

**Efecto de lente gravitacional
unificado: una aproximación a la
reconstrucción del perfil de masa de
un cúmulo galáctico**

Daniel Alexdy Torres Ballesteros

Imagen de la portada: Galaxia M83¹.

¹<https://science.nasa.gov/m83-thousand-ruby-galaxy>



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Efecto de lente gravitacional unificado: una aproximación a la reconstrucción del perfil de masa de un cúmulo galáctico

Daniel Alexdy Torres Ballesteros

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Observatorio Astronómico Nacional
Bogotá, Colombia
2020

Efecto de lente gravitacional unificado: una aproximación a la reconstrucción del perfil de masa de un cúmulo galáctico

Daniel Alexdy Torres Ballesteros

Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en ciencias - Astronomía

Director:

Prof. Dr. Leonardo Castañeda Colorado

Línea de Investigación:

Lentes Gravitacionales, Cosmología

Grupo de Investigación:

Astronomía Galáctica, Gravitación y Cosmología

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Observatorio Astronómico Nacional

Bogotá, Colombia

2020

Dedicado a mis padres y hermanas

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres y hermanas por su apoyo incondicional durante mi estadía en el programa, que no ha sido falto de dificultades más allá de lo académico. También quiero agradecer al profesor Leonardo Castañeda por su guía y paciencia a lo largo del desarrollo de este trabajo, que me ha permitido enfocar de nuevo mis intereses.

Por último, quiero agradecer a la Universidad Nacional de Colombia por el apoyo tanto académico como económico por medio de las becas auxiliar y asistente docente.

Resumen

En este trabajo presentamos la descripción, implementación y aplicación de un método de reconstrucción libre que hace uso del efecto de lente gravitacional para poder producir una estimación del perfil de masa de un cúmulo galáctico. En particular, se hace uso de los sistemas de múltiples imágenes presentes (régimen fuerte), y de las elipticidades aparentes de fuentes de fondo (régimen débil) para realizar la reconstrucción. Este método corresponde a una extensión del esquema dado en SWUnited, en donde hemos incluido una aproximación alternativa al refinamiento irregular adaptativo de la red, así como también dos posibles funciones de penalización χ_s^2 asociadas al régimen fuerte, las cuales para nuestra implementación han probado ser numéricamente más estables que la sugerida en SWUnited.

El método se aplicó a dos modelos de prueba, donde los resultados han mostrado la efectividad del método al recobrar el perfil de la lente, incluso cuando solamente se consideran las múltiples imágenes. Al incluir las elipticidades se amplía el campo de acción. El método es capaz de recobrar las curvas críticas producidas por la lente, sin embargo, se presentan dificultades para recobrar en su totalidad algunos de los sistemas de múltiples imágenes utilizados. Por otro lado, se realizó la reconstrucción del cúmulo galáctico Abell 370, donde fue posible recobrar tanto en posición como en forma el arco característico de este cúmulo. Además, se obtuvo una estimación de la masa encerrada en un radio $\theta \approx 1.1$ (*arcmin*) que se encuentra en el rango de $(4.5 - 4.7) \times 10^{14} M_\odot$.

Palabras clave: Lentes gravitacionales - Cúmulos galácticos - Abell 370.

Abstract

In this work, we present the description, implementation, and application of a free-form reconstruction method that makes use of the gravitational lensing effect to produce an estimation of the mass profile of a galaxy cluster. In particular, multiply-imaged systems (strong regime) and the apparent ellipticity of background sources (weak regime) are employed. This method is an extension of the scheme given in SWUnited, where we have included an alternative approach to the irregular and adaptive grid refinement, as well as two penalty functions χ_s^2 for the strong regime, which for our implementation have proven to be numerically more stable than the one suggested in SWUnited.

The method was applied to two mock models, for which their mass profiles have been recovered effectively, even when only multiply-imaged systems are considered. If ellipticities are included, the region of action widens. This method has also demonstrated to be capable of recovering the critical curves produced by the lens, nonetheless, there are difficulties in recovering some of the multiply-imaged systems in their entirety. The reconstruction method was also applied to the galaxy cluster Abell 370, where it was possible to recover in both shape and size its characteristic arc. Furthermore, the mass enclosed within a radius of $\theta \approx 1.1$ (*arcmin*) was found to be in the range of $(4.5 - 4.7) \times 10^{14} M_\odot$.

Key words: Gravitational lensing - Galaxy clusters - Abell 370.

Contenido

Agradecimientos	IX
Resumen	XI
Abstract	XIII
1. Introducción	2
2. Elementos de Cosmología	4
2.1. Principio Cosmológico	4
2.2. Un universo homogéneo e isotropo	4
2.3. Distancia angular diametral	8
3. Efecto de lente gravitacional	12
3.1. Ecuación de la lente	12
3.2. Ángulo de deflexión	15
3.3. Potencial deflector	16
3.4. Peso cosmológico	17
3.5. Deformaciones	18
3.6. Régimen fuerte: Múltiples imágenes	22
3.7. Régimen débil: Elipticidades	23
3.8. Degeneración por una lámina de masa	28
4. Método de reconstrucción	32
4.1. Descripción del método de reconstrucción	32
4.1.1. Descripción del método	33
4.2. Sistema de ecuaciones lineales	36
4.2.1. Régimen débil	40
4.2.2. Régimen Fuerte	42
4.2.3. Regularización	46
4.2.4. Resultado final	47
5. Reconstrucción de prueba	48
5.1. Catálogos	48

5.2. Prueba 1: NIS	49
5.2.1. Modelo	51
5.2.2. Reconstrucción	56
5.2.3. Corrección	65
5.3. Prueba 2: 2NIS	67
5.3.1. Modelo	68
5.3.2. Reconstrucción	71
6. Abell 370	79
6.1. Reconstrucción	79
7. Conclusiones	89
A. Anexo: Coeficientes	91
A.1. Régimen débil	91
A.1.1. Caso $ g_i \leq 1$	92
A.1.2. Caso $ g_i > 1$	93
A.1.3. Coeficientes	94
A.2. Régimen Fuerte	95
A.2.1. Opción 1	95
A.2.2. Opción 2	97
A.3. Regularización	99
A.3.1. Coeficientes	100
Bibliografía	101

1. Introducción

Los cúmulos galácticos son objetos de vital interés pues presentan una prueba directa de la formación y evolución de estructura en el universo, por lo cual son pruebas directas que permiten restringir el modelo cosmológico y los procesos astrofísicos que hay detrás (e.g [AEM11, PAB⁺19] y las referencia allí incluidas), además, dichas estructuras pueden ser utilizadas como telescopios cósmicos, pues como consecuencia del efecto de lente gravitacional se produce un efecto de magnificación significativo en fuentes de fondo, a tal punto que es posible observar fuentes que de otro modo serían invisibles para los instrumentos actuales (e.g. [BTA⁺09, HBH⁺15, PGL⁺18]). Es por tanto de gran interés determinar la distribución de masa de dichas estructuras.

El efecto de lente gravitacional es una herramienta de gran valor ya que es sensible a toda la distribución de masa independientemente de su naturaleza, es por ello que ha sido utilizado de forma extensiva para determinar la distribución de masa de cúmulos galácticos (ver [KN11, HBD⁺13, Ume20]), lo que ha llevado al desarrollo de diferentes algoritmos que aprovechan los diferentes observables propios de este efecto, entre ellos podemos encontrar por ejemplo LENSTOOL [KES⁺96, JKL⁺07, JK09, SFK20, NJJ⁺20], GLAFIC [Ogu10], SWUnited [BSLE05, BES⁺05, BTA⁺09], SaWLens(2) [MCM⁺09, MCD⁺11, Mer16, HTM⁺19], LensPerfect [CFB⁺08, CBM10], GRALE [LDRD06, LDRDB09, LWWDR20, GWL20], WSLAP(+) [DPST05, DTPS07, SDBL14, DBC⁺16], quienes han sido ampliamente aplicados en el caso particular de cúmulos galácticos.

En esencia se dispone de dos tipos de métodos: Tenemos los métodos paramétricos, en los cuales se propone un modelo que se cree es capaz de describir las propiedades y estructura que presenta el cúmulo de interés. Dicho modelo consta de un conjunto (pequeño) de parámetros que lo caracterizan, así que el objetivo de este tipo de métodos es ajustar los parámetros del modelo tal que este sea capaz en efecto de reproducir los datos de entrada. Para realizar el ajuste es común implementar métodos como MCMC o Nested Sampling. Por otro lado, tenemos el tipo de métodos que son comúnmente conocidos como no paramétricos, ya que a diferencia de los métodos paramétricos aquí no se impone un modelo que describa explícitamente la distribución de masa, no obstante, no es correcto llamar este tipo de métodos como no paramétricos, pues sí hay parámetros a ajustar que corresponden a alguna cantidad de interés (puede ser por ejemplo la convergencia o el potencial deflector) definida sobre una red bidimensional respecto a la cual se realiza la reconstrucción. Por tanto, es conveniente llamar a este tipo de métodos simplemente como métodos de forma o reconstrucción libre. Como caso particular también es posible realizar una reconstrucción híbrida como es el caso

de [NJJ⁺20], donde se impone un modelo en la región central (régimen fuerte) de la distribución, mientras que a su vez se permite una reconstrucción libre en la regiones externas (régimen débil), donde entenderemos por régimen fuerte la región donde se presentan múltiples imágenes, y por régimen débil la región donde las deformaciones en tamaño y forma de las imágenes no son significativas, tal que sea posible caracterizar dichas fuentes por medio de su elipticidad aparente.

En este trabajo presentamos el desarrollo, implementación y aplicación de un método de reconstrucción libre basado en SWUnited [BSLE05, BTA⁺09], que consiste en un método de dos niveles de iteraciones, cuyo objetivo radica en encontrar el potencial deflector sobre una red bidimensional adaptativa irregular, donde como datos de entrada se toma la posición de sistemas de múltiples imágenes y la elipticidad de fuentes de fondo. Para esta tarea se plantea una función de penalización general que incluye la contribución de cada régimen, las cuales contrastan los observables con su respectiva representación dada por la teoría de lentes gravitacionales. Adicionalmente, la función de penalización incluye dos términos de regularización que permiten visualizar la estructura del cúmulo, y a su vez controlar el ruido propio del método. La minimización de esta función de penalización respecto al potencial deflector en cada punto de red conduce a un sistema de ecuaciones lineales cuya solución arroja una nueva estimación del potencial deflector en dicha red. El proceso de minimización se repite hasta que el perfil converja. Así pues, para entender el método de reconstrucción este trabajo esta organizado como sigue: En el capítulo 2 establecemos el modelo cosmológico a partir del cual podemos describir las distancias involucradas en la descripción del efecto de lente gravitacional, cuyas propiedades y efectos se discuten en el capítulo 3. Luego, se describe el método de reconstrucción en el capítulo 4, y se aplica a dos modelos de prueba, cuyas propiedades y resultados se presentan en el capítulo 5, lo que nos permite entender las fortalezas y debilidades del método, estableciendo así el terreno para realizar la reconstrucción de un cúmulo galáctico real, en este caso particular Abell 370, cuyos resultados se presentan en el capítulo 6. Por último, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones.

2. Elementos de Cosmología

En este trabajo tendremos como trasfondo cosmológico el modelo Λ CDM, por tanto en el presente capítulo haremos una descripción puntual de las principales características de este modelo, haciendo énfasis en las herramientas que nos permitan definir y calcular lo que conocemos como la distancia angular diametral; indispensable para el desarrollo de la teoría de lentes gravitacionales. Usaremos como principales referencias [Car19, CL03, MVdBW10, Wei08].

Iniciaremos con una descripción del Principio Cosmológico (sección 2.1), luego estableceremos la geometría del sistema por medio de la métrica de Robertson-Walker y con ello describiremos la dinámica del universo según este modelo (sección 2.2), con lo cual tenemos un entorno para definir y establecer cómo calcular la distancia angular diametral (sección 2.3).

2.1. Principio Cosmológico

El principio cosmológico establece que el universo a grandes escalas es espacialmente homogéneo e isótropo. Aquí la homogeneidad indica que hay una distribución uniforme (en promedio) de galaxias, y que observadores que se mueven siguiendo el movimiento medio del universo (o también conocidos como observadores comóviles) miden las mismas propiedades físicas; es decir, hay una invarianza ante traslaciones espaciales entre estos observadores. Por otro lado, la isotropía implica que las propiedades físicas son independientes de la dirección en que se observe, lo cual implica una invarianza ante rotaciones; válido solamente para observadores comóviles.

2.2. Un universo homogéneo e isótropo

En este trabajo consideraremos la Relatividad General como el paradigma que describe de forma correcta la interacción gravitacional. Por lo tanto, es necesario determinar la métrica que describe al sistema; el universo en este caso. Es aquí donde el Principio Cosmológico entra en juego, pues proporciona los cimientos necesarios para plantear una primera aproximación a un modelo que describa el universo. Así pues, considerando que la gravedad es la fuerza fundamental que gobierna la evolución del universo, la métrica que satisface el principio

cosmológico está data por medio del elemento de línea

$$ds^2 = -dt^2 + dl^2, \quad \text{con} \quad dl^2 = a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \right]. \quad (2-1)$$

Esta métrica es comúnmente conocida como la métrica de Robertson-Walker (RW), pues fue presentada de forma independiente por Howard Robertson [Rob35] y Arthur Walker [Wal37]. Aquí (2-1) se encuentra escrita en términos del tiempo cosmológico t , y de las coordenadas polares espaciales comóviles (r, θ, ϕ) , las cuales están definidas respecto a un observador comóvil. Este sistema de coordenadas al ser comóvil, una vez establecido evoluciona en conjunto con el universo, por lo cual las coordenadas se mantienen fijas y no representan la posición física respecto al observador comóvil. Por lo tanto, se introduce el término $a(t)$ conocido como factor de escala, cuya tarea es describir la evolución del universo. El factor de escala solamente depende de t como consecuencia de la homogeneidad del espacio.

Por otro lado, la constante K representa la curvatura espacial del universo. Solamente existen tres posibles geometrías que satisfacen el principio cosmológico, dadas por un K que es igual que -1 , 0 ó $+1$, representando respectivamente un universo abierto, plano ó cerrado.

Una forma clara de entender el papel que juega $a(t)$ es por medio de la distancia propia d_p entre dos objetos comóviles ubicados en los puntos $P_1 = (r_1, \theta_1, \phi_1)$ y $P_2 = (r_2, \theta_2, \phi_2)$ en (2-1) en un tiempo t fijo. Si consideramos que el primer punto corresponde al origen del sistema de coordenadas, mientras que el segundo punto corresponde a una posición de del objeto comóvil de interés, entonces a través del elemento de línea dl dado en (2-1) se obtiene

$$d_p = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} = a(t) f_K(r), \quad (2-2)$$

donde la distancia comóvil se encuentra definida como

$$f_K(r) := \begin{cases} \sinh^{-1}(r) & \text{si } K = -1 \\ r & \text{si } K = 0 \\ \sin^{-1}(r) & \text{si } K = 1 \end{cases}. \quad (2-3)$$

Vemos que a pesar que la distancia propia es diferente en diferentes tiempos, la distancia comóvil no cambia. Desafortunadamente l_p es de poca utilidad pues no es observable, ya que está dada en un tiempo fijo. Sin embargo, en la práctica los observables se definen en general a partir de la radiación electromagnética emitida por el objeto de estudio, y esta radiación no puede propagarse de forma instantánea, lo que implica que el tiempo de emisión y observación de dicha radiación son diferentes. Como resultado, es necesario utilizar otra definición de distancia que sí pueda ser derivada de las observaciones.

Para esta tarea se hace uso del corrimiento al rojo z (redshift) cosmológico debido a la expansión del universo,¹ el cual vincula la longitud de onda (frecuencia) de la radiación

¹En general se tiene tanto un corrimiento al rojo (aumento de la longitud de onda $z > 0$) como un

cuando es emitida (subíndice «e») y observada (subíndice «0»), tal que

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\nu_e - \nu_0}{\nu_0}, \quad (2-4)$$

cuya relación con el factor de escala está dada por la expresión

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{a_0}{a}. \quad (2-5)$$

Esta es una forma simple de relacionar la observación con la teoría. Es claro entonces que a es indispensable para describir la dinámica del Universo, y para hallarlo se hace uso de las ecuaciones de Friedmann

$$H^2 := \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{c^2 K}{a^2} + \frac{c^2 \Lambda}{3}, \quad (2-6)$$

y

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{c^2 \Lambda}{3}, \quad (2-7)$$

en conjunto con la ecuación de conservación

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0, \quad (2-8)$$

donde $H(t) := \dot{a}/a$ se conoce como el parámetro de Hubble y representa la rapidez con la que se expande o contrae el universo; su valor en t_0 suele ser llamado la constante de Hubble H_0 [Hub29]. El punto representa la derivada respecto al tiempo cosmológico t . Adicionalmente se tiene $P = P(t)$ y $\rho = \rho(t)$ quienes representan respectivamente la presión y densidad del fluido perfecto ² que describe las diferentes componentes de materia y energía en el universo. Por último, Λ , conocida como la constante cosmológica es la responsable de la expansión acelerada del universo [FTH08].

Para obtener a hace falta conocer la ecuación de estado que relacione P y ρ , donde en el caso cosmológico se puede modelar de forma sencilla como $P = w\rho$ con w constante, la cual es consistente con las contribuciones de materia no relativista, materia relativista y energía oscura (o constante cosmológica Λ) que se considerarán en este trabajo. En consecuencia, esta ecuación de estado permite solucionar fácilmente (2-8), dando como resultado

$$\rho \propto a^{-3(1+w/c^2)} \quad \Longrightarrow \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w/c^2)}. \quad (2-9)$$

corrimiento al azul (disminución de la longitud de onda $z < 0$), sin embargo, las observaciones muestran que la tendencia es un corrimiento al rojo debido a la expansión del universo. Los corrimientos al azul se deben a movimientos peculiares (fuera de la expansión) a nivel local debido a la interacción especialmente gravitacional entre los miembros del sistema, por ejemplo de un cúmulo galáctico, como lo es en el caso de La Vía Láctea y Andromeda.

²Se considera un fluido perfecto pues este satisface el Principio Cosmológico.

