



UNIVERSIDAD **NACIONAL** DE COLOMBIA  

---

SEDE MEDELLÍN

# **Configuración Óptima de Transductores Piezoeléctricos para Control Activo de Vibraciones en Estructuras Delgadas utilizando el Método de Optimización Topológica**

**DANIEL GIRALDO GUZMÁN**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Minas, Departamento de Ingeniería Mecánica  
Medellín, Colombia  
2018



# Configuración Óptima de Transductores Piezoeléctricos para Control Activo de Vibraciones en Estructuras Delgadas utilizando el Método de Optimización Topológica

**DANIEL GIRALDO GUZMÁN**

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ingeniería Mecánica**

Director:  
Ph.D. Wilfredo Montealegre Rubio

Grupo de Investigación:  
Diseño y Optimización Aplicada (DOA)  
[www.doa-unal.co](http://www.doa-unal.co)

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Minas, Departamento de Ingeniería Mecánica  
Medellín, Colombia  
2018



Toma muy seriamente estas cinco reglas simples:

1. **Cuestiona la autoridad.** Ninguna idea es cierta solo porque alguien lo dice.
2. **Piensa por ti mismo.** Pregúntate a ti mismo. No creas nada solo porque quieres. Creer que algo no lo hace real.
3. **Prueba las ideas,** con la evidencia obtenida de la observación y la experimentación. Si una idea favorita falla una prueba bien diseñada, es incorrecta. Supéralo.
4. **Sigue la evidencia,** donde quiera que te lleve. Si no tienes pruebas, reserva tu juicio.

Y quizás la más importante ...

5. **Recuerda... podrías estar equivocado.** Incluso los mejores científicos se han equivocado en algunas cosas. Newton, Einstein y todos los demás grandes científicos de la historia - todos cometieron errores. Por supuesto lo hicieron. Eran humanos.

La ciencia es una forma de evitar engañarnos a nosotros mismos, y a los demás. Cuanto más nos pertenezca la ciencia a todos, menos probable es que sea mal utilizada.

Neil deGrasse Tyson



# Agradecimientos

Inicialmente, quisiera expresar mi gratitud con todos los investigadores y científicos que a lo largo de la historia han hecho contribuciones en los campos relacionados a mi trabajo, en especial, a todos aquellos que con sus aportes y conocimientos han contribuido directamente en el desarrollo de esta tesis.

A mis padres Jaime H. Giraldo y Maria E. Guzmán; a quienes debo toda mi vida, les agradezco con mi corazón por todo el apoyo recibido a lo largo de mi carrera profesional y mi desarrollo personal. A ellos, les agradezco el esfuerzo, la paciencia, la constancia, y el apoyo incondicional en todas las decisiones que he tomado.

A mis colegas y todas las personas que directa o indirectamente me apoyaron en el desarrollo de este trabajo. A mi tutor Wilfredo Montealegre y su grupo de investigación por todo el conocimiento y enseñanzas que me brindaron. A mis compañeros de posgrado: Jéssica, Laura, Manuela, Francisco, Esteban, Andrés, Juan David, Juan Carlos y Salomón, por el tiempo que compartimos como amigos y colegas, además de la gran disposición y el apoyo comunitario en el avance de nuestros proyectos.

A mis familiares, quienes pacientemente me apoyaron y permanecieron constantemente a mi lado a pesar de las adversidades. A Grego y Checho, que mantuvieron vivo nuestro proyecto empresarial en mi ausencia. Y por último, pero no menos importante, a mi grupo cercano de amigos: Ana, Berrío, Ángel, Jenny, Kike, Loaiza, Mauro, Pinto, Villada, Pol, Jose, Juanjo, Caro, Felo, Gómez, Milo, Correal, Zicer y Juan, que nunca me han dejado de apoyar y han creído fielmente en mí, ellos han sido y serán parte de mi familia.





# Resumen

En esta tesis, una técnica de optimización novedosa; llamada Método de Optimización Topológica (MOT), es utilizada para proponer una solución a problemas de vibración estructural. Un conjunto de transductores piezoeléctricos en configuración de sensores y actuadores se modelan usando el Método de los Elementos Finitos (MEF). Para esto, se desarrolló un *software* de simulación que permite realizar análisis estáticos, modales y armónicos con elementos finitos hexaédricos de segundo orden tipo *Brick-3D* de 20 nodos, con cuatro grados de libertad por nodo, tres de ellos de desplazamientos y uno de voltaje. A partir del modelo numérico, se genera un modelo de control en variables de espacios de estado mediante un conversión matemática que reorganiza los grados de libertad en conjuntos de matrices de estado que relacionan la estructura con los actuadores y sensores. Adicionalmente, se realiza durante la conversión del modelo una reducción modal truncada del sistema a través de un cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas modales usando sus vectores propios. Este modelo de espacios de estado es utilizado para formular un problema de optimización que encuentra una distribución topológica óptima de transductores piezoeléctricos sobre la estructura elástica, usando dos funciones objetivo evaluadas paralelamente, que calculan la maximización de la traza del gramiano de controlabilidad y del gramiano de observabilidad. En la solución del problema de optimización se usa un modelo de interpolación de material SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), se definen límites móviles filtrados para resolver el problema con el método de Programación Lineal Secuencial (PLS), y se realiza un análisis de sensibilidad por un método numérico de diferencias finitas de ambas funciones objetivo. Finalmente, un controlador óptimo LQG (*Linear-Quadratic Gaussian Regulator*) es implementado para verificar el rendimiento del sistema optimizado para un caso de estudio de una viga en *cantilever* sometida a vibración. Los resultados de simulación con el MEF son verificados por comparación directa con el software comercial ANSYS®, y los resultados de optimización son verificados con análisis energéticos del control, la salida del sensor, y el coeficiente de amortiguamiento del sistema planta-controlador.

**Palabras clave:** Control activo de vibraciones • Materiales piezoeléctricos • Optimización topológica • Elementos Finitos



# Abstract

In this thesis, a novel optimization technique; called the Topology Optimization Method (TOM), is used to propose a solution to structural vibration problems. A set of piezoelectric transducers as sensors and actuators are modeled using the Finite Element Method (FEM). To do this, a software was developed that allows simulations of static, modal and harmonic analysis with second-order hexahedral Brick-3D finite elements of 20 nodes, with four degrees of freedom per node, three of them for displacements and one for voltage. From the numerical model, a control model is generated in state-space variables through a mathematical conversion that reorganizes the degrees of freedom in sets of state matrices that relate the structure to the actuators and sensors. Additionally, a truncated modal reduction of the system is carried out during the conversion of the model through a change of cartesian coordinates to modal coordinates using its eigenvectors. This model of state-space is used to formulate an optimization problem that finds an optimal topology distribution of piezoelectric transducers over an elastic structure, using two objective functions evaluated in parallel, which calculate the maximization of the trace of the gramians of controllability and observability. In the solution of the optimization problem, a Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) material interpolation model is used, filtered mobile limits are defined to solve the problem with the Sequential Linear Programming (SLP) method, and an analysis of sensitivity with a numerical method of finite differences of both objective functions is performed. Finally, a Linear-Quadratic Gaussian Regulator (LQG) controller is implemented to verify the performance of the optimized system for a study case of a cantilever beam subject to vibration. The results of the simulation with the FEM are verified by direct comparison with the commercial software ANSYS®, and the optimization results are verified with an energy analysis of the control, the sensor output, and the damping coefficient of the plant-controller system.

**Keywords:** Active vibration control • Piezoelectric materials • Topology optimization • Finite elements



# Contenido

	<b>Pág.</b>
<b>1</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>6</b>
1.2.1	6
1.2.2	7
<b>1.3</b>	<b>7</b>
<b>1.4</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>13</b>
<b>2.1</b>	<b>13</b>
<b>2.2</b>	<b>14</b>
<b>2.3</b>	<b>15</b>
<b>2.4</b>	<b>18</b>
2.4.1	18
2.4.2	20
2.4.3	21
<b>2.5</b>	<b>22</b>
2.5.1	24
2.5.2	25
2.5.3	26
2.5.4	29
<b>2.6</b>	<b>29</b>
2.6.1	29
2.6.2	30
<b>2.7</b>	<b>32</b>
2.7.1	32
2.7.2	32
<b>3</b>	<b>35</b>
<b>3.1</b>	<b>35</b>
<b>3.2</b>	<b>36</b>

3.3	Aplicaciones en Control de Estructuras . . . . .	39
3.4	Análisis Dinámico de Estructuras . . . . .	42
3.4.1	Análisis Modal . . . . .	44
3.4.2	Análisis Armónico . . . . .	45
3.5	Modelos en Espacios de Estado . . . . .	46
3.5.1	Representación de Estructuras Piezoeléctricas . . . . .	47
3.5.2	Modelos de Orden Reducido . . . . .	52
3.6	Controlabilidad y Observabilidad . . . . .	54
3.6.1	Gramianos de Controlabilidad y Observabilidad . . . . .	55
3.7	Control Óptimo . . . . .	56
3.8	Implementación de un Controlador Óptimo . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Optimización Topológica</b> . . . . .	<b>61</b>
4.1	Introducción . . . . .	61
4.2	Reseña Histórica . . . . .	62
4.3	Aplicaciones en Control de Estructuras . . . . .	64
4.4	Introducción a la Optimización Estructural . . . . .	66
4.5	Método de Optimización Topológica (MOT) . . . . .	68
4.5.1	Dominio de Diseño Fijo . . . . .	70
4.5.2	Modelos de Interpolación de Material . . . . .	71
4.5.3	Modelo de Material SIMP . . . . .	74
4.6	Problemas del MOT . . . . .	76
4.6.1	Filtros en el MOT . . . . .	78
4.7	Implementación del MOT . . . . .	80
4.7.1	Problema de Optimización . . . . .	81
4.7.2	Solución al Problema de Optimización . . . . .	82
4.7.3	Programación Lineal Secuencial (SLP) . . . . .	84
4.7.4	Problema de Optimización Discretizado . . . . .	85
4.7.5	Análisis de Sensibilidad . . . . .	87
4.7.6	Algoritmo del MOT . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Resultados</b> . . . . .	<b>97</b>
5.1	Caso de estudio . . . . .	97
5.2	Simulación de Estructuras Piezoeléctricas . . . . .	98
5.2.1	Tipo de elemento finito . . . . .	99
5.2.2	Análisis Estático . . . . .	101
5.2.3	Análisis Modal . . . . .	103
5.2.4	Análisis Armónico . . . . .	105
5.3	Topologías Óptimas Preliminares . . . . .	106
5.4	Variación de Parámetros . . . . .	110

---

5.4.1	Sistema de Unidades . . . . .	111
5.4.2	Factores de Penalización . . . . .	112
5.4.3	Discretización de Malla . . . . .	115
5.4.4	Reducción Modal del Sistema . . . . .	116
5.4.5	Restricciones de Volumen . . . . .	119
5.4.6	Pesos en las Funciones Objetivo . . . . .	120
5.5	Respuesta del Sistema de Control . . . . .	124
5.5.1	Efectos de Control al Interpretar Topologías . . . . .	125
5.5.2	Rendimiento de Diferentes Topologías . . . . .	128
5.5.3	Acción de Control . . . . .	130
5.5.4	Salida del Sistema . . . . .	131
5.5.5	Variables de Estado . . . . .	132
5.5.6	Vibración Estructural . . . . .	134
5.5.7	Energía de Señales . . . . .	135
5.5.8	Amortiguamiento de Señales . . . . .	137
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>141</b>
<b>7</b>	<b>Trabajo Futuro</b>	<b>145</b>
	<b>Anexos</b>	<b>149</b>
<b>A</b>	<b>Ecuaciones Constitutivas Piezoeléctricas Expandidas</b>	<b>149</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>151</b>





# Lista de Figuras

	Pág.
<b>Fig. 1-1</b> Primer modo natural de vibración para una placa de $160 \times 160$ mm con espesores de: (a) 80 mm, (b) 20 mm, (c) 5 mm y (d) 0,5 mm. Las imágenes y frecuencias de vibración se obtienen a partir de un análisis modal por elementos finitos en el <i>software</i> ANSYS. . . . .	2
<b>Fig. 1-2</b> Integración de sensores y actuadores en una estructura inteligente. Figura adaptada de Preumont (2011). . . . .	4
<b>Fig. 1-3</b> Membrana sometida a una vibración sin control (izquierda) y con control activo de vibraciones (derecha) usando el método de optimización topológica (MOT). Posible configuración óptima de sensores (verde) y actuadores (azul). . . . .	6
<b>Fig. 1-4</b> Diagrama del modelo de investigación. . . . .	8
<b>Fig. 1-5</b> Procedimiento de análisis de los elementos finitos. Diagrama adaptado de Bathe (1996). . . . .	9
<b>Fig. 1-6</b> Método de diseño de un sistema de control activo de vibraciones. Figura adaptada de Preumont (2011). . . . .	10
<b>Fig. 2-1</b> Reacción al estímulo de un piezoeléctrico polarizado. (a) Dirección de polarización. (b) Respuesta a la compresión. (c) Respuesta a la tensión. (d) Respuesta al voltaje en la misma polaridad. (e) Respuesta al voltaje en polaridad opuesta. Imagen tomada de Moheimani and Fleming (2006). . . . .	14
<b>Fig. 2-2</b> Espejo segmentado: vista de siete segmentos en su estructura de soporte. El tamaño de cada segmento está entre 100 y 260 mm. Figura adaptada de Rodrigues et al. (2009). . . . .	16
<b>Fig. 2-3</b> Estabilizador de un FA-18 laminado con piezoeléctricos. Imagen de <i>Defence Science and Technology Organization (DESTO)</i> . . . . .	17
<b>Fig. 2-4</b> Cargas en el dieléctrico de un capacitor plano. Figura de Piefort (2001). . . . .	21
<b>Fig. 2-5</b> Diagrama de Heckmann. Figura adaptada de Piefort (2001). . . . .	23
<b>Fig. 2-6</b> Elemento finito hexaédrico de 8 nodos. Figura adaptada de Dhondt (2004). . . . .	30
<b>Fig. 2-7</b> Elemento finito hexaédrico de 20 nodos. Figura adaptada de Dhondt (2004). . . . .	31

<b>Fig. 3-1</b>	Puente de Tacoma durante la vibración inducida por el viento. Noviembre 7 de 1940. Imagen de <i>Historical Photography Collection</i> , Universidad de Washington (Rao, 2011).	38
<b>Fig. 3-2</b>	Plataforma de Stewart construida en el <i>Active Structures Laboratory</i> .	39
<b>Fig. 3-3</b>	(Izquierda) Montacargas Komatsu FD20 usando en el proyecto. (Derecha) Esquema del sistema control semi-activo de vibraciones implementado en el montacargas.	40
<b>Fig. 3-4</b>	(Izquierda) Dispositivo háptico para microscopio AFM. (Derecha) Detalle de la estructura principal del nanomanipulador. Imágenes adaptadas de Letier et al. (2003).	40
<b>Fig. 3-5</b>	Configuración de un experimento de vibración de puentes a excitaciones armónicas. Imagen tomada de Preumont (2011).	41
<b>Fig. 3-6</b>	(Izquierda) <i>Yokohama Landmark Tower</i> , (Derecha) Amortiguador usado en la construcción del edificio como parte del control de vibraciones. Imagen adaptada de Preumont and Seto (2008).	42
<b>Fig. 3-7</b>	Modelo HSR-RSM montado en el laboratorio TDT. Imagen tomada de la galería de <i>Transonic Dynamics Tunnel</i>	43
<b>Fig. 3-8</b>	Diagrama de bloques de un sistema de control lineal continuo representado en espacios de estado. Figura tomada de Ogata (2010).	48
<b>Fig. 3-9</b>	Ejemplo de un sistema mecánico incontrolable (izquierda) y de un sistema mecánico controlable (derecha). Figura tomada de Inman (2006).	54
<b>Fig. 3-10</b>	Regulador lineal cuadrático Gaussiano (LQG) implementado en este trabajo.	59
<b>Fig. 3-11</b>	Representación del modelo en espacio de estados implementado en <i>Simulink</i> .	59
<b>Fig. 3-12</b>	Diagrama de estimador de estados implementado en este trabajo.	60
<b>Fig. 4-1</b>	Estructura óptima para cargas simples. Imagen tomada de Michell (1904).	62
<b>Fig. 4-2</b>	(Izquierda) Placa dispuesta con transductores piezoeléctricos. (Derecha) Resultados de optimización topológica estructural de la placa. Imagen adaptada de Zhu et al. (2002).	64
<b>Fig. 4-3</b>	Optimización para dos casos de modos de vibración del cabezal actuador. (a) El objetivo es el segundo modo. (b) El objetivo es el tercer modo. El color verde representa la estructura, el color rojo es el material PZT. Imagen tomada de Sun et al. (2009).	64
<b>Fig. 4-4</b>	Distribución óptima del electrodo piezoeléctrico con objetivo: (a) minimización de radiación sonora, (b) minimización de rigidez estructural dinámica. Imagen adaptada de Zhang and Kang (2014a).	65
<b>Fig. 4-5</b>	Topologías óptimas de distribución de material visco-elástico para los primeros cuatro modos de vibración, presentados en orden ascendente de izquierda a derecha. Imagen adaptada de Kim et al. (2013).	65

<b>Fig. 4-6</b> Distribución óptima de la capa del sensor y del actuador para una placa en <i>cantilever</i> . (a) Contorno de densidad de material y (b) distribución de material piezoeléctrico con elementos de baja densidad ocultos. Imagen tomada de Hu et al. (2018). . . . .	66
<b>Fig. 4-7</b> Categorías de la optimización estructural: (a) optimización paramétrica, (b) optimización de material, (c) optimización de forma, (d) Optimización topológica. A la izquierda se presentan las estructuras iniciales, a la derechas las estructuras optimizadas. Figura tomada de Sigmund (2000). . . . .	68
<b>Fig. 4-8</b> Algoritmo de Optimización Topológica Aplicado. . . . .	69
<b>Fig. 4-9</b> Dominios de diseño fijos para las optimizaciones realizadas en esta tesis sobre un actuador y un sensor piezoeléctrico. (Izquierda) proyección isométrica de la estructura multicapa. (Derecha) vista lateral de la misma estructura detallando la composición de cada capa. . . . .	71
<b>Fig. 4-10</b> Optimización de estructuras discretas. (izquierda) Estructura tipo pórtico inicial. (Derecha) Estructura optimizada. Imágenes adaptadas de Alzate Acevedo (2016). . . . .	72
<b>Fig. 4-11</b> Optimización topológica de estructuras continuas con un a) abordaje geométrico o macro-estructural y un b) abordaje de material o micro-estructural. Imagen tomada de Berrío (2017). . . . .	73
<b>Fig. 4-12</b> Relación de propiedad del material $E/E^0$ vs. densidad en el modelo de material SIMP $\rho$ . Figura tomada de Eschenauer and Olhoff (2001). . . . .	75
<b>Fig. 4-13</b> Ejemplo de estructura con problemas de escala de grises. Imagen obtenida del código de 99 líneas de Sigmund (2001). . . . .	76
<b>Fig. 4-14</b> Estructura con problema de tablero de ajedrez. Imagen tomada de Sigmund and Petersson (1998). . . . .	77
<b>Fig. 4-15</b> Ejemplificación de la dependencia de malla para cuatro casos sin uso de filtro: 300 elementos, 1200 elementos, 4800 elementos y 19200 elementos. Imagen obtenida del código de 99 líneas de Sigmund (2001). . . . .	77
<b>Fig. 4-16</b> Concepto de filtro de vecindad fija (A) con malla gruesa y (B) con malla fina. Imagen tomada de Berrío (2017). . . . .	79
<b>Fig. 4-17</b> Concepto de filtro espacial en una malla bidimensional. Imagen tomada de Ramírez Gil (2013). . . . .	79
<b>Fig. 4-18</b> Función Heaviside suavizada en función de la penalización $\beta$ . Imagen tomada de Xu et al. (2010). . . . .	81
<b>Fig. 4-19</b> Métodos de solución para problemas no lineales. Figura adaptada de Berrío (2017). . . . .	83
<b>Fig. 4-20</b> Algoritmo de optimización topológica implementado en este trabajo. . . . .	95
<b>Fig. 5-1</b> Estructura de $800 \times 120 \times 9$ mm compuesta por una barra elástica cubierta con un actuador piezoeléctrico en parte superior y un sensor en la parte inferior. . . . .	98

Fig. 5-2	Algoritmo simplificado del programa FEMPS . . . . .	98
Fig. 5-3	Actuador <i>bimorph</i> . Figura adaptada de Hwang and Park (1993) . . . . .	100
Fig. 5-4	Comparación de resultados experimentales reportados en la literatura, ejemplos numéricos, y simulaciones realizadas en los <i>software</i> FEMPS y ANSYS. . . . .	101
Fig. 5-5	Comparación de análisis estático. Distribución del desplazamiento equivalente obtenido con FEMPS (izquierda) y con ANSYS (derecha). . . . .	102
Fig. 5-6	Comparación de deflexión estática entre los programas FEMPS y ANSYS. . . . .	103
Fig. 5-7	Análisis modal del caso de estudio usando FEMPS (izquierda) y ANSYS (derecha). . . . .	104
Fig. 5-8	Comparación de frecuencias modales entre los programas FEMPS y ANSYS. . . . .	105
Fig. 5-9	Comparación de análisis armónico obtenido con (a) FEMPS y (b) ANSYS . . . . .	105
Fig. 5-10	Topologías óptimas para la capa del actuador y del sensor piezoeléctrico . . . . .	107
Fig. 5-11	Evolución de funciones objetivo de controlabilidad y observabilidad. . . . .	107
Fig. 5-12	Distribución óptima interpretada de transductores piezoeléctricos. . . . .	108
Fig. 5-13	Comparación de gramianos de controlabilidad. Valores de desplazamiento modal en la mitad izquierda, y de velocidad modal en la mitad derecha de la gráfica. . . . .	109
Fig. 5-14	Comparación de gramianos de observabilidad. Valores de desplazamiento modal en la mitad izquierda, y de velocidad modal en la mitad derecha de la gráfica. . . . .	109
Fig. 5-15	Topologías óptimas para la capa del actuador y del sensor piezoeléctrico obtenidas al variar el sistema de unidades. . . . .	111
Fig. 5-16	Topologías óptimas para la capa del actuador y del sensor piezoeléctrico obtenidas al variar el sistema de unidades y factores de penalización diferentes. . . . .	112
Fig. 5-17	Topologías obtenidas para la capa del actuador y del sensor usando el sistema de unidades alterno al variar los factores de penalización del modelo SIMP. . . . .	113
Fig. 5-18	Topologías obtenidas para la capa del actuador y del sensor usando el sistema de unidades estándar al variar los factores de penalización del modelo SIMP. . . . .	114
Fig. 5-19	Gráficos de convergencia de malla en discretización de elementos finitos. . . . .	115
Fig. 5-20	Topologías obtenidas para el actuador (columna izquierda) y para el sensor (columna derecha) usando diferentes discretizaciones de la malla. . . . .	116
Fig. 5-21	Topologías obtenidas para el actuador (izquierda) y el sensor (derecha) usando diferente cantidad de modos de vibración en la reducción del modelo de la estructura. . . . .	117
Fig. 5-22	Valores de la diagonal en la matriz del gramiano de controlabilidad para el caso de reducción del modelo con 10 modos de vibración. Valores de desplazamiento modal en la mitad izquierda, y de velocidad modal en la mitad derecha de la gráfica. . . . .	118
Fig. 5-23	Valores de la diagonal en la matriz del gramiano de controlabilidad para el caso de reducción del modelo con 20 modos de vibración. Valores de desplazamiento modal en la mitad izquierda, y de velocidad modal en la mitad derecha de la gráfica. . . . .	118

<b>Fig. 5-24</b> Topologías obtenidos para el actuador (izquierda) y el sensor (derecha) con variaciones en las restricciones de volumen. . . . .	119
<b>Fig. 5-25</b> Topologías obtenidas para el actuador (izquierda) y el sensor (derecha) aplicando pesos en la función objetivo. . . . .	121
<b>Fig. 5-26</b> Influencia de los pesos en los gramianos de controlabilidad. Valores de desplazamiento modal en la mitad izquierda, y de velocidad modal en la mitad derecha de la gráfica. . . . .	122
<b>Fig. 5-27</b> Influencia de los pesos en los gramianos de controlabilidad. Valores de desplazamiento modal en la mitad izquierda, y de velocidad modal en la mitad derecha de la gráfica. . . . .	123
<b>Fig. 5-28</b> Comparación de la acción de control para las topologías interpretada y sin interpretar. . . . .	125
<b>Fig. 5-29</b> Comparación de la salida del sensor para las topologías interpretada y sin interpretar. . . . .	125
<b>Fig. 5-30</b> Comparación del desplazamiento modal para las topologías interpretada y sin interpretar. . . . .	126
<b>Fig. 5-31</b> Comparación de la veocidad modal para las topologías interpretada y sin interpretar. . . . .	127
<b>Fig. 5-32</b> Comparación de la vibración estructural (desplazamiento nodal) para las topologías interpretada y sin interpretar. . . . .	127
<b>Fig. 5-33</b> Topologías de comparación del actuador (izquierda) y del sensor (derecha). . . . .	129
<b>Fig. 5-34</b> Comparación de gramianos de controlabilidad para diferentes topologías. Valores de desplazamiento modal en la mitad izquierda, y de velocidad modal en la mitad derecha de la gráfica. . . . .	130
<b>Fig. 5-35</b> Comparación de gramianos de observabilidad para diferentes topologías. Valores de desplazamiento modal en la mitad izquierda, y de velocidad modal en la mitad derecha de la gráfica. . . . .	130
<b>Fig. 5-36</b> Comparación de la acción de control de una topología intuitiva (rojo), de una topología aleatoria (naranja) y de la topología óptima (azul). . . . .	131
<b>Fig. 5-37</b> Comparación de la salida del sistema de una topología intuitiva (rojo), de una topología aleatoria (naranja) y de la topología óptima (azul). . . . .	132
<b>Fig. 5-38</b> Desplazamiento modal de una topología intuitiva (rojo), de una topología aleatoria (naranja) y de la topología óptima (azul). . . . .	132
<b>Fig. 5-39</b> Velocidad modal de una topología intuitiva (rojo), de una topología aleatoria (naranja) y de la topología óptima (azul). . . . .	133
<b>Fig. 5-40</b> Desplazamiento nodal en la esquina superior del extremo libre de la placa para una topología intuitiva (rojo), de una topología aleatoria (naranja) y de la topología óptima (azul). . . . .	134
<b>Fig. 5-41</b> Descomposición de modos de vibración de una topología intuitiva (rojo), de una topología aleatoria (naranja) y de la topología óptima (azul). . . . .	138



# Lista de Tablas

	Pág.
<b>Tabla 2-1</b> Conversión de magnitudes para un sistema de unidades alternativo. . . . .	33
<b>Tabla 5-1</b> Propiedades de materiales (Piefort, 2001; Hwang and Park, 1993; Toolbox, 2008). . . . .	99
<b>Tabla 5-2</b> Errores relativos a valores teóricos obtenidos en los programas FEMPS y ANSYS. . . . .	100
<b>Tabla 5-3</b> Conjunto de parámetros iniciales para topologías preliminares. . . . .	106
<b>Tabla 5-4</b> Factores de penalización modificados para comparación de sistemas de unidades. . . . .	112
<b>Tabla 5-5</b> Diferentes configuraciones de los factores de penalización $p_1$ (Elasticidad), $p_2$ (Piezoelectricidad), $p_3$ (Permitividad), y $p_4$ (Densidad). . . . .	113
<b>Tabla 5-6</b> Comparación energética de las señales analizadas. . . . .	128
<b>Tabla 5-7</b> Comparación energética de las señales analizadas. . . . .	136
<b>Tabla 5-8</b> Comparación energética de las señales analizadas y sus factores de amortiguamiento. . . . .	138

# Lista de Símbolos

## Símbolos con letras latinas

Símbolo	Definición	Unidad SI
$c$	Elasticidad	Pa
$D$	Densidad de flujo eléctrico	C/m <sup>2</sup>
$E$	Campo eléctrico	V/m
$e$	Piezoelectricidad	C/m <sup>2</sup>
$f$	Fuerza mecánica	N
$f$	Frecuencia	Hz
$h$	Acción de control	V
$K$	Matriz de rigidez	Pa
$M$	Matriz de masa	kg
$q$	Carga eléctrica	C
$S$	Deformación mecánica	m/m
$T$	Esfuerzo mecánico	Pa
$u$	Desplazamiento	m

## Símbolos con letras griegas

Símbolo	Definición	Unidad SI
$\epsilon$	Permitividad eléctrica	F/m
$\eta$	Desplazamiento modal	
$\omega$	Frecuencia angular ( $2\pi f$ )	Hz
$\Lambda$	Matriz de valores propios	Hz
$\Phi$	Vector propio	
$\phi$	Voltaje	V
$\rho$	Densidad de masa	kg/m <sup>3</sup>
$\tau$	Tiempo	s



## Subíndices

Subíndice	Definición
n	Frecuencia natural

## Superíndices

Superíndice	Definición
E	Campo eléctrico constante
S	Campo de deformación constante

## Abreviaturas

Abreviatura	Definición
FEM	<i>Finite Element Method</i>
LQE	Estimador lineal cuadrático
LQG	Regulador lineal cuadrático Gaussiano
LQR	Regulador lineal cuadrático
MEF	Método de los Elementos Finitos
MIMO	<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>
MOT	Método de Optimización Topológica
PVDF	Material piezoeléctrico polímero
PZT	Material piezoeléctrico cerámico
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i>



# 1. Introducción

## 1.1. Problema de Investigación

Muchas de las actividades humanas involucran vibraciones de una forma u otra. Los fenómenos vibratorios se evidencian de diferentes formas en la naturaleza y se han constituido como un problema en la sociedad moderna por su gran influencia en muchos campos de la ingeniería. Esto ha generado la necesidad de desarrollar técnicas de control de vibraciones para un amplio rango de aplicaciones (Rao, 2011).

Los sistemas vibratorios se componen de elementos que pueden almacenar energía potencial (resortes), energía cinética (masas) y otros que pueden disipar energía gradualmente (amortiguadores). La vibración de un sistema se entiende como las transferencias entre la energía cinética y potencial, mientras una parte es disipada en cada ciclo vibratorio (Blake, 1961). Para un sistema amortiguado, la relación entre la frecuencia natural de vibración y sus propiedades, está dada por (Harris, 1996):

$$\omega_d = \omega_n(1 - \zeta^2)^{1/2} \quad (1-1)$$

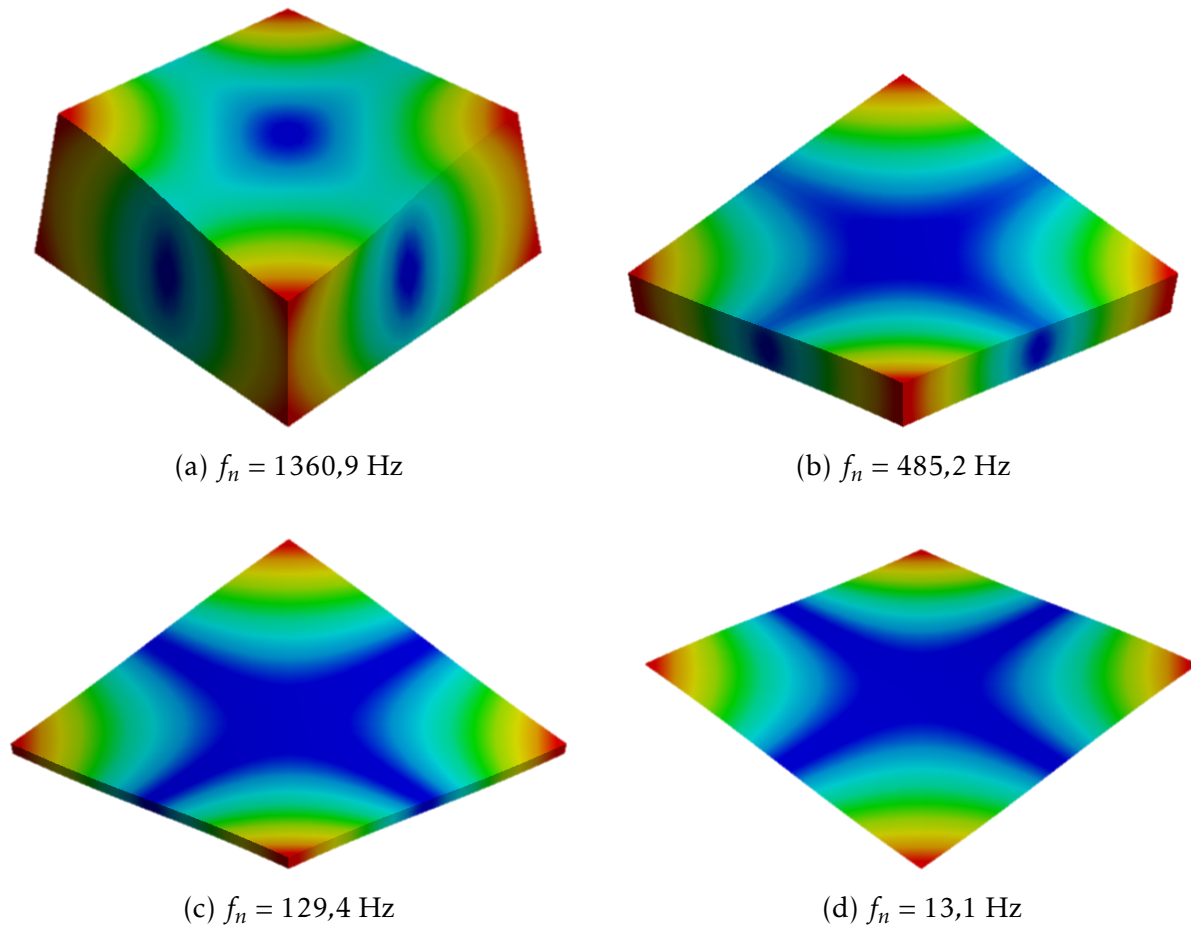
Donde  $\zeta$  es la relación de amortiguamiento crítico, y  $\omega_n^2 \propto K/M$  es la frecuencia angular, proporcional a la relación entre la rigidez  $K$  y la masa  $M$ . Consecuentemente, el comportamiento de los fenómenos vibratorios se verá afectado por las variaciones de sus propiedades físicas y geométricas, como se muestra en la Figura 1-1. En esa figura se observa cómo cambia la frecuencia natural  $f_n$  del primer modo de vibración a flexión en una placa que tiene diferentes espesores. En este caso, la variación de las propiedades se refiere a una modificación geométrica que se refleja en la reducción de masa ( $M$ ) y en la reducción de la rigidez estructural ( $K$ ).

Al reducir la rigidez de un sistema (aumentar su flexibilidad), la frecuencia natural de vibración toma valores más pequeños, incluso ante la reducción de masa, que por el contrario tiende a aumentar esa frecuencia. Esto demuestra que las estructuras delgadas sufren un problema de diseño estructural, ya que cualquier intento de reducción del espesor, implica que serán más propensas a vibrar en rangos de bajas frecuencias, rangos en los que generalmente se presentan los problemas vibratorios.

Las vibraciones están presentes en muchas aplicaciones de la ingeniería, desde grandes estructuras (*e.g.* ingeniería civil) hasta nano-mecanismos (*e.g.* nano-ingeniería), y sus efectos se pueden presentar en tres tipos de situaciones (Preumont and Seto, 2008):

1. Falla de componentes por esfuerzos excesivos o fatiga.
2. Deterioro del *comfort* o la salud humana por exposición a ruido y vibraciones.
3. Dispositivos de alta precisión, donde las condiciones de operación son muy exigentes, y los efectos de micro-vibración limitan su rendimiento.

Algunos problemas asociados a las vibraciones se presentan en la operación de maquinaria y equipos industriales, donde los ciclos repetitivos (*i.e.* rotatorios, periódicos o de impactos); en muchos casos aleatorios, deterioran el rendimiento de los equipos y pueden llegar a causar fractura de piezas (Hibbeler, 2014). En el rango de frecuencias menores a



**Fig. 1-1.:** Primer modo natural de vibración para una placa de  $160 \times 160$  mm con espesores de: (a) 80 mm, (b) 20 mm, (c) 5 mm y (d) 0,5 mm. Las imágenes y frecuencias de vibración se obtienen a partir de un análisis modal por elementos finitos en el *software* ANSYS.

1 Hz se encuentran los movimientos sísmicos y las vibraciones inducidas por efectos aerodinámicos. Estos fenómenos vibratorios poseen una gran cantidad de energía cinética y es de especial interés en ingeniería civil por sus aplicaciones particulares en el diseño de sistemas de control de vibraciones en grandes estructuras, edificios, puentes, entre otros (Fujino and Yoshida, 2002).

El ruido también es una consecuencia de la vibración estructural. Esto es especialmente crítico en estructuras aeroespaciales, terrestres o marinas, donde la reducción del ruido producido por el fuselaje o la carrocería de los vehículos representa un reto importante en investigación aeronáutica (Tiwari, 2016). Por otra parte, el ruido o las vibraciones tienen efectos negativos en la salud física, mental y social del ser humano, sin estar relacionados directamente con una enfermedad o dolencia. Estos efectos a largo plazo pueden causar desordenes cardiovasculares, estrés, insomnio y problemas psicológicos (Hurtley, 2009).

Existen aplicaciones de control estructural en sectores de manufactura, infraestructura, productos de consumo, construcción, y en la industria automotora y aeroespacial (Alkhatib and Golnaraghi, 2003). Algunas estructuras, como los grandes telescopios segmentados; terrestres o espaciales, serían imposibles de construir sin las capacidades del control activo de vibraciones, en parte, debido a las múltiples perturbaciones a las que están expuestas, como errores de trayectorias, gradientes térmicos, entre otros (Preumont, 2011).

Es interesante mencionar que algunas aplicaciones encuentran beneficios en los fenómenos vibratorios. Por ejemplo, en procedimientos terapéuticos o de rehabilitación deportiva, la aplicación de energía vibratoria al cuerpo humano tiene efectos positivos, dependiendo de las características y tiempos de uso en la ondas (Abundo et al., 2011). Por otra parte, en procesos de manufactura de materiales granulados es posible consolidar o compactar los granos de acuerdo a unas condiciones específicas de aplicación de las vibraciones mecánicas (Roberts, 1997). En la industria de la comida, es bastante aceptado el uso de vibraciones mecánicas para enfriamiento, secado, aglomeración o molienda de materias primas (Mujumdar and Erdesz, 1988).

Expuestos estos problemas comunes de vibraciones, es importante resaltar que el control estructural se ha vuelto cada vez más importante en la ingeniería, ya que el diseño de mecanismos y estructuras se ha vuelto cada vez más preciso y menos tolerante a las vibraciones (Inman, 2006).

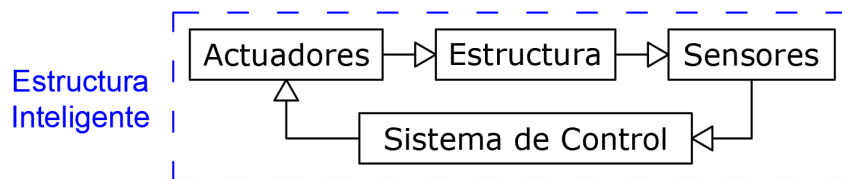
Lo anterior, nos lleva al concepto de estructuras inteligentes (Preumont, 2011). Estas se refieren a estructuras provistas de un conjunto de sensores y actuadores acoplados por un controlador (Figura 1-2). Algunos de los materiales más comunes en control de

vibraciones son: (Preumont, 2011; Srinivasan and McFarland, 2001):

- Materiales piezoeléctricos cerámicos (PZT) o poliméricos (PVDF).
- Compuestos con memoria de forma o *Shape Memory Alloys*.
- Materiales magnetostrictivos (TERFENOL-D).
- Fluidos magneto-reológicos o electro-reológicos.

Los materiales piezoeléctricos han sido ampliamente usados en control de vibración estructural por su respuesta rápida, la excelente capacidad que ofrecen como sensores o actuadores, su alto coeficiente de acople electromecánico, y su fácil implementación por su naturaleza no intrusiva (Moheimani and Fleming, 2006; Gonçalves et al., 2017). Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones de control de vibraciones de estructuras flexibles, la ubicación y forma de los sensores y actuadores se asume como una distribución fija ya dada y el trabajo del diseñador es buscar una ley de control aceptable que logre los objetivos del control (Hać and Liu, 1993).

Surge entonces el problema de la ubicación óptima de sensores y actuadores, que en grandes estructuras flexibles es un problema más importante que la misma ley de control, ya que la incorrecta posición de estos transductores minimiza la controlabilidad, reduce la eficiencia y degrada el rendimiento del sistema de control (Alkhatib and Golnaraghi, 2003). Además de la posición de los transductores, surge la necesidad de determinar la distribución de forma de estos sensores y actuadores para maximizar el control y la observación del sistema.



**Fig. 1-2.:** Integración de sensores y actuadores en una estructura inteligente.

Figura adaptada de Preumont (2011).

Este problema se ha tratado desde diferentes abordajes. Por ejemplo, Hiramoto et al. (2000) encuentran la posición óptima al obtener dos soluciones generalizadas de la ecuación de Riccati; Güney and Eşkinat (2008) desarrollan un método de posición óptima basada en gradientes, y Dhuri and Seshu (2009) proponen una optimización multiobjetivo con algoritmos genéticos. En la actualidad, se ha incrementado exponencialmente el número de investigaciones relacionadas a este problema y diferentes técnicas se han propuesto para resolverlo, lo cual resalta el interés de la comunidad científica e ingenieril en

la temática abordada en esta tesis. Entre los trabajos destacados, se encuentran diferentes enfoques de solución, *i.e.*, maximizar el coeficiente de acople electromecánico (Ducarne et al., 2012), usar optimización difusa para maximizar controlabilidad y parámetros de control (Zorić et al., 2013), usar algoritmos genéticos para resolver el problema de ubicación de material (Biglar et al., 2015; Bruant et al., 2010), o formular el problema de controlabilidad basado en funcionales de Lyapunov (Schulz et al., 2013).

Surge entonces la pregunta ¿Cómo determinar de manera óptima la ubicación, la forma y la cantidad de sensores y actuadores piezoeléctricos para el control activo de vibraciones en estructuras delgadas?

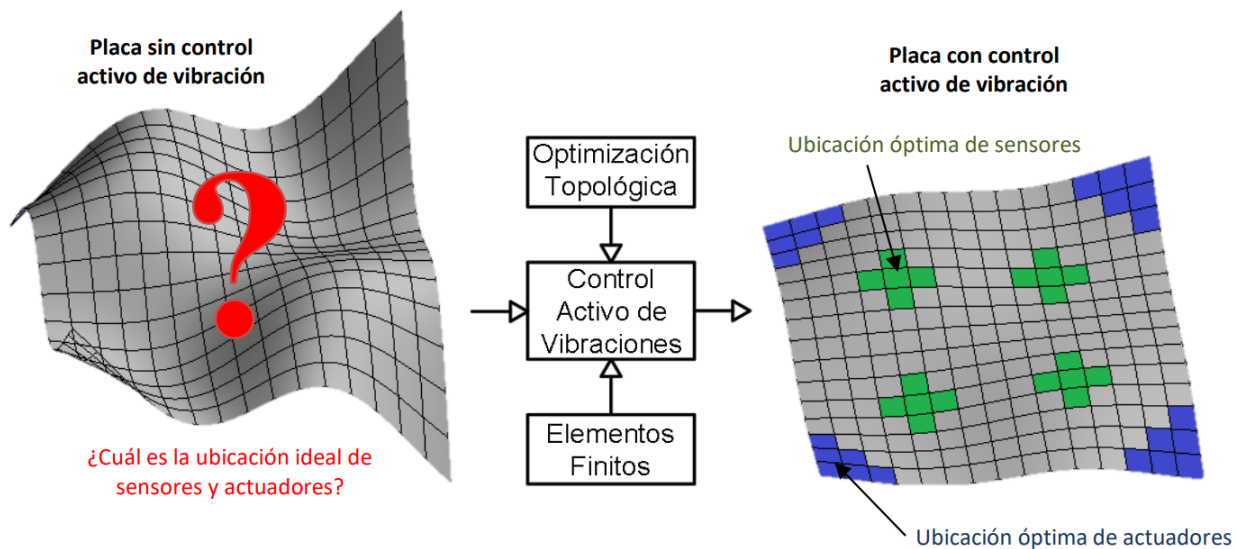
Una técnica de optimización que ha tomado fuerza recientemente puede resolver simultáneamente el problema de cantidad, posición y forma de sensores y actuadores en un sistema de control. Esta nueva técnica, llamada *Optimización Topológica*, es un método computacional que determina, en términos de la composición de un material, su distribución óptima (Bendsøe and Sigmund, 2004). Como ejemplo, Kim et al. (2013) demuestran que mediante la optimización topológica se obtienen resultados de hasta 61,14% más altos en comparación a otros métodos de optimización en la maximización del factor de amortiguamiento.

La inclusión de este método de optimización al control activo de vibraciones es una rama de la investigación que recién comienza y es un área en continuo crecimiento. En los últimos 20 años se registran pocas publicaciones relacionadas al control activo de vibraciones con materiales piezoeléctricos usando el método de optimización topológica; entre ellos, se destaca el trabajo de Kang and Tong (2008) en el cual se considera la la distribución topológica de un actuador piezoeléctrico para control estático de placas, y sus trabajos posteriores en minimización de radiación sonora (Zhang and Kang, 2013; Zhang et al., 2014), control activo de placas con sensores y actuadores simétricamente colocados Zhang and Kang (2014a), y su aplicación en control dinámico de estructuras a respuestas transientes (Zhang and Kang, 2014b), además de la optimización bajo estructuras de control LQR Hu et al. (2018).

También se destaca el trabajo doctoral publicado por Silveira (2012) en el cual se optimiza simultáneamente una estructura elástica y su distribución topológica óptima de actuadores piezoeléctricos, y sus posteriores trabajos en optimización a partir de la energía de deformación y la energía de control (Molter et al., 2013), y el diseño de la topología óptima de sensores piezoeléctricos en el mismo tipo de problemas (Menuzzi et al., 2017). Por otra parte, se reconoce el trabajo de Xu et al. (2013), en el cual se optimiza la cantidad, forma y posición de actuadores piezoeléctricos a partir de una descomposición modal de valores singulares; y el trabajo de Gonçalves et al. (2017), en el cual se realiza la opti-

mización de actuadores piezoeléctricos considerando efectos de *spillover* en el modelo del controlador.

Para resolver este problema de control de vibraciones, se propone en esta tesis utilizar el Método de Optimización Topológica (MOT) usando como función objetivo la maximización de la traza del gramiano de controlabilidad y del gramiano de observabilidad del sistema. Como variable de diseño se usa la pseudo-densidad del modelo de interpolación SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) en las capas de material piezoeléctrico. Para el modelado del sistema se usa el Método de los Elementos Finitos (MEF), y como estrategia de control se implementa un controlador óptimo que minimice una función de energía en el caso de los actuadores, y maximice la energía en el caso de los sensores. En la Figura 1-3, se muestra un diagrama del funcionamiento del MOT aplicado a la búsqueda de la posición, forma y cantidad de sensores y actuadores piezoeléctricos.



**Fig. 1-3.:** Membrana sometida a una vibración sin control (izquierda) y con control activo de vibraciones (derecha) usando el método de optimización topológica (MOT). Posible configuración óptima de sensores (verde) y actuadores (azul).

## 1.2. Objetivos del proyecto

### 1.2.1. Objetivo General

Formular una metodología de diseño conceptual de la configuración de transductores piezoeléctricos para sistemas de control activo de vibraciones en estructuras de placa delgada mediante la técnica de optimización topológica.



### 1.2.2. Objetivos Específicos

1. Desarrollar un código para el modelado de sistemas vibratorios usando el método de los elementos finitos, que permita simular estructuras delgadas y transductores piezoeléctricos en configuración de sensores y actuadores.
2. Verificar el código desarrollado, comparando los resultados obtenidos contra un software comercial de modelado computacional por elementos finitos o modelamiento analítico.
3. Implementar un algoritmo de optimización topológica que permita diseñar la configuración de transductores piezoeléctricos para control activo de vibraciones en estructuras delgadas.
4. Diseñar un sistema de control activo de vibraciones para estructuras tipo placa delgada con transductores piezoeléctricos en la configuración óptima encontrada.
5. Verificar numéricamente y/o analíticamente el diseño conceptual propuesto.

## 1.3. Metodología de Investigación

El diagrama presentado en la Figura 1-4 representa el modelo de investigación, donde se definen las características generales del problema de vibraciones (A) y de este se obtienen los parámetros y condiciones que serán datos de entrada en las siguientes etapas. El bloque de diseño conceptual (B) se refiere a la descripción del sistema completo con sensores y actuadores en la configuración óptima, incluyendo el sistema de control. A este diseño conceptual se le harán las verificaciones numéricas de rendimiento para determinar si la reducción de vibraciones es la esperada (C). El desarrollo del diseño conceptual comprende varias etapas que modelan la física del sistema (E y F), determinan la estrategia de control (G) y optimizan la distribución de transductores en la estructura (D).

Tanto el sistema de control como el algoritmo de optimización requieren del modelo acoplado de la estructura mecánica y los sensores y actuadores piezoeléctricos. Para modelar este tipo de problemas multi-físicos se desarrolla, en el marco de este trabajo, un *software* de simulación en MATLAB con elementos finitos hexaédricos tipo *Brick* de 20 nodos con cuatro grados de libertad por nodo, tres de estos para desplazamientos y uno para voltaje.

Este *software*, llamado FEMPS, tiene la capacidad de realizar análisis estáticos y análisis dinámicos modales y armónicos. Además, el programa permite realizar la representación del modelo en matrices de espacios de estado y su reducción modal, para la posterior evaluación de los gramianos de controlabilidad y observabilidad en la función objetivo

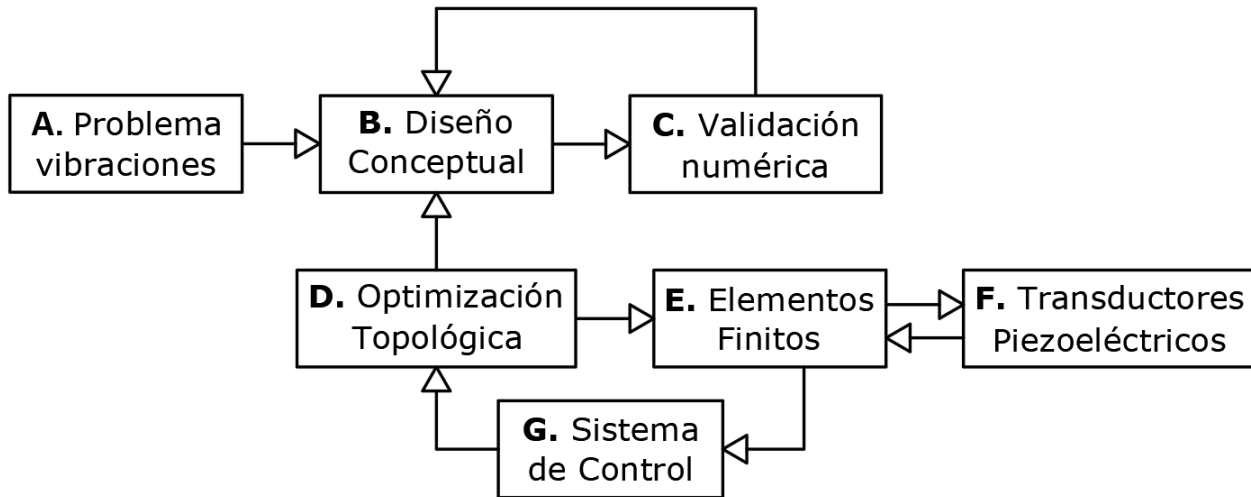


Fig. 1-4.: Diagrama del modelo de investigación.

de la optimización topológica. Finalmente, un módulo de control se encarga de calcular las matrices del lazo de realimentación del controlador y de evaluar el rendimiento de la topología optimizada. En la Figura 1-5 se muestra el procedimiento adoptado en la formulación y cálculo del modelo por el método de los elementos finitos.

En cuanto a las estrategias de control, el problema de vibraciones se puede abordar desde los controladores tipo *Feedback* o *Feedforward* (De Man and Preumont, 2004). Es importante resaltar que el control *Feedback* se adapta mejor a esta investigación ya que parte desde un modelo teórico, tiene un ancho de banda amplio y es eficiente en el control de resonancias (De Man and Preumont, 2004). Además, en la actualidad, los métodos de control óptimo más usados que pertenecen a la estrategia de control *Feedback*, como el control LQR (*Linear Optimal Quadratic Regulator*) y LQG (*Linear Quadratic Gaussian Regulator*), resultan ser los más eficientes en controlar un sistema con un esfuerzo mínimo (Alkhatib and Golnaraghi, 2003).

El proceso de diseñar sistemas de control involucra la generación de un modelo matemático del sistema que refleje la dinámica del sistema y los agentes que intervienen en esta, generalmente construido con el método de elementos finitos. Luego, este modelo se debe modificar para hacerlo manejable por el controlador. En este proceso, es importante definir los requerimientos de sensores y actuadores y definir sus posición y cantidad, evaluando parámetros de controlabilidad y observabilidad. Finalmente, con una ley de control establecida de acuerdo a las necesidades, se simula la respuesta del sistema en el lazo de control y se realizan los ajustes necesarios para optimizar el rendimiento (Alkhatib and Golnaraghi, 2003). En la Figura 1-6 se muestra un diagrama que resume el método de diseño de un sistema de control activo de estructuras para controlar vibraciones. Esta fi-

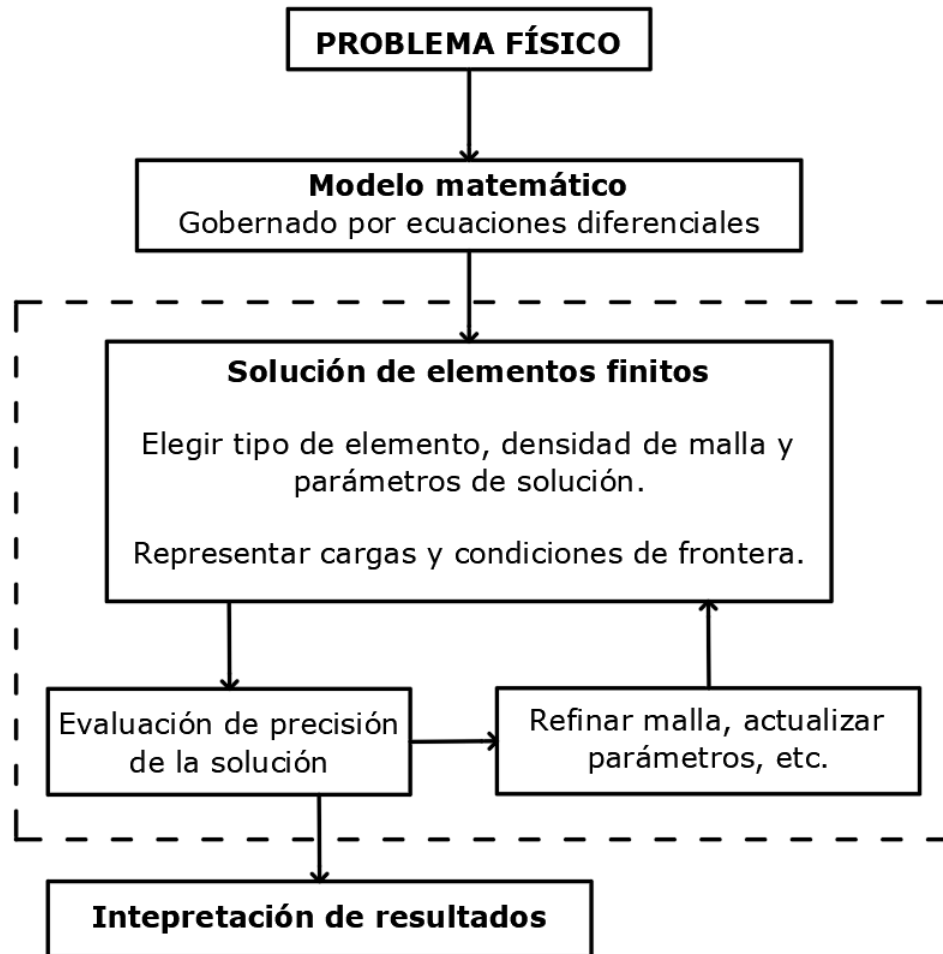
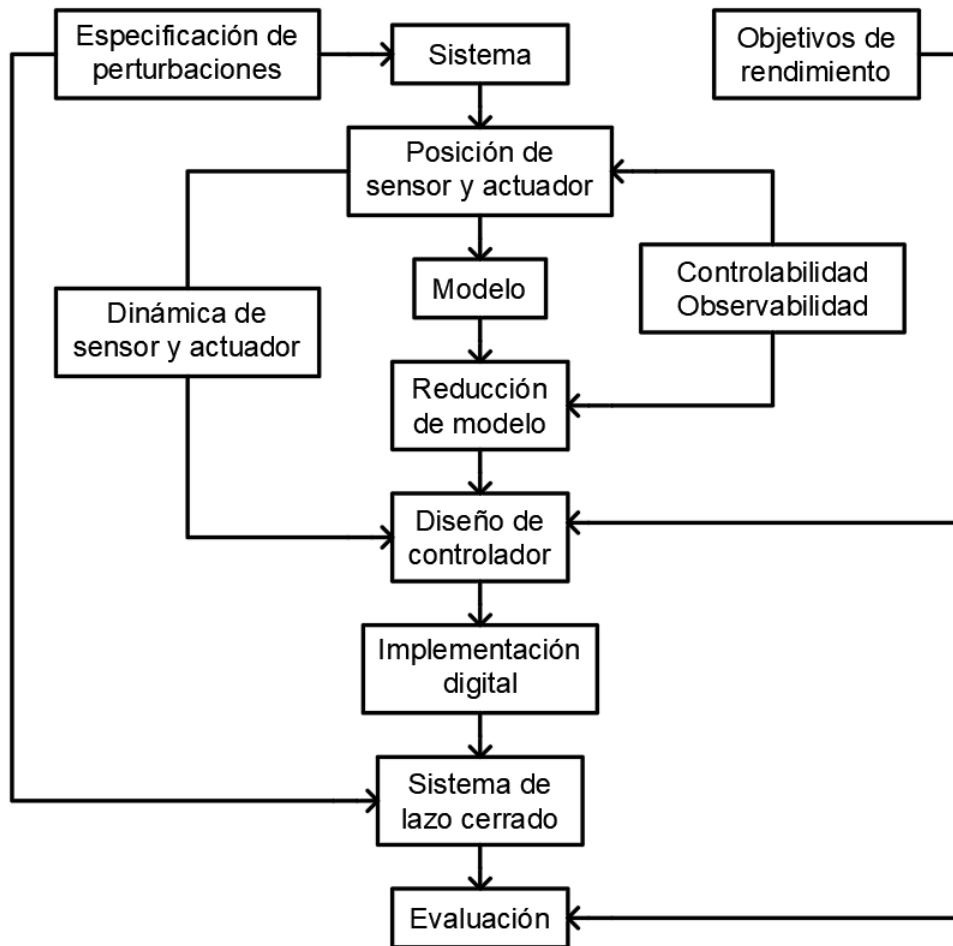


Fig. 1-5.: Procedimiento de análisis de los elementos finitos. Diagrama adaptado de Bathe (1996).

lososofía en diseño de control, más el modelado de sistemas por el método de los elementos finitos, y la inclusión del método optimización topológica forman la estructura general del diseño conceptual propuesto en la presente tesis.

## 1.4. Organización de Tesis

Esta tesis presenta el proceso de investigación de forma que el lector pueda comprender fácilmente el trabajo desarrollado. El documento se divide esencialmente en cinco capítulos: Materiales Piezoeléctricos, Control de Vibraciones, Optimización Topológica, Resultados, y Conclusiones. Los primeros tres capítulos abordan los conceptos teóricos de los temas tratados en la investigación y se definen los métodos, técnicas y modelos utilizado en el desarrollo de la tesis. Los últimos dos capítulos muestran los resultados obtenidos para cada objetivo de la investigación, y finalmente, se presentan las reflexiones acerca del trabajo, así como un propuesta de trabajos futuros.



**Fig. 1-6.:** Método de diseño de un sistema de control activo de vibraciones.

Figura adaptada de [Preumont \(2011\)](#).

El capítulo de materiales piezoeléctricos enmarca el primer objetivo específico, presentado en la Sección 1.2. En este, se abordan los conceptos fundamentales del modelado por el método de los elementos finitos de transductores piezoeléctricos en configuración de actuadores o sensores, dispuestos sobre estructuras elásticas. El contexto matemático es implementado en un *software* y sus resultados de verificación son presentados en el Capítulo 5, dando cumplimiento al segundo objetivo específico.

En el Capítulo 4, se abordan todos los conceptos relacionados a la optimización topológica y su implementación es descrita en detalle en la Sección 4.7. Este capítulo es la base del desarrollo del objetivo específico número tres, y los resultados de implementación son ampliamente descritos en el Capítulo 5.

Finalmente, los resultados obtenidos con el método de optimización topológica son analizados en un sistema de control activo, diseñado e implementado con base en la teoría expuesta en el Capítulo 3, dando cumplimiento al cuarto objetivo. La verificación de los resultados obtenidos se presenta al finalizar el Capítulo 5, desde la Sección 5.5, dando cumplimiento al último objetivo específico.



