Universidad Nacional de Colombia

Elección racional del consumidor en economías de Riesz: una comparación con la modelación tradicional y comentarios desde la economía comportamental

David Stivens Siervo

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
Enero de 2020

Elección racional del consumidor en economías de Riesz: una comparación con la modelación tradicional y comentarios desde la economía comportamental

David Stivens Siervo

Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar al título de:
Maestría en Ciencias - Matemática Aplicada

Director:
Juan Galvis, Ph.D.

Co- Director:
Rafael Ahumada, Ph.D.

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
Enero de 2020

Prefacio

Las formas de pensar el mundo son como distintas estructuras construidas con piezas LEGO©: para una nueva estructura se pueden tener nuevas piezas o nuevas formas de conectar las piezas ya existentes. Este trabajo construye, sobretodo, desde lo segundo; combinando dos enfoques del análisis del problema de las decisiones de consumo: un enfoque típicamente catalogado como normativo y otro descriptivo. Se denomina normativo a aquel enfoque de la modelación microeconómica tradicional, presentado en el marco de la estructura clásica de la teoría de la decisión, que de alguna manera prescribe cuáles son las mejores decisiones (en algún sentido, tradicionalmente el de la maximización de alguna utilidad). El enfoque descriptivo viene principalmente por cuenta de algunos resultados de la economía experimental y del comportamiento que pregunta sobre cómo toman decisiones las personas en la vida real. En buena medida, la exposición de ideas novedosas en este trabajo resulta de la conexión de ideas de campos que no suelen considerarse conjuntamente.

Al concebir la economía como una "arquitectura" de esquemas de incentivos, una "arquitectura de mecanismos", es claro que avanzar en el entendimiento de los procesos de toma de decisiones está en el centro del interés económico. El objetivo y principal contribución es la presentación de una estructura del problema de elección del consumidor que integra la extensión de el espacio de consumo a espacios de Riesz, bajo diferentes estructuras de información, incorporando algunos comentarios de resultados experimentales. Al presentar los resultados sobre espacios de mercancías modelados mediante espacios de Riesz, se generalizan resultados típicos de la modelación tradicional y se presentan nuevas alternativas. Además de una lectura innovadora y global del problema del consumidor, en este trabajo se invita a ver que *la matemática, lo mismo que la poesía, no se trata de palabras, símbolos ni formulaciones complicadas, sino de la posibilidad de interpretar el mundo de una nueva manera*. Este enfoque desarrolla una alternativa en la enseñanza de la microeconomía más integral que pretende servir como material de estudio y referencia en un curso de posgrado en economía matemática o microeconomía avanzada.

Una motivación adicional al estudio y ajuste de las teorías del consumidor se encuentra en la revitalizada microfundamentación de modelos estructurales empleados para la toma de decisiones de política, por ejemplo, en modelos de equilibrio general dinámicos estocásticos empleados para apoyar las decisiones de política monetaria como el *PATACON* (*Policy Analysis Tool Applied to COlombian Needs*) del Banco de la República de Colombia [29], el RAMSES II del Banco central de Suecia (*Riksbank Aggregate Macromodel for Studies of the Economy in Sweden*), el NEMO (*Norwegian Economy MOdel*) de Noruega o el ToTEM *Terms-of-Trade Economic Model* de Canadá [30].

Desde la revolución marginalista en economía, la aproximación predominante a las preguntas relacionadas con el funcionamiento de los mercados ha sido aquella que modela problemas de elección. En el centro de dichos modelos se encuentran aquellos de consumo basados en la figura de un agente representativo que maximiza algún funcional de utilidad [51, p. 44, 68]. Cada vez más, en el creciente diálogo con otras ciencias sociales como la psicología y la sociología, se manifiestan críticas a este enfoque tradicional por su incapacidad de reproducir algunos resultados de la realidad o por suponer comportamientos de los agentes muy restrictivos [51, p. 136]. El campo interdisciplinar de las ciencias del comportamiento, de una manera todavía dispersa, ha provisto algunas observaciones de sesgos sistemáticos en la toma de decisiones de las personas “de carne y hueso” que no encuentran paralelo en sus contrapartes teóricas; sesgos y críticas que ya hacen parte de las corrientes principales como lo muestran las concesiones del premio del Banco de Suecia en ciencias económicas en honor a Alfred Nobel en 2002 a Daniel Kahneman y Vernon Smith [74], y en 2017 a Richard Thaler [75] por trabajos en estas direcciones. Las matemáticas, como plataforma para pensar de manera ordenada y clara las definiciones y relaciones entre conceptos más que como un espacio de virtuosismo abstracto, son un espacio que permite explorar vías de dialogo entre las modelaciones tradicionales y esas muchas variaciones que requieren los acercamientos a las aplicaciones. Este trabajo acompaña la fijación de ese andamiaje de intercambio entre los desarrollos de la modelación tradicional y algunos comentarios que surgen de resultados de la economía del comportamiento. Lo anterior se construye articulando los fundamentos de la teoría de elección racional del consumidor en el marco general de la teoría de la decisión presentado por Takemura [71]. Esta presentación permite integrar otros desarrollos como la extensión del análisis del conjunto de opciones del consumidor por medio de la teoría de espacios de Riesz, ampliamente dirigida por Aliprantis [2, 4, 1], la incorporación de comentarios de resultados experimentales y la discusión de algunos algoritmos de elección en situaciones de incertidumbre. El documento está organizado de la siguiente manera:

- En el Capítulo 1 se presenta de manera informal la estructura y componentes de los problemas de elección, y se presenta el caso de elección del consumidor como un caso particular de dicho problema. Además, se introduce la discusión sobre quién es, qué representa el agente representativo y su lugar en la teoría a medida que ha avanzado la economía.

- En el Capítulo 2 se llama la atención sobre la distinción entre dos significados asociados a la categoría “bienes”, que vienen de significantes diferentes en inglés: *commodities* como aquellos productos de naturaleza física, que se propone denominar “artículos”, y *good* como aquellos artículos que reportan algún provecho a los consumidores considerados. A nivel de la estructura del problema de elección, se definen los primeros cinco elementos del problema del consumidor: el conjunto de opciones (o de planes de consumo), los estados de la naturaleza, la distribución de probabilidad de dichos estados de la naturaleza (en caso de ser conocidos), el conjunto de resultados y la función valor. En el caso del conjunto de planes de consumo la definición se hace mediante los espacios de Riesz, un esquema que permite extender esta teoría de la elección a otros conjuntos de opciones además del tradicional espacio real finito-dimensional, como espacios de sucesiones o de funciones. Esta extensión permite incorporar la modelación de otras elecciones en la teoría como la elección de consumo intertemporal con horizonte infinito (de manera discreta o continua), la elección de consumo en tiempo continuo de un bien en un horizonte finito, o la elección de coberturas de riesgo mediante derivados financieros sencillos. Se exponen las nociones de función valor cómo esta puede servir de interpretación a funciones en otros contextos como el del juego de contribuciones voluntarias a un bien público o el puntaje Elo empleado para construcción de escalafones en ligas de ajedrez. Se presenta además una restricción institucional propia de la modelación tradicional del problema del consumidor que acota el conjunto de opciones disponibles: la restricción presupuestal. Ante la extensión del conjunto de opciones, es necesario extender la noción de “precio” de un plan de consumo, mediante las nociones de espacio dual y operador positivo. Finalmente, se cierra el capítulo con una discusión sobre la naturaleza de las mercancías.

- En el Capítulo 3 se presenta el último elemento del problema de elección: las preferencias. La existencia de unas preferencias “adecuadas” (en el sentido de que cumplan ciertos axiomas como la completitud y la transitividad) es lo que confiere el caracter de “racional” a los problemas del consumidor. Adicionalmente, se presenta la tradicional representación de dichas preferencias por medio de un funcional de utilidad. Esta representación está condicionada por la naturaleza del problema de elección según la definición de los demás elementos del problema de elección, de modo que la función de utilidad asumirá algunas carácterísticas de acuerdo al contexto del problema; por ejemplo, en el caso de elección bajo riesgo la concavidad de la función de utilidad estará asociada al perfil de aversión al riesgo del individuo.

- En el Capítulo 4 se discute el proceso de elección del consumidor en varios contextos en los que se puede dar la decisión, según la naturaleza del conjunto de opciones y la información disponible respecto a los estados de la naturaleza y su distribución de probabilidad. En particular se presentan un conjunto de criterios para la elección en situaciones de ambigüedad que no son tradicionales en economía, pero han sido discutidos en el campo de la investigación de operaciones. Si bien el listado de sesgos y heurísticas de elección es extenso y existen múltiples resultados reportados de manera consistente en la literatura de la economía experimental y de la economía del comportamiento, se comentan solo tres casos, ya tradicionales, a modo de ilustración en los que la racionalidad de las preferencias parece tener refutación empírica. Estas desviaciones reportadas de los resultados teóricos más que desalentar los propósitos de esta teoría, pueden interpretarse como invitaciones a nuevos desarrollos que incorporen un enfoque más preciso a otras realidades y, quizás, más útil. Como resultado adicional se propone una forma particular para la función de utilidad en el modelo de diferencias aditivas de Tversky [77] que modela el fenómeno de reversión en las preferencias.

- En el Capítulo 5 se presenta la situación de interacción en el contexto de economías de intercambio, inicialmente representada por medio de la tradicional caja de Edgeworth, que se extiende a casos diferentes al de dos consumidores y dos mercancías. Se demuestra una proposición de imposibilidad de la representación de una economía de tres consumidores y dos mercancías en una caja de Edgeworth de tres dimensiones o menos. Siguiendo los desarrollos de Aliprantis y otros, en esta extensión del conjunto de planes de consumo a través de espacios de Riesz se caracteriza la noción de equilibrio walrasiano y se muestra que se preservan los resultados básicos de optimalidad para economías de intercambio en estos espacios: el primer y segundo teorema del bienestar. La presentación en este trabajo es eminentemente esquemática, más que extensiva, una presentación que deja una estructura donde acomodar diferentes casos de elección del consumidor en una misma teoría con referentes de consulta adecuadas y suficientes, además de reflexiones conceptuales transversales a dicho problema.

- En el Capítulo 6 se presentan de manera resumida algunas consideraciones finales con direcciones en las que ha continuado o puede continuar el desarrollo de la teoría acá presentada.

- Finalmente se incluyen dos apéndices. Con una motivación de acompañamiento al estudios, en el Apéndice A se presenta un glosario de definiciones matemáticas de referencia rápida que acompañen algunos de los detalles presentados en los capítulos. Las definiciones incluyen referencias de consulta adicional para profundizar sobre dichos conceptos y sus relaciones. En el Apéndice B se presenta a modo de línea temporal un panorama histórico general del desarrollo de la teoría microeconómica en torno a la noción de agente transversal a la teoría del consumidor y se acompaña dicho recorrido con algunos de los principales hitos en el desarrollo de las herramientas matemáticas y algunos sucesos históricos. Sin pretender ser un panorama extensivo, se esboza allí las relaciones entre estos sucesos: cómo las herramientas matemáticas han antecedido y promovido ciertos desarrollos de la teoría económica, y con ellos la forma en la que se conciben las nociones de individuo y de equilibrio; al tiempo que la teoría microeconómica desarrollada es un resultado también del contexto social en el que se gesta.

Así, este trabajo contribuye al entendimiento de la teoría de economías de Riesz mediante la comparación de esta con la teoría de elección racional tradicional y las relaciones de estas con algunos de los resultados de la economía comportamental y experimental, en el marco de la elección del consumidor. Se suponen unas nociones previas de álgebra, cálculo fundamental, teoría de conjuntos y de análisis fundamental. Para repasar las nociones fundamentales de análisis se recomienda la *Introduction to analysis* de Maxwell Rosenlicht [59] y para una revisión de análisis infinito-dimensional el *Introduction to infinite dimensional analysis* de Aliprantis y Border [1]. Aunque no es necesario tener un conocimiento previo de teoría del consumidor, la lectura de este trabajo resultará de mayor provecho para quienes tengan unas nociones previas tales como las que se encuentran en cualquier libro de microeconomía básica e intermedia como los ya muy conocidos manuales de Hal Varian [79, 80] o los libros de Nicholson [55], y Nicholson y Snyder [67]. También se recomiendan los libros *Teoría microeconómica: elección racional* del profesor Francisco Lozano [45] y la colección de libros de equilibrio del profesor Sergio Monsalve [51, 52, 53]. Estos últimos brindan notas que relacionan diferentes avances teóricos y los contextualizan en sus momentos históricos.

David Stivens Siervo.
dssiervo@unal.edu.co
Enero de 2020.

Reconocimientos

Este trabajo ha sido escrito empleando la plataforma TeXstudio de la distribución MikTeX de LaTeXy las herramientas del editor en línea Overleaf. La mayoría de los esquemas son de elaboración propia o realizadas con la función libre de graficado de Wolfram Alpha. Agradezco de manera especial a quienes han sido mis mentores: Juan Galvis, Olga Manrique y Sergio Monsalve, cada uno de los cuales tanto desde su campo, como desde el apoyo personal, han influido mi aproximación a este problema y han hecho posible esta síntesis. También agradezco especialmente los comentarios orientadores del profesor Rafael Ahumada. Además, no tengo sino palabras de afecto para la excelentísima cohorte con quienes he podido discutir ideas y compartir algunas de mis ocurrencias. En particular, a Juan Camilo Lesmes que ha tenido incontable paciencia en esta pequeña aventura, le guardo el cariño que solo una relación de tanta procrastinación puede brindar.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

Problema de elección del consumidor

En este capítulo se presentan los elementos que caracterizan el problema general de elección, y en esta estructura se plantea el problema de elección del consumidor tradicional. Además, se revisa la evolución de la noción del agente representativo que ha sido crucial en la modelación usual en economía.

1.1. Teoría del consumidor: un poco de contexto

¿Quiénes son los consumidores? Son sujetos de elección en un proceso de intercambio que no poseen medios de producción. Se piensa a los consumidores usualmente como las personas u hogares[1]. De una manera que puede sentirse desde lo ingenuo hasta lo macabro, se plantea la existencia de un "consumidor", una categoría que en principio deja de lado las posibles distinciones de muchas dimensiones de las personas, grupos de personas y organizaciones, que descarta la individualidad y agrupa entes tan heterogéneos en rasgos, intereses y procesos de decisión como lo son un estudiante a final de mes y una entidad gubernamental de planeación ambiental. Sus decisiones son decisiones de compra o intercambio que suceden en una región determinada (que es un subconjunto que hace parte de una partición del espacio físico) y en una fecha determinada (que, a su vez, es un subconjunto que hace parte de una partición del lapso considerado).

¿Cómo toman decisiones los consumidores? Al influir factores culturales, psicológicos, ambientales y económicos en los procesos de toma de decisiones y además al considerar que estos aspectos varian no solo entre individuos, sino a través del tiempo, el entendimiento de estos procesos es complejo. Sin embargo, dentro de ciertas consideraciones, parece ser posible hallar algunas regularidades en los comportamientos que resultan útiles para la formulación de políticas o un mejor entendimiento de los mercados.

Para discutir la pregunta del proceso de toma de decisión de los consumidores conviene tener definiciones suficientemente precisas de lo que se entiende por un consumidor, por la decisión de interés, y de cada uno de los elementos involucrados. El modelo que se presenta a continuación es un modelo de "agente representativo", una de las características del análisis por medio del individualismo metodológico que ha sido típico de la economía [39].

Al hablar de *la* teoría del consumidor en economía, necesariamente se habla de una teoría de la decisión fundamentada en la idea de un agente representativo [39]. Siguiendo una visión "atomista" del mercado y de la economía[2], típicamente se construyeron las explicaciones sobre el funcionamiento de los mercados

[1] Hogares en los que sus miembros estén de acuerdo en sus preferencias, porque de no ser así se podrían presentar situaciones como las de la paradoja de Condorcet, o donde los conflictos se resuelven de manera dictatorial.

[2] Este enfoque, que se llamaría *individualismo metodológico*, fue en buena medida consecuencia de la influencia de la visión de las ciencias puras regentes durante el siglo XVIII en la que el funcionamiento de los sistemas se puede explicar mediante la agregación del comportamiento de sus partes según mecánicas identificables. Esto fue especialmente cierto desde la revolucion

a partir de una modelación de sus componentes estructurales y de la agregación de los efectos de las decisiones involucradas: por el lado de la oferta, mediante las decisiones de los oferentes (productores o no), y por el lado de la demanda mediante las decisiones de los consumidores.

Según Hartley [31], la primera aparición de la noción de agente representativo se encuentra en los *Principios de Economía* de Marshall. Ahí, no se trata de un agente "medio" (en los sentidos de promedio o mediana), ni un "gran agente" que realiza toda la producción. Marshall concibió al agente representativo como una solución al problema del costo de la industria que determinaría el precio de un bien en el mercado, frente a la existencia de firmas heterogéneas de tamaños diferentes con estructuras de costos dispares. A diferencia de buena parte de la economía moderna, que plantea que el precio está dado por el costo marginal de la firma menos rentable, él admitía la posibilidad de firmas que en un primer momento aceptarían ganancias negativas con tal de ganar una posición en el mercado, esperando tener beneficios positivos después, con lo que el precio podía estar por debajo del costo marginal de estas firmas expectantes por entrar y por encima de los costos de las firmas establecidas. Tal como señala Hartley, el "*propósito principal* [de Marshall] *fue evitar tener que asumir que todas las firmas eran similares*". Lo anterior va en dirección opuesta a cómo suele presentarse la noción de agente representativo hoy (más allá de que se opine que una u otra posición está mal).

Por decir poco, el empleo de la noción de una firma representativa por parte de Marshall fue fuerte y contundentemente criticado. Algunas críticas que se hacen hoy a ese instrumento de agente representativo son:

- No es claro: ¿qué es exactamente lo que el agente representativo representa? Como pregunta Hartley, "¿en un grupo de agentes con, digamos, 100 características, cuántas de esas características deben ser reflejadas por el agente representativo?"[31, p. 175].

- Los modelos que involucran un esquema de agente representativo suelen tener problemas al representar crecimiento. Bien por que se asuma linealidad en la modelación o por que el número de agentes se determine de manera exógena [31, p. 172].

- Se niega la heterogeneidad o se oculta su relevancia.

Este modelo de agente representativo en economía, el *Homo Economicus*, ha evolucionadeo en tres fases hasta ahora, en orden cronológico: una era filosófica, una era llamada "neoclásica"[3] y finalmente una era estratégica [54]:

- **Era filosófica:** el surgimiento del *homo economicus* se puede encontrar tan temprano como en el ensayo *"On the definition of political economy and on the method of philosophical investigation in that science"* de John Stuart Mill de John Stuart Mill 1836, donde le considera "solamente como un ser que desea poseer riqueza y que es capaz de juzgar la eficacia comparativa de los medios para obtener tal fin". Incluso en Smith, en su *"Investigación sobre la naturaleza y causa de la riqueza de las naciones"* de 1776 [65], se encuentra la idea de que la búsqueda del interés propio es parte de las motivaciones del actuar de las personas en los mercados, y se asocia dicha búsqueda "egoista"con el surgimiento espontáneo del orden y el bien público, bajo condiciones de libre mercado, división del trabajo y libre competencia.

marginalista. Hoy en día enfoques complementarios han surgído, por ejemplo, desde enfoques de complejidad que asumen el comportamiento de el todo como más que símplemente la suma de sus partes.

[3] Colander [17] presenta unas objeciones al uso de este término como clasificación de una corriente. No obstante, en este trabajo se adopta para definir *grosso modo* una época.

- **Era neoclásica:** aquí la noción de maximización del placer toma la forma de maximización de utilidad (o beneficios). En este punto no se hacen consideraciones de lo que debería ser preferido, sino que se toman esas preferencias como dadas. Se incorpora un método deductivo y con este método viene el supuesto de perfecta racionalidad. Este individuo puede hacer una perfecta valoración de las mercancías y escenarios posibles, sin consideraciones éticas, o personales (de creencias, por personalidad, valores o emociones). Las principales críticas señalan que el modelo del individuo perfectamente racional va en contra de lo que parece observarse. La gente no aprende rápido: (1) se suelen cometer varias veces los mismos errores, (2) hay otras motivaciones aparte del interés propio, como la norma social, (3) la información con frecuencia es incompleta. Hay quienes piensan que no se debe analizar solo la acción, sino lo que le precede: el propósito.

- **Era estratégica:** llega principalmente con la teoría de juegos y la incorporación en el análisis de situaciones estratégicas, donde el beneficio de cada individuo está determinado, al menos en parte, por su rol en el juego, las decisiones de otros participantes y la forma en la que se da la interacción con ellos.

La construcción del modelo de decisión del consumidor dentro del marco más general de la teoría de la decisión adopta la racionalidad de la era neoclásica y la visión general del individuo económico que surgió en la era filosófica sin cerrar la posibilidad a modelar situaciones de interacción estratégica o social. Suavizar supuestos del modelo tradicional y hacer comentarios desde la evidencia experimental y comportamental son posibles dentro de esta presentación. En el Anexo B se encuentra un despliegue de un panorama de los avances y obras principales en el desarrollo de la teoría.

1.2. El papel de la modelación en el caso de una teoría del consumidor

Para orientar la discusión considere la siguiente situación hipotética. Si al ir en un carro una señal de tránsito indica que el pueblo de destino se encuentra a 90 kilómetros y el velocímetro marca 60 kilómetros por hora, ¿en cuánto tiempo se llegará al destino? La mayoría concluiríamos que *"en una hora y media"* sería *la* respuesta. Inmediatamente después, o de manera paralela a lo anterior, la experiencia nos recordaría que esos cálculos no resultan exactos (suele llegarse un poco antes o un tanto después, muy pocas veces exactamente tras 90 minutos) y se podría refinar nuestra respuesta a *"como en una hora y media más o menos"*. Es normal, por lo menos debido a que el lugar de destino generalmente es un lugar diferente a aquel marcado a la entrada del pueblo a 90 kilómetros exactos y por que la velocidad a la que anda el carro no es constante. Si hay un trancón no esperado o un accidente en la vía, seguramente esa aproximación resultará equivocada. Podemos entonces decir que se llegará al destino *"en una hora y media más o menos, si nada extraordinario ocurre"*. De tener un compromiso se podría estar dispuesto a correr el riesgo de asegurar que se llegará "en dos horas" con el ánimo de ser prudente y tener un margen de maniobra respecto a la primera estimación. Si se sabe que no suelen haber trancones en esa vía, y dado que los accidentes resulten poco probables, se podría dar por válido y correcto tomar decisiones sobre esa estimación de *"entre una hora y media y dos horas, si nada extraordinario ocurre"*.

Parte del alcance de la economía es el ejercicio de la economía política en relación con el diseño de las instituciones, esas reglas de juego que conduzcan "a través de las fuerzas de los incentivos" a un resultado deseado, generalmente alguna interpretación de bienestar. Para poder hacer ello suele convenir tener un modelo, una representación simplificada del mundo, tal como esa fórmula que dice que la velocidad es el cociente entre el desplazamiento y el tiempo, que por tanto indica que el tiempo requerido será el cociente entre el desplazamiento y la velocidad. Este enfoque metodológico de aproximación a los problemas mediante la formulación de modelos puede identificarse como la característica central de la economía moderna [17, p. 137]. Considerando que una buena parte de las relaciones que llamamos "económicas" tienen lugar en los mercados, modelos adecuados para esas relaciones serían modelos de mercado. Desde una aproximación "atomista", se construyen modelos del funcionamiento de las partes que integran el mercado: consumidores, vendedores y normas (formales e informales), y luego se integran en un modelo que da cuenta de fenómenos emergentes en la agregación. Así, parece tener sentido la formulación de modelos del proceso de elección de los agentes, entre ellos de los modelos de los consumidores, que contribuyan en esa articulación de la modelación de mercados que permita el diseño de instituciones como la formulación de políticas.

No se pretende que el mundo se comporte según el modelo, de la misma manera que no se pretende que el mundo funcione bajo movimientos con velocidad uniforme. Los resultados deben tomarse con una cierta flexibilidad sobre los parámetros, como ese "más o menos" de la respuesta anterior, pero no por eso los modelos carecen de utilidad. También deben tenerse en cuenta las restricciones de aplicación del modelo, lo mismo que con la aproximación del tiempo en una zona donde suelen haber trancones. No porque un supuesto no se cumpla se debe desechar inmediatamente el modelo; en su lugar debe evaluarse el impacto de dicha variación en las conclusiones del modelo. En economía, se contrastan empíricamente los supuestos y pronósticos de los modelos mediante, por ejemplo, ejercicios econométricos, estudios de caso o diseños experimentales. No hay un único modelo válido que cobije la realidad a satisfacción de una manera "al menos tan buena" como todos los demás modelos, en todos los posibles aspectos.

1.3. Elementos del problema de elección del consumidor

De acuerdo a Takemura [71], decidir puede definirse como "el acto de elegir una alternativa entre un conjunto de alternativas". De manera general, un problema de elección para un agente, y en particular para un consumidor, está caracterizado por:

1. **Un conjunto de opciones excluyentes**, también llamado conjunto de oportunidades, denotado por A, con $a \in A$ como una opción. En el caso del consumidor, este sería el conjunto de planes de consumo, excluyentes entre sí. Este conjunto puede ser distinto para cada consumidor; por ejemplo, puede ser una especificación de cantidades de diferentes mercancías o una sucesión de especificaciones de coberturas frente a riesgos financieros por medio de opciones. Este conjunto de planes de consumo puede o no ser de dimensión infinita.

2. **Un conjunto de estados de la naturaleza** que el consumidor considere relevante para su consumo **y una probabilidad** asociada a dicho conjunto de estados. Se denota esta dupla por $(\Theta, \pi(\cdot))$, donde Θ es un conjunto medible y π es una probabilidad[4] definida sobre Θ. Esta distribución de probabilidad puede ser resultado de algún proceso de formación de expectativas. Ejemplos del conjunto de estados pueden ser las realizaciones de alguna tasa de interés de referencia, distintos estados del clima o del tráfico vehicular en una ciudad en un momento determinado, así como expectativas sobre los posibles estados, distribuciones de probabilidad esperada o estimada por el individuo.

3. **Un conjunto de resultados** denotado por X, algunas veces también llamado conjunto de consecuencias [5], y una **función valor**, $f : A \times \Theta \to X$, que relaciona las combinaciones de estados de la naturaleza y las opciones (planes de consumo) con dichos resultados. Si hay certeza de los estados de la naturaleza que van a suceder, el espacio de resultados puede coincidir con el espacio de planes de consumo, y la función de valor sería una función identidad. En algunos casos sencillos en donde $A = \{a_i\}_{j=1}^{L}$ y $\Theta = \{\theta_k\}_{k=1}^{M}$ son finitos, puede presentarse f como una matriz $\Gamma = \{\gamma_{ik}\}$, donde a cada alternativa de elección j ocurrida en cada posible estado de la naturaleza k le es asignado un resultado $\gamma_{jk} = f(a_j, \theta_k)$ que puede ser interpretado como un pago o un costo.

[4]Para una introducción al concepto de probabilidad véase [11, p. 8].

4. **Una relación de preferencias** para cada individuo j que "ordene" el conjunto de resultados, estableciendo comparaciones entre pares de opciones que le permitan decidir qué alternativa del conjunto de opciones elegir. Si el resultado $\mathbf{x}$ se considera "al menos tan bueno como " el resultado $\mathbf{y}$, se denota $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$. Típicamente esta relación de preferencias viene acompañada por una representación funcional, la denominada *función de utilidad*, que es una función $u_j(\cdot)$ que cumple que $u_j(\mathbf{x}) \geq u_j(\mathbf{y})$, toda vez que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

Los elementos de la teoría de la decisión como se presentan en este trabajo son resumidos en la Figura 1.1. Esta presentación es más general que la que típicamente se presenta en un curso de microeconomía. Usar este enfoque, además de ordenar los elementos del problema que nos interesa, permite dar un panorama amplio de distintas alternativas de modelación en la teoría de la elección del consumidor. Al final del Capítulo 4 se revisa esta estructura tras la discusión de sus elementos.

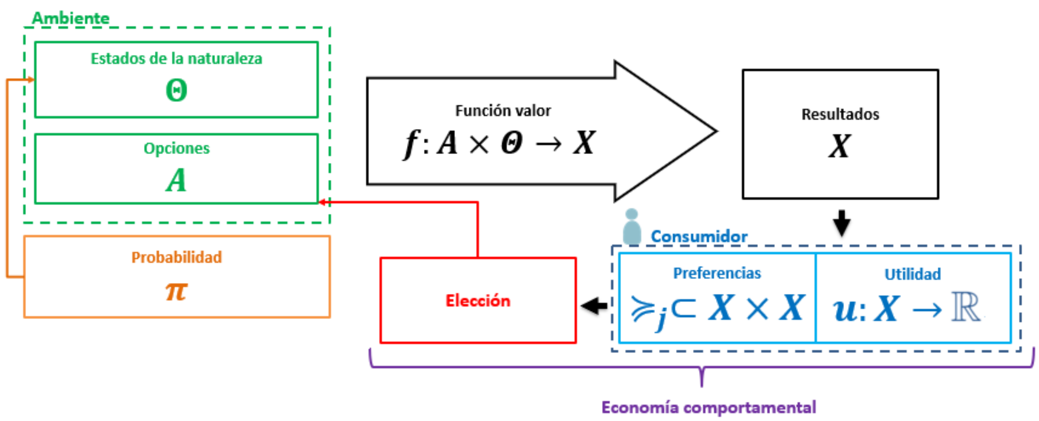

Figura 1.1: Elementos del problema general de decisión.

Uno de los problemas centrales en economía, si no es que el problema central, ha sido el problema de elección racional y, como caso particular, el problema de elección del consumidor. Este problema ha sido concebido de diferentes maneras a medida que ha evolucionado la forma en que la economía piensa sus agentes: desde una visión social y hasta moral, pasando por la tradicional visión de agente representativo, hasta nuevas visiones de agentes con nuevas racionalidades. Esta evolución de la noción de agente representativo, como el de las teorías económicas en general, ha venido acompañada y ha propiciado tanto por el desarrollo de herramientas matemáticas que permiten nuevas perspectivas en el análisis, como por los contextos sociales y ánimos políticos que han acompañado el desarrollo de la teoría.

1.4. Bitácora del capítulo

En este capítulo se revisa la estructura del problema de elección del consumidor bajo el marco general de la teoría de la elección que permite una integración natural de varios desarrollos dispersos y no-estandar alrededor del problema del consumidor. Finalmente, se presenta un marco que sirve de plataforma a la discusión del funcionamiento de mecanismos de asignación como el mercado y su eventual diseño e intervención. En los capítulos siguientes se presentan los diferentes elementos de la teoría de elección racional del consumidor bajo la estructura ofrecida por la teoría de la decisión presentada en este capítulo y, finalmente en el Capítulo 5, se presentan la estructura de las economías de intercambio y la extensión al caso de las economías de Riesz de los resultados de eficiencia.

Capítulo 2

Opciones, escenarios y resultados: mercancías y planes de consumo

En este capítulo se caracterizan las opciones de elección del problema del consumidor junto con los planes asociados al consumo de una o varias mercancías. Siguiendo el desarrollo de Aliprantis, Brown y Burkinshaw [2], se introducen los espacios de Riesz como espacios de elección que generalizan los casos tradicionales de elección del consumidor en dimensión finita y de dimensión infinita. Además, se da una introducción a los diferentes estados de información en que se puede dar la elección, que puedan resultar relevantes para la decisión y que condicionan el espacio de opciones. Finalmente, se define la restricción presupuestal que limita y termina de caracterizar el conjunto de opciones entre las que elige el consumidor.

2.1. Mercancías y planes de consumo

Hay artículos (objetos tangibles) y actividades cuyo consumo resulta de alguna utilidad para algunas personas, en tanto satisfacen alguna necesidad o deseo. En el presente trabajo nos referimos al conjunto de artículos que generan utilidad como **bienes** y a las actividades que generan utilidad como **servicios**. Juntos forman lo que en inglés se denominan *commodities* [49, p. 17]. En español suele emplearse el término “bien” de manera indistinta para referirse a artículos tangibles que generan utilidad unas veces y a todos los productos que generan utilidad (incluyendo a los servicios) otras[1]. En el presente trabajo, a dicho conjunto de bienes y servicios no se le impondrá un rótulo más que el mismo de **bienes y servicios**.

Contrario a los bienes, existen aquellos objetos y servicios cuyo consumo u oferta genera algún malestar, una des-utilidad, para algunos individuos o grupos de personas; estos son los llamados **males** [80, p. 41]. Al igual que los bienes y servicios, los males pueden ser actividades o artículos[2]. El caracter de un artículo o actividad de ser un bien, servicio o mal dependerá de la valoración subjetiva que haga el consumidor en cuestión. Dicho juicio no es explicado por esta teoría, pero es capturado y caracterizado en parte por la noción de preferencias que será discutida en el Capítulo 3.

La posibilidad del consumo de bienes, servicios y males se da en el marco de unas reglas de intercambio. Más precisamente, se puede decir que dicho intercambio se refiere a los derechos de propiedad y uso de dichos bienes, males y servicios. No se consideran en este trabajo situaciones en las que el agente produce para su consumo, sino únicamente aquellas situaciones en las que él acude a algún espacio para adquirir

[1]Este fenómeno es similar al sucedido con la palabra *economía*, en sus sentidos de: por un lado, mecanismo de organización de las actividades de producción, distribución y consumo, en particular de la sucedida en un contexto o región determinada (*economy*); y por otro del estudio del funcionamiento de estos mecanismos (*economics*), sean o no de mercado.

[2]Nótese que en este marco el antónimo de “males” no es “bienes”, sino “bienes y servicios”. Como ejemplos típicos de males se tienen las horas de trabajo y el grado de contaminación del aire en una zona de una ciudad medido por la concentración de materia particulada con tamaño menor a 2,5 micrómetros ($PM_{2,5}$).

bienes a cambio de otros bienes. Para un tratamiento de economías con producción véase Aliprantis, Brown y Burkinshaw [2, cap. 4], y Mas-Colell, Whinston y Green [49, cap. 15, 16].

Definición 2.1. ***Mercado:*** *Es un espacio físico o virtual donde se intercambian derechos de propiedad y uso de bienes, servicios y males.*

Se suele pensar que en un mercado se lleva a cabo la compra-venta de productos. Esto es cierto sobretodo si existe un tipo de bien particular: dinero, siendo la compra, la cesión de dinero a cambio de los derechos de uso o propiedad un artículo o servicio, y la venta, la cesión de los derechos de uso o propiedad sobre un artículo o actividad a cambio de dinero. Una selección de bienes, servicios y males son intercambiados en el mercado, y es a esta selección a la que llamaremos **conjunto de mercancías.** Una representación de la relación entre los conceptos de bienes, servicios, bienes, males y mercancías se encuentra en la Figura 2.1.

Definición 2.2. ***Mercancía:*** *es cualquier artículo o actividad cuyos derechos de uso o propiedad sean objeto de intercambio.*

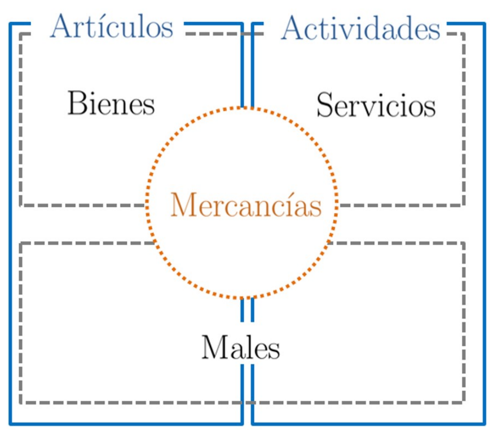

Figura 2.1: Diagrama de conceptos: mercancías, bienes, servicios y males.

Una de las definiciones que más se encuentra en la literatura microeconómica es la de mercancía en el sentido de Arrow y Debreu [20]. Según esta representación de la economía, se particiona el espacio en un número finito de regiones, y el tiempo en un número finito de periodos (que podemos llamar fechas). Esta partición puede obedecer a las características de la actividad económica que se está modelando. Las regiones y las fechas pueden ser tan extensas o reducidas como se desee. Así, una mercancía es un artículo o actividad, definido por sus características, la región y la fecha en la que se encuentre disponible, cuyos derechos de uso y propiedad son potencial objeto de intercambio.

Definición 2.3. ***Mercancía Arrow - Debreu [20, p. 32]:*** *es una mercancía completamente determinada por sus características, la fecha y la región donde está disponible para su consumo.*

Esta distinción entre distintas regiones da lugar a algunas teorías de comercio regional e internacional, en cuyo caso las relaciones de precios corresponden a los términos de intercambio; y la distinción entre fechas da lugar a algunos modelos de economía financiera, en los que la relación de precios corresponde a una relación de descuento [79, p. 363]. Típicamente los consumidores deciden cuáles mercancías consumir y cuáles no, deciden además cuánto y cómo consumir de cada mercancía; sin embargo la decisión no se hace entre el consumo aislado de mercancías, sino sobre toda una lista de "planes de consumo". En general la decisión a la que se enfrentan los consumidores es la de cuál conjunto de mercancías, y en qué grado consumir cada una.

