La máxima pragmática peirceana: modelos categóricos, dualización, aproximaciones algebraicas y modalizaciones lógicas

Tesis de doctorado

Gustavo Eduardo Arengas Reinés

Director
Fernando Zalamea

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá
Septiembre 2018

Contenido

Agradecimientos

A Dios por estar siempre a mi lado. A mis padres, a mis hermanas y a mi novia por su apoyo. Al profesor Fernando Zalamea por su guía.

Proemio. Peirce y Benjamin

> La visión rica, compleja y sobre todo objetiva de la realidad, parece más una ilusión metodológica que una eventualidad del arte, puesto que este siempre responde a una concepción (una cosmovisión, diría Goldman) donde el emisor del mensaje está incluido, y con él su clase, su cultura, su tiempo y circunstancia. *Los dictadores Latinoamericanos*, Ángel Rama (p. 12).

En la cita anterior, podemos cambiar la palabra *arte* perfectamente por ciencia o cualquier otra forma de conocimiento: aún para las matemáticas, considerada por muchos como un cúmulo de verdades necesarias, nos basta un repaso de su historia para darnos cuenta que sus construcciones han respondido más a circunstancias socioculturales en las que han estado inmersos los matemáticos como creadores, que a descubrimientos objetivos llevados a cabo en una ciencia positiva. Utilizando una de las metáforas más antiguas, pero desde nuestro punto de vista más vigentes para describir la situación del ser humano con respecto al conocimiento, estamos encerrados en una suerte de caverna platónica, sin la posibilidad de ser sacados completamente de ella para ver el mundo tal cual es, pero a lo largo del tiempo hemos desarrollado herramientas que nos permiten desde nuestra posición interpretar con mayor precisión las sombras que vemos. La historia de la ciencia nos habla de las victorias relativas a las que nos han llevado el uso constante de estas herramientas, como son, por ejemplo, el método científico y la matematización de ciencias tan dispares como el electromagnetismo, la economía y la biología. En esta tesis discutiremos otra de ellas: el pragmatismo peirceano.

Para entender la obra filosófica de Charles Sanders Peirce (1839-1914) hay que observar que él, en primer lugar, es por formación y vocación un científico: graduado en química en Harvard, trabajó durante décadas en astronomía, geodesia y medidas pendulares en la United States Coast Survey, para finalmente ser profesor de lógica en la Universidad Johns Hopkins. Su pragmatismo es el producto de las reflexiones a que le condujo toda una vida dedicada a la investigación. La siguiente anécdota recogida en [74] es la mejor introducción que se puede hacer a su pensamiento:

> En mayo de 1883, [Peirce] se apresta a realizar "una nueva aplicación del péndulo a la metrología". Con un meticuloso experimento, in-

tenta calcular la razón entre la yarda y el metro con la "máxima exactitud posible" en ese entonces. Poniendo a oscilar simultáneamente dos péndulos en Massachusetts -el uno, con graduaciones en yardas, oscilando a 62 °F, la temperatura estándar de la yarda, y el otro, con graduaciones en metros, oscilando a 0 °C, temperatura estándar del metro- detecta en primera instancia dos patrones de medida; luego, intercambia las varillas afiladas de los péndulos y repite el experimento, obteniendo otros dos patrones suplementarios; compara después los resultados con barras oficiales de un metro y de una yarda disponibles en Estados Unidos; finalmente, envía el péndulo-yarda a Inglaterra y el péndulo-metro a Francia, para que se repitan los experimentos y se comparen con los patrones estándar guardados en cada país. El conjunto de las correlaciones obtenidas permite eliminar así sesgos indeseados y asegurar la corrección de las mediciones.

El pragmatismo peirceano puede verse como una ampliación de este experimento: una búsqueda de la verdad objetiva mediante la eliminación progresiva de errores por medio de la contrastación de estas verdades parciales. Pero vamos por partes. Según Peirce, el conocimiento sólo puede producirse a través de signos. Estos signos, en su forma más general, "pueden verse como variante de un principio general de substitución: un 'signo' es 'algo que substituye algo para algo'" [72]. Así, por su misma definición, los signos son triádicos. Distingamos sus partes: "-1- substituye -2- para -3-. El término '2' es el 'objeto' del signo; el término '1', que le substituye, es el 'representamen' del signo; el término '3' es el medio, el contexto de interpretación, la 'cuasi-mente' donde se realiza la substitución; dentro de esa 'cuasi-mente', el representamen adquiere una nueva forma, llamada por Peirce el 'interpretante'" [72]. Centrémonos en este interpretante del signo, el efecto causado por el signo en su capacidad significativa. Al estudiar en detalle estos efectos en su teoría del *phaneron*, "el contenido total de cualquier conciencia"[1], Peirce distingue tres clases de interpretantes en correspondencia a sus tres categorías cenopitagóricas[2]:

1. Sentimiento. Peirce pone el siguiente ejemplo: "el aire para una guitarra, si se considera como lo que ha de transmitir las emociones musicales genuinas o simuladas de su compositor, sólo puede completar su función excitando sentimientos de respuesta en el oyente"[3].

---

[1] *La base del pragmaticismo en la Faneroscopia* (1905)[57].

[2] Siguiendo [72], las categorías peirceanas pueden describirse con palabras clave y conceptos fundamentales de la manera siguiente:

1. PRIMERIDAD (Firstness): inmediatez, impresión primera, frescura, sensación, predicado unario, azar, posibilidad.
2. SEGUNDIDAD (Secondness): acción-reacción, efecto, otredad, resistencia, relación binaria, hecho, actualidad.
3. TERCERIDAD (Thirdness): mediación, continuidad, orden, conocimiento, relación ternaria, ley, generalidad, necesidad.

[3] *Pragmatismo* (1907)[57].

2. Esfuerzo. "De ese modo, cuando un oficial de instrucción da a la compañía de infantería la orden "¡pongan armas!", si eso ha de actuar realmente como un signo y no de una forma puramente "fisiológica" (uso esta distinción inexacta, más que perder tiempo en explicaciones), debe haber primero, como en toda acción de los signos, un interpretante-sentimiento -una sensación de comprender el significado- que a su vez estimula inmediatamente en los soldados el ligero esfuerzo requerido para llevar a cabo el movimiento. Ese efecto causado por el signo en su capacidad significativa es, por definición, un interpretante suyo"[4].

3. Interpretante triádico. Es el "interpretante *par excellence*[...], la comprensión intelectual del significado de un signo"[5].

La determinación de este interpretante triádico constituye la clave del pragmatismo. Recurriendo a la abstracción hipostática, "ese proceso por el que consideramos un pensamiento como una cosa, hacemos a un signo interpretante del objeto de un signo"[6], vemos que este es en primer lugar un signo, el cual a su vez tiene un interpretante triádico que es de nuevo un signo, dando lugar a un nuevo interpretante, en un proceso *ad infinitum*. Ahora bien, Peirce pensaba que este proceso siempre convergía, tendía siempre a un interpretante intelectual último, que eran los hábitos (autocontrolados). Esta equiparación de creencia con acción es la base de la formulación de la máxima pragmática:

> El sentido entero de cualquier símbolo consiste en el total de todos los modos generales de conducta racional que, condicionalmente sobre todas las diferentes circunstancias posibles, se seguiría al aceptar el símbolo[7].

Un ejemplo nos ayudará a explicar la utilidad de esta máxima en la investigación científica. Haremos una lectura peirceana de una de las obras más ambiciosas del siglo XX: el *Libro de los Pasajes* de Walter Benjamin. En 1927 este crítico alemán se propuso estudiar los pasajes que florecieron en París a mediados del siglo XIX; pero él estaba inmerso en un gran movimiento de refundación metodológica de la historia que le impedía utilizar métodos tradicionales en su trabajo: "Leer en el futuro es difícil, pero ver *puramente* en el pasado es más difícil todavía: digo *puramente*, es decir, sin mezclar en esta mirada retrospectiva todo lo que ha tenido lugar en el intervalo" (Grillparzer citado en [11, p. 472]). Aunque Benjamin pensaba que esta *pureza* de la mirada no es que fuera difícil de alcanzar, sino que era más bien imposible, su objetivo era comprobar "en la práctica lo concreto que se puede ser en contextos histórico-filosóficos"[11, p. 897]. En sus notas, y sobre todo en su correspondencia, nos dejó sólo anotaciones escuetas del que sería su método: "determinar la figura específica del mundo objetual del siglo XIX (quizá a partir de su cara oculta, de sus desechos, restos,

[4] Ibíd.
[5] Ibíd.
[6] *La base del pragmaticismo en las ciencias normativas* (1906)[57].
[7] *Temas del pragmaticismo* (1905)[57].

ruinas)" (carta de Adorno a Benjamin 1935 [11, p. 932]); "el intento de retener la imagen de la historia en las más insignificantes fijaciones de la existencia, en sus desechos, por así decirlo" [11, p. 935]. Mas, ¿cómo pasar de una imagen construida a partir de ruinas a una que represente lo más fielmente posible la realidad? ¿Cuál es el sustento filosófico en que se basa el método?

Tratemos de esbozar una respuesta pragmaticista. Según la máxima, el significado total de los pasajes, vistos como un signo, consiste en todos los modos de conducta racional que él produce, al recorrer todas las circunstancias posibles. Esto es precisamente lo que hace Benjamin a lo largo de su obra: estudiar el efecto que produjeron los pasajes en el *total* de la sociedad de su tiempo, desde caricaturistas como Grandville y grabadores como Meryon, pasando por poetas como Baudelaire hasta novelistas como Hugo y Moilin, desde traperos y prostitutas hasta los más poderosos políticos como Haussmann y Napoleón III, revolucionarios como Blanqui, utopistas como Saint-Simon y Fourier hasta asesinos como Louvel, desde los habitantes de París hasta los que sólo iban de paso, etcétera. De hecho, como discutiremos en el capítulo 4, Benjamin utiliza técnicas muy precisas para abarcar el *todo lo posible* que exigiría la máxima. Así, cuando este crítico habla de buscar ruinas o restos, detecta en realidad muy sutiles formas de conducta ocasionadas por los pasajes. Veamos un ejemplo concreto. Una de las figuras sobre la que Benjamin pone el foco es la del *Flâneur*, aquella persona que se dedica a vagar por las calles, sin objetivo ni rumbo fijo, por el mero placer de hacerlo. En cierto momento [11, p. 422] se sorprende que esta haya surgido en París y no en Roma: "¿Acaso los sueños no discurren en Roma por calles bien dispuestas? ¿Acaso la ciudad no está demasiado llena de templos, plazas recoletas y santuarios nacionales como para que, indivisa, pueda ingresar en el sueño del paseante con cada adoquín, cada letrero comercial, cada escalón y cada portal?" En cambio, a mediados del siglo XIX, París estaba en un gran proyecto de renovación urbana, por lo que se habían demolido muchas calles y edificios, los carruajes eran peligrosos para los transeúntes y muy ruidosos y se formaban lodazales cada vez que llovía. En este panorama veamos el efecto de los pasajes [11, p. 71]:

> Hasta 1870, los carruajes fueron los dueños de la calle. Apenas se podía caminar por las estrechas aceras, y por eso la *flânerie* se realizaba con preferencia en los pasajes, que ofrecían protección contra el tiempo y el tráfico. "Nuestras calles más amplias y nuestras aceras más espaciosas han vuelto fácil la dulce *flânerie*, imposible para nuestros padres en otro sito que no fueran los pasajes." Edmond Beaurepaire, *Paris d'hier et d'aujourd'hui. La chronique des rues*, París, 1900, p. 67.

El estudio de la *flânerie* en cuanto hábito es, en un sentido benjaminiano (le dedica decenas de páginas) y pragmaticista, el estudio de los pasajes.

Nos gustaría centrarnos en el proceso por el cual los signos se van transformando en la mente hasta llegar al interpretante intelectual último. Sigamos con el ejemplo del *Libro de los Pasajes*. Esta obra, por razones que no vale la pena mencionar ahora, está conformada casi en su totalidad por citas de libros, datos sueltos y reflexiones del mismo Benjamin, de la extensión de aproximadamente un párrafo. Supongamos por un momento que no conocemos absolutamente nada de los pasajes parisinos. Leamos el primero de los textos que forman el libro:

> "Al hablar de los bulevares del interior", dice la *Guía ilustrada de París*-todo un retrato de la ciudad del Sena y de sus alrededores por el año 1852-"mencionamos varias veces los pasajes, que desembocan en ellos. Estos pasajes, una nueva invención del lujo industrial, son galerías cubiertas del cristal y revestidas de mármol que atraviesan edificios enteros, cuyos propietarios se han unido para tales especulaciones. A ambos lados de estas galerías, que reciben la luz desde arriba, se alinean las tiendas más elegantes, de modo que un pasaje semejante es una ciudad, e incluso un mundo pequeño, en que el comprador ávido encontrará todo lo que necesita. Ante un chubasco repentino, se convierten en el refugio de todos los que se han visto sorprendidos, ofreciendo un paseo seguro, aunque angosto, del que también los vendedores sacan provecho".

Ahora tenemos una imagen precisa en nuestra mente de lo que son los pasajes; pero esta es necesariamente subjetiva, corresponde a la que tenía quien redactó esta *Guía*. En cierto sentido, como discutiremos en detalle más adelante, Peirce pensaba que entramos en la mente de este escritor anónimo y percibimos cómo él lo hace. Los otros textos que conforman el libro modifican este primer signo según los vamos contrastando entre sí. Tomemos por ejemplo el siguiente:

> "Desde que el Gobierno socialista se convirtió en propietario legítimo de todas las casas de París, se las entregó a los arquitectos con la orden... de establecer en ellas las *calles-galería*... Los arquitectos llevaron a cabo del mejor modo posible la misión que les fue confiada. En el primer piso de cada casa, tomaron todas las piezas que daban a la calle y echaron abajo los tabiques intermedios, después abrieron amplios vanos en los muros medianeros y obtuvieron de esta manera *calles-galería* que tenían la anchura y la altura de una habitación corriente y ocupaban toda la longitud de una manzana de construcciones. En los barrios nuevos donde las casas contiguas tienen sus pisos poco más o menos a la misma altura, el suelo de las galerías se pudo nivelar de una manera bastante regular... Pero en las casas viejas hubo que elevar o rebajar muchos pisos, y frecuentemente hubo que resignarse a dar al suelo una inclinación un poco rápida o a cortarlo con algunos escalones. Cuando todas las manzanas de casas se encontraron atravesadas por galerías que ocupaban... su primer piso, sólo hubo que reunir entre sí esos tramos dispersos, de manera que constituyeran una red... que abarcara toda la extensión de la ciudad. Es algo que se hizo con facilidad estableciendo en cada calle puentes cubiertos... Puentes semejantes, pero mucho más largos, se tendieron igualmente sobre los diferentes bulevares, sobre

> las plazas y sobre los puentes que atraviesan el Sena, de manera que... un paseante podía recorrer toda la ciudad sin ponerse nunca al descubierto... Desde que los parisinos probaron las nuevas galerías, ya no quisieron poner los pies en las antiguas calles que, decían, sólo eran buenas para los perros." Tony Mollin, *Paris en l'an 2000* [París en el año 2000], París, 1869, pp. 9-11. [A 8 a, 2]

Este texto es muy diferente al primero en cuanto género, intención, posición política del autor e incluso en cuanto a valor histórico en el sentido tradicional. Desde un punto de vista pragmaticista es muy interesante porque los pasajes en cuanto signo tienen como efecto que un novelista se imagine que en el futuro las ciudades estarán formadas exclusivamente por pasajes. Este párrafo afecta el primer signo que ya habíamos construido: las dos imágenes en nuestra mente, se funden en una sola que explica a las dos. Pero esto no acaba aquí: la obra de Benjamin está formada por miles de textos que transforman la imagen de los pasajes en la mente del lector conforme avanza en la lectura. Este es un proceso complejo que podemos explicar de diversas maneras. Benjamin utilizaría los conceptos de *shock* y montaje; en palabras de Adorno, quizás su colaborador más cercano: "La intención de Benjamin era renunciar a toda interpretación manifiesta, dejando aparecer los significados únicamente mediante el montaje chocante del material. [...] Como culminación de su antisubjetivismo, la obra principal solamente debía consistir en citas" [3, p. 24]. En términos peirceanos deberíamos recurrir a la abducción: ante la sorpresa de interpretaciones diferentes de un mismo signo, la mente realiza una conjetura que las explica a todas, la cual se va confirmando o modificando ante cada nuevo hecho.

Esta tesis se basa en el empleo del límite categórico para describir estas transformaciones. ¿Por qué teoría de categorías? Como el lector habrá notado, los conceptos claves del pragmatismo son las ideas de *variación* de los interpretantes, pero al mismo tiempo de una profunda *cohesión* entre ellos, que nos permite construir el interpretante triádico. La reconstrucción se basa en captar qué permanece y qué muta en cada una de las diversas variaciones, para a partir de allí hacer la contrastación. Con respecto a la idea de identidad y cambio, Maddalena propuso definir tres tipos de juicio [43]: *analítico* aquel que pierde identidad a través de un cambio, *sintético* como el que reconoce una identidad a través de un cambio, y *vago* (en posteriores desarrollos [44] renombrado *horótico*) como el que es ciego a una identidad a través del cambio. Veamos cómo la teoría de categorías posee estas tres miradas.

Como se ha notado en [75], la teoría de categorías es el campo natural para el estudio de lo sintético: en ella se estudian los objetos a través de la relaciones externas que tienen con su entorno. El concepto clave es el de "corona" (o para emplear un nombre más benjaminiano, "aura") de un objeto como todos los morfismos que entran o salen de él (sintetizados en los funtores representables). Como ha notado Zalamea, todos los axiomas categóricos se pueden derivar de este concepto. Él también jugará un papel importante en nuestra aproximación: los resultados de la sección 2.2 (donde tratamos de entender el "*todo lo posible*" que aparece dos veces en la máxima pragmática) se basan en una extensión paulatina del aura vía adecuados operadores modales. En el capítulo 4 reescribimos nuestro modelo en términos de la teoría homotópica de tipos. Aquí surge una ligera obstrucción, ya que esta teoría es en esencia analítica, por lo que tendemos a perder la mirada sintética. Para resolverla, nos restringimos a trabajar con aquellos objetos que tienen un sabor categórico: familias sobre **W**-tipos a las que hemos aplicado ciertos operadores modales, que como veremos (sección 3.4) tienen un comportamiento similar a los haces.

A pesar de ser sintética, la teoría de categorías no es completamente ciega a la mirada analítica. El punto conjuntista puede ser recuperado vía morfismos que parten de una familia de generadores. Este giro analítico es la base de importantes resultados categóricos: la existencia de suficientes inyectivos en categorías abelianas [31, Lema 1], la semántica de Kripke-Joyal [15, Tomo 3, sección 6.6], etc. Este giro de miradas también jugará un papel importantísimo en este trabajo: en la sección 1.1 mostramos cómo, bajo ciertas condiciones, los principales conceptos categóricos definidos sintéticamente pueden ser caracterizados en términos de generadores; en la subsección 2.1.1, cómo la lógica interna de algunas categorías también es propensa a ser capturada analíticamente; y en la proposición 2.3.17, cómo los espacios de interpretaciones (a los cuales damos el nombre de *pragmáticos*) son propensos a ser estudiados de las dos formas.

La *horosis*, "proveniente de *horos* (borde, frontera), puede definirse en primera instancia como el estudio de las transferencias alrededor de bordes naturales del saber y yace, por tanto, en la frontera entre análisis y síntesis" [75]. Aunque es un concepto relativamente poco conocido en categorías, desde el mismo origen de la teoría de topos en el *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie* tenemos una noción de frontera [6, Exposición IV, Ejercicio 9.4.8]. Los principales divulgadores de este concepto han sido Lawvere y Reyes en una serie de artículos [36], [38], [39], [40]. Siguiendo ideas de Zalamea [74], [75], utilizamos esta noción de frontera para definir un algoritmo (sección 2.4) para mostrar que la mejor forma de interpretar un signo es situarse en una frontera para encontrar visiones que contrastan con la nuestra.

En resumen, aunque la teoría de categorías es marcadamente sintética, posee herramientas analíticas y horóticas lo suficientemente fuertes para estudiar la identidad en el cambio con el rigor que exige el pragmatismo.

De hecho, en esta idea de modelar procesos cognitivos mediante categorías no somos pioneros; ya matemáticos de la talla de Lawvere, Reyes y Makkai han trabajado en esta dirección (ver por ejemplo [37], [41], [45]). En [41] Lawvere escribió: "an explicit mathematical framework is required for progress in the science of cognition, much as multidimensional diferential calculus has been required for 300 years as a framework for progress in such sciences as thermomechanics and electromagnetics". Si consideramos la matemática en general, el mismo Peirce puede considerarse el padre de esta línea de pensamiento: sus gráficos existenciales son una estructura matemática que busca modelar el surgimiento y la transformación de las ideas. Utilizar un límite (categórico) para modelar el interpretante intelectual último es por tanto una consecuencia directa del pragmatismo y de esta escuela de "matematización" de la cognición. En los diferentes capítulos de esta tesis trataremos de desarrollarla en detalle.

0.1 Contenido de la tesis

En el *capítulo 1* enunciaremos una versión categórica de la máxima pragmática y su dual, a la que le daremos un significado filosófico. Desarrollaremos la técnica de los generadores para probar propiedades universales, la cual jugará un gran papel en capítulos posteriores, pues tiene un fuerte potencial de aplicabilidad en teoría de categorías. Por último revisaremos las subdeterminaciones de estas ideas en las categorías más importantes: topos, categorías abelianas y topológicas.

En el *capítulo 2* nos centraremos en una clase particular de categorías: las de bi-Heyting. Sus buenas propiedades reticulares nos permitirán definir fronteras y operadores modales, esenciales para una adecuada comprensión del pragmaticismo. Mediante el empleo de morfismos parciales, mostraremos cómo la máxima conduce naturalmente a un continuo, donde se puede entender mejor la formación paulatina del interpretante intelectual último.

En el *capítulo 3* trasladamos este modelo a la teoría homotópica de tipos en aras de aprovechar las ventajas computacionales que esta ofrece. Tratamos de mostrar la existencia de conceptos arquetípicos a partir de los cuales se pueden construir los demás que conforman un interpretante. Por último enriquecemos nuestro algoritmo de interpretación mediante el empleo de líneas de identidad y de evolución de las ideas.

En el *capítulo 4* hacemos unas aplicaciones concretas de las ideas desarrolladas a obras literarias, artísticas y filosóficas: profundizamos en nuestra interpretación del *Libro de los Pasajes*, estudiamos la identidad en los *Ensayos* de Montaigne desde un punto de vista semiótico, el *Atlas Mnemosyne* de Warburg como espacio de interpretantes, las similitudes de la *Divina Comedia* con leyendas musulmanas a partir de caminos tipo-teóricos y la interpretación figural de la Biblia en términos de haces topológicos.

Todas las definiciones y proposiciones tomadas, o modificadas, de la literatura previa se encuentran marcadas con un indicador entre paréntesis cuadrados [ ]. Las demás definiciones y proposiciones *no marcadas* son del autor.

1. MP y coMP en teoría de categorías

Sea $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un funtor. Consideraremos los Fi como los diferentes contextos de interpretación de un signo. Como por definición los interpretantes se encuentran en la conciencia de quien interpreta el signo, la categoría $\mathcal{C}$ está representando en cierto sentido el *phaneron* de este intérprete. Dado $g : i \to j$ en $\mathcal{I}$, el morfismo $Fg : Fi \to Fj$ será una contrastación del contexto Fi con el contexto Fj. Observemos que surge inmediatamente una disimetría dada por el orden de la flecha, indicando que estamos viendo los elementos que constituyen Fi dentro del nuevo contexto Fj. Esta disimetría puede surgir de varias maneras: elementos que en Fi aparecen separados pueden estar fusionados en Fj; algunos elementos de Fj pueden no tener correspondencia en Fi, etc. La ruptura de esta disimetría será clave en el capítulo siguiente para formar los espacios de interpretantes.

Un cono [15] es un objeto S en $\mathcal{C}$ con una familia de morfismos $(s_i : S \to Fi)_{i \in ob(\mathcal{I})}$ tal que para toda $g : i \to j$, $Fgs_i = s_j$. Dentro de nuestro modelo un cono será una hipótesis del sentido del signo que concuerda con todos los contextos interpretativos y sus contrastaciones.

Un límite L [15] junto a una familia de morfismos $(l_i : L \to Fi)_{i \in ob(\mathcal{I})}$ será un cono con la siguiente propiedad universal: dado cualquier otro cono S existe un único morfismo $s : S \to L$ tal que $l_i s = s_i$.

$$\begin{tikzcd}
 & & Fi \arrow[dd, "Fg"] \\
S \arrow[r, dashed, "s"] \arrow[urr, bend left, "s_i"] \arrow[drr, bend right, "s_j"'] & L \arrow[ur, "l_i"] \arrow[dr, "l_j"'] & \\
 & & Fj
\end{tikzcd}$$

Entenderemos el límite L como el verdadero sentido del signo. Surgen dos consecuencias inmediatas de esta idea: en primer lugar, surge un concepto "ockhamista" de la verdad, directamente de la propiedad universal, según el cual la explicación completa del signo L, además de ser compatible con todos los

Fi, debe ser la explicación más simple posible (principio de parsimonia), la más cercana a los Fi en un sentido categórico. Por otro lado, el sentido del signo es "constructivista", en el sentido de que puede ser obtenido a partir de los contextos interpretativos mediante un proceso contrastivo. En efecto, recordemos que si $\mathcal{C}$ es una categoría con productos e igualadores, el límite L puede ser obtenido del siguiente modo (ver por ejemplo, [15, vol. 1, p. 60]): definimos en primer lugar los productos $(\pi_k : \prod_{i \in Ob(\mathcal{I})} Fi \to Fk)$ y $(p_{Fg} : \prod_{g \in Mor(\mathcal{I})} Fi \to Fj)$, y los morfismos $\alpha, \beta : \prod_{i \in Ob(\mathcal{I})} Fi \rightrightarrows \prod_{g \in Mor(\mathcal{I})} Fj$ del siguiente modo: α es el único morfismo tal que $p_{Fg} \circ \alpha = \pi_j$ para cada $g \in Mor(\mathcal{I})$, mientras β es el único morfismo tal que $p_{Fg} \circ \beta = Fg \circ \pi_i$; entonces L es el igualador de α y β.

$$\begin{tikzcd}
 & & Fj \\
L \arrow[r, tail, "e"] & \prod_{i \in Ob(\mathcal{I})} Fi \arrow[ur, "\pi_j"] \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] \arrow[d, "\pi_i"'] & \prod_{g \in Mor(\mathcal{I})} Fj \arrow[u, "p_{Fg}"'] \arrow[d, "p_{Fg}"] \\
 & Fi \arrow[r, "Fg"'] & Fj
\end{tikzcd}$$

Esto puede verse más explícitamente cuando $\mathcal{C}$ es una categoría concreta (es decir, donde los objetos pueden verse analíticamente como estructuras sobre conjuntos de puntos, como por ejemplo en las categorías de conjuntos, grupos, grupos abelianos, anillos, módulos, espacios topológicos, etc.) donde

$$L = \{(x_i)_{i \in ob(\mathcal{I})} | x_i \in Fi,\ \forall g : i \to j \in \mathcal{I}\ Fg(x_i) = x_j\},$$

es decir, L es el conjunto formado precisamente por los invariantes relativos de los Fi. De hecho, esta idea se puede extrapolar a cualquier categoría. Dado cualquier objeto S, muchos autores definen un elemento de tipo S de L simplemente como un morfismo $s : S \to L$, por lo que de nuevo podemos ver a L como el objeto formado por los invariantes relativos de todos los tipos de los Fi. Sin embargo, para explotar matemáticamente esta idea en las categorías abstractas, exigiremos la presencia en la categoría de una familia de generadores, como desarrollaremos en detalle en las secciones siguientes.

Ahora fijemos un cono S. Consideraremos S como el interpretante triádico que estudiamos en la página 7. El pragmatismo exige que S sea equivalente al límite L de los interpretantes Fi, afirmación que denominaremos para futuras referencias como MP:

MP: s es un isomorfismo.

La pregunta es ¿qué condiciones se le deben exigir al cono S y a la categoría $\mathcal{C}$ para garantizar que s sea un isomorfismo? Trataremos de responderla en las secciones siguientes. Por ahora sigamos desarrollando esta idea.

Una de las principales virtudes de la teoría de categorías es que nos permite trabajar con enunciados duales, los cuales son obtenidos cambiando el orden de la flechas en las definiciones y proposiciones de la teoría, y así, en sintonía con el espíritu categórico, trabajamos unificadamente situaciones aparentemente dispares. Podemos pensar en dualizar la situación anterior del siguiente modo. Sea $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un funtor. Un objeto T con una familia de morfismos $(t_i : Fi \to T)$ es llamado un cocono si $t_j Fg = t_i$ para cualquier $g : i \to j$. Un colímite es un cocono C con morfismos $(c_i : Fi \to C)$ tal que para cualquier otro cocono T existe un único morfismo $c : C \to T$ tal que $cc_i = t_i$.

$$\begin{tikzcd}
Fi \arrow[dd, "Fg"'] \arrow[dr, "c_i"] \arrow[drr, bend left, "t_i"] & & \\
 & C \arrow[r, dashed, "c"] & T \\
Fj \arrow[ur, "c_j"'] \arrow[urr, bend right, "t_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

De nuevo, el caso donde $\mathcal{C}$ es la categoría de conjuntos ayuda a comprender la construcción de C: en primer lugar tomamos la unión disjunta de los Fi, $\coprod Fi = \{(j, x) | x \in Fj\}$, la cual resalta que estamos considerando los Fi como unidades independientes, y después las "pegamos" mediante la relación de equivalencia más pequeña, donde (j, x) esté relacionado con (k, y) si existe un $g : j \to k$ tal que $Fg(x) = y$. En este caso, también quisiéramos que el morfismo c fuera un isomorfismo, por lo que enunciamos:

coMP: c es un isomorfismo.

coMP puede ser expresado en términos filosóficos diciendo que la interpretación de un signo arbitrario se obtiene al pegar (reintegrar) las interpretaciones de todas las partes (subsignos) que componen el signo.

La diferencia entre las dos máximas radica en la forma en que cada una de ellas ve el signo: la máxima pragmática lo ve sintéticamente mientras que la máxima copragmática lo hace analíticamente. Supongamos que queremos entender, por ejemplo, el *Guernica* de Picasso. La aproximación analítica sería "romper" el cuadro para analizar sus elementos constituyentes separadamente (la lámpara, el caballo, el toro, la madre y el hijo, etc), interpretarlos y luego "pegar" para entender el todo. En cambio la aproximación sintética (pragmática) consistiría en tratar de entender todo el cuadro y luego comparar las interpretaciones totales. Desde un punto de vista estrictamente lógico (el de las categorías abstractas) ambos procesos son equivalentes (dualización), sin embargo en casos concretos (categorías concretas) uno puede ser más sencillo que otro o incluso uno ser realizable mientras el otro no: por ejemplo, coMP funciona bien en la categoría de grupos abelianos, mientras que MP no lo hace. Observemos por último, que coMP vive de forma precisa en la lucha local-global mientras que MP lo hace en la lucha uno-múltiple.

Como MP afirma que determinado objeto es un límite, empezamos desarrollando un método que simplifique estas comprobaciones. Este se basa en la existencia de una familia de generadores, verdaderos entes arquetípicos que se proyectan en el resto de objetos de la categoría. En realidad demostraremos un poco más: casi cualquier definición categórica puede ser verificada solamente en familias de generadores.

1.1 Propiedades categóricas vía generadores

La definición de generador fue introducida por Grothendieck en [31] para simplificar la verificación de que un objeto sea inyectivo en una categoría abeliana y poder demostrar su famoso teorema sobre la existencia de suficientes inyectivos. Sin embargo, no existe un consenso general sobre la definición de generador y sus diferentes tipos, por lo que empezamos fijando la nomenclatura que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

Definición 1.1.1. Sea $\mathbb{G} = \{G_i\}$ una familia de objetos de una categoría $\mathcal{C}$. Decimos que $\mathbb{G}$

1. es una familia de generadores cuando, dado dos morfismos $a, b : A \rightrightarrows B$, si $a \neq b$ entonces existen $G_i \in \mathbb{G},\ t : G_i \to A$ tales que $at \neq bt$ [15];

2. es una familia de generadores extrema si cumple 1. y, además, dado cualquier subobjeto estricto $s : A \hookrightarrow B$ existen $G_i \in \mathbb{G},\ t : G_i \to B$ que no se factoriza a través de s [14];

3. es una familia de generadores fuerte si cumple 1. y, además, dados cualesquiera subobjeto $s : U \hookrightarrow B$ y morfismo $f : A \to B$, si para todo $G_i \in \mathbb{G}$ y $t : G_i \to A,\ ft$ se factoriza a través de s entonces f se factoriza a través de s [14];

4. es una familia de generadores iterada si cumple 1. y, además, todo objeto A es el colímite de una familia $(t_i : N_i \to A, \delta_{ij} : N_i \to N_j)$, donde cada N_i es a su vez colímite de una familia $(n_i^l : G_i^l \to N_i, \Delta_i^{lm} : G_i^l \to G_i^m)$ en $\mathbb{G}$ [71].

$$\begin{tikzcd}
G_i^r \arrow[dr, "n_i^r"] \arrow[dd, "\Delta_i^{rs}"'] & \vdots & \\
& N_i \arrow[dddd, "\delta_{ij}"'] \arrow[ddr, "a_i"] & \\
G_i^s \arrow[ur, "n_i^s"'] & & \\
\vdots & & A \\
G_j^t \arrow[dr, "n_j^t"] \arrow[dd, "\Delta_j^{tu}"'] & & \\
& N_j \arrow[uur, "a_j"'] & \\
G_j^u \arrow[ur, "n_j^u"'] & \vdots &
\end{tikzcd}$$

En realidad, la definición 4. es un caso de colímite 2-iterado, porque hay dos niveles de construcción. Podríamos hablar en general de colímites α-iterados, para algún ordinal α, pero no parece haber muchos ejemplos del caso general y, además, las pruebas en esencia son las mismas.

Proposición 1.1.2. Tenemos las siguientes relaciones entre los diferentes tipos de generadores:

1. toda familia de generadores iterada es fuerte;

2. toda familia de generadores fuerte es extrema.

Este resultado es conocido en la literatura, ver por ejemplo [71]. Cabe notar que las implicaciones recíprocas no valen en general.

Observación 1.1.3. Si $\mathbb{G}$ es una familia de generadores entonces para cualquier $a \in ob(\mathcal{C}), \mathbb{G} \cup \{a\}$ también lo es. De hecho todos los objetos de la categoría siempre constituyen una familia de generadores. Nuestro objetivo es trabajar en la medida de lo posible con familias minimales, en el sentido de que todos los integrantes de $\mathbb{G}$ aporten en el cumplimiento de la definición 1.1.1.

Ejemplo 1.1.4.

1. En la categoría de conjuntos, cualquier singleton es un generador iterado.

2. En la categoría de grupos abelianos, $\mathbb{Z}$ es un generador iterado. En general, en cualquier categoría de módulos sobre un anillo A, A es un generador iterado. Esto es consecuencia de que todo módulo admite una presentación libre.

3. En cualquier categoría de funtores, los funtores representables constituyen una familia de generadores iterada [15, Teorema 2.15.6]. En particular, todo topos de Grothendieck tiene una familia de generadores iterada.

4. El singleton es un generador iterado en la categoría de espacios Hausdorff compactos. En efecto, esta categoría es monádica sobre conjuntos, por lo que cada objeto es un coigualador [15, Volumen 2, Lema 4.3.3] entre coproductos del singleton.

5. El singleton es un generador extremo en la categoría de espacios topológicos, que no es fuerte. De hecho en esta categoría no hay generadores fuertes [15].

1.1.1 Límites

Pasemos ahora a restringir la noción de cono y límite a una familia $\mathbb{G}$ de generadores.

Definición 1.1.5. Dado un funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, un $\mathbb{G}$-cono sobre F consiste de

1. un objeto $G_i \in \mathbb{G}$,

2. para cada objeto $D \in \mathcal{D}$, un morfismo $p_D : G_i \to FD$ en $\mathbb{C}$,

tal que para cada morfismo $d : D \to D'$ en $\mathcal{D}$, $p_{D'} = Fd \circ p_D$.

Definición 1.1.6. Dado un funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, un $\mathbb{G}$-límite de F es un cono $(L_G, (p_D)_D)$ de F tal que, para cada $\mathbb{G}$-cono $(M, (q_D)_D)$ sobre F, existe un único morfismo $m : M \to L$ tal que para cada objeto $D \in \mathcal{D}$, $q_D = p_D \circ m$.

En particular, podemos hablar de $\mathbb{G}$-igualador, $\mathbb{G}$-producto, etc. Así, el $\mathbb{G}$-límite L_G es un objeto de $\mathcal{C}$, el cual no tiene por qué estar en la familia $\mathbb{G}$, que satisface una propiedad "universal" en principio *sólo* para objetos de $\mathbb{G}$; las proposiciones siguientes mostrarán que esta de hecho termina valiendo para todos los objetos de la categoría. En otras palabras, para comprobar que un objeto es un límite en una categoría con una buena familia de generadores, basta comprobar que satisface la propiedad universal sólo para los objetos de $\mathbb{G}$.

Proposición 1.1.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con una familia de generadores extrema $\mathbb{G}$ y $(L_G, (p_D)_D)$ un $\mathbb{G}$-límite de un funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Si el límite $(L, (q_D)_D)$ de F existe, entonces L es isomorfo a L_G.

Demostración. La definición de límite implica la existencia de un único morfismo $l : L_G \to L$ tal que $q_D l = p_D$ para cada objeto D de $\mathcal{D}$. Sean $a, b : C \to L_G$ dos morfismos diferentes; entonces existe un G en $\mathbb{G}$ y un morfismo $m : G \to C$ tal que $am \neq bm$. Como L_G es un $\mathbb{G}$-límite, existe D tal que $p_D am \neq p_D bm$ y así $q_D lam \neq q_D lbm$. En particular, $la \neq lb$, lo cual prueba que el morfismo l es mono.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "m"'] & & & FD \\
C \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & L_{\mathbb{G}} \arrow[r, "l"] \arrow[rru, bend left, "p_D"] & L \arrow[ru, "q_D"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, si L_G es un subobjeto estricto de L, como $\mathbb{G}$ es una familia de generadores extrema, existen un G en $\mathbb{G}$ y un morfismo $t : G \to L$ tales que t no se factoriza a través de l. Dados la familia de morfismos $q_D t : G \to F(D)$, la noción de $\mathbb{G}$-límite implica la existencia de $e : G \to L_G$ tal que $p_D e = q_D t$ para todo D. Como L es un límite, $le = t$, lo cual contradice que t no se factoriza a través de l.

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "t"] \arrow[dl, dotted, bend right, "e"'] \\
L_{\mathbb{G}} \arrow[r, hook, "l"] \arrow[dr, "p_D"'] & L \arrow[d, "q_D"] \\
 & F(D)
\end{tikzcd}$$

$\square$

En la proposición anterior necesitamos asumir la existencia del límite del funtor F. Veamos ahora cómo, exigiéndole un poco más a la familia $\mathbb{G}$, podemos prescindir de esa hipótesis.

Proposición 1.1.8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con una familia de generadores fuerte G. Si $i : I \to B$ es el $\mathbb{G}$-igualador de $x, z : B \rightrightarrows C$ entonces i es el igualador de x, z.

Demostración. Sea $f : A \to B$ tal que $xf = zf$. Así, para cualquier $t : G \to A$, $xft = yft$ y la definición de $\mathbb{G}$-igualador implica la existencia de $u : G \to I$ tal que $iu = ft$. Pero entonces la definición de generador fuerte implica la existencia de $v : A \to I$ tal que $iv = f$.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, hook, "e"] & A \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & B \\
 & C \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dotted, "v"] & \\
 & G \arrow[u, "t"'] \arrow[uul, dotted, bend left, "u"] &
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 1.1.9. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con una familia de generadores iterada $\mathbb{G}$. Si $(P, (p_k)_{k\in K})$ es el $\mathbb{G}$-producto de $\{A_k\}_{k\in K}$ entonces $(P, (p_k)_{k\in K})$ es el producto de $\{A_k\}_{k\in K}$.

Demostración. Sea R un objeto de la categoría $\mathcal{C}$ y consideremos una familia de morfismos $r_k : R \to A_k$. No puede haber dos morfismos diferentes $u, u' : R \to P$ tales que $p_k u = p_k u' = r_k$, pues entonces la definición de generador fuerza la existencia de un $s : G \to R$ tal que $us \neq u's$, lo cual contradice que $(P, p_k)_{k\in K}$ es un $\mathbb{G}$-producto. Para ver la existencia de un tal u, consideremos una familia $(t_i : N_i \to A, \delta_{ij} : N_i \to N_j)$ cuyo colímite es A, y familias $(n_i^l : G_i^l \to N_i, \Delta_i^{lm} : G_i^l \to G_i^m)$ cuyos colímites son cada N_i. Para cada G_i^l, la noción de $\mathbb{G}$-producto nos garantiza la existencia de un único $u_i^l : G_i^l \to P$ tal que $p_k u_i^l = r_k t_i n_i^l$; a partir de estos y del concepto de colímite podemos obtener $u_I : N_i \to P$ tal que $u_I n_i^l = q_i$. Se puede ver que $p_k u_I = r_k t_i$. De nuevo aplicando la definición de colímite obtenemos $u : R \to P$ tal que $ut_i = u_I$. Se puede verificar que este es el morfismo cuya existencia buscábamos.

$$\begin{tikzcd}
G_i^r \arrow[dr, "n_i^r"] \arrow[dd, "\Delta_i^{rs}"'] \arrow[ddrrr, dotted, bend left, "u_i^r"] & & & & \\
 & N_i \arrow[dr, "a_i"] \arrow[dd, "\delta_{ij}"] \arrow[drr, dotted, "u_I"] & & & B_k \\
G_i^s \arrow[ur, "n_i^s"'] & & A \arrow[r, dotted, "u"] \arrow[urr, bend left, "t_k"] & P \arrow[ur, "p_k"] & \\
 & N_j \arrow[ur, "a_j"'] \arrow[urr, dotted, "u_J"'] & & &
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 1.1.10. Sean $\mathcal{C}$ una categoría con una familia de generadores iterada $\mathbb{G}$ y $(L_G, (p_D)_D)$ un $\mathbb{G}$-límite de un funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Entonces $(L_G, (p_D)_D)$ es el límite del funtor F.

Demostración. Consecuencia de las dos proposiciones anteriores, dado que todo límite se puede obtener a partir de productos e igualadores. □

Otra forma de forma de expresar los resultados anteriores es mediante el buen comportamiento de los funtores representables originados de $\mathbb{G}$ con respecto a los límites. La siguiente definición es bastante conocida en teoría de categorías.

Definición 1.1.11. [1]

1. Decimos que una familia de funtores $(G_k : \mathcal{C} \to \mathcal{D})_{k \in K}$ refleja colectivamente límites si dado un funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ y un cono $(S \to Fi)_{i \in ob(\mathcal{I})}$ sobre F tal que para cada k, $G_k(S) \to G_k Fi$ es el límite de $G_k F$ entonces $(S \to Fi)_{i \in ob(\mathcal{I})}$ es el límite de F.

2. Si una familia con la propiedad anterior se reduce a un único funtor $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ decimos que G refleja límites.

Proposición 1.1.12.
1. Si $\mathbb{G}$ es una familia de generadores extrema entonces los funtores representables $\mathcal{C}(G, \_\_) : \mathcal{C} \to \mathcal{CON}$, con $G \in \mathbb{G}$, reflejan colectivamente todos los límites que ya existían en $\mathcal{C}$;

2. Si $\mathbb{G}$ es una familia de generadores iterada entonces los funtores $\mathcal{C}(G, \_\_) : \mathcal{C} \to \mathcal{CON}$, con $G \in \mathbb{G}$, reflejan colectivamente límites.

Demostración. Si $(S \to Fi)_{i \in ob(\mathcal{I})}$ es un cono en $\mathcal{C}$, entonces para cada $G \in \mathbb{G}$ tenemos en la categoría de conjuntos un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{C}(G, Fi) \arrow[dd, "Fg_-"] \\ \mathcal{C}(G, S) \arrow[urr, bend left, "s_{i-}"] \arrow[drr, bend right, "s_{j-}"'] \arrow[r, dashed, "(s_{i\_\_})_{i \in ob\mathcal{I}}"] & L_{\mathcal{C}(G,\_\_) \circ F} \arrow[ur, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\ & & \mathcal{C}(G, Fj) \end{tikzcd}$$

donde $L_{\mathcal{C}(G,\_\_) \circ F}$ es el límite de $\mathcal{C}(G, \_\_) \circ F$, p_i son proyecciones en el sentido conjuntista usual y $(s_{i\_\_})_{i \in ob\mathcal{I}}$ es el morfismo inducido, el cual toma la forma

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}(G, S) & \xrightarrow{(s_{i\_\_})_{i \in ob\mathcal{I}}} & L_{\mathcal{C}(G,\_\_) \circ F} \\ g & \longmapsto & (s_i g)_{i \in ob\mathcal{I}}. \end{array}$$

Nuestra hipótesis, que $(s_{i\_\_})_{i \in ob\mathcal{I}}$ es un isomorfismo para cada $G \in \mathbb{G}$, significa que $(S \to Fi)_{i \in ob(\mathcal{I})}$ es un $\mathbb{G}$-límite de F. Luego, la conclusión se sigue de las proposiciones 1.1.7 y 1.1.10. □

1.1.2 Funtores adjuntos

Existe una relación muy estrecha entre funtores adjuntos derechos y generadores explicitada en el teorema especial del funtor adjunto [15, p. 98]; en esta sección, resaltaremos esta relación desde un punto de vista nuevo. Para esto empezamos restringiendo la noción de coreflexión (también conocida como objeto colibre) a una familia de generadores $\mathbb{G}$.

Definición 1.1.13. Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor y B un objeto de $\mathcal{B}$. Una $\mathbb{G}$-coreflexión de B a lo largo de F es una pareja (R_B, ϵ_B), donde

1. R_B es un objeto de $\mathcal{A}$ y $\epsilon_B : F(R_B) \to B$ es un morfismo de $\mathcal{B}$.
2. si $G \in \mathbb{G}$ y $b : F(G) \to B$ es un morfismo de $\mathcal{B}$, entonces existe un único morfismo $a : G \to R_B$ en $\mathcal{A}$ tal que $\epsilon_B F(a) = b$.

Proposición 1.1.14. Considere una categoría $\mathcal{A}$ con una familia de generadores iterada $\mathbb{G}$ y un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Las siguientes condiciones son equivalentes

1. F tiene un adjunto derecho.
2. Las siguientes condiciones valen:
   (a) Cada objeto de $\mathcal{B}$ admite una $\mathbb{G}$-coreflexión a lo largo de F;
   (b) F preserva familias epimórficas.

Demostración. Si F tiene un adjunto derecho claramente cumple la condición (a); que también debe cumplir la condición (b) es conocido en la literatura [42, Lema 2, p. 395]. Para la otra implicación, considere un objeto arbitrario A de $\mathcal{A}$ tal que existe un morfismo $c : F(A) \to B$. Debemos mostrar que existe un único morfismo $d : A \to R_B$ tal que $\varepsilon_B F(d) = c$. Veamos primero la unicidad: supongamos que existen dos morfismos diferentes $d, d' : A \to R_B$ tales que $\varepsilon_B F(d) = \varepsilon_B F(d') = c$; la definición de generador implica la existencia de $G \in \mathbb{G}$ y de un morfismo $t : G \to A$ tal que $dt \neq d't$, pero esto contradiría la unicidad en la noción de $\mathbb{G}$-coreflexión para $cF(t) : F(G) \to B$ pues $\varepsilon_B F(dt) = \varepsilon_B F(d't) = cF(t)$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rrr, "F"] & & & \mathcal{B} & \\
R_B & & & F(R_B) \arrow[r, "\varepsilon_B"] & B \\
A \arrow[u, shift right, "d"] \arrow[u, shift left, "d'"'] & & & F(A) \arrow[u, shift right, "F(d)"] \arrow[u, shift left, "F(d')"'] \arrow[ur, "c"'] & \\
G \arrow[u, "t"] & & & F(G) \arrow[u, "F(t)"] &
\end{tikzcd}
$$

Para ver la existencia consideremos una familia $(t_i : N_i \to A, \delta_{ij} : N_i \to N_j)$ cuyo colímite es A, y familias $(n_i^l : G_i^l \to N_i, \Delta_i^{lm} : G_i^l \to G_i^m)$ cuyos colímites son cada N_i. Dado cada morfismo $cF(t_i)F(n_i^l)$ la definición de $\mathbb{G}$-coreflexión implica la existencia de un morfismo $k_i^l : G_i^l \to R_B$ tal que $\varepsilon_B F(k_i^l) = cF(t_i)F(n_i^l)$. Luego, la definición de colímite implica la existencia de un $k_I : N_i \to R_B$ tal que $k_I n_i^l = k_i^l$; como $\varepsilon_B F(k_I)F(n_i^l) = cF(t_i)F(n_i^l)$ y los n_i^l conforman una familia epimórfica, tenemos que $\varepsilon_B F(k_I) = cF(t_i)$. Además, los morfismos $k_I, k_J\delta_{ij} : N_i \to R_B$ son tales que $\varepsilon_B F(k_I) = \varepsilon_B F(k_J\delta_{ij}) = cF(t_i)$, por lo que deben ser iguales. Luego, para el cono formado por $k_I : N_i \to R_B$, de nuevo la noción de colímite implica la existencia de un $d : A \to R_B$ tal que $dt_i = k_I$. Como $\varepsilon_B F(d)F(t_i) = cF(t_i)$ y los t_i conforman una familia epimórfica, concluimos que $\varepsilon_B F(d) = c$.

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\quad F \quad} \mathcal{B}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & R_B & \\
 & & A \arrow[u, dotted, "d"'] & \\
 & N_i \arrow[r, "\delta_{ij}"] \arrow[ur, "a_i"] \arrow[uur, dotted, "k_I"] & & N_j \arrow[ul, "a_j"'] \arrow[uul, dotted, "k_J"'] \\
G_i^r \arrow[ur, "n_i^r"] \arrow[rr, "\Delta_i^{rs}"'] \arrow[uuurr, dotted, bend left, "k_i^r"] & & G_i^s \arrow[ul, "n_i^s"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & F(R_B) \arrow[rr, "\varepsilon_B"] & & B \\
 & & F(A) \arrow[u, dotted, "F(d)"'] \arrow[urr, "c"'] & & \\
 & F(N_i) \arrow[r, "F(\delta_{ij})"] \arrow[ur, "F(a_i)"] \arrow[uur, dotted, "F(k_I)"] & & F(N_j) \arrow[ul, "F(a_j)"'] \arrow[uul, dotted, "F(k_J)"'] & \\
F(G_i^r) \arrow[ur, "F(n_i^r)"] \arrow[rr, "F(\Delta_i^{rs})"'] \arrow[uuurr, dotted, bend left, "F(k_i^r)"] & & F(G_i^s) \arrow[ul, "F(n_i^s)"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Puede ser interesante comparar el resultado anterior con el teorema del funtor adjunto. Ambos parten de debilitar el concepto “todo objeto de $\mathcal{A}$ tiene un reflexión” (el uno debilitando el concepto de reflexión, el otro la clase de objetos que poseen reflexión), para después restablecerlo mediante la conjugación de algún tipo de pegamiento (completitud, generadores iterados) y de continuidad de F (preservación de límites, de familias epimórficas) a través de un proceso de *back and forth.* También vale la pena destacar que la proposición 1.1.14 no es una consecuencia del teorema del funtor adjunto: en efecto, existen categorías como la de los conjuntos finitos que posee al singleton como generador iterado y no es cocompleta.

1.1.3 Relaciones

Existen varias formas de definir relaciones en una categoría $\mathcal{C}$, equivalentes entre sí siempre que $\mathcal{C}$ tenga algunas propiedades simples de exactitud (ver [15, Tomo 2, sección 2.5] para una discusión detallada). La que utilizaremos aquí es quizás la más general de todas ellas.

Definición 1.1.15. [15, Tomo 2, pp. 101, 102] Una relación (R, r_1, r_2) sobre un objeto X es un objeto R junto con una pareja de morfismos $r_1, r_2 : R \rightrightarrows X$ que es monomórfica (es decir, para cualesquiera $a, b : A \rightrightarrows R,\ a = b$ ssi $r_1 a = r_1 b$ y $r_2 a = r_2 b$).

Para cada $A \in Ob(\mathcal{C})$, definimos una relación (en el sentido usual) generada por (R, r_1, r_2) sobre $\mathcal{C}(A, X)$ como:

$$R_A = \{(r_1 a, r_2 a) | a \in \mathcal{C}(A, R)\}.$$

Dado que las R_A son relaciones conjuntistas usuales, podemos decir que (R, r_1, r_2) tiene una determinada propiedad si todos los R_A la tienen. Así, diremos que (R, r_1, r_2) es reflexiva (respectivamente, simétrica, antisimétrica, transitiva, $\ldots$) si para cada objeto A de $\mathcal{C}$, la relación R_A es reflexiva (respectivamente, simétrica, antisimétrica, transitiva, $\ldots$). Como es de esperar, (R, r_1, r_2) será una relación de equivalencia cuando sea reflexiva, simétrica y transitiva.

Vamos a mostrar que podemos restringir la verificación de las propiedades de una relación de todos los objetos de la categoría, a trabajar sólo con una familia de generadores. El siguiente lema nos facilitará la redacción de la demostración.

Lema 1.1.16. Sean $\mathcal{C}$ una categoría con una familia iterada de generadores de $\mathbb{G}$ y (R, r_1, r_2) una relación sobre X. Dado cualquier objeto A, por la definición de generadores iterados, A es el colímite de una familia $(t_i : N_i \to A, \delta_{ij} : N_i \to N_j)$, donde cada N_i es el colímite de $(n_i^l : G_i^l \to N_i, \Delta_i^{lm} : G_i^l \to G_i^m)$ con $G_i^l \in \mathbb{G}$. Si $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(A, X)$ son tales que para todo G_i^l $(f_1 a_i n_i^l, f_2 a_i n_i^l) \in R_{G_i^l}$ entonces $(f_1, f_2) \in R_A$.

Demostración.

$$\begin{tikzcd}
G_i^l \arrow[dr, "n_i^l"] \arrow[dd, "\Delta_i^{lm}"'] \arrow[ddrrr, dotted, bend left, "u_i^l"] & & & & \\
& N_i \arrow[dd, "\delta_{ij}"] \arrow[dr, "a_i"] \arrow[drr, dotted, "u_I"] & & & \\
G_i^m \arrow[ur, "n_i^m"] & & A \arrow[r, dotted, "u"] \arrow[rr, bend left, "f_1"] \arrow[rr, bend right, "f_2"'] & R \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[r, shift right, "r_2"'] & X \\
& N_j \arrow[ur, "a_j"] \arrow[urr, dotted, "u_J"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Por definición de $R_{G_i^l}, (f_1 a_i n_i^l, f_2 a_i n_i^l) \in R_{G_i^l}$ si y sólo si exite $u_i^l : G_i^l \to R$ tal que $r_1 u_i^l = f_1 a_i n_i^l$, $r_2 u_i^l = f_2 a_i n_i^l$. Dado un morfismo $\Delta_i^{lm} : G_i^l \to G_i^m$ por medio de

$$r_1 u_i^m \Delta_i^{lm} = f_1 a_i n_i^m \Delta_i^{lm} = f_1 a_i n_i^l = r_1 u_i^l$$
$$r_2 u_i^m \Delta_i^{lm} = f_2 a_i n_i^m \Delta_i^{lm} = f_2 a_i n_i^l = r_2 u_i^l,$$

entonces $u_i^l \Delta_i^{lm} = u_i^l$ porque r_1, r_2 es una pareja epimórfica; luego la familia $(u_i^l : G_i^l \to R)_l$ forma un cocono y como N_i es el colímite existe un único $u_I : N_i \to R$ tal que $u_I n_i^l = u_i^l$. Como

$$r_1 u_I n_i^l = r_1 u_i^l = f_1 a_i n_i^l$$
$$r_2 u_I n_i^l = r_2 u_i^l = f_2 a_i n_i^l,$$

la unicidad en la propiedad universal del colímite implica que $f_1 a_i = r_1 u_I$, $f_2 a_i = r_2 u_I$. Dado un $\delta_{ij} : N_i \to N_j$, las ecuaciones

$$\begin{aligned} r_1 u_J \delta_{ij} &= f_1 a_j \delta_{ij} = f_1 a_i = r_1 u_I \\ r_2 u_J \delta_{ij} &= f_2 a_j \delta_{ij} = f_2 a_i = r_2 u_I, \end{aligned}$$

junto al hecho que (R, r_1, r_2) es una relación, implican que $(u_I : N_i \to R)_I$ forman un cocono y así existe un único $u : A \to R$ tal que $u a_i = u_I$. Las ecuaciones

$$r_1 u a_i = r_1 u_I = f_1 a_i \qquad r_2 u a_i = r_2 u_I = f_2 a_i$$

implican que $f_1 = r_1 u$, $f_2 = r_2 u$ y así $(f_1, f_2) \in R_A$. □

Proposición 1.1.17. Sean $\mathcal{C}$ una categoría con una familia iterada de generadores de $\mathbb{G}$ y (R, r_1, r_2) una relación sobre X. Si para cada $G \in \mathbb{G}$, R_G es reflexiva (respectivamente, simétrica, antisimétrica, transitiva) entonces (R, r_1, r_2) es reflexiva (respectivamente, simétrica, antisimétrica, transitiva).

Demostración. Sea A un objeto arbitrario y consideremos la relación R_A. Por la definición de generadores iterados, A es el colímite de una familia $(t_i : N_i \to A, \delta_{ij} : N_i \to N_j)$, donde cada N_i es el colímite de $(n_i^l : G_i^l \to N_i, \Delta_i^{lm} : G_i^l \to G_i^m)$ con $G_i^l \in \mathbb{G}$.

1. Reflexividad.
   Sea $f \in \mathcal{C}(A, X)$. Dado que cada $R_{G_i^l}$ es reflexiva, $(f a_i n_i^l, f a_i n_i^l) \in R_{G_i^l}$ y por el lema anterior $(f, f) \in R_A$.

2. Simetría.
   Supongamos que $(f_1, f_2) \in R_A$, entonces existe $a : A \to R$ tal que $r_1 a = f_1$, $r_2 a = f_2$. Entonces para cada i, l

   $$r_1 a a_i n_i^l = f_1 a_i n_i^l, \quad r_2 a a_i n_i^l = f_2 a_i n_i^l$$

   y así $(f_1 a_i n_i^l, f_2 a_i n_i^l) \in R_{G_i^l}$. Como en este caso por hipótesis cada $R_{G_i^l}$ es simétrica, $(f_2 a_i n_i^l, f_1 a_i n_i^l) \in R_{G_i^l}$ y entonces $(f_2, f_1) \in R_A$.

3. Transitividad.
   Si $(f_1, f_2), (f_2, f_3) \in R_A$ entonces existen $a, b \in \mathcal{C}(A, R)$ tales que

   $$r_1 a = f_1,\ r_2 a = f_2,\ r_1 b = f_2,\ r_2 b = f_3.$$

   Para cada i, l tenemos que

   $$\begin{aligned} r_1 a a_i n_i^l &= f_1 a_i n_i^l, \quad r_2 a a_i n_i^l = f_2 a_i n_i^l \\ r_1 b a_i n_i^l &= f_2 a_i n_i^l, \quad r_2 b a_i n_i^l = f_3 a_i n_i^l \end{aligned}$$

   y así $(f_1 a_i n_i^l, f_2 a_i n_i^l)$, $(f_2 a_i n_i^l, f_3 a_i n_i^l) \in R_{G_i^l}$. La transitividad de $R_{G_i^l}$ implica que $(f_1 a_i n_i^l, f_3 a_i n_i^l) \in R_{G_i^l}$ y por tanto $(f_1, f_3) \in R_{G_i^l}$.

4. Antisimetría.
   Este caso es más directo y no hace falta aplicar el lema 1.1.16 ni la hipótesis que $\mathbb{G}$ sea iterada. Sean $(f_1, f_2),\ (f_2, f_1) \in R_A$. Entonces existen $a, b \in \mathcal{C}(A, R)$ tales que

$$r_1 a = f_1,\ r_2 a = f_2,\ r_1 b = f_2,\ r_2 b = f_1.$$

   Dado cualquier generador G y cualquier morfismo $g : G \to A$, las ecuaciones

$$r_1 a g = f_1 g,\ r_2 a g = f_2 g,\ r_1 b g = f2g,\ r_2 b g = f_1 g$$

   implican que $(f_1 g, f_2 g),\ (f_2 g, f_1 g) \in R_G$ y así $f_1 g = f_2 g$. Como g era arbitrario, la definición de generador nos da $f_1 = f_2$.

□

1.2 Pruebas de MP

En esta sección discutiremos pruebas suficientes de MP y $coMP$ que funcionan en muchas categorías importantes. Trataremos de ilustrarlas con múltiples ejemplos y de hacer una discusión de su posible significado filosófico. La base de nuestra discusión serán las proposiciones 1.1.7 y 1.1.10 de la sección anterior. Como punto de partida será conveniente separar la propiedad universal del $\mathbb{G}$-límite.

Definición 1.2.1. Dado un funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y un $\mathbb{G}$-cono $(L_G, (p_D)_D)$ diremos que $(L_{\mathbb{G}}, (p_D)_D)$ es:

1. $\mathbb{G}$-separado si dados dos morfismos diferentes $a, b : G \rightrightarrows L_{\mathbb{G}}$ con $G \in \mathbb{G}$ existe $p_k : L_{\mathbb{G}} \to Fk$ tal que $p_k a \neq p_k b$;

2. $\mathbb{G}$-pegable si dado $G \in \mathbb{G}$ y una familia $e_i : G \to Fi_{i \in ob(\mathcal{I})}$ tal que $Fge_i = e_j$, existe un morfismo $e : G \to L_{\mathbb{G}}$ tal que $p_i e = e_i$.

La terminología anterior, así como muchas otras ideas, pueden ser clarificadas mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.2. Sean $F : \mathcal{D}^{op} \to \mathcal{CON}$ un prehaz y $S \subseteq \mathcal{D}(-, D)$ una criba. Entonces $\{F(f) : F(D) \to F(dom(f))\}_{f \in S}$ resulta ser un cono sobre la restricción de F a S, donde las contrastaciones serán cualquier morfismo $\{F(g) : F(domf) \to F(domg)\}_{f \in S}$ entre estos dominios, de modo que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} & F(domf) \arrow[dd, "F(g)"] \\ F(D) \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[dr, "F(fg)"'] & \\ & F(domg) \end{tikzcd}$$

El concepto de criba, que es fundamental para que la estructura anterior sea un cono, también garantiza que el sistema es cerrado, en el lenguaje que estamos usando, bajo ámbitos interpretativos: si existe un morfismo $F(h) : F(domg) \to F(domh)$ que liga un interpretante $F(domg)$ de $F(D)$ con otro cualquiera $F(domh)$, como S es una criba, entonces podemos ver a $F(domh)$ también como una interpretación de $F(D)$:

$$\begin{tikzcd}
 & F(domf) \arrow[d, "F(g)"] \\
F(D) \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[r, "F(fg)"] \arrow[dr, dashed, "F(fgh)"'] & F(domg) \arrow[d, "F(h)"] \\
 & F(domh)
\end{tikzcd}$$

F será un haz cuando cumpla MP para todo $D \in \mathcal{D}$, es decir, cuando

$$F(D) \xrightarrow{e} \prod_{f\in S} F(domf) \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} \prod_{f,g\ \ f\in S} F(domf)$$

sea un igualador, donde e es la función $e(x) = \{F(f)(x)\}_{f\in S}$ y si $\mathbf{x} = \{x_f\}_{f\in S}$ en $\prod_{f\in S} F(domf)$, entonces $p_1(\mathbf{x}) = \{x_{fg}\}$ y $p_2(\mathbf{x}) = \{F(g)(x_f)\}$ [42, p. 122]. Recordando que en la categoría de conjuntos el singleton es un generador iterable y que una función del singleton a un conjunto es un punto del conjunto, gracias a 1.1.10 la anterior definición puede ser reformulada de la siguiente forma:

1. el prehaz F es *separado* en D para S si dado dos elementos diferentes $a, b \in F(D)$ existe $f \in S$ tal que $F(f)(a) \neq F(f)(b)$;

2. una familia compatible de F en D es una familia $\{x_f | x_f \in F(dom(f))\}_{f\in S}$, tal que para toda $f : domf \to D \in S$ y $g : domg \to domf$ arbitraria, tenemos que $x_{fg} = F(g)(x_f)$. Un *pegamiento* de tal familia compatible es un elemento $x \in F(D)$ tal que $x_f = F(f)(x)$ para cada $f \in S$.

Un prehaz será un haz si satisface las dos condiciones anteriores. Esta segunda definición explica la nomenclatura usada en 1.2.1. Cabe notar también que las dos definiciones dadas de haz no son equivalentes cuando trabajamos con prehaces $F : \mathcal{D}^{op} \to \mathcal{C}$ sobre una categoría arbitraria $\mathcal{C}$: la primera definición tendrá sentido siempre que $\mathcal{C}$ sea completa (tenga productos e igualadores), la segunda cuando $\mathcal{C}$ posea una familia de generadores; y serán equivalentes entre sí, a la luz de 1.1.10, cuando dicha familia sea iterada, como es el caso cuando $\mathcal{C}$ es la categoría de conjuntos, de grupos abelianos o módulos, que son las categorías donde usualmente se trabaja el concepto de haz vía familias compatibles.

En los haces, admitimos MP directamente y por tanto no se dan condiciones necesarias y suficientes para que la reconstrucción sea posible. Sin embargo, se dan algunas condiciones mínimas que debe cumplir la clase de cribas $J(D)$ (topología de Grothendieck) que reconstruyen D. Estas son:

1. $\mathcal{D}(-, D) \in J(D)$, lo cual significa que todas las interpretaciones posibles deberían bastar para entender el objeto, lo cual coincide exactamente con las ideas de Peirce;

2. si $S \in J(D)$, entonces $h^*(S) = \{g | \ cod(g) = E, \ hg \in S\} \in J(E)$ para cualquier $h : E \to D$ en $\mathcal{D}$: viendo $F(E)$ como una parte del signo $F(D)$ y $h^*(S)$ como una parte S, esto significa que cuando trabajamos con sólo una parte de los contextos interpretativos obtenemos sólo una parte del signo;

3. si $S \in J(D)$ y R es cualquier criba sobre D tal que $h^*(R) \in J(E)$ para todo $h : E \to D$ en S, entonces $R \in J(D)$, lo cual significa que si una criba R reconstruye todos los interpretantes con los cuales reconstruimos $F(D)$, entonces R reconstruye $F(D)$.

Pasemos ahora a hacer una discusión del posible significado, en términos de la máxima pragmática, de las partes de la definición 1.2.1. La primera parte, la $\mathbb{G}$-separabilidad, está ligada a la idea peirceana según la cual "toda diferencia tiene que ser posiblemente medida"[72] en un continuo (en el capítulo siguiente veremos cómo ese continuo puede ser construido a partir de ella). El $\mathbb{G}$-pegamiento se refiere a cómo una nueva idea que explique interpretantes diferentes es formada en la mente del intérprete (*shock*, abducción).

Desde un punto de vista más matemático, la $\mathbb{G}$-separabilidad está relacionada con la parte monomórfica del isomorfismo s de MP, mientras que la $\mathbb{G}$-pegabilidad lo está con su parte epimórfica. Dejaremos un poco de lado el estudio de la primera de ellas, mucho menos interesante matemáticamente, y nos centraremos en obtener condiciones suficientes que nos garanticen que el morfismo s es un epimorfismo (o dualmente, que el morfismo c de coMP es un monomorfismo).

Desde el origen del estudio de límites proyectivos e inductivos por la escuela francesa (por ejemplo, en toda la obra de Bourbaki, en especial [17]), pasando por su generalización en sentido categórico (debida principalmente a Grothendieck, ver [31], [6]) el trabajo con límites o colímites se ha enfatizado en el caso en que ellos son dirigidos-filtrados. Esto se debe, esencialmente, a que en este caso tenemos buenas propiedades de conmutatividad (colímites filtrados con límites) que ha permitido probar resultados tan importantes como la existencia de suficientes inyectivos en categorías abelianas, teoremas de monadicidad en teorías algebraicas, etc. Por tanto, no resulta extraño que este sea un caso importante a tener en cuenta en el contexto de este trabajo. Empezamos aclarando estos conceptos y la relación entre ellos.

