



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# IMPLEMENTACIÓN Y COMPARACIÓN DE CONTROLADORES EN UN PROTOTIPO DE SILLA DE RUEDAS DE DOS RUEDAS

**JULIÁN FELIPE RODRÍGUEZ ARDILA**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
BOGOTÁ D.C.  
2019



# IMPLEMENTACIÓN Y COMPARACIÓN DE CONTROLADORES EN UN PROTOTIPO DE SILLA DE RUEDAS DE DOS RUEDAS

**JULIÁN FELIPE RODRÍGUEZ ARDILA**

Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**MAGISTER EN INGENIERÍA AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL**

Director:  
Germán Andrés Ramos Fuentes, Ph.D.  
Profesor Titular Universidad Nacional de Colombia

Línea de Investigación:  
Robots móviles

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
BOGOTÁ D.C.  
2019



Trabajo de grado aprobado por la Facultad de INGENIERÍA, en cumplimiento de los requisitos exigidos para optar al título de:

**MAGISTER EN INGENIERÍA  
AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL  
- DEPARTAMENTO DE  
INGENIERÍA ELÉCTRICA Y  
ELECTRÓNICA**

---

Germán Andrés Ramos Fuentes Ph.D.  
Director de la Tesis

---

Jurado 1

---

Jurado 2



# DEDICATORIA

A mi familia.



# RECONOCIMIENTOS

El autor desea expresar su reconocimiento a:

- A Germán A. Ramos por su dirección y motivación.
- A John A. Cortés por sus valiosos aportes.
- A la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá por permitirme desarrollar esta tesis en su Laboratorio de Control.



## RESUMEN

El objetivo principal de este trabajo es la comparación de controladores en un prototipo de silla de ruedas de dos ruedas. El propósito del vehículo es realizar trayectorias rectilíneas y curvas mientras se mantiene en equilibrio. La dinámica del robot es obtenida mediante el modelo de identificación de caja gris. Dado que el sistema es no lineal, se linealiza alrededor de un punto de equilibrio. Para alcanzar el objetivo principal se diseñan, simulan e implementan los controladores: 1) PID de doble lazo cerrado, 2) RVE con LQR con precompensador, 3) PI vectorial con LQR, 4) PI vectorial con LQR y FF, 5) control por cadena de integradores con LQR y 6) control GPI con observador desacoplado de estado extendido. Este trabajo evalúa y compara el comportamiento del robot bajo las estrategias de control diseñadas en los siguientes tres aspectos: seguimiento de trayectorias, variación de parámetros y rechazo de perturbaciones. En estas tres pruebas, el controlador GPI con observador desacoplado de estado extendido presenta los mejores resultados.

**Palabras. clave:** (silla de ruedas de dos ruedas, control GPI, control de velocidad).

## ABSTRACT

The main goal of this work is to compare controllers in a two wheeled wheelchair prototype. The purpose of the vehicle is to track linear and curved trajectories while achieving equilibrium. The dynamics of the robot is obtained through the grey box model. Given that the system is nonlinear, it is linearized around an equilibrium point. To achieve the main objective the following controllers are designed, simulated and implemented: 1) double closed loop PID, 2) state feedback with LQR and precompensation, 3) vectorial PI with LQR, 4) vectorial PI with LQR and FF, 5) chain of integrators with LQR and 6) GPI with extended state decoupled observer. This work evaluates and compares the behaviour of the robot under the designed control strategies on three different aspects: trajectory tracking, parameter variation and active disturbance rejection. In these three tests, the GPI controller with extended state decoupled observer shows the best results.

**Keywords:** (two wheel wheelchair, GPI control, velocity control).

# Contenido

<b>Contenido</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>2</b>
1.1 Justificación y motivación . . . . .	2
1.2 Estado del arte . . . . .	3
1.3 Objetivo general . . . . .	5
1.3.1 Objetivos específicos . . . . .	5
1.4 Solución propuesta . . . . .	5
<b>2 Modelo del Sistema</b>	<b>7</b>
2.1 Desplazamiento en silla de ruedas . . . . .	7
2.2 Modelo teórico . . . . .	8
2.2.1 Modelo lineal de un motor DC . . . . .	8
2.2.2 Modelo dinámico del prototipo de silla de ruedas de dos ruedas . . . . .	10
2.3 Identificación del sistema en lazo cerrado . . . . .	17
<b>3 Diseño del control</b>	<b>28</b>
3.1 Control PID de doble lazo cerrado . . . . .	30
3.2 Control por realimentación de variables de estado . . . . .	33
3.3 Control por RVE con LQR y precompensador . . . . .	37
3.4 Control PI vectorial con LQR . . . . .	41
3.5 Control PI vectorial con LQR y FF . . . . .	45
3.6 Control por cadena de integradores con LQR . . . . .	50
3.7 Control GPI con observador desacoplado de estado extendido . . . . .	54
3.7.1 Salida plana SRDR . . . . .	54
3.7.2 Observador desacoplado de estado extendido . . . . .	55
3.7.3 Comparación de resultados de los controladores en simulación . . . . .	62
<b>4 Evaluación de controladores</b>	<b>63</b>
4.1 Seguimiento de trayectorias . . . . .	63
4.1.1 Controlador PID de doble lazo cerrado en tiempo discreto . . . . .	66

---

4.1.2	Controlador por RVE con LQR y precompensador en tiempo discreto	68
4.1.3	Controlador PI vectorial con LQR en tiempo discreto . . . . .	69
4.1.4	Controlador PI vectorial con LQR y FF en tiempo discreto . . . . .	70
4.1.5	Controlador por cadena de integradores con LQR en tiempo discreto	72
4.1.6	Controlador GPI con observador desacoplado de estado extendido en tiempo discreto . . . . .	74
4.1.7	Comparación de resultados de los controladores en seguimiento de trayectorias . . . . .	76
4.2	Variación de parámetros . . . . .	77
4.2.1	Comparación de resultados de los controladores en variación de parámetros . . . . .	87
4.3	Rechazo de perturbaciones . . . . .	88
4.3.1	Comparación de resultados de los controladores en rechazo de perturbaciones . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>99</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>102</b>

# Lista de Figuras

2-1. Diagrama de un motor DC . . . . .	8
2-2. Diagrama de cuerpo libre de la rueda derecha . . . . .	10
2-3. Diagrama de cuerpo libre de la silla . . . . .	12
2-4. Ubicación de los polos del modelo teórico de la SRDR . . . . .	17
2-5. Metodología del proceso de identificación . . . . .	18
2-6. Esquema de identificación en lazo cerrado . . . . .	18
2-7. Señal cuadrada de referencia . . . . .	20
2-8. Comparación velocidad señal cuadrada: simulación e implementación . . . . .	21
2-9. Comparación ángulo señal cuadrada: simulación e implementación . . . . .	21
2-10. Ubicación de los polos del modelo identificado de la SRDR . . . . .	22
2-11. Comparación de velocidad con señal cuadrada después de la estimación . . . . .	23
2-12. Comparación del ángulo con señal cuadrada después de la estimación . . . . .	24
2-13. Señal senoidal de referencia . . . . .	24
2-14. Señal triangular de referencia . . . . .	25
2-15. Comparación de velocidad con señal senoidal después de la estimación . . . . .	25
2-16. Comparación del ángulo señal senoidal después de la estimación . . . . .	26
2-17. Comparación de velocidad señal triangular después de la estimación . . . . .	26
2-18. Comparación del ángulo señal triangular después de la estimación . . . . .	27
3-1. Desafío de control . . . . .	28
3-2. Referencia de velocidad para evaluar desempeño de controladores . . . . .	29
3-3. Estructura de control PID de doble lazo cerrado . . . . .	30
3-4. Respuesta de la SRDR con PID de doble lazo cerrado . . . . .	31
3-5. Primer detalle de la respuesta de la SRDR con PID de doble lazo cerrado . . . . .	32
3-6. Segundo detalle de la respuesta de la SRDR con PID de doble lazo cerrado . . . . .	32
3-7. Señal de control de la SRDR con PID de doble lazo cerrado . . . . .	33
3-8. Estructura de control por RVE con precompensador . . . . .	33
3-9. Respuesta de la SRDR por RVE con ubicación de polos con precompensador . . . . .	35
3-10. Primer detalle de la respuesta de la SRDR por RVE con ubicación de polos con precompensador . . . . .	36
3-11. Segundo detalle de la respuesta de la SRDR por RVE con ubicación de polos con precompensador . . . . .	36

<b>3-12.</b> Señal de control de la SRDR por RVE con ubicación de polos con precompensador . . . . .	37
<b>3-13.</b> Respuesta de la SRDR por RVE con LQR y precompensador . . . . .	39
<b>3-14.</b> Primer detalle de la respuesta de la SRDR por RVE con LQR y precompensador	39
<b>3-15.</b> Segundo detalle de la respuesta de la SRDR por RVE con LQR y precompensador . . . . .	40
<b>3-16.</b> Señal de control de la SRDR por RVE con LQR y precompensador . . . . .	40
<b>3-17.</b> Estructura de control PI vectorial . . . . .	41
<b>3-18.</b> Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR . . . . .	43
<b>3-19.</b> Primer detalle de la respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR . . . . .	44
<b>3-20.</b> Segundo detalle de la respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR . . . . .	44
<b>3-21.</b> Señal de control de la SRDR con PI vectorial con LQR . . . . .	45
<b>3-22.</b> Estructura de control PI vectorial con LQR y FF . . . . .	45
<b>3-23.</b> Posicionamiento de los polos de la función de transferencia de la velocidad en lazo cerrado . . . . .	46
<b>3-24.</b> Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR y FF . . . . .	48
<b>3-25.</b> Primer detalle de la respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR y FF . . . . .	49
<b>3-26.</b> Segundo detalle de la respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR y FF . . . . .	49
<b>3-27.</b> Señal de control de la SRDR con PI vectorial con LQR y FF . . . . .	50
<b>3-28.</b> Estructura de control por cadena de integradores . . . . .	50
<b>3-29.</b> Respuesta de la SRDR por cadena de integradores con LQR . . . . .	52
<b>3-30.</b> Primer detalle de la respuesta de la SRDR por cadena de integradores con LQR	52
<b>3-31.</b> Segundo detalle de la respuesta de la SRDR por cadena de integradores con LQR . . . . .	53
<b>3-32.</b> Señal de control de la SRDR por cadena de integradores con LQR . . . . .	53
<b>3-33.</b> Estructura de control con observador GPI . . . . .	55
<b>3-34.</b> Respuesta de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido	59
<b>3-35.</b> Primer detalle de la respuesta de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido . . . . .	59
<b>3-36.</b> Segundo detalle de la respuesta de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido . . . . .	60
<b>3-37.</b> Señal de control de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido . . . . .	60
<b>3-38.</b> Detalle de la señal de control de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido . . . . .	61
<b>4-1.</b> Perfil de velocidad de la primera trayectoria . . . . .	64
<b>4-2.</b> Perfil de aceleración de la primera trayectoria . . . . .	65
<b>4-3.</b> Perfil de velocidad de la segunda trayectoria . . . . .	65
<b>4-4.</b> Perfil de aceleración de la segunda trayectoria . . . . .	66

4-5. Respuesta de la SRDR con PID de doble lazo cerrado para la primera trayectoria	67
4-6. Respuesta de la SRDR con PID de doble lazo cerrado para la segunda trayectoria	67
4-7. Respuesta de la SRDR por RVE con LQR y precompensador para la primera trayectoria . . . . .	68
4-8. Respuesta de la SRDR por RVE con LQR y precompensador para la segunda trayectoria . . . . .	69
4-9. Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR para la primera trayectoria	70
4-10. Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR para la segunda trayectoria	70
4-11. Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR y FF para la primera trayectoria . . . . .	71
4-12. Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR y FF para la segunda trayectoria . . . . .	72
4-13. Respuesta de la SRDR por cadena de integradores con LQR para la primera trayectoria . . . . .	73
4-14. Respuesta de la SRDR por cadena de integradores con LQR para la segunda trayectoria . . . . .	73
4-15. Respuesta de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido para la primera trayectoria . . . . .	74
4-16. Respuesta de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido para la segunda trayectoria . . . . .	75
4-17. Vista frontal de la SRDR . . . . .	77
4-18. Vista frontal de la SRDR con bloque ubicado en el espaldar . . . . .	78
4-19. Respuesta de la SRDR con PID de doble lazo cerrado con variación de parámetros . . . . .	80
4-20. Respuesta de la SRDR por RVE con LQR y precompensador con variación de parámetros . . . . .	81
4-21. Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR con variación de parámetros	82
4-22. Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR y FF con variación de parámetros . . . . .	84
4-23. Respuesta de la SRDR por cadena de integradores con LQR con variación de parámetros . . . . .	85
4-24. Respuesta de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido con variación de parámetros . . . . .	86
4-25. Captura de la SRDR al surcar el primer terreno irregular. Ver vídeo completo en [39] . . . . .	88
4-26. Captura de la SRDR al surcar el segundo terreno irregular. Ver vídeo completo en [40] . . . . .	88
4-27. Perfil de velocidad para surcar terrenos irregulares . . . . .	89
4-28. Perfil de aceleración para surcar terrenos irregulares . . . . .	89

---

<b>4-29.</b> Respuesta de la SRDR con PID de doble lazo cerrado a rechazo de perturbaciones en el primer terreno (superior) y en el segundo terreno (inferior) . . .	90
<b>4-30.</b> Respuesta de la SRDR por RVE con LQR y precompensador a rechazo de perturbaciones en el primer terreno (superior) y en el segundo terreno (inferior)	91
<b>4-31.</b> Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR a rechazo de perturbaciones en el primer terreno (superior) y en el segundo terreno (inferior) . . . . .	92
<b>4-32.</b> Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR y FF a rechazo de perturbaciones en el primer terreno (superior) y en el segundo terreno (inferior) . .	93
<b>4-33.</b> Respuesta de la SRDR por cadena de integradores con LQR a rechazo de perturbaciones en el primer terreno (superior) y en el segundo terreno (inferior)	94
<b>4-34.</b> Respuesta de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido a rechazo de perturbaciones en el primer terreno (superior) y en el segundo terreno (inferior) . . . . .	95
<b>4-35.</b> Captura de la SRDR al virar en el primer terreno irregular. Ver vídeo completo en [41] . . . . .	96
<b>4-36.</b> Captura de la SRDR al virar en el segundo terreno irregular. Ver vídeo completo en [42] . . . . .	96
<b>4-37.</b> Respuesta de velocidad en cada motor al virar en primer terreno irregular . .	96
<b>4-38.</b> Respuesta de velocidad en cada motor al virar en segundo terreno irregular .	97

# Lista de Tablas

<b>2-1.</b> Constantes SRDR . . . . .	16
<b>2-2.</b> Resultados de identificación . . . . .	22
<b>3-1.</b> Resultados de los controladores en simulación . . . . .	62
<b>4-1.</b> ISO 2631-1 . . . . .	64
<b>4-2.</b> Resultados de los controladores en seguimiento de trayectorias . . . . .	76
<b>4-3.</b> Variación centro de masa SRDR . . . . .	78
<b>4-4.</b> Resultados de los controladores en variación de parámetros . . . . .	87
<b>4-5.</b> Resultados de los controladores en rechazo de perturbaciones . . . . .	98

# 1 Introducción

## 1.1. Justificación y motivación

Las personas con discapacidad motora enfrentan desafíos para moverse diariamente. La opción más utilizada es una silla de ruedas que ubica dos ruedas posteriores y dos ruedas guías de menor tamaño ubicadas en la parte frontal. Para ajustar la dirección y la velocidad de desplazamiento durante el recorrido, el paciente tiene que superar los desafíos provistos tanto por los terrenos irregulares como por las ruedas guías. Una alternativa para enfrentar estos desafíos es eliminar las ruedas guías y realizar el desplazamiento en dos ruedas.

Segway® es uno de los vehículos con mayor popularidad y renombre que utiliza esta configuración en la mayoría de sus modelos. Aunque en el mercado se encuentran vehículos similares al Segway, todavía no se ha consolidado un equivalente para la movilización de personas con dificultades motoras. Un desarrollo incipiente es la Silla de Ruedas de Dos Ruedas (SRDR), cuyos estudios se han llevado a cabo en el ámbito académico. En esta línea, esta tesis plantea un robot de menor escala de una SRDR.

Dado que la configuración del prototipo de SRDR se asemeja al de un robot de dos ruedas, el modelo matemático se obtiene al realizar un estudio físico por medio de las leyes de Newton-Euler. Inicialmente, el modelo nominal se construye a partir de las características mecánicas y fichas técnicas de los componentes del robot, lo que deja cabida a incertidumbres. Por tal razón, se realiza un proceso de identificación para obtener una mejor aproximación del modelo físico de la planta.

Los controladores diseñados en esta tesis buscan satisfacer dos condiciones principales: garantizar el equilibrio del vehículo cuando se encuentre en reposo y realizar seguimiento de señales de referencia de velocidad. Los controladores diseñados deben considerar la dinámica del vehículo, compuesta de una única entrada y múltiples salidas. Dentro de las alternativas consideradas, se diseñan controladores de tipo SISO (*single-input, single-output*) y SIMO (*single-input, multiple-output*). En esta última categoría se encuentran dos enfoques: primero, utilizar estrategias de control lineal que se apoyan en una aproximación lineal del modelo alrededor de un punto de equilibrio. Segundo, utilizar la teoría basada en ADRC (*Active Disturbance Rejection Control*), en lugar del control robusto, dado que ADRC permite agrupar las no linealidades del robot en una variable de perturbación y así considerar el prototipo

como un sistema lineal.

Para encontrar la mejor estrategia, los controladores se validan y comparan en tres aspectos: seguimiento de trayectorias, variación de parámetros y rechazo de perturbaciones. De esta manera, se espera que el comportamiento del prototipo de menor escala de una SRDR sirva como punto de partida para resolver el desafío de desplazamiento para personas con discapacidad motora.

## 1.2. Estado del arte

La ingeniería tiene un campo amplio de aplicación en la creación de soluciones para el problema de desplazamiento en personas con discapacidad motora. En 1933, Harry Jennings y su amigo discapacitado, Herbert Everest, ambos ingenieros mecánicos, diseñaron una silla de ruedas compuesta por dos ruedas posteriores y dos ruedas guías ubicadas en la parte delantera, teniendo las primeras un diámetro mayor que las segundas [18]. Este diseño se utiliza hasta el día de hoy en lo que se conoce como silla de ruedas estándar.

En las sillas de ruedas estándar, el usuario es responsable de controlar la dirección y la velocidad por medio de un esfuerzo sobre las ruedas posteriores pero no tiene control sobre las ruedas guías. Estas predisponen la movilidad y capacidad de direccionamiento, afectando las fuerzas de propulsión y la velocidad promedio, la resistencia al rodar y la estabilidad del sistema en el momento de atravesar terrenos irregulares, curvos, entre otros [11][14][20][28][49].

Las sillas de ruedas eléctricas son una posible solución para surcar terrenos irregulares al aplicar un par de manera constante. Además, en el campo académico y de investigación se ha modificado su estructura, por ejemplo, para alcanzar una altura mayor, ejercer el movimiento por medio de palancas de mando y superar escalones y desniveles [30][32] [9][52]. A pesar de estos avances, los resultados obtenidos presentan las mismas desventajas que las sillas de ruedas estándar, ya que las ruedas guías se mantienen en el diseño, lo que entorpece el recorrido en espacios cerrados y abiertos [16][22].

Realizar el desplazamiento en dos ruedas es una alternativa para sustraer los efectos negativos provocados por las ruedas guías. En la literatura, se encuentran sillas que cambian de cuatro a dos ruedas [36][1][3] y los trabajos de Murakami & Hirata que exploran la posibilidad de desarrollar una Silla de Ruedas de dos Ruedas (SRDR) [33][3]. En estos trabajos, la silla se concibe como un robot de dos ruedas (similar a un Segway®) y se utilizan métodos físicos como el análisis según las leyes de Newton-Euler o balances de energía como el método de Euler-Lagrange para obtener su modelo matemático, como en [21][43][44]. Las distintas estrategias de control implementadas en los prototipos logran cumplir con los objetivos relacionados con mantener el equilibrio, pero no con los de desplazamiento y seguimiento de

señales de referencia de velocidad.

Un enfoque inicial para garantizar el equilibrio y el seguimiento de referencias de velocidad por medio de lazos independientes es la implementación de controladores desacoplados tipo SISO [2]. Por su parte, el control PI vectorial se considera como uno de los sistemas más versátiles, ya que dada la estructura de la planta, este puede ser sintonizado para garantizar el equilibrio y el seguimiento de referencias [12][17]. Para esta sintonización, la técnica de optimización LQR es una alternativa que hace posible diseñar el controlador, teniendo en cuenta la cantidad de energía requerida por la planta [48][27]. El uso de observadores, como los de Dinale y Murakami que consideran la variación de parámetros físicos de cada usuario y la fricción viscosa, tiene gran relevancia en el desempeño de los controladores [15][24][23]. Adicionalmente, es posible garantizar la estabilización y traslación de la silla de manera robusta con un controlador por modo deslizante con observador [25]. Una alternativa de control lineal para sistemas no lineales es el control GPI (*Generalized Proportional Integral*) [10][38]. Su desempeño en sistemas no lineales, como el péndulo invertido y robots bípedos, los cuales tienen que mantener el equilibrio en trayectoria, muestra que podría cumplir con los objetivos del vehículo seleccionado [46][5].

El prototipo de SRDR de menor escala que se propone en este trabajo, es similar en forma y estructura a un robot de dos ruedas. En algunos trabajos se compara el desempeño de distintos controladores en un mismo robot de dos ruedas para así garantizar las mismas condiciones. Por ejemplo, en [31] se realiza una identificación de parámetros por el método de caja gris, para luego comparar el desempeño de los controladores PID y LQR. Aunque durante las pruebas experimentales el controlador LQR presentó un mejor desempeño, el seguimiento de la señal de referencia no fue bueno. Un enfoque diferente es el de [26], donde se comparan los controladores por modo deslizante terminal y LQR. Previo a la fase experimental, se utilizó un algoritmo genético para realizar un proceso de identificación de los parámetros del vehículo. La comparación directa permitió concluir que el controlador por modo deslizante terminal realizó un mejor seguimiento de señales de referencia en terrenos sin inclinación y lisos. Sin embargo, dado que el prototipo no fue perturbado durante el recorrido, no se pudo comprobar la efectividad de los controladores respecto al rechazo de perturbaciones.

De igual manera, este trabajo pretende hacer una comparación de estrategias de control lineal en un prototipo de menor escala de una SRDR. Los controladores se diseñan para cumplir dos objetivos principales: primero, permitir que en la ausencia o presencia de movimiento, el robot se mantenga en equilibrio; segundo, garantizar el seguimiento de trayectorias de velocidad (líneas y curvilíneas). Por un lado, este último requerimiento debe cumplirse, incluso cuando existan perturbaciones exógenas durante el recorrido. Por otro lado, en el caso de la SRDR, las características físicas de cada usuario (altura, peso, distribución muscular)

son una fuente adicional de incertidumbres endógenas que modifican el modelo dinámico del sistema. La comparación que se desarrolla en este trabajo busca encontrar las ventajas y desventajas de cada estrategia de control para que las de mejores resultados sean consideradas en desarrollos posteriores de SRDR.

## 1.3. Objetivo general

Diseñar, implementar y comparar controladores en un prototipo de SDRD para que este pueda mantener de manera robusta y confiable en equilibrio un objeto mientras realiza trayectorias en un espacio determinado.

### 1.3.1. Objetivos específicos

1. Realizar comparación de controladores implementados en el prototipo bajo los siguientes criterios: tiempo que tarda el sistema en alcanzar el punto de equilibrio partiendo de una posición vertical; tiempo que tarda el sistema en volver al punto de equilibrio después de aplicar fuerzas externas de perturbación; respuesta del sistema a la perturbación de fuerzas externas mientras realiza un desplazamiento. Otros pueden ser considerados en el proceso.
2. Comparar el desempeño de los controladores implementados en el prototipo al realizar trayectorias rectilíneas y curvilíneas en terrenos lisos e irregulares sin inclinación.
3. Dentro de la comparación de las técnicas de control se considerarán LQR, PI vectorial con ubicación de polos y GPI.

## 1.4. Solución propuesta

Esta tesis explora el diseño e implementación de sistemas de control para asistir en la trayectoria rectilínea y curvilínea de un prototipo de menor escala de una SRDR. Una persona con limitaciones motoras requiere un vehículo que garantice las condiciones necesarias para realizar desplazamientos. Por tal motivo, el objetivo del controlador es mantener el equilibrio de manera robusta, de modo que cambios en el sistema causados por los usuarios de la silla y las perturbaciones externas dadas en el recorrido no eviten tener un movimiento suave de dinámica estable.

El desafío del modelado de la planta se resuelve estableciendo las ecuaciones matemáticas que explican la dinámica del robot. Este modelo permite aproximar las no linealidades del sistema alrededor de un punto de equilibrio, para así lograr una representación en espacio

estado que involucre las variables de la silla. Debido a que existe variación en los parámetros físicos de los componentes y dinámica interna desconocida del sistema, se realiza una identificación del modelo por medio de la metodología de caja gris. El resultado es una mejor aproximación de los valores numéricos que describen la estructura dinámica del prototipo.

En este trabajo, se diseñan seis controladores: 1) PID de doble lazo cerrado, 2) control multivariable por Realimentación de Variables de Estado (RVE) con método de optimización LQR y precompensador, 3) PI vectorial con LQR, 4) PI vectorial con LQR y seguimiento, mejor conocido como Feed Forward (FF), 5) control por cadena de integradores con LQR y 6) control GPI con observador desacoplado de estado extendido. Los controladores diseñados se sintonizan con el objetivo de ubicar los polos de lazo cerrado en el semiplano izquierdo del plano complejo para que el sistema sea estable. El controlador PID de doble lazo cerrado garantiza el equilibrio estático y dinámico por medio de lazos cerrados independientes. El controlador por RVE con LQR y precompensador involucra la totalidad de las variables del sistema para mejorar el seguimiento de la señal de referencia de velocidad. Con la inclusión de una acción integral el controlador PI vectorial con LQR aproxima el error de estado estacionario a cero. El controlador PI vectorial con LQR y FF toma la función de transferencia de la velocidad en lazo cerrado como base en el diseño de un controlador de seguimiento y uno de referencia para lograr un mejor seguimiento de la señal de referencia. El controlador por cadena de integradores con LQR se diseña como una alternativa para hacer frente a las incertidumbres del sistema y mejorar el seguimiento de referencias de velocidad. Por último, el controlador GPI agrupa las no linealidades del sistema y las perturbaciones exógenas en una variable  $\xi$  y las estima por medio de un observador desacoplado de estado extendido. Lo anterior permite al controlador cancelar tanto las dinámicas desconocidas como las perturbaciones externas.

## 2 Modelo del Sistema

### 2.1. Desplazamiento en silla de ruedas

El desplazamiento en silla de ruedas ha sido estudiado desde la perspectiva dinámica para entender en detalle su forma de traslación y mejorar su desempeño. Diariamente, el usuario de una silla de ruedas estándar enfrenta desafíos causados por las ruedas guías ubicadas en la parte frontal, que influyen el movimiento en distintos aspectos. Primero, la resistencia de una rueda al rodar es inversamente proporcional a su diámetro, es decir al ser pequeñas estas hacen que el usuario tenga que usar más energía para mantener una velocidad promedio [49][14]. Segundo, al realizar recorridos a través de terrenos rugosos e irregulares, la silla es propensa a ladearse y caer en el proceso [20][11]. Tercero, al utilizar las ruedas guías se genera un comportamiento de vaivén<sup>1</sup> que dificulta el desplazamiento en trayectorias curvas, debido a que la fuerza centrífuga que actúa sobre ellas produce dos efectos: dirigir la silla hacia un movimiento rectilíneo cuando se está girando y hacer que las ruedas sean propensas a cambiar su orientación y sentido de giro en el momento de ir en reversa [28]. Las sillas de ruedas eléctricas comparten las desventajas mencionadas, ya que a pesar de tener un chasis diferente y de cambiar la forma y estrategia de movimiento de las ruedas principales ubicadas en la parte posterior, todavía dependen de las ruedas guías para completar la totalidad del movimiento [22] [16].

Remover las ruedas guías delega el movimiento a las ruedas posteriores, las cuales al tener mayor diámetro presentan menor resistencia al rodar y por ende se requiere de menor energía para lograr el desplazamiento. El trabajo realizado por Olson en [34], considera tres configuraciones de péndulo invertido: péndulo invertido simple, el cual posiciona la silla, baterías y drivers de los motores encima del eje principal<sup>2</sup>; doble péndulo invertido, que adiciona un eslabón en la parte superior, para ubicar los drivers y las baterías; y péndulo invertido con contrapeso, el cual ubica los motores y las baterías debajo del chasis. Olson compara estos diseños bajo cinco criterios de evaluación: 1) modo reposo, donde el vehículo debe mantener el equilibrio sin aplicar perturbaciones; 2) modo rechazo, donde el vehículo debe mantener el equilibrio después de que una fuerza exógena es aplicada; 3) modo desplazamiento, donde se toma el tiempo utilizado por el vehículo para alcanzar el punto de equilibrio después de realizar un recorrido; 4) modo rechazo activo, respuesta a perturbaciones externas mientras

---

<sup>1</sup>efecto que resulta en disminuir la velocidad de la rueda guía y/o aumentando la de la otra

<sup>2</sup>punto que conecta las dos ruedas principales

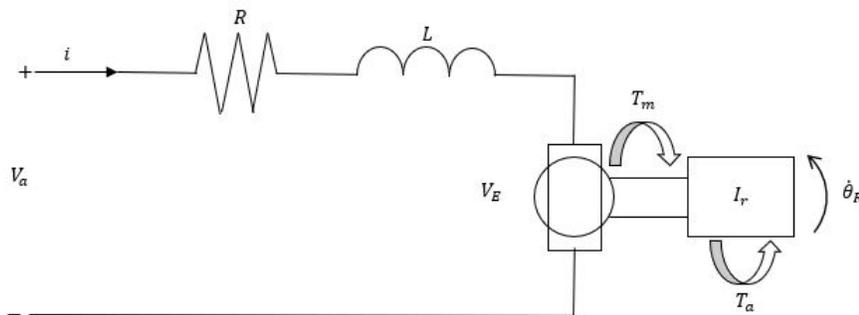
se encuentra en movimiento, y 5) se mide el rango de oscilación del sistema al atravesar un terreno de baja tracción. El diseño de péndulo invertido con contrapeso obtuvo los mejores índices en desarrollos relacionados con estabilidad y maniobrabilidad. Por tal razón, esta configuración es usada en el prototipo de menor escala de una SRDR de esta tesis.

## 2.2. Modelo teórico

En esta sección, se describe el modelo matemático simplificado del prototipo. El análisis se deriva del modelo lineal de un motor DC y las ecuaciones de movimiento para un péndulo invertido.

### 2.2.1. Modelo lineal de un motor DC

El modelo lineal del motor DC permite establecer una relación entre el voltaje aplicado a los motores y el respectivo par generado en el eje de las ruedas.



**Figura 2-1:** Diagrama de un motor DC

La Figura 2-1 muestra la estructura simplificada de un motor DC. Cuando un voltaje  $V_a$  se aplica en las terminales, genera una corriente  $i$  en la armadura del motor. El motor produce un par  $T_m$  que es proporcional a la corriente por un factor  $K_m$ , estableciendo la relación planteada en (2-1). Un par resistor-inductor en serie con el voltaje de fuerza electromotriz contraria  $V_e$ , puede ser usado para describir el circuito eléctrico del motor. Este voltaje de fuerza electromotriz contraria se produce por el movimiento de las bobinas del motor a través de un campo magnético. Al estar el eje del motor acoplado a la rueda, el voltaje  $V_e$  puede ser aproximado como una función lineal de la velocidad angular de la rueda  $\dot{\theta}_R$ , por una constante  $K_e$ , como se describe en (2-2).

$$T_m = K_m i \quad (2-1)$$

$$V_e = K_e \dot{\theta}_R \quad (2-2)$$

Al aplicar la ley de voltajes de Kirchoff en la Figura 2-1, se obtiene la ecuación para el motor DC:

$$V_a - Ri - L \frac{di}{dt} - V_e = 0 \quad (2-3)$$

Donde  $V_a$  es el voltaje aplicado,  $R$  la resistencia y  $L$  la inductancia del motor. La fricción en el eje del motor  $K_f$  se aproxima como una función lineal de la velocidad del mismo. La suma de todos los pares en el eje está linealmente relacionada con la aceleración y la inercia  $I_r$  del mismo. Lo anterior se expresa como:

$$\Sigma M = T_m - K_f \dot{\theta}_R - T_a = I_r \frac{d\dot{\theta}_R}{dt} \quad (2-4)$$

Siendo  $T_a$  el par de carga generado por el eje del motor acoplado a la rueda. Al sustituir (2-1) en (2-4) y (2-2) en (2-3), y organizarlas en términos de sus derivadas, se obtiene:

$$\frac{di}{dt} L = V_a - Ri - K_e \dot{\theta}_R \quad (2-5)$$

$$\frac{d\dot{\theta}_R}{dt} I_r = K_m i - K_f \dot{\theta}_R - T_a \quad (2-6)$$

Ambas ecuaciones establecen una dinámica lineal en términos de la corriente y la velocidad angular. Una versión simplificada del motor DC es suficiente para describir al vehículo en estado de equilibrio. Por tal razón, la inductancia y la fricción del motor se consideran insignificantes y se aproximan a cero ( $L=0$ ;  $K_f=0$ ), de tal manera que:

$$i = \frac{1}{R} V_a - \frac{K_e}{R} \dot{\theta}_R \quad (2-7)$$

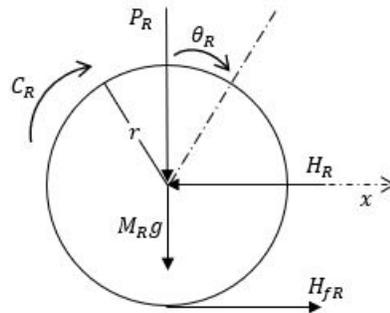
$$\ddot{\theta}_R = \frac{K_m}{I_r} i - \frac{T_a}{I_r} \quad (2-8)$$

Al reemplazar (2-7) en (2-8), se obtiene una aproximación para el motor DC en términos del voltaje aplicado, la velocidad angular actual del motor y el par de carga:

$$\ddot{\theta}_R = \frac{K_m}{I_r R} V_a - \frac{K_m K_e}{I_r R} \dot{\theta}_R - \frac{T_a}{I_r} \quad (2-9)$$

### 2.2.2. Modelo dinámico del prototipo de silla de ruedas de dos ruedas

Como el robot se ubica sobre dos ruedas, se evalúan las fuerzas que actúan sobre ellas. En la Figura 2-2 se estudia la rueda derecha, ya que el modelo es el mismo para la izquierda.



**Figura 2-2:** Diagrama de cuerpo libre de la rueda derecha

El desplazamiento horizontal  $x$  y el ángulo de inclinación de la rueda  $\theta_R$  se consideran positivos en los sentidos que muestra la Figura 2-2. Al aplicar la segunda ley de Newton, la sumatoria de fuerzas en la dirección horizontal es:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= M_R \ddot{x} \\ M_R \ddot{x} &= H_{fR} - H_R\end{aligned}\quad (2-10)$$

Donde  $M_R$  es la masa,  $H_R$  la fuerza resistiva y  $H_{fR}$  la fuerzas de fricción de la rueda derecha. Al sumar las fuerzas en el centro de la rueda, se obtiene:

$$\begin{aligned}\Sigma M_o &= I_R \ddot{\theta}_R \\ I_R \ddot{\theta}_R &= C_R - H_{fR} r\end{aligned}\quad (2-11)$$

Siendo  $I_R$  la inercia,  $r$  el radio,  $\ddot{\theta}_R$  la aceleración angular y  $C_R$  el par aplicado en la rueda derecha. A partir de las ecuaciones (2-1) y (2-8) del modelo dinámico del motor DC, se puede expresar que:

$$C_R = T_m = T_a + I_r \ddot{\theta}_R \quad (2-12)$$

Al reemplazar (2-9) en (2-12), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 C_R &= T_a + I_r \ddot{\theta}_R \\
 C_R &= T_a + I_r \left[ \frac{K_m}{I_r R} V_a - \frac{K_m K_e}{I_r R} \dot{\theta}_R - \frac{T_a}{I_r} \right] \\
 C_R &= \frac{K_m}{R} V_a - \frac{K_m K_e}{R} \dot{\theta}_R
 \end{aligned} \tag{2-13}$$

De tal manera, la ecuación (2-11) queda definida como:

$$I_R \ddot{\theta}_R = -\frac{K_m K_e}{R} \dot{\theta}_R + \frac{K_m}{R} V_a - H_{fRr} \tag{2-14}$$

de donde la fuerza de fricción queda descrita como:

$$H_{fR} = -\frac{K_m K_e}{Rr} \dot{\theta}_R + \frac{K_m}{Rr} V_a - \frac{I_R}{r} \ddot{\theta}_R \tag{2-15}$$

Al sustituir (2-15) en (2-10):

$$M_R \ddot{x} = -\frac{K_m K_e}{Rr} \dot{\theta}_R + \frac{K_m}{Rr} V_a - \frac{I_R}{r} \ddot{\theta}_R - H_R \tag{2-16}$$

Dado que el movimiento lineal está actuando en el centro de la rueda, la rotación angular puede ser transformada por medio de:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\theta}_R r &= \ddot{x} \Rightarrow \ddot{\theta}_R = \frac{\ddot{x}}{r} \\
 \dot{\theta}_R r &= \dot{x} \Rightarrow \dot{\theta}_R = \frac{\dot{x}}{r}
 \end{aligned}$$

Al usar la transformación lineal en (2-16) se obtiene:

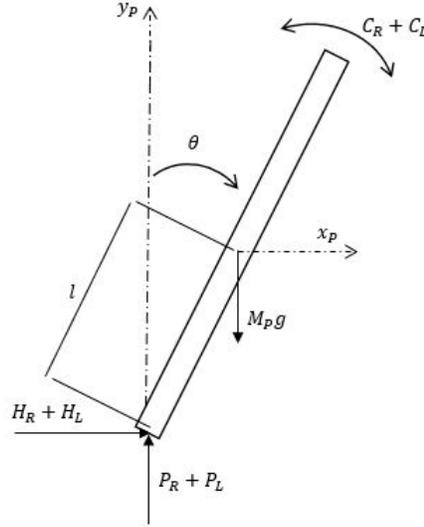
$$M_R \ddot{x} = -\frac{K_m K_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{K_m}{Rr} V_a - \frac{I_R}{r^2} \ddot{x} - H_R \tag{2-17}$$

Luego de realizar el mismo proceso para la rueda izquierda y al sumar las ecuaciones:

$$2\left(M_R + \frac{I_R}{r^2}\right) \ddot{x} = -\frac{2K_m K_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{2K_m}{Rr} V_a - (H_R + H_L) \tag{2-18}$$

Donde  $H_L$  es la fuerza resistiva de la rueda izquierda.

La silla del prototipo se analiza como un péndulo invertido, como se puede ver en la Figura 2-3.