Definición 2.4. ***Plan de consumo:*** *es una especificación de consumo de cada mercancía.*

Como objeto matemático puede representarse, por ejemplo, por una cantidad, una función o un vector[3], según el contexto particular del problema del consumidor. En este trabajo se presentan particularmente, como espacios de mercancías, subconjuntos de espacios de Riesz (véase Definición 2.5). Estos permiten un desarrollo más general de la teoría de elección, al permitir otras modelaciones de conjuntos de elección, además del espacio euclidiano tradicional, que incluyen espacios de dimensión infinita como por ejemplo espacios de funciones que son usados en modelación dinámica y estocástica [7, cap. 1,2], así como la extensión de resultados como los teoremas del bienestar presentados e el Capítulo 5.

2.2. Espacios de Riesz como espacios de mercancías

Se define ahora un espacio de Riesz y se presentan diferentes ejemplos que ilustran cómo esta noción se acomoda a diferentes contextos de la modelación del espacio de opciones.

Definición 2.5. ***Espacio de Riesz o malla vectorial [2, p. 88]:*** *sea E un espacio vectorial real topológico parcialmente ordenado*[4]*. Si además E es una malla*[5] *(esto es que cualquier subconjunto finito tiene supremo) se dice que E es un espacio de Riesz. Se denota por $x \vee y$ al supremo entre los elementos de $\{x, y\}$. De manera análoga, se denota por $x \wedge y$ al ínfimo de los elementos de $\{x, y\}$.*

Otros nombres que reciben los espacios de Riesz son *K-lineales* o *espacios lineales semi-ordenados* [47, p. 48]. En la Figura 2.2 se muestra un esquema de un subconjunto de una malla cuyo orden está representado por los vínculos y la posición vertical. Cualesquiera par de puntos en dicha figura tienen un supremo: note que $a \vee c = c$, $b \vee d = e$ y $c \vee f = h$.

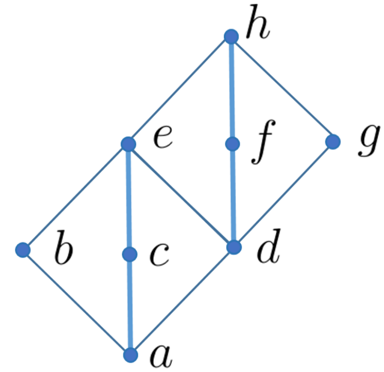

Figura 2.2: Ejemplo de un subconjunto de una malla y su relación de orden.

Como referencias a la teoría de espacios de Riesz se sugieren Aliprantis y Brown [1, cap. 8] y Luxemburg y Zaanen [47]. A continuación se presentan algunos ejemplos de espacios de Riesz con contextos en el marco de esta teoría de elección de consumo.

[3]En la modelación microeconómica tradicional en la que los planes de consumo son especificaciones de las cantidades consumidas de diferentes mercancías es común denominar también a dichos planes de consumo **canastas** o **cestas de consumo**.

[4]Se recuerda que un conjunto parcialmente ordenado es un conjunto dotado de una relación binaria reflexiva, transitiva y antisimétrica, no necesariamente completa. Véase [45, p. 28] y la Definición A.13 del Glosario matemático.

[5]*Lattice* en inglés. Véase Definición A.18 en el Glosario matemático.

2.2.1. Espacio euclidiano

El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ puede dotarse con un orden componente a componente de la forma

$$x = (x_i)_{i=1}^n \geq y = (y_i)_{i=1}^n, \text{ si } x_i \geq y_i, \text{ para todo } i.$$

Además, se definen las operaciones usuales de suma y producto por escalar como

$$x + y = (x_i + y_i)_{i=1}^n \quad \text{y} \quad \lambda x = \{\lambda x_i\}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Con lo anterior, $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Riesz. En este espacio se encuentra el supremo de dos vectores x, y, denotado como $x \vee y$, tomando $x \vee y = (\text{máx}\{x_i, y_i\})_{i=1}^n$.

Con frecuencia se asocia el consumo de cada mercancía con un número real. Si tomamos que las decisiones de los consumidores se dan sobre las cantidades que consumen de cada bien, podría pensarse que las decisiones de los consumidores se pueden representar por un listado de dichas cantidades, es decir por un vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Las unidades de medida de dichas mercancías son arbitrarias y dado que se supone un continuo en estas cantidades (lo que es equivalente a suponer que las mercancías son perfectamente divisibles), dichas unidades con frecuencia resultan poco relevantes. Al admitir cualquier vector de ese espacio como factible se supone que hay una cantidad finita (n) de bienes conocida y que los bienes son perfectamente divisibles. Así, en este espacio se modelan de manera adecuada cestas de consumo de finitas mercancías conocidas perfectamente divisibles. Con frecuencia, para hacer el análisis sobre una mercancía, se usa el espacio de dos mercancías $\mathbb{R}^2$, tomando la otra dimensión para medir las cantidades de un bien que representa "todo lo demás", como si se tratara de un bien compuesto [80, p. 21]. Otra situación que se modela bien es estos espacios es cuando se considera cada una de las componentes del vector como puntajes de algún atributo de la opción que se considera, así cada una de las opciones se especifica como un vector real de características.

2.2.2. Conjunto de las funciones continuas y de las funciones acotadas

Sea $C(Y)$ el conjunto de funciones de valor real continuas definidas sobre un espacio topológico Y y sean $f, g \in C(Y)$. Ordenando punto a punto este conjunto, es decir,

$$f \geq g \quad \text{siempre que} \quad f(y) \geq g(y), \text{ para todo } y \in Y,$$

y considerando las operaciones usuales de suma de funciones y producto por escalar:

$$f + g = f(y) + g(y), \quad \lambda f = \lambda f(y), \text{ para todo } y \in Y, \lambda \in \mathbb{R},$$

se entiende este conjunto de funciones como un espacio de Riesz. El supremo de dos funciones se encuentra como

$$(f \vee g)(y) = \text{máx}\{f(y), g(y)\}, \text{ para todo } y \in Y.$$

Note que la relación de orden definida en este caso no es completa, por lo que puede haber funciones no comparables. En el caso particular que $Y = \mathbb{R}_+$, puede interpretarse cada función como un plan de consumo distribuido a lo largo del tiempo. En ese caso la consideración de orden refleja como mayor un plan de consumo en el que se puede consumir más en cada momento del tiempo. En este espacio, en principio, no se hacen consideraciones sobre la suavidad del consumo, es decir, no se hacen consideraciones sobre el comportamiento de las razones de cambio en los planes de consumo a lo largo del tiempo.

2.2.3. Espacio de las funciones definidas por partes lineales

Para alguna partición finita $\{I_i\}$ de un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, considere el espacio de las funciones continuas compuesta por funciones lineales en cada uno de las partes de la partición. En este espacio se definen las operaciones vectoriales y de malla como en el espacio de funciones reales continuas. Más formalmente, el conjunto

$$T = \{f \text{ continua en } I | f(x) = \{f_i = \alpha_i + \beta_i x; \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \quad \text{ para todo } x \in I_i, \text{ para cada } i\}\}$$

forma un espacio de Riesz, tomando el supremo de la misma forma que en el conjunto de las funciones continuas. En este espacio se pueden modelar combinaciones de opciones financieras tal como se muestra en el artículo de Charles Smithson *"A LEGO approach to financial engineering"* de 1987 [66] en el que se muestran los perfiles de pago de diferentes intrumentos financieros para la gestión del riesgos.

A continuación, en la Figura 2.3, se muestran dichos perfiles de pago para los instrumentos fundamentales en diferentes escenarios, esto es, cómo cambia el valor percibido por el inversionista ΔV si hay un cambio en el precio del activo subyacente ΔP. Por ejemplo, al comprar un *forward* se adquiere el derecho y obligación de comprar en una determinada fecha futura una cantidad acordada de cierto bien o servicio a un precio también acordado previamente p^*. Conforme mayor sea la diferencia entre el precio de mercado del bien o servicio en la fecha de la transacción y el precio acordado, $\Delta P = p_t - p^*$, mayor va a ser el valor percibido por el inversionista porque el precio de mercado va a ser mucho mayor que el precio al que está obligado a comprar la mercancía; en cambio, cuanto menor sea la diferencia, sobre todo cuando esta diferencia sea negativa, menor será el valor percibido por el inversionista. Esto se puede ver en el primer panel de la Figura 2.3. Si bien la compra de este instrumento pudiera parecer una apuesta, puede beneficiar a los consumidores que presentan aversión al riesgo, véase Definición 3.17. En el caso de la compra de una opción se adquiere el derecho, mas no la obligación de realizar la transacción. Hay opciones que otorgan el derecho a comprar una determinada cantidad de cierta mercancía a cierto precio (opciones *call*), pero si en la fecha de la transacción el precio de la mercancía es más bajo que el precio acordado en el mercado, el poseedor de la opción puede no ejercer el derecho y comprar la mercancía en el mercado. Así mismo hay opciones que otorgan el derecho a vender cierto producto en determinadas condiciones de tiempo y precio (opciones *put*). Por supuesto, quienes venden las opciones se obligan a comprar o vender bajo las condiciones pactadas[6]. Una aplicación clásica de estos instrumentos se encuentra en Radner [58] que considera el caso en el que hay mercados incompletos y las transacciones se logran mediante el intercambio de futuros sobre las mercancías.

2.2.4. Espacios l_p y de las sucesiones convergentes a cero

Para $1 \leq p$, sea l_p el espacio de las sucesiones $\{x_i\}_{i \in I}$ tales que $\sum_I |x_i|^p < \infty$ y c_0 el espacio de las sucesiones convergentes a cero con las operaciones usuales. Si $\epsilon = \{\epsilon_\alpha\}, \eta = \{\eta_\alpha\}$ entonces

$$\epsilon + \eta = (\epsilon_i + \eta_i)_{i=1}^{\infty}, \quad \lambda\epsilon = (\lambda\epsilon_i)_{i=1}^{\infty},$$

son espacios de Riesz, tomando el supremo

$$\eta \vee \epsilon = (\text{máx}\{\epsilon_i \vee \eta_i\})_{i=1}^{\infty}.$$

El espacio de las sucesiones convergentes a cero permite representar situaciones donde se pueda agotar un recurso natural en un horizonte infinito de tiempo. Por su parte, las sucesiones l_p permiten modelar planes de consumo con horizonte de tiempo infinito o asignación de consumo en distintas regiones.

[6] En realidad quien vende la opción cobra una prima, una cantidad fija, por el riesgo que asume.

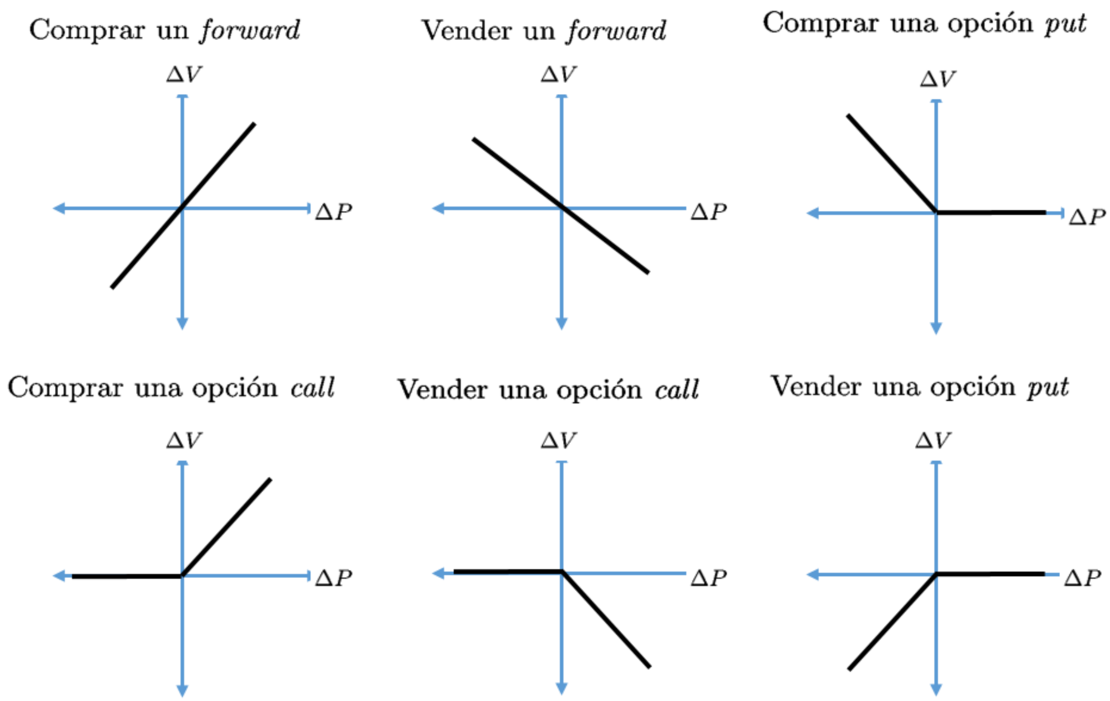

Figura 2.3: Perfiles de pagos de diferentes activos financieros. (Smithson, 1987).

2.2.5. Malla de los enteros

Aunque este no es un espacio vectorial real y por tanto no es un espacio de Riesz de acuerdo a la Definición 2.5, no deja de ser un conjunto interesante de considerar para las aplicaciones sobre la teoría para bienes que no son divisibles. Este espacio se considera con las operaciones tradicionales y tomando como campo del espacio a los enteros. En la Figura 2.4 se encuentra una representación para la malla de los enteros de dos dimensiones y en particular un plan de consumo en el que se eligen cinco unidades de una mercancía y tres de la otra.

Algunas aplicaciones en el contexto de asignaciones de bienes indivisibles son los juegos de emparejamiento como los enunciados en Quint [57] o los juegos de permutación como en Tijs *et al.* [76].

2.3. Observaciones sobre espacios de mercancías de dimensión infinita

Cuando el espacio de opciones es un espacio vectorial de dimensión finita el tratamiento es similar al empleado con $\mathbb{R}^n$. Aliprantis, Brown & Burkinshaw [2] hacen el siguiente listado de precauciones que se deben tener en el manejo de espacios de mercancías de dimensión infinita. Se reproduce aquí de manera casi literal:

1. *No-unicidad de la topología:* a diferencia de los espacios de dimensión finita, los espacios vectoriales de dimensión infinita arbitrarios pueden admitir más de una topología lineal[7].

[7] Una topología τ en un espacio vectorial E se dice lineal si las operaciones de producto por escalar y adición son $\tau-$continuas, esto es, si para todos $x, y \in E$, y α escalar, se tiene que las funciones $(x, y) \mapsto x + y$, y $(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$ son continuas. Véase [1, p. 166] y la Definición A.11.

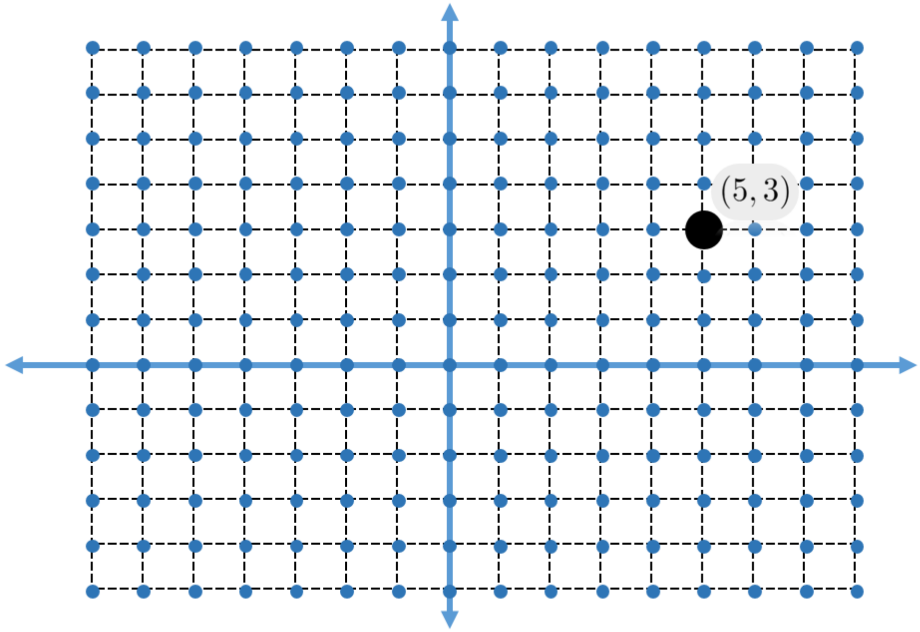

Figura 2.4: Malla de los enteros de dos dimensiones.

2. *Multiplicidad de los espacios duales:* a diferencia de los espacios de dimensión finita, los espacios de dimensión infinita pueden tener varios duales, que en el problema de elección del consumidor se manifiesta en que hay diferentes formas de definir los funcionales de valor de los planes de consumo.

3. *Falta de continuidad conjunta de la función de evaluación:* la función de evaluación $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \mapsto \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ ya no es conjuntamente continua. Esto tiene que ver con la distinción entre **dual algebraico** y **dual topológico**. En dimensión finita, el conjunto de los funcionales lineales (dual algebraico) corresponde al conjunto de los funcionales lineales continuos (dual topológico). En dimensión infinita el dual topológico es un subconjunto propio del dual algebraico, esto significa que pueden existir funcionales lineales que no son continuos.

4. *No-compacidad de intervalos de orden:* las "cajas" de espacios de dimensión infinita no son necesariamente conjuntos compactos. Más aún, ni siquiera son necesariamente débilmente compactos. Un ejemplo presentado por Aliprantis y Border [1, p. 549] es el par Riesz $\langle L_\infty, L_1^d \rangle$ (Véase Definición 2.9) donde ningún intervalo de orden es compacto.

5. *Interior vacío de cono positivo:* el cono positivo[8] E^+ de un espacio de Riesz infinito-dimensional no necesariamente tiene puntos interiores. Aliprantis y Border [1, p. 363] presentan como ejemplo que los espacios $L_1(\mu)$ de dimensión infinita tienen el interior de sus conos positivos vacíos. Esta observación es causa de la distinción enla construcción de la demostración del segundo teorema del bienestar en el caso de dimensión infinita.

6. *Pérdida de propiedad*[9]*:* mientras que una preferencia monótona en un cono positivo de un espacio vectorial finito-dimensional es automáticamente uniformemente-propio (véase Definición 3.13), en un espacio infinito-dimensional no necesariamente se tiene este resultado. Un ejemplo de unas preferencias que aunque son monótonas no tienen esta propiedad se encuentra en [3, p. 227].

[8] Un cono es un conjunto que contiene todos los múltiplos no negativos de sus miembros, es decir, si $a \in E^+$ implica que $\alpha \cdot a \in E^+$, para todo $\alpha > 0$, entonces E^+ es un cono. Si además cada $a \in E^+$ es positivo, se dice que E^+ es un cono positivo. Véase la Definición A.31.

[9] *Properness* en inglés. Véase Definición 3.12

2.4. Condiciones de información

La decisión de elección se puede dar con diferentes niveles de disponibilidad de información. De acuerdo con Takemura [71, p. 7] según las condiciones de información en las que se encuentre el agente al momento de tomar la decisión se puede clasificar el problema de elección como:

- **Decisión bajo certidumbre:** se conoce cuál es el estado de la naturaleza que va a suceder al momento del consumo de la mercancía o en el que no hay distinción entre los diferentes estados de la naturaleza. Una condición más débil es que la probabilidad π definida sobre el conjunto de estados de la naturaleza sea degenerada[10].

- **Decisión bajo riesgo:** se conoce el conjunto de los posibles estados de la naturaleza Θ y se tiene una probabilidad π asociada al conjunto de dichos posibles estados de la naturaleza. En este marco de decisión se encuentran, por ejemplo, los problemas de selección de portafolio clásicos [48].

- **Decisión bajo incertidumbre:** no se asocia una probabilidad al conjunto de estados de la naturaleza, bien porque el conjunto de estados de la naturaleza Θ es desconocido (**decisión en ignorancia**), o porque aún siendo conocido, la probabilidad π sobre este conjunto se desconoce (**decisión en ambigüedad**). Aunque la literatura no es abundante en estos contextos, es posible que muchas de las decisiones de consumo que se toman en la realidad se realicen bajo estas circunstancias recurriendo a estimaciones subjetivas de la distribución de probabilidad o a distintas heurísticas de decisión.

Estos posibles estados de la naturaleza están representados en la Figura 2.5. Véase también Figura 4.2. Por ejemplo, una decisión de cobertura de riesgo con una opción cuando es posible estimar las probabilidades de cambio en la cotización del activo subyacente es una decisión en un contexto de riesgo, pero cuando dicha estimación no es posible es una decisión en ambigüedad. Las decisiones de consumo de un recurso no-renovable del que no se conoce con certeza la cantidad del recurso del que se va a disponer en los periodos futuros, ni las tecnologías que vayan a estar disponibles y le hagan más o menos atractivo sería una decisión de bajo ignorancia.

2.5. Función valor y conjunto de resultados

Después de definir el conjunto de mercancías, se define propiamente el conjunto de resultados posibles que aprecia el consumidor y una función que relaciona las combinaciones de estados de la naturaleza y opciones (planes de consumo) con dichos resultados, de forma que

$$\begin{aligned} f : A \times \Theta &\to X, \\ (a_i, \theta_k) &\mapsto x(a_i, \theta_k). \end{aligned}$$

En muchos casos el conjunto de resultados es un subconjunto de los reales. Algunos ejemplos de funciones de valor y conjuntos de resultados se presentan a continuación.

Ejemplo 2.5.1. ***(La función identidad como función valor del problema tradicional).*** *Si hay certeza de los estados de la naturaleza que van a suceder, el espacio de resultados puede coincidir con el espacio de planes de consumo, $A = X$, y la función de valor sería la función identidad. Nótese que en el caso de toma de decisión bajo certidumbre se puede interpretar que el resultado x_i asociado por la función valor f es independiente del estado de la naturaleza $f(a_i, \theta_k) = f(x_i)$, para todos i, k. Este es el caso tradicional en la modelación microeconómica.*

[10] Recuerde que una probabilidad degenerada es aquella en la que la probabilidad asociada a algún estado de la naturaleza es 1.

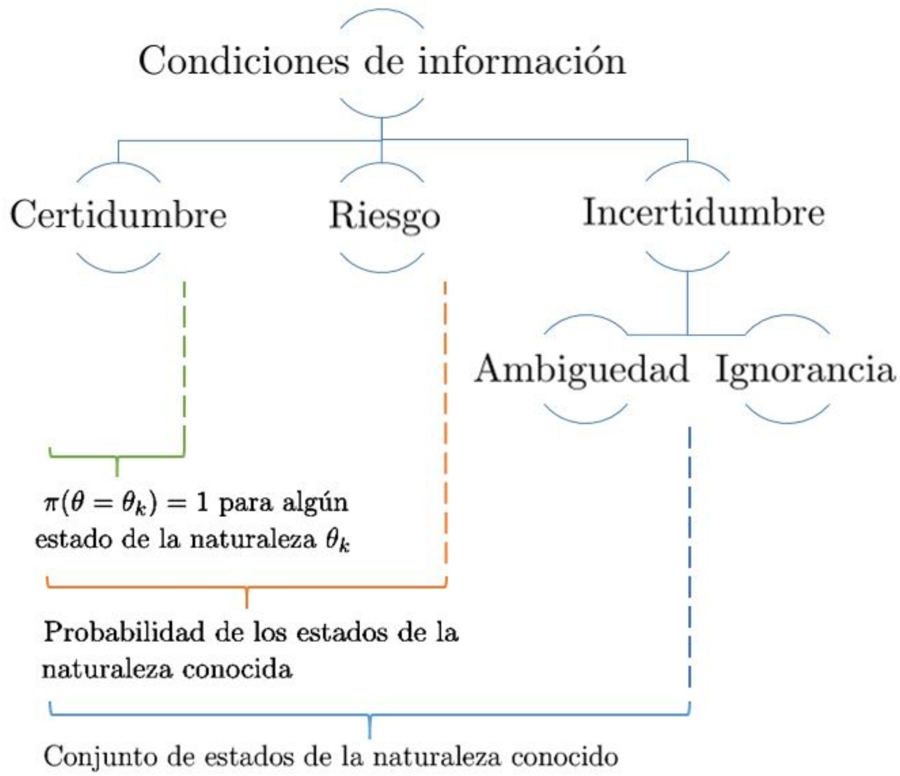

Figura 2.5: Condiciones de información en los que se puede dar la decisión respecto al conjunto de estados de la naturaleza y su distribución de probabilidad.

Ejemplo 2.5.2. ***(Funcional de pago en problemas de control óptimo como función de pago).*** *En situaciones de control óptimo, un agente optimiza un funcional de pago sujeto a unas restricciones dinámicas conocidas como variables de estado que determinan la evolución del sistema a lo largo del tiempo eligiendo la trayectoria de un conjunto de variables conocidas como variables de control. En el contexto de lo discutido en el marco de la teoría de la decisión las variables de control se eligen de un conjunto de opciones, mientras que los estados del sistema representan los estados de la naturaleza. En un problema típico de control el funcional de pago en un intervalo de tiempo $t \in (0, T]$, donde T se denomina tiempo terminal, está dado por*

$$f(a(t)) = \int_0^T r(t, \theta(t), a(t))dt + g(\theta(T)),$$

donde r es una función $r : \mathbb{R}^M \times A \to \mathbb{R}$, llamada función de pago variable, y g es una función denominada de pago terminal, $g : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$. En este funcional de pago los M estados de la naturaleza en cada momento del tiempo están consignados en el vector $\theta(t)$, y el conjunto de controles es el conjunto de funciones tales que $a : (0, T] \to A$, con $A \subseteq \mathbb{R}^M$. Para una introducción a los problemas de control óptimo véase [38]. Un ejemplo clásico de un problema de consumidor con este tipo de función valor es el problema en el modelo de crecimiento económico de Ramsey [10, p. 38], [52, p. 296].

Ejemplo 2.5.3. ***(Función de descuento como función de pago)*** *En finanzas, una función valor es la valoración asociada a un portafolio a una tasa de referencia determinada, por ejemplo durante la valoración de bonos*[11] *que tiene en cuenta no solo el valor que paga el bono el vencimiento, b, sino alguna*

[11] Se considera sin pérdida de generalidad el caso de los bonos cero-cupón.

tasa de costo de oportunidad r, que descuenta el valor n periodos. Dicha función está dada por la expresión

$$f(b) = \frac{b}{(1+r)^n}.$$

En este caso el estado de la naturaleza desconocido es el valor de la tasa de interés. Para una explicación más completa sobre bonos véase Welch [83, cap. 2].

Ejemplo 2.5.4. ***(Función de beneficio en juego de bienes públicos como función de pago).*** *En un juego de bienes públicos bajo un mecanismo de contribución individual voluntaria[12], el pago del individuo está determinado por la contribución individual c y por cuánto haya en el fondo común, digamos C, como*

$$f(c) = w - c + \alpha(C).$$

En este caso el estado de la naturaleza desconocido es la suma de las contribuciones de los demás al fondo común[13]. Una revisión de estudios experimentales bajo el esquema de contribución voluntaria a un bien público se encuentra en [56].

Ejemplo 2.5.5. ***(Función Elo como función de pago).***

En el marco de las estadísticas deportivas se han desarrollado y adoptado medidas para puntuar y escalafonar. Un ejemplo clásico es el sistema de puntaje Elo empleado en la puntuación de jugadores de ajedrez. Partiendo de un puntaje inicial para los competidores, digamos 1500 para cada jugador a_1, estos puntajes $f(a_i)$ se actualizan después de cada partida entre el jugador i y el jugador j así:

$$f(a_i)_{nuevo} = f(a_1)_{viejo} + K(S - \mu_{ij}),$$

donde K es una constante que inicialmente se fijó en $K = 10$, S toma valores uno, un medio o cero según si la partida la gana el jugador i, termina en empate o es ganada por el jugador j respectivamente, y μ_{ij} es una función logística de la forma

$$\mu_{ij} = \frac{1}{1 + 10^{[f(a_j)_{viejo} - f(a_i)_{viejo}]/400}}.$$

Este sistema genera, para cada estado de la naturaleza, por ejemplo, para cada combinación de resultados de un determinado torneo, un puntaje para cada opción, cada jugador. Una característica de este sistema de puntuación es que la ganancia en puntaje de un jugador fuerte (con un puntaje inicial alto) por ganarle a uno débil (con un puntaje bastante menor) es menor que la ganancia que obtiene un jugador débil por vencer a un jugador fuerte. Una introducción a estas medidas se encuentra en Langville, A. & Meyer, C. [44]. En el marco de elección del consumidor, los jugadores o equipos pueden ser las opciones entre las que elige un patrocinador.

Se define a continuación un ejemplo particular de construcción de opciones en un problema de elección donde la función de pago hace parte integral de las opciones consideradas.

[12]Este juego consiste en que cada uno de los n integrantes de una comunidad decide cuánto de una dotación w (digamos en una cierta cantidad de pesos) contribuir a un fondo común que genera beneficios para toda la comunidad, de modo que por cada peso que haya en el fondo común cada integrante recibe α pesos. Lo interesante de este juego es la tensión entre el incentivo individual y la ganancia social al fijar un valor de α tal que $\alpha < 1 < n\alpha$.

[13]Esto se puede ver dentro de un marco incluso más amplio, adicionando al marco actual de decisión la dimensión de la interacción estratégica en la que la función valor del individuo depende de las elecciones de los demás, lo cual entra en el campo de la teoría de juegos.

2.6. Opciones en elección bajo riesgo: loterías

En el contexto particular de problemas de decisión bajo riesgo un concepto al que se recurre para la representación de las opciones entre las que se elige es el de lotería.

Definición 2.6. ***Lotería simple:*** *una lotería simple es un conjunto de estados de la naturaleza acompañado de una distribución de probabilidades asociada a dicho conjunto, y un conjunto de resultados asociados a su vez a cada estado de la naturaleza.*

Nótese que el caso típico de elección en un caso finito-dimensional se obtiene cuando hay únicamente un estado de la naturaleza relevante (véase Figura 2.6). Además, se entiende entonces que una lotería es, en el marco de la teoría de la decisión considerada aquí, una tupla (Θ, π, X, g) formada por un conjunto de estados de la naturaleza (Θ), una medida de probabilidad definida sobre dichos estados (π), y un conjunto de resultados (X) imágenes de los estados de la naturaleza mediante una función valor $(g : \Theta \to X)$. Así, se tiene que el problema de elección de un consumidor está completamente caracterizado por un conjunto de loterías y una relación de preferencias definidas sobre los valores en X. Con esto, se puede adaptar el problema de elección entre loterías definidas sobre el mismo conjunto de estados de la naturaleza y con la misma distribución de probabilidad, al esquema general que se propone en este trabajo definiendo los elementos de la tupla $(A, \Theta, \pi(\cdot), X, f, \succeq)$ como:

- **Conjunto de opciones** (A): un conjunto de índices L del conjunto de loterías entre las que se elige.
- **Conjunto de estados de la naturaleza** (Θ): conjunto común de estados de la naturaleza de las loterías consideradas.
- **Distribución de probabilidad** $(\pi(\cdot))$: distribución común de probabilidad de los estados de la naturaleza.
- Conjunto de resultados (X): unión de los conjuntos de resultados de las loterías consideradas.
- **Función valor** (f): la función valor que asigne a cada lotería k en cada estado de la naturaleza θ_i el valor definido por la lotería en dicho estado. Esto es,

$$\begin{aligned} f: \quad & L \times \Theta \to X, \\ & (k, \theta_i) \mapsto g_k(\theta_i). \end{aligned}$$

- Preferencias $(\succeq)$: sobre las preferencias se discute en el Capítulo 3.

Además, se propone acá representar el caso de las loterías simples como un caso de un espacio de Riesz. Para que este sea el caso se consideran situaciones de elección en las que el conjunto de opciones es el de las loterías simples definidas sobre el mismo conjunto de estados de la naturaleza. Así, las operaciones de suma y de producto por escalar se realizan empleando los pagos asociados a cada estado de la naturaleza. Además, el supremo entre loterías se obtiene como la lotería que otorga como pago en cada estado de la naturaleza el supremo de los pagos en ese estado de la naturaleza de las loterías consideradas.

Ejemplo 2.6.1. ***Lotería simple.*** *Considere a manera de ejemplo un mundo bajo el esquema del modelo binomial de valoración de opciones similar a la presentación inicial por Coss, J., Ross, S. & Rubinstein, M. [18], en el que el valor de una acción que nos interesa puede θ_A: subir o θ_B: bajar. Digamos una Acción A que hoy vale* \$38,000 *y dentro de un día va a valer o bien* \$38,150 *o* \$37,850*. Estos serían los resultados* *asociados a los diferentes estados de la naturaleza. Suponga además que se estima que la probabilidad de que la Acción A se cotice al alza es de* $\pi_{\theta_A} = 50,5\,\%$*. Con lo anterior queda completamente caracterizada una lotería que se puede representar como aparece en la Figura 2.6. Además considere una opción de compra sobre esa acción, esto es, un contrato que da el derecho a adquirir la Acción A mañana al precio actual de* \$38,000*. La opción tendrá uno entre dos valores posibles: si la Acción A al final de mañana tiene un precio de* \$38,150*, entonces la opción vale hasta* \$150*; en cambio, si la acción se cotiza en* \$37,8500 *la opción no vale nada ya que sale más barato comprar la Acción A en el mercado. Así, se puede definir una segunda lotería tomando como resultados los valores de la opción en cada estado de la naturaleza como está igualmente ilustrado en la Figura 2.6.*

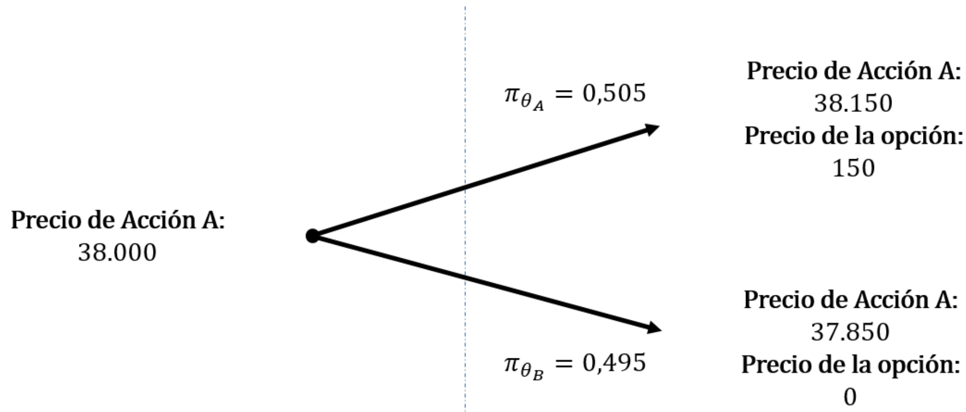

Figura 2.6: Ejemplo de un lotería: compra de una opción de compra sobre una acción.

2.7. Opciones en elección bajo ambigüedad

En ambigüedad las opciones consideradas, de acuerdo al esquema planteado son tuplas consistentes en un conjunto de estados de la naturaleza (Θ) y una función valor (g) que asigna a cada estado de la naturaleza un pago real. Note que en el caso de elección bajo riesgo, la extensión del conjunto de loterías al marco de espacios de Riesz es independiente de la forma particular de la distribución de probabilidad siempre que esta sea común a todas las loterías, por lo que siguiendo el mismo proceso se pueden considerar la extensión al marco de espacios de Riesz del conjunto de opciones en el caso de elección bajo ambigüedad.

2.8. Restricción presupuestal

Además de las características propias de los conjuntos antes mencionados, típicamente existen otras restricciones que limitan el conjunto de opciones entre las que el agente elige. En la modelación tradicional la restricción más común es la llamada *restricción presupuestal*. Esta refleja la idea de que la cantidad de mercancías que se puede consumir está limitada por un monto m (inicialmente dado por una dotación de "riqueza" exógenamente determinado[14]) [49, p. 20]. En el conjunto finito dimensional de mercancías la restricción sería, para un vector de precios $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, la condición[15]

$$\mathbf{p^T x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq m.$$

[14]En algunos casos se denomina a la variable W ingreso, pero eso puede ser parcialmente incorrecto en contextos donde la modelación de la decisión sigue una modelación estática, ya que el ingreso es una variable flujo.

[15]También indicada como $\langle \mathbf{p}, \mathbf{t} \rangle \leq m$.

Esta condición define un conjunto, el conjunto presupuestal, que acota las opciones disponibles para la elección,

$$A(m, \mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{x} \in A \middle| \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq m \right\}.$$

De esta manera, cada vector de precios $\mathbf{p}$ define un funcional lineal sobre el conjunto de planes de consumo. Esta restricción termina de definir el conjunto de elección del consumidor. El subconjunto de planes de consumo que cumplen la condición anterior se conoce como *conjunto presupuestal* [49, p. 21].

En el caso de economías de intercambio puro, las restricciones presupuestales de los agentes están dadas, además del vector de precios $\mathbf{p^T}$, por las dotaciones iniciales de mercancías de las que dispone cada consumidor $\mathbf{w}$, típicamente $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, quedando de la forma

$$\mathbf{p^T x} \leq \mathbf{p^T w}.$$

En este caso $\mathbf{p^T w}$ coincide con la riqueza inicial definida antes, m. Aunque aquí parezca que la construcción se hace con base en una noción de dinero, no tiene que interpretarse necesariamente así. Otros recursos invertidos pueden ser tiempo, energía y recursos humanos. Cuando la diferencia entre mercancías está en la disponibilidad en diferentes momentos del tiempo, asumir que se conocen los precios es una suposición fuerte, sobretodo si el horizonte temporal es indeterminado.