Definición 1.2.3. [2]

1. Un conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{I}$ es llamado dirigido si cada par de elementos tiene una cota superior. Un colímite es llamado dirigido si es el colímite de un funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, con $\mathcal{I}$ dirigido.

2. una categoría $\mathcal{I}$ es llamada filtrada si

(a) $\mathcal{I}$ es no vacía;

(b) para cada $i, j \in ob(\mathcal{I})$ existen $k \in ob(\mathcal{I})$ y morfismos $i \to k, j \to k \in mor(\mathcal{I})$;

(c) para cada par $f, g : i \rightrightarrows j \in mor(\mathcal{I})$ existe $h : j \to k \in mor(\mathcal{I})$ tal que $hf = hg$.

Un colímite es filtrado si es el colímite de un funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ con $\mathcal{I}$ categoría filtrada.

Es bien conocido que los conceptos anteriores son básicamente equivalentes [2, p. 13], sin embargo el concepto de colímite dirigido es más usual en pruebas, mientras que el de colímite filtrado es más natural en construcciones y ejemplos (dado que los diagramas canónicos usualmente son filtrados). Como el concepto de colímite filtrado es mucho más común que su dual, límite cofiltrado, cuando lo utilicemos la discusión será hecha en términos de $coMP$.

Definición 1.2.4. Sean $\mathcal{C}$ una categoría, $\mathbb{G}$ una familia de generadores y $\mathfrak{C}$ una clase de colímites en $\mathcal{C}$. Diremos que $\mathbb{G}$ es proyectiva con respecto a $\mathfrak{C}$ en $\mathcal{C}$ si siempre que un $\{c_i : Fi \to C\}_{i \in \mathcal{I}} \in \mathfrak{C}$ sea el colímite de un funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ y tengamos $g : G \to C$, con $G \in \mathbb{G}$,

1. existen $i \in \mathcal{I}$ y $x : G \to Fi$ tales que $c_i x = g$;

2. si $g = c_i x = c_i x'$ existe $h : i \to j$ tal que $Fhx = Fhx'$.

Observación 1.2.5. En el caso en que cada epimorfismo sea el coigualador de alguna pareja de morfismos (como en topos, categorías abelianas, grupos, espacios topológicos compactos, etc.) ser proyectivo con respecto a coigualadores es equivalente a ser proyectivo en el sentido usual (dado $f : A \twoheadrightarrow B$, y $g : G \to B$ existe $g' : G \to A$ tal que $fg' = g$). Así la definición 1.2.4 puede verse como una generalización de este caso, y de ahí su nombre. Cuando utilicemos la expresión "generadores proyectivos" a secas nos referiremos a esta noción estándar de ser proyectivo con respecto a epimorfismos.

Ejemplo 1.2.6.

1. En la categoría de conjuntos y espacios topológicos el singleton es un generador que es proyectivo con respecto a coproductos, dado que estos toman la forma de una unión disyunta.

2. En la categoría de conjuntos el singleton es un generador proyectivo con respecto a los colímites filtrados. En efecto, como vimos en la página 15, todo colímite en conjuntos es una unión disyunta partida por una relación de equivalencia, así que el punto 1 de la definición 1.2.4 siempre vale; cuando el colímite es filtrado esta relación toma la siguiente forma precisa:

$$(x, i) \approx (x', j) \text{ ssi } \exists k,\ f : i \to k,\ g : j \to k,\ Ff(x) = Fg(x')$$

de donde obtenemos el punto 2.

3. En la categoría de prehaces, gracias al lema de Yoneda y a los incisos anteriores, cada hom-funtor es un generador proyectivo con respecto a los coproductos y los colímites filtrados.

4. En cualquier categoría de modelos de una teoría algebraica el generador es proyectivo con respecto a colímites filtrados: en efecto, en estas categorías el funtor olvido en conjuntos preserva y refleja colímites filtrados [15, Volumen 2, proposición 3.4.2].

Lema 1.2.7. Si $\mathbb{G}$ es proyectiva con respecto a colímites filtrados, $\{c_i : Fi \to C\}_{i\in\mathcal{I}}$ es el colímite filtrado de un funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ y $g_1, \ldots, g_n : G \to C$, con $G \in \mathbb{G}$ es un conjunto finito de morfismos, entonces existen $i \in \mathcal{I}$ y $x_1, \ldots, x_n : G \to Fi$ tales que $c_i x_s = g_s$ para cada $1 \leq s \leq n$.

Demostración. Por inducción sobre n:

- El caso $n = 1$ es la definición 1.2.4.

- Supongamos que propiedad vale para $n - 1$. Por hipótesis de inducción existen $i \in \mathcal{I}$ y funciones $x'_s : G \to Fi$ tales que $c_i x'_s = g_s$ para cada $1 \leq s \leq n - 1$. Por la definición 1.2.4 existen $j \in \mathcal{I}$ y una función $x'_n : G \to Fj$ tales que $c_j x'_n = g_n$. Como la categoría $\mathcal{I}$ es filtrada existen $k \in \mathcal{I}$ y morfismos $g : i \to k,\ h : j \to k$. Definamos para cada $1 \leq s \leq n$

$$x_s = \begin{cases} Fgx'_s, & \text{si } 1 \leq s \leq n-1, \\ Fhx'_s, & \text{si } s = n. \end{cases}$$

Entonces para cada $1 \leq s \leq n - 1$ tenemos

$$c_k x_s = c_k Fgx'_s = c_i x'_s = g_s$$

y de manera análoga para n tenemos

$$c_k x_n = c_k Fhx'_n = c_j x'_n = g_n.$$

□

Proposición 1.2.8. Sean $\mathcal{C}$ una categoría con una familia de generadores $\mathbb{G}$ que es proyectiva con respecto a colímites filtrados, $\{c_i : Fi \to C\}_{i\in\mathcal{I}}$ el colímite filtrado de un funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ y $\{t_i : Fi \to T\}_{i\in\mathcal{I}}$ un cocono arbitrario sobre F. Si $c : C \to T$ es el morfismo inducido, entonces c es inyectivo si y sólo si para todo par de morfismos $x, y : G \rightrightarrows Fi$ tales que $t_i x = t_i y$ existe $g : i \to j$ con $Fgx = Fgy$.

Demostración. Sean c inyectivo y $x, y : G \rightrightarrows Fi$ tales que $t_i x = t_i y$. Como $t_i = cc_i$ tenemos que $c_i x = c_i y$, y el punto 2 de la definición 1.2.4 nos da la existencia del g buscado. Por otro lado, sean $s, t : U \rightrightarrows C$ tales que $cs = ct$ y $r : G \to U$ cualquier morfismo con $G \in \mathcal{G}$. Por el lema 1.2.7 existen $x, y : G \rightrightarrows Fi$ tales que $c_i x = sr$ y $c_i y = tr$. Tenemos que $t_i x = cc_i x = csr = ctr = cc_i y = t_i y$, así que por hipótesis existe $g : i \to j$ con $Fgx = Fgy$. Pero entonces $sr = c_i x = c_j Fgx = c_j Fgy = c_i y = tr$ y la definición de generador implica $t = s$.

$$
\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, dotted, shift right, "x"'] \arrow[dl, dotted, shift left, "y"] \arrow[d, "r"] & \\
Fi \arrow[dr, "c_i"'] \arrow[drr, bend left, "t_i"] \arrow[dd, "Fg"'] & U \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "s"] & \\
& C \arrow[r, "c"'] & T \\
Fj \arrow[ur, "c_j"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$\square$

A partir de esta proposición podemos hacer una prueba de coMP.

Teorema 1.2.9. Sean $\mathcal{C}$ una categoría con una familia de generadores extrema $\mathbb{G}$, que además es proyectiva con respecto a colímites filtrados; $\{c_i : Fi \to C\}_{i\in\mathcal{I}}$ el colímite filtrado de un funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$; y $\{t_i : Fi \to T\}_{i\in\mathcal{I}}$ un cocono arbitrario sobre F. Supongamos que

- para todo $g : G \to T$, con $G \in \mathbb{G}$, existe $x : G \to Fi$ tal que $t_i x = g$;
- para todo par de morfismos $x, y : G \rightrightarrows Fi$ tales que $t_i x = t_i y$ existe $g : i \to j$ con $Fgx = Fgy$.

Entonces el morfismo inducido $c : C \to T$ es un isomorfismo.

Demostración. Por la proposición anterior c es un monomorfismo. Para cualquier $g : G \to T$ existe $x : G \to Fi$ tal que $t_i x = g$, tenemos que $c(c_i x) = t_i x = g$, la definición de generadores extremos implica que c es un isomorfismo. $\square$

Gracias a los ejemplos 1.1.4 y 1.2.6, la prueba de coMP anterior funciona bien en las categorías de conjuntos, prehaces, grupos abelianos, módulos, espacios topológicos, entre otras.

Para obtener otra condición suficiente para garantizar la epimorficidad de s en la prueba de MP podemos asumir que todos los morfismos $s_i : S \to Fi$ son epimorfismos (observemos que esta condición es superflua desde el punto de vista de la proposición 1.2.8: si los t_i fueran monomorfismos por hipótesis, entonces $x = y$ y la propiedad es trivialmente cierta tomando $g = Id_i$). Esto puede ser entendido, en términos de la máxima, como que sólo queremos contrastar "las reacciones necesarias entre las interpretaciones del signo" y que todo Fi es la interpretación de S (la idea de "reacción" será mejor modelada cuando trabajemos con operadores modales en el capítulo 2). Esto tiene varias consecuencias inmediatas: en primer lugar, las contrastaciones Fg son también epimorfismos (pues $Fgs_i = s_j$ y s_j es epimorfismo); del mismo modo, l_i también son epimórficas; y, por último, las contrastaciones están completamente caracterizadas por su dominio y codominio (en efecto, si $h : i \to j$ es otro morfismo en $\mathcal{I}$ entonces $Fgs_i = Fhs_i$ y así $Fh = Fg$). Sin embargo, esto no implica que el morfismo s sea epimórfico.

Ejemplo 1.2.10. Sea el cono $\{j_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{2^n}\}$ donde j_n es el homomorfismo canónico (es decir, el que manda un número al residuo de dividirlo entre 2^n) con contrastaciones $\{\delta_{mn} : \mathbb{Z}_{2^m} \to \mathbb{Z}_{2^n} | m \geq n\}$ escogidas de tal forma que el diagrama siguiente conmute:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}_2 \\ \mathbb{Z} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{Z}_4 \arrow[u] \\ & \mathbb{Z}_8 \arrow[u] \\ & \vdots \arrow[u] \end{tikzcd}$$

La idea de este ejemplo sería entender los números enteros vía sus residuos por potencias de 2. Observemos en primer lugar que para lograr $\mathbb{Z}$-separabilidad necesariamente tenemos que trabajar con un número infinito de interpretaciones. Si L es el límite del diagrama vertical, entonces el morfismo inducido $s : \mathbb{Z} \to L$ es un monomorfismo, gracias a la $\mathbb{Z}$-separabilidad. Sin embargo, s no es un epimorfismo: en efecto, $(1, 3, 7, \ldots, 1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}, \ldots) \in L$, pero no hay ningún entero que posea estos residuos cuando lo dividimos entre potencias de 2.

Para entender qué está sucediendo en el ejemplo anterior, presentamos la siguiente proposición.

Proposición 1.2.11. Sean $\mathcal{C}$ una categoría con una familia de generadores proyectivos $\mathbb{G}$ y $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un funtor con límite $\{l_i : L \to Fi\}_{i \in \mathcal{I}}$. Dado un cono $\{s_i : S \to Fi\}_{i \in \mathcal{I}}$, consideremos las siguientes afirmaciones

1. el único morfismo $s : S \to L$ es epimórfico;

2. para cualquier $G \in \mathbb{G}$ y para toda elección de $x_i \in \mathcal{C}(G, Fi)$ si

$$\bigcap_I (s_{i\,-})^{-1}(x_i) = \emptyset$$

entonces existe $J \subset I$ finito tal que

$$\bigcap_J (s_{j\,-})^{-1}(x_j) = \emptyset,$$

donde $s_{i\,-} : \mathcal{C}(G, M) \to \mathcal{C}(G, M_i)$ es el morfismo inducido por s_i.

Entonces 1. siempre implica 2.; y 2. implica 1. en el caso en que $\mathcal{I}$ sea cofiltrada y los s_i epimórficos.

Observemos que en el enunciado 1. los objetos viven en la categoría $\mathcal{C}$ mientras que en 2. todos ellos viven en la categoría de conjuntos. En efecto, tenemos que en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{C}(G,Fi) \arrow[dd, "Fg_-"] \\
\mathcal{C}(G,S) \arrow[r, dashed, "s_-"] \arrow[urr, bend left, "s_{i\,-}"] \arrow[drr, bend right, "s_{j\,-}"'] & \mathcal{C}(G,L) \arrow[ur, "l_{i\,-}"] \arrow[dr, "l_{j\,-}"'] & \\
 & & \mathcal{C}(G,Fj)
\end{tikzcd}$$

los objetos son conjuntos de morfismos y las flechas son funciones que envían morfismos en morfismos.

Demostración. 1.$\Rightarrow$ 2. Supongamos que toda intersección finita de $\{(s_{i\,-})^{-1}(x_i)\}_I$ no es vacía. Dada cualquier $Fg : Fj \to Fk$, como $(s_{j\,-})^{-1}(x_j) \cap (s_{k\,-})^{-1}(x_k) \neq \emptyset$ existe $y : G \to S$ tal que $s_j y = x_j$ y $s_k y = x_k$, y así obtenemos que $Fgx_j = Fgs_j y = s_k y = x_k$. Como los funtores representables preservan límites y dada la forma que tienen los límites en la categoría de conjuntos, $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{C}(G,L)$. Por hipótesis $s : S \to L$ es epimórfico y como G es proyectivo entonces $s_- : \mathcal{C}(G,S) \to \mathcal{C}(G,L)$ también lo es. Por tanto, existe $x : G \to S$ tal que $sx = (x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ y por construcción $x \in \bigcap_I (s_{i\,-})^{-1}(x_i)$.
2.$\Rightarrow$ 1. Supongamos por contradicción que $s : S \to L$ no es epimórfico. Entonces existe algún $g : G \to L$ que no se deja factorizar a través de s. Considere $l_i g \in \mathcal{C}(G,Fi)$. Como G proyectivo y s_i son epimórficos tenemos que los $s_{i\,-}$ también lo son y así $(s_{i\,-})^{-1}(p_i g) \neq \emptyset$. Sea $J \subset I$ un subconjunto finito arbitrario. Por la hipótesis de cofiltrado, existen Fk y morfismos $g_{kj} : Fk \to Fj$ para cada $j \in J$. Si $y \in (s_{k\,-})^{-1}(l_k g)$ entonces $s_j y = Fg_{kj}s_k y = Fg_{kj}l_k g = l_j g$ y así $y \in \bigcap_J (s_{j\,-})^{-1}(l_j g)$. Por 2. existe $x \in \bigcap_I (s_{i\,-})^{-1}(x_i)$. Entonces $sx = (s_-)x = (l_i g)_I = g$, vistos como elementos de $\mathcal{C}(G,L)$, lo cual contradice que g no se factoriza a través de s. $\square$

En el ejemplo 1.2.10, el límite era cofiltrado, pero fallaba la propiedad de la intersección finita: en efecto, cualquier truncamiento finito de $(1, 3, 7, \ldots, 1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}, \ldots)$ tiene solución en $\mathbb{Z}$ pero la sucesión total no.

Ejemplo 1.2.12. 1. En la categoría de espacios topológicos Hausdorff compactos, *HComp*, el singleton es un generador proyectivo. En este caso, $HComp(\{*\}, S)$ coincide con los elementos de $x_i \in S$ y dado que $\{x_i\}$ es cerrado (Hausdorff) tenemos que $(s_{i\,-})^{-1}(x_i)$ es cerrado y compacto. Dado que los cerrados de un espacio compacto satisfacen la propiedad de la intersección finita, la proposición 1.2.11 se reduce al hecho:

"Sea $\{s_i : S \to Fi\}$ una familia de funciones continuas sobreyectivas indexadas por un conjunto cofiltrado I, donde tanto S como los Fi son espacios topológicos Hausdorff compactos. Entonces la correspondiente función inducida $s : S \to lim(Fi)$ es continua y sobreyectiva."

Este resultado es conocido en la literatura [18, p. 89].

2. En la categoría de R-módulos a derecha M_R, el anillo R es un generador proyectivo. Dado que todo homomorfismo sobreyectivo de módulos es de la forma $M \to M/M_i$, con $M_i \subseteq M$, cualquier $f \in M_R(R, M/M_i)$ está caracterizado por su imagen en $1 \in R$ y $f(1) = x_i + M_i$, para algún $x_i \in M_i$. La proposición 1.2.11 toma en esta categoría la forma:

   "Dado un R-módulo las condiciones siguientes son equivalentes:

   (a) para cada familia dirigida de submódulos, el homomorfismo $M \to lim(M/M_i)$ es sobreyectivo;

   (b) para cada familia de coconjuntos $\{x_i + M_i\}_{i \in I}$, donde $x_i \in M$ y $M_i \subseteq M$, si la intersección de una cantidad finita de coconjuntos no es vacía, entonces $\bigcap_{i \in I}(x_i + M_i) \neq \emptyset$."

   Esta proposición es conocida en la literatura [70, p. 243] y los módulos que satisfacen estas condiciones son llamados linealmente compactos. Veremos más adelante que ellos coinciden con los que satisfacen el axioma $AB5^*$ de [31].

Si pensamos la proposición 1.2.11 desde el punto de vista de nuestro modelo, el problema está en que la máxima pragmática asume la existencia de un *interpretante* que es quien interpreta el signo vía contrastaciones. Este interpretante en el pensamiento de Peirce es un hombre, no un dios, en el sentido que posee limitaciones cognitivas que no le permiten razonar con infinitas interpretaciones. Las matemáticas, al ser puro razonamiento humano, captan estas limitaciones de manera precisa (basta recordar este mismo problema en teoría de conjuntos y la forma en que es superado por medio del axioma de elección). Luego, en vistas de probar un enunciado tipo MP necesitamos una manera de controlar el infinito: una es con la propiedad de la intersección finita, otra gracias a la introducción de una adecuada lógica. En teoría de categorías, la lógica (interna) se basa en las propiedades reticulares de $Sub(A)$, la clase de monomorfismos con codominio A ordenados con una adecuada relación, en donde se definen lo conectivos usuales $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$, los cuantificadores $\forall$, $\exists$ e interpretaciones adecuadas de símbolos de variables, constantes, relación, etc. Sin embargo, en nuestro caso, donde los morfismos involucrados son epimorfismos más que monomorfismos, resulta más natural trabajar con $Coc(A)$, la clase ordenada de epimorfismos con dominio A, que con $Sub(A)$. Quizá sea conveniente aclarar el orden de $Coc(A)$, para ver algunas de sus propiedades básicas.

Definición 1.2.13. [55, p. 170] Sea A un objeto de una categoría $\mathcal{C}$. Dados dos epimorfismos $e_1 : A \to E_1$ y $e_2 : A \to E_2$, diremos que $e_2 \leq e_1$ si hay un epimorfismo $E_1 \twoheadrightarrow E_2$, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & E_1 \arrow[dd, two heads] \\ A \arrow[ur, two heads, "e_1"] \arrow[dr, two heads, "e_2"'] & \\ & E_2 \end{tikzcd}$$

La relación anterior es reflexiva y transitiva en la clase de todos los epimorfismos con dominio A. Partiéndola con la relación de equivalencia $e_1 \cong e_2$ ssi $e_1 \leq e_2$ y $e_2 \leq e_1$, obtenemos $Coc(A)$.

La siguiente proposición es una consecuencia del orden anterior, la propiedad universal del límite y la definición de unión.

Proposición 1.2.14. Supongamos $(l_i : L \to Fi)$ es el límite de un funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, donde cada l_i es un epimorfismo. Entonces $L = \bigcup F_i$ en $Coc(L)$.

Definición 1.2.15. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Diremos que

1. $Coc(M)$ tiene uniones efectivas si para cada $A, B \in Coc(M)$ el cuadrado

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, two heads] & & \\ & A \cup B \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & B \arrow[d, two heads] \\ & A \arrow[r, two heads] & A \cap B \end{tikzcd}$$

es pullback y pushout;

2. $\mathcal{C}$ tiene pushouts efectivos si dado un pushout

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & Y \arrow[d, "d"] \\ Z \arrow[r, "c"'] & W \end{tikzcd}$$

con b monomorfismo, es un pullback;

3. $\mathcal{C}$ tiene pullbacks efectivos si $\mathcal{C}^{op}$ tiene pushouts efectivos, es decir, si todo pullback

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & Y \arrow[d, "d"] \\ Z \arrow[r, "c"'] & W \end{tikzcd}$$

con d epimorfismo, también es un pushout.

Las propiedades 2. y 3. de la definición anterior han sido estudiadas en forma aislada en varios tipos de categorías, es decir, se han planteado enunciados como "En una categoría abeliana el pushout de un monomorfismo es un monomorfismo y el diagrama pushout es también un pullback" [15, Volumen 2, proposición 1.7.6]. Sin embargo no se ha hecho un estudio sistemático de ellas, por lo que no tienen que sepamos ningún nombre específico; los de la definición 1.2.15 fueron introducidos para referirnos a ellas en el contexto de este trabajo, inspirados en el nombre "uniones efectivas" el cual sí es estándar en teoría de categorías.

Proposición 1.2.16. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con uniones efectivas y pullbacks efectivos. Sea $\mathcal{I}$ una categoría con la siguiente propiedad: dados dos funtores $F, G : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ tales que para cada $i \in ob(\mathcal{I})$, si los $Fi \to Gi$ son epimórficos entonces $lim(F) \to lim(G)$ también es epimórfico. Entonces, para cada objeto M de $\mathcal{C}$, para toda familia $\{A_i\}_{i\in ob(\mathcal{I})}$ y todo B con $A_i, B \in Coc(M)$, tenemos que

$$B \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} B \cap A_i.$$

Demostración. Consideremos para cada i el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, two heads, "u_i"] & & \\
& A_i \cup B \arrow[r, two heads, "p_i"] \arrow[d, two heads, "s_i"'] & B \arrow[d, two heads, "r_i"] \\
& A_i \arrow[r, two heads, "t_i"'] & A_i \cap B
\end{tikzcd}$$

el cual es pullback y pushout por unión efectiva. Tomando el límite sobre i tenemos el siguiente diagrama inducido

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, two heads, "u"] & & \\
& lim(A_i \cup B) \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, two heads, "s"'] & B \arrow[d, two heads, "r"] \\
& limA_i \arrow[r, two heads, "t"'] & lim(A_i \cap B)
\end{tikzcd}$$

donde para garantizar que u, p, s, t, r continúen siendo epimorfismos necesitamos aplicar la hipótesis sobre $\mathcal{I}$. En principio, el cuadrado sólo es un pullback, dado que tomar límite sobre i conmuta con tomar el pullback, porque ambos son límites. Sin embargo, como los pullbacks son efectivos por hipótesis, concluimos que el cuadrado también es un pushout. Gracias a que u es epimorfismo, tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, two heads, "pu"] \arrow[d, two heads, "su"'] & B \arrow[d, two heads, "r"] \\
limA_i \arrow[r, two heads, "t"'] & lim(A_i \cap B)
\end{tikzcd}$$

continúa siendo un pushout. Por la definición de intersección en $Coc(M)$ tenemos que $(limA_i) \cap B = lim(A_i \cap B)$. Para finalizar basta aplicar la proposición 1.2.14. $\square$

Proposición 1.2.17. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con factorizaciones epi-mono, un objeto terminal 1 y pushout efectivos. Supongamos que $(l_i : L \to Fi)$ es el límite de un funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ y sea $(s_i : S \to Fi)$ un cono sobre F tal que cada s_i es un epimorfismo. Sea $\alpha(im(s))$ el pushout de $im(s) \hookrightarrow L$ a lo largo de la imagen de $!_{im(s)} : im(s) \to 1$. Si tenemos que[1]

$$\alpha(im(s)) \cap \bigcup l_i = \bigcup \alpha(im(s)) \cap l_i,$$

entonces el morfismo inducido $s : S \to L$ es un epimorfismo.

Demostración.

1. Para todo S, la imagen de $!_S : S \to 1$ es el mínimo de $Coc(S)$.

   En efecto, para cada $S \twoheadrightarrow N$, tenemos

   $$\begin{tikzcd}
   S \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & N \arrow[d, "!_N"] \arrow[dl, dotted, "n"'] \\
   im(!_S) \arrow[r, hook] & 1
   \end{tikzcd}$$

   donde n existe por la definición de factorización epi-mono.

2. Si $f : S \twoheadrightarrow N$ es epimórfico, entonces el pushout de $im(!_S)$ es $im(!_N)$ y ambos son isomorfos.

   Consideremos el diagrama

   $$\begin{tikzcd}
   S \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, two heads, "i"'] & N \arrow[d, two heads, "i'"] \\
   im(!_S) \arrow[r, two heads, "f'", shift left] \arrow[d, hook, "m"'] & P \arrow[l, two heads, dotted, "t", shift left] \\
   1 &
   \end{tikzcd}$$

[1] Escribimos l_i en vez de Fi para resaltar el hecho de que estamos trabajando en $Coc(L)$.

donde P es el pushout de f, i con morfismos inducidos f', i', los cuales resultan ser epimorfismos. Luego, podemos ver $i'f : S \twoheadrightarrow P$ como un elemento de $Coc(S)$ y debe existir, gracias que $im(!_S)$ es mínimo, un $t : P \twoheadrightarrow im(!_S)$ tal que $ti'f = i$. Inmediatamente tenemos que $im(!_S)$ y P son isomorfos tanto en $Coc(S)$ como en $Coc(N)$. Además, mti' es una factorización epi-mono de $!_N : N \to 1$, por lo que $im(!_S)$ es isomorfo a $im(!_N)$ (unicidad de la factorización).

3. $\alpha(im(s))$ es el pushout de la imagen de $!_S : S \to 1$ a lo largo de s.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, two heads, "e_s"] \arrow[d, two heads] & im(s) \arrow[r, hook, "m_s"] \arrow[d, two heads] & L \arrow[d, two heads] \\
im(!_S) \arrow[r, two heads] \arrow[ur, phantom, "I"] & im(!_{im(s)}) \arrow[r, hook] \arrow[ur, phantom, "II"] & \alpha(im(s))
\end{tikzcd}$$

En el diagrama anterior el cuadrado I es un pushout por el ítem anterior; el cuadrado II es un pushout por la definición de $\alpha(im(s))$; por tanto el cuadrado total también es un pushout.

4. El pushout de $im(!_S)$ a lo largo de $s : S \to L$ es $im(!_L)$.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "s"] \arrow[d, two heads, "i"'] \arrow[rr, bend left, two heads, "s_i"] & L \arrow[r, two heads, "l_i"] \arrow[d, two heads, "i'"] & Fi \arrow[d, two heads, "i''"] \\
im(!_S) \arrow[r, "s'"'] \arrow[d, hook, "m"'] & \alpha(im(s)) \arrow[r, two heads, "l'_i"'] & \alpha(im(s)) \cap Fi \arrow[ll, bend left, two heads, "t_i"] \\
1 & &
\end{tikzcd}$$

donde s', i' son morfismos inducidos por ser $\alpha(im(s))$ un pushout (sólo podemos garantizar que i' es epimórfica). El pushout de i' y algún l_i es $\alpha(im(s)) \cap Fi$ en $Coc(L)$. Dado que $l_i s = s_i$ y cada s_i es epimórfico concluimos por 2. que $\alpha(im(s)) \cap Fi = im(!_S)$. Si consideramos el isomorfismo $t_i : \alpha(im(s)) \cap Fi \twoheadrightarrow im(!_S)$, el cual en particular es epimórfico, obtenemos la factorización epi-mono $mt_i i'' l_i$ de $!_L : L \to 1$, por lo que $im(!_S)$ es isomorfo a $im(!_L)$. Así, en $Coc(L)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha(im(s)) &= \alpha(im(s)) \cap \bigcup l_i, \text{ pues } L = \bigcup l_i \\
&= \bigcup \alpha(im(s)) \cap l_i, \text{ hipótesis} \\
&= \bigcup im(!_L) \\
&= im(!_L)
\end{aligned}$$

Además como $s'i = i's = t_i l_i' i's = t_i i'' l_i s = t_i i'' s_i$ concluimos que s' es el isomorfismo que iguala a $\alpha(im(s))$ y $im(!_S)$ en $Coc(S)$.

5. $im(s)$ es isomorfo a L y así s es epimórfica.

   Sea $m_s e_s = s$ la factorización epi-mono de s. Sea I el pushout $im(!_S)$ a lo largo de e_s y (I, II) el pushout de $im(!_S)$ a lo largo de s (los cuales toman esa forma gracias a 2. y 4., respectivamente). Gracias al lema de los pushout, II también es un pushout y como m_s es un monomorfismo, por hipótesis, también es un pullback. Si tomamos cualquier cono (X, x_i) sobre Fi, existe un único $x : X \to L$ tal que $l_i x = x_i$. Tomando este x y $i'x : X \to im(!_S)$, la definición de pullback nos garantiza un $t : X \to im(s)$ tal que $m_s t = x$. Por tanto, $\{l_i m_s : im(s) \to Fi\}$ también es el límite de los Fi.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dotted, "t"'] \arrow[dr, dotted, "x"] \arrow[drr, bend left, "x_i"] & & \\
S \arrow[r, two heads, "e_s"] \arrow[d, two heads, "i"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & im(s) \arrow[r, hook, "m_s"] \arrow[d, two heads, "j"'] \arrow[dr, phantom, "II"] & L \arrow[r, "l_i"] \arrow[d, two heads, "i'"'] & Fi \\
im(!_S) \arrow[r, two heads, "id"'] & im(!_S) \arrow[r, "id"'] & im(!_S) &
\end{tikzcd}$$

□

Para aplicar la proposición anterior necesitamos determinar ciertas propiedades reticulares del álgebra de objetos cocientes. Dado que en la literatura lo natural es trabajar con el álgebra de subobjetos, es deseable tener una aplicación que relacione la estructura de la última con la de la primera.

Proposición 1.2.18. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con factorizaciones epi-mono, un objeto terminal 1 y pushout. Para cada objeto A, existe una aplicación $\alpha : Sub(A) \to Coc(A)$ que reversa el orden.

Demostración. Dado $S \hookrightarrow A$, $\alpha(S)$ será el pushout a lo largo de la imagen de $!_S : S \to 1$:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, hook, "s"] \arrow[d, two heads, "e_s"'] & A \arrow[d, two heads, "\alpha(e_s)"] \\
im(!_S) \arrow[r, hook, "s'"'] \arrow[d, hook, "m_s"'] & \alpha(S) \\
1 &
\end{tikzcd}$$

Sea $S \leq T \in Sub(A)$. Por la propiedad de diagonalización de las factorizaciones epi-mono tenemos

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, two heads, "e_s"] \arrow[d, hook, "o"'] & im(!_S) \arrow[dd, hook, "m_s"] \arrow[ddl, dotted, "d"'] \\
T \arrow[d, two heads, "e_t"'] & \\
im(!_T) \arrow[r, hook, "m_t"'] & 1
\end{tikzcd}$$

Haciendo un cuadrado para T análogo al que utilizamos para definir $\alpha(S)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\Big(\alpha(e_t)t = t'e_t\Big) &\Rightarrow \Big(\alpha(e_t)to = t'e_to\Big) \\
&\Rightarrow \Big(\alpha(e_t)s = t'de_s\Big)
\end{aligned}$$

y por tanto tenemos el diagrama pushout

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, hook, "s"] \arrow[d, two heads, "e_s"'] & A \arrow[d, two heads, "\alpha(e_s)"] \arrow[ddr, two heads, bend left, "\alpha(e_t)"] & \\
im(!_S) \arrow[r, hook, "s'"'] \arrow[drr, hook, bend right, "t'd"'] & \alpha(S) \arrow[dr, dotted, "w"] & \\
 & & \alpha(T)
\end{tikzcd}$$

Así, $\alpha(T) \leq \alpha(S)$ en $Coc(A)$. □

Ejemplo 1.2.19. 1. Como ya habíamos mencionado, toda categoría abeliana tiene pushouts efectivos. Como la noción dual a categoría abeliana es categoría abeliana (autodualidad), en estas también los pullbacks son efectivos. De nuevo por autodualidad, en estas categorías la función 1.2.18 tiene un regreso: dado $Q \in Coc(A)$, como el único morfismo del inicial 0 en Q es un monomorfismo, podemos definir $\beta(Q)$ como el pullback

$$\begin{tikzcd}
\beta(Q) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[d, hook] \\
A \arrow[r, two heads] & Q
\end{tikzcd}$$

Puede mostrarse que α y β son inversas (de hecho, en categorías abelianas α coincide con el cokernel y β con el kernel, así que el hecho que sean inversas es la afirmación bien conocida que cada monomorfismo es el kernel de su cokernel y cada epimorfismo es el cokernel de su kernel [15, Volumen

2, proposición 1.5.7]). Por tanto, $Sub(A)$ y $Coc(A)$ son anti-isomorfos y la condición de la proposición 1.2.17 es equivalente a una de la forma

$$a \vee \bigwedge_{i\in I} b_i = \bigwedge_{i\in I} a \vee b_i.$$

Las proposiciones 1.2.16 y 1.2.17 implican por tanto que las siguientes afirmaciones son equivalentes

- En el álgebra de subobjetos vale la propiedad reticular anterior;
- El límite de una familia de epimorfismos es un epimorfismo.

En el caso que tanto I como los límites sean cofiltrados (que es el más común entre las categorías usuales) la propiedad reticular recibe el nombre de axioma AB5*, el cual constituye la base para el desarrollo del álgebra homológica en categorías abelianas [31]. Esto también explica el ejemplo 1.2.10: en la categoría de grupos abelianos no vale el axioma AB5* (pero sí vale su dual).

2. En los topos los pushouts son efectivos [15, Volumen 3, proposición 5.9.10]. Sin embargo no hemos podido probar hasta el momento que el morfismo α sea una equivalencia (como en un topos el objeto inicial es estricto, el morfismo β es constante a 0, por lo que no nos ayuda en esta tarea). No obstante, podemos usar un subterfugio para aplicar la proposición 1.2.17: si en cada álgebra de subobjetos vale

$$a \vee \bigwedge_{i\in I} b_i = \bigwedge_{i\in I} a \vee b_i,$$

en la $im(\alpha)$ vista como una subálgebra de los objetos cocientes valdrá

$$a \wedge \bigvee_{i\in I} b_i = \bigvee_{i\in I} a \wedge b_i,$$

y así para utilizar esta proposición basta con considerar funtores F donde cada $Fi \in im(\alpha)$.

En resumen, el estudio de MP y coMP conduce a categorías donde en cada álgebra de subobjetos valen identidades de la forma

$$a \wedge \bigvee_{i\in I} b_i = \bigvee_{i\in I} a \wedge b_i, \qquad a \vee \bigwedge_{i\in I} b_i = \bigwedge_{i\in I} a \vee b_i.$$

Ellas reciben el nombre de bi-Heyting y serán el objeto de nuestro estudio en el capítulo siguiente.

2. MP en categorías de bi-Heyting

Como ha sido demostrado en diversos trabajos [72], [74], un estudio serio del pensamiento de Peirce en general, y de la máxima pragmática en particular, no puede escapar de las nociones de continuidad, frontera, modalidad, medición, iteración. Para insertarlas en nuestro modelo, trabajaremos en categorías donde el álgebra de subobjetos tiene propiedades reticulares especiales: las categorías de bi-Heyting.

2.1 Categorías de bi-Heyting: sustracción, frontera y modalidad

Las álgebras de Heyting son un tema clásico en lógica, retículos, categorías, topología. Sus duales, las álgebras de co-Heyting, aunque han sido estudiadas casi desde el mismo tiempo [65], son mucho menos conocidas. Un tratamiento unificado de ellas, las álgebras de bi-Heyting, tuvo que esperar hasta la década del 70, en el marco de la escuela polaca de lógicas no clásicas [60]. En la actualidad han resurgido en una amplia gama de trabajos: como estructuras algebraicas subyacentes a las lógicas paraconsistentes [19], como álgebras de Heyting libres [30], como herramientas para caracterizar categorías de objetos puntuados con cubrimientos iniciales normales [16].

Definición 2.1.1. [36] Sea $\mathcal{A}$ un retículo acotado. Diremos que $\mathcal{A}$ es

1. un álgebra de Heyting si para cada elemento $b \in \mathcal{A}$, el funtor

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\xrightarrow{\;\_\wedge b\;} \mathcal{A} \\ a &\longmapsto a \wedge b \end{aligned}$$

tiene un adjunto derecho, llamado implicación, el cual denotamos

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\xrightarrow{b \Rightarrow \_} \mathcal{A} \\ c &\longmapsto b \Rightarrow c. \end{aligned}$$

Esta adjunción se puede expresar diciendo que para todos a, b, c vale

$$a \wedge b \leqslant c \quad sii \quad a \leqslant b \Rightarrow c.$$

2. un álgebra de co-Heyting, si su dual $\mathcal{A}^{op}$ es un álgebra de Heyting, es decir, si el funtor

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\xrightarrow{b \vee \_} \mathcal{A} \\ c &\longmapsto b \vee c \end{aligned}$$

tiene un adjunto izquierdo, llamado sustracción, el cual denotamos

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\xrightarrow{\_ - b} \mathcal{A} \\ a &\longmapsto a - b. \end{aligned}$$

La adjunción se puede expresar diciendo que para todos a, b, c vale que

$$a - b \leqslant c \quad sii \quad a \leqslant b \vee c.$$

3. un álgebra de bi-Heyting, si es Heyting y co-Heyting al tiempo.

En un álgebra de Heyting podemos definir una operación de negación ($\neg$), llamada negación intuicionista o pseudocomplemento, haciendo $\neg x = x \Rightarrow 0$, la cual también puede ser caracterizada por

$$x \leqslant \neg y \quad sii \quad x \wedge y = 0.$$

Dualmente, en un álgebra de co-Heyting podemos definir otra operación de negación ($\sim$), llamada negación dual intuicionista o más brevemente suplemento [36], definida como $\sim x = 1 - x$. En este caso tenemos

$$\sim x \leqslant y \quad sii \quad 1 = x \vee y.$$

En un álgebra de bi-Heyting podemos definir las dos negaciones y ellas son iguales sólo cuando ambas colapsan en la negación boolena.

Estamos particularmente interesados en las álgebras de bi-Heyting completas, las cuales admiten la siguiente caracterización.

Proposición 2.1.2. [36] Sea $\mathcal{A}$ un retículo acotado completo.

1. $\mathcal{A}$ es un álgebra de Heyting ssi
$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} a \wedge b_i;$$

2. $\mathcal{A}$ es un álgebra de co-Heyting ssi
$$a \vee \bigwedge_{i \in I} b_i = \bigwedge_{i \in I} a \vee b_i.$$

Por tanto, en un álgebra de bi-Heyting completa valen las dos propiedades distributivas anteriores.

Las álgebras de Heyting y co-Heyting aparecen en teoría de categorías al considerar retículos de subestructuras: el álgebra de subobjetos de un objeto fijo en un topos es un álgebra de Heyting, mientras que el álgebra de subtopos de un topos dado es un álgebra de co-Heyting [38]. Aunque algunos autores prefieren agregar condiciones adicionales en el momento de definir categorías de bi-Heyting [36], nosotros nos centraremos sólo en propiedades reticulares.

Definición 2.1.3. Una categoría $\mathcal{C}$ es de bi-Heyting si para todo $A \in Ob(\mathcal{C})$, $Sub(A)$ es un álgebra de bi-Heyting.

2.1.1 Propiedades reticulares de subobjetos y generadores

En la sección 1.1 se esbozó un procedimiento general: para demostrar que una construcción tiene una propiedad con respecto a todos los objetos de una categoría, basta demostrar que la tiene con respecto a una familia de generadores. Aplicaremos la misma idea para las propiedades reticulares de los subobjetos: para ver que para todo objeto A en una categoría $\mathcal{C}$, $Sub(A)$ pertenece a una determinada clase de subálgebras de las álgebras de Heyting, basta ver que $Sub(G)$ lo está, para todo G en una familia de generadores $\mathbb{G}$. Este procedimiento es una generalización de [16, Lema 6.3].

Todo morfismo $f : Y \to X$, induce inmediatamente la función monótona imagen inversa, $f^* : Sub(X) \to Sub(Y)$. Lo mínimo que le podemos pedir a las nuevas operaciones en $Sub(\_)$ es que respeten esta función.

Definición 2.1.4. [52] Sea $T_X : \prod_I Sub(X) \to Sub(X)$ una familia de operaciones definidas para cada objeto X de una categoría $\mathcal{C}$. La familia $\{T_X\}_{X \in \mathcal{C}}$ será llamada natural si para cada morfismo $f : Y \to X$ y cada $\{S_i\}_I \subseteq Sub(X)$, la función $f^* : Sub(X) \to Sub(Y)$ satisface que $f^*(T_X(S_i)_I) = T_Y(f^* S_i)_I$.

Ejemplo 2.1.5. 1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría bien potenciada (cada $Sub(A)$ es un conjunto) y localmente completa (cada $Sub(A)$ es un retículo completo). Por el teorema del funtor adjunto la intersección arbitraria de subobjetos es natural si y sólo si para cada $f : Y \to X$, el morfismo de retículos $f^* : Sub(X) \to Sub(Y)$ posee un adjunto izquierdo $\exists_f : Sub(Y) \to Sub(X)$.

2. En una categoría regular las operaciones $\Rightarrow$, $\neg$ son naturales siempre que ellas existen. En efecto, en este tipo de categorías vale que dados A, B objetos, con $a \in Sub(A)$, $b \in Sub(B)$ y $f : A \to B$ un morfismo, tenemos que $\exists_f(a \wedge f^*(b)) \cong \exists_f(a) \wedge b$ [34, p. 20]. Luego, si $Sub(A)$, $Sub(B)$ son álgebras de Heyting y $c \in Sub(B)$ tenemos que

$$\begin{array}{rll} a \leq f^*(b \Rightarrow c) & ssi & \exists_f(a) \leq b \Rightarrow c \\ & ssi & \exists_f(a) \wedge b \leq c \\ & ssi & \exists_f(a \wedge f^*(b)) \leq c \\ & ssi & a \wedge f^*(b) \leq f^*(c) \\ & ssi & a \leq f^*(b) \Rightarrow f^*(c). \end{array}$$

   Para la naturalidad de $\neg$ necesitamos además que $f^*(0) = 0$.

3. Un hecho fundamental es que las operaciones de sustracción y suplemento $\sim, -$ sólo son naturales cuando colapsan en las operaciones booleanas. En efecto dado $i : A \hookrightarrow X$ en $Sub(X)$, como $A \wedge \sim_X A$ es el pullback de $\sim_X A \hookrightarrow X$ a lo largo de i, tenemos que $A \wedge \sim_X A = i^*(\sim_X A) = \sim_A i^*(A) = \sim_A A = 0_A = 0_X$.

Proposición 2.1.6. Sean $\mathcal{C}$ una categoría con factorizaciones epi-mono, con coproductos disyuntos, y tal que pullbacks de epi son epi; $\mathbf{A}$ una subvariedad de las álgebras de Heyting; y $\mathbb{G}$ una familia de generadores en $\mathcal{C}$. Supongamos que todas las operaciones del lenguaje de $\mathbf{A}$ son interpretables y naturales en $\mathcal{C}$. Si $Sub(G) \in \mathbf{A}$ para cada $G \in \mathbb{G}$ entonces $Sub(X) \in \mathbf{A}$ para cada $X \in \mathcal{C}$.

Demostración. Dado cualquier $X \in \mathcal{C}$, existe un epimorfismo $\gamma : \coprod_f Dom(f) \twoheadrightarrow X$, donde $f \in \bigcup_{G \in \mathbb{G}} \mathcal{C}(G, X)$. La función $\gamma^* : Sub(X) \to Sub(\coprod_f Dom(f))$ es inyectiva: en efecto, dados $A, B \in Sub(X)$ si $\gamma^*(A) = \gamma^*(B)$ entonces tenemos los pullbacks

$$\begin{tikzcd} \gamma^*(A) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook] \\ \coprod_f Dom(f) \arrow[r, two heads, "\gamma"'] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \gamma^*(B) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ \coprod_f Dom(f) \arrow[r, two heads, "\gamma"'] & X \end{tikzcd}$$

y gracias a la unicidad de la factorización epi-mono, concluimos que $A = B$. Por otro lado, tenemos que $Sub(\coprod_f Dom(f)) = \prod_f Sub(Dom(f))$. En efecto, denotando $i_f : Dom(f) \hookrightarrow \coprod_f Dom(f)$ la inyecciones del coproducto, definimos

$$\begin{array}{ccc} Sub(\coprod_f Dom(f)) & \xrightarrow{\alpha} & \prod_f Sub(Dom(f)) \\ A & \longmapsto & (i_f^* A)_f \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \prod_f Sub(Dom(f)) & \xrightarrow{\quad\beta\quad} & Sub(\coprod_f Dom(f)) \\ (A_f)_f & \longmapsto & \bigcup_f i_f(A_f) \end{array}$$

En primer lugar, dada cualquier $g \in \bigcup_{G\in\mathbb{G}} \mathcal{C}(G, X)$ tenemos que $Dom(g) \cap \bigcup_f i_f(A_f) = \bigcup_f Dom(g) \cap i_f(A_f) = Dom(g) \cap i_g(A_g) = i_g(A_g)$, gracias a que los coproductos son disyuntos. Así, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_g \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \bigcup_f A_f \arrow[d, hook] \\ Dom(g) \arrow[r, hook, "i_g"'] & \coprod_f Dom(f) \end{tikzcd}$$

es un pullback y $\alpha\beta(A_f)_f = (A_f)_f$. Por el otro lado, dado cualquier $A \in Sub(\coprod_f Dom(f))$, tenemos que $Dom(f) \cap A = i_f^* A$, por tanto

$$A = A \cap \coprod_f Dom(f) = A \cap \bigcup Dom(f) = \bigcup A \cap Dom(f) = \bigcup_f i_f^* A = \beta\alpha(A).$$

Dada cualquier identidad de la forma $\tau_1 = \tau_2$ que haga parte de la definición de $\mathbf{A}$, tenemos que cualesquiera realizaciones de τ_1, τ_2 en $Sub(X)$ son iguales en $\prod_f Sub(Dom(f))$ y gracias a la inyectividad de γ^* también son iguales en $Sub(X)$. Así, $Sub(X) \vDash \tau_1 = \tau_2$ y $Sub(X) \in \mathbf{A}$. $\square$

Corolario 2.1.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría regular; con coproductos, los cuales son disyuntos; para cada morfismo f, f^* posee adjuntos izquierdo $\exists_f$ y derecho $\forall_f$; bien potenciada; localmente completa; y con una familia de generadores $\mathbb{G}$. Si $Sub(G)$ es un álgebra de bi-Heyting completa para cada $G \in \mathbb{G}$ entonces $Sub(X)$ es un álgebra de bi-Heyting completa para cada $X \in \mathcal{C}$.

Demostración. Consecuencia de las proposiciones 2.1.2, 2.1.6 y el ejemplo 2.1.5. $\square$

Lema 2.1.8. Sean X un objeto de una categoría $\mathcal{C}$ tal que $Sub(X)$ es un álgebra de Heyting y $T_X : \prod_I Sub(X) \to Sub(X)$ una operación natural a lo largo de monomorfismos. Entonces T_X es una operación compatible de $Sub(X)$.

Demostración. Sean $\{S_i\}_I \subseteq Sub(X)$ y $i : A \hookrightarrow X$ un subobjeto arbitrario de X. Como $i^*(S_i) = A \wedge S_i$, tenemos que $T_X(S_i)_I \wedge A = i^*(T_X(S_i)_I) = T_X(i^*(S_i)_I) = T_X(S_i \wedge A)_I$ y basta aplicar [22, Lema 2.1]. $\square$

Proposición 2.1.9. Sean $\mathbf{A}$ una subvariedad de las álgebras de Heyting, $\mathcal{L}$ un local, $Sh(\mathcal{L})$ el topos de haces sobre $\mathcal{L}$, y supongamos que todas las operaciones de $\mathbf{A}$ son naturales en $Sh(\mathcal{L})$. Entonces para $X \in Sh(\mathcal{L})$, $Sub(X) \in \mathbf{A}$ si y sólo si $\mathcal{L} \in \mathbf{A}$.

Demostración.

$\Rightarrow$ Inmediato pues $Sub(1) \cong \mathcal{L}$.
$\Leftarrow$ Como $Sub(1) \cong \mathcal{L}$, tenemos que $Sub(1)$ es de **A**-Heyting. Luego si $i : U \hookrightarrow 1$ entonces $i^* : Sub(1) \twoheadrightarrow Sub(U)$ es un homomorfismo sobreyectivo (una preimagen de cualquier $a : A \hookrightarrow U$ viene dada simplemente por $ia : U \hookrightarrow 1$) y por el lema 2.1.8 $Sub(U)$ también es de **A**-Heyting. Como estamos en un topos locálico, $Sh(\mathcal{L})$ es generado por subobjetos de 1 y por la proposición 2.1.6 $Sh(\mathcal{L})$ es de **A**-Heyting. □

Corolario 2.1.10. Si $\mathcal{L}$ es un local, el topos $Sh(\mathcal{L})$ de haces sobre $\mathcal{L}$ es de bi-Heyting ssi $\mathcal{L}$ es un álgebra de bi-Heyting completa.

Demostración. Consecuencia de la proposición 2.1.9.

Puede ser interesante escribir explícitamente operaciones de sustracción y suplemento para este caso. Sean $F \in Sh(\mathcal{L})$ y $B, C \in Sub(F)$. Entonces para cada $u \in \mathcal{L}$ definimos

$$\begin{aligned}(B -_F C)(u) =& \{x \in F(U) : \exists u = \vee u_i, v_i \geqslant u_i \;\; e_i \in B(v_i),\; e_i|_{u_i} = x|_{u_i} \\ & \wedge \;\; u_i \leqslant v_i - m(e_i, v_i, C)\}\end{aligned}$$

donde $m(e, v, C) = \bigvee\{r \leqslant v : e|_r \in C(r)\}$. Gracias al axioma de pegamiento de los haces, tenemos $e|_{m(e,v,C)} \in C(m(e, v, C))$ y por definición este es el elemento más grande menor que v con dicha propiedad.

Verificar que $B - C$ es un subhaz de F es un ejercicio sencillo. Veamos solamente que si $D \in Sub(F)$ es otro subhaz, tenemos

$$B - C \leqslant D \quad sii \quad B \leqslant C \vee D$$

$\Rightarrow$) Sea $a \in B(u)$. Si $a \in C(u)$ hemos acabado, así que supongamos que $a \notin C(u)$. Sabemos que $a|_{m(a,u,C)} \in C(m(a, u, C))$ y por construcción $a|_{u-m(a,u,C)} \in (B - C)(u - m(a, u, C)) \subseteq D(u - m(a, u, C))$. Así por definición tenemos $a \in (C \vee D)(u)$.
$\Leftarrow$) Si $a \in (B-C)(u)$ entonces existen $u = \vee u_i, v_i \geqslant u_i$ y $e_i \in B(v_i)$ con $e_i|_{u_i} = a|_{u_i}$ y $u_i \leqslant v_i - m(e_i, v_i, C)$. Por hipótesis $e_i \in (C \vee D)(v_i)$ y por tanto existen $k_i, t_i \in \mathcal{L}$ tal que $v_i = k_i \vee t_i, e_i|_{k_i} \in C(k_i)$ y $e_i|_{t_i} \in D(t_i)$. Como $k_i \leqslant m(e_i, v_i, C)$ tenemos $u_i \leqslant v_i - m(e_i, v_i, C) \leqslant v_i - k_i \leqslant t_i$. Así $a|_{u_i} = e_i|_{u_i} \in D(u_i)$ y por ser D un haz $a \in D(u)$.

La operación de suplemento en este caso toma la forma

$$\begin{aligned}(\sim_F C)(u) =& \{x \in F(U) : \exists u = \vee u_i, v_i \geqslant u_i \;\wedge\; e_i \in F(v_i) \quad e_i|_{u_i} = x|_{u_i} \\ & \wedge \;\; u_i \leqslant v_i - m(e_i, v_i, C)\}.\end{aligned}$$

□

Veamos algunos ejemplos adicionales.

Ejemplo 2.1.11. 1. El retículo de abiertos de un espacio topológico es un álgebra de Heyting completa. Análogamente, el retículo de conjuntos cerrados es un álgebra de co-Heyting completa. Por tanto, en cada espacio topológico donde todo conjunto abierto es a la vez cerrado constituye un ejemplo de un álgebra de bi-Heyting completa. Por el corolario 2.1.10, las categorías de haces sobre estas topologías son de bi-Heyting.

2. Para toda categoría pequeña $\mathcal{I}$, su categoría de prehaces asociada $Pr(\mathcal{I})$ es de bi-Heyting [36]. En este caso, dado un prehaz F y $X, Y \in Sub(F)$ la operación de sustracción toma la forma

$$(X - Y)(C) = \{x \in F(C) | \exists h : C \to C', \exists x' \in F(C'),\ F(h)(x') = x, x' \in X(C') \wedge x' \notin Y(C')\}.$$

Y así,

$$(\sim Y)(C) = \{x \in F(C) | \exists h : C \to C', \exists x' \in F(C'),\ F(h)(x') = x \wedge x' \notin Y(C')\}.$$

3. Dada una categoría $\mathcal{I}$, su retículo de subcategorías constituye un álgebra de bi-Heyting. Dada una subcategoría $\mathcal{J}$ sus dos negaciones toman la forman:

   (a) $\neg\mathcal{J} = \begin{cases} ob(\neg\mathcal{J}) = ob(\mathcal{I}) - ob(\mathcal{J}); \\ \neg\mathcal{J}(a,b) = \mathcal{I}(a,b),\ \forall a, b \in ob(\neg\mathcal{J}). \end{cases}$

   (b) $\sim\mathcal{J} = \begin{cases} ob(\sim\mathcal{J}) = \{i \in ob(\mathcal{I}) | \exists f \in mor(\mathcal{J})^c \wedge (i = dom f \vee i = codom f)\}; \\ mor(\sim\mathcal{J}) = \{id_j | j \in ob(\sim\mathcal{J})\} \bigcup \{f | f \in Mor(\mathcal{J})^c\}. \end{cases}$

4. Toda categoría abeliana $\mathcal{A}$ con coproductos arbitrarios y de bi-Heyting es trivial. En efecto, en estas categorías valen el axioma AB5 y su dual, lo cual implica $\mathcal{A} = \{0\}$ [31].

2.1.2 Frontera

La definición de frontera en álgebras de co-Heyting fue realizada en [39] con el interés de clasificar las posibles interacciones entre una pareja de cuerpos físicos.

Definición 2.1.12. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de co-Heyting. Dado un $x \in \mathcal{A}$ definimos su frontera, denotada por $\partial(x)$, como $\partial(x) = x \wedge \sim x$.

Las siguientes propiedades de la frontera son conocidas en la literatura.

Proposición 2.1.13. [40], [36]

1. En cualquier álgebra de bi-Heyting $\mathcal{L}$ valen las siguientes identidades

$$\partial(a \wedge b) = \Big(\partial(a) \wedge b\Big) \vee \Big(a \wedge \partial(b)\Big),$$
$$\partial(a \wedge b) \vee \partial(a \vee b) = \partial(a) \vee \partial(b).$$

2. En un topos, si $A \leq X,\ B \leq Y$ entonces
$$\partial(A \times B) = \Big(\partial(A) \times B\Big) \vee \Big(A \times \partial(B)\Big)$$
donde las fronteras son tomadas respectivamente en $X \times Y,\ X,\ Y$.

Ejemplo 2.1.14. 1. En el álgebra de co-Heyting dada por los conjuntos cerrados de un espacio topológico, la frontera en el sentido de 2.1.12 coincide con la frontera topológica usual.

2. En el retículo de subcategorías de una categoría $\mathcal{I}$, para cada subcategoría $\mathcal{J}$ tenemos
$$\partial\mathcal{J} = \begin{cases} ob(\partial\mathcal{J}) = \{i \in ob(\mathcal{J}) | \exists f \in mor(\mathcal{J})^c \wedge (i = domf \vee i = codomf)\}; \\ mor(\partial\mathcal{J}) = \{id_j | j \in ob(\partial\mathcal{J})\}. \end{cases}$$

2.1.3 Operadores Modales

En una serie de artículos en la década de los 90 [61], [62], [63], Reyes realizó diferentes propuestas para definir operadores modales en lógica categórica. Entre ellas, la siguiente se puede trabajar en álgebras de bi-Heyting.

Definición 2.1.15. [63] Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de bi-Heyting al menos σ-completa (es decir, con supremos e ínfimos contables). En ella podemos construir por inducción los operadores:

1. $\Box_0 = \Diamond_0 = Id$.
2. $\Box_{n+1} = \neg \sim \Box_n$.
3. $\Diamond_{n+1} = \sim \neg \Diamond_n$.

Definimos los operadores modales como límites de los anteriores:
$$\Box a = \bigwedge_n \Box_n a \qquad\qquad \Diamond a = \bigvee_n \Diamond_n a.$$

En la siguiente proposición se resumen las propiedades más importantes de los operadores anteriores.

Proposición 2.1.16. [63]

1. Para todo $\alpha \in \omega + 1$ vale
   - $\Box_\alpha,\ \Diamond_\alpha$ preservan el orden;
   - $\Diamond_\alpha \dashv \Box_\alpha$.
2. $\Box \leq \ldots \leq \Box_{n+1} \leq \Box_n \leq \ldots \leq Id \leq \ldots \leq \Diamond_n \leq \Diamond_{n+1} \leq \ldots \leq \Diamond$.
3. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de bi-Heyting al menos σ-completa, entonces los operadores $\Box, \Diamond$ admiten la siguiente caracterización

- $\Box a$ es el elemento complementado x más grande tal que $x \leq a$;
- $\Diamond a$ es el elemento complementado x más pequeño tal que $a \leq x$.

Ejemplo 2.1.17. 1. [63] Sean $Pr(\mathcal{C})$ la categoría de prehaces sobre una categoría pequeña $\mathcal{C}$, $E \in Ob(Pr(\mathcal{C}))$, $S \in Sub(E)$ y $e \in E(C)$ para algún $C \in Ob(\mathcal{C})$. Entonces

(a) $e \in \Box_n S(C)$ ssi para cada cadena en $\mathcal{C}$ de la forma

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] C = C_0 \arrow[dr] & & C_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_{2n-2} \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_{2n} \arrow[dl] \\ & C_1 & & \dots & & C_{2n-1} & \end{tikzcd}$$

y para cualesquiera elementos $e_i \in E(C_i)$ $(0 \leqslant i \leqslant 2n)$ tales que $e_0 = e, E(C_{2k+1} \to C_{2k})(e_{2k}) = e_{2k+1}, E(C_{2k+1} \to C_{2k+2})(e_{2k+2}) = e_{2k+1}$ entonces $e_{2n} \in S(C_{2n})$.

(b) $e \in \Diamond_n S(C)$ ssi existe una cadena en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] C = C_0 \arrow[dr] & & C_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_{2n-2} \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_{2n} \arrow[dl] \\ & C_1 & & \dots & & C_{2n-1} & \end{tikzcd}$$

y existen elementos $e_i \in E(C_i)$ $(0 \leqslant i \leqslant 2n)$ tales que $e_0 = e, E(C_{2k} \to C_{2k-1})(e_{2k-1}) = e_{2k}, E(C_{2k} \to C_{2k+1})(e_{2k+1}) = e_{2k}$, y $e_{2n} \in S(C_{2n})$.

Si denotamos con $\eta_C : E(C) \to colimE$ la inyección canónica (en la categoría de conjuntos) y con $\Pi_0(C)$ la componente conexa de $C \in \mathcal{C}$, entonces

(a) $e \in \Box S(C)$ ssi para cada $C' \in \Pi_0(C)$ y para cada $e' \in E(C')$ tal que $\eta_C(e) = \eta_{C'}(e')$, $e' \in S(C')$.

(b) $e \in \Diamond S(C)$ ssi existen $C' \in \Pi_0(C)$ y un elemento $e' \in E(C')$ tales que $\eta_C(e) = \eta_{C'}(e')$ y $e' \in S(C')$.

2. En el caso en que la categoría de prehaces sean los grafos, para cada G y cada subobjeto $X \leqslant G$ las caracterizaciones anteriores se reducen a

- $\Box X$ son los elementos de X que no están conectados con el exterior, manteniendo las flechas entre ellos;
- $\Diamond X$ son los elementos de G que están conectados por un camino con los de X, con las flechas entre ellos.

3. En el retículo de subcategorías de una categoría $\mathcal{I}$, para una subcategoría $\mathcal{J}$ tenemos

(a) $\Box\mathcal{J} = \begin{cases} ob(\Box\mathcal{J}) = \{i \in ob(\mathcal{J}) | \neg(\exists j \in ob(\mathcal{J})^c \wedge conec(i,j))\}; \\ \Box\mathcal{J}(a,b) = \mathcal{I}(a,b),\ \forall a,b \in ob(\Box\mathcal{J}). \end{cases}$

(b) $\Diamond\mathcal{J} = \begin{cases} ob(\Diamond\mathcal{J}) = \{i \in ob(\mathcal{I}) | \exists j \in ob(\mathcal{J})^c \wedge conec(i,j)\}; \\ \Diamond\mathcal{J}(a,b) = \mathcal{I}(a,b),\ \forall a,b \in ob(\Diamond\mathcal{J}), \end{cases}$

donde $conec(i,j)$ significa que existe algún morfismo conectando i y j.

Puede ser interesante estudiar las propiedades lógicas de los operadores modales anteriores antes de pasar al estudio del pragmatismo.

Definición 2.1.18. El cálculo modal $BiMo$ es la extensión del bi-intuicionista de primer orden (para una introducción detallada de este, ver [5]) obtenida agregando los conectivos $\Box$, $\Diamond$ y los siguientes axiomas modales

HMo-1 $\varphi \Rightarrow \psi$ implica $\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi$;

HMo-2 $\varphi \Rightarrow \psi$ implica $\Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\psi$;

HMo-3 $\Box\varphi \Rightarrow \varphi$;

HMo-4 $\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$;

HMo-5 $\Box\varphi \vee \neg\Box\varphi$;

HMo-6 $\Diamond\varphi \vee \neg\Diamond\varphi$;

HMo-7 $(\varphi \vee \neg\varphi)$ implica $(\varphi \Rightarrow \Box\varphi)$;

HMo-8 $(\varphi \vee \neg\varphi)$ implica $(\Diamond\varphi \Rightarrow \varphi)$.

Proposición 2.1.19. Los axiomas HMo-1 a HMo-8 definen implícitamente $\Box$ y $\Diamond$ sobre el intuicionismo.

Demostración. Suponga que extendemos la lógica HMo con los axiomas HMo$-1'$, ..., HMo$-8'$ obtenidos al reemplazar $\Box'$ por $\Box$ y $\Diamond'$ por $\Diamond$ en HMo-1,..., HMo-8. De HMo-5' y HMo-7 obtenemos $\models \Box'\varphi \Rightarrow \Box\Box'\varphi$, y de HMo$-3$' y HMo$-1$ obtenemos $\models \Box\Box'\varphi \Rightarrow \Box\varphi$. Así $\models \Box'\varphi \Rightarrow \Box\varphi$ (la otra implicación se obtiene por simetría). De forma análoga se puede demostrar que $\models \Diamond'\varphi \Leftrightarrow \Diamond\varphi$. $\Box$

Proposición 2.1.20. Sea φ cualquier fórmula en el lenguaje de $BiMo$. Entonces φ es demostrable a partir de los axiomas de $BiMo$ ssi φ es válida en todas las álgebras de bi-Heyting.

Demostración. El álgebra de Lindenbaum de esta lógica es de bi-Heyting. Si denotamos con $\Box_A$, $\Diamond_A$ los operadores modales vistos como operaciones algebraicas en el sentido de 2.1.15 y con $\Box_C$, $\Diamond_C$ vistos como conectivos que satisfacen los axiomas de 2.1.18, entonces por la caracterización dada en 2.1.16 tenemos

$$[\![\Box_C\varphi]\!] = \Box_A[\![\varphi]\!], \quad [\![\Diamond_C\varphi]\!] = \Diamond_A[\![\varphi]\!].$$

$\Box$

Corolario 2.1.21 (Validez)**.** Si φ es una fórmula que es demostrable a partir de $BiMo$ y $\mathcal{C}$ es una categoría de bi-Heyting entonces $\mathcal{C} \models \varphi$.

Revisemos la completitud de *BiMo* con respecto a sus modelos en categorías y en topos de bi-Heyting.

Proposición 2.1.22. Sea φ una fórmula en el lenguaje de *BiMo*. Si φ es satisfecha en todos los modelos de esta teoría en categorías de bi-Heyting, entonces ella es demostrable a partir de *BiMo*.

Demostración. Esta proposición es una simple generalización de los resultados de [34, Sección D1.4] a las categorías de bi-Heyting. La idea es construir, a partir de las fórmulas del lenguaje, una categoría $\mathcal{C}_{\mathbb{B}}$ a la que los axiomas de la lógica proveerán de la estructura adecuada y que valide exactamente los teoremas de $BiMo$. Así, en cierto sentido, lo que haremos será generalizar a la lógica de tipos de primer orden el álgebra de Lindenbaum de una teoría en lógica proposicional (allí construíamos un retículo al que los axiomas proposicionales proveían de estructura y en donde valían exactamente los teoremas de la teoría).

Para esto diremos que dos fórmulas φ, ψ son α-equivalentes si una es obtenida de la otra por renombramiento de sus variables libres, manteniendo su tipo (que las variables acotadas pueden ser renombradas es un supuesto estándar). Los objetos de $\mathcal{C}_{\mathbb{B}}$ serán las clases de fórmulas α-equivalentes. Emplearemos la notación $\{\varphi(x)\}$ para indicar la clase de $\varphi(x)$, donde x denotará todas las variables libres de φ para facilitar la escritura.

Entre dos objetos $\{\varphi(x)\}, \{\psi(y)\}$ (donde podemos asumir que sus representantes $\varphi(x), \psi(y)$ tienen todas sus variables libres distintas) habrá un morfismo $[\theta]$, si θ es una fórmula que tiene como variables libres las de $\varphi(x)$ y $\psi(y)$, tal que las fórmulas

$$\begin{gathered}\theta(x, y) \Rightarrow \varphi(x) \wedge \psi(y),\\ \theta(x, y) \wedge \theta(x, z) \Rightarrow y = z,\\ \varphi(x) \Rightarrow \exists y \theta(x, y)\end{gathered}$$

son demostrables en la teoría. Interpretando una fórmula $\varphi(x)$ de tipo A como el "subconjunto" de A que satisface $\varphi(x)$, vemos que las tres fórmulas anteriores dicen exactamente que θ, vista como una relación, es en realidad una función. Diremos que dos morfismos $[\theta], [\tau] : \{\varphi(x)\} \to \{\psi(y)\}$ son iguales si la fórmula $\theta \Leftrightarrow \tau$ es demostrable. La composición de dos morfismos $[\theta] : \{\varphi(x)\} \to \{\psi(y)\}, [\tau] : \{\psi(y)\} \to \{\chi(z)\}$ es definida como la clase de equivalencia de $\exists y(\theta(x, y) \wedge \tau(y, z))$, mientras que la identidad viene dada por $[\varphi(x) \wedge x = y] : \{\varphi(x)\} \to \{\varphi(y)\}$.

En [34] se demuestra que, con las anteriores definiciones, $\mathcal{C}_{\mathbb{B}}$ resulta ser una categoría de Heyting. Además tenemos que:

Afirmación 2.1.23. [34, p. 844] Cualquier subobjeto de $\{\varphi(x)\}$ en $\mathcal{C}_{\mathbb{B}}$ es isomorfo a uno de la forma $[\psi(x) \wedge (x = y)] : \{\psi(y)\} \to \{\varphi(x)\}$ donde ψ es una fórmula tal que la secuencia $\psi(y) \Rightarrow \varphi(x)$ es demostrable. Además, para dos de tales subobjetos, correspondientes a fórmulas ψ y χ, tenemos $\{\psi(x)\} \leqslant \{\chi(x)\}$ en $Sub(\varphi(x))$ ssi $\psi(x) \Rightarrow \chi(x)$ es demostrable.

