



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# DISPERSION DE INSECTOS

EDUARDO ESTRADA KASSIR

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad Ciencias  
Departamento de Matemáticas  
Bogotá, Colombia  
2013



# Dispersión de insectos.

Eduardo Estrada Kassir

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Matemática Aplicada

Director

Ph. D. Jorge Mauricio Ruiz V.

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad Ciencias, Departamento Matemáticas  
Bogotá, Colombia  
2013



# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>v</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Introducción</b>	<b>xi</b>
<b>1. Modelación matemática.</b>	<b>1</b>
1.1. Modelo logístico . . . . .	2
1.2. Modelo de camino aleatorio. . . . .	4
1.3. Coeficiente de difusión no lineal. . . . .	11
<b>2. Soluciones analíticas.</b>	<b>13</b>
2.1. Problema de valor inicial en una dimensión. . . . .	13
2.1.1. Solución caso lineal ( $m=0$ ). . . . .	15
2.1.2. Solución caso no lineal ( $m>0$ ). . . . .	18
2.2. Problema de valor inicial en dos dimensiones. . . . .	24
<b>3. Solución de la ecuación de difusión con variaciones.</b>	<b>35</b>
3.1. Solución con crecimiento exponencial. . . . .	35
3.2. Solución con advección en el estado estacionario. . . . .	53
<b>4. Simulación numérica</b>	<b>57</b>
4.1. Solución numérica de la ecuación de difusión lineal. . . . .	57
4.2. Solución numérica de la ecuación de difusión con natalidad y/o mortalidad. . . . .	61
<b>5. Caso de estudio</b>	<b>65</b>
5.1. Dispersión de la abeja africanizada . . . . .	65
5.2. Simulación a partir de elementos finitos. . . . .	68
<b>6. Conclusiones</b>	<b>71</b>

<b>A. Algunas funciones especiales</b>	<b>73</b>
A.0.1. Función signo. . . . .	73
A.0.2. Función error. . . . .	73
A.0.3. Función gamma. . . . .	73
A.0.4. Función Beta . . . . .	73
<b>B. Método de autosimilaridad.</b>	<b>75</b>
<b>C. Solución con D constante.</b>	<b>77</b>
<b>D. Programas en MatLab.</b>	<b>79</b>
<b>Bibliografía.</b>	<b>85</b>

# Dedicatoria

A Dios por darme la fuerza para superar los inconvenientes presentados y permitirme encontrar el camino para llegar hasta aquí.

A mis padres, mis hijos Camilo, Ana Lucía, Laura Sofía y Daniel Eduardo, y a mi esposa Amanda por el sacrificio y ser la motivación de mis logros.



# Agradecimientos

El autor del presente trabajo agradece a quienes de alguna forma colaboraron con el desarrollo del mismo. Reconocimiento a los profesores Jesús Fernando Novoa director del departamento de matemáticas de la Pontificia Universidad Javeriana y Edgar Vargas director del programa de Ingeniería de la Universidad Jorge Tadeo Lozano por el estímulo, al profesor Nelson Sánchez Sánchez por su colaboración en las presentaciones realizadas en los diferentes seminarios de investigación donde se presentaron adelantos de este trabajo, a mis colegas Héctor Linares, Liliana Barreto, Moises Aranda, Vladimir Moreno y Ricardo Contento por su continuo apoyo, y de forma muy especial al director de este trabajo, profesor Jorge Mauricio Ruiz Vera, cuyo interés y apoyo académico fueron constantes durante todo el desarrollo de esta tesis.



# Resumen

En el siguiente trabajo se deduce un modelo para estudiar la dinámica espacio-temporal de una población considerándola como un proceso de difusión, el enfoque a considerar es una consecuencia del modelo de camino aleatorio, luego se resuelve el modelo básico en forma analítica en una y dos dimensiones, considerando inicialmente el coeficiente de difusión constante y luego considerándolo dependiente de la densidad de población. Se consideran y resuelven en forma analítica las siguientes variaciones del modelo de difusión, el crecimiento exponencial a partir de la natalidad y la mortalidad, el crecimiento logístico a partir de la competencia entre individuos de la misma población y la advección a partir del transporte. Como tal el modelo matemático está determinado por una ecuación diferencial parcial parabólica no lineal, la cual se resuelve en forma exacta utilizando el método autosimilaridad de Boltzmann. Se realizan simulaciones numéricas a partir del esquema de diferencias divididas y del método explícito de Euler, para los diferentes escenarios y como caso de estudio particular se considera la dispersión de la abeja africanizada en Suramérica desde su introducción en Brasil, realizando simulaciones numéricas a partir del método de elementos finitos.

**Palabras clave:** Modelo de camino aleatorio, coeficiente de difusión no lineal, autosimilaridad, escalamiento, solución radial, método en Euler, método de elementos finitos.

## Abstract

In this paper follows a model to study the spatiotemporal dynamics of a population regarding it as a diffusion process, the approach to consider is a consequence of the random walk model, then the basic model is solved analytically in one and two dimensions initially considering the diffusion coefficient constant and then considering dependent density. Are considered and solved analytically in the following variations in the diffusion model, the exponential growth from birth and mortality, logistic growth from competition between individuals of the same population and advection from transportation. As such, the mathematical model is determined by a parabolic partial differential equation nonlinear, which is resolved accurately using the self-similarity of Boltzmann method. Numerical simulations are performed from the divided difference scheme and explicit Euler method for different scenarios and as a particular case study considered the dispersion of the Africanized bee in South America since its introduction in Brazil, performing numerical simulations from finite elements method.

**Keywords:** Random walk model, nonlinear diffusion coefficient, self-similarity, scaling, Euler method, finite elements method.



# Introducción

En la naturaleza, muchos organismos migran o se dispersan en cierta medida, esa dispersión puede ser voluntaria (natural) cuando un organismo deja a sus sitios natales, o cuando el hábitat de un organismo se deteriora, o puede ser involuntaria (artificial) cuando por ejemplo el hombre ocasiona migraciones o redistribuciones que naturalmente no eran posibles por los propios animales por barreras insuperables tales como océanos, cadenas montañosas, ríos y zonas climáticamente hostiles. Entre las consecuencias de mayor alcance de este reordenamiento se encuentra el incremento de los invasores biológicos, que son especies que se establecen en nuevas áreas en las cuales proliferan, se distribuyen y persisten en detrimento de especies y ecosistemas nativos.

La invasión biológica es un área importante de investigación en biología matemática y más aún si se trata de especies que son vectores de enfermedades que amenazan la salud pública de grandes poblaciones. Por otra parte la migración, el cambio climático y la creación de nuevos hábitats provocan que menos gente desarrolle una inmunidad natural a estas enfermedades, el control de las enfermedades es costoso y las epidemias inciden negativamente en el desarrollo socioeconómico de los países. Sin la perspectiva de una vacuna eficaz y barata en un futuro próximo, cualquier política pública viable para el control de las epidemias necesariamente debe incluir estrategias apropiadas para reducir al mínimo el factor de población de vectores, ya que la invasión de estos a menudo causa grandes daños a la agricultura, la silvicultura y la salud humana, tanto como agentes directos de enfermedades o como vectores o portadores de enfermedades causadas por parásitos.

En ecología la migración corresponde a desplazamientos periódicos, estacionales o permanentes, de especies animales, de un hábitat a otro, mientras que la dispersión es la capacidad que tiene una población de colonizar nuevos hábitats, por pequeños desplazamientos al azar de sus individuos, quienes se instalan en lugares un poco alejados del lugar en que fueron engendrados.

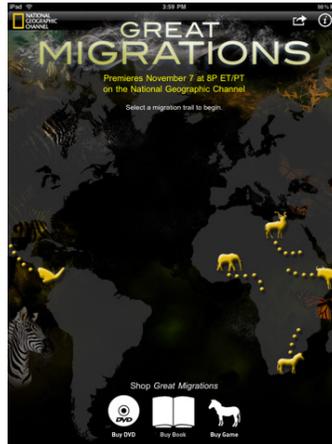


Fig.0.1. Documental de National Geographic sobre grandes migraciones.<sup>1</sup>

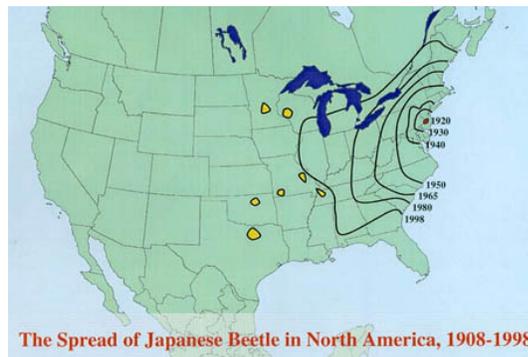


Fig. 0.2. Dispersión del escarabajo japonés en Norte América desde 1908 hasta 1998.<sup>2</sup>

El concepto de difusión puede verse como la tendencia de que un grupo de organismos inicialmente concentrados cerca de una posición en el espacio (nicho) se dispersen en el tiempo ocupando un área cada vez mayor alrededor del punto inicial. Desde el punto de vista práctico es interesante estudiar cómo es la dispersión de insectos si es conocido su nicho (humedal, pantano, laguna, etc) y hasta donde espacialmente la población puede llegar, para dar políticas de control de la plaga. Los modelos de difusión constituyen una base razonable para el estudio de la dispersión de insectos,

<sup>1</sup>Tomado de <http://www.nationalgeographic.es/animales/grandes-migraciones>

<sup>2</sup>Tomado de The spread of the Japanese beetle in North America. (Ohio State University, [http://www.oardc.ohio-state.edu/biocontrol/images/jb\\_map.jpg](http://www.oardc.ohio-state.edu/biocontrol/images/jb_map.jpg))

muchas especies se dispersan según un modelo de reacción difusión con un coeficiente de difusión constante [14], pero una característica común de las poblaciones de insectos es su crecimiento discreto en tiempo causando un efecto importante en su dispersión espacial [9][43]. También hay modelos de ecuaciones que implican un acoplamiento de tiempo discreto con espacio continuo en [15][25], la modelación de poblaciones biológicas en espacio y tiempo se ilustra en [33] y la distribución espacial de dos poblaciones que compiten cuyas difusiones se solapan en regiones con condiciones de contorno de Dirichlet en [23]. Modelos de reacción difusión como sistemas dinámicos se presentan en [5], modelos de difusión espacial de dinámica de poblaciones de paso aleatorio utilizando cadenas de Markov en [11], se presenta un modelo matemático de advección y difusión para explicar la distribución espacial de la población de animales que son controlados principalmente por la interferencia entre los individuos y otras condiciones ambientales. Clasificación de la dispersión de los animales en dispersión aleatoria y dispersión dependiente de la densidad haciendo énfasis en la importancia de esta última desde el punto de vista de la dinámica de la población [13].

Existen varios textos y artículos que tratan sobre la problemática de la invasión de insectos como la morfología, la ecología y la distribución de especies de mosquitos, y su control en [3]; un modelo basado en agentes del mosquito *Aedes aegypti*, considerando la dinámica de la población de mosquitos y una estrategia de control específicos de la población, así como la propagación del dengue en [12]; un modelo estocástico espacial de las poblaciones de *Aedes Aegypti* basado en el ciclo de vida del mosquito y su dispersión en [31]; un modelo para estudiar la propagación del dengue mediante un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de reacción-difusión en [6]; modelos matemáticos diseñados para describir la dinámica vital y la dispersión del *Aedes Aegypti*, con el fin de destacar los procedimientos para la minimización de su impacto como un vector del dengue en [40]; modelos matemáticos de dinámica de la malaria humana en ambientes espacialmente homogéneos y en ambientes espacialmente fragmentados en [2]. Un modelo para estudiar la propagación del dengue usando un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de reacción-difusión, se supone que un área esta previamente colonizada por los mosquitos y la velocidad de propagación de la enfermedad se determina como una función de los parámetros del modelo en [6]. La propagación de las abejas africanizadas ha sido considerada una de las invasiones biológicas más notables del siglo XX. [19].

En muchos tipos de seres vivos no solo se observa el crecimiento de la población en el tiempo, sino también en espacio ya que debido a problemas de subsistencia de la especie, los individuos se ven obligados a desplazarse en búsqueda de nuevos lugares (medios) para sobrevivir y para reproducirse. Por esto el proposito principal de este proyecto es el estudio de la propagación en espacio y tiempo de una población de insectos en regiones vecinas a su habitat, a partir de un modelo matemático determinado por medio de una ecuación diferencial parcial parabólica no lineal denominada ecuación de difusión, la solución analítica se realiza a partir del método de autosimilaridad, la solución numérica mediante el método de diferencias finitas y la simulación del caso particular de estudio se realiza utilizando elementos finitos.

Este documento está desarrollado de la siguiente manera: en el primer capítulo a partir del modelo de camino aleatorio y de la serie de Tylor se deduce el modelo de difusión básico y con las siguientes variaciones, el crecimiento exponencial a partir de la natalidad y la mortalidad, el crecimiento logístico a partir de la competencia entre individuos de la misma población y la advección a partir del transporte, a partir del modelo de camino aleatorio y por último se hace énfasis en el coeficiente de difusión no lineal; en el segundo capítulo se resuelve en forma analítica el modelo básico lineal y

no lineal deducido en el capítulo 1, a partir de una ecuación diferencial parcial de segundo orden en una y dos dimensiones, por simplicidad en dos dimensiones se considera la forma radial; en el tercer capítulo de manera similar al capítulo 2 se resuelve en forma analítica el modelo de difusión con las variaciones deducidas en el capítulo 1; el cuarto capítulo se enfoca en la simulación numérica partir de diferencias finitas y del método explícito de Euler, de los modelos básico, con crecimiento exponencial y con crecimiento logístico; por último en el quinto capítulo se analiza como caso de estudio, la abeja africanizada y su dispersión en Suramérica a partir del método de elementos finitos.

# Capítulo 1

## Modelación matemática.

La dinámica de poblaciones es uno de los temas de mayor importancia para entender la propagación en tiempo y espacio de grupos de organismos de la misma especie que se desarrollan en distintos ambientes. Una población es considerada como un grupo de organismos de la misma especie, que habitan un lugar determinado, en el cual utilizan recursos y se reproducen. Este grupo de organismos está caracterizado básicamente por una serie de propiedades como son: la densidad, cantidad de individuos en función del espacio o volumen que ocupan; la reacción característica propia de cada población determinada por la natalidad y la mortalidad, que se miden en tasas que corresponden al número de nacimientos y muertes que se producen en una población por unidad de tiempo; la migración es el balance entre inmigración y emigración si estas se producen; y la competencia.

La dinámica de dispersión está caracterizada por los movimientos dentro de la población y la migración. Los movimientos dentro de la población se realizan en el espacio ocupado por ella. La migración se produce cuando una población o parte de ella abandona o coloniza un espacio, distinguiéndose varias formas: (1) La emigración o el abandono definitivo del área para ocupar otra donde existen condiciones adecuadas; (2) La inmigración o la ocupación de otra parte del área, donde ya existe la especie, generalmente por el aumento de densidad; (3) La permigración cuando sólo pasan por el área sin ocuparla; (4) La invasión o la ocupación de una nueva área donde antes no se encontraba; y (5) La translocación o el abandono total de un área.

La dinámica de densidad es la oscilación en la concentración de los individuos de una población en el área, los cambios de densidad en el espacio pueden ser graduales u ofrecer determinadas zonas de fluctuación causadas por el clima, la orografía (laderas, planicies), el suelo, la vegetación, el equilibrio trófico, etc. La dinámica del crecimiento poblacional cómo tal es el aumento de la población en el tiempo, descontando la mortalidad.

El propósito de este capítulo es deducir un modelo para estudiar la dinámica espacio-temporal de una población considerándola como un proceso de difusión, el enfoque a considerar es una consecuencia del modelo de camino aleatorio introducido en [39] y profundizado en [30], discretizando el espacio y el tiempo. Supondremos inicialmente que los individuos ni se reproducen ni mueren, luego a partir del modelo logístico podremos considerar algunas variaciones del modelo de difusión como son la natalidad, la mortalidad, la competencia y la advección. Especialmente nos enfocaremos en cómo se propaga una población en una región (espacial) a través del tiempo y el espacio, cuando

esta inicialmente se concentra en un punto. Finalmente consideraremos el coeficiente de difusión constante y variable (dependiendo de la densidad).

## 1.1. Modelo logístico

Los modelos matemáticos básicos que intentan describir cómo la población de una especie evoluciona en el tiempo son el modelo de Malthus y el modelo logístico. En primer lugar consideremos el crecimiento de una población en función de la natalidad y mortalidad, sin que se tengan en cuenta otros fenómenos que pudieran afectar la densidad. El modelo más simple de crecimiento de una población cuyo número de individuos se incrementa a una tasa proporcional a la población en ese instante es conocido como incremento exponencial y se describe por medio de la ecuación diferencial Maltusiana

$$\frac{dn}{dt} = \mu n \quad (1.1)$$

donde  $n = n(t)$  es la densidad de población en el tiempo  $t$ ,  $\mu = b - d$  es la tasa intrínseca de crecimiento, diferencia entre la tasa de natalidad  $b$  (número de nacimientos que se producen por unidad de tiempo) y la tasa de mortalidad  $d$  (número de muertes por unidad de tiempo).

Resolviendo (1.1) con la condición inicial  $n = n_0$  para  $t = 0$ , por separación de variables obtenemos

$$n(t) = n(0)e^{\mu t}. \quad (1.2)$$

En la Figura 1.1. se ve que si  $\mu > 0$  la natalidad es mayor que la mortalidad ( $b > d$ ) la población crece exponencialmente sin límite, si  $\mu < 0$  la mortalidad es mayor que la natalidad ( $b < d$ ) la población decrece exponencialmente y tiende a extinguirse, y si  $\mu = 0$  la natalidad es igual a la mortalidad ( $b = d$ ) la población permanece constante.

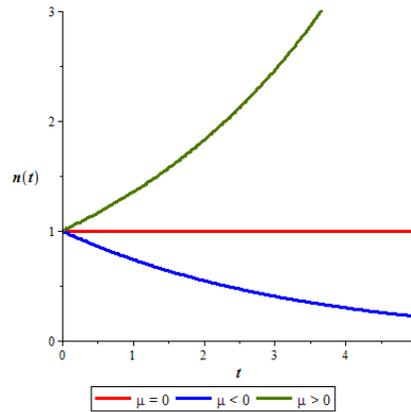


Fig. 1.1. Densidad de población utilizando el modelo de Malthus para  $\mu = 0$ ,  $\mu < 0$ ,  $\mu > 0$

En la Figura 1.2 se ve que a medida que  $n(0)$  aumenta, la densidad de la población es mayor.

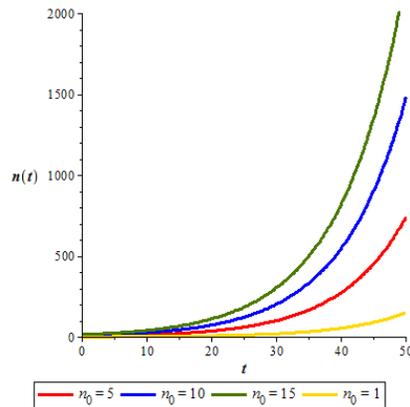


Fig. 1.2. Densidad de población utilizando el modelo de Malthus para  $\mu = 0.1$ ,  $n(0) = 1, 5, 10, 15$ .

Una variación de este modelo viene dada por el modelo logístico, propuesto por el matemático belga P. F. Verhulst en 1836. La idea de Verhulst fue mejorar el modelo de Malthus introduciendo la competencia entre los individuos de la especie en estudio como un factor que altera los nacimientos y/o las muertes. A medida que el tamaño de la población crece, los recursos disminuyen proporcionalmente, cada individuo nuevo resta una proporción de alimentos y espacio a los recursos existentes, la densidad de la población debe llegar necesariamente a un límite cuando todos los individuos tengan su porción de recursos. En este modelo, la natalidad y la mortalidad estarán compensadas y los recursos serán explotados de forma óptima, y el modelo es de la forma

$$\frac{dn}{dt} = \mu \left(1 - \frac{n}{k}\right) n \quad (1.3)$$

ecuación logística, donde  $k$  es la capacidad de carga (densidad máxima de individuos que puede soportar un medio) y está dada por  $k = \frac{\mu}{\omega}$  con  $\omega \neq 0$ , donde  $\omega$  representa el efecto de la competencia intraespecífica en la tasa de reproducción.

Resolviendo (1.3) con la condición inicial  $n = n_0$  para  $t = 0$ , por el método de separación de variables obtenemos

$$n(t) = n(0) \frac{ke^{\mu t}}{k + n(0)(e^{\mu t} - 1)}. \quad (1.4)$$

En la Figura 1.3 se ve que a medida que el tiempo aumenta la solución tiende a la capacidad de carga  $k$  y analíticamente utilizando la regla de L'Hopital  $\lim_{t \rightarrow \infty} n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} n(0) \frac{ke^{\mu t}}{k + n(0)(e^{\mu t} - 1)} = k$ .

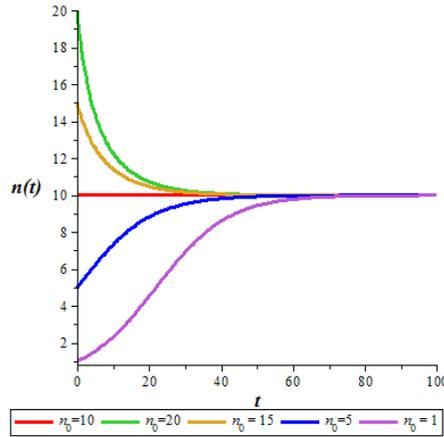


Fig. 1.3. Densidad de población utilizando el modelo de Verhulst para  $\mu = 0.01$ ,  $k = 10$ ,  $n(0) = 1, 5, 10, 15, 20$ .

Estos modelos son simples pues solo consideran evolución temporal de una población y para estar más cercanos a la realidad además de estar interesados en la evolución temporal debemos estar interesados en la propagación espacial de la población, pues la dinámica de una población es su desarrollo en el tiempo y en el espacio, y está determinada por factores que actúan en el organismo, en la población y en el medio ambiente. Una manera de construir un modelo para esta dinámica es considerándola como un proceso de difusión y advección; como es sabido el punto de partida de la teoría de la difusión es el modelo de camino aleatorio o de vuelo aleatorio.

## 1.2. Modelo de camino aleatorio.

Consideremos un espacio de una dimensión donde cada individuo se mueve una distancia corta  $\lambda$  a la derecha o a la izquierda en un intervalo de tiempo  $\tau$ . Si el movimiento se asume completamente aleatorio e isotrópico, la probabilidad de que un individuo se mueva a algún lado (derecha o izquierda) es de  $1/2$ . Después de un tiempo  $\tau$  una población dada se extiende una distancia  $\lambda$  del origen, la mitad de la población se mueve a la derecha y la otra mitad de la población lo hace a la izquierda, lo que no sabemos es que individuos pertenecen a cada mitad. En el siguiente intervalo de tiempo  $\tau$  nuevamente la mitad de la población se mueve a la derecha una distancia  $\lambda$  y la otra mitad de la población se mueve una distancia  $\lambda$  a la izquierda, o sea la probabilidad de que un individuo de la población se mueva a la derecha o a la izquierda es de  $1/2$ , independiente del movimiento anterior. Además  $1/4$  de la población se encuentra a una distancia  $2\lambda$  a la derecha del origen,  $1/4$  de la población se encuentra a una distancia  $2\lambda$  a la izquierda del origen y la mitad de la población se encuentra nuevamente en el origen. Nos interesa saber qué ocurre con la distribución espacial de la población después de que han pasado  $n\tau$  intervalos de tiempo. Claramente después de que han pasado  $l\tau$  intervalos de tiempo, un individuo ocupará uno de los puntos  $-l, -l+2, \dots, l+2, l$ . Sin embargo la distribución espacial de la población no es uniforme, pues un individuo que ocupa el punto más lejano a la derecha  $l$ , ha llegado allí por repetir el movimiento a la derecha  $l$  veces

sucesivamente, la probabilidad de que esto ocurra es muy pequeña cuando  $l$  es muy grande. Consideremos ahora la probabilidad de que un individuo arribe desde un punto  $m$  pasos a la derecha del origen, después de que han pasado  $l\tau$  tiempos. (asuma que  $l + m$  es par).

Vamos a considerar la probabilidad de que un individuo vuelva al origen desde un punto  $m$  pasos a la derecha del origen, después de que han pasado  $n\tau$  tiempos. (asuma que  $n + m$  es par). Si, para llegar a ese punto, un individuo ha pasado  $d$  pasos a la derecha y  $i$  pasos a la izquierda, entonces  $d - i = m$  y  $d + i = l$ ,  $d = \frac{l + m}{2}$  e  $i = \frac{l - m}{2}$ .

El número de posibles caminos por los cuales el individuo puede llegar desde el origen a un punto  $m$  es conocido en la teoría de combinatoria como

$$C(l, d) = \frac{l!}{d!(l-d)!} = \frac{l!}{\{(l+m)/2\}!\{(l-m)/2\}!}. \quad (1.5)$$

Además como las probabilidades de arribar desde la izquierda y desde la derecha son iguales entonces el número total de posibles caminos de  $l$  pasos es  $2^l$  y la probabilidad de que un individuo pueda arribar al origen desde un punto  $m$  después de  $l$  pasos es

$$P(m, l) = \frac{C(l, a)}{2^l} = \frac{1}{2^l} \frac{l!}{\{(l+m)/2\}!\{(l-m)/2\}!}. \quad (1.6)$$

La ecuación (1.6) es conocida como la distribución de Bernoulli (también distribución binomial)

Si el movimiento se asume completamente aleatorio y no es isotrópico, suponemos que la probabilidad de que un individuo se mueva a la derecha es igual a  $p$  y la probabilidad de que se mueva a la izquierda es igual a  $q$  (con  $q = 1 - p$  por axioma de la probabilidad). Denotando por  $n_i^k$  (ver Figura 1.4) el tamaño de la población en el punto  $i$  después de  $k$  pasos, entonces la población en el punto  $i$  después del siguiente paso es la suma de aquellos que permanecen sin moverse  $(1 - p - q)n_i^k$ , los que llegan de los puntos adyacentes  $qn_{i+1}^k + pn_{i-1}^k$ , los que nacen(y/o mueren)  $\mu n_i^k$  y  $\omega (n_i^k)^2$  la competencia entre los individuos. Por lo tanto tenemos

$$n_i^{k+1} = (1 - p - q)n_i^k + qn_{i+1}^k + pn_{i-1}^k + \mu n_i^k - \omega (n_i^k)^2 \quad (1.7)$$



Fig. 1.4. Modelo de camino aleatorio en una dimensión para  $t = k, k + 1, k + 2$ .

