UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA EN LA EDUCACIÓN MEDIA

Noemy Elvira Cano Yepes

Universidad Nacional de Colombia

Facultad De Ciencias

Medellín, Colombia

Diciembre 2013

UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA EN LA EDUCACIÓN MEDIA

Noemy Elvira Cano Yepes

Trabajo parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y naturales

Director:

CARLO JULIO ECHAVARRÍA HINCAPIÉ

Universidad Nacional de Colombia

Facultad De Ciencias

Medellín, Colombia

Diciembre 2013

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi familia, a mis compañeros de estudio y a todos aquellos que directa e indirectamente han participado en mi proceso de formación académica y personal.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia por todo su apoyo y respaldo incondicional frente a mi proceso educativo.

Agradezco a mis compañeros de estudio quienes generosamente contribuyeron en mi proceso académico y personal.

Agradezco a mi asesor por su apoyo incondicional.

Resumen

La Unidad Didáctica Para La Enseñanza Del Concepto De Integral Definida En La Educación Media, se plantea desde los parámetros del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) y bajo los principios de La Estrategia Educativa Para El Aprendizaje Significativo (TEAS). La Unidad Didáctica Para La Enseñanza Del Concepto De Integral Definida En La Educación Media, se desarrolla a partir de doce guías de trabajo cada una de ellas con sus respectivos objetivos y con actividades a desarrollar con material concreto, además se utilizara el software matemático GeoGebra como mediador en el proceso de construcción y desarrollo de la unidad didáctica el cual es de fácil manejo y libre adquisición, también se utilizara el link http://www.matematicasvisuales.com/ a fin de lograr interactuar con los diferentes conceptos a trabajar desde aplicaciones dinámicas.

Abstract

The Didactic Unit For The Education Of The Concept Of Integral Defined In The Average Education, appears from the parameters of the Universal Design of Learning (DUA) and under the beginning of The Educational Strategy For The Significant Learning (TORCHES). The Didactic Unit For The Education Of The Concept Of Integral Defined In The Average Education, develops from twelve guides of work each of them with his respective aims and with activities to develop with concrete material, in addition there was in use the mathematical software GeoGebra as mediator in the process of construction and development of the didactic unit which is of easy managing and free acquisition, also the link was in use http: // www.matematicasvisuales.com/in order to manage to interact with the different concepts

Contenido **Pág.**

PRESENTACIÓN Y JUSTIFICACIÓN

La presente unidad didáctica pretende potenciar en los educandos del grado once estrategias para la determinación y la aproximación de áreas de figuras planas a partir de la interacción con elementos tangibles e intangibles desde los cuales se pretende establecer una comprensión del mundo circundante y del individuo como constructor de conocimiento, colocando en escena figuras geométricas de uso frecuente como el rectángulo, el triangulo, entre otros.

Se pretende partir de la noción de área a fin de permitirle al educando establecer relaciones entre los saberes previos y los nuevos con elementos que contribuyan en su proceso de aprendizaje del concepto de área entre figuras planas en la educación media, específicamente a educandos de undécimo grado, a su vez se pretende que el educando construya e intérprete modelos matemáticos desde la aplicación de procedimientos aritmético, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas, tangibles e intangibles.

.

OBJETIVOS

➢ Objetivo General

Presentar una unidad didáctica para la enseñanza del concepto de integral definida en la educación media en la cual el estudiante logre determinar y aproximar áreas de figuras geométricas desde la reflexión e interacción con elementos físicos y teóricos que lleven a los educandos del grado undécimo a una apropiada comprensión y asimilación de los mismos.

➢ Objetivos Específicos

- ✓ Plantear actividades que propicien en el educando la reflexión de su entorno físico y geométrico en pro de su propia identificación.
- ✓ Diseñar guías de trabajo que potencien en el educando su pensamiento geométrico y variacional a partir del cálculo de áreas en figuras planas.
- ✓ Presentar al educando actividades que le permitan determinar el área entre curvas por aproximación geométrica.
- ✓ Proponer actividades que lleven al educando a determinar el área entre curvas a partir de las sumas de Riemann.

CONTENIDOS

Para el desarrollo de la unidad didáctica y en pro de un mejor acercamiento de los educandos a la determinación y aproximación de áreas de figuras geométricas, se busca mediar entre sus saberes previos y su percepción como individuo en su propio entorno, el cual mediado por las dinámicas sociales se ha tornado ajeno al individuo, se presentan dos actividades previas que propiciaran una reflexión del educando hacia la percepción de su entorno y de sí mismo.

Para lograr determinar y aproximar áreas de figuras geométricas en el grado undécimo se abordaran los siguientes tópicos: conceptos básicos de la geometría plana, determinación del área entre figuras planas por suma o resta de áreas conocidas, ubicación de puntos y trazado de curvas en un plano cartesiano, finalmente se determinará por aproximación el área entre curvas y el área bajo curvas utilizando las sumas de Riemann.

METODOLOGÍA

La unidad didáctica para la enseñanza del concepto de integral definida en la educación media, se desarrollara a partir del diseño universal de aprendizaje (DUA) a fin de obtener una flexibilidad en la presentación y en el desarrollo de la temática propuesta y se ejecutara desde guías de trabajo elaboradas bajo la estrategia educativa para el aprendizaje significativo (TEAS).

El Diseño universal de aprendizaje (DUA), pretende satisfacer las necesidades de la generalidad de los educandos permitiendo hacer modificaciones a los currículos diseñados. Se rige por tres principios: proporcionar múltiples medios de representación, proporcionar múltiples medios de expresión y proporcionar múltiples medios de compromiso, a su vez posibilita trabajar de forma amplia y propicia el diseño, la estructuración y la reorganización de currículos y por ende del trabajo en el aula, permitiendo una variedad de recursos didácticos, pedagógicos y teóricos para llegar a un gran número de educandos y de educadores.

La estrategia educativa para el aprendizaje significativo (TEAS), se rige por siete principios a saber: un aprender haciendo, una metodología participativa**,** una pedagogía de la pregunta, un entrenamiento que tiende al trabajo interdisciplinario y al enfoque sistémico, el carácter globalizante e integrador de su práctica pedagógica, implica y exige un trabajo grupal, el uso de técnicas adecuadas y permite integrar tres instancias como son la docencia, la investigación y la práctica.

La estrategia educativa para el aprendizaje significativo (TEAS), permite la interacción entre los educandos y sus saberes, propiciando un trabajo dinámico en pro de la confrontación y consolidación de saberes previos para la consecución de los nuevos.

El desarrollo de la unidad didáctica para la enseñanza del concepto de integral definida en la educación media, se realizara a partir de doce guías de trabajo a saber: Vivamos nuestros sentidos, Observando el infinito, Ubiquémonos, Áreas sombreadas, Sumas y Sumatorias, Sumando áreas, Geometría plana y analítica, Cuadratura de la parábola, Cuadratura del triángulo equilátero, Cicloide, Aproximando áreas y Áreas entre curvas, cada guía cuenta con sus objetivos a trabajar y con la teoría necesaria para su desarrollo.

Como mediadores en el desarrollo de la unidad didáctica para la enseñanza del concepto de integral definida en la educación media se contara con el software matemático GeoGebra, el cual es de fácil manejo y libre adquisición, a demás el siguiente link http://www.matematicasvisuales.com/ será de gran utilidad para lograr interactuar con los diferentes conceptos a trabajar tanto desde aplicaciones dinámicas como desde el desarrollo histórico de la matemática.

EVALUACIÓN

La unidad didáctica para la enseñanza del concepto de integral definida en la educación media, se evalúa desde cada guía de trabajo, bajo las competencias básicas trabajadas en cada una de ellas, será fundamental el trabajo en grupo y la participación de los educandos en el desarrollo de las actividades como el respeto hacia sus compañeros.

La evaluación será continua, individual y grupal, buscando percibir en el educando su comprensión de las dinámicas del trabajo grupal a fin de lograr una mejor apropiación de los conocimientos como de su propia interacción con dichos conocimientos.

FORMATO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Área o materia	Ud. No.	Titulo de la unidad didáctica
Matemáticas	4	UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA EN LA EDUCACIÓN MEDIA

Temporización: Agosto - Octubre **N° de sesiones previstas**: 16

1. INTRODUCCIÓN
En el desarrollo de la Unidad Didáctica Para La Enseñanza Del Concepto De Integral Definida En La Educación Media el estudiante determinara y aproximara áreas de figuras geométricas, desde los conceptos básicos de la geometría plana como desde la geometría analítica, trabajara el concepto de suma y sumatoria para finalmente determinara el área entre curvas a partir de la suma de Riemann.

2. Objetivos didácticos	3. Criterios de evaluación
-Calcular el área de algunas figuras planas desde la de la geometría elemental y la geometría analítica. - Ubicar puntos y construir curvas en un plano cartesiano. -Utilizar GeoGebra para construir figuras en el plano cartesiano. -Identificar el entorno y su interacción con el individuo. -Presentar algunas figuras geométricas de compleja obtención. -Visualizar la variabilidad de una dimensión en figuras geométricas. -Identificar relaciones de igualdad entre áreas de figuras diferentes.	C_1-Calcula el área de algunas figuras planas desde la de la geometría elemental y la geometría analítica. C_2- Ubica puntos y construye curvas en un plano cartesiano. C_3-Utiliza Geo Gebra para construir figuras en el plano cartesiano. C_{4} - Identifica el entorno físico con la interacción del individuo. C_{5}- Representa algunas peculiaridades del cálculo integral. C_6-Realiza comparaciones de áreas y establece relaciones de orden. C_{7}- Establece sanas relaciones con sus compañeros. C_8- Asume responsablemente el trabajo en grupo.

4. CONTENIDOS
-Conceptos básicos de la geometría plana (punto, recta, plano, cuerpo geométrico, longitud, área). -Área entre figuras planas por suma o resta de áreas conocidas. -Ubicación de puntos y trazado de curvas en un plano cartesiano. -Determinación de la distancia entre dos puntos dados en un plano cartesiano. -Concepto de integral.
Temas transversales
-El hombre y su entorno: Identificar la percepción que posee el hombre de su entorno. -Educación para la paz: Propiciar el dialogo como instrumento de identidad y de socialización. -Socialización: Trabajo en grupos.

5. Actividades tipo y tareas propuestas. S_i :número de secciones sugeridas.	Competencias Básicas Trabajadas							
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
Vivamos nuestros sentidos. S_1				X			X	X
Observando el infinito. S_2				X			X	X
Ubiquémonos. S_3		X		X			X	X
Áreas sombreadas. S_4	X			X		X	X	X
Sumas y Sumatorias. S_5	X			X		X	X	X
Sumando Áreas S_6	X			X		X	X	X
Geometría plana y analítica. S_7	X			X		X	X	X
Cuadratura de la parábola. S_8	X			X		X	X	X
Cuadratura del triángulo equilátero. S_9	X	X	X	X		X	X	X
Cicloide. S_{10}	X	X	X	X		X	X	X
Aproximando áreas. S_{11}, S_{12}, S_{13}.	X	X		X	X	X	X	X
Encontremos El Área Entre Curvas. S_{14}, S_{15}, S_{16}	X	X		X	X	X	X	X

6. Metodología	7. Atención a la Diversidad
Se trabajara según los parámetros del DUA (diseño universal de educación) y la estrategia educativa para el aprendizaje significativo (TEAS), en pro de la utilización de diversos recursos para el trabajo de aula, la variabilidad en la propuesta evaluativa y la flexibilidad curricular que ofrece, a fin de propiciar un mayor acercamiento de los educandos con los conceptos requeridos en su proceso de aprendizaje.	-Actividades de refuerzo y ampliación utilizando páginas de internet pertinentes. -Organización del aula, para trabajo individual ó grupal. -Seguimiento a los educandos, que requieran del aula de apoyo. - Motivar y valorar el esfuerzo de los educandos según su ritmo de trabajo.

8. Espacios y Recursos
-Aula de clase -Aula de informática para realizar experiencias en GeoGebra. -Guías de trabajo. -Lápiz, borrador, regla, compas, sacapuntas, papel milimetrado. - http://www.matematicasvisuales.com/

9. Procedimientos de Evaluación	10. Instrumentos de Evaluación
-Observación de la participación, cooperación y actitudes de los educandos en la realización de cada actividad propuesta. - Revisión de cada trabajo realizado y de los cuadernos de clase. -Autoevaluación de cada educando en la realización de su trabajo. -Seguimiento de avances y dificultades de cada educando en su aprendizaje de los contenidos de la unidad.	- Desarrollo de cada guía de trabajo. - Registro de actividades de clase. - Carpeta de trabajos de los educandos. -Participa y se muestra motivado en el desarrollo de las diferentes actividades. -Respeta el trabajo realizado por sus compañeros. -Identifica sus fortalezas y debilidades en la adquisición del conocimiento.

GUÍAS DE TRABAJO

En el siguiente link se encuentran teoría y Applet de la historia de las matemáticas, siendo un buen complemento para trabajar la unidad didáctica.

http://www.matematicasvisuales.com/

Dada la flexibilidad del diseño universal de educación (DUA) el orden de las guías de trabajo no es lineal por tanto la elección y el orden de la utilización de ellas dependerá de las necesidades de los educandos y de las dinámicas de los actores del proceso enseñanza – aprendizaje.

VIVAMOS NUESTROS SENTIDOS

"La Naturaleza está escrita en lenguaje matemático".
Galileo Galilei (1623)

Nombre(s): ____
Institución_____________________ Grupo _______Fecha________________
No. Paginas: 7 **Materiales:** Lápiz, borrador y sacapuntas.

OBJETIVOS

- ✓ Reflexionar frente a las dimensiones y proporciones del entorno circundante.
- ✓ Analizar algunos elementos comunes a la geometría y al entorno físico.
- ✓ Propiciar un encuentro del educando consigo mismo y con su entorno.

INTRODUCCIÓN

Generalmente el mirar, ver y observar se consideran como sinónimos, pero entre ellas se presenten grades diferencias a saber: **Ver** se relaciona con el proceso que nos permite darnos cuenta de aquello que nos rodea, según el modo en que es reflejada la luz en los objetos y las características físicas del ojo. **Mirar** se refiere al acto de dirigir la vista hacia un objeto, es decir, enfocar algo en particular. **Observar** hace referencia a examinar atentamente es decir para observar se requiere ver y mirar y la idea de **prestar atención**, estaría relacionada con las asociaciones que podemos hacer sobre aquello a donde dirigimos la vista, y sobre aquello de lo que nos formamos un juicio, que está sustentado en lo que se mira, y en la experiencia previa de quien mira.

