UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

PUNTOS FIJOS DE APLICACIONES CONTRACTIVAS EN ESPACIOS UNIFORMES CON MÉTRICAS DÉBILES

Johnny Cuadro Molina

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Agosto de 2019

PUNTOS FIJOS DE APLICACIONES CONTRACTIVAS EN ESPACIOS UNIFORMES CON MÉTRICAS DÉBILES

Johnny Cuadro Molina

Trabajo presentado como requisito parcial para
optar al título de:
Magister en Matemáticas

Director
Dr. Jaime Rodríguez Montes

Linea de Investigación:
Teoría de Puntos Fijos

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Noviembre de 2019

A Dios y a mi familia

Agradecimientos

Quiero expresar mis más sinceros agradecimientos al Profesor Jaime Rodriguez Montes que a pesar de nuestras diferencias académicas siempre fue un poyo para terminar este trabajo.
A la Universidad Nacional sede Bogotá, por darme la oportunidad de seguir con mis estudios de posgrado y pos su ayuda económica.
Mi madre Pole Jesusa por su indiscutible apoyo a pesar de todos los inconvenientes de mi enfermedad, insistió en terminar este posgrado.

Resumen

En este trabajo demostraremos que una condición simple en la función $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ permite establecer resultados de puntos fijos y de puntos de coincidencias para aplicaciones contractivas ($\phi(t) < t$ para todo $t > 0$) o expansivas ($\phi(t) > t$ para todo $t > 0$) con respecto a las w-distancias en espacios uniformes. Estos generaliza recientes resultados de muchos autores. También mostraremos un intento de lograr la unificación del punto de vista de las contracciones y las expansiones.

Palabras Claves: Métricas, w-distancias, aplicaciones contractivas y expansivas, puntos fijos y putos de coincidencia, espacios uniformes.

Abstract

FIXED POINT FOR W-CONTRACTIVE AND W-EXPANSIVE MAPS IN UNIFORM SPACES WHIT W-DISTANCE.

In this work we prove that a simple condition on the function $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ allows to establish results fixed and coincidence points for contractive ($\phi(t) < t$ for all $t > 0$) or expansive ($\phi(t) > t$ for all $t > 0$) maps with respect to a w-distance on uniform spaces. These generalize recent results different authors. We also show, an attempt in made toward a unification of the point of view in contractions and expansions.

Keywords: Metric (distance), w-distance, contractive and expansive maps, fixed point and coincidence point of maps, uniform spaces complete.

Tabla de Contenido

Introducción

Una herramienta fundamental del Análisis es el Principio de Contracción de Banach. Problemas que involucran inyectividad o sobreyectividad de aplicaciones, existencia y unicidad de soluciones de operadores diferenciales, ceros de funciones, etc., se pueden reducir, mediante modificaciones apropiadas; a demostrar la existencia y unicidad de puntos fijos o puntos de coincidencia de aplicaciones contractivas o expansivas definidas en espacios métricos, en espacios ordenados o más generalmente, en los espacios uniformes.

El principio de contracción asegura que si f es una aplicación de un espacio métrico completo (X, d) en sí mismo tal que $d(f(x), f(y)) \leq \phi(d(x, y))$ para cada par x, y en X, donde $\phi(t) = \alpha t$ para cada $t > 0$ y $0 \leq \alpha < 1$; entonces existe un único x en X tal que $f(x) = x$.

Este principio ha sido generalizado en muchas direcciones, en unas ampliando el número de funciones involucradas, en otras flexibilizando las condiciones de la aplicación contractiva, como por ejemplo, teniendo presente que la función $\phi(t) = \alpha t$ es no decreciente y además $\sum_{n=1}^{\infty} \phi^n(t) < \infty$ para cada $t > 0$, una condición natural más débil que la anterior fue dada por Matkowsky en 1975 [7], donde ϕ es no decreciente y además $\phi^n(t) \to 0$. Otro avance significativo sobre la generalización de este principio fue dado en el 2001, por J. Rodríguez [9] quien extendió los resultados anteriores a funciones contractivas que satisfacen las condiciones (A) o (B) y a funciones expansivas que satisfacen (A) o la condición (C), logrando de esta forma, unificar el problema contractivo y expansivo para las aplicaciones que satisfacen la condición (A). Por otro lado, en

[6], O. Kada, T. Suzuki y W. Takahashi introdujeron la noción de métrica débil en un espacio métrico y mediante ella obtuvieron generalizaciones de teoremas importantes en la teoría de punto fijo; moción ésta que fue extendida en [9] a los espacios uniformes, lográndose así extender a estos espacios varios resultados clásicos del tipo contractivo o expansivo.

Por último, el Teorema 2.1 y el Ejemplo 2.1 de [10] permiten ver que la hipótesis de contractividad estricta de la función ϕ puede ser relajada y la Proposición 3.1 del mismo establece condiciones suficientes para que ciertos problemas de punto fijo se puedan reducir a alguno de los ya demostrados.

Los objetivos fundamentales de este trabajo son: Obtener algunos resultados análogos a los demostrados en [9] bajo condiciones más débiles sobre la función contractiva ϕ. En segundo lugar: extenderemos a espacios uniformes con métricas débiles y a pares de aplicaciones, un teorema contractivo de Bianchini [1] establecido en espacios métricos completos, abordando también el caso expansivo y, por último, exploraremos la utilidad de la Proposición 1.6 en la reducción y extensión de algunos teoremas contractivos establecidos en espacios métricos, a otros ya demostrados en espacios uniformes con métricas débiles.

El trabajo está dividido en tres capítulos. El primero está dedicado al repaso de algunos conceptos topológicos conocidos y otros no tanto, los cuales proveen de los elementos suficientes para la comprensión de los temas tratados y que ayudan a seguir más fácilmente la mecánica de las demostraciones de los resultados obtenidos. En el segundo capítulo se demuestran los resultados del trabajo de tesis. Estos resultados son teoremas de existencia, y está dividido en cuatro secciones. En la primera se demuestra un principio uniforme contractivo el cual es usado en la obtención de puntos fijos y de coincidencia de pares de aplicaciones. En la segunda sección se establece otro principio uniforme contractivo - expansivo, también válido en cualquier espacio uniforme, el cual extiende a espacios uniformes con métricas débiles, dos teoremas demostrados en [3] y [10]; el último de los cuales se utiliza en la extensión de un teorema contractivo de Bianchini. En la tercera sección , usamos el principio anterior en la obtención de puntos fijos de pares de aplicaciones, pero de tipo expansivo; y en la última sección se ve la utilidad de la Proposición 1.6 y el Teorema 2.1. El tercer capítulo, hace referencia a las conclusiones y recomendaciones para este trabajo desde el punto de vista del autor.

Capítulo 1

CONCEPTOS Y RESULATADOS BÁSICOS

A lo largo de este trabajo aparecerán algunos conceptos y propiedades relacionadas con los espacios topológicos, los espacios uniformes y las funciones contractivas y expansivas que serán necesarias para obtener nuestros resultados. Las referencias básicas para este capítulo son [2], [4], [9].

1.1. Espacios Topológicos

Definición 1.1. Sea X un espacio no vacío. Una topología sobre X es una colección τ de subconjuntos de X, que satisfacen las siguiente propiedades:

1. $\emptyset, X \in \tau$

2. La unión arbitraria de elementos de τ está en τ; es decir, si $\{A_i\}_{i\in I}$, es una familia de elementos de τ, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$.

3. La intersección finita de elementos de τ está en τ; es decir, si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$, entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.

Definición 1.2. (Espacio Topológico). Un espacio topológico es una par (X, τ), donde $X \neq \emptyset$ y τ es una toología sobre X.

Observación 1.1. Se dice que $U \subset X$ es un conjunto abierto de X si, y sólo si $U \in \tau$. Por definición $\emptyset, X, \bigcup_{i \in I} A_i, \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ son conjuntos abiertos de X.

Definición 1.3. (Base de una Topología). Sea X un conjunto no vacío. Una base para una topología sobre X es una colección β de subconjuntos de X llamados elementos básicos, que satisfacen:

1. $\forall x \in X, \exists B \in \beta$ tal que $x \in B$.
2. Si $B_1, B_2 \in \beta$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces $\exists B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.
3. Si β satisface las condiciones (1) y (2), la topología generada por β se define como:

$$U \in \tau \iff \forall x \in U, \exists B \in \beta \quad \text{tal que } x \in B \subset U$$

Ejemplo 1.1. (Topología métrica).
Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $\epsilon > 0$ y $x \in X$, la bola abierta con centro en x y radio ϵ es el conjunto $B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$. Entonces la colección $\mathcal{C} := \{B(x, \epsilon) : x \in X, \epsilon > 0\}$ es una base para la topología sobre X, denominada topología métrica generada por d.
A partir de este ejemplo podemos reformular la definición de topología métrica como sigue:

$$U \in \tau(d) \iff \forall y \in U, \exists \delta > 0 : \quad B(y, \delta) \subset U$$

Definición 1.4. (Espacios Topológicos de Hausdorff).
Un espacio topológico (X, τ), es un espacio de Hausdorff si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existen abiertos U, V tal que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Teorema 1.1. *Si (X, τ) es un espacio de Hausdorff, entonces una sucesión de puntos de X converge a lo sumo a un punto.*

Demostración. Véase [2],[4]. □

1.2. Espacios Uniformes

Definición 1.5. Una estructura uniforme sobre un conjunto X es un conjunto $\mathcal{U}$ de subconjuntos de $X \times X$ que satisfacen :

1. Si $U \in \mathcal{U}$ y $V \subseteq X \times X$ es tal que $U \subseteq V$, entonces $V \in \mathcal{U}$.

2. Si $V_i \in \mathcal{U}$ para $i = 1, 2, ..., n$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{U}$.

3. La diagonal $\Delta = \{(x, x)/x \in X\}$ está contenida en V, para todo $V \in \mathcal{U}$.

4. Si $V \in \mathcal{U}$ entonces $V^{-1} \in \mathcal{U}$ (si $V \subseteq X \times X, V^{-1} = \{(y, x)/(x, y) \in V\}$).

5. Para todo $V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \circ W \subseteq V$ (si $U, V \subseteq X \times X$, $U \circ V = \{(x, y)/(x, z) \in U$ y $(z, y) \in V$ para algún $z \in X\}$)

Si $V \in \mathcal{U}$, se dice que V es un entorno de $\mathcal{U}$. La pareja $(X,\mathcal{U})$ se denomina un espacio uniforme. Si $V \in \mathcal{U}$ y $(x, y) \in V$, se dice que x, y son vecinos de orde V. Un entorno $V \in \mathcal{U}$ es simétrico si $V = V^{-1}$. Es claro que si $V \in \mathcal{U}$, entonces $V \cap V^{-1}$ es un entorno simétrico contenido en V.

Nota 1.1. Si X es no vacío, la propiedad (1) de la Definición 1.5 implica que ningún entorno en $\mathcal{U}$ es vacío. Sobre el conjunto $\emptyset$ existe una única estructura uniforme: $\mathcal{U} = \{\emptyset\}$.

Definición 1.6. Un sistema fundamental de entornos de una estructura uniforme $\mathcal{U}$ es cualquier subconjunto β de $\mathcal{U}$ tal que todo $U \in \mathcal{U}$ contiene un $V \in \beta$.

