UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Propuesta didáctica para la enseñanza de las propiedades de reflexión de las cónicas por medio de la metodología de resolución de problemas

Angélica Lorena Garzón Muñoz

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2013

Propuesta didáctica para la enseñanza de las propiedades de reflexión de las cónicas por medio de la metodología de resolución de problemas

Angélica Lorena Garzón Muñoz

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director (a):
Martha Cecilia Moreno Penagos
Matemática Docente Universidad Nacional de Colombia

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de ciencias
Bogotá, Colombia
2013

Resumen

Uno de los propósitos fundamentales de la estructura curricular en la propuesta del Ministerio de Educación Nacional Colombiano es propiciar aprendizajes duraderos, de mayor alcance que no solo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y algoritmos sino en procesos de pensamiento aplicables y útiles. El Ministerio sugiere que para lograrlo es fundamental relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana y contextualizar a través de situaciones problema; por lo que, teniendo encuenta que la geometría analítica integra la geometría y el álgebra y en ella se estudia las cónicas y sus propiedades básicas, se considera importante hacer una propuesta que integre las propiedades de reflexión de las cónicas haciendo énfasis en un análisis geométrico y analítico, bajo la teoría de resolución de problemas mostrando importantes aplicaciones en diferentes disciplinas que permitan motivar al estudiante.

Palabras clave: (Aprendizaje, geometría, algebra, geometría analítica, cónicas, propiedades de reflexión, resolución de problemas).

Abstract

One of the fundamental purposes of the curriculum structure in the proposal of the Colombian National Education Ministry is to promote lasting learning, far-reaching that not only emphasizes the learning of concepts and algorithms but thought useful and applicable processes. The Ministry suggests that to achieve this goal is essential to relate the learning contents and context of everyday experience, through problem situations, so that, taking into account that Analytic Geometry integrates Algebra and Geometry and it is studied conics and their basic properties; it is important to make a proposal to integrate the reflective properties of conics with emphasis on geometric and analytic analysis under the theory of problem solving showing significant applications in different disciplines as to motivate the student.

Keywords: (Learning, geometry, algebra, analytic geometry, conic, reflective properties, problem solving).

Contenido

Lista de figuras

Pág.

Lista de tablas

Introducción

La geometría en la educación media hace parte de los conocimientos básicos trabajados a partir del desarrollo del Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos, uno de los 5 pensamientos que plantean los Lineamientos Curriculares (2006) [1]. El objetivo de este pensamiento es desarrollar procesos donde se construya y manipule objetos del plano y el espacio, se creen representaciones mentales de ellos y se reconozcan sus propiedades desde su posición y en relación con los demás. Sin embargo, la educación matemática impartida actualmente como la describe Miguel de Guzmán (2001) [2] trae consigo un abandono de la geometría intuitiva y un incremento por el interés en el desarrollo de destrezas en el cálculo, señalando que: con la sustitución de la geometría por el álgebra la matemática elemental se vacío rápidamente de contenidos y de problemas interesantes. Al privilegiar en muchas ocasiones el carácter algebraico y algorítmico sobre un análisis geométrico, estamos dejando atrás elementos exploratorios de la forma, desarrollo de intuiciones, trabajo con acciones de descubrimiento, uso de situaciones de reto, y experimentación sobre las aplicaciones de los objetos trabajados; elementos útiles en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Dentro de la enseñanza de la geometría en general se incluye la geometría analítica, impartida en la educación media específicamente en ciclo 5 (grados décimo y once). En esta etapa se enfrenta al estudiante a caracterizar una figura geométrica dentro de un sistema de coordenadas mediante técnicas básicas algebraicas; es decir se propone realizar un estudio matemático utilizando herramientas de la geometría y el álgebra. El caso particular tratado es el estudio de las cónicas para la que los Estándares Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (2006) [3] proponen:

Estándar 1: Identificar en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.

Estándar 2: Resolver problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de sus representaciones algebraicas.

Al enseñar las cónicas y sus propiedades, se reconoce un fuerte y necesario trabajo en el primer estándar donde se identifican los diferentes elementos y propiedades de las cónicas desde procesos algebraicos, se muestran sus formas desde los cortes longitudinales de un cono, se trabaja con la ecuación que caracteriza a cada una de ellas, se reconocen las gráficas en el plano cartesiano, y en ocasiones se llegan a realizar construcciones geométricas. Identificamos acciones que desde el modelo de Van Hiele son categorizadas en el nivel 1 de reconocimiento y 2 de análisis donde prevalece el reconocimiento visual de la forma cónica y una generalización a partir del uso de la ecuación. Para el segundo estándar se observa en general que el trabajo en la resolución de problemas haciendo uso de las propiedades geométricas de las cónicas es un elemento que se trabaja en forma insipiente sin aprovechar la gran variedad de aplicaciones que tienen estas curvas en contextos matemáticos, geométricos y en otras ciencias, lo que podría utilizarse para fortalecer el proceso de resolución y planteamiento de problemas. Al respecto, Miguel de Guzmán señala en los Lineamientos Curriculares [1] :

> "*la enseñanza a partir de situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces."*

Por otro lado se tiene en cuenta que el proceso de construcción del pensamiento geométrico sigue una evolución que se puede resumir en el modelo de Van Hiele [4] donde se plantea y caracteriza el aprendizaje de la geometría a través de niveles de pensamiento y conocimiento que no están asociados con la edad ni el nivel escolar, si no con el desarrollo y construcción del pensamiento, en el que solo alcanzando un nivel se puede pasar al siguiente.

El desarrollo del segundo estándar se ve en la mayoría de las veces truncado posiblemente por falta de tiempo y se limita al estudio de la propiedades básicas de la cónicas, por lo que este trabajo busca desarrollar una propuesta didáctica en torno a la enseñanza de las propiedades de reflexión de las cónicas buscando actividades que fortalezcan el segundo estándar, que privilegie un análisis geométrico, que plantee el uso de problemas aplicativos de cada una de las propiedades de reflexión de las cónicas y busque llegar a los niveles más altos expuestos en el modelo de Van Hiele (nivel 3 de clasificación, nivel 4 de deducción formal).

Los objetivos del trabajo "Propuesta didáctica para la enseñanza de las propiedades de reflexión de las cónicas por medio de las metodología de resolución de problemas" son:

Objetivos

Objetivo General

- Diseñar una propuesta didáctica para estudiantes de ciclo 5 en torno a la enseñanza de las propiedades de reflexión de las cónicas basada en el planteamiento y resolución de problemas de aplicación que privilegien el análisis geométrico sobre el algebraico.

Objetivos Específicos

- Hacer uso del desarrollo histórico de las cónicas como recurso didáctico y epistemológico en el diseño de la propuesta.

- Identificar los antecedentes didácticos y teóricos de las secciones cónicas, que permitan reconocer las ventajas e inconvenientes tanto a nivel teórico como pedagógico en su enseñanza.

- Reconocer en el modelo de Van Hiele planteado para la enseñanza de la geometría, los niveles esperados en relación al proceso de enseñanza- aprendizaje de las propiedades de reflexión de las cónicas.

- Estructurar la propuesta bajo la metodología de resolución de problemas, incorporando las aplicaciones de cada una de las propiedades de reflexión de las secciones cónicas (Elipse, parábola, Hipérbole).

1. Desarrollo Histórico y Disciplinar de las Secciones cónicas.

1.1 Los primeros aspectos históricos:

Las cónicas desde sus características de forma las podemos identificar en un ambiente natural inclusive desde la época prehistórica, ya que varios objetos en la naturaleza mostraban formas elípticas o parabólicas [5], como la trayectoria de un objeto lanzado al aire, las técnicas de casa, el reflejo de la luna en la superficie del mar, las aguas calmadas de un rio, la forma de los peces, o la forma de una piedra utilizada como arma. Al cuestionarnos sobre el origen de las cónicas desde la matemática como curvas con características específicas nos debemos ubicar en la antigua Grecia en la segunda mitad del siglo IV a.C.

El primer estudio sobre las cónicas lo realiza Aristeo (hacia 330 a.c), quien estudia los lugares geométricos y cuerpos regulares. Sus obras marcan el inicio del estudio de las cónicas en el libro de los "lugares sólidos", "aquellos en los que aparecen las cónicas por intersección de cilindros y conos con planos". En esta obra se cree que hay una gran influencia de Euclides (365- 300 a.c) y su obra "sobre secciones cónicas". Las cónicas desde Aristeo se conocen como sección del cono acutángulo, sección del cono rectángulo y sección del cono obtusángulo [6].

En el año 420 a.c surge uno de los problemas griegos de la época reconocido como: *"*La duplicación del cubo o problema de Delos". Este problema plantea desde una situación de la mitología griega, la necesidad de construir un cubo que tenga el doble de volumen de un cubo dado haciendo uso de regla y compás:

> [7] Cuenta la leyenda que, estando los atenienses- allá por el año 439 antes de Jesucristo- azotados por la peste, acudieron al Oráculo de Delfos con el ánimo de encontrar el remedio que eliminase tamaña calamidad. El dios Apolo les indicó que, a tal efecto, deberían construir un altar doble del que, por aquellas fechas, le estaba dedicado (advirtiendo que la forma de dicho altar era cúbica)

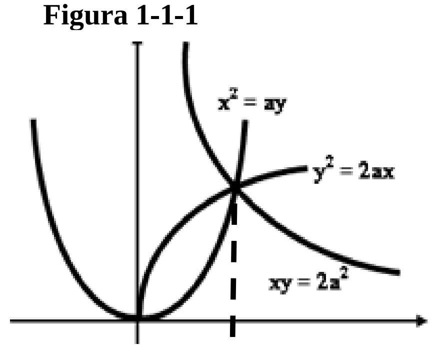
Ante el problema surgen las primeras aproximaciones de solución [6]:

Arquitas de Tarento (428 – 347 a. c) da una solución utilizando superficies de revolución, mostrando una solución tridimensional a la duplicación del cubo en la que determina un cierto punto como la intersección de tres superficies de revolución (un cono, un cilindro y un toro).

Eudoxo (408- 355 a.c) enfrenta el problema que ataca Arquitas, pero en dos dimensiones recurriendo a la teoría de las proporciones relacionando la arista y el volumen de un cubo dado. Se conoce su aporte al problema específicamente al estudiar la teoría de las proporciones. Por una parte introduce y manipula las magnitudes inconmensurables en la geometría ya que una razón de magnitudes era una proporción fueran o no conmensurables y recurre a definir la igualdad entre dos razones, permitiendo el uso de la teoría de las proporciones en estudios próximos: " $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *sí y solo si, dados dos números naturales cualesquiera m y n,* $ma \leq nb$, *entonces* $mc \leq nd$ *ó si,* $ma = nb$, *entonces* $mc = nd$, *o bien si* $ma \geq nb$ *entonces* $mc \geq nd$*"* [6].

Hipócrates de Quíos (470 – 410 a. c) haciendo uso del aporte de Eudoxo, busca la solución reduciendo el problema a uno equivalente donde se busca dos medias en proporción continua entre dos segmentos, uno de los cuales es el doble del otro. Es decir, busca encontrar dos medias proporcionales entre la arista dada *a* y el doble de la misma *2a* : $a/x = x/y = y/2a$.

Figura 1-1-1



x* = *a $\sqrt[3]{2}$

Menécmo de Proconeso (380-320 a. c) plantea la solución de Hipócrates desde una mirada geométrica evidenciando la solución con la intersección de nuevas curvas, que constituyen más adelante la triada de Menécmo y cónicas en la actualidad. Menécmo descubre dichas curvas como elementos útiles para la solución. La solución que ofrecía Menécmo satisfacía la proporción planteada por Hipócrates ($a/x = x/y = y/2a$), donde $x = a\sqrt[3]{2}$, $y = 2a/\sqrt[3]{2}$. Es en este proceso y búsqueda, donde el punto de intersección $x = a\sqrt[3]{2}$ entre parejas de curvas ($x^2 = ay$, $xy = 2a^2$, $y^2 = 2ax$) representa la arista del cubo que duplica en volumen uno de arista a.

Diocles de Caristo (240-180 a.c) y Nicomedes (280- 210 a.c), retoman el método utilizado por Menécmo, enfrentándose al problema con el uso de otras curvas planas. Idean la cisoide ($y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$) y la concoide ($(x-b)^2(x^2+y^2)=h^2x^2$) respectivamente, buscando curvas que permitieran construir las dos medias proporcionales y duplicar el volumen de un cubo dado.

Eratóstenes de Cirene (276-194 a.c) concibe el problema como el método para hallar raíces cúbicas de un número y crea la llamada máquina de Eratóstenes. Esta máquina utilizada por medios mecánicos a partir de dos líneas paralelas con triángulos entre ellas, permitía encontrar más de dos medias proporcionales brindando una aproximación a la solución del problema.

Aunque el problema lo atacan varios geómetras de la época brindando algunas aproximaciones sin llegar a su solución, y con intuiciones de no poder ser solucionado al menos con regla y compás. En 1837 el problema es atacado por el matemático Frances Pierre Wantzel (1814 -1848) quien demuestra que el problema no tenía solución.

El problema de Delos genero el descubrimiento de nuevas curvas planas, específicamente en la solución geométrica que presenta Menécmo, en ella en términos actuales se visualiza la intersección entre dos parábolas o una parábola y una hipérbola. Para Menécmo quien inicia el estudio de dichas curvas, inclusive la elipse que no había surgido inicialmente como recurso ante el problema, las cónicas son: “las secciones que se forman al cortar un cono circular recto por un plano perpendicular a una generatriz[1]” [6] Menécmo encuentra 3 secciones formando la conocida triada de Menécmo: Oxitoma, Ortotoma, y Ambliotema, que se forman respectivamente al cortar un cono circular agudo, recto y obtuso por un plano perpendicular a una generatriz del cono; las cuales más adelante se llamarían Elipse, Parábola e Hipérbola.

---

[1] [9] La generatriz es cualquier recta contenida en la superficie cónica y que pase por el vértice del cono.

Figura 1-1-2

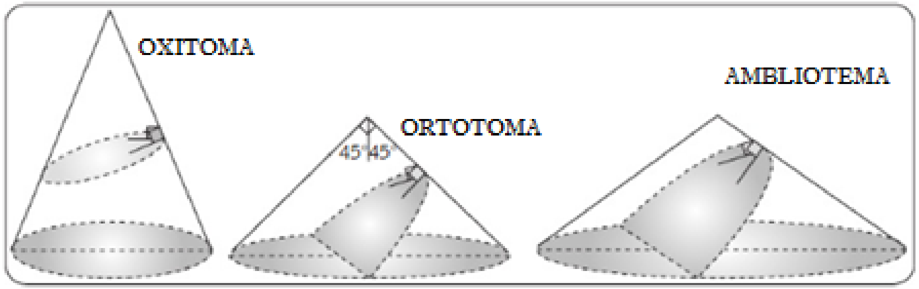
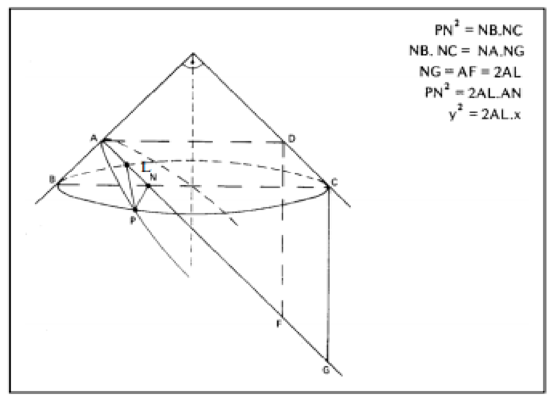


Figura 1-1-3



Cuando Menécmo descubre inicialmente como se forma cada una de las curvas y las denomina como secciones de un cono específico, el objetivo consiste en averiguar sus propiedades e inclusive sus usos. Es aquí donde Menécmo [8] vincula la geometría de la época con el simbolismo algebraico mostrando que las secciones de los conos tenían importantes propiedades como lugares planos, traducibles en básicas expresiones geométricas equivalentes a nuestras ecuaciones, que permitían deducir, a su vez, otras innumerables propiedades de las cónicas. La figura 1-1-3 ilustra el razonamiento de Menécmo donde demuestra la curva obtenida corresponde a la que actualmente se conoce como $y^2 = 2px$ en la sección del cono rectángulo.

Con procesos similares se llega a definir las ecuaciones de cada una de ellas [9]. La sección del cono recto: $y^2 = lx$, la sección del cono agudo: $y^2 = lx - b^2x^2/a^2$, y finalmente la sección del cono obtuso: $y^2 = lx + b^2x^2/a^2$, donde *l, a y b* son constantes.

Euclides (325-265 a.c) [6] además de los elementos escribió un libro de 4 tomos titulado "Sobre las secciones cónicas". Aunque no se tiene muestra de las concepciones descritas en sus libros se conoce que Euclides desarrolló demostraciones similares a las de Menécmo y denomino cada sección como sección del cono rectángulo, sección del cono acutángulo y sección del cono obtusángulo, nominación que retomo Aristeo. El aporte de Euclides seria incorporado más adelante en las cónicas de Apolonio.

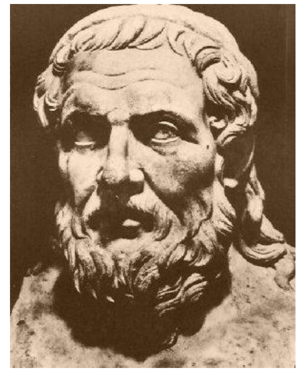
Arquímedes (287-212 a. c) [6] estudia las secciones cónicas y obtiene algunas propiedades, e interesantes principios incluidos en uno de sus escritos titulado "*Cuadratura de la parábola",* en donde se encuentra inmerso la propiedad de reflexión de las cónicas. Arquímedes descubre la relación entre el área de una elipse y el área de un círculo, y encuentra una forma para aproximar el valor del área de un sector de la parábola. En sus escritos se sigue nominando cada cónica como sección de cada cono. Cuenta la leyenda que Arquímedes haciendo uso de espejos parabólicos y la propiedad de reflexión de la parábola incendio las naves romanas durante la defensa de Siracusa.

Figura 1-1-4

Pappus de Alejandría (290 a.c) [6] escribe "*La Colección Matemática"*, una obra muy heterogénea, de un valor científico, histórico, metodológico inconmensurable, y una de las obras más importantes de la historia de la geometría analítica. En ella se presentan numerosas soluciones a los problemas clásicos de las duplicación del cubo y la trisección del ángulo, nuevos estudios y extensiones de propiedades de las secciones cónicas como lugares geométricos (sobre todo el Teorema VII.238 que permite unificar en la Geometría escolar la definición de las tres cónicas como lugares geométricos en relación con distancias a un punto, el foco y a una recta, la directriz) y la clasificación definitiva de los problemas geométricos en planos, sólidos y lineales.

1.2 Cónicas De Apolonio

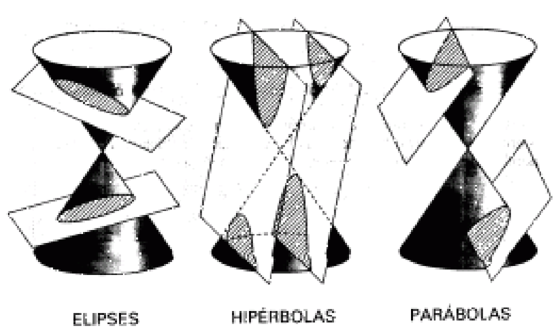
Figura 1-2-1



Apolonio de Perga (260 - 200 a. c) [9]. Nació en Perga en Pamphilia, convirtiéndose en uno de los tres hombres y geómetras más reconocidos de la llamada edad de oro de las matemáticas en Grecia, fue profesor de universidad, dejo grandes obras en geometría entre las que se destaca “*El tratado de las secciones cónicas*”, que consta de 8 libros donde describe cada una de las secciones cónicas y sus propiedades (tabla 1-2-1)

Apolonio inicia un estudio de las curvas encontradas por Menécmo descubriendo aspectos decisivos en la caracterización de las secciones cónicas. Hace referencia a que no es necesario tomar 3 conos diferentes y un plano perpendicular a uno solo para obtener la triada de Menécmo, indicando que basta con variar la inclinación del plano que corta al cono (la parábola se obtenía con el plano de corte paralelo a una sola generatriz, la elipse con el plano de corte no paralelo a ninguna generatriz y la hipérbola con el plano de corte paralelo a dos de sus generatrices). Es decir, ya no era necesario 3 tipos de conos, ya que en un cono oblicuo o recto podía encontrar las mismas propiedades. Además descubre que las curvas pueden surgir también de un cono circular recto sencillo o doble, aspecto que generaba la nueva concepción de la hipérbola con dos ramas. Para Apolonio las cónicas vistas como secciones de un cono se reducirían a: Las secciones que resultan de intersecar un cono con un plano.

Figura 1-2-2



Las triada de Menécmo conocida hasta el momento, tomaba otro nombre en conexión a la curva que expresaba, " Elipse, Hipérbola Parábola,", nombres asignados por Apolonio y en conexión a las palabras utilizadas en la solución de ecuaciones cuadráticas donde, Elipse significaba deficiencia, Hipérbola exceso y Parábola ni deficiencia ni exceso[2].

La concepción de cónica, planteada por Apolonio inicia como sección de un cono, pero poco a poco en su tratado, del que sólo se conserva el original de la mitad de la obra, el resto es una traducción al árabe, prevalece el trabajo sobre las curvas.

Tabla 1-2-1 : Temáticas del tratado de las secciones cónicas

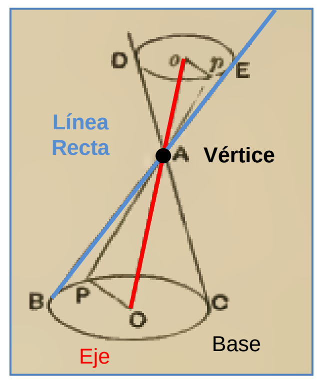
Libro I	Modos de obtención y propiedades fundamentales de las cónicas. Incluye también teoremas sobre el trazado de tangentes.
Libro II	Teoría de los ejes principales, las asíntotas y los diámetros conjugados.
Libro III	Teoremas sobre las áreas de figuras formadas por secantes, asíntotas y tangentes. Propiedades de los focos.
Libro IV	División armónica de rectas. Mayor número de puntos de intersección y de contacto de dos secciones cónicas.
Libro V	Se resuelven problemas extremales: segmento de máxima y mínima distancia a las cónicas. Normal, evoluta, centro de curvatura.
Libro VI	Análisis del problema de semejanza de las secciones cónicas y la generalización del problema sobre la construcción de una familia de conos que pasan a través de una sección cónica dada.
Libro VII	Se investigan las cuestiones relacionadas con las funciones de las longitudes de los diámetros conjugados, parámetros, etc.
Libro VIII	Se desconoce su contenido. *E Halley* trabajando sobre la reconstrucción del texto extraviado interpretó que contendría problemas próximos al material teórico del libro séptimo.

En el tratado de las Secciones Cónicas [11] se establece relaciones de áreas y longitudes en forma de proporción, elemento que Apolonio utiliza para plantear la definición de cada cónica. La propiedad geométrica de la curva es equivalente a su definición como lugar geométrico donde se

[2] [10], Los griegos clasificaban las curvas en 3 clases. La primera denominada lugares planos donde se encontraba la recta y la circunferencia, lugares sólidos con la elipse, hipérbola, y parábola, y finalmente las curvas mecánicas nombre denominado para las otras curvas. A Euclides se le asigna el estudio de lugares planos y Apolonio el desarrollo del estudio de los lugares sólidos.

traduce en una relación entre las abscisas y las correspondientes ordenadas, que Apolonio llamaba el symptoma de la curva y que no es sino la expresión retórica de la ecuación analítica de la curva. Las propiedades de reflexión de las cónicas surgen a partir del estudio de las propiedades focales y el estudio de las tangentes. De esta manera se considera que en el libro I y III de Apolonio se estudian las propiedades de reflexión de las cónicas. Apolonio inicia su tratado definiendo el cono seguido de cada una se las secciones cónicas. A continuación se presenta las concepciones de Apolonio tomadas del libro de Heath [12]. Inicialmente se presentan las definiciones que plantea Apolonio para cada sección cónica seguido de los enunciados de las proposiciones que demuestra haciendo uso de la geometría de la época para identificar las propiedades encontradas de las mismas, reconociendo en algunas de ellas complejidad para entender sus razonamientos ya que se conciben teoremas y definiciones planteadas del libro en secciones anteriores.

Figura 1-2-3



Definición 1:

"*Si una línea recta indefinida en longitud pasa siempre a través de un punto fijo, y se mueve alrededor de la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano con el punto fijo, y pasa sucesivamente a través de cada punto de la circunferencia; la línea recta que se mueve trazara la superficie de un cono doble*" [12] **.**

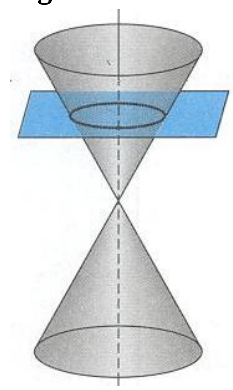
El vértice se define como el punto fijo de la línea recta en movimiento y punto de intersección de dos conos en direcciones opuestas. La base del cono corresponde al círculo sobre el que la línea recta está en movimiento, y el eje corresponde a la línea recta dibujada desde el punto fijo hasta el centro de la base. Los conos formados como se describe anteriormente se denominan escalenos u oblicuos, en el caso que el eje sea perpendicular a la base el cono se denomina recto.

Podemos comparar la definición del cono de Apolonio con algunas definiciones actuales:

Definición 2: "*El cono es el cuerpo geométrico limitado por una base circular y por la superficie generada por la rotación de una recta que mantiene fijo uno de sus extremos y que describe con el otro la circunferencia de dicha base"* [13].

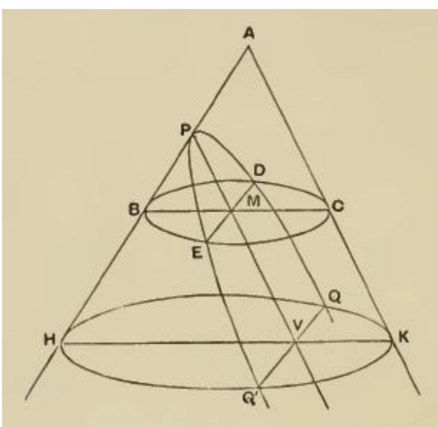
1.2.1 El circulo

Figura 1-2-1-1



Definición 3: *"Todas las secciones del cono que sean paralelas a la base circular del cono son círculos*". [13]

Figura 1-2-1-2



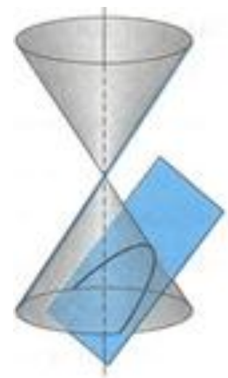
Proposición 1:

"*Si PM es el diámetro*[3] *de la sección de un plano que corta la base circular en una línea recta DME perpendicular a BC, y si PM es paralela a AC, o forma con PB un ángulo menor que el ángulo BAC encontrándose más allá del vértice del cono. AC extendida a infinito, hace que la sección formada se extiende al infinito."* [12]

[3][12] La línea recta bisectriz de la serie de rectas paralelas que cortan la base de un cono es llamada diámetro.

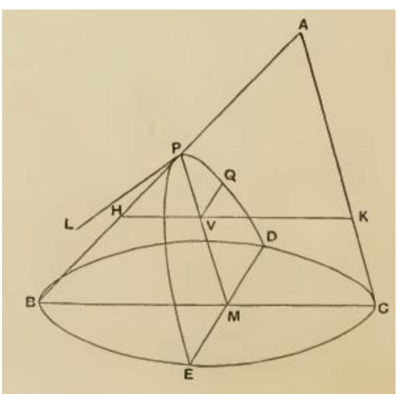
1.2.2 La Parábola

Figura 1-2-2-1



Definición 4: *"La sección cónica que se forma cuando el plano secante es paralelo a una generatriz del cono se denomina parábola".* [13]

Figura 1-2-2-2



Proposición 2:

"Al tomar el diámetro PM de la seccion paralela a uno de los lados del triángulo axial , PM paralelo a AC, y dejar QV una odenada[4] al diámetro PM . Entonces, si la linea recta PL (se supone que fue dibujada perpendicular a PM en el plano de la seccion) de una longitud

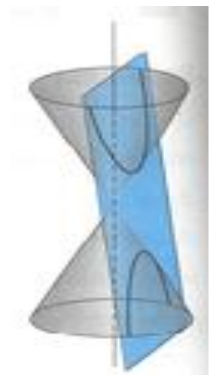
PL:PA = BC: BA.AC, se cumple que:

QV^2= PL.PV. Y esta sección se denomina ***parábola****."* [12]

[4] Aunque no se defina en un apartado específico del libro, se concibe que la ordenada es la recta perpendicular al diámetro en algún punto.