Si hacemos  $x = i\Delta x$  y  $t = k\Delta t$ , y suponemos que  $\Delta x$  y  $\Delta t$  son suficientemente pequeños, podemos reescribir la ecuación (1.7) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} n(x, t + \Delta t) - n(x, t) &= (1 - p - q)n(x, t) + qn(x + \Delta x, t) + pn(x - \Delta x, t) - n(x, t) + \mu n(x, t) - \omega n^2(x, t) \\ &= qn(x + \Delta x, t) - (p + q)n(x, t) + pn(x - \Delta x, t) + \mu n(x, t) - \omega n^2(x, t) \\ &= \frac{1}{2}(p + q)\{n(x + \Delta x, t) - 2n(x, t) + n(x - \Delta x, t)\} \\ &\quad - \frac{1}{2}(p - q)\{n(x + \Delta x, t) - n(x - \Delta x, t)\} + \mu n(x, t) - \omega n^2(x, t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde  $n(x, t)$  determina la densidad de población en la posición  $x$  y en el tiempo  $t$ .

De la ecuación (1.8) se observa que si  $n(x, t)$  es dos veces continuamente diferenciable en  $x$  y en  $t$ , del desarrollo en serie de Taylor con respecto a  $x$  tenemos que

$$n(x, t + \Delta t) = n(x, t) + n_t(x, t)\Delta t + O((\Delta t)^2),$$

luego

$$n(x, t + \Delta t) - n(x, t) = n_t(x, t)\Delta t + O((\Delta t)^2). \quad (1.9)$$

Además utilizando desarrollos en series de Taylor respecto a  $x$  en forma progresiva y en forma regresiva observamos que

$$n(x + \Delta x, t) = n(x, t) + n_x(x, t)\Delta x + \frac{n_{xx}(x, t)}{2}(\Delta x)^2 + O((\Delta x)^3), \quad (1.10)$$

$$n(x - \Delta x, t) = n(x, t) - n_x(x, t)\Delta x + \frac{n_{xx}(x, t)}{2}(\Delta x)^2 - O((\Delta x)^3), \quad (1.11)$$

restando (1.11) a (1.10) obtenemos

$$n(x + \Delta x, t) - n(x - \Delta x, t) = n_x(x, t)(2\Delta x) + O((\Delta x)^3), \quad (1.12)$$

y expandiendo de la misma forma con más términos

$$n(x + \Delta x, t) = n(x, t) + n_x(x, t)\Delta x + \frac{n_{xx}(x, t)}{2}(\Delta x)^2 + \frac{n_{xxx}(x, t)}{6}(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4), \quad (1.13)$$

$$n(x - \Delta x, t) = n(x, t) - n_x(x, t)\Delta x + \frac{n_{xx}(x, t)}{2}(\Delta x)^2 - \frac{n_{xxx}(x, t)}{6}(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4), \quad (1.14)$$

sumando (1.13) con (1.14) obtenemos

$$n(x + \Delta x, t) - 2n(x, t) + n(x - \Delta x, t) = \frac{n_{xx}(x, t)(\Delta x)^2}{2} + O((\Delta x)^4). \quad (1.15)$$

Reemplazando (1.9), (1.12) y (1.15) en (1.8) obtenemos

$$n_t(x, t)\Delta t + O((\Delta t)^2) = \frac{1}{2}(p+q)n_{xx}(x, t)(\Delta x)^2 - \frac{1}{2}(p-q)n_x(x, t)(2\Delta x) + O((\Delta x)^4) + \mu n(x, t) - \omega n^2(x, t). \quad (1.16)$$

Si tomamos límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ , y además suponemos que  $(p+q)\Delta x^2$  y  $(p-q)\Delta x$  decrecen con el mismo orden de magnitud de  $\Delta t$ , es decir, si

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow (0,0)} \frac{(p+q)\Delta x^2}{2\Delta t} \rightarrow D \quad \text{y} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow (0,0)} \frac{(p-q)\Delta x}{\Delta t} \rightarrow v \quad \text{existen,}$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión que describe la rapidéz con que se dispersan ciertos individuos y  $v$  es el coeficiente de advección que describe la velocidad de transporte, obtenemos

$$n_t(x, t) = Dn_{xx}(x, t) - vn_x(x, t) + \mu n(x, t) - \omega n^2. \quad (1.17)$$

Si en (1.17) consideramos un recorrido isotrópico el término advectivo desaparece y si además no hay nacimientos y/o muertes, ni competencia la ecuación se reduce a

$$n_t(x, t) = Dn_{xx}(x, t). \quad (1.18)$$

Por lo tanto la propagación espacial de una especie puede describirse básicamente por el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} n_t(x, t) = Dn_{xx}(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ n(x, 0) = f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}, \\ \int_{\mathbb{R}} n(x, t) dx = E_0 & \text{si } t \geq 0, \end{cases} \quad (1.19)$$

donde  $n_0(x)$  es la densidad en el tiempo  $t = 0$ , y  $E_0$  denota la población total o masa (biológicamente se denomina biomasa). Esta ecuación diferencial modela un proceso de transporte de masa por difusión el cual es conservativo.

Básicamente existen dos mecanismos diferentes que hacen que el tamaño de la población varíe con el tiempo: el asociado con los procesos locales, tales como el nacimiento, la muerte, la depredación, la competencia y el otro asociado con una redistribución de la población en el espacio debido al movimiento de sus individuos.

Si en el modelo (1.17) no hay competencia entre los individuos ni advección, la ecuación del modelo corresponde a la ley de Malthus, cuya forma ahora es igual a

$$n_t(x, t) = Dn_{xx}(x, t) + \mu n(x, t), \text{ con } \mu \text{ constante} \quad (1.20)$$

Ahora bien, si en el modelo (1.17) no hay advección entonces la tasa de crecimiento de la población se ve disminuida por el término  $\omega n^2(x, t)$  y la ecuación del modelo corresponde a la ley de Verhulst, cuya forma ahora es igual a

$$n_t(x, t) = Dn_{xx}(x, t) + \mu n(x, t) - \omega n^2(x, t), \text{ con } \mu \text{ y } \omega \text{ constantes} \quad (1.21)$$

Como extensión del modelo de camino aleatorio en una dimensión consideremos ahora el modelo en dos dimensiones. Si el movimiento se asume completamente aleatorio y no es isotrópico, suponemos ahora que la probabilidad de que un individuo se mueva a la derecha es igual a  $p$ , la probabilidad de que se mueva a la izquierda es igual a  $q$ , la probabilidad de que se mueva arriba es igual a  $r$  y la probabilidad de que se mueva abajo es igual a  $s$  (con  $p + q + r + s = 1$  por axioma de la probabilidad). Denotando por  $n_{i,j}^k$  (ver Figura 1.5) el tamaño de la población en el punto  $i, j$  después de  $k$  pasos, entonces la población en el punto  $i, j$  después del siguiente paso es la suma de aquellos que permanecen sin moverse  $(1 - p - q - r - s)n_{i,j}^k$ , los que llegan de los puntos adyacentes  $qn_{i+1,j}^k + pn_{i-1,j}^k + sn_{i,j+1}^k + rn_{i,j-1}^k$ , los que nacen(y/o mueren)  $\mu n_{i,j}^k$  y  $\omega (n_{i,j}^k)^2$  la competencia entre los individuos. Por lo tanto tenemos

$$n_{i,j}^{k+1} = (1 - p - q - r - s)n_{i,j}^k + qn_{i+1,j}^k + pn_{i-1,j}^k + sn_{i,j+1}^k + rn_{i,j-1}^k + \mu n_{i,j}^k - \omega (n_{i,j}^k)^2 \quad (1.22)$$

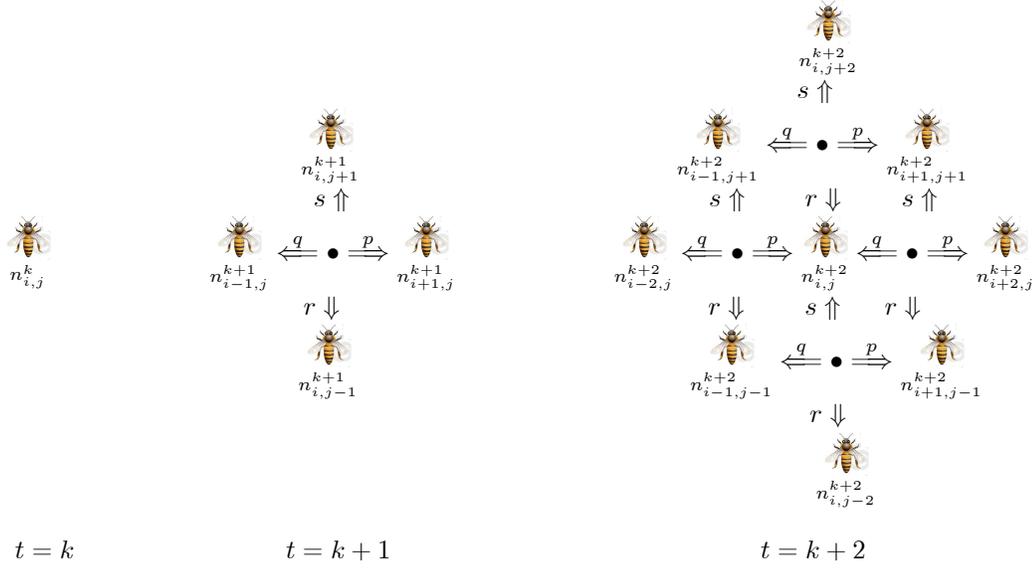


Fig. 2.9. Modelo de camino aleatorio en dos dimensiones para  $t = k, k + 1, k + 2$ .

Si hacemos  $x = i\Delta x$ ,  $y = j\Delta y$  y  $t = k\Delta t$ , y suponemos que  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$  son suficientemente pequeños, podemos reescribir la ecuación (1.22) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 n(x, y, t + \Delta t) - n(x, y, t) &= (1 - p - q - r - s)n(x, y, t) + qn(x + \Delta x, y, t) + pn(x - \Delta x, y, t) \\
 &\quad + sn(x, y + \Delta y, t) + rn(x, y - \Delta y, t) + \mu n(x, y, t) - \omega n^2(x, y, t) \\
 &= qn(x + \Delta x, y, t) + sn(x, y + \Delta y, t) - (p + q + r + s)n(x, y, t) \\
 &\quad + pn(x - \Delta x, y, t) + rn(x, y - \Delta y, t) + \mu n(x, y, t) - \omega n^2(x, y, t) \\
 &= \frac{1}{2}(p + q)\{n(x + \Delta x, y, t) - 2n(x, y, t) + n(x - \Delta x, y, t)\} \\
 &\quad - \frac{1}{2}(p - q)\{n(x + \Delta x, y, t) - n(x - \Delta x, y, t)\} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(r + s)\{n(x, y + \Delta y, t) - 2n(x, y, t) + n(x, y - \Delta y, t)\} \\
 &\quad - \frac{1}{2}(r - s)\{n(x, y + \Delta y, t) - n(x, y - \Delta y, t)\} + \mu n(x, y, t) - \omega n^2(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

donde  $n(x, t)$  determina la densidad de población en la posición  $(x, y)$  y en el tiempo  $t$ .

De la ecuación (1.23) se observa que si  $n(x, y, t)$  es dos veces continuamente diferenciable en  $(x, y)$  y en  $t$ , del desarrollo en serie de Taylor con respecto a  $x$  tenemos que

$$n(x, y, t + \Delta t) = n(x, y, t) + n_t(x, y, t)\Delta t + O((\Delta t)^2),$$

luego

$$n(x, y, t + \Delta t) - n(x, y, t) = n_t(x, y, t)\Delta t + O((\Delta t)^2). \quad (1.24)$$

Además utilizando desarrollos en series de Taylor respecto a  $x, y$  en forma progresiva y en forma regresiva observamos que

$$n(x + \Delta x, y, t) = n(x, y, t) + n_x(x, y, t)\Delta x + \frac{n_{xx}(x, y, t)}{2}(\Delta x)^2 + O((\Delta x)^3), \quad (1.25)$$

$$n(x - \Delta x, y, t) = n(x, y, t) - n_x(x, y, t)\Delta x + \frac{n_{xx}(x, y, t)}{2}(\Delta x)^2 - O((\Delta x)^3), \quad (1.26)$$

restando (1.26) a (1.25) obtenemos

$$n(x + \Delta x, y, t) - n(x - \Delta x, y, t) = n_x(x, y, t)(2\Delta x) + O((\Delta x)^3), \quad (1.27)$$

y expandiendo de la misma forma con más términos

$$n(x + \Delta x, y, t) = n(x, y, t) + n_x(x, y, t)\Delta x + \frac{n_{xx}(x, y, t)}{2}(\Delta x)^2 + \frac{n_{xxx}(x, y, t)}{6}(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4), \quad (1.28)$$

$$n(x - \Delta x, y, t) = n(x, y, t) - n_x(x, y, t)\Delta x + \frac{n_{xx}(x, y, t)}{2}(\Delta x)^2 - \frac{n_{xxx}(x, y, t)}{6}(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4), \quad (1.29)$$

sumando (1.28) con (1.29) obtenemos

$$n(x + \Delta x, y, t) - 2n(x, y, t) + n(x - \Delta x, y, t) = \frac{n_{xx}(x, y, t)(\Delta x)^2}{2} + O((\Delta x)^4). \quad (1.30)$$

De igual forma respecto a  $y$

$$n(x, y + \Delta y, t) = n(x, y, t) + n_y(x, y, t)\Delta y + \frac{n_{yy}(x, y, t)}{2}(\Delta y)^2 + O((\Delta y)^3), \quad (1.31)$$

$$n(x, y - \Delta y, t) = n(x, y, t) - n_y(x, y, t)\Delta y + \frac{n_{yy}(x, y, t)}{2}(\Delta y)^2 - O((\Delta y)^3), \quad (1.32)$$

restando (1.32) a (1.31) obtenemos,

$$n(x, y + \Delta y, t) - n(x, y - \Delta y, t) = n_y(x, y, t)(2\Delta y) + O((\Delta y)^3), \quad (1.33)$$

y expandiendo de la misma forma con más términos

$$n(x, y + \Delta y, t) = n(x, y, t) + n_y(x, y, t)\Delta y + \frac{n_{yy}(x, y, t)}{2}(\Delta y)^2 + \frac{n_{yyy}(x, y, t)}{6}(\Delta y)^3 + O((\Delta y)^4), \quad (1.34)$$

$$n(x, y - \Delta y, t) = n(x, y, t) - n_y(x, y, t)\Delta y + \frac{n_{yy}(x, y, t)}{2}(\Delta y)^2 - \frac{n_{yyy}(x, y, t)}{6}(\Delta y)^3 + O((\Delta y)^4), \quad (1.35)$$

sumando (1.34) con (1.35) obtenemos

$$n(x, y + \Delta y, t) - 2n(x, y, t) + n(x, y - \Delta y, t) = \frac{n_{yy}(x, y, t)(\Delta y)^2}{2} + O((\Delta y)^4). \quad (1.36)$$

Reemplazando (1.24), (1.27) y (1.36) en (1.23) obtenemos

$$\begin{aligned} n_t(x, y, t)\Delta t + O((\Delta t)^2) &= \frac{1}{2}(p+q)n_{xx}(x, y, t)(\Delta x)^2 - \frac{1}{2}(p-q)n_x(x, y, t)(2\Delta x) \\ &+ O((\Delta x)^4) + \frac{1}{2}(r+s)n_{yy}(x, y, t)(\Delta y)^2 - \frac{1}{2}(r-s)n_y(x, y, t)(2\Delta y) \\ &+ O((\Delta y)^4) + \mu n(x, y, t) - \omega n^2(x, y, t). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Si tomamos límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ , y además suponemos que  $(p+q)\Delta x^2$ ,  $(p-q)\Delta x$ ,  $(r+s)\Delta y$  y  $(r-s)\Delta y$  decrecen con el mismo orden de magnitud de  $\Delta t$ , es decir, si

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow (0,0)} \frac{(p+q)\Delta x^2}{2\Delta t} \rightarrow D_x, \quad \lim_{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow (0,0)} \frac{(p-q)\Delta x^2}{2\Delta t} \rightarrow v_x,$$

$$\lim_{(\Delta y, \Delta t) \rightarrow (0,0)} \frac{(r+s)\Delta y^2}{2\Delta t} \rightarrow D_y \quad \text{y} \quad \lim_{(\Delta y, \Delta t) \rightarrow (0,0)} \frac{(r-s)\Delta y^2}{2\Delta t} \rightarrow v_y \quad \text{existen,}$$

donde  $D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2}$  es el coeficiente de difusión que describe la rapidéz con que se dispersan ciertos individuos y  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  es el coeficiente de advección que describe la velocidad de transporte, obtenemos

$$n_t(x, y, t) = D\nabla^2 n(x, y, t) - v(\nabla n(x, y, t))^T(x, y) + \mu n(x, y, t) - \omega n^2(x, y, t). \quad (1.38)$$

Si en (1.38) consideramos un recorrido isotrópico el término advectivo desaparece y si además no hay nacimientos y/o muertes, ni competencia la ecuación se reduce a

$$n_t(x, t) = D\nabla^2 n(x, t). \quad (1.39)$$

Por lo tanto la propagación espacial de una especie puede describirse básicamente por el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} n_t(x, y, t) = D\nabla^2 n(x, y, t) & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ n(x, y, 0) = f(x, y) & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \int_{\mathbb{R}^2} \int n(x, y, t) dA = E_0 & \text{si } t \geq 0, \end{cases} \quad (1.40)$$

donde  $n_0(x, y)$  es la densidad en el tiempo  $t = 0$ , y  $E_0$  denota la población total o masa (biológicamente se denomina biomasa). Esta ecuación diferencial modela un proceso de transporte de masa por difusión el cual es conservativo.

Si en el modelo (1.38) no hay competencia entre los individuos ni advección, la ecuación del modelo corresponde a la ley de Malthus, cuya forma ahora es igual a

$$n_t(x, y, t) = D\nabla^2 n(x, y, t) + \mu n(x, y, t), \text{ con } \mu \text{ constante} \quad (1.41)$$

Ahora bien, si en el modelo (1.38) no hay advección entonces la tasa de crecimiento de la población se ve disminuida por el término  $\omega n^2(x, t)$  y la ecuación del modelo corresponde a la ley de Verhulst, cuya forma ahora es igual a

$$n_t(x, y, t) = D\nabla^2 n(x, y, t) + \mu n(x, y, t) - \omega n^2(x, y, t), \text{ con } \mu \text{ y } \omega \text{ constantes} \quad (1.42)$$

### 1.3. Coeficiente de difusión no lineal.

En la sección anterior, se presento la deducción de un modelo lineal, en el cual el coeficiente de difusión es constante. Sin embargo, se ha comprobado que en algunas situaciones de movilidad ecológica de especies, el coeficiente de difusión puede depender de la densidad de la población [27] [10]. Hay diferentes manifestaciones de este fenómeno y diferentes enfoques de modelado para tener en cuenta [42]. Aquí asumimos que la dependencia de la densidad de las especies puede ser descrita adecuadamente por medio del coeficiente de difusión, nuestro objetivo en este trabajo es investigar ahora cómo cambia la dinámica del sistema.

El coeficiente de difusión o difusividad de partículas es una medida que determina la rapidez con que estas se dispersan de altas a bajas concentraciones, por lo tanto depende de la densidad y en el caso que la propagación espacial ocurra en un dominio de dos dimensiones ésta se mide en unidades de longitud al cuadrado sobre tiempo. Se ha observado que en el caso de algunas especies a mayor densidad de la población, estos tienden a dispersarse, es decir el coeficiente de difusión es mayor y cuando la densidad de individuos es menor estos tienden a agruparse con otros individuos para aumentar la densidad y también el coeficiente de difusión [42], por lo tanto se ha considerado que el coeficiente de difusión depende de la densidad de población [21] y una buena aproximación de este fenomeno esta dado por la siguiente aproximación

$$D(n(x, t)) = D_0 \left( \frac{n(x, t)}{n_0} \right)^m. \quad (1.43)$$

Donde  $D_0$  es una constante de proporcionalidad del coeficiente de difusión,  $m \geq 0$  constante de adaptabilidad y  $n_0$  denota un factor de escala de la densidad de la población. En la Figura 1.5 se considera el coeficiente de difusión no lineal  $D$  para diferentes valores de  $m$ .

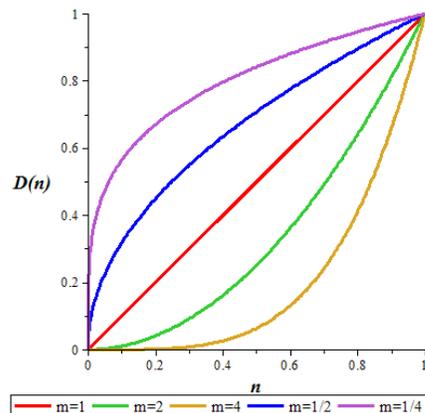


Fig. 1.5. Coeficiente de difusión  $D(n(x,t))$  para  $m = 1, 1/2, 1/4, 2, 4$ .

Se observa que para una densidad  $n(x,t)$  en un instante  $t$  y una posición  $x$  fijos, si  $m < 1$  mayor es el coeficiente de difusión, lo que sugiere que los individuos tienen una mayor adaptabilidad al medio y si  $m > 1$  menor es el coeficiente de difusión, lo que sugiere que los individuos tienen una menor adaptabilidad al medio, luego  $m$  es inversamente proporcional a la adaptabilidad al medio. Por lo tanto la propagación espacial de una especie puede describirse básicamente por el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} n_t(x,t) = D_0 \left( \left( \frac{n(x,t)}{n_0} \right)^m n_x(x,t) \right)_x & \text{si } x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ n(x,0) = f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}, \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{n(x,t)}{n_0} dx = E_0 & \text{si } t \geq 0. \end{cases} \quad (1.44)$$

Al igual que en el caso lineal, en este modelo podemos introducir los efectos de natalidad, mortalidad y competencia entre individuos de la misma especie.

Para dos dimensiones el problema de valor inicial básico queda igual a

$$\begin{cases} n_t(x,y,t) = D_0 \nabla \left( \left( \frac{n(x,y,t)}{n_0} \right)^m \nabla(x,y,t) \right) & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ n(x,y,0) = f(x,y) & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{n(x,y,t)}{n_0} dA = E_0 & \text{si } t \geq 0. \end{cases} \quad (1.45)$$

Y aquí también podemos introducir los efectos de natalidad, mortalidad y competencia entre individuos de la misma especie.

## Capítulo 2

# Soluciones analíticas.

Cómo se mencionó en el capítulo anterior el modelo es más interesante cuando el coeficiente de difusión depende de la densidad de población, por lo tanto el propósito de este capítulo es resolver el problema de valor inicial determinado por el modelo (1.26), inicialmente por simplicidad consideramos el problema en una dimensión con constante de adaptabilidad lineal, luego lo consideramos no lineal comprobando los resultados con algunos casos particulares; por último se considera el mismo problema en dos dimensiones aprovechando la simetría radial del problema, éste se reduce al caso unidimensional y se comprueban los resultados con algunos casos particulares.