Por ejemplo, $\mathcal{U}$ mismo es un sistema fundamental de entornos de $\mathcal{U}$. De la propiedad (4) de la Definición 1.5 se deduce que si β es un sistema fundamental de entornos de $\mathcal{U}$ y $n > 0$ es un entero, el conjunto $\{V^n/V \in \beta\}$, donde $V^n = V \circ V^{n-1} = V^{n-1} \circ V$, también es un conjunto fundamental de entornos de $\mathcal{U}$. A su vez, de (5) se tiene que el conjunto de los entornos simétricos de una estructura uniforme $\mathcal{U}$ forma un sistema fundamental de entornos de $\mathcal{U}$ (si $V \in \mathcal{U}$ entonces $W = V \cap V^{-1} \subseteq V$ es un entorno simétrico).

Proposición 1.1. *Las propiedades (4) y (5) de la Definición 1.5 son equivalentes a la propiedad siguiente:*

(4-5) Para cada $V \in \mathcal{U}$ existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \circ W^{-1} \subseteq V$

Demostración. Si (4) y (5) se cumplen y $V \in \mathcal{U}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \circ U \subseteq V$. Sea $W = U \cap U^{-1}$; entonces $W = W^{-1} \in \mathcal{U}$ y $W \subseteq U$ y claramente $W \circ W^{-1} \subseteq U \circ U \subseteq V$. Supongamos, recíprocamente, que (4-5) es válida, y sean V, W tales que $W \circ W^{-1} \subseteq V$. Entonces $W^{-1} = \Delta \circ W^{-1} \subseteq W \circ W^{-1} \subseteq V$, de lo cual $W \subseteq V^{-1}$ y por (1), $V^{-1} \in \mathcal{U}$ y (4) se cumple. Para demostrar (5) sea $W' = W \cap W^{-1}$; entonces $W' \in \mathcal{U}$ y $W' \circ W' \subseteq W \circ W^{-1} \subseteq V$. □

Proposición 1.2. *Un conjunto β de subconjuntos de $X \times X$ es un sistema fundamental de entornos de una estructura uniforme $\mathcal{U}$ sobre X si y sólo si β tiene las siguientes propiedades:*

1. *Si $W_1, W_2 \in \beta$ existe $W_3 \in \beta$ tal que $W_3 \subseteq W_1 \cap W_2$.*

2. *Para todo $V \in \beta$, $\Delta \subseteq V$.*

3. *Para todo $V \in \beta$ existe $W \in \beta$ tal que $W \subseteq V^{-1}$.*

4. *Para todo $V \in \beta$ existe $W \in \beta$ tal que $W \circ W \subseteq V$.*

Demostración. Claramente la condición es necesaria. Recíprocamente, si β satisface las propiedades, entonces $U = \{U \subseteq X \times X / W \subseteq U$ para algún $W \in \beta\}$ es una estructura uniforme sobre X y β es un sistema fundamental de entornos de $\mathcal{U}$. □

Ejemplo 1.2. Sea (X, d) un espacio métrico y para todo $\epsilon > 0$ sea $B_\epsilon = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \epsilon\}$. Si $\delta = \text{mín}\{\epsilon, \epsilon'\}$ entonces $B_\delta \subseteq B_\epsilon \cap B_{\epsilon'}$, $\Delta \subseteq B_\epsilon$, $B_\epsilon^{-1} = B_\epsilon$ y $B_{\epsilon/2} \circ B_{\epsilon/2} \subseteq B_\epsilon$. La Proposición 1.2 garantiza que $\beta = \{B_\epsilon : \epsilon > 0\}$ es un sistema fundamental de entornos de una estructura uniforme $\mathcal{U}(d)$ sobre X denominada la estructura uniforme inducida por d. El conjunto B_ϵ se denomina la banda abierta de amplitud ϵ para d. A su vez, $\bar{B}_\epsilon = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) \leqslant \epsilon\}$ será la banda cerrada de amplitud ϵ, y $\beta = \{\bar{B}_\epsilon : \epsilon > 0\}$ es también un sistema fundamental de entornos para $\mathcal{U}(d)$.

1.3. Topología de un Espacio Uniforme

Definición 1.7. Si $\mathcal{U}$ es una estructura uniforme sobre X, $V \in \mathcal{U}$ y $x \in X$, se define la sección $V(x)$ de V con x por $V(x) = \{y \in X : (x, y) \in V\}$.

Es claro que $y \in V(x)$ si y sólo si $(x, y) \in V$.

Proposición 1.3. *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y para cada $x \in X$ sea $\mathcal{U}(x) = \{V(x) : V \in \mathcal{U}\}$. Entonces existe una única topología sobre X tal que para cada $x \in X$, $\mathcal{U}(x)$ es el conjunto de vecindades de x en esta topología.*

Demostración. Por la Proposición 1.2, es suficiente demostrar que $\mathcal{U}(x)$ satisface las propiedades de (1) a (4), es decir :

1. Si $A \subseteq X$ y $V(x) \subseteq A$ para algún $V \in \mathcal{U}$, entonces $A \in \mathcal{U}(x)$.

2. Cualquier intersección finita de subconjuntos de $\mathcal{U}(x)$ pertenece a $\mathcal{U}(x)$.

3. x está en todo conjunto en $\mathcal{U}(x)$.

4. Si $V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $V(x) \in \mathcal{U}(y)$ para todo $y \in W(x)$.

En efecto:

1. Si $V(x) \subseteq A \subseteq X$ con $V \in \mathcal{U}$, entonces $A = W(x)$, donde $W = V \cup (\{x\} \times A) \in \mathcal{U}$.

2. Si $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, entonces $V_1(x) \cap V_2(x) = (V_1 \cap V_2)(x)$, por lo tanto, $V_1(x) \cap V_2(x) \in \mathcal{U}(x)$.

3. Claramente $\{x\} = \Delta(x) \subseteq V(x)$ para todo $V \in \mathcal{U}$.

4. Dado $V \in \mathcal{U}$ existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \circ W \subseteq V$; entonces si $y \in W(x)$ y $z \in W(y)$ se tiene que $(x, z) \in V$, es decir $z \in V(x)$ y por lo tanto $W(y) \subseteq V(x)$. Se concluye que $V(x) \in \mathcal{U}(y)$ para cada $y \in W(x)$.

$\square$

Definición 1.8. La topología definida en la Proposición 1.3 se denomina la topología inducida por $\mathcal{U}$ sobre X y se denota por $\tau(\mathcal{U})$.

Ejemplo 1.3. Espacio métrico.

Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $\epsilon > 0$ y $x \in X$, la "bola abierta"con centro en x y radio ϵ es el conjunto $B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$. Entonces la colección $\mathcal{V}(x) = \{A \subseteq X : B(x, \epsilon) \subseteq A$ para algún $\epsilon > 0\}$ satisface las propiedades de la Proposición 1.2. En efecto, para cada $x \in X$, $x \in B(x, \epsilon)$, si $B(x, \epsilon) \subseteq A \subseteq B$, $B \in \mathcal{V}(x)$, $B(x, \epsilon) \cap B(x, \epsilon') = B(x, \delta)$ donde $\delta = \text{mín}\{\epsilon, \epsilon'\}$ y por último, si $y \in B(x, \epsilon) \subseteq A$, entonces $B(y, \epsilon - d(x, y)) \subseteq A$, por lo tanto, A es vecindad de cada $y \in B(x, \epsilon)$. Existe sobre X una única topología $\tau(d)$ con $\mathcal{V}(x)$ como sistema de vecindades de x.

Así, si (X, d) es un espacio métrico, la topología inducida por $\mathcal{U}(d)$ es $\tau(d)$, la topología definida por d de la manera usual. Nótese al respecto que $B_\epsilon(x)$, el corte de B_ϵ con x, es simplemente la bola abierta de centro x y radio ϵ.

Ejemplo 1.4. Espacio vectorial topológico.

Definición 1.9. Si τ es una topología sobre un espacio vectorial X tal que las operaciones del espacio vectorial son continuas, se dice que τ es una topología vectorial sobre X y que X es un espacio vectorial topológico.

La anterior definición significa que las aplicaciones $s : X \times X \longrightarrow X$ y $p : K \times X \longrightarrow X$($K$ es el campo de escalares del espacio vectorial X) definidas sobre los espacios productos $X \times X$ y $K \times X$ por $s(x, y) = x + y$ y $p(\alpha, x) = \alpha x$ son continuas.
Para cada $a \in X$ y cada escalar $\alpha \neq 0$ las aplicaciones de X en X tal que $x \longrightarrow a + x$, y, $x \longrightarrow \alpha x$ son continuas con inversas $x \longrightarrow -a + x$, y $x \longrightarrow \alpha^{-1}x$, por lo tanto, son homeomorfismos. Se deduce de lo anterior que un subconjunto $V \subseteq X$ es una vecindad de 0 (cero) en X si y solo si $x + V = \{x + v/v \in V\}$ es una vecindad de x para cada x en X; por lo tanto, el conjunto de vecindades de x es $\mathcal{V}(x) = \{x + V/V \in \mathcal{V}(0)\}$, donde $\mathcal{V}(0)$ es el conjunto de vecindades de 0.

Para cada $V \in \mathcal{V}(0)$ sea $V_\tau = \{(x,y) \in X \times X / y - x \in V\}$; entonces el conjunto $\beta = \{V_\tau, V \in \mathcal{V}(0)\}$ es un sistema fundamental de entornos. En efecto, si U y $V \in \mathcal{V}(0)$ entonces $W = U \bigcap V \in \mathcal{V}(0)$ y $W_\tau = U_\tau \cap V_\tau$; $\Delta \subseteq V_\tau$ para todo $V \in \mathcal{V}(0)$; $(V_\tau)^{-1} = (-V)_\tau$ y, finalmente, la continuidad de s garantiza que para todo $V \in \mathcal{V}(0)$ existe $W \in \mathcal{V}(0)$ tal que $W + W \subseteq V$, de lo cual se deduce que $W_\tau \circ W_\tau \subseteq V_\tau$. Por la Proposición 1.2 existe una estructura uniforme $\mathcal{U}$ sobre X con β como un sistema fundamental de entornos y desde que $V_\tau(x) = \{y \in X/(x,y) \in V_\tau\} = \{y \in X/y - x \in V\} = \{y \in X/y \in x + V\} = x + V$, se deduce que la topología $\tau(\mathcal{U})$ inducida por $\mathcal{U}$ sobre X coincide con τ.

Proposición 1.4. *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces el espacio topológico $(X, \tau(\mathcal{U}))$ es de Hausdorff si y sólo si la intersección de todos los entornos de su estructura uniforme es la diagonal Δ de $X \times X$.*

Demostración. Supongamos primero que $\bigcap_{V\in\mathcal{U}} V = \Delta$ y sean x, y en X con $x \neq y$. Entonces existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $(x,y) \notin V$; y desde que los entornos simétricos forman un sistema fundamental de entornos, existe un $W \in \mathcal{U}$ simétrico tal que $W \circ W \subseteq V$, de lo cual $W(x) \cap W(y) = \emptyset$ y $(X, \tau(\mathcal{U}))$ es un espacio de Hausdorff.
Recíprocamente, si $(X, \tau(\mathcal{U}))$ es un espacio de Hausdorff y $x \neq y$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $y \notin V(x)$, de lo cual $(x,y) \notin V$. Se deduce que $\bigcap_{V\in\mathcal{U}} \subseteq \Delta$ y por lo tanto, $\Delta = \bigcap_{V\in\mathcal{U}} V$. □

Nota 1.2. De la anterior proposición se deduce que si X es un espacio de Hausdorff con la topología $\tau(\mathcal{U})$, y si (x,y) pertenecen a todo entorno V en $\mathcal{U}$ necesariamente $x = y$.