Así pues, para las componentes de materia y energía que nos interesan toma la forma

$$\begin{aligned}
\text{Materia relativista:} \quad w = c^2/3 &\implies \rho_r = \rho_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \\
\text{Materia no relativista:} \quad w = 0 &\implies \rho_m = \rho_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \\
\text{Energía oscura:} \quad w = -c^2 &\implies \rho_\Lambda = \text{Constante}
\end{aligned} \tag{2-10}$$

Siguiendo (2-6) se puede definir la densidad asociada a la energía oscura como

$$\rho_\Lambda := \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}, \tag{2-11}$$

y de forma análoga por fines prácticos se puede definir una densidad efectiva para la curvatura K dada por

$$\rho_K := \rho_{K,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \quad \text{con} \quad \rho_{K,0} := -\frac{3c^2 K}{8\pi G a_0^2}. \tag{2-12}$$

De esta forma la ecuación de Friedmann (2-6) se puede escribir en términos de una densidad efectiva ρ_{ef} como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{ef}, \tag{2-13}$$

siendo

$$\rho_{ef} = \rho_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_{K,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \rho_\Lambda. \tag{2-14}$$

Definamos ahora un parámetro adicional Ω_i (aquí $i = r, m, K, \Lambda$) denominado parámetro densidad, el cual está dado por

$$\Omega_i := \frac{\rho_i}{\rho_{cr}} \quad \text{con} \quad \rho_{cr} := \frac{3H^2}{8\pi G}, \tag{2-15}$$

siendo ρ_{cr} lo que se conoce como densidad crítica, que corresponde a la densidad de un universo plano, por lo cual sirve de referencia para determinar la curvatura del universo. Al aplicar esta definición en (2-14) obtenemos como resultado la propiedad

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_K + \Omega_\Lambda = 1, \tag{2-16}$$

valida para cualquier tiempo t . De (2-16) es claro que

$$\Omega_K = 1 - \Omega \quad \text{con} \quad \Omega := \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda, \tag{2-17}$$

en consecuencia el valor de Ω permite determinar la curvatura de universo, tal que

$$\begin{aligned}
\Omega < 1 &\implies \text{Universo abierto} \\
\Omega = 1 &\implies \text{Universo plano} \\
\Omega > 1 &\implies \text{Universo cerrado}
\end{aligned} \tag{2-18}$$

Ahora, la ecuación de Friedmann (2-6) se puede escribir de forma más practica dividiendo por $\rho_{cr,0}$ (la densidad crítica evaluada en $t = t_0$) y aplicando la definición (2-15), dando como resultado

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{K,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \right], \quad (2-19)$$

o en términos de z (por medio de (2-5))

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{r,0} (1+z)^4 + \Omega_{m,0} (1+z)^3 + \Omega_{K,0} (1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \right], \quad (2-20)$$

con

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{z}}{1+z} \quad (2-21)$$

según corresponda. Es claro a partir de (2-17) que $\Omega_{K,0}$ no es una cantidad independiente en el sistema. Tenemos entonces que al conocer H_0 , $\Omega_{r,0}$, $\Omega_{m,0}$ y $\Omega_{\Lambda,0}$, en conjunto con las ecuaciones (2-7), (2-8), (2-19) y (2-20) es posible describir la geometría y la dinámica del Universo. La solución de (2-19) permite obtener $a(t)$, donde se suele tomar como condiciones iniciales $a(t=0) = 0$ (origen del Universo) en conjunto con $a_0 = 1$, donde t_0 se puede obtener al solucionar (2-20) considerando que $z(t=0) \rightarrow \infty$ mientras que $z(t_0) = 0$. Esto esta sujeto al valor de los parámetros densidad, ya que en algunos modelos de Universo $a(t)$ nunca se hace cero (es decir que no hay un inicio), dando como resultado que la edad del Universo es infinita. Al estudiar modelos de juguete que permiten entender el comportamiento de estas ecuaciones, en particular cuando se considera una contribución de materia o energía dominante se puede obtener fácilmente una solución analítica, sin embargo, en general es necesario solucionarlas de forma numérica.

A partir de los resultados de la colaboración Planck [AAA⁺20] tomaremos un modelo Λ CDM para un universo plano con parámetros densidad $\Omega_{m,0} = 0.315$ y $\Omega_{\Lambda,0} = 0.685$, junto con el parámetro de Hubble $H_0 = 67.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Con estos parámetros al solucionar (2-20) se obtiene que la edad del universo es aproximadamente 13.8×10^9 años, mientras que al solucionar (2-19) se obtiene que el factor de escala evoluciona como se muestra en la figura 2-1, en la cual el punto negro representa el presente. Vemos que el universo se expande cada vez más rápido, siendo consistente con las observaciones.

2.3. Distancia angular diametral

La distancia angular diametral es una extensión en nuestro contexto de la relación $ds = R d\theta$ definida en un espacio Euclideo, donde ds representa la longitud de arco de un círculo de radio R cuando se abarca un ángulo $d\theta$. Por lo tanto, la distancia angular diametral D se puede definir como el cociente entre la longitud propia dl_p del objeto de interés, y su amplitud angular $d\theta$ (en radianes), es decir $D := dl_p/d\theta$.

Consideremos que el objeto de interés se encuentra a un corrimiento al rojo z_2 , y se quiere determinar la distancia angular diametral $D = D(z_1, z_2)$ que hay entre este y un punto a un

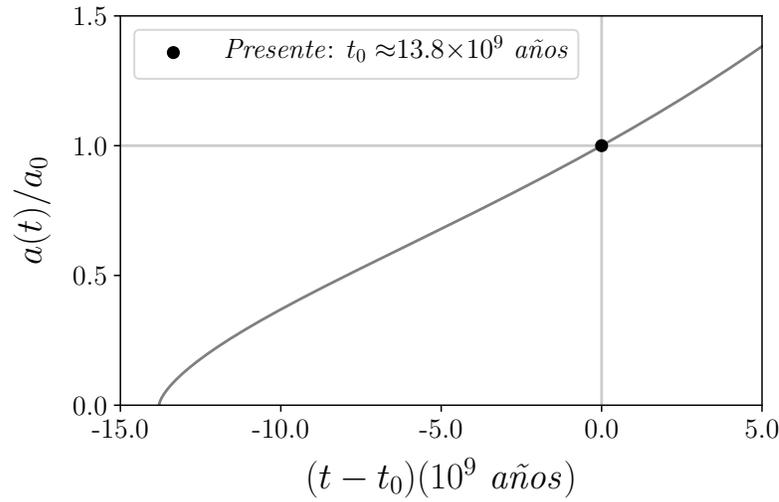


Figura 2-1.: Evolución del factor de escala a partir de los parámetros obtenidos por la colaboración Planck [AAA⁺20].

corrimiento al rojo z_1 ; aquí z_1 y z_2 están medidos respecto a un observador con corrimiento al rojo $z = 0$. Definamos ahora un sistema de coordenadas comóviles (r, θ, ϕ) centrado en z_1 , tenemos entonces que la longitud propia del objeto de interés en un tiempo t_2 (cuando emite la radiación) se puede obtener por medio del elemento de línea dl dada por (2-1), tal que

$$dl_p = a(t_2)r(z_1, z_2)d\theta, \quad (2-22)$$

con lo cual

$$D = a(t_2)r(z_1, z_2) = \frac{a_0}{1 + z_2}r(z_1, z_2), \quad (2-23)$$

siendo $r = r(z_1, z_2)$ la coordenada comóvil entre puntos ubicados a un corrimiento al rojo z_1 y z_2 ($z_1 < z_2$). Ahora bien, por medio de (2-1) es claro que para la radiación se satisface

$$\frac{cdt}{a} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (2-24)$$

donde r disminuye mientras que t aumenta, por lo que se toma el signo negativo en (2-24). Por tanto

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{cdt}{a} = - \int_{z_1}^{z_2} \frac{cdz}{a_0 H} = - \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = -f_K(r) \implies y = \int_{z_1}^{z_2} \frac{cdz}{a_0 H} = f_K(r), \quad (2-25)$$

donde $H = H(z)$ y $f_k(r)$ están dados por (2-20) y (2-3), respectivamente. Como resultado r se puede escribir fácilmente como $r = g_K(y)$, con lo cual la distancia angular diametral entre dos puntos con corrimiento al rojo z_1 y z_2 se puede escribir como

$$D(z_1, z_2) = \frac{a_0}{1 + z_2}g_K(y(z_1, z_2)) \quad (2-26)$$

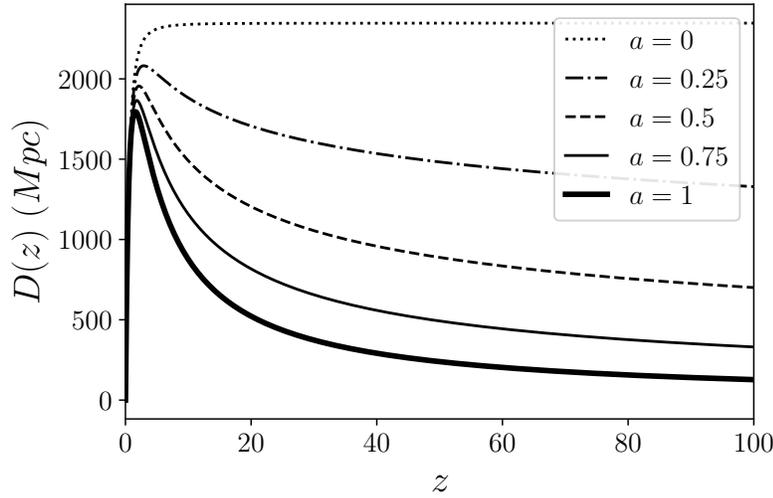


Figura 2-2.: Distancias angulares diametrales como solución de la ecuación de Dyer-Roeder para un universo caracterizado por los parámetros cosmológicos presentados por la colaboración Planck [AAA+20].

siendo

$$g_K(y) = \begin{cases} \sinh(y) & \text{si } K = -1 \\ y & \text{si } K = 0 \\ \sin(y) & \text{si } K = 1 \end{cases} . \quad (2-27)$$

Como caso particular tenemos que $D(z) = D(0, z)$.

Ahora bien, a gran escala el universo parece satisfacer el principio cosmológico, sin embargo, a nivel local el universo presenta inhomogeneidades en la distribución de materia, lo que hace conveniente introducir una corrección en la estimación de las distancias angulares diametrales que de cuenta de estas inhomogeneidades, y a su vez se reduzca a (2-26) en el límite homogéneo. La ecuación diferencial de segundo orden que cumple con esta tarea se conoce como la ecuación de Dyer-Roeder [DR73], y permite por tanto hallar la distancia angular $D = D(z_1, z)$ entre dos puntos ubicados a un corrimiento al rojo z_1 y z ($z_1 \leq z$) en presencia de inhomogeneidades. Para un universo tipo Λ CDM dicha ecuación se puede escribir como³

$$0 = \frac{3a\Omega_{m,0}}{2(1+z)} D + \frac{1}{1+z} \left(3 + \frac{\Omega_{m,0}}{2} + \frac{7\Omega_{m,0}z}{2} - \frac{(1+6z+3z^2)\Omega_{\Lambda,0}}{(1+z)^2} \right) \frac{dD}{dz} + \left(1 + \Omega_{m,0}z - \frac{z(2+z)\Omega_{\Lambda,0}}{(1+z)^2} \right) \frac{d^2D}{dz^2}, \quad (2-28)$$

³En [Cas00] se puede encontrar una deducción detallada de esta ecuación.

cuyas condiciones de frontera son

$$D(z_1, z_1) = 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{dD}{dz} \right|_{z=z_1} = \frac{H_0(1+z_1)^{-1}}{c\sqrt{(1+z_1\Omega_{m,0})(1+z_1)^2 - z_r(2+z_1)\Omega_{\Lambda,0}}}. \quad (2-29)$$

En (2-28) tenemos que $a \in [0, 1]$ representa un parámetro de suavidad que da razón de las inhomogeneidades presentes entre los puntos de interés. La figura **2-2** muestra el comportamiento de las soluciones de (2-28) ante la variación de a , donde la homogeneidad se recobra cuando $a = 1$.

3. Efecto de lente gravitacional

El objetivo principal de este trabajo radica en hacer una estimación del perfil de masa de un cúmulo galáctico haciendo uso del efecto de lente gravitacional, por ende en este capítulo haremos una breve descripción de los elementos propios de la teoría de lentes gravitacionales que permiten caracterizar los observables que utilizaremos. Tomaremos como principales referencias [SEF92, MR02, SKW06, CK18].

Iniciaremos con la obtención de la ecuación de la lente y estableceremos bajo qué condiciones se satisface (sección 3.1), luego, obtendremos una forma de calcular el ángulo de deflexión producto de la presencia de la lente (sección 3.2) y definiremos el potencial deflector junto con la convergencia y el shear (sección 3.3), donde al definir el peso cosmológico es posible obtener dichas cantidades en términos de un observador de referencia (sección 3.4). Posteriormente, centraremos nuestra atención en cómo actúa la lente (sección 3.5), en especial cuando se producen múltiples imágenes asociadas a una única fuente (sección 3.6) y cuando las fuentes se ven débilmente afectadas por la lente (sección 3.7).

3.1. Ecuación de la lente

El efecto de lente gravitacional es consecuencia de la presencia de campos gravitacionales producto de distribuciones de materia, sin embargo, qué significativo es el efecto depende principalmente de la magnitud del campo gravitacional involucrado y cómo esté distribuida la materia. En un contexto en donde el campo gravitacional es fuerte, por ejemplo en las cercanías de un agujero negro o una estrella de neutrones, es necesario aplicar la Relatividad General sin ninguna aproximación, sin embargo, en la mayoría de aplicaciones astrofísicas se puede describir este efecto de manera más simple ya que en las escalas de interés el campo gravitacional presente es débil; lo que se conoce como aproximación de campo débil. Bajo esta aproximación se puede considerar que la luz viaja siguiendo trayectorias rectas y por tanto se pueden tratar como rayos; de forma análoga a la óptica geométrica. Igualmente, es posible aplicar la aproximación de la lente delgada en la cual el tamaño de la lente (particularmente a lo largo de la línea de visión) es mucho más pequeño que la distancia que hay entre el observador y la lente, la lente y la lente, y el observador y la fuente. Así pues, aunque el efecto de lente gravitacional se produce por toda distribución de materia ubicada entre la fuente y el observador, consideraremos que solamente hay una distribución de materia (o inhomogeneidad) dominante entre la fuente y el observador que es responsable del efecto de lente gravitacional, esta distribución de materia es conocida como la lente o deflector.

Consideremos entonces la existencia de dos planos perpendiculares a la línea de visión (LDV) (conocida también como eje óptico) entre el observador (\mathcal{O}) y la fuente (f), los cuales se encuentran ubicados en la posición de la lente (l) y en la posición de la fuente, por lo cual se conocen como el plano de la lente y el plano de la fuente (ver figura **3-1**). Si la lente y la fuente se encuentran respectivamente a un corrimiento al rojo z_l y z_f respecto al observador, tenemos que las distancias (angulares diametrales) involucradas en el sistema son: la distancia entre el observador y la lente $D_l = D(z_l)$, la distancia entre el observador y la fuente $D_f = D(z_f)$, y finalmente la distancia entre la lente y la fuente $D_{lf} = D(z_l, z_f)$. Para que se satisfaga la aproximación de la lente delgada se debe satisfacer $D_l, D_l, D_{lf} \ll d$, siendo d el espesor de la lente.

Definamos un sistema de coordenadas cartesianas en cada plano centradas en el punto de corte entre el plano y la LDV, donde $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ y $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ representan respectivamente las posiciones propias en el plano de la fuente y en el plano de la lente. Por simplicidad ambos sistemas coordenados tiene la misma orientación. Ahora bien, desde la perspectiva del observador no es posible determinar estas posiciones, pues lo que se observa es la posición (o tamaño) angular de las fuentes dada como $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ en ausencia del deflector y $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ en presencia del deflector. Se pueden considerar como vectores definidos sobre el plano de la fuente y el plano de la lente gracias a las aproximaciones mencionadas anteriormente [SEF92]. Por lo tanto, es posible escribir dichas posiciones propias en términos de sus correspondientes posiciones angulares como $\boldsymbol{\eta} = D_f \boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\xi} = D_l \boldsymbol{\theta}$. Vemos que en el contexto de lentes gravitacionales la noción más natural de distancia es la noción de distancia angular diametral.

Dicho esto, a partir de la figura **3-1** tomemos $\boldsymbol{\eta}$ como la posición propia real de la fuente en su respectivo plano, y tomemos $\boldsymbol{\xi}$ como la posición propia en donde el rayo de luz proveniente de la fuente corta con el plano de la lente. Vemos entonces que para la fuente su posición propia real y su posición propia aparente difieren, donde esta última está dada por $\boldsymbol{\eta}_0 = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}_\alpha$. Aquí $\boldsymbol{\eta}_\alpha = D_{lf} \hat{\boldsymbol{\alpha}}$ representa la posición propia relativa entre $\boldsymbol{\eta}$ y $\boldsymbol{\eta}_0$, siendo $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)$ el ángulo de deflexión (quien al igual que $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\theta}$ se puede definir como un vector en un plano) el rayo de luz proveniente de la fuente y el que llega al observador, así que este ángulo representa qué tanto y en qué dirección ha cambiado la posición de la fuente vista por el observador respecto a su posición real. Con esto en mente, si comparamos la posición propia aparente de la fuente en el plano de la lente ($\boldsymbol{\xi}$) con su respectiva posición propia aparente en el plano de la fuente ($\boldsymbol{\eta}_0$) podemos ver que por semejanza de triángulos se satisface

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{D_l} = \frac{\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}_\alpha}{D_f} \implies \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\beta} + \frac{D_{lf}}{D_f} \hat{\boldsymbol{\alpha}}. \quad (3-1)$$

Esta expresión se conoce como ecuación de la lente, y una forma más limpia de escribirla es

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\alpha} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\alpha} := \frac{D_{lf}}{D_f} \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \quad (3-2)$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ se conoce como el ángulo de deflexión escalado, sin embargo, de ahora en

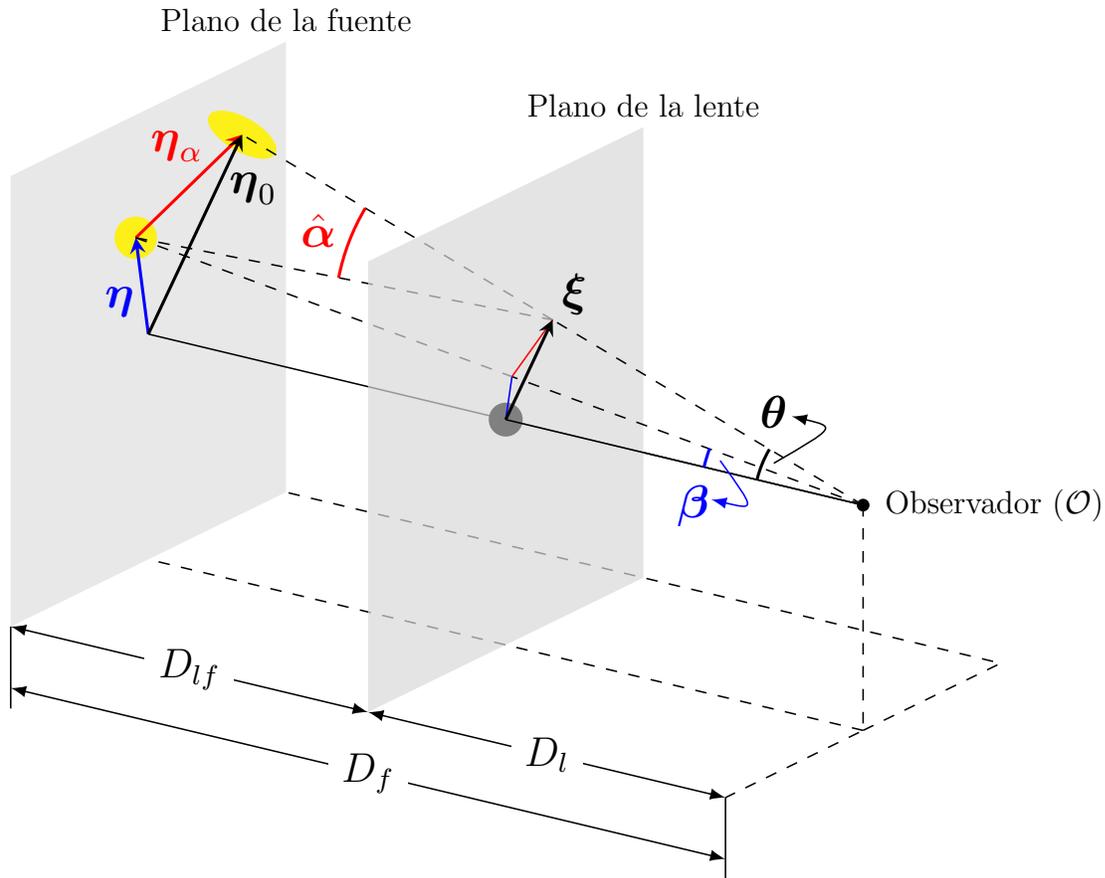


Figura 3-1.: Esquema en el cual se muestra la disposición de los diferentes actores en una situación donde se presenta el efecto de lente gravitacional bajo las aproximaciones de campo débil y lente delgada. En el plano de la fuente tenemos que η representa la posición propia real de la fuente (círculo amarillo), η_0 representa la posición propia aparente de la fuente (elipse amarilla la cual muestra una deformación respecto a la fuente real), y por último η_α representa la posición propia relativa entre la fuente aparente y la fuente real. En el plano de la lente ξ representa la posición propia donde corta el plano de la lente con el rayo de luz proveniente de la fuente; punto en el cual se produce la deflexión del mismo rayo en una cantidad $\hat{\alpha}$ conocida como ángulo de deflexión. Desde la perspectiva del observador \mathcal{O} tenemos que β y θ corresponden respectivamente a la posición angular real y aparente de la fuente. La recta sólida que une al observador con los planos de la lente y la fuente corresponde al eje óptico, mientras que el círculo de color gris oscuro en el centro del plano de la lente corresponde a la lente misma o al deflector si se prefiere. Las distancias D son distancias angulares diametrales.

adelante por simplicidad llamaremos a α el ángulo de deflexión, o simplemente deflexión. El ángulo de deflexión depende de la distribución de materia, por lo cual en general no es lineal respecto a θ , en consecuencia dado un β la ecuación de la lente tampoco es lineal respecto a θ , lo que lleva a la obtención de múltiples imágenes dada una única fuente. En general dichas soluciones deben obtenerse de forma numérica, a diferencia de obtener β dados θ y α lo cual se puede hacer directamente reemplazando en (3-2).

