



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

**La visualización por deconstrucción dimensional como proceso central en la comprensión de los elementos constitutivos de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares. Una propuesta didáctica para su aprendizaje**

**Ana Gisela León Jaramillo**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ingeniería y Administración  
Maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Palmira, Colombia

2020

# **La visualización por deconstrucción dimensional como proceso central en la comprensión de los elementos constitutivos de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares. Una propuesta didáctica para su aprendizaje**

**Ana Gisela León Jaramillo**

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

**Magíster en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales**

Director (a):

Ph.D. Teresa Pontón Ladino

Línea de Investigación:

Educación Matemática

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería y Administración

Maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Palmira, Colombia

2020



*A mis estudiantes*

*“La educación es el arma más poderosa que puedes usar  
para cambiar el mundo”.*

*Nelson Mandela*

(Espacio para el Acta de Grado)

## **Agradecimientos**

Principalmente agradezco a Dios, que acompaña con su gloriosa presencia todos los días de mi vida, cada sueño y camino escogido.

A mi madre *Miryam Jaramillo Gasca*, por su apoyo en este proceso, acompañando mis días y noches de trabajo académico con su amor, cuidados y detalles.

A mi directora de tesis la profesora *Teresa Pontón Ladino*, por orientarme en el camino de la excelencia académica exigiendo siempre lo mejor de mí; por su dedicación a la formación de maestros, donde cada seminario representa un reto que transforma nuestra visión y prácticas educativas; y por sus valiosos aportes al campo de la Educación Matemática. Mis más sinceros agradecimientos y afecto.

A mi prima y hermana *Edda Cifuentes*, por brindarme su apoyo en múltiples formas, siendo ese respaldo constante, y motivándome aún en tiempos de angustia. Te llevo en mi corazón.

A mis amigas y compañeras académicas, *Diana Milena Valdés Millán* y *Diana Marcela Lourido Guerrero*, quienes me ayudaron con sus ideas y habilidades para la culminación de este hermoso trabajo de investigación.

*A todos, muchas gracias.*

## Resumen

Este trabajo de indagación, enmarcado en la teoría semiótica cognitiva de Duval (2005, 2017), tiene como propósito identificar, describir y analizar los procesos de visualización por deconstrucción dimensional de las formas para el reconocimiento de las unidades figurales elementales de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares, mediante la articulación de los registros de representación semiótica figural y de la lengua natural. Esto, a partir del diseño de una secuencia didáctica, como propuesta de enseñanza, que potencialice la visualización por deconstrucción dimensional de las formas y la producción discursiva, apoyada en los elementos dados en la teoría semiótica cognitiva, los referentes curriculares y teoría matemática asociada a los sólidos geométricos y sus propiedades.

La implementación se realizó a través de un estudio de caso, como método cualitativo de indagación, presentado en cuatro etapas metodológicas (planeación y organización; diseño y análisis a priori de la secuencia de situaciones geométricas; implementación; Evaluación y análisis a posteriori de las producciones geométricas y discursivas de los estudiantes) permitiendo la observación y sistematización de los procesos de visualización en la identificación y tratamientos de las unidades figurales y características dimensionales de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares, necesarios en el desarrollo de actividades geométricas que involucran el análisis cualitativo de la superficie y el volumen de dichos sólidos en un grupo de estudiantes de séptimo de una institución educativa de carácter público, ubicada en la ciudad de Cali.

Finalmente, los resultados de este estudio permiten concluir que los procesos de visualización por deconstrucción dimensional de las formas, que emergen de la articulación entre figura y discurso, son esenciales en los procesos de comprensión de los sólidos geométricos, permitiéndoles reflexionar sobre sus propiedades cualitativas a partir de la configuración de las unidades figurales de diferente dimensión.

**Palabras claves:** Enseñanza de la geometría, representaciones semióticas, deconstrucción dimensional, perspectiva semiótica cognitiva, sólidos geométricos, volumen, área de la superficie, diseño de una secuencia de situaciones geométricas, procesos discursivos y visualización.

## Abstract

This research work, framed in Duval's cognitive semiotic theory (2005, 2017), as a purpose to identify, describe and analyze has the visualization processes by dimensional deconstruction of the forms for the recognition of the elementary figurative units of the right prisms and quadrangular pyramids, through the articulation of the registers of figural semiotic representation and natural language. This, from the design of a didactic sequence, as a teaching proposal, that potentiates the visualization by dimensional deconstruction of the forms and discursive production, supported by the elements given in the cognitive semiotic theory, the curricular references and mathematical theory associated with geometric solids and their properties.

The implementation was carried out through a case study, as a qualitative method of inquiry, presented in four methodological stages (planning and organization; design and a priori analysis of the sequence of geometric situations; implementation; a posteriori evaluation and analysis of the productions geometric and discursive patterns of students) allow observation and visualization processes in the identification and treatment of the figurative units and dimensional characteristics of right prisms and quadrangular pyramids, necessary in the development of geometric activities that involve the qualitative analysis of the surface and the volume of said solids in a group of seventh grade students from a public educational institution, located in the city of Cali.

Finally, the results of this study allow us to conclude that the visualization processes by dimensional deconstruction of the forms, that emerge from the articulation between figure and discourse, are essential in the processes of understanding geometric solids, allowing them to reflect on their qualitative properties from the configuration of the figurative units of different dimensions.

**Keywords:** Teaching of geometry, semiotic representations, dimensional deconstruction, cognitive semiotic perspective, geometric solids, volume, surface area, design of a sequence of geometric situations, discursive processes and visualization.

## Contenido

	Pág.
<b>Resumen .....</b>	<b>VI</b>
<b>Lista de figuras .....</b>	<b>XI</b>
<b>Lista de tablas .....</b>	<b>XIII</b>
<b>Introducción .....</b>	<b>1</b>
<b>1. Planteamiento Del Campo Problemático .....</b>	<b>4</b>
1.1 Justificación .....	6
1.2 Antecedentes.....	17
1.2.1 Algunas investigaciones en el campo de la geometría desde la teoría semiótica cognitiva20	
1.3 Pregunta de indagación .....	24
1.4 Objetivos.....	24
1.4.1 Objetivo General.....	24
1.4.2 Objetivos Específicos.....	25
<b>2. Fundamentos Teóricos .....</b>	<b>26</b>
2.1 Teoría Semiótica Cognitiva .....	26
2.1.1 Sobre la necesidad de la articulación de diferentes registros de representación semiótica en el aprendizaje de las matemáticas .....	27
2.1.2 La Comprensión de los objetos matemáticos.....	28
2.1.3 La no-congruencia entre representaciones de un mismo objeto .....	29
2.1.4 Unidades figurales elementales .....	32
2.1.5 Aprehensión operatoria en el registro figural.....	33
2.1.6 Variables de visualización en la actividad geométrica.....	39
2.1.6.1 Control visual.....	40
2.1.7 Las funciones discursivas en la actividad geométrica .....	40
2.2 Referentes Matemáticos .....	43
<b>3. Diseño Metodológico de la Indagación.....</b>	<b>49</b>
3.1 Enfoque general de este trabajo de indagación .....	49
3.2 Estructura del proceso metodológico de este trabajo de indagación .....	54
3.2.1 Fase 1: Planeación, organización y contextualización del estudio .....	55
3.2.1.1 Instrumentos de recolección de la información .....	55
3.2.1.2 Criterios de selección de los estudiantes para el estudio de caso.....	58
3.2.1.3 Contextualización de la población participante en el estudio.....	59
3.2.2 Fase 2: Diseño de las situaciones geométricas y de los protocolos de intervención virtual. 61	
3.2.3 Fase 3: Diseño y Análisis a priori de las situaciones geométricas.....	62

3.2.4	Fase 4: Desarrollo de la implementación .....	62
3.2.5	Fase 5: Análisis a posteriori y resultados del trabajo de indagación.....	64
<b>4.</b>	<b>Diseño y Análisis A Priori de la Secuencia de Situaciones Geométricas .....</b>	<b>65</b>
4.1	Variables Macro-Didácticas que orientan el diseño.....	67
4.1.1	Categoría I, Componente Cognitivo .....	67
4.1.2	Categoría II, Componente Geométrico.....	70
4.1.3	Categoría III, Componente Curricular .....	71
4.1.3.1	Procesos generales: .....	71
4.1.3.2	Conocimientos básicos .....	73
4.2	Variables Micro-Didácticas.....	75
4.3	Análisis A Priori de la Secuencia de Situaciones Geométricas.....	79
4.3.1	Situación 1: Observar y descubrir características geométricas .....	79
4.3.1.1	Situación 1 Tarea 1 (S1T1).....	80
4.3.1.2	Situación 1 Tarea 2 (S1T2).....	82
4.3.2	Situación 2: Identificar y designar representaciones figurales de prismas y pirámides .....	83
4.3.2.1	Situación 2 Tarea 1 (S2T1).....	84
4.3.2.2	Situación 2 Tarea 2 (S2T2).....	85
4.3.2.3	Situación 2 Tarea 3 (S2T3).....	89
4.3.3	Situación 3: Descomponer y componer dimensionalmente, la representación figural de un sólido geométrico. ....	91
4.3.3.1	Situación 3 Tarea 1 (S3T1(a, b, c)).....	92
4.3.3.2	Situación 3 Tarea 2 (S3T2).....	94
4.3.4	Situación 4: Descubrir, comparar y establecer relaciones entre superficies representadas.....	97
4.3.4.1	Situación 4 Tarea 1 (S4T1).....	98
4.3.4.2	Situación 4 Tarea 2 (S4T2).....	100
4.3.4.3	Situación 4 Tarea 3 (S4T3).....	102
4.3.5	Situación 5: Descubrir, comparar y establecer relaciones entre el volumen de prismas rectos y pirámides cuadrangulares representadas figuralmente. ....	107
4.3.5.1	Situación 5 Tarea 1 y 2 (S5T(1, 2)).....	107
4.3.5.2	Situación 5 Tarea 3, 4 y 5 (S5T(3, 4, 5)) .....	112
4.4	Comentarios finales .....	117
<b>5.</b>	<b>Análisis A Posteriori .....</b>	<b>118</b>
5.1	Categorías de análisis .....	118
5.1.1	Primera categoría de análisis: Funciones discursivas.....	119
5.1.2	Segunda Categoría de análisis: Discriminación de las unidades figurales como elementos de razonamiento en el desarrollo de las tareas.....	135
5.1.3	Tercera Categoría de análisis: Visualización por deconstrucción dimensional para la comprensión del volumen y área de la superficie de los prismas rectos y las pirámides cuadrangulares. ....	148
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y recomendaciones.....</b>	<b>169</b>
6.1	Conclusiones relacionadas con los aspectos teóricos que sustentan el trabajo de indagación.....	170
6.2	Conclusiones asociadas a la articulación entre figura y discurso para la comprensión de las propiedades de los objetos geométricos tridimensionales.....	172

---

6.3	Conclusiones asociadas a las variables macro y micro didácticas utilizadas en el diseño de la secuencia de situaciones geométricas.....	174
6.4	Conclusión sobre los aportes de este trabajo de indagación a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, asociada a los procesos de comprensión de las propiedades de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares. ....	177
6.5	Trabajos que surgen de esta indagación y recomendaciones.....	178
<b>A.</b>	<b>Anexo: Diseño de la secuencia de Situaciones Geométricas.....</b>	<b>181</b>
<b>B.</b>	<b>Anexo: Producción de los estudiantes.....</b>	<b>182</b>
	<b>Referencias Bibliográficas .....</b>	<b>183</b>

## Lista de figuras

	Pág.
<b>Figura 1.</b> Introducción al concepto de volumen. ....	13
<b>Figura 2.</b> Ejemplo de la función referencial de designar. ....	15
<b>Figura 3.</b> Congruencia de segmentos. ....	31
<b>Figura 4.</b> Sólidos geométricos. ....	31
<b>Figura 5.</b> Clasificación de unidades elementales figurales. ....	33
<b>Figura 6.</b> Descomposición en unidades figurales por deconstrucción dimensional de las formas .....	35
<b>Figura 7.</b> Deconstrucción dimensional (propuesta 1: $3D \rightarrow 2D \rightarrow 1D/0D$ ). ....	35
<b>Figura 8.</b> Deconstrucción dimensional (propuesta 2: $3D \rightarrow 3D/1D \rightarrow 1D \rightarrow 1D/0D$ ). ....	36
<b>Figura 9.</b> Representación figural por deconstrucción dimensional ( $3D/2D$ y $1D$ ), del volumen de un prisma pentagonal recto. ....	37
<b>Figura 10.</b> Representación figural de dos prismas. ....	47
<b>Figura 11.</b> Relaciones dimensionales entre la configuración figural de polígonos y poliedros. ....	48
<b>Figura 12.</b> Estructura general del proceso metodológico del trabajo de indagación. ....	54
<b>Figura 13.</b> Designación realizada sobre las representaciones de los objetos 1 y 2. S1T1. ....	81
<b>Figura 14.</b> Configuración 2D de la representación figural de un prisma recto. S1T2. ....	82
<b>Figura 15.</b> Representación figural de un Prisma recto octogonal y una Pirámide cuadrangular (S2T1). ....	84
<b>Figura 16.</b> Representación figural de un Prisma recto. S2T2. ....	86
<b>Figura 17.</b> Trazos de segmentos que representan diagonales y su representación simbólica. S2T2. ....	89
<b>Figura 18.</b> Tratamientos figurales realizados en la representación figural de un prisma recto. S1T3. ....	90
<b>Figura 19.</b> Reconocer y reconfigurar las unidades figurales elementales 2D de la representación figural de un prisma recto triangular (S1T3). ....	91
<b>Figura 20.</b> Representación figural de un prisma recto pentagonal y su desarrollo (S3T1a). ....	93
<b>Figura 21.</b> Enunciado problema S3T2. ....	95
<b>Figura 22.</b> Representación figural de un cubo S y su desarrollo. S4T1. ....	98
<b>Figura 23.</b> Superposición de la unidad figural de superficie ABCD, sobre el desarrollo del cubo S. S4T1. ....	99
<b>Figura 24.</b> Representación figural de dos superficies planas. S4T2. ....	100
<b>Figura 25.</b> Tratamiento por reconfiguración S4T2. ....	101
<b>Figura 26.</b> Representación figural de un prisma triangular y su desarrollo bidimensional. S4T3 .....	102
<b>Figura 27.</b> Representación figural de un prisma recto triangular. S5T1. ....	108
<b>Figura 28.</b> Tratamientos figurales realizados sobre las unidades de superficie QRST y UVW. Producciones de E1 y E5. S4T3. ....	143

---

<b>Figura 29.</b> Construcción de unidades de superficie por configuración reiterada y reconfiguración de las unidades figurales de superficie QRST y UVW.....	144
<b>Figura 30.</b> Representación figural bidimensional del desarrollo de un prisma presentada en el foro 2. ....	155
<b>Figura 31.</b> Articulación entre el registro figural y discursivo. S5T3.....	158
<b>Figura 32.</b> Ejemplo de la articulación entre los registros figural y discursivo. Construcciones figurales realizadas por E2 y E3. S5T3(1) .....	159

## Lista de tablas

	Pág.
<b>Tabla 1.</b> DBA Matemáticas. Pensamiento Espacial. Grado Primero de Educación Básica .....	9
<b>Tabla 2.</b> DBA Matemáticas. Pensamiento Espacial y Métrico. Grado Sexto de Educación Básica.....	10
<b>Tabla 3.</b> DBA Matemáticas. Pensamiento Espacial y Métrico. Grado 8° de Educación Básica	11
<b>Tabla 4.</b> Instrumentos de recolección de la información y datos a recolectar.....	57
<b>Tabla 5.</b> Número de situaciones didácticas, tareas y tiempo estimado de desarrollo.....	63
<b>Tabla 6.</b> Cronograma de Implementación.....	63
<b>Tabla 7.</b> Estructura general de la secuencia didáctica .....	66
<b>Tabla 8.</b> Estándares curriculares para el conjunto de situaciones de la secuencia didáctica ....	74
<b>Tabla 9.</b> Variables macro y micro didácticas definidas para el diseño de la secuencia didáctica .....	78
<b>Tabla 10.</b> Discriminación y designación de unidades figurales. Enunciado 2 (S2T1).....	85
<b>Tabla 11.</b> Discriminación y designación de unidades figurales. Enunciado 6. S3T1a.....	94
<b>Tabla 12.</b> Posibles justificaciones para la selección de la representación figurar del sólido descrito S3T2.....	96
<b>Tabla 13.</b> Ejemplo de tratamientos figurales por superposición y fraccionamiento de superficies (S4T3).....	103
<b>Tabla 14.</b> Algunos enunciados y tratamientos figurales esperados para el desarrollo de la S5T1 y S5T2 .....	109
<b>Tabla 15.</b> Algunos enunciados y razonamientos para el desarrollo de la S5T3, S5T4 y S5T5.....	113
<b>Tabla 16.</b> Operaciones de la función referencial. Ejemplos de enunciados donde se articulan los registros figurar y discursivo, presente en diferentes momentos de las situaciones didácticas .....	120
<b>Tabla 17.</b> Operación de designación de objetos. Producciones de E2, E5 y E6. S1T1.....	122
<b>Tabla 18.</b> Operación de designación de objetos. Producciones de E2, E5 y E6. S1T2.....	125
<b>Tabla 19.</b> Operación de designación de objetos. Producciones de E2, E5 y E6. S2T1.....	128
<b>Tabla 20.</b> Operación de designación de objetos. Producciones de E2. S2T2 .....	129
<b>Tabla 21.</b> Designación y unidades apofánticas. Producciones de E1 y E2. S4T1.....	131
<b>Tabla 22.</b> Designación y unidades apofánticas. Producciones de E1, E2, E5 y E6. S4T2 .....	133
<b>Tabla 23.</b> Identificación de unidades figurales elementales. Producciones de E2 y E5. S2T1	136
<b>Tabla 24.</b> Describir a partir de las unidades figurales. Producciones de E2 y E5. S2T1.....	137
<b>Tabla 25.</b> Reconfiguración o verificación a partir de las unidades figurales 1D y 0D. S3T2 ....	139
<b>Tabla 26.</b> Superposición de unidades de superficie QRST y UVW. Producciones de E1 y E5. S4T3.....	140
<b>Tabla 27.</b> Construcción de unidades de superficie. Producciones de E1, E2, E3 y E5. S4T3.	143
<b>Tabla 28.</b> Relación entre las unidades figurales de superficie QRST y UVW. Producciones de E1, E3 y E5. S4T3 .....	145

<b>Tabla 29.</b> Descomposición y reconfiguración. Producciones de E1 y E2. S5T2.....	146
<b>Tabla 30.</b> Ejemplos de enunciados que centran la visualización de las unidades figurales (2D, 1D, 0D) del sólido geométrico representado. Producciones de E1, E2, E3 y E5. S5T2 ....	149
<b>Tabla 31.</b> Desarrollo de un sólido geométrico. Producciones de E1, E2 y E6. S2T3.....	153
<b>Tabla 32.</b> Relaciones entre el número de unidades figurales. Producciones de E1, E2 y E5. S3T31c .....	156
<b>Tabla 33.</b> Deconstrucción dimensional de un prisma. Producción de E1 y E3. S5T3.....	160
<b>Tabla 34.</b> Reconstrucción de un prisma recto deconstruido en 2D y 1D. Producción de E2 y E3. S5T4.....	161
<b>Tabla 35.</b> Fragmentos de la producción discursiva de E1 en cuatro momentos diferentes de la secuencia de situaciones didácticas .....	163
<b>Tabla 36.</b> Resumen de las actividades cognitivas desarrolladas por los estudiantes en la implementación del diseño de la secuencia didáctica propuesta.....	165

## Introducción

El trabajo de indagación presentado a continuación se desarrolla en el campo de la Educación Matemática y está inscrito en la maestría en Enseñanza de las Ciencias Naturales y Exactas de la universidad Nacional de Colombia, en la modalidad de profundización. El interés particular de esta indagación se ubica en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, dada la complejidad de las actividades cognitivas necesarias para la comprensión de los objetos geométricos, que requieren la articulación de dos registros de representación semiótica: el registro figural y el de la lengua natural (Duval, 2017).

Sin embargo, esta característica de la actividad geométrica pasa inadvertida en los procesos de enseñanza y aprendizaje por lo que se ha convertido en objeto de estudio en diversas investigaciones (León 2005; Marmolejo 2007, 2014) que buscan analizar las condiciones que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes y aporten elementos esenciales a la práctica del maestro. Por lo cual, es necesario que, como maestros, se reflexione sobre los procesos de comprensión a partir de los elementos fundamentales, que se deben tener en cuenta, en el diseño o selección de actividades de aprendizaje de los objetos geométrico y los procesos discursivos que emergen en los estudiantes en dichas actividades.

Teniendo en cuenta lo anterior, esta propuesta de indagación, enmarcada en la teoría semiótica cognitiva de Raymond Duval, centra su atención en el desarrollo de los procesos de visualización por deconstrucción dimensional de las formas, que emergen de la articulación entre figura y discurso y son esenciales en los procesos de comprensión de las propiedades geométricas de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares, que favorezcan la resolución de situaciones geométricas, permitiendo a los estudiantes de grado séptimo de educación básica secundaria, reflexionar sobre las propiedades

cualitativas de dichos sólidos geométricos, a partir de la configuración de las unidades figurales de diferente dimensión.

En el trabajo se plantea el diseño e implementación, en un estudio de caso, de una secuencia de situaciones geométricas a partir de los elementos aportados por la teoría semiótica cognitiva, resaltando la deconstrucción dimensional de las formas como el tipo de visualización a fortalecer, para facilitar la aprehensión operatoria de las figuras, que permita el análisis cualitativo de propiedades de los sólidos geométricos, como el volumen y el área de la superficie.

El trabajo de indagación está estructurado de la siguiente manera: en el primer capítulo se presenta el planteamiento del campo problemático, en donde se exponen los argumentos que lo justifican y se presentan algunos antecedentes en el campo de la Educación Matemática, específicamente de la geometría, resaltando investigaciones doctorales adscritas a la teoría semiótica cognitiva; se finaliza con el planteamiento de la pregunta de indagación y los objetivos planteados.

En el segundo capítulo, se presentan los referentes teóricos que sustentan la propuesta, describiendo elementos fundamentales de la teoría semiótica cognitiva en el aprendizaje de las matemáticas, particularmente el aprendizaje de los objetos geométricos y los procesos para su comprensión. De igual manera, se exponen investigaciones desarrolladas desde el mismo referente teórico, cuyos resultados aportan elementos importantes para el interés de este trabajo de indagación (León, 2005; Marmolejo, 2007, 2014; Marmolejo y González, 2015; Pontón, 2014), que orientan la construcción teórica de la propuesta de aprendizaje, desde la selección de las variables didácticas para el diseño e implementación de una secuencia didáctica y, las categorías para el análisis de las producciones de los estudiantes.

Posteriormente, en el tercer capítulo, se expone los aspectos metodológicos de la indagación, donde se expone su naturaleza; características y estructura general, organizada en cuatro etapas: planificación, diseño y análisis *a priori*, implementación, y análisis *a posteriori*. Así como, se describe los métodos de

recolección de datos y la contextualización y criterios de selección de los estudiantes que hicieron parte del estudio de caso, en la implementación del diseño propuesto.

En el cuarto capítulo, se presenta las variables macro y micro didácticas utilizadas en el diseño de la situación didáctica propuesta, a partir de los elementos proporcionados por el marco teórico de referencia presentado en este trabajo de indagación; que sustentan la estructura global del diseño y orientan la secuencialidad y complejidad de cada tarea. Tanto las variables macro como las micro didácticas, establecen los lineamientos bajo los cuales se realiza el diseño de la secuencia de situaciones geométricas y orientan el análisis *a priori* de cada tarea, centrado en la articulación entre figura y discurso como condición cognitiva fundamental, en el aprendizaje de la geometría.

En el quinto capítulo, análisis *a posteriori*, se definen las categorías de análisis bajo las cuales se presentan e interpretan las producciones de los estudiantes; realizando un contraste entre lo esperado y descrito en el análisis *a priori* y los resultados de la implementación. Finalmente, en el capítulo seis, se presentan las conclusiones y recomendaciones que emergieron tanto del proceso de indagación, como de las reflexiones realizadas desde el papel de maestro/investigador.

## 1. Planteamiento Del Campo Problemático

La educación matemática, entendida como campo de investigación, se enfrenta a constantes retos alrededor de la enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos que, dada su naturaleza abstracta, hace necesario una constante reflexión sobre la forma como dichos objetos son estudiados, pues a diferencia de otras ciencias del conocimiento, en las matemáticas quien enseña o aprende no puede estar en contacto directo con el objeto mismo (como números u objetos geométricos), si no, con sus diversas representaciones semióticas (Duval, 2017).

El reconocimiento del uso de representaciones semióticas en la enseñanza de las matemáticas conlleva a la necesidad de comprender las formas de operar los elementos de cada tipo de representación (tratamientos) y la interacción entre ellas (conversiones). Estas características propias de los diferentes registros de representación semiótica de los objetos matemáticos se exponen en la teoría semiótica cognitiva presentada en el marco teórico de esta propuesta.

La particularidad de la naturaleza de los objetos matemáticos hace indispensable pensar en las formas de enseñar y aprender matemáticas ¿Cómo puede el estudiante interactuar con los objetos de estudio? ¿qué características del objeto son visibles en cada representación? ¿cuál o cuáles representaciones usar al abordar un objeto para su posterior conceptualización? ¿Qué implicaciones tienen el uso de una o más representaciones semióticas de un objeto matemático en la comprensión de este? Pensar en estos y otros interrogantes es responsabilidad del maestro en práctica y en formación para favorecer y potenciar el aprendizaje en los estudiantes de los objetos matemáticos en estudio, apoyados o respaldados en las diferentes líneas de investigación en educación matemática (en didáctica, currículo, lenguaje, etc.) que se han formado en los últimos años fortaleciendo la práctica educativa.

Bajo la premisa de la “responsabilidad” del maestro frente a los procesos de enseñanza, se ubica esta propuesta de indagación, en la que se identifica uno, de los diversos problemas, asociados al aprendizaje de los estudiantes de un objeto matemático en particular, reflexionando sobre los funcionamientos cognitivos involucrados en la interacción con las representaciones del objeto y las actividades cognitivas pertinentes, para que dichos funcionamientos se desarrollen. Tener en cuenta estos aspectos, debe ser esencial en los procesos de enseñanza.

Por lo anterior, y fundamentado en los elementos de la teoría semiótica cognitiva, se propone el diseño de una secuencia de situaciones geométricas que favorezca el aprendizaje de los estudiantes del objeto matemático seleccionado, además de favorecer, los procesos visualización para la comprensión de las propiedades de los sólidos geométricos seleccionados, que pueden surgir en el desarrollo de las tareas propuestas.

La necesidad de desarrollar propuestas didácticas alrededor de la enseñanza de los objetos de conocimiento, en particular de los objetos matemáticos, nace como respuesta a la emergencia educativa que vivimos en Colombia, donde la educación ha sufrido diversas reformas en pro de la llamada calidad educativa, considerada un elemento esencial en el desarrollo de un país, donde intervienen factores como el currículo y la evaluación, los recursos, las prácticas pedagógicas y la formación docente (MEN, 2006). Sin embargo, los resultados que se reflejan en las pruebas que, a nivel nacional e internacional, miden los conocimientos, habilidades y competencias en el área<sup>1</sup> no son del todo alentadores. Esto ha generado el interés del estado y de las universidades, en su papel de formador de maestros, en indagar las problemáticas educativas asociada a los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En este orden de ideas, es esencial que los maestros pensemos en la educación matemática como un campo de investigación y acción, donde se logre el desarrollo de competencias matemáticas que

---

<sup>1</sup> A nivel nacional están las pruebas saber (3°, 5° y 9°) para educación básica, y saber 11° para educación media. A nivel internacional las pruebas TIMSS (2007 y 2018).

evidencien la comprensión de los objetos matemáticos, sin desconocer las particularidades cognitivas implicadas en tal desarrollo. En los estándares básicos de matemáticas se plantea que, “las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problemas significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejas” (MEN, 2006, p.49).

A continuación, se presentan argumentos que describen la importancia de profundizar en los aspectos disciplinares, cognitivos, didácticos y curriculares, involucrados en la educación matemática escolar, específicamente en el campo de la geometría, donde se analiza las particularidades del pensamiento geométrico y las operaciones cognitivas necesarias, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los sólidos geométricos, para los primeros niveles de la educación básica secundaria.

Para la delimitación del problema y el planteamiento de la pregunta de indagación, se exponen los elementos fundamentales de la teoría semiótica cognitiva bajo la cual se realiza esta propuesta de indagación, pasando por la descripción de algunos trabajos realizados alrededor de la misma problemática.

## **1.1 Justificación**

La enseñanza de las matemáticas implica un reconocimiento del objeto matemático que se estudia, que no debe confundirse con sus diferentes representaciones semióticas (RS), de esta diferenciación depende la comprensión en matemáticas (Duval, 2017). Es necesario que el maestro utilice diferentes representaciones para presentar un mismo objeto matemático, debido a que, cada representación da un contenido diferente del objeto en estudio, además de generar diferentes actividades cognitivas de acuerdo con el tipo de representación semiótica utilizada.

Duval (2017) plantea, que el aprendizaje de las matemáticas requiere de funcionamientos cognitivos específicos que favorecen el análisis de actividades cognitivas como el razonamiento, la

conceptualización, la resolución de problemas, la comprensión de textos, entre otras. Por lo cual, es un campo problemático amplio, objeto de diversas investigaciones desde lo matemático, didáctico y curricular, que no puede centrarse solo en los contenidos de los objetos matemáticos a ser enseñados; es necesario que se analicen las dificultades presentes en la comprensión por parte de los estudiantes de dichos objetos.

Un área específica de la educación matemática donde se puede evidenciar los problemas de comprensión a los que se enfrentan maestros y estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es la Geometría, en los diferentes niveles educativos. Estas dificultades van, desde la forma como se presentan los objetos geométricos de estudio en la escuela, hasta la ausencia absoluta de su enseñanza, resultado de las diversas reestructuraciones que ha sufrido el currículo a lo largo de la historia.

Un ejemplo de dichas reformas lo encontramos en la incorporación de la teoría de conjuntos al currículo, durante la época de la llamada matemáticas Modernas, donde se trató de acercar el conocimiento matemático escolar al conocimiento científico (lineamientos del programa bourbakista), dejando de lado la enseñanza de la geometría euclidiana y/o disminuyendo su intensidad horaria en los planes de estudio (León, O. 2005; Guacaneme, E. A. et al. 2017).

Solo hasta 1998 con la publicación de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, la geometría, específicamente, el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos toma una posición de inclusión en la organización de la enseñanza de las matemáticas, expuesta en los conocimientos básicos, donde se presenta que el pensamiento espacial, “es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales” (MEN, 1998). Posteriormente, se publican los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006) como un complemento orientador, que fija las metas mínimas

en cuanto a lo que los estudiantes deben saber y saber hacer (MEN, 2006); así como, los Derechos Básicos de Aprendizaje DBA (MEN, 2016).

Además, se expone en los lineamientos curriculares la necesidad de una geometría activa, a través de la cual es posible la interacción con el entorno físico, social y cultural que favorece el desarrollo del pensamiento espacial:

Este proceso de construcción del espacio está condicionado e influenciado tanto por las características cognitivas individuales como por la influencia del entorno físico, cultural, social e histórico. Por tanto, el estudio de la geometría en la escuela debe favorecer estas interacciones. Se trata de actuar y argumentar sobre el espacio ayudándose con modelos y figuras, con palabras del lenguaje ordinario, con gestos y movimientos corporales.  
(MEN, 1998, p. 37)

El MEN como respuesta a los bajos resultados obtenidos en matemática y en el componente geométrico en las pruebas nacionales saber (3°, 5°, 9°) y saber 11°, incorpora en el currículo, a través de políticas educativas, el uso de diversos recursos tecnológicos, impulsados en las instituciones educativas y multiplicados entre los docentes, en diferentes proyectos como tit@, computadores para educar, semilleros tic entre otros; que buscan favorecer la geometría activa propuesta en los lineamientos curriculares de matemáticas.

Sin embargo, la enseñanza de la geometría sigue limitada a las construcciones en papel, a la réplica de figuras, al reconocimiento de formas por su contorno y en el mejor de los casos, a la medición y operaciones aritméticas para cálculos que tratan de involucrar propiedades geométricas como el área o el volumen a través del uso de fórmulas.

A pesar de la propuesta curricular sobre geometría expuesta en los lineamientos curriculares de matemáticas y de las múltiples propuestas tecnológicas como herramientas de apoyo, la enseñanza de la

geometría en las instituciones educativas sigue en estado de emergencia, ya sea porque se deja como unidad final (ignorando las consideraciones expuestas en los lineamientos sobre la integración de los cinco pensamientos: numérico, variacional, aleatorio, métrico y espacial) o por la forma en que los objetos geométricos son presentados en la escuela, donde la percepción de formas tiene el papel central.

Una muestra de esta situación se presenta en el siguiente DBA (Tabla 1), donde la actividad cognitiva que se destaca en la propuesta didáctica de abordarlo es el reconocimiento de la forma (percepción visual), en la cual los estudiantes pueden confundir el objeto representado con la representación propuesta, en este caso una representación asociada a un objeto físico:

**Tabla 1.** DBA Matemáticas. Pensamiento Espacial. Grado Primero de Educación Básica

Descripción del DBA	Actividad sugerida en el DBA
<p><b>(DBA 6)</b> Compara objetos del entorno y establece semejanzas y diferencias empleando características geométricas de las formas bidimensionales y tridimensionales (Curvo o recto, abierto o cerrado, plano o sólido, número de lados, número de caras, entre otros).</p> <p><b>Evidencias de aprendizajes</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Crea, compone y descompone formas bidimensionales y tridimensionales, para ello utiliza plastilina, papel, palitos, cajas, etc.</li> <li>• Describe de forma verbal las cualidades y propiedades de un objeto relativas a su forma.</li> <li>• Agrupa objetos de su entorno de acuerdo con las semejanzas y las diferencias en la forma y en el tamaño y explica el criterio que utiliza.</li> <li>• Identifica objetos a partir de las descripciones verbales que hacen de sus características geométricas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• A partir de la construcción de títeres con material reciclable y de la configuración de objetos como los que se muestran en las figuras siguientes, relaciona las formas y cuerpos geométricos y encuentra características similares y diferentes entre la forma de las figuras y los sólidos que los componen.</li> </ul> <div style="text-align: center;">  <p>Mariposa      Pingüino</p> <p>Gato      Señora Bigotes</p> </div>

Fuente: MEN, 2016. Los Derechos Básicos de Aprendizaje. Ministerio de Educación.

La consigna de la actividad donde la tarea inicia con la construcción de un títere desvirtúa la construcción en geometría ¿realmente este tipo de actividades favorece el desarrollo del pensamiento espacial y aporta elementos fundamentales a los funcionamientos cognitivos propios del aprendizaje de los objetos geométricos? Actividades como la anterior que se presentan desde los primeros años de escolaridad hasta grados superiores, limitan el objeto geométrico a una representación física del mismo y se privilegia una aprehensión perceptual visual.

Se podría pensar que, al ser el primer año de escolaridad, en la actividad propuesta se “justifica” el uso de objetos físicos como la representación privilegiada. Sin embargo, al revisar una actividad para grado sexto de educación básica secundaria, propuesta para otro DBA (Tabla 2) relacionado con el pensamiento espacial y métrico, se observa de nuevo el uso de representaciones física asociadas a los sólidos geométricos que no dan cuenta propiamente de las evidencias de aprendizaje propuestas para el DBA:

**Tabla 2.** DBA Matemáticas. Pensamiento Espacial y Métrico. Grado Sexto de Educación Básica

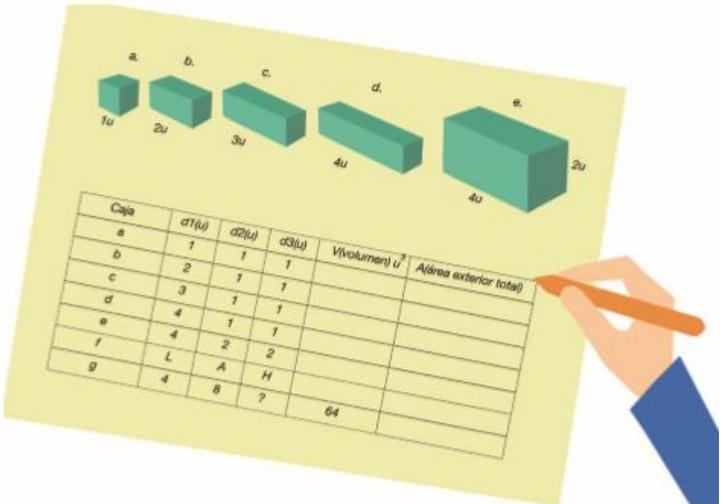
Descripción del DBA	Actividad sugerida en el DBA
<p><b>(DBA 6)</b> Representa y construye formas bidimensionales y tridimensionales con el apoyo en instrumentos de medida apropiados.</p> <p><b>Evidencias de aprendizaje</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Diferencia las propiedades geométricas de las figuras y cuerpos geométricos.</li> <li>• Identifica los elementos que componen las figuras y cuerpos geométricos.</li> <li>• Estima áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos.</li> <li>• Construye cuerpos geométricos con el apoyo de instrumentos de medida adecuados.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los productos de la industria son envasados en diferentes materiales: cartón, vidrio, plástico, metal y diferentes formas. A partir de las condiciones reales identifica las formas volumétricas que los constituyen, construye representaciones semejantes para configurar sus desarrollos geométricos y estima la cantidad de material necesario para su fabricación. Compara la información sobre volumen y peso que aparece en algunos empaques y establece relaciones entre ellas.</li> </ul> 

Si se analiza estas evidencias de aprendizaje, la actividad no favorece que emerjan los tratamientos que den cuenta del reconocimiento de las propiedades geométricas de los sólidos involucrados (cilindros, prismas rectos); tampoco permite discriminar las unidades figurales elementales (en sus diferentes dimensiones) para establecer relaciones de congruencia o semejanza. Por otro lado, en el enunciado se hace referencia a un reconocimiento perceptual visual el cual puede ser interpretado por el estudiante de diferentes formas, de manera que las representaciones semejantes que se pide de los objetos físicos expuestos sean variadas y no correspondan con los modelos geométricos a los que hacen referencia.

Además, las propiedades de los sólidos geométricos como el área de la superficie o el volumen, se proponen y evalúan a partir de las relaciones numéricas o algebraicas presentadas en fórmulas, sin realizar un análisis de las características geométricas dimensionales del sólido, limitado solo al cálculo desde sus unidades elementales de dimensión 1, sobre un modelo algebraico estandarizado, como se puede observar en la actividad propuesta para un DBA de grado octavo (Tabla 3):

**Tabla 3.** DBA Matemáticas. Pensamiento Espacial y Métrico. Grado 8° de Educación Básica

Descripción del DBA	Actividad propuesta como ejemplo en el DBA
<p><b>(DBA 4)</b> Describe atributos medibles de diferentes sólidos y explica relaciones entre ellos por medio del lenguaje algebraico.</p> <p><b>Evidencias de aprendizaje</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Utiliza lenguaje algebraico para representar el volumen de un prisma en términos de sus aristas.</li> <li>• Interpreta las expresiones algebraicas que representan el volumen y el área cuando sus dimensiones varían.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• En la figura se presentan cinco cajas y en la tabla se especifican las dimensiones de cada una de ellas. Completa e interpreta la tabla a partir de las dimensiones de cada caja.</li> <li>• Encuentra las razones aritméticas entre los diferentes volúmenes de las cajas y la expresión general para el volumen y el área exterior total de cada una de ellas.</li> </ul>

Descripción del DBA	Actividad propuesta como ejemplo en el DBA																																																
<ul style="list-style-type: none"> <li>Realiza la representación gráfica del desarrollo plano de un prisma.</li> <li>Estima, calcula y compara volúmenes a partir de las relaciones entre aristas de un prisma o de otros sólidos.</li> </ul>	 <p>The diagram illustrates five rectangular prisms labeled a through e, showing their dimensions in terms of a unit 'u'. Prism a has dimensions 1u x 1u x 1u. Prism b has dimensions 2u x 1u x 1u. Prism c has dimensions 3u x 1u x 1u. Prism d has dimensions 4u x 1u x 1u. Prism e has dimensions 4u x 2u x 1u. Below the prisms is a table with columns for 'Caja', 'a1(u)', 'a2(u)', 'a3(u)', 'V(volumen) u³', and 'A(área exterior total)'. A hand is shown pointing to the table.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Caja</th> <th>a1(u)</th> <th>a2(u)</th> <th>a3(u)</th> <th>V(volumen) u³</th> <th>A(área exterior total)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>c</td> <td>3</td> <td>1</td> <td>1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>d</td> <td>4</td> <td>1</td> <td>1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>e</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>f</td> <td>L</td> <td>A</td> <td>H</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>g</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>?</td> <td>64</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Caja	a1(u)	a2(u)	a3(u)	V(volumen) u³	A(área exterior total)	a	1	1	1			b	2	1	1			c	3	1	1			d	4	1	1			e	4	2	1			f	L	A	H			g	4	8	?	64	
Caja	a1(u)	a2(u)	a3(u)	V(volumen) u³	A(área exterior total)																																												
a	1	1	1																																														
b	2	1	1																																														
c	3	1	1																																														
d	4	1	1																																														
e	4	2	1																																														
f	L	A	H																																														
g	4	8	?	64																																													

Fuente: MEN, 2016. Los Derechos Básicos de Aprendizaje. Ministerio de Educación.

A pesar de referirse a objetos tridimensionales, el análisis numérico realizado sobre el volumen solo hace referencia a la medida de la longitud de sus dimensiones, a partir del producto entre ellas. En el caso del área de la superficie, quien propone la actividad infiere una descomposición del sólido, de dimensión 3 a dimensión 2 (para hacer visibles las caras rectangulares que componen el sólido) y lograr calcular el área de cada cara realizando la operación entre las longitudes de sus dimensiones (fórmula). Esta manera de abordar propiedades de los sólidos geométricos como el volumen no dan cuenta de la comprensión de los estudiantes sobre dicha propiedad, solo del manejo de una fórmula que, en algunos casos, ni siquiera es reconocida como una expresión algebraica que modela la propiedad, ni tampoco de la comprensión del volumen como magnitud.

Teniendo en cuenta que los documentos curriculares ministeriales (lineamientos, estándares y DBA) son los referentes principales utilizados por los maestros en la construcción de los planes de estudios y de aula, las actividades propuestas como las referenciadas anteriormente, deben dar respuesta a los mismos, siendo objeto de reflexión y mejora.

es importante tener en cuenta que los DBA por sí solos no constituyen una propuesta curricular y estos deben ser articulados con los enfoques, metodologías, estrategias y contextos definidos en cada establecimiento educativo, en el marco de los Proyectos Educativos Institucionales (PEI) materializados en los planes de área y de aula. (MEN, 2016, p. 6)

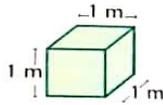
Otro referente usado de manera masiva por los maestros, son los libros de texto de diferentes procedencias, como los publicados por editoriales privadas con diseño de expertos en el área nacionales o internacionales y los textos proporcionados por el estado. Por ejemplo, en el texto escolar Estrategias Matemáticas 7 (ver *figura 1*), la unidad que aborda el volumen de sólidos geométricos, centrado en el pensamiento métrico, inicia directamente con la exposición de la fórmula del paralelepípedo:

**Figura 1.** Introducción al concepto de volumen.

**S** abías que...

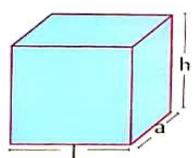
Los objetos que hay a nuestro alrededor son de diferentes formas y tamaños. Para medir la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo se establecieron las *unidades de volumen*.

En el sistema internacional la unidad patrón es el **metro cúbico**, es decir, un cubo cuyos lados miden 1 metro.

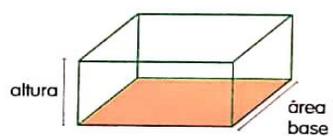


El volumen de un paralelepípedo rectangular se puede calcular así:

$$\text{Volumen} = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{alto}$$

$$V = l \times a \times h$$


Cuando se conoce el área de la base de la figura, el volumen se halla así:



$$\text{Volumen} = \text{área de la base} \times \text{altura}$$

**Ejemplo:** Hallar el volumen la biblioteca del salón si mide 2 m de largo, 0,4 m de ancho y 1,8 m de alto.

$$\text{Volumen} = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{alto}$$

$$V = 2 \text{ m} \times 0,4 \text{ m} \times 1,8 \text{ m} = 1,44 \text{ m}^3$$

Observa que el volumen resulta expresado en unidades cúbicas.

Fuente: Libro texto Estrategias Matemáticas Grado 7, Editorial Educar, p.74

Es importante destacar que el volumen es una propiedad de los sólidos, es decir, una propiedad de los objetos tridimensionales, y puede ser estudiado desde dicha condición dimensional, sin desconocer su carácter de magnitud. Sáiz (2002) realiza un recorrido histórico para revisar el desarrollo del concepto de volumen; la autora expone dos formas de “rastrear” el concepto, una desde la historia del cálculo y la otra desde el desarrollo de la geometría. En la primera forma, se destaca el trabajo sobre volumen de Bonaventura Cavalieri (1635), citado por Sáiz (2002), que consistía en considerar todos los planos paralelos a la base que cortan al cuerpo, en consecuencia, se forman sólidos infinitamente delgados; la suma del volumen de todos los sólidos permite obtener el volumen total. El recorrido histórico sobre la construcción del concepto de volumen realizada por Sáiz, le permite llegar a una conclusión que es interesante y pertinente a la luz de esta propuesta de profundización:

Desde este punto de vista, el concepto volumen pierde su identidad al grado de que es posible estudiarlo como una medida, sin distinguirlo de la longitud o del área. En cierto sentido esto empobrece tales conceptos, particularmente al de volumen que como magnitud y concepto matemático contiene particularidades que lo enriquecen. (Sáiz, 2002, pp.34-35)

Desde el desarrollo de la geometría, Sáiz (2002) hace referencia a la descomposición de los sólidos de volumen desconocido, en sólidos cuya reconfiguración sea un sólido de volumen conocido, como es el caso del paralelepípedo. Esta situación se presenta en el tercer problema de Hilbert, resuelto por Dehn y del cual se concluyó que no siempre es posible, sin embargo, la situación es de gran importancia para el trabajo de volúmenes en la educación básica (Sáiz, 2002).

A partir de lo anterior, considerar un análisis cualitativo y comparativo del volumen y del área de la superficie de los sólidos geométricos, enriquecería cada concepto, en tanto da lugar al análisis de las características tridimensionales, y de sus unidades elementales figurales en dimensión 2, 1 y 0,

favoreciendo y posibilitando los tratamientos figurales de descomposición y reconfiguración para realizar comparaciones y conjeturas previas al trabajo con las unidades de medida. Sáiz (2002), reconoce los conflictos relacionados con el paso de procedimientos unidimensionales a bidimensionales al medir el volumen de un sólido, y es más complejo si se considera que esto traduce medir un objeto tridimensional a partir de sus dimensiones lineales (unidimensional).

Al pensar una situación con tareas que movilicen los funcionamientos cognitivos necesarios para el aprendizaje de la geometría, éstas deberían favorecer el reconocimiento y apropiación de las unidades figurales elementales de las figuras y cuerpos geométricos, sus tratamientos y operaciones cognitivas, desde enunciados que permitan realizar dichas operaciones, con consignas claras y específicas que den cuenta de la representación figural (unidimensional, bidimensional o tridimensional) destacando cada unidad figural al designarlas y orientar tratamientos sobre ellas.

Por ejemplo, en *figura 2* se muestra una tarea que orienta al reconocimiento de las unidades figurales en 0, 1 y 2 dimensiones que constituyen el sólido geométrico representado figuralmente.

**Figura 2.** Ejemplo de la función referencial de designar.

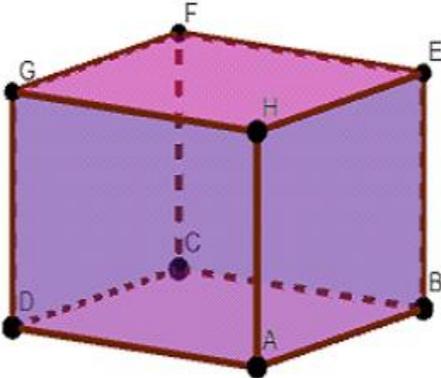
<p>I. A partir de la figura 1, identifique:</p> <p>a. Número de Vértices</p>	
<p>b. Número de Aristas</p>	
<p>c. Designe los segmentos que son aristas</p>	
<p>d. Número de Caras</p>	
<p>e. Designe los polígonos que forman cada cara del cuerpo geométrico</p>	

Figura 1

Fuente: Elaboración propia.

Los enunciados involucrados en cada ítem mostrado en la figura 2 posibilitan operaciones como la designación, dando lugar a tareas de descomposición o establecer relaciones entre dichas unidades figurales (como el paralelismo entre segmentos). La importancia de la designación en esta tarea, es que posibilita la articulación entre el registro discursivo y el registro figural en tareas posteriores.

Este tipo de tareas pueden aportar elementos importantes para actividades cognitivas de mayor complejidad como el razonamiento, las cuales son evaluadas en grados superiores y en cuyos resultados se evidencia el fracaso escolar, donde se pasa de forma abrupta de una aprehensión perceptual, al uso de teoremas en la construcción de demostraciones.

Es necesario que, desde el trabajo en el aula, los maestros reflexionemos sobre las implicaciones cognitivas propias de la enseñanza y aprendizaje de los objetos geométricos y sus tres operaciones cognitivas fundamentales presentadas en la teoría semiótica cognitiva de Duval (2016a): visualización, construcción y razonamiento. Estas operaciones implican una coordinación entre dos registros esenciales para el aprendizaje y comprensión de los objetos geométricos **el registro de representación figural y el registro de representación de la lengua natural**, puesto que los tratamientos efectuados separadamente en estos dos registros no son suficientes para que el proceso sea significativo, como lo expresa Duval (2017).

La necesidad de una coordinación entre los tratamientos que provienen de registros figurales y los que provienen de registros discursivos, de un lado, y la falsa proximidad entre los tratamientos matemáticos pertinentes y aquellos espontáneos practicados en cada uno de los dos registros, del otro, controlan los problemas en el aprendizaje de la geometría. (Duval, 2017, p. 196)

A partir de lo anterior, se puede observar que, en la geometría, se encuentra una fuente problemática sobre la cual es necesario reflexionar e indagar. En el desarrollo de esta propuesta de indagación, el interés

se ubica en la enseñanza y aprendizaje de la geometría en los primeros años de la educación básica secundaria (grado séptimo), cuyo objeto geométrico de estudio son los sólidos geométricos, el caso de los prismas rectos y las pirámides cuadrangulares, y el análisis cualitativo y comparativo de sus propiedades volumen y área de la superficie, previo al manejo de los cálculos numéricos, desde la teoría semiótica cognitiva.

## 1.2 Antecedentes

En Colombia y a nivel internacional, la enseñanza de la geometría ha sido objeto de profundización e investigación en diferentes líneas y marcos teóricos, desde pregrado hasta postgrado (maestría y doctorado). Se exponen a continuación algunos trabajos relacionados con la enseñanza de la geometría en general y luego aquellos que aportan referentes para esta propuesta en particular, de manera que se recogen elementos que aportan a la delimitación del problema que se busca abordar.

A nivel internacional, se destacan trabajos doctorales como el realizado por Gregoria Gillen Soler (1997), enmarcado en la teoría del modelo de Van Hiele para la enseñanza de los sólidos geométricos. La investigación se centra en medir el estado de los estudiantes en comparación de unos ítems establecidos en cinco niveles y para los cuales existen 5 fases que permiten la clasificación de acuerdo con el cumplimiento de ciertas tareas. Sin embargo, los procesos de enseñanza no son el objeto de reflexión, ni las condiciones cognitivas necesarias para el desarrollo de las tareas que evidencian el aprendizaje. Se establecen los niveles de razonamiento, pero no se identifica las condiciones por las cuales los estudiantes se encuentran en dichos niveles, es decir, es una teoría de clasificación, aunque la autora apoya su investigación en autores que han considerado las implicaciones cognitivas en las construcciones de imágenes mentales de los objetos. Para cada nivel, a las actividades se les asigna una operación cognitiva, por ejemplo, en la actividad que mide el nivel 1, la operación asociada es el reconocimiento, la del nivel 2, análisis, para el nivel 3, clasificación.

De este modelo, adoptado en muchas escuelas, podemos encontrar referencias en los lineamientos curriculares, donde se invita a reflexionar de manera crítica sobre su aplicación, ya que no da cuenta de lo que se propone para el desarrollo del pensamiento espacial.

