

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

REFERENCE DEPENDENT Y AVERSIÓN A LA PÉRDIDA APLICADO A LA EVALUACIÓN ESCOLAR

Nelson Miguel Ochoa Moya

Universidad Nacional de Colombia
Facultad De Ciencias Económicas
Bogotá D.C., Colombia

2019

REFERENCE DEPENDENT Y AVERSIÓN A LA PÉRDIDA APLICADO A LA EVALUACIÓN ESCOLAR

Nelson Miguel Ochoa Moya

Tesis de investigación presentada como requisito parcial para optar al título de
Magister En Ciencias Económicas

Director (a):

Doctora en Economía Aplicada: Olga Lucía Manrique Chaparro

Línea de Investigación:

Teoría y Política Económica (Política Pública)

Universidad Nacional de Colombia

Facultad, de Ciencias Económicas

Bogotá D.C., Colombia

2019

Dedicatoria

A mi madre, todo esto que yo he logrado a nivel académico y como persona, se lo debo a ella, el título máspreciado para mí, es ser su hijo.

Mejor que de nuestro juicio, debemos fiarnos del cálculo algebraico. (Leonhard Euler)

Agradecimientos

Inicialmente, agradecer a mi familia, a mis amigos y mi novia, quienes me impulsaron a tomar la decisión de seguir adelante con este proyecto de mejoramiento académico.

Mención especial a la profesora Olga Lucía Manrique Chaparro, a quien, desde las primeras clases de economía experimental, me ayudó a involucrar mi profesión de docente, con el conocimiento de modelos económicos que me guían hoy en día a entender mejor algunos comportamientos de mis estudiantes, en cuanto a desempeño académico refiere. También su paciencia infinita, y apoyo en los momentos difíciles, en los cuales incluso, estuve a punto de renunciar. Gracias miles profe.

A mi madre, quien me ha apoyado siempre, en las buenas, las malas, las regulares, mejor dicho, en todas. Me ha acompañado, me brinda cariño y muchos “tinticos” para que siempre tenga energía...LA AMO. Me ha soportado a veces mi mal genio, y ha sido realmente el motor de todos mis éxitos. También a mi padre, quien tocando su guitarra me acompañó durante las largas jornadas de estudio independiente. La pausa activa, siempre fue motivo de conversaciones agradables, para después continuar.

A mis hermanos, Daniel, Carolina, Andrés, Erika y Jorge...solo me queda decir, que este triunfo también es de ustedes.

A mi amigo David Ibáñez, quien, desde la distancia, me impulso para no dejar mi maestría a medias...buen parcerero.

A Chucho, mi amigo docente, compañero de trabajo consejero e interlocutor, nunca se me olvidan esos consejos de un docente que lleva casi 40 años en el servicio público educativo, usted me colaboró infinitamente en el trabajo, para que todo me saliera de la mejor manera, gracias por sacrificar incluso tiempo y prestarme el apoyo, igualmente a la compañera Luz Marina, a quien le debo que me haya prestado sus estudiantes, para hacer todo lo referido a la implementación del cuasi experimento de esta tesis. Yo sé que ustedes me quieren mucho y lo mínimo es dar esta mención. Yo también los quiero un montón.

Resumen

El presente documento presenta los resultados obtenidos a partir de un ejercicio cuasi experimental, de un sistema de evaluación escolar el cual está basado en incentivos de aversión a la pérdida y teoría de prospectos. El ejercicio se realizó a estudiantes del colegio INEM Francisco De Paula Santander ubicado en la ciudad de Bogotá D.C. el desempeño académico de estudiantes cuando se encuentran en dominios de pérdidas.

Se compara el desempeño académico de dos grupos A y B, en diferentes momentos (5 sesiones). El grupo A se enfrenta a tomar decisiones en un dominio de ganancias y el grupo B toma decisiones en un dominio de pérdidas (castigos por no superar expectativas inducidas como referencia).

Para analizar el desempeño académico de los estudiantes se tuvo en cuenta el modelo cumulative prospect theory (CPT) de Tversky & Kahneman (1992) en cada una de las 5 sesiones, estableciendo estimadores de máxima verosimilitud para determinar la función de ponderación de probabilidad (s – curva). También se realizó un análisis de varianza (ANOVA) para medir la diferencia entre calificaciones de ambos grupos en cada sesión. Los resultados determinan que los estudiantes quienes se encuentran en dominios de pérdida incrementan el desempeño académico significativamente, mientras que los estudiantes de dominios de ganancia tienen reducción no significativa en el desempeño académico, mostrándose invariantes ante incentivos de Status Quo.

Palabras clave:

Reference dependent, teoría de prospectos, puntos de referencia, aversión a la pérdida, ponderación de probabilidad, Statu Quo.

Abstract

This document presents the results obtained from a quasi-experimental exercise, from a school evaluation system which is based on loss aversion incentives and prospect theory. The exercise was carried out to students of the INEM Francisco De Paula Santander school located in the city of Bogotá D.C. the academic performance of students when they are in domains of losses.

The academic performance of two groups A and B is compared, at different times (5 sessions). Group A faces decisions in a profit domain and group B makes decisions in a loss domain (penalties for not exceeding induced expectations as a reference).

To analyze the academic performance of students, the cumulative prospect theory (CPT) model of Tversky & Kahneman (1992) was taken into account in each of the 5 sessions, establishing maximum likelihood estimators to determine the function of probability weighting (s - curve). An analysis of variance (ANOVA) was also performed to measure the difference between the scores of both groups in each session. The results determine that students who are in domains of loss, increase academic performance significantly, while students of domains of gain have no significant reduction in academic performance, being invariant before incentives of Status Quo.

Keywords:

Reference dependent, prospect theory, reference points, loss aversion, probability weights, Statu Quo.

Contenido

| | Pág. |
|--|------|
| Agradecimientos | V |
| Resumen | VII |
| Abstract | VIII |
| Contenido | IX |
| Lista de figuras | XI |
| Lista de tablas | XII |
| Introducción | 12 |
| Marco teórico y metodología. | 15 |
| 2.1. Teoría de prospectos. | 15 |
| 2.2. Función de valor | 17 |
| 2.3. Teoría de prospectos acumulativa | 20 |
| 2.4. Función de utilidad reference – dependent | 21 |
| 2.5. Identificación de problemas | 22 |
| Metodología | 26 |
| 3.1. Diseño del ejercicio experimental | 26 |
| 3.2. Implementación del experimento | 28 |
| 3.3. Resultados | 30 |
| 3.4. Control ANOVA | 31 |
| Conclusiones | 34 |
| Anexos | 40 |
| Anexo A | 40 |
| Anexo B | 41 |

Lista de figuras

| | <u>Pág.</u> |
|--|--------------------|
| Figura A. S – Curva Kahneman (1979) | 21 |
| Figuras correspondientes a los modelos implementados. | |
| Figura 4. Comparación sesiones 1 y 2. | 42 |
| Figura 5. Comparación sesiones 2 y 3. | 42 |
| Figura 6. Comparación sesiones 3, 4 y 5. | 42 |

Lista de tablas

| | <u>Pág.</u> |
|--|--------------------|
| Tabla 1 Tabla de parámetros por sesión para gráfica de s – curva | 31 |
| Tabla 2 Diferencia de medias evaluaciones grupos A y B | 32 |

Introducción

El presente trabajo propone un sistema de evaluación escolar basado en incentivos de aversión a la pérdida y teoría de prospectos, ya que la evidencia de estudios realizados en este campo señala la importancia de proponer mecanismos que ayuden a mejorar la calidad académica y desempeño de los estudiantes de educación media. En ese sentido, se a partir de un ejercicio cuasi experimental, se busca identificar el efecto en el desempeño académico de un modelo de evaluación escolar en el contexto de referece dependent y aversión a la pérdida, en el cual se induce en los estudiantes un punto de referencia definido a partir de la calificación obtenida en un momento (t), la cual es ajustada según el promedio general del grupo en el que el estudiante se encuentre. Se espera que el punto de referencia (calificación) del momento (t) sea superado en el momento (t+i).

Algunos diseños experimentales sugieren que las expectativas se determinan según la ganancia o pagos obtenidos a partir de un esfuerzo generado, así, por ejemplo, Abeler, Falk, Goette, & Huffman, (2011, p.2) sostienen que “los modelos de preferencias reference dependent basados en expectativas predicen la provisión de esfuerzo”. Es así como la aversión a la pérdida juega un papel importante, dado que, ante una inminente pérdida, un sujeto debería trabajar más duro y mejorar el desempeño. Apostolova-Mihaylova, Cooper, Hoyt, & Marshall (2014) muestran en su trabajo que los estudiantes varones en un sistema de evaluación basado en pérdidas, pueden obtener un de 8% a 11% el aumento de probabilidad de obtener una calificación de B y una disminución de hasta 4% en una calificación deficiente. En este documento se muestra que los estudiantes quienes reciben tratamiento inician con puntuaciones de 500 de 500 posibles, mientras que el control se toma de manera tradicional en la escala de 0 a 500. Clark, Gill, Prowse, & Rush, (2017) quienes proponen metas de desempeño en tareas escaladas y evidenciar que este tipo de situaciones aumenta el rendimiento de los estudiantes. En el experimento, se pide a los estudiantes del grupo tratado que establezcan metas, mientras que al control no se les solicita, a su vez, cada una de esas metas está asociada exámenes de práctica y antes de cada examen, se les recuerda a los estudiantes de manera privada mediante correo electrónico, cual es el objetivo o meta a cumplir. Finalmente, se encuentra que el experimento tiene impacto positivo, ya que aumenta la probabilidad de completar exámenes de práctica con más de seis puntos porcentuales sobre el control. Clark et al.(2017, p.21) afirman que “En el contexto de la educación, un estudiante con aversión a la pérdida podría trabajar particularmente duro en un intento por lograr un nivel de

rendimiento de referencia sobresaliente en su curso”. Esto indica que los estudiantes en contextos de pérdida, deberían mejorar su desempeño o generar esfuerzos mayores para alcanzar un nivel de expectativa más alto, situación consistente con el planteamiento de Koszegi (2010, p.2) quien afirma que “los resultados de evaluar una decisión sobre puntos de referencia relevantes están determinados en parte por los resultados que se esperaban obtener”. A dicha situación, se le llama “anticipación”. Con base en lo anterior, se podría suponer que los estudiantes definirían sus preferencias a partir de expectativas, las cuales se encuentran conectadas con las actitudes hacia las decepciones en relación con los resultados esperados.

Por otro lado, respecto a las expectativas, el sesgo de Status Quo, tal como lo define Samuelson & Zeckhauser (1988), se puede considerar como el hecho de permanecer apegado a una decisión tomada con anterioridad, en su defecto, no hacer nada para que todo siga igual. Múltiples experimentos en economía han considerado importante incorporar el Status Quo, ya que permite analizar cambios en el comportamiento respecto de las preferencias y la toma de decisiones bajo riesgo (particularmente aversión a la pérdida). Por ejemplo, Abeler et al. (2011); Allen, Dechow, Pope, & Wu (2016); Traub & Shmidth (2001); Meng, (2017) & Samuelson & Zeckhauser (1988), han concluido que el Statu Quo puede determinar un punto de partida para generar expectativas que representen ganancias seguras o simplemente “no pérdida”. Dicha situación, puede ser comparable con el “efecto dotación” planteado por Kahneman, Knetsch, & Thaler (1991), donde los individuos tienen tendencia a mantenerse en estados en los cuales renunciar a un objeto representa costos elevados, mientras que para adquirir dicho objeto, no están dispuestos a generar los mismos pagos. Bajo la premisa anterior, un estudiante instrumentalizado con el sesgo Status Quo, debería apegarse a decisiones pasadas que representen algún beneficio antes que generar un esfuerzo por incrementar tal beneficio. En ese sentido, Eidelman & Crandall (2012) dicen que la conducta de los seres humanos puede tener carácter inductivo en ciertos contextos, y por tanto, el sesgo de Status Quo está incorporado naturalmente en los procesos psicológicos de las personas.

El presente trabajo pretende analizar la diferencia en el desempeño académico de estudiantes en un escenario con un sistema de evaluación basado en pérdidas (castigo), en contraste con estudiantes en un escenario con un sistema de evaluación basado en Statu Quo. En ese sentido, el ejercicio realizado busca dar respuesta a la siguiente pregunta: **¿Hay diferencia en el desempeño académico de los estudiantes que enfrentan un esquema de evaluación motivado por la posibilidad de obtener perdidas de acuerdo con el resultado grupal versus estudiantes que enfrentan un esquema de evaluación a partir de mantener los resultados iniciales?**

Para dar respuesta a la pregunta, se diseña un cuasi experimento que consiste en 5 sesiones de exámenes durante 6 semanas continuas (un examen semanal) los cuales se sustentan en talleres de libre solución (no obligatorios)¹, y a partir de las calificaciones obtenidas por los estudiantes respecto de exámenes, se castiga con cero la nota parcial correspondiente de la sesión al estudiante quien obtenga calificación inferior al promedio del grupo, y se darán premios de 20% y 50%², a quienes generen desempeños altos, medido por las desviaciones estándar. Se consideraron una y dos desviaciones estándar encima de la media respectivamente. En un segundo escenario de comparación, las calificaciones no generan castigo, pero se mantienen premios a quienes generen desempeños altos.