**Figura 2-3:** Diagrama de cuerpo libre de la silla

Siendo  $\theta$  el ángulo de inclinación,  $l$  la longitud,  $y_P$  el desplazamiento vertical y  $x_P$  el desplazamiento horizontal del péndulo. Estos desplazamientos, al ser relativos a la rueda, se expresan en coordenadas polares, de manera que:

$$x_P = l \sin \theta \quad (2-19)$$

$$y_P = l \cos \theta \quad (2-20)$$

Luego de derivar dos veces con respecto al tiempo, se obtienen las expresiones que describen las aceleraciones:

$$\ddot{x}_P = l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2-21)$$

$$\ddot{y}_P = -l\ddot{\theta} \sin \theta - l\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (2-22)$$

Usando nuevamente las leyes de movimiento de Newton, las fuerzas en dirección horizontal son:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= M_P \ddot{x} \\ M_P \ddot{x} + M_P \ddot{x}_P &= (H_R + H_L) \\ M_P \ddot{x} + M_P l \ddot{\theta} \cos \theta - M_P l \dot{\theta}^2 \sin \theta &= (H_R + H_L) \end{aligned} \quad (2-23)$$

Donde  $M_P$  es la masa del péndulo. Al realizar el mismo estudio para las fuerzas verticales:

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= M_P \ddot{y} \\ M_P \ddot{y}_P &= -M_P g + (P_R + P_L) \\ M_P g - M_P l \ddot{\theta} \sin \theta - M_P l \dot{\theta}^2 \cos \theta &= (P_R + P_L)\end{aligned}\quad (2-24)$$

Siendo  $g$  la aceleración de la gravedad,  $P_R$  y  $P_L$  las fuerzas en dirección vertical entre las ruedas derecha e izquierda y el péndulo, respectivamente. Al sumar las fuerzas alrededor del centro de masa, se obtiene:

$$\begin{aligned}\Sigma M_o &= I_P \ddot{\theta} \\ -(H_R + H_L)l \cos \theta + (P_R + P_L)l \sin \theta - (C_R + C_L) &= I_P \ddot{\theta}\end{aligned}\quad (2-25)$$

Donde  $I_P$  es la inercia del péndulo y  $C_L$  el par aplicado en la rueda izquierda. Al sustituir (2-23) y (2-24) en (2-25):

$$(I_P + M_P l^2) \ddot{\theta} = -M_P l \ddot{x} \cos \theta + M_P g l \sin \theta - (C_R + C_L) \quad (2-26)$$

El par aplicado por el motor en el péndulo, como se definió en (2-13), después de la transformación lineal resulta en:

$$C_R + C_L = -\frac{2K_m K_e}{R} \frac{\dot{x}}{r} + \frac{2K_m}{R} V_a \quad (2-27)$$

Luego de reemplazar (2-27) en (2-26):

$$(I_P + M_P l^2) \ddot{\theta} = -M_P l \ddot{x} \cos \theta + M_P g l \sin \theta + \frac{2K_m K_e}{Rr} \dot{x} - \frac{2K_m}{R} V_a \quad (2-28)$$

Al sustituir (2-23) en (2-18):

$$2\left(M_R + \frac{I_R}{r^2} + M_P\right) \ddot{x} = -M_P l \ddot{\theta} \cos \theta + M_P l \dot{\theta}^2 \sin \theta - \frac{2K_m K_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{2K_m}{Rr} V_a \quad (2-29)$$

Dado que el objetivo del sistema es mantenerse alrededor de un punto de equilibrio, las expresiones anteriores que contienen funciones senos y cosenos son linealizadas de tal manera que:

$$\theta = 0$$

Esta simplificación es usada para obtener:

$$\cos \theta = 1, \sin \theta = \theta, \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0$$

De tal manera, las ecuaciones que describen la dinámica del sistema son:

$$(I_P + M_P l^2) \ddot{\theta} = -M_P l \ddot{x} + M_P g l \theta + \frac{2K_m K_e}{Rr} \dot{x} - \frac{2K_m}{R} V_a \quad (2-30)$$

$$(2M_R + \frac{2I_R}{r^2} + M_P) \ddot{x} = -M_P l \ddot{\theta} - \frac{2K_m K_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{2K_m}{Rr} V_a \quad (2-31)$$

Para obtener la representación en espacio estado, se organizan las ecuaciones (2-30) y (2-31):

$$\ddot{\theta} = -\frac{M_P l}{a} \ddot{x} + \frac{M_P g l}{a} \theta + \frac{2K_m K_e}{a R r} \dot{x} - \frac{2K_m}{a R} V_a \quad (2-32)$$

$$\ddot{x} = -\frac{M_P l}{b} \ddot{\theta} - \frac{2K_m K_e}{b R r^2} \dot{x} + \frac{2K_m}{b R r} V_a \quad (2-33)$$

donde  $a$  y  $b$  son:

$$a = I_P + M_P l^2, \quad b = 2M_R + \frac{2I_R}{r^2} + M_P$$

Con las variables establecidas, se busca representar el sistema con la siguiente estructura:

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B} u_r(t) \quad (2-34)$$

$$\mathbf{y}_r(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}_r(t) \quad (2-35)$$

donde

$\mathbf{x}_r \in \mathfrak{R}^4$  : vector de estado del robot

$u_r \in \mathfrak{R}$  : señales de control del robot

$\mathbf{y}_r \in \mathfrak{R}^4$  : variables controladas del robot

$\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{4 \times 4}$  : matriz de estados

$\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{4 \times 1}$  : matriz de entradas

$\mathbf{C} \in \mathfrak{R}^{1 \times 4}$  : matriz de salidas

Las variables de estado del vector  $\mathbf{x}_r$  son:

$x(t)$  = posición lineal

$\dot{x}(t)$  = velocidad lineal

$\theta(t)$  = ángulo de inclinación

$\dot{\theta}(t)$  = velocidad angular

y la de la entrada  $u_r$  es:

$$V_a(t) = \text{voltaje aplicado a los motores}$$

Con esta representación de estado, cada una de las variables del vector de estado  $\mathbf{x}_r$  tiene un significado físico que es posible medir a través de sensores. Al quedar definida la estructura, se reemplazan las ecuaciones (2-32) y (2-33) en (2-30) y (2-31), respectivamente. Tras realizar operaciones algebraicas se obtienen las matrices de estado que describen la dinámica del robot:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2K_m K_e (-a - M_P l r)}{R r^2 (ab - M_P^2 l^2)} & -\frac{M_P^2 g l^2}{ab - M_P^2 l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2K_m K_e (br + M_P l)}{R r^2 (ab - M_P^2 l^2)} & \frac{M_P g l b}{ab - M_P^2 l^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2K_m (a + M_P l r)}{R r (ab - M_P^2 l^2)} \\ 0 \\ \frac{2K_m (-br - M_P l)}{R r (ab - M_P^2 l^2)} \end{bmatrix} [V_a] \quad (2-36)$$

La SRDR tiene como objetivos mantener el equilibrio y realizar trayectorias de velocidad. La variable de estado de posición  $x(t)$  no tiene conexión directa con los objetivos de control o con otra variable, por lo que el sistema puede ser reducido. Lo anterior se deduce al observar la primera fila y columna de la matriz  $\mathbf{A}$ . De esta forma, la estructura del sistema queda expresada como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2K_m K_e (-a - M_P l r)}{R r^2 (ab - M_P^2 l^2)} & -\frac{M_P^2 g l^2}{ab - M_P^2 l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2K_m K_e (br + M_P l)}{R r^2 (ab - M_P^2 l^2)} & \frac{M_P g l b}{ab - M_P^2 l^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2K_m (a + M_P l r)}{R r (ab - M_P^2 l^2)} \\ 0 \\ \frac{2K_m (-br - M_P l)}{R r (ab - M_P^2 l^2)} \end{bmatrix} [V_a] \quad (2-37)$$

Las constantes físicas de la SRDR en la Tabla 2-1 fueron obtenidas por medio de mediciones y por las respectivas fichas técnicas de cada componente.

**Tabla 2-1:** Constantes SRDR

Símbolo	Descripción	Valor	Unidad
$g$	Constante gravedad	9.807	m/s <sup>2</sup>
$M_R$	Masa de las ruedas	0.085	kg
$I_R$	Inercia de las ruedas	3.2716e-05	kg·m <sup>2</sup>
$M_P$	Masa péndulo	0.660	kg
$I_P$	Inercia del péndulo	0.005492874	kg·m <sup>2</sup>
$l$	Distancia al centro de masa del péndulo	0.09475	m
$r$	Radio de las ruedas	0.0375	m
$K_m$	Constante torque del motor	0.0325	N·m/A
$K_e$	Constante electromotriz del motor	0.0324	V·s/rad
$R$	Resistencia del motor	6.2	$\Omega$

Al utilizar las constantes físicas de la Tabla 2-1 en (2-37), se obtiene el modelo nominal:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5452 & -6.2896 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3.7793 & 88.158 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.63102 \\ 0 \\ 4.3742 \end{bmatrix} [V_a] \quad (2-38)$$

El siguiente paso es determinar si el sistema es controlable y observable, por lo que se construyen las matrices de controlabilidad y observabilidad ( $\varsigma$ ) y ( $\varrho$ ), respectivamente).

$$\varsigma = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (2-39)$$

$$\varrho = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2-40)$$

Como:

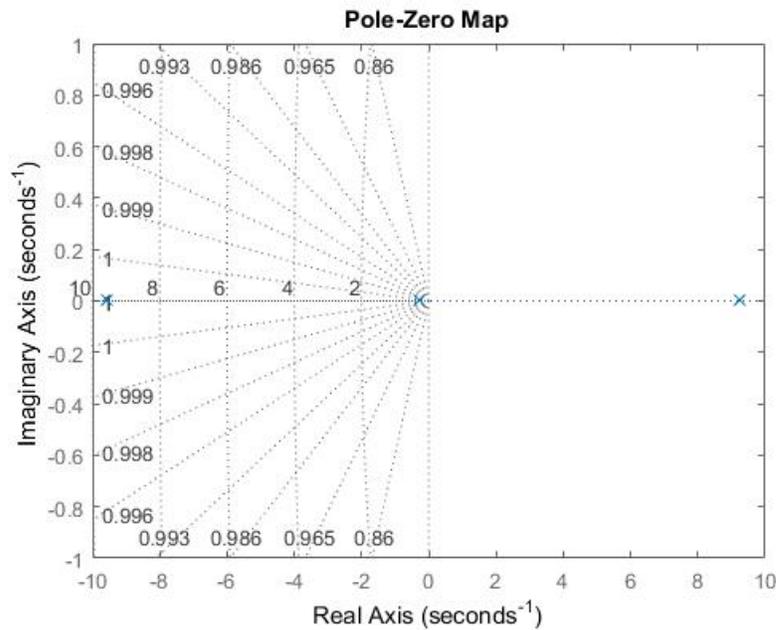
$$\text{rank}(\varsigma) = \text{rank}(\mathbf{A}) = 3 \quad (2-41)$$

$$\text{rank}(\varrho) = \text{rank}(\mathbf{A}) = 3 \quad (2-42)$$

Entonces, el par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  es controlable y observable. Por consiguiente, se define un sistema generalizado de la forma:

$$G = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-43)$$

El sistema en (2-43) es inestable por el polo ubicado en el semiplano derecho, como lo muestra la Figura 2-4.

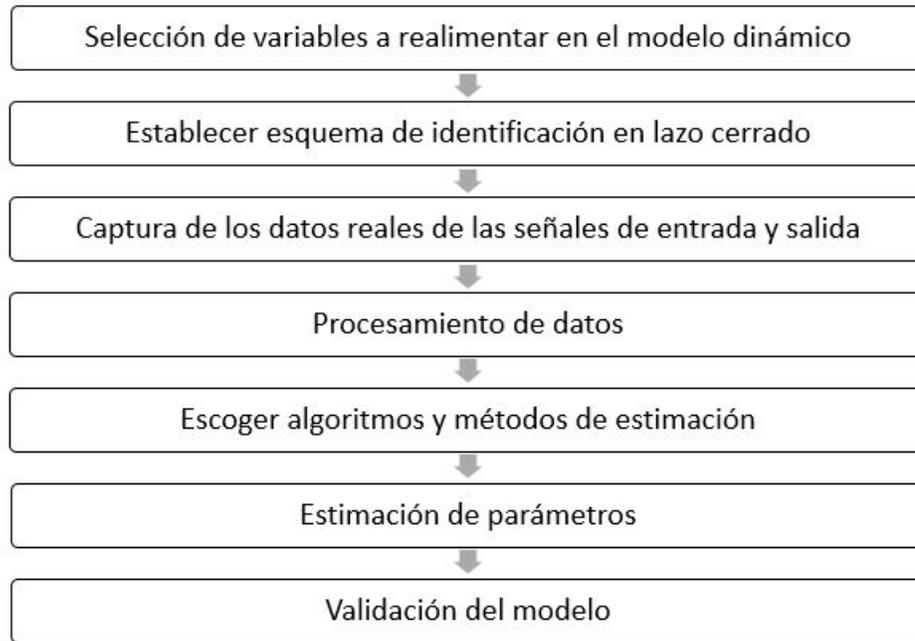


**Figura 2-4:** Ubicación de los polos del modelo teórico de la SRDR

## 2.3. Identificación del sistema en lazo cerrado

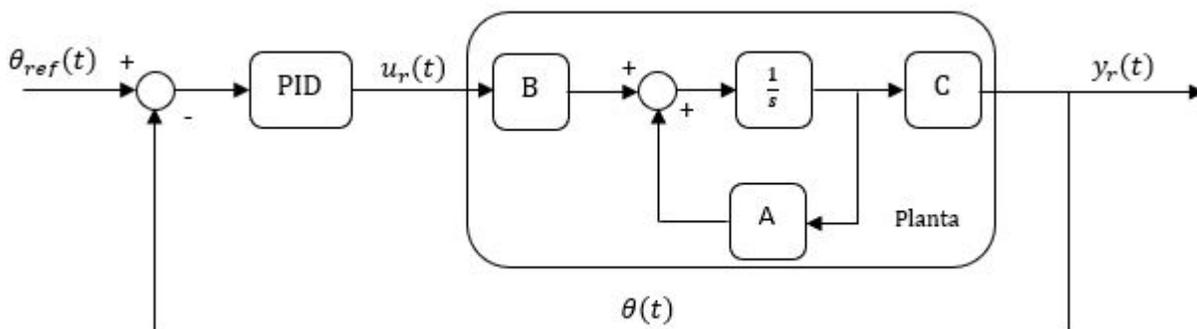
Los parámetros físicos de los componentes, junto con la dinámica interna desconocida del sistema, hacen que la obtención de los coeficientes del modelo matemático sea una etapa crucial previa al diseño e implementación de los controladores. Dado que el vehículo es un sistema inestable, el proceso de identificación debe ser hecho en lazo cerrado. Existen tres modelos para realizar la tarea mencionada: caja negra, blanca y gris. El primero captura los datos de la entrada y salida del sistema e intenta encontrar la dinámica entre ellos, sin mantener rigurosamente un nexo de principios teóricos matemáticos y físicos. Los cálculos analíticos descritos en la sección anterior representan el segundo modelo. Fundamentar el análisis teórico-físico no garantiza la inclusión total de las variables físicas (tanto endógenas como exógenas), lo que deja cabida a incertidumbres. El tercer modelo complementa los dos anteriores: usa los datos obtenidos de entrada y salida para ser involucrados en el estudio

teórico-físico. Este último método es aplicado al prototipo de SRDR con el fin de generar una estructura matemática que explique el comportamiento del robot de una manera más exacta [29]. La metodología del proceso de identificación está descrita en la Figura 2-5.



**Figura 2-5:** Metodología del proceso de identificación

El primer paso del modelo de caja gris consiste en seleccionar las variables que van a ser realimentadas en el modelo dinámico. Dado que en esta tesis garantizar el equilibrio y realizar seguimiento de trayectorias de velocidad hacen parte de los objetivos, se escogen la velocidad lineal  $\dot{x}(t)$  y el ángulo de inclinación  $\theta(t)$ .



**Figura 2-6:** Esquema de identificación en lazo cerrado

Para garantizar que el vehículo sea estable alrededor del punto de operación ( $\dot{x}(t) = 0$ ,  $\theta(t) = 0$ ), se implementa un controlador PID (Figura 2-6). La estructura del controlador PID está dada por:

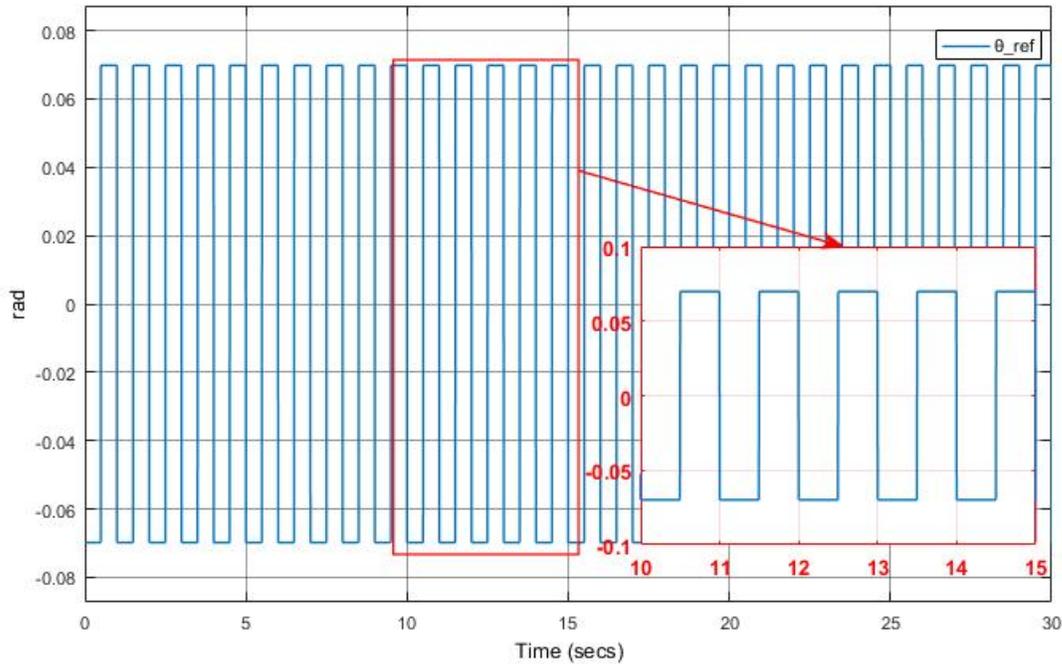
$$C_{PID} = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d N}{1 + N \frac{1}{s}} \quad (2-44)$$

En esta etapa del proceso de identificación no se conoce la exactitud con la que el modelo nominal describe el comportamiento real del robot. Por tal razón, la sintonización del controlador PID se realiza de forma experimental. Para hacerlo, se discretiza el controlador en (2-44) usando la aproximación de Euler hacia adelante, de esta manera se obtiene:

$$C_{PID_d} = K_p + \frac{K_i T_s}{z - 1} + \frac{K_d N}{1 + N T_s \frac{1}{z-1}} \quad (2-45)$$

El controlador PID se compone de una ganancia proporcional  $K_p$ , una integral  $K_i$  y una derivativa  $K_d$ . La variación de cada uno de estos términos afecta de manera directa el control sobre el ángulo  $\theta(t)$ . Tomando como referencia  $\theta_{ref}(t) = 0$ , se sintonizan las ganancias del controlador. El valor de la ganancia proporcional  $K_p$ , se encuentra aumentando la misma hasta que el sistema puede alcanzar el equilibrio a pesar de presentar pequeñas oscilaciones. Para disminuir las oscilaciones anteriores y el tiempo de asentamiento, se aumenta la ganancia derivativa  $K_d$  hasta que el robot puede volver al punto de equilibrio después de aplicar pequeñas perturbaciones. El coeficiente del filtro derivativo  $N$  se usa para reducir el ruido de alta frecuencia al realizar la derivada. La ganancia integral  $K_i$  se aumenta hasta garantizar que el error del ángulo en estado estacionario es cero. De esta manera se obtienen los siguientes valores:  $K_p=500$ ,  $K_i=20$ ,  $K_d=30$  y  $N=100$ .

La señal de referencia cuadrada de la Figura 2-7 se escoge para excitar al robot. Se prefiere esta señal sobre las de tipo senoidal o triangular, ya que tiene un contenido espectral de armónicos impares que alcanzan un mayor rango de contenidos frecuenciales. Al aplicar esta señal como referencia del ángulo de inclinación ( $\theta_{ref}(t)$ ), el robot avanza y retrocede, para así obtener los datos reales provenientes de las salidas  $\theta(t)$  y  $\dot{x}(t)$ .



**Figura 2-7:** Señal cuadrada de referencia

Un primer acercamiento para establecer la diferencia entre la respuesta del modelo nominal (2-38) y la obtenida de datos reales se puede ver en las Figuras 2-8 y 2-9. La velocidad en simulación  $\dot{x}_s$  y la capturada  $\dot{x}_m$  difieren tanto en amplitud como en menor medida en fase (Figura 2-8). Por su parte, hay una diferencia de amplitud entre el ángulo de inclinación simulado  $\theta_s$  y el capturado  $\theta_m$ , como se ve en la Figura 2-9. Lo anterior demuestra que el modelo nominal no describe de manera acertada el comportamiento del robot. El siguiente paso en la metodología de caja gris toma las matrices nominales  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  definidas en (2-38) y limita sus coeficientes de la siguiente manera: desde cero a infinito para valores positivos, desde menos infinito a cero para valores negativos y fija los ceros iniciales. Al establecer lo anterior, los signos de los coeficientes del modelo nominal se mantienen para que la herramienta *Identificación de Sistemas* de Matlab® realice la identificación de los parámetros a través de diferentes algoritmos y métodos. En adición, esta herramienta permite incluir una función de costo robusto, que es útil cuando los datos experimentales presentan valores atípicos o son ruidosos. Para medir la efectividad de los algoritmos considerados durante el proceso, se usa el Error Cuadrático Medio (ECM) como función de costo.

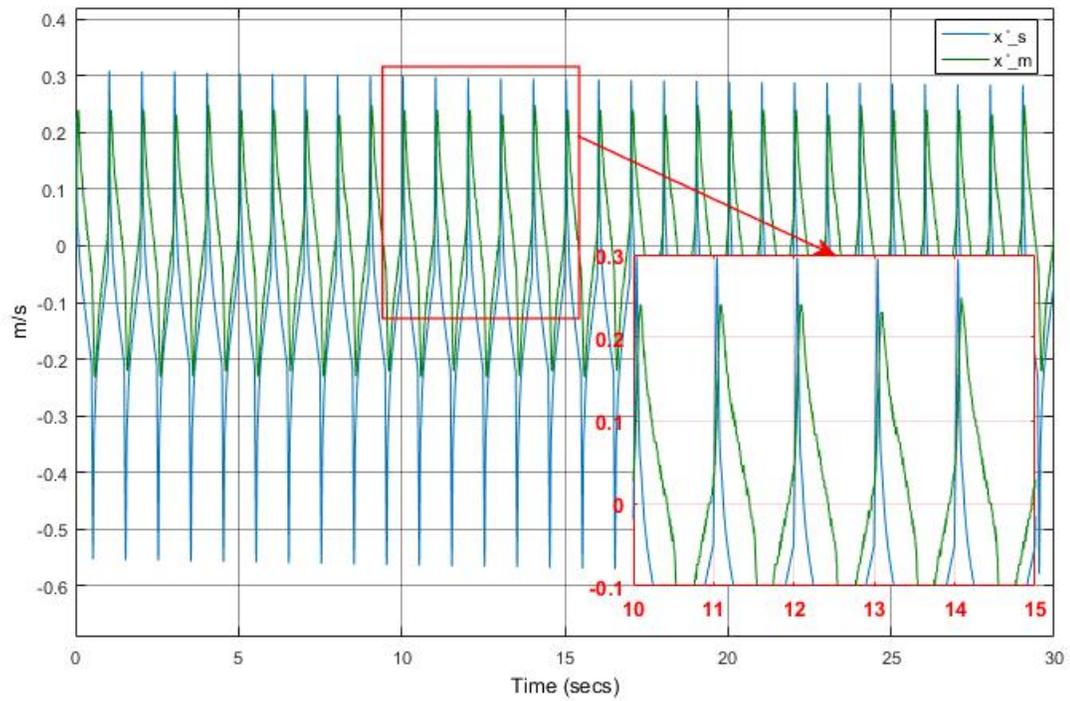


Figura 2-8: Comparación velocidad señal cuadrada: simulación e implementación

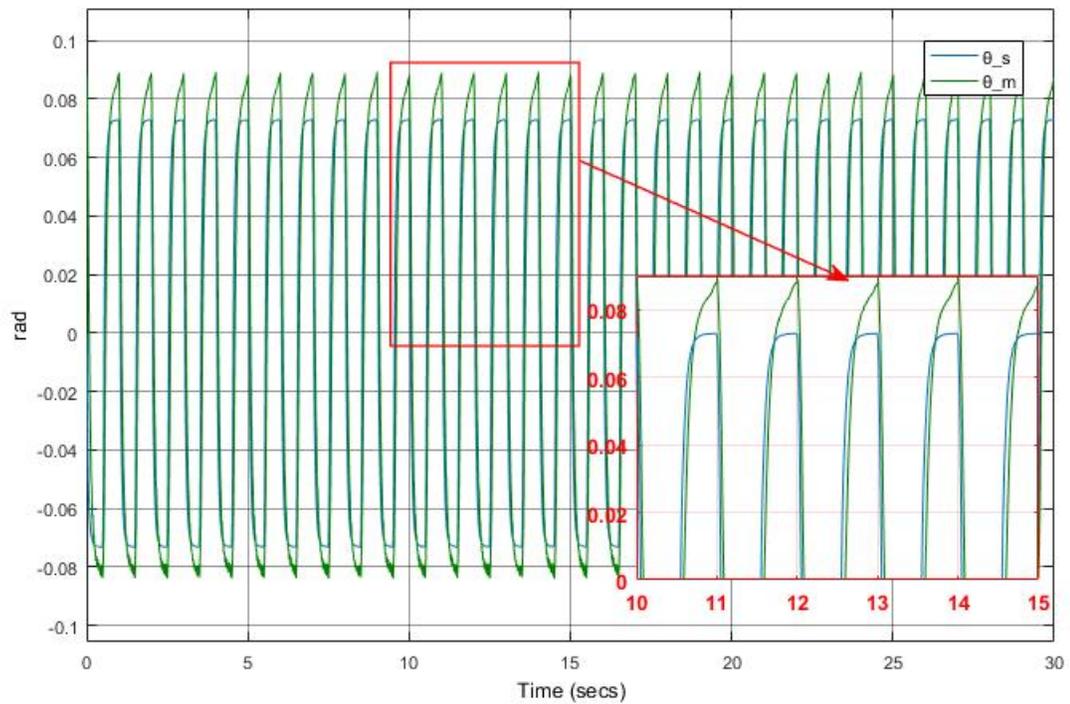


Figura 2-9: Comparación ángulo señal cuadrada: simulación e implementación

La Tabla 2-2 muestra el resultado de los métodos y algoritmos considerados durante el proceso de identificación. Como se puede ver, el método de *Mínimos cuadrados no lineales* y el algoritmo *Región reflectiva confiable* presentan un valor de ECM menor.

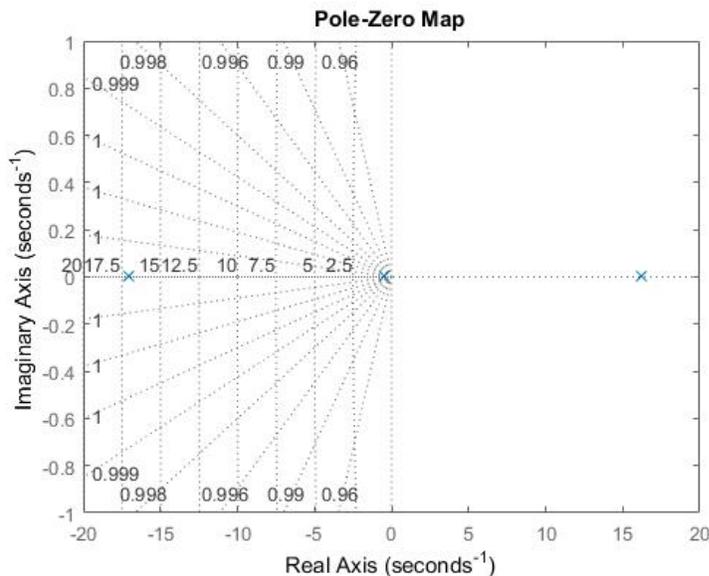
**Tabla 2-2:** Resultados de identificación

Prueba	Método	Algoritmo	Robusto	ECM
1	Gradiente descendiente	Set activo	Sí	108.6024
2	Mínimos cuadrados no lineales	Región reflectiva confiable	Sí	16.8984
3	Búsqueda patrón	Bases positivas Np1	Sí	49.6024
4	Búsqueda patrón	Hipercubo Latino	Sí	20.1007
5	Búsqueda Simplex		Sí	21.042

De los resultados de este método y algoritmo se obtiene los siguientes coeficientes para el modelo identificado:

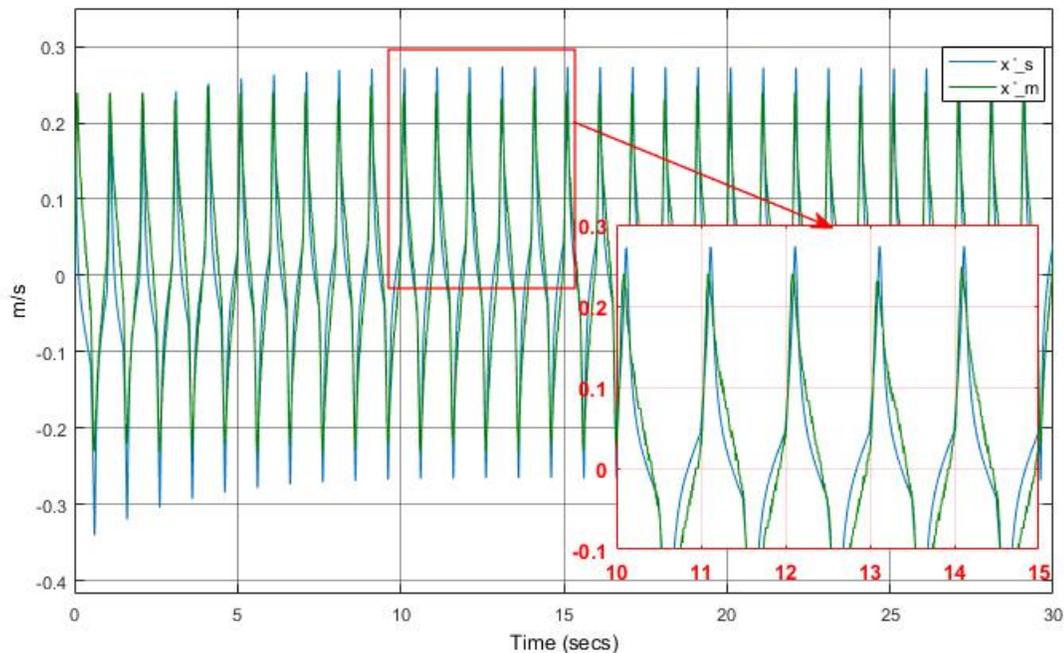
$$A = \begin{bmatrix} -1.2251 & -31.547 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6.713 & 276.46 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.30925 \\ 0 \\ 2.4631 \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

La ubicación de los polos del modelo identificado se puede ver en la Figura 2-10. Se puede observar que el sistema mantiene un polo en el semiplano derecho, lo que corrobora su inestabilidad.



**Figura 2-10:** Ubicación de los polos del modelo identificado de la SRDR

La señal de referencia cuadrada se induce al modelo identificado para obtener las respuestas de velocidad y ángulo de inclinación. La Figura 2-11 muestra que la respuesta de velocidad en simulación  $\dot{x}_s$  y la capturada  $\dot{x}_m$  coinciden de manera más precisa en fase y amplitud. De igual manera, la respuesta del ángulo de inclinación en simulación  $\theta_s$  y en captura real  $\theta_m$  coinciden en fase y difieren con una pequeña diferencia en amplitud (Figura 2-12). Para validar que los parámetros identificados corresponden con el comportamiento real del robot, se inducen dos señales de referencia con contenidos frecuenciales diferentes al de la señal cuadrada. Las Figuras 2-13 y 2-14 muestran los perfiles de las señales senoidal y triangular, respectivamente. En la comparación de la respuesta de velocidad con señal senoidal, se observa que la del modelo identificado  $\dot{x}_s$  acierta en fase pero presenta una amplitud menor a la obtenida en la captura real  $\dot{x}_m$  (Figura 2-15). Por otra parte, la respuesta del ángulo de inclinación en simulación  $\theta_s$  coincide en fase con una amplitud menor al ángulo capturado  $\theta_m$  (Figura 2-16). Para las respuestas en el caso de la señal triangular se presenta un escenario similar al anterior, la velocidad simulada del modelo identificado  $\dot{x}_s$  y la capturada  $\dot{x}_m$  llegan a coincidir en fase sin lograr la amplitud exacta (Figura 2-17); el comportamiento del ángulo de inclinación simulado  $\theta_s$  y el capturado  $\theta_s$  comparten las diferencias con la señal senoidal (Figura 2-18). Se puede concluir que la identificación realizada por el método de caja gris resulta en una mejor aproximación del modelo físico de la planta. Se espera que durante el diseño de los controladores, las respuestas obtenidas en simulación sean equivalentes a las de implementación.



**Figura 2-11:** Comparación de velocidad con señal cuadrada después de la estimación

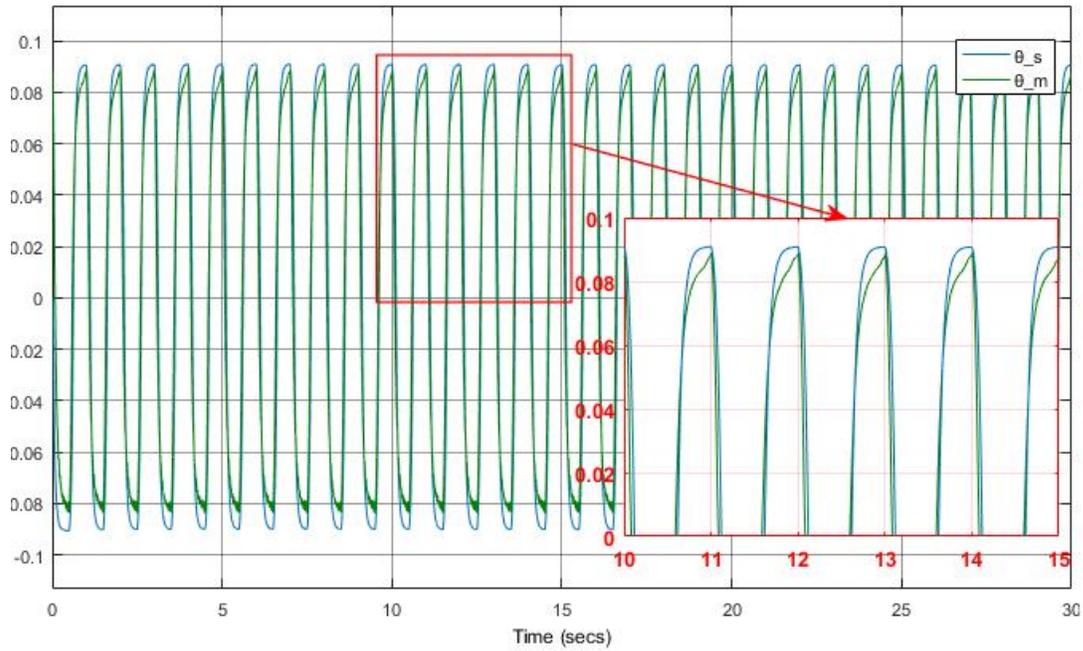


Figura 2-12: Comparación del ángulo con señal cuadrada después de la estimación

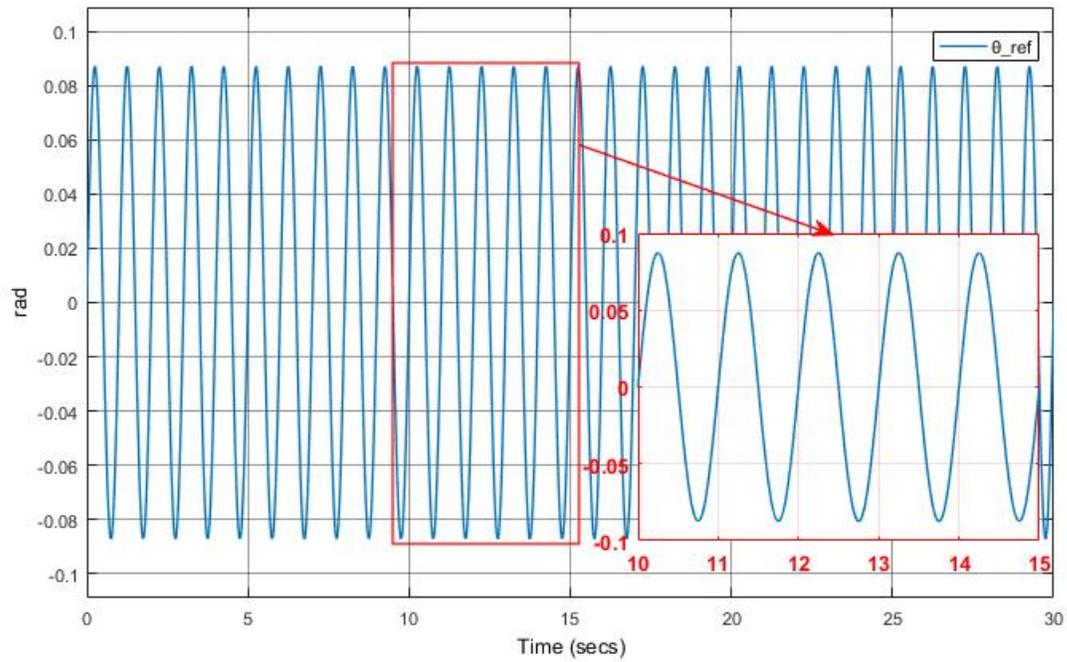


Figura 2-13: Señal senoidal de referencia

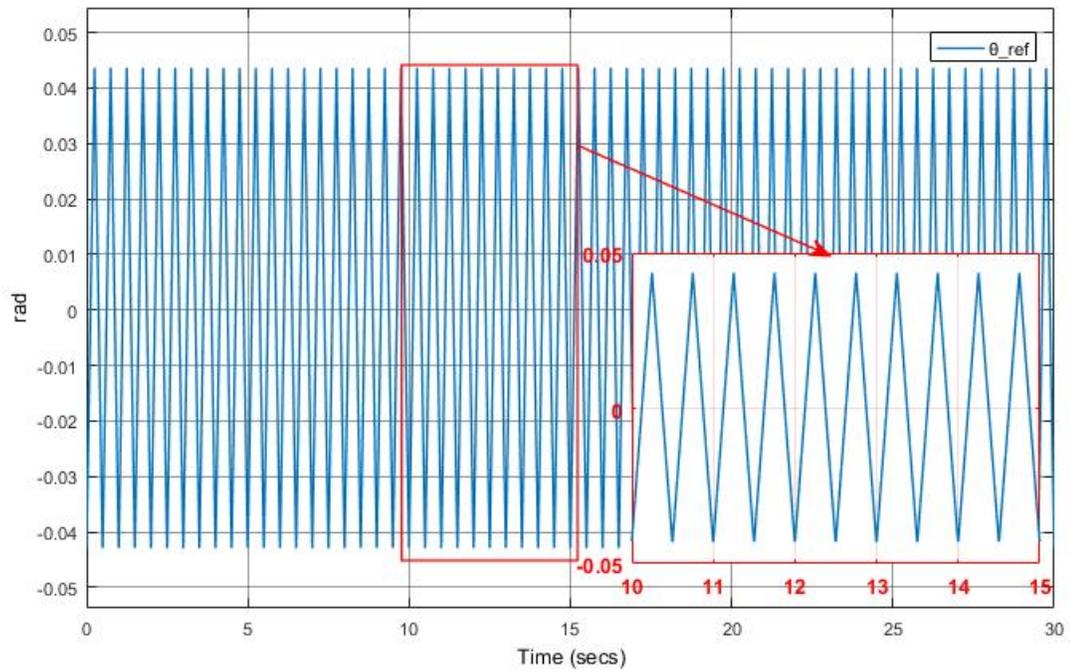


Figura 2-14: Señal triangular de referencia

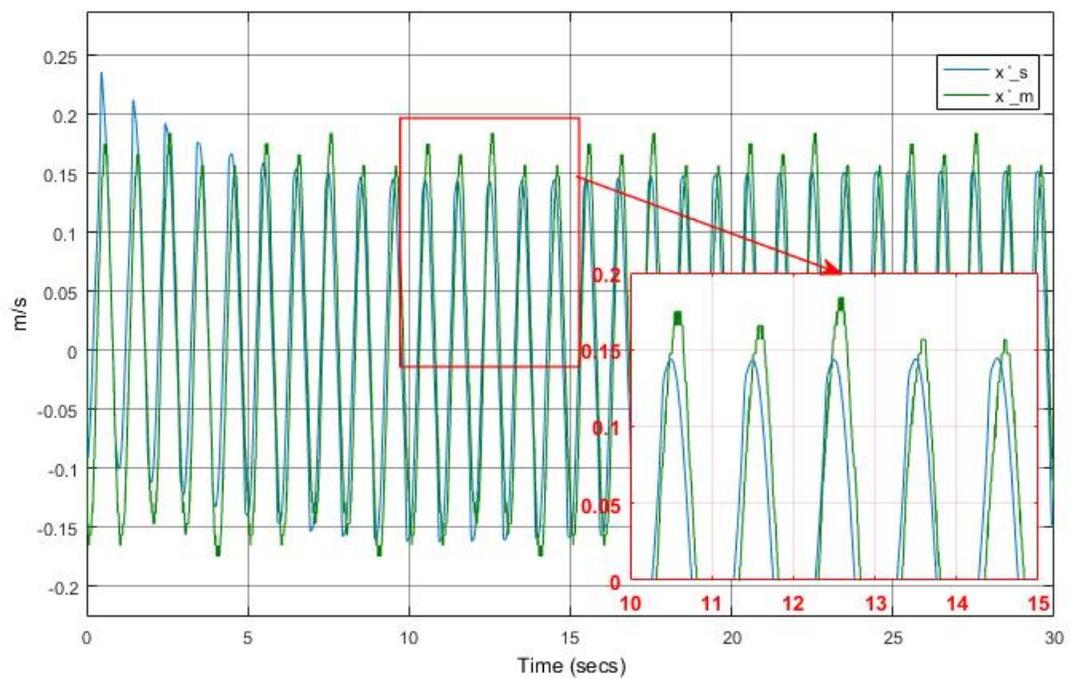
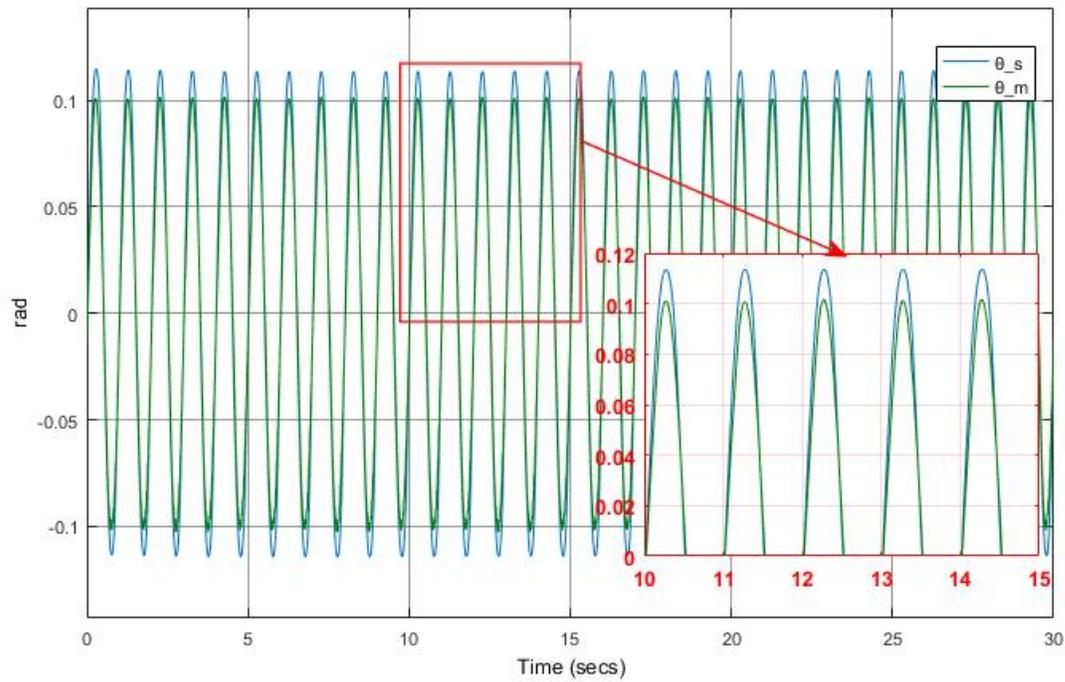
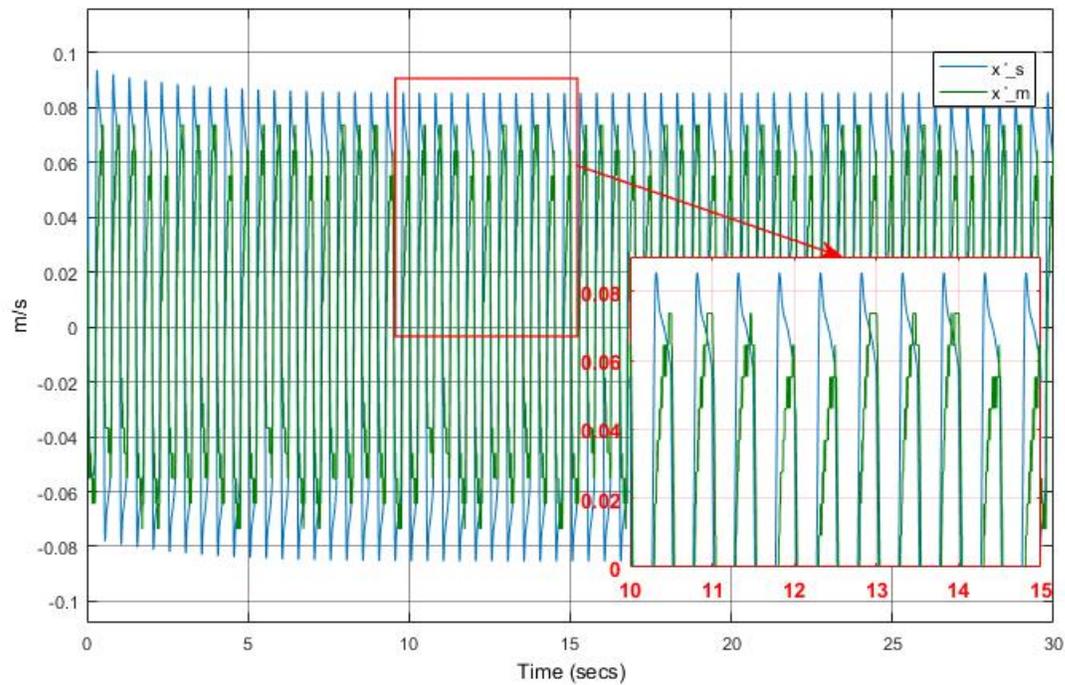