Definición 1.10. Una sucesión (x_n) de un espacio uniforme X es una sucesión de Cauchy si para cada entorno V de X existe un entero $N > 0$ tal que si $m \geq N$ y $n \geq N$ entonces $(x_m, x_n) \in V$.

Definición 1.11. Un espacio uniforme es secuencialmente completo si toda sucesión de Cauchy es convergente, es decir, existe $x \in X$ tal que para todo entorno V de X existe un entero $N > 0$ tal que si $n \geq N$, entonces $(x_n, x) \in V$.

La Definición 1.11 afirma que toda sucesión de Cauchy en $(X,\mathcal{U})$ es convergente en el espacio topológico $(X,\tau(\mathcal{U}))$.

Nota 1.3. Cuando se mencionan conceptos topológicos en el contexto de un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ (continuidad o semicontinuidad de aplicaciones definidas en X, por ejemplo), estos se refieren siempre al espacio topológico $(X,\tau(\mathcal{U}))$.

1.4. Funciones Contractivas y Expansivas

Definición 1.12. Una función $\varphi : \mathbb{R}^+ = [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es contractiva si $\varphi(t) < t$ para todo $t > 0$, y es expansiva si $\varphi(t) > t$ para todo $t > 0$.

Definición 1.13. Sea $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función. Diremos que:

1. φ satisface la condición (A), si para toda sucesión decreciente (t_n) en $\mathbb{R}^+$ (es decir, $t_{n+1} < t_n$ para todo $n \geq 1$) tal que

$$\lim t_n = \lim \varphi(t_n) = t, \tag{1.1}$$

   se tiene que $t = 0$.

2. φ satisface la condición (B), si para toda sucesión decreciente (t_n) en $\mathbb{R}^+$ tal que $t_{n+1} \leq \varphi(t_n)$ para todo $n \geq 1$, y para la cual (1.1) se satisface, se tiene que $t = 0$.

3. φ satisface la condición (C), si para toda sucesión decreciente (t_n) en $\mathbb{R}^+$ tal que $\varphi(t_{n+1}) \leq t_n$ para todo $n \geq 1$, si (1.1) se satisface, se tiene que $t = 0$

Denotaremos por:

Φ el conjunto de las aplicaciones contractivas $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfacen la condición (A), es decir

$$\Phi := \{\phi : \phi(t) < t,\ \forall t \in (0,+\infty) \text{ y que satisfacen (A)}\} \tag{1.2}$$

Φ_0 el conjunto de aplicaciones contractivas $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfacen la condición (B) y $\phi(0) = 0$, es decir

$$\Phi_0 := \{\phi : \phi(t) < t,\ \phi(0) = 0\ \forall t \in (0, +\infty) \text{ y que satisfacen (B)}\} \tag{1.3}$$

Ψ el conjunto de las aplicaciones expansivas $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfacen la condición (A) tanto para sucesiones crecientes como decrecientes es decir

$$\Psi := \{\psi : \psi(t) > t, \quad \forall t \in (0, +\infty) \text{ y que satisfacen (A)}\} \tag{1.4}$$

Ψ_0 el conjunto de las funciones expansivas $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfacen la condición (C) y $\psi(0_+) = 0$, es decir

$$\Psi_0 := \{\psi : \psi(t) > t,\ \psi(0_+) = 0\ \forall t \in (0, +\infty) \text{ y que satisfacen (A) y (C)}\} \tag{1.5}$$

Si ϕ es contractiva, claramente $\phi(0_+) = 0$. Sea $\widetilde{\phi} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por:

$$\widetilde{\phi}(t) = \begin{cases} \sup\{\phi(x) : 0 < x \leq t\}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Entonces $\widetilde{\phi}$ es no decreciente ($\widetilde{\phi}(t) \leq \widetilde{\phi}(t')$ si $t < t'$), $\phi(t) = \widetilde{\phi}(t) < t$ ó $\phi(t) < \widetilde{\phi}(t) \leq t$ para todo $t > 0$.

Proposición 1.5. *[10] Si $\phi \in \Phi_0$, la función $\widetilde{\phi}$ satisface las siguientes condiciones.*

1. *$\widetilde{\phi}$ es una función no decreciente tal que $\widetilde{\phi}(0) = 0$ y $\phi(t) < \widetilde{\phi}(t) \leq t$ ó $\phi(t) = \widetilde{\phi}(t) < t$ para todo $t > 0$.*

2. *Para todo intervalo $(\alpha, \beta]$ con $\alpha > 0$, existe $\epsilon \in (\alpha, \beta]$ tal que $\widetilde{\phi}(\epsilon) < \epsilon$.*

3. *$\widetilde{\phi}$ satisface la condición (B).*

Demostración. La condición (1) es consecuencia inmediata de la definición de $\widetilde{\phi}$.

Supóngase que (2) no se cumple. Entonces existen $0 < \alpha < \beta$ tal que $\widetilde{\phi}(t) = t$ para todo $t \in (\alpha, \beta]$. Puesto que $\widetilde{\phi}(\beta) = \beta$ existiría t_1 en $\mathbb{R}^+$ tal que $\alpha < \phi(t_1) < t_1 \leq \beta$. De nuevo, como $\widetilde{\phi}(\phi(t_1)) = \phi(t_1)$, existiría $\alpha < \phi(t_2) < t_2 \leq \phi(t_1)$. La iteración de este argumento define una sucesión decreciente (t_n) tal que $\alpha < \phi(t_{n+1}) < t_{n+1} \leq \phi(t_n)$ para todo $n \geq 1$, así que $\lim t_n = \lim \phi(t_n) = t \geq \alpha > 0$. Como $\phi \in \Phi_0$, esto es contradictorio. Para demostrar (3), sea (t_n) una sucesión decreciente en $\mathbb{R}^+$ tal que $t_{n+1} \leq \widetilde{\phi}(t_n)$ para todo $n \geq 1$, y que verifique(1.1) para $\widetilde{\phi}$. De la definición de $\widetilde{\phi}$ se obtiene una sucesión (s_n) en $\mathbb{R}_+$ tal que $t_{n+1} < \phi(s_n) < s_n \leq t_n$ y que $\phi(s_n) \leq \widetilde{\phi}(t_n), n \geq 1$, así que (s_n) es una sucesión decreciente y $\lim s_n = \lim \phi(s_n) = t$. Como $\phi \in \Phi_0$, entonces $t = 0$. □

Denotaremos por:

Φ^* el conjunto de las aplicaciones $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ no decrecientes que satisfacen las propiedades (2) y (3) de la Proposición 1.5 y, además, $\phi(t) \leq t$ para todo $t > 0$, es decir

$$\Phi^* := \{\phi : \phi(t) \leqslant t,\ \forall t > 0 \text{ y que satisfacen (2) y (3) de la Proposición 1.5}\} \tag{1.6}$$

En algunos teoremas de punto fijo, no asoma de manera explícita su carácter contractivo. La siguiente definición y proposición son muy útil para clarificar esta condición.

Definición 1.14. Sea f y g aplicaciones de un conjunto no vacío X con valores en el conjunto $\mathbb{R}^+$. Diremos que f y g satisfacen la "condición (C.E)"si para cada par de sucesiones decrecientes $(f(x_n))$ y $(g(x_n))$ con x_n en X, si $\lim f(x_n) = \lim g(x_n) = t$, necesariamente $t = 0$.

Proposición 1.6. *[10] Sea X un conjunto no vacío y $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ aplicaciones tales que $f(x) < g(x)$ para cada $x \in X$ si $g(x) > 0$. Supóngase además que f y g satisfacen la condición (C.E). Entonces existe una función no decreciente $\phi \in \Phi^*$ tal que $f(x) \leq \phi(g(x))$ para todo x en X.*

Demostración. Para cada $t > 0$ sea

$$\phi(t) = \begin{cases} \sup\{f(x) : g(x) \leq t\}, & \text{si } \{f(x) : g(x) \leq t\} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se deduce fácilmente de la definición que ϕ es no decreciente y que $f(x) \leq \phi(g(x))$ para cada $x \in X$. Falta demostrar que se satisfacen las propiedades (2) y (3) de la Proposición 1.5.

Si (2) no se verificara, existirían α y $\beta, 0 < \alpha < \beta$ tal que $\phi(t) = t$ para todo $t \in (\alpha, \beta]$. Puesto tal que $\phi(\beta) = \beta$, para algún x_1 en X debería tenerse que $\alpha < f(x_1) < g(x_1) \leq \beta$, y habiendo elegido x_n en X tal que $\alpha < f(x_n) < g(x_n)$, también puede elegirse x_{n+1} en X tal que $\alpha < f(x_{n+1}) < g(x_{n+1}) \leq f(x_n)$, de lo cual se deduce que para algún $t \geq \alpha > 0, t = \text{lím}\, f(x_n) = \text{lím}\, g(x_n)$. Como las funciones f y g satisfacen la condición (C.E), $t = 0$, lo cual es contradictorio. Para demostrar (3), supongamos, sin pérdida de generalidad, que (t_n) es una sucesión decreciente en $\mathbb{R}^+$ tal que $t_{n+1} < \phi(t_n), n \geq 1$, y que $\text{lím}\, t_n = \text{lím}\, \phi(t_n) = t$ para algún $t \geq 0$. De la definición de ϕ se deduce que para cada $n \geq 1$, existe x_n en X tal que $t_{n+1} < f(x_n) \leq \phi(t_n)$ y $f(x_n) < g(x_n) \leq t_n$. Como la sucesión $(f(x_n))$ es decreciente, $g(x_{n+1}) < f(x_n)$ y además $\text{lím}\, f(x_n) = \text{lím}\, g(x_n) = t$, necesariamente $t = 0$, lo cual significa que ϕ satisface la condición (B). $\square$

Capítulo 2

TEOREMAS DE EXISTENCIA

En este segundo capítulo se demuestran los resultados del trabajo de tesis. Estos resultados son teoremas relacionados con la de existencia de puntos fijos, tipo contractivo y expansivo los cuales son usados para obtener puntos fijos y puntos de coincidencia de pares de aplicaciones. Se establece otro principio uniforme contractivo - expansivo, también válido en cualquier espacio uniforme, el cual extiende a espacios uniformes con métricas débiles, dos teoremas demostrados en [3] y [10]; el último de los cuales se utiliza en la extensión de un teorema contractivo de Bianchini. Para obtener estos resultados se extiende el concepto de métrica débil dado en [6], a espacios uniformes.

2.1. Métricas débiles sobre Espacios Uniformes

Definición 2.1. Sea$(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Una aplicación $p : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una métrica débil sobre X, si p satisface las siguientes propiedades, cualesquiera que sean x, y, z en X:

1. $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z)$
2. $p(x, \cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es semicontinua inferiormente.
3. Para todo $V \in \mathcal{U}$ existe $\delta > 0$ tal que si $p(z, x) < \delta$ y $p(z, y) < \delta$, entonces $(x, y) \in V$.

El siguiente lema resume algunas de las propiedades de las métricas débiles, y fue demostrado en [9].