Se evalúan las diferencias entre grupos A y B, tomando como base la adaptación a los puntos de referencia, los cuales son determinados por el promedio del grupo, y analizados mediante equivalentes de certeza para lo cual se utiliza el modelo de cumulative prospect theory (CPT) (Tversky & Kahneman, 1992). A partir de las frecuencias relativas de las calificaciones obtenidas por los estudiantes, se establecen los parámetros de las funciones de ponderación de probabilidad (CPT, s – curve), para cada uno de los grupos. Finalmente se define la variable desempeño académico en función de la ponderación de probabilidad, y se realiza un análisis de varianza ANOVA para identificar la diferencia de medias según las calificaciones obtenidas por los estudiantes.

El documento está organizado de la siguiente forma, la introducción, en la segunda parte se se presenta el marco teórico de referencia, posteriormente se presenta la metodológica propuesta, corresponde al diseño cuasi experimental implementado y el modelo econométrico desarrollado. Finalmente, se presentan los resultados y conclusiones, y se da respuesta a la hipótesis planteada.

¹ Los talleres y evaluaciones son tipo test, área de matemáticas tomadas de “BARRON’S, The leader in test preparation, NEW GRE, 2011”, ya que están previamente estructurados y las preguntas han tenido un proceso de evaluación hecho por expertos, situación que permite evitar sesgo en cuanto a la comprensión o calificación de las pruebas (Ver anexo B).

² Los valores de los premios se seleccionaron arbitrariamente, sin embargo, se busca generar incentivos a diferentes niveles de esfuerzo, así el 20% corresponde a niveles más bajos de esfuerzo y el 50% a niveles más altos.

Marco teórico

En el estudio se hace énfasis en la aplicación de la teoría de prospectos Kahneman & Tversky, (1979), la cual considera que la función de utilidad no es lineal, depende de valores subjetivos y la toma de decisiones depende de la fijación de puntos de referencia.

2.1. Teoría de prospectos

La teoría de prospectos, desarrollada por Kahneman & Tversky, (1979) fue motivada por evidencia empírica que muestra que los agentes toman decisiones conforme a puntos de referencia. Permite describir cómo las personas toman decisiones en situaciones en las que tienen que decidir entre alternativas que implican riesgo y describe cómo los individuos evalúan las posibles pérdidas y ganancias.

La teoría describe que los procesos de decisión tienen dos etapas: la edición y la evaluación. En la primera, los posibles resultados de la decisión están ordenados siguiendo algunas heurísticas. Los resultados por encima del punto de referencia se consideran ganancias; y los resultados por debajo del punto de referencia, se consideran pérdidas. En la fase de evaluación, las personas se comportan como si calcularan un valor (utilidad), basados en los potenciales resultados y sus respectivas probabilidades, y luego eligen la alternativa que presentan una mayor utilidad.

La función de valor

La función de valor cruza el punto de referencia en forma de "S", y es asimétrica, ya que, dada la misma variación absoluta, hay un impacto distinto en pérdidas y en ganancias, siendo mayor en el caso de las pérdidas que en el de las ganancias (aversión a la pérdida). En contraste con la teoría de la utilidad que mide las ganancias y las pérdidas, pero no su valor absoluto.

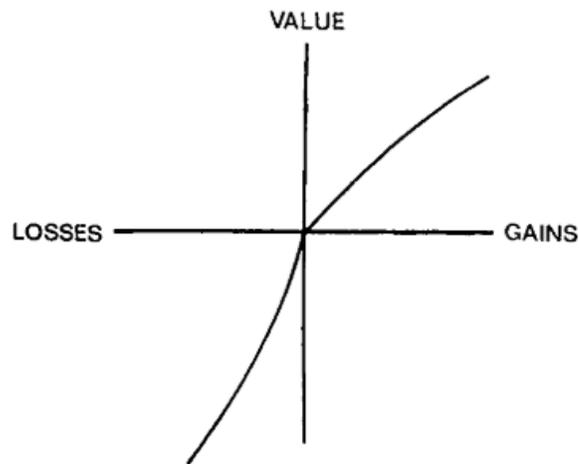


FIGURE 3.—A hypothetical value function

Figura 1. Función de valor asociada a la teoría de prospectos Kahneman & Tversky (1979)

La importancia de la función de valor es que el valor se encuentra en términos de los puntos de referencia que el decisor quiera tener, es decir, hay una cantidad de percepciones que se juzgan primero antes de cada decisión, y en ese sentido, hay preferencia por los estados intermedios que por los finales. Así, Cada estado anterior inmediato influye en la decisión que se tome en el siguiente instante Koszegi (2010) establece que al tomar decisiones, el agente es consistente con la expectativa según la información que tenga con anterioridad. Igualmente, si estas decisiones se implementan momento a momento, no implica que la decisión final sea permeada necesariamente por una decisión intermedia.

En la teoría de prospectos, las decisiones que varían según los puntos de referencia, también están influenciadas por el efecto reflejo, esto quiere decir que si hay definido un punto de partida como prospecto necesariamente respecto de ese punto habrá pérdidas y ganancias, Kahneman & Tversky (1979) sugieren que necesariamente la función es cóncava en las ganancias y convexa en las pérdidas como se observa en la figura1. Y a esto se le asocia una S – curva determinada por la función de ponderación de probabilidad (figura 2). que tiene las siguientes propiedades que para Stommel (2013), se definen así:

(Punto de referencia), en la que los individuos definen funciones de ganancia y pérdida con respecto a un punto de referencia que les permite evaluar la decisión que toman, es decir, en un momento determinado se puede tomar la decisión de aceptar una apuesta, pero en otro momento la misma se podría rechazar dependiendo del contexto.

(S – curva), la función de valor asociada a la S – curva, indica que las preferencias son convexas en estados de pérdida los cuales se encuentran por debajo del punto de referencia y cóncavas en estados de ganancia que se encuentran por encima del punto de referencia. Esto indica que las personas tienen aversión a la pérdida en el dominio de las ganancias, mientras que, en el dominio de la pérdida, las personas tienen preferencias por tomar riesgos.

las personas presentan mayor aversión a la pérdida en comparación con el sentimiento de satisfacción de la ganancia, lo que genera asimetría en el comportamiento, puesto que duele más perder algo ya obtenido que ganar algo que en principio se supone no se tiene. (p.23)

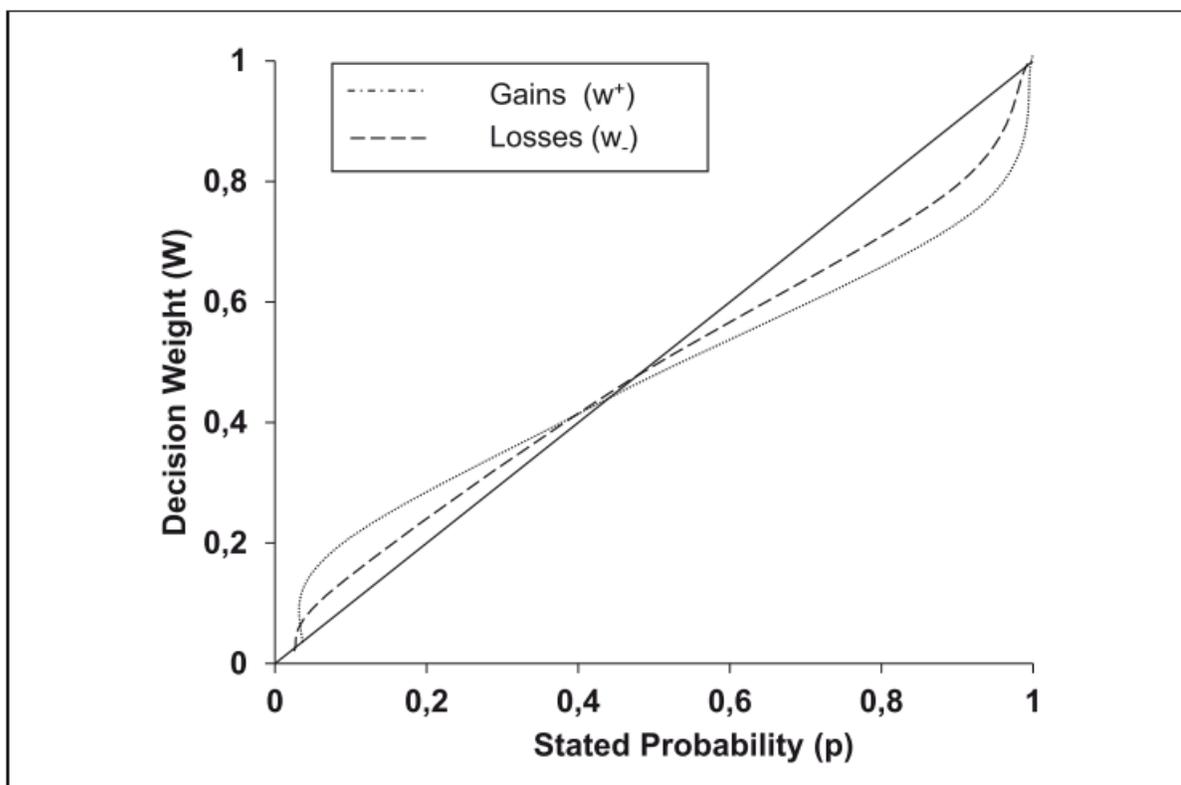


Figure 2: Weighting function for gains and for losses based on median estimations. Source: Tversky and Kahneman (1992, p. 310)

2.2. Teoría de prospectos acumulativa

La teoría de prospectos acumulativa es una extensión de La teoría de prospectos, en la cual se permite identificar las funciones de ponderación de probabilidad y la inclusión de nuevos resultados sobre la teoría de prospectos. Permite ampliar el espectro de análisis para Tversky & Kahneman, (1992), quienes afirman que existen cuatro escenarios sobre los cuales se hace juzgamiento, los cuales son: baja probabilidad de ganar – alta probabilidad de perder (búsqueda de riesgo) y alta probabilidad de ganar – baja probabilidad de perder (aversión al riesgo) y en ese sentido se construyen los prospectos, además, muestran evidencia que identifica que alrededor de los puntos de referencia hay una sobre estimación de probabilidades bajas y en consecuencia hay mayor impacto cuando se toman decisiones, por ejemplo, se percibe diferente un incremento de probabilidad de 0.1 cuando este va de 0.9 a 1, o de 0.1 a 0.2, que cuando este se encuentra sobre probabilidades intermedias, por ejemplo de 0.6 a 0.7, o de 0.4 a 0.5.

En la teoría acumulativa se hace énfasis en explicar la probabilidad desde el concepto de capacidad expuesto por Choquet (1955) que afirma es una generalización de la noción estándar de probabilidad. De esta manera, Tversky & Kahneman (1992) dice que un prospecto en incertidumbre se está dado por una función $f: S \rightarrow X; s \in S$ Donde S es el conjunto de todos los eventos y s es un elemento de este conjunto, por otro lado encontramos X que corresponde al conjunto de las consecuencias, de esta manera $f(s) = x$ en X, para definir la función acumulativa, por tanto un prospecto f es representado por una secuencia de pares (x_i, A_i) donde se tiene x_i si A_i ocurre y los valores de x resultan ser $x_i > x_j$ si $i > j$ y A_i es una partición de S.

Los prospectos pueden ser negativos o positivos, de esta manera f^+ y f^- según sea el caso, por ejemplo, $f^+(s) = f(s)$ si $f(s) > 0$ y viceversa en el caso negativo, además, a cada prospecto f se le asigna un número $V(f)$, que es preferido o indiferente a $V(g)$ si y solo si $V(f) \geq V(g)$.

Igualmente una capacidad asigna $A \subset S$ un número $W(A)$, con $W(\emptyset) = 0$ y $W(S) = 1$, $W(A) \geq W(B)$ cuando B es subconjunto de A.

En el sentido anterior, la teoría de prospectos acumulativa afirma que existen capacidades W^+ y W^- tales que para $f = (x_i, A_i)$ con $-m \leq i \leq n$, se tiene la siguiente expresión generalizada $V(f) = V(f^+) + V(f^-)$. Y que la función de utilidad expresada como valor corresponde a una función estrictamente creciente de la forma $v: X \rightarrow \mathbb{R}$, que satisface $v(x_0) = v(0) = 0$.

En general, un prospecto se escribe,

$$V(f) = \sum_{i=-m}^n \pi_i v(x_i) \quad (1)$$

Donde π_i corresponde al peso que se le da a una decisión.

