

*Modelo Bayesiano de Teoría de Respuesta al Ítem
Multidimensional para datos de naturaleza asimétrica*

JENNY PAOLA MARTÍNEZ FONSECA
LICENCIADA Y MATEMÁTICA
CÓDIGO: 1012359312



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
BOGOTÁ, D.C.
JULIO DE 2019

*Modelo Bayesiano de Teoría de Respuesta al Ítem
Multidimensional para datos de naturaleza asimétrica*

JENNY PAOLA MARTÍNEZ FONSECA
LICENCIADA Y MATEMÁTICA
CÓDIGO: 1012359312

DIRECTOR
ALVARO MAURICIO MONTENEGRO DÍAZ, PH.D.
DOCTOR EN ESTADÍSTICA



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
BOGOTÁ, D.C.
JULIO DE 2019

Título en español

Modelo Bayesiano de Teoría de Respuesta al Ítem Multidimensional para datos de naturaleza asimétrica.

Title in English

Bayesian Model of Multidimensional Item Response Theory for data of Asymmetric Nature.

Resumen: En el marco de los modelos logísticos de la Item Response Theory (IRT) es común encontrarse con la hipótesis de que el trazo latente subyacente a un test puede tener un comportamiento simétrico. No obstante, se ha observado en áreas como la educación, la psicología y la psicometría que las variables latentes pueden presentar un comportamiento naturalmente asimétrico. Por ejemplo, el *neuroticismo*, entendido como la capacidad de lidiar con el estrés y mejorar la disposición ante los retos que puedan presentarse, es un rasgo de personalidad que puede mostrar un comportamiento naturalmente asimétrico, ya que la mayor parte de la población responderá correctamente -o incorrectamente- a los ítems de la prueba que indaguen por este constructo -depende del sentido de los ítems-. En esta tesis se propone un modelo multidimensional asimétrico de la Teoría de la Respuesta al Ítem, el cual se diseñó para ajustar datos provenientes de pruebas binarias o dicotómicas, las cuales están divididas en subpruebas, y en donde la dimensión del trazo coincide con la dimensión del test. El modelo propuesto se denomina Modelo Multiunidimensional Logístico de la Teoría de Respuesta al Ítem Asimétrico de dos parámetros, MuIRTA-2PL, el cual considera la asimetría de los trazos y la correlación entre estos, por tanto, se hace uso de una *Copula Gaussiana* que captura dicha estructura de dependencia, y cuyo uso se justifica, dado que, proporciona un ajuste más adecuado, esto es, recupera y estima de mejor forma los parámetros incidentales y estructurales del modelo, en contraste con el modelo unidimensional UIRTA-2PL Modelo Unidimensional Logístico de la Teoría de Respuesta al Ítem Asimétrico de dos parámetros, que también se propone aquí, el cual esencialmente es un modelo unidimensional de la IRT que tiene en cuenta la naturaleza asimétrica del trazo. La metodología empleada en esta tesis se inscribe en el marco de la Inferencia Bayesiana por tal razón se hizo uso del lenguaje de programación bayesiano *Stan*, en particular de la posibilidad de construir funciones del tipo, `_lpdf` (función de densidad), indispensables en la implementación del modelo multiunidimensional propuesto. Por último, se trabajó con la prueba Inventario PIHEMA-R2, aplicada durante el proceso de admisión a la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad Central de Venezuela, para el período 2014.

Abstract: In the frame of logistic models of Item Response Theory (IRT), it is common to find a hypothesis that states the latent trace line underlying a test can have symmetrical behavior. Nonetheless, in areas such as education, psychology and psychometry, it can be observed that the latent variables may display a naturally asymmetric behavior. For instance, neuroticism, which is understood as the capacity to cope with stress and improve the attitude when facing life challenges, is a personality trait that can show a naturally asymmetric behavior, since most of the time the population will respond in a correct or incorrect way to the items of the test requiring this construct, depending on the intention of the items. A multidimensional model of the Item Response Theory is presented, which was created to adjust data from binary or dichotomous tests, which are

divided into sub-tests and where the dimension of the trace coincides with the dimension of the test. The model proposed is known as the Multiunidimensional logistic model of the Item Response Theory to the Asymmetric Item of two parameters: MuIRTA-2PL, which mainly considers the asymmetry of the traces and their correlation. Therefore, a Copula Gaussiana, which captures such structure of dependence, is used. Its use is justified since it provides a more adequate adjustment. That is, it recovers and estimates in a better way the incidental and structural parameters of the model, in contrast to the unidimensional model, UIRTA-2PL, Unidimensional Logistic Model of the Response Theory to the Asymmetric Item of two parameters, which is being proposed here, and where the natural asymmetry of the trace is being regarded. The methodology used in this discussion is framed upon the Bayesian Inference principle. In consequence, the Bayesian programming language known as Stan was used, especially the chance to construct functions type, `_1pdf` (density function), essential when implementing the Multiunidimensional model proposed. Finally, an Inventory test PIHEMA-R2 was used during the admission process to the Faculty of Human Sciences and Education of Universidad Central de Venezuela in 2014.

Palabras clave: Teoría de Respuesta al Ítem, Copula Gaussiana, Estimación Bayesiana, Stan, Distribución asimétrica

Keywords: Item Response Theory, Gaussian Copula, Bayesian Estimation, Stan, Asymmetric Distribution.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis

Aprobada

Jurado

Campo Elias Pardo Turriago

Jurado

Sandra Vergara Cardoza

Director

Alvaro Mauricio Montenegro Díaz

Bogotá, D.C., 2019

Dedicado a

A mis hermanos, sobrinos y sobrina, Cristian, Angel, Camilo, Daniel, Manuel y Ingrid, nunca olviden, que la educación siempre será la respuesta.

DEDICADO A

Agradecimientos

Agradezco a Dios, a mis padres, a mis hermanos y a mi esposo que me apoyan siempre en cada paso. Por supuesto al Profesor Alvaro Mauricio Montenegro por su paciencia, comprensión, apoyo y asesoría en la elaboración de esta tesis, y finalmente a la Profesora María Ángeles Payer por facilitarnos y permitirnos trabajar con los datos obtenidos en la aplicación de la Prueba Inventario PIHEMA-R2 a los aspirantes a la Universidad Central de Venezuela en 2014 .

Índice general

Índice general	III
Índice de tablas	VII
Índice de figuras	IX
Introducción	XIII
1. Marco Teórico	1
1.1. Modelos Unidimensionales de la Teoría de Respuesta al Ítem	2
1.1.1. Modelo Unidimensional Logístico de dos Parámetros	3
1.2. Modelos Multidimensionales de la Teoría de Respuesta al Ítem	4
1.2.1. Modelo Logístico Multidimensional de dos parámetros	4
1.2.2. Función de Verosimilitud	7
1.2.3. Identificabilidad de los modelos teoría de respuesta al ítem clásicos	7
1.3. Inferencia Bayesiana	8
1.3.1. Estimación Bayesiana en la Teoría de Respuesta al Ítem	9
1.4. Copulas	10
1.4.1. Conceptos básicos de copulas	10
1.4.1.1. Teorema de Sklar	11
1.4.1.2. Copula Gaussiana	12
1.5. RStan	13
1.5.1. Monte Carlo Hamiltoniano HMC	14
1.5.2. Implementación en Stan	14
1.6. Evaluación del modelo Bayesiano	20
1.6.1. WAIC	20
1.6.2. Bondad de Ajuste	22

2. Modelos Bayesianos Multidimensionales para Datos de Naturaleza Asimétrica	25
2.1. Introducción	25
2.2. Modelo unidimensional asimétrico logístico	25
2.2.1. Modelo unidimensional asimétrico logístico de dos Parámetros (UIRTA-2PL)	26
2.2.2. Distribución a posteriori del modelo UIRTA-2PL	27
2.3. Modelo multiunidimensional asimétrico logístico	28
2.3.1. Modelo multiunidimensional asimétrico logístico de dos parámetros (MuIRTA-2PL)	29
2.3.2. Función de Máxima Verosimilitud	29
2.3.3. Construcción de la función de densidad multivariada.	30
2.3.4. Distribución a posteriori del modelo MuIRTA-2PL	32
2.4. Estimación Bayesiana de modelo UIRTA-2PL (y MuIRTA-2PL)	34
2.4.1. Estimación Bayesiana de UIRTA-2PL	34
2.4.2. Estimación Bayesiana del MuIRTA-2PL	34
2.5. Estimación y construcciones requeridas en Stan	36
2.5.1. Estimación de los parámetros del modelo UIRTA-2PL en Stan	36
2.5.2. Implementación de la Copula en Stan	37
2.5.3. Estimación de los parámetros del modelo MuIRTA-2PL en Stan.	39
2.5.3.1. Función multivariada Gamma	39
2.5.3.2. Estimación de los parámetros de modelo multiunidimensional del modelo MuIRTA-2PL	41
3. Simulación	43
3.1. Generación del Test	44
3.2. Distribución predictiva vía método MCMC.	46
3.2.1. Comparación entre trazo simulado y el trazo recuperado	47
3.2.2. Función de densidad multivariada	48
3.3. Implementación del modelo UIRTA-2PL y MuIRTA-2PL	49
3.3.1. Comparación entre los parámetros incidentales simulados y los recuperados del Test.	50
3.3.2. Comparación entre los parámetros estructurales simulados y los recuperados del Test.	53
4. Análisis de Datos Reales	59
4.1. Descripción de los datos	59

4.1.1. Selección de los constructos y análisis preliminar	59
4.2. Estimación de los parámetros	61
4.2.1. Análisis preliminar (Falta de Identificabilidad)	61
4.2.2. Ajuste de datos empleando el Modelo UIRTA-2PL	63
4.2.3. Neuroticismo	63
4.2.4. Tendencia Paranoica	66
4.2.5. Tendencia Psicópatas	70
4.2.6. Ajuste de datos empleando el Modelo MuIRTA-2PL	74
4.2.7. Implementación Modelo Multiunidimensional Asimétrico de dos parámetros Logístico	74
5. Discusión y Conclusiones	83
A. Implementación en R y Stan	87
A.1. Códigos y funciones empleados en la Simulación	87
A.1.1. Función de Densidad Gamma Multivariada	90
A.2. Códigos implementación Stan para los Datos Reales	93
A.2.1. Códigos implementación del modelo BUIRT-2PL y MuBUIRT-2PL en Stan	93
B. Resultados de la Simulación	97
C. Resultados de los modelos UIRTA-2PL y MuIRTA-2PL en datos reales	107
C.1. Resultados datos reales para el modelo unidimensional	107
C.1.1. Neuroticismo	107
C.1.2. Tendencias Paranoideas	109
C.1.3. Tendencias Psicopáticas	111
C.2. Plot de cadenas de los parámetros de los ítems modelo unidimensional	112
C.3. Resultados datos reales para el modelo multiunidimensional	114
C.3.1. Neuroticismo	122
C.3.2. Tendencias Psicópatas	123

Índice de tablas

3.1. Medidas Descriptivas de los parámetros simulados.	46
3.2. Recuperación de los parámetros de la distribución asignada a los trazos.	48
3.3. Comparación de los parámetros de la distribución asignada a los trazos, y los parámetros recuperados vía la función de densidad multivariada.	49
3.4. Correlación entre la trazo simulado y la trazo recuperado	50
3.5. Estadísticas descriptivas para el error absoluto de los trazos.	53
3.6. Estadísticas descriptivas para el error absoluto del parámetro de discriminación empleando el modelo MuIRTA-2PL	54
3.7. Estadísticas descriptivas para el error absoluto del parámetro de dificultad empleando el modelo MuIRTA-2PL	54
4.1. Número total de ítem del test PIHEMA	60
4.2. Valores obtenidos de los parámetros vía Máxima verosimilitud	62
4.3. Comparación de los modelos usando diferentes prior para el trazo latente, se corrieron 3×1000 iteraciones en un PC de 8G RAM.	63
4.4. Estadísticas de resumen para $\hat{\theta}_1$	64
4.5. Estadísticas de resumen para $SE(\hat{\theta}_1)$	64
4.6. Comparación de los modelos usando diferentes prior para el trazo latente, se corrieron 3×2000 iteraciones en un PC de 8G RAM.	67
4.7. Estadísticas de resumen para $\hat{\theta}_1$	67
4.8. Estadísticas de resumen para $SE(\hat{\theta}_1)$	67
4.9. Comparación de los modelos usando diferentes prior para el trazo latente, se corrieron 3×1000 iteraciones en un PC de 8G RAM.	71
4.10. Estadísticas de resumen para $\hat{\theta}_3$	71
4.11. Estadísticas de resumen para $SE(\hat{\theta}_3)$	71
4.12. Comparación de los modelos MuIRTA-2PL, se corrieron 4×3000 iteraciones en un PC de 8G RAM.	75
4.13. Estadísticas de resumen para $\hat{\theta}_1$ <i>neuroticismo</i>	77

4.14. Estadísticas de resumen para $\hat{\theta}_2$ <i>psicopatía</i>	77
4.15. Estadísticas de resumen para $\hat{\theta}_3$ <i>paranoide</i>	78
C.1. Parámetros del ítem constructo Neuroticismo con ajuste Gamma	107
C.2. Parámetros del ítem constructo Neuroticismo con ajuste Lognormal	108
C.3. Parámetros del ítem constructo Neuroticismo con ajuste Normal	109
C.4. Parámetros del ítems constructo Paranoide con ajuste Gamma	109
C.5. Parámetros del ítems constructo Paranoide con ajuste Lognormal	110
C.6. Parámetros del ítems constructo Paranoide con ajuste Normal	110
C.7. Parámetros del ítems constructo Psicopatía con ajuste Gamma	111
C.8. Parámetros del ítems constructo Psicopatía con ajuste Lognormal	111
C.9. Parámetros del ítems constructo Psicopatía con ajuste Normal	111
C.10. Parámetros del ítem con ajuste MuIRTA-2PL Gamma	125
C.11. Parámetros del ítem con ajuste MuIRTA-2PL Lognormal	126
C.12. Parámetros del ítem con ajuste MuIRTA-2PL Gamma	127

Índice de figuras

1.1.	Curva característica del ítem (CCI) o (ICC), donde a_i y b_i corresponden al parámetro de discriminación y dificultad asociado al ítem i , respectivamente.	2
1.2.	CCI para distintos valores de b_i	3
1.3.	CCI para distintos valores de a_i	3
1.4.	Descripción de las transformaciones para un modelo copula, tomada de Smith (2011)	12
2.1.	Descripción de las transformaciones requeridas para la construcción de la función de densidad	30
3.1.	Correlación de las muestras	44
3.2.	Correlación de las variables u	44
3.3.	Gráfico 3D de las variables simuladas	45
3.4.	Correlación de las variables latentes θ_1 , θ_2 y θ_3	45
3.5.	Cadenas para los parámetros de forma α_1 , α_2 y α_3 (Ver apéndice C.)	47
3.6.	Cadenas para los parámetros de escale β_1 , β_2 y β_3 (Ver apéndice C)	47
3.7.	Comparación entre los valores simulados y los recuperados para el parámetro de habilidad θ en cada subtest.	48
3.8.	Correlaciones entre trazos estimados (izq.) y Gráfico criterio Rhat (der.)	49
3.9.	Comparación entre los valores simulados y los recuperados para el trazo (MuIRTA-2PL), de izq. a der. trazo 1, trazo 2 y trazo 3.	51
3.10.	(Simulación 1) Gráficos de las MCMC y densidad para algunos individuos. Izq. a Der. Test1, Test2 y Test3.	52
3.11.	Densidades recuperadas de los trazos simulados (MuIRTA-2PL)	53
3.12.	Comparación entre los valores simulados y recuperados para el parámetro de discriminación	55
3.13.	Comparación entre los valores simulados y recuperados para el parámetro de dificultad	56

4.1. Boxplot Score de cada constructo	60
4.2. Correlación de los puntajes clásicos (score) de los constructos seleccionados	61
4.3. Score de constructos seleccionados con densidad ajustada Máxima Verosimilitud, la línea azul -Gamma- y la línea vinotinta -Lognormal-.	62
4.4. Histograma para el constructo neuroticismo θ_1 . De Izq a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)	64
4.5. Gráficos cadenas y densidades para el Trazo Neuroticismo de los individuos 6578, 4250, 59 y 7094. De izquierda a Derecha, Gamma, Lognormal y Normal	65
4.6. Estimaciones parámetro de Discriminación constructo Neuroticismo. De Izq a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)	65
4.7. Estimaciones parámetro de Dificultad constructo Neuroticismo. De Izq. a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)	65
4.8. Curvas características del ítem para el test Neuroticismo	66
4.9. Histograma para el constructo paranoide θ_1 . De Izq a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)	68
4.10. Gráficos cadenas y densidades para el Trazo Paranoide de los individuos 6578, 4250, 59 y 7094. De izquierda a Derecha, Gamma, Lognormal y Normal	68
4.11. Estimaciones parámetro de Discriminación constructo Tendencias Paranoicas. De Izq a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)	69
4.12. Estimaciones parámetro de Dificultad constructo Tendencias Paranoicas. De Izq. a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)	69
4.13. Curvas características del ítem para el test Tendencias Paranoicas	70
4.14. Histograma para el constructo paranoide θ_1 . De Izq a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)	71
4.15. Gráficos cadenas y densidades para el Trazo Psicopatía de los individuos 1, 2345, 5323 y 8767. De izquierda a Derecha, Gamma, Lognormal y Normal	72
4.16. Estimaciones parámetro de Discriminación constructo Tendencias Psicopáticas. De Izq a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)	72
4.17. Estimaciones parámetro de Dificultad constructo Tendencias Psicopáticas. De Izq. a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)	73
4.18. Curvas características del ítem para el test Tendencias Psicopáticas	74
4.19. Histogramas obtenidos para los tres constructos con modelo MuIRTA-2PL empleando la función <code>multi_gamma_lpdf</code>	76
4.20. Histogramas obtenidos para los tres constructos con modelo MuIRTA-2PL empleando la función <code>multi_lognormal_lpdf</code>	76
4.21. Histogramas obtenidos para los tres constructos con modelo MuIRTA-2PL empleando la función <code>multi_normal_lpdf</code>	77
4.22. Estimaciones obtenidas para parámetro de Dificultad constructo Tendencias paranoides empleando el modelo MUIRTA-2PL. De Izq. a Der. (MultiGamma), (Multilognormal) y (Multinormal)	79

4.23. Estimaciones obtenidas para parámetro de Discriminación constructo Tendencias paranoides empleando el modelo MUIRTA-2PL. De Izq. a Der. (MultiGamma), (Multilognormal) y (Multinormal)	79
4.24. Curvas características del ítem para el test Tendencias Paranoicas obtenidas por los MuIRTA-2PL.	80
4.25. Criterio Rhat de convergencia para el modelo MuIRTA-2PL. De Izq. a Der. (MultiGamma), (Multilognormal) y (Multinormal)	80
B.1. (<i>Simulación 2</i>) Gráficos de las MCMC y densidad para algunos individuos. Izq. a Der. Test1, Test2 y Test3.	102
B.2. (<i>Simulación 3</i>) Gráficos de las MCMC y densidad para algunos individuos. Izq. a Der. Test1, Test2 y Test3.	105
C.1. Cadenas parámetros de discriminación para el trazo Tendencias Paranoicas ajuste Gamma.	112
C.2. Cadenas parámetros de discriminación para el trazo Tendencias Paranoicas ajuste Lognormal.	112
C.3. Cadenas parámetros de discriminación para el trazo Tendencias Paranoicas ajuste Normal.	112
C.4. Cadenas parámetros de discriminación para el trazo Tendencias Psicópatas ajuste Gamma.	113
C.5. Cadenas parámetros de discriminación para el trazo Tendencias Psicópatas ajuste Lognormal.	113
C.6. Cadenas parámetros de discriminación para el trazo Tendencias Psicópatas ajuste Normal.	113
C.7. Estimaciones obtenidas para parámetro de Dificultad constructo Neuroticismo empleando el modelo MUIRTA-2PL. De Izq. a Der. (MultiGamma), (Multilognormal) y (Multinormal)	122
C.8. Estimaciones obtenidas para parámetro de Discriminación constructo Neuroticismo empleando el modelo MUIRTA-2PL. De Izq. a Der. (MultiGamma), (Multilognormal) y (Multinormal)	122
C.9. Curvas características del ítem para el test Neuroticismo obtenidas por los MuIRTA-2PL.	123
C.10. Estimaciones obtenidas para parámetro de Dificultad constructo Tendencias psicópatas empleando el modelo MUIRTA-2PL. De Izq. a Der. (MultiGamma), (Multilognormal) y (Multinormal)	123
C.11. Estimaciones obtenidas para parámetro de Discriminación constructo Neuroticismo empleando el modelo MUIRTA-2PL. De Izq. a Der. (MultiGamma), (Multilognormal) y (Multinormal)	123
C.12. Curvas características del ítem para el test Tendencias Psicopáticas obtenidas por los MuIRTA-2PL.	124

Introducción

La Teoría de Respuesta al Ítem (IRT) busca explicar las características de los ítems que componen un test y del grupo de individuos que responden a dicho test, a través de la probabilidad de respuesta correcta de los ítems (modelos); pero, ¿cómo medir o cuantificar la habilidad o característica de un sujeto del grupo de respondientes en un área específica, dado que, son numerosas las características que no son observables de manera directa y para las que resulta indispensable crear una escala que facilite su interpretación?, dichas habilidades se denominan *trazos o variables latentes* y su caracterización son el objeto de la Teoría de Respuesta al Ítem.

De manera general, Andrade et al. (2000) señala que los ítems que componen un test poseen características tales como: nivel de dificultad, nivel de discriminación y probabilidad de acierto casual, que pueden ser estimadas e interpretadas vía un modelo de respuesta correcta, de igual forma, es posible realizar la estimación y análisis de una o más características no observables de los respondientes, a las que se les denomina habilidad(es) o constructo(s). Los modelos de la *Item Response Theory* (IRT) se dividen en *Unidimensional Item Response Theory* (UIRT) y *Multidimensional Item Response Theory* (MIRT), de acuerdo a la cantidad de trazos latentes que estén siendo considerados y medidos. Un tipo particular de modelo multidimensional de la teoría de respuesta al ítem es el *modelo multiunidimensional*, también llamado *K-multivariado* o *test de estructura simple*, en el cual la dimensión del trazo latente coincide con la dimensión del test.

Usualmente se trabaja con la hipótesis en la que se asume una distribución simétrica para el trazo latente, esto es, la variable latente sigue una distribución normal (UIRT) o normal multivariada (MIRT). Sin embargo, admitir que los constructos se distribuyen simétricamente cuando existe ausencia de simetría, puede llevar a obtener estimaciones sesgadas. Es posible encontrar en la literatura propuestas de modelos unidimensionales y multidimensionales que asignan una distribución asimétrica al o a (los) constructo(s), Díaz (2018) o León (2017).

Los datos con los que se corresponden al test psicométrico diseñado por Ponce and Granell (2006) titulada Prueba Inventario PIHEMA R-2, la cual fue aplicada por la Universidad Central de Venezuela en el año 2014 a los 8767 aspirantes a pertenecer a la Facultad de Humanidades y Educación, la prueba contiene variables cognitivas y socio económicas, y variables relacionadas con la personalidad de los individuos; esta tesis se centra en estas últimas, particularmente aquellas que indagan por las conductas de los individuos que pueden interferir en su éxito académico: *Neuroticismo*, *Tendencias Psicopáticas* y *Tendencias Paranoicas*. Páyer (2013) menciona que, variables como los rasgos de personalidad o con-

ducta de los individuos, no suelen seguir un comportamiento simétrico, y por el contrario se evidencia características asimétricas del constructo.

La presente tesis se encuentra motivada por la necesidad de una mejor representación de los constructos que son de naturaleza asimétrica, así que se proponen dos modelos IRT, en ambos la hipótesis de simetría no se asume. El primer modelo unidimensional propuesto UIRTA-2PL (*Modelo Asimétrico Unidimensional de dos parámetros*) asigna una distribución asimétrica a la variable latente como lo son, la distribución Gamma o la distribución Lognormal, cuyas propiedades pueden llegar a ser más convenientes. Para el segundo modelo multidimensional MuIRTA-2PL (*Modelo Multiunidimensional Asimétrico de dos parámetros*) se requiere de una distribución multivariada asimétrica, la cual se construye vía una Copula Gaussiana, que considera la correlación entre los trazos.

El modelo MuIRTA-2PL puede ser empleado a una prueba que se encuentra dividida en subpruebas aproximadamente unidimensionales, esto es, donde cada una de estas subpruebas es diseñada esencialmente para medir una única habilidad o trazo latente, como lo es la prueba del Inventario PIHEMA-R2 que indaga por las conductas que interfieren con el éxito académico. Por otro lado, se utiliza estimación bayesiana para estimar los parámetros del modelo propuesto de la IRT, para ello se emplea la interface Stan (2017), que trabaja con el lenguaje de programación probabilística de estadística Bayesiana Stan, que implementa el algoritmo HMC (Hamiltoniano Monte Carlo) y el muestreador no-U-turn Hoffman and Gelman (2014).

Esta tesis está organizada en cuatro capítulos. En el capítulo 1 se presenta una breve revisión literaria de: los principales aspectos de los modelos de la Teoría de Respuesta al Ítem, unidimensionales (UIRT) y multidimensionales (MIRT), los aspectos fundamentales de la Estadística Bayesiana empleada en la estimación de los parámetros del modelo IRT y de su evaluación, los conceptos básicos de la Teoría de Copulas, en particular de la Copula Gaussiana y finalmente una reseña del uso de lenguaje de programación Stan en la construcción de funciones `_lpdf` y `_rng`. En el capítulo 2 se expone con detalle los modelos propuestos, UIRTA-2PL y MuIRTA-2PL y cómo se realiza la construcción de la función de densidad multivariada requerida en el modelo multiunidimensional empleando una Copula Gaussiana.

En el capítulo 3 se encuentra la explicación detallada de la simulación del test dicotómico que se divide en subtests esencialmente unidimensionales asimétricos, con una estructura de dependencia entre los constructos (subtest). Se realizan varias simulaciones, que surgen de modificar la correlación y la distribución asimétrica establecida al trazo, Gamma o Lognormal; a todas las simulaciones se les aplica el modelo MuIRTA-2PL y se evalúa el ajuste del modelo. Por último, en el capítulo 4 se realiza la aplicación de los modelos propuestos UIRTA-2PL y MuIRTA-2PL a los datos reales, prueba inventario PIHEMA-R2. El trabajo de estos dos últimos capítulos permite establecer las conclusiones, observaciones y aspectos a tener presentes en trabajos futuros. En los apéndices, se encuentran los resultados de las simulaciones, los resultados obtenidos con los datos reales y finalmente los códigos y/o funciones elaboradas en [R](#) y [Stan](#).

CAPÍTULO 1

Marco Teórico

En la década de los ochenta se da inicio a la transición desde la Teoría Clásica de los Tests (TCT) a la Teoría de Respuesta al Ítem (IRT). Como lo menciona (Navas, 1994, 1994, p.176) el problema central de cualquier teoría de test, es la relación entre la actuación -observable- del sujeto en el test con la habilidad o rasgo -inobservable- que éste pretende medir. La TCT inicio con el trabajo de Spearman (1904), Spearman (1907) y Spearman (1913). La IRT por su parte emerge en 1968 con el trabajo de Lord (1952) quienes llevan a cabo una reformulación de la teoría clásica y abren paso al nuevo enfoque de la Teoría de Respuesta al Ítem.

La TCT como la TRI tiene por objeto estimar una variable, la cual no puede ser observada directamente: la puntuación verdadera \mathbf{V} o el trazo latente θ respectivamente. Donde θ es una variable latente que debe ser entendida como, una variable aleatoria cuya realización no puede ser observada directamente. Así la definición operacional establece que la construcción está relacionada con los datos observables. La relación se define a menudo de tal manera que las respuestas de los ítems sirven como indicadores para la medición del constructo subyacente (Fox, 2010, p.5).

En la TCT la ecuación que relaciona la variable inobservable con la actuación en el test es de tipo lineal, ya que esta consiste en asumir que la puntuación que obtiene una persona en un test, puntuación empírica, y que suele designarse con la letra \mathbf{X} , esta formada por dos componentes, la puntuación verdadera \mathbf{V} y un error e , formalmente, $\mathbf{X} = \mathbf{V} + e$. En el caso de la IRT, esta relación viene expresada por una función no lineal entre el nivel del sujeto en el rasgo latente y las probabilidades respuestas correcta dadas a los ítems, a esta ecuación se le conoce como función característica del test (Muniz, 2010, p.60). La mayor debilidad de la TCT, como lo indica Navas (1994), reside en el hecho de que las estimaciones son específicamente una función del conjunto particular de ítems y de la muestra de sujetos, sobre la que han sido recogidos los datos, razón por la cual su generalización resulta bastante limitada. En (Muniz, 2010, Tabla 1. pág 64) se puede consultar una comparación detallada de la IRT y la TCT.

1.1. Modelos Unidimensionales de la Teoría de Respuesta al Ítem

Las publicaciones de Lord (1952), Rash (1960) y Birbaum (1968) son las que le dieron a la IRT una mayor difusión. En estas se establecen los conceptos y supuestos básicos para estructurar la IRT. El supuesto clave en los modelos de la IRT es la existencia de una relación funcional no decreciente (hipótesis de monotonía) entre los valores de la variable que miden los ítems y la probabilidad de responder correctamente, se denomina *Curva Característica del Ítem CCI* (Figura 1.1); dicha función siempre se expresa de forma tal que cuanto mayor habilidad muestre el sujeto, mayor será la probabilidad de acierto al ítem, es decir, la probabilidad depende, naturalmente, del nivel de la persona para la variable a ser medida. Los modelos propuestos en la literatura depende fundamentalmente de tres factores (Andrade et al., 2000, p.7):

- i.* La naturaleza del ítem -dicotómicos o no dicotómicos-
- ii.* El número de poblaciones envueltas -una o más de una-
- iii.* La cantidad de trazos latentes que está siendo medida -unidimensional o multidimensional-

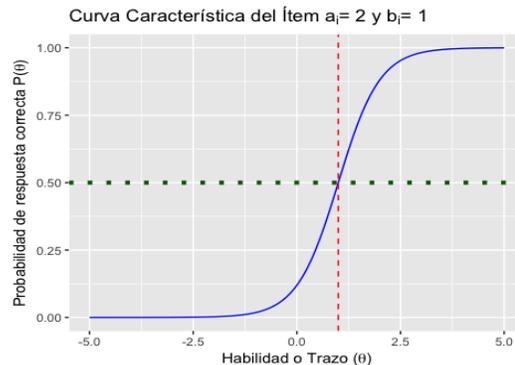


FIGURA 1.1. Curva característica del ítem (CCI) o (ICC), donde a_i y b_i corresponden al parámetro de discriminación y dificultad asociado al ítem i , respectivamente.

En la práctica, los modelos logísticos para ítems dicotómicos son los modelos de respuesta al ítem más utilizados, dado que la función logística permite obtener resultados similares a los que se obtienen al emplear la función normal (Reckase, 2009, p.26) .

En la construcción de modelos de la TRI es bastante común adoptar tres hipótesis que simplifican el desarrollo teórico de los procesos de estimación de los parámetros. Tales hipótesis son:

- i.* **Unidimensional:** Todos los ítems que forman el test han de medir un mismo y único trazo latente o habilidad, es decir, que cada uno de los ítems midan en una única dimensión.
- ii.* **Independencia local (S1):** Los ítems son respondidos de forma independiente por cada individuo (Andrade et al., 2000, p.30).

iii. Independencia entre individuos (S2): Las respuestas que provienen de individuos diferentes son independientes (Andrade et al., 2000, p. 30).

1.1.1. Modelo Unidimensional Logístico de dos Parámetros

Los modelos unidimensionales de la Teoría de Respuesta al Ítem o, *Unidimensional Item Response Theory* (UIRT) se caracterizan básicamente por dos tipos de parámetros, **Parámetros de ítems (estructurales):** $\xi_i = \{a_i, b_i\}$ relacionados con las características de cada una de las preguntas del test, y **Parámetro habilidad (incidental):** θ_j relacionado con las característica del individuo respecto del constructo -trazo latente- que esta siendo medido Azevedo (2003)

El modelo de dos parámetros (UIRT-2PL) propuesto por Birnbaum (1968) indica que la probabilidad de que el individuo j responda correctamente el ítem i , dada la habilidad θ_j esta dada por,

$$f(\theta, \xi_i, y) = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \xi_i) = \frac{e^{a_i(\theta_j - b_i)}}{1 + e^{a_i(\theta_j - b_i)}} = \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}} \quad (1.1)$$

con $i = 1, 2, \dots, I$, y $j = 1, 2, \dots, J$, en:

Y_{ij} es una variable dicotómica (binaria) que asume el valor 1, cuando el individuo j responde correctamente al ítem i , o el valor de 0 cuando un individuo j no responde correctamente (incorrectamente) al ítem i .

θ_j representa la habilidad (trazo latente) del individuo j -ésimo.

b_i el parámetro de dificultad (o de posición) del ítem, el cual es medido en la misma escala de la habilidad.

a_i el parámetro de discriminación (o de inclinación) del ítem i . Si $a_i = 1$ en 1.1.

$\eta_{ij} = a_i(\theta_j - b_i)$ se denomina predictor linear latente Montenegro (2011).

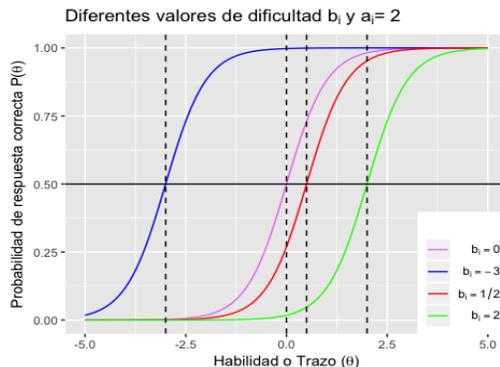


FIGURA 1.2. CCI para distintos valores de b_i

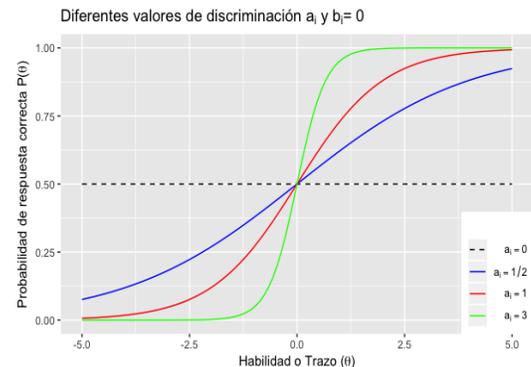


FIGURA 1.3. CCI para distintos valores de a_i

Cada ítem de un test queda completamente caracterizado por sus parámetros de discriminación y de dificultad. Además, si $\theta_j = b_i$ en la expresión 1.1 se obtendrá que $f(b_i) = P(Y_{ij} = 1|\theta_j, \xi_i) = \frac{1}{2}$, luego, b_i puede ser interpretada como la habilidad del sujeto necesaria para resolver correctamente el ítem i con una probabilidad de $\frac{1}{2}$, por tanto como se puede observar en la figura 1.2 ítems con valores altos o grande en el parámetro b_i , corresponde a ítem difíciles.

En la Figura 1.3 se muestran distintas CCI para diferentes valores del parámetro de discriminación, ya que el parámetro a_i puede interpretarse como la pendiente de la CCI en el punto b_i , asumiendo que $P(Y_{ij} = 1|\theta_j, \xi_i)$ es una función $f(\cdot)$ de θ_j , esto es, $f'(b_i) = \frac{1}{4}a_i$, luego, el parámetro de discriminación permite clasificar los individuos en distintos niveles del trazo latente teniendo en cuenta que a mayor valor del parámetro menor será la discriminación.

1.2. Modelos Multidimensionales de la Teoría de Respuesta al Ítem

Los modelos multidimensionales de la teoría de respuesta al ítem o, *Multidimensional Item Response Theory* (MIRT) son modelos que pretenden ser una idealización más cercana a la realidad Reckase (2009). Aquí algunos ítems requieren de múltiples habilidades para obtener una correcta respuesta, esto es, más de una habilidad es requerida para responder correctamente el ítem (Fox, 2010, p.14). El modelo MIRT ese asume como una función de probabilidad continua que relaciona la localización del *parámetro incidental* el cual en este caso corresponderá a un vector m -dimensional $\theta_j = (\theta_{1j}, \theta_{2j}, \dots, \theta_{mj})$ que contiene las probabilidades de respuesta correcta, asociada al individuo j .

Antes de examinar la definición del modelo multidimensional logístico de dos parámetros MIRT-2PL, se debe tener cuidado de diferenciar entre las *dimensiones* definidas por el modelo MIRT, que representan abstracciones estadísticas de los datos observados y las *dimensiones cognitivas* o afectivas en una población de examinados que representan construcciones hipotéticas. Reckase (2009) establece dos tipos de modelos MIRT: los *modelos compensatorios* y los *modelos no compensatorios*¹.

Definición 1.1. Modelos compensatorio: Modelo basado en el predictor lineal, que emplea la función de distribución acumulada normal o la función de distribución acumulada logística para especificar la probabilidad de respuesta correcta a un ítem. La combinación lineal de las coordenadas θ_j puede producir la misma suma para diferentes combinaciones de valores de las coordenadas, si una coordenada de θ_j es baja, la suma será la misma si en compensación otra coordenada de θ es suficientemente alta. Reckase (2009)

1.2.1. Modelo Logístico Multidimensional de dos parámetros

Una representación general de los modelos multidimensionales de dos parámetros (MIRT-2PL) se presenta en la expresión 1.2, donde $\zeta = (\mathbf{a}, \mathbf{d})$ representa el conjunto

¹En este trabajo sólo se emplearán modelos compensatorios, para mayor detalle sobre la tipología, consultar (Reckase, 2009, cap. 4)

de los parámetros estructurales que describen las características del ítem, donde \mathbf{a} es una matriz de tamaño $I \times M$ siendo $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$ la i -ésima fila que corresponde al vector de tamaño $1 \times M$ que contiene los parámetros de discriminación del ítem i en cada una de las dimensiones y el vector $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_I)$, con $d_i = -a_i b_i$, en donde los b_i corresponden a los parámetros de dificultad de todos los ítems a lo largo de cada dimensión, finalmente f , representa la relación entre la localización de persona con trazo latente especificado por $\boldsymbol{\theta}'_j$ y la probabilidad de respuesta correcta, la expresión en el lado derecho de 1.2 corresponde a la extensión compensatoria del modelo logístico multidimensional de dos parámetros que presenta Reckase (2009).

$$f(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\gamma}, y) = P(Y_{ij} = 1 | \boldsymbol{\theta}_j, \mathbf{a}_i, d_i) = \frac{e^{\mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}'_j + d_i}}{1 + e^{\mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}'_j + d_i}} = \frac{1}{1 + e^{-\mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}'_j + d_i}} \quad (1.2)$$

la expresión $\mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}'_j + d_i$ es similar a la presentada para el modelo UIRT-2PL. Los vectores m -dimensionales \mathbf{a}_i y $\boldsymbol{\theta}'_j$ que corresponden respectivamente a los parámetros de discriminación del ítem i y a las coordenadas asociadas a la j -ésima persona y d_i es un escalar que corresponde a la dificultad asociada al ítem i . El exponente en 1.2 se puede expandir como se expresa en 1.3, donde η_{ij} debe ser entendido como un predictor lineal Montenegro (2011):

$$\eta_{ij} = \mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}'_j - a_i b_i = \mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}'_j + d_i = (\boldsymbol{\theta}'_j, 1) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_i \\ d_i \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^m a_{il} \theta_{jl} + d_i \quad (1.3)$$

con $i = 1, 2, \dots, I$ (ítems) y $j = 1, \dots, J$ (individuos). La expresión 1.3 es una función multivariante que representa la curva de respuesta al ítem que corresponde a una hipersuperficie, en un espacio m dimensional. Reckase (2009) señala que una propiedad interesante de este modelo es, si al predictor lineal $k = \mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}'_j + d_i$ se le asigna algún valor constante, k , todos los vectores $\boldsymbol{\theta}$ que satisfacen la expresión caen a lo largo de una línea recta y tendrán la misma probabilidad de respuesta correcta para el modelo, así, si las coordenadas son interpretadas como habilidades, está característica del modelo se utilizará para indicar que una alta habilidad en una dimensión puede compensar una baja habilidad en otra dimensión.

Montenegro (2011) muestra que cualquier ítem en un modelo MIRT compensatorio es esencialmente unidimensional a lo largo de una dirección en el espacio de trazos latentes la dirección del ítem, y si además la función de respuesta al ítem satisface la hipótesis de monotonía a lo largo de cualquier dirección, es posible determinar lo que mide realmente un ítem en un modelo MIRT.

Para el desarrollo del planteamiento de Montenegro (2011) se debe tener presente las definiciones que se encuentran en Reckase (2009), quien afirma que no es posible establecer una interpretación directa de los parámetros $\boldsymbol{\zeta}_i = (\mathbf{a}_i, d_i)$, por tanto, si se señala la dirección de mayor pendiente desde el origen en el $\boldsymbol{\theta}$ -espacio, es posible definir los parámetros con una interpretación similar a la asignada en los modelos UIRT. La equivalencia conceptual del parámetro de discriminación en el caso de los modelos MIRT es la pendiente de la superficie de respuesta del ítem en el punto de mayor pendiente en la dirección desde el origen en el $\boldsymbol{\theta}$ -espacio, así se define MDISC entendido como la discriminación multidimensional del ítem i :

$$\text{MDISC} = A_i = \sqrt{\sum_{k=1}^m a_{ik}^2}$$

El parámetro \mathbf{d} no es un parámetro de dificultad en el sentido usual de los modelos unidimensionales, por tanto se define MDIFF como la distancia desde el origen al punto de mayor pendiente, como:

$$\text{MDIFF} = B_i = \frac{-d_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^m a_{ik}^2}} = \frac{-d_i}{A_i}$$

Finalmente, el vector \mathbf{a}_i se puede reescribir como $\mathbf{a}_i = A_i \boldsymbol{\beta}_i$, donde $\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{im})^t$, $\beta_{ik} = a_{ik}/A_i$, que corresponde a la parametrización propuesta por Montenegro (2011), así el modelo de la ecuación 1.2 puede reescribirse como:

$$P(Y_{ij} = 1 | \boldsymbol{\theta}_j, A_i, \boldsymbol{\beta}_i, B_i) = \frac{1}{1 + e^{-A_i(\boldsymbol{\beta}_i \boldsymbol{\theta}'_j - B_i)}} \quad (1.4)$$

donde $B_i = \gamma_i/A_i$ donde $\boldsymbol{\beta}_i$ es un vector unitario de \mathbb{R}^m . Montenegro (2011) propone los modelos MIRT para una estructura lineal latente (LSMIRT), aplicable a pruebas que están divididas en m subpruebas, cada una esencialmente unidimensional. Por tanto, cada subprueba mide sólo un trazo latente principal, así, si cada subprueba tiene K_v ítems, la prueba tendrá $K = K_1 + K_2 + \dots + K_m$ ítems, en consecuencia para este modelo la probabilidad de respuesta al ítem vi dada por el suceso de examinado j es:

$$P(Y_{vij} = 1 | A_{vi}, \gamma_{vi}, \boldsymbol{\beta}_v, \boldsymbol{\theta}_j) = \frac{1}{1 + e^{-A_{vi} \boldsymbol{\beta}_v \boldsymbol{\theta}'_j - \gamma_{vi}}} \quad (1.5)$$

donde A_{vi} y γ_{vi} son respectivamente el parámetro de pendiente (la discriminación) y el parámetro de intercepto del ítem vj , y donde el vector $\boldsymbol{\beta}_v = (\beta_{v1}, \dots, \beta_{vm})'$ será la dirección de la subprueba v .

Un caso particular del modelo LSMIRT sucede cuando la dimensión del trazo latente coincide con la dimensión de la prueba, se llama prueba de estructura simple, *Modelo multiunidimensional* Sheng and Wikle (2007) o *Modelo k -multivariado de 2 parámetros Probito (Km2PP)* da. Silva (2008).

Definición 1.2. Modelo multiunidimensional o de estructura simple: Sheng and Wikle (2007) Montenegro (2011) Suponga un test que contiene k -ítems que están contenidos en m -subtests, cada uno contiene k_v ítems que miden una única habilidad (en una dimensión), así que el vector de parámetros de discriminación se puede simplificar por $\mathbf{a}_i = (0, \dots, 0, a_{vi}, 0, \dots, 0)$, este modelo se denomina, *Modelo multiunidimensional*, cuya probabilidad de respuesta correcta esta dada por:

$$P(Y_{vij} = 1 | \theta_{vi}, a_{vi}, b_{vi}) = \frac{1}{1 + e^{-a_{vi}(\theta_{vj} - b_{vi})}} \quad i = 1, \dots, m$$

donde a_{vi} corresponde a la discriminación del ítem i en el subtest v , θ_{vj} representa la habilidad del j -ésimo individuo en la v -ésima dimensión, b_{vi} el parámetro escalar de dificultad del ítem i la v -ésima dimensión y $\gamma_{vi} = -a_{vi}b_{vi}$ es un parámetro escalar que indica dentro del espacio latente la localización de la dimensión en la que ítem proporcional mayor in-

formación. En este modelo las direcciones de las subpruebas se pueden identificar con los vectores de base canónica del espacio euclidiano.

1.2.2. Función de Verosimilitud

Una vez definida la función de respuesta al ítem, y las hipótesis básicas de la IRT, se debe construir la función de verosimilitud da. Silva (2008) para la forma general de los modelos multidimensionales. Empleando la hipótesis **S2** se tiene que:

$$P(\mathbf{Y}_{\cdot j} = y_{ij} | \boldsymbol{\theta}_j, \boldsymbol{\zeta}) = \prod_{i \in I} P(y_{ij} | \boldsymbol{\theta}_j, \boldsymbol{\zeta}_i) \quad (1.6)$$

representa la probabilidad (condicional) de ocurrencia de un determinado vector de respuesta asociado al j -ésimo individuo; I es el conjunto de subíndices de los ítems que componen el test, $\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2, \dots, \boldsymbol{\zeta}_I)$ son los parámetros de los ítems definidos en la sección anterior y por último $\mathbf{Y}_{\cdot j} = (\mathbf{Y}_{1j}, \mathbf{Y}_{2j}, \dots, \mathbf{Y}_{Ij})'$ denota el vector total de respuestas que corresponden al sujeto j sometido a un test compuesto por I ítems. Además, a partir de la hipótesis **S1** podemos obtener un modelo probabilístico condicional para el total de respuestas,

$$P(\mathbf{Y} = \mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}) = \prod_{j \in J} P(\mathbf{Y}_{\cdot j} = \mathbf{y}_{\cdot j} | \boldsymbol{\theta}_j, \boldsymbol{\zeta}) \quad (1.7)$$

en el que $\boldsymbol{\theta}$ es una matriz $J \times M$ cuya j -ésima línea al trazo latente (multidimensional) asociado al j -ésimo sujeto, $\boldsymbol{\theta}_j' = (\theta_{j1}, \theta_{j2}, \dots, \theta_{jM})$ y donde $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_I)$ denota la matriz $I \times J$ de respuestas dicótomas asociadas a todos los J individuos cuya j -ésima línea es $\mathbf{Y}_{\cdot j} = (Y_{1j}, \dots, Y_{ij}, \dots, Y_{Ij})$. En consecuencia, usando 1.6 y 1.7 se puede escribir la *función de verosimilitud* como

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta} | \mathbf{Y}) &\equiv P(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}) \\ &= \prod_{j=1}^J \prod_{i=1}^I P(Y_{ij} = y_{ij} | \boldsymbol{\theta}_j, \mathbf{a}_i, d_i) \\ &= \prod_{j=1}^J \prod_{i=1}^I [P(Y_{ij} = 1 | \boldsymbol{\theta}_j, \mathbf{a}_i, d_i)]^{y_{ij}} [P(Y_{ij} = 0 | \boldsymbol{\theta}_j, \mathbf{a}_i, d_i)]^{1-y_{ij}} \\ &= \prod_{j=1}^J \prod_{i=1}^I P_{ij}^{y_{ij}} Q_{ij}^{1-y_{ij}} \end{aligned}$$

donde $Q_{ij} = 1 - P_{ij}$, así que la log-verosimilitud puede ser escrita como,

$$\log L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta} | \mathbf{Y}) = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I [y_{ij} \log P_{ij} + (1 - y_{ij}) \log Q_{ij}] \quad (1.8)$$

1.2.3. Identificabilidad de los modelos teoría de respuesta al ítem clásicos

Uno de los problemas frecuentemente encontrados en la IRT ocurre cuando existe un interés en realizar una estimación conjunta del vector de parámetros de los ítems, $\boldsymbol{\zeta}_i$, y de

los vectores de trazos latentes, θ_j , ya que no existe una métrica definida. Este problema es más conocido en la literatura como, *indeterminación de la escala de medida o métrica*, pero rigurosamente debe ser entendido como un *falta de identificabilidad* (Montenegro, 2011). Este inconveniente ocurre porque, más de un conjunto de parámetros produce el mismo valor en el modelo y consecuentemente en la verosimilitud y por tanto es de fundamental importancia que se establezca (fijar) una métrica para los conjuntos de parámetros -ítems o trazos latentes-, pues sin esta no tiene sentido alguno hablar de estimación conjunta (da. Silva, 2008, p.23).

Una explicación formal para la necesidad de establecer una métrica de los parámetros, la ofrece Andrade et al. (2000); si $\theta_j^* = \alpha\theta_j + \beta$, $b_i^* = \alpha b_i + \beta$, $a_i^* = a_i/\alpha$, donde α y β son constantes reales con $\alpha > 0$, entonces

$$\begin{aligned} P(Y_{ij} = 1 | \theta_j^*, \zeta_i^*) &= \frac{1}{1 + \exp(-a_i^*(\theta_j^* - b_i^*))} \\ &= \frac{1}{1 + \exp(-\frac{a_i}{\alpha}(\alpha\theta_j + \beta) - (\alpha b_i + \beta))} \\ &= \frac{1}{1 + \exp(-a_i(\theta_j) - b_i)} \\ &= P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) \end{aligned}$$

Esta no identificabilidad puede ser eliminada de varias formas, Baker and Kim (2004) mencionan a detalle una solución natural que se obtiene al fijar los parámetros de localización de escala de una distribución seleccionada para los trazos latentes, esto se logra fijando algunos valores para las habilidades. Se debe resaltar que esta no identificabilidad está íntimamente relacionada a las características de la población envuelta en el estudio. Esto es, cómo determinar cuando una habilidad puede considerarse alta o baja, ni cómo ignorar cuando una habilidad está lejos de otra. Esto puede resolverse especificando primero, una medida de posición y segundo una medida de dispersión para las habilidades.