## 2. Materiales Piezoeléctricos

### 2.1. Introducción

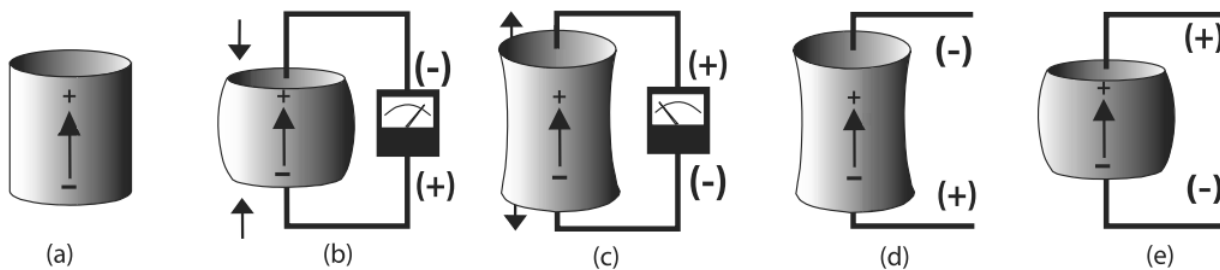
Piezolectricidad literalmente significa “electricidad generada por la presión”. Es un fenómeno encontrado naturalmente en estructuras cristalinas como el cuarzo, la turmalina, el topacio o la sal de Rochelle (Moheimani and Fleming, 2006). Estos materiales cuando se someten a presión mecánica generan carga eléctrica, y cuando son expuestos a un campo eléctrico se deforman mecánicamente. Así, el efecto de la piezolectricidad puede ser entendido como las transferencias entre la energía eléctrica y la energía mecánica (Piefort, 2001).

Los materiales piezoeléctricos pertenecen a la familia de los llamados materiales inteligentes, los cuales tienen la habilidad de responder significativamente al estímulo de diferentes fenómenos físicos y son usados con frecuencia como sensores y actuadores (Preumont, 2011). El efecto de piezolectricidad ocurre en los materiales cristalinos que no tienen centro de simetría. De los 32 tipos de estructuras cristalinas existentes, 20 de ellas exhiben piezolectricidad, las cuales están designados como: 1, 2, 222, mm2, 4, -4, 422, 3, 32, 3m, 6, -6, 622, 6mm, -62m, 23, y -43m (Cracknell, 1969).

Este tipo de materiales son comúnmente usados en el control estructural de vibraciones por su respuesta rápida, flexibilidad de uso y facilidad de implementación, además de su bajo peso y la posibilidad de ser adheridos o empotrados en gran variedad de estructuras (Gonçalves et al., 2017). Sin embargo, los materiales piezoeléctricos naturales no son adecuados para aplicaciones en control de vibraciones y en su lugar se fabrican materiales policristalinos que exhiben mejores propiedades piezoeléctricas (Moheimani and Fleming, 2006).

Existen dos clases de materiales piezoeléctricos muy usados en control de vibraciones: cerámicos y polímeros (Moheimani and Fleming, 2006). El más conocido piezocerámico es el PZT (por su fórmula química  $\text{Pb}[\text{Zr}_x\text{Ti}_{1-x}]\text{O}_3$ ) y es ampliamente usado como actuador o sensor para un amplio rango de frecuencias, como aplicaciones de ultrasonido o alta precisión (Piefort, 2001). El piezopolímero más conocido es el PVDF (por sus siglas en inglés *PolyVinylidene Fluoride*) y es usado principalmente como sensor debido a sus características físicas (Marutake, 1995).

Por otra parte, la polarización es una etapa muy importante en la fabricación de materiales piezoeléctricos (cerámicos o polímeros) y determina las propiedades permanentes del elemento. En la Figura 2-1 se muestra una serie de imágenes que ejemplifican el comportamiento de estos materiales ante diferentes estímulos. Ante la compresión o la tensión mecánica en la dirección de polarización se genera una diferencia de potencial entre los electrodos del material, cuya polaridad depende de la dirección en que se aplica la fuerza mecánica. Ante la aplicación de un voltaje entre los electrodos del material piezoeléctrico, se generará una deformación mecánica de expansión o compresión del material dependiendo de la dirección de polarización del material con respecto a la polaridad del voltaje aplicado.



**Fig. 2-1.:** Reacción al estímulo de un piezoeléctrico polarizado. (a) Dirección de polarización. (b) Respuesta a la compresión. (c) Respuesta a la tensión. (d) Respuesta al voltaje en la misma polaridad. (e) Respuesta al voltaje en polaridad opuesta. Imagen tomada de [Moheimani and Fleming \(2006\)](#).

En este capítulo se abordarán en detalle los materiales piezoeléctricos. Inicialmente se muestra una breve reseña histórica, seguida de un acercamiento a las aplicaciones en control de estructuras en las secciones 2.2 y 2.3 respectivamente. Seguido de esto, en la Sección 2.4 se presenta la descripción matemática de los materiales piezoeléctrico, sus ecuaciones constitutivas, de equilibrio, y el modelado por el método de los elementos finitos es presentado en la Sección 2.5. Finalmente, se presenta en la Sección 2.7 algunos problemas comunes en la formulación y modelado de materiales piezoeléctricos.

## 2.2. Reseña Histórica

Siglos atrás fue notado un particular efecto en los cristales de Turmalina. Al ser arrojados al fuego se atraían entre sí y luego se rechazaban. La primera referencia escrita se halla en el año 314 A.C., pero tan solo hasta 1747 fue relacionado el fenómeno con la electricidad, y la Turmalina fue llamada “La piedra eléctrica” ([Linnaeus, 1747](#)). En el año 1756, el físico alemán Franz Aepinus (1724-1802) demostró la polarización eléctrica que sufren los cristales de Turmalina ante los cambios de temperatura, y luego en 1824, el físi-



co escocés David Brewster (1781-1868) le dio el nombre de *Piroelectricidad* (Piefort, 2001).

En 1817 el francés René Just Haüy (1743-1822) mencionó por primera vez la presencia de cargas eléctricas en la superficie de un cristal de Turmalina sometido a esfuerzos. Pero fue hasta 1880 que los científicos franceses Pierre Curie (1859-1906) y Paul-Jacques Curie (1855-1941) realizan la primera publicación describiendo este fenómeno en una serie de cristales, que después fue llamado efecto de *Piezoelectricidad*.

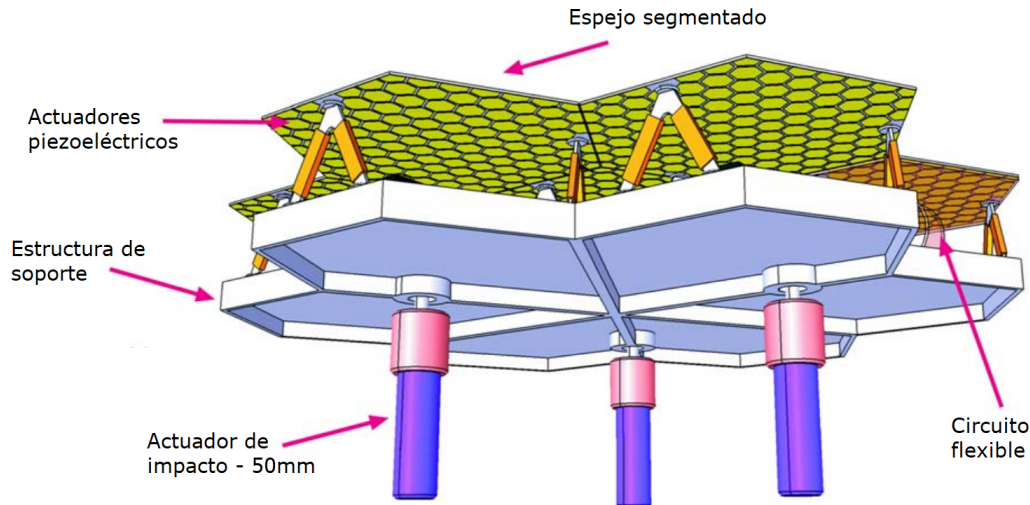
Sin embargo, los hermanos Curie descubrieron el efecto directo de piezoelectricidad, más no el efecto inverso, el cual fue descrito matemáticamente por el físico Gabriel Lippmann (1845-1921) en 1881 e inmediatamente confirmado experimentalmente por los hermanos Curie. Aún cuando el descubrimiento de la piezoelectricidad fue de gran interés en la comunidad científica, solo hasta la Primera Guerra Mundial apareció su aplicación con el *sonar*, atribuido a Paul Langevin (1872-1946) y su equipo de trabajo. Este dispositivo usaba piezoeléctricos de cuarzo para producir ondas de ultrasonido que se reflectaban en los submarinos, y luego con el tiempo de retardo de la señal se obtenía la ubicación de los mismos (Moheimani and Fleming, 2006).

En el periodo entre la primera y segunda guerra mundial ocurrieron la mayoría de invenciones con materiales piezoeléctricos que tenemos actualmente: micrófonos, acelerómetros, transductores ultrasónicos, entre otros. Después de la segunda guerra mundial, ocurrió el desarrollo de los piezocerámicos como resultado de la investigación realizada por la Unión Soviética en materiales con constantes dieléctricas muy grandes para la construcción de condensadores. Finalmente en 1969, el Dr. Heiji Kawai realiza la primera publicación en películas plásticas, donde expone una excelente tipología para transductores piezoeléctricos, conocidos hoy en día como piezopolímeros PVDF (Marutake, 1995).

Actualmente, los piezoeléctricos son materiales usados en una gran cantidad de aplicaciones, algunas de las cuales serán presentadas en la siguiente sección, enfocadas específicamente al interés de este trabajo.

## 2.3. Aplicaciones en Control de Estructuras

Los materiales piezoeléctricos han sido ampliamente usados en aplicaciones de control de vibración estructural. Esto puede ser atribuido a su excelente capacidad de sensar y actuar gracias a su alto coeficiente de acople electro-mecánico; así como su naturaleza poco intrusiva (Moheimani and Fleming, 2006). Las principales aplicaciones de los materiales piezoeléctricos en el control de vibraciones en la ingeniería moderna radican en el control de grandes estructuras delgadas como espejos segmentados para grandes telescopios, paneles solares plegables, hélices, rotores y fuselaje de vehículos terrestres y aéreos,



**Fig. 2-2.:** Espejo segmentado: vista de siete segmentos en su estructura de soporte. El tamaño de cada segmento está entre 100 y 260 mm. Figura adaptada de [Rodrigues et al. \(2009\)](#).

y en general en aplicaciones de ingeniería aeroespacial ([Nitzsche et al., 2015](#)).

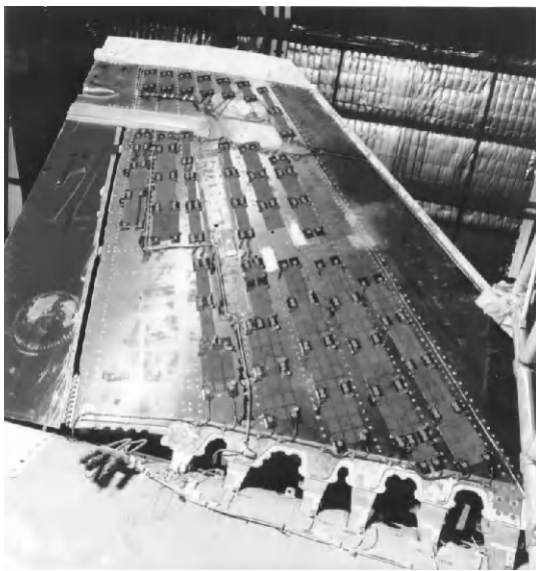
En 1993, a petición de la *European Space Agency* (ESA), fue desarrollado un experimento del control de una placa delgada con piezocerámicos PZT. Luego, este experimento se convirtió en un modelo de operación llamado CFIE (*Control-Flexibility Interaction Experiment*) que en septiembre de 1995 fue exitosamente lanzado por la NASA en el transbordador espacial STS-69 ([Preumont, 1994](#)).

Un campo de la investigación que ha revolucionado la astronomía moderna es la Óptica Adaptativa. Numerosas aplicaciones en el desarrollo de telescopios terrestres y espaciales han surgido de la necesidad de construir grandes espejos para los telescopios que puedan corregir en tiempo real las aberraciones ópticas inducidas por turbulencias atmosféricas y sus efectos vibratorios en las estructuras ([Rodrigues et al., 2009](#)). Una solución que hasta ahora es la única forma de poner en órbita espejos más grandes que los cohetes de lanzamiento y, también, la única forma de construir superficies reflectantes mayores a 8 metros, son los espejos segmentados, como el espejo principal del *James Webb Space Telescope*, cuyo lanzamiento está programado para el año 2021. Este tipo de espejos solucionan el problema de las grandes estructuras flexibles propensas a vibraciones que deterioran su rendimiento, al introducir sistemas de control de vibraciones en cada uno de los segmentos del espejo. En la Figura 2-2 se muestra el esquema de un espejo segmentado equipado con un sistema de control de vibraciones usando materiales piezoeléctricos tipo PZT.

Otras aplicaciones interesantes aparecen en dominios más pequeños. Por ejemplo, las cabezas de lectura y escritura de los discos duros son muy sensibles a las vibraciones in-

ducidas por perturbaciones externas como los ventiladores de refrigeración, un máquina rotatoria en operación, el tráfico cercano e incluso un caída inesperada del disco. Esto hace que los discos duros sean uno de los elementos más débiles de un computador y el control de vibraciones en su cabezal es muy importante en el desarrollo de computadores avanzados, de alta tecnología y para la industria militar (Sun et al., 2009).

Adicionalmente, un tema que ha ganado mucha atención en la investigación y aplicación de ingeniería, es la reducción sonora. En particular, el control activo de la radiación proveniente de estructuras vibrantes es un tema importante en el diseño de aeronaves, embarcaciones, submarinos, transductores, entre muchos otros. El control activo de ruido y vibraciones usando materiales piezoeléctricos ha sido un tema ampliamente investigado desde el control de radiación sonora en placas (Tiwari, 2016; De Man and Preumont, 2004; Engels et al., 2006), cilindros (Cao et al., 2012), o fuselaje de vehículos como submarinos (Caresta, 2011), que pueden involucran fenómenos acústico-estructurales (Shu et al., 2014) como la optimización de directividad sonora (Yoon et al., 2017), o la optimización del electrodo de polarización de los piezoeléctricos para minimizar radiación sonora (Zhang et al., 2014; Rosi et al., 2010).



**Fig. 2-3.:** Estabilizador de un FA-18 laminado con piezoeléctricos. Imagen de *Defence Science and Technology Organization (DESTO)*.

El campo de la nanotecnología ha incrementado la demanda por estructuras pequeñas, ligeras y rígidas, lo cual representa grandes retos de diseño en el compromiso entre masa y rigidez. Tales sistemas, no existirían sin la capacidad de controlar activamente la vibración (Preumont and Seto, 2008). Por otro lado, un gran esfuerzo de investigación se realiza alrededor del control estructural en aeronaves. En ciertos modos de vuelo, las cargas de viento sobre las alas y los estabilizadores aerodinámicos pueden causar altos niveles de vibración. Estas vibraciones producen fatiga mecánica y reducen el rendimiento de sustentación o descenso del vuelo. En la Figura 2-3 se muestra el ala de un avión FA-18 cubierto de materiales piezoeléctricos para el control de vibración del estabilizador. Este tipo de incorporaciones también se han realizado en las aspas del rotor de helicópteros para la eliminación de modos poco amortiguados en rotores (Moheimani and Fleming, 2006).

## 2.4. Ecuaciones Constitutivas

Las ecuaciones que representan el comportamiento de los materiales piezoeléctricos se pueden escribir como una relación entre las ecuaciones constitutivas mecánicas y eléctricas. Estas son la base para la formulación del modelo por el método de los elementos finitos. En esta sección, las ecuaciones constitutivas serán formuladas siguiendo la notación del *IEEE Standard on Piezoelectricity* (Meitzler et al., 1988).

### 2.4.1. Ecuaciones Constitutivas Mecánicas

La formulación de estas ecuaciones está basada en la generalización de la ley de Hooke, considerando las deformaciones de un cuerpo isotrópico, no piezoeléctrico y en un medio continuo. Las constantes físicas serán la deformación mecánica  $S$  y el esfuerzo mecánico  $T$  (Nader, 2002). A diferencia del potencial eléctrico o el campo eléctrico, que son de grado tensorial de orden cero y uno respectivamente (escalar y vectorial), el esfuerzo y la deformación son de grado tensorial de segundo orden (Brizzotti, 2006).

Denotando  $u_i$  como las componentes cartesianas del desplazamiento mecánico infinitesimal en un punto de material en la dirección  $i$ , la parte simétrica del gradiente espacial de desplazamiento determina el tensor de deformación  $S_{ij}$ , mientras la parte antisimétrica determina las rotaciones rígidas, las cuales pueden aparecer sin restricciones en la descripción del continuo (Meitzler et al., 1988):

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2-1)$$

Donde  $i$  y  $j$  son los índices direccionales en el espacio material. En forma matricial, el tensor de deformación se puede escribir como (Brizzotti, 2006):

$$S = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

Donde  $x$ ,  $y$  y  $z$  son las coordenadas materiales. Ya que este tensor es simétrico, se puede escribir de forma reducida como:

$$\{S\} = [S_{xx} \quad S_{yy} \quad S_{zz} \quad S_{yz} \quad S_{xz} \quad S_{xy}]^T \quad (2-3)$$

El esfuerzo mecánico es la fuerza por unidad de área aplicada a un cuerpo. Esas fuerzas pueden descomponerse en fuerzas de volumen y fuerzas de superficie o contacto, y

el esfuerzo resultante en cada componente es consecuencia de la dirección en la que se aplique esa fuerza. De allí que resultan esfuerzos normales, producto de la aplicación de la fuerza en dirección normal a la componente, y esfuerzos cortantes, producto de fuerza aplicadas en dirección diferente a la componente del esfuerzo. De allí resulta que el tensor de segundo orden para esfuerzos mecánicos  $\mathbf{T}$  es (Brizzotti, 2006):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

Ya que este tensor también es simétrico, se puede escribir de forma reducida como:

$$\{T\} = [T_{xx} \quad T_{yy} \quad T_{zz} \quad T_{yz} \quad T_{xz} \quad T_{xy}]^T \quad (2-5)$$

Las deformaciones y los esfuerzos en un punto material están relacionados por las propiedades del cuerpo que definen su rigidez o flexibilidad a través de la ley generalizada de Hooke:

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} \quad (2-6)$$

Donde  $c_{ijkl}$  es el tensor de rigidez que representa las propiedades elásticas del cuerpo sometido a deformación. La rigidez está relacionada con la fuerza necesaria para producir una unidad de desplazamiento en una dirección específica, y la flexibilidad será su recíproco (Nader, 2002). Por esto, también es posible escribir la ecuación anterior como:

$$S_{ij} = s_{ijkl} T_{kl} \quad (2-7)$$

Donde  $s_{ijkl}$  será el tensor de flexibilidad.

Las constantes en el tensor de propiedades elásticas definen la conexión elástica entre las moléculas del material y representan la relación entre las deformaciones y los esfuerzos normales y cortantes (Nader, 2002). Debido a las propiedades de simetría cúbica, en un material isotrópico, es posible reducir la cantidad de constantes necesarias, considerando además que presenta la misma relación cortante en todas las direcciones. De forma general, se puede escribir la ecuación constitutiva mecánica como:

$$\mathbf{T} = \mathbf{cS} \quad (2-8)$$

y en forma matricial, utilizando la expresión reducida de los tensores (Nader, 2002):

$$\begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{xz} \\ T_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \\ S_{xy} \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Donde los subíndices de cada coeficiente representan un dirección en el sistema de coordenadas principal, y se pueden definir como  $c_{12} = \lambda$ ,  $c_{44} = \mu$  y  $c_{11} = \lambda + 2\mu$ , siendo  $\lambda$  y  $\mu$  las constantes de Lamé (Auld, 1990). Estos coeficientes están relacionados con el módulo de Young ( $E$ ) y el coeficiente de Poisson ( $\sigma$ ) a través de las relaciones entre esfuerzo y deformación, de forma que (Nader, 2002):

$$c_{11} = \frac{E(1 - \sigma)}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \quad (2-10)$$

$$c_{12} = \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \quad (2-11)$$

$$c_{44} = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \quad (2-12)$$

Sin embargo, los materiales piezoelectricos son anisotrópicos en la dirección 3 e isotrópicos en el plano 1,2 (Auld, 1990). Esto significa que el tensor de constantes elásticas para los materiales piezoelectricos está dado por (Kino, 1987):

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

Donde los coeficientes  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ , y  $c_{13}$  estarán dados por las propiedades del material piezoelectrico. En este nuevo tensor, el coeficiente al esfuerzo cortante en la dirección anisotrópica será (Brizzotti, 2006):

$$c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \quad (2-14)$$

#### 2.4.2. Ecuaciones Constitutivas Eléctricas

La naturaleza eléctrica de los materiales piezoelectricos radica en la relación entre un campo eléctrico  $E$  aplicado, y una polarización  $P$  inducida en el material (Piefort, 2001). Como se muestra en la Figura 2-4, una distribución de cargas eléctricas  $Q_2$  se alinean con el campo eléctrico, y otras cargas  $Q_1$  quedan libres para definir la polarización del material. Para un campo eléctrico  $E_j$  pequeño, la densidad de polarización  $P_i$ , definida como el momento de dipolo por unidad de volumen, es proporcional al campo eléctrico aplicado (Brizzotti, 2006) tal que:

$$P_i = \varepsilon_0 \mathcal{X}_{ij} E_j \quad (2-15)$$

Donde  $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$  es la permisividad eléctrica en el vacío y  $\mathcal{X}_{ij} = \varepsilon_r - 1$  es el tensor de susceptibilidad eléctrica del material, con  $\varepsilon_r$  como la permitividad relativa (constante

dieléctrica). De lo anterior, es posible deducir que la densidad de flujo eléctrico  $D$  (carga por unidad de área) se relaciona con el campo eléctrico  $E$  y la densidad de polarización  $P$  por:

$$D_i = \varepsilon_0 E_i + P_i \quad (2-16)$$

Reemplazando la ecuación (2-15) en (2-16):

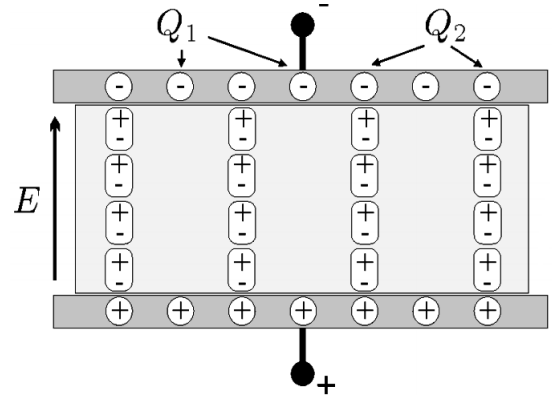
$$D_i = \varepsilon_0(\delta_{ij} + \chi_{ij})E_j \quad (2-17)$$

Escrita de forma general, la ecuación constitutiva eléctrica es:

$$D = \varepsilon E \quad (2-18)$$

Donde  $\varepsilon = \varepsilon_0(\delta_{ij} + \chi_{ij})$  es la permitividad eléctrica y se expresa en forma matricial como:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2-19)$$



**Fig. 2-4.:** Cargas en el dieléctrico de un capacitor plano. Figura de [Piefort \(2001\)](#).

Siendo  $\varepsilon$  los coeficientes de permitividad en cada dirección del sistema de coordenadas. Debido a los efectos de simetría en materiales piezoeléctricos, es posible reducir el número de constantes ([Kino, 1987](#)), y el tensor de permitividad eléctrica será:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

La expresión en forma matricial, para las ecuaciones constitutivas eléctricas será:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

Donde  $D_x$ ,  $D_y$  y  $D_z$  son las densidades de flujo eléctrico, y  $E_x$ ,  $E_y$  y  $E_z$  son los campos eléctricos en las direcciones de sistema coordenado  $x, y, z$ .

### 2.4.3. Ecuaciones Constitutivas Piezoeléctricas

Un material piezoeléctrico tiene la capacidad de generar un campo eléctrico a partir de la deformación mecánica e, inversamente, de sufrir deformaciones como respuesta a un campo eléctrico ([Moheimani and Fleming, 2006](#)). Estos fenómenos son conocidos como el efecto piezoeléctrico directo e inverso, respectivamente.

Debido a esto, las ecuaciones constitutivas piezoeléctricas se escribirán a partir de las ecuaciones constitutivas mecánicas (2-8) y eléctricas (2-18); sin embargo, estas no son suficientes para describir completamente el comportamiento del material, ya que es necesario introducir las expresiones del acople electro-mecánico y los coeficientes piezoeléctricos  $e$  del material. En concreto, una deformación  $S$  en el material induce una polarización  $eS$  por el efecto piezoeléctrico directo, mientras un campo eléctrico  $E$  tiende a alinear los dipolos en el dieléctrico, induciendo un esfuerzo  $-eE$ . Donde  $e$  es la constante piezoeléctrica que acopla el medio mecánico y eléctrico. Las ecuaciones constitutivas mecánicas y eléctricas acopladas resultan ser (Piefort, 2001):

$$T = c^E S - eE \quad (2-22)$$

$$D = \epsilon^S E + eS \quad (2-23)$$

Donde el superíndice en  $c^E$  indica que las propiedades mecánicas son descritas cuando se somete el material a un campo eléctrico constante y en  $\epsilon^S$  indica que las propiedades dieléctricas son descritas a una deformación constante (Meitzler et al., 1988). Las ecuaciones (2-22) y (2-23) son conocidas como las ecuaciones constitutivas de los materiales piezoeléctricos. Mientras la primera se refiere a los materiales piezoeléctricos en configuración de actuadores, la segunda ecuación se refiere a una configuración de sensores.

En forma matricial, las ecuaciones (2-22) y (2-23) se pueden reescribir como:

$$\begin{bmatrix} T \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^E & -e \\ e & \epsilon^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ E \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

En esta expresión, los tensores de las ecuaciones constitutivas piezoeléctricas se escriben de diferentes formas dependiendo de la dirección de polarización ( $x$ ,  $y$ , o  $z$ ) con respecto al sistema de coordenadas definido (Nader, 2002). Estas expresiones se presentan en detalle en el Anexo A. Finalmente, la relación entre las diferentes magnitudes físicas y las propiedades de un material (elasticidad, piezoelectricidad, entre otras) son presentadas en la figura 2-5. Este diagrama, conocido como el *Diagrama de Heckmann*, muestra las relaciones termodinámicas entre medios continuos mecánicos, eléctricos y térmicos, definiendo las propiedades fundamentales y sus relaciones físicas, sintetizando las ecuaciones constitutivas generales de la termodinámica (Piefort, 2001).

## 2.5. Modelado por el Método de los Elementos Finitos

En muchas situaciones, los problemas de ingeniería se deben resolver usando modelos aproximados de los fenómenos físicos, con lo cual se obtiene una formulación discreta de un problema. Sin embargo, una definición completa de los problemas involucran un marco matemático que deriva en ecuaciones diferenciales parciales o formulaciones



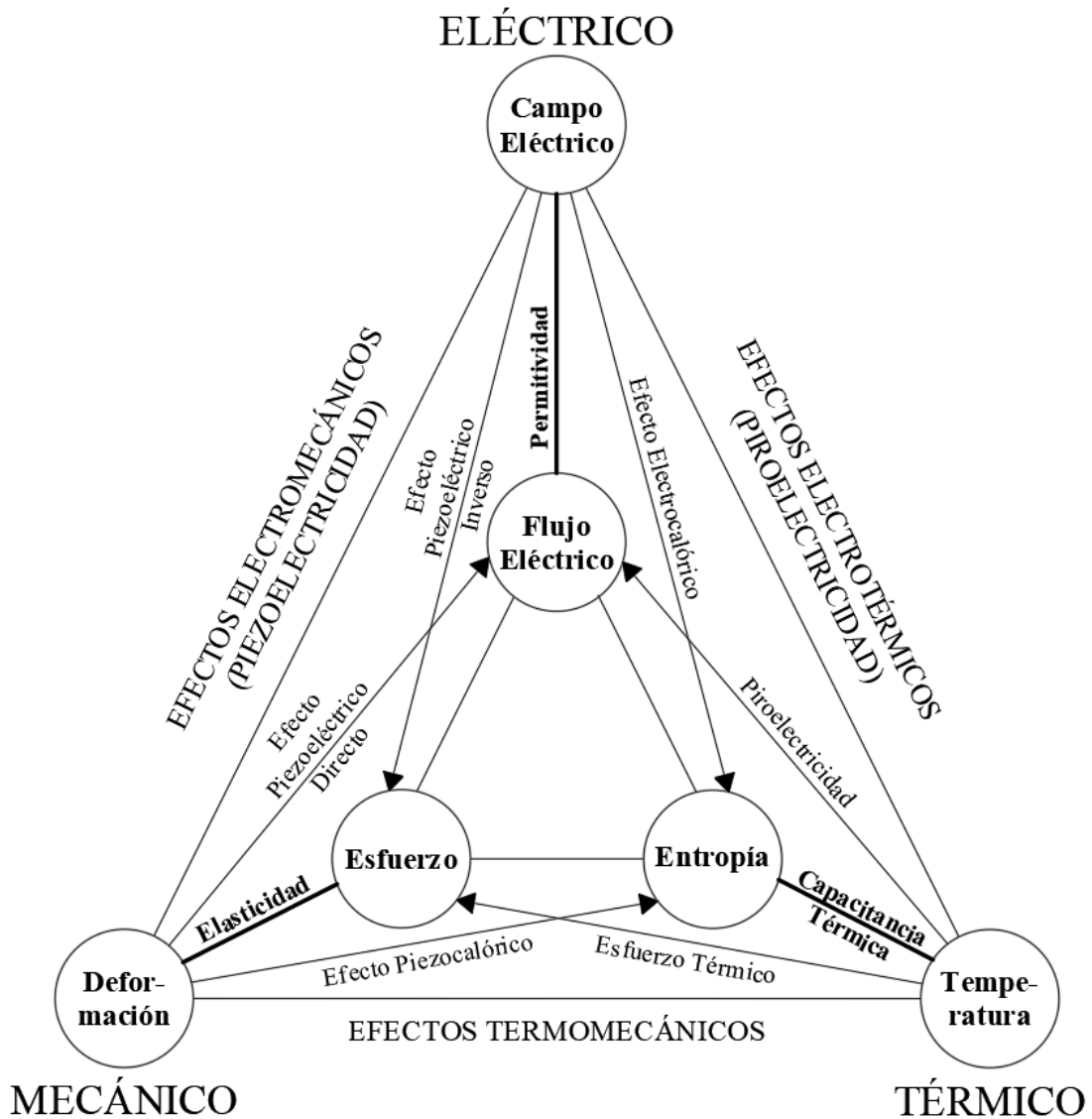


Fig. 2-5.: Diagrama de Heckmann. Figura adaptada de Piefort (2001).

equivalentes para describir el medio continuo. En algunos casos, estas ecuaciones, son tan complejas que simplemente no se pueden resolver analíticamente o carecen de una solución exacta (Piefort, 2001). En estos casos, es necesario usar métodos de aproximación numérica como las diferencias finitas, los residuos ponderados, las funciones de aproximación, o el más conocido en la ingeniería moderna, el Método de los Elementos Finitos (MEF) (Zienkiewicz et al., 2013). Este último método, gracias al avance en tecnologías de la computación, puede resolver problemas a partir de un modelo matemático (ecuaciones diferenciales), discretizando el dominio al dividir el medio continuo en un número finito de partes o “elementos finitos”. A cada uno de estos elementos se les analiza el comportamiento individual y luego se reconstruye el comportamiento del sistema original completo (Zienkiewicz et al., 2013; Cook et al., 2007).

### 2.5.1. Principio Variacional

En la formulación de elementos finitos se requiere la expresión integral (forma débil) de una ecuación diferencial (forma fuerte) que describe el sistema para hallar la solución al problema continuo. Una forma para hallar la expresión integral se conoce como *Principio Variacional*. Este principio consiste en hallar un funcional  $\Pi$  tal que la solución al problema continuo de la variable  $v$  haga el funcional estacionario con respecto a cambios arbitrarios  $\delta v$  (Zienkiewicz et al., 2013). Esta variable  $v$  representa el desplazamiento y el voltaje en el caso de los medios continuos piezoelectricos. Esto se puede escribir como:

$$\delta\Pi = 0 \quad (2-25)$$

En el caso de estructuras piezoelectricas, es posible derivar la forma débil del problema usando una modificación del principio de *Hamilton*, donde se establece que la dinámica de un sistema físico puede ser determinada por un problema variacional basado en el funcional Lagrangiano  $\mathcal{L}$ , el cual contiene toda la información física del sistema e incluye tanto las contribuciones eléctricas como las mecánicas. Aplicando esta definición en la ecuación (2-25) se escribe el problema variacional piezoelectrico como (Lerch, 1990):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \quad (2-26)$$

Donde el Lagrangiano  $\mathcal{L}$  será determinado por todas las energías disponibles en el medio piezoelectrico:

$$\mathcal{L} = E_K + E_E + E_D + \mathcal{W} \quad (2-27)$$

Con  $E_K$  es la energía cinética,  $E_E$  es la energía elástica,  $E_D$  es la energía dieléctrica, y  $\mathcal{W}$  es el trabajo virtual. Es común encontrar en la literatura la ecuación (2-26) como:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L} + \mathcal{W}) dt = 0 \quad (2-28)$$

Esta última expresión agrupa los primeros tres términos de la ecuación (2-27) en  $\mathcal{L}$  y deja explícito el trabajo virtual  $\mathcal{W}$  para facilitar las operaciones de solución.

Ya que el Lagrangiano determina la relación de energías en el sistema, se define como una relación entre la energía cinética  $J$  y la entalpía  $H$  (Piefort, 2001):

$$\mathcal{L} = \int_V (J - H) dV \quad (2-29)$$

En esta expresión, la energía cinética es:

$$J = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} \quad (2-30)$$

Donde  $\mathbf{u}$  es el desplazamiento y  $\dot{\mathbf{u}}$  la velocidad. La entalpía será:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}[\mathbf{S}^T \mathbf{T} - \mathbf{E}^T \mathbf{D}] \quad (2-31)$$

Por otra parte, el trabajo virtual será la suma de fuerzas de volumen  $F_V$ , las fuerzas de contacto  $F_S$  y las cargas eléctricas aplicadas  $Q$ :

$$\mathcal{W} = F_V + F_S + Q \quad (2-32)$$

Las ecuaciones (2-29) y (2-32), incluyendo las ecuaciones constitutivas (2-24) y la forma fuerte del problema, se reemplazan en la ecuación (2-28) para resolver el problema variacional.

### 2.5.2. Formulación Fuerte del Problema Piezoeléctrico

La forma fuerte de un problema es descrito por ecuaciones diferenciales. En el caso de los problemas piezoeléctrico estará definido por las ecuaciones de balances mecánicos y eléctricos (Naillon et al., 1983). Las ecuaciones de balance mecánico corresponden al cálculo de fuerzas expresado por la ecuación de Newton para medios continuos:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2-33)$$

Donde  $\mathbf{T}$  es el tensor de esfuerzos,  $\rho$  es la densidad de masa,  $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamientos, y  $\nabla$  es el operador de gradiente. Por otra parte, las ecuaciones de balance eléctrico están descritas por la ley de Gauss de las ecuaciones de Maxwell, asumiendo que el material es aislante (Lerch, 1990):

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2-34)$$

Donde  $\mathbf{D}$  es la densidad de flujo eléctrico y está directamente relacionada al campo eléctrico  $\mathbf{E}$  por la permitividad  $\epsilon$ , definida en la ecuación (2-18). Adicionalmente, el tensor de deformación  $\mathbf{S}$  está relacionado al vector desplazamiento mecánico  $\mathbf{u}$  por:

$$\mathbf{S} = \nabla \mathbf{u} \quad (2-35)$$

De forma análoga, el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  está relacionado al potencial eléctrico  $\phi$  por:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (2-36)$$

Las ecuaciones (2-33) a (2-36) son la formulación fuerte para problemas piezoeléctricos, que en complemento con las ecuaciones constitutivas (2-24) y las condiciones de frontera, forman el modelo matemático completo del sistema.

### 2.5.3. Elemento Finito Piezoeléctrico

Las ecuaciones que describen cualquier sistema dinámico piezoeléctrico pueden ser escritas en términos de los desplazamientos  $\mathbf{u}$  y los potenciales eléctricos  $\phi$ . A estas dos magnitudes se les llamará las incógnitas del problema de elementos finitos, que a su vez representarán los grados de libertad del sistema. Las incógnitas en el nodo de un elemento finito  $v_i$ , en la relación al valor de la incógnita en cualquier punto del espacio  $v$ , están relacionadas por la funciones de interpolación polinomiales  $\mathbf{ax}$  (Cook et al., 2007), tal que:

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}\mathbf{a} \quad (2-37)$$

En donde:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} & \mathbf{x}^2 & \mathbf{x}^3 & \dots & \mathbf{x}^n \end{bmatrix} \quad (2-38)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{bmatrix}^T \quad (2-39)$$

Al aplicar las condiciones de frontera, el vector de valores nodales  $v_i$  se relaciona con el vector de coeficientes  $\mathbf{a}$  por la matriz de coordenadas globales  $\mathbf{A}$ , tal que:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{A}\mathbf{a} \quad (2-40)$$

Despejando  $\mathbf{a}$  y reemplazando en (2-37):

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}_i \quad (2-41)$$

A la expresión  $\mathbf{x}\mathbf{A}^{-1} = \mathcal{N}$  se le conoce como funciones de forma. Se define entonces que el desplazamiento  $\mathbf{u}$  y el potencial eléctrico  $\phi$  de un elemento finito están relacionados con sus respectivos valores nodales  $\mathbf{u}_i$  y  $\phi_i$  por las funciones de forma  $\mathcal{N}_{\mathbf{u},\phi}$ , tales que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathcal{N}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_i \\ \phi &= \mathcal{N}_{\phi}\phi_i \end{aligned} \quad (2-42)$$

Además, de (2-35) y (2-36) se sabe que la deformación  $\mathbf{S}$  y el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  están relacionados por la derivada del desplazamiento  $\mathbf{u}$  y el potencial eléctrico  $\phi$ , Esto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathcal{D}\mathcal{N}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_i = \mathcal{B}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_i \\ \mathbf{E} &= -\nabla\mathcal{N}_{\phi}\phi_i = -\mathcal{B}_{\phi}\phi_i \end{aligned} \quad (2-43)$$

Donde  $\mathcal{B}_{\mathbf{u}}$  y  $\mathcal{B}_{\phi}$  son las matrices gradiente mecánica y eléctrica, las cuales se refieren a

la derivada de las funciones de forma a través de los operadores diferenciales  $\mathcal{D}$  y  $\nabla$ :

$$\mathcal{B}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \mathcal{N}_u \quad (2-44)$$

$$\mathcal{B}_\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \mathcal{N}_\phi \quad (2-45)$$

Las matrices gradiente cumplen la función de relacionar, respectivamente, los desplazamientos  $u_i$  y potenciales  $\phi_i$  nodales con las deformaciones  $S$  y campos eléctricos  $E$ . Luego, a través de las propiedades mecánicas, eléctricas y piezoeléctricas es posible relacionar los esfuerzos  $T$  y densidades de flujos eléctricos  $D$ , como es presentado en la ecuación (2-24).

Reemplazando las ecuaciones del principio variacional desarrolladas en la sección 2.5.1, se obtiene la expresión general de movimiento en sistemas dinámicos, expandida para incluir el efecto piezoeléctrico en las matrices de elementos finitos de masa  $M$ , amortiguamiento  $D$  y rigidez  $K$ . Escrita en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix} \quad (2-46)$$

Donde, las matrices de masa  $M_{uu}$ , rigidez  $K_{uu}$ , acople piezoeléctrico  $K_{u\phi}$ , capacitancia

$\mathbf{K}_{\phi\phi}$ , amortiguamiento mecánico  $\mathbf{D}_{uu}$  y eléctrico  $\mathbf{D}_{\phi\phi}$ , son (Piefort, 2001):

$$\mathbf{M}_{uu} = \rho \int_V \mathcal{N}_u^T \mathcal{N}_u dV \quad (2-47)$$

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{c}^E \mathbf{B}_u dV \quad (2-48)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi} = \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}^T \mathbf{B}_\phi dV \quad (2-49)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi} = - \int_V \mathbf{B}_\phi^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{B}_\phi dV \quad (2-50)$$

$$\mathbf{K}_{\phi u} = \mathbf{K}_{u\phi}^T \quad (2-51)$$

$$\mathbf{D}_{uu} = \alpha \mathbf{M}_{uu} + \beta \mathbf{K}_{uu} \quad (2-52)$$

$$\mathbf{D}_{\phi\phi} = - \frac{h^d}{\omega} \mathbf{K}_{\phi\phi} \quad (2-53)$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son las constantes del amortiguamiento de Rayleigh,  $h^d$  es el factor de pérdida dieléctrico, y  $\omega$  es la frecuencia angular (Nader, 2002). Además, las fuerzas externas (de cuerpo y superficie) y las cargas eléctricas aplicadas al sistema son (Piefort, 2001):

$$\mathbf{f} = \int_V \mathcal{N}_u^T \mathbf{F}_B dV + \int_S \mathcal{N}_u^T \mathbf{F}_S dS + \mathcal{N}_u^T \mathbf{F}_C \quad (2-54)$$

$$\mathbf{q} = - \int_S \mathcal{N}_\phi^T \mathbf{q}_S dS - \mathcal{N}_\phi^T \mathbf{Q} \quad (2-55)$$

Donde  $\mathbf{F}_B$  son las fuerza de cuerpo,  $\mathbf{F}_S$  las fuerzas de superficie,  $\mathbf{F}_C$  las fuerzas de contacto,  $\mathbf{q}_S$  las cargas eléctricas de superficie, y  $\mathbf{Q}$  las cargas eléctricas en el dieléctrico.

De la ecuación 2-46 se derivan las diferentes formulaciones para el análisis estático, modal y armónico. En el caso de un problema estático, tan solo se consideran los términos de rigidez y las cargas, por tanto, la ecuación que describe el sistema será:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (2-56)$$

En el caso de un análisis modal, adicionalmente se consideran los efectos de inercia en las matrices de masa, de forma que la ecuación que describe el sistema será:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (2-57)$$

Finalmente, en el caso de análisis armónicos se consideran todos los términos, es decir, la ecuación que describe el sistema será la ecuación completa, tal como se presenta la ecuación 2-46. En el Capítulo 3 se describe de forma más detallada las consideraciones para los análisis modales y armónicos de sistemas dinámicos usando el método de elementos finitos.

### 2.5.4. Elemento Finito Mecánico

La ecuación que describe un sistema dinámico mecánico se escribe en términos de los desplazamientos  $\mathbf{u}$ , que a su vez serán los grados de libertad del sistema y cumplen la ecuación general de movimiento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2-58)$$

Es notable que la ecuación 2-58 es muy similar a la ecuación 2-46, la única diferencia es la consideración de los grados de libertad eléctricos  $\phi$ . Esto se debe a que la formulación del elemento finito mecánico es exactamente igual a la formulación presentada para el elemento finito piezoeléctrico, basta con eliminar los grados de libertad eléctricos o hacer las propiedades dieléctricas ( $\epsilon$ ) y piezoeléctricas ( $e$ ) iguales a cero en la formulación de las matrices locales de los elementos finitos (ecuaciones 2-47 a 2-53).

## 2.6. Implementación de Elementos Finitos

En este trabajo se implementaron dos tipos de elementos finitos hexahédricos; de 8 y 20 nodos, con cuatro grados de libertad por nodo, tres de ellos para desplazamientos  $u_x$ ,  $u_y$  y  $u_z$ , y otro para voltajes  $\phi$ . La matrices de los elementos presentadas en la Sección 2.5, son implementadas realizando un cambio de coordenadas para construir una formulación de elementos finitos isoparamétricos, la cual es un formulación versátil que le permite a los elementos tener formas no rectangulares (Cook et al., 2007). Las funciones de forma isoparamétricas de ambos tipos de elementos finitos son presentadas a continuación.

### 2.6.1. Elemento Hexaédrico de 8 nodos

Este elemento finito es el más popular, también llamado elemento lineal *Brick*, ya que sus funciones de interpolación son lineales. Aunque este elemento es muy usado por su fácil implementación, tiene problemas de *shear-locking*, *volume-locking* y *hourglass* (Dhondt, 2004). En la Figura 2-6 se muestra un diagrama del elemento de 8 nodos y se establece el sistema de coordenadas locales del mismo.

Las funciones de forma de este tipo de elementos surgen del polinomio de ocho variables con más bajo orden posible. Este polinomio es:

$$\varphi_i(\xi, \eta, \zeta) = a_i + b_i\xi + c_i\eta + d_i\zeta + e_i\xi\eta + f_i\xi\zeta + g_i\eta\zeta + h_i\xi\eta\zeta \quad (2-59)$$

Donde  $\varphi_i$  puede tomar valores entre 0 y 1, de forma que:

$$\varphi_i(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) = \delta_{ij} \quad (2-60)$$

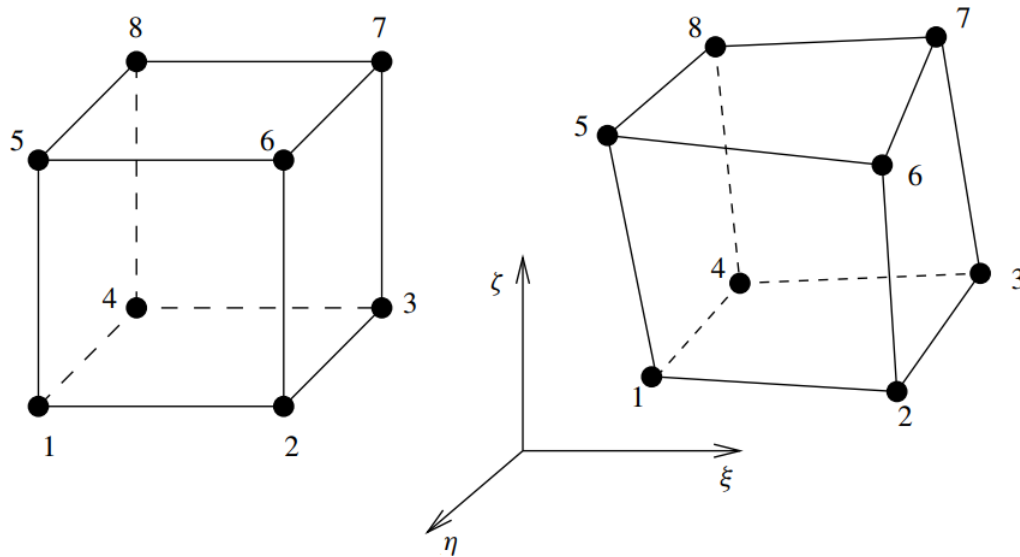


Fig. 2-6.: Elemento finito hexaédrico de 8 nodos. Figura adaptada de Dhondt (2004).

Así, las funciones de forma del elemento finito isoparamétrico son la combinación de las ecuaciones anteriores (Dhondt, 2004):

$$\varphi_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)/8 \quad (2-61)$$

$$\varphi_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)/8 \quad (2-62)$$

$$\varphi_3 = (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)/8 \quad (2-63)$$

$$\varphi_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)/8 \quad (2-64)$$

$$\varphi_5 = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)/8 \quad (2-65)$$

$$\varphi_6 = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)/8 \quad (2-66)$$

$$\varphi_7 = (1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)/8 \quad (2-67)$$

$$\varphi_8 = (1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)/8 \quad (2-68)$$

### 2.6.2. Elemento Hexaédrico de 20 nodos

Este elemento contiene 20 nodos repartidos en las mismas posiciones del elemento de 8 nodos (vértices) y adicionalmente en los bordes de cada cara del elemento. En la Figura 2-7 se muestra el diagrama con la disposición de los nodos en el elemento en el sistema de coordenadas local. Este elemento, también llamado *Brick* cuadrático por sus funciones de interpolación, puede simular fronteras curvas con buena aproximación, puede solucionar problemas comunes del elemento *Brick* lineal, y puede soportar grandes deformaciones (Dhondt, 2004). Las funciones de forma de este tipo de elementos surgen de un polinomio cuadrático con 20 variables. Este polinomio evaluado en las posiciones locales de cada nodo, dan como funciones de forma:



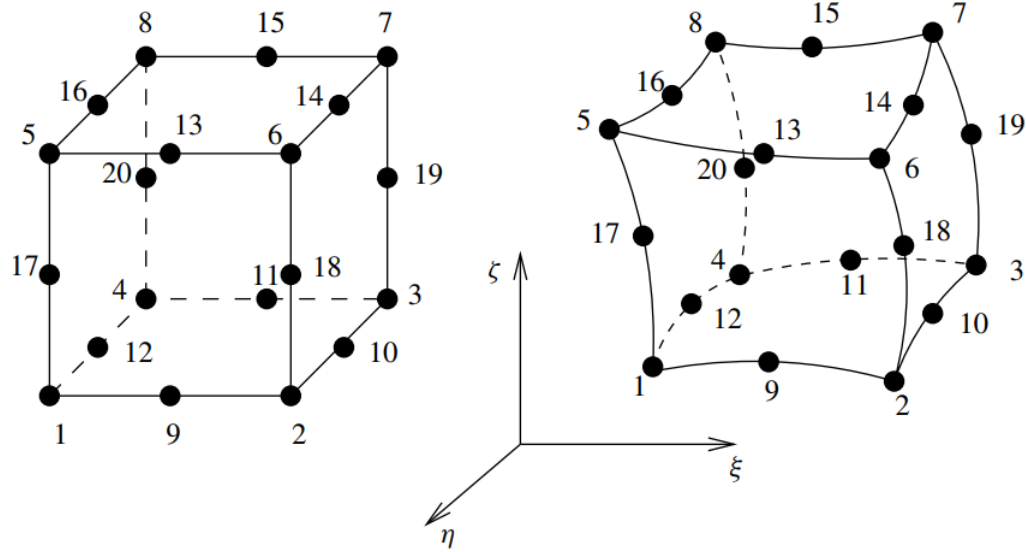


Fig. 2-7.: Elemento finito hexaédrico de 20 nodos. Figura adaptada de Dhondt (2004).

$$\varphi_1 = -(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(2 + \xi + \eta + \zeta)/8 \quad (2-69)$$

$$\varphi_2 = -(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(2 - \xi + \eta + \zeta)/8 \quad (2-70)$$

$$\varphi_3 = -(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)(2 - \xi - \eta + \zeta)/8 \quad (2-71)$$

$$\varphi_4 = -(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)(2 + \xi - \eta + \zeta)/8 \quad (2-72)$$

$$\varphi_5 = -(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)(2 + \xi + \eta - \zeta)/8 \quad (2-73)$$

$$\varphi_6 = -(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)(2 - \xi + \eta - \zeta)/8 \quad (2-74)$$

$$\varphi_7 = -(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)(2 - \xi - \eta - \zeta)/8 \quad (2-75)$$

$$\varphi_8 = -(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)(2 + \xi - \eta - \zeta)/8 \quad (2-76)$$

$$\varphi_9 = (1 - \xi)(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)/4 \quad (2-77)$$

$$\varphi_{10} = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)(1 - \zeta)/4 \quad (2-78)$$

$$\varphi_{11} = (1 - \xi)(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)/4 \quad (2-79)$$

$$\varphi_{12} = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)(1 - \zeta)/4 \quad (2-80)$$

$$\varphi_{13} = (1 - \xi)(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)/4 \quad (2-81)$$

$$\varphi_{14} = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)(1 + \zeta)/4 \quad (2-82)$$

$$\varphi_{15} = (1 - \xi)(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)/4 \quad (2-83)$$

$$\varphi_{16} = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)(1 + \zeta)/4 \quad (2-84)$$

$$\varphi_{17} = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(1 + \zeta)/4 \quad (2-85)$$

$$\varphi_{18} = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(1 + \zeta)/4 \quad (2-86)$$

$$\varphi_{19} = (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)(1 + \zeta)/4 \quad (2-87)$$

$$\varphi_{20} = (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)(1 + \zeta)/4 \quad (2-88)$$

## 2.7. Problemas de Implementación

Esta sección trata algunos problemas comunes de implementación del método de los elementos finitos para problemas de piezoelectricidad. Este método fue implementado en MATLAB usando programación orientada a objetos y fue verificado analíticamente con reportes teóricos y experimentales en la literatura y numéricamente usando el *software* ANSYS. Los resultados de la implementación son presentados en el Capítulo 5.

### 2.7.1. Condicionamiento Numérico

La simulación de transductores piezoeléctricos aplicando el método de los elementos finitos es en sí mismo un problema mal condicionado numéricamente ya que se trabaja con unidades mecánicas y eléctricas que poseen valores de ordenes de magnitud física muy diferentes. Las propiedades elásticas de un material generalmente se expresan en Gigapascales y pueden estar en un orden de grandeza de  $10^9$ , mientras las propiedades eléctricas del mismo material pueden oscilar alrededor de  $10^{-12}$ . Esto representa una diferencia de grandezas en un orden de  $10^{20}$  en la matriz de rigidez del sistema (Nakasone, 2011). Para atenuar este problema de condicionamiento numérico se trabaja con un sistema de unidades alternativo, en el cual se reduce la gran diferencia entre los valores de las propiedades del material. En la Tabla 2-1 se presenta el sistema de unidades alternativo utilizado en este trabajo.

En la implementación del sistema de unidades alternativo realizada en MATLAB, se utilizaron las constantes de la Tabla 2-1 que escalan cada propiedad del material, sea elástico o piezoeléctrico, de la siguiente forma:

1.  $10^{-6}$  para la elasticidad.
2.  $10^{12}$  para la permitividad.
3.  $10^3$  para la piezoelectricidad.
4.  $10^{-6}$  para la densidad.

Luego de aplicar esta conversión de unidades, el orden de grandeza resultante entre los los valores más grandes y los más pequeños, oscila alrededor de  $10^3$ , mientras en el sistema de unidades original el orden de grandeza era de  $10^{20}$ .

### 2.7.2. Electrodo Piezoeléctricos

Un problema común de la implementación de elementos finitos involucra una serie de condiciones de frontera que se pueden expresar matemáticamente como funciones de los grados de libertad individuales. Estas son llamadas "*restricciones simples de grados de*

Magnitud	Sistema Internacional	Sistema Alternativo
Masa	$kg$	$g$
Longitud	$m$	$mm$
Tiempo	$s$	$ms$
Corriente eléctrica	$A$	$\mu A$
Frecuencia	$Hz$	$kHz$
Tensión eléctrica	$V$	$10^{-6} \frac{g \cdot mm^2}{\mu A \cdot ms^3}$
Carga eléctrica	$C$	$10^9 \mu A \cdot ms$
Densidad	$\frac{kg}{m^3}$	$10^{-6} \frac{g}{mm^3}$
Elasticidad	$\frac{N}{m^2}$	$10^{-6} \frac{g}{mm \cdot ms^2}$
Piezoelectricidad	$\frac{C}{m^2}$	$10^3 \frac{\mu A \cdot ms}{mm^2}$
Permitividad	$\frac{F}{m}$	$10^{12} \frac{\mu A^2 \cdot ms^4}{g \cdot mm^3}$

**Tabla 2-1.:** Conversión de magnitudes para un sistema de unidades alternativo.

*libertad*". Sin embargo, algunas situaciones como el modelado de electrodos piezoeléctricos hace necesario el acople de dos o más grados de libertad. Este proceso de acoplar se conoce como restricciones de múltiples grados de libertad y consiste en generar ecuaciones que conectan dos o más grados de libertad. Existen varios métodos para imponer ecuaciones de restricción, el más sencillo de entender e implementar se conoce como "*La eliminación Maestro-Eslavo*". Este método consiste elegir un grado de libertad "Maestro" y a partir de este escribir las ecuaciones de restricción de los grados de libertad "Esclavos" (Felippa, 2014).

Para entender el funcionamiento del método, se ejemplificará un problema simple: Suponga que tiene un sistema  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$  con 6 grados de libertad. Se desea acoplar los grados de libertad 2, 5 y 6. Para este caso, se escoge el grado de libertad 2 como el maestro y los demás como esclavos. Las ecuaciones de restricción se pueden escribir como:

$$u_5 = u_2 \quad u_6 = u_2 \quad (2-89)$$

Ahora es necesario incluir las ecuaciones de restricción en el sistema. Para esto, se modificará el vector  $\mathbf{u}$  a través de una matriz de acople  $\mathbf{T}$ , tal que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{T} \hat{\mathbf{u}} \quad (2-90)$$

Esto se puede escribir para nuestro ejemplo como:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (2-91)$$

Es importante notar que la matriz de acople  $T$  siempre tendrá un tamaño  $n \times q$ , donde  $n$  es el número de total de grados de libertad y  $q$  el número de grados de libertad no restringidos, incluyendo al grado de libertad maestro.

Ahora que ya se tienen incluidas las ecuaciones de restricción en el sistema a través de la ecuación 2-90, se puede reescribir como:

$$\hat{K}\hat{u} = \hat{f} \quad (2-92)$$

Donde:

$$\hat{K} = T^T K T \quad \hat{f} = T^T f \quad (2-93)$$

Formas más complejas en el uso de las ecuaciones de restricción son usadas en problemas comunes simple y complejos, sin embargo, estos temas son abordados por Felippa (2014).

# 3. Control de Vibraciones

## 3.1. Introducción

Las vibraciones son oscilaciones mecánicas a partir de un punto de equilibrio que experimentan partículas o cuerpos. En general, las actividades humanas y la naturaleza involucran vibraciones de una forma u otra, algunas veces su amplitud es tan baja que no las podemos percibir, y otras veces las vibraciones tienen tal amplitud que pueden ocasionar desastres naturales como terremotos o tormentas. Por una parte, las vibraciones pueden ser de gran utilidad (*e.g.* mezcladores y separadores, explotación minera, fabricación de instrumentos, entre otros), pero por otra parte, el exceso de vibración en muchos sistemas puede causar daños graves y de allí la importancia de estudiar los fenómenos vibratorios y cómo mitigarlos de formas apropiadas ([Chakraverty, 2008](#)).

Las vibraciones están presentes en sistemas biológicos, sistemas de comunicación, instrumentos musicales, entre otros; sin embargo, los sistemas mecánicos y las estructuras sufren de vibraciones indeseadas que pueden ser destructivas ([Inman, 2013](#)). Algunos efectos dañinos causados por las vibraciones se presentan en estructuras de aviones, helicópteros, puentes, edificios, máquinas, sistemas de suspensión, telescopios, mecanismos de alta precisión, sistemas ópticos, entre otros ([Preumont and Seto, 2008](#)). La teoría de control aplicada a la supresión de vibraciones es un tema que se suele llamar *Control Estructural* y se ha convertido en un tema importante en el diseño de mecanismos más precisos y menos tolerantes a las vibraciones ([Inman, 2006](#)). Adicionalmente, el estudio de estructuras delgadas se torna importante debido a que ellas constituyen una parte fundamental de numerosas estructuras en aeronaves, rotores, vehículos, sensores o embarcaciones, lo cual hace del estudio de vibraciones en este tipo de estructuras de extrema importancia en un amplio rango de aplicaciones de ingeniería aeronáutica, civil o mecánica ([Chakraverty, 2008](#)).

En esencia, existen tres acercamientos a un problema de control de vibraciones:

- Control Pasivo.
- Control Activo.
- Control Semi-activo o Semi-pasivo.

El abordaje de control pasivo se enfoca en la disipación de energía del sistema, mas no posee información del comportamiento dinámico del sistema en tiempo real ya que no usa sensores y su rendimiento depende del diseño de control pasivo propuesto. El control semi-activo o semi-pasivo sí puede conocer información del sistema por medio de sensores, pero sus actuadores se encargan de disipar la energía vibratoria en otro tipo de energía. Este abordaje de control puede ser entendido como un amortiguamiento activo o inteligente. Finalmente, el control activo además de observar el sistema a través de sus sensores, tiene la capacidad de introducir energía de control al sistema a través de sus actuadores de acuerdo a una estructura de control (Preumont, 2011).

En este capítulo se abordará el control activo de vibraciones aplicado en problemas de estructuras delgadas utilizando materiales piezoeléctricos como transductores en configuración de actuadores y sensores. Inicialmente, se presenta una reseña histórica del desarrollo de control de vibraciones en un contexto general y concluye presentando el desarrollo histórico específico al interés de esta tesis. Luego, se aborda el análisis dinámico de estructuras utilizando el método de los elementos finitos. Posteriormente, se presenta el desarrollo teórico de los conceptos de controlabilidad y observabilidad usado en la formulación de la optimización topológica. Finalmente, se aborda el tema de control óptimo aplicado en esta tesis.

## 3.2. Reseña Histórica

La palabra vibraciones, que viene del latín *vibrationem*, ya existía alrededor del siglo VI A.C; pero era usado en el contexto de la música, aún cuando existe evidencia de instrumentos musicales en China cerca de 13,000 años A.C. Sin embargo, uno de los primeros laboratorios de vibraciones, de los que se tiene conocimiento, fue fundado por el matemático y filósofo griego Pitágoras de Samos (570-497 A.C.), inspirado por el sonido emitido por los martillos al golpear el metal (Archambault, 2003). Fue Pitágoras quien inició la teoría de las vibraciones en el siglo quinto A.C; en asociación con la teoría de la música y la teoría de la acústica; además, unificó de manera rigurosa la teoría musical de la época con la teoría de los números (Dimarogonas, 1990).

Pitágoras observó acertadamente que el tono del sonido emitido por los martillos golpeando el metal no dependía de la fuerza golpe, mas sí del peso propio de cada martillo, de forma que una variación de una octava en el sonido correspondía a la relación de peso 2:1, lo que estableció uno de los primeros axiomas de la teoría de las vibraciones (Archambault, 2003). Además, determinó que la frecuencia natural de los sistemas vibratorios es una propiedad de cada sistema y no depende de la excitación, y estableció un método racional para medir la frecuencia de los sonidos basado en intervalos sonoros básicos de los instrumentos musicales (Dimarogonas, 1990).

Cuando parecía que todo el conocimiento de la música y la acústica provenía de los griegos, el famoso arquitecto romano Marcus Vitruvius Pollio (80-15 A.C.) escribió, alrededor del año 20 A.C., un tratado titulado *De Architectura Libri Decem* acerca de los fenómenos acústicos en los teatros. Este texto estuvo perdido hasta el siglo quince, y no existe registro de avances teóricos en acústica o vibraciones durante los 16 siglos posteriores al trabajo de Vitruvius (Rao, 2011).