### 2.1. Problema de valor inicial en una dimensión.

Para determinar una solución del problema no lineal (1.26) en una dimensión, primero hacemos el siguiente cambio de variable  $u(x, t) = \frac{n(x, t)}{n_0}$  entonces  $n(x, t) = u(x, t)n_0$  derivando a  $n$  una vez respecto a  $t$  y dos veces respecto a  $x$  obtenemos.

$$n_t(x, t) = n_0 u_t(x, t) \text{ y } n_{xx}(x, t) = n_0 u_{xx}(x, t) \quad (2.1)$$

Reemplazando (2.1) en el modelo (1.23) obtenemos

$$u_t(x, t) = D_0 (u^m(x, t) u_x(x, t))_x \quad (2.2)$$

Puesto que la población total es constante

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = E_0 > 0, \text{ con } E_0 \text{ constante,} \quad (2.3)$$

podemos ver que a partir de las condiciones de invarianza de  $u$  respecto a la transformación  $\xi = \frac{x}{t^\beta}$ , donde  $\alpha, \beta$  son constantes y considerando  $\theta(\xi) \geq 0$  una función continua simétrica con condiciones de frontera  $\theta(\infty) = \theta(-\infty) = 0$ , pues a distancias muy lejanas  $\theta$  tiende a cero, por el método de autosimilaridad (Apendice B) la solución es similar a sí misma si su configuración espacial sigue siendo similar en todo momento durante la evolución, esto se debe a los fenomenos de escalamiento, entonces

$$u^m(x, t) = t^{m\alpha}\theta^\sigma(\xi). \quad (2.4)$$

Reemplazando (2.4) en (2.2) obtenemos

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \alpha t^{\alpha-1}\theta(\xi) + t^\alpha\theta_\xi(\xi)\xi_t, \\ &= \alpha t^{\alpha-1}\theta(\xi) + t^\alpha\theta_\xi(\xi)(x)(-\beta)t^{-\beta-1}, \\ &= \alpha t^{\alpha-1}\theta(\xi) - \beta t^{\alpha-1}\theta_\xi(\xi)\frac{x}{t^\beta}, \\ &= \alpha t^{\alpha-1}\theta(\xi) - \beta t^{\alpha-1}\theta_\xi(\xi)\xi, \\ &= t^{\alpha-1}(\alpha\theta(\xi) - \beta\theta_\xi(\xi)\xi). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= t^\alpha\theta_\xi(\xi)t^{-\beta} \text{ y } u^m(x, t)u_x = t^{m\alpha}\theta \\ u^m(x, t)u_x(x, t) &= t^{m\alpha+\alpha-\beta}\theta^m(\xi)\theta_\xi(\xi) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ahora derivando respecto a  $x$  la ecuación (2.6) obtenemos

$$\begin{aligned} (u^m(x, t)u_x(x, t))_x &= t^{\alpha(m+1)-\beta} \left( m\theta^{m-1}(\xi)\theta_\xi^2(\xi)\frac{1}{t^\beta} + \theta^m(\xi)\theta_{\xi\xi}(\xi)\frac{1}{t^\beta} \right), \\ &= t^{\alpha(m+1)-2\beta} (m\theta^{m-1}(\xi)\theta_\xi^2(\xi) + \theta^m(\xi)\theta_{\xi\xi}(\xi)), \\ &= t^{\alpha(m+1)-2\beta} (\theta^m(\xi)\theta_\xi(\xi))_\xi, \end{aligned} \quad (2.7)$$

por lo tanto

$$t^{\alpha-1}(\alpha\theta(\xi) - \beta\theta_\xi(\xi)\xi) = D_0 t^{\alpha(m+1)-2\beta} (\theta^m(\xi)\theta_\xi(\xi))_\xi. \quad (2.8)$$

Haciendo  $\alpha - 1 = \alpha(m + 1) - 2\beta$  se cancela el tiempo  $t$  y (2.6) queda igual a

$$\alpha\theta(\xi) - \beta\theta_\xi(\xi)\xi = D_0 (\theta^m(\xi)\theta_\xi(\xi))_\xi. \quad (2.9)$$

Además utilizando la identidad

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} t^\alpha \theta\left(\frac{x}{t^\beta}\right) dx, \\ &\equiv t^{\alpha+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

y asumiendo que  $\theta$  es integrable en  $\mathbb{R}$ , por la condición (2.3)  $\alpha + \beta = 0$ . Luego  $\alpha = -\beta$  y  $\alpha - 1 = \alpha(m + 1) + 2\alpha$ . De lo cual  $\alpha = -\frac{1}{m+2}$  y  $\beta = \frac{1}{m+2}$ , y la solución  $u(x, t)$  en términos de la función  $\theta$  es  $u(x, t) = t^{-1/m+2}\theta(\xi)$ ,  $\xi = \frac{x}{t^{1/m+2}}$ .

El siguiente paso es determinar la función  $\theta$ , para ello reemplazamos los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  en (2.9) y por lo cual la función  $\theta$  que satisface la ecuación cuasilineal elíptica

$$D_0(\theta^m(\xi)\theta_\xi(\xi))_\xi + \frac{1}{m+2}\theta_\xi(\xi)\xi + \frac{1}{m+2}\theta(\xi) = 0. \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) es equivalente a

$$\left(D_0\theta^m(\xi)\theta_\xi(\xi) + \frac{1}{m+2}(\theta(\xi)\xi)\right)_\xi = 0 \text{ con } \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

A continuación se resuelve la ecuación (2.11) considerando los casos  $m = 0$  (lineal) y  $m > 0$  (no lineal). Luego analizaremos las propiedades que cumple esta solución respecto a el coeficiente de difusión, a el soporte, a la velocidad de difusión, a la masa y la densidad de población, entre otras propiedades.

### 2.1.1. Solución caso lineal (m=0).

Haciendo  $m = 0$  en (2.11) la ecuación queda igual a

$$\left(D_0\theta_\xi(\xi) + \frac{1}{2}(\theta(\xi)\xi)\right)_\xi = 0 \text{ con } \xi \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

luego

$$D_0\theta_\xi(\xi) + \frac{1}{2}(\theta(\xi)\xi) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Por propiedades de la función  $\theta$ , podemos ver que si  $\theta(\xi) \rightarrow 0$ , para cualquier valor finito de  $\xi$ , la constante de integración debe anularse (Si  $\xi = 0$ ,  $\theta_\xi(\xi) = 0$  pues  $\theta$  posee un máximo en  $\xi = 0$  y para algun  $\xi = \xi_0$ ,  $\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \theta(\xi) = 0$ )

$$D_0\theta_\xi(\xi) + \frac{1}{2}\theta(\xi)\xi = 0$$

la cual se resuelve por el método de separación de variables considerando la condición inicial  $\xi = 0$  y  $\theta_\xi(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned}
D_0 \frac{d\theta}{\theta(\xi)} &= -\frac{1}{2}\xi d\xi \\
\int D_0 \frac{d\theta}{\theta(\xi)} &= \int -\frac{1}{2}\xi d\xi \\
D_0 \ln(\theta(\xi)) &= -\frac{\xi^2}{4} + C \\
\ln(\theta(\xi)) &= -\frac{\xi^2}{4D_0} + C \\
\theta(\xi) &= C e^{-\frac{\xi^2}{4D_0}} \text{ para } C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Como la masa se conserva, tenemos que

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} C e^{-\frac{\xi^2}{4D_0 t}} d\xi = C \sqrt{4\pi D_0 t}$$

entonces

$$C = \frac{E_0}{\sqrt{4\pi D_0 t}} \text{ y } \theta(\xi) = \frac{E_0}{\sqrt{4\pi D_0 t}} e^{-\frac{\xi^2}{4D_0 t}}.$$

Por lo tanto la solución es (vease gráfica de la solución en Figura 2.1)

$$u(x, t) = t^{-1/2} \theta(\xi) = \frac{E_0}{\sqrt{4\pi D_0 t}} e^{-\frac{x^2}{4D_0 t}} \quad (2.13)$$

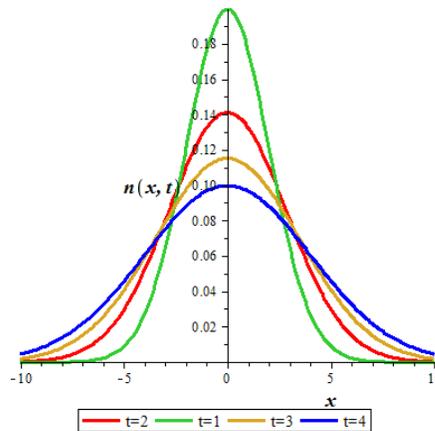


Fig. 2.1. Densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $t = 1, 2, 3, 4$ .

De la Figura 2.1. se observa que la solución de la fórmula 2.13 tiene soporte de la densidad infinito y que a medida que  $t$  aumenta la amplitud de las curvas disminuyen, además es claro que debido a las condiciones iniciales y a la solución de la ecuación, se tiene que se conserva la masa, o sea para

$$\text{cualquier } D_0 \text{ y cualquier tiempo } t, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_0}{\sqrt{4\pi D_0 t}} e^{-\frac{x^2}{4D_0 t}} dx = E_0$$

Conocida la solución del problema (2.12), estudiaremos las diferentes propiedades de esta y su comportamiento con relación a el coeficiente de difusión el cual se muestra en la Figura 2.2.

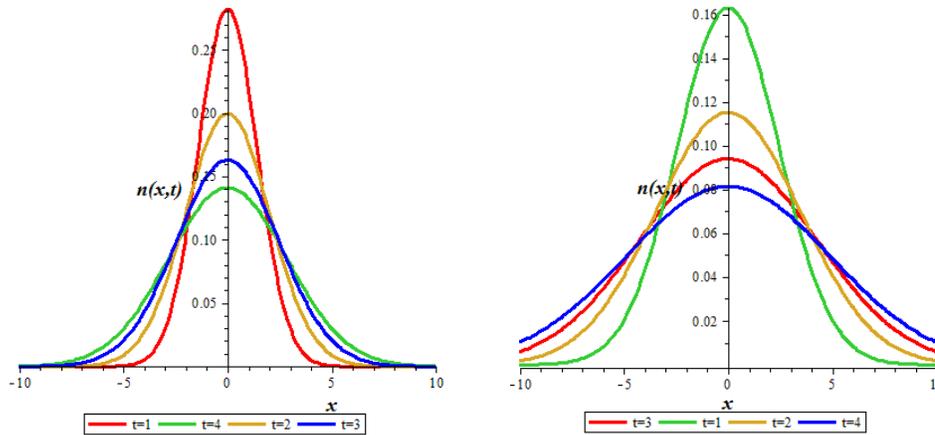


Fig. 2.2. Densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 1, 3$ ,  $t = 1, 2, 3, 4$ .

La fórmula 2.13 muestra que a medida que  $D_0$  aumenta, la amplitud de las curvas disminuyen y viceversa, para los mismos tiempos, esto se ilustra en la Figura 2.2. comparada con la Figura 2.1.

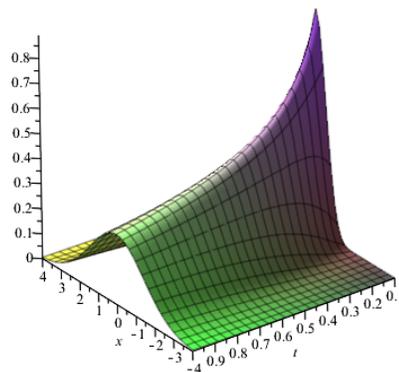


Fig. 2.3. Densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $-4 \leq x \leq 4$  y  $0 \leq t \leq 1$ .

La Figura 2.3. corresponde a la gráfica del campo escalar  $u(x, t)$  de la fórmula 2.13, se puede ver que las curvas de la Figura 2.1. corresponden a algunas secciones transversales de la gráfica de  $u(x, t)$  para  $-4 \leq x \leq 4$ . Vemos que cuando  $t \rightarrow 0^+$  la solución tiende a concentrar la densidad alrededor del origen.

### 2.1.2. Solución caso no lineal ( $m > 0$ ).

Consideremos ahora  $m > 0$  en (2.11), luego

$$D_0 \theta^m(\xi) \theta_\xi(\xi) + \frac{1}{m+2} \theta(\xi) \cdot \xi = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

De la misma forma que en el caso lineal

$$D_0 \theta^m(\xi) \theta_\xi(\xi) + \frac{1}{m+2} \theta(\xi) \cdot \xi = 0$$

la cual se resuelve por el método de separación de variables, y de la misma forma como se considero en el caso lineal ( $\theta(\xi) \rightarrow 0$ , para  $\xi = 0$ ,  $\theta_\xi(\xi) = 0$  pues  $\theta$  posee un máximo en  $\xi = 0$  y para algun  $\xi = \xi_0$ ,  $\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \theta^m(\xi) = 0$ ),

$$\begin{aligned} D_0 \theta^{m-1}(\xi) \theta_\xi(\xi) &= -\frac{1}{m+2} \xi, \\ D_0 \theta^{m-1}(\xi) d\theta &= -\frac{1}{m+2} \xi d\xi, \\ \int D_0 \theta^{m-1}(\xi) d\theta &= \int -\frac{1}{m+2} \xi d\xi, \\ \frac{D_0 \theta^m(\xi)}{m} &= -\frac{1}{2m+4} \xi^2 + c, \\ \theta(\xi) &= \sqrt[m]{\frac{m}{D_0(2m+4)} (\xi_0^2 - \xi^2)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Denotando

$$k = \left( \frac{m}{D_0(2m+4)} \right)^{1/m},$$

entonces

$$\theta(\xi) = \begin{cases} k (\xi_0^2 - \xi^2)^{1/m} & \text{si } |\xi| \leq \xi_0 \\ 0 & \text{si } |\xi| > \xi_0 \end{cases}.$$

Por lo tanto la solución es de la forma

$$u(x, t) = \begin{cases} t^{-1/(m+2)} \left( \frac{m}{D_0(2m+4)} \right)^{1/m} \left( \xi_0^2 - \frac{x^2}{t^{m+2}} \right)^{1/m} & \text{si } |x| \leq \xi_0 t^{\frac{1}{m+2}} \\ 0 & \text{si } |x| > \xi_0 t^{\frac{1}{m+2}} \end{cases}. \quad (2.15)$$

La solución muestra que la dispersión es finita en espacio  $x$  lo cual garantiza que el soporte es finito y que fuera del soporte la población es cero, además vemos que la solución no es diferenciable en el frente de onda.

Para hallar la constante  $\xi_0$  utilizamos el hecho que la masa se debe conservar (2.3), entonces

$$\begin{aligned} E_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) d\xi, \\ &= 2k \int_0^{\xi_0} (\xi_0^2 - \xi^2)^{1/m} d\xi, \\ &= 2k \xi_0^{2/m} \int_0^{\xi_0} \left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_0^2}\right)^{1/m} d\xi, \end{aligned}$$

realizando la sustitución

$$\mu = \frac{\xi^2}{\xi_0^2}, \quad d\mu = \frac{2\xi}{\xi_0^2} d\xi$$

tenemos que

$$\begin{aligned} E_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi) d\xi, \\ &= k \xi_0^{2/m} \int_0^1 (1 - \mu)^{1/m} \frac{\xi_0}{\mu^{1/2}} d\mu, \\ &= k \xi_0^{2/m} \int_0^1 (1 - \mu)^{1/m} \mu^{-1/2} d\mu, \\ &= \frac{k \xi_0^{2/m+1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{3}{2}\right)}, \\ &= \frac{k \xi_0^{2/m+1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{3}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Luego despejando  $\xi_0$ , obtenemos que

$$\xi_0 = \left( \frac{E_0 \left( \frac{D_0(2m+4)}{m} \right)^{1/m} \Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)} \right)^{m/(2+m)}$$

donde  $\Gamma$  denota la función gamma (Apendice A). Ver gráfica de la solución en la Figura 2.4.

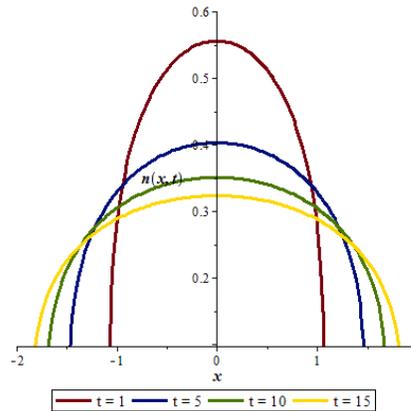


Fig. 2.4. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$  con  $m = 3$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Las gráficas de la fórmula 2.15 muestran que el soporte de la densidad es finito y corresponde a el intervalo  $[-\xi_0 t^{\frac{1}{m+2}}, \xi_0 t^{\frac{1}{m+2}}]$ , y que a medida que  $t$  aumenta la amplitud de las curvas disminuyen, además es claro que de las condiciones iniciales y la solución de la ecuación, se tiene que se conserva la masa.

Ya conocida la solución del problema (2.11 para  $m > 0$ ), en lo que sigue, estudiaremos las diferentes propiedades de esta y su comportamiento con relación al parámetro  $m$ . La siguiente tabla registra los datos de las gráficas mostradas en la figura 2.4. se puede ver que el soporte de la densidad es finito y que a medida que  $t$  aumenta la longitud del soporte aumenta, la amplitud de las curvas de la solución disminuyen, la velocidad de difusión disminuye y la densidad de población se conserva.

$t$	Soporte	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}} \mu(x,t) dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-1,069524, 1,069524]$	0,555679	1,069524	1
5	$[-1,475652, 1,475652]$	0,402745	0,295131	1
10	$[-1,695081, 1,695081]$	0,350610	0,169508	1
15	$[-1,838267, 1,838267]$	0,323300	0,122551	1

Tabla 2.1. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 3$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

La solución no lineal tiene mejor sentido biológico, ya que la solución en el caso lineal por ser el soporte de la densidad infinito supone que habrían individuos muy lejos del origen en un instante de tiempo pequeño y que el espacio se invade completamente, lo cual no es cierto pues la velocidad de difusión es finita y además el espacio no se va a llenar en ningún tiempo.

Las siguientes gráficas y tablas muestran la evolución de la densidad de la población a partir del soporte (máxima distancia recorrida a la izquierda o a la derecha), la amplitud ( $u(0, t)$ ) y la velocidad de difusión (distancia recorrida a la izquierda o a la derecha en el tiempo).

Inicialmente modifiquemos  $m$  en la función de difusión  $D$ , considerando el mismo  $D_0 = 2$ , la misma masa  $E_0 = 1$  y los mismos tiempos  $t = 1, 5, 10, 15$ .

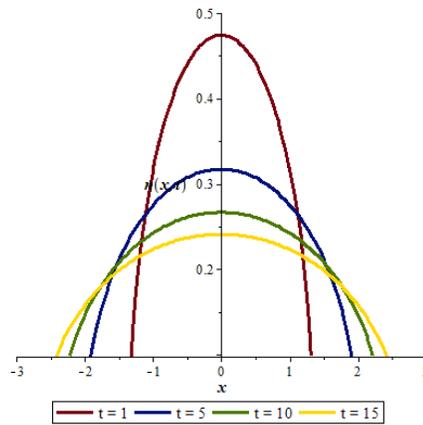


Fig. 2.5. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 2$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

$t$	Soporte	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}} \mu(x, t) dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-1,341877, 1,341877]$	0,474425	1,341877	1
5	$[-2,006573, 2,006573]$	0,317267	0,401314	1
10	$[-2,386231, 2,386231]$	0,266789	0,238623	1
15	$[-2,640799, 2,640799]$	0,241071	0,176053	1

Tabla 2.2. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 2$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

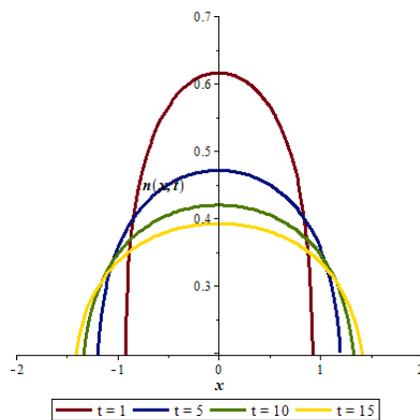


Fig. 2.6. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 4$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

$t$	Soporte	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}} \mu(x, t) dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-0,928948, 0,928948]$	0,615826	0,928948	1
5	$[-1,214748, 1,214748]$	0,470937	0,242950	1
10	$[-1,363509, 1,363509]$	0,419557	0,136351	1
15	$[-1,458836, 1,458836]$	0,392141	0,097256	1

Tabla 2.3. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 4$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Vemos que cuando disminuimos  $m$  la longitud del soporte aumenta, la amplitud de las curvas disminuyen y la velocidad de difusión aumenta; pero cuando aumentamos  $m$  la longitud del soporte disminuye, la amplitud de las curvas aumentan y la velocidad de difusión disminuye. La Figura 2.7. muestra el consolidado de la evolución de la densidad de población respecto a estos parámetros, para diferentes tiempos y diferentes constantes de adaptabilidad.

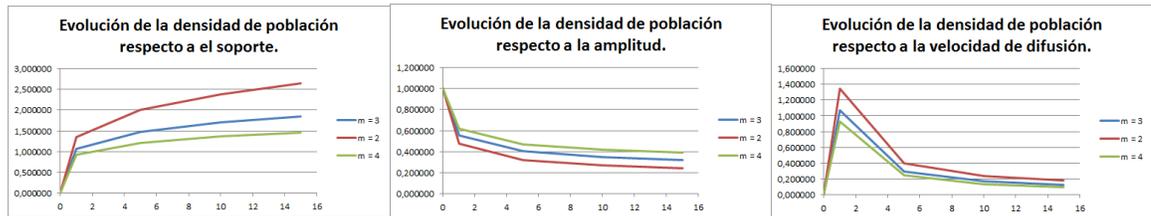


Fig. 2.7. Evolución de la densidad de población respecto al soporte, la amplitud y la velocidad de difusión, en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 2, 3, 4$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Modifiquemos ahora  $D_0$  y conservemos todos los demás datos, lo cual se ilustra en las gráficas 2.8. y 2.9., y en las tablas 2.4. y 2.5.

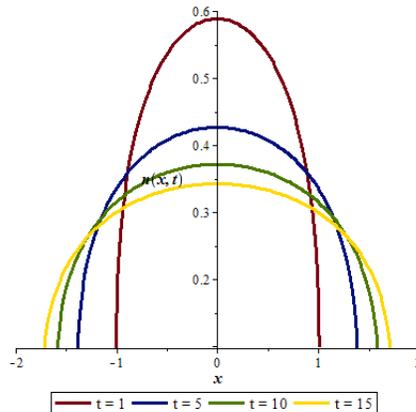


Fig. 2.8. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 1,5$ ,  $m = 3$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

$t$	Soporte	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}} \mu(x, t) dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-1,009724, 1,009724]$	0,588588	1,009724	1
5	$[-1,393146, 1,393146]$	0,426597	0,278629	1
10	$[-1,600304, 1,600304]$	0,371374	0,160030	1
15	$[-1,735485, 1,735485]$	0,342447	0,115699	1

Tabla 2.4. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 1,5$ ,  $m = 3$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

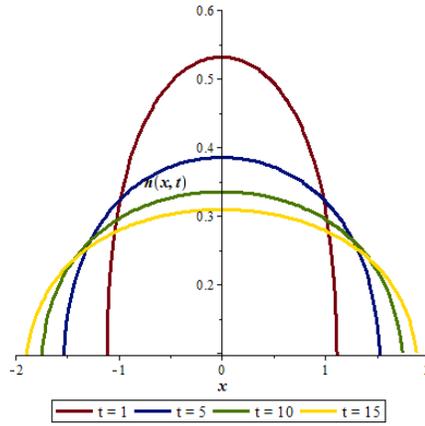


Fig. 2.9. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2,5$ ,  $m = 3$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

$t$	Soporte	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}} \mu(x, t) dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-1,118336, 1,118336]$	0,531425	1,118336	1
5	$[-1,543002, 1,543002]$	0,381660	0,308600	1
10	$[-1,772443, 1,772443]$	0,335307	0,177244	1
15	$[-1,922165, 1,922165]$	0,309189	0,128144	1

Tabla 2.5. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2,5$ ,  $m = 3$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Vemos que si  $D_0$  disminuye la longitud del soporte disminuye, la amplitud de las curvas aumentan y la velocidad de difusión disminuye; si  $D_0$  aumenta la longitud del soporte aumenta, la amplitud de las curvas disminuyen y la velocidad de difusión aumenta. La Figura 2.10. muestra el consolidado de la evolución de la densidad de población respecto a estos parámetros, para diferentes tiempos y diferentes constantes de proporcionalidad del coeficiente de difusión.

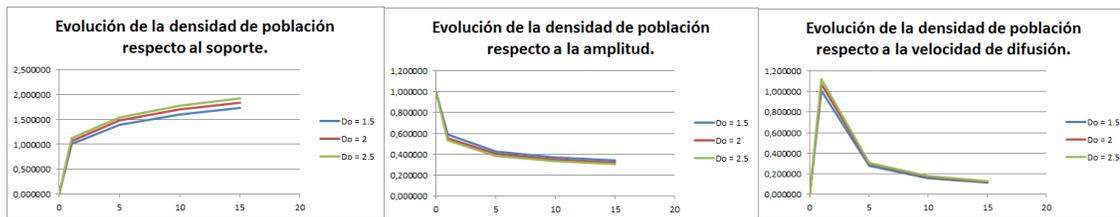


Fig. 2.10. Evolución de la densidad de población respecto al soporte, la amplitud y la velocidad de difusión, en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 1.5, 2, 2.5$ ,  $m = 3$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

## 2.2. Problema de valor inicial en dos dimensiones.

En general la colonización de nuevos hábitats por una población se realiza en el espacio bidimensional o tridimensional. Para ello consideremos el problema (1.40) donde la densidad de población es  $n(x, y, t)$  en el plano  $xy$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int \frac{n(x, y, t)}{n_0} dy dx = E_0 > 0. \quad (2.17)$$

Ahora, sea

$$u(x, y, t) = \frac{n(x, y, t)}{n_0},$$

luego  $n_t(x, y, t) = n_0 u_t(x, y, t)$  y  $n_{xx}(x, y, t) = n_0 u_{xx}(x, y, t)$ ,  $n_{yy}(x, y, t) = n_0 u_{yy}(x, y, t)$  entonces

$$n_t(x, y, t) = D_0 \nabla \cdot \left( \left( \frac{n(x, y, t)}{n_0} \right)^m \nabla n(x, y, t) \right).$$

Por lo tanto

$$u_t(x, y, t) = D_0 \nabla \cdot (u^m(x, y, t) (u_x(x, y, t), u_y(x, y, t))), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.18)$$

Nuevamente utilizando el método de autosimilaridad realizamos el siguiente cambio de variables

$$u(x, y, t) = t^\alpha \theta(\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1 = \frac{x}{t^\beta}, \quad \xi_2 = \frac{y}{t^\beta}, \quad (2.19)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes,  $\theta(\xi_1, \xi_2) \geq 0$  es una función continua y  $u^m(x, y, t) = t^{m\alpha} \theta^m(\xi_1, \xi_2)$ .