ACTIVIDADES:

1. Lee cuidadosamente la letra de la siguiente canción.

EL PUNTO Y LA RAYA

Entre tu pueblo y el mío,
hay un punto y una raya,
la raya dice «no hay paso»,
el punto, «vía cerrada».

Y así, entre todos los pueblos,
raya y punto, punto y raya,
con tantas rayas y puntos,
el mapa es un telegrama.

Caminando por el mundo,
se ven ríos y montañas,
se ven selvas y desiertos,
pero ni puntos ni rayas.

Porque estas cosas no existen,
sino que fueron creadas,
para que mi hambre y la tuya
estén siempre separadas.

Canción de: Aníbal Nazoa y Juan Carlos Núñez

Responde desde la lectura

a) ¿Cómo interpretas está canción social?___________________________

____

____

____

____

b) ¿Estás de acuerdo con la letra de la canción, por qué?_______________

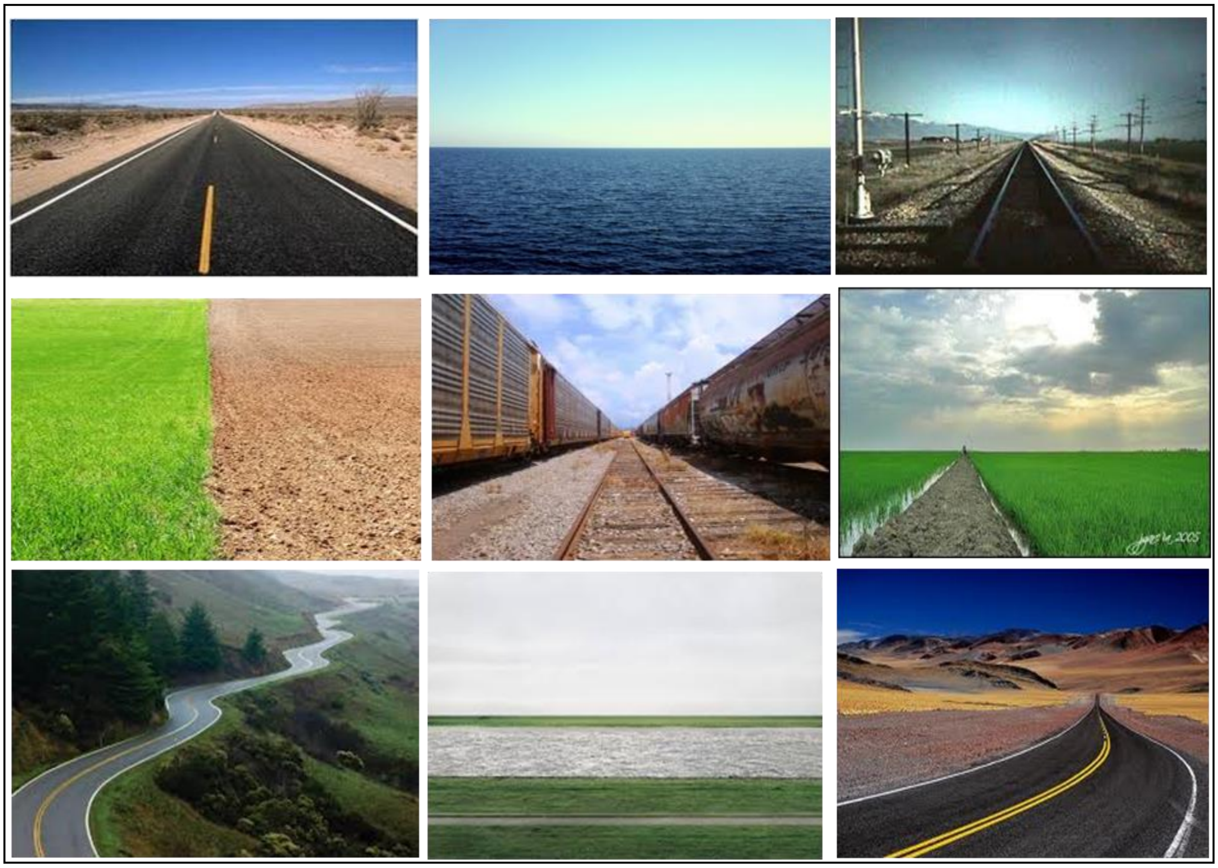
____

____

____

____

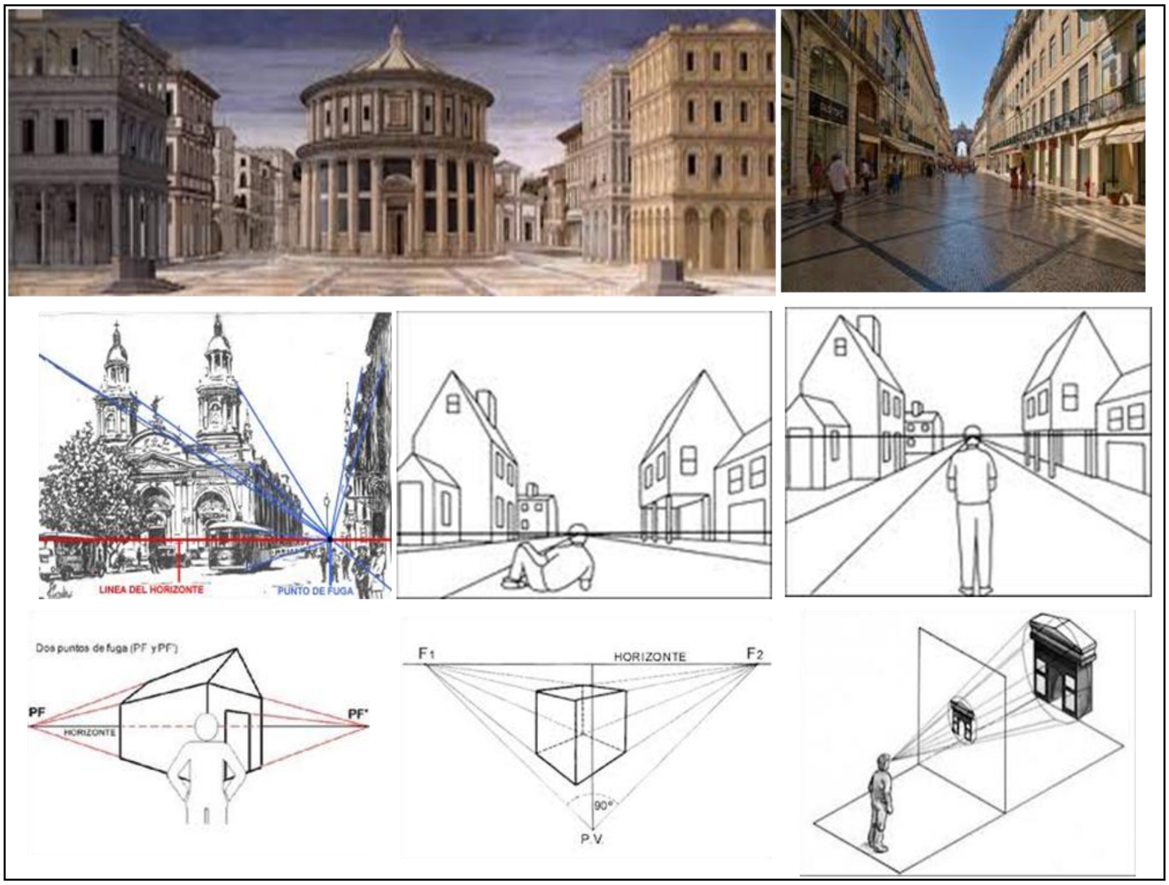
2. En la geometría euclidiana existen conceptos básicos fundaméntales a partir de los cuales se establecen relaciones y definiciones a fin de lograr su desarrollo y construcción axiomática.



a) Desde estas imágenes describe lo que observas:

b) Desde estas imágenes cómo definirías: línea y punto.

3. Las siguientes imágenes permiten identificar conceptos de la geometría descriptiva.



Desde estas imágenes define:

a) Perspectiva, b) Línea de horizonte y c) Punto de fuga

____

____

____

____

____

____

____

3. Identifica características comunes entre estas imágenes.

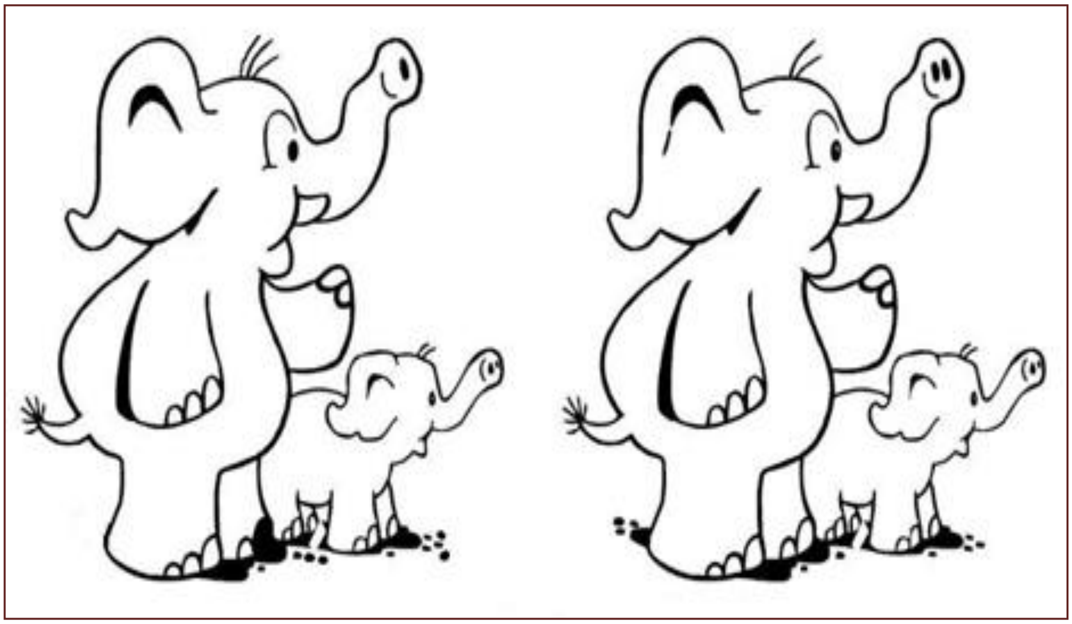
¿Qué semejanza s encuentras entre las cuatro imágenes?

4. Observa las imágenes.

   a) encuentra las ocho diferencias entre ellas

.

b) Encuentra las ocho diferencias entre las siguientes imágenes.



____

____

____

____

____

____

____

____

Cibergrafía

- Imágenes google.com
- Construyendo la vida, Luz Castillo
- http://construyendolavida.blogspot.com/2012/12/ver-mirar-observar.html, tomado el miércoles, 26 de diciembre de 2012.
- http://archivo-periodico.cnt.es/286ene2003/cultura/cultura_archivos/ocioc01.htm

OBSERVANDO EL INFINITO

"El silencio es el único amigo que jamás traiciona"   *Confucio*

Nombre:____

Institución________________________ Grupo _____Fecha_______________

No. Paginas: 8   **Materiales:** Lápiz, borrador y sacapuntas.

OBJETIVOS

- ✓ Reflexionar frente a las dimensiones y proporciones del entorno circundante.
- ✓ Analizar algunos elementos comunes a la geometría y al entorno físico.
- ✓ Propiciar un momento de reflexión del educando frente a sus relaciones interpersonales.

INTRODUCCIÓN

El ser humano requiere de la convivencia con sus semejantes, la cual se hace necesaria por razones de: **supervivencia, comunicación, aprendizaje** y **reconocimiento de la propia identidad**, para lograr una adecuada convivencia se requiere del conocimiento propio y del conocimiento del otro, al igual que de la aceptación del otro y de sí mismo.

En la actual sociedad globalizada el hombre se ha alejado de sí mismo, esto ha permitido que el hombre se ocupe de objetos, en algunos casos innecesarios y ha propiciado formas de comunicación impersonales desde, diferentes medios electrónicos e informáticos como correos electrónicos, redes sociales entre otros, esto ha llevado al aislamiento, al desconocimiento de sí mismo y del otro, dada la poca posibilidad que se ofrece al hombre para tener momentos de silencio y reflexión frente a su realidad social y personal.

ACTIVIDADES

1. Observar el cielo es un viaje al infinito que motivo a las antiguas culturas a estudiar el mundo próximo y distante, ellos se maravillaron, interpretaron y estudiaron el mundo. Ahora experimenta un viaje por el próximo e infinito mundo circunscrito a nuestra existencia.

a) Escribe la sensación que te dejan las imágenes

____

____

____

____

Define:

b) Plano____

____

____

c) Espacio____

____

____

d) Imagen____

____

____

2. Realiza la siguiente lectura y reflexiona frente a su mensaje.

LAS TRES REJAS

El joven discípulo de un filósofo sabio llega a su casa y le dice:

-Maestro, un amigo estuvo hablando de ti con malevolencia...

-¡Espera! -lo interrumpe el filósofo-. ¿Hiciste pasar por las tres rejas lo que vas a contarme?

-¿Las tres rejas? -preguntó su discípulo.

-Sí. La primera es la verdad. ¿Estás seguro de que lo que quieres decirme es absolutamente cierto?

-No. Lo oí comentar a unos. vecinos

-Al menos lo habrás hecho pasar por la segunda reja, que es la bondad. Eso que deseas decirme, ¿es bueno para alguien?

-No, en realidad no. Al contrario...

-¡Ah, vaya! La última reja es la necesidad. ¿Es necesario hacerme saber eso que tanto te inquieta?

-A decir verdad, no.

-Entonces... -dijo el sabio sonriendo-, si no es verdad, ni bueno ni necesario, sepultémoslo en el olvido.

Autor: Anónimo

RESPONDE

¿Qué mensaje te deja la lectura?