Si el prospecto $f = (x_i, A_i)$ esta dado por una distribución de probabilidad $P(A_i) = p_i$ entonces se dice que es un prospecto con riesgo y puede ser representado mediante el par (x_i, p_i) en este caso el peso de decisión se define como:

$$\pi_n^+ = w^+(p_n), \pi_{-m}^- = w^-(p_{-m})$$

$$\pi_i^+ = w^+(p_i, \dots, p_n) - w^+(p_{i+1} + \dots + p_n); 0 \leq i \leq n - 1$$

$$\pi_i^- = w^-(p_{-m}, \dots, p_i) - w^-(p_{-m} + \dots + p_{i-1}); 1 - m \leq i \leq 0$$

Para hacer más simple y comprensiva la expresión, notemos el siguiente prospecto (\$1000, 1/3; \$2000, 1/3; \$100, 1/3), de esta manera tenemos la siguiente situación:

$$\pi_i = w\left(\sum_{k=i}^n p_k\right) - w\left(\sum_{k=i+1}^n p_k\right)$$

$$\pi_3 = w\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\pi_2 = w\left(\frac{2}{3}\right) - w\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\pi_1 = 1 - w\left(\frac{2}{3}\right)$$

Igualmente, si queremos saber el valor correspondiente a prospectos dentro de la función de valor hacemos $V(f) = V(f^+) + V(f^-)$ dando las asignaciones negativas o positivas pertinentes con base en la ecuación (1).

Con base en (CPT), se busca establecer la actitud hacia el riesgo de los individuos en cuanto a la sobre estimación de probabilidades en el momento de tomar decisiones, además de la identificación de los puntos de referencia los cuales se asocian a una función de ponderación de probabilidad que se explica en la siguiente sección.

S – curva

La identificación de las decisiones que los individuos toman se puede observar mediante los cambios que presenta la s – curva, la cual indica el nivel de aversión que presentan los individuos dependiendo de del grado de curvatura que esta muestra, así, por ejemplo, una curva pronunciada en el dominio de la pérdida, indica una alta aversión, mientras que una curva poco pronunciada muestra la cercanía entre el valor de $w(p)$ y p , para probabilidades p .

Khaneman y Tversky (1992), proponen la siguiente forma funcional que presenta las características de asimetría entre ganancias y pérdidas, cuasi concavidad en el dominio de las pérdidas y cuasi convexidad en el de las ganancias.

$$w^+(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}} \quad (2)$$
$$w^-(p) = \frac{p^\delta}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{\frac{1}{\delta}}}$$

Para los escenarios propuestos en el diseño experimental se asume el parámetro $\alpha = 1$ y se determina la función de valor que corresponde en principio a sujetos indiferentes al riesgo (esta función de valor en el prospecto corresponde análogamente a una función de utilidad) que propone Khaneman en la teoría de prospectos acumulativa.

$$v(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \text{para } x \geq 0 \\ -\lambda(-x)^\beta, & \text{para } x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

En este caso, tomamos $\alpha = \beta$ como lo plantea (Arkes, Hirshleifer, Jiang, & Lim, 2008) por conveniencia de la estimación de los parámetros.

2.3. Identificación de problemas

Para Rosch (1975) un punto de referencia es un estímulo para la consecución de un problema (Stommel, 2013, p2.). En ese sentido, los problemas que causan pérdidas van generando un retorno asociado a la aversión al riesgo y con el tiempo la decisión empieza a cambiar. En contraste, para

Stommel (2013) existe un efecto de certidumbre en las decisiones, estamos en un mundo donde las preferencias se rigen por los resultados finales y estas son relativas a las decisiones de cada individuo

Ahora bien, ¿qué significa asociar la decisión dentro del contexto de un problema bajo incertidumbre? Tenemos entonces dos posibilidades de identificación según lo determine el efecto reflejo, es decir, el individuo esta potencialmente en pérdida o puede estar en una situación de ganancia sin mover su Status Quo; si un individuo se encuentra en la situación de búsqueda de riesgo, es porque puede apostar con una alta probabilidad de no perder, o porque habiendo una alta probabilidad de perder algo que inicialmente se tenía, hay una preferencia por el riesgo. Para Stommel (2013) la prominencia de cambios de puntos de referencia es una base del comportamiento humano.

En resumen, identificar un problema de decisión se basa en una búsqueda de riesgo si la pérdida es segura o existe una alta probabilidad de perder, lo que se definiría como aversión a la pérdida. Por otro lado, si la probabilidad de pérdida es insignificante, la decisión se toma con base en la preferencia inicial del individuo. Es decir, en el dominio de ganancia con baja probabilidad de ganar, se busca riesgo mientras que hay aversión con alta probabilidad de perder ganancia, y en el dominio de la pérdida, con baja probabilidad hay aversión al riesgo y con alta probabilidad hay búsqueda de riesgo (Stommel, 2013).

2.4. Puntos de referencia y expectativa endógena

Cuando los agentes se enfrentan a puntos de referencia, evalúan las expectativas según el pasado reciente, tal y como se explicó anteriormente, esto significa que el peso de la decisión tiene carga por eventos pasados recientes. Específicamente, Koszegi & Rabin, (2007) plantean que la decisión que toma una persona se basa en la creencia probabilística de la evaluación de resultados según la expectativa, es decir, que una expectativa se hace fuerte en la medida que se establezcan criterios de pérdida y ganancia sobre una decisión y así formar el punto de referencia.

El punto de referencia que se presenta más comúnmente es aquel que se deriva del Status Quo, es decir, una persona no tomará una decisión que le ponga en riesgo su preferencia por la estabilidad. Igualmente, cuando se hace referencia al Status Quo, es importante diferenciar las expectativas de

la realidad, por ejemplo, una persona con expectativa de salario alto, no necesariamente tiene una pérdida cuando se le ofrece un salario por debajo del esperado, simplemente hay un cambio de expectativa versus realidad, ahora bien, si una persona tiene un salario alto, y decide que va a tomar un trabajo, pero que potencialmente este salario es menor, simplemente preferiría no arriesgar y mantener el Status Quo.

En ese sentido, las decisiones están sesgadas por el ambiente, es decir que el ambiente pesa bastante en la elección. Una persona que tiene claro el ambiente en el cual decide, simplemente genera un punto de referencia que le permite visualizar el contraste de Status Quo y riesgo o aversión a la pérdida, en este caso, solamente hará el esfuerzo por obtener mayor rendimiento si esto asegura un gran beneficio, mientras que no hacer el esfuerzo no le quita rendimiento y se mantiene constante su situación. Es decir, no desmejora. En general, la decisión se toma basado en $c - r$. donde r es el nivel de esfuerzo, desempeño o similares.

2.5. El contexto escolar

En la revisión de literatura, se encontraron algunos trabajos experimentales basados en puntos de referencia que evidencian el incremento en el desempeño académico de los estudiantes, Clark et al. (2017) muestran un diseño experimental en el cual la utilización de objetivos como tareas, definen puntos de referencia para mejorar el desempeño, también, se observa que los estudiantes en ausencia de metas, pueden presentar problemas de auto control, ya que se encuentran sesgados por el presente. Aunque el documento no se enfoca en el sesgo de Status Quo, dicha situación puede asimilarse al planteamiento de Eidelman & Crandall (2012) quienes defienden dicha posición, como un estado natural del ser humano, y tanto el efecto Status Quo y efecto dotación de Kahneman et al. (1991), hacen parte de las decisiones racionales. Levitt, List, Neckermann, & Sadoff, (2016) en su estudio experimental, evidencian que antes de generar estímulos de orden económico para mejorar el desempeño de los estudiantes, es importante observar el comportamiento de los estudiantes, cuando estos se enfrentan a incentivos basados en pérdidas, además, sugieren que los incentivos deben ser inmediatos, para evitar el bajo esfuerzo de los estudiantes, de tal manera que disminuyan su capacidad. En la misma línea McEvoy (2016) muestran que la manipulación de las escalas de calificación pueden representar incentivos basados en pérdidas. Allí se muestra la diferencia entre grupos de estudiantes a quienes se les asigna la evaluación de 100% equivalente

a 560 y a partir de estos generar pérdidas, otro grupo debe ir sumando en la escala. Se puede evidenciar, que los estudiantes generan mayores esfuerzos por no perder calificación y sostener notas altas. En contraste, los estudiantes que deben ir sumando desde cero, generan menores esfuerzos.

Por otro lado, se puede hacer la extensión al contexto escolar de una amplia gama de documentos que muestran que las decisiones de las personas están atravesadas por las expectativas y el riesgo que lleva hacer algún tipo de elección, es el caso de Holt & Laury (2002), quienes emplean incentivos monetarios para medir la aversión al riesgo de las personas cuando estos se multiplican, es decir, en la medida que hay mayor posibilidad de perder una suma alta de dinero, las personas eligen las expectativas seguras. En este experimento se eligen entre dos loterías inicialmente una con ganancias fijas y la otra con riesgos altos, después de 10 sesiones, se espera que el comportamiento de los agentes cambie en función de obtener resultados menos riesgosos en las elecciones. Una de las conclusiones importantes es que la expectativa cambia cuando la elección se encuentra alrededor de 0.5 de probabilidad y, por tanto, también cambia la decisión.

También, se pueden encontrar experimentos como el de Koszegi & Rabin (2007) en cuanto a las actitudes frente al riesgo, y evidencia se desarrolla el modelo de teoría de prospectos combinado con referencia dependiente, "ganancia y pérdida de utilidad", en la que se muestra el punto de referencia en relación a mejorar o seguir igual y cómo se trasladan las preferencias en riesgo monetario, en este sentido, se define la exposición de actitudes al riesgo mediante la introducción de una lotería, el modelo busca generar mezcla de sentimientos frente a las decisiones.

Como se puede observar, cada uno de los experimentos busca hacer una extensión a algún contexto, en este caso, se quiere extender al contexto escolar con el objetivo de mostrar las preferencias de los estudiantes frente a realizar tareas que determinen un desempeño que responda a minimizar las expectativas de pérdida.

Es así, que se puede asociar el patrón cuádruple de (CPT) de la sección 2.3 Khaneman (1992) de la elección bajo riesgo al contexto escolar, es decir, quienes se encuentran en el dominio de las ganancias, y por tanto son aversos al riesgo, en el sentido de mantener las preferencias que presentan alta probabilidad de ganancia, mientras que son amantes al riesgo, cuando las probabilidades de ganar son pocas. En contraste, las personas que se encuentran en el dominio de la pérdida se comportarían como aversos en cuanto existan bajas probabilidades de perder, y serían

amantes al riesgo en cuanto sean altas las probabilidades de perder.

Teniendo en cuenta el patrón cuádruple de la elección bajo riesgo, un estudiante que genera grandes esfuerzos por obtener calificaciones altas, es porque interiormente siente altas probabilidades de perder, lo que sería un indicador de aversión a la pérdida y por tanto generaría esfuerzo para aumentar el desempeño académico. Por otro lado, un estudiante en el dominio de las ganancias debería evitar aumentar el desempeño, dado que no habría necesidad en generar esfuerzo dado que hay alta probabilidad de ganar.

2.5.1. El efecto de pares

Para Battaglini, Díaz, & Patacchini, (2017) el efecto de pares se enmarca en las decisiones de un grupo de personas quienes influyen sobre la decisión de algún integrante al grupo, es decir que los agentes se preocupan por las acciones de otros, dado que pueden contar con tal información, para lograr extraer información, la cual surge de manera endógena en el grupo. En la misma dirección, Buechel, Mechtenberg, & Petersen, (2014) desarrollan un estudio experimental, en el cual muestran evidencia consistente con Battaglini et al. (2017), donde se muestra que lo importante para mejorar rendimiento académico, es establecer una red de estudiantes talentosos, o que tengan una mayor capacidad de autocontrol. Los autores mencionados anteriormente definen el autocontrol, como la capacidad de poder establecer criterios relativos a objetivos que los estudiantes se han trazado, por ejemplo, la capacidad de priorizar estudio, sobre salir en la noche, en pocas palabras, evitar postergar tareas.

En el contexto del aula escolar Burke & Sass (2013) analizan un conjunto de datos longitudinales, para estimar efectos fijos sobre el impacto que tienen los compañeros de clase en el rendimiento académico de los estudiantes en las escuelas públicas del Estado de Florida, para lo cual tomaron datos de 5 años en grados de 3 – 10, aquí se evidencia, que el efecto de pares es más significativo cuando los estudiantes comparten aula. Los autores también mencionan la dificultad que se presenta, tanto a nivel legal, como a nivel práctico, frente a realizar experimentos aleatorios en las escuelas públicas a gran escala. Burke & Sass (2013) argumentan que, una vez iniciado un experimento en la escuela, con muestra aleatoria, si en el tiempo se diera un fenómeno de deserción, o de renuncia al experimento, los resultados pueden estar sesgados. Además, resulta importante que la presencia de algún grado de clasificación en la capacidad del estudiante

determine una mejor medida, para calcular el efecto de pares. En el mismo sentido, se encuentra el trabajo realizado por McEwan (2003), que muestra evidencia en Chile, donde el rendimiento de los estudiantes de grado octavo se determina con base en el efecto de pares tomando como base la endogeneidad de las variables al incluir efectos fijos escolares que controlan las características familiares y estudiantiles no observadas. Las estimaciones sugieren que la media de la educación de las madres en el aula es un determinante importante del rendimiento individual, aunque sujeto a rendimientos marginales decrecientes.

Otros estudios como el de Carrell, Fullerton, & West (2009) sugieren que el efecto de pares se incrementa, en la medida que se comparta la mayor cantidad de tiempo posible entre pares. En el diseño experimental que se desarrolla en la academia de la fuerza aérea de Estados Unidos, de manera exógena introducen pares, con el objeto de compartir la mayor parte del tiempo con compañeros durante un año académico. A los estudiantes básicamente se les induce a estar únicamente con sus compañeros asignados, en esta situación, el efecto de pares cuando se comparte mayor cantidad de tiempo es mucho mayor, que otros resultados, cuando se comparte únicamente dormitorio.