3.2. Ángulo de deflexión

En la sección anterior obtuvimos la ecuación que nos permite relacionar una fuente real con una aparente (3-2), sin embargo, para poder aplicarla nos hace falta determinar $\hat{\alpha}$. En el caso más simple se puede considerar el deflector como una distribución de masa esféricamente simétrica con una masa total M , tal que si el rayo de luz pasa cerca del deflector con parámetro de impacto $\xi = |\boldsymbol{\xi}| \gg R_s := 2M/c^2$ siendo R_s el respectivo radio de Schwarzschild de la distribución (esta condición garantiza que se satisfaga la aproximación de campo débil), como resultado el ángulo de deflexión toma la forma

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2\xi} \quad \text{con} \quad \hat{\alpha} = |\hat{\boldsymbol{\alpha}}|. \quad (3-3)$$

En este caso particular $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ y $\boldsymbol{\xi}$ poseen la misma dirección. En es especial (3-3) se satisface para una masa puntual.

Consideremos ahora una situación más general donde se tienen N deflectores puntuales cuya posición propia respecto a la LDV es $\boldsymbol{\xi}'_i$ (con $i \in \{1, \dots, N\}$), en este límite $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ satisface el principio de superposición (ver [SEF92]) así que se puede escribir como

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{4G}{c^2} \sum_{i=1}^N M_i \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'_i}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'_i|^2}, \quad (3-4)$$

siendo M_i y $|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'_i|$ la masa y el parámetro de impacto para el i -ésimo deflector y $\boldsymbol{\xi}$ la posición propia del punto de corte entre el plano de la lente y el rayo de luz proveniente de la fuente. Bajo estas condiciones (3-4) se puede extender fácilmente al límite continuo, dando como resultado

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{4G}{c^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\boldsymbol{\xi}') \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|^2} d^2\xi', \quad (3-5)$$

donde la integral se realiza sobre el plano de la lente. En este caso la cantidad Σ se conoce como la densidad de masa superficial y está definida como

$$\Sigma := \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\boldsymbol{\xi}', z) dz. \quad (3-6)$$

Aquí z representa la coordenada a lo largo de la LDV, por lo que no se debe confundir con el corrimiento al rojo. Ahora bien, como indicamos en la sección anterior, en (3-2) no se usa

explícitamente $\hat{\alpha}$ sino α , el cual a partir de (3-5) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{4GD_{lf}}{c^2 D_f} \int_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\xi') \frac{\xi - \xi'}{|\xi - \xi'|^2} d^2 \xi' = \frac{4GD_{lf} D_l}{c^2 D_f} \int_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\theta') \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} d^2 \theta' \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\theta') \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} d^2 \theta',\end{aligned}\quad (3-7)$$

siendo κ una cantidad que se conoce con el nombre de **convergencia** y está definida como

$$\kappa := \frac{\Sigma}{\Sigma_{cr}}, \quad \text{con} \quad \Sigma_{cr} := \frac{c^2 D_f}{4\pi G D_l D_{lf}}. \quad (3-8)$$

La densidad superficial crítica Σ_{cr} sirve de guía para estimar si se producen múltiples imágenes en el sistema dado el deflector y las distancias angulares diametrales propias del sistema.

3.3. Potencial deflector

Dentro de la teoría de lentes gravitacionales, y especialmente en este trabajo, una cantidad fundamental definida sobre el plano de la lente es el conocido potencial deflector $\psi = \psi(\theta)$. Su importancia radica en la simplicidad y versatilidad que aporta a la descripción del efecto de lente gravitacional y las propiedades de la lente, permitiendo que estas se representen en términos de derivadas de diferente orden de ψ respecto a θ . Dicho esto, el potencial deflector se encuentra definido como

$$\psi := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\theta') \ln |\theta - \theta'| d^2 \theta'. \quad (3-9)$$

Para empezar, tomemos el gradiente respecto a θ de (3-9), lo cual se traduce en

$$\nabla \psi = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\theta') \nabla \ln |\theta - \theta'| d^2 \theta' = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\theta') \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} d^2 \theta' = \alpha \quad (3-10)$$

donde se hizo uso de la identidad

$$\nabla \ln |\theta - \theta'| = \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} \quad (3-11)$$

y se comparó con (3-7). Queda claro que el ángulo de deflexión se puede escribir como $\alpha = \nabla \psi$, lo que lleva a la ecuación de la lente (3-2) a tomar la forma

$$\beta = \theta - \nabla \psi. \quad (3-12)$$

Si tomamos ahora el laplaciano respecto a θ de (3-9), y aplicamos la identidad

$$\nabla^2 \ln |\theta - \theta'| = 2\pi \delta(\theta - \theta'), \quad (3-13)$$

obtenemos como resultado

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\boldsymbol{\theta}') \nabla^2 \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'| d^2 \theta' = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\boldsymbol{\theta}') [2\pi \delta(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}')] d^2 \theta' = 2\kappa(\boldsymbol{\theta}). \quad (3-14)$$

Como resultado la convergencia y el potencial deflector están relacionados por medio de la ecuación de Poisson en dos dimensiones $\nabla^2 \psi = 2\kappa$.

Vamos a definir ahora una cantidad que será de particular utilidad en la descripción del régimen débil (ver sección 3.7). Esta cantidad se conoce como **shear** (pues induce deformaciones anisótropas en las fuentes (ver sección 3.5)) y se denota como $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, siendo una cantidad compleja con componentes γ_1 y γ_2 las cuales se encuentran definidas como

$$\gamma_1 := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_2^2} \right) \quad \text{y} \quad \gamma_2 := \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}. \quad (3-15)$$

Es posible definir diferentes cantidades a partir de derivadas de mayor orden de ψ respecto a $\boldsymbol{\theta}$ dependiendo de las propiedades que se quieran estudiar, como lo es el caso de la flexión [SE08], sin embargo, para el desarrollo de este trabajo será suficiente con saber como obtener α , κ y γ en términos de ψ .

3.4. Peso cosmológico

En la práctica es común usar múltiples fuentes, no obstante, tenemos una única lente según la descripción que se ha hecho del efecto de lente gravitacional en este trabajo. Es conveniente por lo tanto caracterizar las diferentes propiedades de la lente y los efectos que esta produce en términos de una fuente de referencia ubicada a un corrimiento a rojo $z_r > z_l$ respecto al observador. Es común tomar como fuente de referencia aquella que satisface $z_r \rightarrow \infty$, que en términos prácticos suele ser $z_r = 1000$, sin embargo es conveniente dejar esta opción libre.

A partir de la definición de κ (3-8), es claro que esta depende de las distancias angulares diametrales D_f , D_l y D_{lf} , para una fuente cualquiera. Podemos entonces escribir κ fácilmente en términos de las distancias angulares diametrales D_r y D_{lr} correspondientes a nuestra fuente de referencia; la lente no cambia. Es decir

$$\kappa = \frac{4\pi G D_l D_{lf}}{c^2 D_f} \Sigma = \left(\frac{D_{lf} D_r}{D_f D_{lr}} \right) \left(\frac{4\pi G D_l D_{lr}}{c^2 D_r} \Sigma \right) := Z \kappa_r, \quad (3-16)$$

donde κ_r representa la convergencia asociada a la fuente de referencia, y $Z = Z(z)$ se conoce como el **peso cosmológico** de una fuente ubicada a un corrimiento al rojo z . Es claro que $Z(z_r) = 1$. Podemos definir entonces el peso cosmológico como

$$Z(z) := \frac{D(z_l, z) D(z_r)}{D(z) D(z_l, z_r)} H(z) \quad \text{con} \quad H(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z > z_l \\ 0 & \text{si } z \leq z_l \end{cases}, \quad (3-17)$$

lo cual garantiza que no se incluyan fuentes que no están siendo afectadas por la lente. Es claro entonces que dada una fuente Z es constante, por ende ψ se puede escribir como $\psi = Z\psi_r$ gracias a su definición (3-9), siendo ψ_r el potencial deflector asociado a la fuente de referencia. Si tenemos en cuenta que α y γ están dados como derivadas de ψ (ver (3-10) y (3-15)) se obtiene que $\alpha = Z\alpha_r$ y $\gamma = Z\gamma_r$, con α_r y γ_r el ángulo de deflexión y el shear correspondientes a la fuente de referencia. En consecuencia, es posible escribir fácilmente en términos de una fuente de referencia cualquier cantidad que dependa de κ , α , γ . Por ejemplo, el shear reducido (3-22) se puede escribir como

$$g = \frac{Z\gamma_r}{1 - Z\kappa_r}. \quad (3-18)$$

Este resultado nos será de gran utilidad más adelante, tal como se evidencia en la sección 4.2 y en el anexo A.

3.5. Deformaciones

Como producto del mapeo entre la posición angular aparente y real de la fuente dado por (3-2), es decir $\theta \rightarrow \beta$, tenemos que los cambios o deformaciones que experimentan los elementos de área (o fuentes infinitesimales) a nivel local están caracterizados por

$$d^2\beta = |\det(\mathcal{J})|d^2\theta \quad (3-19)$$

donde \mathcal{J} se conoce como la matriz Jacobiana del mapeo, cuyas entradas toman la forma

$$\mathcal{J}_{ij} = \frac{\partial\beta_i}{\partial\theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \quad \text{con } i, j \in \{1, 2\} \quad (3-20)$$

como consecuencia de (3-12). Por lo tanto, haciendo explícitas (3-14) y (3-15) en (3-20) obtenemos como resultado

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 - g_1 & -g_2 \\ -g_2 & 1 + g_1 \end{pmatrix}, \quad (3-21)$$

donde $g = g_1 + ig_2$ se conoce como **shear reducido** (será de gran utilidad más adelante (ver sección 3.7)) y se define como

$$g := \frac{\gamma}{1 - \kappa}. \quad (3-22)$$

Por tanto, el determinante de (3-21) se puede escribir como

$$\det \mathcal{J} = (1 - \kappa)^2 - |\gamma|^2 = (1 - \kappa - |\gamma|)(1 - \kappa + |\gamma|), \quad (3-23)$$

con $\lambda_{\pm} = 1 - \kappa \pm |\gamma| = (1 - \kappa)(1 \pm |g|)$ corresponden a los valores propios de \mathcal{J} . Aquí $|\gamma| = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$ y $|g| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$ representan la magnitud del shear y del shear reducido. A la

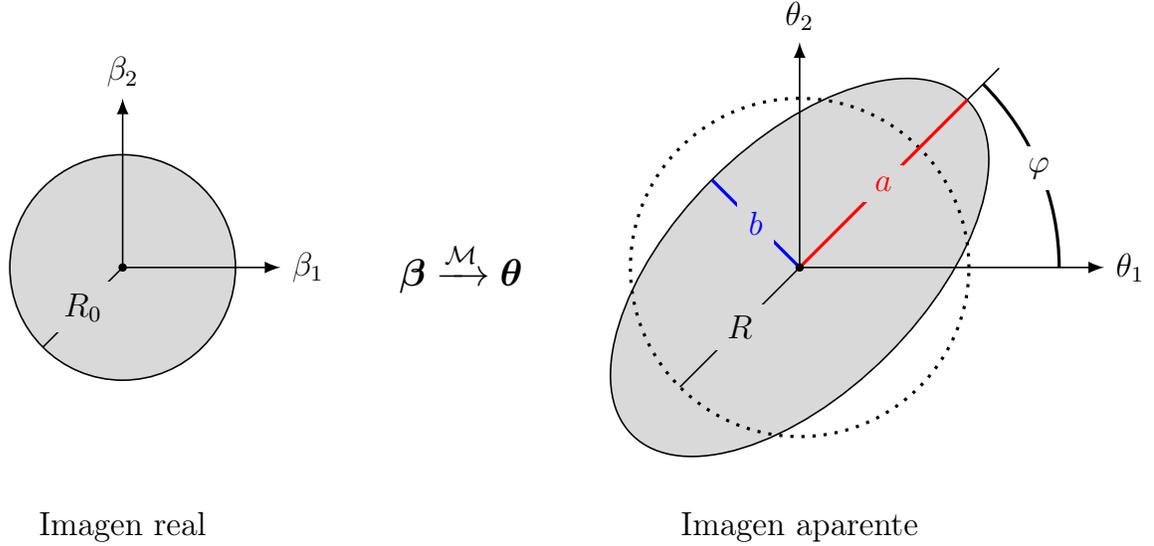


Figura 3-2.: Esquema en el cual se muestra el efecto que produce el efecto de lente gravitacional a nivel local sobre una fuente con un perfil circular de radio R_0 cuando la ecuación de la lente puede ser linealizada en dicha región. A la derecha se muestra la fuente circular centrada en β_0 (imagen real), mientras que a la izquierda se muestra cómo cambia la fuente debido a la presencia de la lente (imagen aparente), dando como resultado una elipse centrada en θ_0 cuyo semieje mayor a y semieje menor b presentan una rotación φ respecto al eje θ_1 y θ_2 respectivamente. Aquí el círculo punteado de radio R representa la imagen aparente de la fuente cuando solamente actúa κ .

inversa de \mathcal{J} (cuando existe), denotada como \mathcal{M} , se le conoce como matriz de magnificación pues caracteriza el mapeo $\beta \rightarrow \theta$ a nivel local.

Puesto que estamos considerando una fuente infinitesimal, su tamaño angular es lo suficientemente pequeño de manera tal que α no cambia de forma significativa.¹ Como resultado podemos linealizar la ecuación de la lente (3-12) alrededor de la posición central real β_0 y aparente $\theta_0 = \theta(\beta_0)$ de la fuente, tal que la ecuación de la lente ahora satisface

$$\Delta\beta = \mathcal{J}_0\Delta\theta, \quad \text{con } \mathcal{J}_0 = \mathcal{J}(\theta_0), \quad \Delta\beta := \beta - \beta_0 \quad \text{y} \quad \Delta\theta := \theta - \theta_0. \quad (3-24)$$

Si multiplicamos (3-24) a izquierda por su traspuesta, y a su vez consideramos que la fuente es circular con radio $R_0 = \Delta\beta = |\Delta\beta|$ se obtiene como resultado

$$\Delta\beta^T\Delta\beta = \Delta\theta^T\mathcal{J}_0^2\Delta\theta \quad \iff \quad R_0^2 = \Delta\theta^T\mathcal{J}_0^2\Delta\theta. \quad (3-25)$$

De acuerdo con la descripción de las secciones cónicas en términos de formas cuadráticas podemos ver que (3-25) representa una elipse centrada en θ_0 , y la cual está rotada un ángulo

¹Esto es equivalente a tener que las propiedades de la lente no cambien significativamente en el respectivo ángulo sólido.

φ respecto al eje θ_1 positivo, pues \mathcal{J}_0^2 no es diagonal. Los semiejes de la elipse se encuentran alineados con los vectores propios de \mathcal{J}_0^2 (que son los mismos de \mathcal{J}_0) quienes forman una base ortogonal respecto a la cual la elipse no está rotada. En términos de esta nueva base se puede mostrar fácilmente que los semiejes de elipse evaluados en $\boldsymbol{\theta}_0$ son

$$a = \frac{R_0}{|\lambda_-|} = \frac{R_0}{|1 - \kappa - |\gamma||} \quad \text{y} \quad b = \frac{R_0}{|\lambda_+|} = \frac{R_0}{|1 - \kappa + |\gamma||}, \quad (3-26)$$

siendo a el semieje mayor y b el semieje menor (ver la figura **3-2**).

Si centramos nuestra atención en (3-26) podemos ver que al tomar $|\gamma| = 0$ se obtiene $a = b = R_0/|1 - \kappa| = R$, lo que indica que κ produce una deformación isótropa de la fuente; solamente cambia el radio de la fuente. Por otro lado, al tomar $|\gamma| > 0$ se producen deformaciones anisótropas, pues la fuente ve afectada su elipticidad y su orientación, donde la componente γ_2 es la responsable de la rotación ya que corresponde a los términos cruzados en \mathcal{J}_0 . De hecho, se puede mostrar a partir de los vectores propios de \mathcal{J}_0 que

$$\tan(2\varphi) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad (3-27)$$

siendo 2φ la fase tanto de γ como de g , por ende ambas cantidades se pueden escribir de forma más práctica como

$$\gamma = |\gamma|e^{2i\varphi} \quad \text{y} \quad g = |g|e^{2i\varphi}. \quad (3-28)$$

En particular queda claro que g gracias a su definición (3-22) alberga simultáneamente la información correspondiente a la deformación isótropa inducida por κ , y la deformación anisótropa inducida por γ .

