Desarrollo del pensamiento lógico en la educación media con actividades de demostración en geometría dinámica

Diego Alejandro Jiménez Forero

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia

2019

Desarrollo del pensamiento lógico en la educación media con actividades de demostración en geometría dinámica

Diego Alejandro Jiménez Forero

Trabajo final de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:

Dr. Clara Helena Sánchez Botero

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2019

La geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas.

Henri Poincaré

Agradecimientos

Agradezco a mis padres y a mi compañera sentimental por todo el apoyo que me dieron durante la maestría, su entrega a la motivación y esfuerzo para este proceso fue un factor fundamental para terminar este trabajo y todo el posgrado.

También agradezco a mi directora del trabajo final de grado, la profesora Clara Helena Sánchez Botero, por sus esfuerzos para el desarrollo de este documento y por enseñarme varios temas sobre la matemática, historia de la matemática, la lógica matemática y el razonamiento científico.

De igual forma agradezco los estudiantes de 7A, año 2019 del Colegio Cardenal Sancha, por su dedicación y buena disposición en la aplicación de la secuencia didáctica.

Resumen

Los lineamientos curriculares de matemáticas en Colombia se enfocan al desarrollo del pensamiento lógico y manifiestan que el trabajo formal de las matemáticas en geometría es uno de los mejores caminos para dicho objetivo. Estas consideraciones no se evidencian en el Colegio Cardenal Sancha; a pesar de estar regidos por dichos documentos curriculares. Por ello a continuación se presenta una secuencia didáctica para el desarrollo del pensamiento lógico por medio del desarrollo del razonamiento geométrico en función de la actividad demostrativa. Dicha secuencia fue diseñada y aplicada a estudiantes de grado séptimo de la institución mencionada, con el uso del software de geometría dinámica GeoGebra.

Palabras clave: Geometría, Demostración en geometría, Enseñanza y aprendizaje de la geometría, Razonamiento geométrico, Argumentación, Pensamiento lógico y Geometría dinámica.

Abstract

The Colombian curricular guidelines in mathematics focus to development of logic thinking and express that the formal work of mathematics in geometry is one of better ways for that objective. These considerations are not revealing in Colegio Cardenal Sancha; in spite of its rule over for aforesaid curricular documents. For that below it presents a didactic sequence for the development of logic thinking by means of development of geometry reasoning in relation with the proof activity. This sequence was designed and applied to seventh grade students of the mentioned institution, with the use of dynamic geometry software GeoGebra.

Keywords: Geometry, Proof in geometry, Teaching and learning of geometry, Geometry reasoning, Argumentation, Logical thinking and Dynamic geometry.

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Introducción

El Colegio Cardenal Sancha es una institución educativa privada en Bogotá. Con su Proyecto Educativo Institucional (PEI), pretende formar seres humanos para cooperar en los cambios socioculturales de una sociedad más justa. El currículo de matemáticas de la institución está construido teniendo en cuenta los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM) (MEN, 2006), en los que se establecen las competencias que deben desarrollar los estudiantes a lo largo del año escolar.

Los EBCM afirman que una de las facetas del conocimiento matemático a trabajar en el aula, es la formal. Esta faceta está relacionada con la concepción de las matemáticas como un sistema axiomático, estructurado y justificado lógicamente. La argumentación y la justificación son procesos esenciales del pensamiento matemático que deben ser potenciados en la matemática escolar de la educación básica, media y superior. Mediante la comprensión de lo que es una demostración en geometría, se puede desarrollar en los estudiantes de educación básica y media el pensamiento lógico relacionado con la matemática.

Justamente los EBCM especifican que el pensamiento lógico es un tipo de pensamiento de gran importancia para el estudiante, que puede ser practicado en el pensamiento matemático, y que este se desarrolla fuertemente en el trabajo con la geometría euclidiana.

Particularmente en la institución donde se desarrollará el trabajo, no se aprovecha el trabajo en geometría, puesto que desde hace al menos ocho años la enseñanza de la matemática ha tenido un enfoque operativo; se enseñan hasta grado noveno algoritmos para calcular áreas y volúmenes de figuras geométricas básicas, como polígonos y la circunferencia, y hasta grado undécimo se trabajan conceptos básicos de geometría analítica.

Además, se evidencia en las pruebas diagnóstico que realiza el Colegio Cardenal Sancha, al comenzar cada año para establecer los conocimientos previos de los estudiantes, y en el desarrollo del currículo de matemáticas que los estudiantes únicamente trabajan geometría operacional, esto es, aplicación de fórmulas para áreas y volúmenes de ciertas figuras.

Los Estándares plantean la importancia de enseñar geometría elaborando argumentos y justificaciones, por medio de la actividad demostrativa, para enriquecer el desarrollo del pensamiento lógico; sin embargo, el pensamiento geométrico en la institución no considera aspectos de la geometría euclidiana que exigen hacer demostraciones de teoremas y aplicarlos.

Por otro lado, respecto al trabajo con la demostración en geometría, se reportan investigaciones didácticas que han estudiado las relaciones entre la enseñanza de la demostración en geometría y el trabajo en el aula con geometría dinámica. Gutiérrez (2007), plantea la necesidad de enseñar geometría con un enfoque hacia la demostración, puesto que la actividad demostrativa requiere de un razonamiento deductivo riguroso. Además, propone actividades para el desarrollo del razonamiento deductivo que se ejecutan en programas de geometría dinámica, y aunque se pueden trabajar con papel y lápiz, muestra las ventajas de usar las herramientas que ofrece el software.

Igualmente, Camargo, Samper y Perry (2006), reconocen los programas de geometría dinámica como un instrumento potente para una enseñanza más eficiente de la demostración. Esto, debido a que la exploración, que hace parte de la actividad demostrativa, se enriquece con la utilización del arrastre de puntos para estudiar varios casos de una posible conjetura que podría ser demostrada.

Ahora bien, teniendo en cuenta los planteamientos del MEN sobre la importancia de enseñar a demostrar en geometría y las investigaciones sobre el uso de las herramientas tecnológicas actuales para hacer eficiente el proceso de enseñanza y aprendizaje de la actividad demostrativa surge la siguiente pregunta:

¿Qué características debe tener una estrategia didáctica que utilice los ambientes de geometría dinámica para enseñar a hacer demostraciones de proposiciones en geometría en la educación básica secundaria?

Para resolver esta pregunta se pretende desarrollar como objetivo general una secuencia didáctica con los estudiantes de grado séptimo del Colegio Cardenal Sancha de Bogotá, para trabajar demostraciones geométricas usando ambientes de geometría dinámica (GeoGebra). La estrategia didáctica se fundamentará en el conocimiento básico de la argumentación y la lógica, indispensables para desarrollar el pensamiento lógico implícito en las demostraciones de las proposiciones en la geometría euclidiana. Además, la estrategia se fundamentará en la teoría de enseñanza y aprendizaje de la geometría del modelo de Van Hiele.

Para llevar a cabo el trabajo, se tiene como objetivos específicos:

- Establecer los aspectos teóricos de la geometría euclidiana, la didáctica de la geometría, la geometría dinámica y la actividad demostrativa que fundamentan la propuesta.
- Identificar los conocimientos previos de los estudiantes sobre la geometría euclidiana y los niveles de desarrollo de sus procesos argumentativos.
- Diseñar, usando GeoGebra, actividades de visualización, exploración, conjeturación, validación, justificación y demostración que conforman la secuencia.
- Implementar la secuencia con estudiantes de grado séptimo.
- Evaluar los avances de los estudiantes de grado séptimo en la actividad demostrativa después de la implementación de la secuencia.

El trabajo cuenta con 4 capítulos, el primero son los fundamentos teóricos en los campos del conocimiento, necesarios para el desarrollo del trabajo. Contiene conceptos epistemológicos e históricos, disciplinares y didácticos de la geometría, la demostración en matemáticas y los ambientes de geometría dinámica.

En el segundo capítulo se describen los aspectos metodológicos del presente trabajo, los cuales involucran: la población, las condiciones de trabajo, la herramienta didáctica utilizada, las fases de la secuencia didáctica y los talleres que desarrollaron los estudiantes. En cada taller se describen las finalidades y el sustento didáctico con el que fueron creados.

En el tercer capítulo, se detallan los resultados obtenidos de la aplicación de la secuencia didáctica. Además, se presenta el análisis de estos resultados en función de las finalidades descritas en el segundo capítulo.

Por último, en el cuarto capítulo están las conclusiones, las sugerencias y reflexiones de este trabajo final.

1. Marco Teórico

Este apartado se dedicará a las especificaciones teóricas que fundamentarán el trabajo de grado, las cuales están relacionadas con aspectos histórico-epistemológicos, disciplinares y didácticos enmarcados en la geometría, la demostración en geometría y su enseñanza.

1.1 Aspectos históricos y epistemológicos de la geometría

La epistemología de los conceptos matemáticos o de los campos de la matemática, que se pretenden abordar en el presente trabajo, ayudan a dar un mejor entendimiento de las dificultades y eventualidades matemáticas que se dieron en la historia de la humanidad cuando el concepto o el campo empezó a surgir. A continuación, se esbozan algunos aspectos históricos y epistemológicos de la geometría euclidiana, las geometrías no euclidianas y su paso a la geometría de Hilbert, la lógica y la geometría dinámica, componentes significativos en las demostraciones matemáticas.

1.1.1 La geometría euclidiana

El geómetra griego Euclides (330 a.C. – 275 a.C.) hacia los 300 a.C. elaboró uno de los trabajos más importantes de la matemática mientras trabajaba en el Museo de Alejandría. Su obra, *Elementos*, conformada por trece libros, los cuales abordan las matemáticas como un sistema axiomático. Los cuatro primeros libros tratan parte de la geometría plana sobre elementos tales como rectas, segmentos, circunferencias y polígonos.

El quinto libro trabaja la teoría de las proporciones, mientras que el sexto libro es sobre la relación de semejanza de figuras. Los siguientes tres libros (7, 8 y 9), abordan la teoría de números, el décimo libro trata exclusivamente los números inconmensurables (irracionales), y por último, los últimos tres libros (11, 12 y 13) tratan de la geometría del espacio.

El trabajo de estos trece libros, con 465 teoremas, está sustentado en 131 definiciones, 5 nociones comunes y 5 postulados; proposiciones que se aceptaban como evidentes y por eso no requerían de una demostración. Los postulados son los siguientes (Puertas, 1991):

1. Trazar una única recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
2. Prolongar continuamente un segmento en línea recta.
3. Describir un único círculo con cualquier centro y radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta al incidir sobre dos rectas hace que los ángulos internos del mismo lado sean menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indeterminadamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

Se puede observar que los tres primeros postulados con de carácter constructivo, permiten trazar rectas, segmentos y circunferencias solamente. El cuarto y quinto son propiedades de ángulos rectos y cierta relación entre rectas y los ángulos formados por ellas.

El método de demostración seguido por Euclides en su obra *Elementos* consistía en:

1. Realizar un enunciado general del teorema.
2. Hacer una representación gráfica (figura) nombrando los elementos geométricos involucrados.
3. Realizar un enunciado particular relativo a la figura.
4. Realizar una construcción pertinente.
5. Demostrar el enunciado particular.

Este modelo de demostración fue aceptado por los matemáticos por varios siglos, porque las demostraciones en los *Elementos* fueron consideradas rigurosas por el uso de un sistema axiomático con definiciones, postulados, axiomas y nociones comunes[1]. Cabe resaltar que la obra de Euclides también se consideró por muchos siglos un prototipo de aprender a razonar correctamente (Sánchez C. H., 2012).

Los primeros cuatro postulados se caracterizan por ser fáciles de entender, pero el quinto postulado tiene sus complejidades, pues de alguna manera involucra el infinito. Era difícil comprender que, si en ambos lados la suma de los ángulos internos era igual a dos rectos, estas rectas jamás se iban a intersecar en cualquiera de sus prolongaciones, por lo tanto, estas rectas debían ser paralelas. Por ello fue llamado el postulado de las paralelas y fue cuestionado por distintos matemáticos durante varios siglos.

La controversia con el enunciado del quinto postulado condujo a los matemáticos a intentar demostrarlo a partir de los otros cuatro, uno de los que intentó hacerlo fue el matemático escocés John Playfair (1748 - 1819) en el siglo XVIII con el postulado: Por un punto exterior a una recta, pasa una única recta paralela. Igualmente, muchos matemáticos como el francés Legendre (1752 - 1833) y el alemán Karl Gauss (1777 - 1855) dedicaron parte de su trabajo para demostrar el quinto postulado a partir de los anteriores.

Uno de los intentos más interesantes fue el del matemático italiano Giovanni Saccheri (1667 - 1733) quien intentó demostrarlo por reducción al absurdo. Él quería mostrar que Euclides fue pertinente en dar una definición de rectas paralelas y asumir el quinto postulado como verdadero.

Para esto Saccheri supuso que, si negaba el quinto postulado podría llegar a una contradicción. Desarrolló un sistema de tres hipótesis sobre la suma de los ángulos de un cuadrilátero, llamado el cuadrilátero de Saccheri. Las tres hipótesis son:

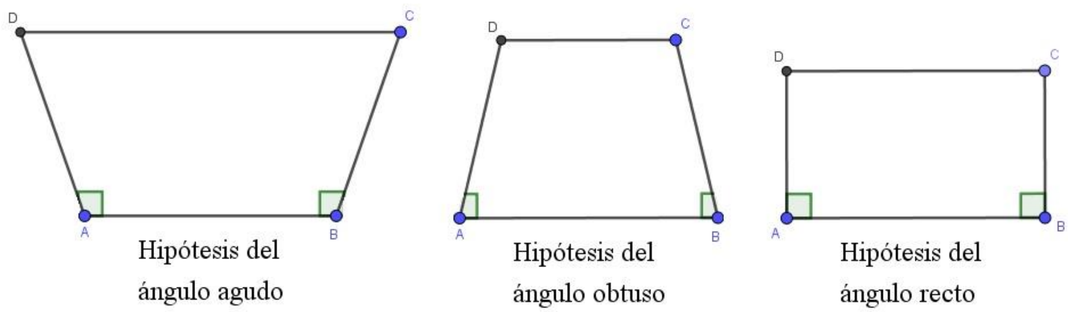
- Hipótesis del ángulo agudo: La suma mencionada es menor que cuatro ángulos rectos.

[1] En esta época se distinguió entre postulado, verdad relativa a la teoría particular y axioma o noción común, verdad válida para todas las ciencias.

- Hipótesis del ángulo obtuso: La suma mencionada es mayor que cuatro ángulos rectos.
- Hipótesis del ángulo recto: La suma mencionada es igual a cuatro ángulos rectos.

Logró una contradicción con la hipótesis del ángulo obtuso, no lo logró con la del ángulo agudo, lo rechazó por prejuicios no válidos matemáticamente, estableciendo la siguiente proposición "La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa porque repugna a la naturaleza de la línea recta" (Campos, 2008, p.25). En su trabajo se encuentran resultados interesantes que darían lugar después a las geometrías no euclidianas. En la Figura 1.1 se muestran las hipótesis contempladas por Saccheri.

Figura 1.1: Cuadriláteros de Saccheri



El trabajo de Saccheri, con la negación del quinto postulado, terminó en la demostración de la existencia de las rectas asintóticas, dos rectas que nunca se intersecan y que no tienen una misma recta perpendicular. Además, mostró la pertinencia del quinto postulado en *Elementos,* pero no terminó con la contradicción esperada desde un inicio, por lo cual no logró demostrarlo (más detalles pueden consultarse en Campos, 2008).

1.1.2 Las geometrías no euclidianas

En el siglo XIX, los trabajos del húngaro Bolyai (1802 - 1860), el ruso Lobachebsky (1792 - 1856) y Gauss en torno al quinto postulado, permitieron la creación de la llamada *Geometría no Euclidiana*. Esta geometría era consistente como la euclidiana y cumplía los cuatro primeros postulados, pero el quinto permitía infinitas rectas paralelas a la recta dada por un punto exterior a ella. Por otro lado, el matemático alemán Riemann (1826 - 1866), propuso una nueva geometría no euclidiana en la cual no hay o no pasaran rectas paralelas a la recta dada por un punto, llamándola Geometría Esférica (Campos, 2008).

Estas geometrías no fueron aceptadas fácilmente, puesto que la geometría euclidiana, al estilo de los *Elementos*, fue considerada como verdadera y estudiada por más de veinte siglos. Para el tiempo de Gauss había muchos matemáticos que, como él, trabajaban sobre si se podía demostrar o no el quinto postulado a partir de los otros cuatro. Sus trabajos e ideas acerca de este problema compartían la misma teoría que Bolyai. Pero publicar un trabajo sobre geometría, en el que se tratara de que por un punto exterior a una recta existía más de una recta paralela, parecía una acción de alto riesgo por las posibles críticas que podía recibir dicho trabajo (Campos, 2008), dada su dificultad en entenderla.

La controversia sobre el quinto postulado se fue acrecentando y posteriormente se hablaba de una geometría imaginaria con las ideas de Lobachevsky, pero los trabajos del italiano Eugenio Beltrami (1835-1899) y el alemán Félix Klein (1849-1925) mostraron la consistencia de esa geometría, que causó el reconocimiento de los trabajos de Bolyai y Lobachevsky (Sánchez C. H., 2012).

1.1.3 Geometría de Hilbert

A finales del siglo XIX, en 1899, el alemán David Hilbert (1862 - 1943) publicó la obra llamada *Fundamentos de la Geometría*, donde presentó una reconstrucción axiomática de la geometría euclidiana partiendo de cinco grupos de axiomas (un total de 20 axiomas) sobre puntos, rectas y planos y las relaciones entre ellos: estar en y estar entre. Esta reconstrucción se dio gracias a que Hilbert había encontrado distintos errores lógicos en la obra *Elementos* y buscaba el máximo rigor.

Los grupos de axiomas son los siguientes (Campos, 2008):

1. *Axiomas de pertenencia*: Son ocho y establecen las relaciones de pertenencia y unicidad entre puntos, rectas y planos.

2. *Axiomas de ordenación*: Son cuatro y definen implícitamente el concepto de "estar entre" en los puntos que están sobre una recta, rayo o segmento, ya sea en un plano o el espacio.
3. *Axiomas de congruencia*: Son cinco y definen implícitamente el concepto de congruencia entre segmentos y también entre ángulos. Además, se verifica que la relación de congruencia es una relación de equivalencia al ser reflexiva, simétrica y transitiva.
4. *Axioma de paralelismo*: Es uno y establece que, en un plano, dada una recta y un punto exterior a ella, solo existe una única recta paralela a la recta dada y que pasa por el punto exterior.
5. *Axiomas de continuidad*: Son dos, uno es el *Axioma de la medida de Arquímedes*, a saber:

> Si AB[2] y CD son dos segmentos cualesquiera, existe un numero n tal que el transporte del segmento CD repetido n veces a partir de A sobre la semirecta determinada por B conduce a un punto situado por el otro lado de B. (p.305)

El otro, recibe el nombre de *Axioma de compleción lineal* que enuncia así:

> El conjunto de los puntos de una recta provisto de las relaciones de oren y de congruencia, no es susceptible de ampliación alguna en la que sean válidas las relaciones precedentes y las propiedades fundamentales de orden lineal y de congruencia de los axiomas I – III y del axioma de la medida de Arquímedes. (p.305)

A partir de estos axiomas Hilbert desarrolla su sistema teórico, el cual le permitió definir rigurosamente los objetos geométricos manejados en la geometría de *Elementos* como lo son el segmento, ángulo y recta entre otros. Esto le da un criterio de superioridad a la obra de Euclides, puesto que las definiciones manejadas allí no eran del todo rigurosas.

[2] En la cita el termino AB es usado para referirse al segmento $\overline{AB}$, de igual forma pasa con el termino CD

1.1.4 Sistemas de geometría dinámica

Desde la geometría euclidiana de la época de Euclides, hasta las geometrías no euclidianas trabajadas por Riemann, Bolyai y Lobachebsky, los objetos geométricos involucrados en estas geometrías son inmóviles y los sistemas teóricos nacen a partir del análisis de figuras del plano y el espacio. Por lo tanto, todas las representaciones gráficas de estas geometrías podían ser manipuladas mediante construcciones auxiliares con regla y compás, pero ningún objeto geométrico tenía movimiento, por lo cual la persona que quisiera estudiar una representación de una situación geométrica, le resultaba dispendioso analizar distintas variaciones de esta.

Con las nuevas tecnologías se avanza en función de hacer representaciones gráficas en los computadores, facilitando las representaciones con papel y lápiz. El primer programa que permitió la manipulación directa de objetos gráficos fue *Sketchpad*, creado por Iván Shuterland en 1963. Este permitió la interacción entre el usuario y los distintos elementos de un computador, a través del arrastre y la opción de dar clic en botones para seleccionar objetos visibles (Manzano, s.f.).

Posteriormente, se dieron las bases para el desarrollo de los sistemas de geometría dinámica. El primer software que permitiría crear objetos geométricos y manipularlos como entes gráficos fue *Cabri Geomètre* presentado en 1988 en Francia por Jean-Marie Laborde con colaboración de Frank Bellemain; le siguió *The Geometer's Sketchpad* elaborado en 1989. Con estos dos programas empezó la era de los sistemas de geometría dinámica. Al pasar los años aparecieron nuevos programas con más herramientas y utilidades como *GEONExT, Gambol, Dr. Geo, Dr Genius, GeoGebra,* entre otros (Manzano, s.f.). Algunos de estos programas actualmente son accesibles de forma gratuita y de fácil alcance a los estudiantes.

Los programas de geometría dinámica han desarrollado herramientas fundamentales en la geometría. Hoy en día los desarrolladores de estos programas tienen como objetivo promover la creatividad de los usuarios, dejando que ellos generen las herramientas con un dominio básico de algunos lenguajes de programación. Además, el trabajo en tres dimensiones que puede ofrecer GeoGebra o Cabri, han servido de forma significativa para los estudios de la geometría del espacio.

1.1.5 Lógica Matemática

La lógica matemática tiene su inicio en la época dorada de Grecia, cuando el filósofo estagirita Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) desarrolló la lógica formal en su obra *Órganon*, donde estudió conjuntos de 3 proposiciones categóricas[3], relacionadas de una cierta manera que determinaban un tipo especial de deducción, llamado silogismo. El trabajo de Aristóteles consistió en estudiar las características de los silogismos válidos (Piscoya, 2007).

Se puede decir que la lógica como disciplina fue rigurosa desde sus inicios, puesto que Aristóteles estudiaba los silogismos por su estructura abstracta, donde la forma de los enunciados y los silogismos tiene prioridad sobre su contenido.

Los primeros pasos en el desarrollo de la lógica matemática fueron dados por el matemático inglés George Boole (1815 – 1864) al resolver problemas de la teoría del silogismo con el álgebra (Piscoya, 2007). Luego el matemático alemán Gottlob Frege (1848 – 1925) axiomatizó la lógica de predicados en su famoso trabajo *Begriffsschrift* de 1879.

Con los trabajos de Boole, Frege y otros se consolidaría una tendencia por el uso de la lógica matemática en varias teorías matemáticas, puesto que al estructurarlas lógicamente se incitaba a axiomatizarlas y por ende a darles un nivel de rigor bastante avanzado (Piscoya, 2007). Además, se considera hoy día que la lógica matemática, desde sus inicios, fundamenta de forma significativa las demostraciones, consideradas uno de los quehaceres fundamentales de los matemáticos.

Hoy se considera que la lógica matemática, y la teoría de conjuntos, son los fundamentos de la matemática. Desde los años 60 se ha promovido su enseñanza en la educación media y en los primeros semestres de la universidad. Sin embargo, su enseñanza ha sido cuestionada fuertemente, por lo cual, actualmente se trabaja muy arduamente sobre la mejor forma para su enseñanza y aprendizaje.

---

[3] Estas son: Todos los A son B, Ningún A es B, Algunos A son B y Algunos A no son B.

Este trabajo se puede considerar una aproximación a esa forma de enseñanza y aprendizaje, puesto que la enseñanza de la actividad demostrativa está ligada con la enseñanza de la lógica matemática de forma explícita o implícita. Para este caso es de forma implícita porque no se pretende abordar un curso de lógica formal con los estudiantes a los que se les aplicara la secuencia didáctica.

1.2 Aspectos disciplinares

La fundamentación disciplinar es un componente muy relevante en este trabajo, porque el dominio teórico y conceptual de los conocimientos matemáticos a enseñar permite que las actividades propuestas estén dirigidas a comprender los conceptos matemáticos para evitar errores en la disciplina. En este apartado se presentan los contenidos mínimos necesarios para realizar una demostración, proceso por el cual se justifican todos los teoremas en cualquier teoría matemática. Por lo tanto, se dará claridad sobre el sistema teórico geométrico seleccionado, base sobre la cual se enseñará a realizar demostraciones en geometría. Posteriormente, se hará claridad sobre lo qué es una demostración matemática y los tipos de razonamiento para llevarla a cabo.

1.2.1 La geometría euclidiana

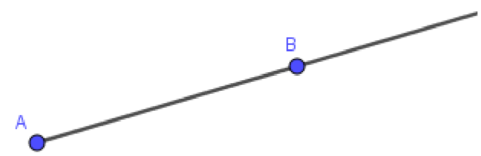
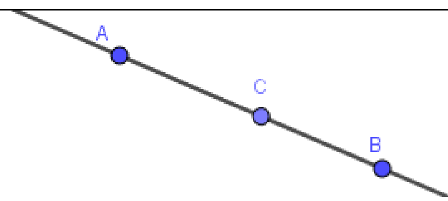
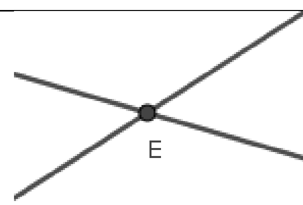
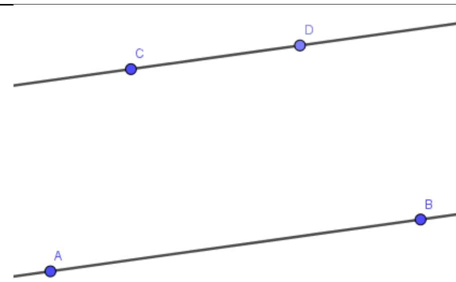
Este trabajo está basado en el libro *Geometría con aplicaciones y solución de problemas* de Clemens, O'Daffer y Cooney (1998). Se consideró este libro por el tratamiento tanto teórico como práctico que hace de la geometría plana. Cuenta con numerosos ejemplos, aplicaciones y solución de problemas. Además, el segundo capítulo del libro está dedicado al razonamiento en geometría y abarca conceptos como tipos de razonamiento y tipos de proposiciones.

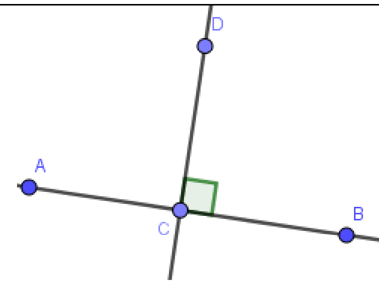
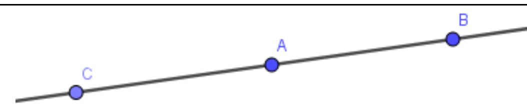
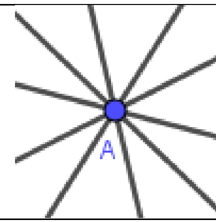
Dada la amplitud de teoremas en la geometría plana, el grado de los estudiantes al cual se pretende aplicar el presente trabajo y la disponibilidad de tiempo en la institución, la propuesta didáctica se concentrará en teoremas relacionados con propiedades de los triángulos.