____

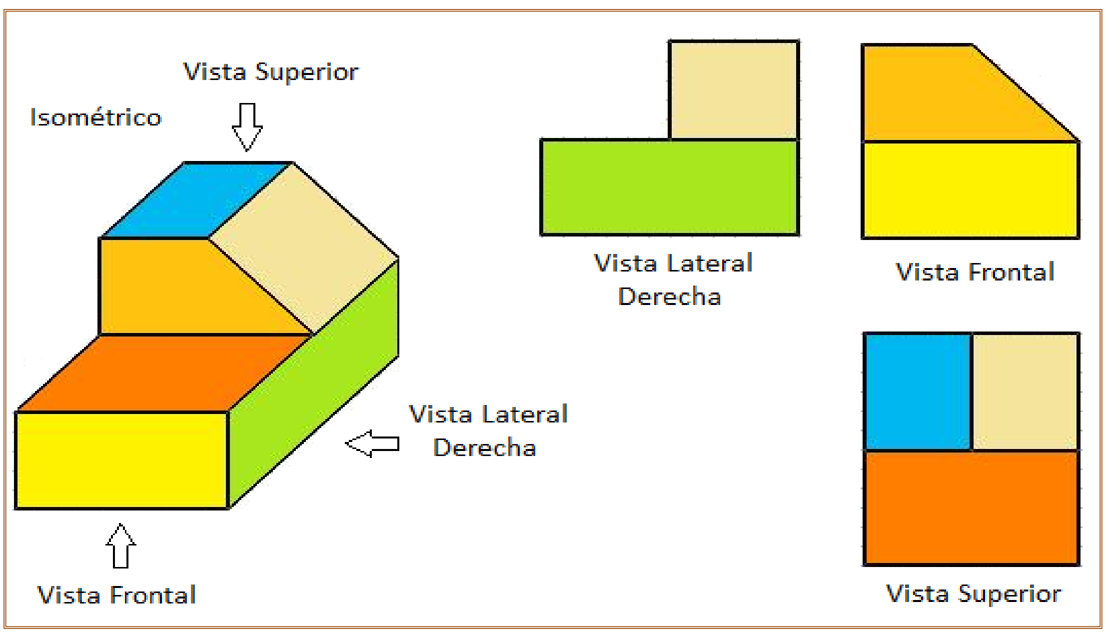
____

____

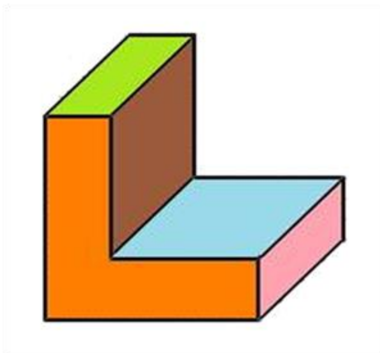
____

____

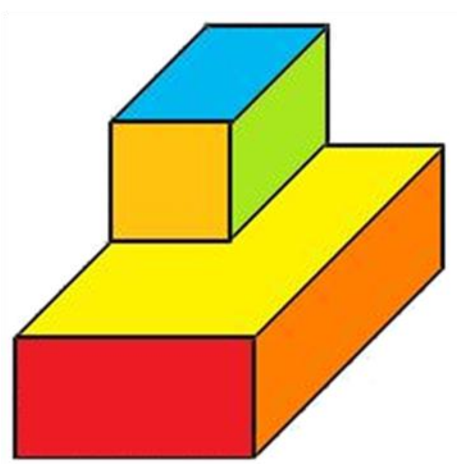
3. Un cubo es un cuerpo de seis caras iguales y paralelas de dos en dos, el dibujo técnico se basa en la representación bidimensional de las partes que se observan de un objeto desde tres puntos diferentes, cada parte es nombrada según el punto de observación (vista lateral, vista derecha, vista frontal y vista superior) Ejemplo:



a) Dibujar las vistas (lateral derecha, frontal y superior) del siguiente isométrico.



b) Determinar las vistas (lateral derecha, frontal y superior) del siguiente isométrico.



4. El cuerpo geométrico de la gráfica se ha construido con siete dados numerados de uno a seis.

a) ¿Cuántos puntos hay en la vista superior?______________________

b) Si se quiere la misma figura con la menor suma en su vista superior como se lograría y cuál es su menor suma._____________________

____

____

c) Si se quiere la misma figura con la mayor suma en la vista superior como se lograría y cuál es su mayor suma____________________

____

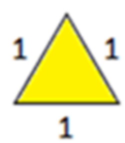
____

5. Encuentra el perímetro de una cadena de 50 triángulos equiláteros unidos por sus lados como lo indica la figura siguiente, cada lado mide 1cm.

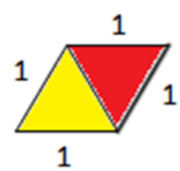
Para encontrar la solución comienza por determinar el perímetro de los cinco primeros triángulos, finalmente establece una expresión general que permita calcular el perímetro para n triángulos y completa la siguiente tabla:

Número de triángulos	1	2	3	4	5	10	15	20	25	30	40	50
Perímetro												

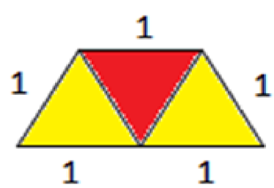
¿Cuál es el perímetro de una cadena de un triangulo equilátero?



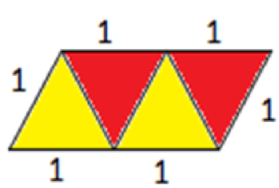
¿Cuál es el perímetro de una cadena de dos triángulos equiláteros?



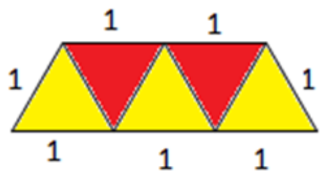
¿Cuál es el perímetro de una cadena de tres triángulos equiláteros?



¿Cuál es el perímetro de una cadena de cuatro triángulos equiláteros?



¿Cuál es el perímetro de una cadena de cinco triángulos equiláteros?



¿Determina una expresión general para determinar el perímetro de una cadena n triángulos equiláteros unidos por sus lados?

Cibergrafía

- http://www.laculpaesdelavaca.com/las-tres-rejas/ Jaime Lopera y Marta Bernal,tomado diciembre20de2013.
- http://www.oupe.es/es/Secundaria/EducacionParaLaCiudadania/ proyadarveepccomvalenciana/proyadarveepccomvalencianacast/ Galeria%20documentos/ED%20CIUD_ESO_interiores.pdf, tomado enero 20,2014
- http://www.aulataller.es/ejercicios/alzado-perfil-planta/vistas01-tecnologia-ESO-alzado-perfil-planta.html,Tomado diciembre 22 de 2013.
- http://www.slideshare.net/INEE_MECD/218pisam-una-construccion-con-dadoser-29035380,tomado diciembre 22 de 2013
- http://www.slideshare.net/juanchojuancho/juegos-de-matematicas-secundaria, tomado diciembre 22 de 2013.

UBIQUEMONOS

"El tacto es el arte de hacer un punto sin hacer un enemigo"

Isaac Newton (1642-1727)

Nombre (s): ____

Institución: __________________________Grupo _______Fecha_________

No. Paginas: 4 **Materiales**: Lápiz, borrador, sacapuntas, hojas milimetradas y computador con software GeoGebra.

OBJETIVOS:

- ✓ Ubicar puntos en el plano cartesiano.
- ✓ Establecer relaciones entre variables.

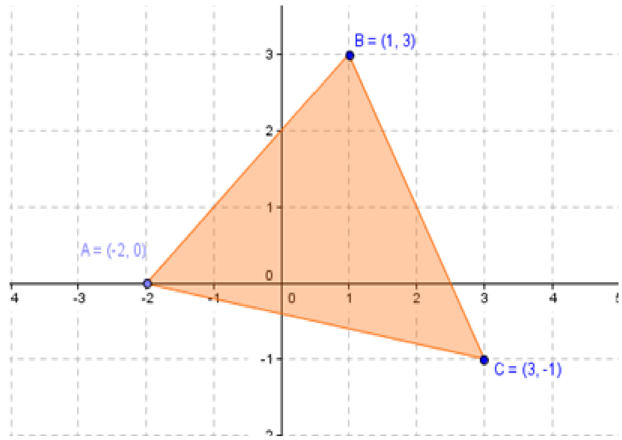
ALGO DE HISTORIA:

René Descartes (1596-1650) inventor de la notación algebraica moderna, en la que las constantes son representadas por las primeras letras del alfabeto $a, b, c,$ y las variables son representadas por las ultimas esto es x, y, z, además es el, creador de la geometría analítica estableciendo un sistema de coordenadas ortogonales conocido actualmente con el nombre de sistema cartesiano, conformado por dos rectas que se cortan perpendicularmente en un punto llamado origen.

RECORDEMOS:

Para construir figuras geométricas usando el plano cartesiano, se requiere de la ubicación de puntos definidos por dos coordenadas (x, y); donde cada componente del punto recibe un nombre específico así: x es llamada abscisa, y es llamada ordenada, la abscisa se ubica en el eje horizontal y la ordenada en el eje vertical, el ángulo entre ambos ejes es un ángulo recto.

Ejemplo: El triangulo definido por: $\mathrm{A}\ (-2{,}0);\ \mathrm{B}\ (1{,}3)$ y $\mathrm{C}\ (3,-1)$ es:



ACTIVIDADES

1. Ubica los siguientes puntos en un plano cartesiano y determina el tipo de curva que se puede construir con ellos.
   a) $A\ (2{,}3);\ B\ (-1,-2)$
   b) $A\ (0{,}0);\ B\ (1{,}1);\ C(2{,}4);\ D(-1{,}1)$
   c) $A(-1,-1);\ B(0{,}0);\ (1{,}1);\ D(2{,}8);(-2,-8)$

2. Ubica los puntos en el plano cartesiano y determina el tipo de figura que se puede construir con ellos; determina el área de cada figura utilizando dos estrategias diferentes:
   a) $A\ (0{,}2);\ B\ (0{,}0);\ C(3{,}0)$
   b) $A\ (0{,}0);\ B\ (0{,}3);\ C(3{,}3);\ D\ (3{,}0)$
   c) $A(-1{,}1);\ B\ (4{,}1);\ C\ (6{,}3);\ D(1{,}3)$

3. Construir en GeoGebra el triangulo de vértices A(1,1); B(7,1); C(1,3) y determina:
   a) El área del triangulo
   b) Desplazar cada uno de los vértices de forma tal que el área del triangulo se conserve.
   c) ¿Qué observas?
   d) ¿Qué hace que se conserve el área del triangulo?

Para graficar en GeoGebra se procede así:

- Ubicar los puntos con el icono resaltado en la barra de herramientas.

- Unir los puntos con el icono resaltado en la barra de herramientas.

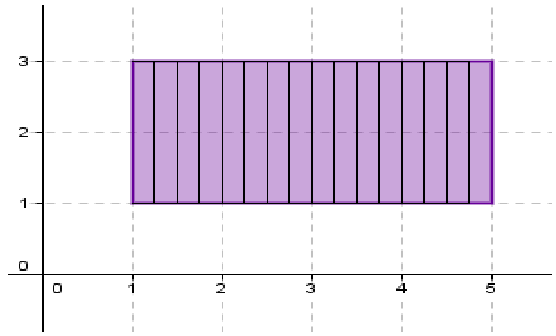
- Determinar el área de dicho triangulo, para ello utilizar el icono resaltado en la barra de herramientas.

4. Utilizando GeoGebra señala y determina el área de las regiones comprendidas entre las curvas:

   a) $y = x,\ y = 3$ y el eje y $(x = 0)$
   b) $y = 2, x = -2, x = 2$ y el eje x
   c) $-x + 5y = 12,\ 2x + y = -2,\ 3x - y = 6$ y el eje

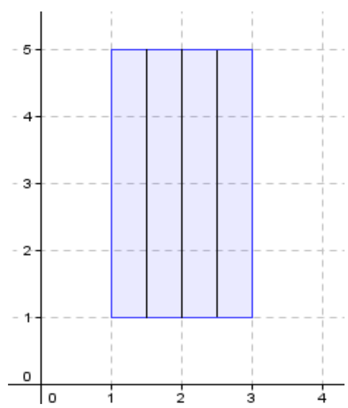
5. Obtener el área de un rectángulo a partir de la información suministrada.

   a) Construir el rectángulo ABCD de coordenadas $A\ (1,1), B\ (5,1), C\ (5,3), D\ (1,3)$ y determinar de dos maneras diferentes su área.
   b) Dividir en dos partes iguales dicho rectángulo y determinar de dos maneras diferentes el área de cada parte.
   c) El grafico muestra el rectángulo $ABCD$ de coordenadas $A\ (1,1), B\ (5,1), C\ (5,3), D\ (1,3)$ dividido en 16 partes iguales, determinar su área de dos formas diferentes



d) Construir el rectángulo $(1,1),(3,1),(1,5),(3;5)$ y determinar su área de dos formas diferentes.

e) Compara el gráfico anterior con éste y establece relaciones entre las áreas.



Cibergrafía

- Markus Hohenwarter y Judith Hohenwarter, www.geogebra.org, tomado , Oct. 10, 2013.
- http://www.edilatex.com/index_archivos/algebra5tintas.pdf, tomado nov.20 de 2013

ÁREAS SOMBREADAS

"Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor, la electricidad y la energía atómica: la voluntad". ***Albert Einstein (1879-1955).***

Nombre(s): ____
Institución__________________ Grupo ______Fecha_____________
No. Paginas: 5 **Materiales**: Lápiz, borrador y sacapuntas.

OBJETIVOS

- ✓ Determinar el área de figuras planas a partir de sumas ó restas de áreas conocidas.
- ✓ Determinar el área sombreada en diferentes regiones comprendidas entre figuras planas.

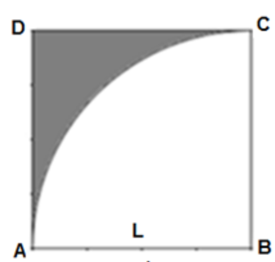
IDEAS PRELIMINARES

Para determinar el área de una figura geométrica se recurre a expresiones generales las cuales facilitan dicha proceso, pero hay situaciones donde se dificulta establecer una expresión general para ello, por tanto se hace necesario recurrir a determinar dicha área mediante la suma o resta de áreas conocidas.

ACTIVIDADES

1. Toma una hoja cuadrada de longitud **L** y realiza las siguiente figura con las condiciones dadas:

a) Marca los vértices con las letras A, B, C, D, en B y con radio **L** trazar un arco de circunferencia, la figura formada corresponde al siguiente grafico.

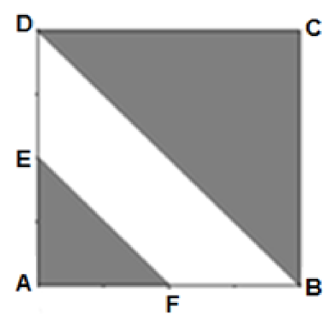


a)

¿Qué sucede si cortas por AC?

¿El area de la parte sombreada coresponde a?

b) En una hoja cuadrada de lado **L** marca los vértices con las letras A,B,C,D, traza la diagonal BD y busca los   puntos medios de AB y AD marcándolos con las letras F, E como se muestra en el siguiente grafico**:**



b)

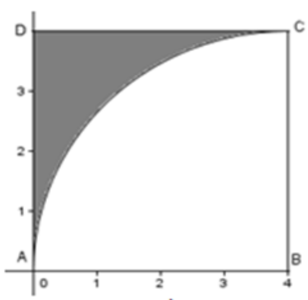
¿Qué sucede si cortas por la diagonal BD?