Ejemplo 2.8.1. ***(Restricción presupuestal tradicional con dos y tres mercancías).*** *Considere el caso de un consumidor que elige su consumo entre cestas de consumo de dos bienes (x_1, x_2), que dispone de una renta $\mathbf{m}$, resultado del valor de sus dotaciones iniciales, de 200 a precios $(p_1, p_2) = (10, 4)$. Para este consumidor su restricción presupuestal es el conjunto de todas las cestas de consumo tales que*

$$10x_1 + 4x_2 \leq 200.$$

Estas cestas se representan por aquellos puntos en el área sombreada en la Figura 2.7. Por su parte, en la Figura 2.8 [16] se muestra la gráfica de la restricción presupuestal de un consumidor que elige entre cestas de tres mercancías (x, y, z) a precios iguales todos a uno con una renta inicial de 100: $x + y + z = 100$. Se presenta a continuación un resultado usado para imponer condiciones sobre el problema de decisión de modo que éste tenga solución[17].

Teorema 2.8.1. ***Acotamiento del conjunto presupuestal (Aliprantis, Brown y Burkinshaw, [2])*** *Para un vector de precios $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_+$ se tiene que todos los conjuntos presupuestales son acotados si y solo si $\mathbf{p} \gg 0$.*

Demostración. (Siguiendo a Aliprantis, Brown y Burkinshaw [2, p. 19]) Para la primera implicación se asume que cada conjunto presupuestal para un precio $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_+$ es acotado. Se debe mostrar que $p_i > 0$ para todo i. Esta demostración se realiza por contradicción: se supone que $p_i = 0$ para algún i, entonces los vectores ne_i, con $i = 1, 2, ..., l$, donde $n \in \mathbb{R}_+$ y e_i denota al vector unitario estandar en la dirección i-ésima, pertenece a cada conjunto presupuestal dado que $\mathbf{p} \cdot e_i = 0$. Esto sigue la intuición económica en la que si un bien es gratuito, se planeará consumir de este cantidades indefinidamente grandes. Ahora se debe mostrar la implicación en sentido contrario: si $\mathbf{p} \gg 0$, entonces los conjuntos presupuestales son

[16] Estas gráficas han sido realizadas con ayuda de las herramientas https://www.math.uri.edu/ bkaskosz/flashmo/graph3d/ y Wolfram Alpha.

[17] El desarrollo a continuación debería recordar el resultado planteado por el teorema de Weierstrass, que indica que una función continua definida sobre un intervalo real cerrado alcanza un máximo y un minimo local.

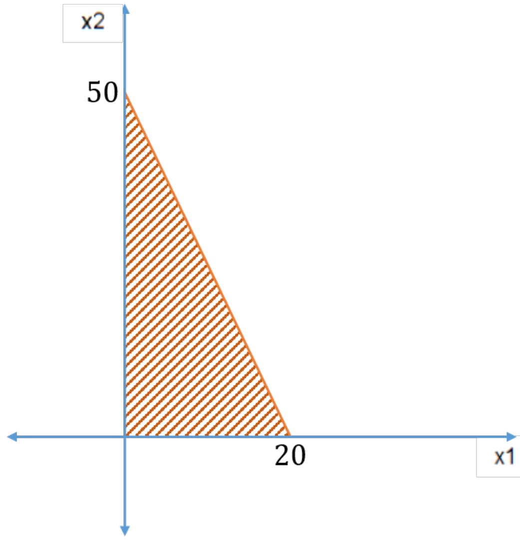

Figura 2.7: Conjunto presupuestal $10x_1 + 4x_2 \leq 200$.

acotados. Para esto se consideran $\mathbf{p} \gg 0$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^l_+$. Además, sea $r = \min\{p_1, p_2, \ldots, p_l\}$¿0. Si $\mathbf{x}$ pertenece al conjunto presupuestal definido por $\mathbf{p^T x} \leq \mathbf{p^T x}$, entonces

$$0 \leq p_i x_i \leq \sum_{k=1}^{l} p_k x_k = \mathbf{p^T x} \leq \mathbf{p^T w}$$

que conduce, dividiendo las desigualdades entre p_i, a

$$0 \leq x_i \leq \frac{\mathbf{p^T x}}{p_i} \leq \frac{\mathbf{p^T w}}{r} \leq \infty,$$

lo cual se tiene para cada $i = 1, 2, \ldots, l$. Esto muestra que el conjunto presupuestal es acotado. □

Así, es común fijar condiciones de positividad estricta sobre los precios para garantizar la compacidad.

2.9. Funcionales lineales positivos

Dado que las opciones del consumidor están restringidas por una restricción presupuestal, una extensión natural del caso tradicional a otros espacios de mercancías se obtiene mediante la noción de funcionales lineales positivos que actuarán como vectores de precios.

Definición 2.7. ***Funcional lineal positivo* [1, p. 325]:** *un funcional lineal real ϕ definido sobre un espacio de Riesz E se dice un funcional lineal positivo, si para cada $x \in E$, $x \geq 0$, se tiene que $\phi(x) \geq 0$.*

En el análisis económico, los funcionales lineales positivos definen los precios sobre los planes de consumo. Se plantea la existencia de una dualidad entre cantidad de mercancías y precios, en el sentido formulado a continuación:

Definición 2.8. ***Par dual* [1, p. 211]:** *también llamado **sistema dual**,es una pareja de espacios vectoriales $\langle A, P\rangle$ junto a una aplicación bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle : A \times P \to \mathbb{R}$, tal que*

- $\langle x, p\rangle = 0$, *para todo $x \in A$, implica $p = 0$.*
- $\langle x, p\rangle = 0$, *para todo $p \in P$, implica $x = 0$.*

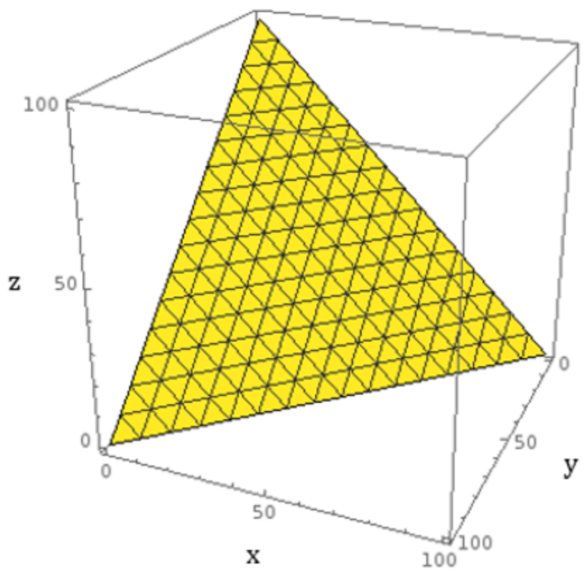

Figura 2.8: Gráfica de la restricción presupuestal $x + y + z = 100$.

El espacio A es el espacio de opciones, y el espacio P es el espacio de precios. Típicamente la modelación presenta al espacio de mercancías A y al espacio de precios P como el espacio euclídeo real de dimensión finita l, y como aplicación bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$ al producto interno entre los vectores de esos espacios. Por ejemplo para el espacio de opciones $\mathbb{R}^3$, el vector de precios (2,3,8) define un funcional lineal de la forma

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = (2, 3, 8) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 8x_3.$$

Definición 2.9. ***Par Riesz*** *es un par dual $\langle L, L'\rangle$ tal que L es un espacio Riesz y L' es un ideal*[18] *en el orden dual $L\sim$*[19].

Es natural pensar el par $\langle \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\rangle$ como un par Riesz. Otro caso sería el par $\langle c_0, l_1\rangle$, en el que cada sucesión acotada en l_1 define un funcional lineal sobre el espacio de sucesiones convergentes a cero. Por ejemplo, la sucesión $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots]$ con $\epsilon_i < K,$ con $K \in \mathbb{R}$, define un funcional lineal sobre las sucesiones de c_0. En particular para el plan de consumo $\eta = \left[1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right]$ se define el funcional lineal como:

$$\epsilon \cdot \eta = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i \cdot \frac{1}{i^2}.$$

En esta caso los elementos de l_1 podrían interpretarse como precios en distintas fechas de obtención del recurso natural no-renovable cuyo consumo esta representado en la sucesión η de c_0.

2.10. Algunas propiedades en espacios de Riesz

En esta sección se presentan algunas propiedades que se tienen en los espacios Riesz y que serán empleadas en el Capítulo 5 para extender el primer y segundo teorema del bienestar a economías con espacios Riesz de mercancías.

[18]Recuerde que un ideal es un subespacio vectorial sólido de un espacio de Riesz. Un subespacio vectorial S de un espacio de Riesz L se dice sólido si para dos vectores $u \in L$ y $v \in S$ tales que $|u| < |v|$ implica que $u \in S$. Véase Definición A.34.

[19]Para cualquier espacio de Riesz L el **orden dual** es el espacio de Riesz Dedekin completo $\mathcal{L}_b(L, \mathbb{R})$, esto es que todo subconjunto no-vacío y acotado por arriba de L tiene un supremo.

2.10.1. Identidades de operaciones de orden

Se presentan en esta sección algunas propiedades de las operaciones de orden y algunas definiciones derivadas. Puede consultarse un tratamiento más detallado en [3, p. 3].

- $|u| \coloneqq u \vee (-u)$
- $u^+ \coloneqq u \vee 0$
- $u^- \coloneqq u \wedge 0$
- $u + v \vee w = (u + v) \vee (u + w)$
- $u + v \wedge w = (u + v) \wedge (u + w)$
- $u - v \vee w = (u - v) \vee (u - w)$
- $u - v \wedge w = (u - v) \wedge (u - w)$
- $u = u^+ - u \ (u - v)^+ - (u - v)^- = u - v$
- $(u - v)^- = (v - u)^+$
- $-|v| \leq u \vee (-|v|)$
- $-|v| \leq |v|$

2.10.2. Teorema de descomposición de Riesz

Teorema 2.10.1. ***Teorema de descomposición de Riesz - Aliprantis y Burkinshaw [3, p. 8]*** *Suponga que en un espacio de Riesz E se tiene la siguiente desigualdad*

$$|u| \leq |v_1 + v_2 + \cdots + v_n|.$$

Entonces existen elementos $u_1, u_2, \ldots, u_n \in E$ satisfaciendo $|u_i| \leq |v_i|$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ tales que $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Adicionalmente, si el vector u es positivo, entonces cada uno de los vectores u_i pueden también elegirse positivos.

Demostración. Usando inducción, basta mostrar el resultado para $n = 2$. Suponga entonces que $|u| \leq |v_1 + v_2|$. Definamos ahora u_1 como $u_1 = [u \vee (-|v_1|)] \wedge v_1$. De las desigualdades $-|v_1| \leq u \vee (-|v_1|)$ y $-|v_1| \leq |v_1|$ se tiene que $-|v_1| \leq u_1$ o $-u_1 \leq |v_1|$. Por otro lado, de $u_1 \leq |v_1|$ se tiene que $|u_1| \leq (u_1) \vee u_1 \leq |v_1|$. Ahora, si $u_2 = u - u_1$, entonces

$$u_2 = u - [u \vee (-|v_1|)] \wedge v_1 = [0 \wedge (u + |v_1|) \vee (u - |v_1|)].$$

Sin embargo, $|u| \leq |v_1| + |v_2|$ implica que $-|v_1| - |v_2| \leq u \leq |v_1| + |v_2|$, de donde se obtiene

$$-|v_2| = (-|v_2|) \wedge 0 \leq (u = |v_1|) \wedge 0 \leq u_2 \leq 0 \vee (u - |v_1|) \leq |v_2|$$

que implica que $|u_2| \leq |v_2|$, que es lo que se quería mostrar. □

2.10.3. Teorema de separación

El siguiente teorema extiende los resultados del teorema de separación clásico para subconjuntos en un par dual.

Teorema 2.10.2. ***Teorema de separación - Aliprantis, Brown & Burkinshaw [2, p. 100]*** *Sea $\langle E, E' \rangle$ un par dual, y sean A, B dos subconjuntos no-vacíos, disyuntos y convexos. Si para alguna topología consistente localmente convexa en E alguno de los conjuntos A o B tiene un interior no-vacío, entonces existe un elemento e' no-cero en el dual E' tal que*

$$\langle a, e' \rangle \geq \langle b, e' \rangle$$

para todo $a \in A$ y todo $b \in B$.

Demostración. (Siguiendo a Aliprantis & Burkinshaw [4, p. 141,142]) Como A y B son disyuntos, entonces $0 \notin A-B$, pues al no existir elementos iguales en ambos subconjuntos no es posible que la resta algebraica sea cero. Como A y B son convexos, entonces $A-B$ es un subconjunto convexo. Además, $A-B$ tiene al menos un punto interior, dado que existe un punto interior en al menos uno de los conjuntos, esto implica que alguna vecindad de dicho punto se conserva tras la resta algebraica. Se denota c un punto interior de $A-B$. Entonces 0 es un punto interior del conjunto convexo $K = a - (A - B)$.

Se define V como una $\tau-$vecindad de cero convexa y circular que satisface $V \subseteq K$. Se tiene que K es un conjunto absorvente. Se nota que el funcional de Minkowski, $p_K(a) \coloneqq \inf\{\lambda > 0 : a \in \lambda K\} \geq 1$. Si $p_K(a) < 1$ entonces existiría un λ tal que $0 \leq \lambda < 1$ para el que $a \in \lambda K$. De ser así, se tendría que $a = \lambda v = \lambda v + (1-\lambda)0 \in K$, lo que implicaría de $0 \in A - B$, que es una contradicción, de modo que se tiene que $p_K(a) \geq 1$.

Se considera ahora el subespacio $Y = \{\lambda a : \lambda \in \mathbb{R}\}$ y se define el funcional lineal no-nulo $e' : Y \to \mathbb{R}$ como $e'(\lambda a) = \lambda p_K(a)$. Se tiene que $e'(\lambda a) \leq p_k(a)$ para cada λ. Por el teorema de Hahn-Banach se tiene una extensión lineal a todo E, que se denota e' de nuevo. Dicha extensión resulta ser continua y cumplir que $e'(e) \geq 0$ para todo $e \in E$.

Se definen $s \coloneqq \inf\{e'(a)|a \in A\}$ y $t \coloneqq \sup\{e'(b)|b \in B\}$. Como $e'(a) - e'(b) \geq 0$, entonces $-\infty < t \leq s < \infty$. Si c es un número tal que $t \leq c \leq s$, entonces $e'(b) \leq c \leq e'(a)$, esto es, el funcional e' separa los subconjuntos A y B.

□

2.11. Opciones fuera del mercado

Se presentan en esta sección algunos ejemplos de consideraciones sobre la definición de qué es o no una mercancía y bienes que son asignados fuera del mercado o no son asignados en absoluto. Actualmente en muchos países no está formalmente permitido el trabajo infantil y hay esfuerzos específicos de algunos gobiernos y organizaciones para evitar que los niños trabajen. El tráfico de órganos está prohibido y estas “transacciones” son llevadas a cabo mediante donaciones. No hay gente que desee o que venda de manera abierta hamburguesas con carne humana. Está mal vista la compra y venta de votos. Estos son algunos ejemplos que muestran que varios bienes y servicios no son objeto de intercambio en el mercado por razones que tienen más que ver con una cierta (aunque en ocasiones no explícitamente expuesta) escala de valores. Siguiendo el planteamiento de Ha-Joon Chang [15], *no hay mercados libres*, ya que la intervención del gobierno y las escalas de valores de cada comunidad definen cuáles cosas son o no mercancías. Esta distinción obedece no solo a diferencias históricas, sino también a contextos regionales. No es común, hoy en Bogotá, que se negocien las posiciones en una fila de banco aún cuando alguien estuviera dispuesto a pagar por ser atendido más rápido y otra persona estuviera dispuesta a recibir el pago por intercambiar su puesto en la fila, mientras que en Venezuela, hoy, es común que gente madrugue a hacer una fila y luego venda la posición.

Algunos de estos bienes y servicios no son transados en absoluto, mientras que otros son distribuidos por medio de mecanismos diferentes al mecanismo de precios en el mercado. Un mecanismo de asignación de bienes puede darse a través de señales de precios, pero fuera de la dinámica usual de mercado, por ejemplo en el caso de algunas subastas: una obra de arte que es ofrecida según una subasta sellada de segundo precio[20]. Aún por fuera de los mecanismos de señales de precios se hacen asignaciones de bienes, como sucede en el caso de la organización centralizada de donaciones de riñones [60].

[20] Una subasta sellada de segundo precio es una subasta en la que los participantes presentan sus ofertas de manera secreta y la oferta más alta se lleva el artículo subastado, pero en vez de pagar lo que haya ofrecido, paga el valor de la segunda oferta más alta.

2.12. Bitácora del capítulo

Aunque el espacio euclideo, $\mathbb{R}^n$, es el tradicionalmente empleado para modelar el conjunto de las posibles planes de consumo, hay otros espacios de opciones que modelan situaciones como la cobertura de riesgos mediante instrumentos financieros o el consumo de un recurso no-renovable a lo largo de varios periodos que extienden la aplicación de la teoría del consumidor a otros mercados. Se nota que en el contexto de elección del consumidor sólo algunos de los planes de consumo están disponibles dada la existencia de una restricción de presupuesto, o de restricciones de otro tipo sobre el conjunto de opciones como las restricciones en la disponibilidad de información sobre las opciones o los estados de la naturaleza en los que se dará el consumo. Las mercancías que se tienen en cuenta en este trabajo son mercancías regulares: aquellas cuyo consumo presente no afecta el consumo futuro, que presentan preferencias independientes entre individuos y cuya valoración por parte del individuo es conocida. Mercancías que no cumplen estas condiciones son aquellas **mercancías adictivas**, **mercancías de red** y las llamadas **mercancías experienciales** [50].

En el capítulo siguiente se construye la noción de preferencias que se define sobre el conjunto de resultados o, como se verá, sobre el conjunto de opciones si la función valor está definida de manera adecuada.

Capítulo 3

Gustos: preferencias y utilidad

El siguiente elemento que se requiere en una teoría de elección racional es un criterio de comparación sobre el conjunto de resultados y, a partir de éste, un criterio sobre el conjunto de opciones de elección. En este capítulo se presenta la construcción de dicho criterio de comparación por medio de una *relación de preferencias* definida sobre el conjunto de alternativas, sus propiedades básicas y otras que son requeridas para simplificar el problema de elección. Además se presentan brevemente algunos resultados de representación de dicha relación de preferencias como un funcional de valor real, la llamada típicamente *función de utilidad* y sus propiedades heredades de las propiedades de la relación de preferencias original. Al final del capítulo se presentan algunos resultados de economía comportamental y experimental que cuestionan, entre otros, la transitividad de las preferencias en distintos contextos.

3.1. Preferencias

Considerando dos elementos del espacio de resultados, $x, y \in X$, una relación de preferencia es una relación binaria de la forma "el resultado x es al menos tan bueno como el resultado y", simbolizado $x \succeq y$. En la teoría económica tradicional el conjunto de opciones y el conjunto de resultados suelen ser el mismo, en cuyo caso las opciones están identificadas consigo mismas como su propio resultado, por lo que la definición de las preferencias suele hacerse directamente sobre el espacio de opciones. Así, considerando un par de elementos en el espacio de opciones, $a, b \in A$, $f(a) = x$, $f(b) = y$, se hereda una relación de preferencia en el espacio de opciones a partir de la definida en el espacio de resultados de la forma "la opción a es al menos tan buena como la opción b", simbolizado $a \succeq b$[1] toda vez que $x \succeq y$[2]. El desarrollo que se hace en este capítulo partiendo de la definición de preferencias débiles, $\succeq$, también puede hacerse a partir de la relación de preferencia estricta, $\succ$. Este último es, por ejemplo, el camino tomado por Kreps [40].

Definición 3.1. ***Preferencias racionales - (Mas-Colell, Whinston & Green [49, p. 42]):*** *una relación de preferencias racionales* $(\succeq)$[3]*, sobre un espacio de resultados* X*, es una relación binaria sobre dicho espacio tal que sea*

1. ***Completa o total*** [4]***:*** *cualesquiera dos resultados son directamente comparables por medio de esa relación, es decir que bien* x *es al menos tan bueno como* y $(x \succeq y)$*, o que* y *es al menos tan bueno*

[1] También se suele leer como "la opción a es preferida o indiferente a la opción b" o "la opción a es no-peor que la opción b".

[2] A pesar de que la relación sobre el conjunto de opciones se define a partir de la relación definida sobre el conjunto de resultados, son relaciones distintas puesto que en principio se definen sobre elementos de conjuntos diferentes. No obstante, esta distinción no es tan esencial como para reflejarla en la notación.

[3] A veces también llamada *relación de preferencas débil.*

[4] En contextos de teoría de la decisión se puede encontrar esta propiedad denominada como *comparabilidad*, como en Takemura [71].

como x ($y \succeq x$)[5].

2. ***Transitiva:*** *para cualesquiera tres resultados, $x, y, z \in X$ se tiene que si $x \succeq y$, a la vez que $y \succeq z$, entonces necesariamente $x \succeq z$*[6].

A una relación con estas características también se le conoce como una *relación racional* [49]. Si las preferencias de distintos consumidores son diferentes, esta diferencia puede indicarse incluyendo un subíndice para cada agente, denotando el perfil de preferencias del agente j como $\succeq_j$. La transitividad de la relación de preferencias implica que no se tienen ciclos de preferencia de la forma *piedra $\succeq$ tijeras, tijeras $\succeq$ papel, papel $\succeq$ piedra* lo cual da un criterio de consistencia a la hora de tomar decisiones cuando se consideran más de dos opciones. Además de las características de completitud y transitividad, se suele encontrar en los manuales de microeconomía otra condición, la **reflexividad** ($x \succeq x$ para todo $x \in X$). Por supuesto, dado que no se supone que $x \neq y$ en la condición de completitud, la reflexividad está garantizada. Una relación de preferencia no es necesariamente una relación de orden en sentido estricto, en tanto puede no ser una relación simétrica.

A partir de una relación así definida, se pueden obtener otras dos relaciones sobre el conjunto de resultados, una relación de indiferencia y una relación de preferencia estricta [49, p. 6]:

Definición 3.2. ***Relación de indiferencia:*** *se dice que dos elementos en el espacio de resultados $x, y \in X$ son indiferentes, simbolizado $x \sim y$, si se tiene que $x \succeq y$ a la vez que $y \succeq x$.*

La relación de indiferencia es:

- **Simétrica:** si $x \sim y$ entonces $y \sim x$. Por supuesto, si un plan de consumo es indiferente a otro, ambos son idiferentes entre sí.
- **Reflexiva:** $x \sim x$. Esto es que cada plan de consumo es tan bueno como él mismo.
- **Transitiva:** si $x \sim y$, y $y \sim z$, entonces $x \sim z$.
- **No-antisimétrica:** $x \sim y$ no significa que $x = y$. Planes consumos diferentes pueden ser catalogados por un consumidor como indiferentes.

Nótese que la relación de indiferencia no es completa, dado que no necesariamente se tiene que $x \sim y$ o $y \sim x$.

Definición 3.3. ***Relación de preferencia estricta:*** *sean $x, y \in X$, se dice que x es estrictamente preferido a*[7] *y si tanto $x \succeq y$, como $y \not\succeq x$, simbolizado como $x \succ y$.*

La relación de preferencia estricta es:

- **Irreflexiva:** $x \not\succ x$. Un plan de consumo no puede ser estrictamente preferido a sí mismo.
- **Asimétrica**[8]: si $x \succ y$, entonces $y \not\succ x$. No se puede tener que un plan de consumo sea estrictamente mejor y estrictamente peor al tiempo que algún otro plan determinado.

[5]Una relación así también es denominada a veces como *fuertemente conexa* [14]. Existe una condición más débil: una relación ($\succeq$) se dice *conexa*, si para $x \neq y$ se tiene que $x \succeq y$ o bien $y \succeq x$, que es a la que parecen referirse los manuales que incluyen la reflexividad como una condición requerida sobre la relación de preferencias.

[6]Se puede tener en algunos casos una condición más débil: la *aciclicidad*.

[7]A veces también expresado como "x es mejor que y".

[8]Como señala Kreps ([40, p. 20]) esto supone o bien que las preferencias no cambian, o que todas las comparaciones se hacen en el momento de tomar la decisión. Otro ejemplo en el que este supuesto, aparentemente natural, no necesariamente se tiene suvede bajo el llamado el efecto contexto, sobre el que se discute en el Capítulo 3.

- **Transitiva negativamente:** si $x \succ y$, entonces para cualquier tercer elemento z se tiene que $x \succ z$ o $z \succ y$, o ambas [9].
- **Transitiva:** si $x \succ y$ a la vez que $y \succ z$ entonces $x \succ z$. Este supuesto captura una cierta noción de consistencia en las decisiones que es deseable para que la elección tenga lugar.[10]

Nótese igualmente, que la relación de preferencia estricta no es completa, dado que no necesariamente $x \succ y$ o $y \succ x$. Por ejemplo, para fijar ideas, si el espacio de resultados es un subconjunto de los reales, se podría emplear como relación de preferencia el orden usual sobre los reales, como relación de indiferencia la relación de igualdad y como relación de preferencia estricta la relación de comparación "mayor que". De manera similar una lista de opciones puntuadas, aún cuando se permitan empates, también define una relación de preferencias[11]. En la Figura 3.1 se muestran las implicaciones que existen entre unos y otros axiomas de las relaciones de preferencias.

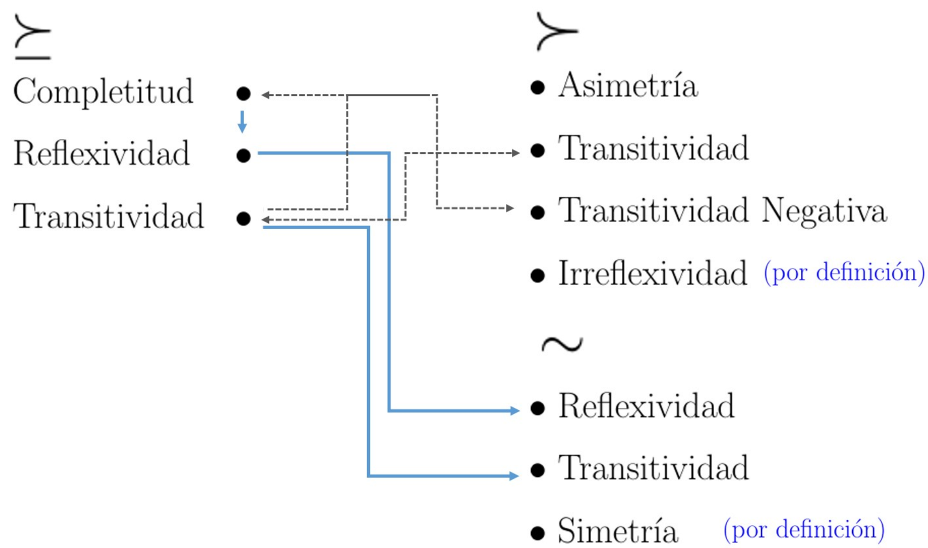

Figura 3.1: Diagrama de relación entre axiomas de las relaciones de preferencia.

Se presentan a continuación las implicaciones anteriores de las características de las relaciones de indiferencia y preferencia estricta a partir de las características de la relación de preferencia racional.

- La relación de indiferencia ($\sim$) es:
  - **simétrica:** si $x \sim y$ entonces $x \succeq y$ y $y \succeq x$ que también significa que $y \sim x$.
  - **reflexiva:** se tiene de manera trivial a partir de la reflexividad de la relación de preferencia.
  - **no-completa:** dado que no necesariamente se tiene que $x \sim y$. Por ejemplo es posible que $x \succeq y$ pero $y \not\succeq x$.
  - **transitiva:** si $x \sim y$, y $y \sim z$, entonces por una parte $x \succeq y$ y $y \succeq z$, que por la transitividad de la relación de preferencia significa que $x \succeq z$; y por otro lado $z \succeq y$ y $y \succeq x$, que por la

[9] Esta condición es fomulada equivalentemente como: si $y \not\succ x, x \not\succ z$, entonces $y \not\succ z$ [14].

[10] Esta condición garantiza que esta relación cumpla una condición más débil, la aciclicidad que dice que si $x \succ y$, $y \succ z$ entonces $x \neq z$. La aciclicidad captura de manera similar la noción de consistencia mediante la negación de la posibilidad de ciclos en las preferencias.

[11] De hecho, si no se permiten empates se obtiene una relación de preferencias estrictas. Este tipo de preferencias son empleadas en el artículo seminal de Gale y Shapley [27] sobre emparejamiento, *College Admissions and the Stability of Marriage*, y en algunos problemas de elección de mecanismos de elección social.

transitividad de la relación de preferencias implica que $z \succeq x$. Como $x \succeq z$ y $z \succeq x$, entonces $x \sim z$.

- La relación de preferencia estricta es:
  - **irreflexiva:** No puede ser que una opción sea estrictamente mejor que sí misma, ya que se requeriría que $x \succeq x$ y $x \not\preceq x$.
  - **asimétrica**: Si $x \succ y$, entonces $y \not\succeq x$ por lo que no puede ser que $y \succeq x$ para que $y \succ x$.
  - **no-completa:** por supuesto es posible que $x \succeq y$ y $y \succeq (x)$.
  - **transitiva negativamente:** si $x \succ y$, entonces para cualquier tercer elemento z se tiene que $x \succ z$ o $z \succ y$, o ambas [12].
  - **transitiva:** si $x \succ y$ y $y \succ z$ entonces $x \succeq y$ y $y \succeq z$ con lo que, por la transitividad de la relación de preferencia, $x \succeq z$. Ahora toca mostrar que $z \not\succeq x$, para lo cual se supone que sí se tuviera. Si $z \succeq x$, etonces como $x \succeq y$, por transitividad de $\succeq$ se tendría que $z \succeq y$, pero esto contradice que $y \succ z$, por lo que necesariamente $z \not\succeq x$.

Dependiendo de las características del espacio de opciones se pueden definir ciertas características sobre la relación de preferencias racional. Las relaciones anteriores permiten definir los siguientes conjuntos:

Definición 3.4. *Sea una relación de preferencias racionales, $\succeq$, definida sobre el conjunto de resultados X, para cada elemento $x \in X$ se definen los siguientes conjuntos:*

- ***Indiferentes-a** x: $\sim x = \{y \in X \mid y \sim x\}$.*
- ***No-mejores-que** x: $\preceq x = \{y \in X \mid y \preceq x\}$.*
- ***No-peores-que** x: $\succeq x = \{y \in X \mid y \succeq x\}$.*
- ***Mejores-que** x: $\succ x = \{y \in X \mid y \succ x\}$.*
- ***Peores-que** x: $\prec x = \{y \in X \mid y \prec x\}$.*

Siguiendo a Aliprantis y Burkinshaw [3] definimos ahora lo que es una opción **deseable** y una **extremadamente deseable** en el contexto de un espacio vectorial.

Definición 3.5. ***Aliprantis y Burkinshaw [3, p. 216], Aliprantis, Brown y Burkinshaw [2, p. 9].*** *Sea $\succeq$ una relación de preferencia sobre un subconjunto X de un espacio vectorial. Un vector v, no necesariamente en X, es*

- ***Deseable:** si para cada $x \in X$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $\alpha \in (0, \delta)$ se tiene que $(x + \alpha v) \in X$ y además $(x + \alpha v) \succ x$.*
- ***Extremadamente deseable:** si para cada $x \in X$ y cada $\alpha > 0$ se tiene tanto que que $x + \alpha v \in X$, como $x + \alpha v \succ x$.*

En el caso típico en el que el espacio de resultados $X = \mathbb{R}^2$ y preferencias en las que más (componente a componente) es mejor, un ejemplo de una cesta deseable para el subconjunto definido por la restricción usual podría ser cualquier canasta suficientemente grande con coordenadas positivas.

Definición 3.6. *Sea $\succeq$ una relación de preferencias sobre un espacio topológico X. Se dice que la relación $\succeq$ es*

[12] Esta condición es fomulada equivalentemente como: si $y \nsucc x, x \nsucc z$, entonces $y \nsucc z$, Bridges & Mehta (1995).

- ***Semi-continua superior:*** *si para toda opción x en X el conjunto de no-peores-que-x es cerrado.*
- ***Semi-continua inferior:*** *si para toda opción x en X el conjunto de no-mejores-que-x es cerrado.*
- ***Continua:*** *si es semi-continua superior e inferior.*

Naturalmente, se tiene que una relación de preferencias sobre un espacio topológico X se dice continua si los conjuntos de mejores-que x, y peores-que x son abiertos.

A continuación se muestran tres ejemplos de relaciones de preferencias sobre activos financieros, siguiendo los principios según los cuales se prefieren los activos con mayores rentabilidades y menor volatilidad:

Ejemplo 3.1.1. ***(Preferencias lexicográficas).*** *Sean dos activos financieros con medias y desviaciones estandar de sus rendimientos dadas por μ_j, σ_j donde $j = A, B$. Se define la relación de preferencia*

$$A \succ B \text{ si, y sólo si, } \mu_A > \mu_B \quad \text{ó} \quad \mu_A = \mu_B \text{ y } \sigma_A < \sigma_B.$$

Ejemplo 3.1.2. ***(Enfoque de media-varianza).*** *Sean dos activos financieros, A y B, con medias y desviaciones estandar de sus rendimientos dadas por μ_j, σ_j donde $j = A, B$. Se define la relación de preferencia*

$$A \succ B \text{ si, y sólo si } (\mu_A - \mu_B) - (\sigma_A - \sigma_B) > 0.$$

Es fácilmente verificable que esta relación de preferencia estricta cumple con las siguientes propiedades:

- ***Irreflexividad****: Un activo financiero A no puede ser preferido a sí mismo ya que $(\mu_A - \mu_A) - (\sigma_A - \sigma_A) = 0$, que claramente no es mayor que cero.*
- ***Asimetría****: Si $A \succ B$, entonces $(\mu_A - \mu_B) - (\sigma_A - \sigma_B) > 0$. Al multiplicar por menos uno dicha desigualdad se obtiene que $(\mu_B - \mu_A) - (\sigma_B - \sigma_A) < 0$, que implica que $B \not\succ A$.*
- ***Transitividad****: Si entre tres activos financieros (A, B, C) se tiene que $A \succ B$, $B \succ C$, entonces $(\mu_A - \mu_B) - (\sigma_A - \sigma_B) > 0$,a la vez que $(\mu_B - \mu_C) - (\sigma_B - \sigma_C) > 0$. Sumando dichas desigualdades se obtiene que $(\mu_A - \mu_C) - (\sigma_A - \sigma_C) > 0$, que es $A \succ C$.*
- ***Transitividad negativa****:Si entre tres activos financieros (A, B, C) se tiene que $A \not\succ B$, $B \not\succ C$, entonces $(\mu_A - \mu_B) - (\sigma_A - \sigma_B) \leq 0$,a la vez que $(\mu_B - \mu_C) - (\sigma_B - \sigma_C) \leq 0$. Sumando dichas desigualdades se obtiene que $(\mu_A - \mu_C) - (\sigma_A - \sigma_C) \leq 0$, que es $A \not\succ C$.*

Esta relación induce una relación de preferencia, $\succeq$, completa y transitiva, que además es continua.

Ejemplo 3.1.3. ***(Enfoque de tasas de rendimiento).*** *Sean dos activos financieros A, B, cuyas tasas de rendimiento están representadas por funciones $f_A(t), f_B(t)$ continuas y acotadas. Se define, para $T > 0$, la relación de preferencia*

$$A \succ B \text{ si, y sólo si, } \int_0^T (f_A - f_B)\, dt > 0.$$

A continuación se presentan dos condiciones que se suelen suponer sobre la relación de preferencia $\succeq$, que hacen tratables de manera más sencilla los problemas de elección: la monotonicidad y la convexidad. Las nociones de convexidad capturan la idea de que entre más se tenga de un bien, va a ser menos valorado en relación con los demás, es decir, que entre más se posea de un bien k, más se estará dispuesto a cambiar por una cantidad menor de otras mercancías. Esto es lo que se asocia típicamente como una tasa marginal de sustitución decreciente.

Definición 3.7. *Una relación de preferencias $\succeq$ definida sobre un espacio convexo X se dice*

- ***Convexa:*** *si para cualesquiera elementos $x, y \in X, x \succeq y$ con $\alpha \in (0,1)$ se tiene que $\alpha x + (1+\alpha)y \succeq y$*[13]*.*

- ***Estrictamente convexa:*** *si para cualesquiera elementos $x, y, z \in X, x \succ y$ a la vez que $z \succ y$ con $\alpha \in (0,1)$ se tiene que $\alpha x + (1+\alpha)z \succeq y$.*

A partir de lo anterior puede verse que para una relación de preferencias convexas necesariamente se tiene que los conjuntos de no-peores son convexos.

Definición 3.8. *Una relación de preferencias $\succeq$ definida sobre un conjunto X parcialmente ordenado mediante la relación $\geq$ se dice*

- ***Monótona*** *si $x \succeq y$ implica $x \geq y$.*

- ***Estrictamente monótona*** *si $x \succ y$ implica $x > y$.*

A continuación, en la Figura 3.2, se muestran los conjuntos de preferencias para una relación de preferencias definidas sobre $\mathbb{R}^2$. En dicha relación una cesta de consumo x es al menos tan buena como otra cesta y si x está a una distancia de la cesta $(4,5)$, en el sentido de la distancia usual, menor o igual que la distancia entre y y $(4,5)$.