Lema 2.1. *[9] Sean $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y p una métrica débil sobre X. Sean $(x_n),(y_n)$ sucesiones arbitrarias de X y $(\alpha_n),(\beta_n)$ sucesiones en $\mathbb{R}^+$ convergentes a 0. Entonces, para $x,y,z \in X$, se tiene que:*

1. *Si $p(x_n,y) \leq \alpha_n$ y $p(x_n,z) \leq \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $y = z$. En particular, si $p(x,y) = 0$ y $p(x,z) = 0$, entonces $y = z$.*
2. *Si $p(x_n,y_n) \leq \alpha_n$ y $p(x_n,z) \leq \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces (y_n) converge a z.*
3. *Si $p(x_n,x_m) \leq \alpha_n$ para $m,n \in \mathbb{N}$ con $m > n$, entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy en $(X,\mathcal{U})$.*
4. *Si $p(y,x_n) \leq \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy en $(X,\mathcal{U})$.*

En lo que sigue, supondremos que todos los espacios son de Hausdorff y el término "subespacio completo"de un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ alude a la completez secuencial dada en la Definición 1.11.

2.1.1. Un Principio Uniforme Contractivo

Lema 2.2. *Sean $(Y,\mathcal{U})$ un espacio uniforme, $X \subseteq Y$ un subconjunto de Y y f una aplicación de X en Y. Supóngase que:*

1. *Existe una sucesión (x_n) en X tal que $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \geq 1$.*
2. *Para todo $W \in \mathcal{U}$, existe $N \geq 1$ tal que $(x_N, f(x_N)) \in W$.*
3. *Para todo entorno $V \in \mathcal{U}$ existe un entorno $W \subseteq V$ tal que si $(x,f(x)) \in W$ y $(x,z) \in V$, entonces $(x,f(z)) \in V$. Entonces la sucesión (x_n) es de Cauchy. Si, además, X es un subespacio completo de Y, existe x_0 en X tal que $f(x_0) = x_0$ y*

$$\lim x_n = \lim f(x_n) = x_0, \tag{2.1}$$

Demostración. Sea V un entorno en $\mathcal{U}$ y V' un entorno simétrico tal que $V' \circ V' \subseteq V$. Para V', sea $W \subseteq V'$ un entorno como en (3). Por (2), existe un entero $N \geq 1$ tal que $(x_N, f(x_N)) \in W$; pero $(x_N, f(x_N)) = (x_N, x_{N+1}) \in V'$, de lo cual, por (3), $(x_N, f(x_{N+1})) = (x_N, x_{N+2}) \in V'$. Procediendo inductivamente tenemos que $(x_N, x_{N+n}) \in V'$ para todo $n \geq 1$, y por la simetría de V', $(x_{N+p}, x_{N+m}) \in V$ para $m, p \geq 1$, y (x_n) es una sucesión e Cauchy en X, el cual es completo, por lo tanto, existe $x_0 \in X$ tal que $\lim x_n = \lim f(x_n) = x_0$.

Ahora, para V, V' y W como anteriormente, existe $N \geq 1$ tal que $(x_N, x_0) \in V'$ y $(x_N, f(x_N)) \in W$ (por (2)). La condición (3) garantiza que $(x_N, f(x_0)) \in V'$. Desde que $(x_0, x_N) \in V'$ y $(x_N, f(x_0)) \in V'$, se deduce que $(x_0, f(x_0)) \in V$ y por ser $V \in \mathcal{U}$ arbitrario se concluye que $f(x_0) = x_0$, y x_0 es un punto fijo de f. □

2.1.2. Teoremas de Existencia Débilmente Contractivos

El siguiente resultado, del tipo contractivo, extiende el Teorema 2.1 de [9] a las aplicaciones $\phi \in \Phi^*$ y nos permite ver la utilidad del Lema 2.2.

Teorema 2.1. *Sea f una aplicación de un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ en sí mismo y supóngase que uno al menos de X ó $f(X)$ es un subespacio completo de X. Sea p una métrica débil sobre X tal que para $\phi \in \Phi^*$, fija,*

1. $p(f(x), f(y)) < p(x, y), x, y \in X$, *si* $p(x, y) > 0$.

2. $p(f(x), f(y)) \leq \phi(p(x, y)), x, y \in X$.

Entonces existe un único punto fijo x_0 de f, para el cual se verifica 2.1 cualquiera que sea la sucesión (x_n) en X que satisfaga $x_{n+1} = f(x_n), n \geq 1$.

Demostración. Sea $\mathcal{U}(d)$ la estructura uniforme sobre X inducida por la métrica $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por:

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{p(x, y), p(y, x)\}, & \text{si } x \neq y, \\ p(x, y) = 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Por la Proposición 1.5 (2), sea $\epsilon > 0$ tal que $\phi(\epsilon) < \epsilon$ y $\delta = \frac{(\epsilon - \phi(\epsilon))}{2}$; entonces, si $(x, f(x)) \in B_\delta$ y $(x, z) \in B_\epsilon$, se deduce de (2) y de que ϕ es no decreciente, que

$$\begin{aligned} d(x, f(x)) &\leq d(x, f(x)) + d(f(x), f(z)) \\ &\leq \delta + \text{máx}\{p(f(x), f(z)), p(f(z), f(x))\} \\ &\leq \delta + \phi(\epsilon) < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x, f(z)) \in B_\epsilon$. Dado $x_1 \in X$, sean (x_n) la sucesión en X definida por $x_{n+1} = f(x_n), n \geq 1, t_n = p(x_{n+1}, x_n)$ y $s_n = p(x_n, x_{n+1}), n \geq 1$. Si para todo $n \in \mathbb{N}, t_n > 0$ y $s_n > 0$, se deduce de (2) que

$$t_{n+1} = p(x_{n+2}, x_{n+1}) = p(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq \phi(p(x_{n+1}, x_n)) = \phi(t_n) \leq t_n$$

y similarmente para la sucesión (s_n), por lo tanto, $\text{lím}\, t_n = \text{lím}\, \phi(t_n) = t$ y $\text{lím}\, s_n = \text{lím}\, \phi(s_n) = s$ para algún par $s \geq 0$ y $t \geq 0$, y desde que ambas sucesiones son decrecientes y $\phi \in \Phi^*$, necesariamente $t = s = 0$. Se deduce que para todo $\delta > 0$, existe un entero $N \geq 1$ tal que $(x_N, f(x_N)) \in B_\delta$. El Lema 2.2 garantiza que la sucesión (x_n) es de Cauchy en $(X, \mathcal{U}(d))$ y desde que $p(x, y) \leq d(x, y)$ para todo x, y en X, el Lema 2.1 (3) garantiza que también es de Cauchy en $(X, \mathcal{U})$ y existe x_0 en X tal que

$$\text{lím}\, f(x_n) = \text{lím}\, x_n = x_0.$$

Dado $V \in \mathcal{U}$ sea δ como en la Definición 2.1 (3) y $N \geq 1$ tal que $p(x_n, x_m) < \delta/2$ para todo $n, m \geq N$. La semicontinuidad inferior $p(x, \cdot)$ garantiza que $p(x_n, x_0) \leq \delta/2$ para todo $n \geq N$. Se deduce de (2) que,

$$p(x_{n+1}, f(x_0)) = p(f(x_n), f(x_0)) \leq \phi(\delta/2) \leq \delta/2$$

y por la Definición 2.1 (3) $(x_0, f(x_0)) \in V$ y desde que V es arbitrario, $f(x_0) = x_0$, y x_0 es un punto fijo de f. Supóngase ahora que para algún $N \geq 1, p(x_N, x_{N+1}) = 0$; entonces, de (2), también $p(x_{N+1}, x_{N+2}) = 0$, de lo cual,

$$p(x_N, x_{N+2}) \leq p(x_N, x_{N+1}) + p(x_{N+1}, x_{N+2}) = 0$$

y por el Lema 2.1 (1), $x_{N+1} = x_{N+2} = f(x_{N+1})$ y x_{N+1} es un punto fijo de f. Finalmente, si $\widetilde{x_0}$ es otro punto fijo de f, se deduce de (1) que $p(x_0, x_0) = p(x_0, \widetilde{x_0}) = 0$, y nuevamente el Lema 2.1 (1) garantiza que $x_0 = \widetilde{x_0}$ y el punto fijo es único. $\square$

El siguiente resultado generaliza el Lema 2.2 al caso de una pareja de aplicaciones.

Lema 2.3. *Sean f y g aplicaciones de un conjunto X en un espacio uniforme $(Y,\mathcal{U})$. Supóngase además que:*

1. *Existe una sucesión (x_n) en X tal que $g(x_n) = f(x_{n+1}), n \geq 1$.*

2. *Para todo $W \in \mathcal{U}$, existe un entero $N \geq 1$ tal que $(f(x_N), g(x_N)) \in W$.*

3. *Para todo $V \in \mathcal{U}$, existe un entorno $W \subseteq V$ tal que $(f(x), g(z)) \in V$ siempre que $(f(x), g(x)) \in W$ y $(f(x), f(z)) \in V$.*

Entonces la sucesión $(f(x_n))$ es de Cauchy en $f(X)$. Si, además, $f(X)$ es un subespacio completo de Y, existe x_0 en X tal que

$$\lim f(x_n) = \lim g(x_n) = f(x_0) = g(x_0). \tag{2.2}$$

Demostración. Dado $V \in \mathcal{U}$, existe un entorno simétrico V' tal que $V' \circ V' \subseteq V$; para V' sea $W \subseteq V'$ como en (3). Por (2), existe un entero $N \geq 1$ tal que

$$(f(x_N), g(x_N)) = (f(x_N), f(x_{N+1})) \in W \subseteq V',$$

de lo cual, por (3),

$$(f(x_N), g(x_{N+1})) = (f(x_N), f(x_{N+2})) \in V'$$

y por un proceso inductivo, $(f(x_N),\ f(x_{N+m})) \in V'$ para todo $m \geq 1$, y por la simetría de V' , $(f(x_{N+p}), f(x_N)) \in V'$ para todo $p \geq 1$, por lo tanto, $(f(x_{N+p}), f(x_{N+m})) \in V$ para todo $n, m \geq N$ y $(f(x_n))$ es una sucesión de Cauchy en $f(X)$, el cual es completo, por lo cual, existe x_0 en X tal que $\lim f(x_n) = \lim g(x_n) = f(x_0)$.

Ahora, para V, V' y W como anteriormente, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $(f(x_N), g(x_N)) \in W$ y $(f(x_N), f(x_0)) \in V'$. De (3) se deduce que $(f(x_N), g(x_0)) \in V'$ y desde que

$(f(x_0), f(x_N)) \in V'$ y $(f(x_N), g(x_0)) \in V'$, se deduce que $(f(x_0), g(x_0)) \in V$ y por ser $V \in \mathcal{U}$ arbitrario, $f(x_0) = g(x_0)$. $\square$

El siguiente resultado extiende el Teorema 2.1 anterior a una pareja de aplicaciones .

Teorema 2.2. *Sean f y g aplicaciones de un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ en sí mismo tal que $g(X) \subseteq f(X)$. Supóngase que $f(X)$ ó $g(X)$ es un subespacio completo de X y sea p una métrica débil sobre X tal que para $\phi \in \Phi^*$, fija,*

1. *$p(g(x), g(y)) < p(f(x), f(y)), x, y \in X$ si $p(f(x), f(y)) > 0$.*

2. *$p(g(x), g(y)) \leq \phi(p(f(x), f(y)), x, y \in X$*

Entonces existe x_0 en X tal que (2.2) se verifica para cualquier sucesión (x_n) en X tal que $g(x_n) = f(x_{n+1}), n \geq 1$. Si, además, f y g conmutan en sus puntos de coincidencia, $f(x_0)$ es un único punto fijo común de f y g.