- **Definiciones básicas**

Los conceptos de punto y recta se introducen como conceptos primitivos en la geometría, esto es, se dejan a la intuición y no se definen. La recta se puede caracterizar por medio de dos puntos A y B de esta y representarla mediante el símbolo $\overleftrightarrow{AB}$. Luego se definen los siguientes conceptos en la Tabla 1.1:

Tabla 1.1: Definiciones básicas y relaciones entre rectas y puntos

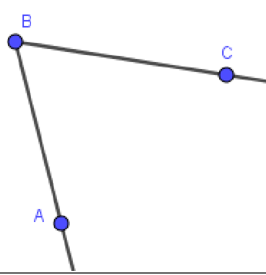
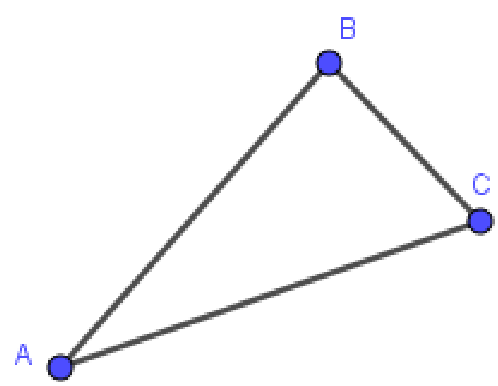
Definición	Ilustración
Segmento: Dados dos puntos A y B distintos, llamados extremos, el *segmento* está constituido por estos puntos y los puntos que están entre ellos, y se nota $\overline{AB}$.	
Rayo: Dados dos puntos A y B distintos en una recta, un *rayo* está constituido por uno de esos puntos, que se llama *origen*, y los puntos que están después del origen y en el mismo lado donde está el otro punto inicial, se nota $\overrightarrow{AB}$ para indicar un rayo que tiene el punto A como origen.	
Puntos colineales: Dados los puntos A, B y C, estos puntos son *colineales* si pertenecen a la misma recta.	
Intersección de rectas: Dos rectas se *intersecan*, cuando hay un único punto que pertenece a ambas rectas.	
Rectas paralelas: Dos rectas son *paralelas* cuando no se intersecan. Se utiliza el símbolo $\parallel$ entre dos rectas para decir que son paralelas. También se puede decir que segmentos o rayos son paralelos, si las rectas que los contienen son paralelas. En la ilustración, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	

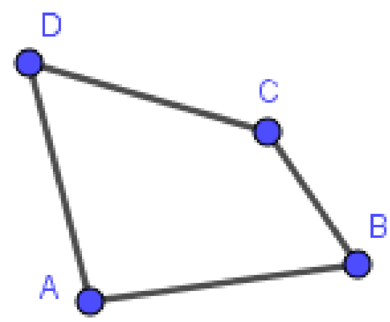
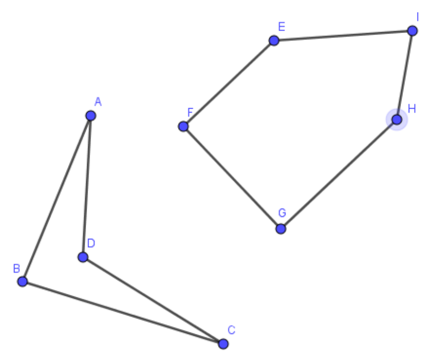
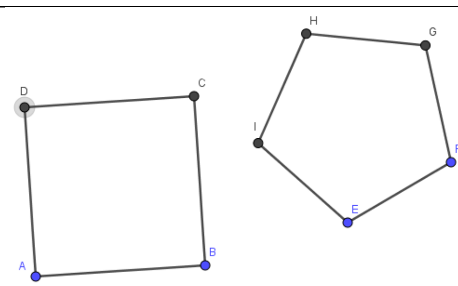
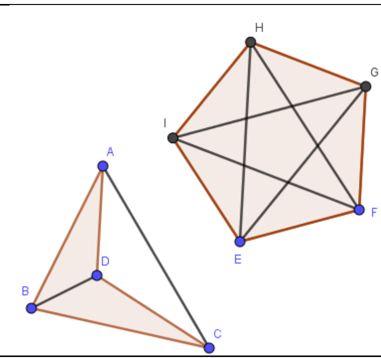
Rectas perpendiculares: Dos rectas son *perpendiculares* cuando se intersecan y forman cuatro ángulos congruentes, cada uno de ellos llamado *ángulo recto*. Se usa el símbolo ⊥ entre dos rectas para decir que son perpendiculares. También se puede decir que dos segmentos o rayos son perpendiculares, si se intersecan y las rectas que los contienen son perpendiculares. En la ilustración, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$	
Rayos opuestos: Dos rayos son opuestos cuando son colineales, tienen el mismo punto de origen y forman una recta. En la ilustración, los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son opuestos.	
Rectas concurrentes: Tres o más rectas son *concurrentes* cuando se intersecan en un mismo punto.	

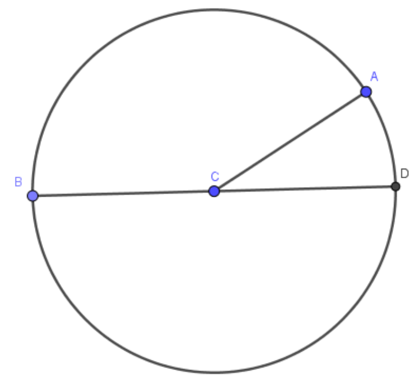
▪ Objetos geométricos básicos

En la Tabla 1.2 se muestran las siguientes definiciones, que fueron consideradas necesarias para el desarrollo del presente trabajo:

Tabla 1.2: Objetos geométricos básicos

Definición	Ilustración
Ángulo: Son dos rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ que tienen el mismo origen, al que se le llama *vértice* del ángulo. Se usa el símbolo $\angle ABC$ el cual indica un ángulo cuyo vértice es el punto B. Se consideran esencialmente tres tipos de ángulos: ángulo recto, ángulo agudo y ángulo obtuso, los cuales se definirán más adelante.	
Triángulo: Es una figura formada por tres segmentos determinados por tres puntos no colineales, donde cada punto es extremo de solo dos de estos segmentos. La notación geométrica del triángulo para la ilustración es ΔABC. Nota: Se consideran dos clasificaciones de triángulos: • Según la medida de sus lados: triángulo equilátero, triángulo isósceles y triángulo escaleno.	

• Según la medida de sus ángulos: triángulo acutángulo, triángulo rectángulo y triángulo obtusángulo. Cada uno de estos se definirá más adelante.	
Cuadrilátero: Es una figura compuesta por cuatro segmentos determinados por cuatro puntos, de los cuales no hay tres que sean colineales, cada punto es extremo de dos y sólo dos de estos segmentos y los segmentos únicamente se intersecan en sus extremos. En la ilustración la figura se denota $\square ABCD$ Nota: Como casos especiales de cuadriláteros están: El cuadrado, rombo, rectángulo, paralelogramo, trapecio y cometa, los cuales se definirán más adelante.	
Polígono: Es una secuencia de segmentos tales que: • Cada par de segmentos a lo más se intersecan en un punto. • El punto inicial del primer segmento debe ser el extremo del último segmento de la secuencia. • Los extremos de cada segmento se denominan vértices del polígono. Nota: El triángulo y el cuadrilátero son casos particulares de polígonos.	
Polígono regular: Es un polígono que tiene todos sus lados congruentes y todos sus ángulos congruentes. Su nombre depende del número de lados a partir de 5: Pentágono regular, Hexágono regular, heptágono regular, etc.	
Diagonal de un polígono: Dado un polígono, una *diagonal* de este es un segmento cuyos extremos son vértices no consecutivos del polígono. Nota: En el caso en que todas las diagonales del polígono se encuentren en su interior, se dice que es un *polígono convexo*. Pero en el caso contrario se dice que es un *polígono cóncavo*. En la ilustración se encuentra un ejemplo de polígono cóncavo (el $\square ABCD$) y convexo (el pentágono $EFGHI$).	

Circunferencia: Dado un punto llamado *centro*, una *circunferencia* es el conjunto de puntos que está a la misma distancia del centro. El segmento que tiene como extremos el centro de la circunferencia y un punto cualquiera de esta se denomina *radio*. El segmento que tiene como extremos puntos de la circunferencia y además contiene el centro de esta, se denomina *diámetro*. En la ilustración, $\overline{CA}$ es el radio y $\overline{BD}$ es el diámetro de la circunferencia con centro en C.	

- **Congruencia de segmentos y ángulos**

Para referirse a la *longitud* de un segmento se usa la notación AB y para referirse a la *amplitud* (medida de apertura) de un ángulo se usa la notación $m\angle ABC$.

Congruencia de segmentos: Dos segmentos son congruentes cuando tienen la misma longitud.

Congruencia de ángulos: Dos ángulos son congruentes cuando tienen la misma amplitud.

El símbolo de congruencia es $\cong$ y se utiliza entre dos segmentos o dos ángulos para decir que miden lo mismo.

Nota: Tanto la congruencia de segmentos como la de ángulos es una relación de equivalencia, ya que cumple con las siguientes propiedades[4]:

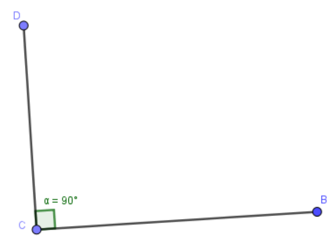
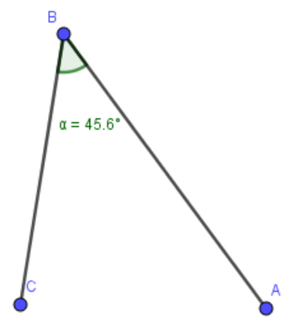
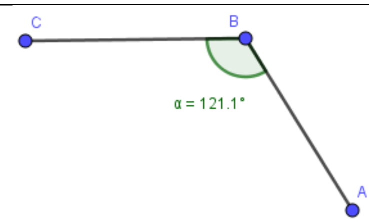
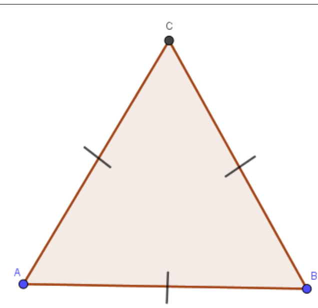
- **Reflexiva:** Un segmento $\overline{AB}$ es congruente consigo mismo. Esto es $\overline{AB} \cong \overline{AB}$.
- **Simétrica:** Si un primer segmento $\overline{AB}$ es congruente con un segundo segmento $\overline{CD}$, entonces el segundo segmento es congruente con el primero. Esto es, si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ entonces $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.
- **Transitiva:** Si dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ son congruentes con un tercer segmento $\overline{CD}$, entonces los dos primeros segmentos son congruentes entre sí. Esto es, si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{EF} \cong \overline{CD}$ entonces $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

[4] La demostración de estas propiedades se deduce del hecho que la igualdad es una relación de equivalencia y estas congruencias se refieren a igualdad de longitudes e igualdad de amplitudes.

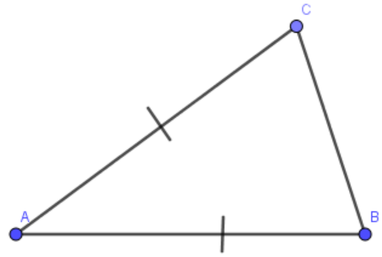
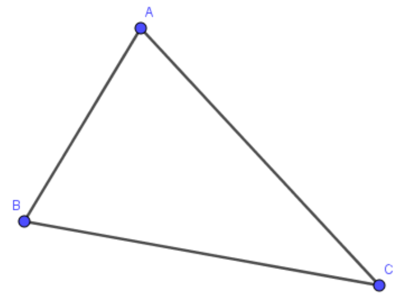
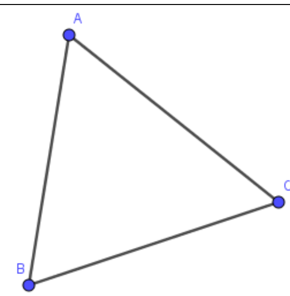
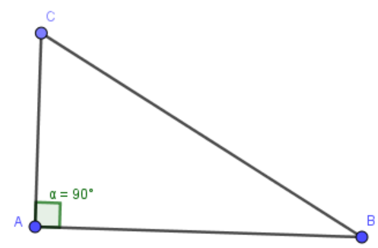
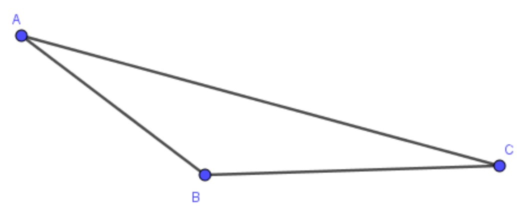
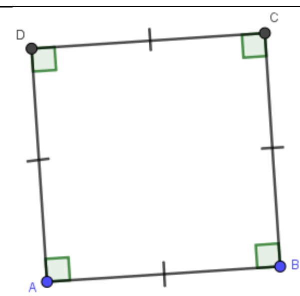
- **Tipos de ángulos, triángulos y cuadriláteros.**

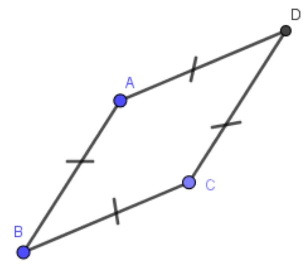
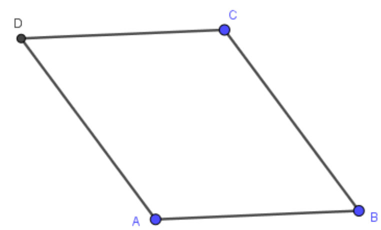
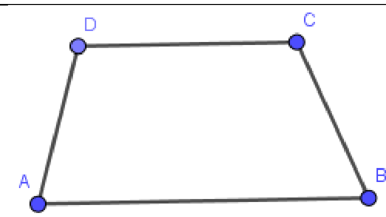
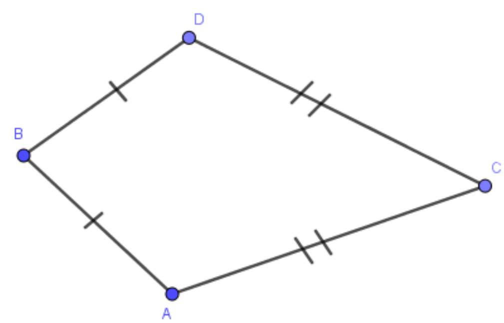
En la Tabla 1.3 se encuentran las definiciones y clasificaciones de ángulos, triángulos y cuadriláteros:

Tabla 1.3: Clasificación de ángulos según su medida, triángulos y cuadriláteros

Definición	Ilustración
Ángulo recto: Ángulo cuya medida[5] es igual a 90°. Está conformado por segmentos perpendiculares.	
Ángulo agudo: Ángulo cuya medida es menor a 90°.	
Ángulo obtuso: Ángulo cuya medida es mayor a 90°.	
Triángulo equilátero: Triángulo que tiene todos sus lados congruentes.	

[5] La definición 10 del primer libro de Elementos de Euclides es la de ángulo recto, se define como uno de los cuatro ángulos adyacentes y congruentes que se forman cuando dos rectas se intersecan (Puertas, 1991). La medida de los ángulos por grados viene del sistema sexagesimal de los Babilónicos y la división de la circunferencia en 360 partes iguales. Se inventaron un instrumento llamado transportador para realizar esas mediciones.

Triángulo isósceles: Triángulo que tiene al menos dos lados congruentes.	
Triángulo escaleno: Triángulo en el cual ninguna pareja de lados es congruente.	
Triángulo acutángulo: Triángulo donde todos sus ángulos son agudos.	
Triángulo rectángulo: Triángulo que tiene un ángulo recto. En la ilustración el $\angle CAB$.	
Triángulo obtusángulo: Triángulo que tiene un ángulo obtuso. En la ilustración, el $\angle ABC$ es un ángulo obtuso.	
Cuadrado: Cuadrilátero que tiene todos sus lados congruentes y todos sus ángulos rectos. En la ilustración, los ángulos $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle D$ son ángulos rectos. Además $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$.	

Rombo: Cuadrilátero que tiene todos sus lados congruentes. En la ilustración, $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$	
Rectángulo: Cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos. En la ilustración los ángulos $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle D$ son ángulos rectos.	
Paralelogramo: Cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos. En la ilustración, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	
Trapecio: Cuadrilátero que tiene únicamente un par de lados opuestos paralelos. En la ilustración, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	
Cometa: Cuadrilátero que tiene dos pares de lados adyacentes congruentes, pero ningún par de lados opuestos son congruentes. En la ilustración, $\overline{AB} \cong \overline{BD}$ y $\overline{AC} \cong \overline{CD}$	

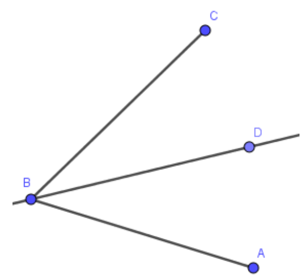
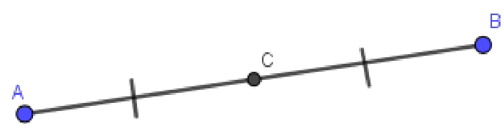
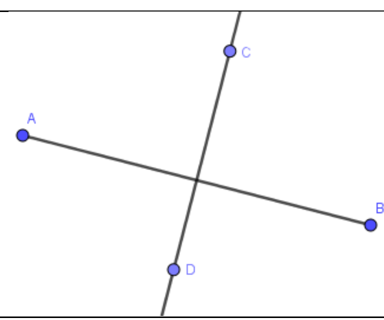
Cualquier triángulo se puede clasificar en las dos categorías anteriormente mencionadas, por ejemplo, un triángulo puede ser isósceles y acutángulo o puede ser también escaleno y rectángulo.

Además, de las definiciones de los tipos de cuadriláteros se sigue una jerarquización[6] de estos cuando se relacionan sus propiedades, un ejemplo es el cuadrado, que en su definición contiene la definición de rombo y rectángulo, por lo cual se puede decir que todo cuadrado es un rectángulo y un rombo o también que todo rectángulo es un paralelogramo, aunque esta conclusión[7] se soporta de razonamientos deductivos a partir de la definición de rectángulo.

- **Rectas y puntos especiales**

En la tabla 1.4 se caracterizan las definiciones de algunos objetos, considerados como especiales por las propiedades que enmarcan:

Tabla 1.4: Puntos y rectas especiales

Definición	Ilustración
Bisectriz: Dado un ángulo, su bisectriz es un rayo que está en el interior de este, su origen es el vértice del ángulo y divide el ángulo en dos ángulos congruentes cuya medida es la mitad de la medida del ángulo inicial. En la ilustración, el $\overrightarrow{BD}$ es bisectriz del $\angle ABC$.	
Punto medio: Dado un segmento, su punto medio es un punto que está en el segmento y que divide el segmento en dos segmentos congruentes cuya medida es la mitad de la medida del segmento inicial. En la ilustración, C es punto medio del $\overline{AB}$.	
Mediatriz: Dado un segmento, su *mediatriz* es una recta donde cada punto está a la misma distancia de los extremos del segmento. En la ilustración, $\overleftrightarrow{CD}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.	

[6] El proceso de jerarquizar figuras consiste en mostrar que todos los elementos de un determinado grupo también lo son de otro. Esto es, el primer grupo está contenido en el segundo.

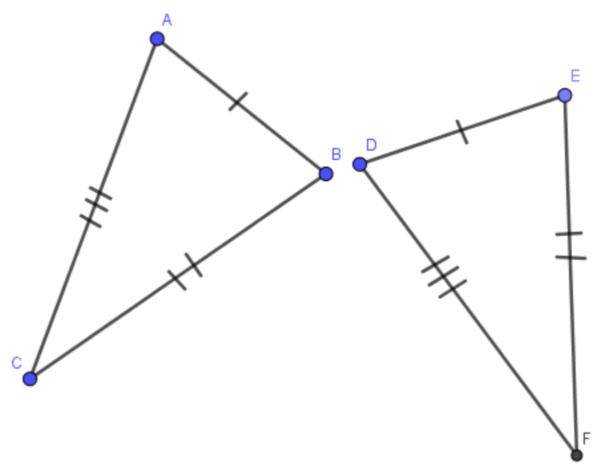
[7] Cabe resaltar que las afirmaciones recíprocas no se cumplen, es decir, las afirmaciones "Todo rectángulo es cuadrado", "Todo rombo es rectángulo" y "Todo paralelogramo es rectángulo" son falsas. Concluir la falsedad de estas afirmaciones también hace parte del proceso de jerarquizar figuras.

- **Postulados de congruencia de triángulos**

Definición de Triángulos congruentes: Dada una correspondencia entre los vértices de dos triángulos, estos son congruentes si cada par de lados y ángulos correspondientes son congruentes.

En la Figura 1.2, se encuentra la ilustración de un ejemplo de triángulos congruentes donde $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$.

Figura 1.2: Triángulos congruentes



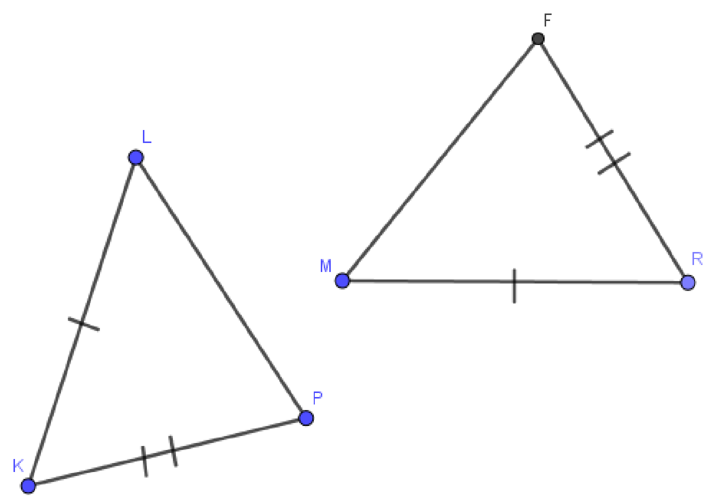
Según este ejemplo, la correspondencia de puntos sería la siguiente: Al punto A le corresponde el punto D, al punto B le corresponde el punto E y al punto C le corresponde el punto F; por lo tanto, la congruencia de triángulos se nota $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, más estaría incorrecto escribir alguna otra variación en la cual se pueda interpretar una correspondencia falsa, pues evidentemente $\Delta ABC = \Delta BCA$ pero la relación de correspondencia entre triángulos facilita el análisis y comprensión de las propiedades requeridas para la congruencia de triángulos.

Sin embargo, basta con verificar en dos triángulos algunas condiciones para garantizar que se cumple la definición anterior, estas condiciones se consideran postulados de triángulos congruentes y son los siguientes:

Postulado Lado, Ángulo, Lado (LAL): Si dos lados de un triángulo y el ángulo que conforman son congruentes a dos lados y el ángulo que conforman de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

En la Figura 1.3 se encuentra una representación gráfica de un ejemplo del uso del postulado lado, ángulo, lado:

Figura 1.3: Postulado Lado, Ángulo, Lado



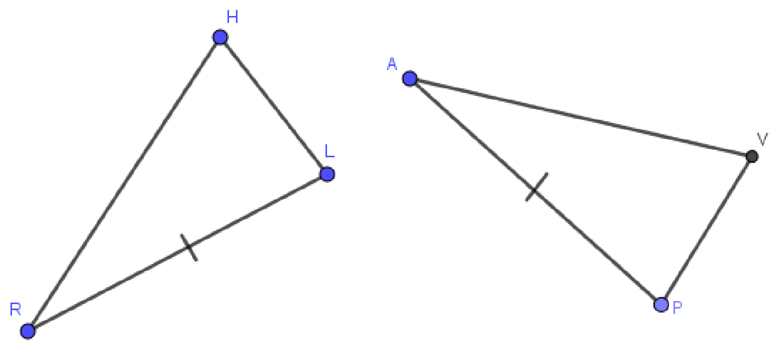
Dados dos triángulos ΔLKP y ΔMRF, si $\overline{LK} \cong \overline{MR}$, $\angle K \cong \angle R$ y $\overline{KP} \cong \overline{RF}$, entonces $\Delta LKP \cong \Delta MRF$.

Se puede observar que solo es necesario tres condiciones para concluir la congruencia de los triángulos. Luego, al concluir la congruencia de los triángulos, se puede deducir las otras tres congruencias restantes, bajo la definición de triángulos congruentes.

Postulado Ángulo, Lado, Ángulo (ALA): Si dos ángulos de un triángulo y el lado que comparten son congruentes a dos ángulos y el lado que comparten de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

En la Figura 1.4 se encuentra una representación gráfica de un ejemplo del postulado ángulo, lado, ángulo:

Figura 1.4: Postulado Ángulo, Lado, Ángulo

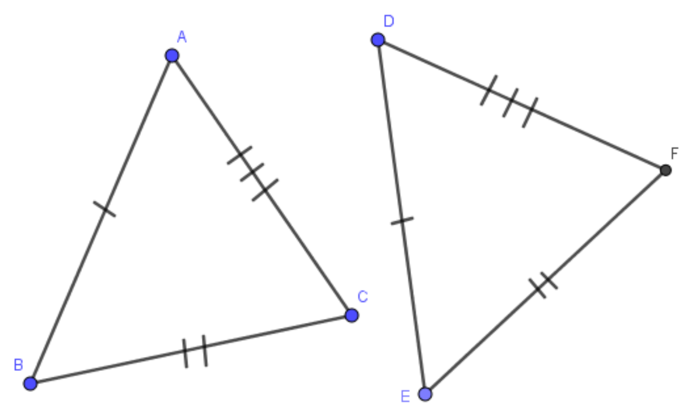


Dados los triángulos ΔRLH y ΔAPV, si $\angle R \cong \angle A$, $\overline{RL} \cong \overline{AP}$ y $\angle L \cong \angle P$, entonces $\Delta RLH \cong \Delta APV$

Postulado Lado, Lado, Lado (LLL): Si los tres lados de un triángulo son congruentes a los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

En la Figura 1.5 hay una representación gráfica de un ejemplo del postulado lado, lado, lado.

Figura 1.5: Postulado Lado, Lado, Lado



Dados los triángulos ΔABC y ΔDEF, si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Aunque el sistema teórico presentado no es el más formal, es un acercamiento a los elementos teóricos formales de la geometría euclidiana, ya sea de la versión de *Elementos* de Euclides o los *Fundamentos de la geometría* de Hilbert. Además, este sistema teórico permitirá desarrollar los teoremas que abordarán en los talleres para los estudiantes dados en el presente trabajo.

1.2.2 La demostración en matemáticas

Una de las finalidades del presente trabajo es conseguir que los estudiantes realicen una buena aproximación a la demostración de proposiciones geométricas (teoremas). Para esto, es necesario tener claro qué significa una demostración en el campo de las matemáticas, cómo está estructurada y qué tipos de demostraciones existen.

Según la Real Academia Española (2019), una demostración es una "comprobación, por hechos ciertos o experimentos repetidos, de un principio o de una teoría". En matemáticas, no se puede concebir como demostración una serie de experimentos repetidos, porque en esta disciplina las afirmaciones que se demuestran son de carácter universal o existencial para todos los elementos de un determinado conjunto que cumplan o satisfagan una afirmación y con frecuencia ese conjunto es infinito. Por lo tanto, una serie de repeticiones no garantiza formalmente la comprobación de lo que se quiere demostrar.

En matemáticas una demostración debe estar sustentada en un sistema teórico con sus definiciones, axiomas y teoremas. Estos dos últimos elementos son proposiciones que se diferencian en que un axioma o postulado no requiere de demostración, mientras que un teorema sí lo requiere. Martínez (2001) expresa la idea de que la axiomatización le da a la demostración un nivel de rigor, por lo cual, una demostración rigurosa de un teorema, es deducirlo de un conjunto de axiomas y premisas, mediante reglas o razonamientos lógicos.

Existe una diferencia entre *explicación*, *argumentación*, *justificación* y *demostración*. Explicar y argumentar son procesos que se expresan mediante un lenguaje coloquial y el conocimiento propio de la persona. Sin embargo, una explicación solo trata de hacer inteligible, ante las personas que la reciben, un resultado de una relación de propiedades entre objetos; mientras que una argumentación busca convencer a las personas dando razones basadas en lo que la persona, que argumenta, conoce.

Si estas razones son aceptadas en correspondencia con el saber científico con un nivel de rigurosidad, se puede decir que lo que se está haciendo es una justificación. Una demostración es más que una justificación ya que esta busca convencer al propio autor, que la realiza con mucho más rigor, de la validez de una afirmación para que esta sea expuesta a una comunidad y se integre a un saber disciplinar.

Según Knowless (1998), citado por Martínez (2001), una demostración es una cadena de proposiciones donde cada proposición o es un axioma o es una proposición, que fue deducida de los axiomas de un sistema teórico mediante reglas de inferencia. Estas reglas de inferencia son leyes de la lógica formal la cual soporta una demostración.

Godino y Martínez (2001), citado por Sánchez E. F. (2014), ven la demostración como un producto de argumentos aceptados por una comunidad. De lo anterior se infiere que una demostración es una serie de argumentos, los cuales tienen premisas y conclusión. Una conclusión puede ser premisa para otro argumento, la última conclusión de esta serie debe ser considerada la conclusión principal, lo que se quiere demostrar.