Montenegro (2011) establece que el modelo LSMIRT es no identificable, no obstante, para obtener la identificabilidad se debe establecer la restricción de que los vectores de las direcciones de referencias β_v sean unitarios, aunque esta es una restricción necesaria pero no suficiente, dados los problemas de rotación en el caso multidimensional.

1.3. Inferencia Bayesiana

La estadística Bayesiana proporciona métodos que permiten caracterizar las poblaciones por medio de sus parámetros, Hoff (2009) menciona que el uso de probabilidades para expresar información puede hacerse en un sentido matemático, por medio del Teorema de Bayes (métodos Bayesianos). El método bayesiano consiste en establecer distribuciones *a priori* que explicitan el conocimiento previo, la plausibilidad, o rangos razonables para los parámetros de interés que permite construir una “nueva” función denominada, distribución *a posteriori*, la cual se obtiene vía el uso del **Teorema de Bayes** y a partir de ella estimar los parámetros de interés con base en algunas características de la distribución Hoff (2009).

$$p(\phi|y) = \frac{p(y|\phi)p(\phi)}{\int_{\Phi} p(y|\phi)p(\phi)d\phi} = \frac{p(y|\phi)p(\phi)}{p(y)} \quad (1.9)$$

Así, para cada valor de $\phi \in \Theta$ se supone de manera subjetiva una distribución que describe los valores plausibles de los parámetros antes de que los datos sean observados. En tanto, la distribución muestral, $p(y|\phi)$ corresponde a la la probabilidad asignada a los datos observados dado el valor del parámetro que se busca estimar. Si se toma $p(y)$ constate, entonces la distribución a posteriori se puede reescribir de forma más compacta como: $\pi(\phi) \propto L(\phi)p(\phi)$, donde $L(\phi) = p(y|\phi)$ corresponde a la función de verosimilitud.

Los investigadores de la IRT usan métodos Bayesianos para obtener una apropiada estimación de los parámetros del modelo propuesto y controlan los problemas que aparecen en la estimación máximo verosimilitud EMV. Estos inconvenientes son mencionados con detalle en los trabajos de Andrade et al. (2000), Azevedo (2003) y Bazán (2005). Por ejemplo, una dificultad surge al estimar los parámetros de los ítems, ya que la estimación puede caer fuera del intervalo esperado, esto es, obtener valores negativos para el parámetro de discriminación a_i , o valores fuera del intervalo $[0, 1]$ para el parámetro de pseudo-azar c_i , dicho inconveniente puede ser subsanado al considerar que los parámetros provienen de variables aleatorias independientes y continuas, con distribuciones especificadas (a priori), por tanto, los métodos Bayesianos consiguen una mejorar el proceso de estimación de los parámetros Baker and Kim (2004).

Fox (2010) señala que en los modelos de IRT el objetivo se centra en las distribuciones posteriori de los parámetros de los individuos y los ítems, luego por 1.9, la densidad posteriori conjunta de los parámetros pueden ser establecida como:

$$p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta})p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta})}{p(\mathbf{y})} = \frac{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta})p(\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\zeta})}{p(\mathbf{y})}$$

donde $p(\boldsymbol{\theta})$ es la densidad a priori para los parámetros de las personas, $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\zeta}$ las características de los ítems parametrizadas y $p(\boldsymbol{\zeta})$ sus densidades a priori.

1.3.1. Estimación Bayesiana en la Teoría de Respuesta al Ítem

La estimación Bayesiana en la IRT consiste en la estimación de los parámetros de los ítems y la habilidad del individuo sobre un modelo de probabilidad de respuesta correcta, incorporando la información a priori de los parámetros, y de esta forma llegar a una distribución posteriori. A continuación se expondrá el tratamiento más general de la estimación bayesiana marginal, tomado de Andrade et al. (2000):

1. La distribución de las habilidad del individuo j en función de un vector de parámetros $\boldsymbol{\eta}$, con densidad $p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\eta})$.
2. La distribución de $\boldsymbol{\zeta}_i$ con $i = 1, \dots, I$, en función de un vector de parámetros $\boldsymbol{\tau}_i = (\boldsymbol{\tau}_{a_i}, \boldsymbol{\tau}_{b_i})$ representa los hiperparámetros relacionados a $\boldsymbol{\zeta}_i$.
3. Las distribuciones a priori para los parámetros $\boldsymbol{\tau}_i$ y $\boldsymbol{\eta}$ definidas como $f(\boldsymbol{\tau}_i)$ y $g(\boldsymbol{\eta})$.

Luego, la densidad conjunta de los parámetros será,

$$f(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) = p(\boldsymbol{\zeta}|\boldsymbol{\tau})p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\tau})g(\boldsymbol{\eta}) \quad (1.10)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^I p(\zeta_i|\boldsymbol{\tau}) \right) \left(\prod_{j=1}^J p(\theta_j|\boldsymbol{\eta}) \right) f(\boldsymbol{\tau})g(\boldsymbol{\eta}) \quad (1.11)$$

así que la inferencia sobre todos los parámetros, esta basada en la distribución porsteriori dada por:

$$f(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}|\mathbf{y}) = L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}|\mathbf{y})p(\boldsymbol{\zeta}|\boldsymbol{\tau})p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\tau})g(\boldsymbol{\eta}) \quad (1.12)$$

$$= \left(\prod_{j=1}^J \prod_{i=1}^I P_{ij}^{y_{ij}} Q_{ij}^{1-y_{ij}} \right) \left(\prod_{i=1}^I p(\zeta_i|\boldsymbol{\tau}_i) \right) \left(\prod_{j=1}^J p(\theta_j|\boldsymbol{\eta}) \right) f(\boldsymbol{\tau})g(\boldsymbol{\eta}) \quad (1.13)$$

$$= \left(\prod_{j=1}^J \prod_{i=1}^I P_{ij}^{y_{ij}} Q_{ij}^{1-y_{ij}} \right) \left(\prod_{i=1}^I p(\zeta_i|\boldsymbol{\tau}_i) \right) \left(\prod_{j=1}^J p(\theta_j|\boldsymbol{\eta}) \right) \left(\prod_{i=1}^I f(\boldsymbol{\tau}_i) \right) g(\boldsymbol{\eta}) \quad (1.14)$$

en esta última ecuación 1.14 se están especificando las distribuciones a priori para los parámetros de interés y de las distribuciones de los hiperparámetros, que constituyen respectivamente el primer y segundo estado del *modelo bayesiano (jerárquico)*.

1.4. Copulas

1.4.1. Conceptos básicos de copulas

Las cópulas han tenido gran desarrollo en la literatura de los últimos años, una detallada reseña historica de la idea de “copula” desde Fréchet a la fecha se encuentra en Durante and Sempi (2010) y (Nelsen, 2006, cap. 1). A finales de los noventa la noción de copula se hace más popular apareciendo en 1999 uno de los primeros libros referente al tema, titulado *Introduction to copula* de Nelsen (2006), del cual se toma gran parte de las definiciones y conceptos que se presentan en esta sección.

Definición 1.3. Copula dos dimensional o (2-copula) Nelsen (2006) es un a función C cuyo dominio es $\mathbb{I}^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ y rango es $\mathbb{I} = [0, 1]$ con las siguientes propiedades:

1. Para todo u, v en \mathbb{I} ,

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v)$$

y

$$C(u, 1) = u \quad y \quad C(1, v) = v$$

2. Para todo u_1, u_2, v_1, v_2 en \mathbb{I} tal que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$, se cumple

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

esta última expresión indica que el número asignado por la función C de cada rectángulo $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ en \mathbb{I}^2 deberá ser no negativo.

Para todo $m \geq 2$ una *copula m dimensional* (m -copula) es una función de densidad definida en \mathbb{I}^m cuyas marginales están uniformemente distribuidas en \mathbb{I} , es decir, cada m -copula puede ser asociada con una variable aleatoria $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ tal que $u_i \sim \mathcal{U}(\mathbb{I})$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ y $\mathbf{u} \sim C$.

1.4.1.1. Teorema de Sklar

El teorema de Sklar es central en la teoría de copulas, ya que este aclara el rol que juegan las copulas en la relación entre las funciones de distribución multivariada y sus distribuciones univariadas marginales.

Teorema 1.4. Teorema de Sklar: Nelsen (2006) Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G , existe una copula C tal que para todo x, y en \mathbb{R} ,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (1.15)$$

si F y G son continuas, entonces C es única, además C esta unicamente determinada por $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$. A la inversa, si C es una copula y F y G son funciones de distribución, entonces existe una función H definida por 1.15 que correspondería a una función de distribución conjunta con marginales F y G .

Así, dada un función de distribución H con marginales continuas F y G , “invertibles” vía 1.15 se obtiene una copula:

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$$

con esta copula, una nueva distribución multivariada con marginales arbitrarias, F' y G' , se puede construir usando el teorema de Sklar: $H'(x, y) = C(F'(x), G'(y))^2$.

Teorema 1.5. Teorema de Sklar m -dimensional: Nelsen (2006) Sea F una función de distribución m -dimensional con marginales F_1, F_2, \dots, F_m existe una m -copula C tal que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_m(x_m)) \quad (1.16)$$

Si F_1, F_2, \dots, F_m son todas continuas, C es única y determinada únicamente por $\text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2 \times \dots \times \text{Ran}F_m$. Inversamente, si C es una m -copula y F_1, F_2, \dots, F_m son funciones de distribución, entonces la función F definida por 1.16 es una función distribución m -dimensional con marginales F_1, F_2, \dots, F_m .

Como lo señala Durante and Sempi (2010) el teorema anterior, brinda una usual e importante “metodología” para la construcción estadística de modelos, considerando el comportamiento univariado de las componentes de un vector aleatorio y sus propiedades de dependencia que serán capturadas por la copula, esta idea es señalada por (Nelsen, 2006, Sección 3.1) y la denomina el *método de inversión* para la construcción de copulas.

²Las funciones F' y G' no corresponden a las derivadas de las funciones F y G respectivamente.

Formalmente, sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ un vector en $\bar{\mathbb{R}}^m$ con función de distribución m -variable $F(\mathbf{x}; \Sigma)$, con Σ la matriz de correlación, y funciones de distribución marginales univariadas estrictamente monótonas $F_1(x_1; \phi), F_1(x_2; \phi), \dots, F_1(x_m; \phi)$, empleando 1.16, con $x_i = F_i^{-1}(u_i; \phi)$ se tiene que,

$$C(u_1, u_2, \dots, u_m) = F(F_1^{-1}(u_1; \phi), F_2^{-1}(u_2; \phi), \dots, F_d^{-1}(u_m; \phi); \Sigma) \quad (1.17)$$

donde F_i^{-1} denota la psuedo-inversa (quasi inversa) de F_i , así que las copulas son esencialmente un camino para transformar el vector (y_1, y_2, \dots, y_m) en otro $(u_1, u_2, \dots, u_m) = (G_1(y_1), G_2(y_2), \dots, G_m(y_m))$, cuyas marginales son uniformes en \mathbb{I} que preserva la dependencia entre las componentes. Es importante notar que la función copula C no determina las marginales de G_i .

1.4.1.2. Copula Gaussiana

Las cópulas elípticas son las cópulas de las distribuciones elípticas, la propuesta de copula Gaussiana expuesta por Song (2000), toma F como la función de distribución multivariada normal con media cero y matriz de correlación Γ , $F(\mathbf{x}; \phi) = \Phi_m(\mathbf{x}; \Gamma)$. Tomando $\Sigma = \Gamma$ y $F_i(x_i) = \Phi_i(x_i; 1)$ en 1.17 se tendrá,

$$C_\Phi(u_1, \dots, u_m; \Gamma) = \Phi_m(\Phi_1^{-1}(u_1; 1), \dots, \Phi_m^{-1}(u_m; 1); \Gamma) \quad (1.18)$$

La copula Gaussiana se puede interpretar como una transformación de un dominio de datos, a otro dominio donde la dependencia es fácilmente modelada, dicha transformación se presenta en la figura 1.4.

	\mathbf{y}	$u_i = G_i(y_i)$	\mathbf{u}	$x_i = \Phi^{-1}(u_i)$	\mathbf{x}
Variable	\mathbf{y}	\longrightarrow	\mathbf{u}	\longrightarrow	\mathbf{x}
Dominio	$S_{\mathbf{y}}$	\longrightarrow	$[0, 1]^m$	\longrightarrow	$S_{\mathbf{x}}$
Función Distribución Conjunta	$G(\mathbf{y})$	\longrightarrow	$C(\mathbf{u})$	\longrightarrow	$\Phi(\mathbf{x})$
Marginales de las FDC	$G_i(y_i)$	\longrightarrow	Uniforme	\longrightarrow	$\Phi_i(x_i)$

FIGURA 1.4. Descripción de las transformaciones para un modelo copula, tomada de Smith (2011)

Ahora bien, si los elementos de $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^m$ son valores continuos, la transformación $x_i \rightarrow u_i$ es uno a uno, como lo debe ser la transformación $x_i \rightarrow y_i$, vía la inversión de la copula, se puede obtener la función de densidad de \mathbf{y} dada por Song (2000),

$$f(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} C(G_1(y_1), \dots, G_m(y_m)) = c(\mathbf{u}) \prod_{i=1}^m g_i(y_i) \quad (1.19)$$

donde y_i son los datos observados, $g_i = \frac{\partial}{\partial y_i} G_i(y_i)$ son las funciones de densidad marginal, $c(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} C(\mathbf{u})$ y por último Σ es la matriz de correlación que se define como, $\Gamma = [\gamma_{ij}]_{m \times m}$, con $\gamma_{ij} = \text{corr}(\Phi^{-1}(G_i(y_i)), \Phi^{-1}(G_j(y_j))) = \text{corr}(\Phi^{-1}(u_i), \Phi^{-1}(u_j))$ que corresponde a la correlación de Pearson entre dos scores normales la cual mide la dependencia entre las dos variables y_i y y_j .

La densidad de la copula con matriz de correlación Γ esta dada por,

$$c_{\Phi}(\mathbf{u}; \Gamma) = c_{\Phi}(u_1, \dots, u_m; \Gamma) = |\Gamma|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^t (\Gamma^{-1} - \mathbb{I}) \mathbf{x}\right) \quad (1.20)$$

donde $\mathbf{x} = (\Phi_1^{-1}(u_1; 1), \dots, \Phi_m^{-1}(u_m; 1))$, empleando 1.19 y 1.20 la verosimilitud de \mathbf{y} estará dada en función de Θ que corresponde a los parámetros de las marginales G_i y la correlación Γ por la siguiente expresión, tomada de (Smith, 2011, p.15),

$$f(\mathbf{y}|\Theta, \Gamma) = |\Gamma|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^t (\Gamma^{-1} - \mathbb{I}) \mathbf{x}\right) \prod_{i=1}^m g_i(y_i; \Theta) \quad (1.21)$$

$$= |\Gamma|^{-1/2} \left(\prod_{j=1}^J \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}_j^t (\Gamma^{-1} - \mathbb{I}) \mathbf{x}_j\right] \prod_{k=1}^m \prod_{i=1}^m g_i(y_i; \Theta) \right) \quad (1.22)$$

1.5. RStan

En muchos modelos Bayesianos, por lo general es complicado muestrear la distribución a posteriori, así que el interés recae en generar valores aleatorios de los parámetros de la distribución *a posteriori*, no obstante, la obtención de estos puede resultar bastante dispendiosa, de allí la necesidad de emplear un lenguaje de computador y entornos computacionales que posean procedimientos para simular dichos procesos, como WinBUGS, JAGS, y en particular este trabajo empleo el lenguaje de programación probabilístico Stan al usar la interface RStan.

Stan es un lenguaje de programación probabilístico que genera muestras de una distribución posterior de los parámetros de un modelo, el nombre del lenguaje hace referencia a Stanislaw Ulam (1904-1984) quien fue pionero en los métodos de Monte Carlo. Este lenguaje a diferencia de JAGS y BUGS emplea para la generación de las cadenas de Markov el método de Monte Carlo Hamiltoniano (HMC) el cual para resolver los problemas relacionados con el tuning del HMC introdujo el muestreador No-U turn, para más detalle consultar Hoffman and Gelman (2014). Los beneficios de HMC incluyen eficiencia mejorada e inferencia más rápida, en comparación con otras implementaciones de software para Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC), consultar Ames and Au (2018) y Stan (2017).

Método de Monte Carlo

El método conocido como aproximación de Monte Carlo, esta basado en un muestreo aleatorio y su implementación no requiere de conocimientos avanzados de cálculo o análisis numérico. La idea general del método como lo explica (Hoff, 2009, p.54) consiste en, dado un parámetro de interés ϕ y y_1, y_2, \dots, y_n valores numéricos de la distribución $p(y_1, y_2, \dots, y_n | \phi)$ se muestrea S valores independientes desde la distribución a posteriori $p(\phi | y_1, y_2, \dots, y_n)$, esto es

$$\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots, \phi^{(S)} \sim \text{i.i.d } p(\phi | y_1, y_2, \dots, y_n)$$

entonces la distribución empírica de la muestra $\{\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots, \phi^{(S)}\}$ aproximará $p(\phi|y_1, y_2, \dots, y_n)$, así la distribución empírica de $\{\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots, \phi^{(S)}\}$ se le conoce como *aproximación de Monte Carlo*.

El propósito de las MCMC es obtener una secuencia de $\{\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots, \phi^{(S)}\}$ tal que $\lim_{s \rightarrow \infty} Pr(\phi^{(s)} \in A) = \int_A p(\phi) d\phi$, es decir, dicha secuencia generada $\{\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots, \phi^{(S)}\}$ debe ser representativa de $p(\phi)$, dicha probabilidad se puede entender como una trayectoria de una partícula ϕ moviéndose alrededor de un espacio de parámetros, el objetivo es que la cantidad de tiempo que la partícula pasa en un determinado conjunto A es proporcional a la probabilidad objetivo $\int_A p(\phi) d\phi$, en otras palabras, se busca que la cadena alcance la estacionariedad (*estacionaria*) o convergencia.

1.5.1. Monte Carlo Hamiltoniano HMC

Stan como lenguaje de programación probabilista facilita la implementación de complejos algoritmos, dado que emplea el muestreador No-U-turn Sampler por sus siglas en inglés NUTS Hoffman and Gelman (2014). Como lo señala Neal (2011) en un paper de 1987, Duane, Kennedy, Pendleton y Roweth unen las MCMC con el enfoque de dinámicas molecular, ellos llamaron a este método “Hybrid Monte Carlo”, abreviado “HMC”, pero la frase *Hamiltonian Monte Carlo* conservo la abreviatura, pues se considero más específica y descriptiva, así que la teoría de HMC está desarrollada en términos de geometría diferencial, para detalles Neal (2011) y Stan (2017).

En los principios de la mecánica Hamiltoniana la expresión $-2 \log f(x)$ corresponde a la log verosimilitud la cual es considerada la energía potencial del modelo y donde la energía cinética es introducida artificialmente y usualmente la distribución normal multivariada se emplea para tal fin. Así que a partir de las ecuaciones de movimiento del Hamiltoniano con estas energía, se generan trayectorias, en las cuales se ubican las muestras. El método de salto de la rana es usado para aproximar las ecuaciones diferenciales, que generan las trayectorias. Es importante mencionar que la gran ventaja de estos métodos de muestreo es que las muestras obtenidas por lo general son casi independientes, es decir, la autocorrelación es baja, además de que por lo general escanean el espacio de los parámetros de manera muy amplia.

1.5.2. Implementación en Stan

Para la implementación de un modelo haciendo uso del paquete `rstan`, que corresponde a la interface Stan para R, se deben guardar el archivo de `Stan` con la extensión `.stan` y el archivo que contiene los comandos con extensión convencional `.r` ya que los dos archivos son complementarios. Los modelos escritos en Stan son compilados en C++ lo cual permite enlazar Stan con programas como Python, Shell, MATLAB, Julia, Mathematica y Stata.

Un primer documento de consulta sobre la implementación de Stan para modelos de teoría de respuesta al ítem es el artículo de Luo and Jiao (2017), en el que se encuentran códigos en Stan de modelos de la IRT esenciales, incluyendo modelo logístico de tres parámetros, modelo de respuesta nominal y modelo de respuesta gradual. También puede consultar Ames and Au (2018) en el que se presenta una forma vectorial y más eficiente de construir códigos de modelos IRT en Stan y por último, puede ser consultado la tesis (Díaz, 2018,

Apéndice A) quien realiza una detallada presentación de la construcción de modelos IRT en Stan y las salidas que este proporciona, para el establecimiento de resultados. La estructura general del conjunto de bloques con nombre se especifica a continuación:

```

functions {
// ... function declarations and definitions ...
}
data {
// ... declarations ...
}
transformed data {
// ... declarations ... statements ...
}
parameters {
// ... declarations ...
}
transformed parameters {
// ... declarations ... statements ...
}
model {
// ... declarations ... statements ...
}
generated quantities {
// ... declarations ... statements ...
}

```

Cuando se realiza inferencia Bayesiana empleando el método de Monte Carlo se necesita de tres ingredientes esenciales que son mencionados por Hoff (2009), especificación del modelo, especificación de las distribuciones a priori, y el resumen de las distribución a posteriori, los cuales pueden ser establecidos claramente en cada uno de los bloques del archivo Stan.

1. **Especificación del Modelo:** la colección de distribuciones de probabilidad $\{p(\mathbf{Y}|\phi), \phi \in \Theta\}$ que debe representar la distribución muestral de los datos para algún valor de $\phi \in \Theta$. En Stan esta especificación se encuentra en `data block`, `functions block`, `parameters block`, `model block` and `transformed parameters block`. Se hará especial énfasis en el bloque de funciones pues es esencial en la implementación del modelo que aquí se propone.

Bloque de funciones (*functions block*)

El `block functions` debe contener funciones definidas por el usuario, las cuales pueden usarse la mayoría de las veces en cualquier bloque y aplicarse a una mezcla de parámetros y datos, este bloque siempre debe estar antes de todos los demás bloques del programa.

Los nombres de funciones definidos por el usuario no se pueden usar como una variable dentro del modelo. En las funciones definidas por el usuario se deben declarar

el tipo de argumento base, el tipo de retorno y en el cuerpo de la función debe estar entre llaves `{}` y en el se debe declarar la dimensionalidad de las variables.

```
real foo_lpdf(real y, vector theta) {
  int M;
  int N;
  // ... definitions

  real x;
  vector<lower=0> alpha;
  matrix<lower=0, upper=1> [M,N];
  // ... declarations

  return x;}

```

Todos los argumentos de la función son obligatorios; no hay valores predeterminados.

Definición del tipo variable: los tipos de variables de base son `int`, `real`, `vector`, `row_vector` y `matrix` (Stan, 2017, p.301 para más detalle) además no se permiten restricciones de límite inferior o superior en los argumentos de la función.

Declaración de dimensionalidad: las dimensiones para vectores y matrices se indican con corchetes cuadrado y comas opcionales, las restricciones de límite inferior y/o superior deben anteceder a la dimensionalidad, `matrix<lower=L, upper=U> [M,N]` dentro del cuerpo de la función.

Las funciones no nulas deben tener una declaración `return` que devuelva una expresión escrita adecuadamente.

Tipos de funciones

En Stan las funciones pueden tener un tipo de retorno nulo (`void`) o no nulo (`non-void`) y pueden tener uno de los sufijos especiales, `_lpdf`, `_lpmf`, `_lp` o `_rng`. La información a continuación fue tomada de (Stan, 2017, cap. 24) y Luo and Jiao (2017).

Funciones como declaraciones: en algunos casos puede ser requerido funciones que no retornan valores. El símbolo especial `void` es usado como un tipo de retorno, sin embargo, este no es un tipo de retorno en si mismo, no hay valores de tipo `void`; simplemente indica la falta de un valor. Como tal, el estado de retorno para funciones nulas no puede tener argumentos.

Funciones de probabilidad (densidad o masa): Stan admite una colección cada vez mayor de funciones de masa y densidad de probabilidad univariadas y multivariadas integradas. Las funciones que terminan en `_lpmf` o `_lpdf` y con el tipo de retorno `real` pueden usarse como funciones de probabilidad en las declaraciones de muestreo, el primer sufijo se emplea para definir funciones de densidad y el segundo para funciones de masa. Todas las funciones de probabilidad son definidas en escala logarítmica para evitar el desbordamiento.

```

functions{
  real unit_normal_lpdf (real y){
    return normal_lpdf(y|0,1);
  }
}
...
model{
  alpha ~ unit_normal();
  beta ~ unit_normal();
  ...
}

```

Las funciones que finalizan con `_lpmf` y `_lpdf` se comportan exactamente de la misma manera, excepto que el primer argumento en una función de densidad debe ser continuo (no entero o array entero) y en una función de masa debe ser discreto (entero o array entero). Estas funciones de probabilidad y pueden usarse en lugar de distribuciones parametrizadas en el lado derecho de las declaraciones de muestreo, esto es, el sufijo `_lpdf` se descarta y el primer argumento se mueve a la izquierda del símbolo de muestreo (`~`) en la instrucción de muestreo. No hay restricciones sobre dónde se pueden usar dichas funciones.

Funciones generadoras de números aleatorios: se puede declarar una función especificada por el usuario que actúa como un generador de número (pseudo) aleatorio (PNRG) dándole un nombre que termina en `_rng`, solo las funciones que terminan en `_rng` pueden acceder a las funciones PRNG integradas.

```

matrix predictors_rng(int N, int K){
matrix[N,K] x:
  for (n in 1:N){
    x[n,1]=1.0;
    for (k in 2:K)
      x[n,k] = normal_rng(0,1);
  }
}

```

Al igual que otras funciones generadoras de números aleatorios, las funciones definidas por el usuario con nombres que terminan en `_rng` se pueden usar solo en el bloque de `generated quantities` y el `transformed parameters`, o dentro de los cuerpos de las funciones definidas por el usuario que terminan en `_rng`. Un intento de utilizar dicha función en otro lugar da como resultado un error en tiempo de compilación.

Funciones de log-probabilidad o distribución acumulada: las funciones de probabilidad o de distribución acumulada deben tener un nombre que termine en `_lp`, estas pueden usar declaraciones de muestreo y declaraciones `target=+`; otras funciones no lo son.

```

functions{
vector center_lp(vector bera_raw, real mu, real sigma){
  beta_raw ~ normal(0,1);
  sigma ~ cauchy(0,5);
}

```

```

    mu ~ cauchy(0, 2.5);
    return sigma*beta_raw+mu;
  }
}
...
transformed parameters{
  vector[K] beta;
  ...
  beta = center_lp(beta_raw, mu_beta, sigma_beta);
}

```

Restricciones de colocación: las funciones de ciertos tipos están restringidas en el ámbito de uso. Las funciones cuyos nombres terminan en `_lp` asumen acceso al acumulador de probabilidad de registro y solo están disponibles en el parámetro transformado y en los bloques del modelo. Las funciones cuyos nombres terminan en `_rng` asumen acceso al generador de números aleatorios y solo se pueden usar dentro del bloque de cantidades generadas, el bloque de datos transformados y dentro de las funciones definidas por el usuario que terminan en `_rng`.

Bloque de Datos (*data block*)

En este bloque `data` se declaran las variables que se leen como datos, las variables no se transforman de ninguna manera, el formato para archivos de datos dependen de la interfaz RStan. El valor de cada variable se valida con su declaración a medida que se lee. El ejemplo que se presenta a continuación para ilustrar este bloque y los siguientes bloques fue tomado de Ames and Au (2018)..

```

data{
  int<lower=0> I; // Número de items
  int<lower=0> J; //Número de personas
  int<lower=1> N; //Número de observaciones (respuestas)
  int<lower=1,upper=I>ii[N]; //Item por observación
  int<lower=1,upper=J>jj[N]; //Persona por observación
  int<lower=1,upper=1>y[N]; //Respuesta binaria por observación
}

```

Bloque de Parámetros (*parameters block*)

El siguiente bloque es el de los parámetros, en el cual los parámetros o hiperparámetros del modelo son especificados, las variables declaradas en este bloque corresponden directamente a las variables que están siendo muestreadas por los muestreadores de Stan (HMC y NUTS), por ello no pueden tener valores directamente asignados, las cantidades variables declaradas de los parámetros pueden declararse en los bloques `transformed parameters` o `generated quantities`.

```

parameters{
  vector<lower=0>[I] alpha; //Discriminación del ítem I
  vector[I] beta; //Dificultad del ítem J
  vector[J] theta; //Trazo Latente para la persona J
}

```

2. **Especificación de la Priori:** la(s) distribución(es) de probabilidad $p(\phi)$, que idealmente representan la información a priori acerca de los parámetros pueden describir la distribución del modelo. En Stan esta especificación se encuentra en `model block`.

Bloque del Modelo (*model block*)

El bloque `model` consta de declaraciones de variables, es decir, se deben especificar las distribuciones *a priori*. Note que todos los parámetros deben aparecer en este bloque, además en este bloque se permiten las declaraciones de probabilidad (notación de muestreo, emplee las funciones `_lpdf` o `_lpmf`).

```
model{
  vector[N] eta;
  alpha ~ lognormal(0.5,1); //Priori para el parámetro de discriminación
  beta ~ normal(0,10); //Priori para el parámetro de dificultad
  theta ~ normal(0,1); //Priori para el trazo latente
  for(n in 1:N){
    eta[n] = alpha[ii[n]]*(theta[jj[n]]-beta[ii[n]]); //2PL Model
    y ~ bernoulli_logit(eta);
  }
}
```

3. **Resumen Posteriori:** Una descripción de la distribución posteriori $p(\phi|\mathbf{Y})$, en términos de las cantidades de interés, como la media posterior, probabilidad predictiva o región de confianza. En Stan esta especificación se encuentra en `model block`, `generated quantities block` o en el archivo `.R`.

Stan proporciona automáticamente inferencia bayesiana completa al producir la distribución posterior extrayendo un parámetro “oculto” llamado `lp`.

```
model{
  vector[N] eta;
  // ... declaration of a priori distributions
  for(n in 1:N){
    eta[n] = alpha[ii[n]]*(theta[jj[n]]-beta[ii[n]]); //2PL Model
    y ~ bernoulli_logit(eta);
  }
}
```

Bloque generador de cantidades (*generated quantities block*)

El bloque `generated quantities` es bastante diferente a los otros bloques. Nada en el bloque de cantidades generadas afecta los valores de los parámetros muestreados. Este bloque se ejecuta solo después de que se haya generado una muestra.

```
generated quantities{
  vector[N] log_lik;
  vector[N] eta;
}
```

```

for (n in 1:N){
eta[n] = alpha[ii[n]] * (theta[jj[n]] - beta[ii[n]]); // 2PL Model
log_lik[n] = bernoulli_logit_lpmf(y[n]|eta[n]);
}
}

```

Es más eficiente definir una variable en el bloque de cantidades generadas en lugar del bloque de parámetros transformados. Por lo tanto, si una cantidad no juega un papel en el modelo, debe definirse en el bloque de cantidades generadas. Todas las variables declaradas como cantidades generadas se imprimen como parte de la salida.

Por último, con la log-verosimilitud (*log-likelihood*), especificada, su distribución posterior puede ser obtenida y suele ser útil para calcular el criterio (Watanabe, 2010, WAIC)³ y leave-one-out cross-validation (Vehtari and Gelman, 2014, LOO).

1.6. Evaluación del modelo Bayesiano

Si se está interesado en el éxito al ajustar un modelo a un conjunto de datos, se debe indagar si el ajuste es o no adecuado y si las suposiciones hechas para el modelo son justificadas. Para la evaluación de la calidad del modelo, se cuenta con varios criterios: *widely available Watanabe-Akaike* (WAIC) diseñado para comparar modelos y como criterio de bondad de ajuste del modelo, se trabajará con *Predictive Assessment* Fox (2010).

1.6.1. WAIC

Para la selección del mejor modelo, se usó el criterio de información de Watanabe-Akaike (WAIC) que se puede ver como una mejora en el *Deviance Information Criterion* (DIC) para los modelos bayesianos, Gao (2018) menciona como en ocasiones, DIC puede producir estimaciones negativas del número efectivo de parámetros en un modelo, WAIC es totalmente bayesiano y a diferencia de DIC, WAIC es invariante a la parametrización y también funciona para modelos singulares.

Los métodos de selección de modelos utilizados en métodos frecuentistas suelen ser de validación cruzada *-cross validation-* y criterios de información. En el documento de Vehtari and Gelman (2014) se muestra cómo se pueden calcular en Stan los criterios WAIC y LOO Stan (2017), además se proponen medidas de diagnóstico para estimar la confiabilidad de ambos métodos.

Idealmente, se quiere elegir el modelo más simple con el mejor ajuste, es decir, es necesario evaluar la calidad del modelo que ajusta los datos, así que para este trabajo se emplearán los criterios WAIC y LOO. A continuación se presentan algunas definiciones, no obstante el detalle de la construcción de los criterios se encuentran en Vehtari and Gelman (2014)

³En este artículo se muestra como el criterio WAIC resulta ser más robusto por lo general que el criterio DIC.

y en (Gao, 2018, Sección 2.2.3).

Considere y_1, \dots, y_n un conjunto de datos modelado por los parámetros θ , tal que $p(y|\theta) = \prod_{i=1}^n p(y_i|\theta)$ y $p(\theta)$ la distribución a priori, luego la distribución a posteriori será $p_{post}(\tilde{y}) = \int p(\tilde{y}_i|\theta)p_{post}(\theta)d\theta$. Se define $elpd :=$ logaritmo esperado de densidad predictiva puntual para un nuevo conjunto de datos, $lpd :=$ registra la densidad predictiva puntual y $l\hat{p}d :=$ es densidad computarizada puntual logarítmica calculada, con θ^s las simulaciones posteriori de los parámetros, con $s = 1, \dots, S^4$.

Definición 1.6. WAIC: Watanabe (2010) se puede interpretar como una aproximación conveniente de validación (*cross-validation*) cruzada que se define como,

$$el\hat{p}d_{waic} = l\hat{p}d - \hat{p}_{waic} \quad (1.23)$$

donde \hat{p}_{waic} es número efectivo de parámetros estimados, el cual se computa básicamente como la suma de todos los puntos y_i ,

$$\hat{p}_{waic} = \sum_{i=1}^n V_{s=1}^S(\log p(y_i|\theta^s)) \quad (1.24)$$

donde $V_{s=1}^S$ representa la varianza muestral, la cual se puede calcular usando la varianza posterior de la densidad predictiva logarítmica para cada punto de datos y_i , es decir, $V_{s=1}^S \log p(y_i|\theta^s)$.

Para DIC, existe un cálculo similar basado en la varianza del número de parámetros, la versión WAIC es más estable ya que calcula la varianza por separado para cada punto de datos y luego suma, esta da como resultado la estabilidad. Si se desea usar la escala de desviación que hace comparable a AIC y DIC, entonces,

$$WAIC = -2el\hat{p}d_{waic} \quad (1.25)$$

Definición 1.7. LOO leave-one-out: Vehtari and Gelman (2014) La estimación LOO de muestreo que estabilizada el logarítmico predictivo esperado densidad es,

$$el\hat{p}d_{loo} = \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{\sum_{s=1}^S p(y_i|\theta^s) \tilde{w}_s}{\sum_{s=1}^S \tilde{w}_s} \right) \quad (1.26)$$

donde \tilde{w}_s son los pesos, definidos como $\tilde{w}_s = \min(w_s, \sqrt{S}\bar{w})$, con $w_s = \frac{1}{p(y_i|\theta^s)}$, los cuales se emplean ya que desafortunadamente, un uso directo de pesos w_s induce inestabilidad.

Así que se define para LOO el número efectivo de parámetros estimados como,

$$\hat{p}_{loo} = l\hat{p}d - el\hat{p}d_{loo} \quad (1.27)$$

Definición 1.8. Comparación de Modelos: Vehtari and Gelman (2014) Cuando se comparan dos modelos, se puede estimar por la precisión predictiva esperada por la diferencia en $el\hat{p}d_{waic}$ $el\hat{p}d_{loo}$ multiplicado por -2, si se desea, para estar en la deviance scale. Si se desea comparar el modelo A y el modelo B , se puede calcular el error estándar de

⁴El detalle de la construcción se encuentra en (Vehtari and Gelman, 2014, p.2)

esta diferencia como,

$$se(\hat{elpd}_{waic}^A - \hat{elpd}_{waic}^B) = \sqrt{nV_{i=1}^n(\hat{elpd}_{waic}^A - \hat{elpd}_{waic}^B)} \quad (1.28)$$

$$\hat{p}_{loo} = \hat{lpd} - \hat{elpd}_{loo} \quad (1.29)$$

1.6.2. Bondad de Ajuste

Como criterio de bondad de ajuste del modelo se usa la evaluación de la predicción (Fox, 2010, Sección 5.4), empleada por Sheng and Wikle (2007), Sheng and Wikle (2008) y Sheng and Wikle (2009).

Definición 1.9. Distribución predictiva posterior Hoff (2009) La distribución predictiva \tilde{Y} es la distribución condicional de \tilde{Y} dada $M = \{Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n\}$, es decir, esta está condiciona a los datos observados, la *posterior predictive distribution* puede ser derivada desde la verosimilitud de Y dada los parámetros θ y la distribución posterior de θ .

$$\begin{aligned} f(\tilde{Y} = \tilde{y}|M) &= P(\tilde{Y} = \tilde{y}|Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n) = \int f(\tilde{y}|\theta, M)p(\theta|M)d\theta \\ &= \int p(\tilde{y}|\theta, y_1, \dots, y_n)p(\theta|y_1, \dots, y_n)d\theta \end{aligned}$$

Dos características importantes de la distribución predictiva son:

1. La distribución predictiva no depende de cantidades desconocidas. Si lo hiciera, no podríamos usarlo para hacer predicciones
2. La distribución depende de los datos observados, así que \tilde{Y} no es independiente de Y_1, \dots, Y_n , dado que estas variables dan información acerca de θ , quien a su vez da información sobre \tilde{Y} .

El método *posterior predictive p-values*, consiste en generar predicciones con el modelo, y comparar los datos replicados, \mathbf{Y}_{rep} , que se generar desde la distribución posterior predictiva $p(\mathbf{Y}_{rep}|\mathbf{Y}_{obs}) = \int p(\mathbf{Y}_{rep}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta})p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}|\mathbf{Y}_{obs})d\boldsymbol{\theta}d\boldsymbol{\zeta}$ con los datos observados \mathbf{Y}_{obs} . Las predicciones también son llamados medidas de discrepancia o estadísticas de prueba. Considere un modelo de respuesta al ítem \mathcal{M} con parámetros $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta})$ y los respectivos datos. La hipótesis nula, asume que los datos de respuesta se distribuyen condicionalmente como $p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta})$ y los parámetros desconocidos tienen una distribución $p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta})$, contra una hipótesis alternativa no especificada. La estadística de prueba, *discrepancy measure*, denotada $T(\mathbf{y}) = T(\mathbf{y}, (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}))$, es un escalar que mide la discrepancia entre el modelo y los datos, cantidad que depende solo de los datos Sheng and Wikle (2009).

Así que para investigar la compatibilidad del modelo \mathcal{M} con los datos observados \mathbf{Y}_{obs} , puede ser medida por *tail-area probability* o *pvalor*, que se define como,

$$p_0(\mathbf{Y}_{obs}) = Pr(T(\mathbf{Y}_{rep}, (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta})) \geq T(\mathbf{Y}_{obs}, (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}))|\mathcal{M}) \quad (1.30)$$

entendida como la probabilidad de que los datos replicados puedan ser más extremos que los datos observados Carlin and Louis (2009).

Modelos Bayesianos Multidimensionales para Datos de Naturaleza Asimétrica

2.1. Introducción

La teoría de respuesta al ítem (IRT) considera modelos estadísticos que se emplean para describir la probabilidad de respuesta correcta a un ítem en una prueba (o test), en términos de la habilidad (o constructo) del individuo y las propiedades del ítem. Dichos modelos como lo menciona Fox (2010) tienen gran aplicación en áreas como la educación, la psicometría y la psicología, y donde comúnmente es la Distribución Normal Estándar (Univariada y Multivariada) las más utilizadas. No obstante, como lo establece Woods (2008), en ámbitos como el análisis de rasgos de personalidad, el trazo podría presentar características que sugieren el uso de una distribución diferente a la normal estándar, así que motivados por la necesidad de mejorar la representación de ciertos fenómenos, surge la idea de emplear distribuciones asimétricas, especialmente cuando ya existe evidencia de resultados en este sentido en la literatura, como los trabajos de (da. Silva, 2008, pp.34-35), (León, 2017) y (Díaz, 2018).

En este capítulo se presenta una propuesta de modelo unidimensional y multidimensional de la Teoría de respuesta al Ítem sobre el marco Bayesiano para pruebas que consisten en subpruebas (o subtests) múltiples de naturaleza asimétrica. En esta disertación se parte de la propuesta de Sheng and Wikle (2007) quien señala que, una prueba que consta de varias subpruebas las cuales se centra en una habilidad específica, resulta ser apropiado pensar en el empleo de un modelo MIRT de estructura simple, también llamados modelo multiunidimensional, ya que la prueba involucra múltiples dimensiones, y cada prueba es unidimensional por sí misma.

2.2. Modelo unidimensional asimétrico logístico

Este trabajo emplea métodos Bayesianos para estimar e ilustrar la flexibilidad y la eficiencia del modelo unidimensional asimétrico y el modelo multiunidimensional asimétrico comparándolo con los modelos clásicos. Las ventajas de este enfoque son: en primer lugar,

al ser Bayesiano permite especificar modelos muy complejos, sin preocuparse de como se hará la estimación y en segundo lugar, los cálculos para los parámetros de estimación se basan en los métodos de Monte Carlo, aunque esta característica no es única de lo Bayesiano, que están libres de algunas de las limitaciones de usar cuadratura Gaussiana en la verosimilitud máxima Béguin and Glass (2001) o León (2017). Por último, la estimación Bayesiana de las distribuciones posteriores de los parámetros del modelo de medición, como los modelos de la teoría de respuesta de ítems y los modelos de análisis factorial, se realiza principalmente a través de los algoritmos MCMC, Cadena de Markov Monte Carlo.

2.2.1. Modelo unidimensional asimétrico logístico de dos Parámetros (UIRTA-2PL)

Sea $\mathbf{Y}' = [Y_{ij}]_{I \times J}$ la matriz que representa las respuestas de J individuos a I ítems dicotómicos, así y_{ij} esta definida como

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la persona } j \text{ responde correctamente al ítem } i \\ 0, & \text{si la persona } i \text{ responde incorrectamente al ítem } i \end{cases}$$

considere además θ_j la variable latente (trazo) la cual mide la habilidad de interés de la j -ésima persona, con $j = \{1, \dots, J\}$, donde J es el número total de personas evaluadas por el test y $\boldsymbol{\xi}_i = \{a_i, b_i\}$ es el conjunto de parámetros asociados al ítem i , con $i = \{1, 2, \dots, I\}$, siendo I el número total de ítem del test, donde a_i y b_i corresponden al parámetros de discriminación y dificultad de un modelo logístico dos parámetros. Así que, la probabilidad condicional para $(Y_{ij}|\theta_j, \boldsymbol{\xi}_i)$ esta dada por,

$$P_{ij} = P(Y_{ij} = 1|\theta_j, \boldsymbol{\xi}_i) = \text{logit}^{-1}(\eta_{ij}) = \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}} \quad (2.1)$$

donde $\eta_{ij} = a_i(\theta_j - b_i) = a_i\theta_j - a_ib_i = a_i\theta_j - d_i$, donde η_{ij} es el predictor lineal simple de probabilidad de acierto, junto al vector de parámetros de la regresión, donde a_j es el parámetro de inclinación y d_j es el parámetro de intercepto, además $\text{logit}^{-1} = (1 + e^{-1})^{-1}$ corresponde a la función logit inversa, entendiendo esta expresión como la función de distribución acumulada (cdf) de la distribución logit, luego, $Y_{ij}|\theta_j, \boldsymbol{\xi}_i \sim \text{Bernoulli}(P_{ij})$.

La justificación al uso de la parametrización que se seguirá a continuación radica en la estabilidad de los cálculos, por ende en la facilidad computacional (Bazán, 2005, p.6). En el modelo presentado en 2.1, es usual asumir que $\theta_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$, en adición en este documento se asignarán distribuciones asimétricas al trazo, ya que las variables latentes presenta una mayor densidad de sucesos a la izquierda de la media, las distribuciones a considerar serán, la distribución Gamma y la distribución Lognormal.

Distribución Gamma

Sea variable $\theta \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$, se dice que se distribuye Gamma con parámetros α y β si su función de densidad se define como,

$$f(\theta; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}, & \text{con } x > 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.2)$$

con $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \theta^{\alpha-1} e^{-\theta} d\theta$, para $\alpha > 0$. Donde α corresponde al parámetro de forma, sitúa la máxima intensidad de probabilidad y β corresponde al parámetro escala que determina el alcance de la asimetría, desplazando la densidad a la cola derecha.

Propiedades de la función gamma

Coefficiente de asimetría $\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ (*Asimetría positiva*)

Curtosis relativa $3(1 + \frac{2}{\alpha})$, conforme α crece el sesgo se hace menos pronunciado y la curtosis relativa tiende a 3. (*Leptocúrtica*)

La esperanza de la distribución gamma es $E(\theta) = \alpha/\beta$

La varianza de la distribución gamma es $Var(\theta) = \alpha/\beta^2$

La función generadora de momentos es, $m_\theta(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$ con $t < \beta$.

Distribución Lognormal

La distribución logarítmica normal se aplica a casos donde una transformación logarítmica natural tiene como resultado una distribución normal. Sea θ una variable aleatoria positiva que tiene distribución lognormal $\theta \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$, si $\delta = \ln(\theta)$ tiene distribución normal con media μ y desviación estándar σ , la función densidad de θ esta dada por,

$$f(\theta; \mu, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\theta} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\ln(\theta)-\mu]^2}, & \text{con } x \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Propiedades de la función lognormal

La esperanza de la distribución lognormal es $E(\theta) = e^{\mu+\sigma^2/2}$.

La varianza de la distribución lognormal es $Var(\theta) = e^{2\mu+2\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$

2.2.2. Distribución a posteriori del modelo UIRTA-2PL

En Albert (1992) y Béguin and Glass (2001) se encuentra a detalle el procedimiento de estimación Bayesiana cuando se asume distribución normal para el trazo, estos autores además emplean variables auxiliares, Z_{ij} o W_{ij} , a esta metodología se le denominada datos aumentados y se emplea cuando hacen falta datos (respuestas). Este trabajo no hizo uso de tales variables, ya que se trabaja con datos observados y no se tienen datos faltantes, sin embargo, la metodología presentada en los dos artículos mencionados al inicio se tomo como base para la construcción del proceso de estimación Bayesiano que se presenta a continuación.

Sean $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_J)$ el vector completo de parámetros de la habilidad y $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_I)$, con $\xi_i = \{a_i, b_i\}$, la matriz que contiene todos los parámetros de los ítems, la función de

verosimilitud estará dada por,

$$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi} | \mathbf{Y}) \equiv P(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) = \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J P_{ij}^{y_{ij}} (1 - P_{ij})^{1-y_{ij}} \quad (2.4)$$

con P_{ij} definido en 2.1.

A priori ajuste Normal

Se asignan las siguientes distribuciones a priori para los parámetros e hiperparámetros de los ítems, cuando se asume que $\theta_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$, además tenga presente la transformación asociada al parámetro de discriminación $a_i = \log(1 + e^{a_i^*})$

$$b_i \sim \mathcal{N}(\mu_b, \sigma_b^2), \quad (2.5)$$

$$a_i^* \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{a_i}^2) \quad (2.6)$$

$$\mu_b \sim \mathcal{N}(0, 2), \quad (2.7)$$

$$\sigma_b \sim \text{Cauchy}(0, 2)I_{(0, \infty)}, \quad (2.8)$$

$$\sigma_a \sim \text{Cauchy}(0, 2)I_{(0, \infty)}. \quad (2.9)$$

A priori ajuste Gamma y Lognormal

Se asignan las siguientes distribuciones a priori para los parámetros e hiperparámetros de los ítems, cuando se asume que $\theta_j \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$ o $\theta_j \sim \mathcal{LN}(\mu_{\log}, \sigma_{\log})$, además tenga presente la transformación asociada al parámetro de discriminación $a_i = \log(1 + e^{a_i^*})$

$$b_i \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta) \text{ o } b_i \sim \mathcal{LN}(\mu_{\log}, \sigma_{\log}) \quad (2.10)$$

$$a_i^* \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{a_i}^2) \quad (2.11)$$

$$\sigma_a \sim \text{Cauchy}(0, 2)I_{(0, \infty)}. \quad (2.12)$$

es decir, se asumirá la misma distribución para θ_j y b_i por razones de interpretación (escala).

2.3. Modelo multiunidimensional asimétrico logístico

Los modelos multiunidimensionales, se entienden como un tipo particular de modelo multidimensionales, los cuales permiten hacer inferencia, para cada una de las dimensiones, es decir, un análisis separado de cada subtests, dado que múltiples habilidades específicas (constructos) son desarrolladas en un test, y cada test es unidimensional en sí mismo dado que cada ítem mide sólo uno de los constructos. La propuesta de modelo que se presenta a continuación sigue los procedimientos expuestos por da Silva (2008), Béguin and Glass (2001), Sheng and Wikle (2007) y Sheng and Wikle (2008).

2.3.1. Modelo multiunidimensional asimétrico logístico de dos parámetros (MuIRTA-2PL)

Sea la matriz $\mathbf{Y}' = [Y_{ij}]_{I \times J}$ que representa las respuestas de J individuos a I ítems dicotómicos, y se establece una partición I_1, I_2, \dots, I_m del conjunto de ítems I de un test, considere la estructura particular de modelo multidimensional en el que un sólo elemento del vector de discriminación $\mathbf{a}_i = (0, \dots, a_{ki}, \dots, 0)$ es no nulo, es decir, en el que el i -ésimo ítem “discrimina” en una sola dimensión del vector de trazos latentes $\boldsymbol{\theta}_k$. (Montenegro, 2011, p.42) llama a este tipo de modelo *test de estructura simple* en el que la dimensión del trazo latente coincide con la dimensión del test, en este modelo todos las direcciones de los subtest puede ser identificada con el vector de la base canonica del espacio Euclideo \mathbb{R}^m .

Considere i -ítems de un test que contiene m -subtest (sud-pruebas), cada uno contiene I_k ítems con $k = 1, 2, \dots, m$, así que el conjunto de ítems medirá en una sola dimensión (escala), con una función de enlace logit, la probabilidad de que la persona j responda correctamente al ítem i que pertenece al k -ésimo subtest será,

$$P_{kij} = P(Y_{kij} = 1 | \theta_{kj}, a_{ki}, b_{ki}) = \frac{1}{1 + e^{-a_{ki}(\theta_{kj} - b_{ki})}} \quad (2.13)$$

donde a_{ki} , b_{ki} y θ_{kj} son parámetros escalares que representan la discriminación y dificultad del ítem y la habilidad del individuo en la k -ésima dimensión respectivamente y donde $d_{ki} = a_{ki}b_{ki}$ corresponde a un parámetro escalar que indica la localización de la dimensión en la que el ítem proporciona mayor información.