Ahora bien, las imágenes observadas son consecuencia del mapeo $\boldsymbol{\beta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}$, con lo cual (3-19) sugiere que a nivel local el mediador de las deformaciones respecto a la fuente original sea $|\det \mathcal{J}|^{-1}$. Para caracterizar estas deformaciones en términos observacionales es conveniente hacer el uso de la distribución de brillo superficial o intensidad de la fuente real I_f y aparente I , pues el efecto de lente gravitacional no produce emisión ni absorción de radiación; solamente produce la deflexión de los rayos de luz. Como consecuencia I se conserva, es decir $I_f(\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta})) = I(\boldsymbol{\theta})$. Por esta razón si una fuente posee isofotas (curvas de igual brillo) circulares es de esperar que para el observador estas sean más elípticas bajo la presencia de lente gravitacional, según el análisis hecho anteriormente.

El brillo superficial es una cantidad intrínseca de la fuente la cual no se puede medir directamente, no obstante, se puede medir su respectivo flujo $d\mathcal{F} = Id\Omega$, siendo

$$d\Omega_f = \frac{d^2\eta}{D_f^2} = d^2\beta \quad \text{y} \quad d\Omega_l = \frac{d^2\xi}{D_l^2} = d^2\theta \quad (3-29)$$

el ángulo sólido que abarca la fuente real o aparente según corresponda. Por tanto, vemos que el cociente entre el flujo observado y el flujo real da información respecto a los cambios aparentes que sufre la fuente. Así pues, denominamos este cociente como $|\mu|$, donde μ se

conoce con el nombre de **factor de magnificación** o simplemente **magnificación**. Como resultado tenemos que

$$|\mu| := \frac{d\mathcal{F}_l}{d\mathcal{F}_f} = \frac{Id\Omega_l}{I_f d\Omega_f} = \frac{d^2\theta}{d^2\beta} = \frac{1}{|\det \mathcal{J}|}, \quad (3-30)$$

donde μ se puede definir como

$$\mu := \frac{1}{\det \mathcal{J}} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - |\gamma|^2}. \quad (3-31)$$

Vemos que μ puede ser negativo ó positivo, dicho signo se conoce como la **paridad** de la magnificación, la cual representa la orientación de la imagen respecto a la fuente real. Una paridad positiva indica que la fuente y la imagen poseen la misma orientación, mientras que una paridad negativa indica una orientación opuesta, que es equivalente a tener una imagen especular de la fuente junto con las respectivas deformaciones en tamaño y forma.

En la práctica μ no es un observable, pues no es posible determinar el flujo real de la fuente y los flujos son positivos como lo indica (3-30), en consecuencia solamente es posible determinar la magnitud de magnificaciones relativas $|\mu_i|/|\mu_j|$ (con $i \neq j \in \{1, \dots, N\}$) cuando se dispone al menos un sistema con N múltiples imágenes. Es claro entonces que μ permite estudiar el comportamiento de modelos, mientras que $|\mu|$ permite la introducción de observaciones al momento de modelar sistemas que presentan el efecto de lente gravitacional.

Cuando se presenta la existencia de un sistema con N múltiples imágenes se puede definir la magnitud de la magnificación total $|\mu_t|$ de una fuente infinitesimal (en el límite puntual) como la suma de la magnitud de las magnificaciones individuales.

$$|\mu_t| := \sum_{i=1}^N |\mu_i|. \quad (3-32)$$

La definición de μ (4-22) indica que esta no está bien definida en la región donde se genera un cambio de paridad, es decir cuando se satisface la ecuación $\det \mathcal{J} = 0$, la cual en general debe ser resuelta numéricamente. Los puntos en el plano de la lente que satisfacen esta condición forman una curva que se conoce como **curva crítica**, y su respectivo mapeo en el plano de la fuente por medio de (3-2) arroja como resultado lo que se conoce como **curva cáustica**. Estas dos curvas son indispensable para el estudio del efecto de lente gravitacional, pues delimitan la región donde se producen múltiples imágenes y deformaciones en forma de arco que siguen las curvas críticas, quienes son resultado de fuentes que se encuentran en las cercanías de alguna curva cáustica; cuando esto sucede las lentes también suelen ser llamadas lentes críticas. Estas propiedades son dominio del régimen fuerte. Igualmente, cuando una fuente se encuentra alejada de las curvas cáusticas, tenemos que esta fuente se encuentra débilmente deformada; dichas deformaciones caen en el dominio del régimen débil. Si la lente es suave es de esperar que en este régimen solamente se produzca una imagen. En el caso de un lente puntual siempre se producen dos imágenes, solamente que para una de ellas la magnitud de su magnificación disminuye significativamente a medida que la fuente se aleja de las curvas cáusticas, con lo cual en fines prácticos no sería observable.

3.6. Régimen fuerte: Múltiples imágenes

Como mencionamos al inicio del este capítulo, para nosotros es de particular interés y utilidad la presencia de múltiples imágenes, por lo cual haremos una breve descripción respecto a la formación de imágenes debido a la presencia de la lente. Para esta tarea veamos que la ecuación de la lente (3-12) puede reescribirse como

$$\nabla \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta}|^2 - \psi \right) = \mathbf{0} \iff \nabla \phi = \mathbf{0}, \quad (3-33)$$

donde

$$\phi := \frac{1}{2} |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta}|^2 - \psi \quad (3-34)$$

se conoce como el potencial de Fermat. En este caso particular $\boldsymbol{\beta}$ funciona como un parámetro, así que dado un $\boldsymbol{\beta}$ los valores de $\boldsymbol{\theta}$ que satisfacen (3-33) representan puntos estacionarios de ϕ , los cuales corresponden a máximos, mínimos o puntos de silla de ϕ . Por ende, es posible determinar la existencia de múltiples imágenes y sus posiciones al explorar las curvas de nivel de ϕ .

Para determinar la naturaleza de cada punto extremo haremos uso del criterio de la segunda derivada². Por esta razón requerimos la respectiva matriz Hessiana \mathcal{H} de ϕ , la cual coincide con la matriz Jacobiana \mathcal{J} (3-21), tal que sus respectivas entradas están dadas por

$$\mathcal{H}_{ij} = \mathcal{J}_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}. \quad (3-35)$$

Al aplicar explícitamente el criterio de la segunda derivada obtenemos como resultado:

1. Una imagen es un mínimo de ϕ si se satisface $\det \mathcal{J} > 0$ y $\mathcal{J}_{11} = 1 - \kappa - \gamma_1 > 0$, donde esta última es equivalente a considerar $\lambda_{\pm} > 0$ o $Tr \mathcal{J} > 0$.

Si la fuente tiende al límite puntual (fuente infinitesimal) y a su vez se satisface $k \geq 0$, a partir de la condición $Tr \mathcal{J} > 0$ se obtiene que $0 \leq \kappa < 1$. Así pues, junto con la condición $\det \mathcal{J} > 0$ se llega a que para al menos una imagen se satisface [SKW06]

$$0 < \det \mathcal{J} = (1 - \kappa)^2 - |\gamma|^2 \leq (1 - \kappa)^2 \leq 1 \iff 0 < \det \mathcal{J} \leq 1, \quad (3-36)$$

que es equivalente a tener $\mu \geq 1$. Este resultado se conoce como el teorema de magnificación [Sch84]. En el caso más general donde se tienen múltiples lentes delgadas el resultado sigue siendo válido [SS92].

2. Una imagen es un máximo de ϕ si se satisface $\det \mathcal{J} > 0$ y $\mathcal{J}_{11} = 1 - \kappa - \gamma_1 < 0$, donde esta última es equivalente a considerar $\lambda_{\pm} < 0$ o $Tr \mathcal{J} < 0$.
3. Una imagen es un punto de silla de ϕ si se satisface $\det \mathcal{J} < 0$.

²Este criterio se puede encontrar en cualquier libro de Cálculo Vectorial.

Consideremos una situación donde no se forman múltiples imágenes, es de esperar entonces que la imagen existente sea un mínimo de ϕ , pues se satisface $\mu > 0$ ($\det \mathcal{J} > 0$), con lo cual la imagen no ha sido invertida. Como resultado al menos una de las imágenes formadas debe ser un mínimo de ϕ . Ahora bien, para que se formen múltiples imágenes debe existir entonces al menos un punto donde la imagen esté invertida, es decir $\mu < 0$ ($\det \mathcal{J} < 0$). Por ende, para que se produzca un cambio en el número de imágenes producidas la fuente debe atravesar una curva cáustica. Como caso particular, Dyer y Roeder [DR80] (para lentes circulares) y posteriormente Burke [Bur81] (para lentes más generales) mostraron que si la lente no posee divergencias y decrece más rápido que $|\boldsymbol{\theta}|^{-2}$ cuando $|\boldsymbol{\theta}| \rightarrow \infty$ (tal que la lente tenga una masa finita) el número total de imágenes producidas está dado como $N = N_+ + N_- = 2N_- + 1$, con N_+ el número de imágenes con paridad positiva y N_- el número de imágenes con paridad negativa. Por lo tanto, se presenta un número impar de imágenes con al menos una de ellas con paridad positiva, dando origen al teorema del número impar de imágenes. Este resultado también se mantiene cuando se tienen múltiples lentes delgadas transparentes [SS92]. Tenemos entonces que cada vez que la fuente atraviesa una curva cáustica hay un cambio de ± 2 imágenes cada una de diferente paridad.

Cuando se considera una lente puntual el resultado anterior no se satisface, pues $\boldsymbol{\alpha}$ posee una divergencia. En este caso particular como ya hemos mencionado antes se forman siempre dos imágenes. De forma análoga una esfera singular isoterma también presenta una singularidad en $\boldsymbol{\alpha}$, con lo cual no se obtiene en general un número impar de imágenes, en particular solamente se producen como máximo dos imágenes cada una de diferente paridad, y cuando la fuente se aleja lo suficiente de la respectiva curva cáustica se obtiene una única imagen. Una generalización del teorema de un número impar de imágenes en presencia de singularidades o divergencias tanto en el caso de una única lente delgada como cuando se tienen múltiples lentes delgadas fue presentado por Peters y Werner [PW10]. En el caso de una única lente delgada si esta posee n singularidades entonces el número de imágenes que se produce es $N = 2N_- + 1 - n$ (para más detalles ver [PW10]). Tanto la lente puntual con la esfera singular isoterma poseen una singularidad, con lo cual el número de imágenes que se produce es $N = 2$, pues en ambos casos $N_- = 1$, lo cual concuerda que el número de imágenes que son capaces de producir estas distribuciones. Para más detalles sobre la formación y clasificación de imágenes ver por ejemplo [McK85, BN86, SEF92, GL99, PW10].

3.7. Régimen débil: Elipticidades

En este régimen nos concentraremos en regiones donde la ecuación de la lente (3-12) puede ser linealizada, lo que corresponde a regiones donde las propiedades de la lente no cambian significativa especialmente $\boldsymbol{\alpha}$. Por tanto, como describimos en la sección 3.5, en este dominio el mapeo $\boldsymbol{\beta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}$ induce cambios en el tamaño, elipticidad y orientación de las fuentes (ver figura 3-2), los cuales es de esperar estén codificados en g pues podemos ver que en el caso más simple correspondiente a una fuente con perfil circular el cambio en su orientación está

dado como el cociente de las componentes del shear (reducido) (3-27) mientras que el cambio en su tamaño y forma se puede caracterizar tomando el cociente entre los semiejes (3-26) de la elipse producida, es decir

$$\frac{b}{a} = \left| \frac{1 - |g|}{1 + |g|} \right| \leq 1 \quad \text{donde} \quad g \rightarrow \frac{1}{g^*} \implies \frac{b}{a} = \left| \frac{|g| - 1}{|g| + 1} \right|. \quad (3-37)$$

Aquí el cambio $g \rightarrow 1/g^*$ (donde $*$ representa el conjugado complejo) produce un cambio de signo en el numerador de b/a , sin embargo, como b/a es un observable, en la práctica no es posible dar razón de este cambio de signo y así diferenciar si el mediador de los cambios en la imagen es g ó $1/g^*$. Tal como indica el valor absoluto tomado en (3-37). Esto se conoce con el nombre de degeneración local [SS95]. El cambio $g \rightarrow 1/g^*$ implica un cambio de signo en λ_- lo que es equivalente a tener $\mu < 0$ o en su defecto $|g| > 1$, por tanto la imagen se encuentra dentro de una curva crítica. Con este resultado es de esperar que g sea el mediador de la deformación fuera de la región crítica o en la presencia de una lente no crítica (régimen débil) pues se satisface $|g| \leq 1$ (equivalente a $\mu > 0$), mientras que $1/g^*$ sea el mediador de la deformación en el interior de la región crítica (régimen fuerte) ya que satisface $|g| > 1$ (equivalente a $\mu < 0$).

Tenemos entonces que la elipticidad de la imagen y su orientación pueden brindar información respecto a las propiedades de la lente por medio de g , lo que lleva a definir una elipticidad compleja que incluya simultáneamente el cambio en tamaño y forma (b/a), y su orientación φ respecto al eje θ_1 positivo. Hay diversas definiciones de elipticidad, no obstante, dos definiciones de particular utilidad son

$$\chi = \chi_1 + i\chi_2 = |\chi|e^{2i\varphi} \quad \text{y} \quad \epsilon := \epsilon_1 + i\epsilon_2 = |\epsilon|e^{2i\varphi} \quad (3-38)$$

con

$$|\chi| = \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2} \quad \text{y} \quad |\epsilon| = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}, \quad (3-39)$$

las cuales poseen la misma fase y magnitud, sin embargo su forma funcional no es idéntica pues están definidas como

$$|\chi| = \frac{1 - h^2}{1 + h^2} \quad \text{y} \quad |\epsilon| = \frac{1 - h}{1 + h}, \quad \text{con} \quad h = \frac{b}{a} \leq 1. \quad (3-40)$$

En particular, χ permite mostrar la existencia de la invarianza ante el cambio $g \rightarrow 1/g^*$ (ver [SS95]), mientras que ϵ ha sido adoptada como una definición estándar de elipticidad pues como veremos más adelante permite realizar una estimación directa de g ó $1/g^*$, según corresponda.

Queremos estudiar fuentes de fondo por medio de sus elipticidades lo que hace necesario definir una forma de determinar dichas elipticidades a través de las observaciones. Para esta tarea vamos a considerar que las fuentes pueden ser aisladas, y vamos a hacer usos de los segundos momentos de área de la imagen los cuales están definidos como

$$\mathcal{Q}_{ij} = \frac{1}{\mathcal{N}} \int (x_i - x_{0,i})(x_j - x_{0,j})q[I(\mathbf{x})]d^2x \quad \text{con} \quad i, j \in \{1, 2\}, \quad (3-41)$$

con \mathbf{x} la posición de los pixeles en la imagen y \mathbf{x}_0 una posición de referencia (3-45), mientras que

$$\mathcal{N} = \int q[I(\mathbf{x})]d^2x \quad (3-42)$$

representa un factor de normalización. Por conveniencia se puede escribir (3-41) de forma más compacta como

$$Q = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{x}^T q[I(\mathbf{x})]d^2x, \quad \text{donde } \Delta\mathbf{x} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_0. \quad (3-43)$$

Aquí $q = q[I(\mathbf{x})]$ es un factor de peso que claramente depende del brillo superficial I de la fuente y delimita su contorno, por tanto q se puede considerar como un factor de forma. Siguiendo [BS01] podemos ver que hay diferentes maneras de definir q considerando que en la práctica se trabaja con los pixeles que forman la imagen: la definición más simple consiste en tomar $q = 1$ si el pixel de interés esta dentro del contorno de la imagen y $q = 0$ si este está fuera, es decir

$$q[I(\mathbf{x})] = H(\mathbf{x}) \quad \text{con} \quad H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbf{X}_c \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin \mathbf{X}_c \end{cases}, \quad (3-44)$$

siendo \mathbf{X}_c el conjunto de todos los pixeles que forma la imagen. En este contexto \mathbf{x}_0 representa el centro geométrico o de masa de la imagen.

En términos directamente de I , siendo I el brillo o intensidad de cada pixel, se puede definir $q[I(\mathbf{x})] = I(\mathbf{x})$, tal que \mathbf{x}_0 representa el centro de brillo de la imagen, e igualmente se puede definir $q[I(\mathbf{x})] = I(\mathbf{x})H(\mathbf{x})$ con lo cual \mathbf{x}_0 representa el centro de brillo geométrico de la imagen. Como resultado \mathbf{x}_0 representa el primer momento geométrico de la imagen pesado por q , es decir

$$\mathbf{x}_0 = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathbf{x}q[I(\mathbf{x})]d^2x. \quad (3-45)$$

Dicho esto, para obtener los momentos de área de la fuente real y aparente simplemente debemos reemplazar \mathbf{x} en (3-41) (o en (3-43)), en (3-42) y en (3-45) por $\boldsymbol{\beta}$ ó $\boldsymbol{\theta}$ según corresponda.