El seguimiento o estructuración de los argumentos se desarrolla mediante el razonamiento deductivo. Para Balacheff (2000), citado por Sánchez E. F. (2014), el razonamiento es una actividad mental, no del todo explícita, que se encarga de relacionar información establecida o adquirida, para concluir nueva información.

Todos los teoremas en matemáticas son de la forma "sí P entonces Q"; donde P se llama hipótesis y Q se llama consecuente o tesis (tanto P como Q pueden ser proposiciones simples o compuestas). Esta forma se puede representar mediante la expresión "$P \rightarrow Q$" que también se puede leer como "P implica Q".

Es bueno tener en cuenta que la afirmación "P implica Q" exige que la condicional P→Q sea una tautología, sin embargo, con frecuencia no se usa esta rigurosa distinción, lo cual puede traer dificultades. Dependiendo de las estructuras lógicas y las reglas de inferencia que se usan en la demostración de un teorema, se pueden distinguir tres tipos[8] de demostraciones:

- **Directa.**

Es el método más usual de demostración. Se supone como verdadera la hipótesis y es el punto de partida para mostrar la veracidad de la tesis mediante el sistema teórico dado

[8] La consideración de cuáles o cuántos tipos de demostración existen, varía de acuerdo con el autor. Luego de la revisión bibliográfica los tipos de demostraciones presentadas son los considerados más pertinentes para este trabajo.

(definiciones, axiomas y teoremas) y reglas de inferencia. También se considera como demostración directa, el método exhaustivo, cuando se dan varios casos que intervienen en una proposición, se analizan todos los casos posibles y se verifican en función de la proposición. La demostración se considera válida cuando todos los casos posibles han sido tratados.

- **Indirecta**

En este método se consideran dos submétodos:

- *Contrarrecíproca*: Se parte de la negación de la tesis, mediante el sistema teórico y razonamientos deductivos se llega a la negación de la hipótesis.
- *Reducción al absurdo*: Se parte de la hipótesis y la negación de la tesis, mediante el sistema teórico y razonamientos deductivos se llega a una contradicción cualquiera o una proposición absurda, es decir, se concluye una afirmación y a la vez la negación de esta.

Para lograr una demostración rigurosa se requiere un manejo adecuado del cálculo proposicional y del cálculo de predicados, los cuales abordan las reglas de la lógica matemática y estudian el proceso para deducir una conclusión a partir de un conjunto de premisas (demostración).

- **Constructiva**

Algunas demostraciones en matemáticas requieren probar la existencia de objetos que cumplan ciertas condiciones. Por otro lado, dada una afirmación sobre un conjunto de objetos, también hay demostraciones que se encargan de mostrar con un contraejemplo que refuta dicha afirmación, esto es, mostrar un elemento de ese conjunto de objetos que no cumple la afirmación establecida. Para los dos casos se considera que la demostración es constructiva. En algunos casos tiene un fuerte soporte geométrico y los elementos a exhibir son construidos para la finalidad de la demostración.

Las demostraciones que consisten en probar la existencia de un cierto elemento requieren justificar que dicho objeto cumple con ciertas propiedades exigidas, para lo cual en su desarrollo se usa alguno de los dos tipos de demostración antes vistos.

Un ejemplo está en demostrar la existencia de los números irracionales. Se puede tomar el número $\sqrt{2}$ y demostrar que es un número irracional. Una forma para asegurar que efectivamente es un número irracional sigue el método de demostración indirecta por reducción al absurdo. Si $\sqrt{2}$ no es irracional, entonces debe ser un numero racional, por lo cual

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Con p y q, primos relativos, lo que quiere decir que el máximo común divisor entre p y q es 1, entonces la fracción $\frac{p}{q}$ es irreducible. De la igualdad anterior se tiene que:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2$$

De lo anterior se puede decir que p^2 es un número par y por ende, p también lo es (lo cual es un teorema que también se demuestra por reducción al absurdo). Si p es un numero par, esto quiere decir que:

$$p = 2k; k \in \mathbb{Z}$$

Si remplazamos esta igualdad en la ecuación $2q^2 = p^2$ se tiene que:

$$2q^2 = (2k)^2$$

$$q^2 = 2k^2$$

Por lo tanto q^2 es par y por ende q también lo es. Pero si tanto p como q son números pares, entonces la fracción $\frac{p}{q}$ es reducible, luego p y q no serian primos relativos, cosa que es absurdo puesto que contradice los supuestos. Así queda demostrado que $\sqrt{2}$ es irracional.

La demostración directa, indirecta y constructiva están enmarcadas en esquemas formalistas, por su estructura deductiva en un sistema teórico y reglas de inferencia. Esto ocasiona que las demostraciones sean complejas y que cuando una persona, en un entorno de enseñanza, quiera explicar o sustentar una demostración a un grupo de personas, estas no puedan entenderla bien por su nivel de rigurosidad.

Por esto, existe otro grupo de tipos de demostraciones, para que sean más sencillas de entender, como los son (Martínez, 2001):

- *Demostraciones informales:* Las cuales no son axiomatizadas y mucho más simples.
- *Demostraciones holográficas:* Elaboradas con software especializado que utiliza procesos aleatorios de validación de argumentos y se basa en comprobaciones experimentales.

1.3 Aspectos didácticos

En el siguiente apartado se encuentran las consideraciones didácticas, sobre la actividad demostrativa, que se creen pertinentes para el presente trabajo y los niveles de razonamiento en geometría que tienen los estudiantes en su proceso de aprendizaje. Esto nos ayuda a esbozar una estructura del modelo de enseñanza y aprendizaje de la demostración en geometría, además de seleccionar el proceso didáctico más acertado para realizar una demostración que utilice los ambientes de geometría dinámica como herramienta didáctica.

1.3.1 La demostración en la didáctica de la geometría

En primer lugar, se presentan algunas ideas de autores sobre el provecho y los beneficios que tiene la demostración en la didáctica de la geometría. En segundo lugar, se describen los procesos adecuados para la enseñanza de la actividad demostrativa, procedentes de autores que pertenecen a grupos de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Para De Villiers (1999), citado por Jones (2002), la demostración o prueba en geometría tiene distintas funciones en las cuales están la comunicación, el descubrimiento, el desafío intelectual, la comprobación o verificación y la sistematización entre otras. Además, Jones afirma que aprender a demostrar ayuda a que el estudiante tenga otra visión de las matemáticas, pasando de ser un campo algorítmico, mecánico y memorístico, lo que el autor llama “computacional”, a verla como un campo de estructuras que están relacionadas de forma intrínseca.

Jones (2002), argumenta la relevancia de la enseñanza de la geometría en función de la demostración, dado que la actividad demostrativa ayuda a desarrollar el pensamiento crítico, la intuición, la perspectiva, el razonamiento para la resolución de problemas, la argumentación lógica y el razonamiento deductivo.

Para Martínez (2011), las finalidades de la demostración matemática en la escuela residen en que los estudiantes tengan la capacidad de dar validez a sus propias ideas, identificar y aplicar razonamientos deductivos e inductivos, aplicar procesos de razonamiento espacial y apreciar la utilidad y fortaleza que tiene el razonamiento matemático ante cualquier situación fuera del aula y en función de la sociedad (p. 37).

Samper y Molina (2013), en sus investigaciones sobre la enseñanza de la demostración, en los ámbitos universitarios, aseguran que “la práctica de demostrar o actividad demostrativa involucra procesos de conjeturación y justificación, relacionados entre sí por el hecho de que se justifica lo que se conjetura” (p. 17). Entonces, cuando se tiene el objetivo de enseñar a demostrar, es importante que el estudiante pueda realizar una conjetura, ligada a otras heurísticas como la visualización y la exploración, que permiten que la persona identifique de varios casos, características invariantes que se pueden caracterizar mediante un lenguaje matemático. Ahora bien, la justificación de una conjetura también requiere de la visualización y la exploración, pero en dirección al desarrollo de un razonamiento deductivo enmarcado en un sistema teórico, para este caso, de la geometría.

- **Conjeturación**

El proceso de conjeturación, en la actividad demostrativa, consiste en crear una conjetura y comprobarla. Este proceso inicia con detectar propiedades de una situación geométrica y verificar todos los casos posibles para determinar cuáles propiedades se mantienen y cuáles no, con el fin de escoger y verificar aquellas propiedades que son invariantes (Samper y Molina, 2013).

Luego, se procede a elaborar una conjetura, que es un enunciado condicional general, en términos matemáticos, fundamentado en lo empírico, que todavía no es verídico y tiene un alto grado de verdad. Por último, se corrobora la conjetura que consiste en determinar si todas las condiciones mencionadas en los antecedentes de la conjetura son suficientes para deducir el consecuente y también analizar si la conjetura tiene todos los consecuentes posibles. Puesto que la conjetura es fundamentada en lo empírico, es decir, donde interviene la visualización y la verificación de las propiedades invariantes mediante la exploración, es importante hablar sobre lo que significa la visualización y exploración en geometría.

- **Visualización y exploración**

La visualización en geometría es un proceso sensorial y cognitivo que permite obtener información geométrica de una figura, identificando las características, propiedades y relaciones entre estas, de los distintos objetos geométricos presentes en la figura. Requiere establecer conexiones entre los saberes previos y las figuras por medio de la vista. También se considera parte de la visualización geométrica, reconocer e interpretar símbolos de la geometría tales como paralelismo($\parallel$), perpendicularidad ($\perp$), congruencia ($\cong$), etc. (Samper y Molina, 2013).

La exploración en la actividad demostrativa reside en hallar propiedades, relaciones o regularidades geométricas. De lo anterior, se puede considerar dos tipos de exploración según Samper y Molina (2013): empírica y teórica.

La *exploración empírica* se lleva a cabo en ambientes de geometría dinámica y se desarrolla mediante mediciones y construcciones sobre la figura o situación geométrica. Estas construcciones son de índole auxiliar y sirven para enriquecer la figura en función de realizar una mejor exploración comparando objetos geométricos o también para destacar casos hipotéticos en relación con la conjetura que se desea realizar. La *exploración teórica* reside en encontrar proposiciones que permitan comprobar las hipótesis o guiar la exploración empírica.

- **Justificación**

Con lo anterior, acabado el proceso de conjeturación mediante las distintas heurísticas anteriormente mencionadas, se procede a justificar la conjetura realizada. Por lo tanto, la *justificación* es la parte final de la actividad demostrativa. La justificación (en matemáticas) es un enlace de argumentos donde cada proposición demostrada se usa como premisa para sustentar la siguiente tesis. Además, en este proceso se distinguen tres momentos que consisten en seleccionar y organizar de forma deductiva los elementos adecuados para respaldar las hipótesis, que pueden ser de carácter teórico o empírico, y exponer la justificación. Al hablar de argumentos, se hace referencia a un conjunto de proposiciones llamadas premisas, que dan sustento a otra llamada conclusión (Samper y Molina, 2013).

1.3.2 Niveles del pensamiento geométrico de Van Hiele

El modelo de Van Hiele es una progresión de niveles que describen las características, del proceso del pensamiento geométrico, en el aprendizaje de la geometría. Inicia con el reconocimiento visual de los objetos geométricos por su apariencia física y finaliza con el reconocimiento de las relaciones entre propiedades geométricas, enmarcadas en un sistema axiomático (Crowley M.,1987).

Este modelo consta de 5 niveles, enumerados originalmente del 0 al 4 y se ha mostrado que no es posible alcanzar un nivel sin haber desarrollado las habilidades de pensamiento de los niveles anteriores. Según Shaughnessy y Burger, citados por Crowley M. (1987) los niveles son: Visualización, Análisis, Deducción informal, Deducción formal, Rigor.

- **Nivel 0: visualización**

La visualización (nivel 0), es el estadio donde la persona identifica los objetos geométricos por su apariencia física, sin reconocer las propiedades que tengan dichos objetos. En este nivel la persona puede hacer una réplica de una figura basándose en la forma de objetos reales conocidos, por ejemplo, un cuadrado lo asocia con la forma de una caratula de un CD, pero no por el hecho de que tenga todos sus ángulos rectos y que todos sus lados sean congruentes. El aprendizaje del uso del lenguaje geométrico también es propio de este nivel, por ejemplo, una persona que reconozca y use términos como $\overline{AB}$ para referirse al "segmento AB".

- **Nivel 1: Análisis**

Hace referencia a la habilidad de analizar los objetos geométricos y reconocerlos por sus propiedades. Por lo tanto, la persona está en disposición de hacer una categorización de las figuras geométricas por las propiedades encontradas. Sin embargo, a la persona aún le cuesta identificar relaciones entre propiedades de una figura y relaciones entre figuras mediante sus propiedades. Además, todavía no está en la capacidad de generar o entender una buena definición, o una definición formal, de un objeto geométrico. Un ejemplo de este nivel se da cuando la persona identifica la congruencia de las alturas respectivas a los lados congruentes de un triángulo isósceles; puede clasificar los triángulos que tienen esta propiedad y puede clasificar los triángulos isósceles aparte, pero no puede relacionar las propiedades de estos triángulos.

- **Nivel 2: Deducción informal**

En este momento la persona ya ha adquirido un pensamiento geométrico que le permite entender y formular definiciones formales, además de entender demostraciones un tanto rigurosas. También tiene la habilidad de establecer relaciones entre las propiedades de las figuras e incluso estructurar una jerarquía de estas, creando conjeturas y dando argumentos no tan formales. Pero la persona todavía no puede realizar una demostración puesto que todavía no ha descubierto la relevancia de un sistema axiomático y el pensamiento lógico, para elaborar argumentos de forma lógica estructurando las premisas.

- **Nivel 3: Deducción formal**

En este estadio la persona puede elaborar una demostración haciendo uso de un sistema teórico con definiciones, postulados y teoremas, mediante el razonamiento deductivo y considerando en cada argumento las premisas necesarias y suficientes para desarrollar una justificación.

- **Nivel 4: Rigor**

La persona ya tiene un gran bagaje en el mundo de las demostraciones y puede realizar demostraciones con alto rigor matemático. Por tanto, la persona entiende y maneja el sistema axiomático a tal punto de extender su razonamiento geométrico en otros sistemas como lo son los de las geometrías no euclidianas.

Para finalizar, este modelo argumenta que el avance entre nivel depende del docente y las actividades que él plantee. Por consiguiente, la metodología, el lenguaje y los objetos de estudio de cada actividad, serán los elementos más importantes para que la persona que las desarrolle pueda avanzar en cada nivel. También, existen fases de aprendizaje para avanzar de un nivel a otro, estas fases consisten en promover la investigación de los conocimientos previos de la persona, la orientación de las actividades para mostrar las características de cada nivel, la explicación de la exploración y la socialización de ideas sobre los argumentos empíricos, el diseño de caminos de justificación de propiedades y relaciones entre propiedades y la síntesis de lo aprendido mediante una clasificación de los objetos de estudio.

1.3.3 Ambientes de geometría dinámica

Un ambiente de geometría dinámica es aquel espacio donde se pretende enseñar y aprender geometría mediante el uso de un software geométrico, como Cabri Geómètre, GeoGebra o CaRmetal, entre otros. El uso de esos programas permite realizar construcciones geométricas con elementos básicos de la geometría, de tal forma que las construcciones pueden ser *robustas*, es decir, que se puede manipular y explorar una construcción sin afectar las propiedades geométricas de la figura. Esta exploración permite al estudiante abordar un sinfín de casos de una situación, proponer y validar una conjetura de la situación y a su vez ayuda a generar una demostración de la conjetura. (Sua, 2015).

Gutiérrez (2005), afirma que la ventaja de usar software en geometría sobre los distintos elementos estáticos y dinámicos tradicionales reside en que los estudiantes pueden realizar construcciones de manera más fácil y rápida, además de tener la posibilidad de hacer mediciones precisas y realizar transformaciones de las construcciones para obtener una gran variedad de ejemplos para analizar, sea cual sea la situación.

De lo anterior, se puede inferir que la herramienta más eficiente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la actividad demostrativa en geometría es el *arrastre,* dado que promueve el proceso de exploración que hace parte de la conjeturación. Dada una construcción geométrica, en geometría dinámica, el *arrastre* consiste en cambiar de posición los puntos de esta, solo los puntos que son independientes en la construcción son aquellos que se pueden arrastrar.

- **Tipos de arrastre de objetos**

Autores como Gutiérrez (2005) señalan que existen distintos tipos de arrastre, según las intenciones de la persona que está usando el programa, para construir la situación geométrica que se le presente. Los tipos de arrastre son: de prueba, errático, guiado y sobre un lugar geométrico.

Los *arrastres de prueba* son utilizados cuando se quiere verificar una construcción geométrica y saber si es robusta o no. Este arrastre tiene como fin probar si la construcción realizada conserva las propiedades matemáticas de la situación planteada.

Los *arrastres erráticos* se caracterizan porque no tienen un fin determinado, los elementos que se pueden arrastrar se mueven de tal forma que la persona o estudiante que lo esté realizando, busque invariantes sin tener alguna idea de cuáles encontrar ni dónde buscarlos. Este arrastre suele ser posterior al arrastre de prueba, dado que luego de comprobar si la construcción solicitada es robusta, el estudiante empieza a explorar su construcción sin saber qué relaciones puede encontrar.

Por otro lado, los *arrastres guiados* son aquellos que tienen la finalidad de que la figura que está siendo modificada represente un caso específico del problema planteado, este caso puede variar de tamaño, forma y posición.

El último de los arrastres mencionados es *sobre un lugar geométrico* y reside en el hecho de que al arrastrar un punto o elemento en un lugar específico, se espera identificar que algún otro objeto que dependa del objeto arrastrado también tenga un movimiento muy particular que cumpla con alguna propiedad o relación. Ese movimiento oculto del elemento dependiente marca una serie de puntos que dependen de la variedad de casos que se pueden observar, todos esos puntos especiales se llaman *lugar geométrico*.

- **Proceso ideal de la actividad demostrativa en ambientes de geometría dinámica**

Dada la especificación de los tipos de arrastre y la idea de que el arrastre contribuye al proceso de exploración y visualización en la actividad demostrativa, el proceso ideal para realizar actividad demostrativa con software de geometría dinámica inicia con la construcción en el programa de la situación, con las condiciones o premisas que se mencionen, luego se realizan algunos arrastres de elementos para identificar propiedades o relaciones entre propiedades constantes de los objetos geométricos involucrados; después de determinar estas invariantes se proponen (determinan) una o varias proposiciones que pueden ser ciertas a la luz de la exploración realizada, por lo cual se realzan nuevos arrastres para validar las proposiciones y generar una conjetura.

En esta parte de la actividad demostrativa, el papel de los sistemas de geometría dinámica pasa a un segundo plano, puesto que todo culmina con la demostración de la conjetura, bajo un razonamiento deductivo, convirtiéndola en un teorema (Gutiérrez, 2005).

- **Ventajas sobre el lápiz y el papel**

Durante la actividad demostrativa, el uso de sistemas de geometría dinámica muestra con mucho detalle los procesos de carácter empírico que lleva la persona en su aprendizaje, cosa que tiene ventaja sobre el uso del papel y lápiz, porque en este se requiere realizar varias representaciones para analizar unos cuantos casos y que son menores en comparación con los que se pueden representar (y con mayor celeridad) con geometría dinámica.

Cabe resaltar que los arrastres o la exploración en la actividad demostrativa, también muestran premisas o condiciones útiles para la elaboración futura de la demostración, esto se le conoce como “*unidad cognitiva de un teorema*” (Gutiérrez, 2005).

Es importante resaltar que el software de geometría dinámica a utilizar en este trabajo será GeoGebra, dado que es un programa de acceso libre y que cuenta con múltiples herramientas para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Aunque hoy en día la variedad de herramientas que ofrece GeoGebra permite trabajar en campos como la estadística y la geometría del espacio, para este caso interesa trabajar con las herramientas propias de la geometría plana.

1.3.4 Dificultades en la enseñanza

Promover en los estudiantes la actividad demostrativa en geometría, utilizando ambientes de geometría dinámica, también genera ciertas dificultades en la metodología de enseñanza y aprendizaje.

Según Mariotti (2000) y Vicent (2002), citados por Sua (2017), una de las dificultades radica en propiciar en los estudiantes la necesidad de demostrar, dado que las conjeturas obtenidas por un proceso de exploración son de un enfoque empírico, conlleva a un nivel de convencimiento en los escolares aun mayor que el que genera una demostración. Al verificar dicha conjetura, para ellos solo es suficiente comprobar algunos casos usando de nuevo la exploración.

Esta dificultad se suele presentar cuando la exploración de casos particulares se facilita, como es el caso del uso de la geometría dinámica. Estos ambientes permiten al estudiante verificar una conjetura con facilidad al explorar diferentes casos con las distintas herramientas que estos programas ofrecen. Para esto, es necesario que el docente presente la demostración en función de comprender por qué las conjeturas son verdaderas. Es importante mostrarles a los estudiantes que aun teniendo concluida la verificación de una conjetura, la demostración es un recurso conveniente para entender por qué es verdadera la conjetura (Gutiérrez, 2005).

Otra complicación, de este proceso de enseñanza, radica en el buen uso de la herramienta didáctica, en este caso el software de geometría dinámica. Cuando los estudiantes no están familiarizados con programas como GeoGebra, es necesario realizar un breve curso sobre algunas herramientas que se usarán en posteriores actividades, lo cual conlleva tiempo y aun así no se garantiza que los escolares sean expertos en el uso de la herramienta. Por esto, en las actividades de conjeturación que se puedan plantear, es necesario la intervención del docente para guiar el uso del software.

Por último, Freyre y Mántica (2017) indican que una dificultad en la enseñanza de la geometría está en la comprensión y uso del lenguaje, puesto que en geometría existen distintos símbolos que representan algunos objetos de la geometría y los estudiantes no están acostumbrados a identificar y usar dichos símbolos. Igualmente, dentro de los niveles de Van Hiele especificados anteriormente, el primer nivel consiste también en poder manejar satisfactoriamente este lenguaje.

2. Marco Metodológico

Luego de tener un referente teórico desde lo epistemológico, disciplinar y didáctico, en este capítulo se consignan las especificaciones del diseño de la estrategia didáctica, las herramientas o actividades utilizadas para el desarrollo del trabajo y cuáles fueron los criterios para su diseño. Además, se especificará la población estudiantil con la cual se probó la estrategia didáctica y qué secuencia de fundamentación o preparación tuvo para el desarrollo de los talleres.

2.1 Secuencia didáctica

La secuencia didáctica está basada en tres fases: Punto de partida, Presentación del sistema teórico y Aplicación de talleres sobre aproximación a la demostración en geometría con ayuda de geometría dinámica. Esta secuencia está pensada con el fin de desarrollar de forma satisfactoria los procesos involucrados en la actividad demostrativa según Samper y Molina (2013): conjeturación y justificación. Además, cada fase en su desarrollo está planteada con un orden de enseñanza y aprendizaje de la geometría en torno al desarrollo del pensamiento geométrico, según los niveles de Van Hiele (Crowley M.,1987).

Esta secuencia fue aplicada a un grupo de 27 estudiantes de grado séptimo del Colegio Cardenal Sancha con edades entre los 12 y 13 años. Se trabajó en bloques de clase (80 minutos) cada semana, durante 18 semanas, para el desarrollo de las fases anteriormente mencionadas. Para el trabajo con el software de geometría dinámica se contó con una sala de sistemas en la institución con el software instalado y cada estudiante podía trabajar personalmente con un computador. La gran mayoría de estudiantes, a pesar de que GeoGebra es un software libre y gratuito, no podían trabajar con él en sus casas, por lo que el trabajo de la secuencia didáctica se realizó en el aula únicamente. A continuación, se especifican las fases de la secuencia didáctica.

2.1.1 Punto de partida

Esta fase se desarrolla en cinco sesiones de clase determinadas en dos momentos: primero se aplica con los estudiantes un taller diagnóstico, para tener un referente de ellos a nivel conceptual y sobre el manejo del software, luego se desarrolla un cursillo de GeoGebra en el aula de informática.

- **Taller diagnóstico**

Para la secuencia didáctica se aplica el taller diagnóstico (ver Anexo 1) para identificar los conocimientos previos de los estudiantes en geometría, tales como el reconocimiento y definición de elementos básicos, clasificación de figuras geométricas, niveles de visualización, dominio del lenguaje geométrico, descripción de relaciones o propiedades de las figuras y niveles de argumentación. De esta forma se puede determinar los parámetros iniciales de la siguiente fase que es la presentación del sistema teórico.

El taller diagnóstico inicialmente se desarrolla con lápiz y papel, y posteriormente se desarrolla con apoyo del software de geometría dinámica GeoGebra. Al final se solicita a los estudiantes que escribieran las diferencias de desarrollar el taller usando los dos ambientes (lápiz y papel y GeoGebra) con el fin de determinar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en los dos ambientes y cómo son percibidos por los estudiantes.

El taller consta de 20 puntos distribuidos de la siguiente manera:

Puntos de definición: Son seis (puntos 1, 3, 5, 8, 11 y 14) y buscan que el estudiante pueda dar una definición adecuada de algunos elementos de la geometría como son segmento, rayo, ángulo, triángulo, paralelogramo y circunferencia. Con estos puntos se pretende determinar la capacidad de los estudiantes para dar una definición formal y acertada.

Puntos de visualización y clasificación: Son nueve (puntos 2, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13 y 15) y buscan que el estudiante inicialmente represente gráficamente los objetos que definió anteriormente. Luego, otros puntos tienen la finalidad de detallar si los estudiantes conocen y determinan gráficamente los tipos de ángulos, triángulos y cuadriláteros. De esta manera se pretende determinar el nivel de visualización que tienen los escolares sobre las representaciones que ellos hagan. El último punto consiste en analizar una situación geométrica y mediante la visualización determinar todos los objetos geométricos involucrados y nombrarlos usando el lenguaje geométrico previamente abordado.

Puntos de Jerarquización: Son tres (puntos 16, 17 y 18) y buscan que el estudiante comprenda y argumente algunas jerarquizaciones de los triángulos y cuadriláteros. Para esto se espera que utilicen las definiciones de los tipos de triángulos y las relacione, de tal forma que pueda realizar algunas conjeturas sobre esas relaciones con alguna explicación. El penúltimo punto pretende que el estudiante se dé cuenta que no hay una jerarquía entre dos tipos de cuadriláteros.

Puntos de Construcción y Argumentación: Son dos (puntos 19 y 20) y están relacionados con el primer teorema del primer libro de la obra de Euclides; *Elementos*. Estos puntos buscan que los estudiantes relacionen propiedades de elementos geométricos y que además utilicen elementos de un sistema teórico para construir un triángulo equilátero y que además justifiquen su construcción. Es decir, argumentar por qué la construcción que plantean da como resultado un triángulo equilátero. Cabe resaltar que estos puntos se enfocan en los primeros indicios de una demostración, no se espera que los estudiantes realicen una demostración, pero sí que argumenten sus procesos y razonamientos.

Dependiendo de los resultados obtenidos a nivel global con todo el curso, se puede determinar un punto de partida para la presentación del sistema teórico, que manejará el curso en la secuencia didáctica, con el fin de que todos los estudiantes y el docente manejen las mismas definiciones y postulados para que no existan inconsistencias conceptuales en la aplicación de los talleres de la última fase.

- **Cursillo de GeoGebra**

Se requiere preparar a los estudiantes previamente en cuanto al uso de la herramienta didáctica y la conceptualización de los saberes previos para la actividad demostrativa. Por lo tanto, como actividad inicial se realiza un cursillo básico para que los estudiantes supieran manejar de forma satisfactoria el software de geometría dinámica GeoGebra; esto es, las herramientas que este programa ofrece y enfatizar aquellas que se iban a utilizar en los talleres (dado que GeoGebra tiene una gran variedad de herramientas para geometría euclidiana, geometría analítica, estadística, cálculo y otras ramas de las matemáticas).

El cursillo consta de tres bloques de clase donde cada estudiante en su computador, bajo instrucción del docente, interactúa con las herramientas de GeoGebra. La barra de herramientas de GeoGebra se encuentra en la parte superior de la pantalla y consta de once listas de herramientas, cada lista tiene por defecto la primera herramienta de la lista, y para desplegar la lista, basta con dar clic en la flecha que se encuentra en la parte inferior derecha del recuadro. En la Figura 2.1 se ilustra la interfaz de GeoGebra con la cual interactúan los estudiantes y en la Figura 2.2 como se puede desplegar una lista de herramientas.