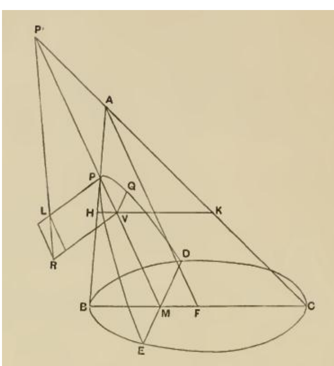
1.2.3 La Hipérbola

Figura 1-2-3-1



Definición 5: *"La sección cónica que se forma cuando el plano secante es paralelo al eje del cono se denomina hipérbola, dependiendo del cono sencillo o doble se puede encontrar hipérbola de una o dos ramas."* [13]

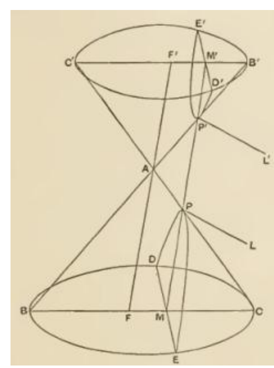
Figura 1-2-3-2



Proposición 3:

"Ahora, tomando PM no paralela a AC, rectas que se encuentran en el vértice P´ del cono. Al trazar PL en ángulo recto a PM en el plano de la seccion y de longitud PL: PP´ = BF. FC : AF^2, donde AF es una linea recta desde A paralela a PM que corta a BC en F.

Figura 1-2-3-3

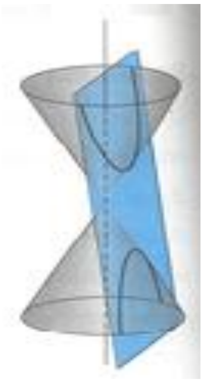


Entonces, si VR es trazada paralela a PL Y P´L corta a VR en R, se concluye que :

*QV^2= PV.VR, y esta sección se denomina **hiperbola**."* [12]

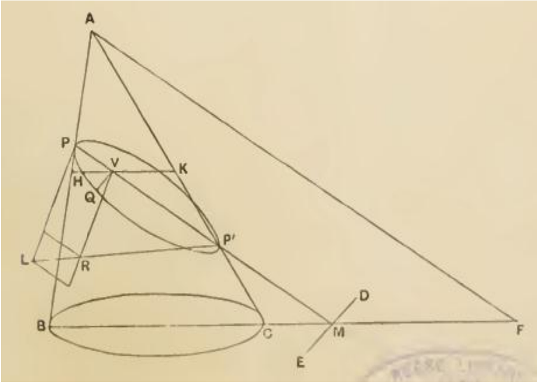
1.2.4 La Elipse

Figura 1-2-4-1



Definición 6: *"La sección cónica que se forma cuando el plano secante es paralelo al eje del cono se denomina hipérbola, dependiendo del cono sencillo o doble se puede encontrar hipérbola de una o dos ramas*". [**13**]

Figura 1-2-4-2



Proposición 4:

"*Si PM corta AC en P´ y a BC en M, se traza AF paralela a PM que corta a BC en F, PL en ángulo recto a PM en el plano de la sección y con longitud PL: PP´= BF .FC: AF^2. Se une P´L, se traza VR paralela a PL, VR corta a P´L en R. Se cumple que: QV^2 = PV. VR esta sección se denomina* ***elipse****."* [12]

Apolonio en su tratado desde un estudio planimétrico plantea procesos, estructuras y demostraciones desde cada una de las proposiciones. Donde las cónicas inicialmente son interpretadas como secciones cónicas, después como ecuaciones específicas y finalmente interpretadas como lugares geométricos. Las proposiciones vistas anteriormente plantean algunas de las propiedades reconocidas actualmente como [14]:

"La parábola tiene la propiedad característica de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y , es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abscisa x y lado recto l "

"*En la sección cónica considerada* [llamada hipérbola (resp. llamada elipse)], *el cuadrado de la ordenada equivale a un área rectangular aplicada siguiendo el lado recto, es decir, teniendo el lado recto como altura, y teniendo la abscisa como base, aumentada (resp. disminuida) de otra área semejante a la que tenga el eje transverso o diámetro como base, y la mitad del lado recto como altura*"

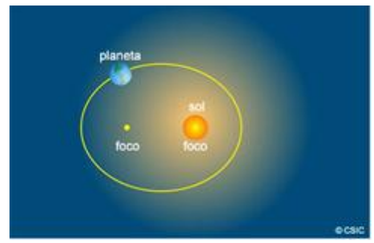
1.3 Las cónicas después de Apolonio:

Después del gran avance que tiene el estudio de las cónicas desde Apolonio se encuentran algunos estudios posteriores [6]:

Hypathia de Alejandria (370-415): Hija del astrónomo Teón de Alejandría matemática, astrónoma, y filosofa. Recogió de nuevo las principales propiedades de las curvas cónicas en su libro: "*Sobre las cónicas de Apolonio"*. Este libro se desarrolla con el objetivo de facilitar el entendimiento de estos conceptos ya que en la época se sentía gran atracción por las secciones cónicas pero había dificultad en el entendimiento de algunas de sus propiedades.

Hypathia estudio los movimientos orbitales de los cuerpos celestes descubriendo que las orbitas planetarias no eran circulares, que el sol no ocupaba el centro del universo ni la tierra se movía con exactitud alrededor del centro sol. Se cree que Hypathia aunque no se tenga ningún documento escrito por ella descubrió las orbitas elípticas relacionadas con movimientos orbitales planetarios identificando dos focos uno de ellos el sol, tomando una distancia constante de la tierra desde las sumas de las distancias a cada uno de los focos, e identificando épocas de mayor cercanía al sol como verano. Después de su muerte, las secciones cónicas tienen un lapso de estudio hasta comienzos del siglo XVII donde se empieza a modelar diferentes fenómenos naturales por medio de las secciones cónicas.

Figura 1-3-1



Johannes Kepler (1571-1630): Científico, astrónomo y matemático alemán se dedicó a estudiar el movimiento elíptico de los planetas. Se plantea la primera ley de Kepler: *"Los planetas en su movimiento alrededor del Sol describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos se encuentra el Sol"* [6]

Pierre de Fermat (1601-1665): Matemático francés, en 1629 restauro algunos trabajos de Apolonio, estableciendo teoremas parciales sobre secciones cónicas, descubrió el principio fundamental de la geometría analítica (sistema de coordenadas) elemento que marcaría la historia de las secciones cónicas más adelante.

E. Torricelli (1608-1647): Físico y matemático Italiano, siguiendo a Galileo y Cavalieri investigó sobre la parábola en el estudio de la caída de los graves, sobre el volumen de revolución engendrado por la hipérbola, sobre la cuadratura de la parábola y sobre la caracterización de propiedades de las tangentes a hipérbolas y parábolas.

Gerard Desargues (1591-1661): Matemático e Ingeniero Francés, se ocupó de las secciones cónicas de Apolonio enfatizando en una geometría proyectiva.

Blaise pascal (1623-1662): Matemático, físico, filósofo, publico un libro en 1648 *"Ensayo en las Secciones Cónicas"*. Realizó el descubrimiento de su conocido teorema sobre la sección cónica denominada la línea de Pascal: *“Si un hexágono arbitrario se encuentra inscrito en alguna sección cónica, y se extienden los pares opuestos de lados hasta que se cruzan, los tres puntos en los que se intersecan se encontrarán ubicados sobre una línea recta*” [6].

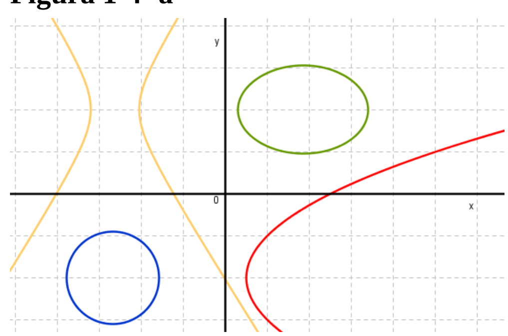
Isaac Newton (1642-1727): Matemático, astrónomo, demostró que la órbita de un cuerpo alrededor de una fuerza de tipo gravitatorio es siempre una curva cónica.

1.4 Cónicas desde Descartes.

Figura 1- 4

En 1637 [6], René Descartes (1596-1650), Viete (1540-1603) y Fermat (1601-1665), introducen los sistemas de coordenadas, brindando la posibilidad de expresar un punto o una línea a partir de coordenadas o ecuaciones. Al relacionar la geometría con el Algebra se desarrolla la Geometría Analítica que brinda al estudio de las secciones cónicas nuevas herramientas de interpretación y demostración de propiedades. El estudio de las secciones cónicas toma un nuevo giro estudiadas ahora como lugares geométricos.

Figura 1-4 -a



Definición 7: Una cónica es el lugar geométrico de los puntos del plano (x, y) que satisfacen una ecuación de segundo grado [15]:

$$\boldsymbol{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Esta ecuación es válida para todas las cónicas cuyos ejes son paralelos a los de sus coordenadas; es decir donde sus ejes coinciden con los ejes del plano o se someten a traslaciones. Se observa a continuación como la ecuación de segundo grado se aplica a cada una de las secciones cónicas bajo unas condiciones:

- Si se desea representar una circunferencia con radio diferente de cero se debe cumplir:

$$A = C, \text{ y } \quad D^2 + E^2 - 4F > 0$$

- Para el caso de la Parábola es necesario que *A= 0, ó C=0.*

  - Si A= 0, C $\neq 0$ y D $\neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo o coincide con el eje X.
  - Si D = 0, La ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje X o dos rectas coincidentes paralelas al eje X, o ningún lugar geométrico. Esto dependerá de las raíces de $Cy^2 + Ey + F = 0$ sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas.
  - Si A$\neq$ 0, C $= 0$ y E $\neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo o coincide con el eje y.
  - Si E = 0, La ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje Y, dos rectas coincidentes paralelas al eje Y, o ningún lugar geométrico, según que las raíces de $Ax^2 + Dx + F = 0$ sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas.

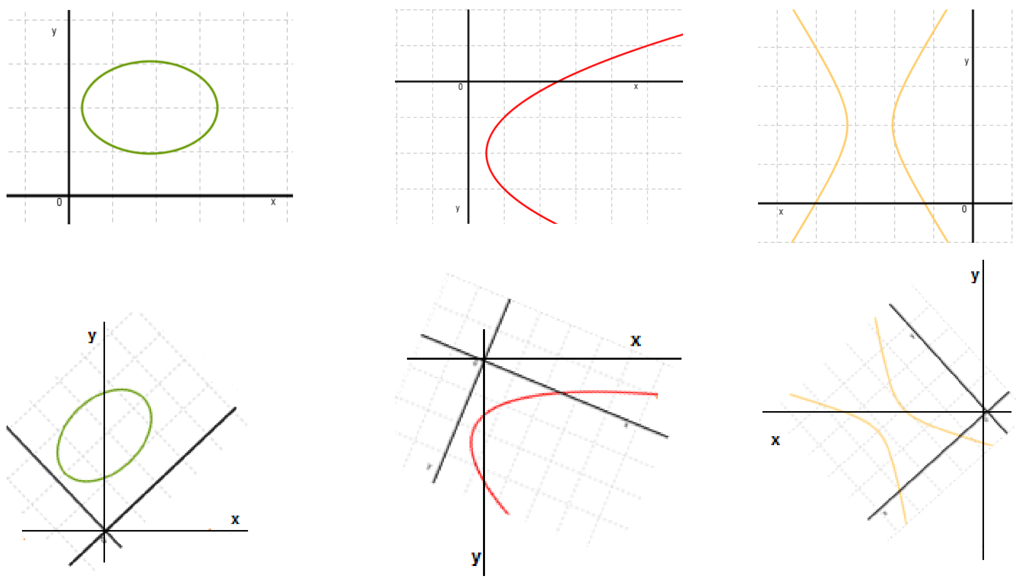
- Para el caso de la elipse es necesario que A y C sean del mismo signo, es decir se debe cumplir: $AC > 0 \; y \; A \neq C$, ya que bajo la ecuación se puede representar una elipse de ejes paralelos a los coordenados, o bien un punto, o no representar ningún lugar geométrico real.

- Para el caso de la hipérbola es necesario que A y C difieran en el signo, es decir se debe cumplir: $AC < 0$, ya que bajo la ecuación se puede representar una hipérbola de ejes paralelos a los coordenados, o un par de rectas que se cortan.

Para el caso donde las cónicas se someten a una rotación la ecuación general que contempla giros y traslaciones es:

$$\boldsymbol{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Figura 1-4-b



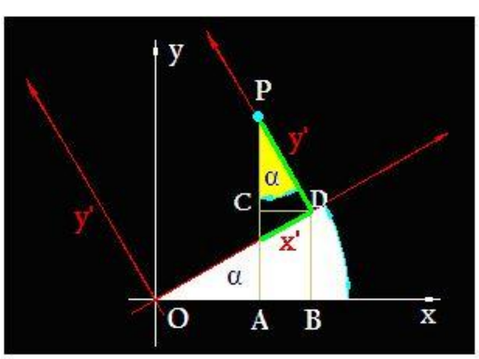
En esta ecuación el término cuya parte literal es ***xy,*** representa una rotación en las cónicas (excepto la circunferencia). Los valores de ***x*** y ***y*** después de un giro de α grados equivalen a:

$$\boldsymbol{x = x'.cos\alpha - y'.sen\ \alpha}$$

$$\boldsymbol{y = \ x'.sen\alpha + y'.cos\ \alpha}$$

Estos valores surgen después de realizar un cambio en las coordenadas de cada punto de la cónica referido ahora a x´y y´, presentado a continuación [23]:

Figura 1-4-c



Las coordenadas del punto ***P(x, y)*** Se expresan como:

$$x = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB}; x = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{CD} \quad \text{(III)}$$
$$y = \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CA}; y = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{DB} \quad \text{(IV)}$$

Hallando $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{CD}$:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OB}}{x'}\,;\ \overrightarrow{OB} = x'.\cos\alpha; \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overrightarrow{CD}}{y'}\,;\ \overrightarrow{CD} = y'.\operatorname{sen}\alpha$$

Al sustituir en (III) $\boldsymbol{x = x'.\cos\alpha - y'.sen\alpha}$

Hallando $\overrightarrow{PC}$ y $\overrightarrow{DB}$:

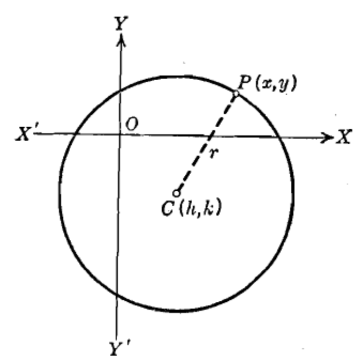
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{PC}}{y'}\,;\ \overrightarrow{PC} = y'.\cos\alpha; \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overrightarrow{DB}}{x'}\,;\ \overrightarrow{DB} = x'.\operatorname{sen}\alpha$$

Al sustituir en (IV) $\boldsymbol{y = y'.\cos\alpha + x'.sen\alpha}$

Para términos de la explicación de cada cónica a continuación se tomará la ecuación ordinaria de cada una de las curvas conocida frecuentemente como la forma canónica considerando una forma más simple y fácil de caracterizarlas teniendo en cuenta el nivel de la población a quien va dirigida la propuesta.

1.4.1 La Circunferencia

Figura 1- 4-1



Definición 8: "*La circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano"* [15].

- **Elementos de la circunferencia:**

  - ✓ Centro: Es el punto fijo que equidista de cualquier punto de la circunferencia.
  - ✓ Radio: Es la distancia constante del centro a la circunferencia.

- **Ecuación canónica de la circunferencia:**

Dada una circunferencia con centro en el punto (h, k) y radio r, tiene por ecuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Demostración:

Sea P (x, y) un punto cualquiera de la circunferencia de centro C (*h, k*) y radio r. Por definición de radio se obtiene:

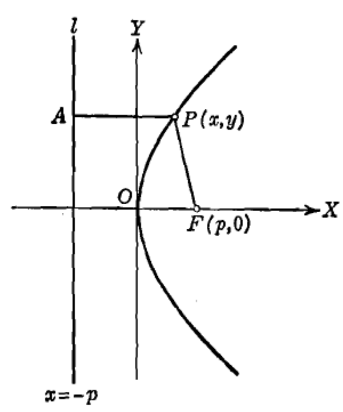
$|CP| = r.$

Encontrando la distancia entre los dos puntos:

$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Si el centro C (*h, k*), es en el origen *h* = *k* = *0*, entonces, $x^2 + y^2 = r^2$

Figura 1-4-2-1



1.4.2 La Parábola

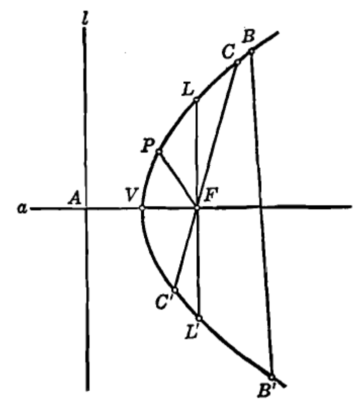
Definición 9: *"Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija llamada directriz, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta denominado foco"* [5]

---

[5] [15] La definición excluye el caso en el que el foco está sobre la directriz.

- **Elementos:**

Figura 1-4-2-2



✓ Eje de la parábola: Es la recta que pasa por el foco F y es perpendicular a la directriz.

✓ Vértice: Es el punto V de la parábola, punto medio del segmento AF que une directriz y foco.

✓ Cuerda: Es el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la parábola, tal como BB´.

✓ Cuerda Focal: Es la cuerda que pasa por el foco F (CC´).

✓ Lado recto: Es la cuerda focal perpendicular al eje (LL´).

✓ Radio focal o radio vector: Es el segmento que une un punto P de la parábola y el foco F, (PF).

- **Ecuaciones canónicas de la parábola:**

$y^2 = 4px$ Ecuación de una parábola con vértice en el origen y el eje focal *x*.

$x^2 = 4py$ Ecuación de una parábola con vértice en el origen y el eje focal *y*.

$(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$ Ecuación de una parábola con vértice (*h*, *k*) y el eje focal paralelo a *x*.

$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$ Ecuación de una parábola con vértice (*h*, *k*) y el eje focal paralelo a *y*.

Demostración:

Sea F el foco de una parábola F (p, 0), $x = -p$ la ecuación de la directriz *l*, por definición de la parábola, sea P(x, y) un punto cualquiera de la parábola; entonces por P trácese el segmento PA perpendicular *l*. Por definición de la parábola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica:

$$|FP| = |PA|$$

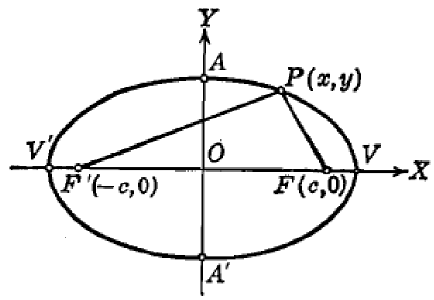
Hallando la distancia entre los extremos de los segmentos:

$|FP| = \sqrt{((x-p)^2 + y^2)}$, $\quad |PA| = |x+p|$

Por tanto, $\sqrt{((x-p)^2 + y^2)} = |x+p|$; entonces, $\quad y^2 = 4px$

1.4.3 La Elipse

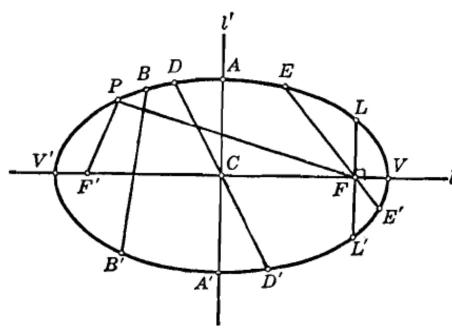
Figura 1-4-3-1



Definición 10*: “Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (focos) de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos*"[6].

- **Elementos:**

Figura 1-4-3-2



  - ✓ Eje focal: Es la recta *1* que pasa por los focos.
  - ✓ Vértices: Son los puntos donde el eje focal corta a la elipse.
  - ✓ Eje mayor: Es la porción del eje focal comprendida entre los vértices.
  - ✓ Centro: Es el punto C del eje focal, y punto medio del segmento que une los focos.
  - ✓ Eje normal: Es La recta *l´* que pasa por el centro *C* y es perpendicular a1 eje focal *1*.
  - ✓ Eje menor: Es el segmento AA´ sobre el eje normal que corta a la elipse en dos puntos A y A´.
  - ✓ Cuerda: Es un segmento que une dos puntos diferentes cualesquiera de la elipse, tal como BB'
  - ✓ Cuerda focal: Es la cuerda que pasa por uno de 1os focos, tal como *EE'*.
  - ✓ Lado recto: Es una cuerda focal, tal como LL´, perpendicular a1 eje focal *l*.
  - ✓ Diámetro: Es una cuerda que pasa por C, tal como DD´.

---

[6] [15] La definición de una elipse excluye el caso en que el punto móvil este sobre el segmento que une los focos.

- ✓ Radios vectores: Es el segmento que une un punto P cualquiera de la elipse y uno de los focos, tal como FP y F´P

- **Ecuaciones canónicas de la elipse:**

Las ecuaciones canónicas que se presentan de la elipse mantienen una distancia focal 2c, una longitud del eje menor 2b y la longitud del eje mayor 2a.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Ecuación de una elipse con vértice en el origen y el eje focal *x*.

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ Ecuación de una elipse con vértice en el origen y el eje focal *y*.

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ Ecuación de una elipse con vértice (h, k) y el eje focal paralelo a *x*.

$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ Ecuación de una elipse con vértice (h, k) y el eje focal paralelo a *y*.

Demostración:

Dada una elipse con centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje *x*, sea F (c,0) y F´(-c,0). Sea P (x, y) un punto cualquiera de la elipse. Por definición de la elipse, el punto P debe satisfacer la condición geométrica:

$|FP| + |F'P| = 2a$, donde a es una constante positiva mayor que c.

Hallando la distancia entre los extremos de los segmentos;

$|FP| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $|F'P| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

Por lo tanto, $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ = 2a, entonces, $cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ (1)

Como 2a > 2c, entonces $a^2 > c^2$ y por lo tanto $a^2 - c^2 > 0$,

es decir ;

$b^2 = a^2 - c^2$ (2)

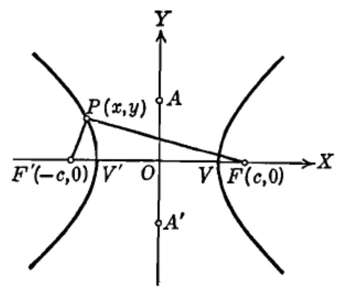
Si en (1) se reemplaza (2), $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Dividiendo entre a^2b^2, se obtiene $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

1.4.4 La Hipérbola

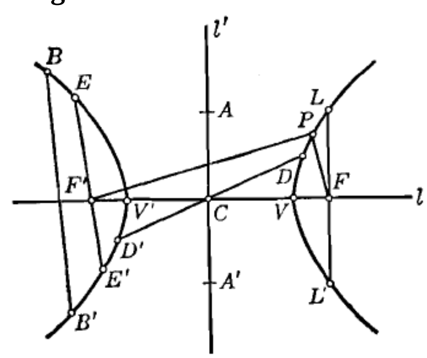
Figura 1-4-4-1

Definición 11: “*Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos*"[7]



- **Elementos:**

Figura 1-4-4-2



  - ✓ Eje focal: Es la recta que pasa por los dos focos, tal como l.
  - ✓ Vértices: Son los dos puntos V y V' donde el eje focal corta la hipérbola.
  - ✓ Eje transverso: Es la porción del eje focal comprendido entro los vértices, tal como, VV´.
  - ✓ Centro: Es el punto medio C del eje transverso.
  - ✓ Eje normal: Es la recta l' que pasa por el centro C y es perpendicular a1 eje focal l .
  - ✓ Eje conjugado: Es el segmento de recta perpendicular al eje transverso. Corta a este en el centro y no corta a la hipérbola, tal como, AA'

[7] [15] La definición de la hipérbola excluye el caso en que el punto móvil se mueva sobre la recta que pasa por los focos a excepción del segmento comprendido entre ellos. Los focos y el punto medio de este segmento no pueden pertenecer al lugar geométrico.

- ✓ Cuerda: Es el segmento que une dos puntos diferentes cualesquiera de la hipérbola.
- ✓ Cuerda focal: Es una cuerda que pasa por un foco, tal como EE' .
- ✓ Lado recto: Es una cuerda focal, tal como LL', perpendicular a1 eje focal.
- ✓ Diámetro: Es una cuerda que pasa por el centro C. (DD')
- ✓ Radios vectores: Son los segmentos que unen uno de los focos y un punto P de la hipérbola.

- **Ecuaciones canónicas de la hipérbola:**

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Ecuación de una hipérbola con vértice en el origen y el eje focal *x*.

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ Ecuación de una hipérbola con vértice en el origen y el eje focal *y*.

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ Ecuación de una hipérbola con vértice (h, k) y el eje focal paralelo a *x*.

$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ Ecuación de una hipérbola con vértice (h, k) y el eje focal paralelo a *y*.

Demostración:

Dada una hipérbola de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje x, sea F y F´ sus focos son sus respectivas coordenadas (c, 0) y (-c, 0) siendo c una constante positiva, el centro como punto medio (0,0).

Tómese P (x, y) un punto cualquiera de la hipérbola.

Por definición de hipérbola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$\left||FP| - |F'P|\right| = 2a$, donde a es una constante positiva mayor que c. 2a < 2c.

$|FP| - |F'P| = 2a$, o $|FP| - |F'P| = -2a$ (La primera es verdadera cuando P esta sobre la rama izquierda de la hipérbola; la segunda se verifica cuando P esta sobre la rama derecha)

Hallando la distancia entre los extremos de los segmento, haciendo uso de la ecuación de distancia entre dos puntos,

$|FP| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $|F'P| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

Por lo tanto, $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ - $\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ = 2a,

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ - $\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ = -2a,

Entonces,

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2\,(c^2 - a^2)$ ***(1)***

Como c $>$ a, $c^2 - a^2$ es un número positivo que puede ser reemplazado por el número positivo b^2. Por tanto,

$b^2 = c^2 - a^2$ ***(2)***

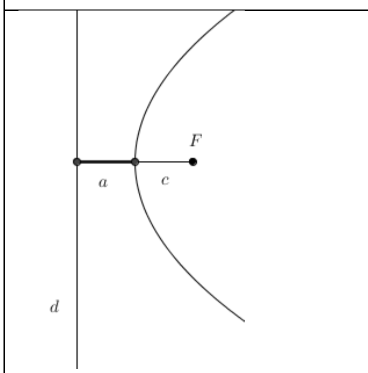
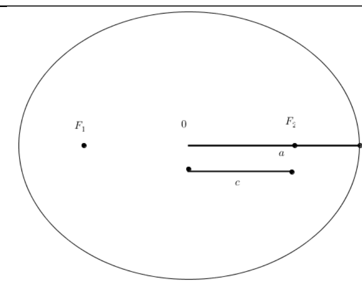
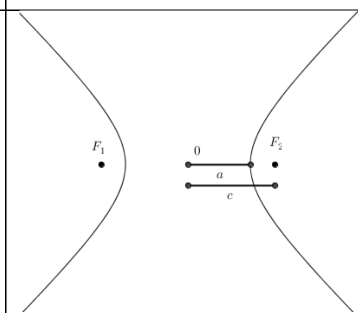
Si en (1) se reemplaza (2), $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

Dividiendo entre a^2b^2, se obtiene $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

1.5 Excentricidad

Cada una de la cónicas interpretadas como lugares geométricos permiten construir una definición general de la cónica como: "el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que la razón de las distancias de un punto fijo llamado foco, y una recta fija llamada directriz, es una constante". Esta razón o parámetro constante y positivo se conoce como la excentricidad de la cónica [15].