Aunque estos niveles son una aproximación aceptable a las posibles etapas en las que progresa el pensamiento geométrico, los docentes debemos ser críticos con respecto a ellos, pues no parecen dirigidos a lo que parecen ser los logros más importantes del estudio de la geometría: la exploración del espacio, el desarrollo de la imaginación tridimensional, la formulación y discusión de conjeturas, jugar con los diseños y teselaciones del plano y sus grupos de transformaciones. (MEN, 1998, p. 39)

En Guillen (2010), en su artículo titulado *¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría?*, describe la riqueza contextual que ofrecen los sólidos geométricos como objeto de estudio, a través del cual se pueden explorar relaciones y operaciones figurales desde la fenomenología descrita por Freudenthal y citado por Guillen en sus trabajos sobre la enseñanza de la geometría, y donde la autora expone la necesidad de la investigación alrededor del estudio de los sólidos como problema de enseñanza/aprendizaje y su importancia en la educación matemática. De esta propuesta se puede rescatar la importancia del estudio de este objeto geométrico en el desarrollo de actividades cognitivas que, desde la teoría semiótica cognitiva, posibiliten identificar las unidades elementales figurales en todas sus dimensiones, pasando de mayor dimensión a menor dimensión.

Otro trabajo doctoral alrededor de la enseñanza de la geometría es el realizado por Soto (2017), que centra su investigación en la enseñanza de los cuerpos geométricos a través del desarrollo de una secuencia didáctica basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1997), donde se incorporan actividades con el uso de los softwares Sketch-up y Realidad Aumentada (RA). La investigación

se desarrolla con estudiantes de 4° año de magisterio de educación primaria (los futuros maestros), que busca proponer e implementar un modelo alternativo para la enseñanza de la Geometría, es decir, es la propuesta de una implementación metodológica, donde se evalúa su eficacia incorporando las TIC, en particular los recursos de realidad aumentada con los cuales el autor busca dar la posibilidad a los estudiantes de explorar y construir la geometría tridimensional. La teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, aporta elementos importantes de orden metodológicos, para el proyecto que se describe en esta propuesta y se expondrán posteriormente.

Alrededor del estudio de los sólidos geométricos y del volumen, también se encuentra el trabajo doctoral realizado por Sáiz (2002), titulado *“El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto matemático volumen y su enseñanza”*. En este trabajo, la autora realiza un análisis sobre la construcción del concepto de volumen, a través de la historia, y sus implicaciones didácticas en la escuela primaria y secundaria de hoy. Se destaca el concepto de volumen como magnitud abordado en las ciencias, y realiza una reflexión sobre la importancia del concepto del volumen a partir de sus particularidades matemáticas.

Como las anteriores investigaciones, pero en niveles de profundización más que de investigación, se encuentran numerosos trabajos de maestría y pregrado en educación matemática alrededor de la enseñanza/aprendizaje de los sólidos geométricos en marcos teóricos variados (modelo Van Hiele, TSD, TAD, enfoque histórico, orquestación). Sin embargo, para considerar un análisis cualitativo y comparativo del volumen y el área superficial de los sólidos geométricos, es necesario un marco teórico que considere las unidades elementales figurales de los objetos tridimensionales, que centre su atención en los modos de funcionamiento cognitivos propios de la actividad geométrica para dar cuenta de las dificultades en la comprensión de los estudiantes en su proceso de aprendizaje. En este sentido, la teoría semiótica cognitiva de Duval (2016a, 2017), explica todos los elementos mencionados, dando una base teórica consistente para el desarrollo de esta propuesta.

### 1.2.1 Algunas investigaciones en el campo de la geometría desde la teoría semiótica cognitiva

En su investigación, Duval expone la complejidad del proceso de aprendizaje de la geometría debido a las actividades cognitivas que son necesarias para el desarrollo de pensamiento geométrico. Esta complejidad radica, más que en los conceptos geométricos mismos, en el manejo de los registros de representación figural y discursivo, tanto al interior de cada uno, como en la coordinación entre ellos, donde las actividades propuestas en la enseñanza no favorecen las operaciones cognitivas fundamentales en la geometría, "...la mayoría de los estudiantes entre 5° y 8° están lejos de haber adquirido esta coordinación. A pesar de ser allí donde reside el punto estratégico del aprendizaje de la geometría" (Duval, 2017, p.196).

Los dos registros mencionados, figural y discursivo, tienen un manejo amplio fuera de las matemáticas, en el caso del registro figural, la percepción visual de los objetos crea una falsa comprensión de los mismo, por otro lado, el uso de la lengua natural, lejos de un discurso bien establecido, juega un papel de comunicación, en sus formas cotidianas. Esta falsa proximidad en los tratamientos al interior de cada registro, hacen que emerja dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de los objetos geométricos (Duval, 2017).

En la teoría semiótica cognitiva, Duval plantea que el uso de la lengua natural en geometría debe distinguir tres niveles de operaciones discursivas que son la designación, la enunciación de propiedades y la deducción. Estas operaciones cambian totalmente el trabajo sobre el registro figural, haciendo posible el desarrollo de la visualización, orienta la construcción y favorece el razonamiento. Pero en este punto, Duval reconoce la existencia de lo que denomina "hiato dimensional", donde la conversión entre el registro figural y el registro discursivo en el tratamiento de figuras geométricas implica un cambio dimensional, que normalmente no se tienen en cuenta en el diseño de las actividades de aprendizaje.

Sin embargo, existen formas de tratamiento figural que aportan elementos esenciales para superar el hiato dimensional. Duval llama a este tipo de tratamientos, la quinta entrada a la geometría: ***la deconstrucción dimensional de las formas***. La importancia de los elementos teóricos que ofrece esta teoría se refleja en los resultados de trabajos de investigación a nivel doctoral que se presentan a continuación.

Entre los trabajos de investigación que centran su atención en los problemas de enseñanza y aprendizaje de la geometría, se encuentra la tesis doctoral de Gustavo Marmolejo (2014) titulada “Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles”. En esta investigación, el autor centra su interés de indagación en la operación cognitiva de visualización, reconocida como una operación fundamental en el desarrollo del pensamiento geométrico desde una perspectiva semiótica cognitiva, tomando como escenario para su desarrollo, el trabajo con áreas de superficies planas y específicamente, el análisis de las actividades propuestas en los libros de texto. Marmolejo (2014), considera que el área de figuras planas permite proponer actividades que involucra el tratamiento figural, favoreciendo el desarrollo de la visualización.

Desde el análisis de los textos, el autor realiza una caracterización de las tareas propuestas alrededor del área de superficies planas que le permiten identificar de qué manera es o no, potenciada la visualización en las escuelas. Para la realización del análisis de las tareas, Marmolejo diseña una metodología de análisis conformada por cinco categorías que son: elementos generadores de control visual, elementos constitutivos de la visualización, clases de control visual, funciones visuales, y tópicos y ciclos educativos en los que se promueve el estudio del área. Los aportes de Marmolejo a la problemática de la enseñanza de los objetos geométricos son fundamentales para el desarrollo del proyecto de profundización propuesto en este documento para el diseño de las situaciones, donde las variables de diseño involucrarán los elementos de control visual que favorezcan los tratamientos figurales realizados

por los estudiantes en el análisis cualitativo y comparativo del volumen y área de la superficie de sólidos geométricos.

Finalmente, en el documento de la tesis doctoral realizada por León (2005), titulada: *“Experiencia figural y procesos semánticos para la argumentación en geometría”*, desde la perspectiva semiótica cognitiva, inscrita en el grupo de investigación Interdisciplinaria en Pedagogía del Lenguaje y las Matemáticas; la autora presenta el documento como el resultado de una indagación macro sobre los procesos de argumentación realizado en un contexto escolar, reconociendo la existencia de un problema en la enseñanza y aprendizaje, asociado al desarrollo comunicativo y matemático en las actividades realizadas por los estudiantes, cuyo análisis oriente el desarrollo de un saber de tipo didáctico, que permita comprender, planear, ejecutar, monitorear y valorar los procesos de aprendizaje escolar relacionados con la argumentación en matemáticas, específicamente, los factores requeridos en los diseños didácticos que permitan la formulación de relaciones geométricas, como el caso de los teoremas (León, O. 2005).

En este trabajo de investigación, la autora centra su atención en los procesos de argumentación propios del registro semiótico de la lengua natural, necesario para la actividad geométrica.

El tipo de sistema semiótico que privilegia la argumentación y los razonamientos en general es el de la lengua natural; sin embargo, la elaboración de conceptos matemáticos exige el uso de otros sistemas semióticos y –como lo destaca Raymond Duval para el caso de la geometría– “no sólo es muy compleja la articulación entre el registro de las figuras geométricas y el de los discursos, sino que esta complejidad se desconoce en la enseñanza”. (Duval, 1999, p. 71, citado por León, O. 2005, p.2a)

Es a través de la argumentación, como primera forma de razonamiento, que realizan los estudiantes sobre los procesos involucrados en las actividades escolares, que pueden llegar a emerger, relaciones

geométricas y posteriormente la conceptualización de propiedades y teoremas. Pero surge entonces preguntas como ¿Qué tipo de actividades promueven esta actividad cognitiva de argumentar?

La autora utiliza como escenario para el desarrollo de esta investigación, las diferentes formas de demostración figural del teorema de Pitágoras, donde las actividades propuestas orientan operaciones particulares de este registro semiótico centradas en la visualización, y tratamientos como la reconfiguración, donde se debe tener en cuenta el tipo de entrada matemática que se da un problema, pues de ella depende la posición argumentativa que el estudiante asuma frente a la actividad, y como está incide en el desarrollo del pensamiento geométrico.

En este sentido, la teoría semiótica cognitiva aporta a la investigación la importancia de los argumentos que emergen de la articulación entre los registros figural y discursivo en la actividad geométrica: “el éxito de la exploración de la figura en el marco de un problema planteado va a depender de esta aprehensión operatoria de la figura y un manejo discursivo de inferencias que moviliza una red de definiciones y teoremas” (Duval, 2017, p.212).

Sin embargo, la articulación entre figura y discurso no es inmediata y, por el contrario, la falta de congruencia entre ambos registros genera dificultades en el aprendizaje que hace necesaria la reflexión sobre los factores de no – congruencia como la heterogeneidad dimensional entre enunciados y unidades figurales.

Las anteriores investigaciones, entre muchas otras, en el campo de la educación matemática y en ella, de la geometría, dan un panorama de la necesidad de desarrollar propuestas didácticas entorno a la enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos para mejorar la comprensión de dichos objetos, que le permitan a los estudiantes desarrollar competencias básicas y avanzar en actividades cognitivas de mayor complejidad. En el caso de los sólidos geométricos, objeto de interés para esta propuesta, los trabajos de investigación expuestos en otras teorías diferentes a la semiótica cognitiva priorizan la

aprehensión visual (percepción de formas) que se encajan en el reconocimiento y clasificación para posteriormente aplicar fórmulas, definiciones y teoremas (como se hace normalmente en la escuela) sin dar cuenta de la comprensión de los objetos geométricos.

### **1.3 Pregunta de indagación**

En busca de mejorar los procesos de aprendizaje de los estudiantes en la geometría, a través de operaciones cognitivas como la visualización (registro figural) y la construcción de enunciados que justifiquen los tratamientos figurales realizados (registro en lengua natural), apoyada en el análisis del funcionamiento cognitivo, los cambios de representaciones semióticas, y principalmente, la articulación entre los registros de representación figural y discursivo, mostrados en la teoría semiótica cognitiva; se presenta una propuesta de enseñanza para favorecer la comprensión de algunas propiedades de los sólidos geométricos, que responda a la siguiente pregunta de indagación:

¿De qué forma se potencializan los procesos de comprensión de las propiedades geométricas de prismas rectos y pirámides cuadrangulares, a través de los tratamientos figurales y operaciones discursivas para el análisis cualitativo y comparativo del volumen y el área de la superficie, en estudiantes de grado séptimo de Educación Básica Secundaria?

### **1.4 Objetivos**

Los objetivos que orientan el desarrollo del presente trabajo de indagación son los siguientes:

#### **1.4.1 Objetivo General**

Identificar, describir y analizar los procesos de visualización por deconstrucción dimensional de las formas y la articulación entre los registros figural y de la lengua natural, para el reconocimiento de las unidades figurales elementales de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares, como actividades cognitivas esenciales en los procesos de comprensión de algunas situaciones geométricas

### 1.4.2 Objetivos Específicos

- Identificar las unidades figurales elementales que deben movilizarse en los objetos tridimensionales para favorecer la deconstrucción dimensional de formas.
- Describir las variables de diseño y de control visual pertinentes para que emerjan los tratamientos figurales y discursivos en el análisis cualitativo y comparativo de las unidades figurales de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares en las dimensiones 0D, 1D, 2D y 3D que posibiliten la comprensión global de cada sólido
- Diseñar y analizar la aplicación de la secuencia de situaciones geométricas, con los elementos de la teoría semiótica cognitiva que potencialicen el análisis cualitativo y comparativo de las unidades figurales de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares en las dimensiones 0D, 1D, 2D y 3D para su comprensión.

## 2. Fundamentos Teóricos

En este apartado, se presenta los elementos esenciales del marco teórico referencial semiótico cognitivo, en el cual se enmarca esta propuesta de profundización, alrededor de la enseñanza y aprendizaje de la geometría, distribuido de la siguiente manera: primero se presenta las características y premisas fundamentales de la teoría semiótica cognitiva propuesta por Duval (2016a, 2017), seguido de algunos elementos tomados de los trabajos doctorales de investigación de Marmolejo (2007, 2014) y Pontón (2012).

Posteriormente, se exponen los referentes matemáticos a partir de las definiciones de los objetos geométricos involucrados en la propuesta de indagación: prismas rectos y pirámides cuadrangulares, desde la geometría euclidiana, tomando como referente los elementos de Euclides. También se exponen la presentación de los mismos objetos geométricos en un libro de texto escolar, como resultado de la transposición didáctica (del saber sabio al saber enseñado).

### 2.1 Teoría Semiótica Cognitiva

Las investigaciones que se realizan alrededor de los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas evidencian dificultades que van más allá del contenido curricular, o de los recursos utilizados en las aulas de clases que puedan favorecer los procesos de aprendizaje. La preocupación por la manera como los estudiantes interactúan con los objetos matemáticos, teniendo en cuenta su naturaleza, han centrado la atención en el análisis de los funcionamientos cognitivos involucrados en la actividad matemática y en los procesos de comprensión, expuestos en la teoría semiótica cognitiva propuesta por Duval (2005, 2017).

### 2.1.1 Sobre la necesidad de la articulación de diferentes registros de representación semiótica en el aprendizaje de las matemáticas

Duval plantea que, dada la naturaleza de los objetos matemáticos, solo es posible acceder a ellos a través de sus representaciones semióticas, donde cada representación expone un contenido diferente del objeto representado, lo cual hace necesario la diferenciación entre el objeto representado y sus representaciones.

La premisa fundamental de esta teoría es que la comprensión del objeto en estudio se logra en tanto es posible realizar el paso de una representación a otra, es decir, que se realice lo que el autor denomina una **conversión entre registros**. Pero esta operación no es algo natural ni inmediato, requiere de la congruencia entre los registros involucrados y dicha congruencia no es fácil de establecer. Se requiere el reconocimiento de los elementos de cada registro y los funcionamientos cognitivos asociados a cada uno (Duval, 2017).

En la escuela se suele dar prioridad a las operaciones entre los elementos de un mismo registro de representación, estas operaciones reciben el nombre de **tratamientos** y dependen de las características, propiedades y relaciones propias del tipo de representación, por ejemplo en el caso de las representaciones numéricas, los tratamientos dependen del tipo de representación (racional entero, racional fraccionario, racional mixto, racional decimal no exacto), en las representaciones figurales, los tratamientos hacen referencia a las operaciones sobre las unidades elementales figurales, tal como la reconfiguración. Desde esta teoría y de acuerdo con el análisis del funcionamiento cognitivo propio de las matemáticas, la actividad matemática no puede efectuarse fuera de un sistema de representación semiótica:

...en matemáticas las representaciones semióticas no son solo indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma. En efecto, la posibilidad de efectuar tratamientos sobre los objetos matemáticos

depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. (Duval, 2017, p.45)

Desde esta perspectiva, se resalta la necesidad de reconocer en diferentes representaciones semióticas el mismo objeto matemático, a partir de las cuales se puede acceder a todas sus características, distinguiendo el objeto representado de su representación. Esto solo es posible si se interactúa con varias representaciones semióticas de manera simultánea (conversión entre registros de representación), lo que, en palabra de Duval (2017), es la única forma en que puede haber comprensión en matemáticas. En este sentido se enmarca este trabajo de investigación, donde se considera que el aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos es posible por la movilización de diversos registros de representación semióticos de un mismo objeto y la coordinación entre ellos.

### **2.1.2 La Comprensión de los objetos matemáticos**

Tomando como referencia la interpretación dada por Duval (2017) de Semiosis “la aprehensión o producción de una representación semiótica” y de noesis “los actos cognitivos tales como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia”, El autor plantea que no puede haber noesis sin Semiosis, es decir, no se puede esperar la comprensión de un objeto matemático, sino se reconoce el mismo objeto en sus diferentes formas de representación.

En su investigación, Duval (2017) identifica tres fenómenos vinculados a los procesos de aprendizaje y que se asocian a los obstáculos encontrados en dichos procesos:

1. La diversificación de los registros de representación semiótica
2. Diferenciación entre representante y representado
3. La coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica

El reconocimiento del objeto matemático en sus diferentes representaciones semióticas, posibilitan la realización de los tratamientos al interior de cada registro y su conversión a otro registro de representación para comunicar, explicar, definir, entre otras actividades cognitivas, que no es posible efectuar sin dichas transformaciones (tratamientos y conversión). Más que los tratamientos al interior de un registro de representación semiótica, a lo que se le suele dar prioridad en la enseñanza, es la conversión entre registro, la transformación que debe priorizarse, pues es en esta transformación donde se toca la complejidad cognitiva de la comprensión en la actividad matemática (Duval, 2016).

En el caso de los objetos geométricos de interés para esta investigación, más que una conversión, es necesaria la articulación entre los registros de representación figural y discursivo, dado el funcionamiento cognitivo de la actividad geométrica, que son esenciales para identificar características, comprobar propiedades y conceptualizar, lo que implica una coordinación entre las unidades significante de cada registro de representación.

La comprensión conceptual, la diferenciación y el dominio de las diferentes formas de razonamiento, las interpretaciones – hermenéutica y heurística – de los enunciados, están íntimamente ligados a la movilización y a la articulación cuasi-inmediatas de algunos registros de representación semiótica. (Duval, 2017, p. 49)

Sin embargo, dicha coordinación depende del grado de congruencia entre las unidades significantes de cada registro; en el caso de los objetos geométricos esta coordinación involucra un cambio dimensional. La conversión entre registros es una transformación que no se da de manera natural, como se evidencia a continuación.

### **2.1.3 La no-congruencia entre representaciones de un mismo objeto**

Se mencionó anteriormente, que hablar de comprensión en matemáticas implica poder movilizarse de una representación semiótica a otra del mismo objeto. Sin embargo, Duval explica que esto solo es

posible, cuando ambas representaciones son congruentes, es decir, cuando cumplen las siguientes condiciones:

1. Correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen.
2. Igual orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones.
3. Convertir una unidad significativa en la representación de partida en una sola unidad significativa en la representación de llegada.

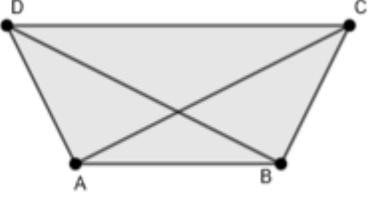
La falta de algunas de estas condiciones genera el fenómeno de no-congruencia, lo que ocasiona dificultades en la transformación de conversión y por tanto en la comprensión del objeto mismo.

Esta situación se vive en las escuelas diariamente, al no ser consientes como maestros, de dichas especificidades de las matemáticas, priorizando la actividad matemática escolar en un solo registro de representación, trabajando independientemente en cada uno sin realizar articulación. Un ejemplo de esta situación de no-congruencia los vemos en el fracaso escolar alrededor de la resolución de problemas, donde el estudiante debe dar solución a un enunciado presentado en el registro de lengua natural a través de representaciones numéricas, o algebraicas, o figurales según sea el caso. Normalmente se limita la situación a un problema de lectura, dado el desconocimiento de las condiciones descritas anteriormente.

En el siguiente ejemplo (*figura 3*) se da al estudiante información sobre las características del cuadrilátero  $ABCD$  (dimensión 2, en adelante 2D), haciendo énfasis en la propiedad de paralelismo entre dos segmentos  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  (dimensión 1, en adelante 1D) y se solicita la prueba de la congruencia entre los segmentos  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$  (1D). Para realizar la prueba solicitada, es necesario que los estudiantes comprueben la congruencia entre  $\triangle ABD$  y  $\triangle BAC$  (2D) a los cuales el enunciado no hace referencia. Además, ambos triángulos se encuentran sobrepuestos lo que dificulta su reconocimiento perceptual inmediato. Finalmente, después de reconocer los triángulos involucrados en la prueba y su congruencia, debe

concluir la congruencia de las partes correspondiente (unidades figurales 1D) para dar respuesta a la prueba solicitada inicialmente.

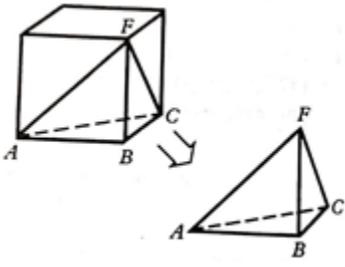
**Figura 3.** Congruencia de segmentos.

<p>Dado: <math>ABCD</math> es un trapecio isósceles con</p> $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ <p>Pruébese: <math>\overline{AC} \cong \overline{BD}</math></p>	
---	--

Fuente: Libro texto de Clemens, et al. (1998). Geometría. Editorial Pearson. (p.291 ejercicio 13)

Otro ejemplo de este fenómeno de no-congruencia entre las representaciones figurales de figuras tridimensionales y el enunciado dado en lengua natural, se evidencia en la *figura 4*, donde en el enunciado se orienta al estudiante a realizar tratamientos específicos sobre el sólido representado. Sin embargo, dichos tratamiento introducen el reconocimiento de segmentos (1D) que no hacen parte de los trazos “comunes” de construcción; además, hace necesario una descomposición tridimensional del sólido (guiada someramente por el enunciado) a través del corte (no ilustrado) del sólido por un plano (2D). Para dar solución a la consigna, el estudiante debe recurrir a la definición de pirámide regular que involucra unidades figurales de 1D y 2D no explícitas en el enunciado.

**Figura 4.** Sólidos geométricos.

<p>Supóngase que el cubo de la figura está cortado por un plano <math>ACF</math>, formando la pirámide <math>ABCF</math>. Explíquese por qué esta pirámide es regular. (Recuérdese que la arista de un cubo siempre tiene la misma longitud)</p>	
--	--

Fuente: Libro texto de Clemens, et al. (1998). Geometría. Editorial Pearson. (p. 436)

En los dos ejemplos anteriores se identifica la no-congruencia entre el registro de representación figural y el registro de representación en lengua natural, que hace de la actividad geométrica foco de múltiples dificultades tanto en el desarrollo de procesos como en la comprensión de estos.

Es fundamental que se propongan tareas que potencialicen la articulación entre los registros de representación y su congruencia. En el caso de la geometría, Duval plantea que los registros de representación semiótica que deben articularse son el registro figural y el registro de la lengua natural, en los cuales, a diferencia de otros registros de representación, los tratamientos efectuados por separado en cada uno no son suficientes para realizar la actividad (Duval, 2017).

Por la naturaleza plurifuncional de ambos registros, la actividad geométrica es particularmente compleja, debido al uso que se hace por fuera de la geometría, de las figuras u objetos geométricos, y lo mismo ocurre con el uso de la lengua natural fuera de la actividad matemática, que normalmente se generaliza, sin tener en cuenta las características que debe tener la lengua dentro de este campo.

Las dificultades asociadas al uso articulado de estos dos registros en la geometría, implica reconocer que una figura por sí sola no representa actividad geométrica, necesariamente debe estar anclada a un enunciado, es decir, a un discurso que se refiera a la figura, indique las acciones a realizar sobre la misma y oriente las operaciones figurales a realizar. Para establecer congruencias entre ambos registros es necesario identificar las unidades elementales y significantes de cada uno.

#### **2.1.4 Unidades figurales elementales**

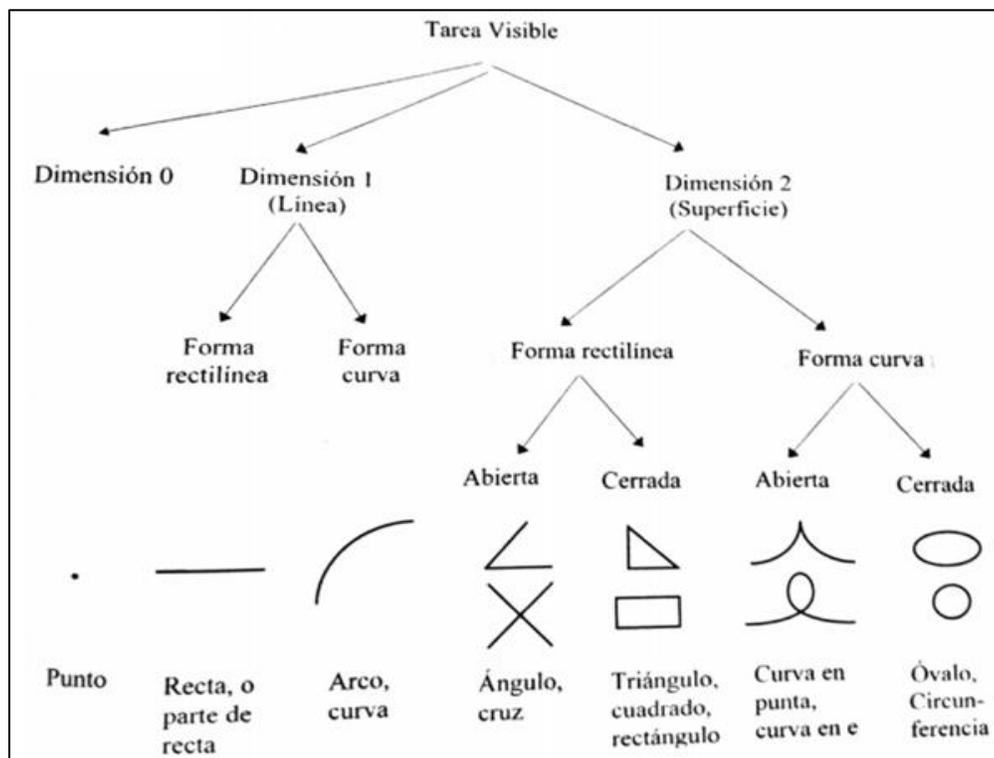
En su obra *Semiosis y pensamiento humano*, Duval (2017) define las unidades elementales de una figura, de acuerdo con dos tipos:

1. Variables Dimensionales (asociadas al número de dimensiones: 0, 1, 2 o 3)
2. Variables cualitativas (asociadas a la forma: línea recta, curva, etc.)

En donde establece que “...toda figura combina estos dos tipos de variables, el cruce de los valores de esta variable visual cualitativa con la variable de dimensión nos permite definir las unidades figurales elementales para el registro de las representaciones geométricas” (Duval, 2017, p. 198).

Estos dos tipos de variables se resumen en la *figura 5* donde se clasifican las unidades elementales figurales:

**Figura 5.** Clasificación de unidades elementales figurales



Fuente: Duval R. (2017)

### 2.1.5 Aprehensión operatoria en el registro figural

La posibilidad de realizar operaciones figurales depende del reconocimiento de las unidades figurales elementales, de manera que se puedan separar dichas unidades de acuerdo con su variable de dimensión, permitiendo realizar modificaciones sobre la figura (descomposición, reconfiguración, transformaciones) que dan a la figura su carácter heurístico en la resolución de problemas (Duval, 2017).

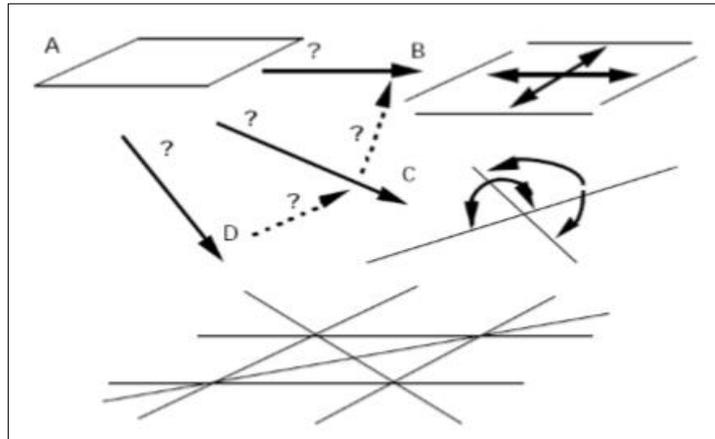
Los tratamientos figurales permiten la descomposición de una figura, en una variedad de subfiguras homogéneas o heterogéneas a la figura inicial, para reconfigurarla en otra figura que dé cuenta de la pregunta planteada en el enunciado, es decir, los tratamientos figurales posibilitan realizar acciones cognitivas sobre la figura. Pero también permite la descomposición en unidades figurales de dimensión inferior, visualizando los elementos geométricos a los cuales se hace referencia en el registro discursivo. Esta descomposición en unidades figurales elementales a nivel dimensional, Duval la categoriza como una deconstrucción dimensional de la figura y la reconoce como la entrada más potente en el estudio de los objetos geométricos.

Como se estableció anteriormente, la actividad geométrica implica la articulación entre los registros de representación figural y discursivo, como condición para pensar en la comprensión en geometría. Sin embargo, La coordinación de estos dos registros involucra un hiato dimensional que pasa inadvertido en la trasposición didáctica que se da en las aulas de clases, pues la diferencia dimensional entre enunciados de propiedades geométricas y figura se asume como un proceso natural que el estudiante puede hacer, pero que evidencia obstáculos cognitivos en el aprendizaje.

La utilización de una figura requiere un cambio continuo del número de dimensiones tomadas en consideración para la aprehensión perceptiva de las unidades figurales discernibles. De otra parte, el tratamiento de la situación matemática representada por la figura, requiere que se la restrinja a las unidades figurales de dimensión 1 o 0, mientras que la percepción se focaliza automáticamente sobre las unidades figurales de dimensión superior. (Duval, 2017, p.201)

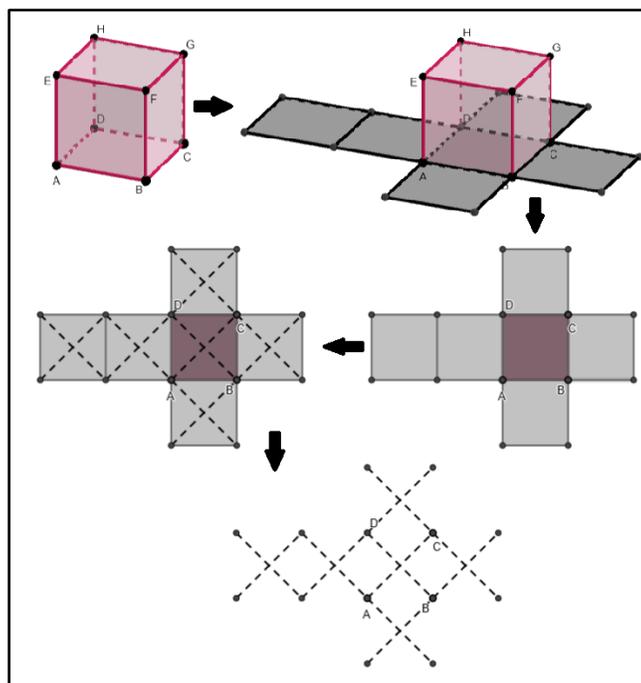
En las *figuras 6, 7 y 8*, se observa el proceso de deconstrucción dimensional para resaltar las unidades figurales elementales de la figura:

**Figura 6.** Descomposición en unidades figurales por deconstrucción dimensional de las formas



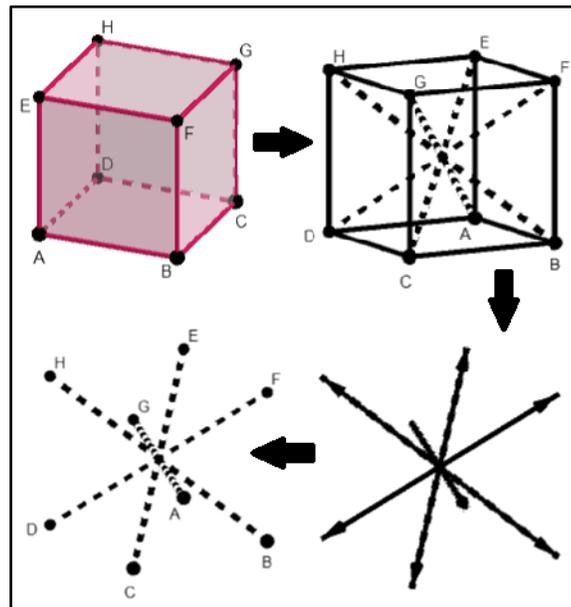
Fuente: Duval, R. (2005)

**Figura 7.** Deconstrucción dimensional (propuesta 1: 3D→2D→1D/0D).



Fuente: Elaboración propia

**Figura 8.** Deconstrucción dimensional (propuesta 2:  $3D \rightarrow 3D/1D \rightarrow 1D \rightarrow 1D/0D$ ).



Fuente: Elaboración propia.

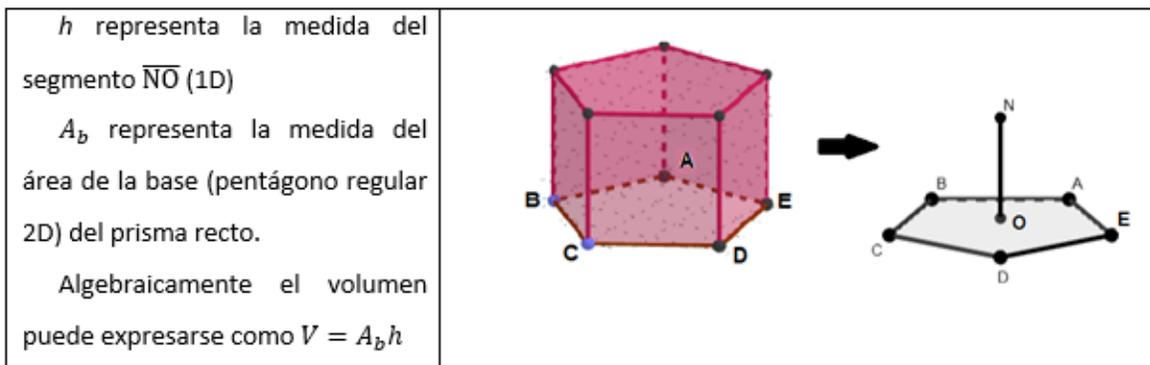
Como se observa, este hiato dimensional está presente también en el trabajo con sólidos geométricos (dimensión 3) que pueden presentarse como subfiguras (caras) que lo constituyen que son de dimensión 2 y no unidades de dimensión 3; o al analizar propiedades como el volumen, cuyo concepto es introducido en las escuelas desde el pensamiento métrico (y no como magnitud geométrica) y hace referencia a las unidades figurales elementales de dimensión 2 y 1 para definirlo a través de una operación algebraica.

En el caso del volumen de un prisma recto se tiene que la expresión algebraica que lo representa es  $V = A_b h$  (el producto del área de la base (bidimensional) por la longitud de la altura (unidimensional)), o puede expresarse en el producto de unidades de dimensión 1,  $V = a.l.h$  (el producto de la longitud del ancho, por la longitud del largo, por la longitud de la altura).

En la *figura 9*, se presenta la representación figural de un prisma recto pentagonal en correspondencia con una representación de su deconstrucción dimensional en unidades 2D y 1D, específicamente se resalta la forma poligonal de la cara base  $ABCDE$  (2D) y el segmento  $\overline{NO}$  que representa la altura (1D) del prisma. De esta manera, se establece la articulación entre enunciado, expresión algebraica y

representación figural por deconstrucción dimensional, para favorecer los procesos cognitivos realizados por los estudiantes en el aprendizaje de propiedades como el volumen de los sólidos geométricos.

**Figura 9.** Representación figural por deconstrucción dimensional (3D/2D y 1D), del volumen de un prisma pentagonal recto.



Fuente: Elaboración propia.

Desde esta perspectiva semiótica cognitiva, las situaciones geométricas propuestas, deben considerar la “entrada” utilizada en el estudio de un objeto geométrico, porque las tareas presentadas a los estudiantes son las que orientan su forma de ver las figuras, siendo la más potente la deconstrucción dimensional.

El cambio de dimensión que se hace presente en la enunciación de las unidades significantes que constituyen los enunciados (una dimensión menor) articulado con la representación figural (una dimensión mayor) puede solventarse si en los tratamientos efectuados simultáneamente en ambos registros, se realizan a través de una deconstrucción dimensional de las formas, donde la variable dimensional crea un puente al convertir un registro al otro.

Duval establece, que esta manera de “ver” implica descomponer la forma en sus unidades figurales elementales (*figura 6*), de un número de dimensión menor al de la forma inicial. Esta deconstrucción dimensional, como forma de visualización, permite la coordinación con el registro en lengua natural ya

que admite discriminar los elementos a los que el enunciado hace referencia, y así poder realizar las operaciones discursivas de designación, enunciación de propiedades y construcción de justificaciones.

Para un individuo que haya tomado conciencia del funcionamiento del registro figural y de la organización deductiva del discurso, y que haya alcanzado el estadio de la coordinación de los registros, es la articulación global la que constituye lo esencial de la actividad geométrica. (Duval, 2017, p.214)

Teniendo en cuenta que las actividades cognitivas fundamentales en la geometría son construir, razonar y ver (Duval, 2017), la forma como se presente un objeto geométrico para su aprendizaje debe favorecer las tres. La deconstrucción dimensional, permite un análisis cualitativo de las propiedades de las figuras, pues pone en primer plano las unidades figurales elementales que la constituyen, de acuerdo con el número de dimensiones del objeto geométrico.

Además, es independiente de lo relacionado al tamaño asociado a las medidas, lo que establece un diferencial importante, con respecto a lo que normalmente se realiza, ya que en la escuela se favorece, el uso de instrumentos de medida para la construcción de figura-espejo (copia de otra ya construida normalmente en los libros texto), o en el uso de las medidas para determinar, por ejemplo, el área de una figura, el volumen de un sólido, etc., que minimiza estas propiedades a la aplicación de una fórmula dada y al número que se obtiene, sin detenerse al reconocimiento de los elementos que hacen parte de la expresión algebraica, lo que puede convertirse en obstáculos en la comprensión del objeto geométrico en estudio.

Desde esta perspectiva teórica, es posible el diseño, modificación y organización de situaciones geométricas donde se priorice el reconocimiento y tratamientos de las unidades figurales elementales por deconstrucción dimensional, que favorezca la articulación entre el registro figural y el registro en lengua natural, necesarios para la comprensión en geometría.

En particular, para el interés de esta propuesta, la deconstrucción dimensional como entrada en el estudio de los sólidos geométricos, puede potenciar el análisis cualitativo y comparativo de propiedades como el volumen y el área de la superficie de prismas y pirámides, que permita la exploración de las unidades figurales elementales (en diferentes dimensiones), para descubrir relaciones y plantear hipótesis desde la argumentación de los tratamientos figurales.

### **2.1.6 Variables de visualización en la actividad geométrica**

Desde la teoría semiótica cognitiva, cuando se estudia un objeto geométrico a través de su representación figural, debe tenerse en cuenta la diferenciación entre los actos cognitivos de la visión y la visualización, donde el primero hace referencia a la percepción de los objetos físicos y la segunda, a la percepción de las representaciones (Marmolejo, 2014).

Esta diferenciación es fundamental cuando el estudiante se enfrenta a la resolución de un problema que presenta una figura como objeto central de análisis o como registro auxiliar para la resolución del problema, donde la figura juega un papel heurístico. En ambos casos, es a través de la visualización, y no de la visión, que se tiene acceso a las propiedades de las figuras, al reconocimiento de sus unidades figurales elementales que, posteriormente, permitirán desarrollar las operaciones pertinentes sobre la figura que permita la resolución del problema.

A partir de lo anterior, se hace necesario potenciar en las tareas, la actividad cognitiva de visualizar, este es el reto para los maestros, quienes a través de sus diseños o adaptaciones deben centrar especial atención a los factores de visualización, es decir, aquellos que pueden posibilitar o dificultar el acto de visualizar. En su tesis doctoral, Marmolejo (2014) hace referencia al papel que juegan los factores de visualización en la actividad geométrica y el papel heurístico de las figuras, a través de las operaciones que sobre éstas se realicen.

“Padilla (1992), menciona, que se ha demostrado que estos factores de visibilidad inciden en los tiempos de respuestas, asunto que resalta en gran manera la complejidad cognitiva que subyace en la visualización en relación con el registro semiótico de las figuras” (Marmolejo, 2014, p. 36).

Algunos de los factores de visualización para tener en cuenta en el diseño de actividades geométricas son: el uso de cuadrícula, resaltar el contorno de las figuras para destacar algunos de sus elementos y hacerlos visibles a los estudiantes, uso de figuras convexas, trazo de elementos auxiliares en congruencia con los mencionados en lengua natural, elementos de contraste, entre otros (Marmolejo, 2014).

#### **2.1.6.1 Control visual**

Marmolejo expone la importancia de reconocer en que variables visuales se puede ejercer una estructura de control, entendida como los elementos y estrategias utilizados por los estudiantes, para el desarrollo y comprensión de una actividad matemática, que permite tomar decisiones, establecer hipótesis, verificar resultados, entre otras acciones de las cuales puede establecer su relevancia (Balacheff y Gaudin, 2010; citado por Marmolejo, 2014, p. 44).

Estas estructuras determinan los tipos de control visual que pueden ser utilizados. El aporte realizado por Marmolejo al análisis de las formas de visualización, son importantes para el desarrollo de esta propuesta de profundización en el trabajo con los sólidos geométricos, especialmente, como variables de diseño en las actividades.

#### **2.1.7 Las funciones discursivas en la actividad geométrica**

Las funciones discursivas, definidas por Duval (2017), “son las funciones cognitivas que un sistema semiótico debe cumplir para que sea posible un discurso” (Duval, 2017, p. 124). Las cuatro funciones discursivas son: la función referencial de designación de objetos; la función apofántica de enunciados completos; la función de expansión discursiva; y la función de reflexividad.

Cada una de estas funciones, cumple con un conjunto de operaciones discursivas a partir de las cuales, es posible la producción y organización de un discurso. Para el interés de este trabajo de indagación, se centra la atención en las tres primeras funciones y sus respectivas operaciones discursivas.

- a) Función referencial de designación de objetos, a partir de la cual es posible identificar, nombrar y/o referirse sobre un objeto específico, como las representaciones figurales de los objetos geométricos. Las operaciones discursivas específicas de esta función son: *i)* la designación pura, a partir del uso de marcas específicas y de acuerdo al contexto teórico, como en este caso la geometría; *ii)* la operación de categorización simple, para designar un objeto a partir de la clase a la cual pertenece; *iii)* la operación de determinación, que precisa el campo de aplicación de la operación de categorización; y *iv)* la operación de descripción, que permite identificar un objeto a través de la integración de varias operaciones de categorización. La operación de descripción tiene gran importancia en el desarrollo de situaciones geométricas, como característica del uso especializado de la lengua natural (Duval, 2017).
- b) Función apofántica de expresión de enunciados completos, la cual permite, a partir de la designación, referirnos sobre el objeto designado, al hacer afirmaciones, construir proposiciones, describir observaciones y procedimientos, conjeturas, explicaciones, etc., en el marco de las situaciones propuestas, de los conocimientos movilizados y de los valores dados.

Esta función, se asocia a dos operaciones: *i)* operación de predicación, a partir de la cual se vincula la expresión de una propiedad, una relación o acción, con una expresión que designe el objeto, por ejemplo, geométrico; y *ii)* lo que se define como acto ilocutorio, que le asigna un valor social a los enunciados construidos, mientras que los enunciados construidos a través de la operación

de predicación pueden tener un valor epistémico<sup>2</sup>, un valor lógico<sup>3</sup> o los dos, de acuerdo al contexto teórico en los que están inmersos los enunciados. En este sentido, las operaciones de la función apofántica permiten la construcción de enunciados con sentido completo, como lo expresa Duval (2017).

Un enunciado tiene un “sentido completo” porque el acto de expresión que lo produce es completo. Un acto de expresión es un acto completo del discurso cuando la expresión producida toma un valor determinado en el universo cognitivo, representacional de los interlocutores. (Duval, 2017, p. 142)

- c) Función de expansión discursiva, esta función discursiva integra en un todo, la designación y las unidades apofánticas, para dar origen a un planteamiento discursivo que permita, por ejemplo, la construcción de justificaciones de los tratamientos realizados por los estudiantes, en el desarrollo de una tarea propuesta.

De acuerdo con lo planteado por Duval (2017), las formas asociadas a la función de expansión discursiva permiten reconocer, en un conjunto de unidades apofánticas con referencia a un objeto (geométrico en este caso), la unidad de un propósito; como en una descripción, una explicación o una justificación.

El aula de clases es un espacio para potencializar la producción de descripciones, explicaciones y justificaciones como formas de expansión discursivas. Comenzando con el diseño didáctico donde los objetos de aprendizaje, en el caso de esta propuesta, los objetos geométricos, son puestos en escena a través de su representación figural, y las producciones discursivas construidas por los estudiantes,

---

<sup>2</sup> El valor epistémico depende de la comprensión del contenido del enunciado, es decir, está asociado al conocimiento, sobre los enunciados, de quien aprende. Dos personas pueden tener un valor epistémico diferente frente a una misma proposición. (Duval, 2017. p.238)

<sup>3</sup> El valor lógico, se refiere al valor de verdad de la proposición enunciada “verdadero” o “falso” y estos resultan de procedimientos externos de verificación. (Duval, 2017. p.238)

resultan de la coordinación entre la aprehensión operacional (tratamientos figurales) y las operaciones discursivas, donde las funciones referencial y apofántica del registro discursivo, juegan un papel fundamental en la actividad matemática (Pontón, 2012), y orientan la exploración perceptual, la identificación de relaciones, el establecimiento de conjeturas y la verificación de propiedades, favoreciendo los procesos de comprensión.

La comprensión de un enunciado de problema según Pontón (2012) implica tener en cuenta diferentes elementos de orden semiótico-cognitivo, particularmente lingüísticos, por parte del maestro que diseña, selecciona o reescribe el enunciado problema, además, la comprensión de enunciados de problemas no depende solo de las reglas de la lengua, sino que también depende de la organización de los objetos de conocimiento y de la situación extra matemática a la cual se refiere, al igual que al trasfondo de los estudiantes (Pontón, 2012, p. 412) y las presuposiciones que el autor (o maestro) tienen al usar cada enunciado. En el caso de la comprensión en geometría, el discurso debe coordinarse con la visualización.

La visualización y la producción de enunciados en geometría requieren funcionamientos cognoscitivos que son diferentes y más complejos que los que obran por fuera de la geometría. Esta es la razón por la que su desarrollo y su coordinación deben considerarse como objetivos de enseñanza tan esenciales como los contenidos matemáticos mismos. Dado que aquí la comprensión del contenido no puede construirse sino a partir de una sinergia entre visualización y lengua natural. (Duval, 2005)

## **2.2 Referentes Matemáticos**

Desde el inicio del ciclo de educación básica, los estudiantes se enfrentan a una teoría matemática transpuesta, del saber sabio al saber enseñado (Chevallard, 1997), que da cuenta de un corpus matemático formal (definiciones, postulados, axiomas, teoremas) que orientan la actividad matemática

escolar, expuesta en los referentes curriculares, los libros de texto y el discurso del maestro de acuerdo con el nivel de su formación disciplinar.

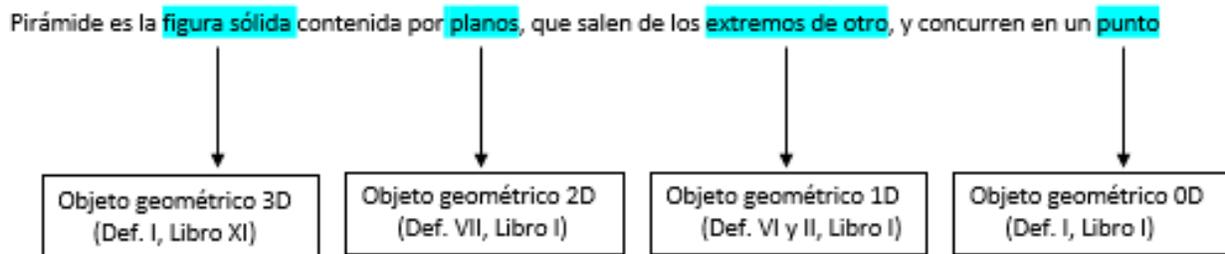
El referente teórico matemático usado para el desarrollo de este trabajo de indagación, son los Elementos de Euclides, teniendo en cuenta que la geometría que se aborda en las instituciones escolares a nivel de básica primaria y secundaria es la euclidiana. De esta obra, el interés particular, se encuentra en los contenidos de los libros I, II, IV, V, VI, XI, XII y XIII, ya que en ellos se hace referencia a los objetos geométricos de interés para esta propuesta: Definiciones básicas, nociones comunes (axiomas), postulados sobre rectas, ángulos, polígonos y sólidos geométricos. Es en este último grupo de objetos geométricos, los sólidos, específicamente los prismas rectos y pirámides cuadrangulares donde se centra el objetivo de esta indagación.

Del texto traducido de Los Elementos de Euclides (Simson, 1774), se extraen las siguientes definiciones asociadas a la geometría tridimensional de los sólidos geométricos, como fundamentos teóricos de referencia:

#### Libro XI (Definiciones)

- (Def. I) “sólido es lo que tiene longitud, latitud, y grueso”.
- (Def. II) “los extremos, o términos del sólido, son superficies”
- (Def. VIII) “planos paralelos son los que continuados nunca se encontrarán”
- (Def. XII) “pirámide es la figura sólida contenida por planos, que salen de los extremos de otro, y concurren en un punto”
- (Def. XIII) “prisma es la figura sólida contenida por planos, en que dos opuestos son iguales, semejantes y paralelos; y los demás paralelogramos”

Puede observarse que en la definición de pirámide y prisma surgen objetos de naturaleza bidimensional (2D), unidimensional (1D) y de cero dimensiones (0D) como es el caso de los planos, líneas y puntos respectivamente, que son presentados en el libro I. Esto corresponde a un cambio dimensional entre el objeto geométrico representado y su caracterización (representación discursiva).



De acuerdo con lo anterior, la definición de pirámide se introduce a partir de la definición de otros objetos geométricos que en conjunto la constituyen. ¿Puede entonces presentarse una pirámide deconstruida en los elementos constitutivos de dimensiones inferiores sin perder su esencia geométrica inicial?

En la geometría Euclidiana, los objetos geométricos son concebidos puros e inmutables, y es a partir de los postulados, definiciones y proposiciones que establecen sus propiedades y relaciones (Murillo, 2017). A partir de lo anterior, las definiciones y proposiciones expuestas en el libro I con respecto a las nociones de punto, segmento, rectas, ángulos y polígonos, permiten la definición de los sólidos geométricos a partir de dichos elementos, teniendo en cuenta que hacen parte del mismo corpus teórico.

Sin embargo, aunque el referente teórico geométrico son los Elementos de Euclides, el lenguaje utilizado en las traducciones fieles a la obra original, hacen compleja su lectura. Se muestra a continuación, las definiciones traducidas a el lenguaje escolar presentadas en el libro texto de geometría euclidiana de Rich (1989), que mantienen la rigurosidad de las originales en tanto a contenido, pero clarificando los enunciados.