Figura 2.1: Interfaz de GeoGebra

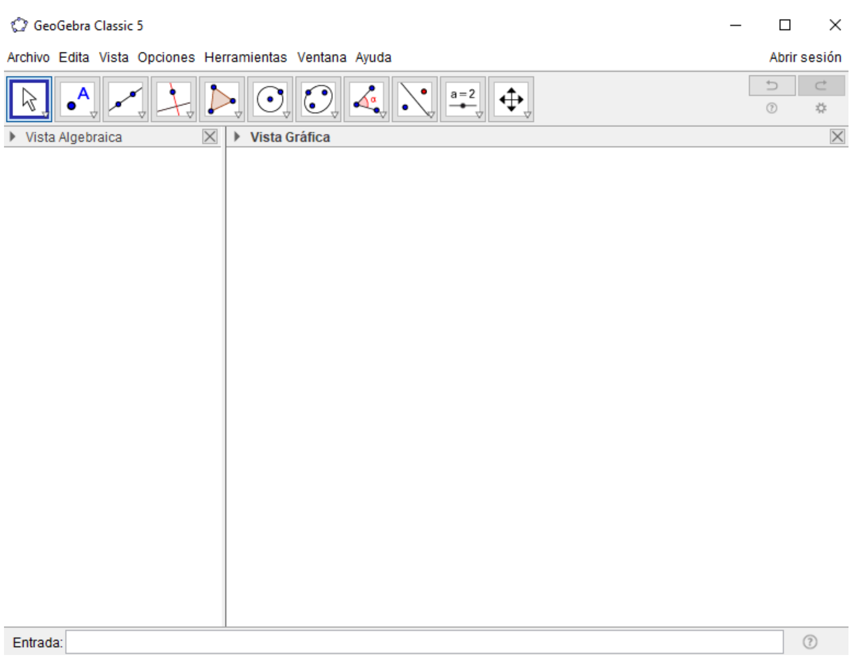


Figura 2.2: Ejemplo de lista de herramientas

En la Figura 2.2, se observa el despliegue de la octava lista con la herramienta ángulo. Si por ejemplo se quiere utilizar la herramienta *Área*, esta se referenciará como la herramienta que está en la cuarta posición. Dado lo anterior, las herramientas que se abordan en el cursillo son las que se enuncian en la Tabla 2.1:

Tabla 2.1: Herramientas de GeoGebra a utilizar

Lista donde se encuentra	Herramienta	Posición en la lista
Primera lista	Elige y mueve	Primera
Segunda lista	Punto	Primera
	Intersección	Cuarta
	Medio o Centro	Quinta
Tercera lista	Recta	Primera
	Segmento	Segunda
	Semirrecta	Cuarta
Cuarta lista	Perpendicular	Primera
	Paralela	Segunda
	Mediatriz	Tercera
	Bisectriz	Cuarta
Quinta lista	Polígono	Primera
Sexta lista	Circunferencia (centro, punto)	Primera
	Semicircunferencia	Quinta
Octava lista	Ángulo	Primera
	Relación	Séptima
Undécima lista	Desplaza Vista Gráfica	Primera

El objetivo del cursillo consiste en que los estudiantes identifiquen y manejen las herramientas descritas en la Tabla 2.1 y que pudieran manejar algunas opciones de la interfaz de GeoGebra, como cambiar el nombre a un punto o medida. Como actividad final, se plantea construir de forma robusta un rectángulo utilizando algunas de las herramientas abordadas, esta actividad posteriormente debe ser revisada por el docente usando arrastres de prueba y dando la instrucción de mejorar la construcción en caso de que el rectángulo no sea robusto.

2.1.2 Presentación del sistema teórico

Esta fase es la que mayor tiempo necesita, puesto que se busca en los bloques de clase la enseñanza y aprendizaje de todos los elementos teóricos necesarios para el desarrollo de la última fase de la unidad didáctica. En esta fase se adelantan algunas actividades de aula, para el desarrollo de habilidades propias de la actividad demostrativa, como la visualización, construcción de definiciones de objetos geométricos y jerarquización de triángulos y cuadriláteros.

- **Elementos del sistema teórico**

En la sección 1.2.1 se encuentran los elementos del sistema teórico que se trabajaran con los estudiantes. En distintas clases se abordan las definiciones presentadas en dicha sección y se les enfatiza a los escolares en el uso de la notación geométrica. En la Tabla 2.2 se encuentran las notaciones requeridas para la práctica:

Tabla 2.2: Notaciones geométricas del sistema teórico

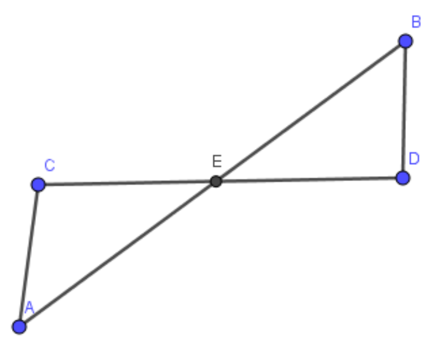
Elemento	Notación	Comentario
Segmento	$\overline{AB}$	$\overline{AB}$ o $\overline{BA}$ hacen referencia al mismo objeto
Rayo	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$ es diferente a $\overrightarrow{BA}$ porque en el primero, el punto de origen es el punto A, mientras que en el segundo es el punto B
Recta	$\overleftrightarrow{AB}$	$\overleftrightarrow{AB}$ o $\overleftrightarrow{BA}$ hacen referencia al mismo objeto
Intersección de rectas	$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{E\}$	El punto se escribe entre corchetes tal como una intersección de conjuntos
Paralelismo	$\parallel$	Ninguno
Perpendicularidad	$\perp$	Ninguno

Ángulo	$\angle ABC$	La letra del centro debe ser el vértice del ángulo, por lo tanto $\angle ABC$ o $\angle CBA$ hacen referencia al mismo objeto
Triángulo	ΔABC	El orden de los vértices del triángulo no es relevante
Congruencia	$\cong$	Se usa para especificar la propiedad entre dos objetos geométricos.
Igualdad	$=$	Se usa para decir que una medida es igual a otra

Los comentarios en la Tabla 2.2 son las aclaraciones que se tuvieron que hacer a los estudiantes durante esta fase. En cada definición abordada se muestran distintos ejemplos que cumplieran su respectiva notación.

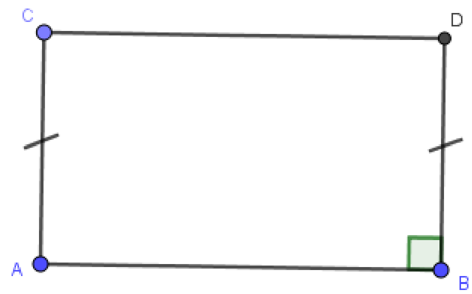
Para las actividades de visualización, se abordan ejercicios donde los estudiantes tienen que identificar objetos geométricos. Por ejemplo, para la Figura 2.3 se dan instrucciones a los escolares sobre escribir, con notación geométrica, los objetos geométricos que identifiquen tales como segmentos, ángulos y triángulos. Se espera que los estudiantes tengan respuestas como $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{AC}, \angle D, \angle BED, \angle ECA, \Delta ACE, \Delta DEB$ entre los posibles 18 elementos abordados en clase.

Figura 2.3: Ejemplo de ejercicios de visualización 1



Otra de las actividades para el desarrollo de la visualización, son identificar la información geométrica que tuviera cierta representación. Esta información hace referencia a relaciones entre objetos geométricos, como la perpendicularidad, paralelismo, congruencia o intersecciones. En la Figura 2.4 se muestra una representación de un ejemplo a utilizar en las clases; la instrucción era escribir las relaciones que identificaran usando notación geométrica.

Figura 2.4: Ejemplo de visualización 2



De la Figura 2.4 se espera que los estudiantes contesten que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ por el símbolo que hay en dichos segmentos. Así mismo, se espera que contesten que $\overline{AB} \perp \overline{BD}$ por el símbolo que hay entre esos segmentos. El objetivo de estas actividades es desarrollar el primer nivel de razonamiento de Van Hiele, el cual es visualización, de forma satisfactoria, lo que implica que el docente pueda lograr que los estudiantes tengan un buen manejo de la notación geométrica para nombrar objetos geométricos y algunas de sus relaciones.

Para tratar las definiciones de los tipos de triángulos y cuadriláteros, se realizan las actividades que consisten en mostrar un ejemplo de un tipo de triángulo o cuadrilátero. Los estudiantes deben identificar las propiedades y relaciones entre los objetos que conforman estos polígonos y generar una definición.

Una vez analizaba las definiciones escritas por los estudiantes, se procedía a darles un contraejemplo que cumple las características que el estudiante presenta, con el fin de mostrar que las definiciones escritas no eran correctas, si ese era el caso, para que así las reformularan y con el fin de inducirlos a formular una definición adecuada.

La finalidad de estas actividades radica en desarrollar en los estudiantes su razonamiento geométrico, dirigido a mejorar la capacidad de analizar las figuras geométricas y reconocerlas por sus propiedades. Esto le permitirá al estudiante categorizar correctamente los objetos geométricos y, posteriormente, formular y entender definiciones con un buen nivel aproximado de formalismo.

Por último, para esta segunda fase de la secuencia didáctica, luego de haber dado las definiciones de los tipos de triángulos y cuadriláteros, se les formula a los estudiantes preguntas que exigen relacionar las propiedades entre las figuras y su categorización, con el fin de que puedan "deducir" alguna jerarquización de figuras geométricas y las justifiquen.

Las preguntas que a abordar en clase fueron las siguientes: ¿Todo triángulo equilátero es un triángulo isósceles? ¿Todo triángulo isósceles es un triángulo equilátero? ¿Todo rombo es un cuadrado? ¿Todo cuadrado es un rombo? ¿Todo cuadrado es un rectángulo? ¿Todo rectángulo es un cuadrado?

La finalidad de formular estas preguntas es generar un diálogo con los estudiantes y escuchar sus respuestas con el objetivo de fortalecer la argumentación. Generar debates entre los estudiantes, que tengan una solución distinta a cada pregunta, es una oportuna herramienta para que ellos sientan la necesidad de buscar argumentos para defender sus respuestas y convencer a sus compañeros de clase.

El desarrollo de esta fase explora las distintas habilidades propias de la actividad demostrativa. Sin embargo, no se busca un avance profundo en cada una de estas habilidades, porque las actividades propuestas para esta fase son de total dependencia del docente y su papel de guía en la presentación del sistema teórico. Un aspecto relevante de esta fase es generar en los escolares una base sobre cómo razonar en cada estadio del razonamiento geométrico.

2.1.3 Talleres sobre aproximación a la demostración en geometría con ayuda de geometría dinámica

En esta última fase de la secuencia didáctica se aplican tres talleres secuenciales con los estudiantes. Cada taller está elaborado para ser desarrollado exclusivamente con GeoGebra, por lo cual todos los talleres son de carácter instructivo. Para este trabajo, los talleres están nombrados según la habilidad que se pretende desarrollar con el seguimiento de las actividades que contiene. Los talleres son los siguientes:

- **Taller de definiciones**

Este taller (ver Anexo 2) tiene como objetivo que los estudiantes reconozcan y definan apropiadamente el concepto de *ángulos par lineal*, *polígono convexo* y *polígono cóncavo*, mediante el uso de geometría dinámica y los conceptos teóricos abordados en la fase anterior. El taller se divide en dos partes:

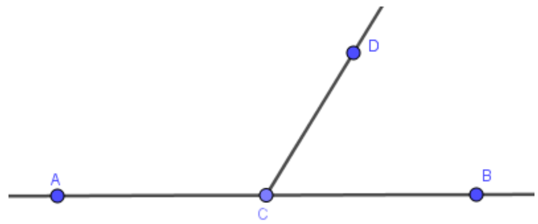
1. **Ángulos par lineal:** Consta de 13 instrucciones las cuales guían al estudiante a construir un par de ángulos $\angle ACD$ y $\angle BCD$ de tal manera que $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean rayos opuestos (que tienen el mismo punto de origen y son colineales), visualicen y escriban con notación geométrica los ángulos mencionados y los rayos que los conforman, y mediante la experimentación con arrastres erráticos y guiados puedan concluir la siguiente definición:

   Dados los rayos $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{CD}$, los ángulos $\angle ACD$ y $\angle BCD$ son ángulos par lineal si los rayos $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ son rayos opuestos y el punto D es externo a la $\overleftrightarrow{AB}$.

   Para llegar a esta definición, el taller tiene como finalidad que el estudiante en cada uno de los arrastres de los puntos perciba, mediante la visualización y el análisis, que la propiedad de los rayos opuestos se mantiene. Luego al explorar distintos casos con los arrastres, pueda concluir que es una propiedad que hace parte de la definición de ángulos par lineal.

   Además, las instrucciones también guían a los estudiantes a que determinen la posición del punto D para que los ángulos $\angle ACD$ y $\angle BCD$ existan, luego en su exploración con este punto, se espera que concluyan que el punto debe estar por fuera de la $\overleftrightarrow{AB}$ para que los ángulos mencionados existan. En la Figura 2.5 se puede detallar un ejemplo de la construcción esperada en GeoGebra.

Figura 2.5: Ángulos par lineal



Cabe aclarar que, para el buen desarrollo de esta parte del taller, el punto C debe estar entre los puntos A y B, por eso la primera instrucción hace explícito que el punto C se construya con esa condición.

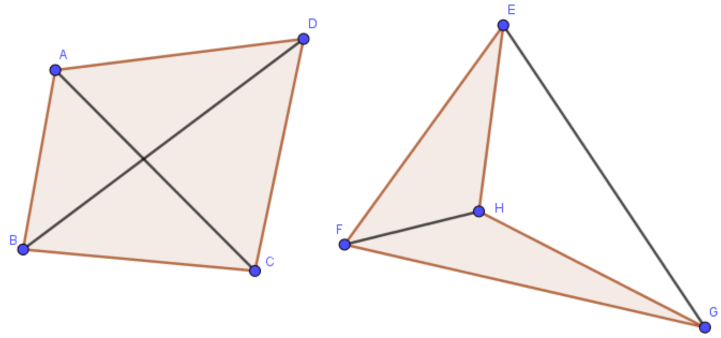
2. **Polígono convexo y polígono cóncavo:** Consta de 17 instrucciones las cuales guían al estudiante a construir dos cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square EFGH$, que serán los polígonos convexo y cóncavo respectivamente. En las instrucciones los estudiantes construirán las diagonales de estos cuadriláteros y moverán sus vértices con arrastres de prueba para que puedan llegar a las siguientes definiciones:

Un cuadrilátero $\square ABCD$ *es un polígono convexo si todas sus diagonales se encuentran en el interior.*

Un cuadrilátero $\square EFGH$ *es un polígono cóncavo si al menos una de sus diagonales está por fuera del polígono.*

En la Figura 2.6 se encuentra un ejemplo de una posible construcción esperada en GeoGebra.

Figura 2.6: Polígono convexo y cóncavo



Para llegar a estas definiciones, el taller tiene como primer objetivo que el estudiante realice el trabajo de exploración con el $\square ABCD$ y sus diagonales, de tal forma que al arrastrar sus vértices de forma condicionada[9], perciba mediante la visualización que en cualquier caso, todas sus diagonales se encuentran en su interior. El segundo objetivo es que el estudiante realice el trabajo de exploración con el $\square EFGH$ y perciba que al menos una diagonal del cuadrilátero está por fuera.

Como apoyo para el trabajo con los dos cuadriláteros en esta parte del taller, se utiliza el hecho de que en un polígono convexo todas sus diagonales se intersecan en el interior de este, mientras tanto en un polígono cóncavo, particularmente en los cuadriláteros, las diagonales no se intersecan.

Algunas de las instrucciones de las dos partes del taller son preguntas que los estudiantes respondieron en una hoja. Estas guían a que el escolar se de cuenta que la propiedad de contener todas sus diagonales es invariante en el caso de los polígonos convexos y que la propiedad de que al menos una diagonal esta por fuera del polígono es invariante en el caso de los polígonos cóncavos.

[9] Los arrastres condicionados que se dieron en las instrucciones debían garantizar que las diagonales se intersecaran en el interior del cuadrilátero.

Con este taller los estudiantes tienen un fuerte acercamiento a las actividades propias de la actividad demostrativa, como lo son la visualización, el análisis de figuras y la construcción de definiciones. Esto ayuda a que los estudiantes entiendan parte del proceso de conjeturación, el cual es el objetivo del trabajo con geometría dinámica, que consiste en explorar una situación geométrica, visualizar las representaciones determinando objetos geométricos y analizar propiedades invariantes.

- **Taller de conjeturación**

Este taller (ver Anexo 3) tiene como objetivo que los estudiantes formulen conjeturas sobre propiedades de ángulos, la suma de los ángulos de un triángulo, ángulos inscritos en una semicircunferencia y relaciones entre cuadriláteros, mediante el uso de geometría dinámica. Aunque los estudiantes no tengan los elementos teóricos suficientes para realizar o entender una demostración de las conjeturas que se abordaron en el taller, es importante que tengan una práctica sobre el proceso de conjeturar y deducir afirmaciones de la forma "Si P entonces Q". De igual forma que en el anterior taller, este es instructivo y de desarrollo exclusivo en GeoGebra. A continuación, se especifican las conjeturas abordadas en el taller.

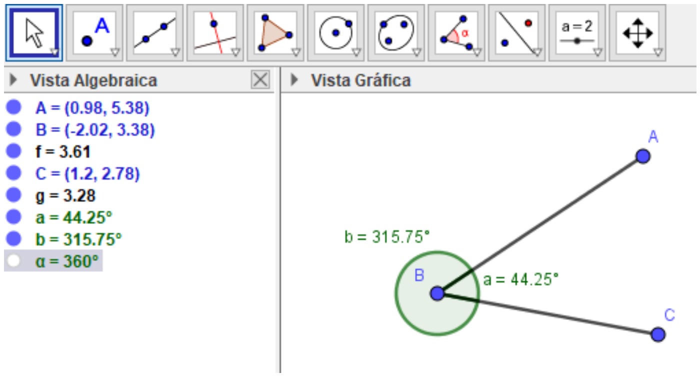
1. **Suma de ángulos:** Consta de 13 instrucciones que guía al estudiante a construir un ángulo $\angle ABC$ y calcular su medida interna y externa[10] con las herramientas de GeoGebra. Después se le instruye para que realice la suma de estas dos medidas y mediante arrastres guiados puedan llegar a la siguiente conjetura:

   Dado un $\angle ABC$, si se suman las medidas del ángulo interno y el ángulo externo, entonces la suma siempre será 360.

   En la Figura 2.7 se muestra un ejemplo de una posible construcción y la interfaz del estudiante.

[10] En GeoGebra se considera dos medidas de amplitud del mismo ángulo por ser accesible al trabajo en trigonometría, que requiere ángulos con medidas mayores a 180°. Es un concepto bastante diferente al de ángulo externo en geometría euclidiana, el cual deriva de cualquier triángulo y su teorema es reconocido (teorema 32 del primer libro de *Elementos* de Euclides).

Figura 2.7: Interfaz Conjetura 1



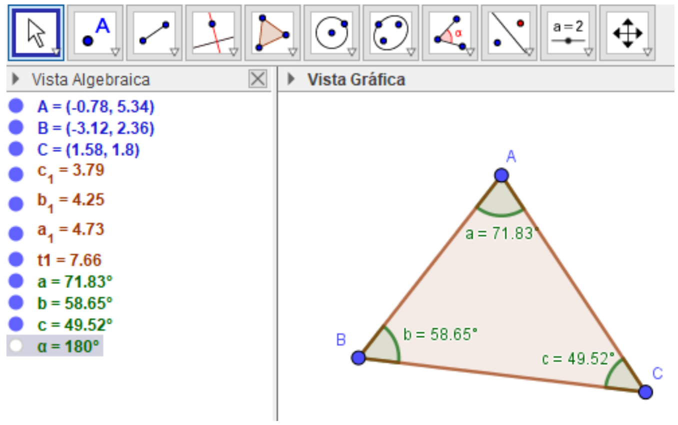
2. **Suma de ángulos de un triángulo:** Consta de 13 instrucciones que guían al estudiante para que construya un ΔABC, mida sus ángulos internos y realice la suma de las medidas, para luego mediante los arrastres solicitados pueda formular la siguiente conjetura:

Dado un ΔABC, si se suman las medidas de todos sus ángulos, entonces esta suma siempre será de 180°.

En la figura 2.8 se muestra un ejemplo de una posible construcción y la interfaz[11] del estudiante.

[11] Es posible que GeoGebra mida los ángulos externos durante la exploración con el arrastre de puntos, esta dificultad puede ser solventada al decirle a los estudiantes que luego de medir cada ángulo, con clic derecho en cada medida y en la pestaña básico elijan la opción de "Ángulo entre 0° y 180°"

Figura 2.8: Interfaz Conjetura 2

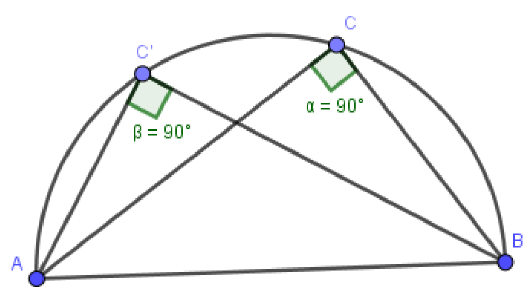


3. **Ángulo inscrito en una semicircunferencia y su diámetro:** Consta de 18 instrucciones que guían al estudiante para que construya una semicircunferencia, cuyo radio sea $\overline{AB}$, **y** el ángulo $\angle ACB$ donde C es un punto de la semicircunferencia. Después se lo instruye para que mida dicho ángulo y mediante arrastres de prueba y guiados pueda llegar a la siguiente conjetura:

   Dada una semicircunferencia con un $\overline{AB}$ como diámetro, Si el $\angle ACB$ tiene su vértice C en la semicircunferencia, entonces es un ángulo recto.

   En la Figura 2.9 se visualizan dos ejemplos de una posible construcción.

Figura 2.9: Conjetura 3



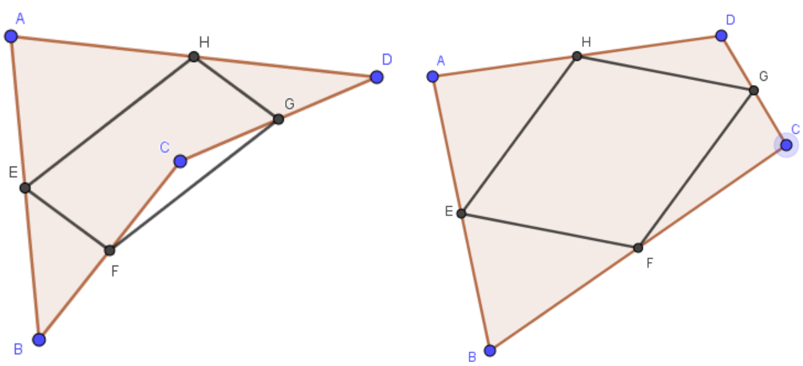
4. **Relación entre cuadriláteros:** Consta de 17 instrucciones que guían al estudiante para construir un cuadrilátero $\square ABCD$, los puntos medios de cada lado de este y luego construir el cuadrilátero $\square EFGH$ cuyos vértices son los puntos medios de $\square ABCD$. También se instruye al escolar a explorar por medio del arrastre, visualizar y analizar

las propiedades del cuadrilátero $\square EFGH$ para llegar a una conjetura[12], caso especial puesto que es un resultado conocido en la geometría como el *teorema de Varignon*:

Dado un cuadrilátero $\square ABCD$ cualquiera, si los puntos E, F, G y H son puntos medios de sus lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente, entonces el cuadrilátero $\square EFGH$ es un paralelogramo.

En la Figura 2.10 se muestran dos ejemplos de una posible construcción del taller

Figura 2.10: Conjetura 4



Se puede observar de la Figura 2.10 que independientemente de si el cuadrilátero es cóncavo o convexo, se tiene la conjetura. Cabe resaltar que, en esta última conjetura, las instrucciones también permiten que el estudiante pueda verificar su conjetura con el uso de la herramienta *Relación*. En caso de que no sea la conjetura esperada, la exploración le mostrará un error en su afirmación, para lo cual el estudiante deberá reformular su conjetura.

[12] Aunque esta conjetura esta direccionada a que el $\square EFGH$ es un paralelogramo, puede variar según la condiciones del $\square ABCD$. Por ejemplo, si el $\square ABCD$ es un cometa, entonces el $\square EFGH$ es un rectángulo, también puede suceder que si $\square ABCD$ es un rectángulo, entonces el $\square EFGH$ es un rombo. No obstante, la conjetura que da como consecuencia el paralelogramo es la más general.

> Verificar una conjetura es parte fundamental de la actividad demostrativa, puesto que al validar el enunciado este adquiere un alto nivel de veracidad para ser un teorema, es decir, para que sea demostrado. Hay que recordar que en ocasiones la validación de la conjetura se da de forma implícita en la exploración mediante el arrastre. Por lo tanto, algunos procesos de conjeturación dan como resultado una conjetura que ya está verificada y lista para ser demostrada.

El desarrollo de las instrucciones de todo el taller exige el manejo de más herramientas, por lo cual las instrucciones están explícitas para que el estudiante pueda manejar dichas herramientas de forma ordenada y pueda explorar su construcción sin ningún problema que pueda ofrecer el software de geometría dinámica.

Es importante para la formulación de las conjeturas que los estudiantes sepan cuales son las condiciones iniciales, para que puedan interpretarlo como la hipótesis y cuál es la propiedad invariante que se observó y analizó en los arrastres de los puntos libres, para que puedan interpretarla como la tesis.

- **Taller de demostraciones**

Este taller (Anexo 4) tiene como objetivo que los estudiantes formulen y comprueben una conjetura sobre propiedades de objetos geométricos, usando geometría dinámica, para luego demostrarla usando los elementos teóricos vistos en la fase anterior. Para este momento de la secuencia didáctica se puede decir que los estudiantes trabajan todo el proceso de la actividad demostrativa, se pretende abordar dos conjeturas con los escolares cuya demostración fuera corta y accesible para el nivel escolar de ellos.

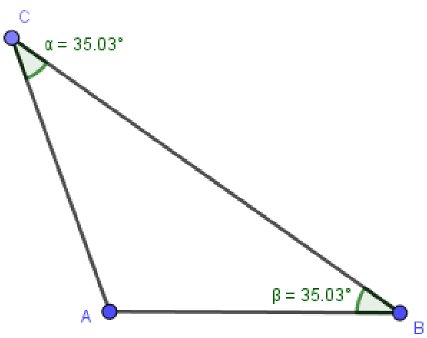
Primero los estudiantes hacen el trabajo de conjeturación con geometría dinámica con las siguientes conjeturas:

1. **Teorema del triángulo isósceles:** Consta de 14 instrucciones que guían al estudiante para construir un triángulo ΔABC isósceles con los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ congruentes y luego medir los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ACB$. Después mediante la exploración con arrastres de prueba y guiados, la visualización y análisis de la construcción, se pretende que los escolares formulen la siguiente conjetura:

Si un ΔABC es triángulo isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, entonces $\angle ABC \cong \angle ACB$.

En la Figura 2.11 se encuentra un ejemplo de una posible construcción.

Figura 2.11: Construcción demostración 1



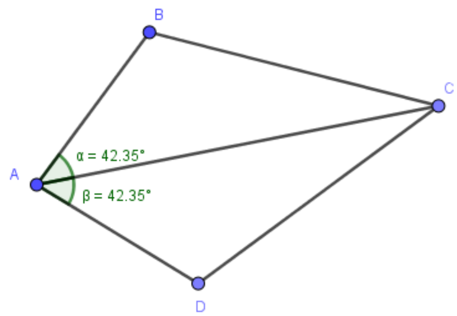
2. **Teorema cometa – bisectriz:** Consta de 18 instrucciones que guían al estudiante a construir un $\square ABCD$ tal que los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ sean congruentes, luego construir la diagonal del cuadrilátero $\overline{AC}$ y medir los ángulos $\angle BAC$ y $\angle DAC$. Después mediante la exploración con arrastres de prueba y guiados, la visualización y el análisis de la construcción hecha, se pretende que los escolares formulen y comprueben la siguiente conjetura:

Si un $\square ABCD$ es cometa con $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{CD}$, entonces su diagonal $\overline{AC}$ es bisectriz del $\angle BAD$.

En la Figura 2.12 se muestra un ejemplo de una posible construcción[13].

[13] Es claro que la construcción también se puede concluir que el $\overline{AC}$ es bisectriz del $\angle BCD$, pero para este taller solamente se plantea la conclusión para el $\angle BCD$.