Demostración. Puesto que $g(X) \subseteq f(X)$, existe una sucesión (x_n) en X tal que $g(x_n) = f(x_{n+1}), n \geq 1$. Sea $\mathcal{U}(d)$ la estructura uniforme inducida sobre X por la métrica d del Teorema 2.1 y B_ϵ, B_δ como en el mismo. Si $(f(x), g(x)) \in B_\delta$ y $(f(x), f(z)) \in B_\epsilon$, se deduce de (2) que

$$\begin{aligned}
d(f(x), g(z)) &\leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), g(z)) \\
&< \delta + \max\{p(g(x), g(z)), p(g(z), g(x))\} \\
&\leq \delta + \max\{\phi(p(f(x), f(z))), \phi(p(f(z), f(x)))\} \\
&\leq \delta + \phi(\epsilon) \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

de lo cual, $(f(x), g(z)) \in B_\epsilon$.

Sean $y_n = g(x_n) = f(x_{n+1}), t_n = p(y_{n+1}, y_n)$ y $s_n = p(y_n, y_{n+1}), n \geq 1$. Si $t_n > 0$ y $s_n > 0$ para todo $n \geq 1$, se deduce de (2) que

$$t_{n+1} = p(g(x_{n+2}), g(x_{n+1})) \leq \phi(p(f(x_{n+2}), f(x_{n+1}))) = \phi(t_n) \leq t_n,$$

y similarmente, $s_{n+1} \leq \phi(s_n) \leq s_n$ para todo $n \geq 1$. Desde que las sucesiones (t_n) y (s_n) son decrecientes (por (1)) y $\phi \in \Phi^*$, se tiene que

$$\lim t_n = \lim \phi(t_n) = 0$$

y $\lim s_n = \lim \phi(s_n) = 0$.

Se deduce que para todo $\delta > 0$, existe un entero $N \geq 1$ tal que $(f(x_N), g(x_N)) \in B_\delta$. El Lema 2.2 garantiza que la sucesión $(f(x_n))$ es de Cauchy en $(f(X), \mathcal{U}(d))$ y como en el Teorema 2.1, si $f(X)$ es completo, existe x_0 en X tal que

$$\lim f(x_n) = \lim g(x_n) = f(x_0).$$

Dado $V \in \mathcal{U}$, sea $\delta > 0$ como en la Definición 2.1 (3) y $N \geq 1$ tal que $p(y_n, y_m) < \delta/2$, para todo $n, m \geq N$. Desde que $p(x, \cdot)$ es semicontinua inferiormente, haciendo $m \to \infty$ obtenemos que $p(y_n, f(x_0)) \leq \delta/2$ para todo $n \geq N$. Se deduce de (2) que

$$\begin{aligned} p(y_{n+1}, g(x_0)) &= p(g(x_{n+1}), g(x_0)) \\ &\leq \phi(p(y_n, f(x_0)) \\ &\leq \phi(\delta/2) \\ &\leq \delta/2, \end{aligned}$$

y por la Definición 2.1 (3), $(f(x_0), g(x_0)) \in V$; y desde que V es arbitrario, $f(x_0) = g(x_0)$. Supóngase que para algún $N \geq 1$ $p(y_N, y_{N+1}) = 0$; entonces, de (2),$p(y_{N+1}, y_{N+2}) = 0$, de lo cual,

$$p(y_N, y_{N+2}) \leq p(y_N, y_{N+1}) + p(y_{N+1}, y_{N+2}) = 0,$$

y por el Lema 2.1 (1), $y_{N+1} = y_{N+2}$, es decir, $g(x_{N+1}) = f(x_{N+1})$. Si $g(X)$ es completo, la demostración es similar pues $g(X) \subseteq f(X)$. Si f y g conmutan en x_0, entonces

$$g^2(x_0) = g \circ f(x_0) = f \circ g(x_0) = f^2(x_0).$$

Ahora, desde que

$$p(g(x_0), g(x_0)) = p(f(x_0), f(x_0))$$

y $p(g(x_0),\, g^2(x_0)) = p(f(x_0),\, f\circ g(x_0))$, se deduce de (1) que

$$p(g(x_0), g(x_0)) = p(g(x_0), g^2(x_0)) = 0,$$

y por el Lema 2.1 (1),

$$g(x_0) = g^2(x_0) = f(x_0) = f^2(x_0)$$

y $f(x_0)$ es un punto fijo de f y g. La unicidad resulta de un argumento similar al del Teorema 2.1. $\square$

Ejemplo 2.1. [10] Sea $X = \{\frac{1}{n}, n \geq 1\} \cup \{0\}$ con la métrica $d(x,y) = |x-y|$. Para cada $x_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$, sean f y $g : X \longrightarrow X$ tales que $g(x_n) = f(x_{n+1}) = \frac{1}{2n}, n \geq 1, f(0) = g(0) = 0, f(1) = 1$. Sea $E = \{\frac{1}{2n}, n \geq 1\} \cup \{\frac{2n-1}{2n}, n \geq 1\} \cup \{\frac{m-n}{2mn}, m \geq 1, n \geq 1, m \geq n\}$ y $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\phi(t) = \sup\{y \in E/y \leq t\}$. Entonces, es fácil verificar que $\phi \in \Phi^*$ y se satisfacen las condiciones del Teorema 2.2 para las funciones f y g, por lo tanto, existe un único punto fijo para f y g. Es claro que ϕ no es contractiva pues $\phi(y) = y$ para cada $y \in E$, así que los Teoremas 3.1 y 2.2 de los capítulos II y III de [9] no son aplicables.

2.2. Un Principio Uniforme Contractivo-Expansivo

Teorema 2.3. *Sea v una aplicación de un conjunto no vacío X en un espacio uniforme $(Y,\mathcal{U})$ tal que Y ó $v(X)$ es completo, $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una aplicación tal que para todo $V \in \mathcal{U}$,*

$$\inf\{\varphi(x) + \varphi(y) : (v(x), v(y)) \notin V\} = \mu(V) > 0 \tag{2.3}$$

Entonces para cualquier sucesión (x_n) en X tal que $\varphi(x_n)$ converge a cero, $v(x_n)$ converge a un único y a un mismo elemento x en Y.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión en X tal que $\varphi(x_n) \to 0$. Dado $V \in \mathcal{U}$, existe un entero $N > 0$ tal que $\varphi(x_n) < \frac{\mu(V)}{2}$ para todo $n \geq N$, de lo cual se deduce que $\varphi(x_n) + \varphi(x_m) < \mu(V)$ si $m, n \geq N$, y por (2.3) se tiene que $(v(x_n), v(x_m)) \in V$ para todo $m, n \geq N$, es decir, la sucesión $(v(x_n))$ es de Cauchy en $v(X)$. La completez secuencial de Y ó $v(X)$ asegura la existencia de x en Y tal que $v(x_n) \to x$. Si (y_n) es otra sucesión en X tal que $\varphi(y_n)$ converge a cero, dado $V \in \mathcal{U}$, existen $W \in \mathcal{U}$ y un entero $N > 0$ tal que $W \circ W \subseteq V, \varphi(x_n) < \frac{\mu(W)}{2}, \varphi(y_n) < \frac{\mu(W)}{2}$ y $(x, v(x_n)) \in W$ para todo $n \geq N$, de lo cual $\varphi(x_n) + \varphi(y_n) < \mu(W)$ y por (2.3) se tiene que $(v(x_n), v(y_n)) \in W$ para todo $n \geq N$ y por lo tanto, si $n \geq N, (x, v(y_n)) \in V$, es decir, $v(y_n) \in V(x)$ para todo $n \geq N$, lo que significa que la sucesión $(v(y_n))$ converge a x. $\square$

Corolario 2.1. *Sea v una aplicación de un conjunto no vacío X en un espacio uniforme $(Y,\mathcal{U})$ tal que Y ó $v(X)$ es completo, p una métrica débil sobre Y y $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una aplicación tal que para todo $a > 0$,*

$$\inf\{\varphi(x) + \varphi(y) : p(v(x), v(y)) \geq a\} = \mu(a) > 0 \tag{2.4}$$

Entonces para cualquier sucesión (x_n) en X tal que $\varphi(x_n)$ converge a cero, $v(x_n)$ converge a un único y a un mismo elemento x en Y.

Demostración. Es suficiente verificar que para cada $V \in \mathcal{U}$, la propiedad (2.3) del Teorema 2.3 se satisface. Si ésta no se cumple, existe $V \in \mathcal{U}$ y sucesiones $(x_n), (y_n)$ en X tales que $(v(x_n), v(y_n)) \notin V$ y $\lim \varphi(x_n) + \varphi(y_n) = 0$.
Sea $\delta > 0$ como en la Definición 2.1 (3) para V y $\mu(\delta)$ como en (2.4); entonces existe un entero $N \geq 1$ tal que $\varphi(x_n) < \frac{\mu(\delta)}{2}$ y $\varphi(y_n) < \frac{\mu(\delta)}{2}$ para todo $n \geq N$, de lo cual, $\varphi(x_n) + \varphi(y_n) < \mu(\delta)$ si $n \geq N$ y por (2.4), $p(v(x_n), v(y_n)) < \delta$ y $p(v(x_n), v(x_m)) < \delta$ para $n, m \geq N$. La Definición 2.1 (1) asegura que $(v(x_n), v(y_n)) \in V$ para todo $n \geq N$, lo cual es contradictorio. Lo anterior demuestra que (2.3) se verifica y la conclusión se deduce del Teorema 2.3. $\square$

Corolario 2.2. *[10] Sea v una aplicación de un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ en sí mismo tal que X ó $v(X)$ es completo, p una métrica débil sobre X y $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función no negativa tal que*

$$\inf\{\varphi(x) + \varphi(y) : p(v(x), v(y)) \geq a\} = \mu(a) > 0 \textit{ para todoa} > 0.$$

Entonces para cualquier sucesión (x_n) *en* X *tal que* $\varphi(x_n)$ *converge a cero, la sucesión* $(v(x_n))$ *converge a un único y a un mismo elemento* x *en* X*.*

Corolario 2.3. *[3] Sea* (X, d) *un espacio métrico completo y* $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *una función no negativa tal que para todo* $a > 0$*,*

$$\inf\{\varphi(x) + \varphi(y) : d(x, y) \geq a\} = \mu(a) > 0.$$

Entonces cada sucesión (x_n) *en* X *para la cual* $\varphi(x_n) \to 0$ *converge a un único y a un mismo* $x \in X$*.*

Demostración. Basta tomar $v = I_X$, la identidad de X y $d = p$ en el Corolario 2.2. □

2.2.1. Teoremas Débilmente Contractivos Tipo Bianchini

Teorema 2.4. *Sean* f *y* g *aplicaciones de un conjunto* X *en un espacio uniforme* $(Y, \mathcal{U})$ *tal que* $g(X) \subseteq f(X)$*. Supóngase además que* $g(X)$ *ó* $f(X)$ *es completo y sea* p *una métrica débil sobre* Y *tal que*

$$p(g(x), g(y)) \leq \phi(\max\{p(g(x), f(x)), p(g(y), f(y))\}), x, y \in X \tag{2.5}$$

donde $\phi \in \Phi_0$ *es fija. Entonces existe* $x_0 \in X$ *tal que*

$$f(x_0) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(x_0) \tag{2.6}$$

para cada sucesión (x_n) *en* X *con* $g(x_n) = f(x_{n+1}), n \geq 1$*.*

Demostración. Afirmamos que la función $\varphi(x) = p(g(x), f(x)), x \in X$ satisface la propiedad (2.4) del Corolario 2.1, pues en caso contrario existe $a > 0$ tal que

$$\inf\{\varphi(x) + \varphi(y) : p(g(x), g(y)) \geq a\} = 0,$$

de lo cual se deduce que existen sucesiones $(x_n), (y_n)$ en X tales que

$$\varphi(x_n) + \varphi(y_n) \to 0$$

y $p(g(x_n), g(y_n)) \geq a$ para todo $n \geq 1$. De ésto y de (2.5) se tiene que

$$\begin{aligned} 0 < a &\leq p(g(x_n), g(y_n)) \\ &\leq \phi(\max\{p(g(x_n), f(x_n)), p(g(y_n), f(y_n))\}) \\ &< \max\{p(g(x_n), f(x_n)), p(g(y_n), f(y_n))\} \\ &= \max\{\varphi(x_n), \varphi(y_n)\} \\ &\leq \varphi(x_n) + \varphi(y_n) \to 0, \quad si \;\; n \to \infty \end{aligned}$$

lo cual es absurdo, pues $a > 0$.