Así, para mostrar que $\mathcal{C}_{\mathbb{B}}$ es de bi-Heyting (es decir, que para todos subobjetos a, b, c vale que $a - b \leqslant c$ sii $a \leqslant b \vee c$), basta mostrar que para toda tripla $\varphi(x), \phi(x), \chi(x)$, la fórmula

$$\Big(\big(\varphi(x) - \phi(x)\big) \Rightarrow \chi(x)\Big) \Leftrightarrow \Big(\varphi(x) \Rightarrow \big(\phi(x) \vee \chi(x)\big)\Big)$$

es demostrable. Esto es de hecho una consecuencia inmediata de los axiomas del bi-intuicionismo (para una presentación más explícita de estos axiomas, consultar [5, Definición 4.3.2]). Utilizando la notación de la proposición 2.1.20, deberíamos mostrar también que $[\![\Box_C \varphi]\!] = \Box_A [\![\varphi]\!]$, $[\![\Diamond_C \varphi]\!] = \Diamond_A [\![\varphi]\!]$. Pero para esto sólo necesitamos volver a aplicar el argumento que empleamos para demostrar dicha proposición.

En $\mathcal{C}_{\mathbb{B}}$ definimos la interpretación $M_{\mathbb{B}}$ dada por la asignación:

- a un tipo A, el objeto $\top(x)$, con x variable de tipo A;
- a un símbolo de función $f : A_1 \dots A_n$, el morfismo $[f(x_1 \dots, x_n) = y] : \top(x_1 \dots, x_n) \to \top(y),\ x_i$ de tipo A_i;
- a un símbolo de relación $R \rightarrowtail A_1 \dots A_n$, el subobjeto $R(x_1, \dots, x_n) \rightarrowtail \top(x_1, \dots, x_n),\ x_i$ de tipo A_i.

Con estas definiciones tenemos

Afirmación 2.1.24. [34, p. 845]

i Para cualquier término $\tau(x_1, \dots, x_n)$ de tipo B con variables libre x_i de tipo A_i, su interpretación en $M_{\mathbb{B}}$ es el morfismo

$$[\tau(x_1, \dots, x_n) = y] : \{\top(x_1, \dots, x_n)\} \to \{\top(y)\}$$

donde y es variable de tipo B.

ii La interpretación de cualquier fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ es el subobjeto $\{\varphi\} \rightarrowtail \top(x_1, \dots, x_n)$.

De las dos afirmaciones anteriores concluimos que una fórmula $\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)$ es demostrable en *BiMo* ssi es válida en $\mathcal{C}_{\mathbb{B}}$. □

Proposición 2.1.25. Sea $\mathcal{A}$ una categoría coherente pequeña. Entonces existe una subcategoría $\mathcal{K}$ de $Mod(\mathcal{A})$, tal que el funtor evaluación $e : \mathcal{A} \to \mathcal{CON}^{\mathcal{K}}$ es conservativo, coherente y preserva todos los $\Rightarrow, -, \Box$ y $\Diamond$ existentes en $\mathcal{A}$.

Demostración. Siguiendo [46] definimos, para cualquier categoría coherente $\mathcal{A}$, la categoría $Mod(\mathcal{A})$ conformada por los funtores coherentes de $\mathcal{A}$ a la categoría de conjuntos $\mathcal{CON}$ y las transformaciones naturales entre ellos. Sea $L_{\mathcal{A}}$ el lenguaje cuyos tipos son los objetos de $\mathcal{A}$ y sus símbolos de función son los morfismos de $\mathcal{A}$, y $\Theta_{\mathcal{A}}$ el conjunto de fórmulas de $L_{\mathcal{A}}$ válidas en $\mathcal{A}$; entonces un funtor $\mathcal{A} \to \mathcal{CON}$ no es más que un modelo de $\Theta_{\mathcal{A}}$ y una transformación natural entre funtores de esta forma es un homomorfismo de modelos. Si λ es un cardinal mayor que $\aleph_0$ y la cardinalidad de las flechas de $\mathcal{A}$, definimos $\mathcal{K}$ como la subcategoría de $Mod(\mathcal{A})$ cuyos objetos son los modelos λ-especiales (en el sentido de [23, p. 295]) de $\mathcal{A}$ y sus morfismos son las transformaciones naturales entre ellos. Definimos el funtor evaluación e como

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\quad e \quad} \mathcal{CON}^{\mathcal{K}}$$

$$A \longmapsto \mathcal{K} \xrightarrow{e_A} \mathcal{CON}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{M}A \arrow[d, "h_A"] \\ \mathrm{N} \arrow[r, mapsto] & \mathrm{N}A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & & \mathrm{M}A \arrow[d, "\mathrm{M}f"] \\ B \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & & \mathrm{M}B \end{tikzcd}$$

Gracias a [46, Teorema 6.2] el funtor e es conservativo y respeta las operaciones $\Rightarrow$, $-$. Resta mostrar que hace lo mismo con $\Box$, $\Diamond$.

Sea $\Phi \in Sub(E)$ en $\mathcal{A}$, tal que $\Box\Phi$ existe. Queremos ver que $e(\Box\Phi) = \Box e(\Phi)$. Como e respeta la estructura de bi-Heyting, en particular respeta elementos complementados, por lo que $e(\Box\Phi)$ es un elemento complementado menor que $e(\Phi)$. Gracias a la caracterización dada en 2.1.16 concluimos que $e(\Box\Phi) \leq \Box e(\Phi)$ en $Sub(e(E))$. Para la otra desigualdad, basta con ver que para todo $C \in \mathcal{K}$ y cada $a : e(E)(C)$, si $a \notin e(\Box\Phi)(C)$ entonces $a \notin \Box e(\Phi)(C)$. Por la caracterización dada de $\Box e(\Phi)$ en 2.1.17, basta con darnos algún diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} C : \mathcal{A} \to \mathcal{CON} & & N : \mathcal{A} \to \mathcal{CON} \\ & D : \mathcal{A} \to \mathcal{CON} \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{K}$ (observemos que aquí cambiamos el sentido de los morfismos dado en 2.1.17, porque en aquel ejemplo trabajamos con funtores contravariantes (prehaces) y aquí estamos trabajando con funtores covariantes; sin embargo, este cambio de sentido terminará siendo irrelevante para nuestro argumento) y algún $d : e(E)(D)$ tal que $e(E)(u)(d) = a$, $e(E)(v)(d) = b$, pero $b \notin e(\Phi)(N)$. Tomaremos $D = N$ y $v = id_N$. Consideremos el siguiente conjunto de sentencias en el lenguaje $L_{\mathcal{A}} \cup \{x\}$, donde x es una nueva variable de tipo E y para $\Gamma \in Sub(E)$, $\tilde{\Gamma}$ es una fórmula tal que $[\![\tilde{\Gamma}]\!] = \Gamma$:

$$\Xi = \Theta_{\mathcal{A}} \cup \{\tilde{\Gamma}(x) | \Gamma \in Sub(E), \Gamma \text{ es complementado, } a \in e(\Gamma)(C)\} \cup \{\neg\tilde{\Phi}(x)\}$$

Si Ξ fuera finitamente inconsistente, podríamos hallar un Γ complementado con $a \in e(\Gamma)(C)$ y $\Gamma \leqslant \Phi$; pero entonces $\Gamma \leqslant \Box\Phi$ y contradiríamos así nuestra hipótesis $a \notin e(\Box\Phi)(C)$. Luego Ξ es consistente y podemos hallar un modelo λ-especial $N : \mathcal{A} \to \mathcal{CON}$ y un $b \in e(E)(N)$, jugando el papel de x, que lo satisfaga. La interpretación de $\neg\tilde{\Phi}(x)$ en N significa exactamente que $b \notin e(\Phi)(N)$. Dado que para cualquier $\Pi \in Sub(E)$, $b \in e(\Pi)(N)$ implica $a \in e(\Pi)(C)$, por [46, Lema 6.4], tenemos que existe $u : N \to C$ tal que $e(E)(u)(b) = a$.

La prueba que e preserva los $\Diamond\Phi$ existentes en $Sub(E)$ es completamente análoga, y por tanto la omitiremos. $\Box$

Proposición 2.1.26. Sea φ una fórmula en el lenguaje de *BiMo*. Si φ es satisfecha en todos los modelos de esta teoría en topos de bi-Heyting, entonces ella es demostrable a partir de *BiMo*.

Demostración. Por 2.1.22 existe una categoría $\mathcal{C}_{\mathbb{B}}$ que valida exactamente los teoremas de $BiMo$. Por la proposición anterior existe un funtor e de $\mathcal{C}_{\mathbb{B}}$ en un topos de bi-Heyting $\mathcal{E}$ que preserva y refleja la validez de las fórmulas de esta teoría. $\Box$

Proposición 2.1.27. Sean φ, ψ fórmulas en el lenguaje de *BiMo*. Entonces los siguientes resultados son deducibles en esta teoría

1. Regla de Necesitación : Si $\models \varphi$ entonces $\models \Box\varphi$;
2. $\Diamond\Box\varphi \Rightarrow \varphi$; $\quad \varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$;
3. $\models \Box(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \Box\varphi \wedge \Box\psi$; $\quad \models \Diamond(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$;
4. $\models \Box\varphi \vee \Box\psi \Rightarrow \Box(\varphi \vee \psi)$; $\quad \models \Diamond(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi$;
5. $\Box\varphi \Leftrightarrow \Box\Box\varphi \Leftrightarrow \Diamond\Box\varphi$; $\quad \Diamond\varphi \Leftrightarrow \Diamond\Diamond\varphi \Leftrightarrow \Box\Diamond\varphi$;
6. $\Diamond\varphi \Leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$;
7. $\Box\varphi \Leftrightarrow \sim \Diamond \sim \varphi$;
8. Ley de Frobenius : $\models \Diamond(\varphi \wedge \Box\psi) \Leftrightarrow \Diamond\varphi \wedge \Box\psi$.

En primer orden tenemos

1. $\Box\forall x\varphi \Rightarrow \forall x\Box\varphi$;
2. $\forall x\Box\varphi \Rightarrow \Box\forall x\varphi$;
3. $\exists x\Box\varphi \Rightarrow \Box\exists x\varphi$;

4. $\exists x \Diamond \varphi \Rightarrow \Diamond \exists x \varphi$;
5. $\Diamond \exists x \varphi \Rightarrow \exists x \Diamond \varphi$;
6. $\Diamond \forall x \varphi \Rightarrow \forall x \Diamond \varphi$.

Demostración. Basta mostrar que ellas valen en un álgebra de bi-Heyting arbitraria A. Escribiremos $[\![\varphi]\!]$ para indicar el elemento de A obtenido al evaluar φ en una valuación.

1. Si $\vDash \varphi$ entonces $[\![\varphi]\!] = 1$, el cual en particular es complementado. Luego $\Box_A[\![\varphi]\!] = [\![\varphi]\!] = 1$.
2. $\Diamond_A \dashv \Box_A$ [63];
3. Dado que $\Diamond_A \dashv \Box_A$, entonces $\Box_A$ preserva límites y $\Diamond_A$ colímites.
4. Como $([\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!]) \leqslant [\![\varphi]\!]$ entonces $\Diamond_A([\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!]) \leqslant \Diamond_A[\![\varphi]\!]$. Igualmente $\Diamond_A([\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!]) \leqslant \Diamond_A[\![\psi]\!]$, así que por definición de ínfimo $\Diamond_A([\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!]) \leqslant \Diamond_A[\![\varphi]\!] \wedge \Diamond_A[\![\psi]\!]$. La otra desigualdad se demuestra de forma análoga.
5. $\Box_A[\![\varphi]\!]$, $\Diamond_A[\![\varphi]\!]$ son complementados;
6. [63];
7. [63];
8. $\Diamond_A[\![\varphi]\!] \wedge \Box_A[\![\psi]\!]$ es complementado (intersección de dos complementados) y además $[\![\varphi]\!] \wedge \Box_A[\![\psi]\!] \leqslant \Diamond_A[\![\varphi]\!] \wedge \Box_A[\![\psi]\!]$. Si $x \in A$ es complementado tal que $[\![\varphi]\!] \wedge \Box_A[\![\psi]\!] \leqslant x$, entonces $[\![\varphi]\!] \leqslant \Box_A[\![\psi]\!] \Rightarrow x$ luego $\Diamond_A[\![\varphi]\!] \leqslant \Diamond_A(\Box_A[\![\psi]\!] \Rightarrow x) = \Box_A[\![\psi]\!] \Rightarrow x$ (donde la última igualdad se tiene pues a, b complementados implica $a \Rightarrow b$ complementado), y así $\Diamond_A[\![\varphi]\!] \wedge \Box_A[\![\psi]\!] \leqslant x$. Luego $\Diamond_A[\![\varphi]\!] \wedge \Box_A[\![\psi]\!]$ es el menor complementado más grande que $[\![\varphi]\!] \wedge \Box_A[\![\psi]\!]$ y así $\Diamond_A([\![\varphi]\!] \wedge \Box_A[\![\psi]\!]) = \Diamond_A[\![\varphi]\!] \wedge \Box_A[\![\psi]\!]$.

Resta mostrar las fórmulas de primer orden. Recordemos la interpretación algebraica usual de los cuantificadores (por ejemplo en [59, p. 366])

$$[\![\exists x \varphi]\!] = \bigvee_{\tau \in Term} [\![\varphi(\tau)]\!] \qquad\qquad [\![\forall x \varphi]\!] = \bigwedge_{\tau \in Term} [\![\varphi(\tau)]\!]$$

A partir de ahí y del comportamiento de las negaciones $\neg$, $\sim$ con los supremos e ínfimos arbitrarios [60, Proposición 7.2] las pruebas son relativamente sencillas. Mostremos por ejemplo que $\exists x \Box \varphi \Rightarrow \Box \exists x \varphi$. Como para cualquier familia $\{a_t\}_{t \in T}$ vale que

$$\sim \bigvee_{t \in T} a_t \leq \bigwedge_{t \in T} \sim a_t \qquad\qquad \bigvee_{t \in T} \neg a_t \leq \neg \bigwedge_{t \in T} a_t$$

obtenemos que

$$\bigvee_{t \in T} \neg \sim a_t \leq \neg \bigwedge_{t \in T} \sim a_t \leq \neg \sim \bigwedge_{t \in T} a_t.$$

Como la familia $\{a_t\}_{t\in T}$ era arbitraria, tenemos en particular que para toda fórmula de primer orden φ y para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\bigvee_{\tau\in Term} \Box_n[\![\varphi(\tau)]\!] \leq \Box_n \bigvee_{\tau\in Term} [\![\varphi(\tau)]\!],$$

de donde se obtenemos la ecuación deseada. $\Box$

Las fórmulas faltantes, $\Box\exists x\varphi \Rightarrow \exists x\Box\varphi$ y $\forall x\Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\forall x\varphi$, no son válidas en la lógica modal clásica de primer orden [26, p. 246]. En este sistema tampoco: aunque existen topos, por ejemplo los Booleanos, donde ellas son trivialmente ciertas, hay otros donde fallan, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.28. Sea el grafo dado por $G = \{s \to t\}$. Como los límites de funtores son calculados puntualmente, tenemos que $G \times G$ es

$$\begin{tikzcd}
(s,t) & (t,t) \\
(s,s) \arrow[ur, "f"] & (t,s)
\end{tikzcd}$$

Consideremos $\pi_1 : G \times G \to G$ la primera proyección. Si $A = \{(s,t),(t,t)\} \leqslant G \times G$, tenemos por el ejemplo 2.1.17

- $\Box A = \{(s,t)\}$ por lo que $\exists_{\pi_1}\Box A = \{s\}$. Por otro lado, $\exists_{\pi_1} A = \{s,t\}$ y así $\Box\exists_{\pi_1} A = \{s,t\}$. Por lo tanto $\exists_{\pi_1}\Box A \lneq \Box\exists_{\pi_1} A$;

- $\Diamond A = \{(s,t),(t,t),(s,s),f\}$ por lo que $\forall_{\pi_1}\Diamond A = \{s\}$, mientras que $\forall_{\pi_1} A = \Diamond\forall_{\pi_1} A = \emptyset$. Así $\Diamond\forall_{\pi_1} A \lneq \forall_{\pi_1}\Diamond A$.

2.2 MP modalizada

En esta sección emplearemos las herramientas existentes en las categorías de bi-Heyting para mejorar el modelo de la máxima pragmática propuesto en el capítulo 1.

Empezamos tratando de formalizar la noción de “effects”, “general modes of rational conduct”, las reacciones a la interpretación (subdeterminación) del signo. En el capítulo 1 tratamos de hacerlo vía las imágenes de los morfismos $s_i : S \to F_i$, pero esto daba origen a un proceso estático en vez del dinámico que la idea sugiere. Para corregir esto, aplicaremos los operadores $\Diamond_n$ a $im(s_i)$; así entenderemos $im(s_i)$ como un interpretante sin reacción, $\Diamond_1 im(s_i)$ el interpretante con sus efectos más inmediatos, $\Diamond_2 im(s_i)$ el anterior con sus efectos siguientes, y así sucesivamente hasta llegar a $\Diamond im(s_i)$ que es un interpretante del signo con *todos* sus efectos posibles. Por ahora el funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sólo nos permite contrastar F_i con F_j vía cada $g : i \to j$ en $\mathcal{D}$, en donde se mezclan todas las reacciones con aquellas que no lo son. Lo que quisiéramos es poder contrastar sólo las reacciones a la interpretación del signo, o más realista aún, cada nivel de reacción por separado. La oportunidad de hacer esto nos la dan las siguientes proposiciones.

Proposición 2.2.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de bi-Heyting donde los conectivos $\vee$, $\neg$ son naturales. Supongamos que A, B son objetos de $\mathcal{C}$ y que tenemos subobjetos $S_A \in Sub(A)$, $S_B \in Sub(B)$ con morfismos $f : S_A \to S_B$, $g : A \to B$ de tal forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} S_A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "m_a"'] & S_B \arrow[d, hook, "m_b"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Entonces para cada $\alpha \in \omega + 1$ existe un único morfismo $f_{\Diamond_\alpha} : \Diamond_\alpha S_A \to \Diamond_\alpha S_B$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} S_A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & \Diamond_1 S_A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_{\Diamond_1}"] & \dots \arrow[r, hook] & \Diamond_n S_A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_{\Diamond_n}"] & \dots \arrow[r, hook] & \Diamond S_A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_{\Diamond}"] & A \arrow[d, "g"] \\ S_B \arrow[r, hook] & \Diamond_1 S_B \arrow[r, hook] & \dots \arrow[r, hook] & \Diamond_n S_B \arrow[r, hook] & \dots \arrow[r, hook] & \Diamond S_B \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

Demostración. Es conveniente introducir una notación para las inclusiones entre los operadores modales presentes en la prueba. Así, para $i \in \{A, B\}$ escribiremos

- $m_i(n) : \Diamond_n S_i \hookrightarrow i,\ m_i(\Diamond) : \Diamond S_i \hookrightarrow i$;
- $m_i(n, n+1) : \Diamond_n S_i \hookrightarrow \Diamond_{n+1} S_i,\ m_i(n, \Diamond) : \Diamond_n S_i \hookrightarrow \Diamond S_i$ para las relaciones $\Diamond_n S_i \leq \Diamond_{n+1} S_i,\ \Diamond_n S_i \leq \Diamond S_i$, respectivamente.

Para mayor comodidad, en lo que sigue denotaremos $m_A = m_a,\ m_B = m_b$. Para $n \in \omega$, definimos $f_{\Diamond_n}$ por inducción:

- Para el caso $n = 0$, como $\Diamond_0 = id$, basta con tomar $f_{\Diamond_0} = f$;
- Supongamos que hemos construido $f_{\Diamond_n}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} S_A \arrow[r, hook, "m_a(0,1)"] \arrow[d, "f"] & \Diamond_1 S_A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_{\Diamond_1}"] & \dots \arrow[r, hook] & \Diamond_{n-1} S_A \arrow[r, hook, "m_a(n-1,n)"] \arrow[d, "f_{\Diamond_{n-1}}"] & \Diamond_n S_A \arrow[r, hook, "m_a(n)"] \arrow[d, "f_{\Diamond_n}"] & A \arrow[d, "g"] \\ S_B \arrow[r, hook, "m_b(0,1)"'] & \Diamond_1 S_B \arrow[r, hook] & \dots \arrow[r, hook] & \Diamond_{n-1} S_B \arrow[r, hook, "m_b(n-1,n)"'] & \Diamond_n S_B \arrow[r, hook, "m_b(n)"'] & B \end{tikzcd}$$

Para construir $f_{\Diamond_{n+1}}$, consideramos en primer lugar el siguiente diagrama pullback

$$\begin{tikzcd}
\Diamond_n S_A \arrow[rrd, bend left, "m_b(n,n+1)f_{\Diamond_n}"] \arrow[rd, hook, dotted, "z_{n+1}"] \arrow[rdd, hook, bend right, "m_a(n)"'] & & \\
& g^{-1}(\Diamond_{n+1} S_B) \arrow[r, "x_{n+1}"] \arrow[d, hook, "y_{n+1}"'] & \Diamond_{n+1} S_B \arrow[d, hook, "m_b(n+1)"] \\
& A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Así, tenemos que $\Diamond_n S_A \leq g^{-1}(\Diamond_{n+1} S_B)$ en $Sub(A)$. Como $\Diamond_{n+1} S_B = \sim \neg \Diamond_n S_B$ tenemos que $\Diamond_{n+1} S_B \vee \neg \Diamond_n S_B = B$. Luego, utilizando la naturalidad de $\neg, \vee$, obtenemos

$$\begin{aligned}
g^{-1}(\Diamond_{n+1} S_B) \vee \neg g^{-1}(\Diamond_n S_B) &= g^{-1}(\Diamond_{n+1} S_B) \vee g^{-1}(\neg \Diamond_n S_B) \\
&= g^{-1}(\Diamond_{n+1} S_B \vee \neg \Diamond_n S_B) \\
&= g^{-1}(B) \\
&= A.
\end{aligned}$$

Gracias al diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Diamond_n S_A \arrow[rrd, bend left, "f_{\Diamond_n}"] \arrow[rd, hook, dotted] \arrow[rdd, hook, bend right, "m_a(n)"'] & & \\
& g^{-1}(\Diamond_n S_B) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Diamond_n S_B \arrow[d, hook, "m_b(n)"] \\
& A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

concluimos que $\Diamond_n S_A \leq g^{-1}(\Diamond_n S_B)$ y así $\neg \Diamond_n S_A \geq \neg g^{-1}(\Diamond_n S_B)$. Por tanto, $\neg \Diamond_n S_A \vee g^{-1}(\Diamond_{n+1} S_B) \geq \neg g^{-1}(\Diamond_n S_B) \vee g^{-1}(\Diamond_{n+1} S_B) = A$. La definición de $\sim$ implica por tanto que $\Diamond_{n+1} S_A = \sim \neg \Diamond_n S_A \leq g^{-1}(\Diamond_{n+1} S_B)$. Si llamamos $i_{n+1} : \Diamond_{n+1} S_A \hookrightarrow g^{-1}(\Diamond_{n+1} S_B)$ al monomorfismo que da esta desigualdad, podemos definir $f_{\Diamond_{n+1}} = x_{n+1} i_{n+1}$. Veamos que además el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Diamond_n S_A \arrow[r, hook, "m_a(n,n+1)"] \arrow[d, "f_{\Diamond_n}"] & \Diamond_{n+1} S_A \arrow[r, hook, "m_a(n+1)"] \arrow[d, "f_{\Diamond_{n+1}}"] & A \arrow[d, "g"] \\
\Diamond_n S_B \arrow[r, hook, "m_b(n,n+1)"'] & \Diamond_{n+1} S_B \arrow[r, hook, "m_b(n+1)"'] & B
\end{tikzcd}$$

Observando que $z_{n+1} = i_{n+1} m_a(n, n+1)$ obtenemos que $f_{\Diamond_{n+1}} m_a(n, n+1) = x_{n+1} i_{n+1} m_a(n, n+1) = m_b(n, n+1) f_{\Diamond_n}$. Por otro lado, como $m_b(n+1) x_{n+1} =$

gy_{n+1}, componiendo con i_{n+1} obtenemos que

$$m_b(n+1)f_{\Diamond_{n+1}} = m_b(n+1)x_{n+1}i_{n+1} = gy_{n+1}i_{n+1} = gm_a(n+1).$$

Para construir $f_\Diamond$, consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Diamond_n S_A \arrow[rrd, bend left, "m_b(n,\Diamond)f_{\Diamond_n}"] \arrow[rd, hook, dotted] \arrow[rdd, bend right, "m_a(n)"'] & & \\
& g^{-1}(\Diamond S_B) \arrow[r, "x_\Diamond"] \arrow[d, hook] & \Diamond S_B \arrow[d, hook, "m_b(\Diamond)"] \\
& A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Lo cual implica que $\Diamond_n S_A \leq g^{-1}(\Diamond S_B)$ para cada $n \in \omega$ y así $\Diamond S_A \leq g^{-1}(\Diamond S_B)$. Si llamamos $i_\Diamond : \Diamond S_A \hookrightarrow g^{-1}(\Diamond S_B)$, podemos definir $f_\Diamond = x_\Diamond i_\Diamond$. Puede verse que para todo n el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Diamond_n S_A \arrow[r, hook, "m_a(n,\Diamond)"] \arrow[d, "f_{\Diamond_n}"] & \Diamond S_A \arrow[r, hook, "m_a(\Diamond)"] \arrow[d, "f_\Diamond"] & A \arrow[d, "g"] \\
\Diamond_n S_B \arrow[r, hook, "m_b(n,\Diamond)"'] & \Diamond S_B \arrow[r, hook, "m_b(\Diamond)"'] & B
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 2.2.2. Sean $\mathcal{C}$ una categoría de bi-Heyting con factorizaciones epi-mono y naturalidad de los conectivos $\neg$, $\vee$; $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un funtor y $s_i : S \to F_i$ un cono sobre él. Entonces

1. para cada $\alpha \in \omega + 1$, existe un funtor $F_S^{\Diamond_\alpha} : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ tal que $F_S^{\Diamond_\alpha}(i) = \Diamond_\alpha im(s_i)$;
2. las inclusiones canónicas $F_S^{\Diamond_0}(i) \leq F_S^{\Diamond_1}(i) \leq \ldots \leq F_S^{\Diamond}(i) \leq F(i)$ son transformaciones naturales entre los funtores involucrados;
3. los funtores $F_S^{\Diamond_\alpha}$ son únicos con las propiedades anteriores.

Demostración. Dado cualquier morfismo $g : i \to j$ en $\mathcal{I}$, podemos construir un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
& im(s_i) \arrow[r, hook, "m_i(0,1)"] \arrow[d, two heads, "F_S^{\Diamond_0}(g)"] & \Diamond_1 im(s_i) \arrow[r, hook, "m_i(1,2)"] \arrow[d, "F_S^{\Diamond_1}(g)"] & \Diamond_2 im(s_i) \arrow[r, hook, "m_i(2,3)"] \arrow[d, "F_S^{\Diamond_2}(g)"] & \ldots \arrow[r, hook] & \Diamond im(s_i) \arrow[r, hook, "m_i(\Diamond)"] \arrow[d, "F_S^{\Diamond}(g)"] & Fi \arrow[d, "Fg"] \\
S \arrow[ru, two heads, "e_i"] \arrow[rd, two heads, "e_j"'] & & & & & & \\
& im(s_j) \arrow[r, hook, "m_j(0,1)"'] & \Diamond_1 im(s_j) \arrow[r, hook, "m_j(1,2)"'] & \Diamond_2 im(s_j) \arrow[r, hook, "m_j(2,3)"'] & \ldots \arrow[r, hook] & \Diamond im(s_j) \arrow[r, hook, "m_j(\Diamond)"'] & Fj
\end{tikzcd}$$

donde

- $e_i : S \twoheadrightarrow im(s_i),\ m_i : im(s_i) \hookrightarrow Fi$ son la factorización epi-mono de s_i;
- $m_i(n) : \Diamond_n im(s_i) \hookrightarrow Fi,\ m_i(\Diamond) : \Diamond im(s_i) \hookrightarrow F_i$ son los elementos de $Sub(F_i)$;
- $m_i(n, n+1) : \Diamond_n im(s_i) \hookrightarrow \Diamond_{n+1} im(s_i),\ m_i(n, \Diamond) : \Diamond_n im(s_i) \hookrightarrow \Diamond im(s_i)$ son las relaciones $\Diamond_n im(s_i) \leq \Diamond_{n+1} im(s_i), \Diamond_n im(s_i) \leq \Diamond im(s_i)$, respectivamente.

La construcción de los $F_S^{\Diamond_\alpha}(g)$ se realiza de la siguiente manera:

- $F_S^{\Diamond_0}(g)$ por la factorización epi-mono;
- el resto, a partir de $F^{\Diamond_0}(g)$ por medio de la proposición 2.2.1.

$\square$

Denotaremos con $L_S^{\Diamond_\alpha}$ el límite de los funtores $F_S^{\Diamond_\alpha}$ cuando ellos existan.

Proposición 2.2.3. En las condiciones de la proposición anterior, existe una escala entre los límites de los funtores $F_S^{\Diamond_\alpha},\ \alpha \in \omega + 1$, del modo siguiente

$$L_S^{\Diamond_0} \hookrightarrow L_S^{\Diamond_1} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow L_S^{\Diamond_n} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow L_S^{\Diamond},$$

siempre que ellos existan.

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \omega + 1$ con $\alpha < \beta$. Denotemos $m_i : \Diamond_\alpha im(s_i) \hookrightarrow \Diamond_\beta im(s_i)$. Que existe un morfismo $a : L_S^{\Diamond_\alpha} \to L_S^{\Diamond_\beta}$ lo da inmediatamente el hecho que $L_S^{\Diamond_\beta}$ es un límite. Para ver que este morfismo es un monomorfismo, suponga $x, y : Z \to L_S^{\Diamond_\alpha}$ tal que $ax = ay$. Entonces $l_{\beta_i} ax = l_{\beta_i} ay$ y así $m_i l_{\alpha_i} x = m_i l_{\alpha_i} y$; como m_i es mono, tenemos que $l_{\alpha_i} x = l_{\alpha_i} y$ y dado que $L_S^{\Diamond_\alpha}$ es un límite concluimos que $x = y$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \Diamond_\alpha im(s_i) \arrow[rr, hook, "m_i"] \arrow[dd, "F^\alpha g"] & & \Diamond_\beta im(s_i) \arrow[dd, "F^\beta g"] \\
Z \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & L_S^{\Diamond_\alpha} \arrow[ur, "l_{\alpha_i}"] \arrow[dr, "l_{\alpha_j}"'] \arrow[rr, dotted, "a"] & & L_S^{\Diamond_\beta} \arrow[ur, "l_{\beta_i}"] \arrow[dr, "l_{\beta_j}"] & \\
 & & \Diamond_\alpha im(s_j) \arrow[rr, hook, "m_j"] & & \Diamond_\beta im(s_j)
\end{tikzcd}$$

$\square$

Así, tenemos una escala de comprensión basada en los niveles de reacción con los que trabajemos. En la práctica, no podemos trabajar con todas las reacciones posibles sino que podemos llegar hasta un cierto nivel n; este nivel depende de la pericia del interpretante, de la cantidad de tiempo y trabajo, o de lo que crea conveniente para lograr sus objetivos.

Pasemos ahora a una prueba de MP en categorías de bi-Heyting, que corresponderá al caso ideal en el que trabajemos con todas las reacciones del signo.

Teorema 2.2.4. Sean $\mathcal{C}$ una categoría de bi-Heyting con factorización epi-mono, una familia de generadores $\mathbb{G}$, objeto terminal, colímites finitos y pushouts efectivos; $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un funtor y $(s_i : S \to F_i)$ un cono sobre él que satisface $\mathbb{G}$-separabilidad. Si el límite $(l_i : L_S^{\Diamond} \to \Diamond im(s_i))$ del funtor asociado $F_S^{\Diamond}$ existe, entonces $L_S^{\Diamond} \cong S$.

Demostración. Utilizando la misma notación y argumento de la proposición 2.2.1, podemos construir un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
 & im(s_i) \arrow[r, hook, "m_i(0,\Diamond)"] \arrow[d, two heads, "!^0_{F_i}"] & \Diamond im(s_i) \arrow[r, hook] \arrow[d, "!^{\Diamond}_{F_i}"] & F_i \arrow[d, "!_{F_i}"] \\
S \arrow[ur, two heads, "e_i"] \arrow[dr, two heads, "e_{!_S}"'] & & & \\
 & im(!_S) \arrow[r, hook, "m_!(0,\Diamond)"'] & \Diamond im(!_S) \arrow[r, hook] & 1
\end{tikzcd}$$

Resaltemos un hecho que, aunque trivial, será utilizado constantemente a lo largo de la prueba: cualquier par de morfismos paralelos con codominio $\Diamond im(!_S)$ son iguales. Denotemos por P el pushout de $s : S \hookrightarrow L_S^{\Diamond}$ a lo largo de $m_!(0, \Diamond)e_{!_S} : S \to \Diamond im(!_S)$. Dado que los pushout son efectivos por hipótesis, el cuadrado resulta también ser un pullback. Sea $(x_i : X \to \Diamond im(s_i))$ una familia de morfismos tales que $F_S^{\Diamond}(g)x_i = x_j$ para cada morfismo $g : i \to j$ en $\mathcal{D}$. Como $L_S^{\Diamond}$ es el límite de los $\Diamond im(s_i)$ existe un único $x : X \to L_S^{\Diamond}$ tal que $l_i x = x_i$ para cada $i \in Ob(\mathcal{D})$. Además, como $\Diamond im(!_S) \hookrightarrow 1$, tenemos que $!^{\Diamond}_{F_i} x_i =!^{\Diamond}_{F_j} x_j$ para cada $i, j \in Ob(\mathcal{D})$. Por otro lado como $!^{\Diamond}_{F_i} l_i s = m_!(0, \Diamond)e_{!_S}$, la definición de pushout nos garantiza que $q!^{\Diamond}_{F_i} l_i = r$. Por tanto, $q!^{\Diamond}_{F_i} x_i = q!^{\Diamond}_{F_i} l_i x = rx$, y dado que el cuadrado es un pullback existe $y : X \to S$ el cual satisface que $l_i s y = x_i$ para cada i. Por tanto, $(l_i s : S \to \Diamond im(s_i))_i$ es el límite de los $(\Diamond im(s_i))_i$ y $S \cong L_S^{\Diamond}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "y"] \arrow[drr, dotted, "x"] \arrow[drrr, bend left, "x_i"] \arrow[ddr, bend right, "!^{\Diamond}_{F_i} x_i"'] & & & \\
 & S \arrow[r, hook, "s"] \arrow[d, "m_!(0,\Diamond)e_{!_S}"'] & L_S^{\Diamond} \arrow[r, "l_i"] \arrow[d, "r"] & \Diamond im(s_i) \\
 & \Diamond im(!_S) \arrow[r, hook, "q"'] & P &
\end{tikzcd}$$

□

Pasemos ahora a estudiar la situación “all the posible different circumstances” que exige la máxima.

Sean $\mathcal{I}$ una categoría conectada y $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un funtor. Supongamos que para cada $\mathcal{J}$ subcategoría plena de $\mathcal{I}$, la restricción de F a $\mathcal{J}$ posee un límite $\{f_A^{\mathcal{J}} : L_{\mathcal{J}} \to FA\}_{A \in \mathcal{J}}$. Definimos la relación $L_{\mathcal{J}} \geq L_{\mathcal{K}}$ si y sólo si existe único

$s : L_{\mathcal{J}} \to L_{\mathcal{K}}$ tal que $f_A^{\mathcal{K}} s = f_A^{\mathcal{J}}$ para cada objeto A en $\mathcal{K}$. La relación resultante es una relación de orden.

Revisemos rápidamente el objetivo que queremos lograr con las definiciones anteriores. Como ya habíamos mencionado, cada Fi representará un interpretante de un signo dado. Cuando $\mathcal{J}$ es una subcategoría plena estamos considerando sólo una parte de dichos interpretantes manteniendo todas las contrastaciones que se pueden hacer entre ellos. En este contexto $L_{\mathcal{J}}$ es la interpretación que logramos a partir de los interpretantes de $F|_{\mathcal{J}}$. La relación de orden nos dice qué tan buena es esta con respecto al interpretante intelectual último L. Nuestro objetivo es optimizar este proceso interpretativo de tal forma que consigamos estar lo más cerca de L. Una primera forma de lograrlo, empleando una idea del análisis matemático, es que conforme nos vamos acercando al límite, los $L_{\mathcal{J}}$ tienden a estabilizarse.

Así, empezamos buscando condiciones para que el límite $L_{\mathcal{J}}$ se mantenga constante cuando ampliamos $\mathcal{J}$. Para este propósito es conveniente introducir la siguiente notación: escribiremos $\mathcal{J}_{\to z}$ para la subcategoría plena con objetos $ob(\mathcal{J}) \cup \{z\}$ siempre y cuando exista por lo menos un $a \in ob(\mathcal{J})$ con un morfismo $a \to z$; escribiremos $\mathcal{J}_{\leftarrow z}$ para la subcategoría plena con objetos $ob(\mathcal{J}) \cup \{z\}$ si para cada $a \in ob(\mathcal{J})$ sólo existen morfismos $z \to a$. El argumento de la siguiente proposición es originario de [6] y juega un rol importante en la teoría de funtores finales.

Proposición 2.2.5. Sean $\mathcal{C}$ una categoría completa, $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un funtor, $\mathcal{J}$ una subcategoría de $\mathcal{I}$ y z un objeto de $\mathcal{I}$ tal que podemos formar $\mathcal{J}_{\to z}$. Si la coma categoría con:

- objetos son morfismos $a \to z$, donde $a \in ob(\mathcal{J})$;
- morfismos de $a \to z$ a $b \to z$ son morfismos $f : a \to b$ en $\mathcal{J}$ tales que el triángulo es conmutativo

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & b \arrow[dl] \\ & z & \end{tikzcd}$$

es conectada, entonces $L_{\mathcal{J}}$ es isomorfo a $L_{\mathcal{J}_{\to z}}$.

Demostración. Denotemos con $\big(n_i : L_{\mathcal{J}} \to Fi\big)_{i \in ob(\mathcal{J})}$ el límite de $F|_{\mathcal{J}}$ y con $\big(m_j : L_{\mathcal{J}_{\to z}} \to Fj\big)_{j \in ob(\mathcal{J}_{\to z})}$ el límite de $F|_{\mathcal{J}_{\to z}}$. Dado que $L_{\mathcal{J}}$ es un límite y m_j forman un cono sobre $F|_{\mathcal{J}}$ existe $\alpha : L_{\mathcal{J}_{\to z}} \to L_{\mathcal{J}}$ tal que $n_j \alpha = m_j$ para cada $j \in \mathcal{J}$. Por el otro lado, queremos formar a partir de $L_{\mathcal{J}}$ un cono sobre $F|_{\mathcal{J}_{\to z}}$. Dado cualquier $\delta_{iz} : i \to z$, consideramos $F(\delta_{iz}) n_i : L_{\mathcal{J}} \to M_z$. El morfismo anterior no depende de la elección de δ_{iz}: dado cualquier otro $\delta_{jk} : j \to z$, dado que la coma categoría es conectada, podemos formar un diagrama conmutativo de la forma

$$
\begin{tikzcd}
 & & & L_{\mathcal{J}} \arrow[dlll, bend right, "n_i"'] \arrow[dll, "n_{i_1}"'] \arrow[dl, "n_{i_2}"'] \arrow[dr, "n_{i_{n-2}}"] \arrow[drr, "n_{i_{n-1}}"] \arrow[drrr, bend left, "n_j"] & & & \\
Fi \arrow[r, dash, "F(\delta)"] \arrow[drrr, bend right, "F(\delta_{iz})"'] & Fi_1 \arrow[r, dash, "F(\delta)"] \arrow[drr, "F(\delta_{1z})"] & Fi_2 \arrow[r, dash, "F(\delta)"] \arrow[dr, "F(\delta_{2z})"] & \dots \arrow[r, dash, "F(\delta)"] & Fi_{n-2} \arrow[r, dash, "F(\delta)"] \arrow[dl, "F(\delta_{n-2,z})"'] & Fi_{n-1} \arrow[r, dash, "F(\delta)"] \arrow[dll, "F(\delta_{n-1,z})"'] & Fj \arrow[dlll, bend left, "F(\delta_{jz})"] \\
 & & & Fz & & &
\end{tikzcd}
$$

donde el sentido de las flechas horizontales es irrelevante. La parte superior del diagrama conmuta dado que $\{L_{\mathcal{J}}\}$ es un cono y la parte de abajo por definición. $\square$

Un análogo de la proposición anterior para el caso $\mathcal{J}_{\leftarrow z}$ es mucho más complicado. Proponemos la siguiente:

Proposición 2.2.6. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con una familia de generadores extrema y proyectiva. Sean $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un funtor, $\mathcal{J}$ una subcategoría plena de $\mathcal{I}$, en la que tenemos $\mathcal{J}_{\leftarrow z}$, $(n_i : L_{\mathcal{J}} \to F_i)$ y $(m_i : L_{\mathcal{J}_{\leftarrow z}} \to F_i)$ los límites de las respectivas restricciones de F. Escribamos $\mathcal{J}^*_{\leftarrow z}$ para la subcategoría plena cuyos objetos son $\{i \in ob(\mathcal{J}) | \exists z \to i\}$. Asumamos que:

1. Dados $x, y : G \rightrightarrows L_{\mathcal{J}_{\leftarrow z}}$ si $m_z x \neq m_z y$ entonces existe $i \neq z$, $m_i : L_{\mathcal{J}_{\leftarrow z}} \to F_i$ tal que $m_i x \neq m_i y$;

2. F_z es $\mathbb{G}-$pegable sobre $F|_{\mathcal{J}^*_{\leftarrow z}}$ (Definición 1.2.1).

Bajo estas condiciones $L_{\mathcal{J}}$ es isomorfo a $L_{\mathcal{J}_{\leftarrow z}}$.

Demostración. Sea $l : L_{\mathcal{J}_{\leftarrow z}} \to L_{\mathcal{J}}$ el morfismo inducido gracias a que $L_{\mathcal{J}}$ es un límite. Tenemos que l es un monomorfismo gracias a la hipótesis 1. Si $L_{\mathcal{J}_{\leftarrow z}}$ fuera un subobjeto propio de $L_{\mathcal{J}}$ existiría $g : G \to L_{\mathcal{J}}$ que no se deja factorizar a través de l. Gracias a la hipótesis 2 existe $g_z : G \to F_z$ inducido por los $n_i g : G \to F_i$ para los cuales existe un morfismo $z \to i$. Por definición, la familia $\{g_z\} \cup \{n_i g\}$ forma un cono para $F|_{\mathcal{J}_{\leftarrow z}}$, por tanto existe $e : G \to L_{\mathcal{J}_{\leftarrow z}}$ tal que, en particular, $n_i g = m_i e = n_i l e$ para $i \in J$. Por tanto $g = le$, lo cual contradice que g no se deja factorizar a través de l. $\square$

En la sección 1.2 se estudiaron algunas maneras de garantizar la validez de las condiciones 1 y 2 de la proposición anterior. Nos gustaría observar solamente que ellas se cumplen implícitamente en 2.2.5:

1. Sean $x, y : G \to L_{\mathcal{J}_{\to z}}$ tales que $m_z x \neq m_z y$. Entonces para cualquier $i \in \mathcal{J}$ tal que existe $i \to z$ necesariamente debemos tener que $m_i x \neq m_i y$.

2. Si escribimos $\mathcal{J}^*_{\to z}$ para la subcategoría plena cuyos objetos son $\{i \in ob(\mathcal{J}) | \exists i \to z\}$, la extensión de un cono sobre $F|_{\mathcal{J}^*_{\leftarrow z}}$ hasta z se realiza

componiendo con los $i \to z$; la coherencia de estas compuestas se tiene por la conexidad de la coma categoría como se vio en la demostración de 2.2.5.

Para toda subcategoría $\mathcal{J}$, $\Diamond_1\mathcal{J}$ es construida agregándole a $ob(\mathcal{J})$ los objetos conectados con ellos por algún morfismo; $\Diamond_2\mathcal{J}$ agregando los objetos conectados a $\Diamond_1\mathcal{J}$; y así sucesivamente hasta llegar a $\Diamond\mathcal{J}$, formada por todos los objetos conectados mediante una cadena finita de morfismos a $ob(\mathcal{J})$. Por la conexidad de $\mathcal{I}$, tenemos que $\Diamond\mathcal{J} = \mathcal{I}$. Así, las proposiciones 2.2.5, 2.2.6 son condiciones para garantizar que el límite de $F|_{\mathcal{J}}$ se mantenga invariante en cada paso, hasta ser finalmente igual al límite de F. Aunque estas condiciones son difíciles de cumplir en cada paso en la práctica, sí nos guían en nuestro estudio de la máxima pragmática. Más que centrarnos en "all the posible different circumstances", lo cual como hemos dicho es una imposibilidad, debemos centrarnos en trabajar con sólo una parte $\mathcal{J}$, pero cuidadosamente escogida, de tal forma que se proyecte en gran parte de $\mathcal{I}$. Las proposiciones 2.2.5, 2.2.6 aunque tienen algunas exigencias que podrían ayudarnos en nuestra búsqueda de un $\mathcal{J}$ adecuado, adolecen de una petición de principio: en ella buscamos los mejores F_z vía el conocimiento previo del límite que queremos construir con ellos. Por eso en la sección siguiente trataremos de hacer una aproximación que trabaje directamente con los interpretantes, que es lo único que conocemos en la práctica, sin hacer ninguna mención de S ni de los límites.

2.3 Espacios pragmáticos

Los espacios pragmáticos serán un tipo de "mapa de interpretantes" que nos ayudará en nuestra tarea de escoger las mejores interpretaciones para entender el signo.

Para su construcción trabajaremos con morfismos parciales en vez de los morfismos usuales que veníamos utilizando. Entendemos por un morfismo parcial de A en B un morfismo de un subobjeto de A (no necesariamente igual a A) en B:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, hook, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A & B \end{tikzcd}$$

Las razones de este cambio son varias. En primer lugar, desde el punto de vista de la veracidad de nuestro modelo, es más razonable pensar que dadas dos interpretaciones sólo una parte de la primera puede ser relacionada con la segunda. De hecho este es el caso de las aplicaciones que trabajaremos en el capítulo 4. Por ejemplo, en el proemio estudiamos dos interpretantes de los pasajes: una *Guía ilustrada de París* y un fragmento de la novela *Paris en l'an 2000.* Existen algunos elementos de la primera que se pueden corresponder con la segunda (por ejemplo, el confort que ofrecían los pasajes en contraste con la calle) mientras que otros no (todo el carácter económico de los pasajes que ocupa un primer plano en la *Guía*, se pierde en la novela). Dado que nuestro objetivo es contrastar lo mejor posible dos interpretaciones F_i y F_j, asumiremos que existe un F_{ij} que es la parte mayor de F_i que se puede hacer corresponder con F_j (es decir, cuando contrastamos estamos utilizando toda la información posible). En breve expresaremos formalmente esta idea.

En segundo lugar, trabajar con morfismos parciales nos da la posibilidad de contrastar cualquier par de interpretantes, ya que en el peor de los casos podemos definir el morfismo desde un subobjeto lo suficientemente pequeño. En particular, dadas dos interpretaciones F_i, F_j tenemos un subobjeto $F_{ij} \hookrightarrow F_i$ desde el cual definir un morfismo parcial δ_{ij} en F_j, y un subobjeto $F_{ji} \hookrightarrow F_j$ desde el cual definir un morfismo parcial δ_{ji} en F_i.

$$\begin{tikzcd}
F_{ij} \arrow[d, hook, "f_{ij}"'] \arrow[dr, "\delta_{ij}"] & F_{ji} \arrow[d, hook, "f_{ji}"] \arrow[dl, "\delta_{ji}"] \\
F_i & F_j
\end{tikzcd}$$

En base a esto definimos:

Definición 2.3.1. Sea I un conjunto, $S = \{S_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos en una categoría $\mathcal{C}$. Diremos que S está equipada con una estructura de morfismos parciales $\Delta = \{\delta_{ij}\}_{i,j \in I}$ si

1. Para cada $(i, j) \in I \times I$ tenemos un morfismo parcial

$$\begin{tikzcd}
S_{ij} \arrow[d, hook, "s_{ij}"'] \arrow[dr, "\delta_{ij}"] & \\
S_i & S_j
\end{tikzcd}$$

2. $S_{ii} = S_i$ y $\delta_{ii} = id_{S_i}$;

3. si $i, j, k \in I$, y P_{ijk} es el pullback de S_{jk} a lo largo de δ_{ij}, entonces $P_{ijk} \leq S_{ik}$.

En la estructura anterior, cada S_i representa un interpretante del signo. 1 dice que todo par son contrastables. 2 dice que la parte más grande de S_i que se puede contrastar con S_i es el mismo S_i. Para entender 3 hacemos un gráfico detallado (asumimos factorización epi-mono):

$$\begin{tikzcd}
P_{ijk} \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & im(\delta_{ij}) \cap S_{jk} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & S_{jk} \arrow[d, hook] \arrow[dr] & \\
S_{ij} \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & im(\delta_{ij}) \arrow[r, hook] & S_j & S_k \\
S_i & & &
\end{tikzcd}$$

Así, P_{ijk} es una parte de S_{ij} y por tanto de S_i, que respetando la estructura de Δ se puede proyectar en S_k. Que S_{ik} sea la parte más grande de S_i que se puede contrastar con S_k, significa que P_{ijk} debe estar contenido en S_{ik}.

Pensamos la estructura S como una especie de funtor de I en $\mathcal{C}$ donde cualquier par de interpretantes pueden ser contrastados sin que la estructura se trivialice. Esta manera de ver nos permite que mucha de la teoría de los funtores se pueda reescribir en términos de familias de morfismos parciales. En particular, este es el caso de conos y límites.

Definición 2.3.2. Sea $(\delta_{ij} : S_{ij} \leq S_i \to S_j)$ una familia de morfismos parciales. Por un cono parcial entendemos una familia de funciones $t_i : T \to S_i$ tal que:

- Factorización: Para todo $s_{ij} : S_{ij} \hookrightarrow S_i$ existe $t_{ij} : T \to S_{ij}$ tal que $s_{ij}t_i = t_{ij}$;
- Conmutatividad: Para todos $i, j,\ \delta_{ij}t_{ij} = t_j$.

Un límite parcial $(l_i : L \to S_i)$ es un cono parcial tal que para cualquier otro cono parcial $(t_i : T \to S_i)$ existe un único morfismo $l : T \to L$ tal que $l_i l = t_i$.

Mucha de la teoría de los capítulos también se puede generalizar. Sin embargo, nuestro objetivo por el momento es construir un espacio de interpretantes. Para esto asumiremos que la categoría $\mathcal{C}$ tiene las siguientes propiedades:

- Es de bi-Heyting.
- Posee coproductos disyuntos.
- Posee objeto inicial, el cual es estricto.
- Posee una familia de generadores, la cual es proyectiva en el sentido usual y proyectiva con respecto a coproductos en el sentido de 1.2.4.
- Posee relaciones de equivalencia efectivas.

Por ejemplo, en cualquier categoría de prehaces valen todas las condiciones anteriores.

Fijemos una estructura S. Nuestro primer paso será tomar $\coprod_{i\in I} S_i$. Dado que utilizaremos este coproducto a lo largo de esta sección, reservaremos la notación $c_k : S_k \hookrightarrow \coprod_{i\in I} S_i$ para la inclusión canónica. El siguiente lema, aunque trivial, amerita una pequeña discusión.

Proposición 2.3.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto inicial estricto, una familia de generadores y coproductos disyuntos. Dados una familia $\{S_k\}_{k\in I}$, $G \in \mathbb{G}$ y morfismos $x : G \to S_i$, $y : G \to S_j$ tales que $c_i x = c_j y$ en $\mathcal{C}(G, \coprod_{k\in I} S_k)$ entonces $i = j$ en I.

Demostración. Sea $i \neq j$. Supongamos que la familia $\mathbb{G}$ ha sido expurgada de elementos superfluos según mencionamos en la observación 1.1.3. Aplicando la definición de coproductos disyuntos podemos formar un diagrama pullback de la forma

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, dotted, "w"] \arrow[drr, bend left, "x"] \arrow[ddr, bend right, "y"'] & & \\
& 0 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & S_i \arrow[d, hook, "c_i"] \\
& S_j \arrow[r, hook, "c_j"'] & \coprod_{k\in I} S_k
\end{tikzcd}$$

Como 0 es estricto, w es un isomorfismo y así G es un objeto inicial. Ahora bien la información que le aporta un objeto inicial a una familia de generadores es superflua: dadas $f, g : X \rightrightarrows Y$, para el único morfismo $!_X : 0 \to X$ siempre vamos a tener que $f!_X = g!_X$, por lo que no nos ayuda en nada a determinar si f y g son iguales. Así, G es un elemento superfluo, lo cual contradice nuestra asunción acerca de la minimalidad de $\mathbb{G}$. $\square$

Nuestro objetivo es definir una relación de equivalencia sobre $\coprod_{i\in I} S_i$. Partimos de la siguiente definición.

Definición 2.3.4. $\mathfrak{G}$ será el conjunto de quíntuplas (G, i, j, t_i, t_j), con G un generador, $i, j \in I$ y $t_i : G \to S_{ij}$, $t_j : G \to S_{ji}$, de tal manera que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, bend right, "t_i"'] \arrow[dr, bend left, "t_j"] & \\
S_{ij} \arrow[d, hook, "s_{ij}"'] \arrow[drr, "\delta_{ij}"] & & S_{ji} \arrow[d, hook, "s_{ji}"] \arrow[dll, "\delta_{ji}"'] \\
S_i & & S_j .
\end{tikzcd}$$

En realidad pudimos haber definido $\mathfrak{G}$ como parejas de morfismos, de tal forma que los tres primeros datos queden determinados implícitamente por e-llos. Sin embargo, la definición anterior tiene la ventaja de permitirnos obtener a partir de una quíntupla arbitraria toda la información que necesitaremos en las construcciones vía proyecciones.

Consideremos $\coprod_{q\in\mathfrak{G}} pr_1(q)$. Este constará de un coproducto de generadores, de tal forma que un generador particular aparecerá tantas veces como haya una quíntupla adecuada. Definimos una pareja de morfismos $r_1, r_2 : \coprod_{q\in\mathfrak{G}} pr_1(q) \rightrightarrows \coprod_{i\in I} S_i$ vía la propiedad universal del coproducto del siguiente modo

$$\begin{tikzcd}
pr_1(q) \arrow[dr, "inj_q"'] \arrow[drr, bend left, "c_{pr_2(q)}s_{pr_2(q)pr_3(q)}pr_4(q)"] & & \\
& \coprod_{q\in\mathfrak{G}} pr_1(q) \arrow[r, dotted, "r_1"] & \coprod_{i\in I} S_i,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
pr_1(q) \arrow[dr, "inj_q"'] \arrow[drr, bend left, "c_{pr_3(q)}s_{pr_3(q)pr_2(q)}pr_5(q)"] & & \\
& \coprod_{q\in\mathfrak{G}} pr_1(q) \arrow[r, dotted, "r_2"] & \coprod_{i\in I} S_i.
\end{tikzcd}$$

No es difícil convencerse de que $(\coprod_{q\in\mathfrak{G}} pr_1(q), r_1, r_2)$ forma una relación de equivalencia sobre $\coprod_{i\in I} S_i$ dado que $\mathfrak{G}$ está definida en esencia por un pentágono que es simétrico. Sin embargo, la prueba de este hecho es un tanto complicada.

Proposición 2.3.5. $(\coprod_{q\in\mathfrak{G}} pr_1(q), r_1, r_2)$ forma una relación de equivalencia sobre $\coprod_{i\in I} S_i$.

Demostración.

1. $(\coprod_{q\in\mathfrak{G}} pr_1(q), r_1, r_2)$ es una relación.
   Sean X un objeto arbitrario y $x, y : X \rightrightarrows \coprod_{q\in\mathfrak{G}} pr_1(q)$ una pareja de morfismos tales que $r_1x = r_1y,\ r_2x = r_2y$; debemos mostrar que $x = y$. Dado cualquier morfismo $g : G \to X$, donde G es un generador, el hecho de que en la categoría los generadores sean proyectivos con respecto a coproductos, nos garantiza la existencia de $q, q' \in \mathfrak{G}$ y morfismos $d : G \to pr_1(q),\ d' : G \to pr_1(q')$ tales que $inc(q) \circ d = xg,\ inc(q') \circ d' = yg$. Luego

$$\begin{aligned} c_{pr_2(q)}s_{pr_2(q)pr_3(q)}pr_4(q)d =& r_1inc(q)d = r_1xg = r_1yg \\ &= r_1inc(q')d' = c_{pr_2(q')}s_{pr_2(q')pr_3(q')}pr_4(q')d' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{pr_3(q)}s_{pr_3(q)pr_2(q)}pr_5(q)d =& r_2inc(q)d = r_2xg = r_2yg \\ &= r_2inc(q')d' = c_{pr_3(q')}s_{pr_3(q')pr_2(q')}pr_5(q')d' \end{aligned}$$

   Por la proposición 2.3.3 obtenemos $pr_2(q) = pr_2(q'),\ pr_3(q) = pr_3(q')$, y como

$$c_{pr_2(q)},\ c_{pr_3(q)},\ s_{pr_2(q)pr_3(q)},\ s_{pr_3(q)pr_2(q)}$$

   son todos monomorfismos tenemos $pr_4(q)d = pr_4(q')d',\ pr_5(q)d = pr_5(q')d'$. Así, si definimos la quíntupla $(G, pr_2(q), pr_3(q), pr_4(q)d, pr_5(q)d)$ tanto xg como yg funcionan como su inclusión canónica y por tanto son iguales. Dado que g era arbitrario, la definición de generador implica que $x = y$.

2. $(\coprod_{q\in\mathfrak{G}} pr_1(q), r_1, r_2)$ es reflexiva.
   Por la proposición 1.1.17 basta mostrar que para todo generador G, R_G es reflexiva sobre $\mathcal{C}(G, \coprod_{i\in I} S_i)$. Si $f \in \mathcal{C}(G, \coprod_{i\in I} S_i)$, como los generadores

devuelven coproductos existen $i \in I$ y $d : G \to S_i$ tales que $c_i d = f$. Si definimos la quíntupla $q = (G, i, i, d, d)$ tenemos que

$$r_1 \circ inc_q = c_i \circ id_{S_i} \circ d = f$$
$$r_2 \circ inc_q = c_i \circ id_{S_i} \circ d = f$$

y así $(f, f) \in R_G$.

3. $(\coprod_{q\in\mathfrak{G}} pr_1(q), r_1, r_2)$ es simétrica.
   Basta mostrar que para cada G generador, la relación R_G es simétrica sobre $\mathcal{C}(G, \coprod_{i\in I} S_i)$. Si $(f_1, f_2) \in R_G$ entonces existe $x \in \mathcal{C}(G, \coprod_{q\in\mathfrak{G}} pr_1(q))$ tal que $r_1 x = f_1,\ r_2 x = f_2$. Por la relación de generadores y coproductos existen $q \in \mathfrak{G},\ d : G \to pr_1(q)$ tales que $inc(q) \circ d = x$. Así, obtenemos las ecuaciones

$$f_1 = r_1 x = r_1 inc(q) d = c_{pr_2(q)} s_{pr_2(q) pr_3(q)} pr_4(q) d,$$
$$f_2 = r_2 x = r_2 inc(q) d = c_{pr_3(q)} s_{pr_3(q) pr_2(q)} pr_5(q) d.$$

   Entonces si definimos la quíntupla $q' = (pr_1(q), pr_3(q), pr_2(q), pr_5(q), pr_4(q))$ obtenemos inmediatamente que $r_1 inc_{q'} d = f_2,\ r_2 inc_{q'} d = f_1$ y así $(f_2, f_1) \in R_G$.

4. $(\coprod_{q\in\mathfrak{G}} pr_1(q), r_1, r_2)$ es transitiva.
   Mostremos que R_G es transitiva para cada generador G. Sean (f_1, f_2), $(f_2, f_3) \in R_G$, entonces existen $x, y \in \mathcal{C}(G, \coprod_{q\in\mathfrak{G}} pr_1(q))$ tales que

$$f_1 = r_1 x, \quad f_2 = r_2 x, \quad f_2 = r_1 y, \quad f_3 = r_2 y.$$

   Existen $q, q' \in \mathfrak{G},\ d : G \to pr_1(q),\ d' : G \to pr_1(q')$ tales que $inc(q) \circ d = x,\ inc(q') \circ d' = y$. Así, obtenemos las ecuaciones

$$f_1 = r_1 x = r_1 inc_q d = c_{pr_2(q)} s_{pr_2(q) pr_3(q)} pr_4(q) d,$$
$$f_2 = r_2 x = r_2 inc_q d = c_{pr_3(q)} s_{pr_3(q) pr_2(q)} pr_5(q) d,$$
$$f_2 = r_1 y = r_1 inc_{q'} d' = c_{pr_2(q')} s_{pr_2(q') pr_3(q')} pr_4(q') d',$$
$$f_3 = r_2 y = r_2 inc_{q'} d' = c_{pr_3(q')} s_{pr_3(q') pr_2(q')} pr_5(q') d'.$$

   Igualando las ecuaciones 2 y 3, tenemos que $pr_3(q) = pr_2(q')$ y como $c_{pr_3(q)}$ es monomorfismo, $s_{pr_3(q) pr_2(q)} pr_5(q) d = s_{pr_2(q') pr_3(q')} pr_4(q') d'$.

   El siguiente diagrama conmutativo nos ayudará a entender la situación en que nos encontramos

$$\begin{tikzcd}
 & & & G \arrow[dll, "d"'] \arrow[drr, "d'"] & & & \\
 & pr_1(q) \arrow[dl, "pr_4(q)"'] \arrow[dr, "pr_5(q)"] & & & & pr_1(q') \arrow[dl, "pr_4(q')"'] \arrow[dr, "pr_5(q')"] & \\
S_{pr_2(q)pr_3(q)} \arrow[d, hook, "s_{pr_2(q)pr_3(q)}"'] \arrow[drr, "\delta_{pr_2(q)pr_3(q)}"] & & S_{pr_3(q)pr_2(q)} \arrow[d, hook, "s_{pr_3(q)pr_2(q)}"'] \arrow[dll, "\delta_{pr_3(q)pr_2(q)}"] & & S_{pr_2(q')pr_3(q')} \arrow[d, hook, "s_{pr_2(q')pr_3(q')}"'] \arrow[drr, "\delta_{pr_2(q')pr_3(q')}"] & & S_{pr_3(q')pr_2(q')} \arrow[d, hook, "s_{pr_3(q')pr_2(q')}"] \arrow[dll, "\delta_{pr_3(q')pr_2(q')}"] \\
S_{pr_2(q)} & & S_{pr_3(q)} & = & S_{pr_2(q')} & & S_{pr_3(q')}
\end{tikzcd}$$

A partir de aquí, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo, donde el cuadrado es un pullback

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[drr, bend left, "pr_4(q')d'"] \arrow[dr, dotted, "k_1"] \arrow[ddr, bend right, "pr_4(q)d"'] & & & \\
 & P \arrow[r, "p"] \arrow[d, hook, "p_{pr_2(q)}"'] & S_{pr_2(q')pr_3(q')} \arrow[d, hook, "s_{pr_2(q')pr_3(q')}"'] \arrow[dr, "\delta_{pr_2(q')pr_3(q')}"] & \\
 & S_{pr_2(q)pr_3(q)} \arrow[r, "\delta_{pr_2(q)pr_3(q)}"'] \arrow[d, hook, "s_{pr_2(q)pr_3(q)}"'] & S_{pr_2(q')} & S_{pr_3(q')} \\
 & S_{pr_2(q)} & &
\end{tikzcd}$$

La maximalidad de Δ implica que tenemos los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, hook, dotted, "s_{P,pr_2(q)}"] \arrow[dr, hook, "s_{pr_2(q)pr_3(q)}p_{pr_2(q)}"'] & & S_{pr_2(q)pr_3(q')} \arrow[dl, hook', "s_{pr_2(q)pr_3(q')}"] \\
 & S_{pr_2(q)} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, hook, dotted, "s_{P,pr_2(q)}"'] \arrow[ddrr, "\delta_{pr_2(q')pr_3(q')}p"] & & \\
S_{pr_2(q)pr_3(q')} \arrow[d, hook] \arrow[drr, "\delta_{pr_2(q)pr_3(q')}"'] & & \\
S_{pr_2(q)} & & S_{pr_3(q')}
\end{tikzcd}$$

De manera análoga tenemos los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, dotted, "k_2"] \arrow[drr, bend left, "pr_5(q)d"] \arrow[ddr, bend right, "pr_5(q')d'"'] & & & \\
& T \arrow[r, "t"] \arrow[d, hook, "t_{pr_3(q')}"'] & S_{pr_3(q)pr_2(q)} \arrow[d, hook, "s_{pr_3(q)pr_2(q)}"'] \arrow[dr, "\delta_{pr_3(q)pr_2(q)}"] & \\
& S_{pr_3(q')pr_2(q')} \arrow[r, "\delta_{pr_3(q')pr_2(q')}"'] \arrow[d, hook, "s_{pr_3(q')pr_2(q')}"'] & S_{pr_3(q)} & S_{pr_2(q)} \\
& S_{pr_3(q')} & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, hook, dotted, "s_{T,pr_3(q')}"] \arrow[dr, hook, "s_{pr_3(q')pr_2(q')}t_{pr_3(q')}"'] & & S_{pr_3(q')pr_2(q)} \arrow[dl, hook, "s_{pr_3(q')pr_2(q)}"] \\
& S_{pr_3(q')} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[d, hook, dotted, "s_{T,pr_3(q')}"'] \arrow[ddr, "\delta_{pr_3(q)pr_2(q)}t"] & \\
S_{pr_3(q')pr_2(q)} \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\delta_{pr_3(q')pr_2(q)}"'] & \\
S_{pr_3(q')} & S_{pr_2(q)}
\end{tikzcd}$$

Consideremos la quintupla $q'' = (G, pr_2(q), pr_3(q'), s_{P,pr_2(q)}k_1, s_{T,pr_3(q')}k_2)$. Mostremos que ella está en $\mathfrak{G}$, es decir, que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, bend right, "s_{P,pr_2(q)}k_1"'] \arrow[dr, bend left, "s_{T,pr_3(q')}k_2"] & \\
S_{pr_2(q)pr_3(q')} \arrow[d, hook, "s_{pr_2(q)pr_3(q')}"'] \arrow[drr, "\delta_{pr_2(q)pr_3(q')}" near start] & & S_{pr_3(q')pr_2(q)} \arrow[d, hook, "s_{pr_3(q')pr_2(q)}"] \arrow[dll, "\delta_{pr_3(q')pr_2(q)}" near end] \\
S_{pr_2(q)} & & S_{pr_3(q')}
\end{tikzcd}$$

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\delta_{pr_2(q)pr_3(q')} s_{P,pr_2(q)} k_1 &= \delta_{pr_2(q')pr_3(q')} p k_1 \\
&= \delta_{pr_2(q')pr_3(q')} pr_4(q') d' \\
&= s_{pr_3(q')pr_2(q')} pr_5(q') d' \\
&= s_{pr_3(q')pr_2(q')} t_{pr_3(q')} k_2 \\
&= s_{pr_3(q')pr_2(q)} s_{T,pr_3(q')} k_2. \\
\delta_{pr_3(q')pr_2(q)} s_{T,pr_3(q')} k_2 &= \delta_{pr_3(q)pr_2(q)} t k_2 \\
&= \delta_{pr_3(q)pr_2(q)} pr_5(q) d \\
&= s_{pr_2(q)pr_3(q)} pr_4(q) d \\
&= s_{pr_2(q)pr_3(q)} p_{pr_2(q)} k_1 \\
&= s_{pr_2(q)pr_3(q')} s_{P,pr_2(q)} k_1.
\end{aligned}$$

Por último, las ecuaciones

$$\begin{aligned}
r_1 inc_{q''} &= c_{pr_2(q)} s_{pr_2(q)pr_3(q')} s_{P,pr_2(q)} k_1 \\
&= c_{pr_2(q)} s_{pr_2(q)pr_3(q)} p_{pr_2(q)} k_1 \\
&= c_{pr_2(q)} s_{pr_2(q)pr_3(q)} pr_4(q) d \\
&= f_1; \\
r_2 inc_{q''} &= c_{pr_3(q')} s_{pr_3(q')pr_2(q)} s_{T,pr_3(q')} k_2 \\
&= c_{pr_3(q')} s_{pr_3(q')pr_2(q')} t_{pr_3(q')} k_2 \\
&= c_{pr_3(q')} s_{pr_3(q')pr_2(q')} pr_5(q') d' \\
&= f_3;
\end{aligned}$$

implican por definición que $(f_1, f_3) \in R_G$.