Figura 2.12: Construcción demostración 2



Los arrastres solicitados en las instrucciones de las dos conjeturas del taller permiten que el estudiante compruebe su conjetura, dado que es indispensable que las construcciones tanto del triángulo isósceles como del cometa sean robustas. Para garantizar esto, el lector docente puede escoger entre guiar los estudiantes o proporcionar un archivo de GeoGebra con cada construcción hecha para que la construcción efectivamente sea robusta. En las dos partes de este taller la última instrucción consiste en demostrar la conjetura formulada.

- **Recomendaciones**

Durante la aplicación de todos los tres talleres en esta última fase, las definiciones, conjeturas y demostraciones que realizaron los estudiantes pueden ser aproximadas a las que se escribieron en este capítulo. Por lo tanto, en el análisis de las respuestas se determinó que tan aproximadas son las definiciones, conjeturas y demostraciones frente a lo esperado de los estudiantes.

Una cuestión de orden didáctico sobre el papel del docente en la aplicación de los talleres, de esta última fase, es que el docente pueda aplicar los talleres de tal forma que todos los estudiantes realicen la misma instrucción al mismo tiempo, para que luego puedan compartir sus experiencias mediante una socialización corta y así se pueda avanzar a la siguiente instrucción. Esto facilitará el trabajo de los talleres en el aula y el tiempo será más provechoso para explorar todas las actividades anteriormente descritas.

3. Análisis de los resultados

En este capítulo se presentan los resultados de la aplicación de la secuencia didáctica y su respectivo análisis, pasando por cada fase y los talleres aplicados con los estudiantes. Cada análisis estará en función de las finalidades propuestas en el capítulo anterior.

3.1 Primera fase: Punto de partida

3.1.1 Taller Diagnóstico

Los resultados obtenidos en la aplicación del taller diagnóstico se categorizaron de acuerdo con las distribuciones especificadas en el capítulo 2, es decir, se determinó el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes de acuerdo con las habilidades propias del aprendizaje geométrico, que ellos evidenciaron en sus respuestas. Estas habilidades son visualización, definición de objetos geométricos, jerarquización y argumentación.

Los criterios para determinar esta categorización estuvieron de acuerdo con las respuestas acertadas de los estudiantes, en cada grupo de preguntas. Por ejemplo, si un estudiante lograba responder acertadamente, al menos un punto del apartado de definiciones de objetos geométricos, se consideraba que tenía la habilidad de definir objetos geométricos adecuadamente. Como taller diagnóstico no se pretendió ser tan exigente en la cantidad de puntos que debían ser respondidos adecuadamente.

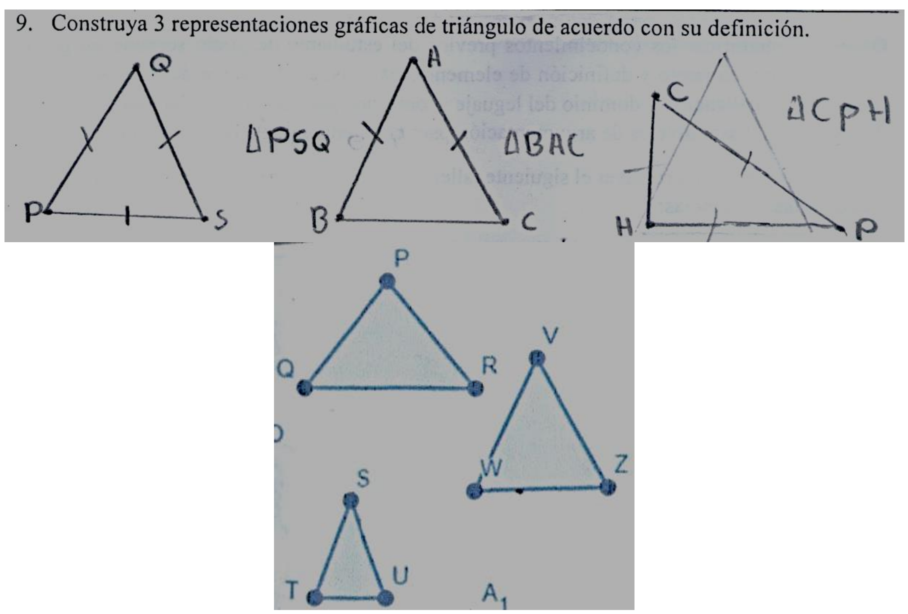
Dado que las categorías de habilidades siguen un cierto orden ascendente desde la visualización hasta la argumentación, no se encontró estudiantes que hayan respondido acertadamente en una habilidad pero no en una inferior. Por ejemplo, se identificó de manera general en los 27 estudiantes que los que si lograban responder adecuadamente en el apartado de jerarquización, también lo hicieron en el apartado de definiciones y de visualización.

Sin embargo, también se categorizaron las respuestas erróneas y se identificó por qué los estudiantes no lograron avanzar hasta cierta habilidad o la última que era la de argumentación. Más adelante en el análisis de los resultados de cada habilidad se aclara algunas dificultades encontradas.

- **Habilidad de visualización**

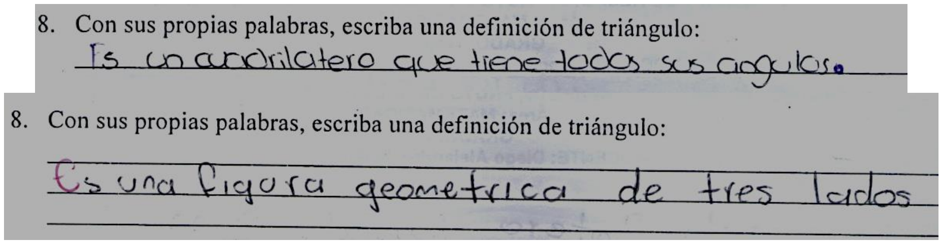
De las respuestas obtenidas se encontraron que 15 de 27 estudiantes únicamente manejan la habilidad de la visualización, por lo cual se evidenció que se encuentran en un nivel de razonamiento geométrico básico. Estos estudiantes pudieron representar gráficamente algunos objetos geométricos como se ve en la Figura 3.1, dichas representaciones las realizaron tanto con lápiz y papel como con GeoGebra.

Figura 3.1: Respuesta de visualización 1



En la Figura 3.1 se puede observar que los estudiantes reconocen visualmente un triángulo por su apariencia, pero no por sus propiedades. Esto se relaciona con la afirmación anterior de que estos 15 estudiantes no lograron mostrar alguna habilidad más. Para esto se observa en la Figura 3.2 la definición de triángulo que algunos de estos estudiantes escribieron en el taller diagnóstico.

Figura 3.2: Respuestas visualización 2

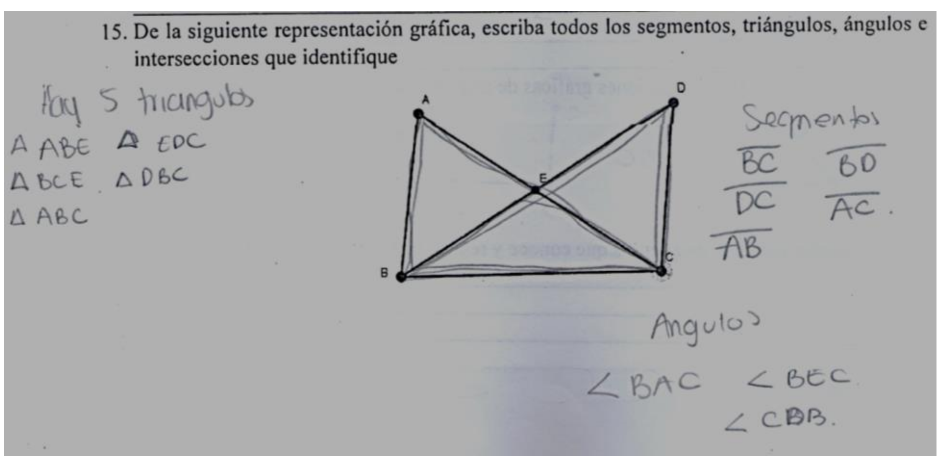

8. Con sus propias palabras, escriba una definición de triángulo:
Es un cuadrilatero que tiene todos sus angulos.

8. Con sus propias palabras, escriba una definición de triángulo:
Es una figura geometrica de tres lados

De la Figura 3.2, en la primera respuesta se identifica que el estudiante no relaciona la propiedad de que un triángulo es un polígono de tres lados y lo confunde con el concepto de cuadrilátero, que es un polígono de cuatro lados. En la siguiente respuesta, el estudiante no contempla la propiedad del triángulo que está inmersa en todo polígono, la cual es que son figuras cerradas. Por lo tanto, se puede pensar en una figura que cumpla esa definición y que esté conformada por tres segmentos intersecados en sus extremos (colineales o no) y que dos extremos no serán puntos de intersección de los segmentos.

Sin embargo, 4 de estos 15 estudiantes muestran que su nivel de visualización está por encima de los demás al usar adecuadamente la notación geométrica para nombrar objetos geométricos. En la Figura 3.3 se observa una de las respuestas que corroboran lo anterior.

Figura 3.3: Respuesta visualización 3


15. De la siguiente representación gráfica, escriba todos los segmentos, triángulos, ángulos e intersecciones que identifique

Hay 5 triangulos
Δ ABE Δ EDC
Δ BCE Δ DBC
Δ ABC

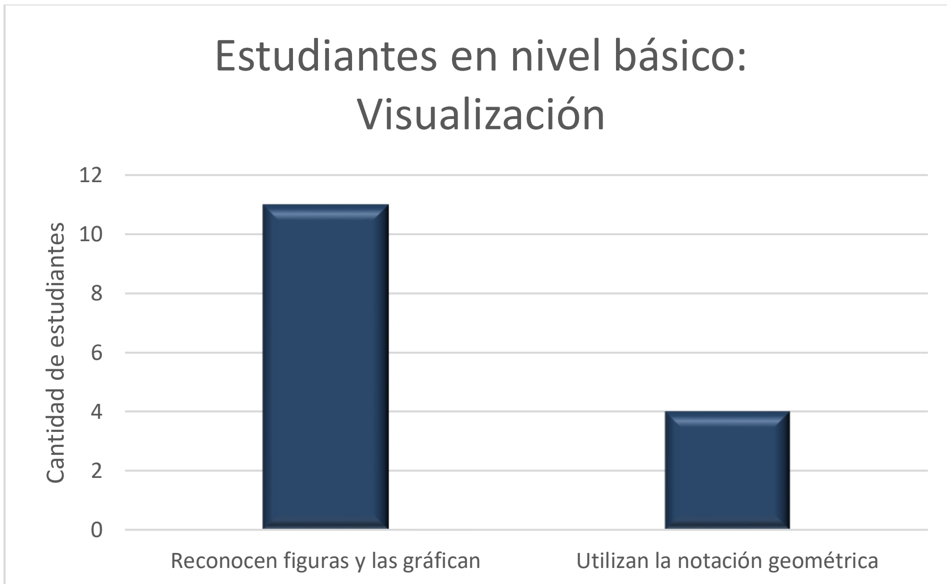
Segmentos
$\overline{BC}$ $\overline{BD}$
$\overline{DC}$ $\overline{AC}$.
$\overline{AB}$

Angulos
∠BAC ∠BEC
∠CBB.

Aunque manejan la notación geométrica, en la Figura 3.3 se puede observar que falta nombrar otros objetos, este error se percibe como un nivel de visualización que todavía falta ser desarrollado para ser satisfactorio y que el estudiante esté preparado para avanzar al siguiente nivel de razonamiento, identificando propiedades de figuras y tenerlas en cuenta para escribir definiciones adecuadas.

En la Figura 3.4 se muestra un gráfico consolidando los resultados anteriores.

Figura 3.4: Gráfica sobre respuestas: Visualización



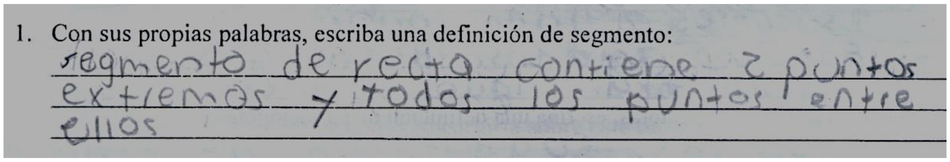
Todo lo anterior de esta sección permite concluir que la gran mayoría de estudiantes del curso al cual se le aplicó la secuencia didáctica inició este proceso con un nivel de razonamiento geométrico que se ubica en la visualización. Pero esta heurística no está del todo desarrollada en los escolares, dado que unos pocos estudiantes dominan la notación geométrica y aún les falta identificar todas las propiedades que tenga una situación geométrica.

- **Habilidad de definir objetos geométricos**

Luego de aplicar el taller diagnóstico, se encontró que 6 de 27 estudiantes logran definir satisfactoriamente los objetos propuestos como segmento, rayo, ángulo, triángulo y paralelogramo. Cabe aclarar que, en esta categoría, los seis estudiantes alcanzaron de forma satisfactoria el nivel de visualización y dan evidencia de dominio de esta habilidad en su razonamiento geométrico.

En la Figura 3.5 se observa una respuesta obtenida sobre la definición de segmento:

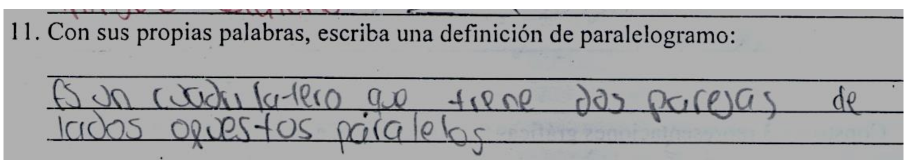
Figura 3.5: Respuesta definiciones 1


1. Con sus propias palabras, escriba una definición de segmento:
segmento de recta contiene 2 puntos extremos y todos los puntos entre ellos

En esta respuesta el estudiante muestra un conocimiento de las propiedades del segmento, las cuales involucran los puntos extremos y, de alguna manera, con la palabra “todos”, la cantidad infinita de puntos que existen entre esos puntos extremos. Al no considerar alguna de estas dos propiedades se puede pensar que un segmento es una recta, o que solamente son los dos puntos que llaman extremos. Dado esto, se considera que la definición otorgada por el estudiante es adecuada.

Otra de las respuestas encontradas de estos seis estudiantes, es la definición de paralelogramo, que se puede visualizar en la Figura 3.6.

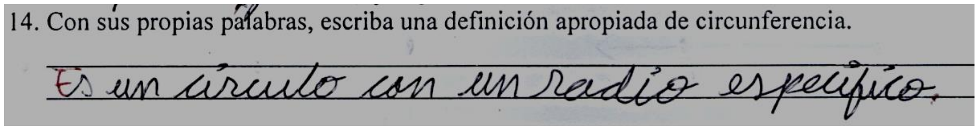
Figura 3.6: Respuesta definiciones 2


11. Con sus propias palabras, escriba una definición de paralelogramo:
Es un cuadrilatero que tiene dos parejas de lados opuestos paralelos

Se puede evidenciar en la anterior imagen que el estudiante tuvo en cuenta las características mínimas para definir un paralelogramo, dado que mencionó el hecho de que es un polígono de cuatro lados al decir que es un cuadrilátero, de lo contrario se hubiera podido dar un ejemplo de cuatro segmentos que forman una figura abierta. Además, resalta la característica única de los paralelogramos, la cual es el paralelismo en las dos parejas de lados opuestos, dado que, al solo considerar un par de lados opuestos paralelos, se puede representar un trapecio, el cual cumple esa condición pero no sería un paralelogramo. Por lo tanto, se considera que esta definición está muy bien construida.

En tres de las respuestas se encuentra una dificultad para definir circunferencia, en la Figura 3.7 se ilustra un ejemplo.

Figura 3.7: Respuesta definiciones 3


14. Con sús propias palabras, escriba una definición apropiada de circunferencia.

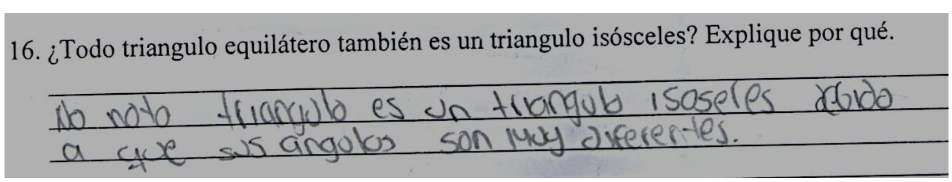
Es un circulo con un radio especifico.

El error evidenciado en la figura anterior permite suponer que el estudiante confunde las nociones de círculo y circunferencia, que aunque diferentes están íntimamente relacionadas, sin duda. Dado lo anterior, parece que el estudiante hiciera una autorreferencia en la definición de circunferencia usando la palabra circulo, es decir, que para definir un objeto geométrico está usando el objeto que está definiendo.

Por lo tanto es importante aclarar a los estudiantes la diferencia entre circulo y circunferencia, la cual es que la circunferencia es un conjunto de puntos que cumplen una condición específica: la equidistancia a un mismo punto llamado centro (esa distancia es la que se define como radio de la circunferencia); mientras que un círculo es un conjunto de puntos que determina una superficie, exactamente la que está por dentro de la circunferencia.

Por otro lado, estos seis estudiantes no fueron clasificados en la siguiente categoría de jerarquización de figuras, puesto que a pesar de que puedan definir bien algunos objetos geométricos, no relacionan las propiedades que hay en las definiciones para convencerse, o argumentar afirmaciones, como que todo triángulo equilátero es triángulo isósceles. La Figura 3.8 evidencia lo anterior dicho.

Figura 3.8: Respuesta definiciones 4

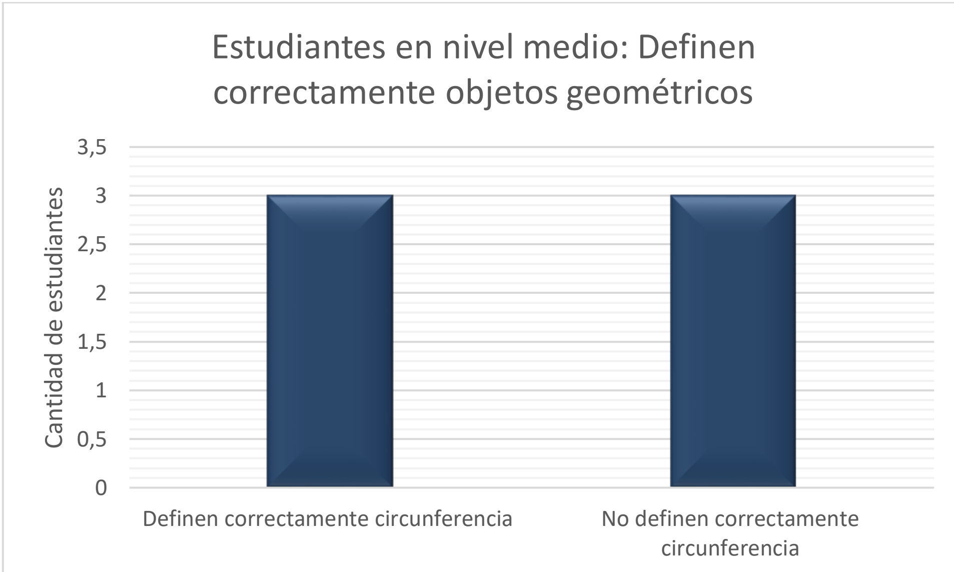

16. ¿Todo triangulo equilátero también es un triangulo isósceles? Explique por qué.

No todo triangulo es un triangulo isoseles debido a que sus angulos son muy diferentes.

Se puede observar en la Figura 3.8 que el estudiante argumentó su respuesta por una propiedad de ángulos entre triángulos, que no existe efectivamente. Pero las definiciones de triángulos involucradas no relacionan ángulos, pero sí relaciona la congruencia entre los lados de los triángulos involucrados.

En la Figura 3.9 se muestra un gráfico consolidando las respuestas de esta categoría.

Figura 3.9: Gráfica sobre respuestas: Definiciones



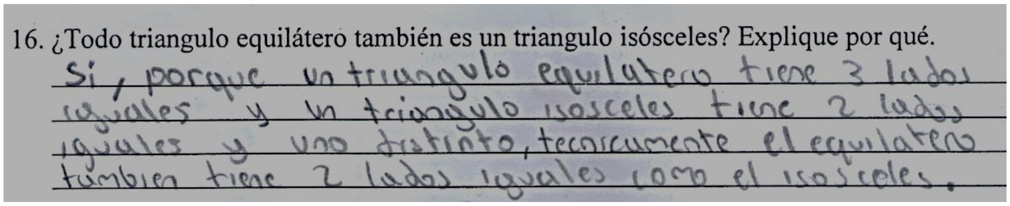
Dadas las respuestas analizadas, aunque fueron pocos los estudiantes que lograron definir correctamente los objetos geométricos preguntados en el taller diagnóstico, se evidenció dificultades en la última definición solicitada, la cual era la de circunferencia. Esto generó como resultado, para la siguiente fase de la socialización del sistema teórico, empezar desde la definición de segmento en adelante, y cuando se abordó la definición de circunferencia, se tuvo que hacer una aclaración sobre la diferencia entre círculo y circunferencia.

- **Habilidad de jerarquizar figuras geométricas**

Tras haber implementado el taller diagnóstico, se encontró que 4 de 27 estudiantes respondieron de forma acertada los puntos asociados a la jerarquización de triángulos y cuadriláteros. Además, al clasificar estos estudiantes en este nivel de razonamiento, con la habilidad de comprender una jerarquización, se determinó que alcanzaron los niveles anteriores porque sus respuestas en los puntos correspondientes, para visualización y definiciones, fueron acertadas.

En la Figura 3.10 se muestra la respuesta de uno de los cuatro estudiantes, del primer punto de la sección de jerarquización.

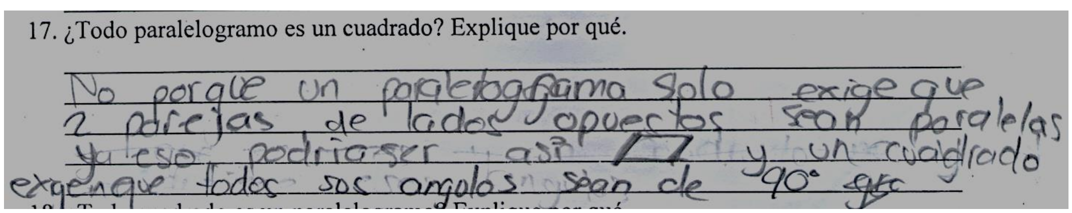
Figura 3.10: Respuesta jerarquización 1


16. ¿Todo triangulo equilátero también es un triangulo isósceles? Explique por qué.
Si, porque un triangulo equilatero tiene 3 lados iguales y un triangulo isosceles tiene 2 lados iguales y uno distinto, tecnicamente el equilatero tambien tiene 2 lados iguales como el isosceles.

Se puede observar en la Figura 3.10 que la estudiante relacionó las definiciones de triángulo equilátero y triángulo isósceles para concluir la afirmación. Hay que reconocer que la definición de triángulo isósceles está alterada al decir que tiene, como si fuera obligatorio, un lado que no es congruente con los otros dos. Es por esto el uso posterior de la palabra "técnicamente" de la estudiante en su respuesta. Sin embargo, al final ella reconoce que el triángulo equilátero también tiene dos lados congruentes y cumple los requerimientos mínimos para ser triángulo isósceles.

Para el punto 17, una de las respuestas de las estudiantes fue la que se puede ver en la Figura 3.11.

Figura 3.11: Respuesta jerarquización 2


17. ¿Todo paralelogramo es un cuadrado? Explique por qué.
No porque un paralelogramo solo exige que 2 parejas de lados opuestos sean paralelas ya eso podria ser así y un cuadrado exige que todos sus angulos sean de 90°

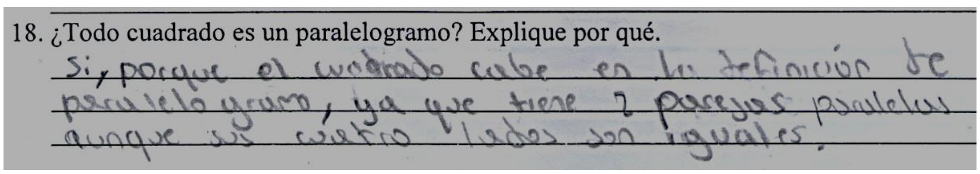
En esta respuesta se puede evidenciar que la estudiante comparó las propiedades de las definiciones de paralelogramo y cuadrado, para explicar que la definición de paralelogramo no detalla propiedades sobre los ángulos del cuadrilátero, mientras que en la definición de cuadrado sí se enuncia la propiedad de que sus ángulos midan 90°, es decir, sean ángulos rectos.

A pesar del espacio usado para la representación gráfica, la estudiante brindó un *contraejemplo* de la afirmación preguntada en el punto 17 del taller diagnóstico; se puede considerar esta respuesta como una demostración constructiva al buscar un elemento del conjunto de todos los paralelogramos que no cumple las condiciones para ser un cuadrado.

De esta forma, se evidencia que la demostración ayudó a que la estudiante se haya convencido de la falsedad de la afirmación y también está en la disposición de convencer a otros usando el mismo contra ejemplo.

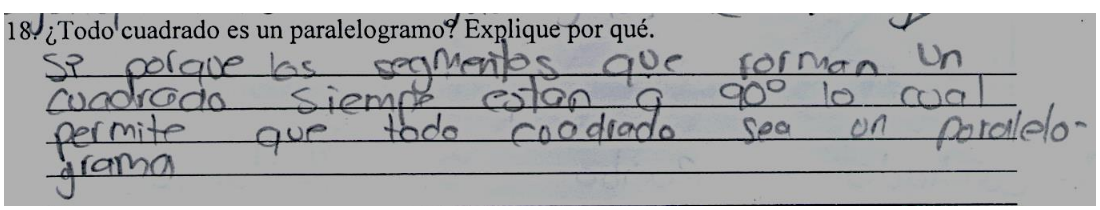
En las respuestas presentadas por cuatro estudiantes, se encontró una dificultad para argumentar la jerarquía presentada en el punto 18. En la Figura 3.12 se muestra un ejemplo de estas respuestas.

Figura 3.12: Respuesta jerarquización 3


18. ¿Todo cuadrado es un paralelogramo? Explique por qué.
Si, porque el cuadrado cabe en la definición de paralelogramo, ya que tiene 2 parejas paralelas aunque sus cuatro lados son iguales.

Como se observa en la figura anterior, la dificultad radica en que para explicar la afirmación el estudiante cambia la definición de cuadrado. Él aseguró, por definición, que un cuadrado tiene dos parejas de lados opuestos paralelos y por lo tanto esta propiedad permite garantizar que también es un paralelogramo. Sin embargo, de alguna forma en su razonamiento la estudiante reconoce una jerarquización, pero no la pueden argumentar de forma satisfactoria.

Figura 3.13: Respuesta jerarquización 4


18. ¿Todo cuadrado es un paralelogramo? Explique por qué.
Sí porque los segmentos que forman un cuadrado siempre estan a 90° lo cual permite que todo cuadrado sea un paralelo-grama

Para la respuesta de la Figura 3.13 es posible que la estudiante, dado que se basó en la propiedad de los cuadrados de que todos sus ángulos son rectos, haya pensado la jerarquía usando algún teorema que relacione segmentos perpendiculares y segmentos paralelos en un cuadrilátero. Sin embargo, no hay evidencia de cuál fue la verdadera razón para pasar de los ángulos rectos de un cuadrado a las propiedades del paralelogramo, según su definición.

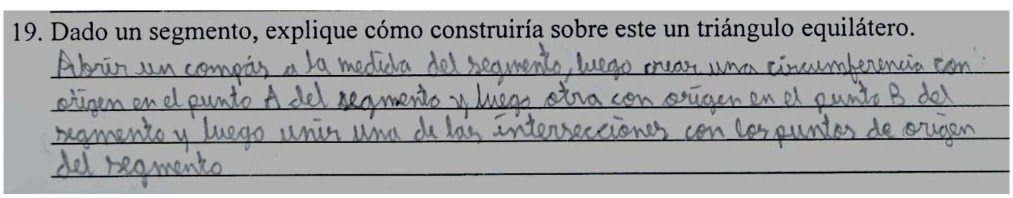
Del análisis de las respuestas anteriores se puede inferir que son muy pocos los estudiantes que logran llegar a este nivel. Además, se debe aclarar con los estudiantes, para la siguiente fase de la secuencia didáctica, la diferencia de decir que dos objetos son iguales o son congruentes, con el fin de mejorar la calidad de expresión de ideas que tengan los escolares y también que tengan un mejor dominio del concepto de congruencia. Por último, para el análisis de esta categoría, aunque los argumentos no son los mejores, se percibe razonamiento deductivo en las respuestas de los estudiantes, por lo cual se puede inferir que estos están próximos a estar en el siguiente nivel de razonamiento, el cual busca la buena argumentación.