En contraste con las situaciones expuestas anteriormente Gaviria & Raphael, (2001), afirman que hay una cantidad de variables contextuales que llevan a que los jóvenes se comporten de la misma manera, dado que comparten mismos gustos, misma escuela, etc. Dentro de esta gama de variables, pueden existir dos situaciones diferenciadas, por ejemplo, una variable exógena, que puede venir de una reiterada deserción de sus padres cuando estuvieron en la escuela, esto pudiera ocasionar tal comportamiento en el estudiante, pero también de manera endógena, cuando un estudiante hace parte de un grupo, y es normal que sus compañeros sufran de deserción y eso sea un comportamiento natural. En este punto, es importante mencionar que el efecto de pares puede determinarse por comportamiento inducido en un grupo, o por variables estructurales que definan comportamientos generalizados, por procesos de selección discriminada de manera deliberada, puede ser escuela, barrio, estrato socio económico, etc.

Metodología

3.1. Diseño del ejercicio experimental

Para estructurar el cuasi experimento se tuvo en cuenta el decreto 1290 de 2009, conocido como sistema de evaluación institucional, el cual obliga a las instituciones a establecer los criterios de promoción de aprobación de las asignaturas. En el caso particular de la institución donde se aplicó el ejercicio, está definido que las asignaturas se aprueban con una nota de 30 en una escala de 0 a 50.

Se toman dos grupos A (para escenario A, Status Quo) y B (para escenario B, aversión a la pérdida o sistema basado en castigos).

Para el grupo del escenario A, con media (μ), desviación estándar (σ) y con calificación (x) obtenida por cada estudiante, se crea el siguiente sistema de beneficios sin pérdida. Para generar Status Quo. Es decir, no hay castigo.

Situación 1, cuando la media es inferior a la calificación mínima de 30.

- i) *si $x < \mu$; entonces $x = x$*
- x) *si $\mu \leq x < \mu + \sigma$; entonces $x = 30$*
- xi) *si $\mu + \sigma \leq x < \mu + 2\sigma$; entonces $x = 30 + 0.2x$*
- xii) *si $\mu + 2\sigma \leq x$; entonces $x = 30 + 0.5x$*

Situación 2, cuando la media es superior a la calificación mínima de 30.

- i) *si $x < \mu$; entonces $x = x$*
- ii) *si $\mu \leq x < \mu + \sigma$; entonces $x = x$*
- iii) *si $\mu + \sigma \leq x < \mu + 2\sigma$; entonces $x = x + 0.2x$*
- iv) *si $\mu + 2\sigma \leq x$; entonces $x = x + 0.5x$*

Para el grupo del escenario B, con media (μ), desviación estándar (σ) y con calificación (x) obtenida por cada estudiante, se crea el siguiente sistema de beneficios y pérdidas. Cabe anotar que el sistema de incentivos de 20% y 50% es arbitrario y tiene por objeto dar mayores beneficios

a quienes generen mayores esfuerzos.

Situación 1, cuando la media es inferior a la calificación mínima 35.

- i) *si $x < \mu$; entonces $x = 0$*
- ii) *si $\mu \leq x < \mu + \sigma$; entonces $x = 35$*
- iii) *si $\mu + \sigma \leq x < \mu + 2\sigma$; entonces $x = 35 + 0.2x$*
- iv) *si $\mu + 2\sigma \leq x$; entonces $x = 35 + 0.5x$*

Situación 2, cuando la media es superior o igual a la calificación mínima de 35.

- i) *si $x < \mu$; entonces $x = x$*
- ii) *si $\mu \leq x < \mu + \sigma$; entonces $x = x$*
- iii) *si $\mu + \sigma \leq x < \mu + 2\sigma$; entonces $x = x + 0.2x$*
- iv) *si $\mu + 2\sigma \leq x$; entonces $x = x + 0.5x$*

Se puede observar que la diferencia entre los grupos de los escenarios A y B radica básicamente en que el grupo del escenario B perderá la calificación obtenida y esta se convertirá en cero a menos que supere la expectativa de encontrarse igual o por encima del promedio del grupo, esto en la situación 1 en la cual la media del grupo es inferior a 35. Por otro lado, en la situación 2, el estudiante no perderá la calificación obtenida, si ha superado la calificación mínima aprobatoria de 35, así este se encuentre por debajo del promedio del grupo; es decir, el 35 funciona como un seguro.

También se puede observar que para el grupo del escenario A (Status Quo), la calificación aprobatoria es de 30. Esta se diferencia de la del grupo de aversión a la pérdida, dado que el argumento que se utiliza para generar Status Quo, se basa en Eidelman & Crandall (2012, p. 271) quienes afirman que “apegarse a lo que funcionó en el pasado es una opción segura que lo convierte en una opción inteligente. Mientras las decisiones anteriores sean "suficientemente buenas", en la misma línea, para Samuelson & Zeckhauser (1988) se evita el cambio y que los encargados de tomar decisiones se apeguen a lo que se ha hecho en el pasado. Lo anterior motiva, a que el escenario de Status Quo, deba generarse en función del pasado, y como lo describe la norma institucional, los estudiantes han aprobado históricamente con una calificación de 30 sobre

un total de 50, con lo que se pretende reforzar un escenario de Status Quo. En resumen, las diferencias entre los grupos de comparación son: para el grupo del sistema de pérdidas hay castigo, si no superan el punto de referencia establecido por el promedio del grupo, o mínimamente una calificación de 35 (esta para inducir mayor desempeño y evitar una situación de Status Quo). En contraste, para el grupo Status Quo, no hay castigo si no se supera el punto de referencia definido por el promedio del grupo (calificación invariante) o la nota mínima aprobatoria de 30 (esta para reforzar el Statu Quo, bajo la idea de apego a la decisión con información proveniente del pasado o la experiencia).

Para lograr el efecto de punto de referencia, en cada momento de calificación de los exámenes se brindó información del promedio del grupo y los ajustes pertinentes, de manera pública, así en cada momento, el estudiante sabrá el promedio en un tiempo (t), que servirá como expectativa para el siguiente examen en (t + 1).

Los talleres y evaluaciones aplicados en las 5 sesiones se encuentran en el ANEXO A.

3.2. Implementación del experimento

1. Se realizaron 5 sesiones que corresponden a 5 exámenes de selección múltiple o con respuesta cerrada, calificados en la escala 0 – 50. Cada examen se asocia a talleres propuestos sin peso en la valoración final para el estudiante.
2. Al finalizar cada sesión se calificaron los talleres indicando media y desviación estándar, y con base en los escenarios planteados en el numeral anterior, se determinaron los ajustes correspondientes que los estudiantes recibieron como parte del proceso de implementación de la evaluación.
3. Se brindó información pública del punto de referencia (promedio del grupo) a los estudiantes de los grupos A y B al finalizar cada sesión (tiempo t). Se aplicaron los incentivos o castigos correspondientes.
4. El estudiante del grupo statu quo **no** tiene castigos.

Para la primera sesión no existe un promedio o un punto de referencia definido por las calificaciones del grupo, por lo que se espera un proceso de adaptación al sistema de evaluación,

conforme va transcurriendo el tiempo durante las 5 sesiones.

Con base en el modelo de cumulative prospect theory (CPT), expuesto en el marco teórico, se analizan los escenarios planteados, y se determina el punto de referencia inducido, en función de la probabilidad subjetiva. En el ejercicio experimental realizado hay un escenario de riesgo, en el cual hay una probabilidad (p) de obtener un ajuste o una calificación invariante, y una probabilidad (1-p) de obtener un castigo.

Llamaremos C_i la calificación obtenida en el momento i. si dicha calificación genera ajuste será $C_i + \text{ajuste}$ ³, el cual depende del diseño experimental. Si es castigado $C_i + b = 0$, también se tiene que (CPT) define que hay un punto de referencia, ese es μ_i , según el diseño. Por último, se tiene que $CF_i = C_i + \text{ajuste}$, es la calificación final (CF) la cual corresponde al desempeño académico de los estudiantes, que es obtenida una vez se realizan todos los ajustes, bien sea a cero, invariante o con ajustes positivos de 20% y 50%.

Tenemos que la función de valor de (CPT) es $v(x) = x^\alpha$, que el equivalente de certeza es

$EC_i = C_i + CF_i - \mu_{i-1}$; por lo que $v(EC_i) = w(p_i)v(C_i + \text{ajuste} - \mu_{i-1}) + (1 - w(p_i))(v(C_i + b - \mu_{i-1}))$.

Para $i=1, \dots, 5$. La referencia en $\mu_0 = 0$, dado que el primer punto de referencia no está dado.

En general, la ecuación queda convertida en $v(CE) = w(p)v(CF - \mu) + (1 - w(p))v(-\mu)$

Así, la calificación final y la referencia se pueden evaluar en función de la probabilidad subjetiva.

$$v(EC) - (1 - w(p))v(-\mu) = w(p)v(CF - \mu)$$

$$\frac{v(EC) - (1 - w(p))v(-\mu)}{w(p)} = v(CF - \mu)$$

Finalmente,

$$v^{-1}\left(\frac{v(EC) - (1 - w(p))v(-\mu)}{w(p)}\right) = CF - \mu$$

La calificación final y el punto de referencia se pueden interpretar como función de probabilidades subjetivas $w(p)$.

³ Suponga en el dominio de pérdidas $\mu=15$, $\sigma=7.5$, $C_i = 20$; entonces $C_i > \mu$, pero $C_i < \mu + \sigma$, así, $CF = C_i + \text{ajuste} = 35$. ahora suponga que $C_i = 25$; entonces $C_i > \mu$, y $C_i > \mu + \sigma$, así, $CF = C_i + \text{ajuste} = 35 + 0.2C_i$. sí $C_i = 10$, entonteces $C_i + b = 0$, así $CF = C_i + b = 0$. En el dominio de ganancia $\mu=15$, $\sigma=7.5$, $C_i = 14$, entonces $C_i = C_i = CF$.

$$w^+(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

$$w^-(p) = \frac{p^\delta}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{\frac{1}{\delta}}}$$

Estimamos los parámetros δ, γ mediante el método de máxima verosimilitud, tal como lo propone la teoría. Se asume $\alpha = 1$ para que la función de valor sea lineal, suponiendo (en principio) individuos neutrales al riesgo, para enfocar la atención en la función de probabilidad subjetiva.

3.3. Resultados

En la tabla 1, se observa que los parámetros δ, γ para dominios de ganancia y pérdida mantienen la relación $\delta > \gamma$ durante cada una de las 5 sesiones, se interpreta a la luz de (CPT), que los individuos en el dominio de las ganancias tienden a sobre estimar probabilidades bajas, esto significa que son menos sensitivos al cambio de probabilidad. Dicha situación sugiere en el cuasi experimento, que no hay incentivos para generar desempeño académico alto, situación que los convierte en amantes al riesgo ya que no hay castigos. En contraste, en el dominio de pérdida, los estudiantes se convierten en aversos al riesgo en la medida que transcurren las sesiones, ya que el valor del parámetro δ crece sesión tras sesión, mostrando adaptación al punto de referencia μ_{i-1} , los estudiantes en dominio de pérdida son sensibles al cambio de probabilidades y prefieren mejorar el desempeño, dado que, de no ser así, se enfrentarían al castigo de convertir su calificación en cero.

En las figuras 3, figura 4 y figura 5 del anexo A, se observa el comparativo de las funciones de probabilidad subjetiva, sesión por sesión.

Tabla 1*Tabla de parámetros por sesión para gráfica de s - curva*

| Valor | Sesión 1 | Sesión 2 | Sesión 3 | Sesión 4 | Sesión 5 |
|----------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Parámetros | | | | | |
| (γ, δ) | | | | | |
| Parámetros para w + (γ) | 0.5 | 0.48 | 0.43 | 0.45 | 0.42 |
| Parámetros para w- (δ) | 0.7 | 0.67 | 1 | 0.95 | 1 |

Tabla de parámetros obtenida mediante el estimador de máxima verosimilitud⁴ para la ecuación (2). Se sabe que w- es dominio de pérdida y w+ es dominio de ganancia.

3.4. Control ANOVA

Los resultados promedio de las evaluaciones hechas a los estudiantes son: En el caso del grupo A obtuvieron en las sesiones 1,2 ,3 4 y 5, respectivamente resultados promedio de 21.57/50; 16.84/50; 8.15/50; 16.84/50 y 13.42/50. Para el caso del grupo B (dominio de pérdidas) se obtuvieron en las sesiones respectivas, resultados promedio 15/50; 23.42/50; 45.52/50; 41.31/50; 48.54/50.

⁴ $l(\delta) = \text{Ln } l(\delta)$; $l(\delta) = \text{Ln } \prod_{i=1}^n p_i^\delta - \text{Ln}(p_i^\delta + (1 - p_i)^\delta)^{\frac{1}{\delta}}$; $\frac{\partial l}{\partial \delta} = 0$; se resuelve para δ sabiendo que p_i corresponde a la probabilidad calculada como frecuencia, según se determine en cada prospecto.