2.3.2. Función de Máxima Verosimilitud

Observe que $\forall_i \in I_1$, el vector \mathbf{a}_i (m -dimensional) es de la forma $(a_{1i}, 0, 0, \dots, 0)$, $\forall_i \in I_2$, el vector \mathbf{a}_i es de la forma $(0, a_{2i}, 0, \dots, 0)$, y sucesivamente $\forall_i \in I_m$ el vector \mathbf{a}_i será de la forma $(0, 0, \dots, a_{mi})$, y junto con el modelo de probabilidad definido en la ecuación 2.13 se tendrá que la función de verosimilitud es

$$P(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) = \prod_{i \in I_k} \prod_{j=1}^J \prod_{i=1}^I P_{kij}^{y_{kij}} [1 - P_{kij}]^{1-y_{kij}} \quad (2.14)$$

$$= \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^J \prod_{i=1}^I P_{kij}^{y_{kij}} [1 - P_{kij}]^{1-y_{kij}} \quad (2.15)$$

donde:

\mathbf{Y} es la matriz $J \times I$ con $I = \sum_{k=1}^m I_k$ de todas las respuestas dicotómicas cuya j -ésima línea es $\mathbf{y}_j = (\mathbf{y}_{1,j}, \dots, \mathbf{y}_{k,j}) = ((y_{11j}, \dots, y_{1I_1j}), \dots, (y_{mij}, \dots, y_{mI_mj}))$

\mathbf{b} es el vector de dimensión I que contiene los parámetros de dificultad los todos los ítems del test, tal que $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_I) = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m) = ((b_{11}, \dots, b_{1I_1}), \dots, (b_{m1}, \dots, b_{mI_m}))$, , así que \mathbf{b}_k con $k = 1, 2, \dots, m$ son los parámetros de dificultad del para los ítems que

pertencen al k -ésimo subtest.

\mathbf{a} es la matriz de $I \times m$ que los I vectores de discriminación de todos los ítems del test, que a su vez esta compuesta por m matrices de tamaños $I_k \times m$, con $k = 1, 2, \dots, m$, así que la i -ésima fila -vector- de una de estas matrices será $\mathbf{a}_i = (0, \dots, a_{ki}, \dots, 0)$ que corresponde a la discriminación del ítem i en el subtest k , donde $i = 1, \dots, I_1, \dots, 1, \dots, I_k$.

$\boldsymbol{\theta}$ es la matriz $J \times m$ de todos los trazos latentes de los individuos, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_m)$, así que cada columna $\boldsymbol{\theta}_k$ corresponderá al trazo latente asociado al subtest k , por otro lado note que la j -ésima línea $\boldsymbol{\theta}_j = (\theta_{1j}, \theta_{2j}, \dots, \theta_{mj})$ corresponderá a la habilidad de la persona en cada uno de los m subtest y $j = 1, \dots, J$.

Tal y como se presentó para el modelo unidimensional se deberá asignar un distribución -multivariada- al parámetro $\boldsymbol{\theta}$ con el fin de llevar a cabo el proceso de estimación; es frecuente encontrar en la literatura Béguin and Glass (2001) y Sheng and Wikle (2007) el uso de la distribución normal multivariada, $\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}_m(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\theta)$, no obstante, en el marco de la investigación que aquí se ha expuesto, en el que se considera la naturaleza asimétrica del trazo, es preciso trabajar con una distribución multivariada asimétrica, como podrían ser la distribución Gamma Multivariada \mathcal{G}_m o la distribución Lognormal Multivariada \mathcal{LN}_m , en consecuencia se hizo uso de la teoría de copulas expuesta en la sección 1.4, para construir la función de densidad multivariada requerida en por modelo multiunidimensional MuIRTA-2PL.

2.3.3. Construcción de la función de densidad multivariada.

Considere m -variables latentes (trazos), $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_m)^t$, donde cada una es medida J -veces (sujetos),

$$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_m)^t = ((\theta_{11}, \dots, \theta_{J1})^t, \dots, (\theta_{1m}, \dots, \theta_{Jm})^t)^t \quad (2.16)$$

donde θ_{kj} corresponde a la observación en la k -ésima dimensión para el j -ésimo individuo, con $k = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, J$.

		$u_k = G_k(\boldsymbol{\theta}_k)$		$x_k = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(u_k)$	
Variable	$\boldsymbol{\theta}$	\longrightarrow	\mathbf{u}	\longrightarrow	\mathbf{x}
Dominio	S_θ	\longrightarrow	$[0, 1]^m$	\longrightarrow	S_x
Función Distribución Conjunta (CDF)	$G(\boldsymbol{\theta})$	\longrightarrow	$C(\mathbf{u})$	\longrightarrow	$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})$
Marginales de las CDF	$G_k(\boldsymbol{\theta}_k)$	\longrightarrow	Uniforme	\longrightarrow	$\boldsymbol{\Phi}_k(\mathbf{x}_k)$

FIGURA 2.1. Descripción de las transformaciones requeridas para la construcción de la función de densidad

De acuerdo con la figura 2.1, los pasos a seguir para la construcción de la función de densidad requerida son:

1. Los parámetros en cada una de las m dimensiones (subtest), se denotarán por $\boldsymbol{\eta}_k$, según corresponda si $G_k := \mathcal{G}$ -Gamma-, $\boldsymbol{\eta}_k = (\alpha_k, \beta_k)$ -(forma y escala)- o

si $G_k = \mathcal{LN}$ -Lognormal-, $\boldsymbol{\eta}_k = (\mu_k, \sigma_k)$ -(media y desviación estándar)-, luego $u_{kj} = \mathcal{G}(\theta_{kj}; \alpha_k, \beta_k)$ o $u_{kj} = \mathcal{LN}(\theta_{kj}; \mu_k, \sigma_k)$ respectivamente,

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m) = ((u_{11}, \dots, u_{J1})^t, \dots, (u_{1m}, \dots, u_{Jm})^t)^t$$

2. En la copula Gaussiana $F(\mathbf{x}) = \Phi_m(\mathbf{x}, \Gamma)$ -normal multivariada con media cero y matriz de correlación Γ y varianza unitaria en cada dimensión- y $F_k(x_{kj}) = \Phi_k(x_{kj})$ -normal estandar-, $x_{kj} = \Phi^{-1}(u_{kj})$, por tanto:

$$\begin{aligned} \Phi_m(\mathbf{x}) &= \Phi_m(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) = \Phi_m(\Phi(x_{11}, \dots, x_{J1})^t, \dots, \Phi(x_{m1}, \dots, x_{Jm})^t) \\ &= \Phi_m((u_{11}, \dots, u_{J1})^t, \dots, (u_{1m}, \dots, u_{Jm})^t) \\ &= \Phi_m(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m) \\ &= \Phi_m(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

3. La función copula estará dada por:

$$C(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m; \Gamma) = \Phi_m(\Phi_1^{-1}(\mathbf{u}_1; 1), \dots, \Phi_m^{-1}(\mathbf{u}_m; 1); \Gamma)$$

se asume que los elementos de $\boldsymbol{\theta}$ toma valores continuos, y la transformación $\boldsymbol{\theta}_k \mapsto \mathbf{u}_k$ es uno a uno, de igual forma se tiene que para la transformación $\boldsymbol{\theta}_k \mapsto \mathbf{x}_k$, necesaria condición para emplear el método de inversión, esto es, una nueva distribución multivariada con marginales G_k , con $k = 1, 2, \dots, m$, puede ser construida usando el teorema de Sklar, $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}) = C(G_1(\boldsymbol{\theta}_1), \dots, G_m(\boldsymbol{\theta}_m))$ (Nelsen, 2006, p.52), con lo cual es posible establecer la función de densidad, aquí se sigue la propuesta de Song (2000): $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_m)$ estará dada por,

$$f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\eta}_k, \Gamma) = |\Gamma|^{-J/2} \left(\prod_{j=1}^J \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}_j^t (\Gamma^{-1} - \mathbb{I}) \mathbf{x}_j \right] \prod_{k=1}^m f_k(\theta_{jk}; \boldsymbol{\eta}_k) \right) \quad (2.17)$$

$$= |\Gamma|^{-J/2} \left(\prod_{j=1}^J \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}_j^t (\Gamma^{-1} - \mathbb{I}) \mathbf{x}_j \right] \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^m f_k(\theta_{jk}; \boldsymbol{\eta}_k) \right) \quad (2.18)$$

Aplicando logaritmo a la igualdad 2.18 esto debido a los requerimientos de estan para la creación de las funciones a emplear en el modelo.

$$\log(f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\eta}_k, \Gamma)) = \log(|\Gamma|^{-J/2}) + \sum_{j=1}^J \left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}_j^t (\Gamma^{-1} - \mathbb{I}) \mathbf{x}_j \right] + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^m \log f_k(\theta_{jk}; \boldsymbol{\eta}_k) \quad (2.19)$$

$$= -\frac{J}{2} \log |\Gamma| + \sum_{j=1}^J \left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}_j^t (\Gamma^{-1} - \mathbb{I}) \mathbf{x}_j \right] + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^m \log f_k(\theta_{jk}; \boldsymbol{\eta}_k) \quad (2.20)$$

2.3.4. Distribución a posteriori del modelo MuIRTA-2PL

Sea $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_m)$ la matriz de parámetros de la habilidad de los J respondientes en las m dimensiones, y sea $\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta}_1, \dots, \boldsymbol{\zeta}_I)$ la matriz que contiene todos los parámetros de los ítems, $\boldsymbol{\zeta}_i = (\mathbf{a}_i, b_i)$ entonces la función de verosimilitud esta dada por,

$$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta} | \mathbf{Y}) \equiv P(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}) = \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^J \prod_{i=1}^I P_{kij}^{y_{kij}} [1 - P_{kij}]^{1-y_{kij}} \quad (2.21)$$

Para la asignación de las distribuciones a priori de los parámetros e hiperparámetros de los ítems, tenga en cuenta la siguiente ilustración,

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1I_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{2I_2} & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{m1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{mI_m} \end{bmatrix}$$

En Álgebra se cuenta con la transformación **vec**, la cual vectoriza una matriz. En Stan se conoce como la función *to vector*, la cual fue empleada dentro de la programación para que la matriz anteriormente ilustrada se transforme el siguiente vector,

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ a_{I_1} \\ a_{I_1+1} \\ a_{I_1+2} \\ \cdot \\ a_{I_1+I_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{I_1+I_2+\dots+I_{m-1}+1} \\ a_{I_1+I_2+\dots+I_{m-1}+2} \\ \cdot \\ a_{I_1+I_2+\dots+I_{m-1}+I_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ a_{I_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{I_1+I_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_I \end{bmatrix}$$

por otro lado, para el vector dificultad se tomará como,

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m] = [(b_{11}, \dots, b_{1I_1}), \dots, (b_{m1}, \dots, b_{mI_m})] = [b_1, \dots, b_{I_1}, \dots, b_{I_1+I_2}, \dots, b_I]$$

Por tanto, se debió hacer estimación sobre los I parámetros de discriminación y los I parámetros de dificultad, al considerar una nueva indexación, dada la partición establecida en m subtest, en consecuencia las distribuciones a priori para los parámetros e hiperparámetros de los ítems serán iguales a las establecidas en la sección 2.2.2., con $I = \sum_{k=1}^m I_k$.

Dado que $\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{G}_m(\boldsymbol{\eta}_k, \Gamma)$, donde $\boldsymbol{\eta}_k$ corresponde a los parámetros de las marginales y Γ es la matriz de correlación, que tiene 1 en la diagonal principal y $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ es la correlación entre $\boldsymbol{\theta}_i$ y $\boldsymbol{\theta}_j$ con $i \neq j$ en el resto de las posiciones, esto es

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdot & \cdots & \cdot & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & 1 & \cdot & \cdots & \cdot & \rho_{2m} \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 1 & \cdot \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \cdot & \cdots & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

se debe asignar entonces una distribución a priori para este parámetro, aquí se seguirá la propuesta de Montenegro (2011), por ende, la matriz de correlación se le asignará una distribución inversa Wishart con $m + 1$ grados de libertad y matriz no informativa la matriz identidad de tamaño $m \times m$ que se denota por \mathbb{I}^m .

$$\Gamma \sim \text{Wishart}_m^{-1}(m + 1, \mathbb{I}^m)$$

esta misma asignación de la distribución a priori para la matriz de correlación se empleará para el modelo Log-Normal .

A priori ajuste Normal

Se asignan las siguientes distribuciones a priori para los parámetros e hiperparámetros de los ítems, teniendo en cuenta que $\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}_m(\mathbf{0}, \Gamma)$, tenga presente las observación de la sección anterior y además la transformación asociada al parámetro de discriminación $a_i = \log(1 + e^{a_i^*})$

$$\begin{aligned} b_i &\sim \mathcal{N}(\mu_b, \sigma_b^2), \\ a_i^* &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_{a_i}^2), \\ \mu_b &\sim \mathcal{N}(0, 2), \\ \sigma_b &\sim \text{Cauchy}(0, 2)I_{(0, \infty)}, \\ \sigma_a &\sim \text{Cauchy}(0, 2)I_{(0, \infty)}. \\ \Gamma &\sim \text{Wishart}_m^{-1}(m + 1, \mathbb{I}^m) \end{aligned} \tag{2.22}$$

A priori ajuste Gamma y Lognormal

Se asignan las siguientes distribuciones a priori para los parámetros e hiperparámetros de los ítems, cuando se asume que $\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{G}_m(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \Gamma)$ o $\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{LN}_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}; \Gamma)$ - **implementación copula**-, tenga presente la transformación asociada al parámetro de

discriminación $a_i = \log(1 + e^{a_i^*})$

$$b_i \sim \mathcal{G}_m(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \Gamma) \text{ o } b_i \sim \mathcal{LN}_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}; \Gamma) \quad (2.23)$$

$$a_i^* \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{a_i}^2) \quad (2.24)$$

$$\sigma_a \sim \text{Cauchy}(0, 2)I_{(0, \infty)}. \quad (2.25)$$

$$\Gamma \sim \text{Wishart}_m^{-1}(m + 1, \mathbb{I}^m) \quad (2.26)$$

2.4. Estimación Bayesiana de modelo UIRTA-2PL (y MuIRTA-2PL)

Gamerman and Lopes (2006) y Hoff (2009) señalan que los métodos Bayesianos son comúnmente utilizados cuando no es posible encontrar distribuciones posteriores conocidas que nos permitan obtener información de los parámetros de manera analítica. Por esta razón, se hace uso del algoritmo de HMC para obtener muestras de $\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\xi}$ desde las respectivas distribuciones a priori de $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\zeta}$ establecidas para el modelo UIRTA-2PL y MuIRTA-2PL.

2.4.1. Estimación Bayesiana de UIRTA-2PL

Con el fin de realizar la estimación de los parámetros de interés, se debe establecer la función de densidad a posteriori del modelo Bayesiano Jerárquico Unidimensional Logístico de dos parámetros de la teoría de respuesta al ítem, l esta dada por,

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi} | \mathbf{Y}) &\propto L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi} | \mathbf{Y}) P(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\eta}) P(\boldsymbol{\xi} | \boldsymbol{\tau}) P(\boldsymbol{\tau}) \\ &= \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J P_{ij}^{y_{ij}} (1 - P_{ij})^{1-y_{ij}} P(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\eta}) P(\boldsymbol{\xi} | \boldsymbol{\tau}) P(\boldsymbol{\tau}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

por la notación establecida en la sección 1.3.1 se tendrá que $\boldsymbol{\xi}$ corresponde a los parámetros de los ítem, con $\boldsymbol{\tau}_a = (\sigma_a)$ los *hiperparámetros del parámetro de discriminación*, $\boldsymbol{\tau}_b = (\mu_b, \sigma_b)$ -solo para el ajuste normal- los *hiperparámetros del parámetro de dificultad* y $\boldsymbol{\eta} = (\alpha, \beta)$ -Gamma- o $\boldsymbol{\eta} = (\mu_{\log}, \sigma_{\log})$ -Lognormal- los *parámetros del parámetro de habilidad* dependiendo de la distribución asimétrica que se asuma para el trazo.

2.4.2. Estimación Bayesiana del MuIRTA-2PL

La densidad a posteriori para el modelo Bayesiano Jerárquico Multiunidimensional Logístico de dos parámetros de la teoría de respuesta al ítem empleando la construcción

de la función de distribución multivariada presentada la sección 2.3.3 es,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma} | \mathbf{Y}) &\propto L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi} | \mathbf{Y}) P(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Gamma}) P(\boldsymbol{\zeta} | \boldsymbol{\tau}) P(\boldsymbol{\tau}) P(\boldsymbol{\Gamma}) \\
&= \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^J \prod_{i=1}^I P_{kij}^{y_{kij}} [1 - P_{kij}]^{1-y_{kij}} P(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Gamma}) P(\boldsymbol{\zeta} | \boldsymbol{\tau}) P(\boldsymbol{\tau}) P(\boldsymbol{\Gamma}) \\
&= \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^J \prod_{i=1}^I P_{kij}^{y_{kij}} [1 - P_{kij}]^{1-y_{kij}} \\
&\times |\boldsymbol{\Gamma}|^{-J/2} \left(\prod_{j=1}^J \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}_j^t (\boldsymbol{\Gamma}^{-1} - \mathbb{I}) \mathbf{x}_j \right] \prod_{k=1}^m f_k(\theta_{jk}; \boldsymbol{\eta}_k) \right) \times \\
&\times P(\boldsymbol{\zeta} | \boldsymbol{\tau}) P(\boldsymbol{\tau}) P(\boldsymbol{\Gamma}) \tag{2.28}
\end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\zeta}$ corresponde a los parámetros de los ítems, $\boldsymbol{\tau}$ son los hiperparámetros de los ítems y $\boldsymbol{\eta}$ son los parámetros de las distribuciones marginales asociadas a los trazos (dimensiones).

2.5. Estimación y construcciones requeridas en Stan

2.5.1. Estimación de los parámetros del modelo UIRTA-2PL en Stan

A continuación se muestra el código usado para la estimación de los parámetros de los ítem y los trazos latentes con el modelo unidimensional logístico asimétrico de dos parámetros desarrollado en Stan, en particular, el código emplea la distribución Gamma para el trazo latente paranoide¹

```

data{
  int<lower=1> I; // Number of items
  int<lower=1> J; // Number of examinees
  int<lower=1> N; // Number of observations
  int<lower=1, upper=I> ii[N]; // Item for n
  int<lower=1, upper=J> jj[N]; // Examinee for n
  int<lower=0, upper=1> y[N]; // Binary response for n
}
parameters{
  vector<lower=0>[J] theta; // Latent ability for 11. person J
  vector<lower=0>[I] adisc; // Discrimination for item I
  vector<lower=0>[I] bdif; // Difficulty for item I
  real<lower=0> sigma_gamma; //sd of the prior distributions of category difficulty
}
transformed parameters{
  vector[I] a_disc;
  a_disc=log(1+exp(adisc));
}
model{
  vector[N] eta;
  adisc ~ normal(0,sigma_gamma); // Discrimination for item I
  theta ~ gamma(3.41,1.51); // Prior for latent ability parameter
  bdif ~ gamma(3.41,1.51); // Difficulty for item I
  for (n in 1:N)
    eta[n]=a_disc[ii[n]] * (theta[jj[n]] - bdif[ii[n]]); // 2PL Model
  y ~ bernoulli_logit(eta);
}

```

En las líneas 1-8 se especifica el número de ítems, número de aspirantes, número de observaciones $N = I \times J$, la indexación para ítems y personas y finalmente el vector de respuestas dicótomicas. Las líneas 9-20 se declaran los parámetros del modelo y la transformación aplicada al parámetro de discriminación. Por último, en las líneas 21-29 aparecen las distribuciones a priori de los parámetros y finalmente el modelo. Los datos que se cargaron en este caso fueron,

¹Un código análogo se corrió para cada uno de los trazos y para cada una de las distribuciones asociadas al trazo latente, es decir, en total se corrieron nueve veces este código.

List of 6

```
$ n_aspirantes: int 8767
$ n_items      : int 14
$ N            : int 122738
$ ii          : int [1:122738] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
$ jj          : int [1:122738] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...
$ y           : int [1:122738] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
```

2.5.2. Implementación de la Copula en Stan

Para obtener la distribución predictiva se puede aplicar el método de Monte Carlo, a continuación se presenta el algoritmo presentado por (Gao, 2018, p.162) para dicho propósito,

1. Aplique el método de MCMC a cada marginal para generar cadenas de Markov cuya distribución estacionaria será la distribución a posteriori de α_k y β_k para $k = 1, \dots, m$.
2. Para los parámetros muestreados α_k^t y β_k^t , se calcula la correspondiente probabilidad acumulada $u_{kj}^t = G_k(\theta_{kj}; \alpha_k^t, \beta_k^t)$.
3. Calcule la correlación Γ^t producto de la implementación de la copula y genere una muestra $u_{n+1}^t \sim C(u|\Gamma^t)$.
4. Calcule los valores predictivos como,

$$R^t = (G_1^{-1}(u_{n+1,1}^t; \alpha_k^t, \beta_k^t), \dots, G_m^{-1}(u_{n+1,m}^t; \alpha_k^t, \beta_k^t))$$

5. Repita los pasos 2 a 4 para T iteraciones y obtenga la cadena de Markov R^t , con $t = 1, \dots, T$.

El siguiente código elaborado en el lenguaje Stan corresponde a los pasos 1 y 2 de anterior algoritmo,

```
data{
  int J;
  int M;
  real<lower=0> theta1[J];
  real<lower=0> theta2[J];
  real<lower=0> theta3[J];
}
parameters{
  real<lower=0> alpha1;
  real<lower=0> alpha2;
  real<lower=0> alpha3;
  real<lower=0> beta1;
  real<lower=0> beta2;
  real<lower=0> beta3;
}
model{
  for(j in 1:J){
    theta1[j] ~ gamma(alpha1,beta1);
```

```

    theta2[j] ~ gamma(alpha2,beta2);
    theta3[j] ~ gamma(alpha3,beta3);
  }
}
generated quantities{
  vector[J] u1;
  vector[J] u2;
  vector[J] u3;
  for (j in 1:J){
    u1[j] = gamma_cdf(theta1[j],alpha1,beta1);
    u2[j] = gamma_cdf(theta2[j],alpha2,beta2);
    u3[j] = gamma_cdf(theta3[j],alpha3,beta3);
  }
}

```

Con el fin de seguir con el algoritmo anteriormente citado, se elaboraron las funciones que se presentan en el Apéndice A.1. dentro de las que se encuentra la función `randmultinorm_rng` la cual desarrolla los pasos 3 y 4 del algoritmo, y que a su vez esta enlazada con dos funciones más denominadas `corr`, `m2corr` y `m3corr` dado que Stan no cuenta con una función que calcule la correlación entre variables y tampoco que construya la matriz de correlación 2×2 o 3×3 .

```

functions{
  matrix randmultinorm_rng(int J, matrix Sigma) {
    int M = cols(Sigma);
    vector[M] x[J];
    matrix[J,M] vU;
    vector[M] zeros;
    matrix[M,M] L;
    zeros=rep_vector(0,M);
    L=cholesky_decompose(Sigma);
    for (n in 1:J){
      x[n]= multi_normal_cholesky_rng(zeros,L);
    }
    for (n in 1:J){
      for (k in 1:M){
        R[n,k]=x[n] [k];
        vU[n,k]=normal_cdf(R[n,k],0,1);
      }
    }
    return vU;
  }
}

```

Para el desarrollo del paso 5, se extraen los parámetros α_i o β_i obtenidos del ajuste del paso 2, posteriormente se ejecutan las siguientes líneas, esto se realiza en R, dado que Stan no cuenta con una función cuantil para la distribución gamma o lognormal.

²El código que se presenta es muy “rudimentario.”este puede ser mejorado

```

print(stan.fit.u, pars = "alpha2")
print(stan.fit.u, pars = "beta1")

newtheta1<-qgamma(vU[,1],alpha1,beta1)
newtheta2<-qgamma(vU[,2],alpha2,beta2)

```

Es así como se generan los valores predictivos para las variables latentes, los cuales se emplearán en el cálculo de los residuales y de la aplicación de la Prueba de Bondad de Ajuste descrita en la sección 1.6.2.

2.5.3. Estimación de los parámetros del modelo MuIRTA-2PL en Stan.

2.5.3.1. Función multivariada Gamma

Stan solo cuenta con la función multivariada continua `multi_normal_lpdf`, `multi_normal_rng`, que corresponden respectivamente a la función de densidad y la función generadora de aleatorios para la distribución normal multivariada (Stan, 2017, p.548). Por ello y dada la importancia que se le brinda a la naturaleza de los constructos, surge la necesidad de definir una función multivariada asimétrica empleando el lenguaje de programación Stan, la definición de esta función es guiada por la construcción expuesta en la sección 2.3.3. A continuación se presenta la definición de la función `multi_gamma_lpdf`. También se construyó la función `multi_lognormal_lpdf` esta puede ser consultada en el Apéndice A.

```

\* Función Gamma Multivariada *\
functions{
  real multi_gamma_lpdf(matrix Theta, vector Alpha, vector Beta, matrix Gamma){
    int lInf =-6;
    int lSup =6;
    int M=cols(Theta);
    int J=rows(Theta);
    matrix[J,M] vU;
    matrix[J,M] vX;
    matrix[M,M] RInI;
    matrix[J,M] f;
    vector[M] x[J];
    vector[J] u[M];
    vector[M] y[J];
    vector[J] resnor;
    vector[M] zeros;
    vector[M] ones;
    matrix[M,M] L;
    matrix[J,M] R;
    matrix[M,M] invGamma;
    matrix[M,M] IdK;
    real ldet;
    real doublesum;
    real cons;
    real fdj;
  }
}

```

```

zeros=rep_vector(0,M);
ones=rep_vector(1,M);
IdK=diag_matrix(ones);
cons=round(J*0.5);
  for(k in 1:M){
    for(j in 1:J){
      vU[j,k] = gamma_cdf(Theta[j,k],Alpha[k],Beta[k]);
      f[j,k] = gamma_lpdf(Theta[j,k]|Alpha[k],Beta[k]); //Marginales
vX[j,k] = inv_Phi(vU[j,k]);
vX[j,k] = (vX[j,k] < lInf) ? lInf : vX[j,k];
vX[j,k] = (vX[j,k] > lSup) ? lSup : vX[j,k];
u[k][j] = vU[j,k];
x[j][k] = vX[j,k];
    }
  }
invGamma = inverse(Gamma);
ldet=log_determinant(Gamma);
doblesum=sum(f);
RInI=invGamma-IdK;
  for(j in 1:J){
    resnor[j] = (-0.5)*quad_form(RInI,x[j]);
  }
fdj = (-cons*ldet)+sum(resnor)+doblesum;
  return fdj;
}

```

La función `multi_gamma_lpdf` corresponde al tipo de función de densidad `_lpdf` la cual retorna un valor `real`, los argumentos de la función son: dos vectores `Alpha` y `Beta` que corresponde a los parámetros de forma y los parámetros de escala de las marginales (`Gamma`) respectivamente y la matriz `Gamma` que corresponde a la matriz de correlación de las variables latentes a considerar.

En las líneas 6-29 se definen todas las variables y su dimensionalidad empleadas en la función, en la línea 27 se define un vector $1 \times J$ de unos que posteriormente se emplea en la línea 28 para construir la matriz identidad $\mathbb{I}_{J \times J}$, en la línea 29 se defina la constante $\frac{J}{2}$ obtenida en 2.18, y en adelante la construcción de la función sigue de las ecuaciones finales obtenidas en la sección 2.3.3.

Las líneas 33 y 35 corresponden a las transformaciones del figura 2.1 y de los numerales 1 y 2 de la sección 2.3.3. En la línea 34 se calculan los valores de la función de densidad gamma para cada variable latente, y finalmente en las líneas 36-37 se define una estructura condicional para los valores cuantiles de la distribución normal empleando los límites definidos en la líneas 4 y 5, ya que cuando esto no se realizada generada error y valores `NaN` en los cálculos posteriores.

Por último, en las líneas 42-50 se realizan los cálculos requeridos para obtener el valor de la función de log-densidad multivariada,

$$\log(f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\eta}_k, \Gamma)) = -\frac{J}{2} \log |\Gamma| + \sum_{j=1}^J \left[-\frac{1}{2} \boldsymbol{x}_j^t (\Gamma^{-1} - \mathbb{I}) \boldsymbol{x}_j \right] + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^m \log f_k(\theta_{jk}; \boldsymbol{\eta}_k)$$

donde:

`log_determinant(M)`: Calcula el logaritmo del determinante de la matriz `M`
`inverse(M)`: Devuelve la inversa de la matriz `M`
`quad_form(M,N)`: Retorna la forma cuadrática $M'AM$.

La línea 51 retorna el valor real `fdj` de la función de Densidad Gamma Multivariada.

2.5.3.2. Estimación de los parámetros de modelo multiunidimensional del modelo MuIRTA-2PL

Luego de construida la función multivariada requerida, se escribe y ejecuta el modelo multidimensional, el código Stan a continuación,

```
functions{
  /* include multi_gamma_lpdf */
}
data{
  int<lower=1> M; // Number of groups (dimensions)
  int<lower=1> N; // Number of observations
  int<lower=1> I; // Number of items
      int<lower=1> J; // Number of examinees
  int<lower=1, upper=I> ii[N]; // Item for N
  int<lower=1, upper=J> jj[N]; // Examinee for N
  int<lower=1, upper=M> kk[N]; // Dimensions for N
  int<lower=0, upper=1> y[N]; // Binary response for n
  vector<lower=0> [M] AlphMarg; //shape of each 62. marginal gamma
  vector<lower=0> [M] BetMarg; // form of each marginal gamma
}
parameters {
  matrix<lower=0>[J,M] Theta; //Matriz latents ability
  corr_matrix[M] sigma; //Matriz of correlation
  vector<lower=0>[I] adisc; // Discrimination for item I
  vector<lower=0>[I] bdif; // Difficulty for item I
  real<lower=0> sigma_gamma; //sd of the prior
  distributions of category difficulty
}
model{
  vector[N] eta;
  vector[M] ones;
  matrix[M,M] IdK;
  ones=rep_vector(1,M);
  IdK=diag_matrix(ones);
  sigma ~ inv_wishart(m+1,IdK);
  adisc ~ normal(0,sigma_gamma); // Prior Discrimination for item I
  Theta ~ multi_gamma(AlphMarg,BetMarg,sigma); // Prior for latents ability
  for(j in 1:I1){
    bdif[j] ~ gamma(AlphMarg[1],BetMarg[1]); // Prior of the item parameters,
    I1 es el número de ítems del primer subtest
  }
}
```

```

    }
    for(j in 11:I2){
      bdif[j] ~ gamma(AlphMarg[2],BetMarg[2]);// Prior of the item parameters,
      I2 es el número de ítems del segundo subtest
    }
    for(j in 21:I3){
      bdif[j] ~ gamma(AlphMarg[3],BetMarg[3]);// Prior of the item parameters,
      I3 es el número de ítems del tercer subtest
    }
    sigma_gamma ~ cauchy(0,2);// hyper prior for sigma_gamma
    for (n in 1:N)
      eta[n] = adisc[ii[n]] * (Theta[jj[n],kk[n]] - bdif[ii[n]]); // 2PL Model
    y ~ bernoulli_logit(eta);
  }

```

Los aspectos a destacar del anterior código que lo diferencian del código expuesto en la sección 2.5.1 para el caso unidimensional son: Primero, en este código se trabaja con una matriz **Theta** de dimensión $J \times M$ que contiene los trazos de cada respondiente para cada una de las dimensiones consideradas, línea 66; la segunda diferencia es, el empleo de la función multivariada definida `multi_gamma_lpdf` la cual es asignada como *a priori* para **Theta**, línea 80 y el último aspecto a destacar radica en la asignación de la distribución gamma univariada para cada uno de los grupos de parámetros de dificultad de cada una de las subpruebas del test, ver líneas 81-90.

Simulación

Este capítulo tiene por objeto ilustrar el funcionamiento de las funciones de densidad multivariada, `multigamma_lpdf`, `multilognormal_lpdf`, requerida en el modelo propuesto MuIRTA-2PL, a través de la simulación de un test dicotómico logístico de dos parámetros, donde a_i y b_i son el parámetro de discriminación y dificultad respectivamente. La copula gaussiana empleada en la construcción de la función de densidad multivariada deseada, considera la estructura de correlación y las distribuciones marginales de las variables aleatorias, esto se puede ver como una ventaja para los casos en los que no existe funciones que integren o combinen las distribuciones asignadas a cada uno de los trazos latentes.

Un propósito paralelo al anterior es evaluar la recuperación de los parámetros de las distribuciones marginales, los parámetros del modelo Teoría de Respuesta al Ítem propuesto y de la correlación. El procedimiento empleado para la construcción del test, se presenta a continuación, este sigue los trabajos Yan (2007), (Gao, 2018, cap. 6), blog: Alice (n.d.) y del código disponible en <https://github.com/stan-dev/example-models/tree/master/misc/irt>.

Se realizaron tres simulaciones de test donde cada test generado se divide en tres subtest (tres habilidades), esto es, $m = 3$, cada subprueba consta de 10 ítems, en total 30 ítems, por ende, se tienen 60 parámetros de ítems asociados a las habilidades específicas, a_i y b_i , generados desde una distribución Gamma respectivamente. Por otro lado, 1000 parámetros de habilidad, en total 3000, $\theta_j = (\theta_{1j}, \theta_{2j}, \theta_{3j})$ fueron generados en cada simulación, desde una distribución Gamma (3 primeras simulaciones), cada simulación trabaja con una matriz de correlación Γ dada,

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 1 & 0.7 \\ 0.9 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$$

en consecuencia, la matriz Γ_1 fue empleada en la simulación 1, Γ_2 se empleo en la simulación 2, por último Γ_3 en la simulación 3.

3.1. Generación del Test

En esta sección se mostrará el paso a paso para la generación del test, teniendo presente la correlación asignada a los variables latentes,

1. Se generan $J = 1000$ muestras a partir de una distribución normal multivariante de tres variables aleatorias dada la matriz de correlación Γ ¹ utilizando la librería MASS, y se calcula nuevamente la correlación empleando el método `pearson`.

```
set.seed(100)
m <- 3
J <- 1000
sigma <- matrix(c(1, 0.4, 0.2,
                  0.4, 1, 0.3,
                  0.2, 0.3, 1),
                nrow=3)
x <- mvrnorm(J,mu=rep(0,m),Sigma=sigma,empirical=T)
u <- pnorm(x)
```

En la figura 3.1 se observa la estructura de correlación asignada para la generación del vector \mathbf{x} y en la figura 3.2 se muestra la correlación de las variables contenidas en el vector \mathbf{u} , las cuales tienen distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Se observa que la correlación entre las variables u_1, u_2 y u_3 , es aproximadamente la correlación inicialmente asignada, ya que la transformación aplicada, $\Phi(x) = u$, no cambia la estructura de correlación entre las variables aleatorias.

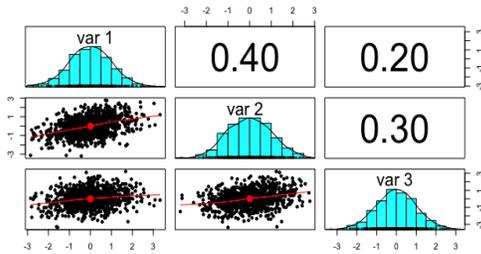


FIGURA 3.1. Correlación de las muestras

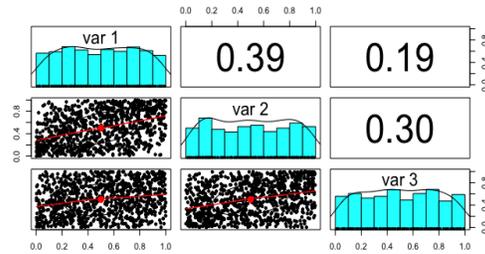


FIGURA 3.2. Correlación de las variables u

2. Se debe asignar las distribuciones a cada variable del vector \mathbf{u} , teniendo presente que las variables θ_1, θ_2 y θ_3 tienen función de distribución de probabilidad conocida F_1, F_2 y F_3 . Las distribuciones para los parámetros de habilidad asociados a cada subtest a simular serán, $\theta_1 \sim \mathcal{G}(2, 0.5)$, $\theta_2 \sim \mathcal{G}(2.5, 0.75)$ y $\theta_3 \sim \mathcal{G}(3, 1)$.

```
seed_b <- 250L
set.seed(seed_b)
scale.theta1<-0.5
scale.theta2<-0.75
```

¹La matriz propuesta, debe ser definida positiva, por ello se reviso que sus valores propios fueran todos positivos.

```

scale.theta3<-1

theta1 <- qgamma(u[,1],shape=2,scale=scale.theta1)
theta2 <- qgamma(u[,2],shape=2.5,scale=scale.theta2)
theta3 <- qgamma(u[,3],shape=3,scale=scale.theta3)

```

La gráfica 3.3 presenta los valores del vector θ simulados y en figura 3.4 se observa la estructura de dependencia para las variables latentes (Trazos) θ_1 , θ_2 , θ_3 construida de forma simple..

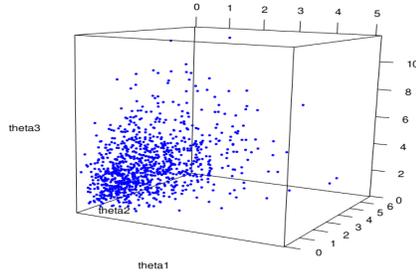


FIGURA 3.3. Gráfico 3D de las variables simuladas

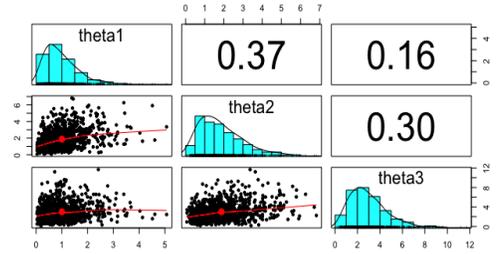


FIGURA 3.4. Correlación de las variables latentes θ_1 , θ_2 y θ_3 .

- Se generan tres test dicotómicos, cada uno de 10 ítems aplicados a $J = 1000$ individuos y en el que la probabilidad de acierto para el individuo j al ítem i que pertenece al subtests k , esta dada por,

$$P_{kij} = P(Y_{kij} = 1 | \theta_{kj}, a_{ki}, b_{ki}) = \frac{1}{1 + e^{-a_{ki}(\theta_{kj} - b_{ki})}} \quad (3.1)$$

La simulación se realizo con la siguiente información, $j = 1, \dots, 1000$ e $i = 1, \dots, 10$ y $m = 3$, la distribución empleada para generar el parámetro de discriminación fue $\mathcal{LN}(0, 0.25)$ en todo el test, para el parámetro de dificultad se empleo las mismas distribuciones asignadas al trazo respectivo, esto es, $b_1 \sim \mathcal{G}(2, 0.5)$, $b_2 \sim \mathcal{G}(2.5, 0.75)$ y $b_3 \sim \mathcal{G}(3, 1)$. A continuación se presenta el código que genera los valores de respuesta dicotómicos de cada test.

```

inv_logit = function(u) {1.0/(1.0 + exp(-u));}
J <- 1000;
I1=I2=I3=10;
I<-I1+I2+I3;
for (j in 1:J){
  for (i in 1:I1){
    y_1[j,i] <- rbinom(1,1,inv_logit(adisc[i] * (theta1[j] - bdif1[i])));
    y_2[j,i] <- rbinom(1,1,inv_logit(adisc[i] * (theta2[j] - bdif2[i])));
    y_3[j,i] <- rbinom(1,1,inv_logit(adisc[i] * (theta3[j] - bdif3[i])));
  }
}

```

Algunas medidas descriptivas de los parámetros simulados se presentan en la Tabla 3.1.

<i>Medida</i>	θ_1	θ_2	θ_3	b_1	b_2	b_3	a_i
<i>mín</i>	0.033	0.067	0.139	0.941	0.071	1.324	0.713
Q_1	0.495	0.942	1.737	1.709	1.218	2.196	0.847
<i>Mediana</i>	0.843	1.628	2.647	2.158	2.573	2.850	0.947
<i>Media</i>	0.999	1.875	2.999	3.215	2.362	2.929	1.013
Q_3	1.344	2.519	3.887	3.837	3.144	3.383	1.189
<i>máx</i>	5.067	6.826	11.679	9.216	5.029	5.577	1.445
<i>sd</i>	0.712	1.178	1.737	2.587	1.571	1.227	0.239

TABLA 3.1. Medidas Descriptivas de los parámetros simulados.

Los pasos que se acaban de ilustrar se siguieron para cada una de las tres simulaciones propuestas.

3.2. Distribución predictiva vía método MCMC.

El objetivo principal del ejercicio que se expondrá a continuación es de tipo pedagógico, ya que si bien los códigos y las construcciones que aquí se desarrollaron no se emplean directamente en el modelo, el estudio de la propuesta de Gao (2018) permitió comprender aspectos relevantes de la implementación de la copula, cuando esta es usada para modelar la dependencia entre variables, en este caso entre trazos latentes.

Una vez generado el test con los supuestos básicos de la teoría de respuesta al ítem, esto es, se verificó la unidimensional de cada subprueba, se realizó el proceso de recuperar los parámetros de las marginales y la correlación, empleando la propuesta de Gao (2018, pág 162-165) que se expuso con detalle en la sección 2.5.2, para el ajuste de tres variables aleatorias (constructos). Hamiltoniano Monte Carlo (HMC) es la metodología Bayesiana empleada por Stan.

1. Se generaron 3 cadenas cada una de 3000 iteraciones para los parámetros de forma y escala $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ y β_3 respectivamente, tomando 1500 cadenas de calentamiento, las gráficas con las cadenas del muestreo de los parámetros se presentan en la figura 3.5 y 3.6, luego se emplea la media para estimar los parámetros de la distribución gamma supuesta para cada variable latente y con ellos generar los vectores u_1, u_2 y u_3 , a través de la función de distribución gamma.
2. Posteriormente se hace el cálculo de la correlación dos a dos de $\Phi^{-1}(u_1)$, $\Phi^{-1}(u_2)$ y $\Phi^{-1}(u_3)$, y se genera la matriz de correlación Γ . Dado que Stan no cuenta con una función que realice el cálculo de la correlación², se construyen las funciones **corr** y **m2corr** y **m3corr**, que pueden ser consultadas en el Apéndice C, dichas funciones generan la

²Sean X y Y variables aleatorias reales, con $0 < Var(X) < \infty$ y $0 < Var(Y) < \infty$. El coeficiente de correlación entre X y Y se define como:

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

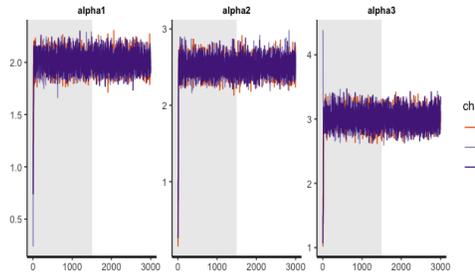


FIGURA 3.5. Cadenas para los parámetros de forma α_1, α_2 y α_3 (Ver apéndice C.)

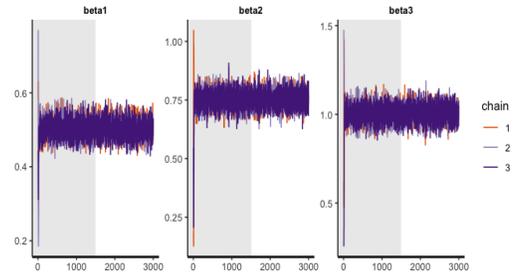


FIGURA 3.6. Cadenas para los parámetros de escala β_1, β_2 y β_3 (Ver apéndice C)

siguiente matriz,

$$\widehat{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.3994016 & 0.1997078 \\ 0.3994016 & 1.00 & 0.2996210 \\ 0.1997078 & 0.2996210 & 1.00 \end{bmatrix}$$

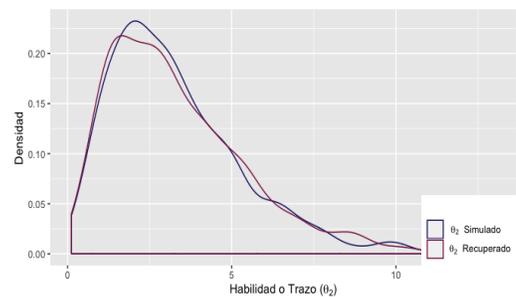
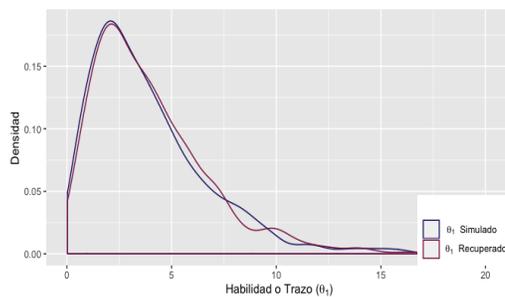
- Finalmente empleando la función `randommultinorm_rng` se genero la cantidad solicitada de vectores aleatorios de una distribución normal multivariada, dada una matriz de correlación; además esta función genera J vectores aleatorios que se obtienen con $u_k = \Phi(x_k)$, $k = 1, 2, 3$, los cuales se emplearan para generar las variables latentes θ_k , a través de la función `qgamma`³.

```
vU<-randommultinorm_rng(J,Gamma)
```

```
newtheta1<-qgamma(vU[,1],2,0.5)
newtheta2<-qgamma(vU[,2],2.51,0.75)
newtheta3<-qgamma(vU[,3],3.01,1)
```

3.2.1. Comparación entre trazo simulado y el trazo recuperado

Se procede a compara los valores de los parámetros de la habilidad para cada test estimados con los de la simulación con el fin de determinar la confiabilidad de la implementación de la Copula Gaussiana. En la figura se contrastan los valores simulados y los recuperados para los parámetros θ_k



³Stan no cuenta con una función análoga a la función cuantil de la distribución gamma, por ello esta parte del proceso se realiza en R, no obstante es posible construirla, pero esto sale del propósito del trabajo.

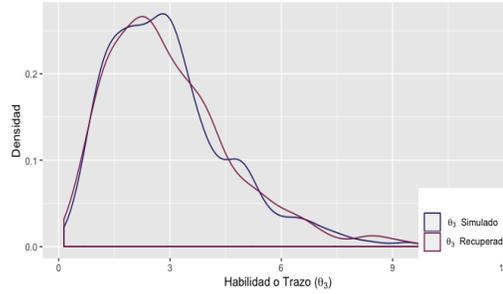


FIGURA 3.7. Comparación entre los valores simulados y los recuperados para el parámetro de habilidad θ en cada subtest.

Se calcula nuevamente la correlación entre los trazos recuperados, además se recupera la media y desviación para cada trazo y con ellos se calculan los parámetros de forma y escala de cada θ_k , estos últimos cálculos se realizan siguiendo la propuesta de Yan (2007), para la verificación del correcto funcionamiento de la copula. Dado que $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$ y $\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$, luego $\alpha = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$ y $\beta = \frac{\mu}{\sigma^2}$.

$$\widehat{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.3636384 & 0.1899246 \\ 0.3636384 & 1.00 & 0.2802668 \\ 0.1899246 & 0.2802668 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Se observa en la tabla 3.2 que el error absoluto que se obtiene para los parámetros de las

	μ_i	σ_i	α_i	β_i	$ \alpha_i - \hat{\alpha}_i $	$ \beta_i - \hat{\beta}_i $
θ_1	3.885	2.802	1.922	0.495	0.078	0.005
θ_2	3.296	2.047	2.592	0.786	0.092	0.036
θ_3	2.969	1.671	3.159	1.064	0.159	0.064

TABLA 3.2. Recuperación de los parámetros de la distribución asignada a los trazos.

habilidades son menores al 0.1 con excepción de parámetro de forma para el tercer trazo, no obstante la recuperación de los parámetros es aceptable.

3.2.2. Función de densidad multivariada

Realizado el ejercicio de comprensión de la implementación de la copula Gaussiana, se procedió a construir en Stan la función `multi_gamma_lpdf` la cual fue explicada a detalle en la sección 2.5.3. En esta sección se procedió a comprobar la recuperación de los parámetros de las marginales y de la matriz de correlación cuando se ejecuta la función construida `multi_gamma_lpdf`, para ello se ejecutaron 3 cadenas de Markov de 400 iteraciones con 200 de calentamiento, los datos ingresados se presentan a continuación, el código completo puede ser consultado en el apéndice A.

```
str(data_irt_funcion) #Resumen datos de entrada
List of 4
 $ M      : num 3
 $ J      : num 1000
 $ AlphMarg: num [1:3] 2 2.51 3.01
```

```

$ BetMarg : num [1:3] 0.5 0.75 1

stan.fit.copula <- stan(file = 'Funciondensidad.stan',
data = datafit.copula, iter = 400, warmup = 200, chains = 3)

```

En la tabla 3.3 se presentan los valores recuperados de los parámetros de las marginales gamma, es este caso forma y escala, junto con algunas estadísticas descriptivas, media y desviación estándar respectiva para cada una de las tres variables consideradas.

	μ_i	σ_i	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_i$	$ \alpha_i - \hat{\alpha}_i $	$ \beta_i - \hat{\beta}_i $
Marginal 1	3.999	2.828	2.001	0.500	0.001	0.000
Marginal 2	3.348	2.115	2.506	0.749	0.006	0.001
Marginal 3	3.010	1.737	3.002	0.997	0.002	0.003

TABLA 3.3. Comparación de los parámetros de la distribución asignada a los trazos, y los parámetros recuperados vía la función de densidad multivariada.

Finalmente, en la matriz $\widehat{\Gamma}_1$ se observa que las correlaciones estimadas mostraron valores cercanos a las correlaciones verdaderas, todos los resultados que arrojo Stan pueden consultarse en (Apendice B.), por último en el gráfico 3.8 se observa como el criterio de convergencia Rhat que nos proporciona stan, se encuentra entre 1.01 o 0.99.

$$\widehat{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.43 & 0.21 \\ 0.43 & 1.00 & 0.29 \\ 0.21 & 0.29 & 1.00 \end{bmatrix}$$

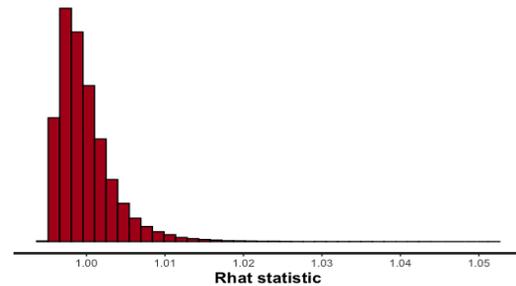


FIGURA 3.8. Correlaciones entre trazos estimados (izq.) y Gráfico criterio Rhat (der.)