Tabla 1-5 Excentricidad de las cónicas

Parábola	Elipse	Hipérbola
		
La excentricidad e de una parábola es 1 (e=1).	La excentricidad e de una elipse es mayor que 0 y menor que 1 (0< e <1), para una circunferencia caso particular de la elipse la excentricidad es 0 (e=1).	La excentricidad e de una hipérbola es mayor que 1 (e >1).
Si $e = \frac{c}{a}$, para el caso de la parábola c corresponde a la distancia del vértice de la parábola al foco y a es la distancia del vértice a la directriz.	Si $e = \frac{c}{a}$, para el caso de la elipse c corresponde a la longitud del semieje menor y a es la longitud del semieje mayor.	Si $e = \frac{c}{a}$, para el caso de la hipérbola c corresponde a la longitud del semieje transverso y a es longitud del semieje focal.

2. Propiedades de Reflexión de las cónicas

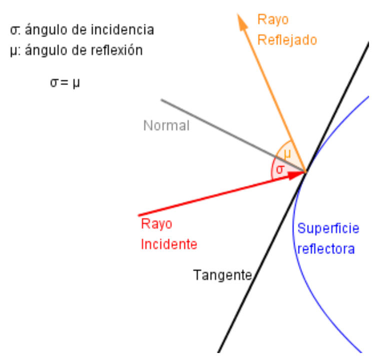
Las cónicas y sus propiedades aparecen en múltiples aplicaciones en campos como la física, la comunicación, la astronomía, la medicina, la ingeniería entre otros. Muchas de sus aplicaciones están relacionadas con las denominadas propiedades de reflexión. La reflexión es definida desde la física como una propiedad de la luz que genera el cambio de dirección de la luz cuando choca contra un cuerpo [17][8]. Particularmente en física dichas propiedades están asociadas con las superficies reflectoras que reflejan la luz o cualquier otro tipo de onda; estas superficies se denominan espejos cuando están pulidas y forma imágenes por reflexión de la luz. Los espejos pueden ser planos o curvos entre los que se encuentran los espejos esféricos, parabólicos, hiperbólicos y elípticos entre otros que surgen a partir de un sólido de revolución.

Asociado a las superficies reflectoras están los conceptos de rayo incidente, rayo reflejado, ángulo de incidencia, y ángulo de reflexión. El rayo incidente es el rayo de luz con dirección a la superficie reflectora; el rayo reflejado es el rayo que resulta del choque del rayo incidente con la superficie reflectora quién toma otra dirección. El ángulo de incidencia es el ángulo formado entre

[8] [17] La óptica geométrica se ocupa de los aspectos relacionados con la propagación de la luz y su objetivo es determinar la trayectoria de la energía radiante.

el rayo incidente, el punto de incidencia con la superficie reflectora y la recta normal; el ángulo de reflexión es el ángulo formado entre el rayo reflejado, el punto de incidencia y la recta normal.

Figura 2



Desde la física al estudiar la dirección de ese rayo reflejado se llega a la ley de reflexión de la luz que afirma:

"el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión de cualquier haz de luz respecto a la normal, que incide y se refleja después de chocar contra un cuerpo deben ser iguales, teniendo en cuenta que el haz de luz incidente, reflejado y la normal a la superficie se encuentran en un mismo plano" [17].

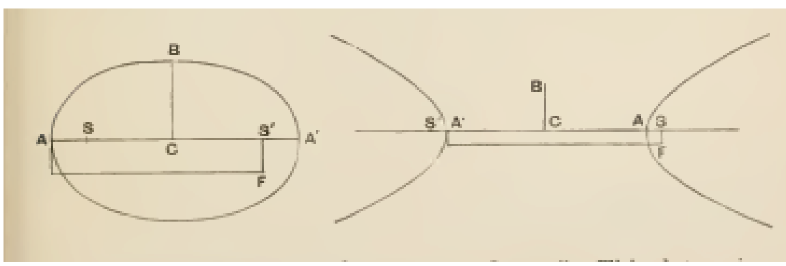
En este capítulo se presenta un ejemplo del uso de las propiedades de reflexión de las cónicas en las proposiciones de Apolonio, la descripción de las propiedades de reflexión de las cónicas geométricamente, las demostraciones de cada caso por métodos geométricos y analíticos, las propiedades de reflexión enunciadas desde la física y finalmente se presentan algunas de las aplicaciones.

Las demostraciones de las propiedades de reflexión de cada una de las cónicas presentadas en el capítulo acuden a razonamientos geométricos [18], y analíticos [15] donde se hace uso de elementos del algebra y la geometría identificando cada cónica desde su ecuación, es decir son trabajadas desde la geometría analítica. Dentro del razonamiento de las demostraciones se añade algunas aclaraciones buscando comprender cada proceso y verificar en cada caso que se cumpla la condición que plantea la ley de reflexión de la luz, verificando que el ángulo de incidencia (σ) es igual al de reflexión (μ). En las demostraciones

2.1 Propiedades de reflexión en Apolonio.

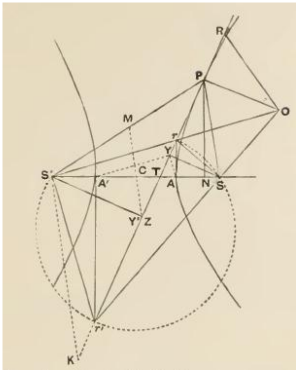
Las propiedades de reflexión de las cónicas son descubiertas por Apolonio durante el estudio de las tangentes a la parábola, la hipérbola y la elipse. En el apartado: *"Las propiedades focales de las cónicas centrales"* [12] , se reconoce que la palabra foco no es utilizada en el relato de Apolonio ni sustituido por otra palabra; sin embargo, los puntos si son utilizados en sus demostraciones y usados como: Los dos puntos S, S´ en el eje que equidistan del punto central de la cónica.

Figura 2-1-1



En este mismo apartado identificamos en tres de sus proposiciones (69, 70, 71) las propiedades de reflexión de la elipse y la hipérbola enumeradas correspondientemente (5, 6, 7). En la proposición 7 se enuncia la igualdad entre un ángulo de incidencia <SPr y de reflexión <S´Pr´ respecto a la tangente rr´, es decir inmerso se enuncia la propiedad de reflexión que conocemos actualmente; en la proposición 6 se define lo que actualmente conocemos como la normal, y en la proposición 5 se plantea en términos actuales la igualdad entre dos ángulos formados a partir del foco, un extremo de la tangente, y un vértice de un triángulo donde dos de sus lados son el eje focal y la tangente [12].

Figura 2.1.2

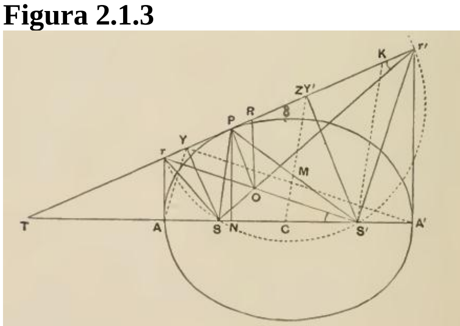


Proposición 5: *“Si Ar, A´r, son los extremos de la recta tangente al eje central de la cónica, la tangente satisface en el punto P en r r´ respectivamente:*

(1) rr´ subtiende un ángulo recto de cada foco, S, S´.

(2) Los ángulos r r´S, A´r´S´ son iguales, como también los ángulos r´r S´, ArS.”

Figura 2.1.3



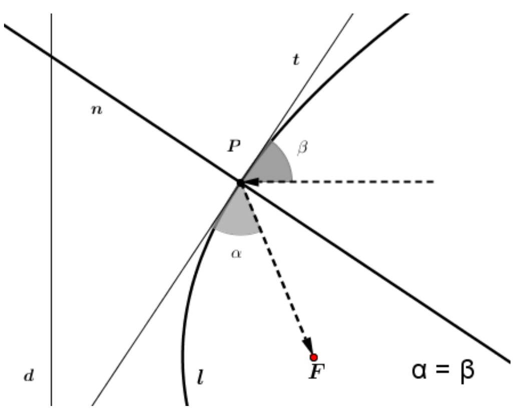
Proposición 6*: “Si, en la misma figura, O es la intersección de rS´, r´S, entonces OP será perpendicular a la tangente en P.”*

Proposición 7:“*La distancia focal a P hace ángulos iguales a la tangente en un punto. <SPr =<S´Pr´.”*

2.2 Propiedad de Reflexión de la Parábola

2.2.1 Interpretación geométrica

Figura 2-2-1-1



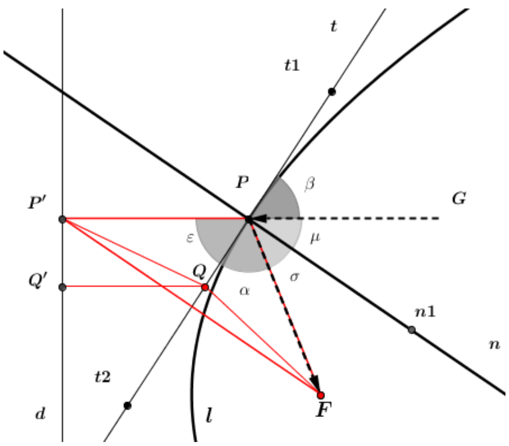
Sea P un punto de una parábola. La tangente a la parábola en el punto P forma ángulos congruentes con:

1.) La recta que pasa por P y el foco F.

2.) La recta paralela al eje de la parábola que pasa por P.

Demostración geométrica:

Figura 2-2-1-2



Sea P un punto de la parábola *l* con foco F, GP el segmento paralelo al eje de la parabola que pasa por P y PF el segmento que une a P y el foco. Sea t la recta tangente[9] a *l* en P y n la recta normal[10] al mismo punto. Tómese en n el punto *n1* entre P y la recta normal que queda inmersa en la parábola. Tómese *t1* el punto en t posicionado más arriba de P y *t2* el punto posicionado abajo de P. <μ = <GP*n1*, <σ = <FP*n1*, <α = <t2PF, y <β = <GPt1.

Se demostrará inicialmente que t es tangente a *l* en un único punto P y que < α = < β buscando demostrar la propiedad de reflexión de la parábola.

i.) Sea d la directriz de *l*, tómese *P´* el punto en la directriz cuya distancia a *P* es mínima y *t* la recta de los puntos equidistantes de *F* y *P´*. Por la definición de parábola[11] se tiene que *PP´=PF,* es decir t pasa por P. Tómese un punto cualquiera *Q* en *t*, y *Q´* el punto en *d* más cercano a *Q*. Si Q fuese un punto de la recta t y de la parábola *l*, se debería cumplir que Q´Q = QF (definición de parábola) y como se supone que Q está en t, P´Q = QF. Entonces *P´Q* debería ser igual a *Q´Q*. Ahora bien; sin embargo, *P´Q>Q´Q*, ya que Q´ esta ala mínima distancia de Q, entonces *QF >Q´Q.* Es decir Q no podría estar en la parábola *l*. En el único caso que la igualdad se cumple *P´Q=Q´Q,* es cuando *Q=P*. Esto demuestra que *t* solo toca a la parábola en el punto *P*. Por lo tanto *t* es la recta tangente a la parábola *l*.

---

[9] [15] Una recta tangente es la recta que toca a una curva en un solo punto.
[10] [15] Una recta normal es la perpendicular a un punto de una curva respecto la tangente en ese punto.
[11] [15] Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta

ii.) Ahora bien, como P´P = PF, se forma un triángulo isósceles PP´F, y como P´Q = QF, P está en t y Q está en t, puedo afirmar que cualquier punto de t equidista de P´ y de F. Por definición de mediana[12] puedo concluir que t será la mediana del triángulo PP´F. Sea < ξ= < tPP´, <α = <tPF, dado que el triángulo PP´F es isósceles (*En todo triangulo isósceles la bisectriz del ángulo opuesto a la base es mediana, altura y pertenece a la mediatriz de la base*). Entonces, <ξ = <α.

iii.) Por ángulos opuestos por el vértice (*dadas dos rectas que se cortan en el punto P, dos ángulos se dicen opuestos por el vértice cuando los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro, dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.)* < ξ = < β.

iv.) Desde iii y iv, < ξ = < α y < ξ = < β. Retomando la propiedad transitiva (*Si m = n y n = p, entonces m = p*), se puede concluir que < α = < β.

Demostración analítica:

En las demostraciones analíticas de las propiedades de reflexión el objetivo es demostrar que el ángulo de incidencia y de reflexión con la recta normal son iguales. Identificando que la tg α = tg β. En este caso se recurre a demostrar el teorema 3 enunciado en el libro de Lehman [15] como teorema 7, que relaciona las propiedades focales de la parábola y la ley de reflexión de la física.

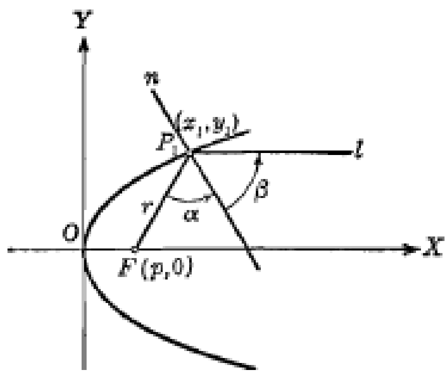
En la demostración se recurre a 2 teoremas:

Teorema 1: "*La tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en cualquier punto P1 (x_1, y_1) de la curva tiene por ecuación $y_1 y = 2p(x+x_1)$.*"

Teorema 2: *"La tangente de pendiente m a la parábola $y^2 = 4px$ tiene por ecuación $y = mx + \frac{p}{m}$, $m \neq 0$."* [15]

[12] [15] La mediana es la recta que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto y divide el triángulo en 2 partes iguales.

Figura 2-2-1-3



Teorema 3:

La normal a la parábola en un punto P_1 (x_1, y_1) cualquiera de la parábola forma ángulos iguales con el radio vector de P_1 y la recta que pasa por P_1 y es paralela al eje de la parábola.

Tomese como ecuación de la parábola la forma canónica de la parabola:

$y^2=4px$ (1)

Sea n la normal a la parábola en P_1, l la recta que pasa por P_1 paralela al eje, y por r el radio vector F P_1. Sea $<\alpha = <nP_1r$, y $<\beta = <nP_1l$, Se demostrara que $<\alpha = <\beta$.

- La pendiente de la parábola en P1 (x_1, y_1) es $\frac{2p}{y_1}$,

Dado que se busca la forma general y= mx + k, y por Teorema 1:

$y_1y = 2p(x+x_1)$, $y = \frac{2p\,(x+x1)}{y_1}$, $m = \frac{2p}{y1}$

- La pendiente de n es $\frac{-y_1}{2p}$

Dado que la pendiente de la recta normal a una curva en un punto es la opuesta de la inversa de la pendiente de la recta tangente, ya que son rectas perpendiculares entre sí.

- La pendiente de r es $\frac{y_1}{x_{1-p}}$

Dado que los dos puntos de r son: (p, 0) (x_1, y_1), y por ecuación de recta $m = \frac{y_1-y}{x_1-x}$, entonces, $m= \frac{y_1-0}{x_1-p}$. Al sustituir en Teorema 2:

$$Tg\alpha = \frac{-\frac{y_1}{2p} - \frac{y_1}{x_1-p}}{1-\frac{{y_1}^2}{2p(x_1-p)}} = \frac{-x_1y_1+py_1-2py_1}{2px_1-2p^2-{y_1}^2} = \frac{-x_1y_1-py_1}{2px_1-2p^2-{y_1}^2}$$

Como P_1 (x_1, y_1), está sobre la parábola sus coordenadas satisfacen la ecuación (1), ${y_1}^2 = 4Px_1$ Sustituyendo este valor de ${y_1}^2$ en la última igualdad, tenemos:

$$Tg\,\alpha = \frac{-x_1y_1-py_1}{2px_1-2p^2-4Px_1} = \frac{-y_1\,(x_1+p)}{-2p\,(x_1+p)} = \frac{Y_1}{2P} \qquad (2)$$

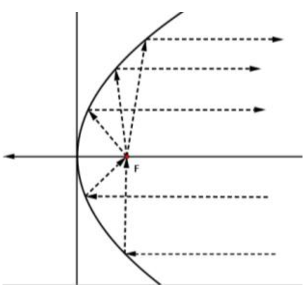
Y como la pendiente de *l* es 0, resulta:

$$Tg\,\beta = \frac{0-(-\frac{Y_1}{2P})}{1+0(-\frac{Y_1}{2P})} = \frac{Y_1}{2P} \qquad (3)$$

Por tanto, de (2) y (3) se concluye que <α = <β. El teorema queda demostrado y la propiedad de reflexión de la parábola inmersa.

2.2.2 Interpretación desde la óptica geométrica

Figura 2-2-2



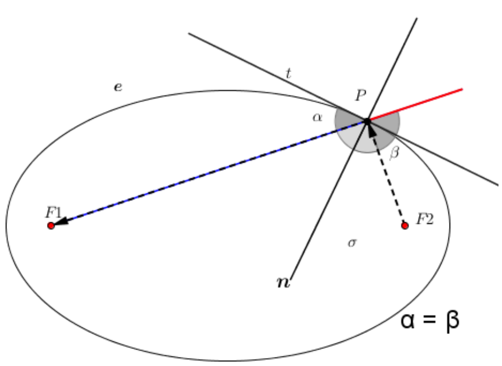
Propiedad de reflexión de la parábola:

Si se emiten rayos de luz paralelos al eje de un espejo parabólico, la luz reflejada se concentrará en el foco, así mismo si se emite rayos provenientes del foco hacia el espejo parabólico se reflejaran paralelos al eje del espejo.

2.3 Propiedad de Reflexión de la Elipse

2.3.1 Interpretación geométrica

Figura 2-3-1-1



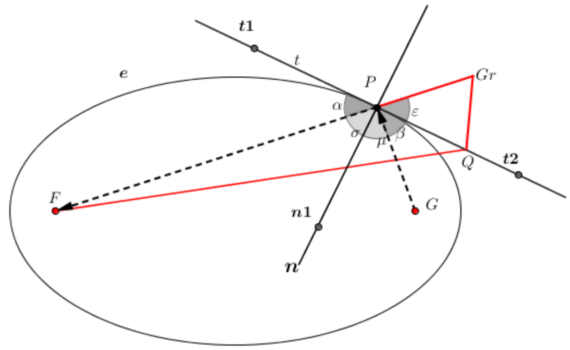
Sea P un punto de una elipse. La tangente a la elipse en el punto P forma ángulos congruentes con:

1.) La recta que pasa por P y el foco F1.

2.) La recta que pasa por P y el foco F2.

Demostración geométrica:

Figura 2-3-1-2



Dada una elipse *e* con focos F, G y P un sobre ella, GP y PF segmentos de los focos al punto P. Sea t la recta tangente a *e* en P y n la recta normal al mismo punto P. Tómese n1 un punto en n sobre la recta normal inmersa en *e*, t1 el punto en t por encima de P y t2 el punto en t por debajo de P.

<μ = <GP*n1*, <σ = <FP*n1*, <α = <*t1*PF, y <β = <GP*t2*.

Se demostrará inicialmente que t es tangente a *e* en único punto P y que < α = < β buscando demostrar la propiedad de reflexión de la elipse.

i.) Sea Gr la reflexión de G con respecto a t, es decir, GP y GrP forman el mismo ángulo con la recta t. Sea Q un punto arbitrario de t. Si Q estuviera en e y en t, se tendría que cumplir por definición de elipse [13] que FP +PG = FQ +QG, pero como PGr = PG, se observa por desigualdad triangular que:

FQ+QG=FQ+QGr>FP+PGr=FP+PG (desigualdad triangular)

Es decir, a menos que Q=P. Q no es un punto de e y t. El valor mínimo de la suma FQ+QGr se alcanza cuando Q=P y por lo tanto P es el único punto en e y t.

ii.) <α es un ángulo opuesto por el vértice P al ángulo < ξ, entonces <α = < ξ,

iii.) < β = <ξ por definición de reflexión dado que GrP es la reflexión de GP y forman el mismo ángulo con la recta r.

iv.) De ii y iii se concluye que <α = < β por propiedad transitiva.

[13] [15] Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

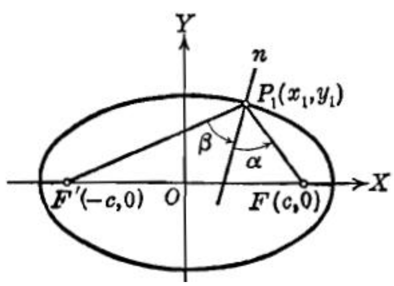
Demostración analítica:

En este caso se recurre a demostrar el teorema 6 enunciado en el libro de Lehman [15] recurriendo al teorema 4 y 5 donde el objetivo igual que en la propiedad de reflexión de la parábola consistirá en demostrar que <α = <β.

Teorema 4: "*La tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en cualquier punto $P_1(x_1, Y_1)$ de la curva tiene por ecuación $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$",*

Teorema 5: *"Las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ son $y = mx \pm \sqrt{a^2}m^2 + b^2$",*

Figura 2-3-1-3



Teorema 6: La normal a una elipse en cualquiera de sus puntos es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de ese punto.

Tómese la ecuación de la elipse en su forma canónica. $b^2x^{2\,+}a^2y^2 = a^2b^2$ (1)

Sea n la normal a la elipse en un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ de la curva. Sea α el ángulo formado por n y el radio vector FP_1, y β el formado por n y el radio vector $F'P_1$. Se demostrará que <α = < β.

- La pendiente de la elipse en $P_1(x_1,y_1)$ es $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

  Por teorema 4 y buscando la forma general y= mx+b:

  $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$, $a^2y_1y = - b^2x_1x + a^2b^2$,

  $y = \frac{-b^2x_1x + a^2b^2}{a^2y_1}$, $m = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$.

- La pendiente de la normal en es $\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$

  Dado que la normal es perpendicular a la tangente, es decir su pendiente es opuesta e inversa a la pendiente de la tangente, las pendientes de los radios vectores FP_1 Y $F'P_1$ son $\frac{y_1}{x_1-c}$ y $\frac{y_1}{x_1+c}$

  Dado que las coordenada de los dos puntos del vector FP_1 son (-c,0) y (x_1, y_1), y de $F'P_1$ son (c,0) y (x_1, y_1). Utilizando la formula punto pendiente tenemos, si $m = \frac{y_1-y}{x_1-x}$, m = $\frac{y_1-0}{x_1-c}$ y m = $\frac{y_1-0}{x_1+x}$,

Respectivamente. Entonces por el teorema 5, resulta:

$$Tg\alpha = \frac{\frac{y_1}{x_1-c} - \frac{a^2y_1}{b^2x_1}}{1+(\frac{y_1}{x_1-c})(\frac{a^2y_1}{b^2x_1})} = \frac{b^2x_1y_1 - a^2x_1y_1 + a^2cy_1}{b^2{x_1}^2 - b^2cx_1 + a^2{y_1}^2}$$

Como el punto P_1 está sobre la elipse, sus coordenadas (x_1, y_1) satisfacen la ecuación (1), es decir,

$$b^2{x_1}^2 + a^2{y_1}^2 = a^2b^2$$

Usando esta relación y la relación $c^2=a^2-b^2$, tenemos:

$$Tg\alpha = \frac{x_1\,y_1\,(b^2-a^2) + a^2cy_1}{a^2b^2 - b^2cx_1} = \frac{-c^2x_1y_1 + a^2cy_1}{b^2(a^2-cx_1)} = \frac{cy_1(-cx_1+a^2)}{b^2(-cx_1+a^2)} = \frac{cy_1}{b^2} \qquad (2)$$

v.) Análogamente, tenemos

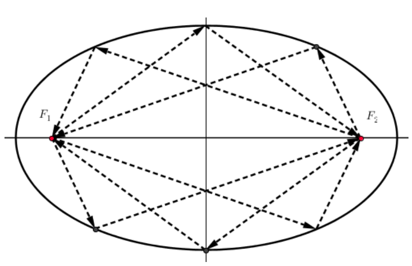
$$Tg\beta = \frac{\frac{a^2y_1}{b^2x_1} - \frac{y_1}{x_1+c}}{1+(\frac{y_1}{x_1+c})(\frac{a^2y_1}{b^2x_1})} = \frac{a^2x_1y_1 + a^2cy_1 - b^2x_1y_1}{b^2{x_1}^2 - b^2cx_1 + a^2{y_1}^2} = \frac{x_1\,y_1\,(a^2-b^2) + a^2cy_1}{a^2b^2 + b^2cx_1} =$$

$$\frac{c^2x_1y_1 + a^2cy_1}{b^2(a^2+cx_1)} = \frac{cy_1(cx_1+a^2)}{b^2(cx_1+a^2)} = \frac{cy_1}{b^2} \qquad (3)$$

Por tanto, de (2) y (3) se deduce que $tg\,\alpha = tg\beta$, entonces $<\alpha = <\beta$, demostrando el teorema 6 y la propiedad de reflexión de la elipse inmersa.

2.3.2 Interpretación desde la óptica geométrica

Figura 2-3-2



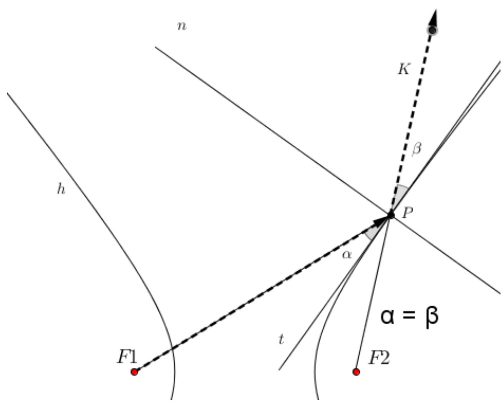
Propiedad de reflexión de la elipse:

Si se emite un rayo de luz desde un foco en el interior de una elipse, el rayo reflejado se concentrará en el otro foco.

2.4 Propiedad de Reflexión de la Hipérbola

2.4.1 Interpretación geométrica

Figura 2-4-1-1

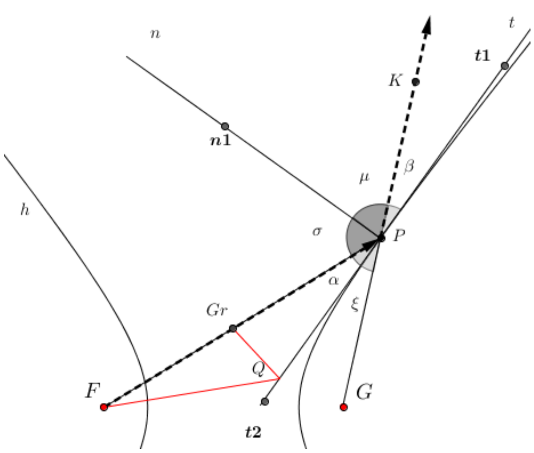


Sea P un punto de una hipérbola. La tangente a la hipérbola en el punto P forma ángulos congruentes con:

1.) La recta que pasa por P y el foco F1.
2.) La recta que pasa por P y K (donde P, K y F2 son colineales).

Demostración geométrica:

Figura 2-4-1-2



Sea P un punto de la hipérbola h con focos F y G, FP el segmento que pasa por P y el foco F, PK un segmento donde PKG son colineales. Sea t la recta tangente a h en P, y n la recta normal en el mismo punto. Tómese *n1* un punto en n fuera de la hipérbola, t1 el punto en t por encima de P y t2 el punto en t por debajo de P.

<μ = <*n1*PK, <σ = <FP*n1*, <α = <*t2*PF, y <β = <KP*t1*.

Se demostrará inicialmente que la tangente t toca a la hipérbola h en único punto P y que $<\alpha = <\beta$ buscando demostrar la propiedad de reflexión de la hipérbola.

i.) Sea *Gr* un punto de la recta *FP* que dista de *P* lo mismo que *G* y sea *t* la recta formada por los puntos equidistantes de *G* y *Gr*. Tómese Q un punto cualquiera en t. Si Q perteneciera a h y a t, por definición de hipérbola[14] se debería cumplir qué: FQ-QG = FP-PG. Ahora bien, al formar el triángulo FQGr se deduce para todos los puntos Q de la recta por propiedades de los lados del triángulo:

FQ-QGr≤ FGr=FP-PGr, y como Gr y G distan de *P,* entonces*: FQ-QG ≤ FP-PG*

y la igualdad sólo ocurre cuando Q=P. Por lo tanto, el único punto de la recta t que toca a la hipérbola h es P, es decir, **t** es la recta tangente a la hipérbola en *P*.

ii.) Dado que PGr = PG, se forma GrPG un triángulo isósceles. P en la recta t equidista de G y Gr, es decir t será la mediana, por lo tanto <QPGr = <GPQ, $<\alpha = <\xi$.

iii.) $<\xi = <\beta$ serán iguales al ser ángulos opuestos por el vértice.

iv.) De ii y iii se concluye que $<\alpha = <\beta$ por propiedad transitiva

Demostración analítica:

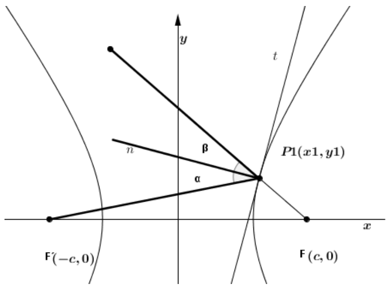
Para términos de la demostración se hace uso de 3 teoremas, buscando demostrar el teorema 9

Teorema 7: *"Las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ de pendiente m son* $y = mx \pm \sqrt{a^2}m^2 - b^2$, $|m| > \frac{b}{a}$", resulta:

Teorema 8: "*La ecuación de la tangente a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la curva es $b^2x_1x - a^2y_1y= a^2b^2$",*

[14] [15] Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

Figura 2-4-1-3



Teorema 9: La tangente a una hipérbola en cualquier punto de la curva es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de ese punto [15].

