



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Medición Simultánea de Observables Incompatibles

Daniel Alejandro Saavedra Martínez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá D.C., Colombia
2019

Medición Simultánea de Observables Incompatibles

Daniel Alejandro Saavedra Martínez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Mágister en Ciencias-Física

Directora:
Karen Milena Fonseca Romero

Línea de Investigación:
Mecánica Cuántica
Grupo de Investigación:
Grupo de Óptica e Información Cuántica

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá D.C., Colombia
2019

A mi mamá y a mi hija

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi directora Karen, por la dedicación, el esfuerzo, los aportes y las discusiones que se han logrado con ella. Además, a mi familia por el apoyo brindado durante este proceso y por la motivación que me dieron cada día para seguir adelante con este proyecto. También, deseo gratificar a mis compañeros del grupo de investigación, por hacer más ameno las intensas horas de trabajo y por las discusiones realizadas con ellos durante el desarrollo de esta tesis. Por último, quiero reivindicar a Rocío por incentivarme en la progresión de este documento.

Resumen

Se modela la medición de una componente de espín de un sistema de interés, empleando un modelo microscópico sencillo: una interacción con otro sistema (auxiliar) que sufre decoherencia. En la aproximación de interacción impulsiva, la medición puede caracterizarse por un único parámetro. Usualmente se tiene una medición borrosa, en la que los elementos de la POVM asociada conmutan mutuamente y no todos son proyectores. La generalización a dos aparatos, cada uno de los cuales mediría una componente ortogonal de espín (en ausencia del otro), se escoge de manera que se puede caracterizar con dos parámetros. Una exploración sistemática del espacio de parámetros muestra como cada aparato afecta al otro. Se caracteriza geoméricamente la medición generalizada correspondiente usando un vector tridimensional, dos de cuyas componentes corresponden a los observables efectivamente medidos por los aparatos y una tercera componente que depende de las coincidencias entre los resultados de los mismos. En general, se puede hacer estimación del estado inicial del sistema de interés. Sin embargo, existe un conjunto de parámetros en los cuales solamente se pueden medir dos (uno o ninguno) observables independientes, el cual se caracteriza analíticamente.

Palabras clave: Mediciones simultáneas, aparato, mediciones borrosas y proyectivas, estimación cuántica, vector de Bloch.

Abstract

We model the measurement of a spin component of a certain interest system, we employ a microscopic simplified model: a interaction with other (auxiliary) system, which suffers decoherence. In the approximation of impulsive interaction, the measurement can be characterized by a unique parameter. Usually, we have an unsharp measurement, in which the associated POVM elements mutually commute and not all of them are projectors. The generalization to two apparatus, each one would measure a spin orthogonal component (in absence of the other one), is chosen in a way that we can characterize with two parameters. A systematic exploration of the parameter space shows how each apparatus affects the other one. We geometrically represent the correspondent generalized measurement using a three-dimensional vector, two of whose components correspond to the effectively measured observables by the apparatus and the third component which depends on the coincidences between the results of the meters. In general, we can estimate the initial state of the interest system. However, it exists a set of parameters in which we can measure two (one or none) independent observable, which we can describe analytically.

Key words: simultaneous measurement, apparatus, unsharp and projective measurement, quantum state estimation, Bloch vector.

Contenido

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Lista de tablas	XIII
Lista de figuras	XV
Introducción	1
1. Marco Teórico	5
1.1. POVM	5
1.1.1. Tipos de Medición	7
1.2. Ecuación de Lindblad	9
1.3. Revisión de Literatura	14
1.3.1. Decoherencia en las Mediciones	16
1.3.2. Primeras Nociones de Medición Conjunta de Observables Incompatibles	18
1.3.3. Medición Simultánea con Reservorios Independientes	18
2. Modelo de Medición de la Tercera Componente de Espín	21
2.1. Dinámica del sistema de medición (Estado Inicial Puro)	22
2.2. Dinámica del sistema de medición (Estado Inicial Mezclado)	29
2.3. POVM	30
2.3.1. Resultado $ +_x\rangle$	31
2.3.2. Resultado $ -_x\rangle$	32
2.4. Mediciones Borrosas (<i>Unsharp Measurements</i>)	33
3. Modelo para Medición Simultánea con Dos Aparatos	37
3.1. Dinámica del Sistema de Medición	38
3.2. POVM	41
3.3. Estimación del estado	42

3.4. Interpretación Física	45
3.4.1. Coincidencias	47
3.5. Casos Singulares	49
3.6. Tipos de Medición	58
3.7. Mediciones Débiles	61
Conclusiones	63
Perspectivas	64
A. Anexo: Modelo de Medición de la primera Componente de Espín	65
B. Anexo: Componentes de la Matriz \mathbb{D}	69
Bibliografía	71

Lista de Tablas

3.1. Sobre cada curva en el espacio de parámetros (θ_A, θ_B) , direcciones en las cuales el vector de Bloch puede ser estimado, escrito como combinación lineal de los vectores de la base.	57
3.2. En cada curva del espacio de parámetros (θ_A, θ_B) , vectores de Bloch los cuales son combinaciones lineales de las bases de vectores que pueden ser estimados. Los subíndices dan información acerca de los tipos de curva: recta horizontal (H), recta vertical (V), circunferencia (C) y recta diagonal (D). Los vectores \mathbf{a}_D , \mathbf{b}_D y \mathbf{c}_D están sobre el mismo plano.	58

Lista de Figuras

1.1.	Diagrama de los diferentes tipos de medición que pueden existir en las mediciones generalizadas, o POVM	10
2.1.	Esquema del modelo de medición, el cual consta de un sistema S y un aparato de medición A. El aparato A está en contacto con el reservorio R	22
2.2.	Coefficiente de la probabilidad de obtener $ +_x^A\rangle$ en el aparato en función del parámetro de acople θ	28
3.1.	Esquema del modelo de medición con dos aparatos de medida que interactúan simultáneamente con el sistema a medir, y a su vez, éstos están dentro de reservorios independientes.	39
3.2.	Representación en la esfera de Bloch del estado inicial ρ_0^S	43
3.3.	Reconstrucción del estado cuántico a partir de la medición de las tres componentes de espín	44
3.4.	Vectores que determinan las componentes de espín que se pueden medir. $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ asociado al observable que mide el aparato A, $\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ asociado al observable que mide el aparato B y $\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ el observable que se mide gracias a las coincidencias de los conteos de los dos aparatos	48
3.5.	Número de componentes de espín que se pueden estimar a partir del rango de la matriz \mathbb{T} para las curvas en las cuales $\Delta = 0$	49
3.6.	Configuración de los vectores $\hat{\mathbf{q}}_{kl}$ para el conjunto de parámetros que satisfacen en una circunferencia de radio 2π	53
3.7.	Variación del plano en el cual se pueden estimar las componentes del espín para una circunferencia de radio 2π	54
3.8.	Configuración de los vectores \mathbf{q}_{kl} para el conjunto de parámetros que satisfacen $\theta_A = \theta_B$. Donde se muestra que los cuatro vectores pertenecen al mismo plano	55
3.9.	Variación del plano en el cual se pueden estimar las componentes del espín para la recta diagonal $\theta_A = \theta_B$	56
3.10.	Tipos de medición en el espacio de parámetros θ_A y θ_B	59
3.11.	Puntos en el espacio de parámetros de medidas “proyectivas” simultáneas	60

Lista de símbolos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término
H	Hamiltoniano del sistema
V	Mapeo que da la evolución temporal $\rho(t) = V\rho$
\mathcal{L}	Operador Liouvilliano o generador del semigrupo de V
E_i	Operadores de Kraus
M_i	Elementos del POVM
p_i	Probabilidad de cada posible resultado
U_i	Operador Unitario
\mathbb{T}	Matriz que mapea las componentes del vector de Bloch en las probabilidades
s_x, s_y, s_z	Componentes del vector de Bloch. Valores esperados de los observables $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, respectivamente.

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término
ρ	Matriz densidad
ψ_0	Estado inicial del sistema
θ	Parámetro adimensional de acople
θ_A	Parámetro adimensional de acople entre el sistema y el aparato A
θ_B	Parámetro adimensional de acople entre el sistema y el aparato B
γ_A	Tasa de decoherencia del reservorio A
γ_B	Tasa de decoherencia del reservorio B
θ_C	Parámetro adimensional de acople radial $\theta_C = \sqrt{\theta_A^2 + \theta_B^2}$

Símbolo	Término
Π_+	Proyector $ +\rangle \langle + $
Π_{+x}	Proyector $ +_x\rangle \langle +_x $
ϕ	Parámetro adimensional de acople angular $\tan \phi = \theta_B/\theta_A$
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Matrices de Pauli
$\boldsymbol{\sigma}$	Vector de Pauli con componentes $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$
Δ	Determinante de la matriz \mathbb{D}

Subíndices

Subíndice	Término
+	Asociado al proyector de la tercera componente con autovalor positivo
+x	Asociado al proyector de la primera componente con autovalor positivo
+	Asociado al resultado del aparato en dirección positiva
-	Asociado al resultado del aparato en dirección negativa
A	Asociado al primer aparato A
B	Asociado al segundo aparato B
T	Asociado al sistema completo S+A+B
x, y o z	Componente a lo largo del eje x, y o z

Superíndices

Superíndice	Término
A	Asociado al primer aparato A
B	Asociado al segundo aparato B
S	Asociado al sistema a medir

Introducción

“An experiment is a question which science poses to Nature, and a measurement is the recording of Nature’s answer.”

Max Planck

La teoría cuántica es una rama de la física que surgió a partir de una serie de renombrados experimentos, en los cuales el proceso de medición ha desempeñado un papel fundamental. Tan importante es este papel que desde los primeros postulados de esta teoría, se predicen los posibles resultados de una medición. Desde entonces, la teoría ha evolucionado para tratar de abarcar todas las posibles mediciones que se puedan realizar.

Los primeros autores en hablar sobre la medición en mecánica cuántica, fueron los mismos precursores de esta teoría, entre ellos Dirac y Heisenberg [Dirac, 1932, Heisenberg, 1927]. Ellos postularon que a cada observable, o variable dinámica, le corresponde un operador hermítico. Asimismo, al realizar la medición, los únicos valores posibles que puede tomar la variable dinámica son los autovalores del operador. Adicionalmente, el estado del sistema colapsa después de la medición en alguno de los autovectores del operador: este proceso es conocido comúnmente como el colapso o reducción de la función de onda.

Max Born muestra los primeros aspectos estadísticos, o probabilistas, de la teoría cuántica, al ofrecer una interpretación del comportamiento ondulatorio de las partículas. En 1926 [Born, 1926], Born plantea una regla según la cual la probabilidad de obtener cada uno de los posibles resultados después de una medición se calcula como el módulo cuadrado del producto interno entre el estado anterior a la medición y el autovector asociado al autovalor del resultado obtenido en la medición.

En 1932, von Neumann [von Neumann, 1932a] planteó un esquema más completo que la teoría de la medición desarrollada por Heisenberg y Dirac (mejorada por Born), al incorporar un sistema auxiliar como el aparato de medida, o metro. Von Neumann mostró una forma de la evolución del estado del sistema a medir después de la medición: esta evolución es no-unitaria y, generalmente, aumenta la incertidumbre estadística del estado cuántico. En 1951, Lüders [Lüders, 1951] muestra los posibles estados del sistema después de la medición a partir de una relación de similaridad con operadores de proyección, conocida como la regla de Lüders. La evolución no-unitaria que plantea von Neumann, al igual que la formulada por Lüders, se calcula a partir de operadores de proyección, mediciones conocidas como PVM (por sus siglas en inglés *projection-valued measure*).

Aunque el esquema de medición de operadores de proyección sirvió por muchos años y aún se usa en algunos textos modernos de mecánica cuántica [Greiner, 2000, Claude Cohen-Tannoudji, 1991, Griffiths, 1995], se demostró que no es posible hacer una correspondencia entre las mediciones factibles en procesos cuánticos y este conjunto de operadores [de Muynck, 2004]. Por ejemplo, experimentos que involucran detectores ineficientes [de Muynck, 2004] y mediciones con interacción débil (o valores débiles) [Aharonov et al., 1988] no se pueden formular mediante la evolución planteada por Lüders y von Neumann. Como una generalización de las mediciones PVM, surgen los POVM (por sus siglas en inglés *positive operator-valued measure*) [Nielsen, 2000, Peres, 2002], los cuales son resoluciones ortogonales y no-ortogonales de la identidad [Holevo, 2011], es decir, $\{M_i\}$ tales que $\sum_i M_i = I$. Para intentar salvar el formalismo estándar de medición (mediciones de von Neumann-Lüders) se usó el teorema de Naimark, el cual expresa los operadores del POVM como operadores de proyección de un espacio de Hilbert más grande que el espacio al que pertenece el estado del sistema a medir. Sin embargo, la extensión del espacio de Hilbert no obedece a ningún tratamiento físico.

A pesar de la facilidad de la representación por medio de operadores de medición, este conjunto de operadores no permite discernir la dinámica envuelta en la evolución física, ni tiene en cuenta los sistemas auxiliares que se acoplan al sistema (que incluso pueden ser reservorios). Por ejemplo, si se quisiera modificar el tiempo de interacción entre el sistema a medir y el aparato de medida, no sería claro qué parámetro cambiaría en los operadores semidefinidos positivos. Aunque las mediciones generalizadas escritas como operadores POVM enriquecen el tratamiento matemático de las mediciones, muchas veces no es fácil asociar un operador con la evolución temporal de un sistema y el aparato de medición.

Por otro lado, la medición simultánea de observables incompatibles, operadores no-conmutantes, es una idea que ha causado interés en la mecánica cuántica desde los *gedankenexperiment* propuestos por Heisenberg en 1927 [Heisenberg, 1927]. Posteriormente, Arthurs y Kelly proveen una descripción más rigurosa de la medición conjunta usando dos sistemas auxiliares (aparatos de medición) [Arthurs y Kelly, 1965]. Ellos proponen que cada uno de los metros mide una variable dinámica diferente para así obtener una distribución de probabilidad conjunta de los resultados de la medición. Por otra parte, la generalización de los esquemas de medición ha mostrado que son viables mediciones simultáneas de observables no conmutantes incluso a nivel experimental [Hacohen-Gourgy et al., 2016].

La propuesta en este trabajo es usar dos metros para medir dos observables incompatibles y acoplarlos de manera independiente a sus respectivos ambientes. Esto implica que la medición puede hacerse de manera simultánea gracias a la interacción paralela con los dos metros. Particularmente, para encontrar de manera explícita los posibles resultados de la medición,

se plantea como sistema a medir una partícula de espín $1/2$ y cada aparato, en ausencia del otro, puede determinar la primera y tercera componente de espín, respectivamente. Además, los dos sistemas de prueba se asumen partículas de espín $1/2$ o sistemas de dos estados, por simplicidad.

El acople simultáneo del sistema con los dos metros permite estimar no sólo las dos componentes de espín que se deseaban medir, sino también, la segunda componente de espín. El anterior resultado conlleva directamente a la estimación del estado cuántico del sistema, incluso si el sistema se encontraba inicialmente en una mezcla estadística.

Para llevar a cabo la estimación es necesario plantear una ecuación maestra que de cuenta de la evolución del sistema completo (sistema+aparatos) y hallar la evolución para cualquier tiempo. La evolución Hamiltoniana se propone tipo Peres [Peres, 1986], similar a una interacción entre espines tipo Ising. A su vez, se asumen dos aproximaciones: la primera es que el tiempo de interacción de cada uno de los metros con el sistema es corto comparado con la interacción propia de cada reservorio con el ambiente; la segunda, que la escala de energía de la interacción Hamiltoniana es mucho más grande que cualquier otra acción sobre el sistema. Con el estado completo (Sistema+Aparatos) en un largo tiempo, comparados con el tiempo de decoherencia, se hallan los operadores de Kraus, los elementos del POVM y las probabilidades de los posibles resultados. Los cálculos necesarios para encontrar la evolución del sistema son completamente analíticos y no es necesario el uso de herramientas computacionales, salvo para elaborar las gráficas que se muestran en este documento.

Partir desde la dinámica del sistema completo (sistema y aparatos) permite hacer una exploración sistemática del espacio de parámetros, que en este caso son los parámetros de acople entre el sistema y cada uno de los metros. Esta descripción no sería posible si se postularan los elementos de la medición POVM desde un comienzo. Además, el modelamiento dinámico hace posible obtener explícitamente la perturbación que cada aparato le hace al sistema medido y la perturbación mutua entre aparatos [Perarnau-Llobet y Nieuwenhuizen, 2017].

La organización de este escrito se muestra a continuación. Primero se brinda un marco teórico de los temas necesarios para entender las deducciones y tipificaciones que se realizan a lo largo de este documento. Además, se presenta una revisión de la literatura para tratar el estado del arte referente a la dinámica de las mediciones cuánticas y la medición de observables incompatibles. En el segundo capítulo, se plantea un esquema para la medición de una componente de espín a partir de un sistema ancilla o auxiliar acoplado al sistema que se quiere medir. Donde el aparato tiene un proceso de decoherencia. En el capítulo siguiente dos aparatos de medición son acoplados simultáneamente a este sistema como una generalización

del capítulo anterior. Cada metro en ausencia del otro mide una componente independiente, y ortogonal, de espín. La caracterización de las mediciones se logra completamente con los dos parámetros de acoples involucrados en la evolución del sistema completo. Dentro de la caracterización se observan casos en los cuales es posible medir tres componentes de espín, es decir, hacer estimación del estado, como también obtener menor número de observables o inclusive no medir ningún observable. Se ofrece una interpretación física y geométrica a la estimación que hace más claro e ilustrativo los parámetros que hacen parte de la medición.

Adicionalmente, se observan los casos en los cuales no es posible la estimación completa del estado y se describen cuáles son las únicas componentes del vector de Bloch que se podrían estimar. Se mencionan brevemente las situaciones en donde los parámetros de acople son pequeños, es decir, mediciones débiles. Además, se muestra que ocurre cuando se realizan medidas simultáneas proyectivas, en el sentido en que cada aparato en ausencia del otro aparato realizaría una medición proyectiva. Por último, se muestran las conclusiones y perspectivas al trabajo mostrado en este documento.

1. Marco Teórico

"The concept of 'measurement' becomes so fuzzy on reflection that it is quite surprising to have it appearing in physical theory at the most fundamental level ... does not any analysis of measurement require concepts more fundamental than measurement? And should not the fundamental theory be about these more fundamental concepts?"

John Stewart Bell

En este capítulo se hace una revisión de los temas necesarios para el entendimiento de los capítulos posteriores, los cuales corresponden a los resultados del actual trabajo de investigación; también, los conceptos más recientes de mediciones generalizadas, su relación con los POVM y la caracterización de las mediciones a partir de estos operadores. Adicionalmente, se hace una introducción a los sistemas cuánticos abiertos, en donde se muestra una deducción de la ecuación de Lindblad y algunas de sus propiedades. Finalmente, se comentan brevemente algunas publicaciones concernientes al estudio aquí realizado.

1.1. POVM

El postulado de las mediciones generalizadas es una ampliación de las definiciones estándar e incompletas de la medición [Nielsen, 2000] [Konrad, 2003]. Este postulado enuncia que a cada posible resultado n de la medición, le corresponde un operador E_n (que actúa sobre los elementos del espacio de Hilbert) y la probabilidad de obtener cada uno de estos posibles resultados es

$$p_n = \text{Tr}[E_n \rho E_n^\dagger], \quad (1.1)$$

donde ρ es el estado del sistema justo antes de realizar la medición. Además, los operadores permiten calcular el estado del sistema posterior a la medición por medio de la relación

$$\rho_n = \frac{E_n \rho E_n^\dagger}{\text{Tr}[E_n \rho E_n^\dagger]}. \quad (1.2)$$

La anterior ecuación es conocida como la regla de Lüders [Lüders, 1951]. Sin embargo, cuando Lüders propuso esta relación en 1951 hizo referencia a los operadores de medición E_n simplemente como operadores de proyección, una versión menos genérica de las mediciones puesto que se limita a usar operadores idempotentes. El postulado de las mediciones generalizadas restringe únicamente estos operadores a cumplir la relación de completitud, ésta es,

$$\sum_n E_n^\dagger E_n = I, \quad (1.3)$$

donde I es el operador identidad de la dimensión del espacio de operadores al que pertenece el estado ρ . La relación (1.3) surge como consecuencia de la ligadura de las probabilidades $\sum_n p_n = 1$. Por otro lado, la regla de Lüders (1.2) se puede ver como un caso específico de los mapeos u operaciones sobre la matriz densidad [Nielsen, 2000], estos incluyen la interacción con un sistema auxiliar, o inclusive con un reservorio. Cualquier operación \mathcal{E} sobre una matriz densidad puede ser representada como

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_n K_n \rho K_n^\dagger, \quad (1.4)$$

donde los operadores K_i son conocidos como operadores de Kraus. Como consecuencia, en este texto los operadores E_n se nombran como operadores de Kraus. La relación (1.4) es conocida como la representación de Kraus o representación de suma de operadores [Konrad, 2003].

Además, las probabilidades de obtener cada uno de los posibles resultados después de una medición se pueden calcular a partir de los operadores $M_n = E_n^\dagger E_n$ como $p_n = \text{Tr}[E_n \rho E_n^\dagger] = \text{Tr}[M_n \rho]$. El conjunto completo de operadores $\{M_n\}$ es una resolución de la identidad ($\sum_n M_n = I$) y hace parte de medida con operadores de valor positivo, conocido por sus siglas en inglés POVM (*Positive Operator-Valued Measure*) [Peres, 2002]. Se podría pensar que cualquier conjunto de operadores $\{M_n\}$ que sea una resolución de la identidad formaría un POVM, pero también se hace necesario que los operadores sean semidefinidos positivos ($\langle \psi | M_n | \psi \rangle \geq 0, \forall |\psi\rangle$) y además hermíticos, en virtud de la definición $M_n = E_n^\dagger E_n$. Los operadores M_n son conocidos como los elementos del POVM. Muchas veces se usan estos operadores sin tener en cuenta los operadores de Kraus, puesto a la gran riqueza matemática que presentan estos conjuntos y a que los operadores de Kraus no son únicos. Un ejemplo que

puede ilustrar la anterior afirmación es multiplicar cualquier operador de Kraus con una fase $e^{i\phi}$, lo cual no altera la regla de Lüders (1.2) ni las probabilidades de obtener cada posible resultado (1.1).

1.1.1. Tipos de Medición

Ahora, cualquier medición está completamente descrita por el conjunto de operadores de Kraus $\{E_n\}$. Con las propiedades específicas que tengan estos operadores (o los elementos del POVM) es posible una clasificación de las mediciones. Konrad, en su tesis doctoral [Konrad, 2003], realiza una clasificación de las mediciones en mecánica cuántica así:

Mediciones Proyectivas (Fuerzas)

Estas mediciones fueron las primeras en postularse, y son las que von Neumann enuncia en (1.31). Por otra parte, cuando Lüders muestra la evolución de un sistema después de una medición lo hace para este tipo específico de medidas. Por lo anterior, estas mediciones son conocidas como mediciones de von Neumann-Lüders o mediciones ideales. En estas mediciones los operadores de Kraus E_n son proyectores, es decir, $E_n = E_n^2 = E_n^\dagger$. Por tanto, los elementos de POVM son también operadores de proyección ($E_n = M_n$).