La elección del texto responde a dos aspectos: el primero, al valor de verdad de los enunciados expuestos (definiciones, postulados, etc.), tomando como corpus teórico la geometría Euclidiana; y el segundo aspecto, hace referencia a la precisión en el lenguaje utilizado para la interacción con el interlocutor (lector) donde se evidencia la importancia de la designación y la diferencia entre objeto representado y representación, lo cual es coherente a los elementos aportados por el marco teórico semiótico cognitivo. Por ejemplo, en el texto capítulo 1, titulado Líneas, ángulos y triángulos, se presenta la noción de punto:

Un punto sólo tiene posición. No tiene longitud, anchura o grosor. Se representa al punto por medio de un “punto dibujado”. No debe olvidarse, sin embargo, que el “punto dibujado” representa al concepto de punto, pero no es un punto conceptualmente. Se designa al punto conceptual por medio de una letra mayúscula junto al punto dibujado, esto es: ●A”. (Rich, B. 1997, p. 1)

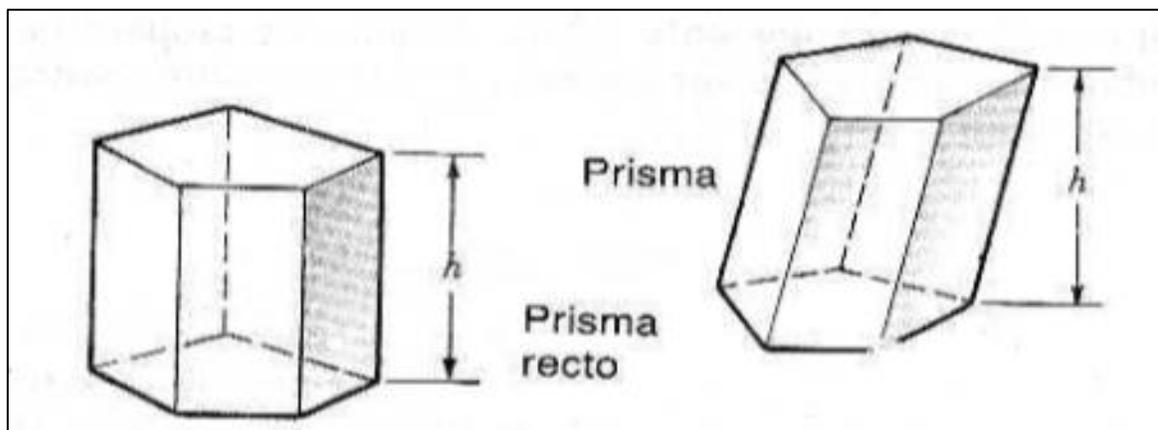
Es importante que, desde la presentación de los objetos geométricos que conforman el corpus teórico, exista claridad y precisión en los enunciados y sean congruentes con la perspectiva utilizada. En cuanto a la definición de sólido (o cuerpo) geométrico, en el texto se presenta de la siguiente manera:

Un sólido es la porción de espacio comprendida entre superficies planas y curvas. Así, la pirámide, el cubo, el cono, el cilindro y la esfera, son sólidos. Un sólido tiene tres dimensiones: largo, ancho y espesor. Los ejemplos prácticos de sólidos incluyen una caja, un ladrillo, un bloque y una pelota. Éstos no son, sin embargo, los sólidos puros e ideales que conciernen a la geometría sólida. La geometría sólida estudia las propiedades geométricas de sólidos “perfectos”. Éstas son su forma, tamaño, la relación de sus partes, y la relación entre sólidos; se descarta propiedades físicas tales como su color, textura o peso. (Rich, B. 1989, p. 321)

En la anterior definición, se retoma la expuesta en los elementos (libro XI) “un sólido es lo que tiene longitud, latitud y grueso”, pero ejemplificando de manera que se diferencie entre el objeto representado y algunos objetos físicos que tienen una forma sólida específica; además, se involucra la definición en términos de superficie (2D). Esta manera de presentar los objetos geométricos corresponde con los objetivos de este trabajo de indagación y la perspectiva semiótica cognitiva seleccionada.

Otra definición es la de prisma: “Un prisma es un poliedro en el cual dos de sus caras son polígonos paralelos y las caras restantes son paralelogramos...si las caras laterales son rectángulos, el prisma es recto” (Rich, B. 1989. p. 322). En la *figura 10* se representan dos prismas de características diferentes con respecto al ángulo que se forma entre las caras bases y las caras laterales.

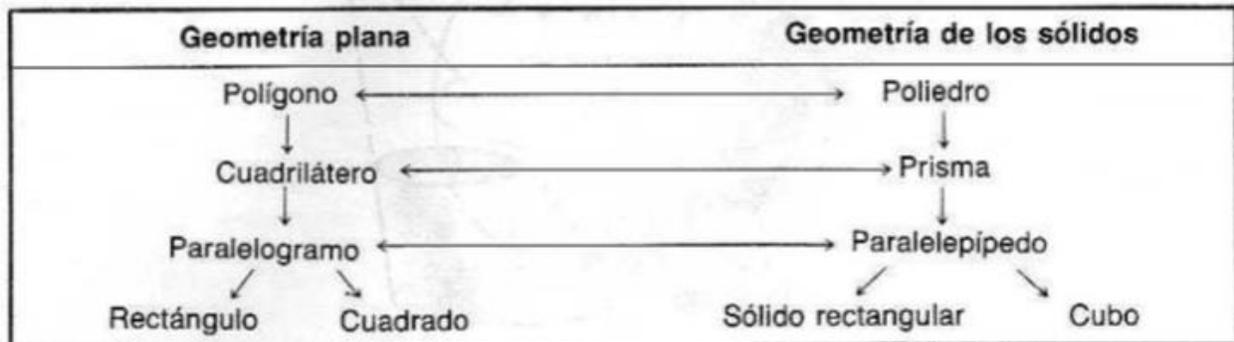
**Figura 10.** Representación figural de dos prismas.



Fuente: Rich, B. (1989)

En la *figura 11* se relaciona el nivel dimensional entre los objetos geométrico de bidimensionales de la geometría plana, y los objetos geométricos tridimensionales correspondientes a la geometría de los sólidos. En dicha relación, se destacan las formas poligonales como configuraciones de cada poliedro referenciado

**Figura 11.** Relaciones dimensionales entre la configuración figural de polígonos y poliedros.



Fuente: Rich Barnett. (1989)

Sin embargo, en el texto de Rich (1989), la presentación del área de la superficie de sólidos y el volumen centra su atención en la medida, desde las relaciones unidimensionales y bidimensionales, sin hacer un acercamiento cualitativo que es parte de la propuesta en este trabajo. Por esta razón, el análisis de ambas propiedades se tendrá en cuenta, tanto en el referente conceptual matemático, como la construcción cualitativa de la magnitud.

El corpus teórico que proporciona los elementos, tanto en su presentación original como en las adaptaciones realizadas en el libro texto seleccionado corresponden a las propuestas curriculares para el nivel de escolaridad (séptimo grado de educación básica)

### 3. Diseño Metodológico de la Indagación

En este capítulo, se presentan y describen los aspectos metodológicos que orientan este trabajo de indagación, organizados en tres criterios que sustentan la selección metodológica: *i)* la naturaleza cualitativa de la indagación; *ii)* la pertinencia del enfoque metodológico que dé respuesta a la pregunta de indagación y cumplimiento a los objetivos planteados; y *iii)* la población considerada para el desarrollo de la indagación.

Posteriormente, se presenta un diagrama estructural del proceso metodológico de la indagación, donde se explicita cada fase del procedimiento y los criterios de selección de los estudiantes que participan en la aplicación de la secuencia de situaciones geométricas. Finalmente, se presentan los métodos de recolección de datos y se contextualiza la institución educativa a la que pertenecen los estudiantes.

#### 3.1 Enfoque general de este trabajo de indagación

Con respecto al primer criterio, el trabajo final de indagación responde a una perspectiva de tipo cualitativo, enmarcado en el campo problemático de la educación matemática, específicamente, las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los objetos geométricos tridimensionales, es decir, se centra en un problema educativo, cuya naturaleza es cualitativa. Como lo menciona Munarriz (2001).

“La necesidad de comprender los problemas educativos desde la perspectiva del actor, a partir de la interrelación del investigador con los sujetos de estudio, para captar el significado de las acciones sociales, es lo que ha llevado al estudio de los problemas desde una perspectiva cualitativa”. (Munarriz, B. 2001. p.102).

Desde esta perspectiva de indagación, se posibilita realizar el estudio, recolección y análisis de los datos, en el ambiente usual o natural de los participantes, permitiendo la observación de sus comportamientos, actitudes, reacciones, entre otros aspectos.

De acuerdo a lo planteado por Creswell (1997) y Neuman (1994), citado por Hernández (2010, p. 10), el investigador, en este caso, maestro/investigador, cumple con diversas actividades entre las que se destacan: observar eventos y actividades cotidianas tal y como suceden en sus ambientes naturales (aula de clases, espacios académicos); está directamente involucrado con los participantes en el proceso de indagación (los estudiantes) y con sus experiencias personales, lo que le permite entenderlos y desarrollar empatía hacia ellos; presenta un punto de vista interno (desde su papel como maestro), manteniendo una perspectiva analítica como observador externo a la luz del marco teórico de referencia; puede utilizar diversas técnicas de investigación, así como habilidades sociales que se adaptan a las situaciones que emergen, posibilitando la construcción de descripciones detalladas y la toma de decisiones sobre los datos que pueden ser relevantes en la indagación.

Con relación al segundo criterio, el objetivo general se enfoca al desarrollo de los procesos de visualización por deconstrucción dimensional de las formas y la articulación entre los registros figural y discursivo, esenciales en el desarrollo y comprensión de algunas situaciones geométricas. Por lo anterior, se requiere elementos metodológicos que permitan la planeación, ejecución y evaluación de situaciones que den cuenta de dichos procesos de visualización, enmarcados en la teoría semiótica cognitiva. Sin embargo, aunque el trabajo final de indagación centra su atención en los procesos de visualización de los estudiantes, el papel del maestro, como maestro/investigador es fundamental en la fase de diseño de las situaciones y en su interacción con los estudiantes y el conocimiento.

A partir de lo anterior, la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (2007), aportan elementos metodológicos significativos para alcanzar los objetivos planteados. En esta teoría, se propone el diseño

de un conjunto de situaciones específicas de conocimiento, organizadas por el maestro/investigador que genera u orienta la necesidad de resolverlas, de manera que el nuevo conocimiento emerja como una solución a las tareas planteadas en cada situación, es decir, la interacción entre los sujetos (estudiante-maestro) y el medio (la situación geométrica) con relación a un conocimiento y a las decisiones tomadas en su resolución, pero que además tiene en cuenta el contexto en el cual se desarrolla y al que pertenece los participantes.

En este sentido, se identifica las interacciones entre maestro, estudiante, conocimiento y contexto, de manera que uno de los actores (por ejemplo, el maestro) exhibe la intención de modificar el sistema de conocimientos de otro (estudiante) tales como el vocabulario usado, los modos de justificación, las formas de visualizar, orientado a partir de las tareas propuestas y, regulados por las acciones que cada uno realiza (intencionalidades explícitas e implícitas; formulación de preguntas y respuestas; reacciones; decisiones frente a las tareas propuestas; control sobre las interacciones maestro-estudiantes, estudiantes-estudiantes, estudiante-conocimiento, maestro-conocimiento, etc.). de manera que se favorezca los procesos de aprendizaje como un resultado de dichas interacciones, que posteriormente serán institucionalizadas.

Finalmente, con relación a la población sujeto de investigación, y teniendo en cuenta, como lo señala Tejedor (1986), citado por Munarriz (2001, p.103) "la investigación cualitativa requiere una metodología sensible a las diferencias, a los procesos singulares y anómalos, a los acontecimientos y a los significados latentes"; el estudio de caso es la metodología central de este trabajo final de indagación, donde se observa las características de un grupo de individuos con el propósito de analizar distintos aspectos de un mismo fenómeno (Munarriz, B. 2001, p.104). En la enseñanza, los estudios de caso han permitido evaluar cómo evolucionan los estudiantes cuando se aplica un sistema de enseñanza o un diseño de estudio particular (Muñiz, 2010), convirtiéndose en una herramienta valiosa de investigación.

En este sentido, una metodología enmarcada en una perspectiva cualitativa y desarrollada a partir del estudio de casos de carácter exploratorio (al favorecer un acercamiento entre las teorías inscritas en el marco teórico y la realidad objeto de estudio) e interpretativo (porque permite, a partir de los datos, defender o desafiar presupuestos teóricos presentados antes de recoger los datos), es pertinente para este trabajo de indagación de acuerdo con los objetivos propuestos, por características como: participación intensiva en un contexto de campo, que en este caso es el aula de clase con un grupo de estudiantes de grado séptimo de educación básica, y la interrelación continúa entre maestro/investigador-participantes en el escenario natural, donde el papel del maestro-investigador propicia las condiciones necesarias para este método de indagación.

Además, En los estudios de casos, el investigador, particularmente, el maestro-investigador tiene la oportunidad de describir y analizar aquello que ha observado, generando espacios de reflexión que involucre a los participantes (Stake, 1999), posibilitando la transformación de prácticas y participación, tanto del maestro como de los estudiantes.

Otra fortaleza del estudio de casos, como lo menciona Arnal, del Rincón y Latorre (1994), citado por Álvarez (2012, p. 2), es permitir generar hipótesis y descubrimientos, debido a que centra su interés en un individuo, grupo o institución, y en su flexibilidad y aplicabilidad a situaciones naturales, como es el caso del salón de clases. Por lo anterior, la elección del estudio de caso como método de indagación, favorece el análisis de los procesos de comprensión que desarrollan los estudiantes al interactuar con actividades donde se moviliza la visualización de los sólidos geométricos por deconstrucción dimensional, desde una participación activa del maestro-investigador inmerso en el contexto de los estudiantes observados.

De las ventajas de los estudios de casos como método de indagación, se resalta algunas de las presentadas por López (2013) y adaptadas para este trabajo específico de indagación: (a) la oportunidad

de descubrir procesos realizados por los estudiantes que bajo otras condiciones pasarían por alto; (b) identificar realidades educativas complejas, ocultas por las prácticas tradicionales, pero que son necesarias para entender las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes en su proceso de aprendizaje y que en muchos casos corresponden a la existencia de obstáculos epistemológicos o didácticos que no se tienen en cuenta en la enseñanza de los objetos geométricos; y (c) tener la oportunidad de aportar elementos relevantes al marco teórico y a otras investigaciones respecto al tema de estudio, a partir de la exploración y el análisis de los datos obtenidos.

Una de las limitaciones que presenta el estudio de caso como método de indagación, es la imposibilidad de generalizar los resultados obtenidos en el proceso (Munarriz, 2001), esto se debe a la especificidad del caso (por ejemplo, tipo de población, perspectiva teórica del investigador). Pero, como lo plantea Flórez (1999), la investigación cualitativa no busca la generalización de resultados, debido a que los resultados están asociados a una población específica, en un contexto y condiciones particulares.

Otra limitación que se expone en este método de indagación es la validez de los resultados; sin embargo, dichos resultados representan oportunidades de profundizar o generar nuevas hipótesis de investigación, en el caso de la educación, las propuestas presentadas pueden ser validadas en la enseñanza de otros objetos, en otro contexto y tipo de población, partiendo de las conclusiones como elementos preliminares en la nueva indagación. Para este trabajo de indagación, la validación se realiza de manera interna desde la confrontación entre lo esperado en el diseño de las tareas de la situación didáctica (*a priori*), a la luz de la teoría semiótica cognitiva, y los resultados obtenidos (*a posteriori*), y cuyos aportes pueden ser considerados en futuras investigaciones con relación al objeto de estudio.

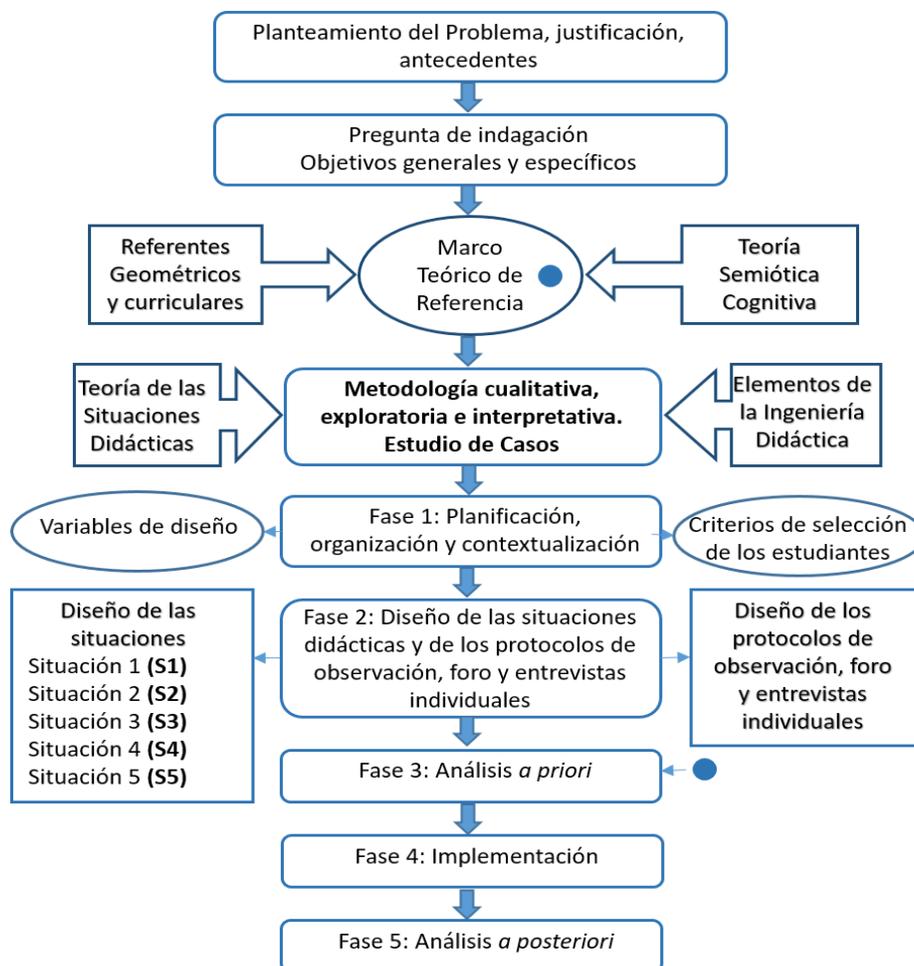
El análisis *a priori* y *a posteriori* que se integran como elementos metodológicos, hacen parte de la Ingeniería didáctica, definida como metodología de investigación, caracterizada por una parte, por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase (concepción, realización,

observación y análisis de secuencias de enseñanza), que se ubica en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori* (Artigue, M. 1995, p.37). Son estos elementos, el análisis *a priori* y *a posteriori*, los que se retoman para este trabajo final de indagación.

### 3.2 Estructura del proceso metodológico de este trabajo de indagación

A continuación, se presenta en la *figura 12*, la estructura general del proceso metodológico desarrollado en el presente trabajo de indagación, para el estudio de caso. Cada fase se explicita posteriormente:

**Figura 12.** Estructura general del proceso metodológico del trabajo de indagación



**Fuente.** Elaboración propia, basada en Martínez (2006)

### 3.2.1 Fase 1: Planeación, organización y contextualización del estudio

En esta fase, se establecen las variables didácticas de diseño que orientan la construcción de las situaciones geométricas, determinadas a partir de los objetivos de la indagación, del marco teórico de referencia y del objeto de estudio geométrico, explicitado en el capítulo de diseño y análisis *a priori*. También, se identifica, el conjunto de instrumentos de recolección de la información que serán aplicados durante la fase 3 de implementación, resumidos en la tabla 4, donde se exponen la nomenclatura que simboliza cada instrumento y el momento de su aplicación. Además, se identifica los criterios de selección de los estudiantes que harán parte del estudio de caso, teniendo en cuenta factores como la emergencia mundial de pandemia a causa del COVID-19, que coincidió con el desarrollo, aplicación y análisis de la información de este trabajo final de indagación. Finalmente, se caracteriza la población educativa a la cual pertenece el grupo de estudiantes seleccionados y el maestro/investigador.

#### 3.2.1.1 Instrumentos de recolección de la información

Los instrumentos seleccionados responden a los objetivos del trabajo de indagación, a la caracterización de la población educativa y a las condiciones especiales marcadas por la emergencia mundial a causa de la pandemia del COVID-19 que obligó a los centros educativos de todo el país, tanto públicos como privados, a suspender las clases presenciales y adaptarse a la virtualidad, lo que general limitaciones en la selección de los instrumentos de recolección de la información, así como las interacciones entre los participantes del estudio de caso.

- Instrumento 1. El instrumento principal de recolección de la información está representado por las producciones de los estudiantes frente al conjunto de situaciones geométricas diseñadas en la fase 2. Las situaciones geométricas se presentan de forma impresa (a color y doble cara) en formato carta, y se distribuyen a los estudiantes seleccionados de manera personal (domicilio a cada casa), es decir, que el desarrollo de las situaciones es individual (con acompañamiento del maestro por medio virtual

(WhatsApp), en los momentos que el estudiante así lo solicite, durante los horarios acordados según el cronograma presentado en la fase 4).

- Instrumento 2. Intervención virtual individual, como medio de comunicación principal, se selecciona la aplicación WhatsApp, por accesibilidad, pues el único medio tecnológico común entre los estudiantes seleccionados es el celular, con acceso continuo de conectividad a dicha aplicación. Durante los tiempos establecidos para el desarrollo de cada situación, los estudiantes seleccionados pueden establecer comunicación por audio, video u chat + fotos, con el maestro/investigador, con el fin de manifestar preguntas sobre los enunciados, proponer estrategias o mostrar sus avances en el desarrollo de las tareas. Los registros se realizan por transcripción de los audios, videos u chat, con previo consentimiento escrito por los padres o acudientes.

- Instrumento 3. Intervención virtual colectiva (Foros), en total se proponen 3 foros, distribuidos al final del desarrollo de las situaciones geométricas agrupadas de la siguiente manera: primer foro al finalizar el desarrollo de las situaciones 1 y 2; segundo foro, al finalizar las situaciones 3 y 4; tercer foro, al finalizar la situación 5. La manera como son agrupadas las situaciones para la realización del foro se asocia a la etapa de cada situación de acuerdo con el diseño explicitado en la fase 2. Los foros se realizan a través del grupo de WhatsApp creado para tal fin, donde la administradora del grupo (quién crea y vincula a los participantes) es la maestra/investigadora. De acuerdo con el cronograma establecido (fase 3) los estudiantes se conectan al grupo por videoconferencia, audio y chat, donde la maestra/investigadora propone un conjunto de preguntas sobre el desarrollo de las situaciones en general, además de preguntas puntuales frente a algunas tareas como puntos focales para la interacción entre los estudiantes seleccionados al expresar sus respuestas y justificaciones. Los registros se realizan por transcripción de los audios, videos u chat, con previo consentimiento escrito por los padres o acudientes.

A continuación, se presenta en la tabla 4, el resumen de los instrumentos de recolección de la información, la nomenclatura que se usa en los análisis para su referencia y el momento de su implementación:

**Tabla 4.** Instrumentos de recolección de la información y datos a recolectar

Instrumento	Nomenclatura para designar y referenciar	Momento de implementación	Datos a recolectar
Situaciones geométricas: Producción de los estudiantes.	<b>S1</b> (situación 1)		hojas de trabajo
	<b>S1t1</b> (situación 1, tarea 1)		desarrolladas con la
	<b>S1t1(1)</b> (situación 1, tarea 1, enunciado 1)	Fase 3: Implementación	evidencia de los Tratamientos
	Para todas las situaciones se sigue el mismo modelo de nomenclatura.	Al inicio de la fase	figurales y producciones discursivas escritas.
Intervención virtual individual	<b>IviEn</b> (Intervención virtual individual estudiante n)	Fase3: Implementación	Audios y escritos de las intervenciones
	Por ejemplo, <b>IviE1</b> (observación virtual individual estudiante 1) <b>IviMs</b> (Intervención virtual individual maestro/investigador)	Durante el desarrollo de cada situación didáctica de acuerdo con el cronograma de implementación.	realizadas por los estudiantes y el maestro/investigador de manera individual
Intervención virtual colectiva	<b>IFnEn</b> (Intervención virtual Foro <sub>n</sub> , del estudiante n)	Fase 3: Implementación	Audios y escritos de las intervenciones
	Por ejemplo, <b>IF<sub>1</sub>E1</b> (observación virtual Foro 1 del estudiante 1)	Al finalizar cada conjunto de situaciones de acuerdo con el cronograma de implementación.	realizadas por los estudiantes y el maestro/investigador de manera colectiva.
	<b>IF<sub>1</sub>Ms</b> (Intervención virtual Foro maestro/investigador)		

**Fuente:** Elaboración propia

### 3.2.1.2 Criterios de selección de los estudiantes para el estudio de caso

Para este trabajo de indagación, y de acuerdo con la metodología en una perspectiva cualitativa, exploratoria e interpretativa enmarcada en un estudio de caso, la selección de los estudiantes participantes responde a los siguientes criterios:

- I. Nivel de escolaridad e institución educativa: los estudiantes deben pertenecer al grado séptimo de educación básica secundaria de la institución educativa de carácter público seleccionada, ubicada en la ciudad Santiago de Cali, departamento del Valle, país Colombia.
- II. Grupo de escolaridad: Los estudiantes deben ser del grupo 7-2 jornada de la mañana, donde la maestra/investigadora orienta el área de matemáticas, con fines de ser actor activo en el proceso de implementación, además de conocer la población estudiantil, sus antecedentes académicos y sus hábitos escolares frente al área.
- III. Continuidad escolar: los estudiantes seleccionados deben haber cursado el grado sexto de educación básica secundaria en la misma institución y con la maestra/investigadora, para garantizar la continuidad en los procesos de aprendizaje, metodología de aula, e igualdad de condiciones de los participantes frente a los desempeños abordados y considerados como nociones comunes de geometría y aritmética.
- IV. Herramientas digitales y conectividad: los estudiantes deben tener acceso, por lo menos, a una herramienta digital con acceso a internet, como celular Smartphone, computador o Tablet.
- V. Ubicación con respecto a la institución educativa: el estudiante debe pertenecer a la misma comuna a la que pertenece la institución educativa, para favorecer la distribución y recepción del material impreso (las situaciones geométricas), así como tener un punto de referencia conocido y cercano (la institución educativa) en caso de ser necesario un encuentro presencial.
- VI. Interés de participar en la implementación: el estudiante debe mostrar interés en participar por voluntad propia en el desarrollo de las situaciones geométricas, así como en los foros. Es

importante resaltar, que el grupo de 7-2 de la institución orientado por la maestra/investigadora, conocía del proyecto, sus características y propósitos, previó a la emergencia presentada a causa por el COVID-19, lo que permite la toma de decisiones sobre su participación voluntaria.

De acuerdo con los criterios expuestos, se seleccionan inicialmente 8 estudiantes que cumplen con todos los criterios. Sin embargo, antes de la implementación, dos de los estudiantes cambian de domicilio e institución educativa, quedando el grupo final constituido por seis (6) estudiantes.

### **3.2.1.3 Contextualización de la población participante en el estudio**

Se contextualiza la población que participa del estudio de caso, en el desarrollo del trabajo de indagación de acuerdo con las siguientes características: contexto educativo y social de la institución y la comunidad educativa en general; los procesos geométricos previos del grupo al que pertenecen los estudiantes seleccionados, las condiciones grupales frente al área y antecedentes de participación.

El trabajo de indagación se realiza con los estudiantes de grado séptimo de educación básica secundaria de una institución educativa de carácter público, ubicada en la ciudad de Cali, en la comuna 16. La población estudiantil que conforman los grupos en la institución tiene alrededor de 3100 estudiantes, con un promedio de 38 estudiantes por grado, cuyo estrato socioeconómico está ubicado, principalmente, entre 1, 2 y 3.

Los núcleos familiares de la población estudiantil son diversos, abarcando familias nucleares y monoparentales, además de un número significativo de familias desplazadas, y del vecino país Venezuela. Todas ellas inmersas en sectores vulnerables de mediano y alto riesgo de violencia, micro tráfico y consumo de sustancias psicoactivas. Las actividades laborales de los padres de familia corresponden a contratos definidos como empleados en diversos sectores, muchos de ellos con ocupaciones de tipo informal, donde uno o todos los responsables adultos trabajan, dejando el cuidado de sus hijos a parientes o terceros sin vínculo familiar, pues es la forma como pueden sostener las necesidades básicas del hogar.

La institución es de carácter técnico industrial, con 4 especialidades que son dibujo técnico, electricidad, electrónica y sistemas, que hacen parte del proceso de articulación con el Sena; atiende los niveles de educación preescolar y básica primaria en 4 sedes, y la básica secundaria y educación media en la sede central. Además, ofrece educación para adultos en la jornada nocturna, posibilitando el acceso a la educación de la mayor parte de la población del sector.

El proyecto educativo institucional está orientado a la formación por procesos que busca la implementación de nuevas prácticas pedagógicas. Sin embargo, carece de un modelo pedagógico definido que oriente las actividades pedagógicas y articulen las metodologías. En el área de matemáticas, la institución cuenta con 7 profesores para secundaria, distribuidos 4 en la mañana y 3 en la tarde.

El grupo donde se realizará el estudio de caso es del grado séptimo jornada de la mañana, consta de en promedio de 37 estudiantes (hombres y mujeres), la mayoría provienen de las escuelas de primaria de la institución. La intensidad horaria de matemáticas es de 5 horas semanales, distribuidas en el plan de estudios así: 4 para aritmética y geometría, 1 hora para estadística. La institución no cuenta con recursos tecnológicos como computadores o tabletas para las áreas académicas; cuenta con conectividad a internet, una red para maestros y directivos, otra para estudiantes de baja velocidad.

El grupo 7-2 jornada de la mañana de donde se selecciona los estudiantes participantes, curso el grado sexto con la misma maestra/investigadora del actual año escolar; tienen nociones sobre algunos objetos geométricos estudiados en la geometría euclidiana, específicamente, las características y propiedades de las figuras planas y sus representaciones figurales, desde una exploración cualitativa, de acuerdo con los acuerdos establecidos por todos los maestros del área en el año lectivo 2019. La intensidad horaria destinada al estudio del pensamiento espacial y sistemas geométricos, de acuerdo con plan de aula del año lectivo 2019, era de una hora semanal, lo que dejó poco tiempo para avanzar en el estudio de la tridimensionalidad, característica decisiva para seleccionar este grupo como población de selección.

En cuanto al pensamiento numérico, los estudiantes del grupo 7-2, presentan manejo de las operaciones, propiedades y relaciones entre las representaciones numéricas, del conjunto de los números naturales y enteros. Tienen noción de las representaciones fraccionarias de los números racionales positivos, como parte todo y sus representaciones unidimensionales y bidimensionales. Lo que contribuye como antecedente relevante en el desarrollo de las situaciones geométricas diseñadas y propuestas en este trabajo de indagación.

El grupo es de participación activa en su mayor porcentaje, hacen preguntas abiertas, manifiestan opiniones sobre las intervenciones de otros compañeros y presentan buenas relaciones personales y de convivencia entre ellos. Se tiene apoyo constante de los padres de familia y de la orientación de grupo (maestro titular del grupo), lo que favorece la participación y responsabilidad de los compromisos académicos adquiridos.

### **3.2.2 Fase 2: Diseño de las situaciones geométricas y de los protocolos de intervención virtual.**

En esta segunda fase del estudio, se procede al diseño de las situaciones geométricas, de acuerdo con las variables didácticas (visuales y de control) seleccionadas que son detalladas en el capítulo de diseño y análisis *a priori*. En cuanto a los protocolos de observación virtual, en el caso individual, se orientan la intervención del maestro/investigador, de acuerdo con las preguntas que surgen de cada estudiante, centrando la atención en las variables visuales seleccionadas en el diseño (análisis *a priori*), de manera que el estudiante logre identificar los elementos a partir de los cuales puede llegar a dar respuesta a los enunciados.

La intervención del maestro/investigador en esta parte se condiciona a las necesidades expresas del estudiante, por lo que no se diseña propiamente un protocolo fijo, sino una postura sobre el tipo de orientación (devolución) a los interrogantes de los estudiantes.

En el caso de la observación virtual colectiva, se diseña el conjunto de preguntas, designadas como preguntas orientadoras, alrededor de las cuales se desarrolla el foro. Las intervenciones de los estudiantes al responder las preguntas generan el debate en caso de tener respuestas diferentes o se identifica un patrón de respuesta y justificación en caso de ser iguales. Este protocolo no es totalmente fijo pues, aunque las preguntas se diseñan previas al foro, de acuerdo con las interacciones entre los participantes, el maestro/investigador puede introducir una nueva pregunta que redireccione la atención o focalice la discusión hacia los elementos objeto de estudio.

### **3.2.3 Fase 3: Diseño y Análisis a priori de las situaciones geométricas**

En el análisis a priori, se establecen las variables didácticas cognitiva y de diseño, que son consideradas pertinentes con relación al problema de indagación, los objetivos planteados y el marco teórico de referencia, a partir de las cuales se diseña las situaciones geométricas. De acuerdo con lo planteado en la ingeniería didáctica, es en el *análisis a priori*, donde se describe de manera detallada el tipo de variables involucradas que son categorizadas como macro-didácticas y micro-didácticas (Artigue, M. 1995).

Además, en este tipo de análisis se plantean los supuestos frente a las producciones de los estudiantes, lo que se espera suceda en el desarrollo de las situaciones (comportamientos, dificultades, razonamientos), que dan paso a establecer hipótesis frente a los resultados esperados a la luz del marco teórico. La importancia del análisis *a priori* en el desarrollo del trabajo de investigación hace necesario que se le dedique un capítulo, donde se expongan todos los factores mencionados.

### **3.2.4 Fase 4: Desarrollo de la implementación**

En esta fase, posterior a la distribución del material impreso a cada estudiante, tal como se describe en la fase 1, se procede a iniciar el desarrollo de las situaciones geométricas por parte de los seis estudiantes seleccionados para el estudio de caso. Las situaciones geométricas diseñadas constan de un número determinado de tareas y de un tiempo de ejecución estimado, lo cual se resume en la tabla 5:

**Tabla 5.** Número de situaciones geométricas, tareas y tiempo estimado de desarrollo

Situación Didáctica	Número de tareas	Tiempo estimado de desarrollo (hora clase 60 minutos)
Situación 1	2 tareas	4 horas clase
Situación 2	3 tareas	4 horas clase
Situación 3	2 tareas	6 horas clase
Situación 4	3 tareas	4 horas clase
Situación 5	5 tareas	10 horas clase

Fuente: Elaboración propia

La fase de implementación consta de tres momentos: primero, desarrollo de las situaciones 1 y 2, foro 1; segundo, desarrollo de las situaciones 3 y 4, foro 2; tercero, desarrollo de la situación 5, foro 3. A continuación se presenta el cronograma de implementación, presentado en la tabla 6:

**Tabla 6.** Cronograma de Implementación

Fase de implementación	Fecha (DD/MM/AA) Hora (formato 12h)
Entrega de las situaciones 1 y 2, entrega del cronograma y autorización de participación a los padres de familia.	18/05/20 Hora: 9am-11am
Desarrollo de la situación 1 Intervención virtual individual	Del 19/05/20 al 20/05/20 Hora: 9am a 11am
Desarrollo de la situación 2 Intervención virtual individual	Del 21/05/20 al 22/05/20 Hora: 9am a 11am
Intervención virtual colectiva: Foro 1	23/05/20 Hora: 9am-11am
Recepción de las situaciones 1 y 2. Entrega de las situaciones 3 y 4.	23/05/20 Hora: 2pm-4pm
Desarrollo de la situación 3 Intervención virtual individual	Del 25/05/20 al 27/05/20 Hora: 9am a 11am
Desarrollo de la situación 4 Intervención virtual individual	Del 28/05/20 al 29/05/20 Hora: 9am a 11am

Fase de implementación	Fecha (DD/MM/AA) Hora (formato 12h)
Intervención virtual colectiva: Foro 2	30/05/20 Hora: 10am-12pm
Recepción de las situaciones 3 y 4. Entrega de la situación 5	02/06/20 Hora: 9am-11am
Desarrollo de la situación 5 Intervención virtual individual	Del 03/06/20 al 08/06/20 Hora: 9 am a 11 am
Intervención virtual colectiva: Foro 3	09/06/20 Hora: 9am-11am
Recepción de la situación 5	10/06/20 Hora: 9am-11am

**Fuente:** Elaboración propia

### 3.2.5 Fase 5: Análisis a posteriori y resultados del trabajo de indagación

En el análisis *a posteriori*, se presentan los resultados y acciones reales de los estudiantes, con respecto al desarrollo de la secuencia de situaciones geométricas diseñada e implementada, principalmente, las producciones escritas. Así como, algunos registros de las intervenciones virtuales, individuales y colectivas, que sean relevantes en el análisis. Estos resultados, se confrontan con los procesos esperados y enunciados en el análisis *a priori*, a partir de lo cual se puede realizar una validación interna de los resultados obtenidos y llegar a determinadas conclusiones. Esta fase se desarrolla con detalle en el capítulo 5 del presente trabajo de indagación.

## 4. Diseño y Análisis A Priori de la Secuencia de Situaciones

### Geométricas

En este capítulo se presenta el diseño y análisis *a priori*, incluyendo las variables didácticas que orientaron el diseño de las situaciones propuestas. Estas variables didácticas se fundamentan en, los elementos proporcionados por el marco teórico de referencia presentado en este trabajo de indagación. La organización de las variables responde a una categorización de dos tipos: variables macro – didácticas y variables micro – didácticas.

Las variables macro – didácticas sustentan la estructura global del diseño y las variables micro – didácticas, orientan la secuencialidad y complejidad de cada tarea. Tanto las variables macro como las micro didácticas, establecen los lineamientos bajo los cuales se realiza el diseño y análisis *a priori* de la secuencia didáctica, expuestos en este capítulo, y las condiciones de su validación en el análisis *posteriori* presentado en el capítulo siguiente.

De acuerdo con lo planteado por Artigue (1995), el análisis *a priori* es considerado como un análisis de control, donde se establecen las condiciones bajo las cuales los estudiantes desarrollan tareas, toman decisiones y ejecutan acciones que dan respuesta a los enunciados planteados al enfrentarse a las mismas.

Las variables macro-didácticas, en este análisis se han distribuido en tres componentes macros: componente cognitivo, componente geométrico y componente curricular. Posteriormente, se establecen las variables micro-didácticas seleccionadas para cada situación y tarea, articuladas con las variables macro, que orientan la construcción de enunciados, los elementos que describen la visualización, los factores de visibilidad que intervienen en cada tarea, los objetos geométricos movilizados, la intención de secuencialidad y el nivel de complejidad de una situación a otra.

Finalmente, se presenta el análisis de cada situación y sus correspondientes tareas, iniciando con una descripción general de la situación y posteriormente un análisis detallado de cada tarea y algunos de los enunciados que la constituye, las cuales se encuentran organizadas en cuatro etapas:

- i) Reconocimiento, centrada en la identificación del objeto geométrico a través de sus representaciones figurales, y la designación de las unidades figurales que lo configuran.
- ii) Inicial, en esta etapa las tareas se enfocan en la discriminación de las unidades figurales de los sólidos geométricos representados, a partir de dos tipos de variación visual: las variaciones de forma, y las variaciones de dimensión.
- iii) Fundamentación, en la cual, a partir de la discriminación de las unidades figurales, se busca que el estudiante establezca relaciones y regularidades que lo ayuden a realizar un análisis cualitativo de algunas características comunes en las representaciones figurales de los prismas rectos y pirámides, y la construcción de conjeturas sobre la configuración del sólido geométrico representado.
- iv) Profundización, esta etapa se presenta en dos partes, distribuidas en las dos últimas situaciones. En estas, se centra la atención en la comparación de superficies (2D) y volumen (3D) representadas figuralmente, para establecer relaciones de parte-todo a partir de los tratamientos figurales que realicen los estudiantes.

En la tabla 7, se presenta la estructura general de la secuencia didáctica diseñada y propuesta en este trabajo de indagación.

**Tabla 7.** Estructura general de la secuencia didáctica

Etapa	Situaciones ( $S_n$ , $n$ = número de situación)	Número de tareas ( $T_n$ , $n$ =número de tarea)
Reconocimiento	Situación 1 ( $S_1$ ): Observar y descubrir características geométricas	2 tareas ( $T_1$ , $T_2$ )
Inicial	Situación 2 ( $S_2$ ): Identificar y designar representaciones figurales de prismas y pirámides	3 tareas ( $T_1$ , $T_2$ , $T_3$ )

Etapa	Situaciones (Sn, n= número de situación)	Número de tareas (Tn, n=número de tarea)
Fundamentación	Situación 3 (S3): Descomponer y componer dimensionalmente, la representación figural de un sólido geométrico	2 tareas (T1, T2)
Profundización	Situación 4 (S4): Descubrir, comparar y establecer relaciones entre superficies representadas	3 tareas (T1, T2, T3)
Profundización	Situación 5 (S5): Descubrir, compara y establecer relaciones entre el volumen de prismas rectos y pirámides cuadrangulares representadas figuralmente	5 tareas (T1, T2, T3, T4, T5)

Tomado de: elaboración propia.

## 4.1 Variables Macro-Didácticas que orientan el diseño

Tomando como referencia el marco teórico expuesto en el desarrollo de este trabajo de indagación, se establecen tres variables macro-didácticas, que representan las categorías globales de diseño y análisis transversales en las situaciones geométricas. Estas son:

### 4.1.1 Categoría I, Componente Cognitivo

Sustentado en la teoría semiótica cognitiva, en este componente se seleccionan los registros de representación semiótica que se articular en el desarrollo de la situación didáctica y son determinantes para la actividad cognitiva que requiere la geometría (Duval, 2017): el registro de representación figural (**RF**), donde se privilegia la visualización por deconstrucción dimensional; y el registro de representación de la lengua natural (**RL**), donde se enfatiza en las funciones discursivas de referenciación, apofántica y de expansión discursiva. La coordinación entre los tratamientos de las representaciones figurales y las funciones discursivas del registro de lengua natural, son las variables que orientan la construcción de los enunciados presentados en la situación didáctica, puesto que es a través de los enunciados sobre las representaciones figurales, que puede realizarse acciones que conllevan a la significación del objeto de aprendizaje (Duval, 2017).

En este caso, el interés se centra en las unidades figurales elementales del registro de representación figural que componen, semióticamente, un sólido geométrico y los tratamientos figurales que favorecen las actividades cognitivas de visualización y razonamiento, actividades fundamentales en el aprendizaje de la geometría. En este componente cognitivo, se identifican las siguientes variables globales en el registro de representación figural, seleccionadas para el diseño de las situaciones geométricas:

a) *La puesta en perspectiva*, teniendo en cuenta que el diseño de la situación didáctica se presenta como una propuesta para la comprensión de las propiedades de algunos sólidos geométricos, esta operación es esencial para la representación de la tridimensionalidad, especialmente, por la accesibilidad a los programas o software que apoyen la visibilidad 3D.

De acuerdo a lo definido por Duval (2017), la puesta en perspectiva posibilita “ver” en profundidad, es decir, permite una percepción en profundidad de una representación plana; para el caso de las representaciones figurales de los sólidos geométricos presentados en todas las tareas, se usó el programa Geogebra para su construcción teniendo en cuenta, lo que Duval (2017) llama variables visuales suplementarias (como el color, la posición en el espacio, el uso de alguna marca que habilite la función de profundidad al visualizarla, por ejemplo el uso de cuadrícula en el *plano xy* al usar el componente gráfico 3D de Geogebra), estas variables se identifican como factores de visibilidad en el desarrollo de este trabajo de indagación.

Dada la importancia de la puesta en perspectiva, como variable para las representaciones figurales de objetos tridimensionales en el diseño de las situaciones geométricas, se toma la decisión de presentarla por separado de las demás operaciones, agrupadas en lo que Duval (2017) denomina *aprehensión operatoria*, que constituye otra variable global seleccionada en el registro de representación figural.

b) *La aprehensión operatoria*, permite la realización de un conjunto de operaciones o tratamientos figurales como la reconfiguración, la superposición, la configuración por reiteración, el fraccionamiento, entre otras, que centran la atención en subfiguras o unidades elementales figurales que no son visibles

de entrada, pero que una vez establecidas permiten la reorganización de las representaciones figurales dando paso a su visualización y análisis para el desarrollo de diferentes razonamientos.

c) *La deconstrucción dimensional*, presentada como entrada para el estudio de los sólidos geométricos, que orienta todos los enunciados construidos para favorecer la visualización de las unidades figurales elementales y el cambio de dimensión como foco principal en la actividad cognitiva de los estudiantes.

En cuanto al registro de representación de la lengua natural, y de acuerdo con lo presentado en el marco teórico de referencia, para la actividad en geometría es necesaria la articulación entre el discurso y la representación figural, es decir, es necesario una entrada discursiva para anclar la figura como representación del objeto geométrico estudiado (Duval, 2017, p. 210). Por lo anterior, para el diseño y análisis de las situaciones geométricas, se seleccionan tres de las funciones discursivas esenciales en la articulación entre figura y discurso, las cuales son objetos centrales en el diseño, implementación y análisis de la situación didáctica:

a) *La función referencial o de designación de objetos*, permite identificar un objeto a partir de marcas, que pueden pertenecer a un lenguaje especializado de acuerdo con el objeto designado (Duval, 2017); por ejemplo, en las reglas de designación para los objetos geométricos en el corpus de la geometría euclidiana, los puntos son representados por letras mayúsculas, o la representación de segmentos como el segmento  $AB$ :  $\overline{AB}$ . Esta función tiene un papel fundamental en el diseño y desarrollo del conjunto de situaciones geométricas, en tanto permite el planteamiento de enunciados sobre los objetos geométricos movilizados, haciendo posible la discriminación de las unidades figurales elementales que constituyen las representaciones unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales; además de la construcción de explicaciones o justificaciones procedimentales realizada por los estudiantes en la articulación entre figura y discurso.

b) *La función apofántica de expresión de enunciados completos*, esta función discursiva posibilita, a partir de la designación, referirnos sobre el objeto designado, al hacer afirmaciones, construir

proposiciones, describir observaciones y procedimientos, conjeturas, explicaciones, etc., en el marco de las situaciones propuestas, de los conocimientos movilizados y de los valores dados (Duval, 2017).

c) *La función de expansión discursiva de un enunciado completo*, finalmente a partir de esta función discursiva se integra en un todo la designación y las unidades apofánticas, para dar origen a un planteamiento discursivo que permita a los estudiantes justificar las respuestas dadas en las diferentes tareas propuestas, como resultado de la interacción y articulación entre discurso y representación figural. Además, posibilita enriquecer el lenguaje utilizado en las intervenciones escritas y orales, donde se evidencie la apropiación de las nociones geométricas que emergen en el desarrollo de las situaciones propuestas.

#### **4.1.2 Categoría II, Componente Geométrico**

El corpus teórico de referencia para el diseño y desarrollo de la situación didáctica es la geometría euclidiana, centrado en el estudio de los objetos tridimensionales desde un análisis cualitativo de sus propiedades y características, a partir del cambio dimensional (de representaciones tridimensionales (3D) a bidimensionales (2D) y unidimensionales (1D)). También se explora el estado inicial de los estudiantes frente a la conceptualización de figuras geométricas planas (2D), segmentos (1D) y puntos (0D), identificando fortalezas o dificultades conceptuales frente a estas nociones, de manera que, a través del desarrollo de las tareas, se solventen dichas dificultades y se de paso paralelamente, al proceso de una conceptualización de las características y propiedades cualitativas de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares, que permitan su reconocimiento a partir de enunciados (representaciones discursivas) y representaciones figurales dadas

En el caso del área de la superficie y volumen de un sólido geométrico, el acercamiento se realiza de manera cualitativa, como introducción a la medida de estas magnitudes, usando unidades figurales de longitud, superficie y espacio, a partir de las cuales se busca que el estudiante logre establecer relaciones de la forma parte – todo y comparaciones entre unidades figurales diferentes para una misma magnitud,

usando distintos tratamientos figurales (reconfiguración, superposición, fraccionamiento) acompañando del conteo de las unidades figurales establecidas en el diseño o propuesta por los estudiantes, según sea la orientación discursiva, sin ser procedimientos exclusivamente aritméticos.

#### **4.1.3 Categoría III, Componente Curricular**

El diseño de la situación didáctica considera los elementos expuestos en los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) y los estándares curriculares de competencias matemáticas (MEN, 2006), así como los correspondientes a la teoría semiótica cognitiva; a partir de los cuales, se construyen los estándares curriculares que determinan los propósitos de aprendizaje para los estudiantes en cada situación didáctica, que responden a las orientaciones ministeriales desde los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto.

Estos tres aspectos permiten la organización del currículo, respondiendo a lo estipulado en la ley general de educación de 1994, donde se da autonomía a las instituciones educativas en la organización de su proyecto educativo institucional PEI, apoyado en las orientaciones ministeriales mencionadas anteriormente, que contribuya al desarrollo integral de los estudiantes, es decir, una educación matemática que propicie aprendizajes significativos cada vez más complejos, que tengan en cuenta la exigencia cognitiva de la actividad matemática.

A partir de lo planteado en los lineamientos curriculares de matemáticas, esta propuesta de profundización enmarcada en la enseñanza y aprendizaje de la geometría se caracteriza por la siguiente estructura curricular:

##### **4.1.3.1 Procesos generales:**

- **Resolución y planteamiento de problemas:** Los lineamientos curriculares se presentan las situaciones problema como el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido. En el caso de los enunciados problemas en la actividad geométrica, la coordinación de las unidades significantes del

enunciado con las unidades figurales elementales del objeto geométrico, dan sentido al enunciado y favorecen los tratamientos figurales, que permitan al estudiante, observar relaciones, usar conocimientos específicos, verificar propiedades y establecer conjeturas que finalmente den respuesta a la pregunta formulada (MEN, 1998).

- **Comunicación:** Este proceso debe dar cuenta de: Expresar ideas hablando, escribiendo y describiendo visualmente de diferentes formas. Aquí se prioriza la visualización no icónica por deconstrucción dimensional; interpretar, comprender y evaluar ideas que son presentadas oralmente, en forma visual y por escrito; interpretar, construir y asociar varias representaciones de ideas y de relaciones; hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y reunir y evaluar información; producir y presentar argumentos persuasivos y convincentes (MEN, 1998).

- **Razonamiento:** desde este referente curricular, se entiende razonamiento como la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión, en la que se manifiestan acciones como: dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones; justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas; formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos; utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar (MEN, 1998).

En esta propuesta, se centra la atención en producciones discursivas construidas a partir de las operaciones discursivas, tales como las descripciones, explicaciones y justificaciones, como una actividad cognitiva propia del registro de representación de la lengua natural, que emergen en medio del contexto escolar (aula de clase) y es orientado por los enunciados propuestos y asociados a las representaciones figurales.

#### 4.1.3.2 Conocimientos básicos

- **Pensamiento Espacial y sistemas geométricos:** Desde los lineamientos curriculares, se busca fortalecer la enseñanza y aprendizaje de la geometría, para desarrollar los procesos geométricos necesarios en la actividad matemática y en visualización del mundo circundante. La propuesta curricular es la implementación de una geometría activa que favorezca el desarrollo del pensamiento geométrico, atendiendo dificultades como la enseñanza de la tridimensionalidad, como aspecto importante del pensamiento espacial, que permita la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación, y la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio (MEN, 1998. p. 39).

En esta propuesta de profundización, se aborda la enseñanza de la geometría respondiendo a las orientaciones curriculares, pero desde una perspectiva semiótica cognitiva, centrando la atención en los funcionamientos cognitivos y en la articulación entre visualización y discurso necesarias para la actividad geométrica.

**Pensamiento Métrico y sistemas de medida:** La propuesta curricular enfatiza en la importancia de la construcción de la magnitud, sin limitarla a la asignación numérica de la medida. Por el contrario, se hace necesario para el desarrollo del pensamiento métrico, actividades de análisis cualitativo y comparativo que aporten elementos para las estimaciones a nivel cualitativo previas a la asignación numérica (MEN, 1998). En este sentido, la propuesta expuesta en este documento aporta elementos significativos al desarrollo del pensamiento métrico. Los estándares básicos de competencias en matemáticas inscritos a los pensamientos geométrico y métrico para grado séptimo de educación básica, y asociados a los sólidos geométricos y sus propiedades de volumen y área de la superficie que se propone abordar en esta propuesta de profundización, adaptados a los elementos presentados en este marco teórico, se distribuyen como se muestra en la tabla 8:

**Tabla 8.** Estándares curriculares para el conjunto de situaciones de la secuencia didáctica

Situaciones geométricas	Estándares curriculares asociados
<p><b>Situación 1</b> (Reconocimiento): Observar y descubrir características geométricas</p>	<p><b>Estándar 1:</b> Observo y exploro objetos físicos e identifico algunas características de acuerdo con las definiciones y propiedades de las representaciones unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales.</p> <hr/> <p><b>Estándar 2:</b> Diferencio atributos y características de objetos físicos tridimensionales y establezco las propiedades cualitativas que se asemejan a los objetos geométricos.</p>
<p><b>Situación 2</b> (Inicial): Identificar y designar representaciones figurales de prismas y pirámides</p>	<p><b>Estándar 1:</b> Comparo y clasifico representaciones figurales de objetos geométricos tridimensionales de acuerdo con sus características y propiedades.</p> <hr/> <p><b>Estándar 2:</b> Identifico, designo y describo figuras y representaciones figurales de sólidos geométricos a partir de su deconstrucción dimensional (3D/1D, 3D/2D, 2D/1D).</p> <hr/> <p><b>Estándar 3:</b> Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.</p>
<p><b>Situación 3</b> (fundamentación): Descomponer y componer dimensionalmente, la representación figural de un sólido geométrico.</p>	<p><b>Estándar 1:</b> Descompongo prismas rectos y pirámides cuadrangulares en sus componentes bidimensionales (3D/2D), a través de sus representaciones figurales, características y propiedades e identifico el desarrollo que da forma a la superficie del sólido geométrico representado.</p> <hr/> <p><b>Estándar 2:</b> Identifico, designo y describo representaciones figurales de prismas restos y pirámides a partir de su deconstrucción dimensional (3D/2D, 3D/1D, 2D/1D)</p>
<p><b>Situación 4</b> (profundización): Descubrir, comparar y establecer relaciones entre superficies representadas</p>	<p><b>Estándar 1:</b> Describo áreas a través de la composición y descomposición de sus unidades figurales elementales (3D/2D) desde el desarrollo de prismas rectos en su representación figural.</p> <hr/> <p><b>Estándar 2:</b> Establezco relaciones cualitativas entre el área de dos o más superficies poligonales diferentes, a partir de la</p>

Situaciones geométricas	Estándares curriculares asociados
	deconstrucción dimensional de la representación figural de un prisma recto y/o pirámide cuadrangular.
<p><b>Situación 5</b> (profundización):                      Descubrir, compara y establecer relaciones entre el volumen de prismas rectos y pirámides cuadrangulares representadas figuralmente.</p>	<p><b>Estándar 1:</b> Describo el volumen de la representación figural de un prisma recto o pirámide cuadrangular, a través de la composición y descomposición de sus unidades figurales elementales (3D/3D, 3D/2D, 3D/1D) desde la deconstrucción dimensional.</p> <hr/> <p><b>Estándar 2:</b> Establezco relaciones cualitativas entre el volumen y el área de dos o más representaciones figurales de prismas rectos y/o pirámides cuadrangulares, partir de su deconstrucción dimensional.</p>

Tomado de: elaboración propia.