Desde que $g(X) \subseteq f(X)$, dado $x_1 \in X$, existe una sucesión (x_n) en X tal que $g(x_n) = f(x_{n+1}), n \geq 1$. Sea $y_n = g(x_n)$ y $t_n = p(y_{n+1}, y_n), n \geq 1$. Se deduce de (2.5) que si $t_n > 0$ para todo $n \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= p(y_{n+2}, y_{n+1}) \\ &= p(g(x_{n+2}), g(x_{n+1})) \\ &\leq \phi(\max\{p(y_{n+2}, y_{n+1}), p(y_{n+1}, y_n)\}) \\ &= \phi(p(y_{n+1}, y_n)) \\ &< p(y_{n+1}, y_n) \\ &= t_n, \end{aligned}$$

por lo tanto, $\lim t_n = \lim \phi(t_n) = t$ para algún $t \geq 0$ y desde que $\phi \in \Phi_0$, necesariamente $t = 0$. Si $g(X)$ es completo, el Corolario 2.1 asegura la existencia de un único $x \in g(X) \subseteq f(X)$ tal que $x = \lim f(x_n) = \lim g(x_n)$. Sea $x_0 \in X$ tal que $x = f(x_0)$. Si $p(g(x_0), f(x_0)) > 0$ se deduce de (2.5) que

$$p(g(x_0), g(x_n)) \leq \phi(\max\{p(g(x_0), f(x_0)), p(g(x_n), f(x_n))\}) = \phi(p(g(x_0), f(x_0)))$$

para n grande; y desde que $p(x, \cdot)$ es semicontinua inferiormente, al hacer n tender a infinito, se obtiene que

$$p(g(x_0), f(x_0)) \leq \phi(p(g(x_0), f(x_0))) < p(g(x_0), f(x_0)),$$

lo cual es absurdo, por lo tanto, $p(g(x_0), f(x_0)) = 0$. Nuevamente, de (2.5)

$$p(g(x_0), g(x_0)) \leq \phi(p(g(x_0), f(x_0))) = \phi(0) = 0,$$

de lo cual $p(g(x_0), g(x_0)) = 0$. El Lema 2.1 (1) garantiza que $g(x_0) = f(x_0)$ y entonces

$$f(x_0) = \text{lím}\, f(x_n) = \text{lím}\, g(x_n) = g(x_0).$$

Si para algún entero $N \geq 1$, $t_N = p(y_{N+1}, y_N) = 0$, entonces de (2.5), $t_{N+1} = 0$, de lo cual,

$$p(y_{N+2}, y_N) \leq p(y_{N+2}, y_{N+1}) + p(y_{N+1}, y_N) = 0$$

y por el Lema 2.1 (1) se tiene que $y_N = y_{N+1}$, es decir, $g(x_{N+1}) = f(x_{N+1})$. Por último, si $f(X)$ es completo, la demostración es similar pues $g(X) \subseteq f(X)$. Esto termina la demostración. □

Corolario 2.4. *Sean f y g aplicaciones de un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ en si mismo tal que $g(X) \subseteq f(X)$. Supóngase además que $g(X)$ ó $f(X)$ es completo y sea p una métrica débil sobre X tal que se satisface la condición (2.5) del Teorema 2.4 para alguna $\phi \in \Phi_0$. Si f y g conmutan en sus puntos de coincidencia, existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = g(x) = x$.*

Demostración. El Teorema 2.4 asegura la existencia de x_0 en X tal que $f(x_0) = g(x_0)$ y $p(g(x_0), g(x_0)) = 0$. De la conmutatividad de f y g en x_0 se deduce que

$$g^2(x_0) = g \circ f(x_0) = f \circ g(x_0) = f^2(x_0).$$

Si $p(g^2(x_0), g \circ f(x_0)) > 0$ se deduce de (2.5) que

$$\begin{aligned} p(g^2(x_0), g \circ f(x_0)) &\leq \phi(\text{máx}\{p(g^2(x_0), f \circ g(x_0)), p(g \circ f(x_0), f^2(x_0))\}) \\ &< p(g^2(x_0), g \circ f(x_0)), \end{aligned}$$

lo cual es absurdo; por lo tanto, $p(g^2(x_0), g \circ f(x_0)) = 0$. Nuevamente, de (2.5),

$$p(g(x_0), g^2(x_0)) \leq \phi(\{\text{máx}\, p(g(x_0), f(x_0)), p(g^2(x_0), f \circ g(x_0))\}) = \phi(0) = 0$$

es decir, $p(g(x_0), g^2(x_0)) = 0$. El Lema 2.1 (1) asegura que $g(x_0) = g^2(x_0) = f(x_0) = f^2(x_0)$, de lo cual $x = f(x_0)$ es un punto fijo común de f y g.

Si $\widetilde{x}$ es otro punto fijo de las aplicaciones f y g, se deduce de (2.5) que $p(x, x) = p(x, \widetilde{x}) = 0$ y también que

$$p(x, \widetilde{x}) = p(g(x), g(\widetilde{x})) \leq \phi(\text{máx}\{p(x, x), p(x, \widetilde{x})\}) = 0$$

y por Lema 2.1 (1), $x = \widetilde{x}$ y el punto fijo es único. □

Corolario 2.5. *[10] Sean f y g aplicaciones de un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ en sí mismo tales que $g(X) \subseteq f(X)$. Supóngase además que $f(X)$ ó $g(X)$ es un subespacio completo de X y sea p una métrica débil sobre X tal que*

$$p(g(x), g(y)) \leq \phi\left(\frac{p(g(x), f(x)) + p(g(y), f(y))}{2}\right),$$

$x, y \in X$, donde $\phi \in \Phi_0$ es fija.

Entonces existe x_0 en X tal que $f(x_0) = \text{lím}\, f(x_n) = \text{lím}\, g(x_n) = g(x_0)$ para cualquier sucesión (x_n) en X tal que $g(x_n) = f(x_{n+1}), n \geq 1$. Si, además, f y g conmutan en sus puntos de coincidencia, $f(x_0)$ es el único punto fijo común de f y g.

Demostración. Desde que $\frac{(a+b)}{2} \leq \text{máx}\{a, b\}$ para cada par a, b en $\mathbb{R}$, la conclusión se deduce del Corolario 2.4. □

Ejemplo 2.2. Sean $X = [0, 1]$ y $d(x, y) = |x - y|$. Sea $f(x) = \frac{x^2}{4}$ cuando $x \in X$ es irracional y $f(x) = 0$ cuando x es racional. No es difícil convencerse de que no existe $\phi \in \Phi_0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \phi(\frac{1}{2}(d(f(x), x) + d(f(y), y)))$$

para $x, y \in X$. Por otra parte, si $\phi(t) = t^2$ para $0 \leq t < 1$ y $\phi(t) = 0$ para $t \geq 1$, entonces $\phi \in \Phi_0$. Sea $p(x, y) = y$ para $x, y \in X$. Entonces p es una métrica débil sobre (X, ϑ_d) tal que

$$p(f(x), f(y)) \leq \phi(\frac{1}{2}(p(f(x), x) + p(f(y), y))).$$

El Teorema 2.4 asegura entonces la existencia de un único punto fijo de f.

Ejemplo 2.3. Sean X, d, p y ϕ como en el ejemplo 2.2 , $f(x) = x^2$ si $x \in X$; $g(x) = \frac{x^4}{4}$, $x \in X - \mathbb{Q}$, $g(x) = 0$, $x \in X \cap \mathbb{Q}$. Entonces, no existe $\phi \in \Phi_0$ tal que

$$d(g(x), g(y)) \leq \phi(\frac{1}{2}(d(g(x), f(x)) + d(g(y), f(y))))$$

para $x, y \in X$, pero si es cierto que

$$p(g(x), g(y)) \leq \phi(\frac{1}{2}(p(g(x), f(x)) + p(g(y), f(y))), x, y \in X.$$

El Teorema 2.6 asegura entonces la existencia de un único punto fijo común. Los resultados de estos ejemplos no podrían haberse obtenido a partir de una métrica.

2.3. Puntos Fijos de Aplicaciones Expansivas

El Corolario 2.1, útil en el tratamiento de problemas de tipo contractivo, también lo es en el problema expansivo.

Teorema 2.5. *Sea X un subconjunto de un espacio uniforme (Y, ϑ) y f una aplicación de X en Y tal que $X \subseteq f(X)$. Supongase además que X ó $f(X)$ es un subespacio completo ó secuencialmente . Sea p una métrica débil sobre Y tal que para algún $\psi \in \Psi_0$*

$$\psi(p(x, y)) \leq \max\left\{\frac{p(x, f(x)) + p(y, f(y))}{2}\right\}; x, y \in X \tag{2.7}$$

Entonces existe un único x_0 en X tal que $f(x_0) = x_0$ y $\lim x_n = \lim f(x_n) = x_0$ para cualquier sucesión (x_n) en X tal que $x_n = f(x_{n+1}), n \geq 1$.

Demostración. Sea $\varphi(x) = (p\ (x, f(x))) + p\ (f(x), x)$, $x \in X$, y supongamos que existe $a > 0$ tal que

$$\inf \{\varphi(x) + \varphi(y)/p\ (f(x), f(y)) \geq a\} = 0.$$

existe entonces una sucesión (x_n, y_n) en $X \times X$ tal que $0 < a \leq p\ (f(x_n), f(y_n))$ para todo $n \geq 1$, y $\varphi(x_n) + \varphi(y_n) \longrightarrow 0$. Se deduce de (2.7) que

$$\begin{aligned}
0 < a &\leq p\ (f(x_n), f(y_n)) \leq p\ (f(x_n), x_n) + p\ (x_n, y_n) + p\ (y_n, f(y_n)) \\
&\leq p\ (f(x_n), x_n) + \psi(p\ (x_n, y_n)) + p\ (y_n, f(y_n)) \\
&\leq p\ (f(x_n), x_n) + p\ (y_n, f(y_n)) + \text{máx}\left\{\frac{p\ (x_n, f(x_n)) + p\ (y_n, f(y_n))}{2}\right\} \\
&\leq p\ (f(x_n), x_n) + p\ (y_n, f(y_n)) + \frac{p\ (x_n, f(x_n)) + p\ (y_n, f(y_n))}{2}, \quad n \geq 1
\end{aligned}$$

Haciendo $n \longrightarrow \infty$, obtenemos que $a = 0$, lo cual es absurdo. Dado que $X \subseteq f(X)$ existe una sucesión (x_n) tal que $x_n = f(x_{n+1})$, $n \geq 1$. Se deduce de (2.7) siempre y cuando $t_n = p\ (x_{n+1}, x_n) > 0$ para todo $n \geq 1$ que

$$\begin{aligned}
t_n &= p\ (x_{n+1}, x_n) < \psi(p\ (x_{n+1}, x_n)) \leq \text{máx}\left\{\frac{p\ (x_{n+1}, f(x_{n+1})) + p\ (x_n, f(x_n))}{2}\right\} \\
&= \text{máx}\left\{\frac{p\ (x_{n+1}, x_n) + p\ (x_n, x_{n-1})}{2}\right\} = p\ (x_n, x_{n-1}) = t_{n-1}; \qquad y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_n &= p\ (x_n, x_{n+1}) < \psi(p\ (x_n, x_{n+1})) \leq \text{máx}\left\{\frac{p\ (x_n, f(x_n)) + p\ (x_{n+1}, f(x_{n+1}))}{2}\right\} \\
&\leq t_{n-1}
\end{aligned}$$

Desde que la sucesión (t_n) es decreciente y $\lim t_n = \lim \psi(t_n) = t$ entonces $t = 0$, por lo tanto $\lim s_n = 0$ asegurando con lo anterior que $\lim \varphi(x_n) = 0$. Si $f(X)$ es completo, existe $z \in X$ tal que $\lim x_n = \lim f(x_n) = z = f(x_0)$.