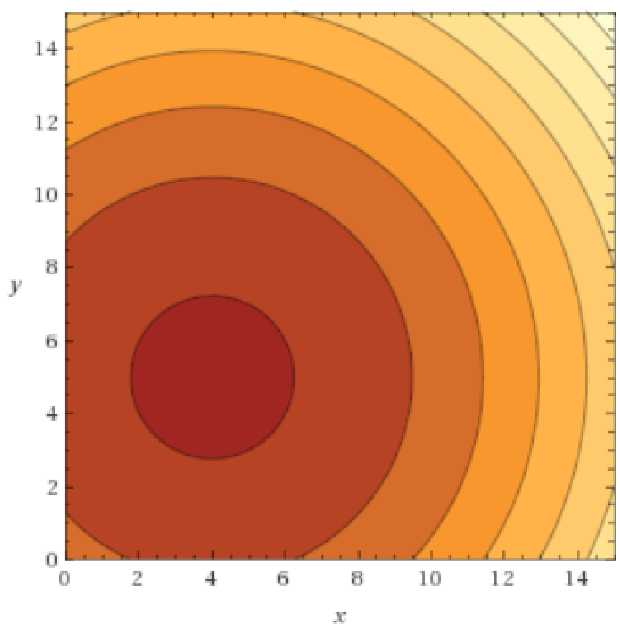

Figura 3.2: Ejemplo de conjuntos de preferencias no-monótonas y no-convexas.

3.2. Utilidad

Con frecuencia se emplea una representación numérica, una función de valor real, para representar, sobre el conjunto de los números reales, el ordenamiento parcial del conjunto que induce una relación de preferencias. En el caso particular de los consumidores, tal función suele ser una función ordinal de utilidad.

[13]Esta definición es equivalente a decir que una relación $\succeq$ sobre un espacio convexo, es convexa si $y \succeq x$, $z \succeq x$ implica que $\alpha y + (1-\alpha)z \succeq x$, para todo $\alpha \in [0,1]$ tal como aparece en Aliprantis, Brown y Burkinshaw [2].

Definición 3.9. *Dada una relación de preferencias $\succeq$ sobre X, una función ordinal de utilidad o sencillamente una función de utilidad, $u(\cdot)$, que representa dicha relación es una función*

$$\begin{aligned} u:\ & X \to \mathbb{R}, \\ & x \rightarrowtail u(x), \end{aligned}$$

tal que para cualesquiera elementos $x, y \in X$, se tiene que $x \succeq y$ implica $u(x) \geq u(y)$.

Nótese que las curvas de nivel de esta función de utilidad, llamadas comúnmente *curvas de indiferencia*, son el antes llamado conjunto de indiferencia, ya que a todos los planes de consumo a los que la función de utilidad les asigne el mismo valor son indiferentes entre sí. Un ejemplo de función de utilidad para las preferencias representadas en la Figura 3.2 es $u(x, y) = -(x-4)^2 - (y-5)^2$, para la que las circunferencias concéntricas en $(4, 5)$ definen los conjuntos de indiferencia y los círculos así definidos los conjuntos de no-peores. Otra característica de estas funciones de utilidad ordinales es que, dada una relación de preferencias, no están únicamente determinadas: una transformación creciente de una función de utilidad representa las mismas preferencias que la función original ya que el preorden inducido por las preferencias se preserva. Así, las preferencias de la Figura 3.2 también están representadas por $u(x, y) = -10(x-4)^2 - 10(y-5)^2 + 60$. Ahora se presenta una propiedad esencial de la función de utilidad, la invarianza frente a transformaciones crecientes.

Teorema 3.2.1. *Si f es una función tal que $f(x) > f(y)$ siempre que $x > y$, y $u(\cdot)$ es una función de utilidad que representa la relación de preferencias $\succeq$, entonces $f(u(\cdot))$ también representa la relación $\succeq$.*

Demostración. Sean dos planes de consumo cualesquiera de modo que $x \succeq y$. Como $u(\cdot)$ representa a $\succeq$, entonces $u(x) \geq u(y)$. Dado lo anterior y debido a que f es una transformación creciente, $f(u(x)) \geq f(u(y))$, que es lo que se quería mostrar. □

Esta propiedad es aprovechada para la estimación econométrica de los parámetros de una función de utilidad, por ejemplo mediante el empleo de logaritmos para linealizar la función. Por ejemplo, si los parámetros a estimar son aquellos de una función de utilidad de la forma Cobb-Douglas [véase Sección 3.2.3]:

$$u(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i},$$

entonces aplicando logaritmos se tiene una nueva representación de las mismas preferencias que se ajusta mejor al esquema lineal de estimación tradicional:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \ln u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \ln x_i.$$

A pesar de que esta es la formulación actual de la teoría, en sus inicios fue común pensar en una medida objetiva de la satisfacción, es decir una función cardinal de utilidad. Una de las principales desventajas de las funciones de utilidad ordinal es la imposibilidad de compararlas entre individuos, por lo que hablar de cosas como "utilidad promedio" no tiene sentido. En la práctica, en algunos campos es necesario recurrir a aproximaciones de medidas cardinales de utilidad. Para un comentario breve en el caso de economía de la salud se puede ver el artículo de García y Chicaiza [28].

3.2.1. Existencia de una familia de funciones de utilidad

Las condiciones que se requieren sobre la relación de preferencia $\succeq$ para garantizar la existencia de una familia de funciones que utilidad que la representen cambian si el conjunto de elección es finito, contable o no-contable. La siguiente sección resume y adapta algunos resultados reseñados en Bridges & Mehta [14].

Teorema 3.2.2. ***Existencia de una función de utilidad en un espacio de elección contable*** *Si existe una relación de preferencias racionales $\succeq$ definida sobre X, entonces existe una función u en X tal que para cualesquiera elementos $x \succeq y$ implica $u(x) \geq u(y)$.*

Demostración. Siguiendo a Bridges & Mehta [14, p. 8] Se supone que $\succeq$ es una relación de preferencia racional definida sobre X. Como X es contable, puede ser enumerado como $x_1, x_2, \ldots$. Ahora, para cada par de elementos x_i, x_j se define

$$r_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } x_j \succeq x_i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta es una función indicatriz que señala si el plan de consumo x_j es al menos tan bueno como el plan de consumo x_i. Ahora, se define la función

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} r_{ij}.$$

La serie que define a f converge de modo que f está bien definida. El valor de f en x_j es una medida del "tamaño" del conjunto de elementos en X que son no-mejores que x_j. Se verifica a continuación que la función f así definida es una función de utilidad. Sean dos planes de consumo $x, y \in X$, tales que $x \succeq y$. Como la relación de preferencia es transitiva, entonces para cualquier plan de consumo $z \in X$ para el que $y \succeq z$, también se tiene que $x \succeq z$, entonces el conjunto de índices de las opciones no-mejores que x contiene al conjunto de índices de las opciones no-mejores que y, esto es, $\{i : y \succeq x_i\} \subseteq \{i : x \succeq x_i\}$, por lo que $f(y) \leq f(x)$. □

Para extender el resultado de existencia de una función de utilidad a un conjunto de elección no-contable se emplea la noción de separabilidad del conjunto que se define a continuación.

Definición 3.10. *Decimos que una relación de pre-orden en X, $\succeq$, es* ***orden-separable en el sentido de Debreu****, si existe un subconjunto contable Z de X tal que cuando sea que $x \succ y$, existe $z \in Z$ tal que $x \succeq z \succeq y$.*

Teorema 3.2.3 (Existencia de una función de utilidad en un espacio de elección no-contable)**.** *Sea $\succeq$ una relación de preferencias racionales sobre un conjunto no-contable X. Para que exista una función u de valor real tal que para $x, y \in X$, si $x \succeq y$, entonces $u(x) \geq u(y)$, es suficiente que el conjunto X sea orden-separable en el sentido de Debreu.*

Demostración. (Siguiendo a Bridges & Mehta [14, p. 16]) Se supone que X es separable en el sentido de Debreu. Esto implica que hay un subconjunto contable Z' tal que cuando $x \succeq y$ existe $z \in Z'$ que cumple $x \succeq z \succeq y$. Entonces Z tiene solo una cantidad contable de saltos, de modo que el conjunto G de puntos finales de todos los saltos es contable. De esto se tiene que $Z = Z' \cup G$ es un conjunto contable. Sea $z_1, z_2, \ldots$ una numeración de Z. Para cada $x \in X$ sea

$$N(x) = \{n : x \succ z_n\},$$

y sea

$$f(x) = \sum_{n \in N} 2^{-n}.$$

Se verifica que $f(x)$ es una función de utilidad que representa $\succeq$. Se consideran dos elementos $x, y \in X$ tales que $y \succeq x$. Como $\succeq$ es una relación de orden completo, entonces $N(x)$ es un subconjunto de $N(y)$, de modo que $f(y) \geq f(x)$. $\square$

Una versión muy empleada de un teorema de existencia de una representación de preferencias por medio de una función de utilidad es aquella que se define para cestas de consumo en $\mathbb{R}^n$, tal como la presenta Mas-Colell y se reproduce a continuación:

Teorema 3.2.4. ***Mas-Colell [49, p. 47]*** *Suponga una relación de preferencias $\succeq$ racional, estrictamente monótona y continua en $\mathbb{R}^n_+$. Entonces existe una función de utilidad continua $u(x)$ que representa $\succeq$.*

Demostración. La primera parte de la demostración sigue lo mostrado en Mas-Colell [49, p. 47.]. Sea Z el rayo diagonal en $\mathbb{R}^n_+$, esto es el conjunto de todos los vectores cuyas componentes son todas no-negativas e iguales. Se denota como e al vector del conjunto Z cuyas componentes son todas iguales a 1. Nótese que para cada escalar α mayor o igual que cero, $\alpha e \in Z$. Nótese que para cada vector $x \in \mathbb{R}^n_+$ la monotonicidad implica que $x \succeq \mathbf{0}$, y que para cualquier $\tilde{\alpha}$ tal que $\tilde{\alpha} e \gg x$, necesariamente $\tilde{\alpha} e \succeq x$.

Se muestra ahora que para cada x hay un único valor $\alpha = \alpha(x)$, tal que $\alpha \cdot e \sim x$. Como $\succeq$ es una relación continua, para todo vector x en $\mathbb{R}^n$, los conjuntos de no-mejores y de no-peores son cerrados. Sean los siguientes conjuntos de números, $A^+ = \{\alpha : \alpha e \succeq x\}$, $A^- = \{\alpha : \alpha e \preceq x\}$, entonces, por completitud de $\succeq$, $\mathbb{R}_+ \subseteq (A^+ \cup A^-)$. Como A^+, A^- son cerrados, no-vacíos y como $\mathbb{R}$ es conexo, entonces $A^+ \cap A^-$ es un conjunto no-vacío. Esto es, existe al menos un valor α en $A^+ \cap A^-$, es decir un α para el que $\alpha e \sim x$. Ahora, por monotonicidad, para cualquier otro valor $\hat{\alpha}$ tal que $\hat{\alpha} > \alpha$, necesariamente $\hat{\alpha} e \succ \alpha e$, por lo que α es único. Se toma ahora $\alpha(x)$ como la función de utilidad, esto es, definimos la función de utilidad $u(x)$ como $u(x) = \alpha(x)$. Se verifica a continuación que dicha función cumpla con las propiedades que debe cumplir una función de utilidad.

Se verifica inicialmente que $u(x)$ representa a $\succeq$. Suponga que $\alpha(x) \geq \alpha(y)$. Por monotonicidad $\alpha(x)e \succeq \alpha(y)e$. Dado que $x \sim \alpha(x)e$ y además $y \sim \alpha(y)e$, entonces $x \succeq y$. Por otro lado, si $x \succeq y$, entonces $\alpha(x)e \sim x \succeq y \sim \alpha(y)e$ y entonces por monotonía se tiene que $\alpha(x) \geq \alpha(y)$. Ahora, siguiendo a Lozano [45, p. 120], se muestra que $u(x)$ es continua. Para esto basta con mostrar que la imagen inversa de todo intervalo de la forma $[u_0, \infty)$ o de la forma $[0, u_0]$ es cerrada en $\mathbb{R}^n_+$. Debido a que el rango de la función $u(\cdot)$ es $\mathbb{R}_+$, la continuidad de la relación $\succeq$ implica que los conjuntos de no-mejores y no-peores que los planes de consumo x tales que $u(x) = u_0$ son cerrados en $\mathbb{R}^n_+$ Para el conjunto de no-peores se tiene que

$$\begin{aligned} u^{-1}([u_0, \infty)) =& \{x \in \mathbb{R}^n_+ | u(x) \geq u_0\}, \\ & \{x \in \mathbb{R}^n_+ | u(x) \geq u(x_0)\}, \\ & \{x \in \mathbb{R}^n_+ | x \succeq x_0\}. \end{aligned}$$

De manera similar se termina la demostración para el conjunto de no-mejores. $\square$

Hay preferencias que no se pueden representar como funciones de utilidad, por ejemplo las preferencias lexicográficas. Un caso de preferencias de este estilo podrían ser preferencias sobre activos financieros que cataloguen como preferidos aquellos portafolios con mayor rentabilidad y entre los de misma rentabilidad, prefieran el de menor varianza.

3.2.2. Algunas propiedades de las funciones de utilidad

Se definen a continuación las propiedades de concavidad de la función de utilidad[14].

Definición 3.11. *Una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ es:*

- ***Cuasicóncava:*** *si para cualesquiera $x, y \in X, x \succeq y$, con $x \neq y$, se tiene que $u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq u(y)$.*
- ***Estrictamente cuasicóncava:*** *si para cada número $0 < \alpha < 1$ y cada par $x, y \in X$, con $x \neq y$, se tiene que $u(\alpha x + (1-\alpha)y) > \text{mín}\{u(x), u(y)\}$.*
- ***Cóncava:*** *si para cada número $0 < \alpha < 1$ y cada par $x, y \in X$, con $x \neq y$, se tiene que $u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y)$.*
- ***Fuertemente cuasicóncava:*** *si para cada número $0 < \alpha < 1$ y cada par $x, y \in X$, con $x \neq y$, con $u(x) \geq u(y)$, se tiene que $u\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right) > u(y)$.*
- ***Estrictamente cóncava:*** *si para cada número $0 < \alpha < 1$ y cada par $x, y \in X$, con $x \neq y$, se tiene que $u(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y)$.*

La condición de cuasiconcavidad de la función de utilidad se tiene si, y sólo si, se tiene la convexidad de la relación de preferencia. En la Figura 3.3 se resumen las relaciones de implicaciones de las diferentes condiciones de concavidad sobre funciones reales. Nótese que el que una función sea estrictamente cuasicóncava no implica que la función sea cuasicóncava. Por supuesto estas relaciones se mantienen para las condiciones y definiciones análogas de funciones convexas.

$$\begin{tikzcd}
\text{Estrictamente cóncava} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Fuertemente cuasicóncava} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Estrictamente cuasicóncava} \\
& \text{Cóncava} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Cuasicóncava}
\end{tikzcd}$$

Figura 3.3: Relación de condiciones de concavidad de funciones.

Teorema 3.2.5. *Aliprantis, Brown y Burkinshaw [2, p. 10].* *Para una relación de preferencia continua $\succeq$ definida en el cono positivo $\mathbb{R}^l_+$ de algún $\mathbb{R}^l$ se tiene que si $\succeq$ es convexa y monótona con un plan de consumo extremadamente deseable, entonces la relación $\succeq$ puede ser representada por una función de utilidad continua, monótona y cuasicóncava.*

Demostración. (Siguiendo a Aliprantis, Brown y Burkinshaw [2, p. 10]). Se considera una relación de preferencias continua, convexa, monótona con una cesta extremadamente deseable v. Se nota que, por la monotonicidad de $\succeq$, la cesta $e = v + (1, 1, \ldots, 1)$ es también una cesta extremadamente deseable, de modo que se puede suponer que existe una cesta extremadamente deseable $e = (e_1, e_2, \ldots, e_l)$ tal que $e_i > 0$ para cada i. Se define para cada $x \in \mathbf{R}^l_+$

$$u(x) = \text{ínf}\{\alpha > 0 | \alpha e \succeq x\}.$$

[14] Algunas de estas definiciones son adaptadas de [25].

Como todas las componentes de e son positivas, existe un $\alpha > 0$ tal que $\alpha e > x$, y por tanto para dicho valor (y cualquiera mayor) se tiene que $\alpha e \succeq x$, por lo que la función está bien definida.

Se prueba ahora que $x \sim u(x)e$. Como el conjunto de no-peores que x es cerrado, se tiene necesariamente que $u(x)e \succeq x$. Ahora resta mostrar que $x \succeq u(x)e$. Si $u(x) > 0$, entonces para para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se tiene que $x \succeq (u(x) - \varepsilon)e$ y haciendo $\varepsilon \to 0$, se ve que $x \succeq u(x)e$ también se tiene. De modo que si $u(x) > 0$ se tiene que $x \sim u(x)e$. Si $u(x) = 0$, en cambio, como $x \geq 0$, se tiene que $x \succeq 0 = u(x)e$, por lo que también se tiene que $x \sim u(x)e$.

Para mostrar que la función definida en efecto representa las preferencias $\succeq$, se muestra que si $\alpha \geq 0$ y $\beta \geq 0$, entonces $\alpha e \succeq \beta e$ si, y sólo si, $\alpha \geq \beta$. En efecto, si $\alpha e \succeq \beta e$, entonces $\beta > \alpha$ implica que $\beta e = \alpha e + (\beta - \alpha)e \succ \alpha e$, que es imposible. La continuidad de la función así definida se deriva de la continuidad de la relación de preferencias. □

3.2.3. Funciones de utilidad típicas

Las funciones de utilidad más tradicionales en microeconomía son aquellas de la familia de elasticidad de sustitución constante[15]. A continuación, en el Cuadro 3.1, se presentan las versiones de dichas funciones para n mercancías[16].

Función con elasticidad de sustitución constante (CES)	$u(\mathbf{x}) = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right]^{\frac{-\sigma}{\rho}}$	$\alpha_i, \sigma, \rho \in \mathbb{R}, \rho \neq 0.$
Lineal	$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i;$	$\alpha_i \in \mathbb{R}.$
Cobb-Douglas	$u(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i};$	$\alpha_i \in \mathbb{R}.$
Leontief	$u(\mathbf{x}) = \text{mín}\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^{n};$	$\alpha_i \in \mathbb{R}.$

Cuadro 3.1: Algunas funciones de utilidad tradicionales.

- La versión lineal de la función CES se obtiene haciendo $\rho = -1; \sigma = 1$. Esta se emplea para modelar preferencias que consideran las mercancías involucradas como sustitutos perfectos. Por ejemplo, soy indiferente entre un capuccino, un mocaccino o un latte.
- La función Leontief modela bienes que son considerados como complementarios perfectos. Al comprar juegos de cubiertos se prefiere por cada cuchillo, un tenedor, una cuchara sopera y una cucharilla de postre, tener 3 juegos completos y 2 imcompletos da lo mismo que tener sólo los 3 juegos completos.

[15] CES por sus sigles en inglés.

[16] Es común encontrar la definición de la función CES en versiones menos generales, por ejemplo asumiendo el parámetro $\sigma = \pm 1$, o como aparece en Nicholson (2008) donde se asume que $\sigma = -\rho := \delta, \alpha_i = \frac{1}{\delta}$, con lo que la función CES se expresa como $u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\delta}$. También se puede encontrar la función Cobb-Douglas multiplicada por un escalar y con los exponentes normalizados de forma que sumen uno. Esto último es posible aprovechando que, por la misma definición de la función de utilidad, esta representa las mismas preferencias si se le aplica una transformación creciente, bien sea multiplicar o dividir por un escalar positivo o tomar raíz de grado igual a la suma de los exponentes de la función original.

- La función Cobb-Douglas modela preferencias que consideran que hay una relación de complementariedad y sustitución imperfecta.

- En el caso que sólo haya una mercancía, todas estas funciones son equivalentes en el sentido de que representan las mismas preferencias, preferencias monótonas en las que más de la mercancía en cuestión es preferido.

En la Figura 3.4 se muestra la curva de indiferencia de nivel 4 para varias funciones de utilidad CES con diferentes valores del parámetro ρ, haciendo $\sigma = -\rho$. Los valores de ρ en la Figura 3.4 son, desde el origen, $\rho =$ (0.01 (roja), 0.1 (naranja), 0.5 (azul), 1 (verde), 2 (negra), 20 (morada)). Se nota el caso lineal como un caso particular de la CES cuando $\rho = 1$, y la función Leontief cuando ρ tiende a cero como una forma límite de la CES. Además, se nota que las preferencias representadas por esta función dejan de ser convexas para valores de ρ más grandes que 1.

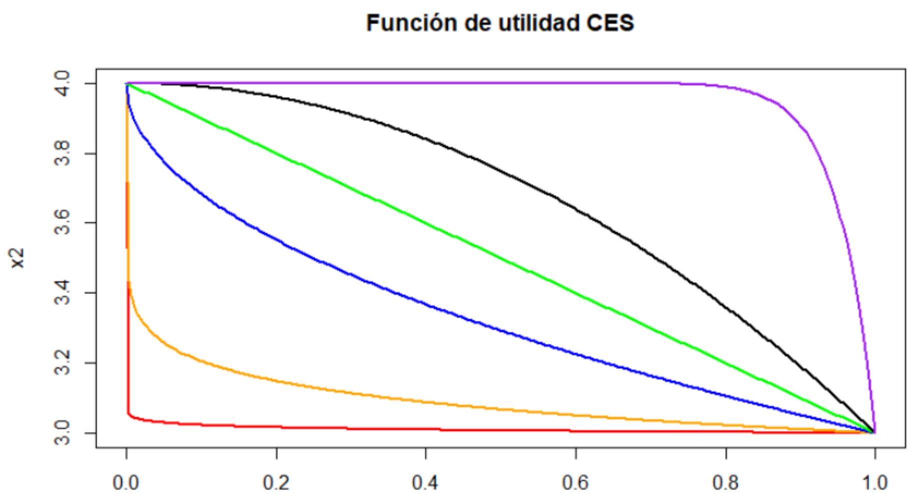

Figura 3.4: Curva de indiferencia de nivel 4 de una función de utilidad CES con variación de parámetros. Elaboración propia.

En la Figura 3.5 se muestra un posible conjuntos de cestas indiferentes para el caso en que el espacio de cestas de consumo es $\mathbb{R}^3$.

3.2.4. Propiedad en las preferencias

Se define en esta sección la noción de propiedad de las preferencias que será importante para describir en los espacios Riesz uno de los resultados principales del análisis de bienestar: el segundo teorema del bienestar. En el caso de dimensión infinita, esta propiedad compensa la ausencia de puntos interiores en el cono positivo de elección. Para ello se define antes la noción de convergencia en orden.

Definición 3.12. ***Propiedad de las preferencias:*** *sea E un espacio de Riesz. τ una topología lineal en E, y $\succeq$ una relación de preferencias sobre el cono positivo E^+,*

- *La relación de preferencias se dice **τ-propia** en algún punto $x \in E^+$ cuando existe algún $v > 0$ y alguna $\tau-$vecindad V de cero tal que $x - \alpha v + z \succeq x$ en E^+ para α, implica que $z \notin \alpha V$.*

- *La relación de preferencias se dice **uniformemente τ-propia** en algún punto $x \in E^+$, cuando existe algún $v > 0$ y alguna $\tau-$vecindad V de cero tal que para cualquier $x \in E^+$ que cumpla que $x - \alpha v + z \succeq x$ en E^+ para α, se tiene que $z \notin \alpha V$.*

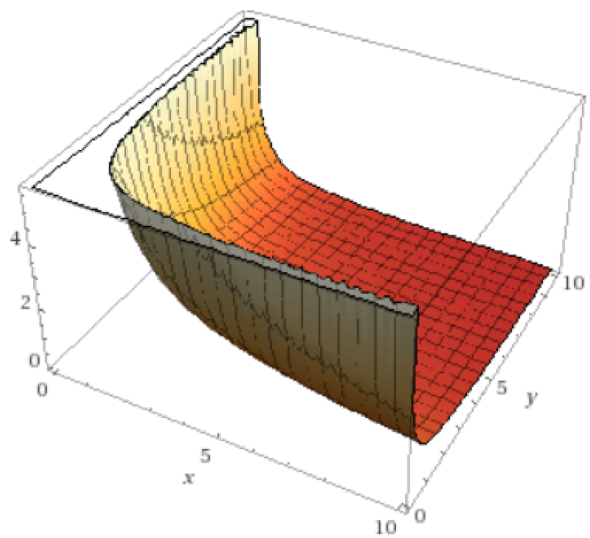

Figura 3.5: Superficie de indiferencia de una función de utilidad Cobb-Douglas de tres mercancías.

De acuerdo con Aliprantis y Burkinshaw [3, p. 116], se puede interpretar esta característica de las preferencias como el que una pérdida en el sentido de algún vector v no puede ser recuperada por una canasta "pequeña". Otra forma en que ha sido caracterizada esta propiedad, que permite una interpretación geométrica, es la de Mas-Colell como sigue a continuación y se representa en la Figura 3.6

Definición 3.13. *Sea τ una topología localmente convexa*[17] *en un espacio de Riesz E y sea $\succeq$ una preferencia sobre E^+. Entonces $\succeq$ es **uniformemente τ-propia** si y solo si existe un cono convexo no-vacío $\tau-$abierto Γ tal que*

- $\Gamma \bigcap (-E^+) \neq \emptyset$;
- $(x+\Gamma)\bigcap P(x) = \emptyset$ *para todo $x \in E^+$, donde $P(x)$ es el conjunto de planes de consumo no-peores que x.*

3.3. Funciones de utilidad en situaciones de riesgo

Cuando se conocen las probabilidades asociadas a los diferentes estados de la naturaleza, se está frente a una situación de decisión bajo riesgo. La modelación tradicional de esta situación emplea ampliamente la figura de las loterías. Un aporte importante a la modelación lo hicieron John von Neumann y Oskar Morgerstern [81, p. 24] al definir los axiomas que debe cumplir una función de utilidad para que capture y refleje el concepto de valor esperado desarrollado inicialmente por Bernoulli. Este es el enfoque tradicional para abordar situaciones de decisión bajo riesgo.

3.3.1. Criterio del valor esperado

La primera herramienta matemática de decisión en situaciones de riesgo es el valor esperado. Para una lotería (Θ, π, X, f) caracterizada por pagos $x_i = f(\theta_i)$ con probabilidades $\pi_i = \pi(x = x_i)$, el valor esperado en el caso de un conjunto contable de estados de la naturaleza Θ está dado por

$$E(x) = \sum_i x_i \pi_i,$$

[17]Una topología lineal τ se dice localmente convexa si todos los conjuntos de la forma $\{x : ||x|| < \varepsilon\}$ con ε siendo número positivo, son convexos.

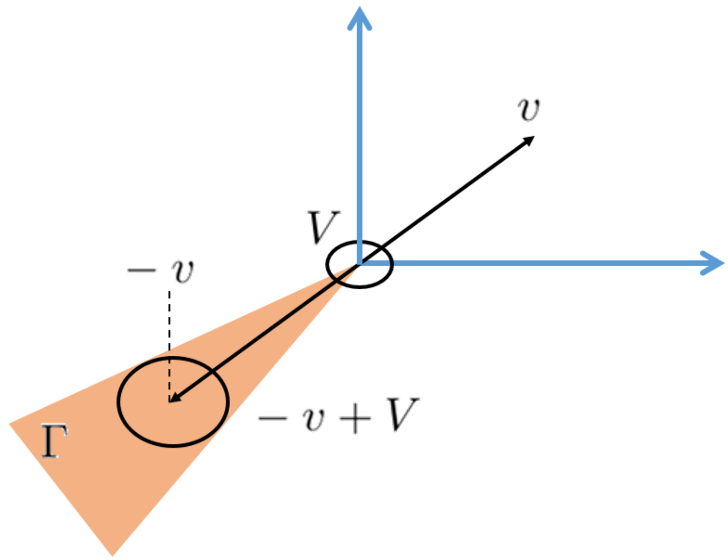

Figura 3.6: Representación de preferencias uniformemente τ-propia. Tomada de Aliprantis, Brown y Burkinshaw [2, p. 117].

y en el caso de que los pagos sucedan en un conjunto no-contable de estados de la naturaleza Θ con una función de densidad de probabilidad $g(x)$, se puede tener como

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) dx.$$

No obstante, este criterio deja de lado la valoración que el agente pueda hacer sobre dichos pagos, por ejemplo, según su perfil de riesgo (véase Sección 4.2.4). Tomando el ejemplo de Hens y Rieger [32], no necesariamente está "el doble de feliz" si se gana un billón de pesos comparado con si se gana medio billón de pesos. Esta modelación es complementada con la introducción del concepto de *utilidad esperada*.

3.3.2. Funciones de utilidad von Neumann-Morgenstern

Siguiendo las ideas inicialmente presentadas por John von Neumann y Oskar Morgenstern [81], es posible deducir el comportamiento de la función de utilidad esperada a partir de un conjunto de axiomas, que se relacionan con los axiomas de racionalidad de las preferencias, como se han mostrado en este capítulo. Se presenta inicialmente la definición de una función de utilidad Bernoulli que da lugar a la definición de la función de utilidad von Neumann-Morgenstern.

Definición 3.14. *Una función de utilidad Bernoulli u es una función de utilidad definida sobre el conjunto de resultados posibles, asociados a la elección de una lotería y la ocurrencia de un determinado estado de la naturaleza:*

$$\begin{aligned} u : X &\to \mathbb{R}, \\ (x_i) &\mapsto u(x_i). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.1. ***(Utilidad Bernoulli de una lotería simple).*** *Considere el ejemplo de lotería de la Figura 2.6. En dicho ejemplo se tiene una Acción A que puede tomar diferentes valores, diferentes resultados, dependiendo de lo que ocurra como estado de la naturaleza: bien puede aumentar su valor* *a \$38,150 o bien disminuirlo a 37,850. Sobre esos resultados se puede definir una función de utilidad Bernoulli, por ejemplo, $u(x) = \sqrt{x}$, con lo que cada resultado asociado a la lotería en cada uno de los estados de la naturaleza queda con un valor real asociado como se ve en la Figura 3.7. De esta manera la utilidad Bernoulli asociada al aumento de la cotización de la Acción A es de 195, 32025 aproximadamente.*

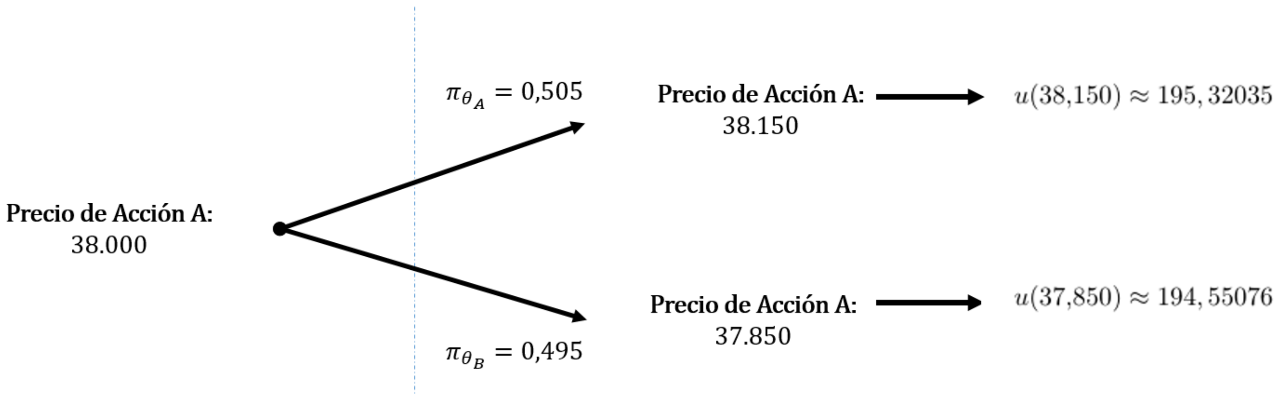

Figura 3.7: Función de utilidad Bernoulli.

De esta manera, es claro que la función de utilidad Bernoulli es la utilidad de cada posible resultado de una lotería escogida. A continuación se combinan las funciones de utilidad Bernoulli de todos los posibles estados de la naturaleza relevantes en la elección de una determinada lotería para crear una "función de utilidad conjunta" de toda la lotería, la función de utilidad von Neumann Morgenstern.

Definición 3.15. *Sea $B = (\Theta, \pi, X, f)$ una lotería, donde Θ es el conjunto de estados de la naturaleza, $\pi(\cdot)$ es la medida de probabilidad de los estados de la naturaleza, X el conjunto de resultados y $f(\cdot)$ la función valor. Una función de utilidad esperada es una función U que asigna a cada lotería B un valor tal que*

$$U(B) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{M} \pi(\theta = \theta_k) u(x_k), & \text{si } \Theta \text{ es un conjunto contable con } M \text{ elementos,} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta) u(x(\theta)) d\theta, & \text{si } \Theta \text{ es un conjunto no-contable,} \end{cases}$$

donde $u(\cdot)$ es una función de utilidad Bernoulli.

A una función de utilidad esperada se le conoce también como una función von Neumann-Morgenstern.

Ejemplo 3.3.2. ***(Utilidad von Neumann-Morgenstern de una lotería simple).*** *En el ejemplo de la Figura 3.7 la utilidad esperada de la lotería definida por la cotización de la Acción A está dada por*

$$U(A) = 0,505 \cdot u(38{,}150) + 0,495 \cdot u(37{,}850) = 0,505 \cdot \sqrt{38{,}150} + 0,495 \cdot \sqrt{37{,}850} \approx 194,939.$$

Definición 3.16. ***Axiomas de la función de utilidad esperada - von Neumann-Morgenstern.*** *Los siguientes axiomas son requeridos para caracterizar un funcional de utilidad esperada. Si se tienen tres loterías B, C, D que se diferencian únicamente en sus medidas de probabilidad, entonces:*

- ***Completitud:*** $D \succeq B$ *o* $B \succeq D$.
- ***Transitividad:*** *si* $D \succeq B$ *a la vez que* $B \succeq C$, *entonces* $D \succeq C$.

- ***Indenpedencia (frente a alternativas irrelevantes)***[18]***:*** *si $D \succ B$ a la vez que $\alpha \in (0,1]$, entonces para cualquier otra lotería C se tiene que $\alpha D + (1-\alpha)C \succ \alpha B + (1-\alpha)C$.*

- ***Continuidad:*** *si $D \succeq B \succeq C$, entonces existe una probabilidad p tal que $B \sim pD + (1-p)C$.*

Los axiomas de completitud y transitividad son análogos a los definidos en la Definición 3.1 en el caso general. Con estos axiomas es posible garantizar la existencia de una representación funcional real de dichas preferencias, como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 3.3.1. ***Hens & Rieger [32, p. 33]*** *Si una relación de preferencias satisface los axiomas de la Definición 3.16, puede ser representada por un funcional de utilidad esperada.*

Demostración. (Siguiendo a Hens & Rieger [32, p. 33]). Se considera una lotería A con una cantidad finita de resultados $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tales que $x_1 > x_2 \ldots > x_n$, con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivamente. Por el axioma de continuidad un pago seguro de x_i es indiferente a una lotería con pagos x_1 y x_n con probabilidades adecuadas q_i[19] y $(1-q_i)$ respectivamente. Ahora, por el axioma de independencia es posible reemplazar cada uno de los pagos de la lotería A por loterías con pagos x_1 y x_n, de modo que la lotería resultante tiene únicamente dichos pagos con probabilidades $\sum_{i=1}^{n} p_i q_i$ y $\sum_{i=1}^{n} p_i(1-q_i)$. Sin pérdida de generalidad, se supone que el pago x_1 es preferido al pago x_n, entonces se puede definir la función de utilidad de la lotería A como el valor de la probabilidad de obtener dicho pago, ya que al ser comparada con otra lotería será preferida aquella para la cual dicha probabilidad sea más grande. Esto es que la función de utilidad sea de la forma

$$U(A) = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i.$$

Se puede ver que definiendo la utilidad de cada pago x_i como $u(x_i) = q_i$ la expresión anterior es la expresión de una función de utilidad esperada que resulta de la combinación convexa de funciones de utilidad Bernoulli. □

Después de definida la función de utilidad esperada, se puede interpretar la concavidad de la misma, cuando se obtienen pagos monetarios, como una descripción de cierta aversión al riesgo. De manera análoga, una función de utilidad esperada convexa caracteriza un comportamiento de búsqueda de riesgo por parte del consumidor. Así, una persona con una función de utilidad afín, presenta un comportamiento riesgo-neutral. A continuación se presenta la definición de diferentes perfiles de riesgo a partir de la noción de utilidad esperada.

Definición 3.17. ***Lozano [45, p. 283]*** *Si se tiene un individuo con una relación racional definida sobre un conjunto de loterías, entonces,*

- *dicho individuo es* ***averso al riesgo****, si para toda lotería simple L, la lotería degenerativa que da el valor esperado de L con certeza es al menos tan buena como la lotería L. Dicho individuo es* ***estrictamente averso al riesgo****, si es averso al riesgo y además, la indiferencia se tiene únicamente cuando las dos loterías son iguales; es decir, si prefiere el resultado X a cualquier lotería simple no-degenerativa cuyo valor esperado sea X.*

- *dicho individuo es* ***neutral al riesgo****, si para toda lotería simple L la lotería degenerativa que da el valor esperado de L con certeza es indiferente a la lotería L.*

[18] En el contexto de elección social, la violación de este supuesto conduce a algunos ejemplos de paradojas de ciertos mecanismos de votación.