¿Qué sucede si cortas por la diagonal EF?

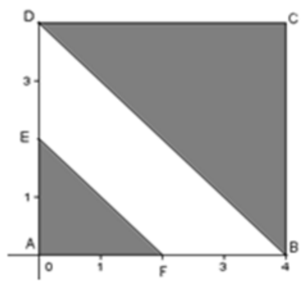
¿Cómo son los triangulos $\Delta BCD \ y \ \Delta EAF$?

¿Qué cuadrilatero es BDEF?

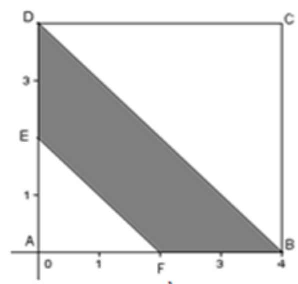
2. Determina el área sombreada en cada figura, aplicando suma o resta de áreas conocidas.



a)



b)



c)

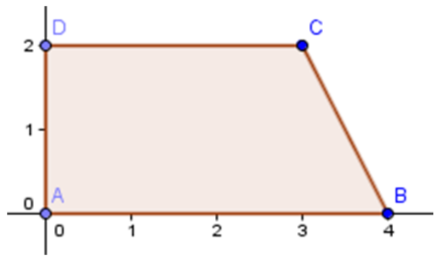
$\boldsymbol{A_{(a)}}$

$\boldsymbol{A_{(b)}}$

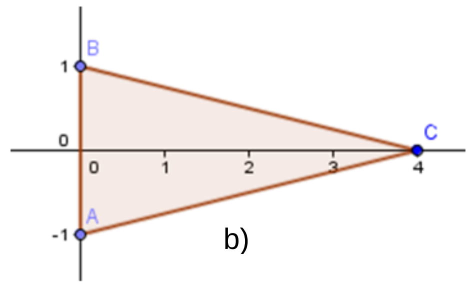
$\boldsymbol{A_{(c)}}$

3. Encuentra la distancia entre dos puntos para determinar la longitud de cada lado del polígono representado en cada plano cartesiano.

> RECUERDA: La distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)\ y\ B(x_2, y_2)$
> se determina así: $d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



a)



b)

El área de **a)** es: **A(a)):**

____

____

____

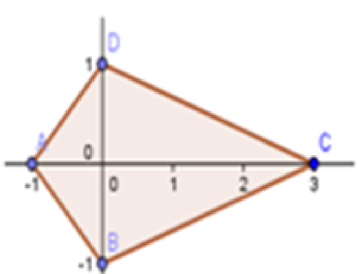
El área de **b)** es: **A (b)):**

____

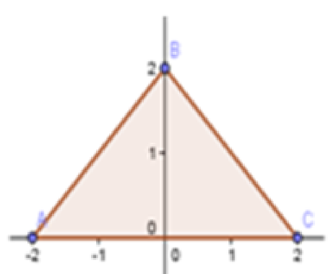
____

____

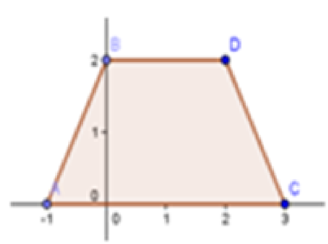
4. Determina el área de las figuras planas representadas en el plano cartesiano, determinando la longitud de los lados requeridos en cada caso.



a)



b)



c)

El área de **a)** es: **A(a)):**

El área de **b)** es: **A (b)):**

El área de **c)** es: **A(c)):**

5. Del numeral 3 y 4. Determinar una expresión general que permita obtener el área de un triangulo, de un rombo y de un trapecio.

Cibergrafía
El plano cartesiano, Page (PS/TeX): 13 / 253, COMPOSITE, http://www.edilatex.com/index_archivos/algebra5tintas.pdf, tomado nov 23 de 3013

SUMAS Y SUMATORIAS

"La historia del mundo es la suma de aquello que hubiera sido evitable."
Russell, Bertrand

Nombre: ____

Institución________________________ Grupo _____Fecha_______________

No. Paginas: 3 **Materiales:** Lápiz, borrador y sacapuntas.

Objetivos:

- Realizar la suma de los n primeros enteros positivos.
- Obtener la sumatoria de sucesiones dadas.
- Identificar ventajas en la utilización de una expresión general para la obtención de la suma de los n primeros enteros positivos

El símbolo Σ corresponde a la letra griega mayúscula llamada Sigma y se utiliza para indicar la suma de muchos términos.

Leonhard Euler (1707-1783) aporta a la matemática las notaciones: f(x), senθ, cosθ, el símbolo i para designar la raíz cuadrada de -1 $\left(i = \sqrt{-1}\right)$; el uso de la letra π, de la letra e, la introducción de los llamados diagramas de Euler-Venn, y la del símbolo Σ.

ACTIVIDAD

1. Realiza la suma de los enteros positivos:

a) $1,2,3,4\ ,5$______________________________

b) $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$____________________________________

c) $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15$____________________________________

2. ¡Te imaginas sumar los primeros 100 enteros positivos ó que tal los primeros 10000 enteros positivos!

Al sumar los números $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ de la siguiente forma:

$$(1+10)+\ (2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6)=5(11)=55$$

Si n es la cantidad de números a sumar iniciando en 1 y terminando en 10, esto es n=10, una expresión general para sumar los primeros n naturales es: $\sum_{i}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$ para calcular la suma de los primeros 10 naturales se procede así:

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{10(10+1)}{2}=\frac{10(11)}{2}=55$$

a) Realiza la suma de los primeros 100 números $(n=100)$_________________

____

b) Realiza la suma de los primeros 10000 números $(n=10000)$ ____________

____

c) ¿Qué sucede con la suma a medida que n es mayor?___________________

____

3. Realiza la suma de los siguientes números:

a) $1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1$____

b) $7,7,7,7,7,7,7,7,7,7$____

c) $12,12,12,12,12$____

d) Determina una expresión general para las sumas realizadas, siendo cada termino de la sucesión una constante (c) ________________________________

4. Dada la sucesión $1, 4, 9, 16, 25, 36,49,64$ determina:

a) El número de términos (n) de la sucesión ______________________________

b) ¿Qué números forman la sucesión?____________________________________

c) La suma de los términos dados es   ____________________________________

d) Realiza la suma de la sucesión dada utilizando la expresión

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

e) ¿Cómo son los resultados obtenidos en c) y en d)?______________________

f) ¿Qué puedes concluir del numeral e)? _________________________________

5. Dada la sucesión $1, 8, 27, 64,125, 216$ determina:

a) El número de términos (n) de la sucesión ______________________________

b) ¿Qué números forman la sucesión?____________________________________

c) La suma de los términos dados es: ____________________________________

d) Realiza la suma de la sucesión dada utilizando la expresión $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

e) ¿Cómo son los resultados obtenidos en c) y en d)?______________________

f) ¿Qué puedes concluir del numeral e). __________________________________

Cibergrafia

Eduardo Tellechea Armenta, El Cálculo Según Euler, Apuntes de Historia de las Matemáticas No. 1, Vol. 2, enero 2003, pág 26.

SUMANDO AREAS

"El día en que el hombre se dé cuenta de sus profundas equivocaciones, se habrá acabado el progreso de la ciencia". Charles Chaplin

Nombre: ____

Institución________________________ Grupo _____Fecha______________

No. Paginas: 7 **Materiales**: Lápiz, borrador y sacapuntas.

Objetivos:

- Identificar las características de las funciones cuya área se puede determinar por sumatorias de Riemann.
- Reconocer regiones sombreadas entre dos ó más funciones.

Preliminares

Determinar el área de figuras planas como circulo ó polígonos como el triangulo, el rectángulo no presentan gran dificultad, pero ¿Cómo determinar el área de figuras planas delimitadas por funciones bien sea polinómicas ó trascendentes?

Pues bien el procedimiento aunque no es muy familiar solo requiere de conceptos como: partición, intervalo, sumatoria y límite de una suma.

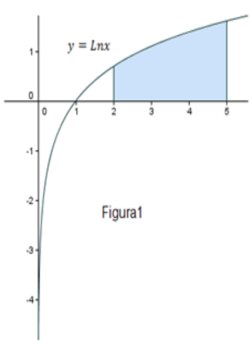


figura1 $x \in [2,5]$

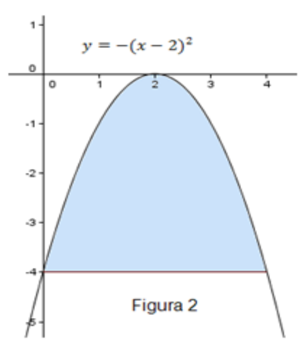


figura 2 $x \in [0,4]$

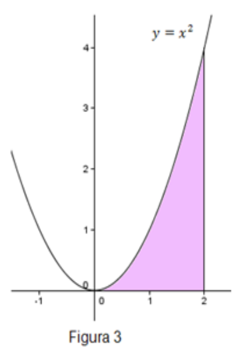


figura 3 $x \in [0,2]$

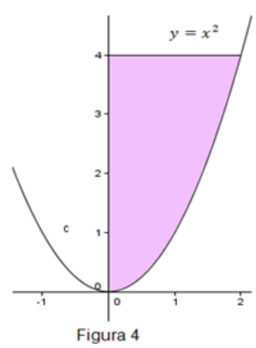


figura 4 $x \in [0,2]$

Ejemplo: Dada la función $y = sex$ con $x \in \ [0, \pi]$

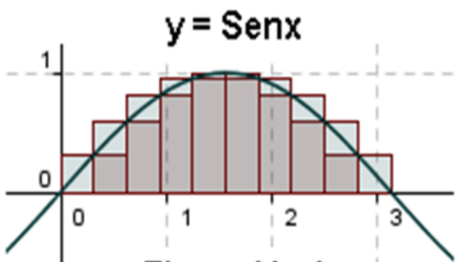


Figura No.1

Figura No. 2

Para aproximar ó determinar el área de la función $y = sex$ se requiere de:

a) Un intervalo real $[a, b]$donde la función se continúa.

b) Realizar particiones del intervalo $[a, b]$ en subintervalos.

c) Sobre cada subintervalo construir rectángulos inferiores y superiores cada vez más pequeños.

d) Calcular el área de cada rectángulo, realizar la suma de las respectivas áreas inferiores y superiores, con altura $f(x_i)$ y base Δx_i

e) El área como suma de particiones corresponde a: $A_{inf} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ y $A_{sup} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ con $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, n número de particiones, a límite inferior y b límite superior del intervalo.

d) El área como límite de una suma, cuando determina los límites de las sumas inferiores y superiores:

$$A_{inf} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \qquad A_{sup} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

$$A = \lim_{\|n\| \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

ACTIVIDAD

Para resolver los primeros cuatro puntos de esta actividad debes:

- Graficar la función
- Encontrar el intervalo $[a, b]$ donde se va a determinar cada ΔX
- Determinar $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$
- Hallar el $f(x_i)$ para cada Δx_i
- Realizar las sumatoriasA_{inf} y A_{sup}
- Determinar A $= \lim_{\|n\| \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$

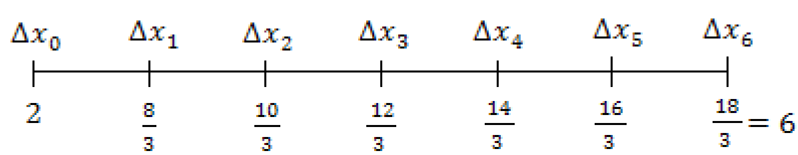
Nota: Dado $x \in [2,6]$ para determinar Δx_i si se requieren $n = 6$ particiones se procede así:

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{6-2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{luego} \quad \Delta x_0 = 2 \quad \Delta x_1 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\Delta x_2 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \quad \Delta x_3 = \frac{10}{3} + \frac{2}{3} = \frac{12}{3} \quad \Delta x_4 = \frac{12}{3} + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\Delta x_5 = \frac{14}{3} + \frac{2}{3} = \frac{16}{3} \quad \Delta x_6 = \frac{16}{3} + \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

De donde el intervalo queda dividido así:



Para determinar $f(x_i)$ se procede así:

$$f(x_0) = f(2) \quad f(x_1) = f(\tfrac{8}{3}) \quad f(x_2) = f(\tfrac{10}{3}) \quad f(x_3) = f(\tfrac{12}{3})$$

$$f(x_4) = f(\tfrac{14}{3}) \quad f(x_5) = f(\tfrac{16}{3}) \quad f(x_6) = f\left(\frac{18}{3}\right) = f(6)$$

1. Determina el area del triangulo formado por la recta $y = \ x$ el $eje\ x$ y la recta $x = 5$, utilizando una partición de $n = 4$, $n = 6$ y $n = 10$ compara los resultados y concluye.

2. Determina el área del triangulo formado por la recta $y = \frac{x}{2}$ el eje x y la recta $x = 5$, utilizando una partición de $n = 4$, $n = 6$ y $n = 10$ compara los resultados y concluye.

3. Determina el área comprendida entre y=3, x=4 y x=7 utilizando particiones $n = 4$, $n = 6$ y $n = 10$ compara los resultados y concluye.

4. Determina el área de la región determinada por las rectas $y = \frac{x}{2} + 3$, y=0 y x=0 utilizando una partición de $n = 4$, $n = 6$ y $n = 10$ compara los resultados y concluye.

5. Realiza la lectura sobre Riemann y responde:

a) Se puede decir que George Friedrich Bernhard Riemann es un genio ¿Por qué?

b) Consulta las caracteristicas sociales de la epoca en la cual vivio George Friedrich Bernhard Riemann (1826 -1866).

c) Consulta las carateristicas del caracter timido y argumenta de que forma contribuye ó no la personalidad de Riemann a obtener éxito como matemático.

d) Si tu carácter fura timido que harias en pro de alcanza tus metas a corto y a largo plazo.

Quien fue
George Friedrich Bernhard Riemann

Bernhard Riemann nace el 17 de septiembre de 1826 en Breselenz, en el Reino de Hanover, actualmente Alemania y muere en junio de 1866. Hijo de un pastor Luterano de la misma ciudad, quien luchó en las guerras napoleónicas y de quien recibe su primera educacion, su madre Charlotte Ebell murió antes de que él alcanzara la edad adulta. Desde niño mostro cualidades para las matematicas. Fue el segundo de seis hermanos, de carácter timido frecuentemente sufria de ataques de nervios, personalidad que le condicionó a la hora de hablar en público pues su timidez y miedo escénico se lo impedía.