Las mediciones proyectivas justifican, en algunos libros [Greiner, 2000, Claude Cohen-Tannoudji, 1991, Griffiths, 1995], el colapso o reducción de función de onda. En estas publicaciones, los proyectores provenientes de la descomposición espectral del operador hermítico –correspondiente a la variable dinámica que se mide– forman el conjunto POVM $\{M_n\}$, o el conjunto de los operadores de Kraus $\{E_n\}$. Asimismo, algunos textos [Claude Cohen-Tannoudji, 1991] justifican la “imposibilidad” de medir conjuntamente observables incompatibles usando mediciones proyectivas.

Mediciones Nítidas (*Sharp Measurement*)

Las mediciones generalizadas son nítidas (*sharp*) si todos los elementos del POVM son proyectores, esto es, $M_n = M_n^2$. Las mediciones proyectivas son un caso particular de las mediciones

nítidas. Por ejemplo, si los operadores de Kraus tienen la forma $E_i = U_i P_i$, donde U_i es un operador unitario y P_i es un proyector, los elementos del POVM satisfacen $M_i = P_i$, pero los operadores de Kraus no son proyectores. La diferencia entre estos dos tipos de medición radica en los estados después de la medición. En mediciones consecutivas, si se realiza la misma medición proyectiva sobre un sistema, el estado del sistema queda inalterado $P_i(P_i\psi) = P_i\psi$. Mientras que en una medida nítida el estado puede cambiar al realizar la misma medición.

Mediciones Borrosas (*Unsharp Measurement*)

Una medida generalizada es borrosa (*unsharp*) si los elementos del POVM, también llamados efectos, no son todos proyectores y además, conmutan mutuamente, es decir,

$$[M_m, M_n] = 0 \quad \forall \text{ los posibles resultados } m \text{ y } n.$$

Respecto a las mediciones borrosas (aunque la proposición también aplica a los dos tipos de mediciones anteriores), Konrad enuncia la siguiente proposición:

Proposición 1. *Si los efectos M_m , $m \in \Omega$ el conjunto de todos los posibles resultados, de una medida generalizada no trivial¹ conmutan mutuamente, entonces existe un observable no trivial² A , que conmuta con todos los efectos. Además, las probabilidades de los resultados $m \in \Omega$ de las medidas generalizadas determinan el valor esperado $\langle A \rangle$ como también todos los momentos más altos $\langle A^n \rangle$ de un observable ordinario A .*

La demostración de esta proposición permite obtener, de manera esquemática, los valores esperados de un observable en términos de las probabilidades de los posibles resultados de la medición.

Demostración. Si dos operadores autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert conmutan, se sabe que existe una base común de autovectores $|i\rangle$. Luego si todos los efectos conmutan con $A = \sum_i a_i P_i$, donde $P_i = |i\rangle\langle i|$, entonces

$$M_m = \sum_i p_{mi} P_i \tag{1.5}$$

¹Una medida no trivial en el sentido en que las probabilidades de los resultados dependen del estado inicial

²Observable no trivial significa que no es proporcional a la identidad $A \neq \alpha I$

para algunos valores no negativos $p_{mi} \in \mathbb{R}$. Si la matriz p_{mi} es invertible, entonces las ecuaciones acopladas

$$\langle M_m \rangle = \sum_i p_{mi} \langle P_i \rangle \quad (1.6)$$

pueden ser resueltas para $\langle P_i \rangle = Tr[\rho P_i] = \langle i | \rho | i \rangle$ e insertadas dentro de la ecuación

$$\langle A^n \rangle = \sum_i a_i^n \langle P_i \rangle \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.7)$$

Conociendo las probabilidades $p_m = Tr[\rho M_m] = \langle M_m \rangle$ entonces se pueden calcular los momentos $\langle A^n \rangle$. \square

La figura 1.1 muestra un diagrama de Venn de las medidas generalizadas y los tipos de mediciones que se pueden encontrar. En el conjunto más grande están las mediciones generalizadas o POVM, los cuales son todos los operadores hermíticos semidefinidos positivos que son resoluciones ortogonales y no ortogonales de la identidad. Contenido dentro de este gran conjunto están las resoluciones ortogonales de la identidad, es decir, las cuales satisfacen

$$M_i M_j = M_i \delta_{ij} \quad \text{y} \quad \sum_i M_i = I.$$

Este conjunto contiene dos tipos excluyentes de medición: las mediciones borrosas (*unsharp measurement*) y las mediciones nítidas (*sharp measurement*) las cuales se distinguen solamente porque en las primeras no todos los operadores pueden ser operadores de proyección, mientras que en las últimas todos los operadores deben serlo. Por último, están las medidas proyectivas, las cuales se caracterizan porque los operadores de medida E_i (tales que $E_i^\dagger E_i = M_i$) son todos proyectores.

1.2. Ecuación de Lindblad

El siguiente tratamiento de los sistemas cuánticos abiertos es realizado por Breuer [Heinz-Peter Breuer, 2002], las limitaciones de este desarrollo y otras deducciones microscópicas de la ecuación de Lindblad pueden verse en el mismo libro de texto.

Los sistemas cuánticos abiertos consisten de un sistema S y el ambiente R , el ambiente es tratado como un reservorio. Para ver la dinámica del sistema S , conocido como sistema reducido, se hace la evolución del sistema completo $S + R$ por medio de la ecuación de

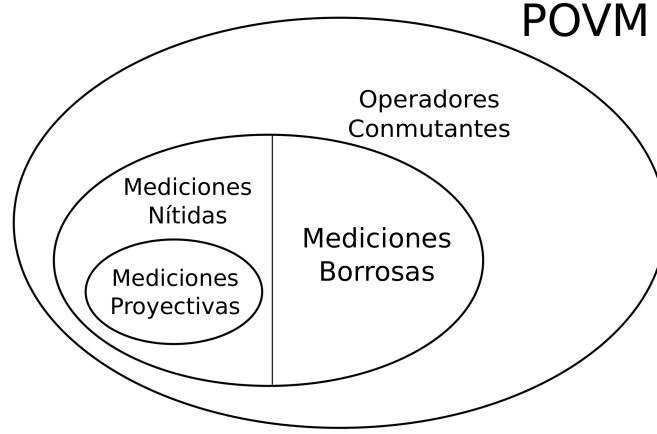


Figura 1.1.: Diagrama de los diferentes tipos de medición que pueden existir en las mediciones generalizadas, o POVM

Schrödinger para un tiempo arbitrario y luego se hace la traza sobre los grados de libertad del reservorio. Esto es,

$$\rho(t)_S = Tr_B[U(t)\rho_T(0)U^\dagger(t)], \quad (1.8)$$

donde $\rho_T(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R$ es el estado inicial del sistema completo y se considera separable, es decir, que no hay una interacción entre el sistema y el entorno para $t \leq 0$. Los operadores unitarios surgen de la evolución Hamiltoniana del sistema completo (S+R), que puede ser considerado aislado. Si la evolución Hamiltoniana es independiente del tiempo, los operadores unitarios toman la forma $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$, donde \hbar es la constante de Planck y el operador H es el operador Hamiltoniano de interacción del sistema completo. Básicamente el operador Hamiltoniano es

$$H = H_S + H_R + H_I, \quad (1.9)$$

donde H_S es el operador del sistema libre S, H_R es el Hamiltoniano del reservorio y H_I es el término de interacción entre el sistema y el ambiente. Escribiendo el operador ρ_R en su descomposición espectral como $\rho_R = \sum_\alpha \lambda_\alpha |\phi_\alpha\rangle \langle \phi_\alpha|$ se observa que el estado del sistema para un tiempo $t > 0$ se puede ver como

$$\rho_S(t) = \sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha,\beta} \rho_S(0) W_{\alpha,\beta}^\dagger, \quad (1.10)$$

donde los operadores $W_{\alpha,\beta}(t) = \sqrt{\lambda_\alpha} \langle \phi_\beta | U(t) | \phi_\alpha \rangle$ representan los operadores de Kraus de la operación de evolución de un sistema en contacto con un reservorio (1.4). El mapeo que brinda la evolución del estado del sistema se va a notar por $V(t)$, es decir, $\rho_S(t) = V(t)\rho_S(0)$.

El mapeo en un tiempo inicial equivale al operador identidad $V(0) = I$. Los operadores de Kraus $W_{\alpha,\beta}$ se pueden escribir en términos de una base $\{F_i\}$ de dimensión N^2 de matrices de tamaño $N \times N$. Esta base de matrices se puede escoger de tal forma que la matriz F_{N^2} sea la matriz identidad. Los operadores de Kraus son

$$W_{\alpha,\beta} = \sum_i (F_i, W_{\alpha,\beta}) F_i, \quad (1.11)$$

donde $(F_i, W_{\alpha,\beta}) = \text{Tr}[F_i^\dagger, W_{\alpha,\beta}]$ es el producto interno en el espacio de operadores que actúan sobre el espacio de Hilbert. Teniendo en cuenta que el operador adjunto es $W_{\alpha,\beta}^\dagger = \sum_i (F_i, W_{\alpha,\beta})^* F_i^\dagger$, se puede escribir la evolución del sistema como

$$V(t)\rho_S = \sum_{i,j} c_{ij}(t) F_i \rho_S F_j^\dagger, \quad (1.12)$$

donde

$$c_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} (F_i, W_{\alpha,\beta})(F_j, W_{\alpha,\beta})^*.$$

El mapeo que representa la evolución temporal del sistema se considera markoviano cuando cumple la relación

$$V(t_1)V(t_2) = V(t_1 + t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0 \quad (1.13)$$

Los semigrupos continuos de un solo parámetro satisfacen la relación (1.13), luego el semigrupo tiene un generador que cumple

$$V(t) = e^{\mathcal{L}t}. \quad (1.14)$$

Viendo la ecuación anterior se observa que el mapeo representado por $V(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}V(t)\rho_S = \mathcal{L}V(t)\rho_S \quad (1.15)$$

o, en otros términos, el operador densidad satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}\rho_S(t) \quad (1.16)$$

La definición de generador se puede dar en términos de la derivada del mapeo con respecto al parámetro t en el tiempo $t = 0$

$$\mathcal{L}\rho_S = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [V(\epsilon) - I]\rho_S. \quad (1.17)$$

Reemplazando la ecuación (1.12) en (1.17) se encuentra que

$$\mathcal{L}\rho_S = \frac{1}{N} a_{N^2 N^2} \rho_S + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N^2-1} a_{i N^2} F_i \rho_S + a_{i N^2}^* \rho_S F_i^\dagger + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_i \rho_S F_j, \quad (1.18)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{N^2N^2} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (c_{N^2N^2}(\epsilon) - N), \\ a_{iN^2} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} c_{iN^2}(\epsilon), \\ a_{ij} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} c_{ij}(\epsilon). \end{aligned}$$

Además, se tuvo en cuenta que la matriz c_{ij} es hermítica y se recalca que $F_{N^2} = I$. A continuación, redefiniendo $F = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N^2-1} a_{iN^2} F_i$ se tiene

$$\mathcal{L}\rho_S = \frac{a_{N^2N^2}}{N} \rho + F\rho_S + \rho F^\dagger + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_i \rho_S F_j^\dagger. \quad (1.19)$$

Ahora se definen el operador

$$G = \frac{1}{2N} a_{N^2N^2} I + \frac{1}{2} (F^\dagger + F) \quad (1.20)$$

y el operador hermítico

$$H = \frac{\hbar}{2i} (F^\dagger - F) \quad (1.21)$$

la relación (1.19) se puede escribir como

$$\mathcal{L}\rho_S = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho_S] + \{G, \rho_S\} + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_i \rho_S F_j^\dagger. \quad (1.22)$$

Como el semigrupo continuo preserva la traza, se satisface que

$$Tr[\mathcal{L}\rho_S] = Tr \left[\left(2G + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i \right) \rho_S \right] = 0, \quad (1.23)$$

por tanto

$$G = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i. \quad (1.24)$$

Reemplazando G en (1.22) se encuentra la primera forma estándar del generador del semigrupo continuo de un solo parámetro

$$\mathcal{L}\rho_S = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho_S] + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} \left(F_i \rho_S F_j^\dagger - \frac{1}{2} \{F_j^\dagger F_i, \rho_S\} \right). \quad (1.25)$$

Con una adecuada transformación unitaria de la matriz $a = (a_{ij})$, ésta se puede diagonalizar y los elementos de la diagonal serían los autovalores $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_{N^2-1}$ ($uau^\dagger = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_{N^2-1}\}$). Introduciendo los operadores A_k que satisfacen

$$F_i = \sum_k u_{ki} A_k,$$

se encuentra la forma diagonal del generador

$$\mathcal{L}\rho_S = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho_S] + \sum_{k=1}^{N^2-1} \gamma_i \left(A_k \rho_S A_k^\dagger - \frac{1}{2} \{A_k^\dagger A_k, \rho_S\} \right). \quad (1.26)$$

Para encontrar la ecuación de Lindblad se reemplaza el generador en su forma diagonal (1.26) en la ecuación (1.16),

$$\frac{d\rho_S}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho_S] + \sum_{k=1}^{N^2-1} \gamma_i \left(A_k \rho_S A_k^\dagger - \frac{1}{2} \{A_k^\dagger A_k, \rho_S\} \right), \quad (1.27)$$

los operadores A_k son conocidos como operadores de Lindblad, los factores γ_i tienen unidades del inverso del tiempo, suponiendo que A_k son adimensionales, y son conocidos como las tasas de relajación o decoherencia. El operador hermítico H se asocia al Hamiltoniano debido a que está relacionado con la evolución unitaria en la ecuación de von Neumann para la evolución de operadores en el tiempo. El término que no corresponde a la evolución unitaria es conocido como el disipador

$$D(\rho_S) = \sum_{k=1}^{N^2-1} \gamma_i \left(A_k \rho_S A_k^\dagger - \frac{1}{2} \{A_k^\dagger A_k, \rho_S\} \right).$$

Se debe notar que el operador H no siempre está identificado con el Hamiltoniano libre del sistema, algunas veces se modifica por el acople con el reservorio. De hecho, el generador \mathcal{L} no está definido únicamente por el operador H y los operadores de Lindblad A_k , esto se debe a la invarianza del generador frente a las transformaciones

- Transformaciones unitarias de los operadores de Lindblad

$$\sqrt{\gamma_k} A_k \rightarrow \sqrt{\gamma'_k} A'_k = \sum_i u_{ki} \sqrt{\gamma_l} A_l, \quad (1.28)$$

donde u_{kl} es una transformación unitaria.

- Las transformaciones inhomogéneas

$$A_k \rightarrow A'_k = A_k + a_k, \quad (1.29)$$

$$H \rightarrow H' = H + \frac{1}{2i} \sum_l \gamma_l \left(a_l^* A_l - a_l A_l^\dagger \right) + b, \quad (1.30)$$

donde a_k son números complejos y b es un número real.

La ecuación de Lindblad (1.27) permite encontrar la evolución temporal de un sistema cuántico abierto, es decir, en contacto con un sistema cuántico conocido como el ambiente, donde se asume que el mapeo $V(t)$ que evoluciona la matriz densidad reducida es markoviano, es decir que la evolución del proceso depende únicamente del estado presente y no, del estado anterior.

1.3. Revisión de Literatura

En esta sección se muestran algunos escritos que han tratado el problema de la medición, y más enfáticamente los artículos relacionados con la medición simultánea de observables no conmutantes. Si el lector desea hacer una revisión más completa de los temas tratados, puede remitirse a las citas aquí mencionadas.

Como se mencionó en secciones anteriores, los primeros autores en hablar sobre la medición en mecánica cuántica, fueron los mismos precursores de esta teoría [Dirac, 1932, Heisenberg, 1927] quienes postularon que las variables dinámicas que se quieren medir tienen correspondencia con operadores hermíticos que actúan sobre elementos de un espacio de Hilbert. Los únicos valores que pueden tomar estas variables son los valores propios del operador. Ellos también precisaron que después de medir una variable dinámica, el estado del sistema que se quiere medir colapsa en el vector propio asociado al autovalor que tomó el observable.

Mediciones en Mecánica Cuántica

Para el estudio del proceso de medición en mecánica cuántica es necesario comprender el modelo de John von Neumann [von Neumann, 1932b]. Él evidencia la necesidad de usar un aparato de medida que interacciona con el sistema que se quiere medir y a partir de alguna propiedad del aparato conocer cierta información del sistema. Textualmente von Neumann mencionó:

...In the measurement we cannot investigate the system \mathbf{S} by itself, but must rather investigate the system $\mathbf{S}+\mathbf{M}$, in order to obtain (numerically) its interaction with the measurement apparatus \mathbf{M} . The theory of the measurement is a statement concerning $\mathbf{S}+\mathbf{M}$, and should describe how the state of \mathbf{S} is related to certain properties of the state of \mathbf{M} (namely, the positions of a certain pointer, since the observer reads these)...

Donde el observable que von Neumann asocia al aparato (puntero), para saber la propiedad del sistema, es la posición. Aunque es posible usar cualquier observable en el sistema de prueba, mientras brinde la información suficiente sobre la medición, incluso usar observables de espectro discreto.

Neumann muestra dos tipos de intervenciones que pueden ocurrir en el sistema \mathbf{S} . El primero, cambios asociados a mediciones dados por la fórmula

$$\rho \rightarrow \rho' = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n | \rho | \phi_n \rangle P_n \quad (1.31)$$

(ϕ_1, ϕ_2, \dots es un conjunto ortogonal completo, y P_1, P_2, \dots los correspondientes operadores proyección). El segundo, asociado a cambios automáticos los cuales ocurren con el paso del tiempo, es decir, la evolución Hamiltoniana del sistema. Dados por la fórmula

$$\rho \rightarrow \rho_t = e^{-iHt/\hbar} \rho_0 e^{iHt/\hbar} \quad (1.32)$$

(H es el operador de energía, t el tiempo; H es independiente del tiempo). Si H depende del tiempo, se divide el intervalo a consideración en pequeños intervalos, en los cuales H no cambia significativamente.

La ecuación (1.31) muestra, generalmente, el paso de estados puros a estados mezclados, es decir, incrementa la incertidumbre estadística, sin mostrar claramente de dónde viene esta evolución. El segundo tipo de evolución (1.32) surge de la ecuación de Schrödinger y mapea estados puros en estados puros.

Se debe notar que la medición dada por la ecuación (1.31) debe ser instantánea, o sea, relativamente corta de tal modo que la evolución dada por el proceso (1.32) sea imperceptible. Además, debe ser lo suficientemente corto con la restricción del principio de incertidumbre de energía y tiempo ³.

³También se deben considerar los problemas de causalidad espacio-temporales, pero que en una teoría cuántica no relativista no son tenidos en cuenta. Para una discusión más rigurosa ver el texto de von Neumann [von Neumann, 1932b]

Por otro lado, los dos tipos de intervención difieren en propiedades estadísticas de mezclas. Es importante ver que la intervención del segundo tipo (1.32) no incrementa la incertidumbre estadística en ρ , pero la intervención de primer tipo (1.31), usualmente, sí lo hace. En otras palabras, el cambio en el estado en (1.31) es estadístico, mientras que en (1.32) es causal. Se puede observar que para un tiempo fijo (1.32) es sólo una transformación unitaria, $\rho_t = U\rho U^{-1}$. Por lo tanto, esta intervención es reversible, basta aplicar la transformación de similaridad inversa. Mientras que la intervención del primer tipo es por lo general⁴ irreversible. Existen algunos otros casos especiales en los que las mediciones son reversibles [Peres, 1974].

1.3.1. Decoherencia en las Mediciones

Una visión más completa de los procesos de medición fue dada por Asher Peres [Peres, 1986] y por Wojciech Zurek [Zurek, 1991] asociando la medición de un sistema con los posibles estados que tenga un apuntador o metro que interacciona con el sistema. Para entender este proceso ellos toman como objeto a medir un sistema de dos estados (o una partícula de espín $1/2$) $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ y además, consideran como detector, aparato, metro o puntero otro sistema de dos estados, preparado en cierto estado conocido $|\psi_0\rangle^A = |+\rangle^A$.

Después de la interacción entre el sistema objeto y el aparato, el aparato estará en el estado $|+\rangle_A$, si el sistema está en $|+\rangle$ y el aparato estará en el estado $|-\rangle_A$, si el sistema está en $|-\rangle$. Esta evolución se puede escribir como

$$(\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle)|+\rangle_A \Rightarrow \alpha|+\rangle|+\rangle_A + \beta|-\rangle|-\rangle_A, \quad (1.33)$$

la cual se puede generar a partir de la evolución temporal del Hamiltoniano

$$H = g(t)(1 - \sigma_z)\Pi_{+x}^A, \quad (1.34)$$

donde σ_z es la matriz de Pauli que actúa en el espacio de Hilbert del sistema. Por otro lado, el proyector Π_{+x}^A está definido como $\Pi_{+x}^A = |+\rangle_x^A \langle +|_x^A = (|+\rangle + |-\rangle)(\langle +| + \langle -|)$, es decir, el proyector de la componente positiva de σ_x del estado del aparato, y $g(t)$ es una función suave angosta que da cuenta del tiempo y la intensidad de la interacción entre el sistema y el aparato, y satisface $\int g(t)dt = \pi\hbar/2$. Por tanto, la evolución temporal del sistema se calcula con el operador

$$U = e^{-i\int H(t)dt/\hbar} = I - (1 - \sigma_z)\Pi_{+x}^A, \quad (1.35)$$

⁴von Neumann muestra que la entropía para este proceso siempre aumenta, a menos que ϕ_1, ϕ_2, \dots sean autoestados de ρ , es decir, $\rho = \rho'$ [von Neumann, 1932b]

el cual reproduce el resultado de la ecuación (1.33).

Esta evolución es reversible, basta con aplicar el inverso (o adjunto) del operador evolución temporal y se encuentra el estado inicial.

A partir del estado final se pueden encontrar los valores esperados tanto de la primera como de la segunda componente de espín ⁵,

$$\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_x \sigma_x^A \rangle = - \langle \sigma_y \sigma_y^A \rangle = \alpha \beta^* + \alpha^* \beta \quad (1.36)$$

y

$$\langle \sigma_y \rangle = \langle \sigma_x \sigma_y^A \rangle = - \langle \sigma_y \sigma_x^A \rangle = i(\alpha \beta^* - \alpha^* \beta). \quad (1.37)$$

Aunque este sistema en conjunto después de la interacción brinda información completa sobre el estado inicial, éste no representa el proceso de medición macroscópico en el cual para cada ensamble se tienen diferentes entornos y por lo tanto produce una pérdida de información que tiene como consecuencia la irreversibilidad del proceso. Según Peres, la máxima información que se puede obtener después del proceso viene dada por el estado mezclado

$$\rho = |\alpha|^2 |+\rangle \langle +| \otimes |+\rangle \langle +|^A + |\beta|^2 |-\rangle \langle -| \otimes |-\rangle \langle -|^A. \quad (1.38)$$

De igual forma que en (1.33) se tiene que cuando el sistema está en $|+\rangle$, el aparato está $|+\rangle^A$ y de la misma forma con el estado $|-\rangle$. Asimismo, Zurek menciona la misma necesidad de obtener un estado final de la forma (1.38), es decir, sin los términos por fuera de la diagonal, mostrando que las propabilidades que acompañan cada uno de los términos son probabilidades clásicas y resuelven el problema de ambivalencia [Peres, 2002] por medio de la decoherencia. Pero a diferencia de la evolución (1.33), los únicos valores esperados distintos de cero son

$$\langle \sigma_z \rangle = \langle \sigma_z^A \rangle = |\alpha|^2 - |\beta|^2 \quad (1.39)$$

y

$$\langle \sigma_z \sigma_z^A \rangle = 1. \quad (1.40)$$

Estos valores corresponden a las cantidades calculadas usualmente por la teoría cuántica para el estado $\alpha |+\rangle + \beta |-\rangle$. Después de la medición no hubo "colapso", pero sí se borró información, como los valores esperados de σ_x y σ_y , es decir, las fases relativas entre α y β . Como consecuencia de la inseparabilidad del aparato con el ambiente, se logra un proceso irreversible, un factor importante para la medición.