Solo hasta el siglo XVII, se registran nuevamente avances teóricos y experimentales sobre la oscilación del péndulo y la vibración en cuerdas. Galileo Galilei (1564-1642) publica en 1638 un escrito llamado *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze*, en el cual se discute la vibración en los péndulos, sus dependencias de las frecuencias de resonancia y la relación entre frecuencia, longitud, tensión y densidad de una cuerda vibrante. Sin embargo, el primer trabajo formal de vibración de cuerdas es publicado por el matemático francés Marin Mersenne (1588-1648) en su libro *Harmonicorum Liber*, publicado en 1636 (Rao, 2011).

Todos los esfuerzos hasta esa época se concentraron en entender el fenómeno de las vibraciones y en desarrollar modelos matemáticos para describir el comportamiento físico de estos sistemas; pero, en tiempos más recientes, las aplicaciones de la teoría de vibraciones comenzaron a cobrar sentido en las aplicaciones de ingeniería debido a la cantidad de fallas reportadas en máquinas y estructuras debido al exceso de vibraciones (Rao, 2011).

Un famoso suceso histórico del efecto de las vibraciones ocurrió en 1940 con el primer puente suspendido de Estados Unidos, llamado *Tacoma Narrows Bridge* (ver Figura 3-1). El puente de Tacoma colapsó tan solo cuatro meses después de su inauguración debido a un exceso de vibraciones verticales inducidas por resonancia mecánica con las fuertes condiciones de vientos debido a un fenómeno aerodinámico de resonancia conocido como *auto-excitación* o *amortiguamiento negativo* en un modo de vibración torcional del puente (Billah and Scanlan, 1991). Luego del desastre, muchos textos de física presentan este suceso como un ejemplo de resonancias mecánicas forzadas.

Tal vez una de las primeras aplicaciones en control de vibraciones aparece en 1904 con la patente presentada por Vittorio Arcioni titulada *Damping Device for Measuring Instruments*. En esta invención se especifica un dispositivo que reduce al mínimo las oscilaciones y vibraciones de las partes móviles en instrumentos de medición eléctrica (Arcioni, 1904). Luego, en 1909, Hermann Frahm (1867-1939) propone el primer absortor dinámico de vibraciones (Den Hartog, 1985). Desde entonces, el análisis y control de vibraciones se ha convertido en un disciplina formal de la ingeniería, y aunque la teoría de interferencia de ondas, la cual es un concepto básico en el control activo de ruido y vibraciones,



**Fig. 3-1.:** Puente de Tacoma durante la vibración inducida por el viento. Noviembre 7 de 1940. Imagen de *Historical Photography Collection*, Universidad de Washington (Rao, 2011).

fue desarrollada en el siglo XVII, solo hasta principios de 1930 empiezan a ser reportados aplicaciones de control activo de vibraciones (Tokhi et al., 2002).

Desde la ingeniería naval se realizaron importantes contribuciones al control de vibraciones (Guicking, 2007). En 1905, el ingeniero británico Arnulph Mallock publica un trabajo para reducir las vibraciones de una embarcación a vapor mediante la sincronización de dos motores con fase opuesta. Luego en 1934, H. Hort publica el control activo de vibraciones de rotación en grandes embarcaciones usando tanques anti-volcamiento (Tanques de Frahm). Atacando un problema similar de embarcaciones, J. F. Allan propone en 1945 un control de estabilización usando “Aletas Activas”. De forma similar, se han propuesto controles de vibración para estructuras de aeronaves (Alfred, 1944), en ambientes especiales como vacío extremo (Anon, 1959), y aplicaciones aero espaciales de control de estructuras flexibles (Leatherwood et al., 1971).

Algunas aplicaciones modernas en ingeniería, específicamente relacionadas al control activo de vibraciones en estructuras serán presentadas en la siguiente sección.



### 3.3. Aplicaciones en Control de Estructuras

En muchas aplicaciones espaciales y terrestres se requiere asegurar estabilidad de operación en lugar de precisión. Esta especificación sobre la estabilidad estructural para misiones espaciales, combinada con el requisito de estructuras livianas, ha generado investigaciones exhaustivas en el área del control activo de estructuras. En la Figura 3-2 se muestra una plataforma para control vibraciones de seis ejes, usando dos plataformas triangulares paralelas, conectadas por seis actuadores ortogonales entre sí. Esta plataforma es usada como sistema de control de vibraciones en instrumentos muy sensibles, específicamente en aplicaciones de interferómetros en exploraciones espaciales con el propósito de usar varios telescopios pequeños como interferómetros en lugar de un gran telescopio monolítico (Hanieh, 2003).

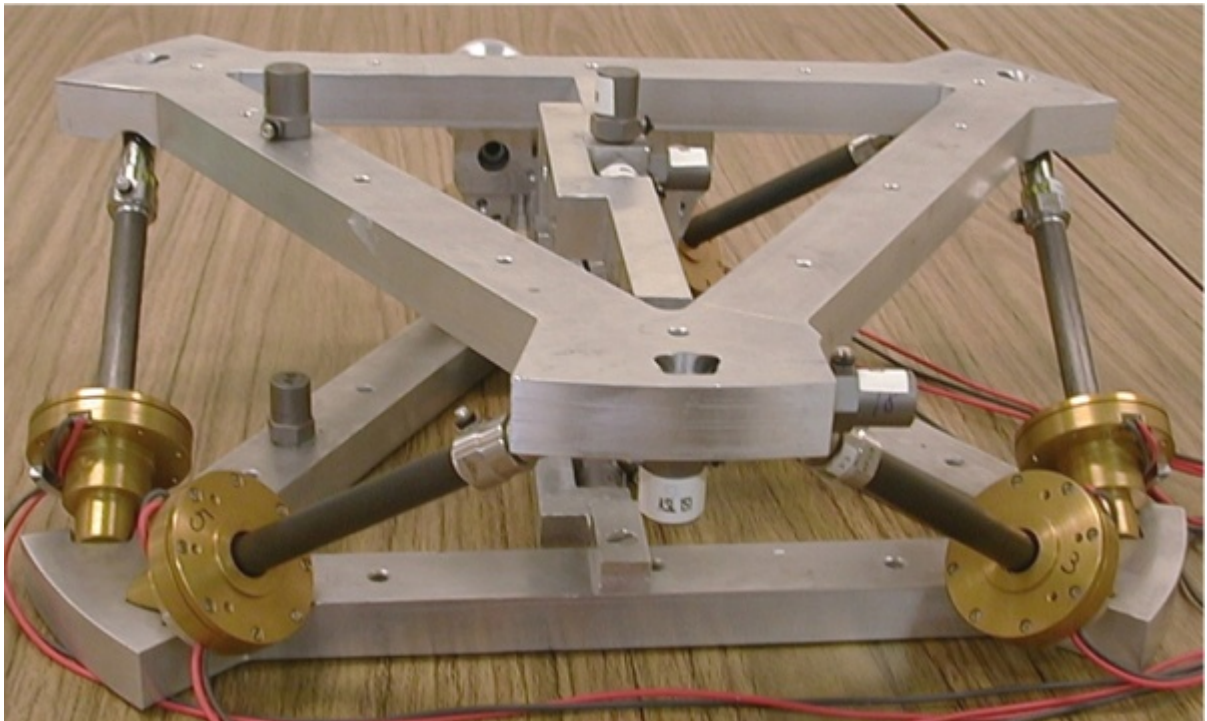
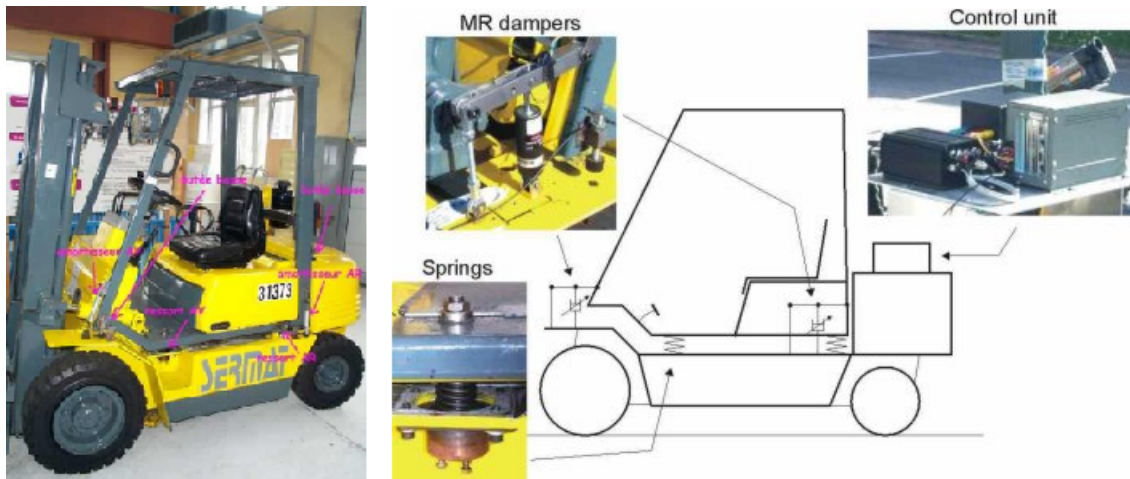


Fig. 3-2.: Plataforma de Stewart construida en el *Active Structures Laboratory*.

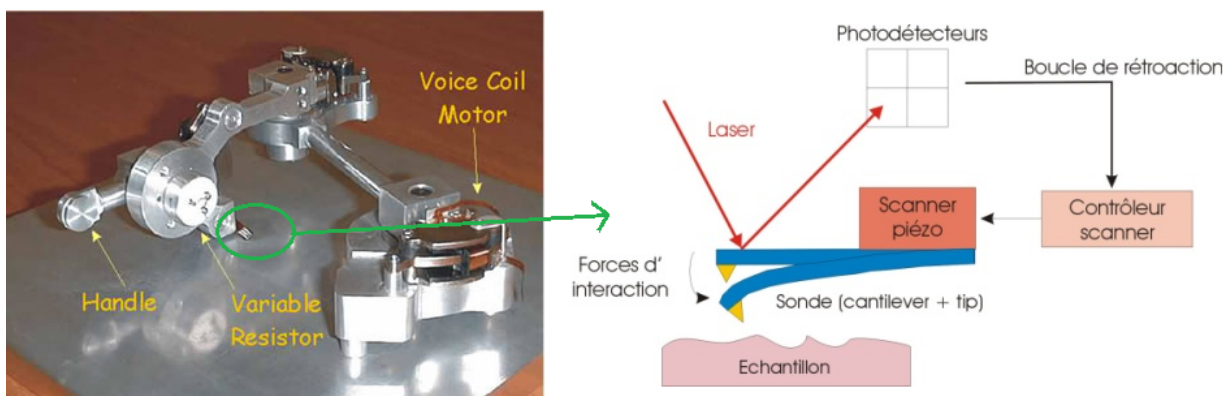
El control activo de estructuras puede entenderse como un proceso de amortiguamiento activo, un enfoque es especialmente interesante en aplicaciones de control con fluidos electro/magneto-reológicos. Una aplicación implementada en un montacargas para reducir el impacto de las vibraciones de baja frecuencias en las personas que operan este tipo de maquinas es mostrada en la Figura 3-3. El dispositivo consiste en cuatro amortiguadores magnetoreológicos *Lord 1005* que sustituyen un parte de la estructura original del montacargas, permitiendo los movimientos verticales y de rotación con mayor flexibilidad, mientras previene movimientos horizontales.

Este proyecto en control de vibraciones fue realizado por el [Active Structures Laboratory](#), la compañía belga [MicroMega-Dynamics](#), y el Instituto Nacional de Investigación y Seguridad ([INRS](#)) de Francia.



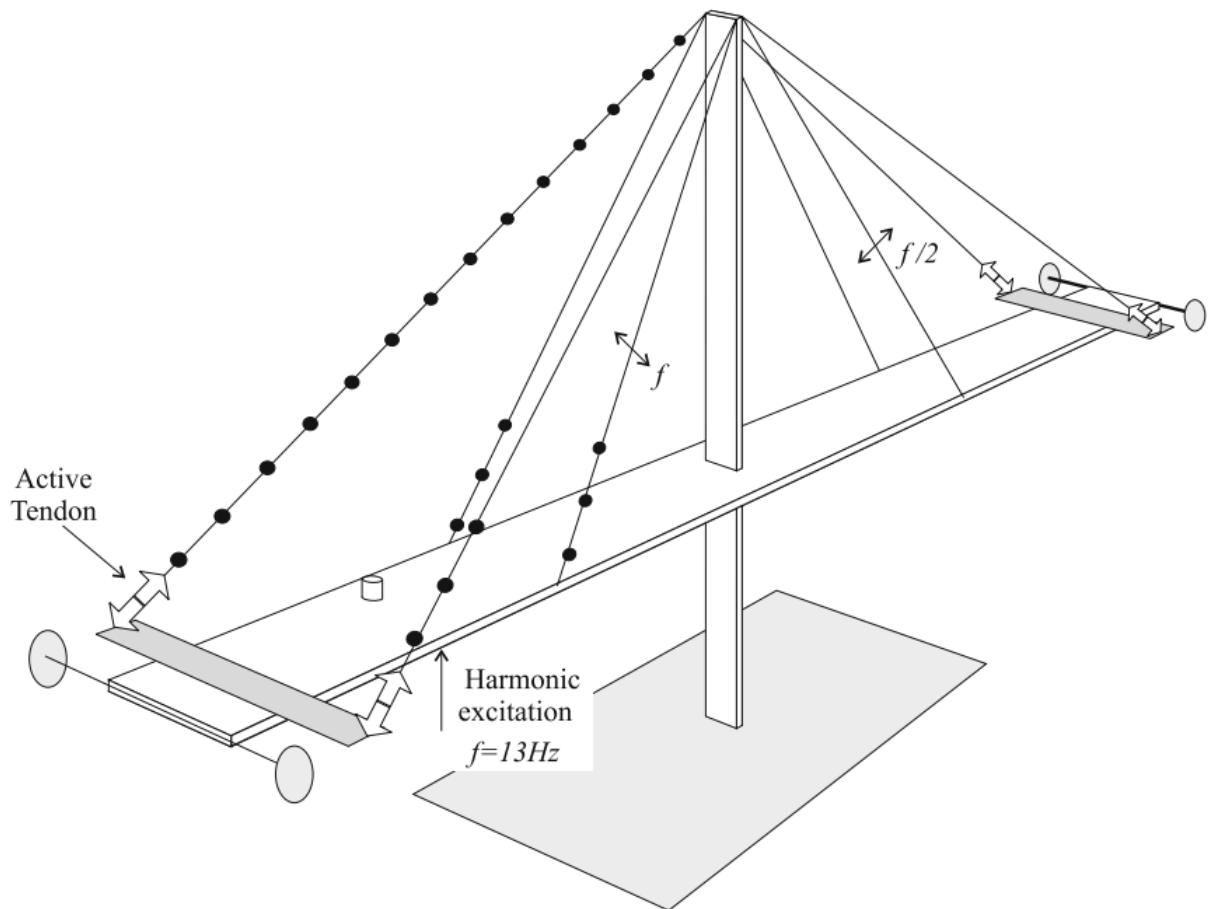
**Fig. 3-3.:** (Izquierda) Montacargas Komatsu FD20 usando en el proyecto. (Derecha) Esquema del sistema control semi-activo de vibraciones implementado en el montacargas.

Por otra parte, la nanotecnología ha desarrollado nuevas herramientas para aumentar el rendimiento de sensores y actuadores en control de nanoestructuras. Uno de los mayores desafíos de esta tecnología es la manipulación de componentes sometidos a fuerzas de nivel molecular con dimensiones inferiores a 100 nanómetros. Se pueden encontrar muchas aplicaciones en varios campos, como las biotecnologías (estudio de ADN y proteínas), el almacenamiento de datos o la ciencia de materiales (nanotubos o caracterización de películas en superficies) ([Letier et al., 2003](#)). En la Figura 3-4 se muestra un mecanismo de control de nanoestructuras usando materiales piezoeléctricos para crear un interfaz háptica en un microscopio de fuerza atómica (AFM).



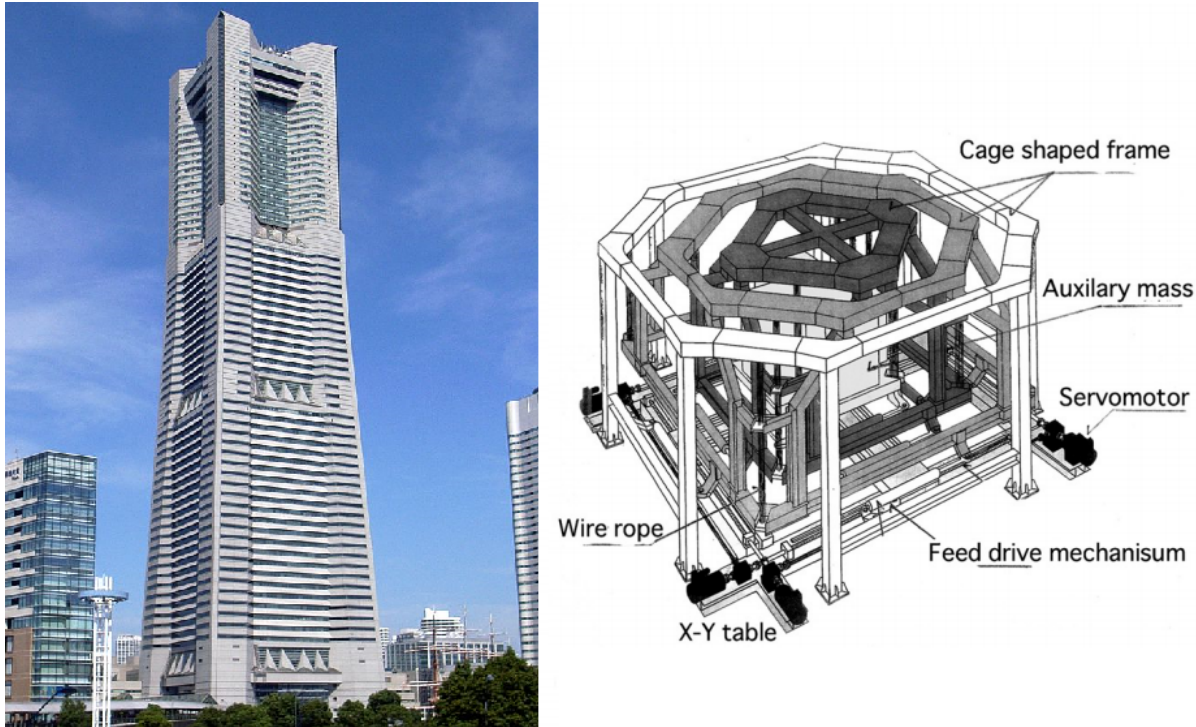
**Fig. 3-4.:** (Izquierda) Dispositivo háptico para microscopio AFM. (Derecha) Detalle de la estructura principal del nanomanipulador. Imágenes adaptadas de [Letier et al. \(2003\)](#).

Algunas aplicaciones de ingeniería civil como puentes suspendidos o puentes colgantes, torres estructurales, grandes superficies como techos de estadios, son generalmente estructuras atadas con cables para soportar las cargas. Estas estructuras son muy flexibles y sensibles a vientos y vibraciones inducidas. En estos casos se usan los llamados “Tendones Activos”, los cuales se presentan en la Figura 3-5, que ejemplifica una sección de un puente en construcción, donde se tienen dos plataformas y una columna central.



**Fig. 3-5.:** Configuración de un experimento de vibración de puentes a excitaciones armónicas. Imagen tomada de [Preumont \(2011\)](#).

Otra aplicación en ingeniería civil muy común en control de vibraciones de grandes estructuras delgadas, como los edificios, es la lucha contra las perturbaciones por viento o los movimientos sísmicos. Una solución práctica es la inclusión de amortiguadores dinámicos llamados *Mass Dampers* (Amortiguadores de masa). En la Figura 3-6 se muestra la edificación *Yokohama Landmark Tower*, la cual fue construida en 1993 y tiene un arreglo de estos actuadores en paralelo como sistema de control antisismos, también mostrados en la figura.



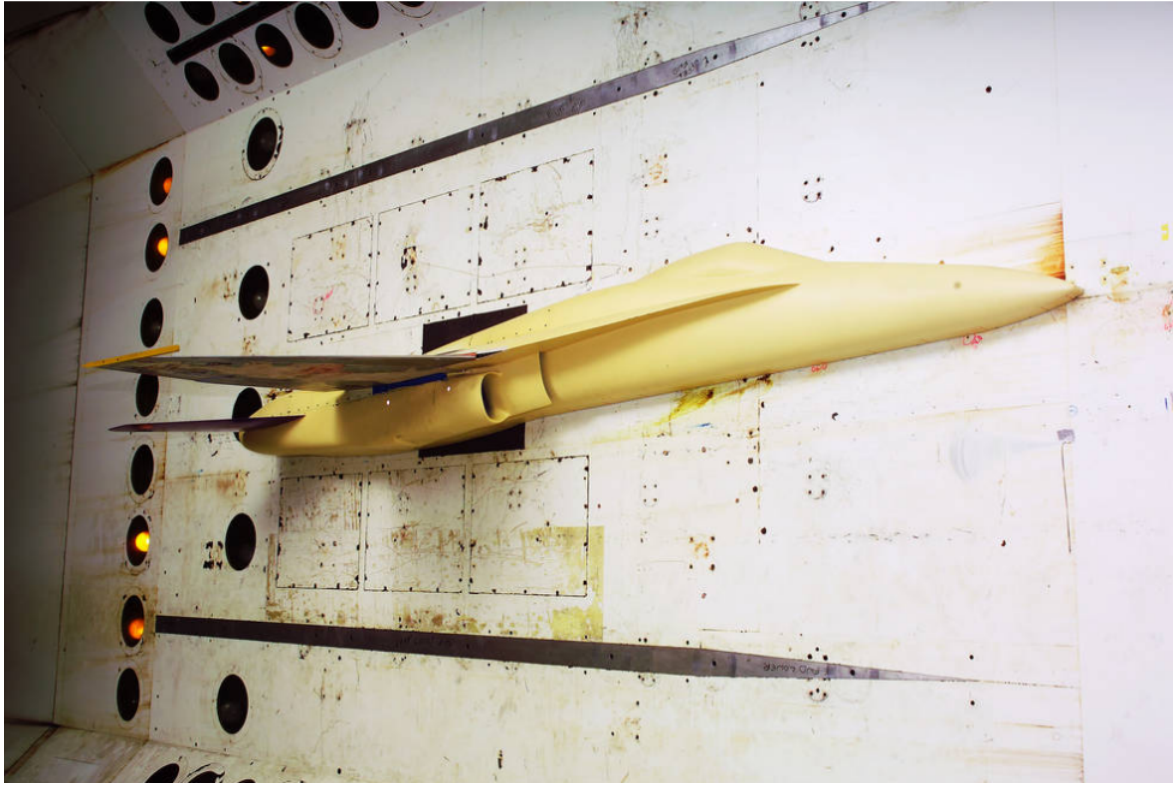
**Fig. 3-6.:** (Izquierda) *Yokohama Landmark Tower*, (Derecha) Amortiguador usado en la construcción del edificio como parte del control de vibraciones. Imagen adaptada de [Preumont and Seto \(2008\)](#).

El control de vibraciones en estructuras flexibles, como las hélices de un helicóptero o las alas de una aeronave, ha sido estudiado por la NASA en el *Transonic Dynamics Tunnel (TDT)*, instituto dedicado a resolver problemas aeroelásticos como las vibraciones inducidas por viento en diferentes estructuras. En la Figura 3-7 se muestra un modelo de investigación llamado HSR-RSM (*High-Speed Research - Rigid Semispan Model*) usado para obtener información estática y dinámica de una aeronave ([Cole et al., 2003](#)) sometida a pruebas aerodinámicas que generan vibración en la estructura de la misma.

### 3.4. Análisis Dinámico de Estructuras

Los procesos dinámicos en la naturaleza se pueden describir con modelos matemáticos que incluyen dependencias en los efectos acumulados (integración) de las variables del proceso, y dependencia en las tasa de cambio (diferenciación) de esas variables. Esas dos características determinan la dinámica de un sistema y generalmente pueden ser reducidas a una forma de ecuaciones diferenciales ([Goodwin et al., 2001](#)).

Estos modelos matemáticos se pueden usar para resolver problemas dinámicos estructurales, y se dividen en dos grandes tipologías ([Chakraverty, 2008](#)):



**Fig. 3-7.:** Modelo HSR-RSM montado en el laboratorio TDT. Imagen tomada de la galería de *Transonic Dynamics Tunnel*

- Sistemas discretos o *lumped*, con grados de libertad finitos.
- Sistemas continuos o distribuidos, con infinitos grados de libertad.

Los modelos matemáticos de los sistemas dinámicos discretos se describen con variables que solo dependen del tiempo, mientras los sistemas continuos son descritos con variables que dependen del tiempo y del espacio. De esta forma, las ecuaciones de movimiento de sistemas discretos son escritas con ecuaciones diferenciales ordinarias, mientras las ecuaciones de los sistemas continuos son gobernadas por ecuaciones diferenciales parciales ([Chakraverty, 2008](#)).

Normalmente, la representación de sistemas continuos infinito-dimensionales requiere un desarrollo matemático que resulta tan complejo, si no imposible, que simplemente no puede ser formulado ni resuelto de forma analítica o carece de una solución exacta ([Pierfort, 2001](#)). En estos casos, es necesario utilizar métodos de aproximación numérica como diferencias finitas, residuos ponderados, funciones de aproximación o el más conocido en la ingeniería moderna: el método de los elementos finitos ([Zienkiewicz et al., 2013](#)).

El primer paso en el diseño de sistemas de control es construir un modelo matemático

que describa la dinámica del sistema físico y sus perturbaciones (Alkhatib and Golnaraghi, 2003). Una respuesta estructural es dependiente del tiempo si sus perturbaciones son dependientes del tiempo, y se requiere un análisis dinámico si estas cargas son aplicadas a una frecuencia no menor a la frecuencia natural de vibración más baja del sistema o si son aplicadas de forma repentina (*e.g.* cargas impulsivas) (Cook et al., 2007). En esta sección se presentan dos técnicas de análisis dinámico de estructuras usando el método de los elementos finitos (MEF): análisis modal y análisis armónico.

### 3.4.1. Análisis Modal

Las frecuencias naturales de vibración de una estructura y las formas de vibrar de la misma deben ser datos conocidos en el análisis dinámico de estructuras. Este tipo de análisis se conoce como vibraciones libres no amortiguadas, en la cuales se analiza el comportamiento de una estructura que se ha desplazado desde su punto de equilibrio y se le deja vibrar libremente sin aplicar ninguna fuerza externa (Harris, 1996). Para calcular esas frecuencias, y las formas modales de vibración, se debe resolver un problema de valor y vector propio (Cook et al., 2007).

El desarrollo de un análisis modal con el MEF requiere el conocimiento de la matriz de rigidez y la matriz de masa. De la ecuación 2-46 presentada en la Sección 2.5, se extraen estas dos matrices para obtener la formulación de un problema modal, tal que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3-1)$$

Donde  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\phi}$  son respectivamente los grados de libertad de desplazamiento y voltaje,  $\mathbf{M}_{uu}$  y  $\mathbf{K}_{uu}$  son, respectivamente, las matrices de masa y de rigidez asociadas a la estructura elástica, mientras  $\mathbf{K}_{u\phi}$  y  $\mathbf{K}_{\phi u}$  son las matrices de acople piezoeléctrico, y  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  es la matriz de permitividad eléctrica.

Existen dos configuraciones posibles para resolver la ecuación 3-1, dependiendo de la configuración que adopte el material piezoeléctrico; circuito abierto o corto circuito. En la configuración de circuito abierto los electrodos del material están desconectados para permitir que se genere una diferencia de potencial entre ellos dependiendo de la deformación de estructura, así, las cargas eléctricas en el material se consideran nulas ( $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ ). La otra configuración posible es disponer el material piezoeléctrico en corto circuito. En esta configuración, los dos electrodos del material están aterrizados a tierra, por tanto el voltaje entre ellos es nulo ( $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ ) (Silveira, 2012).

Por simplicidad, la ecuación 3-1 se puede reescribir como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (3-2)$$

Donde  $K$  y  $M$  son respectivamente las matrices de masa y de rigidez; considerando grados de libertad tanto mecánicos como eléctricos, y  $v$  es el vector de grados de libertad. Considerando que la respuesta de los grados de libertad es oscilatoria; es decir, que se puede escribir como una solución particular de la ecuación diferencial tal que:

$$v = p_i \cdot e^{j\omega_i t} \quad (3-3)$$

Donde  $p_i$  es el vector de amplitud modal del modo  $i$ ,  $\omega_i$  es la frecuencia natural de vibración, y  $t$  es el tiempo. Reemplazando la ecuación 3-3 en 3-1, se obtiene una expresión que resulta ser un problema generalizado de vectores y valores propios de la forma:

$$(K - \omega_i^2 M) p_i e^{j\omega_i t} = 0 \quad (3-4)$$

En su expresión matricial:

$$K\Phi = M\Phi\Lambda \quad (3-5)$$

Donde  $\Phi$  y  $\Lambda$  son las matrices de vectores y valores propios, tales que (Bathe, 1996):

$$\Phi = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_i] \quad (3-6)$$

$$\Lambda = \text{diag}[\omega_1^2, \ \omega_2^2, \ \dots \ \omega_i^2] \quad (3-7)$$

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (3-8)$$

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (3-9)$$

### 3.4.2. Análisis Armónico

Las excitaciones armónicas pueden ser ocasionadas por máquinas rotativas adheridas a la estructura, y es necesario conocer la respuesta armónica de la misma ante esa excitación armónica. En este tipo de análisis, la respuesta transiente a la inicialización de aplicación de cargas es ignorada y tan solo se busca obtener la respuesta en estado estable; es decir, la respuesta que se repite en intervalos de tiempo iguales (Cook et al., 2007).

En el análisis armónico desarrollado con el MEF se requieren las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, además de las cargas armónicas a las que se someterá la estructura durante el análisis. Por tanto, la ecuación que describe un problema de análisis armónico expresada en términos de las matrices del MEF es:

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix} \quad (3-10)$$

En su forma simplificada:

$$M\ddot{v} + D\dot{v} + Kv = F \quad (3-11)$$

Al igual que en el análisis modal, nuevamente se considera como solución de la ecuación diferencial la forma armónica  $\mathbf{v} = \mathbf{p}_i \cdot e^{j\omega_i t}$ . Adicionalmente, se considerarán las fuerzas sobre la estructura también como cargas armónicas, de la forma  $\mathbf{F} = \mathbf{f}_h \cdot e^{j\omega_i t}$ , siendo  $\mathbf{f}_h$  la amplitud de carga armónica. Así, la solución armónica de la ecuación es:

$$\mathbf{v} = (-\omega_i^2 \mathbf{M} + j\omega_i \mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{f}_h \quad (3-12)$$

### 3.5. Modelos en Espacios de Estado

La ingeniería moderna afronta cada vez problemas más exigentes debido a la necesidad de ejecutar múltiples tareas complejas con alta precisión, lo cual demanda métodos de control eficientes. Los métodos de control se puede dividir en dos grandes categorías: Control clásico y Control moderno (Inman, 2006).

El control clásico se enfoca en analizar sistemas lineales e invariantes en el tiempo tipo SISO (*Single-Input Single-Output*) en el dominio de la frecuencia, mientras el control moderno puede ser aplicado a sistemas más complejos tipo MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*), no lineales y variantes en el tiempo, con un enfoque tanto en el dominio en el tiempo como en la frecuencia (Ogata, 2010).

En los problemas de control SISO, una representación del sistema es tan buena como cualquier otra. Sin embargo, cuando se tratan problemas complejos, especialmente los MIMO, es necesario usar modelos de representación con formatos especiales. Uno de los formatos más flexibles y útiles es llamado **Modelos de Espacios de Estado** (Goodwin et al., 2001). Los modelos de espacios de estado toman la forma de ecuaciones diferenciales de primer orden, lo cual facilita frecuentemente la solución numérica de varios problemas de control. Adicionalmente, la estructura de los modelos en espacios de estado usa teoría de matrices y vectores compatible con las descripciones comunes de los problemas de vibración en estructuras (Inman, 2006).

El análisis de sistemas dinámicos usando este modelo, involucra tres variables:

- Variables de entrada  $\mathbf{h}(t)$
- Variables de salida  $\mathbf{y}(t)$
- Variables de estado  $\mathbf{x}(t)$

Los modelos de espacios de estado usados en el control moderno están basados en el concepto de *estado*. Un *estado* es el conjunto más pequeño posible de variables  $\mathbf{x}(t)$ , llamadas *variables de estado*, que si son conocidas en un tiempo  $t = t_0$  y, además, son conocidas



las entradas  $\mathbf{h}(t)$  en un tiempo  $t \geq t_0$ , es posible determinar completamente el comportamiento dinámico del sistema para cualquier tiempo  $t \geq t_0$ , y cualquier salida del sistema  $\mathbf{y}(t)$  puede ser calculada en función de las *variables de estado*  $\mathbf{x}(t)$ , y de los valores presentes y futuros de las entradas  $\mathbf{h}(t)$ . Un espacio de estados es un espacio  $n$ -dimensional en el cual cada uno de sus ejes coordenados es una *variable de estado* (Ogata, 2010; Goodwin et al., 2001).

La forma general de un modelo de espacios de estado relaciona el cambio en las variables de estado en función de los valores pasados de esas variables y de las entradas del sistema. Por otra parte, también relaciona la salida del sistema con las variables de estado y las entradas del sistema. Para sistemas continuos, un modelo de espacios de estado tiene la forma (Goodwin et al., 2001):

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{h}(t), t) \quad (3-13)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{h}(t), t) \quad (3-14)$$

Donde  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  son funcionales que definen la dinámica del sistema en términos de las variables de estado (modelo del sistema) y los efectos de la entrada en el mismo (actuadores). En el caso de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, el modelo de espacios de estado tiene la forma (Goodwin et al., 2001):

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{h}(t) \quad (3-15)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{h}(t) \quad (3-16)$$

Donde  $\mathbf{A}$  es llamada matriz de estado,  $\mathbf{B}$  matriz de entradas,  $\mathbf{C}$  matriz de salidas, y  $\mathbf{D}$  matriz de transmisión directa. En la Figura 3-8 se muestra una representación en diagrama de bloques de las ecuaciones 3-15 y 3-16.

### 3.5.1. Representación de Estructuras Piezoeléctricas

En esta sección se presenta la formulación desarrollada en esta tesis de un modelo en espacios de estado para un problema de control activo de vibraciones que incluye estructuras elásticas y estructuras piezoeléctricas en configuración de sensores y actuadores como estructura de control. En el desarrollo se parte de un modelo físico obtenido a través del método de los elementos finitos y su representación es convertida a un modelo de espacios de estado. Finalmente, se presenta un procedimiento de reducción del modelo usando una transformación modal para posibilitar la implementación del modelo sobre una estrategia de control.

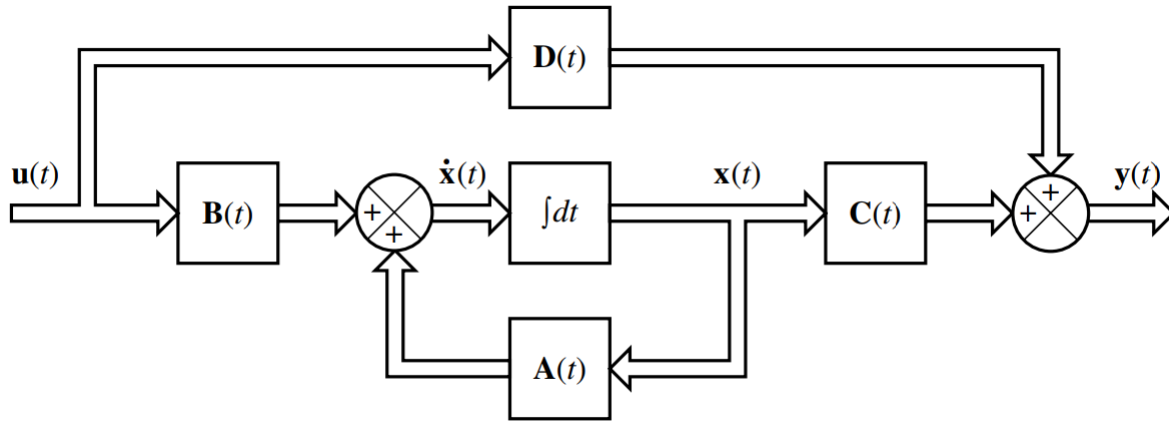


Fig. 3-8.: Diagrama de bloques de un sistema de control lineal continuo representado en espacios de estado. Figura tomada de Ogata (2010).

La expresión general que rige el comportamiento de los de sistemas dinámicos en su forma matricial modificada para el caso de estructuras activas usando sensores y actuadores piezoeléctricos fue presentada en la ecuación 2-46. Esa ecuación es:

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (3-17)$$

Donde  $\mathbf{u}$  es el vector desplazamientos,  $\boldsymbol{\phi}$  el vector de voltajes,  $\mathbf{f}$  el vector de fuerzas mecánicas,  $\mathbf{q}$  el vector de cargas eléctricas,  $M_{uu}$  la matriz de masa,  $D_{uu}$  la matriz de amortiguamiento mecánico,  $K_{uu}$  la matriz de rigidez mecánica,  $K_{u\phi}$  y  $K_{\phi u}$  las matrices de acople piezoeléctrico, y  $K_{\phi\phi}$  la matriz de capacitancia eléctrica.

Es necesario reconocer que algunos voltajes del sistema serán la referencia de tierra; es decir, algunos grados de libertad eléctricos tendrán valores de cero voltios ( $\phi_g = 0$ ). También existirán voltajes internos dentro del material piezoeléctrico cuyo valor depende del voltaje en los electrodos y de la deformación mecánica; por tanto, es posible escribir estos voltajes internos en términos de sus variables dependientes y a esta modificación de variables se le denomina condensación estática (Menuzzi et al., 2017).

Para realizar el proceso de eliminación de los voltajes en cero y el proceso de condensación estática, es necesario expandir la matriz de rigidez del sistema dinámico en términos de los voltajes de los electrodos tanto de sensores y actuadores como de los voltajes en los

electrodos de referencia y los voltajes internos. Expandiendo la ecuación 3-17:

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{us} & K_{ua} & K_{ug} & K_{ui} \\ K_{su} & K_{ss} & K_{sa} & K_{sg} & K_{si} \\ K_{au} & K_{as} & K_{aa} & K_{ag} & K_{ai} \\ K_{gu} & K_{gs} & K_{ga} & K_{gg} & K_{gi} \\ K_{iu} & K_{is} & K_{ia} & K_{ig} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi}_s \\ \boldsymbol{\phi}_a \\ \boldsymbol{\phi}_g \\ \boldsymbol{\phi}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q}_s \\ \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_g \\ \mathbf{q}_i \end{Bmatrix} \quad (3-18)$$

En esta expansión, los subíndices  $u, s, a, g, i$  se refieren respectivamente a los desplazamientos, voltajes del electrodo del sensor, voltajes del electrodo del actuador, voltajes de los electrodos a tierra (*grounded*) y voltajes internos de los materiales piezoeléctricos.

Ahora, todos los voltajes a tierra  $\boldsymbol{\phi}_g$  se eliminarán de la ecuación de balance dinámico. Esto implica que todas las filas y columnas relacionadas con los voltajes de los electrodos de referencia se eliminarán de las matrices en la ecuación 3-18, y los voltajes internos se escribirán en términos de los demás grados de libertad. Del sistema de ecuaciones 3-18 se puede expandir la última ecuación como:

$$K_{iu}\mathbf{u} + K_{is}\boldsymbol{\phi}_s + K_{ia}\boldsymbol{\phi}_a + K_{ii}\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{q}_i \quad (3-19)$$

Teniendo en cuenta que las cargas eléctricas internas del piezoeléctrico deben estar en equilibrio; es decir, se deben cancelar las cargas positivas con las negativas, se dice que las cargas eléctricas internas son nulas ( $\mathbf{q}_i = 0$ ) (Silveira, 2012). Despejando el voltaje interno  $\boldsymbol{\phi}_i$  de la ecuación anterior:

$$\boldsymbol{\phi}_i = K_{ii}^{-1}(-K_{iu}\mathbf{u} - K_{is}\boldsymbol{\phi}_s - K_{ia}\boldsymbol{\phi}_a) \quad (3-20)$$

Reemplazando la ecuación 3-20 en 3-18 y eliminando los voltajes de tierra:

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_s \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_s \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{uu} & G_{us} & G_{ua} \\ G_{su} & G_{ss} & G_{sa} \\ G_{au} & G_{as} & G_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi}_s \\ \boldsymbol{\phi}_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q}_s \\ \mathbf{q}_a \end{Bmatrix} \quad (3-21)$$

Donde las matrices  $\mathbf{G}$  son:

$$\begin{aligned} G_{uu} &= K_{uu} - K_{ui}K_{ii}^{-1}K_{iu} & G_{us} &= K_{us} - K_{ui}K_{ii}^{-1}K_{is} & G_{ua} &= K_{ua} - K_{ui}K_{ii}^{-1}K_{ia} \\ G_{su} &= K_{su} - K_{si}K_{ii}^{-1}K_{iu} & G_{ss} &= K_{ss} - K_{si}K_{ii}^{-1}K_{is} & G_{sa} &= K_{sa} - K_{si}K_{ii}^{-1}K_{ia} \\ G_{au} &= K_{au} - K_{ai}K_{ii}^{-1}K_{iu} & G_{as} &= K_{as} - K_{ai}K_{ii}^{-1}K_{is} & G_{aa} &= K_{aa} - K_{ai}K_{ii}^{-1}K_{ia} \end{aligned} \quad (3-22)$$

Una parte importante en el desarrollo de las ecuaciones de espacios de estado está en la simplificación de los términos para facilitar la implementación del controlador. Por esto, es importante notar que los vectores de voltaje  $\boldsymbol{\phi}_s$  y  $\boldsymbol{\phi}_a \in \mathbb{R}^{q \times 1}$ , donde  $q$  es el número de nodos en los electrodos del sensor o del actuador. Sin embargo, todos estos voltajes nodales tendrán el mismo valor ya que representan electrodos completos y eso permite

la reducción del sistema utilizando la técnica de acople de grados de libertad presentada en la sección 2.7.2. Para esto, los vectores de voltajes en los electrodos del sensor y del actuador se acoplarán de forma que:

$$\begin{aligned} \phi_s &= T_s \phi_{es} & q_{es} &= T_s^T q_s \\ \phi_a &= T_a \phi_{ea} & q_{ea} &= T_a^T q_a \end{aligned} \quad (3-23)$$

Donde  $\phi_{es}$  y  $q_{es}$  son el voltaje y la carga eléctrica en los electrodos del sensor,  $\phi_{ea}$  y  $q_{ea}$  son el voltaje y la carga eléctrica en los electrodos del actuador,  $T_s$  y  $T_a$  son los vectores de acople de grados de libertad tales que:

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & T_s & 0 \\ 0 & 0 & T_a \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

Donde  $T \in \mathbb{Z}^{n \times (m+s+a)}$  siendo  $n$  el número de grados de libertad totales del sistema,  $m$  el número de grados de libertad mecánicos,  $s$  y  $a$  el número de grados de libertad asociados respectivamente al electrodo del sensor y actuador. El término  $T$  es la matriz de acople construida de forma que se puede insertar la expresión general de movimiento de sistemas dinámicos para reducir el número de grados de libertad y mantener la simetría de las matrices:

$$T^T M T \ddot{v} + T^T D T \dot{v} + T^T K T v = T^T F \quad (3-25)$$

Siendo  $v$  el vector de grados de libertad mecánicos y eléctricos. Así, la ecuación 3-21 se puede reescribir acoplando los voltajes en cada electrodo como:

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi}_{es} \\ \ddot{\phi}_{ea} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{uu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi}_{es} \\ \dot{\phi}_{ea} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{uu} & H_{us} & H_{ua} \\ H_{su} & H_{ss} & H_{sa} \\ H_{au} & H_{as} & H_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi_{es} \\ \phi_{ea} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q_{es} \\ q_{ea} \end{Bmatrix} \quad (3-26)$$

Donde las sub-matrices  $H$  son:

$$\begin{aligned} H_{uu} &= G_{uu} & H_{us} &= G_{us} T_s & H_{ua} &= G_{ua} T_a \\ H_{su} &= T_s^T G_{su} & H_{ss} &= T_s^T G_{ss} T_s & H_{sa} &= T_s^T G_{sa} T_a \\ H_{au} &= T_a^T G_{au} & H_{as} &= T_a^T G_{as} T_s & H_{aa} &= T_a^T G_{aa} T_a \end{aligned} \quad (3-27)$$

El siguiente paso en la formulación de las matrices de espacios de estado es la escritura de la ecuación 3-26 en términos de las variables de estado  $x(t)$ , la acción de control  $h(t)$ , y la salida del sistema  $y(t)$ . Para esto, se despejará el voltaje en el sensor  $\phi_{es}$ . De 3-26:

$$H_{su} u + H_{ss} \phi_{es} + H_{sa} \phi_{ea} = q_{es} \quad (3-28)$$

En la configuración de sensores, los materiales piezoeléctricos no son excitados con cargas eléctricas en el electrodo, es decir  $q_{es} = 0$ , lo cual permite que se generen cargas

en la superficie del materiales debido a la deformación mecánica del material y se pueda medir el voltaje generado. Asumiendo esta configuración, el voltaje en el sensor es:

$$\phi_{es} = -\mathbf{H}_{ss}^{-1}(\mathbf{H}_{su}\mathbf{u} + \mathbf{H}_{sa}\phi_{ea}) \quad (3-29)$$

Al reemplazar la ecuación 3-29 en la primera línea de 3-26 se obtiene:

$$\mathbf{M}_{uu}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}_{uu}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_v\mathbf{u} + \mathbf{K}_w\phi_{ea} = \mathbf{f} \quad (3-30)$$

Donde:

$$\mathbf{K}_v = \mathbf{H}_{uu} - \mathbf{H}_{us}\mathbf{H}_{ss}^{-1}\mathbf{H}_{su} \quad (3-31)$$

$$\mathbf{K}_w = \mathbf{H}_{ua} - \mathbf{H}_{us}\mathbf{H}_{ss}^{-1}\mathbf{H}_{sa} \quad (3-32)$$

Ya que en este trabajo no se considera la presencia de actuadores mecánicos ni se considera que la estructura esté pre-estresada o con deformaciones mecánicas impuestas por fuerzas externas, es normal asumir que  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , ya que la excitación de la estructura se realiza en los grados de libertad de aceleración, velocidad y desplazamiento a través del actuador piezoeléctrico. Despejando  $\ddot{\mathbf{u}}$  de 3-30 y organizando los términos en forma de matrices de espacios de estado, se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{M}_{uu}^{-1}(\mathbf{D}_{uu}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_v\mathbf{u} + \mathbf{K}_w\phi_{ea}) \quad (3-33)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_{uu}^{-1}\mathbf{K}_v & -\mathbf{M}_{uu}^{-1}\mathbf{D}_{uu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_{uu}^{-1}\mathbf{K}_w \end{bmatrix} \phi_{ea} \quad (3-34)$$

Donde los desplazamientos  $\mathbf{u}$  y las velocidades  $\dot{\mathbf{u}}$  serán las variables de estado,  $\mathbf{I}$  la matriz identidad, y  $\mathbf{0}$  la matriz cero. El voltaje en el electrodo del sensor  $\phi_{es}$  será la salida del sistema  $\mathbf{y}$ , y la ecuación 3-29 se puede escribir en forma de matrices de espacio de estado como:

$$\phi_{es} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{ss}^{-1}\mathbf{H}_{su} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{ss}^{-1}\mathbf{H}_{sa} \end{bmatrix} \phi_{ea} \quad (3-35)$$

Las ecuaciones 3-34 y 3-35 son las ecuaciones de espacios de estado equivalentes a:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{h} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{h} \end{aligned} \quad (3-36)$$

Donde las variables de estado  $\mathbf{x}$ , la salida del sistema  $\mathbf{y}$ , la entrada del sistema o acción

de control  $\mathbf{h}$  y las matrices de estado son respectivamente:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (3-37)$$

$$\mathbf{y} = \phi_{es} \quad (3-38)$$

$$\mathbf{h} = \phi_{ea} \quad (3-39)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_{uu}^{-1} \mathbf{K}_v & -\mathbf{M}_{uu}^{-1} \mathbf{D}_{uu} \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_{uu}^{-1} \mathbf{K}_w \end{bmatrix} \quad (3-41)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{ss}^{-1} \mathbf{H}_{su} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3-42)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{ss}^{-1} \mathbf{H}_{sa} \end{bmatrix} \quad (3-43)$$

### 3.5.2. Modelos de Orden Reducido

De las ecuaciones 3-37 a 3-43 es posible ver que  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2n \times a}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{s \times 2n}$  y  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{s \times a}$  donde  $n$  es el número de grados de libertad del modelo de elementos finitos,  $a$  es el número de actuadores y  $s$  es el número de sensores. Esto significa que para los modelos comunes de elementos finitos, en los cuales se modelan las estructuras con miles o millones de grados de libertad, el ensamble de las ecuaciones en espacios de estado quedarán hasta del doble de tamaño. Una matriz de dimensión  $2n \times 2n$  puede representar un costo computacional que inhabilite el proceso de control, además que puede hacer irrealizable el control activo de estructuras en tiempo real. Es por esto que se hace necesaria la reducción de orden del modelo usando un cambio del sistema de coordenadas nodales para pasar a un sistema de coordenadas modales truncado. En esta transformación se define el desplazamiento modal  $\boldsymbol{\eta}$  como (Menuzzi et al., 2017):

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\eta} \quad (3-44)$$

Donde  $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es la matriz de vectores propios y  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  es el desplazamiento modal con  $n$  el número de grados de libertad totales y  $p$  el número de vectores propios. Este desplazamiento modal, siendo un vector ubicado en un espacio coordenado donde cada eje es la amplitud modal, representa el comportamiento de los  $p$  modos de vibración escogidos para modelar el sistema. El valor de  $p$  es escogido por el diseñador del sistema de control para reducir el costo computacional, aunque esta reducción pueda implicar problemas de sobre excitación en modos superiores al valor de  $p$  y contaminación en la señal del sensor por modos residuales (Alkhatib and Golnaraghi, 2003). Este problema se conoce como *spillover* y es trabajado ampliamente en la literatura (Preumont, 2011). Reemplazando la ecuación 3-44 en 3-30 y pre-multiplicando por  $\boldsymbol{\Phi}^T$ , se obtiene:

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M}_{uu} \boldsymbol{\Phi} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{D}_{uu} \boldsymbol{\Phi} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_v \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_w \phi_{ea} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{f} \quad (3-45)$$

$$\mathbf{M}_m \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{D}_m \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}_{vm} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{K}_{wm} \boldsymbol{\phi}_{ea} = \mathbf{f}_m \quad (3-46)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m &= \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M}_{uu} \boldsymbol{\Phi} \\ \mathbf{D}_m &= \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{D}_{uu} \boldsymbol{\Phi} \\ \mathbf{K}_{vm} &= \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_v \boldsymbol{\Phi} \\ \mathbf{K}_{wm} &= \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_w \\ \mathbf{f}_m &= \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{f} \end{aligned} \quad (3-47)$$

Despejando  $\ddot{\boldsymbol{\eta}}$  y reescribiendo los términos en forma de matrices de espacios de estado:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} = -\mathbf{M}_m^{-1} (\mathbf{D}_m \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}_{vm} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{K}_{wm} \boldsymbol{\phi}_{ea}) \quad (3-48)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{K}_{vm} & -\mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{K}_{wm} \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{ea} \quad (3-49)$$

De forma similar se puede reemplazar 3-44 en 3-35 para obtener:

$$\boldsymbol{\phi}_{es} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{ss}^{-1} \mathbf{H}_{su} \boldsymbol{\Phi} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{ss}^{-1} \mathbf{H}_{sa} \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{ea} \quad (3-50)$$

Las ecuaciones 3-48 y 3-50 son las nuevas ecuaciones en espacios de estado con la reducción modal en función del tamaño de la matriz de vectores propios  $\boldsymbol{\Phi}$ . Esta reducción modal genera un nuevo sistema de espacios de estado en el cual  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2p \times 2p}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2p \times a}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{s \times 2p}$  y  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{s \times a}$ , donde  $p$  es el número de modos normales de vibración calculados en el análisis modal,  $a$  es el número de actuadores, y  $s$  es el número de sensores. Este nuevo sistema de ecuaciones se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_m &= \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{h}_m \\ \mathbf{y}_m &= \mathbf{C}_m \mathbf{x}_m + \mathbf{D}_m \mathbf{h}_m \end{aligned} \quad (3-51)$$

Donde las variables de estado  $\mathbf{x}_m$ , la salida del sistema  $\mathbf{y}_m$ , la entrada del sistema o acción de control  $\mathbf{q}_m$  y las matrices de estado son:

$$\mathbf{x}_m = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{Bmatrix} \quad (3-52)$$

$$\mathbf{y}_m = \boldsymbol{\phi}_{es} \quad (3-53)$$

$$\mathbf{h}_m = \boldsymbol{\phi}_{ea} \quad (3-54)$$

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{K}_{vm} & -\mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \quad (3-55)$$

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{K}_{wm} \end{bmatrix} \quad (3-56)$$

$$\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{ss}^{-1} \mathbf{H}_{su} \boldsymbol{\Phi} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3-57)$$

$$\mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{ss}^{-1} \mathbf{H}_{sa} \end{bmatrix} \quad (3-58)$$

### 3.6. Controlabilidad y Observabilidad

En el diseño de sistemas de control activo no siempre es posible encontrar una ley de control que cause los efectos deseados. Esa inhabilidad de encontrar las leyes de control correctas plantea el concepto de *Controlabilidad y Observabilidad* (Inman, 2006). La controlabilidad mide la habilidad de una configuración particular de actuadores de controlar todos los estados de un sistema. De forma similar, la observabilidad mide la habilidad de una configuración particular de sensores de suministrar la información necesaria para estimar todos los estados del sistema (Preumont, 2011).

Se dice que un sistema es completamente controlable, si y solo si, todas las variables de estado pueden ser afectadas de alguna forma que puedan alcanzar un valor particular en un tiempo finito por una acción de control  $h(t)$  sin restricciones. De igual forma, se dice que un sistema es completamente observable, si y solo si, todas las variables de estado pueden ser determinadas a partir de la salida del sistema  $y(t)$  (Inman, 2006). La Figura 3-9 ejemplifica el concepto de controlabilidad, donde una fuerza de control  $u$  actuando sobre dos masas  $m_1$  y  $m_2$  puede tener o no tener control sobre todos los movimientos del sistemas.

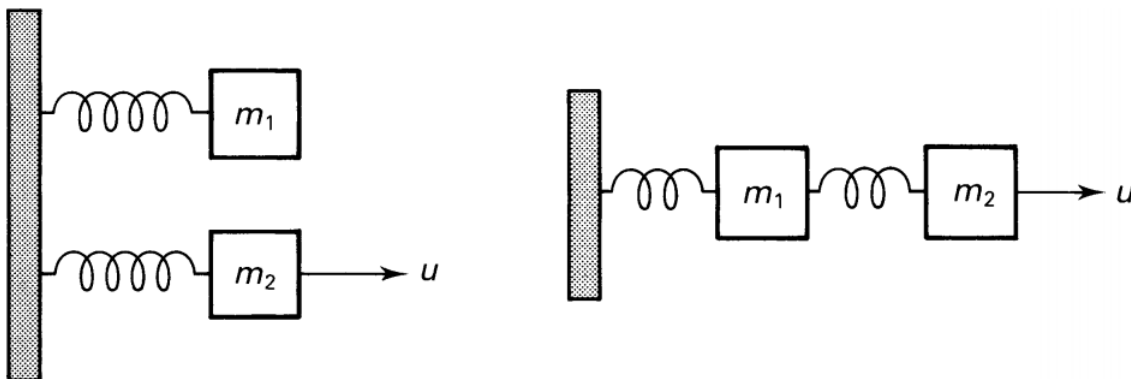


Fig. 3-9.: Ejemplo de un sistema mecánico incontrolable (izquierda) y de un sistema mecánico controlable (derecha). Figura tomada de Inman (2006).

La definición formal de controlabilidad y observabilidad para sistemas lineales e invariantes en el tiempo se hace sobre los modelos de representación en espacios de estado (Inman, 2013). Por tanto, dado el sistema presentado en las ecuaciones 3-15 y 3-16, se define una matriz de controlabilidad  $R \in \mathbb{R}^{2n \times 2nr}$  con  $2n$  siendo el número de variables de estado, y  $r$  el número de actuadores, tal que:

$$R = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{2n-1}B] \quad (3-59)$$

Si esta matriz es de rango completo, es decir de rango  $2n$ , se dice que el sistema es completamente controlable (Gawronski, 2004). Por otra parte, se define una matriz de



observabilidad  $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{2np \times 2n}$ :

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{CA} & \mathbf{CA}^2 & \dots & \mathbf{CA}^{2n-1} \end{bmatrix}^T \quad (3-60)$$

Donde  $p$  es el número de sensores. Si esta matriz es de rango completo, se dice que el sistema es completamente observable (Gawronski, 2004).

En problemas prácticos de ingeniería, esta información generalmente no es suficiente, ya que se necesita información más cuantitativa que simplemente afirmar o negar la existencia de controlabilidad y observabilidad. Determinar el rango de una matriz consiste en verificar si su determinante es cero, pero surge la pregunta de ¿cómo interpretar valores del determinante con valores demasiado pequeños, por ejemplo, en el orden de  $10^{-6}$ ?. Esta situación lleva al concepto de "Grado de Controlabilidad y Grado de Observabilidad" (Preumont, 2011). Una opción es calcular una norma matricial; sin embargo, una forma más apropiada usada en sistemas asintóticamente estables es la definición de *Gramiano de Controlabilidad y Gramiano de Observabilidad* (Inman, 2006).

### 3.6.1. Gramianos de Controlabilidad y Observabilidad

El concepto de generar un grado de controlabilidad y observabilidad de un sistema, que exprese esta información cuantitativamente y evite dificultades numéricas, nace de la idea de que los actuadores deberían tener la capacidad de afectar tanto como sea posible los estados del sistema; es decir, la energía transmitida o disipada de los actuadores a la estructura debe ser tan grande como sea posible. Para evaluar estas contribuciones de energía, se usa un análisis de covarianza (Hać and Liu, 1993). Así, considerando la respuesta de un sistema a un conjunto de actuadores individuales generando ruido blanco de intensidad unitaria, la matriz de covarianza es:

$$E[\mathbf{h}(t)\mathbf{h}^T(t)] = \mathbf{U}\delta(t - \tau) \quad (3-61)$$

Donde  $\mathbf{U}$  es la matriz de intensidad del ruido, que puede ser considerada una matriz identidad ( $\mathbf{U} = \mathbf{I}$ ) si todos los actuadores tienen los mismos requerimientos de potencia. Si el sistema es asintóticamente estable; es decir, que es un sistema disipativo y converge a un punto de equilibrio (Bang and Kwon, 2000), la respuesta estará limitada y la matriz de covarianza en estado estable es finita (Preumont, 2011), *i.e.*, la energía del sistema puede ser expresada como una suma de las contribuciones de cada estado. Así, para un sistema en estado estable, bajo excitación de ruido blanco, su comportamiento está descrito por la matriz de covarianza (Hać and Liu, 1993):

$$E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)] = \mathbf{W}_c \quad (3-62)$$

Donde  $W_c$  es definido como el *Gramiano de Controlabilidad*, y  $x(t)$  son las variables de estado. Con una filosofía similar, la relación señal a ruido de los sensores; en presencia de una señal de medición, debería ser tan grande como sea posible, y deberían garantizar que bajo cualquier condición de operación, la salida del sistema y el aporte de cada estado a la misma, sean tan grandes como sea posible. De acuerdo a esto, si el sistema es liberado con las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$ , con la acción de control  $u(t) = 0$ , para un tiempo  $t \geq 0$ , la energía de salida es (Hać and Liu, 1993):

$$\int_0^{\infty} y^T(t)y(t)dt = x_0^T W_o x_0 \quad (3-63)$$

Donde  $W_o$  es definido como el *Gramiano de Observabilidad*, y  $y(t)$  es la salida del sistema. Los gramianos de controlabilidad y de observabilidad para sistemas en estado estable están definidos como (Preumont, 2011):

$$W_c = \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (3-64)$$

$$W_o = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (3-65)$$

Para sistemas asintóticamente estables, estos gramianos son una solución de la ecuación de Lyapunov (Hać and Liu, 1993):

$$A W_c + W_c A^T + B B^T = 0 \quad (3-66)$$

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \quad (3-67)$$

Así, los gramianos de controlabilidad y observabilidad describen la relación de los estados con la acción de control y la salida del sistema. Es por esto que si el gramiano de controlabilidad es “grande”, los estados pueden ser excitados con una cantidad mínima de energía. De forma análoga, si el gramiano de observabilidad es “grande”, los estados reflejarán a la salida del sistema mayor energía (Hać and Liu, 1993). Este concepto de “grandeza” de los gramianos puede ser traducido matemáticamente como el aporte (suma) de cada estado desde la diagonal de la matriz del gramiano de controlabilidad y observabilidad; es decir, la traza de la matriz. En la sección 4.7 es presentada de manera formal la formulación de la optimización desarrollada en esta tesis a partir del concepto de los gramianos de controlabilidad y observabilidad.

### 3.7. Control Óptimo

En el problema de ubicar actuadores para el control activo de vibraciones se desea minimizar la energía de control requerida para llevar el sistema a un estado deseado  $x(t) = x_d$ , en cierto tiempo  $t$  (Hać and Liu, 1993). Esto se puede lograr considerando un

problema de optimización, aunque involucra la correcta elección de una función de costo o *índice de rendimiento* (Inman, 2006). Uno de los métodos de control moderno más usados, que calcula la ganancia de realimentación a través de la minimización de una función de costo, es llamado **Control Óptimo** (Alkhatib and Golnaraghi, 2003).