□

Como la categoría tiene relaciones de equivalencia efectivas (es decir, el coigualador e de una relación de equivalencia r_1, r_2 existe y r_1, r_2 es el par kernel de e), podemos definir:

Definición 2.3.6. El espacio pragmático E_P es el coigualador $e : \coprod_{i \in I} S_i \to E_P$ de r_1, r_2.

Proposición 2.3.7. Cada inyección canónica $ec_i : S_i \to E_P$ en el espacio pragmático es un monomorfismo.

Demostración. Sean G un generador y $x, y : G \to S_i$ una pareja de morfismos tal que $ec_i x = ec_i y$. Gracias a la efectividad de las relaciones de equivalencia tenemos el diagrama pullback

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, dotted, "w"] \arrow[drr, bend left, "c_i x"] \arrow[ddr, bend right, "c_i y"'] & & \\
& \coprod_{q\in\mathfrak{G}} pr_1(q) \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "r_2"'] & \coprod_{i\in I} S_i \arrow[d, "e"] \\
& \coprod_{i\in I} S_i \arrow[r, "e"'] & E_P
\end{tikzcd}$$

Dado que los generadores son proyectivos con respecto a coproductos existen $q \in \mathfrak{G},\ d : G \to pr_1(q)$ tales que $inc_q d = w$. Por tanto tenemos que

$$c_i x = r_1 w = r_1 inc_q d = c_{pr_2(q)} pr_4(q) d,$$
$$c_i y = r_2 w = r_2 inc_q d = c_{pr_3(q)} pr_5(q) d.$$

Por la proposición 2.3.3, $i = pr_2(q) = pr_3(q)$. Por definición $S_{ii} = S_i$ y $\delta_{ii} = id_{S_i}$, y entonces tenemos un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
& pr_1(q) \arrow[dl, bend right, "pr_4(q)"'] \arrow[dr, bend left, "pr_5(q)"] & \\
S_i \arrow[d, "id"'] \arrow[drr, "id"] & & S_i \arrow[d, "id"] \arrow[dll, "id"'] \\
S_i & & S_i
\end{tikzcd}$$

por lo que $pr_4(q) = pr_5(q)$. Así, $c_i x = c_{pr_2(q)} pr_4(q) d = c_i y$, y como c_i es un monomorfismo por la disyuntividad del coproducto, tenemos que $x = y$. $\square$

La proposición anterior implica que podemos aplicar la estructura de bi-Heyting de $Sub(E_P)$ a los interpretantes S_i. En particular, podemos utilizar la operación de sustracción $(-)$ para ver la información que aporta un primer interpretante que no posee un segundo, y la operación de suplemento $(\sim)$ para encontrar opuestos dialécticos, interpretaciones opuestas a la dada. La lógica de co-Heyting nos permite manejar estas interpretaciones contradictorias sin caer en trivialidades, lo cual es importante dado que lo usual es que cuando varios interpretantes se enfrentan a la interpretación de un signo aparezcan estas visiones opuestas.

Sea $\{S_i\}$ una familia parcial y E_P su espacio asociado. Gracias a la proposición 2.2.1, cada triángulo de la forma $S_{ij} \leq S_i \leq E_P$ da origen a otro $\Diamond_1 S_{ij} \leq \Diamond_1 S_i \leq E_P$, y a su vez una familia parcial $\{\Diamond_1 S_i\}_{i\in I}$ con su respectivo espacio, al que denotaremos E_P^1. Reiterando este procedimiento, obtenemos espacios E_P^α para cada $\alpha \in \omega + 1$. La relación entre ellos viene dada por la siguiente proposición.

Proposición 2.3.8. Existe una escala entre los espacios pragmáticos E_P^α, $\alpha \in \omega+1$ del modo siguiente

$$E_P^0 \to E_P^1 \to E_P^2 \to \ldots \to E_P^\Diamond.$$

Demostración. Sean $\alpha,\ \beta \in \omega+1$ con $\alpha < \beta$. Denotamos con $m_i(\alpha,\beta) : \Diamond_\alpha S_i \hookrightarrow \Diamond_\beta S_i$ el monomorfismo canónico, con $e_i^\alpha : \Diamond_\alpha S_i \to E_P^\alpha$ las inyecciones en el espacio pragmático y con $F^\alpha,\ F^\beta$ los funtores de los cuales $E_P^\alpha,\ E_P^\beta$ son colímites. Dado que $e_j^\beta m_j(\alpha,\beta)F^\alpha(g) = e_j^\beta F^\beta(g) m_i(\alpha,\beta) = e_i^\beta m_i(\alpha,\beta)$, la familia $\left(e_i^\beta m_i(\alpha,\beta) : \Diamond_\alpha S_i \to E_P^\beta\right)_{i\in I}$ constituye un cocono sobre F^α, lo que nos garantiza la existencia del morfismo $t_{\alpha,\beta} : E_P^\alpha \to E_P^\beta$ buscado. □

Observemos que en principio no tenemos ninguna información adicional sobre el morfismo $t_{\alpha,\beta}$: no podemos asegurar que sea monomorfismo ni epimorfismo. En realidad, tan sólo representa el tránsito de una distribución a otra del espacio. Así, los espacios pragmáticos no deben considerarse como estructuras fijas, sino como sujetas a un proceso iterativo que las va modificando según lo vayan haciendo las interpretaciones que lo originan.

Nuestro principal objetivo con el concepto de espacio pragmático es definir una estrategia para optimizar el entendimiento de un signo, y acercarnos lo más posible al interpretante intelectual último a pesar de trabajar con un número limitado de ellos. Nuestro primer paso será definir una adecuada noción de distancia en álgebras de co-Heyting.

Definición 2.3.9. En un álgebra de co-Heyting podemos definir la diferencia simétrica $a \triangle b = (a-b) \vee (b-a)$.

Las siguientes proposiciones ofrecen algunas propiedades sencillas de la operación de sustracción, que son conocidas en la literatura de las álgebras de co-Heyting (o dualmente en las de Heyting) o que se pueden deducir fácilmente de las definiciones.

Proposición 2.3.10. [60] En un álgebra de co-Heyting vale:

1. $a \leq b$ si y sólo si $a - b = 0$;
2. $a - b \leq (a-c) \vee (c-b)$;
3. $a - b \leq a$;
4. $b \vee (a-b) = a \vee b$.

Proposición 2.3.11. La operación $\triangle$ satisface:

1. (a) $a \triangle a = 0$;
   (b) $a \triangle b = 0$ implica $a = b$;
2. $a \triangle b = b \triangle a$;

3. $a \triangle b \leq (a \triangle c) \vee (c \triangle b)$.

Demostración. Consecuencia de 1. y 2. de la proposición anterior. Observemos solamente que 3 se obtiene combinando las dos desigualdades siguientes $a - b \leq (a - c) \vee (c - b)$ y $b - a \leq (b - c) \vee (c - a)$. □

Ejemplo 2.3.12. En un álgebra de Heyting $\mathbb{L}$ donde valgan las dos leyes de De Morgan podemos definir una operación de diferencia simétrica que satisfaga las tres propiedades de la proposición 2.3.11. En efecto, definiendo $a - b = \neg(a \Rightarrow b)$, tenemos

1.

$$\begin{aligned} a \leq b \quad & ssi \quad a \Rightarrow b = 1 \\ & ssi \quad \neg(a \Rightarrow b) = \neg 1 = 0 \\ & ssi \quad a - b = 0. \end{aligned}$$

2. En cualquier álgebra de Heyting tenemos $(a \Rightarrow c) \wedge (c \Rightarrow b) \leq (a \Rightarrow b)$. Aplicando $\neg$ a ambos lados obtenemos $\neg(a \Rightarrow b) \leq \neg((a \Rightarrow c) \wedge (c \Rightarrow b))$. Aplicando las leyes de De Morgan, obtenemos $a - b \leq (a - c) \vee (c - b)$.

Esta operación cumple axiomas similares a los que satisface la distancia en espacios métricos, pero sus valores ya no son números reales sino elementos del álgebra misma. La necesidad de ir más allá del concepto de número para expresar continuidad fue ya intuida por Peirce:

> Number cannot possibly express continuity. *Multitude and Continuity [c. 1897; NEM 3,93].*
>
> There will be lengths not measurable by such numbers, nor by limits of series of them. *On Continuous Series and the Infinitesimal [NEM 3,127].*

Dado que E_P fue construido en términos de generadores resulta razonable pensar que la estructura $Sub(E_P)$ pueda ser caracterizada en términos de ellos.

Definición 2.3.13. Si $\mathbb{G}$ es la familia de generadores iterada, definimos para cada $A \in Sub(E_P)$:

$$\mathbb{G}(A) = \{g : G \to A | G \in \mathbb{G}\},$$

y también $\mathbb{P}(E_P) = \{\mathbb{G}(A) | A \in Sub(E_P)\}$.

Utilizaremos el subíndice $_E$ para las operaciones en el álgebra de bi-Heyting y $_{\mathbb{P}}$ para aquellas en $\mathbb{P}(E_P)$. Hay que tener cuidado sobre dónde vive cada operación: mientras las $_E$ están en $Sub(E_P)$, $_{\mathbb{P}}$ vivirán en la categoría de conjuntos.

Definimos la siguiente relación de orden sobre $\mathbb{P}(E_P)$: $S_i \leq_{\mathbb{P}} S_j$ ssi para cada $g \in \mathbb{G}(S_i)$ existen $t : G \to S_{ij},\ t' : G \to S_{ji}$ tales que

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "t'"] \arrow[ddl, bend right=60, "g"'] & \\
S_{ij} \arrow[d, hook, "s_{ij}"'] \arrow[drr, "\delta_{ij}"] & & S_{ji} \arrow[d, hook, "s_{ji}"] \arrow[dll, "\delta_{ji}"] \\
S_i & & S_j.
\end{tikzcd}$$

Dado que no todos los subobjetos de E_P son de la forma $ec_i : S_i \hookrightarrow E_P$ (intuitivamente, aunque el espacio pragmático haya sido construido sólo con algunos interpretantes, en él se pueden observar variaciones de estos, formas de pseudo-complemento, intersecciones, uniones, distancias) en principio el orden anterior no está definido en todo $\mathbb{P}(E_P)$. Para extenderlo, necesitamos construir para todo par de subobjetos A, B de E_P, subobjetos $S_{AB} \hookrightarrow A,\ S_{BA} \hookrightarrow B$ y morfismos parciales $\delta_{AB} : S_{AB} \to B,\ \delta_{BA} : S_{BA} \to A$ que sean coherentes con los δ_{ij} que dieron origen a E_P. La definición en sí es completamente natural, la escribimos con cierto detalle para fijar la notación que utilizaremos más adelante.

Definición 2.3.14. Construimos $\delta_{AB} : S_{AB} \to B$ mediante el siguiente proceso:

1. Tomamos la imágenes inversas de B a lo largo de cada uno de los $\{\delta_{ij}\}_{i,j\in I}$:

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(B) \arrow[r, "\delta_{ij}^{B}"] \arrow[d, hook, "s_{\delta_{ij}^{-1}(B)}"'] & B \arrow[d, hook, "s_B"] \\
S_{ij} \arrow[r, "ec_j\delta_{ij}"'] & E_P
\end{tikzcd}$$

2. Intersectamos cada una de las imágenes inversas anteriores con A:

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(B) \cap A \arrow[r, hook, "s'_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}"] \arrow[d, hook, "s_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}"'] & \delta_{ij}^{-1}(B) \arrow[d, hook, "ec_i s_{ij} s_{\delta_{ij}^{-1}(B)}"] \\
A \arrow[r, hook, "s_A"'] & E_P
\end{tikzcd}$$

3. Definimos $S_{AB} = \bigcup_{ij\in I} \delta_{ij}^{-1}(B) \cap A$. Puede ser conveniente recordar que toda categoría con coproductos y factorizaciones epi-mono tiene uniones,

y que $\bigcup_{i,j\in I}\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A$ es la imagen del morfismo

$$\Big(\coprod_{i,j\in I}\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A\Big)\to A.$$

4. Dado que la categoría tiene uniones efectivas, tenemos un morfismo inducido $\delta_{AB}:S_{AB}\to B$

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A \arrow[dr, hook, "inc_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}"'] \arrow[drrr, bend left, "\delta_{ij}^{B}s'_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}"] & & & \\
& \coprod_{i,j\in I}\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A \arrow[r, two heads, "e_{AB}"'] & S_{AB} \arrow[r, "\delta_{AB}"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Si la definición anterior es coherente, cuando la apliquemos $A=S_k,\ B=S_l$ deberíamos obtener S_{kl}. En efecto, $\delta_{kl}^{-1}(S_l)=S_{kl}$ y como $S_{kl}\leq_B S_k$ tenemos que $S_{kl}\cap S_k=S_{kl}$ y así $S_{kl}\leq_{E_P}\bigcup_{ij\in I}\delta_{ij}^{-1}(S_l)\cap S_k$. Por otro lado, gracias a la maximalidad de los δ, $\delta_{ij}^{-1}(S_l)\cap S_k\leq_{E_P}S_{kl}$.

Lema 2.3.15. Sean $A,B\in Sub(E_P)$, G un generador y una pareja de morfismos $t_A:G\to S_{AB},\ t_B:G\to S_{BA}$ tal que $\delta_{AB}t_A=s_{AB}t_B,\ \delta_{BA}t_B=s_{AB}t_A$, es decir, los dos cuadriláteros superiores del siguiente diagrama conmutan

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, "t_A"'] \arrow[dr, "t_B"] & \\
S_{AB} \arrow[d, hook, "s_{AB}"'] \arrow[drr, "\delta_{AB}"] & & S_{BA} \arrow[d, hook, "s_{BA}"] \arrow[dll, "\delta_{BA}"'] \\
A \arrow[dr, hook, "s_A"'] & & B \arrow[dl, hook', "s_B"] \\
& E_P &
\end{tikzcd}$$

Entonces existe $q\in\mathfrak{G}$ tal que

$$ec_{pr_2(q)}s_{pr_2(q)pr_3(q)}pr_4(q)=s_As_{AB}t_A;$$
$$ec_{pr_3(q)}s_{pr_3(q)pr_2(q)}pr_5(q)=s_Bs_{BA}t_B.$$

Demostración. Gracias a que los generadores son proyectivos con respecto a epimorfismos y coproductos podemos retraer el morfismo $t_A:G\to S_{AB}$ hasta algún $\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A$, por lo que tenemos un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
S_{AB} \arrow[ddr, hook, bend right, "S_{AB}"'] & & G \arrow[ll, "t_A"'] \arrow[d, "t'_A"] & & & \\
\coprod \delta_{xy}^{-1}(B)\cap A \arrow[u, two heads, "e_A"'] & & \delta_{ij}^{-1}(B)\cap A \arrow[ll, "inc_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}"'] \arrow[rr, hook, "s'_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}"] \arrow[dl, hook, "s_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}"'] & & \delta_{ij}^{-1}(B) \arrow[r, "\delta_{ij}^{B}"] \arrow[dll, hook, "ec_i s_{ij} s_{\delta_{ij}^{-1}(B)}"'] \arrow[dl, hook, "s_{\delta_{ij}^{-1}(B)}"] & B \arrow[dl, hook, "s_B"] \\
& A \arrow[r, hook, "s_A"'] & E_P & S_{ij} \arrow[r, "ec_j\delta_{ij}"'] & E_P. &
\end{tikzcd}$$

De forma análoga podemos retraer $t_B : G \to S_{BA}$ hasta algún $\delta_{kl}^{-1}(A)\cap B$ y formar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
S_{BA} \arrow[ddr, hook, bend right, "S_{BA}"'] & & G \arrow[ll, "t_B"'] \arrow[d, "t'_B"] & & & \\
\coprod \delta_{xy}^{-1}(A)\cap B \arrow[u, two heads, "e_B"'] & & \delta_{kl}^{-1}(A)\cap B \arrow[ll, "inc_{\delta_{kl}^{-1}(A)\cap B}"'] \arrow[rr, hook, "s'_{\delta_{kl}^{-1}(A)\cap B}"] \arrow[dl, hook, "s_{\delta_{kl}^{-1}(A)\cap B}"'] & & \delta_{kl}^{-1}(A) \arrow[r, "\delta_{ij}^{A}"] \arrow[dll, hook, "ec_k s_{kl} s_{\delta_{kl}^{-1}(A)}"'] \arrow[dl, hook, "s_{\delta_{kl}^{-1}(A)}"] & A \arrow[dl, hook, "s_A"] \\
& B \arrow[r, hook, "s_B"'] & E_P & S_{kl} \arrow[r, "ec_l\delta_{kl}"'] & E_P. &
\end{tikzcd}$$

Dado que

$$\begin{aligned}
ec_j\delta_{ij}s_{\delta_{ij}^{-1}(B)}s'_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}t'_A &= s_B\delta_{ij}^{B}s'_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}t'_A \\
&= s_B s_{\delta_{kl}^{-1}(A)\cap B}t'_B \quad \Big(\text{hipótesis } \delta_{AB}t_A = s_{BA}t_B\Big) \\
&= ec_k s_{kl}s_{\delta_{kl}^{-1}(A)}s'_{\delta_{kl}^{-1}(A)\cap B}t'_B
\end{aligned}$$

podemos formar un diagrama pullback de la forma

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, dotted, "w"'] \arrow[drr, bend left, "c_j\delta_{ij}s_{\delta_{ij}^{-1}(B)}s'_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}t'_A"] \arrow[ddr, bend right, "c_k s_{kl}s_{\delta_{kl}^{-1}(A)}s'_{\delta_{kl}^{-1}(A)\cap B}t'_B"'] & & \\
& \coprod_{q\in\mathfrak{G}} pr_1(q) \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "r_2"'] & \coprod_{i\in I} S_i \arrow[d, "e"] \\
& \coprod_{i\in I} S_i \arrow[r, "e"'] & E_P.
\end{tikzcd}$$

Dado que los generadores se proyectan a través de coproductos existen $q \in \mathfrak{G}$, $d : G \to pr_1(q)$ tales que $inc_q d = w$. Por tanto tenemos que

$$c_j\delta_{ij}s_{\delta_{ij}^{-1}(B)}s'_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}t'_A = r_1 w = r_1 inc_q d = c_{pr_2(q)}s_{pr_2(q)pr_3(q)}pr_4(q)d,$$

$$c_k s_{kl}s_{\delta_{kl}^{-1}(A)}s'_{\delta_{kl}^{-1}(A)\cap B}t'_B = r_2 w = r_2 inc_q d = c_{pr_3(q)}s_{pr_3(q)pr_2(q)}pr_5(q)d.$$

De estas ecuaciones concluimos que

$$j = pr_2(q),\ k = pr_3(q),\ \delta_{ij} s_{\delta_{ij}^{-1}(B)} s'_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A} t'_A = s_{jk} pr_4(q) d.$$

A partir de aquí, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo, donde el cuadrado es un pullback

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[drr, bend left, "pr_4(q)d"] \arrow[dr, dotted, "v_1"] \arrow[ddr, bend right, "s_{\delta_{ij}^{-1}(B)} s'_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A} t'_A"'] & & & \\
& P \arrow[r, "p"] \arrow[d, hook, "p_i"'] & S_{jk} \arrow[d, hook, "s_{jk}"'] \arrow[dr, "\delta_{jk}"] & \\
& S_{ij} \arrow[r, "\delta_{ij}"'] \arrow[d, hook, "s_{ij}"'] & S_j & S_k \\
& S_i & &
\end{tikzcd}$$

La maximalidad de los δ implica que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, hook, dotted, "s_{P,i}"] \arrow[dd, bend right, "s_{ij} p_i"'] \arrow[ddr, "\delta_{jk} p"] & \\
S_{ik} \arrow[d, hook, "s_{ik}"] \arrow[dr, "\delta_{ik}"'] & \\
S_i & S_k
\end{tikzcd}$$

De manera completamente análoga procedemos para construir los diagramas

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[drr, bend left, "pr_4(q')d'"] \arrow[dr, dotted, "v_2"] \arrow[ddr, bend right, "s_{\delta_{kl}^{-1}(A)} s'_{\delta_{kl}^{-1}(A)\cap B} t'_B"'] & & & \\
& Q \arrow[r, "q"] \arrow[d, hook, "q_k"'] & S_{li} \arrow[d, hook, "s_{li}"'] \arrow[dr, "\delta_{li}"] & \\
& S_{kl} \arrow[r, "\delta_{kl}"'] \arrow[d, hook, "s_{kl}"'] & S_l & S_i \\
& S_k & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[d, hook, dotted, "s_{Q,k}"] \arrow[dd, bend right, "s_{kl} q_k"'] \arrow[ddr, "\delta_{li} q"] & \\
S_{ki} \arrow[d, hook, "s_{ki}"] \arrow[dr, "\delta_{ki}"'] & \\
S_k & S_i
\end{tikzcd}$$

Mostremos que la quíntupla $(G, i, k, s_{P,i}v_1, s_{Q,k}v_2)$ es la que estamos buscando. En primer lugar veamos que ella pertenece a $\mathfrak{G}$, es decir, los cuadriláteros superiores del siguiente diagrama conmutan

$$
\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, "s_{P,i}v_1"'] \arrow[dr, "s_{Q,k}v_2"] & \\
S_{ik} \arrow[d, hook, "s_{ik}"'] \arrow[drr, "\delta_{ik}" near start] & & S_{ki} \arrow[d, hook, "s_{ki}"] \arrow[dll, "\delta_{ki}" near start] \\
S_i \arrow[dr, hook, "ec_i"'] & & S_k \arrow[dl, hook', "ec_k"] \\
& E_P &
\end{tikzcd}
$$

En efecto tenemos

$$
\begin{aligned}
\delta_{ik}s_{P,i}v_1 &= \delta_{jk}pv_1 \\
&= \delta_{jk}pr_4(q)d \\
&= s_{kj}pr_5(q)d \quad \Big(\text{porque } q \in \mathfrak{G}\Big) \\
&= s_{kl}s_{\delta_{kl}^{-1}(A)}s'_{\delta_{kl}^{-1}(A)\cap B}t'_B \quad \Big(\text{definición de } q\Big) \\
&= s_{kl}q_kv_2 \\
&= s_{k,i}s_{Q,k}v_2.
\end{aligned}
$$

De forma análoga se muestra que $\delta_{ki}s_{Q,k}v_2 = s_{ik}s_{P,i}v_1$. Además tenemos que

$$
\begin{aligned}
ec_is_{i,k}s_{P,i}v_1 &= ec_is_{ij}p_iv_1 \\
&= ec_is_{ij}s_{\delta_{ij}^{-1}(B)}s'_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}t'_A \\
&= s_As_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}t'_A \\
&= s_As_{AB}t_A.
\end{aligned}
$$

E igualmente $s_Bs_{BA}t_B = ec_ks_{ki}s_{Q,k}v_2$. □

Lema 2.3.16. Sean $A, B \in Sub(E_P)$. Si $\mathbb{G}(A) \leq_{\mathbb{P}} \mathbb{G}(B)$ entonces $s_B\delta_{AB} = s_As_{AB}$.

Demostración. Sean G un generador y $g : G \to S_{AB}$ un morfismo arbitrario. Como $\mathbb{G}(A) \leq_{\mathbb{P}} \mathbb{G}(B)$, dado $s_{AB}g \in \mathbb{G}(A)$ existe $g' : G \to S_{AB}$ tal que $\delta_{AB}g = s_{BA}g'$, $\delta_{BA}g' = s_{AB}g$. Así, gracias al lema 2.3.15, existe una quíntupla $q \in \mathfrak{G}$ tal que

$$
\begin{aligned}
ec_{pr_2(q)}s_{pr_2(q)pr_3(q)}pr_4(q) &= s_As_{AB}g; \\
ec_{pr_3(q)}s_{pr_3(q)pr_2(q)}pr_5(q) &= s_Bs_{BA}g'.
\end{aligned}
$$

Como e es el coigualador de r_1, r_2 tenemos que

$$\begin{aligned}
s_A s_{AB} g &= ec_{pr_2(q)} s_{pr_2(q)pr_3(q)} pr_4(q) \\
&= er_1 inc_q \quad \Big(\text{definición de } r_1\Big) \\
&= er_2 inc_q \\
&= ec_{pr_3(q)} s_{pr_3(q)pr_2(q)} pr_5(q) \quad \Big(\text{definición de } r_2\Big) \\
&= s_B s_{BA} g' \\
&= s_B \delta_{AB} g \quad \Big(\text{elección de } g'\Big).
\end{aligned}$$

Como G, g eran arbitrarios, la definición de generador implica que $s_B \delta_{AB} = s_A s_{AB}$. □

Proposición 2.3.17. Sean $A, B \in Sub(E_P)$. Si $\mathbb{G}$ es iterada, entonces

$$A \leq_E B \Longleftrightarrow \mathbb{G}(A) \leq_{\mathbb{P}} \mathbb{G}(B).$$

Demostración. $\Longrightarrow$ Supongamos que existe un monomorfismo $k : A \hookrightarrow B$ tal que $s_B k = s_A$ y sea $g : G \to A$. Como los generadores son proyectivos y se retrotraen a través de coproductos, podemos retraer el morfismo g hasta un morfismo $g' : G \to S_i$ tal que $ec_i g' = s_B k g$. Dado que $s_{ii} = \delta_{ii} = id_{S_i}$ tenemos, siguiendo la notación de la definición 2.3.14, el siguiente diagrama conmutativo, donde los dos cuadrados son pullbacks

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, dotted, "w"'] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "g'"'] & & \\
& \delta_{ii}^{-1}(B) \cap A \arrow[r, hook, "s_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}"] \arrow[d, hook, "s'_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}"] & A \arrow[d, hook, "k"'] \arrow[dd, hook, bend left, "s_A"] \\
& \delta_{ii}^{-1}(B) \arrow[r, hook, "\delta_{ii}^B"'] \arrow[d, hook, "s_{\delta_{ii}^{-1}(B)}"] & B \arrow[d, hook, "s_B"'] \\
& S_i \arrow[r, hook, "ec_i"'] & E_P
\end{tikzcd}$$

Como también tenemos el pullback

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ii}^{-1}(A) \arrow[r, hook, "\delta_{ii}^A"'] \arrow[d, hook, "s_{\delta_{ii}^{-1}(A)}"] & A \arrow[d, hook, "s_A"'] \\
S_i \arrow[r, hook, "ec_i"'] & E_P
\end{tikzcd}$$

y $\delta_{ii}^{-1}(A) \leq_E A \leq_E B$, concluimos que $\delta_{ii}^{-1}(A) \cap B = \delta_{ii}^{-1}(A) = \delta_{ii}^{-1}(B) \cap A$.

Así, podemos definir

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, "e_{AB}inc_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}w"'] \arrow[dr, "e_{BA}inc_{\delta_{ii}^{-1}(A)\cap B}w"] \arrow[ddl, bend right=80, "g"'] & \\
S_{AB} \arrow[d, hook, "s_{AB}"] \arrow[drr, "\delta_{AB}" near start] & & S_{BA} \arrow[d, hook', "s_{BA}"'] \arrow[dll, "\delta_{BA}"' near start] \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Falta ver que los dos cuadriláteros superiores conmutan. En primer lugar, escribimos los diagramas inducidos por la definición 2.3.14:

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A \arrow[dr, hook, "e_{AB}inc_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}"'] \arrow[drr, bend left, "\delta_{ii}^{B}s'_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}"] & & \\
& S_{AB} \arrow[r, "\delta_{AB}"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ii}^{-1}(A)\cap B \arrow[dr, hook, "e_{BA}inc_{\delta_{ii}^{-1}(A)\cap B}"'] \arrow[drr, bend left, "\delta_{ii}^{A}s'_{\delta_{ii}^{-1}(A)\cap B} = \delta_{ii}^{A} = s_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}"] & & \\
& S_{BA} \arrow[r, "\delta_{BA}"'] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A \arrow[dr, hook, "e_{AB}inc_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}"'] \arrow[drr, hook, bend left, "s_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}"] & & \\
& S_{AB} \arrow[r, hook, "s_{AB}"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ii}^{-1}(A)\cap B \arrow[dr, hook, "e_{BA}inc_{\delta_{ii}^{-1}(A)\cap B}"'] \arrow[drr, hook, bend left, "s_{\delta_{ii}^{-1}(A)\cap B} = ks_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}"] & & \\
& S_{BA} \arrow[r, hook, "s_{BA}"'] & B
\end{tikzcd}$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
\delta_{AB}e_{AB}inc_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}w &= \delta_{ii}^{B}s'_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}w \\
&= ks_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}w \\
&= s_{\delta_{ii}^{-1}(A)\cap B}w \\
&= s_{BA}e_{BA}inc_{\delta_{ii}^{-1}(A)\cap B}w.
\end{aligned}$$

Por el otro lado

$$\begin{aligned}\delta_{BA}e_{BA}inc_{\delta_{ii}^{-1}(A)\cap B}w &= s_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}w \\ &= s_{AB}e_{AB}inc_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}w.\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Por la definición de generadores iterados, A es el colímite de una familia $(a_s : N_s \to A, \Delta_{st} : N_s \to N_t)$, donde cada N_s es el colímite de $(n_s^l : G_s^l \to N_s, \Delta_s^{lm} : G_s^l \to G_s^m)$ con $G_s^l \in \mathbb{G}$.

$$\begin{tikzcd}
G_s^l \arrow[rr, dotted, "u_s^l"] \arrow[dr, "n_s^l"] \arrow[dd, "\Delta_s^{lm}"'] & & S_{AB} \arrow[dd, hook, "s_{AB}"] \arrow[ddrr, "\delta_{AB}"] & & \\
& N_s \arrow[ur, dotted, "k_s"] \arrow[dr, "a_s"] \arrow[drrr, dotted, bend left, "u_s"] \arrow[dd, "\Delta_{st}"] & & & \\
G_s^m \arrow[ur, "n_s^m"'] & & A \arrow[rr, dotted, "u"] \arrow[ddr, hook, "s_A"'] & & B \arrow[ddl, hook, "s_B"] \\
& N_t \arrow[ur, "a_t"] \arrow[urrr, dotted, bend right, "u_t"'] & & & \\
& & & E_P &
\end{tikzcd}$$

Por la definición de $\leq_{\mathbb{P}}$, para cada s, l existe un $u_s^l : G_s^l \to S_{AB}$ tal que $s_{AB}u_s^l = a_s n_s^l$. Dado cualquier $\Delta_s^{lm} : G_s^l \to G_s^m$, la ecuación

$$s_{AB}u_s^m\Delta_s^{lm} = a_s n_s^m \Delta_s^{lm} = a_s n_s^l = s_{AB}u_s^l$$

junto con el hecho que s_{AB} es un monomorfismo implica que $u_s^m\Delta_s^{lm} = u_s^l$. Esto nos permite definir dos coconos: en primer lugar, $(u_s^l : G_s^l \to S_{AB})_l$ a partir del cual podemos construir morfismos $k_s : N_s \to S_{AB}$ tales que $k_s n_s^l = u_s^l$; como

$$s_{AB}k_s n_s^l = s_{AB}u_s^l = a_s n_s^l$$

concluimos que $s_{AB}k_s = a_s$.

En segundo lugar, $(\delta_{AB}u_s^l : G_s^l \to B)_l$ lo que nos da un morfismo $u_s : N_s \to B$ tal que $u_s n_s^l = \delta_{AB}u_s^l$. Como

$$u_s n_s^l = \delta_{AB}u_s^l = \delta_{AB}k_s n_s^l$$

tenemos que $u_s = \delta_{AB}k_s$.

Sea $\Delta_{st} : N_s \to N_t$. Observando que

$$s_{AB}k_t\Delta_{st} = a_t\Delta_{st} = a_s = s_{AB}k_s$$

vemos que $k_t\Delta_{st} = k_s$. Así,

$$u_t\Delta_{st} = \delta_{AB}k_t\Delta_{st} = \delta_{AB}k_s = u_s.$$

Entonces, $(u_s : N_s \to B)$ constituye un cocono y existe $u : A \to B$ tal que $ua_s = u_s$.

Resta mostrar que el morfismo u es tal que $s_B u = s_A$. Para esto, gracias a la propiedad universal del colímite, basta mostrar que tanto $s_B u$ como s_A hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
N_s \arrow[dr, "a_s"] \arrow[drr, bend left, "s_A a_s"] & & \\
& A \arrow[r, dotted, shift left, "s_A"] \arrow[r, dotted, shift right, "s_B u"'] & E_P
\end{tikzcd}$$

Que s_A lo hace conmutar es inmediato. $s_B u$ también porque

$$\begin{aligned}
s_B u a_s &= s_B \delta_{AB} k_s \\
&= s_A s_{AB} k_s \quad \Big(\text{lema } 2.3.16\Big) \\
&= s_A a_s.
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.3.18. La relación $\leq_{\mathbb{P}}$ es reflexiva y transitiva.

Observemos que no podemos concluir directamente que $\leq_{\mathbb{P}}$ sea antisimétrica. En efecto, si $\mathbb{G}(A) \leq_{\mathbb{P}} \mathbb{G}(B)$ y $\mathbb{G}(B) \leq_{\mathbb{P}} \mathbb{G}(A)$ entonces $A \leq_{E_P} B$ y $B \leq_{E_P} A$, y así $A = B$ como subobjetos de E_P, lo cual significa tan sólo que son isomorfos como objetos de $\mathcal{C}$, y que $\mathbb{G}(A)$ y $\mathbb{G}(B)$ son sólo isomorfos en la categoría de conjuntos (de hecho, $\mathbb{G}(A)$ y $\mathbb{G}(B)$ son conjuntos de funciones con codominio distinto y de entrada no pueden ser iguales en el sentido conjuntista usual). Sin embargo, podemos partir $\mathbb{P}$ por la relación de equivalencia generada por $\leq_{\mathbb{P}}$ de tal forma que esta relación induce un orden sobre las clases. Por un abuso de notación seguiremos denotando con $\mathbb{P}$ el conjunto de estas nuevas clases y por $\leq_{\mathbb{P}}$ la relación inducida. A partir de esta observación podemos concluir que

Proposición 2.3.19. Los órdenes $Sub(E_P)$ y $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ son isomorfos.

En particular, $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ es un álgebra de bi-Heyting. Queremos dar una caracterización de algunas de las operaciones de $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ en términos de generadores.

Definición 2.3.20. Sean $A, B \in Sub(E_P)$. Definimos

- $\mathbb{G}(A) - \mathbb{G}(B)$ como el conjunto de $g \in \mathbb{G}(A)$ tales que no existen $t : G \to$

S_{AB}, $t' : G \to S_{BA}$ que hagan conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "t'"] \arrow[ddl, bend right=60, "g"'] & \\
S_{AB} \arrow[d, hook, "s_{AB}"'] \arrow[drr, "\delta_{AB}"] & & S_{BA} \arrow[d, hook, "s_{BA}"] \arrow[dll, "\delta_{BA}"'] \\
S_A & & S_B
\end{tikzcd}$$

- $\mathbb{G}(A) \triangle \mathbb{G}(B)$ como la unión $\mathbb{G}(A) - \mathbb{G}(B)$ y $\mathbb{G}(B) - \mathbb{G}(A)$;
- $\partial \mathbb{G}(A)$ como el conjunto de parejas $(g : G \to A, g' : G \to \sim A)$ tales que $s_A g = s_{\sim A} g'$.

Observemos que ninguno de los conjuntos anteriores está en $\mathbb{P}$. Sin embargo ellos caracterizan las operaciones homónimas de $\mathbb{P}$. Los siguientes lemas nos ayudarán a demostrar este hecho.

Lema 2.3.21. Sean $A, B, C \in Sub(E_P)$, tales que $B \leq_{E_P} C$ vía un morfismo $k_{BC} : B \hookrightarrow C$. Entonces

1. $S_{A,B} \leq_{E_P} S_{A,C}$ por un monomorfismo $u_{BC} : S_{AB} \hookrightarrow S_{AC}$ y el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
S_{AB} \arrow[d, hook, dotted, "u_{BC}"] \arrow[dr, "\delta_{AB}"] \arrow[dd, bend right=50, "s_{AC}"'] & \\
S_{AC} \arrow[d, hook, "s_{AC}"] \arrow[dr, "\delta_{AC}"'] & B \arrow[d, hook, "k_{BC}"] \\
A & C
\end{tikzcd}$$

2. $S_{BA} \leq_{EP} S_{CA}$ por algún morfismo $v_{BC} : S_{BA} \hookrightarrow S_{CA}$ y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, hook, "k_{BC}"] & S_{BA} \arrow[l, hook', "s_{BA}"'] \arrow[d, hook, dotted, "v_{BC}"] \arrow[dr, "\delta_{BA}"] & \\
C & S_{CA} \arrow[l, hook', "s_{CA}"] \arrow[r, "\delta_{CA}"'] & A
\end{tikzcd}$$

3. Dado el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "t'"] & \\
S_{AB} \arrow[d, hook, "s_{AB}"'] \arrow[drr, "\delta_{AB}" near start] & & S_{BA} \arrow[d, hook, "s_{BA}"] \arrow[dll, "\delta_{BA}" near start] \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

entonces el diagrama siguiente también es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "u_{AB}t"'] \arrow[dr, "v_{BC}t'"] & \\
S_{AC} \arrow[d, hook, "s_{AC}"'] \arrow[drr, "\delta_{AC}" near start] & & S_{CA} \arrow[d, hook, "s_{CA}"] \arrow[dll, "\delta_{CA}" near start] \\
A & & C
\end{tikzcd}$$

Demostración. 1. Empleando la notación de la definición 2.3.14, podemos construir para cada i, j los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}(B) \arrow[r, hook, "k'_{BC}"'] \arrow[rr, hook, bend left, "s_{\delta_{ij}^{-1}(B)}"] \arrow[d, "\delta_{ij}^{B}"'] & \delta_{ij}(C) \arrow[r, hook, "s_{\delta_{ij}^{-1}(C)}"'] \arrow[d, "\delta_{ij}^{C}"'] & S_{ij} \arrow[d, "ec_j\delta_{ij}"] \\
B \arrow[r, hook, "k_{BC}"] \arrow[rr, hook, bend right, "s_B"'] & C \arrow[r, hook, "s_C"] & E_P
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(B) \cap A \arrow[r, hook, "x_{ij}"'] \arrow[rr, hook, bend left, "s_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}"] \arrow[d, hook, "s'_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}"'] & \delta_{ij}^{-1}(C) \cap A \arrow[r, hook, "s_{\delta_{ij}^{-1}(C)\cap A}"'] \arrow[d, hook, "s'_{\delta_{ij}^{-1}(C)\cap A}"'] & A \arrow[d, hook, "s_A"] \\
\delta_{ij}^{-1}(B) \arrow[r, hook, "k'_{BC}"] & \delta_{ij}^{-1}(C) \arrow[r, hook, "ec_i s_{ij} s_{\delta_{ij}^{-1}(C)}"] & E_P
\end{tikzcd}$$

Así, podemos definir u_{BC} como el único morfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A \arrow[rr, hook, "x_{ij}"] \arrow[dr, hook, "e_{AB}inc_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}"'] & & \delta_{ij}^{-1}(C)\cap A \arrow[dr, hook, "e_{AC}inc_{\delta_{ij}^{-1}(C)\cap A}"] & \\
& S_{AB} \arrow[rr, hook, dotted, "u_{BC}"'] & & S_{AC}
\end{tikzcd}$$

Recordando los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A \arrow[dr, hook, "e_{AB}inc_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}"'] \arrow[drr, bend left, "\delta_{ij}^{B}s'_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}"] & & \\
& S_{AB} \arrow[r, "\delta_{AB}"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(C)\cap A \arrow[dr, hook, "e_{AC}inc_{\delta_{ij}^{-1}(C)\cap A}"'] \arrow[drr, bend left, "\delta_{ij}^{C}s'_{\delta_{ij}^{-1}(C)\cap A}"] & & \\
& S_{AC} \arrow[r, "\delta_{AC}"'] & C
\end{tikzcd}$$

vemos que tanto $k_{BC}\delta_{AB}$ como $\delta_{AC}u_{BC}$ hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A \arrow[dr, "e_{AB}inc_{\delta_{ij}^{-1}(B)\cap A}"'] \arrow[drr, bend left, "\delta_{ij}^{C}s'_{\delta_{ij}^{-1}(C)\cap A}x_{ij}"] & & \\
& S_{AB} \arrow[r, dotted, shift left, "k_{BC}\delta_{AB}"] \arrow[r, dotted, shift right, "\delta_{AC}u_{BC}"'] & C
\end{tikzcd}$$

y son por tanto iguales.

2. A partir de la definición 2.3.14, para cada i, j construimos los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(A) \arrow[r, "\delta_{ij}^{A}"] \arrow[d, hook, "s_{\delta_{ij}^{-1}(A)}"'] & A \arrow[d, hook, "s_A"] \\
S_{ij} \arrow[r, "ec_j\delta_{ij}"'] & E_P
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(A)\cap B \arrow[r, hook, "y_{ij}"'] \arrow[rr, hook, bend left, "s'_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap B}"] \arrow[d, hook, "s_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap B}"'] & \delta_{ij}^{-1}(A)\cap C \arrow[r, hook, "s'_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap C}"'] \arrow[d, hook, "s_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap C}"'] & \delta_{ij}^{-1}(A) \arrow[d, hook, "ec_i s_{ij} s_{\delta_{ij}^{-1}(A)}"] \\
B \arrow[r, hook, "k_{BC}"] \arrow[rr, hook, bend right, "s_B"'] & C \arrow[r, hook, "s_C"] & E_P
\end{tikzcd}$$

Definimos v_{BC} como el único morfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(A) \cap B \arrow[rr, hook, "y_{ij}"] \arrow[dr, hook, "e_{BA}inc_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap B}"'] & & \delta_{ij}^{-1}(A) \cap B \arrow[dr, hook, "e_{CA}inc_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap C}"] & \\
& S_{BA} \arrow[rr, hook, dotted, "v_{BC}"'] & & S_{CA}
\end{tikzcd}$$

De los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(A) \cap B \arrow[dr, hook, "e_{BA}inc_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap B}"'] \arrow[drr, bend left, "\delta_{ij}^{A}s'_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap B}"] & & \\
& S_{BA} \arrow[r, "\delta_{BA}"'] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(A) \cap C \arrow[dr, hook, "e_{CA}inc_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap C}"'] \arrow[drr, bend left, "\delta_{ij}^{A}s'_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap C}"] & & \\
& S_{CA} \arrow[r, "\delta_{CA}"'] & A
\end{tikzcd}$$

tenemos que tanto δ_{BA} como $\delta_{CA}v_{BC}$ hacen conmutar

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(A) \cap B \arrow[dr, "e_{BA}inc_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap B}"'] \arrow[drr, bend left, "\delta_{ij}^{A}s'_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap B}"] & & \\
& S_{BA} \arrow[r, dotted, shift left, "\delta_{BA}"] \arrow[r, dotted, shift right, "\delta_{CA}v_{BC}"'] & A
\end{tikzcd}$$

y por tanto son iguales. De manera análoga, a partir de los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(A) \cap B \arrow[dr, hook, "e_{BA}inc_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap B}"'] \arrow[drr, hook, bend left, "s_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap B}"] & & \\
& S_{BA} \arrow[r, hook, "s_{BA}"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(A) \cap C \arrow[dr, hook, "e_{CA}inc_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap C}"'] \arrow[drr, hook, bend left, "s_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap C}"] & & \\
& S_{CA} \arrow[r, hook, "s_{CA}"'] & C
\end{tikzcd}$$

concluimos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\delta_{ij}^{-1}(A) \cap B \arrow[dr, "e_{BA} inc_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap B}"'] \arrow[drr, bend left, "k_{BC} s_{\delta_{ij}^{-1}(A)\cap B}"] & & \\
& S_{BA} \arrow[r, dotted, shift left, "k_{BC} s_B"] \arrow[r, dotted, shift right, "s_{CA} v_{BC}"'] & C
\end{tikzcd}$$

y por tanto $k_{BC} s_B = s_{CA} v_{BC}$.

3. Por los dos incisos anteriores.

$\square$

Lema 2.3.22. Sean $A, B \in Sub(E_P)$. Entonces $\mathbb{G}(A \cup B)$ es isomorfo a $\mathbb{G}(A) \cup \mathbb{G}(B)/ \approx$, donde $\approx$ es la siguiente relación de equivalencia: si $o, p \in \{A, B\}$ entonces dados $g \in \mathbb{G}(o)$, $g' \in \mathbb{G}(p)$, $g \approx g'$ ssi $s_o g = s_p g'$, donde $s_{\_}$ es la inclusión en E_P.

Demostración. Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, hook, "inc_A"'] & & \\
& A \coprod B \arrow[r, two heads, "e"'] & A \cup B \\
B \arrow[ur, hook, "inc_B"] & &
\end{tikzcd}$$

Así, un elemento en $\mathbb{G}(A)$ o $\mathbb{G}(B)$ da origen a uno de $\mathbb{G}(A \cup B)$; y viceversa, un elemento de $\mathbb{G}(A \cup B)$, gracias a que los generadores son proyectivos y se retrotraen a través de coproductos, se puede retraer hasta $\mathbb{G}(A)$ o $\mathbb{G}(B)$. El diagrama

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "g_a"] \arrow[ddd, bend right, "g_b"'] \arrow[ddrr, bend left, "g_u"] & & \\
& A \arrow[dr, hook, "einc_A"] \arrow[ddd, hook, "s_A"] & \\
& & A \cup B \arrow[ddl, hook, "s_{A\cup B}"] \\
B \arrow[urr, hook, "einc_B"] \arrow[dr, hook, "s_B"] & & \\
& E_P &
\end{tikzcd}$$

muestra además que

- si $g_a \in \mathbb{G}(A)$ y $g_b \in \mathbb{G}(B)$ son tales que $s_A g_a = s_B g_b$ entonces $g_a einc_A = g_b einc_B$;
- si $g_a einc_A = g_b einc_B = g_u$ entonces $s_A g_a = s_B g_b$. $\square$

Proposición 2.3.23. Sean $A, B, C \in Sub(E_P)$. Entonces

$$\mathbb{G}(A) - \mathbb{G}(B) \leq \mathbb{G}(C) \Longleftrightarrow \mathbb{G}(A) \leq \mathbb{G}(B \cup C).$$

Demostración. $\Rightarrow$ Sea $g \in \mathbb{G}(A)$. Tenemos dos posibilidades: si $g \in \mathbb{G}(A) - \mathbb{G}(B)$, entonces, como $\mathbb{G}(A) - \mathbb{G}(B) \leq \mathbb{G}(C)$, podemos formar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "t'"] \arrow[ddl, bend right=60, "g"'] & \\
S_{AC} \arrow[d, hook, "s_{AC}"'] \arrow[drr, "\delta_{AC}"] & & S_{CA} \arrow[d, hook, "s_{CA}"] \arrow[dll, "\delta_{CA}"] \\
A & & C
\end{tikzcd}$$

de donde, gracias al lema 2.3.21, podemos construir

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "t'"] \arrow[ddl, bend right=60, "g"'] & \\
S_{A,B\cup C} \arrow[d, hook, "s_{A,B\cup C}"'] \arrow[drr, "\delta_{A,B\cup C}"] & & S_{B\cup C,A} \arrow[d, hook, "s_{B\cup C,A}"] \arrow[dll, "\delta_{B\cup C,A}"] \\
A & & B \cup C
\end{tikzcd}$$

Si $g \notin \mathbb{G}(A) - \mathbb{G}(B)$, entonces por definición podemos construir el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "t'"] \arrow[ddl, bend right=60, "g"'] & \\
S_{AB} \arrow[d, hook, "s_{AB}"'] \arrow[drr, "\delta_{AB}"] & & S_{BA} \arrow[d, hook, "s_{BA}"] \arrow[dll, "\delta_{BA}"] \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

y de nuevo gracias al lema, tenemos

$$
\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "t'"] \arrow[ddl, bend right=60, "g"'] & \\
S_{A,B\cup C} \arrow[d, hook, "s_{A,B\cup C}"'] \arrow[ddrr, phantom] \arrow[drr, "\delta_{A,B\cup C}"] & & S_{B\cup C,A} \arrow[d, hook, "s_{B\cup C,A}"] \arrow[dll, "\delta_{B\cup C,A}"'] \\
A & & B\cup C
\end{tikzcd}
$$

$\Leftarrow$ Sea $g \in \mathbb{G}(A) - \mathbb{G}(B)$. Como en particular $g \in \mathbb{G}(A)$, por hipótesis podemos construir un diagrama de la forma

$$
\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "t'"] \arrow[ddl, bend right=60, "g"'] & \\
S_{A,B\cup C} \arrow[d, hook, "s_{A,B\cup C}"'] \arrow[drr, "\delta_{A,B\cup C}"] & & S_{B\cup C,A} \arrow[d, hook, "s_{B\cup C,A}"] \arrow[dll, "\delta_{B\cup C,A}"'] \\
A & & B\cup C
\end{tikzcd}
$$

Dado que

$$
\begin{aligned}
S_{B\cup C,A} &= \bigcup_{i,j\in Ob(\mathcal{I})} \delta_{ij}^{-1}(A) \cap \big(B \cup C\big) \\
&= \bigcup_{i,j\in Ob(\mathcal{I})} \big(\delta_{ij}^{-1}(A) \cap B\big) \cup \big(\delta_{ij}^{-1}(A) \cap C\big) \\
&= \Big(\bigcup_{i,j\in Ob(\mathcal{I})} \delta^{-1}(A) \cap B\Big) \cup \Big(\bigcup_{i,j\in Ob(\mathcal{I})} \delta_{ij}^{-1}(A) \cup C\Big) \\
&= S_{BA} \cup S_{CA},
\end{aligned}
$$

el hecho que los generadores sean proyectivos y se retrotraigan a través de colímites nos permite retraer $t' : G \to S_{B\cup C,A}$ hasta S_{BA} o hasta S_{CA}. Pero dado que el primer caso contradiría que $g \in \mathbb{G}(A) - \mathbb{G}(B)$, siempre estaremos en el segundo, y así $\mathbb{G}(A) - \mathbb{G}(B) \leq \mathbb{G}(C)$. $\square$

Proposición 2.3.24. Dados $A, B \in Sub(E_P)$, el conjunto $\mathbb{G}(A)\triangle\mathbb{G}(B)$ caracteriza a $\mathbb{G}(A\triangle B)$.

Demostración. Consecuencia de 2.3.22 y 2.3.23. Debemos notar tan sólo que la relación $\approx$ de 2.3.22 se reduce en este caso a la igualdad. Esbocemos el argumento: si existieran $g_a : \mathbb{G}(A) - \mathbb{G}(B),\ g_b : \mathbb{G}(B) - \mathbb{G}(A)$ tales que $s_A g_a = s_B g_b$, retrayendo este último hasta un S_i, encontramos un morfismo g tal que $ec_i g = s_A g_a$. A partir de la definición 2.3.14, podemos definir los diagramas pullbacks

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, dotted, "w"] \arrow[drr, bend left, "g_b"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& \delta_{ii}^{-1}(B) \arrow[r, hook, "\delta_{ii}^{B}"'] \arrow[d, hook, "s_{\delta_{ii}^{-1}(B)}"] & B \arrow[d, hook, "s_B"'] \\
& S_i \arrow[r, hook, "ec_i"'] & E_P
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, dotted, "g_a^*"] \arrow[drr, bend left, "w"] \arrow[ddr, bend right, "g_a"'] & & \\
& \delta_{ii}^{-1}(B)\cap A \arrow[r, hook, "s'_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}"'] \arrow[d, hook, "s_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A}"] & \delta_{ii}^{-1}(B) \arrow[d, hook, "ec_i s_{\delta_{ii}^{-1}(B)}"] \\
& A \arrow[r, hook, "s_A"'] & E_P
\end{tikzcd}
$$

De forma simétrica podemos definir $g_b^* : G \to \delta_{ii}^{A} \cap B$, y tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, "e_{AB} inc_{\delta_{ii}^{-1}(B)\cap A} g_a^*"'] \arrow[dr, "e_{AB} inc_{\delta_{ii}^{-1}(A)\cap B} g_b^*"] \arrow[ddl, bend right=80, "g_a"'] \arrow[ddr, bend left=80, "g_b"] & \\
S_{AB} \arrow[d, hook, "s_{AB}"'] \arrow[drr, "\delta_{AB}"'] & & S_{BA} \arrow[d, hook, "s_{BA}"] \arrow[dll, "\delta_{BA}"] \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

lo cual contradice que $g_a \in \mathbb{G}(A) - \mathbb{G}(B),\ g_b \in \mathbb{G}(B) - \mathbb{G}(A)$. $\square$

Proposición 2.3.25. Los conjuntos $\partial\mathbb{G}(A)$ y $\mathbb{G}(\partial A)$ son isomorfos.

Demostración. El diagrama pullback muestra que darse un $(g, g') \in \partial\mathbb{G}(A)$ es equivalente a darse un $g'' \in \mathbb{G}(\partial A)$

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[drr, bend left, "g'"] \arrow[dr, dotted, "g''"'] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& \partial A \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \sim A \arrow[d, hook, "s_{\sim A}"] \\
& A \arrow[r, hook, "s_A"'] & E_P
\end{tikzcd}
$$

□

2.4 Algoritmo cenopitagórico de interpretación

Sea S un signo que queremos interpretar. Para optimizar su comprensión proponemos los siguientes pasos:

- ubicarnos en nuestra interpretación inmediata del signo (1);
- a partir de esta encontrar polaridades (2), interpretaciones alejadas de la nuestra;
- vía mediaciones (3) captar todas las interpretaciones ubicadas entre estas polaridades.

Después de ejecutar estos pasos obtenemos una mejor interpretación del signo, sin embargo no tenemos la interpretación total. Podemos repetir el proceso anterior las veces que necesitemos para mejorar nuestra interpretación del signo. Trataremos a continuación de hacer una prueba de este algoritmo en términos de espacios pragmáticos.

El primer paso del algoritmo consiste en determinar nuestra interpretación actual del signo, ubicarnos en una región del espacio pragmático. Esta región posee una frontera, la cual gracias a la definición 2.3.20 y la proposición 2.3.25 está caracterizada por aquellas ideas sobre el signo que se encuentran a la vez en nuestra concepción y en contacto con el exterior. A partir de la frontera es más sencillo localizar las polaridades.

> Una de las conquistas mayores de la arquitectónica peirceana consiste en mostrar cómo, cada vez que deseemos *ampliar* nuestro conocimiento, debemos situarnos en un borde y luego barrer ese borde pendularmente e, *inversamente*, cómo, cada vez que nos enfrentemos a una oscilación, debemos definir la frontera barrida por el péndulo y *extender* así desde esa nueva frontera nuestra comprensión de la oscilación. [74, p. 32]

Mientras mayor sea la distancia desde nuestra concepción inicial, mayor será la región que podemos cubrir a partir de ellas.

Proposición 2.4.1. Si $x_1 \triangle x_2 \leq x_1 \triangle x_3$ entonces $x_1 \vee x_2 \leq x_1 \vee x_2$.

Demostración.

$$\begin{aligned} x_1 \vee x_2 =& x_1 \vee (x_2 - x_1) \\ =& x_1 \vee (x_1 - x_2) \vee (x_2 - x_1) \\ \leq& x_1 \vee (x_1 - x_3) \vee (x_3 - x_1) \\ =& x_1 \vee (x_3 - x_1) \\ =& x_1 \vee x_3 \end{aligned}$$

□

Proposición 2.4.2. 1. Sea $(l_i : L \to A_i)$ un cono parcial sobre una familia $s_{A_i} : A_i \hookrightarrow E_P$ de subobjetos del espacio pragmático. Entonces para todo $i, j,\ s_{A_i} l_i = s_{A_j} l_j$.

2. Si L es un límite entonces el único morfismo $l_e : L \to E_P$ es un monomorfismo.

3. Sean $\{A_i\}_I,\ \{B_i\}_I$ dos familias de subobjetos de E_P tales que para cada $i \in I,\ A_i \leq B_i$. Entonces $L_A \leq L_B$ en $Sub(E_P)$.

Demostración. 1. Sea $g : G \to L$ arbitraria. Dado que L es en particular un cono parcial, tenemos por la definición que existen $l_{ij} : S_{A_i A_j} \hookrightarrow A_i,\ l_{ji} : S_{A_j A_i} \hookrightarrow A_j$ tales que

$$\delta_{A_i A_j} l_{ij} g = l_j g = s_{A_j A_i} l_{ji} g,$$
$$\delta_{A_j A_i} l_{ji} g = l_i g = s_{A_i A_j} l_{ij} g.$$

Entonces, gracias al lema 2.3.15, existe un $q \in \mathfrak{G}$ tal que

$$ec_{pr_2(q)} s_{pr_2(q) pr_3(q)} pr_4(q) = s_{A_i} s_{A_i A_j} l_{ij} g;$$
$$ec_{pr_3(q)} s_{pr_3(q) pr_2(q)} pr_5(q) = s_{A_j} s_{A_j A_i} l_{ji} g.$$

Por la definición de $r_1,\ r_2$ tenemos que

$$er_1 inj_q = ec_{pr_2(q)} s_{pr_2(q) pr_3(q)} pr_4(q),$$
$$er_2 inj_q = ec_{pr_3(q)} s_{pr_3(q) pr_2(q)} pr_5(q).$$

Pero e es el coigualador de $r_1,\ r_2$, así que $er_1 inj_q = er_2 inj_q$. Toda la cadena anterior de igualdades muestra que $s_{A_i} l_i g = s_{A_j} l_j g$. Como el g era arbitrario, la definición de generador implica que $s_{A_i} l_i = s_{A_j} l_j$.

$$
\begin{tikzcd}
& & G \arrow[d, "g"'] & & \\
& & L \arrow[dl, "l_{ij}"'] \arrow[dr, "l_{ji}"] \arrow[ddl, bend right=60, "l_i"'] \arrow[ddr, bend left=60, "l_j"] & & \\
& S_{A_iA_j} \arrow[d, hook, "s_{A_iA_j}"'] \arrow[drr, "\delta_{A_iA_j}"] & & S_{A_jA_i} \arrow[d, hook, "s_{A_jA_i}"] \arrow[dll, "\delta_{A_jA_i}"] & \\
& A_i \arrow[dr, hook, "s_{A_i}"'] & & A_j \arrow[dl, hook', "s_{A_j}"] & \\
& & E_P & &
\end{tikzcd}
$$

2. Sean $x, y : Z \rightrightarrows L$, tales que $l_e x = l_e y$. Como $l_e = s_{A_i} l_i$ y cada s_{A_i} es un monomorfismo, entonces los conos parciales $\{l_i x\}$, $\{l_i y\}$ son iguales. La definición de límite parcial implica por tanto que $x = y$.

3. Debemos construir un cono parcial sobre $\{B_i\}_I$ a partir $\{l_i^A : L_A \to A_i\}$. Si denotamos $k_i : A_i \hookrightarrow B_i$, entonces $\{k_i l_i^A\}$ es un buen candidato. Debemos mostrar que la familia anterior satisface las dos propiedades de la definición 2.3.2. Gracias al lema 2.3.21 podemos construir los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
A_i \arrow[d, hook, "k_i"] & S_{A_iB_j} \arrow[l, hook', "s_{A_iB_j}"'] \arrow[d, dotted, hook, "v_{ij}"] \arrow[dr, "\delta_{A_iB_j}"] & \\
B_i & S_{B_iB_j} \arrow[l, hook', "s_{B_iB_j}"] \arrow[r, "\delta_{B_iB_j}"'] & B_j
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
S_{A_iA_j} \arrow[d, dotted, hook, "u_{ij}"] \arrow[dr, "\delta_{A_iA_j}"] \arrow[dd, bend right=50, hook, "s_{A_iA_j}"'] & \\
S_{A_iB_j} \arrow[d, hook, "s_{A_iB_j}"] \arrow[dr, "\delta_{A_iB_j}"'] & A_j \arrow[d, hook, "k_j"] \\
A_i & B_j
\end{tikzcd}
$$

En primer lugar debemos ver que para cada j, cada $k_i l_i^A$ se deja factorizar a través de $s_{B_iB_j}$:

$$s_{B_iB_j} v_{ij} u_{ij} l_{ij}^A = k_i s_{A_iB_j} u_{ij} l_{ij}^A = k_i s_{A_iA_j} l_{ij}^A = k_i l_i^A$$

En segundo lugar, debemos mostrar que la anterior factorización se comporta bien con los δ:

$$\delta_{B_iB_j} v_{ij} u_{ij} l_{ij}^A = \delta_{A_iB_j} u_{ij} l_{ij}^A = k_j \delta_{A_iA_j} l_{ij}^A = k_j l_j^A.$$

Así, existe un morfismo $l : L_A \to L_B$. Este es un monomorfismo pues $l_e^A = l_e^B l$ y l_e^A es un monomorfismo.

$\square$

Así la nueva interpretación obtenida al contrastar las antiguas es de nuevo una región (subobjeto) del espacio, por lo que el algoritmo puede volver a empezar. Además, si queremos que nuestra comprensión del signo sea lo mejor posible, lo cual se traduce en que en el espacio pragmático se cubra una región más amplia (el inciso 3 de la 2.4.2), debemos en efecto contrastar interpretaciones alejadas de la nuestra (2.4.1).

2.5 MP y arquitectura peirceana

Terminamos este capítulo con un breve resumen de lo que se ha logrado matematizar del pensamiento peirceano. Nuestro primer objetivo era presentar una versión modalizada de las ideas relativas a la máxima pragmática. Como se ha notado en [72] esta modalización debe ser doble: una para *los modos generales de conducta racional* y otra para las *circunstancias*. Ambas fueron formalizadas con el operador $\Diamond$, con el teorema 2.2.4 como una prueba de ella. Pero más importante es que en las álgebras de bi-Heyting no sólo tenemos el operador absoluto $\Diamond$, sino toda una escala infinita $\{\Diamond_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de operadores modales parciales que tienden a él, por lo que podemos hablar de una aproximación paulatina a la comprensión absoluta ideal del signo (proposición 2.2.3).

El pensamiento de Peirce no está formado por parcelas aisladas de ideas, sino que constituye una verdadera arquitectura donde cada parte se sostiene mutuamente. Por eso no es de extrañar que los estudios sobre la máxima conduzcan irremediablemente al continuo. El argumento ya está presente en Peirce. La clase de todos los interpretantes de un signo es un *general* dado que le otorga a cada intérprete el derecho a completar la determinación por sí mismo (CP 5.505) y la continuidad no es más que una perfecta generalidad organizada por una ley de relación (CP 6.172). En la sección 2.3 utilizamos como dicha ley a $\triangle$. En este capítulo no probamos que dicha construcción tiene todas las propiedades que debe tener el continuo peirceano (genericidad, supermultitud, reflexividad, inextensibilidad), sin embargo en el capítulo 4 (p. 173) damos un argumento intuitivo de que este debe ser el caso. Un resultado fundamental es que los interpretantes son subobjetos-regiones del espacio pragmático (proposición 2.3.7), por lo que todo el aparato lógico-algebraico de las álgebras de bi-Heyting puede aplicarse a dichos interpretantes. La importancia de una adecuada lógica que nos permita contrastar diferentes interpretaciones ya fue resaltada en el capítulo 1 (p. 33), lo cual puede hacerse ahora gracias a la presencia de la sustracción

"$-$". Además, esta estructura nos permite definir una frontera "∂" cuya importancia filosófica fue resaltada en [74].

Uno de nuestros principales objetivos era desarrollar un procedimiento para optimizar la comprensión de un signo. Intentamos hacer esto con el algoritmo de la sección 2.4. Como su nombre lo indica, este fue inspirado en las categorías cenopitagóricas. Recordemos que Peirce concebía sus categorías como tonos o tinturas sobre un continuo (CP 1.353). Esto es lo quisimos replicar en este caso, el cual puede ser pensado como un "juego de tinturas": el primer paso, ubicarnos en nuestra interpretación actual del signo, como tinturar la región del espacio pragmático que representa dicha interpretación; a partir de allí tinturamos las polaridades que podamos encontrar; y finalmente combinamos estas manchas en una interpretación. Detrás de esta fusión hay una abducción, un tipo de adivinanza para tratar de reconciliar interpretaciones contradictorias. Esta es una operación extremadamente compleja, la cual tratamos de formalizar simplificadamente con los límites parciales.

Un componente fundamental de la arquitectura peirceana del cual no hemos hecho ninguna mención son los gráficos existenciales. Esperamos dar algunos lineamientos para resolver esta falencia en el siguiente capítulo.

3. MP en teoría homotópica de tipos

En este capítulo reescribiremos nuestras ideas sobre la máxima pragmática, dadas ya en lenguaje categórico, en términos de la teoría homotópica de tipos. Las ventajas de esta transcripción son varias:

- En el capítulo anterior, enfatizamos la importancia del dinamismo en la máxima pragmática, el cual exige el manejo de una gran cantidad de datos. Por tanto resulta razonable pensar en algún tipo de programa que nos ayude con esta tarea. Entre las ventajas de la teoría homotópica de tipos está su fácil formalización en asistentes de prueba como Coq o Agda. Ese es el tipo de programa en que esperamos cristalice este modelo: un software que interactúe con el usuario para contrastar interpretaciones y ayudarlo a sacar conclusiones de dichas contrastaciones. Aunque esto escapa por mucho a los alcances de esta tesis, nos gustaría hacer algunos lineamientos sobre el camino a seguir.

- Como tratamos de mostrar con los espacios pragmáticos, el estudio de la máxima está íntimamente relacionado con el estudio del continuo: a partir de las interpretaciones definimos un espacio asociado a ellas. Sin embargo esta aproximación no es completamente satisfactoria por una razón: sigue el camino de lo discreto a lo continuo, cuando probablemente lo más natural sea que el continuo sea primigenio y de él surja lo discreto. En la teoría homotópica de tipos los objetos desde el momento mismo de ser definidos vienen provistos con una estructura continua implícita, por lo que quizás constituyan un ambiente más natural para trabajar espacios pragmáticos.

- La teoría homotópica de tipos está basada en interpretar los términos del tipo identidad como caminos entre puntos de un espacio topológico. Por otro lado intuimos que el estudio de los espacios pragmáticos debe llevar a la definición de unos gráficos como los existenciales peirceanos donde, entre otras cosas, la línea de existencia beta se transforma en un tipo de línea evolutiva que muestra cómo las interpretaciones van variando en el espacio. Así, esta idea tiene posibilidades de ser formalizada en esta teoría.

Dado que la teoría homotópica de tipos es una rama relativamente nueva de las matemáticas, nos gustaría iniciar este capítulo presentando algunas de sus ideas fundamentales; todas ellas pueden ser consultadas en [67].

3.1 Teoría homotópica de tipos

La teoría homotópica de tipos es una interpretación homotópica de la teoría intuicionista de tipos de Per Martin-Löf [48], [47]. Al ser una teoría de tipos tiene como conceptos básicos: los tipos, a los cuales representaremos con letras mayúsculas $A,\ B,\ldots$; términos, a los cuales representaremos con letras minúsculas $a,\ b,\ldots$; y una relación $a : A$ la cual leeremos como "a es un término de tipo A". Esta relación, al igual que la pertenencia en teoría de conjuntos, permanece indefinida, pero su interpretación en términos lógicos y homotópicos es la clave de la teoría, como iremos revelando en el transcurso de esta discusión.

La estrecha relación entre la lógica intuicionista y la teoría de tipos como modelos de la computación se conoce prácticamente desde el origen de estas disciplinas (fue observada por Curry en 1934, aunque podría decirse que ya aparece, al menos implícitamente, en los trabajos de Brouwer y Kolmogorov) y recibe el nombre técnico de correspondencia de Curry-Howard. Básicamente ella dice que los conectivos y cuantificadores en lógica intuicionista se comportan exactamente igual que los constructores en teoría de tipos, según la relación expresada en la tabla 3.1.