- **Habilidad de argumentar**

En esta última categoría se encontró que apenas 2 de 27 estudiantes pudieron argumentar satisfactoriamente sus razonamientos, en las respuestas de los dos últimos puntos del taller diagnóstico. Al analizar sus respuestas, de todo el taller, se encontró que estas dos estudiantes logran tener habilidades en el razonamiento geométrico como la visualización, definir adecuadamente figuras geométricas y jerarquizar triángulos y cuadriláteros.

En la Figura 3.14 se muestra una de las respuestas de las estudiantes del punto 19.

Figura 3.14: Respuesta argumentación 1



19. Dado un segmento, explique cómo construiría sobre este un triángulo equilátero.

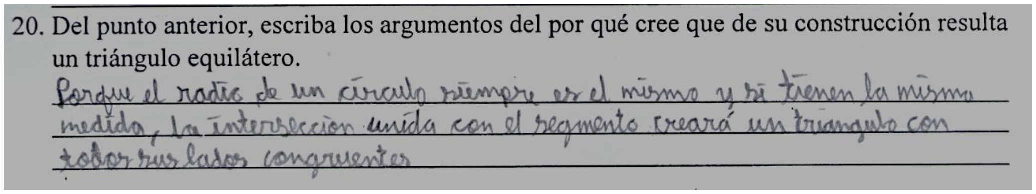
Abrir un compás a la medida del segmento, luego crear una circunferencia con orígen en el punto A del segmento y luego otra con orígen en el punto B del segmento y luego unir una de las intersecciones con los puntos de orígen del segmento

Como se puede observar en la Figura 3.14, esta respuesta coincide con la construcción realizada por Euclides en el teorema 1 del primer libro de *Elementos*. La estudiante especificó bien los puntos que son centro de las circunferencias, los cuales son los extremos del segmento dado, y también tuvo en cuenta las intersecciones de las circunferencias para generar el tercer vértice del triángulo equilátero.

Cabe aclarar que la estudiante utiliza la palabra "unir" para referirse a la construcción de segmentos entre los vértices del triángulo. Por lo tanto, es importante que, para la siguiente fase, se aclare con los estudiantes la diferencia entre unir y construir. Dado que unir hace referencia a mover objetos (en este caso puntos) y para estas construcciones no se considera la posibilidad de mover los elementos.

En la Figura 3.15 se muestra la respuesta correspondiente a la construcción descrita anteriormente

Figura 3.15: Respuesta argumentación 2



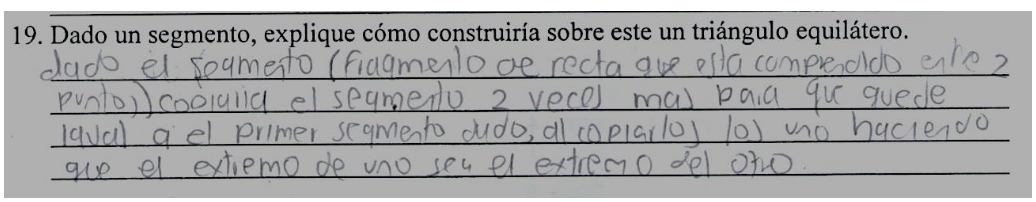
20. Del punto anterior, escriba los argumentos del por qué cree que de su construcción resulta un triángulo equilátero.

Porque el radio de un círculo siempre es el mismo y si tienen la misma medida, la intersección unida con el segmento creará un triángulo con todos sus lados congruentes

En esta respuesta se puede resaltar que la estudiante argumenta su construcción mediante el uso de las propiedades de la circunferencia, la cual recae en que todos sus radios son congruentes. Es un buen argumento dado que se asemeja algunos pasos de la demostración hecha por Euclides, para la construcción de triángulo equilátero. Sin embargo, no queda justificado el hecho de que los tres segmentos sen congruentes, solamente se justifica que los dos segmentos construidos son congruentes.

Respecto a las respuestas de la otra estudiante, su construcción está basada en copiar segmentos y construirlos de tal manera que los segmentos, incluido el segmento dado, se intersequen en sus extremos. En la Figura 3.16 se muestra dicha respuesta.

Figura 3.16: Respuesta argumentación 3

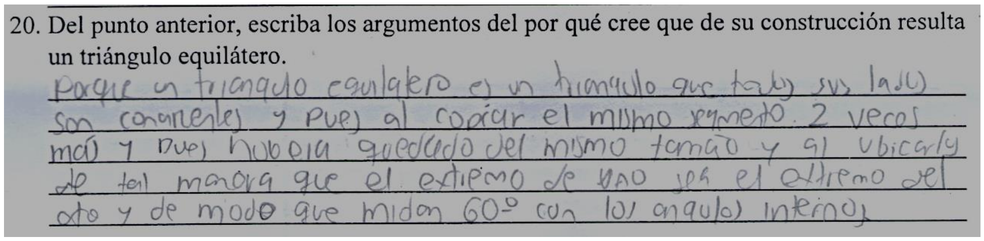


19. Dado un segmento, explique cómo construiría sobre este un triángulo equilátero.

dado el segmento (fragmento de recta que esta comprendido entre 2 puntos) copiaria el segmento 2 veces mas para que quede igual a el primer segmento dado, al copiarlos los uno haciendo que el extremo de uno sea el extremo del otro.

Con esta descripción no es claro el proceso para copiar los segmentos y se evidencia que la construcción está enfocada a cumplir las propiedades del triángulo como polígono de tres lados. Los argumentos de esta construcción mostrados por la estudiante se evidencian en la Figura 3.17

Figura 3.17: Respuesta argumentación 3



20. Del punto anterior, escriba los argumentos del por qué cree que de su construcción resulta un triángulo equilátero.

Porque un triangulo equilatero es un triangulo que todos sus lados son congruentes y pues al copiar el mismo segmento 2 veces más y pues habria quedado del mismo tamaño y al ubicarlo de tal manera que el extremo de uno sea el extremo del otro y de modo que midan 60° con los angulos internos

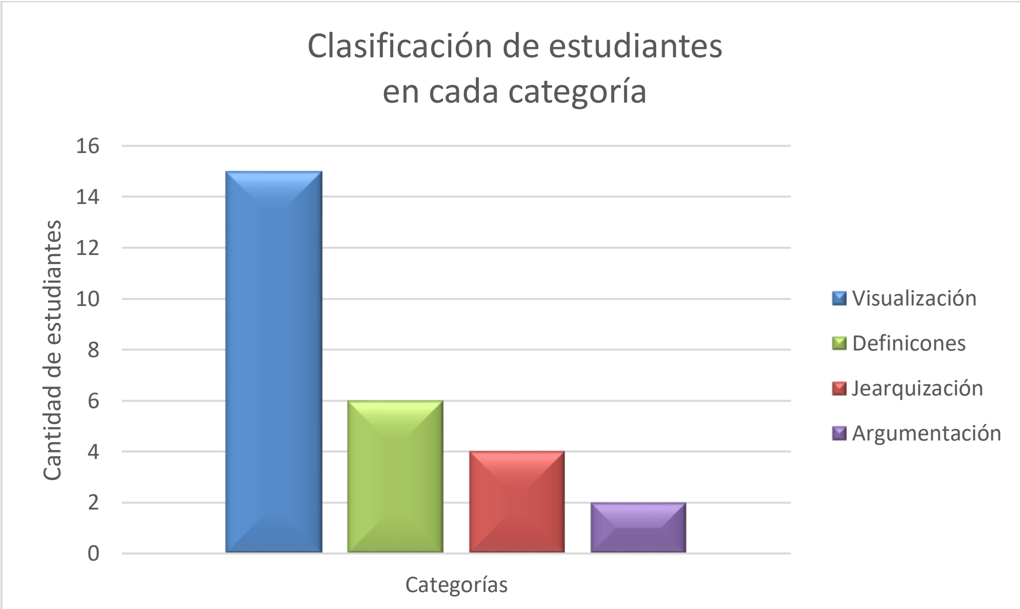
Se puede observar que la estudiante utiliza la definición de triángulo equilátero para justificar su construcción, dado que al copiar los segmentos, de alguna manera, quiso generar la congruencia necesaria para usar la definición y concluir que el triángulo construido es efectivamente un triángulo equilátero.

En las respuestas de las dos estudiantes, se valoró el hecho de que argumentaran sus construcciones usando algún elemento de un sistema teórico, como una definición o un teorema. Tal como se detalló en el capítulo anterior, la finalidad no era que realizaran una demostración, pero que se acercan a ella. Es por ello que el razonamiento geométrico y habilidades de las estudiantes fueron clasificadas en este nivel.

- **Conclusiones del taller diagnóstico**

El taller diagnostico generó como resultados para la siguiente fase que la parte de conceptualización del sistema teórico a manejar con los estudiantes debe empezar desde la definición de segmento en adelante, aclarando la diferencia de términos como circunferencia y círculo y unir y construir. Durante cada definición abordada en la siguiente fase, se debe resaltar la notación correspondiente para los objetos geométricos, dado que hay un grupo de once estudiantes que no utilizan bien la notación geométrica. En la Figura 3.18 se muestra un gráfico consolidando los resultados de la aplicación del taller diagnóstico.

Figura 3.18: Gráfica del análisis del taller diagnóstico



Al observar la Figura 3.18 se puede decir que, dado que más de la mitad del curso está en el nivel de visualización, se requiere para la siguiente fase que se trabajen actividades de visualización (usando notación geométrica), definición de objetos geométricos y jerarquización de figuras. Esto con el fin de que los estudiantes puedan entender los criterios mínimos de estas habilidades en geometría y tengan un conocimiento más amplio de los alcances del trabajo en la actividad demostrativa.

3.1.2 Cursillo de GeoGebra

Para este apartado se relata como diario de campo el cursillo de GeoGebra. En la primera sesión del cursillo se abordaron las herramientas de la primera y segunda lista. Los estudiantes no tuvieron ningún problema para usarlas, construyeron distintos puntos, dándose cuenta de que podían arrástralos por la vista geométrica del programa y que el software los nombraba de forma automática en orden alfabético. De igual forma, aprendieron a renombrar dichos objetos y fueron intuitivos en la exploración del programa para usar las herramientas de la tercera lista.

Cuando los estudiantes construyeron segmentos, se les indicó que construyeran dos de tal manera que se intersecaran, esto con la finalidad de que aprendieran a usar la herramienta de intersección y construyeran un punto que dependía de los segmentos. Luego, los estudiantes observaron que este punto tiene una apariencia distinta a los otros puntos. Al percibir dicha reacción, se les explicó a los estudiantes la diferencia entre puntos libres y puntos dependientes, aclarando que el punto de intersección es un punto dependiente y no se puede arrastrar, mientras que los puntos libres sí pueden arrastrarse si así se desea.

En la segunda sesión, se abordaron las herramientas de la cuarta, quinta lista y sexta lista. Las instrucciones hacia los estudiantes fueron más sencillas por el trabajo de la sesión anterior, puesto que, al darles la instrucción de construir rectas y segmentos con nombres específicos en los puntos, ellos podían ubicar rápidamente las herramientas y renombrar los puntos como les fue solicitado.

Para la herramienta perpendicular se construyeron dos rectas con esta propiedad y se comprobó la creación del ángulo recto, al enseñarles a los estudiantes a usar la herramienta ángulo que les permite medir ángulos. Luego, ellos notaron que al arrastrar cualquier punto de la construcción, de las rectas perpendiculares, el ángulo medido siempre iba a ser recto.

En la tercera y última sesión del cursillo se abordaron las herramientas de octava y undécima lista. La sesión empezó con la instrucción de construir un cuadrilátero que tuviera cuatro ángulos rectos, sin decirles aún que se trataba de un rectángulo. Los estudiantes realizaron un cuadrilátero, solamente con la herramienta *segmento* y mediante la visualización arrastraron los puntos para que los ángulos parecieran ángulos rectos.

Seguido se les explicó a los escolares que la construcción debía ser robusta y los cuatro ángulos rectos deberían permanecer en la construcción sin importar cual punto se arrastre. Mediante arrastres de prueba, los estudiantes comprobaron que sus construcciones no eran robustas y usaron la herramienta ángulo para que la medida fuera cercana a 90° mediante el arrastre de los vértices del cuadrilátero.

De igual forma, se les mostró a los estudiantes que la construcción que estaban realizando tampoco era robusta, mencionando que deben usar una herramienta que les garantice siempre un ángulo recto, para lo cual rápidamente intuyeron que tenían que usar la herramienta perpendicular y construir los cuatro ángulos con esta herramienta.

Después de esto comprobaron con arrastres de prueba que la construcción ya era robusta y se les enseñó a usar la herramienta relación, dando clic en los lados opuestos del cuadrilátero que construyeron y que GeoGebra les mostrara un aviso indicando que los lados son paralelos. De esta manera, se les explico que la herramienta relación nombra las propiedades que hay entre dos elementos, las cuales pueden ser perpendicularidad, paralelismo y congruencia entre otros.

Con el cursillo los estudiantes tuvieron una preparación adecuada para el manejo del software de geometría dinámica. El lector docente puede escoger en realizar otra construcción robusta para explorar de forma interactiva las herramientas que ofrece GeoGebra.

3.2 Segunda fase: Presentación del sistema teórico

Esta fase fue la más extensa de todas, se emplearon ocho bloques de clase para abordar con todo el grupo de séptimo los elementos teóricos necesarios para el desarrollo de la última fase. Primero se presentó todas las definiciones y elementos de la Tabla 1.1, la Tabla 1.2 y las definiciones de congruencia de segmentos y ángulos.

Trasversalmente se les presentó a los estudiantes representaciones gráficas de dichos elementos y se daba la instrucción de que usaran la notación geométrica para nombrar los elementos. Los estudiantes mostraban sus respuestas y se socializaban con el fin de mostrar la forma adecuada de usar el lenguaje geométrico. Los estudiantes tuvieron una gran acogida a este tipo de actividades por la misma razón que la mayoría empezó este proceso apenas en el estadio de la visualización como razonamiento geométrico.

Posteriormente se abordó los contenidos de la Tabla 1.3 y la Tabla 1.4, para las definiciones de los distintos tipos de cuadriláteros se dio la instrucción de definirlos luego de observar una representación gráfica en el tablero, estas actividades generaron distintas discusiones en torno a los contraejemplos que planteó el docente.

Por ejemplo, al definir el cuadrado, un estudiante en sus respuestas respondió que "*Es un cuadrilátero que tiene todos sus lados iguales*", para ese entonces ya se había resaltado la diferencia entre igualdad y congruencia, por lo cual se corrigió al estudiante y reformuló su respuesta: "*Es un cuadrilátero con todos sus lados congruentes*". Sin embargo se dio un contraejemplo de un rombo cualquiera el cual cumplía la definición pero no era un cuadrado. Socializando la situación el estudiante tuvo que reformular su definición teniendo en cuenta que los ángulos del cuadrado son congruentes y son rectos.

Muchos estudiantes estuvieron de acuerdo con la respuesta, lo que evidencia que la propiedad que más resaltan de un cuadrado es la congruencia de sus lados, pero dejan de lado la otra propiedad que todos sus ángulos son rectos. Esta dificultad fue aclarada en el curso mediante un contraejemplo: dibujar un rombo donde ninguno de sus ángulos fuera recto. De esta manera el estudiante reformuló su definición incluyendo la propiedad de los ángulos rectos.

Otro ejemplo fue cuando los estudiantes definieron cometa como "*Un cuadrilátero con todos sus lados congruentes*", pero inmediatamente se mostró un contraejemplo de un rombo y un cuadrado, por lo cual el estudiante dio otra definición "*Un cuadrilátero con dos pares de lados congruentes*" y el contraejemplo que se mostró fue el de un paralelogramo y un rectángulo, aclarando que son propiedades que se pueden deducir de sus definiciones, pero que son objetos que cumplen con la definición del estudiante y no es un cometa. Después de esto, el estudiante agregó la cualidad de que los lados congruentes deben ser adyacentes.

Para las actividades de jerarquización, los estudiantes debatieron sobre el proceso de categorizar un grupo y determinar su contenencia en otro grupo. Por ejemplo, cuando dos estudiantes resaltaron el caso de los rombos y los cuadrados destacando que la definición de rombo está inmersa en la definición de cuadrado. Con ello pudieron afirmar que "Todo cuadrado es rombo". También aclararon que el cuadrado al tener más características que el rombo, se puede pensar como caso particular de estos.

Otro ejemplo fue cuando trataron la jerarquía de los triángulos isósceles y equilátero, algunos estudiantes argumentaban frente a sus compañeros que por la definición de triángulo equilátero, este siempre tendría sus tres lados congruentes, mientras que la definición de triángulo isósceles exige al menos dos lados congruentes, cosa que si lo cumple el equilátero y concluyeron que "*Todo triángulo equilátero es un triángulo isósceles*" y que "*No todo triángulo isósceles es un triángulo equilátero*".

Durante esta fase se resalta como resultado la iniciativa de los estudiantes para expresar sus ideas e intentar argumentarlas desde sus conocimientos. Parte del pensamiento lógico radica en que la persona que lo esté desarrollando adquiera un sentido crítico frente a las situaciones que está afrontando, además de tener la capacidad de dialogar con sus semejantes en pro de afirmar o refutar una proposición, en este caso, de geometría.

3.3 Tercera fase: Aplicación de los talleres con geometría dinámica

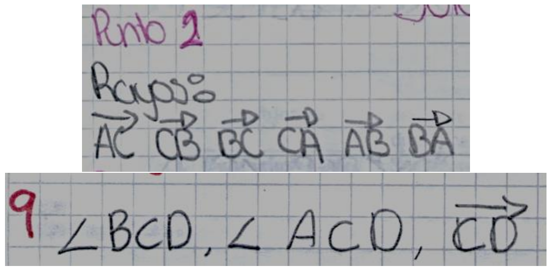
A continuación, se presentan los resultados de la aplicación de los tres talleres con geometría dinámica, descritos en el capítulo anterior, y que están en función de la actividad demostrativa. Se describen y analizan las respuestas del taller de definiciones, observando cuántos estudiantes cumplieron con el objetivo propuesto del taller, y de forma análoga se realiza el mismo seguimiento con el taller de conjeturas y el taller de demostraciones.

3.3.1 Taller de definiciones

- **Ángulos par lineal**

En las respuestas de los estudiantes para la primera serie de instrucciones que conducían a la definición de ángulos par lineal, se encontró que todos los estudiantes realizaron la segunda instrucción: señalar todos los rayos que podían observar en la construcción con la notación geométrica adecuada. De igual forma en la novena instrucción, que les solicitaba describir los objetos geométricos formados por la construcción; todos los estudiantes escribieron los objetos con la notación adecuada. En la figura 3.19 se puede detallar un ejemplo de las respuestas que sustentan lo anterior.

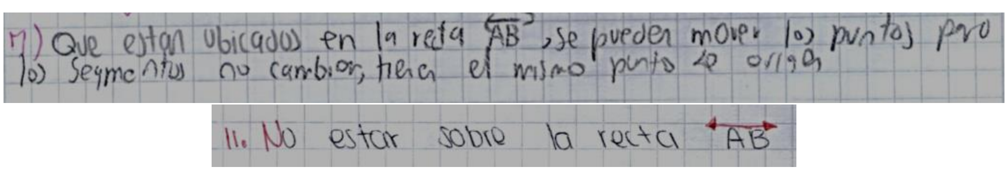
Figura 3.19: Respuestas objetos geométricos, ángulos par lineal



Al observar la Figura 3.19 se puede inferir que los estudiantes adquirieron un mejor nivel de visualización al poder escribir de forma satisfactoria los objetos geométricos usando la notación enseñada en la fase anterior.

También se observó en las respuestas que 16 de 27 estudiantes lograron identificar las propiedades de los rayos opuestos luego de realizar los arrastres indicados; todos los estudiantes manifestaron esta propiedad diciendo que los rayos se encontraban en la misma recta (eran colineales) y que tenían el mismo punto de origen, pero no enfatizaron que tenían direcciones opuestas. Estos estudiantes también identificaron la propiedad de los ángulos par lineal sobre el punto externo a los rayos opuestos. En la Figura 3.20 se evidencian unos ejemplos de dichas respuestas.

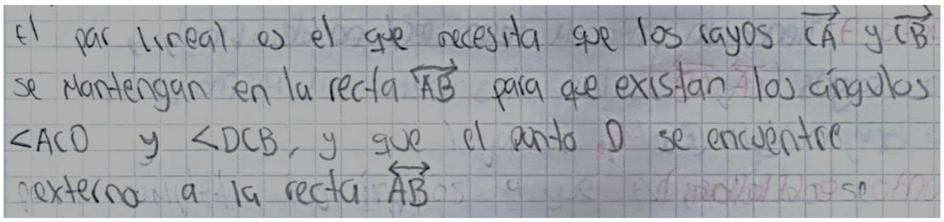
Figura 3.20: Respuestas propiedades, ángulos par lineal



Lo anterior nos permite decir que un grupo significativo de estudiantes alcanzaron a mejorar su nivel de razonamiento geométrico, desarrollando su habilidad de análisis de figuras, gracias a la exploración que desarrollaron en GeoGebra. Esto, sin duda, apoya el progreso en el pensamiento lógico de los estudiantes.

Haber llegado a este nivel de razonamiento geométrico fue clave para alcanzar el objetivo del taller. Sin embargo, solamente 8 de estos 16 estudiantes pudieron dar una definición apropiada para ángulos par lineal al tener en cuenta las propiedades encontradas en su análisis. En la Figura 3.21 se encuentra un ejemplo de las definiciones dadas.

Figura 3.21: Respuesta definiciones, ángulos par lineal



El par lineal es el que necesita que los rayos $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ se Mantengan en la recta $\overleftrightarrow{AB}$ para que existan los ángulos <ACO y <DCB, y que el punto D se encuentre externo a la recta $\overleftrightarrow{AB}$

La dificultad de los estudiantes que sí pudieron determinar las propiedades de los ángulos par lineal pero no dieron una definición adecuada, fue que dieron otras propiedades que se observaron con la construcción luego de los arrastres, como que observaron que los segmentos contenidos en los rayos eran congruentes.

También cometieron errores porque no contemplaron todas las propiedades posibles, como que la definición era de tres rayos que se intersecaban en un mismo punto. Esto es cierto para los ángulos par lineal, pero hay otros casos, que se les mostró, donde se cumple dicha propiedad y no necesariamente son ángulos par lineal.

- **Polígono convexo y cóncavo**

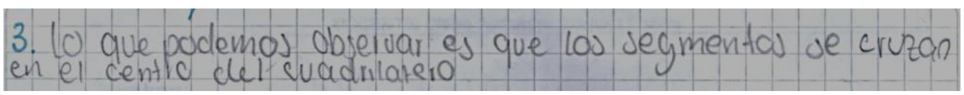
Se encontró que 8 de 27 estudiantes lograron definir de forma satisfactoria tanto polígono convexo como cóncavo. El seguimiento de las instrucciones tuvo varias complicaciones por el tipo de actividad que se estaba abordando. Muchos de los estudiantes identificaron como propiedad constante que las diagonales del cuadrilátero convexo generaban cuatro triángulos y, además, cuando construyeron dicho cuadrilátero, arrastraron los puntos para intentar formar un cuadrado.

Al construir un cuadrado, los estudiantes observaron que los triángulos parecían congruentes, pero al igual que la dificultad encontrada en la actividad anterior, los estudiantes no demostraron un avance más allá de la habilidad visual y no detallaron en su exploración las propiedades invariantes.

En un polígono convexo sí es posible que se generen triángulos, pero esto es una consecuencia directa de que los segmentos se intersequen, y a su vez, la intersección es consecuencia de la propiedad que se pretendía buscar en las instrucciones, la cual era que las diagonales siempre estarían en el interior del cuadrilátero.

Ahora bien, los estudiantes que lograron llegar a la definición de polígono convexo identificaron que las diagonales se intersecaban en el interior. Sin embargo, la expresión utilizada fue que las diagonales se intersecaban en el centro del cuadrilátero. En la Figura 3.22 se evidencia una de estas respuestas.

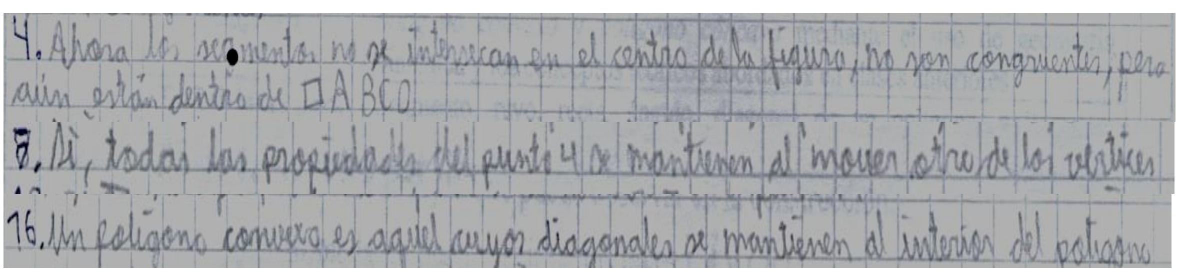
Figura 3.22: Respuesta propiedades, polígono convexo



3. lo que podemos observar es que los segmentos se cruzan en el centro del cuadrilatero

Luego de arrastrar condicionalmente un vértice del cuadrilátero de tal forma que las diagonales se siguieran intersecando, lo estudiantes se dieron cuenta que dicha intersección no se daba necesariamente en el centro, pero sí en el interior del cuadrilátero. Luego, con la exploración de la construcción, mediante los arrastres guiados, los estudiantes lograron definir de forma satisfactoria un polígono convexo. En la Figura 3.23 se muestran las respuestas que sustentan lo anterior dicho.

Figura 3.23: Respuestas definición, polígono cóncavo



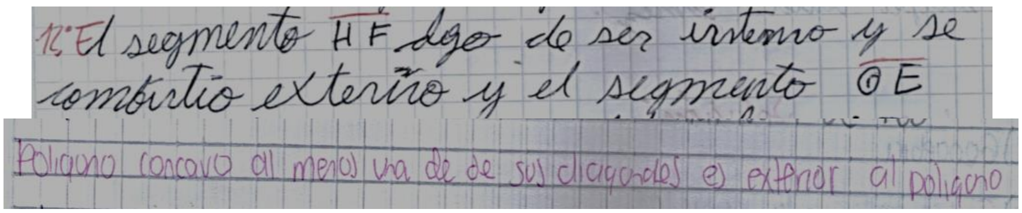
4. Ahora los segmentos no se intersecan en el centro de la figura, no son congruentes, pero aún están dentro de □ABCD

8. Sí, todas las propiedades del punto 4 se mantienen al mover otro de los vértices

16. Un polígono convexo es aquel cuyas diagonales se mantienen al interior del polígono

En las respuestas encontradas para la definición de polígono cóncavo, los ocho estudiantes en su exploración, mediante los arrastres guiados, analizaron y determinaron que una diagonal del polígono se encontraba en el exterior del cuadrilátero, propiedad suficiente para definir polígono cóncavo. Salvo algunas dificultades de redacción de los estudiantes, en la Figura 3.24 se encuentra un ejemplo de las respuestas que proporcionaron para identificar la propiedad y para formular la definición.

Figura 3.24: Respuestas definición, polígono cóncavo



Como conclusión de la aplicación de este primer taller, se puede observar que algunos estudiantes mejoraron sus habilidades en el razonamiento geométrico al desarrollar la visualización, la exploración y el análisis. Aunque las respuestas no fueron las más acertadas, se aproximaron bastante y dan evidencia de la utilidad del software de geometría dinámica para que los escolares logren inferir propiedades de acuerdo con lo que observan y analizan.

Mientras tanto, los estudiantes que tuvieron dificultades en este taller no captaron adecuadamente la finalidad de la exploración ni las instrucciones de cada actividad; solamente detallaban las propiedades que variaban en los arrastres como medidas y posiciones de los objetos geométricos. Para los siguientes talleres fue necesario aclarar sobre la importancia de observar y detallar las propiedades que son invariantes.