Tomando la ecuación de la hipérbole en su forma canónica.

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \qquad (1)$$

Sea t la tangente a la hipérbola en un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ de la curva y n la normal a la tangente t. Sea α el ángulo formado por n y el radio vector $F´P_1$, y β el formado por n y el radio vector FP_1. Se demostrará que α=β.

- La pendiente de la hipérbole en $P_1(x_1,y_1)$ es: $+\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

Por teorema 7, buscando la forma general y= mx+b, se tiene:

$b^2x_1x-a^2y_1y= a^2b^2$, $-a^2y_1y=- b^2x_1x+ a^2b^2$,

$y =\frac{- b^2x_1x+ a^2b^2}{-a^2y_1}$, $m=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$.

- La pendiente de la normal n es $-\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$

  Dado que la normal es perpendicular a la tangente, es decir su pendiente es opuesta e inversa a la pendiente de la tangente.

- Las pendientes de los radios vectores $F´P_1$ y FP_1 son $\frac{y_1}{x_1+c}$ y $\frac{y_1}{x_1-c}$,

  Dado que las coordenada de los dos puntos del vector $F´P_1$ son (-c,0) y (x_1, y_1), y de FP_1 son (c,0) y (x_1, y_1). Utilizando la formula punto pendiente tenemos, si $m = \frac{y_1-y}{x_1-x}$,

$m = \frac{y_1-0}{x_1-c}$ y $m = \frac{y_1-0}{x_1+x}$, Respectivamente. Entonces por el teorema 8:

$$Tg\alpha = \frac{\frac{y_1}{x_1-c} + \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}}{1+\left(\frac{y_1}{x_1-c}\right)\left(-\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}\right)} = \frac{b^2 x_1 y_1 + a^2 x_1 y_1 - a^2 c y_1}{b^2 {x_1}^2 - b^2 c x_1 - a^2 {y_1}^2}$$

Como el punto P_1 está sobre la hipérbole, sus coordenadas (x_1, y_1) satisfacen la ecuación (1), es decir,

$$b^2 {x_1}^2 - a^2 {y_1}^2 = a^2 b^2$$

Usando esta relación y la relación $c^2=a^2+b^2$, tenemos:

$$Tg\ \alpha = \frac{x_1 y_1 (b^2+a^2) - a^2 c y_1}{a^2 b^2 - b^2 c x_1} = \frac{c^2 x_1 y_1 - a^2 c y_1}{b^2(a^2 - c x_1)} = \frac{c y_1 (c x_1 - a^2)}{-b^2 (c x_1 - a^2)} = -\frac{c y_1}{b^2} \qquad (2)$$

Análogamente, tenemos

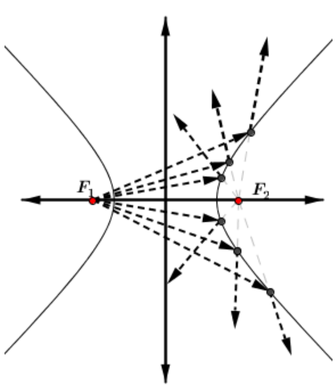
$$Tg\ \beta = \frac{-\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} - \frac{y_1}{x_1+c}}{1+\left(\frac{y_1}{x_1+c}\right)\left(\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}\right)} = \frac{-a^2 x_1 y_1 - a^2 c y_1 - b^2 x_1 y_1}{b^2 {x_1}^2 - b^2 c x_1 + a^2 {y_1}^2} = \frac{x_1 y_1 (a^2 - b^2) - a^2 c y_1}{a^2 b^2 + b^2 c x_1} =$$

$$\frac{-c^2 x_1 y_1 - a^2 c y_1}{b^2 (a^2 + c x_1)} = \frac{-c y_1 (c x_1 + a^2)}{b^2 (c x_1 + a^2)} = -\frac{c y_1}{b^2} \qquad (3)$$

Por tanto, de (2) y (3) se deduce que $tg\ \alpha = tg\ \beta$, entonces $<\alpha = <\beta$, demostrando el teorema y la propiedad de reflexión de la hipérbola inmersa.

2.4.2 Interpretación desde la óptica geométrica

Figura 2-4-2



Propiedad de reflexión de la hipérbola:

Si se emite un rayo de luz desde un foco de una rama de una hipérbola hacia la otra rama, el rayo se reflejara de manera que los rayos reflejados parecen provenir del otro foco.

2.5 Aplicaciones de las propiedades de reflexión de las cónicas.

En general las aplicaciones de las propiedades de reflexión de las cónicas las identificamos en el uso de implementos o instrumentos con la función de transportar ondas a puntos específicos. Si se considera ondas de luz, la función consiste en iluminar, sea para generar una visión, calor e inclusive fuego transportando rayos de luz a un punto fijo. Si se considera ondas de sonido, radio o televisión, el objetivo será crear un canal de comunicación. De esta manera las aplicaciones de las propiedades de reflexión con sus dos modalidades abarcan aplicaciones en ámbitos como la física, la astronomía, las ingenierías, la arquitectura, la medicina, y las telecomunicaciones, ámbito que implica aplicaciones no solo en ambientes científicos, si no también sociales.

2.5.1 Aplicaciones propiedad de reflexión de la parábola:

Las aplicaciones de la propiedad de reflexión de la parábola dependen del lugar de donde se emita la onda: desde el foco o desde una fuente exterior con rayos paralelos al eje del espejo parabólico. Si la propiedad se usa emitiendo la onda de una fuente lejana al espejo parabólico, de manera que los rayos incidentes son paralelos al eje del espejo, las aplicaciones más comunes están en la fabricación y uso de instrumentos de comunicación, instrumentos para crear fuego o hornos parabólicos donde se conduce las ondas de luz, sonio, radio o televisión a un punto fijo. Si se emite la onda desde el foco, las aplicaciones se basan en la fabricación de instrumentos de iluminación específicamente en reflectores. A continuación se describe cada uno de ellos:

- **Satélites**: Uno de los artefactos más importantes de la comunicación, posibilita la comunicación recibiendo señal de televisión, radio, teléfono e internet. El satélite al ubicarse fuera del planeta brinda información sobre el espacio e información de la tierra a nivel ambiental. Por medio de un radar que sigue la propiedad de reflexión de la parábola se transmiten pulsos de radio de ondas de alta frecuencia, para emitir imágenes tomadas por medio de cámaras especiales.

Figura 2-5-1-1

- **Las Antenas parabólicas:** Reciben información de un satélite que emite ondas hacia la tierra. De esta manera su función también consiste en generar la comunicación por teléfono, radio y televisión. Este dispositivo desarrolla un sistema basado en la propiedad de reflexión de la parábola que puede transmitir o recibir una señal o las dos funciones a la vez. La antena que consta de un plato paraboloide, y un dispositivo ubicado en el foco, puede emitir una onda desde el foco reflejada por medio de rayos paralelos o la función inversa de tomar la señal del medio preferiblemente desde rayos paralelos al eje del plato paraboloide para enfocar la señal directa al foco como funciona normalmente las antenas de televisión.

Figura 2-5-1-2

- **Los micrófonos:** Dispositivos para capturar ondas de sonido del aire y emitirlas como señales eléctricas, existen unos micrófonos denominados paraboloides direccionales que recogen el sonido emitido frontalmente siguiendo la propiedad de reflexión que direcciona la onda al punto de captura, es decir toma las ondas emitidas paralelas al eje del entorno paraboloide y lo captura en el foco.

Figura 2-5-1-3

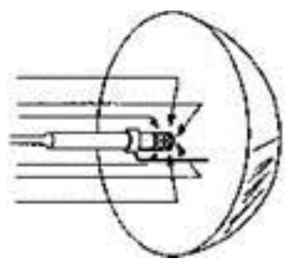
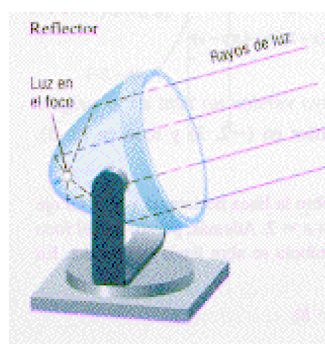


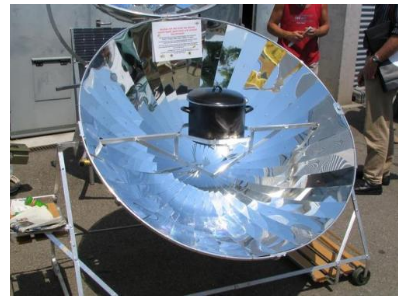
Figura 2-5-1-4



- **Reflectores:** Linternas, lámparas, faros de autos entre otros son ejemplos claros de instrumentos de iluminación basados en el mismo funcionamiento. La función consiste en reflejar en estos casos las ondas de luz en una dirección indicada bajo la propiedad de reflexión de la parábola, es decir una bombilla que emite luz se ubica en el foco del instrumento de superficie parabólica, con el objetivo de reflejar los rayos de luz paralelos a su eje. Cambiando la posición del instrumento dirigimos los rayos hacia otra dirección dependiendo de nuestra necesidad.

- **Hornos Solares:** También llamadas cocinas parabólicas cuyo objetivo es capturar los rayos emitidos por el sol por medio de láminas de aluminio con superficie parabólica, y concentrarlos en un punto denominado foco. En el foco se ubica un recipiente para cocinar a una determinada temperatura dependiendo de las condiciones tanto de tiempo (intensidad), y de forma ya que influye los ángulos incidentes del sol y las condiciones del horno diseñado.

Figura 2-5-1-5



- **Espejos parabólicos:** Como ejemplo se identifican los espejos retrovisores y espejos viales utilizados con fines de seguridad en tránsito, en vías, en locales y espacios públicos. Los espejos parabólicos usados con fines de entretenimiento en parques o trucos de magia, espejos parabólicos de experimentación en física, y espejos parabólicos de algunos tocadores simplemente con el objetivo de visualizarnos. Todos ellos hacen uso de la propiedad de reflexión generando una visualización de imágenes de diferentes formas según los rayos de incidencia de la luz en el objeto y su posición (Ver actividad 4-1-2)

Figura 2-5-1-6

2.5.2 Aplicaciones de la propiedad de reflexión de la elipse:

La propiedad de reflexión de la elipse tiene aplicaciones importantes en campos como la medicina y la arquitectura, donde se refleja una onda de uno de los focos de la figura tipo elipsoidal para conducirla al otro foco, sea ondas intra-acuáticas con fines medicinales, ondas de sonido para generar comunicación, u ondas de luz para iluminar [17] .

Figura 2-5-2-1

- **Litotriptor:** Instrumento utilizado en medicina para desintegrar cálculos renales en pacientes. El litotriptor consta de un medio elipsoide lleno de agua y un generador de ondas intra-acuáticas ubicado en uno de los focos del reflector elipsoidal, el litotriptor funciona ubicándolo pegado al cuerpo de tal forma que un foco quede ubicado en los cálculos renales. Al generar ondas intra- acuáticas de uno de los focos el objetivo es que converjan en el cálculo para desintegrarlo.

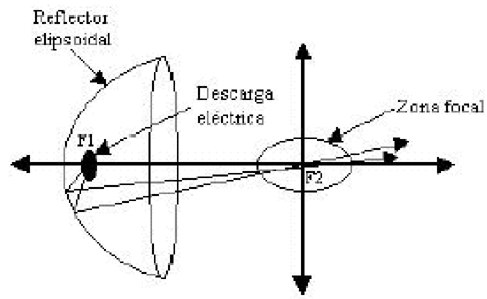


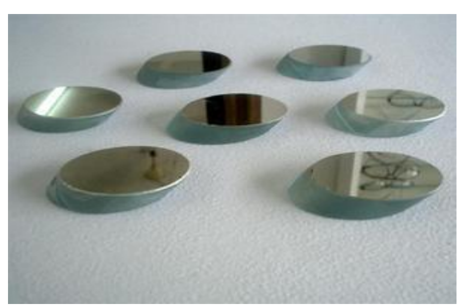
Fig. 1. Generador electrohidráulico

- **Estructuras elipsoidales:** Usadas en la arquitectura con fines estéticos, posibilitan una comunicación caracterizada por que si se emite un sonido desde uno de los focos converge al otro y en los otros espacios no se oirá nada. Un ejemplo es el edificio el torco observado en la figura 2-4-2-2, las galerías susurrantes, la capilla de los secretos que la podemos encontrar en el Desierto de los Leones en México DF, la catedral de San Pablo en Londres y el Salón de los Estatutos del Capitolio en EEUU.

Figura 2-5-2-2

- **Espejos Elípticos:** Tienen la función de emitir luz de uno de los focos, para poder transmitirla al otro. Los espejos elípticos bajo la propiedad de reflexión son usados en la óptica geométrica, en sistemas de enfoques, en proyectores de imágenes elipsoidales, en hornos de espejos elípticos, en la construcción de telescopios, y en algunos faros de los autos.

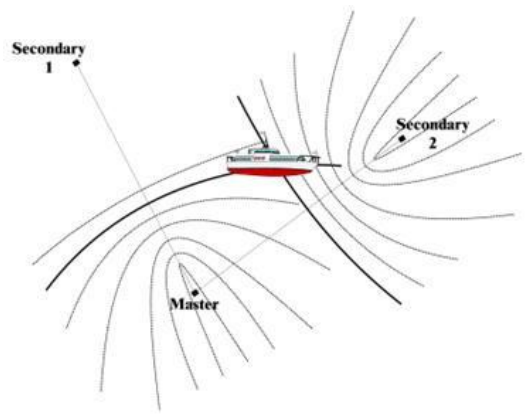
Figura 2-5-2-3



2.5.3 Aplicaciones de la propiedad de reflexión de la hipérbola:

La propiedad de reflexión de la hipérbola tiene aplicaciones importantes en el campo de la astronomía desde la construcción de telescopios, y en la comunicación a través el sistema de navegación LORAN. Para este caso si se usa la propiedad con las ondas de luz, señal u ondas electromagnéticas la propiedad nos permite visualizar a grandes distancias e identificar el posicionamiento de objetos en el mar o aire.

Figura 2-5-3-1

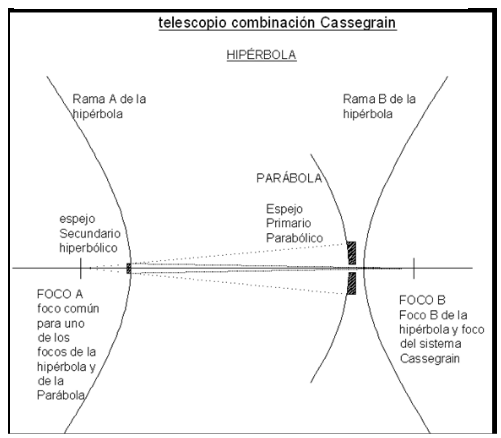


- **El sistema de navegación LORAN:** [19] Sus siglas expresan en ingles Long Range Navigation, un sistema de radionavegación hiperbólica de largo alcance y gran precisión usado para determinar la posición de un barco o un avión. El objetivo es conocer el punto de intersección de dos o más hipérbolas para conocer la posición del barco o avión y posiblemente establecer comunicación con cada uno de ellos. Su funcionamiento parte de la propiedad de reflexión de la hipérbola ya que si se tiene dos estaciones que emiten señales desde la superficie terrestre y se calcula la diferencia de tiempo con que se obtienen en un receptor de señales, se logra localizar el lugar geométrico de los puntos en que se encuentra el avión o el barco; es decir, dicho lugar es un hipérbola donde los focos son las estaciones. Aunque su uso no sea muy común en la actualidad por el desarrollo de nuevas tecnologías de sistemas de navegación por satélite el sistema de navegación LORAN brindo gran ayuda y se convirtió en una herramienta con objetivos militares desde la segunda guerra mundial.

Figura 2-5-3-2

- **Los espejos hiperbólicos:** Funcionan con una o sus dos ramas generando que la reflexión de un rayo emitido desde uno de los focos hacia la otra rama de la hipérbola se refleje como si viniera del otro foco. Si se combina la función de los espejos hiperbólicos con los paraboloides, elípticos, y circulares se pueden construir telescopios reflectores.

Figura 2-5-3-3



- **Telescopios Reflectores:** Enfocan la luz y forman imágenes sin el uso de lentes si no con el uso de espejos ubicados en los ángulos indicados para visualizar mayores regiones [20]. El telescopio reflector más conocido por el uso de espejos hiperbólicos y parabólicos es el telescopio reflector tipo Cassegrain. Este telescopio presenta varios tipos dependiendo del tipo de espejo primario y secundario. Algunos de los telescopios reflectores más conocidos son:

Tabla 2-5-3: Telescopios reflectores

Telescopio	Espejo primario	Espejo secundario
Cassegrain	Parabólico	Hiperbólico
Ritchey-Chrétien	Hiperbólico	Hiperbólico
Dall-Kirkham	Elíptico	Esférico
Pressmann-Camichel	Esférico	Elipsoide

3. Aspectos didácticos y epistemológicos.

3.1 Resolución de Problemas

La propuesta didáctica que se plantea como producto final de este trabajo con el objetivo de enseñar las propiedades de reflexión de las cónicas y sus aplicaciones, se caracteriza por utilizar la metodología de resolución de problemas para el diseño de las actividades.

La resolución y planteamiento de problemas desde los Lineamientos Curriculares [1] es concebida como uno de los 5 procesos generales del currículo en matemáticas[15]; proceso que no tiene un fuerte trabajo en la escuela ya que se evidencia un aprendizaje de las matemáticas formales y abstractas descontextualizadas, donde la resolución de problemas en varias ocasiones se deja al final como parte de la aplicación de la temática trabajada o en ocasiones ni se llega a trabajar. Como se afirma [1] "*Las aplicaciones y los problemas no se deben reservar para ser considerados solamente después de que haya ocurrido el aprendizaje, sino que ellas pueden y deben utilizarse como contexto dentro del cual tiene lugar el aprendizaje."*

Miguel de Guzman[16] reconoce la necesidad del uso de situaciones problemáticas exponiendo algunas razones, afirmando que: "la importancia radica en proporcionar a nuestros jovenes capacidad autónoma para resolver sus propios problemas, y por que muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas."

[15] [1]Los 5 procesos generales del currículo en matemáticas son: Razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
[16] [1] "Miguel de Guzmán, Enseñanza de las ciencias y de las matemáticas, Editorial Popular, Madrid, 1993, pág. 111.

Al reconocer la necesidad del trabajo de este proceso, es necesario caracterizar dicha metodología desde el planteamiento de problemas tarea que por lo general desarrolla un docente con el objetivo de motivar y guiar a cada uno de los estudiantes para que enfrenten y lleguen a una solución. Dicha tarea como resolutor o generador de la situación la puede desarrollar cualquier persona interesada en resolver o plantear un problema.

3.1.1 ¿Qué es un problema en matemáticas?

La definición formal en matemáticas de problema presenta muchas percepciones y es relativa, pues depende de para quien se convierte dicha situación en un problema. Algunas concepciones que caracterizan un problema matemático son:

Krulik y Rudnik [22] : “*Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma*”.

Miguel de Guzmán [2]*“situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfiladas, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra situación.”*

Desde las concepciones expresadas se identifican aspectos característicos de lo que se entiende como un problema en matemáticas:

- Es un enunciado verbal, situación o pregunta.
- Genera un reto para el resolutor, es decir no tiene una solución inmediata ni un camino evidente de solución.
- Debe generar interés por parte del resolutor para poder enfrentarse a su solución.

3.1.2 Tipos de problemas

Dependiendo del criterio la clasificación se pueden obtener diferentes tipos de problemas en matemáticas. Para Polya [21] por ejemplo dependiendo de la incógnita se diferencian 3 clases de problemas:

- ✓ Problemas de Construcción: Generalmente son utilizados en geometría con el objetivo de llegar a mostrar una construcción con condiciones específicas utilizando cada una de las propiedades de los elementos emergentes del problema. Ejemplo: *“Inscribir un cuadrado en un triángulo dado tal que dos vértices del cuadrado deben hallarse sobre la base del triángulo y los otros dos vértices del cuadrado sobre cada uno de los otros dos lados del triángulo respectivamente”*

- ✓ Problemas de Hallar: En ellos se solicita hallar una característica, una descripción, un valor o una medida específica de algún elemento, bajo las relaciones presentes con los otros objetos presentados en el problema. Ejemplo: *“Determinar el área S de la superficie lateral de un tronco de cono, conociendo el radio R de la base inferior, r el de la base superior y la altura h”*

- ✓ Problemas de Demostración: Expresan una afirmación de algún tipo de teorema, deducción, o relación matemática donde se solicita directamente una demostración. Ejemplo: “*Dos ángulos están situados en dos planos diferentes, pero cada uno de los lados de uno es paralelo al lado correspondiente del otro, y en la misma dirección. Demostrar que los dos ángulos son iguales”*

3.1.3 ¿Qué se debe tener en cuenta al plantear un problema?

- Exponer un enunciado sencillo donde sea claro los datos, la incógnita (lo que se pide hallar), y las condiciones del problema.
- No caer en la exposición de problemas de aplicación con soluciones repetitivas es decir en el planteamiento de ejercicios que pueden resolverse por medio de procesos repetitivos.

- No concebir como problema un ejercicio dentro de un contexto.
- Plantear el problema acorde al nivel de trabajo, que no sea demasiado fácil pero tampoco imposible de solucionar para dicho grupo.
- Concebir con anticipación los múltiples caminos que pueden llevar a la solución del problema, para poder guiar a los estudiantes desde múltiples razonamientos.
- El profesor debe ayudar de forma natural al estudiante pero no demasiado al punto que no se le deje nada al estudiante, el estudiante debe asumir una parte razonable del trabajo.
- La nueva pregunta es el recurso del profesor para indicar caminos sin imposición, teniendo en cuenta la generalidad en dicha pregunta planteada.

3.1.4 Fases para resolver un problema

En cada una de las fases que puede pasar un resolutor de problemas el papel del profesor juega un papel importante en el paso de una etapa a otra ya que, con la formulación de nuevas preguntas tantas sean necesarias se guiara al estudiante de una forma indirecta para que el por sí mismo llegue a una solución. Polya formula una lista de preguntas generales que se pueden plantear en cada etapa dependiendo de los procesos que lleve el resolutor, aunque no es un modelo exacto a seguir para obtener el éxito en cada uno de ellas, estas preguntas sugieren y brindan herramientas para que el profesor genere una verdadera sesión de resolución de problemas y acciones específicas por parte de los estudiantes:

i. Comprender el problema: En esta etapa la idea es responder a las preguntas que se presentan como ejemplo a continuación.
   ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la condición?, ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿Es insuficiente? ¿Redundante?, ¿Contradictoria?

ii. Concebir un Plan.
   Si es posible se debe determinar la relación entre los datos e incógnita, o por ejemplo considerar problemas auxiliares, para obtener finalmente un plan de solución. Algunas de las preguntas que ayudan a la concepción del plan:

¿Se ha encontrado con un problema semejante?, ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿Conoce un problema relacionado con éste?, ¿Conoce algún teorema que pueda ser útil?. Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar. Si lo encuentra entonces pregúntese. ¿Podría emplear su método?, ¿Le haría usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de utilizarlo?, ¿Podría enunciar el problema en otra forma?, ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente?. Refiérase a las definiciones.

Si no puede resolver el problema propuesto trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible?, ¿Un problema más general?, ¿Un problema más particular?, ¿Un problema análogo?, ¿Puede resolver una parte del problema?. Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿En qué medida ahora la incógnita queda ahora determinada?, ¿En qué forma puede variar?, ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos?, ¿Puede pensar usted en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita?, ¿Puede cambiar la incógnita?, ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?.

¿Ha empleado todos los datos?, ¿Ha empleado toda la condición?, ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

iii. Ejecución del Plan

Al ejecutar el plan de solución, compruebe cada uno de los pasos.

¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto?, ¿Puede demostrarlo?

iv. Examinar la solución obtenida.

¿Puede verificar el resultado?, ¿Puede verificar el razonamiento?, ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?.

3.2 Modelo de Van Hiele

Este modelo educativo de razonamiento y enseñanza de la matemática, principalmente de la geometría plantea una secuencia de tipos de razonamiento de los estudiantes denominados niveles y brinda directrices desde las fases de aprendizaje sobre cómo se puede ayudar a los alumnos para que puedan alcanzar con más facilidad un nivel superior de razonamiento. Los niveles y fases planteadas en el modelo de Van Hiele [4] para la enseñanza de la geometría se convierten en una herramienta en la construcción de la propuesta didáctica cuyo objetivo es desarrollar procesos de análisis geométrico. Específicamente la propuesta busca generar situaciones problema que lleven al estudiante a alcanzar el nivel 3 y 4 de Van Hiele.

3.2.1 Niveles de razonamiento de Van Hiele

✓ **Nivel 1 (De reconocimiento):**

- Es el nivel más elemental de razonamiento, en él los estudiantes perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades, pudiendo incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen.
- Los estudiantes perciben las figuras como objetos individuales, es decir que no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase.
- Los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras; los reconocimientos, diferenciaciones o clasificaciones de figuras que realizan se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas.
- En muchas ocasiones las descripciones de las figuras; están basadas en su semejanza con otros objetos (no necesariamente geométricos) que conocen: suelen usar frases como “…se parece a…”, “…tiene forma de”, etc.
- Aprenden nombres de las figuras y practican actividades de reconocimiento en los dos sentidos nombre $\leftrightarrow$ figura
- Los estudiantes no suelen reconocer explícitamente las partes de que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas.

En la propuesta planteada el estudiante llega al primer nivel de Van Hiele cuando describe desde la forma física la propiedad de reflexión para el caso específico planteado sin un vocabulario formal, cuando identifica la incógnita, los datos y la condición de cada una de las situaciones problema, comprendiendo el problema inmerso pero, no logra aplicar la propiedad de reflexión en la situación.

✓ **Nivel 2 (de análisis):**

- El nivel 2 se inicia un razonamiento de tipo matemático, pues es el primero en el que los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar (necesariamente a partir de la observación y la manipulación) propiedades que todavía no conocían.
- Los estudiantes se dan cuenta de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y de que están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal.
- Los estudiantes pueden deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.
- Los estudiantes cambian la forma de mirar las figuras geométricas, ya son conscientes de que pueden estar formadas por elementos y de que son portadoras de ciertas propiedades.
- Los estudiantes no son capaces de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades. La capacidad de razonamiento es limitada, pues usaran las propiedades de una figura como si fueran independientes entre sí.

Este nivel específicamente en la propuesta se caracteriza porque: El estudiante enuncia la propiedad de reflexión desde la forma física, generalizándola a partir de la experimentación, busca estrategias de solución de la situación problema planteado identificando el uso de la propiedad de reflexión en cada una de ellas, para el caso particular.

✓ **Nivel 3 (de clasificación):**

- En este nivel aumenta la capacidad de razonamiento formal (matemático) de los estudiantes: Ya son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir esas implicaciones; en particular, pueden clasificar lógicamente las diferentes familias de figuras a partir de sus propiedades o relaciones ya conocidas. No obstante, sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación.

- Los estudiantes pueden describir una figura de manera formal, es decir, pueden dar definiciones matemáticamente correctas, comprenden el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.
- Adquieren la habilidad de conectar lógicamente diversas propiedades de la misma o diferentes figuras.
- Pueden realizar clasificaciones más exhaustivas y podrán dar definiciones matemáticamente correctas, sin redundancias.
- Si bien los estudiantes comprenden los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal, los ven de forma aislada, ya que no comprenden la necesidad del encadenamiento de estos pasos ni entienden la estructura de una demostración: Pueden entender una demostración explicada por el profesor o desarrollada en el libro de texto, pero no son capaces de construirla por sí mismos.
- Al no ser capaces de realizar razonamientos lógicos formales ni sentir su necesidad, los estudiantes no comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.
- La capacidad de los estudiantes se limitará a realizar pequeñas deducciones, es decir, implicaciones simples, no pudiendo, por ejemplo, darse cuenta de la técnica seguida para hacer la demostración completa de un teorema. La incapacidad de los estudiantes para comprender las demostraciones viene acompañada de un sentimiento de que las demostraciones formales no son necesarias, pues para ellos es suficiente si se comprueba el teorema en cuestión en una cantidad “razonablemente grande” de casos.