Tabla 3.1: Correspondencia de Curry-Howard.

Lógica	**Constructores de tipos**
Verdad	$\mathbf{1}$
Falsedad	$\mathbf{0}$
$A \wedge B$	$A \times B$
$A \vee B$	$A + B$
$A \Rightarrow B$	$A \to B$
$\neg A$	$A \to 0$
$\forall(x : A)P(x)$	$\prod_{x:A} P(x)$
$\exists(x : A)P(x)$	$\sum_{x:A} P(x)$

No podemos definir aquí con todo detalles los constructores anteriores, sin embargo es conveniente dar al menos una idea intuitiva de ellos para lo que viene.

- $\mathbf{1}$ es el tipo generado por un solo término $*$;
- $\mathbf{0}$ puede ser considerado como el tipo vacío.

Si A, B son tipos arbitrarios (lo cual se expresa generalmente diciendo $A, B \in \mathcal{U}$, donde $\mathcal{U}$ es el universo donde estamos trabajando) entonces

- $A \times B$ es el tipo generado por las parejas (a, b), donde $a : A,\ b : B$;
- $A + B$ es el tipo generado por los objetos de la forma $inl(a)$ para cada $a : A$, o $inr(b)$ para $b : B$;
- $A \to B$ es el tipo de todas las funciones de A en B, el cual es usualmente denotado fuera de la teoría de tipos como B^A.

Un tipo dependiente sobre un tipo A, también llamado una familia de tipos indexada por A, es una función de la forma $P : A \to \mathcal{U}$. Si A es un tipo arbitrario y P es un tipo dependiente sobre él entonces

- $\prod_{x:A} P(x)$ es el tipo generado por las funciones f tales que para cada $a : A,\ f(a) : P(a)$, es decir, aquellas funciones donde el codominio varía de acuerdo al elemento al que la función es aplicada. Este tipo de funciones recibe el nombre de dependientes. Cuando P es una función constante, digamos a un tipo B, entonces $\prod_{x:A} P(x)$ coincide con $A \to B$.
- $\sum_{x:A} P(x)$ es el tipo generado por las parejas de la forma (a, p) donde $a : A$ y $p : P(a)$. Cuando P es un función constante, por ejemplo siempre igual a B, $\sum_{x:A} P(x)$ coincide con $A \times B$.

En las caracterizaciones anteriores, tratamos de enfatizar que los tipos están *generados* por los elementos propuestos. Esto quiere decir, por ejemplo que no todo elemento de $A + B$ tiene que ser de la forma $inr(a)$ o $inl(b)$, sin embargo, a la hora de trabajar con $A + B$ esta asunción sí puede ser hecha. Este es uno de los puntos más sutiles de la teoría y lo discutiremos en detalle más adelante.

Para mostrar que los constructores se comportan como los conectivos intuicionistas resta definir una noción de verdad para los tipos. Diremos que un tipo A es verdadero si existe algún $a : A$. Por esta razón los términos de un tipo A son también llamados pruebas o testigos de A. Veamos algunos pocos ejemplos.

- El modus ponens establece que si $A,\ A \Rightarrow B$ son verdaderos entonces B también es verdadero. En términos de la correspondencia esto significa que dado $a : A,\ f : A \to B$ podemos construir un término de B, el cual es simplemente $f(a)$.
- $\forall x P(x)$, dado un cierto universo de discurso A sobre el que la variable x varía, significa que siempre que reemplazamos x por un objeto a en A, la fórmula $P(a)$ es verdadera. En términos de la teoría de tipos, un término $f : \sum_{x:A} P(x)$ nos da un término $f(a) : P(a)$ para cada $a : A$; y viceversa, dada una familia $\{p_a : P(a)\}_{a:A}$ podemos definir una función en $\prod_{x:A} P(x)$ enviando cada $a : A$ a p_a.

La idea básica de la teoría de Martin-Löf es tomarse la anterior correspondencia en serio hasta el punto que las afirmaciones matemáticas, y aún sus pruebas, son consideradas objetos de la teoría. Así, por ejemplo, a diferencia de la teoría de conjuntos donde los objetos de la teoría (conjuntos) son de naturaleza diferente de las afirmaciones de la teoría (fórmulas), en esta teoría ambos son tipos. Por ejemplo, dados dos tipos A, B la afirmación "A es isomorfo a B" es el tipo

$$\sum_{f:A\to B}\sum_{g:B\to A}\Big(\Big(\prod_{x:A} g(f(x)) = x\Big) \times \Big(\prod_{y:B} f(g(y)) = y\Big)\Big).$$

Abreviaremos el tipo anterior con la notación $Iso(A, B)$. La correspondencia de Curry-Howard nos dice que este tipo puede ser leído como la fórmula que establece la definición usual de isomorfismo. Además, por la definición de los constructores involucrados, un término de $Iso(A, B)$ es una cuádrupla donde la primera componente es una función de tipo $A \to B$, a la cual llamaremos f por simplicidad; la segunda componente es una función de tipo $B \to A$, denominémosla g; la tercera es una función $\alpha : \prod_{x:A} g(f(x)) = x$, que asigna a cada $a : A$ un elemento $\alpha(a) : g(f(a)) = a$, es decir, una prueba o testigo que efectivamente $g(f(a))$ es igual a a; por último, la cuarta componente, es una función β que asigna a cada $b : B$ un término $\beta(b) : f(g(b)) = b$. En resumen, de un término $Iso(A, B)$ se puede extraer una prueba (en el sentido matemático usual) que A es isomorfo B; y viceversa, dar un elemento de $Iso(A, B)$ es construir explícitamente un isomorfismo entre ellos.

Detengámonos en la igualdad. Es importante distinguir entre dos de ellas: una del metalenguaje, que denotaremos como $\equiv$ y otra dentro de la teoría, $=$. La primera de ellas puede ser entendida como una igualdad por definición, que utilizaremos principalmente para abreviar tipos o construir funciones, hecho que será resaltado escribiendo $:\equiv$ cuando la introduzcamos; mientras que la segunda será para igualar términos de un tipo dado o tipos entre sí (los cuales se pueden considerar como términos del universo $\mathcal{U}$). Por ejemplo, no tendría mucho sentido escribir

$$Iso(A, B) = \sum_{f:A\to B}\sum_{g:B\to A}\Big(\Big(\prod_{x:A} g(f(x)) = x\Big) \times \Big(\prod_{y:B} f(g(y)) = y\Big)\Big)$$

dado que $Iso(\_, \_)$ no es en principio un constructor; sólo se convierte en uno cuando lo equiparamos con el lado derecho. Lo correcto sería escribir

$$Iso(A, B) :\equiv \sum_{f:A\to B}\sum_{g:B\to A}\Big(\Big(\prod_{x:A} g(f(x)) = x\Big) \times \Big(\prod_{y:B} f(g(y)) = y\Big)\Big)$$

donde resaltamos que Iso ha sido introducida en la teoría sólo por la equivalencia anterior. En cambio, $=$ debe pensarse como una familia dependiente de constructores: para cada tipo A (y para el universo $\mathcal{U}$[1]) tenemos un constructor

[1] Es usual tratar el universo $\mathcal{U}$ como si fuera un tipo: hablamos de funciones, de parejas dependientes, de tipos identidad donde alguna de sus entradas es $\mathcal{U}$. Por razones de consistencia estos tipos no pueden habitar en $\mathcal{U}$, sino en un universo más grande que lo contenga. Esto nos lleva a una escala de universos acumulativos $\mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_1 : \mathcal{U}_2 : \ldots$, similar a la que ocurre en teoría de categorías [6]. Sin embargo, siguiendo con el estilo semiformal de [67], dejaremos implícito el subíndice y diremos solamente $A : \mathcal{U}$; lo importante es que siempre podremos, ubicando los tipos iniciales de una construcción en un cierto nivel, ir comprobando que los tipos más complejos se van ubicando en niveles superiores de tal forma que el todo resulta consistente.

$=_A$ que, a partir de dos términos $a, b : A$, nos da un tipo $a =_A b$. Un término p de este tipo se puede considerar como una prueba que efectivamente a y b son iguales.

La teoría homotópica de tipos enriquece la teoría de tipos al interpretar el tipo A como un espacio topológico, $a, b : A$ como puntos del espacio y $a =_A b$ como el conjunto de caminos continuos que parten de a y terminan en b. Esta interpretación tiene la ventaja inmediata que nos permite hacer teoría homotópica directamente, aprovechando además los métodos tradicionales de la teoría de tipos en los cálculos; y, por otro lado, provee a la teoría de una semántica adecuada, útil a la hora de construir modelos. Veamos las propiedades principales de la igualdad desde los dos puntos de vista.

- Para $a : A$, existe un término $refl_a : a =_A a$; el cual se puede ver como una prueba trivial que a es igual a a, o como el camino constante en a.
- Dado $p : a =_A b$ existe $p^{-1} : b =_A a$; es decir, de una prueba de que a es igual b podemos construir una prueba que b es igual a a, o que todo camino de a en b se puede revertir en un camino de b en a.
- Dado $p : a =_A b$ y $q : b =_A c$ existe $p \cdot q : a =_A c$; de una prueba que a es igual a b y otra que b es igual a c, podemos construir una prueba que a es igual c, o en términos de la topología algebraica, tenemos la operación de concatenación de caminos.

No es difícil mostrar que estas operaciones cumplen los mismos axiomas que un grupo (identidad, inversos y asociatividad); sin embargo, no es grupo porque cada cosa vive en tipos diferentes. Las estructuras como la anterior reciben el nombre de grupoides. En realidad un tipo A en teoría homotópica tiene una estructura de ∞-grupoide en el sentido que está formado por varios niveles

- un nivel 0 donde están los $a : A$;
- un nivel 1 donde están las $a =_A b$;
- un nivel 2 donde están las $p =_{a=_A b} q$;
- un nivel 3 donde están las $r =_{p=_{a=_A b} q} s$;

y así sucesivamente, tal que todo nivel mayor que 1 tiene una estructura de grupoide. Caracterizar la estructura de ∞-grupoide de un tipo dado es un problema equivalente a calcular los grupos de homotopía asociados al tipo, algo extremadamente difícil incluso para espacios tan conocidos como esferas y toros. Desde este punto de vista sería extremadamente complicado trabajar con tipos (por ejemplo, para definir una función de un tipo a otro tendríamos que asignar una imagen a toda la estructura de ∞-grupoide). Afortunadamente, de manera análoga a como las definiciones en teoría de categorías se realizan vía propiedades universales, los tipos en teoría homotópica son definidos mediante reglas donde está toda la información necesaria para trabajar con ellos. Estas son

- una **regla de formación**, que establece cuándo el constructor puede ser aplicado;
- algunas **reglas de introducción**, que establecen cómo estará, al menos, habitado el nuevo tipo;
- **reglas de eliminación**, que establecen cómo usar un elemento del tipo;
- **reglas de computación**, las cuales son igualdades de la metateoría que explican qué sucede cuando las reglas de eliminación son aplicadas a los resultados de las reglas de introducción. Básicamente estas reglas nos aseguran que las construcciones hechas mediante eliminación se comporten de la manera esperada.

Opcionalmente, también podemos tener **principios de unicidad**, los cuales nos garantizarán que las construcciones hechas por eliminación sean las únicas con las propiedades esperadas. Estas reglas pueden ser establecidas en un lenguaje tan formal como sea necesario. En nuestra exposición, por claridad, decidimos emplear uno semiformal.

Por ejemplo, para el coproducto las cuatro reglas son

- $+_{\mathbf{For}}$ Si $A, B : \mathcal{U}$ entonces $A + B : \mathcal{U}$.
- $+_{\mathbf{Int}}$ Si $a : A$ entonces $inl(a) : A + B$. Si $b : B$ entonces $inr(b) : A + B$.
- $+_{\mathbf{Eli}}$ Sea $C : A + B \to \mathcal{U}$. Supongamos que para cada $a : A$ existe $\alpha(inl(a)) : C(inl(a))$ y que para cada $b : B$ existe $\beta(inr(b)) : C(inr(b))$. Entonces para toda $e : A + B$ existe $ind_{A+B}(C, \alpha, \beta, e) : C(e)$.
- $+_{\mathbf{Com}}$ Con la notación de la regla anterior, para cada $a : A$

  $$ind_{A+B}(C, \alpha, \beta, inl(a)) \equiv \alpha(inl(a)) : C(inl(a))$$

  y para cada $b : B$

  $$ind_{A+B}(C, \alpha, \beta, inr(b)) \equiv \beta(inr(b)) : C(inr(b)).$$

La regla de formación nos dice solamente que dados dos tipos siempre podemos formar su coproducto. La regla de introducción nos dice que en $A + B$ hay al menos una copia de A y una copia de B, aunque podría haber más información. En la regla de eliminación partimos de una función dependiente $C : A+B \to \mathcal{U}$ y nuestro objetivo es construir para cada $e : A+B$ un término en $C(e)$. Podríamos pensar en C como una propiedad que quisiéramos demostrar para cada término de $A+B$ (un término en $C(e)$ nos garantizaría que la propiedad es válida para e) o en el caso que C fuera constante, digamos a un D, esto permitiría definir una función $A + B \to D$. La regla de eliminación nos dice que basta con considerar los casos en que e sea $inl(a)$ o sea $inr(b)$. Más que pensar que $A + B$ en efecto está constituido solo por una copia de A o de B, deberíamos imaginarnos que hay una forma de inducción (por eso el nombre *ind*) que nos permite pasar la información de $inl(a)$ o $inr(b)$ hasta e. La regla de computación nos dice que dado que ind_{A+B} fue definido a partir de α y β, cuando lo restrinjamos a A debe comportarse como α y cuando lo restrinjamos a B debe portarse como β.

Un caso mucho más sutil e importante dentro de la teoría es el de la igualdad, que procedemos a considerar.

Definición 3.1.1.

- $=_{\mathbf{For}}$ Si $A : \mathcal{U}$ y $a, b : A$ entonces $a =_A b : \mathcal{U}$.
- $=_{\mathbf{Int}}$ Si $a : A$ entonces $refl_a : a =_A a$.
- $=_{\mathbf{Eli}}$ Sea $C : \left(\prod_{x,y:A} x =_A y\right) \to \mathcal{U}$. Si existe $\alpha : \prod_{z:A} C(z, z, refl_z)$ entonces para todos $a, b : A$ y $p' : a =_A b$ tenemos $ind_{=_A}(C, \alpha, a, b, p') : C(a, b, p')$.
- $=_{\mathbf{Com}}$ Con la notación anterior, para cada $a : A$

$$ind_{=_A}(C, \alpha, a, a, refl_a) \equiv \alpha(a) : C(a, a, refl_a).$$

Las reglas $=_{\mathbf{Eli}}$ y $=_{\mathbf{Com}}$ reciben también el nombre de "inducción sobre caminos". Ellas establecen que para definir un término en $C(a, b, p')$, donde a y b son *cualquier* par de términos en A y p' es *cualquier* término en $a =_A b$, basta hacerlo en el caso en que la pareja consiste en una misma variable, digamos z, y el camino es $refl_z$. Esto choca un poco con nuestra intuición que en teoría homotópica de tipos deben abundar los caminos no triviales. Por ejemplo, el tipo que representa la 1-esfera $\mathbb{S}^1$ es el siguiente

Definición 3.1.2.

- $\mathbb{S}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{For}}$ Existe $\mathbb{S}^1 : \mathcal{U}$.
- $\mathbb{S}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{Int}}$ $\mathbb{S}^1$ está generada por $base : \mathbb{S}^1$ y $loop : base =_{\mathbb{S}^1} base$.
- $\mathbb{S}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{Eli}}$ Sea $C : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{U}$. Supongamos que existe $\alpha : C(base)$ tal que existe $l : \alpha =^C_{loop} \alpha$. Entonces para todo $p : \mathbb{S}^1$ existe $ind_{\mathbb{S}^1}(C, \alpha, l, p) : C(p)$.
- $\mathbb{S}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{Com}}$ Con la notación de la regla anterior,

$$\begin{aligned} &ind_{\mathbb{S}^1}(C, \alpha, l, base) \equiv \alpha : C(base) \\ &\mathbb{S}^1 loopcomp : apd_{(\lambda y.ind_{\mathbb{S}^1}(C,\alpha,l,y))}(loop) = l. \end{aligned}$$

En la anterior definición *loop* hace el papel del camino que da vuelta a lo largo de toda la circunferencia. Como es de esperarse de la definición homotópica, hay una equivalencia $f : \mathbb{Z} \to (base =_{\mathbb{S}^1} base)$ definida como

$$f(n) \equiv \begin{cases} loop^n, & \text{si } n > 0, \\ (loop^{-1})^{-n}, & \text{si } n < 0, \\ refl_{base}, & \text{si } n = 0, \end{cases}$$

donde, dado un lazo p, p^n significará concatenar p consigo mismo n veces. A partir de este ejemplo no resulta muy claro por qué la inducción sobre caminos funciona. Conjeturamos que como todo tipo puede verse como una categoría (donde los términos del tipo serían los objetos de la categoría, dados dos términos a, b los morfismos de a en b serían los caminos en $a = b$: así, $refl$ haría el papel de identidad y la concatenación el de compuesta) lo que ocurre es similar a lo que demostramos en la sección 1.1: para mostrar una propiedad categórica (ser un límite, un funtor adjunto, una relación) basta trabajar con los generadores, aunque no todos los objetos de la categoría estén en la familia de generadores. Esto le daría un significado matemático más real a la expresión "tipo generado por un término o un camino". Todavía no contamos con una prueba completa de este hecho. Por ahora, invitamos al lector a considerar la inducción sobre caminos como parte de la definición de la igualdad en teoría homotópica de tipos.

Los tipos como 3.1.2, en los cuales en sus reglas de introducción aparecen nuevos caminos son llamados altamente inductivos, en contraste con aquellos como el coproducto, llamados inductivos, donde sólo aparecen en estas reglas información sobre términos. Esta nueva información de los tipos altamente inductivos se ve reflejada en las reglas de eliminación y computación. Ellas tratan sobre la estrecha relación entre funciones y caminos en teoría homotópica de tipos: toda función transporta caminos y todo camino da lugar a una función. Dado que más adelante trabajaremos con esta clase de tipos, nos gustaría hacer una discusión un poco detallada sobre este tema.

Dada una función $f : A \to B$, en matemática clásica si $x = y$ en A entonces $f(x) = f(y)$ en B. En teoría homotópica de tipos vale lo mismo, pero debemos tener en cuenta que toda igualdad debe estar garantizada por un camino, es decir, lo que tenemos en realidad es una función que envía caminos en caminos

$$ap_f : (x =_A y) \to (f(x) =_B f(y)).$$

La existencia de tal función es obvia cuando vemos un tipo como un ∞-grupoide, dado que una función debe estar definida sobre todos los niveles que constituyen el tipo. Sin embargo, esta estructura de ∞-grupoide sólo se ve explícitamente cuando miramos un tipo desde fuera de la teoría homotópica, desde la teoría de conjuntos. Desde el punto de vista de la teoría homotópica, un tipo A es un ente indefinido (sólo una variable) y su estructura es revelada a partir de los axiomas de la teoría. Así, como ap_f tiene como dominio un tipo identidad, es construida por inducción sobre caminos: para definirla basta considerar el caso $refl_x : x =_A x$, que enviamos a $refl_{f(x)} : f(x) =_B f(x)$.

Dada $P : A \to \mathcal{U}$, deberíamos tener un resultado similar al anterior para una función dependiente $f : \prod_{a:A} P(a)$. Sin embargo, si $p : x =_A y$ tenemos que $f(x) : A(x)$ mientras $f(y) : A(y)$, los cuales son en principio tipos diferentes, así que $f(x)$ y $f(y)$ no serían siquiera comparables. Sin embargo, asociada a p existe una función a través de la cual podemos relacionar las imágenes de la función f.

Proposición 3.1.3. [67, 2.3.1] Suponga $P : A \to \mathcal{U}$ y $p : x =_A y$. Entonces existe una función

$$transport^P(p, \_) : P(x) \to P(y).$$

Demostración. Por inducción sobre caminos, basta considerar el caso $refl_x : x =_A x$, en cuyo caso tomamos $transport^P(refl_x, \_) : P(x) \to P(x)$ como la función identidad. $\square$

Cuando P esté sobreentendida, escribiremos muchas veces p_* en vez de $transport^P(p, \_)$. En este caso la funcionalidad de f se reduce a la siguiente proposición, trivial por inducción sobre caminos

Proposición 3.1.4. [67, 2.3.4] Supongamos $f : \prod_{a:A} P(a)$, entonces existe una función

$$apd_f : \prod_{p:x=y} \Big(p_*(f(x)) =_{P(y)} f(y)\Big).$$

Retomemos nuestra discusión sobre tipos altamente inductivos. Cuando trabajemos con ellos, introducimos la siguiente notación: dados $P : A \to \mathcal{U},\ p : x =_A y,\ u : P(x),\ v : P(y)$ escribiremos

$$\Big(u =^P_p v\Big) :\equiv \Big(transport^P(p, u) = v\Big).$$

Es en este sentido que debe leerse $\alpha =^C_{loop} \alpha$ en la regla $\mathbb{S}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{Eli}}$. Hipótesis de esta forma aparecen en las reglas de eliminación de cualquier tipo altamente inductivo. Intuitivamente ellas nos garantizan que, dado que la función *ind* depende de la escogencia de unas pruebas iniciales α, estamos trabajando con una única familia de pruebas (cuando le aplicamos la operación "transporte" a una de estas pruebas iniciales caemos en la misma familia). Asociada a esta, en la regla de computación, debemos tener una prueba que la imagen del camino con el que construimos la función *transport* sea el testigo de la coherencia de los α: en el caso de $\mathbb{S}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{Comp}}$ tenemos una prueba $\mathbb{S}^1 loopcomp$ que $apd_{(\lambda y.ind_{\mathbb{S}^1}(C,\alpha,l,y))}(loop)$ es igual a $l : \alpha =^C_{loop} \alpha$. A lo largo de este capítulo veremos otros ejemplos de tipos altamente inductivos.

Dejamos para el final la piedra angular de la teoría: el axioma de univalencia, que, en última instancia, es quien garantiza que efectivamente haya caminos no triviales. Este axioma se basa en el principio básico utilizado en muchas partes de la matemática, por ejemplo en la teoría de categorías, de considerar dos objetos como iguales cuando hay una equivalencia (isomorfismo) entre ellos. La dificultad en teoría homotópica de tipos es que toda igualdad debe estar atestiguada por un camino. Notemos que construir una equivalencia a partir de un camino es relativamente sencillo, como lo muestra la siguiente proposición:

Proposición 3.1.5. [67, 2.10.1] Para $A, B : \mathcal{U}$, existe una función

$$idtoeqv : (A =_{\mathcal{U}} B) \to (A \simeq B).$$

Demostración. Considerando la función identidad $id_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ como una familia de tipos indexada por $\mathcal{U}$, dada $p : A =_{\mathcal{U}} B$ le asignamos $transport^{id_{\mathcal{U}}}(p, \_) : A \to B$; esta función es una equivalencia con inversa $transport^{id_{\mathcal{U}}}(p^{-1}, \_) : B \to A$. $\square$

Sin embargo, no hay un procedimiento que nos permita construir un camino a partir de una equivalencia. El axioma de univalencia nos garantiza esto.

Axioma de univalencia Para cada $A, B : \mathcal{U}$, *idtoeqv* es un equivalencia.

En particular, tenemos una inversa $ua : (A \simeq B) \to (A =_{\mathcal{U}} B)$.

Con las definiciones y resultados anteriores, estamos preparados para iniciar nuestro estudio.

3.2 BiMo en teoría homotópica de tipos

Nuestro primer objetivo es definir operadores modales análogos a los del capítulo 2, en aras de construir una versión modalizada de la máxima pragmática en teoría homotópica de tipos. Nos apoyaremos en los **W**-tipos (llamados así por su nombre en inglés *wellordering types*), los cuales nos permitirán mantener un control sobre los términos que los constituyen.

Definición 3.2.1. [48]

- $\mathbf{W_{For}}$ Si $A : \mathcal{U}$ y $B : A \to \mathcal{U}$ es una familia dependiente sobre él, entonces hay un nuevo tipo $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$.
- $\mathbf{W_{Int}}$ Si $a : A$ y $f : B(a) \to \mathbf{W}_{x:A}B(x)$, entonces $sup(a, f) : \mathbf{W}_{x:A}B(x)$.
- $\mathbf{W_{Eli}}$ Dado $C : \mathbf{W}_{x:A}B(x) \to \mathcal{U}$, si para todo $x : A$, $u : B(x) \to \mathbf{W}_{x:A}B(x)$, tenemos que $v : \prod_{y:B(x)} C(u(y))$ implica $\alpha(x, u, v) : C(sup(x, u))$, entonces para todo $w : \mathbf{W}_{x:A}B(x)$, existe $ind_{\mathbf{W}}(w, \alpha) : C(w)$.
- $\mathbf{W_{Com}}$ En la situación anterior, para todo $x : A$, $u : B(x) \to \mathbf{W}_{x:A}B(x)$
$$ind_{\mathbf{W}}(sup(x, u), \alpha) \equiv \alpha(x, u, \lambda y.ind_{\mathbf{W}}(u(y), \alpha)) : C(sup(x, u)).$$

Cuando los tipos A y $B : A \to \mathcal{U}$ sean absolutamente claros en el contexto que estemos trabajando, notaremos el tipo $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$ simplemente por $\mathbf{W}$.

De la definición 3.2.1, observamos que podemos considerar los términos de un tipo $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$ como si fueran parejas $sup(a, f)$, donde $a : A$ y $f : B(a) \to \mathbf{W}_{x:A}B(x)$. Por tanto es útil tener una primera proyección, $pr_1^{\mathbf{W}}$, y una segunda proyección, $pr_2^{\mathbf{W}}$, que nos extraiga la información que constituye dichos términos. Observemos que dichas funciones son construidas, como es de esperarse, sólo por el empleo de las reglas de eliminación y computación.

Proposición 3.2.2. Existen funciones

$$pr_1^{\mathbf{W}} : \mathbf{W}_{x:A}B(x) \to A$$
$$pr_2^{\mathbf{W}} : \prod_{w:\mathbf{W}_{x:A}B(x)} \Big(B(pr_1(w)) \to \mathbf{W}_{x:A}B(x)\Big)$$

tales que para todo término de la forma $sup(a, f)$, tenemos

$$pr_1^{\mathbf{W}}\Big(sup(a, f)\Big) \equiv a, \qquad pr_2^{\mathbf{W}}\Big(sup(a, f)\Big) \equiv f.$$

Demostración. Podemos definir $pr_1^{\mathbf{W}}$ tomando $C(w) \equiv A$ y $\alpha(x,u,v) \equiv x$ en la regla $\mathbf{W_{Eli}}$. La función resultante $pr_1^{\mathbf{W}} :\equiv ind_{\mathbf{W}}(w,\alpha)$ tiene el comportamiento deseado gracias a $\mathbf{W_{Com}}$. De manera análoga, construimos $pr_2^{\mathbf{W}}$ a partir de $C(w) \equiv B(pr_1(w)) \to \mathbf{W}_{x:A}B(x)$ y $\alpha(x,u,v) \equiv u$. □

Cuando se sobreentienda que estas proyecciones están aplicadas a un término de un $\mathbf{W}$-tipo, escribiremos simplemente $pr_1,\ pr_2$ en vez de $pr_1^{\mathbf{W}},\ pr_2^{\mathbf{W}}$.

Una parte importante de la teoría homotópica de tipos es caracterizar, siempre que se pueda, el tipo identidad entre términos de cada nuevo constructor definido. La siguiente proposición da una de estas caracterizaciones, la cual será de utilidad más adelante.

Proposición 3.2.3. Dados dos elementos $w, w' : \mathbf{W}_{x:A}B(x)$, hay una equivalencia

$$(w = w') \ \simeq \sum_{q:pr_1(w)=pr_2(w)} pr_2(w') \circ transport^B(q,\ ) = pr_2(w).$$

Demostración. Definimos una función

$$T : \prod_{w,w':\mathbf{W}} (w = w') \to \sum_{q:pr_1(w)=pr_2(w)} pr_2(w') \circ transport^B(q,\ ) = pr_2(w)$$

por inducción sobre caminos, asignando

$$T(w,w,refl_w) :\equiv (refl_{pr_1(w)}, refl_{pr_2(w)}).$$

Necesitamos construir una función que vaya en la dirección contraria, es decir,

$$S : \prod_{w,w':\mathbf{W}} \sum_{q:pr_1(w)=pr_2(w)} pr_2(w') \circ transport^B(q,\ ) = pr_2(w) \to w = w'.$$

Utilizando inducción de $\mathbf{W}$-tipos ($\mathbf{W_{Eli}}$) podemos asumir que $w,\ w'$ son de la forma $sup(a,f),\ sup(a',f')$. Así, basta con definir una función

$$\Big(\sum_{q:a=a'} f' \circ q_* = f\Big) \to \Big(sup(a,f) = sup(a',f')\Big).$$

Por inducción sobre Σ-tipos, podemos trabajar con los términos de $\sum_{q:a=a'} f' \circ q_* = f$ de la forma (q,r), donde $q : a = a'$ y $r : f' \circ q_* = f$. Haciendo inducción sobre caminos en q (es decir, asumiendo que $a' \equiv a$ y $q \equiv refl_a$), tenemos que

$$f' \circ q_* \equiv f' \circ (refl_a)_* = f'$$

y así r es un testigo que $f' = f$. De esta forma podemos hacer inducción sobre caminos en r y definir

$$S(sup(a,f), sup(a,f), (refl_a, refl_f)) \equiv (refl_{sup(a,f)}).$$

Denotemos con $T',\ S'$ las funciones $T(w,w',\_),\ S(w,w',\_)$.

Con las definiciones anteriores, debemos mostrar en primer lugar que para cada $w, w' : \mathbf{W}$ y cada $p : w = w'$, $S'T'(p) = p$. Aplicando primero inducción sobre caminos y luego inducción sobre $\mathbf{W}$-tipos, basta con mostrar que

$$S(sup(a,f), sup(a,f), T(sup(a,f), sup(a,f), refl_{sup(a,f)})) = refl_{sup(a,f)}$$

lo cual es cierto por construcción (atestiguado por $refl_{refl_{sup(a,f)}} : refl_{sup(a,f)} = refl_{sup(a,f)}$).

Por último, necesitamos mostrar que para $w, w' : \mathbf{W}$ y

$$s : \sum_{q : pr_1(w) = pr_2(w)} pr_2(w') \circ q_* = pr_2(w),$$

tenemos que $T'S'(s) = s$. Retomando las mismas inducciones que usamos para definir S (inducción sobre $\mathbf{W}$, Σ e identidad tipos) basta con mostrar que

$$T(sup(a,f), sup(a,f), S(sup(a,f), sup(a,f), (refl_a, refl_f))) = (refl_a, refl_f)$$

lo cual es de nuevo cierto por construcción. □

Otra propiedad importante de un $\mathbf{W}$-tipo $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$ es que no es trivial si y sólo si existe al menos un $a : A$ tal que $B(a) = 0$. Recordando que un tipo X es trivial (es decir, equivalente al tipo $\mathbf{0}$) cuando $\neg X$ está habitado, esta propiedad puede ser expresada en el lenguaje de la teoría de tipos como

Proposición 3.2.4.

$$\prod_{A:\mathcal{U}} \prod_{B:A\to\mathcal{U}} \neg\Big(\mathbf{W}_{x:A}B(x)\Big) \simeq \neg\Big(\sum_{a:A} \neg B(a)\Big).$$

Demostración. [48, p. 85], [67, p. 177]. □

La idea detrás de la proposición anterior es muy sencilla: dado que todo elemento $w : \mathbf{W}_{x:A}B(x)$ es de la forma $sup(pr_1(w), pr_2(w))$ donde $pr_2(w) : B(pr_1(w)) \to \mathbf{W}_{x:A}B(x)$, el elemento w sólo puede ser construido si ya contamos con la función $pr_2(w)$, lo cual en particular significa que ya tenemos para cada $b : B(pr_1(w))$ su imagen $pr_2(w)(b) : \mathbf{W}_{x:A}B(x)$, pero esto a su vez presupone otras tantas funciones $pr_2(pr_2(w)(b)) : B(pr_1(pr_2(w)(b))) \to \mathbf{W}_{x:A}B(x)$ con sus imágenes, y así sucesivamente. El proceso anterior sólo parará (y por tanto, el término w efectivamente puede ser construido) si cada rama termina eventualmente en algún $B(a) = 0$, en cuyo caso la función $0 \to \mathbf{W}_{x:A}B(x)$ es la trivial.

Esto nos permite definir los términos "minimales" de un $\mathbf{W}$-tipo.

Definición 3.2.5.

$$isMin : \mathbf{W}_{x:A}B(x) \to \mathcal{U}$$

se define para cada $w : \mathbf{W}_{x:A}B(x)$ como

$$isMin(w) :\equiv \neg B(pr_1(w)).$$

La anterior definición fue expresada, como es usual en teoría homotópica de tipos, como un tipo dependiente. Decimos que un término $w : \mathbf{W}_{x:A}B(x)$ satisface la anterior definición si $isMin(w)$ está habitado y que no la satisface si el tipo $isMin(w)$ es trivial. Nos gustaría que estas fueran las únicas dos opciones, que fueran mutuamente excluyentes y que siempre tengamos una de las dos, es decir, que sobre la definición $isMin$ valiera la lógica clásica. Este es un punto relativamente sutil de esta teoría, que creemos amerita al menos una rápida discusión.

En primer lugar, la correspondencia de Curry-Howard, expresada en la tabla 3.1, nos permite sospechar que la lógica asociada a la teoría homotópica de tipos es la intuicionista. Sin embargo, lo que en últimas hace que esta no degenere en la lógica clásica es el a primera vista inocente axioma de univalencia. Damos un esbozo del argumento.

Proposición 3.2.6. [67, 3.2.2] No es el caso que para todo $A : \mathcal{U}$, tengamos que $\neg(\neg A) \to A$.

Demostración. Asumamos que existe una función $f : \prod_{A:\mathcal{U}} \neg(\neg A) \to A$. A partir de allí debemos llegar a una contradicción, es decir, construir un término de $\mathbf{0}$.

Consideremos el tipo $\mathbf{2}$. Este tipo posee dos términos diferentes, a los que denotaremos $0_\mathbf{2}$, $1_\mathbf{2}$. Por su regla de eliminación, podemos definir una función $e : 2 \to 2$ por $e(0_\mathbf{2}) :\equiv 1_\mathbf{2}$ y $e(1_\mathbf{2}) :\equiv 0_\mathbf{2}$. La función e es una equivalencia, así que por el axioma de univalencia existe un camino $p : \mathbf{2} = \mathbf{2}$ asociado a e, es decir, tal que $p :\equiv ua(e)$. Aplicando la proposición 3.1.4 a la función $f(\mathbf{2}) : \neg\neg\mathbf{2} \to \mathbf{2}$ tenemos que

$$apd_f(p) : transport^{A\mapsto(\neg\neg A\to A)}(p, f(\mathbf{2})) = f(\mathbf{2}).$$

Dado que las dos funciones anteriores son iguales, para cada $u : \neg\neg\mathbf{2}$, tenemos que

$$transport^{A\mapsto(\neg\neg A\to A)}(p, f(\mathbf{2}))(u) = f(\mathbf{2})(u).$$

Simplificando el lado izquierdo de la ecuación anterior por medio de las propiedades de la función *transport* (los detalles pueden ser consultados en [67]), llegamos a

$$transport^{A\mapsto A}(p, f(\mathbf{2}))(u) = f(\mathbf{2})(u).$$

Dado que las funciones $transport^{A\mapsto A}(p, \_)$ y e son iguales (ambas son imágenes de p por la función de 3.1.5) concluimos que

$$e(f(\mathbf{2})(u)) = f(\mathbf{2})(u).$$

Denotemos con α un testigo de la anterior igualdad. Por otro lado, utilizando la regla de eliminación del tipo $\mathbf{2}$ se puede mostrar que existe

$$\beta : \prod_{x:\mathbf{2}} \neg(e(x) = x).$$

Así, $\beta(f(\mathbf{2})(u))(\alpha) : \mathbf{0}$. $\square$

Analizando la prueba anterior, vemos que lo que produjo la contradicción fue que el tipo **2** tuviera dos términos distintos. Desde un punto de vista lógico, dado que un tipo es verdadero cuando posee un término y falso cuando es vacío, el hecho que posea más de dos términos distintos hace que haya un exceso de información (si se quiere, hay en juego más de los dos valores de verdad tradicionales) que impide que la lógica sea clásica. Así, los tipos que pueden tener un comportamiento clásico sin que se produzcan contradicciones son los que tienen a lo más un término, lo que lleva a la siguiente definición.

Definición 3.2.7. [67, 3.3.1] Un tipo P es una mera proposición (en inglés, *mere proposition*) si para todos $x, y : P$ tenemos que $x = y$. Formalmente, esto se expresa mediante una función $isProp : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, definida para cada $P : \mathcal{U}$ como

$$isProp(P) :\equiv \prod_{x,y:P} (x = y).$$

La ley del tercio excluso para meras proposiciones toma la forma

$$\prod_{A:\mathcal{U}} (isProp(P) \to (A + \neg A))$$

mientras la doble negación es

$$\prod_{A:\mathcal{U}} (isProp(P) \to (\neg\neg A \to A)).$$

Los dos tipos anteriores, como es de esperarse, son equivalentes. Es importante resaltar que ellos no son deducibles de la teoría homotópica de tipos (no podemos construir un término de ellos a partir de las definiciones). Sin embargo, ellos pueden ser asumidos como axiomas, sin que esto afecte la consistencia de la teoría. Esta será la posición que asumiremos a lo largo de este capítulo. Así, para que $isMin$ tenga un comportamiento clásico resta probar que es una mera proposición.

Proposición 3.2.8. Para cualquier $w : \mathbf{W}_{x:A} B(x)$, $isMin(w)$ es una mera proposición.

Demostración. En primer lugar, todo tipo de funciones cuyo codominio es una mera proposición es a su vez una mera proposición (si $f, g : A \to B$ y B es una mera proposición, entonces para cada $a : A$, $f(a) =_B g(a)$ y por tanto $f = g$). Como $\mathbf{0}$ es, por definición, una mera proposición y $\neg B(pr_1(w)) \equiv B(pr_1(w)) \to \mathbf{0}$, el resultado se sigue de la observación anterior. □

Otra asunción que será útil en algunas construcciones es la siguiente

Definición 3.2.9. Decimos que un tipo $\mathbf{W}_{x:A} B(x)$ es de aridad acotada si para cada $w : \mathbf{W}$, existe un número natural n, tal que el número de componentes conexas del tipo $B(w)$ es igual a n. En términos de la teoría, esto puede ser expresado como una función, que llamaremos $isArAc$, cuyo dominio es la "clase" de los $\mathbf{W}$-tipos y cuyo codominio es el universo $\mathcal{U}$, definida para $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$ como

$$isArAc(\mathbf{W}_{x:A}B(x)) \equiv \prod_{w:\mathbf{W}_{x:A}B(x)} \sum_{n:\mathbf{N}} |(\|B(pr_1(w))\|_0)|_0 = n.$$

Una rápida observación sobre la notación en la definición anterior: la función $\|\text{\_}\|_0 : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, llamada truncación, es tal que convierte cualquier tipo A en un conjunto $\|A\|_0$ mediante la igualación de cualquier par de caminos no triviales; dado un conjunto B, $|B|_0$ es su cardinalidad [67].

Gracias a las definiciones anteriores, podemos hablar de la complejidad de cada término $w : \mathbf{W}_{x:A}B(x)$, como la máxima distancia que lo separa de los términos minimales.

Proposición 3.2.10. Sea $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$ un $\mathbf{W}$-tipo de aridad acotada. Entonces existe una función *compl* : $\mathbf{W}_{x:A}B(x) \to \mathbb{N}$ definida por recursión como

$$compl(w) :\equiv \begin{cases} 0, \text{ si } isMin(w); \\ max\{compl(pr_2(w)(b))|b : B(pr_1(w))\} + 1, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Dado cualquier $w : \mathbf{W}_{x:A}B(x)$, podemos determinar si $isMin(w)$ es válido o no. Además, cada rama de w termirá eventualmente en algún minimal, como muestra el argumento de la proposición 3.2.4. Nuestro único problema sería que $\{compl(pr_2(w)(b))|b : B(pr_1(w))\}$ diera origen a una serie no acotada, pero como $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$ es de aridad acotada esto no ocurre. □

Definición 3.2.11. Sea $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$ un $\mathbf{W}$-tipo de aridad acotada. Para cada $n : \mathbb{N}$ definimos

$$\begin{aligned} compl_{=n}(\mathbf{W}_{x:A}B(x)) &:\equiv \sum_{w:\mathbf{W}_{x:A}B(x)} compl(w) = n, \\ compl_{\leq n}(\mathbf{W}_{x:A}B(x)) &:\equiv \sum_{w:\mathbf{W}_{x:A}B(x)} compl(w) \leq n, \\ compl_{<n}(\mathbf{W}_{x:A}B(x)) &:\equiv \sum_{w:\mathbf{W}_{x:A}B(x)} compl(w) < n. \end{aligned}$$

Las construcciones anteriores nos permitirán hacer inducción sobre la complejidad de los términos de un $\mathbf{W}$-tipo de la siguiente manera:

Proposición 3.2.12. Sean $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$ un $\mathbf{W}$-tipo y $P : \mathbf{W}_{x:A}B(x) \to \mathcal{U}$ un tipo dependiente tal que existen

1. $\alpha_0 : \prod_{w:compl_{=0}} P(w)$;
2. $\beta : \prod_{n:\mathbb{N}} \left(\prod_{w:compl_{\leq n}} P(w) \to \prod_{w:compl_{\leq n+1}} P(w) \right)$.

Entonces existe $\gamma : \prod_{w:\mathbf{W}_{x:A}B(x)} P(w)$.

Demostración. Sea $Q : \mathbb{N} \to \mathcal{U}$ definida como $Q(n) :\equiv \prod_{w:compl_{\leq n}} P(w)$. Las hipótesis 1 y 2 significan, respectivamente, que Q satisface el caso 0 y el caso sucesor de una prueba por inducción. Así, por la regla de eliminación de $\mathbf{N}$ existe una función

$$ind_{\mathbb{N}}(Q, \alpha_0, \beta, \_) : \prod_{n:\mathbb{N}} Q(n) \equiv \prod_{n:\mathbb{N}} \prod_{w:compl_{\leq n}} P(w).$$

Basta entonces con definir

$$\gamma(w) :\equiv ind_{\mathbb{N}}(Q, \alpha_0, \beta, compl(w))(w).$$

□

3.3 Operación de clausura y operadores modales

En esta sección introduciremos operadores modales en teoría homotópica de tipos con miras a dar una versión modalizada de MP. Pero, en primer lugar, debemos discutir sobre qué clase de tipos queremos que dichos operadores actúen. En el capítulo anterior vimos que los operadores modales en una categoría de bi-Heyting no están definidos sobre todos los objetos, sino sólo sobre los subobjetos de un objeto fijo, en base al cual se realiza la construcción. Así, nuestra definición de operadores modales debería aplicarse sólo a subestructuras asociadas a los tipos, “subtipos”. En esta teoría los subtipos de A se construyen de manera análoga al axioma de separación de la teoría de conjuntos: dada una cierta propiedad $P : A \to \mathcal{U}$, abstraemos los términos de A que la satisfacen. Esta idea corresponde al tipo $\sum_{a:A} P(a)$. En efecto, un término de este tipo es una pareja (x, p), donde $x : A$ y $p : P(x)$ (p puede entenderse como una prueba de que el término x satisface P). Para lo que sigue es útil hacer algunas observaciones al respecto:

1. Si dejamos que $P : A \to \mathcal{U}$ sea arbitrario, ocurrirá generalmente que dado $a : A$, $P(a)$ esté múltiplemente habitado, digamos por $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ y entonces $(a, p_1), \ldots, (a, p_n) \ldots : \sum_{a:A} P(a)$. Así, un mismo término $a : A$ puede generar una multitud de términos en el subtipo. Aunque esto no es del todo indeseable, puede generar que el subtipo en cuestión no se comporte siempre como cabría de esperarse. La solución es de hecho muy sencilla: basta con asumir que P es una mera proposición. Sin embargo sólo asumiremos esta condición cuando sea estrictamente necesario.

2. Dado que todos los subtipos de A son de la forma $\sum_{a:A} P(a)$, para algún P, una operación sobre subtipos debe tomar una familia $P_1, \ldots, P_n : A \to \mathcal{U}$ y generar algún $P_R : A \to \mathcal{U}$ de tal forma que tengamos $\sum_{a:A} P_R(a)$ como resultado de la operación.

3. Definiremos los operadores sólo para subtipos de $\mathbf{W}$-tipos. Entre las diversas razones para esto, la de índole más práctico es que queremos que estas operaciones sean recursivas.

La base de nuestra construcción será la operación **Cl**, que llamaremos "clausura", y que jugará el papel que tenía la iteración de las dos negaciones $\sim \neg$ en la definición 2.1.15.

Definición 3.3.1.

- $\mathbf{Cl_{For}}$ Para $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$ y $P : \mathbf{W}_{x:A}B(x) \to \mathcal{U}$ definimos $\mathbf{Cl}(P) : \mathbf{W}_{x:A}B(x) \to \mathcal{U}$.

- $\mathbf{Cl_{Int}}$ Sea $w : \mathbf{W}_{x:A}B(x)$. Entonces

  1. Para cada $p : P(w)$ existe $cl_1(w,p) : \mathbf{Cl}(P)(w)$;
  2. Para cada $g : \prod_{b:B(pr_1(w))} P(pr_2(w)(b))$ existe $cl_2(w,g)$[2]: $\mathbf{Cl}(P)(w)$.

- $\mathbf{Cl_{Eli}}$ Dado $C : \prod_{w:\mathbf{W}_{x:A}B(x)} \mathbf{Cl}(P)(w) \to \mathcal{U}$, si $w : \mathbf{W}_{x:A}B(x)$ es fijo, supongamos que

  1. para cada $p : P(w)$, existe $\alpha(w,p) : C(w)(cl_1(p))$;
  2. para cada $g : \prod_{b:B(pr_1(w))} P(pr_2(w)(b))$, existe $\beta(w,g) : C(w)(cl_2(g))$;

  entonces para todo $d : \mathbf{Cl}(P)(w)$ existe $ind_{\mathbf{Cl}(P)}(w,\alpha,\beta,d) : C(w)(d)$.

- $\mathbf{Cl_{Com}}$ En las condiciones de la regla anterior, para cada $p : P(w)$

  $$ind_{\mathbf{Cl}(P)}(w,\alpha,\beta,cl_1(p)) \equiv \alpha(w,p) : C(w)(cl_1(p))$$

  y para cada $g : \prod_{b:B(pr_1(w))} P(pr_2(w)(b))$

  $$ind_{\mathbf{Cl}(P)}(w,\alpha,\beta,cl_2(g)) \equiv \beta(w,g) : C(w)(cl_2(g)).$$

Interpretando, como es usual, $P : \mathbf{W}_{x:A}B(x) \to \mathcal{U}$ como pruebas o justificaciones de los términos w, la regla 1 de $\mathbf{Cl_{Int}}$ nos dice que todas las pruebas que estaban en P se mantendrán en $\mathbf{Cl}(P)$, la regla 2 nos da además la posibilidad de "pegar" pedazos locales de verdad, para obtener pruebas más complejas. Así, si para cada $b : B(pr_1(w))$ tenemos una prueba de $pr_2(w)(b)$ en P, entonces podremos formar una prueba de w en $\mathbf{Cl}(P)$.

La siguiente proposición caracteriza los tipos identidad asociados a $\mathbf{Cl}(P)$.

Proposición 3.3.2. Sean $w, w' : \mathbf{W}_{x:A}B(x)$ y $q : w = w'$. Denotemos con $q_1 : pr_1(w) = pr_1(w')$ y $q_2 : pr_2(w) = pr_2(w') \circ transport^B(q_1, \ )$ los caminos asociados a $q : w = w'$ por la proposición 3.2.3. Entonces

1. Si $p : P(w),\ p' : P(w')$ entonces

$$\left(transport^{\mathbf{Cl}(P)}(q, cl_1(p)) =_{\mathbf{Cl}(P)(w')} cl_1(p')\right) \simeq \left(transport^P(q,p) =_{P(w')} p'\right).$$

2. Si $g : \prod_{b:B(pr_1(w))} P(pr_2(w)(b))$ y $g' : \prod_{b:B(pr_1(w'))} P(pr_2(w')(b))$ entonces

$$\left(transport^{\mathbf{Cl}(P)}(q, cl_2(g)) =_{\mathbf{Cl}(P)(w')} cl_2(g')\right) \quad \simeq$$
$$\left(transport^P(q_2, \ ) \circ g =_{\prod_{b:B(pr_1(w))} P(pr_2(w')q_{1*})} g' \circ transport^B(q_1, \ )\right).$$

[2]Cuando no haya riesgo de confusión, escribiremos simplemente $cl_1(p),\ cl_2(g)$.

Demostración. Puede ser conveniente iniciar analizando el dominio y el codominio de las funciones *transport* para ver que las igualdades están bien definidas. En el inciso 1, $transport^{\mathbf{Cl}(P)}(q,\ ) : \mathbf{Cl}(P)(w) \to \mathbf{Cl}(P)(w')$, así que efectivamente $transport^{\mathbf{Cl}(P)}(q, cl_1(p)),\ cl_1(p') : \mathbf{Cl}(P)(w')$. En el lado derecho de la misma, $transport^{P}(q,\ ) : P(w) \to P(w')$ y así $transport^{P}(q, p),\ p' : P(w')$.

Para la segunda equivalencia, por la misma justificación de antes

$$transport^{\mathbf{Cl}(P)}(q, cl_2(g)),\ cl_2(g') : \mathbf{Cl}(P)(w').$$

Para el otro lado revisemos que ambas compuestas tienen tipo

$$\prod_{b:B(pr_1(w))} P(pr_2(w')q_{1_*}).$$

En la de la izquierda, $g : \prod_{b:B(pr_1(w))} P(pr_2(w)(b))$ mientras que

$$transport^{P}(q_2,\ ) : \prod_{b:B(pr_1(w))} P(pr_2(w)(b)) \to P(pr_2(w')transport^{B}(q_1, w)).$$

En la compuesta de la derecha, $transport^{B}(q_1,\ ) : B(pr_1(w)) \to B(pr_1(w'))$ y $g' : \prod_{b:B(pr_1(w'))} P(pr_2(w')(b))$.

Dado que w, w' son términos arbitrarios de $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$ y q es un camino arbitrario de $w = w'$, podemos usar inducción sobre caminos para asumir que $w' \equiv w$ y $q \equiv refl_w$. En este caso además por la proposición 3.2.3, $q_1 \equiv refl_{pr_1(w)}$ y $q_2 \equiv refl_{pr_2(w)}$. Por tanto, las equivalencias que necesitamos probar se reducen a

$$\Big(cl_1(p) =_{\mathbf{Cl}P(w)} cl_1(p')\Big) \simeq \Big(p =_{P(w)} p'\Big),$$
$$\Big(cl_2(g) =_{\mathbf{Cl}P(w)} cl_2(g')\Big) \simeq \Big(g =_{\prod_{b:B(pr_1(w))} P(pr_2(w)} g'\Big).$$

Hagamos la prueba solamente de la segunda de ellas (la de la primera es completamente análoga). Utilizaremos una clase de prueba, propia de la teoría homotópica de tipos, llamada método "encode-decode"[67]. Fijemos g. Definimos una función $code : \mathbf{Cl}(P)(w) \to \mathcal{U}$, gracias a $\mathbf{Cl}_{\mathbf{Eli}}$, como

1. para $p : P(w),\ code(cl_1(p)) :\equiv \mathbf{0}$,
2. para $f : \prod_{b:B(pr_1(w))} P(pr_2(w)(b)),\ code(cl_2(f)) :\equiv g = f$.

Queremos mostrar que para cada $x : \mathbf{Cl}(P)(w)$, tenemos que $\Big(cl_2(g) = x\Big) \simeq code(x)$. Así, definimos

$$encode : \prod_{x:\mathbf{Cl}(P)(w)} \prod_{p:cl_2(g)=x} code(x)$$

como

$$encode(x, p) :\equiv transport^{code}(p, refl_{cl_2(g)}).$$

En la otra dirección, definimos

$$decode : \prod_{x:\mathbf{Cl}(P)(w)} \prod_{c:code(x)} \Big(cl_2(g) = x\Big)$$

por $\mathbf{Cl}_{\mathbf{Eli}}$ como

1. si $x \equiv cl_1(p)$ entonces $code(cl_1(p)) :\equiv \mathbf{0}$ y tomamos $decode(cl_1(p),\ ) :\equiv ind_{\mathbf{0}}(\ ) : \mathbf{0} \to \Big(cl_2(g) = cl_1(p)\Big)$ (gracias a la regla de eliminación de $\mathbf{0}$, ver [67, p. 436]);
2. si $x \equiv cl_2(f)$ entonces $code(cl_2(f)) :\equiv g = f$ y así $c : g = f$; tomamos $decode(cl_2(f), c) :\equiv ap_{cl_2}(c) : \Big(cl_2(g) = cl_2(f)\Big)$.

De las definiciones, puede mostrarse que las funciones *encode* y *decode* son cuasi-inversas, lo que en particular implica la equivalencia 2 que queríamos mostrar. □

Dado que más adelante definiremos funciones entre tipos dependientes, es conveniente tener claro cómo funcionan esta clase de asignaciones.

Definición 3.3.3. [67, p. 141] Dados dos tipos dependientes $P, Q : A \to \mathcal{U}$, una transformación fibrada es una función $f : \prod_{x:A} \Big(P(x) \to Q(x)\Big)$.

Es importante resaltar que toda transformación fibrada da origen a una función canónica entre los subtipos asociados.

Definición 3.3.4. [67, 4.7.5] Dados dos tipos dependientes $P, Q : A \to \mathcal{U}$ y $f : \prod_{x:A} \Big(P(x) \to Q(x)\Big)$, definimos

$$total(f) :\equiv \lambda w.(pr_1 w, f(pr_1 w, pr_2 w)) : \sum_{x:A} P(x) \to \sum_{x:A} Q(x).$$

Observemos que en cambio no toda función $g : \sum_{x:A} P(x) \to \sum_{x:A} Q(x)$ da origen a una transformación fibrada en $\prod_{x:A} \Big(P(x) \to Q(x)\Big)$: en efecto, podemos tener que $g(a,p) \equiv (b,q)$ sin que haya ningún habitante en $a =_A b$.

También necesitamos recordar la forma que toman los monomorfismos en teoría homotópica de tipos.

Definición 3.3.5. [67, 4.6.1] Una función $f : A \to B$ es llamada una inmersión si para todos $x, y : A$ la función $ap_f : (x =_A y) \to (f(x) =_B f(y))$ es una equivalencia.

En la definición anterior, $\big(ap_f\big)^{-1} : (f(x) =_B f(y)) \to (x =_A y)$ juega el papel de la implicación "si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$" de la definición usual de función inyectiva.

Proposición 3.3.6. Para cada $P : \mathbf{W} \to \mathcal{U}$, existe una inmersión

$$\sum_{w:\mathbf{W}} P(w) \hookrightarrow \sum_{w:\mathbf{W}} \mathbf{Cl}P(w).$$

Demostración. Dado que $cl_1 : \prod_{w:\mathbf{W}} P(w) \to \mathbf{Cl}P(w)$ es una transformación fibrada, $total(cl_1)$ puede ser la función que estamos buscando. Resta ver que ella efectivamente es una inmersión. Si $p_1, p_2 : \sum_{w:\mathbf{W}} P(w)$ entonces, por la proposición [67, 2.7.2] tenemos que

$$\big(p_1 = p_2\big) \;\simeq \sum_{p:pr_1^{\sum}(p_1)=pr_1^{\sum}(p_2)} p_*(pr_2^{\sum}(p_1)) = pr_2^{\sum}(p_2).$$

Observemos que $pr_1^{\sum}(p_1), pr_1^{\sum}(p_2) : \mathbf{W}$ y $pr_2^{\sum}(p_1) : P(pr_1^{\sum}(p_1))$, $pr_2^{\sum}(p_2) : P(pr_2^{\sum}(p_2))$. Luego, por la proposición 3.3.2, tenemos

$$\Big(p_*(pr_2^{\sum}(p_1)) = pr_2^{\sum}(p_2)\Big) \simeq \Big(p_*\big(cl_1(pr_1^{\sum}(p_1), pr_2^{\sum}(p_1))\big) = cl_1(pr_1^{\sum}(p_2), pr_2^{\sum}(p_2))\Big).$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
\big(p_1 = p_2\big) &\simeq \sum_{p:pr_1^{\sum}(p_1)=pr_1^{\sum}(p_2)} p_*(pr_2^{\sum}(p_1)) = pr_2^{\sum}(p_2) \\
&\simeq \sum_{p:pr_1^{\sum}(p_1)=pr_1^{\sum}(p_2)} p_*\Big(cl_1(pr_1^{\sum}(p_1), pr_2^{\sum}(p_1))\Big) = cl_1\big(pr_1^{\sum}(p_2), pr_2^{\sum}(p_2)\big) \\
&\simeq \Big(total(cl_1)(p_1) = total(cl_1)(p_2)\Big).
\end{aligned}$$

□

El siguiente resultado nos da un procedimiento para construir funciones con dominio $\sum_{w:\mathbf{W}} \mathbf{Cl}P(w)$.

Proposición 3.3.7. Sean $P, Q, R : \mathbf{W} \to \mathcal{U}$ y $f : \sum_{w:\mathbf{W}} P(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} Q(w)$. Asumamos que existen funciones

$$\begin{aligned}
\phi &: \prod_{w:\mathbf{W}} Q(w) \to R(w), \\
\varphi &: \prod_{w:\mathbf{W}} \prod_{g:\prod_{b:B(pr_1(w))} Q(pr_2(w)(b))} R(w).
\end{aligned}$$

Entonces

1. Existe una función $f^{\mathbf{Cl}} : \sum_{w:\mathbf{W}} \mathbf{Cl}P(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} R(w)$.
2. Si f, ϕ, φ son inmersiones y existe un función dependiente

   $$t : \prod_{w:\mathbf{W}} \prod_{q:Q(w)} \prod_{g:\prod_{b:B(pr_1(w))} Q(pr_2(w)(b))} \neg\Big(\phi(w,q) = \varphi(w,\varphi)\Big),$$

   entonces $f^{\mathbf{Cl}}$ también es una inmersión.

Demostración. Definamos

$$f_1 :\equiv p_1^{\sum} \circ f : \sum_{w:\mathbf{W}} P(w) \to \mathbf{W},$$
$$f_2 :\equiv p_2^{\sum} \circ f : \prod_{u:\sum_{w:\mathbf{W}} P(w)} Q(f_1(u)).$$

1. Sea $p : \mathbf{Cl}P(w)$. Por $\mathbf{Cl}_{\mathbf{Eli}}$ basta considerar dos casos para definir $f^{\mathbf{Cl}}$:
   (a) $p \equiv cl_1(b)$, con $b : P(w)$. En este caso hacemos $f^{\mathbf{Cl}}(w,p) :\equiv \phi(f(w,b))$.
   (b) $p \equiv cl_2(g)$, con $g : \prod_{b:B(pr_1(w))} P(pr_2(w)(b))$. Como las parejas $(pr_2(w)(b), g(b)) : \sum_{w:\mathbf{W}} P(w)$, para cada $b : B(pr_1(w))$, podemos definir $f^{\mathbf{Cl}}(w,p) \equiv (sup(pr_1(w), f_1 \circ pr_2(w)), \varphi(g'))$, donde $g' \equiv f_2 \circ g : \prod_{b:B(pr_1(w))} Q(f_1(pr_2(w)(b)))$.

2. Sean $(w,p), (w',p') : \sum_{w:\mathbf{W}} \mathbf{Cl}P(w)$. Hay que considerar tres casos:
   (a) $p \equiv cl_1(b)$, $p' \equiv cl_1(b')$ con $b : P(w)$, $b' : P(w')$. En este caso tenemos

$$\begin{aligned}(w,p) = (w',p') &\equiv (w, cl_1(b)) = (w', cl_1(b')) \\ &\simeq \sum_{q:w=w'} q_*\big(cl_1(b)\big) = cl_1(b') \\ &\simeq \sum_{q:w=w'} q_*\big(b\big) = b' \\ &\simeq \phi(f(w,b)) = \phi(f(w',b')) \\ &\equiv f^{\mathbf{Cl}}(w,p) = f^{\mathbf{Cl}}(w',p').\end{aligned}$$

   (b) $p \equiv cl_2(g)$, $p' \equiv cl_2(g')$, con $g : \prod_{b:B(pr_1(w))} P(pr_2(w)(b))$, $g' : \prod_{b:B(pr_1(w'))} P(pr_2(w')(b))$. Por la definición dada en el inciso anterior, $f^{\mathbf{Cl}}(w,p) = f^{\mathbf{Cl}}(w',p')$ es por definición

$$(sup(pr_1(w), f_1 \circ pr_2(w)), \varphi(f_2 \circ g)) = (sup(pr_1(w'), f_1 \circ pr_2(w')), \varphi(f_2 \circ g')).$$

   Por [67, 2.7.2] este tipo puede ser expresado como

$$\sum_{q:sup(pr_1(w), f_1 \circ pr_2(w)) = sup(pr_1(w'), f_1 \circ pr_2(w'))} q_*\Big(\varphi(f_2 \circ g)\Big) = \varphi(f_2 \circ g').$$

   Denotemos este tipo por Ω. Dado que tanto φ como f_2 son inmersiones, tenemos que

$$\Big(q_*\big(\varphi(f_2 \circ g)\big) = \varphi(f_2 \circ g')\Big) \simeq \Big(q_*\big(g\big) = g'\Big).$$

   Por otro lado, por la proposición 3.2.3 el tipo

$$sup(pr_1(w), f_1 \circ pr_2(w)) = sup(pr_1(w'), f_1 \circ pr_2(w'))$$

es equivalente a

$$\sum_{q_1:pr_1(w)=pr_1(w')} f_1 \circ pr_2(w') \circ q_{1_*} = f_1 \circ pr_2(w).$$

Como f_1 es una inmersión este tipo es equivalente a

$$\sum_{q_1:pr_1(w)=pr_1(w')} pr_2(w') \circ q_{1_*} = pr_2(w)$$

el cual, de nuevo por 3.2.3, es equivalente a $w = w'$. En resumen el tipo Ω es equivalente a

$$\sum_{q:w=w'} q_*(g) = g'.$$

Por la proposición 3.3.2 este tipo es equivalente a

$$\sum_{q:w=w'} q_*(cl_2(g)) = cl_2(g'),$$

el cual por definición es $(w, p) = (w', p')$.

(c) $p \equiv cl_1(b)$ y $p' \equiv cl_2(g)$, o, $p \equiv cl_2(g)$ y $p' \equiv cl_1(g)$. Inmediato del hecho que $\Big(cl_1(b) = cl_2(g)\Big) \simeq \mathbf{0}$ por la proposición 3.3.2 y que por hipótesis existe

$$t : \prod_{w:\mathbf{W}} \prod_{q:Q(w)} \prod_{g:\prod_{b:B(pr_1(w))} Q(pr_2(w)(b))} \neg\Big(\phi(w,q) = \varphi(w,\varphi)\Big).$$

□

Como habíamos mencionado construiremos nuestros operadores modales en base a **Cl**; al igual que en el capítulo 2, para nuestros objetivos será suficiente trabajar con la posibilidad.

Definición 3.3.8. Sean $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$ y $P : \mathbf{W}_{x:A}B(x) \to \mathcal{U}$. Para cada $n : \mathbb{N}$, definimos

- $\lozenge_0 P :\equiv P$;
- $\lozenge_{n+1} P :\equiv \mathbf{Cl}(\lozenge_n P)$.

Finalmente definiremos $\lozenge P : \mathbf{W}_{x:A}B(x) \to \mathcal{U}$ como un tipo altamente inductivo.

Definición 3.3.9.
- $\lozenge_{\mathbf{For}}$ Para todos $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$ y $P : \mathbf{W}_{x:A}B(x) \to \mathcal{U}$ existe $\lozenge P : \mathbf{W}_{x:A}B(x) \to \mathcal{U}$.
- $\lozenge_{\mathbf{Int}}$ $\lozenge P$ está generado por las funciones

1. $\diamond : \prod_{w:\mathbf{W}_{x:A}B(x)} \Big(\big(\sum_{n:\mathbb{N}} \Diamond_n P(w) \big) \to \Diamond P(w) \Big)$;
2. $\delta : \prod_{w:\mathbf{W}} \prod_{n:\mathbb{N}} \prod_{p:\Diamond_n P(w)} \diamond(w,n,p) = \diamond(w,n+1,cl_1(p))$.

- $\Diamond_{\mathbf{Eli}}$ Sea $C : \prod_{w:\mathbf{W}} \Diamond P(w) \to \mathcal{U}$ tal que existen funciones
   1. $\alpha : \prod_{w:\mathbf{W}} \prod_{n:\mathbb{N}} \prod_{p:\Diamond_n P(w)} C(\diamond(w,n,p))$,
   2. $\beta : \prod_{w:\mathbf{W}} \prod_{n:\mathbb{N}} \prod_{p:\Diamond_n P(w)} transport^C \Big(\delta(w,n,p), \alpha(w,n,p) = \alpha(w,n+1,cl_1(p)) \Big)$.

   Entonces existe una función $ind_{\Diamond}(\alpha,\beta) : \prod_{w:\mathbf{W}} \prod_{p:\Diamond P(w)} C(w,p)$.

- $\Diamond_{\mathbf{Com}}$ En las condiciones de la regla anterior, para todos $w : \mathbf{W},\ n : \mathbb{N},\ p : \Diamond_n P(w)$ tenemos

$$ind_{\Diamond}(w, \diamond(w,n,p)) \equiv \alpha(w,n,p) : C(\diamond(w,n,p)),$$
$$apd_{ind_{\Diamond}(\alpha,\beta)} \Big(\delta(w,n,p) \Big) = \beta(w,n,p).$$

Observación 3.3.10. En el caso en que C es una función constante, las reglas de eliminación y computación de las definiciones altamente inductivas como 3.1.2 o 3.3.9 sufren una considerable simplificación que es importante tener en cuenta. La causa es que cuando C es constante, la función *transport* que aparece en la segunda hipótesis de las reglas de eliminación pierde todo su sentido dado que para cualquier camino p, $transport^C(p, \ )$ se reduce a una función identidad [67, 2.3.5]. De igual manera, la función *apd* que aparece en la segunda conclusión de las reglas de computación se reduce a *ap* [67, 2.3.8]. En el caso del círculo, por ejemplo, si para todo $x : \mathbb{S}^1,\ C(x) \equiv A$ entonces para construir una función $f : \mathbb{S}^1 \to A$ basta con asignar $f(base) :\equiv a : A$ y tomar un camino en $p : a =_A a$, de tal manera que la función resultante satisface que $ap_f(loop) = p$ [67, 6.2.5]. En el caso de $\Diamond$ la regla es un poco más complicada porque C posee dos variables, pero la idea es la misma: supongamos que para cada $w : \mathbf{W},\ p : \Diamond P(w)$ tenemos que $C(w,p) \equiv A_w$, entonces para definir una función $f : \prod_{w:\mathbf{W}} \Diamond P(w) \to A_w$ basta con asignar una imagen $f(\diamond(w,n,p)) : A_w$ y un camino $\beta(w,n,p) : f(\diamond(w,n,p)) =_{A_w} f(w, n+1, cl_1(p))$; esta nueva función cumplirá que $ap_{ind_{\Diamond}(\alpha,\beta)} \Big(\delta(w,n,p) \Big) = \beta(w,n,p)$.

Mostremos que los operadores anteriores satisfacen propiedades análogas a los definidos en categorías de bi-Heying.