[19] Dicha probabilidad podría estar dada por $q_i = \dfrac{x_i - x_n}{x_1 - x_n}$.

- *dicho individuo es **propenso o amante al riesgo**, si para toda lotería simple L, la lotería L es al menos tan buena como la lotería degenerativa que da el valor esperado con certeza. Dicho individuo es **estrictamente amante al riesgo** si es amante al riesgo y además, la indiferencia se tiene únicamente cuando las dos loterías son iguales; es decir si prefiere lotería simple no-degenerativa cuyo valor esperado sea X a el resultado X con certeza.*

Suponiendo una función de utilidad de un cierto nivel de riqueza, la noción de aversión al riesgo puede ser capturada en la concavidad de dicha función de utilidad. Esto se ilustra en la Figura 3.8, donde el conjunto de resultados son las posibles cantidades de riqueza w, la función de utilidad $u(w)$ es una función de utilidad Bernoulli y se definen loterías con dos escenarios de la naturaleza $\{\theta_1, \theta_2\}$ con probabilidades asociadas $\pi_1, (1-\pi_1)$ respectivamente. En este caso la concavidad de la función de utilida Bernoulli hace que la utilidad von Neumann-Morgenstern, que es la combinación convexa de las utilidades Bernoulli de diferentes resultados (la diagonal punteada en la gráfica), tome un valor menor que el valor asociado a la ganancia segura. Lo anterior se nota en que para cualquier par de resultados w_1, w_2 la combinación convexa de sus utilidades es menor que la utilidad de la combinación convexa de los resultados.

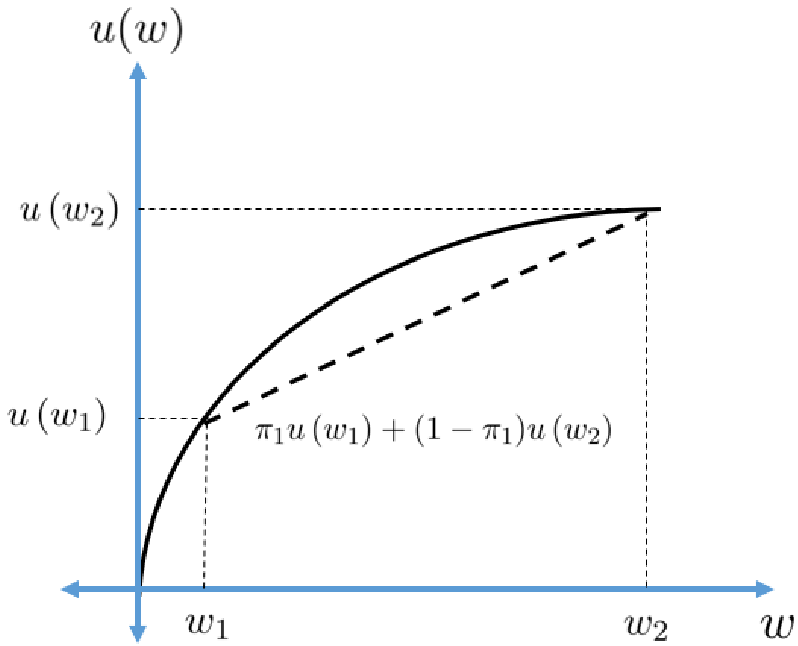

Figura 3.8: Relación entre concavidad de la función de utilidad Bernoulli y aversión al riesgo.

Como un primer, y más conocido, indicador de esta aversión al riesgo absoluta se encuentra el **coeficiente de Arrow-Pratt**, r, calculado como

$$r = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

Nótese que funciones diferentes pueden dar lugar al mismo coeficiente de Arrow-Pratt; basta tomar como ejemplo las funciones $u(x) = -x^2$ y $u(x) = \ln(x)$, ambas para $x > 0$. Además, tomando el caso de funciones de utilidad definidas sobre el cono real unidimensional positivo, como sería el caso tradicional sobre el consumo de una sola mercancía, se nota que esta medida no es invariante frente a transformaciones monótonas. Las funciones $u(x) = x^\alpha, (\alpha > 0)$, $u(x) = \ln(x)$ y $u(x) = e^x$ representan las mismas preferencias para $x > 0$; no obstante se les asocian distintos coeficientes de Arrow-Pratt. Esto indica que en este punto se abandona la versión general de la teoría de la utilidad ordinal y se recurre a una teoría de utilidad cardinal. En el caso de n mercancías, se podría definir la aversión respecto a la $j-$ésima mercancía como:

$$r = \frac{u''_{x_j}}{u'_{x_j}}.$$

Se presentan ahora los coeficientes para algunas de las funciones generales tradicionales[20]:

$$\begin{array}{ll} \text{Lineal:} & r = 0. \\ \text{Cobb-Douglas} & r = \dfrac{1-\alpha_j}{x_j}. \\ \text{CES} & r = \dfrac{1-\delta}{x_j^{-1}}. \end{array}$$

En el caso de la función de utilidad lineal se tiene neutralidad al riesgo para la $j-$ésima mercancía. En el caso de la función de utilidad Cobb-Douglas, para valores de $\alpha_j < 1$ se presenta aversión al riesgo, para $\alpha_j > 1$ se tiene gusto por el riesgo y si $\alpha_j = 1$ se tiene neutralidad al riesgo para la $j-$ésima mercancía. Además, si bien este coeficiente no está definido para la función de utilidad Leontief, tomando el límite sobre el parámetro δ cuando este tiende a $-\infty$ se tendría una completa aversión al riesgo sobre el consumo de la $j-$ésima mercancía.

Dependiendo del comportamiento del coeficiente de Arrow-Pratt, las funciones de utilidad Bernoulli se pueden clasificar como:

- función de utilidad de aversión al riesgo absoluta constante, denominada CARA por sus siglas en inglés. Además de la función lineal, un ejemplo típico es la función

$$u(x) = -e^{-Ax},$$

  donde

$$r(x) = \frac{-A^2e^{-Ax}}{-Ae^{-Ax}} = A.$$

- función de utilidad de aversión al riesgo absoluta decreciente, denominada DARA por sus siglas en inglés. Un ejemplo de este tipo de funciones es la función de utilidad Cobb-Douglas.
- función de utilidad de aversión al riesgo absoluta creciente, denominada IARA por sus siglas en inglés.
- función de utilidad de aversión al riesgo absoluta hiperbólica, denominada HARA por sus siglas en inglés. Estas funciones tienen un coeficiente de Arrow Pratt de la forma

$$r(x) = \frac{1}{\alpha x + \beta}.$$

  Esta categoría no es excluyente con las anteriores.

En el ejemplo de la Figura 3.7 los resultados están definidos, en este caso, como una función sobre los niveles del valor de la acción. Una forma diferente es sugerida en la teoría de perspectiva[21] donde el valor asociado a cada estado de la naturaleza no es el nuevo valor de la acción, sino la diferencia entre la nueva cotización de la acción y la cotización anterior; con esto, el resultado es negativo si la cotización de

[20]Por simplicidad se presenta aquí el coeficiente de Arrow-Pratt para una función como la presentada en Nicholson (2008). El coeficiente de la versión general presentada antes sería $r = (\sigma+\rho)\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{-\rho}\right](\alpha_j x_j^{-(\rho+1)}) - (\rho+1)x_j^{-1}$.

[21]Más reconocida por su nombre en inglés, *prospect theory*. A veces se le ha traducido también como "teoría de prospectos".

la acción disminuye y es positivo si la cotización aumenta. Lo anterior refleja la percepción de la nueva situación como una "ganancia" o una "pérdida", ya que la pone en comparación con una situación de referencia. La función de utilidad Bernoulli sugerida en la teoría de perspectiva hace un trato diferenciado de ganancias y pérdidas, definiendo una función cóncava en el dominio de las ganancias y una función convexa en el dominio de las pérdidas para reflejar el resultado experimental de aversión al riesgo en el dominio de las ganancias y propensión al riesgo en el dominio de las pérdidas [37, 78].

3.3.3. Enfoque de media-varianza

El criterio de media-varianza para decisión en situaciones de incertidumbre, típicamente asociado a decisiones de elección de portafolio, fue introducida por Markowitz en su artículo *Portfolio selection* de 1952 [48]. Este criterio depende únicamente de los parámetros de media y varianza de las loterías involucradas. En el contexto de la selección de portafolio las opciones (loterías) son los diferentes portafolios y los parámetros de media y varianza corresponden, *grosso modo*, al rendimiento promedio del portafolio y a su volatilidad.

Definición 3.18. *Una función de utilidad media-varianza,*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ (\mu, \sigma) &\mapsto u(\mu, \sigma), \end{aligned}$$

se dice

- ***Estrictamente monótona**, si* $u(\mu, \sigma) > u(\gamma, \psi)$ *para* $\mu > \gamma$*,*
- ***Estrictamente riesgo-averso:**,* $u(\mu, \sigma) > u(\gamma, \psi)$ *para* $\psi > \sigma$*.*

Sin embargo el éxito de este enfoque ha sido limitado, en especial dado el siguiente resultado.

Teorema 3.3.2. ***Paradoja de media-varianza. (Hens & Rieger [32, p. 50,51]):*** *Para cada función de utilidad de media-varianza continua* $u(\mu, \sigma)$ *que representa preferencias riesgo-aversas, existen dos activos* A *y* B *tales que* A *ofrece un pago no-menor en cada estado de la naturaleza que* B*, pero* B *es preferido sobre* A*.*

Demostración. (Siguiendo a Hens & Rieger [32, p. 51]). Se construye un ejemplo explícito en el que se asume que la función de utilidad Bernoulli asociada a cada pago es monótona por simplicidad. Se considera la siguiente lotería

$$A_N \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - \dfrac{1}{N^2}, \\ N & \text{con probabilidad } \dfrac{1}{N^2}. \end{cases}$$

El valor esperado de dicha lotería es

$$\mathbb{E}\left(A_N\right) = 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{N^2}\right) + N\left(\frac{1}{N^2}\right) = \frac{1}{N}.$$

La varianza de dicha lotería es

$$\operatorname{Var}\left(A_N\right) = \left(N - \frac{1}{N}\right)^2 \frac{1}{N^2} + \left(\frac{-1}{N}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{N^2}\right) = 1 - \frac{1}{N^2}.$$

Se compara a continuación con la lotería que da un pago seguro de cero, B. A medida que N se hace grande el valor esperado de la lotería A_N tiendo a cero, mientras que su varianza converge a 1. Como la función de utilidad es continua y representa preferencias de un agente riesgo-averso

$$U(A_N) = u(\mu, \sigma^2) \to u(0,1) < u(0,0) = U(B),$$

de modo que se puede elegir un N suficientemente grande de tal manera que

$$u\left(\frac{1}{N}, 1 - \frac{1}{N^2}\right) < u(0,0).$$

Aún cuando la lotería A_N ofrece resultados positivos en algunos estados de la naturaleza, la lotería de pago seguro cero es preferida bajo esta función de utilidad, que es el resultado de la paradoja de media-varianza. □

3.4. Bitácora del capítulo

En el enfoque tradicional se emplea la figura de las prefencias como criterio de elección en el problema del consumidor. Esta relación binaria debe ser, en general, completa y transitiva, y además suele modelarse con otras características, como monotonicidad estricta y cuasiconcavidad, para poder ser representada en la forma de una función de utilidad. En el caso del enfoque de media-varianza y en varias aplicaciones de funciones de utilidad bajo riesgo, se emplea una función de valor real que junto al orden de los reales permite la definición de las preferencias sobre un conjunto de resultados, caso que contrasta con el caso tradicional donde las preferencias están definidas sobre el espacio de mercancías. Con los elementos definidos hasta este capítulo queda completamente caracterizado el problema de elección del consumidor. En el siguiente capítulo se plantearán algunas observaciones sobre la forma en la que se realiza la elección y se encuentra solución (o no) a este problema. Varias observaciones de la economía del comportamiento y de la economía experimental son precisas en este momento para hacer una comparación empírica de la teoría. Finalmente, en el Capítulo 5 se reunen los elementos construidos hasta este momento en la plataforma de las economías de intercambio y se presentan las versiones generales de los teoremas del bienestar.

Capítulo 4

Elección

Existen dos enfoques de construcción de la teoría de la elección: un *enfoque normativo* y un *enfoque descriptivo*. En el enfoque normativo, presentado hasta ahora, la modelación suele adoptar los supuestos de racionalidad y poder de cómputo por parte del agente. En este enfoque se pregunta cuál debería ser la decisión del agente, del consumidor, en este contexto y se prescribe un algoritmo para encontrar el conjunto solución. En el enfoque descriptivo se indaga sobre cómo toman estas decisiones los individuos en el mundo real y, sobretodo recientemente, se llevan a cabo experimentos y observaciones desde la economía del comportamiento, que se nutren de aportes de áreas como la física y la sociología. En esta sección se describen las generalidades de estos enfoques en el contexto del problema del consumidor[1]. La teoría que se construye en el marco presentado en este trabajo contempla únicamente situaciones en las que los consumidores no toman decisiones sobre los precios.

4.1. Teoría de la elección normativa

Se presentan a continuación algunos de los criterios de toma de decisión más conocidos según las condiciones de información en que se de la elección. La elección del consumidor suele presentarse en la forma de uno de dos problemas: la maximización de la utilidad o la minimización del gasto. El desarrollo presentado en este capítulo se concentra en el primero de esos problemas[2].

4.1.1. Elección bajo certidumbre

En un contexto de certidumbre se conoce el estado de la naturaleza que ocurrirá, o se concibe de esta manera (véase Sección 2.4). En economía, estados de la naturaleza relevantes para la elección suelen incluir precios de bienes relacionados. Así, el problema del consumidor se presenta ahora como el problema de elección de la alternativa que maximice su utilidad sujeta a una cierta restricción presupuestal,

$$\begin{aligned} \max_{a\in A} \quad & u(x = f(a)). \\ s.a. \quad & p \cdot a \leq m. \end{aligned}$$

El algoritmo solución del problema dependerá, en buena medida, de la naturaleza del conjunto de elección. En la versión tradicional de este problema el conjunto de opciones A coincide con el conjunto de resultados X, de modo que $A = X = \mathbb{R}^n$, el conjunto de estados de la naturaleza Θ tiene un único

[1]En este trabajo se ha optado por dejar de lado una parte importante de la teoría donde se modela la caracterización de las preferencias a partir de las elecciones del individuo. En este campo surgen nociones relevantes en la caracterización de la elección como los axiomas de preferencias reveladas, y los axiomas alfa y beta de Sen.

[2]En el contexto tradicional existe una dualidad entre ambos problemas, pero aquello no será explorado en profundidad en este documento.

elemento θ_1 con probabilidad $\pi = \mathbf{1}_\theta$, de modo que $\pi(\theta = \theta_1) = 1$. Así, la función valor del problema tradicional es $f : (\mathbb{R}^n \times \{\theta_1\} \to \mathbb{R}^n)$, que es la función identidad I, que asocia siguiendo $f(a, \theta_1) = x = a$. En la Figura 4.1 se presenta una representación que asocia los elementos de la teoría microeconómica clásica de la elección del consumidor con este marco general.

$$\{A, \Theta, \pi(\cdot), X, f, \succeq\}$$
$$\downarrow$$
$$\{\mathbb{R}^n, \{\theta\}, \mathbf{1}_\theta, \mathbb{R}^n, I, \succeq\}$$

Figura 4.1: Identificación del problema de elección del consumidor como un caso de un problema de elección general.

El problema tradicional puede formularse como

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & u(x). \\ s.a. \quad & \sum_j p_j \cdot x_j \leq m. \end{aligned}$$

Dadas ciertas condiciones, este puede resolverse mediante la aplicación del algoritmo de Karush-Kuhn-Tucker para resolver problemas de optimización con restricciones de desigualdad. Cuando las preferencias representadas por $u(\cdot)$ son crecientes en al menos una mercancía, no tiene sentido para el consumidor no gastarse toda su dotación, por lo que en la solución la restricción presupuestal se cumplirá como igualdad. En este segundo caso, cumplidas ciertas condiciones, las soluciones podrían encontrarse mediante el algoritmo de Lagrange para solución de problemas de optimización con restricciones de igualdad.

En el caso tradicional el espacio de mercancías A se establece como el espacio real de dimensión finita $\mathbb{R}^n$, el conjunto de estados de la naturaleza relevantes para los consumidores Θ es un conjunto unitario o aún en caso de no serlo, tiene asociada una distribución de probabilidad degenerada, tal que la probabilidad asociada a uno de los estados de la naturaleza es uno ($\pi(\theta = \theta_k) = 1$). El conjunto de resultados es, por tanto, el mismo conjunto de opciones, con lo que la función valor es una función identidad. Finalmente, las preferencias son definidas de manera tradicional y suelen cumplir las características de continuidad, crecimiento estricto y cuasiconcavidad que les permiten ser representadas mediante una función de utilidad. Con frecuencia en estos casos se dan las condiciones para encontrar la solución por medio de la aplicación de los algoritmos de Lagrange o de Karush-Kuhn-Tucker [70]. Se reproduce a continuación una versión de las condiciones necesarias para que el algoritmo de Lagrange caracterice las soluciones del problema de optimización sobre una función definida en $\mathbb{R}^2$. Para esto se define primero la función lagrangiana.

Definición 4.1. *Sea $f : X \to \mathbb{R}^n$, con $X \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sean $g_j : X \to \mathbb{R}$ con $j = 1, 2, \ldots, m$, funciones $\mathcal{C}^1$. A la función*

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x),$$

con $x \in X$, se le denomina función lagrangiana o lagrangiano, con función objetivo $f(x)$ y restricciones $g_j(x)$.

Ahora, se presenta el teorema que da condiciones necesarias para

Teorema 4.1.1. ***(Algoritmo de Lagrange. [25, p. 26]:*** *Se consideran f, g_j como en la Definición 4.1. Se supone que x^* es un máximo (mínimo) local de f que satisgace además $g_j(x^*) = 0$ para $j : 1, 2, \dots, m$, y que la matriz*

$$J_g = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m(x^*)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m(x^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

tenga rango $m < n$. Entonces existen valores $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots \lambda_m^*$ tales que

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} = 0$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Demostración. Se consideran inicialmente las ecuaciones anteriores para $i = 1, \dots, m$. Suponiendo que las primeras m columnas de J_g son linealmente independientes, se tiene que en el sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} = -\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i},$$

existen λ_1^*, λ_2^*, $\dots$, λ_m^* únicos, ya que el rango de J_g es m. Se debe comprobar ahora que dichos valores también cumplen las restantes $n - m$ ecuaciones.

Sea $\tilde{x} = (x_{m+1}, \dots, x_n)$. Aplicando el teorema de la función implícita al conjunto de ecuaciones $g_j(x) = 0$ para $j = 1, \dots, m$, se obtiene que existen funciones $h_i(\tilde{x})$ y un conjunto $Y \subset \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $x_i^* = h_i(\tilde{x}^*)$ para $i = 1, \dots, m$, $\tilde{x}^* \in Y$ y $g_j\left(h_1(\tilde{x}^*), \dots, h_m(\tilde{x}^*), \tilde{x}^*\right) = 0$ para $j = 1, \dots, m$. Por lo tanto, $f(x^*) = f(h_1(\tilde{x}^*), \dots, h_m(\tilde{x}^*), \tilde{x}^*)$.

Ahora bien, como x^* es un máximo local, entonces

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_k} \frac{\partial h_k(\tilde{x}^*)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0,$$

para $i = m + 1, \dots, n$. De aplicar el teorema de la función implícita a las restricciones se tiene que

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_k} \frac{\partial h_k(\tilde{x}^*)}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} = 0,$$

para $j = 1, \dots, m$ y para $i = m + 1, \dots, n$. Al multiplicar la última expresión por $-\lambda_j^*$ y sumar sobre el índice j se llega a

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} -\lambda_j^* \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_k} \frac{\partial h_k(\tilde{x}^*)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} = 0,$$

para $i = m + 1, \dots, n$. Al restarle esta expresión a $\dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}$ se obtiene

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial h_k(\tilde{x}^*)}{\partial x_i} \left[\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_k} \right] \right) + \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} = 0,$$

donde la expresión entre paréntesis rectos es cero ya que esos valores de λ_j son solución del sistema de m ecuaciones planteado originalmente, por lo cual

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0,$$

para $i = m+1, \ldots, n$, con lo que se prueba que los valores de λ_j satisfacen las ecuaciones para $i = 1, \ldots, n$. □

Un ejemplo diferente sería aquel en el que la elección se hace sobre una dimensión temporal, donde la elección del consumo en cada momento del tiempo se tiene como la elección en un problema de control óptimo.

La existencia de la solución al problema suele garantizarse, además de con supuestos sobre las preferencias, mediante la compacidad del conjunto de elección. Sin embargo, tal como señalan Aliprantis, Brown y Burkinshaw [2], esta solución no necesariamente está definida cuando el espacio de elección es de dimensión infinita, aún si los precios son estrictamente positivos. El empleo de otros espacios de elección implica el uso de otros algoritmos para resolver el problema.

Ejemplo 4.1.1. ***(Elección mediante el algoritmo de Lagrange en problema tradicional).*** *Considere el siguiente problema tradicional del consumidor. Un consumidor con una renta inicial m debe elegir sus consumos de dos mercancías, (x, y) considerando que los precios de las mercancías son (p_x, p_y) respectivamente, y que posee una función de utilidad $u(x, y) = \gamma x^\alpha y^\beta$, con $\alpha, \beta, \gamma > 0$. En este caso la decisión ocurre bajo certidumbre, por lo que el conjunto de estados de la naturaleza es unitario $\Theta = \{\theta_1\}$. Con esto el conjunto de opciones A y el conjunto de resultados X coinciden siendo $A = X = \mathbb{R}^2$; esto haciendo para $x, y \in A$, $f(x, y, \theta_1) = (x, y)$. Las preferencias son las representadas por la función de utilidad. Como las derivadas parciales son positivas, las preferencias son monótonas estrictas. Además, la función de utilidad es estríctamente cóncava, por lo que es cuasicóncava y las preferencias son convexas. Se puede emplear en este caso el algoritmo de Lagrange para resolver este problema.*

Considerando la propiedad de invarianza de la función de utilidad frente a transformaciones crecientes, se puede dividir la función de utilidad original entre γ y se puede elevar a la $\frac{1}{\alpha+\beta}$. Con esto se puede reescribir la función de utilidad como $u(x, y) = x^{\hat\alpha} y^{\hat\beta}$, donde $\hat\alpha = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $\hat\beta = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$. Esta transformación de modo que $\hat\alpha + \hat\beta = 1$ es muy común en la literatura, y además de tener una interpretación más adelante en la obtención de los resultados, permite en el caso de funciones Cobb-Douglas tratar solo con el caso de funciones homogéneas de grado uno.

El lagrangiano del problema es

$$\mathcal{L} = x^{\hat\alpha} y^{\hat\beta} + \lambda(m - p_x x - p_y y),$$

y las condiciones de primer orden son

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx} = \hat\alpha x^{\hat\alpha - 1} y^{\hat\beta} - \lambda p_x = 0, \tag{4.1}$$
$$\frac{d\mathcal{L}}{dx} = \hat\beta x^{\hat\alpha} y^{\hat\beta} - \lambda y = 0, \tag{4.2}$$
$$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = m - p_x x - p_y y = 0. \tag{4.3}$$

De (4.1) y (4.2) se obtiene la llamada ecuación de Jevons, en la que se obtiene como condición de optimalidad la igualdad de la relación de precios con la relación de utilidades marginales. Así,

$$\frac{\hat{\alpha}y}{\hat{\beta}x} = \frac{p_x}{p_y}, \tag{4.4}$$

de donde se puede despejar y y reemplazar en (4.3) obteniendo

$$m - p_x x - p_y \left(\frac{\hat{\beta} p_x x}{\hat{\alpha} p_y} \right) = 0,$$

de esta manera se obtiene el consumo óptimo y^* de la mercancía y,

$$y^* = \frac{\hat{\beta} m}{p_y}.$$

Esta respuesta puede reemplazarse en (4.4) para obtener el consumo óptimo x^* de la mercancía x,

$$x^* = \frac{\hat{\alpha} m}{p_x}.$$

4.1.2. Elección en ambigüedad

Se está en una situación de decisión bajo ambigüedad cuando hay distintos estados de la naturaleza relevantes para la decisión de consumo, pero en los que no hay probabilidades asociadas a ellos, véase Figura 2.5. Se pueden tomar entonces distintos criterios de asignación de la función valor. Algunos de ellos siguen algún perfil de comportamiento, por ejemplo de aversión al riesgo. Para un conjunto de elección A y un conjunto de estados de la naturaleza posibles Θ, ambos conjuntos finitos, se presentan a continuación algunos de los criterios de elección en este entorno de información como se presentan en Anderson *et al.* [5]:

- **Optimista o maximax:** Este criterio tiene como función valor el máximo pago posible que brinde cada opción en cualquiera de los escenarios. Puede asociarse a perfiles más amantes del riesgo. La elección se da entonces maximizando el máximo valor posible entre los escenarios.

- **Pesimista, de Wald o maximin:** Este criterio puede asociarse a perfiles más aversos al riesgo. La elección se hace maximizando el mínimo valor posible para cada alternativa a lo largo de los escenarios[3].

- **Criterio de Hurwicz (nivel α de optimismo):** En este criterio se supone la existencia de un coeficiente $\alpha \in (0, 1)$ de optimismo que pondera los valores asociados a cada alternativa por los criterios optimista y pesimista. La elección se hace maximizando este valor.

- **Costo de oportunidad o de Savage:** Este criterio considera minimizar el máximo costo de oportunidad como una manera de reducir el máximo arrepentimiento al que el agente se puede exponer. Dada una alternativa y un estado de la naturaleza se entiende el costo de oportunidad como la diferencia entre el valor asociado a dicha combinación alternativa-estado de la naturaleza y el máximo valor asociado a alguna alternativa con ese mismo estado de la naturaleza.

- **Razón insuficiente o de Laplace:** Este criterio supone que todos los estados de la naturaleza suceden de manera equiprobable y a cada alternativa le asigna como valor el promedio aritmético simple de los valores asociados a dicha alternativa en los distintos estados de la naturaleza.

Criterio	**Descripción**
Optimista	Maximiza entre los mayores pagos posibles
Pesimista	Maximiza entre los menores pagos posibles
Hurwicz	Maximiza una combinación convexa de los máximos y mínimos pagos posibles
Costo de oportunidad	Minimiza el mayor costo de oportunidad
Laplace	Maximiza entre el pago promedio, asumiendo que los estados de la naturaleza son equiprobables

Cuadro 4.1: Criterios de elección bajo incertidumbre.

Se nota que cada uno de estos criterios define de una manera diferente el "valor" de cada opción, como si de una función de utilidad se tratara, asignando un valor real entre los cuales o bien el mayor o el menor valor determina que opción. A continuación se presenta un ejemplo de los criterios anteriores.

Ejemplo 4.1.2. ***(Elección en situación de ambigüedad).*** *Suponga un consumidor que se enfrenta a una decisión con cuatro alternativas a_i, y cuatro estados de la naturaleza θ_k con la siguiente matriz de pagos:*

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	14	9	10	5
a_2	11	10	8	7
a_3	9	10	10	11
a_4	8	10	11	13

Cuadro 4.2: Matriz de pagos para una elección con cuatro alternativas y cuatro estados de la naturaleza.

Inicialmente se supone una situación de ambigüedad, donde las probabilidades asociadas a cada estado de la naturaleza son desconocidas como el el Cuadro 4.2, y se elige con cada uno de los criterios antes considerados:

- ***Optimista:*** *Considerando que bajo este criterio* $f(a_1) = 14; f(a_2) = 11; f(a_3) = 11; f(a_4) = 13$*, se elegiría la alternativa* a_1*.*

- ***Pesimista:*** *Considerando que bajo este criterio* $f(a_1) = 5; f(a_2) = 7; f(a_3) = 9; f(a_4) = 8$*, se elegiría la alternativa* a_3*.*

- ***Hurwicz:*** *Consideremos, para efectos del ejemplo, un agente con un coeficiente de optimismo* (α) *de 60 %. Así, bajo este criterio se asociarían valores como:* $f(a_1) = 0,6(14)+0,4(5) = 10,4; f(a_2) = 0,6(11)+0,4(7) = 9,4; f(a_3) = 0,6(11)+0,4(9) = 10,2; f(a_4) = 0,6(13)+0,4(8) = 11$*, y se elegiría la alternativa* a_4*.*

[3] Se puede ver la solución del criterio optimista como el equilibrio de Nash en un juego secuencial entre el consumidor y "la naturaleza", donde el juego es simétrico y presenta pagos iguales tanto para el consumidor como para el jugador naturaleza. De manera similar se puede obtener la solución del criterio pesimista como el conjunto de equilibrios de Nash perfectos en subjuegos en un juego secuencial entre el consumidor y "la naturaleza", donde el juego es un juego de suma cero.

- ***Costo de oportunidad:*** *Para ilustrar este criterio conviene construir antes una matriz de costos de oportunidad asociados a cada combinación alternativa-estado de la naturaleza, véase el Cuadro 4.3. Note que el máximo costo de oportunidad al que se expone el consumidor al elegir la alternativa* a_1 *es 8, por lo que* $f(a_1) = -8$*. Consecuentemente,* $f(a_2) = -6; f(a_3) = -5; f(a_4) = -6$*, por lo que bajo este criterio se elegiría la opción* a_3*.*

- ***Laplace:*** *Si se suponen todos los estados como equiprobables, los valores asociados a cada alternativa serrían* $f(a_1) = 9,25; f(a_2) = 9; f(a_3) = 10; f(a_4) = 10,5$*, de modo que se elegiría bajo este criterio la alternativa* a_4*.*

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	0	1	1	8
a_2	3	0	3	6
a_3	5	0	1	2
a_4	6	0	0	0

Cuadro 4.3: Matriz de costo de oportunidad para una elección con cuatro alternativas y cuatro estados de la naturaleza.

Se observa que los criterios no necesariamente coinciden, ni conducen a una mayoría concluyente a favor de alguna alternativa en particular.

4.1.3. Elección bajo riesgo

La elección cuando las probabilidades son conocidas suelen conducirse, en el esquema normativo, bajo el criterio de maximizar el valor esperado. Se presenta a continuación un ejemplo tomado del Lozano [45].

Ejemplo 4.1.3. ***(Elección bajo riesgo).*** *Sea* L *una lotería cuyos resultados son 10 y 20 dólares con probabilidades* $\frac{2}{3}$ *y* $\frac{1}{3}$*, respectivamente, y sea* L' *la lotería cuyos resultados son 5, 15 y 30 dólares con probabilidades* $\frac{1}{3}, \frac{5}{9}$ *y* $\frac{1}{9}$*, respectivamente. Se muestra que* $U(L) \geq U(L')$ *para un individuo que es averso al riesgo y cuyas preferencias se pueden representar por una función von Neumann-Morgenstern. La utilidad esperada de la lotería* L' *está dada por:*

$$\begin{aligned} U(L') &= \frac{1}{3}u(5) + \frac{5}{9}u(15) + \frac{1}{9}u(30) \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}u(5) + \frac{1}{2}u(15)\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}u(15) + \frac{1}{3}u(30)\right). \end{aligned}$$

Dado que $u(\cdot)$ *es cóncava, debido a la aversión al riesgo se tiene que*

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}u(5) + \frac{1}{2}u(15)\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}u(15) + \frac{1}{3}u(30)\right) &\leq \frac{2}{3}\left(u\left(\frac{5}{2} + \frac{15}{2}\right)\right) + \frac{1}{3}\left(u\left(\frac{30}{3} + \frac{30}{3}\right)\right) \\ &= \frac{2}{3}u(10) + \frac{1}{3}u(20) = U(L). \end{aligned}$$

Esto muestra que este individuo, que es averso al riesgo, declara que la lotería L *es al menos tan buena como la lotería* L'*.*

Otro ejemplo de elección bajo riesgo es aquel de selección de portafolio en el enfoque de media-varianza de Markowitz o la elección (y valoración de opciones) de acuerdo al modelo Black-Scholes [9].

4.2. Teoría de la elección descriptiva

La segunda aproximación al estudio de los procesos de decisión es el enfoque descriptivo, en el que a partir de observaciones comportamentales y experimentales se construye la teoría, en lugar de la prescripción obtenida a partir del análisis normativo. Como es de esperarse, los consumidores no son completamente racionales y caen en sesgos y "errores" de manera sistemática. A continuación se reseñan dos de ellos que van en abierto desacuerdo con el esquema de preferencias racionales.

4.2.1. Reversión de las preferencias

Tanto en situaciones de elección bajo certidumbre, como en decisiones bajo incertidumbre, se ha mostrado que las personas pueden revelar tener preferencias que no satisfacen el supuesto de transitividad. El ejemplo más clásico se encuentra en los trabajos de Amos Tversky, especialmente en su artículo *Intransitivity of preferences* de 1969 [77]. En dicho trabajo Tversky presenta dos ejemplos que se reproducen a continuación.

Experimento de candidatos En este experimento se les presentó a un grupo de estudiantes de pregrado parejas de candidatos hipotéticos a la universidad y se les pidió que escogieran cuál elegirían. Cada uno de los candidatos estaba descrito por un perfil que le puntuaba en tres dimensiones: habilidad intelectual (I), estabilidad emocional (E) y nivel de sociabilidad (S). A continuación se muestra un ejemplo de los perfiles empleados:

Candidato	I	E	S
a	66	90	85
b	72	80	70
c	78	70	55
d	84	60	40
e	90	50	25

La instrucción dada a los participantes para la elección es la siguiente[4]:

> El comité de selección de la universidad está interesado en aprender sobre la opinión de los estudiantes acerca del tipo de candidatos que deberían ser admitidos a la universidad. Por lo tanto, se le pide que escoja cuál admitiría usted de cada uno de los pares de candidatos. Naturalmente, la habilidad intelectual sería el factor más importante en su decisión, pero los demás factores también son valorados. Además, usted debe tener presente que los puntajes están basados en el ordenamiento del comité y por lo tanto pueden no ser completamente confiables.
>
> (Tversky, [77])

En los casos en los que la diferencia en la dimensión de habilidad intelectual fue pequeña, por ejemplo entre el par de candidatos (a, b) o (d, e), esta diferencia fue típicamente tenida en cuenta de menor manera y se favorecieron los candidatos con mayor puntaje en las otras características, así el ordenamiento de los candidatos indica las relaciones:

$$a \succ b, \quad b \succ c, \quad c \succ d, \quad d \succ e.$$

No obstante, cuando la diferencia en la habilidad de inteligencia fue mayor, como en el par (a, e), esta dimensión fue determinante en la elección de modo que

$$e \succ a.$$

[4]Traducción propia.

Este resultado revela unas preferencias que no son transitivas, en un contexto donde la información es conocida y el esfuerzo de cómputo implicado en la comparación no es alto.

Modelo de diferencias aditivas En ese mismo trabajo, Tversky [77] formula un modelo que podría expresar este ciclo en las preferencias. Él consideraba en ese modelo a cada opción, digamos x o y, como una especificación de puntajes sobre n distintas características, indexadas por i, y definía las preferencias como

$$x \succeq y \text{ si, y sólo si, } \sum_{i=1}^{n} \phi_i \left[u_i(x_i) - u_i(y_i) \right] \geq 0,$$

con ϕ_1 siendo una función impar, definida por trozos.

Un ejemplo sencillo de una función de esta familia que explica el fenómeno con los valores de la tabla anterior podría ser:

$$\phi_i(x_i, y_i) = \begin{cases} (x_i - y_i)^3, & \text{si} \quad i = 1, \\ 10(x_i - y_i), & \text{si} \quad i = 2{,}3, \end{cases}$$

donde el subíndice $i = 1$ denota la dimensión de habilidad intelectual (I), y donde $i = 2, 3$ denota las dimensiones de estabilidad emocional (E) y el nivel de sociabilidad (S).

Causas del fenómeno de reversión de las preferencias Algunas causas que se han dado para este comportamiento vienen desde *la teoría del arrepentimiento* así como *desviaciones de la invarianza de procedimiento.*

4.2.2. Efecto contexto

Otro fenómeno reportado en varios estudios es el efecto contexto[5] que consiste en el cambio de elección por parte de los individuos simplemente por un cambio en la forma en que se presenta la elección. De cierta manera, este fenómeno cuestiona la propiedad de asimetría de las preferencias estrictas. Preguntar en un marco "positivo" ¿podría usted retirarse con 70 % de su ingreso actual? o preguntar en un marco "negativo" ¿podría usted retirarse con un recorte/disminución del 30 % de su ingreso actual? podría generar respuestas muy diferentes aunque la elección es la misma. Kreps [40, p. 20] reproduce un ejemplo de Kahneman y Tversky [77] sobre un escenario formulado de dos maneras diferentes que genera elecciones distintas únicamente por el marco en el que es presentada:

> **Formulación 1:** Usted es un doctor en una posición de autoridad en el gobierno nacional. Se le ha informado que un nuevo virus epidémico va a atacar su país el siguiente invierno, y que esto resultará en la muerte de 600 personas (los únicos posibles resultados son la muerte o la recuperación completa). Hay dos programas de vacunación disponibles y el realizar uno implica renunciar al otro. El primero salvará 400 personas con certeza. El segundo programa salvará las 600 con probabilidad $\frac{2}{3}$, mientras que con probabilidad $\frac{1}{3}$ no salvará a nadie. ¿Qué programa prefiere?