La adaptación de los estándares básicos de competencias usando los elementos de la teoría semiótica cognitiva, orientan la selección de las variables de diseño de las situaciones geométricas que potencialicen las actividades cognitivas necesarias para el desarrollo de la comprensión de los sólidos geométricos, desde la articulación del registro figural y discursivo.

## 4.2 Variables Micro-Didácticas

En el análisis de cada tarea, se realiza una descripción de los enunciados contruidos y su intencionalidad, además de lo que se espera de los estudiantes al enfrentarse a cada enunciado. Se tiene en cuenta la linealidad en la presentación de las situaciones, es decir, lo que en cada una se avanza a partir de la anterior, de la misma manera al interior de cada situación, las tareas presentadas contribuyen al cumplimiento del estándar propuesto.

Para el análisis individual de las tareas, se articulan las variables macro-didácticas; así como los elementos que describen la visualización, factores de visibilidad asociados a los tratamientos figurales y las estructuras de control visual (Marmolejo y González, 2013).

Los elementos que caracterizan la visualización se presentan de la siguiente manera: operaciones (OP) que corresponde a los tratamientos figurales aplicados a las figuras; cambio figural ( $Cf_g$ ) que se produce al aplicar un tratamiento figural determinado; cambio dimensional (CD) 3D/2D-1D, 2D/1D-0D, 1D/0D; cambio de anclaje bidimensional (CFB) y el flujo visual (FI) que corresponde a la manera como se articulan los demás elementos (Marmolejo & González, 2013. p.68).

Entre los elementos que caracterizan la visualización, de las operaciones propuestas por Marmolejo y González (2013), que llamaremos tratamientos figurales en este análisis **Tf**, se seleccionan como variables micro-didácticas las descritas a continuación:

a) *Reconfiguración (Rc)*, en esta operación se identifican una o varias subfiguras para su reorganización (Duval, 2017), lo que forma una nueva figura, pero con propiedades invariantes como el área de la superficie (2D) o el volumen (3D) de los prismas rectos y pirámides representados.

b) *Fraccionamiento (Fr)*, resulta de la subdivisión de una figura en otras, que puedan reorganizarse para formar una nueva configuración. Aunque estas operaciones se proponen en los trabajos con áreas de superficies planas, considero que pueden extender su aplicabilidad a las figuras tridimensionales.

c) *Configuración por reiteración (Cr)*, a partir de una representación figural de inicio, se conforman nuevas representaciones figurales sin solapar cada figura repetida, por medio de traslaciones o rotaciones de acuerdo con el tratamiento que realice el estudiante. Para la situación didáctica diseñada, las unidades figurales de longitud, superficie o volumen, representa la figura que se reitera.

d) *Superposición (Sp)*, la representación figural designada como unidad figural de longitud o superficie se utiliza para recubrir la superficie plana representada; en el caso de la unidad figural de volumen, la

superposición se combina con la configuración por reiteración para dar forma a las representaciones figurales tridimensionales de prismas rectos y pirámides.

En cuanto a las estructuras de control, entendidas como las estrategias y elementos utilizados en el diseño para controlar la visualización en el desarrollo de las tareas propuestas, de las descritas por Marmolejo (2014), se considera para el diseño como variables micro las siguientes:

a) *Estructuras de control por visibilidad (ECV)*. Los tratamientos figurales propuestos en el enunciado, o aquellos que deciden los estudiantes utilizar en sus estrategias para dar respuesta a un interrogante, pueden verse afectados por la presencia de diferentes factores de visibilidad, que favorezcan los procesos de visualización de acuerdo con la tarea planteada. Los factores de visibilidad que se destacan en el diseño de las situaciones geométricas son el uso de cuadrícula (**f1**), marcas de graduaciones que representan unidades de longitud (**f2**) en las representaciones unidimensionales (segmentos que representan alturas) y el manejo de color para destacar las representaciones tridimensionales, las superficies y el contorno de las figuras como elementos de contraste (**f3**) que sirvan de foco perceptual en la visualización.

b) *Estructuras de control discursivo (ECD)*. La visibilidad y los tratamientos de las representaciones figurales son orientada por las operaciones discursivas (designar, describir, dirigir a partir de orientaciones procedimentales) expuestas en el registro de representación en lengua natural.

En la tabla 9, se presentan las variables macro y micro didácticas seleccionadas, a partir de las cuales se desarrolla el diseño y análisis *a priori* de las situaciones geométricas y sus respectivas tareas.

**Tabla 9.** Variables macro y micro didácticas definidas para el diseño de la secuencia de situaciones geométricas

Variables Didácticas para el Diseño y Análisis <i>a priori</i>													
Variables Macro - Didácticas	Componentes Cognitivo, Geométrico y Curricular	Situaciones geométricas	Funciones Discursivas potenciadas en cada situación	Variables Micro – Didácticas									
				Elementos que caracterizan la visualización									
				Tratamientos figurales (Tf)						Cambio Figural	Cambio de anclaje bidimensional	Cambio dimensional	
				Reconfiguración	Configuración por reiteración	superposición	fraccionamiento						
Situación 1	Función referencial de designación										T1 – T2	T2	
Situación 2	Función referencial de designación	T3									T2 – T3	T1-T2-T3	
Situación 3	Funciones: referencial de designación y apofántica	T1a- T1b-T2									T1a- T1b-T2	T1a- T1b-T1c-T2	
Situación 4	Funciones: ref. de designación, apofántica y de expansión discursiva	T1- T2- T3	T1- T2- T3	T1- T2- T3	T1- T2- T3	T1- T2- T3	T1- T2- T3	T1- T2- T3	T1- T2- T3			T1- T2- T3	
Situación 5	Funciones: ref. de designación, apofántica y de expansión discursiva	T1-T2-T3-T4-T5	T1-T2-T3-T4-T5	T3-T4-T5	T2-T3-T4-T5						T1-T2- T3-T4- T5	T3-T4-T5	
				f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3	
Factores de visibilidad y elementos de contraste													
Estructura de control visual (ECV)													

Estructuras de control Discursivo

Fuente: Elaboración propia

f1: cuadrícula de fondo

ECV: estructuras de control por visibilidad

f2: marcas de unidades de longitud en eje

ECD: estructuras de control discursivas f3: color de superficie y contorno

### 4.3 Análisis A Priori de la Secuencia de Situaciones Geométricas

A continuación, se presenta una descripción general de cada una de las cinco situaciones geométricas diseñadas (ver anexo), donde se conjugan las variables macro y micro didácticas, así como la descripción de cada tarea. Se exponen algunos de los enunciados propuestos y los posibles tratamientos (figurales o discursivos) que pueden realizar los estudiantes, a partir de las orientaciones enunciadas y las estructuras de control utilizadas.

#### 4.3.1 Situación 1: Observar y descubrir características geométricas

##### Descripción general

La *situación 1* corresponde a la etapa de reconocimiento, donde se orienta a los estudiantes a observar la tridimensionalidad de objetos que tienen formas alusivas a los sólidos geométricos, sin ser objetos geométricos, es decir, se hace referencia a no confundir un objeto físico, de una forma determinada, con un objeto geométrico, que por su naturaleza no es manipulable directamente, lo que hace necesario el uso de representaciones semióticas como las representaciones figurales y las representaciones en lengua natural definidas en el marco teórico de este trabajo de indagación.

Uno de los propósitos de esta *situación*, es visualizar la tridimensionalidad de los objetos físicos como un reconocimiento previo, al trabajo con representaciones figurales bidimensionales de cuerpos tridimensionales. Sin embargo, se busca que el estudiante avance a una visualización no icónica por lo cual, las preguntas involucran la observación de propiedades comunes entre los objetos físicos con y los objetos geométricos como el paralelismo y/o perpendicularidad, donde podemos ubicar las superficies planas que limitan al objeto físico, en comparación de las representaciones figurales de las superficies planas que limitan el sólido geométrico representado.

Se espera que los estudiantes encuentren estrategias para comprobar propiedades, sin orientarlo a que use instrumentos de medición, pues son las propiedades cualitativas y no las medidas las que se

quieren resaltar. Otro propósito de esta *situación* es realizar un diagnóstico frente a las nociones previas que tienen los estudiantes sobre algunos elementos geométricos (punto, segmento, polígonos) que pueden ser fortalecidos o introducirlos si se evidencia su ausencia.

Para el diseño de esta *situación*, se seleccionan dos objetos de madera de superficies lisas, con formas geométricas específicas. El objeto 1 tiene una forma parecida a la representación figural de un prisma recto triangular, y el objeto 2 tiene forma parecida a la representación figural de una pirámide pentagonal. Ambos objetos son entregados a los estudiantes para el desarrollo de la *tarea 1* de la *situación 1*.

Teniendo en cuenta lo señalado en los estándares propuestos (tabla 8), se presenta en la *situación 1*, una introducción sobre los prismas y pirámides como parte de los objetos geométricos tridimensionales denominados sólidos geométricos, es importante resaltar que no se define formalmente ninguno de los objetos geométricos mencionados, pues se busca que a través del desarrollo de la secuencia didáctica, el estudiante identifique las características cualitativas de dichos objetos que constituyen los elementos esenciales para su posterior conceptualización. A continuación, se describe la estructura de la *situación 1* y el análisis sobre los procesos cognitivos e intenciones didácticas de cada *tarea* propuesta.

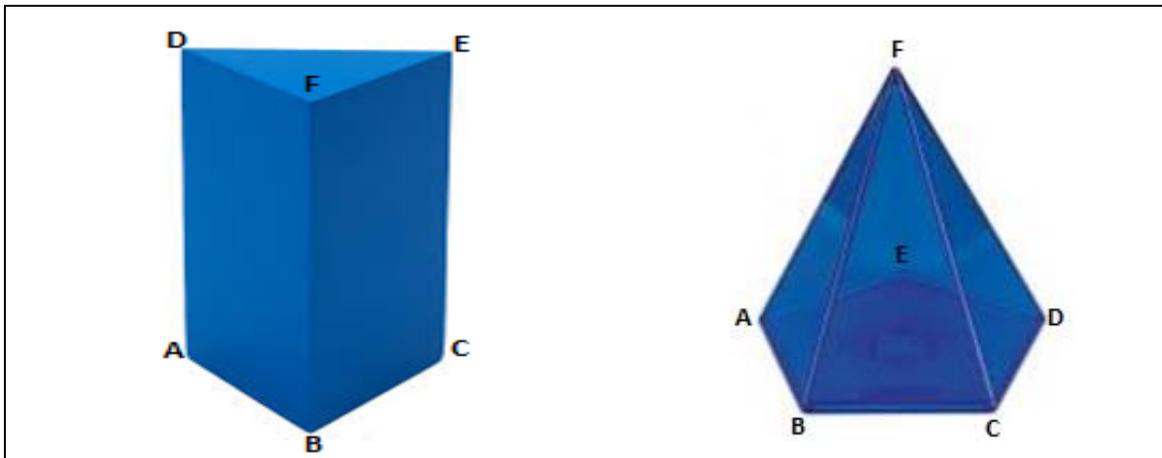
#### **4.3.1.1 Situación 1 Tarea 1 (S1T1)**

La primera tarea consta de 4 *enunciados* que hacen referencia a las características físicas de los objetos de madera 1 y 2, que tienen los estudiantes; además, se presenta en la hoja de trabajo, una representación icónica de cada objeto (fotografía) que describe a que forma tridimensional se parece, haciendo énfasis en que dicho objeto físico, no es un sólido geométrico, solo tiene una forma parecida a la representación figural de un prisma recto triangular y una pirámide pentagonal.

En los *enunciados* 1 y 3, se solicita al estudiante explorar la superficie de los objetos de madera 1 y 2, como se indica en la *figura 13*. Luego de dicha exploración y las observaciones de sus características físicas, se le presentan un conjunto de proposiciones de las cuales debe establecer su valor de verdad y justificar

la selección realizada. Se espera que el estudiante evidencie en su justificación escrita, el reconocimiento de formas y de límites, además de identificar en el lenguaje utilizado, el uso o ausencia de nociones geométricas que asocie a los objetos explorados, según crea pertinente desde el conjunto de saberes que posee (reconocimiento de formas poligonales, representaciones de segmentos rectos, superficies curvas).

**Figura 13.** Designación realizada sobre las representaciones de los objetos 1 y 2. S1T1.



Tomado del diseño propuesto.

En los *enunciados 2 y 3*, se centra la atención en las representaciones icónicas de los objetos 1 y 2 (fotografías) pero con una modificación: sobre las representaciones icónicas se realiza una designación, representando figuralmente puntos sobre los extremos o puntas de los objetos de madera 1 y 2.

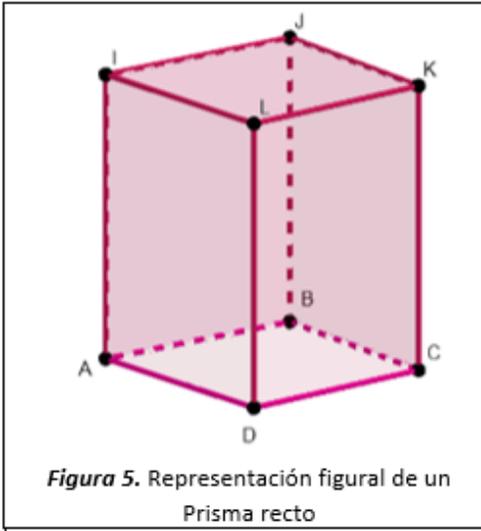
Realizar la designación tiene como propósito que el estudiante pueda hacer referencia a características específicas de las formas poligonales a las que la superficie del objeto pueda evocar, además de resaltar la necesidad de la operación de designación para poder construir proposiciones tanto en sus justificaciones escritas como en sus observaciones e intervenciones orales. En el *enunciado 5*, se retoman las observaciones y justificaciones escritas realizadas en los *enunciados 2 y 4*, para orientar al estudiante en la búsqueda de diferencias entre ambos objetos, a la luz de las características geométricas destacadas.

### 4.3.1.2 Situación 1 Tarea 2 (S1T2)

En la *tarea 2*, se presenta a los estudiantes una representación figural de un prisma recto de base cuadrada (*figura 14*), donde los puntos representados como vértices, están designados con letras mayúsculas, a partir de dicha designación, se realiza un conjunto de afirmaciones con referencia a las características de las representaciones poligonales que limitan la superficie del sólido representado

**Figura 14.** Configuración 2D de la representación figural de un prisma recto. S1T2

**Tarea 2:** A continuación, se presenta la representación figural de un Prisma recto (ver figura 5) que cumple con las siguientes características:



a) ABCD es la representación figural de un cuadrado  
 b) IJKL es la representación figural de un cuadrado  
 c) ADLI es la representación figural de un rectángulo  
 d) BCKJ es la representación figural de un rectángulo  
 e) ABJI es la representación figural de un rectángulo  
 f) CDLK es la representación figural de un rectángulo

*Figura 5.* Representación figural de un Prisma recto

Tomado del diseño de las situaciones geométricas propuesta

Se espera que tales afirmaciones asociadas a las propiedades de las figuras geométricas que evocan (segmentos opuestos paralelos, segmentos congruentes, ángulos rectos, existencia de dos diagonales, etc.), permitan a los estudiantes establecer relaciones de paralelismo y perpendicularidad, por ejemplo:  $\overline{AB} \parallel \underline{\hspace{1cm}}$ , o  $\overline{IL} \perp \underline{\hspace{1cm}}$ ; es decir, hace referencia al corpus teórico de la geometría euclidiana, introducido hasta este año de escolaridad (séptimo grado de educación básica), según la planeación institucional de los años anteriores. En caso de que los estudiantes no muestren conocimiento de dichos conceptos, la *tarea* posibilita su introducción.

### 4.3.2 Situación 2: Identificar y designar representaciones figurales de prismas y pirámides

#### Descripción general

Esta *Situación* corresponde a la etapa inicial, donde cada enunciado centra su atención en dos tipos de variación visual: las variaciones de forma, a partir de descripciones cualitativas globales de la figura inicial; y las variaciones de dimensión, cuya integración dan lugar a la discriminación de las unidades figurales elementales de dimensión inferior, a las de la figura tridimensional inicial representada (3D/2D-1D-0D). Esta última variación visual es una condición necesaria para posibilitar diferentes tratamientos figurales pertinentes sobre las representaciones figurales de los sólidos geométricos como objeto de estudio (Duval, 2017).

Con el propósito de focalizar la atención de los estudiantes en las unidades figurales elementales de dimensión dos (2D), dimensión uno (1D) y dimensión cero (0D), en esta *situación* se privilegia la función discursiva referencial de designación de objetos y la función discursiva apofántica. La primera función discursiva posibilita referirse a cada una de las unidades elementales asociadas al objeto geométrico representado, al asignar una marca que responden a las reglas del lenguaje formal en geometría, por ejemplo el uso de letras mayúsculas para designar los puntos representados, o el uso de dos letras mayúsculas más un símbolo particular que las vincula (línea horizontal ubicada en la parte superior de ambas letras) para designar un segmento representado:  $\overline{AB}$ . La segunda función discursiva, permite construir proposiciones referentes al objeto designado:  $\overline{AB}$  es paralelo a  $\overline{CD}$ ; el punto A es el punto de intersección entre las rectas  $\vec{l}$  y  $\vec{m}$ . De esta manera, es posible la interacción cognitiva entre visualización y discurso, dotando la figura de significado (Duval, 2016a).

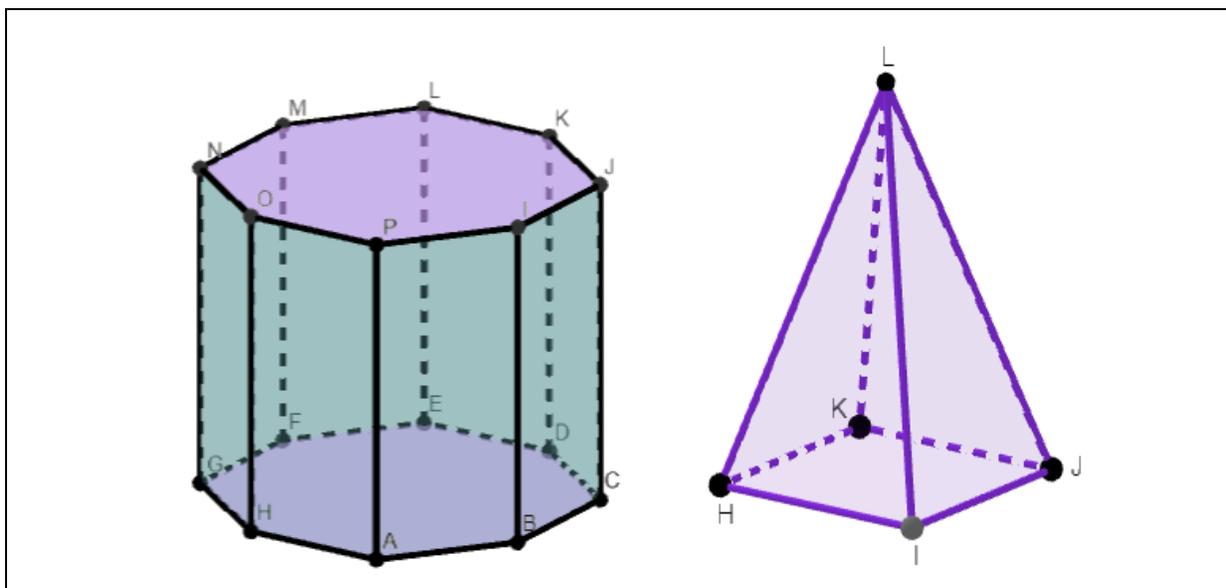
A continuación, se describe el análisis sobre los procesos cognitivos e intenciones didácticas de cada *tarea* propuesta.

#### 4.3.2.1 Situación 2 Tarea 1 (S2T1)

Se presenta al estudiante, la representación figural de sólidos geométricos, un prisma recto octogonal y una pirámide cuadrangular, con marcas que designan los vértices representados con letras mayúsculas (*figura 15*). Se espera que el estudiante inicie la discriminación de algunos elementos constitutivos (unidades elementales figurales) en dimensión inferior a la del objeto representado, usando la designación ya establecida, orientado por los enunciados presentados, que generan acciones como:

- Identificar y designar nuevos elementos (enunciado 1 y 2)
- Describir y comparar características de las representaciones figurales presentadas (enunciado 3)

**Figura 15.** Representación figural de un Prisma recto octogonal y una Pirámide cuadrangular (S2T1)



Tomado del diseño de la secuencia didáctica propuesta.

En el caso de los *enunciados 1 y 2*, se indaga sobre algunas características globales con relación a la representación figural del sólido geométrico, y se presentan las proposiciones en una tabla para favorecer el reconocimiento y la designación de los objetos representados organizados por grupos de igual dimensión: vértices representados (0D), segmentos representados que corresponden a aristas (1D), polígonos representados que corresponden a caras (2D). Además, la organización de estos elementos en una tabla permite realizar una comparación directa entre la información proporcionada en cada figura.

Por ejemplo, en la tabla 10 se presentan los enunciados correspondientes a S2T1, con respecto a la pirámide cuadrangular *HIJKL* representada en la *figura 15*:

**Tabla 10.** Discriminación y designación de unidades figurales. Enunciado 2 (S2T1)

Enunciados que orientan la discriminación de unidades figurales	Respuestas esperadas
a. Número de vértices representados	Cinco (5)
b. Número de segmentos representados que corresponden a aristas	Ocho (8)
c. Número de polígonos representados que corresponden a caras	Cuatro (4)
d. Designe los segmentos que representan aristas	$\overline{HI}, \overline{IJ}, \overline{JK}, \overline{KH}, \overline{HL}, \overline{JL}, \overline{IL}, \overline{KL}$
e. Designe los polígonos que forman cada cara del sólido geométrico representado	$\Delta HIL, \Delta IJL, \Delta JKL, \Delta HKL, HIJK$

Tomado del diseño de la secuencia didáctica propuesta.

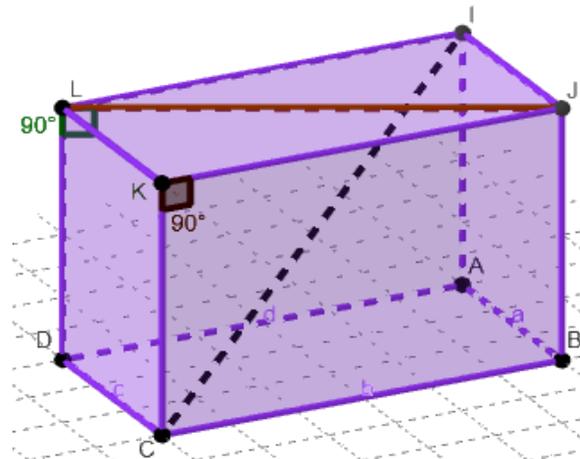
En el *enunciado 3*, se pretende que el estudiante compare las representaciones figurales de los dos sólidos geométricos (ver *figura 15*), es decir que se centra la atención en las figuras iniciales (3D), para establecer algunas diferencias como el número de polígonos representados que corresponden a las caras del sólido representado, la forma poligonal específica de cada cara (caras bases, caras laterales), las características de los puntos designados (si son de intersección entre dos o más segmentos); que permitan la observación del conjunto de elementos discriminados en los *enunciados 1 y 2* en una sola representación (1D/2D, 2D/3D), además de identificar las nociones geométricas básica de los estudiantes, sobre algunos conceptos geométricos como figuras planas poligonales, paralelismo, perpendicularidad, entre otros, para tomar las decisiones pertinentes en el desarrollo de las tareas.

#### 4.3.2.2 Situación 2 Tarea 2 (S2T2)

Se presenta a los estudiantes, la representación figural de un sólido geométrico clasificado como un prisma recto, con marcas que designan los vértices representados, con letras mayúsculas. A diferencia de

las representaciones figurales dadas en la S2T1 (figura 15), en esta *tarea* se resaltan elementos unidimensionales que normalmente son invisibles para los estudiantes al enfrentarse con las representaciones figurales de sólidos geométricos (figura 16), como los segmentos que representan las diagonales de los polígonos representados correspondientes a las caras que limitan el sólido como  $\overline{LJ}$ , y los segmentos que representan las diagonales del prisma representado como  $\overline{CI}$ .

**Figura 16.** Representación figurale de un Prisma recto. S2T2



Tomado del diseño de situaciones geométricas propuesto (S2T2)

También se resaltan representaciones figurales de los ángulos formados entre las caras que limitan el prisma representado ( $\angle CKJ$ ), y entre los segmentos que representan aristas y diagonales ( $\angle DLJ$ ). En este sentido, la *tarea* focaliza la atención de los estudiantes en los elementos de dimensiones inferiores a las del objeto geométrico inicialmente representado, planteando *enunciados* como: ¿Es el segmento  $\overline{LJ}$  una arista? ¿El segmento  $\overline{LJ}$  se encuentra sobre la superficie del sólido geométrico o al interior del sólido geométrico? Observa el ángulo formado entre los segmentos  $\overline{LJ}$  y  $\overline{LD}$ . ¿Qué relación (ser paralelo, ser perpendicular o ninguna) puedes establecer entre los polígonos  $IJKL$  y  $CDKL$  representados? (ver S2T2 en anexos)

En los *enunciados 1, 7, 8 y 9*, se espera que el estudiante discrimine cada unidad elemental figurale (1D, 2D) contenida en la representación figurale tridimensional, para posteriormente establecer relaciones

entre los objetos representados, a partir de las designaciones y de las características de los dos ángulos representados, únicos con medida numérica asignada, cuya intencionalidad es dar elementos de justificación a los estudiantes para establecer las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre los segmentos y polígonos representados, sin que recurran al uso de instrumentos de medida.

En este conjunto de *enunciados*, es importante reconocer la forma como los estudiantes establecen dichas relaciones, si acuden al valor del ángulo designado o las propiedades de los polígonos rectangulares (segmentos opuestos paralelos), por lo cual es fundamental la justificación escrita solicitada en cada pregunta. En este aspecto, se diferencia de la *situación 1*, donde en la *tarea 2* solo se pide identificar los pares de segmentos o polígonos representados que son paralelos o perpendiculares entre sí.

En el *enunciado 1*, por ser la primera vez donde se pide establecer dichas relaciones, y con el fin de orientar al estudiante sobre el tipo de relaciones que se indaga, se le dan dos opciones para que seleccione y justifique su selección; mientras que en los *enunciados 7, 8 y 9* aunque se pide establecer estas relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre algunas unidades elementales figuales, discriminadas de la representación figural del sólido geométrico, no se dan opciones, pero sí se dejan los espacios y los símbolos propios del lenguaje geométrico para tales relaciones  $\parallel$  (paralelo),  $\perp$  (perpendicular). Estos símbolos ya son familiares para los estudiantes y se trabajaron en **S1T2**.

¿Por qué este tipo de relaciones específicas? El paralelismo y la perpendicularidad son propiedades fundamentales en la conceptualización de los sólidos geométricos, intervienen en el análisis de las unidades elementales figuales al posibilitar el trazo de segmentos auxiliares como la altura, cuando esta no está determinada por un segmento representado que corresponda a una arista (por ejemplo el caso de las pirámides), o la prolongación de estos segmentos para la discriminación de otros objetos geométricos como los ángulos externos de un polígono representado figuralmente que permitan

establecer otras relaciones como la de congruencia entre ángulos, tanto a nivel cualitativo como al introducir el uso de medidas.

Para el interés de este trabajo de indagación, las propiedades de paralelismo y perpendicularidad aportan elementos al análisis cualitativo para la comprensión del área de la superficie y el volumen de los prismas rectos y pirámides que se desarrollan en las *situaciones 4 y 5* posteriormente.

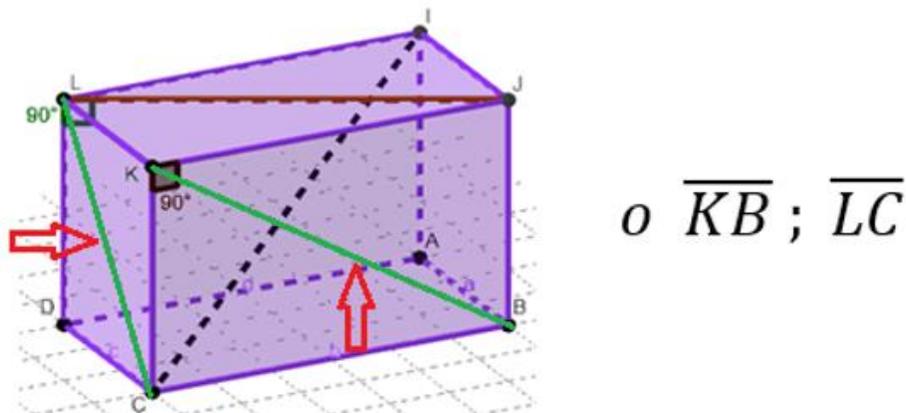
En los *enunciados 2 y 3*, se retoma la discriminación de las unidades figurales (1D), donde se indaga por la naturaleza del segmento representado ¿es una arista? Se busca identificar en las justificaciones de los estudiantes las características que le atribuye al segmento para considerar que representa o no una arista en la representación figural del prisma recto referenciado. Preguntas de este tipo, posibilitan avanzar en la conceptualización de los elementos unidimensionales, usados en otros registros de representaciones como el algebraico, cuando se presenta a los estudiantes el trabajo con fórmulas para calcular área de la superficie y el volumen. Por ejemplo, en el caso de un cubo se tiene las representaciones algebraicas  $V_{cubo} = a^3$ ;  $A_{s.cubo} = 6a^2$ , donde  $a$  representa la arista del cubo.

En los *enunciados 4 y 5*, se alude a la ubicación de los segmentos representados y se relaciona con la discriminación de las unidades elementales figurales 2D en oposición a la representación figural 3D del sólido geométrico. En estas preguntas es fundamental el papel de la cuadrícula de base como factor de visibilidad que da la perspectiva de tridimensionalidad necesarias en este tipo de representaciones (representaciones tridimensionales en medios bidimensionales). El uso de la cuadrícula y la posición de la representación figural sobre ella, donde se hace coincidir los segmentos que representan aristas, las marcas de los puntos que representan vértices y el uso de colores diferentes para cada segmento representado, son decisiones tomadas para favorecer la visualización de la superficie del sólido representado figuralmente, y de su interior. Con estas preguntas, se espera contribuir en la conceptualización de *diagonal*, que es puesto a prueba en el *enunciado 6 (S2T2)*, en el cual se pide

identificar y designar dos segmentos que representen diagonales (sin especificar sobre o al interior de la representación figural del sólido).

A partir de los segmentos representados; se espera dos posibles tratamientos: primero, que realice el trazo sobre la figura usando la regla, para luego hacer la designación de los segmentos que acaba de representar figuralmente, para luego representarlos de manera escrita usando las designaciones dadas en la figura; o segundo, que identifique sin realizar trazos, dos puntos representados y designados en la figura para referenciar los segmentos que representan tales diagonales. Por ejemplo, en la figura 17 se ilustra una posible solución:

**Figura 17.** Trazos de segmentos que representan diagonales y su representación simbólica. S2T2



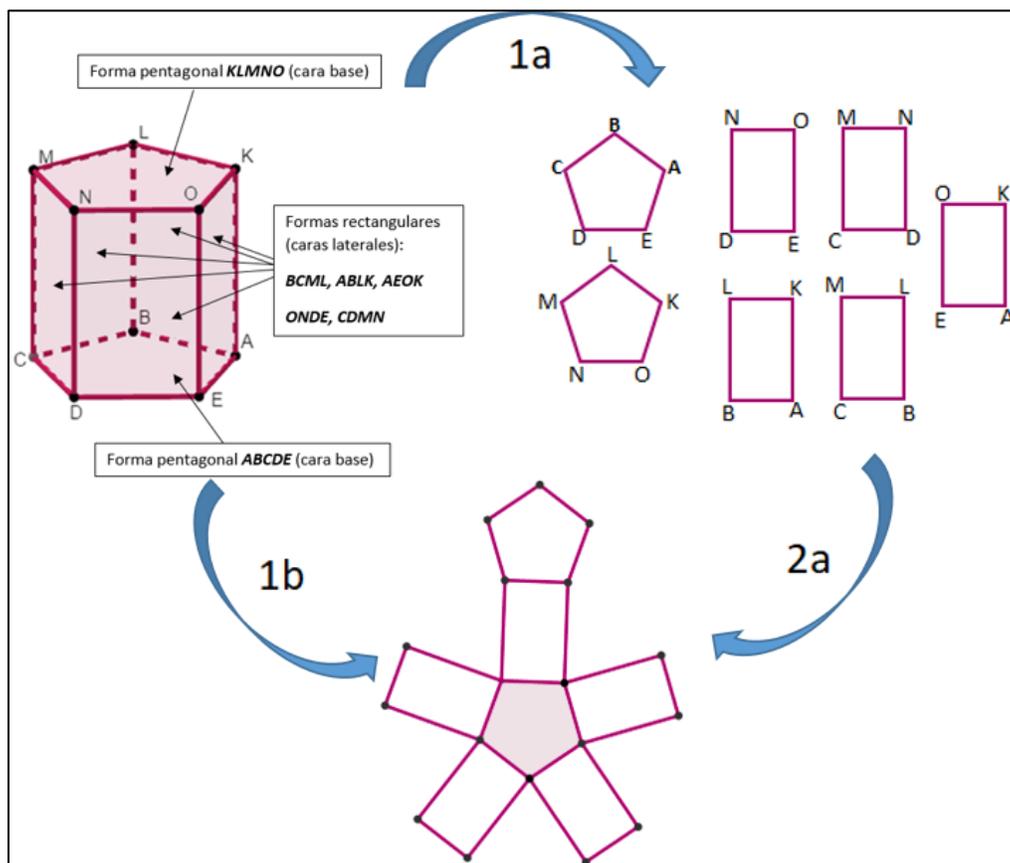
Tomado del diseño de situaciones geométricas propuesto

#### 4.3.2.3 Situación 2 Tarea 3 (S2T3)

Uno de los elementos que caracteriza la visualización de figuras geométricas, son las operaciones o tratamientos figurales que pueden realizarse en el registro de representación figural, como la reconfiguración (Duval, 2017), operación que permite la reorganización de una figura (en este caso una representación figural tridimensional) en otra figura, que en este caso sería la representación bidimensional del desarrollo del sólido representado, que conserva propiedades como el área de la superficie total. Tenemos entonces el uso de la operación de reconfiguración inmersa en un cambio dimensional que representa otro elemento que caracteriza la visualización (Marmolejo y González, 2013).

De acuerdo con esto, el *enunciado 1* de **S2T3**, centra la atención del estudiante en la asociación de una representación figural del sólido geométrico con su desarrollo bidimensional, a partir de la discriminación de las unidades figurales 2D. Luego del reconocimiento de dichas unidades, se espera que el estudiante realice una descomposición de la representación figural con cambio dimensional, y posteriormente, la reconfigure dando forma al desarrollo del prisma representado (procedimiento 1a, 2a *figura 18*) o asociar cada representación figural 2D a las representadas en el desarrollo, para seleccionar el que se ajuste a dichas formas (procedimiento 1b *figura 18*). Este tratamiento figural puede evidenciarse en la justificación escrita que el estudiante presente, de ahí la importancia de las funciones discursivas como designar.

**Figura 18.** Tratamientos figurales realizados en la representación figural de un prisma recto. S1T3

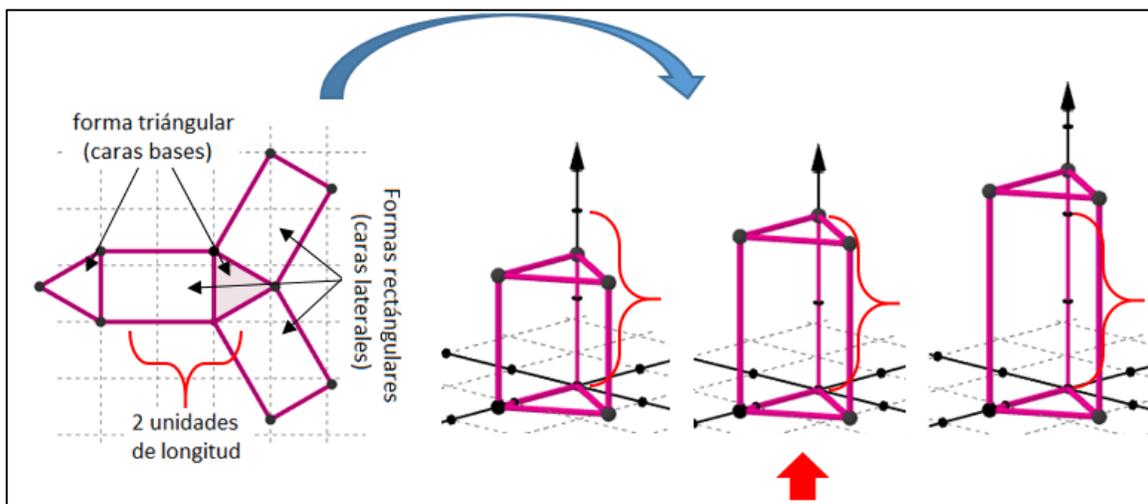


Tomado del diseño de situaciones geométricas propuesto

En el *enunciado 2*, el proceso es similar, sin embargo, el cambio dimensional exigido es de una dimensión inferior a una superior (2D/3D), donde la discriminación de las unidades figurales elementales

2D son esenciales antes de la reconfiguración y el cambio dimensional. El factor de visibilidad utilizado en la representación figural de partida  $f_1$  (uso de la cuadrícula) y  $f_2$  (marcas en el eje coordenado donde se representa la altura del prisma) juegan un papel fundamental en la selección de la respuesta, creando un anclaje con relación a la unidad de longitud, además de las de formas geométricas (ver figura 19).

**Figura 19.** Reconocer y reconfigurar las unidades figurales elementales 2D de la representación figural de un prisma recto triangular (S1T3)



Tomado del diseño de situaciones geométricas propuesto

### 4.3.3 Situación 3: Descomponer y componer dimensionalmente, la representación figural de un sólido geométrico.

#### Descripción general

Esta *situación* corresponde a la etapa de fundamentación en la discriminación de unidades elementales figurales, a través de las cuales se busca establecer regularidades que ayuden a realizar un análisis cualitativo de algunas características comunes en las diferentes representaciones figurales de los prismas rectos y pirámides, que permitan a los estudiantes hacer conjeturas, como la relación entre el número de segmentos de los polígonos representados en las caras bases y el número de vértices y segmentos que correspondan a las aristas de las representaciones figurales de los prismas rectos y pirámides utilizadas.

Además, en esta *situación*, el grupo de tareas fortalece las nociones geométricas elementales del corpus teórico de referencia (geometría euclidiana), dando paso a la conceptualización de propiedades cualitativas de los sólidos geométricos representados figuralmente y en la construcción de proposiciones en el registro de lengua natural a partir de las funciones discursivas referencial y apofántica que se espera evidenciar desde las justificaciones escritas y orales de los estudiantes.

A continuación, se describe la estructura de la *situación* y el análisis sobre los procesos cognitivos e intenciones didácticas de cada *tarea* propuesta.

#### **4.3.3.1 Situación 3 Tarea 1 (S3T1(a, b, c))**

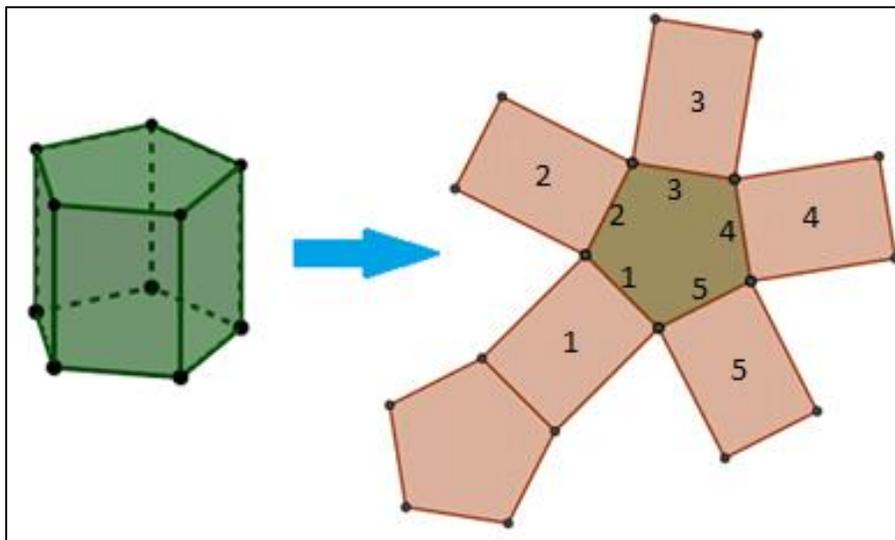
En la *tarea 1*, se presenta a los estudiantes la representación figural de un prisma recto pentagonal con su respectiva representación bidimensional de su desarrollo, movilizándolo un cambio de dimensión, que sigue siendo una representación del mismo objeto geométrico. Se presenta simultáneamente ambas representaciones figurales, para establecer la correspondencia entre las unidades elementales figurales 2D que se obtienen, a partir de la descomposición y reconfiguración de la representación figural del prisma, como se presentó en la S2T3.

Los *enunciados 1, 2, 3, 4 y 5*, hacen referencia a las unidades elementales figurales que componen la representación figural del desarrollo del prisma representado, para identificar en ambas representaciones (la del sólido y la del desarrollo) las mismas unidades figurales (2D, 1D y 0D). Sin embargo, se espera que surjan interrogantes y/o conjeturas sobre el número de segmentos y vértices representados en el desarrollo del prisma, en comparación con los representados figuralmente en el prisma ¿Qué sucede con los segmentos representados en el desarrollo del prisma al plegarse?

En el *enunciado 6*, se pide a los estudiantes consignar en una tabla, el número de unidades elementales figurales identificadas en la representación figural del prisma recto pentagonal, con el fin de facilitar, debido a la organización de los elementos, la construcción de conjeturas, a partir de la observación,

designación y descripción de las unidades elementales figurales (2D, 1D, 0D) discriminadas, a partir de preguntas orientadoras como: si las caras bases tienen la forma de un pentágono ¿cuál es el número de representaciones rectangulares posibles que forman las caras laterales del prisma representado? Dado el número de caras laterales rectangulares ¿Cuál es la forma poligonal que representa las caras bases en un prisma? (ver *figura 20*).

**Figura 20.** Representación figural de un prisma recto pentagonal y la representación figural de su desarrollo (S3T1a)



Tomado del diseño de situaciones geométricas propuesto

En el *enunciado 7*, se espera que los estudiantes establezcan una relación entre el número de segmentos representados que corresponden a los lados del polígono de la cara base con respecto al número de segmentos representados que corresponden a aristas y el número de vértices, a partir de las conjeturas realizadas, pero no escritas, hasta el momento.

Por ejemplo, en el *enunciado 6* (S3T1a), se orienta al estudiante a completar la tabla presentada, a partir de la discriminación y conteo de las unidades figurales elementales presentadas en la representación figural del prisma recto y su desarrollo (*figura 20*), como se presenta en la tabla 11:

**Tabla 11.** Discriminación y designación de unidades figurales. Enunciado 6. S3T1a

Características generales del Prisma Recto	Soluciones esperadas
Número de caras bases representadas	2
Número de caras laterales representadas	5
Número total de caras poligonales representadas	7
Número de aristas representadas	15
Número de vértices representados	10

Tomado del diseño de la secuencia didáctica propuesta

Además, se espera que pueda realizar una proposición que evidencia la relación encontrada, por ejemplo: el número de segmentos que representan los lados del polígono (cara base) corresponde al número de representaciones rectangulares que corresponden a las caras laterales del prisma representado.

La *tarea 1b*, presenta la misma estructura e intencionalidad, pero usando la representación figural de una pirámide. Se espera que los estudiantes reconozcan las diferencias que surgen entre ambas representaciones figurales, como la ausencia de una cara base en comparación de la representación figural del prisma recto, generando cambios en la conjetura que realicen inicialmente, aportando elementos a la conceptualización de cada uno de los sólidos representados (prismas rectos y pirámides), que se buscan fortalecer en el desarrollo de la *tarea 1c*.

#### 4.3.3.2 Situación 3 Tarea 2 (S3T2)

En la *tarea 2*, se hace uso del registro de representación de lengua natural, para describir un grupo de características que presenta un sólido geométrico desconocido. El enunciado orienta a los estudiantes a reconocer las relaciones que, a partir de la información, pueden establecerse, como se muestra en la *figura 21*. Se espera que los estudiantes tomen como punto de análisis, las conjeturas realizadas en la **S3T1**, para verificar si las relaciones que establecen en ese instante de la *situación* dan solución a los interrogantes de esta *tarea*. La *tarea 2* de la *situación 3*, se presenta de la siguiente manera:

**Figura 21.** Enunciado problema S3T2

**Tarea 2.** Lee el enunciado que se presenta a continuación:

Un estudiante del grado séptimo les describe a sus compañeros algunas características de un sólido geométrico que desea representar figuralmente (construcción a lápiz y papel o con ayuda de algún programa como Geogebra). Para solicitar ayuda a sus compañeros, organiza en un listado las características del sólido geométrico de la siguiente manera.

- El sólido geométrico que se busca representar, tiene dos caras bases (superior e inferior respectivamente)
- El sólido geométrico que se busca representar, tiene un total de 9 segmentos que corresponden a aristas.
- El sólido geométrico que se busca representar, tiene un total de 6 vértices representados.

A partir de la información anterior, selecciona la opción que consideres correcta para cada enunciado marcando con un **X**. **Justifica tu selección:**

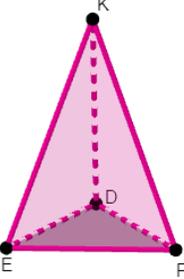
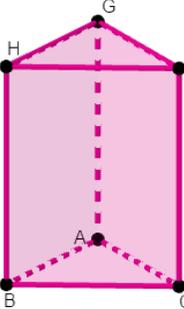
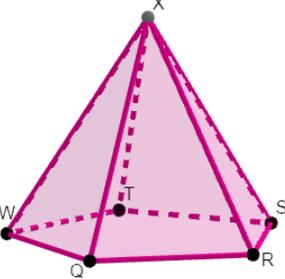
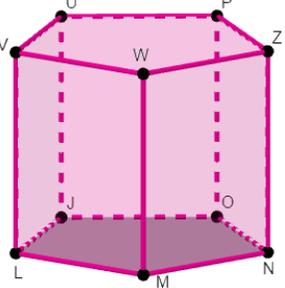
Tomado del diseño de la secuencia didáctica propuesta

Se debe tener en cuenta que la información suministrada en el listado de las características, aluden a unidades elementales figurales de dimensión 0, 1 y 2, pero se pregunta por una representación de dimensión 3. En este momento de la situación didáctica, se han proporcionado las condiciones para realizar la operación de reconfiguración y el cambio dimensional en ambos sentidos (de mayor a menor dimensión – de menor a mayor dimensión).

Los *enunciados* planteados en cada numeral se presentan de forma organizada y categorizada, aportando en cada uno, elementos que permitan la construcción de una representación bidimensional, como el posible desarrollo del sólido que se busca representar, a partir de la composición de cada unidad elemental figural, para finalmente hacer una reconfiguración y cambio de dimensión que de forma a la representación tridimensional buscada. También es posible desarrollar la *tarea* a partir de la verificación de las características descritas en el *enunciado*.

Por ejemplo, en la tabla 12 se presentan posibles justificaciones para la selección de la representación figural del sólido descrito, a partir de un conjunto de cuatro representaciones figurales propuestas en el *enunciado 4* (S3T2):

**Tabla 12.** Posibles justificaciones para la selección de la representación figural del sólido descrito S3T2

Representación figural del sólido geométrico	Justificaciones de selección o no selección, de acuerdo con la verificación de las características descritas en el enunciado
	<p>No corresponde al sólido geométrico descrito, porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La representación figural solo tiene una cara base representada.</li> <li>• El número total de aristas representadas es diferente a 9</li> <li>• El número total de vértices representado es diferente a 6</li> </ul>
	<p>Corresponde al sólido geométrico descrito, porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La representación figural del sólido geométrico tiene dos caras bases representadas por formas poligonales triangulares.</li> <li>• El número de aristas representadas corresponde a 9 y es el triple del número de segmentos que forman la cara base triangular representada.</li> <li>• El número de vértices representados es 6 y corresponde a doble del número de segmentos que forman la cara base triangular representada.</li> </ul>
	<p>No corresponde al sólido geométrico descrito, porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La representación figural solo tiene una cara base representada.</li> <li>• El número total de aristas representadas es diferente a 9</li> <li>• Si el número de aristas representadas es 9, el número de segmentos que debe tener la representación poligonal de la cara base es 3</li> </ul>
	<p>No corresponde al sólido geométrico descrito porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El número total de aristas representadas es diferente a 9</li> <li>• El número total de vértices representado es diferente a 6</li> <li>• Si el número de aristas representadas es 9, el número de segmentos que debe tener la representación poligonal de la cara base es 3 y el número de vértices representados debe ser el doble del número de segmentos de la cara base poligonal representado.</li> </ul>

Fuente: Elaboración propia.

#### **4.3.4 Situación 4: Descubrir, comparar y establecer relaciones entre superficies representadas**

##### Descripción general

Desde la *situación 1* hasta la *situación 3* de la secuencia didáctica propuesta, ha centrado la atención en la discriminación de las unidades figurales elementales que constituyen las representaciones figurales de los prismas rectos y pirámides: su naturaleza dimensional, descomposición (3D/2D, 2D/1D-0D, 3D/1D-0D), su composición (1D/2D, 1D/3D, 2D/3D), establecer relaciones a partir de la observación, designación y descripción que originan conjeturas por comparación. Cada *situación* y *tarea*, se espera que aporte elementos que le permita al estudiante hacer un análisis cualitativo sobre los objetos tridimensionales representados, y los describa en sus justificaciones escritas (en las hojas de trabajo) u orales (en la participación de los foros de socialización).

El análisis cualitativo del área de figura planas, contribuye al desarrollo de la visualización como actividad cognitiva necesaria en la enseñanza y aprendizaje de la geometría (Marmolejo y Vega 2012), en este sentido, la discriminación de las unidades elementales figurales focalizadas hasta el momento, favorecen los tratamientos figurales necesarios para establecer relaciones entre el área de superficies poligonales representadas, como en el caso de las representaciones bidimensionales del desarrollo de los sólidos geométricos.

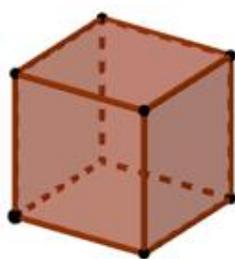
La *situación 4*, corresponde a la primera parte de la etapa de profundización, y centra su atención en la comparación de superficies representadas figuralmente (2D) para establecer relaciones de parte-todo a partir de operaciones como: la reconfiguración (2D/2D, 3D/2D), la superposición (2D/2D) usando unidades figurales de diferente configuración. Aunque en las tareas se utiliza la cuadrícula como un factor de visibilidad (**f1**) que favorezca los tratamientos figurales, el análisis se realiza desde lo cualitativo, como la discriminación de formas (cerradas, poligonales) y a las relaciones parte - todo que pueden establecerse

a partir de las unidades figuales y los elementos de visualización, como el cambio dimensional, unido con las funciones discursivas del registro de representación en la lengua natural, y no a una escala numérica asociada a la magnitud. Sin embargo, este tipo de análisis cualitativo del área de la superficie de los sólidos geométricos representados, permiten un acercamiento a la comprensión del concepto de área y su estudio como magnitud (Freudenthal, 1983. Citado por Marmolejo & González, 2013).

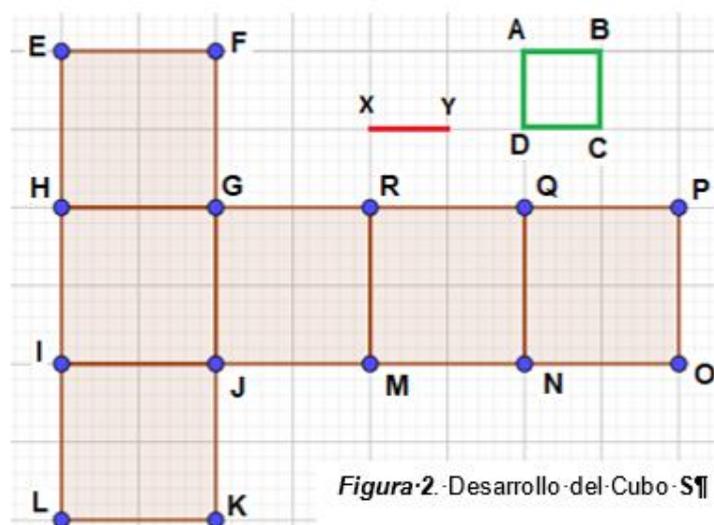
#### 4.3.4.1 Situación 4 Tarea 1 (S4T1)

Se muestra a los estudiantes las representaciones figuales de un cubo (3D) y de su desarrollo (2D), ver *figura 22*. La atención se centra en el desarrollo del cubo representado, sobre una cuadrícula (con cuadrados mayores y menores) como factor de visibilidad (**f1**) de fondo, que apoye los tratamientos figuales esperados para la solución de la *tarea*. Sobre la cuadrícula donde se encuentra el desarrollo del cubo representado, también se muestra la representación figural del cuadrado  $ABCE$  y del segmento  $\overline{XY}$ , a los cuales se hace referencia en el enunciado y se establecen como unidades de superficie y longitud respectivamente; de esta manera se proporciona a los estudiantes, los elementos necesarios para realizar comparaciones entre longitudes (1D) y superficies (2D).