El nivel de clasificación en la propuesta planteada se caracteriza porque: El estudiante enuncia la propiedad de reflexión usando un vocabulario formal, argumenta bajo razonamientos geométricos y algebraicos lógicos, e identifica su uso en otras situaciones o contextos, no mantiene razonamientos lógicos y formales en procesos de demostración y generaliza su solución para casos análogos de geometría analítica.

Nivel 4 (De deducción formal):

- Alcanzado este nivel, los estudiantes pueden entender y realizar razonamiento lógicos formales; las demostraciones (de varios pasos) ya tienen sentido para ellos y sienten su necesidad como único medio para verificar la verdad de una afirmación.
- Los estudiantes pueden comprender la estructura axiomática de las matemáticas, es decir el sentido y la utilidad de términos no definidos, axiomas, teoremas, …
- Los estudiantes aceptan la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (es decir, la existencia de demostraciones alternativas del mismo teorema), la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto,..
- Al alcanzar el nivel 4 de razonamiento se logra la plena capacidad de razonamiento lógico matemático y, al mismo tiempo, la capacidad para tener una visión globalizadora del área que se está estudiando.

En la propuesta este nivel se caracteriza porque: El estudiante deduce y define la propiedad de reflexión demostrándola desde razonamientos lógicos formales, halla y describe la solución de la situación problema planteada bajo razonamientos lógicos formales, reconoce la necesidad de demostrar sus inferencias al respecto recurriendo a la demostración de cada una de las propiedades de reflexión de las cónicas desde razonamientos geométricos y algebraicos.

3.2.2 Las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele

El modelo propone unas fases planteadas y enfocadas a la gestión del profesor encaminando un proceso de aprendizaje y razonamiento por parte de los estudiantes a los niveles más altos. En la propuesta planteada se estructura las actividades haciendo uso de las fases del modelo de Van Hiele [4] y las fases para resolver un problema que plantea Polya [21] descritas en el capitulo 4.

- **1ra Fase: Información**

En esta fase se espera que el profesor descubra que nivel de razonamiento tienen sus alumnos en el nuevo tema y que saben del mismo. Además de informar sobre el tipo de trabajo que se va hacer.

El profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, qué tipo de problemas se van a plantear, que materiales van a utilizar, etc. Así mismo, los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos imprescindibles para poder empezar el trabajo matemático propiamente dicho.

Sirve para que el profesor averigüe los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema que se va abordar. La experiencia extraescolar no debe despreciarse, sino que puede aprovecharse como fuente de motivación; además es conveniente evitar hacer un trabajo repetido o tratar de “enseñar cosas que los alumnos ya saben. Por otra parte, muchas veces tendremos que trabajar en un tema que no es absolutamente nuevo para los estudiantes, que ya lo han estudiado en algún curso anterior, por lo que, para una buena utilización del modelo de Van Hiele es imprescindible que el profesor sepa qué grado de conocimiento de los contenidos del tema tienen sus alumnos y, sobre todo que nivel de razonamiento son capaces de mostrar.

- **2a fase: Orientación Dirigida**

En esta fase los estudiantes empiezan a explorar el campo del estudio por medio de investigaciones basadas en el material que les ha sido proporcionado. El objetivo principal de esta fase es que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuales son los conceptos, propiedades, figuras, etc principales en el área de la geometría que están estudiando. En esta fase se construirán los elementos básicos de la red de las relaciones del nuevo nivel. Van Hiele afirma, difiriéndose a esta fase, que “las actividades, si son escogidas cuidadosamente forman la base adecuada del pensamiento del nivel superior” (Van Hiele $[1986], p. 97$).

Los estudiantes, por si solos, no podrían realizar un aprendizaje eficaz (en cuanto a los resultados obtenidos y el tiempo empleado), por lo que es necesario que las actividades que se les propongan estén convenientemente dirigidas hacia los conceptos, propiedades, etc. Que debe estudiar. El trabajo que vayan hacer está seleccionado de tal forma que los conceptos y estructuras característicos se les presenten de forma progresiva.

- **3ª fase: Explicitación**

La 3ª fase no es una fase de aprendizaje de cosas nuevas, si no de revisión del trabajo hecho antes de puesta a punto de conclusiones y de práctica y perfeccionamiento en la forma de expresarse.

Una de las finalidades de la tercera fase es hacer que los estudiantes intercambien sus experiencias, que comenten las regularidades que han observado, que expliquen cómo han resuelto las actividades, todo ello dentro de un contexto de dialogo en el grupo. Es interesante que surjan puntos de vista divergentes, ya que el intento de cada estudiante por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas (o las de su compañero), que ordenarlas y que expresarlas

con claridad. Este dialogo hace que sea en el transcurso de esta fase cuando se forma parcialmente la nueva red de relaciones.

- **4ª fase: Orientación Libre.**

En esta fase los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir a otras investigaciones diferentes de las anteriores. El campo de estudio ya es en gran parte conocido por los alumnos, pero estos todavía deben perfeccionar su conocimiento del mismo. Esto se consigue mediante el planteamiento del profesor de problemas, que preferiblemente pueden desarrollarse de diferentes formas o que puede llevar a diferentes soluciones. En estos problemas se colocarán indicios que muestren el camino a seguir, pero de forma que el estudiante tenga que combinarlos adecuadamente, aplicando los conocimientos y la forma de razonar que ha adquirido en las fases anteriores. El núcleo de esta fase está formado por actividades de utilización y combinación de los nuevos conceptos, propiedades y formas de razonamiento. Los problemas que hay que plantear en la fase 4 no tienen nada que ver con los ejercicios de “aplicación”, tan frecuentes en nuestros libros de texto, algunos de los problemas de esta fase deben presentar situaciones nuevas, ser abiertos, con varios caminos de resolución. Este tipo de actividad es la que permitirá completar la red de relaciones que se empezó a formar en las fases anteriores, dando lugar a que se establezcan las relaciones más complejas y más importantes.

- **5ª Fase: Integración**

A lo largo de las fases anteriores, los estudiantes han adquirido nuevos conocimientos y habilidades, pero todavía deben adquirir una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición relacionado los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente; se trata de condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento. En esta fase el profesor puede fomentar este trabajo proporcionando concepciones globales pero es importante que estas comprensiones no le aporten ningún concepto o propiedad nueva al estudiante: solamente deben ser una acumulación, comparación y combinación de cosas que ya conoce. Completada esta fase, los alumnos tendrán a su disposición una nueva red de relaciones mentales, más amplia que la anterior y que las sustituye, y habrán adquirido un nuevo nivel de razonamiento.

4. Propuesta didáctica

La propuesta didáctica está diseñada para estudiantes de ciclo V (grados décimo y once), en ella se plantean actividades en torno a cada una de las propiedades de reflexión de las cónicas usando la metodología de resolución de problemas y el modelo de Van Hiele. La propuesta didáctica concibe 3 etapas de desarrollo teniendo en cuenta que el estudiante al enfrentarse a la propuesta con anterioridad debe reconocer cada una de las cónicas y sus elementos como mínimo. En la primera etapa el objetivo consiste en identificar y deducir desde una actividad tipo experimental las respectivas propiedades de reflexión de las cónicas, en la segunda etapa el propósito es aplicar las propiedades de reflexión en una situación problema y en la tercera etapa se espera involucrar al estudiante en una situación problema de geometría analítica aplicando las propiedades de reflexión en un contexto geométrico y algebraico.

En la primera etapa se enfatiza en los primeros niveles de Van Hiele donde se descubre y generaliza cada una de las propiedades de reflexión a partir de la experimentación. En la segunda etapa se espera llegar al nivel 3 de Van Hiele donde se aplica las propiedades solucionando una situación problema desde razonamientos geométricos lógicos; y finalmente en la tercera etapa buscando llegar al nivel más alto de Van Hiele se espera relacionar los razonamientos geométricos y algebraicos para alcanzar un razonamiento lógico formal.

Tabla 4-1: Propuesta didáctica propiedades de reflexión de las cónicas.

Etapas	**Propiedad reflectora de la parábola**	**Propiedad reflectora de la elipse**	**Propiedad reflectora de la hipérbola**
Actividades de Etapa 1	Ubica el Buque	Defensa del Buque	Juego entre Buques
Actividades de Etapa 2	La magia en el espejo parabólico	El uso del litotriptor	Diseño de un telescopio
Actividades de Etapa 3	Uso de un horno solar parabólico	Ubícate en la Galería susurrante	Imagen en el telescopio Cassegrain

Como la propuesta está diseñada bajo la metodología de resolución de problemas se plantea en cada actividad una situación problema para resolver a partir de análisis geométricos. La propuesta se plantea a partir de una guía para el estudiante donde se formula cada una de las situaciones diseñadas y una guía de apoyo para el docente donde se formulan posibles preguntas para encaminar un proceso de solución reconociendo que los procesos de los estudiantes en búsqueda de la solución no siempre van a ser los mismos y en cada caso es necesario acudir a acciones distintas por parte del docente. Esta guía del docente se estructura desde 4 momentos:

- **MOMENTO 1 (Introducción)**: En este momento se desarrollan las acciones descritas en el modelo de Van Hiele en la fase de introducción y la orientación dirigida. Se informa al estudiante sobre el experimento o actividad a desarrollar, para el caso de una sesión con material es aquí donde se debe exponer los materiales necesarios, la explicación de su uso, y la descripción de un montaje experimental si es necesario para la actividad. El estudiante en este primer momento debe comprender las indicaciones, contar con material para la actividad, y construir el montaje experimental si es necesario.

- **MOMENTO 2 (Planteamiento y comprensión del problema):** El docente en un segundo momento debe exponer la situación problema que se plantea, aclarando cualquier inquietud para la comprensión por parte del estudiante. En este momento para generar y verificar la comprensión del problema por parte del estudiante se recurre a las preguntas sugeridas por

Polya y en algunos casos se toman preguntas específicas a las situaciones problema planteadas.

- ***MOMENTO 3 (*Enfrentamiento al problema*):*** En este tercer momento se debe brindar el espacio para que los estudiantes se enfrenten al problema, deduzcan información del mismo, interactúen con el material, busquen la solución al problema, identifiquen relaciones y la función de cada elemento expuesto en el enunciado. Se espera que en este momento el proceso del estudiante respecto a la solución del problema lo lleve a la 2, 3 y 4 fase que propone Polya en la resolución de problemas “*concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida*”. En este momento las preguntas se sugieren recordando que las preguntas deben ser emitidas dependiendo del proceso individual y grupal del estudiante.

    - **Concepción de un Plan**: En este momento el objetivo por parte del docente es inducir al estudiante a sus primeras acciones respecto al problema.

    - **Ejecución del plan:** El problema ha generado la concepción de unas primeras estrategias por parte del estudiante, en esta fase se espera ponerlas en acción y dar solución a la situación problema. Las preguntas generales sugeridas por Polya pueden ser útiles, siendo conscientes que no todas son efectivas con todos los procesos de los estudiantes.

    - **Examinar la solución obtenida*:*** En esta fase el estudiante ya ha planteado una solución al problema y ha desarrollado un método o explicación de la solución. El objetivo de este momento es verificar procesos, argumentos o demostraciones, además de aplicar lo aprendido a otros problemas o situaciones similares.

- **MOMENTO 4 (Integración):** En este momento el objetivo es desarrollar una socialización de las soluciones, argumentos y demostraciones encontradas por parte de los estudiantes entorno a la situación problema planteada. Independientemente del nivel al que hayan llegado cada uno de los estudiantes se busca formalizar los contenidos trabajados a lo largo de la actividad (a partir de los razonamientos de ellos mismos). Es importante en este momento identificar las aplicaciones que tiene lo aprendido, hallado y trabajado por cada uno de ellos en diferentes contextos, tal como se describe en el modelo de Van Hiele.

4.1 Actividades entorno a la propiedad de reflexión de la parábola

4.1.1. Primera actividad: Ubica el buque

Guía del estudiante

Objetivo: Deducir la propiedad de reflexión de la parábola por medio del análisis geométrico de una situación problema experimental.

Materiales: Laser tipo esfero, lata de atún o lamina de aluminio rectangular, parábola (dibujada construida o impresa del tamaño de una hoja carta con la directriz y foco marcados), bisturí, cinta, tijeras fuertes, rectángulo 50cm x 40cm de cartón o icopor, pintura azul, 4 barcos y 1 buque dibujados o de juguete pequeños (que su largo no exceda 3 cm).

Montaje:

1.) Cortar de la lata la base y la tapa dejando la tirilla del contorno.

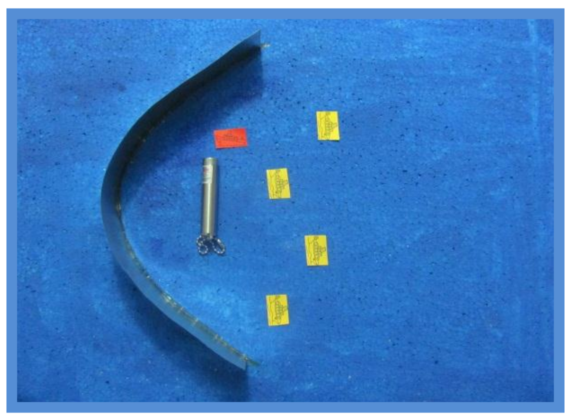
2.) Pintar el icopor de azul, dejar secar y ubicar la lámina horizontalmente.

3.) Pegar la hoja de la parábola sobre la lámina a algún costado con cinta.

4.) Con ayuda del bisturí hacer un corte sobre la línea que describe la parábola.

5.) Despegar la hoja, marcando el foco en la lámina de icopor.

Figura 4-1-1-1

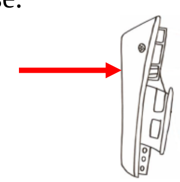


6.) Tomar la tirilla de lata y ubicarla sobre la parábola, de forma que quede encajada en el corte hecho en el paso anterior, si es necesario cortar un poco más el largo.

7.) Ubicar los barcos en la lámina como se observa en la figura 4-1-1 (sobre el contorno o en la región azul, pegados o superpuestos, donde desde los barcos se debe ver la tirilla cóncava, es decir, como si estuvieras mirando una cuchara en la parte donde pones el alimento)

Situación problema: La construcción representa un mar, 4 son los barcos oponentes y el buque más grande representa tu base. Debes ubicar tu buque en una posición donde puedas derribar a todos tus oponentes teniendo en cuenta que:

- Solo puedes apuntar hacia la tirilla de la lata. No puedes derribar a tus oponentes apuntando directamente a ellos.
- Desde la posición que elijas debes derribar a todos tus oponentes sin moverte de tu posición.
- Un barco se derriba por completo cuando lo alumbras con el láser perpendicularmente a su base.



Guía de apoyo del docente

- **MOMENTO 1 (Introducción)**: Se informa al estudiante sobre el experimento a desarrollar, se expone los materiales necesarios con antelación y se explica cómo construir el montaje descrito en la guía del estudiante.

- **MOMENTO 2 (Planteamiento y comprensión del problema):** Se plantea la situación problema diseñada descrita en la guía del estudiante y con el objetivo de generar la comprensión del problema se recurre a las preguntas sugeridas por Polya:

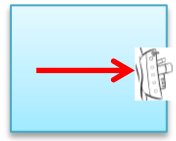
¿Cuál es la incógnita?: La Ubicación del buque

¿Cuáles son los datos?: La construcción representa un mar donde hay 5 barcos, 4 son los barcos oponentes y el buque más grande representa tu base. Un barco se derriba por completo cuando lo alumbras con el láser perpendicularmente a su base. De tu buque puedes lanzar haces de luz.

¿Cuál es la condición?: Se deben derribar los 4 oponentes, el barco no se puede mover de la base escogida, y solo se puede apuntar hacia la tirilla de la lata.

¿Qué significa ser alumbrado perpendicularmente?:

Que al incidir forme ángulos de 90 grados con su base



- ***MOMENTO 3 (*Enfrentamiento al problema*):*** En este momento se dejara un espacio para que los estudiantes experimenten con el reflejo de los haces de luz, busquen la solución al problema e identifiquen las primeras relaciones.

  - **Concebir un Plan**:

Preguntas generales sugeridas por Polya	*Aplicación en la solución del problema específico*
¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos o del montaje?	El estudiante puede identificar la forma específica parabólica de la tirilla que debe haber visto con anterioridad y describirla. Se puede preguntar directamente sobre ¿qué forma tiene la tirilla?. A partir de la forma se puede pasar a reconocer la acción de la tirilla como instrumento de reflexión de la luz planteando como preguntas: ¿Por qué le llega el haz de luz a los barcos si no se está apuntando hacia ellos?, ¿si apuntas al icopor pasa lo mismo?, ¿si se hubiera colocado la tirilla en línea recta pasaría lo mismo?. Si el estudiante visualiza la reflexión del láser este aspecto facilita la descripción de la reflexión desde la forma y quizás empiecen a surgir las primeras relaciones entre parábola y reflexión.
"¿Puede resolver una parte del problema?, Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte"	• Considere que solo se derriba un barco siendo alumbrado. Y no puede mover la base. (El estudiante puede empezar a identificar la relación entre el ángulo de incidencia y reflexión desde la experimentación). • Considere que puede mover su base y solo se derriba un barco si es alumbrado con un rayo perpendicular a él. (El estudiante puede identificar hacia que sitio de la tirilla específicamente debe apuntar por medio de la experimentación y la forma de crear rayos perpendiculares). • Busque derribar solo un barco, sin mover la base y alumbrando

	perpendicularmente al barco. (El estudiante al enfocarse solo en un barco puede identificar la base con mayor facilidad trasladando solo el láser hacia una posición.)
"¿Podría enunciar el problema en otra forma?. ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?",	Se emiten haces de luz desde los barcos perpendicularmente a ellos en dirección a la tirilla, y todos iluminan el buque, ¿Cuál era la posición del buque? El nuevo enunciado toma la propiedad de reflexión en sentido contrario haces de luz-foco. Si el estudiante explica su respuesta y es posible emitir al mismo tiempo los haces de luz desde los barcos con 5 laser y visualizar que el punto de intersección es el mismo. Se logra que el estudiante describa la propiedad de reflexión de la parábola en sentido contrario al expresado en la primera situación

- **Ejecución del plan:**

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
"¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto?"	Como el problema cuestiona por una ubicación, es necesario cuestionar sobre el método para hallar esa ubicación, se identifica las siguientes preguntas específicas para buscar los pasos que cuestiona Polya: Si necesita indicarle a alguien como hallar la base, ¿qué indicaciones daría?, ¿siempre funciona de la misma manera?, *¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto?,* describa que pasa si se emite un haz de luz desde el buque o desde los barcos bajo las condiciones del problema, si es necesario dibuje lo que observa. ¿Cuándo usted apunta con un láser a la tirilla, puede saber hacia dónde se dirige el haz de luz? Sustente su respuesta, ¿por qué ocurre?. La pregunta puede generar al estudiante la necesidad primero de buscar un método para hallar la ubicación si es el caso que la halló por ensayo error, o buscar sustentar la forma en que ubico el buque. Este tipo de descripciones solicitadas puede permitir la identificación de la propiedad de reflexión de la parábola con la excusa de buscar un foco.

“¿Puede usted demostrarlo”	Se puede encaminar al estudiante en la búsqueda de una demostración sencilla como la que se muestra en el capítulo 3. Si el nivel del estudiante lo permite se solicita una demostración, esperando profundizar en la propiedad de reflexión de la parábola, donde el conocimiento del principio de reflexión de la luz, la concepción de tangente, ángulo de incidencia y reflexión son necesarios pero posibles de visualizar y comprender desde el montaje y la situación problema.

- **Examinar la solución obtenida:**

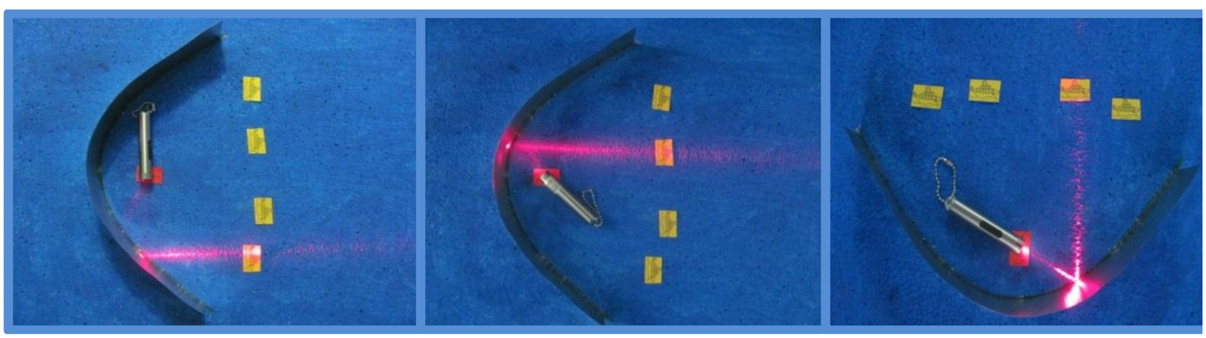
Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted verificar el resultado?, ¿Puede verificar el razonamiento?, ¿Puede verlo de golpe?	En un proceso de generalización de dichas estrategias utilizadas por los estudiantes se puede recurrir a otras preguntas específicas, que terminen con la que propone Polya: ¿Si cambia la posición de los Barcos es necesario cambiar la posición del buque?, ¿Si no son 5 barcos si no 10 barcos, la posición del buque cambia?, ¿Siempre es posible derribar un Barco desde la posición que se halló para el buque?. Bajo las condiciones del problema ¿Es posible que el buque se derribe el mismo?. Cuestionar sobre otros casos o modificaciones en la situación, le permitirá al estudiante fortalecer argumentos, generalizar estrategias y buscar verificarlas.
¿Puede obtener el resultado en forma diferente?,	Plantear el problema en sentido contrario puede generar más estrategias por parte del estudiante, fortalecer sus argumentos, o al contrario encaminarlos: Si emite los haces de luz desde los Barcos perpendicularmente a ellos ¿qué sucede?. Ya que la propiedad de reflexión de la parábola se puede plantear de dos formas dependiendo de dónde se emita el haz de luz, es importante que el estudiante llegue a enfrentarse o a deducir la propiedad en sus dos sentidos.
¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?.	La misma situación aplicada a otro contexto como las telecomunicaciones usando una antena parabólica, puede generar que el estudiante formalice sus deducciones o premisas de la primera situación. Que los estudiantes identifiquen otros usos donde la propiedad es aplicable, o que el profesor plantee otro tipo de situaciones análogas en otros campos; generará un nivel mayor en el aprendizaje de la propiedad. (Se puede recurrir al capítulo 3)

- **MOMENTO 4 (Integración):** En este momento se espera socializar la solución del problema, se debe tener en cuenta que la ubicación del foco de una parábola problema específico de la situación, nos debe inducir a la propiedad de reflexión desde un análisis geométrico, si se le incluye datos de la directriz a la situación es posible que la situación tome un rumbo algebraico. Se puede socializar algunas de las preguntas sugeridas en los momentos anteriores y finalmente cuestionar por el ¿por qué ocurre dicho fenómeno?. Si es el caso que ningún grupo llega a la demostración se considera necesario que el profesor la exponga.

➢ **Apoyo en el proceso de solución de la actividad:**

Recurriendo a la propiedad de reflexión de la parábola la posición del Buque desde donde puede derribar a todos sus oponentes corresponde al foco de la parábola utilizada en la construcción del montaje. Podemos observar algunas imágenes donde se evidencia la solución de la primera actividad:

Figura 4-1-1-2



4.1.2. Segunda actividad: La magia en el espejo parabólico

Guía del estudiante

Objetivo: Aplicar la propiedad de reflexión de la parábola en una situación problema en torno a la formación de imágenes en espejos parabólicos.

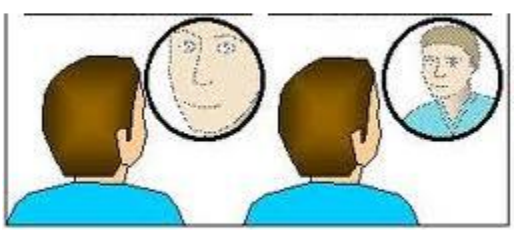
Introducción: **¡Sabias que!**

En un espejo cóncavo la parte reflectante está en el interior del casquete esférico

En un espejo convexo la parte reflectante está en el exterior del casquete esférico

¿Te has preguntado alguna vez por qué no te ves igual en todos los espejos?

Figura 4-1-2-1



Dibuja 3 espejos cóncavos y 3 espejos convexos que se utilicen en la cotidianidad.

Con ayuda del video o la explicación que ha dado tu profesor sobre la formación de imágenes descubre donde se forma un objeto que es ubicado en:

La izquierda del centro de la curvatura, el centro de la curvatura, entre el centro de la curvatura y el foco, en el foco y a la derecha del foco.

Materiales: 2 espejos cóncavos parabólicos de igual tamaño cuyos bordes puedan ajustarse, bolita de plastilina pequeña, gotas de agua y un pañuelo o papel.

Montaje*:*

1. Ubicar en una mesa un espejo cóncavo parabólico
2. En el fondo y centro del espejo ubicar la gota de agua.
3. Tapar el espejo cóncavo con el segundo espejo de forma que encaje uno sobre el otro.

Figura 4-1-2-2

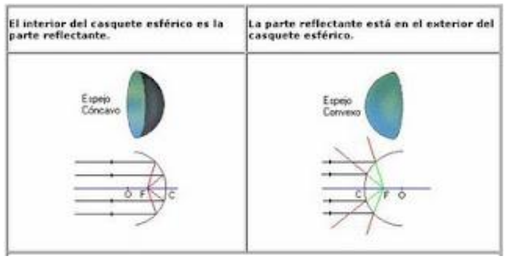
(Experimento Tomado de http://www.youtube.com/watch?v=8m2No1NGZVc)

Situación problema: Se tiene una gota de agua sobre esta estructura que observan, tomamos un pañuelo, damos los polvitos mágicos. Pasamos el pañuelo sobre el agua y ¡taraaaaaaaan! el agua no lo ha mojado. Ahora bien tenemos una bolita de plastilina roja, tomamos un lapicero para tocarlos y ¡taraaaaaaaan!. ¿Cuál es el truco en el acto de mágia?

Guía de apoyo del docente

- **MOMENTO 1 (Introducción)**: En este momento el objetivo consiste en clarificar algunos elementos de la óptica geométrica útiles en la comprensión y solución del problema tales como: Espejo cóncavo, convexo, foco, curvatura, vértice, imagen real, imagen virtual y la forma de hallar la formación de imágenes específicamente en espejos cóncavos donde se aplica la propiedad de reflexión de la parábola. Aunque con anterioridad se halla dejado la consulta de algunos términos la guía del estudiante se tomara como apoyo para clarificar y realizar unas pequeñas actividades de introducción. Se presenta a continuación la información mínimo que debe conocer el docente para introducir la actividad:

1.) ***Espejos cóncavos y convexos:***



En los espejos convexos los rayos inciden desde la parte externa del espejo, cambiando la dirección del rayo reflejado, para este caso el rayo de luz que incide sobre la superficie del espejo convexo, se reflejara como si fuera emitido del foco, es decir en este tipo de espejos no se aplica la propiedad de reflexión de la parábola pero el fenómeno ocurrido es semejante a la propiedad de reflexión de la parábola y la hipérbola.