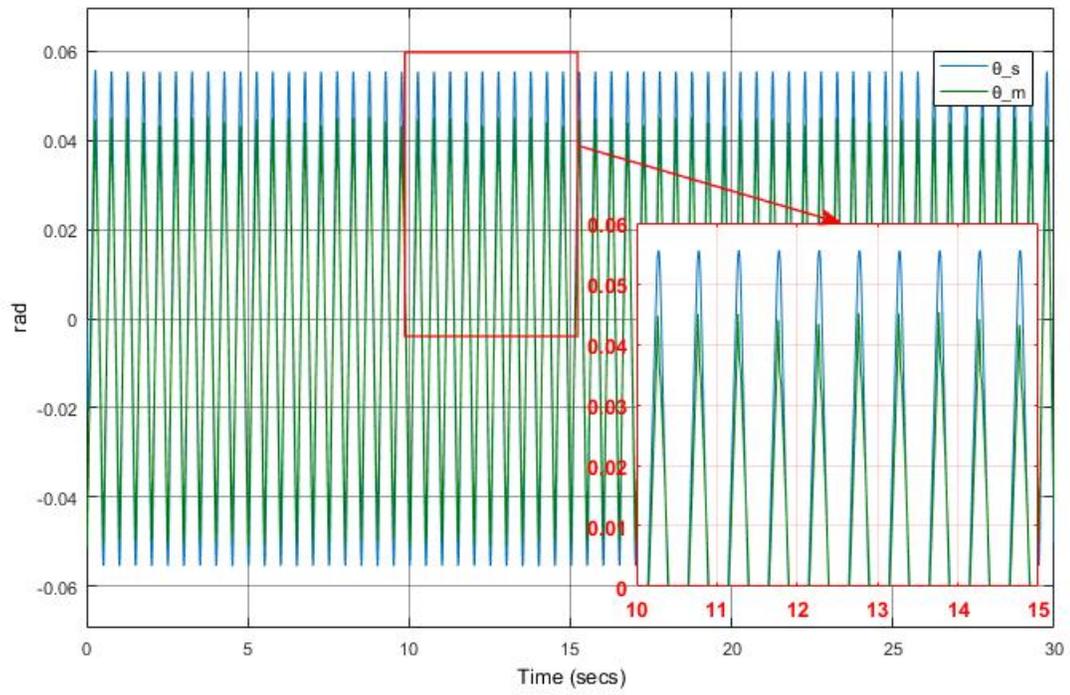
Figura 2-15: Comparación de velocidad con señal senoidal después de la estimación



**Figura 2-16:** Comparación del ángulo señal senoidal después de la estimación



**Figura 2-17:** Comparación de velocidad señal triangular después de la estimación



**Figura 2-18:** Comparación del ángulo señal triangular después de la estimación

### 3 Diseño del control

En este capítulo se diseñan y simulan las respuestas de los controladores en tiempo continuo. El problema de control del prototipo de SRDR se divide en dos tareas principales: primero, mantener el vehículo en equilibrio en la ausencia de una señal de referencia de velocidad  $\dot{x}_{ref}(t)$ . Segundo, realizar el desplazamiento mientras se hace seguimiento de señales de referencia de velocidad. La Figura 3-1 muestra al robot como un sistema con única entrada y múltiples salidas.

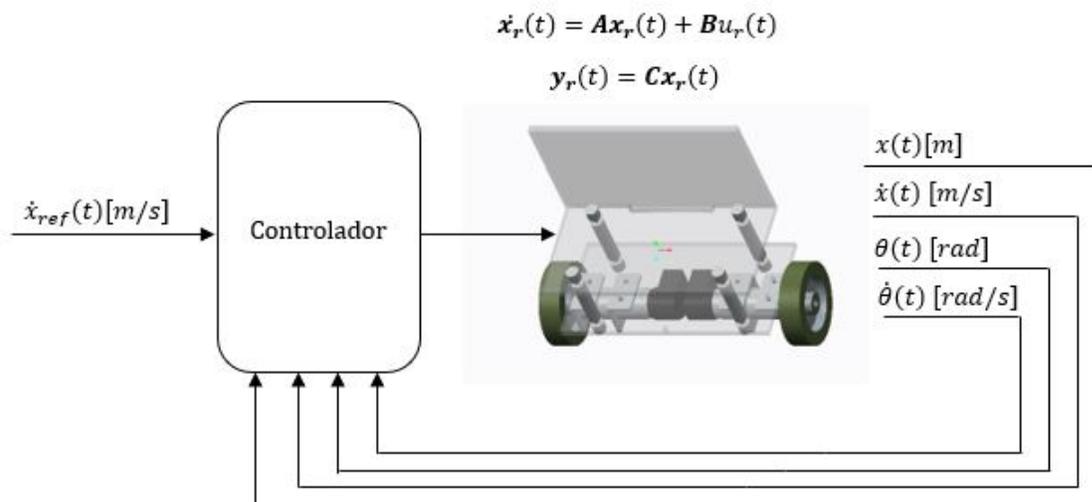
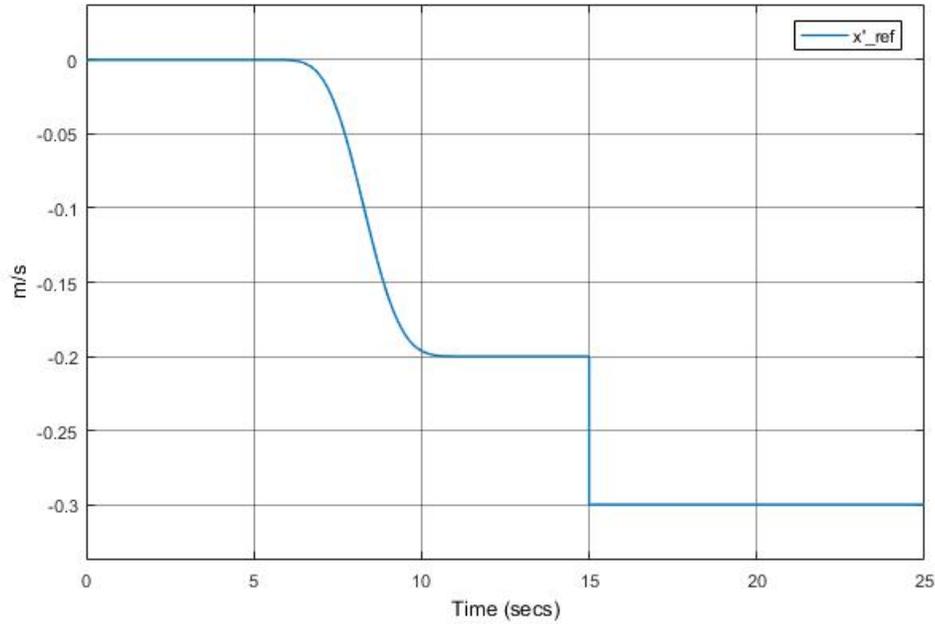


Figura 3-1: Desafío de control

La primera y segunda tarea del problema de control tienen relación con dos tipos de equilibrio, estático y dinámico. El equilibrio estático hace referencia al equilibrio del vehículo mientras se encuentra en posición vertical y en ausencia de referencia de velocidad, mientras que el dinámico se presenta durante el transcurso del recorrido [4]. Para que existan los equilibrios mencionados, se desea que:

Equilibrio estático =  $\theta(t) \simeq 0, \wedge, \dot{x}(t) = 0$   
Equilibrio dinámico =  $\theta(t) \simeq 0, \wedge, \dot{x}(t) \simeq \dot{x}_{ref}(t)$

Los controladores que se diseñan en esta sección son: 1) PID de doble lazo cerrado, 2) RVE con LQR y precompensador, 3) PI vectorial con LQR, 4) PI vectorial con LQR y FF, 5) cadena de integradores con LQR y 6) control GPI con observador desacoplado de estado extendido.



**Figura 3-2:** Referencia de velocidad para evaluar desempeño de controladores

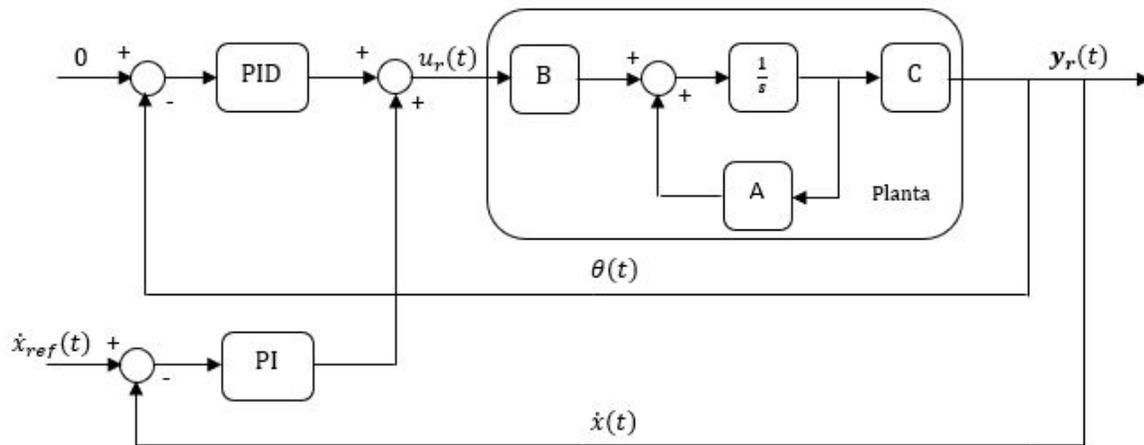
La señal de referencia de velocidad en la Figura 3-2 se plantea para evaluar cada uno de los controladores bajo diferentes criterios de desempeño. El primero toma el tiempo que el robot necesita para alcanzar el punto de equilibrio partiendo desde posición vertical y en reposo. Por tal razón, se establece el siguiente vector de condiciones iniciales:

$$\mathbf{x}_{r0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \text{ m/s} \\ 0.0698132 \text{ rad} \approx 4^\circ \\ 0 \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

Con el fin de otorgar al sistema con una transición suave en los cambios de velocidad, se usa una curva de Bézier en el intervalo de  $t=5 \text{ s}$  a  $t=12 \text{ s}$ . Estas curvas han sido utilizadas en sillas de ruedas inteligentes, donde se comprueba que logran proveer al sistema de control de una mejor transición y precisión al momento de realizar trayectorias [8]. Con la curva de Bézier se puede evaluar el segundo criterio de desempeño que determina la capacidad de seguimiento de trayectorias de cada controlador. Se aplica un cambio de referencia tipo escalón en  $t=15 \text{ s}$  y una perturbación sobre la señal de control, equivalente al 10% de la señal de control actual en  $t=20 \text{ s}$  para establecer el tercer y cuarto criterio de desempeño. De

esta manera, se obtiene la respuesta en estado transitorio y la magnitud del error de estado estacionario. El diseño de los controladores toma en cuenta el voltaje máximo permitido que ingresa a los motores, el cual es de  $\pm 14$  V.

### 3.1. Control PID de doble lazo cerrado



**Figura 3-3:** Estructura de control PID de doble lazo cerrado

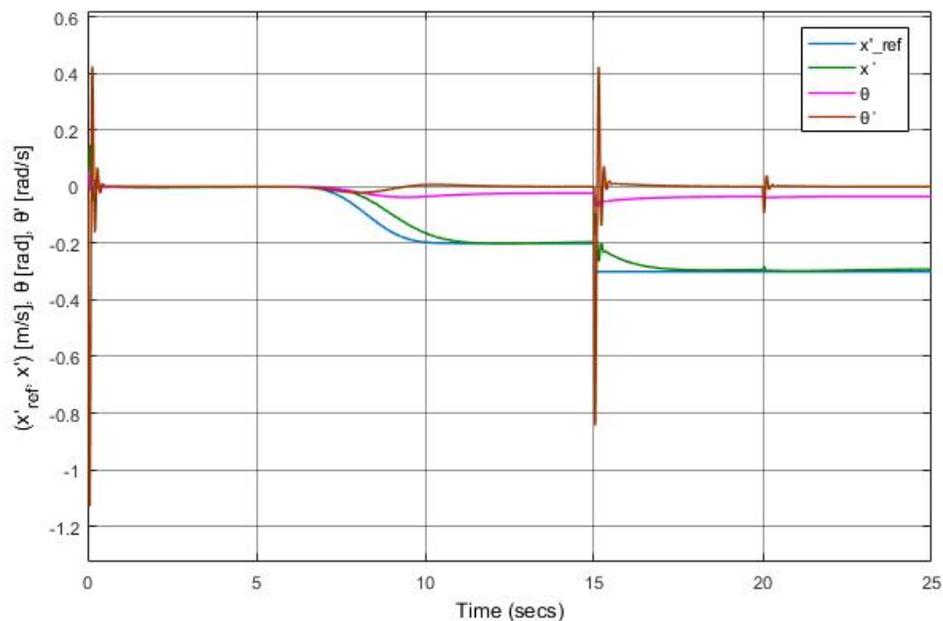
El control PID es el algoritmo de control más comúnmente implementado, la mayoría de los lazos cerrados están controlados por este algoritmo con pequeñas variaciones entre ellos [7]. El enfoque utilizado en esta sección adopta una realimentación de doble lazo cerrado sobre el ángulo de inclinación  $\theta(t)$ , y la velocidad  $\dot{x}(t)$ , como lo muestra la Figura 3-3.

La naturaleza del sistema establece que solo es posible realizar control de velocidad mientras exista en primer lugar control sobre el ángulo de inclinación. Esta premisa es tomada en cuenta para sintonizar los controladores PID y PI. En el proceso de identificación del capítulo anterior se encontraron los valores del controlador PID que garantizan el equilibrio cuando el vehículo se encuentra en reposo. Para realizar el control de velocidad se propone utilizar un controlador PI con la siguiente estructura:

$$C_{PI} = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (3-1)$$

Durante el proceso de sintonización del controlador PI se aumenta la ganancia proporcional  $K_p$  hasta que el sistema, a pesar de las oscilaciones, puede seguir la referencia de velocidad de la Figura 3-2. El valor de la ganancia integral  $K_i$  se aumenta hasta que el error entre la referencia y la velocidad es aproximadamente cero. Los valores obtenidos son:  $K_p=125$  y  $K_i=75$ .

La Figura 3-4 muestra la respuesta completa en simulación del sistema con el controlador PID de doble lazo cerrado. En  $t = 0$  s el vehículo logra mantener el equilibrio en un tiempo menor a 1 s, como se ve en la Figura 3-5. De la Figura 3-6 se puede ver que a pesar de que la velocidad llega al valor de  $0.2$  m/s en la curva de Bézier, no hay un seguimiento preciso durante el transcurso de la misma. Además, la respuesta al cambio de referencia tipo escalón permite observar subpicos, un tiempo de elevación de  $2.5$  s y uno de asentamiento de  $4$  s. El sistema no puede contrarrestar la perturbación aplicada en la señal de control, lo que genera un error de estado estacionario mayor a cero. La Figura 3-7 muestra que se presentan picos de voltaje tanto al partir de posición vertical, como al ser aplicado el cambio de referencia tipo escalón.



**Figura 3-4:** Respuesta de la SRDR con PID de doble lazo cerrado

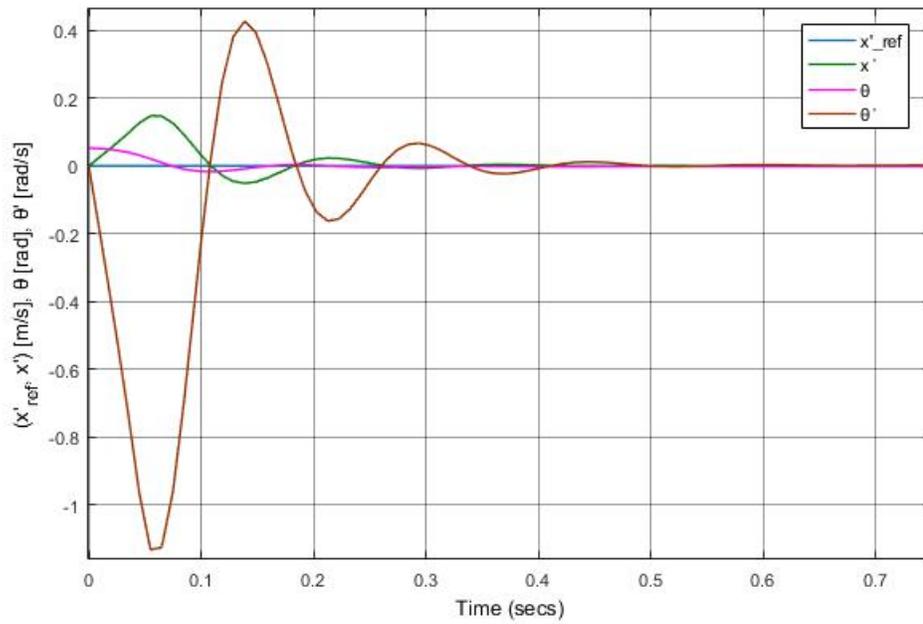


Figura 3-5: Primer detalle de la respuesta de la SRDR con PID de doble lazo cerrado

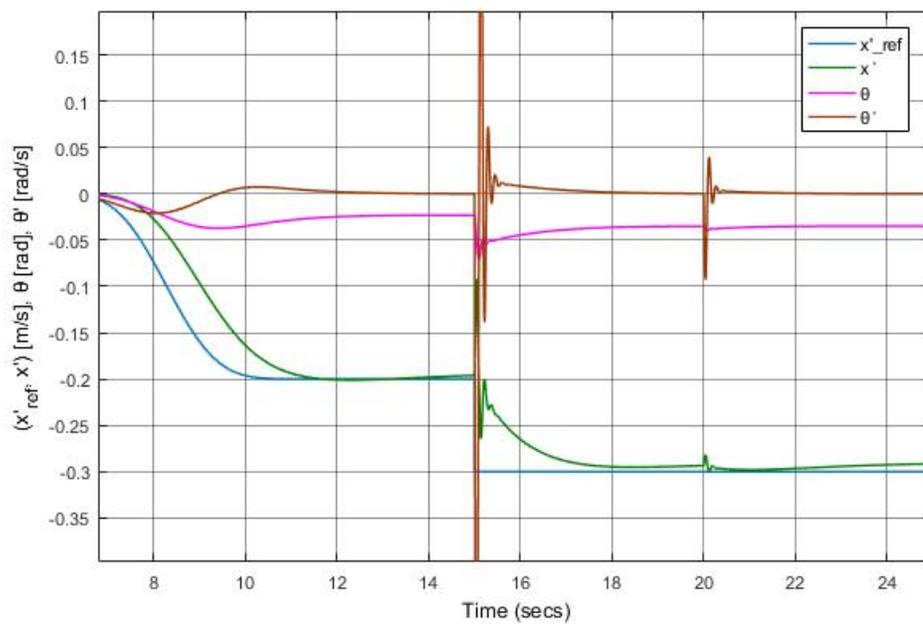


Figura 3-6: Segundo detalle de la respuesta de la SRDR con PID de doble lazo cerrado

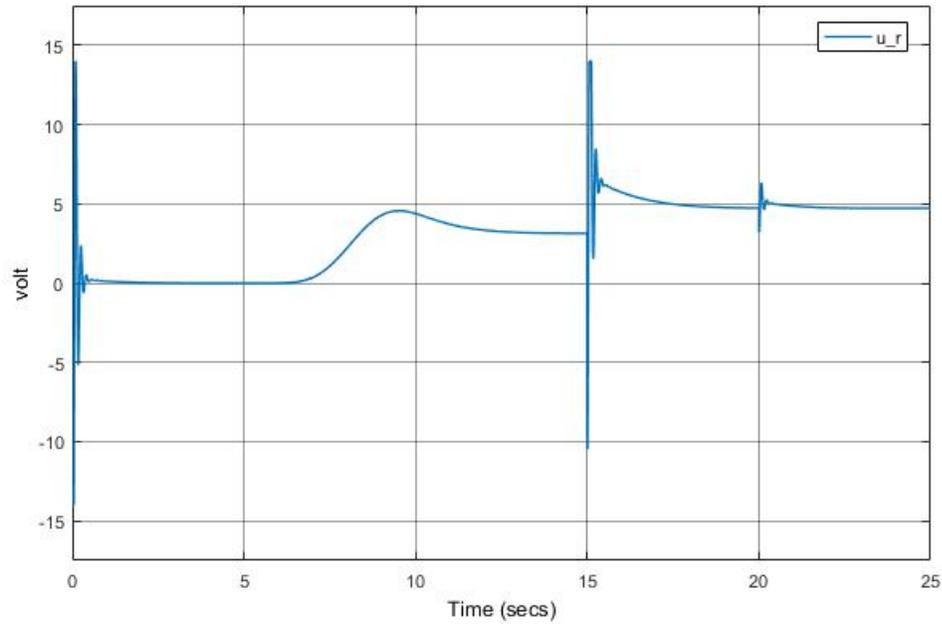


Figura 3-7: Señal de control de la SRDR con PID de doble lazo cerrado

### 3.2. Control por realimentación de variables de estado

La estructura de control por Realimentación de Variables de Estado (RVE) utiliza un vector de ganancias que realimenta cada uno de los estados del sistema. El rango de las matrices de controlabilidad y observabilidad establecidas en el segundo capítulo demuestran que el sistema es controlable y observable, requisitos previos al diseño de este controlador.

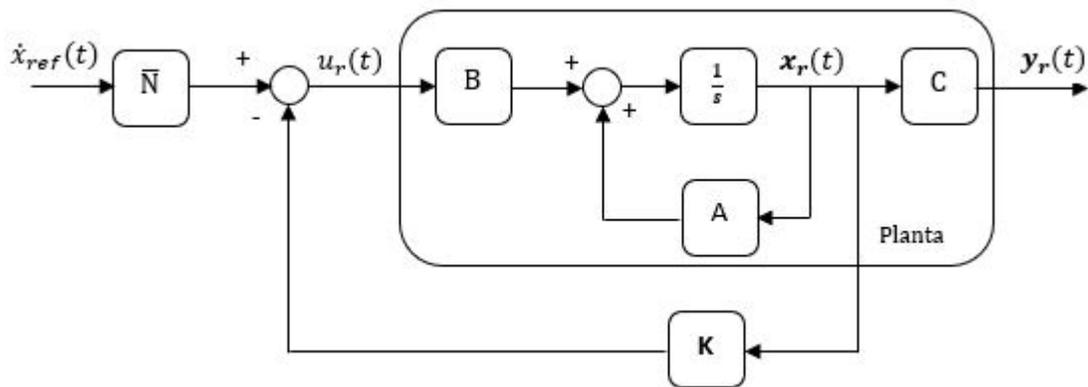


Figura 3-8: Estructura de control por RVE con precompensador

En la Figura 3-8 se muestra la estructura de control por RVE que incluye un bloque pre-compensador  $\bar{N}$ . Inicialmente, se asume  $\bar{N} = 1$  para obtener el vector de ganancias  $\mathbf{K}$ . Se obtiene la representación de estado del sistema en lazo cerrado con  $u_r(t) = \dot{x}_{ref}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}_r(t)$ , por lo que la ecuación de estado toma la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}u_r(t) \quad (3-2)$$

donde  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  contiene la dinámica del sistema en lazo cerrado y  $u_r(t)$  es la entrada del sistema.

Los polos del sistema estimado en lazo abierto son  $\lambda_i(\mathbf{A})$  para todo  $i=1, \dots, j$  con  $j=3$ , los cuales corresponden a los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  de la representación del sistema linealizado:

$$\lambda(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 16.259 \\ -0.45849 \\ -17.025 \end{bmatrix}$$

El valor propio positivo del primer polo indica su ubicación en el semiplano derecho del plano complejo, lo cual categoriza el sistema como inestable.

El primer objetivo que se desea alcanzar es la estabilidad en lazo cerrado. Para lograr esto, se asignan los polos de lazo cerrado en la nueva forma de la ecuación de estado (3-2). La matriz  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  define la dinámica del lazo cerrado donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son matrices del sistema, por lo que al escoger  $\mathbf{K}$ , los valores propios  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  tendrán parte real negativa y el sistema será estable. Por medio de un proceso de asignación de polos se obtiene el vector de ganancias. De tal manera, se ubican los polos en el semiplano izquierdo que logran un menor tiempo de asentamiento para equilibrar al vehículo:

$$\begin{aligned} P_{RVE} &= [-9.2 \quad -9.4 \quad -9.6] \\ \mathbf{K} &= [97.315 \quad 210.99 \quad 23.17] \end{aligned} \quad (3-3)$$

El valor del precompensador  $\bar{N}$  se obtiene de:

$$\bar{N} = M^{-1}(0) \quad (3-4)$$

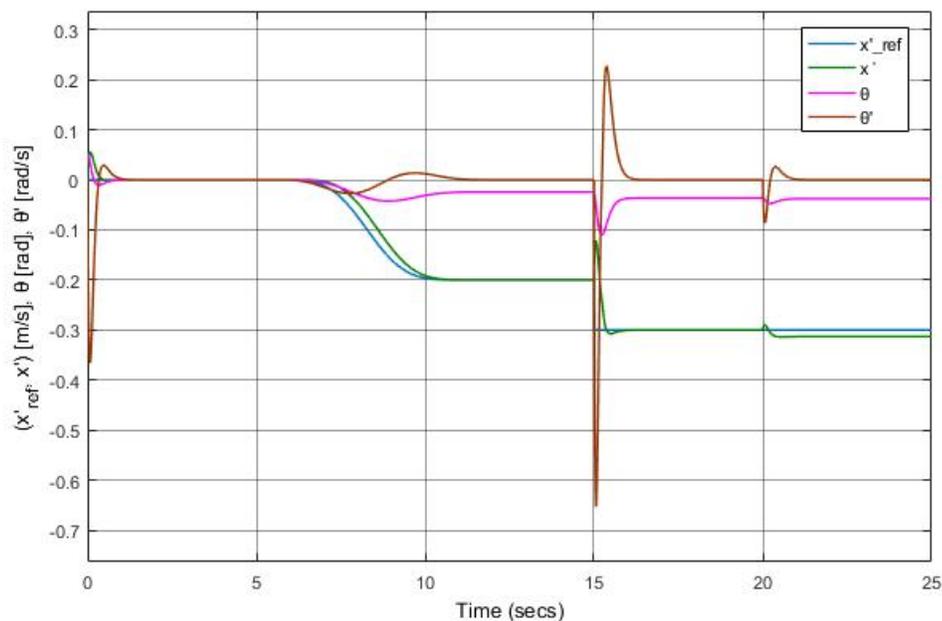
donde  $M(0)$  se considera la ganancia DC del lazo cerrado del sistema, la cual se calcula a partir de la siguiente función de transferencia:

$$Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}] r(s) \quad (3-5)$$

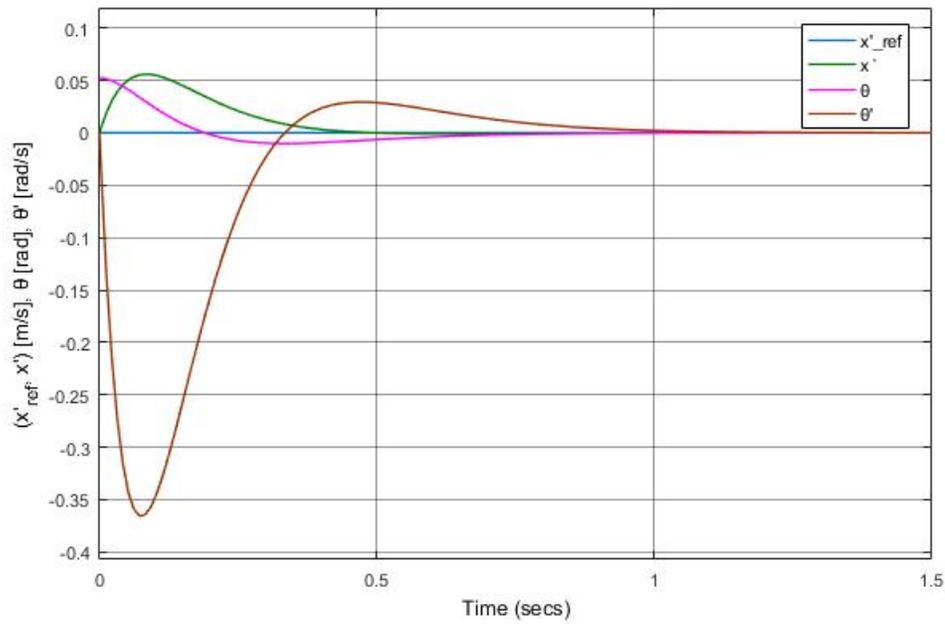
Al tener los polos de  $(\mathbf{A}-\mathbf{BK})$  parte real negativa, la ganancia DC es finita y se obtiene al evaluar  $\lim_{s \rightarrow 0} M(s)$  [50]:

$$M(0) = \frac{Y(0)}{r(0)} = \mathbf{C}(-\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B} \quad (3-6)$$

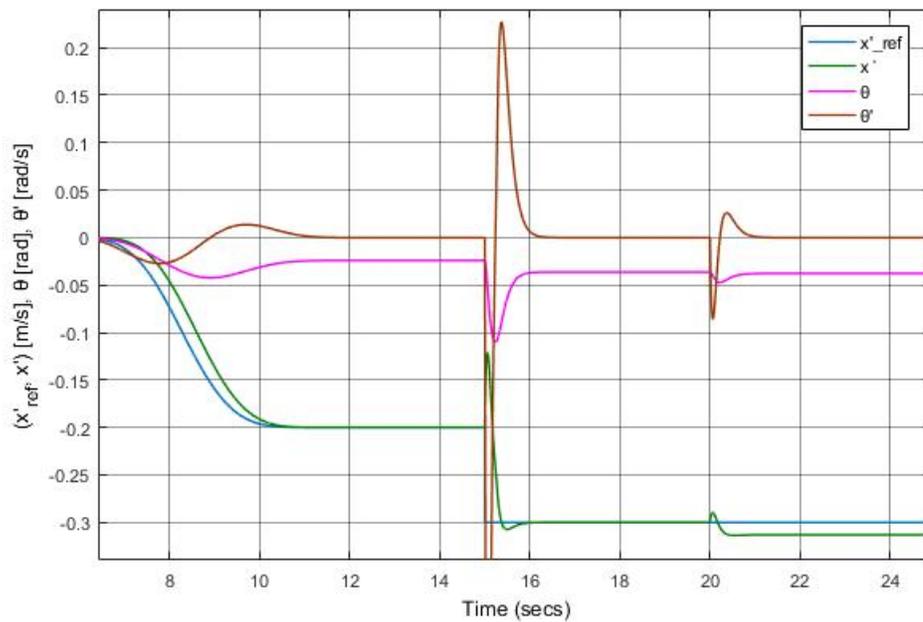
La Figura 3-9 muestra que a pesar de no ser ajustado el seguimiento, la velocidad del vehículo se encuentra cerca de la referencia, tanto en la curva de Bézier como en el cambio de referencia tipo escalón. Al partir de posición vertical, el robot alcanza equilibrio en un tiempo de 1.1 s (Figura 3-10). De la Figura 3-11 se pueden obtener las siguientes conclusiones con respecto al cambio de referencia tipo escalón: se generan un subpico y un sobrepico, este último de aproximadamente 2.4%. El tiempo de elevación es de 0.8 s y el de asentamiento de 1 s. Además, se puede ver que el controlador no rechaza la perturbación y se produce un error de estado estacionario. El voltaje requerido por el vehículo se observa en la Figura 3-12, donde durante el cambio de referencia tipo escalón se presenta un pico de voltaje que alcanza los 14 V.



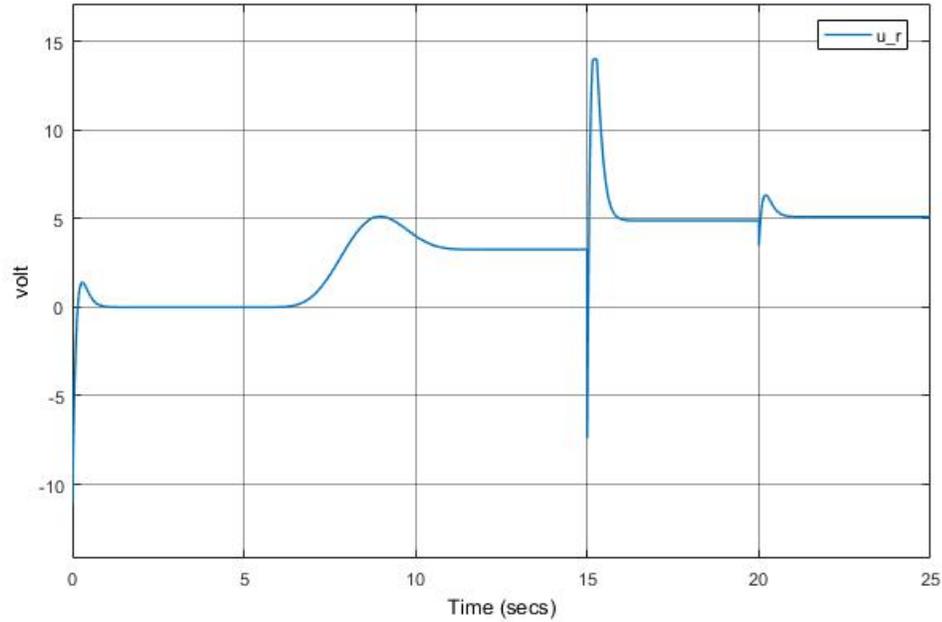
**Figura 3-9:** Respuesta de la SRDR por RVE con ubicación de polos con precompensador



**Figura 3-10:** Primer detalle de la respuesta de la SRDR por RVE con ubicación de polos con precompensador



**Figura 3-11:** Segundo detalle de la respuesta de la SRDR por RVE con ubicación de polos con precompensador



**Figura 3-12:** Señal de control de la SRDR por RVE con ubicación de polos con precompensador

### 3.3. Control por RVE con LQR y precompensador

Es de interés encontrar el vector de ganancias del controlador que saca el mejor provecho de los elementos del lazo de control para cumplir con los objetivos propuestos. Por esta razón, se propone utilizar la estructura de control en la Figura 3-8 para incluir la estrategia de optimización LQR que determina las ganancias del controlador.

El prototipo de SRDR se expresa como:

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}u_r(t) \quad (3-7)$$

Se asume que la señal de referencia  $\dot{x}_{ref}(t)$  es cero, por lo que la respuesta del sistema es solamente excitada por el vector de condiciones iniciales  $\mathbf{x}_{r0}(t)$ . Por lo anterior, la ley de control se reduce a  $u_r(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_r(t)$  y modifica a (3-7):

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}_r(t) \quad (3-8)$$

Claramente, la respuesta de (3-8) depende de los valores propios de  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ .

El método LQR propone encontrar el vector de ganancias  $\mathbf{K}$  que minimiza el índice cuadrático de desempeño:

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}'_r(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}_r(t) + u'_r(t)Ru_r(t)] dt \quad (3-9)$$

donde la prima representa la transpuesta,  $\mathbf{Q}$  es una matriz simétrica y positiva semidefinida ( $\mathbf{Q} \geq 0$ ) y  $R$  es simétrica y positiva definida ( $R > 0$ ).

La ley de control se puede encontrar en [27][48] y está definida por:

$$u_r(t) = -R^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{x}_r(t) \quad (3-10)$$

donde  $\mathbf{P}=\mathbf{P}' \geq 0$  resuelve la ecuación de Ricatti dada por:

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}R^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (3-11)$$

El vector de ganancias  $\mathbf{K} = R^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}$  determina la ley de control que ingresa al sistema. Las matrices  $\mathbf{Q}$  y  $R$  ajustan la importancia de la señal de control y de los estados en función de  $J$ . Los tamaños de  $\mathbf{Q}$  y  $R$  dependen del tamaño de la matriz de estados y del número de señales de control, respectivamente. Con el propósito de escoger los coeficientes adecuados de la función objetivo, se usan matrices diagonales para asociar cada valor de la diagonal con las variables de estado o señales de control. Se usa el comando `lqr(A,B,Q,R)` de Matlab® para resolver la ecuación de Ricatti y encontrar el valor de  $\mathbf{K}$  para los valores escogidos de  $\mathbf{Q}$  y  $R$ .

Los valores de  $\mathbf{Q}$  y  $R$  que presentan los mejores resultados en simulación son:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 8 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 0.1 \quad (3-12)$$

$$\mathbf{K} = [242.54 \quad 472.29 \quad 70.904]$$

La simulación completa del control por RVE con LQR y precompensador en la Figura 3-13 permite encontrar algunas similitudes con el controlador anterior: primero, el sistema logra conservar el equilibrio partiendo de posición vertical. Segundo, el seguimiento de referencias no es ajustado y no existe rechazo a la perturbación de tipo escalón. El acercamiento en la Figura 3-14 muestra que el robot alcanza equilibrio en un tiempo aproximado de 1.3 s. A pesar de que el vehículo no sigue de manera precisa la curva de Bézier, no se presentan sobrepicos durante el cambio de referencia tipo escalón, como se ve en la Figura 3-15. Lo último repercute en un aumento del tiempo de elevación y asentamiento, 1.7 s y 2 s, respectivamente. La Figura 3-16 muestra que el voltaje con LQR es menor al método de ubicación de polos.