**Figura 22.** Representación figural de un cubo  $S$  y su desarrollo. S4T1



**Figura 1.** Cubo  $S$



**Figura 2.** Desarrollo del Cubo  $S$

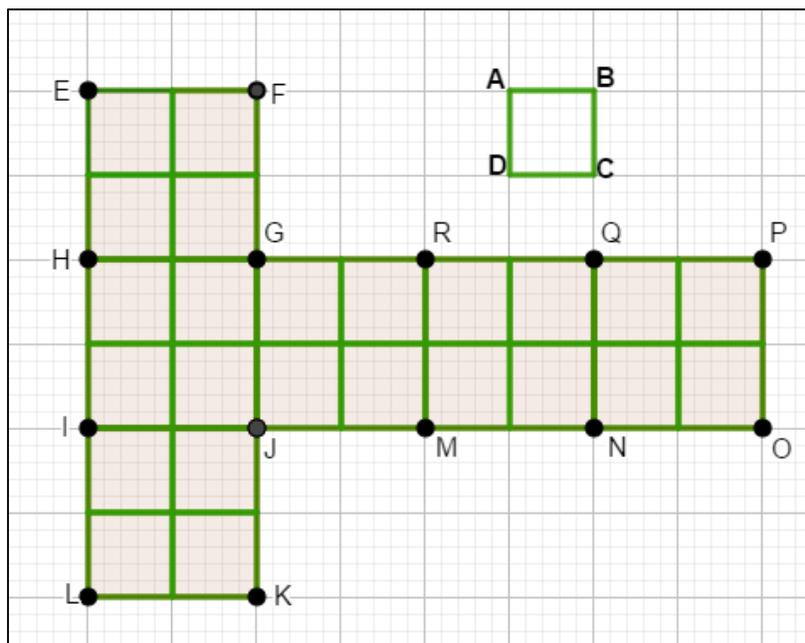
Tomado del diseño de la secuencia didáctica propuesta

En los *enunciados 1 y 2*, se orienta al estudiante que a partir de la información visual proporcionada por la representación figural del desarrollo del cubo *S* y de las unidades figurales de superficie y longitud definidas, se establezca el valor de verdad de un conjunto de proposiciones, ocho en total. Se espera que los estudiantes realicen el tratamiento de configuración por reiteración a partir de las unidades figurales de longitud y superficie designadas, o que realicen tratamientos de superposición, usando como apoyo visual la cuadrícula de fondo. En el caso del *enunciado 2* (S4T1), mostrado a continuación:

*Tomando como unidad de superficie el cuadrado ABCD, representado figuralmente sobre la cuadrícula de la figura 2, ¿Cuántas unidades de superficie ABCD recubren la superficie total del desarrollo del cubo S representado? ¿Qué parte de la superficie total del desarrollo del cubo S representado corresponde al cuadrado ABCD? Explique los procedimientos empleados.*

Un posible tratamiento figural realizado por los estudiantes pueden ser la superposición de la unidad figural de superficie ABCD sobre la superficie total del desarrollo del cubo *S* mostrado en la *figura 23*.

**Figura 23.** Superposición de la unidad figural de superficie ABCD, sobre el desarrollo del cubo *S*. S4T1



Tomado del diseño de la secuencia didáctica propuesta

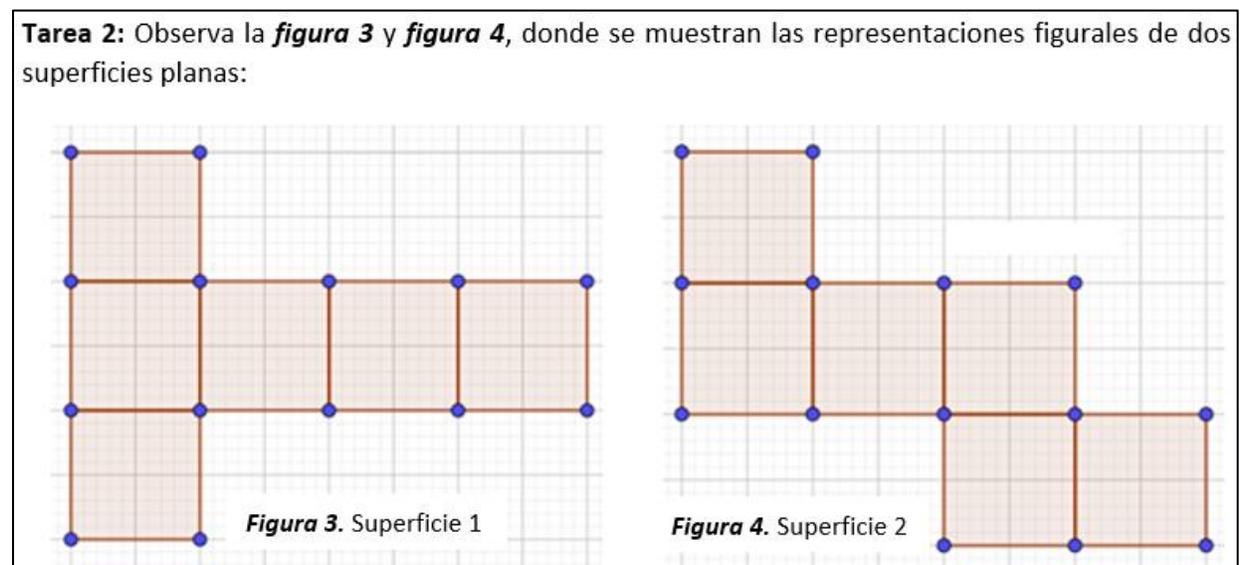
Donde el estudiante puede establecer que 24 unidades figurales  $ABCD$  recubren la superficie total del desarrollo del cubo  $S$  representado y corresponde a la veinticuatroava parte de la superficie representada. Sin embargo, puede obtener el mismo resultado si utiliza la cuadrícula de fondo, al discriminar que la unidad figurial  $ABCD$  corresponde a la misma superficie del cuadrado mayor de la cuadrícula.

Para cada proposición del *enunciado 1* y su selección de F (falso) o V (verdadero), se les pide justificar de manera escrita como llega a la selección realizada, de manera que el maestro pueda verificar el uso de tratamientos figurales y el papel de la variable visual de fondo. En cuanto al contenido geométrico de este *enunciado*, la intención es introducir al estudiante el análisis cualitativo de la noción de longitud del contorno y superficie a partir de una unidad figurial establecida, que proporcione elementos para establecer relaciones parte – todo.

#### 4.3.4.2 Situación 4 Tarea 2 (S4T2)

En la *tarea 2*, se presenta a los estudiantes dos representaciones figurales bidimensionales (superficie 1 y superficie 2) con cuadrícula de fondo, como se puede observar en la *figura 24*.

**Figura 24.** Representación figurial de dos superficies planas. S4T2

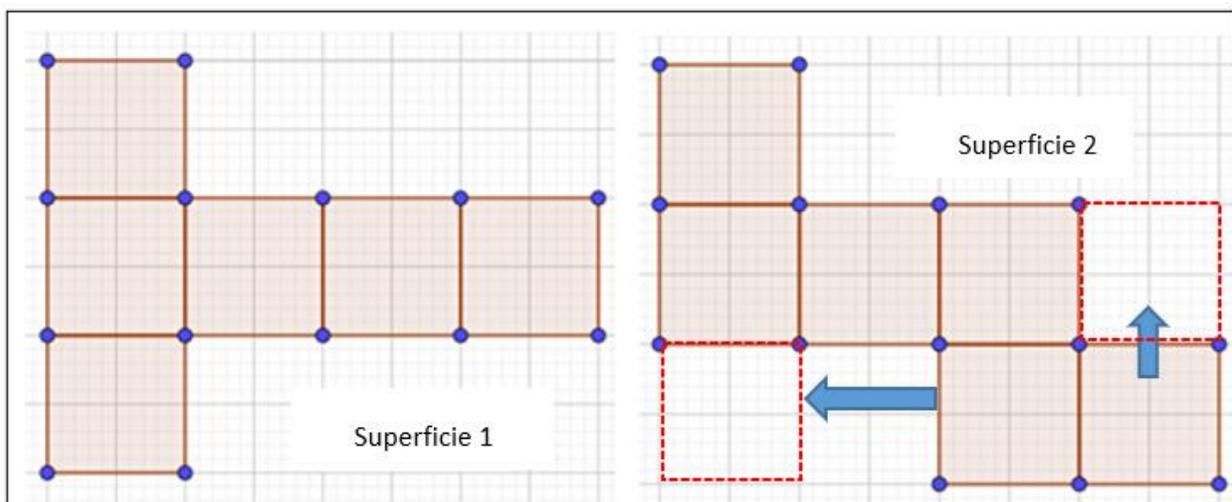


Tomado del diseño de la secuencia didáctica propuesta

A diferencia de la *tarea 1*, las representaciones bidimensionales no hacen referencia, inicialmente, al desarrollo de algún sólido geométrico; tampoco se define una unidad de superficie como en la *tarea 1*. La intención del *enunciado 1 y 2* en **S4T2**, es que los estudiantes propongan una unidad de superficie común (diferente a la presentada en la *tarea 1*) para establecer relaciones entre las dos superficies representadas, usando como apoyo visual la cuadrícula de fondo.

En el caso del enunciado 2, se espera que utilicen tratamientos figurales como las operaciones de configuración por reiteración o superposición, que les permita comparar las dos superficies representadas y establecer la relación entre ellas. Sin embargo, es posible que a través de una reconfiguración (usando traslaciones en algunas de las unidades elementales figurales 2D) el estudiante pueda establecer la relación esperada, sin la selección de una unidad de superficie común (*figura 25*).

**Figura 25.** Tratamiento por reconfiguración S4T2



Tomado del diseño de la secuencia didáctica propuesta

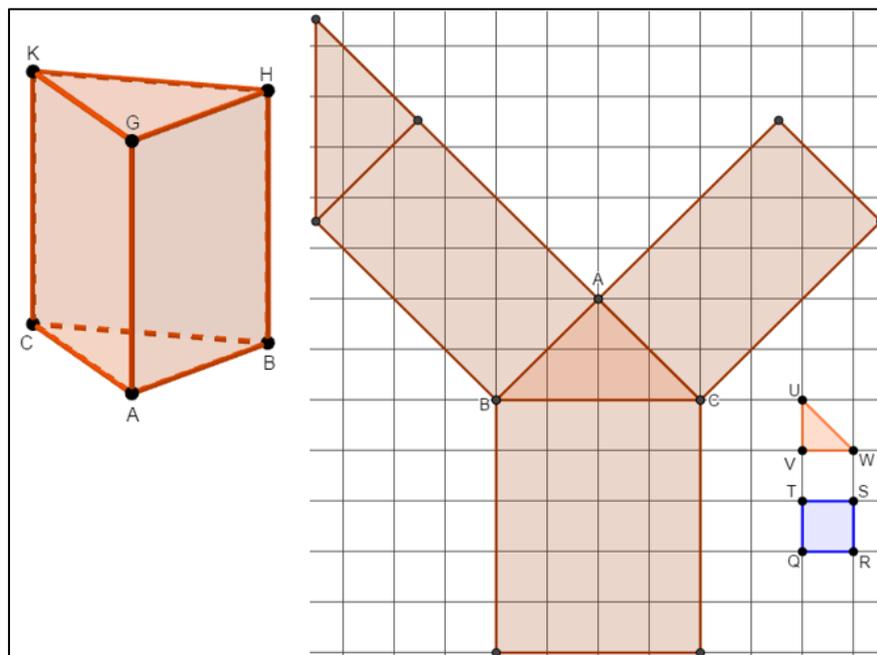
En los *enunciados 3 y 4*, se asocia las dos representaciones figurales de las superficies planas al desarrollo de un cubo, se espera que el estudiante en su justificación describa tratamientos figurales como el de reconfiguración y cambio de dimensión para representar figuralmente el cubo, sin recurrir a cortes

o plegados, mostrando apropiación de los elementos de visualización utilizados en el desarrollo de las situaciones ya desarrolladas (S1, S2, S3).

#### 4.3.4.3 Situación 4 Tarea 3 (S4T3)

En la *tarea 3*, se presenta las representaciones figurales de un prisma recto triangular y su desarrollo bidimensional, con cuadrícula de fondo, donde se resaltan dos unidades figurales de superficie diferentes: **QRST** y **UVW** (*figura 26*). En el *enunciado 1*, se retoma la operación de designar, pues es importante resaltar la necesidad de referenciar los objetos geométricos sobre los cuales se realizan tratamientos y son objeto de reflexión, esto permite al maestro/investigador establecer la apropiación de los estudiantes de esta operación discursiva y su uso en la construcción de justificaciones a los tratamientos realizados. Además, favorece la focalización en las unidades figurales elementales 2D, 1D y 0D al realizar el cambio dimensional, necesaria para el desarrollo de algunos de los *enunciados* posteriores.

**Figura 26.** Representación figurale de un prisma triangular y su desarrollo bidimensional. S4T3



Tomado del diseño de la secuencia didáctica propuesta

En el *enunciado 2*, se hace referencia a una de las unidades figurales de superficie representadas sobre la cuadrícula de fondo *QRST*, para establecer con relación a esta, la medida de la superficie de diferentes zonas limitadas por las formas poligonales que constituyen el desarrollo del prisma triangular representado.

A diferencia de la *tarea 1* y *2*, usar la unidad de superficie con forma cuadrada *QRST*, en las zonas limitadas por representaciones figurales triangulares (caras bases), hace necesario que el estudiante realice un fraccionamiento de la unidad de superficie dada *QRST* o una reconfiguración de la representación figural de la superficie triangular ( $\triangle ABC, \triangle KHG$ ) que le permita establecer una medida en términos de la unidad de superficie *QRST*.

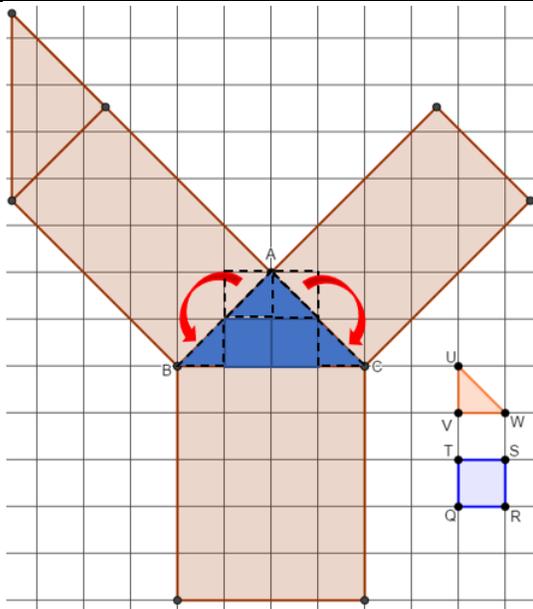
Además, estos tratamientos son posibles en la cara base representada por la forma triangular *ABC*, para la otra forma triangular *GHK*, por la posición que ocupa sobre la cuadrícula, se dificultan tales tratamientos y es entonces donde se espera que el estudiante recurra a las características que se han identificado sobre los prismas rectos a partir de sus representaciones figurales y discriminación de sus unidades figurales elementales. Para el *enunciado 2* (S4T3) propuesto, se presentan a continuación en la tabla 13, algunos desarrollos posibles:

**Tabla 13.** Ejemplo de tratamientos figurales por superposición y fraccionamiento de superficies (S4T3)

Superficies planas correspondientes al desarrollo del prisma recto de base triangular representado figuralmente	Medida de la superficie con relación a la unidad <i>QRST</i> (desígna la como $u^2$ )
a) Superficie de la cara base representada ( $\triangle ABC$ )	<p><b>Cuatro (4) unidades de superficie <i>QRST</i></b></p> <p><b>Opción 1:</b> Procedimiento por superposición de la unidad de superficie <i>QRST</i>, sobre la superficie <i>ABC</i>, usando la cuadrícula de fondo como factor de visibilidad, donde se realiza un fraccionamiento de la unidad de superficie</p>

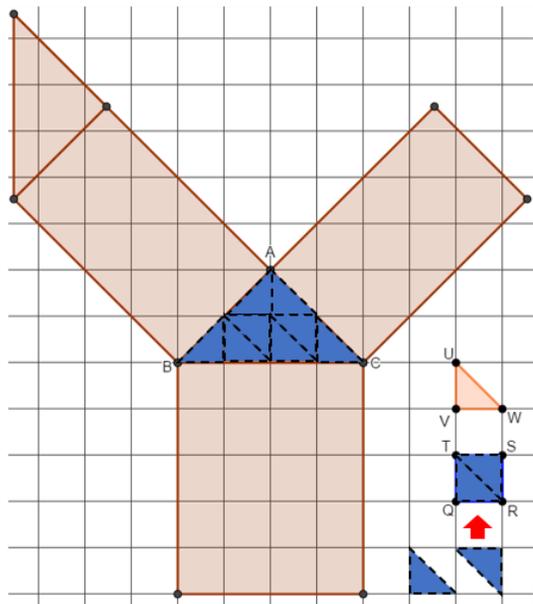
**Superficies planas correspondientes al desarrollo del prisma recto de base triangular representado figuralmente**

**Medida de la superficie con relación a la unidad QRST (desígñala como  $u^2$ )**



QRST más una rotación para recubrir toda la superficie ABC. Conteo de las unidades figurales superpuestas.

**Opción 2:** Procedimiento por fraccionamiento de la unidad de superficie QRST y la superposición de la unidad de superficie fraccionada, sobre la superficie ABC, usando la cuadrícula de fondo como factor de visibilidad. Conteo de las unidades superpuestas. Conteo de las unidades figurales fraccionadas.



En ambos procedimientos, la superposición puede reemplazarse por el fraccionamiento directo de la superficie ABD en la unidad de superficie QRST a partir del trazo de segmentos complementarios, usando la cuadrícula de fondo como apoyo visual.

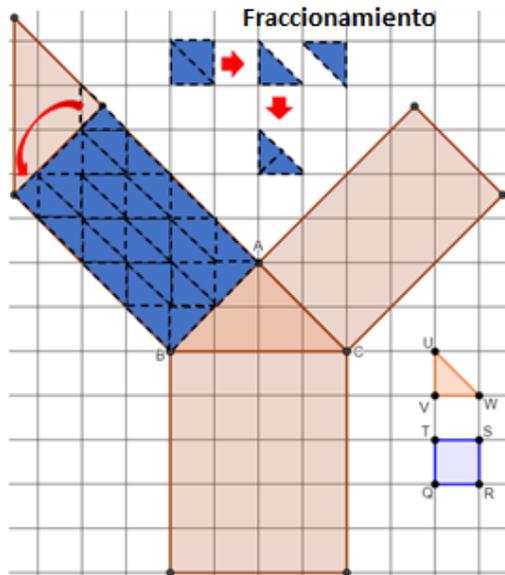
**Cuatro (4) unidades de superficie QRST**

b) Superficie de la cara base representada ( $\Delta$  GHK)

Las representaciones figurales triangulares GHK y ABC, tiene la misma superficie, porque corresponden a las caras bases paralelas del prisma recto representado en la figura.

<b>Superficies planas correspondientes al desarrollo del prisma recto de base triangular representado figuralmente</b>	<b>Medida de la superficie con relación a la unidad QRST (desígna la como <math>u^2</math>)</b>
--	---

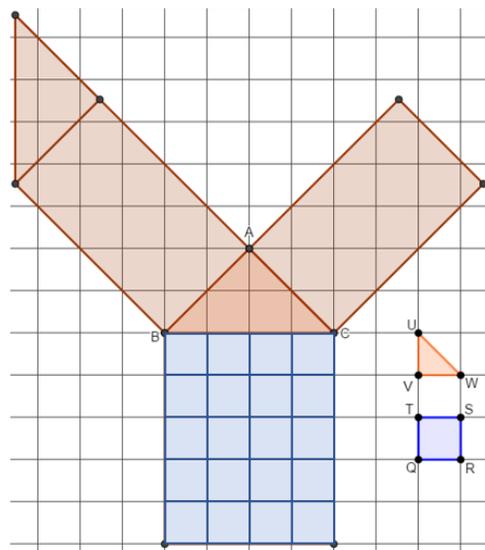
c) Superficie de la cara representada (ABHG)



**Catorce (14) unidades de superficie QRST**

Procedimiento por superposición de la unidad de superficie QRST, sobre la superficie ABHG, usando la cuadrícula de fondo como factor de visibilidad, realizando dos fraccionamientos de la unidad de superficie QRST: el primer fraccionamiento se realiza a partir del trazo de la diagonal de la unidad figural representada (dividiendo la figura en dos partes de forma triangular) y el segundo fraccionamiento se realiza sobre cada forma triangular, para recubrir toda la superficie ABHG.

e) Superficie de la cara lateral (BCKH)



**veinte unidades de superficie QRST**

Procedimiento por superposición de la unidad figural de superficie QRST, o conteo directo usando la cuadrícula de fondo como apoyo visual.

Fuente: Elaboración propia

En el *enunciado 3*, la orientación es igual a la del *enunciado 2*, pero cambia la unidad de superficie seleccionada. En este caso, se espera que los estudiantes no necesiten usar ninguna de los tratamientos figurales trabajados hasta el momento, sino que establezca una relación entre las dos unidades figurales

de superficie representadas  $QRST$  y  $UVW$  usando un trazo complementario (segmento diagonal sobre  $QRST$ ) que le permita determinar la medida de cada superficie con relación a la unidad figural de superficie  $UVW$ .

En el *enunciado 4*, se pide al estudiante construir una nueva unidad figural de superficie, y realizar el mismo análisis de los *enunciados 2 y 3*, para lo cual se presenta en la hoja de trabajo un espacio con cuadrícula de fondo como factor de visibilidad que oriente la elección de la nueva unidad figural de superficie. El uso de tratamientos figurales depende de la unidad de superficie construida, se espera que el estudiante pueda construir la nueva unidad a partir de la configuración reiterada de una de las dos unidades anteriores o su fraccionamiento y establecer la relación entre ellas, para expresar las diferentes medidas a partir de dicha relación.

En los *enunciados 5 y 6*, se relaciona la medida de la superficie total del desarrollo bidimensional representado, con la medida de la superficie total de la representación figural del prisma recto triangular, de manera que el estudiante reconozca que el cambio de dimensión (al plegarse el desarrollo y dar forma al prisma recto triangular representado) no afecta el área de la superficie.

En estos enunciados se orienta al estudiante a realizar comparaciones entre la medida de la superficie total del prisma representado, en función de cada unidad figural de superficie utilizada en la *tarea*, para finalmente encontrar relaciones entre ellas, a partir de los tratamientos figurales realizados. Este tipo de enunciados donde se busca establecer relaciones a partir de la comparación de unidades figurales diferentes, favorecen los procesos de visualización en tanto centran la atención en las unidades figurales de superficie, como unidades constituyentes de la figura, aportando elementos para la estimación de áreas de figuras planas.

### **4.3.5 Situación 5: Descubrir, comparar y establecer relaciones entre el volumen de prismas rectos y pirámides cuadrangulares representadas figuralmente.**

#### Descripción general

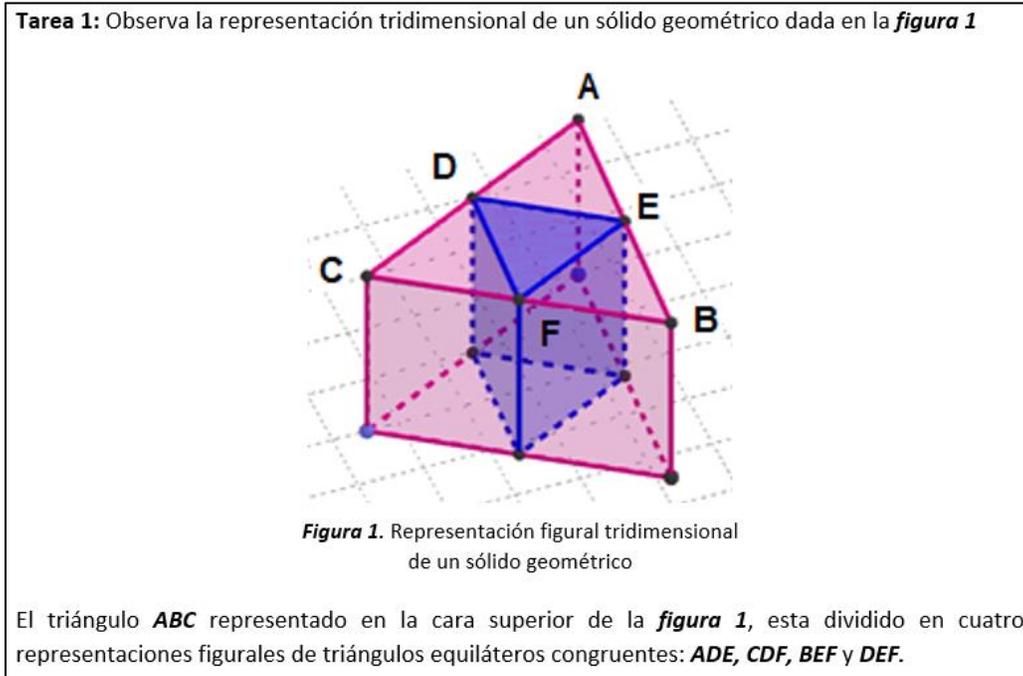
La *situación 5*, corresponde a la segunda parte de la etapa de profundización de la secuencia didáctica, y centra su atención en el reconocimiento de unidades figurales de volumen a partir de las cuales se puede realizar comparaciones y establecer relaciones parte -todo con respecto al espacio ocupado por un sólido geométrico, a partir de tratamientos figurales como: el fraccionamiento del sólido representado (3D/3D), la reconfiguración de las unidades figurales de volumen para representar nuevos sólidos, la superposición de unidades figurales 3D sobre representaciones 2D para completar un sólido geométrico parcialmente representado y la configuración por reiteración de unidades figurales de volumen.

En el conjunto de *tareas* que constituyen la *situación 5*, factores de visibilidad perceptuales como el color, juega un papel importante para favorecer la discriminación de las unidades figurales de volumen y unidades figurales elementales de dimensión 2D, 1D y 0D, lo que favorece la correspondencia entre enunciado y visualización del sólido representado, focalizando la atención de los estudiantes en las unidades figurales pertinentes en el desarrollo de cada tarea.

#### **4.3.5.1 Situación 5 Tarea 1 y 2 (S5T(1, 2))**

En este conjunto de *tareas*, se fija una unidad figurale de volumen a partir de la cual es fraccionado el sólido geométrico representado, centrando la atención en los tratamientos figurales de reconfiguración o configuración reiterada que permiten dar cuenta del número de unidades figurales de volumen necesarias para formar los sólidos representados o constituir nuevas representaciones figurales 3D. Por ejemplo, en la *tarea 1* se muestra la representación figurale de un prisma recto triangular (*figura 27*), fraccionado en cuatro prismas rectos triangulares, donde se establece como unidad figurale de volumen el prisma de cara base superior *DEF* representado, como se muestra a continuación:

**Figura 27.** Representación figural de un prisma recto triangular. S5T1



Tomado del diseño de la secuencia didáctica propuesta

A partir de la descripción del tipo de triángulos que corresponden a las caras superiores de cada prisma triangular representado, se proponen un conjunto de enunciados que orientan al estudiante a centrar la atención en la unidad figural de volumen establecida. La intencionalidad de darle un color diferente (azul) es favorecer, perceptualmente, el reconocimiento de dicha unidad figural, como apoyo a la operación de designación (específicamente por ser la representación de un objeto tridimensional).

Cada enunciado exige el uso de los diferentes tratamientos figurales descritos, además de la discriminación de las unidades figurales elementales de dimensión inferior (2D, 1D, 0D). A continuación, en la tabla 14 se presentan algunos de los enunciados que hacen parte de la S5T1 y S5T2 con algunos de los posibles tratamientos figurales que pueden desarrollar los estudiantes para dar respuesta a los interrogantes enunciados:

**Tabla 14.** Algunos enunciados y tratamientos figurales esperados para el desarrollo de la S5T1 y S5T2

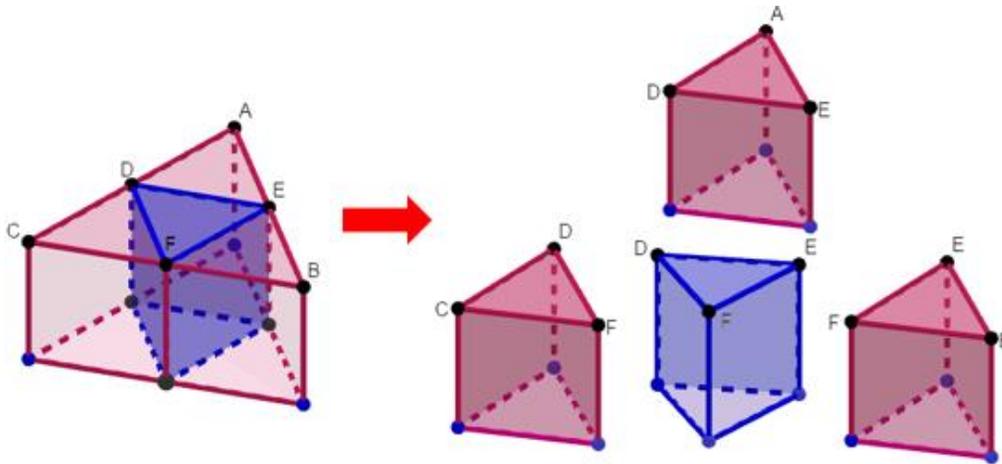
**Enunciados y posibles tratamientos figurales**

(enunciado 1a, S5T1)

¿Cuántos prismas representados identificas en la **figura 1**? Designa la representación figural de cada prisma identificado y descríbelos con tus palabras.

**Posibles Tratamientos figurales**

Inicialmente, se espera que el estudiante identifique los cuatro prismas rectos triangulares en los que se presenta fraccionado el sólido geométrico representado en la **figura 1**, designados a partir de su cara base triangular superior como **ADE**, **CDF**, **BEF** y **DEF**, entre los que se encuentra la unidad figural de volumen seleccionada.

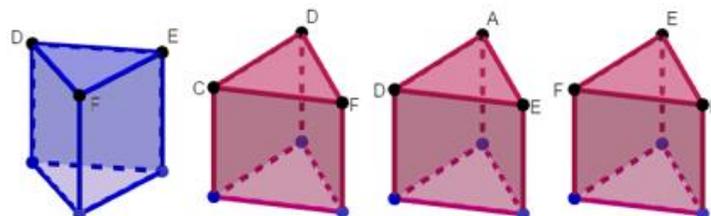


(enunciado 1b, S5T1)

¿Cuántas unidades de volumen equivalen al espacio ocupado por la representación tridimensional del prisma recto con cara poligonal **ABC**? Justifica tu respuesta.

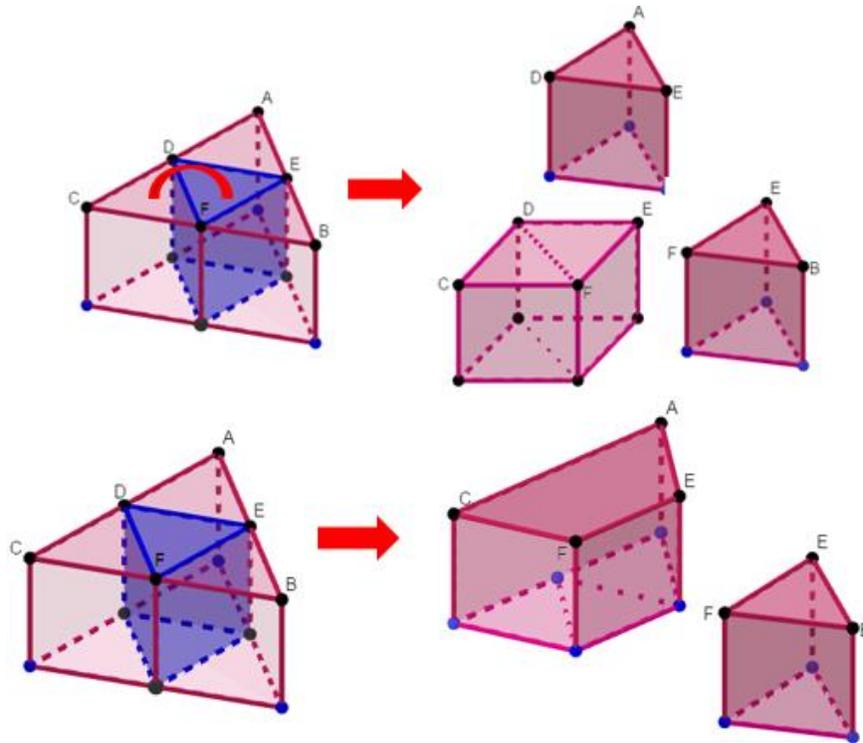
**Posibles Tratamientos figurales**

El fraccionamiento del prisma recto triangular representado, permite establecer el número de unidades figurales de volumen solicitado: El espacio ocupado por la representación figural del prisma recto equivale a cuatro unidades de volumen.



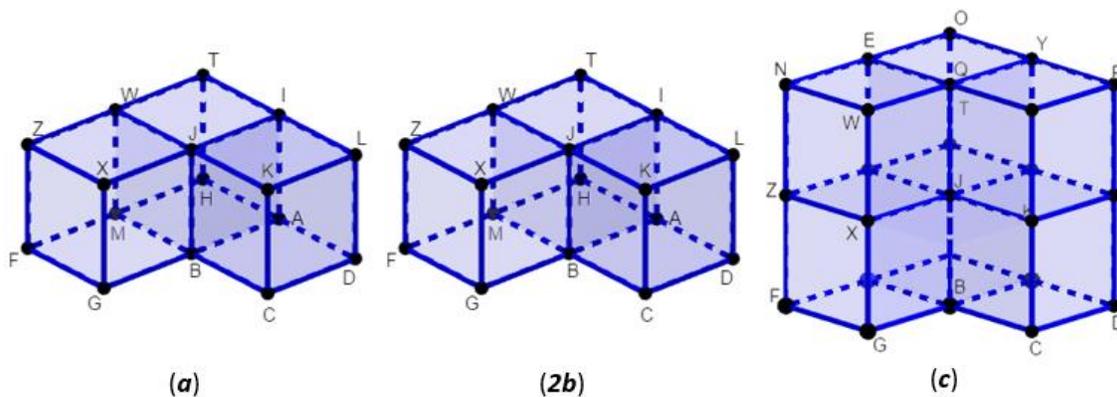
**Enunciados y posibles tratamientos figurales**

Sin embargo, es posible por configuración reiterada de las unidades figurales de volumen obtenidas por fraccionamiento, discriminar otras representaciones figurales correspondientes a prismas de base poligonal diferentes (como prismas de base cuadrada y base trapezoidal)



(enunciado 4, S5T2)

Explica de que manera podemos construir la representación figural de un prisma recto utilizando las representaciones figurales tridimensionales **a**, **2b** y **c**. (sugerencia: puedes usar cualquiera de las representaciones dadas en la **figura 3** como figura de partida para construir la representación del prisma recto solicitado)

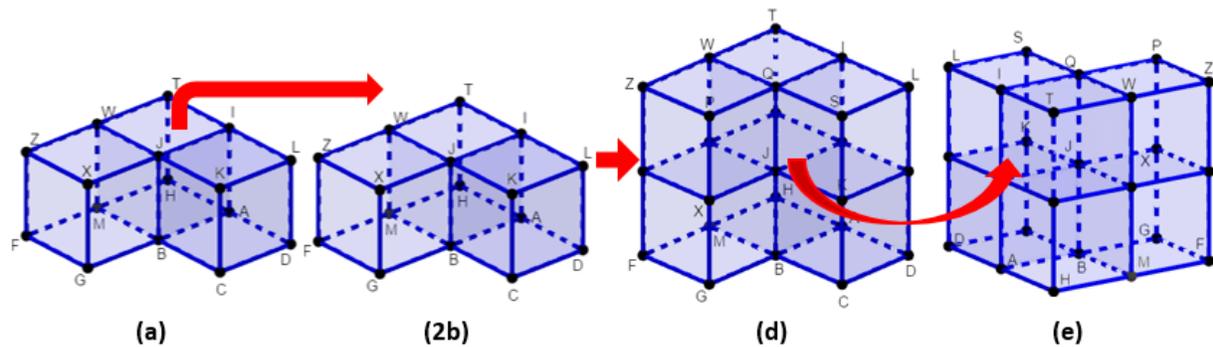


**Figura 3.** Representaciones figurales tridimensionales de tres sólidos geométricos **a**, **2b** y **c**

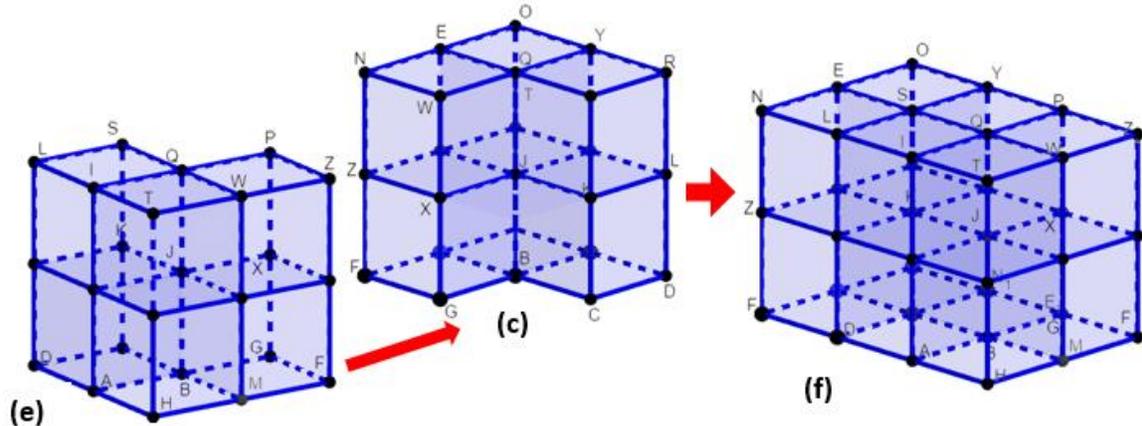
### Enunciados y posibles tratamientos figúrales

#### Posibles Tratamientos figúrales

El desarrollo de esta tarea implica seleccionar entre cuál de las figuras **a**, **2b** y **c** se aplican los tratamientos figúrales tomando cualquiera como unidad figúral de volumen, para formar la representación del prisma recto solicitado. Por ejemplo, si se toma la figura **a** y **2b** como unidades figúrales de volumen, se puede sobreponer la figura **a** sobre la figura **b** (se designa como **d** la composición resultante), luego girar horizontalmente la figura **d** (se designa como **e** la figura resultante), como se muestra a continuación:

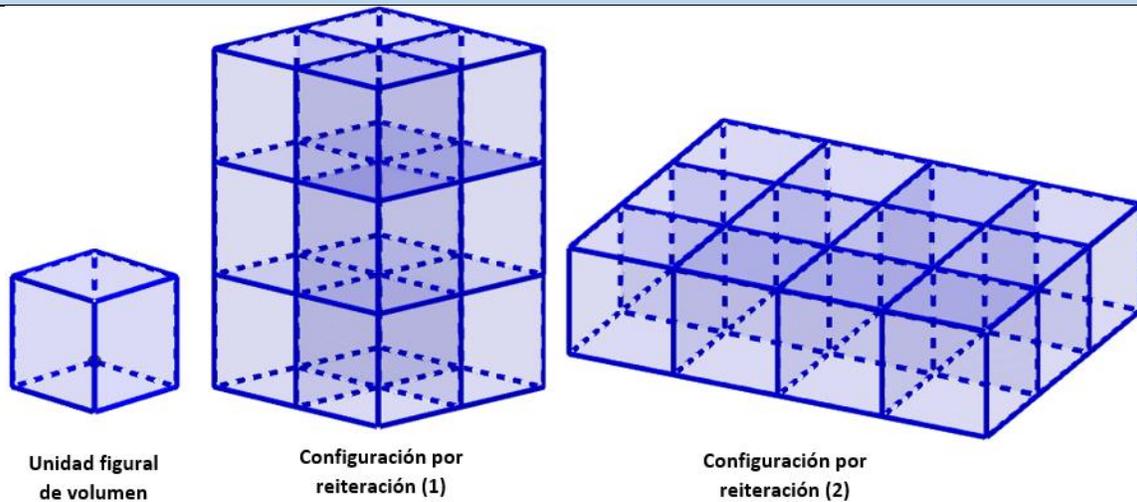


Finalmente, la figura **c** y la figura **e** pueden encajar para formar el prisma recto representado en la figura **f** designada:



En el procedimiento descrito, el foco de visualización fue las figuras **a** y **2b**; sin embargo, los estudiantes pueden seleccionar otra unidad figúral de volumen, por ejemplo los cubos que constituyen por configuración reiterada, cada una de las representaciones figúrales **a**, **2b** y **c**, de esta manera los tratamientos figúrales necesarios pueden limitarse al fraccionamiento en dicha unidad figúral de volumen de las tres figuras y formar una nueva representación 3D, a partir de la configuración reiterada de las 12 unidades figúrales de volumen:

### Enunciados y posibles tratamientos figúrales



Fuente: Elaboración propia

Los *enunciados* presentados en las *tareas 1 y 2*, no implican un cambio dimensional, pero sí la discriminación de unidades figúrales 3D que aportan elementos al estudio del volumen como magnitud, como la conservación del volumen en diferentes reconfiguraciones figúrales 3D, si se mantiene el número de unidades figúrales de volumen seleccionada; además de permitir establecer comparaciones y relaciones entre el espacio ocupado por diferentes sólidos geométricos representados, a partir de las unidades figúrales de volumen comunes identificadas.

#### 4.3.5.2 Situación 5 Tarea 3, 4 y 5 (S5T (3, 4, 5))

El conjunto de estas tres últimas *tareas*, involucra la combinación de los elementos de la visualización que se proponen durante el desarrollo de todas las situaciones anteriores (tratamientos figúrales, cambio dimensional, cambio figural y cambio de focalización bidimensional) en articulación con las funciones discursivas fortalecidas en cada tarea, a través de las designaciones dadas o exigidas, las presentaciones de proposiciones en referencia a los diferentes objetos geométricos, especialmente las unidades figúrales elementales identificadas o resaltadas (3D, 2D, 1D y 0D) y la construcción de justificaciones a las respuestas o afirmaciones realizadas para cada enunciado, por parte de los estudiantes.

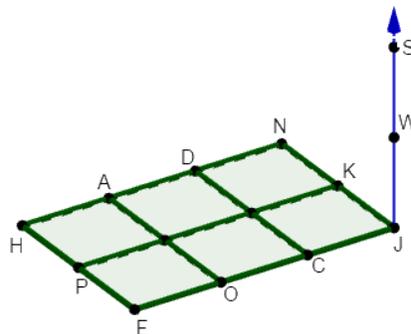
En las *tareas* se representan prismas rectos y pirámides cuadrangulares incompletas, es decir, solo se proporciona parte de la representación figural (cara base bidimensional y el segmento unidimensional que representa la altura del sólido representado), que contiene factores de visibilidad como cuadrícula en la representación bidimensional o marca de graduación en algunas representaciones unidimensionales, que favorecen la coordinación entre el enunciado y la figura. A continuación, se presentan en la tabla 15, algunos de los *enunciados* que hacen parte de las tres tareas y los posibles razonamientos para su solución.

**Tabla 15.** Algunos enunciados y razonamientos para el desarrollo de la S5T3, S5T4 y S5T5

**Enunciados y posibles tratamientos figurales**

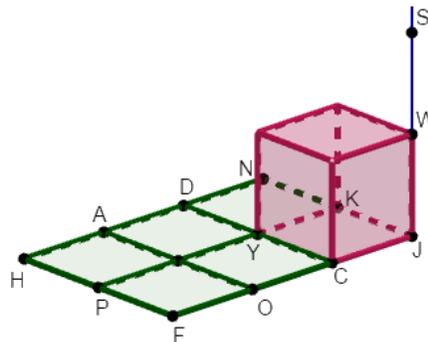
(*enunciado 1, S5T3*)

observa la representación bidimensional y unidimensional de un prisma recto, dado en la **figura 6**, donde la superficie bidimensional de la cara base **HNF** representada, esta subdividida en 6 superficies con formas cuadradas.



**Figura 6.** Representación figural bidimensional y unidimensional de un prisma recto

Si se toma como unidad de volumen la representación figural del cubo **CJKY**, dada en la **figura 7**



**Figura 7.** Representación figural 2D y 1D de un prisma recto y su unidad de volumen

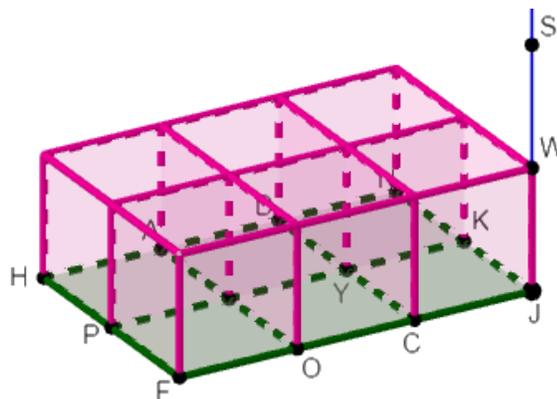
### Enunciados y posibles tratamientos figurales

¿Cuántas unidades de volumen son necesarias para representar un prisma recto que ocupe el espacio delimitado por la superficie **HFJN** y de altura correspondiente al segmento **JS** representados en la **figura 6**? Justifica tu respuesta

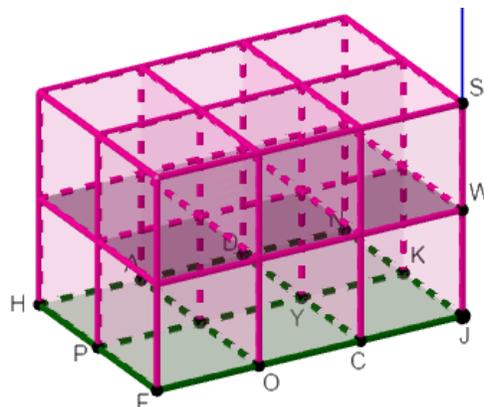
#### Posibles Tratamientos figurales

En esta tarea se tiene como factores de visibilidad, la cuadrícula resaltada sobre la representación bidimensional y las marcas de graduaciones en el segmento vertical que representa la altura del prisma parcialmente representado; además, se presenta la unidad figurale de volumen designada **CJKY** en un color diferente, para que visualmente pueda ser identificada de entrada. El conjunto de estos factores de visibilidad busca centrar la atención del estudiante en la unidad figurale de volumen señalada, y establecer la correspondencia entre sus unidades figurales elementales 2D y 1D al realizar un cambio dimensional. Posteriormente, se debe establecer el número de reiteraciones necesarias para configurar completamente, el prisma parcialmente representado:

1. Reiteraciones de la unidad figurale de volumen para recubrir la representación bidimensional



2. Reiteraciones de la unidad figurale de volumen para recubrir y alcanzar la altura representada en el segmento vertical limitado por el punto S

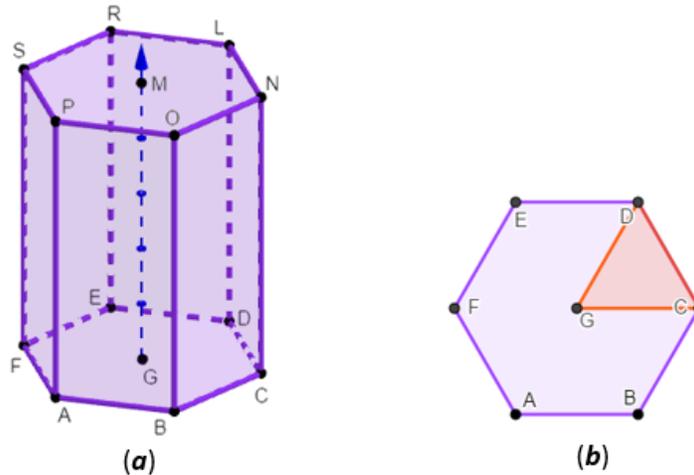


Son necesarias 12 unidades figurales de volumen

**Enunciados y posibles tratamientos figurales**

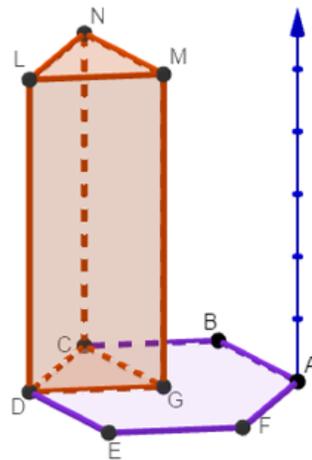
(enunciado 1, S5T4)

Observa la **figura 8**, donde se presenta las representaciones figurales de: **(a)** un prisma recto hexagonal, **(b)** la cara base inferior con forma hexagonal.



**Figura 8.** Representaciones figurales de: **(a)** un prisma recto hexagonal, **(b)** la cara base inferior con forma hexagonal.

1) Si tomamos como unidad de volumen el prisma recto triangular representado en la **figura 9**, donde la cara base corresponde al triángulo equilátero **GDC** representado en **la figura 8 (b)**



**Figura 9.** Representación figurale de un prisma recto triangular (cara base **CDG**) seleccionado como unidad de volumen

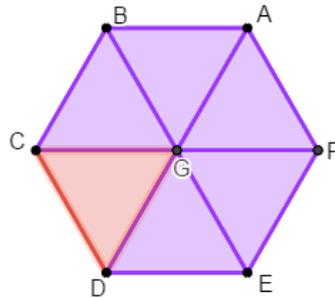
**Posibles Tratamientos figurales**

A partir de la **figura 8**, los estudiantes pueden discriminar una de las unidades figurales elementales 2D perteneciente al prisma hexagonal representado (el hexágono **ABCDEF**) sobre el cual se representa el triángulo **GDC**. La intención de presentar ambas figuras (prisma y cara base) conjuntamente, es la

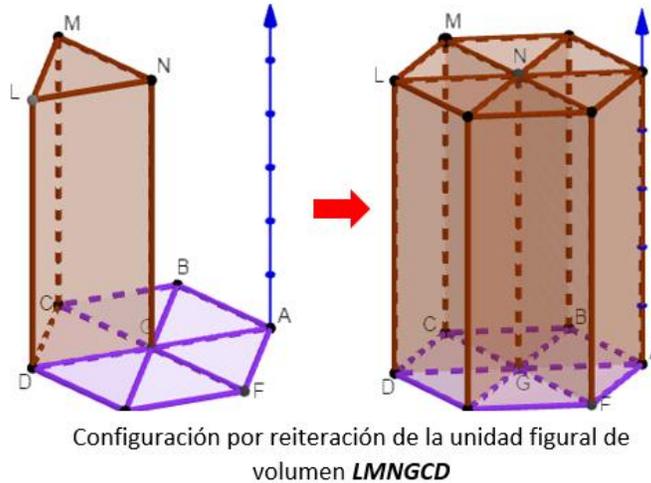
**Enunciados y posibles tratamientos figurales**

centrar la atención en el cambio dimensional, y en el reconocimiento de la unidad figural de superficie (triángulo **GDC**). Esta información se complementa con la representación figural presentada en la **figura 9**, donde se incluye una representación unidimensional (segmento vertical graduado) y la unidad figural de volumen seleccionada.

El estudiante puede identificar en el segmento vertical representado, la altura del prisma hexagonal de la **figura 8a**, a partir de las marcas de graduación; además, establecer la relación parte-todo entre la superficie del triángulo **GDC** y la superficie del hexágono **ABCDEF** representado en la **figura 8**.



Dicha relación permite identificar el número de reiteraciones de la unidad figural de volumen identificada, necesarias para completar el prisma hexagonal parcialmente representado en la **figura 9**.



(enunciado 1a, S5T4)

a) ¿Cuántas unidades de volumen son necesarias para formar la representación figural del prisma recto hexagonal de la **figura 8 (a)**?

Solución: Son necesarios 6 unidades figurales de volumen

Los otros *enunciados* que hacen referencia a representaciones figurales de pirámides cuadrangulares (S5T5) tienen las mismas características y pueden resolverse con razonamientos similares a los expuesto anteriormente, cambiando la focalización bidimensional al establecer unidades de superficie diferentes en el fraccionamiento de la superficie de las representaciones bidimensionales (caras bases) y la unidad figural de volumen seleccionada.