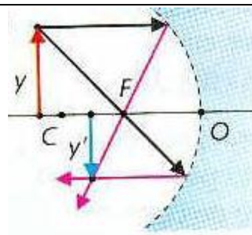
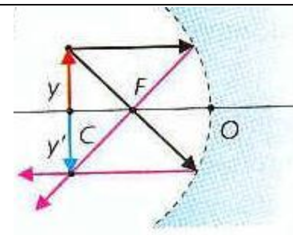
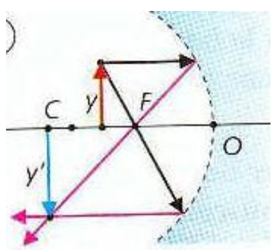
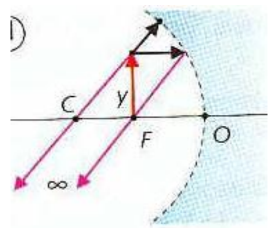
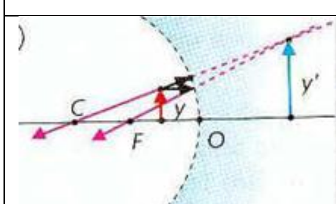
Los espejos cóncavos siguen puntualmente la propiedad de reflexión de la parábola donde los rayos luminosos que inciden paralelos al eje del casquete parabólico convergen en el foco causando fuego en muchos casos tomando rayos solares, o una visualización de imágenes diferenciadas para cada caso dependiendo de la posición del objeto[17]:

2.) ***Imagen virtual y real:***

“Una imagen virtual es aquella que parece formarse por luz proveniente de la imagen de la imagen , aunque en realidad los rayos de luz no pasan por ella.” [17]

“Una imagen real se forma por rayos de luz verdaderos que pasan por ella. Las imágenes reales pueden proyectarse por una pantalla.” [17]:

Tabla 4-1-2 La formación de imágenes en espejos cóncavos **:**

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Un objeto a la izquierda del centro de la curvatura. La imagen es real, invertida y situada entre el centro y el foco. Su tamaño es menor que el objeto.</td><td>Un objeto situado en el centro de curvatura. La imagen es real, invertida y situada en el mismo punto. Su tamaño igual que el objeto.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Un objeto situado entre el centro de curvatura y el foco. La imagen es real, invertida y situada a la izquierda del centro de curvatura. Su tamaño es mayor que el objeto.</td><td>Un objeto situado en el foco del espejo. Los rayos reflejados son paralelos y la imagen se forma en el infinito.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Un objeto situado a la derecha del foco. La imagen es virtual, y conserva su orientación.</td></tr>
</table>

Después de introducir la temática, se informara a los estudiantes que el profesor realizara un experimento de magia como demostración para todo el grupo. Experimento tomado de (https://www.youtube.com/watch?v=zNqXtzTcIqE, y http://www.youtube.com/watch?v=8m2No1NGZVc) .

- **MOMENTO 2 (Planteamiento y comprensión del problema):** En este momento el profesor expondrá el experimento, sin especificar materiales ni pasos. El problema surgirá cuando se cuestione al estudiante por el funcionamiento de dicho acto de magia. Preguntas para la comprensión del problema:

¿Cuál es la incógnita?: El funcionamiento del experimento

¿Cuáles son los datos?: Si el estudiante ha observado identifica, que la estructura está conformada por dos espejos parabólicos, y en el centro de uno se ubica una figura.

¿Cuál es la condición? Se debe identificar la formación de la imagen en ese punto.

¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?: Es suficiente.

- ***MOMENTO 3 (*Enfrentamiento al problema*):*** En este momento se dejara un espacio para que los estudiantes exploren el problema, identifiquen las primeras relaciones, se planteen algunos cuestionamientos e interpreten el problema, puede ser inicialmente desde un dibujo. Si es necesario realizar el montaje lentamente para que los estudiantes identifiquen las características de la estructura se debe realizar.

    - **Concebir un Plan**:

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
“¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos o del montaje?”	Los estudiantes pueden identificar inicialmente la característica de la estructura: 2 espejos parabólicos cóncavos y la posición de la figura. Al identificar la forma parabólica de los espejos los estudiantes pueden relacionar la forma con la propiedad de reflexión y tomar el primer camino para una posible solución.
“¿Puede resolver una parte del problema?, Considere solo una parte de la condición; descarte	• Identifique que pasa con la imagen si hay solo un espejo parabólico. • Identifique que pasa con la misma imagen si se coloca el segundo espejo. Es probable que el estudiante identifique la formación de una imagen a partir de 1 y 2 espejos parabólicos. Como un inicio de búsqueda de las direcciones de los rayos de luz.

la otra parte"	
"¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?.",	Después de realizado el experimento se cuestionó por el truco. Pregunta general que cuestiona a la vez por: Los rayos reflejados y la posición de la figura real. Elementos necesarios de identificar para poder sustentar la formación de la imagen observada. Al intentar cambiar la incógnita para la concepción de un plan es posible tomar parte de ella cuestionando por : ¿Cuál es la posición de la figura para que se forme en ese punto? Si el estudiante no encuentra estrategia para enfrentarse a la búsqueda de la incógnita planteada inicialmente es decir, el truco de magia; surge la necesidad de dividir esa incógnita en partes que puedan guiar al estudiante para que inicie su proceso de solución.

- **Ejecución del plan:**

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto?,	Cuando el estudiante ha encontrado una solución sobre el funcionamiento del truco de magia, se debe fomentar la revisión de la solución: Muestre con un diagrama el funcionamiento del truco. ¿El direccionamiento de los rayos es correcto?, ¿Por qué?. Este tipo de descripciones solicitadas puede permitir al estudiante la validación de su razonamiento e inclusive una aprobación por parte de su grupo de trabajo. En este caso la propiedad de reflexión de la parábola es un elemento de sustentación.
¿Puede usted demostrarlo?.	Para este caso la demostración puede recurrir a la demostración de la propiedad de reflexión de la parábola o sustentar cada formación recurriendo a la teoría o conceptos previos que el estudiante tenga hasta el momento. Los argumentos del estudiante pueden fortalecerse cuando se solicita una demostración. La propiedad de reflexión de la parábola, y la formación de imágenes pueden convertirse en elementos ya aprobados o que quizás necesiten demostración.

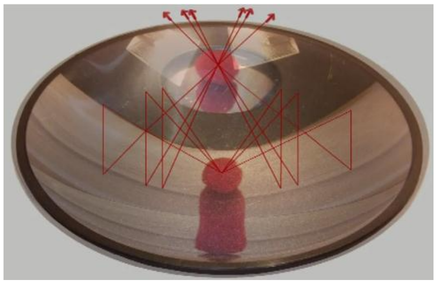
- ***Examinar la solución obtenida:***

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted verificar el resultado?, ¿Puede verificar el razonamiento?, ¿Puede verlo de golpe?	En un proceso de generalización de dichas estrategias utilizadas por los estudiantes se puede recurrir además de las que propone Polya otras preguntas específicas: ¿Si los espejos no son iguales funcionaria igual?, ¿al ubicar la figura en otra posición que ocurriría?, ¿si los espejos no son parabólicos si no planos que ocurre?. Cuestionar sobre otros casos o modificaciones en la situación, le permitirá al estudiante fortalecer argumentos, generalizar estrategias y buscar verificarlas.
"¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?"	La formación de imágenes es una temática trabajada generalmente en el área de física. Es posible llevar situaciones análogas y útiles que asocien la propiedad con formación de imágenes. Que los estudiantes identifiquen otros usos donde la propiedad es aplicable, o que el profesor plantee otro tipo de situaciones análogas en otros campos; generará un nivel mayor en el aprendizaje de la propiedad (Se puede recurrir al capítulo 3).

MOMENTO 4 (Integración): En este momento se espera socializar la solución del problema, la respuesta a algunas preguntas planteadas al estudiante en el transcurso del enfrentamiento y el método para hallar el truco. Se sugiere realizar el truco de nuevo donde los estudiantes expongan paso a paso las explicaciones para que se forme dicha imagen.

- **Apoyo en el proceso de solución de la actividad:**

Figura 4-1-2-3



La formación de la imagen virtual surge a partir de la aplicación de la propiedad de reflexión de la parábola en dos espejos parabólicos. Los haces de luz que vienen de la figura real inciden sobre el espejo superior, allí se reflejan paralelos a su eje, en un segundo momento inciden ahora con el espejo parabólico inferior que los refleja al foco del mismo. En ese punto se formara la imagen virtual identificada en el experimento.

4.1.3. Tercera actividad: Uso de un horno solar parabólico

Guía del estudiante

Objetivo: Solucionar una situación problema aplicando la propiedad reflectora de la parábola por medio de un análisis geométrico y algebraico.

Introducción:

Figura 4-1-3-1

¡Sabias que! *Podrías tener una estufa en casa que aprovecha el calor del sol para cocinar tus alimentos*.

Una cocina solar concentra la radiación solar en el foco de un reflector parabólico, punto donde se debe ubicar los alimentos para ser cocinados.

<u>Situación problema:</u>

Se hace uso de un horno solar parabólico en una finca para fritar un huevo, este horno tiene una profundidad de 6 dm y 1 m de ancho de borde a borde. ¿Cómo funciona este horno? ¿Con qué ángulo se reflejan los rayos del sol que inciden en el horno solar parabólico?.

Figura 4-1-3-2

Guía de apoyo del docente

- **MOMENTO 1 (Introducción)**: Al trabajar la propiedad de reflexión de la parábola surge la necesidad de exponer a los estudiantes las aplicaciones de la propiedad principalmente en el ámbito de telecomunicación con las antenas parabólicas, en física con el uso de reflectores, y en Astronomía con el uso de telescopios, entre otras. La aplicación que tiene la propiedad en el uso de hornos solares se usara para plantear al estudiante una problemática sin olvidar el objetivo ecológico que tiene dicho invento. En este momento el objetivo es exponer algunas de las aplicaciones de la propiedad. (Aplicaciones expuestas en el capítulo 3, si es posible se sugiere utilizar algunos videos, o imágenes que permitan visualizar el funcionamiento de cada uno de los instrumentos principalmente el del horno solar).

- **MOMENTO 2 (Planteamiento y comprensión del problema):** Después que el estudiante tiene conocimiento del funcionamiento de un horno solar parabólico se le planteara la situación problema. Preguntas para la comprensión del problema:

¿Cuál es la incógnita?: El ángulo de reflexión del rayo del sol al incidir con el horno parabólico.

¿Cuáles son los datos?: El horno es parabólico, tiene una profundidad de 6 dm y 1m de ancho de borde a borde.

¿Cuál es la condición? Se debe identificar el ángulo de reflexión del rayo del sol cuando incide sobre el horno parabólico y se dirige a cocinar el huevo.

¿Cuál es el ancho y cuál es lo profundo?: Si es necesario indicar desde un dibujo la medida del ancho y de lo profundo para mejorar la comprensión del problema debe explicarse.

- ***MOMENTO 3 (*Enfrentamiento al problema*):***
  En este momento se dejara un espacio para que los estudiantes exploren el problema, identifiquen las primeras relaciones, se planteen algunos cuestionamientos e interpreten el problema puede ser inicialmente desde un dibujo.

- **Concebir un Plan**:

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos o del montaje?	A partir de los datos que se dan (ancho y profundo del horno), se puede llegar a deducir el foco por medios algebraicos. Es necesario que el estudiante vea la necesidad de un sistema de coordenadas apropiado para identificar el foco, ya que a partir de él se puede generar un plan de solución: 1. Hallar el foco. 2. Identificar que los rayos del sol caen perpendiculares al eje del horno y se desplazan al foco (identificar la propiedad de reflexión de la parábola). 3. Trazar algunas tangentes a los puntos donde se intersecta parábola y rayo. 4. Medir el ángulo de reflexión aproximado que debe ser igual al ángulo de incidencia, respecto a la tangente.
"¿Puede resolver una parte del problema?, Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte"	Identificar inicialmente el foco, se puede considerar la solución de una parte del problema ya que es un elemento necesario para hallar el ángulo de reflexión de los rayos solares. Pedir el punto donde se debe colocar el sartén del huevo, se puede considerar un paso inicial para considerar un plan por parte del estudiante. Cuando el estudiante ya ha identificado el foco, es posible que por medio de la visualización con ayuda de un transportador halle la aproximación del ángulo.
"¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?",	Es posible variar algunos datos, y la incógnita. Por ejemplo brindar el ángulo de reflexión y solicitar el foco. Brindar el foco y solicitar el ancho del horno. Sin embargo se considera que el problema desde su enunciado original o con la variación, cumplirá con el objetivo propuesto en torno a la aplicación de la propiedad de reflexión desde la geometría analítica.

- **Ejecución del plan:**

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***

¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto?,	Como el problema cuestiona por un ángulo, es necesario cuestionar sobre el método para hallar ese ángulo, se identifica las siguientes preguntas específicas para buscar los pasos que cuestiona Polya: Si necesita indicar cómo se halla un ángulo de reflexión en un horno solar, cuándo le dan esos datos, ¿qué pasos describiría?, ¿Siempre funciona de la misma manera?, *¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto?,* Este tipo de descripciones solicitadas puede permitir al estudiante la validación de su razonamiento e inclusive una aprobación por parte de su grupo de trabajo.
¿Puede usted demostrarlo?.	Para este caso donde el problema pide hallar una medida específica. La demostración que se puede solicitar al estudiante asocia primero la forma de hallar el foco, y la concepción de la propiedad de reflexión de la parábola, 2 pasos considerados necesarios en la solución de la situación problema que se tendrán que sustentar si es posible por medio de una demostración. Si el nivel del estudiante lo permite se solicita una demostración formal o una sustentación paso a paso reconociendo cada uno de los argumentos que fortalezcan su solución.

- ***Examinar la solución obtenida:***

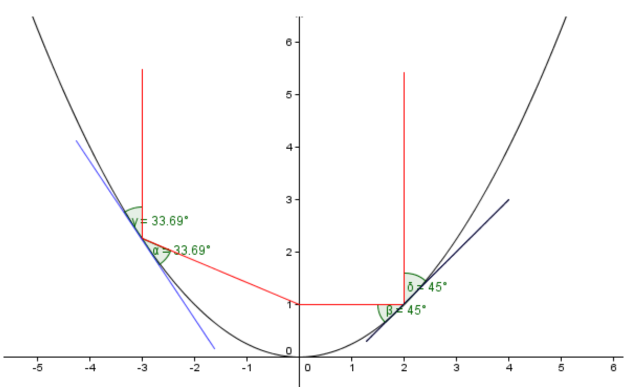
Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted verificar el resultado?, ¿Puede verificar el razonamiento?, ¿Puede verlo de golpe?	En un proceso de generalización de dichas estrategias utilizadas por los estudiantes se puede recurrir a otras preguntas específicas, que terminen con la que propone Polya: Si cambia el ancho o lo profundo del horno solar, ¿la medida cambia? ¿El paso a paso en la solución cambia? ¿Por qué?.¿Es necesario conocer lo profundo del horno?, ¿Puedo hallar el ángulo de reflexión de los rayos del sol sin saber dónde se ubica el sartén? ¿Por qué?, ¿Si el sartén ya no está caliente para fritar el huevo y está bajo el sol? ¿Qué pudo ocurrir?. Cuestionar sobre otros casos o modificaciones en la situación, le permitirá al estudiante fortalecer argumentos, generalizar estrategias y buscar verificarlas.
¿Puede obtener el resultado en forma diferente?,	Se puede indagar por el uso de otro camino para la solución. Para este problema por ejemplo en ocasiones se considera necesario elementos algebraicos para hallar el foco. Para esta tarea podemos obtener más de un proceso inclusive el experimental puede tenerse en cuenta.

	Solicitar la solución del problema por medio de otra forma o utilizando otro proceso. Puede llevar al estudiante a identificar más relaciones con cada uno de los datos y buscar otro orden de ideas.
¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?	La misma situación aplicada a problemas de reflectores o antenas tiene el mismo sentido y cumple con el objetivo de la sesión. Que los estudiantes identifiquen otros usos donde la propiedad es aplicable, o que el profesor plantee otro tipo de situaciones análogas en otros campos; generará un nivel mayor en el aprendizaje de la propiedad. (Se puede recurrir al capítulo 3)

- **MOMENTO 4 (Integración):** En este momento se espera socializar la solución del problema, la respuesta a algunas preguntas planteadas al estudiante en el transcurso del enfrentamiento y el método para hallar la solución. Se debe reflexionar sobre el uso en varios campos de la propiedad de reflexión, se sugiere mostrar cómo se construye un horno solar (ver anexo 4.1.2) y formalizar el método al que los estudiantes hallan llegado.

➢ **Apoyo en el proceso de solución de la actividad:**

Figura 4-1-3-3



Al ubicar la parábola en un sistema de coordendas con los datos del problema, se puede identificar inicialmente el foco:

$x^2 = 4py$, como el punto (5,6) es parte de la parábola se obtiene:

25=24p, $\frac{25}{24}$ = p

Es decir el foco es (0,$\frac{25}{24}$).

Ubicado el foco se puede aproximar el ángulo de reflexión en algún punto, ya que dependiendo del punto elegido el ángulo varia como se observa en la figura

4.2 Propuesta entorno a la propiedad de reflexión de la elipse

4.2.1 Primera actividad: Defensa del buque

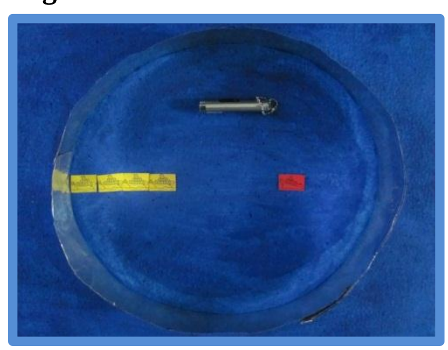
Guía del estudiante

Objetivo: Deducir la propiedad de reflexión de la elipse por medio de un análisis geométrico al resolver una situación problema.

Materiales: Laser tipo esfero (preferiblemente del menor largo posible), lata de algún enlatado o lámina de aluminio rectangular , elipse (construida, dibujada o impresa, con un eje focal entre 20 y 35 cm), bisturí, tijeras fuertes, cinta, lámina de cartón o icopor de 50 por 40 cm, vinilo azul, buque y 4 barcos de tamaño de 2 cm de largo impresos.

Montaje:

Figura 4-2-1-1



1.) Cortar de la lata la base y la tapa dejando la tirilla del contorno del mayor largo posible.
2.) Pintar de azul la lámina de icopor o cartón.
3.) Pegar con la cinta, el molde de la elipse centrada en la lámina de icopor. (Si la curva fue construida, la actividad tiene un mayor potencial).
4.) Con el bisturí hacer un corte sobre la elipse dejando aproximadamente un cm de profundidad.
5.) Retirar el molde.
6.) Tomar la tirilla de lata y encurvarla buscando que tenga la misma forma elíptica e incrustarla en la hendidura realizada cubriendo mínimo la mitad de la elipse.
7.) Pegar el buque donde indique el profesor (debe estar ubicado en uno de los focos de la elipse)
8.) Pegar los 4 barcos alineados al buque hacia el lado opuesto, en fila y línea recta como se presenta en la figura 4-2-1, enfrentando el buque sobre el eje mayor de la elipse.

<u>Situación problema</u>: La construcción representa un mar, allí el Buque está siendo atacado por algunos barcos que avanzan en línea recta y en dirección a él, como se muestra en el montaje. El buque está anclado y tiene una posición fija (en uno de los focos), él cuenta con 4 haces de luz que solo puede utilizar apuntando a su contorno, con el objetivo de derribar a los barcos (un barco es derribado si es iluminado). ¿Qué debe hacer el buque, para estar a salvo y derribar a los barcos que cada vez se acercan más?

Guía de apoyo del docente

- **MOMENTO 1 (Introducción)**: En este momento el docente informa al estudiante sobre el experimento a desarrollar, y da las indicaciones necesarias para construir el montaje.

- **MOMENTO 2 (Planteamiento y comprensión del problema):** Ya que el estudiante construyo el montaje, el docente debe exponer la situación problema que se plantea, aclarando cualquier inquietud para la comprensión por parte del estudiante.

Para generar y verificar la comprensión del problema por parte del estudiante recurrimos a las preguntas sugeridas por Polya:

¿Cuál es la incógnita?: La acción del buque para derribar los barcos que lo persiguen.

¿Cuáles son los datos?: El Buque está siendo perseguido por algunos barcos que avanzan en dirección al buque en línea recta. El buque no tiene opción para avanzar, tiene posición fija. El Buque cuenta con 4 haces de luz. El buque solo puede utilizar los haces de luz apuntando a su contorno. Un barco es derribado si es iluminado.

¿Cuál es la condición?: El buque no se puede mover de su posición, solo cuenta con 4 haces de luz, el buque solo puede apuntar a su contorno no puede iluminar directamente los barcos.

¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?: Es suficiente.

- ***MOMENTO 3 (*Enfrentamiento al problema*):*** En este momento se brindará el espacio para que los estudiantes interactúen con los materiales, simulen con el montaje la situación, prueben las posibles soluciones, busquen argumentos para comprobar que es la mejor acción y la más eficaz.

- **Concepción de un Plan**:

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos o del montaje?	El estudiante puede identificar la forma específica elíptica que debe haber visto con anterioridad y describirla. Se puede plantear la pregunta específica ¿Qué rodea a los buques y a los barcos?, ¿qué forma tiene?. En un segundo momento puede identificar la acción de la tirilla como instrumento de reflexión de la luz.: ¿Por qué, si se apunta con el láser al contorno, el haz de luz llega a otro punto? ¿Si se apunta a la tirilla es posible que le llegue a algún barco? ¿Si el contorno fuera recto pasaría lo mismo?
"¿Puede resolver una parte del problema?, Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte"	• Considere que los barcos que persiguen al buque no avanzan, están fijos y el buque desea derribarlos. (Es importante que el estudiante identifique inicialmente la importancia que los barcos avancen para que lleguen a un punto específico, de lo contrario el buque nunca podría derribar un barco.) • Considere que solo tiene un haz de luz y debe derribar solo un barco, dos barcos, tres barcos, cuatro barcos. (Desde este momento los estudiantes empiezan a identificar el único punto de reflexión.) • Considere que tiene 4 haces de luz y debe derribar 1 barco, 2 barcos, 3 barcos, 4 barcos. El estudiante puede identificar la relación entre la cantidad de haces de luz y la cantidad de barcos a derribar, (es necesario como mínimo

	1 haz de luz para cada barco). Después de varias experimentaciones con el objetivo de derribar 1 barco a la vez, y experimentar con los avances de posición de los barcos, puede llegar a reconocer el punto único donde llega el haz de luz. Es posible que la velocidad de avance sea cuestionada por los estudiantes, en este caso se puede sugerir un avance (longitud largo del barco) cada segundo como elemento para la comprensión inicial, aunque no se considera un elemento necesario para la solución del problema.
"¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?", ¿En qué medida ahora la incógnita queda ahora determinada? *¿Podría enunciar el problema en otra forma?, ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente?*	• El buque fue derribado en la posición donde está, los barcos avanzaban a él y cada uno contaba con un haz de luz para dirigir al contorno. ¿Qué barco fue el que derribo al buqué? ¿Por qué?. Para este caso, la incógnita ya no es una acción si no un objeto, en este caso se pide hallar el culpable de derribar el buque. Aunque la incógnita cambia, cuando se solicita el culpable, surge también la posición de donde se puede emitir el haz de luz, es decir la posición del otro foco, en esta medida la propiedad de reflexión de la elipse también se puede trabajar cumpliendo el mismo objetivo e identificando varios casos ya que puede ser más de un culpable.

- **Ejecución del plan:**

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto?,	Indagando un poco más sobre la argumentación y validación de las soluciones que los estudiantes hallan planteado, se proponen las siguientes preguntas específicas: ¿Cada paso que propone para derribar los barcos es correcto? Desde la posición del buque, ¿cuántos barcos logra iluminar? Si la posición del buque es otra ¿qué ocurre?, ¿Si cambian de posición el buque y los barcos qué ocurre?. ¿Por qué ocurre eso? Argumente sus respuestas
¿Puede usted demostrarlo?.	Se puede encaminar al estudiante en la búsqueda de una demostración sencilla como la que se muestra en el capítulo 3, teniendo en cuenta la necesidad de llegar inicialmente a conocer el principio de la reflexión de la luz y nombrar cada uno de los

	elementos en juego. Si el nivel del estudiante lo permite se solicita una demostración, esperando profundizar en la propiedad de reflexión de la elipse, donde el conocimiento del principio de reflexión de la luz, la concepción de tangente, ángulo de incidencia y reflexión son necesarios pero posibles de visualizar y comprender desde el montaje.

- ***Examinar la solución obtenida:***

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted verificar el resultado?, ¿Puede verificar el razonamiento?, ¿Puede verlo de golpe?	En un proceso de generalización de dichas estrategias utilizadas por los estudiantes se recurre a un mejor uso del lenguaje nominando a cada posición con letras, se puede solicitar un enunciado específico de lo observado y verificaciones de cada idea expresada. Solicitar inicialmente un enunciado más formal, permite avanzar en la formalización de la propiedad de reflexión de la elipse. Ahora bien, en el momento que se solicita verificar, es probable que el estudiante tome el experimento como una verificación, en algún momento será necesario dejar el material tangible a un lado para llevar al estudiante a un nivel más alto.
¿Puede obtener el resultado en forma diferente?,	Plantear el problema en la búsqueda del otro foco puede generar más estrategias por parte del estudiante, fortalecer sus argumentos, o encaminarlos, sin perder el objetivo en torno a la propiedad de reflexión de la elipse, aunque se considera una pista directa para descubrir que solo se puede derribar un barco a la vez, cuando llegue a la posición del otro foco. Se puede plantear la siguiente pregunta, desde el enunciado: ¿Dónde debe estar ubicado un barco para ser derribado por el buque? En la situación planteada la propiedad de reflexión de la elipse puede cuestionar sobre cualquiera de los dos focos teniendo uno fijo, o sobre la forma de poder iluminarlos que fue la pregunta elegida. Si se cambia el enunciado del problema, el estudiante debe

	tener claridades al respecto de los descubrimientos e identificar que el resultado no cambia, o al contrario cuestionarse sobre su solución.
¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?.	La misma situación aplicada a otro contexto comunicación en una estación de tren elíptica por ejemplo, puede generar que el estudiante formalice sus deducciones o premisas de la primera situación. Que los estudiantes identifiquen otros usos donde la propiedad es aplicable, o que el profesor plantee otro tipo de situaciones análogas en otros campos; generará un nivel mayor en el aprendizaje de la propiedad. (Se puede recurrir al capítulo 3)

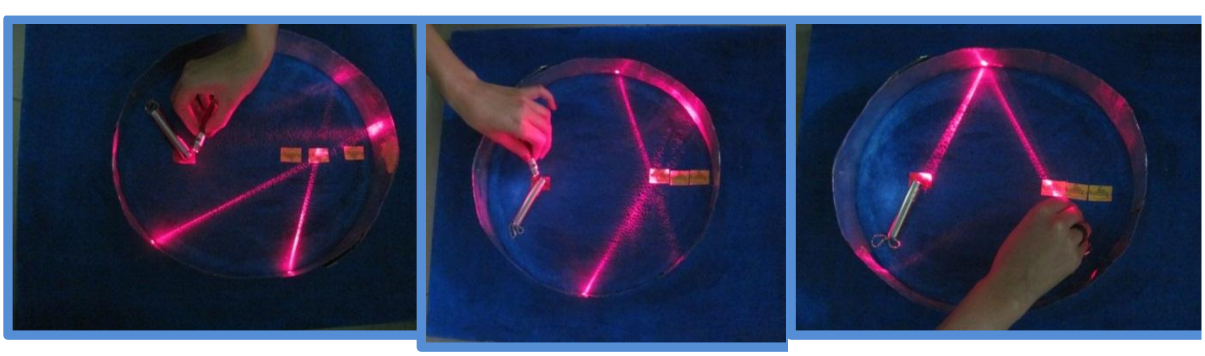
- **MOMENTO 4 (Integración):**

En este momento se socializa cada una de las soluciones y acciones planteadas por los estudiantes, se cuestiona por la veracidad y eficacia de cada acción e independientemente del nivel al que haya llegado cada uno de los estudiantes, se busca formalizar los contenidos trabajados a lo largo de la actividad. La institucionalización al reconocer formalmente la propiedad de reflexión de la elipse deducida en la actividad y la demostración de la propiedad son elementos necesarios a desarrollar en este espacio; además, de identificar varias de las aplicaciones que tiene la propiedad.

- **Apoyo en el proceso de solución de la actividad:**

Recurriendo a la propiedad de reflexión de la elipse, el buque debe defenderse desde su posición utilizando los haces de luz para derribar a sus oponentes emitiéndolos a la elipse. Se debe tener en cuenta que solo los puede derribar cuando los barcos lleguen al otro foco, si un barco se pasa del foco en dirección al buque, ya no habrá salvación.