Desde que p es semicontinua inferiormente tenemos que

$$\begin{aligned}
p\ (x_0, x_n) < \psi(p\ (x_0, x_n)) &\leq \text{máx}\left\{\frac{p\ (x_0, f(x_0)) + p\ (x_n, f(x_n))}{2}\right\} \\
&= \text{máx}\left\{\frac{p\ (x_0, z)) + p\ (x_n, f(x_n))}{2}\right\} \\
&\leq p\ (x_0, z)
\end{aligned}$$

para $n \geq 1$ grande tenemos una sucesión creciente y dado que $\psi \in \Psi_0$ entonces satisface la condición (A).

Nota: Si ψ es expansiva e inferiormente semicontinua entonces para t_n creciente o decreciente, ψ satisface la condición A.

Esto explica que $\lim p\ (x_0, x_n) = \lim \psi(p\ (x_0, x_n)) = p\ (x_0, z) = 0$.

Si $p\ (x_0, x_0) > 0$, entonces

$$0 < p\ (x_0, x_0) < \psi(p\ (x_0, x_0)) \leq \max\left\{\frac{p\ (x_0, z) + p\ (x_0, z)}{2}\right\} = 0$$

lo cual es absurdo.

por lo tanto $p\ (x_0, x_0) = 0$. Se deduce del lema 2.1 que $x_0 = z = f(x_0)$ de donde x_0 es un punto fijo de f.

Si x_0' es otro punto fijo de f, es decir, $(x_0') = f(x_0')$, entonces $p\ (x_0', x_0') = 0$, pues en caso contrario,

$$p\ (x_0', x_0') < \psi(p\ (x_0', x_0')) \leq \max\left\{\frac{p\ (x_0', f(x_0')) + p\ (x_0', f(x_0')}{2}\right\} = 0$$

lo cual es absurdo. Y similarmente

$p\ (x_0, x_0) = 0$ de lo cual de (2.7)

$$p\ (x_0, x_0') < \psi(p\ (x_0, x_0')) \leq \max\left\{\frac{p\ (x_0, f(x_0)) + p\ (x_0', f(x_0')}{2}\right\} = 0$$

y así $p\ (x_0, x_0') = 0$. El lema 2.1 garantiza que $x_0 = x_0'$ y así el punto fijo es único.

Si X es secuencialmente completo, existe $z \in X \subseteq f(X)$ tal que $\lim x_n = z$ y como anteriormente existe $x_0 \in X$ tal que $z = f(x_0)$ y por un procedimiento análogo obtenemos que $f(x_0) = x_0$, es decir, x_0 es un punto fijo de f.

Supongamos ahora que $t_N = p\ (x_{N+1}, x_N) = 0$ para algún $N \geq 1$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned} p\ (x_{N+1}, x_N) &< \psi(p\ (x_{N+1}, x_N)) \leq \max\left\{\frac{p\ (x_{N+1}, x_N)) + p\ (x_N, x_{N-1})}{2}\right\} \\ &\leq p\ (x_N, x_{N-1}) \end{aligned}$$

de donde $p\ (x_N, x_{N-1})$ de lo cual

$$p\ (x_{N+1}, x_{N-1}) \leq p\ (x_{N+1}, x_N) + p\ (x_N, x_{N-1}) = 0$$

y por el lema 2.1, tenemos $x_N = x_{N-1} = f(x_N)$ y x_N es un punto fijo de f. $\square$

Nota 2.1. El Teorema 2.5 es válido si la condición 2.7 se sustituye por:

1. $p(x,y) < \text{máx}\{\frac{p(x,f(x))+p(y,f(y))}{2}\}$; para todo $x, y \in X$, si $\text{máx}\{\frac{p(x,f(x))+p(y,f(y))}{2}\} > 0$, y

2. $\psi(p(x,y)) \leq \text{máx}\{\frac{p(x,f(x))+p(y,f(y))}{2}\}$; para todo $x, y \in X$, donde $\psi(t) \geq t$ para todo $t > 0$ satisface la condición (A) tanto para sucesiones crecientes como decrecientes, pues (1) garantiza que las sucesiones (t_n) y (s_n) son decrecientes y (2), que $\lim t_n = \lim \psi(t_n) = 0$.

El siguiente resultado extiende el Teorema 2.5, es posible extenderlo al caso de un par de aplicaciones.

Teorema 2.6. *Sea X un subespacio de un espacio uniforme (Y, ϑ) y f una aplicación de X en Y tal que $X \subseteq f(X)$. Sea además p una métrica débil sobre Y tal que para algún $\psi \in \Psi_0$*

$$\psi(p(x,y)) \leq \text{máx}\{p(x,f(x)), p(y,f(y))\}\,; x, y \in X \tag{2.8}$$

Entonces f tiene un único punto fijo x_0, para toda sucesión (x_n) en X tal que $x_n = f(x_{n+1})$ para todo $n \geq 1$.

Demostración. Sea $\varphi(x) = (p\ (x, f(x))) + p\ (f(x), x)$, $x \in X$, y supongamos que existe $a > 0$ tal que

$$\text{ínf}\,\{\varphi(x) + \varphi(y)/p\ (f(x), f(y)) \geq a\} = 0.$$

existe entonces una sucesión (x_n, y_n) en $X \times X$ tal que $0 < a \leq p\ (f(x_n), f(y_n))$ para todo $n \geq 1$, y $\varphi(x_n) + \varphi(y_n) \longrightarrow 0$. Se deduce de (2.8) que

$$\begin{aligned} 0 < a &\leq p\ (f(x_n), f(y_n)) \leq p\ (f(x_n), x_n) + p\ (x_n, y_n) + p\ (y_n, f(y_n)) \\ &\leq p\ (f(x_n), x_n) + \psi(p\ (x_n, y_n)) + p\ (y_n, f(y_n)) \\ &\leq p\ (f(x_n), x_n) + p\ (y_n, f(y_n)) + \text{máx}\{p\ (x_n, f(x_n), p\ (y_n, f(y_n))\}\,, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Haciendo $n \longrightarrow \infty$, obtenemos que $a = 0$, lo cual es absurdo, por lo tanto $\text{ínf}\,\{\varphi(x) + \varphi(y)/p\ (f(x), f(y))$ $\mu(a) > 0$ para todo $a > 0$. Dado que $X \subseteq f(X)$ existe una sucesión (x_n) tal que

$x_n = f(x_{n+1})$, para $n \geq 1$. Se deduce de (2.8) siempre y cuando $t_n = p\ (x_{n+1}, x_n) > 0$ para todo $n \geq 1$ que

$$\begin{aligned} t_n &= p\ (x_{n+1}, x_n) < \psi(p\ (x_{n+1}, x_n)) \leq \text{máx}\{p\ (x_{n+1}, f(x_{n+1}), p\ (x_n, f(x_n)\} \\ &= \text{máx}\{p\ (x_{n+1}, x_n), p\ (x_n, x_{n-1})\} = p\ (x_n, x_{n-1}) = t_{n-1}, \quad y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_n &= p\ (x_n, x_{n+1}) < \psi(p\ (x_n, x_{n+1})) \leq \text{máx}\{p\ (x_n, f(x_n)), p\ (x_{n+1}, f(x_{n+1})\} \\ &= \text{máx}\{p\ (x_{n+1}, x_n), p\ (x_n, x_{n-1})\} = p\ (x_n, x_{n-1}) = t_{n-1} \end{aligned}$$

Desde que la sucesión (t_n) es decreciente y $\text{lím}\, t_n = \text{lím}\, \psi(t_n) = t$ entonces $t = 0$, por lo tanto $\text{lím}\, s_n = 0$ asegurando con lo anterior que $\text{lím}\, \varphi(x_n) = 0$. Si $f(X)$ es completo, existe $z \in X$ tal que $\text{lím}\, x_n = \text{lím}\, f(x_n) = z = f(x_0)$.

Desde que p es semicontinua inferiormente tenemos que

$$p\ (x_0, x_n) < \psi(p\ (x_0, x_n)) \quad \leq \quad \text{máx}\{p\ (x_0, z), p\ (x_n, f(x_n))\} = p\ (x_0, z)$$

para $n \geq 1$ grande; lo cual $\text{lím}\, p\ (x_0, x_n) = \text{lím}\, \psi(p\ (x_0, x_n)) = p\ (x_0, z) = 0$ y desde que ψ satisface la condición A, entonces $p\ (x_0, z) = 0$.

Si $p\ (x_0, x_0) > 0$, entonces

$$0 < p\ (x_0, x_0) < \psi(p\ (x_0, x_0)) \leq p\ (x_0, z) = 0$$

lo cual es absurdo, así $p\ (x_0, x_0) = 0$. Se deduce del lema 2.1 que $z = x_0 = f(x_0)$ y x_0 es un punto fijo de f.

Si x_0' es otro punto fijo de f, es decir, $f(x_0') = x_0'$, entonces $p\ (x_0', x_0') = 0$, pues en caso contrario,

$$p\ (x_0', x_0') < \psi(p\ (x_0', x_0')) \leq p\ (x_0', x_0')$$

lo cual es absurdo y de forma similar $p\ (x_0, x_0) = 0$ de lo cual por (2.8)

$$p\,(x_0, x_0') < \psi(p\,(x_0, x_0')) \leq \text{máx}\{p\ (x_0, f(x_0)), p\ (x_0', f(x_0')\} = \text{máx}\{p\ (x_0, x_0), p\ (x_0', x_0')\} = 0 \blacksquare$$

El lema 2.1 permite asegurar que $x_0 = x_0'$ así el punto fijo es único.

Si X es secuencialmente completo, existe $z \in X \subseteq f(X)$ tal que $z = \text{lím}\, x_n$ y como anteriormente existe $x_0 \in X$ tal que $z = f(x_0)$ y por tanto f tiene un único punto fijo .