> **Formulación 2:** Usted es un doctor en una posición de autoridad en el gobierno nacional. Se le ha informado que un nuevo virus epidémico va a atacar su país el siguiente invierno. Para luchar contra esta epidemia se debe elegir uno entre dos posibles programas de vacunación. En el primer programa 200 personas morirán con certeza. En el segundo hay una probabilidad de $\frac{2}{3}$ de que no muera nadie y de $\frac{1}{3}$ de que 600 personas mueran. ¿Qué programa prefiere?

[5] *Framing* en inglés.

Se ha encontrado que en el contexto positivo, donde se plantea la elección en términos del número de personas salvadas, se prefiere con mayor frecuencia el primer programa. Mientras tanto, cuando la elección se presenta en el contexto negativo, en el contexto del número de personas que van a morir, se prefiere el segundo programa, más arriesgado, aún cuando la decisión a la que se enfrentan las personas es la misma.

4.2.3. Nudges

Para fomentar o desincentivar un comportamiento, un gobierno tiene típicamente tres tipos de mecanismos: la prohibición u obligación explícita, los incentivos monetarios (impuestos y subsidios) y los *nudges*. En principio, los *nudges* son mecanismos que preservan de la libertad del individuo que toma la decisión, lo que implica que las opciones siguen siendo "las mismas"; no obstante, con frecuencia generan cambios en la decisión tomada (y podemos afirmar entonces que en las preferencias). Por ejemplo, se ha encontrado una mayor tasa de vinculación en programas de ahorro voluntario cuando la elección se cambia la opción que se tiene como predeterminada. Lo mismo ha sucedido con los aportes voluntarios en forma de tributo para el desarrollo de ciertos programas de desarrollo urbano [73]. Una breve introducción a distintos tipos de *nudges* se encuentra en Sunstein [69], de donde se toman los siguientes ejemplos.

- Simplificación.
- Establecimiento de opciones predetermimnadas.
- Recordatorios.

4.2.4. Paradoja de San Petersburgo

Aunque no constituye una paradoja en el sentido lógico, la llamada paradoja de San Petersburgo es un ejemplo clásico que aparentemente presenta evidencia en contra del modelo de decisión basado en el criterio convencional del valor esperado [71, p. 50]. Este juego consiste en la decisión de cuánto pagar por participar en el siguiente juego: se lanza una moneda, si sale cara el jugador recibe 2.000 pesos, pero si sale sello se vuelve a lanzar la moneda. Si en el segundo turno sale cara, se llevará 4.000 pesos, pero si sale sello se volerá a lanzar la moneda. Si en el tercer turno sale cara, se llevará 8.000 pesos, pero si sale sello se volverá a lanzar la moneda, y así de manera sucesiva, duplicando el potencial monto pagado en cada ronda hasta que salga la primera cara. En este caso el valor esperado del juego es la suma de los productos entre la probabilidad de que toque lanzar la moneda n veces antes de que salga la primera cara y el pago en cada una de esas situaciones. Así, el valor esperado es

$$\frac{1}{2}(2{,}000) + \frac{1}{4}(4{,}000) + \frac{1}{8}(8{,}000) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(2^n \cdot (1{,}000)),$$

que es $\sum_{n=1}^{\infty} 1{,}000$, que a su vez es infinito, por lo que cualquier persona debería estar dispuesta a pagar cualquier cantidad cierta de dinero por participar; sin embargo, nadie lo haría y los montos que las personas en realidad estarían dispuestas a pagar por participar en dicho juego son más bien pequeños. Soluciones a esta aparente paradoja se pueden encontrar en formulaciones de la función de utilidad esperada convexa, como sucede en la llamada teoría de perspectiva [37, 78]. Otra paradoja de elección bajo riesgo en el esquema tradicional del valor esperado es la llamada paradoja de Allais.[71, p. 71].

4.2.5. Aversión a la ambigüedad

En un trabajo de 1961 [23], Ellsberg presentó una aparente paradoja de decisión que evidencia el fenómeno de aversión a la ambigüedad, según el cual las personas prefieren situaciones en las que las probabilidades de ocurrencia de los diferentes estados de la naturaleza son conocidos sobre aquellas situaciones en las que las probabilidades no se conocen. El experimento que conduce a esta paradoja es presentado según la formulación de Takemura [71, p. 71] a continuación.

Considere la elección al azar de una bola de una bolsa donde se encuentran 30 bolas rojas y 60 bolas entre negras y amarillas.

> **Problema 1:** Elija entre las siguientes dos loterías. Una lotería B que le da un pago de \$100 en caso de que salga una bola roja y \$0 en otro caso; y una lotería C que paga \$100 en caso de que salga una bola amarilla y \$0 en otro caso.

> **Problema 2:** Elija entre las siguientes dos loterías. Una lotería $\hat{B}$ que le da un pago de \$100 en caso de que salga una bola roja o una bola amarilla y \$0 en otro caso; y una lotería $\hat{C}$ que paga \$100 en caso de que salga una bola amarilla o una negra y \$0 en otro caso.

En la primera elección se muestra que la mayoría de las personas eligen la lotería B, esto es, se tiene $B \succ C$, dado que en ella conocen las probabilidades de obtener cada pago. En la segunda elección, por un argumento similar, se suele preferir la lotería $\hat{C}$, que es $\hat{C} \succ \hat{B}$. Como se muestra a continuación, estas decisiones son inconsistentes con un esquema de elección bajo utilidad esperada.

Sean los estados de la naturaleza que salga una bola roja (θ_r), que salga una bola negra (θ_n), y que salga una bola amarilla (θ_a), con probabilidades (π_r, π_n, π_a) respectivamente, donde $\pi_k = \pi(\theta = \theta_k)$. De la elección en el problema 1, si $B \succ C$ en la primera elección, es porque $U(B) > U(C)$, que es a su vez que $100\pi_r > 100\pi_n$, de donde $\pi_r > \pi_n$. Por su parte, de la elección en el problema 2 si $\hat{C} \succ \hat{B}$, entonces $U(\hat{C}) > U(\hat{B})$, que es $100\,(\pi_n + \pi_a) > 100\,(\pi_r + \pi_a)$, de donde $\pi_n > \pi_r$, que es una contradicción. Así, la aversión a la ambigüedad es otro motivo por el cual no se tendría que los consumidores decidan bajo el esquema de utilidad esperada tradicional. En contextos diferentes como la elección de tratamientos médicos con riesgos menos conocidos o la participación en mercados financieros también se ha resportado este resultado [64, p. 165].

4.3. Bitácora de capítulos: estructura de elección de los problemas del consumidor

La estructura general del problema de elección del consumidor es la tupla $(A, \Theta, \pi(\cdot), f, X, \succeq)$, conformada por el conjunto de planes de consumo A, el conjunto de estados de la naturaleza Θ, la probabilidad $\pi(\cdot)$ asociada al conjunto de estados de la naturaleza, un conjunto de resultados X, una función valor f que asocia un resultado a cada combinación formada por un plan de consumo y un estado de la naturaleza, y una relación de preferencias que describe el criterio de elección del consumidor. Se actualiza, a partir de las discusiones de los capítulos previos, la Figura 1.1 en la Figura 4.2 a continuación:

Se identifican en estos componentes los elementos cuya modelación clasifica las diferentes formas en que se presentan los problemas del consumidor:

- Cambios en la estructura de información determinan la definición del conjunto de estados de la naturaleza y la probabilidad asociada, dando lugar a la clasificación de los problemas en certidumbre, riesgo y ambigüedad.

- Cambios en la forma de concebir las mercancías invitan modelaciones diferentes a $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de planes de consumo. En este trabajo se presentan elementos de la extensión en este sentido a espacios de Riesz, que además proponen, por medio de la definición del espacio dual, nuevas formas de modelar e interpretar los precios de los planes de consumo.

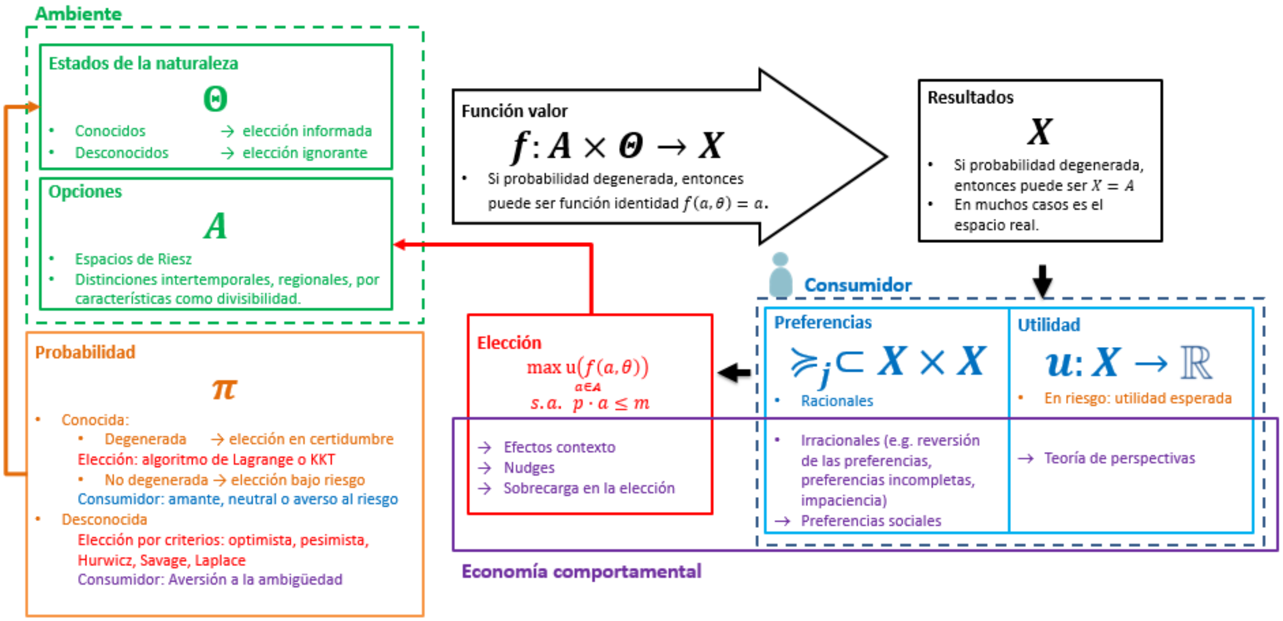

Figura 4.2: Elementos del problema general de decisión en detalle.

- Nociones de racionalidad diferentes a la tradicional racionalidad perfecta modelan criterios de elección distinta, que se reflejan en relaciones de preferencia, y por tanto en funciones de utilidad, diferentes.

- Cada combinación de estructura de información y conjunto de planes de consumo puede tener algoritmos de elección distintos, habiendo casos como el de elección bajo riesgo con aversión al riesgo o el de ambigüedad en los que diferentes criterios están disponibles y conducen a elecciones distintas.

Se nota que el conjunto de loterías que conforman el espacio de opciones en el caso de los problemas bajo riesgo y el conjunto de opciones en los casos bajo ambigüedad no son necesariamente espacios vectoriales, pero estos casos admiten una generalización al marco de espacios de Riesz como se comentó en la Sección 2.6 y 2.7. Con esta consideración, en el Cuadro 4.4 se presenta la siguiente clasificación de las estructuras de los problemas de consumo identificando los elementos de su estructura:

Estructura general del problema de elección del consumidor

	Problema de elección $(A, \Theta, \pi(\cdot), f, X, \succeq)$
Certidumbre	$(E, \{\theta_1\}, \mathbf{1}_{\theta_1}, f, X, \succeq)$
	Caso tradicional: $(\mathbb{R}^n, \{\theta_1\}, \mathbf{1}_{\theta_1}, I, \mathbb{R}^n, \succeq)$
Riesgo	$(L, \Theta, \pi(\cdot), f, \mathbb{R}, \succeq)$
Ambigüedad	$(A, \Theta, ?, f, X, \succeq)$

Cuadro 4.4: Estructura general del problema de elección del consumidor.

Dependiendo del espacio de opciones que se considere para modelar los planes de consumo, se emplearán algoritmos diferentes para encontrar soluciones al problema de elección racional individual. En el esquema tradicional dicho algoritmo suele ser el algoritmo de Lagrange o el de Karush-Kuhn-Tucker, pero herramientas como el control óptimo u otras herramientas de optimización pueden ser, y son, empleadas. Se nota que el algoritmo de decisión puede cambiar también dependiendo de las condiciones de información del problema, hablando de criterios como los fundamentados en la noción de valor esperado o en la dominancia estocástica en situaciones de riesgo, o criterios como el optimista o de minimización del costo de oportunidad en una situación de ambigüedad.

Hay un contraste marcado entre lo que predice la teoría que sería una elección racional y lo que en situaciones experimentales se ha encontrado que eligen las personas. Esto refleja, o bien una incapacidad de las personas para apegarse a un algoritmo que conduzca a una elección mejor, o violaciones de los comportamientos de las preferencias modelados por la teoría tradicional. Toda decisión de consumo es susceptible de estar expuesta a diferentes heurísticas y sesgos, el efecto contexto y los fenómenos de reversión de las preferencias son de los más comunes y reportados en la literatura [77][64]. Algunos de estos sesgos son específicos de la estructura de información en la que se desarrolla el problema. Por ejemplo, la aversión a la ambigüedad es particular de la elección en este contexto, y los fenómenos de valoración subjetiva de las probabilidades y aversión al riesgo son específicos de este último contexto. No hay teoría que estructure y recopile los múltiples desarrollos en economía experimental y comportamental, ni la creciente colección de heurísticas y sesgos identificados. Ahora bien, se entiende esta carencia de la teoría más que como una falla que amerite abandono, como una invitación a construir desde nuevas racionalidades, bien sea con la construcción de esquemas de preferencias más flexibles o algoritmos de decisión diferentes.

Además de los mencionados en este capítulo, la colección de sesgos en elección identificados en la literatura de la economía experimental y comportamental es extensa. Cuando el número de opciones es grande puede presentarse una **“sobrecarga en la elección”**[6], que consiste en una elección que no es óptima debido a la fatiga que genera el procesamiento de todas las opciones [35]. Esta fatiga puede conducir al uso de heurísticas como elegir la opción por defecto, o a la sencilla postergación de la elección [64, p. 167]. Se encuentran también situaciones denominadas de **“preferencias sociales”** en las que las preferencias de las personas se ven influidas por los planes de consumo de los demás, en ocasiones motivadas por sentimientos como culpa, envidia, o por principios de reciprocidad [16]. Una guía de desarrollos recientes en este campo y sus aplicaciones se encuentra en [64].

Dentro de la agenda de la teoría de la decisión, y en particular de la teoría del consumidor, se encuentra el reto de integrar las observaciones realizadas por la economía comportamental que hoy son un amplio compendio de heurísticas y sesgos que se han reportado y replicado en forma más o menos general según el caso. En el Capítulo 5 se presentan las economías de intercambio dejando de lado inicialmente estas observaciones de “racionalidad limitada” de los agentes; se introducen algunas formas de representar dichas economías, algunos de ejemplos y los resultados tradicionales de bienestar.

[6] *Choice overload,* por su nombre en inglés.

Capítulo 5

Economías de intercambio puro

En este capítulo se presenta el problema de asignación de mercancías mediante una economía de intercambio puro en un contexto de certidumbre y se caracteriza el concepto solución tradicional: el equilibrio walrasiano. Se extiende la representación de la caja de Edgeworth a los casos en los que hay más consumidores y una sola mercancía y se exploran diferentes ejemplos de economías de Riesz de intercambio puro, así como también se presentan las nociones tradicionales de equilibrio walrasiano y óptimo de Pareto, con sus relaciones mediante los denominados teoremas del bienestar.

5.1. Economía de intercambio puro

Más allá del problema individual de elección racional, interesa el problema de intercambio y distribución en varios mercados. En el caso más sencillo se considera el problema de una economía en la que, dadas unas asignaciones iniciales de mercancías, los consumidores intencambian entre sí, buscando llegar a una asignación mutuamente beneficiosa. A este caso se le conoce como una economía de intercambio puro. Esta economía consiste en un conjunto de m consumidores que intercambian las mercancías que tienen como dotación, descritos por sus preferencias $\succeq_j$ (que pueden estar representadas a su vez por funciones de utilidad u_j). La definición formal de economía de intercambio se presenta a continuación.

Definición 5.1. ***Aliprantis, Brown y Burkinshaw [2, p. 115]:*** *Una* ***economía de intercambio*** *es una tupla $\varepsilon = \{\langle E, E' \rangle, \{(\omega_j, u_j : \quad j = 1, 2, \ldots, m)\}\}$ donde E es el espacio de mercancías, E' es un espacio dual de E, ω_j denota la dotación inicial del consumidor j, con $\omega_j > 0$, u_j denota la función de utilidad del consumidor j, que es creciente y cuasicóncava. Una economía de intercambio se dice una* ***economía de intercambio puro*** *si u_j es estrictamente monótona.*

Dentro de las simplificaciones realizadas se encuentran los siguientes supuestos:

- Se consideran mercancías en el sentido Arrow-Debreu (Definición 2.3).
- Hay un mercado por cada mercancía en el que se determina el precio de cada una de ellas.
- Cada uno de estos mercados se comporta de manera competitiva, esto es, los consumidores son precio-aceptantes. Condiciones típicamente asumidas para que este supuesto tenga sentido incluyen:
    - Además de las condiciones de información dadas antes, hay otros escenarios de información que son importantes en la caracterización de los problemas de decisión y de la dinámica de los mercados; éstas son la simetría y completitud de la información.
        - Se dice que en un mercado hay **información completa**, si toda la información de las características de los bienes y de los estados de la naturaleza está disponible para alguno de los agentes.

- Se dice que en un mercado hay **información simétrica**, si todos los agentes disponen de la misma información[1].
- Si en un mercado hay información completa y simétrica, se dice que en dicho mercado hay **información perfecta**.

- No hay costos de transacción, esto es que no hay costos de negociación, de transporte, ni de obtención de la información.
- Racionalidad en el sentido de individuos que eligen sus planes de acción de acuerdo a un esquema de elección racional.
- No existen externalidades en el consumo para ninguno de los consumidores.

- En esta primera etapa del análisis no hay producción. En el caso de mercancías que se distingan entre una fecha y otra posterior, significa que no es posible conservar la mercancía (ni siquiera asumiendo un costo) entre un periodo y otro. De manera similar, para mercancías diferenciadas por la zona en la que están disponibles, esto significa que no hay posibilidad de transporte. Esto implica además que no hay posibilidades de arbitraje entre mercancías con características similares en diferentes zonas o en diferentes fechas.

- La economía que se determina en este modelo no es una economía que permita consideraciones monetarias tal como lo señalan Lozano, Monsalve y Villa [46]. Esto es, el dinero no se incorpora como mercancía en el modelo ni se pueden sacar conclusiones de la forma en que su presencia afecta o no los precios de las demás mercancías o el suyo mismo.

El problema de una economía de intercambio resulta, en parte, en la búsqueda de una reasignación de las dotaciones iniciales con las que cuentan los consumidores participantes. Una asignación en este contexto se define como sigue.

Definición 5.2. ***Aliprantis, Brown y Burkinshaw ([2, p. 126]*** *En una economía de intercambio* $\varepsilon = \{\langle E, E'\rangle, \{(\omega_j, u_j : \quad j = 1, 2, \dots, m)\}\}$, *se llama* ***asignación o asignación factible,*** *a cada tupla* $(x_1, \dots, x_m)$ *tal que cada* $x_j \in E^+$, $\sum_{j=1}^m x_j = \sum_{j=1}^m \omega_j$.

Note que se supone una cierta condición de no-desperdicio. Aún si los consumidores estuvieran mejor en una asignación en la que $\sum_{j=1}^m x_j < \sum_{j=1}^m \omega_j$, esta no sería una asignación factible. Por supuesto, en el caso en el que las funciones de utilidad son crecientes, este caso queda descartado. Cada x_j denota el **plan de consumo** del consumidor j. Denotaremos al conjunto de todas las asignaciones como $\mathcal{A}$. Como E^+ es convexo y débilmente cerrado, $\mathcal{A}$ es un conjunto convexo, débilmente cerrado y no vacío, ya que $(\omega_1, \dots, \omega_m) \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subseteq E^m$. Respecto a la compacidad de este conjunto, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.1.1. ***Aliprantis, Brown y Burkinshaw [2, p. 126]*** *Si una economía de intercambio tiene al menos dos consumidores, entonces el intervalo de orden* $[0, \omega]$ *es débilmente compacto si, y sólo si, el conjunto de asignaciones* $\mathcal{A}$ *es un subconjunto débilmente compacto de* E^+.

Demostración. Véase Aliprantis, Brown y Burkinshaw [2, p. 126]. □

El resultado anterior es relevante porque es empleado en las pruebas de existencia de equilibrio walrasiano de la economía de intercambio.

[1] El ejemplo clásico de un mercado con asimetrías de información es el mercado de los carros usados, llamados “limones” o “cacharros”, presentado por primera vez en el artículo seminal de George Akerlof de 1970, *The Market for “lemons”: quality uncertainty and the market mechanism.*

5.1.1. Caja de Edgeworth

Una representación comúnmente empleada en el caso sencillo de una economía de intercambio con dos consumidores y dos mercancías es la llamada caja de Edgeworth. Esta representación muestra un conjunto en el que cada punto representa una asignación factible. A continuación se presenta una definición más general que la del caso tradicional en el espacio de opciones $\mathbb{R}^2$ y posteriormente se discute la posible representación en otros casos de economías de intercambio en el que el espacio de opciones es $\mathbb{R}^l$. Cada economía de intercambio con espacio de opciones $\mathbb{R}^l$ tiene un número de agentes (m) y un número de mercancías (l). Se trata el caso de m consumidores y una mercancía antes de extender a los casos de varias mercancías.

Sea una economía de intercambio en la que hay una cantidad fija w de una mercancía x para asignar. Por supuesto, si hay m consumidores una asignación es una especificación de m cantidades x_m que recibe cada consumidor tales que son todas no-negativas y su suma es w. Es posible obtener todas las posibles asignaciones de la mercancía entre los m agentes como combinaciones convexas de las asignaciones "extremas", aquellas en las que la totalidad de las dotaciones iniciales de la economía de la mercancía son asignadas a un solo consumidor. Este conjunto es esencialmente un simplejo, concepto que se define a continuación.

Definición 5.3. ***Boyd [12, p. 32]*** *Sean m puntos $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ afínmente independientes, esto es, $x_2 - x_1, \ldots, x_m - x_1$ son linealmente independientes. El simplejo[2] determinado por dichos puntos es*

$$S_m = \left\{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m \middle| \alpha_i \geq 0, i = 0, 1, \ldots, m; \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Así, cada simplejo construido a partir de las asignaciones "extremas" representa el conjunto de todas las asignaciones de la mercancía para m consumidores. Los coeficientes α_i del simplejo representan el porcentaje de la dotación inicial de la mercancía que recibe el consumidor i. A continuación se presentan los casos más fundamentales de hasta 4 consumidores.

Dos consumidores, una mercancía: en el caso más sencillo de una economía de intercambio con dos consumidores A y B, y una mercancía x, la caja sería el simplejo de dimensión uno, un segmento de recta, construido a partir de las asignaciones extremas, aquellas en las que o bien el consumidor A recibe toda la dotación inicial de la mercancía $(w, 0)$, o aquella asignación en que toda la dotación de la mercancía la recibe el consumidor B, es decir $(0, w)$,

$$S_2 = \{\alpha_1(0, w) + \alpha_2(w, 0) | \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}.$$

Se ubica a los consumidores sobre los extremos, la longitud de la línea corresponde a la cantidad disponible en la economía de la mercancía w, y cada punto sobre la línea representaría una asignación factible como se ilustra en la Figura 5.1, donde la cantidad disponible de la mercancía a asignar entre dos consumidores (A, B) es x y un punto particular en la línea define una asignación en x_A, x_B.

Sea, por ejemplo, la siguiente economía de intercambio entre dos consumidores (A, B), con dotación inicial de la mercancía igual a 10 y una mercancía $\{x\}$ donde las funciones de utilidad de los consumidores están dadas por:

$$\begin{cases} U^A(x^A) = x^A, & \omega^A = (6), \\ U^B(x^B) = -(x^B - 3)^2, & \omega^B = (4). \end{cases}$$

Nótese que para el consumidor A siempre consumir más es mejor; esto se ve en que su función de utilidad es estrictamente creciente en su consumo de x, dado por x^A. Para este consumidor, cada asignación

[2] *Simplex* en inglés.

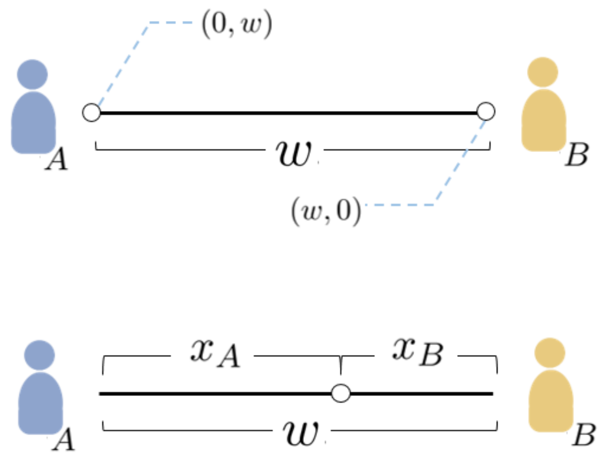

Figura 5.1: Caja de Edgeworth para una economía con dos consumidores y una mercancía.

es preferida a aquellas en las que reciba menos. En cambio, el consumidor B presenta unas preferencias en las que la mayor utilidad es alcanzada cuando consume tres unidades de la mercancía y es indiferente entre las cestas $x^B = 4$ y $x^B = 2$. En esta economía se pueden representar las curvas de indiferencia del consumidor B como "arcos" que unen las cestas indiferentes, azules para el consumidor A y naranjas para el consumidor B en la Figura 5.2. En esta economía la asignación dada por las dotaciones iniciales $(6, 4)$ puede obtenerse como la combinación convexa

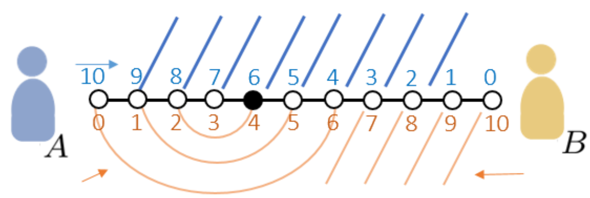

Figura 5.2: Curvas de indiferencia en caja de Edegeworth con dos consumidores y una mercancía.

Tres consumidores, una mercancía: similar al caso anterior, la caja de Edgeworth, la representación del conjunto de todas las asignaciones factibles para el caso de tres consumidores $\{A, B, C\}$ se obtiene mediante el simplejo de dimensión dos que resulta de las combinaciones convexas de las asignaciones extremas $(0, 0, w); (0, w, 0); (w, 0, 0)$,

$$S_3 = \{\alpha_1(w, 0, 0) + \alpha_2(0, w, 0) + \alpha_3(0, 0, w) | \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha 3 = 1\},$$

que es un triángulo como el que se ve en la Figura 5.3.

Considere por ejemplo la repartición de un mal, el pago de la cuota de arriendo de un apartamento compartido entre tres estudiantes. Las asignaciones de las esquinas son aquellas en las que el pago lo hace completamente una persona. En la Figura 5.3 en la esquina superior del triángulo está la asignación en la que el pago lo haría completamente C y en la base del triángulo están todas las asignaciones que son combinaciones convexas de aquellas en las que o bien para A, o bien paga B, por lo que en dicha base

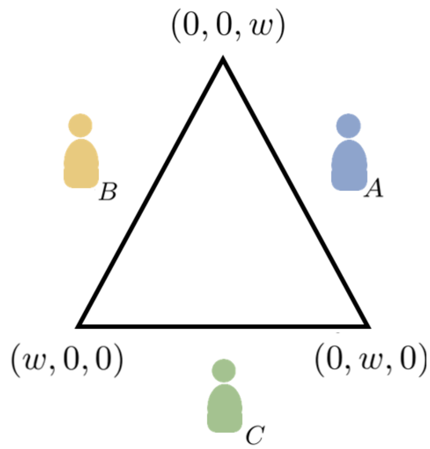

Figura 5.3: Caja de Edgeworth para una economía con tres consumidores y una mercancía.

del triángulo están todas las asignaciones en las que el pago del arriendo se lo dividen entre A y B. De manera similar en los demás lados del triángulo se tienen las asignaciones en las que se reparten el pago solo entre dos compañeros. Nótese en la Figura 5.3 la ubicación de los consumidores en los lados donde no le corresponde pagar.

Mas-Colell [49, p. 175, 183] hace uso de un simplex similar para representar el conjunto de loterías posibles con tres estados de la naturaleza, en donde cada punto del simplex representa una medida de probabilidad diferente (y por lo tanto una lotería diferente). Ese interesante uso del simplex no constituye una caja de Edgeworth, pero inspira la siguiente construcción. En la Figura 5.4 se muestran las curvas de indiferencia del consumidor A en la caja de Edgeworth, suponiendo que las preferencias son monótonas y solo dependen de su consumo de la mercancía. La flecha indica el sentido en que crece la utilidad.

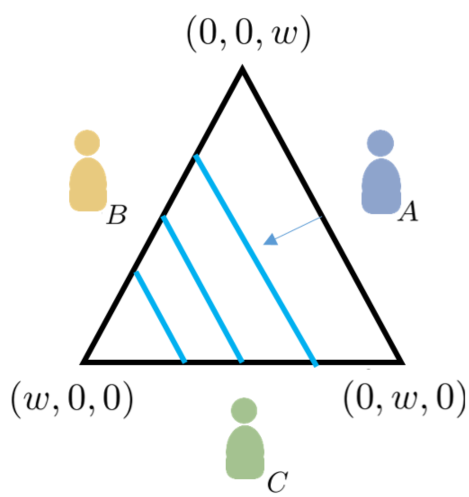

Figura 5.4: Preferencias monótonas en una caja de Edgeworth de tres consumidores y una mercancía.

Por supuesto cada una de dichas curvas de indiferencia es el conjunto de asignaciones donde el consumidor A recibe la misma proporción de la mercancía. Una función de utilidad que podría representar dichas preferencias sería $u^A(x^A) = x^A$. Considere ahora el caso en el que las preferencias del consumidor B dependen positivamente de la proporción de la mercancía que le sea asignada y de la que le sea asignada al consumidor C, digamos acorde a la función de utilidad $u^B(x^B, x^C) = x^B + x^C$. En ese caso el consumidor B es indiferente entre una asignación u otra siempre que otorgue la misma proporción repartida entre él y el consumidor C o, lo que es lo mismo, entre todas las asignaciones en las que la proporción asignada al consumidor A sea igual. Con esto, si la mercancía en cuestión es un mal, las curvas de indiferencia de la Figura 5.4 también podrían representar las preferencias del consumidor B. Un caso muy interesante de asignaciones en una economía de este estilo es el caso de división de la renta y asignación de habitaciones de un apartamento compartido presentado en [26].

Cuatro consumidores, una mercancía: empleando el mismo método de los casos enteriores se tendría que para una representación de una economía con cuatro consumidores y solo una mercancía se emplee el simplejo formado por las combinaciones convexas de las asignaciones extremas. Si, por ejemplo, la dotación disponible en la economía de la mercancía fuera de una unidad, podría tenerse la representación de la Figura 5.5.

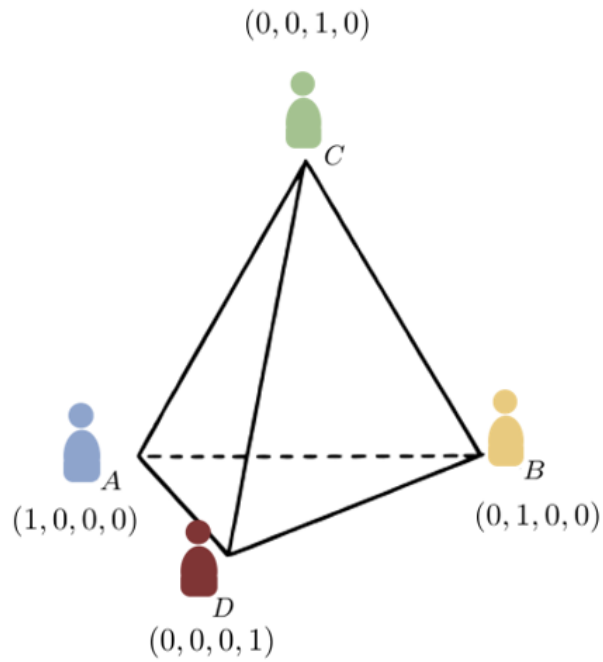

Figura 5.5: Caja de Edgeworth en una economía de una mercancía y cuatro consumidores.

Si bien en situaciones con una sola mercancía no habría intercambio en sentido estricto, sino una cierta asignación y re-asignación de un bien o un mal, al respecto hay una creciente y muy interesante literatura sobre problemas de este estilo conocidos como el problema de la “división de una torta” cuyo artículo seminal es [13]. Una aplicación para el caso de división de la renta de un apartamento entre m compañeros y la asignación de las diferentes habitaciones con preferencias completas se encuentra en [22], mientras que una en la que se disponen de las preferencias solo $m - 1$ compañeros está en [26]. Para una introducción a estos problemas para bienes divisibles perfectamente y para bienes indivisibles se remite a [62].

Para una cantidad mayor de consumidores se considera el simplejo correspondiente, aunque no se pueda representar. Ahora, si se desea emplear más de una mercancía la construcción de la caja de Edgeworth correspondiente se obtiene mediante el producto cartesiano de tantos simplejos como mercancías haya, cada uno de ellos de dimensión igual al número de consumidores involucrados en el intercambio de dicha mercancía. Por ejemplo, para el caso de dos consumidores intercambiando dos mercancías se hará el producto cartesiano de los dos simplejos (uno por cada mercancías) de dimensión dos (porque son dos consumidores), obteniendo un rectángulo. En el caso de tres consumidores intercambiando una primera mercancía, pero solo dos de ellos intercambiando una segunda, se haría el producto cartesiano de el simplejo representado por un triángulo, donde se representan las asignaciones de la primera mercancía entre los tres consumidores, y el simplejo representado por una línea, donde se representan las asignaciones de la segunda mercancía entre los dos consumidores que la intercambian, obteniendo un prisma triangular, donde se representarían las asignaciones de ambas mercancías en esta economía. De manera general, la caja de Edgeworth para el caso de m consumidores y l mercancías estaría dedo por el producto cartesiano de l simplejos, cada uno del caso de m consumidores, esto es

$$\prod_{i=1}^{l} S_m.$$

Se presentan a continuación algunos casos de cajas de Edgeworth para varias mercancías.

Dos consumidores, dos mercancías: para construir la caja de Edgeworth en este caso se toma el producto cartesiano de dos simplejos (uno por cada mercancía) del caso de una mercancía con dos consumidores. Esto es el producto cartesiano entre dos líneas que constituye un rectángulo. Una interpretación común y alternativa en este caso en el de dos sistemas de ejes cartesianos, uno por cada consumidor que se juntan formando un rectángulo de modo que las dimensiones de la caja correspondan con la cantidad total de dotaciones iniciales disponibles en la economía de cada una de las mercancías como se ve en la Figura 5.6.

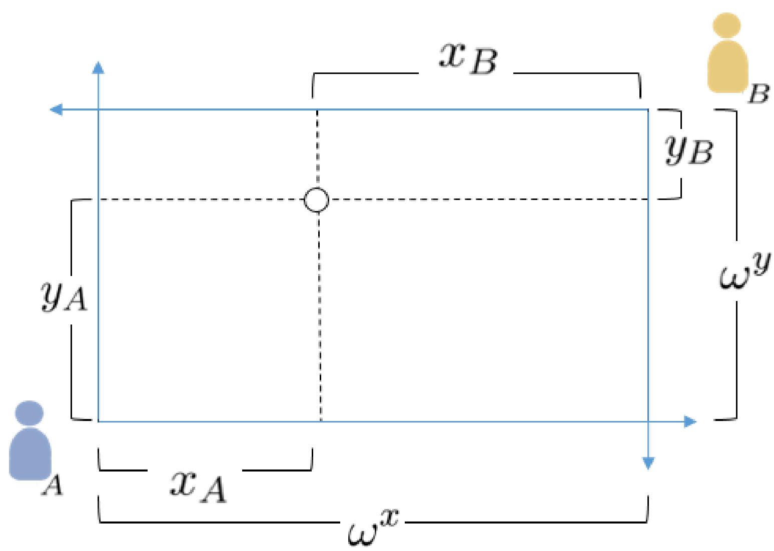

Figura 5.6: Caja de Edgeworth para el caso de dos consumidores $\{A, B\}$ y dos mercancías reales $\{x, y\}$.

Así, el origen de los ejes coordenados de cada consumidor se encuentran en vértices opuestos del rectángulo. Cada punto dentro de la caja representa una asignación factible de las mercancías entre los dos consumidores. En la Figura 5.6 el punto divide la extensión horizontal de la caja en dos, representando que la cantidad x_A de la mercancía x es asignada al consumidor A, mientras que la cantidad x_b de la mercancía x es asignada al consumidor B. De manera similar con la división vertical de la caja. Note que el conjunto obtenido es el formado por todas las combinaciones convexas de las "asignaciones extremas", aquellas en las que todo el consumo de cada mercancía es asignado a alguno de los consumidores. En estas cajas se suelen representar las curvas de indiferencia de los consumidores y esto permite representar todos los elementos de la economía de intercambio tradicional en una representación.