Como resultado, las elipticidades (3-38) se pueden escribir en términos de los segundos momentos de área como

$$\chi = \frac{\mathcal{Q}_{11} - \mathcal{Q}_{22} + 2i\mathcal{Q}_{12}}{\mathcal{Q}_{11} + \mathcal{Q}_{22}} \quad \text{y} \quad \epsilon = \frac{\mathcal{Q}_{11} - \mathcal{Q}_{22} + 2i\mathcal{Q}_{12}}{\mathcal{Q}_{11} + \mathcal{Q}_{22} + 2\sqrt{\mathcal{Q}_{11}\mathcal{Q}_{22} - \mathcal{Q}_{12}^2}}, \quad (3-46)$$

las cuales están relacionadas entre sí, tal que

$$\chi = \frac{\epsilon}{1 - |\epsilon|^2} \quad \text{y} \quad \epsilon = \frac{\chi}{1 + \sqrt{1 - |\chi|^2}}. \quad (3-47)$$

Ahora bien, las fuentes reales en general tienen una elipticidad intrínseca cuyo valor influye en la respectiva elipticidad aparente u observada. El principal problema radica en que no

es posible determinar la elipticidad intrínseca pues se desconoce la fuente real, lo que se traduce como ruido en los estudios donde se incluya la elipticidad como un observable. Para manejar este ruido y disminuir su influencia es conveniente hacer un análisis estadístico de las diferentes elipticidades que hayan sido medidas, el cual queda sujeto al tipo de estudio que se esté realizando. Por tanto, es conveniente buscar una relación explícita entre la elipticidad intrínseca y observada de la fuente. Para ello consideremos el momento de área de la imagen real \mathcal{Q}_f dado por (3-43) como

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_f &= \frac{1}{\mathcal{N}} \int \Delta\boldsymbol{\beta} \Delta\boldsymbol{\beta}^T q_f[I_f(\boldsymbol{\beta})] d^2\boldsymbol{\beta} \\
&= \frac{1}{\mathcal{N}} \int (\mathcal{J}_0 \Delta\boldsymbol{\theta}) (\mathcal{J}_0 \Delta\boldsymbol{\theta})^T q[I(\boldsymbol{\theta})] d^2\boldsymbol{\theta} \\
&= \mathcal{J}_0 \left(\frac{1}{\mathcal{N}} \int \Delta\boldsymbol{\theta} \Delta\boldsymbol{\theta}^T q[I(\boldsymbol{\theta})] d^2\boldsymbol{\theta} \right) \mathcal{J}_0^T \\
&= \mathcal{J}_0 \mathcal{Q} \mathcal{J}_0^T = \mathcal{J}_0 \mathcal{Q} \mathcal{J}_0.
\end{aligned} \tag{3-48}$$

No se hace explícito el Jacobiano de la transformación $|\det \mathcal{J}|$ pues esta información esta incluida en q , quien da cuenta de la forma de la imagen, y \mathcal{N} no cambia ya que tanto I como el número de pixeles que forman la imagen (aunque sean de diferente tamaño) se conserva. Para hallar $\chi_f = \chi_f(\chi, g)$ y $\epsilon_f = \epsilon_f(\epsilon, g)$ debemos reemplazar (3-48) en (3-46), así pues, si iniciamos con χ_f (ya que su definición en términos de \mathcal{Q}_{ij} es más sencilla) se obtiene que [SS95]

$$\chi_f(\chi, g) = \frac{\chi - 2g + g^2 \chi^*}{1 + |g|^2 - 2\text{Re}(g\chi^*)} \quad \text{donde} \quad g \rightarrow \frac{1}{g^*} \implies \chi_f(\chi, g) = \frac{g}{g^*} \chi_f^* \left(\chi, \frac{1}{g^*} \right). \tag{3-49}$$

Para obtener $\chi = \chi(\chi_f, g)$ simplemente se debe hacer los cambios $\chi \rightarrow \chi_f$ y $g \rightarrow -g$ en (3-49). En la práctica no conocemos χ_f para ninguna fuente de fondo, así que vamos a considerar que tenemos N fuentes ubicadas a un mismo corrimiento al rojo z en una pequeña región donde g no cambia significativamente, así que g es constante en dicha región. Si además consideramos que las fuentes están orientadas de forma aleatoria (no hay una dirección preferente en el universo) podemos suponer que el promedio de las elipticidades de dichas fuentes satisface $\langle \chi_f \rangle = 0$. De esta manera, a partir de (3-49) es claro que

$$\langle \chi_f \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{f,i}(\chi_i, g) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{g}{g^*} \chi_{f,i}^* \left(\chi_i, \frac{1}{g^*} \right) = 0. \tag{3-50}$$

Por tanto, al solucionar esta ecuación se puede obtener tanto g como $1/g^*$ en la región de interés, aunque no es una tarea necesariamente sencilla. Esta dualidad dio origen a la denominada degeneración local (ver [SS95] para más detalles) pues en la práctica no es posible diferenciar estos dos casos como discutimos anteriormente. El inconveniente con el uso de χ radica en qué $\langle \chi \rangle$ no se encuentra relacionado de forma directa o simple con g

[SS95, SKW06], haciendo que sea necesario aplicar una definición alterna de elipticidad que simplifique esta tarea. Aquí es donde entra en juego ϵ [SS97, BS01].

Para hallar ϵ_f la forma más directa es aplicar (3-49) en (3-47), dando como resultado [SS97]

$$\epsilon_f(\epsilon, g) = \frac{\epsilon - g}{1 - g^*\epsilon} \quad \text{donde} \quad g \rightarrow \frac{1}{g^*} \implies \epsilon_f(\epsilon, g) = \frac{g}{g^*} \epsilon_f^*\left(\epsilon, \frac{1}{g^*}\right), \quad (3-51)$$

o su equivalente

$$\epsilon_f = \begin{cases} \frac{\epsilon - g}{1 - g^*\epsilon} & \text{si } |g| \leq 1 \\ \frac{1 - g\epsilon^*}{\epsilon^* - g^*} & \text{si } |g| > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \epsilon = \begin{cases} \frac{\epsilon_f + g}{1 + g^*\epsilon_f} & \text{si } |g| \leq 1 \\ \frac{1 + g\epsilon_f^*}{\epsilon_f^* + g^*} & \text{si } |g| > 1 \end{cases}, \quad (3-52)$$

donde se ha hecho explícita $\epsilon = \epsilon(\epsilon_f, g)$ pues la necesitaremos más adelante.

Como ya discutimos anteriormente, para obtener información útil de las elipticidades necesitamos obtener su promedio $\langle \epsilon \rangle$. Para ello consideremos que $\mathcal{P}(|\epsilon_f|)$ es la densidad de probabilidad asociada a las elipticidades reales de las fuentes. Vemos que $\mathcal{P}(|\epsilon_f|)$ no presenta una dependencia de φ debido a la isotropía que se asume presentan estas elipticidades (de manera análoga como se consideró en el caso de χ), siendo $\epsilon_f = |\epsilon_f|e^{2i\varphi}$. Sí además las fuentes se encuentran a un mismo corrimiento al rojo z y las propiedades de la lente en especial g no cambian de forma significativa en la región donde se desea promediar (es decir que es constante en dicha región), se obtiene a partir de (3-52) (derecha) que la elipticidad promedio de las imágenes asociadas a dichas fuentes es resultado de la integral

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}'} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(|\epsilon_f|) \epsilon(\epsilon_f, g) |\epsilon_f| d|\epsilon_f| d\varphi, \quad (3-53)$$

donde el factor de normalización \mathcal{N}' está dado por

$$\mathcal{N}' = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(|\epsilon_f|) |\epsilon_f| d|\epsilon_f| d\varphi = 2\pi. \quad (3-54)$$

Al realizar la respectiva integral se llega a una expresión de la forma

$$\langle \epsilon \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon_f + g}{1 + g^*\epsilon_f} d\varphi = g & \text{si } |g| \leq 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + g\epsilon_f^*}{\epsilon_f^* + g^*} d\varphi = \frac{1}{g^*} & \text{si } |g| > 1 \end{cases}, \quad (3-55)$$

la cual como mencionamos anteriormente es válida cuando se promedian las elipticidades de fuentes a un mismo corrimiento al rojo z , por esta razón para evitar confusiones es

conveniente expresar este resultado explícitamente en términos de z , lo que se logra fácilmente a través del peso cosmológico $Z(z)$, así que a partir de (3-18) se obtiene que

$$\langle \epsilon(z) \rangle = \begin{cases} g(z) = \frac{Z(z)\gamma}{1 - Z(z)\kappa} & \text{si } |g(z)| \leq 1 \\ \frac{1}{g^*(z)} = \frac{1 - Z(z)\kappa}{Z(z)\gamma^*} & \text{si } |g(z)| > 1 \end{cases}, \quad (3-56)$$

con γ y κ asociados a una fuente de referencia.

Es claro finalmente que ϵ es una definición conveniente de elipticidad ya que si se promedia sobre suficientes fuentes aparentes entonces $\langle \epsilon(z) \rangle$ arroja una estimación directa de las propiedades de la lente por medio de $g(z)$. Entre mayor sea el número de elipticidades usadas más se reduce el ruido inducido por la elipticidad intrínseca de dichas fuentes [SS97, SKW06].

3.8. Degeneración por una lámina de masa

El objetivo de este trabajo es obtener el perfil de masa de una distribución que actúa como lente gravitacional, donde se hace uso de la forma de fuentes de fondo caracterizadas por medio de sus elipticidad aparente, al igual que se utilizan las posiciones de fuentes que presentan múltiples imágenes. Es por tanto importante preguntarnos hasta qué punto el perfil obtenido es único o si existe la posibilidad de que haya alguna transformación que permita la reproducción de los valores observacionales de entrada, haciendo que el perfil obtenido no sea único. Dicha transformación existe y se conoce con el nombre de **mass sheet degeneracy** o como la llamaremos nosotros **degeneración por una lámina de masa** (DLM) [FGS85, GFS88, SS95]. Esta degeneración básicamente indica que si agregamos una lámina con densidad de masa superficial constante y reescalamos la densidad superficial original, entonces la mayor parte de las propiedades de la lente se mantienen invariantes, especialmente aquellas que son accesibles a las observaciones. Así pues, la convergencia transforma como

$$\kappa' = \lambda\kappa + (1 - \lambda) \quad \text{con } \lambda \neq 0, \quad (3-57)$$

siendo λ una constante. A pesar del nombre que recibe esta degeneración, es necesario el término de reescalamiento en la convergencia para compensar la presencia de la lámina de masa. Aunque λ en principio es una constante arbitraria es posible imponer restricciones como por ejemplo que κ' no sea negativa [SS95].

Ahora, si consideramos la relación existente entre la convergencia y el potencial deflector dada por (3-14), tenemos que la DLM (3-57) conduce a un potencial deflector de la forma

$$\psi' = \frac{1 - \lambda}{2} |\boldsymbol{\theta}|^2 + \lambda\psi, \quad (3-58)$$

a partir del cual se puede deducir fácilmente que el shear γ y el ángulo de deflexión α transforman como

$$\gamma' = \lambda\gamma \quad \text{y} \quad \alpha' = (1 - \lambda)\theta + \lambda\alpha, \quad (3-59)$$

quienes no son invariantes ante la DLM. A pesar de esta propiedad no es posible romper la degeneración a partir de ellos como veremos más adelante. En el caso del ángulo de deflexión su efecto se encuentra mediado por la ecuación de la lente, por tanto, consideremos una fuente ubicada en β y cuyas imágenes están ubicadas en θ (posiciones dadas por las observaciones), entonces gracias a la DLM la ecuación de la lente transforma como

$$\beta = \theta - \alpha' \quad \Longrightarrow \quad \frac{\beta}{\lambda} = \theta - \alpha, \quad (3-60)$$

donde podemos ver que ambas ecuaciones predicen dos posiciones diferentes para la fuente, quienes difieren en un factor $1/\lambda$. Desafortunadamente β no es un observable, por tal razón la degeneración persiste.

Por otro lado, como resultado del mapeo $\beta \rightarrow \theta$ las fuentes presentan una magnificación μ (3-31) (ver sección 3.5), quien es de gran importancia para determinar la magnitud de la deformación inducida en la fuente. Así pues, la DLM induce la transformación

$$\mu' = \frac{1}{\lambda^2}\mu \quad \Longrightarrow \quad \frac{|\mu_i|'}{|\mu_j|'} = \frac{|\mu_i|}{|\mu_j|}, \quad (3-61)$$

lo cual indica que la magnificación no es invariante ante la DLM. El problema radica en la dificultad de determinar dicha magnificación pues como discutimos en la sección 3.5 esta depende del flujo intrínseco (o el flujo observado en ausencia de la lente) cuyo valor en general se desconoce. En [BTP95] se presenta cómo es posible hacer una estimación de la magnificación. Pese a las dificultades ha sido posible implementar la magnificación de forma exitosa en el estudio de cúmulos galácticos, ver por ejemplo [UBZ⁺11, Ume13, UMN⁺14, DHHJ16]. Si no es posible estimar la magnificación de la imágenes se podría pensar en hacer uso de la magnitud de las magnificaciones relativas cuando se dispone de un sistema de múltiples imágenes, sin embargo, estas sí son invariante ante la presente degeneración tal como se muestra en (3-61).

Veamos qué sucede en la región crítica de la lente. Como consecuencia de la DLM las curvas críticas son solución de

$$\det \mathcal{J}' = 0 = \det \mathcal{J}, \quad (3-62)$$

lo que indica que la posición y forma de las curvas críticas tampoco se ven alteradas. Por tanto en definitiva la existencia de múltiples imágenes y en especial grandes arcos (que siguen aproximadamente la forma de las curvas críticas) no son capaces de romper la DLM.

Consideremos ahora qué pasa en el régimen débil, donde la elipticidad aparente de las fuentes es un observable de gran valor en cuanto al efecto de lente gravitacional se refiere (ver secciones 3.5 y 3.7), siendo el shear reducido g (3-22) el mediador entre las observaciones y

el modelo (3-56). Aquí tenemos que ante la DLM el shear reducido satisface

$$g' = g, \quad (3-63)$$

lo que muestra que es invariante ante la DLM. Como caso particular consideremos una fuente ubicada lo suficientemente lejos de la región crítica de la lente tal que se satisfaga $|\gamma'| \ll 1$ ($|\gamma| \ll 1$) y $\kappa' \ll 1$ ($\kappa \ll 1$). Esto indica que el shear reducido se puede escribir como $g' \approx \gamma' = \gamma$. En consecuencia, en este límite el potencial deflector transforma como [BLS04]

$$\psi' = \frac{1 - \lambda}{2} |\boldsymbol{\theta}|^2 + \psi. \quad (3-64)$$

Es claro entonces que la forma aparente de las fuentes por si sola no es suficiente para romper la degeneración [SS97, SKW06].

La discusión anterior es válida para fuentes que se encuentran a un mismo corrimiento al rojo, y por tanto de gran importancia especialmente cuando no se dispone de dicha información, no obstante, con el avance de la tecnología la calidad de las observaciones mejora constantemente lo que permite tener acceso en muchas ocasiones a catálogos de fuentes cuyo corrimiento al rojo se conoce. Ante esta posibilidad consideremos que para una fuente de referencia las propiedades de la lente transforman como se describió anteriormente. Por tanto, podemos relacionar estos resultados con los correspondientes a una fuente arbitraria localizada a un corrimiento al rojo z gracias al peso cosmológico $Z = Z(z)$ (ver sección (3.4)). De esta forma, respecto a la fuente de referencia la DLM es ahora

$$Z\kappa' = \lambda(Z\kappa) + Z(1 + \lambda) = \lambda(Z\kappa) + [1 - (Z\lambda - Z + 1)], \quad (3-65)$$

lo cual muestra que el único valor de λ que pueden compartir fuentes ubicadas a diferente corrimiento al rojo es $\lambda = 1$.

En particular si centramos nuestra atención en la ecuación de la lente es claro que se satisface

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - Z\boldsymbol{\alpha}' \quad \implies \quad \boldsymbol{\beta} = (1 - Z + Z\lambda)\boldsymbol{\theta} - \lambda(Z\boldsymbol{\alpha}), \quad (3-66)$$

donde la forma funcional de ecuación de la lente se recupera solamente si se cumple $\lambda = 1$. Esto es cierto cuando (3-66) no puede ser linealizada, ya que de lo contrario sería posible obtener un reescalamiento en la posición real análogo a (3-60). Por tanto, en principio la degeneración por una lamina de masa se rompe si se hace uso de fuentes ubicadas a diferentes corrimientos al rojo y que presenten múltiples imágenes [BLS04] (una justificación alternativa se puede encontrar en [Sah00]). No obstante, en la práctica es ideal que los diferentes corrimientos al rojo sean tales que el peso cosmológico para dichas fuentes difiera lo suficiente para que no sea posible hallar un $\lambda \neq 1$ común. Como consecuencia de estas consideraciones es común encontrar que los cúmulos galácticos no se ven significativamente afectados por esta degeneración, pues disponen de un amplio número de sistemas de múltiples imágenes a diferentes corrimientos al rojo.

Ahora bien, la siguiente cantidad de interés es el shear reducido como función del corrimiento al rojo, donde se satisface

$$g'(z) = \frac{Z\gamma'}{1 - Z\kappa'} = \frac{\lambda(Z\gamma)}{1 - \{\lambda(Z\kappa) + [1 - (Z\lambda - Z + 1)]\}}. \quad (3-67)$$

Aquí es claro que en general la degeneración se rompe, pues solamente $\lambda = 1$ es el parámetro común entre fuentes a un corrimiento al rojo diferente. No obstante, para fuentes alejadas de las regiones críticas el potencial deflector transforma como (3-64), lo que lleva a que en este límite el shear reducido se pueda aproximar a

$$g'(z) \approx Z\gamma' = Z\gamma, \quad (3-68)$$

lo que implica que cuando se hace uso de las elipticidades de fuentes lejanas a la región crítica para estudiar las propiedades de la lente se satisface $\langle \epsilon(z) \rangle \approx Z\gamma$, donde no es posible romper la degeneración ya que no hay una dependencia con λ . En caso de también tomar fuentes cercanas a la región crítica se ha mostrado que la degeneración se rompe [BLS04]. La efectividad de esta ruptura está sujeta a la capacidad de las observaciones de evitar que se satisfaga (3-68).

4. Método de reconstrucción

El tamaño y masa presente en los cúmulos galácticos hace posible la presencia del efecto de lente gravitacional tanto en el régimen fuerte como en el régimen débil, donde cada uno es dominante a un radio diferente. Como resultado, la aplicación simultánea de estos dos regímenes presenta una herramienta de gran poder para entender la distribución de masa de un cúmulo galáctico como un todo y no solamente en una región limitada, tal como ha sido aplicado por ejemplo en [ASW98b, BES⁺05, BCG⁺06, LGHM07, MCM⁺09, BTA⁺09, SU11, OBD⁺12, CUS⁺18, SBH⁺18], entre otros. De los diversos métodos existentes si bien han sido aplicados de forma exitosa, tenemos que solamente una porción de ellos ha sido mejorado con los años, y es usado de forma activa. Este es el caso de aquellos métodos que están siendo usados en el programa Hubble Space Telescope Frontier Fields¹.

En este capítulo presentaremos el método que usaremos para realizar la reconstrucción del perfil de masa de un cúmulo galáctico, por lo cual iniciaremos haciendo una descripción del método y los requerimientos que este exige (sección 4.1), para luego explicar cómo se construye el sistema de ecuaciones lineales acoplado (eje central del método) (sección 4.2). Los cálculos explícitos se muestran en el anexo A.

4.1. Descripción del método de reconstrucción

Al abordar el problema de cómo reconstruir el perfil de masa de un cúmulo galáctico (y en general cualquier problema que involucre la reproducción de observaciones), tenemos que la solución más directa consiste en tomar un modelo que es propuesto bajo diversas consideraciones físicas propias del sistema, el cual se considera que es capaz de reproducir las observaciones de entrada. Ahora bien, en nuestro caso el modelo consiste en una distribución de masa que depende de una serie de parámetros, quienes describen la masa, densidad, forma geométrica o alguna otra propiedad relevante. El objetivo del método es por tanto obtener el conjunto de parámetros (con sus respectivas incertidumbres) que mejor se ajusta a las observaciones.

El principal inconveniente con este tipo de métodos se manifiesta como un problema de elección, ya que en la mayoría de los casos es posible tener diferentes distribuciones que reproducen las observaciones de forma satisfactoria, y que proveen resultados que son consistentes entre sí. ¿Cuál es la distribución correcta? No hay realmente una forma simple

¹<https://archive.stsci.edu/prepds/frontier/>

de decidir. Es necesario estudiar otro tipo de propiedades físicas del sistema que permitan descartar modelos.

Para superar esta dificultad, un método no paramétrico o de forma libre representa una gran alternativa. Por tanto, aquí presentamos una descripción de la implementación que hemos adoptado del método propuesto en [BSLE05, BCG⁺06, BTA⁺09] junto con algunas correcciones que encontramos convenientes.