⁵En este trabajo no se tiene en cuenta el factor $\hbar/2$, el cual da unidades de momento angular al espín y hace que se cumplan algunas otras propiedades [Fock, 1978], puesto que no tiene mucha relevancia en la discusión sobre la medición

1.3.2. Primeras Nociones de Medición Conjunta de Observables Incompatibles

En cuanto a la medición simultánea de observables no conmutantes, Arthurs y Kelly plantearon en 1964 una forma de hacer esta medición acoplando dos sistemas unidimensionales, como metros, al sistema a medir. Los sistemas que ellos consideran son meramente cuánticos y los metros son las variables de posición de dos punteros independientes. El Hamiltoniano de interacción que proponen es

$$H_{int} = K(qP_x + pP_y), \quad (1.41)$$

donde q y p son la posición y el momento del sistema a medir; mientras, P_x y P_y son los momentos de los respectivos apuntadores y K es la intensidad del acople. La constante de acople K es considerada grande con respecto a otras escalas de energía, en otras palabras, los demás tipos de interacción pueden ser ignorados. Los estados iniciales de los metros son las Gaussianas

$$M(x) \propto e^{-x^2/b} \quad (1.42)$$

$$N(y) \propto e^{-by^2}, \quad (1.43)$$

donde x y y son las posiciones de los metros y b es un parámetro que llaman “balance”. Con estas condiciones iniciales y el Hamiltoniano propuesto logran obtener los valores esperados de q y p por medio de los valores esperados de x y y después de la medición. Además, encuentran los posibles estados del sistema, posteriores a la medición (interacción). Por último, computan las desviaciones estándar de cada uno de los observables para las mediciones conjuntas. Lo anterior es posible sólo para ciertos valores de intensidad de acoplamiento entre el sistema y los metros.

Esta primera propuesta de mediciones conjuntas muestra una forma de encontrar los valores esperados de ciertos observables de un sistema acoplando éste con dos metros independientes.

1.3.3. Medición Simultánea con Reservorios Independientes

En 2017 Perarnau-Llobet plantea un sistema de medición de dos componentes ortogonales de espín [Perarnau-Llobet y Nieuwenhuizen, 2017], acoplando el sistema de espín $1/2$ a dos imanes. En este caso, los aparatos de medición son los imanes; que a su vez, se acoplan a

reservorios o baños térmicos de manera independiente. Su trabajo es basado en un proyecto anterior propuesto por Allardyan y Nieuwenhuizen [Allahverdyan et al., 2013], quienes acoplan un imán a un espín para medir una de sus componentes, teniendo como posibles lecturas del aparato los estados ferromagnéticos del imán. Estos posibles estados estables después de la interacción con el espín se obtienen al usar el modelo de Curie-Weiss para un acople de un número muy grande de espines. El Hamiltoniano libre de los imanes es

$$H_M = J_2 N \frac{m^2}{2} - J_4 N \frac{m^4}{4}, \quad (1.44)$$

donde m es el operador de magnetización y N el número total de espines. Los estados estables se obtienen para los valores de magnetización $\pm m_F$, para los cuales las energías libres tienen mínimos globales, aunque estos casos se obtienen para valores específicos de temperatura $1/\beta$ y de las constantes J_2 y J_4 . La magnetización caracteriza las transiciones de fase del imán. Por tanto, esta variable dinámica se asocia al observable del metro o apuntador.

El Hamiltoniano de interacción entre el sistema y los dos imanes es

$$H_{SMM'} = -Ng s_z \otimes m \otimes I_{M'} - N' g' s_x \otimes I_M \otimes m', \quad (1.45)$$

donde N , N' es el número de espines que posee cada imán, g , g' son las respectivas constantes de acople y m , m' son las magnetizaciones de los imanes M y M' , definidas como $m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sigma_z^{(n)}$. El estado completo (S+M+M') para un tiempo posterior a la medición es

$$D_{SMM'}(t_F) = p_{++} |\uparrow_{++}\rangle \langle \uparrow_{++}| \otimes R_{\uparrow} \otimes R'_{\uparrow} + p_{+-} |\uparrow_{+-}\rangle \langle \uparrow_{+-}| \otimes R_{\uparrow} \otimes R'_{\downarrow} \\ + p_{-+} |\uparrow_{-+}\rangle \langle \uparrow_{-+}| \otimes R_{\downarrow} \otimes R'_{\uparrow} + p_{--} |\uparrow_{--}\rangle \langle \uparrow_{--}| \otimes R_{\downarrow} \otimes R'_{\downarrow}, \quad (1.46)$$

donde R_{\uparrow} y R_{\downarrow} son los estados de los imanes correspondientes a $\pm m_F$ y $|\uparrow_{\epsilon\epsilon'}\rangle$ son autovectores del vector de Pauli $\mathbf{u}^{(\epsilon\epsilon')} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, esto es

$$(u_z^{(\epsilon\epsilon')} s_z + u_x^{(\epsilon\epsilon')} s_x) |\uparrow_{\epsilon\epsilon'}\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow_{\epsilon\epsilon'}\rangle$$

con $\epsilon, \epsilon' = \pm$ y el vector unitario \mathbf{u} definido como

$$\mathbf{u}^{(\epsilon\epsilon')} = \frac{(\epsilon' N' g', 0, \epsilon N g)}{\sqrt{(N g)^2 + (N' g')^2}}.$$

Los términos de la expresión (1.46) corresponden a cada uno de los posibles resultados de la medición, representados en los posibles estados de los imanes, multiplicados con las respectivas probabilidades de obtener cada uno de estos resultados. Explícitamente, estas probabilidades son

$$p_{\epsilon\epsilon'} = \frac{1}{4} (1 + \epsilon \lambda \langle s_z(0) \rangle + \epsilon' \lambda' \langle s_x(0) \rangle). \quad (1.47)$$

La ecuación (1.47) muestra que a partir de las probabilidades de cada posible resultado se pueden obtener los valores esperados de la primera y tercera componente de espín. Luego este sistema no permite hacer una reconstrucción completa del estado inicial del sistema de espín $1/2$, puesto que no se tiene el valor esperado de la segunda componente de espín, necesaria para hacer la estimación del estado, inclusive para estados puros.

Perarnau-Llobet también muestra de forma explícita los operadores de medición y los elementos del POVM para su sistema en términos de proyectores de los vectores $|\uparrow_{\epsilon\epsilon'}\rangle$.

Cabe resaltar que en nuestro trabajo no se tuvo en cuenta el artículo de Perarnau-Llobet, puesto que esta disertación comenzó a hacerse desde el 2015 y el artículo fue publicado a mediados del 2017.

2. Modelo de Medición de la Tercera Componente de Espín

“I often say that when you can measure what you are speaking about, and express it in numbers, you know something about it;...”

Jhon Thompson (Lord Kelvin)

Para estudiar la teoría de la medición no se puede pensar únicamente en el sistema que se quiere medir (el cual se notará con la letra S). A su vez, es necesario considerar un aparato de medida (notado con la letra A) que interactúe con el sistema a medir y describir el estado de S a partir de alguna propiedad o variable del aparato A [von Neumann, 1932b]. La medida debe ser instantánea en el sentido que el tiempo de interacción debe ser corto, comparado con la evolución propia del sistema. Las propiedades del sistema que evidencian la medida usualmente son las coordenadas de un apuntador, este apuntador o aparato debe ser macroscópico con el fin que el experimentador le haga una adecuada lectura e interprete el resultado de la medición.

Ahora bien, se quiere medir la tercera componente de espín, para una partícula de espín $1/2$. Para medir este observable, el sistema se acopla a un sistema auxiliar (el aparato A). El aparato de medida se considera una partícula de espín $1/2$ (o un sistema de dos niveles) acoplado fuertemente al sistema S durante un intervalo muy corto de tiempo, según las características mencionadas anteriormente. El aparato debe ser macroscópico y, para nuestro modelo, debe estar en contacto con un reservorio que causa decoherencia, con el fin de dejar un registro indeleble y objetivo. Atender a las causas de la medición permite describir este proceso por medio de un sólo parámetro, lo cual es posible gracias a la aproximación de interacción impulsiva.

En la primera sección, se propone un modelo de interacción microscópico que permite estimar una componente de espín y se encuentra la evolución del sistema completo (S+A).

En la segunda sección, se plantea el mismo modelo cuando el sistema S se encuentra en un estado inicial mezclado con el fin de mostrar que es posible una generalización en cuanto al estado inicial. Posteriormente, se muestra cómo se encuentran los operadores semidefinidos positivos de medición (POVM) para el modelo propuesto en cada uno de los posibles resultados y finalmente se muestra que estos procesos generalmente corresponden a mediciones borrosas (*unsharp measurements*) y a mediciones nítidas (*sharp measurements*) para casos particulares.

2.1. Dinámica del sistema de medición (Estado Inicial Puro)

En la figura 2.1 se observa un esquema del modelo de medición.

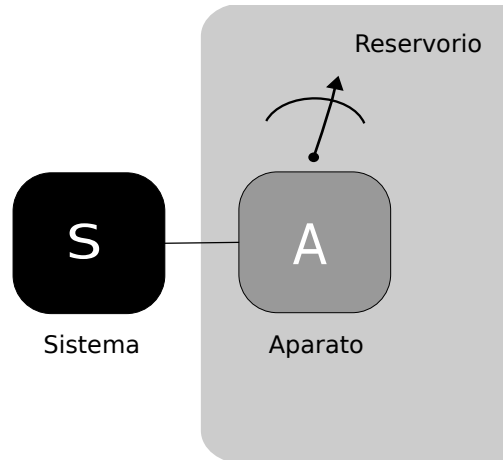


Figura 2.1.: Esquema del modelo de medición, el cual consta de un sistema S y un aparato de medición A. El aparato A está en contacto con el reservorio R

Publicaciones anteriores muestran la utilidad de usar el sistema auxiliar como un sistema de dos niveles [Aquino y Mehmani, 2007, Zurek, 1991]. Para definir el modelo completamente es necesario definir la interacción, en el trabajo de Asher Peres [Peres, 1986] se muestra un operador Hamiltoniano que ilustra una posible forma de interacción para dos sistemas de espín $1/2$.

Usando el modelo de Peres se plantea un Hamiltoniano de interacción de la forma

$$H(t) = g(t)\Pi_+^S \otimes \Pi_+^A = g(t) |+_S+_A\rangle \langle+_S+_A|, \quad (2.1)$$

donde $\Pi_+ = |+\rangle \langle +|$ es el proyector asociado al autovector $|+\rangle$ de σ_z con autovalor $+1$. Los superíndices S y A designan el sistema y el aparato, respectivamente. La función $g(t)$ refleja la intensidad y el tiempo de interacción entre el sistema y el aparato de medida. Esta función es diferente de cero sólo en un intervalo muy pequeño de tiempo (tiempo de interacción entre S y A). Asimismo, esta función predomina frente a cualquier otra interacción (ya sea decoherencia o la acción de otro sistema cuántico) durante el intervalo de interacción.

En el experimento se desconoce el estado inicial del sistema y, por simplicidad, se asume puro, de manera explícita $|\psi^S\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle$, es decir, en principio α y β son desconocidos. En cuanto al aparato, se tiene control sobre su estado inicial, luego se puede preparar en estados muy específicos. Por conveniencia, el estado inicial del aparato es $|\psi^A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) = |+_x^A\rangle$, en otras palabras, el autovector de σ_x asociado al autovalor $+1$.

Además, se tiene un manejo a voluntad de la interacción, lo que permite encenderla o apagarla en un instante de tiempo adecuado. Por esta razón, inicialmente el estado global (sistema + aparato) es separable, puesto que los dos sistemas (S y A) no han interactuado.

A causa de la necesidad de decoherencia en el modelo, con el objetivo dejar un registro macroscópico de los resultados de la medición, se plantea una ecuación maestra para obtener la evolución de la matriz densidad del sistema global. En este modelo la evolución del sistema y el aparato se calcula a partir de la ecuación

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] - \gamma [(I^S \otimes \sigma_x^A) \rho (I^S \otimes \sigma_x^A) - \rho], \quad (2.2)$$

donde \mathcal{L} corresponde al operador Liouvilliano, H es el operador Hamiltoniano dado por (2.1) y γ es la constante asociada al reservorio que brinda información sobre el acople entre el reservorio y el aparato, conocida como tasa de decoherencia (o relajación). Esta igualdad muestra que el reservorio está acoplado con el sistema auxiliar mediante el observable de espín en su primera componente σ_x^A . Para los propósitos de la medición sólo es necesaria la pérdida de coherencia (la pérdida de energía o la termalización no son imprescindibles [Berrêdo et al., 1998]). Este Liouvilliano surge de manera fenomenológica a partir de la ecuación de Lindblad, deducida en el capítulo 1 a partir de la interacción de un sistema con el entorno [Heinz-Peter Breuer, 2002], cuyo efecto es hacer que los términos de la matriz densidad global (S+A) por fuera de la diagonal, en la base en donde σ_x^A es diagonal, se hagan muy pequeños para largos tiempos.

Para hallar la evolución de la matriz densidad por medio de la ecuación diferencial (2.2) se realizan los siguientes pasos: primero, se considera únicamente la evolución Hamiltoniana en el intervalo de tiempo $[0, T]$; y posteriormente, se hace el proceso de decoherencia teniendo

en cuenta sólo el segundo término del miembro derecho de (2.2), es decir, el disipador. De otro modo, inicialmente se considera la parte asociada a la ecuación de von Neumann y para $t > T$ se tiene en cuenta solamente el término dependiente de la tasa de decoherencia. La anterior aproximación es válida gracias a que $g(t)$ es diferente de cero sólo para el intervalo de tiempo muy pequeño $[0, T]$ y es mucho más grande que cualquier otra escala de energía (incluyendo la disipación debida al reservorio). Asimismo, este intervalo de tiempo es mucho menor que el inverso de la tasa de decoherencia $T \ll 1/\gamma$.

La evolución Hamiltoniana se obtiene mediante el operador unitario $U(T, 0)$. El estado para cualquier tiempo es

$$|\psi(T)\rangle = U(T, 0) |\psi(t=0)\rangle \quad (2.3)$$

y para estados mezclados la evolución se calcula con la relación de similaridad

$$\rho(T) = U(T)\rho(0)U(T)^\dagger, \quad (2.4)$$

donde $U(T)^\dagger$ denota el traspuesto conjugado del operador $U(T)$, el cual satisface $U(T)^\dagger = U^{-1}$. Debido a que el operador evolución temporal satisface la ecuación de Schrödinger, éste se puede escribir como $U(T) = e^{\frac{-i}{\hbar}HT}$, donde \hbar es la constante de Planck, para Hamiltonianos independientes del tiempo. Mientras que, para Hamiltonianos dependientes del tiempo el operador

$$U(T) = e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^T H(t') dt'}, \quad (2.5)$$

siendo válida esta relación cuando los Hamiltonianos conmutan en diferentes tiempos, o sea, $[H(t_1), H(t_2)] = 0$, con t_1 y t_2 en el intervalo $[0, T]$.

Para este modelo se define $\theta = \frac{1}{\hbar} \int_0^T g(t) dt$ como un parámetro de acople adimensional que brinda información acerca de la intensidad de interacción. Reemplazando el operador Hamiltoniano (2.1) en la relación (2.5), se obtiene el operador unitario de evolución temporal

$$U(t=T) = e^{-i\theta \Pi_+^S \otimes \Pi_+^A}, \quad (2.6)$$

donde θ es el parámetro que generaliza el modelo propuesto por Peres en 1986. En el modelo de Asher Peres, $\theta = \pi$.

Después de esta corta intervención se encuentra que el estado conjunto (S+A) es

$$\begin{aligned} |\psi(t=T)\rangle &= U(t=T) |\psi(0)\rangle = U(t=T) (|\psi^S\rangle \otimes |+_x^A\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\theta} \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle) \otimes |+_A\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |+\rangle + \beta |-\rangle) \otimes |-^A\rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

O, de manera más abreviada,

$$|\psi(t = T)\rangle = |s_+\rangle |+\rangle^A + |s_-\rangle |-\rangle^A, \quad (2.8)$$

donde $|s_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\theta}\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle)$ y $|s_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle)$. El estado $|\psi(t = T)\rangle$ es, generalmente, entrelazado. Para verificar la previa afirmación es necesario el uso de una medida de entrelazamiento y mostrar que ésta toma valores mayores a cero. Una medida de entrelazamiento es la concurrencia, la cual para un sistema de dos qubits en un estado puro se reduce a [Wootters, 1998]

$$C(\psi) = \left| \langle \psi | \tilde{\psi} \rangle \right|, \quad (2.9)$$

donde $|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y |\psi^*\rangle$ y $|\psi^*\rangle$ es el complejo conjugado de $|\psi\rangle$, cuando este estado es expresado en una base fija tal como $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ y σ_y expresado en la misma base es la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Para el estado (2.8) la concurrencia es

$$C(\psi(t = T)) = \sqrt{2|\alpha|^2|\beta|^2(1 - \cos\theta)}. \quad (2.10)$$

Este resultado muestra que se obtiene un estado separable cuando α , β o $1 - \cos\theta$ son cero. El caso en que $1 - \cos\theta = 0$ satisface ciertas propiedades sobre la medición y el estado posterior a la interacción las cuales se estudiarán posteriormente. Por otro lado, sin tener en cuenta el estado inicial del sistema S, los estados más entrelazados se obtienen para $\theta = (2n - 1)\pi$ (con $n \in \mathbb{I}$). Para estos valores de la constante de acople se encuentra que las mediciones son proyectivas. La anterior proposición se estudiará más adelante con rigurosidad.

Como se mencionó inicialmente, el aparato está en contacto con un reservorio, el cual causa decoherencia. La decoherencia ayuda a escribir los posibles resultados de la medición en términos de probabilidades *clásicas* [Zurek, 1991]. A consecuencia de la brevedad de la interacción entre el sistema y el aparato ($T \ll \tau_D = 1/\gamma$), la relación (2.2) se aproxima, para $t > T$, a la ecuación maestra

$$\frac{d\rho}{dt} \approx -\gamma [(I^S \otimes \sigma_x^A) \rho(t = T) (I^S \otimes \sigma_x^A) - \rho(t = T)], \quad (2.11)$$

donde $\rho(t = T) = |\psi(t = T)\rangle \langle \psi(t = T)|$ es la matriz densidad obtenida después de la interacción Hamiltoniana. La solución a la ecuación diferencial (2.11) es

$$\begin{aligned} \rho(t) &= e^{-\gamma t} e^{\gamma \sigma_x^A \bullet \sigma_x^A t} \rho(t = T) \\ &= e^{-\gamma t} (\cosh(\gamma t) \rho(T) + \sinh(\gamma t) (I \otimes \sigma_x^A) \rho(T) (I \otimes \sigma_x^A)), \end{aligned}$$

el símbolo \bullet denota que en esta posición se opera la matriz densidad, por ejemplo, $(A \bullet B)\rho = A\rho B$. Para tiempos muy grandes, en comparación con $1/\gamma$, el estado conjunto sistema S y aparato A es

$$\rho_\infty = \frac{1}{2} (I + (I \otimes \sigma_x^A) \bullet (I \otimes \sigma_x^A)) \rho(T). \quad (2.12)$$

Para calcular de una manera más sencilla la solución, se hace el cambio de base de los estados del aparato en (2.7) a la base en la cual σ_x^A es diagonal, esto es

$$|\psi(t = T)\rangle = U |\psi_0\rangle = |d_+\rangle |+_x^A\rangle + |d_-\rangle |-_x^A\rangle, \quad (2.13)$$

donde

$$|d_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|s_+\rangle + |s_-\rangle)$$

y

$$|d_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|s_+\rangle - |s_-\rangle).$$

Finalmente, se reemplaza el estado (2.13) en (2.12) encontrando que

$$\rho_\infty = |d_+\rangle \langle d_+| \otimes |+_x^A\rangle \langle +_x^A| + |d_+\rangle \langle d_+| \otimes |-_x^A\rangle \langle -_x^A|, \quad (2.14)$$

en donde se han perdido las coherencias en la base de los autovectores de σ_x^A . Este resultado muestra que el aparato puede estar en dos posibles estados, o lecturas, $|+_x^A\rangle$ y $|-_x^A\rangle$. Cuando el aparato se encuentra en el primero, el sistema está en el estado $|d_+\rangle$ y cuando el aparato se encuentra en el estado $|-_x^A\rangle$, el sistema se encuentra en $|d_-\rangle$ (cabe aclarar que tanto los estados $|d_+\rangle$ y $|d_-\rangle$ como los estados $|s_+\rangle$ y $|s_-\rangle$ no están normalizados). Cuando el sistema completo queda en el estado ρ_∞ , si la partícula de espín 1/2 denominada aparato de medida A atraviesa un experimento Stern-Gerlach, cuyo gradiente de campo magnético va dirigido en la dirección X , la partícula tiene las probabilidades $P_+ = \langle d_+|d_+\rangle$ de dirigirse al sentido positivo y $P_- = \langle d_-|d_-\rangle$ de moverse hacia el sentido negativo. A su vez, se sabe con certeza que si la partícula auxiliar se dirige en sentido positivo, el estado del sistema S se encuentra en el estado $|d_+\rangle$ y ocurre de la misma manera si se dirige en sentido negativo.

Para medir el entrelazamiento en el estado (2.14), de nuevo, se usa la concurrencia para estados de dos qubits. Wootters define la concurrencia como

$$C(\rho) = \text{máx}\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (2.15)$$

donde λ_i son los autovalores de $R = \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$ ordenados de mayor a menor, $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ y ρ^* es el complejo conjugado de ρ . Para el estado (2.14) los autovalores de la matriz R correspondiente son $\sqrt{|\alpha|^2|\beta|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$, $\sqrt{|\alpha|^2|\beta|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$, 0 y 0. Luego la concurrencia para el estado conjunto (S+A) para grandes tiempos es cero. Este hecho muestra que el

estado no presenta entrelazamiento, esto es, el sistema y el aparato pierden entrelazamiento durante el proceso de pérdida de coherencia.