3.3. Implementación del modelo UIRTA-2PL y MuIRTA-2PL

Se ejecuto en R empleando la interface `rstan` el modelo unidimensional propuesto UIRTA-2PL y el modelo multidimensional propuesto MuIRTA-2PL en cada uno de los tres test simulados, se ejecutaron 3 replicas cada una de 400 iteraciones donde las primeras 200 fueron de calentamiento. Los códigos empleados fueron expuestos en la sección 2.5 del presente trabajo.

3.3.1. Comparación entre los parámetros incidentales simulados y los recuperados del Test.

Se realizó una revisión de la correlación recuperada a través de la implementación del modelo MuIRTA-2PL, se obtuvieron las siguientes matrices de correlación para cada simulación:

$$\widehat{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.42 & 0.20 \\ 0.42 & 1.00 & 0.27 \\ 0.20 & 0.27 & 1.00 \end{bmatrix} \quad \widehat{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} 1.00 & -0.03 & 0.02 \\ -0.03 & 1.00 & 0.00 \\ 0.02 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} \quad \widehat{\Gamma}_3 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.79 & 0.89 \\ 0.79 & 1.00 & 0.69 \\ 0.89 & 0.69 & 1.00 \end{bmatrix}$$

por otro lado si se calcula la correlación entre los trazos latentes recuperados, cuando se emplea el modelo UIRTA-2PL de manera separada para cada constructo se obtiene las siguientes matrices de correlación,

$$\widehat{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.33 & 0.15 \\ 0.33 & 1.00 & 0.22 \\ 0.11 & 0.22 & 1.00 \end{bmatrix} \quad \widehat{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} 1.00 & -0.04 & -0.009 \\ -0.04 & 1.00 & -0.004 \\ -0.000 & -0.004 & 1.00 \end{bmatrix} \quad \widehat{\Gamma}_3 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.62 & 0.73 \\ 0.62 & 1.00 & 0.52 \\ 0.73 & 0.52 & 1.00 \end{bmatrix}$$

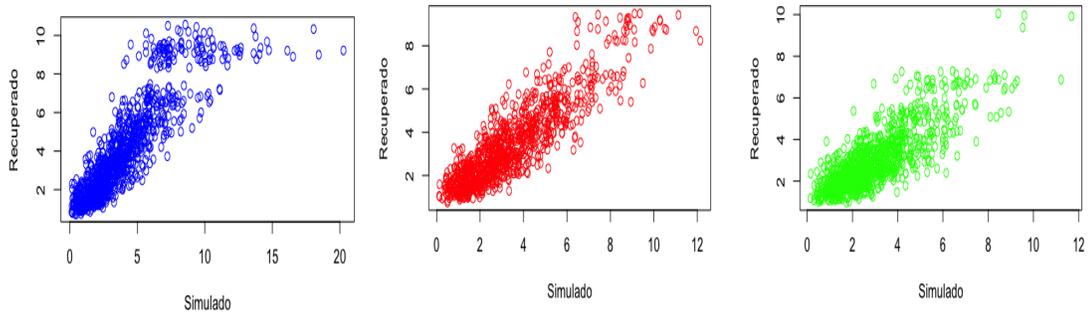
Se observa que la correlación obtenida para las dos replicaciones tanto en al emplear el modelo UIRTA-2PL y MuIRTA-2PL en contraste con las correlaciones verdaderas (iniciales) de cada simulación, muestra que se recupera la estructura de dimensionalidad de la habilidad. Se puede ver para la primera fila de matrices anteriores, que la correlación entre $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_3$ para el modelo multiunidimensional (MuIRTA-2PL) se acercan a los valores de correlación original para la simulación 1 y 3, sin embargo, note que las correlaciones estimadas con el modelo UIRTA-2PL mostraron valores más pequeños que las correlaciones verdaderas en la simulación 2. Cuando la correlación es nula entre variables latentes parece ser más apropiado el uso de un modelo unidimensional empleado por separado para cada trazo, sin ser el modelo multiunidimensional completamente descartable. Dicho de otra forma, la implementación separada del modelo unidimensional funciona bien en la simulación 2, pues la matriz $\widehat{\Gamma}_2$ es la más cercana a la matriz original, que corresponde al caso en el que no se considero correlación entre las verdaderas habilidades latentes, no obstante como se observa en la Tabla 3.5 no se evidencia una diferencia marcada en el error absoluto para las tres simulaciones cuando se emplea el modelo multiunidimensional MuIRTA-2PL.

	Simulación 1			Simulación 2			Simulación 3		
	Modelo UIRTA-2PL por separado								
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_1	θ_2	θ_3	θ_1	θ_2	θ_3
$\hat{\theta}_1$	0.9228			0.9251			0.8231		
$\hat{\theta}_2$		0.8724			0.8664			0.8702	
$\hat{\theta}_3$			0.8875			0.8892			0.8347
	Modelo MuIRTA-2PL								
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_1	θ_2	θ_3	θ_1	θ_2	θ_3
$\hat{\theta}_1$	0.9224			0.9251			0.9391		
$\hat{\theta}_2$		0.8817			0.8655			0.9027	
$\hat{\theta}_3$			0.8907			0.8861			0.9294

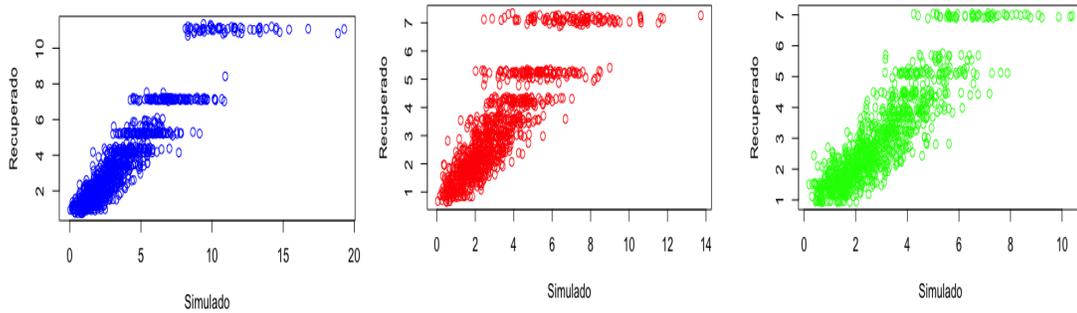
TABLA 3.4. Correlación entre el trazo simulado y el trazo recuperado

En cuanto a la recuperación de los parámetros referentes al trazo latente, las correlaciones entre los valores verdaderos θ_i y los estimados $\hat{\theta}_i$ es bastante buena en ambas implementaciones, aunque a menudo uno solo está interesado en los valores relativos de θ en lugar de los valores verdaderos para los diferentes examinados, pero el objeto de las simulaciones en este caso es el de evaluar la estimación a la luz de los modelos.

Simulación 1



Simulación 2



Simulación 3

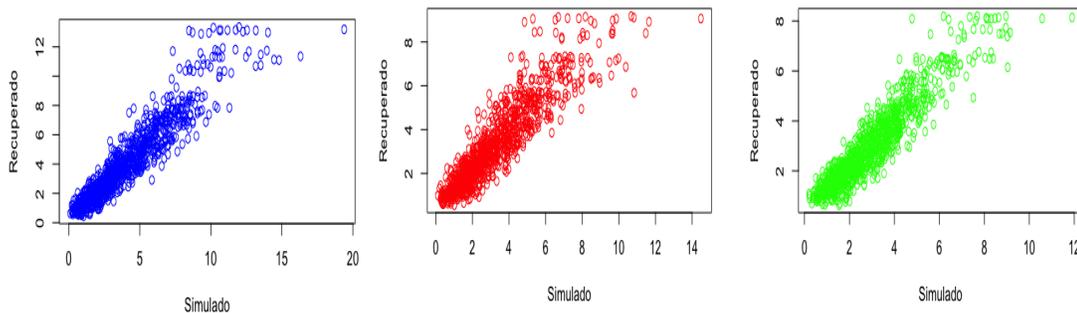


FIGURA 3.9. Comparación entre los valores simulados y los recuperados para el trazo (MuIRTA-2PL), de izq. a der. trazo 1, trazo 2 y trazo 3.

Las correlaciones entre el trazo el estimado y el trazo verdadero para los dos modelos en las tres simulaciones se presentan en la Tabla 3.4. La implementación por separado del modelo unidimensional UIRTA-2PL no fue mejor que el modelo multidimensional MuIRTA-2PL en la recuperación de parámetros de habilidad en cualquiera de los tres escenarios simulados. Se puede además establecer que para los casos en los que se tenga indicios de una alta correlación entre los constructos, el modelo MuIRTA-2PL, figura 3.9 puede llegar a ser más conveniente. Un resultado similar ya fue obtenido por Sheng and Wikle (2007), quien realizó cuatro simulaciones de un test, con $\theta \sim \mathcal{N}_\epsilon(0, \Sigma)$, para diferentes matrices de correlación Σ ; en particular en la cuarta simulación, al igual que aquí, no considero correlación entre los trazos, esto es, $\Sigma = \mathbb{I}^m$, encontrando que el modelo multidimensional propuesto (MuIRTA-2PL) trabaja mejor que el modelo unidimensional (UIRTA-2PL), con excepción de los casos en el que los ítems miden estrictamente la misma habilidad.

Por último, se presentan las gráficas de las cadenas para 3 individuos (ind.10, ind. 200 y ind.750), junto con las gráficas de las densidades correspondientes para los tres trazos, para la **Simulación 1**⁴.

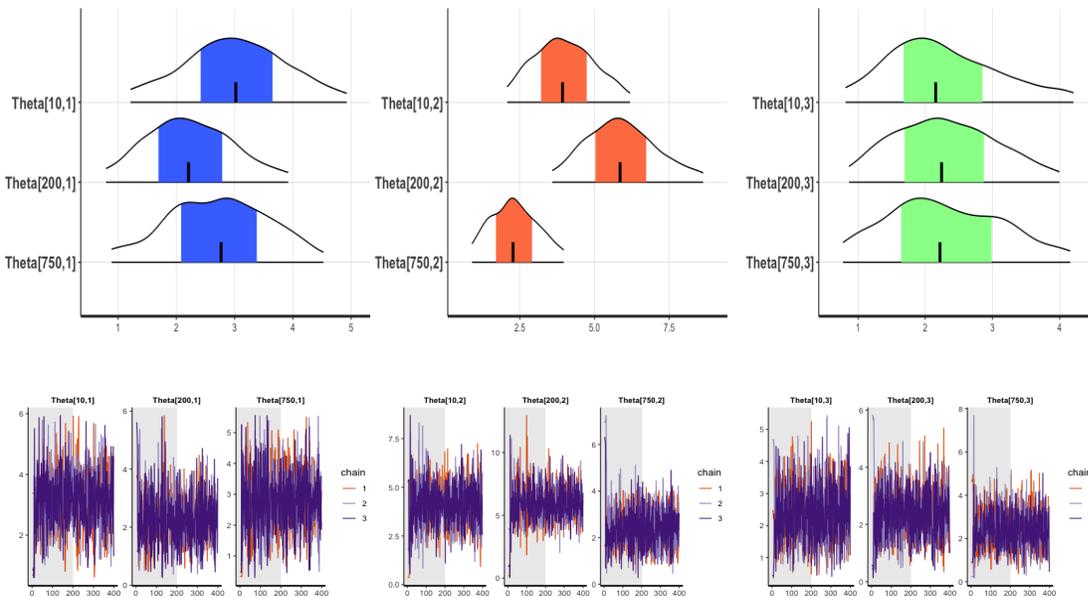


FIGURA 3.10. (*Simulación 1*) Gráficos de las MCMC y densidad para algunos individuos. Izq. a Der. Test1, Test2 y Test3.

Como se observa en la gráfica 3.11 la recuperación del trazo es buena, y junto con las consideraciones y mencionadas en la primera parte de este análisis referente a la correlación, nos permite postular la siguiente afirmación, el modelo multidimensional que considera la correlación entre los trazos es una propuesta a considerar para test con una estructura de subtest, en que la dimensión del trazo coincide con las dimensión del test, ya que proporciona un mejor ajuste que el obtenido al aplicar un modelo unidimensional por separado para cada trazo.

⁴Los mismos gráficos se generaron para las otras dos simulaciones, pueden ser consultados en el Apéndice B

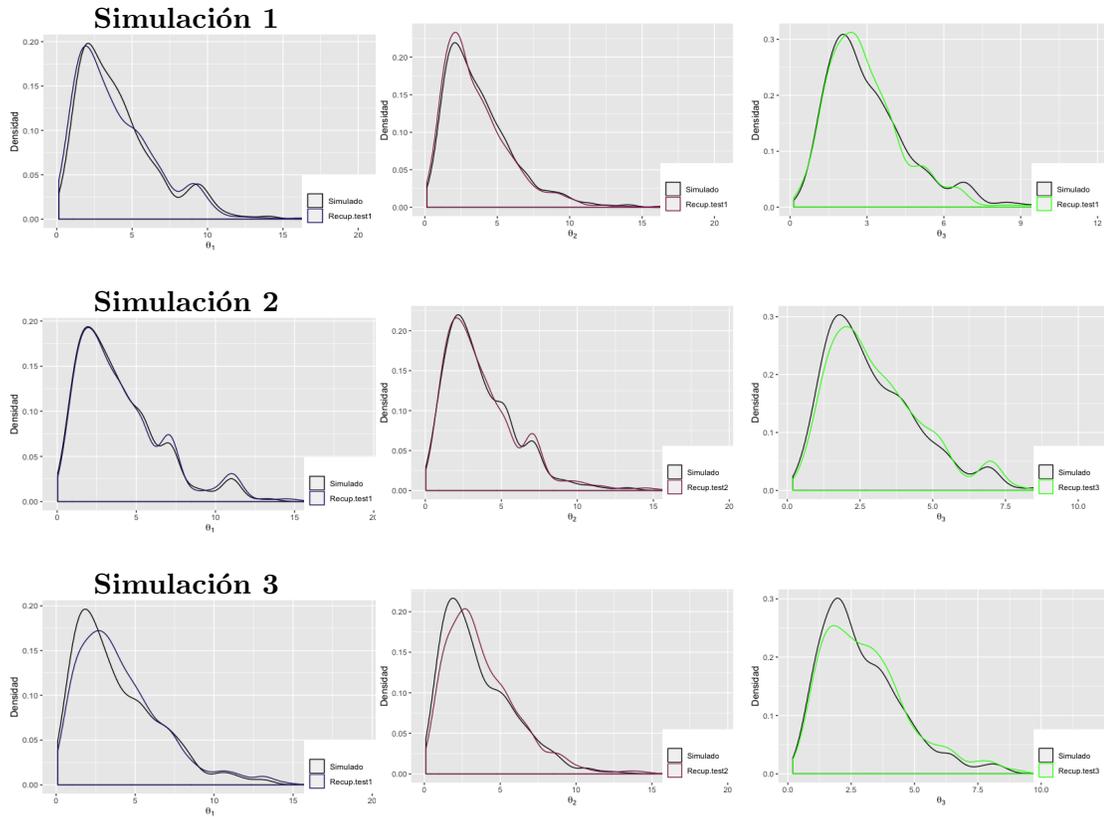


FIGURA 3.11. Densidades recuperadas de los trazos simulados (MuIRTA-2PL)

	<i>mín</i>	Q_1	<i>Mediana</i>	<i>Media</i>	Q_3	<i>máx</i>	<i>sd</i>
Simulación 1							
$ \theta_1 - \hat{\theta}_1 $	0.00051	0.32673	0.69630	0.97748	1.28826	6.04803	1.03561
$ \theta_2 - \hat{\theta}_2 $	0.00013	0.24724	0.61572	0.74206	1.05202	3.89970	0.61282
$ \theta_3 - \hat{\theta}_3 $	0.00002	0.31391	0.63782	0.78319	1.07056	4.34386	0.64187
Simulación 2							
$ \theta_1 - \hat{\theta}_1 $	0.00135	0.26507	0.60116	0.77654	1.03362	8.21472	0.76503
$ \theta_2 - \hat{\theta}_2 $	0.00003	0.26236	0.55714	0.74206	0.95185	6.47408	0.73685
$ \theta_3 - \hat{\theta}_3 $	0.00019	0.20806	0.46555	0.59477	0.84606	3.41716	0.51109
Simulación 3							
$ \theta_1 - \hat{\theta}_1 $	0.000009	0.2297	0.49882	0.68277	0.92864	6.19361	0.67281
$ \theta_2 - \hat{\theta}_2 $	0.001128	0.22682	0.48327	0.65036	0.90653	5.42058	0.615298
$ \theta_3 - \hat{\theta}_3 $	0.00047	0.19561	0.40288	0.49111	0.66643	3.76380	0.411837

TABLA 3.5. Estadísticas descriptivas para el error absoluto de los trazos.

3.3.2. Comparación entre los parámetros estructurales simulados y los recuperados del Test.

Para examinar la recuperación de los parámetros de los ítems en cada caso, se obtuvieron las diferencias absoluta entre los parámetros del ítem verdadero y el estimado en cada replicación, y sus promedios se usaron para describir con qué precisión se estimaron los

parámetros para las tres simulaciones. Como se muestra en la Tabla 3.6 y 3.7 para las tres simulaciones, los dos modelos no difieren significativamente, es decir, el error absoluto no es mayor a 0.5. Sin embargo, en la simulación 2, el modelo multunidimensional MuIRTA-2PL tiene presenta los errores absolutos más pequeños para ambos parámetros estructurales a_i y b_i . Revise las gráficas 3.13 y 3.12.

	<i>mín</i>	Q_1	<i>Mediana</i>	<i>Media</i>	Q_3	<i>máx</i>	<i>sd</i>
Simulación 1							
$ a_i - \hat{a}_{1i} $	0.01125	0.02640	0.03559	0.05596	0.07868	0.14899	0.0457
$ a_i - \hat{a}_{2i} $	0.02407	0.03313	0.04338	0.05246	0.05463	0.10699	0.0287
$ a_i - \hat{a}_{3i} $	0.00704	0.02940	0.06138	0.06773	0.08084	0.17156	0.0553
Simulación 2							
$ a_i - \hat{a}_{1i} $	0.00012	0.01545	0.03513	0.05446	0.04436	0.17671	0.06518
$ a_i - \hat{a}_{2i} $	0.01379	0.03425	0.07897	0.08852	0.13169	0.20314	0.06402
$ a_i - \hat{a}_{3i} $	0.00730	0.02302	0.08097	0.10697	0.14946	0.31784	0.10448
Simulación 3							
$ a_i - \hat{a}_{1i} $	0.00696	0.02607	0.06501	0.10178	0.16705	0.25809	0.09525
$ a_i - \hat{a}_{2i} $	0.00459	0.04589	0.06299	0.07135	0.07877	0.15424	0.04784
$ a_i - \hat{a}_{3i} $	0.0004	0.01553	0.02989	0.08198	0.06956	0.32232	0.115589

TABLA 3.6. Estadísticas descriptivas para el error absoluto del parámetro de discriminación empleando el modelo MuIRTA-2PL

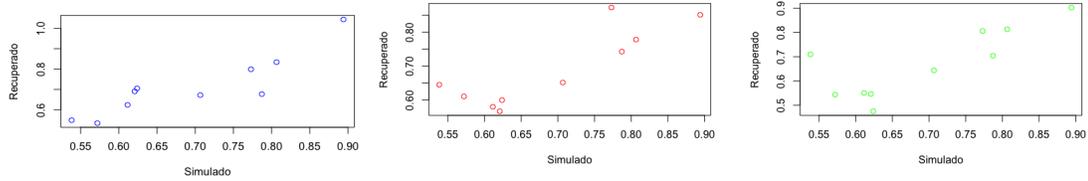
	<i>mín</i>	Q_1	<i>Mediana</i>	<i>Media</i>	Q_3	<i>máx</i>	<i>sd</i>
Simulación 1							
$ b_i - \hat{b}_{1i} $	0.02022	0.03735	0.06992	0.11755	0.13962	0.35089	0.1141
$ b_i - \hat{b}_{2i} $	0.01527	0.04934	0.08387	0.10531	0.11004	0.34026	0.0974
$ b_i - \hat{b}_{3i} $	0.00176	0.04267	0.09279	0.10784	0.16569	0.25394	0.0850
Simulación 2							
$ b_i - \hat{b}_{1i} $	0.02427	0.04326	0.07665	0.07918	0.10662	0.15822	0.04298
$ b_i - \hat{b}_{2i} $	0.02535	0.05530	0.11677	0.13088	0.15367	0.40055	0.10917
$ b_i - \hat{b}_{3i} $	0.00902	0.017387	0.03772	0.06469	0.10629	0.19741	0.19741
Simulación 3							
$ b_i - \hat{b}_{1i} $	0.01984	0.07974	0.09220	0.13014	0.15921	0.44458	0.122347
$ b_i - \hat{b}_{2i} $	0.00936	0.0589	0.07257	0.11005	0.118137	0.38721	0.107714
$ b_i - \hat{b}_{3i} $	0.00559	0.03221	0.07923	0.08812	0.10899	0.24416	0.07358

TABLA 3.7. Estadísticas descriptivas para el error absoluto del parámetro de dificultad empleando el modelo MuIRTA-2PL

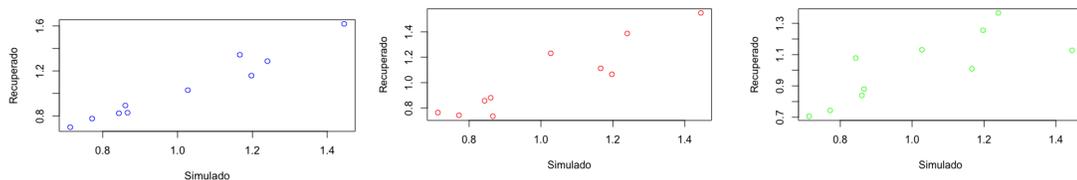
Los parámetros de discriminación a_{ki} y de dificultad b_{ki} verdaderos se comparan con los estimados al emplear el modelo multiunidimensional propuesto MuIRTA-2PL, para ello se cálculo la correlación entre ellos, se obtuvieron los siguientes resultados referentes al parámetro de discriminación: En la simulación 1 se obtuvieron las correlaciones 0.8837, 0.8549 y 0.7903, para la simulación 2 se obtuvo 0.9789, 0.9253 y 0.7790, finalmente para la simulación 3 se obtiene 0.9287, 0.9462 y 0.8620, además observe que la figura 3.12, en los tres casos la correlación entre a_i y \hat{a}_i es mayor al 0.85, lo que evidencia una buena

recuperación del parámetro de discriminación al emplear el modelo propuesto MuIRTA-2PL, aún para el caso en que no se considero correlación entre los trazos.

Simulación 1



Simulación 2



Simulación 3

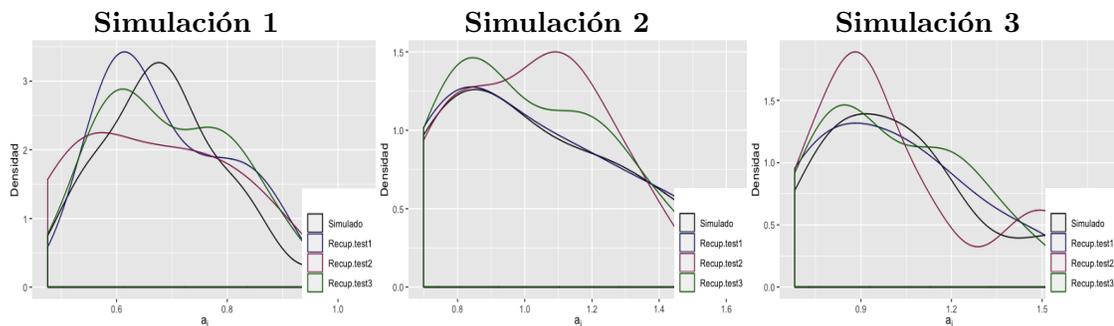
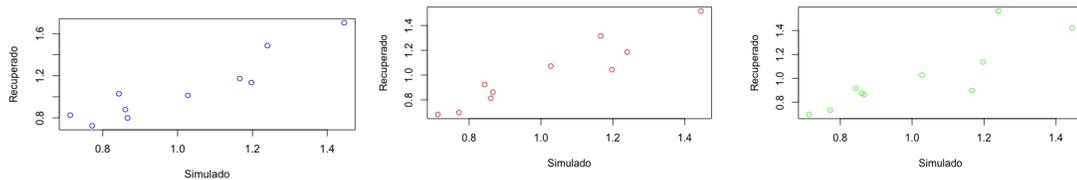
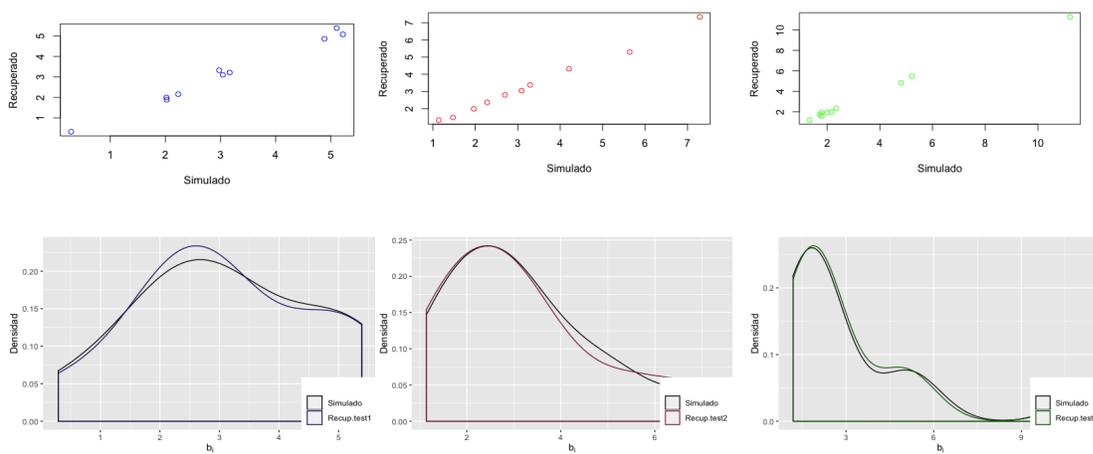


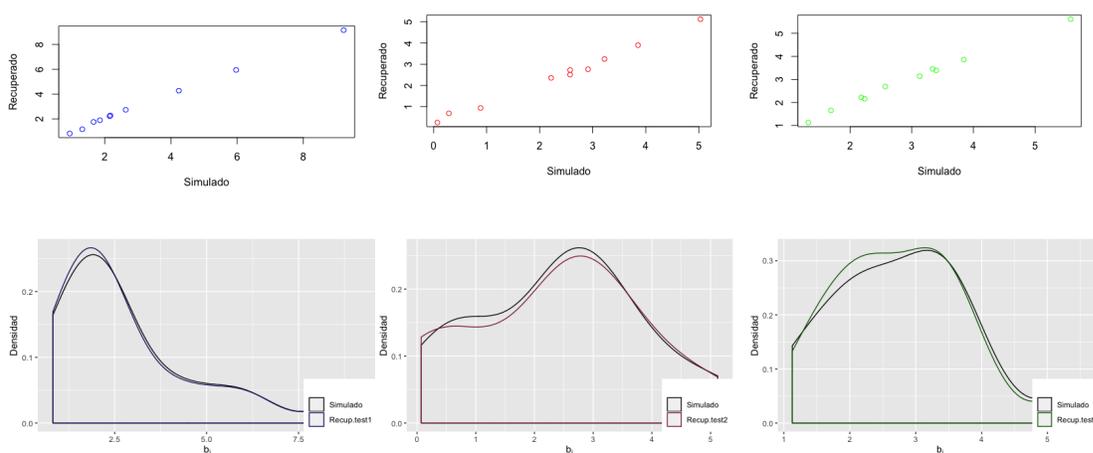
FIGURA 3.12. Comparación entre los valores simulados y recuperados para el parámetro de discriminación

Por último, una observación similar a la obtenida para el parámetro de discriminación se obtiene para el parámetro de dificultad, ya que las correlaciones obtenidas fueron: 0.9950, 0.9975 y 0.9991 entre los valores simulados y los recuperados en cada test para la simulación 1, 0.9993, 0.9963 y 0.9980 para la simulación 2 y 0.9992, 0.9957 y 0.9972 para la simulación 3, también observe la figura 3.13. Además al revisar las estadísticas descriptivas para el error absoluto que se encuentra en la Tabla 3.7, se observa que la desviación estándar en las tres simulaciones no supera el 0.1. de igual forma como se hizo con el parámetro de discriminación.

Simulación 1



Simulación 2



Simulación 3

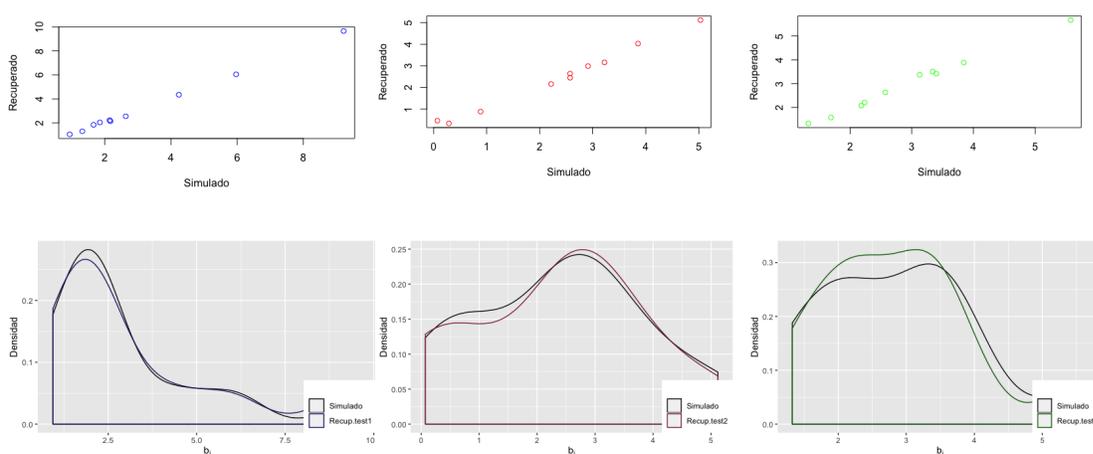


FIGURA 3.13. Comparación entre los valores simulados y recuperados para el parámetro de dificultad

En general, los resultados de los estudios de simulación confirman que la implementación por separado del modelo unidimensional UIRTA-2PL solo resulta ser un poco más conveniente cuando las dimensiones del test no están correlacionadas, lo que parece obvio. La implementación separada del modelo unidimensional no demostró ser mejor que el modelo multiunidimensional en los escenarios simulados para la recuperación de los parámetros de los ítems. Por otro lado, cuando existe correlación entre los trazos definitivamente el modelo multiunidimensional resulta ser mejor que el modelo unidimensional en todos los aspectos, es decir, recupera bien los trazos, los parámetros de los ítems y la correlación entre ellos. El modelo multiunidimensional MuIRTA-2PL resulta ser aplicable en situaciones con varias estructuras de dependencia, obteniendo buenos resultados, resultando ser un modelo más flexible.

Análisis de Datos Reales

4.1. Descripción de los datos

Los datos que se analizarán en este capítulo corresponden a la Prueba de Personalidad que fue aplicada durante el proceso de admisión a la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad Central de Venezuela para el periodo 2014 . El test de personalidad fue aplicado a 8767 aspirantes a ingresar proyectos curriculares pertenecientes a la Facultad de Humanidades y Educación. La prueba es un test psicométrico titulado PIHEMA-R2 elaborado por Ponce and Granell (2006)). El test indaga sobre rasgos o características que pueden asociarse tanto con el rendimiento escolar como con, factores que interfieren en el mismo. Páyer (2013) señala que, el test es aplicado de manera escrita e individual, este debe ser respondido en un máximo de 30 minutos, y por último cada ítem tiene tres opciones de respuesta, verdadero *sí*, falso *no* y no responde.

Es importante señalar, que el conjunto de datos con el que se trabajo fue previamente analizado, depurado y modificado -orientación del ítem- por Páyer, y finalmente se contó con un test de 138 ítem, los cuales se clasifican en tres partes, ¹:

- A. *Indicadores asociados al éxito académico*: Interés por el aprendizaje y la innovación, Organización y Perseverancia, Locus del Control, Autoestima, Asertividad y Autodominio.
- B. *Conductas de interferencia con el éxito académico*: Neuroticismo, Tendencias Psicópatas y Tendencias Paranoides.
- C. *Escala de Sinceridad*: Insinceridad.

4.1.1. Selección de los constructos y análisis preliminar

El inventario PIHEMA-R2 consta de diez constructos (variables latentes) asociados con distintos rasgos de personalidad para los que se identifico el número de ítems, como

¹La descripción de cada uno de los rasgos de personalidad evaluados pueden consultarse en Ponce and Granell (2006)

Constructos	Nº de ítem
Interés por el aprendizaje	16
Organización y Perseverancia	11
Locus de Control	14
Autoestima	9
Asertividad	13
Autodominio	11
Neuroticismo	22
Tendencias Psicopatas	10
Tendencias Paranoide	14
Insinceridad	18
Total	138

TABLA 4.1. Número total de ítem del test PIHEMA

se indica en la tabla 4.1.

En el figura 4.1 muestran la asimétrie del score para los 10 trazos latentes de la prueba, debido a la asimetría positiva de los scores y la correlación positiva entre ellos, ver figura 4.2 , se selecciono trabajar con la parte B, de la prueba, la cual contiene 3 de los 10 trazos que comprenden la prueba.

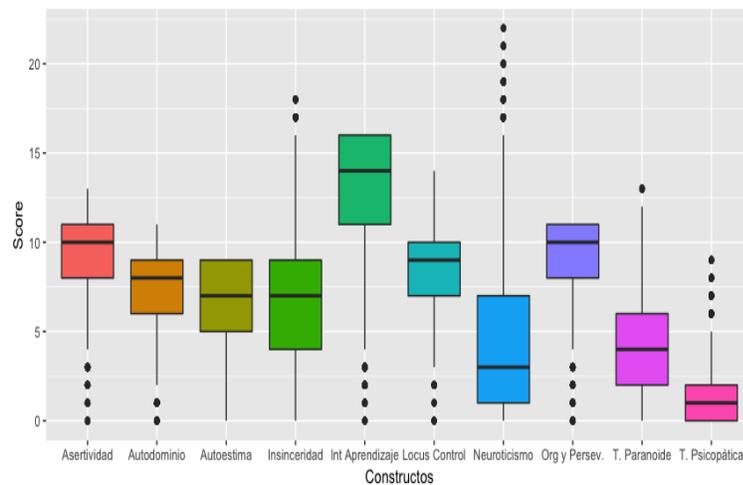


FIGURA 4.1. Boxplot Score de cada constructo

Como señalan Ponce & Granell (2006, p.6), el *neuroticismo* se refiere a un “comportamiento caracterizado por algunos síntomas como ansiedad, miedos, fobias, depresión y culpa, en general, comportamientos que manifiestan sufrimiento sin una justificación real”. Aspectos relacionados con la *tendencia psicopática* ocurre en individuos “con dificultad para asimilar valores y normas sociales, en relación con la autoridad y la familia”. Las personas con este tipo de tendencia están expuestas a riesgos innecesarios y agresividad manifiesta. Finalmente, los factores asociados con la *tendencia paranoica* “se refieren a aquellas ca-

racterísticas que hacen que el comportamiento con sentimientos de persecución, sospecha excesiva, rigidez de las opiniones e ideas magníficas”.

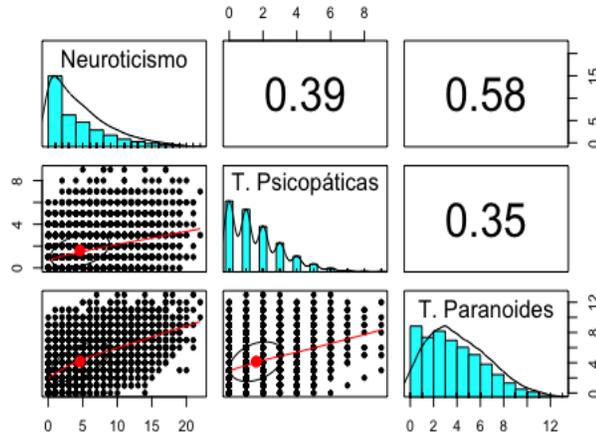


FIGURA 4.2. Correlación de los puntajes clásicos (score) de los constructos seleccionados

Una vez seleccionado el conjunto de datos debe realizarse un análisis preliminar para la determinación de la dimensión del test, detectar ítems problemáticos y eliminar registros con scores perfectos (casos clínicos) y nulos, cambio de sentido de ítems. No obstante este proceso ya había sido desarrollado cuando se recibieron los datos, dicho análisis fue elaborado por María de los Ángeles Páyer y Alvaro Montenegro, por ello en este documento no se presenta dicho análisis.

4.2. Estimación de los parámetros

Una vez establecida la unidimensionalidad del test y el modelo de probabilidad de respuesta correcta. Se procede a la estimación, la cual se dividirá en dos, un primer procedimiento, que consiste en la estimación de los parámetros de cada subprueba por separado, empleando el modelo unidimensional propuesto UIRTA-2PL. El segundo procedimiento se basa en el uso de un modelo de estructura multiunidimensional propuesto MuIRTA-2PL.

4.2.1. Análisis preliminar (Falta de Identificabilidad)

Se construyeron los histogramas para los puntajes clásicos obtenidos por los individuos en los tres constructos seleccionados, recuerde que aquí lo que se tiene es respuestas positivas o negativas en relación con lo que se intenta medir. Los resultados se presentan en la gráfica 4.3, allí se observa que los tres constructos presentan un score con asimetría positiva. Posteriormente se calculó el score total, $\mathbf{Y} = (Y_i)_{i \in I}$, como la suma del score de cada ítem, posteriormente estimación de los parámetros de la función de distribución asociada por Máxima Verosimilitud, implementando la función `optim` y `mle2` de los paquetes `stats4` y `bbmle` respectivamente.

Analíticamente, el problema consiste en minimizar el negativo de la función de log-likelihood, donde Y_i será el score, γ los parámetros de la distribución asimétrica establecida para el score, se hizo la estimación asumiendo distribución \mathcal{LN} -Lognormal- y \mathcal{G} -Gamma-, los resultados obtenidos se encuentran en la tabla 4.2. (Ver código Apéndice A.3)

$$-\ln L(\gamma) = -\ln \left(\prod_{i=1}^n f(Y_i|\gamma) \right) = -\sum_{i=1}^n \ln f(Y_i|\gamma)$$

	Psicopatía		Neuroticismo		Paranoide	
Gamma	$\alpha = 1.72$	$\beta = 3.25$	$\alpha = 2.96$	$\beta = 0.88$	$\alpha = 3.41$	$\beta = 1.51$
Lognormal	$\mu = 1.40$	$\sigma = 0.84$	$\mu = 0.78$	$\sigma = 0.60$	$\mu = 1.49$	$\sigma = 0.60$

TABLA 4.2. Valores obtenidos de los parámetros vía Máxima verosimilitud

Una vez establecidos estos valores para los parámetros de la distribución del trazo, son estos con los que se trabajará en el modelo UIRTA-2PL.

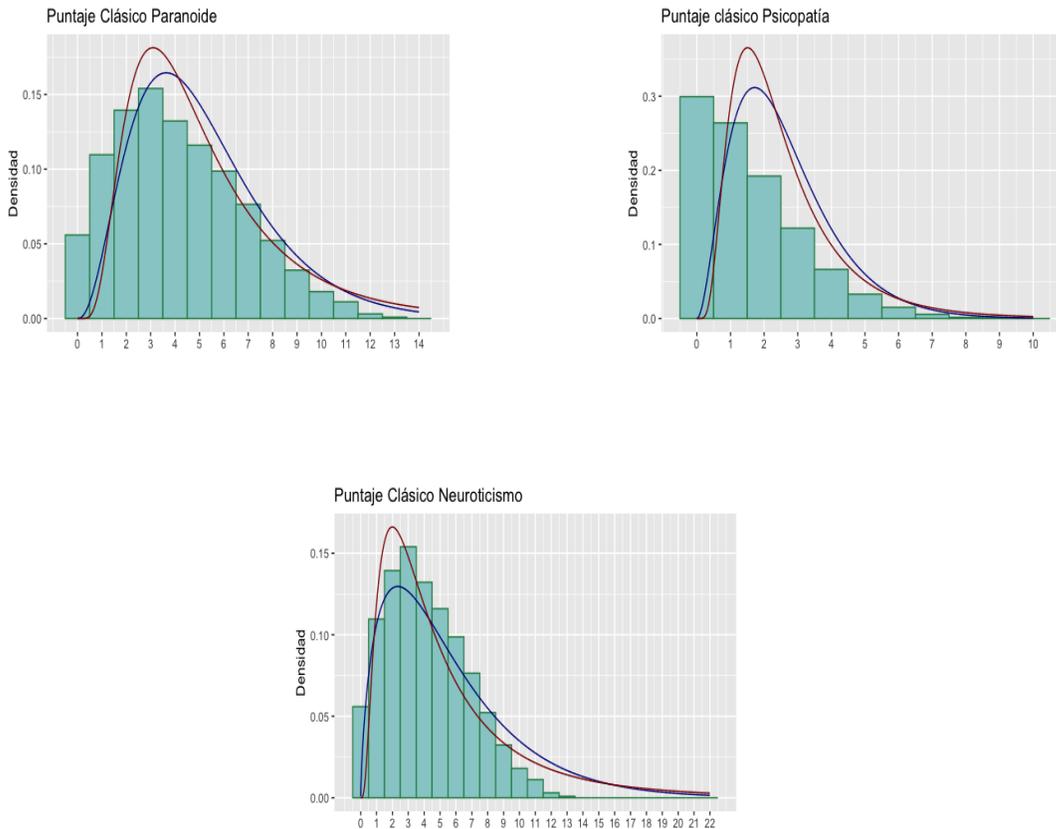


FIGURA 4.3. Score de constructos seleccionados con densidad ajustada Máxima Verosimilitud, la línea azul -Gamma- y la línea vinotinta -Lognormal-.

4.2.2. Ajuste de datos empleando el Modelo UIRTA-2PL

4.2.3. Neuroticismo

El constructo de Neuroticismo consta de $J = 8767$ y $I = 22$ ítems después de haber eliminado los ítems problemáticos y los scores nulos y perfectos (casos clínicos). Se implementa la metodología de estimación Bayesiana descrita en la sección 2.4.1, para los tres ajustes propuestos: 1. $\mathcal{G}(\alpha = 2.96, \beta = 0.88)$, 2. $\mathcal{LN}(\mu = 0.78, \sigma = 0.60)$ y 3. $\mathcal{N}(0, 1)$, recuerde que el parámetro de dificultad, se le asigna la misma distribución asociada al parámetro del trazo. La estimación de cada parámetro se realizó con los valores de la media a partir de la estimación Bayesiana, se tomó una muestra de 2000 individuos de los 8767 esto se realizó debido a que el procesamiento completo toma un tiempo considerable. Se corrieron en Stan tres cadenas de 1000 iteraciones con 400 de calentamiento, los datos de entrada fueron los siguientes:

```
data_irt_paranoide=list(n_aspirantes=J, n_items=I, N=n, ii=ii, jj=jj, y=res)
str(data_irt_paranoide) #Resumen datos de entrada
```

```
List of 6
 $ J: int 2000
 $ I: int 22
 $ N      : int 44000
 $ ii     : int [1:44000] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
 $ jj     : int [1:44000] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...
 $ y      : int [1:44000] 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 ...
```

```
fitirt_uirta2plgamma_neuro=stan(file='UIRTA2PL_gamma.stan',
data=data_irt_paranoide, iter=1000, warmup = 400, chains=3)
```

```
fitirt_uirta2pllognormal_neuro=stan(file='UIRTA2PL_lognormal.stan',
data=data_irt_paranoide, iter=1000, warmup = 400, chains=3)
```

```
fitirt_uirta2plnormal_neuro=stan(file='UIRTA2PL_normal.stan',
data=data_irt_paranoide, iter=1000, warmup = 400, chains=3)
```

En la figura 4.4 se encuentran los trazos recuperados para los tres modelos, los valores de los criterios WAIC y LOO se presentan a continuación, La Tabla 4.3 nos permite concluir

Modelo	WAIC	p_{WAIC}	LOOIC	p_{LOO}
Gamma	34280	1374.9	34294	1381.6
Lognormal	37112	1683.1	34220	2731.1
Normal	37051	1448.3	34465	1654.1

TABLA 4.3. Comparación de los modelos usando diferentes prior para el trazo latente, se corrieron 3×1000 iteraciones en un PC de 8G RAM.

para el conjunto de respuestas al test del constructo *neuroticismo* el mejor ajuste es el que asigne distribución gamma al trazo latente. Las principales estadísticas de resumen del

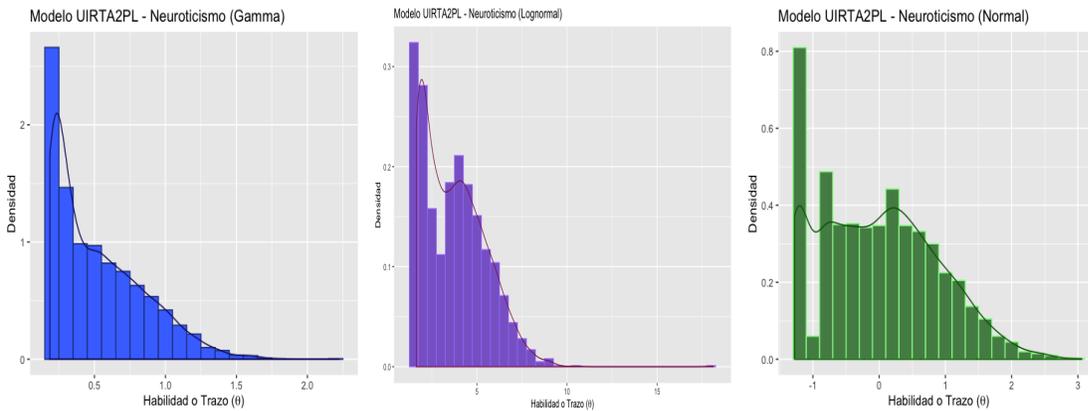
Modelo	<i>mín</i>	Q_1	<i>Mediana</i>	<i>Media</i>	Q_3	<i>máx</i>
Gamma	0.18	0.24	0.43	0.52	0.73	2.22
Lognormal	1.63	2.15	3.51	3.73	4.93	18.12
Normal	-1.27	-0.79	-0.03	-0.01	0.62	3.05

TABLA 4.4. Estadísticas de resumen para $\hat{\theta}_1$.

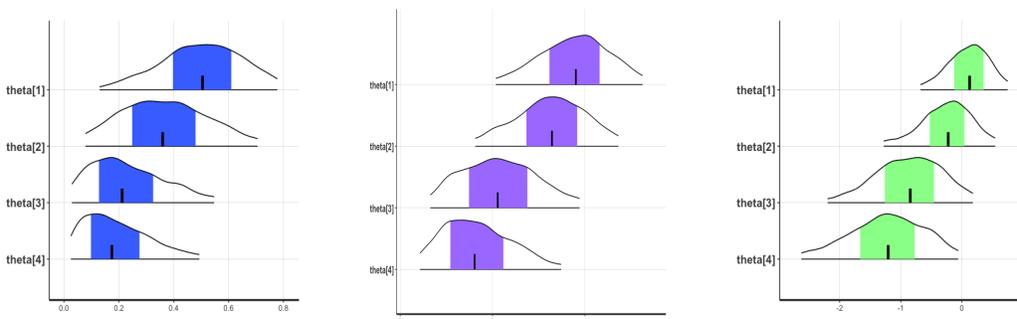
Modelo	<i>mín</i>	Q_1	<i>Mediana</i>	<i>Media</i>	Q_3	<i>máx</i>
Gamma	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.42
Lognormal	0.48	0.63	0.76	0.75	0.85	9.81
Normal	0.24	0.31	0.41	0.44	0.57	0.72

TABLA 4.5. Estadísticas de resumen para $SE(\hat{\theta}_1)$.

trazo estimado θ_i empleando la media y las estadísticas del error estándar se presentan en la Tablas 4.4 y 4.5, se destaca que el error estándar del modelo Gamma es el más bajo en contraste con los errores obtenidos para el modelo Normal y Lognormal.

FIGURA 4.4. Histograma para el constructo neuroticismo θ_1 . De Izq a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)

A continuación se presenta el trazo latente recuperado para cuatro individuos elegidos aleatoriamente, junto con los gráficos de cadenas para los valores muestreados, se puede observar como se comportan de forma similar el trazo para las cuatro personas en los tres ajustes.