Este método decimos que no es paramétrico puesto que no depende de una serie de parámetros los cuales están atados a un determinado modelo. Por consiguiente se disminuye el error humano introducido en la reconstrucción. Los únicos supuestos propios de este método son el potencial gravitacional inicial, y dos constantes que ayudan a que los resultados no diverjan. Más adelante explicaremos la necesidad de introducir estas cantidades. Por otro lado, este método es paramétrico en su trasfondo, pues es necesario obtener el potencial deflector en diferentes posiciones en el plano de la lente (que llamaremos puntos de red), tarea que se logra usando una función de penalización χ^2 la cual es minimizada respecto al potencial deflector.

Se podría pensar en una aproximación bayesiana al problema, sin embargo, a diferencia de la reconstrucción puramente paramétrica que en general involucra del orden de diez parámetros, nosotros debemos obtener miles de parámetros. Es por ello que aplicar métodos bayesianos como MCMC o Nested Sampling son computacionalmente costosos, y resultan poco efectivos para nosotros.

En la siguiente sección definiremos la función de penalización, y realizaremos una descripción detallada de cómo minimizarla, y cómo esto nos lleva a la reconstrucción del perfil de masa de un cúmulo galáctico.

4.1.1. Descripción del método

Consideremos que queremos conocer el potencial deflector en N puntos sobre el plano de la lente, los cuales llamaremos puntos de red. Dichos potenciales ψ_k (con $k \in \{1, \dots, N\}$) forman el conjunto de parámetros a determinar. Al concentrarnos en el potencial deflector directamente, eliminamos el problema generado a la hora de escoger un modelo que describa de forma satisfactoria el sistema de interés.

La importancia de determinar el potencial deflector radica en que a partir de este se definen las cantidades clave que describen el efecto de lente gravitacional como lo son κ , γ y α . Es por tanto adecuado definir χ^2 en términos de observables que se puedan caracterizar por medio de estas cantidades. Así pues, respecto al régimen fuerte usaremos como observables sistemas de múltiples imágenes, los cuales se pueden caracterizar por medio de la ecuación de la lente, mientras que en el régimen débil utilizaremos las elipticidades de galaxias de fondo, donde la elipticidad permite dar razón del shear reducido. Hay otros observables provenientes del efecto de lente gravitacional, como lo es la flexión (ver [SE08]) y la magnificación, sin embargo no haremos uso de ellas pues a nivel práctico presentan dificultades al ser medidas.

Siguiendo [BSLE05, BCG⁺06, Mer16] definiremos la función de penalización como

$$\chi^2 := \chi_w^2 + \chi_s^2 + \chi_{\kappa(R)}^2 + \chi_{\gamma(R)}^2, \quad (4-1)$$

donde χ_w^2 y χ_s^2 se ajustan a los observables provenientes del régimen débil y fuerte, respectivamente. Adicionalmente tenemos dos términos de regularización, $\chi_{\kappa(R)}^2$ y $\chi_{\gamma(R)}^2$, donde respectivamente se usa la convergencia y el shear (ambas componentes) para controlar la evolución del método. Más adelante definiremos cada término presente en (4-1).

Para realizar la reconstrucción se minimiza (4-1) respecto a cada ψ_k . Esto es equivalente a derivar (4-1) respecto a ψ_k e igualar a cero, con lo cual se obtienen N ecuaciones de la forma

$$\frac{\partial \chi_w^2}{\partial \psi_k} + \frac{\partial \chi_s^2}{\partial \psi_k} + \frac{\partial \chi_{\kappa(R)}^2}{\partial \psi_k} + \frac{\partial \chi_{\gamma(R)}^2}{\partial \psi_k} = 0, \quad (4-2)$$

las cuales en general no son lineales. Obtenemos entonces un sistema de N ecuaciones con N incógnitas que no es fácil de solucionar.

Con el fin de llegar a un sistema de ecuaciones que sea soluble, es conveniente linealizar (4-2). En la sección 4.2 describiremos como llegar a un sistema de ecuaciones lineales.

El sistema de ecuaciones es el núcleo del método, sin embargo, por sí solo no es suficiente para llegar a una reconstrucción satisfactoria. Por esta razón es conveniente incorporar esta idea dentro de un algoritmo más completo, el cual sigue el diagrama de flujo que se muestra en la figura 4-1. El método está compuesto por un sistema de dos niveles de iteraciones, los cuales llamaremos el nivel interno y el nivel externo.

Para empezar, es necesario introducir un potencial deflector inicial $\psi^{(0)}$, el cual es conveniente que esté definido sobre una red con una densidad de puntos baja, pues esto le brinda una mayor libertad al método para adaptarse a los datos de entrada. Luego, se calcula los valores iniciales o de entrada $\kappa^{(0)}$, $\gamma_1^{(0)}$ y $\gamma_2^{(0)}$ sobre la misma red usando (4-5), ya que son necesarios para el proceso de regularización. Aquí se inicia la reconstrucción dando inicio al nivel externo ($m = 0$). Tenemos que al inicio de cada iteración externa se calculan los coeficientes \mathcal{K}_{ij} , $\mathcal{G}_{n,ij}$ y $\mathcal{D}_{n,ij}$ (ver (4-4)) en todas las posiciones θ_i que correspondan a puntos de red y puntos donde se tiene algún dato de entrada. Realizar esta tarea al inicio de cada iteración externa disminuye el tiempo de calculo, pues los coeficientes solamente dependen del número de puntos de red y sus posiciones (ver las ecuaciones (4-5) y (4-6)), y estos son fijos para todo nivel interno.

Ahora bien, una vez disponemos del conjunto de coeficientes se da inicio al nivel interno ($n = 0$), cuya tarea principal es calcular el sistema de ecuaciones y solucionarlo, obteniendo así una nueva aproximación al potencial deflector $\psi^{(n+1)}$ en la red. En este punto es necesario determinar qué tan bien se está comportando la reconstrucción, por lo cual se calcula la nueva convergencia $\kappa^{(n+1)}$ y se compara con la convergencia de la iteración interna anterior $\kappa^{(n)}$, ó con $\kappa^{(0)}$ en caso de encontrarnos en la primera iteración interna. Por tanto, el criterio de convergencia toma la forma

$$|\kappa^{(n+1)} - \kappa^{(n)}| \leq \textit{tolerancia}, \quad (4-3)$$

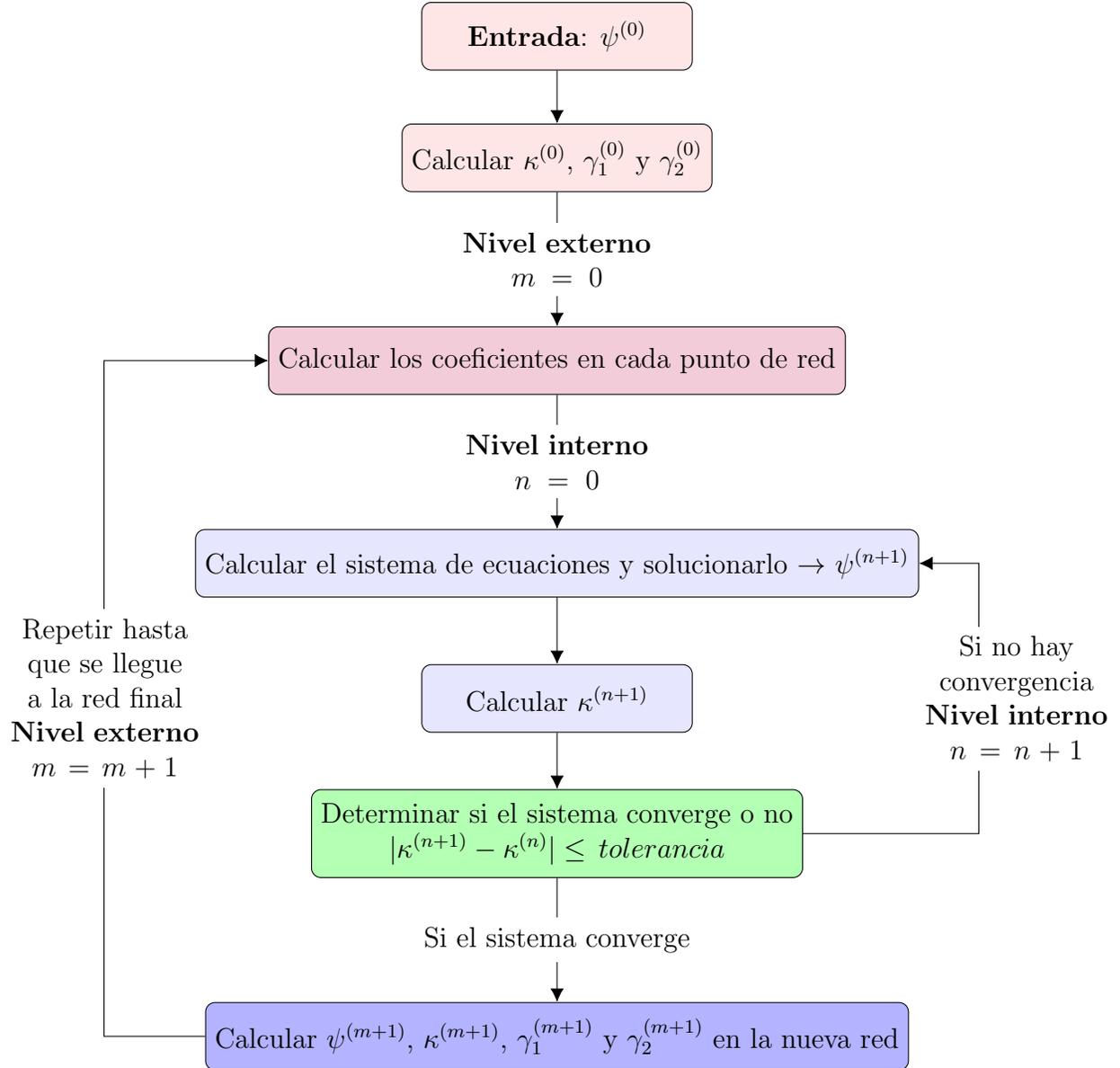


Figura 4-1.: Diagrama de flujo del método implementado en este trabajo.

donde la tolerancia es establecida por el usuario. Esta comparación se hace punto a punto. Si (4-3) no se satisface se inicia una nueva iteración interna, en donde se utiliza $\psi^{(n+1)}$ para calcular el nuevo sistema de ecuaciones. El nivel interno continua hasta que (4-3) se satisfaga. Una vez la solución es aceptable el nivel interno finaliza, y llegamos a la etapa final de la iteración externa en la que nos encontramos. Aquí se procede a aumentar el número de puntos en la red (cómo se hace el refinamiento se explica en la siguiente sección), lo cual permite obtener una mayor resolución en la reconstrucción. Luego se calcula $\psi^{(m+1)}$, $\kappa^{(m+1)}$, $\gamma_1^{(m+1)}$ y $\gamma_2^{(m+1)}$ en la nueva red a partir del potencial deflector resultante del último nivel

interno haciendo uso de la ecuación (4-5). Hecho esto, se inicia la siguiente iteración externa y se realiza de nuevo el nivel interno, lo cual continua el número de veces que indique el usuario.

En la siguiente sección vamos a describir cómo discretizar el plano de la lente, y cómo construir el sistema de ecuaciones lineales que requerimos.

4.2. Sistema de ecuaciones lineales

En esta sección vamos a describir cómo podemos linealizar (4-2), para lo cual es primordial que el plano de la lente se encuentre discretizado. Con ello, es posible definir el potencial deflector en cada uno de estos puntos de red, lo que permite calcular κ , γ y α en un punto cualquiera θ_i sobre el plano de la lente. Esto es

$$\kappa_i = \sum_{j=1}^N \mathcal{K}_{ij} \psi_j, \quad \gamma_{n,i} = \sum_{j=1}^N \mathcal{G}_{n,ij} \psi_j, \quad \alpha_{n,i} = \sum_{j=1}^N \mathcal{D}_{n,ij} \psi_j, \quad n \in \{1, 2\}. \quad (4-4)$$

donde n hace referencia a las componentes ya sea del shear o del ángulo de deflexión. En (4-4) se usa un esquema de diferencias finitas para expresar explícitamente las diferentes derivadas requeridas en términos del potencial deflector². Aquí \mathcal{K}_{ij} , $\mathcal{G}_{n,ij}$ y $\mathcal{D}_{n,ij}$ corresponden a los pesos de cada punto de red producto del esquema de diferencias finitas, los cuales en su mayoría valen cero. Más adelante veremos que en total hay más contribuciones al peso de los puntos de red.

El valor que toma cada uno de estos pesos depende de cómo se este discretizando el espacio, y de cuántos puntos de red se estén tomando. La forma quizá más directa para discretizar el espacio es por medio de una red uniforme, cuyas celdas son cuadradas. Este tipo de discretización corresponde al usado en [BSLE05]. El problema que presenta una red con celdas cuadradas o a lo sumo rectangulares, es que no se adapta fácilmente a los datos disponibles, y lo que se observa es que tiende a inducir una sobre estimación de κ . Es por tanto más conveniente hacer uso de una red irregular.

Siguiendo [BTA⁺09], consideremos que nuestro interés se centra en un punto cualquiera cuya posición es θ_i definido sobre el plano de la lente (puede o no hacer parte de la red). Para poder calcular el potencial deflector y sus diferentes derivadas en este punto vamos a tomar los M puntos de red θ_k ($k \in \{1, \dots, M\}$) más cercanos a θ_i , llamados vecinos más cercanos (VC). Si expandimos el potencial deflector para cada VC alrededor de θ_i hasta derivadas de segundo orden³, obtenemos como resultado

²Hay otros métodos numéricos que permiten calcular derivadas en un espacio discreto, sin embargo, el método de diferencias finitas es bastante simple y a su vez lo suficientemente efectivo para poder linealizar (4-2).

³En este trabajo tomamos las derivadas de hasta segundo orden puesto que estas son suficientes para determinar κ_i , γ_i y α_i que son las cantidades que son de nuestro interés. En caso de querer incluir

$$\begin{aligned} \psi_k = & \psi_i + (\theta_{1,k} - \theta_{1,i}) \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_1} + (\theta_{2,k} - \theta_{2,i}) \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_2} + \frac{1}{2} (\theta_{1,k} - \theta_{1,i})^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \theta_1^2} \\ & + (\theta_{1,k} - \theta_{1,i}) (\theta_{2,k} - \theta_{2,i}) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} + \frac{1}{2} (\theta_{2,k} - \theta_{2,i})^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \theta_2^2}. \end{aligned} \quad (4-5)$$

Así pues, podemos construir un sistema de ecuaciones de la forma $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dado por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & a_{k4} & a_{k5} & a_{k6} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & a_{M3} & a_{M4} & a_{M5} & a_{M6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_i \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \theta_1^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \theta_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_k \\ \vdots \\ \psi_M \end{pmatrix}, \quad (4-6)$$

donde los coeficientes de la matriz \mathcal{A} son

$$\begin{aligned} a_{k1} &= 1, \\ a_{k2} &= (\theta_{1,k} - \theta_{1,i}), \quad a_{k3} = (\theta_{2,k} - \theta_{2,i}), \\ a_{k4} &= \frac{1}{2} (\theta_{1,k} - \theta_{1,i})^2, \quad a_{k5} = (\theta_{1,k} - \theta_{1,i}) (\theta_{2,k} - \theta_{2,i}), \quad a_{k6} = \frac{1}{2} (\theta_{2,k} - \theta_{2,i})^2. \end{aligned} \quad (4-7)$$

El sistema de ecuaciones (4-6) claramente posee M ecuaciones y 6 incógnitas, siendo estas últimas el potencial deflector y sus derivadas hasta segundo orden evaluadas en θ_i . En la práctica se evidencia que es conveniente que se satisfaga $M > 6$, de lo contrario la solución del sistema no es aceptable, y en peor de los casos la matriz obtenida es singular. En nuestro caso la solución es satisfactoria para $16 \leq M \leq 36$.

Es claro entonces que la matriz obtenida no es simétrica, y por tanto se debe hallar la solución usando algún método que permita calcular su matriz pseudo inversa. En este caso el método de descomposición de valores singulares (o SVD por sus siglas en inglés como es comúnmente conocido) prueba ser efectivo. El proceso de construir este sistema de ecuaciones auxiliares se debe repetir para cada punto θ_i en donde se desea interpolar.

Vale la pena mencionar que si M es muy grande, esta interpolación induce ruido en la solución, y como consecuencia la reconstrucción arroja un perfil suavizado en regiones donde se espera una alta concentración de masa (por ejemplo en las regiones alrededor de los deflectores principales del cúmulo), y además suele arrojar una sobre estimación de masa en regiones donde el régimen débil es dominante.

por ejemplo correcciones dadas por la flexión, solamente hay que tomar derivadas de mayor orden en la expansión. Una vez se tenga claro hasta que orden se desea hacer la expansión, el proceso es análogo al presentado en este trabajo.

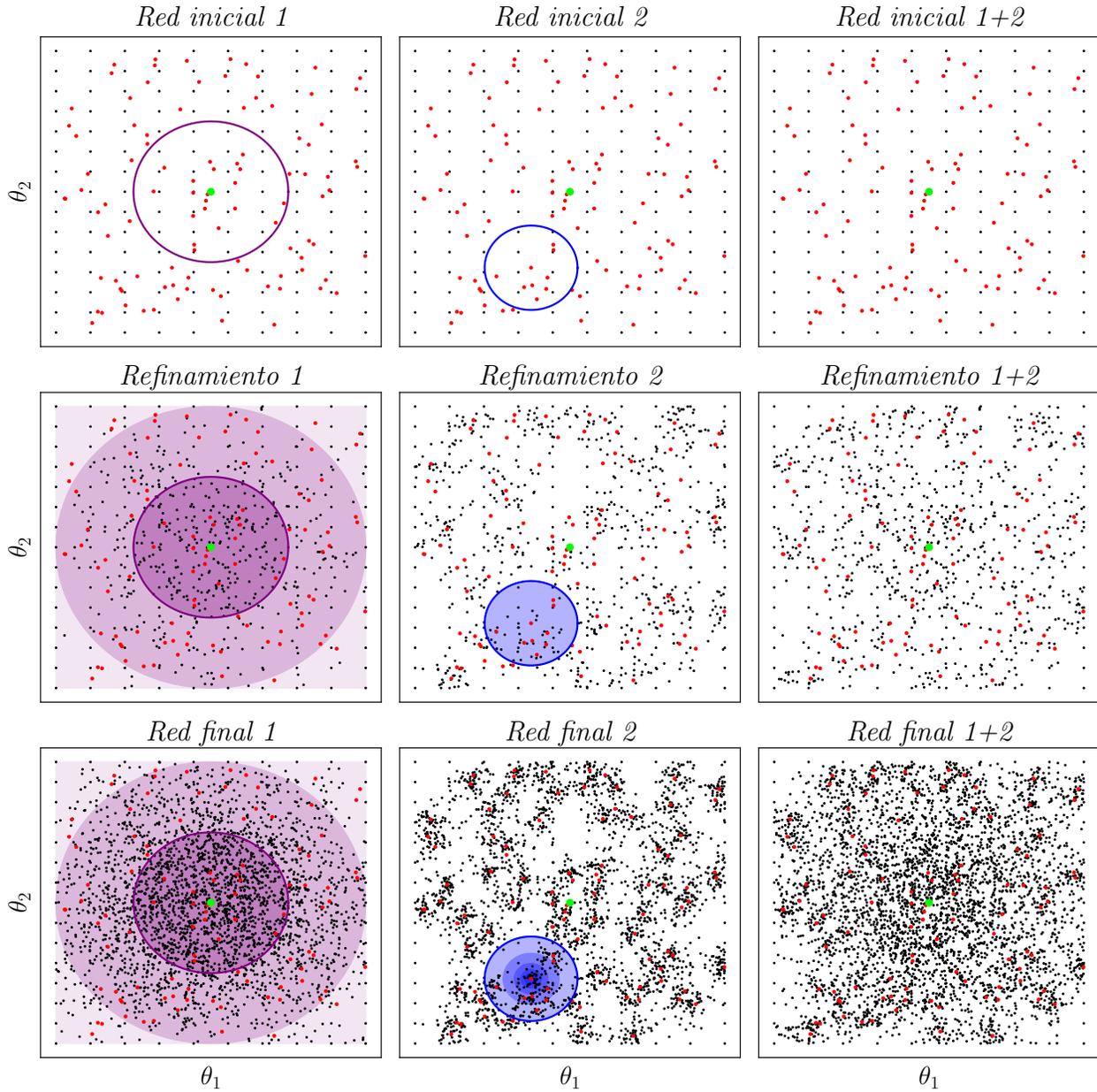


Figura 4-2.: Esquemas de refinamiento posibles en nuestra implementación. Los puntos de color negro representan los puntos de red, el punto de color verde (lima) representa la posición del deflector principal considerado en este ejemplo, mientras que los puntos de color rojo representan las posiciones un las cuales se tiene algún valor observacional de entrada, ya sea la posición de galaxias de fondo para las cuales se posee su respectiva elipticidad, o las posiciones de sistemas de múltiples imágenes.