Proposición 3.3.11. Sean $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$ y $P : \mathbf{W}_{x:A}B(x) \to \mathcal{U}$. Entonces existen inmersiones

$$\sum_{w:\mathbf{W}} P(w) \hookrightarrow \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_1 P(w) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_n P(w) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P(w).$$

Demostración. Como $\Diamond_{n+1} P \equiv \mathbf{Cl}(\Diamond_n P)$, para cada $n : \mathbf{N}$, las inmersiones de la forma

$$\sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_n P(w) \hookrightarrow \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_{n+1} P(w)$$

se obtienen aplicando la proposición 3.3.6. Ahora, dado $n : \mathbf{N}$ queremos una inmersión $\sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_n P(w) \hookrightarrow \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P(w)$. Para esto, en primer lugar definiremos una inmersión

$$inc_n : \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_n P(w) \hookrightarrow \sum_{w:\mathbf{W}} \Big(\sum_{n:\mathbb{N}} \Diamond_n P(w) \Big)$$

y luego la compondremos con $total(\diamond) : \sum_{w:\mathbf{W}} \big(\sum_{n:\mathbb{N}} \Diamond_n P(w) \big) \to \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P(w)$.

Dado cualquier $p : \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_n P(w)$, hacemos

$$inc_n(p) :\equiv \Big(pr_1^{\sum}(p), \big(n, pr_2^{\sum}(p) \big) \Big).$$

Veamos que esta función es una inmersión: si $p_1, p_2 : \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_n P(w)$ entonces

$$\begin{aligned}
\Big(inc_n(p_1) = inc_n(p_2) \Big) &\equiv \bigg(\Big(pr_1(p_1), \big(n, pr_2(p_1)\big) \Big) = \Big(pr_1(p_2), \big(n, pr_2(p_2)\big) \Big) \bigg) \\
&\simeq \sum_{r:pr_1(p_1)=pr_1(p_2)} r_*\Big(\big(n, pr_2(p_1)\big) \Big) = (n, pr_2(p_2)) \\
&\simeq \sum_{r:pr_1(p_1)=pr_1(p_2)} \sum_{s:n=n} s_*\Big(r_*\big(pr_2(p_1)\big) \Big) = pr_2(p_1) \\
&\simeq \sum_{r:pr_1(p_1)=pr_1(p_2)} r_*\Big(pr_2(p_1) \Big) = pr_2(p_2) \\
&\simeq \Big(p_1 = p_2 \Big),
\end{aligned}$$

donde la cuarta equivalencia se debe a que $\mathbb{N}$ es un conjunto y por tanto todos sus caminos son $refl$, así que $s \equiv refl_n$ y s_* es la identidad.

Resta ver, para que $total(\diamond) \circ inc_n : \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_n P(w) \hookrightarrow \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P(w)$ sea efectivamente un inmersión, que para $p_1, p_2 : \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_n P(w)$

$$\Big(inc_n(p_1) = inc_n(p_2) \Big) \simeq \Big(total(\diamond)\big(inc_n(p_1)\big) = total(\diamond)\big(inc_n(p_1)\big) \Big).$$

Ahora bien que $\diamond$ genere $\Diamond P$ significa que en principio $\diamond(w, n, \_)$ nos da una copia exacta de $\Diamond_n P(w)$ en $\Diamond P(w)$; obviamente esta copia puede ser alterada por los caminos extra de la definición altamente inductiva, pero en el caso de $\Diamond P$ estos afectan sólo los cambios de "nivel" de un n a otro, dejando el nivel en sí inalterado. Así, podemos asegurar que $\diamond(w, n, \_)$ es una equivalencia a partir de su construcción misma. Entonces

$$\begin{aligned}
\Big(inc_n(p_1) = inc_n(p_2) \Big) &\equiv \bigg(\Big(pr_1(p_1), \big(n, pr_2(p_1)\big) \Big) = \Big(pr_1(p_2), \big(n, pr_2(p_2)\big) \Big) \bigg) \\
&\simeq \Big((pr_1(p_1), \diamond(pr_1(p_1), n, pr_2(p_1))) = (pr_1(p_2), \diamond(pr_1(p_2), n, pr_2(p_2))) \Big) \\
&\equiv \Big(total(\diamond)\big(inc_n(p_1)\big) = total(\diamond)\big(inc_n(p_1)\big) \Big).
\end{aligned}$$

$\square$

Pasemos ahora a un análogo de 2.2.1.

Proposición 3.3.12. Sea $f : \sum_{w:\mathbf{W}} P(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} Q(w)$. Entonces para cada $\alpha \in \mathbb{N}+1$, existen funciones $f^{\Diamond_\alpha} : \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_\alpha P(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_\alpha Q(w)$.

Demostración. Prueba por inducción sobre α.

- Caso $\alpha \equiv 0$, tomamos $f^{\Diamond_0} \equiv f$.
- Caso $\alpha \equiv S(n)$, con $n : \mathbb{N}$. Aplicando la proposición 3.3.7, tomando como entradas $\Diamond_n P,\ \Diamond_n Q,\ \Diamond_{n+1} Q : \mathbf{W} \to \mathcal{U};\ f^{\Diamond_n} : \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_n P(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_n Q(w)$ y

$$\begin{aligned} cl_1 &: \prod_{w:\mathbf{W}} \Diamond_n Q(w) \to \Diamond_{n+1} Q(w), \\ cl_2 &: \prod_{w:\mathbf{W}} \prod_{g:\prod_{b:B(pr_1(w))} \Diamond_n Q(pr_2(w)(b))} \Diamond_{n+1} Q(w), \end{aligned}$$

  obtenemos $(f^{\Diamond_n})^{\mathbf{Cl}} : \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_{n+1} P(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_{n+1} Q(w)$, a la cual tomaremos por definición como $f^{\Diamond_{n+1}}$.
- Caso $\alpha \equiv \mathbb{N}$. Definimos una función

$$\bar{f^{\Diamond}} : \sum_{w:\mathbf{W}} \sum_{n:\mathbb{N}} \Diamond_n P(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} \sum_{n:\mathbb{N}} \Diamond_n Q(w)$$

  como $\bar{f^{\Diamond}}(w,n,p) :\equiv (f_1^{\Diamond_n}(w), f_2^{\Diamond_n}(p))$. Esta función respeta los nuevos caminos de la definición altamente inductiva 3.3.9, así que induce otra $\sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond Q(w)$, gracias a la observación 3.3.10.

□

También necesitaremos para más adelante que los operadores anteriores conmutan con la compuesta. Recordemos [67, 2.4.1] que dadas dos funciones $f, g : \prod_{x:A} P(x)$, una homotopía entre ellas es una función de tipo

$$\Big(f \sim g\Big) :\equiv \prod_{x:A} \big(f(x) = g(x)\big).$$

Proposición 3.3.13. Sean $f : \sum_{w:\mathbf{W}} P(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} Q(w),\ h : \sum_{w:\mathbf{W}} Q(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} R(w)$. Entonces, para cada $\alpha : \omega + 1$, existe una homotopía $H_\alpha : h^{\Diamond_\alpha} \circ f^{\Diamond_\alpha} \sim (h \circ f)^{\Diamond_\alpha}$.

Demostración. Prueba por inducción sobre α.

- Caso 0, basta tomar, para cada $x : \sum_{w:\mathbf{W}} P(w),\ H_0(x) :\equiv refl_{h(f(x))}$.
- Caso sucesor: supongamos construido H_n. Cada elemento de $b : \Diamond_{S(n)} P(w)$ es de dos formas:

1. $b \equiv cl_1(p)$, con $p : \lozenge_n P(w)$; entonces definimos $H_{S(n)}(w,b) \equiv H_n(w,b)$.
2. $b \equiv cl_2(g)$, con $g : \prod_{b:B(pr_1(w))} \lozenge_n P(pr_2(w)(b))$. Aplicando la proposición 3.3.12 obtenemos

$$\begin{aligned} h^{\lozenge_{S(n)}} \circ f^{\lozenge_{S(n)}}(w,b) &\equiv h^{\lozenge_{S(n)}}\Big(sup\big(pr_1(w), f_1^{\lozenge_n}(pr_2(w))\big), cl_2\Big(f_2^{\lozenge_n} \circ g\Big)\Big) \\ &\equiv \Big(sup\big(pr_1(w), h_1^{\lozenge_n}(f_1^{\lozenge_n}(pr_2(w)))\big), cl_2\Big(h_2^{\lozenge_n} \circ f_2^{\lozenge_n} \circ g\Big)\Big). \end{aligned}$$

De manera análoga

$$\Big(h{\circ}f\Big)^{\lozenge_{S(n)}}(w,b) \equiv \Big(sup\Big(pr_1(w), \big(h{\circ}f\big)_1^{\lozenge_n}(pr_2(w))\Big), cl_2\Big(\big(h{\circ}f\big)_2^{\lozenge_n}{\circ}g\Big)\Big).$$

Observemos que para cada $b : B(pr_1(w))$, $pr_2(w)(b) : \mathbf{W}$ y $g(b) : \lozenge_n P(pr_2(w)(b))$, así que por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} H_n(pr_2(w)(b), g(b)) : &\Big(h_1^{\lozenge_n}(f_1^{\lozenge_n}(pr_2(w)(b)), h_2^{\lozenge_n}(f_2^{\lozenge_n}(g(b)))\Big) = \\ &\Big(\big(h \circ f\big)_1^{\lozenge_n}(pr_2(w)(b)), \big(h \circ f\big)_2^{\lozenge_n}(g(b))\Big). \end{aligned}$$

En particular, por la extensionalidad funcional $h_1^{\lozenge_n}(f_1^{\lozenge_n}(pr_2(w)(\_)) = \big(h \circ f\big)_1^{\lozenge_n}(pr_2(w)(\_))$ y como $pr_1(w) = pr_1(w)$, la proposición 3.2.3 implica

$$sup\Big(pr_1(w), f_1^{\lozenge_n}\big(pr_2(w)\big)\Big) = sup\Big(pr_1(w), \big(h \circ f\big)_1^{\lozenge_n}(pr_2(w))\Big).$$

Como además $h_2^{\lozenge_n}(f_2^{\lozenge_n}(g(\_))) = \big(h \circ f\big)_2^{\lozenge_n}(g(\_))$ por la proposición 3.3.2

$$cl_2\Big(h_2^{\lozenge_n}(f_2^{\lozenge_n}(g(\_)))\Big) = cl_2\Big(\big(h \circ f\big)_2^{\lozenge_n}(g(\_))\Big).$$

Por tanto, $h^{\lozenge_{S(n)}} \circ f^{\lozenge_{S(n)}}(w,b) = \Big(h{\circ}f\Big)^{\lozenge_{S(n)}}(w,b)$ y basta con definir $H_{S(n)}(w,b)$ como algún testigo de esta igualdad.

- Caso $\mathbb{N}$: consecuencia inmediata de la proposición 3.3.12 y los casos anteriores.

□

3.4 Operadores modales y haces

Como ya habíamos mencionado, el operador **Cl** y por tanto los operadores $\{\lozenge_\alpha\}_{\alpha:\omega+1}$, están íntimamente relacionados con la idea de pegar fragmentos locales para formar elementos más globales. Dado que esta es la idea detrás del concepto de haz, puede ser natural preguntarse cuál es la relación entre ambas estructuras. Las siguientes proposiciones están orientadas a dilucidar esta cuestión.

3.4.1 Haces en topologías de Grothendieck

Definición 3.4.1. Dado un tipo $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$, su categoría asociada $\mathcal{C}_{\mathbf{W}_{x:A}B(x)}$ (escrita $\mathcal{C}_{\mathbf{W}}$ cuando no haya riesgo de confusión), está conformada por

- objetos de $\mathcal{C}_{\mathbf{W}_{x:A}B(x)}$: serán los términos de $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$;
- morfismos de $\mathcal{C}_{\mathbf{W}_{x:A}B(x)}$: en primer lugar, para cada objeto $w : \mathbf{W}_{x:A}B(x)$ y cada $b : B(pr_1(w))$ asignamos un único morfismo $pr_2(w)(b) \to w$; en segundo lugar, adjuntamos las identidades y compuestas necesarias.

Así, puede pensarse $\mathcal{C}_{\mathbf{W}}$ como la categoría asociada al orden de $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$.

Definición 3.4.2. Sea $w : \mathbf{W}_{x:A}B(x)$. Para cada $n \leq \mathit{compl}(w)$

- $I^0(w) \equiv \{w\}$;
- $I^{-S(n)}(w) \equiv \{pr_2(x)(c) | x : I^{-n}(w),\ c : B(pr_1(x)\}$.

Resulta natural preguntarse si dos términos iguales de $\mathbf{W}$ tienen las mismas imágenes inversas o si estas son lo suficientemente fuertes para caracterizarlos. El siguiente par de proposiciones trata de dilucidar estas cuestiones.

Proposición 3.4.3. Sean $w, w' : \mathbf{W}$. Entonces para cada $q : w = w'$ existe una biyección $\tau_q^n : I^{-n}(w) \to I^{-n}(w')$ tal que para cada $b : I^{-n}(w)$ existe un camino en $t_q^n(b) : b =_{\mathbf{W}} \tau_q^n(b)$.

Demostración. Sea $q : w = w'$. Definimos la función τ_q^n por inducción sobre n.

- Caso $n = 0$. Aquí $I^0(w) = \{w\}$, $I^0(w') = \{w'\}$, así que basta definir $\tau_q^0(w) :\equiv w'$. El camino en $w = \tau_q^0(w)$ es el mismo q.
- Caso sucesor. Supongamos que hemos definido la función hasta el nivel n y queremos construir $\tau_q^{s(n)} : I^{-s(n)}(w) \to I^{-s(n)}(w')$. Sea $pr_2(w)(c) : I^{-s(n)}(w)$, donde $x : I^{-n}(w)$ y $c : B(pr_1(w))$. Por hipótesis de inducción, existen $\tau_q^n(x) : I^{-n}(w')$ y un camino $t_q^n(x) : x = \tau_q^n(x)$. Gracias a 3.2.3, asociado a este último tenemos los caminos $t_q^n(x)_1 : pr_1(x) = pr_1(\tau_q^n(x))$ y $t_q^n(x)_2 : pr_2(x) = pr_2(\tau_q^n(x)) \circ (t_q^n(x)_1)_*$. Definimos $\tau_q^{s(n)}(pr_2(x)(c)) :\equiv pr_2(\tau_q^n(x))((t_q^n(x)_1)_*(c))$. Dado que $(t_q^n(x)_1)_*(c) : B(pr_1(\tau_q^n(x)))$ y $\tau_q^n(x) : I^{-n}(w')$ tenemos que $\tau_q^{s(n)}(pr_2(x)(c)) : I^{-s(n)}(w')$. Además, gracias a $t_q^n(x)_2$ tenemos un camino en $pr_2(w)(c) = \tau_q^{s(n)}(pr_2(x)(c))$.

□

Proposición 3.4.4. Sean $w : \mathbf{W}$, $n \leq \mathit{compl}(w)$ y $f : I^{-n}(w) \to \mathbf{W}$ tal que para cada $b : I^{-n}(w)$ existe un camino $q_b : b = f(b)$. Entonces existen únicos $\xi(f) : \mathbf{W}$ y $q : w = \xi(f)$ tales que $\tau_q^n = f$ en $I^{-n}(w) \to I^{-n}(\xi(f))$ y $t_q^n(b) = q_b$.

Demostración. Prueba por inducción sobre n:

1. Caso $n = 0$. Como $I^0(w) = \{w\}$, basta tomar $\xi(f) :\equiv f(w)$. Las conclusiones se siguen de la definición de $\tau_{q_w}^0$.

2. Caso sucesor. Sean $f : I^{-s(n)}(w) \to \mathbf{W}$, $pr_2(x)(c) : I^{-s(n)}(w)$ tal que $x : I^{-n}(w)$ y $c : B(pr_1(x))$. Construimos un término $sup(pr_1(x), f_x) : \mathbf{W}$, donde $f_x : B(pr_1(x)) \to \mathbf{W}$ es la asignación $f_x(c) :\equiv f(pr_2(x)(c))$. De esta forma podemos definir $f' : I^{-n}(w) \to \mathbf{W}$ como $f'(x) :\equiv sup(pr_1(x), f_x)$. Dado que por hipótesis, para cada $c : B(pr_1(x))$ tenemos un camino $q_{pr_2(w)(c)} : pr_2(c) = f(pr_2(x)(c))$, la extensionalidad funcional nos garantiza un camino en $pr_2(x) = f_x$ al que denotaremos sugerentemente por $t_q^n(x)_2$. Por la proposición 3.2.3, a $refl_{pr_1(x)}$ y $t_q^n(x)_2$ está asociado un camino $t_q^n(x) : x = f'(x)$. Gracias a la hipótesis de inducción, podemos definir $\xi(f) :\equiv \xi(f')$, lo que nos da un camino $q : w = \xi(f)$. Para cada $pr_2(x)(c) : I^{-s(n)}(w)$

$$\begin{aligned}\tau_q^{s(n)}(pr_2(x)(c)) &\equiv pr_2(\tau_q^n(x))((t_q^n(x)_2)_*(c)) \\ &= pr_2(f'(x))(refl_{pr_1(x)_*}(c)) \\ &= f_x(c) \\ &\equiv f(pr_2(x)(c))\end{aligned}$$

lo que implica que $\tau_q^{s(n)} = f$. Además por la definición de $t_q^n(x)_2$, se tiene que $t_q^n(pr_2(x)(c)) = q_{pr_2(x)(c)}$.

□

$Pr(\mathcal{C}_\mathbf{W})$ será la categoría usual de prehaces sobre $\mathcal{C}_\mathbf{W}$. Definimos los siguientes subprehaces de $\mathcal{C}_\mathbf{W}(\ ,w)$ para cada $n \geq 1$:

$$U_{-n}^w(u) = \begin{cases} \{*\}, & \text{si existe } v : I^{-n}(w),\ u \to v; \\ \emptyset, & \text{otro modo.} \end{cases}$$

Consideramos, para cada $w : \mathbf{W}$, la siguiente familia de subfuntores de $\mathcal{C}_\mathbf{W}(\ ,w)$:

$$\mathcal{L}(w) = \{S \leq \mathcal{C}_\mathbf{W}(\ ,w) | \exists n : \mathbb{N},\ T : U_{-n}^w \to S \text{ transformación natural}\}.$$

En este punto quizás sea conveniente recordar el concepto de sistema localizante.

Definición 3.4.5. [15, Tomo 3, 3.2.1] Un sistema localizante $\mathcal{L}$ sobre una categoría $\mathcal{C}$ consiste en, para cada C en $\mathcal{C}$, una familia $\mathcal{L}(C)$ de subfuntores del representable $\mathcal{C}(\ ,C)$ con la siguiente propiedad: dado un pullback

$$\begin{tikzcd} R_f \arrow[r] \arrow[d, hook] & R \arrow[d, hook] \\ \mathbf{C}(\ ,D) \arrow[r, "\mathbf{C}(\ ,f)"'] & \mathbf{C}(\ ,C) \end{tikzcd}$$

donde $f : D \to C$ es morfismo de $\mathcal{C}$ y $R \in \mathcal{L}(C)$, tenemos que $R_f \in \mathcal{L}(D)$.

Luego, un sistema localizante puede pensarse como una familia que satisface solo el segundo axioma de las topologías de Grothendieck, o una topología de Grothendieck como un sistema localizante “saturado”. La propiedad fundamental que las relaciona es la siguiente:

Proposición 3.4.6. [15, 3.2.12] Sea $\mathcal{L}$ un sistema localizante sobre una categoría $\mathcal{C}$ y $\bar{\mathcal{L}}$ la más pequeña topología de Grothendieck conteniendo a $\mathcal{L}$.

1. La categoría de prehaces separados sobre $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ coincide con la categoría de prehaces separados sobre $(\mathcal{C}, \bar{\mathcal{L}})$.

2. La categoría de haces sobre $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ coincide con la categoría de haces sobre $(\mathcal{C}, \bar{\mathcal{L}})$.

Con estas definiciones, podemos pasar a revisar la estructura de $\mathcal{L}(w)$.

Proposición 3.4.7. La familia $\mathcal{L}(w)$ es un sistema localizante sobre $\mathcal{C}_{\mathbf{W}}$. Si además $\mathbf{W}$ es de aridad acotada entonces $\mathcal{L}(w)$ es una topología de Grothendieck.

Demostración. Sean $S : \mathcal{L}(w)$ y $! : v \to w$. Veamos que $S_! : \mathcal{L}(v)$. Por definición de $\mathcal{L}$, existe $T : U^w_{-n} \to S$. Por la definición de $\mathcal{C}_{\mathbf{W}}$, existe un m tal que $v : I^{-m}(w)$. Sea k el más grande entre m, n. Dado que $S_! \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{W}}(\ ,v)$ es el pullback de $S \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{W}}(\ ,W)$ a lo largo de $\mathcal{C}_{\mathbf{W}}(\ ,!) : \mathcal{C}_{\mathbf{W}}(\ ,v) \to \mathcal{C}_{\mathbf{W}}(\ ,w)$, obtenemos

$$\begin{tikzcd}
U^v_{-k} \arrow[dr, dotted, hook] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& S_! \arrow[r] \arrow[d, hook] & S \arrow[d, hook] \\
& \mathcal{C}_{\mathbf{W}}(\ ,v) \arrow[r, "\mathcal{C}_{\mathbf{W}}(\ ,!)"'] & \mathcal{C}_{\mathbf{W}}(\ ,w)
\end{tikzcd}$$

Observemos también que sin ninguna hipótesis adicional, $\mathcal{C}_{\mathbf{W}}(\ ,w)$ está en $\mathcal{L}(w)$.

Supongamos ahora que $\mathbf{W}$ es de aridad acotada. Vamos a mostrar el tercer axioma de las topologías de Grothendieck: “Sean $w : \mathcal{C}_{\mathbf{W}}$, $R \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{W}}(\ ,w)$ y $S \in \mathcal{L}(w)$; supongamos que para cada $v \in \mathcal{C}_{\mathbf{W}}$ y $f \in S(v)$ tenemos $R_f \in \mathcal{L}(v)$; entonces $R \in \mathcal{L}(w)$”. Como $S \in \mathcal{L}(w)$, existe $U^w_{-m} \to S$. Luego, para todo $v : I^{-m}(w)$ existe un único morfismo $!_v \in S(v)$; dado que para este morfismo $R_{!_v} : \mathcal{L}(v)$, existe a su vez $U^v_{-n_v} \to R_{!_v}$. Por la aridad acotada, podemos considerar el número $n :\equiv \max\{n_v | v : I^{-m}\} + m$. Por construcción, tenemos $U^w_{-n} \to R$ y así $R \in \mathcal{L}(w)$. ☐

Dada la topología de Grothendieck $\mathcal{L}$ sobre la categoría $\mathcal{C}_{\mathbf{W}}$ podemos definir la categoría de haces sobre ellas $Sh(\mathcal{C}_{\mathbf{W}}, \mathcal{L})$ de la manera usual [15, Volumen 3, Definición 3.2.2].

Proposición 3.4.8. Si $P \in Pr(\mathcal{C}_{\mathbf{W}})$ entonces $\Diamond P \in Sh(\mathcal{C}_{\mathbf{W}}, \mathcal{L})$.

Demostración. Sean $w : \mathbf{W}$, $R : \mathcal{L}(w)$ y $\alpha : R \to \Diamond P$. Tomemos n el número natural más pequeño tal que existe $T : U^w_{-n} \to R$. La idea es ir extendiendo recursivamente la compuesta αT a $U^w_{-(n-1)}$, $U^w_{-(n-2)}$, hasta llegar a $U^w_0 \equiv \mathcal{C}_{\mathbf{W}}(\ ,w)$. Así, sean $x : I^{-(n-1)}(w)$ y $c : B(pr_1(x))$. Entonces, dado que $\alpha T(pr_2(x)(c)) : \Diamond P(pr_2(x)(c))$, es de la forma (n_c, p_{n_c}), con $p_{n_c} : \Diamond_{n_c} P(pr_2(x)(c))$. Si $max : \mathbb{N}$ es el máximo del conjunto $\{n_c | c : B(pr_1(x))\}$, podemos definir la función $g : \prod_{c:B(pr_1(x))} \Diamond_{max} P(pr_2(x)(c))$, tal que $g(c) \equiv p_{n_c}$. Así podemos enviar $x \mapsto \diamond(x, max+1, cl_2(g))$ manteniendo la naturalidad de la transformación. Esta extensión es única porque un elemento en $\Diamond P$ está caracterizado completamente por sus proyecciones. □

Proposición 3.4.9. Sean $P : Pr(\mathcal{C}_{\mathbf{W}})$, $Q : Sh(\mathcal{C}_{\mathbf{W}}, \mathcal{L})$ y $f : P \to Q$ una transformación natural entre ellos. Entonces

1. Para cada $n : \mathbb{N}$ existe una única extensión $f^{\Diamond_n} : \Diamond_n P \to Q$ de f;
2. existe una única extensión $f^{\Diamond} : \Diamond P \to Q$ de f.

Demostración. 1. Prueba por inducción sobre n.

- Caso $n = 0$, tomamos $f^{\Diamond_0} \equiv f$;
- Supongamos construido $f^{\Diamond_n} : \Diamond_n P \to Q$. Como para cada $w : \mathbf{W}$, $\Diamond_{S(n)} P(w) \equiv \mathbf{Cl}(\Diamond_n P(w))$, por la regla de eliminación de $\mathbf{Cl}$ basta considerar dos casos:
  (a) $p \equiv cl_1(b)$, con $b : \Diamond_n P(w)$. Entonces tomamos $f^{\Diamond_{S(n)}}(p) \equiv f^{\Diamond_n}(b)$;
  (b) $p \equiv cl_2(g)$, con $g : \prod_{b:B(Pr_1(w))} \Diamond_n P(pr_2(w)(b))$. Entonces para cada $b : B(Pr_1(w))$, $f^{\Diamond_n}(g(b)) : Q(pr_2(w)(b))$ y como Q es un haz, estos elementos tienen un único pegamiento $r : Q(w)$. Así, basta con enviar $p \mapsto r$.

2. Definimos una función $\bar{f^{\Diamond}} : \sum_{n:\mathbb{N}} \Diamond_n P(w) \to Q$ como $\bar{f^{\Diamond}}(n,p) :\equiv f^{\Diamond_n}(p)$. Esta función respeta los nuevos caminos de la definición altamente inductiva de $\Diamond P$, así que induce la $f^{\Diamond}$ deseada.

□

Proposición 3.4.10. La aplicación $\Diamond : Pr(\mathcal{C}_{\mathbf{W}}) \to Sh(\mathcal{C}_{\mathbf{W}}, \mathcal{L})$ es un funtor.

Demostración. Dado un morfismo $P \to P'$ en $Pr(\mathcal{C}_{\mathbf{W}})$, basta aplicar la proposición 3.4.9 a la compuesta $P \to P' \hookrightarrow \Diamond P'$; la funtorialidad se tiene por construcción. □

Teorema 3.4.11. El funtor $\Diamond : Pr(\mathcal{C}_{\mathbf{W}}) \to Sh(\mathcal{C}_{\mathbf{W}}, \mathcal{L})$ es el adjunto izquierdo a la inclusión $i : Sh(\mathcal{C}_{\mathbf{W}}, \mathcal{L}) \to Pr(\mathcal{C}_{\mathbf{W}})$.

Demostración. Para cada $P : Pr(\mathcal{C}_{\mathbf{W}})$, $Q : Sh(\mathcal{C}_{\mathbf{W}}, \mathcal{L})$ basta con establecer una biyección natural:

$$Sh(\mathcal{C}_{\mathbf{W}}, \mathcal{L})(\Diamond P, Q) \simeq Pr(\mathcal{C}_{\mathbf{W}})(P, Q).$$

Si $i : P \to \Diamond P$ es la inclusión canónica, definimos una función

$$\gamma : Sh(\mathcal{C}_{\mathbf{W}}, \mathcal{L})(\Diamond P, Q) \to Pr(\mathcal{C}_{\mathbf{W}})(P, H)$$

como $\gamma(t) \equiv ti$. En la dirección inversa, tomamos

$$\delta : Pr(\mathcal{C}_{\mathbf{W}})(P, Q) \to Sh(\mathcal{C}_{\mathbf{W}}, \mathcal{L})(\Diamond P, Q)$$

la aplicación definida en la proposición 3.4.9. Las aplicaciones γ, δ son inversas y naturales. □

3.4.2 Cuasi-haces con restricciones parciales

La discusión anterior es útil para averiguar la relación de los operadores modales con los haces. Sin embargo, para nuestros propósitos futuros adolece de dos fallas. En primer lugar, asume de entrada que los P son prehaces. Nos gustaría construir explícitamente la función restricción. En segundo lugar, no deja muy claro el comportamiento de la función restricción cuando el operador es $\Diamond_\alpha$, con $\alpha \neq \omega$. Como veremos, cuando P es un tipo dependiente arbitrario, sólo una parte de $\Diamond_\alpha P(w)$ puede restringirse y su alcance está limitado por diversos factores. Por eso hablamos de restricciones parciales. Sin embargo, cuando estas tienen sentido, el comportamiento de $\Diamond_\alpha P(w)$ es básicamente el de un haz, por lo que podríamos hablar de "cuasi-haces".

Definición 3.4.12. Sean $P : \mathbf{W} \to \mathcal{U},\ \alpha : \omega + 1$. Para cada $n \leq \alpha$ construimos $R^n(\Diamond_\alpha P) : \mathbf{W} \to \mathcal{U}$ por recursión sobre n de la siguiente manera:

- Caso $n = 0$. Tomamos $R^0(\Diamond_\alpha P) :\equiv \Diamond_\alpha P$.
- Caso sucesor. Supongamos que ya hemos definido $R^{n-1}(\Diamond_\alpha P)$. Entonces para cada $w : \mathbf{W}$ hacemos

$$R^n(\Diamond_\alpha P)(w) :\equiv \sum_{p : \Diamond_\alpha P(w)} \left(\sum_{g : \prod_{b : B(pr_1(w))} R^{n-1}(\Diamond_{\alpha - n} P)(pr_2(w)(b))} p = cl_2(g) \right).$$

Cada término de $R^n(\Diamond_\alpha P)(w)$ es por definición $r \equiv (x, y, z)$, tal que $pr_1(r) \equiv x : \Diamond_\alpha P(w)$. Sin embargo, por un abuso de notación, trataremos a $R^n(\Diamond_\alpha P)$ como si fuera una parte (en el sentido conjuntista) de $\Diamond_\alpha P$. La idea es que ella será el subtipo de $\Diamond_\alpha P$ consistente de aquellos términos formados mediante la aplicación al menos n veces seguidas del constructor cl_2 de la definición de **Cl**. Como en $\Diamond_\alpha P$ este ha sido aplicado a lo más α veces, en 3.4.12 asumimos que $n \leq \alpha$.

Proposición 3.4.13. Sean $P : \mathbf{W} \to \mathcal{U},\ \alpha : \omega + 1$. Entonces para cada $w : \mathbf{W}$ y $n \leq m$ en $\mathbb{N}$ tenemos que $R^n(\Diamond_\alpha P)(w) \geq R^m(\Diamond_\alpha P)(w)$.

Expliquemos un poco cuál es la idea subyacente en todo esto. Sea $cl_2(g) : \Diamond_\alpha P(w)$, donde $g : \prod_{b : B(pr_1(w))} \Diamond_{\alpha - 1} P(pr_2(w)(b))$. Por la definición de $\mathbf{W}$, w

es el *sup* de los $pr_2(w)(b)$, por lo que tiene sentido decir que restringimos un elemento que viva en el nivel w a los niveles $pr_2(w)(b)$. Para $cl_2(g)$ lo natural es evaluar g en b y así $g(b) : \Diamond_{\alpha-1}P(pr_2(w)(b))$. Gracias a las inmersiones canónicas 3.3.11, una copia de $g(b)$ vivirá en $\Diamond_\alpha P(pr_2(w)(b))$, que por un abuso de notación seguiremos nombrando $g(b)$. Como una función es determinada por sus imágenes, si tuviéramos una g' tal que para cada b, $g(b) = g'(b)$ entonces $g = g'$, es decir, esta forma de restricción tiene buenas propiedades de pegamiento. Ahora bien, si cada $g(b)$ fuera a su vez de la forma $cl_2(g_b)$, es decir, $cl_2(g) : R^2(\Diamond_\alpha P)(w)$ podríamos volver a repetir el proceso, siempre y cuando la complejidad fuera adecuada. Así, tenemos una buena restricción pero dependiendo de n, α y $compl(w)$.

Proposición 3.4.14. Sean $P : \mathbf{W} \to \mathcal{U},\ \alpha : \omega + 1$ y $w : \mathbf{W}$. Entonces

1. Para cada $n \leq \alpha$ y $s : I^{-n}(w)$ existe una función $|_s : R^n(\Diamond_\alpha P)(w) \to \Diamond_\alpha P(s)$ que cumple
   - Para todo $x : R^0(\Diamond_\alpha P)(w), x|_w = x$.
   - Sean $m, o : \mathbb{N}$ tales que $m + o = n$. Sea $t : I^{-m}(w)$ tal que $s : I^{-o}(t)$. Si $x : R^n(\Diamond_\alpha P)(w)$ entonces $x|_s = \big(x|_t\big)|_s$.
2. Sea $n \leq \alpha$. Dado $f : \prod_{c:I^{-n}(w)} \Diamond_{\alpha-n}P(c)$ existe un único $x : R^n(\Diamond_\alpha P)(w)$ tal que $x|_c = f(c)$.

Demostración. 1. Prueba por inducción sobre n:

- Si $compl(w) = 0$ entonces necesariamente debemos tener $n = 0$ y así $s \equiv w$. Tomamos $|_s$ como la identidad de $\Diamond_\alpha P(w)$.
- Supongamos que $s(n) \leq min\{\alpha, compl(w)\}$ y que ya hemos definido la restricción en el caso n. Por definición $I^{-s(n)}(w) :\equiv \{pr_2(y)(c) | y : I^{-n}(w), c : B(pr_1(y))\}$. Sea $x : R^{s(n)}(\Diamond_\alpha P)(w)$. Dado $y : I^{-n}(w)$, como en particular $x : R^n(\Diamond_\alpha P)(w)$, podemos hacer $x|_y : \Diamond_\alpha P(y)$. Pero $x|_y$ debe estar en $R^1(\Diamond_\alpha P)(y)$, así que debe existir una $g : \prod_{b:B(pr_1(w))} \Diamond_{\alpha-1}P(pr_2(w)(b))$ tal que $x|_y = cl_2(g)$. Para cada $pr_2(w)(b)$, definimos $x|_{pr_2(w)(b)} \equiv \big(x|_y\big)|_{pr_2(w)(b)} = \big(cl_2(g)\big)|_{pr_2(w)(b)} \equiv cl_1(g(b))$.

2. Prueba por inducción sobre n:

- Caso $n = 0$. Como $I^0 \equiv \{w\}$ entonces $f(w) \equiv x$ de tipo $\Diamond_\alpha P(w)$. Por tanto $x|_w = x \equiv f(w)$. Por la funcionalidad de f, este x debe ser necesariamente único.
- Supongamos que la propiedad vale para n, a ver el caso $s(n) \equiv n+1$. Teniendo en mente que $I^{-s(n)}(w) :\equiv \{pr_2(y)(c) | y : I^{-n}(w), c : B(pr_1(y))\}$, consideremos $f : \prod_{c:I^{-s(n)}} \Diamond_{\alpha-s(n)}P(c)$. Manteniendo fijo $y : I^{-n}(w)$, tomemos $f_y : \prod_{c:B(pr_1(y))} \Diamond_{\alpha-s(n)}P(pr_2(y)(c))$ definida como $f_y(c) :\equiv f(pr_2(y)(c))$. La regla $\mathbf{Cl_{Int}}$ nos dice que tenemos $cl_2(f_y) : \Diamond_{\alpha-n}P(y)$, así que podemos definir $f' : \prod_{y:I^{-n}(w)} \Diamond_{\alpha-n}P(y)$

como $f'(y) \equiv cl_2(f_y)$. La hipótesis de inducción implica que existe un único $x : R^n(\Diamond_\alpha P)(w)$ tal que $x|_y \equiv f'(y) \equiv cl_2(f_y)$. Dado que $pr_2(y)(c) : I^{-s(n)}(w)$, tenemos

$$x|_{pr_2(y)(c)} = \Big(x|_y\Big)|_{pr_2(y)(c)} \equiv \Big(cl_2(f_y)\Big)|_{pr_2(y)(c)} \equiv f_y(c) \equiv f(pr_2(y)(c)).$$

Para ver la unicidad sean $x, x' : R^n(\Diamond_\alpha P)(w)$ tales que para toda $u : I^{-s(n)}(w)$, $x|_u = x'|_u$. Dado $y : I^{-n}(w)$ definimos un par de funciones $g^y_x,\ g^y_{x'} : \prod_{c:B(pr_1(y))} \Diamond_{\alpha-n} P(pr_2(y)(c))$ como $g^y_x(c) :\equiv x|_{pr_2(y)},\ g^y_{x'}(c) :\equiv x'|_{pr_2(y)}$. Por hipótesis para todo $c : B(pr_1(y), g^y_x(c) = g^y_{x'}(c)$ y así por extensionalidad funcional $g^y_x = g^y_{x'}$. Ahora por $\mathbf{Cl_{Int}}$, $x|_y = v(g^y_x),\ x'|_y = v(g^y_{x'})$, por tanto para toda $y : I^{-n}(w), x|_y = x'|_y$. Por hipótesis de inducción, concluimos que $x = x'$.

□

3.5 Espacios pragmáticos en HoTT

Sea $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$ un $\mathbf{W}$-tipo, cuyos términos son interpretados como afirmaciones o ideas hechas respecto a un signo. Unas interpretaciones del signo serán entonces tipos de la forma $\sum_{a:\mathbf{W}} P(a)$, afirmaciones o ideas sobre el signo junto con sus correspondientes justificaciones. Dado que P no tiene que ser necesariamente una mera proposición, un término puede tener en general varias justificaciones. La idea es trabajar manipulando dichas justificaciones para ampliar nuestro entendimiento del signo. De esta manera, en $\sum_{a:\mathbf{W}} \Diamond_1 P(a)$ mantenemos las ideas y sus justificaciones que teníamos originalmente, pero le adjuntamos las deducciones que podemos hacer a partir de ellas; en $\sum_{a:\mathbf{W}} \Diamond_2 P(a)$ adjuntamos las deducciones que podemos hacer a parir de $\Diamond_1 P(a)$; y así sucesivamente vamos llevando nuestra interpretación hasta sus últimas consecuencias lógicas, representadas en $\sum_{a:\mathbf{W}} \Diamond P(a)$.

Empezamos definiendo espacios análogos a los de 2.3 en teoría homotópica. Estos, al igual que aquellos, son concebidos como espacios de interpretantes. El primer paso de su proceso de formación es similar: juntamos todos los interpretantes. En el capítulo 2 fue por medio de coproductos disjuntos y aquí lo haremos definiendo un nuevo tipo. Después, pasamos a relacionarlos entre sí: antes utilizamos morfismos parciales y ahora emplearemos caminos. Queremos resaltar el aspecto subjetivo de estas relaciones, por eso diremos que ellas están representadas por una familia C arbitraria. Estos dos pasos se apreciarán en los ejemplos del capítulo 4.

Definición 3.5.1.
- $\mathbf{E_{For}}$ Dados I un tipo, $P : I \to \mathcal{U}$ un tipo dependiente tal que para $i : I,\ P(i) : \mathbf{W} \to \mathcal{U},\ \alpha : \omega + 1$ y una familia D, podemos construir el espacio pragmático asociado a P en el nivel α, denotado como $\mathbf{E}^\alpha_{P,D} : \mathbf{W} \to \mathcal{U}$.
- $\mathbf{E_{Int}}$ $\mathbf{E}^\alpha_{P,D}$ está generado por las funciones

- $e : \prod_{i:I} \prod_{w:\mathbf{W}} \Diamond_\alpha P_i(w) \to \mathbf{E}^\alpha_{P,D}$;
- una familia de caminos $D = \{d_t\}_{t:T}$, tal que $d_t : e(i,w,p) = e(j,w',p')$, para algunos $i,j : I,\ w,w' : \mathbf{W},\ p : \Diamond_\alpha P_i(w),\ p' : \Diamond_\alpha P_j(w')$.

- $\mathbf{E_{Eli}}$ Sea $C : \mathbf{E}^\alpha_{P,D} \to \mathcal{U}$. Supongamos que existen funciones:

  1. $\alpha : \prod_{i:I} \prod_{w:\mathbf{W}} \prod_{p:\Diamond_\alpha P_i(w)} C(e(i,w,p))$;
  2. $\beta : \prod_{d_t:D} transport^C(d_t, \alpha(e(i,w,p)) = \alpha(e(j,w',p'))$.

  Entonces existe una función $ind_{\mathbf{E}^\alpha_{P,D}}(\alpha,\beta) : \prod_{m:\mathbf{E}^\alpha_{P,D}} C(m)$.

- $\mathbf{E_{Com}}$ En las condiciones de la regla anterior, para cada $w : \mathbf{W},\ x : \mathbf{V}(w)$

$$ind_{\mathbf{E}^\alpha_{P,D}}(\alpha,\beta,e(i,w,p)) \equiv \alpha(i,w,p) : C(e(i,w,p))$$

  y dado además un $d_t : D$

$$apd_{ind_{\mathbf{E}^\alpha_{P,D}}(\alpha,\beta)}(d_t) = \beta(d_t).$$

Escribiremos muchas veces $\mathbf{E}^\alpha$ o aún $\mathbf{E}$, cuando no creamos necesario especificar todos los datos de la definición anterior. Como ya es costumbre, empezamos caracterizando el tipo identidad de este nuevo constructor.

Proposición 3.5.2. Sean $\mathbf{E}^\alpha$ un espacio pragmático y $w,w' : \mathbf{W}$ tales que existe un camino $q : w = w'$. Denotemos con $q_1 : pr_1(w) = pr_2(w')$ y $q_2 : pr_2(w')q_{1_*} = pr_2(w)$ los caminos asociados a q por la proposición 3.2.3. Si $n \leq \alpha$ y $x : R^n(\Diamond_\alpha P_i)(w),\ x' : R^n(\Diamond_\alpha P_i)(w')$ entonces

$$e_i(w,x) = e_i(w',x') \simeq \prod_{b:I^{-n}(w)} e_i(b, x|_b) = e_i(\tau(b), x'|_{\tau(b)}),$$

donde $\tau : I^{-n}(w) \to I^{-n}(w')$ es la función de 3.4.3.

Demostración. Dividimos la prueba en pasos para facilitar su lectura.

1. Fijando $w : \mathbf{W},\ x : R^n(\Diamond_\alpha P_i)(w)$, definimos una función

$$hrestr : \prod_{(w',q):\sum_{u:\mathbf{W}} w=u} \prod_{x':R^n(\Diamond_\alpha P_i)(w')} \left(e_i(w,x) = e_i(w',x') \to \prod_{b:I^{-n}(w)} e_i(b,x|_b) = e_i(\tau(b), x'|_{\tau(b)}) \right)$$

por inducción sobre caminos, así que nos reducimos a trabajar con

$$hrestr(w, refl_w, x) : \left(e_i(w,x) = e_i(w,x) \to \prod_{b:I^{-n}(w)} e_i(b,x|_b) = e_i(b,x|_b) \right)$$

y defininimos

$$hrestr(w, refl_w, x, refl_{e_i(w,x)}) :\equiv \left(b \mapsto refl_{e_i(b,x|_b)} \right).$$

2. Definimos para $n \leq \alpha$, la familia de tipos $A_i^n : \mathbf{W} \to \mathcal{U}$, como
$$A_i^n(w) \equiv \sum_{u:\mathbf{W}} \sum_{q:w=u} R^n(\Diamond_\alpha P_i)(u).$$
Entonces para cada $w : \mathbf{W}$, el tipo
$$\sum_{(w',q,x'):A_i^0(w)} e_i(w,x) = e_i(w',x')$$
es contraíble. Basta utilizar el mismo argumento de [67, 3.11.8].

3. Veamos que el tipo
$$\beta :\equiv \sum_{(w',q',x'):A_i^n(w)} \prod_{b:I^{-n}(w)} e_i(b, x|_b) = e_i(\tau(b), x'|_{\tau(b)})$$
es contraíble.

Consideremos el siguiente tipo
$$\alpha :\equiv \prod_{b:I^{-n}(w)} \sum_{(w',q',y):A_i^0(b)} e_i(b, x|_b) = e_i(w', y').$$
Definimos una función $r : \alpha \to \beta$: Dada $f : \alpha$, entonces para cada $b : I^{-n}(w)$
$$f(b) \equiv \Big((w_b, q_b, y_b), g_b\Big).$$
Enviamos este término a
$$\Big(\big(\xi(W), q, K\big), b \mapsto g_b\Big),$$
donde $f : I^{-n}(w) \to \mathbf{W}$ está definida como $f(b) \equiv w_b$; $\xi(f) : \mathbf{W}$, $p : w = \xi(W)$ son construidos conforme a la proposición 3.4.4; y $K : R^n(\Diamond_\alpha P)(w)$ es tal que $K|_{w_b} \equiv y_b$ está definido por la proposición 3.4.14.

En la dirección inversa, definimos $s : \beta \to \alpha$ la cual toma un término de la forma $\Big((w', q, x'), g\Big) : \beta$ y lo envía a la función
$$b \mapsto \Big(\big(\tau_q^n(b), t_q^n(b), x'|_{\tau_q(b)}\big), g(b)\Big)$$
donde $t : b = \tau_{q'}(b)$ es el camino dado por 3.4.3.

Veamos que r es un retracción, es decir, que existe una homotopía $\epsilon : \prod_{z:\beta}(r(s(z)) = z)$. Así, dado $\Big((w', q, x'), g\Big) : \beta$ tenemos
$$\begin{aligned} rs\Big((w', q, x'), g\Big) &\equiv r\left(\lambda b.\Big(\big(\tau_q^n(b), t_q^n(b), x'|_{\tau_q(b)}\big), g(b)\Big)\right) \\ &\equiv \left(\Big(\xi(\lambda b.\tau_q(b)), p, K\Big), g\right). \end{aligned}$$

La igualdad entre $\big((w', q, x'), g\big)$ y $\Big(\big(\xi(\lambda b.\tau_q(b)), p, K\big), g\Big)$ se sigue de las proposiciones 3.4.4 y 3.4.14.

Por otro lado, el tipo α es contraíble, dado que cada

$$\sum_{(w',q',y):A_i^0(b)} e_i(b, x|_b) = e_i(w', y')$$

es contraíble como mostramos en el paso anterior y el tipo de las funciones dependientes sobre una familia de tipos contraíbles es contraíble [67, Lema 3.11.6, Teorema 4.9.4]. Así β es una retracción de un tipo contraíble y por tanto ella también es contraíble [67, Lema 3.11.7].

4. La función de tipo

$$\left(\sum_{(w',q',x'):A_i^n(w)} e_i(w, x) = e_i(w', x')\right) \to \beta$$

definida por inducción sobre tipos de pares dependientes como

$$\Big((w', q', x'), r\Big) \mapsto \Big(w', hrestr(w', q', x', r)\Big)$$

es una equivalencia. En efecto, tanto su dominio (por el paso 2) como su codominio (por el paso anterior) son tipos contraíbles, por lo que la función entre ellos es contraíble y por tanto una equivalencia [67, pp. 137,138].

5. La función del paso 4 es la función total asociada a la función fibrada $hrest$. Por tanto como $total(hrest)$ es una equivalencia, $hrest$ también lo es [67, Teorema 4.7.7], como queríamos mostrar.

□

3.5.1 Conceptos arquetípicos

A la hora de hablar de la interpretación de un signo hay que considerar dos dimensiones, a las cuales utilizando libremente la nomenclatura de Peirce, llamaremos amplitud y profundidad[3]. La amplitud se refiere al tamaño de la parte del signo que capta una interpretación dada. En términos de los espacios pragmáticos del capítulo anterior, la amplitud es la extensión de las regiones que manipulamos en el algoritmo cenopitagórico; por tanto nuestro objetivo será maximizar su tamaño en aras a conseguir una comprensión óptima del signo con que estamos trabajando. La profundidad es explicada por Peirce en los siguientes términos "Cuando hablamos de la profundidad, o significación, de un signo, estamos recurriendo a la abstracción hipostática, ese proceso por el que consideramos un pensamiento como una cosa, y hacemos a un signo

[3] *La base del pragmatismo en las ciencias normativas* (1906) [57].

interpretante del objeto de un signo"[4]. En otras palabras, un signo S_1 será más profundo que S_2 si S_1 da origen a S_2 en la mente del intérprete mediante algún procedimiento lógico. En este modelo, $\sum_{a:A} P(a)$ será más profundo que $\sum_{a:A} Q(a)$ si $\sum_{a:\mathbf{W}} P(a)$ da origen a $\sum_{a:\mathbf{W}} Q(a)$ mediante una iteración de **Cl**. Por la definición de esta operación, la profundidad en este sentido lógico está estrechamente ligada con la profundidad en el orden asociado a **W**. De este punto de vista, ¿cuáles son las interpretaciones más profundas? Hagamos un experimento sencillo. Sea $P : \mathbf{W} \to \mathcal{U}$ un tipo dependiente que está habitado en todos los términos minimales y deshabitado en los demás. Dado que todos los elementos de **W** son construidos a partir de funciones que eventualmente terminan en términos minimales, conforme n va creciendo, $\Diamond_n P$ va dando justificaciones a más y más términos, hasta que en $\Diamond P$ tenemos pruebas de todo **W**. Los términos minimales funcionan en cierto sentido como conceptos arquetípicos que dan origen a los demás. Sin embargo, este argumento que es extremadamente sencillo en el caso de una interpretación, se complica considerablemente cuando hay varias de ellas. Nuestro objetivo en este apartado es extenderlo al caso general, es decir, mostrar que aun cuando haya múltiples interpretantes, el trabajo con los conceptos arquetípicos es suficiente para obtener una comprensión plena del signo.

Sea $V : \mathbf{W} \to \mathcal{U}$ un tipo dependiente tal que para cada $w : \mathbf{W}$

1. si $isMin(w)$, entonces $V(w)$ estará habitado;
2. si $\neg isMin(w)$, entonces $V(w)$ será vacío.

Como habíamos mencionado anteriormente, $\Diamond V$ tendrá pruebas para todos los términos de **W**. Como utilizaremos diversos operadores $\Diamond$ a lo largo de esta sección emplearemos la notación $\mathbf{V} :\equiv \Diamond V$ y v para el constructor $\diamond \circ cl_2$ de las definiciones 3.3.1 y 3.3.9. Creemos que para evitar confusiones es conveniente dar una definición explicita de **V**.

Definición 3.5.3. 1. $\mathbf{V_{For}}$ Para cada $\mathbf{W}_{x:A}B(x)$ y

$$N : compl_0(\mathbf{W}_{x:A}B(x)) \to \mathcal{U},$$

tal que cada $N(w)$ está habitado, existe un tipo dependiente

$$\mathbf{V}_N{}^5 : \mathbf{W}_{x:A}B(x) \to \mathcal{U}.$$

2. $\mathbf{V_{Int}}$ Sea $w : \mathbf{W}_{x:A}B(x)$. Entonces
   (a) si $isMinimal(w)$, entonces $\mathbf{V}(w) :\equiv N(w)$;
   (b) si $\neg isMinimal(w)$, entonces para cada $g : \prod_{b:Pr_1(w)} \mathbf{V}(pr_2(w)(b))$ existe $v(g) : \mathbf{V}(w)$.
3. $\mathbf{V_{Eli}}$ Sea $C : \prod_{w:\mathbf{W}_{x:A}B(x)} \mathbf{V}(w) \to \mathcal{U}$. Supongamos para cada $w : \mathbf{W}$ que

[4] Ibid.

[5] El cual denotaremos como **V** dado que no va a haber riesgo de confusión.

(a) si $isMinimal(w)$ y $p : N(w)$, existe $\alpha(w,p) : C(w)(p)$;

(b) si $\neg isMinimal(w)$ y $g : \prod_{b:Pr_1(w)} \mathbf{V}(pr_2(w)(b))$, existe $\beta(w,g) : C(w)(v(g))$.

Entonces existe $ind_{\mathbf{V}}(\alpha,\beta) : \prod_{w:\mathbf{W}_{x:A}B(x)} \prod_{p:\mathbf{V}(w)} C(w)(p)$.

4. $\mathbf{V_{Com}}$ En las condiciones de la regla anterior, para cada $w : \mathbf{W}$

(a) si $isMinimal(w)$ y $p : N(w)$, entonces

$$ind_{\mathbf{V}}(\alpha,\beta)(w,p) \equiv \alpha(w,p) : C(w)(p);$$

(b) si $\neg isMinimal(w)$ y $g : \prod_{b:Pr_1(w)} \mathbf{V}(pr_2(w)(b))$, entonces

$$ind_{\mathbf{V}}(\alpha,\beta)(w,v(g)) \equiv \beta(w,g) : C(w)(v(g)).$$

La siguiente proposición dice que $\mathbf{V}$ se comporta básicamente como un haz.

Teorema 3.5.4. 1. Dado cualquier morfismo $s \to w$ en $\mathcal{C}_{\mathbf{W}}$, existe una función $|_s : \mathbf{V}(w) \to \mathbf{V}(s)$ que cumple:

- para todos $w : \mathbf{W}$ y $x : \mathbf{V}(w)$, $x|_w = x$,
- para todos $t \to s \to w$ y $x : \mathbf{V}(w)$, $x|_t = \big(x|_s\big)|_t$.

2. Dado $f : \prod_{c:I^{-n}(w)} \mathbf{V}(c)$ (definición 3.4.2) existe un único $x : \mathbf{V}(w)$ tal que $x|_c = f(c)$.

Demostración. Esto es una consecuencia de la proposición 3.4.14. Lo único que necesitamos probar es que para cada $w : \mathbf{W}$ y $n : \mathbb{N}$ tenemos que $R^n(\mathbf{V})(w) = \mathbf{V}(w)$. Podemos asumir que $compl(w) > 0$, dado que cuando es 0 el resultado es trivial. Hacemos la prueba por inducción sobre n:

1. Caso $n = 0$. Por definición $R^0(\mathbf{V}) \equiv \mathbf{V}$.

2. Supongamos que la propiedad vale para n, es decir, que para cada w, $R^n(\mathbf{V})(w) = \mathbf{V}(w)$. Entonces por la definición 3.4.12 tenemos que

$$R^n(\mathbf{V})(w) :\equiv \sum_{p:\mathbf{V}(w)} \left(\sum_{g:\prod_{b:B(pr_1(w))} \mathbf{V}(pr_2(w)(b))} p = v(g) \right).$$

Pero por la reglas $\mathbf{V_{Int}}$, $\mathbf{V_{Eli}}$ podemos asumir que cada $p : \mathbf{V}(w)$ es de la forma $v(g)$ para $g : \prod_{b:B(pr_1(w))} \mathbf{V}(pr_2(w)(b))$.

□

Esta forma de representar significa que

1. verdades generales pueden ser restringidas, para obtener resultados particulares;

2. fragmentos locales de verdad pueden ser pegados para obtener nuevos resultados.

Ahora introduciremos una familia de múltiples interpretantes P_i que colectivamente van a tener la misma información que $\mathbf{V}$ en los términos minimales.

Definición 3.5.5. Sean I un tipo y $P : I \to \mathcal{U}$ un tipo dependiente tal que para cada $i : I,\ P(i) : \mathbf{W} \to \mathcal{U}$. Diremos que P cubre minimalmente a $\mathbf{V}$ si para cada $w : \mathbf{W}$ tenemos

1. si $isMin(w)$, entonces $\mathbf{V}(w) \simeq \sum_{i:I} P(i)(w)$;
2. si $\neg isMin(w)$, entonces $\prod_{i:I} \neg P(i)(w)$.

Los $\Diamond_\alpha P_i$ originan subtipos de $\sum_{w:\mathbf{W}} \mathbf{V}(w)$.

Proposición 3.5.6. Para todos $i : I,\ \alpha : \omega + 1$ existe una inmersión canónica $im^{\Diamond_\alpha} : \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_\alpha P_i(w) \hookrightarrow \sum_{w:\mathbf{W}} \mathbf{V}(w)$.

Demostración. Prueba por inducción sobre α.

- En el caso $\alpha \equiv 0$, sea $h : \prod_{w:compl_0} \sum_{i:I} P(i)(w) \to \mathbf{V}(w)$ la familia de equivalencias dada por la definición 3.5.5. Entonces definimos $im : \prod_{i:I} \Big(\sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_\alpha P_i(w) \hookrightarrow \sum_{w:\mathbf{W}} \mathbf{V}(w)\Big)$ como $im(i)(w,p) :\equiv (w, h(w)(i,p))$.

$$\begin{aligned}(w,p) = (w',p') &\simeq \sum_{q:w=w'} q_*(p) = p' \\ &\simeq \sum_{q:w=w'} q_*\Big(h(w)(i,p)\Big) = h(w')(i,p') \\ &\simeq \Big(w, h(w)(i,p)\Big) = \Big(w', h(w')(i,p')\Big)\end{aligned}$$

  donde en la segunda equivalencia utilizamos el hecho que h es una equivalencia junto con inducción sobre caminos.

- Caso $\alpha \equiv S(n)$, con $n : \mathbb{N}$. Aplicando la proposición 3.3.7 con entradas $\Diamond P,\ \mathbf{V},\ \mathbf{V};\ im^{\Diamond_n} : \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_n P(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} \mathbf{V}(w)$ y

$$\begin{aligned} id &: \prod_{w:\mathbf{W}} \mathbf{V}(w) \to \mathbf{V}(w) \\ v &: \prod_{w:\mathbf{W}} \prod_{g:\prod_{b:B(pr_1(w))} \mathbf{V}(pr_2(w)(b))} \mathbf{V}(w), \end{aligned}$$

  obtenemos una función $(im^{\Diamond_n})^{\mathbf{Cl}} : \sum_{w:\mathbf{W}} \mathbf{Cl}(\Diamond_n P)(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} \mathbf{V}(w)$, a la cual tomaremos como $im^{\Diamond_{S(n)}}$. Como $im^{\Diamond_n},\ id,\ v$ son inmersiones, las dos últimas con imágenes disyuntas, la misma proposición 3.3.7 nos garantiza que $im^{\Diamond_{S(n)}}$ es una inmersión.

- Caso $\alpha \equiv \mathbb{N}$. Definimos una función $\bar{im}^{\Diamond} : \prod_{n:\mathbb{N}} \prod_{w:\mathbf{W}} \Diamond_n P(w) \to \mathbf{V}(w)$ como $\bar{im}^{\Diamond}(n, w, p) \equiv im^{\Diamond_n}(w, p)$. Ella respeta los nuevos caminos de la definición 3.3.9, por lo que gracias a la observación 3.3.10 induce la $im^{\Diamond}$ buscada.

□

Nuestro objetivo es encontrar condiciones para que la información que nos aportan los $\Diamond P_i$ sea equivalente a la de $\mathbf{V}$.

Definición 3.5.7. Sean M un tipo y $f : M \to \mathcal{U}$ un tipo dependiente tal que para cada $m : M$, $f(m) : \sum_{w \in \mathbf{W}} \mathbf{V}(w) \to \sum_{w \in \mathbf{W}} \mathbf{V}(w)$. Denotemos con $f(m)_1$, $f(m)_2$ la primera y la segunda componente de $f(m)$, es decir, para cada $(w, x) : \sum_{w \in \mathbf{W}} V(w)$ tenemos $f(m)(w, x) \equiv \Big(f(m)_1(w), f(m)_2(x)\Big)$. Diremos que f es bien comportada minimalmente si cumple:

1. Las funciones $f(m)_1$, $f(m)_2$ respetan los constructores de sus respectivos dominios, es decir, para cada $w : \mathbf{W}$ tenemos $f(m)_1(w) = sup(pr_1(w), f(m)_1 \circ pr_2(w))$ y para cada $v(g) : \mathbf{V}(w)$ tenemos $f(m)_2(v(g)) = v(f(m)_2 \circ g)$.

2. Para cada $i : I$ existen $j : I$ y $l(f(m), i) : \sum_{w:\mathbf{W}} P_i(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} P_j(w)$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \sum_{w:\mathbf{W}} P_i(w) \arrow[r, "l(f(m),i)"] \arrow[d, "im(i)"'] & \sum_{w:\mathbf{W}} P_j(w) \arrow[d, "im(j)"] \\ \sum_{w:\mathbf{W}} \mathbf{V}(w) \arrow[r, "f(m)"'] & \sum_{w:\mathbf{W}} \mathbf{V}(w) \end{tikzcd}$$

   En términos tipo-teóricos, esto se expresa mediante un homotopía $B : \prod_{r:\sum_{w:\mathbf{W}} P_i(w)} im(j)\Big(l(f(m), i)(r)\Big) = f(m)\Big(im(i)(r)\Big)$.

3. Para todas $i, j : I$ existen $k : I$, $m_1, m_2 : M$ tales que

$$l(f(m_1), i) : \sum_{w:\mathbf{W}} P_i(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} P_k(w),$$
$$l(f(m_2), j) : \sum_{w:\mathbf{W}} P_j(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} P_k(w).$$

Proposición 3.5.8. Si f es bien comportada minimalmente, entonces

1. Para todos $m : M$, $i : I$, $\alpha : \omega + 1$ existe una homotopía

$$B_{\Diamond_\alpha} : \prod_{r:\sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_\alpha P_i(w)} im(j)^{\Diamond_\alpha}\Big(l(f(m), i)^{\Diamond_\alpha}(r)\Big) = f(m)\Big(im(i)^{\Diamond_\alpha}(r)\Big)$$

$$\begin{array}{ccc}
\sum_{w:\mathbf{W}} \lozenge_\alpha P_i(w) & \xrightarrow{l(f(m),i)^{\lozenge_\alpha}} & \sum_{w:\mathbf{W}} \lozenge_\alpha P_j(w) \\
{\scriptstyle im(i)^{\lozenge_\alpha}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle im(j)^{\lozenge_\alpha}} \\
\sum_{w:\mathbf{W}} \mathbf{V}(w) & \xrightarrow[f(m)]{} & \sum_{w:\mathbf{W}} \mathbf{V}(w)
\end{array}$$

2. Para cada $m : M$, $f(m)_1$ preserva la complejidad, es decir, para cada $w : \mathbf{W}$ $compl(w) = compl(f(m)_1(w))$.

Demostración. 1. Prueba por inducción sobre α:

- Caso $\alpha \equiv 0$. Consecuencia de que por definición, para toda familia de tipos P, $\lozenge_0 P \equiv P$, y para toda función f, $f^{\lozenge_0} \equiv f$.
- Caso Sucesor. Supongamos que la propiedad vale para n, a ver el caso $S(n)$. Sea $(w,p) : \sum_{w:\mathbf{W}} \lozenge_{S(n)} P_i$. Si $p \equiv cl_1(b)$, la igualdad se tiene por hipótesis de inducción. Centrémonos entonces en el caso $p \equiv cl_2(g)$. Por las proposiciones 3.3.7, 3.3.12

$$\begin{aligned}
&im(j)^{\lozenge_{S(n)}}\Big(l(f(m),i)^{\lozenge_{S(n)}}(w, cl_2(g))\Big)\\
&\equiv im(j)^{\lozenge_{S(n)}}\Big(sup\big(pr_1(w), l(f(m),i)_1^{\lozenge_n} \circ pr_2(w)\big), cl_2\big(l(f(m),i)_2^{\lozenge_n} \circ g\big)\Big)\\
&\equiv \Big(sup\big(pr_1(w), im(j)^{\lozenge_n} \circ l(f(m),i)_1^{\lozenge_n} \circ pr_2(w)\big), v\big(im(j)^{\lozenge_n} \circ l(f(m),i)_2^{\lozenge_n} \circ g\big)\Big).
\end{aligned}$$

  Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}
&f(m)\Big(im(i)^{\lozenge_{S(n)}}(w, cl_2(g))\Big)\\
&\equiv f(m)\Big(sup\big(pr_1(w), im(i)_1^{\lozenge_n} \circ pr_2(w)\big), v(im(i)_2^{\lozenge_n} \circ g)\Big)\\
&\equiv \Big(f(m)_1\big(sup\big(pr_1(w), im(i)_1^{\lozenge_n} \circ pr_2(w)\big)\big), f(e)_2\big(v(im(i)_2^{\lozenge_n} \circ g)\big)\Big)\\
&\equiv \Big(\big(sup\big(pr_1(w), f(m)_1 \circ im(i)_1^{\lozenge_n} \circ pr_2(w)\big)\big), v\big(f(m)_2 \circ im(i)_2^{\lozenge_n} \circ g\big)\Big).
\end{aligned}$$

  Por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
im(j)^{\lozenge_n} \circ l(f(m),i)_1^{\lozenge_n} &= f(m)_1 \circ im(i)_1^{\lozenge_n},\\
im(j)^{\lozenge_n} \circ l(f(m),i)_2^{\lozenge_n} &= f(m)_2 \circ im(i)_2^{\lozenge_n},
\end{aligned}$$

  lo cual nos da la igualdad deseada.
- Caso $\alpha \equiv \mathbb{N}$. Consecuencia de los dos incisos anteriores.

2. Para cualquier $w : \mathbf{W}$, tenemos por definición que $f(m)_1(w) = sup(pr_1(w), f(m)_1 \circ pr_2(w))$; hacemos inducción sobre la complejidad de w:

- Si $compl(w) = 0$, entonces $pr_2(w) : \mathbf{0} \to \mathbf{W}$ y por tanto $f(m)_1 \circ pr_2(w) : \mathbf{0} \to \mathbf{W}$; por definición entonces $compl(f(m)_1(w)) = 0$.

- Supongamos que la propiedad vale para todos los términos de complejidad menor o igual a n y que $compl(w) = S(n)$. Entonces por hipótesis de inducción para toda $b : B(pr_1(w)), compl\Big(f(m)_1\big(pr_2(w)(b)\big)\Big) = compl\big(pr_2(w)(b)\big)$. Entonces

$$\begin{aligned} compl(w) &= \max\{compl\big(pr_2(w)(b)\big)|b : B(pr_1(w))\} + 1 \\ &= \max\{compl\Big(f(m)_1\big(pr_2(w)(b)\big)\Big)|b : B(pr_1(w))\} + 1 \\ &= compl(f(m)_1(w)). \end{aligned}$$ $\square$

Definición 3.5.9. Denotaremos por $\mathbf{E}$ el espacio pragmático construido a partir de $\mathbf{V}$ y la familia f, es decir,

- Para cada $w : \mathbf{W},\ x : \mathbf{V}(w)$ existe un término $e(w, x) : \mathbf{E}$.
- Para cada $m : M$ existe un camino $d(m, w, x) : e(f(m)(w, x)) = e(w, x)$.

Proposición 3.5.10. Sea $\mathbf{W}$ de aridad acotada. Para cada $w : \mathbf{W},\ x : \mathbf{V}(w)$ existen $i : I,\ w' : \mathbf{W},\ p : \Diamond_{compl(w)} P_i(w')$ tales que

$$e(w, x) = e\Big(im(i)^{\Diamond_{compl(w)}}(w', p)\Big).$$

Demostración. Prueba por inducción sobre la complejidad de w:

1. Caso $compl(w) = 0$. Sea $h : \prod_{w:compl_0} \sum_{i:I} P(i)(w) \to \mathbf{V}(w)$ la familia de equivalencias dada por la definición 3.5.5. Entonces dado $x : \mathbf{V}(w)$ existen $i : I,\ p : P_i(w)$ tales que $x = h\big(w, (i, p)\big)$. Como por definición $im(i)(w, p) :\equiv (w, h\big(w, (i, p)\big))$ se tiene $e(w, x) = e\Big(im(i)^{\Diamond_0}\big(w, p\big)\Big)$.

2. Supongamos que $compl(w) = n$ y que la propiedad vale para todos los términos de $\mathbf{W}$ de complejidad estrictamente menor. Luego, para todo $b : B(pr_1(w))$ existen $i_b : I,\ w_b : \mathbf{W},\ p_b : \Diamond_{compl(pr_2(w)(b))} P_{i_b}(w_b)$ tales que

$$e(pr_2(w)(b), x|_{pr_2(w)(b)}) = e\Big(im(i_b)^{\Diamond_{compl(pr_2(w)(b))}}(w_b, p_b)\Big).$$

   Como $\mathbf{W}$ tiene aridad acotada, la definición 3.5.7 y la proposición 3.5.8, implican que existe $k : I$ tal que para $b : B(pr_1(w))$ tenemos funciones

$$l(f(m_b), i_b)^{\Diamond_{compl(w_b)}} : \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_{compl(pr_2(w)(b))} P_{i_b}(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond_{compl(pr_2(w)(b))} P_k(w).$$

   Por definición de $\mathbf{E}$, tenemos un camino en cada

$$e\Big(im(i_b)^{\Diamond_{compl(pr_2(w)(b))}}(w_b, p_b)\Big) = e\Big(f(m_b)\big(im(i_b)^{\Diamond_{compl(pr_2(w)(b))}}(w_b, p_b)\big)\Big).$$

   Sean

   - $\gamma : B(pr_1(w)) \to \mathbf{W}$, definida por $\gamma(b) :\equiv f(m_b)_1\Big(im^{\Diamond_{compl(pr_2(w)(b))}}(w_b)\Big)$;

- $w^* :\equiv sup\big(pr_1(w), \gamma\big) : \mathbf{W}$;
- $g : \prod_{b:B(pr_1(w^*))} \Diamond_{n-1} P_k(pr_2(w^*)(b))$, definida por

$$g(b) :\equiv l(f(m_b, i_b))_2^{\Diamond_{compl(pr_2(w)(b))}}(p_b)$$

(observemos que como $compl(w) = n$ entonces $compl(pr_2(w)(b)) \leq n-1$).