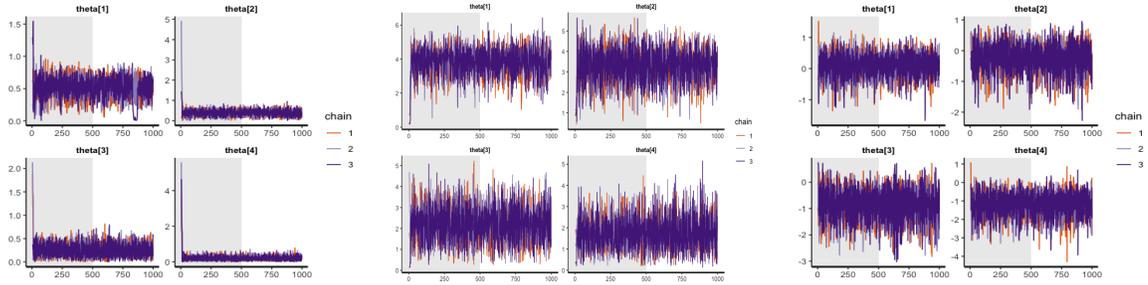


FIGURA 4.5. Gráficos cadenas y densidades para el Trazo Neuroticismo de los individuos 6578, 4250, 59 y 7094. De izquierda a Derecha, Gamma, Lognormal y Normal

Las estimaciones de los parámetros de los ítems, las cadenas obtenidas y las estadísticas de resumen pueden ser consultadas en apéndice C.1.1, los valores de las estadísticas se emplearon para construir los siguientes gráficos

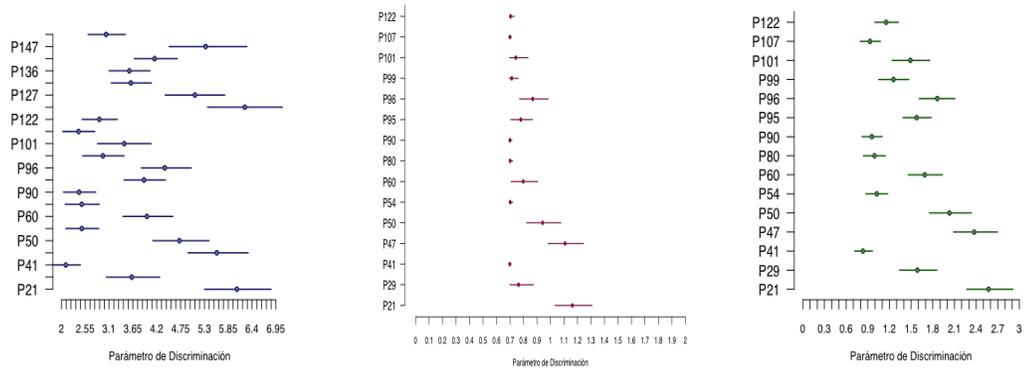


FIGURA 4.6. Estimaciones parámetro de Discriminación constructo Neuroticismo. De Izq a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)

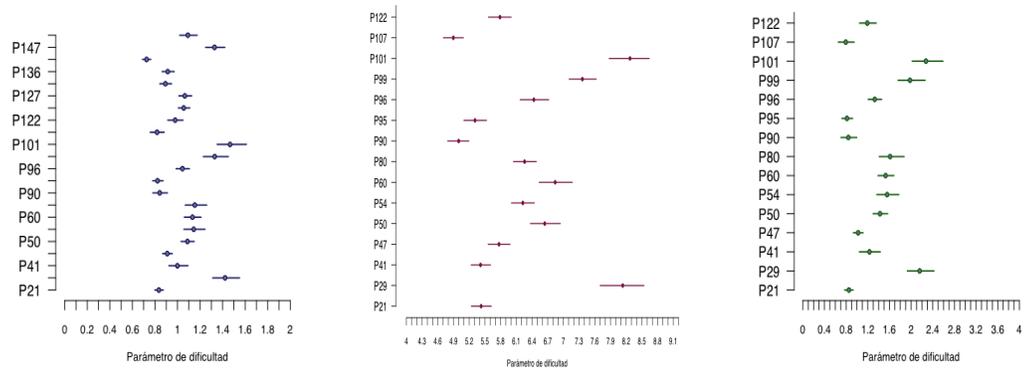


FIGURA 4.7. Estimaciones parámetro de Dificultad constructo Neuroticismo. De Izq. a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)

En la figura 4.6 se muestra la estimación (intervalo del 95%) para el parámetro de discriminación de cada ítem del test neuroticismo, no es posible identificar grupos de

ítems para los tres modelos Gamma, Lognormal y Normal..

Respecto a la figura 4.7 que presenta las estimaciones (intervalo del 95 %) de los parámetros de dificultad de los ítems, se observa en los tres ajustes un patrón similar, se destacan en los tres ajustes los ítems P29 y P101 como los ítems de mayor dificultad, y el P107 como el de menor dificultad. Además se observa como la escala obtenida esta definida por la distribución asignada al parámetro, así la escala es más alta para el modelo Lognormal. Por último, se presentan las curvas características de los ítems obtenidas en cada modelo, se observa la similitud en las CCI del modelo Gamma, Lognormal y Normal.

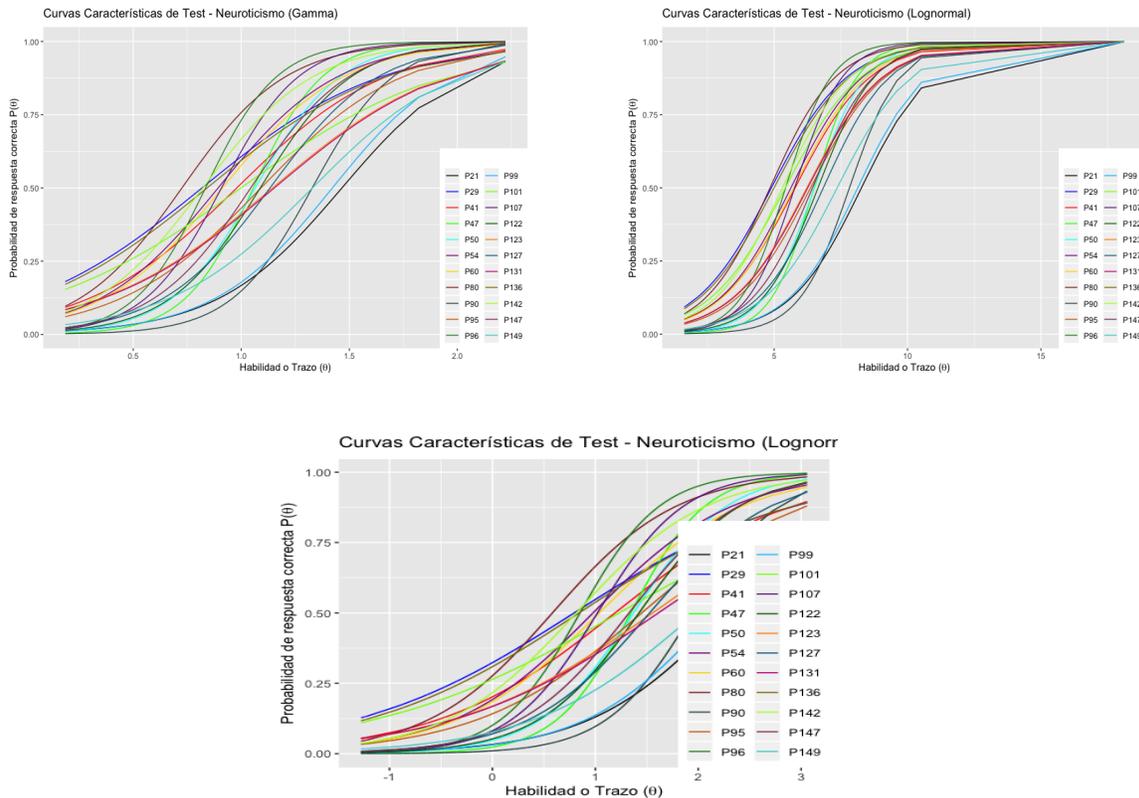


FIGURA 4.8. Curvas características del ítem para el test Neuroticismo

4.2.4. Tendencia Paranoica

El constructo de Tendencias Paranoicas se corrió para la misma muestra de 2000 aspirantes de los 8767, esta prueba cuenta con $I = 14$. Se implemento la metodología de estimación Bayesiana descrita en la sección 2.4.1, para los tres ajustes propuestos: 1. $\mathcal{G}(\alpha = 3.41, \beta = 1.51)$, 2. $\mathcal{LN}(\mu = 1.49, \sigma = 0.60)$ y 3. $\mathcal{N}(0, 1)$, recuerde que el parámetro de dificultad, se le asigna la misma distribución asociada al parámetro del trazo. La estimación de cada parámetro se realizó con los valores de la media a partir de la estimación Bayesiana para ello se corrieron en Stan tres cadenas de 1000 iteraciones con 400 de calentamiento, los datos de entrada fueron los siguientes:

```
data_irt_paranoide=list(J=J, I=I, N=n, ii=ii, jj=jj, y=res)
```

```
str(data_irt_paranoide) #Resumen datos de entrada
```

```
List of 6
 $ J: int 2000
 $ I: int 14
 $ N      : int 28000
 $ ii     : int [1:28000] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
 $ jj     : int [1:28000] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...
 $ y      : int [1:28000] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
```

En la figura 4.9 se encuentran los trazos recuperados para los tres modelos, los valores de los criterios WAIC y LOO se presentan a continuación, La Tabla 4.6 nos permite concluir

Modelo	WAIC	p_{WAIC}	LOOIC	p_{LOO}
Gamma	25713	1365.2	25735	1376.0
Lognormal	26139	1519.5	26159	1601.1
Normal	25549	1385.3	26754	1549.4

TABLA 4.6. Comparación de los modelos usando diferentes prior para el trazo latente, se corrieron 3×2000 iteraciones en un PC de 8G RAM.

Modelo	<i>mín</i>	Q_1	Mediana	Media	Q_3	<i>máx</i>
Gamma	0.95	1.44	2.05	2.21	2.81	6.16
Lognormal	2.06	3.12	4.35	4.39	5.55	10.7
Normal	-1.57	-0.62	-0.04	-0.001	0.59	2.61

TABLA 4.7. Estadísticas de resumen para $\hat{\theta}_1$.

Modelo	<i>mín</i>	Q_1	Mediana	Media	Q_3	<i>máx</i>
Gamma	0.41	0.53	0.57	0.55	0.57	0.99
Lognormal	0.72	0.88	0.92	0.91	0.94	1.63
Normal	0.39	0.46	0.50	0.52	0.57	0.81

TABLA 4.8. Estadísticas de resumen para $SE(\hat{\theta}_1)$.

que para el conjunto de respuestas al test del constructo *tendencias paranoicas* el mejor ajuste es el que asigno al trazo latente la distribución gamma. Las principales estadísticas de resumen del trazo estimado θ_i empleando la media y las estadísticas del error estándar se presentan en la Tablas 4.7 y 4.8, se destaca que el error estándar del modelo Gamma y el modelo Normal son más bajos que el del modelo Lognormal.

A continuación se presenta el trazo latente recuperado para cuatro individuos elegidos aleatoriamente, junto con los gráficos de cadenas para los valores muestreados, se puede observar como se comportan de forma similar el trazo para las cuatro personas en los tres ajustes, no obstante en el ajuste normal, el trazo toma valores negativos.

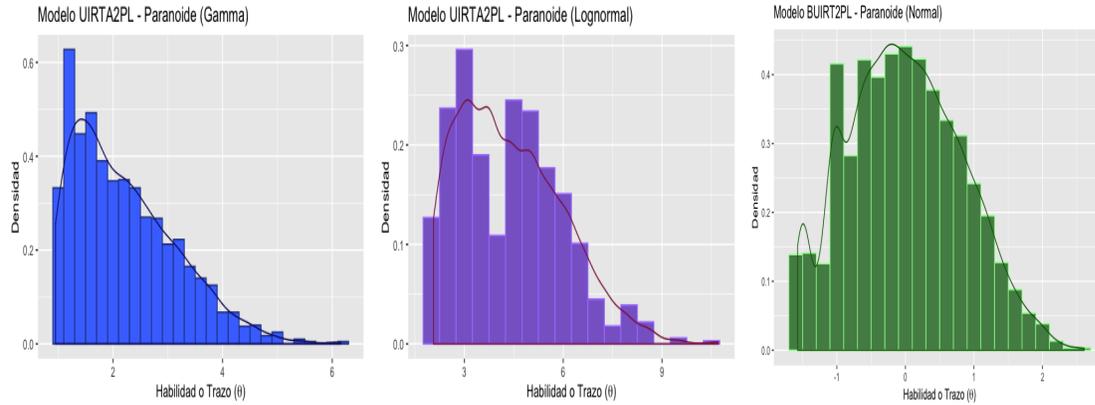


FIGURA 4.9. Histograma para el constructo paranoide θ_1 . De Izq a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)

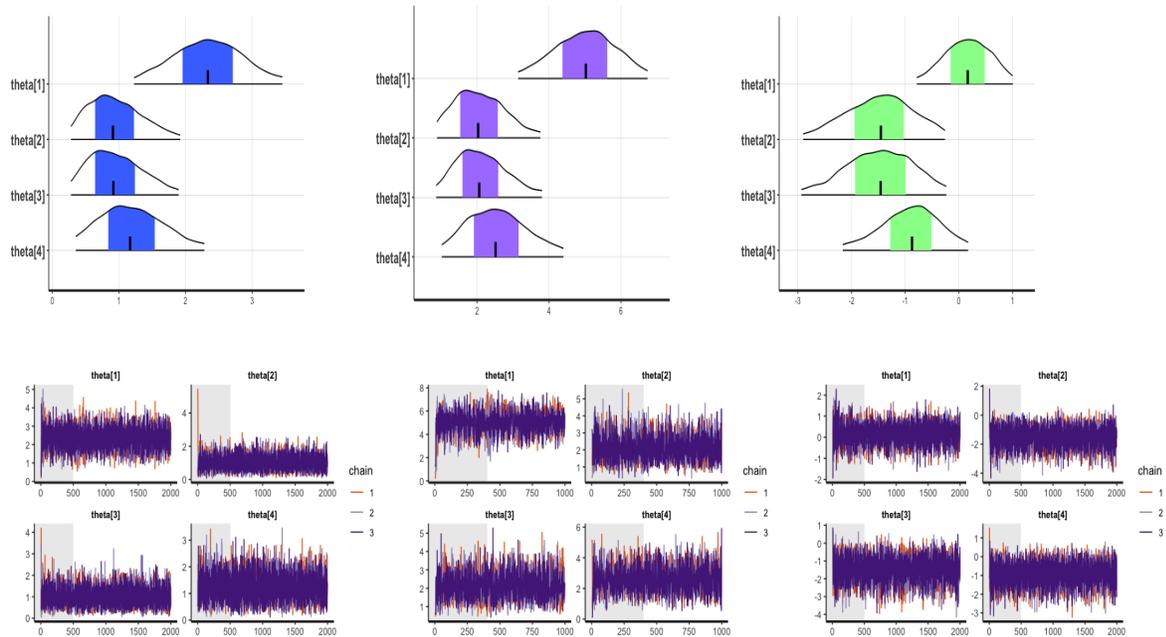


FIGURA 4.10. Gráficos cadenas y densidades para el Trazo Paranoide de los individuos 6578, 4250, 59 y 7094. De izquierda a Derecha, Gamma, Lognormal y Normal

Las estimaciones de los parámetros de los ítems, las cadenas obtenidas y las estadísticas de resumen pueden ser consultadas en apéndice C.1.2, los valores de las estadísticas se emplearon para construir los siguientes gráficos

La figura 4.11 muestra la estimación (intervalo del 95 %) para el parámetro de discriminación de cada ítem del test, se identifican tres grupos de ítems para el modelo Gamma y Normal, sin embargo el gráfico para el modelo Lognormal no permite realizar la misma diferenciación, dando la idea de que casi todos los ítems discriminan de igual forma con excepción del ítem P79 (menos discrimina), ítem que se destaca en los tres ajustes.

Respecto a la figura 4.12 se observan las estimaciones (intervalo del 95 %) de los parámetros de dificultad, en los tres ajustes se evidencia un patrón similar, se destacan en los tres

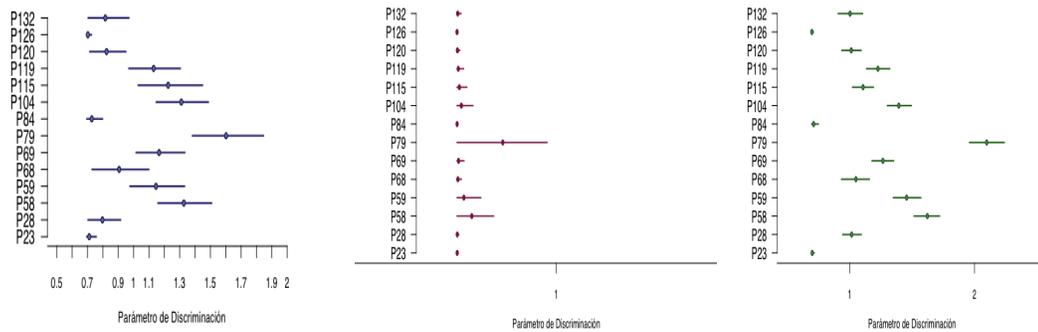


FIGURA 4.11. Estimaciones parámetro de Discriminación constructo Tendencias Paranoicas. De Izq a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)

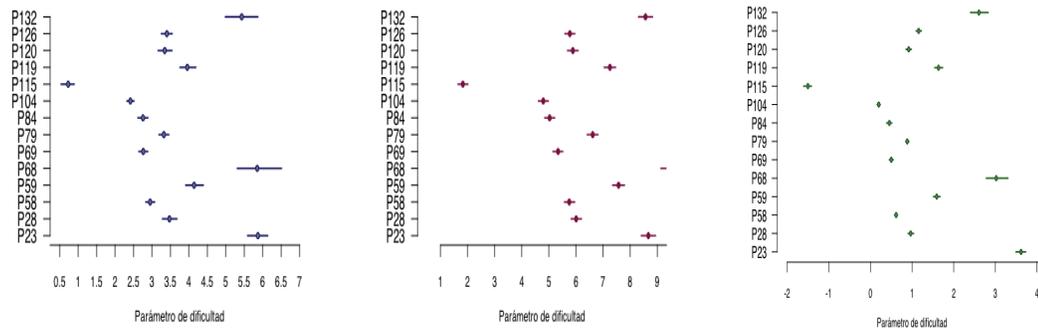


FIGURA 4.12. Estimaciones parámetro de Dificultad constructo Tendencias Paranoicas. De Izq. a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)

ajustes los ítems P23, P68 y P132 como los ítems de mayor dificultad, y el P115 como el de menor dificultad. Además se observa como la escala obtenida esta definida por la distribución asignada al parámetro, recuerde que se asigno la misma distribución al trazo y al parámetro de dificultad. Por último, se presentan las curvas características de los ítems obtenidas en cada modelo, se observa la similitud en las CCI del modelo Gamma y Normal.

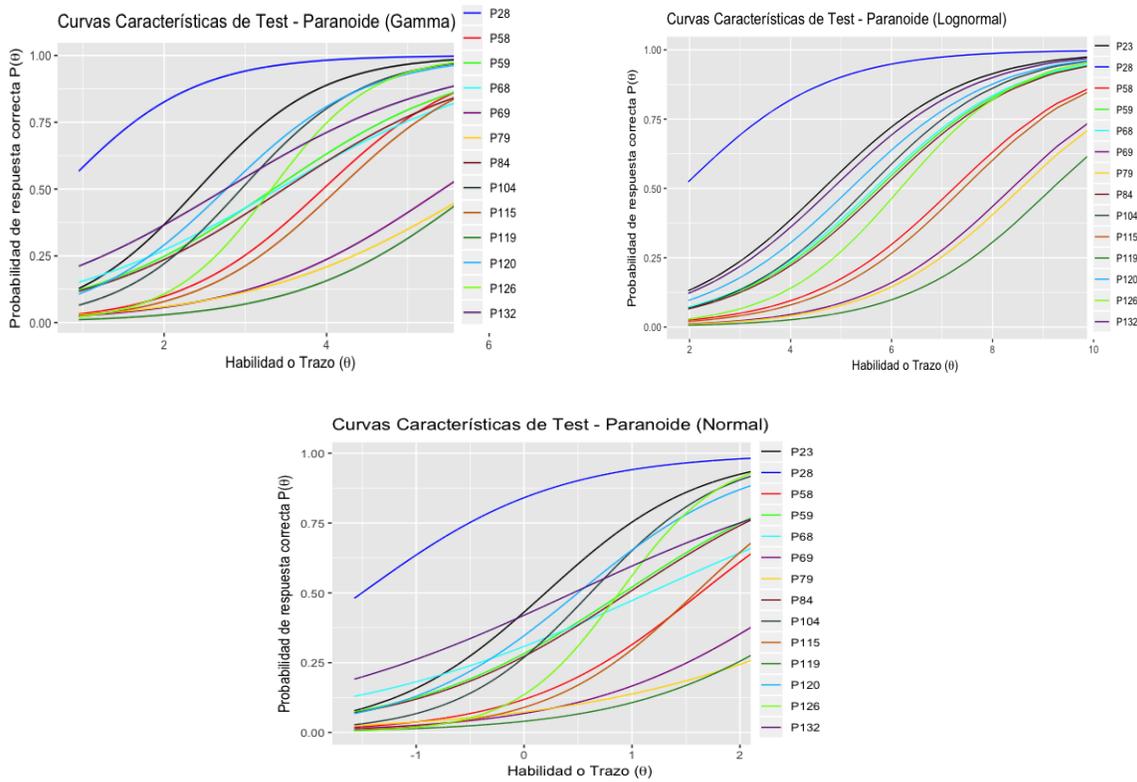


FIGURA 4.13. Curvas características del ítem para el test Tendencias Paranoicas

4.2.5. Tendencia Psicópatas

El constructo de Tendencias Psicopáticas consta de $J = 8767$ y $I = 10$ ítems después de haber eliminado los ítems problemáticos y los scores nulos y perfectos (casos clínicos), se realizó el ajuste con los mismos 2000 individuos seleccionados para los dos trazos anteriores. Los tres ajustes fueron: 1. $\mathcal{G}(\alpha = 2.96, \beta = 0.88)$, 2. $\mathcal{LN}(\mu = 0.78, \sigma = 0.60)$ y 3. $\mathcal{N}(0, 1)$, recuerde que la estimación de todos los parámetros se realizó con los valores de la media a partir de la estimación Bayesiana, en un proceso computacional análogo al desarrollado para el trazo anterior. Los datos ingresados fueron,

```
data_irt_psicopatia=list(J=J, I=I, N=n, ii=ii, jj=jj, y=res)
str(data_irt_psicopatia) #Resumen datos de entrada
```

```
List of 6
 $ J : int 2000
 $ I : int 10
 $ N : int 20000
 $ ii: int [1:20000] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
 $ jj: int [1:20000] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...
 $ y : int [1:20000] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 ...
```

La figura 4.14 presenta los trazos recuperados para el trazo tendencias psicopática empleando la media, los valores para el criterio WAIC y LOO nos indican que el mejor ajuste es el que asigna distribución normal a priori al trazo. Además como se observa en la Tablas

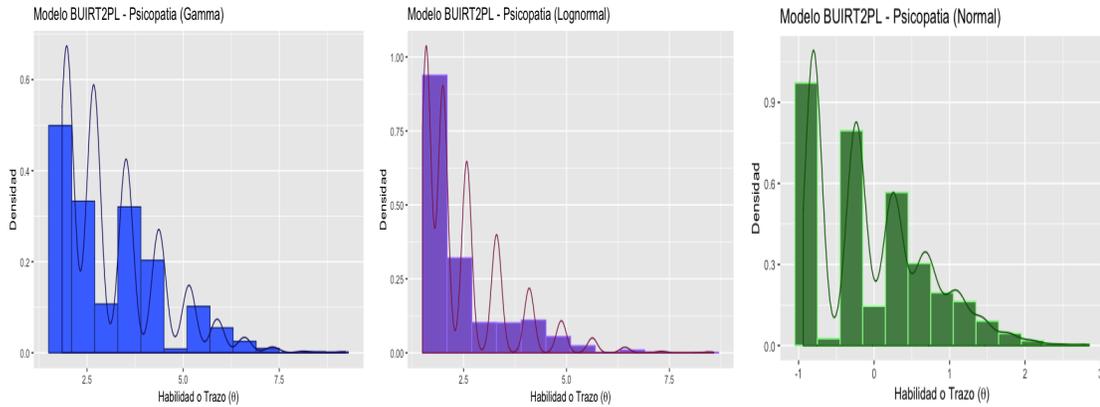


FIGURA 4.14. Histograma para el constructo paranoide θ_1 . De Izq a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)

4.10 y 4.11 que contienen los principales estadísticas de resumen de la estimación del trazo latente para cada uno de los modelos, se destaca que el error estándar el modelo Normal son más bajos que el del modelo Lognormal y el modelo Gamma.

Modelo	WAIC	p_{WAIC}	LOOIC	p_{LOO}
Gamma	36360	2035.1	36739	2025.5
Lognormal	36390	1289.5	36745	1276.0
Normal	35739	1227.5	35409	1261.9

TABLA 4.9. Comparación de los modelos usando diferentes prior para el trazo latente, se corrieron 3×1000 iteraciones en un PC de 8G RAM.

Modelo	$mín$	Q_1	Mediana	Media	Q_3	$máx$
Gamma	1.85	2.00	2.70	3.20	3.59	9.23
Lognormal	1.50	1.62	2.02	2.47	2.64	8.58
Normal	-0.94	-0.77	-0.19	-0.004	0.44	2.85

TABLA 4.10. Estadísticas de resumen para $\hat{\theta}_3$.

Modelo	$mín$	Q_1	Mediana	Media	Q_3	$máx$
Gamma	0.81	0.96	1.05	1.03	1.09	1.38
Lognormal	0.59	0.72	0.86	0.87	1.01	1.58
Normal	0.49	0.63	0.69	0.69	0.75	0.94

TABLA 4.11. Estadísticas de resumen para $SE(\hat{\theta}_3)$.

A continuación los gráficos de los trazos estimados y de las cadenas de los aspirantes 1, 2345, 5323 y 8767. Las estimaciones de los parámetros de los ítems y sus respectivos errores estándar se presentan en las tablas del apéndice C.1.3. En la figura 4.16 se muestra la estimación para el parámetro de discriminación de cada ítem del test tendencias psicopáticas, se observa que en el ajuste Gamma y Lognormal muestran una discriminación

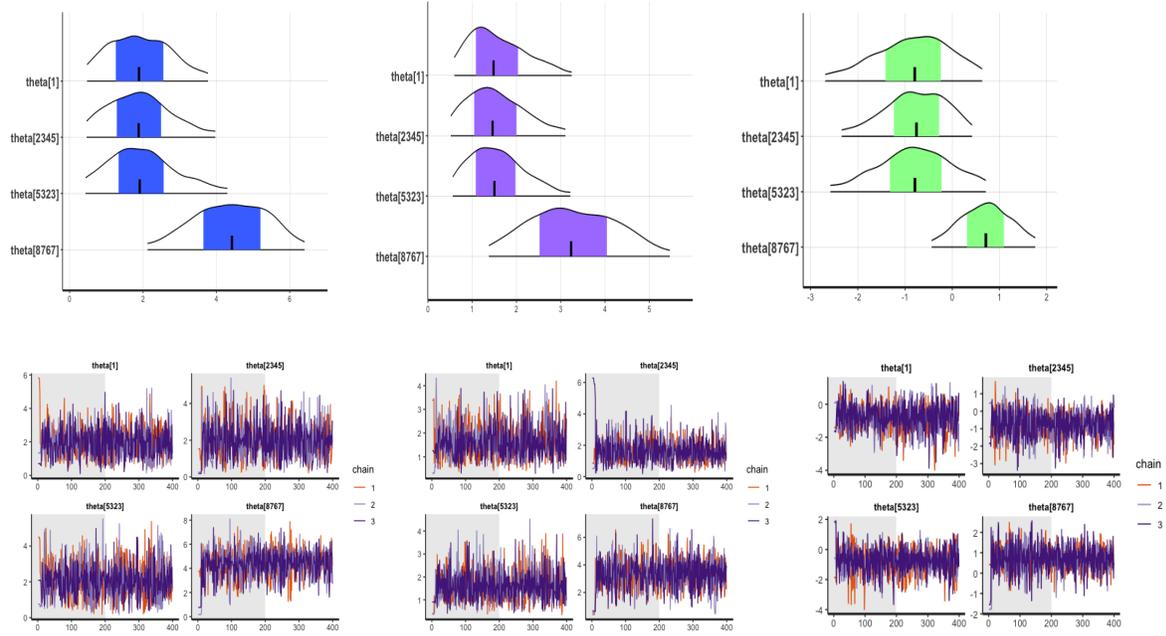


FIGURA 4.15. Gráficos cadenas y densidades para el Trazo Psicopatía de los individuos 1, 2345, 5323 y 8767. De izquierda a Derecha, Gamma, Lognormal y Normal

muy similar para todos los ítems, pero para el ajuste normal sí se presentan diferencias en la discriminación de los ítems, esto se observa con mayor claridad en los gráficos 4.18 que corresponden a las curvas características de los ítems. Referente a la figura 4.17 se observa en los tres ajustes un patrón similar de comportamiento para la dificultad de los ítems, no obstante la escala (valores) en el ajuste Gamma y Lognormal es mayor a la del ajuste normal, asociando una mayor dificultad a los ítems, en los dos ajustes diferentes al Normal.

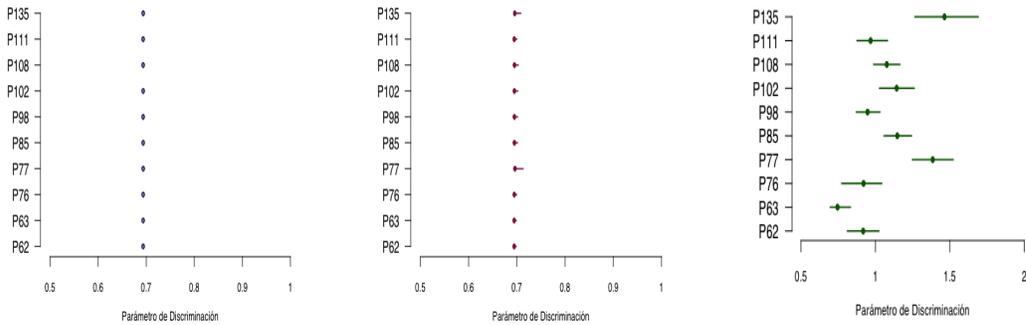


FIGURA 4.16. Estimaciones parámetro de Discriminación constructo Tendencias Psicopáticas. De Izq a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)

En la figura 4.16 se muestra la estimación del parámetro de discriminación para cada ítem del test, se identifican tres grupos de ítems para el modelo Normal, sin embargo el gráfico para el modelo Lognormal y Gamma no permite realizar la misma identificación, dando la impresión de que casi todos los ítems discriminan de igual forma. Respecto a la figura 4.17 que presenta las estimaciones (intervalo del 95 %) de los parámetros de dificultad de los ítems, se observa en tres ajustes un patrón similar, se destacan en los tres modelos los ítems P23, P68 y P132 como ítems de mayor dificultad, y el P115 como el de menor dificultad. Además se observa como la distribución asignada al parámetro de dificultad permite obtener un mejor ajuste del mismo y en consecuencia una mejor interpretación, al estar en la misma escala que el trazo latente. Por último se presentan las curvas características de los ítems en cada modelo en la figura 4.18.

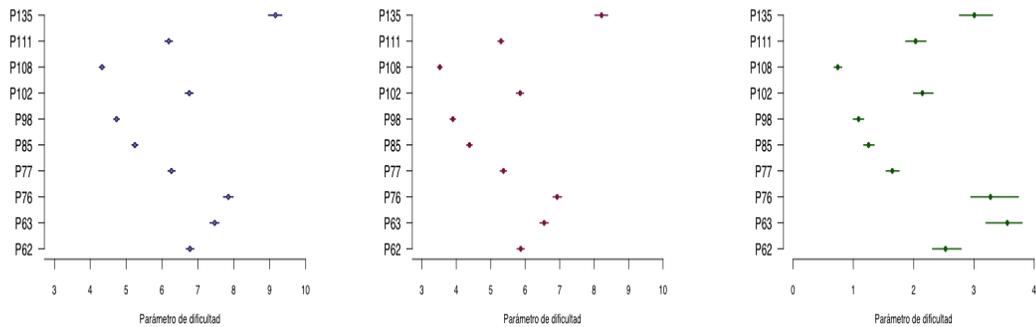
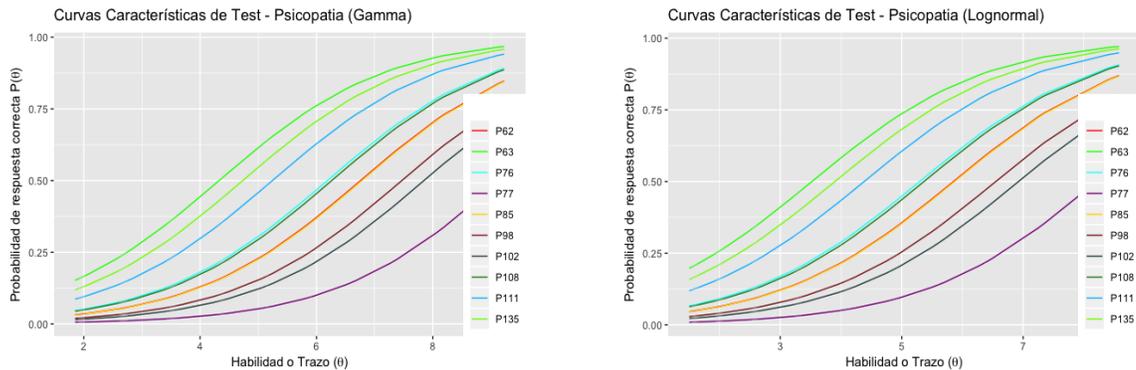


FIGURA 4.17. Estimaciones parámetro de Dificultad constructo Tendencias Psicopáticas. De Izq. a Der. (Gamma), (Lognormal) y (Normal)



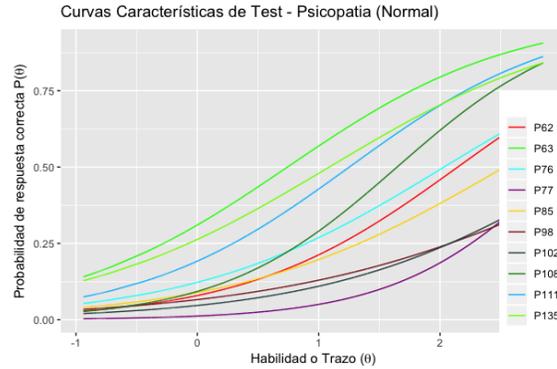


FIGURA 4.18. Curvas características del ítem para el test Tendencias Psicopáticas

4.2.6. Ajuste de datos empleando el Modelo MuIRTA-2PL

El modelo MuIRTA-2PL se aplicó a la prueba PIHEMA-R2, se tomó la parte del test que indaga por las conductas que puedan interferir con el éxito académico de un estudiante de la Universidad Central de Venezuela. Para ello se seleccionaron al azar $J = 2000$ aspirantes de los 8767 que presentaron la prueba, posteriormente se tomaron las respuestas dadas por estos 2000 individuos a los tres subtests, *Tendencias Paranoicas* θ_1 , *Tendencias Psicópatas* θ_2 y *Neuroticismo* θ_3 , la cantidad de ítems de cada subprueba respectivamente son $I_1 = 22$, $I_2 = 14$ y $I_3 = 10$, para un total de $I = 46$ ítems. Este procedimiento se realizó por razones de tiempo, debido a que el procesamiento completo de los datos tomaría un tiempo considerable. No obstante, el modelo puede ser aplicado a un test que se divida en una cantidad m de subtest (dimensiones) sin ningún inconveniente, no existe ninguna restricción para la cantidad de individuos o de ítems más allá de las limitaciones computacionales.

Los parámetros de las distribuciones multivariadas son los mismos que se ingresaron en la aplicación por separada del modelo UIRTA-2PL para cada trazo, con el fin de hacer comparable los dos modelos. Por otro lado, la estimación de cada parámetro se obtuvo utilizando la media empleando la interfaz `rstan`. Se corrieron 4 cadenas cada una de 3000 iteraciones las 1000 primeras se tomaron de calentamiento, la ejecución del código se realizó 3 veces, la diferencia radica en la distribución multivariada empleada.

4.2.7. Implementación Modelo Multiunidimensional Asimétrico de dos parámetros Logístico

Se ejecutó el modelo propuesto MuIRTA-2PL en tres ocasiones, en la primera se empleó la función `multi_gamma_lpdf`, para la segunda se empleó la función `multi_lognormal_lpdf`, note que en estos dos modelos se está considerando la asimetría de los trazos, además las funciones empleadas fueron construidas en Stan. En la tercera ejecución del modelo se empleó la función con la que cuenta Stan `multi_normal_lpdf`. El objetivo en los tres casos es estimar los parámetros de los ítems, el trazo latente y la matriz de correlación, esta última estimación nos permitirá destacar la importancia del empleo de la copula Gaussiana dentro del modelo.

```

#List of 10
#$ M      : num 3
#$ N      : num 92000
#$ I      : int 46
#$ J      : num 2000
#$ kk     : int [1:92000] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
#$ jj     : int [1:92000] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
#$ ii     : int [1:92000] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...
#$ y      : int [1:92000] 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 ...

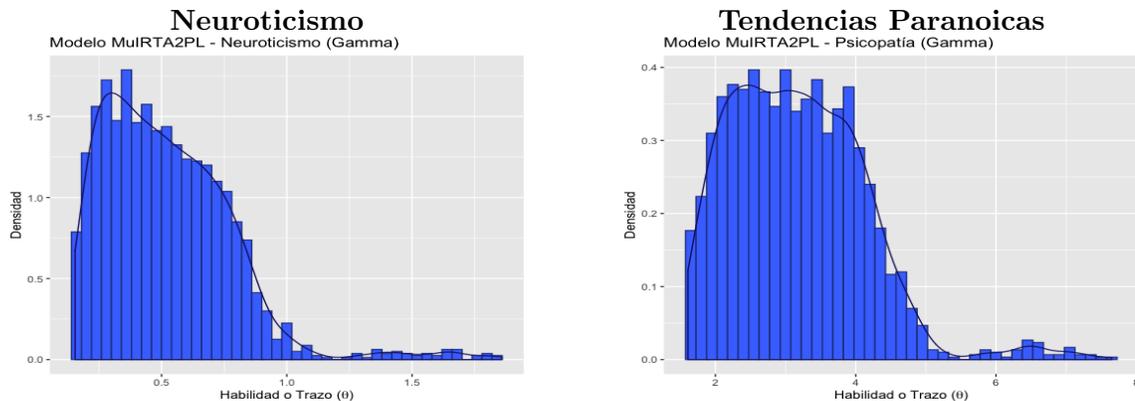
##### Parameters of multi_gamma_lpdf #####
#$ AlphMarg: num [1:3] 2.91 7.55 5.96
#$ BetMarg  : num [1:3] 5.49 2.36 2.96

```

En las figuras 4.19, 4.20 y 4.21 se encuentra el histograma para cada uno de los trazos recuperados al emplear cada uno de los modelos MuIRTA-2PL con para los tres modelos propuestos, los valores de los criterios WAIC y LOOIC se presentan a continuación,

Modelo	WAIC	p_{WAIC}	LOOIC	p_{LOO}
MultiGamma	213062	64678.8	87258.2	1776.8
MultiLognormal	221870	67427.9	90943.5	1964.5
MultiNormal	151582	59103.1	95724.1	2174.1

TABLA 4.12. Comparación de los modelos MuIRTA-2PL, se corrieron 4×3000 iteraciones en un PC de 8G RAM.



La Tabla 4.12 nos permite concluir para el conjunto de respuestas seleccionadas que el mejor ajuste es el que asigno distribución multi_gamma a las variables latentes. Observe que al ser este un modelo de tipo jerárquico, Stan nos sugiere el emplear el criterio LOOIC al ser este más apropiado, de igual forma el número de efectivo de parámetros p_{WAIC} y p_{LOO} apoya el hecho de que el modelo que asigna a los trazos latentes una distribución a priori multigamma es más conveniente que los otros dos modelos considerados para este conjunto de datos de naturaleza asimétrica.

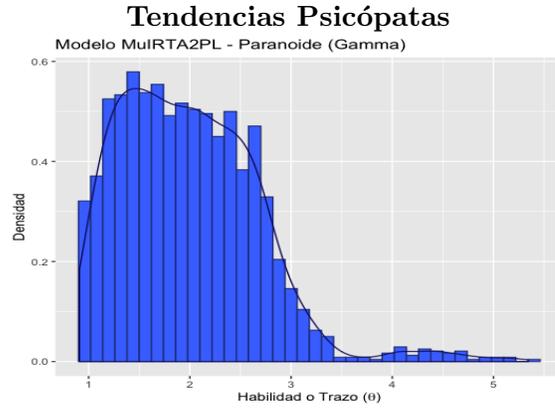


FIGURA 4.19. Histogramas obtenidos para los tres constructos con modelo MuIRTA-2PL empleando la función `multi_gamma_lpdf`.

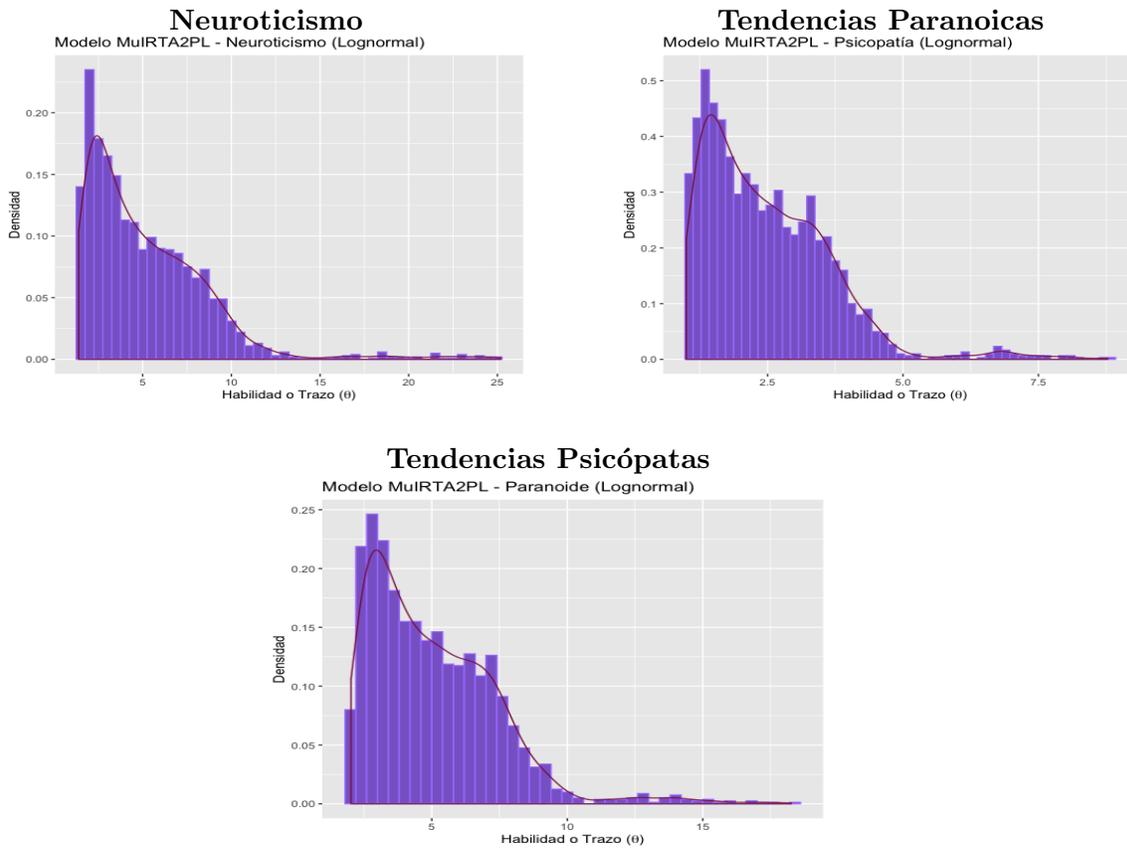


FIGURA 4.20. Histogramas obtenidos para los tres constructos con modelo MuIRTA-2PL empleando la función `multi_lognormal_lpdf`.

A continuación las estadísticas descriptivas para cada variable latente en los tres modelos. Se observa que en los tres constructos la desviación estándar siempre es menor para el modelo Gamma en contraste como los otros dos modelos. Además observe que la correlación entre los trazos se recupera en los tres modelos, observe las matrices a continuación, no obstante es el modelo MUIRTA-2PL Gamma el que proporciona una estimación de la

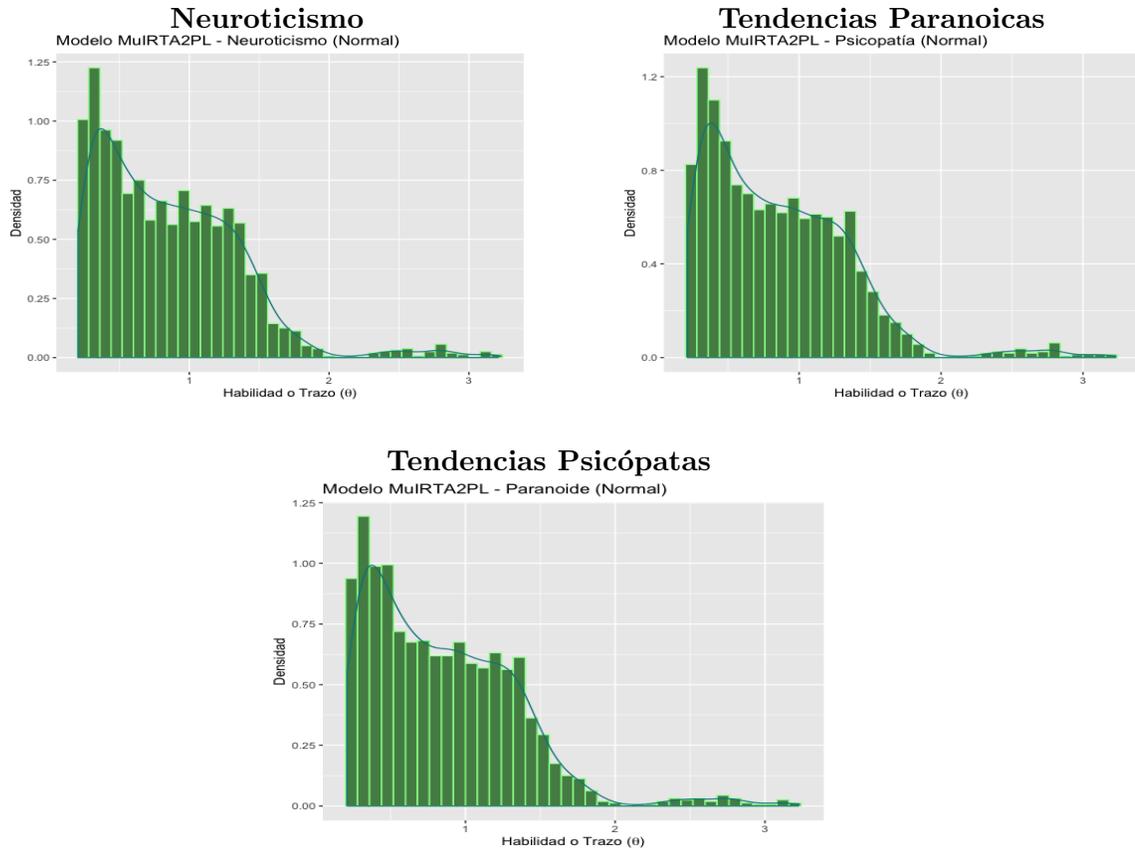


FIGURA 4.21. Histogramas obtenidos para los tres constructos con modelo MuIRTA-2PL empleando la función `multi_normal_lpdf`.

matriz de correlación más cercana a la correlación que inicialmente se obtuvo entre los puntajes clásicos, ver 4.2.

Modelo	<i>mín</i>	Q_1	Mediana	Media	Q_3	<i>máx</i>	<i>sd</i>
MultiGamma	0.15	0.32	0.48	0.51	0.67	1.85	0.001
MultiLognormal	1.39	2.55	4.32	5.19	6.99	25.2	0.014
MultiNormal	0.20	0.43	0.77	0.85	1.17	3.21	0.004

TABLA 4.13. Estadísticas de resumen para $\hat{\theta}_1$ *neuroticismo*.

Modelo	<i>mín</i>	Q_1	Mediana	Media	Q_3	<i>máx</i>	<i>sd</i>
MultiGamma	1.61	2.42	3.08	3.79	7.65	1.38	0.0005
MultiLognormal	1.00	1.55	2.25	2.48	3.19	8.78	0.006
MultiNormal	0.22	0.43	0.76	0.85	1.16	3.23	0.003

TABLA 4.14. Estadísticas de resumen para $\hat{\theta}_2$ *psicopatía*.

Modelo	<i>mín</i>	Q_1	Mediana	Media	Q_3	<i>máx</i>	<i>sd</i>
MultiGamma	0.91	1.45	1.92	1.99	2.44	5.34	0.0005
MultiLognormal	2.02	3.15	4.57	5.04	6.51	18.27	0.011
MultiNormal	0.21	0.44	0.77	0.85	1.17	3.22	0.004

TABLA 4.15. Estadísticas de resumen para $\hat{\theta}_3$ *paranoide*.

$$\widehat{\Gamma}_{\text{gamma}} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.36 & 0.56 \\ 0.36 & 1.00 & 0.35 \\ 0.56 & 0.35 & 1.00 \end{bmatrix} \quad \widehat{\Gamma}_{\text{lognormal}} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.36 & 0.46 \\ 0.36 & 1.00 & 0.34 \\ 0.46 & 0.34 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\Gamma}_{\text{normal}} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.29 & 0.49 \\ 0.29 & 1.00 & 0.27 \\ 0.49 & 0.27 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Del análisis anterior podemos aseverar que la consideración de la naturaleza del trazo es un aspecto importante a tener en cuenta dentro de los modelos de Teoría de Respuesta al ítem, ya que son los modelo MUIRTA-2PL Gamma y Lognormal los que genera un mejor ajuste en términos de la recuperación de los trazos latentes. Por otro lado, la consideración de una copula que capture la estructura de dependencia entre las variables latentes esta justificada por la estimación que se logra de la matriz de correlación.

Para el correspondiente análisis de la estimación de los parámetros de los ítems tenga en cuenta que se evaluaron un total 46 ítems, la enumeración empleada fue, del ítem 1 al 22 corresponde al test de neuroticismo, del ítem 23 al 32 al test de tendencias psicópatas y del ítem 33 al 46 al test tendencias paranoicas. En el apéndice C.3 pueden consultar el resumen de las estadísticas descriptivas del parámetro de a_i y de dificultad b_i para los tres modelos y los gráficos obtenidos de estas. A continuación se presenta el gráfico que resume las estimaciones obtenidas para la variable latente *Paranoide*².

Observe que el modelo MUIRTA-2PL en los tres casos muestra un patrón en el orden de dificultad de los ítems similar, es decir, los tres coinciden en la identificación de los mismos ítems como “difíciles”, no obstante la escala no es la misma, observe como la escala obtenida en el modelo MUIRTA-2PL lognormal es considerablemente mayor a la obtenida por los otros dos modelos, por ende este modelo adjudica un valor de dificultad más alto para todos los ítems del test.. La misma observación se dio con los otros dos constructos, ver C.10 y C.7 en el apéndice C.3.

Un reporte similar se obtiene para el parámetro de discriminación en las tres implementaciones, también se identifica un patrón en el gráfico 4.23 , además el modelo MUIRTA-2PL Normal el que asigna mayores valores al parámetro de discriminación, por ende, este modelo es que menos posibilidad de clasificación ofrece. A continuación se presentan las curvas características obtenidas para los ítems del test que indaga por las posibles tendencias paranoicas de un aspirante a la Universidad, y observe como el análisis realizados para los

²Las observaciones presentadas en esta sección para el trazo paranoide son similares para los otros dos trazos, psicopatía y neuroticismo, puede consultar los gráficos en apéndice C.