Tabla 2

| <i>Diferencia de medias evaluaciones grupos A y B</i> | | | | | Intervalo de confianza | |
|---|---------------|--------------------|----------------|---------------|------------------------|-----------------|
| Evaluación (I) | Evaluación(J) | Dif medias (I – J) | Error Estándar | Significancia | Limite Superior | Limite Inferior |
| Sesión 1A | Sesión 1B | 4,73684 | 1,86163 | ,253 | -1,2275 | 10,7012 |
| | Sesión 2A | 2,89474 | 1,86163 | ,868 | -3,0696 | 8,8591 |
| Sesión 2A | Sesión 2B | -6,57895* | 1,86163 | ,018 | -12,5433 | -,6146 |
| | Sesión 3A | 8,68421* | 1,86163 | ,000 | 2,7198 | 14,6486 |
| Sesión 3A | Sesión 3B | -37,36842* | 1,86163 | ,000 | -43,3328 | -31,4040 |
| | Sesión 4A | -8,68421* | 1,86163 | ,000 | -14,6486 | -2,7198 |
| Sesión 4A | Sesión 4B | -24,47368* | 1,86163 | ,000 | -30,4381 | -18,5093 |
| | Sesión 5A | 3,42105 | 1,86163 | ,710 | -2,5433 | 9,3854 |
| Sesión 5A | Sesión 5B | -35,52632* | 1,86163 | ,000 | -41,4907 | -29,5619 |

Tabla ANOVA con base en estados inmediatamente anteriores y por grupo, ejemplo, sesión 1 grupo A, será sesión 1A, para el grupo B será sesión 1B. (*) Significativo 95%.

Tomando las variaciones de la sesión t+1, respecto de la sesión t, es decir de las sesiones (2 – 1; 3 – 2; 4 – 3; 5 – 4) se obtiene lo siguiente para el grupo A -0.21, -0.51, 1.06, -0.2. Mientras para el grupo B se obtiene: 0.56, 0.94, -0.09, 0.18. De las variaciones descritas, se puede observar que el comportamiento de los grupos es diferente, la tendencia del grupo A es generar variaciones negativas, es decir, cada sesión, obtuvieron calificaciones cada vez más bajas. En contraste, el grupo B, aumentó su calificación en el tiempo, salvo la relación de la sesión 4 – 3 que hubo variación de -0.09, lo que resulta poco significativo en el contexto general.

En la tabla 2 se puede observar que, en la primera sesión, no hubo diferencias significativas en el resultado de las evaluaciones de los estudiantes, esto nos permite determinar que los grupos tienen comportamientos similares en el momento iniciar el cuasi experimento, en este caso el examen inicial, además al no estar inducidos por puntos de referencia puesto que es la primera sesión, se puede asumir como un resultado simple producto de un ejercicio básico de contestar

la prueba. Por otro lado, cuando se contrasta la sesión 1 del grupo A con la sesión 2 del mismo grupo, observamos un comportamiento de Status Quo, ya que este grupo no genera cambio para mejorar su condición inicial.

En cuanto a la sesión 2, se puede observar que el contraste del grupo A (dominio de ganancias) con el grupo B (dominio de pérdidas) es de -6.57, indica que la inducción de puntos de referencia en el dominio de pérdidas hace que los estudiantes generen mayores esfuerzos, este equivale casi al 39% de mejoramiento en el desempeño académico. Por otro lado, la comparación del grupo A de la sesión 2 hacia la sesión 3, muestra una disminución significativa de 8.6, es decir casi 40%. Sin embargo, el grupo A en la sesión 2, obtuvo mejores resultados que en la sesión 3, ya que en la sesión 3, estuvieron 8.33 puntos por debajo de la sesión 2, esto significa disminución alrededor de 50% en el desempeño en la prueba de la sesión 3.

En la sesión 3 el aumento del grupo B sobre el grupo A es mucho mayor 37.36, esto indica que el grupo que se encuentra en dominio de pérdidas asimila el punto de referencia y hay una tendencia a estabilizar calificaciones seguras, es decir que no dependan de la referencia de promedio del cuasi experimento, la variación respecto del grupo A es de casi 5 veces. En la sesión 4 se puede observar que el grupo A respecto del grupo B tiene una diferencia significativa de -24.47 correspondiente a una variación de 41% del grupo de las pérdidas frente al de las ganancias, además se observa que para la calificación obtenida por el grupo A en la sesión 5 no hay diferencias significativas, esto implica que el comportamiento de quienes se encuentran en el grupo A tiene una tendencia a estabilizarse en el tiempo, ratificando sesgo de Status Quo.

En la quinta y última sesión, el comparativo de medias es de -35.52 del grupo A hacia el grupo B, se puede observar que la significancia de este resultado, obedece a que el grupo B generó constantemente incrementos en el desempeño, a tal punto de lograr calificaciones no dependientes del beneficio y de la referencia, en pocas palabras, el grupo B después de las primeras pérdidas, evaluó críticamente la situación frente al punto de referencia y optaron por incrementar el rendimiento. Este incremento, obedece al hecho de que los estudiantes en el tiempo se volvieron aversos a la pérdida. Como lo explican Beckman, Chen, DeAngelo, Smith, & Zhang (2011) "Las personas experimentan la sensación como cambio. Nuestras manos se adaptan rápidamente a la temperatura de un cubo de agua y experimentan calor o frío si la temperatura sube o baja. Al cambiar la metáfora al placer y al dolor, experimentamos pérdidas y ganancias en relación con un punto de referencia que se adapta a las circunstancias actuales "(p.5). Esto significa, que los estudiantes en los grupos evaluaron las condiciones según criterios subjetivos de ganancia y pérdida. Para el caso del grupo A, se mantuvieron en Status Quo En

contraste el grupo B, cada vez que obtuvo castigo, la tendencia fue a incrementar el desempeño, para NO obtener pérdidas. Esta aversión a la pérdida es la actitud hacia el riesgo que las personas toman, cuando sienten peligro de perder algo que ya se ha obtenido.

Conclusiones

Los resultados⁵ del ejercicio cuasi experimental sugieren que los estudiantes que se encuentran expuestos a pérdidas, particularmente se adaptan a los puntos de referencia y a partir de estos generan las decisiones respecto de mejorar el desempeño académico en función de la probabilidad subjetiva referida a la posibilidad de pérdida. En contraste, quienes se encuentran en situación de Status Quo, tienen preferencias por mantener estados actuales y consecuentemente, el rendimiento académico no se incrementa. Finalmente, se concluye que los estudiantes en dominios de pérdida mejoran el desempeño académico y este se ve reflejado en las calificaciones finales de sus pruebas.

Respecto de los puntos de referencia basados en aversión a la pérdida, se puede decir que los estudiantes quienes se encuentran en dominios de pérdida tienen la tendencia a mejorar el desempeño, ya que no sobre estiman probabilidades bajas, esto significa que aumentan el desempeño según van aprendiendo de la pérdida. En pocas palabras, si un estudiante en un tiempo (t) obtiene un castigo por bajo desempeño, se espera que en un tiempo (t+1) incremente su resultado. De acuerdo con Rabín, 1997 (como se citó en Stommel (2013, p.15)) “la teoría de la utilidad considera el supuesto de que los resultados de las perspectivas de riesgo se evalúan como posiciones de activos finales. Sin embargo, hay observaciones que sugieren que los tomadores de decisiones a menudo son más sensibles a cómo un resultado difiere de un nivel de referencia en comparación con el nivel absoluto de la decisión”. Esto indica que los estudiantes hacen las observaciones globales y a partir de estas construyen de manera subjetiva el punto de referencia, y con base en esta referencia toman una nueva decisión. Dicha sensibilidad se puede observar mediante los parámetros de la función de ponderación de probabilidad, la cual creada por el efecto de la inducción de puntos de referencia en el dominio de las pérdidas. Se observa que motiva a que los

⁵ Son robustos en el ejercicio cuasi experimental referido a las calificaciones obtenidas por los estudiantes sesión por sesión. se utilizó Desviación absoluta respecto de la mediana (DAM) y se hizo prueba de hipótesis significativa al 95%, para evaluar puntos de quiebre de 25% y 50%. Aunque son pocos datos 19 para cada grupo, son consistentes y no presentan datos atípicos que afecten la media.

estudiantes deban superarse, o al menos, obtener resultados seguros de tal manera que eviten el castigo, este comportamiento se interpreta a partir de las – curve.

Otra conclusión que se tiene es la posibilidad de implementar un sistema de evaluación que se determine como proceso, en el cual se haga evidente, el punto de partida de un tiempo (t) como punto de referencia para un tiempo (t+1). Dicha situación puede generar incrementos positivos en el desempeño académico de los estudiantes, siempre que sea posible inducir incentivos basados en la pérdida. *“no es fácil atender tal situación, puesto que el proceso enseñanza – aprendizaje no debería ser un sistema de castigos”*. Sin embargo, el sistema de evaluación institucional de la institución debería hacer un enfoque de la calidad a partir de procesos que en el tiempo generen competitividad académica. Al respecto, Koszegi & Rabin, (2007) definen que las actitudes hacia el riesgo en un sistema basado en Status Quo, dependen de la posibilidad de pérdida, esto quiere decir que, ninguna persona estaría dispuesta a aceptar menos valor por algo que considera de valor superior, y en ese sentido debería asumirse la evaluación institucional.

Finalmente, los resultados anteriores, sugieren al menos tres recomendaciones para continuar estudiando posibles incentivos que generen incremento de la calidad académica y el incremento en el desempeño individual de los estudiantes. Primero, la continuación del presente proyecto con los datos recogidos, para hacer un análisis con base en las preferencias de los estudiantes, siguiendo la línea de Camerer & Ho (1994) y así comprender mejor el problema del Status Quo. Segundo, ampliar el campo de innovación pedagógica implementando nuevos experimentos que se estructuren desde teorías económicas cada vez más cercanas al análisis de la subjetividad. Como tercera recomendación, se sugiere hacer adaptaciones de diseños experimentales en economía, y llevarlos a contextos escolares (el aula), ya que es un campo valioso para ser explotado por los economistas.

Bibliografía

Abeler, J., Falk, A., Goette, L., & Huffman, D. (2011). Reference points and effort provision. *American Economic Review*, 101(2), 470–492. <https://doi.org/10.1257/aer.101.2.470>

Allais, M. (2006). Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine. *Econometrica*, 21(4), 503. <https://doi.org/10.2307/1907921>

Allen, E. J., Dechow, P. M., Pope, D. G., & Wu, G. (2016). Reference-Dependent Preferences: Evidence from Marathon Runners. *Management Science*, 1–51. <https://doi.org/10.3386/w20343>

Apostolova-Mihaylova, M., Cooper, W., Hoyt, G., & Marshall, E. (2014). Loss Aversion, Distributional Effects, and Asymmetric Gender Responses in Economics Education *, 04240.

Arkes, H. R., Hirshleifer, D., Jiang, D., & Lim, S. (2008). Reference point adaptation: Tests in the domain of security trading. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*. <https://doi.org/10.1016/j.obhdp.2007.04.005>.

Baker-Henningham, H., & López, F. (2013). Intervenciones de estimulación infantil temprana en los países en vías de desarrollo, 62. <https://doi.org/Report N° IDB-TN-540>

Banco Mundial (2018). Gasto público en educación, total (% del PIB). World Bank Group [US].

Recuperado de <https://datos.bancomundial.org/indicador/SE.XPD.TOTL.GD.ZS?locations=CO>

Banco Mundial (2018). PIB per cápita (US\$ a precios actuales). World Bank Group [US].

Recuperado de <https://datos.bancomundial.org/indicador/NY.GDP.PCAP.CD>

Battaglini, M., Díaz, C., & Patacchini, E. (2017). Self-control and peer groups: An empirical analysis. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 134, 240–254. <https://doi.org/10.1016/j.jebo.2016.12.018>

Becker G, M. Degroot, & J. Marschak. (1963). Measuring Utility by A Single - Response Secuential Method. TEMPO, Carnegie Institute of Technology, and University Of California At Los Angeles.

Beckman, S., Chen, L., DeAngelo, G., Smith, W. J., & Zhang, X. (2011). Microeconomics and Psychology. *The Journal of Economic Education*, 42(3), 255–269. <https://doi.org/10.1080/00220485.2011.581943>

Box-Steffensmeier, J., Brady, H., Collier, D., Jasjeet Sekhon, eds S., Freedman, D., Mebane,

W. R., & Rubin, D. (2007). The Neyman-Rubin Model of Causal Inference and Estimation via Matching Methods * Forthcoming in *The Oxford Handbook of Political Methodology*.