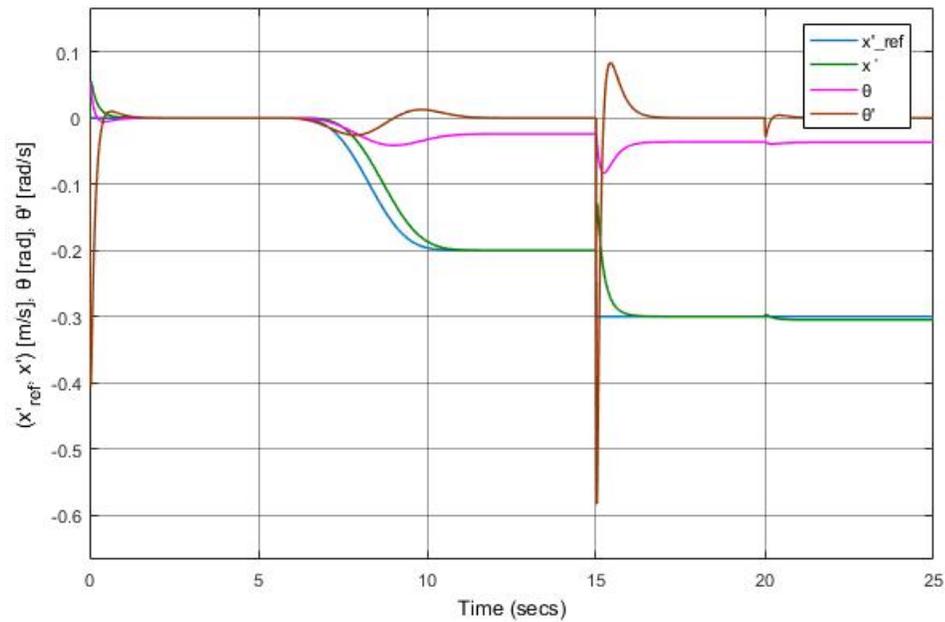


Figura 3-13: Respuesta de la SRDR por RVE con LQR y precompensador

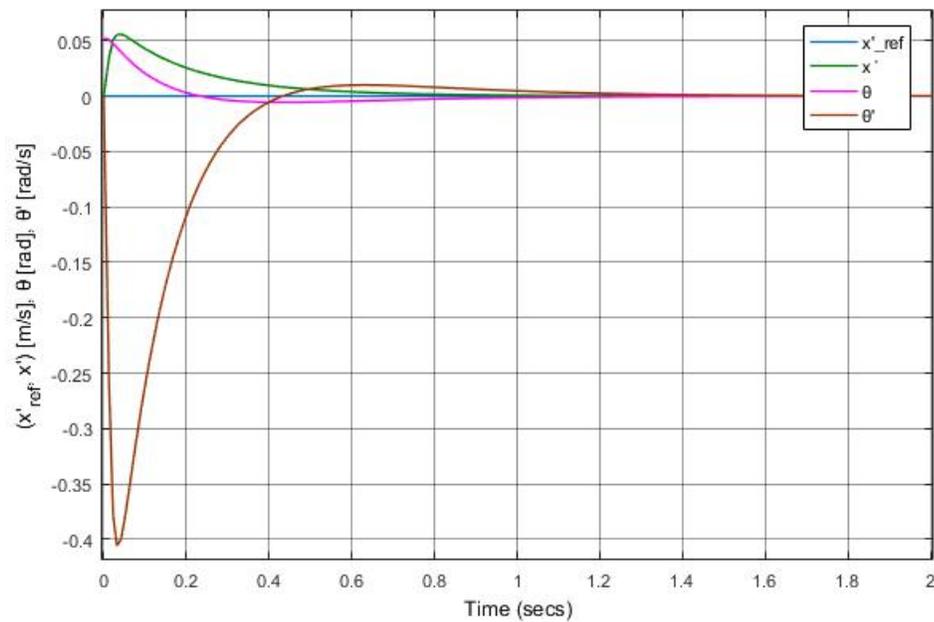
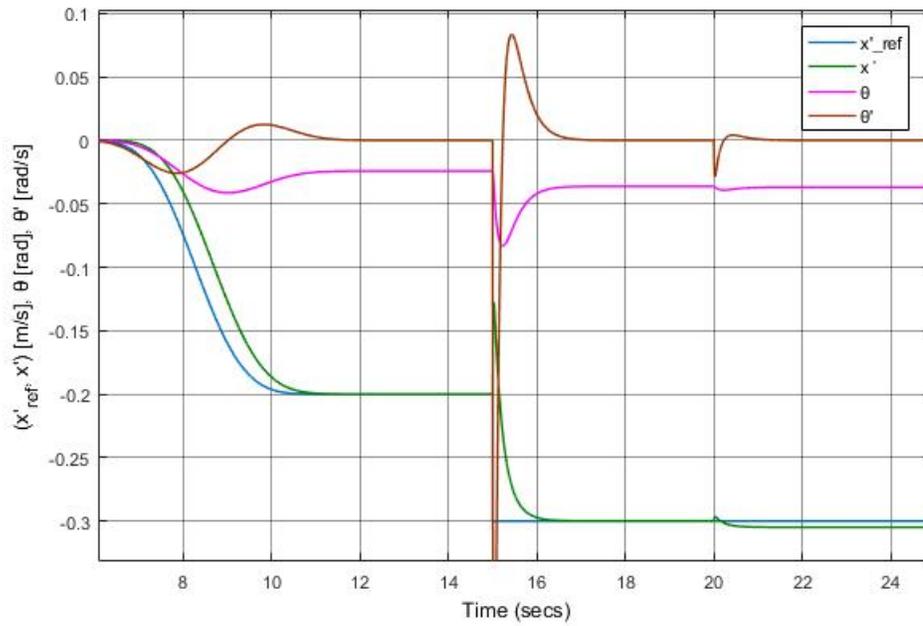
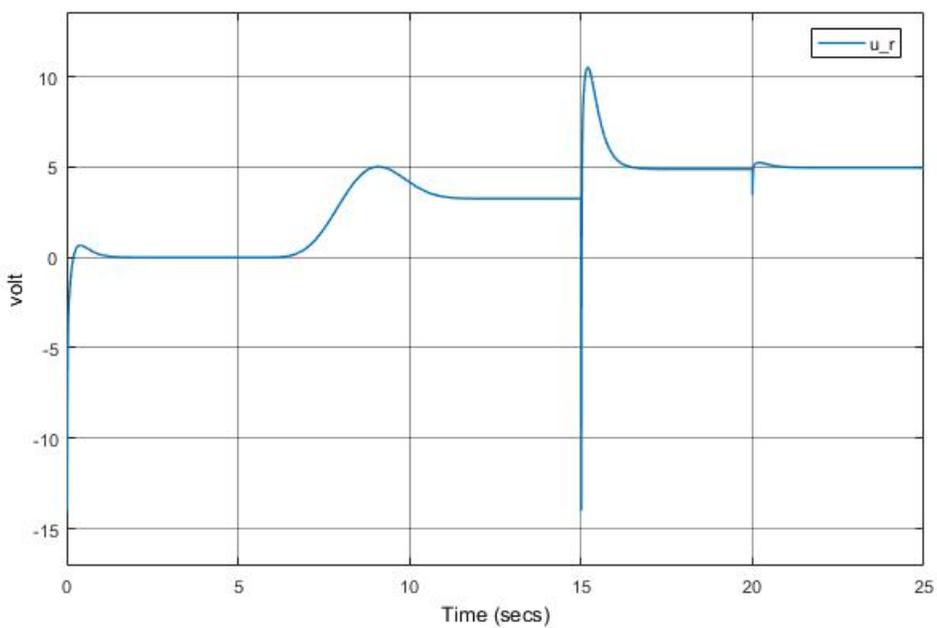


Figura 3-14: Primer detalle de la respuesta de la SRDR por RVE con LQR y precompensador

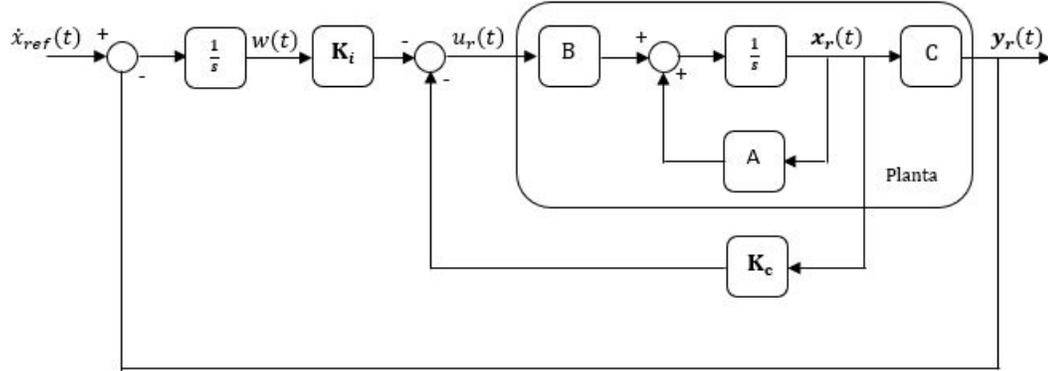


**Figura 3-15:** Segundo detalle de la respuesta de la SRDR por RVE con LQR y precompensador



**Figura 3-16:** Señal de control de la SRDR por RVE con LQR y precompensador

### 3.4. Control PI vectorial con LQR



**Figura 3-17:** Estructura de control PI vectorial

Para rechazar la perturbación en la señal de control y reducir el error de estado estacionario, la estrategia de control PI vectorial incluye una acción integral sobre el error (Figura 3-17). Esta acción está formada por la diferencia entre la referencia de velocidad y el valor de velocidad del sistema ( $e(t) = \dot{x}_{ref}(t) - \dot{x}(t)$ ). Para que el error tienda a cero, se adiciona una nueva variable de estado  $w(t)$  que satisface la siguiente relación:

$$\dot{w}(t) = \dot{x}_{ref}(t) - \dot{x}(t) = \dot{x}_{ref} - \mathbf{C}\mathbf{x}_r(t) = e(t) \quad (3-13)$$

Al definir la nueva variable, se presentan las ecuaciones de estado que rigen el sistema de lazo cerrado:

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}u_r(t) \quad (3-14)$$

$$\dot{w}(t) = -\mathbf{C}\mathbf{x}_r(t) + \dot{x}_{ref}(t) \quad (3-15)$$

donde

$$u_r(t) = -\mathbf{K}_c\mathbf{x}_r(t) - \mathbf{K}_i w(t) \quad (3-16)$$

La ecuación (3-14) es propia de la dinámica del sistema, mientras que (3-15) incluye la nueva variable de estado. Con lo anterior establecido, se representa el sistema en espacios de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_r \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{x}_{ref} \quad (3-17)$$

$$\mathbf{y}_r = [\mathbf{C} \ 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r \\ w \end{bmatrix} \quad (3-18)$$

siendo

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = [\mathbf{C} \ 0] \quad (3-21)$$

El lazo cerrado del sistema se obtiene de las ecuaciones (3-14), (3-15) y (3-16), de manera que:

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_c)\mathbf{x}_r(t) - \mathbf{BK}_i w(t) \quad (3-22)$$

De (3-15) y (3-22), se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_r \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK}_c & -\mathbf{BK}_i \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{x}_{ref} \quad (3-23)$$

A partir de (3-23) se puede definir que:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK}_c & -\mathbf{BK}_i \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

Los valores propios de  $\hat{\mathbf{A}}$  determinan el comportamiento del sistema en lazo cerrado. Para asignar los valores propios de  $\hat{\mathbf{A}}$  es necesario que el par  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})$  sea controlable. Por tal razón, se toma la matriz de controlabilidad en (2-39):

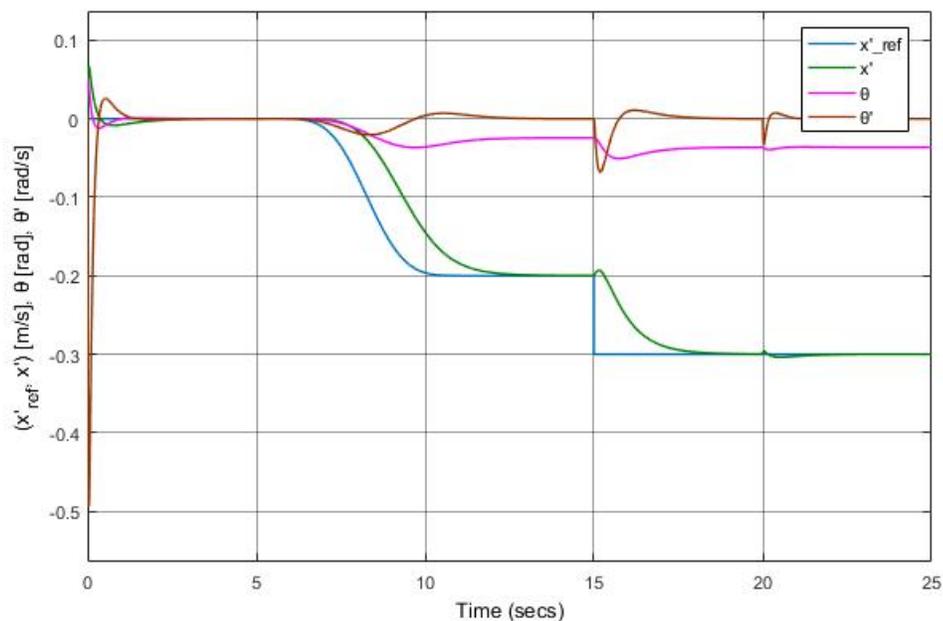
$$\mathfrak{s}_b = [\bar{\mathbf{B}} \ \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \ \bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}} \ \dots \ \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}], \text{rank}(\mathfrak{s}_b) = 4 \quad (3-25)$$

Dado que la condición de controlabilidad se cumple en (3-25), se pueden ubicar los polos de lazo cerrado en el semiplano izquierdo para garantizar la estabilidad del sistema. Por los resultados presentados en el controlador anterior, se utiliza el método de optimización LQR para determinar el vector de ganancias del controlador PI vectorial. Con la matriz de identidad como base, se penalizan las variables de estado que muestran los requerimientos más altos de energía para disminuir los picos máximos de control. Los valores seleccionados para  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  que muestran mejores resultados en simulación son:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \cdot 10^4 \end{bmatrix}, R = 0.1 \quad (3-26)$$

$$\mathbf{K}_c = [249.21 \quad 443.1 \quad 64.908], K_i = -130.19$$

La Figura 3-18 muestra que el controlador PI vectorial logra cumplir con el objetivo de rechazar la perturbación aplicada, lo que elimina de manera asintótica el error en estado estacionario. El vehículo alcanza el equilibrio después de partir en posición vertical en un tiempo menor a 2 s, como se ve en la Figura 3-19. Aunque el seguimiento de la curva de Bézier no es satisfactorio, el controlador reduce el subpico y anula el sobrepico causado por el cambio de referencia de tipo escalón (Figura 3-20). De este último cambio de referencia se obtiene un tiempo de elevación de 3.7 s y uno de asentamiento de 4 s. La Figura 3-21 muestra que solo cuando el robot parte de posición vertical se presenta un pico de voltaje que alcanza un valor de -14 V.



**Figura 3-18:** Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR

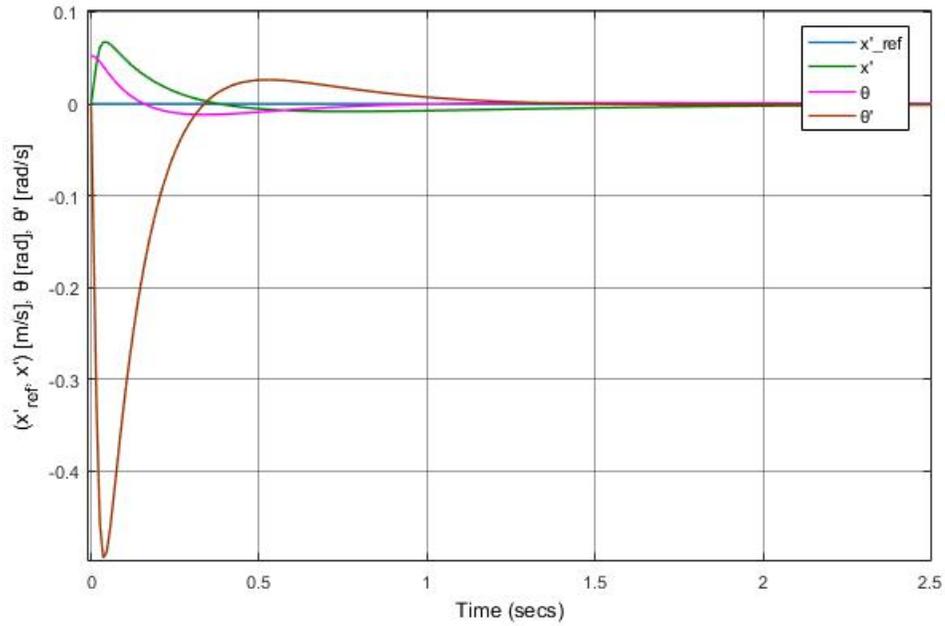


Figura 3-19: Primer detalle de la respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR

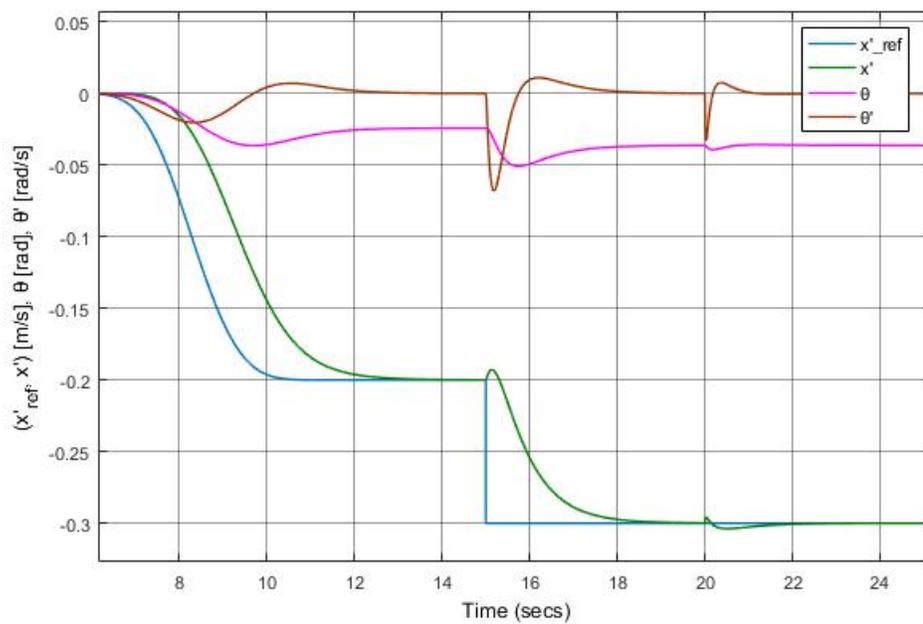


Figura 3-20: Segundo detalle de la respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR

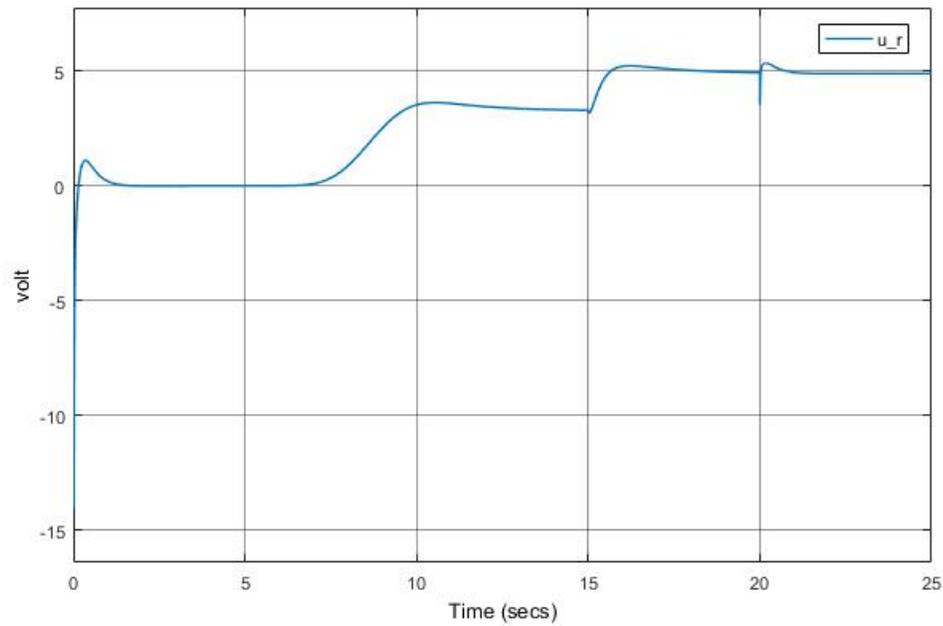


Figura 3-21: Señal de control de la SRDR con PI vectorial con LQR

### 3.5. Control PI vectorial con LQR y FF

Los controladores diseñados hasta esta etapa del capítulo no logran realizar un seguimiento preciso de la curva de Bézier presente en la referencia de velocidad (Figura 3-2). Al ser el seguimiento de trayectorias un objetivo de esta tesis, se propone mejorar el desempeño del controlador PI vectorial por medio de la estructura en la Figura 3-22.

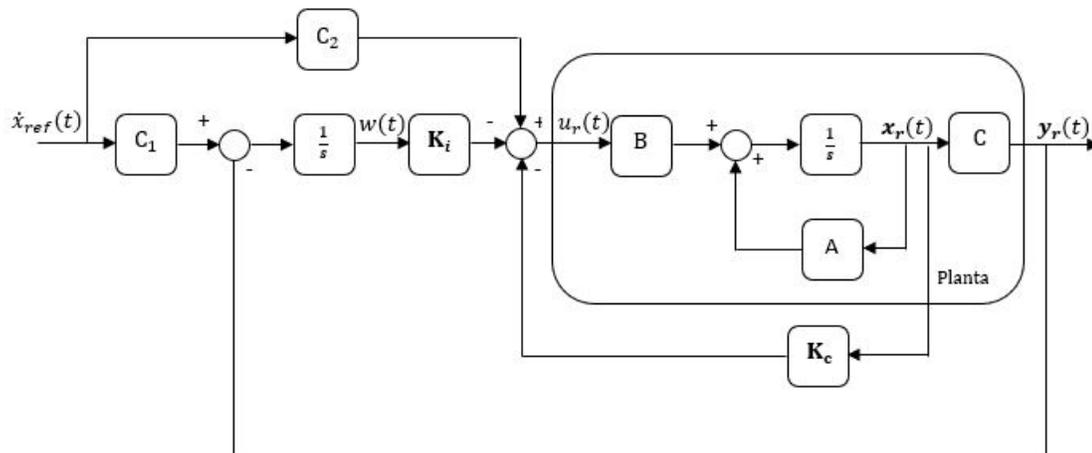


Figura 3-22: Estructura de control PI vectorial con LQR y FF

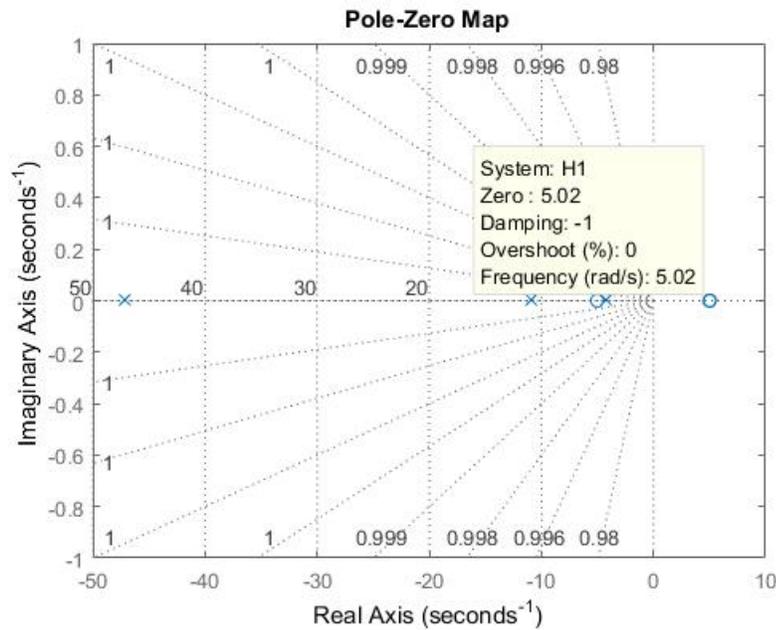
Esta configuración involucra dos controladores adicionales: un controlador de referencia  $C_1(s)$  y un controlador de seguimiento  $C_2(s)$  [19]. Idealmente el controlador de seguimiento es el inverso de  $G_v(s)$  para que se cumpla:

$$C_2(s)G_v(s) \approx 1 \quad (3-27)$$

Donde  $G_v(s)$  es la función de transferencia de la velocidad en lazo cerrado que incluye solamente al vector de realimentación de estados  $\mathbf{K}_c$ :

$$G_v(s) = \frac{-0.30925(s - 5.02)(s + 5.02)}{(s + 71.43)(s + 8.915)(s + 4.427)} \quad (3-28)$$

La Figura 3-23 muestra los polos y ceros de (3-28), donde se ve un cero de fase no mínima ubicado en el semiplano derecho.



**Figura 3-23:** Posicionamiento de los polos de la función de transferencia de la velocidad en lazo cerrado

En (3-27) se puede ver que la efectividad de  $C_2(s)$  depende directamente del conocimiento que se tiene de  $G_v(s)$ . Sin embargo, el tomar la función de transferencia inversa de  $G_v(s)$  implicaría la inestabilidad de  $C_2(s)$ . Por tal razón, la función de transferencia en (3-28) se expresa como:

$$G_v(s) = G_{mp}(s)G_{nmp}(s) \quad (3-29)$$

donde

$$\begin{aligned} G_{mp}(s) &= \frac{1.5526(s + 5.02)}{(s + 71.43)(s + 8.915)(s + 4.427)} \\ G_{nmp}(s) &= -0.19918(s - 5.02) \end{aligned} \quad (3-30)$$

son las partes de fase mínima y de fase no mínima, respectivamente. Cabe anotar que  $G_{mp}(s)$  tiene la misma ganancia DC que  $G_v(s)$ . Por lo tanto, en  $C_2(s)$  se usa la función de transferencia inversa de  $G_{mp}(s)$ :

$$C_2(s) = \frac{C_1(s)}{G_{mp}(s)} \quad (3-31)$$

donde  $C_1(s)$  se diseña para lograr una función de transferencia propia. Para diseñar el controlador de referencia  $C_1(s)$  se establece que:

$$G_{mp}(s) = \frac{B_{mp}(s)}{A_{mp}(s)}, \quad C_1(s) = \frac{B_1(s)}{A_1(s)} \quad (3-32)$$

El grado relativo de  $G_{mp}(s)$  está definido como:

$$d_{G_{mp}} = \deg(A_{mp}) - \deg(B_{mp}) \quad (3-33)$$

Y el grado relativo para  $C_1(s)$ :

$$d_{C_1} = \deg(A_1) - \deg(B_1) \quad (3-34)$$

Así, el requerimiento del controlador de referencia se expresa como:

$$d_{C_1} \geq d_{G_{mp}} \quad (3-35)$$

Por lo anterior,  $C_1(s)$  se escoge con grado relativo dos:

$$\begin{aligned} C_1(s) &= \frac{1}{(\tau_1(s + 1))(\tau_2(s + 1))} \\ C_1(s) &= \frac{1}{0.02s^2 + 0.3s + 1} \end{aligned} \quad (3-36)$$

De tal manera,  $C_2(s)$  queda definido como:

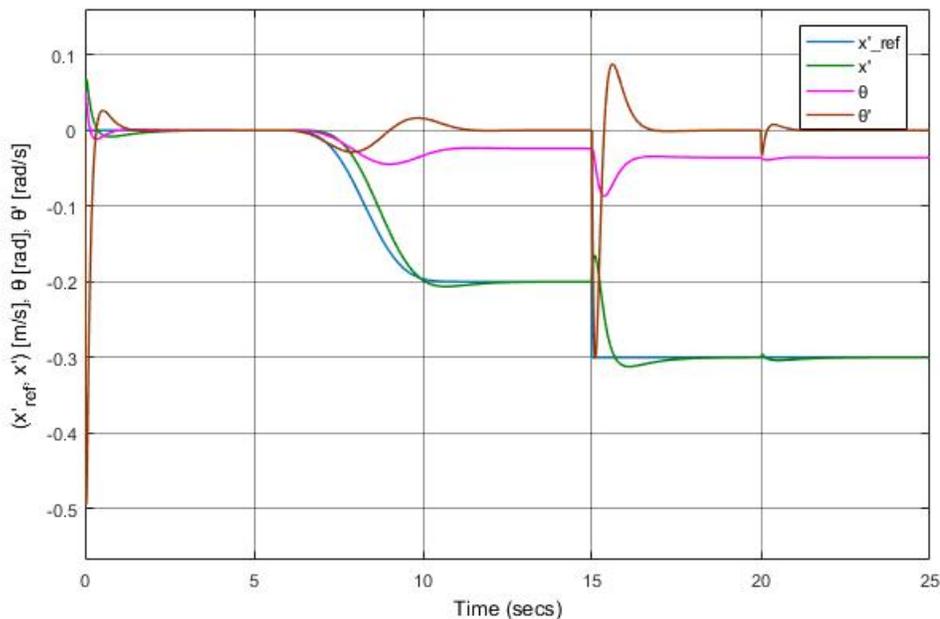
$$C_2(s) = \frac{32.205(s + 72.56)(s + 7.394)(s + 3.899)}{(s + 10)(s + 5.02)(s + 5)} \quad (3-37)$$

Los valores escogidos de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\mathbf{Q}$  y  $R$  que generan los vectores de ganancia  $\mathbf{K}_c$  y  $K_i$  con mejores resultados en simulación son:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 10^4 \end{bmatrix}, R = 0.1 \quad (3-38)$$

$$\mathbf{K}_c = [232.4 \quad 432.65 \quad 62.726], K_i = -100$$

La Figura 3-24 permite ofrece un primer acercamiento de la respuesta del controlador PI vectorial con LQR y FF. El vehículo requiere de 1.5 s para mantener el equilibrio después de partir de la posición de reposo (Figura 3-25). En [6] se establece que el cero ubicado en el semiplano derecho no permite que el control por realimentación de estados realice un seguimiento ajustado, lo cual se comprueba en la Figura 3-26. Aunque el seguimiento de la curva de Bézier mejora, se genera un sobrepico de aproximadamente 5 %. Del cambio de referencia tipo escalón se obtiene: sobrepico aproximado de 12 %, un tiempo de elevación de 3.5 s y tiempo de asentamiento de 4 s. La acción integral en la un estructura del controlador permite rechazar la perturbación aplicada en la señal de control. En la Figura 3-27 se observa que existe un pico de voltaje durante el inicio de la simulación.



**Figura 3-24:** Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR y FF

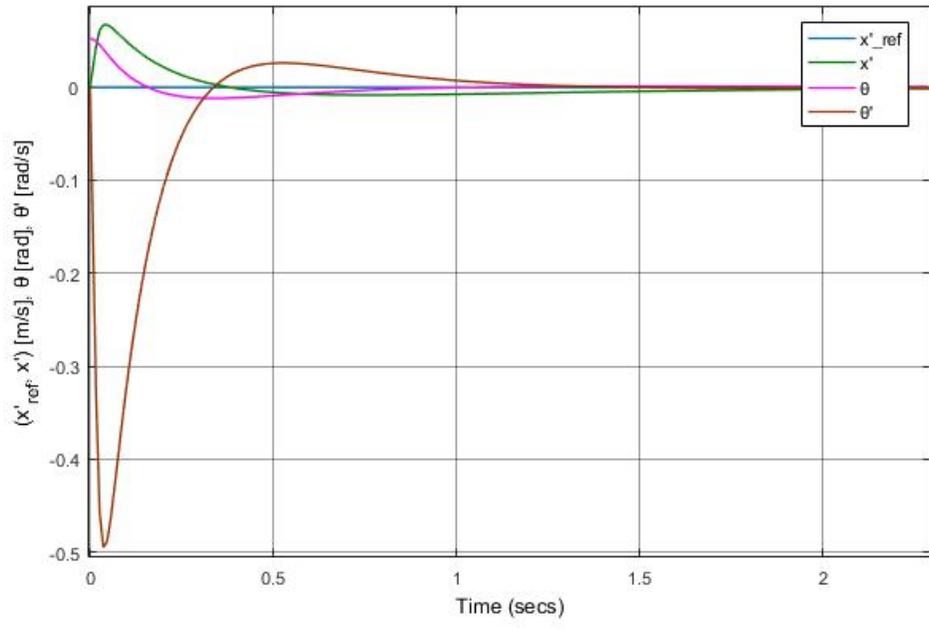


Figura 3-25: Primer detalle de la respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR y FF

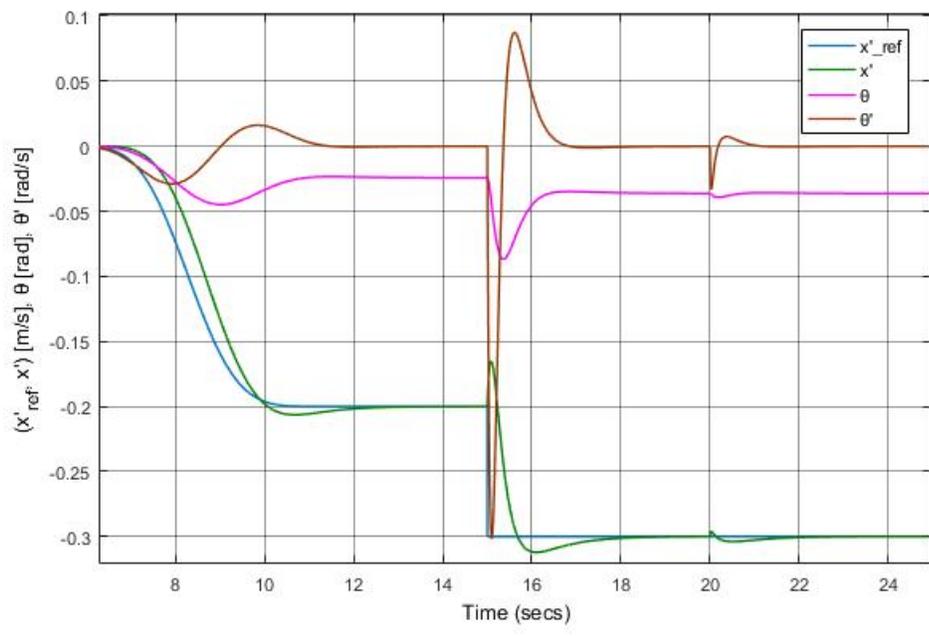


Figura 3-26: Segundo detalle de la respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR y FF

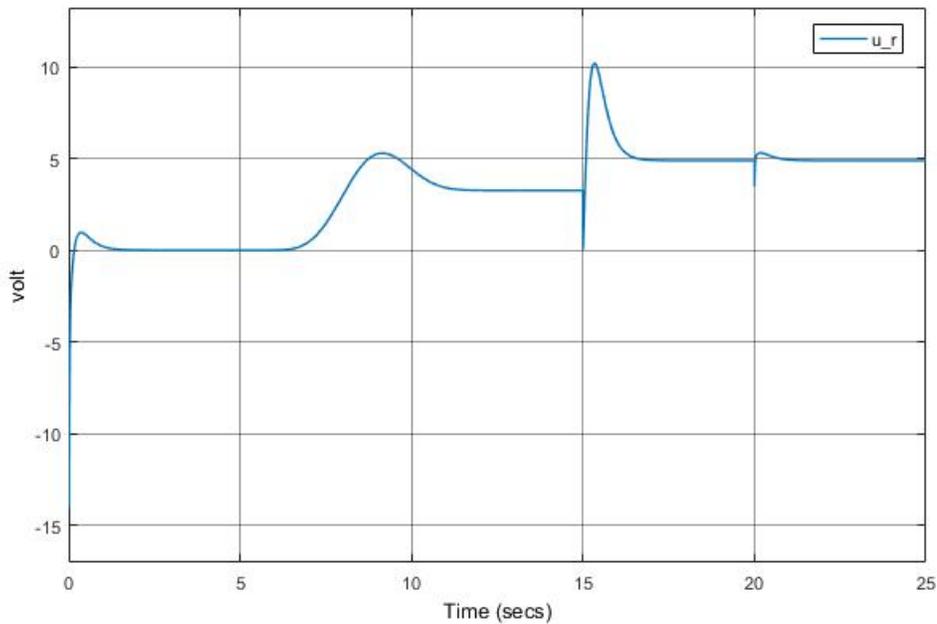


Figura 3-27: Señal de control de la SRDR con PI vectorial con LQR y FF

### 3.6. Control por cadena de integradores con LQR

La inclusión de la acción integral en el lazo cerrado de control permite que el error obtenido con referencias constantes entre la referencia y la salida del sistema tienda a cero [7]. Dado que el desempeño del controlador anterior depende del modelo matemático de sistema, en esta sección se propone un controlador por cadena de integradores para hacer frente a las incertidumbres y cumplir los objetivos planteados (Figura 3-28).

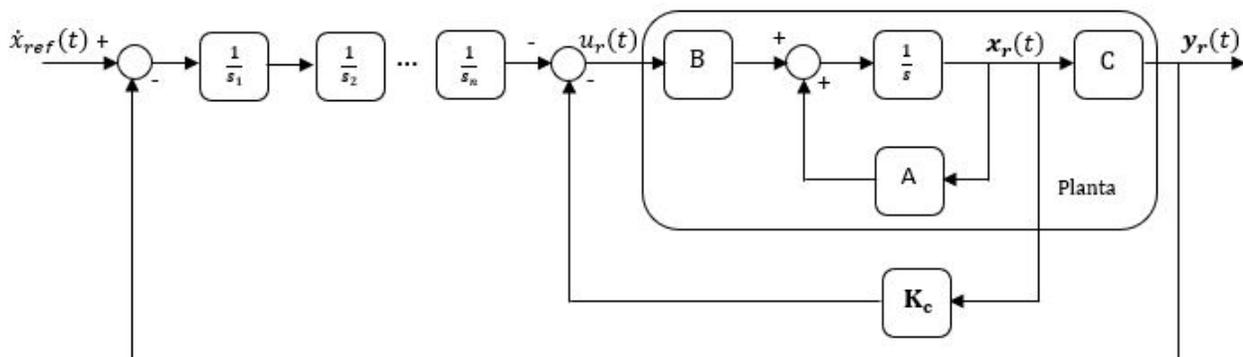


Figura 3-28: Estructura de control por cadena de integradores

Para una cadena de integradores de segundo orden se puede alcanzar la estabilidad del sistema al tomar como base la realimentación de estados [53]. Por esta razón, se utiliza el método de optimización LQR para calcular el vector de ganancias. El modelo global está definido por:

$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{3,2} \\ -\mathbf{B}_i\mathbf{C} & \mathbf{A}_i \end{bmatrix}, \mathbf{B}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{2,1} \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

Donde  $\mathbf{A}_i$  y  $\mathbf{B}_i$  son las matrices en espacio de estado que representan a la cadena de integradores. Las matrices  $\mathbf{Q}$  y  $R$  que producen los mejores resultados en simulación, son:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 10^4 \end{bmatrix}, R = 0.1 \quad (3-40)$$

$$\mathbf{K}_c = [290.85 \quad 442.2 \quad 64.719], \mathbf{K}_i = [-173.21 \quad -378.97]$$

La simulación completa en la Figura 3-29 muestra que el control por cadena de integradores con LQR no realiza un seguimiento de trayectorias acertado. En  $t = 0s$ , el robot se estabiliza en un tiempo cercano a  $2s$ , como se ve en la Figura 3-30. De la Figura 3-31 se pueden obtener las siguientes conclusiones: durante la curva de Bézier se presenta un sobrepico aproximado de 25 % que no permite al vehículo alcanzar estado estacionario antes de afrontar el cambio de referencia tipo escalón. En el cambio de referencia tipo escalón se ve un sobrepico aproximado de 31 % que aleja al sistema de estado estacionario antes de ser aplicada la señal de perturbación. Por lo anterior, no se puede obtener de manera exacta los tiempos de elevación y asentamiento. La Figura 3-32 muestra que en el comienzo de la simulación y en el cambio de referencia de tipo escalón hay picos de voltaje.