Por la regla $\mathbf{Cl_{Int}}$, $cl_2(g) : \Diamond_n P_k(w^*)$. Nuestro objetivo es mostrar que

$$e(w,x) = e\Big(im(k)^{\Diamond_{compl(w)}}\big(w^*, p\big)\Big).$$

Para esto, por la proposición 3.5.2 basta con observar que para cada $b : B(pr_1(w^*))$ tenemos

$$\begin{aligned} e(pr_2(w)(b), x|_{pr_2(w)(b)}) &= e\Big(im(i_b)^{\Diamond_{compl(pr_2(w)(b))}}(w_b, p_b)\Big) \\ &= e\Big(f(m_b)\big(im(i_b)^{\Diamond_{compl(pr_2(w)(b))}}(w_b, p_b)\big)\Big) \\ &= e\Big(im(k)^{\Diamond_{compl(pr_2(w)(b))}}\big(l(f(m_b, i_b))^{\Diamond_{compl(pr_2(w)(b))}}(w_b, p_b)\big)\Big) \\ &\equiv e(\gamma(b), im(k)^{\Diamond_{compl(pr_2(w)(b))}}(g(b))) \\ &= e(pr_2(w^*)(b), v(g)|_{pr_2(w^*)(b)}). \end{aligned}$$

□

Dado que $\sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P_i(w)$ hace referencia a una parte de $\mathbf{E}$, para reconstruir este necesitaríamos pegar los primeros por medio de un colímite. Para definirlos, en teoría homotópica de tipos partimos del concepto de grafo.

Definición 3.5.11. [67] Un grafo Γ consiste de

1. un tipo Γ_0;
2. una familia $\Gamma_1 : \Gamma_0 \to \Gamma_0 \to \mathcal{U}$;
3. para cada $x, y, z : \Gamma_0$, una función $\Gamma_1(y,z) \to \Gamma_1(x,y) \to \Gamma_1(x,z)$, escrita como $\delta \mapsto \gamma \mapsto \delta \circ \gamma$

Para nuestros objetivos utilizaremos el siguiente grafo:

1. $\Gamma_0 \equiv I$ (definición 3.5.5);
2. $\Gamma_1(i,j) \equiv \{l(f(m),i) | m : M,\ l(f(m),i) : \sum_{w:\mathbf{W}} P_i(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} P_j(w)\}$ (definición 3.5.7);
3. composición usual.

Luego, continuamos con los diagramas.

Definición 3.5.12. [67] Un diagrama F sobre un grafo Γ consiste de

1. una familia $F : \Gamma_0 \to \mathcal{U}$;
2. para cada $x, y : \Gamma_0$, una función $F_{x,y} : \Gamma_1(x,y) \to F(x) \to F(y)$;
3. para cada $x, y, z : \Gamma_0,\ \gamma : \Gamma_1(x,y),\ \delta : \Gamma_1(y,z)$, una homotopía $cmp_{x,y,z}(\delta,\gamma) : F_{y,z}(\delta) \circ F_{x,y}(\gamma) \sim F_{x,z}(\delta \circ \gamma)$.

Nosotros trabajaremos con el siguiente diagrama F:

1. $F(i) \equiv \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P_i$;
2. $l(f(m),i) : \Gamma_1(i,j),\ (l(f(m),i))^{\Diamond} : \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P_i \to \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P_j$, vía la proposición 3.5.8;
3. Dados $l(f(m),i) : \Gamma_1(i,j),\ l(f(m'),j) : \Gamma_1(j,k)$ tomamos la homotopía $H_{\Diamond} : l(f(m'),j)^{\Diamond} \circ l(f(m),i)^{\Diamond} \sim (l(f(m'),j) \circ l(f(m),i))^{\Diamond}$ definida en la proposición 3.3.13.

El colímite es definido como:

Definición 3.5.13. [67] El colímite de un diagrama F es el alto tipo inductivo $colim(F)$ generado por

- para cada $x : \Gamma_0$, una función $inc_x : F(x) \to colim(F)$,
- para cada $x, y : \Gamma_0,\ \gamma : \Gamma_1(x,y),\ a : F(x)$ un camino $glue_{x,y}(\gamma, a) : inc_y(F_{x,y}(\gamma, a)) = inc_x(a)$.

Notemos que en 3.5.13 sólo aparecen las reglas de formación e introducción; sin embargo ellas son suficientes para deducir las otras dos. Por eso, libros como [67] las omiten generalmente. Sin embargo, es importante recordar que ellas son parte fundamental de cualquier definición y ayudan a capturar la propiedad universal del colímite. Decidimos explicitarlas más adelante, cuando las utilicemos.

Nuestro objetivo es mostrar que $\mathbf{E} \simeq colim(F)$, con el diagrama F recién definido arriba. Para esto en primer lugar mostramos que $\mathbf{E}$ tiene constructores análogos a los de 3.5.13.

Lema 3.5.14. Existen funciones:

- $inc^{\Diamond} : \prod_{i:\Gamma_0} \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P_i(w) \to \mathbf{E}$;
- $glue^{\Diamond} : \prod_{i,j:\Gamma_0} \prod_{f:\Gamma_1(i,j)} \prod_{a:\sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P_i(w)} inc^{\Diamond}(j, f^{\Diamond}(a)) = inc^{\Diamond}(i,a)$.

Demostración. Para cada $i : I,\ w : \mathbf{W},\ p : \Diamond P_i(w)$, definimos

$$inc^{\Diamond}(i,w,p) :\equiv e\Big(im(i)^{\Diamond}(w,p)\Big).$$

Dado $l(f(m), i) : \Gamma_1(i, j)$, entonces

$$\begin{aligned} inc^{\Diamond}(j, l(f(m), i)^{\Diamond}(w, p)) &:\equiv e\Big(im(j)^{\Diamond} l(f(m), i)^{\Diamond}(w, p)\Big) \\ &= e\Big(f(m)\big(im(i)^{\Diamond}(w, p)\big)\Big) \end{aligned}$$

donde esta última igualdad es atestiguada por el camino $ap_e(B_{\Diamond}(w, p))$ vía la proposición 3.5.8. Por otro, la definición 3.5.9 nos da un camino

$$d(m, im(i)^{\Diamond}(w, p)) : e\Big(f(m)\big(im(i)^{\Diamond}(w, p)\big)\Big) = e\Big(im(i)^{\Diamond}(w, p)\Big).$$

Por tanto basta tomar $glue^{\Diamond}(i, j, l(f(m), i), (w, p)) :\equiv ap_e(B_{\Diamond}(w, p)) \cdot d(m, im(i)^{\Diamond}(w, p))$.
□

En lenguaje categórico, lo que hemos mostrado hasta ahora es que $\mathbf{E}$ se puede ver como un cocono sobre F. Para ver la equivalencia con $colim(F)$, necesitaríamos ver que satisface además algún tipo de propiedad de universal con respecto a las funciones anteriores. En teoría de tipos estas corresponden a las reglas de eliminación, que nos permitirán construir la función deseada, y de computación, que nos garantizarán que la función construida tiene el comportamiento adecuado. Para el colímite $colim(F)$ estas reglas dicen lo siguiente:

Afirmación 3.5.15. Sea $C : colim(F) \to \mathcal{U}$ una familia de tipos tal que existen funciones

- $\widehat{inc} : \prod_{i:\Gamma_0} \prod_{a:\sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P_i(w)} C(inc_i(a))$;
- $\widehat{glue} : \prod_{i,j:\Gamma_0} \prod_{f:\Gamma_1(i,j)} \prod_{a:\sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P_i(w)} transport^C(glue_{i,j}, \widehat{inc}(j, f^{\Diamond}(a))) = \widehat{inc}(i, a)$;

entonces existe $ind_{colim(F)} : \prod_{c:colim(F)} C(c)$, tal que

1. $ind_{colim(F)} : (inc_i(a)) \equiv \widehat{inc}(i, a)$;
2. $apd_{ind_{colim(F)}}(glue_{i,j}(f^{\Diamond}, a)) = \widehat{glue}(i, j, f, a)$.

Estas son las reglas que probaremos para $\mathbf{E}$.

Proposición 3.5.16. Sea $C : \mathbf{E} \to \mathcal{U}$ una familia de tipos tal que existen funciones:

- $\widetilde{inc} : \prod_{i:\Gamma_0} \prod_{a:\sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P_i(w)} C(inc^{\Diamond}(i, a))$;
- $\widetilde{glue} : \prod_{i,j:\Gamma_0} \prod_{f:\Gamma_1(i,j)} \prod_{a:\sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P_i(w)} transport^C(glue^{\Diamond}_{i,j}, \widetilde{inc}(j, f^{\Diamond}(a))) = \widetilde{inc}(i, a)$;

entonces existe una función $\alpha : \prod_{m:\mathbf{E}} C(m)$, tal que

1. $\alpha(inc^{\Diamond}(i, a)) \equiv \widetilde{inc}(i, a)$;

2. $apd_\alpha(glue^{\Diamond}_{i,j}(f^{\Diamond}, a)) = \widetilde{glue}(i, j, f, a)$.

Demostración. Gracias a la definición 3.5.9, construimos la función α por medio de los siguientes pasos:

- Para todo $w : \mathbf{W},\ x : \mathbf{V}(w)$, necesitamos asignar una imagen a $e(w, x)$. Por la proposición 3.5.10, existen $i : I,\ w' : \mathbf{W},\ p' : \Diamond P_i(w)$ tales que $e(w, x) = e\Big(im^{\Diamond_{compl(w)}}(w', p')\Big)$, así que podemos definir $\alpha(e(w, x)) \equiv \widetilde{inc}(i, (w', p'))$. Restaría mostrar que esta función es bien definida en el sentido que si existen $j : I,\ w'' : \mathbf{W},\ p'' : \Diamond P_j(w'')$ tales que $e(w, x) = e\Big(im^{\Diamond_{compl(w)}}(w'', p'')\Big)$ entonces $\widetilde{inc}(i, (w', p')) = \widetilde{inc}(j, (w'', p''))$, es decir, queremos construir una función

  $$e(w', p') = e(w'', p'') \to \widetilde{inc}(i, (w', p')) = \widetilde{inc}(j, (w'', p'')).$$

  Utilizando inducción sobre caminos varias veces (en primer lugar para hacer $w'' \equiv w'$, luego para hacer $j \equiv i$ y por último para $p'' \equiv p'$) esto se reduce a definir una función en

  $$e(w', p') = e(w', p') \to \widetilde{inc}(i, (w', p')) = \widetilde{inc}(i, (w', p')),$$

  lo cual es trivial. Observemos también que por construcción $\alpha(inc^{\Diamond}(i, a)) \equiv \widetilde{inc}(i, a)$.

- Utilizando la misma notación del ítem anterior, démonos además $m : M$. Por la proposición 3.5.8, existe $k : I$ tal que

  $$l(f(m), i)^{\Diamond} : \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P_i(w) \to \sum_{w:\mathbf{W}} \Diamond P_k(w).$$

  A partir de la demostración de las proposiciones 3.5.8, 3.5.10, resulta que

  $$\begin{aligned} e(f(m)(w, x)) &= e\Big(f(m) \circ im(i)^{\Diamond}(w', p')\Big) \\ &= e\Big(im(k)^{\Diamond} \circ l(f(m), i)^{\Diamond}(w', p')\Big). \end{aligned}$$

  Por tanto $\alpha(e(f(m)(w, x))) = \widetilde{inc}(k, l(f(m), i)^{\Diamond}(w', p'))$. Por hipótesis existe un camino

  $$\widetilde{glue}(i, k, l(f(m), i)^{\Diamond}, (w, x)) : transport^C(glue^{\Diamond}_{i,k}, \widetilde{inc}(k, l(f(m), i)^{\Diamond}((w', p')))) = \widetilde{inc}(i, (w', p')).$$

  Como por construcción (proposición 3.5.14) $glue^{\Diamond}_{i,k}(f(m), (w, x))$ coincide básicamente con $d(m, w, x)$, obtenemos la segunda hipótesis de la regla $\mathbf{E_{Eli}}$. La regla $\mathbf{E_{Com}}$ nos da que $apd_\alpha(glue^{\Diamond}_{i,j}(f^{\Diamond}, a)) = \widetilde{glue}(i, j, f, a)$.

□

Teorema 3.5.17. Con la notación e hipótesis anteriores

$$\mathbf{E} \simeq colim(F).$$

Demostración. Definimos una función $\alpha : colim(F) \to \mathbf{E}$ por medio de la afirmación 3.5.15 utilizando $inc^{\Diamond}$, $glue^{\Diamond}$ del lema 3.5.14 como funciones dadas. En sentido inverso, construimos $\beta : \mathbf{E} \to colim(F)$ gracias a la proposición 3.5.16 tomando inc, $glue$ como datos.

Debemos mostrar, en primer lugar que para todo $c : colim(F)$, $\beta\alpha(c) = c$. Por la regla de eliminación de $colim(F)$ basta hacerlo para los constructores

$$\begin{aligned}
&\beta\alpha(inc(i,a)) \equiv \beta(inc^{\Diamond}(i,a)) \equiv inc(i,a),\\
&ap_{\beta\alpha}(glue_{i,j}(f^{\Diamond},a)) = ap_{\beta}(glue^{\Diamond}_{i,j}(f^{\Diamond},a)) = glue_{i,j}(f^{\Diamond},a).
\end{aligned}$$

De manera análoga, para toda $x : \mathbf{E}$ quisiéramos que $\alpha\beta(x) = x$. Por la proposición 3.5.16, basta mostrar que

$$\begin{aligned}
&\alpha\beta(inc^{\Diamond}(i,a)) \equiv \beta(inc(i,a)) \equiv inc^{\Diamond}(i,a),\\
&ap_{\beta\alpha}(glue^{\Diamond}_{i,j}(f^{\Diamond},a)) = ap_{\beta}(glue_{i,j}(f^{\Diamond},a)) = glue^{\Diamond}_{i,j}(f^{\Diamond},a).
\end{aligned}$$

□

3.5.2 Distancia

Nuestro objetivo es definir una noción de distancia en los espacios pragmáticos. Como antes, la construiremos en términos de la sustracción. Para esto es útil tener una noción de subobjeto.

Definición 3.5.18. Sea $\mathbf{E}^{\alpha}$ un espacio pragmático. Dado $X : \mathbf{W} \to \mathcal{U}$, diremos que X es un subobjeto y escribiremos $X \leq \mathbf{E}^{\alpha}$ si existe una inmersión $inc_X : \prod_{w:\mathbf{W}} X(w) \hookrightarrow \mathbf{E}^{\alpha}(w)$.

Definición 3.5.19. Sean $X, Y \leq \mathbf{E}^{\alpha}$. El tipo $X \leq Y$ estará habitado por las funciones $g : \prod_{w:\mathbf{W}} X(w) \hookrightarrow Y(w)$ tales que para $a : X(w)$,

$$inc_X(w)(a) =_{\mathbf{E}^{\alpha}(w)} inc_Y(w)(g(w)(a)).$$

Observemos que cualquier $g : X \leq Y$ es una inmersión. En efecto

$$\begin{aligned}
\Big(g(w)(a) = g(w)(b)\Big) &\simeq \Big(inc_Y(w)(g(w)(a)) = inc_Y(w)(g(w)(a))\Big)\\
&\simeq \Big(inc_X(w)(a) = inc_X(w)(b)\Big)\\
&\simeq \Big(a = b\Big).
\end{aligned}$$

Proposición 3.5.20. Para todos $X, Y \leq \mathbf{E}^{\alpha}$ el tipo $X \leq Y$ es una mera proposición.

Demostración. Sean $g_1, g_2 : X \leq Y$. Para cada $a : X(w)$, tenemos por definición que el tipo

$$inc_Y\Big(g_1(a)\Big) = inc_X(a) = inc_Y\Big(g_2(a)\Big)$$

está habitado. Como inc_Y es un inmersión, $g_1(a) = g_2(a)$. $\square$

Proposición 3.5.21. $\leq$ es una relación de orden sobre los subobjetos de $\mathbf{E}^\alpha$.

Demostración. La reflexividad y la transitividad son inmediatas. Veamos la antisimetría. Sean $g : X \leq Y$ y $h : Y \leq X$. Como $X \leq X$ y $Y \leq Y$ son meras proposiciones, $hg = Id_X$ y $gh = Id_Y$. Así, X es equivalente a Y y gracias al axioma de univalencia $X = Y$. $\square$

Definición 3.5.22.

- $-_{\mathbf{For}}$ Para cada $X,\ Y \leq \mathbf{E}^\alpha$ existe $\Big(X - Y\Big) : \mathbf{W} \to \mathcal{U}$.
- $-_{\mathbf{Int}}$ Dada $w : \mathbf{W}$, si existen
  1. $w' : \mathbf{W},\ n : \mathbb{N}$ tales que $w : I^{-n}(w')$ con $n \leq \alpha$;
  2. $t : \mathbf{E}^\alpha(w')$, tal que

  $$\sum_{a:X(w')} inc_X(a) =_{\mathbf{E}^\alpha(w')} t,$$
  $$\prod_{b:Y(w')} \neg(inc_Y(b) =_{\mathbf{E}^\alpha(w')} t)$$

  entonces $subs(t) : (X - Y)(w)$.
- $-_{\mathbf{Eli}}$ Sea $C : \prod_{w:\mathbf{W}} \big(X - Y\big)(w) \to \mathcal{U}$. Supongamos que para cada $w : \mathbf{W}$ y cada $subs(t) : (X - Y)(w)$ existe $\alpha(w, subs(t)) : C(w)(subs(t))$. Entonces existe una función $ind_-(\alpha) : \prod_{w:\mathbf{W}} \prod_{s:(X-Y)(w)} C(w)(s)$.
- $-_{\mathbf{Com}}$ En las condiciones de la regla anterior, tenemos que $ind_-(\alpha, w, subs(t)) \equiv \alpha(w, subs(t))$.

Proposición 3.5.23. Sean $X, Y, Z \leq \mathbf{E}^\alpha$. Entonces $X - Y \leq Z$ si y sólo si $X \leq Y \vee Z$.

Demostración. Como $X - Y \leq Z$ y $X \leq Y \vee Z$ son meras proposiciones basta con definir funciones $\Big(X - Y \leq Z\Big) \to \Big(X \leq Y \vee Z\Big)$ y $\Big(X \leq Y \vee Z\Big) \to \Big(X - Y \leq Z\Big)$.

1. $\Rightarrow$. Supongamos que $X - Y \leq Z$ está habitado, digamos por una función g. Queremos definir un término $\alpha(g)$ en $\prod_{w:\mathbf{W}} X(w) \hookrightarrow Y(w) \vee Z(w)$. Sean $w : \mathbf{W}$ y $a : X(w)$. Como

   $$\prod_{b:Y(w)} \neg(inc_Y(b) =_{\mathbf{E}^\alpha(w)} inc_X(a))$$

   es una mera proposición, tenemos dos casos:

- Que este tipo esté habitado, en cuyo caso $sub(a) : (X - Y)(w)$. En este caso podemos definir $\alpha(g)(w)(a) :\equiv inr\big(g(w)(a)\big)$.
- Que este tipo no esté habitado. Entonces existe algún $b : Y(w)$ tal que $inc_Y(b) = inc_X(a)$. Así podemos definir $\alpha(g)(w)(a) :\equiv inl(b)$.

2. $\Leftarrow$. Sea $h : \prod_{w:\mathbf{W}} X \hookrightarrow Y + Z$ dada. Queremos definir para cada $w : \mathbf{W}$ una función $\beta(h)(w) : (X - Y)(w) \to Z(w)$. Por $-_{\mathbf{Int}}$ basta trabajar con los términos de la forma $subs(t)$. Veamos que $\prod_{b:Y(w')} \neg(h(x) = inl(b))$ está habitado. En efecto, si existieran $b : Y(w')$ con un camino en $h(x) = inl(b)$ podemos construir un camino en

$$t = inc_Y(a) = inc_{Y\vee Z}(h(x)) = inc_{Y\vee Z}(inl(b)) = inc_Y(b)$$

(dado que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, hook, "inl"'] \arrow[ddr, hook, bend left, "inc_Y"] & \\
X \arrow[r, hook, "h"] \arrow[drr, hook, bend right, "inc_X"'] & Y \vee Z \arrow[dr, hook, "ind_\vee"] & \\
 & & \mathbf{E}
\end{tikzcd}$$

debe conmutar por ser todos subobjetos de $\mathbf{E}$) lo cual contradice la definición de $subs(t)$. Por tanto debe existir $c : Z(w')$ tal que $h(x) = inr(c)$. Así podemos definir $\beta(h)(w)\big(subs(t)\big) :\equiv c|_w$. $\square$

A partir de aquí podemos definir la diferencia simétrica

$$X \triangle Y :\equiv \Big(X - Y\Big) \vee \Big(Y - X\Big),$$

la cual cumplirá el papel de distancia en $\mathbf{E}^\alpha$. Como ya hemos mencionado, esta no sólo mide la diferencia entre el nivel $X(w)$ y $Y(w)$, sino que también tiene en cuenta la posición de w dentro del orden de $\mathbf{W}$: mientras más profundo se encuentren las diferencias, mientras más distintos sean los conceptos arquetípicos en que se basan X, Y, más grande será la distancia entre ellos. Esto es importante porque como habíamos tratado de mostrar antes, es en estas diferencias donde reside la clave de la comprensión del signo.

Observemos también que en los espacios pragmáticos los interpretantes son concebidos en primer lugar como entes aislados. Es después que el intérprete encuentra similitudes entre ellos. Así, la distancia entre dos de ellos X, Y empieza siendo máxima y, conforme vamos tendiendo caminos entre ellos (dependiendo fundamentalmente de la profundidad de estos caminos), la distancia entre ellos empieza a disminuir. Incluso podría llegar un punto en que esta se torne despreciable. Parece insensato pensar que podemos llegar a tender todos los caminos entre X, Y de tal forma que resulten equivalentes, pero podemos fijar una familia de subobjetos $M \equiv \{M_i\}$ de $\mathbf{E}^\alpha$ tal que si $X \triangle Y \leq M_i$, para algún $M_i : M$, se cumple algún propósito particular del intérprete. Por ejemplo, si X, Y fueran obras artísticas, podemos pensar que esta familia indica que traten el mismo tema, o si es más pequeña que una está influenciada por la otra, o que una es una imitación, etc. (Analizaremos un ejemplo en la sección 4.3). Esto es lo que hay detrás de la siguiente definición.

Definición 3.5.24. Sean $\mathbf{E}^\alpha$ un espacio pragmático y $M \equiv \{M_i\}$ una familia de subobjetos de él. Entonces el tipo $Sub(\mathbf{E}^\alpha)_M$ será definido por los siguientes constructores

- para cada $X \leq \mathbf{E}^\alpha$ existe $S(X) : Sub(\mathbf{E}^\alpha)_M$;
- dados $X, Y \leq Sub(\mathbf{E}^\alpha)_M$, si $X \triangle Y \leq M_i$ entonces exite un camino $\pi(X, Y) : S(X) = S(Y)$ en $Sub(\mathbf{E}^\alpha)_M$.

Los caminos de $\mathbf{E}^\alpha$ pueden ser pensados como caminos de primer orden, que igualan elementos de interpretantes, mientras que los de $Sub(\mathbf{E}^\alpha)_M$ son de segundo orden, dado que relacionan interpretantes. En la sección 4.3 veremos una aplicación de estas ideas.

3.6 MP en HoTT y arquitectura peirceana

Al igual que en el capítulo anterior, terminaremos haciendo un breve resumen de lo que hemos logrado matematizar del pensamiento peirceano. Nuestro objetivo consistía en estudiar una versión modalizada de la máxima pragmática en términos de la teoría homotópica de tipos. Para eso empezamos trasplantando los operadores modales de bi-Heyting $\Diamond_n$, $\Diamond$ en esta teoría. La nueva definición fue análoga a la antigua con **Cl**, haciendo la función de la iteración de las dos negaciones de bi-Heyting $\sim \neg$. Escogimos trabajar con **Cl** antes de definir $\sim$, porque de esta forma pudimos resaltar la conexión del operador $\Diamond$ con la hacificación de prehaces y la de los $\Diamond_n$ con cuasihaces (donde no garantizamos el pegamiento de familias compatibles arbitrarias, sino de aquellas cuya "complejidad" se encuentra acotada). Desde un punto de vista filosófico, estamos acoplando fragmentos locales de verdad para obtener más generales (el subíndice n gobernando cada paso del proceso).

Un análogo a los espacios pragmáticos de bi-Heyting también fue definido. En este caso la continuidad es expresada en términos de caminos. Tenemos caminos de dos órdenes distintos: los usuales de la teoría, que actúan entre los elementos constituyentes de las interpretaciones, y los definidos en 3.5.24, que actúan entre las interpretaciones mismas. Estos pueden ser pensados como líneas de "evolución" que nos indican como los conceptos se van transformando conforme nos vamos moviendo a lo largo del espacio.

Es más, podría pensarse en desarrollar unos gráficos evolutivos, similares a los existenciales peirceanos. Demos algunas pocas ideas sueltas en este sentido: la hoja en blanco sería el espacio pragmático de todas las posibles interpretaciones de un signo; un corte representaría la frontera de una región-interpretación dentro del gráfico; aserciones escritas dentro de un corte representarían afirmaciones hechas sobre el signo en la interpretación dada; una línea delgada representaría cómo se va transformando una de tales afirmaciones; una línea gruesa representaría cómo se va transformando una de tales regiones. Aunque la idea es que las evoluciones indicadas por las líneas sean continuas, en la práctica tendremos saltos discretos dado que sólo podemos trabajar con un número finito de afirmaciones e interpretaciones. Podríamos denotar estos saltos con un pequeño triángulo donde indicaríamos su longitud. Por ahora estas ideas no constituyen más que una notación que podría resultar útil para guiarnos cuando necesitemos interpretar un signo.

También definimos versiones de los operadores $-$, $\triangle$ en teoría de tipos. La ventaja de estos con respecto a los del segundo capítulo es que están dotados con una graduación explicita dada por el orden del tipo $\mathbf{W}$. Esto nos permite discriminar las aserciones de cada interpretación y las interpretaciones mismas de acuerdo con su importancia para la comprensión del signo.

4. Aplicaciones

En este capítulo pretendemos utilizar la filosofía peirceana y las herramientas matemáticas desarrolladas a lo largo de este trabajo para analizar diversas obras artísticas y literarias. Empezamos haciendo un bosquejo del contenido del capítulo.

- En 4.1 estudiamos los *Ensayos* de Montaigne a partir de la máxima pragmática, en especial en términos de la formación de hábitos a partir de las ciencias normativas. Por el lado matemático, utilizamos las ideas detrás de los resultados de la sección 2.2.

- En 4.2 examinamos el *Atlas Mnemosyne* de Aby Warburg a partir de los espacios pragmáticos del capítulo 2.

- En 4.3 analizamos la influencia de distintas leyendas musulmanas en la *Divina Comedia* de Dante, empleando de nuevo espacios pragmáticos, pero esta vez en la versión del capítulo 3 basada en el concepto de camino. También definimos una formalización de la medida de creatividad basada en qué tan aislada esté una interpretación dada del resto del espacio pragmático.

- En 4.4 estudiamos la interpretación figural de la Biblia desde la teoría de haces. Este es un ejemplo interesante de una interpretación de un signo con una estructura matemática compleja.

- En 4.5 investigamos el *Libro de los Pasajes* de Walter Benjamin desde la perspectiva del pragmaticismo, tratando de mostrar cómo entendía y juzgaba la importancia de los acontecimientos históricos desde la teoría del cambio de hábito. Además, este ejemplo nos ayudará a intuir en los espacios pragmáticos algunas propiedades matemáticas: continuidad, adimensionalidad, linealización, etc.

- En 4.6 mostramos cómo la fenomenología descrita en la novela *Escuela de Mandarines* de Miguel Espinosa tiene asombrosas similitudes con la pragmaticista. También analizamos un episodio de esta obra desde una perspectiva semiótica, enfatizando cómo se pueden apreciar la definición de signo y los tres interpretantes peirceanos (p. 7).

- Finalmente, en 4.7 revisamos la película *Rashōmon* de Akira Kurosawa utilizando los conceptos de $\mathbb{G}$-separabilidad y $\mathbb{G}$-pegabilidad descritos en la sección 1.2. Tratamos de mostrar cómo estas nociones nos ayudan a reconstruir un hecho a partir de múltiples testigos contradictorios.

Por otro lado, uno de los grandes problemas de los estudios peirceanos son las llamadas *pruebas del pragmatismo*, demostraciones formales en un cierto contexto matemático de la máxima pragmática. Aunque las ideas expresadas en esta tesis podrían ser pensadas en esta línea[1] y el mismo Peirce motivó la realización de este tipo de pruebas en el contexto de los gráficos existenciales, ellas van en contravía del sentido mismo pragmatismo [72]. Examinemos el concepto de verdad en Peirce "Mentes diferentes pueden partir con los más antagónicos puntos de vista, pero el progreso de la investigación, por una fuerza exterior a las mismas, las lleva a la misma y única conclusión. Esta actividad del pensamiento que nos lleva, no donde deseamos, sino a un fin preordenado, es como la operación del destino. Ninguna modificación del punto de vista adoptado, ninguna selección de otros hechos de estudio, ni tampoco ninguna propensión natural de la mente, pueden posibilitar que un hombre escape a la opinión predestinada. Esta enorme esperanza se encarna en el concepto de verdad y realidad. La opinión destinada a que todos los que investigan estén por último de acuerdo en ella es lo que significamos por verdad, y el objeto representado en esta opinión es lo real"[2]. Desde este punto de vista, la verdad de la máxima pragmática se verifica en que pensadores de distintas épocas y enfrentados a problemáticas muy distintas, lleguen esencialmente a ella. Tal parece ser la opinión del mismo Peirce, que utilizando como imagen *las aguas del río del pragmatismo* escribió: "Sócrates se bañó en esas aguas. Aristóteles se regocija cuando puede encontrarlas. Corren, donde uno menos sospecharía, bajo las secas montañas de basura de Spinoza. Las limpias definiciones que cubren las páginas del *Essay concerning Humane Understanding* (renuncio a cambiar la ortografía) habían sido lavadas en esas mismas fuentes de agua pura. Fue este mismo medio, y no aguas de brea, lo que dio fuerza y salud a las primeras obras de Berkeley, su *Theory of Vision* y lo que queda de sus *Principles.* De ese medio obtienen las posturas generales de Kant la claridad que poseen. Augusto Comte usó todavía más -mucho más- ese elemento, tanto como vio que podía usarlo"[3]. Aunque nos resistimos un poco a afirmar una opinión tan radical, si pensamos que cuando un problema cumple con ciertas características, que esperamos ir clarificando a lo largo de nuestra exposición, la solución es expresada en términos pragmaticistas. Así que, al mismo tiempo que los siguientes trabajos pueden verse como una reinterpretación de ciertas obras en términos pragmáticos, deberían también considerarse como evidencias de la veracidad del pragmatismo.

[1] Más que tratar de demostrar la máxima pragmática en teoría de categorías o de tipos, nuestro objetivo es utilizar herramientas matemáticas para entenderla, en vistas a mejorar su aplicabilidad en casos como los que estudiaremos en este capítulo.

[2] *Cómo esclarecer nuestras ideas* (1878) [57].

[3] *Pragmatismo* (1907) [57].

4.1 *Ensayos*, Michel de Montaigne

En esta sección examinaremos la obra de Montaigne desde una perspectiva pragmaticista. La metodología que utilizaremos será, en primer lugar, mostrar que el problema del entendimiento del signo es en cierta medida análogo al problema abordado en los *Ensayos*, enfatizando que Montaigne era consciente de las características fundamentales del problema; para después ver cómo la solución propuesta en esta obra se corresponde casi exactamente con la máxima pragmática.

4.1.1 El problema de la identidad y la máxima pragmática

La pregunta que trata de responder Montaigne en sus *Ensayos* es una de autoreferencia: ¿Quién es Michel de Montaigne? Esta no debe tomarse a la ligera ni en sus ambiciones ni en metodología: Montaigne trata de hacerse un retrato completamente fiel de su persona y para esto se vale de un procedimiento que podríamos calificar como científico, en el sentido que aclararemos a continuación. En realidad, los alcances de estas ambiciones lo llevan a enfrentarse a la pregunta más general ¿Qué es el hombre?, central en la historia de la filosofía y a la cual se ha tratado de responder desde tantos enfoques como escuelas filosóficas hay. Trataremos de mostrar que la respuesta dada por Montaigne a ambas preguntas es pragmatista, en el más preciso significado peirceano del término.

En primer lugar, Montaigne al igual que Peirce es un experimentalista: cada uno de los textos que constituyen sus *Ensayos* debe pensarse como un experimento[4], en el sentido moderno que tiene en psicología (experimento de Milgram, de Asch, de Sherif). Así, en la mayoría de los *Ensayos* se planea un situación determinada y se estudia la conducta humana en dicha situación. Por ejemplo, la situación planteada en el primer ensayo es: ¿qué actitud nos ablanda más los ánimos en aquellos que nos han ofendido, cuando tenemos la venganza en nuestra mano y se encuentran a nuestra merced: que susciten lástima y piedad dando muestras de sumisión o que muestren osadía, firmeza y determinación? El ensayo en sí es la determinación de la conducta de una serie de personas, incluido Montaigne mismo, en esta situación. Pero más adelante nos adentraremos en la estructura que tienen los ensayos. Lo que queremos resaltar por el momento es que, al igual que Peirce considera la definición completa de un concepto como "todos los fenómenos experimentales concebibles que la afirmación o negación de un concepto pueda implicar" y que "*no hay absolutamente nada más en ello*"[5], Montaigne considera al hombre en general y a sí mismo en particular, como la suma de resultados de experimentos como los llevados a cabo en sus ensayos. Parafraseando el enunciado de la máxima pragmática, podemos decir

[4]La palabra Ensayo viene del latín *exagium* que significa acción de pesar exactamente algo. La siguiente cita nos puede ayudar a clarificar el concepto que este término tenía para Montaigne "Et me poise tant de poiser à autruy, qu'és occasions où le devoir me force d'essayer la volonté de quelqu'un..." (Me pesa tanto pesar a los demás, que cuando el deber me obliga a poner a prueba la voluntad de alguno...) Libro III, Ensayo 5.

[5]*Qué es el pragmatismo* (1904) [57].

que para este escritor, "la esencia entera de cualquier hombre consiste en el total de todos sus modos de conducta racional que, condicionalmente sobre todas las circunstancias posibles, seguiría en dicha circunstancia"[6].

Según Zalamea, "una *doble polaridad* tensa el sistema de Peirce: horizontalmente, dentro de cada contexto fijo de interpretación, la acción-reacción (segundidad) entre polos locales da lugar a múltiples efectos visibles y medibles; verticalmente, a lo largo de clases adecuadas de contextos, la mediación (terceridad) entre polos globales permite acordonar los efectos y encontrar tramas comunes" [74, p. 26]. Veamos cómo funcionan ambas polaridades en Montaigne.

De un punto de vista matemático, esta doble polaridad podría explicarse de la siguiente manera. Sea $\mathcal{I}$ una categoría de índices y $\mathcal{C}$ la categoría de todos los posibles ensayos que hubiera podido escribir Montaigne. Esta última puede considerarse de bi-Heyting, con la sustracción indicándonos simplemente qué nos dice un primer ensayo que no nos diga un segundo. Sea $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un funtor. Surgen entonces dos estructuras de bi-Heyting: una primera horizontal en cada Fi dada por el álgebra $sub(Fi)$; y una segunda vertical sobre subclases de ensayos dada por la estructura $sub(\mathcal{I})$ (sección 2.2). En cada una de ellas, la polaridad está definida a partir de $\triangle$. Este doble juego dialéctico es la clave para acotar un ente proteico, como justificaremos más adelante.

4.1.2 Polaridad horizontal

El principal problema al que se enfrenta Montaigne en su estudio autodescriptivo es el de la variabilidad intrínseca del ser humano. Esta preocupación recorre transversalmente su libro:

- "Preciso es reconocer que el hombre es cosa pasmosamente vana, variable y ondeante, y que es bien difícil fundamentar sobre él juicio constante y uniforme". Libro I, ensayo 1.

- "Todas las ideas más contradictorias se encuentran en mi alma, en algún modo, conforme a las circunstancias y a las cosas que la impresionan: vergonzoso, insolente; casto, lujurioso; hablador, taciturno; laborioso, negligente; ingenioso, torpe; malhumorado, de buen talante; mentiroso, veraz; sabio, ignorante; liberal, avaro y pródigo; todas estas cualidades las veo en mí sucesivamente, según la dirección a que me inclino. Quien se estudie atentamente encontrará en sí mismo y hasta en su juicio igual volubilidad y

[6] En realidad, Montaigne nunca habla de lo que según su concepción es un hombre. Sin embargo, desde la primera página, en un advertencia Al Lector, escribe que "el único fin que me he propuesto con él [su libro] es doméstico y privado [...] Lo he dedicado al interés particular de mis parientes y amigos, para que, una vez me hayan perdido -cosa que les sucederá pronto-, puedan reencontrar algunos rasgos de mis costumbres e inclinaciones, y para que así alimenten, más entero y más vivo, el conocimiento que han tenido de mí. [...] Quiero que me vean en mi manera de ser simple, natural y común, sin estudio ni artificio. Porque me pinto a mí mismo. [...] Así, lector, soy yo mismo la materia de mi libro". Dado que las únicas descripciones que encontramos de Montaigne en sus ensayos, son la forma en que actuaría en una situación particular, se infiere que implícitamente su concepción del hombre es en efecto pragmatista.

discordancia. Yo no puedo formular ninguno sobre mí mismo que sea concluyente, sencillo y sólido, sin confusión y sin mezcla, tampoco resumirlo en una palabra: Distingo es el término más universal de mi lógica." Libro II, Ensayo 1.

- "Al cabo, ni nuestro ser ni el de los objetos poseen ninguna existencia constante. Nosotros, y nuestro juicio, y todas las cosas mortales, fluimos y rodamos incesantemente. Por lo tanto, nada cierto puede establecerse del uno al otro, siendo así que tanto el que juzga como lo juzgado están en continua mutación y movimiento." Libro II, Ensayo 12.

- "El mundo no es más que un perpetuo vaivén. Todo se mueve sin descanso... No puedo fijar mi objeto... No pinto el ser; pinto el tránsito... Es muy cierto que tal vez me contradigo, pero la verdad, como decía Demades, no la contradigo. Si mi alma pudiera asentarse no haría ensayos, me mantendría firme; está aprendiendo y poniéndose a prueba." Libro III, Ensayo 2.

La estructura de su obra es la respuesta a este problema. Analicemos la situación desde una perspectiva pragmaticista. A la variabilidad del hombre, y si queremos, a la variabilidad incluso del mundo, se opone el concepto de hábito. Veamos cómo se forman los hábitos según Peirce:

> De este modo, si un hombre tiene el propósito general de hacer bella la decoración de la casa que está construyendo [...] fue que hizo efectivamente decoraciones en su mundo interior y, según los resultados, experimentó en algunos casos sentimientos que le estimularon a tratar de reproducirlas, mientras que en otros casos los sentimientos posteriores a la contemplación de los resultados provocaron esfuerzos para evitarlas o modificarlas, y mediante esos ejercicios se produjo un hábito que, como sabemos, afectará no sólo a sus acciones en el mundo de la imaginación, sino también a sus acciones en el mundo de la experiencia [...] Ha de señalarse que al llamar a un hábito "auto-controlado", no quiero decir que esté en poder del hombre que lo tiene deshacerse de él [...] sino que lo que quiero decir es que ha sido desarrollado según el proceso que acabo de describir en el que sentimientos críticos respecto a los resultados de ejercicios exteriores e interiores estimulan fuertes esfuerzos para repetir o modificar esos efectos[7].

Examinemos este pasaje en detalle. En primer lugar, para formar un hábito necesitamos llenar nuestra mente de interpretantes. Esto es lo que en capítulos anteriores expresábamos con la idea de coproducto. En los ensayos de Montaigne, después de plantearse el tema sobre el que este versará, se procede a hacer un catálogo relativamente exhaustivo sobre las distintas actuaciones humanas en esta circunstancia específica. Para esto Montaigne se vale de ejemplos

[7] *Pragmatismo* (1907) [57].

clásicos tomados de la tradición grecolatina, de la que era un gran conocedor, y anécdotas acaecidas a personas que habían tenido contacto directo o indirecto con él.

Después, según el mismo pasaje de Peirce, se debe determinar el efecto que cada uno de estos interpretantes causa en nosotros. Aquí interviene una parte importante del pragmatismo peirceano, las ciencias normativas. Peirce las define como aquellas que tratan “de las leyes de conformidad de las cosas con los fines”. Aunque él habla solamente de hábitos autocontrolados, ellos son sólo un tipo especial de interpretante, el interpretante intelectual último; en general podemos decir que estas ciencias rigen la formación de todos ellos. En analogía con la teoría de categorías, donde dados $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ y $\mathcal{J}$ una categoría plena de $\mathcal{I}$, considerábamos los $\{Fj\}_{j\in\mathcal{J}}$ como el conjunto de efectos de un signo y al límite $L_{\mathcal{J}}$ de $F|_{\mathcal{J}}$ como el interpretante al que ellos dan lugar, la forma en que las propiedades específicas de $\mathcal{C}$ rigen la formación de $L_{\mathcal{J}}$ es análoga a la manera como las ciencias normativas gobiernan la formación del interpretante intelectual.

Peirce distingue tres ciencias normativas: la estética, que estudia aquellas cosas cuyos fines estriban en encarnar cualidades de sentimiento, la ética cuyos fines radican en la acción, y la lógica cuyo fin es representar algo. Él afirma que la lógica debe basarse en la ética y sugiere que la ética debe fundamentarse en la estética.

En Montaigne, la función de las ciencias normativas la ejerce el juicio. En el juicio están presentes implícitamente las tres ciencias normativas. Diversos autores han explicitado estos tres aspectos en sus críticas. Por ejemplo, Hatzfeld resalta la parte lógica al establecer que el juicio es la habilidad de “discerner le vrai du faux” [32, Tomo 2, p. 1359]. Compayre habla de su función ética, muy similar al pragmatismo: “To judge well, lastly, is to be able and ready to act well” [24, p. 66]. Finalmente, La Charité habla de su parte estética: “When Montaigne speaks of the training of judgment, he often implies the formation of taste, style, manner or gôut” [35, p. 28].

El juicio tiene en Montaigne una función auto-creadora. Las diferentes opciones de acción le ayudan a determinar la suya: “Ambos medios arrastraríanme fácilmente, pues, yo me inclino en extremo a la misericordia y a la mansedumbre. De tal modo, que a mi entender, mejor me dejaría llevar a la compasión que al peso del delito” (Libro I, Ensayo 1), “Yo me inclino mejor a la actitud del primer filósofo, no porque sea más agradable reír que llorar, sino porque lo primero supone mayor menosprecio que lo segundo” (Libro I, Ensayo 50). En términos más peirceanos, al leer de una de tales actuaciones, Montaigne siente sentimientos de simpatía o rechazo que tratará de reproducir. Para que esto funcione es necesario que se tengan polaridades para evaluar el sentimiento que genera cada una de ellas.

Uno de los casos más interesantes para analizar es su postura ante la muerte, uno de sus temas preferidos, que abordó en varios escritos, como *Que filosofar es prepararse a morir* en el Ensayo 19 del libro I o *Costumbre de la Isla de Cea* en el Ensayo 3 del libro II. Lo más sorprendente es el tono que adopta. Cuando habla de las posturas clásicas a favor del suicidio, las defiende con tal multitud de ejemplos y razones, que parecería que Montaigne está a favor de él. Pero con el mismo ahínco defiende las posturas en contra. Esto muestra qué tan en serio vivía las dintintas posturas antes de tomar una resolución. En términos del algoritmo cenopitagórico de interpretación, él trata de situarse con la mayor precisión posible en un espacio vago, difuso y contradictorio de posiciones igualmente válidas. Explicarse a sí mismo las distintas posturas, poder verlas y entenderlas para después precisar su posición.

Esta forma de trabajo pudo tener su origen en la coyuntura histórica en que se desarrolló su vida: las guerras religiosas entre católicos y protestantes. Aunque Montaigne pertenecía a la primera congregación, varios de sus familiares eran de la segunda, y además tuvo que lidiar con ser alcalde de Burdeos, ubicada a medio camino entre los dos bandos. Esto lo obligó a aprender a estar en paz con dos posiciones irreconciliables y es esto lo que se ve reflejado en su obra. Tuvo tanto éxito en su proceder que fue reconocido como caballero de la cámara por Enrique de Navarra (protestante), al tiempo que mantuvo su estatus en la corte del rey de Francia (católico) [29, p. 170].

4.1.3 Polaridad vertical

La máxima habla de que para obtener una comprensión completa del signo debemos trabajar con *all the possible circumstamces*. Pero estas son necesariamente infinitas, por lo que no pueden ser abordadas en ninguna obra, en particular en un libro. Montaigne también era consciente de que para lograr su objetivo su obra debería apuntar a la totalidad: "yo no pinto el ser, pinto el pasar, y no pasar de una edad a otra o, como dice el pueblo, de siete en siete años, sino de día en día, de minuto en minuto (Libro II, Ensayo 1)". Por eso divide su obra en capítulos y en cada uno de ellos aborda un tema diferente. Pero la clave del método, para que finitos contextos capten de alguna manera todos los posibles, está en el azar: "Las fantasías de la música el arte las acomoda, las mías el acaso"[50, Libro 3, Ensayo 2]. Así Montaigne empieza hablando de los motivos que nos inclinan a la piedad, el siguiente capítulo habla de las formas que toman el máximo dolor, y después sobre lo que él considera el más común de los errores humanos: no estar concentrado en sí mismo por la preocupación al porvenir, y así sucesivamente. Tampoco es raro que aborde varios temas en un capítulo y que termine hablando de algo completamente distinto a lo que se propuso en un principio. Los temas de cada capítulo deben ser elegidos con el criterio más arbitrario posible para generar puntos suficientemente separados en el espacio pragmático. De esta manera su envolvente en el paso (3) del algoritmo puede captar de la mejor manera el todo. Esto le generó algunas críticas, particularmente famosa es la de Pascal: "la confusion de Montaigne, qu'il avait bien senti le défaut d'une droite méthode, qu'il l'évitait en sautant de sujet en sujet"[56, volumen 2, p. 27] (la confusión de Montaigne, quién sintió la falta de un método correcto, por lo que saltaba de tema en tema). Sin embargo, a la luz de los resultados del capítulo 2 esta era la manera más adecuada de proceder.

Con la información dada, el lector puede hacerse una idea de la forma en que reaccionaría Montaigne ante una situación dada comparándola con la forma en que reaccionaría ante las circunstancias descritas en sus ensayos. Esto depende de qué tan alejada esté la nueva situación de las ya consignadas, por eso es tan importante la variedad y la multitud de los temas. Obtenemos así una suerte de método de extrapolación.

Finalmente, la siguiente cita de Auerbach donde describe el método seguido por Montaigne en sus ensayos puede ser aplicada perfectamente a la máxima:

> "Aquel que desee describir exacta y objetivamente algo que se halla en continua mudanza debe plegarse también a sus cambios exacta y objetivamente; debe describirlo en la mayor cantidad posible de experiencias y en la forma en que cada vez se comporta, y de esta manera podrá llegar a circunscribir el ámbito de sus cambios posibles, obteniendo finalmente, su imagen total."[9, p. 270]

La obra de Auerbach se caracteriza por sus profundas intuiciones geométricas, que al menos a nosotros nos recuerdan constantemente el concepto matemático de haz (en la sección 4.4 veremos cómo otra de sus citas nos lleva a una interpretación "hacificada" de la Biblia). Si consideramos que las matemáticas no son más que un fenómeno cultural y por tanto sujeta a respuestas a su medio sociohistórico, esta analogía se vuelve aún más interesante: la obra cumbre de Auerbach *Mímesis* fue redactada durante su exilio en Estambul entre 1942 y 1945, exactamente los mismos años en que Jean Leray desarrollaba la teoría de haces en un campo de prisioneros en Austria. ¿Estas ideas habrán surgido como una réplica geométrica-reconstructiva al caos en que ese momento se encontraba el mundo? Los trabajos de Benjamin y Warburg, realizados en la misma época como analizaremos en las siguientes secciones, y la obra matemática de Grothendieck, sugieren que una respuesta afirmativa es admisible. Sin embargo plantearla completa y explícitamente excede por mucho los alcances de este trabajo.

Retornando a la cita de Auerbach aplicada particularmente a Montaigne, podemos pensar en un haz formado de la siguiente manera: el espacio base T sería el tiempo de vida del ensayista y el espacio desplegado las creencias-acciones (indistinguibles desde un punto de vista pragmático) que dicha persona tenía en un momento determinado. Las secciones de este haz muestran cómo las creencias no son instantáneas sino que se desarrollan en el tiempo: las creencias puntuales no son más que un límite de creencias locales [20]. Como es usual, este haz puede reescribirse funtorialmente asignando a cada abierto U de T las creencias-acciones que una persona tenía en ese intervalo de tiempo. La idea es determinar o al menos acotar el cambio de la imagen F cuando varía U. La cita de Auerbach, al igual que nuestra discusión previa, destaca que debemos seleccionar el mayor número de experiencias claves para *circunscribir el ámbito de sus cambios posibles.* En esta acotación entran en juego los operadores $\{\Diamond_n\}$ que, como hemos mencionado anteriormente, funcionan como un tipo de "aura" en expansión alrededor del objeto: mientras más grande sea n, más lejana en el tiempo es la predicción que podemos hacer de un hábito-sección en particular. Ellos terminan funcionando como una red para atrapar las vecindades alrededor de $F(U)$.

4.2 *Atlas Mnemosyne*, Aby Warburg

Con el nombre de *Atlas Mnemosyne* (por Mnemosyne personificación de la memoria en la mitología griega) se conoce un montaje realizado por el historiador de arte Aby Warburg (1866-1929), comenzado en 1924 y en el que trabajó hasta el momento de su muerte. Estaba formado por sesenta y tres paneles (tablas de madera de 150x200cm cubiertas por un paño negro y en donde fueron colocadas fotografías, recortes de libros y periódicos), de los que sólo se conservan fotografías en blanco y negro de 18x24cm, que pretendían mostrar en principio la persistencia de ciertas imágenes paganas durante el renacimiento europeo. Más allá de una mera recopilación iconográfica, como cualquier obra realmente interesante, está sujeta a múltiples interpretaciones. En este trabajo pretendemos hacer un análisis del Panel B (figura 4.1) en términos de la contrastación de imágenes que representan la relación del hombre con el universo.

Partamos de un análisis de las imágenes por separado, resaltando los diversos niveles de lectura que puede realizar un observador. Para facilitar nuestra exposición utilizaremos la numeración de las imágenes dada en la figura 4.2. Al observar la imagen número 1 lo primero que nos percatamos es que los brazos son desmesuradamente largos, extendiéndose hacia los bordes de un círculo azul identificable con el cielo gracias a la presencia del sol, nubes y vientos. La imagen pertenece al *Liber Divinorum Operum* de Santa Hildegarda (siglo XII). “La figura humana es tan larga como ancha si las manos y los brazos se extienden por igual desde su tronco. Es así porque el firmamento también es tan largo como ancho” [33, p. 814]. Según Saxl, esta concepción puede remontarse hasta un mito iraní de la creación que cuenta que “el Primer Hombre, *Vida Mortal*, fue creado a imagen del universo tan brillante como el sol. Su anchura era igual a su altura, su piel era el cielo y su carne la tierra”[64, p. 59].

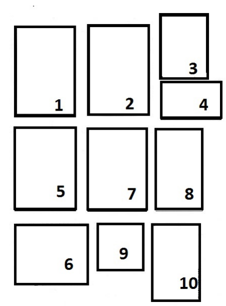

Figura 4.2:

La imagen 2, tomada de un manuscrito griego del siglo XV, presenta una figura humana rodeada por los signos zodiacales. El hombre lleva una porra y tiene un paño bajo el brazo, lo que permite identificarlo con Hércules. A pesar de la existencia de líneas asignando partes corporales a signos del zodiaco no parece claro [64, p. 60] si dicha relación buscaba un significado astrológico general o era una representación particular de “Heracles, vestido de estrellas, señor del fuego, príncipe del universo” como es descrito en las *Dionisíacas* de Nono.

La imagen 3 es un hombre zodiacal perteneciente a las “Très Riches Heures du Duc de Berry”. En ella se nos presentan dos figuras humanas (correspondientes a los dos sexos) y también los signos del zodiaco duplicados: un primer juego está superpuesto a una de las figuras humanas enfatizando la influencia de este sobre el cuerpo humano, y un segundo juego está sobre un elipsoide reglado sugiriendo que esta influencia puede ser calculada. El dibujo está completado

Figura 4.1: Panel B

por cuatro inscripciones en latín describiendo las propiedades de cada signo de acuerdo a las cuatro complexiones (caliente, frío, húmedo o seco), los cuatro temperamentos (colérico, melancólico, sanguíneo y flemático) y los cuatro puntos cardinales: "Aries, Leo y Sagitario son calientes y secos, coléricos, masculinos, orientales"; "Tauro, Virgo y Capricornio son fríos y secos, melancólicos, femeninos, occidentales"; "Géminis, Acuario y Libra son calientes y húmedos, sanguíneos, masculinos, sureños"; "Cáncer, Escorpión y Piscis son calientes y húmedos, flemáticos, femeninos, norteños" [13].

La imagen 4 describe intrucciones para realizar sangrías según el *Hamburger Historienkalender* (1724); la 5 presenta una división del cuerpo humano para practicar sangrías según un manuscrito alemán del siglo XV; y 6 enseña plazos buenos y malos para realizar sangrías y sus consecuencias según un calendario elaborado en Basilea en 1499 por Lienhart Ysenhut. Las sangrías eran una práctica médica muy utilizada al menos desde los tiempos de Hipócrates hasta mediados del siglo XIX. Se creía que estas debían realizarse en determinadas partes del cuerpo en ciertos días del mes de acuerdo a la posición de los planetas y los signos del zodiaco, por lo que calendarios de este tipo fueron bastantes comunes.

La imagen número 7 corresponde al famoso Hombre de Vitruvio de Leonardo da Vinci. Este artista identifica lo bello con lo natural, por lo que investigó sistemáticamente los procesos mecánicos y anatómicos del cuerpo humano, en aras de desarrollar una teoría de las proporciones científica para alcanzar este ideal.

La imagen 8 es un estudio de las proporciones del hombre hecho por Hans von Kulmbach en 1513 titulado "Las proporciones ideales del cuerpo humano según Durero". Durero se orientó hacia una ciencia puramente antropométrica, pero a diferencia de da Vinci, estimaba que esta debía ser más instructiva que práctica. Su búsqueda disciplinada y desinteresada estaba más orientada al saber por el saber, renunciando decididamente a la ambición de descubrir un único canon ideal de belleza [54].

En las imágenes 9,10 en primer plano aparece un dibujo detallado y proporcionado del cuerpo humano y en segundo plano se sitúan símbolos del zodiaco (universo), lo que lleva a pensar, sobre todo en la imagen 10, en un universo sometido al hombre. Las imágenes pertenecen a *Los tres libros de la filosofía oculta* de Agrippa. En ellos se hace un estudio detallado de las medidas y proporciones del cuerpo del hombre, pero no por belleza (Leonardo) ni por su valor intrínseco (Durero) sino con un fin un poco más práctico: "...todos los antiguos contaban otrora con sus dedos, y señalaban los números con los dedos, y parece que con ello quisieron probar que se habían inventado todos los números, medidas, proporciones y armonías, a imitación de las articulaciones del cuerpo humano; de allí deriva también que, adecuándose a las medidas y proporciones del cuerpo humano, efectuaron sus compartimientos, construyeron sus templos, edificios, casas, teatros, navíos, máquinas, toda clase de obras artificiales, y todas las partes o miembros de artes y edificios, como las columnas, capiteles, bases, frontispicios, ordenamientos de pedestales, y todas las demás cosas de esa naturaleza. Dios mismo enseñó a Noé cómo fabricar el arca según la medida del cuerpo humano, como El Mismo fabricó toda la máquina del mundo según la simetría del cuerpo humano...” [4, Libro 2, capítulo XXVII].

Así, el panel B se puede ver como lo que llamamos en el capítulo 2 un espacio pragmático, donde cada imagen representa una interpretación de la relación del hombre con el universo, organizadas de acuerdo a la distancia interpretativa entre ellas. La tensión máxima se encuentra entre la imagen 1 y la 10, en medio de las cuales se puede observar un *degradé* más o menos continuo de las interpretaciones. En primer lugar, en la imagen 1, tenemos la máxima influencia del universo sobre el hombre: el hombre primigenio creado a imagen del universo. Posteriormente en la imagen 2, todavía estamos en presencia de un ser semidivino, en este caso Hércules y surge un elemento que se empezará a desarrollar en imágenes posteriores, la influencia del universo a través del zodiaco. Sin embargo, al ligarse este a la imagen de Hércules, deja en el aire, como ya habíamos comentado, un significado ambiguo. En la imagen 3, la influencia del zodiaco alcanza su plenitud: este afecta cada aspecto de la personalidad del hombre. Gráficamente, la imagen 3 también se ubica en posición central con respecto a las imágenes 2, 4, 5 y 6: la repetición del zodiaco tanto en el borde como sobre la figura humana capta las maneras en que éste se puede ubicar en dichas imágenes. En las imágenes 4, 5 y 6 la influencia baja a un nivel más carnal, más humano: esta se reduce a procedimientos médicos específicos. Aunque el lector se puede extrañar de la distancia dentro del panel B entre la imagen 4 y las imágenes 5-6, cabe recordar que estamos representando en dos dimensiones un espacio donde la noción de dimensión no tiene sentido, por lo que ninguna representación puede ser completamente fiel. Sin embargo, esta disposición de las imágenes permite resaltar la frontera existente entre las imágenes 1, 2, 3, 4, 5, 6 y las imágenes 7, 8, 9, 10: en el primer grupo el universo actúa como “agente activo” sobre el hombre, mientras que en el segundo la relación de causalidad se invierte. Resulta notable que dicha frontera puede observarse gráficamente: en el primer grupo hay un descuido a la hora de representar las figuras, no prestándole mucha atención a las proporciones y obteniendo en la mayoría de los casos sólo mamarrachos; en el segundo grupo, hay un mayor cuidado por obtener figuras proporcionadas y bellas. Como mostró Panofsky en *La historia de las teorías de las proporciones humanas como reflejo de la historia de los estilos* [54, pp. 77-130], existen problemas de fondo que no permiten la coincidencia de las dimensiones técnicas y las objetivas, por lo que la escogencia de una representación se debe más a razones psicológicas que a la habilidad o la destreza del artista.

Este ejemplo nos permite resaltar algunos hechos importantes sobre los espacios de interpretación. En primer lugar, sí se puede establecer una escala de distancias entre las distintas interpretaciones que nos dé toda la información relevante para la configuración del espacio aun cuando no intervenga ningún valor numérico. Esta distancia depende del interpretante, de su entendimiento del signo, de las interconexiones que haga entre los diversos puntos de vista, por lo que está sujeta a modificaciones constantes: cada reentendimiento la modifica.

En segundo lugar, el espacio de interpretaciones es, al menos en el caso ideal de disponer de todas las interpretaciones, continuo. Los saltos apreciables en el

Panel B se deben a que estamos con una cantidad reducida de interpretaciones. Lo mismo vale cuando consideramos la imagen 1 y la imagen 10: ambas son contradictorias, sin embargo si las consideramos inmersas en un espacio pragmático ideal, entre ellas debe existir una infinidad de interpretaciones intermedias de tal manera que los cambios se tornan imperceptibles. Así, la dialéctica llega a ser posterior a la continuidad, dando lugar a toda una serie de tinturas sobre un continuo. Sin embargo, como tratamos de demostrar con el algoritmo cenopitagórico de interpretación y en la exposición que haremos de *El Libro de los Pasajes* de Benjamin, la búsqueda constante de polaridades a ser contrastadas es la manera óptima de acercarse a un conocimiento cabal en medio del mar de interpretaciones.

Las visiones contradictorias aparecen de forma natural:

- Tensión máxima 1-9: el hombre creado a imagen del universo versus el universo creado a imagen del hombre.
- Sentido de la ciencia 6-7-9-10: ciencia por belleza, ciencia de por sí, ciencia para entender el mundo, ciencia para alterar el mundo.

Lo anterior no cubre exhaustivamente todas las posibles relaciones causales entre el hombre y el universo. El mismo Warburg en su libro *El ritual de la serpiente*[69] establece otra de ellas: los indios Pueblo de Norteamérica que se disfrazan de ani-males, para a través de sus danzas y máscaras poder influenciar los fenómenos naturales. Si esta concepción de la naturaleza se insertara dentro del panel B debería producir una curvatura del espacio, en el sentido que debe estar cerca de la imagen 10 porque es el hombre quien influye en el universo, aunque para eso debe perder su identidad, imitar la naturaleza (imagen 1), para que la vida anímica de esta a su vez lo siga.

Así, es de esperarse que este tipo de espacios tengan una estructura compleja. Si los trabajamos en el marco de la teoría homotópica de tipos, ellos pueden ser estudiados a partir de sus grupos de homotopía. Aunque en este caso sencillo esto no sea tan necesario, en ejemplos más interesantes como el *Libro de los Pasajes*, ellos pueden ayudar a "navegar" a través del espacio y, entre otras cosas, facilitar el uso de herramientas como el algoritmo cenopitagórico de interpretación. Quizás en un futuro estos instrumentos sean de utilidad a los investigadores que emprendan proyectos tan ambiciosos como los llevados a cabo por Warburg y Benjamin.

4.3 Escatologías musulmanas en la *Divina Comedia*

En 1919, el arabista español Miguel Asín Palacios publicó un trabajo [7] donde buscaba demostrar la influencia de obras teológicas musulmanas en la *Divina Comedia* de Dante. La obra como era de esperarse generó un gran revuelo en la comunidad dantesca, donde se formaron dos bandos bien marcados: los que aceptaron los argumentos de Asín y los que no. Esto generó una polémica muy interesante en la primera mitad del siglo pasado sobre creatividad versus originalidad, los métodos de la investigación literaria y la permeabilidad de la comunidad académica hacia teorías que ponen en duda ideas que ya han tomado el carácter de dogmas. Sin embargo, más que entrar en ella, nuestro objetivo es utilizarla como ejemplo para ilustrar algunas nociones expresadas sobre todo en el capítulo 3.

Considerando el "más alla" como un signo, cada escatología es un interpretante de él. Podemos construir un espacio pragmático de todas ellas o trabajar con determinadas subclases de ellas. Si seguimos el trabajo de Asín, deberíamos centrarnos en las cristianas, musulmanas y judías de las que se tenga registro antes de 1321, año en que apareció la *Divina Comedia*. Veamos, en términos de 3.5.2, cómo es su construcción.

Esta tiene lugar en la mente de un intérprete, como discutimos anteriormente; sin embargo, la imagen de una hoja en blanco que la represente es muy sugestiva y la emplearemos constantemente. En primer lugar, formamos un tipo **E** consistente de copias de cada una de estas escatologías. Cada una de estas copias es una región en el espacio, compuesta de oraciones que describen cómo será la vida después de la muerte. Al principio, estas regiones son consideradas como disyuntas, sin ninguna relación entre sí; es el intérprete quien concibe relaciones más o menos subjetivas entre ellas. Hemos representado este proceso de varias maneras a lo largo de esta tesis: primero utilizamos morfismos, después morfismos parciales y finalmente caminos. Los caminos, particularmente, constituyen una imagen extremadamente rigurosa y plástica a la vez. Por un lado, dados dos puntos de **E** (imágenes, palabras, descripciones de una escatología), un camino entre ellos no sólo significa que coinciden, sino que, dentro del espíritu de la teoría homotópica de tipos, esta afirmación tiene que ir acompañada de un argumento de por qué lo hacen. Esto no es gratuito ya que como hemos mencionado las relaciones surgen a posteriori y dependen principalmente del intérprete. En la obra de Asín encontramos ejemplos de asociaciones no tan claras, como cuando trata de relacionar el águila gigantesca, formada por millares de ángeles agrupados, que se ofrece a Dante en *Paradiso* XVIII-XX, con un gallo, también gigantesco, que se aparece a Mahoma en el cielo en una leyenda musulmana [7, p. 30]. Esta correspondencia no tiene por qué ser automáticamente evidente, de hecho no lo fue para muchos de sus detractores. Ella amerita una justificación [7, pp. 51,52]:

> El águila dantesca está constituida por espíritus bienaventurados en número incontable, los cuales son pintados por Dante como seres dotados de rostro y alas, que despiden rayos intensos de luz vivísima, y que entonan cánticos armoniosos cuya letra está tomada de textos bíblicos, exhortando a los hombres a la práctica de la justicia; [...] el ave celestial, finalmente, agita sus alas al entonar sus cantos y reposa después.
> El gallo de la leyenda musulmana es también de gigantesco tamaño, [...] sus alas agítanse al entonar sus cantos religiosos excitando a los hombres a la práctica de la oración y reposan después; [...] [esta ave]

> es un ángel y si, además, advertimos cómo se repiten en la leyenda musulmana las visiones de ángeles gigantescos constituidos cada uno de ellos por la monstruosa amalgama de infinitos rostros e infinitas alas, esplendorosos de luz y entonando al unísono, con cada una de sus innúmeras lenguas, cánticos religiosos, se comprenderá cuán tentador sería para un artista como Dante el injertar hábilmente ambos bocetos, para formar con ellos la híbrida pero bellísima imagen del águila.

Los caminos también constituyen una imagen plástica. Podemos pensar en regiones disyuntas jalonadas entre sí por los caminos, hasta que queden superpuestas.

En su libro, este arabista trata de relacionar la *Divina Comedia* con el siguiente versículo del Alcorán: "Loado sea el [Señor] que hizo viajar, durante la noche, a su siervo [Mahoma] desde el templo sagrado [de La Meca] hasta el lejano templo [de Jerusalén] cuyo recinto hemos bendecido, para hacerle ver nuestras maravillas". A primera vista no existe la más mínima relación entre este texto y la obra dantesca. Sin embargo, él originó una gran cantidad de leyendas y obras teológicas que constituyen una suerte de línea de evolución. En las redacciones más sencillas recogidas por Asín, mientras Mahoma duerme es despertado por un hombre que le pide que marche con él. En el transcurso de su viaje, son testigos de suplicios horribles, que su guía le explica como distintos castigos para distintas clases de pecado. Siguen adelante, hasta pasar cerca de la *gehena*, el infierno musulmán, el cual esquivan. Finalmente, llegan a una llanura llena de luz y paz, donde Mahoma encuentra algunos de sus conocidos muertos por la causa del Islam [7, p. 11]. En esta, sin separarse demasiado del versículo del Alcorán, ya se empiezan a notar ciertas similitudes con la obra dantesca: aparece la figura del guía, que satisface la curiosidad del viajero, se explicita que esta es una narración escatológica, aparecen los tormentos con su correspondencia con las culpas, Mahoma se encuentra con fallecidos que conocía. A lo largo del libro, se narran otras leyendas que se acercan poco a poco más a la *Divina Comedia*: en la redacción de la página 14 ya aparecen dos guías; en p. 19 aparece una descripción más precisa del paraíso como dividido en cielos; en p. 89 el protagonista no es Mahoma, sino un poeta, $Ab\bar{u} - l -^{c} Al\bar{a}'$, el cual se toma la libertad de distribuir en el cielo y en el infierno a algunos de sus colegas, con los que entabla conversaciones. De esta manera van surgiendo más y más elementos de la obra de Dante, lo que la va acercando poco a poco al versículo por medio de estos "escalones evolutivos". La gracia de estos es que entre eslabón y eslabón los saltos no sean tan abruptos. Por esta razón en 3.5.24 utilizábamos un factor de tolerancia M, para acotar los cambios razonables. Estos saltos se pueden pensar como saltos de creatividad. A partir de aquí podemos hablar de caminos de segundo orden, que asociarán ya no elementos de las regiones, sino las regiones en sí. Estos caminos se pueden pensar como líneas de evolución.