Figura 4-2-1-2



4.2.2 Segunda actividad: El uso del litotriptor

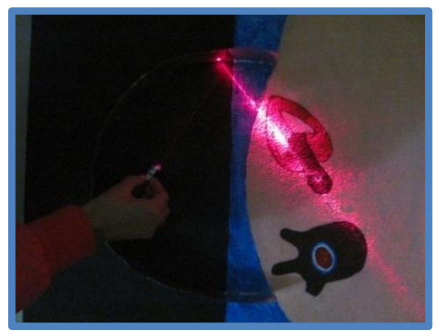
Guía del estudiante

Objetivo: Identificar una de las aplicaciones de la propiedad reflectora de la elipse en el funcionamiento del litotriptor a partir de la solución de una situación problema.

Introducción:

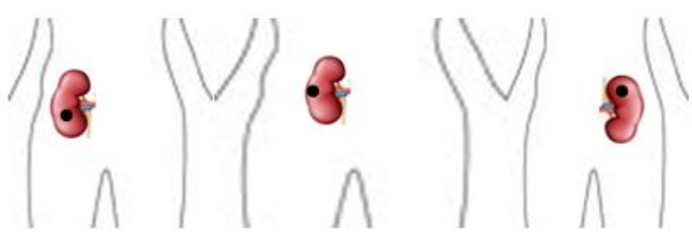
¡Sabias que! Un litotriptor es un equipo de estructura semielipsoidal que localiza cálculos renales generando ondas intracuaticas y rayos x emitidos desde un foco hacia el cálculo renal (ubicado en el otro foco) buscando desintegrarlo.

Figura 4-2-2-1



Situación problema: Se atienden 3 casos de pacientes con las siguientes ecografías y calculos en el riñón derecho. Los 3 casos son atendidos por medio de operación con el mismo litotriptor. ¿Qué características tiene ese litotriptor? y ¿de qué forma pudo ser usado?

Figura 4-2-2-2



Paciente a **Paciente b** **Paciente c**

Guía de apoyo del docente

- **MOMENTO 1 (Introducción)**: En este momento el docente expone al estudiante el funcionamiento de un litotriptor descrito en el capítulo 3. Se sugiere realizar la explicación por medio de una simulación de la descarga de energía con láser, describiendo el sitio donde llega la descarga, y desde donde se emite.

- **MOMENTO 2 (Planteamiento y comprensión del problema):** Ya que el estudiante conoce la forma como actúa un litotriptor. Se planteara la situación problema. Para generar y verificar la comprensión del problema por parte del estudiante recurrimos a las preguntas sugeridas por Polya:

¿Cuál es la incógnita?: Las características y el uso del litotriptor usado para los 3 pacientes.

¿Cuáles son los datos?: El diagnóstico de los 3 pacientes desde las imágenes. Los 3 pacientes fueron tratados con el mismo litotriptor.

¿Cuál es la condición?: El litotriptor usado debe ser el mismo para los 3 casos

¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?: Es suficiente

- ***MOMENTO 3 (*Enfrentamiento al problema*):*** En este momento se brindará el espacio para que los estudiantes busquen las primeras soluciones y opciones que les permitan encontrar las características del litotriptor usado.

- **Concepción de un Plan**:

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos o del	Si el problema afirma el uso de un litotriptor, el estudiante puede considerar las primeras características generales:

montaje?	. El elipse reflector debe ser del mismo tamaño para los 3 casos. . El foco desde donde se emite la descarga debe estar en la posición precisa para que la descarga llegue a la piedra. El estudiante puede iniciar identificando la relación entre la forma elíptica del reflector y la posición de la piedra del riñón.
“¿Puede resolver una parte del problema?, Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte”	• Busque un litotriptor por separado para cada paciente. • Ajuste un litotriptor para que pueda ser usado para el paciente a y b. • Ajuste un litotriptor para que pueda ser usado para los pacientes a, b y c Es importante que el estudiante identifique inicialmente como debe ser un litotriptor que trate un solo caso. En este momento el estudiante puede reconocer la relación entre los dos focos (punto de descarga y punto posición de la piedra). Poco a poco cuando compara los dos casos, debe reconocer las variaciones mínimas para que el litotriptor cumpla la condición completa.
“¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?”, ¿En qué medida ahora la incógnita queda ahora determinada? *¿Podría enunciar el problema en otra forma?, ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente?*	El problema actual cuestiona las características de un litotriptor es decir cuestiona por: • La forma elíptica de un reflector. • El foco desde donde se emite la descarga. • El foco donde llega la descarga. El problema puede cuestionar solo por un elemento ejemplo: • Si para los 3 casos de pacientes se usó el mismo litotriptor, ¿Dónde está ubicado el punto de descarga? • Si para los 3 casos de pacientes se usó el mismo litotriptor, ¿Cuál es la distancia del vértice del litotriptor usado a la piedra del riñón?

- **Ejecución del plan:**

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto?,	Indagando un poco más sobre la argumentación y validación de las soluciones que los estudiantes hallan planteado, se proponen las siguientes preguntas específicas: ¿Cómo puede mostrar que el litotriptor que propone es el que fue

	usado? ¿Qué tuvo en cuenta para identificar ese litotriptor? Solicitar la revisión del litotriptor que se propone como solución de la situación, puede generar argumentos por parte del estudiante con el objetivo de comprobar la solución precisa. En este momento la propiedad de reflexión de la elipse y el funcionamiento de un litotriptor forman parte de su sustento.
¿Puede usted demostrarlo?.	La demostración de la solución planteada puede concebirse como la exposición donde el estudiante demuestre que el litotriptor que se propone puede tratar los 3 casos de pacientes. Una comprobación para los 3 casos específicos debe incluir: • La construcción de la elipse usada. • La identificación de los focos de esa elipse a partir de la propiedad de reflexión.

- ***Examinar la solución obtenida:***

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted verificar el resultado?, ¿Puede verificar el razonamiento?, ¿Puede verlo de golpe?	Cuando el estudiante ya ha identificado la descripción del litotriptor usado, con el objetivo de verificar el razonamiento se pueden plantear las siguientes preguntas específicas: ¿Indique cómo crear un litotriptor para atender cualquier paciente? ¿Qué elementos debe tener en cuenta? ¿Por qué?. Generalizar las estrategias y características que el estudiante ha trabajado en el desarrollo de la situación permite verificar resultados y aplicarlos a campos más amplios.
¿Puede obtener el resultado en forma diferente?,	Ya que la solución del problema requiere de dos acciones : • La construcción de la elipse usada. • La identificación de los focos de esa elipse a partir de la propiedad de reflexión. Cada una de ellas se puede realizar por caminos diferentes. Buscar otro tipo de estrategias o quizás compararlas con la de otros estudiantes puede enriquecer el proceso de aprendizaje.
¿Puede usted emplear el resultado	Cuando el estudiante ha identificado las condiciones de las

o el método en algún otro problema?.	características de un litotriptor para cualquier caso. Es posible enfrentarse a problemas similares donde se brindan medidas y casos específicos, inclusive aplicadas a otros casos Astronomía y Arquitectura. Relacionar los aprendizajes que surgieron en el desarrollo de la actividad y aplicarlos a problemas similares permitirá institucionalizar y generalizar métodos de resolución de problemas.

- **MOMENTO 4 (Integración):**

En este momento se espera socializar las formas de los litotriptores, comparar argumentos, generar demostraciones, formalizar contenidos trabajados e identificar la aplicación de la propiedad de reflexión de la elipse para el caso propuesto.

- **Apoyo en el proceso de solución de la actividad:**

En la solución de la actividad es importante que se identifique la forma como actúa inicialmente el litotriptor aplicando la propiedad de reflexión de la elipse donde en uno de los focos se emiten la ondas y en el otro debe estar ubicado el calculo a desintegrar. Si el litotriptor es usado para los 3 casos expuestos surge la necesidad de buscar una estructura que haga coincidir una distancia focal coherente ya que el litotriptor se ubica sobre la piel del paciente y al buscar distancias focales distintas es posible que se busquen necesariamente estructuras elipsoidales diferentes.

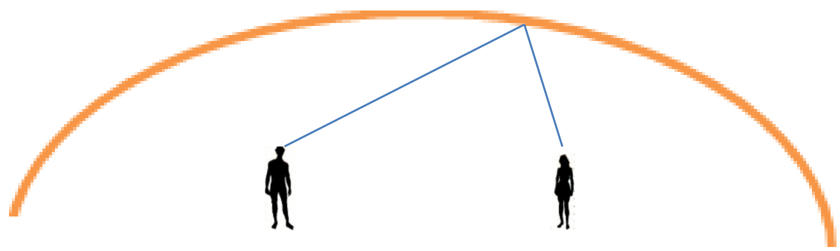
4.2.3 Tercera actividad: Ubícate en la galería susurrante

Guía del estudiante

Objetivo: Solucionar una situación problema aplicando la propiedad reflectora de la elipse por medio de un análisis geométrico y algebraico.

Introducción: ***¡Sabias que!*** Una galería susurrante es una estructura semielipsoidal que permite la comunicación entre dos personas que se ubican en sus focos emitiendo la voz hacia el techo, donde en los otros puntos no llega ningún sonido.

Figura 4-2-3-1



Situación problema: La altura de una galería susurrante desde su centro es de 8 m y el ancho 20 m, el techo describe una elipse con excentricidad 0.5. Si una pareja se encuentra conversando en ella dirigiendo su voz a la galería y no a su compañero directamente. ¿Cuál es la distancia mínima que recorre la voz para que su compañero la escuche?

Guía de apoyo del docente

- **MOMENTO 1 (Introducción)**: Para iniciar la actividad se propone retomar algunas de las aplicaciones de la propiedad de reflexión de la elipse, enfatizando en las galerías susurrantes.

- **MOMENTO 2 (Planteamiento y comprensión del problema):** Ya que el estudiante conoce las características de una galería susurrante. Se planteara la situación problema. Para generar y verificar la comprensión del problema por parte del estudiante recurrimos a las preguntas sugeridas por Polya:

¿Cuál es la incógnita?: La distancia mínima que recorre la voz para que su compañero la escuche

¿Cuáles son los datos?: La altura de una galería susurrante desde su centro es de 8m y el largo 20m.

¿Cuál es la condición?: La pareja está conversando dirigiendo su voz al techo, no directamente a su compañero. La altura máxima es de 8 m y el ancho 20 m.

¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?: Es suficiente

- ***MOMENTO 3 (*Enfrentamiento al problema*):*** En este momento se brindará el espacio para que los estudiantes busquen las primeras soluciones y opciones que les permitan identificar la distancia que recorre la voz.

- **Concepción de un Plan**:

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos o del montaje?	Desde la lectura del enunciado el estudiante puede deducir que: • Cada persona se ubica en un foco del semielipse de la galería. Con procesos algebraicos si el estudiante los maneja. Puede deducir: 1. La ubicación de cada foco o persona. 2. La distancia entre las personas. 3. La forma del semielipse a partir de los focos. 4. El recorrido de la voz. 5. La distancia del recorrido de la voz. A partir de las características de una galería susurrante, el estudiante puede iniciar deduciendo más datos y hallando los que va necesitando por medios algebraicas.
"¿Puede resolver una parte del problema?, Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte"	• Considere el mismo problema con el dato de la distancia de una persona a otra. • Considere el problema con la ubicación de las dos personas pero sin las características de la galería. • Considere el mismo problema con la ubicación de una sola persona. • Considere el problema completo como se plantea inicialmente. Dividir el problema en etapas considerando partes del problema adicionando o cambiando los datos para este caso puede generar un orden en el razonamiento del estudiante buscando llegar a la solución del problema.
"¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de	El enunciado de la situación problema puede ser cambiado cuestionando por:

tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?", ¿En qué medida ahora la incógnita queda ahora determinada? *¿Podría enunciar el problema en otra forma?, ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente?*	• La altura de una galería susurrante desde su centro es de 8 m y el ancho 20 m, es de una sola planta y su puerta está ubicada en el extremo derecho. Si una pareja se encuentra conversando en ella dirigiendo su voz al techo ¿a qué distancia se encuentra cada uno de la puerta?. Con el cambio de incógnita el estudiante puede desarrollar procesos y argumentos similares buscando el mismo objetivo.

- **Ejecución del plan:**

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto?,	Indagando un poco más sobre la argumentación y validación de las soluciones que los estudiantes plantearon, se proponen las siguientes preguntas específicas: ¿Cómo puede mostrar que la distancia obtenida es la real?, ¿Qué tuvo en cuenta para identificar dicha distancia?.Solicitar un argumento y una demostración que compruebe la veracidad de la solución obtenida generará por parte del estudiante un razonamiento más consolidado al respecto.
¿Puede usted demostrarlo?.	Por medio de procesos algebraicos y geométricos los estudiantes pueden demostrar la distancia solicitada desde la situación problema. La demostración puede llegar hasta este punto o quizás generalizar el proceso nombrando cada dato numérico por medio de una variable. El estudiante para este problema es posible que haga uso de la excentricidad de la elipse, deduzca dicha relación, la compruebe, y la use para el caso específico. La propiedad de reflexión, la construcción de una elipse desde sus focos y la excentricidad de una elipse, son elementos necesarios en la demostración.

- ***Examinar la solución obtenida:***

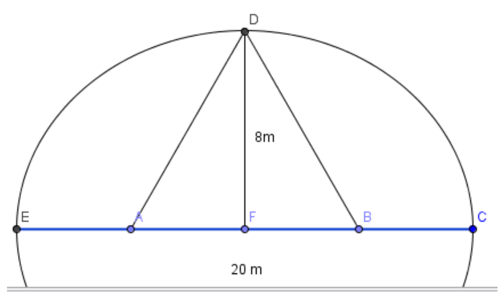
Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted verificar el resultado?, ¿Puede verificar el razonamiento?, ¿Puede verlo de golpe?	Cuando el estudiante ya ha solucionado el problema, se pueden plantear preguntas buscando la verificación tanto del resultado como de los procesos: • ¿Hacia dónde debe hablar ella para que le llegue más rápido la información a su compañero? • ¿Cuánto difiere la voz de la distancia mínima a la máxima que recorre la voz? • Muestre la distancia obtenida ¿Cómo comprueba que es la real? ¿Qué hizo para hallarla? Dentro del problema se cuestiona por una distancia mínima; sin embargo, emergen elementos para analizar, ya que la distancia por definición de elipse siempre es la misma. Cuestionar por elementos emergentes del problema puede fortalecer la solución.
¿Puede obtener el resultado en forma diferente?,	Ya que la solución del problema requiere como mínimo de dos acciones : • La construcción de la elipse usada. • La identificación de los focos de esa elipse a partir de la propiedad de reflexión. Cada una de ellas se puede realizar por caminos diferentes. Construcciones geométricas, o relaciones algebraicas. Buscar otro tipo de estrategias o quizás compararlas con la de otros estudiantes puede enriquecer el proceso de aprendizaje.
¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?.	Cuando el estudiante ha identificado el método usado para la solución de dicho problema. Es posible enfrentarse a problemas similares donde se brindan medidas y casos específicos, inclusive aplicadas a otros campos de aplicación de la propiedad. Relacionar los aprendizajes que surgieron en el desarrollo de la actividad y aplicarlos a problemas similares permitirá institucionalizar y generalizar métodos de resolución de problemas.

- **MOMENTO 4 (Integración):**

En este momento se espera socializar las soluciones obtenidas por parte de los estudiantes, los métodos para llegar a la solución, y algunas de las preguntas planteadas para el enfrentamiento del problema. Es importante reconocer cada uno de los elementos temáticos trabajados a partir de la situación como: La propiedad de reflexión, la construcción de la elipse y la excentricidad de la elipse.

- **Apoyo en el proceso de solución de la actividad:**

Figura 4-2-3-2



Tomando los datos del problema

EC = 20m, DF= 8m , e = 0,5

y reconociendo la incógnita AD +DB = ¿?

1.) Tomando el dato de la excentricidad podemos hallar el foco:

$$e = 0{,}5\ ;\ e = \frac{FB}{FC}\ ;\ 0.5 = \frac{FB}{10}\ ,\ FB = 5m$$

2.) Teniendo la ubicación del foco, y conociendo que en la elipse la distancia de los focos a algún punto de la elipse es una constante (es decir no hay una distancia mínimo como lo afirma el problema, ya que es una constante) , utilizando Pitágoras se obtiene: DF= 8m , FB= 5m , DB = $\sqrt{89}$

3.) Obteniendo la distancia total AD +DB = $2\sqrt{89}$ = 18.87

4.3 Propuesta entorno a la propiedad de reflexión de la hipérbola

4.3.1 Primera Actividad: Juego entre Buques

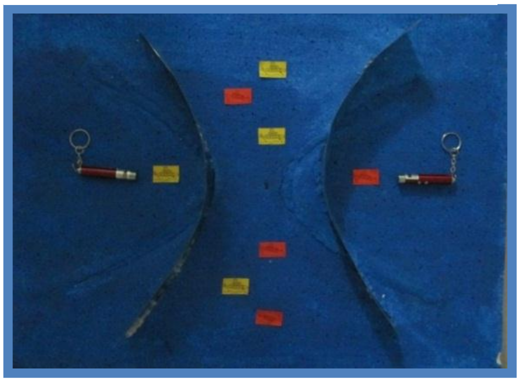
Guía del estudiante

Objetivo*:* Involucrar al estudiante en un juego tipo experimental, donde deduzca la propiedad de reflexión de la hipérbola por medio de un análisis geométrico.

Materiales: Laser tipo esfero, 2 latas de atún o lámina de aluminio, una hipérbola construida, dibujada o impresa indicando los 2 focos (mínimo que ocupe una hoja tamaño carta), bisturí, tijeras fuertes, cinta, un plumón, pintura azul, rectángulo de cartón o icopor de 50cm por 40 cm, 2 buques diferenciados por color o letra y 6 barcos (3 de cada color).

Montaje:

Figura 4-3-1-1



1.) Cortar de la lata la base y la tapa dejando las 2 tirillas del contorno.
2.) Pintar la base de icopor con pintura azul y dejar secar.
3.) Pegar con cinta coincidiendo la mitad de la hoja y del rectángulo la hoja que tiene las curvas con dos puntos internos llamados focos. (Las dos ramas de la hipérbola pueden ser construidas en sesiones anteriores.)
4.) Tomar el bisturí y hacer un corte aproximado de 1 cm sobre cada curva.
5.) Tomar el plumón y marcar los dos puntos que aparecían en la hoja como focos.

6.) Despegar la hoja.
7.) Tomar las tirillas de lata y ubicarlas para que coincidan sobre cada curva marcada. Ubicándolas sobre la hendidura realizada.
8.) Pegar cada buque en el punto marcado sobre el icopor (focos).
9.) Pegar los 6 barcos entre las dos tirillas de lata(de las dos ramas de la hipérbola), cada jugador pega los de su equipo.

Para el desarrollo de la situación y aplicar el juego se deben formar grupos de 2 estudiantes.

Situación problema: En el montaje hay dos buques oponentes A y B fijos en su base, cada uno de los estudiantes debe elegir uno. Los buques se cubren con una compuerta laminada como se observa en el montaje y entre ellos hay 3 barcos del grupo A y 3 barcos del grupo B.

Cada uno cuenta con un arma laser que derriba un oponente si lo ilumina. El objetivo del juego es derribar todos los barcos oponentes antes que su adversario, teniendo en cuenta que:

Se debe tomar un turno, el que empiece abre su compuerta y puede emitir 1 haz de luz dirigido a la compuerta del oponente (no se puede emitir directo a los barcos).

Terminado su intento sea fallido o acertado cierra la compuerta y sigue el turno del adversario. ¿Qué estrategia puedes crear para ganar el juego?

Guía de apoyo del docente

- **MOMENTO 1 (Introducción)**: El docente explica el uso de los materiales que se deben pedir con anterioridad, y la explicación del montaje indicando que se construirá un juego por pareja de estudiantes.

- **MOMENTO 2 (Planteamiento y comprensión del problema):** En este momento se exponen las reglas del juego como parte de la situación y la pregunta de problema.

Para generar y verificar la comprensión del problema por parte del estudiante recurrimos a las preguntas sugeridas por Polya, aplicadas a la situación:

¿Cuál es la incógnita?: La estrategia para ganar el juego

¿Cuáles son los datos?: Hay dos buques oponentes A y B fijos en su base con un arma laser que derriba un oponente si lo ilumina. Los buques se cubren con una compuerta laminada como se observa en el montaje. Hay 4 barcos del grupo A y 4 barcos del grupo B. Se toma un turno para derribar al oponente iluminándolo abriendo sus compuertas y emitiendo 4 haces de luz. Terminado sus 4 intentos cierra la compuerta y sigue el turno del adversario. Gana el buque que derribe todos los barcos oponentes antes que su adversario.

*¿Cuál es la condición?:*Los buques están en una base (no se pueden mover), un adversario se derriba si es iluminado, cada buque tiene 4 intentos para derribar un adversario, no se puede emitir directo a los barcos, se gana el juego cuando se derribe todos los barcos del adversario.

¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?: Es suficiente

- ***MOMENTO 3 (*****Enfrentamiento al problema*****):***

En este momento se brindará el espacio para que interactúen con el material y jueguen bajo las condiciones. Habrá un espacio seguido donde se cuestionara por la estrategia específica, y la verificación de la misma desde las fases que propone Polya:

- **Concepción de un Plan**:

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos o del montaje?	El estudiante puede identificar la forma específica de hipérbola que debe haber visto con anterioridad y describirla. ¿La compuerta que forma tiene?. Para identificar la acción de la tirilla como instrumento de reflexión de la luz se puede cuestionar por: ¿Por qué le llega el haz de luz a los barcos si no se está apuntando hacia ellos? ¿Si apuntas al cartón pasa lo mismo?, ¿Si se hubiera colocado la tirilla en línea recta pasaría lo mismo?.
“¿Puede resolver una parte del problema?, Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte”	• Busque derribar solo un barco. • Considere la opción de mover los buques. El estudiante puede empezar a identificar la relación entre el ángulo de incidencia y reflexión, identificar hacia que sitio de la tirilla específicamente debe apuntar y al enfocarse solo en un barco puede

	identificar la relación de la dirección del haz de luz al reflejarse respecto a la posición del buque adversario.

- **Ejecución del plan:**

Al tener ya una estrategia de juego construida, el estudiante se cuestionara sobre la efectividad de su estrategia dentro del juego, jugando por última vez y cuestionándose por:

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto?,	La nuevas preguntas indagaran sobre la estrategia: • Describa que pasa si se emite un haz de luz desde el buque hacia la tirilla. Si es necesario dibuje lo que observa. • Cuándo usted apunta con un láser a la tirilla ¿Puede saber hacia dónde se dirige el haz de luz? Sustente su respuesta, ¿por qué ocurre? • ¿Qué persona ganaría, más rápidamente?, ¿por qué? Este tipo de preguntas que generan una revisión de la estrategia, permiten validar los primeros razonamientos al respecto. En donde el estudiante puede deducir elementos que no había descubierto o confirmar que sus deducciones con válidas.
¿Puede usted demostrarlo?.	Se puede encaminar al estudiante en la búsqueda de una demostración sencilla de la propiedad de reflexión de la hipérbola como la que se muestra en el capítulo 3teniendo en cuenta llegar inicialmente a conocer el principio de la reflexión de la luz. Si el nivel del estudiante lo permite se solicita una demostración, esperando profundizar en la propiedad de reflexión de la hipérbola, donde el conocimiento del principio de reflexión de la luz, la concepción de tangente, ángulo de incidencia y reflexión son necesarios pero posibles de visualizar y comprender desde el montaje. Si ya se ha trabajado otra propiedad de las vistas en el trabajo es posible que el proceso lo puedan desarrollar los mismos estudiantes.

- ***Examinar la solución obtenida:***

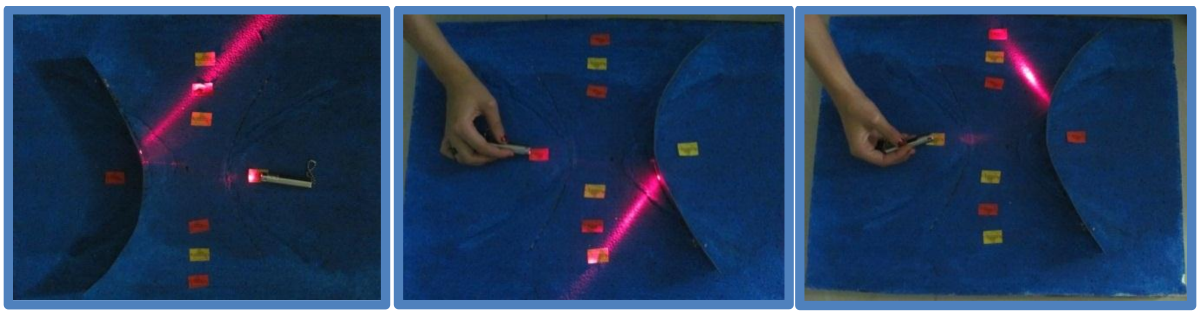
Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted verificar el resultado?, ¿Puede verificar el razonamiento?, ¿Puede verlo de golpe?	En un proceso de generalización de dichas estrategias utilizadas por los estudiantes se puede recurrir a otras preguntas específicas, que terminen con la que propone Polya: • ¿Cómo emites el haz de luz, con la certeza que derribaras un barco contrincante? • ¿Hacia dónde se dirige el haz de luz cuando apuntas a la tirilla?, ¿podrías saberlo? • ¿Puede asegurar en el juego una estrategia para ganar? • ¿Por qué considera que su estrategia es segura? • ¿siempre gana con ella? • Si no hay 5 barcos oponentes si no 6 con 6 opciones de alumbrar. ¿Cambia en algo la estrategia?
¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?.	La misma situación aplicada a otro contexto como la astronomía con el uso de telescopios, puede generar que el estudiante formalice sus deducciones o premisas de la primera situación. Que los estudiantes identifiquen otros usos donde la propiedad es aplicable, o que el profesor plantee otro tipo de situaciones análogas en otros campos; generará un nivel mayor en el aprendizaje de la propiedad. (Se puede recurrir al capítulo 3).

- **MOMENTO 4 (Integración):** En este momento el objetivo es desarrollar una socialización de las estrategias, tomar algunas y compararlas y comprobarlas jugando algunas veces. Responder algunas de las preguntas planteadas en las fases de resolución de problemas es importante para validar algunas de las estrategias. Finalmente institucionalizar la propiedad describiendo lo que pasa con el haz de luz formalizando el lenguaje con el estudiante, inclusive exponer la demostración y evidenciar las aplicaciones de dicha propiedad en otros campos, son elementos fuertes en este momento de integración.

- **Apoyo en el proceso de solución de la actividad:**

Teniendo en cuenta que la estrategia parte de la concepción de la propiedad de reflexión de la hipérbola, el objetivo será inicialmente tomar el primer turno y apuntar al punto sobre la hipérbola alineado con el buque oponente y el barco a derribar. Con este estrategia se podrá derribar todos los barcos siempre y cuando en ese trayecto no este un barco del equipo propio.

Figura 4-3-1-2



4.3.2 Segunda actividad: Diseño de un telescopio

Guía del estudiante

Objetivo: Identificar el uso de la propiedad de reflexión de la hipérbola y parábola en el funcionamiento de un telescopio tipo Cassegrain.

Introducción: ¡Sabias que! un telescopio es un instrumento creado para observar objetos lejanos, amplificando la imagen generalmente a través de espejos cóncavos y convexos donde se aplican las propiedades de reflexión de las cónicas. Un telescopio capta la luz de los objetos lejanos en sus espejos curvos o la radiación electromagnética y esta luz captada por el telescopio o la radiación, es llevada a un foco, en el cual se crea la imagen definitiva.

Situación problema: Se tiene un espejo hiperbólico y un espejo parabólico cualquiera, y una base rectangular con haces de luz paralelos a su base que se dirigen de un costado a otro. Ubica los espejos y si es necesario realízales cortes con el objetivo de llevar cada uno de esos haces de luz al punto marcado A, con la condición que los haces deben pasar por los dos espejos.

Figura 4-3-2-1

Guía de apoyo del docente

- **MOMENTO 1 (Introducción)**: Como inicio de la actividad se propone realizar una charla identificando las características de un telescopio, identificando qué es, para qué se usa, y cómo se usa.

- **MOMENTO 2 (Planteamiento y comprensión del problema):** Se planteara la situación problema de la actividad. Para generar y verificar la comprensión del problema por parte del estudiante recurrimos a las preguntas sugeridas por Polya:

¿Cuál es la incógnita?: La ubicación del espejo parabólico e hiperbólico.

*¿Cuáles son los datos?:*Se tiene un espejo hiperbólico y un espejo parabólico cualquiera, los haces de luz parten paralelos a un lado de la base dada.

¿Cuál es la condición?: Se debe buscar la ubicación de tal manera que el haz de luz pase por los dos espejos y llegue al punto A.

¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?: Es suficiente

- ***MOMENTO 3 (*Enfrentamiento *al* problema):** En este momento se brindará el espacio para que los estudiantes busquen las primeras ubicaciones, observando como manipular la dirección del haz de luz con el uso de los espejos.

- **Concepción de un Plan**:

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos o del montaje?	Si el estudiante quizás conoce el telescopio tipo Cassegrain y su funcionamiento, reconocerá, que la ubicación de las espejos formaran la base de un telescopio tipo Cassegrain. Ya que el punto A esta dado, los estudiantes pueden inferir que la mitad de cada uno de ellos debe coincidir con el punto A. Es posible que identifiquen la necesidad de cortar un espejo, ya que si ubican los 2 completos, el haz de luz no pasara de una primera fase. El estudiante al inferir elementos útiles de la situación problema y de conocimientos previos, puede concebir una estrategia de solución inicial que puede ir perfeccionando a medida que concibe un plan.

“¿Puede resolver una parte del problema?, Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte”	• Considere que solo se utiliza un espejo, ¿Cómo lo ubicaría?. • Considere algunas ubicaciones de los dos espejos y el haz de luz pero, sin la necesidad que el haz de luz llegue al punto a ¿qué pasa con el haz de luz?. • Considere algunas ubicaciones de los dos espejos donde el haz de luz llegue a un lado específico (derecho o izquierdo) • Considere la situación problema completa. Es importante que el estudiante tenga claridad inicialmente sobre la dirección de un haz de luz al incidir sobre un espejo parabólico o hiperbólico, donde aplique la propiedad de reflexión de la hipérbola y la parábola. Es posible con este fin que interactúe inicialmente con solo un espejo. Como parte de la situación el estudiante puede obviar por un momento el punto específico a, y buscar llevar a un solo lado el haz de luz. Cada parte que el estudiante descubra, le permitirá identificar el método que cumpla con las condiciones de la situación problema.
“¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?”, ¿En qué medida ahora la incógnita queda ahora determinada? *¿Podría enunciar el problema en otra forma?, ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente?*	El problema actual cuestiona por una ubicación de dos espejos bajo una condición. La incógnita puede cambiarse por : • Si se tiene estos dos espejos ubicados en una posición fija e inciden haces de luz paralelos, ¿Dónde se concentraran los haces de luz? Los misma situación problema que cuestione por : • ¿Hacia dónde debe abrir la hipérbola o la parábola? • Qué tipo de espejos conseguirían llevar el haz de luz por una dirección indicada. • Los focos de la hipérbola donde deben estar ubicados. El cambio de incógnita pasando de solicitar una ubicación a un tipo de espejos o una característica de ellos, puede generar en el estudiante acciones más claras y estrategias precisas para solucionar la situación problema general presentada. Teniendo en cuenta no cambiar la situación problema a un tipo general de ejercicio.

- **Ejecución del plan:**

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto?,	Indagando un poco más sobre la argumentación y validación de las soluciones que los estudiantes hallan planteado, se proponen las siguientes preguntas específicas: ¿Cómo puede mostrar que la ubicación que propone es la indicada? ¿Qué tuvo en cuenta para identificar la ubicación? Es necesario solicitar una revisión da cada paso realizado en la estrategias de los estudiantes, buscando fortalecer el método y llegar a una solución que puedan comprobar.
¿Puede usted demostrarlo?.	La demostración de la solución planteada puede concebirse como la exposición donde el estudiante demuestre la dirección del haz de luz al punto indicado con el funcionamiento de cada espejo. La exposición por parte del estudiante donde se describa paso a paso la trayectoria del haz de luz, se puede concebir como una demostración inicial. Si es necesario se puede hacer uso de las demostraciones de la propiedad de reflexión de la parábola e hipérbola

- ***Examinar la solución obtenida:***

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted verificar el resultado?, ¿Puede verificar el razonamiento?, ¿Puede verlo de golpe?	Por medio de la explicación y el paso a paso de la demostración solicitada el estudiante puede llegar a verificar cada uno de sus razonamientos. Generalizar las estrategias y características que el estudiante ha trabajado en el desarrollo de la situación permite verificar resultados y aplicarlos a campos más amplios.
¿Puede obtener el resultado en forma diferente?,	Ya que la solución del problema requiere conocer la ubicación de los espejos. Puede existir más de una estrategia, es necesario cuestionar al estudiante por otra. Buscar otro tipo de estrategias o quizás compararlas con la de otros estudiantes puede enriquecer el proceso de aprendizaje.
¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro	Cuando el estudiante ha identificado la solución de la situación, se pueden plantear situaciones similares aplicadas a otros campos, o

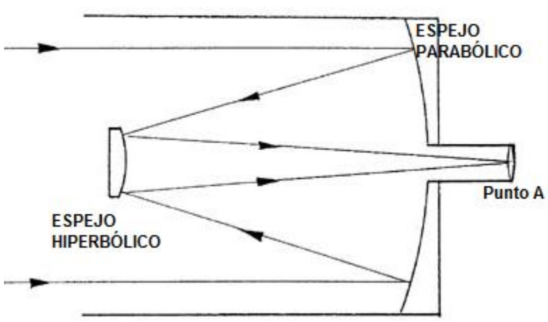
problema?.	quizás hacer uso de otro tipo de telescopios. Relacionar los aprendizajes que surgieron en el desarrollo de la actividad y aplicarlos a problemas similares permitirá institucionalizar y generalizar métodos de resolución de problemas.

- **MOMENTO 4 (Integración):**

En este momento se espera socializar la solución de la situación del problema, algunas de las preguntas planteadas, y las demostraciones o argumentos para cada solución ya que teniendo en cuenta que no se da un espejo parabólico o hiperbólico fijo, existirán varias soluciones bajo la misma argumentación. Es importante formalizar los aprendizajes reconociendo el funcionamiento del telescopio tipo Cassegrain.

- **Apoyo en el proceso de solución de la actividad:**

Figura 4-3-2-2



La ubicación de los espejos seguirá el funcionamiento del telescopio tipo Cassegrain como se observa en la figura 4-3-2-2, llevando todos los haces de luz al punto solicitado A.

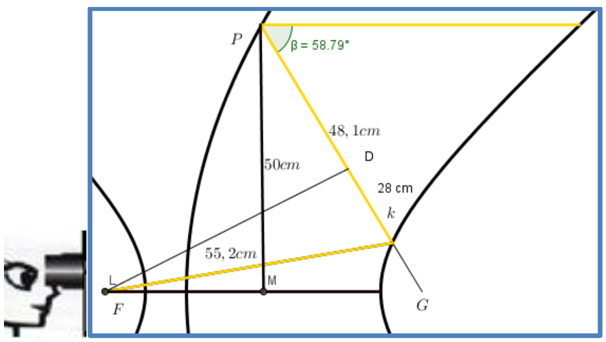
4.3.3 Tercera Actividad: El telescopio tipo Cassegrain

Guía del estudiante

Objetivo: Aplicar la propiedad de reflexión de la hipérbola y la parábola en la solución de una situación problema de tipo geométrico y algebraico a partir del uso del telescopio tipo Cassegrain.

Situación problema: Se hace uso de un telescopio tipo Cassegrain, donde el espejo hiperbólico tiene una excentricidad de 1,3, el ángulo de reflexión del haz de luz que incide en el espejo parabólico en un punto P es de $58{,}79^0$, PM = 50 cm, PK= 48,1 cm, KF = 55,2 cm, KD = 28cm ¿A qué distancia se encuentre el ocular del vértice del espejo hiperbólico (FG)?

Figura 4-3-3-1



Guía de apoyo del docente

- **MOMENTO 1 (Introducción)**: Como inicio de la actividad ya que se trabajara en el telescopio tipo Cassegrain, se propone socializar el funcionamiento del telescopio si es el caso que no se ha visto en momentos anteriores.

- **MOMENTO 2 (Planteamiento y comprensión del problema):** Se planteara la situación problema de la actividad. Para generar y verificar la comprensión del problema por parte del estudiante recurrimos a las preguntas sugeridas por Polya, aplicadas a la situación:

¿Cuál es la incógnita?: La distancia del ocular al espejo hiperbólico.

¿Cuáles son los datos?: Se hace uso de un telescopio tipo Cassegrain, donde el espejo hiperbólico tiene una excentricidad de 1,3, el ángulo de reflexión del haz de luz que incide en el espejo parabólico en un punto P es de $58{,}79^0$, la distancia mínima de P al eje de la hipérbola es de 50 cm, la distancia de P al punto K de incidencia con el espejo hiperbólico es de 48,1 cm y de K a F punto donde se ubica el ocular es de 55,2 cm.

*¿Cuál es la condición?:*Partir de los datos dados y el funcionamiento de un telescopio tipo Cassegrain para hallar la distancia del vértice del espejo hiperbólico al ocular.

¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?: Es suficiente.

- ***MOMENTO 3 (*Enfrentamiento *al problema):***

  En este momento se brindará el espacio para que busquen las primeras estrategias buscando la distancia solicitada:

- **Concepción de un Plan**:

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos o del montaje?	Utilizando razonamientos geométricos y algebraicos el estudiante puede deducir: 1. El ángulo KGF. (igualdad con el ángulo dado ya que son ángulos entre paralelas). 2. La distancia GP Y GK. (utilizando el teorema de Pitágoras) 3. Con la distancia de KF Y KG utilizando la definición de hipérbola puede llegar a encontrar el vértice a. (FP - F´P = 2a, donde a es el vértice) 4. Utilizando el dato de la excentricidad, conociendo el valor de a, se puede hallar el valor de los focos. 5. Si se tiene la distancia de a y c de la hipérbola. Se podrá hallar la incógnita del problema. Es posible que el estudiante no identifique fácilmente toda la información que puede obtener de los datos; sin embargo es posible que se cuestione sobre: ¿qué medidas necesita para hallar la incógnita?. Al darse cuenta que faltan algunos datos, el objetivo es que busque la forma de hallarlos con los datos que se han dado desde el enunciado.

"¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?", ¿En qué medida ahora la incógnita queda ahora determinada? *¿Podría enunciar el problema en otra forma?, ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente?*	La incógnita puede cambiarse a datos específicos que también se pueden hallar de los datos dados en el enunciado: ¿Cuál es la distancia del foco al ocular?. ¿Cuál es la distancia del FK? ¿Cuál es la distancia del KG? ¿Cuál es la distancia del vértice del espejo hiperbólico al foco? Con el cambio de incógnita el estudiante puede desarrollar procesos y argumentos que lo lleven a la incógnita general. Hay que tener presente dependiendo del nivel de los estudiantes y conocimientos previos, si algunas de las preguntas se pueden convertir en ejercicios o problemas, y la necesidad de utilizar el cambio de incógnita o no.

- **Ejecución del plan:**

Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto?,	Indagando un poco más sobre la argumentación y validación de las soluciones que los estudiantes plantearon, se proponen las siguientes preguntas específicas: ¿Cómo puede mostrar que la distancia obtenida es la real? ¿Qué tuvo en cuenta para identificar dicha distancia? Solicitar un argumento y una demostración que compruebe la veracidad de la solución obtenida generará por parte del estudiante un razonamiento más consolidado al respecto.
¿Puede usted demostrarlo?.	Por medio de procesos algebraicos y geométricos los estudiantes pueden demostrar la distancia solicitada desde la situación problema. La demostración puede llegar hasta este punto o quizás generalizar el proceso nombrando cada dato numérico por medio de una variable. El estudiante para este problema es posible que haga uso de razones trigonométricas, teorema de Pitágoras, propiedad de reflexión de la hipérbola, definición de la hipérbola. Elementos necesarios a considerar en la demostración de la situación.

- ***Examinar la solución obtenida:***

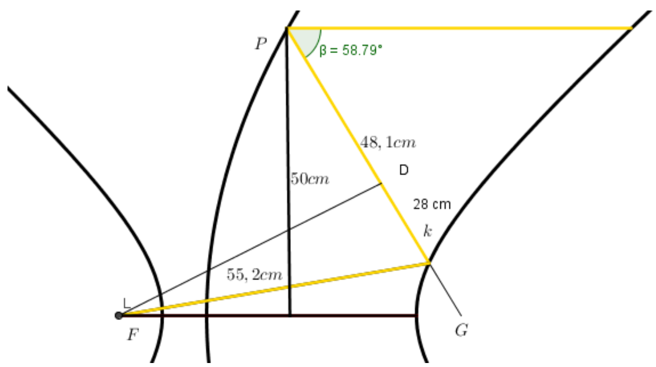
Preguntas generales sugeridas por Polya	***Aplicación en la solución del problema específico***
¿Puede usted verificar el resultado?, ¿Puede verificar el razonamiento?, ¿Puede verlo de golpe?	Cuando el estudiante ya ha solucionado el problema, se pueden plantear preguntas buscando la verificación tanto del resultado como de los procesos: • ¿Puede verificar la distancia de alguna manera? • ¿Qué condiciones debe tener esa distancia? Dentro del problema se estructura una posible estrategia hallando más datos para llegar a la incógnita. Solicitar la verificación de cada razonamiento permitirá formalizar el método utilizado por cada estudiante.
¿Puede obtener el resultado en forma diferente?,	Ya que la solución del problema requiere como mínimo de dos acciones : • Completar las medidas del triángulo formado entre el foco F, el punto P, y el ocular O. • La identificación del vértice desde la diferencia de las recta FP Y F´P. Cada una de ellas se puede realizar por caminos diferentes. Construcciones geométricas, o relaciones algebraicas. Buscar otro tipo de estrategias o quizás compararlas con la de otros estudiantes puede enriquecer el proceso de aprendizaje.
¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?.	Cuando el estudiante ha identificado el método usado para la solución de dicho problema. Es posible enfrentarse a problemas similares donde se brindan medidas y casos específicos, inclusive aplicadas a otros campos de aplicación de la propiedad. Relacionar los aprendizajes que surgieron en el desarrollo de la actividad y aplicarlos a problemas similares permitirá institucionalizar y generalizar métodos de resolución de problemas.

- **MOMENTO 4 (Integración):**

En este momento se espera socializar las soluciones obtenidas por parte de los estudiantes, los métodos para llegar a la solución, y algunas de las preguntas planteadas para el enfrentamiento del problema. Es importante reconocer cada uno de los elementos temáticos trabajados a partir de la situación como: La propiedad de reflexión, la definición de hipérbola y triángulo rectángulo desde razones trigonométricas y teorema de Pitágoras.

- **Apoyo en el proceso de solución de la actividad:**

Figura 4-3-3-1



En esta situación se puede hacer uso de programas como cabri o geogebra para simular la situación presentada construyendo el telescopio con las medidas dadas.

1.) Al plantear los datos en la simulación, es claro que el objetivo es hallar FG. Para ello, por ángulos alternos internos se obtiene $\alpha = \beta$.

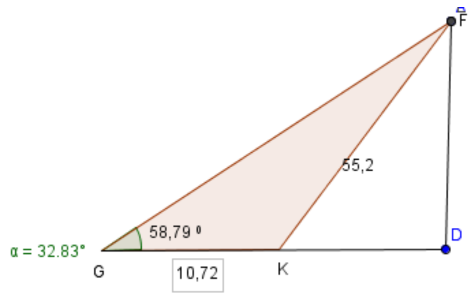
2.) Se forma el triángulo rectángulo PHG, donde PH= 50 cm y $\alpha = 58.79^{0}$. Utilizando seno podemos hallar la hipotenusa de dicho triángulo.

$sen\ 58{,}79 = \frac{50\ cm}{PG}$; $PG = \frac{50\ cm}{Sen\ 58{,}79}$; $PG = \frac{50\ cm}{0{,}85}$; PG = 58,82

3.) Como PK= 48,1 y PG = 58,82, se concluye que KG= 10,72

4.) Se forma el triángulo FKG con FK= 55,2 KG= 10,72 y $\alpha = 58.79^{0}$

Figura 4-3-3-2



"El cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados más el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre el"

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$$

Donde a = FG, b = KF, c = GK , m = KD.

Como KD = 28 cm,

$$a^2 = 55{,}2^2 + 10{,}72^2 + 2(10{,}72)(28)$$

$a^2 = 3047 + 114{,}9 + 600{,}32 = 3762{,}22$

$a = \sqrt{3762{,}22} = 61{,}33$

Es decir la distancia del ocular al vértice del espejo hiperbólico es de 61,33 cm

4.4 Caracterización de los niveles de Van Hiele aplicados a la propuesta didáctica planteada

4.4.1 Niveles de razonamiento para las actividades de la etapa 1.

NIVEL 1 (De reconocimiento):

- El estudiante describe desde la forma física la propiedad de reflexión para el caso específico planteado sin un vocabulario formal.

NIVEL 2 (de análisis):

- El estudiante enuncia la propiedad de reflexión desde la forma física, generalizándola a partir de la experimentación.

NIVEL 3 (de clasificación):

- El estudiante define la propiedad de reflexión usando un vocabulario formal, argumenta lógicamente, e identifica su uso en otras situaciones o contextos. No mantiene razonamientos lógicos en procesos de demostración.

NIVEL 4 (de deducción formal):

- El estudiante deduce y define la propiedad de reflexión demostrándola desde razonamientos lógicos formales.

4.4.2 Niveles de razonamiento para las actividades de la etapa 2.

NIVEL 1 (De reconocimiento):

- El estudiante identifica la incógnita, los datos y la condición de cada una de las situaciones problema, comprendiendo el problema inmerso.

NIVEL 2 (de análisis):

- El estudiante busca estrategias de solución de la situación problema planteado identificando el uso de la propiedad de reflexión en cada una de ellas, para el caso particular.

NIVEL 3 (de clasificación):

- El estudiante halla y describe la solución de la situación problema planteada bajo razonamientos geométricos lógicos, apoyándose en la comprensión de las propiedades de reflexión de las cónicas. El estudiante generaliza su solución para casos análogos.

NIVEL 4 (de deducción formal):

- El estudiante halla y describe la solución de la situación problema planteada bajo razonamientos lógicos formales. En este nivel el estudiante reconoce la necesidad de demostrar sus inferencias al respecto recurriendo a la demostración de cada una de las propiedades de reflexión de las cónicas.

4.4.3 Niveles de razonamiento para la etapa 3.

NIVEL 1 (De reconocimiento):

- El estudiante identifica la incógnita, los datos y la condición de cada una de las situaciones problema, comprendiendo el problema inmerso.

NIVEL 2 (de análisis):

- El estudiante busca estrategias de solución de la situación problema planteada identificando el uso de la propiedad de reflexión en cada una de ellas, para el caso particular.

NIVEL 3 (de clasificación):

- El estudiante halla y describe la solución de la situación problema planteada bajo razonamientos geométricos y algebraicos lógicos, apoyándose en la comprensión de las propiedades de reflexión de las cónicas. El estudiante generaliza su solución para casos análogos de geometría analítica.

NIVEL 4 (de deducción formal):

- El estudiante halla y describe la solución de la situación problema planteada bajo razonamientos lógicos formales. En este nivel el estudiante reconoce la necesidad de demostrar sus inferencias al respecto recurriendo a la demostración de cada una de las propiedades de reflexión de las cónicas desde razonamientos geométricos y algebraicos.

5. Conclusiones

La propuesta didáctica dirigida a estudiantes de ciclo 5 en torno a la enseñanza de las propiedades de reflexión de las cónicas, privilegia de una manera sencilla, motivante y atractiva desde el planteamiento de situaciones problema, el desarrollo de análisis geométrico en el aula.

Al diseñar la propuesta buscando recuperar el análisis geométrico sobre el algebraico, se evidencio que los análisis geométricos permiten la solución de cada una de las actividades; sin embargo, cuando se busca alcanzar un nivel más alto, en los niveles presentados para cada actividad, surge la necesidad de generar en el estudiante razonamientos geométricos y algebraicos. Es decir, en búsqueda de una mejor comprensión y generalidad de cada propiedad de reflexión, cuando el estudiante logra relacionar las estrategias que surgen a partir de un análisis geométrico y desarrollar estrategias que fortalecen sus primeros descubrimientos con razonamientos algebraicos, las propiedades de reflexión llegan a concebirse de una manera más formal y global.

La propuesta didáctica cumple con un marco legal y pedagógico desde los requerimientos del Ministerio en materia de currículo. Aunque está dirigida para estudiantes de ciclo 5 de la educación media se considera que algunas actividades son accesible para estudiantes de grados inferiores ya que aunque no se tengan conocimientos previos de geometría analítica, ni de las cónicas, se puede llegar a deducir y comprender cada una de las propiedades en un nivel intuitivo; es decir, llegando a los primeros niveles de Van Hiele.

Al crear la propuesta bajo la metodología de resolución de problemas se genera un cambio de concepción de la forma y el orden en cómo enseñar cada una de las propiedades de reflexión de las cónicas, ya que, al buscar por medio del planteamiento de una situación la deducción y no la exposición de cada una de las propiedades de reflexión de las cónicas, el orden y la dirección de cómo se dirige un conocimiento (profesor $\leftrightarrow$ estudiante) se renueva promoviendo estrategias didácticas en la enseñanza de las propiedades de reflexión de las cónicas. La metodología de resolución de problemas en la propuesta planteada permite:

- Renovar las acciones del profesor en búsqueda de un ambiente de aprendizaje propicio para que el estudiante desarrolle autónomamente su conocimiento, sin recurrir a exposiciones usuales de una temática.

- Reconocer la posibilidad de aplicar actividades eficaces bajo la metodología de resolución de problemas en aulas con 35- 40 estudiantes de la educación pública, a pesar de los obstáculos de comportamiento, de interés, de conocimientos básicos en matemática, etc.

- Crear estrategias para aplicar la metodología de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática, reconociendo que los resultados obtenidos dependen de una planeación detallada de cada una de las situaciones y preguntas utilizadas en los procesos de solución que enfrenta un estudiante.

- Plantear actividades tipo experimental donde el estudiante interactúa directamente con las aplicaciones de las propiedades de reflexión, motivando procesos de aprendizaje de contenidos geométricos accesibles.

El modelo de Van Hiele utilizado en la propuesta como elemento didáctico y epistemológico, posibilita la categorización en niveles de los tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes específicamente en cada una de las actividades que se plantean para la enseñanza de las propiedades de reflexión de las cónicas. Aunque la propuesta no desarrolla un análisis de la aplicación de las actividades, se logra plantear las categorías desde los niveles de Van Hiele, útiles para incidir en el avance de nivel de razonamiento de los estudiantes.

En el diseño de la propuesta didáctica, el estudio del desarrollo histórico y disciplinar de las secciones cónicas se convierte en un recurso didáctico, que permitió:

- Reconocer la naturaleza de los objetos matemáticos inmersos en las propiedades de reflexión las secciones cónicas; ya que se contextualiza cronológicamente los avances y razonamientos matemáticos del desarrollo del objeto matemático estudiado.

- Comprender la influencia del desarrollo de las ciencias, en el desarrollo del conocimiento del objeto matemático estudiado y el reconocimiento de la aplicación del objeto matemático en el desarrollo de las ciencias.

- Comprender el por qué y cómo surge un objeto matemático a partir de una situación problema usual, buscando respuestas desde razonamientos en ocasiones errados, validos o inválidos, donde la matemática cobra un sentido más humano y accesible.

La historia y el estudio de las aplicaciones de las propiedades de reflexión de las cónicas son elementos que generan un contexto real para enfrentar al estudiante en una situación problema. Si además, se hace uso de elementos gráficos y materiales tangibles donde el estudiante percibe la propiedad por medio de una experiencia práctica, se logra incentivar el interés del estudiante por la actividad y se genera una mayor comprensión del objeto matemático a enseñar.

La propuesta privilegia el desarrollo del razonamiento geométrico sobre el desarrollo de procesos algebraicos desde su diseño. Al aplicar la propuesta en un grupo piloto de 5 estudiantes se evidencia que el carácter experimental que ofrece el diseño genera por medio de la geometría la comprensión de las propiedades a partir de la visualización, elemento que les permite pasar a la comprensión de las propiedades y sus aplicaciones expresadas a partir de ecuaciónes y desarrollos algebraicos, aplicados no como un método a seguir en matemáticas si no relacionando cada una de las expresiones con cada propiedad que observaron y comprobaron con sus sentidos.

2.5 Recomendaciones

En búsqueda de un complemento de lo expuesto en el presente trabajo, se abre la posibilidad de desarrollar un análisis de la propuesta didáctica donde se evalúe con la aplicación en el aula, los resultados que arroja la propuesta, y se identifiquen categorías entorno a los procesos de los estudiantes.

Siguiendo un estudio similar es posible desarrollar una propuesta didáctica que retome otras de las propiedades de las secciones cónicas enunciadas en el capítulo 2 buscando: "*fortalecer la* *resolución de problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de sus representaciones algebraicas"* como se afirma en el estándar trabajado.

Se invita a desarrollar actividades de tipo experimental en el estudio de otras temáticas de la educación matemática que permitan unificar contenidos aplicados a ciencias experimentales.

Bibliografía

[1] Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Serie lineamientos. Áreas obligatorias y Fundamentales.* Bogotá: Magisterio.

[2] Guzman, M. (2001). Tendencias Actuales de la Educación Matemática. *Iralia*, 5.

[3] Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemática, Ciencia y Ciudadanas.* Bogotá: Magisterio.

[4] Rodríguez, A., Pastor, J., & Gutierrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometria: El modelo de Van Hiele. *Teoría y Práctica en educación Matemática Alfar*, 295-384.

[5] Perez, W. W. (2009). *Objetivos del estudio de las cónicas.* Recuperado el 10 de enero de 2013, de Scribd: http://es.scribd.com/doc/21948287/11-Objetivos-Del-Estudios-de-Las-Conica

[6] Navarro, J., Gómez, J., García, F., Pina, E. (2003). *Matemáticas volumen III, Profesores de enseñanza secundaria, Temario para la preparación de oposiciones* . Sevilla: MAD.

[7] Segui, V. M. (2000). *Dos soluciones ingeniosas al problema de la duplicación del cubo.* Recuperado el 20 de diciembre de 2012, de Doredin: http://www.doredin.mec.es/documentos/00820073007872.pdf

[8] Tapia, F. (2002). *Apuntes de historia de la matemáticas, Apolonio el geómetra de la antiguedad.* Recuperado el 28 de diciembre de 2012, de Mat.uson: http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-3-apolonio.pdf

[9] Merzbach,U., & Boyer, C . (2011). *A History of Mathematics.* Hoboken, New Jersey: Wiley and Sons.

[10] Campos, A. (1994). *Axiomática y Geometria desde Euclides hasta Bourbaki.* Bogotá: Universidad Nacional.

[11] Urbaneja, P. M. (2007). Raíces Históricas y trascendentes de la Geometría Analítica. *SIGMA*.

[12] Heath,T. H. (1896). *Apollonius of Perga Treatise on conic sections.* London: C.J and sons Cambriedge university press warehouse.

[13] Solorzano, L . (2010). *Secciones cónicas objetos para aprendizaje.* Recuperado el 8 de Junio de 2013, de sitios.usac: http://sitios.usac.edu.gt/seccionesconicas/esfera_dandelin_quetelet.html

[14] Urbaneja, P. (2001). *Divulgamat.* Recuperado el 2 de febrero de 2003, de Divulgamat: http://divulgamar.ehu.es/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Inprimaketak

[15] Lehmann, C. (1989). *Geometría analítica.* México: LIMUSA.

[16] Bernal, R. P. (2011). *Una Propuesta de enseñanza aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas.* Bogotá.

[17]Tippens, P. (1992). *Fisica 2.* Mexico: Mc Graw Hill.

[18] León, J. L. (2001). *Recursostic educación*, *Ministerio de educación cultura y deporte.* Recuperado el 28 de noviembre de 2012, de Recursostic educación: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Conicas/Reflexion_conicas.htm

[19] Mario E. Casado García, L. V. (2002). *Mecg.* Recuperado el 16 de noviembre de 2012, de Sistema De Navegación Hiperbólico de Largo Alcance LORAN-C: http://mecg.es/archivos/AST2%20%20Bloque2.pdf

[20] Achaya. (s.f.). *Achaya*. Recuperado el 20 de noviembre de 2012, de Achaya taller de óptica: http://www.achaya.cl/talleroptica/134-las-conicas

[21] Polya, G. (1989). *Como Plantear y Resolver Problemas.* Mexico: Trillas.

[22] Bruner, G. L. (1989). Instrucción asistida por computadora y problemas de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Psicología*, 75-85.

[23] Cursos Aula Fácil (2013). *Única ecuación general para las cónicas.* Recuperado el 18 de Noviembre de 2013, de aula fácil: http://cursosgratis.aulafacil.com/matematicas-conicas/curso/Lecc-18.htm