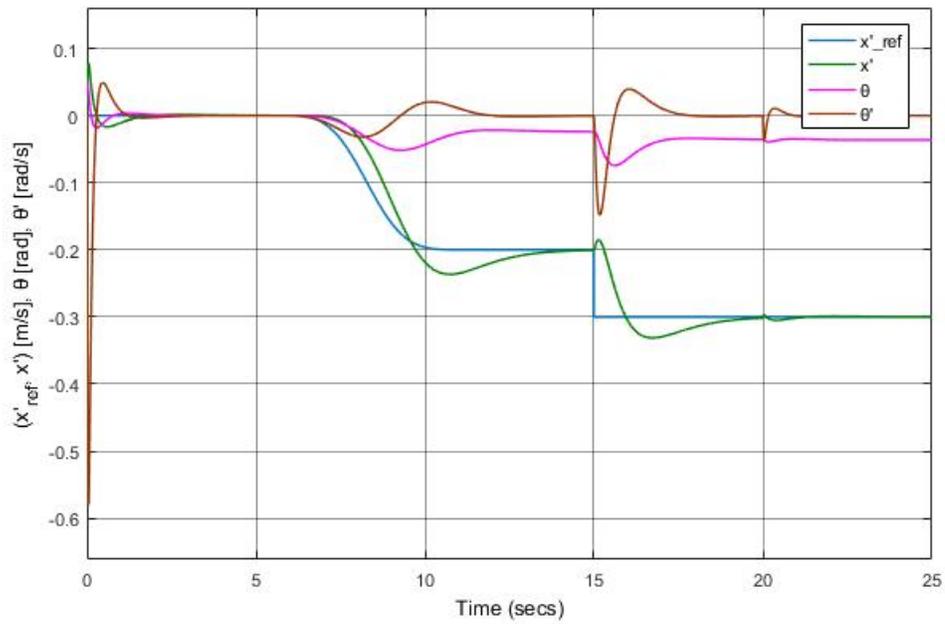


Figura 3-29: Respuesta de la SRDR por cadena de integradores con LQR

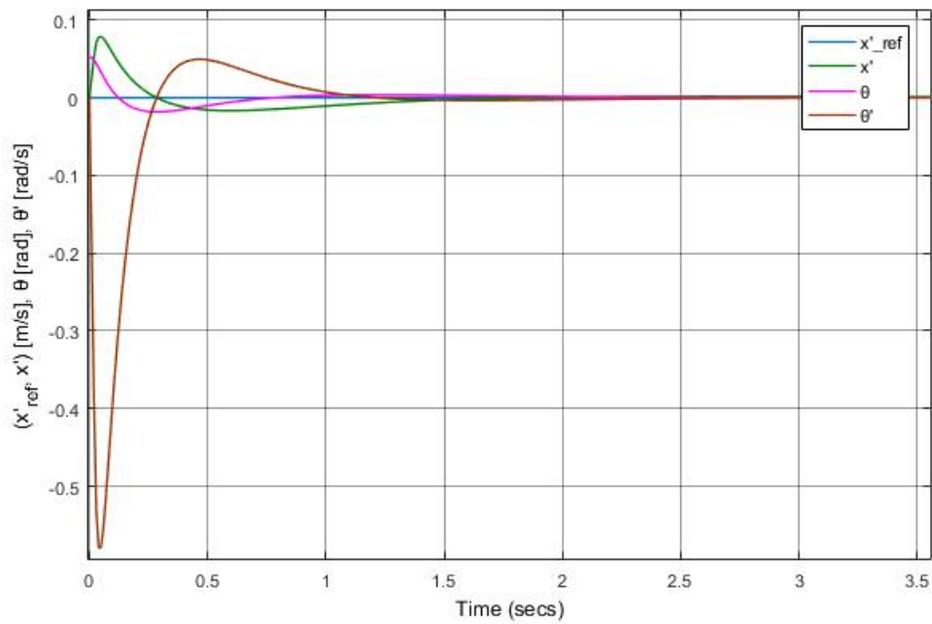
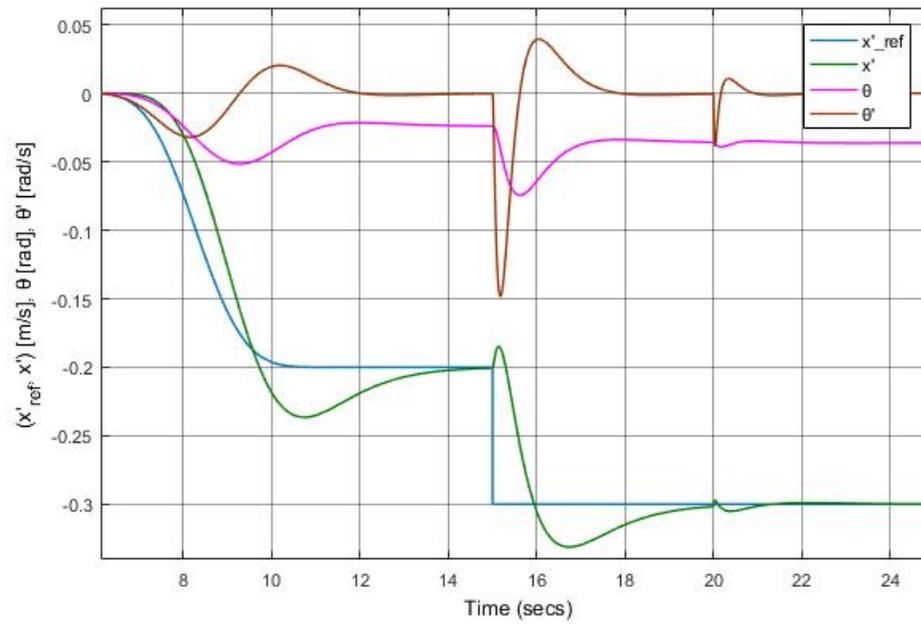
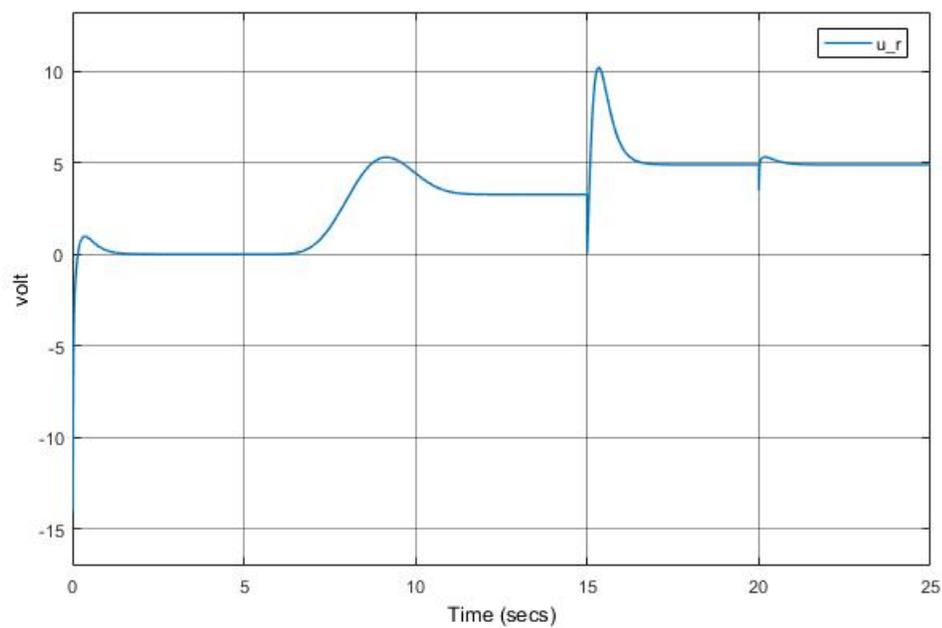


Figura 3-30: Primer detalle de la respuesta de la SRDR por cadena de integradores con LQR



**Figura 3-31:** Segundo detalle de la respuesta de la SRDR por cadena de integradores con LQR



**Figura 3-32:** Señal de control de la SRDR por cadena de integradores con LQR

## 3.7. Control GPI con observador desacoplado de estado extendido

### 3.7.1. Salida plana SRDR

Con el fin de mejorar el seguimiento de referencias de velocidad se diseña una estrategia de control basada en una estructura lineal que puede ser usada en sistemas no lineales denominada control GPI. Este controlador usa un modelo de la perturbación expresado en cadena de integradores que está incluido en el observador, para hacer un rechazo activo de perturbaciones. El número de integradores se determina de acuerdo al polinomio con el cual se puedan aproximar las perturbaciones a rechazar [47]. Con ánimos de comprobar la efectividad de esta metodología, en vez de utilizar el modelo identificado, se toma el modelo nominal como base del diseño.

La estrategia de control GPI se apoya en el concepto de planitud diferencial. Esta propiedad permite parametrizar la totalidad de las variables del sistema incluyendo estados, entradas y salidas en un número finito de variables independientes denominadas salidas planas y un número finito de sus derivadas [45].

La dinámica de la SRDR se expresa mediante la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}u_r(t), \mathbf{x}_r(t) \in R^n, u_r(t) \in R \quad (3-41)$$

La salida plana está dada por la combinación lineal de los estados obtenidos en la última fila de la matriz inversa de controlabilidad  $\mathbf{T}$  [45]:

$$f(t) = [0 \ 0 \ \dots \ 1] [\mathbf{B}, \ \mathbf{AB}, \ \dots, \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1} \mathbf{x}_r(t) \quad (3-42)$$

En este caso, la salida plana del prototipo de SRDR es:

$$f(t) = (br + Mpl)x(t) + (a + rMpl)\theta(t) \quad (3-43)$$

Se deriva (3-43) hasta que aparece el término de la señal de control. Adicionalmente, se toman como referencia las ecuaciones (2-32) y (2-33) para reducir los términos. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(t) &= (br + Mpl)x(t) + (a + rMpl)\theta(t) \\ \dot{f}(t) &= (br + Mpl)\dot{x}(t) + (a + rMpl)\dot{\theta}(t) \\ \ddot{f}(t) &= Mpgl\theta(t) \\ f^{(3)}(t) &= Mpgl\dot{\theta}(t) \\ f^{(4)}(t) &= Mpgl \left( \frac{2K_m K_e (br + Mpl)}{Rr(ab - Mp^2 l^2)} \dot{x}(t) + \frac{Mpglb}{ab - Mp^2 l^2} \theta(t) + \frac{2K_m(-br - Mpl)}{Rr(ab - Mp^2 l^2)} V_a \right) \end{aligned} \quad (3-44)$$

siendo  $V_a = u_r(t)$ . Así, el sistema puede ser llevado a la forma:

$$f^{(4)}(t) = \kappa u_r(t) + \xi(t) \quad (3-45)$$

donde

$$\kappa = Mppl \frac{2K_m(-br - Mpl)}{Rr(ab - Mp^2l^2)}$$

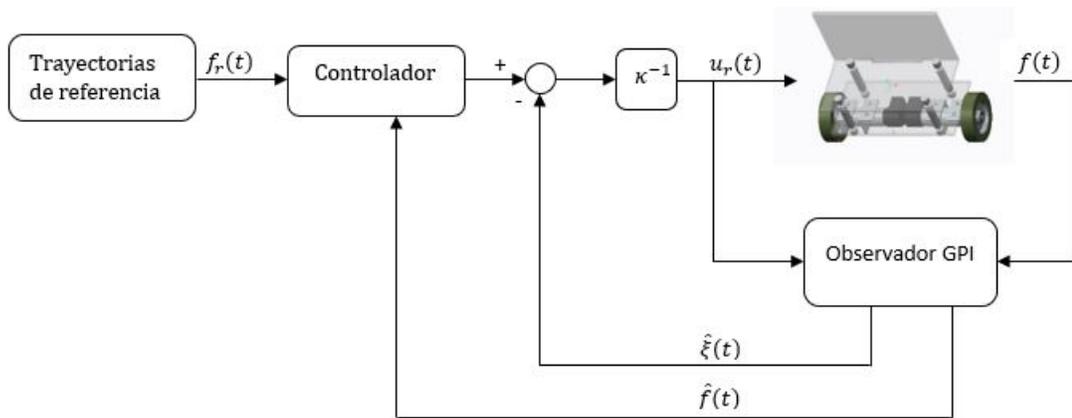
$$\xi(t) = Mppl \frac{2K_m K_e(br + Mpl)}{Rr(ab - Mp^2l^2)} \dot{x}(t) + \frac{Mpplb}{ab - Mp^2l^2} \theta(t)$$

y  $\xi(t)$  es la variable de perturbación acotada. La entrada de control  $u_r(t)$  se define como:

$$u_r(t) = \frac{1}{\kappa} (f_r^{(4)}(t) - k_3(f^{(3)}(t) - f_r^{(3)}(t)) - k_2(\ddot{f}(t) - \ddot{f}_r(t)) - k_1(\dot{f}(t) - \dot{f}_r(t)) - k_0(f(t) - f_r(t)) - \xi(t)) \quad (3-46)$$

donde  $f_r(t)$  son las trayectorias de referencia conocidas para la salida plana. La estructura del controlador en (3-46) considera a la perturbación  $\xi(t)$  y a sus derivadas como acotadas. Dado que la SRDR es un sistema físico sujeto a perturbaciones exógenas desconocidas, se propone estimar a  $\xi(t)$  por medio de un observador.

### 3.7.2. Observador desacoplado de estado extendido



**Figura 3-33:** Estructura de control con observador GPI

Las incertidumbres endógenas del modelo dinámico de la SRDR y las perturbaciones exógenas hacen parte de  $\xi(t)$ . Con el fin de obtener un desempeño robusto se adiciona un estado al observador de perturbaciones para aproximar a  $\xi(t)$  (Figura 3-33) [46]. Considerando la SRDR como el sistema perturbado en (3-45) y un acotamiento de  $\xi(t)$  y su derivada:

$$\sup_t |\xi^{(i)}| = K_i, \quad i = 0, 1. \quad (3-47)$$

se propone el siguiente observador de estado extendido en términos de la salida plana:

$$\begin{aligned} f(t) &= \hat{f}_1(t) \\ \dot{\hat{f}}_1(t) &= \hat{f}_2(t) + \lambda_4(f(t) - \hat{f}_1(t)) \\ \dot{\hat{f}}_2(t) &= \hat{f}_3(t) + \lambda_3(f(t) - \hat{f}_1(t)) \\ \dot{\hat{f}}_3(t) &= \hat{f}_4(t) + \lambda_2(f(t) - \hat{f}_1(t)) \\ \dot{\hat{f}}_4(t) &= \kappa u_r(t) + \hat{\xi}(t) + \lambda_1(f(t) - \hat{f}_1(t)) \\ \dot{\hat{\xi}}(t) &= \lambda_0(f(t) - \hat{f}_1(t)) \end{aligned} \quad (3-48)$$

Con la configuración en (3-48), el observador requiere estimar la totalidad de los estados para encontrar la estimación de la perturbación  $\hat{\xi}(t)$ , por lo que necesita un ancho de banda lo suficientemente grande para lograrlo. En [35] se propone utilizar las variables que pueden ser medibles para disminuir el ancho de banda y obtener la estimación de la perturbación. De las ecuaciones (3-44) y (3-48) se establece que:

$$\begin{aligned} f(t) &= \hat{f}_1(t) \\ \dot{\hat{f}}_1(t) &= \hat{f}_2(t) \\ \dot{\hat{f}}_2(t) &= \hat{f}_3(t) = M_p g l \theta(t) \\ \dot{\hat{f}}_3(t) &= \hat{f}_4(t) \\ \dot{\hat{f}}_4(t) &= \hat{f}_5(t) \\ \dot{\hat{f}}_5(t) &= \frac{d\xi}{dt} \approx 0 \end{aligned} \quad (3-49)$$

En (3-49) se puede ver que  $\ddot{f}(t) = \dot{\hat{f}}_3(t) = M_p g l \theta(t)$  además de ser la entrada del subsistema:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{f}}_1(t) &= \hat{f}_2(t) \\ \dot{\hat{f}}_2(t) &= \hat{f}_3(t) = M_p g l \theta(t) \end{aligned} \quad (3-50)$$

también es la salida medible del subsistema:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{f}}_3(t) &= \hat{f}_4(t) \\ \dot{\hat{f}}_4(t) &= \kappa u_r(t) + \xi(t) \end{aligned} \quad (3-51)$$

Con lo anterior establecido, se plantea el siguiente observador desacoplado de estado extendido:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{f}}_1(t) &= \hat{f}_2(t) + \lambda_4(f(t) - \hat{f}_1(t)) \\
\dot{\hat{f}}_2(t) &= \ddot{f}(t) + \lambda_3(f(t) - \hat{f}_1(t)) \\
\dot{\hat{f}}_3(t) &= \hat{f}_4(t) + \lambda_2(\ddot{f}(t) - \dot{\hat{f}}_3(t)) \\
\dot{\hat{f}}_4(t) &= \kappa u_r(t) + \hat{\xi}(t) + \lambda_1(\ddot{f}(t) - \dot{\hat{f}}_3(t)) \\
\dot{\hat{\xi}}(t) &= \lambda_0(\ddot{f}(t) - \dot{\hat{f}}_3(t))
\end{aligned} \tag{3-52}$$

Para la estimación de  $\dot{\hat{f}}_1(t)$  y  $\dot{\hat{f}}_2(t)$  no se requiere un ancho de banda grande, ya que solo se estiman dos estados. Sus ganancias se calculan a partir de:

$$\begin{aligned}
[\lambda_4, \lambda_3] &= s^2 + 2\zeta_1 w_{n1} s + w_{n1}^2 \\
\lambda_4 &= 2\zeta_1 w_{n1} s, \quad \lambda_3 = w_{n1}^2
\end{aligned} \tag{3-53}$$

Para estimar  $\dot{\hat{f}}_3(t)$ ,  $\dot{\hat{f}}_4(t)$  y  $\dot{\hat{\xi}}(t)$  se requiere un ancho de banda mayor para obtener un error de estimación pequeño, aunque mucho menor que el requerido en (3-48). Las ganancias de este observador se obtienen de:

$$\begin{aligned}
[\lambda_2, \lambda_1, \lambda_0] &= (s + w_{n2})(s^2 + 2\zeta_2 w_{n2} s + w_{n2}^2) \\
\lambda_2 &= 2\zeta_2 w_{n2} + w_{n2}, \quad \lambda_1 = 2\zeta_2 w_{n2}^2 + w_{n2}^2, \quad \lambda_0 = w_{n2}^3
\end{aligned} \tag{3-54}$$

Con la estructura del observador desacoplado de estado extendido definida, el controlador toma la forma:

$$u_r(t) = \frac{1}{\kappa} (f_r^{(4)}(t) - k_3(\hat{f}^{(3)}(t) - f_r^{(3)}(t)) - k_2(\ddot{f}(t) - \ddot{f}_r(t)) - k_1(\dot{\hat{f}}(t) - \dot{f}_r(t)) - k_0(f(t) - f_r(t)) - \hat{\xi}(t)) \tag{3-55}$$

La estructura del controlador (3-55) estabiliza el sistema (3-45) al ubicar los polos por medio del siguiente polinomio característico:

$$s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0 = (s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2)^2 \tag{3-56}$$

Las constantes de amortiguación  $w_n$  y frecuencias naturales  $\zeta$  se escogen para que los polinomios de (3-53), (3-54) y (3-56) sean Hurwitz y sus raíces estén localizadas en el semiplano izquierdo. Para el controlador se cumple que  $k_3 = 4\zeta w_n$ ,  $k_2 = 2(1 + 2\zeta^2)w_n^2$ ,  $k_1 = 4\zeta w_n^3$ ,  $k_0 = w_n^4$ , para cualquier  $\zeta > 0$  y  $w_n > 0$ . Los valores de las constantes de amortiguación  $w_n$  y

frecuencias naturales  $\zeta$  que presentan los mejores resultados en simulación permiten obtener las ganancias del observador desacoplado de estado extendido y del controlador:

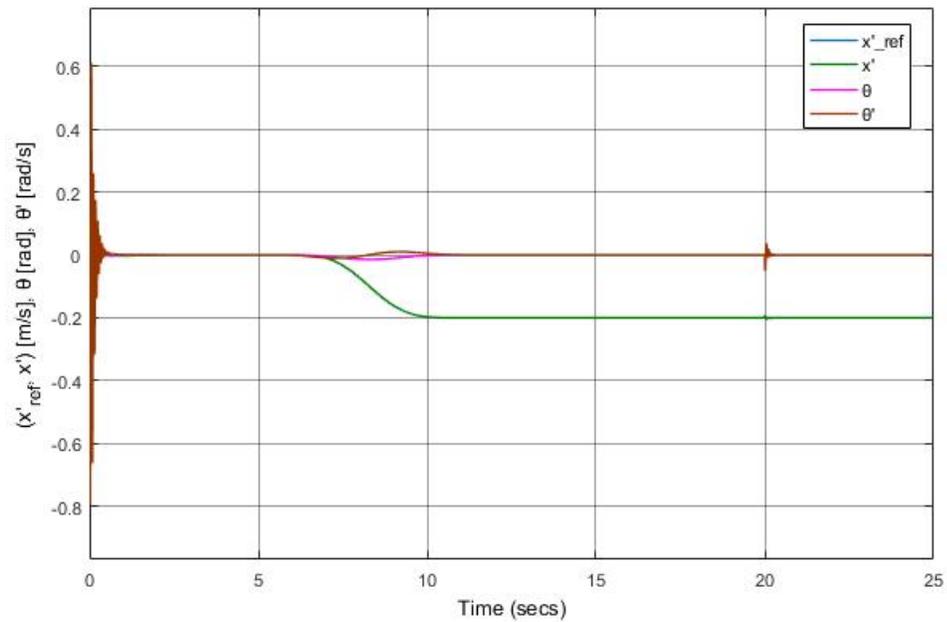
$$\begin{aligned}\lambda_4 &= 360, \lambda_3 = 8100 \\ \lambda_2 &= 120, \lambda_1 = 12000, \lambda_0 = 1000000 \\ \kappa &= 2.6826, k_3 = 64, k_2 = 1152, k_1 = 4096, k_0 = 4096\end{aligned}$$

Para conocer el valor de las variables de estado, estas se representan en términos de la salida plana y sus derivadas:

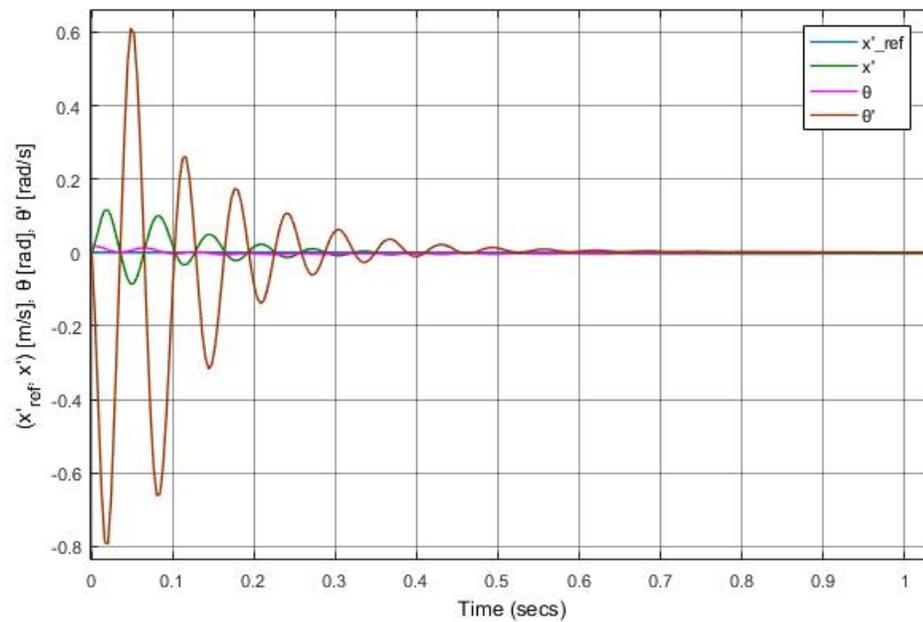
$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{br + M_pl} f(t) - \frac{a + M_plr}{M_pgl} \ddot{f}(t) \\ \dot{x}(t) &= \frac{1}{br + M_pl} \dot{f}(t) - \frac{a + M_plr}{M_pgl} f^{(3)}(t) \\ \theta(t) &= \frac{1}{M_pgl} \ddot{f}(t) \\ \dot{\theta}(t) &= \frac{1}{M_pgl} f^{(3)}(t)\end{aligned}\tag{3-57}$$

La estructura del controlador GPI en (3-55) requiere que se conozcan el número de derivadas de la señal de referencia equivalente al orden del observador para realizar seguimiento [46].

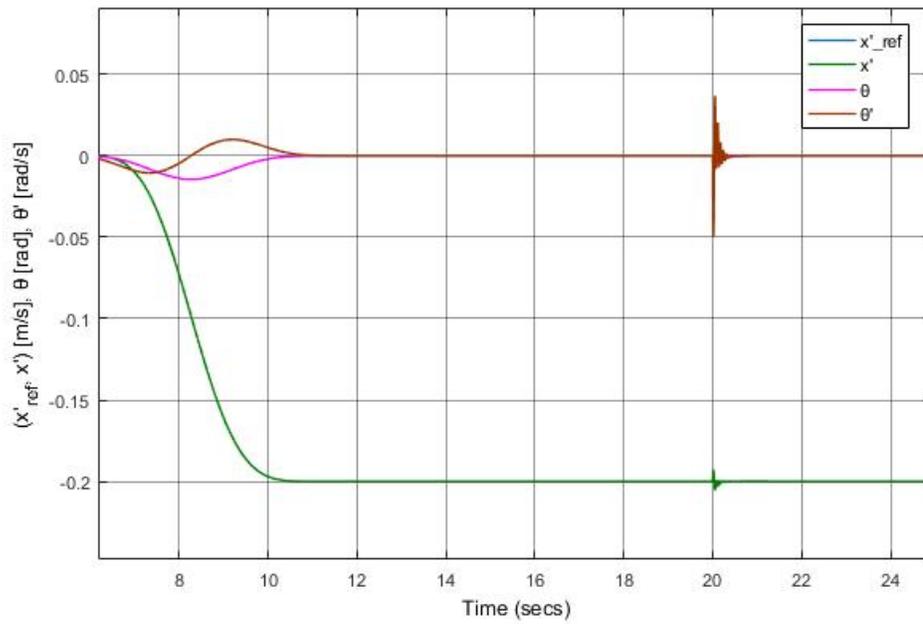
Dado que la señal de referencia debe ser suave para que sus derivadas correspondan a las del sistema, el cambio de referencia tipo escalón no se aplica durante la simulación (Figura 3-34). En la Figura 3-35 se observa que partiendo desde posición vertical, el vehículo oscila hasta alcanzar equilibrio en 0.7 s. La Figura 3-36 muestra que el seguimiento durante la curva de Bézier es preciso, lo que comprueba que con una señal de referencia suave y sus derivadas, la prealimentación al sistema de control causa una mejora notable en el desempeño [5]. En adición, la perturbación aplicada en la señal de control es rechazada efectivamente, con un error de estado estacionario igual a cero. Al comienzo de la simulación se puede ver un pico de voltaje cuando el robot parte de posición vertical (Figura 3-37). Al no tener que estimar la totalidad de las salidas planas para obtener la estimación de la perturbación, el observador de estado extendido desacoplado permite que el controlador utilice un voltaje menor en comparación a los controladores de este capítulo, como se ve en la Figura 3-38.



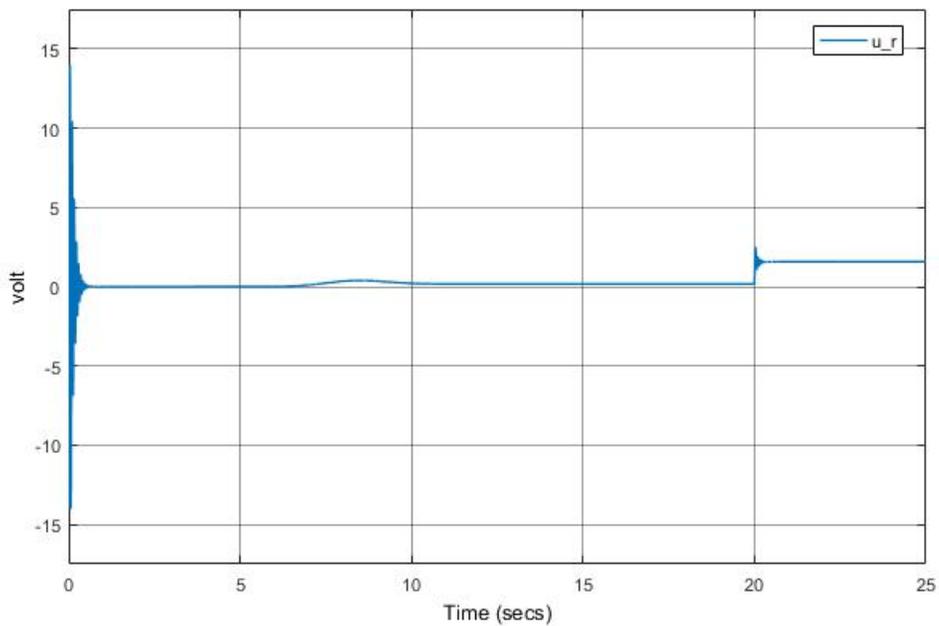
**Figura 3-34:** Respuesta de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido



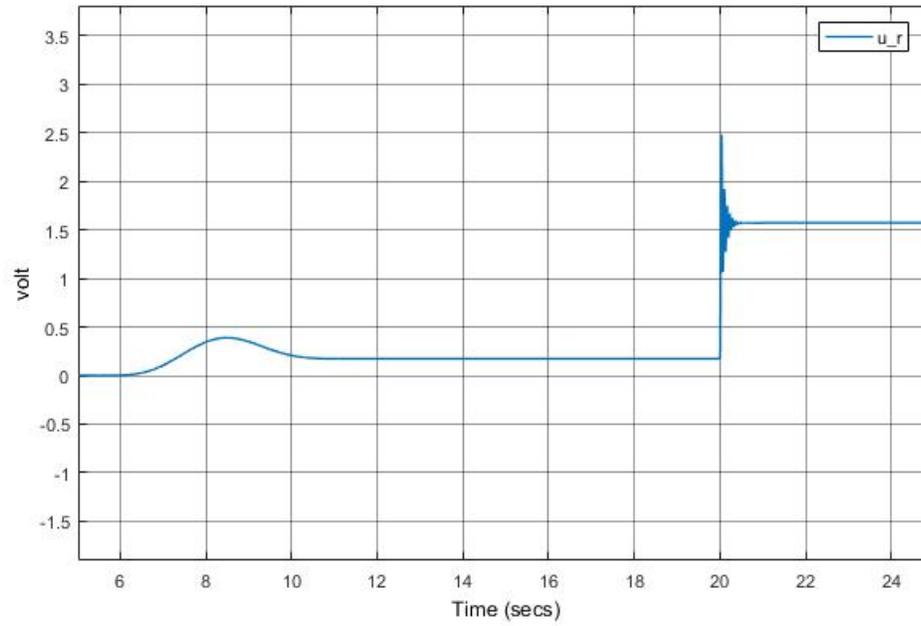
**Figura 3-35:** Primer detalle de la respuesta de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido



**Figura 3-36:** Segundo detalle de la respuesta de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido



**Figura 3-37:** Señal de control de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido



**Figura 3-38:** Detalle de la señal de control de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido

### 3.7.3. Comparación de resultados de los controladores en simulación

La Tabla 3-1 compara los resultados de cada controlador con base en los criterios de desempeño establecidos al comienzo del capítulo. Los controladores PID de doble lazo cerrado y GPI con observador desacoplado de estado extendido necesitan un tiempo menor para estabilizar al vehículo al partir de posición vertical. Aunque los controladores RVE con LQR y precompensador y PI vectorial con LQR y FF se aproximan a la referencia, la inclusión de las derivadas de la señal de referencia permiten concluir que el controlador GPI con observador desacoplado de estado extendido es el único que realiza un seguimiento de referencia ajustado. Es importante resaltar que el controlador GPI parte del modelo nominal, lo que simplifica el diseño y resalta la efectividad del observador desacoplado de estado extendido. La respuesta del controlador RVE con LQR y precompensador presenta los menores tiempos de elevación, asentamiento y porcentaje de sobrepicos causados por el cambio de referencia de tipo escalón, aunque no logra que el error de estado estacionario sea cero después de ser aplicada la perturbación. En contraste, los controladores que incluyen una acción integral en su estructura de control logran que el error de estado estacionario sea aproximadamente cero.

**Tabla 3-1:** Resultados de los controladores en simulación

Controlador	CD1	CD2	CD3	CD4	CD5	CD6
PID de doble lazo cerrado	0.7s	C	2s	4s	0 %	No
RVE con LQR y precompensador	1.3s	B	1.7s	2s	0 %	No
PI vectorial con LQR	1.8s	D	3.7s	4s	0 %	Sí
PI vectorial con LQR y FF	1.5s	B	3.5s	4s	12 %	Sí
Cadena de integradores con LQR	2s	F	-	-	31 %	Sí
GPI con observador desacoplado de estado extendido	0.7s	A	-	-	0 %	Sí

A: excelente, B: bueno, C: aceptable, D: insuficiente, F: malo

CD1: Tiempo en volver a equilibrio, CD2: Seguimiento de trayectorias

CD3: Tiempo de elevación, CD4: Tiempo de asentamiento

CD5: Porcentaje de sobrepicos, CD6: Rechazo de perturbaciones constantes

## 4 Evaluación de controladores

En este capítulo se realiza la implementación en tiempo discreto de las estrategias de control diseñadas en la etapa anterior. Se utiliza el procesador F28377S que hace parte de la familia de microcontroladores C2000 Delfino de Texas Instruments® y la aplicación solidThinking Embed® para programar los controladores. El modelo identificado (2-46) se discretiza por medio del método de invarianza al escalón con un tiempo de muestreo  $T_s = 2 \text{ ms}$ :

$$\mathbf{x}_r(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_r(k) + \mathbf{B}_d u_r(k) \quad (4-1)$$

donde  $\mathbf{A}_d$  y  $\mathbf{B}_d$  son respectivamente:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0.99755 & -0.063028 & -6.3048 \cdot 10^{-5} \\ 1.3416 \cdot 10^{-5} & 1.0006 & 0.0020004 \\ 0.013412 & 0.55261 & 1.0006 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} -0.00061785 \\ 4.9239 \cdot 10^{-6} \\ 0.004923 \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

Para implementar los controladores se mantiene el diseño en simulación realizado en el capítulo anterior. En adición, el software de programación solidThinking Embed® no permite el uso de caracteres especiales en las gráficas, por lo que la nomenclatura de las variables de salida queda definida como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ref}(k) &= ref \\ \dot{x}(k) &= dx \\ \theta(k) &= theta \\ \dot{\theta}(k) &= dtheta \end{aligned}$$

### 4.1. Seguimiento de trayectorias

En esta sección se evalúa el comportamiento de la SRDR en el aspecto de seguimiento de trayectorias. La norma internacional ISO 2631 (Tabla 4-1) establece la relación entre las aceleraciones y su repercusión en el cuerpo humano. En [51] se comprobó que la propulsión en sillas de ruedas estándar y eléctricas excede los límites de comodidad establecidos por esta norma. Por tal motivo, las señales de referencia en esta sección son curvas de Bézier que generan perfiles suaves de velocidad con aceleraciones bajas.

Tabla 4-1: ISO 2631-1

Aceleración total	Consecuencia
$a < 0.315 \text{ m/s}^2$	cómodo
$0.315 \text{ m/s}^2 < a < 0.63 \text{ m/s}^2$	un poco incómodo
$0.5 \text{ m/s}^2 < a < 1 \text{ m/s}^2$	bastante incómodo
$0.8 \text{ m/s}^2 < a < 1.6 \text{ m/s}^2$	incómodo
$1.25 \text{ m/s}^2 < a < 2.5 \text{ m/s}^2$	muy incómodo
$a > 2.5 \text{ m/s}^2$	extremadamente incómodo

Con el fin de exponer las ventajas y desventajas de cada controlador, se generan dos referencias con diferentes perfiles de velocidad y aceleración. En ambos experimentos y en terreno liso, el vehículo empieza en posición vertical con un ángulo aproximado de  $\pm 5$  grados. La primera señal de referencia requiere que el vehículo avance desde  $t = 5 \text{ s}$  hasta  $t = 20 \text{ s}$ , y luego retroceda desde  $t = 25 \text{ s}$  hasta  $t = 40 \text{ s}$  (Figura 4-1). La segunda referencia sucede en un tiempo menor, avanzando entre  $5 \text{ s}$  y  $16 \text{ s}$  y retrocediendo entre  $20 \text{ s}$  y  $31 \text{ s}$  (Figura 4-3). En ambas referencias, la magnitud de velocidad deseada es  $\pm 0.3 \text{ m/s}$  que resulta en perfiles de aceleración diferentes, como se ve en las Figuras 4-2 y 4-4.