El objetivo de la teoría de control óptimo es determinar las señales de control que causen que un proceso cumpla con sus restricciones físicas y al mismo tiempo minimice o maximice un criterio de rendimiento (Kirk, 2012). En otras palabras, un problema de control óptimo calcula la acción de control  $\mathbf{h}(t)$ , tal que minimice un índice de rendimiento  $J(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t, \mathbf{h})$  sujeto a las ecuaciones 3-15 y 3-16. Este índice puede ser definido como un problema de mínima energía o como un problema de mínimos tiempos, en cualquier caso, la función  $J$  debe escribirse de forma que refleje el rendimiento deseado del sistema y que para cualquier elección de  $\mathbf{h}$ , la acción de control óptima  $\mathbf{h}^*$  cumpla la propiedad (Inman, 2006):

$$J(\mathbf{h}^*) < J(\mathbf{h}) \quad (3-68)$$

En la evaluación de ese índice de rendimiento, el diseñador del sistema de control debe seleccionar de forma apropiada la función que mida el rendimiento. Sin embargo, la selección de esta función no siempre se puede definir claramente, dadas las condiciones del problema. En estos casos, el diseñador deberá probar varias funciones de rendimiento (Kirk, 2012). Una función de rendimiento que tiene aplicación específica en el control activo de vibraciones es llamado un *Problema de Regulador Lineal*, en el cual, el problema de optimización consiste en llevar todos los estados a su posición de equilibrio (normalmente  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ), eliminando o minimizando las vibraciones en una estructura. El índice de rendimiento o función objetivo de este problema es (Inman, 2006):

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{h}^T \mathbf{R} \mathbf{h} dt \quad (3-69)$$

Donde  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  son matrices simétricas positivas definidas, llamadas *matrices de pesos*. Mientras más grandes sean los coeficientes de la matriz  $\mathbf{Q}$ , más énfasis estará puesto en llevar todos los estados  $\mathbf{x}$  a cero, ya que la forma cuadrática  $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$  es mínima cuando  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Mientras más grandes sean los coeficientes de la matriz  $\mathbf{R}$ , más énfasis estará puesto en reducir la cantidad de energía o magnitud del esfuerzo de control (Inman, 2006). Las matrices  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  debe ser escogidas de forma que un pequeño cambio en la salida del sistema no sea obtenido a costa de niveles físicamente irrazonables en la entrada (Alkhatib and Golnaraghi, 2003).

La solución analítica para este problema de optimización es (Kirk, 2012):

$$\mathbf{h}^*(t) = -\mathbf{G}(t)\mathbf{x}^*(t) \quad (3-70)$$

Donde  $G(t)$  es la matriz de ganancia de realimentación, definida como:

$$G(t) = R^{-1}B^T S(t) \quad (3-71)$$

y  $S(t)$  es una solución de la *ecuación de Riccati*, dada por:

$$Q - S(t)BR^{-1}B^T S(t) + A^T S(t) + S(t)A + \frac{dS(t)}{dt} = 0 \quad (3-72)$$

La solución para  $S(t)$  de la ecuación de Riccati resuelve el problema del Regulador Lineal, ya que hace que  $J(\mathbf{h})$  sea mínimo (Inman, 2006). La ecuación se puede simplificar cuando solo es de interés las vibraciones en estado estable, ya que el término  $dS(t)/dt$  se hace cero al no existir una dependencia del tiempo. Así, la nueva ecuación de Riccati será la ecuación algebraica no lineal:

$$Q - SBR^{-1}B^T S + A^T S + SA = 0 \quad (3-73)$$

Es interesante notar que la ecuación anterior es un caso especial de la ecuación de Lyapunov cuando  $A = A - BK$  con  $K = R^{-1}B^T S$ . Además, siendo el gramiano de controlabilidad ( $W_c$ ) una solución de la ecuación de Lyapunov, es a su vez la solución a un problema de control óptimo que consiste en la minimización de la energía de control, definido como (Hać and Liu, 1993):

$$\min \int_0^\tau \mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)dt \quad (3-74)$$

Sujeto a las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_\tau$ , para un tiempo  $\tau$ . Este es un problema lineal cuadrático de control óptimo, y su solución es (Hać and Liu, 1993):

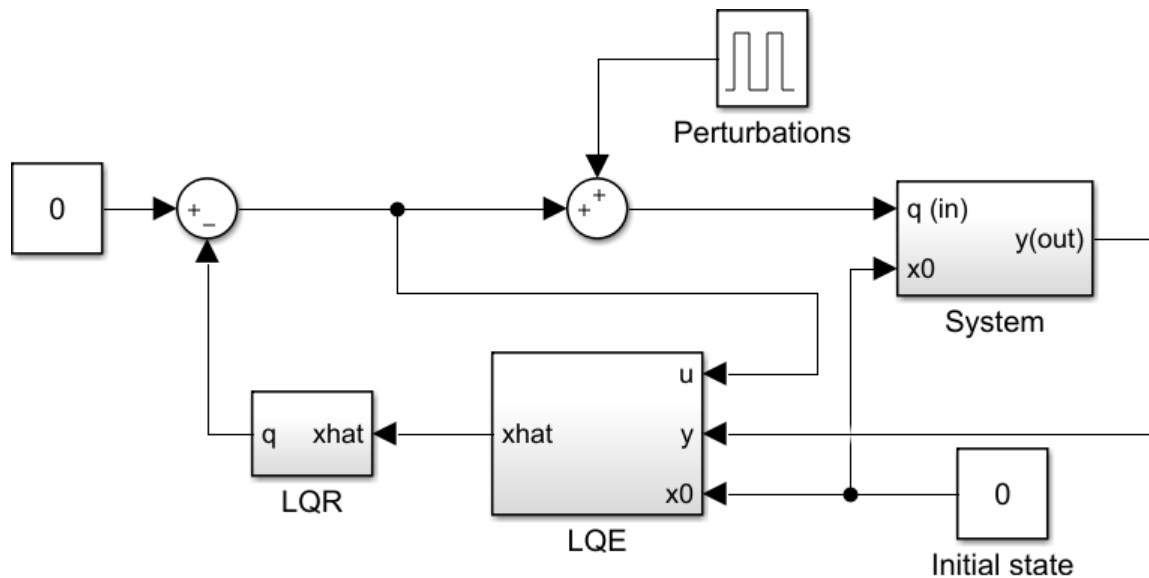
$$\mathbf{h}^*(t) = -B^T e^{A(\tau-t)} W_c^{-1} (e^{A\tau} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\tau) \quad (3-75)$$

Esto implica que la localización óptima de actuadores en el sistema, que minimiza el consumo de energía mientras cumple una ley de control, se da en cuanto la norma del gramiano de controlabilidad sea maximizada (Hać and Liu, 1993). De allí, que como problema de optimización para el control activo de vibraciones se pueda tomar este criterio para formular una función objetivo en términos de los gramianos de controlabilidad y observabilidad. El desarrollo del problema de optimización tratado en esta tesis es presentado en detalle en la sección 4.7.

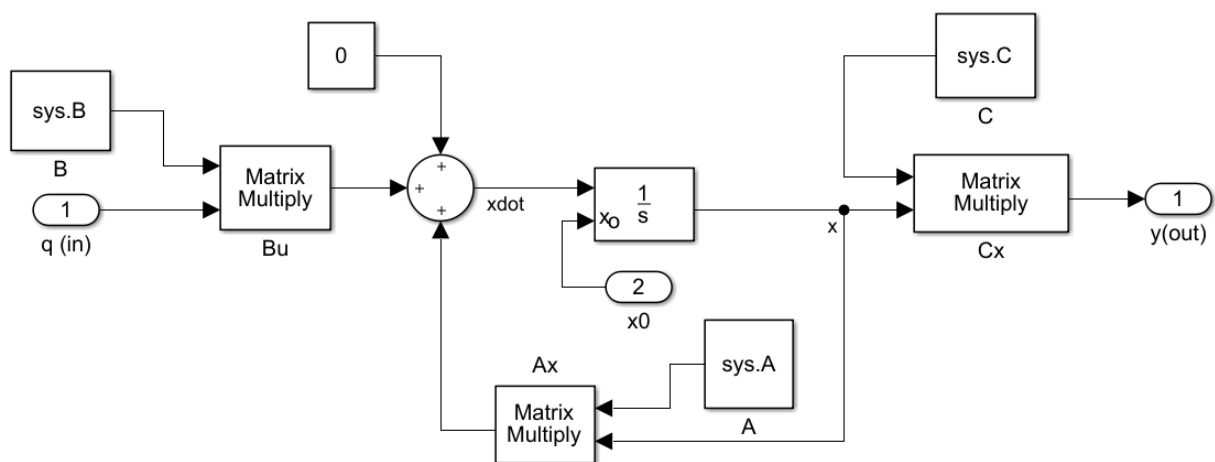
### 3.8. Implementación de un Controlador Óptimo

En la sección 3.7 se presentó el desarrollo teórico de control óptimo necesario en este trabajo para verificar el rendimiento de la estructura luego de encontrar una topología óptima del actuador y del sensor piezoeléctrico. En la figura 3-10 se presenta el diagrama

de bloques del controlador implementado en la plataforma *Simulink*. Este controlador está compuesto esencialmente por tres partes: una planta (modelo del sistema), un regulador (LQR) y un estimador de estados (LQE).



**Fig. 3-10.:** Regulador lineal cuadrático Gaussiano (LQG) implementado en este trabajo.



**Fig. 3-11.:** Representación del modelo en espacio de estados implementado en *Simulink*.

Internamente, las partes principales del controlador tienen una estructura que define el funcionamiento de cada bloque. En el caso del bloque llamado *System*, se modela el sistema a partir de las matrices de estado derivadas del modelo original de elementos finitos, usando las ecuaciones 3-52 a 3-58. El diagrama interno de este bloque se presenta en la Figura 3-11, donde se muestra un modelo de acuerdo al diagrama de un sistema de

control representado en espacios de estado, presentado en la Figura 3-8.

El siguiente bloque en el lazo de realimentación es el estimador de estados LQE. Este bloque es particularmente importante ya que no es posible medir directamente el desplazamiento modal y la velocidad modal, que son los dos parámetros que conforman el vector de estados  $x(t)$ . Así, las mediciones que captan los sensores serán interpretadas y convertidas a un vector de estados estimado  $\hat{x}(t)$  que provee una aproximación de las mediciones que no se pueden realizar (Inman, 2006). El estimador de estados implementado en este trabajo es presentado en la Figura 3-12.

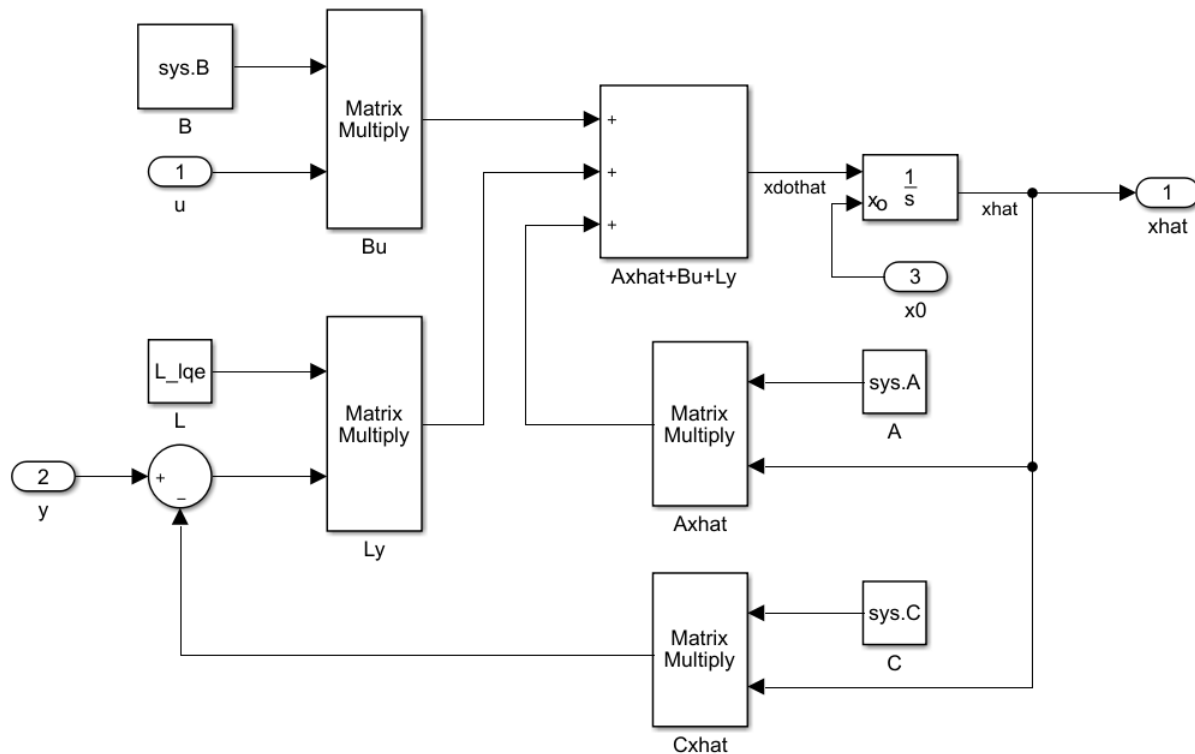


Fig. 3-12.: Diagrama de estimador de estados implementado en este trabajo.

Por último, el bloque final en el lazo de control es el regulador lineal-cuadrático LQR. En este bloque tan solo se aplica la matriz de ganancia al vector de estados para obtener la función de control que se debe aplicar al sistema. La matriz de ganancia es calculada de acuerdo de la ecuación 3-71 usando la librería de control que posee el *software* MATLAB y se multiplica por el vector de estados estimado proveniente del bloque del estimador de estados.

# 4. Optimización Topológica

## 4.1. Introducción

Los humanos buscamos constantemente formas más económicas y más eficientes para resolver problemas de diseño, modelado, fabricación, ensamble o mantenimiento de cualquier sistema. Esta búsqueda ha logrado en las últimas décadas popularizar y madurar los métodos de optimización, los cuales consisten en resolver el cómo hacer las cosas de la mejor manera posible y constituyen una herramienta crucial en la toma de decisiones en ingeniería ([Boom and Schutter, 2007](#)). Tan solo algunos ejemplos de aplicación de los métodos de optimización en ingeniería son:

- Estimación de parámetros de un sistema.
- Diseño de aeronaves y estructuras aeroespaciales.
- Trayectorias óptimas para vehículos espaciales o robots.
- Selección de condiciones de manufactura.
- Diseño de materiales compuestos.
- Diseño de redes eléctricas.
- Planificación de procesos industriales.
- Diseño de estructuras mecánicas y civiles.
- Diseño de sistemas de control.

En el campo de la optimización estructural, una técnica de diseño que se ha vuelto muy popular y se ha expandido rápidamente es llamada Optimización Topológica (OT), y ha obtenido especial atención por los significantes resultados que se pueden lograr en gran variedad aplicaciones, además que este método puede ser aplicado en problemas matemáticos, multi-físicos o de ciencias de la computación ([Rozvany and Lewiński, 2014](#)).

En este capítulo se presentará el Método de Optimización Topológica (MOT) como herramienta de diseño conceptual en la solución de problemas en ingeniería, enfocado a

la configuración óptima de transductores piezoeléctricos para el control de vibraciones. Inicialmente, se presenta una reseña histórica del surgimiento del método y las aplicaciones en la ingeniería moderna. Seguido de esto, se introduce formalmente en el contexto teórico del método y se exponen algunos problemas comunes del mismo. Finalmente, se presenta la implementación del método en el presente trabajo.

## 4.2. Reseña Histórica

La existencia de métodos de optimización se puede rastrear hasta los días de Newton, Lagrange, Cauchy, Leibnitz, Bernoulli, Euler y Weirstrass, quienes realizaron importantes contribuciones al cálculo variacional y aportaron herramientas importantes en la solución de problemas de minimización de funcionales. Sin embargo, solo hasta la aparición de computadoras de alto procesamiento fue posible implementar algoritmos de optimización a gran escala, como se conocen en la actualidad (Rao, 2009). El primer trabajo que trata las formas óptimas de elementos estructurales fue publicado por Galileo Galilei (1564 - 1642) en su libro *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze*, en el cual se realizan investigaciones sistemáticas en la fractura de cuerpos y se describe la influencia de su forma en su resistencia (Eschenauer and Olhoff, 2001).

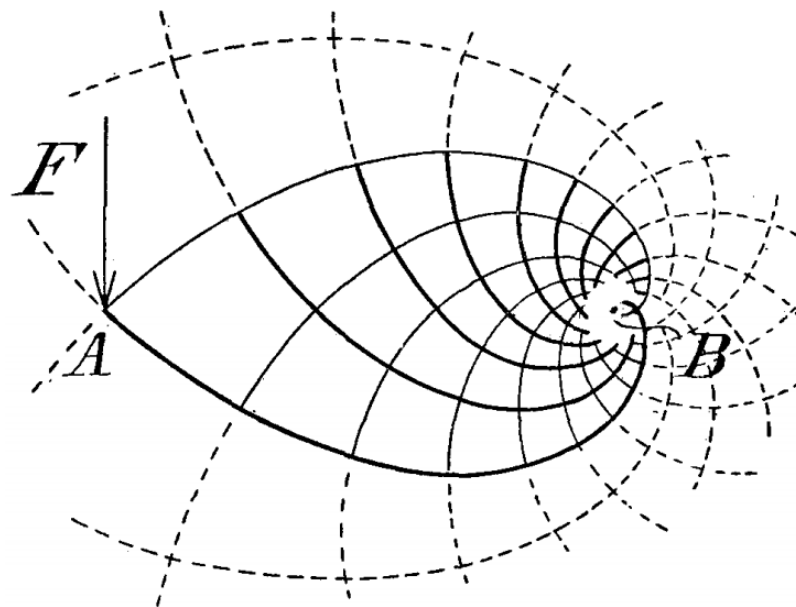


Fig. 4-1.: Estructura óptima para cargas simples. Imagen tomada de [Michell \(1904\)](#).

En 1904, el ingeniero australiano Anthony Michell, basado en los estudios realizados por Maxwell en 1872, publicó lo que hoy es considerado el trabajo fundamental de la optimización estructural y la base teórica detrás de la optimización topológica. En la Figura 4-1 se muestra una estructura optimizada en el trabajo de Michell, donde una fuerza sim-



ple  $F$  es aplicada en un punto  $A$ , mientras un momento  $F \times AB$  es generado en el punto  $B$ . Esta estructura está formada por espirales igualmente extendidos que mantienen deformaciones iguales y opuestas en todas las direcciones principales de deformación en todos los puntos de la estructura (Michell, 1904).

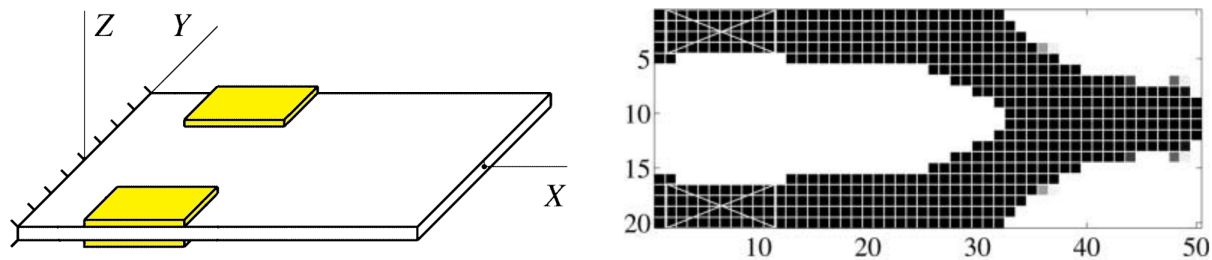
Michell definió las condiciones de optimalidad para estructuras sometidas a cargas y a partir de su trabajo muchos ingenieros y matemáticos trabajaron en el desarrollo teórico del método (Sigmund, 2000). Hasta finales del siglo, todos los esfuerzos en el desarrollo de la optimización estructural se enfocaban en métodos de optimización de tamaño y de forma. Sin embargo, estos métodos restringían el espacio de solución desde la propia definición de las formas o las funciones para optimizar, así que con base en estos trabajos, Bendsøe and Kikuchi (1988) desarrollaron un método de distribución microestructural de material entre material y vacío, que se estableció como un procedimiento computacional conocido hoy como el Método de Optimización Topológica (MOT). En 1990, Martin P. Bendsøe propone una estrategia de solución al problema de optimización bajo los términos de “Densidades artificiales”, que luego en 1992 se introduce como el modelo de densidades SIMP, por sus siglas en inglés *Solid Isotropic Microstructure with Penalization* (Rozvany, 2001).

La optimización topológica es una técnica relativamente nueva que está en continuo crecimiento y las aplicaciones del método han empezado a aparecer en diferentes campos de la ingeniería. La optimización topológica nace como un técnica de optimización estructural; sin embargo, debido a la maduración del método en el siglo XX se han incluido aplicaciones de combinación de estructuras, transferencia de calor, acústica, fluidos, aeroelasticidad, diseño de materiales, entre otros problemas multifísicos (Deaton and Grandhi, 2014).

La inclusión del método de optimización topológica a problemas con materiales piezoeléctricos llega a finales de los 90 con la publicación de los trabajos desarrollados por Silva et al. (1997) y Sigmund et al. (1998). A partir de ese punto, se han desarrollado de manera exponencial trabajos relacionados con el diseño de transductores piezoeléctricos usando el MOT para maximizar su rendimiento en diferentes aplicaciones, por ejemplo, diseño de motores (Silva, 2003), diseño de micro-herramientas (Carbonari et al., 2005), diseño de actuadores de placa y membrana (Kögl and Silva, 2005), actuadores con geometría no lineal (Cardoso and Fonseca, 2006), entre otros. En la actualidad, diferentes trabajos han aplicado el método de optimización topológica en el control activo de estructuras. Algunos de estos trabajos serán presentados en la siguiente sección.

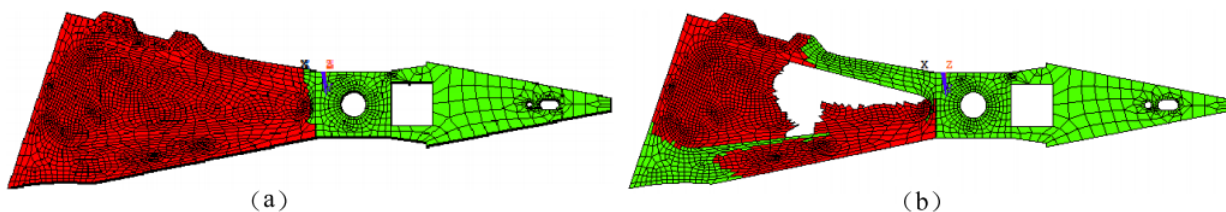
### 4.3. Aplicaciones en Control de Estructuras

El primer trabajo del último siglo que específicamente se refiere al control de vibraciones utilizando materiales piezoeléctricos usando el MOT fue publicado por [Zhu et al. \(2002\)](#), en el cual se realiza una optimización estructural de una placa empotrada, mientras considera la ubicación de actuadores piezoeléctricos unidos a la superficie de la estructura como se muestra en la Figura 4-2. Luego, [Kang and Tong \(2008\)](#) encuentra una topología óptima para actuadores piezoeléctricos en el control de forma de una placa sometida a deformación estática, realizando un acercamiento al problema de optimización topológica de control estructural dinámico.



**Fig. 4-2.:** (Izquierda) Placa dispuesta con transductores piezoeléctricos. (Derecha) Resultados de optimización topológica estructural de la placa. Imagen adaptada de [Zhu et al. \(2002\)](#).

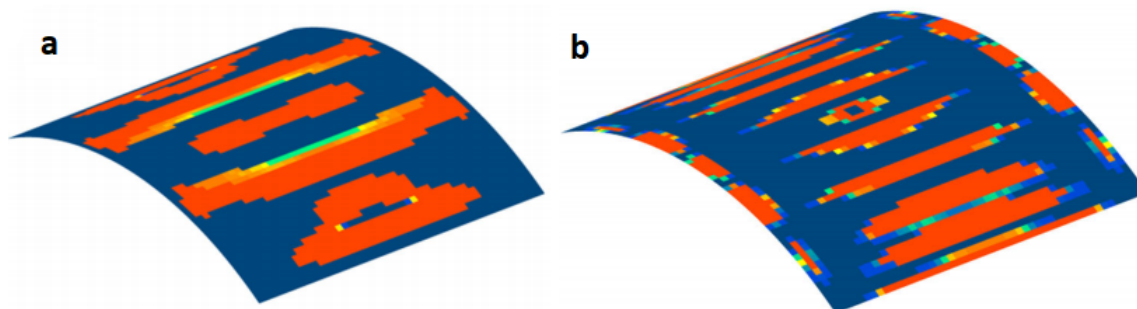
[Sun et al. \(2009\)](#) determina la topología óptima de un actuador dispuesto en el brazo de lectura en una unidad de disco duro (ver Figura 4-3), y los resultados de optimización fueron probados experimentalmente en un brazo de lectura real. Posteriormente, [Silveira \(2012\)](#) presenta la optimización topológica simultánea de una estructura y su distribución de actuadores piezoeléctricos para minimizar la vibración. Algunos meses más tarde, [Xu et al. \(2013\)](#) presenta un trabajo similar de optimización integrada de la topología estructural y el control óptimo a través de una técnica de reducción de las variables de diseño.



**Fig. 4-3.:** Optimización para dos casos de modos de vibración del cabezal actuador. (a) El objetivo es el segundo modo. (b) El objetivo es el tercer modo. El color verde representa la estructura, el color rojo es el material PZT. Imagen tomada de [Sun et al. \(2009\)](#).

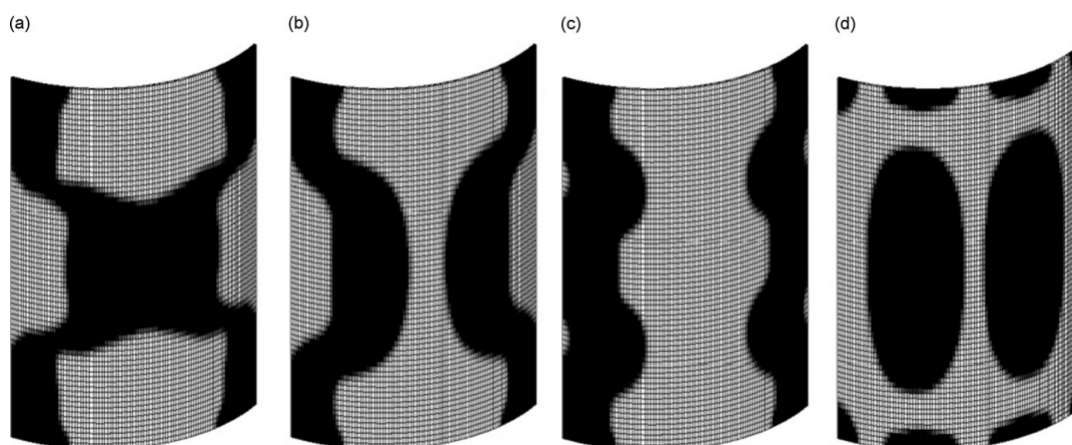
Otros trabajos relacionados al control estructural usando materiales piezoeléctricos y el MOT incluyen la minimización de la radiación sonora en estructuras tipo *shell* usando

capas de material para amortiguamiento (Zhang and Kang, 2013), u optimizando el perfil de polarización de un transductores piezoeléctricos simétricamente colocados (Zhang et al., 2014) y la consideración de respuestas dinámicas transientes en la solución del problema de optimización (Zhang and Kang, 2014b). En la Figura 4-4 se muestran algunos de los resultados de optimización de este trabajo.



**Fig. 4-4.:** Distribución óptima del electrodo piezoeléctrico con objetivo: (a) minimización de radiación sonora, (b) minimización de rigidez estructural dinámica. Imagen adaptada de Zhang and Kang (2014a).

De forma similar, Kim et al. (2013) comparan el amortiguamiento modal obtenido con tres métodos de diseño usando materiales visco-elásticos distribuidos sobre una placa. Los métodos usados son: formas modales, distribución de energía de deformación, y optimización topológica. De estos tres métodos, el método de optimización topológica fue quien mostró rendimiento de control superior en todos los casos estudiados. Algunos de los resultados de distribución de material con optimización topológica encontrados en este trabajo son presentados en la Figura 4-5.



**Fig. 4-5.:** Topologías óptimas de distribución de material visco-elástico para los primeros cuatro modos de vibración, presentados en orden ascendente de izquierda a derecha. Imagen adaptada de Kim et al. (2013).

También se han considerado los efectos de modos residuales (*spillover*) en el modelo de control (Gonçalves et al., 2017), utilizando el gramiano de controlabilidad en la función objetivo del problema de optimización de distribución de actuadores piezoeléctricos embebidos a la estructura (Gonçalves, 2015), y usando el gramiano de observabilidad en la función objetivo para el caso de la optimización topológica de sensores piezoeléctricos (Menuzzi et al., 2017). Finalmente, se considera en la formulación del problema de optimización un esquema de control óptimo de forma que se tiene en cuenta el consumo de energía y el rendimiento del sistema de control (Hu et al., 2018). El resultado de este último trabajo se muestra en la Figura 4-6.

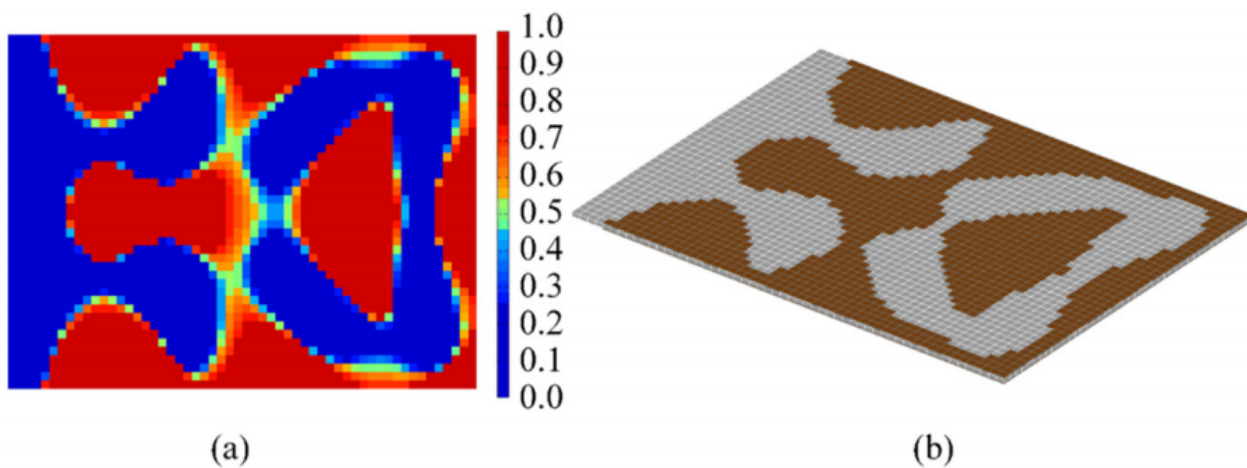


Fig. 4-6.: Distribución óptima de la capa del sensor y del actuador para una placa en *cantilever*. (a) Contorno de densidad de material y (b) distribución de material piezoeléctrico con elementos de baja densidad ocultos. Imagen tomada de Hu et al. (2018).

#### 4.4. Introducción a la Optimización Estructural

La optimización estructural reconoce la importancia de la minimización del peso en las estructuras mientras se pueda maximizar su rendimiento o reducir su costo. Esto fue reconocido inicialmente por la industria aeroespacial y transitoriamente reconocido en otras industrias como la automotriz, mecánica o civil (Haftka and Gürdal, 2012).

Inicialmente, la optimización topológica fue concebida como un técnica de diseño para resolver problemas de optimización estructural (Bendsøe and Kikuchi, 1988), pero recientemente ha sido aplicada a muchos otros problemas de diseño que pueden involucrar campos eléctricos, térmicos o mecánicos, llamados problemas multifísicos (Sigmund and Bendsøe, 2004). Algunos de estos problemas incluyen el trabajo con materiales contra intuitivos con coeficientes de Poisson negativos o con coeficientes de expansión tér-

mica negativos (Sigmund, 2000), optimización de estructuras compuestas de fibras laminadas (Ferreira et al., 2014), optimización de esfuerzo estructuras sometidas a cargas térmicas (Deaton and Grandhi, 2013), optimización en problemas de fluido-estructuras (Kreissl and Maute, 2012), materiales piezoeléctrico gradados para fabricación de micro-herramientas (Carbonari et al., 2009), optimización micro-estructural de materiales para maximizar compliancia acústica (Takezawa et al., 2018), diseño de micro-mecanismos de actuación electro-térmica (Ramírez Gil, 2013), optimización de instrumentos musicales (Berrío, 2017). Un ejemplo claro de un problema multi-físico es el modelamiento y optimización de estructuras piezoeléctricas como las tratadas en esta tesis, ya que estas involucran fenómenos mecánicos y eléctricos acoplados.

La optimización estructural puede ser dividida en cuatro categorías (Sigmund, 2000):

- Optimización paramétrica.
- Optimización de material.
- Optimización de forma.
- Optimización topológica.

Como ejemplo, en la Figura 4-7 se presenta una serie de estructuras simples que son optimizadas desde la perspectiva de las cuatro categorías previamente mencionadas. La diferencia principal de cómo se resuelve el problema de cada estructura está en cómo se definen los parámetros que pueden ser alterados durante la optimización. Estos parámetros son llamados *variables de diseño o de decisión* (Rao, 2009). En el caso de la optimización topológica realizada en esta tesis, las variables de diseño serán las pseudo-densidades de cada elemento finito que representa una fracción del material en un dominio de diseño, considerando que las propiedades del material serán modificadas por esta pseudo-densidad de acuerdo a un modelo de interpolación de propiedades, el cual se explicará en detalle en las secciones siguientes.

En la optimización paramétrica (Figura 4-7a) el diseño de la estructura es predefinido y las variables de diseño serán los parámetros de esa estructura. La optimización de materiales (Figura 4-7b) se enfoca en encontrar la composición u orientación de materiales que optimice la estructura. La optimización de forma (Figura 4-7c) busca mejorar la estructura a partir de la variación de funciones de contorno que definen la estructura. Por último, la optimización topológica (Figura 4-7d) combina todos los métodos anteriores ya que involucra determinar características como número, ubicación y forma de agujeros o contornos, así como la conectividad del dominio (Bendsøe and Sigmund, 2004).

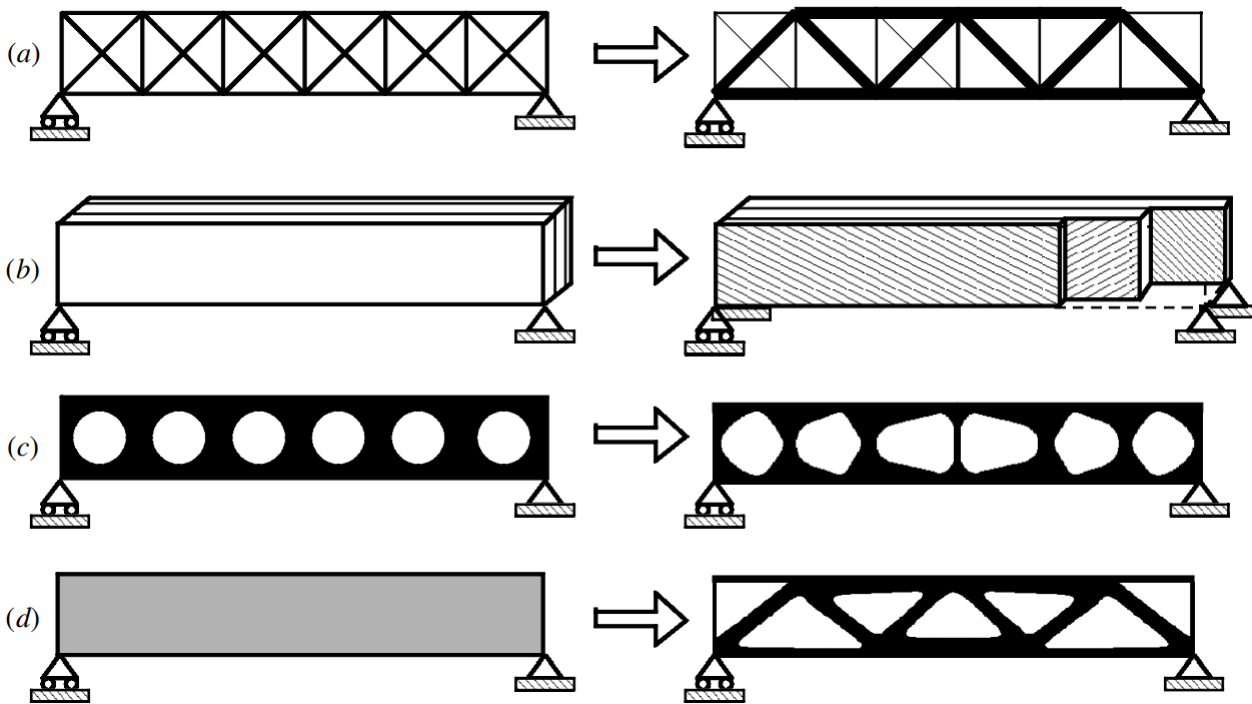


Fig. 4-7.: Categorías de la optimización estructural: (a) optimización paramétrica, (b) optimización de material, (c) optimización de forma, (d) Optimización topológica. A la izquierda se presentan las estructuras iniciales, a la derechas las estructuras optimizadas.

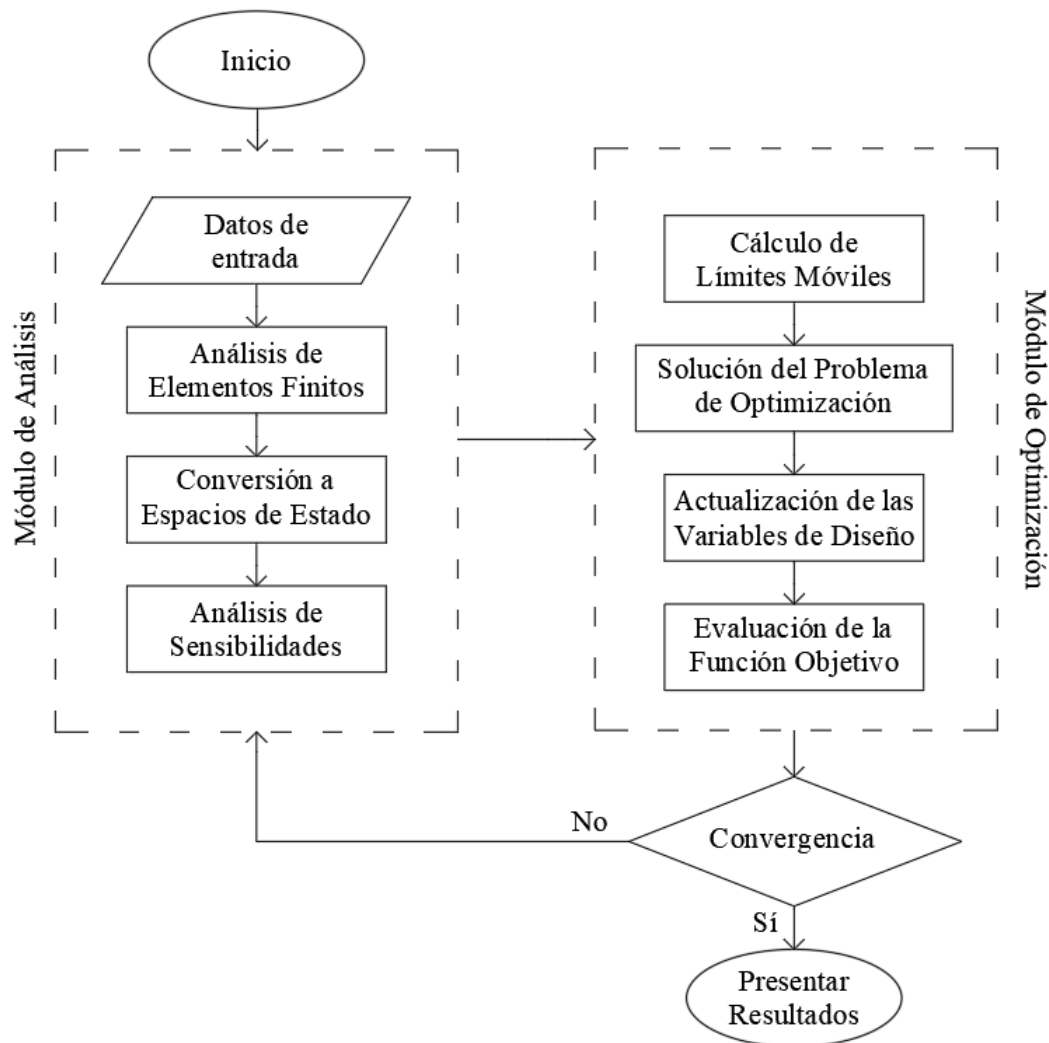
Figura tomada de [Sigmund \(2000\)](#).

## 4.5. Método de Optimización Topológica (MOT)

El MOT es un algoritmo de computación para diseñar topologías óptimas de estructuras y es comúnmente referido como *optimización generalizada de forma* ([Eschenauer and Olhoff, 2001](#)). El algoritmo tiene en esencia dos módulos: análisis y optimización. En el módulo de análisis se calcula la respuesta estructural y su sensibilidad al cambio de las variables de diseño. Generalmente se usa el Método de Elementos Finitos (MEF) para analizar las estructuras. En el módulo de optimización se realizan la actualización de las variables de diseño con base en la información obtenida del módulo de análisis, también se define la función objetivo y las restricciones impuestas al optimizador ([Montealegre, 2005](#)).

En la Figura 4-8 se presenta el algoritmo simplificado de optimización topológica desarrollado en esta tesis. Este algoritmo presenta los dos módulos de principales y los subprocesos que hacen parte del programa implementado en este trabajo. Inicialmente, el módulo de análisis recibe todos los datos de entrada, los cuales incluyen la malla de elementos finitos, el tipo de elemento finito, las restricciones del modelo, las condiciones iniciales y cargas, el sistema de unidades, las propiedades de los materiales, el número

de modos a calcular, los valores iniciales de las variables de diseño, los valores de las restricción de volumen del problema de optimización, los parámetros de configuración del filtro, los parámetros de convergencia de la optimización, los pesos de la función objetivo, los parámetros de los límites móviles y la configuración del cálculo de sensibilidad.



**Fig. 4-8.:** Algoritmo de Optimización Topológica Aplicado.

Una vez establecida la definición de parámetros, se genera el modelo de elementos finitos del sistema mecánico acoplado a los actuadores y sensores piezoeléctricos, para luego ser convertidos a un modelo de espacio de estados. Detalles de la conversión del modelo son presentado en la Sección 3.5.1. Finalmente, el análisis de sensibilidades determina la dirección de búsqueda para el optimizador a través del gradiente de la función objetivo y toda la información del módulo de análisis es entregada al módulo de optimización.

El módulo de optimización tiene una estructura común para problemas de Programa-

ción Lineal Secuencial, en el cual se determinan los límites móviles para cada variables de diseño, se soluciona el problema de optimización con todos los datos que provienen del módulo de análisis y se evalúa el rendimiento de la función objetivo con las nuevas variables de diseño obtenidas del optimizador. Cuando los criterios de convergencia se cumplen; ya sea por número de iteración máximo alcanzado o por variaciones pequeñas en los valores de la función objetivo, el programa se detiene un presenta los resultados de la topología final.

Para entender cómo es formulado correctamente el problema de optimización topológica, es necesario definir dos conceptos fundamentales del MOT:

- Dominio de diseño fijo.
- Modelo de interpolación de material.

#### 4.5.1. Dominio de Diseño Fijo

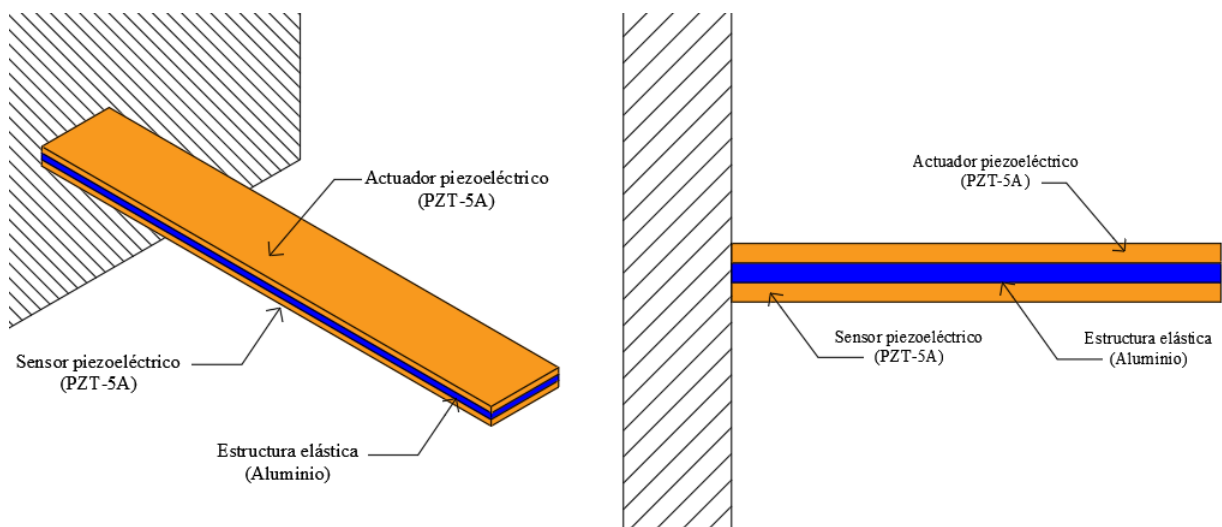
El primero paso del MOT es la definición del espacio que la estructura tendrá permitido ocupar; es decir, la definición del *Dominio de Diseño* y las restricciones o cargas que pueda tener el problema de optimización (Sigmund, 2000). Al igual que en la optimización paramétrica y a diferencia de la optimización de forma, en la optimización topológica el espacio destinado para encontrar una estructura óptima se define *a priori* y se mantiene *fijo* durante toda la optimización (Bendsøe and Sigmund, 2004).

En la Figura 4-7 se presenta un ejemplo sencillo para las categorías de optimización a partir de dominios de diseño iniciales diferentes, definidos de acuerdo al tipo de optimización. En la optimización de paramétrica el dominio de diseño se prescribe con los elementos a los cuales se les puede modificar sus parámetros; que serán las variables de diseño, y se define la cantidad de estos elementos y su conectividad. En la optimización de material se define el dominio de diseño como una composición predefinida de materiales, y las variables de diseño se refieren a la orientación o espesor de los materiales. En la optimización de forma se definen perfiles de forma o curvas paramétricas que determinan la forma inicial del dominio de diseño; en este caso, las variables de diseño se refieren a los parámetros que modifican esas curvas o formas originales. Por último, en la optimización topológica el dominio de diseño no está predefinido, tan solo se considera un estado inicial de densidades para cada elementos finito y se aplican las restricciones de carga y condiciones de frontera (Sigmund, 2000).

A lo largo de este trabajo se resuelve de forma simultánea dos problemas de optimización; por tanto, se definen dos dominios de diseño. El primer dominio será el espacio que puede ocupar el material piezoeléctrico en configuración de actuador, mientras el



segundo dominio será el espacio que ocupe el material piezoeléctrico en configuración de sensor. El dominio de diseño del actuador se ubicará como una capa de material en la parte superior del material no piezoeléctrico, mientras el dominio de diseño del sensor se define en la parte inferior. Así, la estructura completa estará compuesta por tres capas de material, como se muestra en la Figura 4-9. El espacio que ocupa el material elástico no se define como dominio de diseño, ya que representa la estructura a controlar. De esta forma, el problema de optimización global será la concatenación de ambos problemas de optimización.



**Fig. 4-9.:** Dominios de diseño fijos para las optimizaciones realizadas en esta tesis sobre un actuador y un sensor piezoeléctrico. (Izquierda) proyección isométrica de la estructura multicapa. (Derecha) vista lateral de la misma estructura detallando la composición de cada capa.

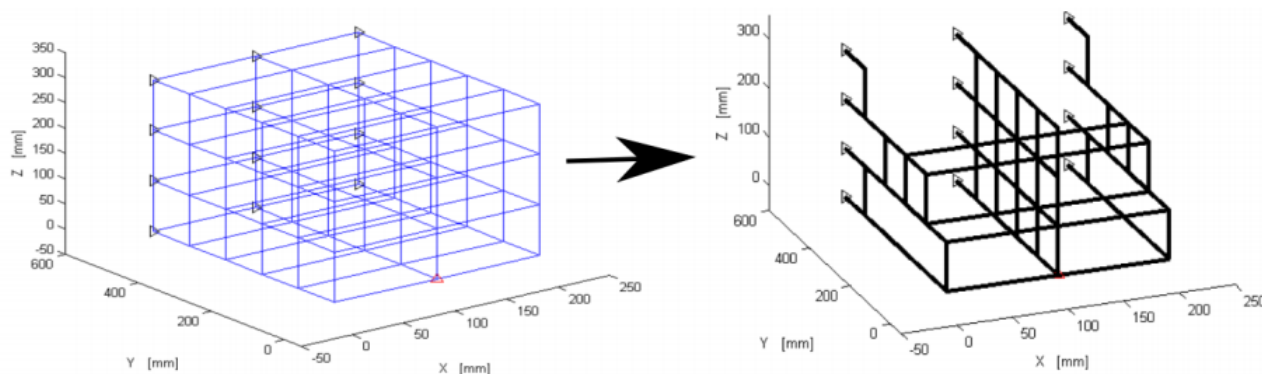
En la figura se presentan las tres capas de material que constituyen el problema de control de vibraciones estudiado en esta tesis. La capa del actuador y del sensor se escogen a modo de ejemplo como un material piezocerámico PZT-5A, ya que es un material común en aplicaciones de actuación y sensado con transductores piezoeléctricos, mientras la capa de material elástico se escoge como aluminio, ya que es un material ampliamente usando en la manufactura de estructuras en un amplio rango de aplicaciones.

#### 4.5.2. Modelos de Interpolación de Material

De acuerdo al tipo de estructura que se desee optimizar, existen dos clasificaciones de optimización topológica (Eschenauer and Olhoff, 2001):

- Optimización de estructuras discretas.
- Optimización de estructuras continuas.

La optimización de estructuras discretas consiste en determinar la mejor combinación de número, posición y conectividad de miembros estructurales. Un ejemplo de optimización de estructuras discretas es mostrado en la Figura 4-10, donde un estructura tipo pórtico tridimensional es optimizada dadas una condiciones de carga para la maximización de la rigidez estructural.



**Fig. 4-10.:** Optimización de estructuras discretas. (izquierda) Estructura tipo pórtico inicial. (Derecha) Estructura optimizada. Imágenes adaptadas de [Alzate Acevedo \(2016\)](#).

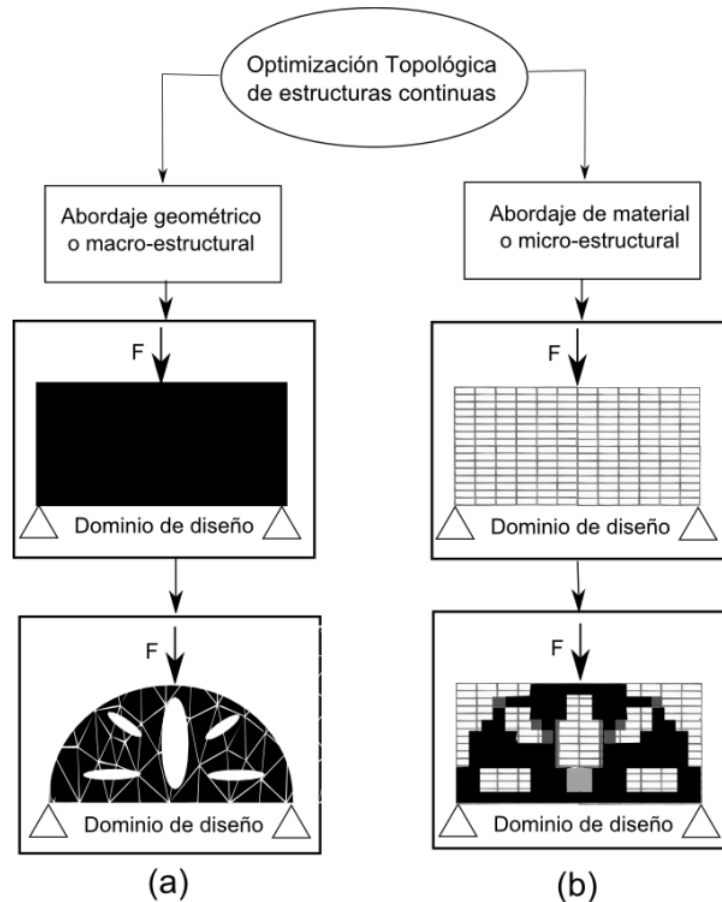
Por otra parte, la optimización de estructuras continuas puede abordarse como:

- Abordaje geométrico o macro-estructural.
- Abordaje de material o micro-estructural.

El abordaje geométrico o macro-estructural considera el material del dominio de diseño completamente sólido, cada iteración retira o adhiere material y puede insertar agujeros que son modificados secuencialmente con optimización de forma; por lo tanto, la malla debe cambiar a cada iteración ([Eschenauer and Olhoff, 2001](#)).

El abordaje de material o micro-estructural usa una discretización del dominio de diseño fija, ya que se asume que la cantidad de material cambia de acuerdo a un distribución micro-estructural en ese dominio. En este caso, la optimización topológica consiste en determinar cuáles micro-estructuras del medio continuo deben contener material o no, y típicamente esta distribución de material está determinada por variables de diseño que toman valores constantes por cada elemento finito de acuerdo a su micro-estructura. Este tipo de problemas de optimización son conocidos como problemas de variables discretas binarias y generalmente sufren de mal condicionamiento; es decir, carecen de solución y la topología obtenida es dependiente de la malla ([Eschenauer and Olhoff, 2001](#)).

En la Figura 4-11 se presenta de manera simplificada un diagrama de la optimización de estructuras continuas con el abordaje macro-estructural y micro-estructural.



**Fig. 4-11.:** Optimización topológica de estructuras continuas con un a) abordaje geométrico o macro-estructural y un b) abordaje de material o micro-estructural. Imagen tomada de [Berrío \(2017\)](#).

Tres formas comunes de resolver este tipo de problemas de optimización son:

- Utilizar un abordaje geométrico, como el método *Level-Set*.
- Utilizar métodos heurísticos o probabilísticos, como los algoritmos genéticos.
- Relajando el problema a través de **modelos de interpolación de material**.

Los abordajes geométricos y los métodos heurísticos o probabilísticos han sido ampliamente utilizados en la solución de problemas de optimización. Sin embargo, en la optimización topológica, la solución de problemas desde un abordaje de material o micro-estructural han sido resueltos comúnmente a través de la relajación del problema ([Sigmund and Maute, 2013](#)).

Se definen entonces los modelos de interpolación de material como una regularización que incluye restricciones a la formulación del problema e introducen las variables de

diseño como variables continuas (Eschenauer and Olhoff, 2001). Existen varios modelos de material en la literatura, sin embargo los dos modelos principales son:

- Modelos de material basados en Homogenización.
- Modelos de material basados en Densidades.

Bendsøe and Kikuchi (1988) introdujeron el método de homogenización y un año más tarde Bendsøe (1989) presenta uno de los métodos de densidad más comunes, llamado SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*). Luego, es introducida por Stolpe and Svanberg (2001) una propuesta alternativa del modelo de densidades llamada RAMP (*Rational Approximation of Material Properties*). El modelo de material basado en densidades es de más fácil implementación computacional que el modelo basado en homogenización ya que existe una variable de diseño por cada punto de discretización en el dominio y los valores de las propiedades se obtienen de forma directa (Silveira, 2012). Este trabajo se desarrolla con el modelo de interpolación de material basado en densidades SIMP.

### 4.5.3. Modelo de Material SIMP

El modelo SIMP es una ley matemática, también llamada *Ley de Potencias*, que define el material en cada punto del dominio de diseño fijo (Silveira, 2012). En este método, un arreglo de variables continuas  $\rho(x)$  tal que  $0 < \rho_i(x) < 1$  representa la pseudo-densidad del material asignada a cada elemento finito  $i$ , a la cual se le aplica un factor de interpolación  $p$  en las propiedades del material. Las relaciones entre esa densidad de material, el tensor de propiedades  $E$  en equilibrio, y el volumen  $V$  de la estructura, se definen como (Bendsøe and Sigmund, 1999):

$$E_i(x) = \rho_i(x)^p E^0 \quad (4-1)$$

$$V = \int_{\Omega} \rho(x) dx \quad (4-2)$$

Donde  $E^0$  es una propiedad de material dada,  $p$  es el factor de penalización tal que  $p > 1$ ,  $x$  es un punto en el dominio de diseño fijo  $\Omega$ . La Figura 4-12 muestra la relación de las propiedades del material  $E/E^0$  en función de la pseudo-densidad  $\rho_i(x)$  para diferentes valores de penalización  $p$ . Cada curva de la gráfica representan el comportamiento de las variables de diseño y su influencia sobre los valores que toman las propiedades micro-estructurales del material de acuerdo a un factor de penalización  $p$ . Claramente se ilustra que entre más grande se escoja el valor del factor de penalización, más se forzaría el problema de optimización a encontrar soluciones de densidad  $\rho_i = 0$  (material vacío) y  $\rho_i = 1$  (material sólido).

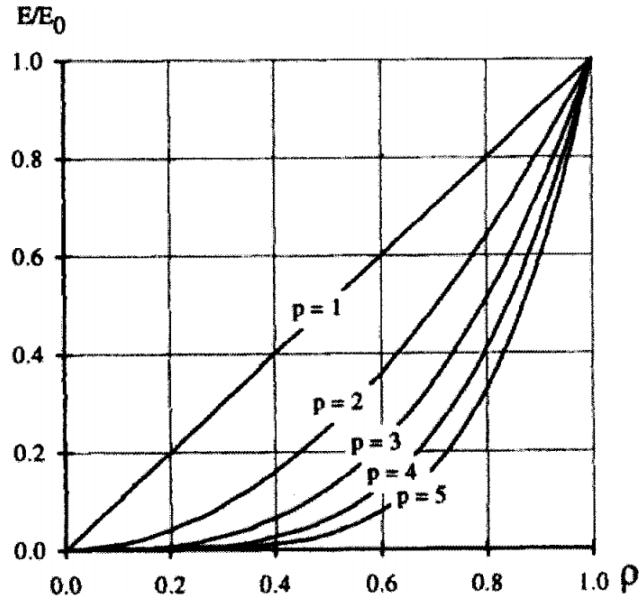


Fig. 4-12.: Relación de propiedad del material  $E/E^0$  vs. densidad en el modelo de material SIMP  $\rho$ . Figura tomada de [Eschenauer and Olhoff \(2001\)](#).

Ya que es necesario interpolar las propiedades de los materiales como funciones de densidad y en los últimos años se ha hecho popular el método SIMP ([Rozvany and Lewiński, 2014](#)), en los problemas que involucren materiales piezoeléctricos, es necesario aplicar el modelo de material SIMP a cuatro propiedades: Elasticidad, Piezoelectricidad, Permitividad, y Densidad. Debido a que los materiales piezoeléctricos poseen estas cuatro propiedades, se designan cuatro diferentes factores de penalización ( $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ , y  $p_4$ ), uno para cada propiedad del material.

En las ecuaciones 4-3 a 4-6 se muestra la implementación del modelo de material aplicado al problema de optimización de estructuras piezoeléctricas tratado en esta tesis.

$$\bar{c} = \rho_i^{p_1} c^E \quad (4-3)$$

$$\bar{e} = \rho_i^{p_2} e \quad (4-4)$$

$$\bar{\epsilon} = \rho_i^{p_3} \epsilon^S \quad (4-5)$$

$$\bar{\rho} = \rho_i^{p_4} \rho_{mat} \quad (4-6)$$

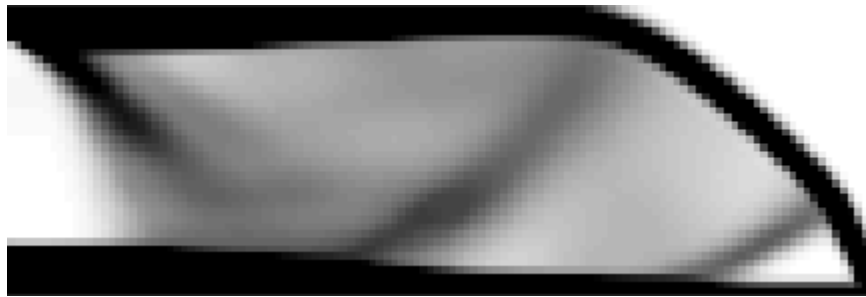
Donde  $\rho_i$  es la pseudo-densidad del elemento finito  $i$  penalizada por un factor de interpolación  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ , o  $p_4$  respectivamente para las propiedades de elasticidad a campo eléctrico constante  $c^E$ , piezoelectricidad  $e$ , permitividad a deformación constante  $\epsilon^S$ , y densidad de volumen del material  $\rho_{mat}$ . Las propiedades interpoladas con el modelo de material se representan con barra superior (e.g. elasticidad interpolada  $\bar{c}$ ).

## 4.6. Problemas del MOT

La implementación del MOT involucra una serie de problemas derivados de la naturaleza del problema, la formulación matemática o el condicionamiento numérico. Entre los problemas más comunes se pueden encontrar ([Alzate Acevedo, 2016](#); [Berrío, 2017](#)):

- Escalas de grises
- Tableros de ajedrez
- Dependencia de malla
- Múltiples soluciones

La escala de grises es un problema que tiene sus raíces en el modelo de interpolación de material, ya que la relajación del problema de optimización permite a la pseudo-densidad tomar valores continuos entre 0 y 1, lo que inmediatamente permite la aparición de materiales con propiedades intermedias, que representan una solución matemática al problema, pero no tienen interpretación física o su manufactura es demasiado compleja.