En el capítulo 3 enfatizamos que existía una suerte de escala entre los diferentes elementos que constituían un interpretante. Por ejemplo, en ciertos momentos Asín destaca la semejanza entre los tormentos del infierno musulmán con los dantescos. En ambas infiernos, los condenados reciben un castigo en cierta medida equivalente al pecado que cometieron en vida, lo que usualmente se conoce como ley del contrapasso. Lo que hay en el fondo de ella es una concepción de la salvación basada en la justicia entendida a partir de la ley del talión. En la definición de distancia en 3.5.2 quisimos resaltar el hecho que ella depende esencialmente de la "profundidad" en que se produzcan las semejanzas y diferencias. Una similitud entre una determinada condena a un determinado grupo de pecadores (los adúlteros arrastrados en ambos infiernos con violencia por un huracán de fuego) es menos profunda que la concepción de la salvación en sí. Así, que si queremos buscar escatologías distantes a estas, debemos centrarnos en cómo ellas conciben la salvación. Un buen ejemplo lo constituye Swendenborg. Él fue un científico la mayor parte de su vida, realizando importantes contribuciones en matemáticas, geología, química, física, mineralogía, astronomía, anatomía, biología, psiquiatría. A la edad de 56 años se dedicó a la teología, y fundamentó su sistema en la salvación por medio de las obras. Pero no como un reflejo de la caridad del alma, sino concebidas en su función autoconstructora, a la par de como la investigación o aprender algún oficio enriquecen al hombre (observemos la similitud con Montaigne y Peirce). En su escatología, el muerto no se daba cuenta inmediatamente de su estado, sino que continuaba con una vida muy similar a la que llevaba en la tierra, sólo que empezaba a recibir la constante visita de ángeles y demonios. Dependiendo de su personalidad, preferirá la compañía de unos o de otros, y los seguirá ya sea al infierno o al cielo. En el primero de ellos, los demonios son felices y se dedican a lo que Borges, al explicar la obra de Swedenborg, llama política sudamericana: vivir para conspirar, mentir e imponerse. En el cielo, en cambio, las almas continúan con su labor autocreadora, al igual que hicieran en la tierra; los ángeles no son más que quienes están avanzados en esta tarea.

Muchos de los ataques que recibió la obra de Asín provinieron de especialistas de Dante para los que esta constituía un menoscabo de la genialidad del poeta. Tradicionalmente muchos de ellos ponderaban gran parte del valor de la *Divina Comedia* en la originalidad de las imágenes utilizadas por Dante en sus descripciones, sin precedentes en las escatologías cristianas o paganas conocidas hasta la fecha. Básicamente la originalidad de un S_i es concebida gracias a qué tan aislado se encuentre S_i del resto del espacio pragmático. A esta concepción de la creatividad le podemos dar un significado formal.

Definición 4.3.1. Sea $\{S_i\}_I$ una familia interpretaciones y $\mathbf{E}_P$ el espacio pragmático originado por ellas, definimos la distancia de S_i a $\mathbf{E}_P$, la cual denotaremos $d(S_i, \mathbf{E}_P)$, como

$$d(S_i, \mathbf{E}_P) = \bigcup_{j \in I - \{i\}} S_i \triangle S_j.$$

Si esta distancia es grande podemos decir que la obra es original, mientras que si es demasiado baja, o tiende a algún S_k, podríamos incluso hablar de plagio. En el espacio pragmático de las escatologías, la distancia de la *Divina*

Comedia era tradicionalmente bastante alta. Asín Palacios en su obra tiende nuevos caminos entre Dante y leyendas musulmanas, haciendo que la distancia 4.3.1 baje. Aunque esta concepción de la creatividad puede ser muy discutida, primeramente por el mismo Asín, ofrece varias ventajas. Gracias a que los caminos en $\mathbf{E}_P$ son definidos por el intérprete, podemos medir la distancia de acuerdo a diversos factores: la originalidad de las imágenes, del estilo, de los recursos lingüísticos, etc. Además, como $\mathbf{E}_P$ es construido abstractamente, la definición 4.3.1 puede aplicarse a una gran variedad de obras: literarias, musicales, pictóricas, científicas, etc.

4.4 La interpretación figural de la *Biblia*

En los capítulos anteriores tratamos las interpretaciones de un signo como objetos de una categoría abstracta, por lo que surge la pregunta: ¿Existen interpretaciones con algún tipo de estructura matemática interesante? En esta sección, trabajaremos con una interpretación de la Biblia que puede entenderse como un haz.

La interpretación figural establece entre dos hechos o personajes históricos, o al menos tenidos como tales, una relación por la cual el primero de ellos no solamente es él mismo, sino que señala al otro, el cual por su parte lo incluye y lo consuma. Generalmente se emplea para entender los hechos históricos narrados en el Antiguo Testamento, como prefiguración de los del Nuevo. Así, por ejemplo, la atadura de Isaac (Génesis 22), la serpiente de bronce (Números 21.4-9) como prefiguración del sacrificio de Cristo; Josué como conductor del pueblo de Israel (Números 14) como prefiguración de Jesús salvador por la gracia y no por la Ley. La figura es un hecho verdadero e histórico que actúa como profecía de otro hecho verdadero e histórico. De hecho, se puede observar en Jesús la voluntad expresa de cumplir las promesas hechas en el Antiguo Testamento, sin importar si estas fueron enunciadas con palabras o con hechos. La interpretación figural jugó un papel importante durante la expansión del cristianismo, porque les permitió a los pueblos bárbaros la aceptación de libros que en principio solo podían ser de importancia para la identidad del pueblo judío, como promesas hechas a ellos mismos.

Como ha notado Auerbach [9, pp. 75-76], la interpretación figural exige dos posiciones de lectura: una causística-temporal-horizontal entre los hechos del Antiguo Testamento, nuestra interpretación histórica usual, y otra vertical, que liga estos hechos con la vida de Cristo, una conexión ni temporal ni causal y que sólo cobra sentido a la luz de la Providencia Divina que es la que planea la historia y proporciona la clave para su comprensión. Este doble enlace horizontal-vertical nos lleva a pensar que el modelo natural para entender las figuras es la teoría de haces de espacios topológicos. Recordemos rápidamente este concepto:

Definición 4.4.1. [20] Dado un espacio topológico X, un haz sobre X es un par $\mathcal{H} = (E, p)$, donde E es un espacio topológico y $p : E \to X$ es un homeomorfismo local, es decir una función tal que cada punto $e \in E$ tiene una vecindad abierta S para la cual se cumple:

1. $p(S)$ es abierto en X,
2. $p|S : S \to p(S)$ es un homeomorfismo.

La función p no tiene por qué ser sobreyectiva. Para cada elemento x en X, el conjunto $E_x = p^{-1}(x) = \{e \in E : p(e) = x\}$ se llama la fibra de $\mathcal{H}$ sobre x.

En nuestro caso, el espacio desplegado E serán los hechos del Antiguo Testamento, mientras que el espacio base X serán los hechos del Nuevo, ambos provistos por una topología de la cercanía en el tiempo y en el espacio. La función continua $p : E \to X$ ligaría cada hecho con aquél a que este prefigura. Luego, las fibras sobre sobre un determinado hecho consistirán en todos aquellos que lo prefiguran. Por ejemplo, en la fibra sobre el sacrificio de Cristo tendríamos: el sueño de Adam, la atadura de Isaac, la serpiente de bronce, etc.

Sin embargo, la clave del concepto de haz es la noción de homomorfismo local, la cual también es la clave de la identificación figural. Analicemos por ejemplo, el episodio de la serpiente de bronce. Este es narrado en los siguientes términos en Números 21.4-9.

> Después partieron del monte de Hor, camino del Mar Rojo, para rodear la tierra de Edom; y se desanimó el pueblo por el camino. Y habló el pueblo contra Dios y contra Moisés: ¿Por qué nos hiciste subir de Egipto para que muramos en este desierto? Pues no hay pan ni agua, y nuestra alma tiene fastidio de este pan tan liviano. Y Jehová envió entre el pueblo serpientes ardientes, que mordían al pueblo; y murió mucho pueblo de Israel. Entonces el pueblo vino a Moisés y dijo: Hemos pecado por haber hablado contra Jehová, y contra ti; ruega a Jehová que quite de nosotros estas serpientes. Y Moisés oró por el pueblo. Y Jehová dijo a Moisés: Hazte una serpiente ardiente, y ponla sobre un asta; y cualquiera que fuere mordido y mirare a ella vivirá. Y Moisés hizo una serpiente de bronce, y la puso sobre un asta; y cuando alguna serpiente mordía a alguno, miraba a la serpiente de bronce y vivía.

En primer lugar observemos que este es narrado como un hecho histórico, en cuya descripción se emplean muchos datos circunstanciales. Esta naturaleza histórica es confirmada en otro episodio, Segunda de Reyes 18.1-4, donde dice que

> En el tercer año de Oseas hijo de Ela, rey de Israel, comenzó a reinar Ezequías hijo de Acaz rey de Judá. Cuando comenzó a reinar era de veinticinco años, y reinó en Jerusalén veintinueve años. El nombre de su madre fue Abi hija de Zacarías. Hizo lo recto ante los ojos de Jehová, conforme a todas las cosas que había hecho David su padre. El quitó los lugares altos, y quebró las imágenes, y cortó los símbolos de Asera, e hizo pedazos la serpiente de bronce que había

> hecho Moisés, porque hasta entonces le quemaban incienso los hijos de Israel; y la llamó Nehustán.

En segundo lugar, la identificación Serpiente de Bronce/Cristo no es una identificación puntual ni a priori, sino que en el texto hay elementos alrededor de la serpiente de Bronce, una vecindad se podría decir, que se pueden proyectar en el episodio de la crucifixión de Cristo, y así lograr la identificación. Así tenemos:

1. La serpientes ardientes, símbolo del pecado, que al morder al pueblo ocasionaban la muerte, metáfora muy usada en la Biblia para referirse al estado sin Dios, en contraste con la vida, el estado de comunión con Él. Jesús usa casi las mismas palabras para referirse a sí mismo: "el que cree en mí, aunque muera, vivirá" Juan 11.25.

2. La serpiente es símbolo de maldición, desde que en el Génesis recibió el castigo divino. Así también desde un punto histórico, la crucifixión era la peor forma de ejecución posible, y desde un punto de vista más teológico, Cristo está maldito al recibir en sí todos los pecados de la humanidad: "Cristo nos redimió de la maldición de la ley, hecho por nosotros maldición (porque está escrito: Maldito todo el que es colgado en un madero)" Gálatas 3.13.

3. La serpiente es colocada en un asta para ser exhibida delante del pueblo. De igual manera, la crucifixión tenía como objetivo exponer al condenado a una muerte particularmente horrible para disuadir a la gente de cometer crímenes parecidos. En el cristianismo, Jesús en la cruz y la cruz por sí sola han pasado a ser símbolos que son exhibidos con objeto de devoción.

4. La serpiente, en particular la serpiente enrollada en un bastón, es también símbolo de curación y resurrección. Warburg cree ver en él un residuo de un culto pagano mucho más antiguo, relacionado también con Asclepio. En [69] escribe "El regreso desde el subsuelo, que es el lugar donde descansan los muertos, en combinación con su facultad para renovar su piel, convierte a la serpiente en el símbolo más natural de la inmortalidad y de la resurrección de una enfermedad o de un peligro mortal".

Aunque reconocer estos elementos depende en gran medida de la voluntad del interpretante y de ciertos conocimientos previos, lo importante es que en la posibilidad fáctica de encontrar esta vecindad o aura en el sentido Benjaminiano está la clave de la interpretación figural: sin ella no hay identificación posible entre la figura y su consumación.

4.5 *Libro de los Pasajes*, Walter Benjamin

El proyecto del *Libro de los Pasajes* sufrió varias transformaciones durante los casi trece años que Benjamin le consagró. La idea inicial en 1927 era redactar un pequeño artículo en colaboración con Franz Hessel, quien se desligó rápidamente del proyecto, sobre los pasajes de París, esas galerías con techo de cristal construidas en los callejones formados entre un par de edificios, donde se ubicaban diversos tipos de establecimientos comerciales y que florecieron en París a mediados del siglo XIX. Según se desprende de las redacciones de esta primera etapa [11, pp. 863-879], la obra tendría la forma de una descripción marcadamente onírica del capitalismo desmedido alrededor de los pasajes (no en vano el articulo llevaría el subtítulo *Un cuento de hadas dialéctico*, carta a Scholem 1928 [11, p. 895]). Una pequeña cita nos puede dar una idea del carácter que tenía en esta etapa la obra: "En los pasajes son posibles los colores más falsos; no extraña apenas que haya peines rojos y verdes. La madrastra de Blancanieves tenía uno así, y cuando el peine no hizo lo que debía, allí estaba la linda manzana para ayudar a ello, de un color venenoso, mitad rojo mitad verde, como el afilado peine" [11, p. 867]. Este carácter onírico de la obra nunca se perdió, y mucho de las primeras redacciones siempre estuvo entre las notas que harían parte de la redacción definitiva. De hecho, como veremos, en eso consiste precisamente su riqueza, en la sedimentación capa tras capa de material de las índoles más diversas.

Lo que sí cambió fueron sus alcances: lo que en principio estaba más orientado hacia una crítica social con tintes caricaturescos se convirtió en una obra que quería captar toda la realidad objetual del siglo XIX. En palabras de Benjamin: "Y entonces habré comprobado en la práctica lo *concreto* que se puede ser en contextos históricos-filosóficos. No se me podrá reprochar que me lo puse fácil"[11, p. 827]. Así lo que en un principio "es un trabajo de pocas semanas", y "no se trata de nada parecido a una vasta exposición" en 1928 [11, p. 895], se convirtió en la gran obra en la que trabajaría hasta su suicidio en 1940. Debido a esta interrupción, que dejó la obra inacabada, queremos empezar nuestro análisis con una descripción detallada del material que nos ha quedado. Todas las versiones del *Libro de los Pasajes* son traducciones de la edición alemana a cargo de Rolf Tiedemann, editor oficial de las obras de Benjamin, la cual en general consta de

1. RESÚMENES: el primero de ellos, titulado *Paris, die Hauptstadt des XIX. Jahrhunderts* fue redactado en alemán como un informe para el Instituto de Investigación Social, que era quien financiaba el proyecto, en mayo de 1935 y consta de unas 13 páginas; el segundo de ellos, titulado *Paris, Capitale du XIX*^{e} *siècle* fue redactado en francés para buscar un mecenas en vista de los problemas económicos por los que pasaba el Instituto, en marzo de 1939 y consta de unas 14 páginas. Los dos resúmenes son muy similares en su temática y redacción, y la principal diferencia entre ellos radica en el trasfondo filosófico que hay detrás: en el segundo de ellos irrumpen con fuerza conceptos como fantasmagoría e inconsciente colectivo. Resaltemos que ninguno de ellos fue pensado para ser publicado.

2. APUNTES Y MATERIALES-PRIMERAS ANOTACIONES: constituyen el grueso de las ediciones con cerca de 800 páginas. Consta principalmente de citas de libros, datos sueltos y reflexiones de Benjamin que varían de extensión entre una línea hasta casi una página (pasajes, en el sentido de párrafos, un juego de palabras que seguramente tuvo muy en cuenta

Benjamin al mantener el nombre el libro como justificaremos más adelante). Generalmente no existe una relación de causalidad lógica entre estos pasajes y solamente están divididos de manera un tanto vaga en partes de algunas decenas de páginas, de acuerdo a los temas que tratan: pasajes, moda, Baudelaire, el flâneur, etc. Fueron redactados entre 1927 y 1940.

3. PROYECTOS INICIALES: borradores del artículo proyectado en un principio. Consta de *Passagen, Parisser Passagen* y *Der Saturnring oder Etwas vom Eisenbau* redactados en torno a 1928 y cubren unas 15 páginas.

4. TESTIMONIOS SOBRE LA GÉNESIS DE LA OBRA: extractos de la correspondencia de Benjamin desde 1928 hasta 1940 donde se habla del *Libro de los Pasajes*. Son particularmente interesantes porque nos dan muchas pistas de la evolución de la concepción del libro en el pensamiento de Benjamin, las críticas recibidas y cómo ellas afectaron el trabajo.

Haremos énfasis en los varios niveles de análisis que se pueden hacer: la idea que tenía Benjamin sobre que debía ser el *Libro de los Pasajes*, lo que nos ha quedado de este proyecto y la experiencia a la que se enfrenta el lector cuando lo lee, y cómo creemos que debió ser afrontado para cumplir con los objetivos marcados.

¿Pero cómo captar la totalidad del siglo XIX? La idea es que en París se condensaban todas las fuerzas que regían el mundo en ese siglo, al menos las de las grandes ciudades europeas que eran el principal interés de Benjamin, así que todo lo que pasara en París acabaría por proyectarse a las demás. Pero esto no afecta lo fundamental de la cuestión, que es la forma de tratar de describir una realidad hasta en sus más mínimos detalles. En varias ocasiones Benjamin comentó someramente el que sería su método, sobre todo en la correspondencia con sus colegas; sin embargo, lo que se esconde detrás es un procedimiento complejo que trataremos de dilucidar en términos de los temas trabajados en esta tesis.

4.5.1 Copragmatismo en el *Libro de los Pasajes*

El método de Benjamin parte en descomponer el objeto que quería entender, en este caso el París del siglo XIX, escoger las partes más significativas y a partir de ellas, mediante un proceso de pegamiento, reconstruirlo íntegramente. Este tipo de procedimiento es el que hemos llamado en este trabajo coMP, copragmatismo. Ya desde sus primeras aproximaciones, *Un cuento de hadas dialéctico*, se encuentran los otros grandes temas sobre los que se constituiría el proyecto: pasajes, moda, Haussmann, construcción en hierro, exposiciones universales, Grandville, Baudelaire, etc. Todos estos temas tienen en común que son puntos frontera, son los momentos exactos donde se produce una transformación: los pasajes como origen de los grandes almacenes, del culto a la mercancía, del capitalismo actual; la construcción en hierro que revolucionó la arquitectura;

Haussmann, el gran reformador urbanístico de París; las exposiciones universales, origen de la industria recreo; Baudelaire, el primero que se hizo cargo del hombre alineado de sí mismo [J 51 a,6], el primer poeta que se reconoció como parte del mercado [J 58,4], el último poeta de alcance universal. Estos elementos también tienen una propiedad relacionada con la anterior, la densidad. En vista de la definición de frontera 2.1.12, y del ejemplo más importante, topos de prehaces, se ve que lo importante en la frontera es la idea de conexión, entre el interior y el exterior. Así, la noción de densidad está relacionada con la posibilidad fáctica de relacionar el elemento denso con cualquier otro elemento del espacio. Aunque es difícil mostrar que cada uno de los elementos que constituyen el París del siglo XIX se encuentra relacionado con cada uno de los temas escogidos, sí se puede observar en Benjamin la voluntad de interrelacionar estos elementos. Esto se puede ver claramente con el siguiente ejemplo. Aparte de los pasajes, el otro gran tema del proyecto es Baudelaire, no hay que olvidar que Benjamin fue sobre todo un crítico literario. Esto se nota en que el legajo J dedicado a Baudelarie ocupa cerca de 200 páginas, cuando los otros tienen en promedio unas 30, y en que fue el único de los temas que Benjamin desarrolló en trabajos directamente derivados del libro de los pasajes: *El París del Segundo Imperio en Baudelaire* y *Sobre algunos motivos en Baudelaire*. Sin embargo, existe un problema: los pasajes no aparecen explícitamente en la obra de Baudelaire. Esto no le impide a Benjamin encontrar una relación:

> "Baudelaire no parece haber pensado nunca en el escenario clásico de la *flânerie* -el pasaje-. Sin embargo, en el planteamiento lírico de *El crepúsculo de la mañana*, que cierra los *Cuadros parisienses*, se puede reconocer el canon del pasaje. La parte principal del poema la componen 9 dísticos rimados entre sí, claramente separados unos de otros. El lector se mueve por este poema como por una galería de vitrinas adosadas. En cada una de ellas se expone la límpida imagen de una miseria desnuda. El poema ⟨desemboca⟩ en dos cuartetos que, con una exposición de cosas terrenas y celestes, forman dos pilastras gemelas" [J 88 a, 2].

Reconocer la aparición de los pasajes en algo tan subjetivo como la sensación que produce la lectura de un poema demuestra un esfuerzo consciente por parte de Benjamin por plantear estas relaciones. Ejemplos de este tipo abundan por toda la obra; los comentarios más originales, atrevidos, casi delirantes, los obtiene cuando busca hacer estas conexiones (en [J 63 a, 1] hace una conexión entre la impotencia de Baudelaire y una teoría del progreso que lo lleva hasta Marx y Fourier). Que Benjamin siempre fue consciente de la importancia de estas conexiones, lo prueba el uso de la siguiente notación: encerraba entre cuadrados negros, ■ ■, el tema con el que podía relacionar un cierto pasaje. Benjamin no hizo un uso sistemático de esta notación, de hecho sólo aparece generalmente al principio de los capítulos de las Anotaciones, lo que lleva a pensar que fue empleado en una primera etapa y después dejado de lado, suponemos por el carácter informal que debían tener sus notas.

Al hacer la conexión entre Baudelaire y los pasajes está sacando a la luz aspectos de los dos, a menudo a través de correspondencias entre residuos temáticos. Otro aspecto fundamental, resaltado en la construcción de límites y colímites, son los enlaces que se pueden hacer entre las partes, ya que permiten hacer un pegamiento coherente de estas y nos ayudan a formar una especie de red que atrapa la totalidad del objeto: mientras más interconexiones hagamos, más fina será la red y más fiel será nuestra interpretación.

4.5.2 Pragmatismo en el *Libro de los Pasajes*

El *Libro de los pasajes* consta, como ya se ha indicado, solamente de pasajes sin ninguna secuencia lógica entre sí. Esta naturaleza ha desconcertado a muchos investigadores que se han enfrentado al texto: ¿El libro de los pasajes nunca llegó a redactarse y lo que nos ha quedado son sólo notas sueltas para su futura redacción? O, ¿Las citas constituyen la verdadera naturaleza del libro y sólo falta un montaje del material? Esta es una pregunta a la que no podemos dar una respuesta segura. Las pistas que deja Benjamin en sus notas o en su correspondencia no son concluyentes. Lo que sí podemos es analizar el problema a que se enfrentaba desde una perspectiva pragmaticista, y ver cómo la estructura del *Libro de los pasajes* corresponde a la que se obtendría a partir de la máxima pragmática.

El mayor obstáculo que tenía que sortear Benjamin estaba relacionado con la epistemología tradicional de la historia: "Esta concepción [la tradicional de la historia] hace poco caso del hecho de que ellos [los acontecimientos históricos] no solamente deben su existencia, sino incluso su transmisión, a un esfuerzo constante de la sociedad, un esfuerzo por el que se encuentran por añadidura extrañamente deformados" [11, p. 50]. Esto ocasionaba que los métodos tradicionales de hacer historia sólo nos transmitieran esta imagen deformada por el inconsciente colectivo, no la imagen objetiva real que buscaba (Benjamin incluso le da el nombre de fantasmagoría, en recuerdo de una forma antigua de teatro de luces y sombras, a estas deformaciones). Su obra puede ser leída como una forma de sortear esta dificultad. Desde la perspectiva de la máxima pragmática, el significado de un acontecimiento histórico se obtiene al contrastar todos los modos de conducta racional que se seguirían de su interpretación. Veamos cómo esto es exactamente lo que hace Benjamin.

En su trabajo, el filósofo alemán se mostró interesado por los cambios de hábito que generaban los temas que trataba. En la introducción (p. 8) ya analizamos como trabajó el efecto del signo "Pasajes" como generador de la *flânerie*. Ejemplos como este abundan en su obra. Veamos algunos de ellos.

La irrupción de la fotografía es estudiada en estos términos. En primer lugar, cambió la relación del gran público con respecto al arte, permitiendo que cualquier persona pudiera generar una obra de arte (fotografía) [11, Y 4,1] y que además pudiera tener un reproducción fotográfica de las principales obras pictóricas. Benjamin creía que esta democratización y recepción tenía como resultado una desacralización de la obra de arte: "las obras de arte más antiguas nacieron [. . .] al servicio de un ritual que fue primero mágico y, en un segundo tiempo, religioso [. . .] el valor único de la obra de arte *auténtica* se encuentra siempre en todo caso teológicamente fundado" [12, Libro I, vol. 2, p. 17]. La necesidad de recuperar este carácter teológico condujo a movimientos como *l'art pour l'art* que generó "una teología negativa del arte, en forma de la idea de un arte puro que no sólo rechaza cualquier función social, sino también toda determinación por un pretexto de orden objetual" [Ibíd, p. 18]. Este giro teológico puede pensarse como un cambio de hábito de la obra de arte misma[8]. Por otro lado, la competición con la fotografía hizo que los pintores se fueran trasladando a terrenos donde esta no pudiera llegar: primero mediante la fuerza del color, después por la agitación y el movimiento de sus temas (al principio, era necesario posar estáticamente delante de la cámara), y finalmente mediante escuelas revolucionarias (impresionismo, cubismo) [11, pp. 40, 41, 689].

Otro ejemplo interesante es la masificación de la prensa. Los primeros periódicos eran tan caros que sólo un pequeño grupo podía permitirse una subscripción:

> Debido a la escasez de periódicos, se leían colectivamente en los cafés. Sólo había otro medio de obtenerlos, y era por subscripción, pero costaba de 80 francos al año. En 1824, los 12 periódicos principales tenían en junio unos 56.000 subscriptores. Por lo demás, tanto a los liberales como los realistas les interesaba mantener alejadas de la prensa a las clases bajas. [11, U 4 a, 7]

Esta situación dió un vuelco con el surgimiento de la publicidad: los comerciantes le empezaron a pagar a los periódicos para promocionar sus productos, lo que produjo que estos bajaran de precio y pudieran ser adquiridos masivamente. Entre los múltiples efectos que tuvo este cambio, el que más le interesó a Benjamin fue el que produjo en los escritores. Con el fin de vender más periódicos y obtener mejores ganancias con la publicidad, el editor Émile de Girardin creó el *feuilleton*, una sección especial en los periódicos donde los escritores publicaban sus novelas serialmente por capítulos antes de que aparecieran como libros. El éxito de la idea produjo que los escritores recibieran ganancias y una relevancia nunca vistas antes. Los de más éxito, podrían trabajar en varios periódicos a la vez, por lo que empezaron a subcontratar "negros" literarios que escribieran las obras por ellos convirtiéndose ellos mismos en "fábricas de novelas" [11, d 1, 4]. Su popularidad hizo que muchos llegaran a ser políticos (Lamartine, Sue, Hugo, Chateaubriand), utilizando sus mismas obras como propaganda política. En general, esto cambió la relación del artista con el mercado: el escritor ya no salía a buscar temas para sus obras, sino para venderse a sí mismo. En este orden de ideas toma relevancia la figura de Baudelaire, el primero que tuvo conciencia de esta situación.

Esta forma un tanto tangencial de hacer historia, es la que acerca a Benjamin a la figura del trapero, que encontró al analizar la obra de Baudelaire: "Trapero

[8] El concepto de hábito en Peirce no tiene un carácter restrictivamente antropológico, sino que se extiende a todo el universo (las leyes físicas son pensadas como hábitos). Esta universalidad está íntimamente relacionada con la generalidad misma de semiótica: los cambios de hábitos no son más que interpretantes de un signo, y como todo puede ser pensado como signo, es necesario un concepto de hábito lo suficientemente libre.

o poeta, ambos han de ocuparse de la escoria; ambos persiguen en solitario su negocio a unas horas en que los burgueses se entregan al sueño" [12, Libro I, vol. 2, p. 174]. En ella no sólo vio la imagen del poeta, sino también la suya en el proyecto de los pasajes, como lo atestiguan las siguientes citas de su correspondencia: "Determinar la figura específica del mundo objetual del siglo XIX (quizá a partir de su cara oculta, de sus desechos, restos, ruinas)" (con Adorno 1935 [11, p. 932]); "El intento de retener la imagen de la historia en las más insignificantes fijaciones de la existencia, en sus desechos, por así decirlo" [11, p. 935]; "El método de captar las épocas mediante detalles sintomáticos en la superficie parece esta vez mostrar todo su poder" (con Horkheimer 1935 [11, p. 939]). Trabajar "cuando los burgueses se entregan al sueño" se refiere al hecho de centrarse en aquellos hábitos inconscientes, y por tanto fieles, ocasionados por los objetos de su estudio: "Allí donde el siglo XIX no se siente observado, se vuelve atrevido" [11, p. 177].

Como ya hemos visto, trabajar con todos los posibles ámbitos interpretativos es una imposibilidad en la práctica que no puede ser resuelta. Esto imposibilita la total comprensión del signo. Lo que puede hacer el intérprete es lograr una comprensión "lo mejor posible" del signo mediante la búsqueda consciente y sistemática de contextos interpretativos distantes. Y esto es precisamente lo que hace Benjamin. Él sabía la cantidad de material que tenía disponible para su investigación: "Pocas cosas hay en la historia de la humanidad de las que sepamos tanto como de la historia de la ciudad de París. Miles y decenas de miles de volúmenes están exclusivamente dedicados a investigar este minúsculo punto de la Tierra. [...] El catálogo de la Biblioteca Imperial, editado en tiempos de Napoleón III, contiene casi cien páginas bajo la entrada París, y esta colección está lejos de ser exhaustiva [...]" [C 1, 6]. Si algo se puede ver en sus Anotaciones es su esfuerzo por encontrar interpretantes dispersos con el fin de cubrir esta cantidad inconmensurable de información. Podemos ver esto, por ejemplo, en el primer capítulo dedicado a los *Pasajes*: él contiene, como ya habíamos mencionado en la introducción, la *Guía ilustrada de París* de 1852 [A 1, 1] y la novela *París en el año 2000* de Tony Moilin [A 8 a, 2], pero además nos habla de cómo los nombres de los almacenes surgieron de vodeviles famosos [A 1,2]; de cómo los pasajes contribuyeron al auge de la pintura de género [A 2, 6]; la transformación del pequeño almacén en el grande [A 3, 5]; la visión utópica de Fourier [A 4 a, 4]; etc.

Esto genera la impresión de una obra inconexa y contradictoria. Pero hay que recordar, como bien dijo Peirce, que lo único que tenemos son marcas sobre un continuo; y en efecto, cualquier espacio de interpretaciones debe ser continuo. Para intuir esto, pensemos en todas las posibles interpretaciones que se podrían hacer de los pasajes. Organicemos este espacio según una noción de cercanía relativa: una interpretación y está más cerca de x, de lo que otra interpretación z lo está de x, si tiene más elementos comunes con x que z. Al ser este espacio necesariamente infinito (y no sólo infinito sino que en palabras de Peirce supermultitudinario) llega un punto donde dos interpretaciones se vuelven prácticamente indistinguibles. Pensemos en las infinitas guías turísticas que se hubieran podido haber escrito en 1852: los puntos de vista llegan a ser tan similares que serían prácticamente indistinguibles de la de [A 1, 1]. Sin embargo, el espacio es tan vasto que estas variaciones infinitesimales llegan a originar interpretaciones contradictorias. Así, la inconexidad, las visiones distanciadas, la dialéctica surgen después: como una estrategia dentro de lo finito para captar lo inconmensurable. Benjamin fue consciente de todo esto: de lo inconmensurable del material y de que su mejor opción para captar lo más fiel posible el objeto era mediante el cambio abrupto de perspectivas.

Por ahora sólo hemos mostrado que para desarrollar su investigación, Benjamin utilizó un procedimiento que podríamos calificar de "pragmático". Otra cuestión muy diferente es cómo utilizaría este material para construir un libro. La forma final que debería tener éste es algo sobre lo que sólo se puede especular y que ha generado no pocas polémicas. Las notas de Benjamin dejan pocas pistas: "Este trabajo tiene que desarrollar el arte de citar sin comillas hasta el máximo nivel. Su teoría está íntimamente relacionada con la del montaje" [11, p. 460]. ¿Por qué un libro de citas? ¿Por qué montaje? Desde un punto de vista pragmático, la comprensión completa de los elementos sólo se obtiene al contrastar todas las interpretaciones posibles. Si la diversidad de interpretaciones corresponde a la diversidad de citas, entonces el proceso contrastivo se corresponde a su vez a un adecuado montaje. Esta idea es bastante cercana a la interpretación de Adorno: "La intención de Benjamin era renunciar a toda interpretación manifiesta, dejando aparecer los significados únicamente mediante el montaje chocante del material. [...] Como culminación de su antisubjetivismo, la obra principal solamente debía consistir en citas" [3, p. 24]. A pesar de que Benjamin hizo varios intentos en este sentido, quizás una de las principales razones por la que no pudo culminar su proyecto fuera que no pudo solucionar el problema del montaje. Veamos algunos de sus intentos.

Su segundo resumen empieza con la siguiente frase: "El objeto de este libro es una ilusión que fue expresada por Schopenhauer en la fórmula de que para captar la esencia de la historia basta con comparar a Heródoto con la *Presse du Matin*"[11, p. 50]. A continuación reproducimos la descripción que hace de los principales temas de su proyecto en estos resúmenes:

- "...los pasajes, que son tanto casa como calle ..." [11, p. 46].
- "... la prostituta, vendedora y mercancía en uno ..." [11, p. 46].
- "La moda está en conflicto con lo orgánico. Ella conecta el cuerpo vivo con el mundo inorgánico. Frente al viviente, defiende los derechos del cadáver" [11, p. 42].
- Al describir el falansterio de Fourier: "Los engranajes de las pasiones, la complicada interacción de la pasión mecanicista con la pasión cabalista, son primitivas analogías de la máquina en el terreno de la psicología. Esta maquinaria humana ..." [11, p. 39].
- Cuando habla de la construcción en hierro lo hace en términos de un regreso, en el nuevo sistema, al clasicismo griego. Menciona las "disputas entre el constructor y decorador, entre la Escuela Politécnica y la Escuela

> de Bellas Artes". Por último, habla de los primeros usos del hierro en términos de la oposición entre lo perenne y lo transitorio [11, p. 38].

Como puede observarse, cada descripción está hecha a partir de dos nociones contradictorias, originando en el lector una ligera sensación de choque. El abuso de este recurso en tan breve espacio y en dos resúmenes separados por cuatro años, demuestra que Benjamin pensaba en esta estrategia como parte fundamental del proyecto.

Un segundo intento de montar el material puede apreciarse en *El París del Segundo Imperio en Baudelaire* [12, Libro I, vol. 2], un largo artículo de un centenar de páginas que fue redactado para ser publicado en la revista del Instituto de Investigación Social. El lector que esté familiarizado con el legajo J sobre Baudelaire reconoce muchas de las citas de este último en este trabajo, al punto que puede decirse que es una obra hecha de citas. El papel de Benjamin se limita a escribir los conectores necesarios para que el flujo de citas constituya un texto coherente. Esto suena exactamente al libro-montaje de la cita antes mencionada de Adorno, e incluso el mismo Benjamin pensaba en *El París del Segundo Imperio* como un *Libro de los Pasajes* en pequeña escala [11, p. 957]. Sin embargo el artículo fue rechazado por el Instituto con duras críticas, lo cual fue sin duda un duro golpe para Benjamin.

Si comparamos la sensación que produce la lectura del legajo J con el *El París del Segundo Imperio*, vemos que toda la sensación de choque se ha perdido: mientras en el primero la presencia de citas inconexas obliga un esfuerzo por parte del lector en reconciliarlas, en el segundo esta reconciliación ya está hecha. Además, en el primero se podían hacer tantas lecturas como permutaciones se podrían hacer entre las citas, en el segundo se nos ofrece una sola de tales lecturas. Mientras que el objetivo con el montaje era eliminar el subjetivismo, se nos termina presentando una visión subjetiva: la de Benjamin. El *Libro de los Pasajes* exige que la labor de montaje y por tanto el *shock*-interpretación del material se deje al lector. Lo ideal hubiera sido que Benjamin se hubiera limitado a sugerir posibles conexiones entre las citas, a sólo abrir perspectivas de interpretación. Es en este sentido que es una obra inacabada.

4.6 *Escuela de Mandarines*, Miguel Espinosa

Miguel Espinosa fue un escritor español (1926-1982). Vivió casi toda su vida bajo el franquismo, del cual su obra es una inmensa crítica. En particular, su novela *Escuela de Mandarines* es interesante desde el punto de vista de los estudios peirceanos, porque aunque casi con total seguridad este escritor no conoció al filósofo norteamericano, en su obra están presentes muchos elementos pragmaticistas. En lo que sigue haremos un estudio de estas correspondencias.

La novela transcurre en un estado imaginario llamado Feliz Gobernación, el cual es una caricatura de la sociedad de su tiempo, impregnada de un aire que recuerda ligeramente a la República romana. Esta sociedad estaba dividida en castas: unos mandarines; unos legos, auxiliares de aquellos; unos becarios, aspirantes al mandarinazgo; unos alcaldes, lacayos rurales del poder; unos hombres de estaca, también apodados soldados, y un pueblo. Por encima de las castas reinaba un Gran Padre Mandarín y un conciliador. Los mandarines constituyen un concepto un tanto vago en la obra de Espinosa: a veces dan la sensación de ser un grupo más bien eclesiástico, con un libro sagrado, el cual constantemente recitan e interpretan con diverso grado de libertad, teniendo al Gran Padre Mandarín como líder máximo; otras dan la sensación de ser un grupo más bien político, ostentando altos cargos administrativos y actuando como una especie de senado romano con el conciliador como cónsul o dictador; y ocasionalmente parecen más bien una escuela de pensamiento con su propia filosofía. Es esta última la que resulta particularmente interesante para nuestro análisis.

La fenomenología mandarinesca clasifica la realidad en tres grandes grupos: cosas primeras, cosas últimas y cosas contradictorias. Estas están relacionadas íntimamente con las categorías cenopitagóricas. Es muy diciente que Espinosa se refiera a ellas simplemente como "cosas" o "conjuntos", dado que si se hubiera inspirado como Peirce en Aristóteles o Kant, seguramente hubiera utilizado la palabra más sugerente de "categorías". Probablemente, dado el carácter general del libro, llegó a ellas mediante la oposición de las cosas del pueblo versus las cosas de los mandarines, con un elemento mediador entre ellas. Sin embargo la concepción de las mismas es muy similar en Peirce y en Espinosa. Peirce se refiere a ellas como modos o tonos de pensamiento, cuyo objetivo fundamental es guiarnos en la formación de juicios. En Espinosa, "Tales conjuntos se muestran como esencias diferentes de la materialidad física, biológica y humana" [28, p. 468] y detrás de cada una de ellas hay una forma de alcanzar el conocimiento.

Las cosas primeras representan la naturaleza o el reino del instinto. Resulta curioso que las palabras con las que las describe Espinosa coinciden muchas veces con las empleadas por Peirce: "[...] la aventura, el amor, el entusiasmo, y todo lo que es espontáneo y vivo, conciernen [...] a las cosas primeras" [28, p. 469], "El instinto, o naturaleza, es sentimiento o es razón, presencia y manifestación del mundo, inmanencia en suma [...] el instinto conoce la cara fresca y lozana de la apariencia" [27, p. 532]. El instinto en el pragmatismo está relacionado con la abducción, el tipo de razonamiento que genera nuevo conocimiento. En esta novela este también debía provenir de la intuición: los mandarines se dedican a recitar simplemente su escritura, mientras que los integrantes del pueblo (alfareros, tapiceros, ceramistas) son quienes se dedican a escribir nuevos libros, los cuales necesariamente son heterodoxos.

"Las cosas últimas representaban la reflexión gobernante o imperio de la premeditación, que se opone al instinto y su espontaneidad; pertenecían a los mandarines" [27, p. 58]. En Peirce lo segundo es "lo absolutamente último"[9] y es definido con respecto a un primero. La premeditación es el "juicio sobre lo conveniente" [27, p. 533], lo cual lo relaciona con la Ciencia Normativa que "versa sobre las leyes de la relación de los fenómenos con los fines"[10]. Esta similitud no es casualidad a partir de la analogía cosas últimas/segundidad,

[9] *Una conjetura para el acertijo* (1887) [57].

[10] *Lecciones de Harvard sobre el pragmatismo, Lección V: Los tres géneros de bondad* (1903) [57].

ya que las ciencias normativas ocupan la posición 2.2 dentro de la clasificación peirceana de las ciencias (la ética ocupa la 2.2.2 [72], mientras la premeditación también es definida en la obra de Espinosa como "juicio moral" [28, p. 470]).

"Se llama doctrina a una larga premeditación. Así resultan las doctrinas un juicio conveniente sobre los hechos. Cuando la premeditación se transforma en costumbre, nace la regla. Una regla no es otra cosa que la premeditación convertida en el hacer de cada día" [28, p. 470]. Aunque detrás de este pasaje hay sin duda un elemento peyorativo, se acerca bastante a la esencia del pragmatismo. En primer lugar, hay una equiparación doctrina-regla muy similar a la peircena creencia-hábito. El sentido total, recordando la máxima pragmática, se encuentra en la costumbre, en el hacer, los modos de conducta. Las ciencias normativas tienen como función autorregular la creación de hábitos, como habíamos mencionado anteriormente: el intérprete trata de reiterar cierta clase de estímulos y de rechazar otros. Lo mismo ocurre en el pasaje anterior: la premeditación (la cual es equiparable a las ciencias normativas) se convierte en regla (hábito) mediante una reiteración consciente.

Las cosas contradictorias [28, p. 476] representaban el reino de la dialéctica. Cuando los hechos no se acomodaban a la escritura, el Gran Padre, único mandarín con tal potestad, solucionaba la oposición mediante sentencias, que recibían el nombre de "contradicción resuelta". En la novela estas toman tintes absurdos, resaltando la incapacidad de la casta gobernante de dar término a los problemas. A pesar de esto, ellas corresponden a un tercero ya que buscan conciliar un primero con un segundo.

La novela empieza con un joven, del cual nunca se menciona su nombre original, que vive en una región apartada de la Feliz Gobernación. El autor resalta que este se encontraba en completa primeridad: "su ser era pura naturaleza [...] entusiasmo sin causa" [27, p. 60]. Mientras paseaba por el campo, se encuentra con un pequeño niño, canijo y endeble, que parecía tiritar. Al ser preguntado sobre su identidad, este responde:

> La representación del Pueblo [...] encarno la necesidad de protestar, y aquí estoy con esta figura, parábola de los hechos. Pero también soy el Primero de los Demiurgos llamados a sonsacarte, arrancarte de la Naturaleza y lanzarte a la cosa de los hombres [...] Vine para abrirte los ojos y mostrarte el Mundo. [27, p. 61]

Como habíamos mencionado en la Introducción, un signo es "algo que sustituye algo para algo". Notemos el carácter semiótico de este personaje: es un niño desvalido, que representa al pueblo y busca cambiar el estado en que se encuentra el joven. En cuanto signo debe generar un efecto, un interpretante en el joven:

> El absorto ser y su armonía con la Naturaleza murieron por la percepción de lo histórico. La transmutación fue tan grande que mi cuerpo entró en cataclismo: enfrióse mi estómago, ardieron mis mejillas, temblaron mis extremidades, latieron mis sienes, y toda mi esencia se estremeció. Al instante surgieron novísimas comparecencias: la ira, el odio y la constante irritación ante los hechos, fundamento de mi futuro talante. Lloré. [27, p. 61]

Según Peirce hay tres tipos de interpretantes: el sentimiento, el esfuerzo (o dinámico) y el interpretante triádico. En primer lugar, en cualquier interpretante, siempre debe haber un interpretante-sentimiento que en el texto está expresado en la ira y en el odio. En algunos casos, este tipo de interpretante es lo suficientemente fuerte para tener efectos fisiológicos, originando los esfuerzos: el temblor del cuerpo, el frío en el estómago, el sonrojo de las mejillas, etc. Resulta curioso que el orden de los interpretantes en el texto aparezca en sentido inverso al sugerido por Peirce. Esto parece deberse más a una licencia poética que a una particularidad del pensamiento del autor. De hecho, en una versión preliminar de la novela, *Historia del Eremita*, el orden de estos interpretantes es el peirceano: "…sentí lo que jamás había experimentado ni soñado experimentar: que la ira invadía mi alma como fuego joven. Desde las vísceras me subió de pronto al pecho el calor irremediable del odio; tembló mi cuerpo, enfrióse mi estómago, sonrojáronse mis mejillas, se estremecieron mis piernas…"[28, p. 55]. Mediante la reiteración del estímulo, los interpretantes somáticos conducen a un hábito: "la constante irritación ante los hechos". De nuevo, en *Escuela de Mandarines* esta reiteración no se observa tan clara como en *Historia del Eremita*. En esta última, en un episodio que se extiende por casi una decena de páginas, el encuentro de ambos personajes se produce en el campo. Pero en este caso la función del demiurgo de despertar la ira es mucho más clara: desde el inicio tiene una violenta discusión con el protagonista. Cuando este decide marcharse, el niño lo persigue importunándolo a lo largo de todo el camino, hasta que en lo alto de una montaña, en medio de un ataque de rabia, el joven empuja al niño, que cae al vacío. El remordimiento de esta acción es la pieza final para generar el hábito en el protagonista.

Como ya habíamos discutido en la sección sobre el *Libro de los Pasajes*, una concepción pragmatista de la historia se basa en la capacidad que tiene un acontecimiento de generar hábitos. Esta concepción coincide con la de Espinosa. Según esta novela, los dioses y el pueblo carecen de historia, porque no tienen demiurgos. Ya hemos visto que estos corresponden a signos que generan efectos. Pero lo que está en el fondo del asunto es un criterio normativo: para el pueblo "todos los sucesos resultan bellos y buenos, pues no distinguen entre caracteres" [27, p. 226] mientras que para la casta gobernante "unos hechos parecen buenos y bellos, y otros, malos y feos" [27, p. 226]. La ética y sobre todo la estética, en su función pragmática es lo que hace que el hombre entre en la historia.

No nos detendremos más en el estudio de esta novela. Esperamos que esta discusión haya ayudado a clarificar cómo algunas ideas peirceanas fueron entendidas a lo largo de este trabajo.

4.7 *Rashōmon*, Akira Kurosawa

"No lo entiendo, no entiendo nada". Con estas palabras empieza *Rashōmon* (1950), una película japonesa de Akira Kurosawa, basada en un par de relatos de Ryunosuke Akutagawa, el homónimo *Rashōmon* (1915) y *En el bosque* (1922).

Refugiándose de una terrible tormenta en la semidestruida Rashomon, la que en otro tiempo fuera la puerta más importante de la ciudad de Kyoto, un leñador y un sacerdote, que acaban de ser testigos en un juicio de asesinato, se encuentran angustiados ante la imposibilidad de entender lo ocurrido. El occiso, su esposa y un bandido se atribuyen el hecho, en declaraciones contradictorias. En medio de un escenario apocalíptico, la imposibilidad de entender lo sucedido se concibe como la peor tragedia: "Guerras, tifones, terremotos, incendios, enfermedades. Cada año, cada año tenemos desgracias. Además tenemos el azote de ladrones como tsunami, cada noche aparecen en algún sitio. He visto muy a menudo personas que han sido asesinadas por cualquier tontería como si fueran bichos repugnantes. Pero nunca creí que llegaría a ser testigo de algo tan horrible. De veras ha sido horroroso. Después de lo que he visto no creo que pueda confiar en nadie nunca más... Pero eso es terrible, es mucho peor que los ladrones, los tifones, las enfermedades y las guerras", dice el sacerdote en uno de los monólogos de la película. Aunque una obra maestra está sujeta por definición a miles de interpretaciones posibles, entendemos esta película como el tránsito de esta desesperación hasta la redención final obtenida cuando el mundo recobra su sentido.

Esta lectura asume, a diferencia de lo que piensan muchos críticos, que la pelí-cula da al espectador los elementos suficientes para determinar lo ocurrido. Aunque esta solución nunca se da explícitamente, podríamos decir en términos matemáticos, que el problema reúne las condiciones para que tenga solución única. Observemos que este cae en lo que en esta tesis hemos llamado MP: se nos presentan varios interpretantes de un signo, en este caso un asesinato, y a partir de ellos debemos reconstruir fielmente el hecho. Las condiciones que garantizan su solución fueron presentadas en la sección 1.2. En primer lugar, tenemos la $\mathbb{G}$-separabilidad, que dice cada aspecto del hecho debe ser diferenciado en alguna interpretación. En segundo lugar, la $\mathbb{G}$-pegabilidad, que nos permite formular hipótesis que expliquen las interpretaciones; esto implica en particular que, ante dos afirmaciones contradictorias, debemos estar en capacidad de decidir cuál es la correcta. Veamos cómo funcionan estas en cada una de las versiones.

Resulta interesante el procedimiento que utiliza el director para revelar los hechos. En medio de la tormenta, un aldeano llega a refugiarse debajo de la puerta junto al sacerdote y al leñador. La inserción de un elemento nuevo dentro de un contexto cerrado, como medio para alcanzar la verdad, es un procedimiento propiamente peirceano. La función de este, además de motivar que los dos testigos narren las distintas versiones, es confirmar con sus comentarios las sospechas del espectador. Resulta revelador la forma en que después que su función está concluida, este personaje es desiterado de la escena.

Del primero de quien se nos cuenta su testimonio es Tajômaru, un famoso bandido. La asociación de este personaje con su fama es resaltada a lo largo de toda la película: siempre que alguien habla de él, hace referencia directa a esta. Él se siente orgulloso de su fama, por lo que se esfuerza en cuidarla. Es interesante en este sentido la narración de su arresto: un policía dice que lo capturó después de que a todas luces había caído de un caballo y gemía de dolor en el suelo, a lo que Tajômaru responde enfurecido que él se bajó del caballo por un dolor de estómago ocasionado por beber el agua envenenada de un arroyo.

Esto nos lleva a sospechar que este bandido es en realidad extremadamente patético (suposición confirmada por otras declaraciones) y que mentiría para ocultarlo. Desde este punto de vista debe analizarse su testimonio. La primera parte no se pone nunca en duda: mientras se encontraba descansando en el bosque, Tajômaru ve pasar a un samurái acompañado de su esposa, al cual consigue amarrar para aprovecharse de la mujer. En este punto su historia difiere de las demás: cuando se disponía a huir, la mujer le suplica que luche a muerte contra su esposo, dado que no puede soportar que ambos hombres que la han poseído continúen con vida. Esto enardece a Tajômaru, que desata al hombre y luego de un espectacular combate de espadas consigue matarlo. Después de esto, se da cuenta de que la mujer ha desaparecido, y él huye a su vez.

A continuación, viene el relato de la mujer. Después de haber sido ultrajada, ella trata de correr hacia su marido, pero Tajômaru la detiene. En ese momento advierte algo extraño en la mirada de su esposo, un brillo frío, que la hiere y la hace desmayarse. Cuando recobra el conocimiento, el bandido ha desaparecido y ella trata de acercarse de nuevo, pero esa misma mirada la altera hasta tal punto de generarle un ataque de histeria. Cuando se recupera, su esposo yace con una daga en el pecho, que ella recuerda haber tomado en algún momento. Llevada por la culpa trata primero de suicidarse y al no conseguirlo, se retira a un templo. Culpa y lagunas, hasta qué punto intencionadas, es el sabor que deja el relato de la mujer.

El relato del occiso se lleva a cabo a través de una médium. Cuenta que después de violar a su mujer, Tajômaru trató de convencerla de que se escapara con él, lo que provocó que el samurái fuera atormentado por los celos. Cuando ya se iban a escapar, ella le ruega al bandido que lo mate, porque no podrían unirse mientras él siguiera con vida. Esto hace que Tajômaru reaccionara violentamente hacia ella, preguntándole al samurái si debía matarla o perdonarla. Pero ella consigue huir, y después de desatar al despechado esposo, también lo hace el bandido. El samurái se incorpora y se suicida con lo que único que había quedado en el lugar: una valiosa daga que había pertenecido a su esposa. Pero mientras agoniza, siente cómo alguien se acerca y le saca lentamente el puñal del pecho.

Aquí termina el cuento de Akutagawa. En este punto tenemos elementos suficientes para sospechar lo ocurrido, para abducir hipótesis. Pero no contamos con una forma de confirmar cuál de todas las posibles es la correcta. Además, muchas preguntas quedan en el aire: ¿Por qué la extraña solicitud de la mujer? ¿Quién retiró la daga, en caso de ser cierta la versión del muerto? No tenemos una $\mathbb{G}$-separabilidad plena porque hay elementos que no han sido adecuadamente explicados en ninguna versión. No tenemos $\mathbb{G}$-pegabilidad plena, porque hay puntos sobre los cuales no podemos decidir. Sin embargo, en la película de Kurosawa, que sigue fielmente los testimonios del bandido, de la mujer y del samurái, aparece otra versión que nos permite dilucidar lo ocurrido.

Después de ser presionado por el aldeano en medio de la tormenta, bajo la puerta de Rashomon, el leñador se ve obligado a confesar que no le contó toda la verdad a la policía. Su testimonio inicial era simplemente que había encontrado el cadáver del samurái con una herida en el pecho sin rastro ni de la espada ni de la daga. Ahora confiesa que llegó en el momento, en que después de haberla violado, Tajômaru le pide perdón a la mujer y le ruega que se case con él. Sin embargo ella le responde que no puede decidirse y, escapando del bandido, desata a su esposo con la daga. Pero este la desprecia, diciendo que lamentaría más perder a su caballo antes que a ella. También Tajômaru termina despreciándola. En este momento ella los increpa: a su marido por no tener el valor de vengarse y a Tajômaru por no actuar conforme a su fama de terrible bandido. Es en este momento que los dos hombres empiezan a luchar de una forma bastante torpe y patética, hasta que finalmente el bandido termina por matar al samurái con su espada. En este momento la mujer huye al bosque y luego también lo hace el bandido.

Esta versión es muy importante por lo que dice, pero más aún por lo que no dice. Si ella hubiera ocurrido exactamente como nos cuenta el leñador, ¿por qué no se la contó tal cual a las autoridades? El aldeano nos da la respuesta: porque el leñador ha robado la fina daga, hecho que este confirma. Esto es muy importante, porque si la daga se hubiera encontrado simplemente tirada en el suelo no habría tenido mucho sentido ocultar los partes principales del relato, hubiera bastado con esconderla. Sin embargo, si esta se encontraba en el pecho del samurái, sí tendría sentido que hubiera ocultado lo que vio, sobre todo si este se hubiera suicidado después de que todos se hubieran ido, en cuyo caso la desaparición de la daga no tendría ninguna explicación. Además, como el samurái se atribuye directamente el hecho, mientras su esposa sólo lo hace de manera tangencial, no resulta muy difícil terminar de reconstruir lo ocurrido.

Después de haber violado a la mujer, Tajômaru, sin duda un criminal mucho más patético que terrible, le ruega a esta que se vaya con él, pero ella no se decide. El haberse mostrado débil y haber sido rechazado es la razón por la que él omite esta parte en su relato. Ella desata a su esposo, sin embargo los celos de lo que acaba ocurrir hacen que este a su vez la rechace con excesiva rudeza. Tajômaru finalmente, para no sentirse plato de segunda mesa, también la rechaza. La mujer, despechada, incita a los dos hombres a que combatan entre sí. Ella omite esta parte de su narración, por medio de sus "desmayos", posiblemente llevada por la culpa ocasionada por la forma en que terminan desarrollándose los acontecimientos. Los dos hombres tienen un combate más penoso que heroico, al cabo del cual el bandido acaba por apoderarse de ambas armas. En este punto, Tajômaru no tiene el valor de matar al samurái y se limita a asustar a la mujer, la cual huye al bosque. El bandido a su vez, también huye llevándose consigo las armas del vencido. Este, humillado, comete suicidio clavándose el puñal de su esposa en el pecho. Es natural que el muerto no haya contado las partes de la historia que constituyen la humillación de la derrota para él. Probablemente su esposa volvió antes de que el leñador pudiera tomar la daga y ante el espectáculo de su esposo muerto, asumió la culpa, primero tratando de suicidarse, y luego buscando redención en un santuario.

Las últimas escenas de la película están cargadas de un sutil simbolismo. Cuando el leñador termina con su testimonio, los tres hombres escuchan el llanto de un niño: hay un bebé abandonado en medio de las ruinas. Mientras el aldeano trata de despojarlo de sus ropas, el leñador y el sacerdote lo acogen. Ese bebé puede pensarse como un símbolo de la verdad. El hecho de despojarlo, de tomar sólo lo que nos conviene, es asociado a cómo los distintos testigos involucrados en el juicio acomodan los hechos a su conveniencia. Aunque el director de la película buscaba lograr una conclusión indudablemente moral, esta se puede extrapolar, como hemos visto, a la forma en que en toda interpretación el efecto del signo es determinado por factores normativos propios de cada intérprete. El hecho de adoptar al bebé por parte del leñador es una forma de aceptar la verdad tal cual es y a la larga constituye una redención: "Gracias a ti puedo seguir creyendo", son las últimas palabras pronunciadas por el sacerdote.

Bibliografía

[1] ADÁMEK Jiří, HERRLICH Horst, STRECKER George, *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats*, http://katmat.math.uni-bremen.de/acc, 2004.

[2] ADÁMEK Jiří, ROSICKY Jiří, *Locally presentable and accessible categories*, Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[3] ADORNO Theodor, *Sobre Walter Benjamin*, Madrid: Cátedra, 1995.

[4] AGRIPPA Heinrich Cornelius, *Los tres libros de la filosofía oculta*, Colonia, 1533, https://archive.org/details/FilosofiaOcultaDeAgrippa.

[5] ARENGAS Gustavo, *Propiedades lógicas del clasificador de subobjetos en un topos*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional, 2014.

[6] ARTIN Michael, GROTHENDIECK Alexander, VERDIER Jean-Louis, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Berlin: Springer-Verlag, 1972.

[7] ASÍN PALACIOS Miguel, *La escatología musulmana en la Divina Comedia*, Madrid: Instituto Benito Arias Montano, 1943.

[8] AUERBACH Erich, *Figura*, Madrid: Trotta, 1998.

[9] AUERBACH Erich, *Mímesis. La representación de la realidad en la literatura occidental*, México: Fondo de cultura económica, 1950.

[10] BARRENA Sara, NUBIOLA Jaime "Antropología pragmatista: el ser humano como signo en crecimiento", en Sellés, J.F. (ed.), *Propuestas antropológicas del siglo XX*, Pamplona: Eunsa, 2007, pp. 39-58.

[11] BENJAMIN Walter, *Libro de los Pasajes*, Madrid: Akal, 2007.

[12] BENJAMIN Walter, *Obras Completas*, Madrid: ABADA, 2008.

[13] BOBER Harry, "The Zodiacal Miniature of the Très Riches Heures of the Duke of Berry: Its Sources and Meaning", *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes vol. 11* (1948): 1-34.

[14] BORGER Reinhard, THOLEN Walter, "Strong, regular and dense generators", *Cahiers de topologie et géométrie différentielle categóriques, tome 32* (1991): 257-276.

[15] BORCEUX Francis, *Handbook of Categorical Algebra*, Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[16] BORCEUX Francis, BOURN Dominique, JOHNSTONE Peter, "Initial Normal Covers in Bi-Heyting Toposes", *Arch. Math. 42* (2006): 335-356.

[17] BOURBAKI Nicolas, *Theorie des ensembles*, Diffusion C.C.L.S.: Paris, 1995.

[18] BOURBAKI Nicolas, *General Topology, Chapters 1-4*, Berlin: Springer, 1995.

[19] BRUNNER Andreas, CARNIELLI Roberto, "Anti-intuitionism and paraconsistency", *Journal of Applied Logic 3 no. 1* (2005): 161-184.

[20] CAICEDO Xavier, "Lógica de los haces de estructuras", *Rev. Acad. Colomb. Cienc. 19 (74)* (1995): 569-586.

[21] CAICEDO Xavier, "Implicit Connectives of Algebraizable Logics", *Studia Logica 78* (2004): 155-170.

[22] CAICEDO Xavier, CIGNOLI Roberto, "An Algebraic Approach to Intuitionistic Connectives", *The Journal of Symbolic Logic 66 no. 4* (2001): 1620-1636.

[23] CHANG Chen Chung, KEISLER H. Jerome, *Model Theory*, Amsterdam: North-Holland, 1992.

[24] COMPAYRÉ Gabriel, *Montaigne and Education of the Judgment*, New York: Crowell, 1908.

[25] COQUAND Thierry, HUET Gérard, "The Calculus of Constructions", *INRIA Rapports de Recherche 530* (1986): 1-21.

[26] CRESSWELL M. J., HUGHES G. E., *A new introduction to modal logic*, London and New York: Routledge, 1996.

[27] ESPINOSA Miguel, *Escuela de Mandarines*, Madrid: Alfaguara, 2006.

[28] ESPINOSA Miguel, *Historia del Eremita*, Murcia: Alfaqueque, 2012.

[29] FRAME Donald, *Montaigne's Discovery of Man*, New York: Columbia University Press, 1955.

[30] GHILARDI Silvio, "Free Heyting algebras as bi-Heyting algebras", *Math. Rep. Acad. Sci. Canada XVI., 6* (1992): 240-244.

[31] GROTHENDIECK Alexander, "Sur quelques points d'algèbre homologique", *Tôhoku Math. Journal 9* (1957): 119-221.

[32] HATZFELD Adolphe, DARMESTETER Arsène, *Dictionnaire général de la langue française du XVIIe siècle jusqu'à nos jours*, París: Delagrave, 1926.

[33] HILDEGARDIS, *Opera Omnia*, París: Apud Garnier Fratres, 1882.

[34] JOHNSTONE Peter, *Sketches of an Elephant*, Oxford: University Press, 2002.

[35] LA CHARITÉ Raymond, *The concept of judgment in Montaigne*, The Hague: Martinus Nijhoff, 1968.

[36] LA PALME Marie, REYES Gonzalo, ZOLFAGHARI Houman, *Generic Figures and their glueings*, Milano: Polimetrica, 2004.

[37] LA PALME Marie, MACNAMARA John, REYES Gonzalo, ZOLFAGHARI Houman, "Count Nouns, Mass Nouns, and Their Transformations: A Unified Category-Theoric Semantics", en: R. Jackendoff, P. Bloom, K. Wynn (eds.), *Language, Logic and Concepts*, Cambridge: MIT Press, 2002, pp. 427-452.

[38] LAWVERE William, "Variable Quantities and Variable Structures in Topoi", en Heller, Tierney (eds.), *Algebra, Topology and Category Theory: a Collection of Papers in Honor of Samuel Eilenberg*, New York: Academic Press, 1976, pp. 101-131.

[39] LAWVERE William, "Introduction", en Lawvere, Schanuel (eds.), *Categories in Continuum Physics*, Berlin: Springer, 1986, pp. 1-16.

[40] LAWVERE William, "Intrinsic Co-Heyting Boundaries and the Leibniz Rule in Certain Toposes", en Carboni, Pedicchio, Rosolini (eds.), *Category Theory - Proceedings of the International Conference held in Como 1990*, Berlin: Springer, 1991, pp. 279-281.

[41] LAWVERE William, "Kinship and Mathematical Categories", en: R. Jackendoff, P. Bloom, K. Wynn (eds.), *Language, Logic and Concepts*, Cambridge: MIT Press, 2002, pp. 411-425.

[42] MACLANE Saunders, MOERDIJK Ieke, *Sheaves in Geometry and Logic*, New York: Springer, 1992.

[43] MADDALENA Giovanni, *Metafisica per assurdo. Peirce e i problemi del'epistemologia contemporanea*, Soveria Mannelli: Rubbettino, 2009.

[44] MADDALENA Giovanni, ZALAMEA Fernando, "A new analytic/synthetic/horotic paradigm: from mathematical gesture to synthetic/horotic reasoning", *European Journal of Pragmatism and American Philosophy 6*, (2012): 208-224.

[45] MAKKAI Michael, "On structuralism in mathematics", en: R. Jackendoff, P. Bloom, K. Wynn (eds.), *Language, Logic and Concepts*, Cambridge: MIT Press, 2002, pp. 43-66.

[46] MAKKAI Michael, REYES Gonzalo, "Completeness results for intuitionistic and modal logic in a categorical setting", *Annals of Pure and Applied Logic 72*, (1995): 25-101.

[47] MARTIN-LÖF Per, "An intuitionistic theory of types: predicative part", *In Logic Colloquium, ed. H. E. Rose and J. C. Shepherdson* (North-Holland, 1974): 73-118.

[48] MARTIN-LÖF Per, *Intuitionistic Type Theory, Notes by G. Sambin of a series of lectures given in Padua, 1980*, Napoli: Bibliopolis, 1984.

[49] MITCHELL Barry, *Theory of Categories*, New York: Academic Press, 1965.

[50] MONTAIGNE Michel de, *Ensayos*, París: Casa Editorial Garnier Hermanos, 1912.

[51] MORENO Javier, "Auge, muerte e inesperada resurrección de una teoría matemática de la narrativa", en: F. Zalamea (ed.), *Rondas en Sais*, Bogotá: Universidad Nacional, 2013, pp. 213-225.

[52] OOSTRA Arnold, *Conectivos en topos*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional, 1997.

[53] OOSTRA Arnold, *Operaciones implícitas en variedades ecuacionales*, Tesis de doctorado, Universidad Nacional, 2006.

[54] PANOFSKY Erwin, *El significado en las artes visuales*, Madrid: Alianza Forma, 1987.

[55] PAREGIS Bodo, *Categories and functors*, New York-London: Academic Press, 1970.

[56] PASCAL Blaise, *Pensées, fragments et lettres, Ed. Faugère*, Paris: Andrieux, 1814.

[57] PEIRCE Charles Sanders, *C. S. Peirce en español*, http://www.unav.es/gep/Peirce-esp.html, 2016.

[58] RAMA Ángel, *Los dictadores latinoamericanos*, México: Fondo de Cultura Económica, 1976.

[59] RASIOWA Helena, *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*, Amsterdam: North-Holland, 1974.

[60] RAUSZER Cecylia, "Semi-Boolean algebras and their applications to intuitionistic logic with dual operations", *Fundamenta Mathematicae 83* (1974): 219-249.

[61] REYES Gonzalo, "A topos-theoretic approach to reference and modality", *Notre Dame Journal of Formal Logic 32* (1991): 359-391.

[62] REYES Gonzalo, ZOLFAGHARI Houman, "Topos-theoretic approaches to modality", *Lecture Notes in Math. 1488* (1991): 359-378.

[63] REYES Gonzalo, ZOLFAGHARI Houman, "Bi-Heyting algebras, toposes and modalities", *Journal of Philosophical Logic 25* (1996): 25-43.

[64] SAXL Fritz, *La vida de las imágenes. Estudios iconográficos sobre el arte occidental*, Madrid: Alianza Editorial, 1989.

[65] STONE Marshall, "Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics", *Cas. Mat. Fys. 67* (1937): 1-25.

[66] STREET Ross, "The family approach to total cocompleteness and toposes", *Trans. Amer. Math. Soc. 284* (1984): 355-369.

[67] Univalent Foundations Project, *Homotopy Type Theory – Univalent Foundations of Mathematics*, Princenton: Institute for Advanced Study, 2013.

[68] WARBURG Aby, *Atlas Mnemosyne*, Madrid: Akal, 2010.

[69] WARBURG Aby, *El ritual de la serpiente*, México: Sexto Piso, 2004.

[70] WISBAUER Robert, *Foundations of module and ring theory*, Reading: Gordoan and Breach Science Publishers, 1991.

[71] YUAN Qiaochu, "Generators", https://qchu.wordpress.com/2015/05/17/generators/.

[72] ZALAMEA Fernando, *El Continuo Peirceano*, Bogotá: Universidad Nacional, 2001.

[73] ZALAMEA Fernando, *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*, Bogotá: Universidad Nacional, 2009.

[74] ZALAMEA Fernando, *Razón de la frontera y fronteras de la razón*, Bogotá: Universidad Nacional, 2010.

[75] ZALAMEA Fernando, "Formas de horosis en la arquitectónica peirceana", *Cuadernos de Sistemática peirceana 4* (2012): 51-69.