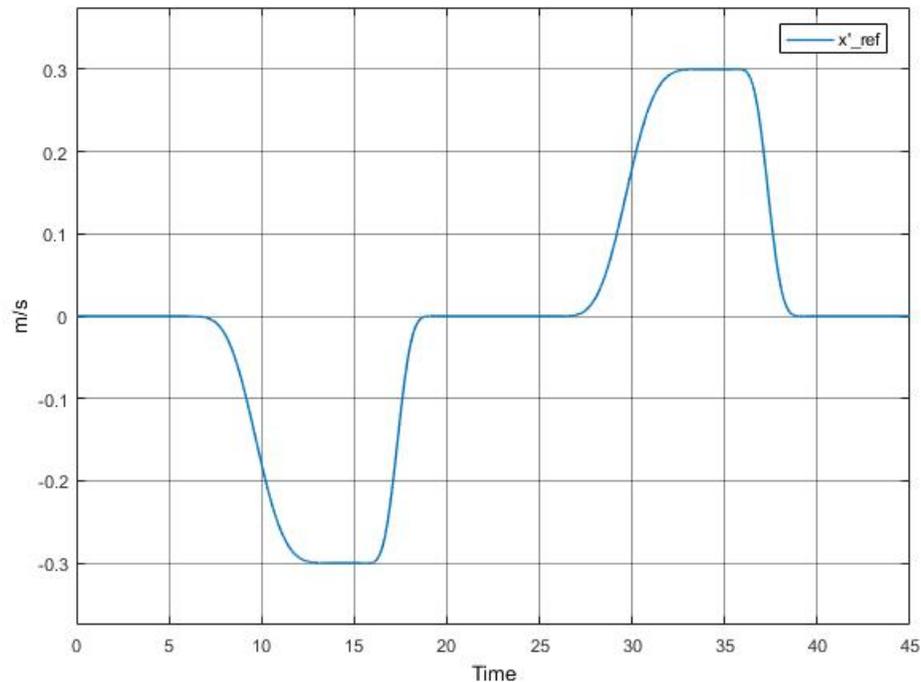


Figura 4-1: Perfil de velocidad de la primera trayectoria

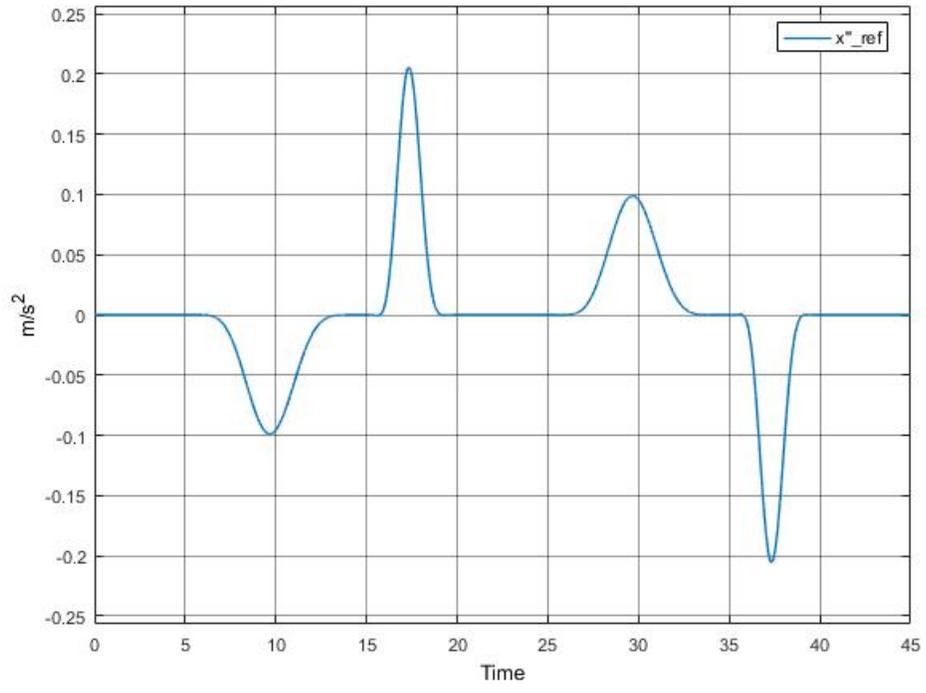


Figura 4-2: Perfil de aceleración de la primera trayectoria

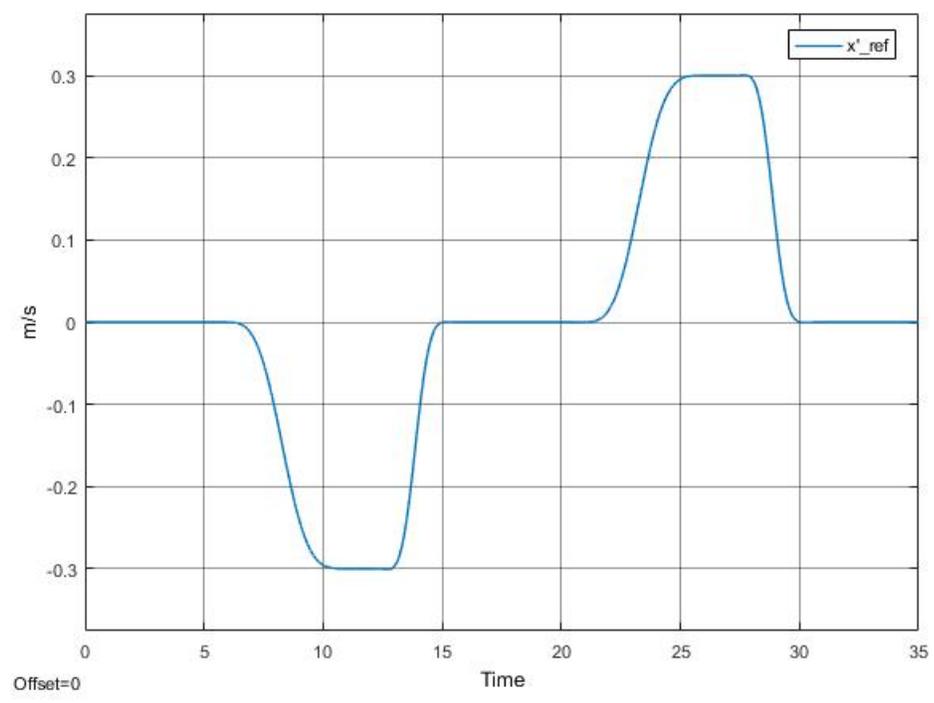


Figura 4-3: Perfil de velocidad de la segunda trayectoria

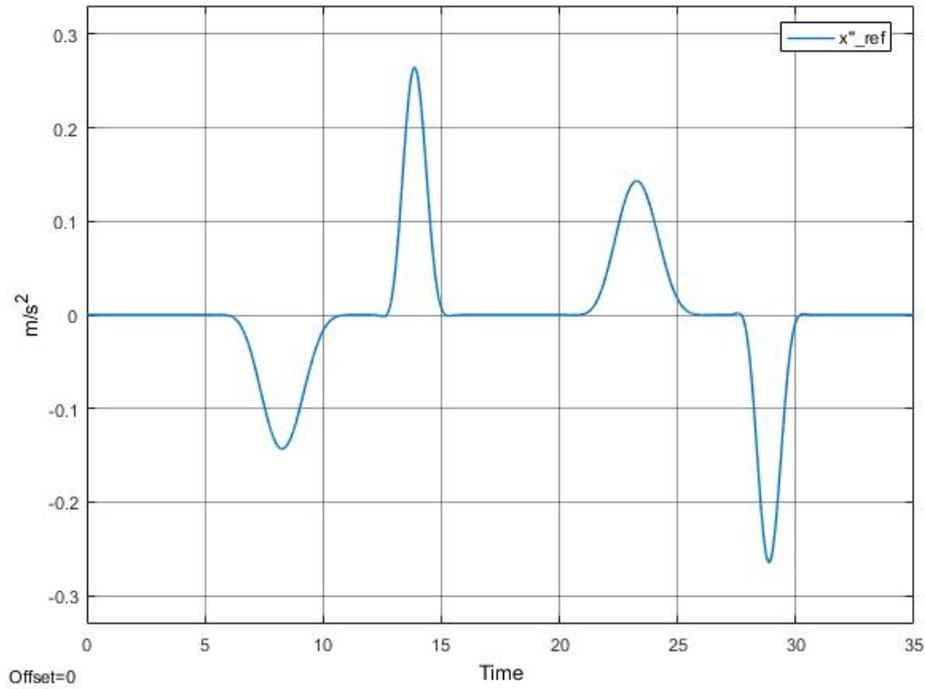


Figura 4-4: Perfil de aceleración de la segunda trayectoria

#### 4.1.1. Controlador PID de doble lazo cerrado en tiempo discreto

El controlador PID de doble lazo cerrado se discretiza usando la aproximación de Euler hacia adelante. Su estructura, definida en el segundo capítulo, está dada por:

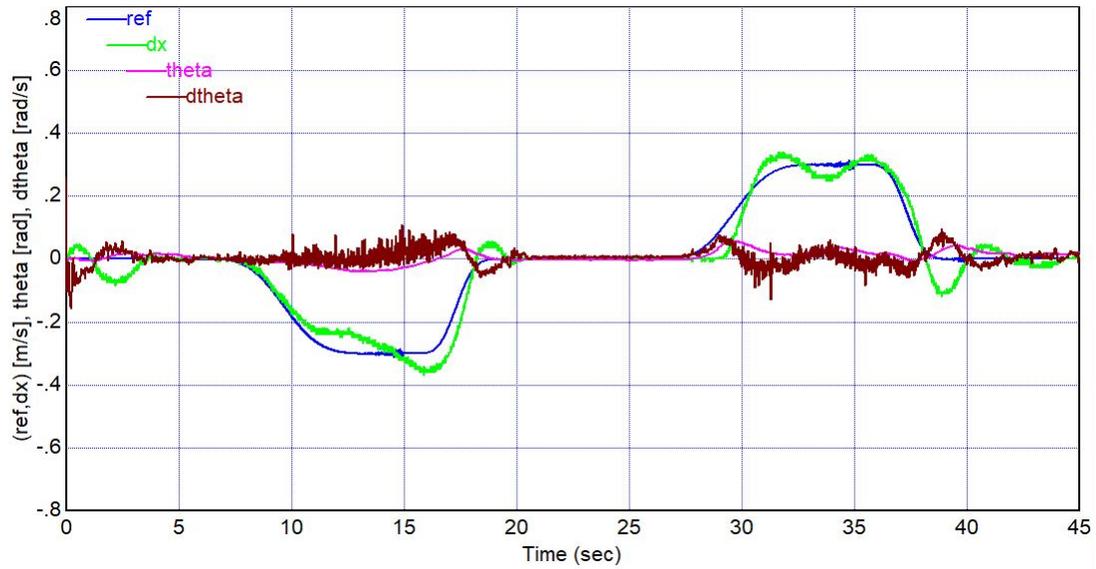
$$C_{PID_d} = K_p + \frac{K_i T_s}{z - 1} + \frac{K_d N}{1 + N T_s \frac{1}{z-1}} \quad (4-3)$$

Reemplazando los valores numéricos respectivos se obtiene:

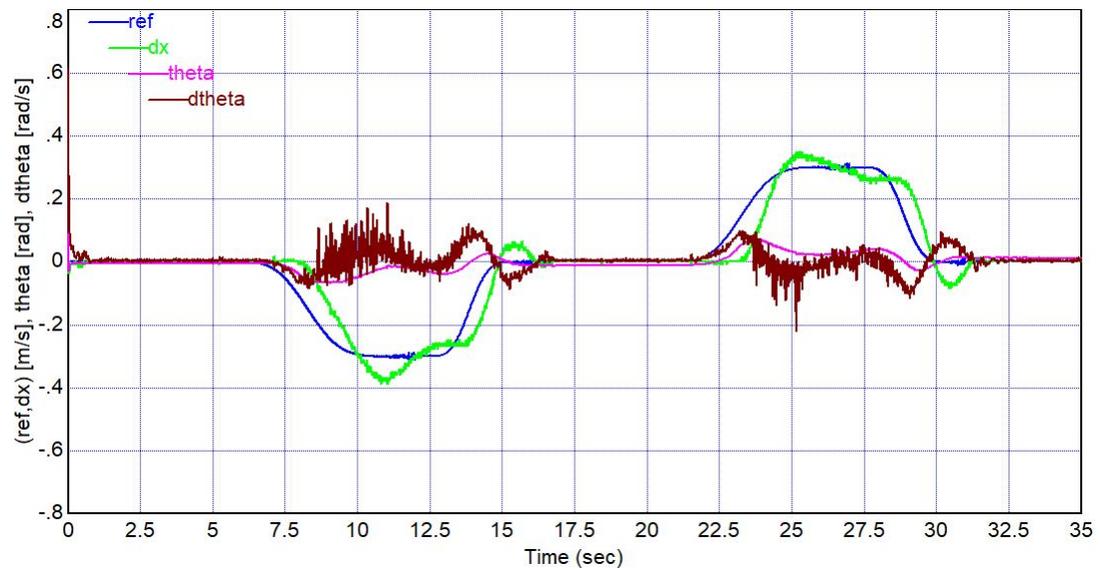
$$C_{PID_d} = 500 + 20 \frac{0.002}{z - 1} + 30 \frac{100z - 100}{z - 0.8} \quad (4-4)$$

$$C_{PI_d} = 125 + 75 \frac{0.002}{z - 1}$$

Partiendo desde posición vertical el robot se equilibra en un tiempo cercano a 5 s, como se muestra en las Figuras 4-5 y 4-6. El controlador PID de doble lazo cerrado, a pesar de estar en el valor de referencia durante 3 s al comienzo y final de la primera trayectoria, no logra un seguimiento adecuado. Sin embargo, al tener la segunda trayectoria un perfil de aceleración mayor, la magnitud de los sobrepicos aumenta cuando el valor de la referencia es 0.3 m/s y 0 m/s. En ambas trayectorias el error de estado estacionario es cercano a cero cuando el vehículo alcanza equilibrio estático.



**Figura 4-5:** Respuesta de la SRDR con PID de doble lazo cerrado para la primera trayectoria



**Figura 4-6:** Respuesta de la SRDR con PID de doble lazo cerrado para la segunda trayectoria

### 4.1.2. Controlador por RVE con LQR y precompensador en tiempo discreto

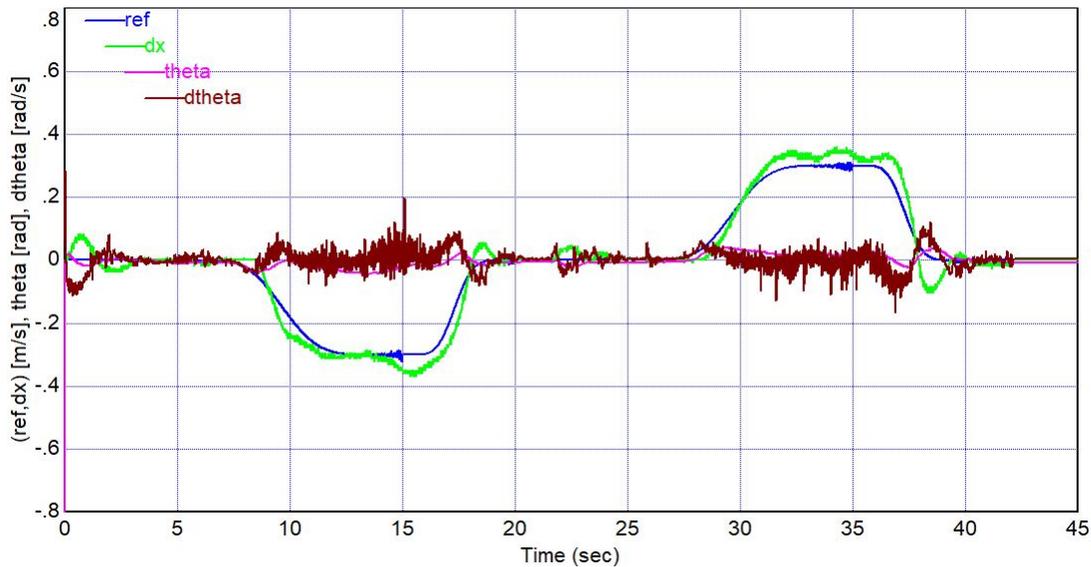
El índice de desempeño del controlador por RVE con LQR y precompensador en tiempo discreto está definido por:

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x}'_r[k] \mathbf{Q} \mathbf{x}_r[k] + u'_r[k] R u_r[k]) \quad (4-5)$$

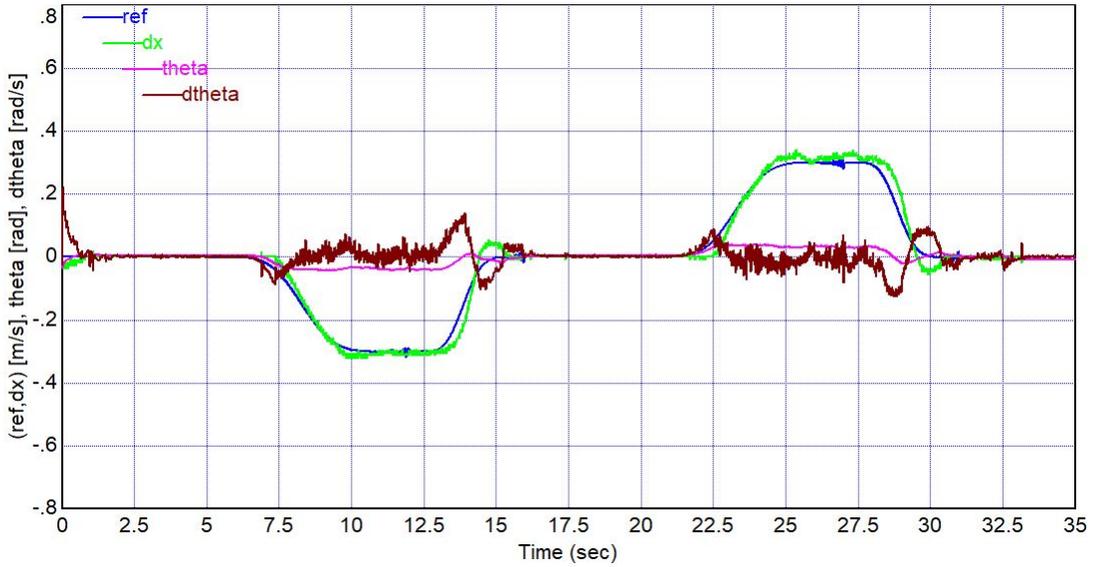
Por medio del comando `dlqr(Ad, Bd, Q, R)` de Matlab® se resuelve la ecuación de Ricatti y se obtiene el vector de ganancia para los valores escogidos de  $\mathbf{Q}$  y  $R$  en (3-12):

$$\mathbf{K} = [220.25 \quad 439.66 \quad 64.78] \quad (4-6)$$

Al comienzo del experimento, el controlador por RVE con LQR y precompensador permite que el vehículo alcance equilibrio en un tiempo aproximado de 5 s. La ausencia de acción integral en el controlador es notable en la primera trayectoria. Al ser esta más suave y generar un desplazamiento mayor, las oscilaciones en estado transitorio son más grandes que en la segunda trayectoria (Figuras 4-7 y 4-8). Este comportamiento es más notable cuando el robot retrocede, ya que el espaldar no está ubicado en el eje central del vehículo. Al finalizar los experimentos el error de estado estacionario es cercano a cero.



**Figura 4-7:** Respuesta de la SRDR por RVE con LQR y precompensador para la primera trayectoria



**Figura 4-8:** Respuesta de la SRDR por RVE con LQR y precompensador para la segunda trayectoria

### 4.1.3. Controlador PI vectorial con LQR en tiempo discreto

El integrador incluido en el controlador PI vectorial con LQR se discretiza por el método de Euler hacia adelante. Para resolver la ecuación de Ricatti y obtener el vector de ganancias, se toma el modelo aumentado en tiempo discreto:

$$\hat{A}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{K}_c & -\mathbf{B} \mathbf{K}_i \\ -\mathbf{C} T_s & 1 \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

Con los valores de  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  en (3-26) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [229.81 \quad 417.59 \quad 60.181 \quad -130.19] \\ \mathbf{K}_c &= [229.81 \quad 417.59 \quad 60.181], \quad K_i = -130.19 \end{aligned} \quad (4-8)$$

siendo  $\mathbf{K}_c$  el vector de ganancias correspondiente a las variables de estado y  $\mathbf{K}_i$  el del integrador.

Al comienzo de las pruebas, el controlador PI vectorial con LQR logra equilibrar al robot en un tiempo de 4 s. La adición de la acción integral permite que el vehículo no sobrepase el valor de referencia tanto en avance como en retroceso (Figuras 4-9 y 4-10). A pesar de esto, el seguimiento de trayectorias no es bueno, con presencia de oscilaciones en estado transitorio. Al finalizar ambos recorridos no hay presencia de error de estado estacionario. Sin embargo, el robot se encuentra en equilibrio con un ángulo de inclinación cercano a dos grados.

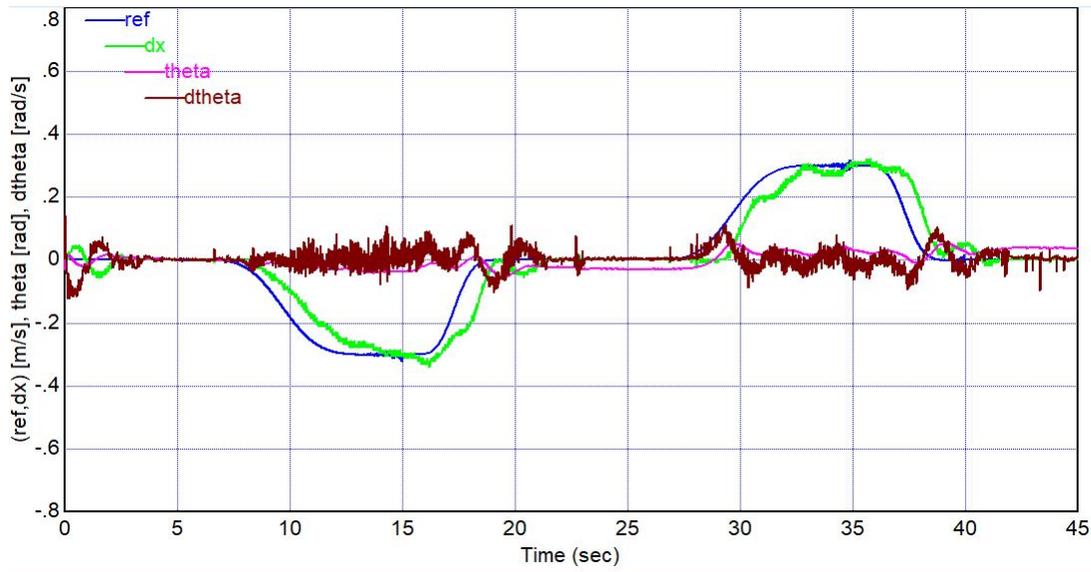


Figura 4-9: Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR para la primera trayectoria

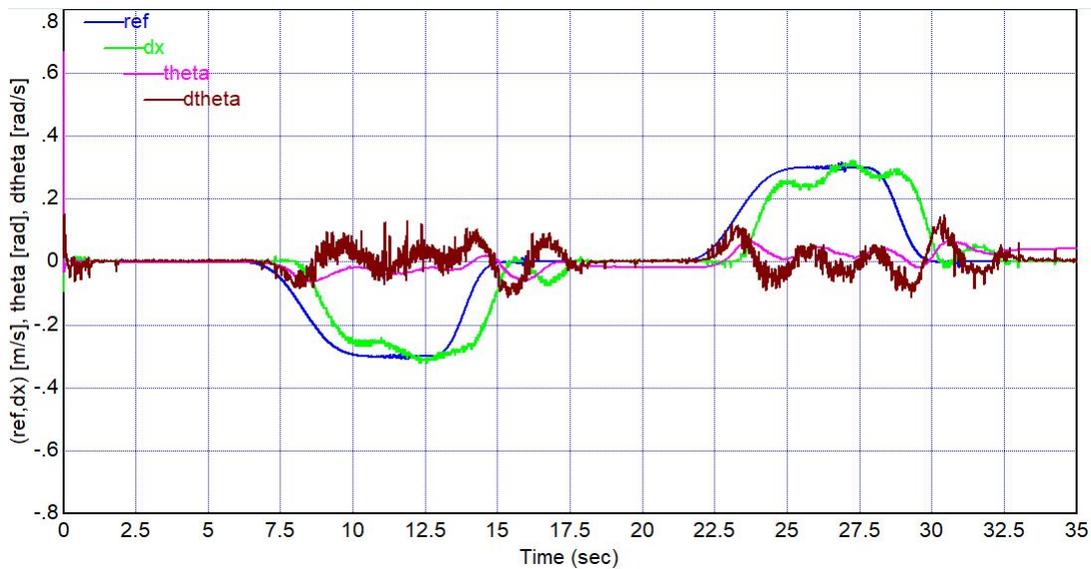


Figura 4-10: Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR para la segunda trayectoria

#### 4.1.4. Controlador PI vectorial con LQR y FF en tiempo discreto

El controlador PI vectorial con LQR y FF tiene anotaciones importantes en su etapa de discretización. Al utilizar el método de invarianza al escalón para discretizar tanto al controlador de referencia como a la parte de fase mínima de la función de transferencia de la velocidad en lazo cerrado, el grado relativo disminuye. Para cumplir la condición establecida en (3-35), se toma el denominador en ambas funciones de transferencia mientras se asegura

que la ganancia DC sea la misma:

$$C_{1d}(k) = \frac{0.000197}{(z - 0.99)(z - 0.9802)} \quad (4-9)$$

$$G_{mpd}(k) = \frac{5.7387 \cdot 10^{-6}(z - 0.99)}{(z - 0.9922)(z - 0.9853)(z - 0.8649)}$$

De (3-31) se obtiene el controlador de seguimiento en tiempo discreto:

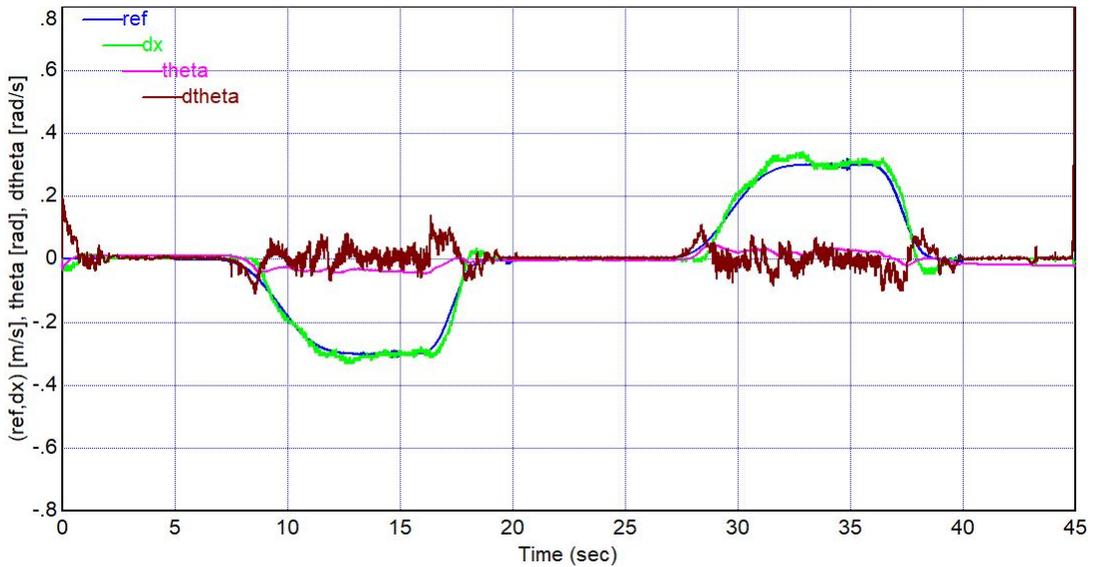
$$C_{2d}(k) = \frac{34.333(z - 0.9922)(z - 0.9853)(z - 0.8649)}{(z - 0.99)(z - 0.99)(z - 0.9802)} \quad (4-10)$$

Los valores del vector de ganancias para las variables de estado  $\mathbf{K}_c$  y del integrador  $K_i$  se obtienen a partir de  $\mathbf{Q}$  y  $R$  en (3-38):

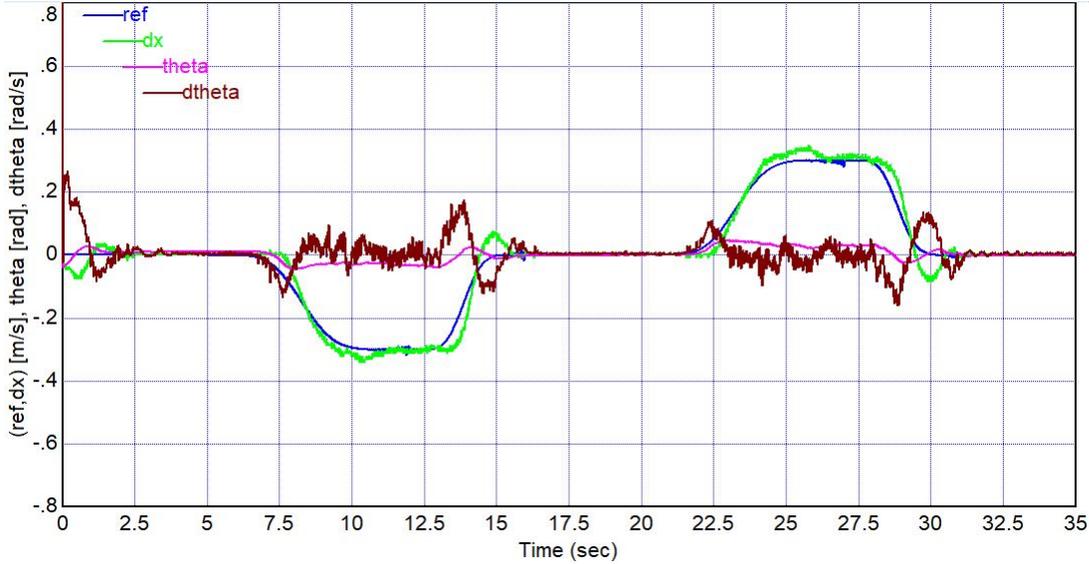
$$\mathbf{K} = [214.3 \quad 407.97 \quad 58.172 \quad -92.704] \quad (4-11)$$

$$\mathbf{K}_c = [214.3 \quad 407.97 \quad 58.172], \quad K_i = -92.704$$

En las Figuras 4-11 y 4-12 se puede observar que el robot alcanza el equilibrio en aproximadamente 3 s y que la inclusión de los controladores de seguimiento ( $C_{2d}$ ) y de referencia ( $C_{1d}$ ) mejoran notablemente el seguimiento de trayectorias. Al tener la primera señal de referencia un perfil de aceleración menor, los sobrepicos y oscilaciones durante el recorrido son menores, como se ve en la Figura 4-11. En ambos escenarios, el error de estado estacionario es aproximadamente cero y el vehículo alcanza equilibrio estático.



**Figura 4-11:** Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR y FF para la primera trayectoria



**Figura 4-12:** Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR y FF para la segunda trayectoria

#### 4.1.5. Controlador por cadena de integradores con LQR en tiempo discreto

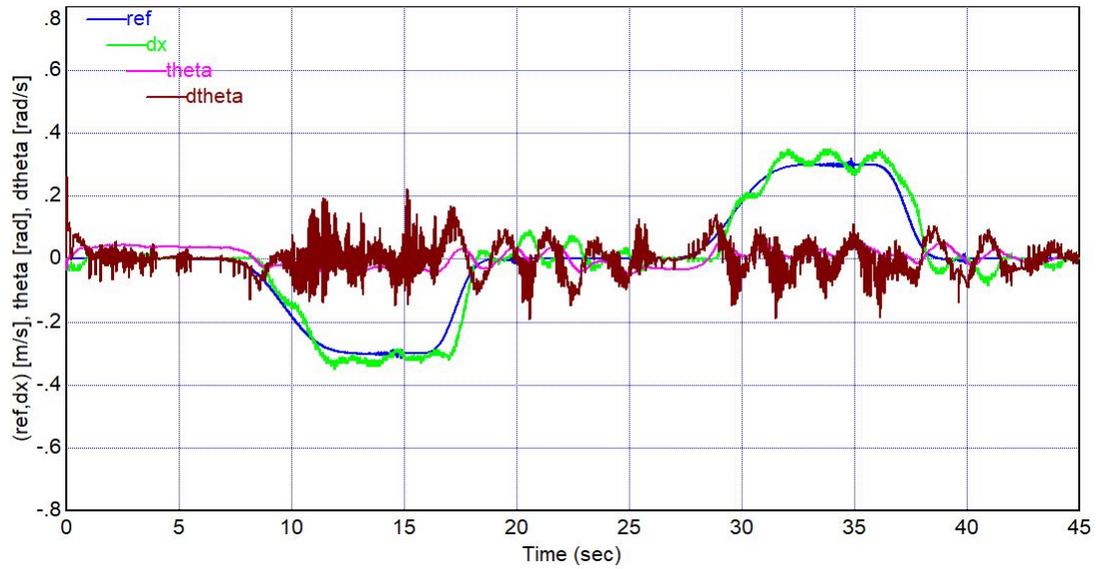
Los dos integradores que hacen parte del controlador por cadena de integradores con LQR, se discretizan por el método de Euler hacia adelante. El modelo aumentado en tiempo discreto está definido como:

$$\mathbf{A}_{Gd} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{0}_{3,2} \\ -\mathbf{B}_{id}\mathbf{C}_d & \mathbf{A}_{id} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{Gd} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d \\ \mathbf{0}_{2,1} \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

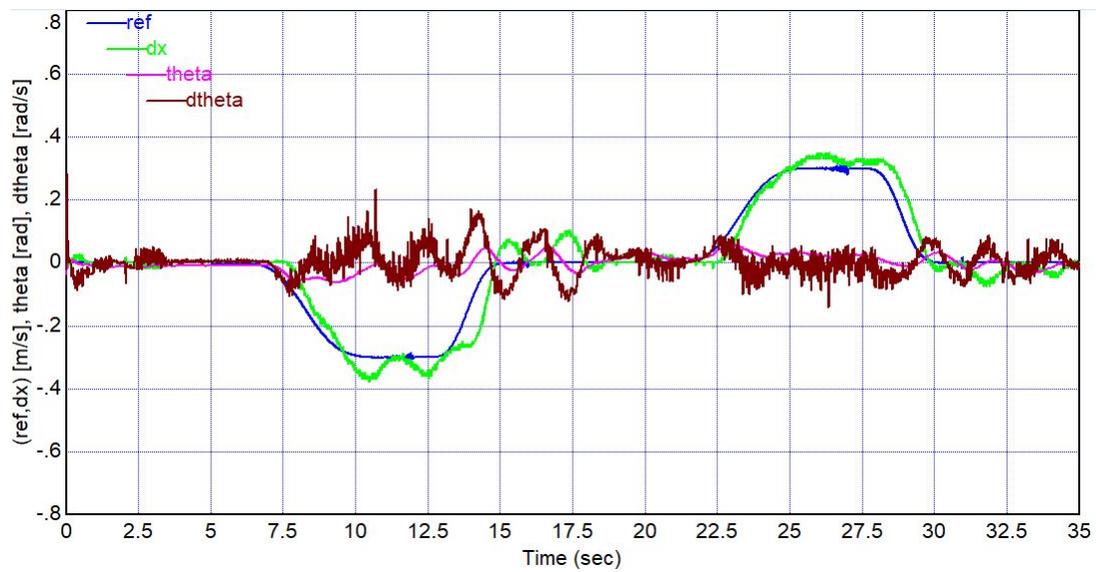
Para obtener los vectores de ganancias de los estados  $\mathbf{K}_c$  y los dos integradores  $\mathbf{K}_i$  por el método de optimización LQR, se utiliza el modelo aumentado (4-12) y los valores de  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  definidos en (3-40):

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [272.14 \quad 420.96 \quad 60.807 \quad -161.59 \quad -354.04] \\ \mathbf{K}_c &= [272.14 \quad 420.96 \quad 60.807], \quad \mathbf{K}_i = [-161.59 \quad -354.04] \end{aligned} \quad (4-13)$$

En las Figura 4-13 se puede ver que aunque el robot alcanza equilibrio en un tiempo cercano a los 4 s después de partir de posición vertical, queda inclinado aproximadamente dos grados. Las oscilaciones en la segunda trayectoria, al ser esta más corta, son menores que en la primera (Figura 4-14). Sin embargo, al terminar ambas trayectorias el robot no alcanza equilibrio estático y hay presencia de error de estado estacionario.



**Figura 4-13:** Respuesta de la SRDR por cadena de integradores con LQR para la primera trayectoria

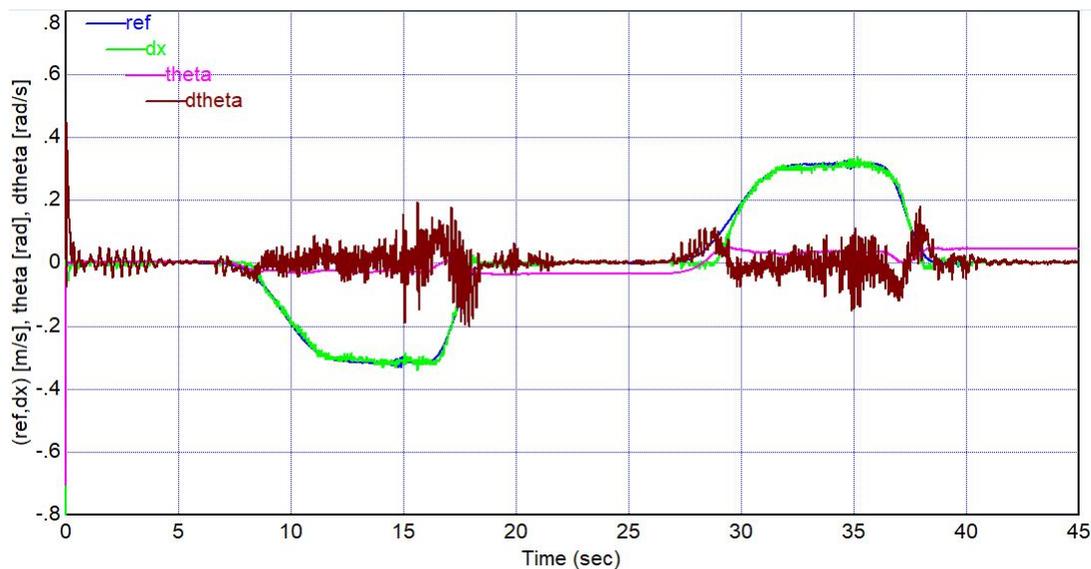


**Figura 4-14:** Respuesta de la SRDR por cadena de integradores con LQR para la segunda trayectoria

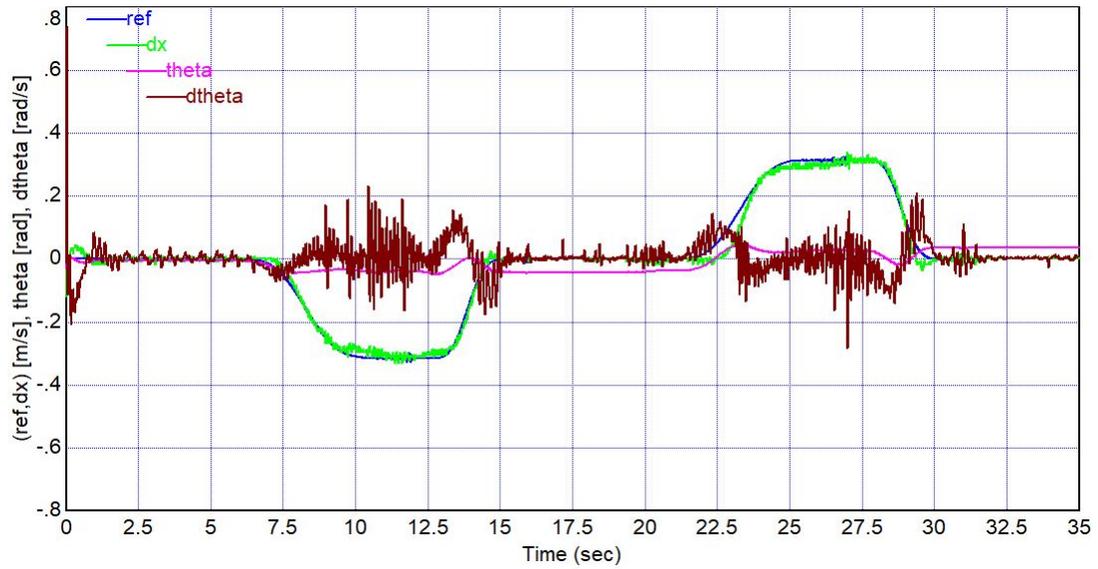
#### 4.1.6. Controlador GPI con observador desacoplado de estado extendido en tiempo discreto

Para implementar el controlador GPI con observador desacoplado de estado extendido se utiliza el método de solución numérica Runge-Kutta de cuarto orden, usado en la discretización temporal para la solución aproximada de ecuaciones diferenciales ordinarias [13]. La herramienta solidThinking Embed® permite ingresar los valores obtenidos en tiempo continuo y utiliza el método de Runge-Kutta en tiempo real.

En el comienzo del experimento el controlador GPI con observador desacoplado de estado extendido permite que el robot alcance equilibrio en un tiempo cercano a 2 s. Durante el movimiento de avance en la primera trayectoria, se realiza un seguimiento ajustado sin presentar oscilaciones o sobrepicos, como se ve en la Figura 4-15. Durante el proceso de retroceso y dado que el centro de masa no se encuentra en el mismo eje de las ruedas, se puede ver una pequeña diferencia entre la velocidad y la referencia durante los primeros segundos. Dado que la segunda referencia tiene un perfil de aceleración mayor que la primera, el robot experimenta un aumento en la magnitud de la velocidad angular. Sin embargo, el controlador logra seguir la señal de referencia sin presentar sobrepicos (Figura 4-16). Aunque el error de estado estacionario es cero y el robot se encuentra en equilibrio, el ángulo de inclinación es cercano a los dos grados.



**Figura 4-15:** Respuesta de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido para la primera trayectoria



**Figura 4-16:** Respuesta de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido para la segunda trayectoria

#### 4.1.7. Comparación de resultados de los controladores en seguimiento de trayectorias

La Tabla 4-2 muestra los resultados obtenidos de cada controlador bajo los criterios de evaluación en el seguimiento de trayectorias. Los controladores RVE con LQR y precompensador y PI vectorial con LQR y FF realizan un seguimiento de velocidad correcto en ambas trayectorias. Sin embargo, es importante mencionar que durante los experimentos ambos controladores presentan oscilaciones cuando el robot retrocede. Por otro lado, el controlador GPI con observador desacoplado de estado extendido logra atenuar las dinámicas desconocidas del robot y realiza un seguimiento ajustado en ambas trayectorias.

**Tabla 4-2:** Resultados de los controladores en seguimiento de trayectorias

Controlador	CE1	CE2	CE3	CE4	CE5	CE6	CE7	CE8
PID de doble lazo cerrado	5 s	D	Sí	Sí	D	Sí	Sí	No
RVE con LQR y precompensador	5 s	C	Sí	Sí	B	No	Sí	No
PI vectorial con LQR	4 s	D	Sí	No	D	Sí	No	No
PI vectorial con LQR y FF	3 s	B	No	No	B	No	Sí	No
Cadena de integradores con LQR	4 s	D	Sí	Sí	D	Sí	Sí	Sí
GPI con observador desacoplado de estado extendido	2 s	A	No	No	A	No	No	No

A: excelente, B: bueno, C: aceptable, D: insuficiente, F: malo

CE1: Tiempo en volver al equilibrio, CE2: Seguimiento de primera trayectoria

CE3: Subpicos durante primera trayectoria, CE4: Sobrepicos durante primera trayectoria

CE5: Seguimiento de segunda trayectoria, CE6: Subpicos durante segunda trayectoria

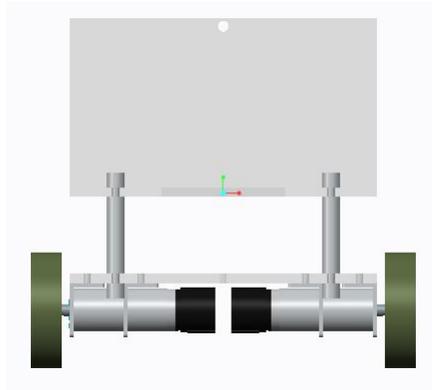
CE7: Sobrepicos durante segunda trayectoria, CE8: Error de estado estacionario

## 4.2. Variación de parámetros

El modelo dinámico de la SRDR está expuesto a incertidumbres causadas por desviaciones en los datos usados, parámetros desconocidos o dinámicas despreciadas. Los factores anteriores tienen un impacto directo en el sistema en la forma de variación de parámetros. A pesar de que el modelo dinámico se consideró invariante en el tiempo durante el proceso de identificación en el segundo capítulo, los datos antropométricos del paciente modifican el modelo nominal del sistema. Las desviaciones en el modelo nominal son tomadas como incertidumbres, por consiguiente, su efecto debe ser asumido por el controlador.