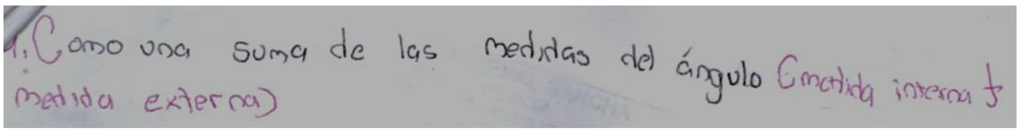
3.3.2 Taller de conjeturas

Antes de describir y analizar las respuestas elaboradas por los estudiantes en la aplicación del segundo taller de esta última fase, es importante aclarar que no se logró desarrollar todas las actividades planteadas. De las cuatro conjeturas descritas en el capítulo anterior, solamente se pudieron desarrollar dos con los escolares, debido a algunos eventos logísticos de la institución que requirieron de la participación de los estudiantes de séptimo en las horas de clase de matemáticas.

- **Suma de ángulos**

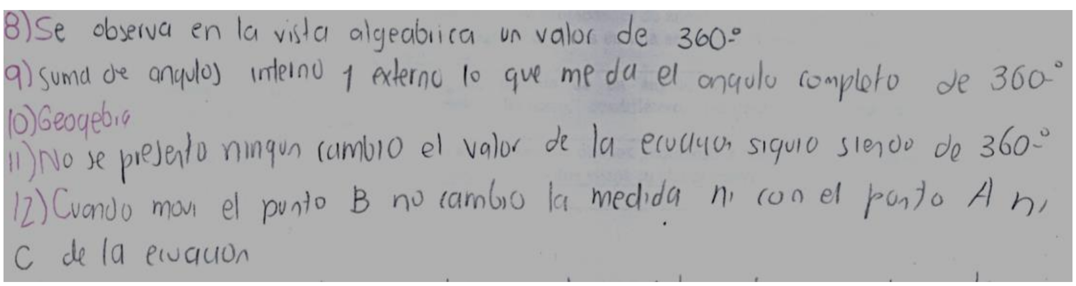
Con las respuestas de los estudiantes se determinó que 16 de 27 estudiantes lograron establecer una conjetura adecuada para la suma de la medida externa e interna de un ángulo cualquiera. Interpretaron bien las instrucciones dadas en el taller y determinaron que la ecuación que ingresaron en GeoGebra, en la instrucción 9, se podía interpretar geométricamente como la suma de los ángulos. En la Figura 3.25 se detalla una de estas respuestas.

Figura 3.25: Respuesta de propiedades, suma de ángulos


1. Como una suma de las medidas del ángulo (medida interna + medida externa)

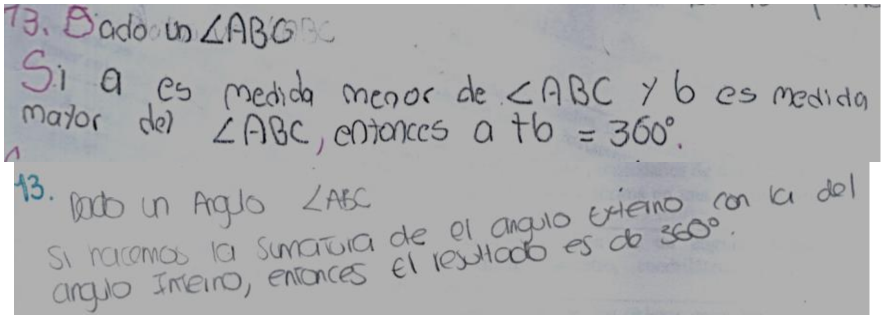
Luego de los arrastres indicados, los estudiantes observaron que el valor de la suma de los ángulos, dado en GeoGebra en la instrucción 8 del taller, no variaba cuando realizaban los arrastres. En la Figura 3.25 se muestra las respuestas de los estudiantes.

Figura 3.26: Respuestas valor de la ecuación, suma de ángulos


8) Se observa en la vista algeabrica un valor de 360°
9) suma de angulos interno y externo lo que me da el angulo completo de 360°
10) Geogebra
11) No se presento ningun cambio el valor de la ecuacion siguio siendo de 360°
12) Cuando movi el punto B no cambio la medida ni con el punto A ni C de la ecuacion

Después, fue necesario indicar para la última instrucción, que tuvieran en cuenta las condiciones iniciales de la construcción para generar la conjetura, esto es, el ángulo y la consideración de las medidas. Además, se les indicó que las propiedades invariantes identificadas en el desarrollo del taller eran la tesis de la conjetura. De esta forma los estudiantes escribieron la conjetura como se evidencia en la Figura 3.27

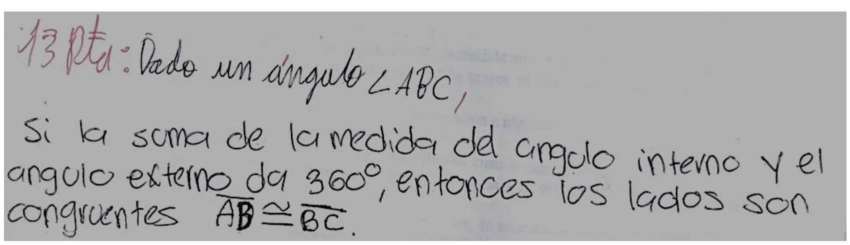
Figura 3.27: Respuestas conjetura, suma de ángulos


13. Dado un ∠ABC
Si a es medida menor de ∠ABC y b es medida mayor del ∠ABC, entonces a + b = 360°.
13. Dado un Angulo ∠ABC
Si hacemos la sumatoria de el angulo externo con la del angulo Interno, entonces el resultado es de 360°.

Se puede observar en la Figura 3.27 que las respuestas son una aproximación a la conjetura esperada. En la primera respuesta se observa que usan las notaciones de las variables indicadas en el taller, para la medida de los ángulos, y formulan la conjetura en el lenguaje matemático. Para la segunda respuesta se evidencia una similitud con la conjetura esperada, salvo algunos detalles de redacción que tuvieron los estudiantes.

Respecto a los estudiantes que no lograron realizar una conjetura apropiada, se encontró como dificultad en el proceso de conjeturación no haber interpretado la suma constante de ángulos como tesis de la conjetura. Escribieron como tesis una propiedad basada en la visualización y que era variante con los arrastres. En la Figura 3.28 se muestra un ejemplo de etas respuestas.

Figura 3.28: Dificultad en la conjetura, suma de ángulos


13 Pta: Dado un ángulo ∠ABC,
Si la suma de la medida del angulo interno y el angulo externo da 360°, entonces los lados son congruentes $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

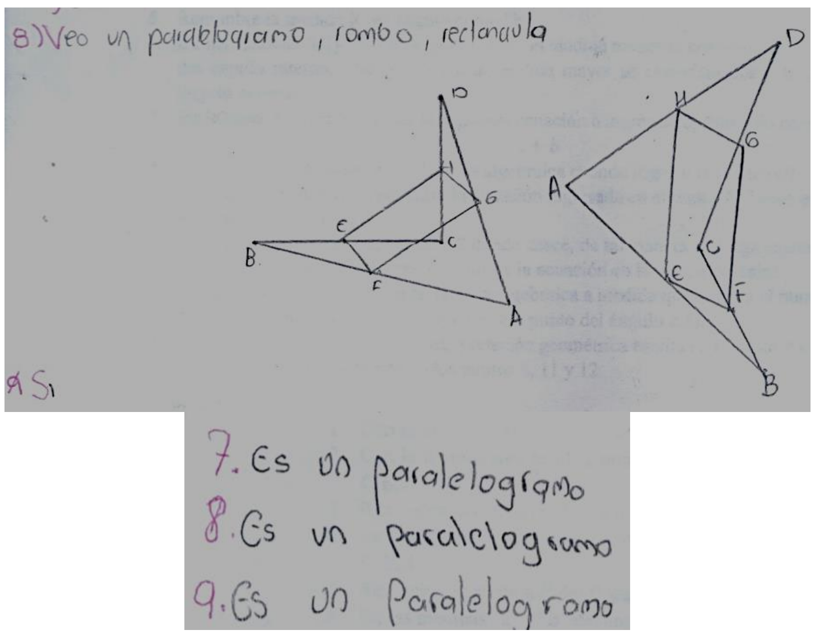
De las respuestas analizadas se puede inferir que varios estudiantes desarrollaron sus habilidades en el razonamiento geométrico en relación con el proceso de conjeturación, al usar correctamente la notación geométrica para el ángulo, determinar las propiedad invariante de la suma constante de las medidas mediante la exploración, e identificar cuáles eran las premisas y la conclusión para elaborar la conjetura.

- **Relación entre cuadriláteros**

Se encontró que 10 de 27 estudiantes lograron el objetivo propuesto en el taller, al formular una conjetura cercana a la conjetura especificada en el capítulo anterior, relacionada con el teorema de Varignon. Además, se aceptaron los enunciados derivados del enunciado general, puesto que en la práctica del taller especificaron otros tipos de cuadriláteros que visualmente eran parecidos.

En la Figura 3.29 se aprecian algunas respuestas de los estudiantes al identificar el tipo de cuadrilátero que era el $\square EFGH$ a medida que realizaban los arrastres indicados.

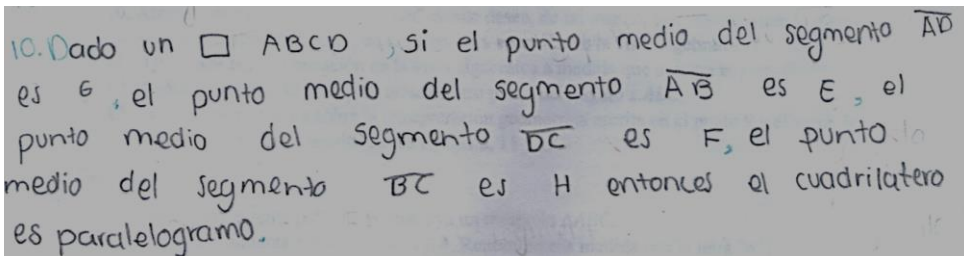
Figura 3.29: Respuestas tipo de cuadrilátero



Como se puede observar en la primera respuesta de la Figura 3.29, los estudiantes encontraron varios tipos de cuadriláteros, e inclusive, realizaron una representación con lápiz y papel de lo que estaban observando en GeoGebra. Se destaca esta respuesta puesto que los estudiantes usualmente no realizan arrastres hasta llegar a lo que parece un cometa y así poder determinar que el cuadrilátero determinado por los puntos medios era un rectángulo.

Sin embargo, en la segunda respuesta de la Figura 3.29, se detalla que los estudiantes también concluyeron en cada uno de sus arrastres que el tipo de cuadrilátero que se preguntaba era un paralelogramo. Después, los estudiantes al identificar que en todos los casos el cuadrilátero resultante era un paralelogramo, formularon la conjetura respectiva. En la Figura 3.30 se puede observar un ejemplo de las respuestas escritas por los escolares.

Figura 3.30: Conjetura sobre el tipo de cuadrilátero


10. Dado un □ ABCD, si el punto medio del segmento $\overline{AD}$ es G, el punto medio del segmento $\overline{AB}$ es E, el punto medio del segmento $\overline{DC}$ es F, el punto medio del segmento $\overline{BC}$ es H entonces el cuadrilatero es paralelogramo.

Estos estudiantes, luego de generar dicha conjetura, procedieron a comprobarla mediante la herramienta *relación* que tiene el programa. Comprobaron que los segmentos $\overline{EH}$ y $\overline{FG}$ eran paralelos y de forma análoga que los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{HG}$ también lo eran.

Para este momento se les aclaró a los estudiantes que hay una diferencia entre afirmar una propiedad entre segmentos, basándose únicamente en la visualización, y que el software de geometría dinámica me permita garantizar que la afirmación es verdadera. Por último, también se aclara con ellos que luego de comprobar una conjetura, se procede a demostrarla con un sistema teórico, pero dicha actividad se realizaría en el siguiente taller y con otras conjeturas.

Los estudiantes que no lograron el objetivo tuvieron dificultades en identificar la propiedad de que el cuadrilátero era un paralelogramo, debido a una falencia en el proceso de jerarquización, porque determinaron que el tipo de cuadrilátero que era el $\square EFGH$ era un rombo o rectángulo, pero no lo asociaron con el hecho de que cada uno de estos cuadriláteros también es un paralelogramo. Otros estudiantes no establecieron correctamente la hipótesis y la tesis de la conjetura, al decir como premisas que el $\square EFGH$ era un paralelogramo y que de esto se concluía de la construcción inicial con los puntos medios.

Sobre la aplicación del segundo taller, se puede concluir que la mayoría de los estudiantes evidenciaron un progreso en su razonamiento geométrico y por ende en su pensamiento lógico, puesto que desarrollaron todo el proceso de conjeturación de forma exitosa. Partieron desde una construcción específica, identificaron las propiedades de los objetos geométricos mediante la visualización, exploraron y analizaron las propiedades invariantes, relacionaron lo analizado mediante la jerarquización, escribieron una conjetura identificando los antecedentes y el consecuente y por último comprobaron dicha conjetura con GeoGebra.

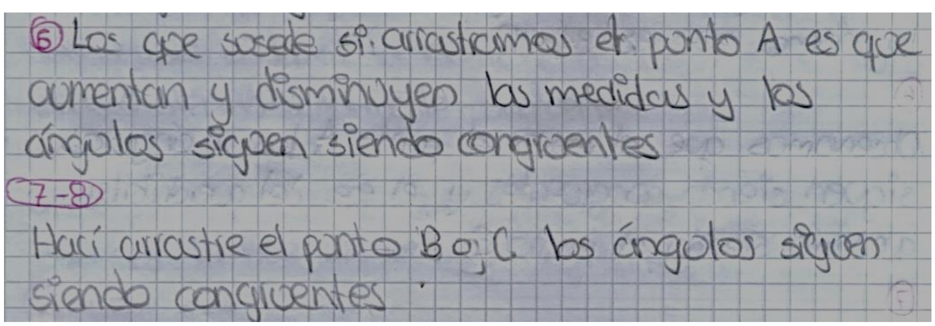
3.3.3 Taller de demostraciones

- **Teorema del triángulo isósceles**

De los resultados obtenidos tras la aplicación del último taller de la secuencia didáctica, se encontró que todos los estudiantes llegaron a escribir una conjetura adecuada tras seguir las instrucciones de este apartado.

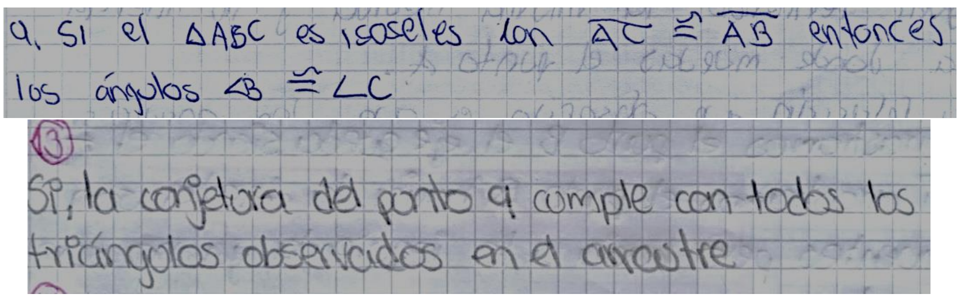
Los estudiantes realizaron la construcción del triángulo isósceles y mediante arrastres de prueba, comprobaron que la construcción fuera robusta. Luego, midieron los ángulos indicados y mediante arrastres guiados se dieron cuenta que, la propiedad de que las medidas de los ángulos eran iguales, no cambiaba. Lo anterior les permitió concluir que los ángulos eran congruentes. En la Figura 3.31 se detalla un ejemplo de las respuestas de los estudiantes en relación con lo previamente dicho.

Figura 3.31: Propiedad entre ángulos del triángulo isósceles


6 Los que sosede si arrastramos el punto A es que aumentan y disminuyen las medidas y los ángulos siguen siendo congruentes
7-8
Hací arrastre el punto B o C los ángulos siguen siendo congruentes

Seguido, todos los estudiantes formularon una conjetura bastante adecuada; identificaron la hipótesis como las condiciones iniciales de la construcción, un triángulo con dos de sus lados congruentes. Luego, identificaron la tesis, como una propiedad consecuente de la construcción, que consistía en la congruencia de dos de sus ángulos. Después verificaron dicha conjetura mediante la herramienta *relación* de GeoGebra, donde el programa aseguraba que las medidas de los ángulos eran iguales. En la Figura 3.32 se detallan las respuestas de la conjetura y su comprobación.

Figura 3.32: Conjetura y comprobación, triángulo isósceles



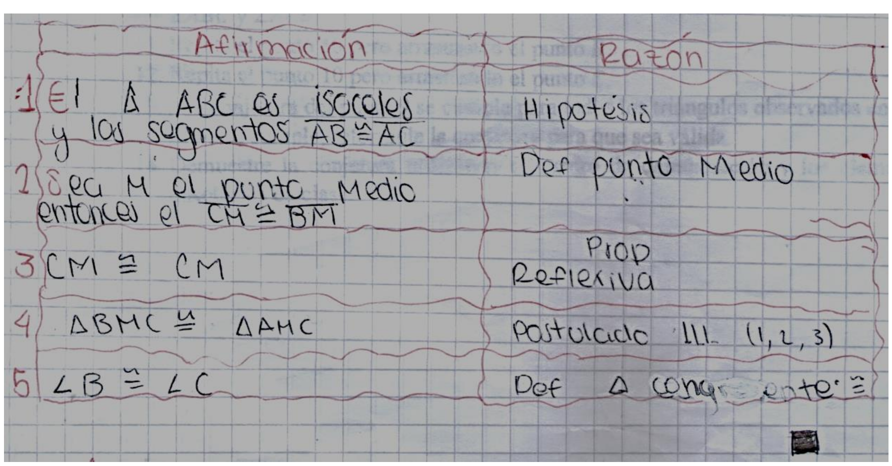
9. Si el $\triangle ABC$ es isoseles con $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ entonces los ángulos $\angle B \cong \angle C$

3

Si, la conjetura del punto 9 cumple con todos los triángulos observados en el arrastre

Por último, 10 de los 27 estudiantes elaboraron la demostración de la conjetura. Sin embargo, se dieron cuenta que tenían que recurrir a una construcción auxiliar para determinar dos triángulos congruentes y de ahí concluir la congruencia de los ángulos. Tras analizar la situación, estos optaron por construir un punto medio en el lado $\overline{BC}$ y proseguir con la demostración. En la Figura 3.33 se muestra una de las demostraciones realizadas.

Figura 3.33: Demostración propiedad del triángulo isósceles

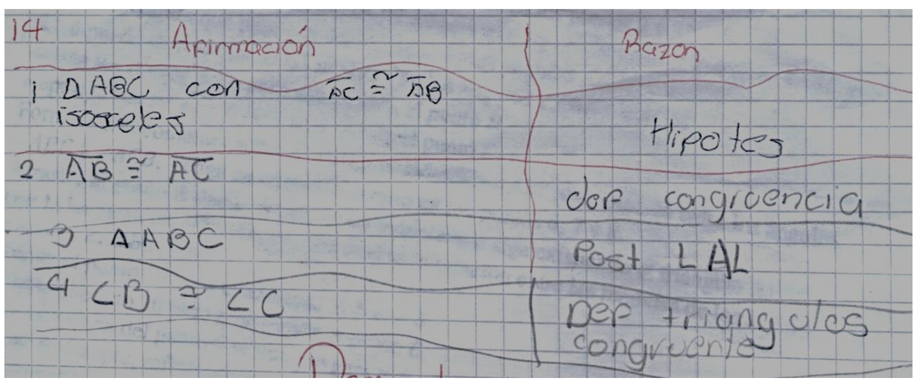


	Afirmación	Razón
1	El $\triangle$ ABC es isóceles y los segmentos $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Hipotesis
2	Sea M el punto Medio entonces el $\overline{CM} \cong \overline{BM}$	Def punto Medio
3	$CM \cong CM$	Prop Reflexiva
4	$\triangle BMC \cong \triangle AMC$	Postulado LLL (1, 2, 3)
5	$\angle B \cong \angle C$	Def $\triangle$ congruente $\cong$

Salvo por unos errores de escritura en el paso 3 de la demostración y la razón de la afirmación del último paso, se considera una demostración muy acertada. Se aclara que la última razón era la definición de triángulos congruentes, la cual le permite deducir la congruencia entre los ángulos.

Respecto a los estudiantes que no lograron el objetivo del taller, algunos no realizaron la demostración al no poder encontrar la construcción auxiliar para determinar la pareja de triángulos congruentes. Otros estudiantes no son claros en los pasos y utilizan de forma incorrecta los postulados de congruencia de triángulos, al no garantizar de forma correcta todas las condiciones para usarlo y deducir la congruencia de triángulos, esta dificultad se puede observar en la Figura 3.34

Figura 3.34: Dificultad en la demostración, triángulo isósceles

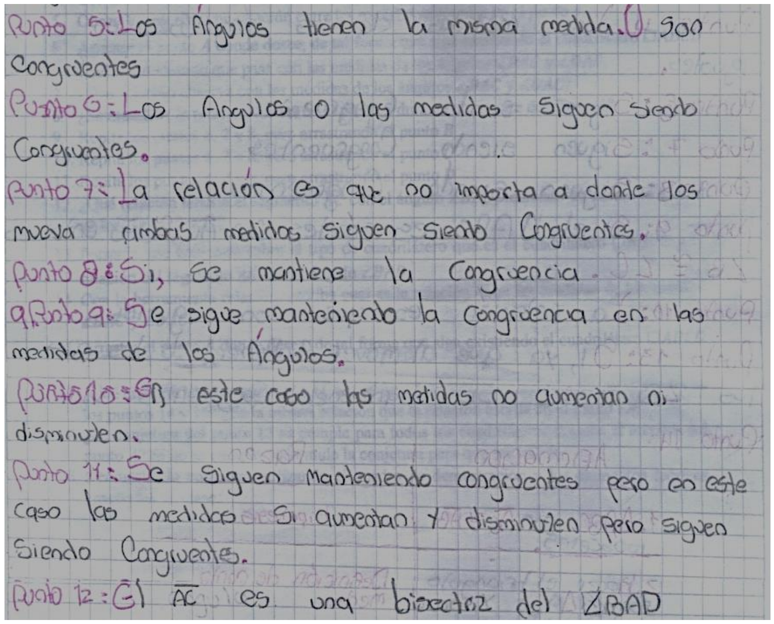


- **Teorema cometa – bisectriz**

Por una actividad realizada en la institución no se pudo contar con todo el tiempo completo de la clase para realizar esta última actividad del taller. Sin embargo, se encontró que todos los estudiantes escribieron una conjetura adecuada y de forma análoga realizaron el debido proceso para llegar a esta.

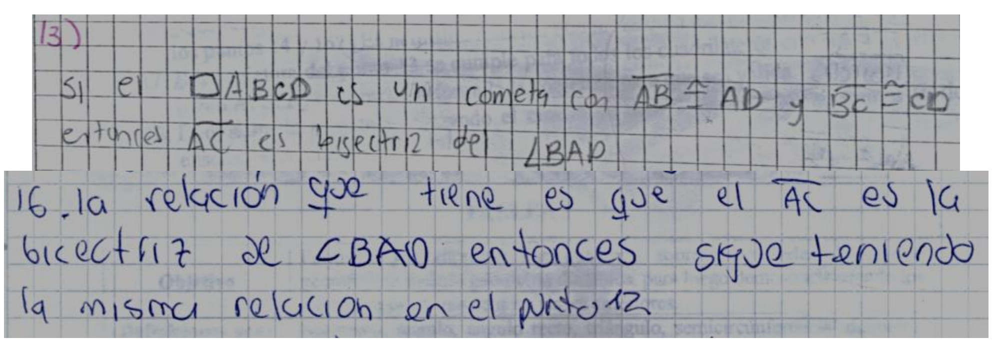
Luego de realizar la construcción del cometa, los estudiantes identificaron la congruencia de los ángulos los cuales se les solicitó medir. Después de realizar varios arrastres guiados, observaron que las medidas de los ángulos eran congruentes y que la relación de una de las diagonales del cometa, respecto a uno de sus ángulos, era que esa diagonal era bisectriz de dicho ángulo. En la Figura 3.35 se observan algunas de las respuestas de los estudiantes que detallan el proceso anteriormente dicho.

Figura 3.35: Respuestas de propiedades, cometa – bisectriz


Punto 5: Los Angulos tienen la misma medida. O son Congruentes
Punto 6: Los Angulos O las medidas siguen siendo Congruentes.
Punto 7: La relación es que no importa a donde los mueva ambas medidas siguen siendo Congruentes.
Punto 8: Si, se mantiene la Congruencia.
Punto 9: Se sigue manteniendo la Congruencia en las medidas de los Angulos.
Punto 10: En este caso las medidas no aumentan ni disminuyen.
Punto 11: Se siguen manteniendo congruentes pero en este caso las medidas si aumentan y disminuyen pero siguen siendo Congruentes.
Punto 12: El $\overline{AC}$ es una bisectriz del $\angle BAD$

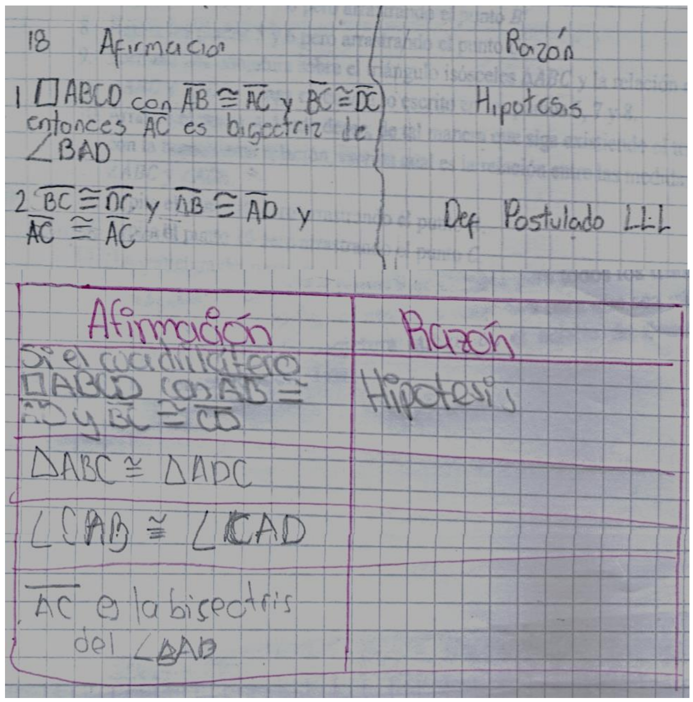
Después, los estudiantes formularon la conjetura respectiva y la verificaron con la herramienta relación del programa, esta les indicó que las medidas de los ángulos eran iguales, por lo cual se podía garantizar que, en todos los arrastres, la diagonal $\overline{AC}$ siempre seguiría siendo la bisectriz del $\angle BAD$. En la Figura 3.36 se muestran algunas respuestas de la conjetura y su comprobación.

Figura 3.36: Conjetura y comprobación, cometa – bisectriz


13)
Si el $\square ABCD$ es un cometa con $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ entonces $\overline{AC}$ es bisectriz del $\angle BAD$
16. la relación que tiene es que el $\overline{AC}$ es la bisectriz de $\angle BAD$ entonces sigue teniendo la misma relacion en el punto 12

Por último, se encontró que 10 de 27 estudiantes intentaron hacer la demostración. Se habla de un intento por la falta de tiempo que existió en la aplicación de esta actividad. Pero sí cabe resaltar algunos de esos intentos que se evidenciaron en las respuestas y cómo los estudiantes lograron detallar algunos pasos de la demostración. En la Figura 3.37 se muestran los intentos de los estudiantes para realizar la demostración.

Figura 3.37: Intentos de la demostración, cometa – bisectriz



En el primer cuadro de demostración se puede evidenciar que los estudiantes dedujeron que el postulado de congruencia a usar, para demostrar la conjetura, era el postulado LLL, el cual era el único que podía ser aplicado según las condiciones de la hipótesis. Mientras tanto, en el segundo cuadro de la demostración, se observa que los estudiantes lograron escribir sus razonamientos deductivos en la columna de afirmación, pero no alcanzaron a escribir el sustento teórico de cada afirmación en la columna de razón. Aun así, se puede evidenciar que la demostración estaba casi hecha, solo faltó deducir la congruencia de la diagonal $\overline{AC}$ consigo misma, por la propiedad reflexiva, que cumple la relación de congruencia.

A manera de conclusión de la aplicación de este taller se puede evidenciar un progreso significativo en el razonamiento geométrico de los estudiantes, porque después de un taller de conjeturas más complejas, todos los estudiantes superaron el nivel básico de visualización y analizaron correctamente las situaciones geométricas abordadas. Cosa que dio pie a que pudieran generar una conjetura apropiada mediante la exploración.