- Buechel, B., Mechtenberg, L., & Petersen, J. (2014). *Peer Effects and Students' Self-Control. Working Paper*. Retrieved from <http://mpa.ub.uni-muenchen.de/53658/>
- Burke, M. A., & Sass, T. R. (2013). Classroom peer effects and student achievement. *Journal of Labor Economics*, 31(1), 51–82. <https://doi.org/10.1086/666653>
- Carrell, S. E., Fullerton, R. L., & West, J. E. (2009). Does your cohort matter? measuring peer effects in college achievement. *Journal of Labor Economics*, 27(3), 439–464. <https://doi.org/10.1086/600143>
- Caliendo, M., Caliendo, M., & Kopeinig, S. (2005). Some Practical Guidance for the Implementation of Propensity Score Matching, 22(1588), 31–72.
- Camerer, C. F., & Ho, T. H. (1994). Violations of the betweenness axiom and nonlinearity in probability. *Journal of Risk and Uncertainty*, 8(2), 167–196. <https://doi.org/10.1007/BF01065371>
- CHOQUET, G. (1954). Theory of capacities. *Annales de l'institut Fourier*, tome 5, p. 131- 295 *Writing*, 3, 769–783. recuperado de: http://www.numdam.org/item?id=AIF_1954_5_131_0@
- Clark, D., Gill, D., Prowse, V. L., & Rush, M. (2017). Using Goals to Motivate College Students: Theory and Evidence from Field Experiments. *SSRN Electronic Journal*, (10283). <https://doi.org/10.2139/ssrn.2856767>
- Colombia, M. D. E. N. (2009). Fundamentaciones y Orientaciones para la aplicación del decreto 1290 de 2009, (11), 16. Retrieved from http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-213769_archivo_pdf_evaluacion.pdf
- Cuenca, M., & Penagos, I. (2014). Crecimiento económico en Colombia: una aproximación empírica fundamentada en la perspectiva capital humano Economic growth in Colombia: an empirical approximation founded in human capital. *Apuntes Del Cenes*, 33(58), 11–44. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.19053/22565779.3099>
- Eidelman, S., & Crandall, C. S. (2012). Bias in Favor of the Status Quo. *Social and Personality Psychology Compass*, 6(3), 270–281. <https://doi.org/10.1111/j.1751-9004.2012.00427.x>
- Gaviria, A., & Raphael, S. (2001). School-based peer effects and juvenile behavior. *Review of Economics and Statistics*, 83(2), 257–268. <https://doi.org/10.1162/00346530151143798>
- Heckman, J. (1998). Matching as an econometric evaluation estimator. *The Review of ...*, 65(2), 261–294. <https://doi.org/10.1111/1467-937X.00044>
- Holt, C. A., & Laury, S. K. (2002). Risk Aversion and Incentive Effects. *The American Economic review*. Vol 92. No 5. pp. 1644 - 1655. Georgia State University. Andrew Young School of Policy Studies. Atlanta.

ICFES. (2016). Resumen Ejecutivo. Colombia en PISA 2015. *Ministerio de Educación Nacional de Colombia*, 27. Retrieved from <http://www.icfes.gov.co/instituciones-educativas-y-secretarias/evaluaciones-internacionales-inves/programa-para-la-evaluacion-internacional-de-estudiantes-pisa>

ICFES - TIMSS. (2007). Evaluaciones Internacionales Resultados de Colombia en TIMSS 2007 esumen Ejecutivo.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk.

Econometrica: Journal of the Econometric Society, 47(3), 263–291.

<https://doi.org/10.1111/j.1536-7150.2011.00774.x>

Kahneman, D., Knetsch, J. L., & Thaler, R. H. (1991). Anomalies: The Endowment Effect, Loss Aversion, and Status Quo Bias. *Journal of Economic Perspectives*, 5(1), 193–206. <https://doi.org/10.1257/jep.5.1.193>

Koszegi, B. (2010). Utility from anticipation and personal equilibrium. *Economic Theory*, 44(3), 415–444. <https://doi.org/10.1007/s00199-009-0465-x>

Koszegi & Rabin, M. (2006). A Model of Reference-Dependent Preferences*, the Quarterly Journal of Economics CXXI(November), 1133–1165

Koszegi, B., & Rabin, M. (2007). Reference-Dependent Risk Attitudes. *The American Economic Review*, 97(4), 1047–73. <https://doi.org/10.1257/aer.97.4.1047>

Márquez Jiménez, A. (2017). Educación y desarrollo en la sociedad del conocimiento. *Perfiles Educativos*, 39(158), 3–17. <https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2017.158.58635>

McEwan, P. J. (2003). Peer effects on student achievement: Evidence from Chile. *Economics of Education Review*, 22(2), 131–141. [https://doi.org/10.1016/S0272-7757\(02\)00005-5](https://doi.org/10.1016/S0272-7757(02)00005-5)

Meng, J. (2017). Target as Reference Point : Evidence from Student Behaviour

Mitra, D., & Ph, D. (n.d.). Pennsylvania' s Best Investment : The Social and Economic Benefits of Public Education.

Radinger, T., Echazarra, A., Guerrero, G., Pablo, J., & Al, V. (2018). *OCDE Revisión de Recursos Escolares COLOMBIA*. Retrieved from www.oecd.org/education/schoolresourcesreview.htm

Ramos P, F. J. (2011). *ATENCIÓN EDUCATIVA Y TRANSICIÓN A LA VIDA ADULTA DE JÓVENES CON BAJO RENDIMIENTO ACADÉMICO*.

República de Colombia DANE Información Estratégica (2018). Resultados preliminares CENSO NACIONAL DE POBLACIÓN Y VIVIENDA 2018. Gobierno de Colombia. Recuperado de <https://sitios.dane.gov.co/cnpv-presentacion/src/#cuantos00>

República de Colombia DANE Información Estratégica (2018). Educación Formal (EDUC) Boletín Técnico (2017). Gobierno de Colombia. Recuperado de https://www.dane.gov.co/files/investigaciones/boletines/educacion/bol_EDUC_17.pdf

República de Colombia: MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, (2009). Decreto 1290. Por el cual se reglamenta la evaluación del aprendizaje y promoción de los estudiantes de los niveles de educación básica y media.

República de Colombia: MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, (1994). Ley General De Educación, (LEY 115). Congreso de la república.

República de Colombia: MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, (2002). Decreto 230 por el cual se dictan normas en materia de currículo, evaluación y promoción de los educandos y evaluación institucional.

República de Colombia: MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, (2002). Decreto 3055 Por el cual se adiciona el artículo 9° del Decreto 230 de 2002.

Rosch, E. (1975). *Cognitive reference points*. *Cognitive Psychology* (Vol. 7). [https://doi.org/10.1016/0010-0285\(75\)90021-3](https://doi.org/10.1016/0010-0285(75)90021-3)

Sánchez, A., & Otero, A. (2012). Educación Y Desigualdad En Colombia. *Banco de La República, Reportes Del Emisor*, (154), 1–4.

Samuelson, W., & Zeckhauser, R. (1988). Status Quo Bias in Decision Making Author (s): WILLIAM SAMUELSON and RICHARD ZECKHAUSER Stable URL : <http://www.jstor.org/stable/41760530> . *Journal of Risk and Uncertainty*, 1(1), 7–59. Retrieved from [https://sites.hks.harvard.edu/fs/rzeckhau/status quo bias.pdf](https://sites.hks.harvard.edu/fs/rzeckhau/status%20quo%20bias.pdf)

Stommel, E. (2013). *Reference-Dependent Preferences: A Theoretical and Experimental Investigation of Individual Reference Point Formation*. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-00635-8>

Traub, U. S. & S. (2001). *AN EXPERIMENTAL TEST OF LOSS AVERSION*. *Universit? at zu Kiel, Germany* (Vol. 103). <https://doi.org/10.1023/A>

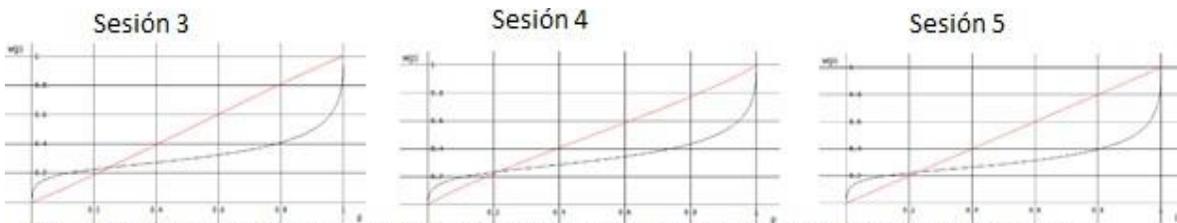
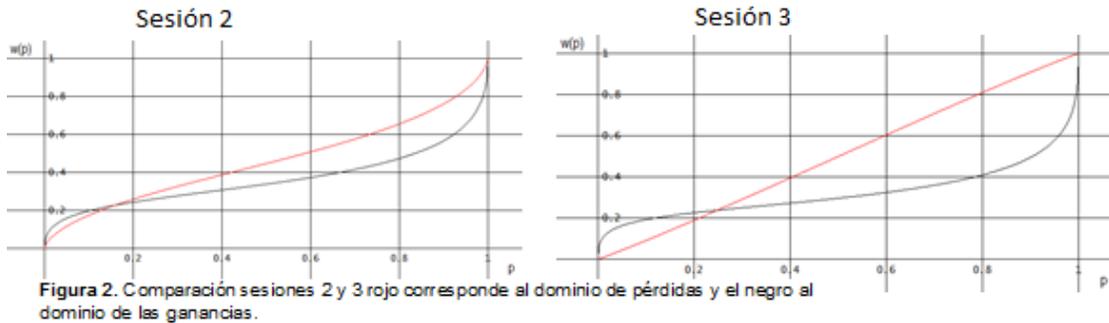
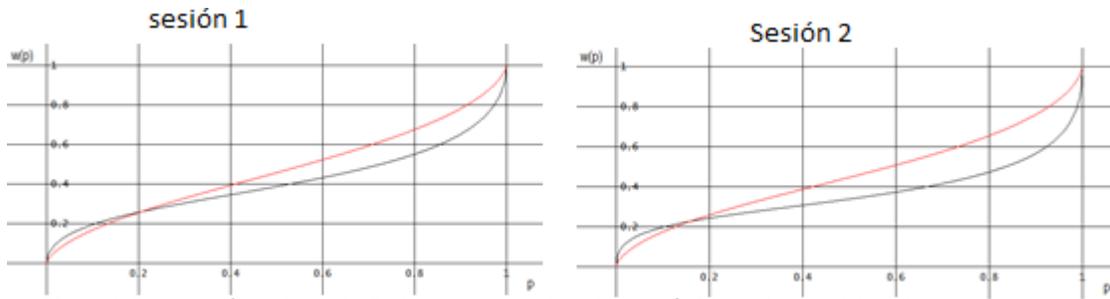
Tversky, A., & Kahneman, D. (1992). Advances in Prospect-Theory - Acumulative Representation of Uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, 5(4), 297–323. <https://doi.org/Doi 10.1007/Bf00122574>

Weiner S. & Ira K. Wolf (2011). "*BARRON'S, The leader in test preparation, NEW GRE, 19 th edition*".

Anexos

Anexo A

Figuras 1, 2, 3, que muestran el comportamiento de las funciones de probabilidad subjetiva en dominios de Status Quo y pérdidas. $W+(p)$ y $w-(p)$.



Anexo B

Los anexos que se presentan a continuación corresponden a talleres y evaluaciones hechas por los estudiantes, además se cuenta con la autorización para poder ser mostrados únicamente con fines investigativos, de acuerdo a la ley de tratamiento de datos.

TALLER 1 (c/u =2)

Discrete Quantitative Questions

1. For how many positive integers, a , is it true that $a^2 \leq 2a$?
- Ⓐ None
 Ⓑ 1
 Ⓒ 2
 Ⓓ 4
 Ⓔ More than 4

2. If $0 < a < b < 1$, which of the following statements are true?

Indicate *all* such statements.

- Ⓐ $a - b$ is negative
- Ⓑ $\frac{1}{ab}$ is positive
- Ⓒ $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ is positive
3. If the product of 4 consecutive integers is equal to one of them, what is the largest possible value of one of the integers?

4. At 3:00 A.M. the temperature was 13° below zero. By noon it had risen to 32° . What was the average hourly increase in temperature?

- Ⓐ $\left(\frac{19}{9}\right)^\circ$
 Ⓑ $\left(\frac{19}{6}\right)^\circ$
 Ⓒ 5°
 Ⓓ 7.5°
 Ⓔ 45°

5. If a and b are negative, and c is positive, which of the following statements are true? Indicate *all* such statements.

Ⓐ $a - b < a - c$

Ⓑ If $a < b$, then $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Ⓒ $\frac{1}{b} < \frac{1}{c}$

6. If $-7 \leq x \leq 7$ and $0 \leq y \leq 12$, what is the greatest possible value of $y - x$?

- Ⓐ -19
 Ⓑ 5
 Ⓒ 7
 Ⓓ 17
 Ⓔ 19

7. If $(7^a)(7^b) = \frac{7^c}{7^d}$, what is d in terms of a , b , and c ?

- Ⓐ $\frac{c}{ab}$
 Ⓑ $c - a - b$
 Ⓒ $a + b - c$
 Ⓓ $c - ab$
 Ⓔ $\frac{c}{a + b}$

8. If each of \star and \diamond can be replaced by $+$, $-$, or \times , how many different values are there for the expression $2 \star 2 \diamond 2$?

9. A number is “terrific” if it is a multiple of 2 or 3. How many terrific numbers are there between -11 and 11 ?

- Ⓐ 6
- Ⓑ 7
- Ⓒ 11
- Ⓓ 15
- Ⓔ 17

10. If $x \star y$ represents the number of integers greater than x and less than y , what is the value of $-\pi \star \sqrt{2}$?