#### **4.4 Comentarios finales**

A partir de las variables didácticas expuestas en este capítulo, y del análisis *a priori* realizado de la secuencia didáctica diseñada, se prosigue con la implementación de acuerdo con la propuesta metodológica presentada en el capítulo 3 de este trabajo de indagación. Posteriormente, se procede a la discriminación y categorización de la información recolectada a partir de las producciones de los estudiantes participantes en el estudio de caso, y los protocolos de observación de los foros de socialización para su análisis y validación interna (análisis *a posteriori*); que permitan establecer los alcances de la propuesta a la luz de los referentes teóricos, las categorías de análisis y los hallazgos que emerjan en la implementación.

Finalmente, se analizará el impacto didáctico y cognitivo de la visualización a partir la deconstrucción dimensional y la articulación de los registros de representación figural y discursivo en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, específicamente, en la comprensión de propiedades como el volumen y área de la superficie de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares.

## 5. Análisis A Posteriori

En este capítulo se presenta el análisis de los datos obtenidos en la implementación de la secuencia de situaciones geométricas diseñada a partir de las variables didácticas expuestas en el análisis *a priori* presentado en el capítulo anterior del presente trabajo de indagación. Los datos presentados y analizados cualitativamente constan de la producción escrita de los estudiantes, realizados en las hojas de trabajo impreso, y de sus intervenciones orales y escritas en los foros de socialización virtual, además de la interacción virtual individual de los estudiantes con el maestro – investigador, a través de la aplicación WhatsApp, como se describió en el diseño metodológico.

El análisis se desarrolla a partir de la confrontación de las producciones de los estudiantes con relación a los resultados esperados de acuerdo con: las variables macro y micro didácticas, el marco teórico de referencia y los objetivos general y específicos de este trabajo de indagación; cuya articulación dan origen a tres categorías de análisis: *i)* Funciones discursivas; *ii)* discriminación de unidades figurales elementales; y *iii)* visualización por deconstrucción dimensional. A partir de estas categorías, se presentan un análisis interpretativo de algunas de las producciones de los estudiantes, desarrolladas durante la implementación de las situaciones geométricas diseñadas, tomando como referencia, aquellas producciones que permitan verificar avances en cuanto a las actividades cognitivas movilizadas, en cada categoría de análisis.

### 5.1 Categorías de análisis

Cada categoría de análisis orientó la revisión de las producciones de los estudiantes y la selección de los momentos más significativos en los procesos realizados, de acuerdo con lo esperado y planteado en el análisis *a priori*, en correspondencia al marco teórico de referencia. La lectura de las producciones de

los estudiantes se realizó en tres tiempos, una lectura por cada categoría de análisis, centrando la atención en las variables didácticas de interés descritas en dichas categorías, de manera que se logre evidenciar la evolución de los procesos de los estudiantes frente a cada una de ellas, y los aportes al cumplimiento de los objetivos planteados.

### **5.1.1 Primera categoría de análisis: Funciones discursivas.**

Esta categoría de análisis se aborda desde las tres funciones discursivas seleccionadas en las variables macro didácticas: la función referencial de designación de objetos; La función apofántica de expresión de enunciados completos y la función de expansión discursiva de un enunciado completo. El análisis se centra en la transición y evolución de los razonamientos realizados por los estudiantes, a partir de la designación de objetos, como operación fundamental en la articulación entre el registro de representación figural y el registro de representación de lengua natural, y la construcción de enunciados completos que justifiquen las decisiones y tratamientos realizados por los estudiantes al enfrentarse y resolver las tareas propuestas en cada situación didáctica.

Duval (2017), expone cuatro operaciones discursivas asociadas a la función referencial: *i)* la operación de designación pura (asignación de marcas o combinación de signos que dan un nombre propio a un objeto para su identificación); *ii)* la operación de categorización simple *iii)* la operación de determinación (*ii* y *iii* conjuntamente, *permiten* identificar un objeto de acuerdo a sus cualidades o clase a la que pertenece, precisando el campo de aplicación); y *iv)* la operación de descripción, la cual permite identificar un objeto combinando varias operaciones de categorización, a partir de la construcción de proposiciones relativas y la posibilidad de designar objetos que no existen en la realidad, como es el caso de las figuras geométricas (representaciones no icónicas). De acuerdo con el autor, en el registro de la lengua natural se debe combinar al menos dos de las anteriores operaciones para poder designar un objeto.

Teniendo en cuenta esta clasificación, se identifica en la secuencia de situaciones geométricas el uso de cada operación en diferentes momentos y por los diferentes actores que participaron en la implementación del diseño: maestro-investigador (construcción de los enunciados que orientan el desarrollo de las tareas de cada situación didáctica diseñada) y estudiantes (construcción de enunciados que dan solución a las tareas y la construcción de sus justificaciones).

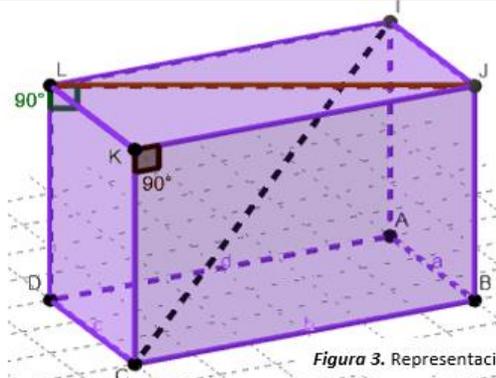
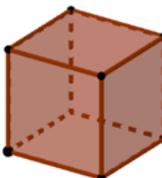
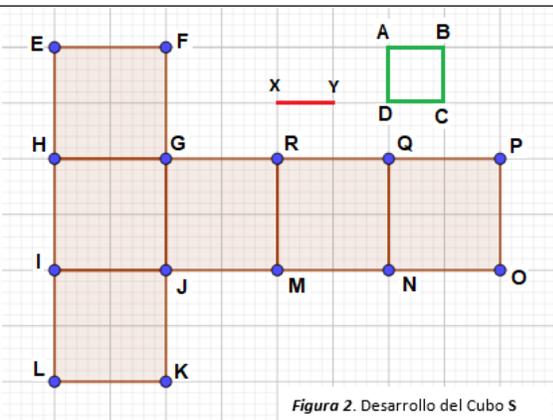
La operación de designación pura fue utilizada en el diseño para designar las unidades figurales elementales a través de un conjunto de marcas (uso de letras mayúsculas) sobre las representaciones figurales tridimensionales de algunos sólidos geométricos, presentados a los estudiantes en las hojas de trabajo que, en combinación con las operaciones de categorización, determinación y descripción, hicieron posible la interacción estudiante – enunciado – figura.

En el desarrollo de cada tarea, se orientó actividades cognitivas como: la identificación de unidades figurales elementales en dimensiones diferentes; establecer relaciones entre objetos designados e identificados; y realizar tratamientos figurales a partir de las unidades figurales.

En la tabla 16, se presenta dos enunciados tomados de momentos diferentes de la secuencia de situaciones geométricas diseñada, donde se resaltan como convergen en los enunciados las operaciones de la función referencial.

**Tabla 16.** Operaciones de la función referencial. Ejemplos de enunciados donde se articulan los registros figural y discursivo, presente en diferentes momentos de las situaciones geométricas

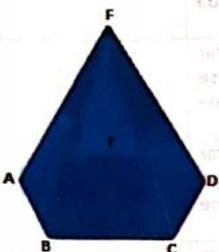
Operaciones de función referencial	Designación Pura ( <b>resaltado en negrita</b> ), Categorización ( <u>subrayado línea</u> ), Determinación ( <b>resaltado</b> )
Enunciado en lengua natural - Tomado de S2T2(1)	Observe <b>la</b> <u>representación figural</u> de <b>un prisma recto</b> dada en <b>la figura 3</b> . A partir de <b>la</b> información dada en <b>la figura 3</b> , responde cada interrogante y justifica tu respuesta.

Operaciones de función referencial	Designación Pura ( <b>resaltado en negrita</b> ), Categorización ( <u>subrayado línea</u> ), Determinación ( <b>resaltado</b> )
	<p>1) ¿Cuál de <b>las</b> siguientes <u>relaciones</u> se puede <u>establecer</u> entre <b>los</b> <u>segmentos</u> <math>\overline{CK}</math> y <math>\overline{KJ}</math>? Marca con una X y justifica tu selección (Recuerda que <b>el</b> <u>símbolo</u> <math>\parallel</math> significa ser <u>paralelo</u>, y <b>el</b> <u>símbolo</u> <math>\perp</math> significa ser <u>perpendicular</u>)</p> <p>a) <math>\overline{CK} \parallel \overline{KJ}</math> <input type="checkbox"/>      b) <math>\overline{CK} \perp \overline{KJ}</math> <input type="checkbox"/></p>
<p>Representación figural a la que se hace referencia en el enunciado</p>	 <p>Figura 3. Representación figural de un Prisma Recto.</p>
<p>Enunciado en lengua natural – Tomado de S4T1(1a)</p>	<p>Dada <b>la</b> <u>representación figural</u> <b>del</b> <u>cuubo S</u> mostrada en <b>la</b> <u>figura 1</u>, se representa su <u>desarrollo</u> en <b>la</b> <u>figura 2</u>.</p> <p>1) Tomando como <u>unidad de superficie</u>, <b>el</b> <u>cuadrado ABCD</u> representado sobre <b>la</b> <u>cuadrícula</u>, y como <u>unidad de longitud</u> <b>el</b> <u>segmento <math>\overline{XY}</math></u> representado sobre <b>la</b> <u>cuadrícula</u>, establezca <b>el</b> <u>valor de verdad</u> de cada enunciado (F para <u>falso</u>, V para <u>verdadero</u>). Justifica tu elección.</p> <p>a) <b>La</b> <u>longitud</u> <b>del</b> <u>segmento <math>\overline{XY}</math></u> está contenida dos veces en <b>la</b> <u>longitud</u> <b>del</b> <u>segmento <math>\overline{EF}</math></u></p>
<p>Representación figural a la que se hace referencia en el enunciado</p>	 <p>Figura 1. Cubo S</p>  <p>Figura 2. Desarrollo del Cubo S</p>

El uso combinado de las cuatro operaciones tanto en el diseño como en las producciones de los estudiantes, tras la implementación evidencian la necesidad de lo que Duval (2017) identifica como un léxico asociativo, es decir, que la referencia a los objetos geométricos se hace a través de expresiones que combinan varios elementos del léxico inicial y los nuevos elementos que van surgiendo. En este sentido, la función referencial emerge como una función fundamental en la construcción del léxico necesario para la articulación entre figura y discurso en geometría, que favorezcan el uso especializado de la lengua natural en la construcción de enunciados completos (función apofántica), al vincular una propiedad, una relación o una acción, con la función referencial, dando como resultado enunciados cuyo valor puede ser epistémico, lógico o ambos. En este sentido, se evidencia un cambio de nivel y de criterio en la constitución del sentido de un enunciado que da lugar a expresiones que justifiquen los procesos realizados por los estudiantes.

A continuación, en la tabla 17 se muestran algunas de las producciones de los estudiantes, en diferentes momentos de la secuencia de situaciones geométricas, donde se observa el uso de las operaciones de las funciones referenciales y apofánticas, y la evolución del léxico inicial que aporta elementos en la construcción de descripciones, explicaciones y justificaciones, a partir de la función de expansión discursiva. Los resultados utilizan la nomenclatura descrita en el capítulo 3 de esta indagación, por ejemplo: **S1T1(4)**, corresponde a la situación 1, tarea 1, enunciado 4.

**Tabla 17.** Operación de designación de objetos. Producciones de E2, E5 y E6. S1T1

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
S1T1(4)	<p>4) De acuerdo a las afirmaciones seleccionadas como verdaderas, en los enunciados de la pregunta 3, responde cada interrogante, usando las designaciones realizadas sobre la foto del objeto 2 en tus respuestas (ver <i>figura 4</i>):</p>  <p><i>Figura 4.</i> Designación sobre la foto de un Objeto tridimensional con forma de Pirámide</p>

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes	
Estudiante E2	<b>Pregunta</b>	<b>Respuesta y Justificación</b>
	a) ¿Qué formas poligonales puedes identificar que estén representadas en cada cara de la superficie del objeto 2?	6 caras triangulares y 7 cara Pentagonal
	b) ¿Cuántos vértices se pueden encontrar representados en el objeto 2? ¿Por qué se pueden considerar representaciones de vértices?	6 vertices, por que son los puntos de intercesion
	c) ¿Cuántas aristas se pueden encontrar representadas en el objeto 2? ¿Por qué pueden considerarse representaciones de aristas?	9 aristas, por que son los lados de las caras del poliedro
	d) ¿El objeto 2 tiene caras paralelas? Explica cómo puedes verificar la propiedad de paralelismo para este caso.	No, porque no tiene lineas iguales en este caso.
e) ¿El objeto 2 tiene caras perpendiculares entre sí? Explica cómo puedes verificar la propiedad de perpendicularidad para este caso.	No, porque no tiene angulos rectos.	
Estudiante E5	<b>Pregunta</b>	<b>Respuesta y Justificación</b>
	a) ¿Qué formas poligonales puedes identificar que estén representadas en cada cara de la superficie del objeto 2?	tiene 5 caras que son triangulare que son lados y se hace es un pentagono con 5 lados
	b) ¿Cuántos vértices se pueden encontrar representados en el objeto 2? ¿Por qué se pueden considerar representaciones de vértices?	tiene 5 vertices ya que cada uno, une 3 lados y una cuspide que une 5 lados
	c) ¿Cuántas aristas se pueden encontrar representadas en el objeto 2? ¿Por qué pueden considerarse representaciones de aristas?	tiene 10 aristas ya que cada una, une dos caras
	d) ¿El objeto 2 tiene caras paralelas? Explica cómo puedes verificar la propiedad de paralelismo para este caso.	No ya que todas las caras que tiene se tocan y solo tiene una cara hace
e) ¿El objeto 2 tiene caras perpendiculares entre sí? Explica cómo puedes verificar la propiedad de perpendicularidad para este caso.	No como tiene todas las lineas se encuentra en un punto y no forma un angulo 90	
Estudiante E6	<b>Pregunta</b>	<b>Respuesta y Justificación</b>
	a) ¿Qué formas poligonales puedes identificar que estén representadas en cada cara de la superficie del objeto 2?	esta representado por trian gulo en cada uno de las caras
	b) ¿Cuántos vértices se pueden encontrar representados en el objeto 2? ¿Por qué se pueden considerar representaciones de vértices?	Tiene 6 vertices por que se consider es que por los puntos que hace formar los puntos
	c) ¿Cuántas aristas se pueden encontrar representadas en el objeto 2? ¿Por qué pueden considerarse representaciones de aristas?	Tiene 9 aristas por que es la encañada de unis los puntos con otras para asi forme la figura
	d) ¿El objeto 2 tiene caras paralelas? Explica cómo puedes verificar la propiedad de paralelismo para este caso.	el objeto 2 no tiene cara paralelas por que tiene unice mente una cara y la otra cara paralela
e) ¿El objeto 2 tiene caras perpendiculares entre sí? Explica cómo puedes verificar la propiedad de perpendicularidad para este caso.	si es un objeto perpendicular por que es una figura recta	

En las respuestas dadas por **E2, E5 y E6** a cada enunciado pregunta en **S1T1(4)** (ver tabla 17) se puede observar que, a pesar de la designación realizada sobre la *figura 4* de S1T1(4) y la orientación explícita en el enunciado de utilizar dicha designación, ninguno de los estudiantes la incluye en sus producciones escritas; solo centran su atención en la descripción general de las formas poligonales reconocidas.

Por otro lado, se observó, algunas de las concepciones de paralelismo y perpendicularidad que tienen los estudiantes, evidenciados a través de expresiones como, “...todas las caras se tocan” para justificar que no son paralelos (S1T1(4)); o la inexistencia de ángulos rectos para justificar la ausencia de segmentos perpendiculares. Sin embargo, en ningún caso se hace referencia a dichos segmentos a partir de su designación, procedimiento esperado en esta tarea.

Para el desarrollo de **S1T2(1)** mostrada en la tabla 18, los estudiantes presentaron dificultades para interpretar lo que los símbolos  $\parallel$  y  $\perp$  representaban, y sobre la forma como debían designar los segmentos o polígonos representados en la *figura 5* de S1T2(1), y escribirlos para completar cada proposición. En todos los casos, se encontró que los estudiantes identifican las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre los segmentos y formas poligonales representadas, apoyándose en la designación para referenciar los objetos que cumplen tales relaciones

Sin embargo, los estudiantes utilizaron la designación para identificar, visualmente, los objetos geométricos que cumplen las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, pero mostraron dificultades para usar la designación de manera escrita en combinación con los símbolos  $\parallel$ ,  $\perp$ , lo que hizo necesario la intervención del maestro-investigador (de manera virtual individual y colectivo), durante el espacio del foro de socialización realizado en ambos casos por WhatsApp, para precisar la forma de designar de acuerdo al objeto geométrico representado y según la codificación simbólica propias de la geometría euclidiana, por ejemplo el uso de letras mayúsculas para designar puntos. Algunas de las intervenciones virtuales realizadas por los estudiantes durante el primer foro, sobre la operación de designación fueron:

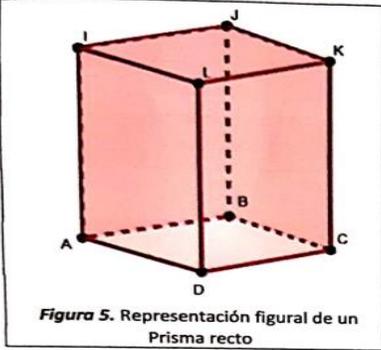
**IF1E6:** La palabra designar, es como decir el nombre de lo que están hablando, como designar cuáles son las caras y eso, como que con los puntos con qué están conformados o diferente, o también se puede llamar las aristas, las caras, así, eso es designar decirle por su nombre o darle un nombre.

**IF1E2:** Para mí la palabra designar, es escribir el objeto con el que se está haciendo la pregunta o con lo que le está respondiendo.

**IF1E3:** por ejemplo, es como decir, que me den las designaciones de los polígonos y serían pues los que hay, por ejemplo, en el objeto uno hay triángulo rectángulo es como decirle el nombre de las cosas que nos están pidiendo.

A partir de las intervenciones sobre la operación de designar objetos y la lectura colectiva de cada enunciado haciendo referencia en reconocer cada objeto geométrico referenciado en la representación figural dada, los estudiantes lograron completar las proposiciones propuestas, como se muestra en la tabla 18. En esta tarea, introducir la operación de designación de manera explícita, orientó a los estudiantes a centrar la atención en los objetos geométricos de interés didáctico, logrando enfocar sus razonamientos en las relaciones de paralelismo y perpendicularidad.

**Tabla 18.** Operación de designación de objetos. Producciones de E2, E5 y E6. S1T2

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
S1T2(1)	<p><b>Tarea 2:</b> A continuación, se presenta la representación figural de un Prisma recto (ver <i>figura 5</i>) que cumple con las siguientes características:</p>  <p><i>Figura 5.</i> Representación figural de un Prisma recto</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) ABCD es la representación figural de un cuadrado</li> <li>b) IJKL es la representación figural de un cuadrado</li> <li>c) ADLI es la representación figural de un rectángulo</li> <li>d) BCKJ es la representación figural de un rectángulo</li> <li>e) ABJI es la representación figural de un rectángulo</li> <li>f) CDLK es la representación figural de un rectángulo</li> </ul>

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes								
Estudiante E2	Teniendo en cuenta las características descritas sobre la representación figural del prisma recto de la <b>figura 5</b> , completa cada enunciado de manera que cada proposición final sea verdadera:								
	<table border="1"> <tr> <td>1. <math>\overline{AB} \parallel \overline{CD}</math> "el segmento <math>AB</math> es paralelo a..."</td> <td>2. <math>\overline{IJ} \parallel \overline{LK}</math></td> </tr> <tr> <td>3. <math>\overline{AD} \parallel \overline{BC}</math></td> <td>4. <math>\overline{IL} \perp \overline{JK}</math> "el segmento <math>IL</math> es perpendicular a..."</td> </tr> <tr> <td>5. <math>\overline{AB} \perp \overline{CD}</math></td> <td>6. <math>CDLK \parallel ABIJ</math></td> </tr> <tr> <td>7. <math>IJKL \parallel ABCD</math></td> <td>8. <math>IJKL \perp ABCD</math></td> </tr> </table>	1. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ "el segmento $AB$ es paralelo a..."	2. $\overline{IJ} \parallel \overline{LK}$	3. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	4. $\overline{IL} \perp \overline{JK}$ "el segmento $IL$ es perpendicular a..."	5. $\overline{AB} \perp \overline{CD}$	6. $CDLK \parallel ABIJ$	7. $IJKL \parallel ABCD$	8. $IJKL \perp ABCD$
	1. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ "el segmento $AB$ es paralelo a..."	2. $\overline{IJ} \parallel \overline{LK}$							
	3. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	4. $\overline{IL} \perp \overline{JK}$ "el segmento $IL$ es perpendicular a..."							
5. $\overline{AB} \perp \overline{CD}$	6. $CDLK \parallel ABIJ$								
7. $IJKL \parallel ABCD$	8. $IJKL \perp ABCD$								
Estudiante E5	Teniendo en cuenta las características descritas sobre la representación figural del prisma recto de la <b>figura 5</b> , completa cada enunciado de manera que cada proposición final sea verdadera:								
	<table border="1"> <tr> <td>1. <math>\overline{AB} \parallel \overline{IJ}</math> "el segmento <math>AB</math> es paralelo a..."</td> <td>2. <math>\overline{IJ} \parallel \overline{AB}</math> <math>\overline{IJ}</math> es paralelo a <math>\overline{AB}</math></td> </tr> <tr> <td>3. <math>\overline{AD} \parallel \overline{IL}</math> <math>\overline{AD}</math> es paralelo a <math>\overline{IL}</math></td> <td>4. <math>\overline{IL} \perp \overline{JK}</math> "el segmento <math>IL</math> es perpendicular a..."</td> </tr> <tr> <td>5. <math>\overline{AB} \perp \overline{BC}</math> <math>\overline{AB}</math> es perpendicular a <math>\overline{BC}</math></td> <td>6. <math>CDLK \parallel ABJI</math> <math>CDLK</math> es paralelo a <math>ABJI</math></td> </tr> <tr> <td>7. <math>IJKL \parallel ABCD</math> <math>IJKL</math> es paralelo a <math>ABCD</math></td> <td>8. <math>IJKL \perp ABCD</math> <math>IJKL</math> es perpendicular a <math>ABCD</math></td> </tr> </table>	1. $\overline{AB} \parallel \overline{IJ}$ "el segmento $AB$ es paralelo a..."	2. $\overline{IJ} \parallel \overline{AB}$ $\overline{IJ}$ es paralelo a $\overline{AB}$	3. $\overline{AD} \parallel \overline{IL}$ $\overline{AD}$ es paralelo a $\overline{IL}$	4. $\overline{IL} \perp \overline{JK}$ "el segmento $IL$ es perpendicular a..."	5. $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{BC}$	6. $CDLK \parallel ABJI$ $CDLK$ es paralelo a $ABJI$	7. $IJKL \parallel ABCD$ $IJKL$ es paralelo a $ABCD$	8. $IJKL \perp ABCD$ $IJKL$ es perpendicular a $ABCD$
	1. $\overline{AB} \parallel \overline{IJ}$ "el segmento $AB$ es paralelo a..."	2. $\overline{IJ} \parallel \overline{AB}$ $\overline{IJ}$ es paralelo a $\overline{AB}$							
	3. $\overline{AD} \parallel \overline{IL}$ $\overline{AD}$ es paralelo a $\overline{IL}$	4. $\overline{IL} \perp \overline{JK}$ "el segmento $IL$ es perpendicular a..."							
5. $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{BC}$	6. $CDLK \parallel ABJI$ $CDLK$ es paralelo a $ABJI$								
7. $IJKL \parallel ABCD$ $IJKL$ es paralelo a $ABCD$	8. $IJKL \perp ABCD$ $IJKL$ es perpendicular a $ABCD$								
Estudiante E6	Teniendo en cuenta las características descritas sobre la representación figural del prisma recto de la <b>figura 5</b> , completa cada enunciado de manera que cada proposición final sea verdadera:								
	<table border="1"> <tr> <td>1. <math>\overline{AB} \parallel \overline{CD}</math> "el segmento <math>AB</math> es paralelo a..."</td> <td>2. <math>\overline{IJ} \parallel \overline{IK}</math></td> </tr> <tr> <td>3. <math>\overline{AD} \parallel \overline{IL}</math> "el segmento <math>AD</math> es paralelo a..."</td> <td>4. <math>\overline{IL} \perp \overline{LD}</math> "el segmento <math>IL</math> es perpendicular a..."</td> </tr> <tr> <td>5. <math>\overline{AB} \perp \overline{BJ}</math></td> <td>6. <math>CDLK \parallel ABWJ</math></td> </tr> <tr> <td>7. <math>IJKL \parallel ABCD</math></td> <td>8. <math>IJKL \perp CDKJ</math></td> </tr> </table>	1. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ "el segmento $AB$ es paralelo a..."	2. $\overline{IJ} \parallel \overline{IK}$	3. $\overline{AD} \parallel \overline{IL}$ "el segmento $AD$ es paralelo a..."	4. $\overline{IL} \perp \overline{LD}$ "el segmento $IL$ es perpendicular a..."	5. $\overline{AB} \perp \overline{BJ}$	6. $CDLK \parallel ABWJ$	7. $IJKL \parallel ABCD$	8. $IJKL \perp CDKJ$
	1. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ "el segmento $AB$ es paralelo a..."	2. $\overline{IJ} \parallel \overline{IK}$							
	3. $\overline{AD} \parallel \overline{IL}$ "el segmento $AD$ es paralelo a..."	4. $\overline{IL} \perp \overline{LD}$ "el segmento $IL$ es perpendicular a..."							
5. $\overline{AB} \perp \overline{BJ}$	6. $CDLK \parallel ABWJ$								
7. $IJKL \parallel ABCD$	8. $IJKL \perp CDKJ$								

Fuente: Producciones de los estudiantes

Teniendo en cuenta el medio virtual de interacción entre, maestro/investigador – estudiante y estudiante – estudiante, utilizado en la implementación de la secuencia de situaciones geométricas propuesta; la operación de designación de objetos juega un papel fundamental en el proceso de comunicación virtual, al permitir manifestar inquietudes sobre la figura y los enunciados, así como para seguir la idea de las afirmaciones realizadas por otro sujeto en la interacción, y en esa medida participar haciendo referencia a los objetos geométricos referenciados. Por ejemplo, se presenta un fragmento de la intervención virtual individual del estudiante E6, donde manifiesta inquietudes sobre la S1T2, particularmente sobre la identificación de segmentos paralelos:

**IviE6:** profe, es que allí en esa pregunta de la tarea 2, dice que hay que completar, pero no entiendo muy bien que debo escribir.

**IviMs:** Recuerdas que cuando hablamos de dos segmentos o planos paralelos, nos referimos a aquellos que guardan una distancia constante entre ellos, es decir, a lo largo de su trayecto no se encuentran y lo podemos simbolizar usando dos líneas verticales (||) como lo muestran en cada proposición. En el caso del enunciado de la tarea 2, en la pregunta 1, te piden encontrar en la figura un segmento que sea paralelo al segmento  $AB$ . Ubica  $\overline{AB}$  en la figura.

**IviE6:** ya profe, ya lo vi.

**IviMs:** Ahora observa entre todos los segmentos representados, cual cumple la propiedad “ser paralelo” que no toque  $\overline{AB}$  según la característica de mantener la misma distancia del  $\overline{AB}$ .

**IviE6:** bueno, en el que yo busque profe, creo que estoy bien, no sé si está bien o no, yo creo que las que no se tocan pueden ser la CD, que es la que no están juntas, pero están igual distanciados.

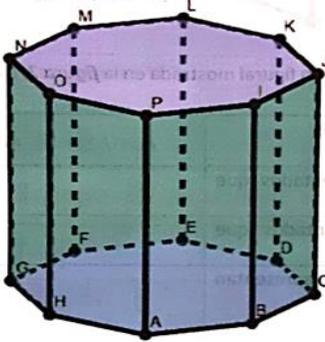
**IviMs:** y en el caso de la pregunta 6, donde piden identificar una cara paralela a CDLK, ¿cuál identificas?

**IviE6:** ABIJ profe.

En el anterior dialogo, la designación permite que el estudiante articule el enunciado con la figura, con el apoyo de las orientaciones del maestro/investigador, focalizando las acciones de identificar en los objetos geométricos de interés.

En **S2T1(1)** la operación de designar aparece como una acción explícita a ser realizada en los ítems d y e, ver tabla 19. En este caso, tanto los estudiantes **E5** y **E6** desarrollan la operación de designación, teniendo en cuenta las marcas presentadas en la representación figural del prisma recto octogonal dada en la *figura 1* de S2T1(1), como parte del proceso de discriminación de unidades figurales elementales 1D y 2D. Además, permite asociar cada objeto designado con un elemento de los objetos tridimensionales que se estudian (prismas rectos), tales como aristas y caras poligonales.

**Tabla 19.** Operación de designación de objetos. Producciones de E2, E5 y E6. S2T1

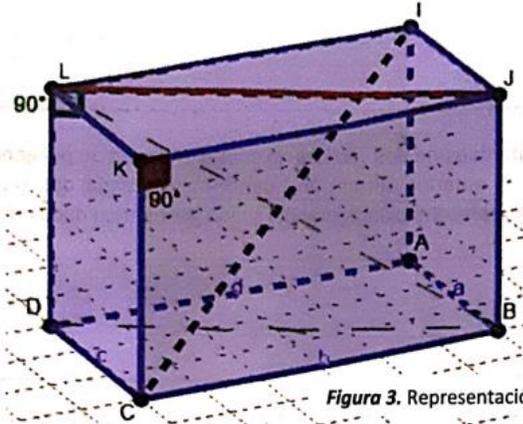
Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes										
S2T1(1)	<p><b>Tarea 1:</b> Observa la representación figural de un prisma recto octogonal dada en la <b>figura 1</b>:</p>  <p><b>Figura 1.</b> Representación figural de un Prisma Recto Octogonal</p>										
	<p>A partir de representaciones figurales como la mostrada en la <b>figura 1</b>, podemos identificar y designar los componentes de un sólido geométrico representado, por ejemplo, las formas poligonales que limitan la superficie del prisma recto representado reciben el nombre de caras.</p> <p>1) Teniendo en cuenta la representación figural mostrada en la <b>figura 1</b>, completa la siguiente tabla:</p>										
Estudiante E2	<table border="1"> <tr> <td>a. Número de vértices representados</td> <td>16 vertices</td> </tr> <tr> <td>b. Número de segmentos representados que corresponden a aristas</td> <td>24 aristas</td> </tr> <tr> <td>c. Número de polígonos representados que corresponden a caras</td> <td>10 caras</td> </tr> <tr> <td>d. Designe los segmentos que representan aristas</td> <td>son los lados de las caras. Cada arista hace frontera de dos caras.</td> </tr> <tr> <td>e. Designe los polígonos que forman cada cara del sólido geométrico representado</td> <td>2 caras octagonales y 8 rectángulos</td> </tr> </table>	a. Número de vértices representados	16 vertices	b. Número de segmentos representados que corresponden a aristas	24 aristas	c. Número de polígonos representados que corresponden a caras	10 caras	d. Designe los segmentos que representan aristas	son los lados de las caras. Cada arista hace frontera de dos caras.	e. Designe los polígonos que forman cada cara del sólido geométrico representado	2 caras octagonales y 8 rectángulos
a. Número de vértices representados	16 vertices										
b. Número de segmentos representados que corresponden a aristas	24 aristas										
c. Número de polígonos representados que corresponden a caras	10 caras										
d. Designe los segmentos que representan aristas	son los lados de las caras. Cada arista hace frontera de dos caras.										
e. Designe los polígonos que forman cada cara del sólido geométrico representado	2 caras octagonales y 8 rectángulos										
Estudiante E5	<table border="1"> <tr> <td>a. Número de vértices representados</td> <td>16 vertices</td> </tr> <tr> <td>b. Número de segmentos representados que corresponden a aristas</td> <td>24 aristas</td> </tr> <tr> <td>c. Número de polígonos representados que corresponden a caras</td> <td>8 rectángulos de 4 lados, dos caras de ocho lados (heptágono)</td> </tr> <tr> <td>d. Designe los segmentos que representan aristas</td> <td>AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ, JK, KL, LM, MN, NO, OP, PI</td> </tr> <tr> <td>e. Designe los polígonos que forman cada cara del sólido geométrico representado</td> <td>ABPI, BCij, CDJK, DEKL, EFLM, FGHU, ghNO, hOP, IJNLMNOP, ABCDEFGH</td> </tr> </table>	a. Número de vértices representados	16 vertices	b. Número de segmentos representados que corresponden a aristas	24 aristas	c. Número de polígonos representados que corresponden a caras	8 rectángulos de 4 lados, dos caras de ocho lados (heptágono)	d. Designe los segmentos que representan aristas	AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ, JK, KL, LM, MN, NO, OP, PI	e. Designe los polígonos que forman cada cara del sólido geométrico representado	ABPI, BCij, CDJK, DEKL, EFLM, FGHU, ghNO, hOP, IJNLMNOP, ABCDEFGH
a. Número de vértices representados	16 vertices										
b. Número de segmentos representados que corresponden a aristas	24 aristas										
c. Número de polígonos representados que corresponden a caras	8 rectángulos de 4 lados, dos caras de ocho lados (heptágono)										
d. Designe los segmentos que representan aristas	AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ, JK, KL, LM, MN, NO, OP, PI										
e. Designe los polígonos que forman cada cara del sólido geométrico representado	ABPI, BCij, CDJK, DEKL, EFLM, FGHU, ghNO, hOP, IJNLMNOP, ABCDEFGH										

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes	
Estudiante E6	a. Número de vértices representados	16 vértices
	b. Número de segmentos representados que corresponden a aristas	24 aristas
	c. Número de polígonos representados que corresponden a caras	8 caras
	d. Designe los segmentos que representan aristas	$\overline{AB}$ $\overline{IP}$ $\overline{CD}$ $\overline{KJ}$ $\overline{DE}$ $\overline{KL}$ $\overline{EF}$ $\overline{LM}$ $\overline{FG}$ $\overline{MN}$ $\overline{HO}$ $\overline{OP}$ $\overline{AP}$ $\overline{HO}$ $\overline{GN}$ $\overline{FM}$ $\overline{CL}$ $\overline{DK}$ $\overline{CJ}$ $\overline{BT}$
	e. Designe los polígonos que forman cada cara del sólido geométrico representado	$ABIP$ , $BCJI$ , $CDJK$ , $DEKI$ , $EFLM$ , $FGMN$ , $GNHO$ , $HAOP$ , $IJKLMNOP$ , $ABCDEFGH$

Fuente: Producciones de los estudiantes

En el caso del estudiante E2, sus respuestas se apoyan en la descripción general de los elementos señalados (aristas y caras poligonales) sin hacer referencia explícita, a la designación de cada uno. Sin embargo, en la S2T2(5, 6), este estudiante se apoya en la designación de los segmentos para justificar las respuestas dadas a los enunciados, como se muestra en la tabla 20.

Tabla 20. Operación de designación de objetos. Producciones de E2. S2T2

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
S2T2(5, 6)	<p>Tarea 2: Observe la representación figural de un prisma recto dada en la figura 3.</p>  <p>Figura 3. Representación figural de un Prisma Recto.</p> <p>A partir de la información dada en la figura 3, responde cada interrogante y justifica tu respuesta.</p>

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
	<p>5) ¿El segmento <math>\overline{CI}</math> se encuentra sobre la superficie del sólido geométrico o al interior del sólido geométrico? Justifica tu respuesta</p> <p>Se encuentra adentro del solido geometrico porque una de las aristas pasa por encima del segmento CI</p>
Estudiante E2	<p>6) La diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos en un polígono o un sólido geométrico. De acuerdo a la anterior afirmación, identifica y designa dos segmentos que representen diagonales en la representación figural del sólido geométrico dado en la <i>figura 3</i></p> <p>los segmentos diagonales de la Figura 3 son: <math>\overline{LJ}</math> y <math>\overline{CI}</math></p>

Fuente: Producciones de los estudiantes

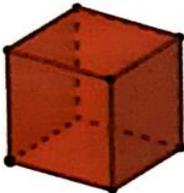
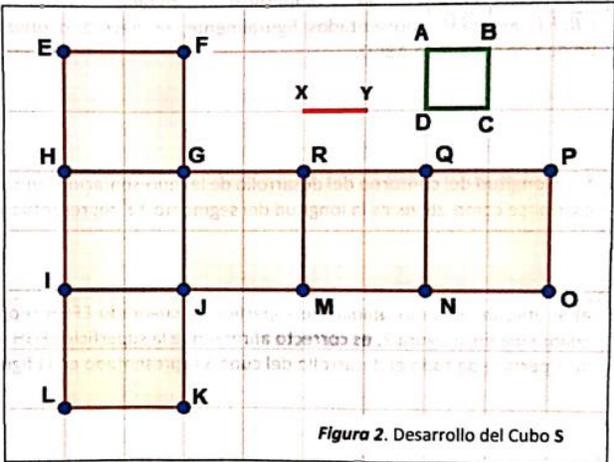
En el *enunciado 5*, se orienta a discriminar segmentos específicos, a partir de la designación presentada en la *figura 3* de S2T2, en este caso el estudiante E2, reconoce la necesidad de utilizar la designación para identificar el objeto sobre el cual se plantea un interrogante, usándola para referirse a dicho segmento en su respuesta. El uso constante de la operación de designación en los enunciados con respecto a las representaciones figurales, favorecieron el reconocimiento de elementos del objeto designado.

En el caso del *enunciado 6*, el estudiante E2 hace uso de la designación de dos segmentos que están representados en la *figura 3* de S2T2, pero no han sido referenciados explícitamente hasta el momento, son visualizados a partir de la enunciación escrita de la definición de diagonal expuesta en el *enunciado 6*, e identificados a partir de las marcas (letras mayúsculas en los vértices representados) utilizadas en la figura. Es importante resaltar, que existe congruencia entre las unidades figurales elementales 1D (segmentos representados) y la definición dada de diagonal en el registro de lengua natural, que favorece su reconocimiento.

La función de designación de objetos, además de favorecer la visualización e identificación de unidades figurales como los segmentos (1D) y polígonos (2D) representados, aporta elementos discursivos en la construcción de unidades apofánticas que permitan, de manera oral y/o escrita, justificar afirmaciones y

tratamiento realizados en el desarrollo de las tareas propuestas, como puede observarse en las producciones de los estudiantes mostrada en la tabla 21.

**Tabla 21.** Designación y unidades apofánticas. Producciones de E1 y E2. S4T1

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes												
	<p><b>Tarea 1:</b> Dada la representación figural del cubo <b>S</b> mostrada en la <b>figura 1</b>, se representa su desarrollo en la <b>figura 2</b>.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>Figura 1. Cubo S</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Figura 2. Desarrollo del Cubo S</p> </div> </div> <p>1) Tomando como unidad de superficie, el cuadrado <b>ABCD</b> representado sobre la cuadrícula, y como unidad de longitud, el segmento <math>\overline{XY}</math> representado sobre la cuadrícula, establece el valor de verdad de cada enunciado (F para falso, V para verdadero). Justifica tu elección.</p>												
<p>S4T1(1)</p> <p>Estudiante E1</p> <p>S4T1(1a, b)</p>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 80%;">Enunciado</th> <th style="width: 5%;">F</th> <th style="width: 15%;">V</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a) La longitud del segmento <math>\overline{XY}</math> está contenida dos veces en la longitud del segmento <math>\overline{EF}</math> <i>si por que el segmento xy tiene la longitud de lado de un cuadrado y en el segmento EF esta formado por 2 cuadrados</i></td> <td style="text-align: center;">X</td> <td style="text-align: center;">X</td> </tr> <tr> <td>b) La longitud del segmento <math>\overline{HR}</math> es el triple de la longitud del segmento <math>\overline{XY}</math> <i>no, porque del punto H al punto R hay cuatro cuadrados de lado xy y no tres</i></td> <td style="text-align: center;">X</td> <td style="text-align: center;">X</td> </tr> </tbody> </table>	Enunciado	F	V	a) La longitud del segmento $\overline{XY}$ está contenida dos veces en la longitud del segmento $\overline{EF}$ <i>si por que el segmento xy tiene la longitud de lado de un cuadrado y en el segmento EF esta formado por 2 cuadrados</i>	X	X	b) La longitud del segmento $\overline{HR}$ es el triple de la longitud del segmento $\overline{XY}$ <i>no, porque del punto H al punto R hay cuatro cuadrados de lado xy y no tres</i>	X	X			
Enunciado	F	V											
a) La longitud del segmento $\overline{XY}$ está contenida dos veces en la longitud del segmento $\overline{EF}$ <i>si por que el segmento xy tiene la longitud de lado de un cuadrado y en el segmento EF esta formado por 2 cuadrados</i>	X	X											
b) La longitud del segmento $\overline{HR}$ es el triple de la longitud del segmento $\overline{XY}$ <i>no, porque del punto H al punto R hay cuatro cuadrados de lado xy y no tres</i>	X	X											
<p>Estudiante E1</p> <p>S4T1(1c, d, e)</p>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 80%;">Enunciado</th> <th style="width: 5%;">F</th> <th style="width: 15%;">V</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>c) Con relación a la longitud del segmento <math>\overline{XY}</math>, se puede decir que la longitud del segmento <math>\overline{EL}</math> es el triple de la longitud del segmento <math>\overline{EH}</math> <i>Por que el segmento EH tiene el doble de xy y del punto E a la L se repiten 3 veces la longitud del EH</i></td> <td style="text-align: center;">X</td> <td style="text-align: center;">X</td> </tr> <tr> <td>d) Con relación a la superficie del cuadrado <b>ABCD</b> representado, se puede decir que la superficie del rectángulo <b>HRMI</b> representado, es el doble de la superficie del cuadrado <b>NOPQ</b> representado. <i>por que NOPQ forman un cuadrado y HRMI forman dos cuadrados el doble de NOPQ</i></td> <td style="text-align: center;">X</td> <td style="text-align: center;">X</td> </tr> <tr> <td>e) Para recubrir la superficie limitada por los segmentos <math>\overline{GR}</math>, <math>\overline{RJ}</math>, <math>\overline{JM}</math>, y <math>\overline{GM}</math> representados figuralmente, es necesario utilizar cuatro veces la unidad de superficie <b>ABCD</b>. <i>por que de G a la R hay dos cuadrados y de S a la M hay 2 cuadrados así que en total serian 4 veces la Unidad ABED</i></td> <td style="text-align: center;">X</td> <td style="text-align: center;">X</td> </tr> </tbody> </table>	Enunciado	F	V	c) Con relación a la longitud del segmento $\overline{XY}$ , se puede decir que la longitud del segmento $\overline{EL}$ es el triple de la longitud del segmento $\overline{EH}$ <i>Por que el segmento EH tiene el doble de xy y del punto E a la L se repiten 3 veces la longitud del EH</i>	X	X	d) Con relación a la superficie del cuadrado <b>ABCD</b> representado, se puede decir que la superficie del rectángulo <b>HRMI</b> representado, es el doble de la superficie del cuadrado <b>NOPQ</b> representado. <i>por que NOPQ forman un cuadrado y HRMI forman dos cuadrados el doble de NOPQ</i>	X	X	e) Para recubrir la superficie limitada por los segmentos $\overline{GR}$ , $\overline{RJ}$ , $\overline{JM}$ , y $\overline{GM}$ representados figuralmente, es necesario utilizar cuatro veces la unidad de superficie <b>ABCD</b> . <i>por que de G a la R hay dos cuadrados y de S a la M hay 2 cuadrados así que en total serian 4 veces la Unidad ABED</i>	X	X
Enunciado	F	V											
c) Con relación a la longitud del segmento $\overline{XY}$ , se puede decir que la longitud del segmento $\overline{EL}$ es el triple de la longitud del segmento $\overline{EH}$ <i>Por que el segmento EH tiene el doble de xy y del punto E a la L se repiten 3 veces la longitud del EH</i>	X	X											
d) Con relación a la superficie del cuadrado <b>ABCD</b> representado, se puede decir que la superficie del rectángulo <b>HRMI</b> representado, es el doble de la superficie del cuadrado <b>NOPQ</b> representado. <i>por que NOPQ forman un cuadrado y HRMI forman dos cuadrados el doble de NOPQ</i>	X	X											
e) Para recubrir la superficie limitada por los segmentos $\overline{GR}$ , $\overline{RJ}$ , $\overline{JM}$ , y $\overline{GM}$ representados figuralmente, es necesario utilizar cuatro veces la unidad de superficie <b>ABCD</b> . <i>por que de G a la R hay dos cuadrados y de S a la M hay 2 cuadrados así que en total serian 4 veces la Unidad ABED</i>	X	X											

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes	F	V
Estudiante E2 S4T1(1c, d, e)	<p>Enunciado</p> <p>c) Con relación a la longitud del segmento <math>\overline{XY}</math>, se puede decir que la longitud del segmento <math>\overline{EL}</math> es el triple de la longitud del segmento <math>\overline{EH}</math></p> <p>Si porque son 3 veces la misma medida de EH</p>		X
	<p>d) Con relación a la superficie del cuadrado ABCD representado, se puede decir que la superficie del rectángulo HRMI representado, es el doble de la superficie del cuadrado NOPQ representado.</p> <p>Si, porque cuenta con 2 veces la misma medida</p>		X
	<p>e) Para recubrir la superficie limitada por los segmentos <math>\overline{GR}</math>, <math>\overline{RJ}</math>, <math>\overline{JM}</math>, y <math>\overline{GM}</math> representados figuralmente, es necesario utilizar cuatro veces la unidad de superficie ABCD.</p> <p>Si porque la medida de longitud equivale a esa cantidad</p>		X

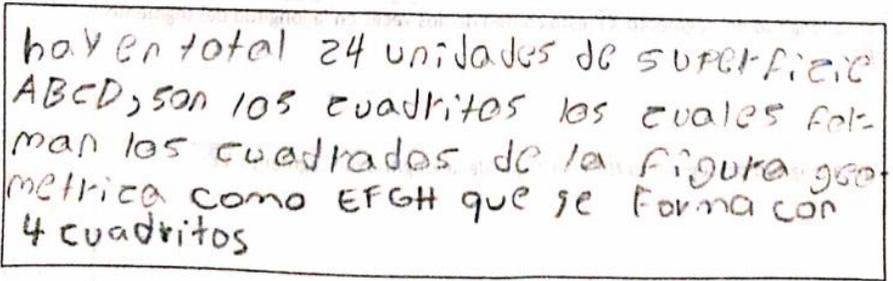
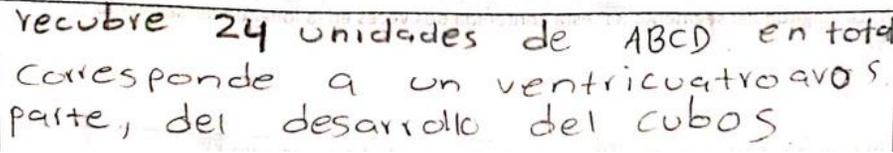
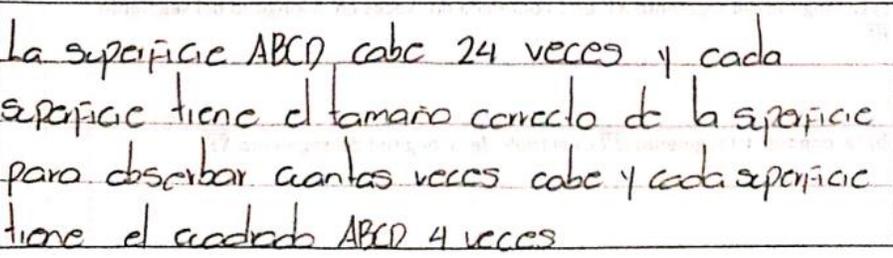
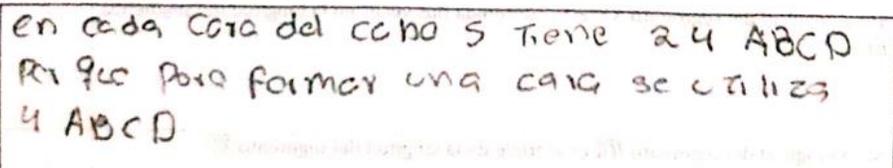
Fuente: Producciones de los estudiantes

Para los ítems c, d y e de **S4T1(1)**, la designación de la unidad figural de longitud  $\overline{XY}$  representada en la *figura 2* de S4T1, además de permitir identificar los objetos geométricos sobre los cuales se debe centrar la atención, juega un papel fundamental en la construcción de los enunciados que justifican la selección del valor de verdad de cada proposición dada.

Los *enunciados* contruidos por los estudiantes **E1** y **E2** en sus justificaciones, muestran una apropiación de la unidad figural de longitud y las relaciones que, a partir de ella, pueden establecerse con otros segmentos designados. En esta articulación se reconoce el uso de un lenguaje geométrico superior al mostrado en la primera situación didáctica desarrollada.

De la misma forma, en **S4T1(2)** el *enunciado* orientó a focalizar la atención en la unidad figural de superficie propuesta, identificada por la designación *ABCD*, sobre la cual se desarrollaron tratamientos figurales (implícitos), como la superposición de unidades, para dar solución a la tarea y a partir de los cuales se construyeron los enunciados que explican los tratamientos realizados, como se muestra en las producciones de los estudiantes, expuestas en la tabla 22.

**Tabla 22.** Designación y unidades apofánticas. Producciones de E1, E2, E5 y E6. S4T2

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
S4T1(2)	2) Tomando como unidad de superficie el cuadrado ABCD, representado figuralmente sobre la cuadrícula de la <b>figura 2</b> , ¿Cuántas unidades de superficie ABCD recubren la superficie total del desarrollo del cubo S representado? ¿Qué parte de la superficie total del desarrollo del cubo S representado corresponde al cuadrado ABCD? <b>Explique los procedimientos empleados</b>
Estudiante E1	
Estudiante E2	
Estudiante E5	
Estudiante E6	

Fuente: Producciones de los estudiantes

La designación de las unidades figurales de superficie propuestas en el *enunciado* les permitió a los estudiantes orientar las actividades cognitivas de visualización y razonamiento, posibilitando la comparación de superficies a través de tratamientos figurales, usando dichas unidades. Por ejemplo, tratamientos como la superposición o configuración por reiteración, utilizada por el estudiante E5, la cual puede inferirse en su justificación (ver tabla 22). En este caso, los estudiantes E1, E2, E5 y E6, logran

establecer una coordinación discurso – figura – discurso, es decir, a partir de las designaciones y el enunciado problema, interactúan con las representaciones figurales, realizando acciones como identificar unidades figurales 2D y comparar superficies para luego convertir dichas acciones en nuevos enunciados que dan respuesta a los interrogantes.

En el análisis *a priori*, las funciones discursivas de referenciación, apofántica y de expansión discursiva se presentaron como variables macro didácticas en tanto dan la entrada a las formas de ver una figura geométrica, a través de los enunciados construidos, que orientaron las operaciones discursivas y los tratamientos figurales realizado por los estudiantes, tal como lo plantea Duval (2016a), el reconocimiento de los objetos geométricos representados, no depende de la percepción de las formas, si no de los enunciados que sobre ellos se dan, orientando la mirada sobre la figura, y los tratamientos que sobre ella se puedan desarrollar para realizar actividades cognitivas discursivas como justificar y explicar.

En este sentido, las producciones de los estudiantes, correspondientes a diferentes tareas a través de las situaciones geométricas, muestran que operaciones discursivas como la designación, para visualizar aquellos objetos geométricos que son de interés didáctico en cada tarea dada, permiten al estudiante, identificar, construir y transformar las unidades figurales elementales que puedan emerger en la interacción figura y enunciado, aportando elementos en la construcción de expresiones que describan lo que se observa, establezcan relaciones a partir de lo observado y justifiquen cómo y por qué se realizan tratamientos sobre las representaciones figurales para dar solución a un enunciado problema. Además, posibilita la configuración de un léxico especializado en las representaciones discursivas, con referencia a los objetos geométricos movilizados, y necesarios para actividades cognitivas de mayor complejidad como la argumentación y la demostración.

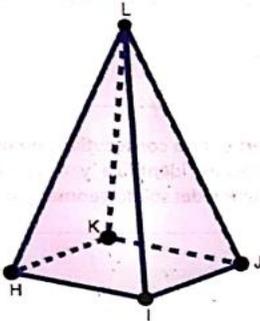
### 5.1.2 Segunda Categoría de análisis: Discriminación de las unidades figurales como elementos de razonamiento en el desarrollo de las tareas.

La visualización de las representaciones figurales de los objetos geométricos, como actividad cognitiva, implica la discriminación de las unidades figurales elementales asociadas a las propiedades cualitativas del objeto representado, tal como lo plantea Duval “La distinción de esas propiedades puramente cualitativas constituye el primer umbral crítico para el aprendizaje de la geometría” (Duval, 2016. p.14).

En este sentido, cada tarea del diseño de las situaciones geométricas, a través de sus enunciados, orientó la atención de los estudiantes al reconocimiento de las unidades figurales elementales en los sólidos geométricos representados, tanto las resaltadas con trazos visibles, como las que no se marcaron, apoyados en la operación de designación de las representaciones figurales. Dicha discriminación, favoreció la actividad cognitiva de visualización y la producción de enunciados como las justificaciones de los procesos realizados por los estudiantes, a partir de la articulación entre figura y discurso, al establecer correspondencia entre cada unidad figurales elemental y las unidades apofánticas construidas.