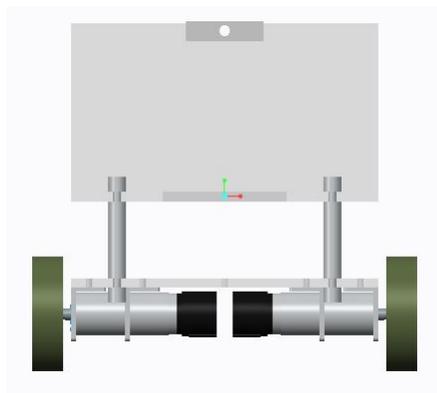
Para recrear los posibles efectos que generan los pacientes, se propone utilizar dos bloques con pesos que modifican el centro de masa de la SRDR. Con las dimensiones y pesos de cada una de las partes del vehículo, el robot es modelado en el software de elementos finitos Creo Parametric® (Figura 4-17). En ausencia de usuario, el centro de masa se ubica en:

$$x = 8.618953 \text{ mm}, y = 8.704991 \text{ mm}, z = -5.720649 \text{ mm} \quad (4-14)$$



**Figura 4-17:** Vista frontal de la SRDR

La variación del centro de masa que produce un paciente en una silla de ruedas eléctrica fue estudiada en [37]. Tomando en cuenta usuarios con un peso entre 50 kg y 90 kg, el centro de masa presentó una modificación del 179 % para el primer caso y del 202 % para el segundo. Con base y en similitud con estos resultados se seleccionan y colocan dos bloques en el espaldar de la SRDR para asemejar el porcentaje de variación del trabajo descrito (Figura 4-18).



**Figura 4-18:** Vista frontal de la SRDR con bloque ubicado en el espaldar

El primer bloque de 0.061 kg que ejemplifica a una persona, ubica el centro de masa en:

$$x = 8.255818 \text{ mm}, y = 15.24790 \text{ mm}, z = -7.059581 \text{ mm} \quad (4-15)$$

Un segundo bloque de 0.085 kg modifica al centro de masa por:

$$x = 8.110531 \text{ mm}, y = 17.86567 \text{ mm}, z = -7.595277 \text{ mm} \quad (4-16)$$

Con ambos bloques se puede observar que el cambio del centro de masa es más notable la componente vertical. La Tabla 4-3 resume la variación del centro de masa en la ausencia e inclusión de ambos bloques:

**Tabla 4-3:** Variación centro de masa SRDR

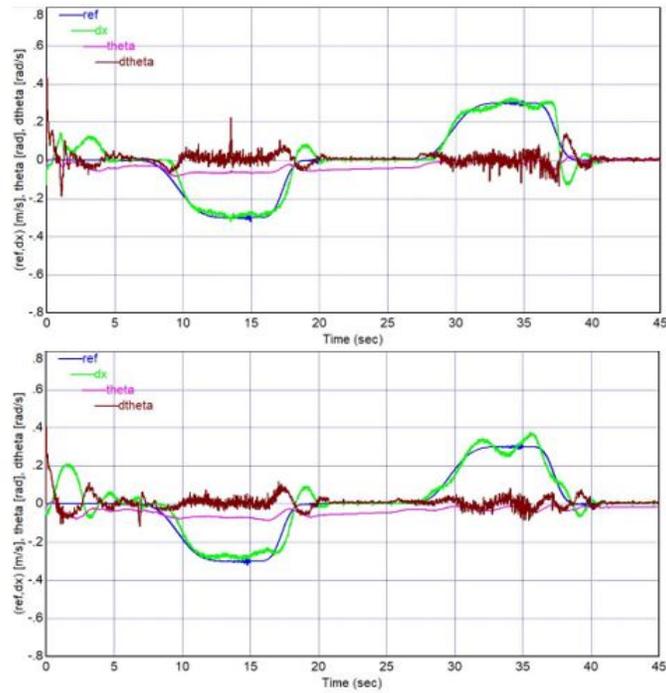
Eje	Sin peso	Bloque 1	Bloque 2
x	8.618953 mm	8.255818 mm	8.110531 mm
y	8.704991 mm	15.24790 mm	17.86567 mm
z	-5.720649 mm	-7.059581 mm	-7.595277 mm

El primer bloque de 0.061 kg modifica en un 184 % la posición, mientras que el segundo de 0.085 kg lo hace en un 216 %. Para comprobar la efectividad de los controladores, se toman las referencias de velocidad definidas en las Figuras 4-1 y 4-3. Dado que ambos perfiles de velocidad y aceleración son diferentes, cada controlador experimenta fuerzas de gravedad distintas para mantener el equilibrio, mientras intenta realizar el seguimiento de referencia con los bloques ubicados en el espaldar. Durante los experimentos se puede observar que durante la segunda referencia y con el bloque de mayor tamaño, el tiempo de asentamiento, los sobrepicos y las oscilaciones aumentan.

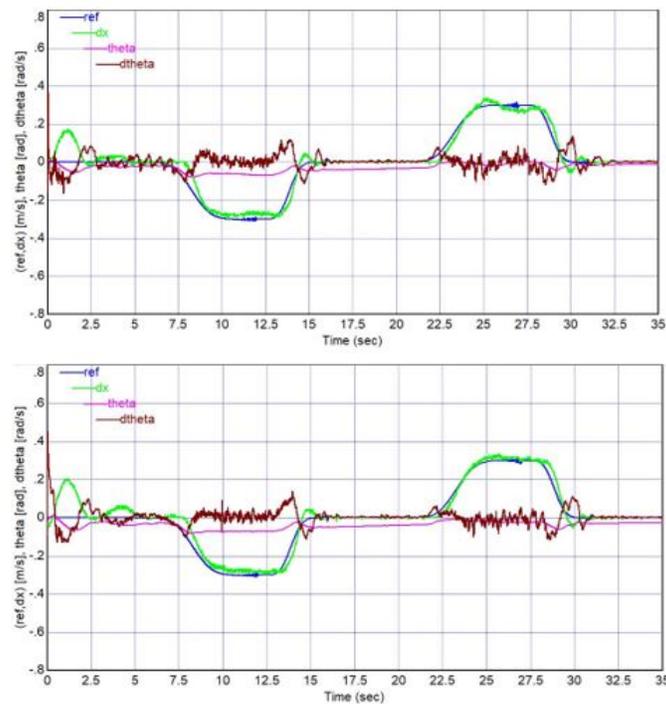
La Figura 4-19 muestra la respuesta del **controlador PID de doble lazo cerrado** con ambos bloques para la primera y segunda trayectoria. En el comienzo del experimento el robot necesita de 1 s más para alcanzar en equilibrio en comparación con la etapa anterior. En ambas trayectorias, el seguimiento de referencias es bueno cuando el vehículo va hacia adelante. Por otro lado, durante el proceso de retroceso, la acción derivativa no logra atenuar las oscilaciones ni los sobrepicos cuando la velocidad de referencia es cero. En adición, se puede observar que al terminar los recorridos de avance y previo a los de retroceso, el robot se encuentra en equilibrio pero con un ángulo de inclinación cercano a los dos grados. Al terminar las trayectorias el error de estado estacionario es aproximadamente cero.

Al comienzo de los experimentos, el **controlador por RVE con LQR y precompensador** mantiene al robot en equilibrio, pero no logra que la velocidad del robot sea cero antes de avanzar (Figura 4-20). Con el bloque de menor tamaño se puede observar que durante los procesos de avance la velocidad del robot se encuentra por debajo de la referencia. Cuando este termina y la referencia de velocidad es cero, el vehículo está en equilibrio pero no alcanza equilibrio estático antes de comenzar los procesos de retroceso. En estos últimos, la velocidad del robot supera a la referencia. Con el bloque de mayor tamaño, la magnitud de las oscilaciones es considerablemente mayor en ambas trayectorias, tanto en avance como en retroceso. Es importante mencionar que durante los experimentos el robot perdió el equilibrio en varias oportunidades al retroceder con el bloque de mayor tamaño. Al finalizar ambas trayectorias, se puede ver que existe error de estado estacionario.

En la Figura 4-21 se puede observar que el **controlador PI vectorial con LQR** permite al prototipo de SRDR alcanzar equilibrio desde posición vertical en un tiempo menor a 5 s. El seguimiento de referencias de velocidad en ambas trayectorias, al igual que en la sección anterior, no es bueno. Sin embargo, la acción integral en el controlador evita que la velocidad del vehículo exceda el valor de la referencia en estado transitorio. Al terminar los procesos de avance y previo a los de retroceso, el robot se encuentra en equilibrio pero el ángulo de inclinación es de aproximadamente tres grados. Cuando las trayectorias finalizan, se puede ver que con el bloque de mayor peso, el robot requiere de un tiempo mayor a 5 s para alcanzar equilibrio estático. En adición, al finalizar ambos recorridos el error de estado estacionario es aproximadamente cero.

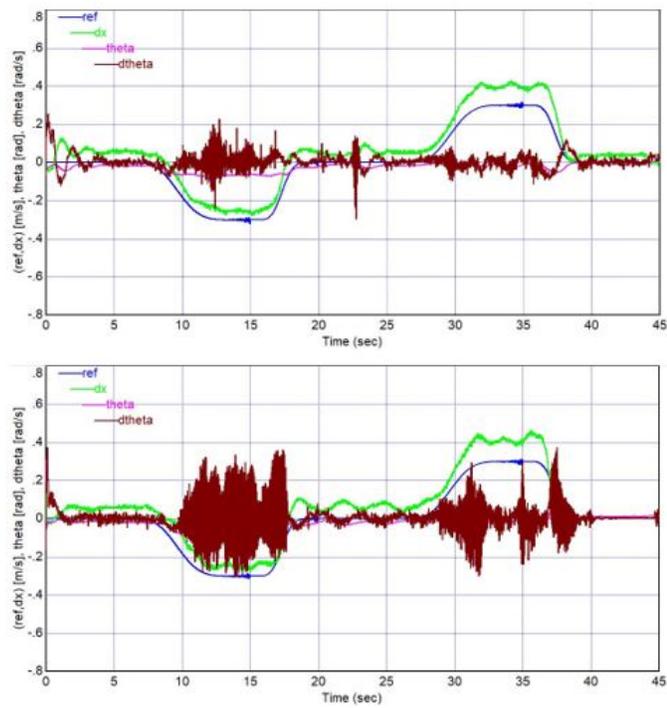


(a) Primera trayectoria con bloques de 0.061 kg (superior) y de 0.085 kg (inferior)

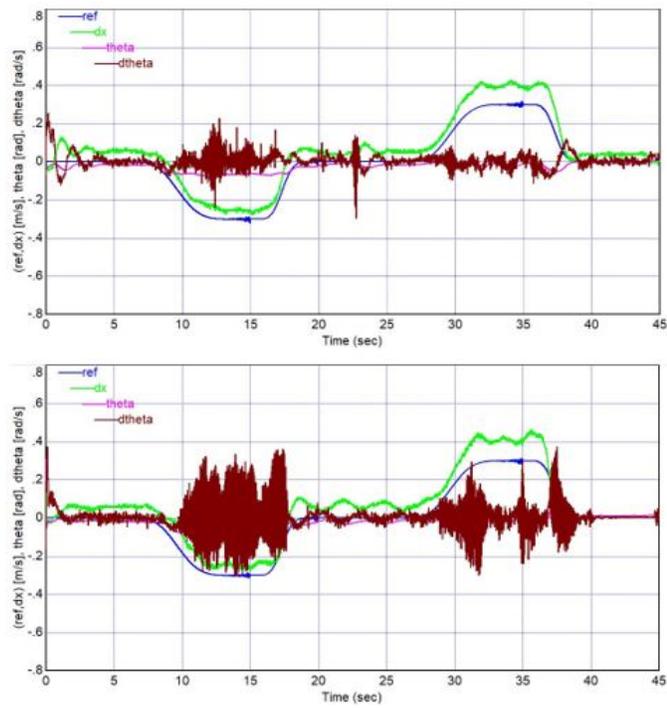


(b) Segunda trayectoria con bloques de 0.061 kg (superior) y de 0.085 kg (inferior)

**Figura 4-19:** Respuesta de la SRDR con PID de doble lazo cerrado con variación de parámetros

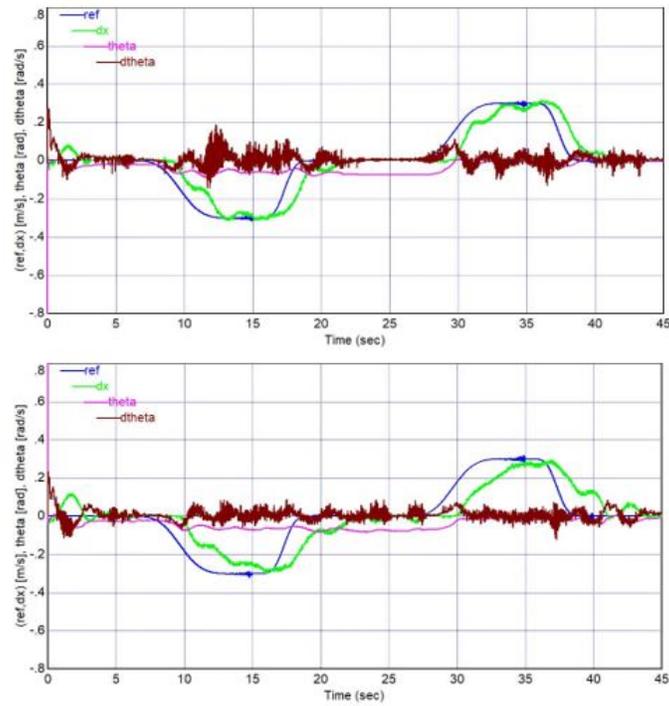


(a) Primera trayectoria con bloques de 0.061 kg (superior) y de 0.085 kg (inferior)

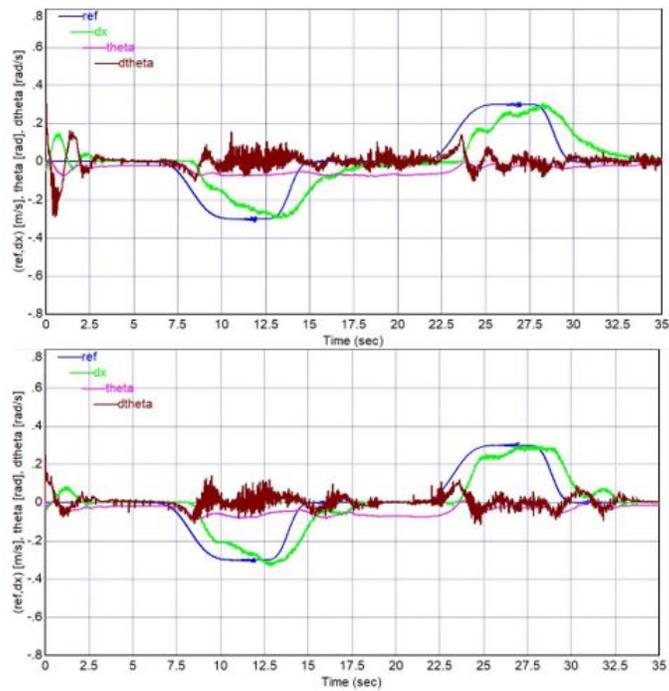


(b) Segunda trayectoria con bloques de 0.061 kg (superior) y de 0.085 kg (inferior)

**Figura 4-20:** Respuesta de la SRDR por RVE con LQR y precompensador con variación de parámetros



(a) Primera trayectoria con bloques de 0.061 kg (superior) y de 0.085 kg (inferior)



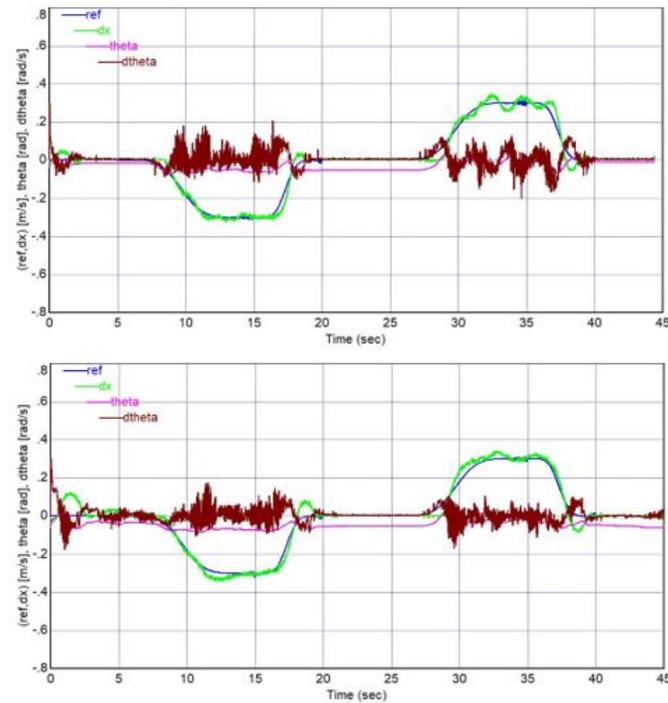
(b) Segunda trayectoria con bloques de 0.061 kg (superior) y de 0.085 kg (inferior)

**Figura 4-21:** Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR con variación de parámetros

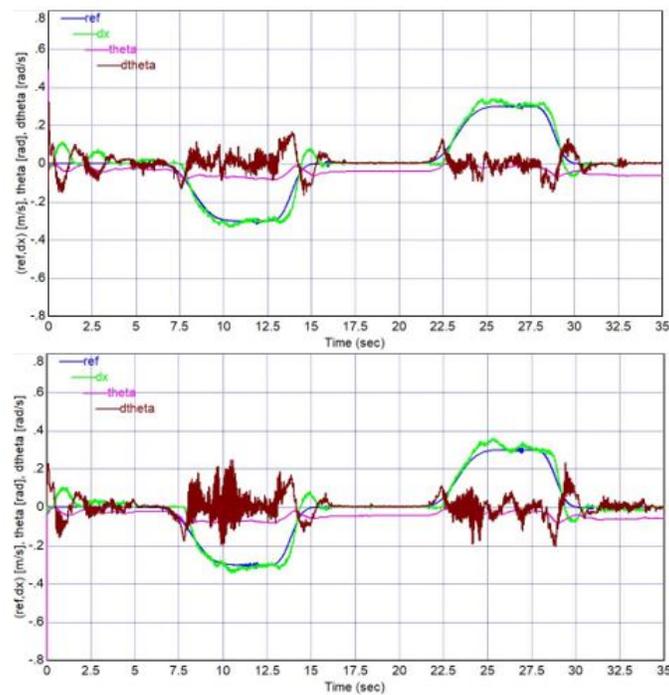
En la Figura 4-22 se puede observar que con el **controlador PI vectorial con LQR y FF** el robot requiere de 2 s más en comparación a la sección anterior para alcanzar equilibrio al comienzo de los experimentos. En los procesos de avance, tanto en la primera como en la segunda trayectoria y con ambos bloques, el controlador realiza un buen seguimiento de la señal de referencia. Al ir en reversa se presentan oscilaciones, siendo estas más notables cuando el vehículo lleva el bloque de mayor peso. Se puede observar que cuando la referencia de velocidad es cero, no hay presencia de error de estado estacionario. Sin embargo, al finalizar los recorridos el ángulo de inclinación del robot es cercano a los dos grados.

Partiendo de posición vertical el **controlador por cadena de integradores con LQR** no logra que el vehículo alcance equilibrio estático (Figura 4-23). A pesar de esto y sin realizar un buen seguimiento de referencias, la velocidad del vehículo es cercana a la referencia durante la primera trayectoria y con ambos pesos. En contraste, al tener la segunda trayectoria un perfil de aceleración mayor al de la primera, la velocidad del robot se aleja de la referencia y el error de estado estacionario aumenta cuando la referencia de velocidad es cero. Al finalizar ambas trayectorias y con ambos pesos, el robot oscila sin alcanzar equilibrio estático y hay presencia de error de estado estacionario.

El **controlador GPI con observador desacoplado de estado extendido** logra que el robot alcance equilibrio en un tiempo cercano a los 3 s al partir de posición vertical, como se ve en la Figura 4-24. En ambas trayectorias y con ambos bloques el controlador logra realizar un buen seguimiento de referencias. Sin embargo, se puede ver que cuando el proceso de avance en ambas trayectorias termina y la referencia de velocidad es cero, el robot alcanza equilibrio con un ángulo de inclinación cercano a los dos grados. Al finalizar ambos recorridos, el ángulo de inclinación y el error de estado estacionario son aproximadamente cero.

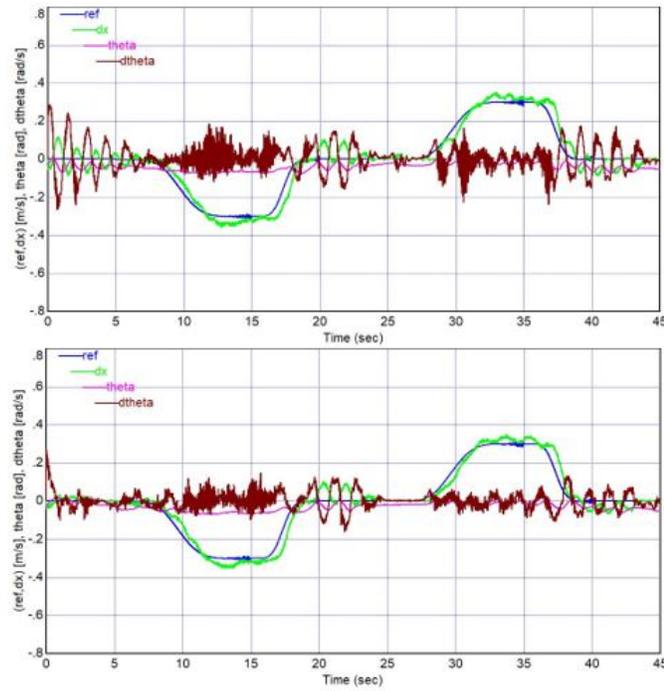


(a) Primera trayectoria con bloques de 0.061 kg (superior) y de 0.085 kg (inferior)

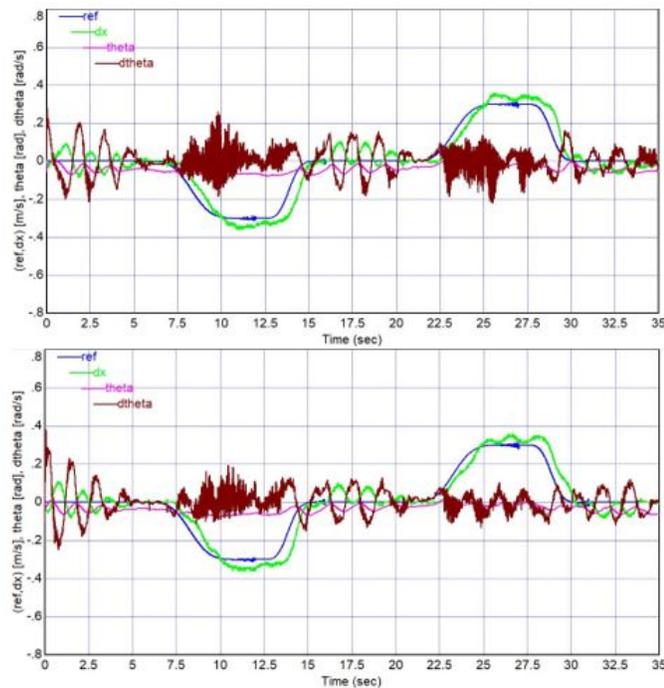


(b) Segunda trayectoria con bloques de 0.061 kg (superior) y de 0.085 kg (inferior)

**Figura 4-22:** Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR y FF con variación de parámetros

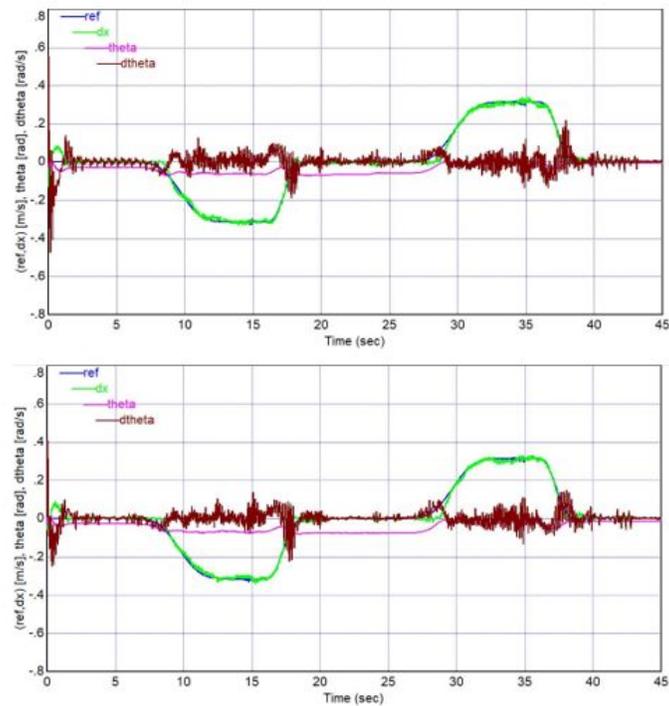


(a) Primera trayectoria con bloques de 0.061 kg (superior) y de 0.085 kg (inferior)

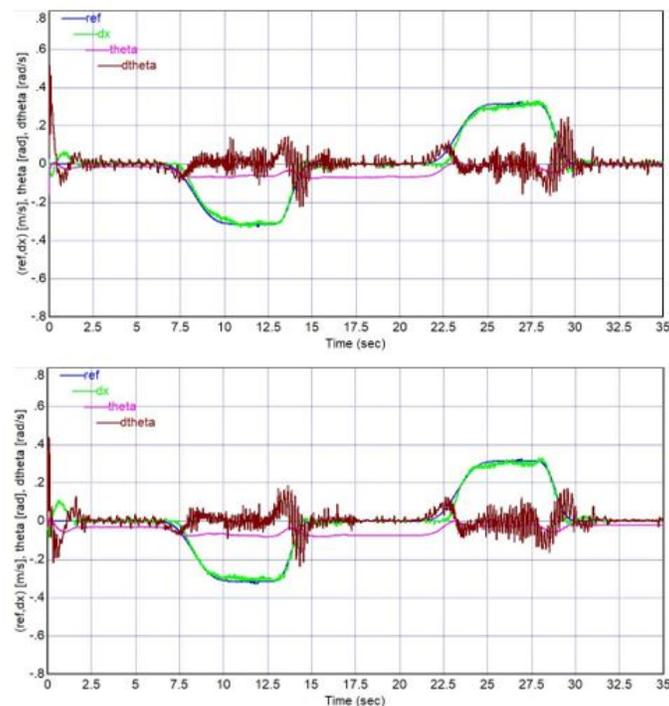


(b) Segunda trayectoria con bloques de 0.061 kg (superior) y de 0.085 kg (inferior)

**Figura 4-23:** Respuesta de la SRDR por cadena de integradores con LQR con variación de parámetros



(a) Primera trayectoria con bloques de 0.061 kg (superior) y de 0.085 kg (inferior)



(b) Segunda trayectoria con bloques de 0.061 kg (superior) y de 0.085 kg (inferior)

**Figura 4-24:** Respuesta de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido con variación de parámetros

### 4.2.1. Comparación de resultados de los controladores en variación de parámetros

La Tabla 4-4 resume los resultados de cada estrategia de control bajo los diferentes criterios de evaluación. Por una parte, los controladores RVE con LQR y precompensador, PI vectorial con LQR y control por cadena de integradores con LQR no logran atenuar las perturbaciones endógenas provistas por los bloques. En contraste, los controladores PID de doble lazo cerrado, PI vectorial con LQR y FF y GPI con observador desacoplado de estado extendido realizan un buen seguimiento de referencias de velocidad. Sin embargo, el observador del controlador GPI logra estimar y atenuar las perturbaciones de una mejor manera, por lo que esta estrategia presenta los mejores resultados.

**Tabla 4-4:** Resultados de los controladores en variación de parámetros

Controlador	CE1	CE9	CE10	CE11	CE12	CE8
PID de doble lazo cerrado	6 s	B	C	B	B	No
RVE con LQR y precompensador	-	D	F	D	F	Sí
PI vectorial con LQR	5 s	D	D	D	D	Sí
PI vectorial con LQR y FF	5 s	C	B	B	B	No
Cadena de integradores con LQR	-	C	C	D	D	Sí
GPI con observador desacoplado de estado extendido	3 s	A	A	A	B	No

A: excelente, B: bueno, C: aceptable, D: insuficiente, F: malo

CE1: Tiempo en volver al equilibrio, CE9: Seguimiento primera trayectoria con bloque de 0.061 kg

CE10: Seguimiento primera trayectoria con bloque de 0.085 kg

CE11: Seguimiento segunda trayectoria con bloque de 0.061 kg

CE12: Seguimiento segunda trayectoria con bloque de 0.085 kg

CE8: Error de estado estacionario

### 4.3. Rechazo de perturbaciones

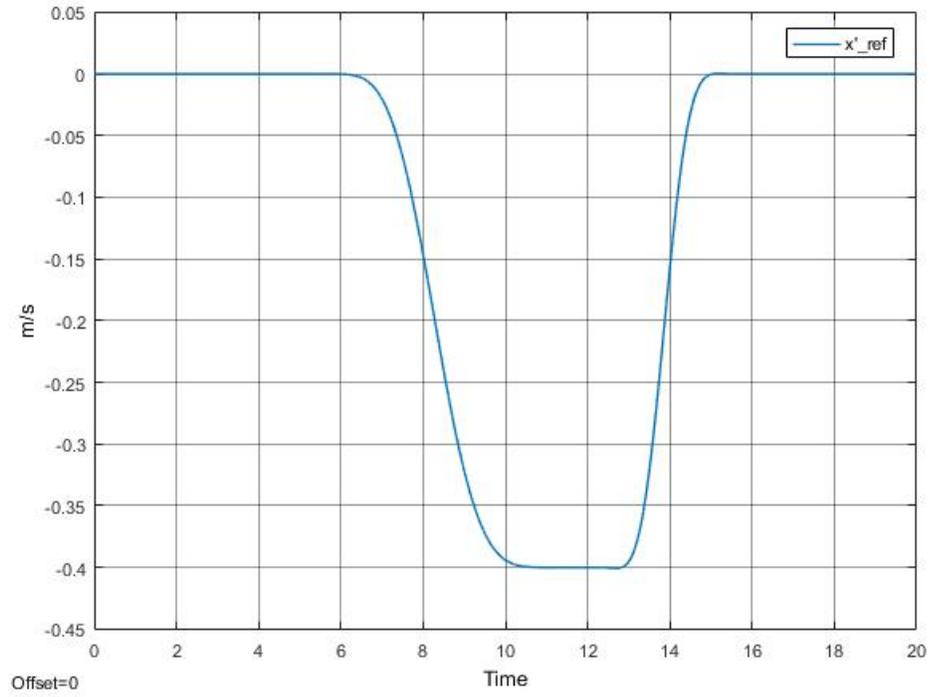
Las perturbaciones externas tienen un impacto directo cuando la SRDR surca un terreno irregular y los obstáculos provistos por el mismo. Para comprobar la efectividad de cada controlador en esta área, se evalúa el seguimiento de referencias de velocidad mientras la SRDR realiza el recorrido sobre dos terrenos irregulares, como se muestra en las Figuras 4-25 y 4-26. El primer terreno es una superficie lisa con desniveles presentes entre cada baldosa, mientras que el segundo, aunque permite un recorrido de mayor longitud con solo un espacio entre las placas de concreto, tiene una rugosidad mayor por las imperfecciones del cemento y pequeñas piedras que actúan como obstáculos. Al no tener los motores caja reductora, las perturbaciones de los terrenos tienen un mayor efecto en el sistema. Por esta razón, el perfil de velocidad se escoge para que en su valor máximo el vehículo pueda superar los obstáculos (Figura 4-27). La Figura 4-28 muestra el perfil de aceleración de la señal de referencia escogida.



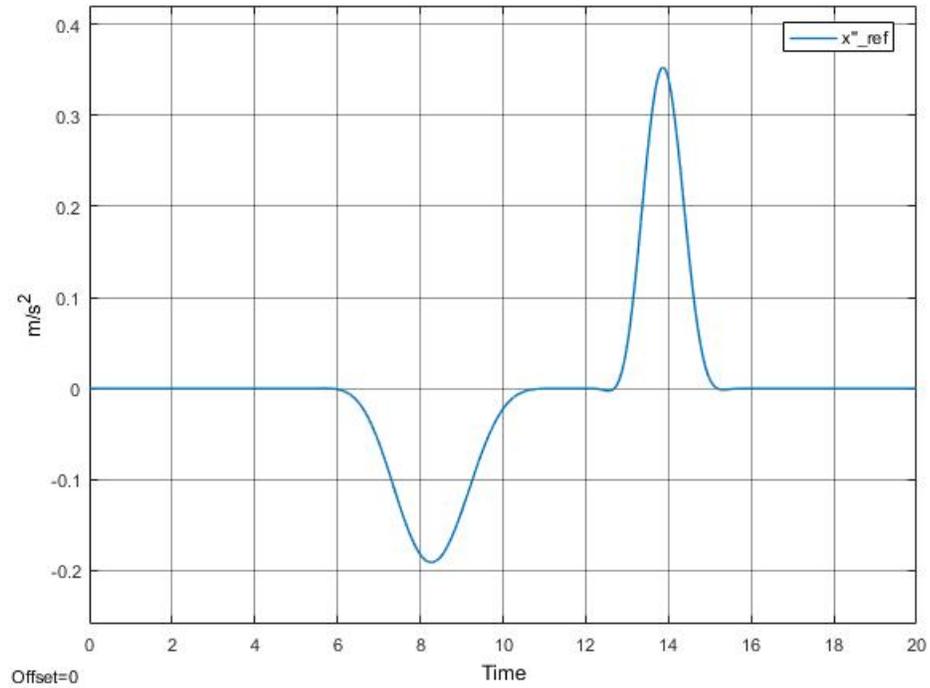
**Figura 4-25:** Captura de la SRDR al surcar el primer terreno irregular. Ver vídeo completo en [39]



**Figura 4-26:** Captura de la SRDR al surcar el segundo terreno irregular. Ver vídeo completo en [40]

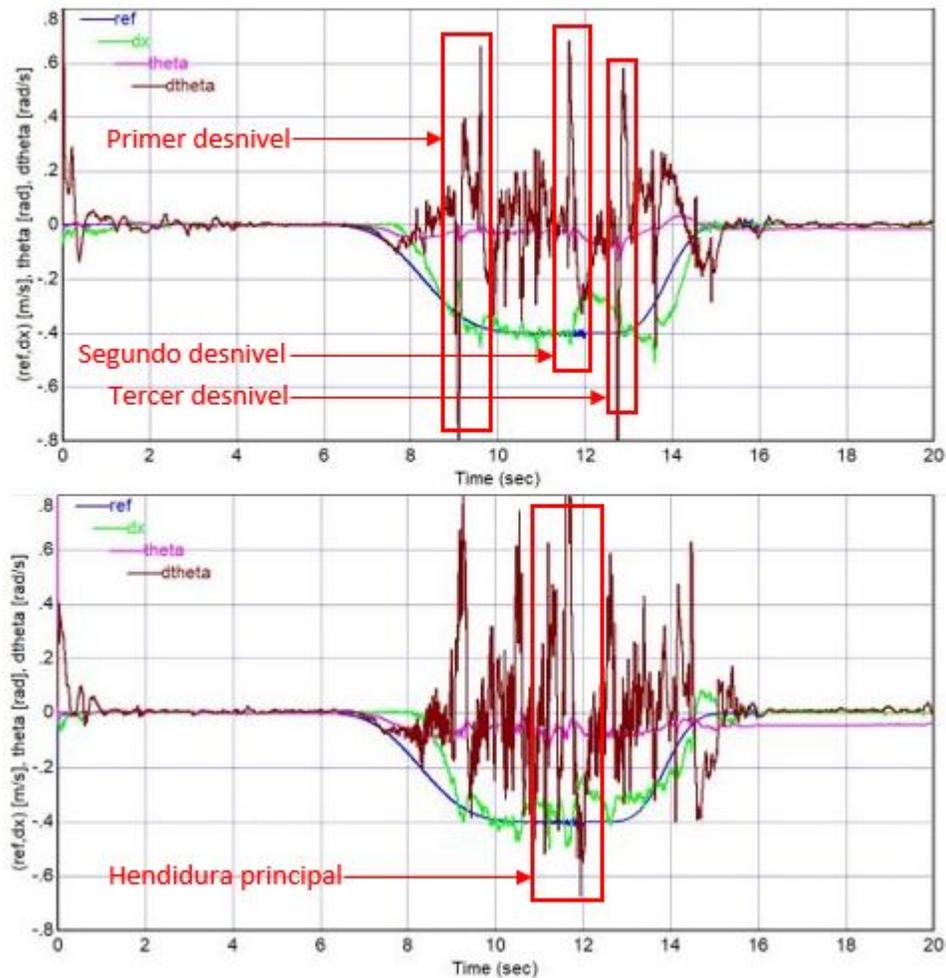


**Figura 4-27:** Perfil de velocidad para surcar terrenos irregulares



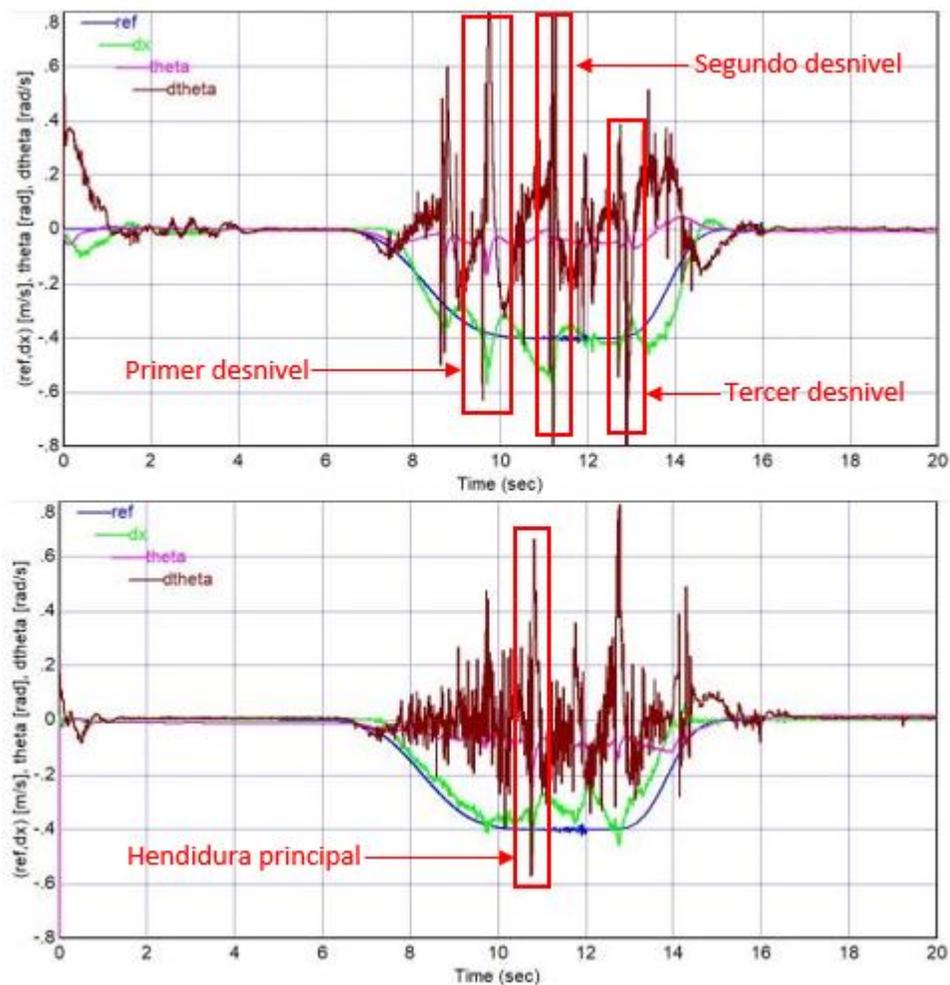
**Figura 4-28:** Perfil de aceleración para surcar terrenos irregulares

El controlador **controlador PID de doble lazo cerrado** permite que el vehículo alcance el equilibrio en alrededor de 4 s al partir de posición vertical (Figura 4-29). Al ser el primer terreno más liso que el segundo, el controlador requiere de aproximadamente 2 s para volver al punto de equilibrio después de sobrepasar el primer desnivel y afrontar el segundo. En contraste, la rugosidad del segundo terreno perturba al robot de manera constante, aumentando las oscilaciones. Luego de finalizar ambos recorridos, el error de estado estacionario es cercano a cero. Sin embargo, aunque el vehículo se encuentra en equilibrio, el ángulo de inclinación es de aproximadamente dos grados en el segundo terreno. Al finalizar las trayectorias en ambos terrenos, no hay presencia de error de estado estacionario.