Sustituyendo (2.19) en (2.18) obtenemos que las derivadas de primer orden respecto a  $t$ ,  $x$  están dadas por

$$\begin{aligned}
u_t(x, y, t) &= \alpha t^{\alpha-1} \theta(\xi_1, \xi_2) + t^\alpha \theta_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2) (\xi_1)_t + t^\alpha \theta_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2) (\xi_2)_t, \\
&= \alpha t^{\alpha-1} \theta(\xi_1, \xi_2) + t^\alpha \theta_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2) (x) (-\beta) t^{-\beta-1} + t^\alpha \theta_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2) (y) (-\beta) t^{-\beta-1}, \\
&= \alpha t^{\alpha-1} \theta(\xi_1, \xi_2) - \beta t^{\alpha-1} \theta_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2) \frac{x}{t^\beta} - \beta t^{\alpha-1} \theta_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2) \frac{y}{t^\beta}, \\
&= \alpha t^{\alpha-1} \theta(\xi_1, \xi_2) - \beta t^{\alpha-1} \theta_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2) \xi_1 - \beta t^{\alpha-1} \theta_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2) \xi_2, \\
&= t^{\alpha-1} (\alpha \theta(\xi_1, \xi_2) - \beta (\theta_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2) \xi_1 + \theta_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2) \xi_2)). \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Como  $u_x(x, y, t) = t^\alpha \theta_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2) t^{-\beta}$  y  $u_y(x, y, t) = t^\alpha \theta_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2) t^{-\beta}$ , entonces

$$\begin{aligned}
\nabla u &= (u_x(x, y, t), u_y(x, y, t)), \\
&= (t^\alpha \theta_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2) t^{-\beta}, t^\alpha \theta_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2) t^{-\beta}), \\
&= t^{\alpha-\beta} (\theta_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2), \theta_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2)).
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
u^m(x, y, t) \nabla u(x, y, t) &= t^{m\alpha+\alpha-\beta} \theta^m(\xi_1, \xi_2) (\theta_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2), \theta_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2)), \\
&= t^{\alpha(m+1)-\beta} \theta^m(\xi_1, \xi_2) (\theta_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2), \theta_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2)), \tag{2.21}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (u^m(x, y, t) \nabla u(x, y, t)) &= (u^m(x, y, t) \nabla u(x, y, t))_{\xi_1} + (u^m(x, y, t) \nabla u(x, y, t))_{\xi_2} T, \\
&= t^{\alpha(m+1)-\beta} \left( (\theta^m(\xi_1, \xi_2) \theta_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2))_{\xi_1} + (\theta^m(\xi_1, \xi_2) \theta_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2))_{\xi_2} \right), \\
&= t^{\alpha(m+1)-\beta} (m \theta^{m-1}(\xi_1, \xi_2) \theta_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2) + \theta^m(\xi_1, \xi_2) \theta_{\xi_1 \xi_1}(\xi_1, \xi_2) \frac{1}{t^\beta}, \\
&\quad + m \theta^{m-1}(\xi_1, \xi_2) \theta_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2) + \theta^m(\xi_1, \xi_2) \theta_{\xi_2 \xi_2}(\xi_1, \xi_2) \frac{1}{t^\beta}), \\
&= t^{\alpha(m+1)-\beta} (m \theta^{m-1}(\xi_1, \xi_2) (\theta_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2) + \theta_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2)), \\
&\quad + \theta^m(\xi_1, \xi_2) \frac{1}{t^\beta} (\theta_{\xi_1 \xi_1}(\xi_1, \xi_2) + \theta_{\xi_2 \xi_2}(\xi_1, \xi_2))), \\
&= t^{\alpha(m+1)-2\beta} \nabla \cdot (\theta^m(\xi_1, \xi_2) \nabla \theta(\xi_1, \xi_2)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$t^{\alpha-1} (\alpha \theta(\xi_1, \xi_2) - \beta (\theta_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2) \xi_1 + \theta_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2) \xi_2)) = D_0 t^{\alpha(m+1)-2\beta} \nabla \cdot (\theta^m(\xi_1, \xi_2) \nabla \theta(\xi_1, \xi_2)) \tag{2.22}$$

haciendo  $\alpha - 1 = \alpha(m + 1) - 2\beta$  se cancela el tiempo  $t$  y (2.22) queda igual a

$$\alpha \theta(\xi_1, \xi_2) - \beta (\theta_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2) \xi_1 + \theta_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2) \xi_2) = D_0 \nabla \cdot (\theta^m(\xi_1, \xi_2) \nabla \theta(\xi_1, \xi_2)).$$

Además utilizando la identidad

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \int u(x, y, t) dy dx &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t^\alpha \theta \left( \frac{x}{t^\beta}, \frac{y}{t^\beta} \right) dy dx \\ &\equiv t^{\alpha+2\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \end{aligned}$$

y asumiendo que  $\theta$  es integrable en  $\mathbb{R}^2$  por (2.17), tenemos que  $\alpha + 2\beta = 0$ . Luego obtenemos de  $\alpha = -2\beta$  y  $\alpha - 1 = \alpha(m+1) + \alpha$  que  $\alpha = -\frac{1}{m+1}$  y  $\beta = \frac{1}{2m+2}$ , esto permite obtener la solución deseada

$$u(x, y, t) = t^{-1/m+1} \theta(\xi_1, \xi_2), \text{ con } \xi_1 = \frac{x}{t^{1/2m+2}}, \xi_2 = \frac{y}{t^{1/2m+2}} \quad (2.23)$$

entonces se deduce de (2.22) que la función  $\theta \geq 0$  satisface la ecuación cuasilineal elíptica

$$D_0 \nabla_\xi (\theta^m(\xi_1, \xi_2) \cdot \nabla_\xi \theta(\xi_1, \xi_2)) + \frac{1}{2m+2} (\theta_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2) \xi_1 + \theta_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2) \xi_2) + \frac{1}{m+1} \theta(\xi_1, \xi_2) = 0, \xi \in \mathbb{R}^2 \quad (2.24)$$

con condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 d\xi_1 = E_0 \quad (2.25)$$

Suponemos que no hay direcciones preferidas para el flujo de población o más precisamente que el movimiento de los individuos es isotrópico, la densidad de población se expande alrededor del origen en forma circular, luego la función  $\theta$  es radialmente simétrica, entonces esta depende de una sola coordenada  $\eta$ , con

$$\eta = |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^2.$$

Por lo cual transformamos la ecuación (2.24) en coordenadas polares. En efecto

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \theta &= (\theta_\eta \eta_{\xi_1}, \theta_\eta \eta_{\xi_2}), \\ &= \left( \theta_\eta \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}, \theta_\eta \frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \right), \\ &= \left( \theta_\eta \frac{\xi_1}{\eta}, \theta_\eta \frac{\xi_2}{\eta} \right). \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} (\nabla_\xi \theta)^T(\xi_1, \xi_2) &= \theta_\eta \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{\eta}, \\ &= \theta_\eta \eta, \end{aligned}$$

así como

$$\begin{aligned}
\nabla_{\xi}(\theta^m \nabla_{\xi} \theta) &= \nabla_{\xi} \left( \theta^m \frac{1}{\eta} \theta_{\eta} \cdot (\xi_1, \xi_2) \right), \\
&= \nabla_{\xi} \left( \frac{\theta^m}{\eta} \theta_{\eta} \cdot (\xi_1, \xi_2) \right), \\
&= \frac{\partial \left( \frac{\theta^m}{\eta} \theta_{\eta} \xi_1 \right)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \left( \frac{\theta^m}{\eta} \theta_{\eta} \xi_2 \right)}{\partial \xi_2}, \\
&= \left( \theta^m \theta_{\eta} \frac{\xi_1}{\eta} \right)_{\xi_1} + \left( \theta^m \theta_{\eta} \frac{\xi_2}{\eta} \right)_{\xi_2}, \\
&= m \theta^{m-1} \theta_{\eta}^2 \left( \frac{\xi_1}{\eta} \right)^2 + \theta^m \theta_{\eta \eta} \left( \frac{\xi_1}{\eta} \right)^2 + \theta^m \theta_{\eta} \frac{\xi_2^2}{\eta^{3/2}}, \\
&\quad + m \theta^{m-1} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2 \left( \frac{\xi_2}{\eta} \right)^2 + \theta^m \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \left( \frac{\xi_2}{\eta} \right)^2 + \theta^m \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\xi_1^2}{\eta^{3/2}}, \\
&= m \theta^{m-1} \theta_{\eta}^2 \left( \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{\eta^2} \right) + \theta^m \theta_{\eta \eta} \left( \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{\eta^2} \right) + \theta^m \theta_{\eta} \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{\eta^{3/2}}, \\
&= m \theta^{m-1} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2 + \theta^m \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \theta^m \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{1}{\eta}, \\
&= \frac{1}{\eta} (\eta m \theta^{m-1} \theta_{\eta}^2 + \eta \theta^m \theta_{\eta \eta} + \theta^m \theta_{\eta}), \\
&= \frac{1}{\eta} (\eta \theta^m \theta_{\eta})_{\eta}. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Luego la ecuación (2.24) en coordenadas polares tiene la forma

$$\frac{D_0}{\eta} (\eta \theta^m \theta_{\eta})_{\eta} + \frac{1}{2m+2} \theta_{\eta} \eta + \frac{1}{m+1} \theta = 0. \tag{2.27}$$

Multiplicando la ecuación (2.27) por  $\eta$  obtenemos

$$D_0 (\eta \theta^m \theta_{\eta})_{\eta} + \frac{1}{2m+2} \theta_{\eta} \eta^2 + \frac{1}{m+1} \theta \eta = 0.$$

Por propiedades de la derivada el anterior resultado es equivalente a

$$D_0 (\eta \theta^m \theta_{\eta})_{\eta} + \frac{1}{2m+2} (\theta \eta^2)_{\eta} = 0, \quad \eta > 0$$

luego

$$D_0 \eta \theta^m \theta_{\eta} + \frac{1}{2m+2} (\theta \eta^2) = c, \quad c \in \mathbb{R}^2.$$

Por propiedades de la función  $\theta$ , podemos ver que  $\theta(\eta) \rightarrow 0$ , para  $\eta = 0$ ,  $\theta_\xi(\eta) = 0$  pues  $\theta$  posee un máximo en  $\eta = 0$  y para algun  $\eta = \eta_0$ ,  $\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \theta(\eta) = 0$

$$D_0 \eta \theta^m \theta_\eta + \frac{1}{2m+2} (\theta \eta^2) = 0, \eta > 0, \theta^m \theta_\eta(0) = 0.$$

Usando el método de separación de variables, tenemos

$$\begin{aligned} D_0 \theta^{m-1} \partial \theta &= -\frac{1}{2m+2} \eta \partial \eta, \\ \int D_0 \theta^{m-1} \partial \theta &= -\int \frac{1}{2m+2} \eta \partial \eta, \\ \frac{D_0 \theta^m}{m} &= -\frac{\eta^2}{4m+4} + c, \\ \frac{D_0 \theta^m}{m} &= \frac{1}{4m+4} (\eta_0^2 - \eta^2), \\ \theta(\eta) &= \sqrt[m]{\frac{m}{D_0(4m+4)} (\eta_0^2 - \eta^2)}, \quad \eta \geq 0. \end{aligned}$$

Denotando

$$\begin{aligned} k &= \left( \frac{m}{D_0(4m+4)} \right)^{1/m}, \\ \theta(\eta) &= \begin{cases} k (\eta_0^2 - \eta^2)^{1/m} & \text{si } |\eta| \leq \eta_0 \\ 0 & \text{si } |\eta| > \eta_0 \end{cases}, \end{aligned}$$

la solución es de la forma

$$u(\eta, t) = \begin{cases} t^{-1/(m+1)} \left( \frac{m}{D_0(4m+4)} \right)^{1/m} \left( \eta_0^2 - \frac{\eta^2}{t^{\frac{1}{m+2}}} \right)^{1/m} & \text{si } \eta \leq \xi_0 t^{\frac{1}{m+2}} \\ 0 & \text{si } \eta > \xi_0 t^{\frac{1}{m+2}} \end{cases}. \quad (2.28)$$

Para hallar la constante  $\eta_0$  utilizamos la condición (2.17) y el jacobiano de la transformación, que es igual a  $\eta$  entonces

$$\begin{aligned} E_0 &= \int_{\mathbb{R}^2} \int \theta(\xi) d\xi \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\eta_0} (\eta_0^2 - \eta^2)^{1/m} \eta d\eta d\theta \\ &= 2\pi k \int_0^{\eta_0} \eta_0^{2/m} \left( 1 - \frac{\eta^2}{\eta_0^2} \right)^{1/m} \eta d\eta \end{aligned}$$

realizando la sustitución

$$\mu = \frac{\eta^2}{\eta_0^2} \text{ y } d\mu = \frac{2\eta}{\eta_0^2} d\eta$$

entonces la integral queda igual a

$$\begin{aligned} E_0 &= 2\pi k \int_0^{\eta_0} \eta_0^{2/m} \left(1 - \frac{\eta^2}{\eta_0^2}\right)^{1/m} \eta d\eta \\ &= \pi k \eta_0^{2/m+2} \int_0^1 (1 - \mu)^{1/m} \mu^0 d\mu \\ &= \pi k \eta_0^{2/m+2} \frac{\Gamma(1) \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + 2\right)} \\ &= \pi k \eta_0^{2/m+2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + 2\right)} \\ &= \pi k \eta_0^{2/m+2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + 2\right)}. \end{aligned}$$

Finalmente, despejando  $\eta_0$  y reemplazando  $k$  obtenemos que

$$\eta_0 = \left( \frac{E_0 \Gamma\left(\frac{1}{m} + 2\right)}{\pi \left(\frac{m}{D_0(4m+4)}\right)^{1/m} \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)} \right)^{m/(2+3m)}.$$

Ver gráfica de la solución para algunos valores de los parametros en la Figura 2.11.

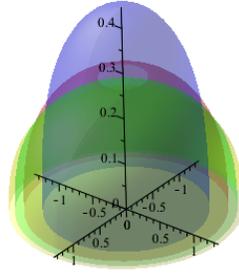


Fig. 2.11. Evolución de la densidad de población en dos dimensiones para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 3$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Las gráficas de la solución muestran que el soporte de la densidad es finito y corresponde a las bolas cerradas de radio  $\eta = \xi_0 t^{\frac{1}{m+2}}$ , y que a medida que  $t$  aumenta, el radio de las bolas aumenta, la amplitud de las superficies disminuyen, además es claro que de las condiciones iniciales y de la solución de la ecuación, se tiene que se conserva la masa.

Ya conocida la solución del problema (2.27), en lo que sigue, estudiaremos las diferentes propiedades de esta y su comportamiento con relación al parámetro  $m$ . Esta solución tiene mejor sentido biológico que el caso unidimensional con coeficiente de difusión dependiendo de la densidad, debido a que el movimiento de los individuos no se realiza en una dimensión.

La siguiente tabla registra los datos de las gráficas mostradas en figura 2.11. a partir del soporte (máxima distancia recorrida alrededor), la amplitud ( $u(0, 0, t)$ ) y la velocidad de difusión (distancia radial recorrida en el tiempo), igual que en una dimensión se puede ver que el soporte es finito y que a medida que  $t$  aumenta el área del soporte aumenta, la amplitud de las superficies disminuye, la velocidad de difusión disminuye y la densidad de población se conserva.

$t$	radio $\eta$	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}^2} u(x, y, t) dy dx$
0	0	1	0	1
1	0,974820	0,446622	0,974820	1
5	1,192053	0,298674	0,238411	1
10	1,299943	0,251154	0,129994	1
15	1,367527	0,226943	0,091168	1

Tabla 2.6. Evolución de la densidad de población en dos dimensiones para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 3$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Modifiquemos  $m$  en el coeficiente de difusión  $D$ , considerando el mismo  $D_0 = 2$ , la misma masa  $E_0 = 1$  y los mismos tiempos  $t = 1, 5, 10, 15$ .

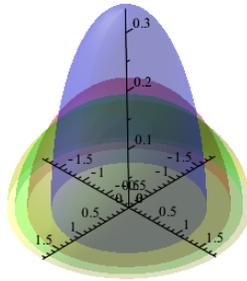


Fig. 2.12. Evolución de la densidad de población en dos dimensiones para  $E_0 = 1, D_0 = 2, m = 2, t = 1, 5, 10, 15$ .

La siguiente tabla registra los datos de las gráficas mostradas en figura 2.12.

$t$	radio $\eta$	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}^2} u(x, y, t) dy dx$
0	0	1	0	1
1	1,182617	0,341392	1,182617	1
5	1,546461	0,199647	0,309292	1
10	1,735844	0,158460	0,173584	1
15	1,857202	0,138428	0,123813	1

Tabla 2.7. Evolución de la densidad de población en dos dimensiones para  $E_0 = 1, D_0 = 2, m = 2, t = 1, 5, 10, 15$ .

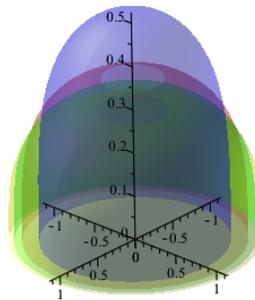


Fig. 2.13. Evolución de la densidad de población en dos dimensiones para  $E_0 = 1, D_0 = 2, m = 4, t = 1, 5, 10, 15$ .

La siguiente tabla registra los datos de las gráficas mostradas en figura 2.13.

$t$	radio $\eta$	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}^2} u(x, y, t) dy dx$
0	0	1	0	1
1	0,870771	0,524749	0,870771	1
5	1,022824	0,380328	0,204565	1
10	1,096236	0,331095	0,109624	1
15	1,141598	0,305305	0,076107	1

Tabla 2.8. Evolución de la densidad de población en dos dimensiones para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 4$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Podemos ver que cuando disminuimos  $m$  el área del soporte aumenta, la amplitud de las superficies disminuyen y la velocidad de difusión aumenta; cuando aumentamos  $m$  el área del soporte disminuye, la amplitud de las superficies aumentan y la velocidad de difusión disminuye. La Figura 2.14. muestra el consolidado de la evolución de la densidad de población respecto a estos parámetros, para diferentes tiempos y diferentes constantes de adaptabilidad.

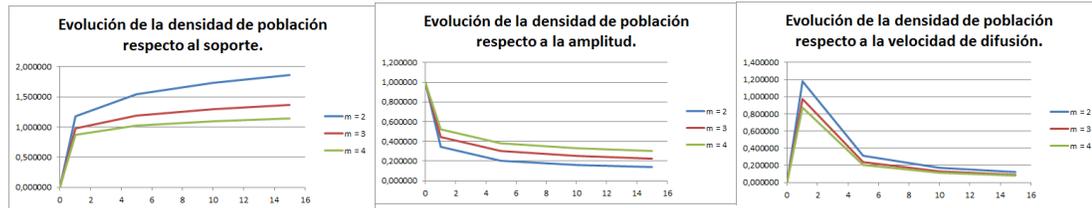


Fig. 2.14. Evolución de la densidad de población respecto al soporte, la amplitud y la velocidad de difusión, en dos dimensiones para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 2, 3, 4$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Ahora modifiquemos  $D_0$ , considerando el mismo  $m = 3$ , la misma masa  $E_0 = 1$  y los mismos tiempos  $t = 1, 5, 10, 15$ .

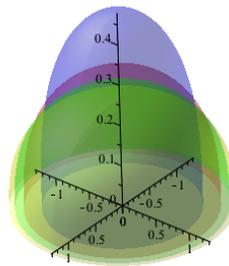


Fig. 2.15. Evolución de la densidad de población en dos dimensiones para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 1,5$ ,  $m = 3$ ,  $t = 1,5, 10, 15$ .

La siguiente tabla registra los datos de las gráficas mostradas en figura 2.15.

$t$	radio $\eta$	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}^2} u(x, y, t) dy dx$
0	0	1	0	1
1	0,940388	0,479926	0,940388	1
5	1,149948	0,320946	0,229590	1
10	1,254028	0,269882	0,125403	1
15	1,319224	0,243866	0,087948	1

Tabla 2.9. Evolución de la densidad de población en dos dimensiones para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 1,5$ ,  $m = 3$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

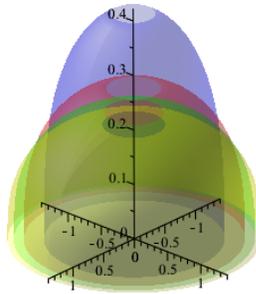


Fig. 2.16. Evolución de la densidad de población en dos dimensiones para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2,5$ ,  $m = 3$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

La siguiente tabla registra los datos de las gráficas mostradas en figura 2.16.

$t$	radio $\eta$	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}^2} u(x, y, t) dy dx$
0	0	1	0	1
1	1,002393	0,422389	1,002393	1
5	1,225771	0,282469	0,245154	1
10	1,336713	0,237527	0,133671	1
15	1,406208	0,214630	0,093747	1

Tabla 2.10. Evolución de la densidad de población en dos dimensiones para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2,5$ ,  $m = 3$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Vemos que si  $D_0$  disminuye el área del soporte disminuye, la amplitud de las superficies aumentan y la velocidad de difusión disminuye; si  $D_0$  aumenta el área del soporte aumenta, la amplitud de las superficies disminuyen y la velocidad de difusión aumenta. La Figura 2.17. muestra el consolidado de la evolución de la densidad de población respecto a estos parámetros, para diferentes tiempos y diferentes constantes de proporcionalidad del coeficiente de difusión.

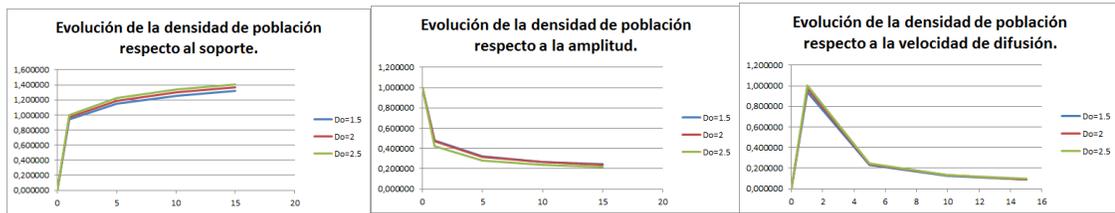


Fig. 2.17. Evolución de la densidad de población respecto al soporte, la amplitud y la velocidad de difusión, en dos dimensiones para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 1.5, 2, 2.5$ ,  $m = 3$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

## Capítulo 3

# Solución de la ecuación de difusión con variaciones.

La dinámica de una población es su desarrollo en el tiempo y en el espacio, y está determinada por otros factores que actúan en el organismo, en la población y en el medio ambiente. En este capítulo introduciremos al modelo (1.19) el crecimiento exponencial dado por los factores de natalidad y mortalidad, y consideraremos el transporte de la población cuando también ocurre el fenómeno de advección.

### 3.1. Solución con crecimiento exponencial.

Introduciendo a la ecuación del modelo (1.23) los efectos de natalidad o mortalidad la ecuación queda igual a:

$$n_t(x, t) = D_0 \left( \left( \frac{n(x, t)}{n_0} \right)^m n_x(x, t) \right)_x + \mu n(x, t) \quad (3.1)$$

en caso que se solo se presente natalidad consideramos  $\mu > 0$  y en caso que solo se presente mortalidad consideramos  $\mu < 0$ .