Visualizar las unidades figurales elementales de un objeto geométrico representado, en este caso prismas rectos y pirámides cuadrangulares, implica discriminar objetos 2D, 1D y 0D de representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales, es decir, es necesario un cambio dimensional, que se opone al reconocimiento perceptual de las formas. Esto no sucede de manera espontánea, es necesario involucrar tareas que propicie dicha discriminación. Por ejemplo, en **S2T1(2)**, los estudiantes orientados por el enunciado centran su atención en la discriminación de las unidades figurales de dimensión 0D, 1D y 2D, estableciendo el número de unidades figurales de cada tipo y designando aquellas que corresponden a los elementos definidos como aristas y caras representadas, tal como se presenta en las producciones de los estudiantes **E2** y **E5** en la tabla 23.

**Tabla 23.** Identificación de unidades figurales elementales. Producciones de E2 y E5. S2T1

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes										
S2T1(2)	<p>Observa la representación figural de un prisma recto dada en la <b>figura 2</b>:</p>  <p><b>Figura 2.</b> Representación figural de una Pirámide.</p> <p>2) Teniendo en cuenta la representación figural mostrada en la <b>figura 2</b>, completa la siguiente tabla:</p>										
Estudiante E2	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>a. Número de vértices representados</td> <td>5 vertices</td> </tr> <tr> <td>b. Número de segmentos representados que corresponden a aristas</td> <td>8 aristas</td> </tr> <tr> <td>c. Número de polígonos representados que corresponden a caras</td> <td>5 Caras</td> </tr> <tr> <td>d. Designe los segmentos que representan aristas</td> <td>los segmentos de las aristas son los lados de las caras.</td> </tr> <tr> <td>e. Designe los polígonos que forman cada cara del sólido geométrico representado.</td> <td>4 triángulos y 1 cuadrado</td> </tr> </tbody> </table>	a. Número de vértices representados	5 vertices	b. Número de segmentos representados que corresponden a aristas	8 aristas	c. Número de polígonos representados que corresponden a caras	5 Caras	d. Designe los segmentos que representan aristas	los segmentos de las aristas son los lados de las caras.	e. Designe los polígonos que forman cada cara del sólido geométrico representado.	4 triángulos y 1 cuadrado
a. Número de vértices representados	5 vertices										
b. Número de segmentos representados que corresponden a aristas	8 aristas										
c. Número de polígonos representados que corresponden a caras	5 Caras										
d. Designe los segmentos que representan aristas	los segmentos de las aristas son los lados de las caras.										
e. Designe los polígonos que forman cada cara del sólido geométrico representado.	4 triángulos y 1 cuadrado										
Estudiante E5	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>a. Número de vértices representados</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>b. Número de segmentos representados que corresponden a aristas</td> <td>tiene 8 aristas</td> </tr> <tr> <td>c. Número de polígonos representados que corresponden a caras</td> <td>4 triángulos de 3 lados y un cuadrado de 4 lados</td> </tr> <tr> <td>d. Designe los segmentos que representan aristas</td> <td>h<sub>1</sub>, i<sub>1</sub>, j<sub>1</sub>, k<sub>1</sub>, l<sub>1</sub>, l<sub>1</sub>, l<sub>1</sub>, l<sub>1</sub></td> </tr> <tr> <td>e. Designe los polígonos que forman cada cara del sólido geométrico representado.</td> <td>h<sub>1</sub>l<sub>1</sub>, i<sub>1</sub>j<sub>1</sub>l<sub>1</sub>, j<sub>1</sub>k<sub>1</sub>l<sub>1</sub>, k<sub>1</sub>h<sub>1</sub>l<sub>1</sub>, h<sub>1</sub>i<sub>1</sub>j<sub>1</sub>k<sub>1</sub></td> </tr> </tbody> </table>	a. Número de vértices representados	5	b. Número de segmentos representados que corresponden a aristas	tiene 8 aristas	c. Número de polígonos representados que corresponden a caras	4 triángulos de 3 lados y un cuadrado de 4 lados	d. Designe los segmentos que representan aristas	h <sub>1</sub> , i <sub>1</sub> , j <sub>1</sub> , k <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , l <sub>1</sub>	e. Designe los polígonos que forman cada cara del sólido geométrico representado.	h <sub>1</sub> l <sub>1</sub> , i <sub>1</sub> j <sub>1</sub> l <sub>1</sub> , j <sub>1</sub> k <sub>1</sub> l <sub>1</sub> , k <sub>1</sub> h <sub>1</sub> l <sub>1</sub> , h <sub>1</sub> i <sub>1</sub> j <sub>1</sub> k <sub>1</sub>
a. Número de vértices representados	5										
b. Número de segmentos representados que corresponden a aristas	tiene 8 aristas										
c. Número de polígonos representados que corresponden a caras	4 triángulos de 3 lados y un cuadrado de 4 lados										
d. Designe los segmentos que representan aristas	h <sub>1</sub> , i <sub>1</sub> , j <sub>1</sub> , k <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , l <sub>1</sub>										
e. Designe los polígonos que forman cada cara del sólido geométrico representado.	h <sub>1</sub> l <sub>1</sub> , i <sub>1</sub> j <sub>1</sub> l <sub>1</sub> , j <sub>1</sub> k <sub>1</sub> l <sub>1</sub> , k <sub>1</sub> h <sub>1</sub> l <sub>1</sub> , h <sub>1</sub> i <sub>1</sub> j <sub>1</sub> k <sub>1</sub>										

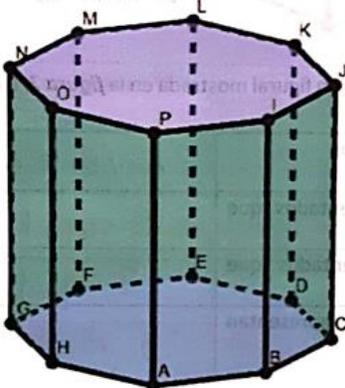
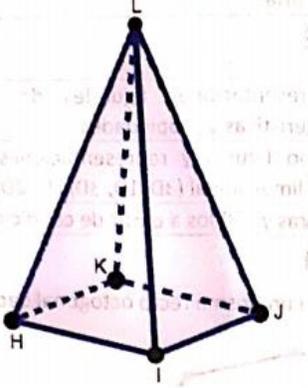
Fuente: Producciones de los estudiantes

La discriminación visual de las variables figurales elementales y su transformación (conversión) al registro de lengua natural especializado de referenciación; emergen como elementos constitutivos de las unidades apofánticas, a partir de las operaciones de predicación (vincula una propiedad, relación o acción

con la operación de designación de objetos) y acto ilocutorio (acto que confiere al enunciado un valor social que involucra al locutor y al destinatario, en este caso maestro – investigador y estudiante) que posibilitan a los estudiantes la construcción de proposiciones conectadas entre sí, para describir, explicar y justificar.

En la tabla 24, se exponen las producciones de los estudiantes E2 y E5, representando las dos formas en que los estudiantes participantes utilizaron las unidades figurales identificadas en S2T1(1) y S2T1(2), para construir los enunciados que describen las diferencias entre dos representaciones figurales dadas.

**Tabla 24.** Describir a partir de las unidades figurales. Producciones de E2 y E5. S2T1

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
<p>S2T1(3)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p><i>Figura 1.</i> Representación figurales de un Prisma Recto Octogonal</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><i>Figura 2.</i> Representación figurales de una Pirámide.</p> </div> </div> <p>3) Describe de manera escrita, las diferencias que encuentras entre las representaciones figurales de los sólidos geométricos dados en las figuras 1 y 2</p>
<p>Estudiante 1 E2</p>	<p>La Figura 1 tiene dos bases octogonales y 14          Figura 2 tiene 1 sola base cuadrangular          La Figura 1 tiene 8 caras rectangulares          y la Figura 2 tiene 4 caras          triangulares.</p>

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes	
Estudiante 5 E5	sus caras tienen distintas formas poligonales la figura dos tiene una punta donde se juntan las aristas (L)	La figura 1 tiene mas segmentos que la 2 La figura 1 tiene 2 caras bases y la dos una La figura 2 tiene mas caras laterales mas vertices y aristas tienen diferentes poligonos

Fuente: Producciones de los estudiantes

La incorporación de unidades de dimensión inferior a las del objeto geométrico representado, en cada una de las descripciones realizadas por los estudiantes en **S2T1(3)**, es resultado de la discriminación y designación, de unidades figurales elementales como los vértices, segmentos y formas poligonales, que configuran las dos representaciones figurales de los sólidos mostrados en la tabla 24; a partir de las cuales, se resalta la existencia de cada unidad figurale.

El estudiante **E2**, por ejemplo, describe las diferencias entre el prisma recto octogonal y la pirámide cuadrangular representadas en la *figura 1* y *2* de **S2T1**, a partir de la discriminación de unidades figurales 2D, haciendo referencia a sus formas poligonales y su función en la configuración del sólido geométrico representado (caras bases, caras laterales). En el caso del estudiante **E5**, además de reconocer las unidades figurales 2D, hace referencia a las unidades figurales 1D y 0D en su descripción (segmentos, y puntos). De igual manera, a partir de la discriminación del número de unidades figurales de dimensión inferior presentadas en **S3T2** (vértices, segmentos y caras poligonales), mostrada en la tabla 25, fue posible para los estudiantes participantes, identificar un objeto geométrico de dimensión superior (prisma o pirámide).

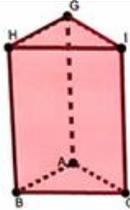
La selección del sólido geométrico descrito, puede ser el resultado de establecer relaciones entre la cantidad de unidades de cada tipo y su reconfiguración para formar el sólido geométrico; o por la

verificación de las unidades figurales descritas (número de vértices, segmentos y caras poligonales) en cada representación figural dada en **S3T2(4)**.

A pesar de no ser explícito el tipo de tratamiento realizado, ya sea por reconfiguración o verificación, en las producciones de los estudiantes, en ambos casos es fundamental la discriminación de las unidades figurales elementales, para la selección del sólido representado en la descripción. las justificaciones escritas, en cada uno de los ítems de la tarea desarrollada, permite inferir dichos tratamientos figurales, como se puede observar en la tabla 25.

**Tabla 25.** Reconfiguración o verificación a partir de las unidades figurales 1D y 0D. S3T2

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
	<p><b>Tarea 2.</b> Lee el enunciado que se presenta a continuación:</p> <p>Un estudiante del grado séptimo les describe a sus compañeros algunas características de un sólido geométrico que desea representar figuralmente (construcción a lápiz y papel o con ayuda de algún programa como Geogebra). Para solicitar ayuda a sus compañeros, organiza en un listado las características del sólido geométrico de la siguiente manera.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El sólido geométrico que se busca representar tiene dos caras bases (superior e inferior respectivamente)</li> <li>• El sólido geométrico que se busca representar tiene un total de 9 segmentos que corresponden a aristas.</li> <li>• El sólido geométrico que se busca representar tiene un total de 6 vértices representados.</li> </ul> <p>A partir de la información anterior, selecciona la opción que consideres correcta para cada enunciado marcando con un X. <b>Justifica tu selección:</b></p>
S3T2	
S3T2(1)	<p>1) El polígono que representa la cara base del sólido geométrico descrito es un:</p> <p>Cuadrado <input type="checkbox"/> Triángulo <input checked="" type="checkbox"/> Pentágono <input type="checkbox"/> Hexágono <input type="checkbox"/></p>
Estudiante E5	<p>dos bases de triángulos tienen 9 segmentos con 6 vértices.</p>
S3T2(2)	<p>2) El número de caras laterales que corresponde al sólido geométrico descrito es:</p> <p>Cinco (5) <input type="checkbox"/> Cuatro (4) <input type="checkbox"/> Seis (6) <input type="checkbox"/> Tres (3) <input checked="" type="checkbox"/></p>
Estudiante E1	<p>Por que sus caras bases son triangulares así que solo tiene 3 caras laterales</p>

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
S3T2(3)	<p>3) El sólido geométrico descrito por el estudiante corresponde a:</p> <p>Un prisma recto pentagonal <input type="checkbox"/></p> <p>Una pirámide pentagonal <input type="checkbox"/></p> <p>Un prisma recto triangular <input checked="" type="checkbox"/></p> <p>Una pirámide triangular <input type="checkbox"/></p> <p>Un prisma recto hexagonal <input type="checkbox"/></p> <p>Una pirámide hexagonal <input type="checkbox"/></p>
Estudiante E2	<p>porque tiene 2 caras base triangular y 5 caras laterales rectangulares y cuenta con todas las características</p>
S3T2(4)	<p>4) Selecciona marcando con una X, la representación figural que puede corresponder al sólido geométrico descrito por el estudiante:</p>
Estudiante E6	<p>Justifica de manera escrita tu selección:</p>  <p>Según la figura o una prisma triangular recto por que el niño dijo que una figura que tenga 2 caras bases 3 aristas y 6 vértices y 5 caras es la que corresponde a la descripción del niño</p> <p><input checked="" type="checkbox"/></p>

Fuente: Producciones de los estudiantes

Por otro lado, en **S4T1**, el reconocimiento de unidades figurales 2D designadas **QRST** y **UVW** establecidas como unidades de superficie, en articulación con el enunciado problema, orientan el tipo de tratamiento figural realizado por los estudiantes.

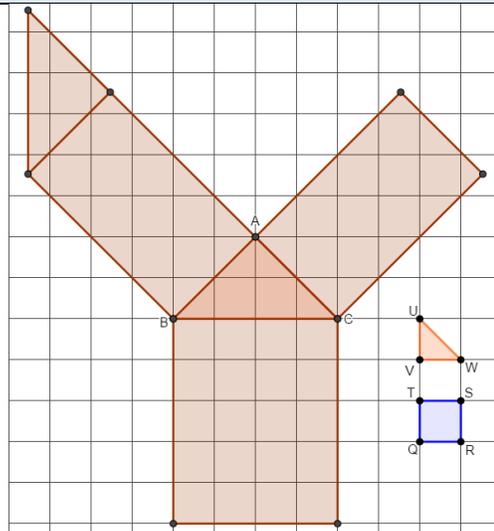
De las producciones de los estudiantes, se seleccionan las de **E1** y **E5**, porque son las dos que hicieron explícitos, a través de marcas y trazos auxiliares, los tratamientos figurales inmersos en sus producciones, y son las representativas de los casos estudiados, como se muestra en la tabla 26.

**Tabla 26.** Superposición de unidades de superficie QRST y UVW. Producciones de E1 y E5. S4T3

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
S4T3(2)	<p>En la <b>figura 6</b> se presenta el desarrollo de la representación figural del prisma recto de base triangular mostrado en la figura 5.</p>

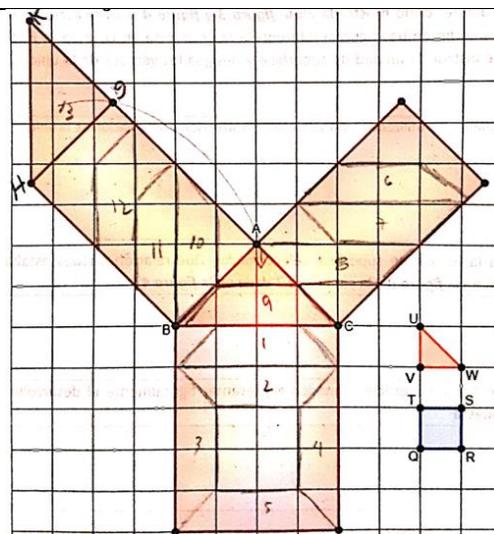
Situación/Estudiante

Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes



2) Tomando como unidad de superficie la representación figural del cuadrado **QRST**, establezca la medida de cada una de las siguientes superficies con relación a la unidad seleccionada.

Estudiante E1

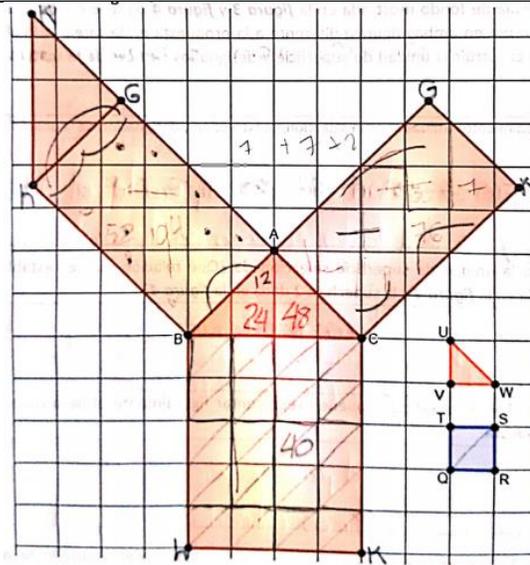


Superficies planas correspondientes al desarrollo del prisma recto de base triangular representado figuralmente	Medida de la superficie con relación a la unidad QRST (designala como $u^2$ )
a) Superficie de la cara base representada ( $\Delta ABC$ )	caben 2 $\square$ y 4 $\Delta = 2 \square$
b) Superficie de la cara base representada ( $\Delta GHK$ )	caben 4
c) Superficie de la cara lateral representada (ABHG)	caben 4
d) Superficie de la cara lateral representada (ACKG)	caben 4
e) Superficie de la cara lateral representada (BCKH)	caben 20

Situación/Estudiante

Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes

Estudiante E5



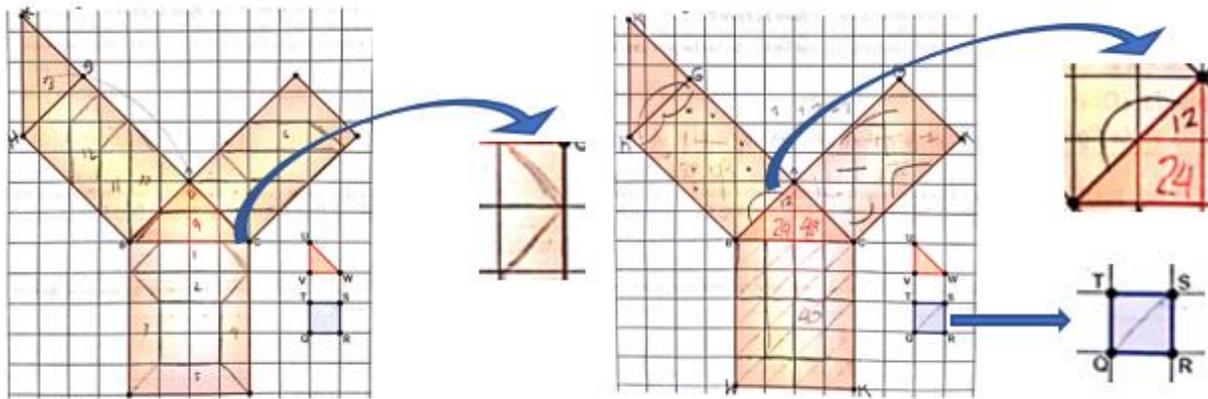
Superficies planas correspondientes al desarrollo del prisma recto de base triangular representado figuralmente	Medida de la superficie con relación a la unidad QRST (designala como $u^2$ )
a) Superficie de la cara base representada ( $\Delta ABC$ )	cabe 4 veces
b) Superficie de la cara base representada ( $\Delta GHK$ )	cabe 4 veces
c) Superficie de la cara lateral representada (ABHG)	14 veces
d) Superficie de la cara lateral representada (ACKG)	14 veces
e) Superficie de la cara lateral representada (BCKH)	cabe 20 veces

Fuente: Producciones de los estudiantes

Se puede observar en los tratamientos figurales mostrados en la tabla 26 que, en los tratamientos realizados, predominó la superposición de la superficie total, a partir de las unidades figurales dadas **QRST** y **UVW**, donde los estudiantes lograron determinar la cantidad necesaria de cada unidad para cubrir la representación bidimensional del desarrollo del prisma triangular dado y establecer relaciones entre ellas.

Además, el uso de trazos auxiliares reconfiguradores como el trazo de la diagonal de cada unidad figural de superficie **QRST** para obtener dos unidades figurales de superficie **UVW**; así como se identifican marcas que sugieren rotaciones de unidades figurales **UVW** para formar unidades **QRST**, como se indica en la *figura 28*, extraída de las producciones de **E1** y **E5**.

**Figura 28.** Tratamientos figurales realizados sobre las unidades de superficie QRST y UVW. Producciones de E1 y E5. S4T3



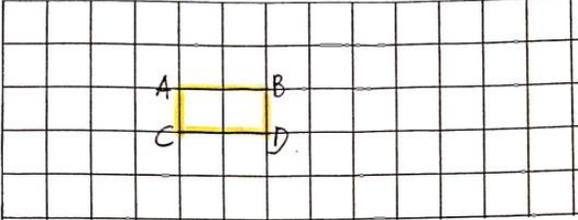
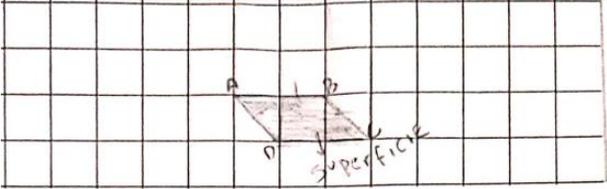
Fuente: Producciones de los estudiantes

Además, al pedirles que construyeran una nueva unidad figural de superficie (**S4T3(4)**), se encontró como posibles estrategias de construcción, la configuración reiterada de la unidad *QRST*, y la reconfiguración de las dos unidades figurales dadas inicialmente *QRST* y *UVW*, dando forma la nueva unidad figural de superficie, construida por cada estudiante.

En la tabla 27, se presentan las diferentes producciones de los estudiantes con relación a las nuevas unidades de superficie y en la *figura 29*, se ilustra como dichas unidades pudieron ser construidas por los estudiantes, teniendo en cuenta que en el ítem no se solicitó una explicación sobre los tratamientos figurales realizados para su construcción.

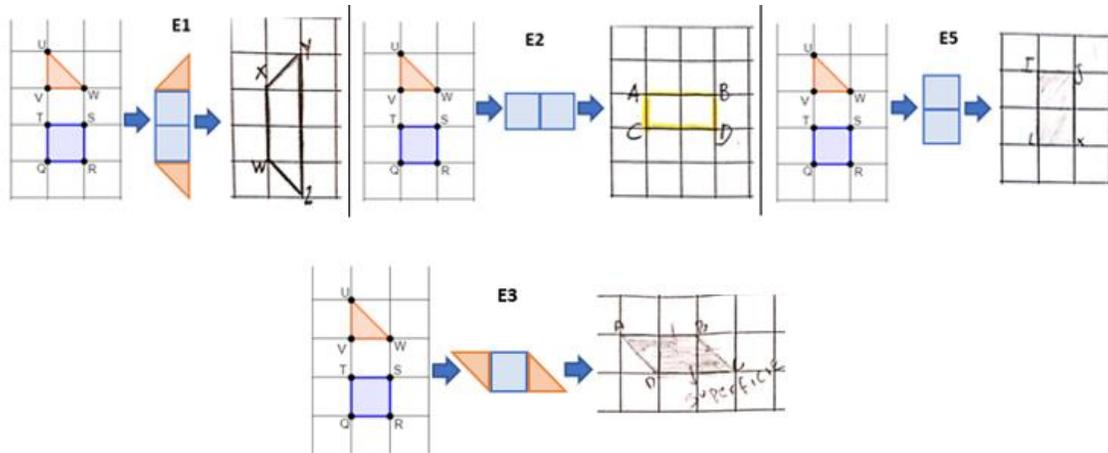
**Tabla 27.** Construcción de unidades de superficie. Producciones de E1, E2, E3 y E5. S4T3

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
S4T3(4)	4) Usando la cuadrícula, construya y designe una nueva unidad de superficie:
Estudiante E1	

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
Estudiante E2	
Estudiante E3	
Estudiante E5	

Fuente: Producciones de los estudiantes

**Figura 29.** Construcción de unidades de superficie por configuración reiterada y reconfiguración de las unidades figurales de superficie QRST y UVW



Fuente: Producciones de los estudiantes

En los tratamientos realizados para medir la superficie del desarrollo del prisma recto triangular de **S4T3**, con las tres unidades figurales de superficie *QRST*, *UVW* y la nueva unidad propuesta por los estudiantes, se identificó que el uso de la cuadrícula de fondo como factor de visibilidad, utilizada por todos los estudiantes, fue fundamental para compararlas y establecer relaciones entre ellas. Además, la

elección de las unidades figurales iniciales ( $QRST$  forma cuadrada y  $UVW$  triangular que coincide con la cuadrícula), tuvieron un impacto favorable en la superposición de unidades y en la reconfiguración, y en la producción discursiva donde se justifican las relaciones establecidas entre las unidades de superficies involucradas, como se expone en la tabla 28.

**Tabla 28.** Relación entre las unidades figurales de superficie  $QRST$  y  $UVW$ . Producciones de E1, E3 y E5.

S4T3

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
S4T3(6)	6) ¿Qué relación puedes establecer entre las áreas de la superficie del prisma recto triangular representado figuramente, al usar las unidades de superficie $QRST$ y $UVW$ respectivamente? Justifique su respuesta
Estudiante E1	gracias a la superficies $QRST$ y $UVW$ pude sacar la superficie de todo y veo que si parto $QRST$ salen 2 $UVW$ y si junto 2 $QRST$ y 2 $UVW$ salen 1 $xyzw$
Estudiante E3	la mitad por que $uvw$ es medio cuadro y $qrst$ es cuadro completo
Estudiante E5	cada figuralesuperficie esta en la figura es una unidad que esta separada por parte para saber cuantas hay. hay que ir rellenando cada superficie y si es muy grande partir la superficie en secciones. como partir en 2 y se ve la unidad $uvw$ mas veces (112)

Fuente: Producciones de los estudiantes

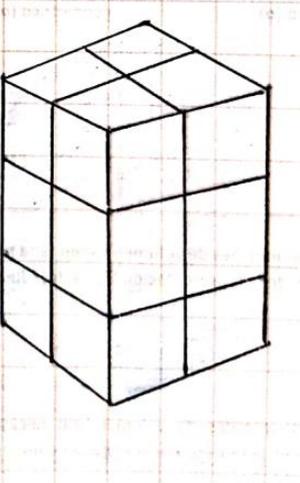
En la situación didáctica **S5T2** enunciado 4, se encontró que los estudiantes, a partir de la discriminación de las unidades figurales de volumen, realizaron tratamientos sobre las representaciones

figurales de los tres prismas presentados, que les permitió unirlos en un solo prisma, lo que implica la descomposición y reconfiguración de unidades, en la misma dimensión.

Del grupo de estudiantes participantes, solo **E1** y **E2** realizaron representaciones figurales del nuevo prisma reconfigurado, acompañado de la explicación de su construcción, como se presenta en la tabla 29.

**Tabla 29.** Descomposición y reconfiguración. Producciones de E1 y E2. S5T2

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
<p>S5T2(4)</p>	<p>4) Si en la representación figural (b) (ver figura 2), se elimina la unidad de volumen de base inferior con forma cuadrada <i>IJWT</i>, el nuevo sólido puede representarse en la figura 3 (desigando como 2b)</p> <div style="text-align: center;"> <p><b>Figura 3.</b> Representaciones figurales tridimensionales de tres sólidos geométricos <i>a</i>, <i>2b</i> y <i>c</i></p> </div> <p>Explica de que manera podemos construir la representación figural de un prisma recto utilizando las representaciones figurales tridimensionales <i>a</i>, <i>2b</i> y <i>c</i>. (<i>sugerencia</i>: puedes usar cualquiera de las representaciones dadas en la figura 3 como figura de partida para construir la representación del prisma recto solicitado)</p>
<p>Estudiante 1 E1</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>(escribe tu explicación aquí)</p> <p>hice un Rectangulo uniendo la figura (a) con la figura (2b) y parti la figura (c) en la mitad y las uní luego con las figuras (a2b) con la figura (c)</p> </div> <div style="text-align: center;"> </div>

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
Estudiante 2 E2	<p>(escribe tu explicación aquí)</p> <p>hame la representacion de la Figura (C) para hacer un prisma recto rectangular. tiene como volumen 12 unidades de Volumen Cubicas</p> 

Fuente: Producciones de los estudiantes

En la construcción figural realizada por **E1**, la vista corresponde a la cara superior del nuevo prisma representado, donde se evidencia la reconfiguración y el número de unidades figurales de volumen correspondientes a la figura (a), (2b) y (c) de **S5T2**. Por otro lado, el estudiante **E2**, trata de realizar la construcción de la representación figural 3D del nuevo prisma, usando como figura inicial (c) y reconfigurando (a) y (2b), usando como unidad de volumen los cubos que constituyen cada figura.

En ambos casos, se puede inferir que, de manera implícita, los estudiantes conciben la unidad seleccionada, como una figura dinámica, es decir, susceptible de tratamientos figurales como la descomposición, traslación y rotación, a través de los cuales se puede justificar la nueva configuración.

Las *tareas* que orientaron a la discriminación de las unidades figurales elementales de las representaciones de objetos geométricos posibilitaron a los estudiantes, reconocer en toda figura geométrica, la configuración de al menos dos unidades figurales elementales (Duval, 2017). Como la discriminación de los puntos vértices (0D), segmentos que representan lados o diagonales (1D) y formas poligonales que representan caras bases o laterales, que configuran los sólidos geométricos representados en cada tarea.

La importancia de tal discriminación emerge al contrastar las definiciones matemáticas de los objetos geométricos presentadas en forma discursiva, donde se alude a las unidades figurales de dimensión inferior (como la definición de un prisma recto) lo que corresponde a un hiato dimensional, pues en cada registro de representación, figural y discursivo, predominan unidades figurales de dimensión diferente.

Como se observó en esta categoría de análisis, de las producciones de los estudiantes, cada enunciado orientó a la discriminación de dichas unidades, para el desarrollo de los tratamientos requeridos en la resolución de enunciados problemas que involucran figuras geométricas o en razonamientos de mayor complejidad. Finalmente, el reconocimiento de las unidades figurales elementales favorece la visualización no icónica por deconstrucción dimensional, reconocida desde la teoría semiótica cognitiva, como la forma de ver necesaria para la articulación cognitiva entre el registro de representación figural y el del lenguaje, indispensable para la comprensión del volumen y área de la superficie de los prismas rectos y las pirámides cuadrangulares.

### **5.1.3 Tercera Categoría de análisis: Visualización por deconstrucción dimensional para la comprensión del volumen y área de la superficie de los prismas rectos y las pirámides cuadrangulares.**

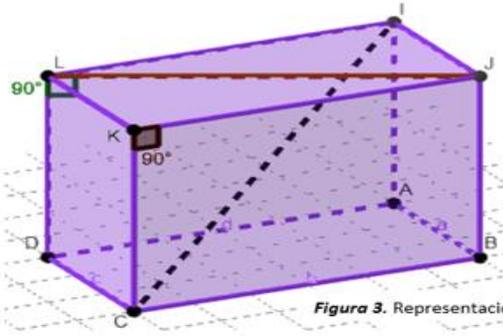
Durante la implementación de la primera y segunda situación didáctica correspondiente al diseño presentado en este trabajo de indagación, se constató que los estudiante al enfrentarse a la visualización de la representación figural de un sólido geométrico, por la ley gestáltica de cierre, reconocieron de entrada las formas bidimensionales poligonales no solapadas, a pesar de que existen otras configuraciones presentes en la representación, tales como: los segmentos unidimensionales que representan las aristas; los puntos de intersección entre las aristas que representan los vértices; los ángulos formados entre las formas poligonales que representan las caras laterales y bases del sólido; entre

otras unidades figurales que no siempre son marcadas, como las diagonales de las formas poligonales o los puntos medios de cada segmento, etc.).

De esta manera, se tiene que las unidades figurales de dimensión 2D (diferentes a las formas poligonales no solapadas), 1D y 0D pasan inadvertidas inicialmente, al menos que se oriente la atención sobre estas, usando enunciados que centren la mirada de los estudiantes en la discriminación de las diferentes unidades figurales en cada dimensión, que configuran al sólido geométrico representado. Una vez que el estudiante visualiza cada unidad figurale, tiene la posibilidad de razonar sobre y a partir de ellas.

En la tabla 30, se presentan algunos de los enunciados construidos en el diseño de la secuencia de situaciones geométricas, en articulación con las representaciones figurales sobre las cuales se hace referencia, y las producciones escritas de los estudiantes al interactuar con cada enunciado, donde se evidencia la discriminación de unidades figurales de diferentes dimensiones, más allá de las reconocidas de entrada, como sucede generalmente con figuras que carecen de enunciados asociados a la representación que sirvan de anclaje para la visualización.

**Tabla 30.** Ejemplos de enunciados que centran la visualización de las unidades figurales (2D,1D, 0D) del sólido geométrico representado. Producciones de E1, E2, E3 y E5. S5T2

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
<p>S2T2(7)</p>	<p><b>Tarea 2:</b> Observe la representación figural de un prisma recto dada en la <b>figura 3</b>.</p>  <p><b>Figura 3.</b> Representación figural de un Prisma Recto.</p> <p>A partir de la información dada en la <b>figura 3</b>, responde cada interrogante y justifica tu respuesta.</p> <p>7) Observa el ángulo formado entre los segmentos <b>LJ</b> y <b>LD</b>. ¿Qué relación (ser paralelo, ser perpendicular o ninguna) puedes establecer entre los polígonos <b>IJKL</b> y <b>CDLK</b> representados? Justifica tu respuesta</p>

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
Estudiante E1	LS y LD o sea son perpendiculares, se puede establecer
Estudiante E2	es perpendicular porque forma un ángulo recto.
Estudiante E3	ser perpendicular porque ellos tienen a $\overline{LS}$ y $\overline{LD}$ y se tocan y forman un ángulo 90
Estudiante E5	Es un ángulo recto o sea que es perpendicular. $\square JKL$ y $\square DKL$ . Cada uno tiene un polígono de 4 lados con 4 ángulos y los dos son perpendiculares entre sí.

**Tarea 1:** Dada la representación figural del cubo **S** mostrada en la **figura 1**, se representa su desarrollo en la **figura 2**.

S4T1(1d)

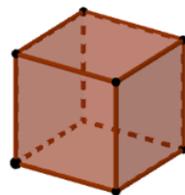


Figura 1. Cubo S

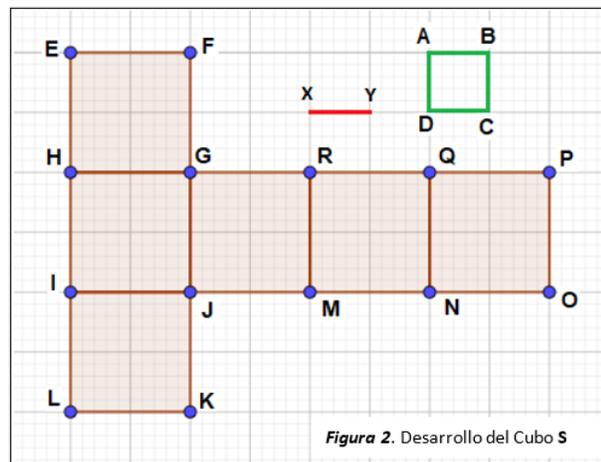


Figura 2. Desarrollo del Cubo S

1) Tomando como unidad de superficie, el cuadrado **ABCD** representado sobre la cuadrícula, y como unidad de longitud, el segmento  $\overline{XY}$  representado sobre la cuadrícula, establezca el valor de verdad de cada enunciado (F para falso, V para verdadero). **Justifica tu elección.**

Estudiante E1	d) Con relación a la superficie del cuadrado <b>ABCD</b> representado, se puede decir que la superficie del rectángulo <b>HRMI</b> representado, es el doble de la superficie del cuadrado <b>NOPQ</b> representado. <i>Por que NOPQ forman un cuadrado y HRMI forman dos cuadrados el doble de NOPQ</i>	X
Estudiante E2	d) Con relación a la superficie del cuadrado <b>ABCD</b> representado, se puede decir que la superficie del rectángulo <b>HRMI</b> representado, es el doble de la superficie del cuadrado <b>NOPQ</b> representado. <i>Si, porque cuenta con 2 veces la misma medida</i>	X

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
Estudiante E3	<p>d) Con relación a la superficie del cuadrado <b>ABCD</b> representado, se puede decir que la superficie del rectángulo HRMI representado, es el doble de la superficie del cuadrado NOPQ representado.</p> <p>Sí porque HRMI tiene 8 cuadros Pequeños y NOPQ tiene 4 cuadros Pequeños ABCD</p> 

Fuente: Producciones de los estudiantes

En el enunciado **S2T2(7)** mostrado en la tabla 30, se hace referencia unidades figurales 1D, orientando a la visualización de los segmentos  $\overline{LJ}$  y  $\overline{LD}$  y la relación de perpendicularidad que puede establecerse a partir del ángulo (2D) formado entre ambos segmentos. Al centrar la atención en estas unidades figurales, los estudiantes E1, E2, E3 y E5, lograron establecer la misma relación de perpendicularidad entre las caras  $IJKL$  y  $CDLK$ , porque contienen a los segmentos  $\overline{LJ}$  y  $\overline{LD}$ , respectivamente. De igual manera, en **S4T1**, la visualización se centra en  $\overline{XY}$  y **ABCD**, como unidades figurales de longitud y superficie respectivamente, donde el enunciado (1d) orientó a los estudiantes a reconocer, en la representación bidimensional del desarrollo del cubo S, la unidad de superficie, para poder establecer la relación entre las superficies de HRMI y NOPQ, tal como lo expresaron en las producciones escritas (ver tabla 30).

En este sentido, el conjunto de *tareas* que hacen parte de las situaciones geométricas propuestas en el presente trabajo de indagación, a través de los *enunciados* construidos en articulación con las representaciones figurales presentadas, focalizan la atención de los estudiantes en el reconocimientos de diferentes unidades figurales e involucra, como elemento central de visualización, el cambio dimensional expuesto en el análisis a priori de cada situación, priorizando el análisis cualitativo del sólido geométrico representado desde la deconstrucción dimensional de las formas, de manera que los estudiantes logren visualizar, aquellas formas que de entrada no son perceptibles (Duval, 2016a).

Además, este tipo de tareas, permiten establecer diferencias entre propiedades como el contorno y la superficie de la representación bidimensional del desarrollo de un sólido geométrico, aportando elementos para la conceptualización de perímetro y área de la superficie de una figura. En el segundo foro

virtual de socialización, realizado al término, de la implementación de **S4**, se planteó a los estudiantes un interrogante relacionado con la diferencia entre contorno y superficie, obteniendo las siguientes intervenciones:

**IvF2Ms:** Explica con tus palabras, la diferencia entre superficie y contorno de una figura.

**IvF2E1:** La superficie es lo que ocupa la figura geométrica plana. El contorno es el límite de donde se puede extender la superficie, son las líneas que tiene la figura geométrica alrededor.

**IvF2E2:** Profe, la superficie de la figura es la parte plana y el contorno es la línea que lo rodea.

**IvF2E3:** La diferencia entre superficie y contorno de una figura, es que la superficie es la parte plana de la figura y el contorno son las líneas que lo rodean a la superficie.

**IvF2E5:** La superficie es lo que ocupa la figura plana y el contorno es lo que limita a la superficie y nos muestra hasta dónde llega.

**IvF2E6:** Contorno es el límite, donde se puede extender la superficie, la superficie es la cara base o laterales en la figura.

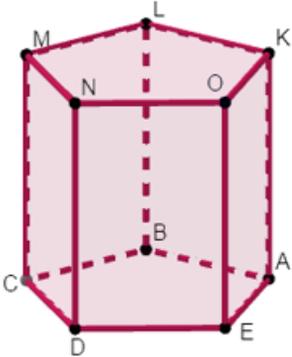
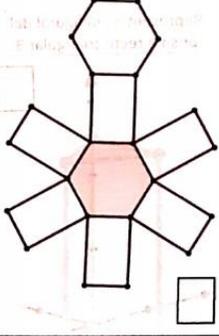
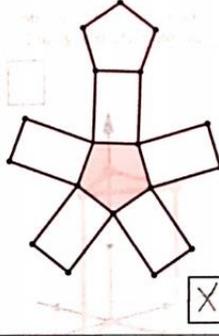
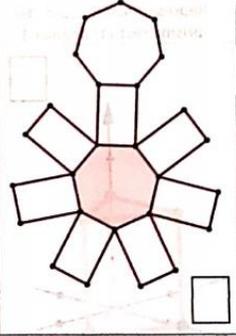
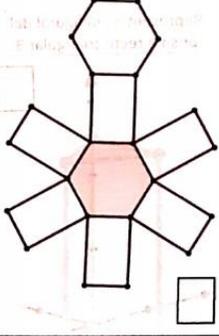
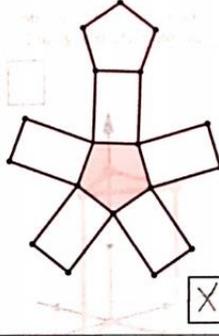
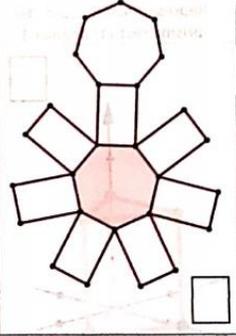
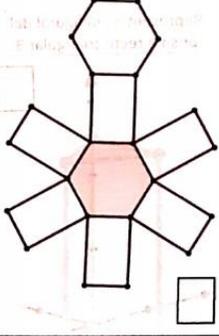
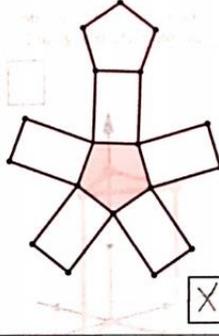
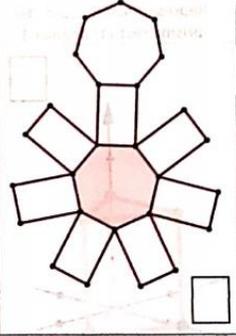
Desde esta categoría de análisis, se observó la manera como los estudiantes utilizan la discriminación de las unidades figurales de dimensiones iguales o inferiores al del objeto geométrico representado, que emergen en cada tarea de las situaciones geométricas **S1**, **S2** y **S3**, y su impacto en la resolución de los enunciados problemas presentados en las situaciones **S4** y **S5**, donde se representan prismas y pirámides deconstruidos en representaciones figurales 2D y 1D, orientando la atención del estudiante al cambio del número de dimensiones a partir de los enunciados presentados en cada tarea. Además, verificar los razonamientos realizados por los estudiantes a través de las producciones discursivas presentadas en las justificaciones. A continuación, se presentan algunas de las producciones de los estudiantes con referencia a esta categoría de análisis.

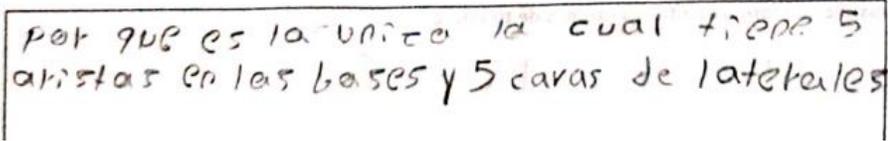
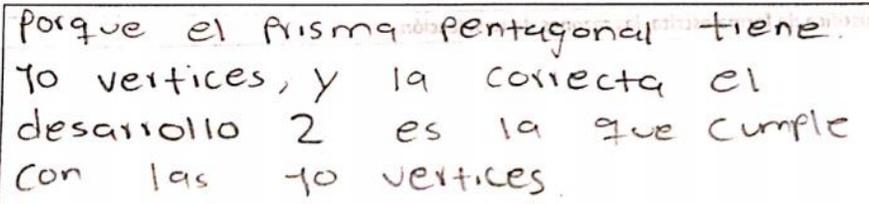
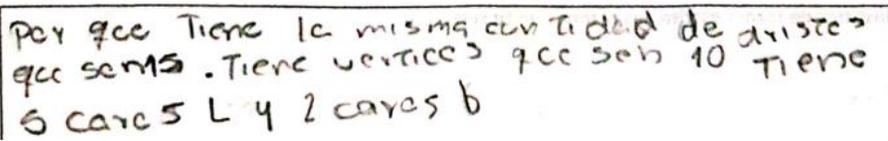
En la **S2T3**, se presenta la representación figurale de un prisma recto pentagonal y se solicita seleccionar la representación bidimensional correspondiente al desarrollo de dicho sólido geométrico. En las

producciones de los estudiantes se observó que su selección fue determinada a partir del reconocimiento de las unidades figurales discriminadas en el prisma representado, y posteriormente verificaron cuál de los desarrollos contenía tales unidades.

En el caso del estudiante **E1**, este centro su mirada en las unidades figurales 2D, es decir, en el reconocimiento de las formas poligonales y el número de caras bases y laterales del prisma representado; mientras que el estudiante **E2**, utiliza las unidades figurales 0D para justificar la selección realizada; y el estudiante **E6** combina varios tipos de unidades figurales 2D, 1D y 0D, como factor determinante en su elección, como se puede observar en la tabla 31.

**Tabla 31.** Desarrollo de un sólido geométrico. Producciones de E1, E2 y E6. S2T3

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes						
<p>S2T3(1)</p>	<p>Tarea 3: Observa la representación figural del prisma recto pentagonal dado en la <i>figura 4</i>.</p> <div style="text-align: center;">  <p><i>Figura 4.</i> Representación figural de un Prisma Recto Pentagonal</p> </div> <p>1) De acuerdo a las características del prisma recto representado (tipo de polígono que representa las caras bases, número de caras laterales, número de aristas, número de vértices). <b>Selecciona con una X</b> la representación figural del desarrollo que podría formarse a partir de la representación dada en la <i>figura 4</i>.</p>						
<p>Selección de <b>E1, E2</b> y <b>E6</b></p>	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th data-bbox="597 1478 836 1507">Desarrollo 1</th> <th data-bbox="836 1478 1075 1507">Desarrollo 2</th> <th data-bbox="1075 1478 1330 1507">Desarrollo 3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="597 1507 836 1854">  <input type="checkbox"/> </td> <td data-bbox="836 1507 1075 1854">  <input checked="" type="checkbox"/> </td> <td data-bbox="1075 1507 1330 1854">  <input type="checkbox"/> </td> </tr> </tbody> </table>	Desarrollo 1	Desarrollo 2	Desarrollo 3	 <input type="checkbox"/>	 <input checked="" type="checkbox"/>	 <input type="checkbox"/>
Desarrollo 1	Desarrollo 2	Desarrollo 3					
 <input type="checkbox"/>	 <input checked="" type="checkbox"/>	 <input type="checkbox"/>					

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
Estudiante 1 E1	<p>Justifica de forma escrita, las razones de tu selección:</p> 
Estudiante 2 E2	<p>Justifica de forma escrita, las razones de tu selección:</p> 
Estudiante 6 E6	<p>Justifica de forma escrita, las razones de tu selección:</p> 

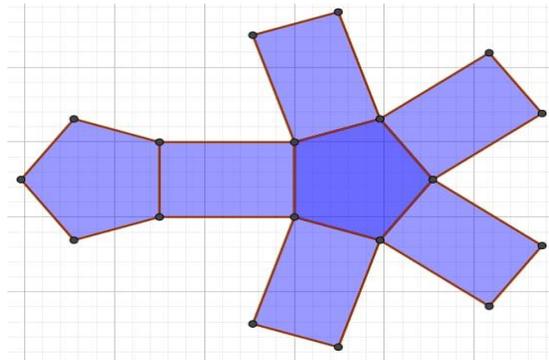
Fuente: Producciones de los estudiantes

En los tres procesos realizados para la selección del desarrollo del prisma representado, se refleja el cambio dimensional del objeto, al aceptar que las unidades figurales discriminadas en la figura 4 (S2T3) se encuentran en uno de los desarrollos representados. Es decir, que implícitamente se realiza la actividad cognitiva opuesta, la de plegar, para verificar que efectivamente las unidades figurales coinciden, pues de lo contrario, podrían haber identificado mayor número de aristas y vértices en el desarrollo en comparación de la representación figural del prisma dado. Se observa a partir de las producciones de los estudiantes y sus intervenciones virtuales, que se reconoce el mismo objeto geométrico en ambas representaciones figurales.

A continuación, se presenta un fragmento de las intervenciones realizadas por los estudiantes en el segundo foro virtual de socialización (usando WhatsApp) con respecto a la representación figural bidimensional del desarrollo de un prisma recto pentagonal dado en la figura 30:

**IvF2Ms:** Observen la siguiente representación figural (figura 30) del desarrollo de un sólido geométrico, ¿a qué dimensión pertenece?

**Figura 30.** Representación figural bidimensional del desarrollo de un prisma presentada en el foro 2.



Fuente: Elaboración propia

**IvF2E6:** Bidimensional

**IvF2E3:** Bidimensional.

**IvF2E1:** Es bidimensional, pero si lo armamos se transforma en tridimensional.

**IvF2Ms:** Y ¿qué tipo de sólido geométrico está representando? ¿Expliquen cuál y por qué?

**IvF2E6:** Es un pentágono, porque es el que tiene dos caras de base, y cinco caras laterales.

**IvF2E2:** es un prisma recto pentagonal

**IvF2E3:** Es un prisma recto pentagonal, porque las bases de la figura geométrica son pentágonos, y los lados son rectángulos, y a partir de eso sería un prisma recto pentagonal.

**IvF2Ms:** Muy bien E2, muy bien ese nombre. E6 lo describiste muy bien, pero te me equivocaste en el nombre. Recuerda que, si tú dices que es un pentágono, te refieres a una figura plana de cinco lados, pero tú lo que me describiste fue un prisma, que es una representación tridimensional, pero entonces, no se llamaría pentágono, sino como dijo E2, prisma recto pentagonal.

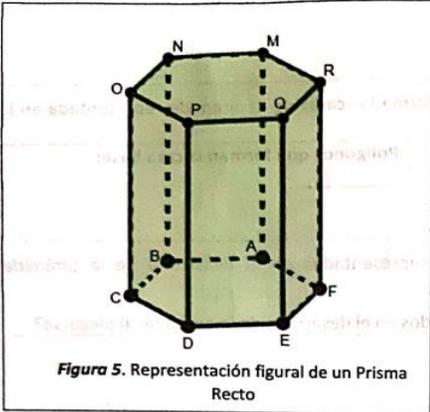
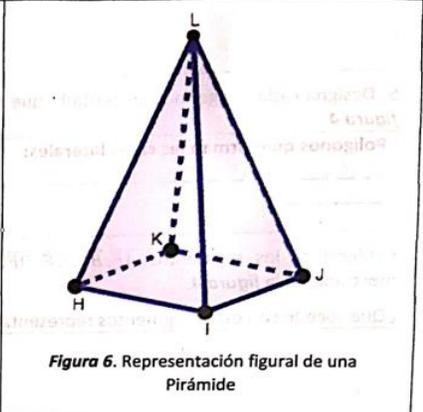
**IvF2E5:** Es un prisma pentagonal, ya que tiene dos bases que son paralelas.

**IvF2E1:** Es un prisma recto pentagonal.

En las intervenciones de los estudiantes, se constató el reconocimiento del objeto geométrico tridimensional, prisma recto pentagonal, en la representación figural bidimensional de su desarrollo, cuya justificación se apoya en la configuración de unidades figurales de dimensión 2D (caras bases y laterales).

Por otro lado, en **S3T1c** se presenta a los estudiantes dos representaciones figurales de sólidos geométricos y se orienta a la discriminación de algunas de las unidades figurales elementales 2D, 1D y 0D, organizadas en tablas. A partir de las respuestas consignadas, los ítems a, b de los enunciados 1 y 2, interrogan sobre las posibles relaciones que pueden establecerse entre el número de unidades figurales unas en función de otras, como se observa en la tabla 32.