Las probabilidades de obtener cada uno de los posibles resultados se encuentran al normalizar cada uno de los estados, es decir, $P_+ = \langle d_+ | d_+ \rangle$ y $P_- = \langle d_- | d_- \rangle$. Calculando las probabilidades a partir de (2.7) se encuentra que

$$P_+ = \frac{1}{2} (1 + |\alpha|^2 \cos \theta + |\beta|^2) \quad (2.16)$$

y

$$P_- = \frac{1}{2} (1 - |\alpha|^2 \cos \theta - |\beta|^2). \quad (2.17)$$

El caso particular en el que $\theta = \pi$ produce el estado ρ_∞ posterior a la medición

$$\rho_\infty = |\alpha|^2 |+\^S\rangle \langle +\^S| \otimes |-_x\rangle \langle -_x|^A + |\beta|^2 |-\^S\rangle \langle -\^S| \otimes |+_x\rangle \langle +_x|^A. \quad (2.18)$$

En este caso, la probabilidad de encontrar al aparato en el estado $|+_x^A\rangle$ es $P_+ = |\beta|^2$ y la de obtener $|-_x^A\rangle$ es $P_- = |\alpha|^2$ asociados a los autoestados $|-\^S\rangle$ y $|+\^S\rangle$ del observable σ_Z . Este resultado muestra el paso a una mezcla estadística del estado del sistema en alguno de los autoestados del observable a medir, en este caso, la tercera componente de espín; este tipo de medida es la usualmente mencionada en los textos de teoría cuántica [Heisenberg, 1927].

Una vez encontrado el estado después de la medición se procede a estimar el valor esperado de σ_z ; para esto se postula que $\langle \sigma_z \rangle$ es una combinación lineal de las probabilidades correspondientes a obtener cada uno de los resultados posibles, es decir,

$$\langle \sigma_z \rangle = c_1 P_+ + c_2 P_-, \quad (2.19)$$

donde P_+ y P_- están dados por (2.16) y (2.17), respectivamente. Se calcula el valor esperado de σ_z con el estado (2.12) de la siguiente manera

$$\langle \sigma_z \rangle' = Tr[(\sigma_z \otimes I) \rho_\infty] = |\alpha|^2 - |\beta|^2, \quad (2.20)$$

este resultado es el mismo encontrado de forma habitual en mecánica cuántica, esto es, $\langle \sigma_z \rangle = \langle \psi | \sigma_z | \psi \rangle$. Para encontrar los coeficientes c_1 y c_2 en (2.19) se usa el valor hallado en (2.20) y las probabilidades calculadas por medio de (2.16) y (2.17). Los coeficientes son

$$c_1 = -1 \quad (2.21)$$

y

$$c_2 = \frac{3 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}. \quad (2.22)$$

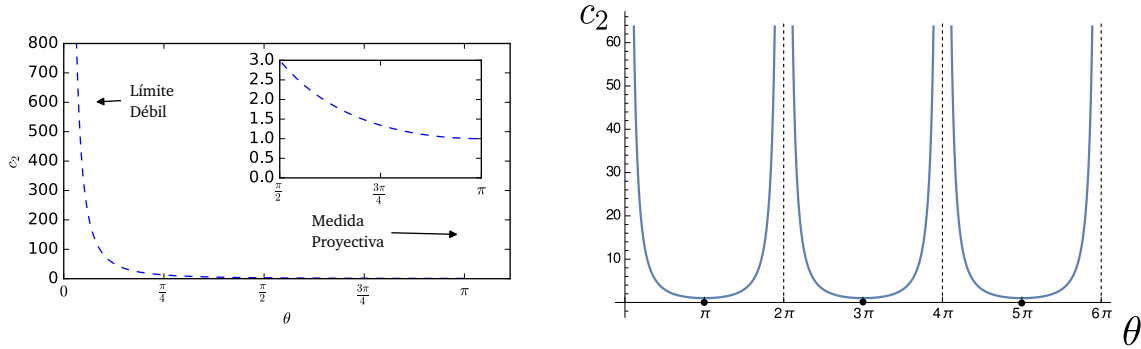


Figura 2.2.: Coeficiente de la probabilidad de obtener $|+^A_x\rangle$ en el aparato en función del parámetro de acople θ

Mientras que el valor del primer coeficiente es independiente de θ , el segundo toma valores entre 1 e infinito. También se observa que, a partir de los valores de probabilidad (2.16) y (2.17), no se pueden obtener los valores esperados de otras componentes de espín de la misma manera, puesto que $\langle\sigma_x\rangle$ y $\langle\sigma_y\rangle$ dependen de $\alpha\beta^*$ y su conjugado. El comportamiento de este coeficiente y su relación con los diferentes tipos de medición se muestran en la gráfica 2.2, se exalta que la medición es proyectiva cuando $\theta = \pi$. De hecho, para cualquier $\theta = (2n - 1)\pi$ (con $n \in \mathbb{I}$) puesto que la función $c_2 = c_2(\theta)$ tiene periodo 2π como se muestra en la figura 2.2. Para estos valores del parámetro de acople, los estados $|d_+\rangle$ y $|d_-\rangle$ toman la forma de los autovectores $\beta| -^S\rangle$ y $\alpha| +^S\rangle$, respectivamente. Esto es, los posibles estados finales del sistema-objeto son los autoestados del observable asociado a la tercera componente de espín σ_z^S , como ocurre en los postulados de la mecánica cuántica.

Este modelo no permite estimar $\langle\sigma_z\rangle$ para ciertos valores del parámetro de acople θ , esto se debe a las divergencias presentadas por c_2 para valores $\theta = 2n\pi$, donde n es cualquier número entero. En este caso los estados finales se expresan como $|d_+\rangle = \alpha| +^S\rangle + \beta| -^S\rangle = |\psi_0^S\rangle$ y $|d_-\rangle = 0$. Luego el aparato sólo tiene una posible lectura, $|+^A_x\rangle$, para cualquiera que sea el estado inicial $|\psi_0^S\rangle$, lo cual haría que en cada experimento se obtenga siempre el mismo resultado, impidiendo así estimar alguna variable dinámica del sistema.

2.2. Dinámica del sistema de medición (Estado Inicial Mezclado)

En la sección anterior, se consideró todo el proceso a partir de un estado inicial puro desconocido. De este modo, se restringe a estados del sistema en la frontera de la esfera de Bloch. Ahora, en esta sección, se realiza el mismo procedimiento pero para un estado inicial mezclado genérico y el estado inicial del aparato, de nuevo, se va a considerar como un autovector de σ_x , esto es,

$$\rho_0 = \rho_0^S \otimes |+_x^A\rangle \langle +_x^A|, \quad (2.23)$$

donde la matriz densidad inicial del sistema ρ_0^S se expresa en la forma

$$\rho_0^S = \rho_{++} |+_S\rangle \langle +_S| + \rho_{+-} |+_S\rangle \langle -_S| + \rho_{-+} |+_S\rangle \langle -_S| + \rho_{--} |+_S\rangle \langle -_S|. \quad (2.24)$$

o en forma abreviada

$$\rho_0^S = \sum_{i,j=+,-} \rho_{ij} |i^S\rangle \langle j^S|, \quad (2.25)$$

donde $\rho_{++} + \rho_{--} = 1$ y $\rho_{+-} = \rho_{-+}^*$. Tanto el operador evolución temporal como el operador Liouvilliano serán los mismos de la sección anterior (2.1) y (2.2). El estado después de la interacción Hamiltoniana es

$$\begin{aligned} \rho_{pre} &= U (\rho_0^S \otimes |+_x^A\rangle \langle +_x^A|) U^\dagger \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=\pm} U_i \rho_0^S U_j^\dagger \otimes |i^A\rangle \langle j^A|, \end{aligned} \quad (2.26)$$

en donde $U_+ = e^{-i\theta\Pi_+}$ y $U_- = I$.

Debido a que la decoherencia sólo actúa sobre el aparato y además actúa en el grado de libertad de σ_x , es más simple resolver cuando se cambia de base los estados del aparato, es decir, expresar (2.26) como

$$\rho_{pre} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \left(\sum_{i,j} a_{kl}^{ij} U_i \rho_0^S U_j^\dagger \right) \otimes |k_x^A\rangle \langle l_x^A|, \quad (2.27)$$

donde $k, l = +, -$. De manera más compacta se escribe como

$$\rho_{pre} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \rho_{kl}^S \otimes |k_x^A\rangle \langle l_x^A|. \quad (2.28)$$

Los valores de ρ_{kl}^S son obtenidos a partir del cambio de base de los autovectores de σ_z a los de σ_x . Después del proceso de decoherencia los términos $|+_x\rangle \langle -_x|$ y $|-_x\rangle \langle +_x|$ tienden a

cero, para tiempos mucho más grandes que el inverso de la tasa de decoherencia $1/\gamma$. Así el estado final es

$$\rho_\infty = \frac{1}{2} \sum_{k=\pm} \rho_{kk}^S \otimes |k_x^A\rangle \langle k_x^A|. \quad (2.29)$$

El estado del sistema completo (S+A) al final de la interacción es

$$\begin{aligned} \rho_\infty = & \left[\rho_{++} \cos^2 \frac{\theta}{2} |+\rangle \langle +|^S + \rho_{+-} e^{-i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle \langle -|^S + \rho_{-+} e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle \langle +|^S + \right. \\ & \left. \rho_{--} |-\rangle \langle -|^S \right] \otimes |+_x\rangle \langle +_x|^A + \rho_{++} \sin^2 \frac{\theta}{2} |+\rangle \langle +|^S \otimes |-_x\rangle \langle -_x|^A, \quad (2.30) \end{aligned}$$

es decir, el estado del sistema cuando el aparato está en $|+_x\rangle$ es un estado mezclado (en general), mientras que el estado para el resultado del aparato $|-_x\rangle$ es un estado puro, cuya probabilidad sólo depende del valor de la primera componente de la matriz densidad inicial (ρ_{++}) y de la intensidad de la interacción inicial (θ). Los dos posibles estados del aparato son las lecturas admisibles que estiman el estado del sistema.

Las probabilidades de encontrar el resultado $+$ y $-$ son

$$P_+ = Tr\left[\frac{1}{2}\rho_{++}^S\right] = \rho_{++} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \rho_{--} = \rho_{++} \frac{1 + \cos \theta}{2} + \rho_{--} \quad (2.31)$$

y

$$P_- = Tr\left[\frac{1}{2}\rho_{--}^S\right] = \rho_{++} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \rho_{++} \frac{1 - \cos \theta}{2}, \quad (2.32)$$

estos verifican que $P_+ + P_- = 1$ y además coinciden con los valores (2.16) y (2.17) para estados puros cuando $\rho_{++} = |\alpha|^2$ y $\rho_{--} = |\beta|^2$.

2.3. POVM

Puesto que las mediciones generalizadas se expresan en términos de matrices semidefinidas positivas (POVM), este modelo también se puede reescribir en términos de estos operadores. Viendo el estado final, se quiere saber si existen matrices que satisfacen la regla de Lüders [Lüders, 1951], a saber,

$$\rho_i = E_i \rho_0 E_i^\dagger, \quad (2.33)$$

donde ρ_i es el estado obtenido posteriormente a la medición, asociado al resultado i (salvo la normalización). Para normalizar el estado es necesario dividir éste entre la traza de ρM_i , donde $M_i = E_i^\dagger E_i$. Las matrices que satisfacen esta relación, no sólo son útiles para encontrar el estado ρ_∞ posterior a la medición, sino también para encontrar las probabilidades de encontrar cada posible resultado y caracterizar adecuadamente la medición realizada.

2.3.1. Resultado $|+_x\rangle$

En esta subsección se trata el resultado cuando el aparato queda en el estado $|+_x\rangle$ después de la interacción. De acuerdo con la sección anterior se puede mostrar que el estado final del aparato es simplemente

$$\rho_\infty^+ = \rho_{++}^x = \langle +_x | U \rho_0 U^\dagger | +_x \rangle. \quad (2.34)$$

A partir de la ecuación (2.26) se tiene

$$\langle +_x | U \rho_0 U^\dagger | +_x \rangle = \frac{1}{4} \sum_{i,j} U_i \rho_0 U_j^\dagger \quad (2.35)$$

donde $U_+ = e^{-i\theta\Pi_+}$ y $U_- = I$. Para encontrar los operadores de Kraus (E_+) se hace un cambio de base de las matrices U_+ y U_- a la base de las matrices de Pauli y la identidad, o sea, $\{I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ y se expresa el estado posterior a la medición ρ_{++}^S como un producto de matrices

$$\langle +_x | U \rho_0 U^\dagger | +_x \rangle = \sum_{ab} d_{ab}^+ \sigma_a \rho_0 \sigma_b = \vec{\sigma} \mathbb{F}^+ \rho_0 (\vec{\sigma})^\dagger, \quad (2.36)$$

donde $d_{ab}^+ = \frac{1}{4} \sum_{ij=\pm} u_{ia} u_{jb}^*$; el superíndice $+$ indica la matriz \mathbb{F}^+ corresponde al resultado $|+_x\rangle$ y u_{ia} son las componentes de las matrices U_i en la base de las matrices de Pauli. Ahora se diagonaliza la matriz \mathbb{F}^+ y el resultado se expresa como

$$\langle +_x | U \rho_0 U^\dagger | +_x \rangle = \vec{\sigma} S \mathbf{\Lambda} \rho_0 (\vec{\sigma} S)^\dagger. \quad (2.37)$$

Hallando los autovalores de \mathbb{F}^+ , se observa que sólo uno es diferente de cero: $\lambda_3 = \frac{1}{2} (\cos^2 \frac{\theta}{2} + 1)$, lo que implica que (2.37) se puede escribir como

$$\langle +_x | U \rho_0 U^\dagger | +_x \rangle = (\sqrt{\lambda_3} \vec{\sigma} S') \rho_0 (\sqrt{\lambda_3} \vec{\sigma} S')^\dagger, \quad (2.38)$$

donde S' es la matriz que sólo tiene al autovector ψ^3 en la última componente. Por tanto, para obtener el efecto M_+ basta con calcular el autovector asociado al autovalor λ_3 , ψ^3 y se escribe como

$$E_+ = \sqrt{\lambda_3} \sum_{i=0}^3 \psi_i^3 \sigma_i. \quad (2.39)$$

El resultado final asociado al operador de la regla de Lüders (matriz de Kraus) es

$$E_+ = \begin{pmatrix} i \cos \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & -\sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

y el elemento del POVM asociado al resultado $+$ es

$$M_+ = E_+^\dagger E_+ = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

2.3.2. Resultado $| -_x \rangle$

Para encontrar el operador de valor positivo que produce el estado posterior a la medición del resultado $| -_x \rangle$, es decir, la matriz densidad que acompaña el proyector $| -_x \rangle \langle -_x |$ en (2.14) se precede de manera análoga al camino tomado en la sección anterior, o sea, se expresa el estado como

$$\rho_{\infty}^- = \rho_{--}^x = \langle -_x | U \rho_{0T} U^\dagger | -_x \rangle. \quad (2.42)$$

Se hace el cambio de base a la base de las matrices de Pauli y se encuentra la matriz \mathbb{D}^- . De nuevo, sólo un autovalor de \mathbb{D}^- es diferente de cero, lo que conlleva a que

$$\langle -_x | U \rho_0 U^\dagger | -_x \rangle = (\sqrt{\lambda_3^-} \vec{\sigma} S'_-) \rho_0 (\sqrt{\lambda_3^-} \vec{\sigma} S'_-)^\dagger, \quad (2.43)$$

donde S'_- es la matriz que sólo tiene al autovector ψ_-^3 en la última componente y demás elementos de la matriz cuadrada son cero. El operador de Kraus se escribe como

$$E_- = \sqrt{\lambda_3^-} \sum_{i=0}^3 \psi_{i-}^3 \sigma_i. \quad (2.44)$$

Finalmente se obtiene que

$$E_- = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

y el respectivo efecto M_- es

$$M_- = \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Los efectos encontrados, los cuales claramente satisfacen $M_+ + M_- = I$, no son operadores de medición simétricos [Choudhary Sujit y Konrad, 2014]. Esto es, no tienen la forma

$$E_0 = \sqrt{p_0} |+\rangle \langle +| + \sqrt{1-p_0} |-\rangle \langle -| \quad (2.47)$$

y

$$E_1 = \sqrt{1-p_0} |+\rangle \langle +| + \sqrt{p_0} |-\rangle \langle -|. \quad (2.48)$$

Se les llama simétricos porque el operador E_1 se obtiene cambiando el coeficiente de $|+\rangle \langle +|$ con el coeficiente de $|-\rangle \langle -|$ de E_0 .

2.4. Mediciones Borrosas (*Unsharp Measurements*)

La colección de operadores de medida (POVM) que actúan en el espacio del sistema a medir calculados en la sección anterior partir de la regla de Lüders también permiten calcular las probabilidades de obtener cada uno de los posibles resultados de la medición. El cálculo de estas probabilidades se obtiene con la traza de los operadores de medida y el estado ρ [Nielsen, 2000]. A partir de los operadores (2.46) y (2.41), se encuentra que

$$P_+ = \text{Tr}[\rho M_+] = \rho_{++} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \rho_{--} \quad (2.49)$$

y

$$P_- = \text{Tr}[\rho M_-] = \rho_{++} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (2.50)$$

las cuales coinciden con las soluciones (2.31) y (2.32) encontradas sin usar los operadores de medición.

Además, estos operadores caracterizan las mediciones de manera precisa como se mostró en el capítulo 1. A partir de los efectos (2.41) y (2.46), se puede inferir que la medición es borrosa (*Unsharp measurement*), puesto que no todos los elemento del POVM son proyectores y además estos operadores conmutan entre sí ($[M_+, M_-] = 0$).

Las mediciones borrosas tienen características muy particulares; una de ellas es la existencia de un observable no trivial (es decir, el operador no es proporcional a la identidad) que conmuta con todos los efectos [Konrad, 2003], lo que permite calcular las probabilidades que estiman el valor esperado del observable en cuestión, y no sólo de éste, sino de cualquier potencia de este observable. Según la proposición 1, se observa que el observable que conmuta con todos los efectos es σ_z y se procede a estimar el valor esperado de esta variable dinámica.

Ahora, se estima el valor esperado de la tercera componente de espín a partir de la demostración de la proposición 1. Como consecuencia de la conmutatividad entre los efectos y el operador asociado a la tercera componente de espín, existe una base común de autovectores de estos operadores. Gracias al teorema espectral los efectos M_{\pm} y el observable σ_z se pueden escribir como combinaciones lineales de proyectores sobre dichos autovectores, esto es,

$$M_{\pm} = \sum_{i=+,-} a_{\pm i} |i\rangle \langle i| \quad (2.51)$$

y

$$\sigma_z = \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| = |+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|, \quad (2.52)$$

es decir, $\lambda_+ = 1$ y $\lambda_- = -1$. Los valores esperados de los elementos del POVM, o en otras palabras las probabilidades de obtener de cada resultado, son

$$\langle M_{\pm} \rangle = \sum_i a_{\pm i} \langle \Pi_i \rangle, \quad (2.53)$$

donde $\Pi_i = |i\rangle \langle i|$ y $\langle \Pi_i \rangle = \langle i | \rho | i \rangle$.

Se escribe la ecuación (2.53) matricialmente

$$\begin{pmatrix} \langle M_+ \rangle \\ \langle M_- \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & 1 \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \Pi_+ \rangle \\ \langle \Pi_- \rangle \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

y se invierte la matriz para obtener los valores esperados de los proyectores Π_+ y Π_- ,

$$\begin{pmatrix} \langle \Pi_+ \rangle \\ \langle \Pi_- \rangle \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\sin^2 \frac{\theta}{2} & \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle M_+ \rangle \\ \langle M_- \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Si se tiene en cuenta que $P_{\pm} = \langle M_{\pm} \rangle = Tr[M_{\pm}\rho]$ y que de la ecuación (2.52) se tiene $\langle \sigma_z \rangle = \sum_i \lambda_i \langle \Pi_i \rangle$, se halla el valor esperado de σ_z

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z \rangle &= \langle \Pi_+ \rangle - \langle \Pi_- \rangle \\ &= P_+ + \frac{3 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} P_-. \end{aligned}$$

Este resultado coincide con los resultados encontrados en (2.21) y (2.22), lo cual muestra que los dos procedimientos diferentes permiten obtener la misma estimación de $\langle \sigma_z \rangle$.

En el caso en el que $\theta = (2n - 1)\pi$, para n entero, estas mediciones se convierten en medidas nítidas (*sharp measurements*), puesto que los efectos M_i toman la forma de proyectores ($M_i = M_i^2 = M_i^\dagger$). Explícitamente,

$$M_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_+^2$$

y

$$M_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_-^2.$$

Para estos valores del parámetro de acople las medidas también son proyectivas, esto en razón a que los operadores de Kraus E_i también son proyectores, se observa que $E_+ = -|^{-S}\rangle \langle^{-S}|$, mientras que $E_- = |^{-S}\rangle \langle^{-S}|$. Aunque el primer operador de Kraus E_+ parece

no ser idempotente, se puede abolir la fase global (-1) sin alterar los principales resultados de las mediciones generalizadas (la regla de Lüders y las probabilidades de los posibles resultados). De hecho, cualquier fase global $e^{i\phi}$ mantiene inalteradas estas relaciones. Salvo esta fase, se puede considerar $E_+ = E_+^2$.

Este último hecho verifica la definición asociada intuitivamente a la reducción de la función de onda en uno de los autoestados del observable a medir. A causa de la regla de Lüders, el estado ρ_0^S se proyecta en alguno de los subespacios generado por cada uno de los autovectores de σ_z^S después de la medición. Además, ya se había mostrado en secciones anteriores que los estados $|d_+\rangle$ y $|d_-\rangle$ pertenecen a los subespacios generados por $| -^S \rangle$ y por $| +^S \rangle$, respectivamente. Para estos mismos valores del parámetro de acople también se mostró que el entrelazamiento en el estado posterior a la evolución unitaria $|\psi(t = T)\rangle$ es máximo.

3. Modelo para Medición Simultánea con Dos Aparatos

“... but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meagre and unsatisfactory kind; it may be the beginning of knowledge, but you have scarcely, in your thoughts, advanced to the stage of science, whatever the matter may be.”

Jhon Thompson (Lord Kelvin)

El capítulo anterior mostró un modelo microscópico efectivo para medir la tercera componente de espín por medio de un sistema auxiliar (aparato) que interacciona con el sistema a medir. El apéndice A muestra que cambiando la interacción con el aparato se puede medir la primera componente y que de hecho, se puede generalizar para cualquier componente de espín individualmente. Estos sucesos permiten inferir que se podrían medir dos componentes de espín simultáneamente usando dos sistemas auxiliares, cada uno midiendo, en ausencia del otro, una componente ortogonal de espín. Asimismo, en los sistemas del capítulo 2 se usa un reservorio que produce pérdida de coherencia en el estado del aparato. Esto con el objetivo de tener un registro macroscópico de los resultados o lecturas del aparato. Esta generalización permite medir simultáneamente tres componentes linealmente independientes de espín, es decir, posibilitan, en la mayoría de los casos, la estimación del estado cuántico del sistema de dos niveles. La dinámica modelada de manera simplificada permite una descripción completa a partir de dos parámetros. Una exploración sistemática del espacio de parámetros de acople hace posible detallar la influencia de un aparato sobre el otro.