En 1840 se fue a Hanover a vivir con su abuela, allí asistió al Lyceum, ingresando directamente al tercer curso. Al morir su abuela en 1842 ingresa al Johanneum Lüneburg, estudia asignaturas clásicas como hebreo y teologia. Durante este tiempo, Riemann estudió la Biblia de forma intensiva, y , de vez en cuando se entretenia con las matemáticas, llegando al punto que intentó probar matemáticamente la exactitud del Libro del Génesis.

El director al ver su interes por las matematicas le presta un libro sobre la teoria de los números de 900 páginas y 6 dias después le pregunta qué tal le parece el libro, a lo cual Riemann le contesta que le había fascinado.

En 1846, a la edad de 19 años, comienza a estudiar filología y teología con la idea de convertirse en sacerdote, y así poder contribuir en las finanzas familiares,

durante la primavera de ese mismo año, su padre ahorra lo suficiente y lo envia a la universidad de Göttingen, donde conoce a Carl Friedrich Gauss y asiste a sus conferencias sobre el método de los minimos cuadrados.

En 1847 viaja a Berlín, donde Jacobi, Dirichlet, Steiner y Eisenstein daban clase y permanece dos años, en los cuales fue reclutado por milicias estudiantiles y ayudó a proteger al rey en su palacio de Berlin durante las manifestaciones y movimientos obreros de 1848.

En1849 regresa a Göttingen y en 1851 se doctora, con una tesis elogiada por Gauss, en la cual estudia la teoria de las variables complejas, lo que hoy se denomina superfıcies de Riemann.

En 1853 Gauss le propone que preparase una Habilitation sobre las bases de la geometria,que es el mayor reconocimiento que puede obtener un alumno, y consiste en escribir una tesis profesional, conocida como Habilitations schrift,que debe defender frente a un comité académico en un proceso similaral de la tesis doctoral, sólo que el nivel exigido debe ser considerablemente mayor tanto en calidad como cantidad, y debe hacerlo de forma independiente. Después de varios meses, Riemann desarrolla su teoría de las grandes dimensiones.

En 1854 se hace lectura de su trabajo titulado "Uber die Hypothesen welche der Geometrie zuGrunde liegen" con el cual se construye la geometrıa de Riemann.

En 1857, despues de un intento para promover a Riemann como profesor extraordinario en la Universidad de Göttingen, se logra la asignacion de un salario regular para Riemann y dos años más tarde es promovido para encabezar el Departamento de Matemáticas tras la muerte de Dirichlet, quien había obtenido su cátedra tras la muerte de Gauss.

En 1855 contrae matirmonio con Elise Koch y 1862 tiene una hija, pero su reciente posición laboral y familiar dura poco al morir en1866, tras huir de Göttingen por la lucha entre la armada de Hanover y Prusia en la ciudad, y contraer tuberculosis.

La muerte le llegó durante su viaje a Italia, donde fue enterrado. Su huida de Göttingen, junto con su muerte en el extranjero hizo que algunos de sus trabajos quedasen inconclusos. Tras su muerte su ama de llaves, encuentra la mesa de su oficina de casa

muchos trabajos sin publicar, ya que Riemann se negaba a publicar algun trabajo incompleto y puede ser que se perdieran algunas de sus ideas más profundas.

La integral de Riemann, la geometrıa riemanniana y la conjetura de Riemann admitieron un gran avance para las matemáticas en el momento en que se desarrollaron, define las conocidas integrales que llevan su nombre.

En su trabajo desarrollo conceptos que hacen parte de la base de la matemática actual, y son fundamentales para la investigación tanto en matemáticas, como física. (tomado de: García Pachón Alejandro, Lucía Rotger García, Riemann)

Cibergrafia

- Aldana Bermúdez Eliécer, Comprensión Del Concepto De Integral Definida En El Marco De La Teoría “APOE” , Tesis Doctoral Universidad De Salamanca Facultad De Educación Departamento De Didáctica De La Matemática Y Didáctica De Las Ciencias Experimentales,2011, págs. 432.

- García Pachón Alejandro, Lucía Rotger García, Riemann,pags9
Enlace: bioinfo.uib.es/~joemiro/teach/DocAlumnos/**Riemann**.pdf

- http://www.librosmaravillosos.com/grandesmatematicos/capitulo26.html

GEOMETRÍA EUCLIDIANA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

"La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles". *René Descartes (1596-1650)*

"No hay un camino real para la geometría". *Euclides (330 A.C-275 A.C.)*

Nombre(s): ____

Institución____________________ Grupo _______Fecha_______________

No. Paginas: 5 **Materiales:** Lápiz, borrador y sacapuntas.

OBJETIVOS

- ✓ Establecer relaciones entre la geometría Euclidiana y la geometría Analítica.
- ✓ Identificar características del trazado de curvas en un plano cartesiano y en un plano no cartesiano.

NOTAS DE INTERÉS

El origen de la geometría analítica se logra gracias a las relaciones establecidas entre la geometría Euclidiana y la geometría Analítica de los diferentes aportes para tal fin se resaltan Euclides y Descartes.

Euclides: Conocido por su libro de geometría los "Elementos" el cual contiene los conocimientos básicos y fundamentales para la construcción científica de la geometría, se cree que alrededor del año 300 A.C. se escribe dicha obra y aun sigue siendo referencia obligada en conceptos de geometría, de teoría de números y en la axiomatización o lógica matemática.

Descartes: La intención de Descartes es aplicar el algebra renacentista en la solución de problemas geométricos, de hecho no utilizaba dos ejes coordenados en la forma que se hace actualmente. Lo más cercano a ello esta dado en el principio presentado por Fermat: **Cuando encontremos dos cantidades conocidas en una ecuación, tenemos un lugar geométrico, la extremidad de una de éstas describe una línea, recta o curva.** Tanto para Fermat como para Descartes las dos cantidades desconocidas en una ecuación corresponden a segmentos lineales y no a números.

ACTIVIDADES

1. Dibuja siguiendo las instrucciones dadas, las siguientes figuras planas y escribe su respectivo nombre:

   a) Una figura plana de un lado.
   b) Una figura plana de dos lados.
   c) Una figura plana de tres lados.
   d) Una figura plana de cuatro lados.
   e) Una figura plana de cinco lados.
   f) Una figura plana de 12 lados.

a)	b)	c)
d)	e)	f)

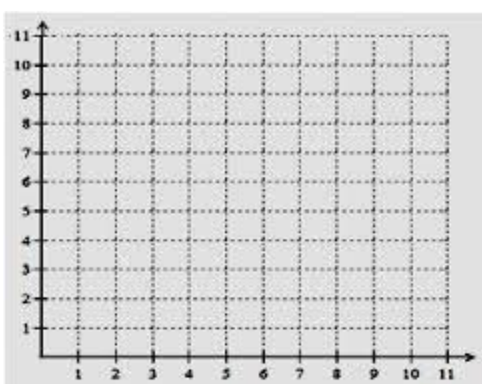
2. Responde las siguientes preguntas

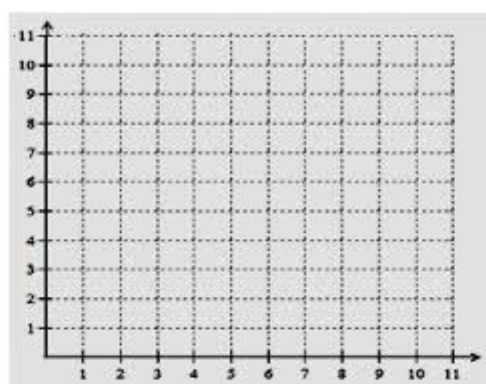
a) ¿Porqué las figuras dibujadas son llamadas figuras planas?

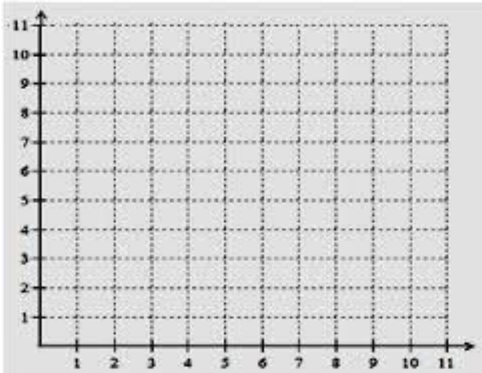
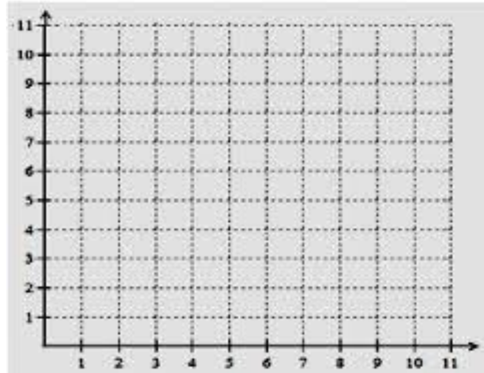
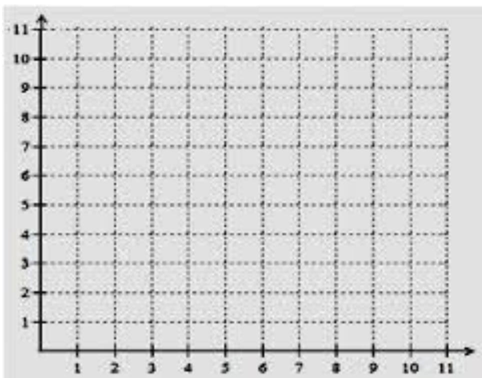
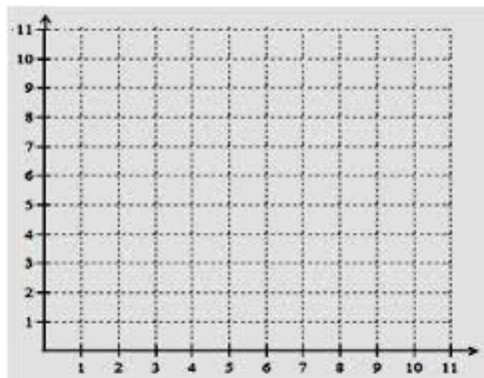
b) ¿Sera posible encontrar en tu mundo físico figuras planas como las que dibujaste? de ser así cita algunos ejemplos.

c) ¿Cómo determinarías el área de las figura planas que dibujaste? Y ¿Su perímetro?

3. Dibuja las mismas figuras del numeral uno en un plano cartesiano





4. Responde las siguientes preguntas

a) ¿Son iguales las figuras dibujadas en el numeral uno y las del numeral tres?

____

____

b) ¿Qué diferencia hay entre las dos formas de graficar?

____

____

c) ¿Cuál de las dos formas de dibujar figuras planas te parece más precisa? , ¿Por qué?

____

____

c) ¿Cómo determinarías el área de las figura planas que dibujaste? y ¿Su perímetro?

____

____

____

____

5. Enumera las ventajas y las desventajas que piensas ofrece cada una de las dos formas de construir figuras planas?

____

____

____

____

____

____

Cibergrafía

http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf.

CUADRATURA DEL SEGMENTO PARABÓLICO

"Si he hecho descubrimientos invaluables ha sido más por tener paciencia que cualquier otro talento". Isaac Newton (1642-1727)

Nombre: ____

Institución ________________________________Grupo _______Fecha_____________

No. Paginas: 5 **Materiales**: 2 Hojas de papel milimetrado, lápiz, borrador, sacapuntas, regla, curvígrafo, tijeras, pegante (colbon) y cartón paja.

OBJETIVOS

- ✓ Construir y recortar segmentos parabólicos, triángulos y rectángulos en papel milimetrado.
- ✓ Comprobar en la palanca de Arquímedes la relación del peso de una de un segmento parabólico y del triangulo inscrito en dicho segmento.

APUNTES HISTÓRICOS

Arquímedes nace en Siracusa aproximadamente en el 287 A.C y fue asesinado en el 212 A.C cuando Siracusa fue conquistada por Roma durante la II Guerra Púnica.

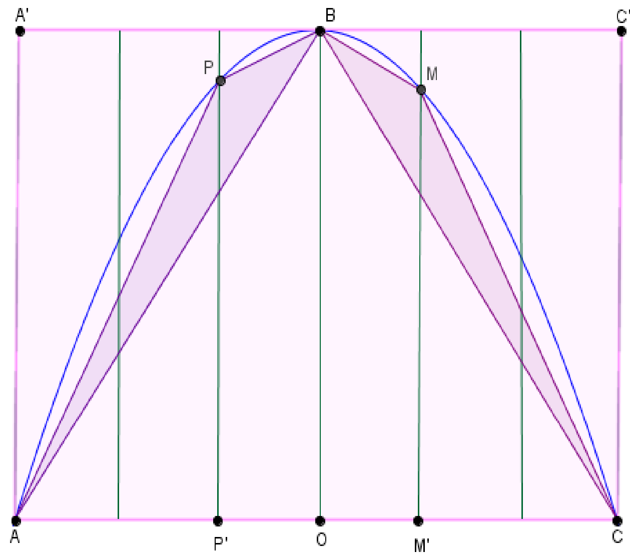
Arquímedes considerado como uno de los matemáticos más prolíferos de todos los tiempos con una inexplicable capacidad para relacionar a la perfección la intuición del descubrimiento con la habilidad de la demostración.

Arquímedes obtiene asombrosos resultados mediante la aplicación de la ley de la palanca método mecánico sobre cuadraturas y cubaturas, que luego demostraba rigurosamente mediante el método de exhaución.

Entre sus resultados más célebres están el cálculo del volumen y de la superficie esférica y el área del segmento parabólico que corresponde a los cuatro tercios del área del triangulo que tiene la misma base y el mismo vértice.

ACTIVIDADES

1. Considere un segmento de la parábola $y = -x^2$ con vértice B, el eje x en una escala 1:2, el eje y en escala 1:1 y $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ para realizar las siguientes construcciones, para mayor facilidad realizar la construcción como lo indica la siguiente figura



1.1. Construir en papel milimetrado el segmento parabólico ABC. Pegarlo en cartón y recortarlo.

1.2. Construir en papel milimetrado el triangulo ΔABC inscrito en el segmento parabólico ABC. Pegarlo en cartón y recortarlo.

1.3. Construir en papel milimetrado el rectángulo $AA'C'C$ circunscrito al segmento parabólico ABC. Pegarlo en cartón y recortarlo.

1.4. Construir en papel milimetrado el triangulo APB. Pegarlo en cartón y recortarlo.

1.5. Construir en papel milimetrado el triangulo BMC. Pegarlo en cartón y recortarlo.

2. En una balanza de torques realizar las siguientes experiencias:

Nota: Para construir una balanza de torque utilizar una varilla de balso de sección cuadrada de $1cm^2$

2.1. Equilibrar la balanza de torques con el segmento parabólico $\boldsymbol{ABC}$ y el $\Delta\boldsymbol{ABC}$ inscrito en dicho segmento parabólico, concluir lo observado.