**Tabla 32.** Relaciones entre el número de unidades figurales. Producciones de E1, E2 y E5. S3T31c

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes																
S3T1c	<p><b>Tarea 1c:</b> Observa la figura 5 y la figura 6, mostradas a continuación:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p><b>Figura 5.</b> Representación figural de un Prisma Recto</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><b>Figura 6.</b> Representación figural de una Pirámide</p> </div> </div>																
Estudiante E1	<p>1) Completa la siguiente tabla, de acuerdo a las características mostradas en la <b>figura 5</b> del prisma recto representado.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th colspan="2" style="background-color: #f2f2f2;">Características generales del Prisma Recto mostrado en la figura 5</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Número de caras bases representadas</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> <tr> <td>Clasifica el polígono correspondiente a las caras bases del prisma recto representado, de acuerdo al número de segmentos que forman sus lados.</td> <td style="text-align: center;">dos hexágonos</td> </tr> <tr> <td>Número de caras laterales representadas</td> <td style="text-align: center;">6</td> </tr> <tr> <td>Clasifica el polígono correspondiente a las caras laterales del prisma recto representado, de acuerdo al número de segmentos que forman sus lados.</td> <td style="text-align: center;">seis Rectángulos</td> </tr> <tr> <td>Número total de caras poligonales representadas</td> <td style="text-align: center;">8</td> </tr> <tr> <td>Número de aristas representadas</td> <td style="text-align: center;">18</td> </tr> <tr> <td>Número de vértices representados</td> <td style="text-align: center;">12</td> </tr> </tbody> </table>	Características generales del Prisma Recto mostrado en la figura 5		Número de caras bases representadas	2	Clasifica el polígono correspondiente a las caras bases del prisma recto representado, de acuerdo al número de segmentos que forman sus lados.	dos hexágonos	Número de caras laterales representadas	6	Clasifica el polígono correspondiente a las caras laterales del prisma recto representado, de acuerdo al número de segmentos que forman sus lados.	seis Rectángulos	Número total de caras poligonales representadas	8	Número de aristas representadas	18	Número de vértices representados	12
Características generales del Prisma Recto mostrado en la figura 5																	
Número de caras bases representadas	2																
Clasifica el polígono correspondiente a las caras bases del prisma recto representado, de acuerdo al número de segmentos que forman sus lados.	dos hexágonos																
Número de caras laterales representadas	6																
Clasifica el polígono correspondiente a las caras laterales del prisma recto representado, de acuerdo al número de segmentos que forman sus lados.	seis Rectángulos																
Número total de caras poligonales representadas	8																
Número de aristas representadas	18																
Número de vértices representados	12																

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
<p>Estudiante E2</p> <p>S3T1c (1a, b)</p>	<p>a) ¿Qué relación podríamos establecer entre el número de lados del polígono que forma la cara base inferior (o superior) con respecto al número de caras laterales del prisma recto representado en la figura 5? Justifica tu respuesta</p> <div data-bbox="537 327 1377 457" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>la relación que existe son las aristas porque unen las bases con las caras laterales por eso tienen el mismo número</p> </div> <p>b) ¿Qué relación podríamos establecer entre el número de lados del polígono que forma la cara base inferior (o superior) con respecto al número de vértices del prisma recto representado en la figura 5? Justifica tu respuesta</p> <div data-bbox="537 569 1377 684" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>la relación es que el mismo número de lados es igual la mitad del número de vértices 5 y 10</p> </div>
<p>Estudiante E5</p> <p>S3T1c (1a, b)</p>	<p>a) ¿Qué relación podríamos establecer entre el número de lados del polígono que forma la cara base inferior (o superior) con respecto al número de caras laterales del prisma recto representado en la figura 5? Justifica tu respuesta</p> <div data-bbox="537 793 1377 898" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>de los segmentos de la cara base es que se forman los lados que forman las caras laterales, tiene el mismo número de lados y de caras</p> </div> <p>b) ¿Qué relación podríamos establecer entre el número de lados del polígono que forma la cara base inferior (o superior) con respecto al número de vértices del prisma recto representado en la figura 5? Justifica tu respuesta</p> <div data-bbox="537 1014 1377 1119" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>la cara base tiene 5 vértices y son 2 caras bases hay 10 vértices</p> </div>

Fuente: Producciones de los estudiantes

De las producciones de los estudiantes se puede observar la discriminación de las unidades figurales referenciadas en la tabla, y como a partir de los datos consignados, logran establecer algunas relaciones entre las unidades figurales 2D, 1D y 0D, como lo hace E5 en S3T1c (1a), al inferir que el número de segmentos (aristas) que forman el polígono base del prisma representado determina el número de formas poligonales (caras laterales) que debe tener el prisma.

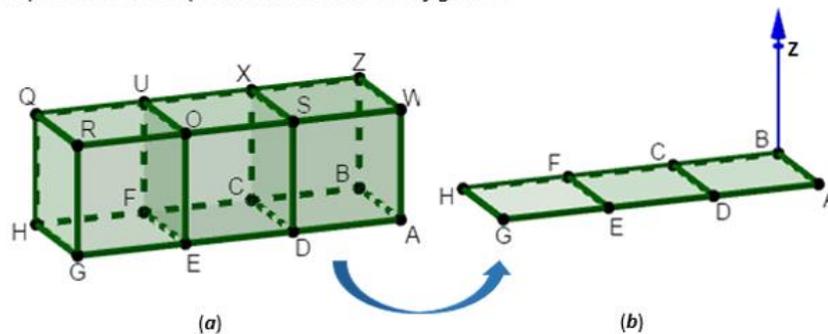
En el caso de E2, el estudiante describe la relación entre el número de segmentos que forman la base del prisma representado y el número de vértices, a través de la expresión “ser la mitad de”. En ambos casos, las relaciones establecidas implican un cambio dimensional, donde se reconoce que las unidades

figurales de dimensión inferior a las del objeto representado, pueden reorganizarse de acuerdo con características que emergen desde las relaciones establecidas.

En la **S5T3** se presenta a los estudiantes la configuración de un prisma recto a partir de su representación bidimensional (cara base) y la representación unidimensional del segmento que representa la altura del prisma, designando las unidades figurales respectivas en cada dimensión. A partir de las orientaciones dadas en el enunciado (*figura 31*), los estudiantes se enfrentan a la tarea de reconstruir el prisma limitado por ambas representaciones (2D y 1D).

**Figura 31.** Articulación entre el registro figural y discursivo. S5T3

**Tarea 3:** En la representación figural tridimensional (3D) de cualquier prisma recto, podemos identificar en su cara base una representación poligonal bidimensional (2D) y podemos representar la altura del prisma a partir de una representación figural unidimensional (1D) con un segmento. Por ejemplo observa la representación dada en la *figura 5*:



**Figura 5.** (a) Representación figural de un prisma recto (3D), (b) representación figural de la cara base poligonal (2D) y segmento altura (1D) de un prisma recto

En la *figura 5 (b)*, la cara base poligonal representada, esta subdividida en 3 partes, que representan los cuadrados *HGEF*, *EFCD*, *CBAD*, y corresponden a la base poligonal de las unidades de volumen del prisma representado en la *figura 5 (a)*. El segmento *BZ* representado en la *figura 5 (b)* es perpendicular a la cara base del prisma representado y corresponde a la altura del prisma.

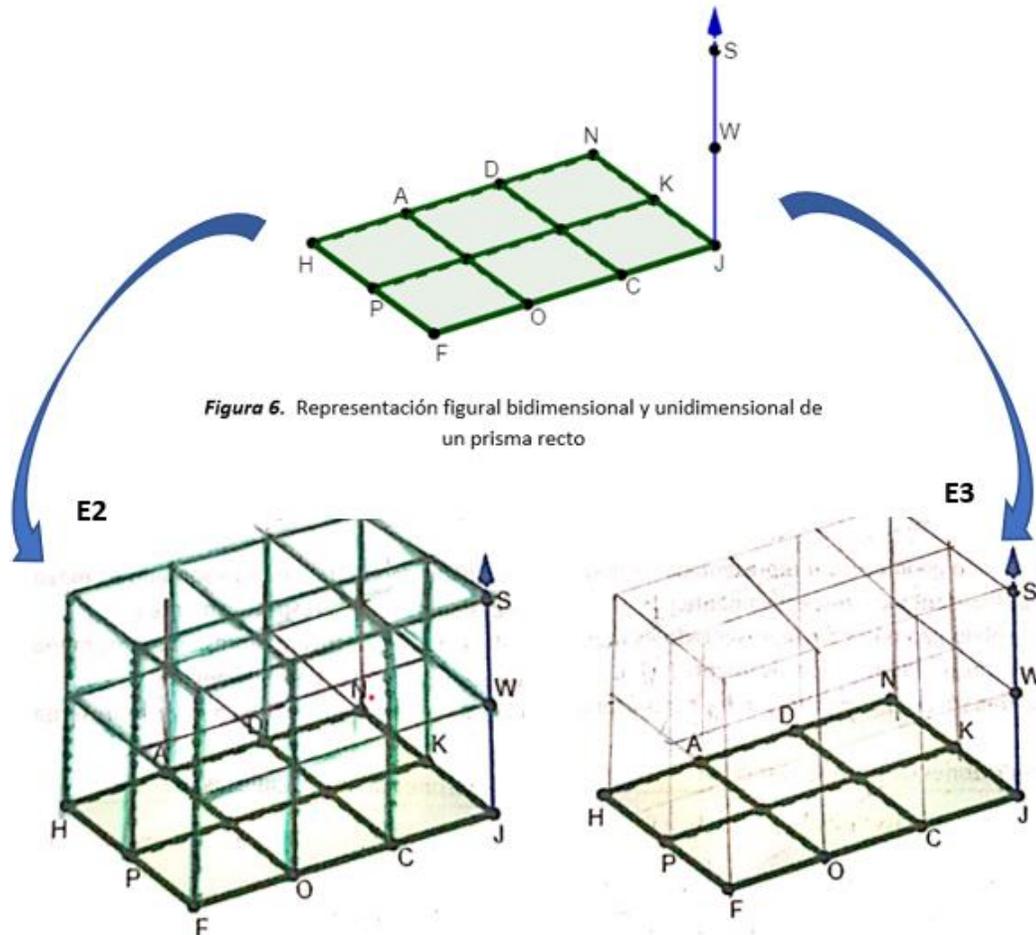
Tomado del diseño de la secuencia didáctica propuesta

Algunos de los estudiantes deciden tratar de completar figuralmente el prisma representado, tomando como referencia el enunciado introductorio de la *tarea 3* en articulación con la figura deconstruida en 2D y 1D, como puede observarse en la *figura 32*, tomada de las producciones de los estudiantes **E2** y **E3** de las situaciones geométricas **S5T3(1)**.

**Figura 32.** Ejemplo de la articulación entre los registros figural y discursivo. Construcciones figurales

realizadas por E2 y E3. S5T3(1)

1) Teniendo en cuenta la información anterior, observa la representación bidimensional y unidimensional de un prisma recto, dado en la **figura 6**, donde la superficie bidimensional de la cara base **HNIJF** representada, esta subdividida en 6 superficies con formas cuadradas.

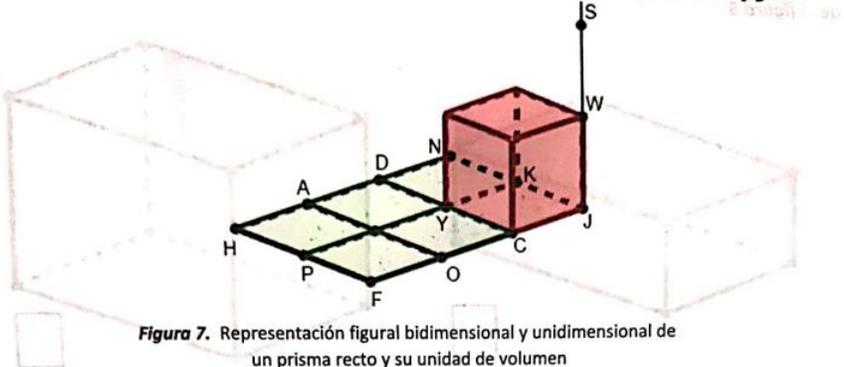


Tomado del diseño de la secuencia didáctica propuesta

A partir de las representaciones figurales construidas por **E2** y **E3**, se puede constatar que la descripción introductoria realizada en **S5T3** fue fundamental en el desarrollo de cada enunciado problema planteados posteriormente, donde se hace referencia explícita a cada representación figural y a sus unidades de acuerdo con la dimensión representada.

Además, el uso de la designación de las unidades figurales de superficie y longitud, direccionan los tratamientos de configuración por reiteración para el desarrollo de la tarea, y la producción discursiva de las justificaciones. En la tabla 33 se observan las producciones de los estudiantes **E1** y **E3**.

**Tabla 33.** Deconstrucción dimensional de un prisma. Producción de E1 y E3. S5T3

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
<p>S5T3(1, 2)</p>	<p>Si se toma como unidad de volumen la representación figural del cubo <i>CKJY</i>, dada en la <i>figura 7</i></p>  <p><i>Figura 7.</i> Representación figural bidimensional y unidimensional de un prisma recto y su unidad de volumen</p> <p>¿Cuántas unidades de volumen son necesarias para representar un prisma recto que ocupe el espacio delimitado por la superficie <i>HFJN</i> y de altura correspondiente al segmento <i>JS</i> representados en la <i>figura 6</i>? Justifica tu respuesta</p>
<p>Estudiante <b>E1</b></p>	<p>SERIAN 12 UNIDADES DE VOLUMEN, PORQUE LA REPRESENTACION FIGURAL ESTA SUBDIVIDIDA EN 6 SUPERFICIES Y PARA LLEGAR A LA ALTURA (S) TACA HACER LO MISMO PERO EN SIMA DE LA SUPERFICIE QUE ARABAMOS DE HACER</p>
<p>Estudiante <b>E3</b></p>	<p>2) Si tomamos como unidad de superficie la representación figural del cuadrado <i>CKJY</i> ¿Cuántas unidades de superficie tendrá la representación figural del prisma recto que se forma a partir de la <i>figura 6</i>? Justifica con tus palabras, el proceso que realizas para dar respuesta a este enunciado.</p> <p>12, Por que se le coloca 2 al lado de cuadrado <i>CKJY</i> y al otro se le coloca 3 y arriba se le ponen 3 de un lado y 3 del otro</p>

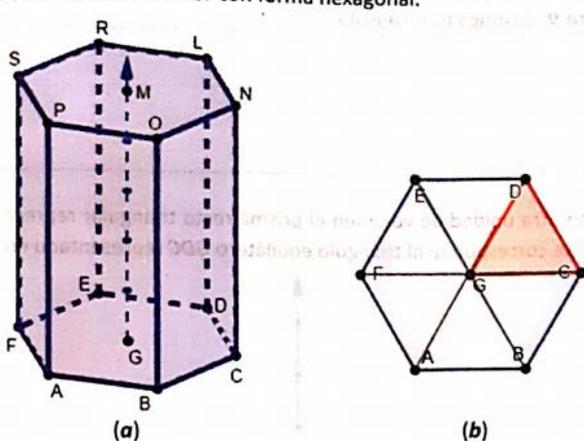
Fuente: Producciones de los estudiantes

Las tareas que involucran la reconstrucción de sólidos geométricos deconstruidos, específicamente, prismas rectos y pirámides cuadrangulares, donde se señalan las unidades de volumen, permitieron a los

estudiantes establecer relaciones parte - todo con respecto al espacio ocupado por el sólido geométrico que se puede formar a partir de las representaciones 2D y 1D presentadas.

Por ejemplo, en **S5T4**, los estudiantes realizan tratamientos figurales como la configuración por reiteración teniendo en cuenta, tanto la representación bidimensional de la cara base del prisma y su unidad de superficie, como la representación unidimensional del segmento altura y su unidad de longitud (resaltadas con marcas), para reconstruir el prisma recto representado. Luego, los estudiantes establecieron la relación parte – todo entre el espacio ocupado por cada unidad de volumen, con respecto al espacio ocupado por el prisma representado, como se puede observar en las producciones del estudiante **E2** y **E3** presentadas en la tabla 34.

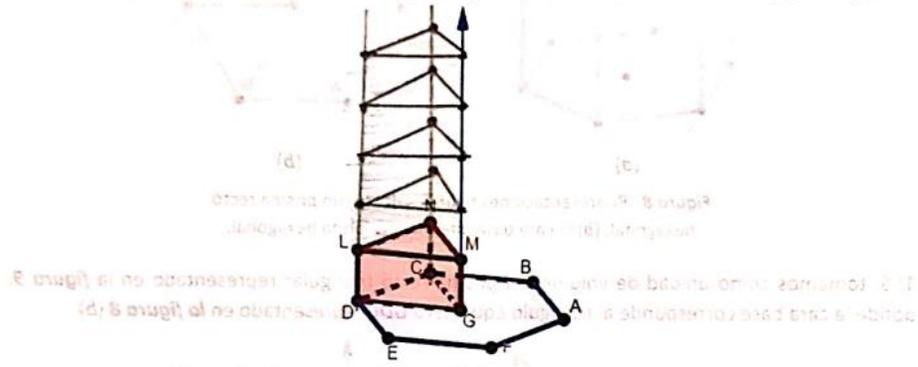
**Tabla 34.** Reconstrucción de un prisma recto deconstruido en 2D y 1D. Producción de E2 y E3. S5T4

Situación/Estudiante	Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes
S5T4	<p><b>Tarea 4:</b> Observa la <b>figura 8</b>, donde se presenta las representaciones figurales de: <b>(a)</b> un prisma recto hexagonal, <b>(b)</b> la cara base inferior con forma hexagonal.</p>  <p><b>Figura 8.</b> Representaciones figurales de: <b>(a)</b> un prisma recto hexagonal, <b>(b)</b> la cara base inferior con forma hexagonal.</p>

**Situación/Estudiante**      **Enunciado de la tarea referenciada/Producciones de los estudiantes**

2) Si tomamos como otra unidad de volumen el prisma recto triangular representado en la **figura 10**, donde la cara base corresponde al triángulo equilátero **GDC** representado en la **figura 8 (b)**

Estudiante E2  
S5T4(2)



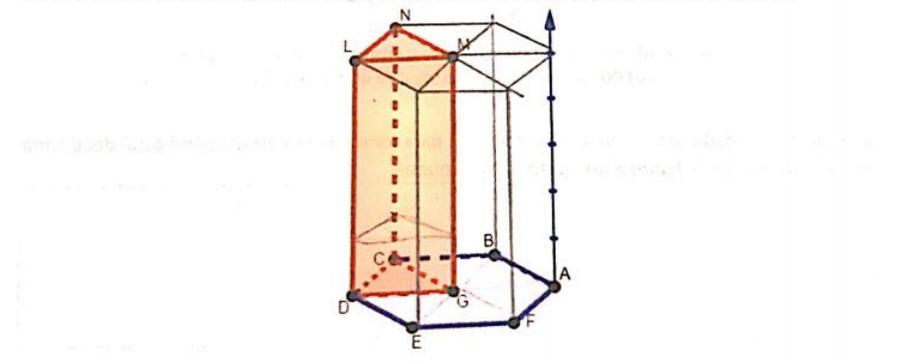
**Figura 10.** Representación figural de un prisma recto triangular (cara base **CDG**) seleccionado como segunda unidad de volumen

a) ¿Cuántas unidades de volumen son necesarias para formar la representación figural del prisma recto hexagonal de la **figura 8 (a)**? Justifica tu respuesta

Son necesarias 30 unidades de volumen para formar la figura, tome la medida de la unidad de volumen DCG de la figura 10

1) Si tomamos como unidad de volumen el prisma recto triangular representado en la **figura 9**, donde la cara base corresponde al triángulo equilátero **GDC** representado en la **figura 8 (b)**

Estudiante E3  
S5T4(1a)



**Figura 9.** Representación figural de un prisma recto triangular (cara base **CDG**) seleccionado como unidad de volumen

a) ¿Cuántas unidades de volumen son necesarias para formar la representación figural del prisma recto hexagonal de la **figura 8 (a)**? Justifica tu respuesta

6 por que los prismas del volumen son 6

Fuente: Producciones de los estudiantes

Al analizar el desarrollo de las diferentes tareas por parte de los estudiantes, desde las tres categorías propuestas al inicio de este capítulo, se observan avances en sus construcciones discursivas, pasando por

descripciones de las representaciones figurales, hasta llegar a establecer relaciones entre las unidades figurales discriminadas en cada tarea; a partir de las cuales se pueden identificar, el reconocimiento de algunas características de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares representados.

Un ejemplo de la anterior afirmación se expone en la tabla 35, donde se presentan cuatro momentos diferentes en la secuencia de situaciones geométricas y se extraen fragmentos de las producciones de uno de los estudiantes participantes (E1). Las producciones discursivas en cada caso, hace referencia a las representaciones figurales involucradas (ver en anexos el diseño de la secuencia completa y las producciones de los estudiantes).

**Tabla 35.** Fragmentos de la producción discursiva de E1 en cuatro momentos diferentes de la secuencia de situaciones geométricas

Descripción de la producción discursiva de los estudiantes y Producciones de los estudiantes
<p>Tomado de <b>S2T1(3)</b>. El estudiante describe las diferencias entre dos representaciones figurales de sólidos geométricos a partir de la discriminación de las unidades figurales elementales (aristas, vértices) y las relaciones de perpendicularidad y paralelismo.</p> <p>3) Describe de manera escrita, las diferencias que encuentras entre las representaciones figurales de los sólidos geométricos dados en las <b>figuras 1 y 2</b></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>tienen diferentes poligonos, no tienen la misma cantidad de aristas ni vertices, la figura 1 es paralela y la figura 2 no, solo una de las figuras es perpendicular</p> </div>
<p>Tomado de <b>S3T3(2)</b>. El estudiante justifica la selección realizada, a partir de la relación entre el número de lados del polígono que representa la cara base y el número de caras laterales del sólido geométrico descrito.</p> <p>2) El número de caras laterales que corresponde al sólido geométrico descrito es:</p> <p>Cinco (5) <input type="checkbox"/>    Cuatro (4) <input type="checkbox"/>    Seis (6) <input type="checkbox"/>    Tres (3) <input checked="" type="checkbox"/></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>Por que sus caras bases son triangulares así que solo tiene 3 caras laterales</p> </div>

**Descripción de la producción discursiva de los estudiantes y Producciones de los estudiantes**

Tomado de **S4T1(1c)**. El estudiante justifica la relación que establece entre dos segmentos dados, a partir de la unidad figural de longitud fijada. Se resalta el uso de la escritura especializada apoyada en la operación de designación.

<p>c) Con relación a la longitud del segmento <math>\overline{XY}</math>, se puede decir que la longitud del segmento <math>\overline{EL}</math> es el triple de la longitud del segmento <math>\overline{EH}</math>                  porque el segmento <math>\overline{EH}</math> tiene el doble de <math>\overline{XY}</math> y del punto <math>E</math> a la <math>L</math> se repiten 3 veces la longitud del <math>\overline{EH}</math></p>	X
---	---

Tomado de **S5T4(1d)**. El estudiante justifica su respuesta a partir de la reconstrucción de un prisma recto, dada su cara base (2D) y la unidad de volumen establecida.

a) ¿Cuántas unidades de volumen son necesarias para formar la representación figural de la pirámide cuadrangular de la **figura 11 (a)**? Justifica tu respuesta

<p>sop 4 unidades de volumen, por que la cara Base de la unidad de volumen cae 4 veces en la figura 11(a)</p>
---

Fuente: Producciones de los estudiantes

La articulación entre figura y discurso presentado en cada enunciado a lo largo de la secuencia de situaciones geométricas implementada contribuyó a la caracterización de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares, en la medida que posibilitó movilizar y orientar, la visualización de las figuras y los tratamientos figurales posibles, aportando elementos para la comprensión de propiedades como el volumen y área de la superficie.

En la tabla 36, se resumen las actividades cognitivas que fueron posibles desarrollar a partir de la implementación del diseño propuesto en este trabajo de indagación, y los aportes desde el análisis cualitativo realizado por los estudiantes, para la comprensión del volumen y el área de la superficie de prismas rectos y pirámides cuadrangulares.

**Tabla 36.** Resumen de las actividades cognitivas desarrolladas por los estudiantes en la implementación del diseño de la secuencia didáctica propuesta

Actividades cognitivas que se posibilitaron a través de la articulación entre las representaciones figurales y los enunciados presentados a los estudiantes	Aportes a la comprensión del volumen y área de la superficie de prismas rectos y pirámides cuadrangulares	Referenciación de la producción de los estudiantes que evidencian las actividades cognitivas realizadas durante la implementación.
Discriminación de las unidades figurales de dimensiones inferior al objeto geométrico representado (prismas rectos y pirámides cuadrangulares)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Reconocimiento de los elementos característicos de los prismas y pirámides como: puntos vértices (0D), segmentos aristas (1D), caras bases y laterales con formas poligonales (2D).</li> </ul>	S1T1(1-5); S2T1(1-3) S2T2(2-6) S3T1a (3-6) S3T1b (1, 4, 5, 7) S3T1c (1, 2)
Establecer relaciones de configuración entre las unidades figurales elementales de dimensiones diferentes (2D, 1D, 0D)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identificación del número de caras laterales posibles de acuerdo con número de lados de la cara base o del número de vértices, en caso de ser un prisma o una pirámide, que permitió el reconocimiento y construcción de representaciones figurales de cada uno.</li> <li>Reconocimiento de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre las caras bases, caras laterales según se represente un prisma o una pirámide.</li> </ul>	S1T2(1-8) S2T2(1, 7-9) S2T2(2-6) S3T1a (7-8) S3T1b (1, 4, 5, 7) S3T1c (1a, b, 2a, b) S3T2(1, 2)

<b>Actividades cognitivas que se posibilitaron a través de la articulación entre las representaciones figurales y los enunciados presentados a los estudiantes</b>	<b>Aportes a la comprensión del volumen y área de la superficie de prismas rectos y pirámides cuadrangulares</b>	<b>Referenciación de la producción de los estudiantes que evidencian las actividades cognitivas realizadas durante la implementación.</b>
Reconocer en dos representaciones figurales de dimensiones diferentes, el mismo objeto geométrico (prismas rectos y pirámides cuadrangulares)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicación de cambios dimensionales entre prismas y pirámides representadas figuralmente y su desarrollo bidimensional (plegar y desplegar); para diferenciar entre la superficie del sólido geométrico y el espacio limitado por dicha superficie, así como, la configuración de las unidades figurales en cada caso.</li> </ul>	S2T3(1, 2) S3T1a (1, 2) S3T1b (2, 3) S3T2(3, 4) S4T2 (3, 4) S4T3 (1))
Establecer relaciones parte todo entre las unidades figurales de longitud y superficie, a partir de los tratamientos figurales realizados (implícitos o explícitos)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilización de unidades figurales diversas ya fueran dadas o construidas (1D y 2D), que favorecieron la diferenciación entre contorno y superficie, previos a la introducción de unidades métricas.</li> <li>• Se promovió la medida de la superficie del desarrollo de un prisma o pirámide a partir de la composición o descomposición de unidades de superficie.</li> </ul>	S4T1(1, 2) S4T2 (1, 2) S4T3 (2-6) S5T3(2)
Reconstruir un prisma recto o pirámide cuadrangular a partir de su desconstrucción dimensional 2D y 1D	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permitió establecer relaciones entre la superficie de la cara base y la longitud del segmento que</li> </ul>	S5T2 (4) S5T3 (1-3) S5T4 (1, 2)

<b>Actividades cognitivas que se posibilitaron a través de la articulación entre las representaciones figurales y los enunciados presentados a los estudiantes</b>	<b>Aportes a la comprensión del volumen y área de la superficie de prismas rectos y pirámides cuadrangulares</b>	<b>Referenciación de la producción de los estudiantes que evidencian las actividades cognitivas realizadas durante la implementación.</b>
	representa la altura de un prisma o pirámide, previos al estudio de las representaciones algebraicas de volumen y/o área de la superficie, así como a las definiciones representadas en lengua natural.	S5T5 (1-3)
Establecer relaciones parte todo entre las unidades figurales de volumen, a partir de los tratamientos figurales realizados (implícitos o explícitos).	<ul style="list-style-type: none"> <li>Utilización de unidades figurales de volumen diversas (3D), que favorecieron la comparación entre el espacio ocupado por cada unidad con respecto al mismo sólido geométrico representado.</li> <li>Se promovió la medida del espacio ocupado por un prisma o pirámide a partir de la composición o descomposición de unidades de volumen. previos a la introducción de unidades métricas.</li> </ul>	S5T2 (1-3) S5T3 (1, 2, 3, 5) S5T4 (1a, b, 2a-d) S5T5 (1a, b, 2a, b, 3c-g)

Fuente: Elaboración propia

A partir del análisis de las producciones de los estudiantes, expuesto a lo largo de este capítulo, se constató lo que Duval plantea “la manera de ver una figura depende de la actividad en que sea movilizada” (Duval, 2016.p.15). En este sentido, las tareas presentadas en la secuencia de situaciones geométricas diseñadas e implementada, movilizan una forma de ver específica, la deconstrucción dimensional; que aporta elementos desde el análisis cualitativo de características y propiedades de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares, como resultado de la interacción entre figura y discurso (enunciados).

## 6. Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo, se presentan las conclusiones generales construidas a partir del desarrollo del presente trabajo de indagación, producto de la reflexión realizada desde la perspectiva semiótica cognitiva, que sustenta la propuesta para el reconocimiento de los elementos constitutivos de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares, desde los procesos de visualización por deconstrucción dimensional de las formas, que favorecieron el análisis cualitativo y comparativo del área de la superficie y el volumen de dichos sólidos, a partir de las unidades figurales dadas. Además, se presentan las conclusiones que emergen desde el análisis del diseño propuesto y los resultados de su implementación. Así como, aquellas conclusiones relacionadas con la posición que asume el maestro/investigador, frente a su formación, en torno a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, específicamente, los procesos de comprensión de las propiedades de los objetos geométricos tridimensionales y sus implicaciones didácticas desde la teoría semiótica cognitiva, en los primeros niveles de escolaridad correspondientes a la educación básica.

Para responder a los objetivos propuestos en esta indagación, las conclusiones se presentan en cuatro categorías: *i)* Conclusiones relacionadas con los aspectos teóricos que sustentan el trabajo de indagación; *ii)* Conclusiones asociadas a la articulación entre figura y discurso para la comprensión de las propiedades de los objetos geométricos, *iii)* Conclusiones asociadas a las variables macro y micro didácticas utilizadas en el diseño de la secuencia de situaciones geométricas; y *iv)* Conclusiones sobre los aportes de este trabajo de indagación al campo de la Educación Matemática asociados a los procesos de comprensión de las propiedades de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares.

Finalmente, se presenta un conjunto de recomendaciones que surgen del proceso de indagación (documentación, diseño e implementación) y de la experiencia de formación del maestro/investigador,

que se consideran significativas para posteriores investigaciones, propias y de terceros en la misma línea teórica, sobre los procesos de comprensión en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

## **6.1 Conclusiones relacionadas con los aspectos teóricos que sustentan el trabajo de indagación**

Al finalizar todo el proceso de diseño, implementación y análisis de los resultados, se logró establecer, con respecto a los referentes teóricos, los siguientes aspectos generales:

- Como lo plantea Duval (2016a) las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes cuando interactúan con una situación geométrica específica, están relacionadas con las actividades cognitivas propias del aprendizaje de la geometría, entre ellas la visualización, es decir, la forma como “ven” la representación figural, no icónica, de un objeto geométrico. En este sentido, se pudo observar en la implementación de la primera situación didáctica diseñada, que los estudiantes participantes en la indagación solo visualizaron, de entrada, la representación figural del objeto tridimensional; sin discriminar otros objetos geométricos como las representaciones 2D (caras poligonales, ángulos), 1D segmentos (aristas, diagonales) y 0D (vértices) que configuran el sólido representado.

Sin embargo, a medida que avanzaron en el desarrollo de la situación didáctica, las representaciones figurales 2D, 1D y 0D, fueron visualizadas por los estudiantes al centrar la atención en dichas representaciones, a partir de los enunciados propuestos y la designación realizada sobre los objetos representados. Lo que permitió a los estudiantes, visualizar y discriminar los objetos a los cuales se hacía referencia en los enunciados y dar respuesta a los interrogantes sobre ellos.

- La visualización como actividad cognitiva fundamental en el aprendizaje de la geometría, no evoluciona desde la simple percepción de las formas, a la discriminación de las unidades figurales

elementales de los objetos representados, de manera espontánea o natural. Es necesario, como se plantea en la teoría semiótica cognitiva, crear las condiciones que favorezca su desarrollo, al incluir tareas que movilicen la visualización de diferentes configuraciones de dichas unidades figurales, tal como se evidenció en el diseño de la secuencia de situaciones geométricas propuesta e implementada, en este trabajo de indagación.

- El reconocimiento y reflexión sobre las propiedades cualitativas de los sólidos geométricos, por parte de los estudiantes, implicó la discriminación de las unidades figurales de los objetos representados, donde es primordial la diferenciación entre objeto representado y representación (Duval, 2017), que no se es posible con la sola exposición de la figura. La intervención del maestro es fundamental en tal diferenciación, al involucrar en las tareas propuestas, el uso de diversas representaciones del mismo objeto, así como en su discurso. En este sentido, en este trabajo de indagación, tanto las tareas diseñadas como la intervención del maestro/investigador, permitió a los estudiantes participantes, identificar en diferentes representaciones semióticas (figural o discursiva) el mismo objeto geométrico, como un prisma o una pirámide particular, dada su representación figural, en diferentes dimensiones; o su descripción escrita en sus configuraciones 3D, 2D o 1D.
- En el análisis de los resultados de las producciones de los estudiantes se puede ratificar, que la comprensión de las propiedades y características de objetos geométricos, como los prismas rectos y pirámides cuadrangulares, solo es posible a partir de la sinergia entre visualización y lenguaje (Duval, 2016). En este caso, a partir de los enunciados construidos, donde se orientó a los estudiantes a la discriminación de las unidades figurales de diferentes dimensiones, fue posible para ellos, realizar razonamientos de tipo figural, a través de los tratamientos descritos en el análisis a posteriori, que posteriormente se transformaron en producciones discursivas donde

describieron y/o justificaron sus procedimientos y decisiones, dando solución a los interrogantes establecidos.

- En este trabajo de indagación, la visualización por deconstrucción dimensional, en sinergia con el lenguaje utilizado, posibilitó el análisis cualitativo y comparativo del volumen y área de la superficie de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares, a partir de la introducción de unidades figurales de superficie y volumen, previas al uso de unidades métricas, que permitió a los estudiantes reconocer en el sólido geométrico representado, la configuración de unidades figurales de diferente dimensión, que emergen en las tareas propuestas. De esta manera, tuvieron la oportunidad de identificar elementos no visibles inicialmente, así como de utilizar o proponer unidades figurales de longitud, superficie y volumen, a partir de la reconfiguración de representaciones figurales como puntos, segmentos, polígonos o sólidos geométricos diferentes a los representados inicialmente en la tarea propuesta. Estos resultados constatan, que el mecanismo de la visualización en matemáticas no está asociado a los aspectos de la magnitud ni a la de sus escalas de medida del objeto geométrico representado, si no a sus dimensiones y cambio dimensionales (Duval, 2016a).

## **6.2 Conclusiones asociadas a la articulación entre figura y discurso para la comprensión de las propiedades de los objetos geométricos tridimensionales.**

Teniendo en cuenta, que la actividad geométrica escolar, implica tareas que involucran figuras geométricas y enunciados problemas que hacen referencia a ellas; es imposible disociar ambos registros de representación, como se plantea en la teoría semiótica cognitiva, donde se establece que la actividad cognitiva realizada en cada uno de los registros es insuficiente para lograr que los estudiantes aprendan sobre los objetos geométricos o sus propiedades y relaciones. La articulación entre figura y discurso

determina la condición necesaria en la enseñanza y aprendizaje de la geometría y, por tanto, en la comprensión de los objetos de estudio (Duval, 2017). A partir de lo anterior, en el proceso de diseño y análisis de los resultados de la implementación de la secuencia de las situaciones geométricas se puede concluir lo siguiente:

- La operación de designación de objetos, correspondiente a la función discursiva de referenciación, tuvo un papel fundamental en el reconocimiento del objeto representado y en la articulación entre enunciado y figura, teniendo en cuenta que posibilitó identificar, sobre qué elementos figurales el estudiante debía enfocar su atención; lo que favoreció la construcción de unidades apofánticas, que dieron paso a producciones discursivas como la descripción y la justificación, a partir de las proposiciones originadas de las operaciones realizadas en el registro de representación figural.

Además, se observó en las producciones de los estudiantes, el uso inicial de un vocabulario y simbología propios de la geometría euclidiana, es decir, ampliaron su léxico a uno especializado, al apropiarse de las reglas de designación a través del desarrollo de las tareas diseñadas en cada situación didáctica; proporcionando elementos de orden discursivo y figural para la construcción de descripciones y justificaciones. (ver producciones de los estudiantes en anexos)

- La coordinación entre los tratamientos específicos del registro figural, y las operaciones discursivas del registro en lengua natural, son necesarios para el aprendizaje en geometría (Duval, 2017). Esta coordinación surge, como resultado de la visualización por deconstrucción dimensional propuesta en cada tarea de las situaciones geométricas y las aprehensiones operatorias desarrolladas en el registro figural; en correspondencia con las operaciones de designación, determinación y descripción de las unidades figurales elementales, que constituyeron cada enunciado construido. De esta manera, fue posible para los estudiantes identificar y enunciar, las características de los sólidos geométricos representados, así como la

construcción de nociones de las propiedades del volumen y el área de la superficie, que les permitieron establecer relaciones de configuración (entre unidades de dimensiones diferentes) y parte todo; previas a la conceptualización de dichas propiedades como magnitudes.

La enseñanza de objetos tridimensionales, como los abordados en este trabajo, representan un lugar significativo para desarrollar procesos de visualización y razonamiento, que van más allá del reconocimiento perceptual de las formas y puede ser abordado desde los primeros años de escolaridad en la educación básica primaria y secundaria.

### **6.3 Conclusiones asociadas a las variables macro y micro didácticas utilizadas en el diseño de la secuencia de situaciones geométricas.**

El diseño presentado en este trabajo de indagación responde a la articulación de las variables didácticas elegidas (macro y micro) descritas en el análisis *a priori* expuesto en el capítulo 4, que tuvieron unas implicaciones de orden didáctico y cognitivo, en las tareas realizadas por los estudiantes en la implementación del diseño. De los resultados obtenidos en las producciones de los estudiantes y su correspondiente análisis, se puede concluir con relación a las variables de diseño, los siguientes aspectos:

- Con relación al diseño de la secuencia de situaciones geométricas propuesto, se considera que fue pertinente, en cuanto al cumplimiento de los objetivos planteados y al desarrollo de las actividades cognitivas de visualización por deconstrucción dimensional, los tratamientos figurales y las producciones discursivas realizadas por los estudiantes; que develaron la importancia de identificar las unidades figurales de diferentes dimensiones, de los objetos tridimensionales presentados, y sus transformaciones, como parte del proceso de comprensión de las propiedades de estos objetos geométricos.
- En cuanto a la potencialidad del diseño para promover la visualización por deconstrucción dimensional (variable macro de diseño), se observó que las representaciones figurales y

discursivas construidas en el diseño, movilizó aprehensiones operatorias que involucraron un cambio dimensional en articulación con los enunciados presentados, que orientó todos los procesos. En este sentido, los estudiantes lograron establecer correspondencias entre dos representaciones figurales diferentes del mismo objeto geométrico (cambio dimensional) como la representación figural de un cubo y la representación figural de su desarrollo, donde la decisión de presentarlos inicialmente de manera simultánea favoreció la correspondencia entre las unidades figurales elementales de cada representación.

Además, la secuencialidad de las tareas propuestas fue determinante en el proceso de visualización, iniciando con la discriminación de las unidades figurales agrupadas por dimensiones inferiores (0D, 1D y 2D), hasta finalizar con el establecimiento de relaciones entre las unidades figurales de dimensión superior.

- El diseño, también promovió en los estudiantes, una visualización dinámica de las representaciones figurales, en tanto lograron realizar tareas que implicaron transformaciones como las traslaciones y rotaciones, aunque no se mostraron explícitas en los razonamientos, pero que se infieren de las respuestas dadas a los interrogantes planteados, especialmente en aquellos donde fue necesario la reconfiguración de unidades figurales para obtener una nueva representación figural, o en las tareas que involucraban un cambio dimensional de 3D a 2D.
- En el diseño fue fundamental, las variables micro didácticas relacionadas con los factores de visibilidad, que favorecieron el reconocimiento y tratamiento de las unidades figurales, especialmente, las de longitud y superficie presentadas en algunas tareas (**S3, S4**), así como las construidas por los estudiantes. Principalmente se destacó el uso de la cuadrícula de fondo como factor de visibilidad potente, así como las marcas realizadas sobre las representaciones unidimensionales que representaban las alturas de los sólidos geométricos deconstruidos en la situación didáctica **S5**. Se considera que la presencia de los factores de visibilidad toma gran

relevancia, al ser la primera vez que el grupo de estudiantes se enfrenta a tareas de este tipo y en las condiciones de implementación suscitada por la emergencia actual del COVID-19.

- Las representaciones figurales bidimensionales de objetos tridimensionales conllevan a la superposición de las unidades figurales de dimensión 1D y 2D; en este caso se observó que la designación de los objetos representados y la enunciación de dicha designación de manera reiterativa en cada tarea fue esencial para que los estudiantes reconocieran cada objeto, independiente del solapamiento.
- En cuanto a la implementación, la no presencialidad en el desarrollo de la secuencia de las situaciones geométricas, debido al aislamiento obligatorio, resultado de la pandemia causada por el COVID-19 a nivel nacional y mundial, generó dificultades en las interacciones entre los participantes y el manejo del tiempo, que disminuyó la oportunidad de socialización entre los estudiantes y el maestro/investigador, de manera simultánea. Sin embargo, el uso de dispositivos digitales, principalmente el celular y la aplicación de WhatsApp, permitieron la implementación, donde se tomaron acciones de seguimiento y acompañamiento individual, además de un espacio de socialización grupal, llamado en este caso foro virtual. En este sentido, las potencialidades del diseño desde su estructura, representaciones figurales y la construcción de enunciados que orientaron las actividades cognitivas de los estudiantes. Así como, el dominio de los referentes teóricos que sustentaron el diseño y la propuesta de enseñanza y aprendizaje en general, por parte del maestro/investigador, fue fundamental en la aplicación de la secuencia y en la participación significativa de los estudiantes, que permitió la culminación de este trabajo de indagación.

## **6.4 Conclusión sobre los aportes de este trabajo de indagación a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, asociada a los procesos de comprensión de las propiedades de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares.**

Teniendo en cuenta que, desde la teoría semiótica cognitiva, la enseñanza y aprendizaje de la geometría, implica el desarrollo de tres actividades cognitivas: visualización, construcción y razonamiento, fundamentales para la comprensión de los objetos geométricos en estudio. Es necesario que se incorpore a los salones de clase, situaciones que movilicen y favorezcan, estas actividades.

De esta manera, el desarrollo del presente trabajo de indagación aporta a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, elementos de orden didáctico, a través del diseño de una secuencia de situaciones geométricas, centrada en los procesos de comprensión de los estudiantes, alrededor de las propiedades de los sólidos geométricos, prismas rectos y pirámides cuadrangulares; sustentada en la teoría semiótica cognitiva, donde se destaca la selección de las variables macro y micro didácticas, entre las cuales juega un papel fundamental la visualización por deconstrucción dimensional de las formas y las funciones discursivas. Resaltando la articulación entre figura y discurso como condición cognitiva esencial en el aprendizaje de la geometría.

Finalmente, se destaca los sólidos geométricos como objetos de estudio que favorecen la exploración, reconocimiento, relaciones y conceptualización de propiedades como el volumen y el área de la superficie, desde un análisis cualitativo; posibilitando el desarrollo y fortalecimiento de aprehensiones operatorias y discursivas que, generalmente, son escasas en los procesos realizados por los estudiantes ante situaciones de tipo geométrico.

## 6.5 Trabajos que surgen de esta indagación y recomendaciones

Teniendo en cuenta la poca literatura encontrada alrededor de la enseñanza y aprendizaje de los sólidos geométricos por deconstrucción dimensional, desde la perspectiva semiótica cognitiva; este trabajo de indagación, deja abierta la línea de investigación alrededor de la comprensión de las propiedades de los sólidos geométricos que no se incluyeron en la propuesta; además de involucrar en el análisis aspectos como la conceptualización del volumen y el área de la superficie desde la construcción de la magnitud y las unidades de medida que complementen el análisis presentado en este trabajo.

Además, se considera que, en la línea de investigación de la enseñanza y aprendizaje de la geometría, se debe profundizar en el estudio de los sólidos geométricos y el proceso de comprensión de sus propiedades. Así como, los razonamientos que, a partir de la visualización por deconstrucción dimensional, involucran dichas propiedades en la construcción de argumentos y demostraciones geométricas, que pueden ampliar el campo teórico de la Educación Matemática.

Por otra parte, a partir de la experiencia como maestro/investigador, la consolidación de un marco teórico de referencia, el proceso de diseño, la implementación y análisis de los resultados de la secuencia de situaciones geométricas; se presentan a continuación algunas recomendaciones enfocadas a la formación de maestros y a las prácticas de aula, relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la educación básica.

- Con respecto a la implementación del diseño, el uso de herramientas digitales y los softwares dinámicos pueden presentarse como una alternativa complementaria para el desarrollo de las tareas, que favorezcan la exploración virtual de las representaciones figurales de objetos geométricos tridimensionales, como los sólidos geométricos. Además, de potencializar la construcción de este tipo de representaciones figurales, como actividad cognitiva fundamental, que pueden representar una nueva variable didáctica.

- En cuanto a la formación del maestro de aula, es importante reconocer la necesidad de una formación continua, tanto de profundización como de investigación, que le permita analizar sus experiencias de aula, desde una mirada reflexiva y transformadora; reconociendo la responsabilidad social frente a los procesos de enseñanza y aprendizaje que deben desarrollarse en la escuela. Esto implica, tener una concepción de la naturaleza de la matemática como ciencia y de sus objetos de estudio, que oriente el análisis de los funcionamientos cognitivos en la actividad matemática. Es decir, el maestro debe asumir una posición teórica, tomando como referencia la naturaleza de los objetos matemáticos, que oriente y sustente, las decisiones didácticas frente a los procesos de enseñanza y aprendizaje (forma de presentar los objetos matemáticos; discurso empleado en clase; elección, adaptación o diseño de actividades de aprendizaje; herramientas tecnológicas de apoyo; evaluación, interacción maestro-estudiante-conocimiento; etc.).
- El rol como maestro/investigador debe hacer parte de la formación del maestro en oficio, porque en ese sentido, se logra una verdadera transformación de la concepción de enseñar y de las dificultades en el proceso de aprendizaje, tomando una postura, desde los referentes teóricos, frente a las propuestas nacionales curriculares, a los libros textos, a la adaptación de diseños y las prácticas lineales donde se enseña por repetición sin tener en cuenta las condiciones cognitivas necesarias para la enseñanza de los objetos matemáticos.
- Desde mi experiencia como maestra en formación, considero fundamentales los elementos teóricos que aporta la perspectiva semiótica cognitiva, en tanto da cuenta de los procesos de comprensión de los estudiantes, de acuerdo con los funcionamientos cognitivos específicos en el aprendizaje de los objetos matemáticos y la articulación de las diferentes representaciones de un mismo objeto, como se expuso en el marco teórico de este trabajo de indagación. Por lo anterior, es importante incluir dichos elementos, en los currículos escolares de la educación básica primaria

y secundaria, así como la educación media; que favorezca el desarrollo de competencias matemáticas como la comunicación, la argumentación, la resolución de problemas y el razonamiento.

- También es esencial que, en programas de apoyo pedagógicos, encaminados a fortalecer las prácticas en el aula, como PTA (Programa Todos a Aprender) que viene trabajando con maestros de primaria desde hace varios años; se incluyan en sus propuestas, reflexiones teóricas que sustenten sus apuestas didácticas, especialmente, porque se dirige a maestros responsables de la formación inicial de los niños. En el caso de la enseñanza de la geometría, es indispensable que la articulación entre el registro figural y el discursivo, que potencialice una visualización no icónica, como actividad cognitiva fundamental, sea objeto de análisis y reflexión constante, al interior de dichos programas.

## **A. Anexo: Diseño de la secuencia de Situaciones Geométricas**

## **B. Anexo: Producción de los estudiantes**

## Referencias Bibliográficas

- Álvarez, C., Maroto, J. (2012). La elección del estudio de caso en investigación educativa. *Gazeta de Antropología*, 28(1), 1-12. Recuperado de <http://hdl.handle.net/10481/20644>
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica. En *Ingeniería didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97–140). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana. Retrieved from <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf>
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Traducción de Dilma Fregona. Buenos Aires: Libros Zarzal.
- Clemens, et al. (1998). *Geometría*. 1a ed. México: Editorial Pearson.
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. AIQUE grupo editor. Recuperado de [https://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID\\_Chevallard\\_Unidad\\_3.pdf](https://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID_Chevallard_Unidad_3.pdf)
- Duval, R. (2005). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría: desarrollo de la visualización, diferenciación de los razonamientos y coordinación de sus funcionamientos. *In Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10(2005), 5–53.
- Duval, R. (2016a). *Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos*. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 13-60). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Duval, R. (2016b). *Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas*. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 60). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de

Caldas.

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*.

[Traducción al español de *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*]. Cali: Universidad del Valle.

Flórez, R. (1999). *Evaluación pedagógica y cognición*. Bogotá: McGrawHill.

Guacaneme, E. A., Obando, G., Garzón, D. & Villa-Ochoa, J. A. (2017). Colombia: Mathematics Education and the Preparation of Teachers. Consolidating a Professional and Scientific Field. In: A. Ruiz (ed.), *Mathematics Teacher Preparation in Central America and the Caribbean: The Cases of Colombia, Costa Rica, the Dominican Republic and Venezuela* (pp. 19-37). Switzerland: Springer.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. (Tesis Doctoral, Universidad de Valencia). Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/405/40516306.pdf>

Guillén, G. (2010). *¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?*. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). Lleida: SEIEM.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. d. (2010). *Metodología de la Investigación*. 5a ed. México: McGraw Hill.

ICFES. (2010). *Resultados de Colombia en TIMSS 2007*. Retrieved from [https://www.icfes.gov.co/documents/20143/234215/Isabel\\_Fernandes\\_Carolina\\_Lopera\\_y\\_Victor\\_Cervantes\\_-\\_Resultados\\_de\\_Colombia\\_en\\_TIMMS\\_2007.pdf](https://www.icfes.gov.co/documents/20143/234215/Isabel_Fernandes_Carolina_Lopera_y_Victor_Cervantes_-_Resultados_de_Colombia_en_TIMMS_2007.pdf)

ICFES. (2018). *Informe Nacional de Resultados para Colombia en TIMSS 2018*. Retrieved from <https://www.icfes.gov.co/documents/20143/1529295/Informe%20nacional%20de%20resultados%20PISA%202018.pdf>

- León, O. (2005). *Experiencia figural y procesos semánticos para la argumentación en geometría*. (Tesis doctoral). Universidad del Valle, Colombia.
- López, W. (2013). *El estudio de casos: una vertiente para la investigación educativa*. *Revista Educere*, 17(56), pp. 139-144. Venezuela: Universidad de los Andes Mérida. Recuperada de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35630150004>
- Marmolejo, G. (2007). *Algunos tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras geométricas: Procesos de visualización y factores de visibilidad*. (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Colombia.
- Marmolejo, G., y González, M. (2013). *Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto*. *Revista Integración*, 31(1), 87–106.
- Marmolejo, G., y Vega, M. (2012). *La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje*. *Educación Matemática*, 24(3), 7–32.
- Marmolejo, G. A. (2014). *Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros textos colombianos y españoles*. Salamanca: Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca, España.
- Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica e la investigación científica. *Pensamiento y Gestión*, 20, pp. 165-193. Colombia: Universidad del Norte. Recuperada de <http://rcientificas.uninorte.edu.co/index.php/pensamiento/article/viewFile/3576/2301>
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Cooperativa Editorial Magisterio.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.
- MEN. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje.V(2)*. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá.
- Munarriz, B. (2001). *Técnicas y métodos en Investigación cualitativa*. *Reis*, (95), 101–116. Recuperado de

<http://ruc.udc.es/dspace/bitstream/2183/8533/1/CC-02art8ocr.pdf>

Muñiz, M. (2010). *Estudios de caso en la investigación cualitativa*. Facultad de Psicología, Universidad de la República. Recuperado de [http://www.psico.edu.uy/sites/default/files/cursos/1\\_estudios-de-caso-en-la-investigacioncualitativa.pdf](http://www.psico.edu.uy/sites/default/files/cursos/1_estudios-de-caso-en-la-investigacioncualitativa.pdf)

Navarro, J. (2003). *Los elementos de euclides. Un Paseo por la Geometría 2002/2003*. pp. 55-82. España:Real Sociedad Matemática Española.

Padilla, E., Melo, C., Barraza, W., & Sánchez, E. (2003). *Estrategias matemáticas 7: Matemáticas para el desarrollo de competencias*. Bogotá, Colombia: Educar Editores.

Pontón, T. (2012). *Elementos semiótico cognitivos y lingüísticos frente al análisis de la comprensión de enunciados*. (tesis doctoral). Universidad del Valle.

Rich, B. (1991). *Geometría*. Segunda edición. México. Editorial McGraw-Hill. Recuperado de [https://www.cimat.mx/ciencia\\_para\\_jovenes/bachillerato/libros/\[Barnett\]geometria\(schaum\).pdf](https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/[Barnett]geometria(schaum).pdf)

Sáiz, M. (2002). *El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto matemático volumen y su enseñanza*. Capítulo 2. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav). Págs. 23-45. México.

Simson, R. (1774) (Eds.). *Los seis primeros libros y el undécimo, y duodécimo de los elementos de Euclides*: traducidos de nuevo sobre la versión latina de Federico Comandino conforme a la fiel, y correctísima edición de ella. Universidad Complutense de Madrid. Recuperado de [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1f/Los\\_seis\\_primeros\\_libros\\_y\\_el\\_undecimo%2C\\_y\\_duodécimo\\_de\\_los\\_elementos\\_de\\_Euclides.pdf](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1f/Los_seis_primeros_libros_y_el_undecimo%2C_y_duodécimo_de_los_elementos_de_Euclides.pdf)

Soto, R. (2017). *Realidad aumentada y secuencias didácticas como elementos de mejora en la educación matemática y la formación permanente del profesorado*. (Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Madrid). Recuperada de <http://hdl.handle.net/10486/680152>

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. 2a Ed. Madrid: Morata. Recuperado de <https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Investigacion-con-estudios-de-caso.pdf>