La primera sección de este capítulo muestra una generalización al modelo usado en el capítulo anterior, tanto en el Hamiltoniano como en la ecuación maestra en donde cada uno de los sistemas auxiliares (en ausencia del otro) mide una componente perpendicular de espín. En la segunda sección se muestra que la dinámica de la primera sección corresponde a una medida generalizada, luego se encuentran los operadores de Kraus y los elementos de la

POVM de una forma más abreviada a la usada en el capítulo 2. En la siguiente sección se muestra como es posible la estimación de los parámetros de Stokes, también conocidos como las componentes del vector de Bloch, a partir de las probabilidades de encontrar cada posible resultado o lectura de los sistemas auxiliares. Posteriormente se observa como cada aparato es afectado por el otro, gracias a la interacción mutua con el sistema a medir y además, se hace una interpretación física y geométrica a los resultados obtenidos en la sección anterior. Consecuentemente, se observan los casos en el espacio de parámetros de acople en los cuales no se pueden estimar todas las componentes de espín, y se estudian cuales componentes se podrían estimar en estos casos. Posteriormente, se caracterizan los tipos de medición en el espacio de los parámetros relacionados con las situaciones en los cuales no se puede estimar completamente el vector de Bloch. Además, se observa si es posible hacer la estimación del vector de Bloch en el caso en que los dos parámetros de acople son pequeños, es decir, con mediciones débiles. En último lugar, se esclarece qué ocurre en el caso en que dos mediciones simultáneas se hagan cuándo individualmente son mediciones proyectivas.

3.1. Dinámica del Sistema de Medición

El modelo propuesto consta de un sistema a medir, dos aparatos de medida (A y B), cada uno en contacto con un reservorio independiente como se observa en la figura 3.1. El sistema, al igual que los aparatos, se considera un sistema de dos estados (o niveles) o una partícula de espín $1/2$.

La interacción Hamiltoniana es similar a la propuesta en (2.1),

$$\begin{aligned} H(t) &= g(t) \left(\lambda_A |+\rangle \langle +|^S \otimes |+\rangle \langle +|^A \otimes I^B + \lambda_B |+_x\rangle \langle +_x|^S \otimes I^A \otimes |+\rangle \langle +|^B \right) \\ &= g(t) \left(\lambda_A \Pi_+^S \otimes \Pi_+^A \otimes I^B + \lambda_B \Pi_{+x}^S \otimes I^A \otimes \Pi_+^B \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde se observa independencia entre las constantes de acople adimensionales asociadas a la interacción del sistema con cada aparato λ_A y λ_B . En este caso, el segundo aparato, superíndice B , está relacionado con la medición de la primera componente de espín, mientras que el aparato A está asociado, como se vio en la sección anterior, con la tercera componente. El superíndice S está asociado al sistema que se va a medir, mientras los superíndices A y B corresponden a los metros A y B. El estado inicial del sistema se asume puro y genérico $|\psi_0^S\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle$. Por otro lado, el estado inicial de los aparatos, por conveniencia, es el autovector de σ_x asociado al autovalor positivo. La evolución Hamiltoniana se calcula por medio del operador

$$U(\tau) = e^{-i\theta_A \Pi_+^S \otimes \Pi_+^A \otimes I^B - i\theta_B \Pi_{+x}^S \otimes I^A \otimes \Pi_+^B}, \quad (3.2)$$

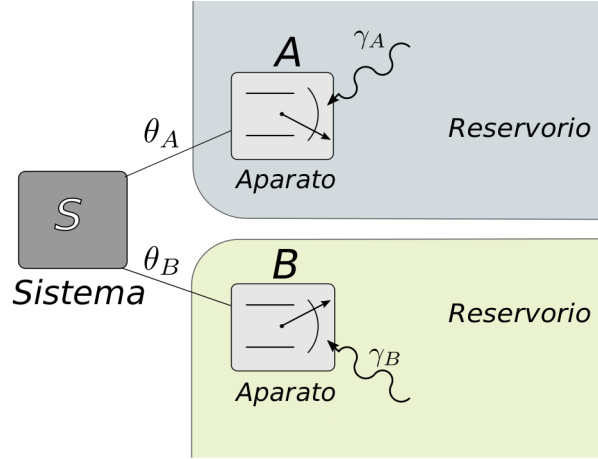


Figura 3.1.: Esquema del modelo de medición con dos aparatos de medida que interactúan simultáneamente con el sistema a medir, y a su vez, éstos están dentro de reservorios independientes.

donde se definen $\theta_A = \frac{\lambda_A}{\hbar} \int_0^\tau g(t) dt$ y $\theta_B = \frac{\lambda_B}{\hbar} \int_0^\tau g(t) dt$. Gracias a la definición del Hamiltoniano (3.1), este operador conmuta consigo mismo para tiempos diferentes ($[H(t_1), H(t_2)] = 0$, $t_1 \neq t_2$), luego es posible usar la relación $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H(t') dt'}$ para encontrar (3.2). La relación (3.2) necesitaría un operador ordenamiento temporal si la interacción relativa cambiara para diferentes tiempos ($g_A(t) \neq g_B(t)$). Después de la interacción Hamiltoniana el sistema completo (S+A+B) queda en el estado entrelazado

$$|\Psi(t = \tau)\rangle = U |\psi_0^S\rangle \otimes |+_x\rangle^A \otimes |+_x\rangle^B \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij=\pm} U_{ij} |\psi_0^S\rangle |i^A j^B\rangle \quad (3.4)$$

donde los operadores U_{ij} son

$$U_{++} = e^{-i\theta_A(I^S + \sigma_z^S)/2 - i\theta_B(I^S + \sigma_z^S)/2}$$

$$= e^{-i(\theta_A + \theta_B)/2} \left(\cos \frac{1}{2} \sqrt{\theta_A^2 + \theta_B^2} I^S - i \frac{\sin \frac{1}{2} \sqrt{\theta_A^2 + \theta_B^2}}{\sqrt{\theta_A^2 + \theta_B^2}} (\theta_A \sigma_z^S + \theta_B \sigma_x^S) \right),$$

$$U_{+-} = e^{-i\theta_A(I^S + \sigma_z^S)/2} = e^{-i\theta_A \Pi_+^S},$$

$$U_{-+} = e^{-i\theta_B(I^S + \sigma_x^S)/2} = e^{-i\theta_B/2} (\cos(\theta_B/2) I^S - i \sin(\theta_B/2) \sigma_x^S),$$

y $U_{--} = I^S$.

Como se mencionó anteriormente, cada aparato está en contacto con reservorios que causan decoherencia. El operador Liouvilliano que representa la evolución temporal de este proceso

es

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + \gamma_A(\sigma_x^A \rho \sigma_x^A - \rho) + \gamma_B(\sigma_x^B \rho \sigma_x^B - \rho), \quad (3.5)$$

donde γ_A y γ_B son las respectivas tasas de decoherencia de los reservorios. Suponiendo que el tiempo de interacción entre el sistema a medir y los aparatos es mucho más pequeño que el tiempo de disipación, en otras palabras, $\tau \ll 1/\gamma_A, 1/\gamma_B$, la ecuación (3.5) se puede aproximar a

$$\frac{d\rho}{dt} \approx \gamma_A(\sigma_x^A \rho \sigma_x^A - \rho) + \gamma_B(\sigma_x^B \rho \sigma_x^B - \rho). \quad (3.6)$$

Al solucionar la ecuación (3.6) se encuentra el estado del sistema conjunto (S+A+B) para cualquier tiempo posterior a la interacción unitaria ($t > \tau$),

$$\rho(t) = e^{-(\gamma_A + \gamma_B)t} e^{\gamma_A \sigma_x^A \bullet \sigma_x^A t} e^{\gamma_B \sigma_x^B \bullet \sigma_x^B t} \rho(\tau), \quad (3.7)$$

donde $\rho(\tau) = |\Psi(t = \tau)\rangle \langle \Psi(t = \tau)|$ se calcula a partir de la ecuación (3.4) y la notación \bullet muestra que en esta posición de la expansión debe ir el operador que se encuentra a la derecha, es decir, $(A \bullet B)\rho = A\rho B$. Escrito de otra manera,

$$\rho(t) = e^{-(\gamma_A + \gamma_B)t} \left[\cosh(\gamma_B t) \cosh(\gamma_A t) + \cosh(\gamma_A t) \sinh(\gamma_B t) \sigma_x^B \bullet \sigma_x^B \right. \\ \left. \cosh(\gamma_B t) \sinh(\gamma_A t) \sigma_x^A \bullet \sigma_x^A + \sinh(\gamma_A t) \sinh(\gamma_B t) \sigma_x^A \sigma_x^B \bullet \sigma_x^B \sigma_x^A \right] \rho(\tau). \quad (3.8)$$

Cuando el tiempo tiende a infinito, algunos términos decaen exponencialmente, asociados a las coherencias en la base de autovectores de σ_x^A y σ_x^B en los estados de los aparatos, es decir,

$$\rho(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{4} \left(1 + \sigma_x^B \bullet \sigma_x^B + \sigma_x^A \bullet \sigma_x^A + \sigma_x^A \sigma_x^B \bullet \sigma_x^B \sigma_x^A \right) \rho(\tau). \quad (3.9)$$

Para escribir el resultado más claramente se cambia de base el estado posterior a la interacción Hamiltoniana (3.4), a saber,

$$\begin{aligned} |\Psi(t = \tau)\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{ij=\pm} U_{ij} |\psi_0^S\rangle \sum_{kl=\pm} |k_x^A l_x^B\rangle \langle k_x^A l_x^B | i^A j^B \rangle \\ &= \sum_{kl=\pm} \frac{1}{2} \sum_{ij=\pm} \langle k_x^A l_x^B | i^A j^B \rangle U_{ij} |\psi_0^S\rangle |k_x^A l_x^B\rangle \\ &= \sum_{kl=\pm} |d_{kl}\rangle |k_x^A l_x^B\rangle, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde los estados del sistema sin normalizar $|d_{kl}\rangle$ son

$$|d_{kl}\rangle = \frac{1}{2} \sum_{ij=\pm} \langle k_x^A l_x^B | i^A j^B \rangle U_{ij} |\psi_0^S\rangle. \quad (3.11)$$

Cuando se reemplaza el estado (3.10) en (3.9), se encuentra el estado del sistema completo (S+A+B) después del proceso de decoherencia

$$\rho_\infty = \sum_{kl=\pm} |d_{kl}\rangle \langle d_{kl}| \otimes |k_x^A l_x^B\rangle \langle k_x^A l_x^B|. \quad (3.12)$$

El estado anterior muestra la mezcla estadística entre los posibles resultados o lecturas de los aparatos A y B, estos son $|+_{x+x}^A +_{x+x}^B\rangle$, $|+_{x-x}^A -_{x-x}^B\rangle$, $|-_{x+x}^A +_{x+x}^B\rangle$ y $|-_{x-x}^A -_{x-x}^B\rangle$, asociados a los respectivos estados del sistema $|d_{ij}\rangle$, con $i, j = \pm$. La correlación entre el sistema-objeto y los aparatos es clásica. Las probabilidades de obtener cada posible resultado de la medición son $p_{kl} = \langle d_{kl}|d_{kl}\rangle$. Al igual que en el sistema tratado en el capítulo 2, para tiempos mayores al tiempo de decoherencia, cada uno de los metros puede ser enviado por un aparato Stern-Gerlach con gradiente en dirección x y la probabilidad de que tomen el sentido k y l respectivamente es p_{kl} , con $k, l = \pm$. Adicionalmente, dependiendo del sentido que tome cada apuntador, el estado del sistema S estará determinado completamente y corresponderá al estado $|d_{kl}\rangle$.

3.2. POVM

Otra manera de encontrar los operadores de Kraus es a partir de los estados finales del sistema

$$|d_{kl}\rangle = \left(\frac{1}{2} \sum_{ij=\pm} \langle k_x^A l_x^B | i^A j^B \rangle U_{ij} \right) |\psi_0^S\rangle = E_{kl} |\psi_0^S\rangle. \quad (3.13)$$

Los productos internos $\langle k_x | i \rangle$ toman únicamente los valores $1/\sqrt{2}$ y $-1/\sqrt{2}$, en el caso $\langle k_x | + \rangle = 1/\sqrt{2}$ y $\langle k_x | - \rangle = k/\sqrt{2}$. Expandiendo la sumación sobre los índices i y j , se tiene que

$$E_{kl} = \frac{1}{4} (U_{++} + lU_{+-} + kU_{-+} + klU_{--}). \quad (3.14)$$

Los elementos de la POVM se encuentran con los operadores de Kraus y sus conjugadas traspuestas $M_{kl} = E_{kl}^\dagger E_{kl}$. Estos se reducen a

$$M_{kl} = \frac{1}{16} \sum_{ij} \left[U_{i,j}^\dagger U_{i,j} + lU_{i,j}^\dagger U_{i,-j} + kU_{i,j}^\dagger U_{-i,j} + klU_{i,j}^\dagger U_{-i,-j} \right]. \quad (3.15)$$

Si se tiene en cuenta que los operadores U_{ij} son unitarios, se obtienen los efectos

$$M_{kl} = \frac{1}{4} I + kA + lB + klC, \quad (3.16)$$

donde

$$A = \frac{1}{16} \sum_{ij} U_{i,j}^\dagger U_{-i,j},$$

$$B = \frac{1}{16} \sum_{ij} U_{i,j}^\dagger U_{i,-j}$$

y

$$C = \frac{1}{16} \sum_{ij} U_{i,j}^\dagger U_{-i,-j}.$$

Las probabilidades de obtener cada uno de los cuatro posibles resultados son

$$p_{kl} = \text{Tr}[E_{kl}\rho_0^S E_{kl}^\dagger] = \text{Tr}[M_{kl}\rho_0^S], \quad (3.17)$$

donde ρ_0^S es el estado inicial del sistema, sin importar si es puro o mezclado. En el caso del estado puro que se trataba en la sección anterior $\rho_0^S = |\psi_0^S\rangle\langle\psi_0^S|$.

3.3. Estimación del estado

Cualquier estado de un sistema de dos niveles se puede escribir en términos de las componentes del vector de Bloch, esto es,

$$\rho_0 = \frac{1}{2} (I + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 s_\mu \sigma_\mu, \quad (3.18)$$

donde las componentes del vector $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ son los parámetros de Stokes, $s_0 = 1$, las componentes del vector $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ son las matrices de Pauli [Blume-Kohout, 2010] y $\sigma_0 = I$. Los parámetros de Stokes satisfacen $|\vec{s}| \leq 1$, donde la igualdad se satisface cuando el estado ρ_0 es puro. La representación en la esfera de Bloch con estos parámetros se observa en la figura 3.2. Los polos de la esfera corresponden a los autoestados de la matriz de Pauli asociada al respectivo eje.

Las probabilidades de adquirir cada posible lectura del aparato, obtenidas a partir de los operadores de Kraus, en términos de las componentes ortogonales de espín son

$$p_{kl} = \frac{1}{4} + \sum_{\mu=0}^3 (a_\mu k + b_\mu l + c_\mu kl) s_\mu, \quad (3.19)$$

donde los coeficientes a_μ , b_μ y c_μ están dados por

$$a_\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}[A\sigma_\mu],$$

$$b_\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}[B\sigma_\mu]$$

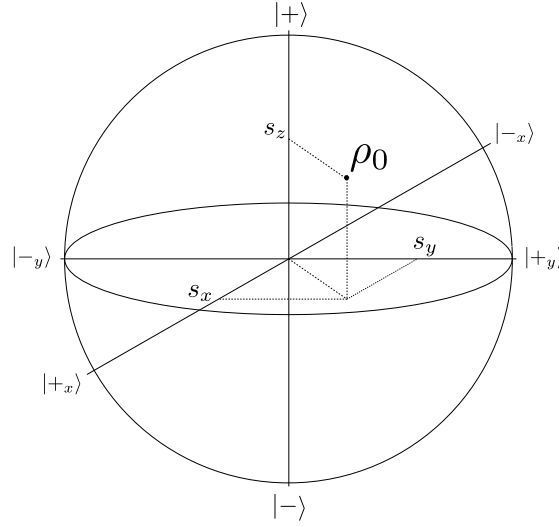


Figura 3.2.: Representación en la esfera de Bloch del estado inicial ρ_0^S .

y

$$c_\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}[C\sigma_\mu].$$

Las expresiones explícitas de estos coeficientes dependientes de θ_A y θ_B se muestran en el apéndice B. La relación (3.19) escrita en forma matricial

$$\begin{pmatrix} p_{++} \\ p_{+-} \\ p_{-+} \\ p_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + a_0 + b_0 + c_0 & a_1 + b_1 + c_1 & a_2 + b_2 + c_2 & a_3 + b_3 + c_3 \\ \frac{1}{4} + a_0 - b_0 - c_0 & a_1 - b_1 - c_1 & a_2 - b_2 - c_2 & a_3 - b_3 - c_3 \\ \frac{1}{4} - a_0 + b_0 - c_0 & -a_1 + b_1 - c_1 & -a_2 + b_2 - c_2 & -a_3 + b_3 - c_3 \\ \frac{1}{4} - a_0 - b_0 + c_0 & -a_1 - b_1 + c_1 & -a_2 - b_2 + c_2 & -a_3 - b_3 + c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

o en una forma más abreviada

$$\vec{p} = \mathbb{T} \vec{s}, \quad (3.21)$$

donde $\vec{p} = (p_{++}, p_{+-}, p_{-+}, p_{--})^T$ y $\vec{s} = (1, s_1, s_2, s_3)^T$. La estimación de las componentes del vector de Bloch se obtiene como

$$\vec{s} = \mathbb{T}^{-1} \vec{p}, \quad (3.22)$$

donde \mathbb{T}^{-1} es la inversa de la matriz \mathbb{T} . Generalmente, el determinante de la matriz \mathbb{T} es diferente de cero, salvo en algunas curvas $(\theta_A(\lambda), \theta_B(\lambda))$ en donde la matriz es singular. Luego en la mayoría de los casos la matriz tiene inversa. La ecuación (3.22) permite hacer la estimación de los valores esperados de las tres componentes de espín, a partir de las probabilidades de obtener $|+_{x+A}^{+B}\rangle$, $|+_{x+A}^{-B}\rangle$, $|-_{x+A}^{+B}\rangle$ y $|-_{x+A}^{-B}\rangle$ en los aparatos A y B . La primera línea de la igualdad (3.22) muestra que $\sum_{ij=\pm} p_{ij} = 1$, el resto de las ecuaciones

pueden ser escritas como

$$s_p = -\frac{1}{4\Delta} \sum_{k,l=\pm} (C_{p1}(4a_0 - k) + C_{p2}(4b_0 - l) + C_{p3}(4c_0 - kl)) p_{kl} \quad (3.23)$$

donde Δ es el determinante de la matriz \mathbb{D} ,

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

y C_{pr} son los cofactores de la misma matriz. Se debe remarcar que $\det \mathbb{T} = -4\Delta$. La ecuación (3.23) muestra que haciendo mediciones sobre los aparatos, es decir, a partir de las lecturas de los aparatos se puede reconstruir completamente el estado inicial de la partícula de espín $1/2$, esto en virtud de que p_{ij} se puede obtener como el número de veces que los apuntadores toman las direcciones i y j (N_{ij}), respectivamente, en un aparato Stern-Gerlach dividido entre el número total de ejecuciones del experimento (N), cuando el número de mediciones tiende a infinito. Además, esta combinación lineal se da de manera única, debido a la unicidad de la inversa de la matriz \mathbb{T} .

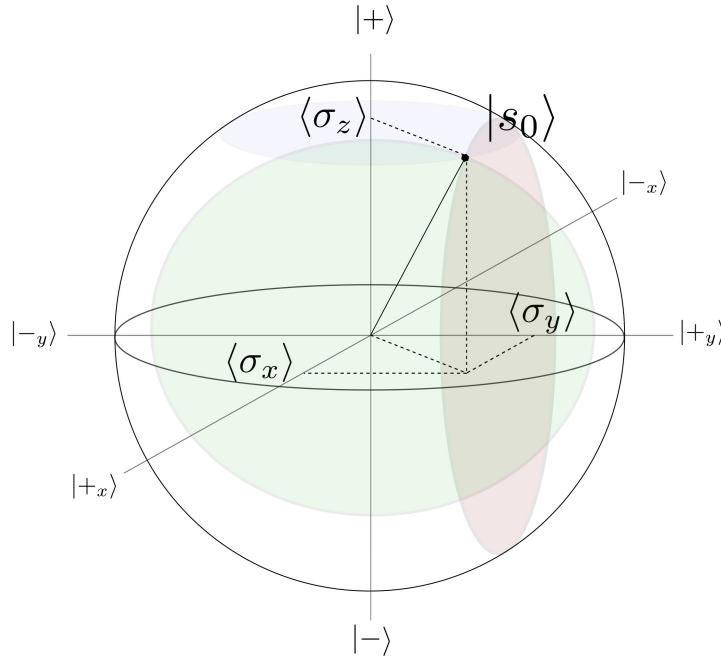


Figura 3.3.: Reconstrucción del estado cuántico a partir de la medición de las tres componentes de espín

En el capítulo 2 se muestra como obtener sólo uno de los parámetros de Stokes. En este capítulo, se muestra que se pueden obtener los tres parámetros acoplando un aparato adicional. El proceso de la reconstrucción del estado cuántico se muestra en la figura 3.3. Cuando se estima una componente de espín, el estado se encuentra en algún punto de la región dada por esta medición, cuando se obtiene una segunda componente ortogonal, se reduce a un segmento dado por la intersección entre los dos círculos en planos ortogonales y finalmente, cuando se mide una componente ortogonal a las dos anteriores, se reduce a un punto. Cuando el estado que se quiere conocer es puro, se podría pensar que basta con estimar dos componentes del vector de Bloch para reconstruir el estado cuántico, pero el estado no está completamente determinado puesto que el signo de la tercera componente ortogonal no se podría encontrar. Esta es una de las diferencias más notables con otros trabajos que acoplan sistemas auxiliares [Perarnau-Llobet y Nieuwenhuizen, 2017], en los cuales sólo pueden medir dos componentes del vector de Bloch, sin poder realizar la reconstrucción completa del sistema.

3.4. Interpretación Física

Existen muchas formas de ver explícitamente como cada aparato perturba al otro. Una de ellas es observar que mide cada aparato sin tener en cuenta la información adquirida por el otro durante el proceso de medición. Para describir la información obtenida por cada aparato separadamente basta definir los nuevos elementos de la medición POVM:

$$M_k^A = M_{k+} + M_{k-} \quad (3.25)$$

y

$$M_l^B = M_{+l} + M_{-l}, \quad (3.26)$$

donde M_{kl} , con $k, l = \pm$, son los efectos encontrados en la relación (3.16). En el caso del aparato A se muestra que los operadores M_{\pm}^A pierden la información que suministraba el metro B y de una forma análoga con los elementos M_{\pm}^B . Es claro que los elementos satisfacen las relaciones de completitud $\sum_k M_k^A = I$ y $\sum_l M_l^B = I$, luego por separado forman conjuntos POVM ($\{M_k^A\}$ y $\{M_l^B\}$). A partir de la ecuación (3.16) los operadores toman la forma

$$M_k^A = \frac{1}{2}I + 2kA \quad (3.27)$$

y

$$M_l^B = \frac{1}{2}I + 2lB, \quad (3.28)$$

donde $A = \sum_{\mu} a_{\mu} \sigma_{\mu}$, $B = \sum_{\mu} b_{\mu} \sigma_{\mu}$ y los coeficientes a_{μ} y b_{μ} ($\mu = 0, 1, 2, 3$) están escritos explícitamente en el apéndice B.