El desarrollo de todas las habilidades de la actividad demostrativa le permitió a un grupo de estudiantes poder realizar una aproximación a una demostración en geometría, que expusieron en sus respuestas mostrando procesos de argumentación y deducción. Tal vez con un poco más de tiempo, estos estudiantes habrían logrado presentar la demostración completa y correcta.

4. Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo se presentan las conclusiones del presente trabajo en relación con el diseño y aplicación de la secuencia didáctica. A su vez, se presentan algunas recomendaciones para que el lector docente tenga en cuenta si se interesa en aplicar la secuencia. Las conclusiones están sustentadas en el seguimiento y cumplimiento de los objetivos específicos, mientras que las recomendaciones surgen de los distintos aspectos evidenciados durante la aplicación de la secuencia didáctica.

El primer capítulo del documento presenta el marco teórico requerido: aspectos históricos - epistemológicos, disciplinares y didácticos; componentes que fueron considerados esenciales para el desarrollo de la secuencia didáctica. Estos aspectos abordaron elementos teóricos de la geometría euclidiana, la didáctica de la geometría, la geometría dinámica y la demostración en matemáticas o actividad demostrativa. Para establecer todos los aspectos y sus consideraciones, se realizó una revisión bibliográfica en varios documentos disciplinares y del área de la educación matemática, los cuales se evidencian en la bibliografía.

En la primera fase de la secuencia didáctica, se identificaron los conocimientos previos de los estudiantes con la aplicación del taller diagnóstico, el cual fue diseñado para abordar distintos conceptos propios de la geometría euclidiana y los procesos asociados a la argumentación en geometría. Los resultados dieron pie para establecer un orden en la presentación del sistema teórico que fue manejado con los escolares.

Los resultados de la primera fase también permitieron establecer los criterios para diseñar las actividades de visualización, exploración, conjeturación, validación, justificación y demostración, que fueron abordados en las dos siguientes fases mediante el uso del software de geometría dinámica GeoGebra. Las actividades de la segunda fase permitieron desarrollar habilidades propias del razonamiento geométrico en los estudiantes, para dar continuidad a los talleres de la última fase que enmarcaban un proceso hacia la demostración en geometría.

La secuencia didáctica fue aplicada satisfactoriamente en un grupo de 27 estudiantes de grado séptimo. Se destinaron bloques de clase de 80 minutos cada semana para el desarrollo de cada fase de la secuencia. Existieron varias dificultades para ejecutar las clases en la institución por los distintos eventos protocolarios que realizaron y en los cuales se necesitaba la participación de este grupo de estudiantes. El uso de la sala de sistemas en la institución requirió de una previa programación para no afectar los horarios de las clases de otros estudiantes.

Después de la aplicación de la secuencia didáctica, se evidenció un progreso en el pensamiento lógico de los estudiantes, en relación con el razonamiento geométrico, mediante los procesos de la actividad demostrativa que ellos desarrollaron. Al principio de la secuencia, la mayoría de los estudiantes se encontraban en un nivel básico de visualización, que no estaba del todo desarrollado, como se puede observar en las respuestas que otorgaron.

A medida que se aplicaron las fases de la secuencia, fueron desarrollando habilidades para hacer una demostración en geometría. Los estudiantes consiguieron dominar la visualización y usar el lenguaje geométrico adecuadamente, posteriormente mostraron dominio en la habilidad de definir objetos geométricos y también se encontró que todos los estudiantes pudieron realizar conjeturas apropiadas para las situaciones que trabajaron. Además, hubo más estudiantes que se encontraban en el nivel más alto, el de argumentación, y desarrollando mejores procesos, debido a que lograron realizar pequeñas demostraciones en geometría a dos columnas.

En el proceso de la siguiente fase, los estudiantes se prepararon en las distintas habilidades del razonamiento geométrico: la visualización, análisis, definición de objetos geométricos, jerarquización y argumentación. En esta fase, los estudiantes se mostraron bastante receptivos a la presentación de los elementos teóricos y compartieron sus ideas en pequeñas discusiones y debates donde, de alguna manera, se estaban preparando para la argumentación.

El uso de geometría dinámica en la secuencia didáctica fue un factor relevante. Los estudiantes al ver una herramienta didáctica nueva, cambian su actitud en la clase de matemáticas y son más receptivos a los cambios de metodología con respecto a lo que están acostumbrados. Aun así, GeoGebra es un programa que requiere buen dominio por parte del docente dado que la gran variedad de herramientas que tiene muestra algunos resultados en las actividades que pueden afectar la finalidad de enseñanza y aprendizaje en las clases de geometría, generando así errores y dificultades en los estudiantes al momento de la conceptualización de lo aprendido.

Lo anterior fue una dificultad encontrada al momento de diseñar los talleres de geometría dinámica, lo cual nos permitió rediseñar algunas instrucciones y dar claridad del papel que debe desempeñar el docente durante la aplicación de estos talleres, como lo es solventar las dificultades de los estudiantes al momento de realizar las construcciones geométricas.

Otra dificultad encontrada, durante la última fase, consistió en hacer conciencia a los estudiantes sobre la finalidad del proceso de exploración, que se llevó a cabo en los últimos talleres. Ellos están acostumbrados a que la variedad de preguntas a resolver en un cuestionario de matemáticas debe generar resultados distintos, pero al encontrarse con actividades cuya finalidad es generalizar, encontrando propiedades invariantes, y preguntas que guían al escolar a tener el mismo resultado, genera algún desconcierto, duda y negación de lo que observan y analizan en las construcciones.

Por lo tanto, al lector docente se le recomienda para la segunda fase de la secuencia, hacer una aclaración del proceso de exploración que van a realizar los estudiantes en la siguiente fase.

Un logro bastante significativo para este trabajo, fueron los resultados del último taller de la última fase. Varios estudiantes hicieron evidente su progreso al realizar demostraciones en geometría, aproximadas a las demostraciones formales. Además, las actividades desarrolladas en todas las fases, contribuyeron a desarrollar en los estudiantes la habilidad de escribir adecuadamente en geometría.

Después de todo este proceso de la elaboración del trabajo, surgen varias inquietudes sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración. Una de estas inquietudes radica en cómo garantizar el aprendizaje significativo de lo enseñado en la secuencia. La segunda inquietud nace de cómo generar una propuesta para innovar el currículo de matemáticas con actividades que apunten a la demostración en geometría.

Por último, se espera que los estudiantes y los docentes lectores de este documento aprecien esta forma distinta de enseñanza – aprendizaje en geometría, comparado con la que se realiza usualmente en la gran mayoría de las instituciones del país.

Bibliografía

Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Sociedad Colombiana de Matemáticas XV Congreso Nacional de Matemáticas*, (Volumen especial), 371–383.

Campos, A. (2008). *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática*. Bogotá D.C., Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Clemens, S., Cooney, T. y O'Daffer, P. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*, México D.F., México: Addison Wesley Longman.

Colegio Cardenal Sancha. (2019). Plan curricular de Matemáticas 2019. Bogotá: Colombia.

Cortez, R. (2012). *Historia de la Geometría Euclidiana y sus aplicaciones para la enseñanza* (Trabajo de grado de Pregrado). Universidad de Valladolid, España.

Crowley, M. (1987). The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. En M. Lindquist (Ed.), *Learning and Teaching* Geometry, *K-12.* Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp.1-16). Reston, Estados Unidos.: National Council of Teachers of Mathematics.

Freyre, M. y Mántica, A. (2017). Constatación empírica y uso de propiedades para la validación de conjeturas en GeoGebra. *Números. 95*, 107–121.

Gonzales, P. (s.f). *Estudio crítico de tres obras cumbres de la literatura matemática: los Elementos de Euclides, el método de Arquímedes y la geometría de Descartes* (pp. 35 – 50). Disponible en: https://goo.gl/QUYE4U

Gutiérrez, A. (2005). *Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploración con software de geometría dinámica.* En A. Maz, B. Gómez, M. Torralbo (Eds.), Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM (pp. 27-44). Córdoba, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Gutiérrez, A. (2007). Geometría, demostración y ordenadores, *Actas de las 13as JAEM* (versión electrónica sin paginar). Granada, España.

Hlibert, D. (2005). *The Foundations of Geometry* (Townsend, E, trad.). Estados Unidos: The Open Court Publishing Co. (Obra original publicada en 1899). Obtenido de https://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf

Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice* (pp. 121-139). Londres, Inglaterra: RoutledgeFalmer.

Linares, M. (2018). *Geometría Interactiva* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional Autónoma de México, México.

Manzano, J. (s.f.). Sistemas de Geometría Dinámica. *Linkages Mecanismos articulados para trazar curvas*. Recuperado de https://sites.google.com/site/tesislinkages/sgd/sgd1

Martínez, A. (2001). *La demostración en matemática: una aproximación epistemológica y didáctica.* En M. Moreno, F. Gil, M. Socas, J. Godino (Eds.), Investigación en educación matemática: Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 27-44). Almería, España: Servicio de Publicaciones.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: MEN.

Molina, O. y Samper, C. (2013). Geometría plana: un espacio de aprendizaje (pp. 17-29). Universidad Pedagógica Nacional: Bogotá.

Piscoya, L. (2007). Reseña histórica de la lógica. *Lógica General* (pp. 307-313). Lima, Perú: Fondo Editorial de la UNMSM.

Puertas, M. (1991). Libro 1. *Elementos de Euclides* (pp. 185 - 264). Madrid, España: Gredos.

Sánchez, C. H. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. *Tecné Episteme Y Didaxis TED*. (32), 71-92.

Sánchez, E. F. (2014). *Iniciación a la demostración matemática en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria y su incidencia en la resolución de problemas. Un ejemplo de aplicación en la Comunidad de Madrid* (Tesis de Doctorado). Universidad Nacional de Educación a Distancia, España.

Senior, J. (2001). El surgimiento de las teorías no euclidianas y su influencia en la filosofía de la ciencia del siglo XX. *Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia*. *2* (5), 45 – 63.

Sua, C. (2015). *La demostración en geometría: procesos cognitivos y metacognitivos favorecidos por la inclusión de ambientes dinámicos.* Comunicación presentada en Compumat 2015 (noviembre 16, 17, 18). La Habana, Cuba.

Sua, C. (2017). *Saber suficiente no es suficiente: un estudio de los comportamientos metacognitivos al resolver problemas de demostración con el apoyo de la geometría dinámica* (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Tejada, D. (2003). Geometrías no-euclidianas. *Grandes pensadores matemáticos, físicos y químicos* (pp. 144-159). Medellín, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Trillas, E. y Sobrino, A. (1990). Nota sobre la enseñanza de la lógica en el bachillerato. *SUMA*. *7*, 19-22.

A. Anexo: Talleres de la secuencia didáctica

A.1 Taller diagnóstico

Nombre: ____

TALLER DIAGNÓSTICO

Objetivo: Identificar los conocimientos previos del estudiante de grado séptimo en geometría, desde el reconocimiento y definición de elementos básicos, clasificación de figuras geométricas, niveles de visualización y dominio del leguaje geométrico, para describir relaciones o propiedades de las figuras, hasta niveles de argumentación para el aprendizaje de la actividad demostrativa.

Utilice GeoGebra para resolver el siguiente taller, luego resuélvalo con regla y compás y mencione una o varias diferencias:

Tiempo estimado: 160 minutos.

1. Con sus propias palabras, escriba una definición de segmento:
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

2. Construya 3 representaciones gráficas de segmento de acuerdo con su definición.

3. Con sus propias palabras, escriba una definición de rayo:
____
____
____
____
____

4. Construya 3 representaciones gráficas de rayo de acuerdo con su definición.

5. Con sus propias palabras, escriba una definición de ángulo:
____
____
____
____
____

6. Construya 3 representaciones gráficas de ángulo de acuerdo con su definición.

7. Escriba los tipos de ángulos que conoce y realice una representación gráfica de cada uno.
____
____
____
____

8. Con sus propias palabras, escriba una definición de triángulo:
____
____
____

9. Construya 3 representaciones gráficas de triángulo de acuerdo con su definición.

10. Escriba los tipos de triángulos que conoce y realice una representación gráfica de cada uno.

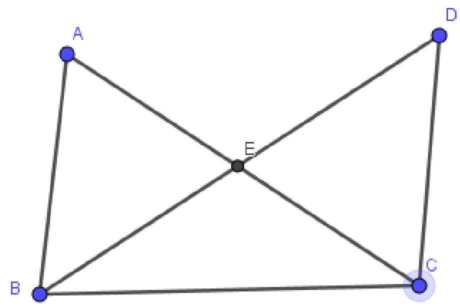
11. Con sus propias palabras, escriba una definición de paralelogramo:

12. Construya 3 representaciones gráficas de paralelogramo de acuerdo con su definición.

13. Escriba los tipos de cuadriláteros que conoce y realice una representación gráfica de cada uno.

14. Con sus propias palabras, escriba una definición apropiada de circunferencia.

15. De la siguiente representación gráfica, escriba todos los segmentos, triángulos, ángulos e intersecciones que identifique



16. ¿Todo triángulo equilátero también es un triángulo isósceles? Explique por qué.

17. ¿Todo paralelogramo es un cuadrado? Explique por qué.

18. ¿Todo cuadrado es un paralelogramo? Explique por qué.

19. Dado un segmento, explique cómo construiría sobre este un triángulo equilátero.

____
____
____
____
____

20. Del punto anterior, escriba los argumentos del porqué cree que de su construcción resulta un triángulo equilátero.

____
____
____
____
____
____
____
____

A.2 Taller de definiciones

Nombres: ____

TALLER DE DEFINICONES

Objetivo	Reconocer y definir apropiadamente el concepto de *ángulos par lineal*, *polígono convexo* y *polígono cóncavo* mediante el uso de geometría dinámica y los conceptos teóricos abordados en clases anteriores.
Definiciones para tener en cuenta	Segmento, rayo, recta, ángulo, diagonal de un polígono, polígono y cuadrilátero.
Ayuda	Recordar cómo se denotan los objetos geométricos como segmento, rayo, recta y ángulo, con los símbolos vistos en clases anteriores.
Tiempo	160 minutos

Parte 1: Ángulos par lineal

1. Construya una recta $\overleftrightarrow{AB}$ y marque con C un punto en esta recta que esté entre A y B.
2. Escriba todos los rayos que puede observar en la construcción.
3. ¿Qué propiedades puede decir de los rayos $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$?
4. Arrastre el punto A donde desee y observe que pasa con los rayos $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$
5. ¿Qué puede afirmar de los rayos $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$?
6. Arrastre el punto B donde desee y observe que pasa con los rayos $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$
7. ¿Qué puede afirmar de los rayos $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$?
8. Marque con D un punto externo a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y construya el rayo $\overrightarrow{CD}$
9. ¿Qué objetos geométricos se formaron con la construcción? Escríbalos con la notación adecuada.
10. Al arrastrar el punto D, ¿en qué posición de este punto, dejan de existir los ángulos $\angle ACD$ y $\angle DCB$?
11. ¿Qué condiciones debe tener el punto D para que existan los ángulos $\angle ACD$ y $\angle DCB$?
12. Según la construcción, mientras estén los $\angle ACD$ y $\angle DCB$, estos ángulos forman un par lineal.
13. Escriba una definición de ángulos par lineal teniendo en cuenta sus respuestas de los puntos anteriores.

Parte 2: Polígono convexo y polígono cóncavo.

1. Con la herramienta polígono, construya un cuadrilátero $\square ABCD$.
2. Construya sus diagonales, es decir, los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.
3. ¿Qué puede observar de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$?
4. Arrastre solo un vértice del cuadrilátero $\square ABCD$ ¿Qué puede observar de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$?

5. Si las diagonales se intersecan, ¿en dónde se intersecan?
6. Aparte de la intersección de las diagonales del cuadrilátero ¿Qué otra propiedad puede observar de estos segmentos en relación con el interior del cuadrilátero?
7. Arrastre solo un vértice del cuadrilátero de tal manera que las diagonales se sigan intersecando y observe los distintos cuadriláteros que se forman.
8. ¿Se mantiene la propiedad escrita en el punto 4? ¿Cuál?
9. Con la herramienta polígono, construya un cuadrilátero $\square EFGH$
10. Construya sus diagonales, es decir, los segmentos $\overline{EG}$ y $\overline{HF}$.
11. Arrastre solo un vértice del cuadrilátero $\square EFGH$ hasta que las diagonales **NO** se intersequen.
12. ¿Qué propiedad puede observar de los segmentos $\overline{EG}$ y $\overline{HF}$ en relación con el interior del cuadrilátero?
13. Arrastre solo un vértice del cuadrilátero $\square EFGH$ de tal manera que las diagonales NO se sigan intersecando y observe los distintos cuadriláteros que se forman.
14. ¿Se mantiene la propiedad escrita en el punto 12? ¿Cuál?
15. Según las construcciones, el cuadrilátero $\square ABCD$ tiene la propiedad de ser un polígono convexo, mientras tanto, el cuadrilátero $\square EFGH$ no es un polígono convexo y tiene la propiedad de ser un polígono cóncavo.
16. Escriba una definición de polígono convexo teniendo en cuenta las respuestas anteriores.
17. Escriba una definición de polígono cóncavo teniendo en cuenta las respuestas anteriores.

A.3 Taller de conjeturación

Nombres: ____

TALLER DE CONJETURACIÓN

Objetivo	Formular conjeturas sobre propiedades de ángulos, la suma de los ángulos de un triángulo, ángulos inscritos en una semicircunferencia y relaciones entre cuadriláteros.
Definiciones para tener en cuenta	Segmento, ángulo, medida de un ángulo, ángulo recto, triángulo, semicircunferencia, diámetro, cuadrilátero, paralelismo, congruencia, paralelogramo.
Ayuda	Recordar cómo se denotan los objetos geométricos como segmento, rayo, recta y ángulo, con los símbolos vistos en clases anteriores.
Tiempo	160 minutos

Conjetura 1:

1. Con la herramienta segmento, construya los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$
2. Con la herramienta ángulo, mida el $\angle ABC$, dando clic en el siguiente orden de puntos: C, B, A
3. Renombre la medida α del ángulo como "a".
4. Con la herramienta ángulo, mida el $\angle ABC$, dando clic en el siguiente orden de puntos: C, B, A
5. Renombre la medida β del ángulo como "b".
6. De las medidas "a" y "b" del ángulo $\angle ABC$, la medida menor se considera como la medida del ángulo interno. Mientras tanto, la medida mayor se considera como la medida del ángulo externo.
7. En la barra de entrada escriba la siguiente ecuación e ingrésela oprimiendo enter:
$$a + b$$
8. ¿Qué valor puede observar en la vista algebraica cuando ingreso la ecuación?
9. ¿Cómo interpretaría en geometría la ecuación ingresada en el punto 7? Tenga en cuenta la información del punto 6.
10. Arrastre un punto del ángulo $\angle ABC$ donde desee, de tal manera que siga existiendo dicho ángulo y observe que pasa con el valor de la ecuación en la vista algebraica.
11. ¿Qué valor tiene la ecuación en la vista algebraica a medida que arrastra el punto?
12. Repita los puntos 10 y 11 pero arrastre otro punto del ángulo $\angle ABC$.
13. Escriba una conjetura sobre la interpretación geométrica escrita en el punto 9 y el valor de la ecuación, según lo escrito en los puntos 8, 11 y 12.

Conjetura 2:

1. Con la herramienta polígono, construya un triángulo ΔABC.
2. Con la herramienta ángulo, mida el $\angle A$. Renombre esa medida con la letra "a".

3. Con la herramienta ángulo, mida el $\angle B$. Renombre esa medida con la letra “b”.
4. Con la herramienta ángulo, mida el $\angle C$. Renombre esa medida con la letra “c”.
5. En la barra de entrada escriba la siguiente ecuación e ingrésela oprimiendo enter

$$a + b + c$$

6. ¿Qué valor puede observar en la vista algebraica cuando ingreso la ecuación?
7. ¿Cómo interpretaría en geometría la ecuación ingresada en el punto 5?
8. Arrastre el punto A donde desee ¿Qué medidas u objetos cambiaron en la construcción?
9. Luego del arrastre, observe que ha pasado con el valor de la ecuación en la vista algebraica.
10. ¿Qué puede decir de este valor frente al valor escrito en el punto 7? ¿Qué valor es?
11. Recuerde que cada vez que arrastra el punto A, está observando un triángulo distinto al que tenía anteriormente.
12. Repita los puntos 8, 9, 10 pero arrastre otro punto distinto de A.
13. Escriba una conjetura sobre la interpretación de la ecuación descrita en el punto 5 y los triángulos observados en el arrastre.

Conjetura 3:

1. Construya un segmento $\overline{AB}$.
2. Con la herramienta semicircunferencia, construya una semicircunferencia cuyo diámetro sea el segmento $\overline{AB}$, dando clic primero en el punto A y luego en el punto B
3. Marque con C un punto que esté en la semicircunferencia.
4. Construya los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$
5. ¿Qué objetos geométricos se formaron con la construcción? Escríbalos con la notación adecuada.
6. Con la herramienta ángulo, mida el ángulo $\angle ACB$, dando clic en el siguiente orden de puntos: A, luego C, luego B.
7. ¿Cuál es la medida del ángulo $\angle ACB$?
8. ¿Qué tipo de ángulo es el ángulo $\angle ACB$?
9. Arrastre el punto C a través de la semicircunferencia con diámetro $\overline{AB}$.
10. ¿Qué propiedad del ángulo $\angle ACB$ se mantiene?
11. ¿Sigue siendo el mismo tipo de ángulo al arrastrar el punto C?
12. Al arrastrar el punto C, ¿en qué posición deja de existir el ángulo $\angle ACB$?
13. ¿Qué condiciones debe tener el punto C para que la propiedad del ángulo $\angle ACB$ se mantenga?
14. Arrastre el punto A donde desee, ¿Qué cambios observa? ¿hay alguna propiedad que se mantiene durante el arrastre?
15. ¿Qué propiedad tiene el punto A respecto a la semicircunferencia?
16. Arrastre el punto B donde desee, ¿Qué cambios observa? ¿hay alguna propiedad que se mantiene durante el arrastre?

17. ¿Qué propiedad tiene el punto B respecto a la semicircunferencia?
18. Formule una conjetura acerca de la propiedad del ángulo $\angle ACB$, con las condiciones y propiedades de los puntos A, B y C.

Conjetura 4:

1. Con la herramienta polígono, construya un cuadrilátero $\square ABCD$.
2. Con la herramienta punto medio marque con E el punto medio del segmento $\overline{AB}$
3. Con la herramienta punto medio marque con F el punto medio del segmento $\overline{BC}$
4. Con la herramienta punto medio marque con G el punto medio del segmento $\overline{CD}$
5. Con la herramienta punto medio marque con H el punto medio del segmento $\overline{AD}$
6. Construya los segmentos $\overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}$ y $\overline{EH}$.
7. ¿Qué tipo de cuadrilátero cree que es el cuadrilátero $\square EFGH$?
8. Arrastre el punto A donde desee, pero que siga manteniéndose el cuadrilátero $\square ABCD$ ¿Qué tipo de cuadrilátero cree que es el cuadrilátero $\square EFGH$?
9. Arrastre el punto D donde desee, pero que siga manteniéndose el cuadrilátero $\square ABCD$ ¿Qué tipo de cuadrilátero cree que es el cuadrilátero $\square EFGH$?
10. Formule una conjetura de la construcción hecha desde el punto 1 hasta el punto 5 y sobre el tipo de cuadrilátero que es el cuadrilátero $\square EFGH$.
11. Con la herramienta relación, escriba qué relación tiene los segmentos $\overline{EH}$ y $\overline{FG}$
12. Con la herramienta relación, escriba qué relación tiene los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{HG}$
13. Teniendo en cuenta lo escrito en los puntos 10 y 11 ¿Qué tipo de cuadrilátero es el cuadrilátero $\square EFGH$?
14. Arrastre el punto A donde desee, pero que siga manteniéndose el cuadrilátero $\square ABCD$
15. Usando la herramienta relación ¿Se mantienen las relaciones entre los segmentos $\overline{EH}$ y $\overline{FG}$? ¿También las de los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{HG}$?
16. ¿Qué tipo de cuadrilátero es el cuadrilátero $\square EFGH$? ¿Es el mismo tipo de cuadrilátero que el descrito en los puntos 7, 8 y 9?
17. Con lo descrito desde el punto 11 en adelante ¿La conjetura que escribió en el punto 10 necesita ser cambiada para que el $\square EFGH$ sea un cuadrilátero especial?

A.4 Taller de demostraciones

Nombres: ____

TALLER 3

Objetivo	Formular y comprobar una conjetura sobre propiedades de objetos geométricos usando geometría dinámica, para luego demostrarla usando los elementos teóricos vistos en clases anteriores.
Definiciones para tener en cuenta	Segmento, ángulo, ángulo recto, triángulo, semicircunferencia, diámetro, cuadrilátero, paralelismo, congruencia, paralelogramo.
Ayuda	Recordar cómo se denotan los objetos geométricos como segmento, rayo, recta y ángulo, con los símbolos vistos en clases anteriores.
Tiempo	160 minutos

Demostración 1:

1. Construya un triángulo ΔABC isósceles de tal forma que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ sean congruentes, es decir $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
2. Con la herramienta ángulo, mida el ángulo $\angle ABC$ dando clic en el siguiente orden de puntos: A, B y C.
3. Con la herramienta ángulo, mida el ángulo $\angle ACB$ dando clic en el siguiente orden de puntos: B, C y A
4. ¿Qué puede determinar de las medidas obtenidas en los puntos 2 y 3?
5. Arrastre el punto A donde desee, de tal manera que siga existiendo el triángulo ΔABC y vaya observando que pasa con las medidas de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ACB$.
6. ¿Qué puede determinar de las medidas de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ACB$?
7. Repita los puntos 5 y 6 pero arrastrando el punto B
8. Repita los puntos 5 y 6 pero arrastrando el punto C
9. Formule una conjetura sobre el triángulo isósceles ΔABC y la relación entre los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ACB$. Tenga en cuenta lo escrito en los puntos 6, 7 y 8.
10. Arrastre el punto A donde desee, de tal manera que siga existiendo el triángulo ΔABC y con la herramienta relación, escriba cual es la relación entre las medidas de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ACB$.
11. Repita el punto 10 pero arrastrando el punto B.
12. Repita el punto 10 pero arrastrando el punto C.
13. ¿La conjetura del punto 9 se cumple para todos los triángulos observados en el arrastre? Si no se cumple, reformule la conjetura para que sea válida.
14. Demuestre la conjetura utilizando el cuadro de demostración y los elementos teóricos enseñados en clase.

Demostración 2:

1. Construya un $\square ABCD$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{CD}$
2. ¿Qué tipo de cuadrilátero es el cuadrilátero $\square ABCD$?
3. Construya el segmento $\overline{AC}$.
4. Con la herramienta ángulo, mida los ángulos $\angle BAC$ y $\angle DAC$.
5. Observe y escriba una relación entre las medidas obtenidas en el punto 4.
6. Arrastre el punto A donde desee, de tal forma que siga existiendo el cuadrilátero $\square ABCD$ y vaya observando que pasa con las medidas de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle DAC$.
7. ¿Qué relación observa con las medidas de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle DAC$?
8. ¿Se mantiene la relación escrita en el punto 5 durante el arrastre del punto A?
9. Repita los puntos 6, 7 y 8, pero arrastrando el punto B
10. Repita los puntos 6, 7 y 8, pero arrastrando el punto C
11. Repita los puntos 6, 7 y 8, pero arrastrando el punto D
12. ¿Qué relación tendría el segmento $\overline{AC}$ con el ángulo $\angle BAD$, teniendo en cuenta lo escrito en los puntos 7 a 11?
13. Formule una conjetura sobre el tipo de cuadrilátero que es el cuadrilátero $\square ABCD$ y la relación del segmento $\overline{AC}$ con el ángulo $\angle BAD$.
14. Con la herramienta relación, escriba cual es la relación entre las medidas de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle DAC$.
15. Arrastre el punto A donde desee, de tal forma que siga existiendo el cuadrilátero $\square ABCD$ y repita el punto 14
16. ¿Qué relación tiene el segmento $\overline{AC}$ con el ángulo $\angle BAD$, teniendo en cuenta lo escrito en los puntos 14 y 15? ¿Es la misma relación que la relación escrita en el punto 12?
17. ¿La conjetura del punto 13 se cumple para todos los cuadriláteros durante el arrastre del punto A? Si no se cumple, reformule la conjetura para que sea válida.
18. Demuestre la conjetura utilizando el cuadro de demostración y los elementos teóricos enseñados en clase.