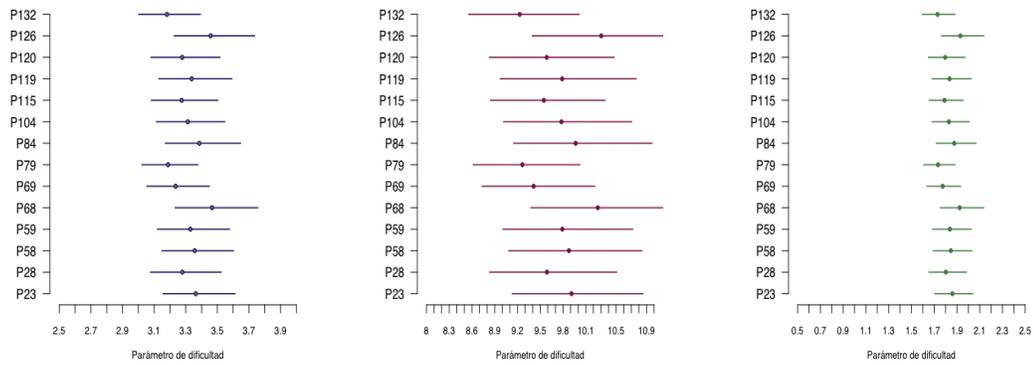


FIGURA 4.22. Estimaciones obtenidas para parámetro de Dificultad constructo Tendencias paranoides empleando el modelo MUIRTA-2PL. De Izq. a Der. (MultiGamma), (Multilognormal) y (Multinormal)

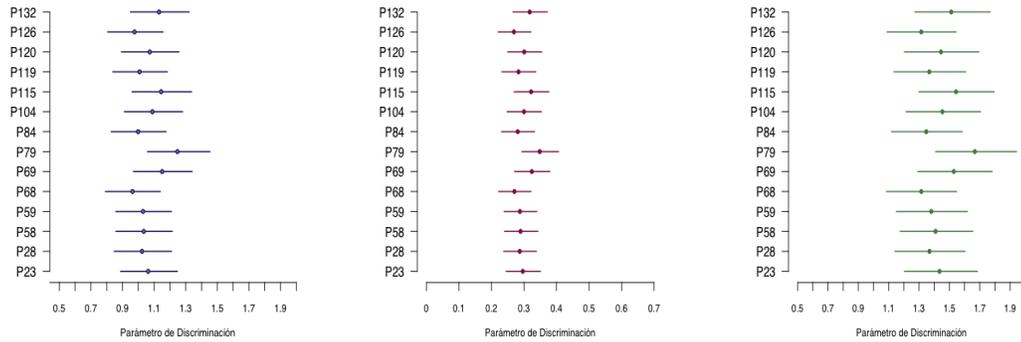
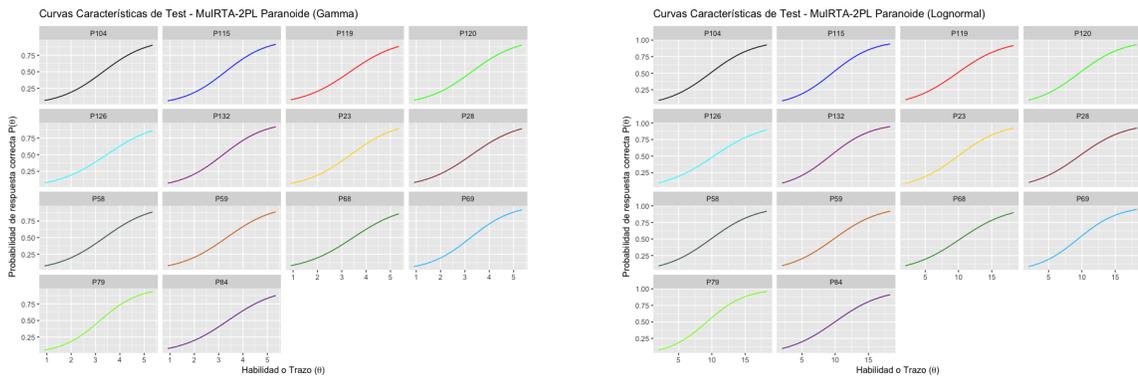


FIGURA 4.23. Estimaciones obtenidas para parámetro de Discriminación constructo Tendencias paranoides empleando el modelo MUIRTA-2PL. De Izq. a Der. (MultiGamma), (Multilognormal) y (Multinormal)

parámetros de los ítems se ven reflejados en la escala del parámetro θ y en la inclinación de las curvas.



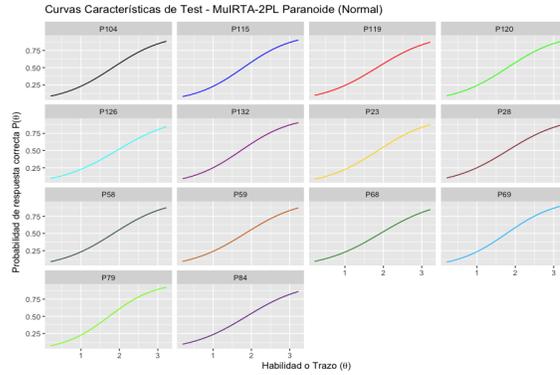


FIGURA 4.24. Curvas características del ítem para el test Tendencias Paranoicas obtenidas por los MuIRTA-2PL.

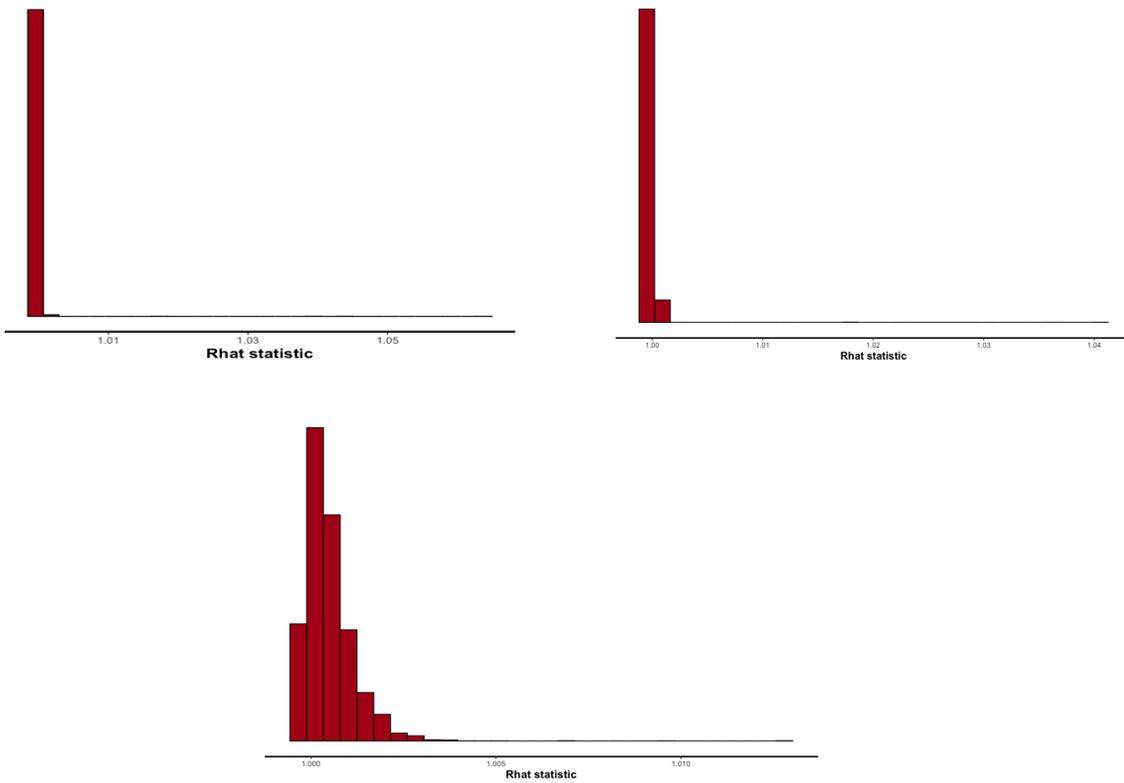


FIGURA 4.25. Criterio Rhat de convergencia para el modelo MuIRTA-2PL. De Izq. a Der. (MultiGamma), (Multilognormal) y (Multinormal)

Por último, observe los gráficos para el criterio de convergencia **Rhat** 4.25, valor que se encuentra en la última columna de las salida de Stan, se considera que la convergencia de la cadena es aceptable para valores menores entre 1.00 y 1.05 Stan (2017). Si bien los tres modelos muestran una convergencia aceptable para las cadenas dentro de los límites establecidos, son el modelo MuIRTA-2PL Gamma y Lognormal los que ofrecen valores en promedio más cercanos a 1.00 para las cuatro cadenas ejecutadas.

El análisis realizado en este capítulo nos permite concluir que la consideración de la correlación en el modelo multiunidimensional asimétrico logístico de dos parámetros MuIRTA-2PL y por ende, el empleo de la copula Gaussiana que captura la estructura de dependencia entre trazos es justificada y en consecuencia es un aspecto que no debe dejarse de lado, sobre todo si el investigador sabe de ante mano que dicha correlación entre trazos es posible y completamente comprensible en términos del campo en el que se este trabajando. Por otro lado, note que la asimétrica “natural” del trazo no debe ser ignorada, ya que para el estudio aquí desarrollado se observa como el considerar distribuciones asimétricas para el trazo latente, como la gamma o la lognormal, generaran mejores estimaciones de los parámetros incidentales y estructurales del modelo en comparación con las estimaciones obtenidas cuando se asume la hipótesis de simetría de la variable latente.

Discusión y Conclusiones

En la Teoría de Respuesta al Ítem se ha trabajado por décadas con la hipótesis de simetría para la variable latente, entendiendo esta como una variable que no se puede medir directamente. En efecto, en la mayoría de la literatura relacionada, se asume que la distribución del trazo es normal y con base a este supuesto se realiza el proceso de estimación del trazo latente y de los parámetros de los ítems. Sin embargo, algunos trazos pueden llegar a presentar un comportamiento asimétrico, como los considerados en el presente trabajo. Los trazos se relacionan con rasgos de personalidad y conducta que pueden interferir en el éxito académico de un estudiante, por lo que resulta necesario proponer modelos que consideren distribuciones asimétricas para el trazo. Son diversos los trabajos e investigaciones que abordan el problema de la simetría adjudicada al trazo, a nivel nacional encontramos a Montenegro (2011), León (2017) y Díaz (2018) e internacional puede consultarse el trabajo de da. Silva (2008). Este trabajo propone el uso de la distribución Gamma o Lognormal, como distribución asociada a la variable latente, a razón de que estas permiten esencialmente modificar la forma de la distribución.

Las metodologías de estimación clásicas empleadas en Teoría de Respuesta al Ítem son: la Estimación Máxima Verosimilitud y la Estimación Bayesiana, esta última es más conveniente en términos computacionales, pues los métodos de estimación Bayesiana como, Muestreador de Gibbs y Metropolis Hasting resultan ser más eficientes. Una consulta obligatoria si se esta interesado en el empleo de la estadística Bayesiana en la TRI son los textos de Fox (2010) y Andrade et al. (2000), estos autores siguen enmarcados en el supuesto de simetría para el trazo latente θ . El lenguaje de programación empleado fue **Stan**, el cual desempeña un papel fundamental en la estimación y análisis del modelo como herramienta actual que se emplea para modelos y cálculos estadísticos de alto rendimiento empleando el algoritmo NUTS en la metodología de estimación titulada Hamiltoniano Monte Carlo.

El Inventario PIHEMA-R2 es un test de psicometría que busca indagar por rasgos de personalidad y conducta de los aspirantes a ingresar a la Universidad Central de Venezuela para el periodo 2014. Esta tesis trabajó con la parte del test que indaga por las conductas que pueden interferir con el éxito académico, como son: el *neuroticismo*, las *tendencias paranoicas* y las *tendencias psicópatas*, Páyer (2013) señala que los constructos mencionados anteriormente pueden presentar un comportamiento de tipo asimétrico, adicionalmente Montenegro (2011) observa que existe una correlación entre estos trazos que no ha sido considerada en los modelos de la Teoría de Respuesta al Ítem. Así que el problema que se abordó en esta tesis es el de plantear un modelo Multidimensional de la Teoría de Respuesta al Ítem que considere, uno la asimetría natural del trazo y dos la

correlación posible entre estos.

Se inicio con la revisión de los trabajos de doctorado de Montenegro (2011) y da. Silva (2008) quienes mencionan el modelo de estructura simple o modelo K-multivariado respectivamente, el cual es un ser un modelo Multidimensional de la Teoría de Respuesta al Ítem que se caracteriza principalmente por la correspondencia entre la dimensión del test y la dimensión del trazo, también mencionado por Sheng and Wikle (2007) como modelo multiunidimensionales, dicho modelo se tomo como base para la construcción del modelo aquí propuesto, dado que se ajusta a la estructura del test inventario PIHEMA-R2. Por otro lado, como se menciona al inicio, son diversos los trabajos e investigaciones que han propuesto modelos de la TRI en los que se decide asignar distribuciones asimétricas al trazo, León (2017) -Gamma-, da. Silva (2008) -t-asimétrica- Díaz (2018) -Normal asimétrica-, todos ellos han obtenido buenos resultados en términos del ajuste empleando diversas metodologías de estimación para diferentes estructuras de modelo, como multiples poblaciones, unidimensional o multidimensional. Dado que uno de los intereses de este documento es la consideración de la naturaleza asimétrica del trazo latente, se proponen dos modelos, el primero de tipo unidimensional, denominado *Modelo Unidimensional Logístico de Teoría de Respuesta Ítem Asimétrico de dos parámetros* (UIRTA-2PL) el cual esencialmente trabaja con una distribución asimétrica para el trazo, en particular se trabajo con la distribución Gamma y la distribución Lognormal.

El segundo modelo propuesto se denomino *Modelo Multiunidimensional Logístico de Teoría de Respuesta al Ítem Asimétrico de dos parámetros* (MuIRTA-2PL) el cual fue escrito como

$$P_{kij} = P(Y_{kij} = 1 | \theta_{kj}, a_{ki}, b_{ki}) = \frac{1}{1 + e^{-a_{ki}(\theta_{kj} - b_{ki})}} \quad (5.1)$$

donde Y_{kij} es la variable aleatoria binaria que representa la respuesta del individuo j para la i -ésima respuesta de la subprueba k . Los parámetros a_{ki} y b_{ki} son respectivamente el parámetro de intercepto y dificultad del ítem ki , en lo que respecta al parámetro θ_{kj} que corresponde a la habilidad del sujeto j en el test k . Además este modelo considero la asimetría de los trazos, en consecuencia surge la necesidad de emplear una distribución multivariada asimétrica que además repare en la correlación existente entre trazos, por ello se decide emplear una copula Gaussiana para la construcción de la función de densidad de la distribución asimétrica requerida; la implementación de la copula posteriormente fue justificada.

Se presentaron algunos inconvenientes con la implementación del modelo, el primero fue la falta de identificabilidad, la cual como sugiere Montenegro (2011) dicho inconveniente puede ser solucionado asignando valores a los parámetros de la distribución del trazo, procedimiento que se desarrollo empleando estimación máximo verosimilitud y que se explico con detalle en la sección 4.2.1. El segundo inconveniente fue de tipo computacional, ya que al considerar todas las respuestas del test, es decir, las tres subpruebas -neuroticismo, psicopatía y paranoide- que constituyen 46 ítems aplicados a los 8767 aspirantes, se tienen 403.282 respuestas, lo que el final configurara una matriz de entrada de 1.613.128 datos (6.2 Mb), y al ejecutar 5 o 6 cadenas de 3000 iteraciones con 1000 de calentamiento que es lo ideal, genera una cantidad considerable de parámetros a estimar y en consecuencia se debe disponer de un espacio considerable de la memoria R.A.M.

Para evaluar la recuperación de los parámetros al emplear el modelo propuesto MuIRTA-2PL, se dividió el análisis en dos partes. En la primera parte se busco ajustar los datos simulados (o reales) empleando el modelo unidimensional propuesto (UIRTA-2PL) por separado para cada trazo y en la segunda parte se realizo el ajuste a los mismos datos pero esta vez empleando el modelo multiunidimensional propuesto (MuIRTA-2PL), con el objeto de comparar los dos ajustes, esta estructura de análisis se siguió tanto en el capítulo tres, que corresponde al estudio de los test simulados, como en el capítulo cuatro que refiere al estudio de los datos reales inventario PIHEMA-R2.

Del estudio de simulación expuesto a detalle en el capítulo tres que compara un modelo multiunidimensional con un modelo unidimensional para pruebas simuladas con diferentes estructuras de dependencia, se mostró que comparativamente el modelo multiunidimensional MuIRTA-2PL es más flexible e incluso funciona bien cuando la correlación entre trazos es nula. Además, el modelo multiunidimensional propuesto emplea la copula Gaussiana para la construcción de la función de densidad multivariada requerida, como resultado de la implementación de dicho modelo se observa que el modelo logra explicar la relación de dependencia entre las habilidades y por tanto produce puntuaciones más confiables que la implementación separada del modelo unidimensional; resultado que ya ha sido mencionado por Sheng and Wikle (2007) para el caso en el que se asume el supuesto de simetría del trazo -Normal multivariada-.

Los resultados reportados en el capítulo cuatro que corresponden a la implementación de los modelos propuestos (UIRTA-2PL) y (MuIRTA-2PL) para los datos reales muestran que el modelo multiunidimensional propuesto es obviamente más preciso para recuperar todos los parámetros del modelo cuando se tiene en cuenta la naturaleza del constructo, además se mostró que la consideración de correlación esta justificada, y en consecuencia el uso de la copula Gaussiana, dado que logra explicarse la estructura de dependencia entre las variables latentes. Finalmente este documento logra establecer que, la correlación entre los trazos y la naturaleza del mismo juegan un papel importante en la estimación de los parámetros en un modelo de la Teoría de Respuesta al Ítem y en consecuencia se sugiere que el investigador del área especifica al test estudiado no debe dejar pasar por alto estas dos consideraciones.

Por supuesto, el estudio desarrollado en este trabajo deja abierta la puerta a futuros trabajos, por ejemplo, el posible uso de otro tipo de copulas que capturen la estructura de dependencia entre variables, la consideración de distribuciones diferentes, asimétricas o simétricas, para cada uno de los trazos dentro de un mismo modelo multiunidimensional y la posible construcción de modelos multidimensionales de la Teoría de Respuesta al Ítems que tengan presente la asimétrica natural del trazo y la correlación entre trazos diferente al modelo de estructura simple o multiunidimensional.

Implementación en R y Stan

A.1. Códigos y funciones empleados en la Simulación

```
#####  
##### Copula Gao.stan #####  
#####  
  
data{  
  int J;  
  int M;  
  real<lower=0> theta1[J];  
  real<lower=0> theta2[J];  
  real<lower=0> theta3[J];  
}  
parameters{  
  real<lower=0> alpha1;  
  real<lower=0> alpha2;  
  real<lower=0> alpha3;  
  real<lower=0> beta1;  
  real<lower=0> beta2;  
  real<lower=0> beta3;  
}  
model{  
  for(j in 1:J){  
    theta1[j] ~ gamma(alpha1,beta1);  
    theta2[j] ~ gamma(alpha2,beta2);  
    theta3[j] ~ gamma(alpha3,beta3);  
  }  
}  
generated quantities{  
  vector[J] u1;  
  vector[J] u2;  
  vector[J] u3;
```

```

for (j in 1:J){
u1[j] = gamma_cdf(theta1[j],alpha1,beta1);
u2[j] = gamma_cdf(theta2[j],alpha2,beta2);
u3[j] = gamma_cdf(theta3[j],alpha3,beta3);
}
}

#####
#### Funciones Stan #####
#####

functions{
/* Cálcula la correlación entre dos variables aleatorias */
real corr(vector x, vector y) {
int J = rows(x);
vector[J] xy;
real sxy;
real sumxy;
real sumx;
real sumy;
real sx;
real sy;
real cor;
xy= rows_dot_product(x,y);
sumxy= sum(xy);
sumx= sum(x);
sumy= sum(y);
sx=sd(x);
sy=sd(y);
sxy=(sumxy-((sumx*sumy)/J))/(J-1);
cor=sxy/(sx*sy);
return cor;
}
/* Construye la matriz de correlación 2 x 2 y 3 x 3, según corresponda */
matrix estmcorr (vector x, vector y){
int J = rows(x);
int M = 2;
int lInf =-6;
int lSup =6;
real rho;
vector[J] x1;
vector[J] x2;
matrix[M,M] Gamma;
for (j in 1:J){
x1[j] = inv_Phi(x[j]);
x2[j] = inv_Phi(y[j]);
x1[j] = (x1[j] < lInf) ? lInf : x1[j];
x1[j] = (x1[j] > lSup) ? lSup : x1[j];
x2[j] = (x2[j] < lInf) ? lInf : x2[j];
}
}
}

```

```

x2[j] = (x2[j] > lSup) ? lSup : x2[j];
}
rho = corr(x1,x2);
for (i in 1:M){
for (j in 1:M){
if (i==j)
Gamma[i,j]=1;
else
Gamma[i,j]=rho;
}
}
return Gamma;
}
matrix m3corr (vector x, vector y, vector z){
int J = rows(x);
int M = 3;
int lInf =-6;
int lSup =6;
real rho;
vector[J] x1;
vector[J] x2;
vector[J] x3;
matrix[M,M] Gamma;
for (j in 1:J){
x1[j] = inv_Phi(x[j]);
x2[j] = inv_Phi(y[j]);
x3[j] = inv_Phi(z[j]);
x1[j] = (x1[j] < lInf) ? lInf : x1[j];
x1[j] = (x1[j] > lSup) ? lSup : x1[j];
x2[j] = (x2[j] < lInf) ? lInf : x2[j];
x2[j] = (x2[j] > lSup) ? lSup : x2[j];
x3[j] = (x3[j] < lInf) ? lInf : x3[j];
x3[j] = (x3[j] > lSup) ? lSup : x3[j];

}
rho12 = corr(x1,x2);
rho13 = corr(x1,x3);
rho23 = corr(x2,x3);
for (i in 1:M){
for (j in 1:M){
if (i==j)
Gamma[i,j]=1;
}
}
Gamma[1,2]=Gamma[2,1]=rho12;
Gamma[1,3]=Gamma[3,1]=rho13;
Gamma[3,2]=Gamma[2,3]=rho23;
return Gamma;
}

```

```
/* La función randomu genera J vectores de números aleatorios vU,
que se distribuyen uniforme en el intervalo [0,1]*/
```

```
matrix randommultinorm_rng(int J, matrix Sigma) {
int M = cols(Sigma);
vector[M] x[J];
matrix[J,M] R;
matrix[J,M] vU;
vector[M] zeros;
matrix[M,M] L;
zeros=rep_vector(0,M);
L=cholesky_decompose(Sigma);
for (n in 1:J){
x[n]= multi_normal_cholesky_rng(zeros,Sigma);
}
for (n in 1:J){
for (k in 1:M){
R[n,k]=x[n][k];
vU[n,k]=normal_cdf(R[n,k],0,1);
}
}
return vU;
}
}
```

A.1.1. Función de Densidad Gamma Multivariada

```
/* La función multi_gamma_lpf corresponde a la función de densidad que se
genera al emplear una copula gaussiana para marginales gamma dadas*/
```

```
functions{
real multi_gamma_lpdf(matrix Theta, vector Alpha, vector Beta, matrix Gamma){
int lInf =-6;
int lSup =6;
int M=cols(Theta);
int J=rows(Theta);
matrix[J,M] vU;
matrix[J,M] vX;
matrix[M,M] RInI;
matrix[J,M] f;
vector[M] x[J];
vector[J] u[M];
vector[M] y[J];
vector[J] resnor;
vector[M] zeros;
vector[M] ones;
matrix[M,M] L;
matrix[J,M] R;
```

```

matrix[M,M] invGamma;
matrix[M,M] IdK;
real ldet;
real doublesum;
real cons;
real fdj;
zeros=rep_vector(0,M);
ones=rep_vector(1,M);
IdK=diag_matrix(ones);
cons=round(J*0.5);

for(k in 1:M){
for(j in 1:J){
vU[j,k] = gamma_cdf(Theta[j,k],Alpha[k],Beta[k]);
f[j,k] = gamma_lpdf(Theta[j,k]|Alpha[k],Beta[k]); //Marginales
vX[j,k] = inv_Phi(vU[j,k]);
vX[j,k] = (vX[j,k] < lInf) ? lInf : vX[j,k];
vX[j,k] = (vX[j,k] > lSup) ? lSup : vX[j,k];
u[k][j] = vU[j,k];
x[j][k] = vX[j,k];
}
}
invGamma = inverse(Gamma);
ldet=log_determinant(Gamma);
doblesum=sum(f);
RInI=invSigma-IdK;

for(j in 1:J){
resnor[j] = (-0.5)*quad_form(RInI,x[j]);
}
fdj = (-cons*ldet)+sum(resnor)+doblesum;
return fdj;
}
}
#####
##### Código Funciondensidad.stan #####
#####
// include multi_gamma_lpdf.stan //
data{
int J; // Number de randoms
int M; // Number of groups (dimensions)
vector[M] AlphMarg; // Parameters of shape
vector[M] BetMarg;// Parameters of scale
}
parameters {
matrix<lower=0>[J,M] Theta; //Matriz of latents ability
corr_matrix[M] Gamma; //Matriz of correlation
}
model{

```

```

vector[M] ones;
matrix[M,M] IdK;
ones=rep_vector(1,M);
IdK=diag_matrix(ones);
Gamma ~ inv_wishart(M+1,IdK);
Theta ~ multi_gamma(AlphMarg,BetMarg,sigma);
}
/* La función multi_lognormal_lpdf corresponde a la función de densidad que se
genera al emplear una copula gaussiana para marginales lognormal dadas*/

functions{
real multi_lognormal_lpdf(matrix Theta, vector Mu, vector Sigma, matrix Gamma){
int lInf =-6;
int lSup =6;
int M=cols(Theta);
int J=rows(Theta);
matrix[J,M] vU;
matrix[J,M] vX;
matrix[M,M] RInI;
matrix[J,M] f;
vector[M] x[J];
vector[J] u[M];
vector[M] y[J];
vector[J] resnor;
vector[M] zeros;
vector[M] ones;
matrix[M,M] L;
matrix[J,M] R;
matrix[M,M] invGamma;
matrix[M,M] IdK;
real ldet;
real doublesum;
real cons;
real fdj;
zeros=rep_vector(0,M);
ones=rep_vector(1,M);
IdK=diag_matrix(ones);
cons=round(J*0.5);

for(k in 1:M){
for(j in 1:J){
vU[j,k] = lognormal_cdf(Theta[j,k],Mu[k],Sigma[k]);
f[j,k] = lognormal_lpdf(Theta[j,k]|Mu[k],Sigma[k]); //Marginales
vX[j,k] = inv_Phi(vU[j,k]);
vX[j,k] = (vX[j,k] < lInf) ? lInf : vX[j,k];
vX[j,k] = (vX[j,k] > lSup) ? lSup : vX[j,k];
u[k][j] = vU[j,k];
x[j][k] = vX[j,k];
}
}
}

```

```

}
invGamma = inverse(Gamma);
ldet=log_determinant(Gamma);
doblesum=sum(f);
RInI=invSigma-IdK;

for(j in 1:J){
resnor[j] = (-0.5)*quad_form(RInI,x[j]);
}
fdj = (-cons*ldet)+sum(resnor)+doblesum;
return fdj;
}
}

```

A.2. Códigos implementación Stan para los Datos Reales

```

#####
##### Estimación máxima verosimilitud #####
#####
library(stats4)
gamaNLL <- function(par,X) {
-sum(dgamma(X, shape=log(1+exp(par[1])), rate=log(1+exp(par[2])),
log = TRUE))
}
EMV1<- optim(par=c(2,3), fn=gamaNLL, method = "BFGS", X=Y+1)

library(bbmle)
Z <- Y+1
NegLogLik = function(alpha_1, beta_1){
-sum(dgamma(Z, shape = log(1+exp(alpha_1)), rate = log(1+exp(beta_1)),
log = TRUE))
}
EMV2<- mle2(minuslogl=NegLogLik, start=list(alpha_1=2, beta_1=3),
method = "BFGS", parameters = list(alpha_1, beta_1))

```

A.2.1. Códigos implementación del modelo BUIRT-2PL y MuBUIRT-2PL en Stan

```

#####
##### Código Modelo UIRTA2PL_gamma.stan #####
#####
// Ejemplo trazo paranoide. Note que la estructura es analoga
en los otros dos lognormal y normal, lo único que debe
modificarse son las funciones de distribución a priori en model block //
data {

```

```

int<lower=1> I; // Number of items
int<lower=1> J; // Number of examinees
int<lower=1> N; // Number of observations
int<lower=1, upper=I> ii[N]; // Item for n
int<lower=1, upper=J> jj[N]; // Examinee for n
int<lower=0, upper=1> y[N]; // Binary response for n
}
parameters {
vector<lower=0>[J] theta; // Latent ability for person J
vector<lower=0>[I] adisc; // Discrimination for item I
vector<lower=0>[I] bdif; // Difficulty for item I
real<lower=0> sigma_gamma; //sd of the prior distributions of category difficulty
}
transformed parameters{
vector[I] a_disc;
a_disc=log(1+exp(adisc));
}
model {
vector[N] eta;
adisc ~ normal(0,sigma_gamma);//
theta ~ gamma(3.41,1.51);// Prior for latent ability parameter
bdif ~ gamma(3.41,1.51);// prior of the item parameters
sigma_gamma ~ cauchy(0,2);// hyper prior for sigma_gamma

for (n in 1:N)
eta[n]=a_disc[ii[n]] * (theta[jj[n]] - bdif[ii[n]]); // 2PL Model
y ~ bernoulli_logit(eta);
}

#####
##### Código MuIRTA-2PL-gamma #####
#####
//
data{
int<lower=1> M; // Number of groups (dimensions)
int<lower=1> N; // Number of observations
int<lower=1> I; // Number of items
int<lower=1> J; // Number of examinees
int<lower=1, upper=I> ii[N]; // Item for N
int<lower=1, upper=J> jj[N]; // Examinee for N
int<lower=1, upper=M> kk[N]; // Dimensions for N
int<lower=0, upper=1> y[N]; // Binary response for n
vector<lower=0> [M] AlphMarg; //shape of each marginal gamma
vector<lower=0> [M] BetMarg; // form of each marginal gamma
}
parameters {
matrix<lower=0>[J,M] Theta; //Matriz latents ability
corr_matrix[M] sigma; //Matriz of correlation
vector<lower=0>[I] adisc; // Discrimination for item I

```

```

vector<lower=0>[I] bdif; // Difficulty for item I
real<lower=0> sigma_gamma; //sd of the prior distributions of category difficulty
real<lower=0> sigma_beta; //sd of the prior distributions of category difficulty

}
model{
vector[N] eta;
vector[M] ones;
matrix[M,M] IdK;
ones=rep_vector(1,M);
IdK=diag_matrix(ones);
sigma ~ inv_wishart(3,IdK);
adisc ~ normal(0,sigma_gamma);// Prior Discrimination for item I
Theta ~ multi_gamma_lpdf(AlphMarg,BetMarg,sigma); // Prior for latents ability
for(j in 1:I1){
bdif[j] ~ gamma(AlphMarg[1],BetMarg[1]);// Prior of the item parameters,
  I1 es el número de ítems del primer subtest}
for(j in 11:I2){
bdif[j] ~ gamma(AlphMarg[2],BetMarg[2]);// Prior of the item parameters,
  I2 es el número de ítems del segundo subtest}
for(j in 21:I3){
bdif[j] ~ gamma(AlphMarg[3],BetMarg[3]);// Prior of the item parameters,
  I3 es el número de ítems del tercer subtest}
sigma_gamma ~ cauchy(0,2);// hyper prior for sigma_gamma
for (n in 1:N)
eta[n] = adisc[ii[n]] * (Theta[jj[n],kk[n]] - bdif[ii[n]]); // 2PL Model
y ~ bernoulli_logit(eta);
}
generated quantities{
vector[N] log_lik;
vector[N] eta;
for (n in 1:N){
eta[n] = adisc[ii[n]] * (Theta[jj[n],kk[n]] - bdif[ii[n]]); // 2PL Model
log_lik[n] = bernoulli_logit_lpmf(y[n]|eta[n]);
}
}
}

```


APÉNDICE B

Resultados de la Simulación

Inference for Stan model: CopulaGao.

3 chains, each with iter=3000; warmup=1500; thin=1

post-warmup draws per chain=1500, total post-warmup draws=4500

	mean	se_mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	n_eff	Rhat
alpha1	2	0	0.08	1.85	1.95	2	2.06	2.17	3329	1
alpha2	2.51	0	0.1	2.32	2.44	2.51	2.58	2.72	3351	1
alpha3	3.01	0	0.13	2.77	2.93	3.01	3.09	3.27	3343	1
beta1	0.5	0	0.02	0.46	0.49	0.5	0.52	0.55	3150	1
beta2	0.75	0	0.03	0.69	0.73	0.75	0.78	0.82	3449	1
beta3	1	0	0.05	0.92	0.97	1	1.04	1.1	3302	1

Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Sun Jul 14 19:58:31 2019.

For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size, and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at convergence, Rhat=1).

Inference for Stan model: Funciondensidad.

3 chains, each with iter=400; warmup=200; thin=1;

post-warmup draws per chain=200, total post-warmup draws=600.

	mean	se_mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	n_eff	Rhat
sigma[1,1]	1.00	0	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	234	1.00
sigma[1,2]	0.43	0	0.04	0.35	0.41	0.44	0.46	0.50	174	1.00
sigma[1,3]	0.21	0	0.04	0.12	0.18	0.21	0.24	0.30	297	1.00
sigma[2,1]	0.43	0	0.04	0.35	0.41	0.44	0.46	0.50	174	1.00
sigma[2,2]	1.00	0	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	756	0.99
sigma[2,3]	0.29	0	0.05	0.20	0.25	0.28	0.32	0.38	258	1.01
sigma[3,1]	0.21	0	0.04	0.12	0.18	0.21	0.24	0.30	297	1.00
sigma[3,2]	0.29	0	0.05	0.20	0.25	0.28	0.32	0.38	258	1.01
sigma[3,3]	1.00	0	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	614	0.99

Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Thu Jul 18 00:11:59 2019.

For each parameter, `n_eff` is a crude measure of effective sample size, and `Rhat` is the potential scale reduction factor on split chains (at convergence, `Rhat=1`).

```
#####
### Resultados parámetros de los ítems ajuste MuIRTA-2PL (Simulación 1)###
#####
Inference for Stan model: MuIRTASim.
```

```
3 chains, each with iter=400; warmup=200; thin=1;
post-warmup draws per chain=200, total post-warmup draws=600.
```

	mean	se_mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	n_eff	Rhat
adisc[1]	0.54	0.00	0.05	0.44	0.51	0.53	0.57	0.64	422	1.00
adisc[2]	0.82	0.01	0.11	0.64	0.74	0.82	0.90	1.04	268	1.00
adisc[3]	1.01	0.01	0.10	0.85	0.95	1.01	1.07	1.22	313	1.00
adisc[4]	0.61	0.00	0.06	0.49	0.57	0.61	0.66	0.75	380	1.00
adisc[5]	0.61	0.00	0.06	0.51	0.57	0.61	0.65	0.74	335	1.01
adisc[6]	0.48	0.00	0.04	0.39	0.45	0.47	0.50	0.58	345	1.00
adisc[7]	0.82	0.01	0.08	0.65	0.76	0.81	0.87	0.98	274	1.00
adisc[8]	0.74	0.00	0.08	0.58	0.68	0.74	0.79	0.92	371	1.01
adisc[9]	0.73	0.00	0.06	0.62	0.69	0.73	0.77	0.86	432	1.00
adisc[10]	0.58	0.00	0.05	0.48	0.54	0.58	0.62	0.68	419	1.00
adisc[11]	0.50	0.00	0.05	0.41	0.46	0.49	0.53	0.59	484	1.00
adisc[12]	0.66	0.00	0.08	0.51	0.60	0.65	0.71	0.82	302	1.01
adisc[13]	0.80	0.00	0.08	0.66	0.75	0.80	0.86	0.97	366	1.00
adisc[14]	0.57	0.00	0.06	0.46	0.53	0.57	0.61	0.71	404	1.00
adisc[15]	0.61	0.00	0.06	0.49	0.57	0.61	0.65	0.75	381	1.00
adisc[16]	0.53	0.00	0.07	0.41	0.48	0.53	0.58	0.68	285	1.01
adisc[17]	0.94	0.01	0.11	0.75	0.87	0.93	1.01	1.19	323	1.00
adisc[18]	0.64	0.00	0.08	0.50	0.58	0.63	0.68	0.80	339	1.00
adisc[19]	0.63	0.00	0.07	0.50	0.58	0.62	0.67	0.77	380	1.00
adisc[20]	0.59	0.00	0.06	0.47	0.55	0.59	0.63	0.73	344	1.01
adisc[21]	0.59	0.00	0.07	0.45	0.54	0.58	0.63	0.74	376	1.00
adisc[22]	0.72	0.01	0.10	0.54	0.66	0.72	0.78	0.90	225	1.01
adisc[23]	1.42	0.02	0.41	0.75	1.13	1.36	1.64	2.35	651	1.00
adisc[24]	0.59	0.00	0.08	0.45	0.52	0.58	0.64	0.75	286	1.01
adisc[25]	0.64	0.01	0.09	0.48	0.58	0.64	0.70	0.82	193	1.02
adisc[26]	0.55	0.00	0.07	0.41	0.50	0.55	0.60	0.71	279	1.01
adisc[27]	0.86	0.00	0.09	0.69	0.79	0.85	0.92	1.04	336	1.00
adisc[28]	0.74	0.01	0.08	0.58	0.69	0.74	0.79	0.91	221	1.01
adisc[29]	0.76	0.01	0.09	0.59	0.70	0.75	0.81	0.96	300	1.01
adisc[30]	0.61	0.00	0.07	0.47	0.56	0.61	0.66	0.75	266	1.01

Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Thu Jul 18 00:11:59 2019.

For each parameter, `n_eff` is a crude measure of effective sample size, and `Rhat` is the potential scale reduction factor on split chains (at convergence, `Rhat=1`).

Inference for Stan model: MuIRTASim.

3 chains, each with iter=400; warmup=200; thin=1;
post-warmup draws per chain=200, total post-warmup draws=600.

	mean	se_mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	n_eff	Rhat
bdif[1]	3.16	0.01	0.15	2.87	3.06	3.16	3.26	3.45	413	1.01
bdif[2]	0.44	0.01	0.21	0.05	0.27	0.45	0.59	0.81	307	1.01
bdif[3]	4.73	0.01	0.15	4.44	4.63	4.73	4.84	5.02	219	1.02
bdif[4]	2.30	0.01	0.15	1.98	2.20	2.30	2.41	2.61	361	1.01
bdif[5]	2.90	0.01	0.15	2.60	2.80	2.89	2.99	3.21	265	1.01
bdif[6]	5.44	0.01	0.22	5.03	5.29	5.43	5.56	5.93	268	1.01
bdif[7]	1.90	0.01	0.13	1.64	1.82	1.91	1.99	2.14	257	1.01
bdif[8]	2.07	0.01	0.13	1.80	1.99	2.08	2.16	2.32	343	1.01
bdif[9]	5.12	0.01	0.18	4.78	4.99	5.10	5.24	5.47	238	1.02
bdif[10]	3.20	0.01	0.16	2.89	3.09	3.20	3.30	3.52	315	1.01
bdif[11]	5.82	0.01	0.28	5.35	5.61	5.81	6.02	6.43	423	1.00
bdif[12]	1.32	0.01	0.18	0.94	1.21	1.33	1.44	1.65	270	1.03
bdif[13]	3.26	0.01	0.13	3.01	3.17	3.26	3.34	3.50	281	1.00
bdif[14]	3.52	0.01	0.15	3.24	3.42	3.52	3.63	3.82	299	1.00
bdif[15]	3.93	0.01	0.15	3.62	3.84	3.93	4.01	4.24	368	1.00
bdif[16]	1.03	0.01	0.24	0.53	0.88	1.04	1.20	1.48	316	1.00
bdif[17]	6.86	0.02	0.28	6.37	6.67	6.85	7.04	7.45	281	1.00
bdif[18]	1.61	0.01	0.16	1.31	1.50	1.62	1.73	1.91	445	1.00
bdif[19]	2.26	0.01	0.14	1.98	2.17	2.26	2.35	2.55	239	1.01
bdif[20]	2.74	0.01	0.13	2.50	2.66	2.75	2.83	2.96	477	1.00
bdif[21]	1.80	0.01	0.15	1.47	1.70	1.80	1.90	2.07	433	1.00
bdif[22]	1.64	0.01	0.16	1.30	1.55	1.65	1.75	1.90	198	1.00
bdif[23]	10.83	0.05	0.97	9.29	10.11	10.72	11.31	13.39	423	1.00
bdif[24]	1.04	0.01	0.22	0.64	0.89	1.04	1.21	1.42	414	1.00
bdif[25]	1.91	0.01	0.15	1.61	1.82	1.91	2.00	2.19	356	1.01
bdif[26]	1.90	0.01	0.16	1.57	1.79	1.91	2.02	2.17	317	1.00
bdif[27]	4.88	0.01	0.19	4.52	4.74	4.87	4.99	5.30	290	1.01
bdif[28]	5.40	0.01	0.24	4.95	5.24	5.39	5.55	5.89	288	1.01
bdif[29]	2.33	0.00	0.11	2.12	2.25	2.33	2.40	2.53	544	1.00
bdif[30]	2.17	0.00	0.12	1.92	2.09	2.18	2.25	2.41	723	1.00

Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Thu Jul 18 00:11:59 2019.

For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
convergence, Rhat=1).

Inference for Stan model: MuIRTASim.

3 chains, each with iter=400; warmup=200; thin=1;
post-warmup draws per chain=200, total post-warmup draws=600.

	mean	se_mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	n_eff	Rhat
sigma[1,1]	1.00		NaN	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	NaN	NaN
sigma[1,2]	0.42		0	0.03	0.35	0.40	0.42	0.45	216	1.01
sigma[1,3]	0.20		0	0.04	0.13	0.17	0.20	0.22	483	1.00

sigma[2,1]	0.42	0	0.03	0.35	0.40	0.42	0.45	0.42	216	1.01
sigma[2,2]	1.00	0	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	566	0.99
sigma[2,3]	0.27	0	0.04	0.19	0.24	0.27	0.29	0.27	364	1.00
sigma[3,1]	0.20	0	0.04	0.13	0.17	0.20	0.22	0.20	483	1.00
sigma[3,2]	0.27	0	0.04	0.19	0.24	0.27	0.29	0.27	364	1.00
sigma[3,3]	1.00	0	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	590	0.99

Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Thu Jul 18 02:35:30 2019.
 For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
 and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
 convergence, Rhat=1).

```
#####
### Resultados parámetros de los ítems ajuste MuIRTA-2PL (Simulación 2)###
#####
Inference for Stan model: MuIRTASim.
3 chains, each with iter=400; warmup=200; thin=1;
post-warmup draws per chain=200, total post-warmup draws=600.
```

	mean	se_mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	n_eff	Rhat
adisc[1]	0.78	0.00	0.08	0.63	0.72	0.77	0.82	0.92	330	1.00
adisc[2]	1.34	0.01	0.16	1.06	1.23	1.33	1.45	1.67	343	1.00
adisc[3]	1.62	0.04	0.48	0.97	1.31	1.51	1.81	2.82	169	1.01
adisc[4]	0.82	0.01	0.09	0.64	0.76	0.82	0.88	1.02	267	1.00
adisc[5]	0.89	0.00	0.09	0.73	0.83	0.89	0.95	1.06	324	1.00
adisc[6]	0.70	0.00	0.07	0.57	0.65	0.70	0.75	0.85	347	1.00
adisc[7]	1.29	0.01	0.15	1.01	1.18	1.28	1.38	1.60	229	1.00
adisc[8]	1.16	0.01	0.11	0.95	1.08	1.16	1.24	1.39	330	1.00
adisc[9]	1.03	0.00	0.09	0.86	0.96	1.02	1.09	1.22	346	1.00
adisc[10]	0.83	0.00	0.07	0.70	0.78	0.82	0.87	0.98	257	1.01
adisc[11]	0.74	0.00	0.07	0.60	0.69	0.74	0.79	0.90	413	1.00
adisc[12]	1.11	0.01	0.10	0.93	1.04	1.11	1.18	1.33	416	1.01
adisc[13]	1.55	0.01	0.21	1.19	1.40	1.53	1.69	1.97	344	1.01
adisc[14]	0.86	0.00	0.08	0.70	0.80	0.85	0.91	1.02	349	1.02
adisc[15]	0.88	0.00	0.08	0.72	0.82	0.88	0.93	1.04	347	1.00
adisc[16]	0.76	0.00	0.07	0.64	0.72	0.76	0.80	0.90	315	1.00
adisc[17]	1.39	0.01	0.14	1.15	1.29	1.38	1.48	1.68	309	1.01
adisc[18]	1.07	0.01	0.10	0.87	0.99	1.07	1.13	1.26	305	1.00
adisc[19]	1.23	0.01	0.16	0.93	1.12	1.21	1.34	1.58	268	1.00
adisc[20]	0.74	0.00	0.06	0.62	0.69	0.73	0.77	0.87	476	1.00
adisc[21]	0.74	0.00	0.07	0.61	0.70	0.74	0.79	0.90	465	1.00
adisc[22]	1.01	0.00	0.10	0.83	0.94	1.00	1.08	1.21	436	1.00
adisc[23]	1.13	0.01	0.14	0.85	1.03	1.12	1.22	1.40	231	1.00
adisc[24]	1.08	0.00	0.10	0.88	1.01	1.07	1.15	1.28	450	1.00
adisc[25]	0.84	0.00	0.07	0.70	0.79	0.84	0.89	0.99	302	1.02
adisc[26]	0.71	0.00	0.07	0.57	0.66	0.70	0.75	0.84	352	1.00
adisc[27]	1.37	0.01	0.14	1.11	1.28	1.37	1.46	1.65	342	1.00
adisc[28]	1.26	0.01	0.14	1.01	1.15	1.25	1.35	1.54	373	1.00

```

adisc[29] 1.13    0.00 0.10 0.93 1.07 1.12 1.19 1.34 470 1.00
adisc[30] 0.88    0.00 0.08 0.74 0.83 0.88 0.93 1.04 340 1.02

```

Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Sun Jul 22 17:58:40 2019.
For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
convergence, Rhat=1).

Inference for Stan model: MuIRTASim.

3 chains, each with iter=400; warmup=200; thin=1;
post-warmup draws per chain=200, total post-warmup draws=600.

	mean	se_mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	n_eff	Rhat
bdif[1]	1.75	0.01	0.14	1.49	1.65	1.76	1.85	2.01	304	1.00
bdif[2]	5.94	0.02	0.18	5.60	5.81	5.94	6.07	6.30	114	1.01
bdif[3]	9.16	0.03	0.34	8.56	8.93	9.13	9.35	9.86	155	1.01
bdif[4]	0.82	0.01	0.18	0.44	0.71	0.84	0.95	1.17	205	1.00
bdif[5]	2.28	0.01	0.11	2.07	2.20	2.27	2.35	2.52	237	1.02
bdif[6]	1.16	0.01	0.17	0.83	1.05	1.17	1.28	1.49	468	1.00
bdif[7]	1.89	0.01	0.09	1.70	1.83	1.89	1.95	2.08	185	1.02
bdif[8]	2.21	0.01	0.10	2.02	2.14	2.21	2.28	2.40	191	1.03
bdif[9]	4.27	0.01	0.15	3.98	4.17	4.26	4.36	4.58	140	1.01
bdif[10]	2.73	0.01	0.13	2.47	2.64	2.73	2.82	2.98	239	1.01
bdif[11]	5.12	0.01	0.19	4.79	4.99	5.12	5.25	5.51	370	1.01
bdif[12]	0.25	0.01	0.12	0.05	0.17	0.24	0.33	0.51	355	1.00
bdif[13]	0.94	0.01	0.12	0.69	0.86	0.95	1.02	1.14	332	1.01
bdif[14]	2.73	0.01	0.10	2.52	2.66	2.73	2.80	2.93	381	1.01
bdif[15]	3.25	0.01	0.11	3.02	3.17	3.25	3.32	3.48	394	1.01
bdif[16]	3.90	0.01	0.13	3.65	3.81	3.89	3.99	4.17	191	1.03
bdif[17]	2.36	0.00	0.08	2.19	2.30	2.35	2.41	2.51	308	1.02
bdif[18]	2.51	0.00	0.09	2.33	2.45	2.51	2.57	2.67	366	1.01
bdif[19]	0.69	0.01	0.15	0.38	0.59	0.69	0.79	0.95	264	1.00
bdif[20]	2.76	0.01	0.11	2.54	2.69	2.76	2.84	2.97	403	1.02
bdif[21]	3.45	0.01	0.13	3.22	3.37	3.45	3.53	3.73	299	1.00
bdif[22]	1.65	0.00	0.10	1.45	1.60	1.66	1.71	1.83	442	1.00
bdif[23]	1.13	0.01	0.14	0.80	1.05	1.14	1.22	1.36	234	1.00
bdif[24]	2.22	0.00	0.08	2.05	2.16	2.22	2.28	2.37	324	1.00
bdif[25]	3.86	0.01	0.13	3.62	3.77	3.86	3.94	4.12	268	1.01
bdif[26]	3.14	0.01	0.11	2.91	3.06	3.14	3.22	3.36	360	1.00
bdif[27]	2.16	0.01	0.07	2.02	2.11	2.16	2.21	2.30	185	1.00
bdif[28]	5.61	0.01	0.20	5.25	5.47	5.60	5.74	6.01	301	1.01
bdif[29]	3.39	0.01	0.11	3.19	3.32	3.39	3.45	3.61	306	1.01
bdif[30]	2.69	0.01	0.10	2.51	2.62	2.69	2.75	2.87	364	1.00

Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Sun Jul 22 17:58:40 2019.
For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
convergence, Rhat=1).

Inference for Stan model: MuBUIRTSim.