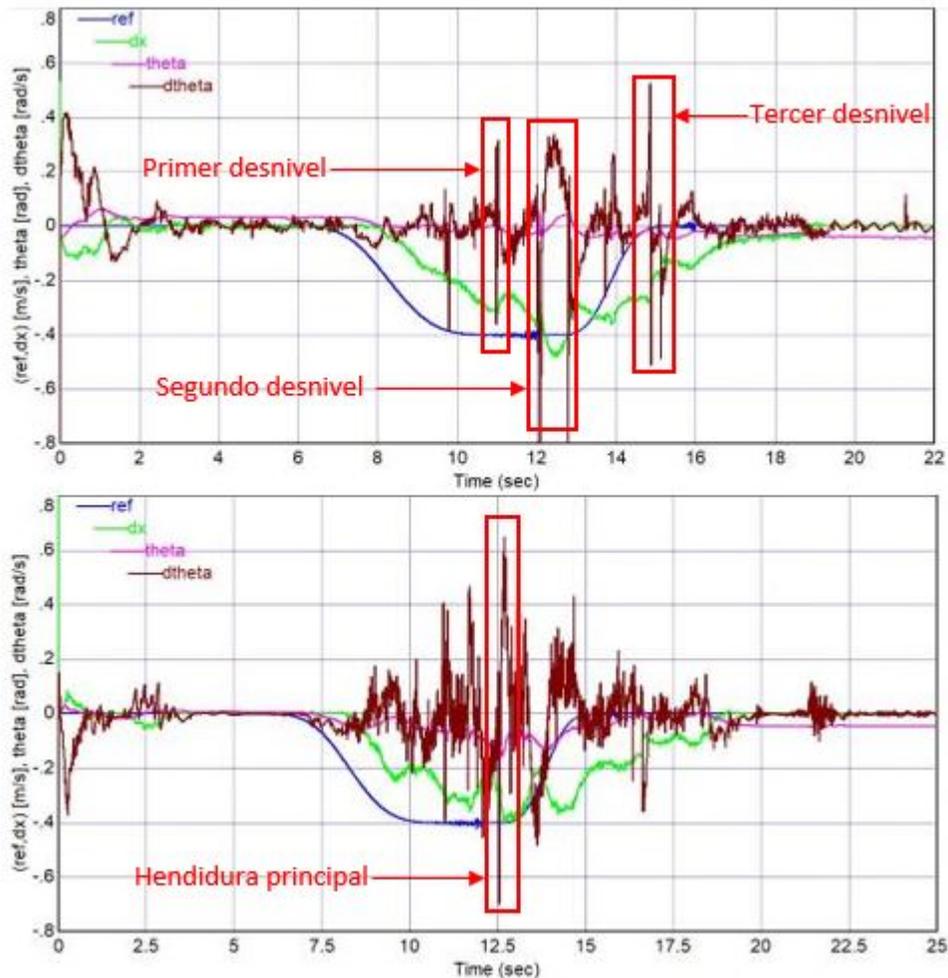
**Figura 4-29:** Respuesta de la SRDR con PID de doble lazo cerrado a rechazo de perturbaciones en el primer terreno (superior) y en el segundo terreno (inferior)

La Figura 4-30 muestra el comportamiento del **controlador por RVE con LQR y precompensador**. El vehículo alcanza equilibrio después de partir de posición vertical en un tiempo de 3 s. Durante el primer y segundo desnivel del primer terreno el robot toma 1.5 s para lograr equilibrio dinámico. A pesar de sobrepasar los desniveles del primer terreno y la hendidura principal del segundo, el robot mantiene una velocidad cercana al valor de referencia. En ambos escenarios, el vehículo alcanza equilibrio estático y el error de estado estacionario es aproximadamente cero.



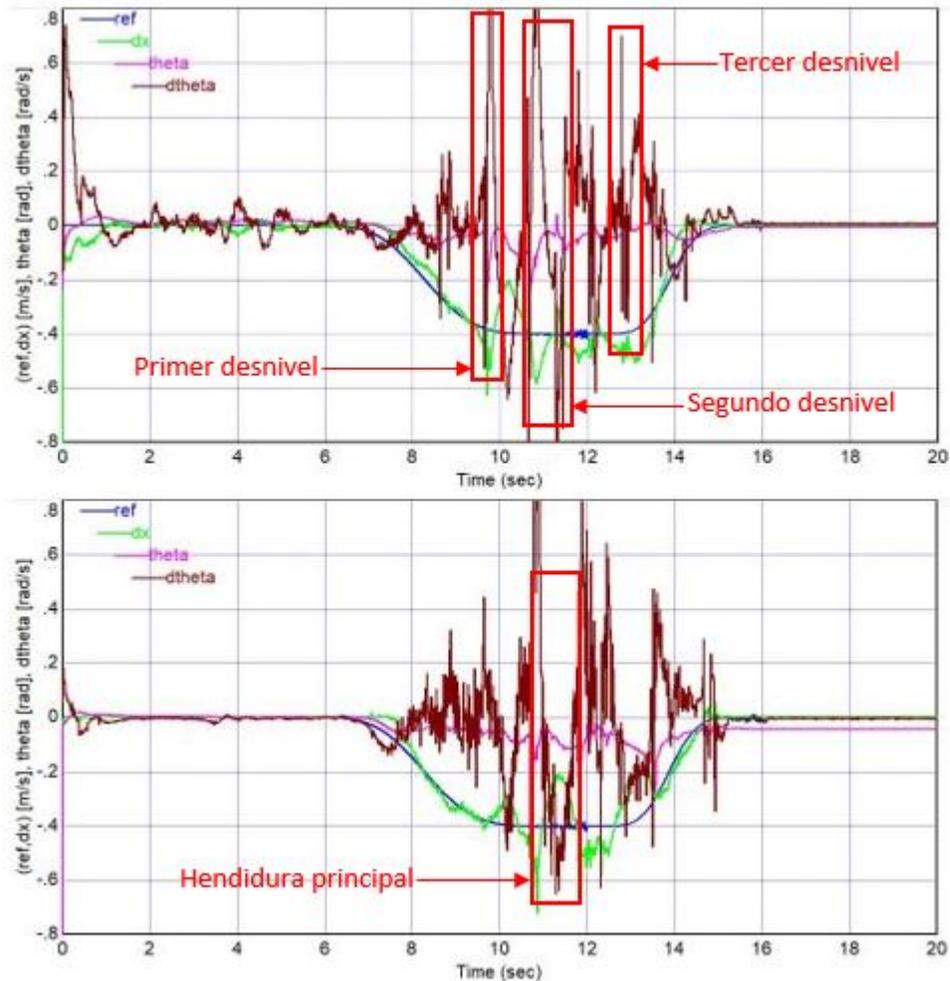
**Figura 4-30:** Respuesta de la SRDR por RVE con LQR y precompensador a rechazo de perturbaciones en el primer terreno (superior) y en el segundo terreno (inferior)

El **controlador PI vectorial con LQR** logra estabilizar al robot en aproximadamente 5 s al empezar los experimentos, como se ve en la Figura 4-31. En ninguno de los recorridos se logra identificar el tiempo que requiere el vehículo para regresar al punto de equilibrio dado que no se realiza un buen seguimiento de la referencia. Como el segundo terreno es más es-triado y presenta una hendidura de mayor tamaño que los desniveles del primero, el impacto sobre los actuadores es mayor, lo que produce oscilaciones de mayor magnitud durante el recorrido. Cuando el proceso de avance en ambas superficies termina, el controlador rechaza las perturbaciones y requiere de aproximadamente 3 s para alcanzar equilibrio y aunque no hay error de estado estacionario el ángulo de inclinación es cercano a un grado.



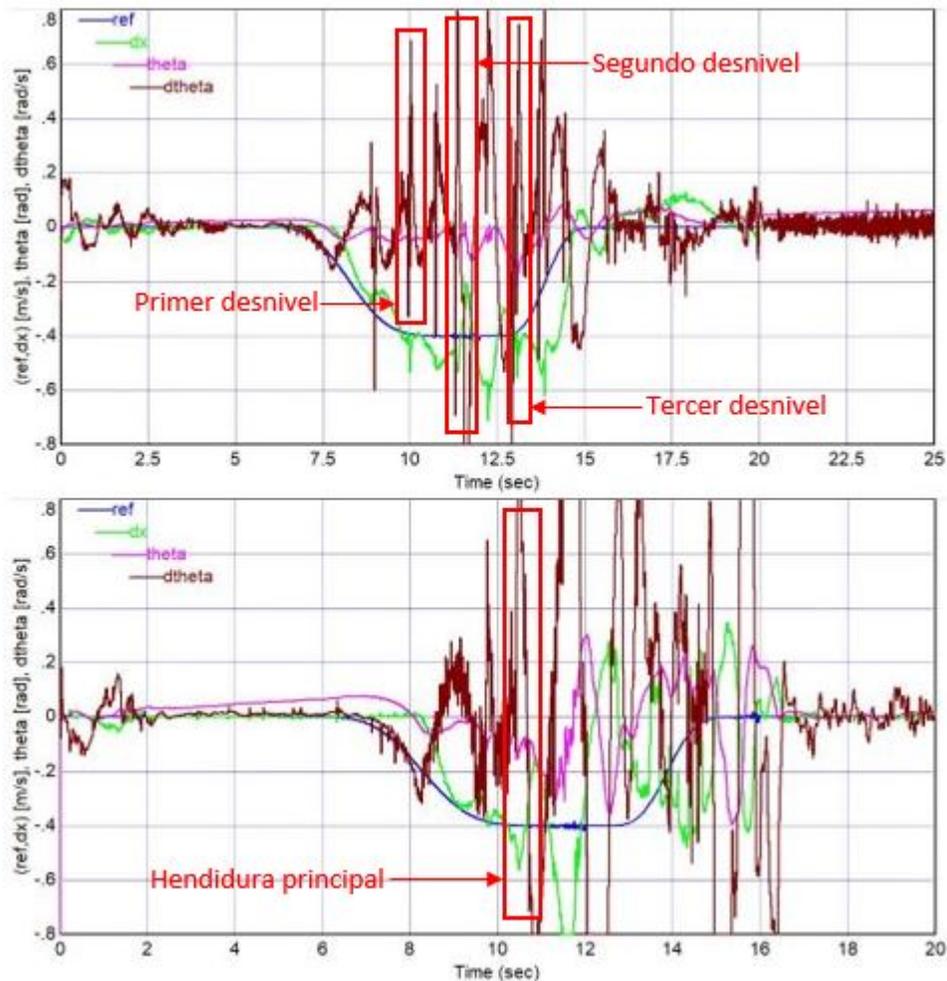
**Figura 4-31:** Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR a rechazo de perturbaciones en el primer terreno (superior) y en el segundo terreno (inferior)

La Figura 4-32 muestra que bajo el **controlador PI vectorial con LQR y FF** el robot requiere de 5 s para alcanzar equilibrio al partir de posición vertical. Antes y después de afrontar los desniveles del primer terreno, el controlador realiza un buen seguimiento de la trayectoria. El robot necesita menos de 2 s para alcanzar equilibrio dinámico al sobrepasar el segundo desnivel. Las perturbaciones provenientes de la rugosidad del segundo terreno son rechazadas por el controlador, donde solo en el sobrepaso de la hendidura principal en  $t = 11$  s, se ve un aumento en la magnitud de la velocidad angular. Al finalizar ambos recorridos no hay presencia de error de estado estacionario. Sin embargo, solo en el primer terreno el robot alcanza equilibrio estático, ya que en el segundo el ángulo de inclinación del robot es de aproximadamente un grado.



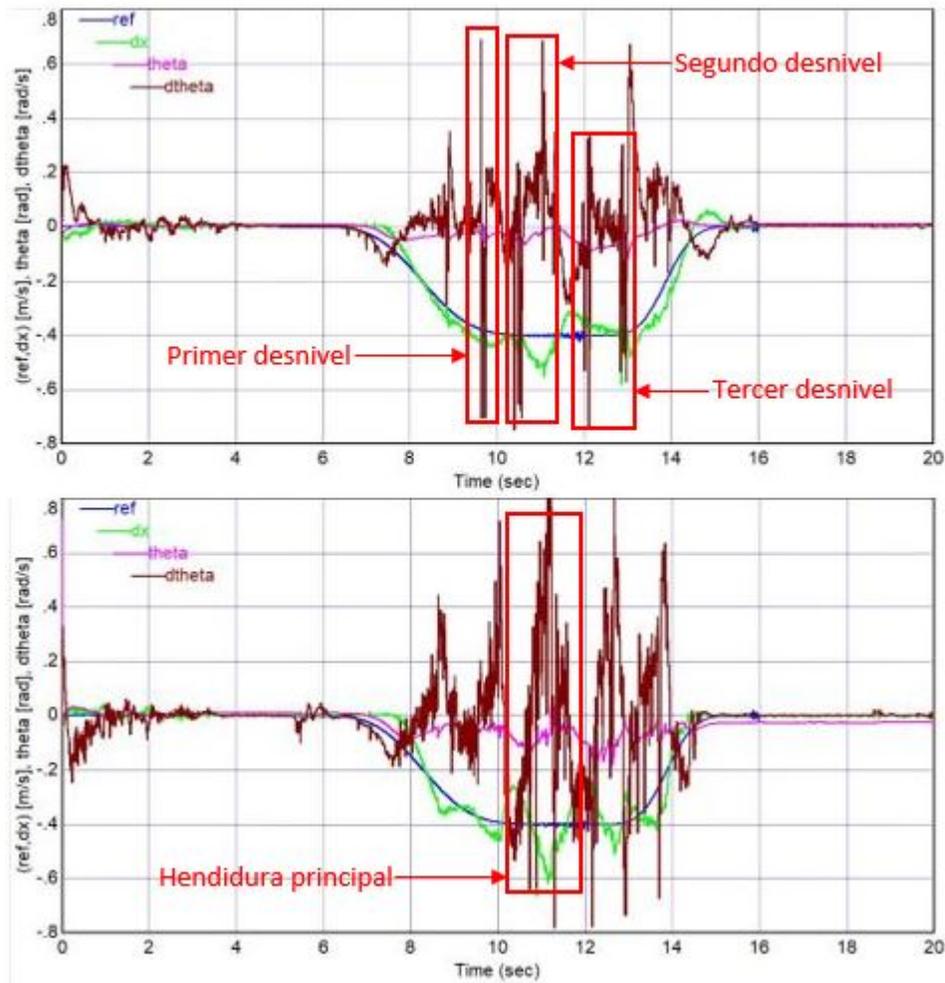
**Figura 4-32:** Respuesta de la SRDR con PI vectorial con LQR y FF a rechazo de perturbaciones en el primer terreno (superior) y en el segundo terreno (inferior)

Al comienzo del experimento, el **controlador por cadena de integradores con LQR** logra equilibrar al robot en aproximadamente 4 s. El controlador no rechaza activamente las perturbaciones en ambos recorridos. Cada vez que un obstáculo o desnivel es sobrepasado, la diferencia del error no se minimiza de manera inmediata (Figura 4-33). Lo anterior predispone al vehículo al momento de afrontar un nuevo obstáculo o desnivel, por lo que no es posible identificar el tiempo que tarda en volver al punto de equilibrio. Al finalizar los recorridos en ambos terrenos, el robot no logra alcanzar equilibrio estático. Es importante precisar que debido a una hendidura en la segunda superficie el robot queda atascado y se atenúan las oscilaciones, ya que en otros experimentos el vehículo no logró mantener el equilibrio durante el recorrido y cayó al suelo.



**Figura 4-33:** Respuesta de la SRDR por cadena de integradores con LQR a rechazo de perturbaciones en el primer terreno (superior) y en el segundo terreno (inferior)

El desempeño del **controlador GPI con observador desacoplado de estado extendido** se puede ver en la Figura 4-34. Al partir de posición vertical, el controlador equilibra al robot en un tiempo menor a 3 s. En ambos recorridos, las perturbaciones exógenas proporcionadas por los terrenos surcados ingresan a la variable estimada  $\hat{\xi}(t)$ , para luego ser rechazadas activamente por el controlador. Por esta razón, el vehículo puede realizar un buen seguimiento de la referencia de velocidad en ambos terrenos. Después de superar el segundo desnivel en el primer terreno y la hendidura principal del segundo, se puede observar que el prototipo alcanza equilibrio dinámico en un tiempo aproximado de 1 s. Es importante precisar que al finalizar la trayectoria en el segundo terreno, el vehículo termina en una hendidura y dada la ausencia de referencia de velocidad, su ángulo de inclinación es cercano a un grado. En adición, se puede ver que el error de estado estacionario es aproximadamente cero.



**Figura 4-34:** Respuesta de la SRDR por GPI con observador desacoplado de estado extendido a rechazo de perturbaciones en el primer terreno (superior) y en el segundo terreno (inferior)

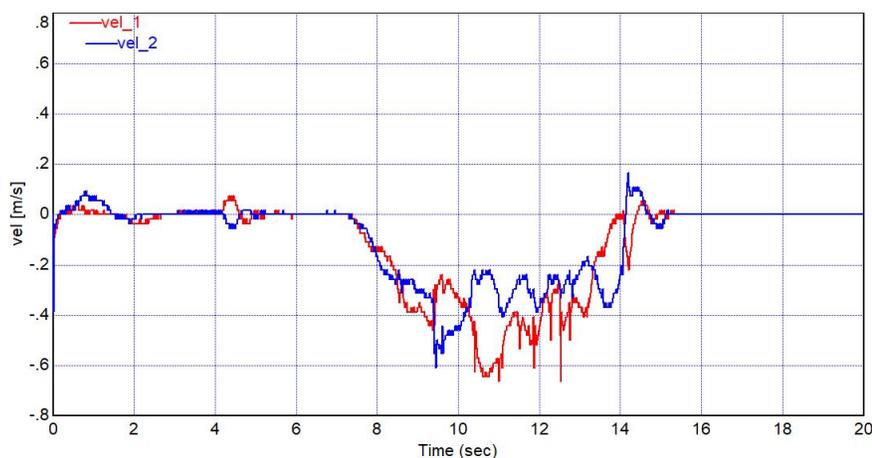
Durante los experimentos realizados con cada controlador, el prototipo de menor escala de una SRDR presentó comportamientos equivalentes al desplazarse en línea recta o virando en el terreno (Figuras 4-35 y 4-36). Para poder girar el sistema de control ingresa el voltaje a los actuadores. Las Figuras 4-37 y 4-38 muestran al robot virando en sentido horario en el primer y segundo terreno irregular, respectivamente.



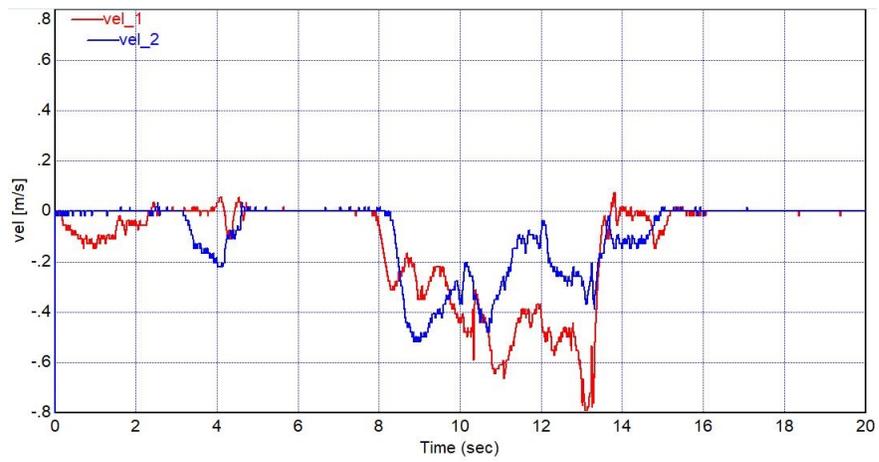
**Figura 4-35:** Captura de la SRDR al virar en el primer terreno irregular. Ver vídeo completo en [41]



**Figura 4-36:** Captura de la SRDR al virar en el segundo terreno irregular. Ver vídeo completo en [42]



**Figura 4-37:** Respuesta de velocidad en cada motor al virar en primer terreno irregular



**Figura 4-38:** Respuesta de velocidad en cada motor al virar en segundo terreno irregular

### 4.3.1. Comparación de resultados de los controladores en rechazo de perturbaciones

En la Tabla 4-5 se pueden ver los resultados de los controladores bajo los diferentes criterios de evaluación. Los controladores RVE con LQR y precompensador, PI vectorial con LQR y FF y GPI con observador desacoplado de estado extendido son los que presentan el mejor desempeño, siendo mejores los del GPI. En estos experimentos, estas estrategias realizan un buen seguimiento de la señal de referencia antes y después de sobrepasar los desniveles del primer terreno y los obstáculos del segundo. Además, al terminar los recorridos, logran equilibrar al robot y aproximar el error de estado estacionario a cero.

**Tabla 4-5:** Resultados de los controladores en rechazo de perturbaciones

Controlador	CE1	CE13	CE14	CE15	CE16	CE8
PID de doble lazo cerrado	4 s	2 s	B	D	Sí	No
RVE con LQR y precompensador	3 s	1.5 s	B	C	Sí	No
PI vectorial con LQR	5 s	-	D	D	Sí	No
PI vectorial con LQR y FF	5 s	1.5 s	B	B	Sí	No
Cadena de integradores con LQR	4 s	-	D	F	No	Sí
GPI con observador desacoplado de estado extendido	3 s	1 s	A	B	Sí	No

A: excelente, B: bueno, C: aceptable, D: insuficiente, F: malo

CE1: Tiempo en volver al equilibrio, CE13: Tiempo en volver al equilibrio después de perturbación

CE14: Seguimiento de trayectoria en primer terreno, CE15: Seguimiento de trayectoria en segundo terreno

CE16: Rechazo de perturbaciones, CE8: Error de estado estacionario

## 5 Conclusiones

En esta tesis se diseñan e implementan estrategias de control para controlar un prototipo de menor escala de una SRDR. Los controladores diseñados tienen como objetivos garantizar el equilibrio en ausencia de referencias de velocidad y realizar el desplazamiento mientras se hace seguimiento de señales de referencia, incluso cuando se presentan perturbaciones endógenas y exógenas.

A partir del análisis físico por medio de las leyes de Newton-Euler se obtiene el modelo teórico. Posteriormente, por medio de mediciones y por las fichas técnicas de los componentes se obtiene el modelo nominal de la SRDR. En un principio, este modelo establece la relación dinámica entre los actuadores, las ruedas y el chasis de la silla, para luego aproximar las no linealidades del sistema alrededor de un punto de equilibrio. Durante esta etapa, tanto los parámetros físicos en los componentes utilizados como la dinámica interna desconocida del vehículo, son una fuente de incertidumbres que afectan directamente el modelo nominal obtenido. Por esta razón, se utiliza la metodología de caja gris para generar una estructura matemática que intenta representar el comportamiento del robot de una manera más exacta. Para lograrlo, se usan las señales de referencia que ingresan al sistema y la respectiva respuesta real de las variables de velocidad y el ángulo de inclinación. El controlador PID de doble lazo cerrado se sintoniza de manera experimental y usa al modelo nominal del sistema. El modelo identificado se toma como base en el diseño de los controladores RVE con LQR y precompensador, PI vectorial con LQR, PI vectorial con LQR y FF y cadena de integradores con LQR para así mejorar el proceso de sintonización y garantizar un mejor desempeño. Con el fin de comprobar la efectividad del controlador GPI con salida plana, su diseño parte del modelo dinámico nominal, dado que las incertidumbres de este son estimadas por medio del observador desacoplado de estado extendido.

Esta tesis es un aporte al control de SRDR. Los controladores se diseñan y simulan en tiempo continuo para luego ser implementados en tiempo discreto. El primer acercamiento con el controlador PID de doble lazo cerrado toma en cuenta la naturaleza del sistema: solo es posible realizar seguimiento de trayectorias de velocidad si hay control sobre el ángulo de inclinación. Los controladores con una entrada y múltiples salidas: RVE con LQR y precompensador, PI vectorial con LQR, PI vectorial con LQR y FF y cadena de integradores con LQR se sintonizan usando el método de optimización LQR. Este método permite encontrar los vectores de ganancia de una manera más efectiva en comparación a otras técnicas de con-

trol por realimentación de variables de estado. El último controlador se desarrolla a partir de una estrategia de control lineal, que puede ser usada en sistemas no lineales, denominada GPI. Este controlador incluye un observador desacoplado de estado extendido que además de atenuar las no linealidades del sistema y la variación de parámetros, logra estimar las perturbaciones externas que luego son canceladas por el controlador.

Los controladores diseñados se evalúan con tres experimentos: seguimiento de trayectorias, variación de parámetros y rechazo de perturbaciones. En el primer aspecto se consideran dos señales de referencia con perfiles de velocidades y aceleraciones diferentes para realizar recorridos. Durante el seguimiento de trayectorias las respuestas obtenidas en la etapa de diseño y simulación son semejantes a las de los experimentos. Los controladores PID de doble lazo cerrado, PI vectorial con LQR y cadena de integradores con LQR, presentan oscilaciones y sobrepicos durante el recorrido, siendo estos comportamientos más notables en la referencia con perfil de aceleración mayor. Por otro lado, los controladores RVE con LQR y precompensador y PI vectorial con LQR y FF realizan un buen seguimiento de las referencias durante el proceso de avance, dado que al ir en reversa presentan pequeñas oscilaciones. La estructura del controlador GPI con observador de estado extendido desacoplado le permite atenuar las dinámicas desconocidas del robot y así ser la única estrategia en esta etapa que presenta un seguimiento ajustado de las referencias.

La evaluación de variación de parámetros se realiza al colocar dos bloques en el espaldar de la SRDR. Estos buscan equiparar los pesos de los pacientes que modifican la distancia al centro de masa en una silla de ruedas estándar. Las trayectorias utilizadas durante la etapa de seguimiento de trayectorias son inducidas al vehículo para evaluar la robustez de los controladores. Los controladores RVE con LQR y precompensador, PI vectorial con LQR y cadena de integradores con LQR se distancian del valor de referencia requerido y no realizan un buen seguimiento de referencias, por lo que se presentan oscilaciones y sobrepicos de mayor magnitud. En contraste, los controladores PID de doble lazo cerrado, PI vectorial con LQR y FF y GPI con observador de estado extendido desacoplado realizan una corrección adecuada a las perturbaciones aportadas por los bloques, siendo mejores los resultados del GPI.

Para surcar los terrenos irregulares durante la etapa de rechazo de perturbaciones, se induce un perfil de velocidad y aceleración mayor al vehículo con el fin de comprobar la robustez de los controladores a perturbaciones exógenas. Los experimentos realizados muestran que el controlador GPI con observador de estado extendido desacoplado además de llevar a la SRDR a terminar los recorridos en los terrenos mientras realiza un seguimiento cercano a la referencia, necesita de un tiempo menor para alcanzar equilibrio dinámico al rechazar una perturbación. Aunque con un tiempo mayor y una efectividad menor, el controlador PI vectorial con LQR y FF también logra rechazar las perturbaciones durante la trayectoria. A

pesar de los resultados negativos obtenidos en la etapa de variación de parámetros, el controlador RVE con LQR y precompensador puede surcar los terrenos sin presentar sobrepicos cuando la referencia de velocidad es cero. Los demás controladores se consideran inadecuados por no converger a la velocidad requerida, tanto en estado transitorio como estacionario.

Según el comportamiento de los controladores durante las etapas de evaluación, se concluye que el mejor controlador para realizar seguimiento de trayectorias de velocidad es el GPI con observador desacoplado de estado extendido, dado que presenta el mejor desempeño durante los experimentos de seguimiento de trayectorias, variación de parámetros y rechazo de perturbaciones. Además, es importante resaltar que este controlador toma el modelo nominal, lo cual simplifica su diseño ya que prescinde del proceso de identificación.

Finalmente, se puede concluir que el uso de controladores GPI multivariantes con salida plana, es prometedor para el control de trayectorias de velocidad en un prototipo de SRDR. La construcción de un modelo a escala real y evaluación con pacientes se considera como etapa futura de investigación.

# Bibliografía

- [1] AHMAD, Salmiah ; TOKHI, M O.: Linear Quadratic Regulator (LQR) approach for lifting and stabilizing of two-wheeled wheelchair. En: *2011 4th International Conference on Mechatronics: Integrated Engineering for Industrial and Societal Development, ICOM'11 - Conference Proceedings*. Kuala Lumpur, Malaysia : IEEE, 2011. – ISBN 978-1-61284-436-7, p. 17–19
- [2] ALQUDAH, Mohammad ; ABDELFAH, Mustafa ; BOIKO, Igor ; ALHAMMADI, Khalid: Dynamic modeling and control design for a self-balancing two-wheel chair. En: *International Conference on Electronic Devices, Systems, and Applications*, 2017. – ISBN 9781509053063, p. 2–5
- [3] AMAGAI, Sho ; MURAKAMI, Toshiyuki: An approach to robust velocity control of two-wheel wheelchair. En: *IECON Proceedings (Industrial Electronics Conference)*. Florence, Italy : IEEE, 2016. – ISBN 9781509034741, p. 494–499
- [4] ANGELES, Jorge: *Dynamic Response of Linear Mechanical Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Mechanical. Springer Science & Business Media, 2011. – 560 p.. – ISBN 1441910271, 9781441910271
- [5] ARCOS, Jaime: *Control automático de un exoesqueleto de marcha para pacientes con discapacidad motora*, Universidad Nacional de Colombia, Tesis de Grado, 2013. – 109 p.
- [6] ÅSTRÖM, K J.: Limitations on control system performance. En: *European Journal of Control* 6 (2000), Nr. 1, p. 2–20. – ISBN 9783952426906
- [7] ÅSTRÖM, Karl ; HÄGGLUND, Tore: *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. ISA: The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 1995. – 343 p.. – ISBN 1556175167
- [8] CHEN, Ling ; WANG, Sen ; HU, Huosheng ; MCDONALD-MAIER, Klaus: Bèzier curve based trajectory planning for an intelligent wheelchair to pass a doorway. En: *Proceedings of the 2012 UKACC International Conference on Control, CONTROL 2012* (2012), Nr. September, p. 339–344. ISBN 9781467315609

- [9] CHOCOTECO, J ; MORALES, R ; FELIU, V ; SANCHEZ, L: Trajectory Planning for a Stair-Climbing Mobility System Using Laser Distance Sensors. En: *IEEE Systems Journal* 10 (2016), Nr. 3, p. 944–956. – ISSN 19379234
- [10] CORTÉS-ROMERO, John ; RAMOS, Germán A ; CORAL-ENRIQUEZ, Horacio: Generalized proportional integral control for periodic signals under active disturbance rejection approach. En: *ISA transactions* 53 (2014), nov, Nr. 6, p. 1901–1909. – ISSN 1879–2022
- [11] COWAN, RE ; NASH, MS ; COLLINGER, JL ; KOONTZ, AM ; BONINGER, ML: Impact of surface type, wheelchair weight, and axle position on wheelchair propulsion by novice older adults. En: *Archives of physical medicine and rehabilitation* 90 (2009), Nr. 7, p. 1076–83
- [12] D’AZZO, John ; HOUPIS, Constantine: *Linear Control System Analysis and Design: Conventional and Modern*. 1st. McGraw-Hill College; Subsequent edition (January 1, 1988), 1975. – 906 p.. – ISBN 9780070161863
- [13] DEVRIES, Paul L. ; HASBUN, Javier E.: *A first course in computational physics*. Second. Jones and Bartlett Publishers, 2011. – 433 p.. – ISBN 1449636195, 9781449636197
- [14] DIGIOVINE, Carmen ; KOONTZ, Alicia ; BONINGER, Michael: Advances in Manual Wheelchair Technology. En: *Topics in Spinal Cord Injury Rehabilitation* 11 (2006), Nr. 4, p. 1–14
- [15] DINALE, Aiko ; HIRATA, Kazuya ; MURAKAMI, Toshiyuki: Analytical Design of a Robust Motion Controller for a Two-Wheeled Wheelchair System. En: *2013 16th International Conference on Advanced Robotics (ICAR)*. Montevideo, Uruguay : IEEE, 2013. – ISBN 9781479927227, p. 1–6
- [16] DING, Dan ; COOPER, Rory A. ; GUO, Songfeng ; CORFMAN, Thomas A.: Analysis of driving backward in an electric-powered wheelchair. En: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 12 (2004), Nr. 6, p. 934–943. – ISBN 1063–6536
- [17] EDWARDS, Cristopher ; SPURGEON, Sarah K.: *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Illustrate. CRC Press, 1998. – 237 p.. – ISBN 0748406018, 9780748406012
- [18] EVEREST, Herbert A. ; JENNINGS, Harry C. *Folding wheel chair*. 1937
- [19] FUJIO, Takehito ; ISHIDA, Yoshihisa: Design of Model-following Control using a Controller Inversion Technique with Active Disturbance Rejection Control. En: *2016 IEEE 12th International Colloquium on Signal Processing & Its Applications (CSPA)* (2016), Nr. March, p. 78–82. ISBN 9781467387804

- [20] GAAL, R P. ; REBHOLTZ, N ; HOTCHKISS, R D. ; PFAELZER, P F.: Wheelchair rider injuries: causes and consequences for wheelchair design and selection. En: *Journal of rehabilitation research and development* 34 (1997), Nr. 1, p. 58–71. – ISBN 0748–7711 (Print) – ISBN 0748 – 7711 (Linking)
- [21] GRASSER, Felix ; D'ARRIGO, Aldo ; COLOMBI, Silvio ; RUFER, Alfred C.: JOE: A mobile, inverted pendulum. En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 49 (2002), Nr. 1, p. 107–114. – ISBN 0272–1708
- [22] HARTMAN, Amiel ; GILLBERG, Richard ; LIN, C T. ; NANDIKOLLA, Vidya K.: Design and development of an autonomous robotic wheelchair for medical mobility. En: *2018 International Symposium on Medical Robotics, ISMR 2018* Vol. 2018-Janua, 2018. – ISBN 9781538625125, p. 1–6
- [23] HIRATA, Kazuya: Advanced motion control of two-wheel wheelchair for slope environment. En: *IECON 2013 - 39th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. Vienna, Austria : IEEE, 2013. – ISBN 9781479902248, p. 6436–6441
- [24] HIRATA, Kazuya ; MURAKAMI, Toshiyuki: A realization of step passage motion in two-wheel wheelchair systems utilizing variable repulsive compliance control. En: *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*. Taipei, Taiwan : IEEE, 2013. – ISBN 9781467351942
- [25] HIRATA, Kazuya ; MURAKAMI, Toshiyuki: An assist control of step climbing motion in two-wheel electric powered wheelchair with controlled casters. En: *2014 IEEE 13th International Workshop on Advanced Motion Control (AMC)*. Yokohama, Japan : IEEE, 2014. – ISBN 9781479923243, p. 440–445
- [26] HUANG, Jian ; DING, Feng ; FUKUDA, Toshio ; MATSUNO, Takayuki: Modeling and Velocity Control for a Novel Narrow Vehicle Based on Mobile Wheeled. En: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* Vol. 21, IEEE, 2013, p. 1607–1617
- [27] LEWIS, Frank L. ; VRABIE, Draguna ; SYRMOS, Vassilis L.: *Optimal Control*. 3rd. Wiley, 2012. – 552 p.. – ISBN 0470633492
- [28] MEDOLA, Fausto O. ; ELUI, Valeria Meirelles C. ; SANTANA, Carla Da S. ; FORTULAN, Carlos A.: Aspects of Manual Wheelchair Configuration Affecting Mobility: A Review. En: *Journal of physical therapy science* 26 (2014), Nr. 2, p. 313–318. – ISBN 0915–5287
- [29] MERCÈRE, Guillaume ; PROT, Olivier ; RAMOS, José A: Identification of Parameterized Gray-Box State-Space Systems: From a Black-Box Linear Time-Invariant Representation to a Structured One. En: *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol. 59, IEEE, 2006, p. 2873–2885

- [30] MORALES, Rafael ; FELIU, Vicente ; GONZALEZ, Antonio ; PINTADO, Publio: Kinematic Model of a New Staircase Climbing Wheelchair and its Experimental Validation. En: *The International Journal of Robotics Research* 25 (2006), Nr. 9, p. 825–841
- [31] MURCIA, Harold F. ; GONZ, Andres E. ; MODEL, A R.: Performance Comparison Between PID and LQR Control on a 2-wheel Inverted Pendulum Robot. En: *2016 IEEE Colombian Conference on Robotics and Automation (CCRA)*. Bogota : IEEE, 2016. – ISBN 9781509037872
- [32] NAKAJIMA, Shuro: Evaluation of the Mobility Performance of a Personal Mobility Vehicle for Steps. En: *IEEE Access* 5 (2017), p. 9748–9756. – ISBN 9781509043644
- [33] NAKAMURA, Akihiro ; MURAKAMI, Toshiyuki: A stabilization control of two wheels driven wheelchair. En: *2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS 2009*, 2009. – ISBN 9781424438044, p. 4863–4868
- [34] OLSON, Zachery L. ; VAN MOORHEM, William K. ; ROEMER, Robert B.: *A comparative analysis of three self-balancing wheelchair balancing mechanisms.*, University of Utah, Tesis de Grado, 2006. – 481–491 p.
- [35] PAN, Jinwen ; QI, Shimin ; WANG, Yong: Flatness based active disturbance rejection control for cart inverted pendulum and experimental study. En: *Proceedings of the American Control Conference 2015-July* (2015), p. 4868–4873. – ISBN 9781479986842
- [36] PANOMRUTTANARUG, Benjamas ; CHOTIKUNNAN, Phichitphon: Self-balancing iBOT-like wheelchair based on type-1 and interval type-2 fuzzy control. En: *2014 11th International Conference on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology, ECTI-CON 2014*. Nakhon Ratchasima, Thailand : IEEE, 2014. – ISBN 9781479929924, p. 1–6
- [37] PUTRA, Renaldo H. ; RAHMAN, Ahmad G W. ; NINGRUM, Endah S. ; PURNOMO, Didik S.: Determination of Center of Gravity on Electric Standing Wheelchair. En: *International Medical Device and Technology Conference*, 2017. – ISBN 9789670194936, p. 142–147
- [38] REN, Chao ; MA, Shugen: Generalized proportional integral observer based control of an omnidirectional mobile robot. En: *Mechatronics* 26 (2015), mar, p. 36–44. – ISSN 09574158
- [39] RODRÍGUEZ, Julián. *SRDR surcando primer terreno irregular*. <https://www.youtube.com/watch?v=NQ7I-pPCrb0>. 2018
- [40] RODRÍGUEZ, Julián. *SRDR surcando segundo terreno irregular*. <https://www.youtube.com/watch?v=roDekIudYMo>. 2018
- [41] RODRÍGUEZ, Julián. *SRDR virando primer terreno irregular*. <https://www.youtube.com/watch?v=RG4C{ }m0gxvg>. 2018

- [42] RODRÍGUEZ, Julián. *SRDR virando segundo terreno irregular*. <https://www.youtube.com/watch?v=wYLSQc2CfXI>. 2018
- [43] RODRÍGUEZ, Julián ; GONZÁLEZ, Sergio: *Diseño y Construcción de un Prototipo Vehicular de Dos Ruedas Capaz de Mantener en Equilibrio un Objeto*, Escuela Tecnológica Instituto Técnico Central, Tesis de Grado, 2015. – 123 p.
- [44] SEO, Sang Y. ; KIM, Seok H. ; LEE, Se H. ; HAN, Sung H. ; KIM, Han S.: Simulation of attitude control of a wheeled inverted pendulum. En: *ICCAS 2007 - International Conference on Control, Automation and Systems*, 2007. – ISBN 8995003871, p. 2264–2269
- [45] SIRA-RAMÍREZ, H ; AGRAWAL, Sunil K.: *Differentially Flat Systems*. Illustrated. CRC Press, 2004. – 450 p.. – ISBN 0824754700, 9780824754709
- [46] SIRA-RAMÍREZ, H ; LUVIANO-JUÁREZ, A ; RAMÍREZ-NERIA, M ; ZURITA-BUSTAMANTE, Eric W.: *Active Disturbance Rejection Control of Dynamic Systems: A Flatness Based Approach*. 1st. Butterworth-Heinemann, 2017. – 358 p.. – ISBN 9780128498682
- [47] SIRA-RAMIREZ, Hebertt ; LUVIANO-JUÁREZ, Alberto ; CORTÉS-ROMERO, John: Control lineal robusto de sistemas no lineales diferencialmente planos. En: *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI* 8 (2011), Nr. 1, p. 14–28. – ISSN 16977912
- [48] STENGEL, Robert F.: *Optimal Control and Estimation*. 1. Dover Publications; Reissue edition (September 20, 1994), 1986. – 672 p.. – ISBN 9780486682006
- [49] TSAI, CY ; LIN, CJ ; HUANG, YC ; LIN, PC ; SU, FC: The effects of rear-wheel camber on the kinematics of upper extremity during wheelchair propulsion. En: *Biomedical engineering online* 11 (2012), Nr. 87
- [50] U.A.BAKSHI, V.U.Bakshi: Transfer Function and Impulse Response. En: *Control System Engineering*. Technical Publications, 2008. – ISBN 8184314639, 9788184314632, Kapitel 3, p. 1036
- [51] VANSICKLE, D P. ; COOPER, R a. ; BONINGER, M L. ; DIGIOVINE, C P.: Analysis of vibrations induced during wheelchair propulsion. En: *Journal of rehabilitation research and development* 38 (2001), Nr. 4, p. 409–21. – ISBN 0748–7711 (Print) 0748–7711
- [52] WADA, Masayoshi: A 4WD Omnidirectional Wheelchair with a Chair Tilting System. En: *Proceedings of 2008 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*. Takamatsu, Japan : IEEE, 2008, p. 21–26
- [53] WANG, Xu ; SABERI, Ali ; STOORVOGEL, Anton ; GRIP, Havard: Control of a chain of integrators subject to actuator saturation. En: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 24 (2017), p. 1–9. – ISBN 9780198722946