- Ⓐ 2
- Ⓑ 3
- Ⓒ 4
- Ⓓ 5
- Ⓔ 6

Questions 11 and 12 refer to the following definition.

For any positive integer n , $\tau(n)$ represents the number of positive divisors of n .

11. Which of the following statements are true?

Indicate *all* such statements.

- Ⓐ $\tau(5) = \tau(7)$
- Ⓑ $\tau(5) \cdot \tau(7) = \tau(35)$
- Ⓒ $\tau(5) + \tau(7) = \tau(12)$

12. What is the value of $\tau(\tau(\tau(12)))$?

- Ⓐ 1
- Ⓑ 2
- Ⓒ 3
- Ⓓ 4
- Ⓔ 6

13. If p and q are primes greater than 2, which of the following statements must be true?

Indicate *all* such statements.

- Ⓐ $p + q$ is even
- Ⓑ pq is odd
- Ⓒ $p^2 - q^2$ is even

14. If $0 < x < 1$, which of the following lists the numbers in increasing order?

- Ⓐ \sqrt{x}, x, x^2
- Ⓑ x^2, x, \sqrt{x}
- Ⓒ x^2, \sqrt{x}, x
- Ⓓ x, x^2, \sqrt{x}
- Ⓔ x, \sqrt{x}, x^2

15. Which of the following is equal to $(7^8 \times 7^9)^{10}$?

- Ⓐ 7^{27}
- Ⓑ 7^{82}
- Ⓒ 7^{170}
- Ⓓ 49^{170}
- Ⓔ 49^{720}

Quantitative Comparison Questions

- Ⓐ Quantity A is greater.
 Ⓑ Quantity B is greater.
 Ⓒ Quantities A and B are equal.
 Ⓓ It is impossible to determine which quantity is greater.

| | Quantity A | Quantity B |
|----------------------------------|---|---|
| 16. | The product of the odd integers between -8 and 8 | The product of the even integers between -9 and 9 |
| a and b are nonzero integers | | |
| | Quantity A | Quantity B |
| 17. | $a + b$ | ab |
| | Quantity A | Quantity B |
| 18. | The remainder when a positive integer is divided by 7 | 7 |
| | Quantity A | Quantity B |
| 19. | $24 \div 6 \times 4$ | 12 |
| | Quantity A | Quantity B |
| 20. | $\frac{2x - 17}{2}$ | $x - 17$ |

n is an integer greater than 1 that leaves a remainder of 1 when it is divided by 2, 3, 4, 5, and 6

| | Quantity A | Quantity B |
|---------------------------|--|--|
| 21. | n | 60 |
| | Quantity A | Quantity B |
| 22. | The number of primes that are divisible by 2 | The number of primes that are divisible by 3 |
| n is a positive integer | | |
| | Quantity A | Quantity B |
| 23. | The number of different prime factors of n | The number of different prime factors of n^2 |
| | Quantity A | Quantity B |
| 24. | The number of even positive factors of 30 | The number of odd positive factors of 30 |
| n is a positive integer | | |
| | Quantity A | Quantity B |
| 25. | $(-10)^n$ | $(-10)^{n+1}$ |

TALLER 2 (c/u=2)

Practice Exercises—Fractions and Decimals

Discrete Quantitative Questions

1. A biology class has 12 boys and 18 girls. What fraction of the class are boys?

| |
|--|
| |
| |

2. For how many integers, a , between 30 and 40 is it true that $\frac{5}{a}$, $\frac{8}{a}$, and $\frac{13}{a}$ are all in lowest terms?

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

3. What fractional part of a week is 98 hours?

| |
|--|
| |
| |

4. What is the value of the product

$$\frac{5}{5} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{15} \times \frac{5}{20} \times \frac{5}{25} ?$$

- (A) $\frac{1}{120}$
- (B) $\frac{1}{60}$
- (C) $\frac{1}{30}$
- (D) $\frac{5}{30}$
- (E) $\frac{1}{2}$

5. If $\frac{3}{11}$ of a number is 22, what is $\frac{6}{11}$ of that number?

- (A) 6
- (B) 11
- (C) 12
- (D) 33
- (E) 44

6. Jason won some goldfish at the state fair.

During the first week, $\frac{1}{5}$ of them died, and

during the second week, $\frac{3}{8}$ of those still alive

at the end of the first week died. What fraction of the original goldfish were still alive after two weeks?

(A) $\frac{3}{10}$

(B) $\frac{17}{40}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{23}{40}$

(E) $\frac{7}{10}$

7. $\frac{5}{8}$ of 24 is equal to $\frac{15}{7}$ of what number?

(A) 7

(B) 8

(C) 15

(D) $\frac{7}{225}$

(E) $\frac{225}{7}$

8. If $7a = 3$ and $3b = 7$, what is the value of $\frac{a}{b}$?

- Ⓐ $\frac{9}{49}$
- Ⓑ $\frac{3}{7}$
- Ⓒ 1
- Ⓓ $\frac{7}{3}$
- Ⓔ $\frac{49}{9}$

9. What is the value of $\frac{\frac{7}{9} \times \frac{7}{9}}{\frac{7}{9} + \frac{7}{9} + \frac{7}{9}}$?

- Ⓐ $\frac{7}{27}$
- Ⓑ $\frac{2}{3}$
- Ⓒ $\frac{7}{9}$
- Ⓓ $\frac{9}{7}$
- Ⓔ $\frac{3}{2}$

10. Which of the following expressions are greater than x when $x = \frac{9}{11}$?

Indicate *all* such expressions.

- Ⓐ $\frac{1}{x}$
- Ⓑ $\frac{x+1}{x}$
- Ⓒ $\frac{x+1}{x-1}$

11. One day at Lincoln High School, $\frac{1}{12}$ of the students were absent, and $\frac{1}{5}$ of those present went on a field trip. If the number of students staying in school that day was 704, how many students are enrolled at Lincoln High?

12. If $a = 0.87$, which of the following expressions are less than a^2 ?

Indicate *all* such expressions.

- Ⓐ \sqrt{a}
- Ⓑ a^2
- Ⓒ $\frac{1}{a}$

13. For what value of x is

$$\frac{(34.56)(7.89)}{x} = (.3456)(78.9)?$$

- Ⓐ .001
- Ⓑ .01
- Ⓒ .1
- Ⓓ 10
- Ⓔ 100

14. If $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, and C is the set consisting of all the fractions whose numerators are in A and whose denominators are in B , what is the product of all of the numbers in C ?

- Ⓐ $\frac{1}{64}$
- Ⓑ $\frac{1}{48}$
- Ⓒ $\frac{1}{24}$
- Ⓓ $\frac{1}{12}$
- Ⓔ $\frac{1}{2}$

you can find all NEW GRE books in pdf ETS
<http://gre-dow>

15. For the final step in a calculation, Ezra accidentally divided by 1000 instead of multiplying by 1000. What should he do to his incorrect answer to correct it?

- Ⓐ Multiply it by 1000.
- Ⓑ Multiply it by 100,000.
- Ⓒ Multiply it by 1,000,000.
- Ⓓ Square it.
- Ⓔ Double it.

Quantitative Comparison Questions

- Ⓐ Quantity A is greater.
- Ⓑ Quantity B is greater.
- Ⓒ Quantities A and B are equal.
- Ⓓ It is impossible to determine which quantity is greater.

| | Quantity A | | Quantity B |
|-----|----------------------|--|----------------------|
| 16. | $\frac{5}{13}$ of 47 | | $\frac{47}{13}$ of 5 |

$$x = -\frac{2}{3} \text{ and } y = \frac{3}{5}$$

| | Quantity A | | Quantity B |
|-----|------------|--|---------------|
| 17. | xy | | $\frac{x}{y}$ |

| | Quantity A | | Quantity B |
|-----|---------------------------|--|------------|
| 18. | $\frac{15}{\frac{1}{15}}$ | | 1 |

Judy needed 8 pounds of chicken. At the supermarket, the only packages available weighed $\frac{3}{4}$ of a pound each.

| | Quantity A | | Quantity B |
|-----|---|--|------------|
| 19. | The number of packages Judy needed to buy | | 11 |

[d GRE, Kaplan, Barron's, Princeton here:](#)

| | Quantity A | | Quantity B |
|-----|------------------------------------|--|-----------------|
| 20. | $\frac{11}{12}$ or $\frac{13}{14}$ | | $\frac{14}{15}$ |

$$a\sqrt{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

| | Quantity A | | Quantity B |
|-----|-------------|--|---------------------------------|
| 21. | $3\sqrt{4}$ | | $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$ |

| | Quantity A | | Quantity B |
|-----|-----------------------|--|-----------------------|
| 22. | $\frac{100}{2^{100}}$ | | $\frac{100}{3^{100}}$ |

| | Quantity A | | Quantity B |
|-----|--|--|--|
| 23. | $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{7}{8}\right)$ | | $\left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{5}{9}\right)\left(-\frac{7}{11}\right)$ |

$$a = \frac{1}{2} \text{ and } b = \frac{1}{3}$$

| | Quantity A | | Quantity B |
|-----|---------------|--|---------------|
| 24. | $\frac{a}{b}$ | | $\frac{b}{a}$ |

| | Quantity A | | Quantity B |
|-----|-------------------------------|--|-----------------------|
| 25. | $\left(\frac{3}{11}\right)^2$ | | $\sqrt{\frac{3}{11}}$ |

TALLER 3 (c/u =2)

Practice Exercises — Percents

Discrete Quantitative Questions

- If 25 students took an exam and 4 of them failed, what percent of them passed?
 - Ⓐ 4%
 - Ⓑ 21%
 - Ⓒ 42%
 - Ⓓ 84%
 - Ⓔ 96%
- Amanda bought a \$60 sweater on sale at 5% off. How much did she pay, including 5% sales tax?
 - Ⓐ \$54.15
 - Ⓑ \$57.00
 - Ⓒ \$57.75
 - Ⓓ \$59.85
 - Ⓔ \$60.00
- What is 10% of 20% of 30%?
 - Ⓐ 0.006%
 - Ⓑ 0.6%
 - Ⓒ 6%
 - Ⓓ 60%
 - Ⓔ 6000%
- If c is a positive number, 500% of c is what percent of $500c$?
 - Ⓐ 0.01
 - Ⓑ 0.1
 - Ⓒ 1
 - Ⓓ 10
 - Ⓔ 100
- What percent of 50 is b ?
 - Ⓐ $\frac{b}{50}$
 - Ⓑ $\frac{b}{2}$
 - Ⓒ $\frac{50}{b}$
 - Ⓓ $\frac{2}{b}$
 - Ⓔ $2b$
- 8 is $\frac{1}{3}\%$ of what number?
- During his second week on the job, Mario earned \$110. This represented a 25% increase over his earnings of the previous week. How much did he earn during his first week of work?
 - Ⓐ \$82.50
 - Ⓑ \$85.00
 - Ⓒ \$88.00
 - Ⓓ \$137.50
 - Ⓔ \$146.67
- At Bernie's Bargain Basement everything is sold for 20% less than the price marked. If Bernie buys radios for \$80, what price should he mark them if he wants to make a 20% profit on his cost?
 - Ⓐ \$96
 - Ⓑ \$100
 - Ⓒ \$112
 - Ⓓ \$120
 - Ⓔ \$125

9. Mrs. Fisher usually deposits the same amount of money each month into a vacation fund. This year she decided not to make any contributions during November and December. To make the same annual contribution that she had originally planned, by what percent should she increase her monthly deposits from January through October?
- Ⓐ $16\frac{2}{3}\%$
 Ⓑ 20%
 Ⓒ 25%
 Ⓓ $33\frac{1}{3}\%$
 Ⓔ It cannot be determined from the information given.
10. The price of a loaf of bread was increased by 20%. How many loaves can be purchased for the amount of money that used to buy 300 loaves?
- Ⓐ 240
 Ⓑ 250
 Ⓒ 280
 Ⓓ 320
 Ⓔ 360
11. If 1 micron = 10,000 angstroms, then 100 angstroms is what percent of 10 microns?
- Ⓐ 0.0001%
 Ⓑ 0.001%
 Ⓒ 0.01%
 Ⓓ 0.1%
 Ⓔ 1%
12. There are twice as many girls as boys in an English class. If 30% of the girls and 45% of the boys have already handed in their book reports, what percent of the students have not yet handed in their reports?
- %
13. An art dealer bought a Ming vase for \$1000 and later sold it for \$10,000. By what percent did the value of the vase increase?
- Ⓐ 10%
 Ⓑ 90%
 Ⓒ 100%
 Ⓓ 900%
 Ⓔ 1000%
14. During a sale a clerk was putting a new price tag on each item. On one jacket, he accidentally raised the price by 15% instead of lowering the price by 15%. As a result the price on the tag was \$45 too high. What was the original price of the jacket?
- dollars
15. On a test consisting of 80 questions, Eve answered 75% of the first 60 questions correctly. What percent of the other 20 questions does she need to answer correctly for her grade on the entire exam to be 80%?
- Ⓐ 85%
 Ⓑ 87.5%
 Ⓒ 90%
 Ⓓ 95%
 Ⓔ 100%

Quantitative Comparison Questions

- Ⓐ Quantity A is greater.
- Ⓑ Quantity B is greater.
- Ⓒ Quantities A and B are equal.
- Ⓓ It is impossible to determine which quantity is greater.