**Fig. 4-13.:** Ejemplo de estructura con problemas de escala de grises. Imagen obtenida del código de 99 líneas de [Sigmund \(2001\)](#).

En la Figura 4-13 se presenta un ejemplo de una estructura que no está completamente definida, ya que algunas zonas del dominio de diseño tiene material sólido (color negro,  $\rho \approx 1$ ), otras zonas tienen material vacío (color blanco,  $\rho \approx 0$ ), y algunas zonas tienen material de propiedad intermedia (color gris,  $0 < \rho < 1$ ). Este problema generalmente ocurre por la falta de restricciones o definición de condiciones del modelo y para afrontarlo se pueden incrementar los factores de penalización del modelo de interpolación, aunque esto generaría nuevamente inestabilidad numérica al ser un problema cada vez más binario. También es posible utilizar filtros en las variables de diseño o en las sensibilidades ([Bendsøe and Sigmund, 2004](#)), los cuales se describirán en detalle en secciones siguientes.

El problema de tablero de ajedrez describe una estructura que posee elementos sólidos y elementos vacíos distribuidos alternadamente, lo que se asemeja a un tablero de ajedrez. Este tipo de problemas se deben a modelados numéricos deficientes, presentan una



Fig. 4-14.: Estructura con problema de tablero de ajedrez. Imagen tomada de [Sigmund and Petersson \(1998\)](#).

rigidez estructural mayor aunque artificial ([Sigmund and Petersson, 1998](#)). Un ejemplo de este tipo de problemas se presenta en la Figura 4-14 en la cual una estructura simple optimizada con MOT evidencia zonas de distribución de material en forma de tablero de ajedrez en los costados izquierdo y derecho del dominio de diseño. Nuevamente, este tipo de problemas puede ser eliminado con el uso de filtros de densidades o sensibilidades.

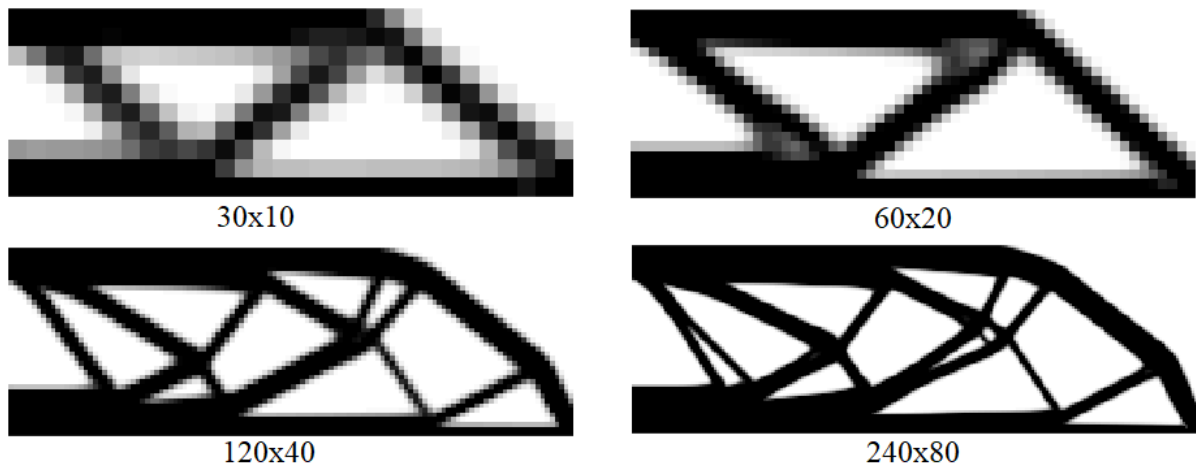


Fig. 4-15.: Ejemplificación de la dependencia de malla para cuatro casos sin uso de filtro: 300 elementos, 1200 elementos, 4800 elementos y 19200 elementos. Imagen obtenida del código de 99 líneas de [Sigmund \(2001\)](#).

La dependencia de malla es ejemplificada en la Figura 4-15. Como su nombre lo indica, de acuerdo a la discretización de la malla la solución del problema de optimización puede cambiar. Dado que los problemas de optimización topológica no están completamente definidos por el fenómeno de no tener un espacio solución completamente cerrado; es decir, carecen de solución o no tienen convergencia, es común encontrar dependencia de la solución en la discretización de la malla. Una solución a este problema es regularizar el problema, relajando el espacio solución a variables de diseño continuas ([Eschenauer and Olhoff, 2001](#)).

Esto también sugiere la aparición de otro de los problemas comunes; la posibilidad de encontrar múltiples soluciones, algo que además de la dependencia de la malla pueden

tener relación con la no convexidad de los problemas de optimización; es decir, la existencia de mínimos locales. Para solucionar estos problemas es necesaria la correcta definición del problema de optimización, incluyendo las restricciones suficientes, además del uso de filtros (Osanov and Guest, 2016).

En cualquiera de los casos presentados como problemas comunes, es posible solucionarlos incluyendo filtros de sensibilidad (Lazarov and Sigmund, 2011), controles de gradiente (Borrvall, 2001), filtros de densidad (Bruns and Tortorelli, 2001), penalizaciones regularizadas (Borrvall and Petersson, 2001), control de perímetros (Ambrosio and Buttazzo, 1993), optimización robusta (Schevenels et al., 2011), o filtros de proyección (Xu et al., 2010; Guest et al., 2004). En la siguiente sección se hará una breve introducción al uso de filtros en problemas de optimización topológica.

#### 4.6.1. Filtros en el MOT

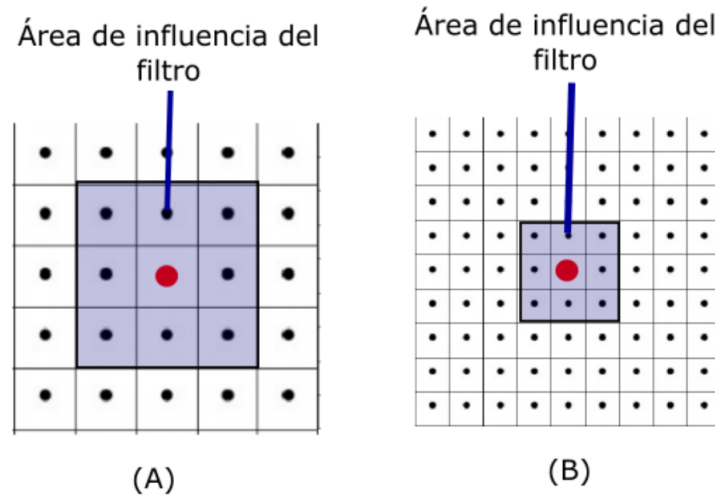
Afrontar los problemas de optimización topológica, introduciendo restricciones implícitas en la formulación del problema, limita la solución del diseño óptimo. Una alternativa es limitar directamente las variables de diseño o las sensibilidades con funciones que ponderan el espacio de solución (Bendsøe and Sigmund, 2004). Los filtros pueden ser entendidos como operadores matemáticos que modifican un parámetro deseado para suavizar su comportamiento con funciones de regularización (Bourdin, 2001).

Dependiendo de la definición espacial o la variable de regularización, los filtros se pueden clasificar en (Bendsøe and Sigmund, 2004; Cardoso and Fonseca, 2003):

- Filtros de vecindad fija
- Filtros espaciales
- Filtros de sensibilidades
- Filtros de densidades

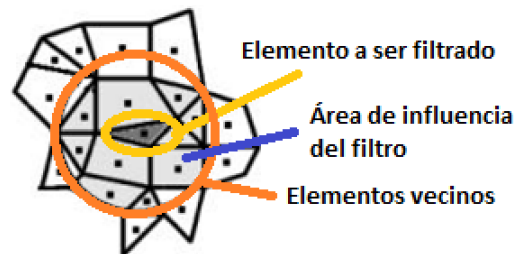
Los filtros de vecindad fija consisten en generar funciones de conectividad entre el elemento filtrado y sus vecinos próximos. Aunque es el filtro más simple, su definición de vecindad implica dependencia a la discretización de la malla, ya que el área de influencia está determinada por el tamaño de la malla (Cardoso and Fonseca, 2003). Debido a este problema, surgen los filtros espaciales. En la Figura 4-16 se presenta una comparación entre dos discretizaciones de malla usada para resolver el mismo problema, mientras se usan filtros de vecindad fija. En esta figura se ilustra cómo el área de influencia del filtro cambia en función del tamaño de los elementos finitos ya que el filtro solo considera una cantidad específica de elementos alrededor del elemento que está siendo filtrado.





**Fig. 4-16.:** Concepto de filtro de vecindad fija (A) con malla gruesa y (B) con malla fina. Imagen tomada de [Berrío \(2017\)](#).

Los filtros espaciales controlan el área de influencia a partir de un radio definido. Esto ayuda también a controlar la complejidad del problema y reduce la dependencia de la malla; sin embargo, estos filtros no tienen en cuenta el tamaño de los elementos vecinos, haciendo su aplicación adecuada para mallas estructuradas ([Cardoso and Fonseca, 2003](#)). La Figura 4-17 ilustra el concepto de un filtro espacial para una donde los elementos vecinos son aquellos que tienen la distancia entre centroides menor al radio del filtro, tomando como referencia el centroide del elemento finito que está siendo filtrado.



**Fig. 4-17.:** Concepto de filtro espacial en una malla bidimensional. Imagen tomada de [Ramírez Gil \(2013\)](#).

La ventaja del uso de este tipo de filtros radica en que se pueden aplicar a cualquier variable; como la pseudodensidad o la sensibilidad, pero modificando dichos valores se afecta directamente los resultados del MOT. En contraste, si se filtran los límites móviles de la programación lineal secuencial (PLS), se asegura que el valor de las variables de diseño estén relacionadas con los elementos del alrededor, evitando el problema del tablero de ajedrez ([Cardoso and Fonseca, 2003](#)).

Por otra parte, los filtros de sensibilidades consisten en alterar la sensibilidad de un elemento específico, en función de la sensibilidad de los elementos en un radio especificado, lo que asegura independencia de malla (Bendsøe and Sigmund, 2004). Aunque inicialmente fue definido como un método heurístico, Sigmund and Maute (2012) demostraron que la formulación de los filtros de sensibilidades pueden ser derivados del concepto de mecánica del medio continuo y elasticidad no local.

Los filtro de densidades son en esencia filtros espaciales en los cuales se modifican las variables de diseño (*i.e.* pseudo-densidades) y se ajustan las sensibilidades para que sean consistentes con la formulación del modelo. En la evaluación del modelo matemático de la optimización solo se permiten las variables filtradas, de forma que las propiedades de un elemento dependen de la densidad en todos los elementos vecinos en un radio determinado (Bendsøe and Sigmund, 2004).

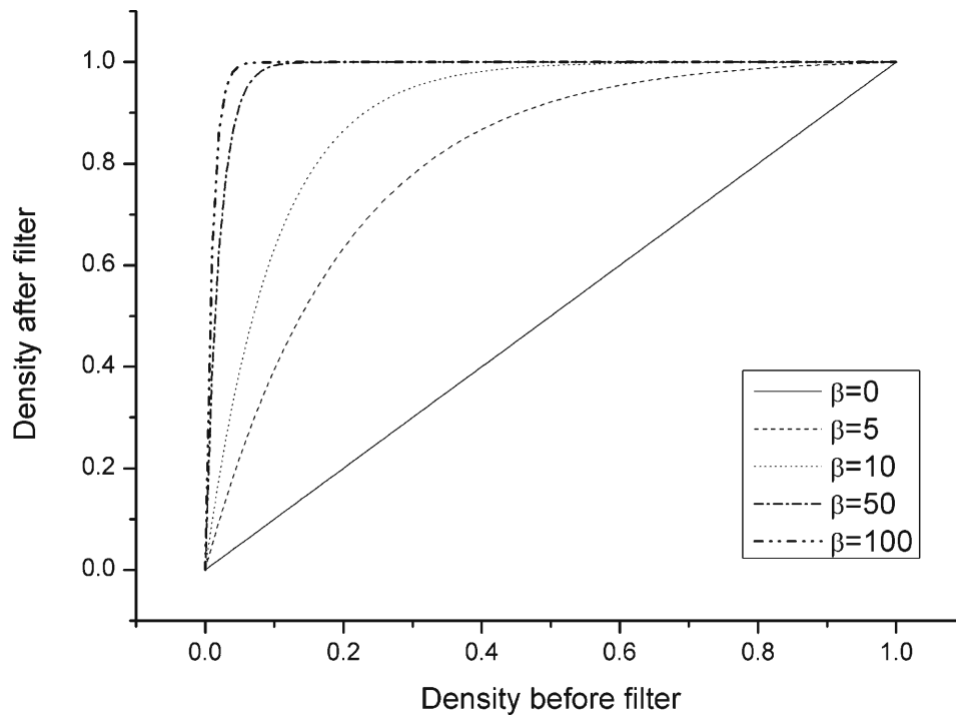
Uno de los filtros de densidad que ha mostrado buenos resultados en los últimos años; introducido por Guest et al. (2004), es llamado filtro de proyección. En este tipo de filtro, se usan variables de diseño “auxiliares” que se proyectan a un espacio solución diferente para evaluar el modelo físico del problema usando funciones no lineales, como la función de Heaviside; logrando así, eliminar la escala de grises y la independencia de la malla (Berrío, 2017). La función de Heaviside debe ser regularizada, de forma que el gradiente de la variable de diseño auxiliar ( $\tilde{\rho}_e$ ) con respecto a la variable de diseño original ( $\rho$ ) sea continuo. Esto se puede lograr con la función exponencial (Xu et al., 2010):

$$\tilde{\rho}_e = 1 - e^{-\beta \tilde{\rho}_e} + \tilde{\rho}_e e^{-\beta} \quad (4-7)$$

Donde  $\tilde{\rho}_e$  es la pseudo-densidad filtrada y penalizada por  $\beta$ , que es un factor de penalización del filtro. En la Figura 4-18 se muestra la regularización de la función Heaviside usada en el filtro de proyección.

## 4.7. Implementación del MOT

Los métodos de optimización topológica han sido desarrollados y aplicados a problemas dominados por fenómenos físicos específicos de una disciplina, como deformaciones elásticas en mecánica estructural, o flujo de fluidos y gases en mecánica de fluidos (Bendsøe and Sigmund, 2004). Sin embargo, el comportamiento de muchos sistemas involucra múltiples fenómenos físicos que pertenecen a diferentes disciplinas de la ingeniería. Estos problemas son llamados *multi-físicos* (Rozvany and Lewiński, 2014). Ejemplos de estos problemas involucran interacciones termo-eléctricas, termo-mecánicas, electro-mecánicas, electro-térmicas, fluido-estructuras, entre otras.



**Fig. 4-18.:** Función Heaviside suavizada en función de la penalización  $\beta$ . Imagen tomada de [Xu et al. \(2010\)](#).

Los materiales piezoeléctricos pertenecen a la familia de fenómenos electro-mecánicos y la relación entre sus propiedades es ilustrada en el diagrama de Heckmann presentado en la Figura 2-5. En esta sección se desarrollará la formulación e implementación de un problema de optimización para encontrar la topología óptima de actuadores y sensores que maximicen la controlabilidad y observabilidad de un sistema de control activo de vibraciones usando transductores piezoeléctricos.

#### 4.7.1. Problema de Optimización

El problema de optimización consiste en encontrar la distribución óptima de material piezoeléctrico sobre una estructura elástica para maximizar el control a las vibraciones que experimente dicha estructura. Para resolver este problema se proponen dos funciones objetivo que son optimizadas de forma paralela y luego sus resultados son concatenados como solución a un problema global de optimización.

La primera función objetivo busca maximizar el gramiano de controlabilidad, mientras la segunda función objetivo busca maximizar el gramiano de observabilidad del sistema. Sin embargo, ambos gramianos son expresiones matriciales cuya dimensión depende de la cantidad de variables de estado definidos en el modelo de control es representación

de espacios de estado (tema abordado detalladamente en el Capítulo 3). Ya que los gramianos son matrices predominantemente diagonales (Silveira, 2012), el criterio de optimización se define como la traza de la matriz del gramiano de controlabilidad y la traza de la matriz del gramiano de observabilidad. En las ecuaciones 4-8 y 4-9 se presentan las definiciones de los problemas de optimización en su forma canónica.

$$\begin{aligned} \max_{\rho_c} \quad & \text{trace}(W_c) \\ \text{s.t.} \quad & \int_{\Omega_c} \rho_c d\Omega_c - V_r \leq 0; \quad 0 \leq \rho_c \leq 1 \end{aligned} \quad (4-8)$$

$$\begin{aligned} \max_{\rho_o} \quad & \text{trace}(W_o) \\ \text{s.t.} \quad & \int_{\Omega_o} \rho_o d\Omega_o - V_r \leq 0; \quad 0 \leq \rho_o \leq 1 \end{aligned} \quad (4-9)$$

Donde  $W_c$  y  $W_o$  son; respectivamente, las matrices del gramiano de controlabilidad y el gramiano de observabilidad,  $\rho_c$  es la variable de diseño para el dominio de diseño del actuador  $\Omega_c$ ,  $\rho_o$  es la variable de diseño para el dominio de diseño del sensor  $\Omega_o$ , y  $V_r$  es la restricción de volumen. Los dominios de diseño son ejemplificados en la Figura 4-9 y los gramianos de controlabilidad y observabilidad son definidos en la Sección 3.6.1.

Ya que las funciones objetivo se definen como la traza de una matriz y esta operación es la suma de los términos en la diagonal, se puede modificar esta definición a una suma ponderada de esos términos. Ya que cada término de la diagonal del gramiano está asociado directamente a un modo de vibración, la función objetivo puede ser entendida como la suma ponderada de los modos de vibración, donde la traza es un caso particular de una función de suma de términos sin pesos. En otras palabras, el programa de optimización favorecerá la controlabilidad o la observabilidad del sistema específicamente en ciertos modos de vibración usando pesos en la formulación de la función objetivo al realizar la suma de los términos de la diagonal de las matrices de controlabilidad y observabilidad.

#### 4.7.2. Solución al Problema de Optimización

El problema de optimización presentado en las ecuaciones 4-8 y 4-9, es un problema no lineal con restricciones lineales. Para resolver este tipo de problemas existen diferentes métodos, *e.g.* métodos analíticos o métodos numéricos, que pueden ser probabilísticos o determinísticos. y a su vez existe una amplia serie de algoritmos de optimización (Boom and Schutter, 2007; Haftka and Gürdal, 2012). En la Figura 4-19 se muestra un diagrama de algunos posibles caminos de solución para un problemas de optimización no lineal.

Cuando se usan modelos de elementos finitos con miles o millones de grados de libertad, en los cuales el costo computacional asociado a la evaluación de la función objeti-

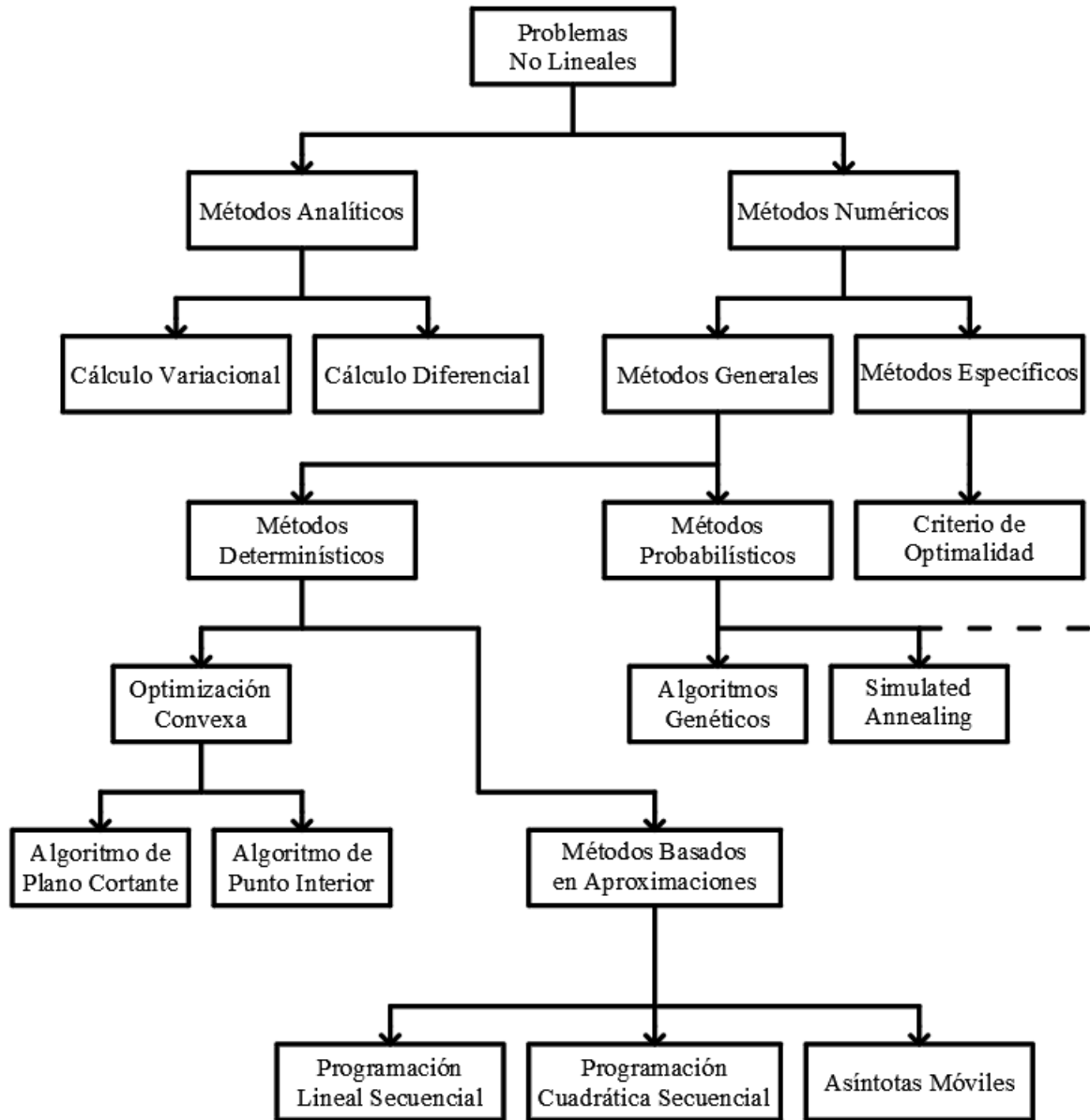


Fig. 4-19.: Métodos de solución para problemas no lineales. Figura adaptada de Berrío (2017).

vo, las restricciones, y sus derivadas es demasiado grande en comparación con el costo computacional asociado a las operación de optimización, es particularmente útil usar métodos de aproximación (Haftka and Gürdal, 2012). De los métodos basados en aproximaciones presentados en la Figura 4-19, el método de Programación Lineal Secuencial (SLP por sus siglas en inglés) es el más popular y el más simple de implementar (Ramírez Gil, 2013).

En este trabajo se ha escogido el SLP como método de solución ya que se ha aplica-

do satisfactoriamente en problemas de optimización topológica considerando materiales piezoeléctricos (Sigmund et al., 1998; Silva and Kikuchi, 1999) y control de vibraciones (Zhang and Kang, 2014b; Silveira, 2012).

### 4.7.3. Programación Lineal Secuencial (SLP)

La solución de problemas no lineales de optimización a través de una técnica de solución como la SLP, consiste en generar series de aproximaciones lineales del problema de optimización, usando series de Taylor de primer orden alrededor de las variables de diseño actuales (Rao, 2009). Así, basta con solucionar un problema de optimización lineal usando algoritmos eficientes para ese tipo de problemas (*e.g.* Método Simplex) (Berrío, 2017).

El problema de optimización linealizado se puede escribir como (Rao, 2009):

$$\begin{aligned} \max_x \quad & f(x_i) + \nabla f(x_i)^T (x - x_i) \\ \text{s.t.} \quad & g_j(x_i) + \nabla g_j(x_i)^T (x - x_i) \leq 0 \end{aligned} \quad (4-10)$$

Donde  $f(x_i)$  y  $g_j(x_i)$  son, respectivamente, la función objetivo y las restricciones evaluadas en el punto  $x_i$ , los términos  $\nabla f_i(x_i)^T$  y  $\nabla g_j(x_i)^T$  son los gradientes de la función objetivo y las restricciones, respectivamente, evaluadas en el mismo punto. El término  $x$  es la variable de diseño.

Aplicando este concepto al problema de optimización presentado en la ecuación 4-8, el nuevo problema de optimización linealizado alrededor del punto  $\rho_i$  es:

$$\begin{aligned} \max_{\rho_c} \quad & \nabla(\text{trace}(W_c)|_{\rho_i})^T (\rho_c - \rho_i) \\ \text{s.t.} \quad & \int_{\Omega_c} \rho_i d\Omega_c - V_r \leq 0, \quad 0 \leq \rho_i \leq 1 \end{aligned} \quad (4-11)$$

De forma similar, se puede definir la linealización de la segunda optimización presentada en la ecuación 4-9, la cual corresponde al problema de maximización de la observabilidad; como:

$$\begin{aligned} \max_{\rho_o} \quad & \nabla(\text{trace}(W_o)|_{\rho_i})^T (\rho_o - \rho_i) \\ \text{s.t.} \quad & \int_{\Omega_o} \rho_i d\Omega_o - V_r \leq 0, \quad 0 \leq \rho_i \leq 1 \end{aligned} \quad (4-12)$$

Es importante resaltar que las restricciones definidas en el problema de optimización topológica no se ven afectadas con la linealización ya que el gradiente de estas es cero por ser funciones lineales. Adicionalmente, los términos  $\text{trace}(W_c)|_{\rho_i}$  y  $\text{trace}(W_o)|_{\rho_i}$  se omiten

de la formulación de las funciones objetivo linealizadas al ser valores constante y por tanto no influyen sobre la solución del problema de optimización (Boom and Schutter, 2007).

El problema de optimización presentado en la ecuación 4-10 algunas veces podría tener soluciones ilimitadas (Rao, 2009). Debido a esto, es necesario introducir límites para asegurar la solución al problema agregando las siguientes restricciones:

$$l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4-13)$$

Donde  $l_i$  y  $u_i$  representan los límites inferior y superior respectivamente, y  $n$  es el número de variables de diseño. En el método SLP, estos límites reciben el nombre de *límites móviles* y son particularmente importantes para lograr aproximar correctamente la solución óptima del problema. Si la selección de los límites móviles es suficientemente pequeña, se puede asegurar una buena aproximación lineal en ese rango, lo cual aseguro una solución más cercana al óptimo del problema no lineal (Haftka and Gürdal, 2012).

En esta tesis, la implementación de los límites móviles se realizar sobre las variables de diseño  $\rho_c$  y  $\rho_o$ , respectivamente; para el problema de controlabilidad y de observabilidad. Al ser un problema no lineal, el rango de límites se selecciona suficientemente pequeño para asegurar buenos resultados de la aproximación, sin comprometer el costo computacional que implica escoger límites demasiado pequeños.

Cada iteración del proceso de optimización resuelto a través del método SLP analiza la evolución de la función objetivo es sus últimas iteraciones para determinar su variación y define nuevos límites móviles basados en esta información. De acuerdo a qué tan no lineal se esté comportando la función objetivo, los límites móviles pueden tomar dos rango; uno amplio y uno corto, los cuales se definen con un paso del 10% o del 5% del valor de las variables de diseño en la iteración inmediatamente anterior.

#### 4.7.4. Problema de Optimización Discretizado

El problema de optimización como está presentado en esta sección debe ser discretizado para ser resuelto por métodos numéricos computacionales. Para esto, es necesario discretizar el dominio de diseño del problema de optimización, así como su formulación, incluyendo la función objetivo y sus restricciones. En este trabajo, se utiliza el método de los elementos finitos (MEF) como método numérico de solución al problema física y por tanto funciona como canal de discretización del problema. Adicionalmente, se utiliza el modelo de interpolación de material SIMP donde se le asigna una variable de diseño a cada elemento del dominio discretizado con el MEF, y las propiedades del material son

penalizadas de acuerdo al modelo, de forma que:

$$\begin{aligned}\bar{c}(\rho_i) &= \rho_i^{p_1} c^E & \bar{\epsilon}(\rho_i) &= \rho_i^{p_3} \epsilon^S \\ \bar{e}(\rho_i) &= \rho_i^{p_2} e & \bar{\rho}_{mat}(\rho_i) &= \rho_i^{p_4} \rho_{mat}\end{aligned}\quad (4-14)$$

Donde  $c^E$ ,  $e$ ,  $\epsilon^S$ , y  $\rho_{mat}$  son; respectivamente, la elasticidad, la piezoelectricidad, la permitividad, y la densidad del material. Los términos con una línea superior ( $\bar{c}$ ,  $\bar{e}$ ,  $\bar{\epsilon}$ , y  $\bar{\rho}_{mat}$ ) son las propiedades del material interpoladas por el modelo SIMP y los factores  $p$  son las penalizaciones para cada propiedad.

Así, la representación del problema dinámico de estructuras piezoeléctricas discretizado a través del MEF y del modelo SIMP se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} M_{uu}(\rho) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{uu}(\rho) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu}(\rho) & K_{u\phi}(\rho) \\ K_{\phi u}(\rho) & K_{\phi\phi}(\rho) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}\quad (4-15)$$

Donde los términos  $M_{uu}(\rho)$ ,  $D_{uu}(\rho)$ ,  $K_{uu}(\rho)$ ,  $K_{u\phi}(\rho)$ ,  $K_{\phi u}(\rho)$ , y  $K_{\phi\phi}(\rho)$  son todos dependientes de la pseudo-densidad  $\rho$  de los elementos finitos en el dominio discretizado. Ya que los valores de  $\rho$  pueden ser cualquiera en el intervalo  $[0,1]$ , las matrices dependientes de esta variables pueden volverse singulares cuando la pseudo-densidad tome valores igual a cero. Para prevenir este problema, se define un valor mínimo para este intervalo  $\rho_{min}$ , tal que:

$$0 < \rho_{min} \leq \rho_i \leq 1 \quad (4-16)$$

Finalmente, las funciones objetivo se pueden expresar en términos de las matrices discretas y la restricción de volumen que involucra una integral se convierte a una sumatoria de términos discretos y la formulación de los problemas de optimización en sus formas discretas se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}\max_{\rho_c} \quad & trace(W_c(\rho_c)) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{c=1}^{n_e} \rho_c V_c - V_r \leq 0; \quad 0 < \rho_{min} \leq \rho_c \leq 1\end{aligned}\quad (4-17)$$

$$\begin{aligned}\max_{\rho_o} \quad & trace(W_o(\rho_o)) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{o=1}^{n_e} \rho_o V_o - V_r \leq 0; \quad 0 < \rho_{min} \leq \rho_o \leq 1\end{aligned}\quad (4-18)$$

Donde  $W_c(\rho_c)$  y  $W_o(\rho_o)$  son; respectivamente, las matrices del gramiano de controlabilidad y el gramiano de observabilidad discretizadas,  $\rho_c$  es la pseudo-densidad del elemento  $c$  cuyo volumen es  $v_c$ ,  $\rho_o$  es la pseudo-densidad del elemento  $o$  cuyo volumen es  $v_o$ , y  $V_r$  es la restricción de volumen.



### 4.7.5. Análisis de Sensibilidad

La linealización de problemas de optimización requiere, en el caso de la SLP, la primera derivada de la función objetivo y sus restricciones con respecto a las variables de diseño a través de su expansión en series de Taylor. Este proceso de obtener la derivada del problema se le llama *Análisis de Sensibilidad* (Berrío, 2017).

Las sensibilidades pueden calcularse con tres métodos (Nocedal and Wright, 2006):

- Método analítico.
- Método semi-analítico.
- Método numérico.

El método analítico es el más complejo ya que requiere que se deriven analíticamente las funciones objetivo, pero genera menor costo computacional. Por otra parte, los métodos numéricos son más fáciles de implementar y se pueden aplicar a cualquier función objetivo, pero representan un mayor costo computacional. Finalmente, los métodos semi-analíticos combinan los métodos anteriores al permitir que algunas partes de la función sean derivadas analíticamente mientras otras partes, generalmente más complejas, se deriven con los métodos numéricos (Haftka and Gürdal, 2012; Nocedal and Wright, 2006).

En este trabajo se desarrolló el análisis de sensibilidad a través de dos métodos: analítico y numérico. El método analítico fue desarrollado e implementado y posteriormente verificado a través del método numérico, sin embargo, el método numérico resultó ser más eficiente en costo computacional, ya que la complejidad del método analítico requiere de inversión de matrices cercanas a la singularidad. A continuación se presenta el desarrollo de la sensibilidad del problema de optimización de este trabajo utilizando el método analítico y posteriormente se presenta la implementación de las sensibilidades a través del método numérico.

**Análisis de Sensibilidad Numérico** En este método la variación de la función objetivo se calcula mediante una aproximación de diferencias finitas. El método de diferencias finitas es un procedimiento general para solucionar problemas de ecuaciones diferenciales. Cada derivada que aparece en la ecuación diferencial parcial debe reemplazarse por una diferencia dividida con valores de la función evaluada en los puntos elegidos (Grossmann et al., 2007). En esencia, el método de diferencias finitas permite calcular derivadas para los análisis de sensibilidad. Específicamente, el método de las diferencias finitas centrales se eligió como el método para calcular la sensibilidad numérica en esta tesis, definido como (Haftka and Gürdal, 2012):

$$\frac{\Delta f}{\Delta \rho_i} = \frac{f(\rho_i + \Delta \rho_i) - f(\rho_i - \Delta \rho_i)}{2\Delta \rho_i} \quad (4-19)$$

Donde  $\rho_i$  es la pseudo-densidad del elemento finito  $i$ , y  $f$  corresponde a una de las funciones objetivo presentadas en las ecuaciones (4-8) y (4-9).

**Análisis de Sensibilidad Analítico** Dada la función objetivo como la traza de los gramianos de controlabilidad y de observabilidad, la sensibilidad de esta función se reducirá al cálculo de la derivada de cada gramiano. La idea general en el desarrollo de la sensibilidad del los gramianos es derivar la ecuación de Lyapunov; usada inicialmente para calcular los gramianos, y resolver nuevamente la ecuación de Lyapunov que en su expansión entregue como la derivada del gramiano de controlabilidad o de observabilidad.

Inicialmente, se definen las sensibilidades del modelo de material con respecto a las variables de diseño  $\rho_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \rho_i} &= p_1 \rho_i^{p_1-1} c^E & \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \rho_i} &= p_3 \rho_i^{p_3-1} \epsilon^S \\ \frac{\partial \bar{e}}{\partial \rho_i} &= p_2 \rho_i^{p_2-1} e & \frac{\partial \bar{\rho}_{mat}}{\partial \rho_i} &= p_4 \rho_i^{p_4-1} \rho_{mat} \end{aligned} \quad (4-20)$$

Donde  $c^E$ ,  $e$ ,  $\epsilon^S$ , y  $\rho_{mat}$  son las propiedades del material dadas por sus características físicas (elasticidad, piezoelectricidad, permitividad, densidad) y  $\bar{c}$ ,  $\bar{e}$ ,  $\bar{\epsilon}$ , y  $\bar{\rho}_{mat}$  son las propiedades del material interpoladas con el modelo de material SIMP usando los factores de penalización  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ , y  $p_4$  respectivamente para cada propiedad.

Partiendo de las ecuaciones generales de Lyapunov para los gramianos:

$$AW_c + W_c A^T + BB^T = 0 \quad (4-21)$$

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \quad (4-22)$$

Donde  $W_c$  es el gramiano de controlabilidad y  $W_o$  es el gramiano observabilidad, con  $A$ ,  $B$  y  $C$  definidos en las ecuaciones 3-52 a 3-58. Derivando la ecuación 4-21 con respecto a la variable de diseño  $\rho$ :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (AW_c + W_c A^T + BB^T) = A \frac{\partial W_c}{\partial \rho} + \frac{\partial W_c}{\partial \rho} A^T + \frac{\partial A}{\partial \rho} W_c + W_c \frac{\partial A^T}{\partial \rho} + \frac{\partial B}{\partial \rho} B^T + B \frac{\partial B^T}{\partial \rho} \quad (4-23)$$

La ecuación 4-23 tiene la misma estructura que la ecuación 4-21 y se puede organizar como un nueva ecuación de Lyapunov de la forma:

$$AX + XA^T + Q = 0 \quad (4-24)$$

Donde  $X$  será la derivada del gramiano de controlabilidad y  $Q$  son los últimos cuatro términos de la ecuación 4-23. De forma similar se puede escribir el problema de las sensibilidades del gramiano de observabilidad. Derivando la ecuación 4-22:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (A^T W_o + W_o A + C^T C) = A^T \frac{\partial W_o}{\partial \rho} + \frac{\partial W_o}{\partial \rho} A + \frac{\partial A^T}{\partial \rho} W_o + W_o \frac{\partial A}{\partial \rho} + \frac{\partial C^T}{\partial \rho} C + C^T \frac{\partial C}{\partial \rho} \quad (4-25)$$

De nuevo, la ecuación 4-25 tiene la misma estructura que la ecuación 4-22, y se puede organizar como una nueva ecuación de Lyapunov de la forma:

$$A^T Y + Y A + R = 0 \quad (4-26)$$

Donde  $Y$  es la derivada del gramiano de observabilidad y  $R$  son los últimos cuatro términos de la ecuación 4-25. De las ecuaciones 4-23 y 4-25 se pueden identificar tres derivadas que se deben obtener previamente para resolver esas nuevas ecuaciones de Lyapunov:

$$\frac{\partial A}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -M_m^{-1} K_{vm} & -M_m^{-1} D_m \end{bmatrix} \quad (4-27)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -M_m^{-1} K_{wm} \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{bmatrix} -H_{ss}^{-1} H_{su} \Phi & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4-29)$$

De las ecuaciones 4-27 a 4-29:

$$\frac{\partial A}{\partial \rho} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\partial M_m^{-1}}{\partial \rho} K_{vm} - M_m^{-1} \frac{\partial K_{vm}}{\partial \rho} & -\frac{\partial M_m^{-1}}{\partial \rho} D_m - M_m^{-1} \frac{\partial D_m}{\partial \rho} \end{bmatrix} \quad (4-30)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \rho} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{\partial M_m^{-1}}{\partial \rho} K_{wm} - M_m^{-1} \frac{\partial K_{wm}}{\partial \rho} \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \rho} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial H_{ss}^{-1}}{\partial \rho} H_{su} \Phi - H_{ss}^{-1} \frac{\partial H_{su}}{\partial \rho} \Phi - H_{ss}^{-1} H_{su} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4-32)$$

Donde:

$$\frac{\partial M_m^{-1}}{\partial \rho} = -M_m^{-1} \frac{\partial M_m}{\partial \rho} M_m^{-1} \quad (4-33)$$

$$\frac{\partial M_m}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (\Phi^T M_{uu} \Phi) \quad (4-34)$$

$$\frac{\partial K_{vm}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (\Phi^T K_v \Phi) \quad (4-35)$$

$$\frac{\partial D_m}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (\Phi^T D_{uu} \Phi) \quad (4-36)$$

$$\frac{\partial K_{wm}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (\Phi^T K_w) \quad (4-37)$$

De las ecuaciones 4-34 a 4-36:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\Phi^T M_{uu} \Phi) = \frac{\partial \Phi^T}{\partial \rho} M_{uu} \Phi + \Phi^T \frac{\partial M_{uu}}{\partial \rho} \Phi + \Phi^T M_{uu} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \quad (4-38)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\Phi^T K_v \Phi) = \frac{\partial \Phi^T}{\partial \rho} K_v \Phi + \Phi^T \frac{\partial K_v}{\partial \rho} \Phi + \Phi^T K_v \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \quad (4-39)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\Phi^T D_{uu} \Phi) = \frac{\partial \Phi^T}{\partial \rho} D_{uu} \Phi + \Phi^T \frac{\partial D_{uu}}{\partial \rho} \Phi + \Phi^T D_{uu} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \quad (4-40)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\Phi^T K_w) = \frac{\partial \Phi^T}{\partial \rho} K_w + \Phi^T \frac{\partial K_w}{\partial \rho} \quad (4-41)$$

De la ecuación 4-38 es necesario obtener las derivadas de los vectores propios, las cuales serán desarrolladas en la sección 4.7.5. Adicionalmente, la derivada de la matriz de masa, teniendo en cuenta su formulación de matriz diagonal, se puede escribir:

$$\frac{\partial M_{uu}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{V_e \bar{\rho}}{20} \quad (4-42)$$

Donde  $V_e$  es el volumen del elemento finito y  $\bar{\rho}$  es la densidad del elemento finito en el proceso de optimización. Esta densidad está determinada por el modelo material expuesto en la sección 4.5.3. Ahora derivando la ecuación 4-6 y reemplazándola en 4-42:

$$\frac{\partial M_{uu}}{\partial \rho} = \frac{V_e}{20} (p_4 \rho^{p_4-1} \rho_{mat}) \quad (4-43)$$

$$\frac{\partial M_{uu}}{\partial \rho} = p_4 \rho^{-1} M_{uu} \quad (4-44)$$

De la ecuación 4-39 además de las derivadas de los vectores propios, es necesario el cálculo de la derivada de la matriz  $K_v$ . Esta se puede escribir usando la ecuación 3-31:

$$\frac{\partial K_v}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (H_{uu} - H_{us} H_{ss}^{-1} H_{su}) \quad (4-45)$$

$$\frac{\partial K_v}{\partial \rho} = \frac{\partial H_{uu}}{\partial \rho} - \frac{\partial H_{us}}{\partial \rho} H_{ss}^{-1} H_{su} - H_{us} \left( \frac{\partial H_{ss}^{-1}}{\partial \rho} H_{su} + H_{ss}^{-1} \frac{\partial H_{su}}{\partial \rho} \right) \quad (4-46)$$

En la ecuación 4-46 se pueden identificar nuevas derivadas necesarias de resolver.

Usando las ecuaciones 3-22 y 3-27 se obtiene:

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{uu}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (\mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{ui} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{iu}) \quad (4-47)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{us}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (\mathbf{K}_{us} - \mathbf{K}_{ui} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{is}) \mathbf{T}_s \quad (4-48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{su}}{\partial \rho} = \left( \frac{\partial \mathbf{H}_{us}}{\partial \rho} \right)^T \quad (4-49)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{ss}^{-1}}{\partial \rho} = -\mathbf{H}_{ss}^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}_{ss}}{\partial \rho} \mathbf{H}_{ss}^{-1} \quad (4-50)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{ss}}{\partial \rho} = \mathbf{T}_s^T \frac{\partial}{\partial \rho} (\mathbf{K}_{ss} - \mathbf{K}_{si} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{is}) \mathbf{T}_s \quad (4-51)$$

Desarrollando las ecuaciones 4-47 a 4-51:

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{uu}}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho} - \frac{\partial \mathbf{K}_{ui}}{\partial \rho} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{iu} - \mathbf{K}_{ui} \left( \frac{\partial \mathbf{K}_{ii}^{-1}}{\partial \rho} \mathbf{K}_{iu} + \mathbf{K}_{ii}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{iu}}{\partial \rho} \right) \quad (4-52)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{us}}{\partial \rho} = \left[ \frac{\partial \mathbf{K}_{us}}{\partial \rho} - \frac{\partial \mathbf{K}_{ui}}{\partial \rho} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{is} - \mathbf{K}_{ui} \left( \frac{\partial \mathbf{K}_{ii}^{-1}}{\partial \rho} \mathbf{K}_{is} + \mathbf{K}_{ii}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{is}}{\partial \rho} \right) \right] \mathbf{T}_s \quad (4-53)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{ss}}{\partial \rho} = \mathbf{T}_s^T \left[ \frac{\partial \mathbf{K}_{ss}}{\partial \rho} - \frac{\partial \mathbf{K}_{si}}{\partial \rho} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{is} - \mathbf{K}_{si} \left( \frac{\partial \mathbf{K}_{ii}^{-1}}{\partial \rho} \mathbf{K}_{is} + \mathbf{K}_{ii}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{is}}{\partial \rho} \right) \right] \mathbf{T}_s \quad (4-54)$$

Donde:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{ii}^{-1}}{\partial \rho} = -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{ii}}{\partial \rho} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \quad (4-55)$$

Usando la ecuación 2-48 para obtener la derivada de  $\mathbf{K}_{uu}$  de la ecuación 4-52:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho} = \int_V \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \bar{\mathbf{c}}}{\partial \rho} \mathbf{B}_u dV \quad (4-56)$$

Usando la ecuación 4-3:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho} = \int_V \mathbf{B}_u^T (p_1 \rho^{p_1-1} \mathbf{c}^E) \mathbf{B}_u dV \quad (4-57)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho} = p_1 \rho^{-1} \mathbf{K}_{uu} \quad (4-58)$$

Algunas derivadas que no poseen expresión analítica de las ecuaciones 4-52 a 4-54 se deben calcular usando las derivadas internas de las matrices piezoeléctricas  $\mathbf{K}_{u\phi}$  y dieléctricas  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ , es decir, la derivada de las matrices  $\mathbf{K}_{ui}$ ,  $\mathbf{K}_{iu}$ ,  $\mathbf{K}_{ii}$ ,  $\mathbf{K}_{us}$ ,  $\mathbf{K}_{si}$ ,  $\mathbf{K}_{is}$  y  $\mathbf{K}_{ss}$  se

obtienen de las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{us} & \mathbf{K}_{ua} & \mathbf{K}_{ug} & \mathbf{K}_{ui} \end{bmatrix} \quad (4-59)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sa} & \mathbf{K}_{sg} & \mathbf{K}_{si} \\ \mathbf{K}_{as} & \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ag} & \mathbf{K}_{ai} \\ \mathbf{K}_{gs} & \mathbf{K}_{ga} & \mathbf{K}_{gg} & \mathbf{K}_{gi} \\ \mathbf{K}_{is} & \mathbf{K}_{ia} & \mathbf{K}_{ig} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \quad (4-60)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\phi u}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{su} & \mathbf{K}_{au} & \mathbf{K}_{gu} & \mathbf{K}_{iu} \end{bmatrix}^T \quad (4-61)$$

Cada una de estas matrices se puede definir usando las ecuaciones 2-49 y 2-50:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \rho} = \int_V \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}^T}{\partial \rho} \mathbf{B}_\phi dV \quad (4-62)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}}{\partial \rho} = - \int_V \mathbf{B}_\phi^T \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \rho} \mathbf{B}_\phi dV \quad (4-63)$$

Donde:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{e}}}{\partial \rho} = p_2 \rho^{p_2-1} \mathbf{e} \quad (4-64)$$

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \rho} = p_3 \rho^{p_3-1} \boldsymbol{\varepsilon}^S \quad (4-65)$$

Reemplazando estas expresiones en las ecuaciones 4-62 y 4-63:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \rho} = p_2 \rho^{-1} \mathbf{K}_{u\phi} \quad (4-66)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}}{\partial \rho} = p_3 \rho^{-1} \mathbf{K}_{\phi\phi} \quad (4-67)$$

Volviendo a la ecuación 4-40 aún es necesario el cálculo de la derivada de la matriz  $\mathbf{D}_{uu}$ . Para desarrollar esta derivada se usa la ecuación 2-52 de forma que:

$$\frac{\partial \mathbf{D}_{uu}}{\partial \rho} = \alpha \frac{\partial \mathbf{M}_{uu}}{\partial \rho} + \beta \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho} \quad (4-68)$$

El desarrollo de las derivadas que aparecen en la ecuación 4-68 ya fueron presentados en las ecuaciones 4-44 y 4-56 respectivamente.

Aún es necesario calcular las derivadas propuestas en la ecuación 4-41. La derivada de los vectores propios se desarrollará en la sección 4.7.5. Para la derivada de  $\mathbf{K}_w$ , se usa la expresión de la ecuación 3-32, de forma que:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_w}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{H}_{ua}}{\partial \rho} - \frac{\partial \mathbf{H}_{us}}{\partial \rho} \mathbf{H}_{ss}^{-1} \mathbf{H}_{sa} - \mathbf{H}_{us} \left( \frac{\partial \mathbf{H}_{ss}^{-1}}{\partial \rho} \mathbf{H}_{sa} + \mathbf{H}_{ss}^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}_{sa}}{\partial \rho} \right) \quad (4-69)$$

En la ecuación 4-69 aparecen dos derivadas nuevas:

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{ua}}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{G}_{ua}}{\partial \rho} \mathbf{T}_a \quad (4-70)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{sa}}{\partial \rho} = \mathbf{T}_s^T \frac{\partial \mathbf{G}_{sa}}{\partial \rho} \mathbf{T}_a \quad (4-71)$$

Usando las ecuaciones en 3-22:

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{ua}}{\partial \rho} = \left[ \frac{\partial \mathbf{K}_{ua}}{\partial \rho} - \frac{\partial \mathbf{K}_{ui}}{\partial \rho} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ia} - \mathbf{K}_{ui} \left( \frac{\partial \mathbf{K}_{ii}^{-1}}{\partial \rho} \mathbf{K}_{ia} + \mathbf{K}_{ii}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{ia}}{\partial \rho} \right) \right] \mathbf{T}_a \quad (4-72)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{sa}}{\partial \rho} = \mathbf{T}_s^T \left[ \frac{\partial \mathbf{K}_{sa}}{\partial \rho} - \frac{\partial \mathbf{K}_{si}}{\partial \rho} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ia} - \mathbf{K}_{si} \left( \frac{\partial \mathbf{K}_{ii}^{-1}}{\partial \rho} \mathbf{K}_{ia} + \mathbf{K}_{ii}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{ia}}{\partial \rho} \right) \right] \mathbf{T}_a \quad (4-73)$$

Las derivadas que aparecen en estas ecuaciones no tienen expresión analítica y también se derivan del análisis de las ecuaciones 4-59 a 4-61.

**Sensibilidad de Valores y Vectores Propios** El proceso de calcular las sensibilidades de los valores y vectores propios se desarrolla siguiendo el procedimiento presentado por Rao (2009). El problema de vectores y valores propios se define como:

$$\mathbf{K}\Phi = \lambda \mathbf{M}\Phi \quad (4-74)$$

Donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez,  $\Phi$  es el vector propio,  $\lambda$  es el valor propio, y  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa. La solución a este problema está dada por la expresión:

$$\mathbf{P}_i \Phi_i = 0 \quad (4-75)$$

Donde  $\mathbf{P}_i$  es una matriz simétrica dada por:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M} \quad (4-76)$$

Adicionalmente, si los vectores propios están normalizados con respecto a la matriz de masa, se cumple la condición:

$$\Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i = 1 \quad (4-77)$$

Derivando las ecuaciones 4-75 y 4-77 con respecto a  $\rho_j$ :

$$\mathbf{P}_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho_j} = -\frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \rho_j} \Phi_i \quad (4-78)$$

$$2\Phi_i^T \mathbf{M} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho_j} = -\Phi_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_j} \quad (4-79)$$

Donde el término  $\partial P_i / \partial \rho_j$  está dado por:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \rho_j} = \frac{\partial K}{\partial \rho_j} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial \rho_j} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial \rho_j} \quad (4-80)$$

Las ecuaciones 4-78 y 4-79 son linealmente independientes y se pueden escribir como:

$$\begin{bmatrix} P_i \\ 2\Phi_i^T M \end{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho_j} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial \rho_j} \\ \Phi_i^T \frac{\partial M}{\partial \rho_j} \end{bmatrix} \Phi_i \quad (4-81)$$

Premultiplicando esta ecuación por:

$$\begin{bmatrix} P_i \\ \Phi_i^T M \end{bmatrix}^T$$

Se obtiene un expresión para la derivada del vector propio:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho_j} = - \left( P_i P_i + 2M \Phi_i \Phi_i^T M \right)^{-1} \left( P_i \frac{\partial P_i}{\partial \rho_j} + M \Phi_i \Phi_i^T \frac{\partial M}{\partial \rho_j} \right) \quad (4-82)$$

#### 4.7.6. Algoritmo del MOT

En la Figura 4-8 se presentó una versión simplificada del algoritmo de optimización usando en esta tesis, explicando los aspectos básicos del funcionamiento del algoritmo del MOT. En esta sección, se presentará en detalle la implementación de método de optimización topológica aplicado en problemas de control activo de vibraciones considerando transductores piezoeléctricos. El MOT fue implementado en el *software* MATLAB ya que es un entorno de programación amigable con el usuario, al tener un balance entre complejidad del lenguaje de programación y eficiencia computacional que permite desarrollar programas complejos, estables y robustos.

El algoritmo implementado en este trabajo inicia con la definición de parámetros tanto para el modelo de elementos finitos, el modelo de espacios de estado, como para el problema de optimización. En esta inicialización de parámetros se define el sistema de unidades, el enmallador utilizado, las restricciones de volumen, el número de iteraciones, el criterio de convergencia, la configuración de los límites móviles y su filtro, el número de modos para la conversión de modelos, y los materiales que se usan. Luego, se define la malla y las condiciones de frontera del modelo de elementos finitos, incluyendo el tipo de elemento finito, el tamaño de elementos, sus grados de libertad activos, y la definición de condiciones de frontera especiales como el acople de grados de libertad en los electrodos de los materiales piezoeléctricos. Seguidamente, se realiza el ensamble de las



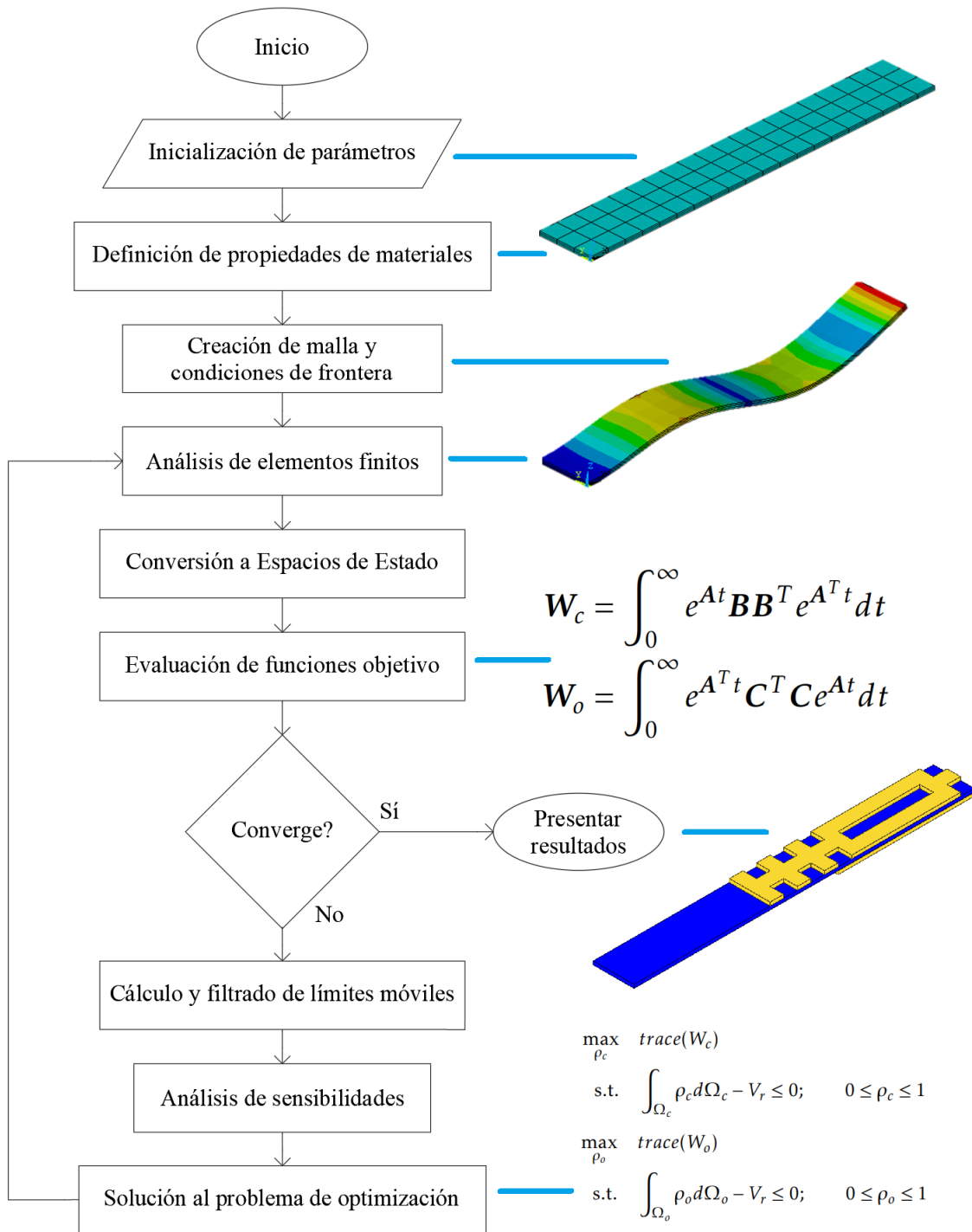


Fig. 4-20.: Algoritmo de optimización topológica implementado en este trabajo.

matrices de elementos finitos de masa, rigidez y amortiguamiento y se resuelve el sistema de ecuaciones para el modelo. Posteriormente, con estas matrices se realiza la conversión de un modelo de espacios de estado, seguido de una reducción modal del sistema para

llevarlo a un orden de magnitud adecuado para sistemas de control.

Con las matrices de espacios de estado se calculan las funciones objetivo de controlabilidad y de observabilidad. En este punto se puede evaluar convergencia del modelo a cada iteración de la optimización, sin embargo, en la primera iteración es necesario también calcular los límites móviles, filtrarlos y realizar un análisis de sensibilidad para soluciones el problema de optimización. En la Figura 4-20 se presenta el algoritmo de optimización, detallando cada subrutina y una representación gráfica de su influencia en el desarrollo del programa (las imágenes en esta figura son ilustrativas).

## 5. Resultados

En este capítulo, se presentarán los resultados del diseño de estructuras inteligentes dispuestas con sensores y actuadores piezoeléctricos distribuidos con el Método de Optimización Topológica (MOT), acoplados a la estructura como un mecanismo de control activo de vibraciones. Inicialmente, se presenta la implementación de un programa de simulación y análisis de estructuras usando el Método de los Elementos Finitos (MEF) y la verificación de sus resultados. Posteriormente, se presentan los resultados de optimización obtenidos con el MOT para maximizar el grado de controlabilidad y el grado de observabilidad del sistema, realizando variaciones en los parámetros de modelado y de optimización. Finalmente, el sistema completo (estructura-transductores); en la configuración óptima encontrada, se somete a un esquema de control LQG para verificar los resultados obtenidos. De esa forma, este capítulo se puede dividir en tres partes fundamentales:

- Simulación de estructuras con el MEF.
- Distribución óptima de transductores piezoeléctricos con el MOT.
- Verificación de resultados en sistemas de control activo de vibraciones.

### 5.1. Caso de estudio

A lo largo de este capítulo se presentarán diferentes tipos de resultados, la mayoría de ellos usando el mismo caso de estudio con la intención de comparar y analizar los resultados. El caso de estudio es una estructura tipo *sandwich* de  $800 \times 120 \times 9$  mm, empotrada en un extremo, compuesta por tres capas de 3 mm cada una. En la Figura 5-1 se muestra el diagrama del caso. La estructura tendrá varias configuraciones en las restricciones y condiciones de frontera, y en todos los casos, la estructura estará compuesta por tres capas de material: la capa inferior será un sensor piezoeléctrico, la capa central será un material elástico, y la capa superior será un actuador piezoeléctrico. Las propiedades mecánicas y eléctricas de los materiales usados se presentan en la Tabla 5-1 (Piefort, 2001; Hwang and Park, 1993; Toolbox, 2008).

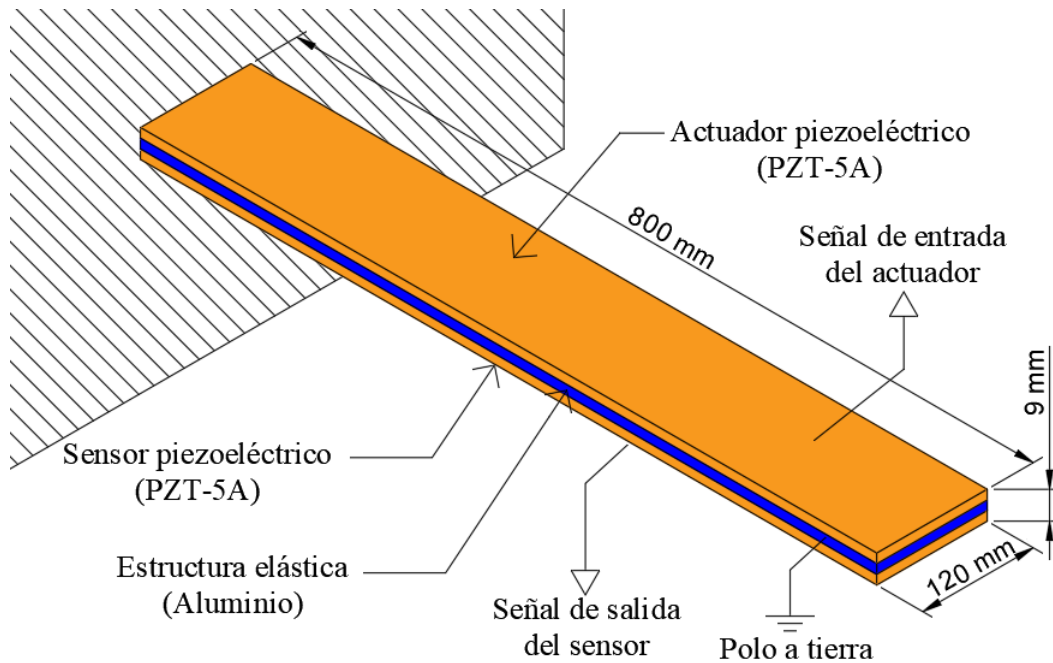


Fig. 5-1.: Estructura de  $800 \times 120 \times 9$  mm compuesta por una barra elástica cubierta con un actuador piezoeléctrico en parte superior y un sensor en la parte inferior.