3 chains, each with iter=400; warmup=200; thin=1;

post-warmup draws per chain=200, total post-warmup draws=600.

	mean	se_mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	n_eff	Rhat
sigma[1,1]	1.00	NaN	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	NaN	NaN
sigma[1,2]	-0.03	0	0.04	-0.11	-0.06	-0.03	0.00	-0.03	434	1.00
sigma[1,3]	0.00	0	0.04	-0.07	-0.02	0.00	0.03	0.02	426	1.00
sigma[2,1]	-0.03	0	0.04	-0.11	-0.06	-0.03	0.00	-0.03	434	1.00
sigma[2,2]	1.00	0	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	606	0.99
sigma[2,3]	0.02	0	0.04	-0.08	-0.03	0.00	0.03	0.00	695	1.00
sigma[3,1]	0.00	0	0.04	-0.07	-0.02	0.00	0.03	0.02	426	1.00
sigma[3,2]	0.02	0	0.04	-0.08	-0.03	0.00	0.03	0.00	695	1.00
sigma[3,3]	1.00	0	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	551	0.99

Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Sun Jul 22 17:58:40 2019.

For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size, and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at convergence, Rhat=1).

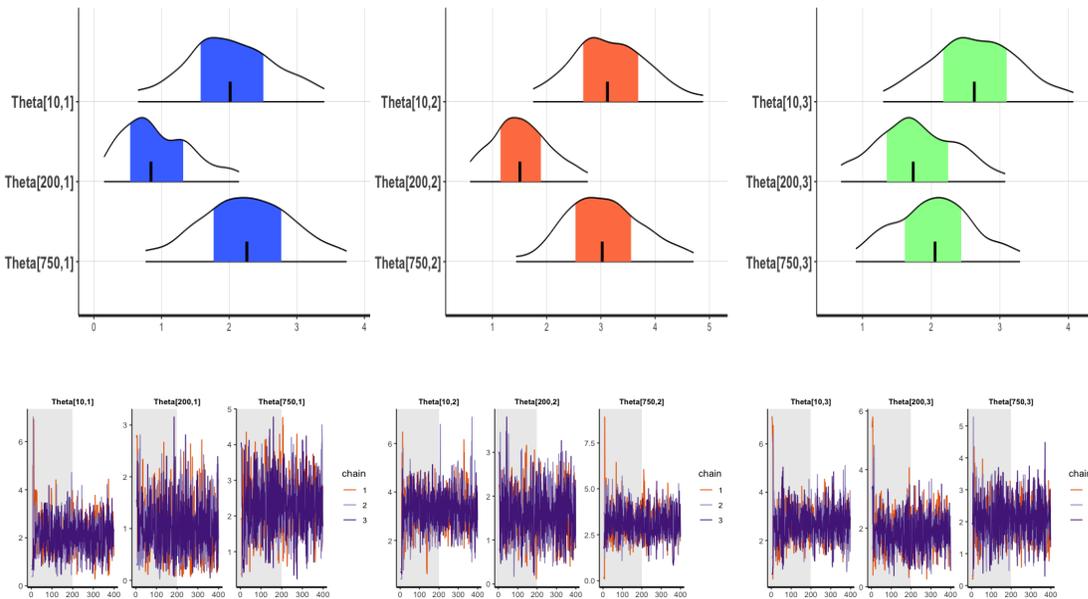


FIGURA B.1. (Simulación 2) Gráficos de las MCMC y densidad para algunos individuos. Izq. a Der. Test1, Test2 y Test3.

```
#####
### Resultados parámetros de los ítems ajuste MuIRTA-2PL (Simulación 3)###
#####
```

Inference for Stan model: MuIRTASim.

3 chains, each with iter=400; warmup=200; thin=1;

post-warmup draws per chain=200, total post-warmup draws=600.

	mean	se_mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	n_eff	Rhat
adisc[1]	0.73	0.00	0.07	0.60	0.68	0.73	0.77	0.86	265	1.01
adisc[2]	1.17	0.01	0.14	0.94	1.08	1.16	1.24	1.47	180	1.01
adisc[3]	1.70	0.04	0.51	1.01	1.34	1.59	1.95	2.89	159	1.01
adisc[4]	1.03	0.01	0.11	0.84	0.95	1.02	1.10	1.23	306	1.00
adisc[5]	0.88	0.00	0.08	0.72	0.82	0.88	0.94	1.04	354	1.00
adisc[6]	0.83	0.00	0.08	0.68	0.77	0.82	0.88	0.99	327	1.01
adisc[7]	1.49	0.01	0.14	1.22	1.38	1.48	1.57	1.79	184	1.00
adisc[8]	1.13	0.01	0.11	0.95	1.06	1.13	1.21	1.34	329	1.01
adisc[9]	1.01	0.00	0.08	0.86	0.96	1.01	1.07	1.18	315	1.00
adisc[10]	0.80	0.00	0.07	0.68	0.75	0.79	0.85	0.93	352	1.00
adisc[11]	0.70	0.00	0.06	0.59	0.65	0.69	0.74	0.83	394	1.00
adisc[12]	1.32	0.01	0.16	1.04	1.20	1.31	1.42	1.65	238	1.01
adisc[13]	1.52	0.01	0.18	1.20	1.38	1.51	1.64	1.90	150	1.03
adisc[14]	0.92	0.00	0.08	0.75	0.86	0.92	0.98	1.08	302	1.00
adisc[15]	0.81	0.00	0.07	0.68	0.76	0.81	0.86	0.98	291	1.00
adisc[16]	0.68	0.00	0.06	0.56	0.64	0.68	0.72	0.80	287	1.01
adisc[17]	1.19	0.01	0.11	0.98	1.11	1.18	1.26	1.41	330	1.00
adisc[18]	1.04	0.01	0.09	0.87	0.98	1.04	1.10	1.23	301	1.00
adisc[19]	1.07	0.01	0.11	0.89	0.99	1.06	1.14	1.31	250	1.00
adisc[20]	0.86	0.01	0.07	0.73	0.81	0.86	0.91	1.02	201	1.00
adisc[21]	0.73	0.00	0.07	0.61	0.69	0.73	0.78	0.88	184	1.01
adisc[22]	0.90	0.00	0.09	0.73	0.83	0.89	0.96	1.09	406	1.00
adisc[23]	1.42	0.01	0.16	1.15	1.32	1.41	1.51	1.73	250	1.00
adisc[24]	0.92	0.01	0.08	0.76	0.86	0.91	0.97	1.09	195	1.01
adisc[25]	0.88	0.01	0.07	0.73	0.83	0.87	0.92	1.02	214	1.01
adisc[26]	0.70	0.00	0.06	0.59	0.66	0.70	0.73	0.82	382	1.00
adisc[27]	1.56	0.01	0.14	1.32	1.46	1.56	1.65	1.88	348	1.00
adisc[28]	1.14	0.01	0.11	0.94	1.05	1.13	1.21	1.38	196	1.00
adisc[29]	1.03	0.01	0.09	0.87	0.96	1.02	1.08	1.21	163	1.02
adisc[30]	0.86	0.01	0.08	0.71	0.81	0.86	0.91	1.03	204	1.01

Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Tue Jul 23 05:20:21 2019.
For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
convergence, Rhat=1).

Inference for Stan model: MuIRTASim.

3 chains, each with iter=400; warmup=200; thin=1;
post-warmup draws per chain=200, total post-warmup draws=600.

	mean	se_mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	n_eff	Rhat
bdif[1]	1.84	0.01	0.15	1.52	1.73	1.85	1.95	2.13	291	1.01
bdif[2]	6.05	0.02	0.19	5.66	5.92	6.05	6.18	6.40	68	1.04
bdif[3]	9.66	0.04	0.35	8.99	9.44	9.65	9.90	10.37	65	1.06
bdif[4]	1.04	0.01	0.14	0.76	0.96	1.04	1.13	1.29	351	1.00
bdif[5]	2.14	0.01	0.11	1.93	2.06	2.14	2.22	2.36	221	1.01
bdif[6]	1.30	0.01	0.14	1.03	1.20	1.30	1.40	1.56	240	1.00
bdif[7]	2.03	0.01	0.09	1.86	1.97	2.03	2.09	2.21	135	1.02

bdif[8]	2.23	0.01	0.10	2.02	2.16	2.23	2.29	2.42	187	1.02
bdif[9]	4.34	0.02	0.13	4.09	4.26	4.34	4.43	4.62	71	1.04
bdif[10]	2.55	0.01	0.11	2.34	2.47	2.55	2.62	2.78	134	1.03
bdif[11]	5.12	0.02	0.18	4.77	4.99	5.12	5.25	5.48	137	1.01
bdif[12]	0.46	0.01	0.15	0.15	0.36	0.47	0.55	0.75	207	1.00
bdif[13]	0.88	0.01	0.11	0.66	0.79	0.88	0.96	1.08	149	1.02
bdif[14]	2.45	0.01	0.09	2.28	2.39	2.45	2.51	2.64	121	1.02
bdif[15]	3.16	0.01	0.12	2.95	3.07	3.15	3.24	3.40	146	1.01
bdif[16]	4.03	0.01	0.15	3.76	3.93	4.03	4.13	4.32	135	1.01
bdif[17]	2.16	0.01	0.10	1.96	2.10	2.16	2.22	2.35	142	1.01
bdif[18]	2.64	0.01	0.09	2.46	2.58	2.64	2.71	2.82	132	1.02
bdif[19]	0.33	0.01	0.14	0.09	0.22	0.33	0.44	0.62	324	1.00
bdif[20]	2.99	0.01	0.11	2.76	2.91	2.99	3.06	3.21	119	1.02
bdif[21]	3.51	0.01	0.13	3.25	3.42	3.50	3.60	3.77	204	1.01
bdif[22]	1.58	0.01	0.11	1.37	1.51	1.58	1.65	1.78	416	1.00
bdif[23]	1.33	0.01	0.09	1.13	1.27	1.34	1.40	1.49	192	1.01
bdif[24]	2.08	0.01	0.10	1.89	2.01	2.08	2.15	2.27	322	1.01
bdif[25]	3.88	0.01	0.12	3.65	3.80	3.89	3.96	4.13	148	1.01
bdif[26]	3.37	0.01	0.13	3.14	3.28	3.37	3.46	3.61	203	1.00
bdif[27]	2.21	0.01	0.07	2.08	2.15	2.21	2.25	2.34	142	1.02
bdif[28]	5.67	0.02	0.20	5.29	5.53	5.66	5.80	6.07	99	1.01
bdif[29]	3.42	0.01	0.11	3.21	3.34	3.43	3.50	3.63	121	1.02
bdif[30]	2.64	0.01	0.10	2.45	2.58	2.64	2.70	2.83	152	1.01

Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Tue Jul 23 05:20:21 2019.
 For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
 and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
 convergence, Rhat=1).

Inference for Stan model: MuIRTASim.

3 chains, each with iter=400; warmup=200; thin=1;
 post-warmup draws per chain=200, total post-warmup draws=600.

	mean	se_mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	n_eff	Rhat
sigma[1,1]	1.00	NaN	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	NaN	NaN
sigma[1,2]	0.79	0	0.02	0.76	0.78	0.79	0.81	0.79	141	1.00
sigma[1,3]	0.89	0	0.01	0.86	0.88	0.89	0.90	0.89	85	1.07
sigma[2,1]	0.79	0	0.02	0.76	0.78	0.79	0.81	0.79	141	1.00
sigma[2,2]	1.00	NaN	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	NaN	NaN
sigma[2,3]	0.69	0	0.02	0.64	0.67	0.69	0.70	0.69	140	1.01
sigma[3,1]	0.89	0	0.01	0.86	0.88	0.89	0.90	0.89	85	1.07
sigma[3,2]	0.69	0	0.02	0.64	0.67	0.69	0.70	0.69	140	1.01
sigma[3,3]	1.00	0	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	507	0.99

Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Tue Jul 23 05:20:21 2019.
 For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
 and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
 convergence, Rhat=1).

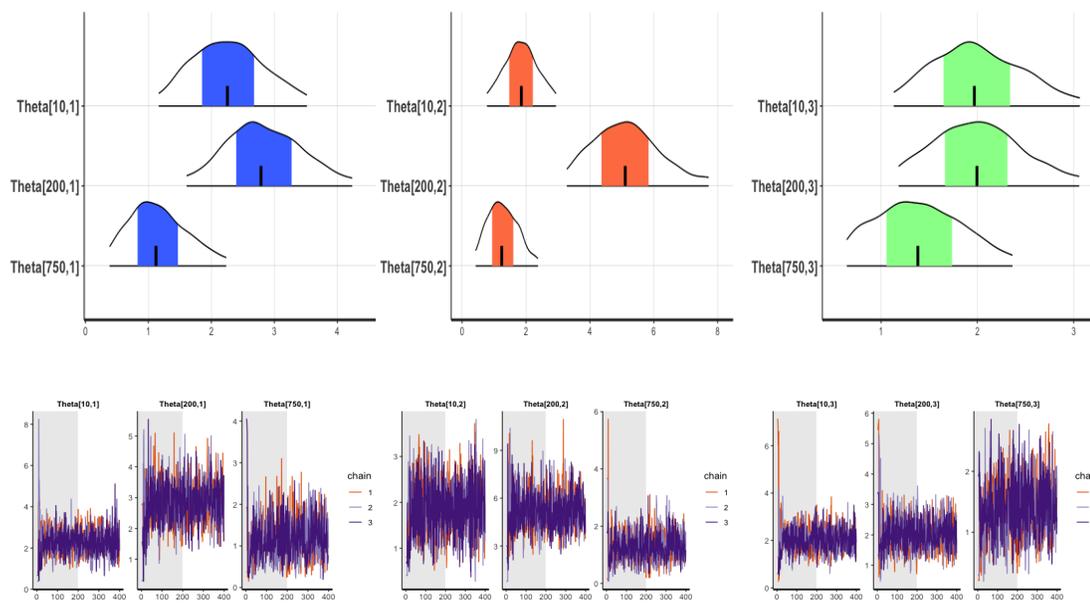


FIGURA B.2. (*Simulación 3*) Gráficos de las MCMC y densidad para algunos individuos. Izq. a Der. Test1, Test2 y Test3.

APÉNDICE C

Resultados de los modelos UIRTA-2PL y MuIRTA-2PL en datos reales

C.1. Resultados datos reales para el modelo unidimensional

C.1.1. Neuroticismo

	bdif_mean	bdif_sd	bdif_975	bdif_025	adisc_mean	adisc_sd	adisc_975	adisc_025
1	0.83	0.02	0.87	0.80	6.05	0.38	6.84	5.30
2	1.42	0.06	1.55	1.31	3.62	0.32	4.27	3.04
3	1.00	0.04	1.09	0.92	2.10	0.18	2.44	1.75
4	0.91	0.02	0.95	0.87	5.59	0.36	6.31	4.92
5	1.09	0.03	1.15	1.03	4.72	0.33	5.41	4.11
6	1.14	0.05	1.24	1.06	2.47	0.19	2.86	2.10
7	1.13	0.04	1.21	1.06	3.97	0.30	4.57	3.42
8	1.15	0.05	1.26	1.07	2.47	0.20	2.87	2.09
9	0.84	0.03	0.91	0.78	2.41	0.19	2.79	2.05
10	0.82	0.02	0.87	0.78	3.90	0.25	4.40	3.44
11	1.04	0.03	1.11	0.99	4.38	0.30	5.00	3.84
12	1.33	0.06	1.45	1.23	2.96	0.24	3.45	2.49
13	1.47	0.07	1.61	1.35	3.45	0.32	4.07	2.83
14	0.82	0.03	0.88	0.76	2.40	0.19	2.77	2.03
15	0.98	0.03	1.05	0.91	2.88	0.21	3.29	2.48
16	1.06	0.03	1.11	1.01	6.23	0.46	7.10	5.37
17	1.06	0.03	1.13	1.01	5.08	0.35	5.77	4.39
18	0.89	0.03	0.95	0.84	3.60	0.24	4.08	3.15
19	0.91	0.03	0.97	0.86	3.57	0.24	4.04	3.10
20	0.73	0.02	0.76	0.69	4.15	0.25	4.68	3.68
21	1.33	0.04	1.42	1.25	5.33	0.46	6.28	4.49
22	1.09	0.04	1.17	1.02	3.03	0.22	3.48	2.61

TABLA C.1. Parámetros del ítem constructo Neuroticismo con ajuste Gamma

	bdif_mean	bdif_sd	bdif_975	bdif_025	adisc_mean	adisc_sd	adisc_975	adisc_025
1	5.43	0.10	5.62	5.24	1.16	0.07	1.31	1.03
2	8.13	0.22	8.54	7.70	0.76	0.05	0.87	0.70
3	5.42	0.10	5.61	5.24	0.70	0.00	0.71	0.69
4	5.77	0.11	5.98	5.56	1.11	0.07	1.25	0.98
5	6.64	0.15	6.94	6.37	0.94	0.07	1.08	0.82
6	6.23	0.11	6.45	6.01	0.70	0.01	0.72	0.69
7	6.84	0.16	7.17	6.54	0.80	0.05	0.90	0.71
8	6.26	0.11	6.48	6.04	0.70	0.01	0.72	0.69
9	5.00	0.10	5.20	4.79	0.70	0.01	0.72	0.69
10	5.31	0.11	5.53	5.10	0.78	0.04	0.87	0.70
11	6.44	0.14	6.72	6.17	0.87	0.06	0.98	0.77
12	7.36	0.13	7.63	7.11	0.71	0.02	0.76	0.69
13	8.27	0.20	8.64	7.87	0.74	0.04	0.83	0.70
14	4.90	0.10	5.09	4.71	0.70	0.01	0.71	0.69
15	5.79	0.11	6.00	5.57	0.70	0.01	0.73	0.69
16	6.49	0.13	6.74	6.25	1.23	0.09	1.43	1.06
17	6.51	0.14	6.79	6.25	1.02	0.07	1.16	0.90
18	5.63	0.11	5.84	5.41	0.74	0.03	0.81	0.70
19	5.74	0.12	5.95	5.51	0.73	0.03	0.79	0.69
20	4.85	0.10	5.06	4.66	0.81	0.05	0.90	0.73
21	7.82	0.21	8.26	7.44	1.05	0.09	1.23	0.89
22	6.36	0.12	6.59	6.14	0.71	0.01	0.75	0.69

TABLA C.2. Parámetros del ítem constructo Neuroticismo con ajuste Lognormal

	bdif_mean	bdif_sd	bdif_975	bdif_025	adisc_mean	adisc_sd	adisc_975	adisc_025
1	0.85	0.04	0.93	0.77	2.57	0.16	2.91	2.27
2	2.16	0.13	2.42	1.93	1.59	0.14	1.86	1.34
3	1.23	0.10	1.43	1.04	0.83	0.06	0.97	0.72
4	1.02	0.05	1.11	0.93	2.37	0.15	2.70	2.09
5	1.42	0.07	1.57	1.30	2.03	0.15	2.33	1.75
6	1.56	0.11	1.78	1.37	1.02	0.08	1.18	0.87
7	1.53	0.08	1.68	1.39	1.69	0.12	1.94	1.46
8	1.61	0.11	1.87	1.41	0.99	0.08	1.15	0.84
9	0.84	0.07	1.00	0.70	0.96	0.07	1.10	0.82
10	0.82	0.05	0.92	0.72	1.58	0.10	1.78	1.39
11	1.33	0.06	1.46	1.21	1.86	0.13	2.11	1.61
12	1.98	0.13	2.26	1.76	1.26	0.11	1.47	1.05
13	2.27	0.14	2.59	2.02	1.49	0.13	1.76	1.24
14	0.79	0.08	0.95	0.65	0.93	0.07	1.08	0.80
15	1.19	0.08	1.36	1.05	1.15	0.08	1.33	1.00
16	1.35	0.05	1.46	1.25	2.76	0.21	3.18	2.37
17	1.37	0.06	1.50	1.26	2.19	0.15	2.49	1.90
18	0.98	0.06	1.10	0.87	1.47	0.10	1.67	1.27
19	1.04	0.06	1.17	0.93	1.43	0.10	1.63	1.25
20	0.58	0.04	0.67	0.49	1.65	0.10	1.84	1.46
21	1.94	0.09	2.15	1.78	2.37	0.21	2.81	1.96
22	1.45	0.09	1.64	1.29	1.24	0.09	1.43	1.06

TABLA C.3. Parámetros del ítem constructo Neuroticismo con ajuste Normal

C.1.2. Tendencias Paranoides

	bdif_mean	bdif_sd	bdif_975	bdif_025	adisc_mean	adisc_sd	adisc_975	adisc_025
1	5.87	0.14	6.14	5.59	0.71	0.02	0.76	0.69
2	3.47	0.10	3.68	3.28	0.80	0.06	0.92	0.70
3	2.95	0.06	3.08	2.83	1.33	0.09	1.51	1.16
4	4.14	0.12	4.40	3.91	1.15	0.09	1.33	0.98
5	5.85	0.31	6.51	5.31	0.91	0.09	1.10	0.73
6	2.76	0.06	2.89	2.64	1.17	0.08	1.34	1.02
7	3.32	0.07	3.46	3.19	1.60	0.12	1.85	1.38
8	2.76	0.07	2.89	2.61	0.73	0.03	0.80	0.69
9	2.42	0.05	2.52	2.32	1.31	0.09	1.49	1.15
10	0.73	0.09	0.90	0.53	1.23	0.11	1.45	1.03
11	3.96	0.11	4.19	3.75	1.13	0.09	1.31	0.97
12	3.35	0.10	3.55	3.16	0.82	0.06	0.95	0.71
13	3.40	0.08	3.55	3.25	0.70	0.01	0.73	0.69
14	5.43	0.23	5.87	4.98	0.82	0.07	0.97	0.70

TABLA C.4. Parámetros del ítems constructo Paranoide con ajuste Gamma

	bdif_mean	bdif_sd	bdif_975	bdif_025	adisc_mean	adisc_sd	adisc_975	adisc_025
1	8.55	0.07	8.69	8.42	0.69	0.00	0.70	0.69
2	5.81	0.05	5.89	5.71	0.69	0.00	0.70	0.69
3	5.52	0.07	5.66	5.39	0.74	0.04	0.81	0.69
4	7.42	0.10	7.61	7.24	0.71	0.02	0.77	0.69
5	9.18	0.09	9.34	9.00	0.70	0.00	0.71	0.69
6	5.19	0.05	5.28	5.10	0.70	0.01	0.72	0.69
7	6.17	0.17	6.46	5.96	0.83	0.11	0.97	0.69
8	4.83	0.05	4.92	4.74	0.69	0.00	0.70	0.69
9	4.65	0.04	4.74	4.57	0.71	0.02	0.74	0.69
10	1.84	0.05	1.93	1.73	0.70	0.01	0.72	0.69
11	7.23	0.07	7.35	7.10	0.70	0.01	0.71	0.69
12	5.73	0.05	5.82	5.64	0.70	0.00	0.70	0.69
13	5.66	0.05	5.76	5.55	0.69	0.00	0.70	0.69
14	8.38	0.08	8.52	8.23	0.70	0.00	0.71	0.69

TABLA C.5. Parámetros del ítems constructo Paranoide con ajuste Lognormal

	bdif_mean	bdif_sd	bdif_975	bdif_025	adisc_mean	adisc_sd	adisc_975	adisc_025
1	3.61	0.06	3.73	3.49	0.70	0.01	0.72	0.69
2	0.97	0.04	1.04	0.90	1.02	0.04	1.10	0.94
3	0.62	0.02	0.66	0.57	1.62	0.06	1.72	1.51
4	1.59	0.04	1.68	1.51	1.46	0.06	1.57	1.35
5	3.02	0.14	3.31	2.78	1.05	0.06	1.16	0.93
6	0.50	0.03	0.55	0.45	1.27	0.04	1.35	1.18
7	0.88	0.02	0.93	0.84	2.10	0.07	2.24	1.96
8	0.45	0.04	0.52	0.38	0.71	0.02	0.75	0.69
9	0.20	0.02	0.24	0.16	1.39	0.05	1.50	1.30
10	-1.50	0.05	-1.41	-1.61	1.11	0.04	1.19	1.02
11	1.63	0.05	1.74	1.54	1.23	0.05	1.32	1.13
12	0.92	0.04	0.99	0.85	1.01	0.04	1.09	0.94
13	1.16	0.04	1.23	1.09	0.70	0.00	0.71	0.69
14	2.60	0.11	2.83	2.40	1.00	0.05	1.11	0.91

TABLA C.6. Parámetros del ítems constructo Paranoide con ajuste Normal

C.1.3. Tendencias Psicopáticas

	bdif_mean	bdif_sd	bdif_975	bdif_025	adisc_mean	adisc_sd	adisc_975	adisc_025
1	6.78	0.06	6.89	6.67	0.69	0.00	0.70	0.69
2	7.47	0.06	7.59	7.33	0.69	0.00	0.70	0.69
3	7.85	0.07	7.98	7.71	0.69	0.00	0.70	0.69
4	6.26	0.05	6.37	6.17	0.69	0.00	0.70	0.69
5	5.24	0.04	5.33	5.16	0.69	0.00	0.70	0.69
6	4.73	0.04	4.81	4.65	0.69	0.00	0.70	0.69
7	6.76	0.06	6.87	6.64	0.69	0.00	0.70	0.69
8	4.33	0.04	4.40	4.25	0.69	0.00	0.70	0.69
9	6.19	0.06	6.29	6.08	0.69	0.00	0.70	0.69
10	9.16	0.09	9.34	8.97	0.69	0.00	0.70	0.69

TABLA C.7. Parámetros del ítems constructo Psicopatía con ajuste Gamma

	bdif_mean	bdif_sd	bdif_975	bdif_025	adisc_mean	adisc_sd	adisc_975	adisc_025
1	5.87	0.06	5.98	5.76	0.69	0.00	0.70	0.69
2	6.55	0.06	6.67	6.42	0.69	0.00	0.70	0.69
3	6.92	0.07	7.06	6.80	0.69	0.00	0.70	0.69
4	5.37	0.05	5.46	5.27	0.70	0.01	0.71	0.69
5	4.38	0.04	4.47	4.30	0.69	0.00	0.70	0.69
6	3.90	0.04	3.98	3.82	0.69	0.00	0.70	0.69
7	5.85	0.06	5.96	5.74	0.69	0.00	0.70	0.69
8	3.52	0.04	3.59	3.45	0.70	0.00	0.70	0.69
9	5.30	0.05	5.38	5.20	0.69	0.00	0.70	0.69
10	8.22	0.10	8.40	8.02	0.70	0.01	0.71	0.69

TABLA C.8. Parámetros del ítems constructo Psicopatía con ajuste Lognormal

	bdif_mean	bdif_sd	bdif_975	bdif_025	adisc_mean	adisc_sd	adisc_975	adisc_025
1	2.53	0.13	2.79	2.31	0.92	0.06	1.02	0.81
2	3.55	0.16	3.80	3.20	0.75	0.04	0.83	0.70
3	3.27	0.20	3.74	2.95	0.92	0.07	1.04	0.77
4	1.65	0.06	1.76	1.54	1.39	0.07	1.52	1.25
5	1.25	0.05	1.35	1.17	1.15	0.05	1.24	1.06
6	1.09	0.05	1.17	1.00	0.95	0.04	1.03	0.87
7	2.15	0.08	2.32	2.00	1.14	0.06	1.26	1.03
8	0.74	0.03	0.81	0.68	1.08	0.05	1.17	0.99
9	2.03	0.09	2.21	1.87	0.97	0.05	1.08	0.88
10	3.01	0.15	3.31	2.76	1.46	0.11	1.69	1.26

TABLA C.9. Parámetros del ítems constructo Psicopatía con ajuste Normal

C.2. Plot de cadenas de los parámetros de los ítems modelo unidimensional

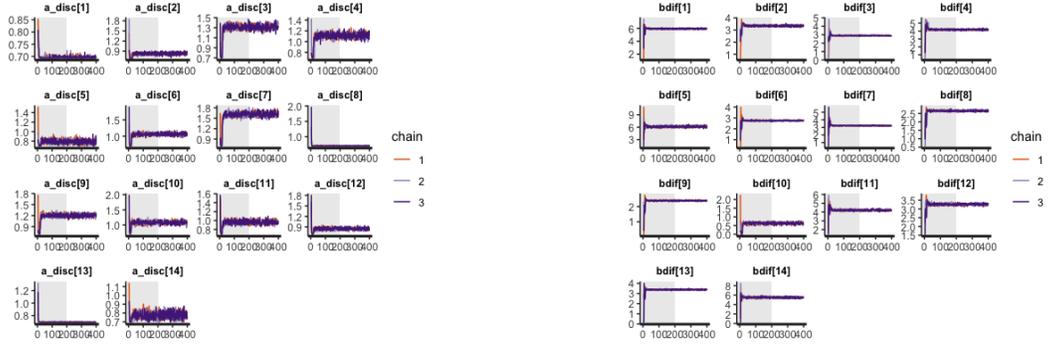


FIGURA C.1. Cadenas parámetros de discriminación para el trazo Tendencias Paranoicas ajuste Gamma.

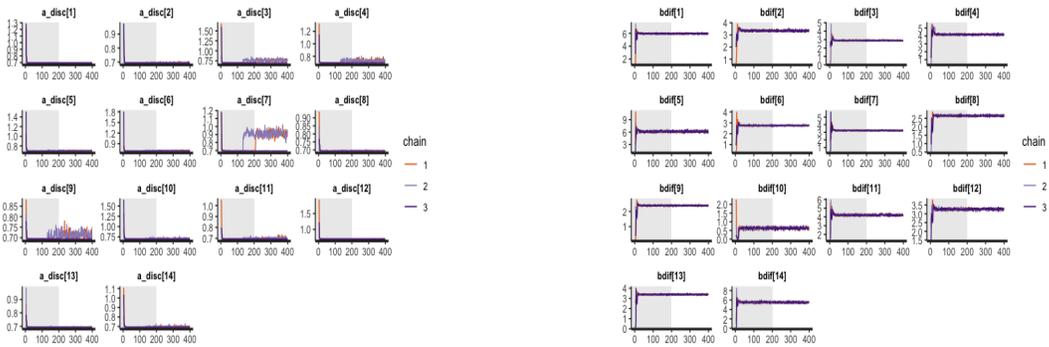


FIGURA C.2. Cadenas parámetros de discriminación para el trazo Tendencias Paranoicas ajuste Lognormal.

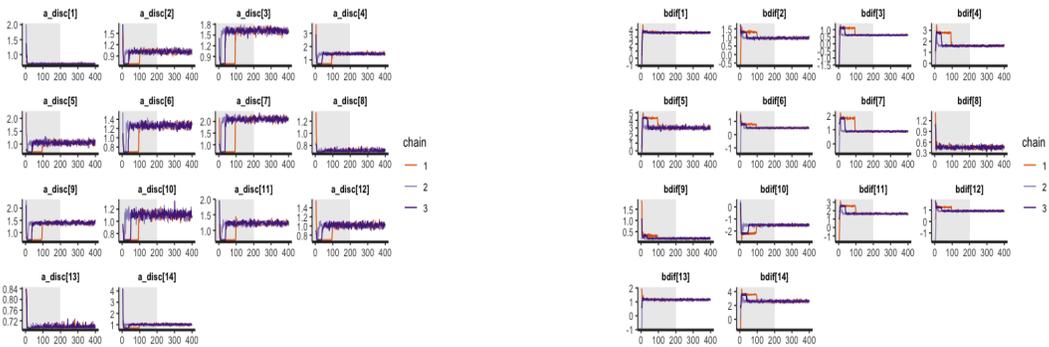


FIGURA C.3. Cadenas parámetros de discriminación para el trazo Tendencias Paranoicas ajuste Normal.

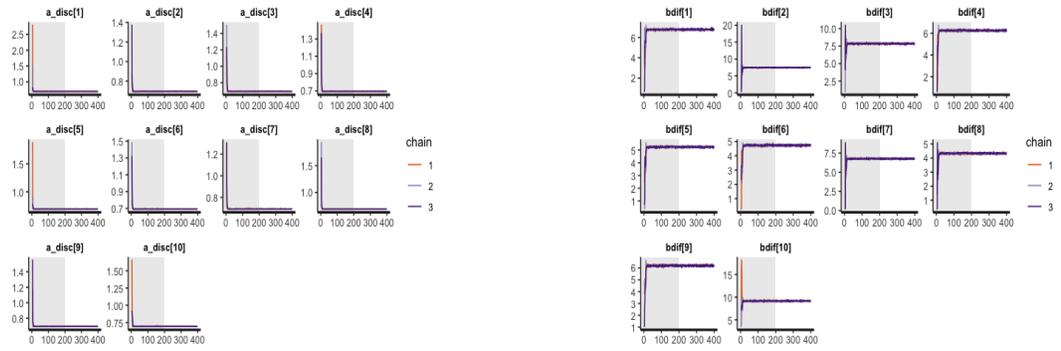


FIGURA C.4. Cadenas parámetros de discriminación para el trazo Tendencias Psicópatas ajuste Gamma.

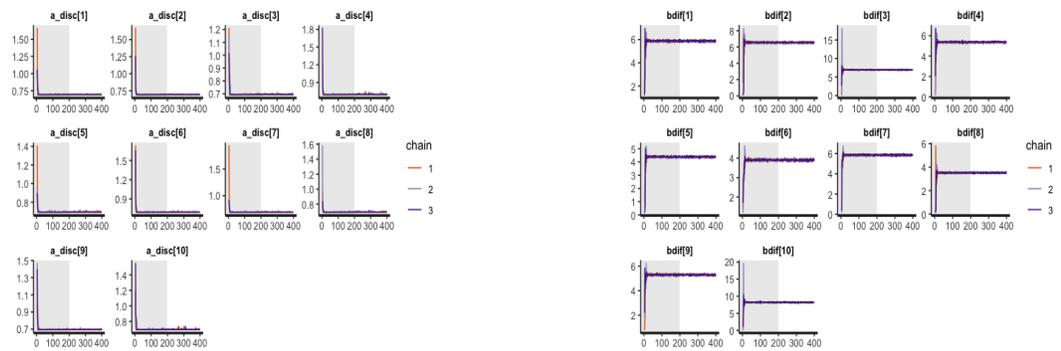


FIGURA C.5. Cadenas parámetros de discriminación para el trazo Tendencias Psicópatas ajuste Lognormal.

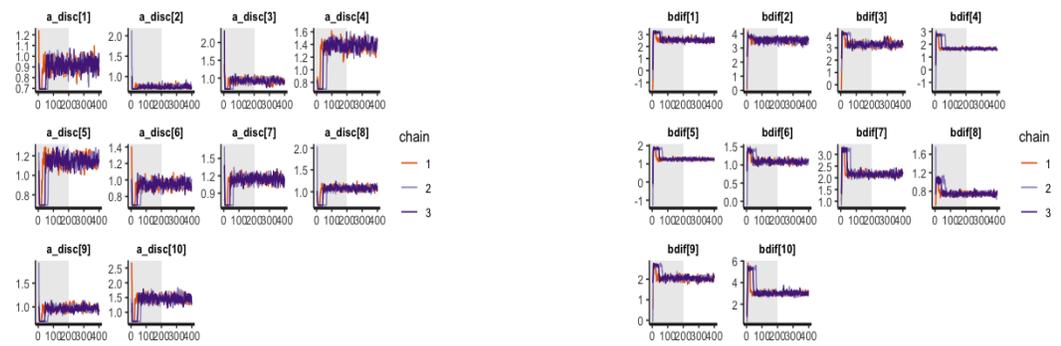


FIGURA C.6. Cadenas parámetros de discriminación para el trazo Tendencias Psicópatas ajuste Normal.

C.3. Resultados datos reales para el modelo multiunidimensional

```
#####
##### Resultados Modelo MUIRTA-2PL Gamma #####
#####
Inference for Stan model: MuIRTAPIHEMA.
4 chains, each with iter=3000; warmup=1000; thin=1;
post-warmup draws per chain=2000, total post-warmup draws=8000.
```

mean	se_mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	n_eff	Rhat		
Theta[1,1]	0.56	0.00	0.13	0.31	0.47	0.55	0.65	0.65	0.81	10937	1
Theta[1,2]	3.42	0.01	0.54	2.37	3.06	3.42	3.79	4.50	10831	1	
Theta[1,3]	2.11	0.00	0.36	1.43	1.86	2.11	2.36	2.82	11300	1	
Theta[2,1]	0.74	0.00	0.13	0.49	0.66	0.74	0.83	1.00	12041	1	
Theta[2,2]	4.18	0.01	0.52	3.16	3.83	4.17	4.53	5.24	9976	1	
Theta[2,3]	2.56	0.00	0.34	1.88	2.33	2.55	2.78	3.22	12384	1	
Theta[3,1]	0.56	0.00	0.13	0.31	0.47	0.55	0.64	0.64	0.81	10490	1
Theta[3,2]	3.41	0.01	0.53	2.36	3.05	3.41	3.77	4.43	10141	1	
Theta[3,3]	2.10	0.00	0.36	1.40	1.87	2.10	2.34	2.81	10145	1	
Theta[4,1]	0.59	0.00	0.13	0.34	0.50	0.59	0.68	0.68	0.84	12595	1
Theta[4,2]	3.70	0.01	0.55	2.64	3.32	3.70	4.07	4.80	11779	1	
Theta[4,3]	2.13	0.00	0.35	1.45	1.90	2.13	2.37	2.81	13460	1	
Theta[5,1]	0.42	0.00	0.13	0.18	0.33	0.42	0.51	0.68	10546	1	
Theta[5,2]	2.86	0.01	0.56	1.77	2.48	2.86	3.24	3.96	9746	1	
Theta[5,3]	1.74	0.00	0.37	1.02	1.48	1.74	1.99	2.46	10211	1	
Theta[6,1]	0.71	0.00	0.13	0.46	0.62	0.71	0.79	0.96	11558	1	
Theta[6,2]	3.90	0.00	0.52	2.91	3.54	3.89	4.24	4.94	13030	1	
Theta[6,3]	2.53	0.00	0.36	1.85	2.29	2.53	2.78	3.23	11302	1	
Theta[7,1]	0.43	0.00	0.12	0.20	0.35	0.43	0.51	0.67	12849	1	
Theta[7,2]	3.01	0.01	0.55	1.93	2.64	3.01	3.38	4.08	11498	1	
Theta[7,3]	1.88	0.00	0.38	1.14	1.62	1.88	2.13	2.61	11973	1	
Theta[8,1]	0.44	0.00	0.13	0.19	0.34	0.43	0.52	0.69	12323	1	
Theta[8,2]	2.86	0.01	0.54	1.79	2.50	2.86	3.23	3.93	10979	1	
Theta[8,3]	1.81	0.00	0.38	1.06	1.55	1.81	2.06	2.55	11131	1	
Theta[9,1]	0.39	0.00	0.13	0.15	0.30	0.39	0.48	0.65	10936	1	
Theta[9,2]	2.75	0.01	0.57	1.64	2.37	2.74	3.14	3.84	9621	1	
Theta[9,3]	1.62	0.00	0.37	0.91	1.36	1.62	1.87	2.34	10003	1	
Theta[10,1]	0.56	0.00	0.12	0.32	0.48	0.56	0.64	0.81	11788	1	
Theta[10,2]	3.61	0.01	0.55	2.52	3.25	3.61	3.98	4.70	9587	1	
Theta[10,3]	2.08	0.00	0.35	1.40	1.85	2.09	2.32	2.76	10790	1	
Theta[11,1]	0.66	0.00	0.13	0.40	0.57	0.66	0.75	0.92	11904	1	
Theta[11,2]	3.54	0.00	0.50	2.55	3.20	3.54	3.88	4.54	11057	1	
Theta[11,3]	2.36	0.00	0.36	1.66	2.12	2.36	2.60	3.07	12063	1	
Theta[12,1]	0.59	0.00	0.12	0.36	0.50	0.59	0.67	0.83	13760	1	
Theta[12,2]	3.75	0.00	0.54	2.68	3.38	3.75	4.12	4.82	12375	1	
Theta[12,3]	2.27	0.00	0.35	1.58	2.03	2.28	2.51	2.96	12519	1	
Theta[13,1]	0.83	0.00	0.13	0.58	0.74	0.83	0.91	1.07	12225	1	

Theta[13,2]	4.21	0.00	0.51	3.25	3.86	4.20	4.54	5.21	11673	1
Theta[13,3]	2.81	0.00	0.35	2.15	2.58	2.81	3.05	3.50	12394	1
Theta[14,1]	0.64	0.00	0.13	0.39	0.56	0.64	0.73	0.89	12302	1
Theta[14,2]	3.77	0.00	0.53	2.74	3.42	3.78	4.13	4.80	12205	1
Theta[14,3]	2.29	0.00	0.34	1.61	2.06	2.29	2.51	2.94	11789	1
Theta[15,1]	0.42	0.00	0.13	0.18	0.33	0.42	0.51	0.68	12480	1
Theta[15,2]	2.79	0.01	0.55	1.74	2.41	2.78	3.16	3.88	10927	1
Theta[15,3]	1.77	0.00	0.38	1.03	1.51	1.77	2.03	2.53	11255	1
Theta[16,1]	0.51	0.00	0.13	0.26	0.43	0.51	0.60	0.77	11024	1
Theta[16,2]	3.18	0.01	0.53	2.13	2.83	3.19	3.54	4.21	10859	1
Theta[16,3]	2.01	0.00	0.37	1.28	1.76	2.01	2.25	2.72	10427	1
Theta[17,1]	0.62	0.00	0.13	0.36	0.53	0.62	0.71	0.88	12877	1
Theta[17,2]	3.43	0.00	0.51	2.43	3.09	3.42	3.77	4.45	11186	1
Theta[17,3]	2.27	0.00	0.36	1.57	2.03	2.27	2.51	2.98	11728	1
Theta[18,1]	0.51	0.00	0.13	0.27	0.43	0.51	0.60	0.76	11332	1
Theta[18,2]	3.35	0.01	0.55	2.26	2.98	3.36	3.72	4.41	10009	1
Theta[18,3]	1.96	0.00	0.36	1.28	1.72	1.96	2.20	2.67	10530	1
Theta[19,1]	0.35	0.00	0.13	0.13	0.26	0.34	0.43	0.61	12931	1
Theta[19,2]	2.64	0.01	0.60	1.53	2.23	2.63	3.04	3.85	11187	1
Theta[19,3]	1.49	0.00	0.37	0.79	1.23	1.47	1.73	2.22	12541	1
Theta[20,1]	0.60	0.00	0.13	0.34	0.50	0.60	0.69	0.86	12104	1
Theta[20,2]	3.50	0.00	0.54	2.42	3.13	3.50	3.86	4.55	12080	1
Theta[20,3]	2.06	0.00	0.35	1.38	1.83	2.06	2.29	2.74	11616	1
Theta[21,1]	0.53	0.00	0.13	0.27	0.44	0.53	0.62	0.80	11325	1
Theta[21,2]	3.22	0.01	0.54	2.14	2.86	3.22	3.58	4.29	11281	1
Theta[21,3]	1.98	0.00	0.37	1.24	1.74	1.98	2.22	2.69	11465	1
Theta[22,1]	0.50	0.00	0.13	0.27	0.41	0.50	0.59	0.75	13068	1
Theta[22,2]	3.25	0.01	0.54	2.21	2.88	3.25	3.62	4.32	11305	1
Theta[22,3]	1.99	0.00	0.37	1.27	1.74	1.99	2.23	2.72	11741	1
Theta[23,1]	0.55	0.00	0.12	0.30	0.46	0.55	0.63	0.80	10429	1
Theta[23,2]	3.41	0.00	0.52	2.39	3.07	3.41	3.76	4.42	11062	1
Theta[23,3]	2.21	0.00	0.37	1.49	1.96	2.21	2.46	2.93	12187	1
Theta[24,1]	0.60	0.00	0.13	0.34	0.51	0.60	0.69	0.86	11044	1
Theta[24,2]	3.38	0.01	0.51	2.37	3.03	3.38	3.72	4.37	10312	1
Theta[24,3]	2.24	0.00	0.37	1.52	1.98	2.24	2.49	2.94	10379	1
Theta[25,1]	0.45	0.00	0.13	0.20	0.35	0.45	0.53	0.70	11744	1
Theta[25,2]	2.94	0.01	0.55	1.85	2.57	2.94	3.31	4.01	11468	1
Theta[25,3]	1.75	0.00	0.36	1.05	1.51	1.75	1.99	2.47	11641	1
Theta[26,1]	0.59	0.00	0.12	0.35	0.50	0.59	0.67	0.83	12008	1
Theta[26,2]	3.54	0.00	0.51	2.56	3.19	3.54	3.90	4.55	11651	1
Theta[26,3]	2.29	0.00	0.35	1.59	2.05	2.29	2.53	2.97	11484	1
Theta[27,1]	0.52	0.00	0.13	0.27	0.44	0.52	0.61	0.79	10900	1
Theta[27,2]	3.30	0.01	0.55	2.21	2.93	3.30	3.66	4.36	11141	1
Theta[27,3]	1.97	0.00	0.36	1.26	1.74	1.98	2.22	2.67	11138	1
Theta[28,1]	0.64	0.00	0.13	0.39	0.55	0.64	0.72	0.89	12667	1
Theta[28,2]	3.88	0.00	0.54	2.84	3.52	3.88	4.24	4.94	11591	1
Theta[28,3]	2.31	0.00	0.35	1.62	2.07	2.31	2.55	2.99	12783	1
Theta[29,1]	0.69	0.00	0.13	0.44	0.60	0.69	0.77	0.94	12255	1
Theta[29,2]	3.81	0.00	0.51	2.80	3.46	3.81	4.16	4.83	11788	1

```

Theta[29,3]  2.43    0.00 0.35 1.75 2.20 2.43 2.66  3.10 11510    1
Theta[30,1]  0.48    0.00 0.13 0.24 0.40 0.48 0.57  0.74 11705    1
Theta[30,2]  2.96    0.00 0.51 1.96 2.62 2.96 3.30  3.98 10508    1
Theta[30,3]  2.03    0.00 0.39 1.28 1.78 2.03 2.30  2.79 11110    1
Theta[31,1]  0.51    0.00 0.13 0.26 0.42 0.51 0.60  0.77 11352    1
Theta[31,2]  3.18    0.01 0.54 2.12 2.81 3.19 3.55  4.24 11526    1
Theta[31,3]  1.98    0.00 0.36 1.28 1.74 1.99 2.23  2.70 10564    1
Theta[32,1]  0.44    0.00 0.13 0.20 0.35 0.43 0.52  0.70 11770    1
Theta[32,2]  2.93    0.01 0.55 1.86 2.56 2.93 3.30  4.01 11321    1
Theta[32,3]  1.82    0.00 0.37 1.10 1.56 1.82 2.07  2.55 10039    1
Theta[33,1]  0.64    0.00 0.13 0.39 0.55 0.63 0.72  0.89 12697    1
Theta[33,2]  3.51    0.00 0.50 2.53 3.18 3.51 3.85  4.49 11629    1
Theta[33,3]  2.44    0.00 0.37 1.72 2.20 2.44 2.69  3.16 11891    1
Theta[34,1]  0.61    0.00 0.12 0.39 0.53 0.61 0.69  0.85 12592    1
[ reached getOption("max.print") -- omitted 5900 rows ]

```

Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Fri Sep 6 06:11:10 2019.
 For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
 and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
 convergence, Rhat=1).

```

#####
##### Resultados Modelo MUIRTA-2PL Lognormal #####
#####

```

Inference for Stan model: MuIRTAPIHEMA2.
 4 chains, each with iter=3000; warmup=1000; thin=1;
 post-warmup draws per chain=2000, total post-warmup draws=8000.

mean	se_mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	n_eff	Rhat	
Theta[1,1]	5.31	0.02	1.76	2.03	4.07	5.25	6.46	8.89	10161	1
Theta[1,2]	2.67	0.01	0.70	1.34	2.19	2.65	3.13	4.12	10393	1
Theta[1,3]	5.27	0.01	1.32	2.69	4.40	5.26	6.13	7.89	9007	1
Theta[2,1]	7.98	0.02	1.79	4.57	6.77	7.92	9.17	11.57	11226	1
Theta[2,2]	3.72	0.01	0.73	2.37	3.23	3.70	4.20	5.21	10901	1
Theta[2,3]	6.97	0.01	1.23	4.58	6.15	6.97	7.79	9.43	10596	1
Theta[3,1]	5.25	0.02	1.74	2.06	4.03	5.18	6.40	8.86	11184	1
Theta[3,2]	2.64	0.01	0.69	1.34	2.18	2.63	3.09	4.03	10518	1
Theta[3,3]	5.20	0.01	1.29	2.68	4.34	5.20	6.05	7.82	10524	1
Theta[4,1]	5.76	0.02	1.75	2.48	4.52	5.71	6.91	9.31	10995	1
Theta[4,2]	3.03	0.01	0.77	1.62	2.48	3.01	3.54	4.58	9112	1
Theta[4,3]	5.40	0.01	1.25	3.01	4.56	5.36	6.21	7.96	10731	1
Theta[5,1]	3.57	0.01	1.53	1.07	2.44	3.43	4.54	6.90	13244	1
Theta[5,2]	1.98	0.01	0.64	0.85	1.52	1.94	2.40	3.33	11604	1
Theta[5,3]	3.95	0.01	1.23	1.69	3.07	3.90	4.79	6.46	12052	1
Theta[6,1]	7.49	0.02	1.81	4.05	6.24	7.44	8.70	11.20	11911	1
Theta[6,2]	3.32	0.01	0.66	2.08	2.87	3.30	3.74	4.70	10588	1
Theta[6,3]	6.90	0.01	1.30	4.44	6.02	6.86	7.75	9.53	11506	1
Theta[7,1]	3.81	0.01	1.47	1.33	2.74	3.70	4.75	6.99	13270	1
Theta[7,2]	2.18	0.01	0.67	1.00	1.70	2.15	2.61	3.60	12136	1

Theta[7,3]	4.43	0.01	1.32	2.05	3.48	4.35	5.31	7.15	12318	1
Theta[8,1]	3.77	0.01	1.58	1.16	2.60	3.61	4.79	7.19	11663	1
Theta[8,2]	2.00	0.01	0.63	0.89	1.55	1.97	2.41	3.35	12163	1
Theta[8,3]	4.17	0.01	1.31	1.83	3.22	4.12	5.05	6.83	10473	1
Theta[9,1]	3.27	0.01	1.54	0.88	2.11	3.09	4.24	6.76	13857	1
Theta[9,2]	1.85	0.01	0.65	0.73	1.37	1.80	2.29	3.20	12570	1
Theta[9,3]	3.62	0.01	1.22	1.46	2.74	3.55	4.43	6.18	12223	1
Theta[10,1]	5.42	0.02	1.68	2.29	4.24	5.35	6.54	8.84	9938	1
Theta[10,2]	2.92	0.01	0.75	1.52	2.39	2.91	3.41	4.44	10044	1
Theta[10,3]	5.26	0.01	1.23	2.90	4.42	5.26	6.09	7.69	9635	1
Theta[11,1]	6.77	0.02	1.87	3.20	5.50	6.72	8.01	10.48	8951	1
Theta[11,2]	2.87	0.01	0.61	1.71	2.45	2.85	3.27	4.10	9563	1
Theta[11,3]	6.21	0.01	1.31	3.62	5.34	6.20	7.08	8.76	9436	1
Theta[12,1]	5.84	0.02	1.64	2.81	4.70	5.78	6.94	9.13	10635	1
Theta[12,2]	3.13	0.01	0.75	1.72	2.61	3.11	3.61	4.64	9274	1
Theta[12,3]	5.90	0.01	1.31	3.39	5.01	5.89	6.78	8.47	9294	1
Theta[13,1]	9.21	0.02	1.81	5.71	7.95	9.18	10.45	12.82	11142	1
Theta[13,2]	3.71	0.01	0.64	2.52	3.26	3.69	4.14	5.01	11249	1
Theta[13,3]	7.95	0.01	1.29	5.53	7.06	7.92	8.80	10.58	11854	1
Theta[14,1]	6.52	0.02	1.80	3.08	5.26	6.46	7.72	10.20	11044	1
Theta[14,2]	3.14	0.01	0.70	1.79	2.65	3.12	3.59	4.56	10919	1
Theta[14,3]	5.94	0.01	1.25	3.56	5.08	5.90	6.78	8.40	10976	1
Theta[15,1]	3.62	0.01	1.55	1.07	2.47	3.48	4.61	6.95	13160	1
Theta[15,2]	1.94	0.01	0.62	0.82	1.49	1.91	2.35	3.24	12453	1
Theta[15,3]	4.06	0.01	1.31	1.70	3.11	4.03	4.95	6.81	11759	1
Theta[16,1]	4.68	0.02	1.71	1.66	3.47	4.58	5.82	8.22	10650	1
Theta[16,2]	2.37	0.01	0.66	1.13	1.92	2.35	2.81	3.73	10659	1
Theta[16,3]	4.83	0.01	1.31	2.35	3.93	4.82	5.69	7.42	9465	1
Theta[17,1]	6.14	0.02	1.90	2.59	4.78	6.09	7.44	10.03	10565	1
Theta[17,2]	2.71	0.01	0.65	1.47	2.26	2.69	3.13	4.03	10285	1
Theta[17,3]	5.84	0.01	1.37	3.17	4.90	5.83	6.74	8.54	9098	1
Theta[18,1]	4.70	0.02	1.66	1.74	3.50	4.62	5.78	8.15	10826	1
Theta[18,2]	2.55	0.01	0.72	1.22	2.06	2.52	3.02	4.02	11062	1
Theta[18,3]	4.76	0.01	1.25	2.36	3.91	4.74	5.59	7.29	9610	1
Theta[19,1]	2.82	0.01	1.36	0.76	1.79	2.65	3.68	5.93	13624	1
Theta[19,2]	1.72	0.01	0.64	0.65	1.25	1.66	2.13	3.14	12333	1
Theta[19,3]	3.24	0.01	1.12	1.30	2.43	3.16	3.98	5.64	11710	1
Theta[20,1]	5.77	0.02	1.91	2.24	4.41	5.72	7.06	9.62	10676	1
Theta[20,2]	2.76	0.01	0.71	1.42	2.27	2.74	3.24	4.18	9269	1
Theta[20,3]	5.13	0.01	1.23	2.73	4.29	5.12	5.96	7.55	9316	1
Theta[21,1]	4.86	0.02	1.77	1.76	3.58	4.78	6.01	8.55	12816	1
Theta[21,2]	2.41	0.01	0.67	1.17	1.93	2.39	2.86	3.77	11059	1
Theta[21,3]	4.79	0.01	1.29	2.38	3.89	4.76	5.67	7.35	11805	1
Theta[22,1]	4.57	0.02	1.65	1.69	3.40	4.45	5.64	8.08	11512	1
Theta[22,2]	2.43	0.01	0.69	1.16	1.94	2.40	2.88	3.87	11139	1
Theta[22,3]	4.81	0.01	1.32	2.35	3.90	4.77	5.69	7.48	10754	1
Theta[23,1]	5.27	0.01	1.62	2.24	4.14	5.23	6.34	8.59	11742	1
Theta[23,2]	2.69	0.01	0.67	1.44	2.23	2.68	3.12	4.03	11439	1
Theta[23,3]	5.64	0.01	1.38	3.02	4.71	5.61	6.57	8.36	10737	1

Theta[24,1]	5.87	0.02	1.85	2.44	4.56	5.81	7.12	9.57	10575	1
Theta[24,2]	2.64	0.01	0.64	1.45	2.21	2.62	3.05	3.95	10367	1
Theta[24,3]	5.70	0.01	1.37	3.08	4.78	5.69	6.60	8.44	9873	1
Theta[25,1]	3.77	0.01	1.64	1.05	2.56	3.63	4.83	7.30	13468	1
Theta[25,2]	2.03	0.01	0.67	0.83	1.56	1.99	2.47	3.46	12182	1
Theta[25,3]	3.96	0.01	1.23	1.69	3.08	3.92	4.80	6.47	11886	1
Theta[26,1]	5.81	0.02	1.65	2.75	4.66	5.75	6.90	9.21	11760	1
Theta[26,2]	2.87	0.01	0.66	1.64	2.42	2.85	3.31	4.20	11268	1
Theta[26,3]	5.98	0.01	1.33	3.42	5.07	5.93	6.86	8.58	11736	1
Theta[27,1]	4.86	0.02	1.71	1.83	3.61	4.75	5.97	8.41	11358	1
Theta[27,2]	2.50	0.01	0.70	1.21	2.01	2.49	2.96	3.95	10720	1
Theta[27,3]	4.81	0.01	1.25	2.44	3.96	4.78	5.65	7.33	10088	1
Theta[28,1]	6.51	0.02	1.71	3.29	5.34	6.49	7.64	10.02	10373	1
Theta[28,2]	3.31	0.01	0.74	1.90	2.80	3.30	3.81	4.80	8455	1
Theta[28,3]	6.06	0.01	1.24	3.71	5.21	6.05	6.88	8.56	10862	1
Theta[29,1]	7.13	0.02	1.81	3.60	5.90	7.09	8.35	10.71	10967	1
Theta[29,2]	3.20	0.01	0.67	1.94	2.74	3.18	3.65	4.56	10439	1
Theta[29,3]	6.47	0.01	1.27	4.02	5.62	6.45	7.32	9.05	9716	1
Theta[30,1]	4.41	0.02	1.62	1.57	3.24	4.34	5.48	7.77	11558	1
Theta[30,2]	2.18	0.01	0.60	1.06	1.76	2.17	2.58	3.41	9503	1
Theta[30,3]	4.95	0.01	1.42	2.27	3.95	4.94	5.88	7.78	10536	1
Theta[31,1]	4.65	0.02	1.75	1.62	3.39	4.56	5.80	8.43	11119	1
Theta[31,2]	2.37	0.01	0.68	1.09	1.90	2.35	2.82	3.76	9943	1
Theta[31,3]	4.79	0.01	1.35	2.26	3.86	4.76	5.68	7.53	9482	1
Theta[32,1]	3.81	0.01	1.54	1.18	2.69	3.70	4.81	7.09	11663	1
Theta[32,2]	2.09	0.01	0.65	0.88	1.63	2.06	2.51	3.44	10927	1
Theta[32,3]	4.23	0.01	1.29	1.82	3.34	4.19	5.08	6.88	10661	1
Theta[33,1]	6.50	0.02	1.74	3.20	5.32	6.46	7.67	10.00	11455	1
Theta[33,2]	2.85	0.01	0.60	1.73	2.43	2.83	3.24	4.11	11005	1
Theta[33,3]	6.57	0.01	1.39	3.86	5.62	6.57	7.49	9.36	11070	1
Theta[34,1]	6.18	0.01	1.60	3.15	5.08	6.14	7.20	9.48	12167	1

[reached getopt("max.print") -- omitted 5900 rows]

Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Thu Sep 5 20:30:53 2019.
 For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
 and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
 convergence, Rhat=1).