____

____

2.2. Equilibrar la balanza de torques con él $\Delta\boldsymbol{ABC}$ y el rectángulo $\boldsymbol{AA'C'C}$**,** concluir lo observado.

____

____

____

2.3. Equilibrar la balanza de torques con él $\Delta\boldsymbol{ABC}$ y los triángulos $\Delta\,\boldsymbol{APB}$ **y** $\Delta\boldsymbol{BMC}$**,** concluir lo observado.

____

____

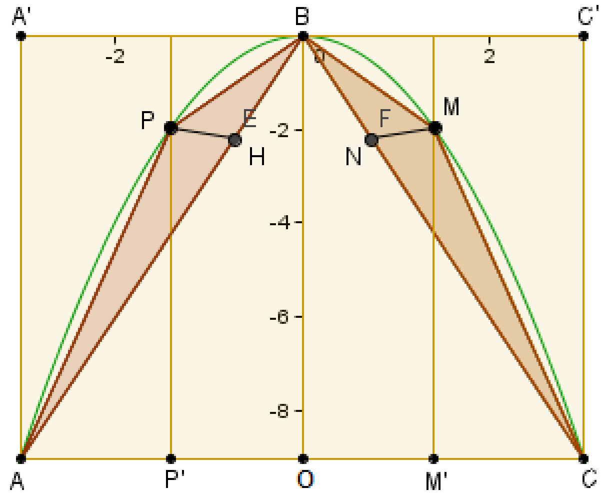
3. Sobre papel milimetrado en escala 1:1 construir un segmento parabólico ABC y el triangulo inscrito ABC. Por medio de la cuadricula del papel hacer estimaciones (aproximaciones) del área del segmento parabólico.

____

____

4. Con base al siguiente grafico establece:
   a. La longitud de los segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}}$ si se sabe qué $\boldsymbol{A}(-\mathbf{3},-\mathbf{9})$ $\boldsymbol{B}(\mathbf{0},\mathbf{0})$ y $\boldsymbol{C}(\mathbf{3},-\mathbf{9})$**.**
   b. Desde $\boldsymbol{P}$ trazar $\overline{\boldsymbol{PH}} \perp \perp\overline{\boldsymbol{AB}}$ y desde **M** trazar $\overline{\boldsymbol{MN}} \perp \perp\overline{\boldsymbol{BC}}$ determinar sus respectivas longitudes.

c. Encontrar las áreas de los triángulos $\boldsymbol{\Delta ABP}$ **y** $\boldsymbol{\Delta BCM}$**.**



5. Determinar:

a. El área del triangulo ΔABC y el área del rectángulo $AA'C'C$, compara ambas áreas y concluye sabiendo que $\boldsymbol{A}(-\mathbf{3},-\mathbf{9})$, $\boldsymbol{A}'(-\mathbf{3},\mathbf{0})$, $\boldsymbol{C}'(\mathbf{3},\mathbf{0})$ y $\boldsymbol{C}(\mathbf{3},-\mathbf{9})$**.**

____

____

b. El área del triangulo ΔABP y del triangulo ΔBCM, compáralas con el área del triangulo ΔABC y concluye.____________________________________

____

____

Cibergrafía

Molina Ángel, El método de investigación de Arquímedes de Siracusa: Intuición, mecánica y exhaución , Revista de Filosofía, Nº 58, 2008-1, pp. 23 - 40 ISSN 0798-1171,Universidad del Zulia, Maracaibo - Venezuela

CUADRATURA DEL TRIÁNGULO EQUILÁTERO

"El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos". Joseph Fourier.

Nombre(s): ____
Institución__________________ Grupo ______Fecha_____________
No. Paginas: 5 **Materiales**: Lápiz, borrador, sacapuntas y software GeoGebra.

DATOS DE INTERÉS

Desde tiempo inmemorial, los puzzles y rompecabezas han ocupado un lugar primordial entre los juegos predilectos de todas las edades. En relación con las Matemáticas, muchas divisiones de figuras han estado en la base de materiales, tanto en su aspecto lúdico para jugar, como para utilizarlos didácticamente.

Los problemas geométricos de disección plantean la partición de figuras geométricas en trozos de forma que al unirse se obtengan otras figuras geométricas. En este artículo vamos a presentar unos casos particulares de disecciones geométricas: las cuadraturas. Consideraremos como cuadraturas a las divisiones que hay que realizar en una figura plana (por ejemplo un polígono regular) de forma que con las piezas obtenidas pueda construirse un cuadrado.

ACTIVIDAD

1. Siguiendo los siguientes pasos realiza la siguiente construcción en GeoGebra. Utiliza una medida de 6 cm para los lados del triangulo equilátero

   a. Dibujar el triángulo equilátero *ABC*.
   b. Obtener los puntos medios de *AB* y *BC* (serán los puntos *D* y *E*).
   c. Prolongar *AE* hasta *F*, para que *EF* = *EB*.
   d. Hallar el punto medio de *AF* (será el punto *G*).
   e. Con centro en *G* dibujar el arco *AF*.

f. Prolongar *EB* hasta cortar el arco, obteniendo el punto *H*.

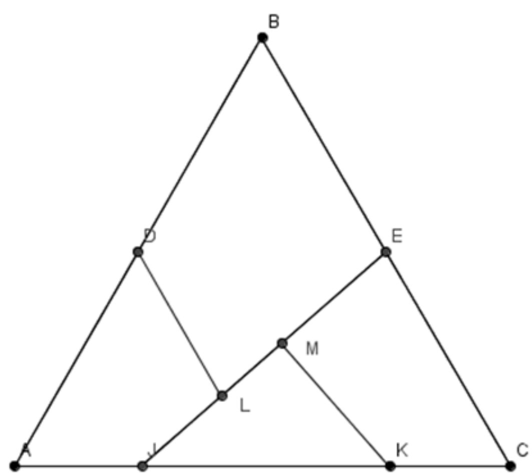
g. Con centro en *E* dibujar un arco de radio *EH*. Llamar *J* al punto en que corte al lado *AC*.

h. Trazar el segmento *JE*.

i. Sobre la base *AC* del triángulo marcar *K*, de forma que *JK=BE*.

j. Dibujar segmentos perpendiculares sobre *JE* desde *D* y *K*, obteniendo los puntos *L* y *M*.

k. El triángulo queda dividido en cuatro piezas: los tres cuadriláteros *BELD*, *DLJA* y *ECKM* y el triángulo *JMK*, con las que podemos formar un cuadrado.



2. Toma la medida de los siguientes segmentos:

$\overline{AD}$ ____________________ $\overline{BD}$ ____________________ $\overline{BE}$ ____________________

$\overline{EC}$ ________________ $\overline{JL}$ ______________ $\overline{EL}$ _____________ $\overline{ME}$ ____________

$\overline{EC}$ _____________________ $\overline{KC}$ ____________________ $\overline{JK}$ ____________________

3. Determina el área de cada cuadrilátero y del triangulo obtenidos en el rompecabezas utilizando GeoGebra y responde:

a. ¿Cuántos cuadriláteros obtuviste?_______________________________

b. ¿Qué tipo de cuadriláteros obtienes?_________________________________
____

c. ¿Qué tipo de triangulo obtienes?_____________________________________

d. Que estrategia utilizarías para construir un cuadrado con estos cuatro cuadriláteros?____
____

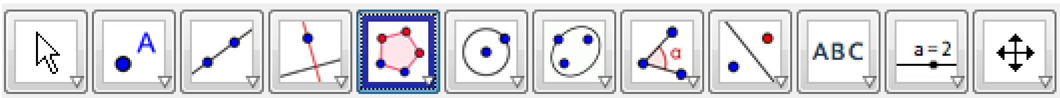
e. ¿El área del triangulo equilátero será igual, mayor o menor al aérea del cuadrado construido con las cuatro figuras obtenidas? ¿por qué?_____________________
____

2. Una vez construido el cuadrado tomar la medida del lado del cuadrado y determinar su área ____
____

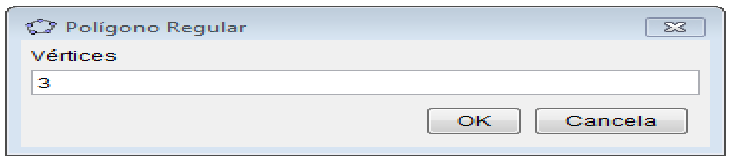
3. Determina el área del triangulo equilátero y compárala con el área del triangulo. ¿Cómo son estas áreas?______________________________
____

RECUERDA

Para construir el triangulo equilátero debes ubicar los puntos A y B, seleccionar la opción polígono regular en la barra de herramientas.



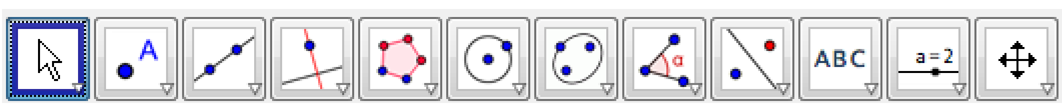
Cuando tengas el vínculo adjunto ingresas 3, que corresponde al número de vértices del triangulo.



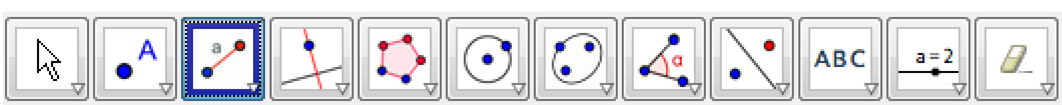
Una vez digitado el numero de vértices das OK y de inmediato obtienes el triangulo equilátero.

Para cambiar las dimensiones del triangulo realiza lo siguiente:

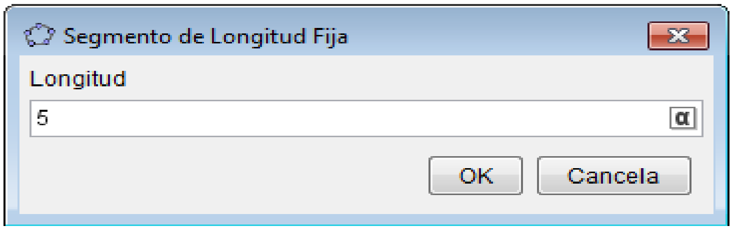
En la barra de herramientas selecciona el icono elige y mueve mostrado en la figura, luego ubícate en uno de los vértices para lograr rotar y variar la longitud de los lados del triángulo.



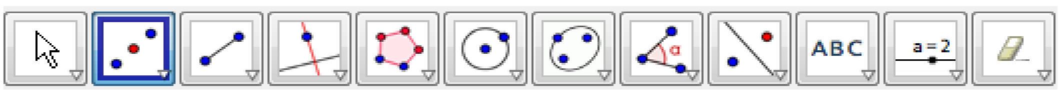
Si deseas un triangulo de longitud dada L seleccionas en la barra de herramientas el icono mostrado en la siguiente figura.



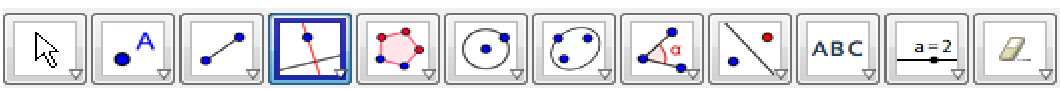
Lugo te ubicas en uno de los vértices del triangulo y en la pantalla observaras el siguiente cuadro, digitas el valor de la longitud deseada y das Clic en Ok en la pantalla observaras el segmento de la longitud deseada, en el caso del grafico (longitud 5cm).



Para encontrar el punto medio de un segmento señalas los extremos del segmento y de la barra de herramientas seleccionas el icono mostrado en siguiente grafico.



Para trazar una recta perpendicular a un segmento dado por un punto dado se selecciona el icono de recta perpendicular, de la barra de herramientas y se señala el punto dado y uno de los extremos del segmento dado.



Cibergrafía

- http://revistasuma.es/IMG/pdf/48/065-068.pdf, Cuadraturas de polígonosregulares,Febrero2005, tomado diciembre 2 de2013.
- http://www.geogebra.org/help/docues.pdf Manual Oficial GeoGebra 3.2,tomado diciembre 2 de 2013.

LA CICLOIDE

"No es el ángulo recto que me atrae, ni la línea recta, dura, inflexible, creada por el hombre. Lo que me atrae es la curva libre y sensual, la curva que encuentro en las montañas de mi país, en el curso sinuoso de sus ríos, en las olas del mar, en el cuerpo de la mujer preferida. De curvas es hecho todo el universo, el universo curvo"   Albert Einstein.

Nombre(s): ____

Institución______________________________ Grupo _______Fecha______________

No. Paginas: 4. **Materiales**: Lápiz, borrador, sacapuntas, cartulina, tijeras, un yoyo y computador con software GeoGebra.

OBJETIVOS

- ✓ Obtener la curva generada por la trayectoria de un punto fijo de una circunferencia que rota sin deslizarse.
- ✓ Determinar el área aproximada bajo una cicloide.

APUNTES HISTÓRICOS

Al parecer Charles de Bouvelles (1471-1553) fue uno de los pioneros en el trabajo de la cicloide, aproximadamente en 1599 Galileo utiliza el término de cicloide y estudia el área que encierra un arco de cicloide bajo consideraciones de carácter mecánico.

En 1634 Roberval demuestra que **el área bajo un arco de cicloide es igual al triple del área del círculo generador** y en 1638 descubre un método para trazar tangentes a la cicloide en cualquier punto de ella. En 1643 Torricelli envía a Mersenne su cuadratura de la cicloide y en 1644 publica su libro "De Parabole". En el apéndice de esta obra figuran la cuadratura de la cicloide y la construcción de la tangente donde Torricelli no referencia a Roberval quien había llegado a estos resultados antes que él y en 1646 Roberval escribe una carta acusando a Torricelli de plagio.

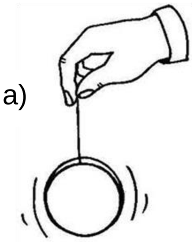
En 1658 Christian Huygens descubre que la cicloide invertida es una curva tautocrona o isócrona y en 1696 Johann Bernoulli propone el problema de la braquistocrona, esto es determinar la curva por la que un cuerpo desciende en el menor tiempo por el efecto de la gravedad.