## 5.2. Simulación de Estructuras Piezoeléctricas

En este trabajo, el MEF es usado para simular estructuras expuestas a perturbaciones dinámicas que involucran dominios elásticos y piezoeléctricos acoplados. Un *software* de simulación fue desarrollado en este trabajo, en la plataforma MATLAB<sup>®</sup>, y se le dio por nombre FEMPS, por sus siglas en inglés *Finite Element Modeling of Piezo-Coupled Structures*. FEMPS es un programa que tiene la capacidad de realizar análisis estáticos, modales y armónicos. Esencialmente, el programa se divide en cinco partes: i) Inicialización de parámetros, ii) Construcción de malla, iii) Construcción de condiciones de frontera, iv) Ensamble de matrices, y v) Solución del sistema de ecuaciones. En la Figura 5-2 se muestra un diagrama simplificado del algoritmo desarrollado para el programa de simulación.

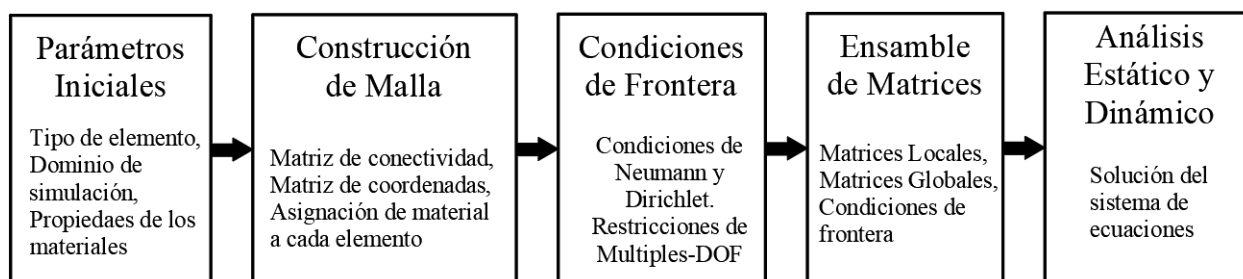


Fig. 5-2.: Algoritmo simplificado del programa FEMPS

Material	Elasticidad (Pa)	Piezolectricidad (Cb/N)	Permitividad Absoluta (F/m)	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )
PZT-5A	$c_{11} = 121 \times 10^9$ $c_{12} = 75,4 \times 10^9$ $c_{13} = 75,2 \times 10^9$ $c_{22} = c_{11}$ $c_{23} = c_{13}$ $c_{33} = 111 \times 10^9$ $c_{44} = 21,1 \times 10^9$ $c_{55} = c_{44}$ $c_{66} = 22,8 \times 10^9$	$e_{31} = -5,4$ $e_{33} = 15,8$ $e_{15} = 12,3$	$\epsilon_{11} = 8,11 \times 10^{-9}$ $\epsilon_{22} = \epsilon_{11}$ $\epsilon_{33} = 7,35 \times 10^{-9}$	7500
PVDF	$E = 2,0 \times 10^9$ $\nu = 0,29$	$d_{31} = 2,2 \times 10^{-11}$	$\epsilon_{11} = 1,062 \times 10^{-10}$ $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33}$	1800
Aluminio	$E = 70 \times 10^9$ $\nu = 0,33$			2700

**Tabla 5-1.:** Propiedades de materiales (Piefort, 2001; Hwang and Park, 1993; Toolbox, 2008).

En esta sección se presentarán los resultados de simulación de modelos para análisis estáticos, modales y armónicos, obtenidos con el *software* implementado y la respectiva verificación de resultados usando el *software* ANSYS como referencia de comparación.

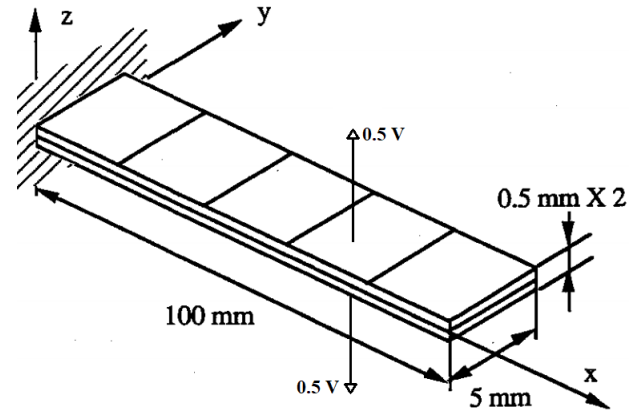
### 5.2.1. Tipo de elemento finito

FEMPS permite el uso de dos tipos de elementos finitos hexaédricos: *Brick* de 8 nodos y *Brick* de 20 nodos, con cuatro grados de libertad por cada nodo, siendo tres de estos para desplazamientos ( $ux$ ,  $uy$ ,  $uz$ ) y uno para voltaje ( $\phi$ ). Se implementan dos elementos finitos diferentes debido a un fenómeno llamado *Shear-Locking* que fue encontrado en la simulación con los elementos de 8 nodos, donde el elemento presenta un exceso de rigidez cuando es sometidos a deformaciones de flexión (Cook et al., 2007). Entre una de las formas de solucionar este problema, se decide usar elementos de orden superior (*Brick* de 20 nodos) por su relativa fácil implementación numérica y fácil acople al código del programa ya desarrollado para el elemento finito *Brick* de 8 nodos.

Para comparar y verificar los resultados obtenidos con los diferentes elementos finitos, se modeló una estructura piezoeléctrica tipo *bimorph* de  $100 \times 5 \times 1 \text{ mm}$ , como se muestra en la Figura 5-3, que consiste en dos capas de actuadores piezopolímeros PVDF con polaridades opuestas, aplicando 1 voltio entre los electrodos. Esta estructura se escoge para comparación ya que fue probada experimentalmente por Tzou and Tseng (1991) y verificada numéricamente por Piefort (2001); Hwang and Park (1993). Adicionalmente, se

presenta como referencia de comparación los resultados teóricos reportados por [Lašová and Zemčík \(2012\)](#) de acuerdo a la teoría de placas de Euler-Bernoulli, considerando variaciones lineales del potencial eléctrico a través del espesor de la placa. Las propiedades del material PVDF se presentan en la Tabla [5-1](#).

Los resultados de comparación se presentan en la Tabla [5-2](#). En esta tabla es posible ver cómo la diferencia relativa a los valores teóricos están por debajo del 2% cuando se usan elementos de 20 nodos. En contraste, cuando se usan elementos de 8 nodos, el error relativo se ubica alrededor de 85%, poniendo en evidencia el efecto de *Shear-Locking* mencionado previamente. En la Figura [5-4](#) se presentan las gráficas de desplazamiento en la dirección  $z$  en función del eje  $x$  correspondientes al mismo experimento. Allí, es de notar las similitudes entre los resultados de nuestro programa (FEMPS), los resultados obtenidos en el programa comercial ANSYS, y los resultados reportados en la literatura.



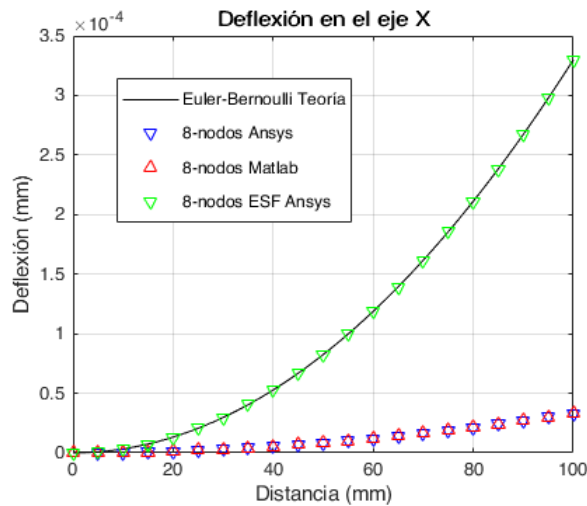
**Fig. 5-3.:** Actuador *bimorph*. Figura adaptada de [Hwang and Park \(1993\)](#)

<i>Software</i>	Tipo de Elemento	Número de Elementos	Diferencia Relativa
FEMPS	Brick 8 nodos	40	85.541 %
ANSYS	Brick 8 nodos	40	85.540 %
ANSYS	Brick 8 nodos (ESF)	40	0.2138 %
FEMPS	Brick 20 nodos	40	1.7014 %
ANSYS	Brick 20 nodos	40	0.5124 %

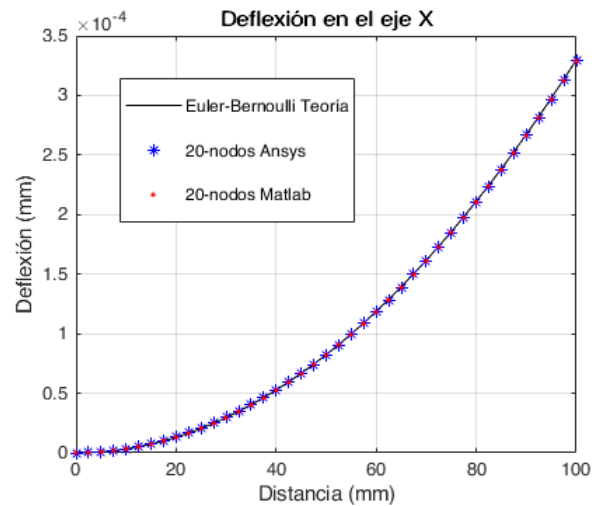
**Tabla 5-2.:** Errores relativos a valores teóricos obtenidos en los programas FEMPS y ANSYS.

Debido a la diferencia relativa que induce el elemento finito de 8 nodos en comparación a su equivalente de 20 nodos, todos los resultados presentados en este capítulo se simulan usando el elemento finito de orden superior tipo *Birck* de 20 nodos.

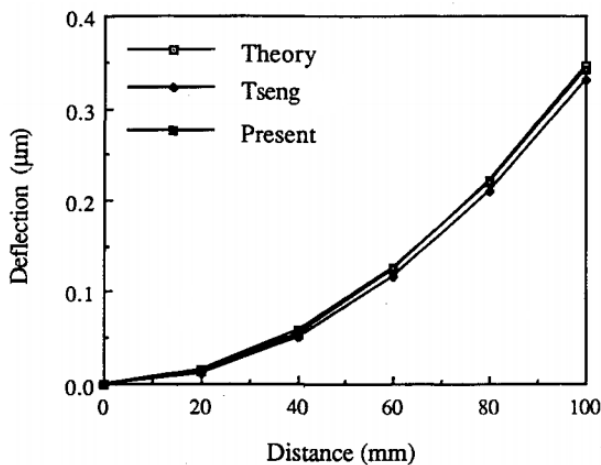
En las siguientes secciones se presentan los análisis de estructuras acopladas con sensores y actuadores piezoeléctricos, utilizando el caso de estudio propuesto en la Sección [5.1](#). Simultáneamente, los resultados obtenidos con nuestro programa FEMPS son verificados en el programa comercial ANSYS. Para realizar esta validación se usa en ambos



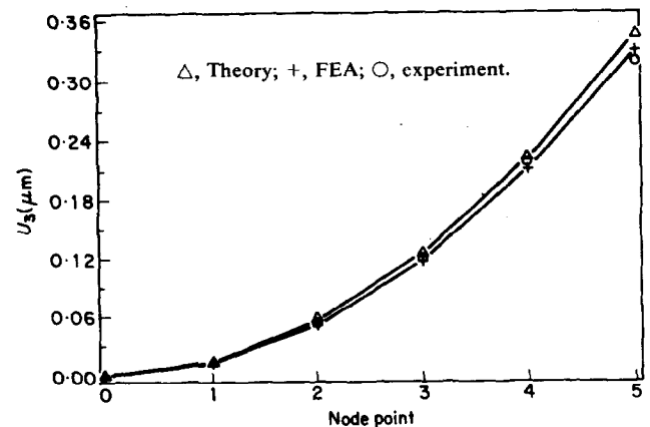
(a) Resultados usando elementos de 8 nodos en MATLAB y ANSYS



(b) Resultados usando elementos de 20 nodos en MATLAB y ANSYS



(c) Resultados de Hwang and Park (1993)



(d) Resultados de Tzou and Tseng (1991)

**Fig. 5-4.:** Comparación de resultados experimentales reportados en la literatura, ejemplos numéricos, y simulaciones realizadas en los *software* FEMPS y ANSYS.

programas la misma malla, las mismas condiciones de frontera, las mismas propiedades de los materiales, y el mismo tipo de elemento finito. De esta forma, tan solo difieren las técnicas de ensamblar las matrices locales y globales de los elementos finitos, el *solver* usado para resolver del sistema de ecuaciones, y el post-procesamiento de datos.

### 5.2.2. Análisis Estático

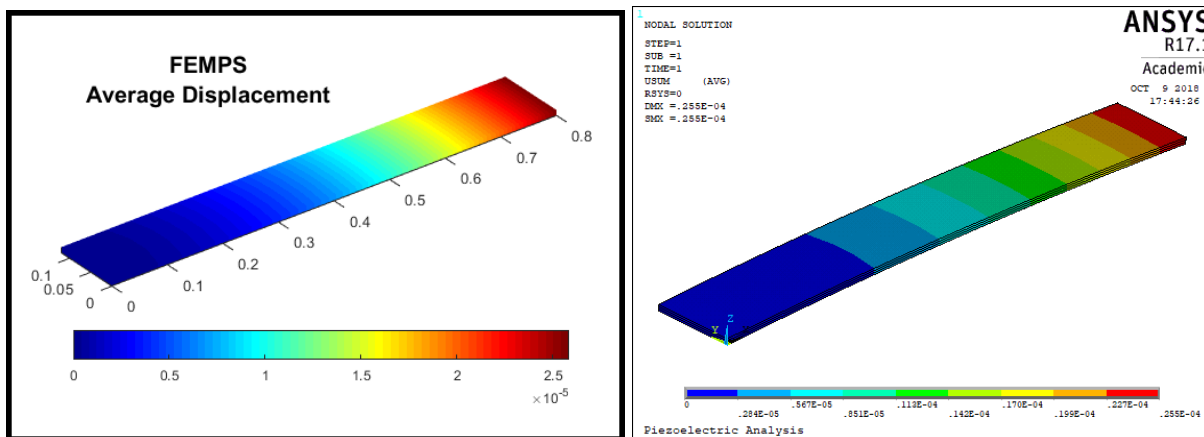
En la Sección 5.2.1 ya se han presentado y verificado resultados de análisis estáticos donde se comparan los diferentes tipos de elementos finitos, aunque tan solo se contem-

pla el uso de elementos finitos piezoeléctricos en configuración de actuadores. A continuación, se presenta el análisis estático de la estructura presentada en la Figura 5-1; una estructura acoplada que contempla tanto materiales elásticos como materiales piezoeléctricos, dispuestos simultáneamente en configuración de actuadores y sensores.

#### Parámetros de simulación:

- Elemento finito: *Brick* de 20 nodos, 4 grados de libertad por nodo.
- Malla: 180 elementos finitos, 4556 grados de libertad.
- Materiales: Aluminio y PZT-5A (ver Tabla 5-1).
- Condiciones de frontera: Placa empotrada en un extremo (*Cantilever*), 10V aplicados en el electrodo del actuador, 0V aplicados en los electrodos internos de los piezoeléctricos en contacto con la estructura elástica.

La Figura 5-5 presenta una comparación del desplazamiento equivalente. En esta figura, el color azul representan desplazamiento cero, mientras el color rojo representa los puntos con mayor desplazamiento equivalente. Aunque visualmente las dos gráficas presentan resultados similares y es posible determinar que ambos casos tienen la misma distribución de desplazamiento y están en el mismo orden de magnitud, es necesario clarificar en detalle los resultados.



(a) Análisis estático FEMPS

(b) Análisis estático ANSYS

**Fig. 5-5.:** Comparación de análisis estático. Distribución del desplazamiento equivalente obtenido con FEMPS (izquierda) y con ANSYS (derecha).

En la Figura 5-6 se presenta el desplazamiento de los nodos en la dirección vertical (eje  $z$ ) en función de la longitud de la barra (eje  $x$ ). La comparación se realiza de esta forma para que sea equivalente a los resultados de verificación mostrados en la Figura



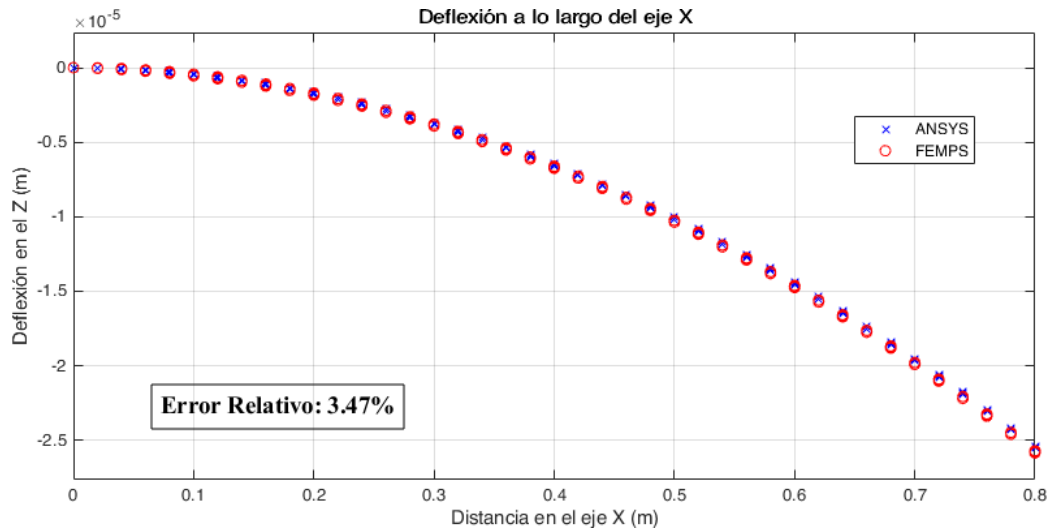


Fig. 5-6.: Comparación de deflexión estática entre los programas FEMPS y ANSYS.

5-4, además que la flexión en la dirección vertical es de importancia en el análisis de vibración estructural, dada la disposición del actuador piezoeléctrico y su polarización en el eje z. En la Figura 5-6 se identifica una tendencia de flexión que sufre la estructura en ambas simulaciones, reforzando los resultados presentados en la Figura 5-5. La diferencia relativa entre las curvas es de 3,47 %, lo que demuestra correlación en todos los resultados presentado y confirma la validez de los datos de simulación obtenidos con el *software* FEMPS.

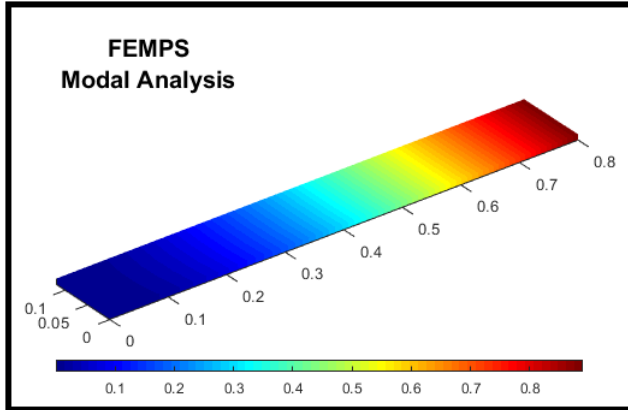
### 5.2.3. Análisis Modal

En esta sección se presenta el análisis dinámico de estructuras considerando los modos normales de vibración para el caso de estudio presentado en la sección 5.1. También se presentarán los resultados de verificación comparándolos con el *software* comercial.

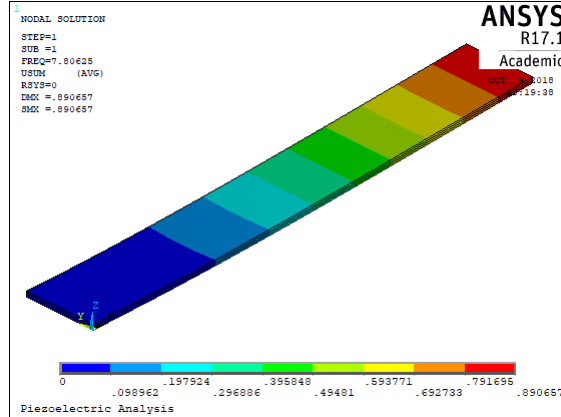
Inicialmente se presentan las formas modales (vectores propios) para los primeros tres modos normales de vibración, obtenidas tanto en el *software* FEMPS como en ANSYS. Luego, una comparación de las frecuencias de vibración (valores propios) es presentada para cuantificar la diferencia relativa de simulación entre ambos programas. En la Figura 5-7 se presentan la gráficas de desplazamiento modal, junto con las frecuencias de resonancia respectivas para cada modo normal de vibración.

Visualmente, los resultados presentados en la Figura 5-7 demuestran forma modales similares en los modos presentados. Adicionalmente, las frecuencias de vibración difieren tan solo en un 0,7%. De nuevo, para detallar la relación entre los resultados expuestos, se presenta en la Figura 5-8 una curva comparativa de los valores de frecuencia obtenidos

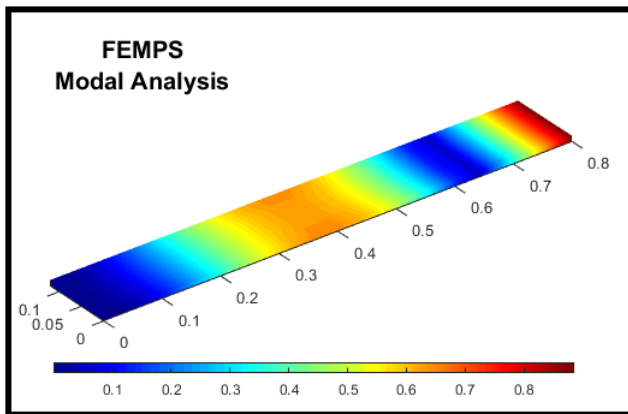
en cada programa y el error relativo asociado a las simulaciones.



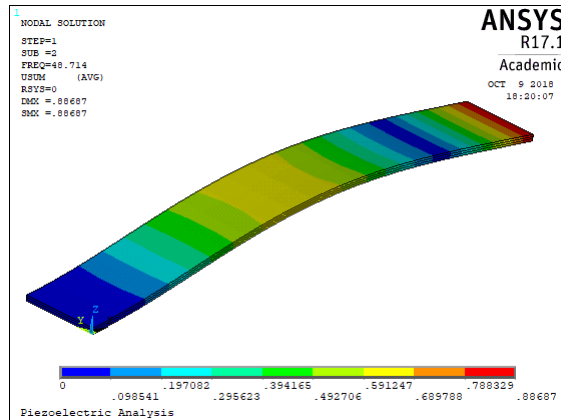
(a) Modo 1. Frecuencia: 7.7689 Hz



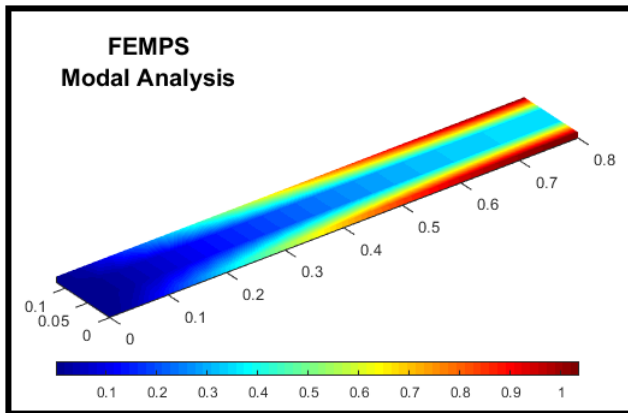
(b) Modo 1. Frecuencia: 7.8062 Hz



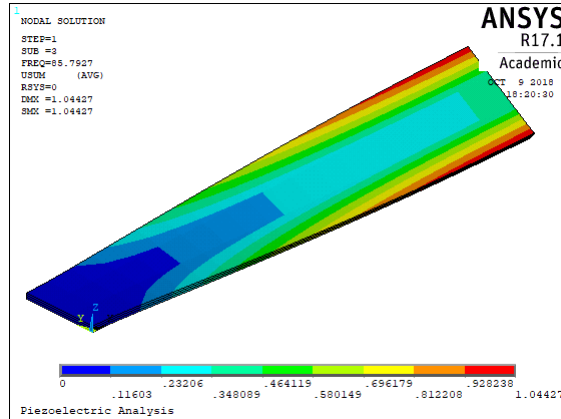
(c) Modo 2. Frecuencia: 48.457 Hz



(d) Modo 2. Frecuencia: 48.714 Hz



(e) Modo 3. Frecuencia: 84.802 Hz



(f) Modo 3. Frecuencia: 85.793 Hz

Fig. 5-7.: Análisis modal del caso de estudio usando FEMPS (zquierda) y ANSYS (derecha).

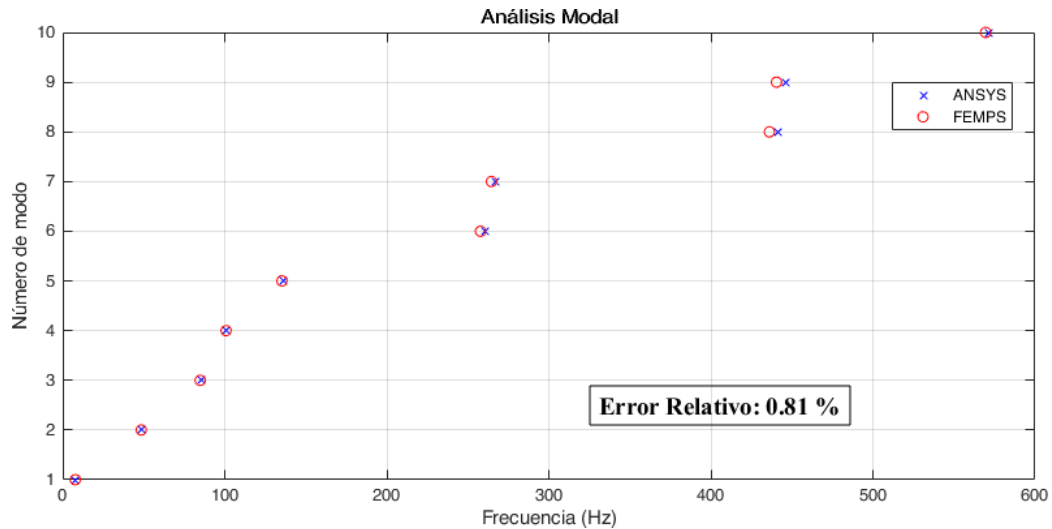
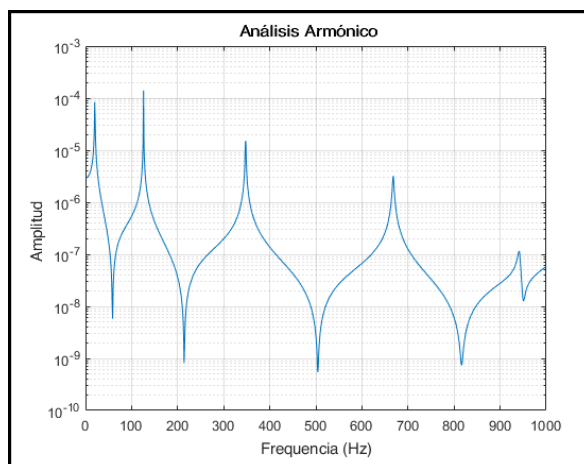


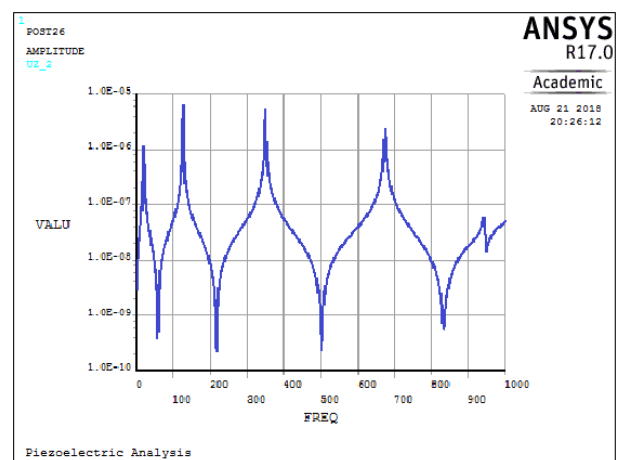
Fig. 5-8.: Comparación de frecuencias modales entre los programas FEMPS y ANSYS.

#### 5.2.4. Análisis Armónico

El análisis armónico aplicado al caso de estudio propuesto en este capítulo también es implementado en el programa de simulación de estructuras FEMPS con el fin de conocer la respuesta en frecuencia del sistema a diferentes tipos de perturbaciones (eléctricas y/o mecánicas). En este caso, la fuerza de excitación armónica se aplica como un voltaje distribuido sobre el electrodo del actuador piezoeléctrico equivalente a 10 Voltios, y se analiza la respuesta armónica de 0 Hz a 1 kHz en un nodo ubicado en el extremo de la viga, identificado en el análisis modal como un punto crítico de vibración.



(a) Análisis armónico FEMPS



(b) Análisis armónico ANSYS

Fig. 5-9.: Comparación de análisis armónico obtenido con (a) FEMPS y (b) ANSYS .

En la Figura 5-9 se presenta la comparación de los resultados para un análisis armónico.

En estas gráficas se presenta la magnitud de la respuesta armónica para un grado de libertad en la dirección del eje  $z$  (vertical) y en un punto de la viga. En esta comparación es posible ver que la respuesta del sistema en ambos programas es similar, los picos de resonancia están en las mismas frecuencias con tan solo un 3,42% de diferencia.

### 5.3. Topologías Óptimas Preliminares

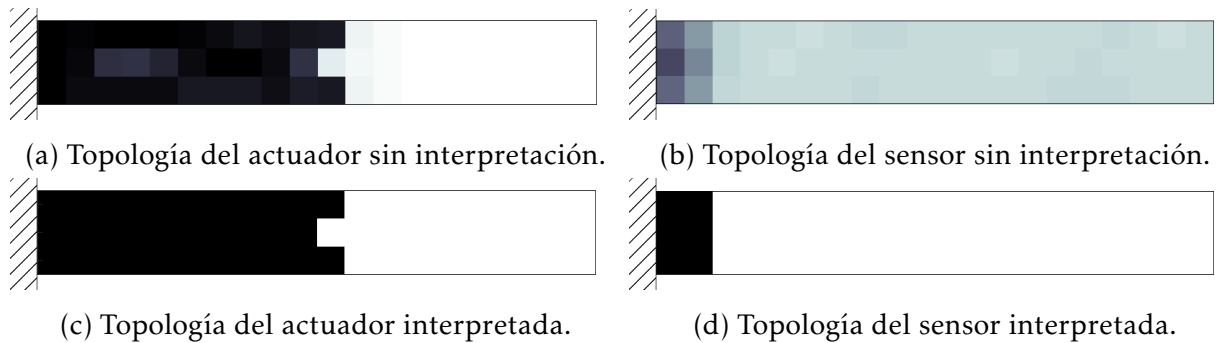
En esta sección se presentan los resultados de las topologías preliminares encontradas con el programa de optimización desarrollado en esta tesis para dos dominios de diseño; uno para el sensor y otro para el actuador. Las topologías mostradas en esta sección corresponden al resultado obtenido a partir de un conjunto de parámetros escogidos con base en la experiencia de configuración del programa de optimización adquirida durante su desarrollo en esta tesis. A partir de estos resultados, se realizarán variaciones de parámetros y análisis de rendimiento en sistemas de control activo en las siguientes secciones. En la Tabla 5-3 se presentan los parámetros iniciales escogidos.

Parámetro	Valor
Sistema de unidades	Estándar ( $m, kg, s, V, Hz$ )
Factores de penalización	$p_1 = 5$ (Elasticidad) $p_2 = 4$ (Piezoelectricidad) $p_3 = 4$ (Permitividad) $p_4 = 5$ (Densidad)
Discretización de malla	180 elementos (60 elementos por capa) 4556 Grados de libertad
Número de modos para reducción del modelo de control	10 Modos
Restricciones de volumen	Máximo volumen: 50 % Mínimo volumen: 20 %
Radio del filtro espacial	80 mm

**Tabla 5-3.:** Conjunto de parámetros iniciales para topologías preliminares.

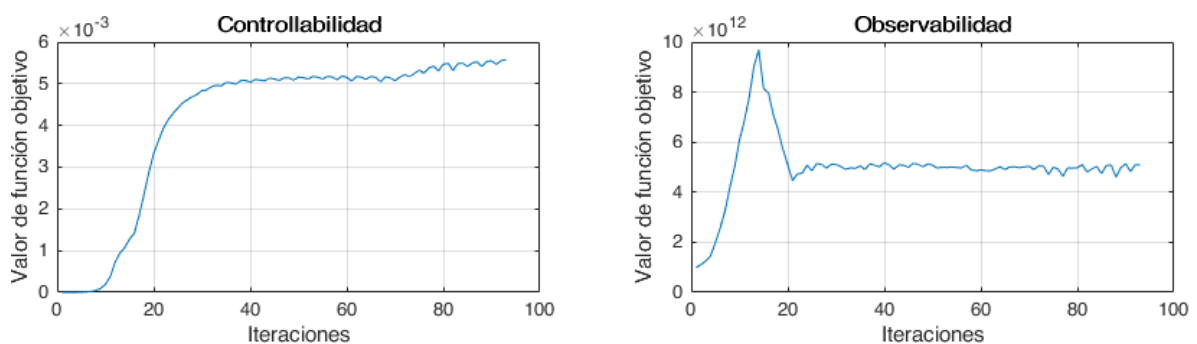
En la Figura 5-10 se presentan las topologías del actuador y sensor piezoeléctrico, como a una vista de sección desde la parte superior de la estructura del caso de estudio (Figura 5-1). Allí se muestra la información de la pseudo-densidad de cada elemento finito de acuerdo con una escala de color, donde los tonos más oscuros representan existencia de material, mientras los tonos más claros representan ausencia de material. Sin embargo, las imágenes contienen tonos intermedios (grises) que no definen claramente la presencia o ausencia de material; por tanto, es necesario interpretar el resultado obtenido para definir claramente una topología que se verá representada como zonas con material (elementos

en color negro) y zonas de la estructura vacías (elementos en color blanco).



**Fig. 5-10.:** Topologías óptimas para la capa del actuador y del sensor piezoeléctrico

En la Figura 5-10 se presenta el mismo resultado de las topologías antes y después de interpretar los valores de pseudo-densidad obtenidos en el programa de optimización desarrollado. En la figura es claro que la topología interpretada del actuador no difiere significativamente de la topología original; además, es claro que la cobertura de un transductor piezoeléctrico en configuración de actuador debe cubrir el costado izquierda de la placa, donde se ubica la restricción de desplazamiento de la estructura (viga en *Cantilever*). De forma similar, se presenta la imagen procesada de la topología del sensor, donde se definen las zonas que tendrán material y las que no. En la imagen se observa que la distribución de material para el sensor se enfoca en la base de la placa empotrada, usando un mínimo de material para sensar la vibración.

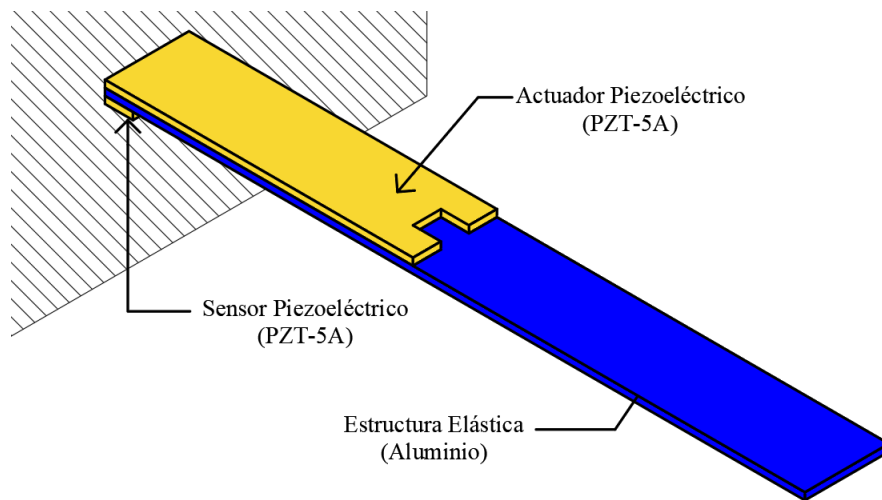


**Fig. 5-11.:** Evolución de funciones objetivo de controlabilidad y observabilidad.

En la Figura 5-11 se muestra la evolución de las funciones objetivo obtenidas para las topologías no interpretadas presentadas en la Figura 5-10, correspondientes a la maximización de la traza del gramiano de controlabilidad y la traza del gramiano de observabilidad. En estas gráficas es posible ver el comportamiento de las funciones objetivo y la relación entre ellas, ya que el resultado de optimización de una función en una determinada iteración, afecta el resultado de la otra función en la siguiente iteración. Esto se

debe a que el problema de ubicar sensores y actuadores se resuelve simultáneamente en cada iteración, mientras el problema de elementos finitos se resuelve con la estructura completa, tomando en cuenta el resultado de ambos problemas de optimización.

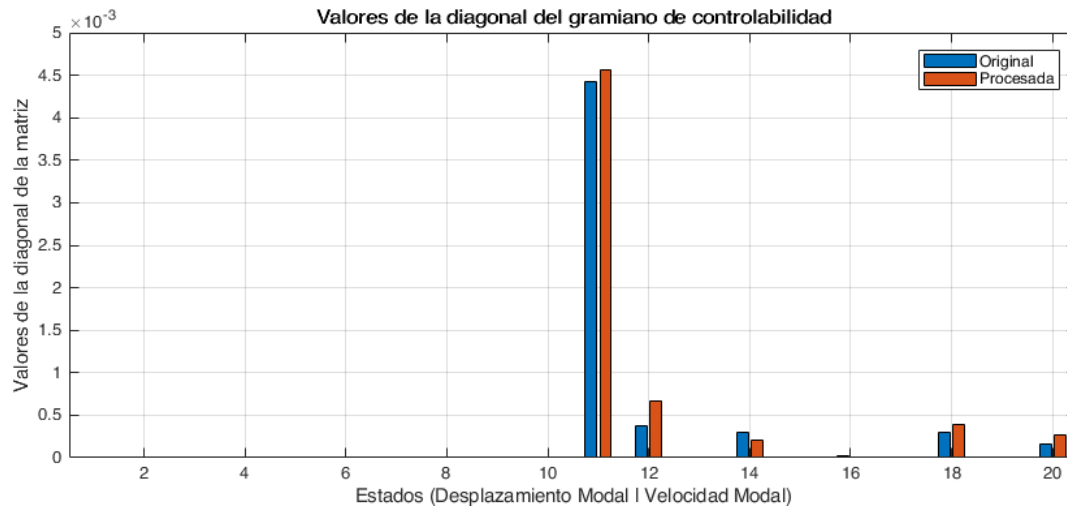
La evolución de las funciones objetivo varia durante el proceso de optimización, y a pesar de que ambas funciones logran llegar a convergencia después de 40 iteraciones; en términos generales, la función de controlabilidad es más estable que la función de observabilidad. Esto se debe a la dependencia que hay entre ambas funciones, donde un máximo valor de controlabilidad no necesariamente refleja un valor óptimo de observabilidad; en consecuencia, el programa debe balancear los valores óptimos de cada función objetivo para que sean compatibles entre ellas, además de cumplir todas las restricciones físicas y de optimización. Se puede observar que la evolución de la función objetivo del gramiano de observabilidad tiene un pico en las primeras iteraciones, pero después desciende y toma un valor estable. Esto se debe a las variaciones que presenta una función objetivo con respecto a las variaciones de la otra, ya que solo hasta que una función se estabiliza, la otra función también lo hace. También es importante resaltar que a partir de la iteración 70 se decide desconectar el filtro espacial de los límites móviles para recuperar el espacio solución completo y permitir que la topología se termine de definir de acuerdo al proceso de optimización. Esta es la razón de que el valor de convergencia se modifica en las última iteraciones para ambas funciones objetivo.



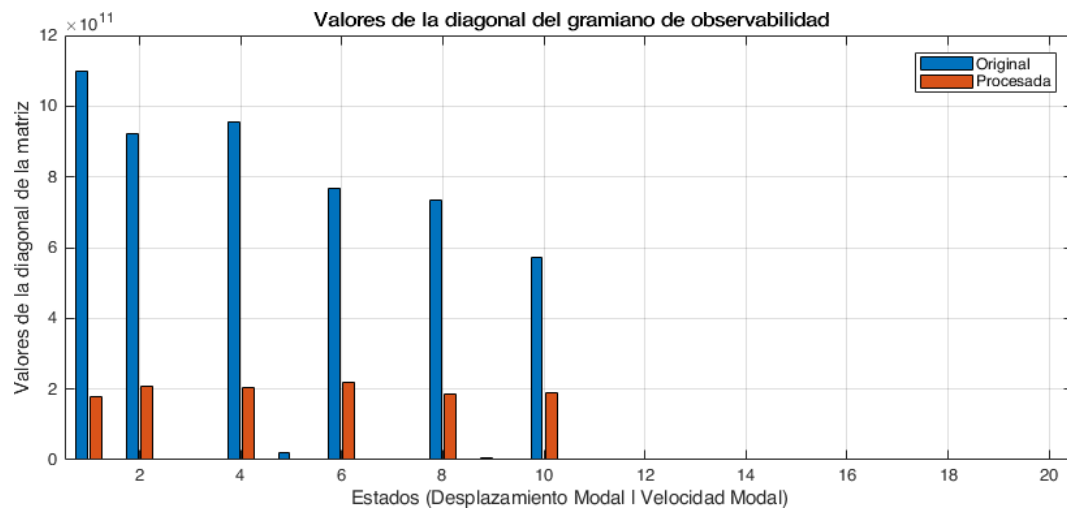
**Fig. 5-12.:** Distribución óptima interpretada de transductores piezoeléctricos.

Para comprender mejor el efecto de la interpretación de las topologías de la Figura 5-10, se presenta en la Figura 5-12 la representación isométrica de las topologías interpretadas de los transductores sobre la estructura, originalmente mostrada en la Figura 5-1. En esta imagen es posible entender cómo la topología óptima procesada puede lograr una disposición de actuador y sensor manufacturable, aunque esto no fue considerado como

una restricción de manufactura en la formulación del problema optimización.



**Fig. 5-13.:** Comparación de gramianos de controlabilidad. Valores de desplazamiento modal en la mitad izquierda, y de velocidad modal en la mitad derecha de la gráfica.



**Fig. 5-14.:** Comparación de gramianos de observabilidad. Valores de desplazamiento modal en la mitad izquierda, y de velocidad modal en la mitad derecha de la gráfica.

Para verificar el efecto que tienen las topologías obtenidas sobre la controlabilidad y la observabilidad del sistema, en las figuras 5-13 y 5-14 se presenta en detalle la comparación del gramiano de controlabilidad y del gramiano de observabilidad antes y después de interpretar las topologías de la Figura 5-10. Las figuras se presentan como diagramas de barras, correspondientes a los valores de la diagonal de la matriz del gramiano de controlabilidad y del gramiano de observabilidad.

En estos diagramas de barras, la mitad izquierda de la gráfica corresponde a los estados asociados al desplazamiento modal, mientras la segunda mitad, la derecha, corresponde a los estados asociados a la velocidad modal. En el caso de las figuras 5-13 y 5-14, los primeros 10 valores corresponden al valor de controlabilidad u observabilidad sobre los desplazamientos modales, y los siguientes 10 valores corresponden al valor controlabilidad u observabilidad sobre las velocidades modales. Los desplazamientos modales y las velocidades modales, en conjunto, forman las variables de estado del sistema de control.

Por parte del gramiano de controlabilidad (Figura 5-13), los cambios no son significativos ya que la controlabilidad de cada modo de vibración se mantiene en el mismo rango, aunque se percibe que la topología interpretada tiene más controlabilidad en algunos modos, en especial en el primer modo. Este efecto se debe a que el procesamiento de la pseudo-densidad de cada elemento finito se realiza aproximando cada valor mayor a 0.45 hasta 1, por tanto, la cantidad de material en el actuador aumenta ligeramente y por tanto aumenta la capacidad de control.

Por parte del gramiano de observabilidad (Figura 5-14), es notable la disminución en los valores de observabilidad de cada modo, con diferencias de hasta 10 veces. Este fenómeno se debe a que muchos elementos finitos que tienen pseudo-densidades intermedias (en escala de grises) contribuyen a aumentar los niveles de observabilidad, pero al procesar la topología estos elementos desaparecen y la observabilidad disminuye, aunque este proceso de interpretación es conservador en las posiciones óptimas de los transductores.

## 5.4. Variación de Parámetros

En esta sección, se presenta una exploración de parámetros realizando variaciones en el programa de optimización con el fin de entender la influencia sobre las topologías obtenidas en la sección anterior. Finalmente, se escoge un conjunto de las topologías obtenidas como referencia para realizar los análisis de control de vibraciones.

La lista de parámetros que se pueden modificar para resolver el problema de optimización es amplia, aunque algunos parámetros tienen más influencia que otros en la solución del problema de optimización topológica. Así, en la presente sección se realiza un estudio sobre los parámetros más relevantes, y los demás se mantienen fijos para todos los casos presentados. En el mismo orden que se presenta la siguiente lista de variaciones, se presentarán los resultados:

- Sistema de Unidades
- Factores de penalización en el modelo de interpolación de material

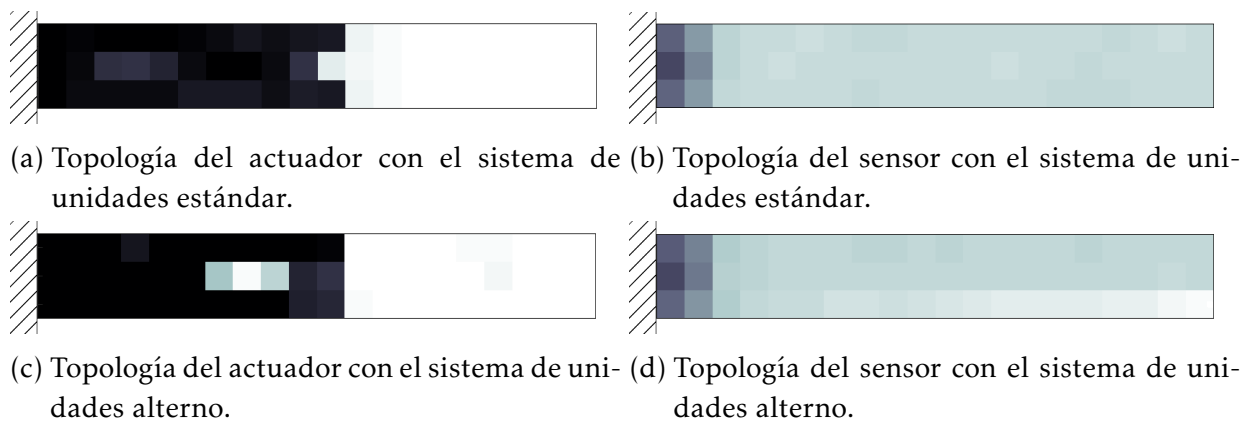


- Discretización de malla en el modelo de elementos finitos
- Número de modos usados en la reducción del modelo
- Restricciones de volumen
- Pesos en la función objetivo

Los resultados presentados a continuación corresponden a las diferentes topologías obtenidas al variar diferentes parámetros y configuración del programa de optimización.

### 5.4.1. Sistema de Unidades

Debido a las diferencias en los ordenes de magnitud de los unidades físicas utilizadas, fue necesario explorar un cambio en el sistema de unidades para afrontar problemas de condicionamiento numérico, tal como fue explicado en la sección 2.7.1. Para evaluar el efecto del cambio en el sistema de unidades sobre las topologías obtenidas, se presenta una comparación de resultados obtenidos variando ese parámetro de configuración del programa de optimización. En la Figura 5-15 se presenta una comparación de la topología del actuador y del sensor piezoeléctrico al cambiar el sistema de unidades estándar internacional MKS (Metros-Kilogramos-Segundos) a un sistema de unidades alterno de acuerdo a la conversión presentada en la Tabla 2-1.

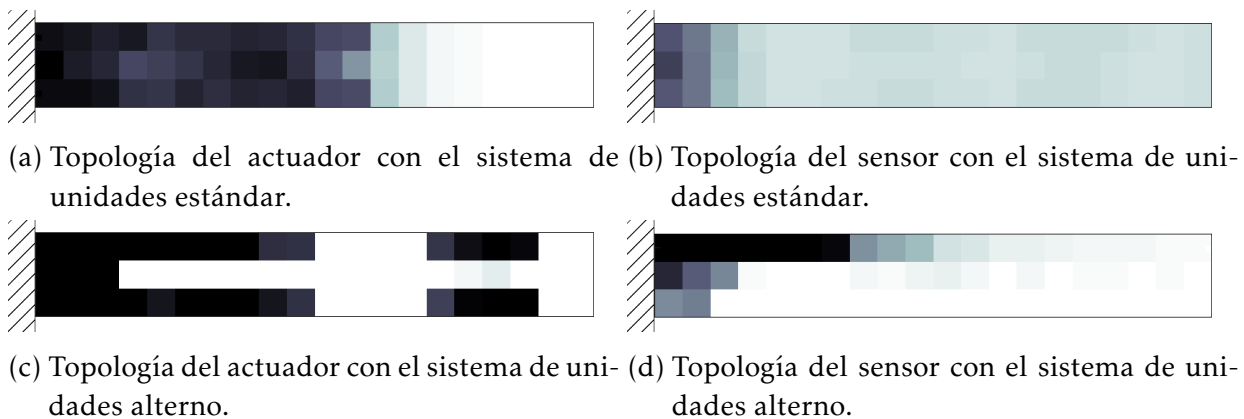


**Fig. 5-15.:** Topologías óptimas para la capa del actuador y del sensor piezoeléctrico obtenidas al variar el sistema de unidades.

A pesar de que los resultados presentados son similares, las topologías obtenidas no siempre mantienen esta similitud ante el cambio del sistema de unidades. En la Figura 5-16 se presenta otra comparación de dos resultados obtenidos usando el sistema de unidades estándar y el alterno, pero en esta ocasión se modifican los factores de penalización en el modelo de interpolación de material, los cuales son presentados la Tabla 5-4.

Parámetro	Valor
Factores de penalización	$p_1 = 4$ (Elasticidad)
	$p_2 = 3$ (Piezoelectricidad)
	$p_3 = 3$ (Permitividad)
	$p_4 = 4$ (Densidad)

**Tabla 5-4.:** Factores de penalización modificados para comparación de sistemas de unidades.



**Fig. 5-16.:** Topologías óptimas para la capa del actuador y del sensor piezoeléctrico obtenidas al variar el sistema de unidades y factores de penalización diferentes.

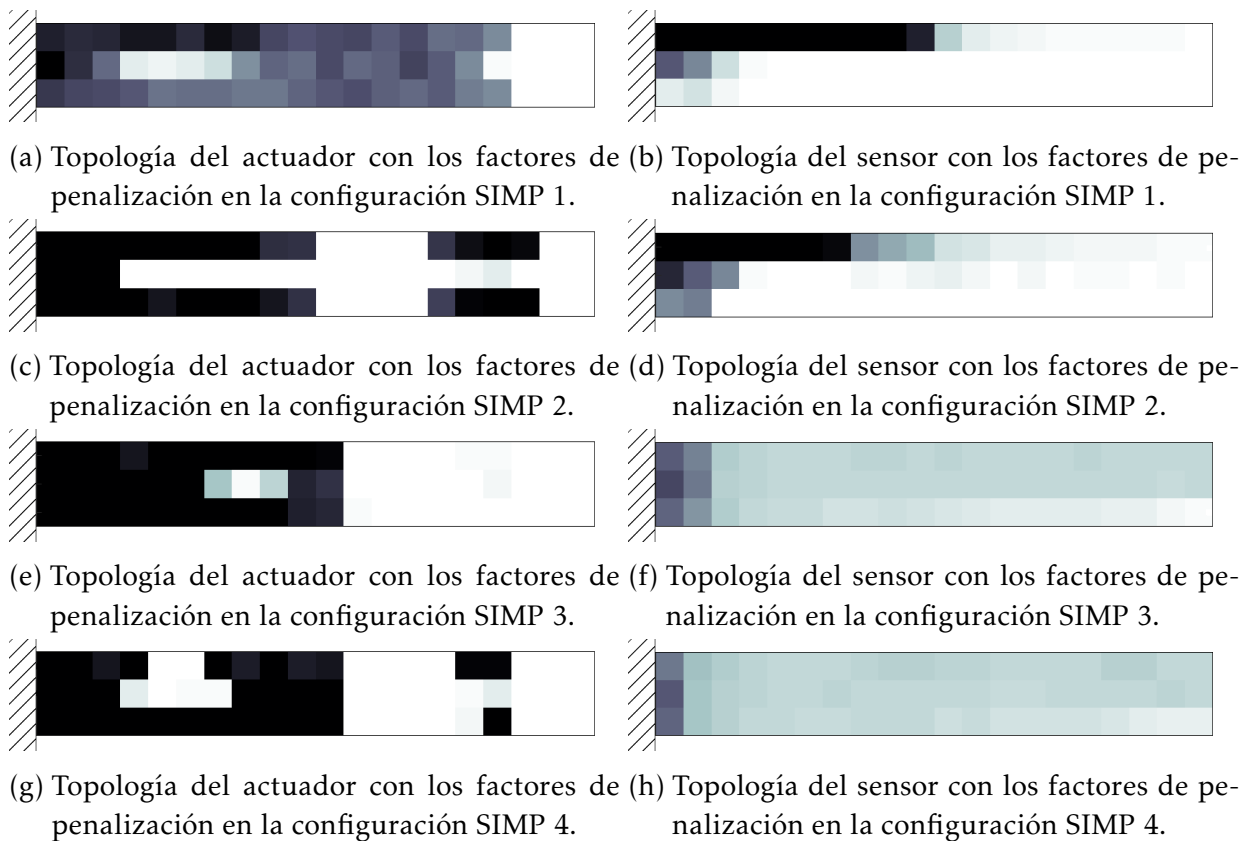
En esta figura es posible ver que el sistema de unidades estándar no presenta modificaciones significativas en la distribución del material con respecto a los resultados presentados en la Figura 5-15 a pesar del cambio realizado en los factores de penalización del modelo SIMP. Por el contrario, los resultados con el sistema de unidades alterno presentan variaciones entre topologías obtenidos al modificar estos factores de interpolación. Para analizar este fenómeno en los resultados, en la siguiente sección se realiza un análisis de resultados variando los factores de penalización y el sistema de unidades.

#### 5.4.2. Factores de Penalización

La forma como se interpolan las propiedades de los materiales durante el proceso de optimización juega un papel fundamental en la topología obtenida; es decir, los coeficientes que se utilizan en el modelo de interpolación de material SIMP afectan la solución del problema de optimización. En la Figura 5-17 se presentan las variaciones de las topologías de la capa de actuador y sensor piezoeléctrico usando el sistema de unidades alterno para cuatro diferentes configuraciones de factores de penalización del modelo de interpolación de material SIMP, descritas en la Tabla 5-5.

Parámetro	Valor de factores de penalización
Configuración SIMP 1	$p_1 = 3, p_2 = 2, p_3 = 2, p_4 = 3$
Configuración SIMP 2	$p_1 = 4, p_2 = 3, p_3 = 3, p_4 = 4$
Configuración SIMP 3	$p_1 = 5, p_2 = 4, p_3 = 4, p_4 = 5$
Configuración SIMP 4	$p_1 = 6, p_2 = 5, p_3 = 5, p_4 = 6$

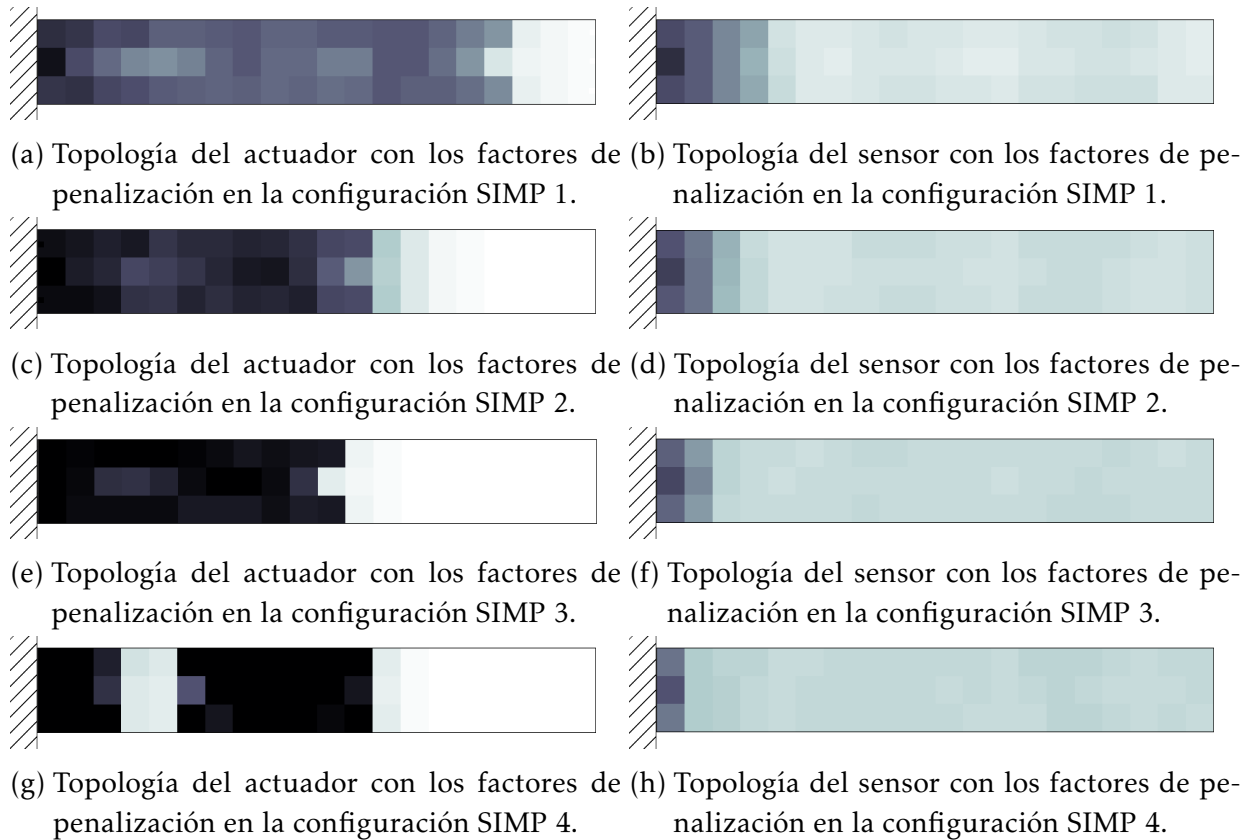
**Tabla 5-5.:** Diferentes configuraciones de los factores de penalización  $p_1$  (Elasticidad),  $p_2$  (Piezo-electricidad),  $p_3$  (Permitividad), y  $p_4$  (Densidad).



**Fig. 5-17.:** Topologías obtenidas para la capa del actuador y del sensor usando el sistema de unidades alterno al variar los factores de penalización del modelo SIMP.

En la Figura 5-17, se observa que al usar el sistema de unidades alterno y variar los factores de penalización, se obtienen topologías diferentes en cada caso y no se identifican tendencias claras en las topologías obtenidas. Para la capa del actuador, las topologías obtenidas difieren entre ellas para caso de configuración SIMP estudiado, mientras en la capa del sensor los primeros dos resultados tiene una similitud y los dos últimos resultados también son similares, pero entre ellos hay un diferencia significativa en la topología obtenida. Debido a esta variación de topologías en los resultados que presenta el sistema

de unidades alternativo al variar parámetros del programa de optimización, en la Figura 5-18 se presenta el mismo análisis realizado en la Figura 5-17 pero utilizando el sistema de unidades estándar, de acuerdo con la Tabla 2-1.



**Fig. 5-18.:** Topologías obtenidas para la capa del actuador y del sensor usando el sistema de unidades estándar al variar los factores de penalización del modelo SIMP.

En las imágenes de la Figura 5-18, se observa que las topologías obtenidas con el sistema de unidades estándar, usando diferentes factores de penalización, muestran una tendencia en la distribución del piezoeléctrico; tanto actuador como sensor, a disponer material en las zonas cercanas a la restricción de desplazamiento (costado izquierdo de la estructura), independiente de la configuración de factores de penalización usada.

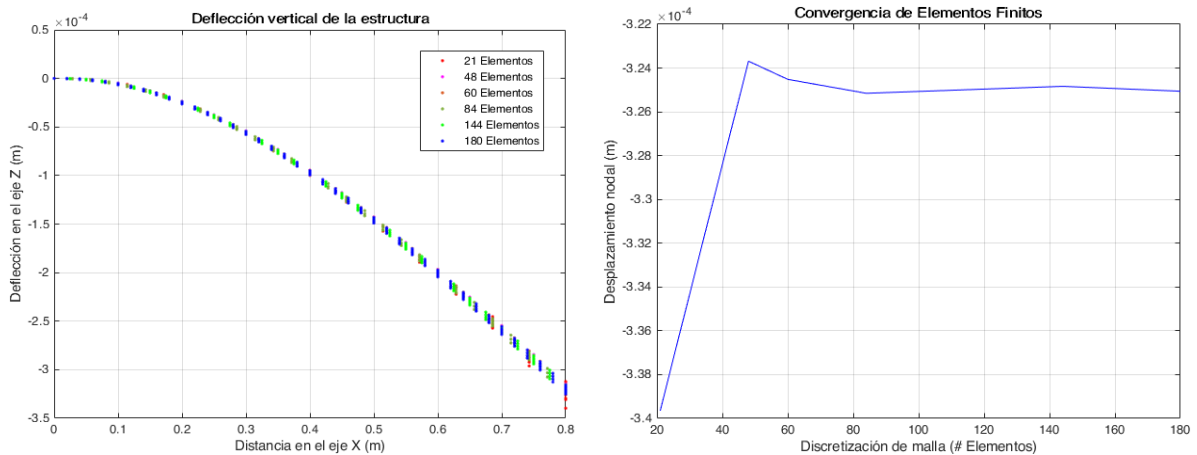
Al aumentar los valores de los factores de penalización, la escala de grises en la capa del actuador se disminuye logrando una definición de la topología más clara, mientras en la capa del sensor se reduce la cantidad de material definido y la escala de grises no se reduce significativamente. Sin embargo, la topología del actuador con factores de penalización muy altos se ha separado en dos partes, aun cuando sigue siendo una misma señal de control, un mismo actuador. En ambos casos; actuador y sensor, existe una similitud entre las topologías obtenidas con cada configuración de factores de penalización. Esto

demuestra estabilidad en los resultados obtenidos con el sistema de unidades estándar que con el sistema de unidades alterno.