Si $t_N = (x_{N+1}, x_N) = 0$ para algún $N \geq 1$ entonces

$$\begin{aligned} p\ (x_{N+1}, x_N) &< \psi(p\ (x_{N+1}, x_N)) \leq \text{máx}\left\{\frac{p\ (x_{N+1}, x_N)) + p\ (x_N, x_{N-1})}{2}\right\} \\ &\leq p\ (x_N, x_{N-1}) \end{aligned}$$

de donde $p\ (x_N, x_{N-1}) = 0$ de lo cual

$$p\ (x_{N+1}, x_{N-1}) \leq p\ (x_{N+1}, x_N) + p\ (x_N, x_{N-1}) = 0$$

y por el lema 2.1, tenemos $x_N = x_{N-1} = f(x_N)$ y x_N es un punto fijo de f □

Nota 2.2. Si $f(x_0) = g(x_0)$ pertenecen a X y las aplicaciones f y g conmutan en sus puntos de coincidencia, entonces $g^2(x_0) = g \circ f(x_0) = f \circ g(x_0) = f^2(x_0)$ y de (2.8) se deduce fácilmente que $p(f(x_0), g(x_0)) = 0$ y $p(f(x_0), f \circ g(x_0)) = 0$ y por el Lema 2.1 (1), $f \circ g(x_0) = g(x_0)$ y $f(x_0)$ es un punto fijo de f y g. La unicidad de x_0 se deduce, como anteriormente, de (2.8).

Nota 2.3. De forma similar al Teorema 2.5, el Teorema 2.6 es válido si la condición (2.8) es sustituida por las siguientes:

1. $p(f(x), f(y)) < \text{máx}\{p(f(x), g(x)), p(f(y), g(y))\}$, para todo $x, y \in X$, si $\text{máx}\{p(f(x), g(x)), p(f(y), g(y))\} > 0$ y

2. $\psi(p(f(x), f(y))) \leq \text{máx}\{p(f(x), g(x)), p(f(y), g(y))\}$, para todo $x, y \in X$, donde $\psi(t) \geq t$ para todo $t > 0$ satisface la condición (A) tanto para sucesiones crecientes como decrecientes.

2.4. Aplicaciones de una Proposición de Reducción

Teorema 2.7. *Sea f una aplicación de un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ en sí mismo tal que X ó $f(X)$ es completo y sea p una métrica débil sobre X tal que*

$$p(f(x), f(y)) \leq \alpha(x, y)p(x, y), \text{ para todo } x, y \in X \tag{2.9}$$

donde $\alpha : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tiene la siguiente propiedad: Para todo intervalo cerrado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^+ - \{0\}$,

$$\sup\{\alpha(x, y)/a \leq p(x, y) \leq b\} = \lambda(a, b) < 1. \tag{2.10}$$

Entonces f tiene un único punto fijo x_0 y $\lim f^n(x) = x_0$ para todo x en X.

Demostración. Supongamos que existe x, y en X tal que $p(x, y) > 0$. Entonces, si $a = p(x, y)$, se tiene que $\alpha(x, y) \leq \sup\{\alpha(x, y)/a \leq p(x, y) \leq a\} = \lambda(a, a) < 1$, de lo cual, por (2.9), $p(f(x), f(y)) < p(x, y)$ si $p(x, y) > 0$. Ahora, sea (x_n, y_n) en $X \times X$ tal que las sucesiones (t_n) y (s_n) con $t_n = p(f(x_n), f(y_n))$ y $s_n = p(x_n, y_n)$ y $t_n < s_n$ son decrecientes y $\lim t_n = \lim s_n = t$, entonces $t = 0$ pues en caso contrario, para todo $\epsilon > 0$, existe un entero $N \geq 1$ tal que $t \leq p(x_n, y_n) \leq t + \epsilon$ para todo $n \geq N$, de lo cual, $\alpha(x_n, y_n) \leq \sup\{\alpha(x, y)/a \leq \alpha(x, y) \leq t + \epsilon\} = \lambda(t, t + \epsilon) = k < 1$, y de (2.9), $\lim p(f(x_n), f(y_n)) \leq k \lim p(x_n, y_n)$, es decir, $t < kt$, con $k < 1$ lo cual es absurdo. La Proposición 1.6 garantiza la existencia de $\phi \in \Phi^*$ tal que $p(f(x), f(y)) \leq \phi(p(x, y)), x, y$ en X, y el Teorema 2.1 permite concluir que existe un único x_0 en X tal que $\lim f^{(n)}(x) = x_0$ para cada $x \in X$. □

En forma completamente similar a la anterior, con ayuda de la Proposición 1.6 y el Teorema 2.2, se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 2.8. *Sean f y g aplicaciones de un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ en sí mismo tal que $g(X) \subseteq f(X)$ y, al menos uno de los dos, $f(X)$ ó $g(X)$ es completo; sea p una métrica débil sobre X tal que*

$$p(g(x), g(y)) \leq \alpha(x, y)p(f(x), f(y)), \text{para todo } x, y \in X \tag{2.11}$$

donde $\alpha : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisface la propiedad (2.10). Entonces existe x_0 en X tal que $f(x_0) = g(x_0)$. Si, además, f y g conmutan en sus puntos de coincidencia, $f(x_0)$ es un único punto fijo de f y g tal que $f(x_0) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(x_0)$ para cualquier sucesión (x_n) en X tal que $g(x_n) = f(x_{n+1}), n \geq 1$.

Corolario 2.6. *[1] Sea f una aplicación de un espacio métrico completo (X, d) en si mismo tal que para algún $0 \leq \alpha \leq 1$,*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \max\{d(f(x), x), d(f(y), y)\}, \text{ para todo } x, y \in X \tag{2.12}$$

Entonces existe un único x_0 en X tal que $f(x_0) = x_0$.

Corolario 2.7. *[3] Sea f una aplicación de un espacio métrico completo (X, d) en sí mismo tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha(x, y)d(x, y), \text{ para todo } x, y \in X \tag{2.13}$$

donde $\alpha : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tiene la propiedad 2.10. Entonces existe un único punto fijo x_0 en X y $f^{(n)}(x)$ converge a x_0 para todo $x \in X$.

Corolario 2.8. *[5] Una aplicación continua f de un espacio métrico compacto (X, d) en sí mismo tiene un punto fijo si existe una función g de X en $f(X)$ que conmuta con f y satisface*

$$d(g(x), g(y)) < d(f(x), f(y)) \text{ para todo } x, y \in X \text{ con } f(x) \neq f(y). \tag{2.14}$$

Demostración. Sean $F, G : Z = X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ las funciones definidas por $G(x, y) = d(g(x), g(y))$ y $F(x, y) = d(f(x), f(y))$ para cada $(x, y) \in Z$. Entonces, $G(z) < F(z)$ si $F(z) > 0$ y las aplicaciones F y G satisfacen la condición (C.E). En efecto si $(F(z_n))$ y $(G(z_n)), z_n \in Z$, son sucesiones decrecientes en $\mathbb{R}^+$ tales que $G(z_n) < F(z_n), n \geq 1$ y $\lim G(z_n) = \lim F(z_n) = t$, necesariamente $t = 0$, pues en caso contrario, la compacidad de Z asegura la existencia de $z_0 \in Z$ y de una subsucesión (z_{n_k}) de (z_n) tal que $\lim z_{n_k} = z_0$. La continuidad de F, y por lo tanto la de G, permiten concluir que $t = \lim G(z_{n_k}) = G(z_0) < F(z_0) = \lim F(z_{n_k}) = t$, lo cual es absurdo.

La Proposición 1.6 y el Teorema 2.2 aseguran la existencia de un único punto fijo de f y g. $\square$

Capítulo 3

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo, puntualizamos los aportes que ofrece este trabajo, donde se introduce una condición simple en la función $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ permitiendo establecer y extender algunos resultados de puntos fijos y de puntos de coincidencias para aplicaciones contractivas ($\phi(t) < t$ para todo $t > 0$) o expansivas ($\phi(t) > t$ para todo $t > 0$) dentro del marco de las w-distancias en espacios uniformes, y se presentaran algunas conclusiones desde el punto de vista del autor.

3.1. Contractividad Débil

El Ejemplo 2.1 de [10] permite ver que la hipótesis de contractividad estricta de la función ϕ, ($\phi(t) < t$) puede ser relajadas a $\phi(t) \leqslant t$ y por lo tanto algunos teoremas de puntos fijos no muestran de manera explícita su carácter contractivo. Esto ha sido la motivación de un esfuerzo para obtener condiciones para clarificar la condición de contractividad y la existencia de funciones Φ^* bajo condicione más débiles, por tal razón la Proposición 1.6 y el Teorema 2.1 son dos resultados importantes en esta tesis, el primero nos garantiza, cuando un problema es del tipo contractivo para funciones Φ^*, y el segundo nos muestra la existencia y unicidad de un punto fijo para esta clase de funciones en espacios más generales como los son los espacios uniformes. Además la combinación de estos dos resultados se convierten en una herramienta fuerte para extender otros resultados de punto fijo, como se demuestra en la sección 2.4 del Capítulo 2.

3.2. Principio Contractivo-Expansivo

Existe una literatura extensa sobre la teoría de puntos fijos, pero sin duda alguna una herramienta de interés es el principio contractivo-expansivo, que garantiza puntos fijos para funciones contractivas en espacios métricos completos. En este trabajo se generaliza este principio a espacios uniformes completos, esta extensión permite obtener puntos fijos únicos tanto para problemas del tipo contractivo, como expansivo logrando unificar los dos tipos de problema en espacios uniformes.

3.3. Nuevas Posibilidades de Investigación

Uno de los objetivos de la teoría de puntos, es extender los resultados ya existen sobre espacios métricos a espacios topológicos más genérales con el fin de extender su espectro de aplicabilidad, permitiendo así abrir nuevas lineas de investigación, de acuerdo al área en que se quiera aplicar.

En este trabajo se generalizaron algunos resultados obtenidos sobre espacios métricos a espacios uniformes, con la propiedad de simetría de la estructura uniforme, de aquí surgen preguntas como ¿Qué pasa si la estructura uniforme no es simétrica?, ¿ Es posible definir otras distancias con propiedades más débiles que las w-distancias?. Actualmente el autor se encuentra trabajando con respecto a esta pregunta sobre espacios cuasiuniformes, con distancias con propiedades más débiles que las w-distancias.

Por otro lado el autor investiga la aplicabilidad de estos teoremas de puntos fijos en el área de la ecuaciones diferenciales, y la teoría de espacios modulares con el fin de obtener soluciones únicas para estos problemas.

Bibliografía

[1] R.M.T. Bianchini., *Su un problema dis. Reich riguardante la teoria dei punti fissi*, Boll. Un. Mat. Ital. 5 (1972), 103-108.

[2] N. Bourbaki., *Topologie Générale*, Caps. I, II, IV., Ed., Hermann'Paris, 1965.

[3] J. Dugundji and A. Granas., *Fixed point theory*, Vol. I, Polish. Sci. Pub., Warszawa, 1982.

[4] J. Dugundji., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[5] G. Jungck., *A common fixed point theorem for commuting maps on L-spaces*, Math. Japon., 25, No. 1 (1980), 81-85.

[6] O. Kada, T. Suzuki and W, Takahashi., *Non convex minimatizations theorems and fixed point theorems in Complete metric Spaces*, Math. JApon. 44(1996), 381-391.

[7] J. Matkowski., *Integrable solutions of functional equations*, Dissertationes Mathematicae 77, Warszawa 1975.

[8] J. Rodríguez Montes y J. A. Charris., *Fixed points for $w-$contractive or $w-$expansive maps in uniforms spaces: Toward a unified approach*, Southwest. J. pure and Appl. Math. Internet: http://rattler.cameron.edot/Swipam.html; Issn 1083-0464, Insue 1, June 2001, 93-101.

[9] J. Rodríguez Montes., *Puntos fijos del tipo constructivo o expansivos, Un punto de vista unificado*, Tesis doctorado en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2001.

[10] J. Rodríguez Montes., *Contracciones, Expansiones, y Teoremas de puntos fijos del tipo contractivo*, Trabajo de Titularidad, por publicar.