ACTIVIDADES

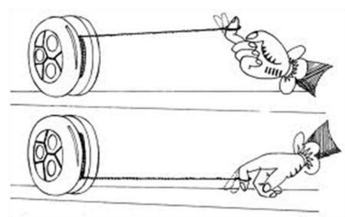
La cicloide es una curva plana determinada por la trayectoria de un punto fijo en una circunferencia que rueda sobre una recta sin deslizarse.

1. Toda circunferencia experimenta dos movimientos uno de rotación y otro de traslación, para verificar dichos movimientos realiza la siguiente experiencia.

a)



b)



a) Toma un yoyo, suspéndelo de su cuerda como lo indica la figura a) y deja que descienda. ¿Qué movimiento realiza el yoyo?______________
____

b) Toma el yoyo, ubícalo en una superficie horizontal como lo indica la figura b) y busca el punto en el cual lo puedes deslizarlo por dicha superficie sin que rote. ¿Qué movimiento realiza el yoyo?_____________
____

2. Realiza en cartulina un circulo de radio r=1.0 cm, marca un punto sobre su circunferencia y sobre el segmento $\overline{AB}$, iniciando en A, haz rotar la circunferencia sin deslizar, en dirección a B marca la mayor cantidad de puntos que puedas y únelos para encontrar la curva descrita por dicho punto.

a) Encuentra el punto medio de la curva obtenida y determina el área sobre poniendo el circulo generatriz.____

b) Mide con una cuerda o hilo la longitud de la cicloide obtenida.____________

____

c) Mide con una cuerda o hilo la longitud de la circunferencia generatriz de la cicloide.____

____

d) Compara los datos obtenidos en b y en c. Concluye:___________________

____

3. Dibuja dicha trayectoria en GeoGebra con las siguientes instrucciones:

   a) f(t)=t-sin(t)
   b) g(t)=1-cos(t)
   c) d=0
   d) (f(d),g(d))
   e) Curva[f(t), g(t), 0, d]
   f) Q=(0,1)
   g) Circunferencia[Q,P]
   h) Segmento[Q,P]

Una vez digitadas las instrucciones y sobre las funciones f(t) y g(t) se da clik derecho, se selecciona **muestra objeto** para obtener solo la circunferencia.

a) Compara esta cicloide con la obtenida en el numeral 2. ¿Cómo son?

____

____

b) ¿Qué diferencia encuentras entre ambas cicloides?____________________

____

____

4. La circunferencia posee una ecuación que la define dicha ecuación es: $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^{2}+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^{2}=\boldsymbol{r}^{2}$, donde $(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k})$ centro de la circunferencia, $\boldsymbol{r}$ radio y $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ punto perteneciente a la circunferencia.

   a. Completa la siguiente tabla y realiza la respectiva circunferencia

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h}$	$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^{2}$	$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k}$	$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^{2}$	$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^{2}+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^{2}$	$\boldsymbol{r}^{2}$	$\boldsymbol{r}$
2	2	0	0							
3		0	2						5	
	4	-1	0							$\sqrt{5}$

   b. Completa la siguiente tabla

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{a}^{2}$	$\boldsymbol{acos\theta}$	$\boldsymbol{asen\theta}$	$(\boldsymbol{acos\theta})^{2}$	$(\boldsymbol{asen\theta})^{2}$	$(\boldsymbol{asen\theta})^{2}+(\boldsymbol{acos\theta})^{2}$
1	15°						
2	30°						
3	45°						

   c. Compara los valores obtenidos en la columna 3 y en la columna 8¿Cómo son?

   d. Ecuaciones paramétricas la cicloide que pasa por P(f(t),g(t))

   f(t) = a[t-sen(t)]   - 2π < t < 2π $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{a}[\mathbf{1}-\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{t})]$

   e. Representa cada función en un plano cartesiano completando la siguiente tabla para los valores dados para t. sabiendo que:

t / a	-2π	$\frac{-5\pi}{3}$	$\frac{-4\pi}{3}$	$-\pi$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π	$(\mathbf{f}(\mathbf{t}),\mathbf{g}(\mathbf{t}))$
1														
2														
3														

Cibergrafia

- Chinea Carlos S., La Cicloide, Una Curva De Mucho Empaque, divulgación de la matemática en la red. enero 2002.
- http://dme.ufro.cl/clinicamatematica/pdf/Leithold%20-20El%20Calculo%20-%20espa%C3%B1ol%20-%207ª.Ed..pdf

APROXIMANDO ÁREAS

"Afronta tu camino con coraje, no tengas miedo de las críticas de los demás. Y, sobre todo, no te dejes paralizar por tus propias críticas". Paulo Coelho

Nombre(s): ____

Institución___________________________ Grupo __________Fecha_____________

No. Paginas: 7 **Materiales**: Lápiz, borrador, sacapuntas, cartulina, tijeras, computador con GeoGebra.

OBJETIVOS:

- ✓ Observar el comportamiento del área bajo una curva cuando esta se ha dividido en un determinado número de rectángulos.
- ✓ Obtener por aproximación el área bajo una curva.

GENERALIDADES

Para determinar el área de regiones comprendidas entre curvas, o bien bajo curvas especificas, se utilizaron desde tiempos remotos diferentes estrategias que por medio de aproximaciones a partir de áreas conocidas, permitían encontrar un valor muy próximo para dichas áreas.

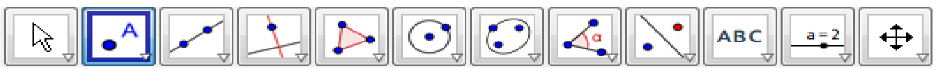
En esta guía se determinara por aproximación el área bajo la curva $y = x^2$, dividiendo dicha región en sectores rectangulares y determinando el área de cada sector se procederá a la obtención del área en cuestión.

ACTIVIDADES

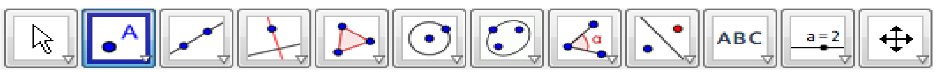
1. Realiza la siguiente construcción en GeoGebra, realizando los pasos dados a continuación:

a) En la barra de entrada ingresar $f(x) = x^2$, se obtendrá la grafica de la función.

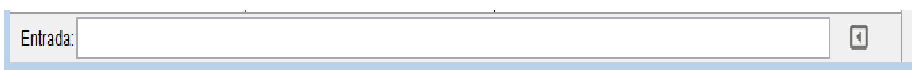
b) punto se mueve solo en el eje x haciendo clic sobre él y desplazándolo de derecha a izquierda



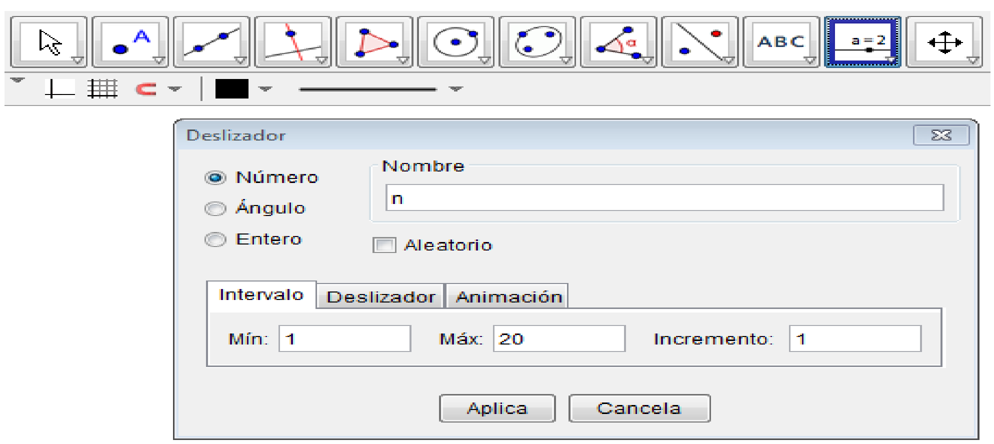
c) Seleccionar nuevo punto y ubicar dicho punto en el eje x, los puntos ubicdos en el eje x corresponden al intervalo de grafica a considerar.



d) En la barra de entrada ingresar $[f, A(x), B(x)]$



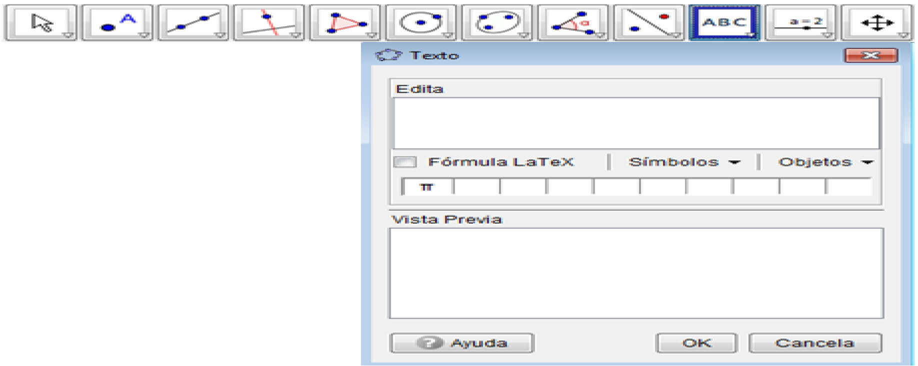
e) Elegir deslizador y completar así: Min 1, Máx 20, Incremento 1 y en nombre cambia a por n, para un numero de divisiones de n=20.



f) Digitar SumaInferior $[f, x(A), x(B), n]$ en la barra de entrada

g) Digitar SumaSuperior $[f, x(A), x(B), n]$ en la barra de entrada

h) Para personalizar ir a texto



En edita entre comillas se escribe “Integral=a”

En edita entre comillas se escribe “SumaInferiorl=b”

En edita entre comillas se escribe “SumaSuperior=c”

Sobre cada elemento se puede modificar el color, el tipo de línea.

2. Una vez construida la gráfica realiza la siguiente experiencia:

a) Determina el área entre la curva $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{2}$, el eje $\boldsymbol{x}$, en el intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{2}]$ para $\boldsymbol{n} = \mathbf{1}$.

Integral________ SumaInferior ________ SumaSuperior________

b) Determina el área entre la curva $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{2}$, el eje $\boldsymbol{x}$, en el intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{2}]$ para $\boldsymbol{n} = \mathbf{2}$.
Integral________ SumaInferior ________ SumaSuperior________

c) Determina el área entre la curva $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{2}$, el eje $\boldsymbol{x}$, en el intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{2}]$ para $\boldsymbol{n} = \mathbf{6}$.

Integral________ SumaInferior ________ SumaSuperior________

d) Determina el área entre la curva $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{2}$, el eje $\boldsymbol{x}$, en el intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{2}]$ para $\boldsymbol{n} = \mathbf{8}$.

Integral________ SumaInferior ________ SumaSuperior________

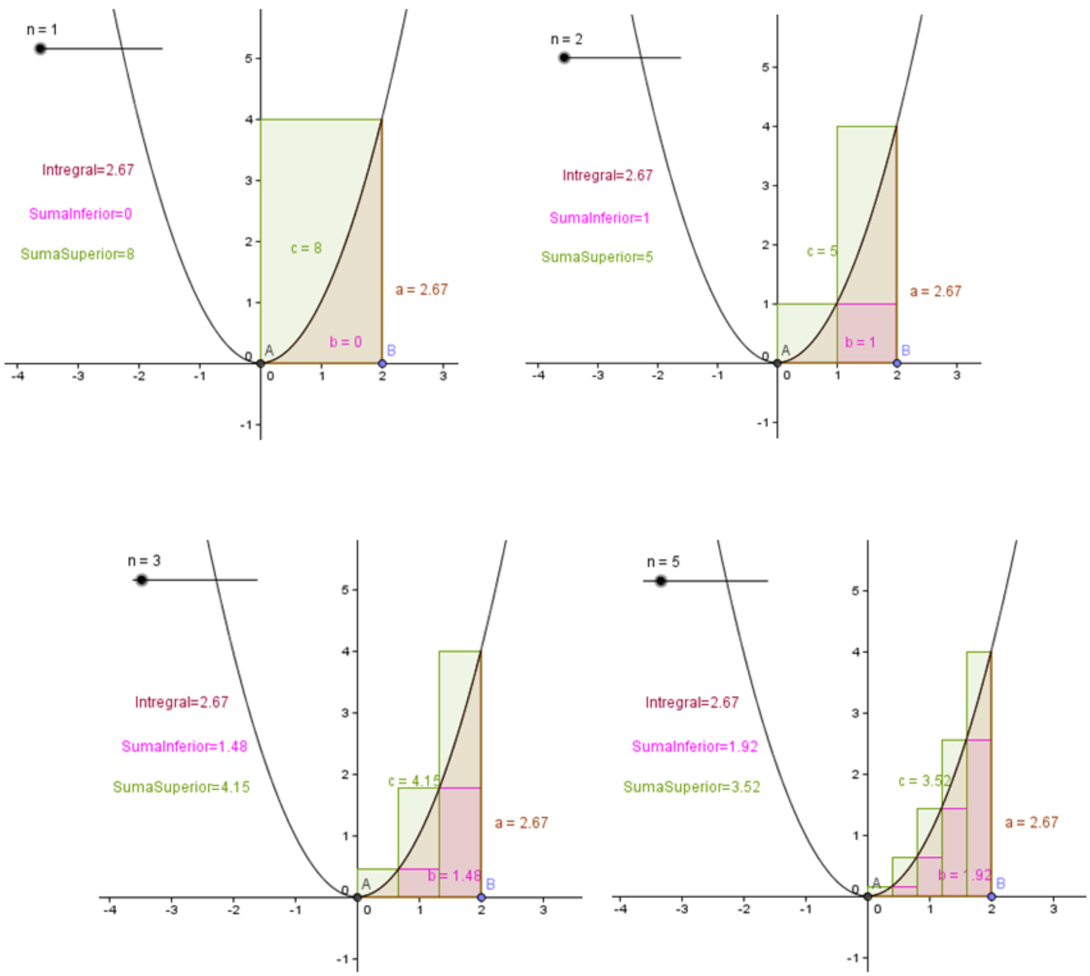
e) Determina el área entre la curva $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{2}$, el eje $\boldsymbol{x}$, en el intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{2}]$ para $\boldsymbol{n} = \mathbf{10}$.

f)