### 5.4.3. Discretización de Malla

Un parámetro importante en un problema de optimización topológica es la discretización de la malla de elementos finitos. La malla utilizada en los resultados ya presentados; incluidos aquellos resultados de referencia de la Figura 5-10, tienen una discretización de malla que ya se ubica en zona de convergencia para el modelo numérico.

Para explorar esta convergencia de malla, la estructura del caso de estudio (Figura 5-1) es sometida a una carga estática de 1N en dirección vertical en el nodo superior del extremo libre de la placa y se estudia su deflexión debido a la carga, como se ilustra en la Figura 5-19, donde además se presenta la curva de convergencia del valor de desplazamiento para el grado de libertad vertical donde se aplicó la fuerza estática.

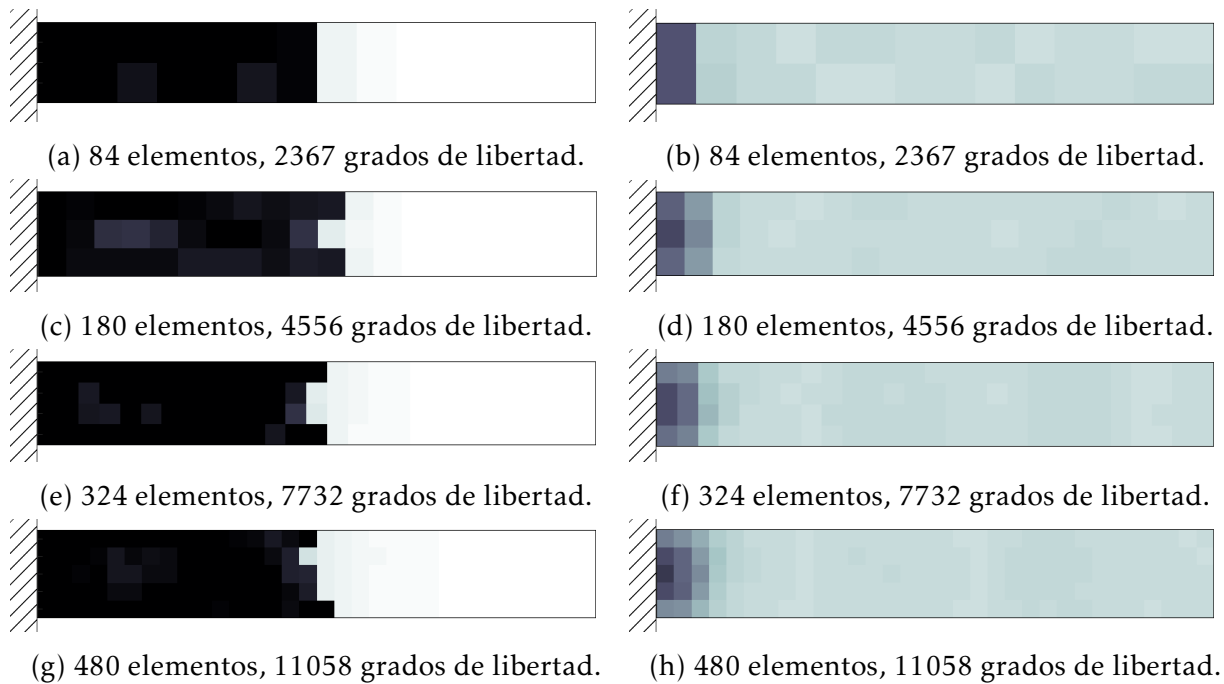


(a) Deflexión vertical de la placa en el nodo superior del extremo libre usando diferentes discretizaciones de malla. (b) Curva de convergencia de malla para el desplazamiento vertical de la placa en el extremo libre.

**Fig. 5-19.:** Gráficos de convergencia de malla en discretización de elementos finitos.

Aunque la malla usada se encuentra en convergencia, incluso usando muy pocos elementos finitos, se realiza una exploración de diferentes mallas para evaluar los efectos en la modificación de este parámetro sobre las topologías obtenidas. En la Figura 5-20 se muestran las topologías óptimas encontradas con diferentes discretizaciones de malla. En estos casos, las mallas van desde una simple con 84 elementos y 2367 grados de libertad, hasta una malla fina con 480 elementos y 11058 grados de libertad.

En las imágenes de la Figura 5-20 se observa que las topologías del actuador y del sensor mantienen una tendencia de igual distribución de material con las diferentes discre-



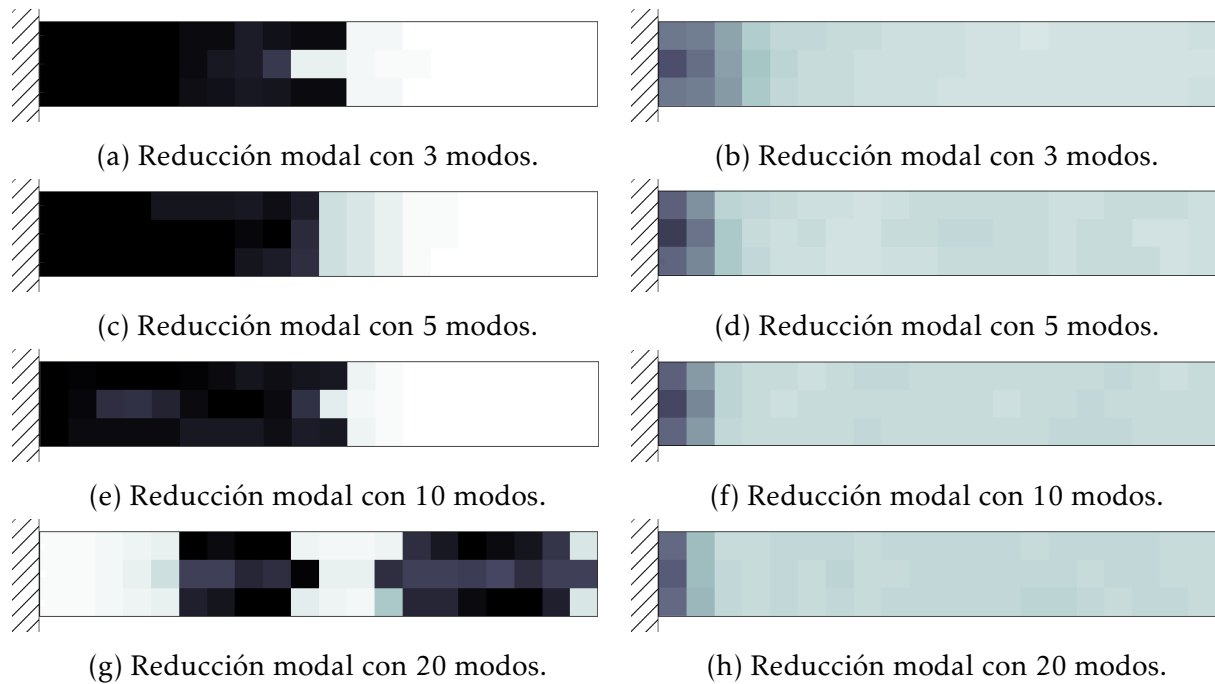
**Fig. 5-20.:** Topologías obtenidas para el actuador (columna izquierda) y para el sensor (columna derecha) usando diferentes discretizaciones de la malla.

tizaciones de malla usadas en la comparación. Esta tendencia constante en los resultados indica una buena independencia de la malla, la cual es lograda en conjunto por los elementos de segundo orden usados en el modelo numérico y por el filtro espacial aplicado en el problema de optimización. Esto le permite al programa el uso de mallas con diferentes discretizaciones, dependiendo de la necesidad del diseñador en términos de la resolución de la topología, y de la disponibilidad en capacidad de procesamiento.

#### 5.4.4. Reducción Modal del Sistema

Luego de modificar los parámetros del modelo de elementos finitos, el siguiente análisis consiste en modificar la cantidad de modos de vibración (vectores propios) que se usan en la reducción modal durante la conversión del modelo de elementos finitos al modelo en espacios de estado, tal como fue explicado en la sección 3.5.2. En la Figura 5-21 se presentan; respectivamente, las topologías óptimas para el actuador y el sensor piezoeléctrico usando 3, 5, 10 y 20 modos de vibración en la reducción modal que se debe realizar durante la conversión del modelo de elementos finitos a espacios de estado.

En la Figura 5-21, se puede observar que la topología del sensor es similar para los cuatro casos de estudio, ya que en todos los resultados obtenidos existe concentración de material en el extremo izquierdo de la placa. Por parte del actuador, solo se logra identi-



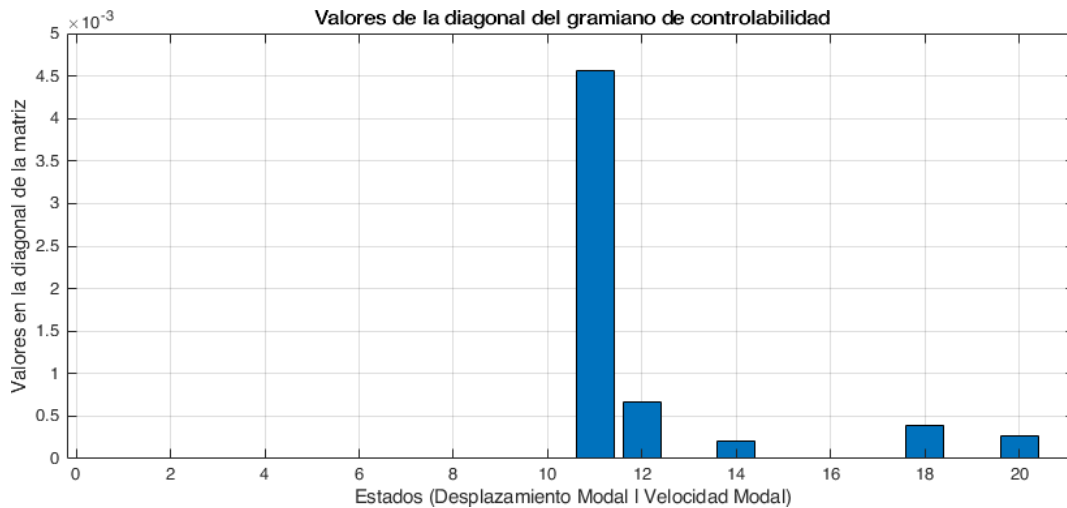
**Fig. 5-21.:** Topologías obtenidas para el actuador (izquierda) y el sensor (derecha) usando diferente cantidad de modos de vibración en la reducción del modelo de la estructura.

car una tendencia de acumulación de material en los primeros tres resultados, en los que usan 3, 5 y 10 modos para reducir el modelo. Este fenómeno de similitud en los resultados está asociado al incremento de controlabilidad u observabilidad en los primeros modos de vibración para todos los casos de estudio; es decir, el programa de optimización encuentra mejoras en la función objetivo al controlar u observar los primeros tres modos de vibración, independiente de la cantidad de modos usados para reducir el modelo del sistema.

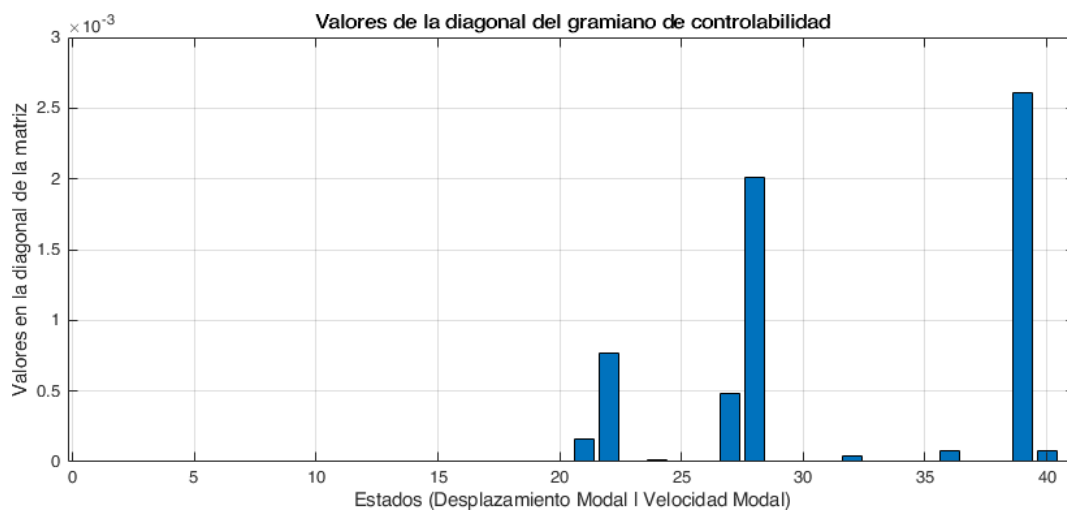
Sin embargo, al reducir el modelo con 20 modos; es decir, considerando más formas de vibrar de la estructura, el algoritmo encuentra un aumento de controlabilidad en esos modos superiores que los demás modelos no pueden detectar ni influir debido a su propia formulación matemática y, debido a esto, la topología obtenida no mantiene la tendencia como las demás, e incluso se divide el actuador en dos partes.

Para verificar las causas de este resultado, es necesario analizar en detalle la distribución de controlabilidad en la diagonal de la matriz del gramiano de controlabilidad para el caso de la reducción con 20 modos en comparación a su predecesor, el caso de reducción con 10 modos. En las figuras 5-22 y 5-23 se presentan diagramas de barras con los valores de la diagonal de la matriz del gramiano de controlabilidad para los dos casos en comparación, donde la primera mitad de los valores corresponde a la controlabili-

dad sobre los desplazamientos modales, y la siguiente mitad de valores corresponde a la controlabilidad sobre las velocidades modales.



**Fig. 5-22.:** Valores de la diagonal en la matriz del gramiano de controlabilidad para el caso de reducción del modelo con 10 modos de vibración. Valores de desplazamiento modal en la mitad izquierda, y de velocidad modal en la mitad derecha de la gráfica.



**Fig. 5-23.:** Valores de la diagonal en la matriz del gramiano de controlabilidad para el caso de reducción del modelo con 20 modos de vibración. Valores de desplazamiento modal en la mitad izquierda, y de velocidad modal en la mitad derecha de la gráfica.

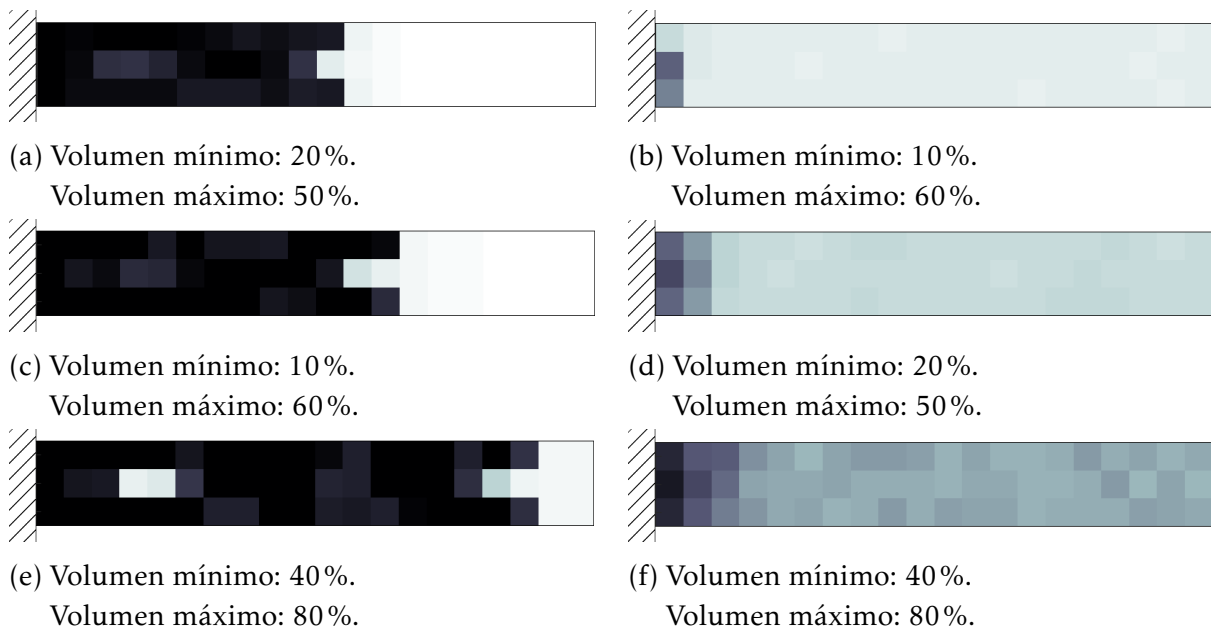
En las figuras de nuevo se evidencia que la controlabilidad solo está presente para las variables de estado que corresponden a las velocidades modales (mitad derecha de cada figura), fenómeno que tiene explicación desde la formulación matemática, como se explicó anteriormente. Además, es fácil ver que para el caso de la reducción con 10 modos (Figura 5-22) la controlabilidad se concentra sobre el primer modo de vibración (primer



estado de velocidad modal), lo cual tiene sentido al observar las topologías de reducción modal con 3 y 5 modos que presentan el mismo comportamiento de controlabilidad y por tanto resultan en una topología similar. Por el contrario, la controlabilidad en el caso de reducción con 20 modos (Figura 5-23) se concentra en los modos de vibración 2, 8 y 19; correspondientes a las variables de estado 21, 28 y 39 de la figura, lo cual explica las diferencias entre las topologías obtenidas al reducir con 3, 5 y 10 modos de vibración, en comparación a la reducción hecha con 20 modos.

### 5.4.5. Restricciones de Volumen

Otro parámetro importante de un problema de optimización topológica es la restricción de volumen. En esta sección se modificarán esos valores para identificar su influencia en la solución del problema de optimización. En la Figura 5-24 se presentan las topologías encontradas cuando las restricciones de volumen máximo y mínimo son modificadas en ambos problemas de optimización, tanto en la maximización de controlabilidad como en la maximización de observabilidad. En estas topologías se puede ver que la cantidad de material en el actuador cambia en función del aumento de la restricción de volumen máximo. Este fenómeno es coherente con la física del problema, ya que una mayor cantidad de material del actuador en una distribución óptima, podría aumentar la controlabilidad del sistema al tener más superficie de la estructura cubierta con materiales en configuración de actuadores realizando fuerzas de control sobre la vibración.



**Fig. 5-24.:** Topologías obtenidos para el actuador (izquierda) y el sensor (derecha) con variaciones en las restricciones de volumen.

Por otra parte, en la segunda columna de la Figura 5-24 se presentan las topologías encontradas para el dominio de diseño del sensor piezoeléctrico cuando las restricciones de volumen máximo y mínimo son modificadas. En estas topologías se puede ver que la cantidad de material del sensor disminuye cuando la restricción de volumen también es disminuida. Esto evidencia que esa restricción está activa constantemente para el sensor, de forma similar que en el dominio de diseño del actuador.. Este fenómeno demuestra que la cantidad de material necesario para sensar vibraciones puede ser muy poco, aunque se ve aún en las topologías encontradas un escala de grises que puede aportar aumentos de observabilidad, ya que las propiedades del material piezoeléctrico, con pseudo-densidades intermedias, favorece la capacidad de sensado.

#### 5.4.6. Pesos en las Funciones Objetivo

Por último, se realiza una modificación a la formulación del problema de optimización presentado en la Sección 4.7. A las funciones objetivo del problema, definidas como la traza de la matriz del gramiano de controlabilidad y de observabilidad, se ponderan mediante pesos para formar una suma ponderada de términos de la matriz de cada gramiano. Esta modificación obedece al hecho de que la traza de una matriz es la suma de los términos de su diagonal, y en el caso de las matrices de los gramianos, cada término de la diagonal corresponde a un estado del sistema que está asociado a un modo de vibración; es decir, al agregar coeficientes en la sumatoria de los términos de la diagonal se modificará la topología óptima de acuerdo al peso agregado en los estados del sistema, favoreciendo la controlabilidad o la observabilidad de modos de vibración específicos.

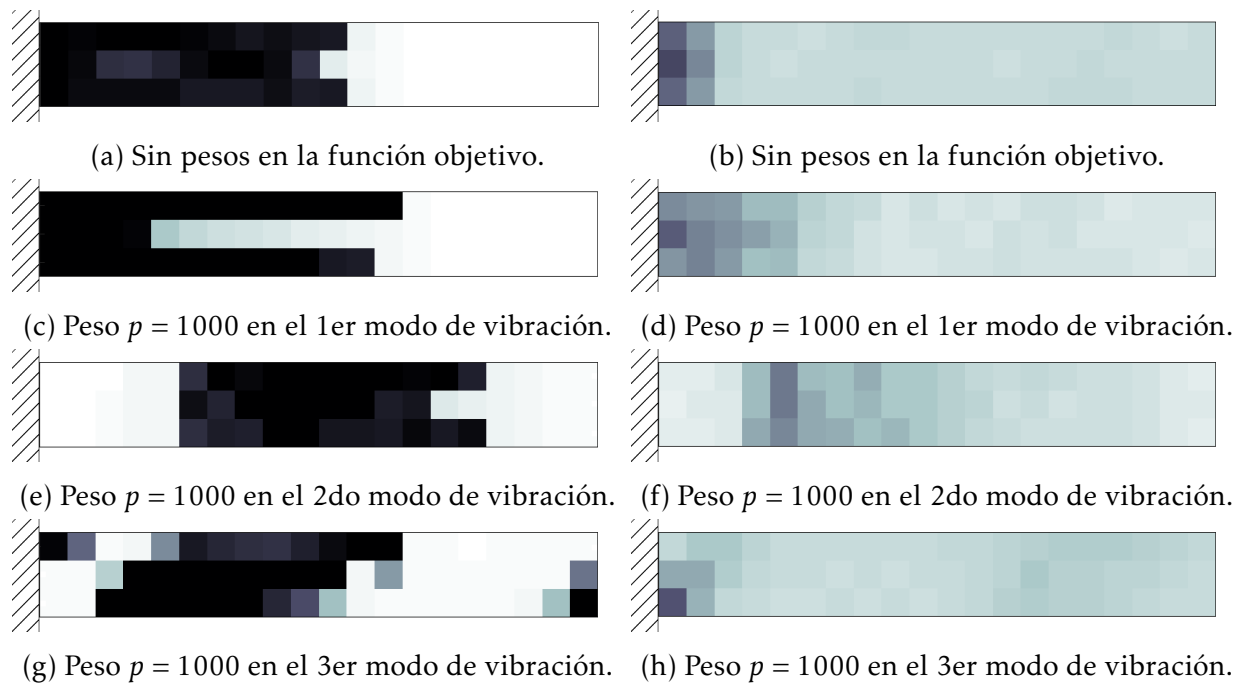
Así, el nuevo problema de optimización con pesos se escribe como:

$$\begin{aligned} \max_{\rho_c} \quad & \text{trace}(\mathbf{C}_c \mathbf{W}_c) \\ \text{s.t.} \quad & \int_{\Omega_c} \rho_c d\Omega_c - V_r \leq 0; \quad 0 \leq \rho_c \leq 1 \end{aligned} \quad (5-1)$$

$$\begin{aligned} \max_{\rho_o} \quad & \text{trace}(\mathbf{C}_o \mathbf{W}_o) \\ \text{s.t.} \quad & \int_{\Omega_o} \rho_o d\Omega_o - V_r \leq 0; \quad 0 \leq \rho_o \leq 1 \end{aligned} \quad (5-2)$$

Donde las matrices  $\mathbf{C}_c$  y  $\mathbf{C}_o$ , son matrices diagonales con los coeficientes de cada peso que se desee aplicar sobre el problema de optimización. Cada coeficiente de estas matrices estará asociado a un modo de vibración específico de acuerdo a la definición de las variables de estado del sistema. Los demás términos en la formulación de este nuevo problema de optimización permanecen iguales a los presentados en la sección 4.7.1.

En la Figura 5-25 se presenta la comparación de las topologías obtenidas para el actuador y el sensor utilizando pesos con valores  $p = 1000$  en las funciones objetivo, en contraste con la topología obtenida sin usar pesos en la formulación. En esta figura se puede observar la influencia de ponderar algún modo de vibración específico en la topología resultante. Para el caso de la topología con pesos en el primer modo de vibración, se puede ver que el material piezoeléctrico en el actuador se distribuye en el perímetro de la placa, manteniendo una tendencia de distribución similar a la topología obtenida sin pesos en la formulación, lo cual indica que la controlabilidad es fuertemente determinada por el primer modo de vibrar cuando no usan pesos. En el caso del sensor, también se observan topologías similares cuando se pondera el primer modo de vibrar, lo cual refleja que la observabilidad también es influenciada en su mayoría por el primer modo cuando no se usan pesos en la formulación del problema.

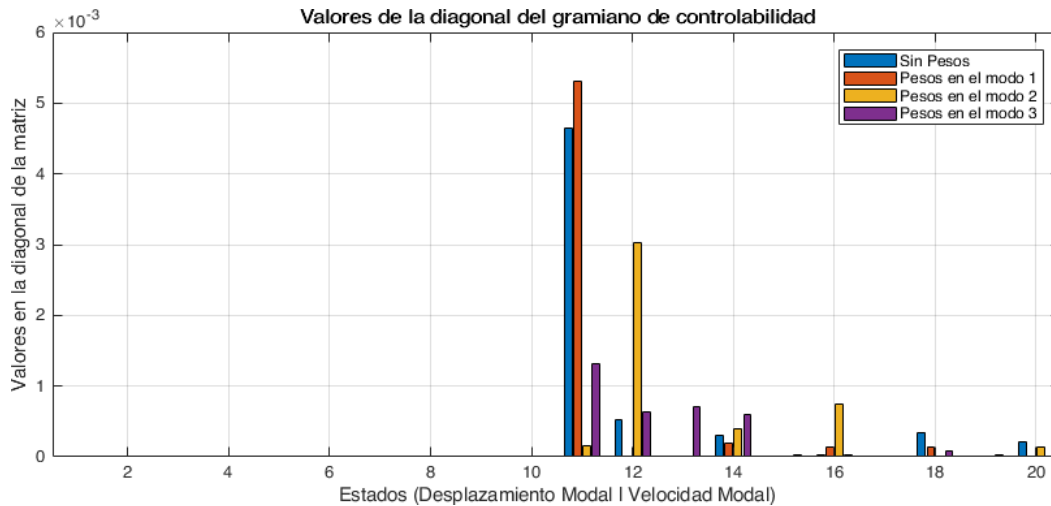


**Fig. 5-25.:** Topologías obtenidas para el actuador (izquierda) y el sensor (derecha) aplicando pesos en la función objetivo.

Por otra parte, las topologías obtenidas al agregarle pesos al segundo modo de vibración distribuye la mayoría del material hacia el centro de la placa, mientras las topologías con los pesos en el tercer modo divide en tres partes el actuador, repartiendo la gran mayoría del material en el centro y algo en los extremos de la estructura, mientras el sensor distribuye el material en una esquina de la placa.

Este fenómeno de la variación de las topologías cuando se agregan pesos tiene una relación directa a la forma de los modos de vibración de la estructura. En la Figura 5-7, se

presentaron las formas de vibración obtenidas al realizar el análisis modal de la estructura del caso de estudio (Figura 5-1) para los primeros tres modos, en donde se puede ver que el segundo modo; como modo de flexión, tiene mayores valores de deformación en la parte central de la placa, mientras el tercer modo de vibración es de carácter torcional. Al analizar de nuevo las topologías de la Figura 5-25 se puede ver que la distribución de material de los modos es acorde a la forma de vibración, y el material se distribuye de acuerdo a los puntos de mayor deformación de la estructura.



**Fig. 5-26.:** Influencia de los pesos en los gramianos de controlabilidad. Valores de desplazamiento modal en la mitad izquierda, y de velocidad modal en la mitad derecha de la gráfica.

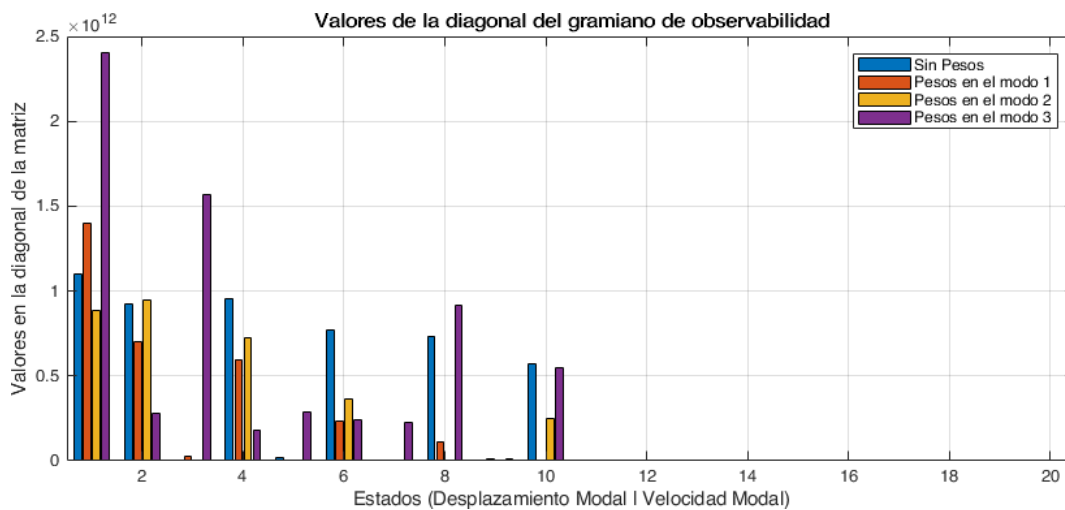
Para explorar el efecto de los pesos sobre el desarrollo de la función objetivo y cómo influye finalmente en la controlabilidad del sistema, se presenta en la Figura 5-26 la gráfica comparativa de los valores de la matriz de controlabilidad asociados a los modos de vibrar para cada una de las topologías previamente presentadas. En esta figura es interesante notar cómo los valores de controlabilidad para cada modo cambian de acuerdo al peso que se le agregó en la formulación de la función objetivo. Para el caso que no tiene ningún peso agregado, el modo de mayor controlabilidad es el primero, como también lo es para el caso del peso agregado en el primer modo, tal como se esperaba. A pesar de que la topología con pesos en el primer modo logra un valor de controlabilidad mayor en ese modo, pierde controlabilidad en los demás modos con respecto a la topología que no tiene pesos agregados.

Para el caso de los pesos agregados en el segundo modo, es evidente que la mayor distribución de controlabilidad se concentró en ese modo y perdió en su mayoría controlabilidad sobre los demás modos. Sin embargo, el caso en el que se agregó pesos en el tercer modo resultó tener una distribución de controlabilidad más equitativa en los cuatro primeros modos, con más relevancia en el primer modo, a pesar de que obtuvo valores

de controlabilidad muy bajos en relación a los otros casos. No obstante, esta última topología es la única que tiene controlabilidad sobre ese tercer modo, ya que ninguna de las demás topologías logró tener impacto sobre este modo con la distribución de material que obtuvieron.

Por otra parte, cuando se agregan pesos en la formulación del problema de optimización también se ve afectada la topología resultante del sensor, ya que la distribución de material puede variar de acuerdo al modo en que se requiere aumentar la observabilidad. En la Figura 5-25 es posible ver la variación en la topología del sensor de acuerdo al modo de vibración escogido al aplicar los pesos en la formulación del problema de optimización. En el caso que se aplican pesos en el primer modo de vibración; de forma similar al caso del actuador, la tendencia de distribuir material es semejante a la obtenida en el caso en que no se le agregaron pesos a la formulación del problema; sin embargo, la cantidad de material concentrada en el lado izquierdo de la placa es mayor en este caso.

Para los otros dos casos, cuando se le agregan pesos al segundo y tercer modo se obtienen distribuciones de material que tiene una tendencia similar a las topologías encontradas para el actuador, de forma que el material se ubica en lugares similares a la distribución en el actuador. Aunque esto no es completamente claro para la topología cuando se agrega peso en tercer modo, ya que el sensor se ubica en la esquina opuesta al actuador, la tendencia en la topología es a ubicar material en las esquinas para ambos casos y en cantidades similares. De hecho, este fenómeno se evidencia en todos los resultados presentados hasta el momento, pero solo hasta este punto se hace evidente que el actuador y el sensor tienden distribuciones topológicas similares en la estructura.



**Fig. 5-27.:** Influencia de los pesos en los gramianos de controlabilidad. Valores de desplazamiento modal en la mitad izquierda, y de velocidad modal en la mitad derecha de la gráfica.

Nuevamente, para estudiar en detalle los pesos en las topologías presentadas para el sensor y sus efectos en la observabilidad del sistema, en la Figura 5-27 se muestra una gráfica comparativa de los valores de la diagonal de la matriz de gramiano de observabilidad, respectivamente asociados a los modos de vibración de la estructura. En esta figura, es interesante notar que la topología que tiene más observabilidad sobre el primer modo de vibración es a la que tiene pesos en el tercer modo de vibrar. Además de eso, esa topología es la única que tiene observabilidad sobre el tercer modo, tal como se esperaba. Las demás topologías tienen una distribución de observabilidad mejor balanceada sobre los primeros modos, siendo la topología que no tiene pesos agregados en la formulación la que tiene mayor observabilidad en los modos superiores (modo del 5 a 10) con respecto a las demás topologías. Así, para el caso del sensor; los pesos aplicados no tienen efectos significativos con respecto a las topologías obtenidas.

## 5.5. Respuesta del Sistema de Control

El modelo de elementos finitos y la topología óptima de los transductores piezoeléctricos son dos insumos fundamentales en la construcción de un sistema de control. Los resultados de estos dos insumos fueron presentados en las secciones previas y se usarán en esta sección para verificar el rendimiento de los resultados a través de un esquema de control activo de vibraciones utilizando una topología óptima de referencia.

Al tener que convertir el modelo de elementos finitos al modelo de espacios de estado, y luego ser reducido a un espacio en coordenadas modales, el esquema de control se convierte en un esquema de control modal. Esto implica que las variables de estado disponibles por el controlador serán el desplazamiento modal y la velocidad modal. En esta sección se presentarán los resultados obtenidos con el modelado del sistema, la optimización topológica de los transductores piezoeléctricos y el esquema de control modal.

En la sección 3.7 fue presentado el desarrollo teórico de los sistemas de control óptimo utilizados en esta tesis. Adicionalmente, fue presentada la implementación de un controlador LQG en el software *Simulink* de acuerdo al esquema presentado en la figura 3-10. En esta sección se analizan cuatro características fundamentales del sistema de control:

- Acción de control (voltaje del actuador).
- Salida del sistema (voltaje del sensor).
- Variables de estado (desplazamiento modal y velocidad modal).
- Vibración estructural (desplazamiento nodal).

### 5.5.1. Efectos de Control al Interpretar Topologías

Ya que las topologías obtenidas del algoritmo de optimización siempre tendrán algunas pseudo-densidades en valores intermedios, lo cual se puede entender en las imágenes como escala de grises, siempre será necesario un post-procesamiento de los datos para obtener topologías completamente definidas que puedan ser fabricadas en la realidad. En la sección 5.3 se presentaron los resultados del caso de estudio para una configuración de parámetros de optimización definidos y se realizó una interpretación de esos resultados (ver Figura 5-10). En esta sección, se compararán los resultados del rendimiento en el control de vibraciones de esas topologías obtenidas sin procesar y luego de ser procesadas.

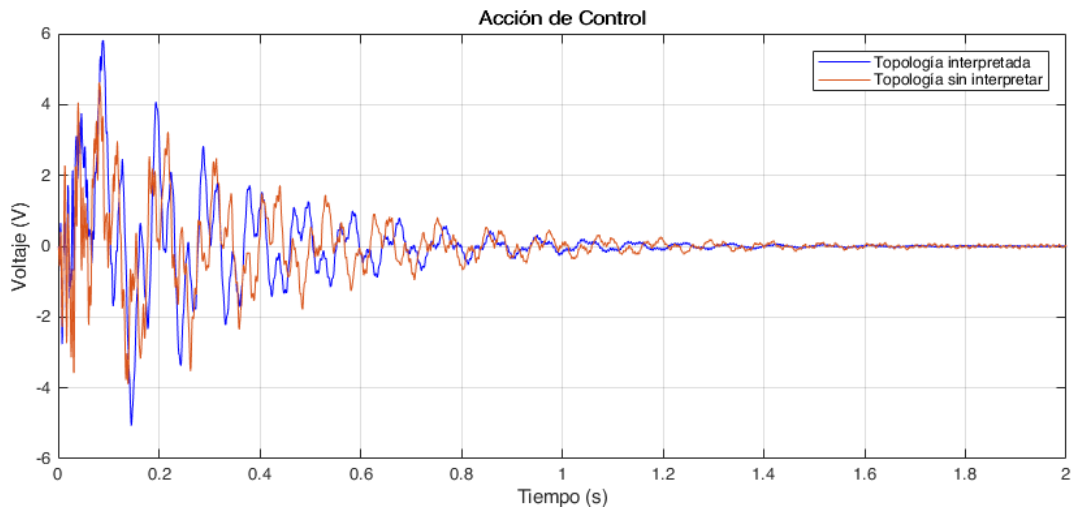


Fig. 5-28.: Comparación de la acción de control para las topologías interpretada y sin interpretar.

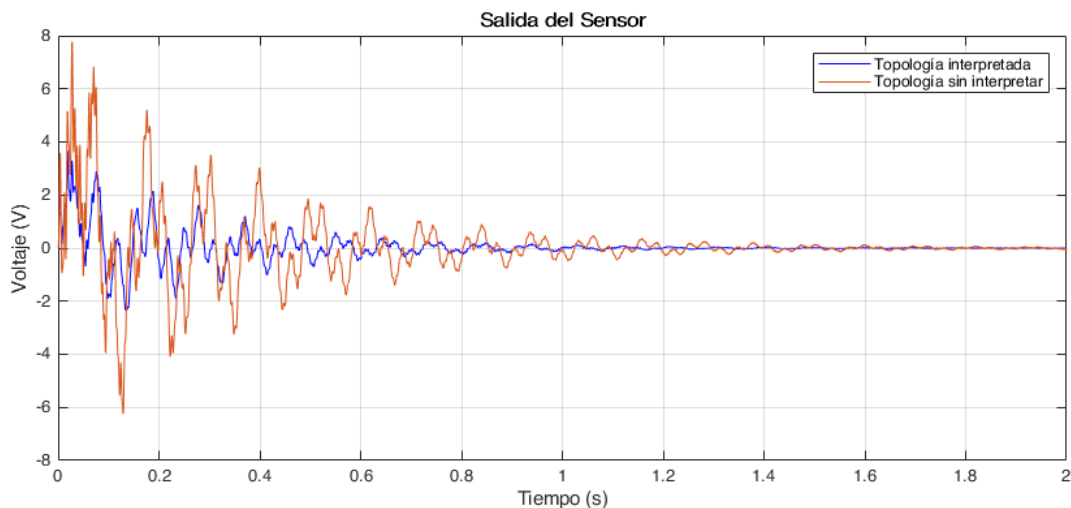
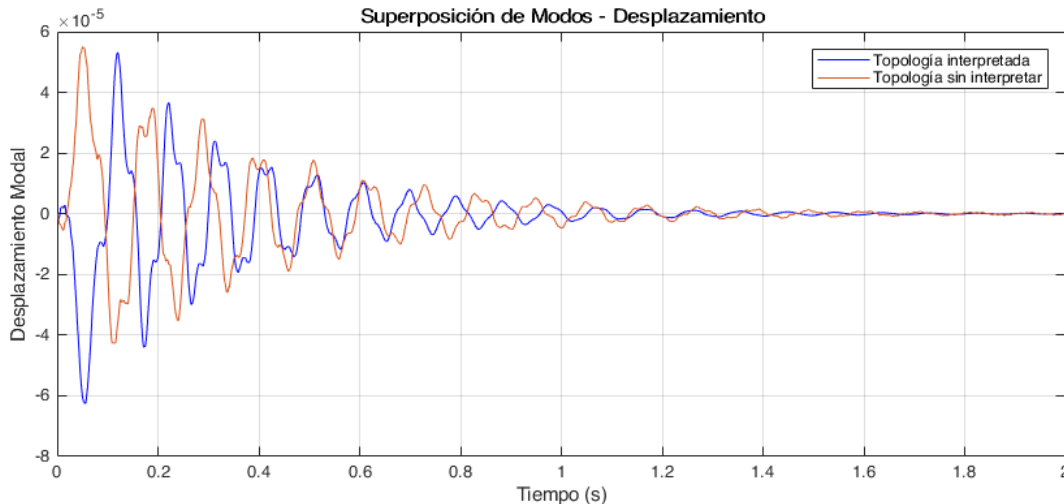


Fig. 5-29.: Comparación de la salida del sensor para las topologías interpretada y sin interpretar.

En la Figura 5-28 se presentan las señales de la acción de control para los dos casos de comparación, mientras en la Figura 5-29 se presentan las señales para la salida del sensor. De acuerdo con los resultados presentados en las figuras 5-13 y 5-14, donde se muestran los coeficientes del gramiano de controlabilidad y del gramiano de observabilidad para las topologías sin procesar en comparación con las topologías procesadas, es un resultado esperado que la respuesta de control de la topología interpretada para el actuador piezoeléctrico no difiera significativamente de los resultados de control para la topología sin interpretar. Por otra parte, en el caso del sensor, era esperado que la respuesta en la salida del sensor fuera menos eficiente para la topología interpretada ya que la observabilidad se vio disminuida al eliminar muchas zonas de material que se encontraban en escala de grises antes del procesamiento de la topología.

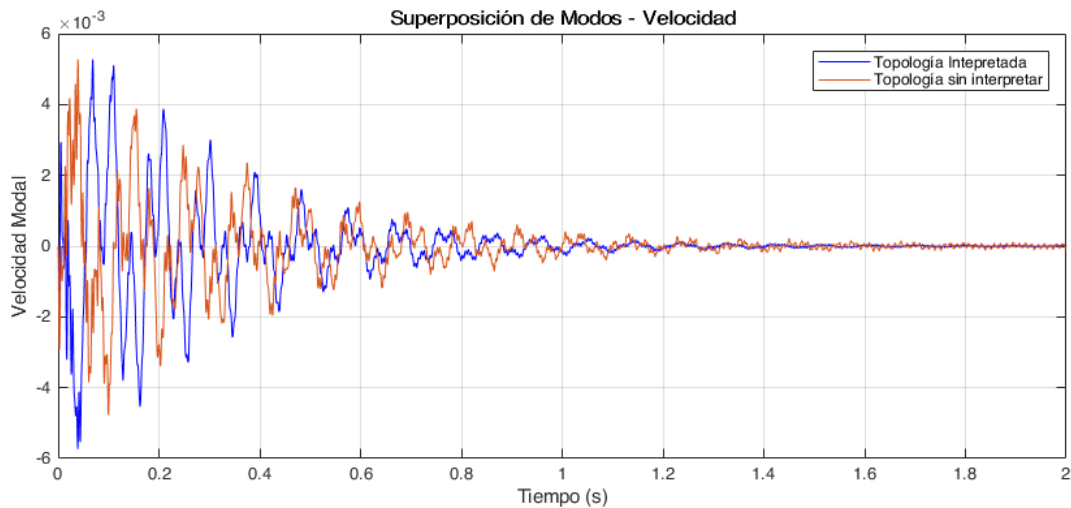


**Fig. 5-30.:** Comparación del desplazamiento modal para las topologías interpretada y sin interpretar.

En las figuras 5-30 y 5-31 se presentan las señales correspondientes a los estados del sistema; siendo respectivamente, una figura para los estados del desplazamiento modal y la otra para los estados de la velocidad modal. En las figuras es posible ver las similitudes en la respuesta del sistema desde sus estados para las dos topologías comparadas. Si bien en las topologías interpretadas la cantidad de material puede aumentar o disminuir de acuerdo a la interpretación que se le aplique, la variación en magnitud de los desplazamiento y velocidades modales se mantiene en un mismo rango de valores. Si bien existen algunas inversiones de fase entre las señales analizadas, este fenómeno responde a la definición de los estados como variables modales que pueden tomar valores positivos o negativos de desplazamiento modal y velocidad modal.

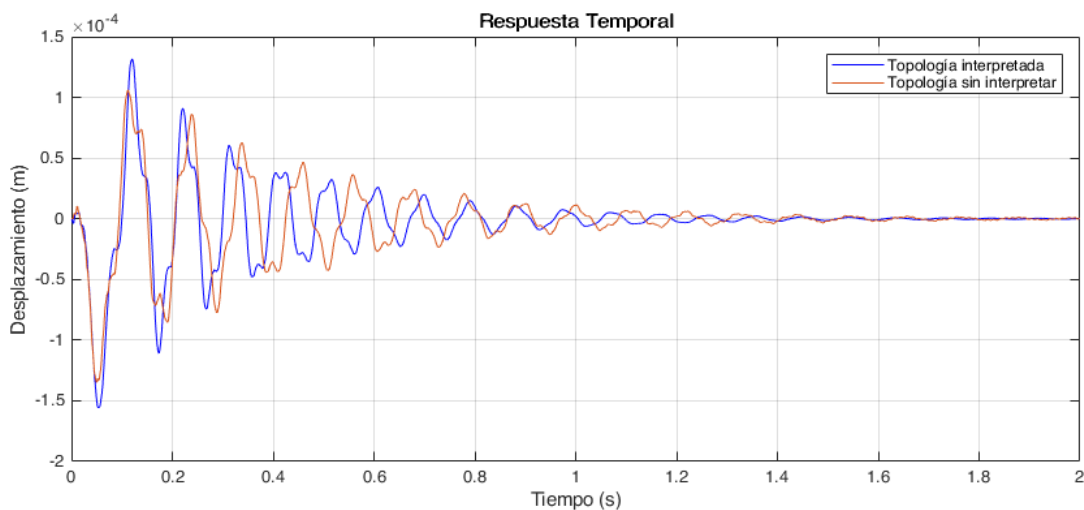
Finalmente, en la Figura 5-32 se presenta la señal correspondiente a un grado de libertad de desplazamiento en un nodo de la estructura. En esta figura es claro que la variación





**Fig. 5-31.:** Comparación de la velocidad modal para las topologías interpretada y sin interpretar.

sobre la respuesta de la vibración estructural de la placa cuando se interpreta la topología del sensor y actuador, no es considerable en términos de magnitud y fase, tan solo es apreciable un efecto de cambio ligero en la frecuencia de resonancia de la estructura, ya que la señal de vibración para la topología interpretada tiene una frecuencia más alta que en el caso de la topología no interpretada. Esta variación en la frecuencia de resonancia del sistema responde a la distribución y cantidad de material en la estructura antes y después de interpretar la topología obtenida.



**Fig. 5-32.:** Comparación de la vibración estructural (desplazamiento nodal) para las topologías interpretada y sin interpretar.

Un análisis energético es realizado para la comparación de las topologías intuitiva, aleatoria y óptima. En la Tabla 5-6 se presenta el análisis energético de esa comparación de acuerdo a la ecuación 5-3.

Característica analizada	Topología óptima interpretada (curva azul)	Topología óptima sin interpretar (curva roja)
Energía de control (Figura 5-28)	2104.2	1937.4
Energía del sensor (Figura 5-29)	743.63	4388.1
Energía del desplazamiento modal (Figura 5-30)	3.95e-07	3.82e-07
Energía de la velocidad modal (Figura 5-31)	2.49e-3	2.1904e-3
Energía de vibración (Figura 5-32)	2.34e-06	2.29e-06

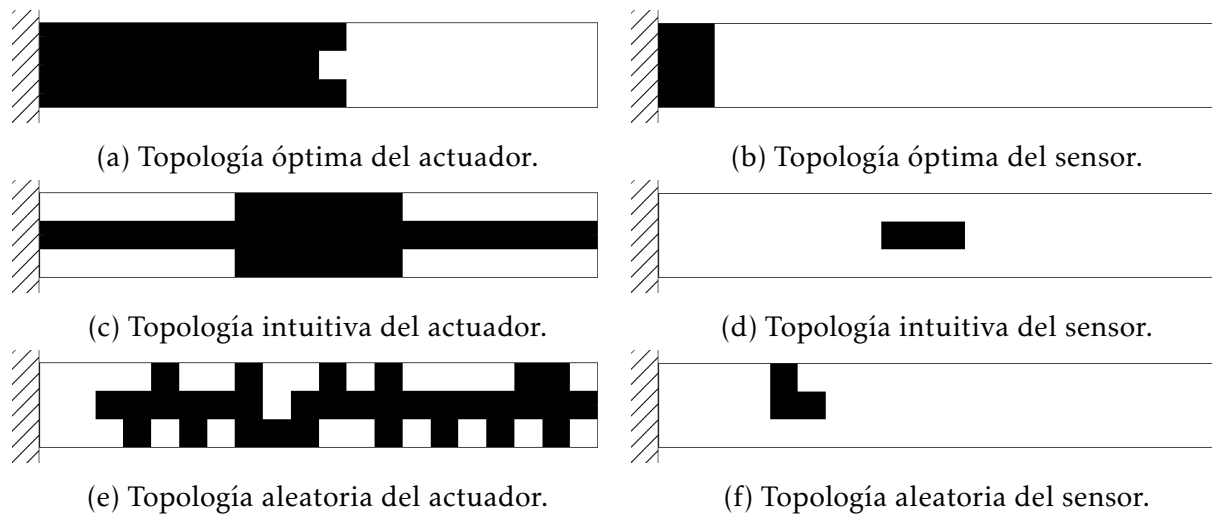
**Tabla 5-6.:** Comparación energética de las señales analizadas.

La información en esta tabla refleja varios efectos de interpretar las topologías que ya fueron mencionados previamente. Sin embargo, es importante resaltar que se demuestra que la energía que consume el actuador se incrementa al aumentar la cantidad de material cuando se realiza la interpretación de la topología del actuador. En el caso del sensor, es evidente que la interpretación de la topología reduce significativamente el grado de observabilidad del sistema y se ve reflejado en la cantidad de energía que entrega el sensor. Las variables de estado; desplazamiento y velocidad modal, no tienen diferencias significativas entre las topología interpretadas y la original, aunque los valores son menores en el caso de la topología sin interpretación. Por último, la energía de vibración confirma que la interpretación de las topologías reduce también el grado de controlabilidad del sistema, ya que aún con un incremento en la cantidad de material para actuar y su incremento en la energía de control utilizada, la vibración de la estructura sigue siendo menor cuando se simula con la estructura sin interpretación.

### 5.5.2. Rendimiento de Diferentes Topologías

Como ejercicio de comparación, se proponen dos configuraciones de los transductores piezoeléctricos distribuidos en la estructura que fueran generadas intuitivamente y aleatoriamente, conservando la misma cantidad de material que en la topología óptima encontradas para el caso de estudio (ver Figura 5-10). La topología intuitiva se genera a partir del criterio de cubrir la mayor cantidad de superficie posible, procurando concentrar material en el centro de la placa. Este criterio intuye que desde el centro de la placa

se puede lograr un mayor efecto de control en la estructura completa. Para la topología aleatoria, el criterio tan solo es mantener la conectividad de los elementos finitos para formar un solo actuador y un solo sensor piezoeléctrico. Estas dos topologías de comparación (la intuitiva y la aleatoria) se muestran en la Figura 5-33, donde además se muestra la topología óptima de referencia encontrada con el método de optimización topológica con la cual se realizará la comparación de la respuesta del sistema de control.



**Fig. 5-33.:** Topologías de comparación del actuador (izquierda) y del sensor (derecha).

Para iniciar la comparación del rendimiento de estas tres topologías, es necesario analizar los gramianos de controlabilidad y de observabilidad del sistema. Los términos en la diagonal de estos gramianos están directamente relacionados con el grado de control y observación del sistema hacia un estado específico del sistema. En las figuras 5-34 y 5-35 se presentan los valores de controlabilidad y observabilidad de la topología óptima de referencia y de las dos topologías de comparación, la topología intuitiva y la topología aleatoria.

En estas figuras se presenta información relevante sobre la influencia que tiene cada topología sobre el rendimiento del control modal. En las figuras se observa que la topología óptima (barras en color azul) tiene un mayor grado de controlabilidad y observabilidad en algunos modos de vibración, es especial en el primer modo de vibración, el cual es, normalmente, quien tiene más energía de vibración. Sin embargo, la valores de observabilidad para todos los modos es mayor en el caso de la topología óptima.

En las siguientes secciones se presentará la comparación de rendimiento de las tres topología en estudio, para los cuatro parámetros de análisis de control descritos previamente: acción de control, salida del sensor, variables de estado y vibración estructural.

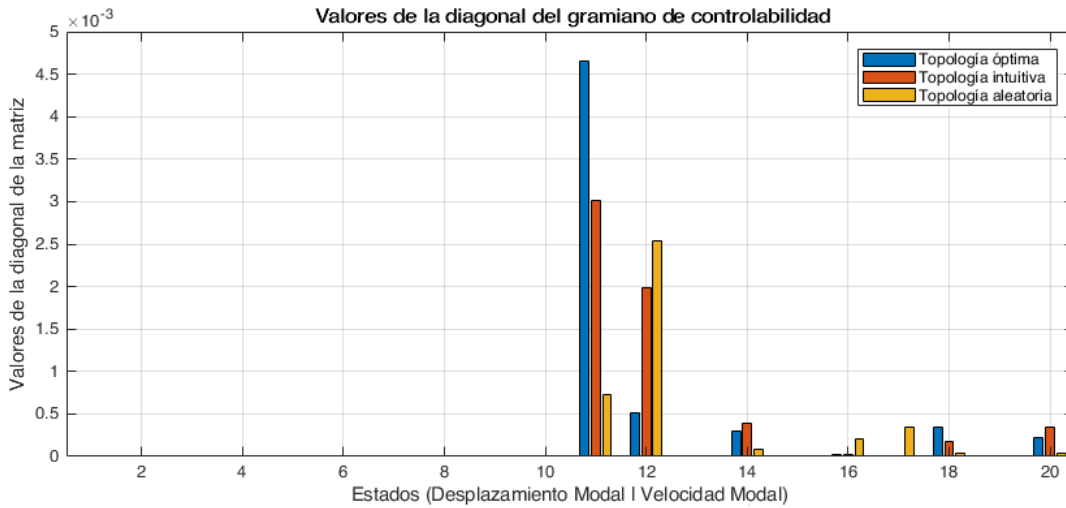


Fig. 5-34.: Comparación de gramianos de controlabilidad para diferentes topologías. Valores de desplazamiento modal en la mitad izquierda, y de velocidad modal en la mitad derecha de la gráfica.

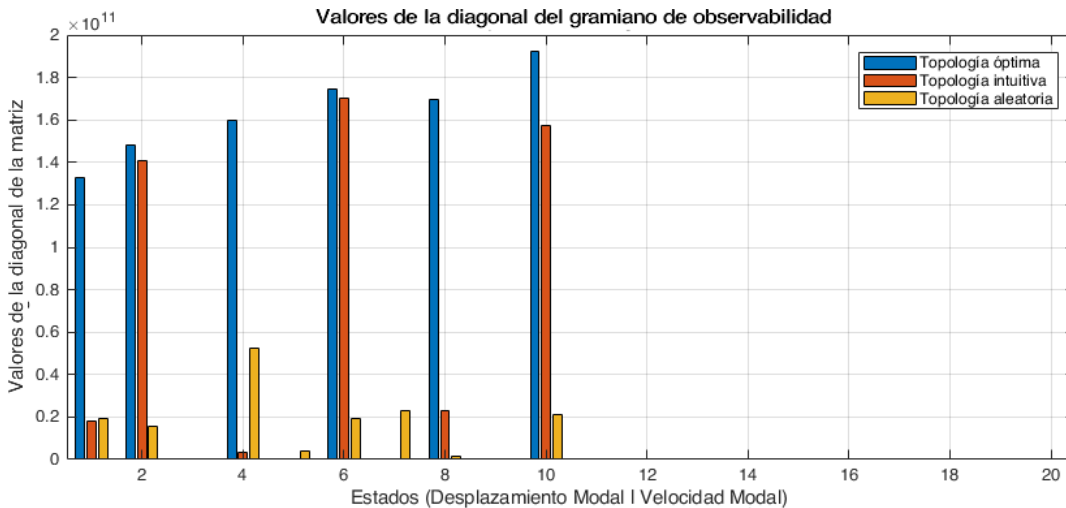
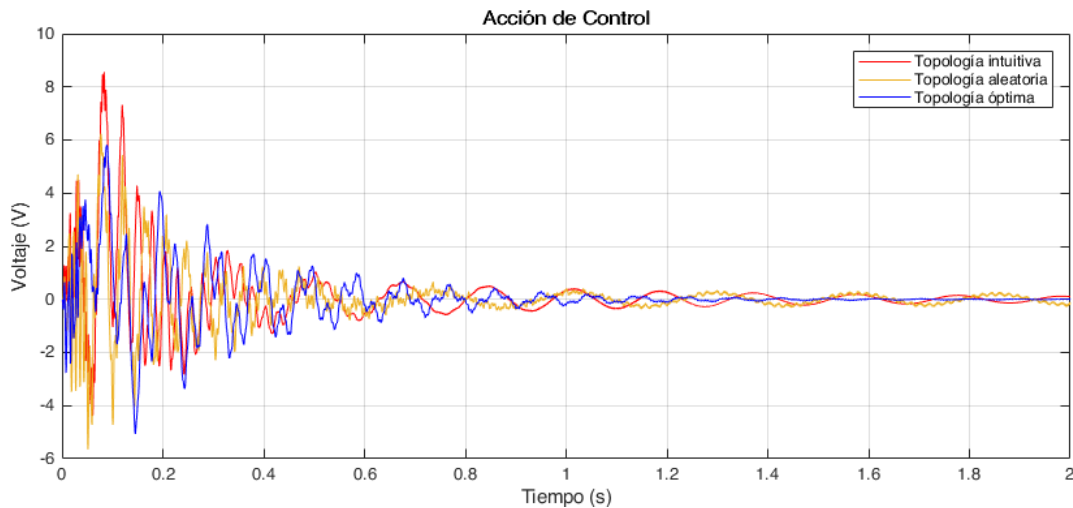


Fig. 5-35.: Comparación de gramianos de observabilidad para diferentes topologías. Valores de desplazamiento modal en la mitad izquierda, y de velocidad modal en la mitad derecha de la gráfica.

### 5.5.3. Acción de Control

La acción de control es registrada antes de ingresar como señal de entrada a los actuadores de la planta. El comportamiento del voltaje de control se obtiene simulando el sistema de control con la topología óptima mostrada en la figura 5-10 y con las dos topologías de referencia previamente presentadas. Las comparaciones de las respuestas del voltaje en el actuador son presentadas en la Figura 5-36.

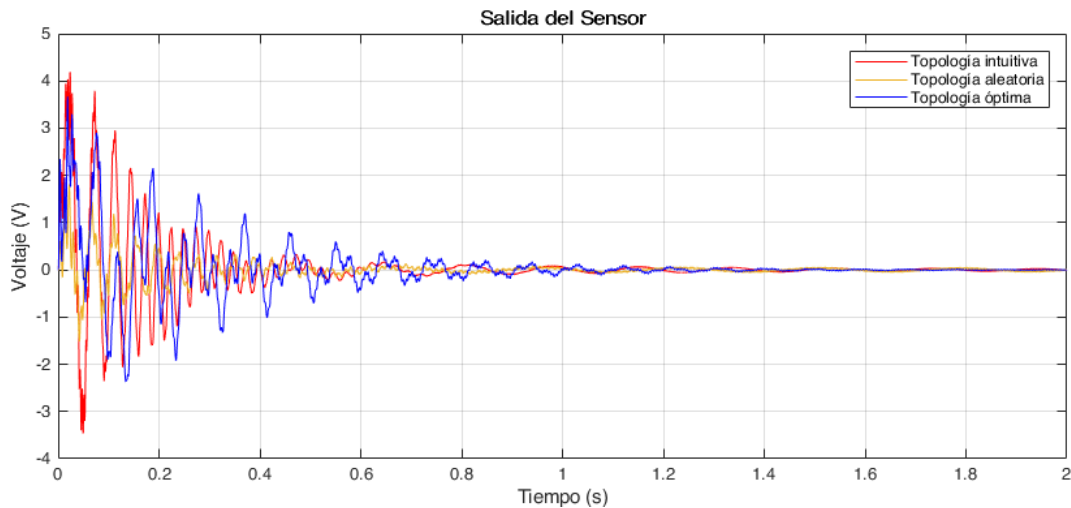


**Fig. 5-36.:** Comparación de la acción de control de una topología intuitiva (rojo), de una topología aleatoria (naranja) y de la topología óptima (azul).