Nótese además que es posible representar cada caja rectangular con un cuadrado de lado igual a 1, interpretando las asignaciones en esta caja como los porcentajes asignados de cada mercancía a cada consumidor. Para lograr una representación de las curvas de indiferencia bajo esta transformación es posible que se requiera reescalar los consumos de las mercancías en las funciones de utilidad.

Dos consumidores, tres mercancías: en el caso de una economía con dos consumidores y tres mercancías se tiene una extensión del caso tradicional donde la caja se formaría a partir del producto cartesiano de tres simplejos (uno por cada mercancía) cada uno de dos consumidores, lo que tomaría la forma de un paralelepípedo. Las dimensiones de la caja dependen de las cantidades disponibles de cada una de las mercancías en la economía, de modo que cada punto dentro de la caja representa una asignación factible. Cada uno de los consumidores se ubica en vértices opuestos de la caja y cuenta en cada una de las tres dimensiones desde su posición. Las curvas de indiferencia serían superficies como la representada en la Figura 3.5.

Tres consumidores, dos mercancías: para una economía con tres consumidores y una mercancía no resulta evidente la existencia de tal representación. Se conjetura a continuación que no existe tal representación en dos ni tres dimensiones.

Proposición 5.1.1. *Si una economía de intercambio puro real está compuesta por tres consumidores y se transan únicamente dos mercancías reales, dicha economía no tiene una representación del tipo caja de Edgeworth en dos ni tres dimensiones.*

Demostración. Los vértices en las representaciones tipo caja de Edgeworth consideradas son todas las asignaciones "extremas", es decir aquellas en las que las asignaciones de cada mercancía que recibe cada consumidor, en una economía normalizada son 1 o 0. En esta economía se requerirían nueve vértices (3^2= 9 posibles asignaciones extremas para las cantidades de la primera mercancía por tres posibles asignaciones extremas para la segunda mercancía). Además, el número de aristas es el número de "transiciones suaves" entre asignaciones extremas. Se entiende acá "transiciones suaves" como el número de parejas de asignaciones extremas en las que la diferencia entre una y otra se encuentra a lo más en una componente del vector a lo más para cada consumidor. En la caja de Edgeworth de esta economía habría doce aristas. Se nota además que la representación buscada debe ser un conjunto convexo.

Para el caso de una representación en dos dimensiones basta señalar que cualquier polígono convexo cumple la característica de que el número de vértices coincide con el número de lados. Claramente esto no se tiene en esta economía, por lo que no existe tal representación en dos dimensiones.

En el caso de tres dimensiones se recuerda que la ecuación de Euler para poliedros convexos plantea que
$$v + c = a + 2,$$
donde v es el número de vértices, c el número de caras y a el número de aristas. Como en esta economía se tendría que $v = 9$ y $a = 12$, necesariamente $c = 5$, esto es, que la representación buscada debe ser un poliedro de cinco caras, un pentaedro. Además, se sabe que
$$rv = 2a,$$

donde r es el número de aristas que convergen en los vértices. De ahí se concluye que $r = \frac{24}{9}$ lo cual no es posible, ya que no es una cantidad entera, por lo que tampoco existiría una representación de esta economía en tres dimensiones. $\square$

5.1.2. Equilibrio

A continuación se da la definición de los principales conceptos solución del problema de una economía de intercambio puro: los cuasiequilibrios y los equilibrios walrasianos.

Definición 5.4. ***Adaptada de Aliprantis, Brown y Burkinshaw [2, p. 135]*** *De una asignación $(x_1, \ldots, x_m) \in E^m$ en una economía de intercambio, se dice que esta es:*

- ***una asignación de equilibrio competitivo o walrasiano:*** *siempre que exista un precio $p \in E'$, $p \neq 0$, tal que si tanto $x_j \in \mathcal{B}_j(p)$ como $x > x_j$, entonces $p \cdot x > p \cdot \omega_j$, donde $\mathcal{B}_j(p)$ denota a la restricción presupuestal usual a los precios p.*

- ***una asignación de cuasiequilibrio:*** *siempre que exista un precio $p \in E'$, $p \neq 0$, tal que $x \succeq_j x_j$ implica que $p \cdot x \geq p \cdot \omega_j$.*

El **equilibrio walrasiano** o **cuasiequilibrio** está conformado tanto por la asignación como por el precio que incorpora la definición anterior[3]. En un equilibrio walrasiano cada consumidor decide su plan de consumo según el esquema de elección racional en el que escoge aquel (o una de aquellos) plan en su conjunto presupuestal que sea más preferido, sujeto a que el valor de dicho plan a los precios dados sea igual al valor que tiene a esos precios su dotación inicial.

Definición 5.5. *Una asignación $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E^m$ en una economía de intercambio se dice **soportada por un vector de precios**, p, $p \neq 0$, $p \in E^{'}$, cuando $x \succeq x_i$ implica que $p \cdot x \geq p \cdot x_i$.*

Esto es, cuando una asignación x es soportada por un precio p, cualquier asignación que sea al menos tan buena como x termina costando al menos tanto como x.

5.2. Ejemplos de economías de intercambio puro

Ejemplo 5.2.1. ***(Una economía tradicional en certidumbre sin sesgos)*** *Sea la economía de intercambio puro de dos consumidores (A, B) y dos mercancías $\{x, y\}$ descrita por:*

$$\begin{cases} U^A(x_A, y_A) = x_A y_A & \omega^A = (8, 6), \\ U^B(x_B, y_B) = x_B y_B & \omega^B = (2, 4). \end{cases}$$

Se nota que la estructura de los problemas de consumo al que se enfrenta cada consumidor es de la forma $(\mathbb{R}^2, \{\theta_1\}, \mathbf{1}_{\theta_1}, I, \mathbb{R}^2, U^i)$. En esta economía el equilibrio walrasiano se obtiene al encontrar los precios que hacen que las demandas, la elección de los consumidores, sean iguales a las dotaciones disponibles de cada mercancía. Empleando el algoritmo de Lagrange (véase 4.1.1) se determina que las demandas de los consumidores de cada mercancía están dadas por:

- $x^A = \dfrac{8p_x + 6p_y}{2p_x}$.
- $x^B = \dfrac{2p_x + 4p_y}{2p_x}$.

[3] En la definición origial de Aliprantis, Brown y Burkinshaw [2], el equilibrio está conformado únicamente por la asignación. En este trabajo se adapta a la concepción más tradicional en economía de equilibrio que incluye tanto a la asignación como a los precios.

- $y^A = \dfrac{8p_x + 6p_y}{2p_y}$.
- $y^B = \dfrac{2p_x + 4p_y}{2p_y}$.

El procedimiento es análogo al presentado en el Ejemplo 4.1.1. Así, el equilibrio walrasiano está dado por la asignación en la que el consumidor A consume siete unidades de cada mercancía mientras que el consumidor B consume tres unidades de cada una de las mercancías, con precios $p_x = p_y = 1$.

Ejemplo 5.2.2. ***(Una economía de Riesz en certidumbre sin sesgos)*** *Drnovsek, R. [21] muestra una economía de intercambio con dos consumidores en la que el par dual que caracteriza esta economía es el par Riesz $\langle l^\infty, l^1\rangle$, esto es, una economía en la que hay una cantidad infinita contable de mercancías y en la que cada vector en l^1 es un vector de precios y define un funcional lineal en el espacio de mercancías. Aquí, cada vector $x = (x_1, x_2, \cdots)$ es un plan de consumo. Los consumidores tienen preferencias representadas por funciones tipo Cobb-Douglas de la forma*

$$U(x_1, x_2, ...) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_k \log |x_k|,$$

con $\alpha_k > 0$ para todo K y $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_k = 1$. Para esta economía, se considera el subconjunto de l^∞ de los vectores que tienen norma menor o igual a uno y se muestra que la cesta (x^*), que maximiza la función de utilidad y el vector de precios que hace que el valor de dicha cesta es maximal, es

$$x_k = \frac{\alpha_k}{p_k}.$$

Esta plataforma puede usarse para modelar situaciones de intercambio de sucesiones de recursos no-renovables. El problema de consumo relacionado tiene una estructura de la forma $(l^\infty, \{\theta_1\}, \mathbf{1}_{\theta_1}, I, l^1, U)$.

Ejemplo 5.2.3. ***(Otra economía de Riesz en certidumbre sin sesgos)*** *Aliprantis y Burkinshaw [3] presentan el siguiente ejemplo de una economía de intercambio puro con dos consumidores. El espacio de opciones es el conjunto de las funciones continuas en el intervalo [0,1]. Esta economía se puede interpretar en el contexto de intercambio de planes de consumo continuos de un recurso renovable en un intervalo de tiempo finito, normalizado en el intervalo [0,1]. El orden de este conjunto indica que en ningún momento del tiempo puede consumirse más de las cantidades disponibles en la economía en dicho momento. Se definen las dotaciones iniciales como la función constante en uno, $\mathbf{1}$, lo que normaliza también los consumos del recurso como si se tratara de una proporción de la cantidad disponible. Se reparte dicha dotación como $\omega_1 = t$; $\omega_2 = 1 - t$, es decir con un plan de consumo creciente en proporción para el agente 1 y con un plan decreciente en proporción para el agente 2. Las funciones de utilidad de esta economía están dadas por*

$$u_1(x) = \int_0^1 x(t)dt,$$

$$u_2(x) = \int_0^1 \sqrt{x(t)}dt.$$

Así, el problema de elección tiene una estructura de la forma $(\mathcal{C}[0,1], \{\theta_1\}, \mathbf{1}_{\theta_1}, I, \mathcal{C}[0,1], u_i)$. Nótese además, que desde la interpretación de proporciones del consumo el hecho de que las funciones de utilidad estén definidas sobre las proporciones y no sobre los niveles puede, en una economía de pocos agentes, representar ciertas preferencias sociales, donde lo importante no es cuánto del recurso se consuma, sino cuánto en proporción e, indirectamente, en relación al consumo de los demás. Se muestra a continuación que la asignación "equitativa", en la que cada agente consume la mitad del recurso disponible en cada momento del tiempo, es un equilibrio walrasiano soportado por el precio p dado por el funcional

$$p \cdot x = \int_0^1 x(t)dt.$$

Para mostrar que es equilibrio se verifica que cualquier asignación que fuera preferida no es factible. Nótese que el valor de las dotaciones iniciales y de la asignación de equilibrio son todas iguales a un medio:

$$p \cdot x_1 = p \cdot x_2 = \int_0^1 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} = \int_0^1 (t) dt = \int_0^1 (1-t) dt.$$

Si hubiera una asignación "$y = (y_1, y_2)$" preferida para el consumidor 1, $y_1 \succ_1 x_1$, entonces

$$u_1(y_1) > u_1(x_1),$$

que es

$$\int_0^1 x(t) dt > \int_0^1 x_1(t) dt,$$

por lo que

$$p \cdot y_1 > p \cdot x_1.$$

Es decir que dicha asignacióna valorada a ese precio sería más costosa que la asignación de equilibrio para el consumidor 1. Adicionalmente, si $y_2 \succ_2 x_2$ entonces $u_2(y_2) > u_2(x_2)$, que es

$$\int_0^1 \sqrt{y_2(t)} dt > \int_0^1 \sqrt{x_2(t)} dt,$$

el cual queda acotado como

$$\left[\int_0^1 y_2(t) dt\right]^{\frac{1}{2}} \geq \int_0^1 \sqrt{y_2(t)} dt > \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{2}} dt.$$

De lo anterior se tiene que

$$\left[\int_0^1 y_2(t) dt\right]^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

es decir,

$$\int_0^1 y_2(t) dt > \frac{1}{2},$$

que es

$$p \cdot y_2 > p \cdot x_2.$$

Esto significa que dicha asignación valorada a a ese precio también sería más costosa que la asignación de equilibrio para el consumidor 2.

Ejemplo 5.2.4. ***(Una economía de intercambio con tres consumidores con ambigüedad).*** *Sea una economía de intercambio compuesta por tres consumidores (A, B, C) que eligen sus planes de consumo entre el conjunto de cantidades enteras de tres activos x, y, z. Dichos activos otorgan pagos de acuerdo a la realización de tres estados de la naturaleza $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ según el Cuadro 5.1.*

	θ_1	θ_2	θ_3
x	16	8	8
y	10	10	10
z	12	7	14

Cuadro 5.1: Matriz de pago para una elección con tres alternativas y tres estados de la naturaleza.

Así, si ocurre el estado de la naturaleza θ_3, cada unidad del activo x otorga un pago de 8, cada unidad del activo y otorga un pago de 10, y cada unidad del activo z otorga un pago de 14. Inicialmente el *consumidor A posee, como dotación inicial, una unidad de los activos x y y. Por su parte el consumidor B posee una unidad de los activos x y z. Finalmente el consumidor C tiene propiedad de una unidad de los activos y y z.*

El consumidor A valora cada una de las opciones bajo un criterio optimista, por lo que su valoración de cada una de los activos es $f_A(x) = 16$, $f_A(y) = 10$, $f_A(z) = 14$, por lo que su activo preferido es el activo x. Por supuesto él querría conservar la unidad que tiene de x y cambiar la unidad que posee de y por alguno de los otros activos. El consumidor B valora cada uno de los activos bajo un criterio pesimista por lo que su apreciación de cada uno de ellos está dada por $f_B(x) = 8$, $f_B(y) = 10$, $f_B(z) = 7$, por lo que se tiene que su activo preferido es y, que da un pago seguro de 10, y el menos preferido para él es el activo z del que posee una unidad. De manera similar el consumidor C valora las opciones según su criterio de minimizar el máximo arrepentimiento, para lo que se construye la matriz de costos de oportunidad, como está en el Cuadro 5.2

	θ_1	θ_2	θ_3
x	0	2	6
y	6	0	4
z	4	3	0

Cuadro 5.2: Matriz de costo de oportunidad para la elección con tres alternativas y tres estados de la naturaleza del Cuadro 5.1.

Para el consumidor C el arreprentimiento asociado a los activos x y y es de 6, mientras que el asociado al activo z es 4, por lo que este último es el activo preferido.

Ahora, si las tasas de intercambio entre activos son uno a uno, esto es $p_x = p_y = p_z$, la asignación que asigna dos unidades del activo x al consumidor A, dos unidades del activo y al consumidor B y dos unidades del activo z al consumidor C es una asignación de equilibrio walrasiano para esos precios. Nótese que este equilibrio depende de la asignación inicial de los activos. Además, si los tres consumidores fueran optimistas o pesimistas, no existe un equilibrio walrasiano como el descrito.

Ejemplo 5.2.5. ***(Una economía con riesgo).*** *Sea una economía con dos tipos de activos, uno riesgoso (x) y otro libre de riesgo (y). En el futuro hay dos estados de la naturaleza, $\{\theta_1, \theta_2\}$, dependiendo de los cuales el activo riesgoso puede pagar 20 o cero unidades monetarias respectivamente. Dichos estados de la naturaleza tienen probabilidades asociadas (π_1, π_2) respectivamente. En dicha economía hay dos consumidores, $\{A, B\}$, con funciones de utilidad dadas por:*

$$U^A(x^A, y^A) = y^A + \sqrt{x^A(20(\pi_1) + 0(\pi_2))},$$
$$U^B(x^B, y^B) = y^B + x^B\left(20(\pi_1) + 0(\pi_2)\right).$$

En este caso el consumidor A muestra cierta aversión al riesgo sobre las ganancias obtenidas con el activo riesgoso. Si la probabilidad de cada estado de la naturaleza fuera $\pi_1 = \pi_2 = 0,5$ (que es similar a lo que sucedería en una situación de ambigüedad con criterio de elección Laplace), las funciones serían

$$U^A(x^A, y^A) = y^A + \sqrt{10x^A},$$
$$U^B(x^B, y^B) = y^B + 10x^B.$$

En esta economía si se asignan dotaciones iniciales $\left((\omega_x^A, \omega_y^A); (\omega_x^B; \omega_y^B)\right) = ((0; 100)(48; 100))$, el equilibrio walrasiano viene dado por la asignación $\left((x^A, y^A); (x^B; y^B)\right) = ((0,025; 99,75)(39,975; 100,25))$ con precios de los activos $p_x = 10$, $p_y = 1$.

Ejemplo 5.2.6. ***(Otra economía sin riesgo, con diferentes probabilidades percibidas).*** *Se presenta a continuación una economía similar a la del ejemplo anterior, con agentes simétricos y la inclusión de la posibilidad de que las probabilidades asociadas por cada consumidor a cada estado de la naturaleza sean diferentes. La formación de las expectativas sobre la distribución de los agentes se da de manera diferente, bien porque tienen diferente información o la valoran de manera diferente. Sea una economía con dos consumidores, $\{A, B\}$, y dos tipos de activos, uno riesgoso (x) y otro libre de riesgo (y). En el futuro hay dos estados de la naturaleza, $\{\theta_1, \theta_2\}$, dependiendo de lo cual el activo riesgoso puede pagar 20 o cero unidades monetarias respectivamente. El consumidor A estima la probabilidad de que ocurra el estado de la naturaleza θ_1 en 0.75, mientras que el consumidor B la estima en 0.25. La utilidad de cada consumidor, considerando una evaluación acorde al criterio de valor esperado, está dada por*

$$U^A(x^A, y^A) = y^A + 15x^A,$$
$$U^B(x^B, y^B) = y^B + 5x^B.$$

En esta economía si se asignan dotaciones iniciales $\left((\omega_x^A, \omega_y^A); (\omega_x^B; \omega_y^B)\right) = ((0; 100)(45; 100))$, el equilibrio walrasiano viene dado por las asignaciones $\left((x^A, y^A); (x^B; y^B)\right) = \left(\left(\frac{100p_y}{p_x}; 0\right)\left(45 - \frac{100p_y}{p_x}; 200\right)\right)$ con precios de los activos $5 \leq \frac{p_x}{p_y} \leq 15$. Se nota en este ejemplo un caso de no-unicidad del equilibrio walrasiano.

5.3. Optimalidad

Se define a continuación una de las nociones más importantes en la teoría del bienestar, la optimalidad en el sentido de Pareto[4].

Definición 5.6. ***Aliprantis, Brown & Burkinshaw [2, p. 153]*** *Una asignación $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E^m$ factible se dice:*

1. ***Individualmente racional****, si $x_i \succeq_i \omega_i$ se tiene para cada consumidor i.*

2. ***Débilmente óptima en el sentido de Pareto****, si no existe una asignación $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ tal que $y_i \succ_i x_i$ para cada consumidor i.*

3. ***Óptima en el sentido de Pareto****, cuando no exista una asignación $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ tal que $y_i \succeq_i x_i$ para cada consumidor i, al tiempo que $y_i \succ_i x_i$ se tenga para algún conumidor i.*

Este es un criterio que se suele tomar como un mínimo deseable sobre cualquier situación, en particular sobre cualquier asignación. Refleja una cierta noción de eficiencia, pero en general no es un criterio de equidad o justicia. Enseguida se presentan dos resultados centrales en la teoría de equilibrio, el primer y segundo teoremas del bienestar. El primer teorema caracteriza la optimalidad en el sentido de Pareto de un equilibrio walrasiano y el segundo da condiciones bajo las cuales sería posible implementar una asignación óptima en el sentido de Pareto como un equilibrio walrasiano por medio de un vector de precios.

5.3.1. Primer teorema del bienestar

Teorema 5.3.1. ***Primer teorema del bienestar - Aliprantis & Burkinshaw [3, p. 222]*** *Suponga que los conjuntos de consumo en una economía de intercambio son conos y que cada preferencia es semicontinua inferior para alguna topología lineal, entonces cualquier asignación que es soportada por un precio $\mathbf{p} \cdot \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ es débilmente Pareto-eficiente.*

[4] Esta noción de "optimalidad" se conoce como una condición de "eficiencia" en manuales como Varian, H. [79].

Demostración. Siguiendo a [3, p. 222]):

Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E^m$ una asignación soportada por un precio p con $p \cdot \omega \neq 0$ y suponga que x no fuera débilmente Pareto-eficiente. Si x no es débilmente Pareto eficiente, entonces existe otra asignación z tal que $z_i \succ_i x_i$ para cada i.

Como p es un precio que soporta a x, entonces $p \cdot z_i \geq p \cdot x_i$ para cada i. Además, se sabe que

$$\sum_{i=1}^{m} p \cdot z_i = p \cdot \sum_{i=1}^{m} z_i.$$

Como z es una asignación factible se tiene que

$$\sum_{i=1}^{m} z_i = p \cdot \omega,$$

y como x también es una asignación factible, entonces

$$p \cdot \omega = p \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} p \cdot x_i,$$

de donde se tiene que $p \cdot z_i = p \cdot x_i$ para cada i. Como cada conjunto de consumo X_i es un cono, y como $\lim_{\delta \uparrow 1} \delta z_i = z_i$ se tiene para cada topología lineal, entonces se sigue de la semi-continuidad inferior de las preferencias que existe algún $\epsilon \in (0, 1)$ tal que $1 - \epsilon \leq \delta \leq 1 + \epsilon$ implica $\delta z_i \succ x_i$. Como p es un precio que soporta x, $\delta p \cdot x_i = \delta p \cdot z_i$ que es igual a $= p \cdot (\delta z_i)$ que es mayor a su vez que $p \cdot x_i$ de donde $(\delta - 1)x_i \geq 0$ para $1 - \epsilon \leq \delta \leq 1 + \epsilon$. Definiendo $\delta = 1 \pm \epsilon$ se tiene que $\pm \epsilon p \cdot x_i \geq 0$ o $p \cdot x_i = 0$ para cada i. Esto implica que $p \cdot \omega = \sum_{m}^{i=1} p \cdot x_i = 0$ lo cual es una contradicción. En consecuencia, x es débilmente Pareto-eficiente. □

La importancia de este resultado reside en la demostración del cumplimiento de un mínimo criterio de eficiencia por parte de la solución del mecanismo de mercado. Este resultado se extiende a las economías con producción. En acasiones, este resultado se ha presentado como evidencia de las bondades del mecanismo de precios. No obstante es importante resaltar que las condiciones de optimalidad de Pareto no incluyen ninguna noción de equidad o justicia.

Ejemplo 5.3.1. ***Una economía con riesgo*** *En el Ejemplo 5.2.5 se puede comprobar que el equilibrio walrasiano está en el conjunto de Pareto, que es el conjunto de todas las asignaciones $\big((x^A, y^A); (x^B; y^B)\big)$ tales que*

$$\begin{cases} y^A = 0; x^A < 0,025, \ \ o \\ x^A = 0,025, \ \ o \\ y^A = 200; x^A > 0,025. \end{cases}$$

5.3.2. Segundo teorema del bienestar

Se reproducen a continuación distintas versiones de otro resultado de optimalidad en economías de intercambio: el segundo teorema del bienestar. Primero se presenta una versión para las economías tradicionales de intercambio puro para el espacio de mercancías real finito-dimensional y luego se presenta la versión más general para economías de Riesz de intercambio puro.

Teorema 5.3.2. ***Segundo teorema del bienestar - Jehle & Reny [36, p. 218]*** *Considere una economía de intercambio puro*[5] *con funciones de utilidad y dotaciones iniciales $(u^j, \omega^j)_{j=1}^m$, tal que las*

[5] Se recuerda que esto implica que las funciones de utilidad son continuas, monótonas estrictas y cuasicóncavas estrictas.

dotaciones iniciales agregadas cumplen que $\sum_{j=1}^{m} \omega^j \gg 0$. Si $\bar{x}$ es una asignación óptima en el sentido de Pareto para esta economía y que las dotaciones son reasignadas de modo que las nuevas dotaciones iniciales son $\bar{x}$, entonces $\bar{x}$ es una asignación de equilibrio walrasiano de la nueva economía.

Demostración. Siguiendo a Jehle & Reny [36, p. 218]: Como $\bar{x}$ es una asignación eficiente en el sentido de Pareto, entonces $\bar{x}$ es factible, esto es

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{x}^j = \sum_{j=1}^{m} \omega^j \gg 0.$$

Como las funciones de utilidad son continuas, monótonas estrictas y cuasicóncavas estrictas, y además la asignación $\bar{x}$ es factible, entonces la nueva economía $(u^j, \omega^j)_{j=1}^{m}$ tiene una asignación de equilibrio walrasiano $\hat{x}$.

(I) Como en equilibrio las demandas maximizan la utilidad sujeto a su restricción presupuestal, necesariamente

$$u(\hat{x}^j) \geq u(\bar{x}^j) \text{ para todo } j.$$

(II) Como $\hat{x}$ es una asignación de equilibrio de la nueva economía, entonces esta asignación debe ser factible. Así,

$$\sum_{j=1}^{m} \hat{x}^j = \sum_{j=1}^{m} \bar{x}^j = \sum_{j=1}^{m} \omega^j,$$

de modo que la asignación $\hat{x}$ es factible para la economía original.

Como se tienen (I) y (II), $\hat{x}$ es una asignación factible para la economía original y hace que los consumidores estén no-peores que como están bajo la asignación paretiana $\bar{x}$. Como $\bar{x}$ es una asignación paretiana, entonces $\hat{x}$ no puede hacer que ningún consumidor está estrictamente mejor que bajo la asignación $\bar{x}$. Con esto las desigualdades de (I) deben tenerse necesariamente como igualdad para todos los consumidores.

Hay que mostrar que $\bar{x} = \hat{x}$. Si este no fuera el caso, entonces en el equilibrio de la nueva economía los consumidores podrían comprar una canasta promedio entre $\hat{x}$ y $\bar{x}$ aumentando entrictamente su utilidad (por la cuasiconcavidad estricta de u^j), contradiciendo el hecho de que $\hat{x}$ es maximizadora de beneficio. □

El anterior resultado muestra que es posible encontrar un vector de precios que soporta cualquier asignación paretiana como equilibrio walrasiano. Es posible generalizar el segundo teorema del binestar tal como se muestra en el trabajo de Aliprantis, Brown y Burkinshaw [2] para economías de intercambio de Riesz.

Teorema 5.3.3. ***Segundo teorema del bienestar en conomías Riesz - Aliprantis & Burkinshaw [3, p. 228]*** *En una economía de Riesz, si las preferencias son convexas, monótonas y uniformemente $(w, V)-$propias para topología consistente localmente sólida τ en L, entonces cada asignación débilmente Pareto eficiente puede ser soportada por un precio $p > 0$.*

Demostración. Siguiendo a Aliprantis & Burkinshaw [3, p. 228]: Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ una asignación débilmente Pareto eficiente en una economía con m consumidores. Considere los conjuntos de no-peores que los planes de consumo asignados para cada individuo i,

$$F_i = \{x \in L^+ | x \succeq_i x_i\}.$$

Notemos que cada uno de esos conjuntos es no-vacío porque los planes de consumo de cada individuo están en su conjunto de no-peores. Además como las preferencias se suponen convexas, cada uno de estos conjuntos de no-peores es convexo.

Consideremos ahora el conjunto

$$F = F_1 + F_2 + \cdots + F_m - w,$$

que es un conjunto convexo y no vacío dado que cada F_i es no-vacío y convexo, y que la resta de w solo es un cambio de nivel.

Mostramos ahora que, como w es deseable, entonces $-\frac{1}{n}w \in F$ para cada n. Para ello, supongamos que sí se tuviera que $-\frac{1}{n}w \notin F$. En ese caso para cada consumidor $i = 1, 2, \ldots, m$ existirían elementos $z_i \in F_i$ tales que

$$-\frac{1}{n}w = z_1 + z_2 + \cdots + z_m - w.$$

Esto es, reorganizando términos, equivalente a,

$$w = z_1 + z_2 + \cdots + z_m + \frac{1}{n}w,$$

que se puede expresar como

$$w = \left(z_1 + \frac{1}{mn}w\right) + \left(z_2 + \frac{1}{mn}w\right) + \cdots + \left(z_m + \frac{1}{mn}w\right).$$

Definamos ahora $y_i = z_i + \frac{1}{mn}w$. Como la suma de los y_i sería igual a las dotaciones iniciales de la economía, entonces el conjunto $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sería una asignación factible. Además, como w es una asignación deseable, entonces $y_i \succ_i z_i$ para cada consumidor, y como z_i pertenecería al conjunto de no-peores para cada consumidor, entonces $z_i \succeq x_i$. Con lo anterior $y_i \succ_i x_i$, lo que no puede ser dado que se supone que $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es una asignación débilmente Pareto eficiente, por lo que se tiene que $-\frac{1}{n}w \notin F$ para cada n.

Se muestra a continuación que F tiene un punto interior para emplear el teorema de separación en su versión infinito-dimensional. Suponemos que la vecindad V es convexa y sólida. Sea

$$\Gamma = \left\{\alpha\left(w + \frac{1}{m}v\right) \mid \alpha > 0, v \in V\right\}.$$

Notemos que Γ es un conjunto convexo y como $w + \frac{1}{m}V$ está contenido en Γ, entonces w es un punto interior de Γ, esto es que Γ tiene un interior no-vacío.

Ahora se verifica que los conjuntos F y $-\Gamma$ son disyuntos. Se supone que se tuviera $(-\Gamma)\bigcap F \neq \emptyset$, entonces se tendrían elementos $\alpha > 0$, $v \in V$ y z_i tales que

$$-\alpha w - \frac{1}{m}v = z_1 + z_2 + \cdots + z_m - w$$

de donde, reordenando términos,

$$-\frac{\alpha v}{m} = z_1 + z_2 + \cdots + z_m - (w - \alpha w),$$

que es $z_1 + z_2 + \cdots + z_m - (w - \alpha w) \in \dfrac{\alpha V}{m}$ (por simetría de V). Definimos $z = z_i$, $y = w - \alpha w$ y se tiene que $z - y \in \dfrac{\alpha V}{m}$. Como $z - y = z - w + \alpha w$, entonces $z - y \leq z + \alpha w$, por lo que

$$(y-z)^- = (z-y)^+ \leq z_1 + z_2 + \cdots + z_m + \alpha w$$

que se puede expresar como

$$(z-y)^+ \leq \left(z_1 + \frac{\alpha}{m}w\right) + \left(z_2 + \frac{\alpha}{m}w\right) + \cdots + \left(z_m + \frac{\alpha}{m}w\right).$$

Por el teorema de descomposición de Riesz (véase 2.10.1) es posible expresar $(z - y)^+$ (y por tanto $(y - z)^-$) como la suma de m elementos positivos del espacio, cada uno menor a $\left(z_i + \dfrac{\alpha}{m}w\right)$, digamos existen elementos s_i, tales que

$$(y-z)^- = \sum_{i=1}^{m} s_i$$

de modo que $0 \leq s_i \leq z_i + \dfrac{\alpha}{m}w$ para cada i. Como $\dfrac{\alpha}{m}V$ es un conjunto sólido y $z - y \in \dfrac{\alpha}{m}V$, entonces $s_i \in \dfrac{\alpha}{m}V$ para cada i.

Como $s_i \leq z_i + \dfrac{\alpha}{m}w$, entonces $z_i + \dfrac{\alpha}{m}w - s_i \geq 0$. Se define $z_i + \dfrac{\alpha}{m}w - s_i = y_i$ y se nota que $y_i \succ_i z_i \succ_i x_i$, por lo que los panes de consumo y son estrictamente preferidos que aquél asignado a cada consumidor. Se muestra a continuación que dicha asignación es factible. Considérese ahora la suma de los y_i que es

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{i=1}^{m} z_i + \frac{\alpha}{m}w - s_i,$$

que con las definiciones anteriores se expresa como

$$= z + \alpha w - (y-z)^-.$$

Si agregamos un elemento positivo a esa suma, $(y - z)^+$, el resultado será mayor o igual que lo anterior, esto es

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = z + \alpha w - (y-z)^- \leq \alpha w - (y-z)^- + (y-z)^+.$$

Como $(y - z)^+ - (y - z)^- = y - z$, entonces

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = z + \alpha w + (y-z) = \alpha w + y = \alpha w + (w - \alpha w) = w,$$

de modo que la asignación y_i es preferida estrictamente a x_i para cada consumidor i, y es además factible, por lo que la asignación x_i no puede ser débilmente Pareto-eficiente, por lo que, por contradicción, se concluye que $F \bigcap (-\Gamma) \neq \emptyset$.

Ahora, sabiendo que F y $-\Gamma$ son dinyuntos y que F tiene un punto interior, aplicando el teorema de separación en su versión infinito-dimensional se tiene que existe un precio p distinto de cero en L' y un escalar c tal que

$$p \cdot (-\gamma) \leq c \leq p \cdot f,$$

para cada $\gamma \in \Gamma$, y cada $f \in F$. Por la definición de Γ, si $\gamma \in \Gamma$, entonces $\alpha\gamma \in \Gamma$ para cada $\alpha > 0$, por lo que se puede asumir c como cero. De lo anterior $p \cdot (-\gamma) \leq 0$ o, lo que es equivalente, $p \cdot \gamma \geq 0$ para todo γ en Γ. Si escogemos γ como $w \pm \frac{1}{m}v$ con $v \in V$, se tiene

$$p \cdot w \pm p \cdot \frac{1}{m}v \geq 0,$$

que es

$$p \cdot w \geq \pm p \cdot \frac{1}{m}v$$

de donde $p \cdot w$ es positivo.

Finalmente se muestra que p soporta la asignación débilmente Pareto eficiente $(x_1, \ldots, x_m)$. Si $x \succeq_i x_i$ entonces se tiene que $x - x_i$ se puede expresar como $x + \left(\sum_{j \neq i} x_j\right) - w$ que sería un elemento de F, y por tanto $p \cdot (x - x_i) \geq 0$, de donde $p \cdot x \geq p \cdot x_i$, que es lo que se quería mostrar.

□

5.4. Bitácora del capítulo

El segundo teorema del bienestar plantea la posibilidad de implementar cualquier asignación que sea óptima en el sentido de Pareto como un equilibrio de mercado a través de ciertos precios. Quedan con ello extendidos los resultados de bienestar (cuya interpretación en términos de política económica va más allá de este trabajo) en el caso de economías de intercambio a economías de Riesz. Se finaliza comentando que la optimalidad de Pareto es una mínima condición que se suele pedir a las asignaciones, pero que además de esta noción de eficiencia se encuentran otros criterios de valoración de asignaciones como las nociones de núcleo, asignaciones no-generadoras de envidia y asignaciones justas. En [3] hay un tratamiento detallado de la extensión en el marco de los espacios de Riesz de la noción de núcleo.

Capítulo 6

Consideraciones finales

Al hacer una revisión histórica se vislumbran las relaciones entre el desarrollo de la teoría del consumidor respecto a los desarrollos matemáticos, que, en general, a medida que han surgido, han abierto posibilidades en tanto nuevas soluciones y nuevos problemas. Como primer ejemplo, la noción de agente representativo desarrollada desde Marshall [31] ha sido un instrumento poderoso de la teoría económica. Con esta simplificación ha sido posible construir esquemas generales que son aplicables a una buena variedad de contextos. Dentro de la teoría económica, uno de estos esquemas es la teoría del consumidor. Los desarrollos que permiten el análisis funcional y la teoría de espacios de Riesz han sentado el desarrollo formal que caracteriza a la microeconomía desde el segundo cuarto del siglo XX. En este trabajo se presentó, cómo los espacios de Riesz sirven como una plataforma que generaliza la presentación tradicional de dicha teoría del consumidor; siguiendo los trabajos de Aliprantis, Border y Luxemburg [4], Aliprantis, Brown y Burkinshaw [2] y Aliprantis y Burkinshaw [3]. Adicionalmente, se presentaron algunas de las observaciones que aclaran la relación de ciertos conceptos entre sí y con algunos planteamientos típicos de la economía del comportamiento.

Cada vez más se han incorporado a los planteamientos dominantes los cuestionamientos sobre la racionalidad perfecta de los agentes, representativos y abstractos, que son los sujetos de decisión en las modelaciones tradicionales. Esto ha sido impulsado por los desarrollos en los campos de la economía experimental y comportamental, además de una reciente convergencia en dialogo con las demás ciencias sociales. Plantear puentes entre los resultados experimentales, las hipótesis comportamentales y las herramientas matemáticas disponibles va a seguir permitiendo la implementación de estructuras de incentivos más efectivas. Como indicador de relevancia se presentan casos como el del gobierno del Reino Unido que tiene desde 2010 una unidad especial dedicadas al estudio del comportamiento para asesorar la formulación de políticas públicas, el *Behavioural Insights Team* [72], o el caso del mismo Banco Mundial y su *The Mind, Behavior, and Development Unit (eMBeD)*.

Se destacan a continuación algunas dimensiones no discutidas, áreas interesantes de trabajo futuro y algunos desarrollos adicionales a lo presentado en este trabajo. Respecto a las opciones, no se ha definido explícitamente el caso en el que los bienes son más o menos diferenciados como en el caso de los modelos de la familia de Hotelling [33] [19] [63]. Tampoco se ha expuesto el caso en el que los bienes son entendidos como un conjunto de atributos y los algoritmos de elección suceden a partir de una evaluación de dichos atributos. La presentación de la restricción presupuestal no considera casos en los que la restricción en el caso usual no es lineal como cuando se ve afectada por fenómenos como cuotas, topes, impuestos o subsidios a partir de ciertas cantidades; en el caso de descuentos por compras al por mayor que suceden en escenarios con discriminación de precios; o en los mismos modelos de localización con costos de transporte no-lieales para los consumidores [19]. De manera similar, en el contexto de las condiciones de información en los que se da la elección del consumidor, aunque se presentaron contextos de información referentes a los estados de la naturaleza y sus distribuciones de probabilidad, en lo presentado no se consideran situaciones en las que el consumidor no conoce las opciones disponibles, o modelos dinámicos de difusión de la información. Estos desarrollos podrían acompañar bien la construcción de una teoría de la elección basado en heurísticas que enfrenten la situación de preferencias incompletas.