Para mostrar como afecta la presencia del aparato B en el aparato A se compara la componente que estima un solo aparato que interacciona con el sistema con el observable que mide el aparato A. Como se mostró en el capítulo 2, el acople del sistema con un sólo aparato permite medir únicamente el observable $\hat{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Mientras que el aparato A permite medir el observable $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, donde las componentes de \mathbf{a} están escritas explícitamente en el apéndice B y corresponde a la primera columna de la matriz \mathbb{D} . Para mostrar que la componente que se puede estimar está dirigida en la dirección \mathbf{a} se encuentran las probabilidades de obtener $|+x\rangle$ y $|-x\rangle$ en el aparato A,

$$\begin{aligned} p_k^A &= Tr[\rho M_k^A] = \frac{1}{2} Tr \left[(I + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \left(\frac{1}{2} I + 2k \sum_{\mu} a_{\mu} \sigma_{\mu} \right) \right] \\ p_k^A &= \frac{1}{2} + 2ka_0 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

con $k = \pm$. En términos de los operadores de medición semidefinidos positivos se observa la diferencia entre los conjuntos de operadores $\{M_{\pm}\}$ del capítulo 2 y el conjunto $\{M_k^A\}$, con $k = \pm$ de la relación (3.27). El vector \mathbf{a} toma casi cualquier dirección escogiendo adecuadamente los parámetros de acople θ_A y θ_B , luego es claro que se puede estimar casi que cualquier componente de espín con la información del metro A. Por otro lado, sin importar el valor de la constante de acople θ de un solo aparato, sólo es posible medir una componente de espín ($\boldsymbol{\sigma}_z$).

Lo mismo ocurre cuando se compara lo que se puede medir teniendo en cuenta solo el aparato B. El tratamiento con un solo aparato que mide la primera componente de espín es mostrado en el anexo A. Mientras que en presencia de los dos aparatos, pero solo teniendo la información del metro B, se puede estimar una componente de espín en la dirección del vector $\mathbf{q}_B = \mathbf{b}$, con solo un aparato se puede medir únicamente la primera componente de espín $\langle \sigma_x \rangle$.

Estos resultados dan interpretación física a los términos de la ecuación (3.23) que permite hacer la estimación de las tres componentes de espín. La primera y segunda columna de la matriz \mathbb{D} (\mathbf{a} y \mathbf{b}) corresponden a los respectivos vectores que dan las direcciones de las componentes que miden el aparato A y el aparato B por separado. Pero todavía hace falta información que estaría representada por la tercera columna de la matriz \mathbb{D} y por el coeficiente del término kl en los elementos de la POVM (3.16).

3.4.1. Coincidencias

En la sección anterior se mostró cuál es la componente del vector de Bloch que se puede estimar tomando únicamente la información de cada aparato por separado. Pero se tiene que incluso si se toma la información de los dos aparatos por separado no se tiene la misma información que con los cuatro operadores M_{kl} . Una forma de probar esto es viendo la transformación lineal entre los conjuntos de operadores a partir de las relaciones (3.25) y (3.26), esto es,

$$\begin{pmatrix} M_+^A \\ M_-^A \\ M_+^B \\ M_-^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{++} \\ M_{+-} \\ M_{-+} \\ M_{--} \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

La matriz de transformación no es invertible, por tanto no es posible pasar de las matrices M_k^A y M_l^B a las matrices M_{kl} . Por otro lado, se mostró que con la información del aparato A se puede estimar una componente en la dirección del vector \mathbf{a} y con el aparato B, en dirección \mathbf{b} (cuyas componentes están dadas en el apéndice B). Luego a lo sumo se pueden medir 2 componentes de espín ($\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ y $\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$).

La información que hace falta se puede observar en la forma de los operadores M_{kl} de la ecuación (3.16),

$$M_{kl} = \frac{1}{4}I + kA + lB + klC,$$

y de los operadores M_k^A y M_l^B de las relaciones (3.27) y (3.28), respectivamente. Es claro que hace falta la información del vector \mathbf{c} el cual proviene del operador $C = \sum_{\mu} c_{\mu} \sigma_{\mu}$, este operador surge cuando se suman los operadores asociados a las coincidencias, es decir,

$$M_m^C = M_{+,m} + M_{-,-m}, \quad (3.31)$$

donde $m = \pm$, o explícitamente, el operador asociado a las coincidencias

$$M_+^C = M_{++} + M_{--}$$

y a las anticoincidencias

$$M_-^C = M_{+-} + M_{-+}.$$

En términos de la matriz C

$$M_m^C = \frac{1}{2}I + 2mC. \quad (3.32)$$

Mientras los aparatos A y B miden por separado los observables $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ y $\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, respectivamente; las coincidencias miden el observable $\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma}$.

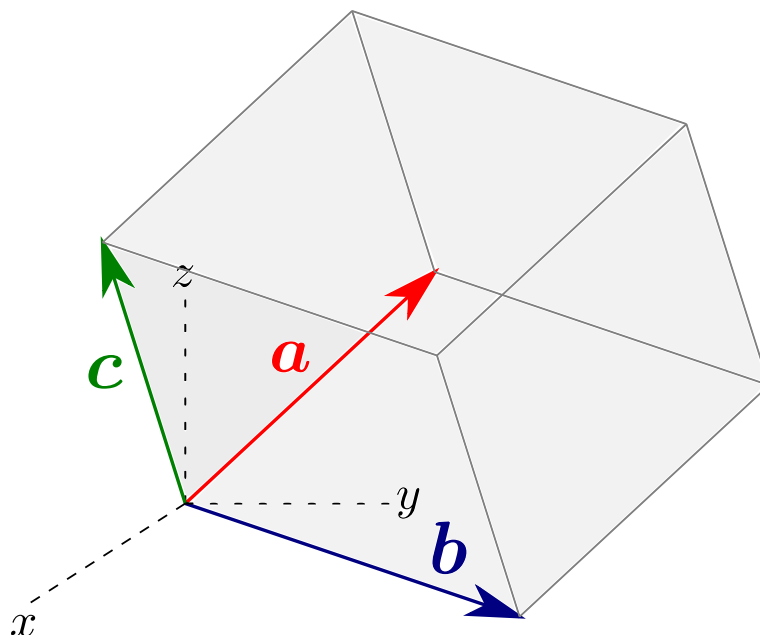


Figura 3.4.: Vectores que determinan las componentes de espín que se pueden medir. $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ asociado al observable que mide el aparato A, $\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ asociado al observable que mide el aparato B y $\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ el observable que se mide gracias a las coincidencias de los conteos de los dos aparatos

Geoméricamente la información de las componentes que se pueden medir está representada por los tres vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} , los cuales ya fueron interpretados físicamente en el proceso de la medición, a causa de la modelación microscópico del proceso de medición. Estos vectores corresponden a las columnas de la matriz \mathbb{D} , la cuál describe completamente las componentes de espín que se pueden medir (ecuación (3.23)). Luego es claro que si los tres vectores son linealmente independientes, se puede hacer la estimación completa del estado del sistema cuántico. La gráfica 3.4 muestra una posible configuración de los tres vectores, además se muestra el paralelepípedo que éstos forman. Además, el determinante de la matriz \mathbb{D} corresponde al volumen del paralelepípedo, luego si el volumen del sólido es cero, entonces no es posible estimar completamente el estado del sistema (medición informacionalmente incompleta). Pero esto no quiere decir que no se puede estimar ninguna componente, puesto que mientras haya un vector linealmente independiente, es posible medir una componente de espín.

3.5. Casos Singulares

Anteriormente se mostró como estimar el estado de un sistema de dos niveles. Aunque se podría pensar que se pueden lograr la estimación para valores arbitrarios de θ_A y θ_B . La ecuación (3.19) muestra que existen valores de θ_A y θ_B en los cuales Δ se anula haciendo que los parámetros s_p no se puedan estimar. Esto hace pensar que no se puede estimar ninguna componente asociada a alguna dirección de espín para esos valores. Un contraejemplo para la anterior afirmación es tomar $\theta_B = 0$, en el cual $\Delta = 0$. Sin embargo, este caso se ve detalladamente en el capítulo 2, donde se observa que se puede medir la componente $\hat{k} \cdot \sigma$.

La información sobre los parámetros que se pueden estimar está contenida en la matriz \mathbb{T} . Una posible manera de saber cuántos son los parámetros que se pueden estimar es usando el rango de esta matriz, y para saber cuales son, se hace con los vectores ortogonales a los vectores base del espacio nulidad.

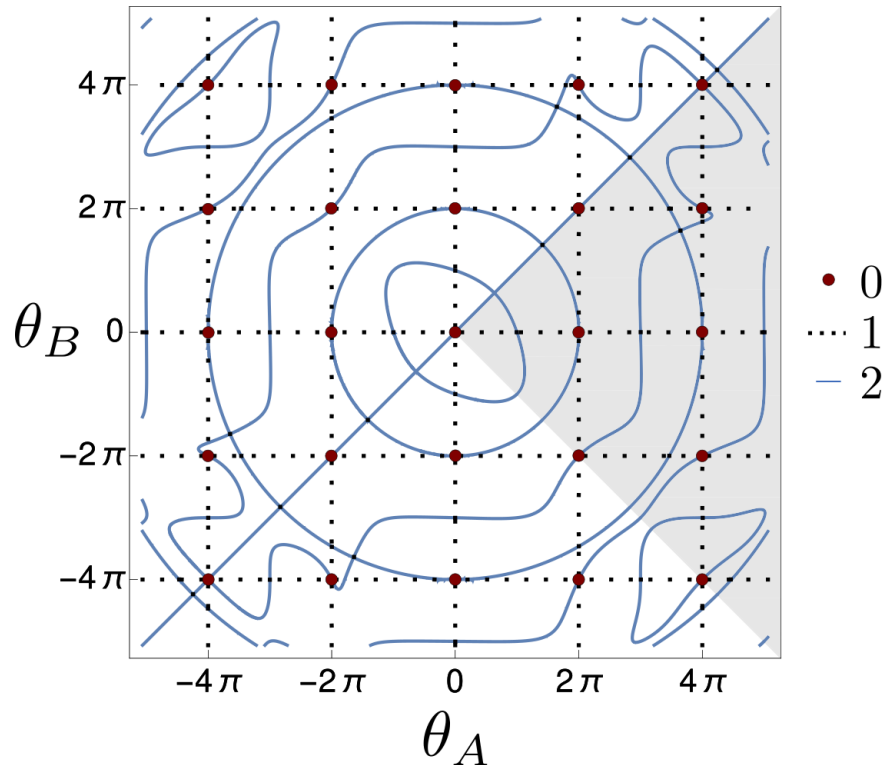


Figura 3.5.: Número de componentes de espín que se pueden estimar a partir del rango de la matriz \mathbb{T} para las curvas en las cuales $\Delta = 0$

El determinante de \mathbb{D} se puede expresar como $\Delta = f_0^S f_0^A = f_0^S (f_1^S f_1^A + f_2^S f_2^A)$ donde las

funciones f^S y f^A son, respectivamente, simétricas y antisimétricas bajo la permutación de θ_A y θ_B .

Más explícitamente, se tiene $f_0^S = -\sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right)\text{sinc}\left(\frac{\theta_C}{2}\right)/2048$, donde $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ y $\theta_C = \sqrt{\theta_A^2 + \theta_B^2}$. Las funciones antisimétricas son

$f_1^A = -(\theta_A^2 + \theta_A\theta_B - \theta_B^2)\sin\theta_A + (\theta_A^2 - \theta_A\theta_B + \theta_B^2)\sin(\theta_A - \theta_B) + (-\theta_A^2 + \theta_A\theta_B + \theta_B^2)\sin\theta_B$
y $f_2^A = 4\sin\left(\frac{\theta_A - \theta_B}{2}\right)$. Las dos funciones simétricas son

$$f_1^S = \text{sinc}\left(\frac{\theta_C}{2}\right)/2,$$

$$f_2^S = \cos\frac{\theta_C}{2} \left(\theta_B \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) + \theta_A \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \right).$$

Es fácil ver que el determinante Δ es antisimétrico ante la reflexión con respecto a la recta $\theta_A = \theta_B$ y simétrico bajo la reflexión con respecto a la recta $\theta_A = -\theta_B$.

La gráfica 3.5 muestra las curvas sobre las cuales el rango de la matriz es menor a 4, es decir, donde la matriz es singular. La simetrías del determinante hacen que sea suficiente estudiar el cuadrante sombreado en la gráfica 3.5. Para cualquier valor de θ_A y θ_B el rango de la matriz es mayor o igual a 1, esto se debe a que la primera componente del vector \vec{s} es uno. En los puntos rojos que forman una red el rango de la matriz \mathbb{T} es 1, esto significa que no se puede estimar ninguna componente de espín. En el caso en que $\theta_B = 0$, es decir, la recta horizontal correspondiente al eje θ_A , se mostró en el capítulo 2 que no se puede estimar ninguna componente para los valores de $\theta_A = 2n\pi$ con n entero. Debido a que uno de los dos operadores de Kraus toma el valor de la matriz nula haciendo que sólo haya un posible resultado para el metro. Luego, se sabe con certeza que el aparato siempre va a tener la misma lectura, esto es, $P_+ = 1$ y $P_- = 0$. El caso de $\theta_B = 0$ es completamente análogo.

En los puntos de la red representados por el color rojo en la figura 3.5, $\theta_A = 2\pi m$ y $\theta_B = 2\pi n$ (m y n enteros), el operador unitario $U_{+-} = U_{-+} = U_{--} = I$. Esto se observa claramente cuando se expresan los operadores unitarios como

$$U_{+-} = e^{-i\theta_A\Pi_+} = I + (e^{-i\theta_A} - 1)\Pi_+ \quad (3.33)$$

y

$$U_{-+} = e^{-i\theta_B\Pi_{+x}} = I + (e^{-i\theta_B} - 1)\Pi_{+x}. \quad (3.34)$$

Por consiguiente, los operadores de Kraus son

$$E_{kl} = \frac{1}{4} (U_{++} + (k + l + kl)I), \quad (3.35)$$

y los correspondientes efectos toma la forma

$$M_{kl} = \frac{1}{16} \left((1 + (k + l + kl)^2)I + (k + l + kl)(U_{++} + U_{++}^\dagger) \right). \quad (3.36)$$

Sin embargo, $U_{++} + U_{++}^\dagger$ es proporcional a la identidad, por tanto todos los operadores de medida son proporcionales a la identidad. Como consecuencia, las probabilidades $p_{kl} = \text{Tr}[M_{kl}\rho]$ son independientes del estado inicial $|\psi_0^S\rangle$. La dependencia del estado inicial es necesaria para la estimación de los parámetros, como lo muestra la ecuación (3.19), o como se mostró en el capítulo 2 era necesario que $p_i = p_i(|\alpha|^2)$, con $i = \pm$, para estimar s_z . A continuación se muestran cuales son las componentes de espín que se pueden estimar en las otras curvas de la gráfica 3.5.

Aunque las componentes del vector se pueden calcular con la nulidad de la matriz \mathbb{T} , el procedimiento se hace tedioso y poco claro. Una forma más evidente de hallar las operadores que se pueden medir es a partir de la descomposición de los elementos del POVM M_{kl} en la base de las matrices de Pauli, esto es,

$$M_{kl} = \varepsilon_{kl}I + \mathbf{q}_{kl} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.37)$$

Se observa que las probabilidades $p_{kl} = \text{Tr}[M_{kl}\rho]$ de obtener cada posible resultado son

$$p_{kl} = \varepsilon_{kl} + q_{kl}\hat{\mathbf{q}}_{kl} \cdot \mathbf{s}, \quad (3.38)$$

donde \mathbf{s} corresponde al vector de Bloch cuando se escribe la matriz densidad como $\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ y $\hat{\mathbf{q}}_{kl} = \mathbf{q}_{kl}/q_{kl}$ es un vector unitario. Las componentes de espín que se pueden estimar son aquellas direcciones pertenecientes al espacio generado por los vectores \mathbf{q}_{kl} . Los vectores \mathbf{q}_{kl} pueden ser todos el vector cero, haciendo imposible la estimación de alguna de las componentes de espín. Aunque el espacio generado también puede ser \mathbb{R}^3 , lo cual significa que se pueden estimar tres componentes de espín en direcciones linealmente independientes, y a su vez es posible la estimación completa del estado de la partícula. La ligadura $\sum_{kl} q_{kl} = 0$ surge de la relación de completitud $\sum_{kl} M_{kl} = I$.

En el caso de los puntos de la red (mostrados de color rojo en la gráfica 3.5), los vectores \mathbf{q}_{kl} son todos cero, puesto que cada elemento del conjunto POVM es proporcional a la identidad. Luego no se puede medir ninguna componente de espín de la partícula. A continuación se muestran los casos de las curvas analíticas en las que el determinante es cero y se estudian las componentes del vector de Bloch que se pueden estimar.

Rectas Horizontales ($\theta_B = 2\pi n$, $n \in \mathbb{I}$)

En el caso de las rectas horizontales que se muestran en el gráfica 3.5 de color negro, los vectores \mathbf{q}_{kl} de la expansión en la base de las matrices de Pauli son

$$\mathbf{q}_{kl} = \frac{k(1+l)\sin\frac{\theta_A}{2}}{\sqrt{(2\pi n)^2 + \theta_A^2}} \left((-1)^{n+1} \frac{n\pi}{4} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{(2\pi n)^2 + \theta_A^2}\right), 0, \right. \\ \left. -\frac{1}{8} \left(\sqrt{(2\pi n)^2 + \theta_A^2} \sin\frac{\theta_A}{2} + (-1)^n \theta_A \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{(2\pi n)^2 + \theta_A^2}\right) \right) \right), \quad (3.39)$$

esto es, los vectores $\mathbf{q}_{k,-1}$ son cero y los dos vectores $\mathbf{q}_{k,+1}$ son linealmente dependientes. Los anteriores resultados muestran que es posible medir sólo una componente de espín en la dirección del vector $\hat{\mathbf{q}}_{k,+1}$.

En el caso de $n = 0$ se verifica que la componente que se puede estimar está en la dirección $(0, 0, 1)$, en concordancia con los resultados del capítulo 2. Cabe notar que la componente del vector de Bloch que se puede estimar siempre está en el plano XZ para cualquier valor del parámetro θ_A .

Rectas Verticales ($\theta_A = 2\pi n$, $n \in \mathbb{I}$)

Los vectores que acompañan al vector de Pauli en la ecuación (3.37) para este caso son

$$\mathbf{q}_{kl} = \frac{l(1+k)\sin\frac{\theta_B}{2}}{\sqrt{(2\pi n)^2 + \theta_B^2}} \left(-\frac{1}{8} \left(\sqrt{(2\pi n)^2 + \theta_B^2} \sin\frac{\theta_B}{2} + (-1)^n \theta_B \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{(2\pi n)^2 + \theta_B^2}\right) \right), \right. \\ \left. 0, (-1)^{n+1} \frac{n\pi}{4} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{(2\pi n)^2 + \theta_B^2}\right) \right) \quad (3.40)$$

Ocurre un caso muy parecido a las rectas horizontales, en donde sólo se puede estimar una componente del vector de Bloch. Las componentes en cualquier otra dirección sobre el plano ortogonal asociado a este vector $\mathbf{q}_{+,l}$ no pueden ser estimadas. De la misma manera, para $n = 0$ se puede estimar la componente $(1, 0, 0)$ correspondiente a la componente de espín s_x . Al igual que en el caso anterior la componente que se puede estimar no se sale del plano XZ.

Circunferencia de Radio $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}^+$

Para este caso los vectores toman una forma extensa y poco esclarecida,

$$\hat{\mathbf{q}}_{kl} = \left(\begin{aligned} &(-1)^n 2k - (k+2)l \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{(2n\pi)^2 - \theta_A^2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)} + kl \frac{\sin\left(\theta_A - \frac{1}{2}\sqrt{(2n\pi)^2 - \theta_A^2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)}, \\ &- 2kl \sin\left(\frac{1}{2}\left(\theta_A - \sqrt{(2n\pi)^2 - \theta_A^2}\right)\right), \\ &-k \frac{\left(l \sin\left(\frac{\theta_A}{2} - \sqrt{(2n\pi)^2 - \theta_A^2}\right) + (l+2) \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{(2n\pi)^2 - \theta_A^2}\right)} + (-1)^n 2l \end{aligned} \right). \quad (3.41)$$

Aunque los cuatro vectores son linealmente independientes, los vectores están sobre el mismo plano. Esto implica que sólo se pueden estimar dos componentes del vector de Bloch sobre el plano que forman los vectores \mathbf{q}_{kl} . La figura 3.6 esquematiza el comportamiento de los cuatro vectores $\hat{\mathbf{q}}_{kl}$.

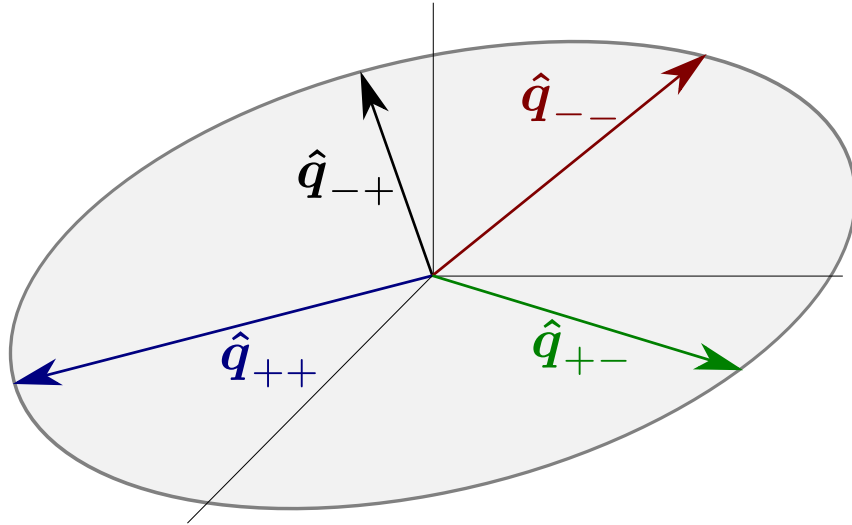


Figura 3.6.: Configuración de los vectores $\hat{\mathbf{q}}_{kl}$ para el conjunto de parámetros que satisfacen en una circunferencia de radio 2π

La gráfica 3.7 muestra los planos en los cuales se pueden estimar las componentes de espín y su correspondiente vector normal para diferentes puntos sobre la circunferencia de radio 2π . Se observa que para puntos cercanos al eje θ_A el vector normal se acerca al eje Z luego el plano de estimación se acerca al plano XY . Es interesante notar que cuando θ_A tiende a 2π el vector normal tiende a $(0, 0, 1)$, pero cuando el límite se hace sobre el eje $\theta_B = 0$ sólo se puede estimar una componente, la cual está en la dirección Z . Además, para el punto $(2\pi, 0)$

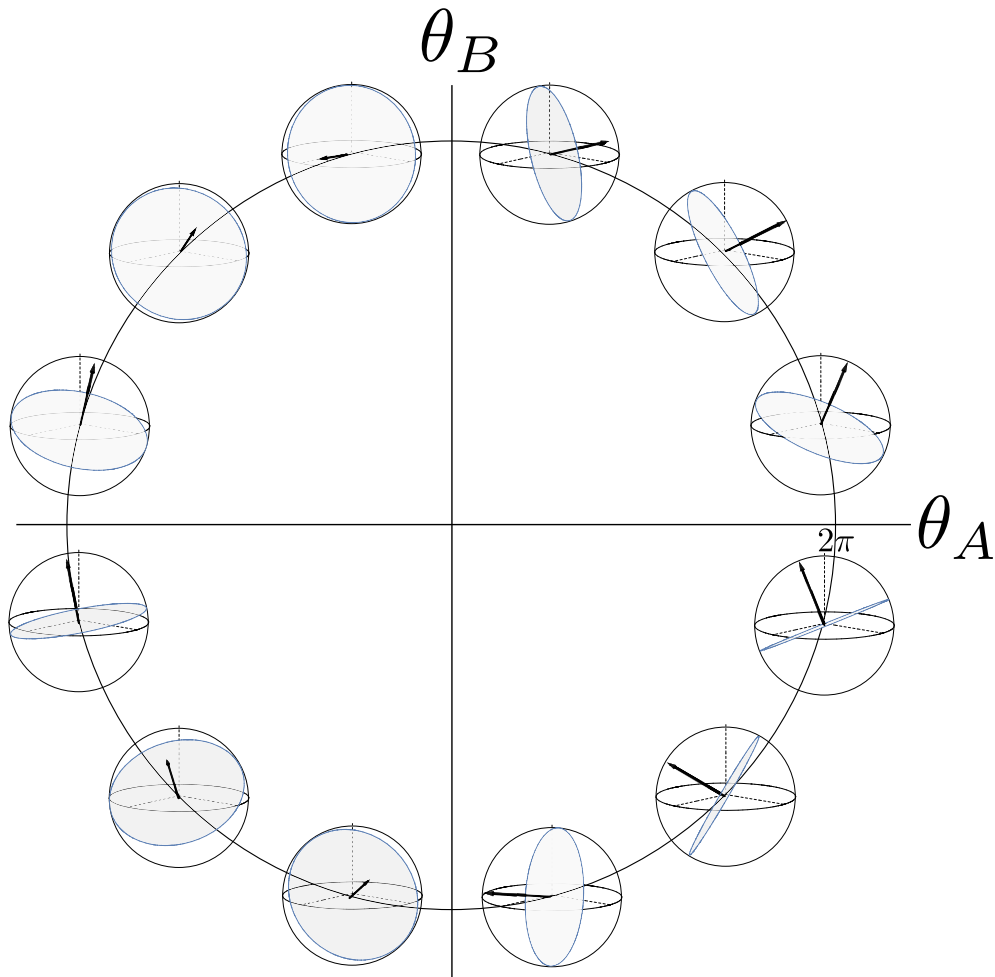


Figura 3.7.: Variación del plano en el cual se pueden estimar las componentes del espín para una circunferencia de radio 2π

sobre el plano de parámetros, no se puede medir ninguna componente de espín. Ocurre de una manera similar cuando θ_B es cercano a 2π o a -2π .