Estas gráficas representan la señal de voltaje que se debe aplicar en el actuador para llevar la estructura al reposo y controlar la vibración inducida por un impulso para tres casos diferentes. En la Figura 5-36 se muestra que la topología intuitiva tiene picos de voltaje de control mayores a los de la topología óptima, lo que implica más consumo de energía y mayores esfuerzos en el transductor, lo que podría ser físicamente inviable. Por otra parte, entre la topología aleatoria y la topología óptima de referencia, se observa un comportamiento similar entre ambas curvas, siendo la topología óptima la que menos energía de control necesita para llevar el sistema al reposo. En ambas comparaciones, la señal de control de la topología óptima (curva azul) llega a valores menores que las otras topologías después de un segundo de simulación. Esto significa que, además de ser la configuración que menos energía requiere, también lo hace en menor tiempo que otras topologías escogidas de forma intuitiva o de forma aleatoria.

#### 5.5.4. Salida del Sistema

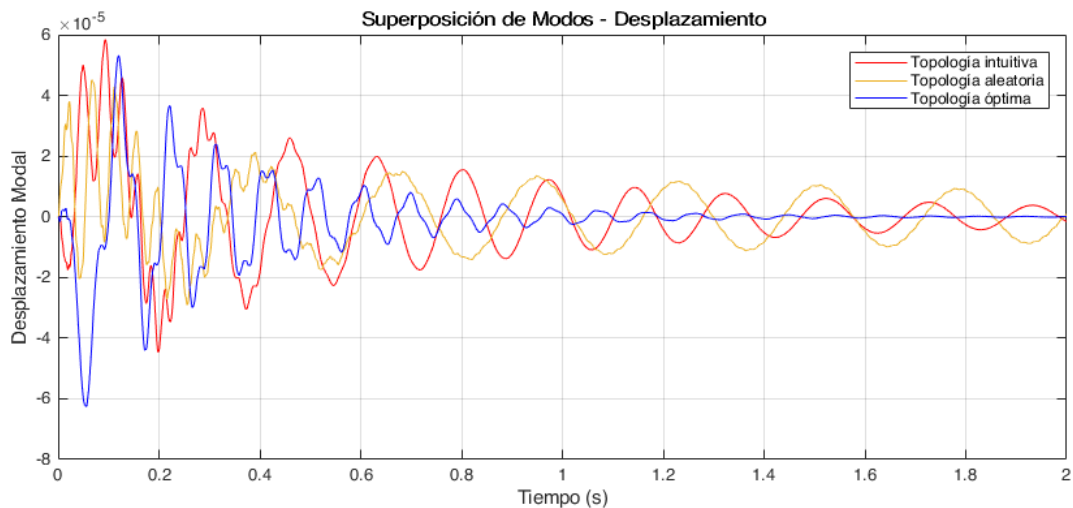
La salida del sistema se registra como la señal que entregan los sensores piezoeléctricos antes de entrar al lazo de realimentación. En la Figura 5-37 se muestra la comparación de las respuestas temporales de la salida del sistema entre la topología óptima de referencia y las topologías de comparación presentadas al inicio de la sección. En la figura, es posible ver que la salida del sensor de la topología óptima tiene valores de voltaje pico mayores en relación a las otras topologías para diferentes instantes de tiempo, en el rango de 0.2 a 1.2 segundos. Esto indica que el sensor en esta configuración óptima es más sensible a las vibraciones de la estructura mientras las demás topologías de comparación reducen su sensibilidad a los modos de vibración luego de los primeros instantes de tiempo.



**Fig. 5-37.:** Comparación de la salida del sistema de una topología intuitiva (rojo), de una topología aleatoria (naranja) y de la topología óptima (azul).

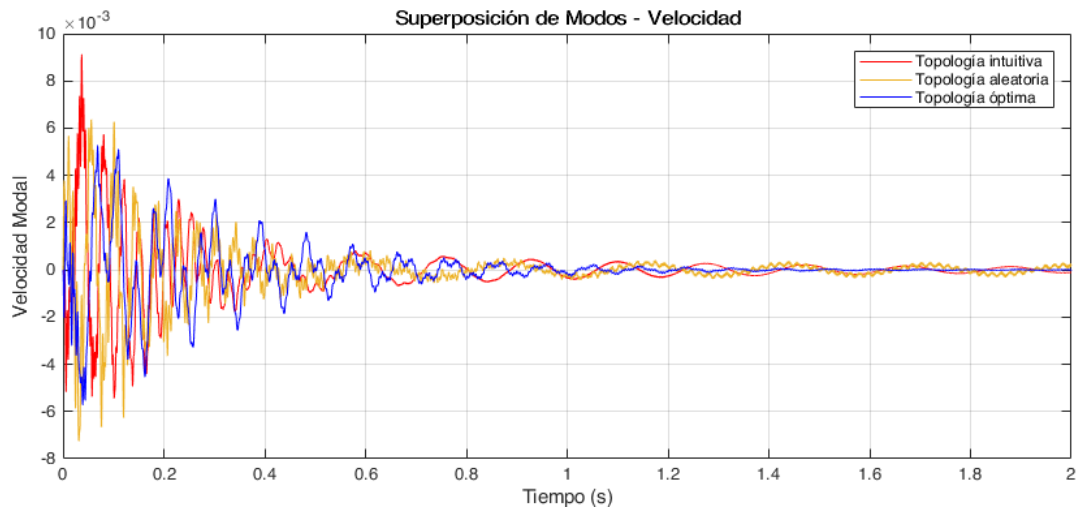
### 5.5.5. Variables de Estado

Ya que las señales del sensor y del actuador solo brindan información relacionada a cómo el sistema de control afecta el sistema (actuar) y a cómo la puede observar (senear), es necesario analizar el comportamiento interno del sistema través de las variables de estado; en este caso, siendo el desplazamiento modal y la velocidad modal. En la Figura 5-38 se presenta la respuesta modal del sistema, usando una superposición de modos (estados) para evaluar la respuesta dinámica completa.



**Fig. 5-38.:** Desplazamiento modal de una topología intuitiva (rojo), de una topología aleatoria (naranja) y de la topología óptima (azul).

El desplazamiento modal muestra una amplitud similar en los primeros instantes de tiempo para los tres casos de las topologías evaluadas. Sin embargo, en las topologías de comparación (curvas roja y naranja) luego de 0,5 segundos se observa una vibración dominada por una sola frecuencia de resonancia, correspondiente al primer modo, mientras en la configuración óptima (curva azul) mantiene presente la superposición de varios modos en diferentes amplitudes. Esto indica que la topología óptima realiza un esfuerzo de control distribuido en el espectro de operación, ya que finalmente controla de manera más eficiente la energía de vibración del sistema completo, sin enfocarse en controlar modos que podrían no aportar significativamente a la dinámica estructural y no son una prioridad de control al momento de reducir una vibración. Esto es evidente al final de las curvas, donde las topologías de comparación (curvas roja y naranja) no logran llevar el desplazamiento modal del sistema a cero, mientras la topología óptima lo estabiliza a partir de 1 segundo, donde la vibración se empieza a reducir significativamente en comparación a la amplitud de vibración inicial.

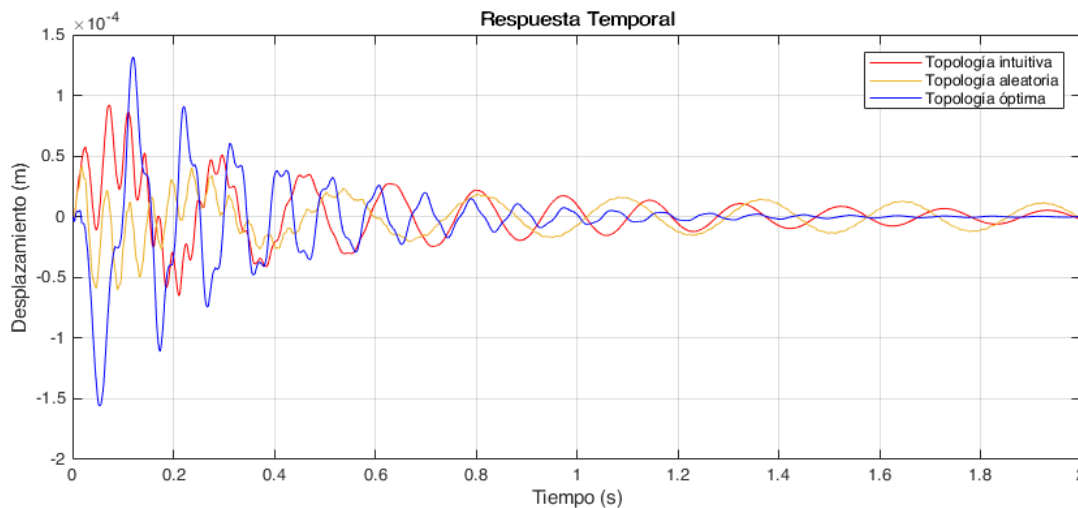


**Fig. 5-39.:** Velocidad modal de una topología intuitiva (rojo), de una topología aleatoria (naranja) y de la topología óptima (azul).

Por otra parte, en la Figura 5-39 se presenta la respuesta del sistema en su estado de velocidad modal, correspondiente a las topologías analizadas previamente. A diferencia del desplazamiento modal, la velocidad modal para la topología óptima no resulta ser claramente mejor que las demás respuestas temporales para las topologías de comparación, exceptuando el hecho de que al final de las curvas; luego de 1 segundo, las variaciones de velocidad para la topología óptima (curva azul) tiene menores valores que las demás respuestas. Esto significa que la vibración de la estructura, entendida desde la velocidad de vibración se logra controlar en menor tiempo con la topología óptima que con las demás topologías de comparación, a su vez que el esfuerzo de control requerido en esta topología es menor, como se mostró en la Figura 5-36.

### 5.5.6. Vibración Estructural

Finalmente, se presenta un análisis de la vibración estructural de acuerdo a la configuración de transductores en las topologías comparadas. En esta sección, el desplazamiento vertical de un nodo de la estructura en la esquina superior del extremo libre de la placa mostrada en la Figura 5-1 es analizado y se compara su comportamiento con las diferentes topologías. Este nodo de análisis se escoge al ser identificado como un punto crítico de vibración en la estructura con base en el análisis modal del sistema presentado en la figura 5-7, donde se puede ver que las zonas con mayor deformación son en los extremos libres de la placa, especialmente en las esquinas. Al ser un punto en el cual se espera mayor desplazamiento, también se espera que sea un punto crítico de vibración estructural.



**Fig. 5-40.:** Desplazamiento nodal en la esquina superior del extremo libre de la placa para una topología intuitiva (rojo), de una topología aleatoria (naranja) y de la topología óptima (azul).

En la Figura 5-40 se presenta la respuesta del sistema en coordenadas nodales; es decir, se ejecuta una regresión del cambio a coordenadas modales realizado en la reducción modal del sistema durante el proceso de conversión al modelo a espacios de estado. Este cambio de coordenadas implica transformar los desplazamientos modales y las velocidades modales (estados del sistema) en información de desplazamientos nodales que pueden ser plenamente interpretados físicamente en los tres grados de libertad.

El desplazamiento de ese punto de la estructura presentado en la Figura 5-40, muestra que la topología óptima (curva azul) es más sensible a la vibración en los primeros instantes de tiempo, ya que registró desplazamientos mayores en los primeros ciclos vibratorios. Esto es evidente al comparar los valores de desplazamiento pico entre la curva óptima y la intuitiva, y entre la curva óptima y la aleatoria. La diferencia porcentual en-



tre los valores pico máximo de las curvas óptima e intuitiva es de 42,67%, mientras la misma diferencia porcentual entre las curvas óptima y aleatoria es de 78,28%. Sin embargo, el control de vibraciones sobre la estructura con esa misma topología (curva azul) decae rápidamente hasta el reposo, cuando las otras dos topologías no logran controlar por completo la vibración de la estructura.

Para un tiempo  $t = 1$  segundo, la diferencia porcentual entre las curvas óptima e intuitiva ya es de 77,72% y entre las curvas óptima y aleatoria es de 75,116% lo cual indica que la vibración en la configuración óptima ya se ha reducido significativamente en comparación a las otras dos configuraciones de transductores piezoeléctricos.

Al analizar en detalle la Figura 5-40 desde los 0,5 segundos, es claro que la vibración que registra la estructura cuando está dispuesta con el arreglo de transductores piezoeléctrico en la topología óptima, es menor a la vibración de la misma estructura con un arreglo de transductores diferente. Es interesante notar que en los casos de comparación (curvas roja y naranja) es predominante un efecto residual de vibración de un modo puro, expresado como una forma de onda senoidal en el movimiento de la estructura. La frecuencia de vibración de esta onda corresponde; en ambos casos, a la vibración predominante del primer modo de vibración.

### 5.5.7. Energía de Señales

Para analizar desde un punto de vista energético las gráficas presentadas en esta sección, se decide calcular la energía de las señales de acuerdo a la definición (Mathuranathan and Viswanathan, 2017):

$$E = \int_0^t |x(t)|^2 dt \quad (5-3)$$

Donde  $E$  es la energía de la señal  $x(t)$ , evaluada entre cero y un tiempo  $t$ . En la Tabla 5-7 se presenta el análisis del valor energético de cada señal de las gráficas presentadas en esta sección. En esta tabla es posible ver que la energía de control utilizada por el sistema es mínima en la configuración de la topología óptima, superando en un 60,97% a la energía utilizada por la topología intuitiva, y superando en un 5,95% a la topología aleatoria. Estas diferencias en la energía utilizada en el control se deben a la cantidad y magnitud de sobre-impulsos de voltaje que debe enviar el sistema a los actuadores para realizar el control de la vibración.

Por parte de la energía que entregan los sensores (salida del sistema), se puede afirmar que la topología intuitiva tiene una configuración de piezoeléctricos que entrega más voltaje que las demás topologías. De forma similar, este gran valor de energía se debe a los picos de voltaje que registra el sensor en los primeros instantes de tiempo, donde la dis-

Característica analizada	Topología óptima (curva azul)	Topología intuitiva (curva roja)	Topología aleatoria (curva naranja)
Energía de control (Figura 5-36)	2104.2	3949.8	2233.3
Energía del sensor (Figura 5-37)	743.63	1081.7	115.86
Energía del desplazamiento modal (Figura 5-38)	3.95e-07	6.78e-07	3.83e-07
Energía de la velocidad modal (Figura 5-39)	2.49e-3	3.92e-3	3.25e-3
Energía de vibración (Figura 5-40)	2.34e-06	1.56e-06	6.73e-07

**Tabla 5-7.:** Comparación energética de las señales analizadas.

tribución de material tiene más sensibilidad a la vibración. Sin embargo, la cantidad de voltaje disminuye rápidamente y, como ya fue mencionado, la información contenida en la señal evidencia pérdida de sensibilidad en varios modos de vibración del sistema. Este efecto de aumento en la sensibilidad de sensado en esa topología es una consecuencia no controlada de la topología generada para comparación, y no corresponde a un resultado esperado como el obtenido con un método sistemático de diseño por optimización topológica. Este fenómeno también se evidencia en la señal de los sensores de la topología aleatoria, donde la señal tiene ligeramente menor cantidad de energía de sensado, y además pierde información de sensado. Una forma de reafirmar este análisis se encuentra al estudiar la Figura 5-35, donde se evidencia el efecto de la pérdida de información en algunos modos en la topología intuitiva y aleatoria, además de las diferencias de sensibilidad hacia ellos.

La energía de los estados del sistema, descritas como la energía del desplazamiento modal y la velocidad modal, deja claro que la topología intuitiva (curvas rojas) tiene la mayor cantidad de energía y, por tanto, el peor rendimiento en cuanto a control de modos de vibración se refiere. Sin embargo, la energía de desplazamiento modal de la topología aleatoria (curva naranja) resulta ser menor que la de la topología óptima. Esto se debe a los picos de desplazamiento que tiene la respuesta con la topología óptima que aportan significativamente a la energía de la señal. Aún así, en la Figura 5-38 es claro que el desplazamiento modal con la topología óptima decae significativamente más rápido que usando la topología aleatoria. Por otra parte, desde las curvas de velocidad modal no es

claro qué topología posee mejor rendimiento, aunque la energía de las señales presentada en la Tabla 5-7 demuestra que la topología óptima es quien tiene menor energía de vibración desde el punto de vista de esa variable de estado.

Por último, la energía de vibración en las topologías comparadas demuestra que la topología óptima es quien más energía de vibración posee, mientras la topología intuitiva y aleatoria presentan energías de vibración menores. Este efecto, nuevamente se debe a los picos de desplazamiento que experimenta la estructura en los primeros instantes de tiempo, y tiene un aporte significativo al cálculo de la energía de la señal. No obstante, el control de la vibración estructural resulta ser más eficiente en la topología óptima como fue mencionado anteriormente, al llevar la estructura al reposo en menor tiempo usando menor cantidad de energía en los actuadores, además que esta configuración de actuadores y sensores tiene la capacidad de controlar un rango más amplio de frecuencias al actuar sobre diferentes modos de vibrar, lo cual convierte a esta distribución óptima en un control de vibraciones más robusto y sistemático.

### 5.5.8. Amortiguamiento de Señales

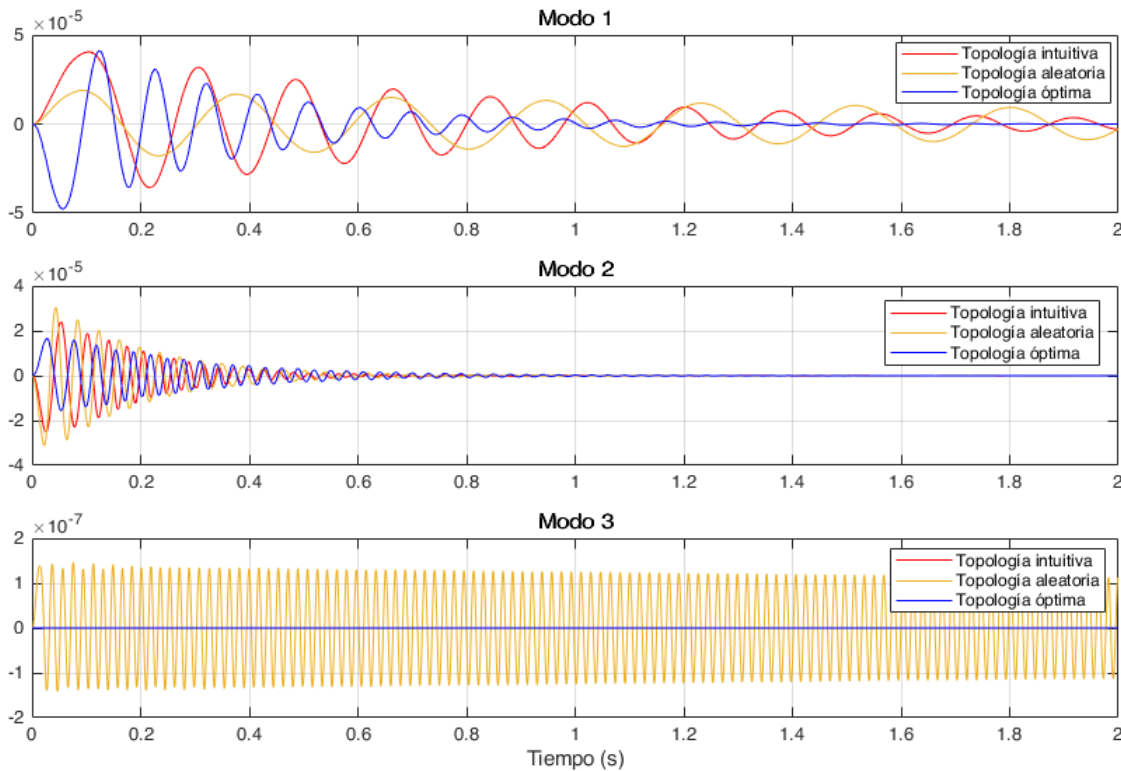
Adicionalmente a los resultados ya presentados, se decide calcular la relación de amortiguamiento ( $\zeta$ ) del desplazamiento modal (Figura 5-38) para analizar el fenómeno del decaimiento de la amplitud de vibración desde un punto de vista del amortiguamiento activo del sistema planta-controlador. Esta medida del amortiguamiento describe la relación amplitud entre las oscilaciones del sistema cuando disminuyen en el tiempo después de una perturbación, y está definida como (Steidel et al., 1979):

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi/\delta)^2}} \quad (5-4)$$

Donde  $\delta$  es el decremento logarítmico, definido como:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{A_0}{A_n} \quad (5-5)$$

Donde  $n$  es el número de picos de la oscilación,  $A_0$  es la amplitud de la señal en el primer pico de la onda, y  $A_n$  en la amplitud de la onda en el pico  $n$ . Para realizar este análisis, es necesario presentar la descomposición de las señales en sus modos de vibrar fundamentales. En este caso, se escogen los tres primeros modos de vibrar de cada señal de desplazamiento modal para realizar el análisis de amortiguamiento. En la Figura 5-41 se presenta la comparación de los modos de vibrar para los tres casos de comparación: topología intuitiva, aleatoria, y óptima. De igual forma, en la Tabla 5-8 se presenta el análisis de estas relaciones de amortiguamiento de las gráficas presentadas en esta sección.



**Fig. 5-41.**: Descomposición de modos de vibración de una topología intuitiva (rojo), de una topología aleatoria (naranja) y de la topología óptima (azul).

Como se muestra en la Figura 5-41, los modos 1 y 2 del sistema aportan significativamente a la vibración de la estructura, mientras el modo 3 no posee una amplitud comparable, además que las formas de onda del modo 3 para los casos presentados no evidencian decaimiento de la señal, y por tanto, no es relevante aplicar la ecuación 5-4. Por este motivo, en la Tabla 5-8 no se presentará coeficientes de amortiguamiento para ese modo.

Característica analizada	Topología óptima (curva azul)	Topología intuitiva (curva roja)	Topología aleatoria (curva naranja)
Amortiguamiento del modo 1 ( $\zeta_1$ )	0.047426	0.038566	0.018917
Amortiguamiento del modo 2 ( $\zeta_2$ )	0.018594	0.030771	0.032357

**Tabla 5-8.**: Comparación energética de las señales analizadas y sus factores de amortiguamiento.

Las relaciones de amortiguamiento calculadas muestran a la topología óptima con un amortiguamiento superior a la topología intuitiva con una diferencia porcentual de

20,61 % y superior a la topología aleatoria en un 85,94 %, aunque en el segundo modo en rendimiento fue inferior en un 49,33 % con respecto a la topología intuitiva, y un 54,02 % con respecto a la topología aleatoria. Sin embargo, la amplitud del segundo modo es menor en topología óptima aún cuando su relación de amortiguamiento es menor. Este fenómeno indica que, la distribución de transductores óptimos se enfoca en los modos que más impacto tienen sobre la controlabilidad y la observabilidad, siendo en este caso el primer modo, lo que finalmente tiene un impacto positivo sobre el control de una vibración inducida al sistema de forma externa.



## 6. Conclusiones

En este trabajo se presenta una metodología de diseño conceptual para control activo de vibraciones en placas delgadas, distribuyendo sobre ella transductores piezoeléctricos; tanto sensores como actuadores, de forma que se maximiza el grado de controlabilidad y de observabilidad del sistema, usando el Método de Optimización Topológica (MOT), el Método de los Elementos Finitos (MEF) y un esquema de Control Óptimo.

El modelado de los materiales piezoeléctricos y los materiales elásticos se realizó usando el MEF con elementos finitos hexaédricos de 20 nodos con hasta cuatro grados de libertad por nodo, tres de ellos para desplazamientos en  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y uno para voltaje. El modelo construido con el MEF de una estructura Actuador-Placa-Sensor fue convertido a un modelo de espacios de estado y reducido a un espacio modal para realizar simulaciones en un esquema de control activo sobre un controlador LQG (*Linear-Quadratic-Gaussian Regulator*). El MOT fue implementado usando el modelo de interpolación de propiedades del material SIMP (*Solid Isotropic Material with Interpolation*) y resuelto con método de Programación Lineal Secuencial (PLS).

De forma concluyente, esta tesis demuestra que es posible modelar una estructura mecánica a través del MEF y agregar sobre ella una serie de transductores piezoeléctricos distribuidos de forma óptima con el MOT para maximizar el control de vibraciones inducidas a la estructura por perturbaciones externas o internas.

Adicionalmente, es importante resaltar que:

- El método de los elementos finitos es una herramienta computacional de modelado de sistemas físicos que permite solucionar problemas que requieren la solución de expresiones matemáticas que no poseen solución analítica o su solución no es realizable por los métodos convencionales, además de permitir el modelado de sistemas multifísicos; como el caso de esta tesis, con el cual es posible modelar transductores piezoeléctricos que se acoplan a una estructura mecánica en configuración de actuadores o de sensores.
- A pesar de que los modelos de elementos finitos, generalmente, se crean utilizando miles o millones de variables (grados de libertad), es posible convertir y reducir estos modelos a una configuración apropiada para diseñar sistemas de control con

modelos de pocas variables (estados) a partir de un modelo numérico de este tipo, como se muestra en la Sección 3.5.2. En el caso de esta tesis, se destaca la posibilidad de asociar los grados de libertad de los materiales piezoeléctricos al modelo de control como actuadores y sensores durante la conversión del modelo, mientras los grados de libertad asociados a la estructura mecánica se pudieron asociar a la planta del controlador. Adicionalmente, se destaca la necesidad de realizar una reducción del modelo utilizando los modos de vibración del sistema, ya que brinda la posibilidad al diseñador de decidir sobre que rangos de frecuencia realizar el control de vibraciones a partir de la frecuencia de los modos de vibración.

- El análisis de estructuras sometidas a cargas dinámicas puede ser modelado a través de las herramientas computacionales de análisis modal, y las vibraciones pueden ser controladas a partir del entendimiento de los modos de vibración de la estructura para generar modelos numéricos y de control eficientes. En ese sentido, la cantidad de modos o el rango de frecuencia de operación se convierte en un factor determinante en el rendimiento del sistema de control y de los resultados mismos de las topologías obtenidas para los transductores. Sin embargo, la complejidad del modelo de control también puede limitar la implementación de un controlador que funcione apropiadamente en situaciones reales.
- En la búsqueda de un parámetro que represente una optimización en el control de vibración estructural, los gramianos de controlabilidad y de observabilidad se presentan como una de las mejores opciones propuestas en la literatura (Silveira, 2012; Menuzzi et al., 2017; Padoin et al., 2015); ya que relacionan directamente el grado de control en relación a los estados del modelo de control. Sin embargo, existen diferentes interpretaciones de un valor de que represente el rendimiento global de un controlador a partir de la definición de los gramianos (Gonçalves et al., 2017). En ese sentido, la traza de la matriz de cada gramiano es un técnica simple y coherente de medir el rendimiento del sistema en un solo valor de optimización.
- El diseño de estructuras piezoeléctricas en configuración de sensores y actuadores para control activo de vibraciones, distribuidos con el método de optimización topológica, demostró ser una técnica de diseño conceptual con resultados favorables en todos los análisis de resultados presentados en el Capítulo 5. Esto demuestra la fortaleza del método de optimización como herramienta de diseño computacional, donde la búsqueda sistemática de topologías permite proponer soluciones a problemas complejos en ingeniería, donde la topología de estructuras juega un papel importante en el rendimiento del sistema, y a problemas donde no siempre será intuitiva la solución para el diseñador. Además, la incursión del método de optimización a problemas multifísicos y de control automático, demuestra su flexibilidad para ser implementado en diferentes campos de la ingeniería y la ciencia.



- 
- Las topologías obtenidas para el actuador y el sensor en todos los resultados obtenidos demuestran que el programa de optimización funciona de acuerdo a la naturaleza física de los materiales elásticos y piezoeléctricos sometidos a excitaciones dinámicas vibratorias. En el caso del actuador, la tendencia en la distribución de material hacia el máximo volumen responde a un fenómeno de maximización de la capacidad de control en función de la cobertura de actuadores disponibles en el sistema. Por otra parte, en el caso del sensor, la tendencia de distribución de material usa el mínimo volumen posible. En este caso, las topologías obtenidas poseen zonas de material con pseudo-densidades intermedias que no terminan de definir los contornos de la estructura, pero responden a la naturaleza de los sensores piezoeléctricos que aumentan la sensibilidad a la deformación con las propiedades de material modificadas.
  - Los problemas de condicionamiento numérico que surgen en los problemas de optimización y modelado de materiales piezoeléctricos representan retos de programación en eficiencia computacional. En principio, las diferencias del orden de magnitud entre las propiedades mecánicas y eléctricas se abordan con un cambio en el sistema de unidades, aunque este cambio demostró tener efectos negativos en la optimización topológica y la simulación del controlador. Luego, los tiempos de procesamiento que requiere el cálculo de sensibilidades por el método analítico resultaron ser mayores que los tiempos con el método numérico, incluso cuando se usa procesamiento paralelo. Esto es consecuencia de la complejidad matemática de la formulación de las sensibilidades analíticas; en especial, la complejidad de calcular la sensibilidad de los vectores propios del problema, en donde es necesario invertir matrices por definición singulares. Adicionalmente, la capacidad computacional en uso de memoria y procesamiento que implica operar con estas matrices que tienen mal condicionamiento numérico, establece un limitante del tamaño de malla del modelo de elementos finitos.
  - El programa de optimización desarrollado sobre la plataforma Matlab se compone de tres partes fundamentales que demuestran la complejidad y robustez de su programación. La primera parte comprende el modelado de sistemas multifísicos usando el método de elementos finitos, importando la malla y las condiciones de frontera del *software* Ansys, mientras el ensamble de matrices y la solución del problema numérico se realizó de forma independiente en el programa desarrollado. La segunda parte se refiere al programa de optimización como tal, donde se definen todos los parámetros y configuraciones de las librerías de optimización de Matlab. Por último, se encuentra la sección de control, desarrollado en *Simulink*, en la cual se interpretan los resultados obtenidos del módulo de optimización, se llevan a una formulación de control modal y se simula el comportamiento del sistema en la configuración topológica óptima.

- Por último, se resalta la contribución de este proyecto de tesis con la participación en el 6to Simposio Nacional en Mecánica de Materiales y Estructuras Continuas, realizado en agosto de 2018 en la ciudad de Cartagena, en el cual se publica un artículo relacionado a la simulación de estructura piezoeléctricas usando el MEF. También se destaca la participación en el XIV Simposio Internacional de Energías Expotecnológica 2018 en el cual se publica un artículo relacionado al control de vibraciones usando el MOT. Adicionalmente, se espera registrar el código del programa desarrollado como un *software* de simulación de estructuras piezoeléctricas y optimización topológica para control activo de vibraciones. Finalmente, se menciona que actualmente los resultados del trabajo de investigación están sometidos para publicación en una revista nacional y un congreso internacional.

## 7. Trabajo Futuro

Durante la realización de este trabajo, se utilizaron dos métodos en la solución del problema de optimización: el método de elementos finitos y el método de optimización topológica. En el desarrollo de la tesis algunas opciones de solución quedaron inexploradas, porque su implementación era demasiado compleja o desconocida, o simplemente superaban el alcance de los objetivos planteados. Debido a esto, se presenta una lista de los trabajos que pueden contribuir a la mejora y continuación de la presente tesis:

- Implementar los elementos finitos ESF (*Extra Shape Functions*) ya que podrían permitir la reducción del costo computacional sin sacrificar la convergencia de malla en los resultados para el modelo numérico. De forma complementaria, otro tipo de elemento finito; llamados *shell*, pueden ser implementados ya que el problema de placas delgadas se adaptaría muy bien a este tipo de elementos, que podrían reducir el costo computacional aún más. En ese mismo sentido, la exploración del procesamiento en GPU puede aliviar algunos problemas de capacidad computacional que se tuvieron en el desarrollo del trabajo.
- Ya que los materiales usados en este trabajo se limitaron a una estructura elástica de aluminio y un conjunto de transductores piezoeléctricos cerámicos, se propone realizar una exploración de diferentes materiales en el modelo para analizar el efecto que tiene sobre las topologías obtenidas, en especial con los materiales piezoeléctricos, donde se podría explorar, incluso, una combinación de materiales diferentes para el sensor y el actuador.
- Adicionalmente, al cambiar el tipo de elemento finito o las propiedades de materiales, es recomendable incrementar la cantidad de sensores y actuadores del modelo. En esta tesis se restringió el uso a un solo sensor y un solo actuador, sin embargo, al incrementar la cantidad de transductores se podrían mejorar los coeficientes de controlabilidad y observabilidad en términos generales, además que se podría abarcar un rango de frecuencia más amplio en el control de vibraciones.
- Incluir en el modelo de espacios de estado un actuador mecánico que pueda simular perturbaciones externas al sistema. Esto podría permitir que las perturbaciones del modelo no necesariamente se vean reflejadas desde el actuador piezoeléctrico, sino desde un componente totalmente externo. Además, la perturbación mecánica se puede modelar en diferentes puntos espaciales de la estructura, lo que permitiría

análisis más complejos para problemas de control de vibraciones reales o experimentales.

- Incluir en el modelo del controlador algunas restricciones que puedan tener en cuenta parámetros físicos de los transductores, como sus valores de saturación, la sensibilidad del sensor o actuador, la velocidad de respuesta y el rango de operación en frecuencia. Estas restricciones además de hacer más ajustado el modelo a la realidad, permitirán obtener topologías más eficientes en las implementaciones experimentales.
- Explorar la modificación de los diferentes coeficientes de las matrices de peso del controlador LQG. En estas matrices se encuentra la relación directa entre las variables de estado (modos de vibrar) y la optimización de los parámetros del controlador. Al modificar estos coeficientes en las matrices, se podría ajustar la controlabilidad o la observabilidad hacia un rango de frecuencias específico o hacia un modo de vibrar puntual. Estas modificaciones afectarán el rendimiento del controlador más no la topología obtenida como tal, a menos que se incluyan estos coeficientes en la formulación del problema de optimización. Para realizar esta exploración, se podría usar técnicas de *Deep Learning* en combinación con el MOT.
- De forma similar, es recomendable explorar modificaciones al problema de optimización, donde se agreguen pesos a la función objetivo para favorecer la respuesta de algunos modos, de forma que cada peso esté asociado a un modo de vibrar durante todo el proceso de optimización por su forma modal de vibrar mas no por el número de modos calculados en la primera iteración, como actualmente sucede. Esta recomendación se hace necesaria cuando las topologías obtenidas, por su forma de distribución de material, cambian la forma de vibrar de los modos y los pesos se desenlazan de su modo original. Una estrategia sugerida para lograr esto, es implementar el MAC (*Modal Assurance Criterion*) ([Allemang, 2003](#)).
- Algunas otras modificaciones sugeridas sobre el problema de optimización se enfocan en la formulación de la función objetivo. Actualmente se usa la traza del gramiano de controlabilidad y de observabilidad como índices de optimización. Sin embargo, este índice de rendimiento puede ser escrito en función de parámetros del controlador, como el tiempo de establecimiento, los valores pico máximo, o la energía que requiere el actuador y la energía que entrega el sensor. Dependiendo del enfoque que se le desee dar a la optimización se podría escribir la función objetivo de acuerdo a las necesidades del diseñador.
- El cálculo de la sensibilidad de las funciones objetivo es uno de los procesos del optimizador que más recursos computacionales consume, y actualmente, es la secuencia que más tiempo toma en cada iteración de la optimización. Como se discutió en este

documento, la sensibilidad analítica presentó problemas numéricos por su formulación, de forma que la sensibilidad numérica fue la herramienta finalmente usada. Es posible combinar estos dos métodos de cálculo para hacer, de forma analítica, todas las operaciones matemáticas que no presentan singularidades por definición y usar el método de las sensibilidades numéricas en las operaciones específicas que no pueden ser resueltas por el método analítico.

- En los resultados obtenidos para sensores y actuadores, siempre fue clara la definición de las topologías de los actuadores, mientras las topologías de los sensores no estuvieron completamente definidas y se requería de una interpretación posterior, sujeta al criterio del usuario del programa. Es posible incluir restricciones en el modelo numérico o en el optimizador que puedan mejorar esta falta de definición en las topologías. Una primera idea consiste en implementar un filtro de proyección en el optimizador que permita estar en un espacio solución donde se puedan definir claramente las densidades del material. Otra idea, es explorar técnicas de optimización, como el *level-set*, que permite definir desde otros abordajes la definición de las topologías.
- Por último, una parte de la investigación fundamental es la experimentación y la validación de resultados con pruebas de laboratorio. Toda la teoría y programación desarrollada en esta tesis está pensada para ser realizable en un montaje experimental que incluyan piezoeléctricos comerciales y estructuras mecánicas reales. Adicionalmente, se podrían incluir restricciones de manufactura en la formulación del problema de optimización para tener en cuenta en el diseño de experimentos que se desee construir.



# A. Ecuaciones Constitutivas Piezoeléctricas Expandidas

En los modelos de simulación de materiales piezoeléctricos se puede polarizar el material en diferentes direcciones de acuerdo al sistema de coordenadas establecido. Para un material piezoeléctrico con polarización en la dirección  $z$ , las ecuaciones constitutivas en forma matricial se escriben (Nader, 2002):

$$\begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{xz} \\ T_{xy} \\ D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^E & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15}^E & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \\ S_{xy} \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (\text{A-1})$$

Para un material piezoeléctrico con polarización en la dirección  $y$ , es necesario realizar un cambio de bases con respecto al sistema coordenado, y la matriz de tensores se escriben:

$$\begin{bmatrix} T'_{xx} \\ T'_{yy} \\ T'_{zz} \\ T'_{xy} \\ T'_{yz} \\ T'_{xz} \\ D'_x \\ D'_y \\ D'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{13}^E & c_{12}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} & 0 \\ c_{13}^E & c_{33}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} & 0 \\ c_{12}^E & c_{13}^E & c_{11}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_{15}^E & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{33} & e_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^E & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S'_{xx} \\ S'_{yy} \\ S'_{zz} \\ S'_{xy} \\ S'_{yz} \\ S'_{xz} \\ E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{bmatrix} \quad (\text{A-2})$$

Cuando sea necesario polarizar el piezoeléctrico en la dirección  $x$ , el tensor de propie-

dades se escribirá:

$$\begin{bmatrix} T''_{xx} \\ T''_{yy} \\ T''_{zz} \\ T''_{yz} \\ T''_{xz} \\ T''_{xy} \\ \hline D''_x \\ D''_y \\ D''_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{33}^E & c_{13}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{33} & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{11}^E & c_{12}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{31} & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{12}^E & c_{11}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & -e_{15} \\ \hline e_{33} & e_{31} & e_{31} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15}^E & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^E & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S''_{xx} \\ S''_{yy} \\ S''_{zz} \\ S''_{yz} \\ S''_{xz} \\ S''_{xy} \\ \hline E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (\text{A-3})$$



# Bibliografía

André Preumont. *Vibration Control of Active Structures*, volume 179. Springer, Bruxelles, 3th edition, 2011. ISBN 978-94-007-2032-9. doi: 10.1007/978-94-007-2033-6. URL <http://link.springer.com/10.1007/978-94-007-2033-6>.

Klaus-Jürgen Bathe. *Finite element procedures*. Prentice Hall, 1996. ISBN 0-13-301458-4.

S. O. Reza Moheimani and Andrew J. Fleming. *Piezoelectric transducers for vibration control and damping*. Springer, 2006. ISBN 1852338288. doi: 10.1007/978-3-319-08413-8.

Gonçalo NM Rodrigues, Renaud P Bastaits, Stephane Roose, Yvan Stockman, Sylvia E Gebhardt, Andreas J Schönecker, Pierre Villon, and André Preumont. Modular bi-morph mirrors for adaptive optics. *Optical Engineering*, 48(3):034001, 2009. doi: 10.1117/1.3099716.

Vincent Piefort. *Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures*. Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering and Robotics, 2001. URL <http://www.ulb.ac.be/scmero/documents/publi/these/Piefort01.pdf>.

Guido Dhondt. *The finite element method for three-dimensional thermomechanical applications*. John Wiley & Sons, 2004.

Singiresu S. Rao. *Mechanical vibrations*, volume 5. Prentice Hall Upper Saddle River, 2011.

Pierre Letier, Thierry Saive, and Ioan Burda. Interface haptique pour nanomanipulateur afm. In *National Congress on Theoretical and Applied mechanics, vol. Ghent*, 2003.

André Preumont and Kazuto Seto. *Active control of structures*. John Wiley & Sons, 2008. URL <https://www.wiley.com/en-co/Active+Control+of+Structures-p-9780470715710>.

Katsuhiko Ogata. *Modern control engineering*. Pearson, 2010.

Daniel J Inman. *Vibration with control*. John Wiley & Sons, 2006.

Anthony George Maldon Michell. Lviii. the limits of economy of material in frame-structures. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 8(47):589–597, 1904.

- Ye Zhu, Jinhao Qiu, H Du, and J Tani. Simultaneous optimal design of structural topology, actuator locations and control parameters for a plate structure. *Computational Mechanics*, 29(2):89–97, 2002.
- Hao Sun, Zhichun Yang, KaiXiang Li, Bin Li, Jiang Xie, Dan Wu, and LingLing Zhang. Vibration suppression of a hard disk driver actuator arm using piezoelectric shunt damping with a topology-optimized pzt transducer. *Smart Materials and Structures*, 18(6):065010, 2009.
- Xiaopeng Zhang and Zhan Kang. Topology optimization of piezoelectric layers in plates with active vibration control. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 25(6):697–712, 2014a.
- Sun Yong Kim, Chris K Mechefske, and Il Yong Kim. Optimal damping layout in a shell structure using topology optimization. *Journal of Sound and Vibration*, 332(12):2873–2883, 2013.
- Jun Hu, Xiaopeng Zhang, and Zhan Kang. Layout design of piezoelectric patches in structural linear quadratic regulator optimal control using topology optimization. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, page 1045389X18758178, 2018.
- Ole Sigmund. Topology optimization: a tool for the tailoring of structures and materials. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 358(1765):211–227, 2000.
- Camilo Alzate Acevedo. Diseño conceptual de torres de transmisión de energía utilizando el método de optimización topológica considerando análisis tridimensional y cargas producidas por cables y viento. Master's thesis, Ingeniería Mecánica, 2016.
- David Berrío. Optimización topológica de un instrumento musical idiófono tipo metalófono. Master's thesis, Ingeniería Mecánica, 2017.
- Hans A Eschenauer and Niels Olhoff. Topology optimization of continuum structures: a review. *Applied Mechanics Reviews*, 54(4):331–390, 2001.
- Ole Sigmund. A 99 line topology optimization code written in matlab. *Structural and multidisciplinary optimization*, 21(2):120–127, 2001.
- Ole Sigmund and Joakim Petersson. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural optimization*, 16(1):68–75, 1998.
- Francisco Javier Ramírez Gil. Diseño óptimo de micromecanismos tridimensionales con actuación electrotérmica utilizando optimización topológica y unidades de procesamiento gráfico (gpu). M.Sc. Thesis, Facultad de Minas, 2013.

- Shengli Xu, Yuanwu Cai, and Gengdong Cheng. Volume preserving nonlinear density filter based on heaviside functions. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41(4): 495–505, 2010.
- W. S. Hwang and H. C. Park. Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators. *AIAA journal*, 5(31):930–937, 1993.
- Engineering Toolbox. Aluminum alloys - mechanical properties. [https://www.engineeringtoolbox.com/properties-aluminum-pipe-d\\_1340.html](https://www.engineeringtoolbox.com/properties-aluminum-pipe-d_1340.html), 2008.
- Ralph E Blake. Basic vibration theory. *Shock and Vibration Handbook*, 1961.
- Cyril M. Harris. *Shock and Vibration Handbook*. McGraw-Hill, 1996.
- Russell C Hibbeler. *Mechanics of Materials*. Pearson, 2014.
- Yozo Fujino and Yoshitaka Yoshida. Wind-induced vibration and control of trans-tokyo bay crossing bridge. *Journal of Structural Engineering*, 128(8):1012–1025, 2002.
- Anurag Tiwari. Design of suboptimal controllers for reduction of vibration and sound radiation of plates using piezoelectric actuators. M.Sc. Thesis, Industrial and Information Engineering, Department of Aerospace Engineering, 2016.
- Charlotte Hurtley. *Night noise guidelines for Europe*. WHO Regional Office Europe, 2009.
- Rabih Alkhatib and MF Golnaraghi. Active structural vibration control: a review. *Shock and Vibration Digest*, 35(5):367, 2003.
- Paolo Abundo, Chiara Trombetta, Calogero Foti, and Nicola Rosato. Production, delivery and application of vibration energy in healthcare. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 280, page 012010. IOP Publishing, 2011.
- AW Roberts. Vibration of fine powders and its application. In *Handbook of Powder Science & Technology*, pages 146–201. Springer, 1997.
- Arun S Mujumdar and Karoly Erdesz. Applications of vibration techniques for drying and agglomeration in food processing. *Drying Technology*, 6(2):255–274, 1988.
- Amruthur V Srinivasan and D Michael McFarland. *Smart structures: analysis and design*. Cambridge university press, 2001.
- Juliano .F. Gonçalves, Daniel M. De Leon, and Eduardo A. Perondi. Topology optimization of embedded piezoelectric actuators considering control spillover effects. *Journal of Sound and Vibration*, 388:20–41, 2017. ISSN 10958568 0022460X. doi: 10.1016/j.jsv.2016.11.001.

- A Hać and L Liu. Sensor and actuator location in motion control of flexible structures. *Journal of sound and vibration*, 167(2):239–261, 1993.
- K. Hiramoto, H. Doki, and G. Obinata. Optimal sensor/actuator placement for active vibration control using explicit solution of algebraic riccati equation. *Journal of Sound and Vibration*, 229(5):1057–1075, 2000. doi: 10.1006/jsvi.1999.2530.
- Murat Güney and Eşref Eşkinat. Optimal actuator and sensor placement in flexible structures using closed-loop criteria. *Journal of Sound and Vibration*, 312(1-2):210–233, 2008. doi: 10.1016/j.jsv.2007.10.051.
- K.D. Dhuri and P. Seshu. Multi-objective optimization of piezo actuator placement and sizing using genetic algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, 323(3-5):495–514, 2009. doi: 10.1016/j.jsv.2009.01.007.
- J Ducarne, O Thomas, and J-F Deü. Placement and dimension optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction. *Journal of Sound and Vibration*, 331(14):3286–3303, 2012.
- Nemanja D Zorić, Aleksandar M Simonović, Zoran S Mitrović, and Slobodan N Stupar. Optimal vibration control of smart composite beams with optimal size and location of piezoelectric sensing and actuation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 24(4):499–526, 2013.
- Mojtaba Biglar, Magdalena Gromada, Feliks Stachowicz, and Tomasz Trzepieciński. Optimal configuration of piezoelectric sensors and actuators for active vibration control of a plate using a genetic algorithm. *Acta Mechanica*, 226(10):3451–3462, 2015.
- Isabelle Bruant, Laurent Gallimard, and Shahram Nikoukar. Optimal piezoelectric actuator and sensor location for active vibration control, using genetic algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, 329(10):1615–1635, 2010.
- Sérgio L Schulz, Herbert M Gomes, and Armando M Awruch. Optimal discrete piezoelectric patch allocation on composite structures for vibration control based on ga and modal lqr. *Computers & Structures*, 128:101–115, 2013.
- Martin Philip Bendsøe and Ole Sigmund. *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. Springer Science & Business Media, 2004.
- Zhan Kang and Liyong Tong. Topology optimization-based distribution design of actuation voltage in static shape control of plates. *Computers & Structures*, 86(19-20):1885–1893, 2008.

- Xiaopeng Zhang and Zhan Kang. Topology optimization of damping layers for minimizing sound radiation of shell structures. *Journal of Sound and Vibration*, 332(10): 2500–2519, 2013.
- Xiaopeng Zhang, Zhan Kang, and Ming Li. Topology optimization of electrode coverage of piezoelectric thin-walled structures with cgvf control for minimizing sound radiation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 50(5):799–814, 2014. ISSN 1615-1488. doi: 10.1007/s00158-014-1082-2.
- Xiaopeng Zhang and Zhan Kang. Dynamic topology optimization of piezoelectric structures with active control for reducing transient response. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 281:200–219, 2014b.
- Otávio Augusto Alves da Silveira. *Projeto simultâneo de otimização topológica e controle para redução de vibrações utilizando material piezolétrico*. Ph.D. Thesis, Engenharia Mecânica, 2012.
- Alexandre Molter, Otávio AA da Silveira, Valdecir Bottega, and Jun SO Fonseca. Integrated topology optimization and optimal control for vibration suppression in structural design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47(3):389–397, 2013.
- Odair Menuzzi, Jun SO Fonseca, Eduardo A Perondi, Juliano F Gonçalves, Eduardo Padoin, and Otávio AA Silveira. Piezoelectric sensor location by the observability gramian maximization using topology optimization. *Computational and Applied Mathematics*, pages 1–16, 2017.
- B Xu, JP Ou, and JS Jiang. Integrated optimization of structural topology and control for piezoelectric smart plate based on genetic algorithm. *Finite Elements in Analysis and Design*, 64:1–12, 2013.
- Pierre De Man and André Preumont. *Contrôle actif du rayonnement acoustique des plaques: une approche à faible autorité*. Ph.D. Thesis, Active Structures Laboratory, Bruxelles, 2004. URL <http://scmero.ulb.ac.be/Redirect.php?p=1&id=4&LNKIJKPublications/Thesis/DeMan04.pdf>.
- Arthur P. Cracknell. *Crystals and Their Structures*. Pergamon Press, 1969. ISBN 978-0080138831.
- M. Marutake. The days when piezoelectric PVDF was discovered. *Ferroelectrics*, 171(1): 5–6, 1995. doi: 10.1080/00150199508018416.
- Carl Linnaeus. *Flora zeylanica sistens plantas indicas zeylonae insulae. Holmiae: Laurenti Salvii [Stockholm: Laurentius Salvius]*, 1747.

- Fred Nitzsche, Douglas D'Assunção, and Carlos De Marqui Junior. Aeroelastic control of non-rotating and rotating wings using the dynamic stiffness modulation principle via piezoelectric actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 26(13): 1656–1668, 2015. doi: 10.1177/1045389x15572011.
- André Preumont. Cfe: In-orbit active damping experiment using strain actuators. <http://scmero.ulb.ac.be/project.php?id=15&page=index.html>, 1994.
- Wouter P Engels, Oliver N Baumann, Stephen J Elliott, and R Fraanje. Centralized and decentralized control of structural vibration and sound radiation. *The journal of the Acoustical Society of America*, 119(3):1487–1495, 2006.
- Yin Cao, Hongling Sun, Fengyan An, and Xiaodong Li. Active control of low-frequency sound radiation by cylindrical shell with piezoelectric stack force actuators. *Journal of Sound and Vibration*, 331(11):2471–2484, 2012.
- Mauro Caresta. Active control of sound radiated by a submarine in bending vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 330(4):615–624, 2011.
- Lei Shu, Michael Yu Wang, and Zhengdong Ma. Level set based topology optimization of vibrating structures for coupled acoustic–structural dynamics. *Computers & Structures*, 132:34–42, 2014.
- Gil Ho Yoon, Hyunggyu Choi, and Shin Hur. Multiphysics topology optimization for piezoelectric acoustic focuser. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017.
- Giuseppe Rosi, Joël Pouget, and Francesco Dell’Isola. Control of sound radiation and transmission by a piezoelectric plate with an optimized resistive electrode. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 29(5):859–870, 2010.
- AWWAH Meitzler, HF Tiersten, AW Warner, D Berlincourt, GA Couquin, and FS Welsh III. Ieee standard on piezoelectricity, 1988.
- Gilder Nader. *Desenvolvimento de técnicas de caracterização de transdutores piezelétricos*. Tese de Doutorado, Engenharia Mecânica, 2002.
- Marco Aurélio Brizzotti. *Análise de materiais piezelétricos compósitos para aplicações em transdutores de ultra-som*. Tese de Mestrado, Engenharia Mecânica, 2006.
- B. A. Auld. *Acoustic Fields and Waves in Solids, Vol. 2*. Krieger Pub Co, 1990. ISBN 978-0898747836.
- Gordon S. Kino. *Acoustic waves: devices, imaging, and analog signal processing*. Prentice-Hall Signal Processing Series. Prentice-Hall, 1987. ISBN 9780130030474.

- Olek C. Zienkiewicz, Robert L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier LTD, Oxford, 2013. ISBN 1856176339.
- Robert D Cook et al. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, 2007.
- Reinhard Lerch. Simulation of piezoelectric devices by two- and three-dimensional finite elements. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 37(3): 233–247, 1990. ISSN 0885-3010. doi: 10.1109/58.55314.
- Martine Naillon, Roger H. Coursant, and Francois Besnier. Analyse de structures piézoélectriques par une méthode d'éléments finis. *Acta Electronica*, 25(4):341–362, 1983.
- Paulo Henrique Nakasone. *Projeto de transdutores baseados em placas piezelétricas através do método de otimização topológica*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2011.
- Carlos A. Felippa. Introduction to finite element methods. <https://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/>, 2014.
- Snehashish Chakraverty. *Vibration of plates*. CRC press, 2008.
- Daniel J. Inman. *Engineering vibration*. Pearson, 2013.
- René Archambault. The past, present and future of vibration analysis. *Conference of the Canadian Machinery Vibration Association*, 2003.
- Andrew D Dimarogonas. The origins of vibration theory. *Journal of Sound and Vibration*, 140(2):181–189, 1990.
- K Yusuf Billah and Robert H Scanlan. Resonance, tacoma narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. *American Journal of Physics*, 59(2):118–124, 1991.
- Vittorio Arcioni. Damping device for measuring instruments., August 16 1904. US Patent 767,372.
- Jacob Pieter Den Hartog. *Mechanical vibrations*. Courier Corporation, 1985.
- M Osman Tokhi, Sandor Veres, and Sándor M Veres. *Active sound and vibration control: theory and applications*, volume 62. Iet, 2002.
- Dieter Guicking. Active control of sound and vibration: History–fundamentals–state of the art. *Oscillations, Waves and Interactions–60 Years Drittes Physikalisches Institute*, pages 107–138, 2007.
- Vang Alfred. Vibration dampening, October 24 1944. US Patent 2,361,071.

- Anon. Perfectionnements apportés aux paliers pour corps tournants, notamment pour ensembles devant tourner 'a l'interieur d'une enceinte 'etanche, 1959. French Patent FR 1 186 527.
- Jack D Leatherwood, David G Stephens, and Gray V Dixon. Active vibration isolator for flexible bodies, March 2 1971. US Patent 3,566,993.
- Ahmed Abu Hanieh. *Active isolation and damping of vibrations via Stewart platform*. Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering and Robotics, 2003. URL <http://scmero.ulb.ac.be/Publications/Thesis/Hanieh03.pdf>.
- Stanley R Cole, Thomas E Noll, and Boyd Perry. Transonic dynamics tunnel aeroelastic testing in support of aircraft development. *Journal of Aircraft*, 40(5):820–831, 2003.
- Graham C Goodwin, Stefan F Graebe, and Mario E Salgado. *Control system design*, volume 13. Prentice Hall, 2001.
- Wodek K Gawronski. *Dynamics and control of structures: A modal approach*. Springer Science & Business Media, 2004.
- Hyochoong Bang and Young W Kwon. *The finite element method using MATLAB*. CRC press, 2000.
- Donald E Kirk. *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation, 2012.
- Ton van den Boom and Bart De Schutter. *Optimization in Systems and Control*. Delft Center for Systems and Control, 2007.
- George IN Rozvany and Tomasz Lewiński. *Topology optimization in structural and continuum mechanics*. Springer, 2014.
- Singiresu S Rao. *Engineering optimization: theory and practice*. John Wiley & Sons, 2009.
- Martin Philip Bendsøe and Noboru Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 71(2):197–224, 1988.
- GIN Rozvany. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics. *Structural and Multidisciplinary optimization*, 21(2):90–108, 2001.
- Joshua D Deaton and Ramana V Grandhi. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 49(1):1–38, 2014.



- EC Nelli Silva, JS Ono Fonseca, and Noboru Kikuchi. Optimal design of piezoelectric microstructures. *Computational mechanics*, 19(5):397–410, 1997.
- Ole Sigmund, S Torquato, and Ilhan A Aksay. On the design of 1–3 piezocomposites using topology optimization. *Journal of materials research*, 13(4):1038–1048, 1998.
- Emílio Carlos Nelli Silva. Topology optimization applied to the design of linear piezoelectric motors. *Journal of intelligent material systems and structures*, 14(4-5):309–322, 2003.
- Ronny C Carbonari, Emílio CN Silva, and Shinji Nishiwaki. Design of piezoelectric multi-actuated microtools using topology optimization. *Smart Materials and Structures*, 14(6):1431, 2005.
- Martin Kögl and Emílio CN Silva. Topology optimization of smart structures: design of piezoelectric plate and shell actuators. *Smart materials and Structures*, 14(2):387, 2005.
- Eduardo Lenz Cardoso and Jun Sérgio Ono Fonseca. Topology optimization of piezoelectric actuators considering geometric nonlinearities. In *IUTAM Symposium on Topological Design Optimization of Structures, Machines and Materials*, pages 391–400. Springer, 2006.
- Juliano Fagundes Gonçalves. Otimização topológica para localização de atuadores piezoelétricos utilizando gramiano de controlabilidade. Master’s thesis, Engenharia Mecânica, 2015.
- Raphael T Haftka and Zafer Gürdal. *Elements of structural optimization*, volume 11. Springer Science & Business Media, 2012.
- Ole Sigmund and Martin P Bendsøe. Topology optimization—from airplanes to nanooptics. In *Bridging from technology to society*, pages 40–51. Technical University of Denmark (DTU), 2004.
- Rafael TL Ferreira, Helder C Rodrigues, José M Guedes, and José A Hernandez. Hierarchical optimization of laminated fiber reinforced composites. *Composite Structures*, 107:246–259, 2014.
- Joshua D Deaton and Ramana V Grandhi. Stress-based topology optimization of thermal structures. In *Proceedings of the 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013.
- Sebastian Kreissl and Kurt Maute. Levelset based fluid topology optimization using the extended finite element method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 46(3):311–326, 2012.

- Ronny C Carbonari, Emílio CN Silva, and Glaucio H Paulino. Multi-actuated functionally graded piezoelectric micro-tools design: A multiphysics topology optimization approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(3):301–336, 2009.
- Akihiro Takezawa, Takashi Yamamoto, Xiaopeng Zhang, Keisuke Yamakawa, Shinichi Nakano, and Mitsuru Kitamura. An objective function for the topology optimization of sound-absorbing materials. *Journal of Sound and Vibration*, 2018.
- Wilfredo Montealegre. *Projeto de MEMS. eletrotermomecânicos usando o método de otimização topológica*. PhD thesis, Universidade de São Paulo (USP). Escola Politécnica, 2005.
- Ole Sigmund and Kurt Maute. Topology optimization approaches. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(6):1031–1055, 2013.
- Martin P Bendsøe. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural optimization*, 1(4):193–202, 1989.
- Mathias Stolpe and Krister Svanberg. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 22(2): 116–124, 2001.
- Martin P Bendsøe and Ole Sigmund. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of applied mechanics*, 69(9-10):635–654, 1999.
- Mikhail Osanov and James K Guest. Topology optimization for architected materials design. *Annual Review of Materials Research*, 46:211–233, 2016.
- Boyan Stefanov Lazarov and Ole Sigmund. Filters in topology optimization based on helmholtz-type differential equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(6):765–781, 2011.
- Thomas Borrvall. Topology optimization of elastic continua using restriction. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 8(4):351–385, 2001.
- Tyler E Bruns and Daniel A Tortorelli. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(26-27):3443–3459, 2001.
- Thomas Borrvall and Joakim Petersson. Topology optimization using regularized intermediate density control. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(37-38):4911–4928, 2001.
- Luigi Ambrosio and Giuseppe Buttazzo. An optimal design problem with perimeter penalization. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 1(1):55–69, 1993.

- Mattias Schevenels, Boyan Stefanov Lazarov, and Ole Sigmund. Robust topology optimization accounting for spatially varying manufacturing errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(49-52):3613–3627, 2011.
- James K Guest, Jean H Prévost, and T Belytschko. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. *International journal for numerical methods in engineering*, 61(2):238–254, 2004.
- Blaise Bourdin. Filters in topology optimization. *International journal for numerical methods in engineering*, 50(9):2143–2158, 2001.
- Eduardo Lenz Cardoso and Jun Sergio Ono Fonseca. Complexity control in the topology optimization of continuum structures. *Journal of the brazilian society of mechanical sciences and engineering*, 25(3):293–301, 2003.
- Ole Sigmund and Kurt Maute. Sensitivity filtering from a continuum mechanics perspective. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 46(4):471–475, 2012.
- Emílio Carlos Nelli Silva and Noboru Kikuchi. Design of piezoelectric transducers using topology optimization. *Smart Materials and Structures*, 8(3):350, 1999.
- Jorge Nocedal and Stephen J Wright. *Numerical optimization* 2nd, 2006.
- Christian Grossmann, Hans-Görg Roos, and Martin Stynes. *Numerical treatment of partial differential equations*, volume 154. Springer, 2007.
- H.S. Tzou and C.I. Tseng. Distributed vibration control and identification of coupled elastic/piezoelectric systems: finite element formulation and applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 5(3):215–231, 1991.
- Zuzana Lašová and Robert Zemčík. Comparison of finite element models for piezoelectric materials. *Procedia Engineering*, 48:375–380, 2012.
- V. Mathuranathan and M. Viswanathan. *Digital Modulations Using Matlab: Build Simulation Models from Scratch*. Amazon Digital Services LLC - Kdp Print Us, 2017. ISBN 9781521493885. URL <https://books.google.com.co/books?id=gCTjtAEACAAJ>.
- Robert F Steidel et al. *An introduction to mechanical vibrations*. Wiley New York, 1979.
- Eduardo Padoin, Jun Sergio Ono Fonseca, Eduardo André Perondi, and Odair Menuzzi. Optimal placement of piezoelectric macro fiber composite patches on composite plates for vibration suppression. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12(5):925–947, 2015.
- Randall J Allemang. The modal assurance criterion—twenty years of use and abuse. *Sound and vibration*, 37(8):14–23, 2003.

# Declaración

Me permito afirmar que he realizado la presente tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en la propia tesis. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo. Ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de tesis.

Medellín, Antioquia, 05.04.2019

---

Daniel Giraldo Guzmán C.C. 1.152.17.536