Con el fin de resolver esta ecuación, observemos que si el fenómeno de difusión fuese despreciable, la ecuación (3.1) viene a describir un crecimiento exponencial de la población en el tiempo. Esto nos motiva a suponer que la solución es de la forma  $u(x, t) = e^{\mu t} \rho(x, t)$  para una función  $\rho$  entonces

$$u_t(x, t) = \mu e^{\mu t} \rho(x, t) + e^{\mu t} \rho_t(x, t) \quad \text{y} \quad u_x(x, t) = e^{\mu t} \rho_x(x, t)$$

luego

$$\begin{aligned} u^m(x, t) u_x(x, t) &= e^{\mu m t} \rho^m(x, t) e^{\mu t} \rho_x(x, t) \\ &= e^{\mu m t + \mu t} \rho^m(x, t) \rho_x(x, t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

y derivando respecto a  $x$  la ecuación (3.2) obtenemos

$$(u^m(x, t)u_x(x, t))_x = e^{\mu t + \mu t} (\rho^m(x, t)\rho_x(x, t))_x \quad (3.3)$$

reemplazando (3.3) en (2.2) con crecimiento exponencial dado por el término  $\mu n(x, t)$  obtenemos

$$\mu e^{\mu t} \rho(x, t) + e^{\mu t} \rho_t(x, t) = D_0 e^{\mu t + \mu t} (\rho^m(x, t)\rho_x(x, t))_x + \mu e^{\mu t} \rho(x, t), \quad (3.4)$$

simplificando tenemos que

$$e^{-\mu t} \rho_t(x, t) = D_0 (\rho^m(x, t)\rho_x(x, t))_x. \quad (3.5)$$

Entonces definimos una nueva variable tiempo  $\tau(t)$  tal que  $\frac{d\tau}{dt} = e^{\mu t}$  y utilizando separación de variables con  $\tau(0) = 0$   $\tau = \frac{1}{\mu m} e^{\mu t} - \frac{1}{\mu m}$  y reemplazando en (3.5) obtenemos

$$\rho_t(x, t) = D_0 (\rho^m(x, t)\rho_x(x, t))_x. \quad (3.6)$$

Utilizando las soluciones de autosimilaridad  $\rho(x, \tau) = \tau^{-k} \theta(\zeta)$ ,  $\zeta = \frac{x}{\tau^\beta}$  donde  $k, \beta$  son constantes y  $\theta(\zeta) \geq 0$  es una función continua, entonces

$$\begin{aligned} \rho_t(x, t) &= -k\tau^{-k-1}\theta(\zeta) + \tau^{-k}\theta_\zeta(\zeta)\zeta_\tau, \\ &= -k\tau^{-k-1}\theta(\zeta) + \tau^{-k}\theta_\zeta(\zeta)x(-\beta)\tau^{-\beta-1}, \\ &= -k\tau^{-k-1}\theta(\zeta) - \beta\tau^{-k-1}\theta_\zeta(\zeta)\zeta\frac{x}{\tau^\beta}, \\ &= -k\tau^{-k-1}\theta(\zeta) - \beta\tau^{-k-1}\theta_\zeta(\zeta)\zeta, \\ &= -\tau^{-k-1}(k\theta(\zeta) + \beta\theta_\zeta(\zeta)\zeta), \end{aligned} \quad (3.7)$$

y

$$\begin{aligned} \rho_x(x, t) &= \tau^{-k}\theta_\zeta(\zeta)\zeta_x, \\ &= \tau^{-k}\theta_\zeta(\zeta)\frac{1}{\tau^\beta}, \\ &= \tau^{-k-\beta}\theta_\zeta(\zeta), \end{aligned} \quad (3.8)$$

luego

$$\begin{aligned} \rho^m(x, t)\rho_x(x, t) &= \tau^{-mk}\theta^m(\zeta)\tau^{-k-\beta}\theta_\zeta(\zeta), \\ &= \tau^{-mk-k-\beta}\theta^m(\zeta)\theta_\zeta(\zeta). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Derivando con respecto a  $x$  la ecuación (3.9) obtenemos

$$\begin{aligned} (\rho^m(x, t)\rho_x(x, t))_x &= \tau^{-mk-k-\beta} \left( m\theta^{m-1}(\zeta)\theta_\zeta^2(\zeta)\frac{1}{\tau^\beta} + \theta^m(\zeta)\theta_{\zeta\zeta}(\zeta)\frac{1}{\tau^\beta} \right), \\ &= \tau^{-mk-k-2\beta} (m\theta^{m-1}(\zeta)\theta_\zeta^2(\zeta) + \theta^m(\zeta)\theta_{\zeta\zeta}(\zeta)), \\ &= \tau^{-mk-k-2\beta} (\theta^m(\zeta)\theta_\zeta(\zeta))_\zeta, \end{aligned} \quad (3.10)$$

y reemplazando (3.7) y (3.9) en (3.6) obtenemos que

$$-\tau^{-k-1} (k\theta(\zeta) + \beta\theta_\zeta(\zeta)\zeta) = D_0\tau^{-mk-k-2\beta} (\theta^m(\zeta)\theta_\zeta(\zeta))_\zeta, \quad (3.11)$$

haciendo

$$-k - 1 = -mk - k - 2\beta$$

se cancela  $\tau$  en (3.11) y la ecuación (3.10) se reduce a

$$-k\theta(\zeta) + \beta\theta_\zeta(\zeta)\zeta = D_0 (\theta^m(\zeta)\theta_\zeta(\zeta))_\zeta$$

la cual por propiedades de la derivada es equivalente a

$$D_0 (\theta^m(\zeta)\theta_\zeta(\zeta))_\zeta + (k\theta(\zeta)\zeta)_\zeta = 0. \quad (3.12)$$

Tomando  $\beta = k = \frac{1}{m+2}$  y utilizando propiedades de la derivada, entonces (3.12) se puede escribir como

$$\left( D_0\theta^m(\zeta)\theta_\zeta(\zeta) + \frac{1}{m+2}\theta(\zeta)\zeta \right)_\zeta = 0,$$

luego

$$D_0\theta^m(\zeta)\theta_\zeta(\zeta) + \frac{1}{m+2}\theta(\zeta)\zeta = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Por propiedades de la derivada la anterior ecuación es equivalente a

$$D_0\theta^m(\zeta)\theta_\zeta(\zeta) + \frac{1}{m+2}\theta(\zeta)\zeta = 0, \quad (3.13)$$

la cual se resuelve por separación de variables, y de la misma forma como en el caso sin tasa intrínseca consideramos  $\zeta = 0$ ,  $\theta_\zeta(\zeta) = 0$  y  $\theta^m(\zeta_0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} D_0\theta^{m-1}(\zeta)d\theta &= -\frac{1}{m+2}\zeta d\zeta \\ \int D_0\theta^{m-1}(\zeta)d\theta &= -\int \frac{1}{m+2}\zeta d\zeta \\ \frac{D_0\theta^m(\zeta)}{m} &= -\frac{1}{2m+4}\zeta^2 + c \\ &= \frac{1}{2m+4}(\zeta_0^2 - \zeta^2) \end{aligned}$$

luego

$$\theta(\zeta) = \begin{cases} \sqrt[m]{\frac{m}{D_0(2m+4)}} (\zeta_0^2 - \zeta^2) & \text{si } |\zeta| \leq \zeta_0 \\ 0 & \text{si } |\zeta| > \zeta_0 \end{cases}.$$

y

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{\mu t} \rho(x, \tau), \\ &= e^{\mu t} \tau^{-1/(m+2)} \theta(\zeta). \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución es de la forma

$$u(x, t) = e^{\mu t} \tau^{-1/(m+2)} \begin{cases} \sqrt[m]{\frac{m}{D_0(2m+4)}} (\zeta_0^2 - x^2/\tau^{2/(m+2)}) & \text{si } |x| \leq \zeta_0 \tau^{1/(m+2)} \\ 0 & \text{si } |x| > \zeta_0 \tau^{1/(m+2)} \end{cases} \quad (3.14)$$

donde

$$\zeta_0 = \left( \frac{E_0 \left( \frac{D_0(2m+4)}{m} \right)^{1/m} \Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)} \right)^{m/(2+m)} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{1}{\mu m} e^{\mu m t} - \frac{1}{\mu m}$$

que se determina de la misma forma cómo se halló  $\xi_0$  en la sección (2.1.2). Ver gráfica de la solución en la Figura 3.1.

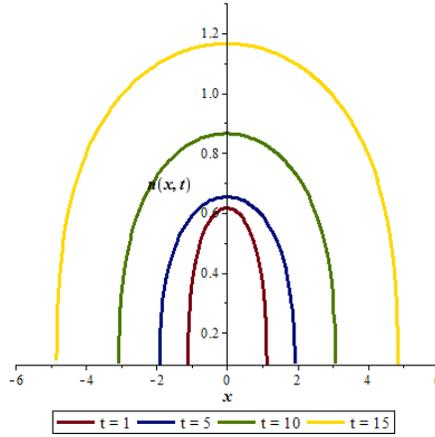


Fig. 3.1. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

De la Figura 3.1. se puede ver que las curvas de la solución muestran que el soporte de la densidad es finito y corresponde a el intervalo  $[-\zeta_0\tau^{1/(m+2)}, \zeta_0\tau^{1/(m+2)}]$  y la amplitud de las curvas de la solución es  $e^{\mu t}\tau^{-1/(m+2)}$  la cual aumenta a medida que aumenta  $t$ , además es claro que de las condiciones iniciales y la solución de la ecuación, se tiene que la masa aumenta.

Ya conocida la solución del problema (3.1) para  $\mu > 0$ , en lo que sigue, estudiaremos las diferentes propiedades de esta y su comportamiento con relación al parámetro  $m$ . La siguiente tabla registra los datos de las gráficas mostradas en la figura 3.1. se puede ver que el soporte es finito y que a medida que transcurre el tiempo  $t$  la longitud del soporte aumenta, la amplitud de las curvas de la solución aumenta, la velocidad de difusión aumenta y la densidad de población aumenta. Es decir, la población cada vez ocupa más espacio, a medida que esta va creciendo.

$t$	Soporte	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-1,120638, 1,120638]$	0,616160	1,120638	1,161834
5	$[-1,924448, 1,924448]$	0,653776	0,384890	2,117000
10	$[-3,079233, 3,079233]$	0,864995	0,307923	4,481689
15	$[-4,838866, 4,838866]$	1,165288	0,322591	9,487736

Tabla 3.1. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Modifiquemos  $m$  en el coeficiente de difusión  $D$ , considerando el mismo  $D_0 = 2$ , la misma masa inicial  $E_0 = 1$ , la misma tasa de natalidad y los mismos tiempos  $t = 1, 5, 10, 15$ .

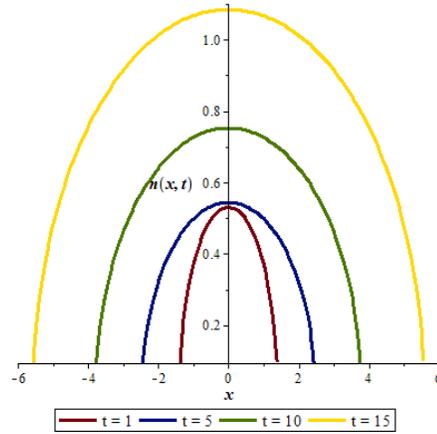


Fig. 3.2. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 2$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

$t$	<i>Soporte</i>	<i>Amplitud</i>	<i>Velocidad</i>	$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-1,394458, 1,394458]$	0,530419	1,394458	1,161834
5	$[-2,476736, 2,476736]$	0,544153	0,495347	2,117000
10	$[-3,789731, 3,789731]$	0,752859	0,378973	4,481689
15	$[-5,569300, 5,569300]$	1,084531	0,371287	9,487736

Tabla 3.2. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 2$ ,  $\mu = 0,15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

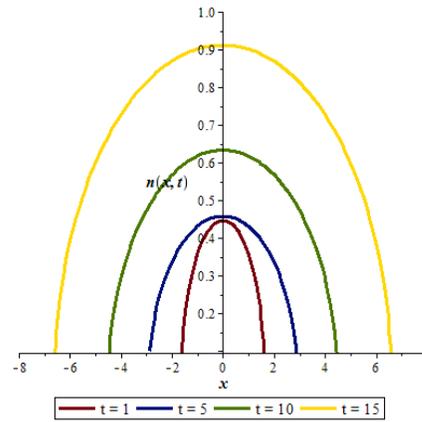


Fig. 3.3. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2, m = 4$ ,  $\mu = 0,15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

$t$	<i>Soporte</i>	<i>Amplitud</i>	<i>Velocidad</i>	$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-0,979013, 0,979013]$	0,678898	0,979013	1,161834
5	$[-1,653548, 1,653548]$	0,732408	0,330710	2,117000
10	$[-2,748406, 2,748406]$	0,932846	0,274841	4,481689
15	$[-4,533137, 4,533137]$	1,197327	0,302209	9,487736

Tabla 3.3. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 4$ ,  $\mu = 0,15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

De los datos registrados en las tablas 3.1., 3.2. y 3.3. vemos que cuando disminuimos  $m$  todos los demás datos aumentan y viceversa cuando aumentamos  $m$  todos los demás datos disminuyen, el único dato que no cambia es la masa. La Figura 3.4. muestra el consolidado de la evolución de la densidad de población respecto a estos parámetros, para diferentes tiempos y diferentes constantes de adaptabilidad.

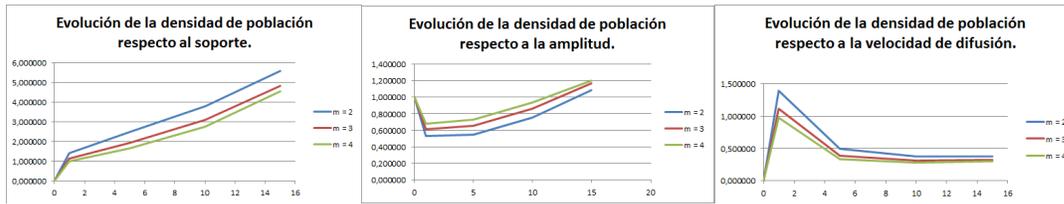


Fig. 3.4. Evolución de la densidad de población respecto al soporte, la amplitud y la velocidad de difusión, en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 2, 3, 4$ ,  $\mu = 0,15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

De manera análoga modificamos  $D_0$  y conservamos todos los demas datos, lo cual se ilustra en las gráficas 3.5. y 3.6., y en las Tablas 3.4. y 3.5.

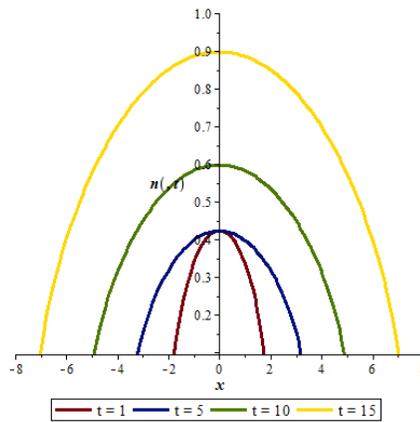


Fig. 3.5. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 1,5$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0,15$ ,  $t = 1,5, 10, 15$ .

$t$	Soporte	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-1,057980, 1,057980]$	0,652651	1,057980	1,161834
5	$[-1,816847, 1,816847]$	0,692495	0,363369	2,117000
10	$[-2,907066, 2,907066]$	0,916223	0,290707	4,481689
15	$[-4,568313, 4,568313]$	1,234301	0,304554	9,487736

Tabla 3.4. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 1,5$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0,15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

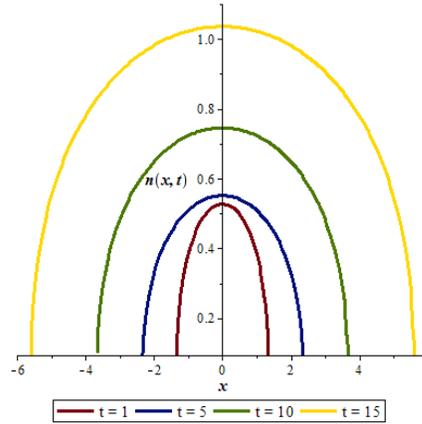


Fig. 3.6. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2,5$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0,15$ ,  $t = 1,5, 10, 15$ .

$t$	Soporte	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-1,171783, 1,171783]$	0,589266	1,171783	1,161834
5	$[-2,012279, 2,012279]$	0,625240	0,402456	2,117000
10	$[-3,219768, 3,219768]$	0,827240	0,321977	4,481689
15	$[-5,059710, 5,059710]$	1,114426	0,304554	9,487736

Tabla 3.5. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2,5$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0,15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Vemos que si  $D_0$  disminuye la longitud del soporte disminuye, mientras que la amplitud de las curvas de la solución y la velocidad aumentan; si  $D_0$  aumenta la longitud del soporte aumenta mientras que la amplitud de las curvas de la solución y la velocidad disminuyen; en ambos casos la masa no cambia. La Figura 3.7. muestra el consolidado de la evolución de la densidad de población respecto a estos parámetros, para diferentes tiempos y diferentes constantes de proporcionalidad del coeficiente de difusión.

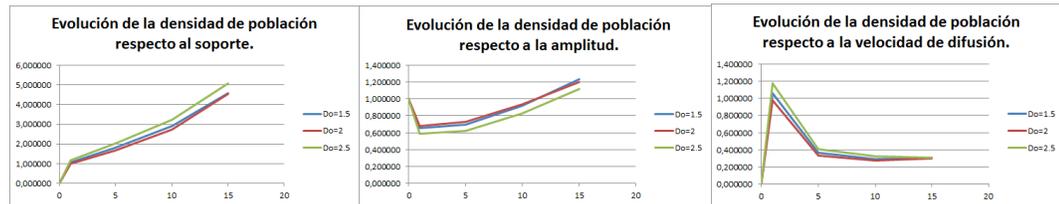


Fig. 3.7. Evolución de la densidad de población respecto al soporte, la amplitud y la velocidad de difusión, en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 1,5, 2, 2,5$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0,15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Por último si conservamos todos los datos menos la tasa de natalidad  $\mu$ , lo cual se ilustra en las Figuras 3.8. y 3.9., y en las Tablas 3.6. y 3.7.

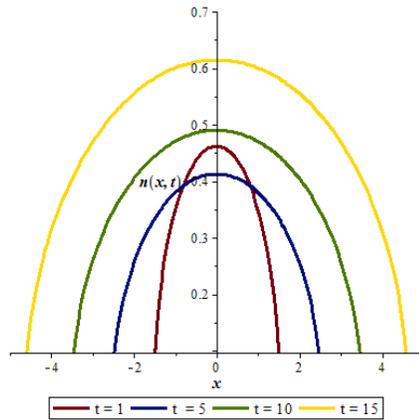


Fig. 3.8. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0,1$ ,  $t = 1,5, 10, 15$ .

$t$	<i>Soporte</i>	<i>Amplitud</i>	<i>Velocidad</i>	$\int_{\mathbb{R}} u(x,t) dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-1,102922, 1,102922]$	0,595524	1,102922	1,105171
5	$[-1,746321, 1,746321]$	0,561096	0,349264	1,648721
10	$[-2,454183, 2,454183]$	0,658266	0,245418	2,718282
15	$[-3,339341, 3,339341]$	0,797619	0,222623	4,481689

Tabla 3.6. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0,1$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

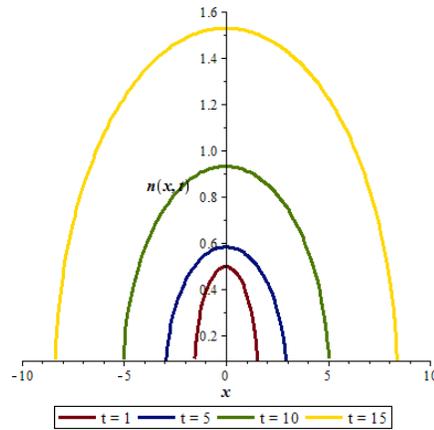


Fig. 3.9. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0,2$ ,  $t = 1,5, 10, 15$ .

$t$	Soporte	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-1, 139061, 1, 139061]$	0,637274	1,139061	1,221403
5	$[-2, 136491, 2, 136491]$	0,756150	0,427298	2,718282
10	$[-3, 930954, 3, 930954]$	1,117134	0,393095	7,389056
15	$[-7, 166644, 7, 166644]$	1,665783	0,477736	20,085537

Tabla 3.7. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0,2$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Vemos que si la tasa de natalidad  $\mu$  disminuye la amplitud, la velocidad de difusión y la masa, y viceversa si la tasa de natalidad  $\mu$  aumenta la amplitud, la velocidad de difusión y la masa aumentan. La Figura 3.10. muestra el consolidado de la evolución de la densidad de población respecto a estos parámetros, para diferentes tiempos y diferentes tasas de natalidad.



Fig. 3.10. Evolución de la densidad de población respecto al soporte, la amplitud y la velocidad de difusión, en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0.10, 0.15, 0.20$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Si el modelo dado por la ecuación (3.1) presenta mortalidad consideramos  $\mu < 0$ . Con el fin de resolver esta ecuación supongamos como en el caso de natalidad, la ecuación (3.1) viene a describir un crecimiento exponencial de la población en el tiempo. Esto nos motiva a suponer que la solución es de la forma  $u(x, t) = e^{-\mu t} \rho(x, t)$  para una función  $\rho$  entonces

$$u_t(x, t) = \mu e^{-\mu t} \rho(x, t) + e^{-\mu t} \rho_t(x, y) \text{ y } u_x(x, t) = e^{-\mu t} \rho_x(x, y)$$

luego

$$\begin{aligned} u^m(x, t) u_x(x, t) &= e^{-\mu m t} \rho^m(x, t) e^{-\mu t} \rho_x(x, y) \\ &= e^{-\mu m t - \mu t} \rho^m(x, t) \rho_x(x, y) \end{aligned} \quad (3.15)$$

y derivando respecto a  $x$  la ecuación (3.11) obtenemos

$$(u^m(x, t) u_x(x, t))_x = e^{-\mu m t - \mu t} (\rho^m(x, t) \rho_x(x, y))_x. \quad (3.16)$$

Reemplazando (3.15) en (2.2) obtenemos

$$-\mu e^{-\mu t} \rho(x, t) + e^{-\mu t} \rho_t(x, y) = D_0 e^{-\mu m t - \mu t} (\rho^m(x, t) \rho_x(x, y))_x - \mu e^{-\mu t} \rho(x, t) \quad (3.17)$$

simplificando tenemos que

$$e^{\mu mt} \rho_t(x, y) = D_0 (\rho^m(x, t) \rho_x(x, y))_x. \quad (3.18)$$

Ahora definimos una nueva variable tiempo  $\tau(t)$  tal que  $\frac{d\tau}{dt} = e^{-\mu mt}$  y utilizando separación de variables con  $\tau(0) = 0$  y  $\tau = -\frac{1}{\mu m} e^{-\mu mt} + \frac{1}{\mu m}$  y reemplazando en (3.18) obtenemos

$$\rho_t(x, y) = D_0 (\rho^m(x, t) \rho_x(x, y))_x. \quad (3.19)$$

Utilizando soluciones de autosimilaridad  $\rho(x, \tau) = \tau^{-k} \theta(\zeta)$ ,  $\zeta = \frac{x}{\tau^\beta}$  donde  $k, \beta$  son constantes y

$\theta(\zeta) \geq 0$  es una función continua, entonces

$$\begin{aligned} \rho_t(x, y) &= -k\tau^{-k-1}\theta(\zeta) + \tau^{-k}\theta_\zeta(\zeta)\zeta_\tau, \\ &= -k\tau^{-k-1}\theta(\zeta) + \tau^{-k}\theta_\zeta(\zeta)x(-\beta)\tau^{-\beta-1}, \\ &= -k\tau^{-k-1}\theta(\zeta) - \beta\tau^{-k-1}\theta_\zeta(\zeta)\frac{x}{\tau^\beta}, \\ &= -k\tau^{-k-1}\theta(\zeta) - \beta\tau^{-k-1}\theta_\zeta(\zeta)\zeta, \\ &= -\tau^{-k-1}(k\theta(\zeta) + \beta\theta_\zeta(\zeta)\zeta), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \rho_x(x, y) &= \tau^{-k}\theta_\zeta(\zeta)\theta_\zeta, \\ &= \tau^{-k}\theta_\zeta(\zeta)\frac{1}{\tau^\beta}, \\ &= \tau^{-k-\beta}\theta_\zeta(\zeta), \end{aligned} \quad (3.21)$$

y

$$\begin{aligned} \rho^m(x, t) \rho_x(x, t) &= \tau^{-mk}\theta^m(\zeta)\tau^{-k-\beta}\theta_\zeta(\zeta), \\ &= \tau^{-mk-k-\beta}\theta^m(\zeta)\theta_\zeta(\zeta). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Derivando con respecto a  $x$  la ecuación (3.20) obtenemos

$$\begin{aligned} (\rho^m(x, t) \rho_x(x, t))_x &= \tau^{-mk-k-\beta} \left( m\theta^{m-1}(\zeta) (\theta_\zeta(\zeta))^2 \frac{1}{\tau^\beta} + \theta^m(\zeta) \theta_{\zeta\zeta}(\zeta) \frac{1}{\tau^\beta} \right), \\ &= \tau^{-mk-k-2\beta} (m\theta^{m-1}(\zeta)\theta_\zeta^2(\zeta) + \theta^m(\zeta)\theta_{\zeta\zeta}(\zeta)), \\ &= \tau^{-mk-k-2\beta} (\theta^m(\zeta)\theta_\zeta(\zeta))_\zeta, \end{aligned} \quad (3.23)$$

y reemplazando (3.19) y (3.21) en (3.18) obtenemos que

$$-\tau^{-k-1}(k\theta(\zeta) + \beta\theta_\zeta(\zeta)(\zeta)\zeta) = D_0 \tau^{-mk-k-2\beta} (\theta^m(\zeta)\theta_\zeta(\zeta))_\zeta. \quad (3.24)$$

haciendo

$$-k - 1 = -mk - k - 2\beta$$

se cancela  $\tau$  en (3.24) y la ecuación (3.23) se reduce a

$$-k\theta(\zeta) + \beta\theta_\zeta(\zeta)\zeta = D_0(\theta^m(\zeta)\theta_\zeta(\zeta))_\zeta,$$

la cual por propiedades de la derivada es equivalente a

$$D_0(\theta^m(\zeta)\theta_\zeta(\zeta))_\zeta + (k\theta(\zeta)\zeta)_\zeta = 0T. \quad (3.25)$$

Tomando  $\beta = k = \frac{1}{m+2}$  y utilizando propiedades de la derivada, entonces (3.25) se puede escribir como

$$\left( D_0\theta^m(\zeta)\theta_\zeta(\zeta) + \frac{1}{m+2}\theta(\zeta)\zeta \right)_\zeta = 0,$$

luego

$$D_0\theta^m(\zeta)\theta_\zeta(\zeta) + \frac{1}{m+2}\theta(\zeta)\zeta = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Por propiedades de la derivada la anterior ecuación es equivalente a

$$D_0\theta^m(\zeta)\theta_\zeta(\zeta) + \frac{1}{m+2}\theta(\zeta)\zeta = 0, \quad (3.26)$$

la cual se resuelve por separación de variables, y de la misma forma como en el caso sin tasa intrínseca consideramos  $\zeta = 0$ ,  $\theta_\zeta(\zeta) = 0$  y  $\theta^m(\zeta_0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} D_0\theta^{m-1}(\zeta)\theta_\zeta(\zeta) &= -\frac{1}{m+2}\zeta \\ D_0\theta^{m-1}(\zeta)d\theta &= -\frac{1}{m+2}\zeta d\zeta \\ \int D_0\theta^{m-1}(\zeta)d\theta &= -\int \frac{1}{m+2}\zeta d\zeta \\ \frac{D_0\theta^m(\zeta)}{m} &= -\frac{1}{2m+4}\zeta^2 + c = \frac{1}{2m+4}(\zeta_0^2 - \zeta^2) \end{aligned}$$

luego

$$\theta(\zeta) = \begin{cases} \sqrt[m]{\frac{m}{D_0(2m+4)}(\zeta_0^2 - \zeta^2)} & \text{si } |\zeta| \leq \zeta_0, \\ 0 & \text{si } |\zeta| > \zeta_0. \end{cases}$$

Y

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{-\mu t} \rho(x, \tau) = e^{-\mu t} \tau^{-1/(m+2)} \theta(\zeta). \\ u(x, t) &= e^{-\mu t} \rho(x, \tau) = e^{-\mu t} \tau^{-1/(m+2)} \theta(\zeta). \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución es de la forma

$$u(x, t) = e^{-\mu t} \tau^{-1/(m+2)} \begin{cases} \sqrt[m]{\frac{m}{2(m+2)} (\zeta_0^2 - x^2/\tau^{2/(m+2)})} & \text{si } |x| \leq \zeta_0 \tau^{1/(m+2)} \\ 0 & \text{si } |x| > \zeta_0 \tau^{1/(m+2)} \end{cases} \quad (3.27)$$

donde

$$\zeta_0 = \left( \frac{2E_0 \left( \frac{2m+4}{m} \right)^{1/m} \Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)} \right)^{m/(2+m)} \quad \text{y} \quad \tau = -\frac{1}{\mu m} e^{-\mu m t} + \frac{1}{\mu m}$$

que se determina de la misma forma cómo se halló  $\xi_0$  en la sección (2.12). Ver gráfica de la solución en la Figura 3.11.