Recta Diagonal $\theta_A = \theta_B$

Los cuatro vectores unitarios para el caso de la diagonal son

$$\mathbf{q}_{kl} = \frac{1}{16} \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \left(2k \cos\left(\frac{\theta_A}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta_A}{\sqrt{2}}\right) \cot\left(\frac{\theta_A}{2}\right) (2kl + k + l) - 2l, \right. \\ \left. \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta_A}{\sqrt{2}}\right) (l - k), \right. \\ \left. -\sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta_A}{\sqrt{2}}\right) \cot\left(\frac{\theta_A}{2}\right) (2kl + k + l) - 2k + 2l \cos\left(\frac{\theta_A}{\sqrt{2}}\right) \right), \quad (3.42)$$

donde $k, l = \pm$. Los vectores (3.42) son iguales cuando $k = l$, luego $\hat{\mathbf{q}}_{++} = \hat{\mathbf{q}}_{--}$ o en

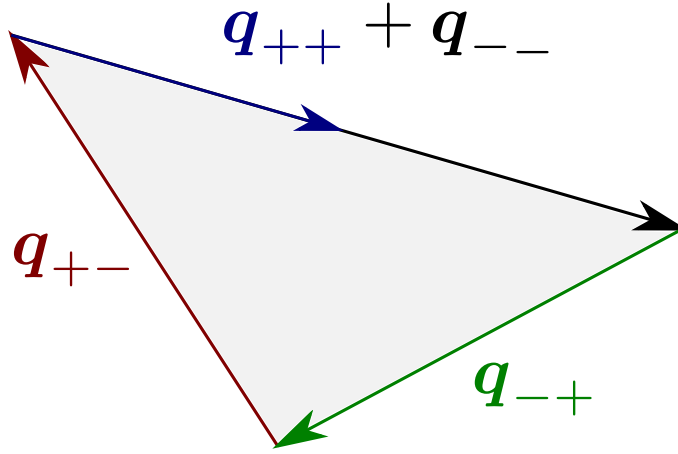


Figura 3.8.: Configuración de los vectores \mathbf{q}_{kl} para el conjunto de parámetros que satisfacen $\theta_A = \theta_B$. Donde se muestra que los cuatro vectores pertenecen al mismo plano

términos de los vectores sin normalizar $\mathbf{q}_{++} = \mathbf{q}_{--}$. Como una consecuencia de $\sum_{kl} \mathbf{q}_{kl} = 0$, $2\mathbf{q}_{--} + \mathbf{q}_{+-} + \mathbf{q}_{-+} = 0$ y siempre que tres vectores sumen cero, los tres pertenecerán al mismo plano, luego los cuatro vectores caen sobre el mismo plano. La figura 3.8 ilustra más claramente el porqué sólo es posible estimar dos parámetros de Stokes sobre un plano. Como en el caso de la cicunferencia, sólo se pueden estimar dos parámetros de Stokes en direcciones sobre el plano formado por los cuatro vectores de la ecuación (3.42).

La figura 3.9 muestra el plano sobre el cual están los cuatro vectores (3.42) para algunos valores del parámetro θ_A y su respectivo vector normal.

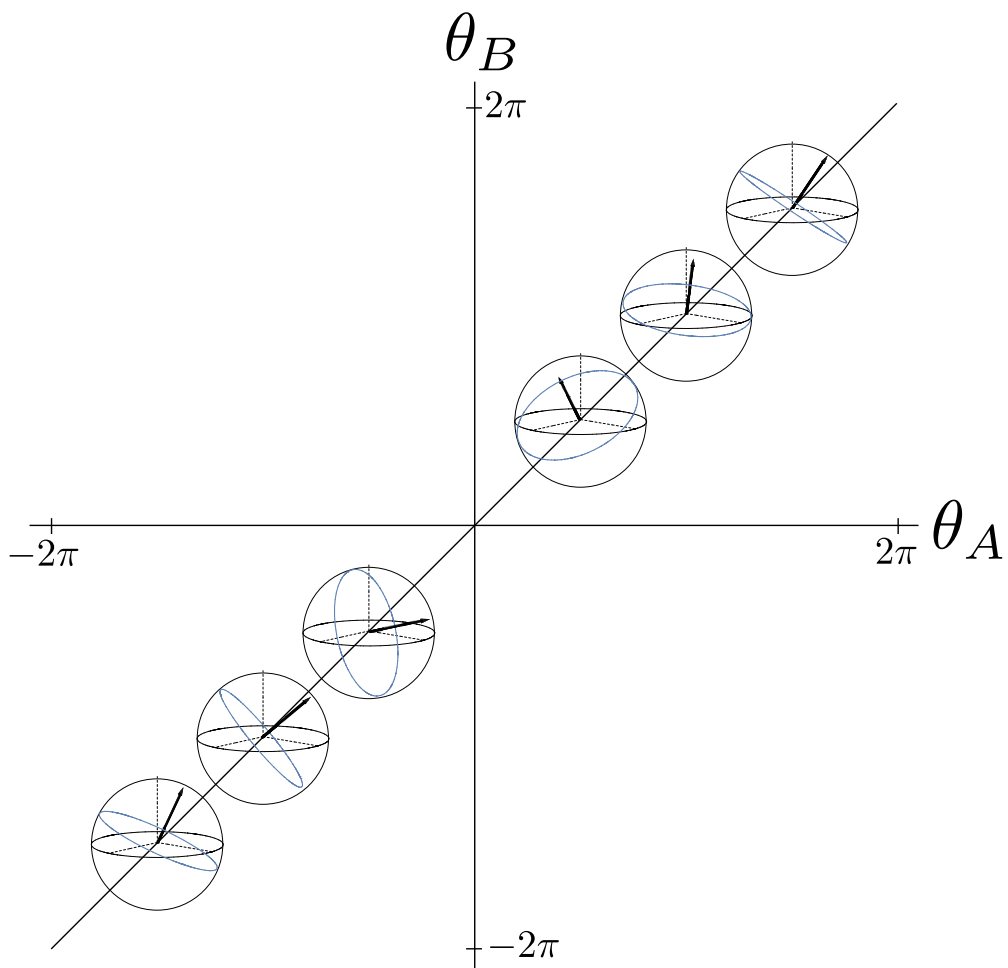


Figura 3.9.: Variación del plano en el cual se pueden estimar las componentes del espín para la recta diagonal $\theta_A = \theta_B$

Tabla 3.1.: Sobre cada curva en el espacio de parámetros (θ_A, θ_B) , direcciones en las cuales el vector de Bloch puede ser estimado, escrito como combinación lineal de los vectores de la base.

Curva	Vectores Base
$\theta_B = 2\pi n$	$\mathbf{u}_H = N_B \left(2n\pi, 0, (-1)^n \frac{2 \sin \frac{\theta_A}{2}}{\text{sinc}(\frac{1}{2}\sqrt{(2\pi n)^2 + \theta_A^2})} + \theta_A \right)$
$\theta_A = 2\pi n$	$\mathbf{u}_V = N_A \left((-1)^n \frac{2 \sin \frac{\theta_B}{2}}{\text{sinc}(\frac{1}{2}\sqrt{(2\pi n)^2 + \theta_B^2})} + \theta_B, 0, 2n\pi \right)$
Circunferencias	$\mathbf{u}_{C1} = N_{C1} \left(\sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{(2\pi n)^2 - \theta_A^2} \right), 0, (-1)^{n+1} \sin \left(\frac{\theta_A}{2} \right) \right)$
$\theta_C = 2\pi n$	$\mathbf{u}_{C2} = N_{C2} \left(1, \tan \left(\frac{\pi}{4} (1 + (-1)^n) - \frac{1}{4} \left(\theta_A - \sqrt{(2\pi n)^2 - \theta_A^2} \right) \right), 1 \right)$
Diagonal	$\mathbf{u}_{D1} = N_{D1} \left(\cot \left(\frac{\theta}{2} \right) - \sqrt{2} \cot \left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} \right), 1, \cot \left(\frac{\theta}{2} \right) + \sqrt{2} \csc \left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} \right) \right)$
$\theta = \theta_A = \theta_B$	$\mathbf{u}_{D2} = N_{D2} \left(\cot \left(\frac{\theta}{2} \right) + \sqrt{2} \csc \left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} \right), -1, \cot \left(\frac{\theta}{2} \right) - \sqrt{2} \cot \left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} \right) \right)$

Los anteriores resultados se pueden condensar en la tabla 3.1. Es necesario aclarar que los vectores \mathbf{u}_{C1} y \mathbf{u}_{C2} , respectivamente \mathbf{u}_{D1} and \mathbf{u}_{D2} , no son ortogonales; $N_B, N_A, N_{C1}, N_{C2}, N_{D1}$, y N_{D2} , son constantes de normalización que también dependen de θ_A y θ_B . Asimismo, las curvas donde sólo hay un vector muestran que es posible estimar únicamente un parámetro. Mientras que, en las curvas con dos vectores en la base se pueden medir dos componentes en el espacio generado por los vectores de la base.

Estos resultados pueden ser vistos más claramente si se tienen en cuenta sólo los tres vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} y no los cuatro vectores \mathbf{q}_{kl} . Además, estos vectores tienen sentido físico en cuanto al proceso de interacción de los sistemas con los aparatos. Luego basta calcular los tres vectores en cada una de las curvas mencionadas anteriormente para caracterizar completamente el espacio de parámetros. Si los tres vectores son linealmente independientes como en la figura 3.4, se puede hacer la estimación del estado inicial del sistema. Pero si alguno de los vectores es cero, o dos de los vectores van en la misma dirección, la medición es informacionalmente incompleta. La tabla 3.2 muestra explícitamente cada uno de los vectores para las respectivas curvas en donde $\Delta = 0$, es decir, el volumen del paralelepípedo es nulo.

Tabla 3.2.: En cada curva del espacio de parámetros (θ_A, θ_B) , vectores de Bloch los cuales son combinaciones lineales de las bases de vectores que pueden ser estimados. Los subíndices dan información acerca de los tipos de curva: recta horizontal (H), recta vertical (V), circunferencia (C) y recta diagonal (D). Los vectores \mathbf{a}_D , \mathbf{b}_D y \mathbf{c}_D están sobre el mismo plano.

Curva	Base de Vectores No-ortogonal
Horizontales $\theta_B = 2\pi n$	$\mathbf{a}_H = \mathbf{c}_H = \frac{1}{8} \sin \frac{\theta_A}{2} (2n\pi \operatorname{sinc} \frac{\theta_C}{2}, 0, 2(-1)^n \sin \frac{\theta_A}{2} + \theta_A \operatorname{sinc} \frac{\theta_C}{2})$
Verticales $\theta_A = 2\pi n$	$\mathbf{b}_V = \mathbf{c}_V = \frac{1}{8} \sin \frac{\theta_B}{2} (2(-1)^n \sin \frac{\theta_B}{2} + \theta_B \operatorname{sinc} \frac{\theta_C}{2}, 0, 2n\pi \operatorname{sinc} \frac{\theta_C}{2})$
Circunferencias $\theta_C = 2\pi n$	$\frac{\mathbf{a}_C}{\sin \theta_{A/2}} = \frac{\mathbf{b}_C}{(-1)^{n+1} \sin \theta_{B/2}} = \frac{1}{8} ((-1)^n \sin (\frac{\theta_B}{2}), 0, -\sin (\frac{\theta_A}{2}))$ $\mathbf{c}_C = -\frac{1}{8} \sin (\frac{\theta_A - \theta_B}{2}) (-\cos \frac{\theta_A}{2} \sin \frac{\theta_B}{2}, \sin \frac{\theta_A}{2} \sin \frac{\theta_B}{2}, \sin \frac{\theta_A}{2} \cos \frac{\theta_B}{2})$
Diagonal $\theta_A = \theta$ $\theta_B = \theta$ $\theta' = \frac{\theta}{\sqrt{2}}$	$\mathbf{a}_D = -\frac{1}{8} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta' - \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta', \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta', \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta' \right)$ $\mathbf{b}_D = -\frac{1}{8} \sin \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta', -\sin \frac{\theta}{2} \sin \theta', \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta' - \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta' \right)$ $\mathbf{c}_D = -\frac{1}{8\sqrt{2}} \sin \theta \sin (\theta') (1, 0, 1)$

3.6. Tipos de Medición

En esta sección se muestran los tipos de medición en el espacio de parámetros y se observa su relación con las curvas en las cuales $\Delta = 0$. La gráfica 3.10 muestra los posibles tipos de medición, e inclusive los casos donde no se puede obtener información sobre algún observable. De nuevo se ratifica que en los puntos de la red, representados como puntos de color rojo, no es posible la medición. Las rectas verticales y horizontales corresponden a mediciones borrosas, puesto que dos de los elementos M_i del POVM se hacen proporcionales a la identidad (ver (3.39) y (3.40)), lo que implica que los otros dos elementos tienen vectores q_{kl} , de la ecuación (3.37) y (3.38), opuestos. Lo anterior se debe a que $\sum_i M_i = I$, luego $\sum_{kl} q_{kl} = 0$. Las medidas proyectivas sólo se encuentran en los casos estudiados en el capítulo 2 y en el apéndice A, es decir, $\theta_A = 0$ y $\theta_B = (2m+1)\pi$ ó $\theta_B = 0$ y $\theta_A = (2n+1)\pi$, con n y m enteros.

Existen puntos aislados de la gráfica 3.10 en donde hay medidas borrosas. Los puntos corresponden a la intersección entre la circunferencia y la forma de “huevo” de la figura 3.5 y también a la intersección entre las circunferencias y la diagonal. En la gráfica 3.5 estas intersecciones se muestran de color negro, lo que implica que sólo se puede estimar una componente de espín. En otros términos, sólo hay un vector linealmente independiente q_{kl} que dicta la dirección del parámetro de Stokes que se puede estimar. Por tanto, todos los

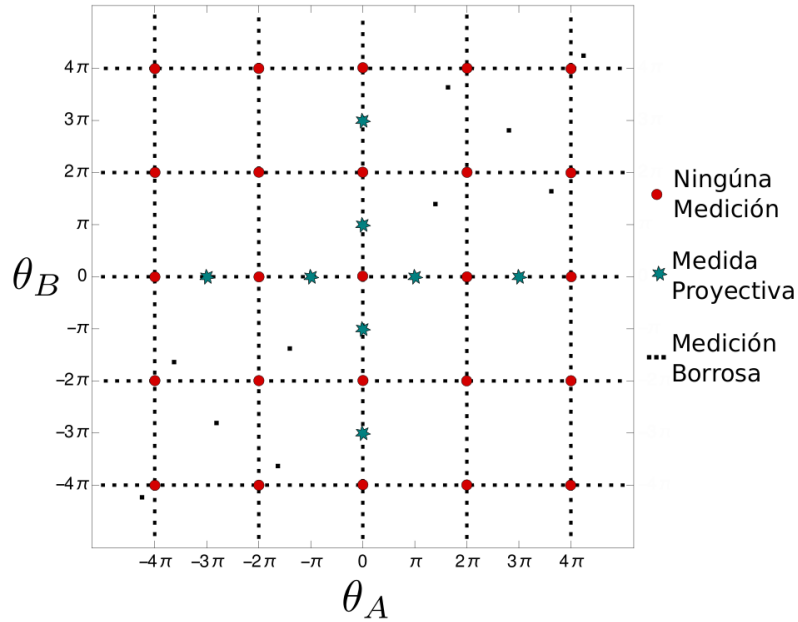


Figura 3.10.: Tipos de medición en el espacio de parámetros θ_A y θ_B

elementos del POVM conmutan. La gráfica 3.10 muestra que una medición conjunta hecha por dos mediciones individuales borrosas deja de ser borrosa, y sólo se tienen este tipo de mediciones para los casos donde sólo se puede estimar una componente del vector de Bloch.

Para lograr la estimación completa fue necesario realizar dos mediciones borrosas (en ausencia del otro aparato) simultáneas. Cabe aclarar que la medición teniendo en cuenta los dos metros deja de ser borrosa, puesto que efectos M_{kl} dados por (3.16) no conmutan. En el trabajo realizado por Llobet [Perarnau-Llobet y Nieuwenhuizen, 2017], los autores realizan mediciones proyectivas simultáneas (en el mismo sentido), y ellos sólo logran estimar dos componentes ortogonales de espín. Al considerar mediciones borrosas se abre el espectro a un conjunto más grande de operadores.

Tendiendo en cuenta el trabajo de Llobet, surge la pregunta ¿Reducirse a medidas proyectivas simultáneas impediría hacer la estimación completa?. En el espacio de parámetros y viendo la gráfica 3.10 se encuentra que estas mediciones corresponderían a los puntos en los cuales los dos parámetros de acople son múltiplos impares de π , esto es, $\theta_A = (2n + 1)\pi$ y $\theta_B = (2m + 1)\pi$, con m y n números enteros. La respuesta a la pregunta es afirmativa y esto se observa gracias al determinante $\Delta = f_0^S f_0^A$, el cual se hace cero porque la función antisimétrica $f_0^A = f_1^S f_1^A + f_2^S f_2^A$ toma valor nulo. La última afirmación manifiesta que estos puntos de medición proyectiva simultánea pertenecen a las curvas cerradas de forma extraña

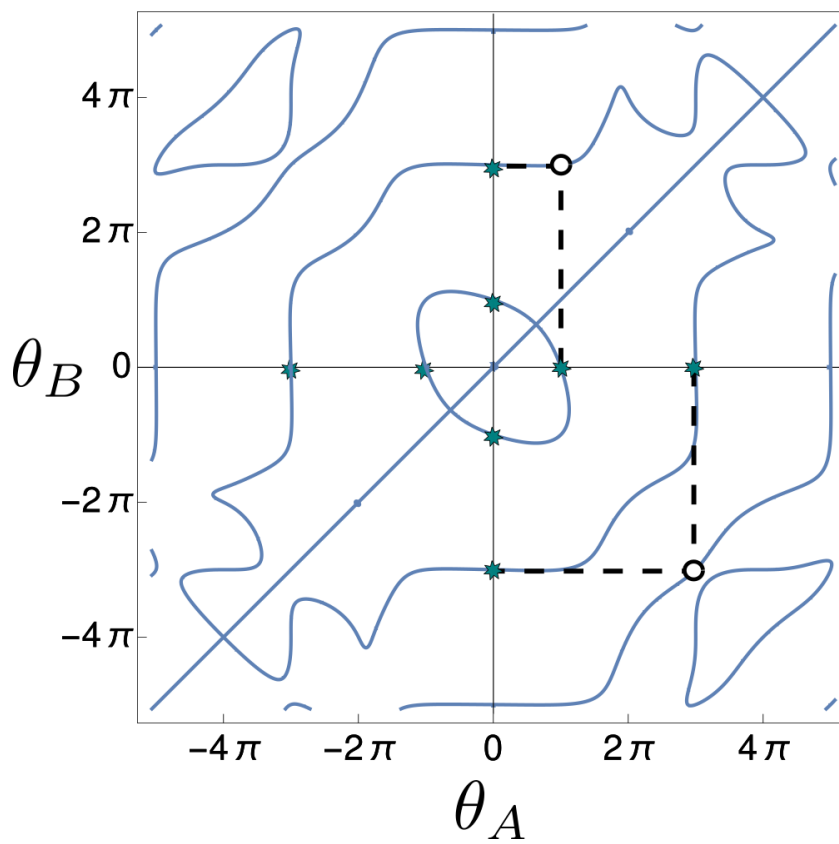


Figura 3.11.: Puntos en el espacio de parámetros de medidas “proyectivas” simultáneas

de la figura 3.5 identificadas con el color azul y también a la diagonal como se muestra en la figura 3.11. En consecuencia, sólo es posible estimar dos componentes del vector de Bloch del sistema.

3.7. Mediciones Débiles

En esta sección se trata el caso de las mediciones débiles, entendidas como las mediciones cuyo parámetro de acople entre el sistema a medir y el metro es pequeño. Esta definición es más cercana al significado que le da Konrad [Konrad, 2003], en lugar del significado que le dan muchos textos que lo relacionan con los valores débiles, en donde es necesaria la pos-selección para medir cierto observable [Aharonov et al., 1988].