En cuanto a las preferencias la incorporación de esquemas de preferencias no binarias o de preferencias definidas como relaciones difusas Barrett, Pattanaik y Salles [8], la identificación de los algoritmos de decisión de los consumidores en la realidad y su representación en la modelación, además de la formulación de nuevos algoritmos o políticas (como los *nudges*) que incorporen las observaciones de fenómenos como los efectos contexto, la aversión al riesgo y la reversión de las preferencias. Hay también aproximaciones a las explicaciones de las dinámicas de mercado desde los estudios de la economía evolucionista y los estudios de sistemas complejos [24]. Como es habitual en la teoría microeconómica las preferencias son exógenas. En este respecto una teoría de formación de las preferencias podría acompañar observaciones sobre la formación y evolución de las demandas y los precios.

Relacionado con la elección, si bien se discutió el enfoque de elección en situaciones de riesgo bajo el esquema de la utilidad esperada, se dejó por fuera la muy importante noción de dominancia estocástica [68, p. 78]. En el caso de la elección intertemporal hay ciertas condiciones de información adicionales que determinan la solución según el tipo de compromiso que tenga el consumidor con el plan de consumo elegido. Si la elección del plan de consumo depende únicamente de las condiciones iniciales (*open-loop*), si puede actualizarse con los cambios en la evolución de los estados de la naturaleza (*closed-loop*), o si no dependen en absoluto de los estados iniciales de la naturaleza (*feedback*) [42, p. 9]. Por otra parte no se presentó una parte de la teoría de elección en el marco de la economía comportamental, apoyada mucho en los desarrollos de las neurociencias en los que el principal interés está en el proceso de la elección.

En la extensión de la noción de equilibrio a economías más generales como las economías de Riesz, aun falta discernir claramente las condiciones bajo las cuales dicho equilibrio es único y bajo que modelaciones dinámicas dicho equilibrio es estable. Una ausencia notable respecto a la teoría tradicional es la ausencia de ejercicios de estática comparativa como aquellos que definen la naturaleza de las mercancías sustitutas o complementarias a partir de las respuestas de las demandas a cambios en los precios; y la natural discusión sobre la extensión de estas caracerísticas a otros espacios. Otra extensión surge al notar que, en los problemas de intercambio considerados, el conjunto de opciones es el mismo para todos los consumidores y de cierta manera es independiente de cada uno de ellos; sin embargo es posible considerar que las opciones de intercambio dependan de alguna característica asociada al agente y su relación con los demás como ocurre con una estructura de red [34, p. 125]. Finalmente, en esta teoría de las economías de intercambio se dejan de lado los problemas de agregación de las preferencias y de las demandas y situaciones de competencia imperfecta en las que lso consumidores pueden afectar los precios de mercado.

Por la parte de los mecanismos de solución sobre la conducción del intercambio, se pueden ver situaciones en las que se puede llevar a cabo un intercambio de bienes sin pasar por el mecanismo de precios que está en el mercado. Estas consideraciones de tipo algorítmico se encuentran en el centro de lo que ahora se conoce como teoría de emparejamiento [61]. De particular relevancia son en este caso el mercado de casas y el caso exitoso de intercambio de riñones, cuya implementación ha sido dirigida por Alvin Roth [60]; ambos asociados a algoritmos particulares a las características propias de cada mercado.

Un ejercicio posterior se propone la exploración de diferentes proceso de decisión bajo incertidumbre en entornos simulados con población heterogéneos y dinámicas de replicación que ilustren la evolución de las expectativas, los precios y la distribución de mercancías.

Apéndice A

Glosario matemático

En este anexo se compilan algunos conceptos que pueden complementar el estudio del material presentado en este trabajo, sobretodo, de quienes no son matemáticos de formación, o como herramienta de consulta rápida. En varias de las definiciones y ejemplos presentados se relacionan referencias donde se puede extender la consulta. La presentación de los conceptos se realiza a manera de glosario comentado, aunque dicha presentación no se realiza de manera alfabética. Se presupone conocimiento de las nociones de conjuntos y funciones.

Definición A.1. ***Campo[6, p. 10]****: Un* ***campo*** *o* ***cuerpo*** *es un conjunto* (C) *con al menos dos elementos distintos, llamados* 0 *y* 1*, y dos operaciones,suma (+) y producto, que satisfacen las siguientes propiedades: sean* α, β *y* $\lambda \in C$

- *Conmutatividad:* $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad y \quad \alpha\beta = \beta\alpha.$
- *Asociatividad:* $(\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda), \quad y \quad (\alpha\beta)\lambda = \alpha(\beta\lambda).$
- *Identidad:* $\lambda + 0 = \lambda, \quad y \quad \lambda 1 = \lambda.$
- *Inverso aditivo: Para cada* α *existe un único* β *tal que* $\alpha + \beta = 0$*.*
- *Inverso multiplicativo: Para cada* $\alpha \neq 0$ *existe un único* β *tal que* $\alpha\beta = 1$*.*
- *Propiedad distributiva:* $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta.$

A los elementos de un campo se les suele denominar **escalares** El campo de mayor interés en economía, y en particular en la teoría desarrollada en este trabajo, es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Otros campos típicos son el conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$) y de los números racionales ($\mathbb{Q}$).

Definición A.2. ***Espacio vectorial:*** *Un* ***espacio vectorial*** *es un conjunto* (X) *con un campo asociado* (C) *y dos operaciones bien definidas: una suma que le asigna a cada pareja de elementos del conjunto otro elemento del conjunto*

$$\begin{aligned} + : X \times X &\to X, \\ (x, y) &\to x + y, \end{aligned}$$

y un producto por escalar, que le asigna a cada pareja formada por un elemento del conjunto y un elemento del campo, un elemento del conjunto

$$\begin{aligned} \cdot : C \times X &\to X, \\ (\lambda, x) &\to \lambda \cdot x, \end{aligned}$$

de forma que dichas operaciones cumplen las siguientes propiedades: sean $x, y, z \in X$ *y* $\alpha, \beta \in C$

- *Conmutatividad de la suma:* $x + y = y + x$.
- *Asociatividad de la suma:* $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- *Existencia del módulo en la suma: Existe un elemento* $0 \in X$ *tal que* $x + 0 = x$.
- *Existencia del inverso en la suma: Para cada elemento* x *existe un único elemento* $-x \in X$ *tal que* $x + (-x) = 0$.
- *Conmutatividad del producto por escalar:* $\alpha x = x\alpha$.
- *Asociatividad del producto por escalar:* $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
- *Existencia del módulo en el producto por escalar: Existe un elemento* $1 \in C$ *tal que* $x1 = x$.
- *Distribución del producto por escalar en la suma de vectores:* $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
- *Distribución del producto por escalar en la suma de escalares:* $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Definición A.3. ***Funcional:*** *Un* ***funcional*** *es una función que le asigna a elementos de un espacio vectorial, elementos en el campo.*

Definición A.4. ***Operador:*** *Un* ***operador*** *es una función entre espacios vectoriales.*

Definición A.5. ***Función lineal.*** *Una función* f *entre dos espacios vectoriales* (X, Y) *con el mismo campo asociado* (C) *se denomina* ***lineal*** *si*

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

para todo $x \in X$, $y \in Y$, $\lambda, \mu \in C$.

La característica de linealidad es central en microeconomía porque es tradicional en la definición de los precios de las mercancías y del precio de las cestas de consumo. A partir de las definiciones anteriores A.3, A.4, A.5, se entiende lo que es un **funcional lineal** y un **operador lineal**.

Definición A.6. ***Funcional sublineal. [1, p. 214]:*** *Un funcional p de valor real en un espacio vectorial* X *que es* ***subaditivo****, esto es que*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y),$$

para todos $x, y \in X$, *es un* ***funcional sublineal.***

Definición A.7. ***Topología. ([82], p. 13.):*** *Sea* A *un conjunto, entonces una colección* τ *de subconjuntos de* A *es una* ***topología****, si se tiene que*

- *El conjunto vacío* $\emptyset$ *y el conjunto* A *pertenecen a* τ.
- *Si* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$, *entonces* $A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n \in \tau$.
- *Si* $\{A_i\}_{i \in I}$, *con* $A_i \in \tau$ *e* I *un conjunto de índices, entonces* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

A los conjuntos que pertenecen a una topología se les denomina ***conjuntos abiertos****.*

Ejemplo A.0.1. ***Topologías ([82, p. 13]:*** *Sea un conjunto* A

- *El conjunto de todas los subconjuntos de* A *conforma una topología, usualmente denominada* ***topología discreta****.*

- *El conjunto conformado únicamente por el conjunto vacío y A, $\{\emptyset, A\}$ es una topología, usualmente denominada **topología trivial**.*

Definición A.8. ***Espacio vectorial topológico:*** *A la dupla conformada por una espacio vectorial A y una topología τ definida en A, se le denomina **espacio vectorial topológico**, (A, τ).*

Definición A.9. ***Vecindad [82, p. 16]:*** *Sea (A, τ) un espacio vectorial topológico, y sea $a \in A$. Un subconjunto $V \subseteq A$ es una vecindad de a si existe un conjunto abierto A_1 con $a \in A_1 \subseteq V$.*

Definición A.10. ***Continuidad [82, p. 21]:*** *Sea $f : (A, \tau_A) \to (B, \tau_B)$ una función entre espacios vectoriales topológicos. Entonces*

- *f es una **función continua en** $a \in A$ si para cada vecindad V de $f(a)$, se tiene que $f^{-1}(V)$ es una vecindad de a.*
- *f es una **función continua** si la preimagen de cada subconjunto abierto de B es abierto en A.*

Se nota que una función puede ser continua en un punto, aunque no sea continua. La noción de continuidad en los funcionales que definen el valor de los planes de consumo se puede interpretar como esa condición en la que cambios "pequeños" en los precios generan cambios "pequeños" en el valor de los planes de consumo que están evaluando.

Definición A.11. ***Topología lineal. [1, p. 166]:*** *Una topología τ en un espacio vectorial X se dice una **topología lineal** si las operaciones de suma y producto por escalar que definen al espacio vectorial son $\tau-$continuas.*

Definición A.12. ***Relación binaria:*** *Una **relación binaria** en un conjunto X es un subconjunto del conjunto $X \times X$.*

Definición A.13. ***Relaciones de orden [14, p. 2,3]:*** *Una relación binaria es un **pre-orden o cuasiorden** si es reflexiva y transitiva. Si además la relación es completa, se dice que la relación es un **pre-orden completo, pre-orden total o pre-orden lineal**. Si la relación es además antisimétrica, la relación es un **orden completo, orden total u orden lineal**. Por su parte una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica es un **orden parcial**.*

Definición A.14. ***Conjunto parcialmente ordenado:*** *Un conjunto X con un orden parcial, $\geq$, se denomina **conjunto parcialmente ordenado,** $(X, \geq)$.*

Definición A.15. ***Intervalos de orden [1, p. 8]:*** *Sea un conjunto X, y dos elementos $x, y \in X$. Un intervalo de orden, $[x, y]$, es el conjunto $\{z \in X | x \leq z \leq y\}$.*

Definición A.16. ***Acotamiento [1, p. 8]:*** *Sea $(X, \geq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Una **cota superior** para un subconjunto $A \subseteq X$ es un elemento $x \in X$ tal que $x \geq y$, para todo $y \in A$. De manera similar, una **cota inferior** para un subconjunto $A \subseteq X$ es un elemento $x \in X$ tal que $x \leq y$, para todo $y \in A$. Un conjunto con cota superior e inferior se dice **conjunto acotado**.*

Definición A.17. ***Supremo e ínfimo [1, p. 8]:*** *Dado un conjunto parcialmente ordenado, $(X, \geq)$, el **supremo** de un subconjunto $A \subseteq X$ es la menor cota superior del subconjunto. De manera similar el **ínfimo** es la mayor cota inferior del subconjunto.*

Definición A.18. ***Malla o lattice [1, p. 8]:*** *Una **malla o lattice** es un conjunto parcialmente ordenado $(X, \geq)$,en el que cada par de elementos tienen un supremo y un ínfimo.*

Tal como lo señalan Aliprantis y Border [1, p. 47], hay dos tipos de topologías que resultan de particular interés: las generadas a partir de métricas y las topologías débiles. Estas últimas se definen a continuación.

Definición A.19. ***Comparación de topologías [1, p. 24]:*** *Sea un conjunto X con varias topologías incluyendo τ y τ'. Si $\tau' \subset \tau$, se dice que la topología τ' es más débil que la topología τ.*

Definición A.20. ***Topología débil [1, p. 48]:*** *Sea X un conjunto no-vacío y $(Y_i, \tau_i)_{i\in I}$ una colección de espacios topológicos, y sea $f_i : X \to Y_i$ una función, para cada $i \in I$. La* ***topología débil o topología inicial*** *en X generada por la colección de funciones $\{f_i\}_{i\in I}$ es la topología más débil en X que hace a todas las funciones f_i continuas. Es la topología generada por la colección de conjuntos*

$$\{f_i^{-1}(B)|i \in I, B \in \tau_i\}.$$

Definición A.21. ***Topología producto [1, p. 50]:*** *Sea $\{(X_i, \tau_i)_{i\in I}\}$ una colección de espacios topológicos, y sea $X = \prod_{i\in I} X_i$ su producto cartesiano. Para cada $j \in I$, se define la* ***proyección*** *$P_j(x) = x_j$. Así, la* ***topología producto*** *τ, es la topología débil en X generada por la colección de proyecciones $\{P_i|i \in I\}$.*

Definición A.22. ***Función conjuntamente continua [1, p. 51]:*** *Una función $f : \prod_{i\in I} X_i \to Y$ se dice* ***función conjuntamente continua*** *si es continua respecto a la topología producto.*

definición ejemplos de los duales de los espacios de Riesz

Definición A.23. ***Espacio dual topológico. ([1]. 165.)*** *La colección de los funcionales lineales continuos de un espacio topológico X es es* ***espacio dual****, denotado X'.*

Definición A.24. ***Espacio dual algebraico [1, p. 195]:*** *El espacio vectorial de los funcionales lineales definidos sobre el espacio vectorial X es el , denotado X^* .*

definición ejemplos e interpretación económica de la convexidad de los espacios de opciones

Definición A.25. ***Espacio vectorial localmente convexo [1, p. 205]:*** *Un espacio vectorial X se dice localmente convexo si toda vecindad de cero incluye una vecindad convexa de cero.*

Definición A.26. ***Conjunto absorbente*** *Un subconjunto A de un espacio vectorial se dice* ***absorbente*** *si para cada $x \in A$, algún múltiplo de A incluye los puntos αx para $\alpha \in (0, 1)$.*

Definición A.27. ***Cobertura abierta:*** *Una cobertura abierta de un conjunto A es una colección de conjuntos abiertos, $\{V_i\}_{i\in I}$, cuya unión incluye a A.*

Definición A.28. ***Conjunto compacto [1, p. 38]:*** *Un subconjunto A de un espacio topológico es compacto si toda cobertura abierta de A incluye una subcobertura finita.*

Definición A.29. ***Conjunto débilmente compacto [1, p. 53]:*** *Un conjunto se dice débilmente compacto si es compacto en la topología producto.*

Definición A.30. ***Conjunto conexo [43, p. 27]:*** *Un espacio topológico X se dice conexo si no es posible expresarlo como la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos.*

Definición A.31. ***Cono:*** *C es un cono si contiene todos los múltiplos no negativos de sus miembros, esto es, A es un cono si $x \in A$, entonces $\alpha x \in A$, para todo $\alpha \geq 0$.*

Definición A.32. ***Interior de un conjunto:*** *El interior de A, denotado A°, es el conjunto abierto más grande (respecto a la inclusión) incluido en A.Es la unión de todos los subconjuntos abiertos de A.*

Definición A.33. ***Conjunto sólido [1, p. 321]:*** *Un subconjunto S de un espacio de Riesz se denomina* ***sólido*** *si $|y| \leq |x|$ a la vez que $x \in S$, implican que $y \in S$.*

Definición A.34. ***Ideal [1, p. 321]:*** *Un subespacio vectorial sólido de un espacio de Riesz es denominado un* ***ideal****.*

Teorema A.0.1. ***Teorema de Hahn-Banach [41, p. 214]:*** *Sea X un espacio vectorial real y sea pun funcional sublineal en X. Además sea f un funcional lineal que está difinido en un subespacio Z de X y que satisface*

$$f(x) \leq p(x),$$

para todo $x \in Z$. Entonces f tiene una extensión linean $\tilde{f}$ de Z a X que satisface

$$\tilde{f}(x) \leq p(x),$$

para todo $x \in X$. Esto es que además de satisfacer lo anterior, $\tilde{f}$ es un funcional lineal en X y $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in Z$.

Apéndice B

Panorama temporal general

En este apéndice se presentan algunos hitos en las contribuciones al desarrollo de la teoría del consumidor y de la microeconomía en general. A pesar de la presentación, no se pretende sugerir un desarrollo lineal en la teoría, ni un acuerdo en ningún momento. A pesar de la crítica de Colander [17] al uso del término "neoclásico", se sigue en este recuento la estructura presentada por Lu Ming Tseng [54]. En magenta se indican algunos desarrollos matemáticos que anteceden esta teoría y en azul se ubican algunos eventos históricos que contextualizan el momento en el que estas contribuciones tuvieron lugar. Buena parte de lo consignado en este panorama es adaptado de las notas históricas de los libros de equilibrio del profesor Sergio Monsalve [51, 52, 53].

Era filosófica

El surgimiento del *homo economicus* se se da con John Stuart Mill en 1836 en su tratado *"On the definition of political economy and on the method of philosophical investigation in that science"*, considerándole "solamente como un ser que desea poseer riqueza y que es capaz de juzgar la eficacia comparativa de los medios para obtener tal fin". Ya desde Smith se encuentra el supuesto de egoísmo y búsqueda del interés propio, y se asocia con el surgimiento espontáneo del orden y el bien público, bajo condiciones de libre mercado, división del trabajo y libre competencia. En esta era la dimensión política y la económica eran inseparables, siempre que se concibe al individuo como parte de un grupo o clase social y la pregunta principal de la economía era la del desarrollo económico.

- (1759) *Teoría de los sentimientos morales* de Adam Smith: el hombre puede elevarse por encima de su interés al formular juicios morales.
- (1776) *Investigación sobre la naturaleza y causas de la riqueza de las naciones* de Adam Smith: funcionamiento de economía de mercado por la búsqueda de los intereses individuales. Teoría de valor-trabajo incorporado.
- (1786) I Revolución industrial: mecanización.
    - Empleo de la máquina de vapor a la industria y el transporte en Inglaterra.
    - Invento del telar mecánico que condujo el desarrollo de la industria textil.
    - Materia prima: hierro.
    - Energía: carbón.
    - Inventos: calefacción a gas, acueducto, alcantarillado y máquina de coser.
- (1789) Revolución francesa.

- (1798) *Un ensayo sobre el principio de la población en lo que afecta a la mejora futura de la sociedad* de Thomas Malthus: los humanos tienen un instinto de reproducción y comen mucho. Medios de subsistencia nulos o limitados -¿Guerras, pestes, epidemias.

- (inicios de S. XIX) Formalización por parte de Cauchy y Weierstrass de las nociones de límite, continuidad, derivada e integral. Tener una noción de límite formal permitiría luego un tratamiento más exacto de las series y sucesiones.

- (1809) *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* de Friedrich Gauss: uso del método de reducción Gaussiano.

- (1817) *Principios de economía política y tributación* de David Ricardo: teoría del valor-trabajo encomendado.

- (1820) "Principles of political economy" de Malthus. Concepto de demanda efectiva y la posibilidad de atascamiento general: mercancias sin compradores.

- (1830) Población mundial: 1 mil millones.

- (1838) *Researches on the Mathematical Principles of the Theory of Wealth* de Augustin Cournot: trabajo pionero de economía matemática.

- (1844) Definición clásica de marginalidad en la teoría económica por Dupuit.

- (1844) *Doctrine of Linear Extension* de Grassmann: trabajo pionero en el concepto abstracto de espacio vectorial de dimensión arbitraria.

- (1848) *Principles of Political Economy* de John Stuart Mill.

- (1850) J.J Sylvester: primera definición de una matriz.

- (1867) "Das Kapital" de Karl Marx .

Era neoclásica: revolución marginalista y la construcción del *mainstream*

Aquí la noción de maximización del placer toma la forma de maximización de utilidad (o beneficios). En este punto no se hacen consideraciones de lo que debería ser preferido, sino que se toman esas preferencias como dadas. Se incorpora un método deductivo y con este método viene el supuesto de perfecta racionalidad. Este individuo puede hacer una perfecta valoración de las mercancías y escenarios posibles, sin consideraciones éticas, o personales (de creencias, por personalidad, valores o emociones). Las principales críticas señalan que el modelo del individuo perfectamente racional va en contra de lo que parece observarse. La gente no aprende rápido: (1) se suelen cometer varias veces los mismos errores, (2) hay otras motivaciones aparte del interés propio, como la norma social, (3) la información con frecuencia es incompleta. Hay quienes piensan que no se debe analizar solo la acción, sino lo que le precede: el propósito. La pregunta del entendimiento de la economía como un sistema formado por la articulación de diferentes instituciones, principalmente mercados se distancia de la política en esta era.

- (1862) *General Mathematical Theory of Political Economy* de Stanley Jevons.

- (1871) *Principles of economics* de Carl Menger

- (1874;1877) *Éleménts* de León Walrás: concepto de *ophelimité*. (La noción de utilidad es mucho más un instrumento. Jaffé diría al respecto que "su problema era más la satisfacción del consumidor en la plaza de mercado que en el comedor de la casa") "La novedad esencial en el trabajo de estos economistas fue que en lugar de basar su economía en producción y distribución, lo basaron en intercambio" Hicks (1976), tomado de Monsalve [52, p. 480]. Hay un tránsito desde la noción de valor de uso a la noción de utilidad hedonista.

- (1877) *A contribution to the theory of manifolds* de Georg Cantor: desarrollo del entendimiento de la noción de infinito.

- (1880's) II Revolución Industrial: producción en masa/serie.
  - Aplicación de la electricidad a la industria y el transporte.
  - Motor de explosión - Automóvil - Industria del petróleo.
  - Materia prima: acero.
  - Transporte: ferrocarriles.
  - Energía: electricidad.
  - Inventos: teléfono, alumbrado eléctrico.

- (1884;1889) *Capital and Interest* de Böhm-Bawerk.

- (1888) *Geometric Calculus* de Peano : teoría de Espacios Vectoriales.

- (1890) *Principles of economics* de Alfred Marshall [Menger]. (Marshall admitía la noción de utilidad como una magnitud cardinal.)

- (1895) *Analysis Situ* de Poincaré: surgimiento de la topología.

- (1906) *Manuale* de Vilfredo Pareto.

- (1914-1918) I Guerra Mundial.

- (1920) Teoría axiomática de los espacios vectoriales normados por parte de Stephan Banach.

- (1918) Tratado de Versalles.

- (1920) III Revolución Industrial: computación y automatización industrial.
  - Transporte: aviación, astronáutica.
  - Comunicación: radio, televisión, cine, informática.
  - Sistemas electrónicos y cibernéticos, informática, telemática, robótica. antibióticos.
  - Energía: avances hacia el uso de energía atómica.

- (1917) Revolución rusa.

- (1922) Proclamación de la creación de la URSS.

- (1928) Presentación axiomática de los espacios de Hilbert por parte de John von Neumann.

- (1929) Gran Depresión.

- (1934) Construcción de teoría ordinal del consumidor por Hicks y Allen usando la noción de curvas de indiferencia de Edgeworth, desarrollada por Pareto.

- (1936) *Teoría General del desempleo, el interés y el dinero* de John Maynard Keynes.
- (1939-1945) II Guerra Mundial.
- (6 y 9 de agosto de 1945) Lanzamiento de las bombas de Hiroshima y Nagasaki.
- (1945) Creación de las Naciones Unidas.
- (1939) *Value and Capital* de John Hicks.
- (1943) *A la recherché d'un discipline économique* de Maurice Allais.
- (1947) *Foundations of economic analysis* de Paul Samuelson. [Teoría de preferencias reveladas].
- (1949) Publicación de ideas centrales de lo que hoy es la programación lineal por parte de George Dantzig. Método simplex.
- (1950) Población mundial: 2.6 mil millones.
- (1954) Prueba de existencia de representación numérica de ciertas preferencias por Debreu.
- (1959) *Theory and Value* de Gérard Debreu.

Era estratégica

Llega principalmente con la teoría de juegos y la incorporación en el análisis de situaciones estratégicas, donde el beneficio de cada individuo está determinado, al menos en parte, por su rol en el juego, las decisiones de otros participantes y la forma en la que se da la interacción con ellos.

- (1944) *Theory of Games and economic Behavior* de John von Neumann y Oskar Morgenstern.
- (1945-1989) Guerra fría.
- (1949) *Equilibrium points in n-person games* de John Nash.
- (1969) Intransitivity of preferences de Amos Tversky.
- (1979) Prospect theory de Kahneman y Tversky.
- (1987) Población mundial: 5 mil millones.
- (1989) Caída del muro de Berlín.
- (1991) Disolución de la URSS.
- (1999) Población mundial: 6 mil millones.
- (2000's) IV Revolución Industrial: impresión 3D, nanotecnología, biotecnología, ciencia de materiales, computación cuántica.
- (2012) Población mundial: 7 mil millones.

A lo largo de este recuento histórico se nota cómo ciertos avances en la teoría económica han sido posibles por los avances en las herramientas matemáticas. Durante la que se denominó era estratégica y en los avances actuales de la economía se encuentra un mayor diálogo con otras disciplinas: la psicología, la sociología, la filosofía, y esto se refleja en consideraciones más amplias del individuo de interés de la economía. El uso del método experimental en economía y el afianzamiento de la economía del comportamiento en la corriente principal son muestra de esto. Lo anterior no significa que se haya dejado de lado (ni que se vaya a abandonar) el marco de racionalidad del individuo, pero por lo menos que se consideran cada vez más esquemas de racionalidad limitada.

Bibliografía

[1] Aliprantis, C. D., and Border, K. C. *Infinite dimensional analysis: a hitchhiker's guide*. Springer, 2006.

[2] Aliprantis, C. D., Brown, D. J., and Burkinshaw, O. *Existence and optimality of competitive equilibria: with 38 figures*. Springer Science & Business Media, 1990.

[3] Aliprantis, C. D., and Burkinshaw, O. *Locally solid Riesz spaces with applications to economics*. American Mathematical Society, 2003.

[4] Aliprantis, C. D., and Burkinshaw, O. *Positive operators*, vol. 119. Springer Science & Business Media, 2006.

[5] Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, T. A., Camm, J. D., and Cochran, J. J. *Quantitative methods for business*. Cengage Learning, 2012.

[6] Axler, S. J. *Linear algebra done right*, vol. 2. Springer, 1997.

[7] Bagliano, F. C., Bertola, G., et al. *Models for dynamic macroeconomics*. Oxford University Press on Demand, 2004.

[8] Barrett, C. R., Pattanaik, P. K., and Salles, M. On choosing rationally when preferences are fuzzy. *Fuzzy Sets and Systems 34*, 2 (1990), 197–212.

[9] Black, F., and Scholes, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy 81*, 3 (1973), 637–654.

[10] Blanchard, O. J., Fischer, S., et al. *Lectures on macroeconomics*. MIT press, 1989.

[11] Blanco, L., Dharmaraja, S., and Arunachalam, V. *Introduction to probability and stochastic processes with applications*. John Wiley & Sons, 2012.

[12] Boyd, S., and Vandenberghe, L. *Convex optimization*. Cambridge University Press, 2004.

[13] Brams, S. J., and Taylor, A. D. An envy-free cake division protocol. *The American Mathematical Monthly 102*, 1 (1995), 9–18.

[14] Bridges, D. S., and Mehta, G. B. *Representations of preferences orderings*, vol. 422. Springer Science & Business Media, 2013.

[15] Chang, H.-J. *23 things they don't tell you about capitalism*. Bloomsbury Publishing USA, 2012.

[16] Charness, G., and Rabin, M. Understanding social preferences with simple tests. *The Quarterly Journal of Economics 117*, 3 (2002), 817–869.

[17] Colander, D. The death of neoclassical economics. *Journal of the History of Economic Thought 22*, 2 (2000), 127–143.

[18] Cox, J. C., Ross, S. A., and Rubinstein, M. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics 7*, 3 (1979), 229–263.

[19] d'Aspremont, C., Gabszewicz, J. J., and Thisse, J.-F. On hotelling's "stability in competition". *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1979), 1145–1150.

[20] Debreu, G. *Theory of value: An axiomatic analysis of economic equilibrium.* Yale University Press, 1959.

[21] Drnovsek, R. An infinite-dimensional generalization of zenger's lemma. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 388*, 2 (2012), 1233–1238.

[22] Edward Su, F. Rental harmony: Sperner's lemma in fair division. *The American Mathematical Monthly 106*, 10 (1999), 930–942.

[23] Ellsberg, D. Risk, ambiguity, and the savage axioms. *The Quarterly Journal of Economics* (1961), 643–669.

[24] Elsner, W., Heinrich, T., and Schwardt, H. *The microeconomics of complex economies: Evolutionary, institutional, neoclassical, and complexity perspectives.* Academic Press, 2014.

[25] Escobar, D. *Introducción a la economía matemática.* Grupo Editorial Iberoamérica, 1998.

[26] Frick, F., Houston-Edwards, K., and Meunier, F. Achieving rental harmony with a secretive roommate. *The American Mathematical Monthly 126*, 1 (2019), 18–32.

[27] Gale, D., and Shapley, L. S. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly 69*, 1 (1962), 9–15.

[28] García Molina, M., and Chicaíza Becerra, L. A. Felicidad: ¿reemplazar o mejorar la utilidad subjetiva? *Cuadernos de Economía 32*, 60 (2013), 325–330.

[29] González, A., Mahadeva, L., Prada, J. D., and Rodríguez, D. Policy analysis tool applied to colombian needs: Patacon model description. *Ensayos sobre Política Económica 29*, 66 (2011), 222–245.

[30] Haider, A., and Khan, S. U. A small open economy dsge model for pakistan. *The Pakistan Development Review 47*, 4 Part II (2008), 963–1008.

[31] Hartley, J. E. Retrospectives: The origins of the representative agent. *Journal of Economic Perspectives 10*, 2 (1996), 169–177.

[32] Hens, T., Rieger, M. O., et al. *Financial economics.* Springer, 2010.

[33] Hotelling, H. Stability in competition. *The Economic Journal 39*, 153 (1929), 41–57.

[34] Hougaard, J. L. *An introduction to allocation rules.* Springer Science & Business Media, 2009.

[35] Iyengar, S. S., and Kamenica, E. Choice overload and simplicity seeking. *University of Chicago Graduate School of Business Working Paper 87* (2006), 1–27.

[36] Jehle, G. A., and Reny, P. *Advanced microeconomic theory*, third ed. Essex: Pearson Education Limited, 2011.

[37] Kahneman, D., and Tversky, A. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica 47*, 2 (1979), 263–292.

[38] Kamien, M. I., and Schwartz, N. L. *Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management.* North-Holland, 1991.

[39] Kirman, A. P. Whom or what does the representative individual represent? *Journal of Economic Perspectives 6*, 2 (1992), 117–136.

[40] Kreps, D. *Microeconomic theory.* Harvester Wheatsheaf New York, 1990.

[41] Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications*, vol. 1. Wiley, New York, 1978.

[42] Lambertini, L. *Differential Games in Industrial Economics.* Cambridge University Press, 2018.

[43] Lang, S. *Real and functional analysis*, vol. 142. Springer Science & Business Media, 2012.

[44] Langville, A. N., and Meyer, C. D. *Who's# 1?: the science of rating and ranking.* Princeton University Press, 2012.

[45] Lozano, F. *Teoría microeconómica: elección racional.* Universidad Nacional de Colombia, 2012.

[46] Lozano, F., Monsalve, S., and Villa, E. El dinero en el modelo arrow-debreu bajo incertidumbre. *Lecturas de Economía*, 47 (1997), 65–99.

[47] Luxemburg, W., and Zaanen, A. C. *Riesz Spaces*, vol. 1. Elsevier, 1971.

[48] Markowitz, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance 7*, 1 (1952), 77–91.

[49] Mas-Colell, A., Whinston, M. D., Green, J. R., et al. *Microeconomic theory*, vol. 1. Oxford University Press, New York, 1995.

[50] McKenzie, R. B., and Tullock, G. *The new world of economics: a remake of a classic for new generations of economics students.* Springer Science & Business Media, 2012.

[51] Monsalve, S. *Competencia bajo equilibrio parcial vol.1.* Universidad Nacional de Colombia, 2016.

[52] Monsalve, S. *Competencia bajo equilibrio general vol.2.* Universidad Nacional de Colombia, 2017.

[53] Monsalve, S. *Competencia bajo equilibrio de Nash vol.3.* Universidad Nacional de Colombia, 2018.

[54] Ng, I. C., and Tseng, L.-M. Learning to be sociable: the evolution of homo economicus. *American Journal of Economics and Sociology 67*, 2 (2008), 265–286.

[55] Nicholson, W. *Teoría microeconómica: principios básicos y ampliaciones*, novena ed. Cengage Learning, 2008.

[56] Palacio García, L. A., and Parra Carreño, D. F. El dilema de la contribución voluntaria a bienes públicos: una revisión de trabajos experimentales. *Cuadernos de Economía 33*, 62 (2014), 124–144.

[57] Quint, T. Restricted houseswapping games. *Journal of Mathematical Economics 27*, 4 (1997), 451–470.

[58] Radner, R. Existence of equilibrium of plans, prices, and price expectations in a sequence of markets. *Econometrica* (1972), 289–303.

[59] Rosenlicht, M. *Introduction to analysis.* Dover Publications, 1986.

[60] Roth, A. E. What have we learned from market design? *The Economic Journal* (2008), 285–310.

[61] Roth, A. E., and Sotomayor, M. Two-sided matching. *Handbook of Game Theory with Economic Applications 1* (1992), 485–541.

[62] Rothe, J. *Economics and Computation: An Introduction to Algorithmic Game Theory, Computational Social Choice, and Fair Division.* Springer Publishing Company, Incorporated, 2015.

[63] Salop, S. C. Monopolistic competition with outside goods. *The Bell Journal of Economics* (1979).

[64] Samson, A. (Ed.). The behavioral economics guide 2019. Consultado el 12 de julio de 2019, 2019.

[65] Smith, A. *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations.* A. & C. Black, and W. Tait, 1846.

[66] Smithson, C. W. A lego approach to financial engineering: an introduction to forwards, futures, swaps and options. *Midland Corporate Finance Journal 4*, 4 (1987), 16–28.

[67] Snyder, C. M., Nicholson, W., and Stewart, R. *Microeconomic theory: Basic principles and extensions.* South-Western Cengage Learning, 2012.

[68] Sriboonchita, S., Nguyen, H. T., Wong, W.-K., and Dhompongsa, S. *Stochastic dominance and applications to finance, risk and economics.* Chapman and Hall/CRC, 2009.

[69] Sunstein, C. R. Nudging: a very short guide. *Journal of Consumer Policy 37*, 4 (2014), 583–588.

[70] Sydsaeter, K., and Hammond, P. *Matemáticas para el análisis económico.* Pearson Educación, 1996.

[71] Takemura, K. Behavioral decision theory. *Psychological and mathematical descriptions of human choice behavior: Springer Japan* (2014).

[72] Team, T. B. I. Annual update report 2017-18. Consultado el 02 de julio de 2019, 2018.

[73] Thaler, R. H., and Sunstein, C. R. *Nudge: improving decisions about health, wealth, and happiness.* Penguin, 2009.

[74] The Royal Swedish Academy of Sciences. Foundations of behavioral and experimental economics: Daniel Kahneman and Vernon Smith. Consultado el 10 de julio de 2019, 2002.

[75] The Royal Swedish Academy of Sciences. Richard Thaler: integrating economics with psychology. Consultado el 10 de julio de 2019, 2017.

[76] Tijs, S., Parthasarathy, T., Potters, J., and Prasad, V. R. Permutation games: another class of totally balanced games. *Operations-Research-Spektrum 6*, 2 (1984), 119–123.

[77] Tversky, A. Intransitivity of preferences. *Psychological Review 76*, 1 (1969), 31.

[78] Tversky, A., and Kahneman, D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty 5*, 4 (1992), 297–323.

[79] Varian, H. R. *Análisis microeconómico.* Antoni Bosch Editor, 1992.

[80] Varian, H. R. *Intermediate microeconomics with calculus: a modern approach.* WW Norton & Company, 2010.

[81] Von Neumann, J., and Morgenstern, O. *Theory of games and economic behavior (commemorative edition).* Princeton University Press, 2007.

[82] Waldmann, S. *Topology: an introduction.* Springer, 2014.

[83] Welch, I. *Corporate finance.* Prentice Hall, 2009.

Índice alfabético