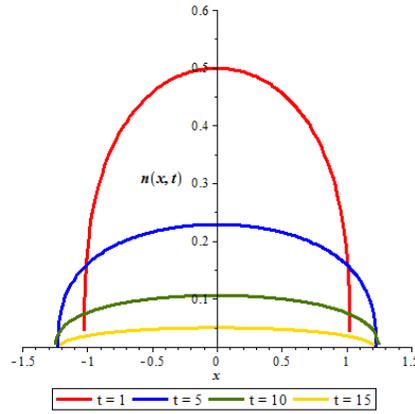


Fig. 3.11. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

La Figura 3.11 muestra que el soporte de la densidad es finito y corresponde a el intervalo  $[-\zeta_0 \tau^{1/(m+2)}, \zeta_0 \tau^{1/(m+2)}]$  y la amplitud de las curvas de la solución es  $e^{-\mu t} \tau^{-1/(m+2)}$  la cual disminuye a medida que aumenta  $t$ , además es claro que de las condiciones iniciales y la solución de la ecuación, se tiene que disminuye la masa.

Ya conocida la solución del problema (3.1) para  $\mu < 0$ , en lo que sigue, estudiaremos las diferentes propiedades de esta y su comportamiento con relación al parámetro  $m$ .

La siguiente tabla registra los datos de las gráficas mostradas en la Figura 3.11. se puede ver que el soporte es finito y que a medida que transcurre el tiempo  $t$  la longitud del soporte disminuye, la amplitud de las curvas de la solución disminuye, la velocidad de difusión disminuye y la densidad de población disminuye. Es decir, la población cada vez ocupa menos espacio, a medida que esta va creciendo.

$t$	<i>Soporte</i>	<i>Amplitud</i>	<i>Velocidad</i>	$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-1,024186, 1,024186]$	0,499449	1,024186	0,860708
5	$[-1,227082, 1,227082]$	0,228781	0,245416	0,472367
10	$[-1,251923, 1,251923]$	0,105924	0,125192	0,223130
15	$[-1,254429, 1,254429]$	0,049935	0,083629	0,105399

Tabla 3.8. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1, D_0 = 2, m = 3, \mu = 0.15, t = 1, 5, 10, 15$ .

Ahora modifiquemos  $m$  en el coeficiente de difusión  $D$ , considerando el mismo  $D_0 = 2$ , la misma masa inicial  $E_0 = 1$ , la misma tasa de mortalidad y los mismos tiempos  $t = 1, 5, 10, 15$ .

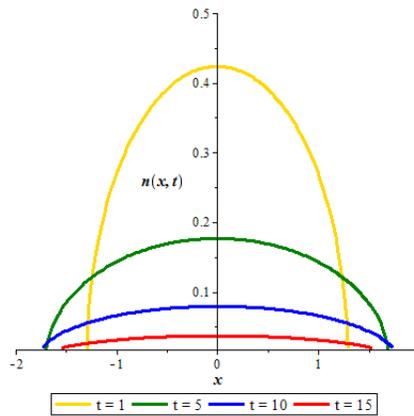


Fig. 3.12. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1, D_0 = 2, m = 2, \mu = 0.15, t = 1, 5, 10, 15$ .

$t$	Soporte	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$
0	[0, 0]	0	1	1
1	[-1,293699, 1,293699]	0,423548	1,293699	0,860708
5	[-1,702234, 1,702234]	0,176661	0,340447	0,472367
10	[-1,790142, 1,790142]	0,079351	0,179014	0,223130
15	[-1,808087, 1,808087]	0,037111	0,120539	0,105399

Tabla 3.9. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 2$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

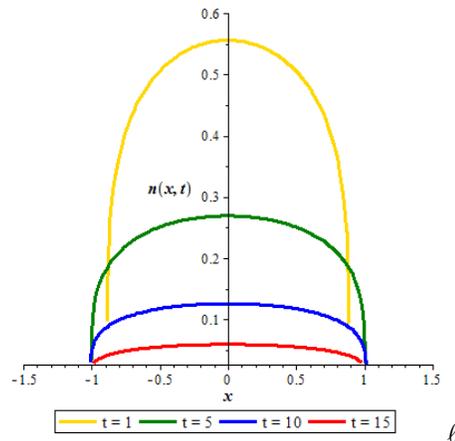


Fig. 3.13. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 4$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

$t$	Soporte	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}} \mu(x, t) dx$
0	[0, 0]	0	1	1
1	[-0,885848, 0,885848]	0,555835	0,885848	0,860708
5	[-1,002927, 1,002927]	0,269438	0,200585	0,472367
10	[-1,011082, 1,011082]	0,126247	0,101108	0,223130
15	[-1,011480, 1,011480]	0,059611	0,067432	0,105399

Tabla 3.10. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 4$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

De los datos registrados en las Tablas 3.8., 3.9. y 3.10. vemos que cuando disminuimos  $m$  el soporte y la amplitud de las curvas de la solución aumentan, la velocidad disminuye; y visceversa cuando aumentamos  $m$  el soporte y la amplitud disminuyen, la velocidad aumenta; en ambos casos la masa permanece igual. La Figura 3.14. muestra el consolidado de la evolución de la densidad de población respecto a estos parámetros, para diferentes tiempos y diferentes constantes de adaptabilidad.

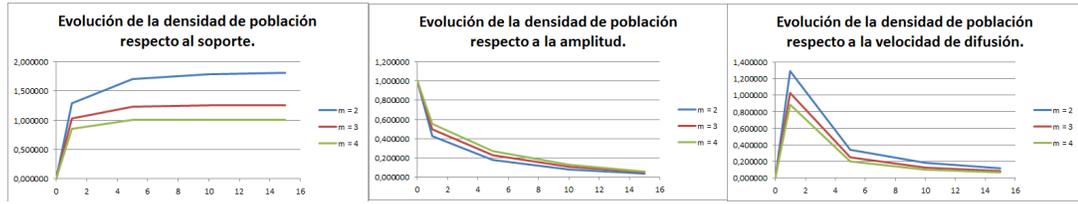


Fig. 3.14. Evolución de la densidad de población respecto al soporte, la amplitud y la velocidad de difusión, en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 2, 3, 4$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

De manera análoga modificamos  $D_0$  y conservamos todos los demás datos, lo cual se ilustra en las Figuras 3.15. y 3.16., y en las Tablas 3.11. y 3.12.

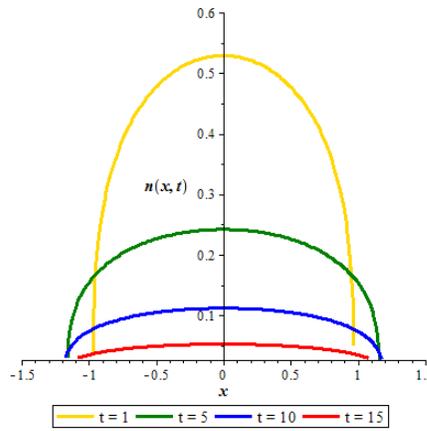


Fig. 3.15. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 1,5$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

$t$	Soporte	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-0,966921, 0,966921]$	0,529029	0,966921	0,860708
5	$[-1,158473, 1,158473]$	0,242330	0,231695	0,472367
10	$[-1,181925, 1,181925]$	0,112197	0,118192	0,223130
15	$[-1,184291, 1,184291]$	0,052892	0,078953	0,105399

Tabla 3.11. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 1,5$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

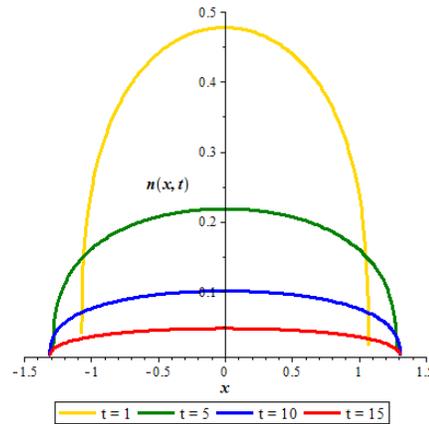


Fig. 3.16. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2,5$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

$t$	Soporte	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-1,070929, 1,070929]$	0,477650	1,070929	0,860708
5	$[-1,283086, 1,283086]$	0,218795	0,256617	0,472367
10	$[-1,309060, 1,309060]$	0,101301	0,130906	0,223130
15	$[-1,311681, 1,311681]$	0,047756	0,087445	0,105399

Tabla 3.12. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2,5$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Vemos que si  $D_0$  disminuye la longitud del soporte y la velocidad disminuyen, mientras que la amplitud de las curvas de la solución aumenta; si  $D_0$  aumenta la longitud del soporte y la velocidad aumentan mientras que la amplitud de las curvas de la solución disminuye; en ambos casos la masa no cambia. La Figura 3.17. muestra el consolidado de la evolución de la densidad de población respecto a estos parámetros, para diferentes tiempos y diferentes constantes de proporcionalidad del coeficiente de difusión.

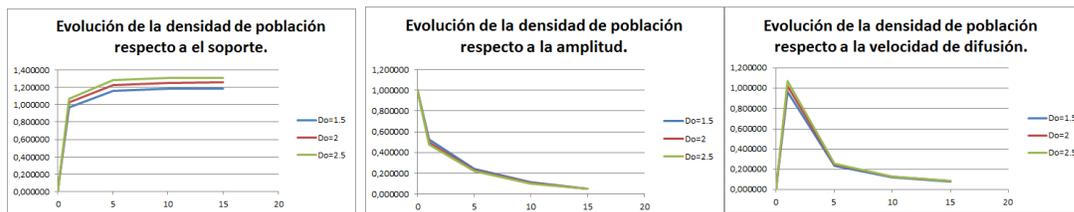


Fig. 3.17. Evolución de la densidad de población respecto al soporte, la amplitud y la velocidad de difusión, en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 1.5, 2, 2.5$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Por último si conservamos todos los datos menos la tasa de mortalidad  $\mu$ , lo cual se ilustra en las Figuras 3.18. y 3.19., y en las Tablas 3.13. y 3.14.

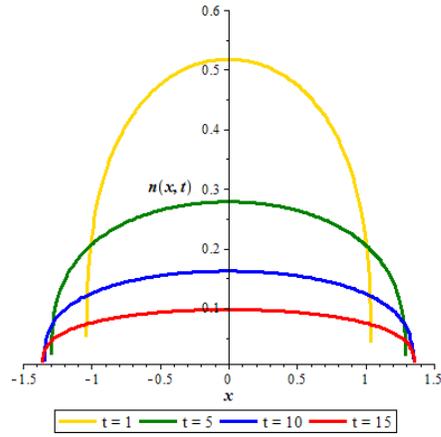


Fig. 3.18. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0,1$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

$t$	Soporte	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-1,038692, 1,038692]$	0,517726	1,038692	0,904837
5	$[-1,293706, 1,293706]$	0,278632	0,258741	0,606531
10	$[-1,346884, 1,346884]$	0,162327	0,134088	0,367879
15	$[-1,397675, 1,397675]$	0,097674	0,090512	0,223130

Tabla 3.13. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0,1$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

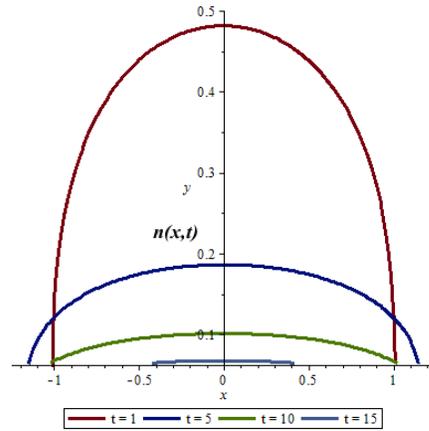


Fig. 3.19. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0,2$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

$t$	Soporte	Amplitud	Velocidad	$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$
0	$[0, 0]$	1	0	1
1	$[-1,010257, 1,010257]$	0,481641	1,010257	0,818731
5	$[-1,172531, 1,172531]$	0,186464	0,234506	0,367879
10	$[-1,183980, 1,183980]$	0,067933	0,118398	0,135335
15	$[-1,184539, 1,184539]$	0,024979	0,078969	0,049787

Tabla 3.14. Evolución de la densidad de población en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0,2$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

La Figura 3.20. muestra el consolidado de la evolución de la densidad de población respecto a algunos parámetros como el soporte, la amplitud y la velocidad de difusión, para diferentes tiempos y diferentes tasas de natalidad.

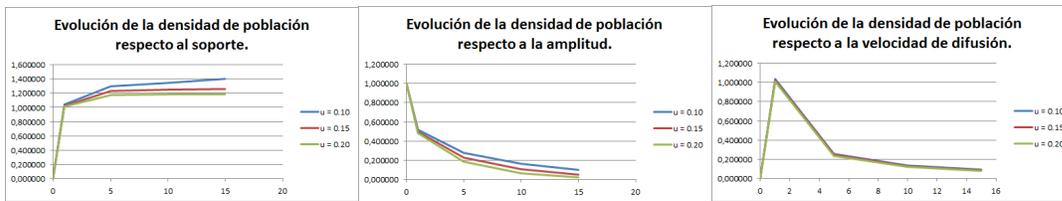


Fig. 3.20. Evolución de la densidad de población respecto al soporte, la amplitud y la velocidad de difusión, en una dimensión para  $E_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $m = 3$ ,  $\mu = 0.10, 0.15, 0.20$ ,  $t = 1, 5, 10, 15$ .

Vemos que si la tasa de mortalidad  $\mu$  disminuye, el soporte, la amplitud y la velocidad de difusión disminuyen y viceversa si la tasa de mortalidad  $\mu$  aumenta, el soporte, la amplitud y la velocidad de difusión aumentan.

### 3.2. Solución con advección en el estado estacionario.

Si el modelo presenta transporte de los individuos por algun medio natural o artificial cómo una corriente de aire o de agua, decimos que en el modelo se presenta el fenomeno de advección, por lo tanto retomamos la ecuación (1.13) que es igual a:

$$n_t(x, t) = D_0 \left( \left( \frac{n(x, t)}{n_0} \right)^m n_x(x, t) \right)_x - v n_x(x, t)$$

En esta sección nos concentraremos en encontrar la densidad de la población a largo plazo (es decir cuando  $t \rightarrow \infty$ )  $n_t = 0$  (caso estacionario). Donde  $v$  es la velocidad del medio denominada constante de advección. Por simplicidad suponemos que el centro de atracción es el origen y la velocidad de atracción  $v$  es constante, tal que  $v = -v_0 \text{signo}(x)$ , ya que la onda viene de izquierda o de derecha, reemplazando en (2.10) obtenemos

$$n_t(x, t) = D_0 \left( \left( \frac{n(x, t)}{n_0} \right)^m n_x(x, t) \right)_x - (v_0 \text{signo}(x) n(x, t))_x. \quad (3.28)$$

Si  $x > 0$ ,  $\text{sgn}(x) = 1$  y  $n_t(x, t) = 0$ , la ecuación (3.28) queda igual a

$$D_0 \left( \left( \frac{n(x, t)}{n_0} \right)^m n_x(x, t) \right)_x - v_0 n_x(x, t) = 0 \tag{3.29}$$

o sea,

$$D_0 \left( \left( \frac{n(x, t)}{n_0} \right)^m n_x(x, t) - v_0 n(x, t) \right)_x = 0$$

luego

$$D_0 \left( \frac{n(x, t)}{n_0} \right)^m n_x(x, t) - v_0 n(x, t) = c$$

por el método de separación de variables

$$\begin{aligned} n(x, t)^{m-1} dn &= \frac{v_0 n_0^m}{D_0} dx \\ \int n^{m-1}(x, t) dn &= \int \frac{v_0 n_0^m}{D_0} dx \\ \frac{n^m(x, t)}{m} &= \frac{v_0 n_0^m}{D_0} x + c \end{aligned}$$

por lo tanto para  $x = 0$  y  $n(0) = n_0$ ,  $c = \frac{n_0^m}{m}$ .

Entonces

$$n(x, t) = \begin{cases} n_0 \left( 1 - \frac{mv_0 |x|}{D_0} \right)^{1/m} & |x| \leq \frac{D_0}{mv_0} \\ 0 & |x| > \frac{D_0}{mv_0} \end{cases} \tag{3.30}$$

la onda viaja centrada en el mismo punto y siempre es cero después de  $\frac{D_0}{mv_0}$ , ver gráfica de la solución en la Figura 3.21.

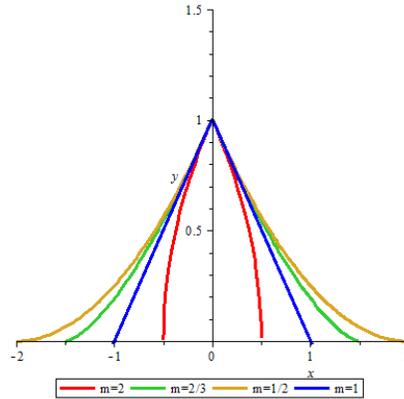


Fig. 3.21. Densidad de población en una dimensión para  $n_0 = 1$ ,  $D_0 = 2$ ,  $v = 2$ ,  $m = 1/2, 1, 2/3, 2$

Las graficas muestran que la dispersión es finita en  $x$ , y que a medida que  $m$  aumenta el soporte es menor y virseversa a medida que  $m$  disminuye el soporte es mayor, mientras que la amplitud de las curvas permanece igual en todos los casos.



# Capítulo 4

## Simulación numérica

En este capítulo discutiremos los procedimientos numéricos utilizados para resolver el problema de valor inicial.

$$n_t(x, t) = D(n^m(x, t)n_x(x, t))_x + \mu n(x, t) \quad -\infty < x < \infty \quad t > 0 \quad (4.1)$$

sujeto a

$$n(x, 0) = f(x) \quad -\infty < x < \infty$$

con  $\int_{-\infty}^{\infty} n(x, t) dx = E_0$ .

Se presentan resultados numéricos para el caso lineal ( $m = 0$ ), caso no lineal ( $m \neq 0$ ) y los casos de natalidad y/o mortalidad. Se utilizó la herramienta matemática MatLab para codificar los respectivos algoritmos.

### 4.1. Solución numérica de la ecuación de difusión lineal.

Con el fin de resolver el problema de valor inicial (4.1) con  $\mu = 0$ , numericamente emplearemos el método de diferencias finitas. Puesto que no es posible representar en el computador el intervalo  $(-\infty, \infty)$  primero consideramos un intervalo acotado lo suficientemente grande  $\Omega = [-L, L]$  y consideraremos que  $n(-L, t) = n(L, t) = 0$  para  $t > 0$ . Ahora denotemos por

$$\Omega_h = \{x | x_i = -L + ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = 2L\},$$

una malla, con número de puntos en la malla  $N$ , tamaño de paso  $h$  del intervalo  $\Omega$  y para discretizar el tiempo consideremos  $t_j = j\tau$  con  $j = 0, 1, \dots$

Usando desarrollo de Taylor progresivo y regresivo de la función  $n$  en la variable espacial  $x$  tenemos:

$$n(x_i + h, t_j) = n(x_i, t_j) + hn_x(x_i, t_j) + \frac{1}{2}h^2n_{xx}(x_i, t_j) + \frac{1}{6}h^3u_{xxx}(x_i, t_j) + O(h^4) \quad (4.2)$$

y

$$n(x_i - h, t_j) = n(x_i, t_j) - hn_x(x_i, t_j) + \frac{1}{2}h^2n_{xx}(x_i, t_j) - \frac{1}{6}h^3u_{xxx}(x_i, t_j) + O(h^4). \quad (4.3)$$

Puesto que nos interesa aproximar  $n_{xx}$  sumamos (4.2) y (4.3) obteniendo

$$n_{xx}(x_i, t_j) = \frac{n(x_i + h, t_j) - 2n(x_i, t_j) + n(x_i - h, t_j)}{h^2} + O(h^2), \quad (4.4)$$

donde  $O(h^2) = -\frac{h^2}{12}n_{xxxx}(\xi_i, t_j)$  para  $\xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ .

De manera similar para aproximar  $n_t(x, t)$  usamos desarrollo de Taylor progresivo de la función  $n$  en la variable tiempo  $t$

$$n(x_i, t_j + \tau) = n(x_i, t_j) + \tau n_t(x_i, t_j) + O(\tau)$$

luego

$$n_t(x_i, t_j) = \frac{n(x_i, t_j + \tau) - n(x_i, t_j)}{\tau} + O(\tau) \quad (4.5)$$

donde  $O(\tau) = -\frac{\tau}{2}n_{tt}(x_i, \zeta_j)$  para  $\zeta_j \in (t_j, t_{j+1})$ .

Por lo tanto, utilizando las ecuaciones (4.4) y (4.5) la ecuación (4.1) queda igual a:

$$\frac{n(x_i, t_j + \tau) - n(x_i, t_j)}{\tau} = D \frac{n(x_i + h, t_j) - 2n(x_i, t_j) + n(x_i - h, t_j)}{h^2} + O(h^2) + O(\tau) \quad (4.6)$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$n(x_0, t_j) = n(-x_N, t_j) = n(x_N, t_j) = 0, \quad t_j > 0$$

y

$$n(x_i, t_0) = f(x_i) \quad -L < x_i < L.$$

Denotando

$$n_i^j \sim n(x_i, t_j),$$

obtenemos la siguiente discretización de (4.6)

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} = D \frac{n_{i+1}^j - 2n_i^j + n_{i-1}^j}{h^2} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N, \quad j > 0. \quad (4.7)$$

El error local de truncamiento para esta ecuación es

$$\delta_{ij} = \frac{\tau}{2}n_{tt}(x_i, \zeta_j) - \frac{Dh}{12}n_{xxxx}(\xi_i, t_j),$$

al resolver la ecuación (4.7) para  $n_i^{j+1}$  obtenemos

$$n_i^{j+1} = n_i^j + \frac{D\tau}{h^2} (n_{i+1}^j - 2n_i^j + n_{i-1}^j) \quad (4.8)$$

para toda  $i = 1, 2, \dots, N-1$  y  $j = 1, 2, \dots$ . Sujeta a las condiciones de frontera  $n_0^j = n_N^j = n_{-N}^j = 0$  para toda  $j = 0, 1, \dots$  y  $n_i^0 = f(x_i)$  para toda  $i = 0, 1, \dots, N$ .

La ecuación (4.8) es equivalente a

$$n_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2D\tau}{h^2}\right) n_i^j + \frac{D\tau}{h^2} (n_{i+1}^j + n_{i-1}^j). \quad (4.9)$$

La naturaleza explícita del método de diferencias implica que la matriz  $A$  de  $(m-1) \times (m-1)$  asociada a este sistema es una matriz tridiagonal cuyos elementos son de la forma

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{D\tau}{h^2} & j = i-1 \text{ o } j = i+1 \\ 1 - \frac{2D\tau}{h^2} & j = i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si utilizamos

$$\mathbf{n}^{(0)} = \langle f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{N-1}) \rangle^T$$

y

$$\mathbf{n}^{(j)} = \langle n_1^j, n_2^j, \dots, n_{N-1}^j \rangle^T \text{ para toda } j = 1, 2, \dots$$

entonces la solución aproximada está dada por

$$\mathbf{n}^{(j+1)} = A\mathbf{n}^{(j)} \text{ para toda } j = 1, 2, \dots$$

este método de diferencias progresivas será condicionalmente estable sólo si  $\rho(A) \leq 1$ .

Como los valores característicos de  $A$  son  $\lambda_i = 1 - 4\frac{D\tau}{h^2} \left(\text{sen}\left(\frac{i\pi}{2m}\right)\right)^2$  para  $i = 1, 2, \dots, m-1$ , la condición de estabilidad se reduce a determinar si

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq m-1} \left| 1 - 4\frac{D\tau}{h^2} \text{sen}^2\left(\frac{i\pi}{2m}\right) \right| \leq 1$$

lo cual se simplifica y transforma en

$$0 \leq \frac{D\tau}{h^2} \text{sen}^2\left(\frac{i\pi}{2m}\right) \leq \frac{1}{2} \text{ para } i = 1, 2, \dots, m-1.$$

En conclusión la estabilidad se da si  $0 \leq \frac{D\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$  ver [4], y desde el punto de vista biológico el número de individuos  $n_i^{j+1}$  en el tiempo  $t_{j+1}$  no puede ser mayor que el número de individuos en tiempos anteriores  $n_i^j, n_i^{j-1}, n_i^{j-2}$ , en particular en el tiempo inicial  $n_i^0$ .

El siguiente algoritmo para la ecuación (4.8) corresponde a el método de Euler explícito en el tiempo.

**Algoritmo 1** Para  $j = 0, \dots, N$

$$n_i^{j+1} = n_i^j + \frac{D\tau}{h^2} (n_{i+1}^j - 2n_i^j + n_{i-1}^j)$$

*fin\_para*

La Figura 4.1. muestra las gráficas de la solución analítica, la condición inicial y la solución numérica, para del caso lineal o sea  $m = 0$ .

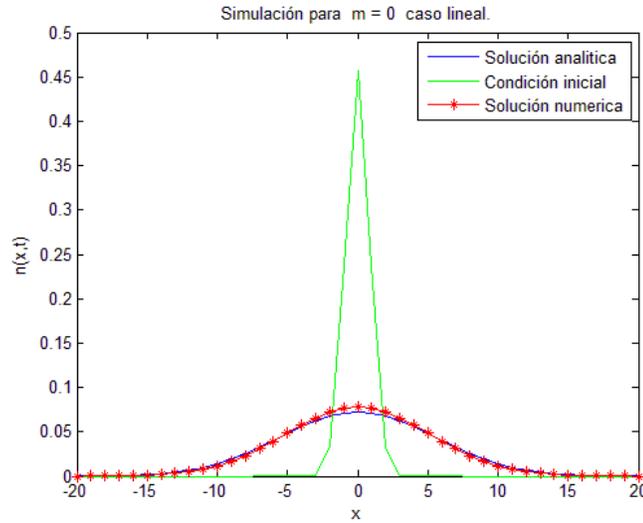


Fig. 4.1. Simulación en MatLab para la evolución de la densidad de población en una dimensión para  $m = 0$ ,  $E = 1$ ,  $D_0 = 3,1449$ ,  $N = 100$ ,  $t = 4$ ,  $h = 1$ ,  $\tau = 0,25 \frac{h^2}{D}$ , condición inicial  $t = 0,1$ .