Las mediciones débiles corresponden a pequeños valores en el parámetro de acople entre el sistema y el aparato, en este caso, los parámetros θ_A y θ_B . Para ver la situación cuando los dos parámetros de acople son pequeños en el mismo orden, se cambia los parámetros de acople θ_A y θ_B por ϕ y r , esto es, coordenadas polares. La matriz \mathbb{T} de la ecuación (3.21) brinda información acerca de las propabilidades p_{kl} en términos de los parámetros de acople. Cuando se expande la matriz en series de potencias en r alrededor de cero a primer orden se obtiene

$$\mathbb{T} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(r^2) = T_0 + O(r^2).$$

Esta aproximación muestra que la probabilidad p_{++} es cercana a 1, luego las demás probabilidades son cercanas a cero. A segundo orden, se obtiene

$$\mathbb{T} \approx T_0 + \frac{1}{8}r^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos^2(\phi) & 0 & 0 & \cos^2(\phi) \\ \sin^2(\phi) & \sin^2(\phi) & 0 & 0 \\ -1 & -\sin^2(\phi) & 0 & -\cos^2(\phi) \end{pmatrix} + O(r^3). \quad (3.43)$$

En este orden, dos de las tres componentes de espín pueden ser estimadas (s_x y s_z) cuando ϕ es diferente de un múltiplo de $\pi/2$, inclusive en la recta diagonal, es decir, $\phi = \pi/4$. En este caso, los observables σ_x y σ_z son estimados como

$$s_z = \frac{8}{r^2 \cos^2(\phi)} P_{-+} - 1 \quad (3.44)$$

y

$$s_x = \frac{8}{r^2 \sin^2(\phi)} P_{+-} - 1. \quad (3.45)$$

La estimación no puede ser hecha para observables por fuera del plano XZ porque las probabilidades no dependen de s_y . Cabe notar que la ligadura $\sum_{ij} p_{ij} = 1$ se satisface para cualquier orden. A tercer orden en la expansión

$$\mathbb{T} \approx T_0 + \frac{1}{8} r^2 T_2 + \frac{1}{32} r^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2(\phi) \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(\phi) \sin^2(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi) \sin(\phi) (\sin(\phi) - \cos(\phi)) & 0 \end{pmatrix} + O(r^4). \quad (3.46)$$

A pesar de la dependencia de s_y en las probabilidades, los tres componentes del vector de Bloch no pueden ser estimadas porque p_{--} es aún cero y se necesitan al menos tres probabilidades linealmente independientes. Sólo las componentes en las direcciones $(0, \frac{1}{4}r \sin \phi, 1)$ y $(1, -\frac{1}{4}r \cos \phi, 0)$ pueden ser estimadas como

$$s_z + \frac{1}{4} r \sin \phi s_y = \frac{8P_{-+}}{r^2 \cos^2 \phi} - 1 \quad (3.47)$$

y

$$s_x - \frac{1}{4} r \sin \phi s_y = \frac{8P_{+-}}{r^2 \sin^2 \phi} - 1, \quad (3.48)$$

la componente en la dirección del vector $(\frac{1}{4}r \cos \phi, 1, -\frac{1}{4}r \sin \phi)$ no puede ser estimada. A cuarto orden, la reconstrucción del estado puede ser realizada completamente. En otras palabras, para estimar el estado inicial del sistema completo con mediciones débiles, es necesario desarrollar muchos más ejecuciones del experimento que las necesarias para estimar las tres componentes del vector de Bloch cuando se toman parámetros de acople arbitrarios.

Conclusiones

Acoplar un sistema auxiliar, en contacto con el ambiente, al sistema que se quiere medir permite estimar cualquier componente de espín ajustando de manera adecuada la interacción entre los dos sistemas como se muestra en el capítulo 2 y apéndice A. El estado inicial del sistema, del cual se tiene control (aparato), debe ser escogido por conveniencia para obtener información sobre el observable. Además, las mediciones pueden ser proyectivas o borrosas obteniendo en cualquiera de las dos el valor esperado del observable.

La generalización a dos aparatos de medida, que miden componentes ortogonales de espín, permite, en la mayoría de los casos, medir las tres componentes de espín simultáneamente. Como consecuencia se puede hacer estimación del estado inicial del sistema. La medición es también descrita en términos de POVM como una medida generalizada.

En este modelo se muestra como cada aparato afecta al otro, puesto que, efectivamente, el observable que mide cada aparato es diferente al que mediría en ausencia del otro aparato. Además, la información mutua, correspondiente a las coincidencias mide otro observable que, generalmente, es diferente a los observables que miden los aparatos por separado.

Una interpretación geométrica de la estimación es posible, debido a la representación por medio de vectores asociados a los observables que se pueden medir. Asimismo, el volumen del paralelepípedo da cuenta de la posibilidad de medición de tres componentes linealmente independientes.

Existe un conjunto infinito de puntos en el espacio de parámetros de acople donde no se puede hacer la estimación completa, en estos valores de los parámetros las mediciones son informacionalmente incompletas y corresponden a los valores en los cuales el volumen del paralelepípedo es cero.

Las mediciones débiles permiten medir dos, o incluso, tres componentes de espín bajo la salvedad de que necesitan un número más grande de corridas del experimento para lograr la convergencia.

La reducción a mediciones "proyectivas" simultáneas permite medir solamente dos componentes de espín. El hecho de abordar mediciones "borrosas" simultáneas hace posible la medición de las tres componentes de espín.

Perspectivas

- Con este tipo de modelos, si se cambian aleatoriamente los ingredientes (el Hamiltoniano de interacción, el estado inicial de los sistemas auxiliares y los grados de libertad de interacción con el ambiente) ¿Qué probabilidad habría de lograr hacer estimación de estado?
- Identificar los aspectos necesarios para lograr la estimación de un sistema de 3 niveles o más, es decir, el número de sistemas auxiliares o el número de niveles de cada sistema auxiliar.
- Caracterizar adecuadamente el error dependiente del número de corridas del experimento para analizar cuantitativamente convergencia. Esto es, abordar el tema de estimación con rigurosidad.
- Generalizar a casos en los cuales la dinámica unitaria y no-unitaria no es separable para analizar que sucede con el sistema y las posibles lecturas del aparato. Ya que nuestro modelo se hizo la aproximación de interacción corta entre el sistema y el aparato para hacer una evolución separable.

A. Anexo: Modelo de Medición de la primera Componente de Espín

Una construcción similar a la mostrada en el capítulo 2 se puede hacer para estimar el valor esperado de la primera componente de espín para una partícula de espín 1/2. En este caso el acoplamiento con el sistema-objeto es mediante el observable asociado a la componente x de espín, ésto es, la matriz de Pauli σ_x . La evolución unitaria está dada por el operador Hamiltoniano en forma de proyectores

$$H(t) = g_B(t)\Pi_{+x}^S \otimes \Pi_+^B = g(t) |+_x^{S+B}\rangle \langle +_x^{S+B}| \quad (\text{A.1})$$

donde $g(t)$ es la función de acople de sistema-objeto con el sistema auxiliar, $\Pi_{+x} = |+_x\rangle \langle +_x|$ es el proyector asociado al autovector $|+_x\rangle$ de autovalor +1 del operador σ_x , los subíndices S y B representan a estados u operadores del sistema y del aparato, respectivamente. La función g se hará $g(t) = \hbar\theta\delta(t)$, donde θ será una constante de acople adimensional que brinda información a cerca de la intensidad de interacción, \hbar es la constante de Planck y $\delta(t)$ es la función delta de Dirac. Todo esto en función de que una medición ocurre en un muy pequeño intervalo de tiempo y además, la interacción es mucho más fuerte que cualquier otra interacción (ya sea decoherencia o la acción de otro sistema cuántico).

El sistema-aparato es una partícula de espín 1/2, éste está sumergido en un reservorio. Debido a la interacción sistema auxiliar con el sistema macroscópico se produce un proceso de decoherencia, y la evolución del sistema-objeto y sistema-aparato está dado por la ecuación maestra

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] - \gamma_B ((I^S \otimes \sigma_x^B)\rho(I^S \otimes \sigma_x^B) - \rho), \quad (\text{A.2})$$

donde γ_B denota la tasa de decoherencia asociada al baño. El estado inicial global (S+A) es separable, esto es,

$$\rho(0) = \rho^S(0) \otimes |+_x^B\rangle \langle +_x^B|. \quad (\text{A.3})$$

Sin pérdida de generalidad se consdira el estado inicial del sistema-objeto como un estado puro

$$\rho^S(0) = |\psi_0^S\rangle \langle \psi_0^S| = (\alpha |+\rangle + \beta |-\rangle)(\alpha^* \langle +| + \beta^* \langle -|) \quad (\text{A.4})$$

El estado completo, después de que la interacción entre el sistema-objeto y sistema-aparato es encendida y apagada, es

$$\begin{aligned} |\psi(0^+)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta \Pi_{+x}^S \Pi_{+x}^B} |\psi_0^S\rangle \otimes (|+^B\rangle + |-^B\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=\pm} U_i |\psi_0^S\rangle |i^B\rangle, \end{aligned}$$

donde $U_+ = e^{-i\theta \Pi_{+x}^S}$ y $U_- = I$. Para expresar los resultados de una manera abreviada se cambia de base el estado del sistema-objeto, a la base de autoestados de la matriz de Pauli σ_x , esto es,

$$|\psi_0^S\rangle = \alpha |+^S\rangle + \beta |-^S\rangle = \zeta |+^S_x\rangle + \eta |-^S_x\rangle,$$

donde $\eta = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}$ y $\zeta = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}$. El estado completo posterior a la interacción entre objeto y aparato es

$$|\psi(0^+)\rangle = |s_+\rangle |+^B\rangle + |s_-\rangle |-^B\rangle, \quad (\text{A.5})$$

donde $|s_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\theta} \eta |+^S_x\rangle + \zeta |-^S_x\rangle)$ y $|s_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta |+^S_x\rangle + \zeta |-^S_x\rangle)$. A causa de que el espín del aparato está sumergido en un reservorio, el estado pierde coherencia. Ésto se refleja en la evolución dada por el operador Liouvilliano (A.2). El cual tiene la misma forma que en el caso en que se medía la tercera componente de espín (2.2). La interacción con el reservorio funciona como medida fuerte (*strong measurement*) haciendo que sólo los términos de la diagonal, en la base de autovectores de σ_x , sean apreciables en tiempos mayores que $1/\gamma_B$.

Se cambia de base el estado (A.5) a la base de vectores que hacen que σ_x^B sea diagonal para la parte asociada a el aparato B. Se encuentra que

$$|\psi(0^+)\rangle = |d_+\rangle |+^B_x\rangle + |d_-\rangle |-^B_x\rangle, \quad (\text{A.6})$$

donde

$$|d_+\rangle = \frac{|s_+\rangle + |s_-\rangle}{\sqrt{2}} = \eta \left(\frac{e^{-i\theta} + 1}{2} \right) |+^S_x\rangle + \zeta |-^S_x\rangle \quad (\text{A.7})$$

y

$$|d_-\rangle = \frac{|s_+\rangle - |s_-\rangle}{\sqrt{2}} = \eta \left(\frac{e^{-i\theta} - 1}{2} \right) |+^S_x\rangle. \quad (\text{A.8})$$

Luego el estado final para tiempos muy grandes, comparados con el tiempo de decoherencia $\tau_D = 1/\gamma_B$, es

$$\rho_\infty = |d_+\rangle \langle d_+| \otimes |+^B_x\rangle \langle +^B_x| + |d_-\rangle \langle d_-| \otimes |-^B_x\rangle \langle -^B_x|, \quad (\text{A.9})$$

de nuevo, este resultado muestra que hay una mezcla estadística entre el estado del sistema-objeto y el sistema-aparato, mas no una correlación cuántica. Para probar la última afirmación se calcula la concurrencia para el estado $|\psi(0^+)\rangle$ y para el estado ρ_∞ . Los valores de

conurrencia se obtienen de la ecuación dada por Wootters (2.9). Los valores obtenidos son

$$C(|\psi(0^+)\rangle) = \sqrt{2|\eta|^2|\zeta|^2(1 - \cos\theta)} \quad (\text{A.10})$$

y

$$C(\rho_\infty) = 0, \quad (\text{A.11})$$

estos valores son los mismos valores obtenidos en el capítulo 1 para el caso de la medición de la tercera componente de espín, salvo que se cambian los valores de α y β por η y ζ .

Las probabilidades de obtener cada posible resultado son obtenidas a partir de la normalización de los estados $|d_+\rangle$ y $|d_-\rangle$. Las correspondientes probabilidades son

$$P_+ = \langle d_+|d_+\rangle = |\eta|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + |\eta|^2 \quad (\text{A.12})$$

y

$$P_- = \langle d_-|d_-\rangle = |\eta|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (\text{A.13})$$

A partir de estas probabilidades se puede estimar el valor esperado de σ_x de la siguiente manera

$$|\eta|^2 - |\zeta|^2 = \alpha\beta^* + \alpha^*\beta = \langle \sigma_x \rangle$$

Despejando $|\eta|^2$ y $|\zeta|^2$ en término de P_+ y P_- se tiene

$$|\eta|^2 = \frac{2}{1 - \cos\theta} P_-$$

y

$$|\zeta|^2 = P_+ - \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} P_-.$$

Luego

$$|\eta|^2 - |\zeta|^2 = -P_+ + \frac{3 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} P_-$$

Esto es, los coeficientes c_1 y c_2 que multiplican a las probabilidades para estimar $\langle \sigma_x \rangle$ son los mismos que los obtenidos en el primer capítulo. De hecho, esto se puede observar desde el cálculo de las probabilidades, puesto que son las mismas que en el modelo de medición de la tercera componente intercambiando $\alpha \rightarrow \eta$ y $\beta \rightarrow \zeta$.

POVM

En este caso los operadores se van a encontrar por inspección, siendo una forma mucho más sencilla pero menos metódica. Observemos que

$$E_+ |\psi_0^S\rangle = |d_+\rangle = \eta \left(\frac{e^{-i\theta} + 1}{2} \right) |+_x\rangle + \zeta |-_x\rangle, \quad (\text{A.14})$$

por tanto

$$E_+ = \frac{e^{-i\theta} + 1}{2} |+_x\rangle \langle +_x| + |-_x\rangle \langle -_x|, \quad (\text{A.15})$$

o en forma matricial

$$E_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{e^{-i\theta}+3}{2} & \frac{e^{-i\theta}-1}{2} \\ \frac{e^{-i\theta}-1}{2} & \frac{e^{-i\theta}+3}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

y

$$E_- |\psi_0^S\rangle = |d_-\rangle = \eta \left(\frac{e^{-i\theta} - 1}{2} \right) |+_x\rangle, \quad (\text{A.17})$$

luego

$$E_- = \frac{e^{-i\theta} - 1}{2} |+_x\rangle \langle +_x|. \quad (\text{A.18})$$

En forma matricial

$$E_- = \frac{e^{-i\theta} - 1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

A partir de los operadores de Kraus se encuentran los operadores de medición (POVM) o efectos

$$M_+ = E_+^\dagger E_+ = \cos^2 \frac{\theta}{2} |+_x\rangle \langle +_x| + |-_x\rangle \langle -_x| \quad (\text{A.20})$$

$$M_+ = E_+^\dagger E_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 1 & -\sin^2 \frac{\theta}{2} \\ -\sin^2 \frac{\theta}{2} & \cos^2 \frac{\theta}{2} + 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

y

$$M_- = E_-^\dagger E_- = \sin^2 \frac{\theta}{2} |+_x\rangle \langle +_x| \quad (\text{A.22})$$

$$M_- = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.23})$$

los cuales satisfacen $M_+ + M_- = I$. Para este caso las mediciones también son borrosas (*unsharp measurements*) como consecuencia de la relación de conmutación entre los efectos $[M_+, M_-] = 0$.

Al igual que en el caso comentado en el capítulo 1, la mediciones son proyectivas para los valores de $\theta = (2n+1)\pi$, para n entero. Las matrices de Kraus toman la forma $E_+ = |-_x\rangle \langle -_x|$ y $E_- = |+_x\rangle \langle +_x|$. En razón a que la medición es proyectiva también es una medición nítida (*sharp measurement*).

B. Anexo: Componentes de la Matriz

\mathbb{D}

Las componentes del vector \vec{a} encontradas por medio de $a_\mu = Tr[A\sigma_\mu]/2$ son

$$a_0(\theta_A, \theta_B) = \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right) + \frac{\theta_B \sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_C}{2}\right)}{\theta_C} + \cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_C}{2}\right) \right),$$

$$a_1(\theta_A, \theta_B) = \frac{1}{8} \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_C}{2}\right) - \frac{\theta_B \cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_C}{2}\right)}{\theta_C} \right),$$

$$a_2(\theta_A, \theta_B) = -\frac{\theta_A \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_C}{2}\right)}{8\theta_C}$$

y

$$a_3(\theta_A, \theta_B) = -\frac{1}{8} \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \left(\frac{\theta_A \cos\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_C}{2}\right)}{\theta_C} + \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \right).$$

Las componentes del vector \vec{b} se encuentran teniendo en cuenta que

$$b_0(\theta_A, \theta_B) = a_0(\theta_B, \theta_A),$$

$$b_1(\theta_A, \theta_B) = a_3(\theta_B, \theta_A),$$

$$b_2(\theta_A, \theta_B) = -a_2(\theta_B, \theta_A),$$

$$b_3(\theta_A, \theta_B) = a_1(\theta_B, \theta_A).$$

Para el último vector, es decir, el coeficiente del término kl se satisface

$$c_3(\theta_A, \theta_B) = c_1(\theta_B, \theta_A),$$

y las componentes de la tercera columna son

$$c_0 = \frac{1}{32} \left(4 \cos\left(\frac{\theta_C}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_A}{2} + \frac{\theta_B}{2}\right) + \cos(\theta_A - \theta_B) + \cos(\theta_A) + \cos(\theta_B) + 1 \right),$$

$$c_1(\theta_A, \theta_B) = \frac{1}{8} \left(\cos\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_A - \theta_B}{2}\right) - \frac{\theta_B \sin\left(\frac{\theta_C}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_A + \theta_B}{2}\right)}{\theta_C} \right), \quad (\text{B.1})$$

y

$$c_2 = -\frac{1}{8} \sin\left(\frac{\theta_A}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_B}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_A - \theta_B}{2}\right),$$

Bibliografía

- [Aharonov et al., 1988] Aharonov, Y., Albert, D. Z., y Vaidman, L. (1988). How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-(1/2) particle can turn out to be 100. *Physical Review Letters*, 60(14):1351.
- [Allahverdyan et al., 2013] Allahverdyan, A. E., Balian, R., y Nieuwenhuizen, T. M. (2013). Understanding quantum measurement from the solution of dynamical models. *Physics Reports*, 525(1):1–166.
- [Altepeter et al., 2004] Altepeter, J. B., James, D. F., y Kwiat, P. G. (2004). *Quantum State Estimation*, Capítulo 4. Springer, corregida edición.
- [Aquino y Mehmani, 2007] Aquino, G. y Mehmani, B. (2007). Simultaneous measurement of non-commuting observables. En Nieuwenhuizen, T. M., editor, *Beyond the Quantum*, páginas 115–124. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [Arthurs y Kelly, 1965] Arthurs, E. y Kelly, J. L. (1965). On the simultaneous measurement of a pair of conjugate observables. *Bell System Technical Journal*, 44(4):725–729.
- [Berrêdo et al., 1998] Berrêdo, R., Faria, J., Camargo, F., Nemes, M., Borges, H., Romero, K., Piza, A., y Salgueiro, A. (1998). On the Physical Content of Lindblad Form Master Equations. *Physica Scripta*, 57:533–534.
- [Blume-Kohout, 2010] Blume-Kohout, R. (2010). Optimal, reliable estimation of quantum states. *New Journal of Physics*, 12.
- [Born, 1926] Born, M. (1926). Quantenmechanik der Stoßvorgänge. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 38(11):803–827.

- [Choudhary Sujit y Konrad, 2014] Choudhary Sujit, T. y Konrad, H. U. (2014). Implementation schemes for unsharp measurements with trapped ions. *Physical Review A*.
- [Claude Cohen-Tannoudji, 1991] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, F. L. (1991). *Quantum Mechanics*, volumen 1,2. Wiley.
- [de Muynck, 2004] de Muynck, W. M. (2004). *Foundations of Quantum Mechanics, an Empiricist Approach*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. Reimpreso: ©2004 Kluwer Academic Publishers New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow.
- [Dirac, 1932] Dirac, P. (1932). *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford Science Publications, Cambridge. Primera Edición 1930, Segundo Edición 1935, Tercera Edición 1947.
- [Fock, 1978] Fock, V., editor (1978). *Fundamentals of Quantum Mechanics*. Mir Publishers, Leningrad.
- [Greiner, 2000] Greiner, W. (2000). *Quantum Mechanics : An Introduction*. Springer, Frankfurt, Germany, cuarta edición.
- [Griffiths, 1995] Griffiths, D. J. (1995). *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, Upper Saddle River.
- [Hacohen-Gourgy et al., 2016] Hacohen-Gourgy, S., Martin, L. S., Flurin, E., Ramasesh, V. V., Whaley, K. B., y Siddiqi, I. (2016). Quantum dynamics of simultaneously measured non-commuting observables. *Nature*, 538(7626):491–494.
- [Heinz-Peter Breuer, 2002] Heinz-Peter Breuer, F. P. (2002). *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, Great Clarendon Street.
- [Heisenberg, 1927] Heisenberg, W. (1927). Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. (Alemán) [On the ideological content of quantum theoretical kinematics and mechanics]. *Zeitschrift für Physik*, 43(3–4):172–198. Traducido al inglés en [Wheeler y Zurek, 1983, páginas 62–84]. Éste es el artículo en el cual Heisenberg introduce el famoso Principio de Incertidumbre (Unschärferelation or Ungenauigkeit (impreciseness)).

- [Holevo, 2011] Holevo, A. S. (2011). *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*. Edizioni della Normale, primera edición.
- [Konrad, 2003] Konrad, T. (2003). *Less is more: on the Theory and Application of Weak and Unsharp Measurements in Quantum Mechanics*. Tesis Doctoral, University of Konstanz.
- [Lüders, 1951] Lüders, G. (1951). Über die Zustandsänderung durch den Meßprozeß. (Alemán) [concerning the state-change due to the measurement process]. *Annalen der Physik*, 15:262.
- [Nielsen, 2000] Nielsen, M; Chuang, I., editor (2000). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge, New York.
- [Perarnau-Llobet y Nieuwenhuizen, 2017] Perarnau-Llobet, M. y Nieuwenhuizen, T. M. (2017). Simultaneous measurement of two noncommuting quantum variables: Solution of a dynamical model. *Phys. Rev. A*, 95:052129.
- [Peres, 1974] Peres, A. (1974). Quantum Measurements Are Reversible. *Am. J. Phys.*, 42:886.
- [Peres, 1986] Peres, A. (1986). When is a Quantum Measurement? *Annals New York Academy of Sciences*, 480:438–448.
- [Peres, 2002] Peres, A., editor (2002). *Quantum Theory: Concepts and Methods*. Kluwer Academic Publishers, New York.
- [von Neumann, 1932a] von Neumann, J. (1932a). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. (Alemán) [*Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*], página 262. Verlag von Julius Springer, Berlin. Reimpreso: Dover Publications (1943); Presses Universitaires de France (1947); Madrid, Institute de Matematicas “Jorge Juan” (1949). Traducido del alemán por Robert T. Beyer, Princeton University Press (1955).
- [von Neumann, 1932b] von Neumann, J. (1932b). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. (Alemán) [*Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*], páginas 352–353. Verlag von Julius Springer, Berlin. Reimpreso: Dover Publications (1943); Presses Universitaires de France (1947); Madrid, Institute de Matematicas “Jorge Juan” (1949).

Traducido del alemán por Robert T. Beyer, Princeton University Press (1955).

[Wheeler y Zurek, 1983] Wheeler, J. y Zurek, W. (1983). *Quantum Theory and Measurement*. Princeton University Press, 41 William Street, primera edición.

[Wootters, 1998] Wootters, W. K. (1998). Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2245–2248.

[Zurek, 1991] Zurek, W. (1991). Decoherence and the transition from quantum to classical. *Physics Today*, 10:36–44.