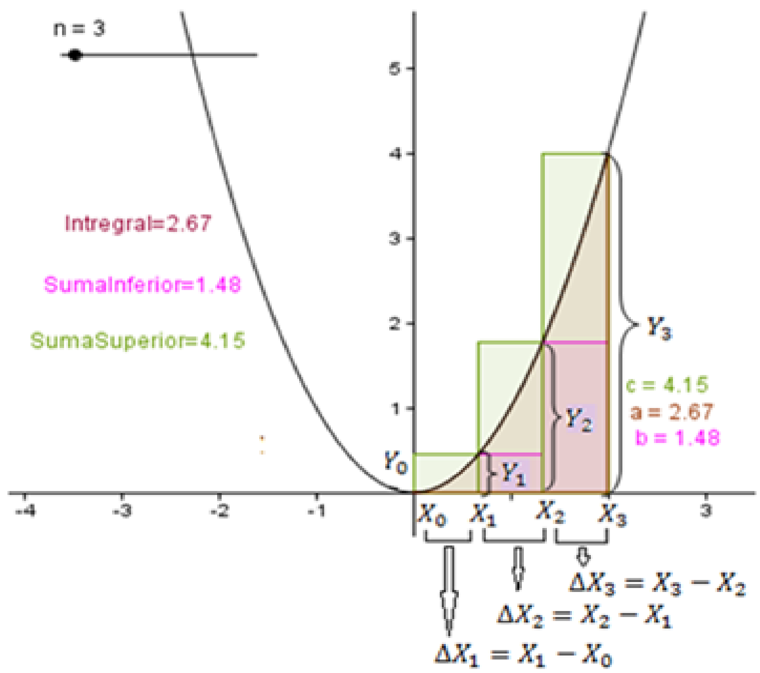
Integral________ SumaInferior ________ SumaSuperior________

g) En cuál de los valores para n se obtiene una mejor aproximación por encima y por debajo del área, bajo la curva $y = x^2$

3. Observa las graficas y responde:



4. En el gráfico siguiente se determina el área bajo la curva $\boldsymbol{y = x^2}$ a partir de la construcción de tres rectángulos de base $\Delta \boldsymbol{X_1} = \Delta \boldsymbol{X_2} = \Delta \boldsymbol{X_3}$, donde la longitud de la base de cada rectángulo es $\Delta \boldsymbol{X_i} = \boldsymbol{X_n} - \boldsymbol{X_{n-1}}$, y la altura relativa a cada rectángulo es $\boldsymbol{Y_i}$. Para determinar a $\Delta \boldsymbol{X_i}$ se procede así $\Delta \boldsymbol{X_i} = \frac{\boldsymbol{X_n - X_0}}{\boldsymbol{n}}$ con $\boldsymbol{i = 0, 1, 2, 3, 4, 5}$ ...



En este caso:

El primer rectángulo tiene base ΔX_1 y altura $Y_1 = Y_0$

El segundo rectángulo tiene base ΔX_2 y altura Y_2

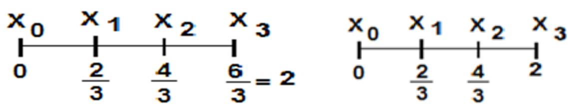
El segundo rectángulo tiene base ΔX_3 y altura Y_3

El área ($\boldsymbol{A}$**)** bajo la curva es mayor al área de los rectángulos bajo la curva ($\boldsymbol{m_i}$) y es menor al área de los rectángulos sobre la curva ($\boldsymbol{M_i}$) esto es ($\boldsymbol{m_i}$) < **A** ($\boldsymbol{M_i}$),

Para este caso se tiene:

$\Delta X_i = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{3}$ $donde, \boldsymbol{n}\ número\ de\ divisiones\ y\ \frac{2}{3}\ longitud\ de\ cada\ division$

$X_0 = 0$, $X_1 = \frac{2}{3}$, $X_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, $X_3 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$



Nota:
El área $\boldsymbol{m_i}$ recibe el nombre de área por izquierda.
El área $\boldsymbol{M_i}$ recibe el nombre de área por derecha.
Para $\boldsymbol{m_i}$ se tiene

$Y_0 = (X_0)^2 = (0)^2 = 0$ $Y_1 = (X_1)^2 = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$ $Y_2 = (X_2)^2 = (\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$

El área bajo la curva es la suma de las áreas de cada rectángulo dicha suma se expresa con el símbolo $\sum llamado\ sumatoria$ ó $\sum_i^n sumatoria\ desde\ \boldsymbol{i}\ hasta\ \boldsymbol{n},$ donde $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}\ enteros$

$\sum_1^3 \Delta X_i . Y_i = \Delta X_1 . Y_0 + \Delta X_2 . Y_1 + \Delta X_3 . Y_2 = \left(\frac{2}{3}\right) . 0 + \left(\frac{2}{3}\right) . \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) . \left(\frac{16}{9}\right)$

$\sum_1^3 \Delta X_i . Y_i = 0 + \left(\frac{8}{27}\right) + \left(\frac{32}{27}\right) = \frac{40}{27} = 1{,}48$ luego $\boldsymbol{m_i} = 1{,}48$

Para $\boldsymbol{M_i}$ se tiene

$Y_1 = (X_1)^2 = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$, $Y_2 = (X_2)^2 = (\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$, $Y_3 = (X_2)^2 = (\frac{6}{3})^2 = \frac{36}{9}$

$\sum_1^3 \Delta X_i . Y_i = \Delta X_1 . Y_1 + \Delta X_2 . Y_2 + \Delta X_3 . Y_3 = \left(\frac{2}{3}\right) . \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) . \left(\frac{16}{9}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) . \left(\frac{36}{9}\right)$

$\sum_1^3 \Delta X_i . Y_i = \left(\frac{8}{27}\right) + \left(\frac{32}{27}\right) + \left(\frac{72}{27}\right) = \frac{112}{27} = 4{,}148$ luego $\boldsymbol{M_i} = 4{,}148$

R/ el área bajo la curva es: $\mathbf{1,48} < A < \mathbf{4,148}$

Nota: $\Delta X_i = \frac{b-a}{n}$ a, b limites del intervalo $[a, b]$ y n número de particiones.

El área calculada está determinada por la curva $y = x^2$, $x = 0$ y $x = 2$, esto equivale a determinar el área bajo la curva $y = x^2$ en el intervalo [0,2].

Observación: de las experiencias anteriores se observa que el valor del área bajo la curva $y = x^2$ en el intervalo [0,2] corresponde a la mayor cantidad de rectángulos bajo la curva. Algebraicamente:

$$A = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Resolver:

Utiliza el procedimiento descripto para determinar el área sombreada para cada situación y verificar la solución encontrada con GeoGebra.

a) Área bajo la curva $\boldsymbol{y = x}$ en el intervalo $[\mathbf{1}, \mathbf{3}]$, para $\boldsymbol{n} = \mathbf{6}$
b) Área bajo la curva $\boldsymbol{y = -x}$ en el intervalo $[\mathbf{1}, \mathbf{3}]$ para $\boldsymbol{n} = \mathbf{6}$
c) Compara los resultados anteriores y concluye.
d) ¿Es posible obtener un área negativa?
e) ¿Qué representara el signo menos del área obtenida en el literal b)?

5. Obtener por aproximación el área de las siguientes regiones:

a) Área bajo la curva $\boldsymbol{y = x^2 + 2}$ en el intervalo [0,2] para $\boldsymbol{n} = \mathbf{5}$
b) Área bajo la curva $\boldsymbol{y = x^3}$ en el intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{2}]$ para $\boldsymbol{n} = \mathbf{6}$
c) Área bajo la curva $\boldsymbol{y = x^3 + 2}$ en el intervalo [0,2] para $\boldsymbol{n} = \mathbf{5}$

Cibergrafia

http://dme.ufro.cl/clinicamatematica/pdf/Leithold%20-%20El%20Calculo%20-%20espa%C3%B1ol%20-%207ª.Ed.pdf

ENCONTREMOS EL ÁREA ENTRE CURVAS

"La razón o el juicio es la única cosa que nos hace hombres y nos distingue de los animales" ***René Descartes.***

Nombre(s): ____
Institución___________________ Grupo _______Fecha______________
No. Paginas: 4 Materiales: Lápiz, borrador , sacapuntas, cartulina, tijeras, computador con GeoGebra.

OBJETIVOS

- ✓ Utilizar la definición del área bajo una curva con valores de x entre a y b $a \leq x \leq b$.
- ✓ Determinar el área bajo una curva utilizando el teorema fundamental del cálculo.

IDEAS CLAVES

El área bajo una curva con valores para x entre a y b se determina así:

$$A = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i \Leftrightarrow A = \int_a^b f(x)\, dx, donde\ f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b],$$

con $f(x_i) = Y_i$.

Para obtener la suma n-esima de un entero positivo, se cuenta con el **teorema** siguiente:

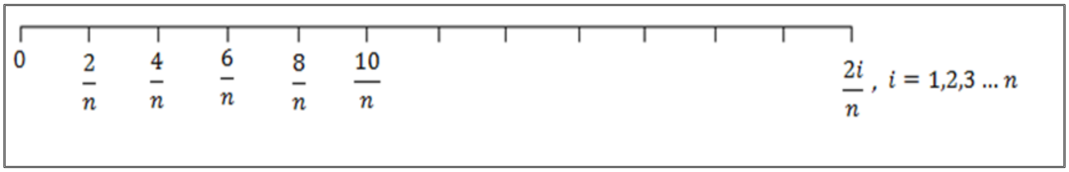
$$a)\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$b)\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$c)\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{6}$$

$$d)\ \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

Para determinar el valor exacto del área A, bajo la curva $y = x^2$, se supone una partición regular en el intervalo cerrado $[0,2]$ en n subintervalos. Entonces $\Delta\mathbf{x} = \frac{\mathbf{2-0}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{n}}$, como $\Delta x \to \infty, entonces\ n \to 0$



Escogiendo Y_i como punto extremo izquierdo de cada subintervalo se tiene:

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i = (0)^2\left(\frac{2}{n}\right) + \left(\frac{2}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right) + \left(\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right) + \left(\frac{6}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots\left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)$$

Siendo $i = 0,1,2,3,4 \ldots$

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{2i}{n}\right)^2 = \left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{4i^2}{n^2}\right) = \left(\frac{8i^2}{n^3}\right)$$

$$\lim_{\|\Delta x\|\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{8i^2}{n^3}\right) = 8\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i^2}{n^3}\right)\right]$$

$$8\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i^2}{n^3}\right)\right] = 8\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i^2}{n^3}\right) = 8\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{n^3}\right)\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$8\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right) = \frac{8}{6}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{n(2n^2+3n+1)}{n^3}\right]$$

$$\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{(2n^2+3n+1)}{6n^2}\right] = \frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{2n^2}{n^2} + \frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{3n}{n^2} + \frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} 2+\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{3}{n}+\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}(2)+(0)+(0)=\frac{8}{3}=2{,}666$$

$$A=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx=\int_0^2 x^2\,dx=\frac{8}{3}$$

La expresión $\int_a^b f(x)\,dx$, recibe el nombre de integral definida y para su cálculo inmediato se tiene el teorema $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$

Para este caso $y=x^2, se\ tiene\ \int_0^2 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{2^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{8}{3}-0=\frac{8}{3}$

En términos generales esto es: $\int_a^b x^n dx=\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$

Si $f(x)=c, siendo\ c\ una\ constante\ se\ tiene\ \int_a^b cdx=cx|_a^b=c(b-a)$

ACTIVIDADES:

1. Obtener el área bajo la respectiva curva encontrando el límite de la sumatoria $A=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$.

   a) Área bajo la curva $\boldsymbol{y=x^2+2}$ en el intervalo [0,2]
   b) Área bajo la curva $\boldsymbol{y=x^3}$ en el intervalo $[\mathbf{0},\mathbf{2}]$
   c) Área bajo la curva $\boldsymbol{y=x^3+2}$ en el intervalo [0,2]

2. Obtener el área bajo la respectiva curva utilizando los teoremas

   $\int_a^b x^n dx=\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$ y $\int_a^b cdx=cx|_a^b=c(b-a)$.

   a) Área bajo la curva $y=x^2+2$ en el intervalo [0,2]
   b) Área bajo la curva $\mathrm{y=x^3}$ en el intervalo [0,2]
   c) Área bajo la curva $y=x^3+2$ en el intervalo [0,2]

3. Dibuja en una hoja cuadriculada y colorea las áreas sombreadas indicadas en cada caso
    a) Área bajo la curva $y = 2x$ en el intervalo $[0,2]$ y $[1,3]$, compra ambos dibujos ¿son iguales las áreas sombreadas?
    b) Área bajo la curva $\mathrm{y} = 3\mathrm{x}^2$ en el intervalo $[0,2]$ y [1,2], compara ambos dibujos ¿son iguales las áreas sombreadas?

4. Determina las áreas bajo la curva $\mathrm{y} = 2\mathrm{x}$ en $[0,2]$ y luego en $[1,3]$, compara los resultados obtenidos y concluye.
5. Determina las áreas bajo la curva $y = 3x^2$ en $[0,2]$ y luego en $[1,3]$, compara los resultados obtenidos y concluye.

Cibergrafia

- http://dme.ufro.cl/clinicamatematica/pdf/Leithold%20-%20El%20Calculo%20-%20espa%C3%B1ol%20-%207ª.Ed..pdf

CONCLUSIONES

- Para el diseño de la unidad didáctica para la enseñanza del concepto de integral definida en la educación media, se trabajaron básicamente los métodos de Euclides, de Arquímedes y las sumas de Riemann.

- El texto de Ma. Guadalupe, Ricardo Cantoral Uriza, Una Aproximación Socio epistemológica Al Estudio De La Integral Definida, proporciono elementos claves para el diseño de la unidad didáctica.

- El software GeoGebra ha sido un buen mediador para determinar y visualizar el área de figuras planas e igualmente en el desarrollo de algunas aplicaciones para determinar el área bajo algunas curvas.

BIBLIOGRAFÍA

Libros

- Sosa G Mercedes, El taller estrategia educativa para el aprendizaje significativo (TEAS), circulo de lectura alternativa Ltda., 2002 pág 111.

- Leithold Louis, El Cálculo con Geometría Analítica, Sesta Edición, Arla Mexico, pág.1563.

Medios digitales

- Cabañas Sánchez Ma. Guadalupe, Ricardo Cantoral Uriza Una Aproximación Socio epistemológica Al Estudio De La Integral Definida http://cimate.uagro.mx/cantoral/Archivos%20PDF/CCF.pdf

- Guía para el diseño universal del aprendizaje (DUA),Versión castellana para uso interno en los estudios de Magisterio.UAM. 2008 http://UDLguidelines.wordpress.com

- López Navarro Manuel, Modelo para la programación de una unidad didáctica, http://www.edudactica.es/Docus/Recursos/Modelo%20Programar%20UD.pdf.

- Matemáticas visuales, http://www.matematicasvisuales.com/

- Salazar Hoyos Wilson Jovany, Introducción al Calculo a Través de Algunas Curvas Especiales, Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, Noviembre 2011.