Para calcular la masa de individuos en el tiempo  $t = 4$  utilizamos la regla del trapecio y obtenemos los siguientes resultados; masa exácta igual a 0,9998 y masa aproximada igual a 0,9997, comparando las masas el error relativo es de  $1,0002 \times 10^{-4}$

Si el coeficiente de difusión  $D$  no es lineal,

$$D_i^j := D(n(x_i, t_j)) \text{ y } D_{i+1/2}^j := \frac{1}{2} (D_i^j + D_{i+1}^j) \quad (4.10)$$

reemplazando en la discretización (4.7) obtenemos

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} = \frac{D_{i+1/2}^j (n_{i+1}^j - n_i^j) - D_{i-1/2}^j (n_i^j - n_{i-1}^j)}{h^2} \text{ para } i = 1, 2, \dots, N, j > 0. \quad (4.11)$$

El siguiente algoritmo para la ecuación (4.11) corresponde a el método de Euler explícito en el tiempo.

**Algoritmo 2** Para  $j = 0, \dots, N$

$$n_i^{j+1} = n_i^j + \frac{D_0 \tau}{h^2} (D_{i+1/2}^j (n_{i+1}^j - n_i^j) - D_{i-1/2}^j (n_i^j - n_{i-1}^j))$$

*fin\_para*

## 4.2. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN CON NATA-LIDAD Y/O MORTALIDAD.61

La Figura 4.2. muestra las gráficas de la solución analítica, la condición inicial y la solución numérica, para del caso no lineal con  $m = 3$ .

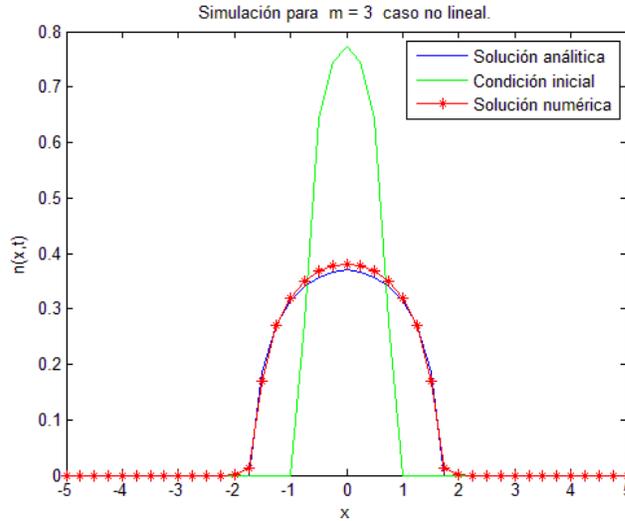


Fig. 4.2. Simulación en MatLab para la evolución de la densidad de población en una dimensión para  $m = 3$ ,  $E = 1$ ,  $D_0 = 3,1449$ ,  $N = 200$ ,  $t = 4$ ,  $h = 1$ ,  $\tau = 0,25 \frac{h^2}{D}$ , condición inicial  $t = 0,1$ .

Para calcular la masa de individuos en el tiempo  $t = 4$  utilizamos la regla del trapecio y obtenemos los siguientes resultados; masa exácta igual a 1,0270 y masa aproximada igual a 1,0113, comparando las masas el error relativo es de 0,0153.

### 4.2. Solución numérica de la ecuación de difusión con natalidad y/o mortalidad.

Para la ecuación de difusión con natalidad utilizamos la ecuación (4.1) con  $\mu > 0$  y con coeficiente de difusión  $D$  no lineal y obtenemos la discretización

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} = \frac{D_{i+1/2}^j (n_{i+1}^j - n_i^j) - D_{i-1/2}^j (n_i^j - n_{i-1}^j)}{h^2} + \mu n_i^j \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N, j > 0. \quad (4.12)$$

El siguiente algoritmo para la ecuación (4.12) corresponde a el método de Euler explícito en el tiempo.

**Algoritmo 3** Para  $j = 0, \dots, N$

$$n_i^{j+1} = n_i^j + \frac{D_0 \tau}{h^2} \left( D_{i+1/2}^j (n_{i+1}^j - n_i^j) - D_{i-1/2}^j (n_i^j - n_{i-1}^j) \right) + \tau \mu n_i^j$$

*fin\_para*

La Figura 4.3. muestra las gráficas de la solución analítica, la condición inicial y la solución numérica, para del caso no lineal con  $m = 3$  y con natalidad.

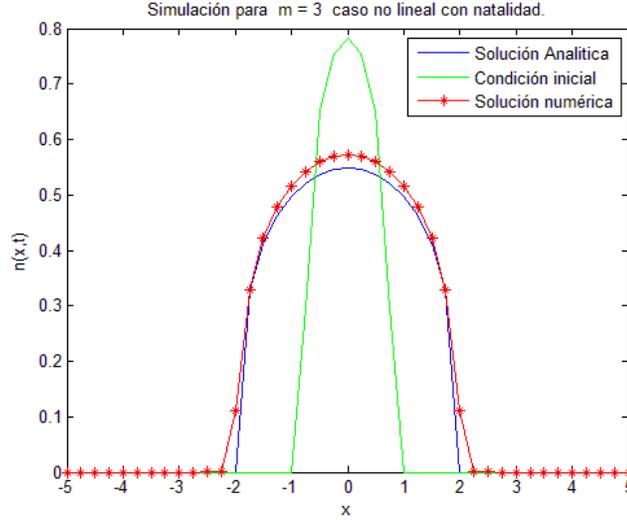


Fig. 4.3. Simulación en MatLab para la evolución de la densidad de población en una dimensión para  $m = 3$ ,  $E = 1$ ,  $D_0 = 3,1449$ ,  $N = 200$ ,  $t = 4$ ,  $h = 1$ ,  $\tau = 0,25 \frac{h^2}{D}$ ,  $\mu = 0,15$ , condición inicial  $t = 0,1$ .

Para calcular la masa de individuos en el tiempo  $t = 4$  utilizamos la regla del trapecio y obtenemos los siguientes resultados; masa exácta igual a 1,9084 y masa aproximada igual a 1,7084, comparando las masas el error relativo es de 0,0629. Además cómo era de esperarse la masa va aumentando debido a la natalidad.

Ahora consideremos la ecuación de difusión con mortalidad, utilizamos la ecuación (4.1) con  $\mu < 0$  y con coeficiente de difusión  $D$  no lineal y obtenemos la discretización

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} = \frac{D_{i+1/2}^j (n_{i+1}^j - n_i^j) - D_{i-1/2}^j (n_i^j - n_{i-1}^j)}{h^2} - \mu n_i^j \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N, j > 0. \quad (4.13)$$

El siguiente algoritmo para la ecuación (4.13) corresponde a el método de Euler explícito en el tiempo.

**Algoritmo 4** Para  $j = 0, \dots, N$

$$n_i^{j+1} = n_i^j + \frac{D_0 \tau}{h^2} \left( D_{i+1/2}^j (n_{i+1}^j - n_i^j) - D_{i-1/2}^j (n_i^j - n_{i-1}^j) \right) - \tau \mu n_i^j$$

*fin\_para*

La Figura 4.4. muestra las gráficas de la solución analítica, la condición inicial y la solución numérica, para del caso no lineal con  $m = 3$  y con mortalidad.

#### 4.2. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN CON NATA-LIDAD Y/O MORTALIDAD.63

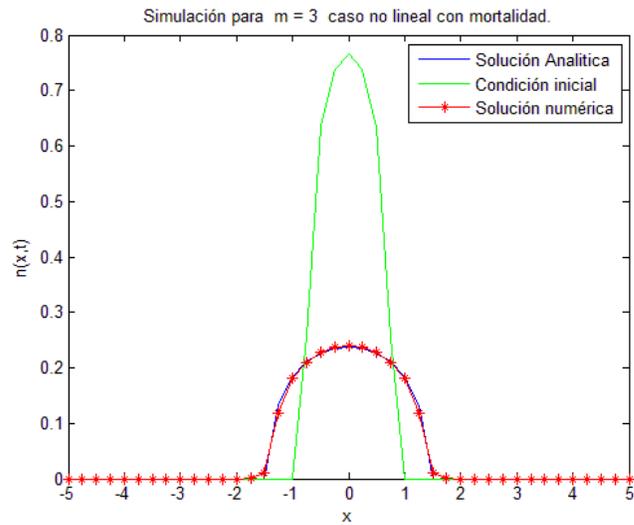


Fig. 4.4. Simulación en MatLab para la evolución de la densidad de población en una dimensión para  $m = 3$ ,  $E = 1$ ,  $D_0 = 3,1449$ ,  $N = 200$ ,  $t = 4$ ,  $h = 1$ ,  $\tau = 0,25 \frac{h^2}{D}$ ,  $\mu = 0,15$ , condición inicial  $t = 0,1$ .

Para calcular la masa de individuos en el tiempo  $t = 4$  utilizamos la regla del trapecio y obtenemos los siguientes resultados; masa exácta igual a 0,5518 y masa aproximada igual a 0,5532, comparando las masas el error relativo es de 0,0025. Además cómo era de esperarse la masa va disminuyendo debido a la mortalidad.



# Capítulo 5

## Caso de estudio

En este capítulo realizaremos una simulación real sobre la dispersión de la abeja africanizada en Suramérica, considerando un modelo de dispersión sin natalidad, mortalidad y advección. Para obtener la aproximación numérica de la solución discretizamos éste problema mediante el método de elementos finitos lineales a trozos en espacio y un esquema semi-implícito en tiempo.

### 5.1. Dispersión de la abeja africanizada

Surge cuando el Departamento de Genética de la Facultad de Medicina de Sao Paulo, Brasil, en el año de 1956, con el propósito de seleccionar e hibridizar especies, introdujo abejas africanas. La finalidad era la de crear nuevas especies con las europeas existentes en el área, para ingresarlas en algunas regiones de ese país, en donde por las características climatológicas las especies comunes no se adaptaban. En el año de 1957 algunos enjambres (26) de esa especie escaparon del apiario experimental, se cruzaron ampliamente con las especies europeas originando una población híbrida llamada abeja africanizada, que se reprodujo profusamente en el medio circunvecino, donde se inició una dispersión lenta hasta 1963 (ver figura 5.1). Después de esta fecha dicha dispersión fue más rápida y constante por el resto del continente americano. En su expansión por América del sur se detuvo en aquellas regiones cuyas temperaturas invernales son bajas. Este tipo de abeja tiene una rápida dispersión en regiones que sufren de sequías prolongadas, y una más lenta en las zonas de clima tropical húmedo y con una precipitación pluvial alta; se estima su velocidad de dispersión entre 250 y 300 km por año. En México su velocidad se ha visto disminuida entre 45 y 55 km por año, debido a las diferentes acciones realizadas por el Programa Nacional para el Control de la Abeja Africana (PNPCAA), de la Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos (SARH). En México se tiene el antecedente de las primeras incursiones al territorio nacional a principios del año de 1987 por el estado de Chiapas; su dispersión se realizó en la península de Yucatán en 1988. En 1989 la población había crecido a muchos millones de colonias repartidas en más de 20 millones de  $km^2$ . Hasta el tercer trimestre de 1991 se habían identificado enjambres de abejas africanas de la siguiente manera: por la Costa del Golfo de México hasta la frontera con los Estados Unidos de Norte América, por la Costa del Pacífico hasta el municipio de Escuinapa en el estado de Sinaloa y por el centro de la República en los estados de Querétaro y Zacatecas. A pesar de que en la actualidad no existen razas absolutamente puras de abejas, se consideran abejas africanas a los enjambres silvestres con un comportamiento y morfología igual al de las abejas del centro y sur

de África, y abejas africanizadas aquellas en las que prevalecen las características africanas, pero modificadas parcialmente por cruzamientos con razas europeas.

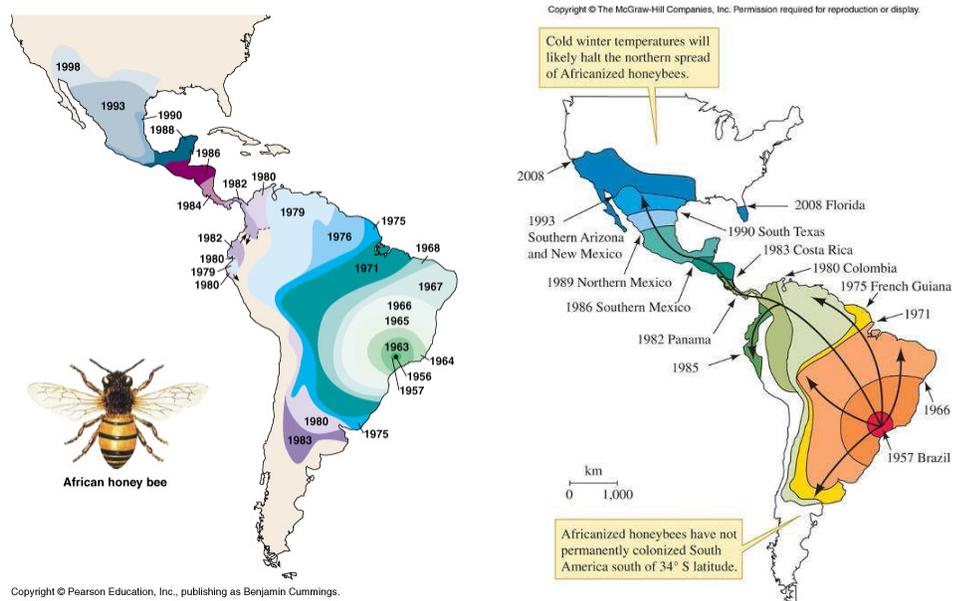


Fig. 5.1. Dispersión de la abeja africanizada.<sup>1</sup>

Los datos disponibles en la Tabla 5.1. muestran la llegada de la abeja africanizada en el norte de Guatemala y en las zonas costeras del Atlántico y del Pacífico de México. Se calcularon las velocidades estimadas, pero la distribución de estos datos no estaba distribuida normalmente. Por lo tanto, utilizaron un enfoque diferente, basado en "tiempo de tránsito", el recíproco de la velocidad.

<sup>1</sup>Tomado de

<http://www.stat.tamu.edu/~matis/Predicting%20the%20Africanized%20Bee%20Invasion.pdf>

Distance, km	Time, mo	Transit time, mo/100 km	Distance, km	Time, mo	Transit time, mo/100 km
75	4	5.3	85	7	8.2
65	3	4.6	140	2	1.4
40	1	2.5	120	1	0.8
60	5	8.3	105	2	1.9
50	1	2.0	90	3	3.3
55	1	1.8	80	1	1.3
130	1	0.8	65	1	1.5
45	1	2.2	70	1	1.4
105	5	4.8	50	1	2.0
140	4	2.9	115	4	3.5
120	5	4.2	100	4	4.0
80	5	6.3	95	3	3.2
75	5	6.7	85	3	3.5
60	12	20.0	30	2	6.7
60	11.5	19.2	10	2	20.0
35	2	5.7	60	3	5.0
70	2	2.9	35	3	8.6
35	2	5.7	40	7	17.5
55	2	3.6	55	3	5.5
90	1	1.1	250	4	1.6
260	10	3.8	300	5	1.7
175	1	0.6	90	2	2.2
70	7	10.0			

Tabla 5.1. Datos sobre la extensión a través de México y norte de Guatemala de la abeja africanizada.<sup>2</sup>

Los datos se representan en el siguiente histograma, en el cual se ve la gran variabilidad de los datos, con los tiempos estimados para recorrer 100 km que van desde menos de un mes a 20 meses. Una distribución gamma que proporciona un buen ajuste a los datos se muestra por la curva suave que se superpone sobre el histograma de la figura 5.2.

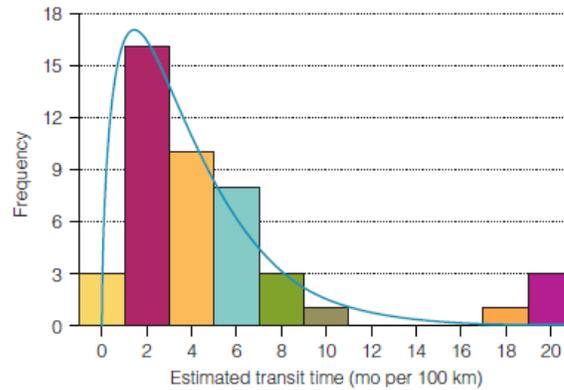


Fig. 5.2. Histograma para estimar los tiempos de transito, ajustados con una distribución gamma.<sup>3</sup>

<sup>2</sup>Tomado de <http://www.stat.tamu.edu/~matis/Predicting%20the%20Africanized%20Bee%20Invasion.pdf>

<sup>3</sup>Tomado de <http://www.stat.tamu.edu/~matis/Predicting%20the%20Africanized%20Bee%20Invasion.pdf>

La distribución gamma tiene parámetros estimados  $\alpha = 1,61$  y  $\beta = 2,37$ , los cuales sirven para estimar el coeficiente de difusión  $D_0$  como el recíproco del valor esperado anual de la distribución gamma,  $D_0 = \frac{12}{\alpha \cdot \beta} = 3,1449$  km/año.

## 5.2. Simulación a partir de elementos finitos.

Para resolver el problema de la dispersión de la abeja africanizada el modelo a considerar es el siguiente, sin nacimientos ni muertes, ni advección, solo difusión.

Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^2$ , con frontera suave a trozos  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  como se presenta en la figura 5.3. y consideremos el siguiente problema de valor de frontera

$$u_t - D_0 \nabla \cdot (K(u) \nabla u) = 0 \quad x \in \Omega \quad t > 0 \quad (5.1)$$

$$\nabla u \cdot \eta = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad t > 0 \quad (5.2)$$

$$u(x, 0) = E_0 \delta(x - x_0) \quad x \in \Omega, \quad (5.3)$$

donde  $K(u) := (u/u_0)^m$ ,  $m, u_0$  y  $E_0$  son constantes positivas. La condición inicial del problema (5.1) describe que la masa de insectos está concentrada inicialmente en  $x_0$  punto de  $\Omega$ , mientras que la condición homogénea de Neumann (5.2) modela el hecho que las costas y las grandes alturas sobre la cordillera de los Andes son impermeables, es decir, las abejas por sí mismas no entran al continente por las costas, ni pueden sobrevivir fuera de las costas o a partir de determinadas alturas.



Figura 5.3. Mapa de Suramérica con las condiciones de frontera

Para solucionar por medio del método de elementos finitos el problema (5.1), primero multiplicamos (5.1) por cualquier función  $v \in H^1(\Omega)$  y aplicando el teorema de Green, obtenemos la correspondiente formulación débil. Encuentre para cada  $t > 0$ ,  $u \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$  tal que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} K(u) \nabla u \nabla v \, dx = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (5.4)$$

Para obtener la aproximación numérica de la solución de (5.4), discretizamos este problema mediante el método de elementos finitos lineales a trozos en espacio y un esquema semi-implícito en tiempo. La discretización en tiempo se obtiene particionando el intervalo de tiempo  $[0, T]$  en pasos uniformes de tamaño  $\tau$  tal que  $T = n\tau$ . De la ecuación (5.4) obtenemos el siguiente problema semi discreto en tiempo: Encuentre para  $k = 0, \dots, n-1$ ,  $u^{k+1} \in H^1(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} u^{k+1} v \, dx + \tau \int_{\Omega} K(u^k) \nabla u^{k+1} \nabla v \, dx = \int_{\Omega} u^k v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (5.5)$$

con  $u^0 = u_0$ . Donde la no linealidad se evalúa en la densidad en el tiempo  $k$  siendo (5.5) una aproximación lineal de (5.4).

Para discretizar en espacio el problema, dividimos el dominio poligonal  $\Omega$  en una triangulación regular  $\mathcal{T} := \{T_1, T_2, \dots, T_p\}$  formada por  $p$  triángulos cerrados contenidos en  $\Omega$  tal que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^p T_i, \quad h_i := \text{diam}(T_i), \quad h = \max_{i=1, \dots, p} h_i.$$

Denotamos por  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  los vértices o nodos de la triangulación  $\mathcal{T}$ . Con la triangulación  $\mathcal{T}$  asociamos el espacio de funciones lineales continuas a trozos  $V_h$  sobre  $\mathcal{T}$

$$V_h := \{v \in C(\bar{\Omega}) : v \text{ es lineal en } T \text{ para todo } T \in \mathcal{T}\}$$

Además, para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$  introducimos las funciones  $\phi_j \in V_h$  tal que  $\phi_j(x_j) = 1$  y  $\phi_j(x_i) = 0$  para todo  $i \neq j$ , las cuales forman una base para  $V_h$  y por lo tanto

$$v(x) = \sum_{j=1}^m v_j \phi_j(x) \quad \forall v \in V_h,$$

donde  $v_j = v(x_j)$  son los valores de  $v$  en los nodos. Entonces el problema (5.4) viene a ser: Encuentre, para  $k = 0, \dots, n-1$ ,  $u_h^{k+1} \in V_h$  tal que

$$\int_{\Omega} u_h^{k+1} v_h \, dx + \tau \int_{\Omega} K(u_h^k) \nabla u_h^{k+1} \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} u_h^k v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h \quad (5.6)$$

con  $u^0 = u_{0h}$ , siendo  $u_{0h}$  una aproximación de  $u_0$  en  $V_h$ .

En términos algebraicos el problema completamente discreto (5.6) es

$$M\mathbf{U}^{k+1} + \tau A(K(\mathbf{U}^k))\mathbf{U}^{k+1} = M\mathbf{U}^k \quad (5.7)$$

donde  $u_h^{k+1} = \sum_{j=1}^m U_j^{k+1} \phi_j$ ,  $\mathbf{U}^{k+1} = [U_1^{k+1}, U_2^{k+1}, \dots, U_m^{k+1}]^T$ ,

$$M_{i,j} = \int_{\Omega} \phi_i(x) \phi_j(x) \, dx$$

$$A_{i,j} \approx \sum_{l=1}^m K(u_l^k) \int_{\Omega} \phi_l \nabla \phi_i(x) \nabla \phi_j(x) \, dx$$

para  $i, j = 1, \dots, m$ .

Observese que la ecuación (5.7) es simplemente un esquema de sustituciones sucesivas, donde en cada paso en el tiempo es necesario resolver un sistema lineal de ecuaciones.

Las gráficas muestran las simulaciones del proceso de difusión de la abeja africanizada a partir de 1957.

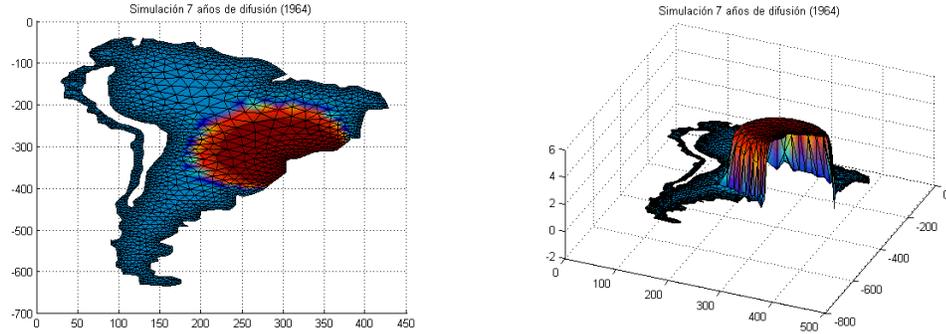


Fig. 5.4. Simulaciones con Matlab, para 7 años (1964), para  $T = 7$ ,  $m = 2$ ,  $E = 2000$ ,  $D_0 = 3,1449$ ,

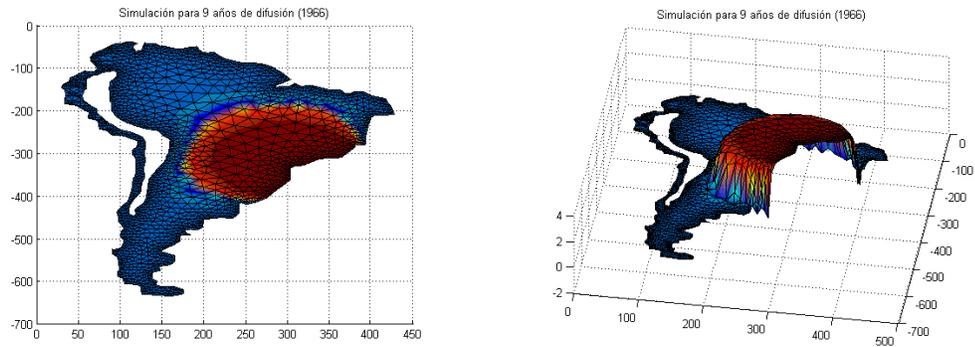


Fig. 5.5. Simulaciones con Matlab, para 9 años (1966), para  $T = 9$ ,  $m = 2$ ,  $E = 2000$ ,  $D_0 = 3,1449$

En ambas simulaciones se considero la población inicial igual a 2000 abejas correspondiente a  $E$ , en coordenadas (1466, 1) aproximadamente Rio de Janeiro, con intervalos de tiempo igual a 1 (cada año). Para construir la malla se utilizo el programa DISTMESH [32] en Matlab y para el ensamble de las matrices de rigidez se adapto el programa FEM2D\_HEAD [1] en Matlab, se utilizarón 1726 nodos (coordinates), 2923 elementos (elements3), 529 datos en Neumann.