| | <u>Quantity A</u> | <u>Quantity B</u> |
|-----|-------------------|-------------------|
| 16. | 400% of 3 | 300% of 4 |

$n\%$ of 25 is 50

| | <u>Quantity A</u> | <u>Quantity B</u> |
|-----|-------------------|-------------------|
| 17. | 50% of n | 75 |

| | <u>Quantity A</u> | <u>Quantity B</u> |
|-----|---|--|
| 18. | The price of a television when it is on sale at 25% off | The price of that television when it's on sale at \$25 off |

The price of cellular phone 1 is 20% more than the price of cellular phone 2.

| | <u>Quantity A</u> | <u>Quantity B</u> |
|-----|---|-------------------------------|
| 19. | The price of cellular phone 1 when it is on sale at 20% off | The price of cellular phone 2 |

| | <u>Quantity A</u> | <u>Quantity B</u> |
|-----|----------------------------------|----------------------------------|
| 20. | $\frac{2}{3}\%$ of $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}\%$ of $\frac{2}{3}$ |

| | <u>Quantity A</u> | <u>Quantity B</u> |
|-----|------------------------|------------------------|
| 21. | $a\%$ of $\frac{1}{b}$ | $b\%$ of $\frac{1}{a}$ |

Bank A pays 5% interest on its savings accounts.
Bank B pays 4% interest on its savings accounts.

| | <u>Quantity A</u> | <u>Quantity B</u> |
|-----|---|-------------------|
| 22. | Percent by which bank B would have to raise its interest rate to match bank A | 20% |

A solution that is 20% sugar is made sweeter by doubling the amount of sugar.

| | <u>Quantity A</u> | <u>Quantity B</u> |
|-----|--|-------------------|
| 23. | The percent of sugar in the new solution | 40% |

b is an integer greater than 1,
and b equals $n\%$ of b^2

| | <u>Quantity A</u> | <u>Quantity B</u> |
|-----|-------------------|-------------------|
| 24. | n | 50 |

After Ali gave Lior 50% of her money,
she had 20% as much as he did.

| | <u>Quantity A</u> | <u>Quantity B</u> |
|-----|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 25. | 75% of the amount Lior had originally | 150% of the amount Ali had originally |

Practice Exercises—Ratios and Proportions

Discrete Quantitative Questions

- If $\frac{3}{4}$ of the employees in a supermarket are not college graduates, what is the ratio of the number of college graduates to those who are not college graduates?
 - Ⓐ 1:3
 - Ⓑ 3:7
 - Ⓒ 3:4
 - Ⓓ 4:3
 - Ⓔ 3:1
- If $\frac{a}{9} = \frac{10}{2a}$, what is the value of a^2 ?
 - Ⓐ $3\sqrt{6}$
 - Ⓑ $3\sqrt{5}$
 - Ⓒ $9\sqrt{6}$
 - Ⓓ 45
 - Ⓔ 90
- If 80% of the applicants to a program were rejected, what is the ratio of the number accepted to the number rejected?

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$
- Scott can read 50 pages per hour. At this rate, how many pages can he read in 50 minutes?
 - Ⓐ 25
 - Ⓑ $41\frac{2}{3}$
 - Ⓒ $45\frac{1}{2}$
 - Ⓓ 48
 - Ⓔ 60
- If all the members of a team are juniors or seniors, and if the ratio of juniors to seniors on the team is 3:5, what percent of the team members are seniors?
 - Ⓐ 37.5%
 - Ⓑ 40%
 - Ⓒ 60%
 - Ⓓ 62.5%
 - Ⓔ It cannot be determined from the information given.
- The measures of the three angles in a triangle are in the ratio of 1:1:2. Which of the following statements must be true? Indicate *all* such statements.
 - Ⓐ The triangle is isosceles.
 - Ⓑ The triangle is a right triangle.
 - Ⓒ The triangle is equilateral.
- What is the ratio of the circumference of a circle to its radius?
 - Ⓐ 1
 - Ⓑ $\frac{\pi}{2}$
 - Ⓒ $\sqrt{\pi}$
 - Ⓓ π
 - Ⓔ 2π
- The ratio of the number of freshmen to sophomores to juniors to seniors on a college basketball team is 4:7:6:8. What percent of the team are sophomores?
 - Ⓐ 16%
 - Ⓑ 24%
 - Ⓒ 25%
 - Ⓓ 28%
 - Ⓔ 32%

9. At Central State College the ratio of the number of students taking Spanish to the number taking French is 7:2. If 140 students are taking French, how many are taking Spanish?

students

10. If $a:b = 3:5$ and $a:c = 5:7$, what is the value of $b:c$?
- Ⓐ 3:7
 Ⓑ 21:35
 Ⓒ 21:25
 Ⓓ 25:21
 Ⓔ 7:3

11. If x is a positive number and $\frac{x}{3} = \frac{12}{x}$, then $x =$

- Ⓐ 3
 Ⓑ 4
 Ⓒ 6
 Ⓓ 12
 Ⓔ 36

12. In the diagram below, $b:a = 7:2$. What is $b - a$?



- Ⓐ 20
 Ⓑ 70
 Ⓒ 100
 Ⓓ 110
 Ⓔ 160

13. A snail can move i inches in m minutes. At this rate, how many feet can it move in b hours?

- Ⓐ $\frac{5bi}{m}$
 Ⓑ $\frac{60bi}{m}$
 Ⓒ $\frac{bi}{12m}$
 Ⓓ $\frac{5m}{bi}$
 Ⓔ $5him$

14. Gilda can grade t tests in $\frac{1}{x}$ hours. At this rate, how many tests can she grade in x hours?

- Ⓐ tx
 Ⓑ tx^2
 Ⓒ $\frac{1}{t}$
 Ⓓ $\frac{x}{t}$
 Ⓔ $\frac{1}{tx}$

15. A club had 3 boys and 5 girls. During a membership drive the same number of boys and girls joined the club. How many members does the club have now if the ratio of boys to girls is 3:4?

- Ⓐ 12
 Ⓑ 14
 Ⓒ 16
 Ⓓ 21
 Ⓔ 28

16. If $\frac{3x-1}{25} = \frac{x+5}{11}$, what is the value of x ?

- Ⓐ $\frac{3}{4}$
 Ⓑ 3
 Ⓒ 7
 Ⓓ 17
 Ⓔ 136

17. If 4 boys can shovel a driveway in 2 hours, how many minutes will it take 5 boys to do the job?

- Ⓐ 60
 Ⓑ 72
 Ⓒ 96
 Ⓓ 120
 Ⓔ 150

18. If 500 pounds of mush will feed 20 pigs for a week, for how many days will 200 pounds of mush feed 14 pigs?

Quantitative Comparison Questions

- Ⓐ Quantity A is greater.
 Ⓑ Quantity B is greater.
 Ⓒ Quantities A and B are equal.
 Ⓓ It is impossible to determine which quantity is greater.

The ratio of red to blue marbles in a jar was 3:5. The same number of red and blue marbles were added to the jar.

| | Quantity A | Quantity B |
|--|------------|------------|
| 19. The ratio of red to blue marbles now | | 3:5 |

Three associates agreed to split the \$3000 profit of an investment in the ratio of 2:5:8.

| | Quantity A | Quantity B |
|---|------------|------------|
| 20. The difference between the largest and the smallest share | | \$1200 |

The ratio of the number of boys to girls in the chess club is 5:2. The ratio of the number of boys to girls in the glee club is 11:4.

| | Quantity A | Quantity B |
|--|------------|-------------------------------------|
| 21. The number of boys in the chess club | | The number of boys in the glee club |

Sally invited the same number of boys and girls to her party. Everyone who was invited came, but 5 additional boys showed up. This caused the ratio of girls to boys at the party to be 4:5.

| | Quantity A | Quantity B |
|---|------------|------------|
| 22. The number of people she invited to her party | | 40 |

A large jar is full of marbles. When a single marble is drawn at random from the jar, the probability that it is red is $\frac{3}{7}$.

| | Quantity A | Quantity B |
|--|------------|---------------|
| 23. The ratio of the number of red marbles to non-red marbles in the jar | | $\frac{1}{2}$ |

$$3a = 2b \text{ and } 3b = 5c$$

| | Quantity A | Quantity B |
|-----------------------------|------------|------------|
| 24. The ratio of a to c | | 1 |

The radius of circle II is 3 times the radius of circle I.

| | Quantity A | Quantity B |
|--|------------|------------|
| 25. $\frac{\text{area of circle II}}{\text{area of circle I}}$ | | 3π |

Practice Exercises—Averages

Discrete Quantitative Questions

1. Michael's average (arithmetic mean) on 4 tests is 80. What does he need on his fifth test to raise his average to 84?
- Ⓐ 82
Ⓑ 84
Ⓒ 92
Ⓓ 96
Ⓔ 100
2. Maryline's average (arithmetic mean) on 4 tests is 80. Assuming she can earn no more than 100 on any test, what is the least she can earn on her fifth test and still have a chance for an 85 average after seven tests?
- Ⓐ 60
Ⓑ 70
Ⓒ 75
Ⓓ 80
Ⓔ 85
3. Sandrine's average (arithmetic mean) on 4 tests is 80. Which of the following **cannot** be the number of tests on which she earned exactly 80 points?
- Ⓐ 0
Ⓑ 1
Ⓒ 2
Ⓓ 3
Ⓔ 4
4. What is the average (arithmetic mean) of the positive integers from 1 to 100, inclusive?
- Ⓐ 49
Ⓑ 49.5
Ⓒ 50
Ⓓ 50.5
Ⓔ 51
5. If $10a + 10b = 35$, what is the average (arithmetic mean) of a and b ?
-
6. If $x + y = 6$, $y + z = 7$, and $z + x = 9$, what is the average (arithmetic mean) of x , y , and z ?
- Ⓐ $\frac{11}{3}$
Ⓑ $\frac{11}{2}$
Ⓒ $\frac{22}{3}$
Ⓓ 11
Ⓔ 22
7. If the average (arithmetic mean) of 5, 6, 7, and w is 8, what is the value of w ?
- Ⓐ 8
Ⓑ 12
Ⓒ 14
Ⓓ 16
Ⓔ 24
8. What is the average (arithmetic mean) in degrees of the measures of the five angles in a pentagon?
- degrees
9. If $a + b = 3(c + d)$, which of the following is the average (arithmetic mean) of a , b , c , and d ?
- Ⓐ $\frac{c + d}{4}$
Ⓑ $\frac{3(c + d)}{8}$
Ⓒ $\frac{c + d}{2}$
Ⓓ $\frac{3(c + d)}{4}$
Ⓔ $c + d$

10. In the diagram below, lines l and m are *not* parallel.



If A represents the average (arithmetic mean) of the degree measures of all eight angles, which of the following is true?

- Ⓐ $A = 45$
 - Ⓑ $45 < A < 90$
 - Ⓒ $A = 90$
 - Ⓓ $90 < A < 180$
 - Ⓔ $A = 180$
11. What is the average (arithmetic mean) of 2^{10} and 2^{20} ?
- Ⓐ 2^{15}
 - Ⓑ $2^5 + 2^{10}$
 - Ⓒ $2^9 + 2^{19}$
 - Ⓓ 2^{29}
 - Ⓔ 30
12. Let M be the median and m the mode of the following set of numbers: 10, 70, 20, 40, 70, 90. What is the average (arithmetic mean) of M and m ?
- Ⓐ 50
 - Ⓑ 55
 - Ⓒ 60
 - Ⓓ 62.5
 - Ⓔ 65

Quantitative Comparison Questions

- Ⓐ Quantity A is greater.
- Ⓑ Quantity B is greater.
- Ⓒ Quantities A and B are equal.
- Ⓓ It is impossible to determine which quantity is greater.

- | Quantity A | Quantity B |
|--|---|
| 13. The average (arithmetic mean) of the measures of the three angles of an equilateral triangle | The average (arithmetic mean) of the measures of the three angles of a right triangle |

- 10 students took a test and the average grade was 80. No one scored exactly 80.

- | Quantity A | Quantity B |
|----------------------------------|------------|
| 14. The number of grades over 80 | 5 |



- | Quantity A | Quantity B |
|--|------------|
| 15. The average (arithmetic mean) of $2x$ and $2y$ | 180 |

There are the same number of boys and girls in a club. The average weight of the boys is 150 pounds. The average weight of the girls is 110 pounds.

- | Quantity A | Quantity B |
|--|---------------------------------------|
| 16. The number of boys weighing over 150 | The number of girls weighing over 110 |

The average (arithmetic mean) of 22, 38, x , and y is 15.
 $x > 0$

- | Quantity A | Quantity B |
|------------|------------|
| 17. y | 0 |

- | Quantity A | Quantity B |
|--|---|
| 18. The average (arithmetic mean) of the even numbers between 1 and 11 | The average (arithmetic mean) of the odd numbers between 2 and 12 |

- | Quantity A | Quantity B |
|---|--|
| 19. The average (arithmetic mean) of 17, 217, 417 | The average (arithmetic mean) of 0, 17, 217, 417 |

- | Quantity A | Quantity B |
|--|---|
| 20. The average (arithmetic mean) of x and y | The average (arithmetic mean) of x , y , and $2y$ |