 ##### Resultados Modelo MUIRTA-2PL Normal #####
 #####

Inference for Stan model: MuIRTAPIHEMA3.
 4 chains, each with iter=3000; warmup=1000; thin=1;
 post-warmup draws per chain=2000, total post-warmup draws=8000.

mean	se_mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	n_eff	Rhat	
Theta[1,1]	0.94	0.00	0.25	0.42	0.77	0.94	1.11	1.41	4689	1.00
Theta[1,2]	0.95	0.00	0.26	0.41	0.77	0.96	1.13	1.46	4665	1.00

Theta[1,3]	0.93	0.00	0.26	0.40	0.76	0.94	1.11	1.43	4933	1.00
Theta[2,1]	1.31	0.00	0.23	0.85	1.15	1.31	1.46	1.75	6572	1.00
Theta[2,2]	1.33	0.00	0.24	0.86	1.17	1.34	1.49	1.80	6594	1.00
Theta[2,3]	1.30	0.00	0.23	0.83	1.14	1.30	1.45	1.75	6375	1.00
Theta[3,1]	0.94	0.00	0.25	0.44	0.77	0.94	1.11	1.41	4471	1.00
Theta[3,2]	0.94	0.00	0.26	0.43	0.77	0.94	1.12	1.44	4388	1.00
Theta[3,3]	0.93	0.00	0.25	0.41	0.76	0.93	1.10	1.42	4052	1.00
Theta[4,1]	0.99	0.00	0.25	0.48	0.83	1.00	1.16	1.47	3657	1.00
Theta[4,2]	1.03	0.00	0.26	0.51	0.86	1.04	1.22	1.53	4389	1.00
Theta[4,3]	0.97	0.00	0.26	0.44	0.80	0.98	1.15	1.45	3994	1.00
Theta[5,1]	0.63	0.01	0.26	0.13	0.45	0.64	0.82	1.15	2586	1.00
Theta[5,2]	0.64	0.01	0.27	0.12	0.44	0.63	0.83	1.17	2735	1.00
Theta[5,3]	0.62	0.01	0.27	0.11	0.43	0.62	0.81	1.15	2659	1.00
Theta[6,1]	1.24	0.00	0.23	0.78	1.09	1.25	1.40	1.70	5707	1.00
Theta[6,2]	1.24	0.00	0.25	0.75	1.08	1.24	1.40	1.71	5529	1.00
Theta[6,3]	1.25	0.00	0.24	0.76	1.09	1.25	1.41	1.72	5569	1.00
Theta[7,1]	0.64	0.00	0.26	0.13	0.45	0.64	0.82	1.15	3556	1.00
Theta[7,2]	0.69	0.00	0.27	0.17	0.50	0.69	0.88	1.22	3472	1.00
Theta[7,3]	0.70	0.00	0.27	0.18	0.51	0.70	0.89	1.22	3475	1.00
Theta[8,1]	0.68	0.00	0.26	0.18	0.50	0.68	0.86	1.20	3311	1.00
Theta[8,2]	0.67	0.00	0.27	0.15	0.48	0.66	0.85	1.19	3589	1.00
Theta[8,3]	0.69	0.00	0.27	0.18	0.50	0.68	0.87	1.20	3582	1.00
Theta[9,1]	0.59	0.00	0.26	0.10	0.39	0.58	0.77	1.11	2804	1.00
Theta[9,2]	0.58	0.01	0.27	0.09	0.38	0.57	0.77	1.11	2688	1.00
Theta[9,3]	0.55	0.01	0.27	0.08	0.36	0.54	0.74	1.10	2817	1.00
Theta[10,1]	0.94	0.00	0.26	0.42	0.77	0.95	1.11	1.43	4586	1.00
Theta[10,2]	1.00	0.00	0.27	0.46	0.82	1.01	1.18	1.51	4556	1.00
Theta[10,3]	0.93	0.00	0.26	0.40	0.76	0.94	1.11	1.42	4595	1.00
Theta[11,1]	1.12	0.00	0.25	0.60	0.96	1.12	1.28	1.59	3033	1.00
Theta[11,2]	1.06	0.00	0.26	0.53	0.89	1.07	1.24	1.56	3490	1.00
Theta[11,3]	1.09	0.00	0.26	0.56	0.92	1.10	1.27	1.58	2957	1.00
Theta[12,1]	1.01	0.00	0.24	0.52	0.85	1.01	1.17	1.48	5307	1.00
Theta[12,2]	1.08	0.00	0.26	0.57	0.91	1.09	1.25	1.58	5393	1.00
Theta[12,3]	1.05	0.00	0.25	0.56	0.89	1.06	1.22	1.54	5470	1.00
Theta[13,1]	1.45	0.00	0.22	1.01	1.30	1.45	1.60	1.88	7118	1.00
Theta[13,2]	1.42	0.00	0.24	0.94	1.26	1.42	1.58	1.88	6713	1.00
Theta[13,3]	1.44	0.00	0.23	0.98	1.29	1.45	1.60	1.90	6973	1.00
Theta[14,1]	1.11	0.00	0.24	0.61	0.95	1.11	1.27	1.55	5808	1.00
Theta[14,2]	1.12	0.00	0.25	0.61	0.96	1.13	1.29	1.59	5896	1.00
Theta[14,3]	1.09	0.00	0.25	0.58	0.93	1.09	1.26	1.56	6339	1.00
Theta[15,1]	0.65	0.00	0.26	0.15	0.47	0.65	0.84	1.18	3402	1.00
Theta[15,2]	0.64	0.00	0.27	0.13	0.44	0.64	0.83	1.19	3504	1.00
Theta[15,3]	0.66	0.00	0.27	0.15	0.46	0.66	0.84	1.19	3400	1.00
Theta[16,1]	0.85	0.00	0.26	0.31	0.68	0.85	1.03	1.35	3252	1.00
Theta[16,2]	0.84	0.00	0.27	0.28	0.66	0.85	1.03	1.35	3282	1.00
Theta[16,3]	0.84	0.00	0.27	0.28	0.67	0.85	1.02	1.36	3117	1.00
Theta[17,1]	1.05	0.00	0.25	0.55	0.89	1.06	1.22	1.52	5244	1.00
Theta[17,2]	1.01	0.00	0.26	0.49	0.83	1.01	1.18	1.50	5182	1.00
Theta[17,3]	1.04	0.00	0.26	0.52	0.87	1.04	1.21	1.53	5448	1.00

Theta[18,1]	0.83	0.00	0.26	0.30	0.66	0.84	1.01	1.33	4116	1.00
Theta[18,2]	0.87	0.00	0.27	0.31	0.69	0.87	1.06	1.38	3992	1.00
Theta[18,3]	0.82	0.00	0.27	0.28	0.64	0.83	1.01	1.34	4243	1.00
Theta[19,1]	0.49	0.00	0.25	0.06	0.30	0.48	0.66	1.00	2995	1.00
Theta[19,2]	0.52	0.00	0.25	0.08	0.33	0.50	0.69	1.05	3432	1.00
Theta[19,3]	0.46	0.00	0.25	0.05	0.27	0.45	0.63	0.98	2824	1.00
Theta[20,1]	0.99	0.00	0.25	0.49	0.83	1.00	1.17	1.46	4122	1.00
Theta[20,2]	0.97	0.00	0.26	0.43	0.79	0.97	1.15	1.47	4331	1.00
Theta[20,3]	0.92	0.00	0.26	0.39	0.75	0.93	1.10	1.41	4299	1.00
Theta[21,1]	0.87	0.00	0.26	0.34	0.69	0.87	1.05	1.37	3061	1.00
Theta[21,2]	0.85	0.00	0.27	0.30	0.66	0.85	1.03	1.37	3156	1.00
Theta[21,3]	0.83	0.00	0.27	0.29	0.65	0.84	1.01	1.34	3005	1.00
Theta[22,1]	0.81	0.00	0.27	0.26	0.63	0.82	0.99	1.32	3228	1.00
Theta[22,2]	0.83	0.00	0.28	0.27	0.64	0.83	1.02	1.36	3403	1.00
Theta[22,3]	0.82	0.00	0.27	0.26	0.64	0.83	1.01	1.34	3505	1.00
Theta[23,1]	0.92	0.00	0.25	0.42	0.75	0.93	1.09	1.40	5102	1.00
Theta[23,2]	0.96	0.00	0.26	0.43	0.78	0.96	1.13	1.46	5467	1.00
Theta[23,3]	0.98	0.00	0.26	0.46	0.80	0.98	1.15	1.46	5057	1.00
Theta[24,1]	1.02	0.00	0.25	0.51	0.86	1.02	1.19	1.49	5628	1.00
Theta[24,2]	0.98	0.00	0.26	0.46	0.80	0.98	1.16	1.47	5822	1.00
Theta[24,3]	1.01	0.00	0.26	0.50	0.84	1.01	1.18	1.49	5948	1.00
Theta[25,1]	0.69	0.00	0.26	0.18	0.51	0.70	0.88	1.21	3260	1.00
Theta[25,2]	0.68	0.00	0.27	0.16	0.49	0.68	0.86	1.22	3573	1.00
Theta[25,3]	0.65	0.00	0.27	0.13	0.46	0.65	0.83	1.18	3475	1.00
Theta[26,1]	1.00	0.00	0.25	0.48	0.84	1.01	1.18	1.48	4320	1.00
Theta[26,2]	1.03	0.00	0.26	0.48	0.85	1.04	1.21	1.52	4430	1.00
Theta[26,3]	1.04	0.00	0.26	0.52	0.87	1.05	1.22	1.53	4433	1.00
Theta[27,1]	0.87	0.00	0.26	0.35	0.70	0.87	1.04	1.36	4893	1.00
Theta[27,2]	0.87	0.00	0.27	0.33	0.69	0.88	1.05	1.39	5043	1.00
Theta[27,3]	0.84	0.00	0.26	0.30	0.66	0.84	1.02	1.35	4890	1.00
Theta[28,1]	1.10	0.00	0.24	0.62	0.94	1.10	1.27	1.57	6313	1.00
Theta[28,2]	1.15	0.00	0.25	0.64	0.98	1.15	1.33	1.65	6342	1.00
Theta[28,3]	1.10	0.00	0.25	0.60	0.94	1.10	1.27	1.59	6366	1.00
Theta[29,1]	1.19	0.00	0.23	0.72	1.03	1.19	1.35	1.63	7142	1.00
Theta[29,2]	1.18	0.00	0.25	0.69	1.02	1.18	1.35	1.65	6981	1.00
Theta[29,3]	1.18	0.00	0.24	0.69	1.02	1.18	1.34	1.64	7207	1.00
Theta[30,1]	0.77	0.00	0.27	0.23	0.58	0.78	0.95	1.26	3268	1.00
Theta[30,2]	0.74	0.00	0.28	0.19	0.54	0.74	0.93	1.27	3257	1.00
Theta[30,3]	0.80	0.00	0.27	0.26	0.62	0.81	0.99	1.31	3004	1.00
Theta[31,1]	0.85	0.00	0.26	0.33	0.68	0.85	1.03	1.33	2959	1.00
Theta[31,2]	0.84	0.00	0.27	0.31	0.66	0.84	1.02	1.35	3476	1.00
Theta[31,3]	0.84	0.00	0.26	0.31	0.66	0.84	1.02	1.34	3660	1.00
Theta[32,1]	0.68	0.00	0.26	0.17	0.49	0.68	0.86	1.19	2853	1.00
Theta[32,2]	0.69	0.01	0.27	0.16	0.50	0.68	0.87	1.22	2917	1.00
Theta[32,3]	0.69	0.00	0.27	0.16	0.50	0.69	0.88	1.22	3163	1.00
Theta[33,1]	1.10	0.00	0.24	0.61	0.94	1.10	1.26	1.55	5057	1.00
Theta[33,2]	1.07	0.00	0.25	0.55	0.90	1.07	1.24	1.54	5073	1.00
Theta[33,3]	1.13	0.00	0.24	0.64	0.97	1.13	1.30	1.60	5017	1.00
Theta[34,1]	1.06	0.00	0.24	0.56	0.90	1.06	1.23	1.53	5629	1.00

```
[ reached getOption("max.print") -- omitted 5900 rows ]
```

Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Thu Sep 5 11:25:49 2019.
For each parameter, `n_eff` is a crude measure of effective sample size,
and `Rhat` is the potential scale reduction factor on split chains (at
convergence, `Rhat=1`).

C.3.1. Neuroticismo

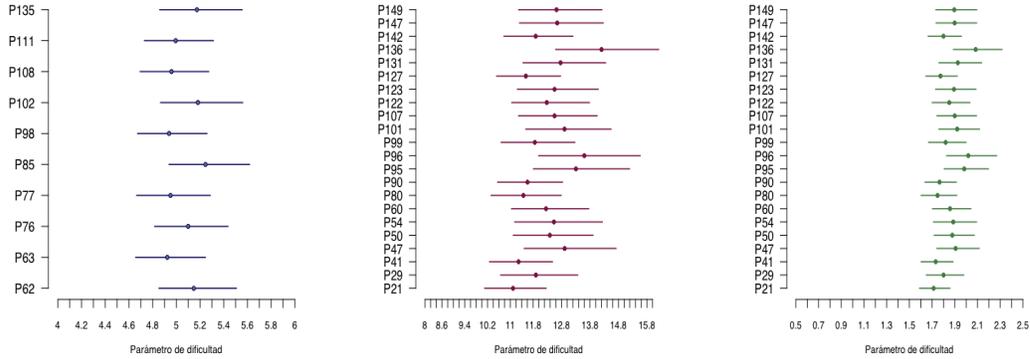


FIGURA C.7. Estimaciones obtenidas para parámetro de Dificultad constructo Neuroticismo empleando el modelo MUIRTA-2PL. De Izq. a Der. (MultiGamma), (Multilognormal) y (Multinormal)

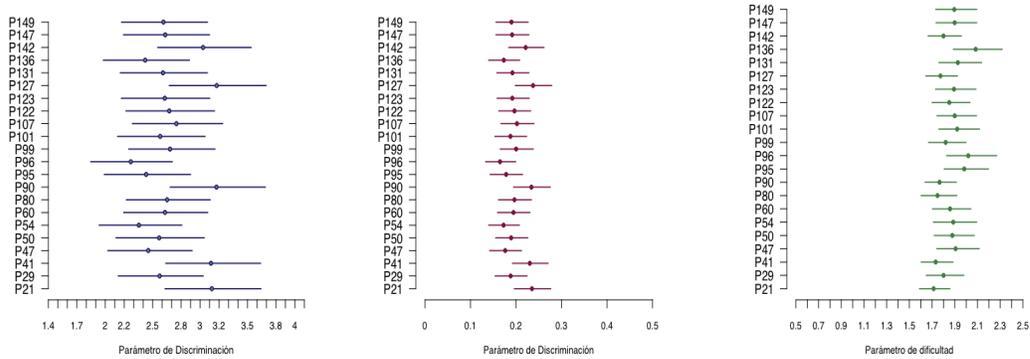
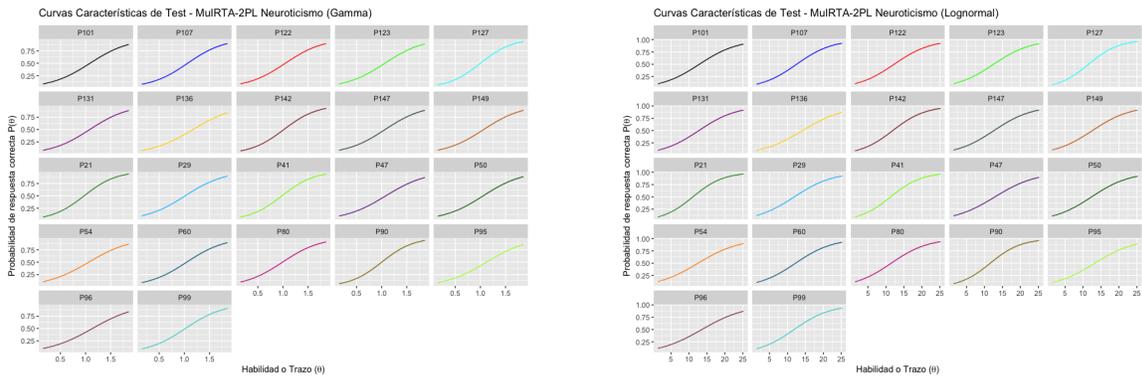


FIGURA C.8. Estimaciones obtenidas para parámetro de Discriminación constructo Neuroticismo empleando el modelo MUIRTA-2PL. De Izq. a Der. (MultiGamma), (Multilognormal) y (Multinormal)



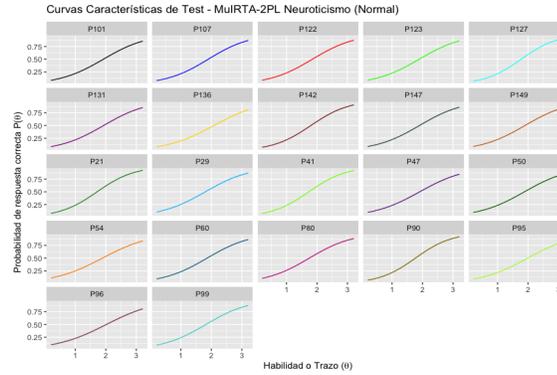


FIGURA C.9. Curvas características del ítem para el test Neuroticismo obtenidas por los MuIRTA-2PL.

C.3.2. Tendencias Psicópatas

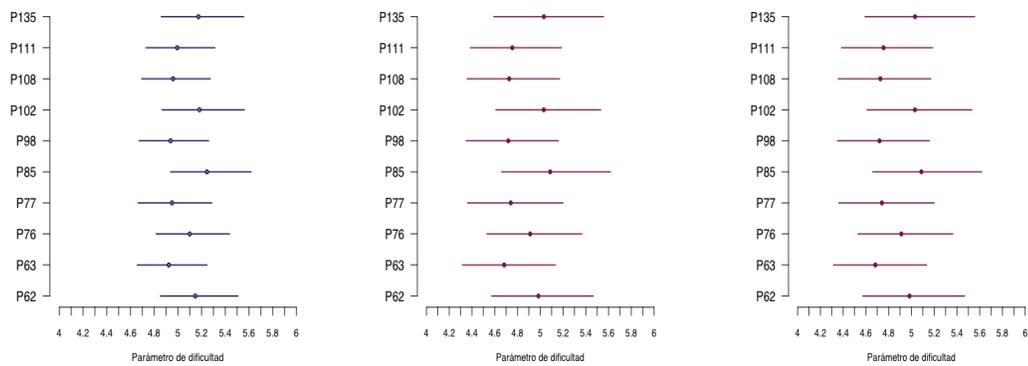


FIGURA C.10. Estimaciones obtenidas para parámetro de Dificultad constructo Tendencias psicópatas empleando el modelo MUIRTA-2PL. De Izq. a Der. (MultiGamma), (Multilognormal) y (Multinormal)

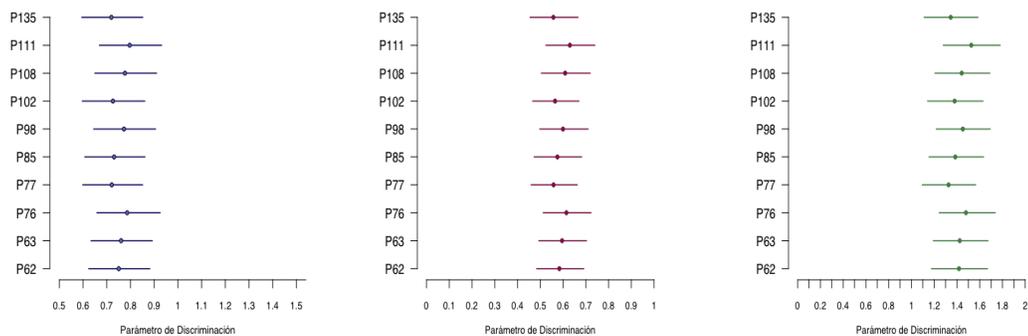


FIGURA C.11. Estimaciones obtenidas para parámetro de Discriminación constructo Neuroticismo empleando el modelo MUIRTA-2PL. De Izq. a Der. (MultiGamma), (Multilognormal) y (Multinormal)

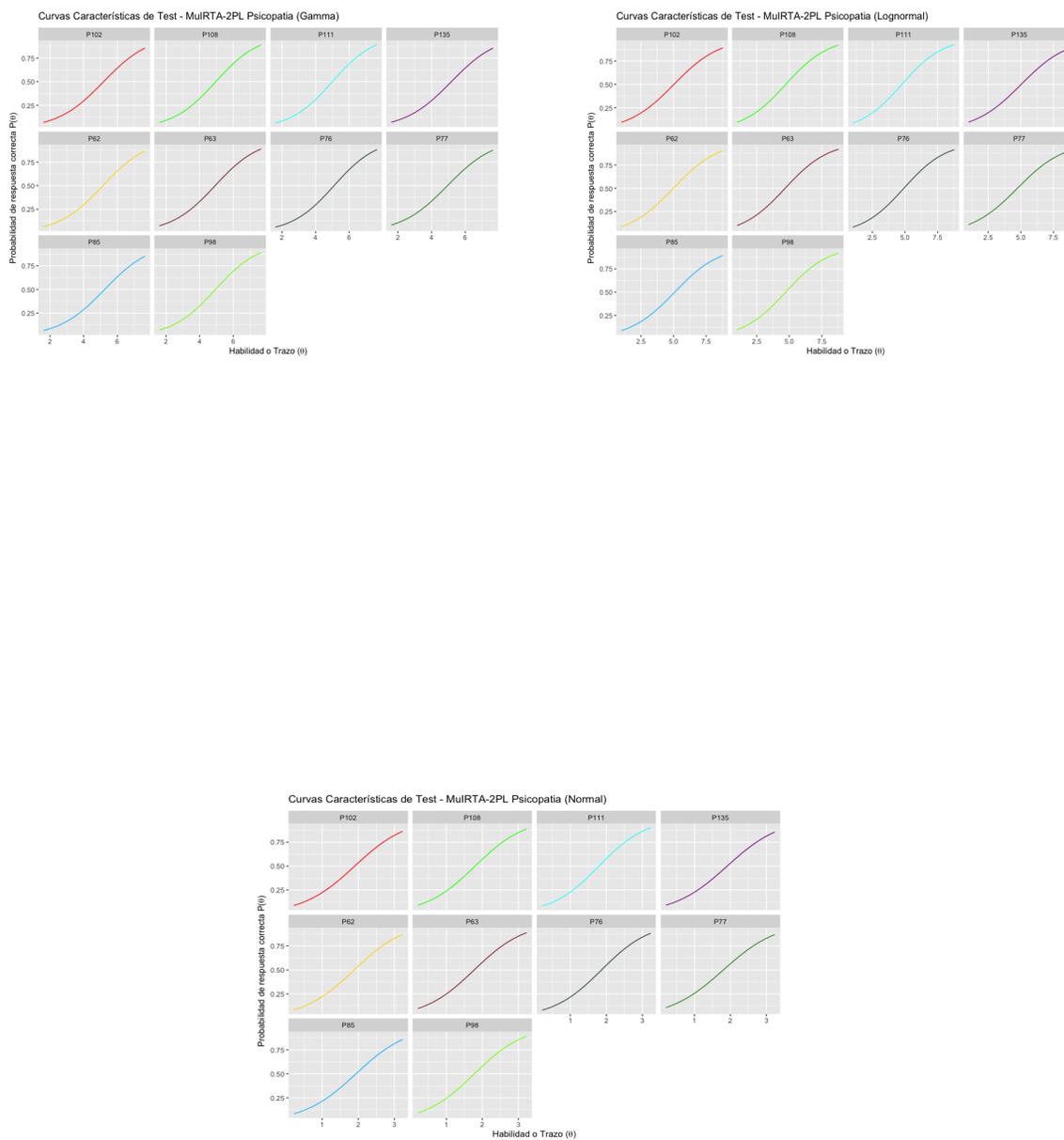


FIGURA C.12. Curvas características del ítem para el test Tendencias Psicopáticas obtenidas por los MuIRTA-2PL.

	bdif_mean	bdif_sd	bdif_975	bdif_025	adisc_mean	adisc_sd	adisc_975	adisc_025
1	1.03	0.05	1.13	0.95	2.63	0.23	3.10	2.18
2	1.02	0.04	1.12	0.94	2.76	0.24	3.25	2.30
3	1.04	0.05	1.14	0.95	2.58	0.23	3.05	2.13
4	1.02	0.04	1.11	0.94	2.75	0.24	3.24	2.30
5	1.06	0.05	1.17	0.97	2.39	0.22	2.84	1.97
6	0.95	0.04	1.03	0.89	2.95	0.25	3.45	2.48
7	1.07	0.05	1.18	0.98	2.60	0.23	3.07	2.15
8	1.07	0.05	1.18	0.98	2.34	0.22	2.78	1.92
9	1.01	0.04	1.10	0.93	2.78	0.24	3.27	2.33
10	0.99	0.04	1.09	0.92	2.71	0.24	3.18	2.26
11	1.06	0.05	1.16	0.97	2.50	0.23	2.96	2.06
12	1.03	0.04	1.13	0.95	2.89	0.25	3.39	2.42
13	1.13	0.06	1.26	1.03	2.33	0.22	2.77	1.90
14	1.07	0.05	1.17	0.98	2.45	0.22	2.89	2.02
15	1.05	0.05	1.15	0.96	2.70	0.24	3.18	2.24
16	0.99	0.04	1.07	0.92	3.07	0.25	3.57	2.59
17	1.05	0.05	1.15	0.96	2.64	0.24	3.11	2.18
18	1.03	0.05	1.13	0.95	2.70	0.23	3.17	2.25
19	1.05	0.05	1.15	0.97	2.66	0.24	3.13	2.21
20	0.95	0.04	1.02	0.89	3.14	0.25	3.65	2.66
21	1.05	0.05	1.14	0.96	2.65	0.23	3.12	2.21
22	1.04	0.04	1.13	0.96	2.76	0.24	3.24	2.31
23	5.01	0.15	5.32	4.74	0.80	0.07	0.94	0.68
24	4.95	0.14	5.25	4.71	0.85	0.07	0.99	0.72
25	4.94	0.14	5.25	4.68	0.82	0.07	0.95	0.68
26	5.11	0.17	5.47	4.80	0.69	0.06	0.82	0.57
27	4.90	0.15	5.23	4.64	0.73	0.06	0.86	0.61
28	4.91	0.15	5.22	4.64	0.77	0.07	0.90	0.64
29	5.13	0.17	5.49	4.83	0.74	0.07	0.87	0.61
30	4.90	0.14	5.20	4.64	0.79	0.07	0.92	0.66
31	5.02	0.16	5.36	4.73	0.72	0.06	0.85	0.59
32	5.07	0.16	5.43	4.77	0.72	0.06	0.85	0.60
33	3.32	0.11	3.56	3.13	1.13	0.10	1.33	0.95
34	3.29	0.11	3.51	3.09	1.10	0.09	1.29	0.92
35	3.41	0.12	3.67	3.19	0.98	0.09	1.15	0.81
36	3.40	0.12	3.67	3.19	1.03	0.09	1.22	0.86
37	3.43	0.12	3.69	3.21	1.05	0.09	1.23	0.87
38	3.41	0.13	3.69	3.18	0.96	0.09	1.14	0.79
39	3.34	0.12	3.58	3.12	1.02	0.09	1.21	0.84
40	3.21	0.10	3.42	3.03	1.12	0.09	1.31	0.95
41	3.50	0.13	3.79	3.26	0.98	0.09	1.16	0.81
42	3.29	0.11	3.53	3.09	1.07	0.09	1.26	0.90
43	3.20	0.10	3.41	3.03	1.19	0.10	1.38	1.00
44	3.22	0.10	3.43	3.04	1.15	0.10	1.34	0.97
45	3.24	0.10	3.45	3.06	1.14	0.09	1.33	0.96
46	3.36	0.11	3.60	3.15	1.05	0.09	1.23	0.88

TABLA C.10. Parámetros del ítem con ajuste MuIRTA-2PL Gamma

	bdif_mean	bdif_sd	bdif_975	bdif_025	adisc_mean	adisc_sd	adisc_975	adisc_025
1	11.82	0.66	13.21	10.66	0.20	0.02	0.24	0.16
2	11.73	0.64	13.10	10.57	0.21	0.02	0.25	0.17
3	11.91	0.68	13.38	10.73	0.20	0.02	0.23	0.16
4	11.66	0.63	12.97	10.54	0.21	0.02	0.25	0.17
5	12.34	0.78	14.07	10.99	0.18	0.02	0.21	0.14
6	10.86	0.56	12.09	9.85	0.22	0.02	0.26	0.18
7	12.46	0.74	14.03	11.12	0.19	0.02	0.23	0.16
8	12.47	0.79	14.15	11.07	0.17	0.02	0.21	0.14
9	11.65	0.64	12.97	10.52	0.21	0.02	0.25	0.17
10	11.33	0.61	12.65	10.20	0.21	0.02	0.24	0.17
11	12.30	0.72	13.83	11.02	0.19	0.02	0.22	0.15
12	11.89	0.64	13.23	10.76	0.22	0.02	0.26	0.18
13	13.35	0.85	15.15	11.86	0.17	0.02	0.21	0.14
14	12.31	0.73	13.87	11.03	0.19	0.02	0.22	0.15
15	12.03	0.67	13.47	10.82	0.20	0.02	0.24	0.17
16	11.28	0.57	12.47	10.26	0.23	0.02	0.27	0.19
17	12.09	0.69	13.51	10.85	0.20	0.02	0.24	0.16
18	11.91	0.67	13.32	10.72	0.20	0.02	0.24	0.17
19	12.17	0.69	13.65	10.94	0.20	0.02	0.24	0.16
20	10.74	0.52	11.86	9.80	0.24	0.02	0.28	0.20
21	12.07	0.69	13.55	10.86	0.20	0.02	0.24	0.16
22	12.04	0.67	13.46	10.83	0.21	0.02	0.24	0.17
23	4.74	0.20	5.16	4.37	0.64	0.06	0.75	0.54
24	4.69	0.19	5.08	4.35	0.67	0.06	0.79	0.56
25	4.67	0.20	5.09	4.32	0.64	0.06	0.75	0.53
26	4.87	0.23	5.37	4.46	0.55	0.05	0.66	0.46
27	4.63	0.21	5.07	4.25	0.58	0.05	0.69	0.48
28	4.64	0.20	5.07	4.28	0.61	0.05	0.71	0.50
29	4.93	0.23	5.42	4.54	0.58	0.05	0.68	0.48
30	4.59	0.19	5.00	4.25	0.63	0.06	0.74	0.53
31	4.78	0.22	5.24	4.39	0.57	0.05	0.67	0.47
32	4.84	0.22	5.32	4.44	0.57	0.05	0.67	0.47
33	9.71	0.41	10.57	8.98	0.32	0.03	0.37	0.27
34	9.59	0.42	10.49	8.84	0.31	0.03	0.37	0.26
35	10.06	0.49	11.12	9.19	0.27	0.03	0.33	0.22
36	9.94	0.45	10.89	9.14	0.29	0.03	0.35	0.24
37	10.05	0.46	11.02	9.22	0.30	0.03	0.35	0.25
38	10.00	0.48	11.05	9.16	0.27	0.03	0.32	0.22
39	9.74	0.44	10.68	8.95	0.29	0.03	0.34	0.24
40	9.23	0.37	9.99	8.56	0.32	0.03	0.38	0.27
41	10.38	0.52	11.49	9.47	0.27	0.03	0.33	0.22
42	9.57	0.42	10.46	8.82	0.30	0.03	0.36	0.25
43	9.23	0.36	9.99	8.59	0.34	0.03	0.40	0.28
44	9.32	0.38	10.12	8.64	0.33	0.03	0.38	0.27
45	9.35	0.38	10.14	8.66	0.33	0.03	0.38	0.27
46	9.81	0.43	10.72	9.04	0.30	0.03	0.35	0.25

TABLA C.11. Parámetros del ítem con ajuste MuIRTA-2PL Lognormal

	bdif_mean	bdif_sd	bdif_975	bdif_025	adisc_mean	adisc_sd	adisc_975	adisc_025
1	0.97	0.04	1.05	0.90	3.12	0.26	3.64	2.63
2	1.02	0.05	1.11	0.94	2.57	0.23	3.03	2.14
3	0.98	0.04	1.06	0.91	3.12	0.25	3.64	2.64
4	1.08	0.05	1.20	0.99	2.45	0.23	2.92	2.03
5	1.06	0.05	1.16	0.97	2.57	0.24	3.05	2.11
6	1.06	0.05	1.18	0.97	2.36	0.22	2.81	1.93
7	1.05	0.05	1.15	0.96	2.63	0.23	3.08	2.19
8	0.99	0.04	1.08	0.91	2.65	0.23	3.11	2.22
9	1.00	0.04	1.08	0.93	3.17	0.26	3.69	2.68
10	1.12	0.06	1.25	1.02	2.43	0.23	2.90	1.99
11	1.14	0.06	1.27	1.03	2.27	0.22	2.71	1.85
12	1.02	0.04	1.12	0.94	2.68	0.23	3.16	2.25
13	1.09	0.05	1.20	1.00	2.58	0.23	3.05	2.13
14	1.07	0.05	1.17	0.98	2.75	0.24	3.24	2.29
15	1.05	0.05	1.15	0.96	2.68	0.24	3.15	2.22
16	1.06	0.05	1.17	0.98	2.63	0.24	3.10	2.17
17	1.00	0.04	1.09	0.93	3.18	0.26	3.70	2.67
18	1.08	0.05	1.19	0.99	2.61	0.23	3.08	2.16
19	1.17	0.06	1.30	1.06	2.42	0.23	2.89	1.98
20	1.02	0.04	1.10	0.94	3.03	0.25	3.54	2.55
21	1.07	0.05	1.17	0.98	2.63	0.23	3.10	2.19
22	1.07	0.05	1.17	0.98	2.61	0.23	3.08	2.17
23	5.15	0.16	5.51	4.85	0.75	0.07	0.88	0.62
24	4.92	0.15	5.25	4.66	0.76	0.07	0.89	0.63
25	5.10	0.16	5.44	4.82	0.79	0.07	0.93	0.66
26	4.95	0.16	5.29	4.66	0.72	0.06	0.85	0.60
27	5.25	0.18	5.62	4.94	0.73	0.07	0.86	0.61
28	4.94	0.15	5.26	4.67	0.77	0.07	0.91	0.64
29	5.18	0.18	5.56	4.87	0.73	0.07	0.86	0.60
30	4.96	0.15	5.27	4.69	0.78	0.07	0.91	0.65
31	4.99	0.15	5.31	4.73	0.80	0.07	0.93	0.67
32	5.17	0.18	5.56	4.86	0.72	0.07	0.85	0.59
33	3.36	0.12	3.61	3.16	1.06	0.09	1.25	0.89
34	3.28	0.11	3.52	3.08	1.02	0.09	1.21	0.85
35	3.36	0.12	3.60	3.15	1.03	0.09	1.22	0.86
36	3.33	0.12	3.58	3.12	1.03	0.09	1.21	0.86
37	3.47	0.13	3.76	3.23	0.96	0.09	1.14	0.79
38	3.24	0.10	3.45	3.05	1.15	0.09	1.34	0.97
39	3.19	0.09	3.38	3.02	1.25	0.10	1.45	1.06
40	3.39	0.12	3.65	3.17	1.00	0.09	1.18	0.83
41	3.31	0.11	3.55	3.11	1.09	0.09	1.28	0.91
42	3.27	0.11	3.50	3.08	1.14	0.10	1.34	0.96
43	3.34	0.12	3.59	3.13	1.01	0.09	1.18	0.84
44	3.28	0.11	3.52	3.08	1.07	0.09	1.26	0.89
45	3.46	0.13	3.74	3.23	0.98	0.09	1.16	0.81
46	3.18	0.10	3.39	3.00	1.13	0.09	1.32	0.95

TABLA C.12. Parámetros del ítem con ajuste MuIRTA-2PL Gamma

Bibliografía

- Albert, J. H. (1992). Bayesian Estimation of Normal Ogive Item Response Curves Using Gibbs Sampling, *Journal of Educational Statistics* **17**(3): 251–269.
- Alice, M. (n.d.). Modelling dependence with copulas in r. consultada: 01-04-2019.
URL: <https://datascienceplus.com>
- Ames, A. J. and Au, C. H. (2018). Using Stan for Item Response Theory Models, *Measurement: Interdisciplinary and Perspectives, Routledge Taylor and Francis Group*. **16**(2): 129–134.
- Andrade, D. F. D., Tavares, H. R. and da Cunha Valle, R. (2000). *Teoria da Resposta ao Item: Conceitos e Aplicações*, SINAPE.
- Antonio, D. S. (2013). Modelo Multidimensional de Teoría de Respuesta al Ítem Jerárquico.
- Azevedo, C. L. (2003). *Metodos de Estimacao na Teoria de Resposta ao Item*, PhD thesis, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.
- Baker, F. B. and Kim, S.-H. (2004). *Item Response Theory: Parameter Estimation Techniques*, STATISTICS: Textbooks and Monographs, Dekker Media, Second Edition, New York-Basel.
- Bazán, J. L. (2005). *Una Família de Modelos de Resposta ao Ítem Normal Assimétrica*, PhD thesis, PhD Thesis, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.
- Birbaum, A. (1968). Some latent trait models and their use in inferring an examinee's ability, *Statistical Theories of Mental Test Scores* .
- Béguin, A. and Glass, C. (2001). MCMC Estimation and Some Model-Fit Analysis of Multidimensional IRT Models, *The Psychometric Society* **66**(4): 541–562.
- Carlin, B. P. and Louis, T. A. (2009). *Bayesian Methods for Data Analysis, Third Edition*, Chapman and Hall Book, CRC Press, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300.
- Carpenter, B., Gelman, A., Hoffman, M. D. and Lee, D. (2017). Stan: A Probabilistic Programming Language, *Journal of Statistical Software* **76**: 1–32.

- da. Silva, G. (2008). *Modelos Multidimensionais da TRI com distribuições assimétricas para os traços latentes*, PhD thesis, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.
- Durante, F. and Sempi, C. (2010). *Copula Theory: An Introduction*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Díaz, S. Y. (2018). Distribuciones asimétricas para el trazo latente en modelos de teoría de respuesta al ítem con múltiples poblaciones.
- Fox, J. P. (2010). *Bayesian Item Response Modeling: Theory and Applications*, Statistics for Social and Behavioral Sciences, Springer, 7500 AE Enschede The Netherlands.
- Gamerman, D. and Lopes, H. F. (2006). *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference*, Text in Statistical Science, Chapman and Hall CRC, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300.
- Gao, G. (2018). *Bayesian Claims Reserving Methods in Non-life Insurance with Stan : An Introduction*, Springer, School of Statistics, Beijing China.
- Hoff, P. D. (2009). *A First Course in Bayesian Statistical Methods*, Springer Texts in Statistics, Springer, Seattle WA 98195-4322.
- Hoffman, M. D. and Gelman, A. (2014). The No-U-Turn Sampler: Adaptively Setting Path Lengths in Hamiltonian Monte Carlo, *Journal of Machine Learning Research* **15**: 1593–1623.
- León, L. N. (2017). Modelo TRI Logístico para un Trazo Latente que sigue una Distribución Asimétrica.
- Lord, F. (1952). *A theory of test scores*, Psychometric Monographs.
- Luo, Y. and Jiao, H. (2017). Using the Stan Program for Bayesian Item Response Theory, *Educational and Psychological Measurement* pp. 1–25.
- Matteucci, M., Mignana, S. and Velbkamp, B. P. (2012). Prior Distributions for Item Parameters in IRT Models, *Communications in Statistics-Theory and Methods Taylor and Francis Group* pp. 2944–2958.
- Montenegro, A. M. (2011). *Multidimensional Ítem Response Theory Models where the Ability has a Latent Structure*, PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia.
- Muniz, J. (2010). Las Teorías de los Tests: Teoría Clásica y Teoría de respuesta a los Ítems, *Papeles del Psicólogo* **31**: 57–66.
- Navas, M. J. (1994). Teoría Clásica de los Test versus Teoría de Respuesta al Ítem, *Psicológica* **17**.
- Neal, R. M. (2011). MCMC Using Hamiltonian Dynamics. In S. Brooks. Gelman and X.L.Meng, *Handbook of Markov Chain Monte Carlo* **Vol 2**: 113–162.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas: Second Edition*, Springer Series to Statistic, Springer, Portland, OR 97219-7899.
- Ponce, M. and Granell, P. (2006). Manual de inventario PIHEMA R2, *Universidad Central de Venezuela, Facultad de ciencias y educación* .

- Páyer, M. d. l. A. (2013). Características de Personalidad asociadas a estudiantes de permanencia prolongada, *Revista de Psicología* **29**(1).
- Rash, G. (1960). *Probabilistic models for some intelligence and attainment test*, The Danish Institute for Educational Research.
- Reckase, M. D. (2009). *Multidimensional Item Response Theory*, Statistics for Social and Behavioral Sciences, Springer, 461 Erickson Hall.
- Sheng, Y. and Wikle, C. K. (2007). Comparing Multiunidimensional and Unidimensional Item Response Theory Models, *Educational and Psychological Measurement* **67**(6): 899–919.
- Sheng, Y. and Wikle, C. K. (2008). Bayesian Multidimensional IRT Models With a Hierarchical Structure, *Educational and Psychological Measurement* **68**(3): 413–430.
- Sheng, Y. and Wikle, C. K. (2009). Bayesian IRT Models Incorporating General and Specific Abilities, *Behaviormetrika* **36**(1): 27–48.
- Smith, M. S. (2011). Bayesian Approaches to Copula Modelling, *Hierarchical Models and MCMC: A Tribute to Adrian Smith* pp. 1–33.
- Song, P. X.-K. (2000). Multivariate Dispersion Models Generated From Gaussian Copula, *Board of the Foundation of the Scandinavian Journal of Statistics* **27**: 305–320.
- Spearman, C. (1904). The proof and measurement of association between two things, *American Journal of Psychology* **15**: 72–101.
- Spearman, C. (1907). Demonstration of formulae for true measurement of correlation., *American Journal of Psychology* **18**: 161–169.
- Spearman, C. (1913). Correlations of sums and differences, *British Journal of Psychology* **5**: 417–426.
- Stan, V. . (2017). *Stan Modeling Language: User's Guide and Reference Manual*, Stan Development Team, mc-stan.org.
- Vehtari, A. and Gelman, A. (2014). WAIC and cross-validation in Stan, *Department Statistics, Columbia University* pp. 1–15.
- Watanabe, S. (2010). Asymptotic equivalence of Bayes cross validation and widely applicable information criterion in singular learning theory, *Journal of Machine Learning Research* **11**: 3571–3594.
- Woods, C. M. (2008). Ramsay-Curve Item Response Theory for the Three Parameter Logistic Item Response Model, *Applied Psychological Measurement* **32**(6): 447–465.
- Yan, J. (2007). Enjoy the Joy of Copulas: With a Package copula, *Journal of Statistical Software* **21**: 1–17.
- Zheng, B. (2000). Bayesian Estimation of Multidimensional Item response Theory Model Using Gibbs Sampling, *Communication Statistics, Copyright by Marcel Dekker, Inc.* pp. 1405–1417.