## Capítulo 6

# Conclusiones

Logramos analizar la dinámica de una población en tiempo y en espacio, como un proceso de difusión, el cual es la base para el desarrollo del modelo matemático de la dispersión de insectos. A partir del modelo de camino aleatorio (caso discreto) y utilizando un desarrollo de Taylor pasamos a una ecuación diferencial parcial de tipo parabólica (caso continuo), para deducir la ecuación de difusión-advección. Inicialmente por simplicidad consideramos el movimiento isotrópico, el cual no considera el termino advectivo.

Desde el punto de vista biológico el coeficiente de difusión juega un papel importante en el desarrollo del modelo, inicialmente consideramos el coeficiente lineal el cual conduce a una solución con soporte infinito, pero en los fenómenos de dinámica de poblaciones, el coeficiente de difusión depende de la densidad por lo tanto consideramos el caso no lineal, el cual conduce a una solución con soporte finito con la característica de no ser derivable en el frente de onda. La velocidad de difusión tiende a infinito cuando la densidad tiende a cero lo cual viola la hipótesis inicial, luego el coeficiente de difusión debe ser no lineal.

Hallamos la solución analítica de la ecuación de difusión considerando inicialmente el movimiento en una dimensión para entender el método y luego a partir de este enfoque fue posible generalizarlo a otras dimensiones. Para poder hacer comparaciones verdaderamente relevantes de las cantidades o fenómenos que ocurren en el modelo, utilizamos las variables adimensionadas, o sea variables independientes de las unidades de medida que sirven para hacer que cambie la escala respecto a las variables características. La ecuación diferencial del modelo es invariante bajo el escalamiento definido para las variables dependientes  $n$  e independientes  $x$  y  $t$ , y la autosimilaridad permitió reducir la ecuación diferencial parcial, en una ecuación diferencial ordinaria equivalente a la ecuación de medios porosos.

Para el caso no lineal obtenemos una ecuación diferencial no lineal degenerada para la densidad de población, a causa de esta degeneración se pudo comprobar que cuando la población estaba inicialmente concentrada en una región acotada esta se extiende a una velocidad finita, y está limitada en cualquier tiempo. En contraste con el caso lineal que la velocidad de propagación es infinita y que la densidad se extiende por todo el espacio.

Además, resolvimos el método con algunas variaciones como son natalidad, mortalidad y advección. Si hay natalidad, el proceso es independiente de los datos iniciales y todo el espacio se llena en última instancia, si hay mortalidad y si la población está inicialmente limitada a un intervalo finito, entonces la población se limita a un intervalo finito en todos los tiempos. La densidad, la tasa

intrínseca y la advección son consistentes con la ley de conservación de la masa por cada región y para cualquier tiempo.

Se realizaron simulaciones numéricas utilizando el método de Euler de diferencias progresivas pero la naturaleza explícita del método es condicionalmente estable por lo cual se requiere elegir adecuadamente los valores de  $h$  y  $k$ , para obtener un método incondicionalmente estable se debe usar un método de diferencias implícitas como Euler implícito, cuya debilidad radica en que se requiere hacer más pequeños los intervalos de tiempo que los de espacio, o un método de Crank-Nicholson. Los resultados obtenidos con el esquema son coherentes con la solución exacta. Hay conservación de la densidad de población para los casos que no presentan reacción y competencia. Hay variación en la densidad de población cuando el modelo presenta tasas de natalidad y/o mortalidad. Cerca del origen la advección es menor que la difusión. Después de un tiempo largo trata de existir equilibrio entre la advección y la difusión. En un tiempo finito la población no se propaga por todo el dominio. Para el caso de estudio una colonia de abejas es una unidad que funciona de una manera muy integrada y para fines muy específicos, mientras que por otro lado, una abeja solitaria no es capaz de sobrevivir y mucho menos de reproducirse, por lo tanto, no tiene sentido hablar de una población de abejas, sino de una población de colonias. Además el comportamiento altamente defensivo de la abeja africanizada es consecuencia de una tasa de fuga extremadamente alta debida a una tasa asombrosa de propagación de las colonias, que siguió casi inmediatamente después de su liberación. Los resultados obtenidos en la simulación de la dispersión de la abeja africanizada utilizando el método de elementos finitos son coherentes con los resultados observados en los mapas (Fig. 5.1.), aunque no se consideraron factores de natalidad y de mortalidad, el modelo fue calibrado con un tamaño de la población inicial grande (2000 abejas).

# Apéndice A

## Algunas funciones especiales

### A.0.1. Función signo.

Esta determinada por:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

### A.0.2. Función error.

Conocida como función error de Gauss es una función especial (no elemental) que se utiliza en el campo de la probabilidad, la estadística y las ecuaciones diferenciales parciales y es igual a

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (\text{A.2})$$

### A.0.3. Función gamma.

Esta denotada por  $\Gamma$  extiende el concepto de factorial a los números complejos y es igual a:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.3})$$

Si  $n$  es un número entero positivo entonces  $\Gamma(n) = (n-1)!$  y  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

NOTA:  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

### A.0.4. Función Beta

La función gamma está relacionada con la función beta de la siguiente forma

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = B(w, z) \quad (\text{A.4})$$



## Apéndice B

# Método de autosimilaridad.

Un proceso autosimilar es aquel que tiene el mismo comportamiento cuando se visualiza a diferentes escalas de una dimensión específica ya sea longitud, ancho o tiempo.

A solution of a particular evolution problem is a similarity or self-similar solution if its spatial configuration (graph) remains similar to itself at all times during the evolution.

In one space dimension, self-similar solutions have the general form

$$u(x, t) = a(t)F(x/b(t))$$

where, preferably,  $u/a$  and  $x/b$  are dimensionless quantity.

Si  $u = u(t, x)$  es solución de la ecuación de difusión homogénea  $u_t = Du_{xx}$  entonces cumple con las siguientes propiedades.

### Tiempo reversible

La función  $v(t, x) = u(-t, x)$  obtenida intercambiando  $t$  por  $-t$  es solución de la ecuación regresiva  $u_t = -Du_{xx}$

### Traslación en tiempo y espacio

Para  $y, s$  fijos la función  $v(t, x) = u(t - s, x - y)$  es solución de la ecuación de difusión homogénea.

### Dilatación parabólica

Para  $a, b, c$  fijos la función  $v(t, x) = cu(at, bx)$  es solución de la ecuación de difusión homogénea.



## Apéndice C

### Solución con $D$ constante.

Si el coeficiente de difusión  $D$  es constante el modelo (1.12) corresponde a la ecuación de calor en una dimensión (ecuación diferencial parcial lineal homogénea de segundo orden),

$$\begin{cases} n_t(x, t) = Dn_{xx}(x, t) & \text{si } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ n(x, 0) = n_0(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

cuya solución en una dimensión por el método de separación de variables es de la forma

$$n(x, t) = X(x)T(t) \quad (\text{C.2})$$

Donde  $X$  y  $T$  son funciones de variables  $x$  y  $t$  respectivamente. Obviamente, no nos interesa en la solución el caso igual a cero  $n(x, t) = 0$ . Por lo tanto, buscamos funciones  $X$  y  $T$  que no se anulen idénticamente. Derivando una vez (2.1) respecto a  $t$  y dos veces respecto a  $x$  obtenemos

$$X(x)T'(t) = DX''(x)T(t)$$

si

$$X(x) \neq 0$$

entonces

$$\frac{T'(t)}{DT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (\text{C.3})$$

como cada lado de esta ecuación depende sólo de una de las variables, ambos lados deben ser constantes, si denotamos la constante común por  $-\lambda$ , (2.2) se convierte en un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas

$$T'(T) = -\lambda DT(t) \text{ y } X''(x) = -\lambda X(x) \quad (\text{C.4})$$

la función  $n$  satisface la condición inicial

$$n(x, 0) = X(x)T(0) = n_0(x)$$

cuya solución es

$$n(x, t) = e^{\lambda t} (Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}) \text{ para algunos parametros } \lambda, A, B \quad (\text{C.5})$$

suponiendo que  $\lambda = n^2$  para cualquier entero positivo  $n$ , se reduce a

$$n(x, t) = Ae^{-n^2\pi^2 t} \text{sen}(n\pi x) \quad (\text{C.6})$$

Para que satisfaga las condiciones iniciales, usamos expansión de Fourier de  $f$ , para definir

$$n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 D t} \text{sen}(n\pi x) \quad (\text{C.7})$$

donde  $A_n$  son los coeficientes de Fourier para  $f$

## Apéndice D

# Programas en MatLab.

SOLUCION ECUACION DE CALOR LINEAL

```
function [u,masa,masaex] = so_ec_calor_lineal(N)
%  $Ut + D * Uxx = 0$   $0 < x < 1$   $t > 0$ 
% Solución de la ecuación de difusión lineal mediante diferencias finitas,
% con un método euler explícito en el tiempo
% Datos de entrada
%
%  $N$  := número de nodos en la malla
%  $\tau$  := paso de discretización en el tiempo
%  $D$  := cte de difusión
% Declaración intervalo espacial
%
 $L = 100$ ; % longitud del intervalo  $[0,L]$ 
 $hx = L/N$ ;
 $x = -20 : hx : 20$ ;
 $N = \text{length}(x)$ ;
% Declaración del tiempo inicial y final
 $tini = 0,0$ ;
 $tfin = 4$ ;
 $D = 3,1449$ ;
 $\tau = (0,25 * hx^2)/D$ ;
% Condición inicial
 $u = \text{cond\_ini}(x)$ ;
 $u0 = \text{ones}(N, 1)$ ;
 $ff = u$ ;
% Algoritmo iterativo
 $t = tini$ ;
while( $t < tfin$ )
```

```

% Proyeccion
  for i = 2 : N - 1
    u_nuevo(i) = u(i) + D * (tau/hx^2) * (u(i + 1) - 2 * u(i) + u(i - 1));
  end
% Avanzo en el tiempo
  t = t + tau
% Corrijo fronteras
  u_nuevo(1) = 0;
  u_nuevo(N) = 0;
% Asigno
  u = u_nuevo;
% Muestro resultados
  plot(x, u, 'r - *', x, ff, 'gt');
  title(sprintf('ttime = %f', t));
  pause(0,1);
end
exacta = sol_ana_lin(x);
% Muestro resultados finales
plot(x, exacta, 'b - t', x, ff, 'gt', x, u, 'r - *')
legend('Solución analítica', 'Condición inicial', 'Solución numérica')
masa = (u(1) + 2 * sum(u(2 : end - 1)) + u(end)) * 0,5 * hx;
masaex = (exacta(1) + 2 * sum(exacta(2 : end - 1)) + exacta(end)) * 0,5 * hx;

```

#### SOLUCION ECUACION DE CALOR NO LINEAL

```

function [u, exact, masa, masaex] = so_ec_calor(N)
%function difusion
%  $Ut + D * Uxx = 0, 0 < x < 1, t > 0$ 
% Solución de la ecuación de difusión no lineal mediante diferencias finitas,
% con un método euler explícito en el tiempo
% Datos de entrada
% N := número de nodos en la malla
% tau := paso de discretización en el tiempo
% D := cte de difusión
% Declaración intervalo espacial
L = 50; % longitud del intervalo [0, L]
hx = L/N; % paso de discretización
x = -5 : hx : 5; % nodos de la malla espacial
N = length(x);
% Declaración Tiempo inicial y final
tini = 0; % instante inicial
tfin = 4; % instante final
D = 3,1449;
% tau = ((0,5 * hx^2) - 0,1 * (0,5 * hx^2))/D % paso de discretización en tiempo satisface criterio
estabilidad

```

```

tau = (0,25 * hx^2)/D;
% condicion inicial
u = cond_ini(x);
u0 = ones(N,1);
ff = u;
% valor del exponente en la no linealidad D= (U/Uo)^p
p = 3;
%Algoritmo iterativo
t = tini;
while(t < tfin)
% Proyeccion
    for i = 2 : N - 1
        Di = (u(i)./u0(i)).^p;
        Di_mas_1 = (u(i+1)./u0(i+1)).^p;
        Di_menos_1 = (u(i-1)./u0(i-1)).^p;
        Di_mas_05 = 0,5 * (Di + Di_mas_1);
        Di_menos_05 = 0,5 * (Di_menos_1 + Di);
        u_nuevo(i) = u(i) + D * (tau/(hx^2)) * (Di_mas_05 * (u(i+1) - u(i)) -
            Di_menos_05 * (u(i) - u(i-1)));
    end
% Avanzo en el tiempo
    t = t + tau
% Corrijo fronteras
    u_nuevo(1) = 0;
    u_nuevo(N) = 0;
% Asigno
    u = u_nuevo;
% Muestro resultados
    plot(x, u, 'r - *t, x, ff, 'gt');
    title(sprintf('time = %ft, t));
    pause(0,1);
end
exact = sol_ana(x);
% Muestro resultados
plot(x, exact, 'b - t, x, ff, 'gt, x, u, 'r - *t)
legend('Solución analítica', 'Condición inicial', 'Solución numérica')
masa = (u(1) + 2 * sum(u(2 : end - 1)) + u(end)) * 0,5 * hx;
masaex = (exact(1) + 2 * sum(exact(2 : end - 1)) + exact(end)) * 0,5 * hx;

```

#### SOLUCION ECUACION DE CALOR NO LINEAL CON MORTALIDAD

```

function [u, exactam, mas, masaex] = so_ec_calor_mor(N)
%function difusion
%  $Ut + D * Uxx - kU = 0, 0 < x < 1 t > 0 k > 0$ 
% Solución de la ecuacion de difusion no lineal con natalidad

```

```

% mediante diferencias finitas, con un metodo euler explicito en el tiempo
% Datos de entrada
% N := número de nodos en la malla
% tau := paso de discretización en el tiempo
% D := cte de difusión
% Declaración intervalo espacial
L = 50; % longitud del intervalo [0, L]
hx = L/N; % paso de discretización
x = -5 : hx : 5; % nodos de la malla espacial
N = length(x);
% Declaración Tiempo inicial y final
tini = 0,0; % instante inicial
tfin = 4; % instante final
D = 3,1449;
%tau = (0,5 * hx^2) - 0,1 * (0,5 * hx^2) % paso de discretización en tiempo satisface criterio
estabilidad
tau = (0,25 * hx^2)/D;
% condicion inicial
u = cond_ini_mor(x);
u0 = ones(N, 1);
ff = u;
% valor del exponente en la no linealidad  $D = (U/U_0)^p$ 
p = 3;
%tasa de natalidad
tm = 0,15;
%Algoritmo iterativo
t = tini;
while(t < tfin)
%Proyeccion
for i = 2 : N - 1
Di = (u(i)./u0(i)).^p;
Di_mas_1 = (u(i + 1)./u0(i + 1)).^p;
Di_menos_1 = (u(i - 1)./u0(i - 1)).^p;
Di_mas_05 = 0,5 * (Di + Di_mas_1);
Di_menos_05 = 0,5 * (Di_menos_1 + Di);
u_nuevo(i) = u(i) + D * (tau/(hx^2)) * (Di_mas_05 * (u(i + 1) - u(i)) -
Di_menos_05 * (u(i) - u(i - 1))) - tm * tau * u(i);
end
%Avanzo en el tiempo
t = t + tau
%Corrijo fronteras
u_nuevo(1) = 0;
u_nuevo(N) = 0;
%Asigno
u = u_nuevo;

```

```

%Muestro resultado
    plot(x, u, tr - *t, x, ff, tgf);
    title(sprintf('time = %ft, t));
    pause(0,1);
end
exactam = sol_ana_mor(x);
%Muestro resultados
plot(x, exactam, tb - t, x, ff, tgf, x, u, tr - *t)
legend('Solución Analítica', 'Condición inicial', 'Solución numérica')
mas = (u(1) + 2 * sum(u(2 : end - 1)) + u(end)) * 0,5 * hx;
masex = (exactam(1) + 2 * sum(exactam(2 : end - 1)) + exactam(end)) * 0,5 * hx;

```

### SOLUCION ECUACION DE CALOR NO LINEAL CON NATALIDAD

```

function [u, exactn, masa, masaex] = so_ec_calor_nat(N)
%function difusion
%  $Ut + D * Uxx + kU = 0$   $0 < x < 1$   $t > 0$   $k > 0$ 
% Solución de la ecuacion de difusion no lineal con natalidad
% mediante diferencias finitas, con un metodo euler explicito en el tiempo
% Datos de entrada
% N := número de nodos en la malla
% tau := paso de discretización en el tiempo
% D := cte de difusión
% Declaración intervalo espacial
L = 50; % longitud del intervalo [0, L]
hx = L/N; % paso de discretización
x = -5 : hx : 5; % nodos de la malla espacial
N = length(x);
% Declaración Tiempo inicial y final
tini = 0; % instante inicial
tfin = 4; % instante final
D = 3,1449
% tau =  $(0,5 * hx^2) - 0,1 * (0,5 * hx^2)$  % paso de discretización en tiempo satisface criterio
estabilidad
tau = (0,25 * hx^2)/D;
% condicion inicial
u = cond_ini_nat(x);
u0 = ones(N, 1);
ff = u;
% valor del exponente en la no linealidad  $D = (U/U_0)^p$ 
p = 3;
% tasa de natalidad
tn = 0,15;
%Algoritmo iterativo

```

```

t = tini;
while(t < tfin)
%Proyeccion
    for i = 2 : N - 1
        Di = (u(i)./u0(i)).^p;
        Di_mas_1 = (u(i+1)./u0(i+1)).^p;
        Di_menos_1 = (u(i-1)./u0(i-1)).^p;
        Di_mas_05 = 0,5 * (Di + Di_mas_1);
        Di_menos_05 = 0,5 * (Di_menos_1 + Di);
        u_nuevo(i) = u(i) + D * (tau/(hx^2)) * (Di_mas_05 * (u(i+1) - u(i)) -
            Di_menos_05 * (u(i) - u(i-1))) + tn * tau * u(i);
    end
%Avanzo en el tiempo
    t = t + tau
%Corrijo fronteras
    u_nuevo(1) = 0;
    u_nuevo(N) = 0;
%Asigno
    u = u_nuevo;
%Muestro resultado
    plot(x, u, 'r - *', x, ff, 'g');
    title(sprintf('ttime = %f', t));
    pause(0,1);
end
exactn = sol_ana_nat(x);
%Muestro resultados
plot(x, exactn, 'b - l', x, ff, 'g', x, u, 'r - *')
legend('Solución Analítica', 'Condición inicial', 'Solución numérica')
masa = (u(1) + 2 * sum(u(2 : end - 1)) + u(end)) * 0,5 * hx;
masaex = (exactn(1) + 2 * sum(exactn(2 : end - 1)) + exactn(end)) * 0,5 * hx;

```

# Bibliografía.

- [1] Alberty Jochen, Carstensen Carsten y Funken Stefan A. Remarks around 50 lines of Matlab: Short finite element implementation. Numerical Algorithms 20, 1999 páginas 117 - 137.  
[www.math.hu\\_berlin.de/~cc/download/public/software/documentation/acf.pdf](http://www.math.hu_berlin.de/~cc/download/public/software/documentation/acf.pdf).
- [2] Basáñez María G. y Rodríguez Diego J. Dinámica de transmisión y modelos matemáticos en enfermedades transmitidas por vectores. Entomotropical revista internacional para el estudio de la entomología tropical. Vol 19 No.3 paginas 113-134 Dic 2004.
- [3] Becker Norbert, Petri Dusan, Zgomba Marija, Boase Clive, Madon Minoo, Dahl Christine y Kaiser Achim. Mosquitoes and their control. Springer-Verlag. Berlin, 2003, 2010.
- [4] Burden Richard y Faires Douglas. Numerical Analysis. 8a edición. Editorial Thomson.USA 2005.
- [5] Cantrell Robert Stephen y Cosner Chris. Spatial Ecology via Reaction Diffusion Equations. John Wiley & Son. USA. 2003.
- [6] Catteruccia Flaminia, Crisanti Andrea y Wimmer Ernest.A. Transgenic technologies to induce sterility. Malaria Journal 2009.
- [7] Du Chateau Paul. y Zachmann David. Partial Differential Equations. McGraw-Hill. Schaum's Outline. New York 1986.
- [8] Evans.Lawrence C. Partial Differential Equations. Segunda edición. American Mathematical Society. USA. 2010.
- [9] Gonzalez Manteiga Maria Teresa. Modelos matemáticos discretos en las ciencias.de la naturaleza. Teoría y problemas Ediciones Diaz de Santos S.A. Madrid 2003.
- [10] Hengevelt Ron. Dynamics of biological invasions. Kluwer Nueva York 1989.
- [11] Hritonenko Natali y Yatsenko Yuri. Applied Mathematical Modelling of Engineering Problems. Kluber Academic Publishers. USA 2003.
- [12] Isidoro Carlos, Fachada Nuno, Barata Fábio y Rosa.Agostinho. Artificial life model of dengue hostvector disease propagation. Instituto Superior Técnico. Portugal 2009.
- [13] Ito Yoshida. Animal Ecology. Vols. 1 y 2. Kokin Shoin, Publ.Co. Tokio 1975.
- [14] Kareiva P. M. (1.983) Local movement in herbivorous insects: applying a passive diffusion model to mark-recapture field experiments Oecologia 57,paginas 322-327. Springer Verlag.
- [15] Kot Mark (1992) Discrete-time travelling waves: Ecological examples. Journal of Mathematical Biology. Vol.30 No.4, paginas 413-436. Springer.
- [16] Logan John David Applied Partial differential equations 2a.edicion Springer-Verlag. New York, 2004.

- [17] Maidana Norberto.A. y Hyun.Mo.Yang. A Spatial Model to Describe the Dengue. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada y Computacional. Brasil 2007.
- [18] Matis James H. y Kiffe Thomas R. Predicting the Africanized Bee Invasion. Universidad de Texas. Pag. 119 - 134.  
<http://www.stat.tamu.edu/~matis/Predicting%20the%20Africanized%20Bee%20Invasion.pdf>
- [19] Mattheij.Robert.M. M, Rienstra S. W. y Bonnkkamp J. H. M. ten Thijs. Partial Differential Equations. Modeling, Analysis, Computation. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia..2005.
- [20] Mistro Diomar Cristina, Diaz Rodriguez Luis Alberto y Castro Ferreira Wilson. The Africanized hohey bee dispersal: a mathematical zoom. Bulletin of Mathematical Biology 67 (2005) 281 - 312.
- [21] Murray.J. D. Mathematical Biology I.An introduction. Springer-Verlag. New York, 2002.
- [22] Murray.J. D. Mathematical Biology II.Spatial Models and Biomedical Applications. Springer-Verlag. New York, 2003.
- [23] Namba Toshiyuki y Mimura Masayasu. Spatial distribution of competing populations. Journal of Theoretical Biology  
 Volume 87, Issue 4, 1980, Paginas 795–814. Elsevier.
- [24] Nentwig Wolfgang. Biological Invasions. Springer-Verlag. New York, 2008.
- [25] Neubert M.G., Kot M, Lewis M.A. (1995) Dispersal and Pattern Formation in a Discrete-Time Predator-Prey Model. Theoretical Population Biology. Volumen 48, paginas 7–43. Elsevier.
- [26] Neuhuser Claudia.Matemáticas para ciencias. 2a. edición. Pearson Educación S. A., Madrid 2004.
- [27].Nicoll E Clara Ines.Control biológico de insectos. Un enfoque agroecológico. Editorial U. de Antioquia 2007.
- [28] Nisbet, R. M. y Gurney W. S. C. Modelling fluctuating populations. Wiley, 1982.
- [29] Okubo.Akira. Dynamical aspects of animal grouping: swarms, schools, flocks and herds. Adv. Biophys.,1986.
- [30] Okubo.Akira.y Levin Simon A. Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models. 2a edición. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2001.
- [31] Otero Marcelo, Schweigmannb Nicolas y Solar.Hernan G. A Stochastic Spatial Dynamical Model for Aedes Aegypti. Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina 2008.
- [32] Persson Per Olof y Strang Gilbert. A simple Mesh Generator in Matlab. SIAM Review, Vol. 46, No.2, 2004, páginas 329 - 345. <http://www.math.mit.edu/~persson/software.html>.
- [33] Renshaw Eric. Modelling Biological Population in space and time. Cambridge University Press. Nueva York 1995.
- [34] Shigesada.Nanako.Spatial distribution of dispersing animals. J. Math. Biol., 1980.
- [35] Shigesada Nanako y Kawasaki Kohkichi. Biological Invasions: Theory and Practice. Oxford University Press,Oxford, 1997.
- [36] Shigesada Nanako, Kawasaki Kohkichi.y Takeda Yasuhiko. Modeling stratified diffusion in biological invasions. Amer.Naturalist, 1995.
- [37] Shigesada Nanako y Roughgarden Jonathan. The role of rapid dispersal in the population dynamics of competition. Theor. Popul. Biol., 1982.

- [38] Shonkwiler Ronald W. y Herold James. *Mathematical Biology. An introduction with Maple and Matlab*. 2a edición Springer Londres y New York 2009.
- [39] Skellam J.G., Random dispersal in theoretical populations, *Biometrika* 38, 196-218 (1951).
- [40] Takahashi Lucy T, Maidana Norberto A., Castro F. Wilson , Pulino Petronio y Yang.Hyun Mo. *Mathematical models for the Aedes aegypti dispersal dynamics: Travelling waves by wing and wind*. *Bulletin of Mathematical Biology*. Elsevier. Brasil. 2004.
- [41] Thieme Horst R. *Mathematics in Population Biology*. Princeton University Press. USA 2003. Poblaciones Birth, death y migration.
- [42] Turchin Peter. *Quantitative Analysis of Movement. Measuring and Modeling Population Redistribution in Animals and Plants*. Sinauer, 1998.
- [43] Vries Gerda de, Hillen Thomas, Lewis Mark, Muller Johannes, Schonfisch Brigitt. *A Course in Mathematical Biology. Quantitative Modeling with Mathematical and Computational Methods*. SIAM (Mathematical Modeling and Computation) 2006.