Ahora bien, ya que tenemos claro el esquema con el que se piensa construir el sistema de ecuaciones, vamos a discutir cómo definir la red que vamos a usar y cómo realizar el refinamiento de la red descrito en la sección anterior.

Iniciaremos con una red de entrada rectangular formada con N_1 y N_2 puntos de red en las coordenadas rectangulares θ_1 y θ_2 , respectivamente, lo que lleva a tener $N = N_1 \times N_2$ puntos de red iniciales. A partir de esta red inicial consideraremos tres posibles esquemas de regularización que llamaremos esquema 1, esquema 2 y esquema 1 + 2, los cuales se muestran en la figura 4-2.

Recordemos que el proceso de refinamiento se lleva a cabo al final de cada iteración externa, por lo cual para construir la red de la iteración externa $m + 1$ debemos tomar como red de entrada la red utilizada en la iteración externa m . En el caso de estar en la iteración externa inicial ($m = 0$) tomamos como red de entrada la red rectangular inicial. Esto es común para los tres esquemas. En la figura 4-2 se muestra la evolución de cada esquema en dirección descendente, donde la primera imagen corresponde a la red rectangular inicial, la segunda imagen muestra el resultado de luego de hacer el primer refinamiento de la red, donde esta nueva red se usa como red de entrada para el siguiente refinamiento. Este proceso se repite tantas veces como iteraciones externas se consideren necesarias, y como resultado final se obtiene una red como la que se muestra en la tercera imagen.

A continuación vamos a describir en qué consiste cada esquema:

- **Esquema 1:** Se busca distribuir de forma aleatoria N_d nuevos puntos de red alrededor de cada deflector considerado. Para ello, se usa como referencia un círculo de radio R_d centrado en la posición de cada deflector, dentro del cual se encuentra la mayoría de los puntos. El objetivo de este esquema es lograr una buena resolución en regiones donde se espera altas concentraciones de masa, y con ello lograr una buena estimación de las curvas críticas. En la figura 4-2 (izquierda en orden descendente) vemos como ejemplo la evolución de este proceso de refinamiento. La primera imagen muestra la red rectangular inicial, donde se traza el círculo de referencia (de color morado) alrededor del único deflector presente, así, una vez se distribuyen los nuevos puntos vemos como en efecto la mayor concentración se encuentra dentro del círculo de referencia. Esto se hace más evidente a medida que se realizan más refinamientos, lo cual se aprecia en las regiones a color presentadas, donde una mayor intensidad representa una mayor concentración de puntos.
- **Esquema 2:** Se busca realizar un refinamiento adaptativo (irregular), donde los nuevos puntos de red se ubiquen alrededor de las posiciones θ_i donde se posee algún dato observacional de entrada (puntos rojos en la figura 4-2). Para esta tarea se traza un círculo de radio r_d alrededor de θ_i y se cuenta cuántos puntos de red hay dentro del círculo. Si este número es menor que M (recordemos que M es el número de VC), entonces se distribuyen de forma aleatoria dentro del círculo el número de puntos que haga falta para que el total sea igual que M . Si por el contrario el número de

puntos dentro del círculo es mayor o igual que M no se colocan nuevos puntos de red dentro de esta región. En la figura 4-2 (centro en orden descendente) vemos como ejemplo la evolución de este proceso de refinamiento. La primera imagen muestra la red rectangular inicial, donde se traza el círculo de referencia (de color azul) alrededor de un punto arbitrario θ_i , una vez se determina el número de puntos de red dentro del círculo se sigue con el proceso anteriormente descrito. Como resultado vemos que de forma progresiva se obtiene una mayor densidad de puntos alrededor de todo θ_i , lo cual es más evidente en la red final: Aquí vemos que a mayor concentración de puntos mayor es la intensidad del la región de color azul. Esto nos lleva a que solamente se tenga una buena resolución en la reconstrucción en las regiones donde se tiene datos de entrada.

- **Esquema 1+2:** Aquí se busca realizar un refinamiento que involucre los esquemas 1 y 2. Para ello iniciaremos con el esquema 1, donde se distribuyen N_d nuevos puntos de red alrededor de cada deflector considerado. Una vez se ha hecho esto, se procede a implementar el esquema 2, donde se busca que haya una concentración de puntos de red que se adapte a la distribución de datos de entrada. En la figura 4-2 (derecha en orden descendente) se puede apreciar la evolución de este esquema, donde es claro que hay una mayor cantidad de puntos de red alrededor del deflector y de las posiciones donde se tienen datos de entrada.

A continuación vamos a discutir cómo escribir cada uno de los términos presentes en (4-2) a partir del potencial deflector, y con ello encontraremos el sistema de ecuaciones deseado.

4.2.1. Régimen débil

Como ya se ha mencionado, el régimen débil podemos estudiarlo por medio de las elipticidades que presentan las fuentes, donde para fuentes a un mismo corrimiento al rojo en una región donde las propiedades de la lente no cambien significativamente tenemos que el promedio de las elipticidades $\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon(z) \rangle$ provee una estimación directa a nivel local del shear reducido $g(z)$ (3-18) (ver sección 3.7 para más detalles). Así pues, si tenemos N_w galaxias para las cuales se ha sido posible determinar su elipticidad ϵ_i , definiremos la función χ_w^2 como

$$\chi_w^2 := \sum_{i=1}^{N_w} \frac{|\epsilon_i - \langle \epsilon_i \rangle|^2}{\sigma_i^2}, \quad (4-8)$$

donde

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{N_{p,i}} (1 - |\langle \epsilon_i \rangle|^2)^2 \sigma_{\epsilon_s}^2 + \sigma_{err}^2 \quad (4-9)$$

Aquí $N_{p,i}$ representa el número de fuentes sobre el cual se está promediando, σ_{ϵ_s} es la desviación estándar correspondiente a la elipticidad intrínseca de las fuentes, mientras que σ_{err} es la desviación estándar o incertidumbre correspondiente a las elipticidades observadas.

En este trabajo tomaremos $N_{p,i} = 1$, que es equivalente a considerar la elipticidad de interés como una excelente representante de la muestra a nivel local [BSLE05]. En la práctica se puede considerar $\sigma_{\epsilon_s} \sim 0.2 - 0.3$ como una buena aproximación a la desviación estándar de la elipticidad de las fuentes [BSLE05, CBMM06]. A medida que $N_{p,i}$ aumenta vemos que la influencia de las elipticidades intrínsecas disminuye dando como resultado $\sigma_i \sim \sigma_{err}$, en este caso simplemente se debe tomar ϵ_i en (4-8) como el promedio de dichas elipticidades.

Según $\langle \epsilon_i \rangle$ (dado por (3-56)) tenemos que la función de penalización (4-8) tiene dos posibles formas: para $|g_i| \leq 1$ tenemos que

$$\chi_w^2 = \sum_{i=1}^{N_w} \frac{1}{\sigma_i^2} \left| \epsilon_i - \frac{Z_i \gamma_i}{1 - Z_i \kappa_i} \right|^2 = \sum_{i=1}^{N_w} \frac{1}{(1 - Z_i \kappa_i)^2 \sigma_i^2} \left| \epsilon_i - Z_i \epsilon_i \kappa_i - Z_i \gamma_i \right|^2, \quad (4-10)$$

mientras que para $|g_i| > 1$ la función de penalización es

$$\chi_w^2 = \sum_{i=1}^{N_w} \frac{1}{\sigma^2} \left| \epsilon_i - \frac{1 - Z_i \kappa_i}{Z_i \gamma_i^*} \right|^2 = \sum_{i=1}^{N_w} \frac{1}{Z_i^2 |\gamma_i|^2 \sigma_i^2} \left| Z_i \epsilon_i \gamma_i^* + Z_i \kappa_i - 1 \right|^2. \quad (4-11)$$

Para obtener la contribución del régimen débil al sistema de ecuaciones (4-2) debemos derivar ya sea (4-10) ó (4-11) (según corresponda) respecto a ψ_k . Este proceso se presenta detalladamente en el anexo A, en donde se muestra que en ambos casos se obtiene que

$$\frac{\partial \chi_w^2}{\partial \psi_k} = 2 \sum_{j=1}^N \mathcal{W}_{kj}^w \psi_j - 2 \mathcal{V}_k^w, \quad (4-12)$$

donde \mathcal{W}_{kj}^w y \mathcal{V}_k^w son cantidades escalares dadas como

$$\mathcal{W}_{kj}^{(w)} := \sum_{i=1}^{N_w} \left[A_{1,i} \left(\mathcal{G}_{1,ik} \mathcal{K}_{ij} + \mathcal{K}_{ik} \mathcal{G}_{1,ij} \right) + A_{2,i} \left(\mathcal{G}_{2,ik} \mathcal{K}_{ij} + \mathcal{K}_{ik} \mathcal{G}_{2,ij} \right) + A_{3,i} \mathcal{G}_{1,ik} \mathcal{G}_{1,ij} + A_{4,i} \mathcal{G}_{2,ik} \mathcal{G}_{2,ij} + A_{5,i} \mathcal{K}_{ik} \mathcal{K}_{ij} \right],$$

y

$$\mathcal{V}_k^{(w)} := \sum_{i=1}^{N_w} \left(a_{1,i} \mathcal{G}_{1,ik} + a_{2,i} \mathcal{G}_{2,ik} + a_{3,i} \mathcal{K}_{ik} \right). \quad (4-13)$$

Los coeficientes \mathcal{K} y \mathcal{G}_n son resultado de la linealización de κ y γ_n (con $n \in \{1, 2\}$) dados por (4-4), lo que hace que dependan solamente de la posición de la imagen de la fuente en el plano de la lente, y también del esquema de discretización usado (ver sección 4.2). Esto hace que solamente sean calculados al inicio de cada iteración externa. Por otro lado, los diferentes coeficientes $A_{m,i}$ (con $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) y $a_{l,i}$ (con $l \in \{1, 2, 3\}$) dependen de $|g_i|$, tal que para $|g_i| \leq 1$ estos son

$$A_{1,i} = \frac{Z_i^2}{\sigma_{\leq,i}^2} \epsilon_{1,i}, \quad A_{2,i} = \frac{Z_i^2}{\sigma_{\leq,i}^2} \epsilon_{2,i}, \quad A_{3,i} = A_{4,i} = \frac{Z_i^2}{\sigma_{\leq,i}^2}, \quad A_{5,i} = \frac{Z_i^2}{\sigma_{\leq,i}^2} |\epsilon_i|^2, \quad (4-14)$$

y

$$a_{1,i} = \frac{Z_i}{\sigma_{\leq,i}^2} \epsilon_{1,i}, \quad a_{2,i} = \frac{Z_i}{\sigma_{\leq,i}^2} \epsilon_{2,i}, \quad a_{3,i} = \frac{Z_i}{\sigma_{\leq,i}^2} |\epsilon_i|^2, \quad (4-15)$$

mientras que para $|g_i| > 1$ se satisface

$$A_{1,i} = \frac{Z_i^2}{\sigma_{>,i}^2} \epsilon_{1,i}, \quad A_{2,i} = \frac{Z_i^2}{\sigma_{>,i}^2} \epsilon_{2,i}, \quad A_{3,i} = A_{4,i} = \frac{Z_i^2}{\sigma_{>,i}^2} |\epsilon_i|^2, \quad A_{5,i} = \frac{Z_i^2}{\sigma_{>,i}^2}, \quad (4-16)$$

y

$$a_{1,i} = \frac{Z_i}{\sigma_{>,i}^2} \epsilon_{1,i}, \quad a_{2,i} = \frac{Z_i}{\sigma_{>,i}^2} \epsilon_{2,i}, \quad a_{3,i} = \frac{Z_i}{\sigma_{>,i}^2}. \quad (4-17)$$

Aquí, las cantidades $\sigma_{\leq,i}^2 := (1 - Z_i \kappa_i)^2 \sigma_i^2$ y $\sigma_{>,i}^2 := Z_i^2 |\gamma_i|^2 \sigma_i^2$ rompen la linealidad buscada en (4-2), por lo cual κ_i y $|\gamma_i|$ no se escriben explícitamente en términos del potencial deflector siguiendo (4-4). Por esta razón, $\sigma_{\leq,i}^2$ y $\sigma_{>,i}^2$ son calculados por medio de los resultados de la iteración inmediatamente anterior; manejándolos como constantes. Si la iteración dada corresponde al inicio del nivel interno, entonces estos términos se calculan con los resultados de la iteración externa anterior, o los valores de entrada en su defecto si se está iniciando la reconstrucción.

4.2.2. Régimen Fuerte

Como ya se ha mencionado anteriormente, una característica fundamental del régimen fuerte es la existencia de sistemas de múltiples imágenes asociadas a un única fuente. Por tanto, si consideramos que tenemos N_s sistemas de múltiples imágenes, cada uno con N_i (con $i \in \{1, \dots, N_s\}$) imágenes asociadas a la i -ésima fuente, tenemos que una forma directa de definir la función de penalización en este régimen es

$$\chi_s^2 := \sum_{i=1}^{N_s} \left(\sum_{n=1}^{N_i} \mathbf{p}_{in}^T \mathcal{S}_{l,in}^{-1} \mathbf{p}_{in} \right), \quad (4-18)$$

siendo

$$\mathcal{S}_{l,in} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,in}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{2,in}^2 \end{pmatrix} \quad (4-19)$$

la matriz de covarianzas en el plano de la lente, y $\mathbf{p}_{in} := \boldsymbol{\theta}_{in} - \boldsymbol{\theta}_{in}^{(l)}$, con $\boldsymbol{\theta}_{in}^{(l)}$ la posición real de la n -ésima imagen del i -ésimo sistema, y $\boldsymbol{\theta}_{in}$ es la respectiva imagen producto de la reconstrucción. No obstante, (4-18) requiere resolver la ecuación de la lente (lo que es computacionalmente costoso) para obtener $\boldsymbol{\theta}_{in}$, el cual no es posible escribir de forma directa en términos del potencial deflector siguiendo el esquema descrito en la sección 4.1.1. Es por tanto conveniente trabajar en el plano de la fuente, pues al aplicar la ecuación de la lente se obtiene una dependencia con el potencial deflector por medio del ángulo de deflexión (3-10). Para esta tarea describiremos dos esquemas diferentes que permiten definir la función de penalización χ_s^2 en términos de las posiciones angulares reales de las fuentes. Más adelante cuando apliquemos el método veremos la efectividad de cada uno de estos esquemas.

Opción 1

Para poder definir χ_s^2 en términos de las posiciones angulares reales de las fuentes debemos tener presente que estas presentan un error que en general difiere del error observacional obtenido para las posiciones angulares aparentes pues el mapeo $\boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\beta}$ induce una distorsión a nivel local en los elementos de área caracterizada por \mathcal{J} (tal como se describió en la sección 3.5). Por tanto, debemos involucrar este cambio a la hora de definir χ_s^2 . Con esto en mente, es posible definir χ_s^2 como

$$\chi_s^2 := \sum_{i=1}^{N_s} \left(\sum_{n=1}^{N_i} \mathbf{b}_{in}^T \mathcal{S}_{l,in}^{-1} \mathbf{b}_{in} \right), \quad (4-20)$$

donde $\mathbf{b}_{in} := \mathcal{M}_{in}(\boldsymbol{\beta}_{in} - \langle \boldsymbol{\beta}_i \rangle)$, siendo $\langle \boldsymbol{\beta}_i \rangle$ el valor promedio de la posición de fuente para el i -ésimo sistema de imágenes, y el cual se considera constante en cada iteración, pues se calcula a partir de los resultados de la iteración inmediatamente anterior, así pues

$$\langle \boldsymbol{\beta}_i \rangle = \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} \boldsymbol{\beta}_{in}, \quad (4-21)$$

con $\boldsymbol{\beta}_{in} = \boldsymbol{\theta}_{in} - Z_i \boldsymbol{\alpha}_{in}$. Por otro lado, \mathcal{M}_{in} representa la matriz de magnificación evaluada en $\boldsymbol{\theta}_{in}$, la cual está dada por

$$\mathcal{M}_{in} = \mu_{in} \begin{pmatrix} 1 - Z_i \kappa_{in} + Z_i \gamma_{1,in} & Z_i \gamma_{2,in} \\ Z_i \gamma_{2,in} & 1 - Z_i \kappa_{in} - Z_i \gamma_{1,in} \end{pmatrix} = \mu_{in} \begin{pmatrix} m_{1,in} & m_{2,in} \\ m_{3,in} & m_{4,in} \end{pmatrix}. \quad (4-22)$$

Esta aproximación para (4-20) funciona muy bien siempre y cuando se garantice que las imágenes obtenidas con el modelo estén lo suficientemente cerca de las observadas [SKW06, Parte II, Sección 4.6]. La introducción de \mathcal{M}_{in} es necesaria siempre que se trabaje en el plano de la fuente y no en el de la lente. En las primeras etapas del método \mathcal{M}_{in} no fue introducida explícitamente [BSLE05, BES⁺05], aunque el efecto que introduce la magnificación fue implementado como un aumento de cinco veces en la incertidumbre de las posiciones de las fuentes (en ambas coordenadas), o lo que es equivalente, la incertidumbre en el plano de la fuentes es cinco veces menor a la obtenida de las observaciones. El inconveniente radica en que en general \mathcal{M}_{in} varía a lo largo del plano, y de forma significativa cerca a las curvas críticas. Como veremos más adelante, el no introducir explícitamente el efecto de \mathcal{M}_{in} hace que no sea posible dar una descripción confiable de regiones que presentan una alta concentración de masa en la distribución; este es el caso de las regiones donde se encuentran los deflectores principales del cúmulo. La necesidad de introducir \mathcal{M}_{in} se hace presente incluso con distribuciones simples al igual que simétricas, como lo es una NIS.

La forma más directa de solucionar el problema es solamente considerar el efecto de μ_{in} [BCG⁺06, JKL⁺07, JK09, NJJ⁺20], cuya ventaja se encuentra en que es fácil de implementar, en particular considerando la naturaleza del método presentado en este trabajo, sin embargo, aquí optamos por implementar también \mathcal{M}_{in} de forma completa. Ya sea que se este tomando

solamente μ_{in} [BCG⁺06] ó \mathcal{M}_{in} , ambas cantidades se consideran constantes durante cada iteración y se obtienen a partir de los resultados de la iteración anterior, lo que garantiza que (4-2) sea lineal. Se deja a elección del usuario determinar si desea usar μ_{in} , \mathcal{M}_{in} ó ninguna de estas correcciones.

Habiendo definido (4-20), el siguiente paso consiste en derivar está función respecto a ψ_k , lo cual lleva a un expresión compacta análoga a la obtenida en el régimen débil. Esta es (ver el anexo A para ver la deducción)

$$\frac{\partial \chi_s^2}{\partial \psi_k} = 2 \sum_{j=1}^N \mathcal{W}_{kj}^{(s)} \psi_j - 2\mathcal{V}_k^{(s)}, \quad (4-23)$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{kj}^{(s)} := & \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_i} \left(B_{1,in} \mathcal{D}_{1,ink} \mathcal{D}_{1,inj} + B_{2,in} \mathcal{D}_{1,ink} \mathcal{D}_{2,inj} + B_{2,in} \mathcal{D}_{2,ink} \mathcal{D}_{1,inj} \right. \\ & \left. + B_{3,in} \mathcal{D}_{2,ink} \mathcal{D}_{2,inj} \right), \end{aligned} \quad (4-24)$$

y

$$\mathcal{V}_k^{(s)} = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_i} \left(b_{1,in} \mathcal{D}_{1,ink} + b_{2,in} \mathcal{D}_{1,ink} + b_{3,in} \mathcal{D}_{2,ink} + b_{4,in} \mathcal{D}_{2,ink} \right). \quad (4-25)$$

Aquí los coeficientes $B_{m,i}$ (con $m \in \{1, 2, 3\}$) y $b_{l,i}$ (con $l \in \{1, 2, 3, 4\}$) se han definido como

$$\begin{aligned} B_{1,in} &:= Z_i^2 \mu_{in}^2 \Delta m_{1,in}, & B_{2,in} &:= Z_i^2 \mu_{in}^2 \Delta m_{2,in}, & B_{3,in} &:= Z_i^2 \mu_{in}^2 \Delta m_{3,in}, \\ b_{1,in} &:= Z_i \mu_{in}^2 \Delta m_{1,in} (\theta_{1,in} - \langle \beta_{1,i} \rangle), & b_{2,in} &:= Z_i \mu_{in}^2 \Delta m_{2,in} (\theta_{2,in} - \langle \beta_{2,i} \rangle), \\ b_{3,in} &:= Z_i \mu_{in}^2 \Delta m_{2,in} (\theta_{1,in} - \langle \beta_{1,i} \rangle), & b_{4,in} &:= Z_i \mu_{in}^2 \Delta m_{3,in} (\theta_{2,in} - \langle \beta_{2,i} \rangle), \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} \Delta m_{1,in} &:= \left(\frac{m_{1,in}^2}{\sigma_{1,in}^2} + \frac{m_{3,in}^2}{\sigma_{2,in}^2} \right), & \Delta m_{2,in} &:= \left(\frac{m_{1,in} m_{2,in}}{\sigma_{1,in}^2} + \frac{m_{3,in} m_{4,in}}{\sigma_{2,in}^2} \right) \\ \Delta m_{3,in} &:= \left(\frac{m_{2,in}^2}{\sigma_{1,in}^2} + \frac{m_{3,in}^2}{\sigma_{4,in}^2} \right). \end{aligned} \quad (4-26)$$

Opción 2

En la opción 1 comparamos la posición angular real de la fuente predicha por el modelo para la n -ésima imagen del i -ésimo sistema, con la posición angular promedio para dicho sistema. A diferencia de la opción 1 en esta opción vamos a comparar de forma directa de a parejas

las posiciones angulares reales predichas por el modelo para las respectivas imágenes que se estén usando, las cuales debe converger a un único valor. De esta forma χ_s^2 se puede definir como

$$\chi_s^2 := \sum_{i=1}^{N_s} \left(\sum_{n=1}^{N_i-1} \sum_{m=n+1}^{N_i} \mathbf{b}_{inm}^T \mathcal{S}_{l,inm}^{-1} \mathbf{b}_{inm} \right), \quad (4-27)$$

con $\mathbf{b}_{inm} = \boldsymbol{\beta}_{in} - \boldsymbol{\beta}_{im}$, siendo $\boldsymbol{\beta}_{in} = \boldsymbol{\theta}_{in} - Z_i \boldsymbol{\alpha}_{in}$ y $\boldsymbol{\beta}_{im} = \boldsymbol{\theta}_{im} - Z_i \boldsymbol{\alpha}_{im}$. En esta ocasión definimos la matriz de covarianzas como

$$S_{l,inm} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,in}^2 \mu_{in}^{-2} + \sigma_{1,im}^2 \mu_{im}^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma_{2,in}^2 \mu_{in}^{-2} + \sigma_{2,im}^2 \mu_{im}^{-2} \end{pmatrix}. \quad (4-28)$$

Incluimos en cada componente de la covarianza el error observacional correspondiente a la posición del par de imágenes que se están comparando, junto con un factor de corrección para dar cuenta de las distorsiones producto del mapeo $\boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\beta}$, siguiendo la discusión realizada para la opción 1. En esta ocasión no es posible implementar de forma directa la matriz de magnificación \mathcal{M} , por lo que la corrección se introduce solamente por medio de las magnificaciones μ_{in} y μ_{im} correspondientes a cada imagen. Esta corrección prueba ser eficaz como veremos en el siguiente capítulo. Si no se incluyen las magnificaciones no es posible obtener una buena aproximación al perfil de masa en regiones que presentan una alta densidad de masa, lo que lleva a obtener un perfil suavizado en dichas regiones.

Ahora bien, la siguiente tarea consiste en derivar (4-27) respecto a un ψ_k arbitrario, lo que lleva a una expresión idéntica a (4-23), es decir

$$\frac{\partial \chi_s^2}{\partial \psi_k} = 2 \sum_{j=1}^N \mathcal{W}_{kj}^{(s)} \psi_j - 2 \mathcal{V}_k^{(s)}, \quad (4-29)$$

cuyos coeficiente $\mathcal{W}_{kj}^{(s)}$ y $\mathcal{V}_k^{(s)}$ en esta ocasión toman la forma (la deducción se encuentra en el A)

$$\mathcal{W}_{kj}^{(s)} := \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_i-1} \sum_{m=n+1}^{N_i} \left(\frac{Z_i^2}{\sigma_{1,inm}^2} \Delta \mathcal{D}_{1,inmk} \Delta \mathcal{D}_{1,inmj} + \frac{Z_i^2}{\sigma_{2,inm}^2} \Delta \mathcal{D}_{2,inmk} \Delta \mathcal{D}_{2,inmj} \right) \quad (4-30)$$

y

$$\mathcal{V}_k^{(s)} := \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_i-1} \sum_{m=n+1}^{N_i} \left(\frac{Z_i}{\sigma_{1,inm}^2} \Delta \mathcal{D}_{1,inmk} \Delta \theta_{1,inm} + \frac{Z_i}{\sigma_{2,inm}^2} \Delta \mathcal{D}_{2,inmk} \Delta \theta_{2,inm} \right), \quad (4-31)$$

siendo

$$\Delta \mathcal{D}_{p,inmq} := \mathcal{D}_{p,inq} - \mathcal{D}_{p,imq} \quad \text{y} \quad \Delta \theta_{p,inm} := \theta_{p,in} - \theta_{p,im}, \quad \text{con} \quad p \in \{1, 2\}. \quad (4-32)$$

4.2.3. Regularización

Estos términos de regularización se encargan de controlar el ruido introducido por los cálculos numéricos, y el ruido propio de las observaciones, al igual que prevenir que las soluciones diverjan. Siguiendo [BSLE05, BCG⁺06, Mer16] tenemos que una forma efectiva de regularizar (4-1) es por medio de las funciones

$$\chi_{\kappa(R)}^2 = \eta_{\kappa} \sum_{i=1}^N \left(\kappa_i - \kappa_i^{(0)} \right)^2, \quad (4-33)$$

y

$$\chi_{\gamma(R)}^2 = \eta_{\gamma} \sum_{i=1}^N \left| \gamma_i - \gamma_i^{(0)} \right|^2 = \eta_{\gamma} \sum_{i=1}^N \left[\left(\gamma_{1,i} - \gamma_{1,i}^{(0)} \right)^2 + \left(\gamma_{2,i} - \gamma_{2,i}^{(0)} \right)^2 \right], \quad (4-34)$$

donde η_{κ} y η_{γ} son constantes (positivas) que determinan el impacto que tiene la regularización sobre la reconstrucción. Aquí η_{κ} tiene un mayor impacto en la región donde el régimen fuerte es dominante, mientras que η_{γ} ayuda a controlar la reconstrucción en la región donde el régimen débil es dominante, particularmente en los casos donde N_w no es muy grande o hay amplias regiones donde no se tienen elipticidades. Es importante hacer énfasis en que valores muy grandes de estas constantes suavizan el perfil de masa, por lo cual el efecto de (4-22) es anulado, mientras que en el otro extremo tenemos que valores muy pequeños producen una sobre estimación del potencial deflector.

Por otro lado, el superíndice (0) en (4-33) y (4-34) indica que los valores de $\kappa_i^{(0)}$, $\gamma_{1,i}^{(0)}$, y $\gamma_{2,i}^{(0)}$ usados son obtenidos de la iteración externa inmediatamente anterior a la actual, siendo interpolados en la nueva red por medio de (4-5). Por tanto, son cantidades constantes a lo largo de cada iteración externa. En el caso de estar en la iteración externa inicial, los valores usados son los valores de entrada (ver figura 4-1). Por último, κ_i , $\gamma_{1,i}$, y $\gamma_{2,i}$ están dados por (4-4).

Ahora bien, al igual que se hizo en el caso del régimen débil y el régimen fuerte, la derivada de (4-33) y (4-34) se puede escribir de forma compacta como

$$\frac{\chi_{r(R)}^2}{\partial \psi_k} := 2 \sum_{j=1}^N \mathcal{W}_{kj}^{(r)} \psi_j - 2\mathcal{V}_k^{(r)}, \quad (4-35)$$

donde r se puede reemplazar por κ ó γ según corresponda. Aquí en el caso de κ tenemos que

$$\mathcal{W}_{kj}^{(\kappa)} := \eta_{\kappa} \sum_{i=1}^N \mathcal{K}_{ik} \mathcal{K}_{ij} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_k^{(\kappa)} := \eta_{\kappa} \sum_{i=1}^N \kappa_i^{(0)} \mathcal{K}_{ik}, \quad (4-36)$$

mientras que para γ

$$\mathcal{W}_{kj}^{(\gamma)} := \eta_{\gamma} \sum_{i=1}^N \left(\mathcal{G}_{1,ik} \mathcal{G}_{1,ij} + \mathcal{G}_{2,ik} \mathcal{G}_{2,ij} \right) \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_k^{(\gamma)} := \eta_{\gamma} \sum_{i=1}^N \left(\gamma_{1,i}^{(0)} \mathcal{G}_{1,ik} + \gamma_{2,i}^{(0)} \mathcal{G}_{2,ik} \right), \quad (4-37)$$

4.2.4. Resultado final

A partir de los resultados anteriores es claro que (4-2) se reduce a

$$\sum_{j=1}^N \left(\mathcal{W}_{kj}^{(w)} + \mathcal{W}_{kj}^{(s)} + \mathcal{W}_{kj}^{(\kappa)} + \mathcal{W}_{kj}^{(\gamma)} \right) \psi_j = \mathcal{V}_k^{(w)} + \mathcal{V}_k^{(s)} + \mathcal{V}_k^{(\kappa)} + \mathcal{V}_k^{(\gamma)}, \quad (4-38)$$

la cual es una ecuación lineal respecto ψ_j , y corresponde a la k -ésima ecuación del sistema de N ecuaciones que requerimos para realizar la reconstrucción.

Aquí los coeficientes $\mathcal{W}_{kj} = \mathcal{W}_{kj}^{(w)} + \mathcal{W}_{kj}^{(s)} + \mathcal{W}_{kj}^{(\kappa)} + \mathcal{W}_{kj}^{(\gamma)}$ son cantidades escalares evaluadas en el j -ésimo punto de red, y representan el peso que tiene dicho punto respecto al k -ésimo punto de red. La mayoría de estos coeficientes es igual que cero, lo cual facilita la solución del sistema de ecuaciones. Igualmente, $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_k^{(w)} + \mathcal{V}_k^{(s)} + \mathcal{V}_k^{(\kappa)} + \mathcal{V}_k^{(\gamma)}$ es una cantidad escalar.

5. Reconstrucción de prueba

En este capítulo vamos a aplicar el método de reconstrucción para dos casos de prueba, y con ello poder evaluar las fortalezas y debilidades que presente el método. Para poder realizar la comparación de los resultados obtenidos con la reconstrucción respecto al modelo real vamos a definir dos cantidades que nos serán de utilidad para esta tarea. Supongamos que X representa la variable de interés, de forma tal que X_R y X_M son respectivamente el valor de la variable obtenida a partir de la reconstrucción y la variable dada por el modelo. De esta forma podemos definir

$$\Delta X = X_R - X_M, \quad (5-1)$$

la cual nos permite determinar dónde se encuentran excesos ($\Delta X > 0$) o defectos ($\Delta X < 0$) en X_R respecto a X_M . Ahora bien, para determinar la magnitud de estos excesos o defectos definiremos la diferencia relativa porcentual como

$$\Delta X_{\%} = 100 \left| \frac{\Delta X}{X_M} \right|. \quad (5-2)$$

Iniciaremos con la descripción de los parámetros implementados para construir los catálogos de prueba (sección 5.1), luego expondremos las propiedades de cada modelo de prueba usado y presentaremos los resultados obtenidos al aplicar el método de reconstrucción. Primero trabajaremos con un modelo sencillo constituido por una lente formada por una Esfera Isoterma No Singular (NIS) (5.2). Para el segundo modelo aumentaremos un poco la complejidad de la lente tomando dos NIS, con lo cual podremos evaluar el comportamiento del método cuando la lente presenta diferentes deflectores cuyo efecto es de diferente magnitud (sección 5.3).

5.1. Catálogos

Con el fin de probar la efectividad del método de reconstrucción debemos crear un catálogo de prueba tanto en el régimen débil como en el régimen fuerte para los modelos de prueba. Para el régimen débil vamos a generar un catálogo de elipticidades considerando 1000 fuentes, donde obtendremos cada componente de la elipticidad de dichas fuentes por medio de un distribución normal con una desviación estándar $\sigma_{\epsilon_s} = 0.2$ (siguiendo [BSLE05]). Así pues, las elipticidades aparentes se obtienen aplicando (3-52), luego, al respectivo resultado le

sumaremos un término dado por una distribución normal con desviación estándar $\sigma_{err} = 0.1$ (siguiendo [BSLE05]) el cual simula la incertidumbre observacional.

Para el régimen fuerte generaremos un catálogo con 40 sistemas de múltiples imágenes, las cuales se obtienen solucionando numéricamente la ecuación de la lente (3-12); en particular usaremos el método descrito en [Bar03]. A cada componente de la posición de las diferentes imágenes le sumaremos el valor obtenido por una distribución normal con desviación estándar $\sigma_s = 0.3$ (*arcseg*) (la cual corresponde a las entradas de las matrices de covarianza (4-19) y (4-28)). Esta misma corrección se introduce a cada componente de las posiciones en el catálogo de elipticidades.

Por último, para ambos catálogos, puesto que estos dependen del corrimiento al rojo al que se encuentran las fuentes, sumaremos de forma aleatoria un término equivalente a lo sumo el $\pm 10\%$ respecto al valor original, con lo cual aseguramos que el corrimiento al rojo no cambie de signo.

5.2. Prueba 1: NIS

Como primera prueba vamos a aplicar el método a una lente constituida por una Esfera Isoterma No Singular, comúnmente conocida como NIS por sus siglas en inglés. Esta distribución se encuentra caracterizada por un potencial deflector de la forma [HCT14]

$$\psi = R_0 \sqrt{\theta^2 + \theta_0^2} \quad \text{con} \quad R_0 := \frac{4\pi\sigma^2 D_{lf}}{c^2 D_f}, \quad (5-3)$$

el cual posee simetría axial pues solamente depende de la coordenada radial $\theta = |\boldsymbol{\theta}| = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}$. Este potencial está caracterizado por su dependencia de las distancias angulares diametrales entre el observador y la fuente D_f y entre la lente y la fuente D_{lf} , la dispersión de velocidades σ y el radió angular del núcleo de la distribución θ_0 .

Como discutimos en el capítulo 3, la convergencia κ es proporcional a la densidad de masa de la distribución o lente cuando esta es proyectada en el plano de la lente, así que el perfil de masa se obtiene de forma directa por medio de κ . Es indispensable entonces obtener κ para una NIS pues nos permite generar el modelo de prueba y posteriormente comparar los resultados de la reconstrucción. Por tanto, aplicando la ecuación de Poisson (3-14) al potencial deflector (5-3) obtenemos que κ para una NIS toma la forma

$$\kappa = \frac{1}{2} \nabla^2 \psi = \frac{R_0}{2} \left[\frac{\theta^2 + 2\theta_0^2}{(\theta^2 + \theta_0^2)^{3/2}} \right], \quad (5-4)$$

tal que junto con (3-8) podemos afirmar que para una NIS la masa encerrada en un radio angular θ es

$$M(\leq \theta) = 2\pi D_i^2 \Sigma_{cr} \int_0^\theta \kappa(\theta') \theta' d\theta' = \frac{\pi\sigma^2 D_l}{G} \frac{\theta^2}{\sqrt{\theta^2 + \theta_0^2}}, \quad (5-5)$$

donde el término D_l^2 proviene del término de integración $\xi' d\xi' = D_l^2 \theta' d\theta'$.¹ Podemos ver que en el caso límite $\theta_0 = 0$ recobramos la masa correspondiente a una Esfera Isoterma Singular (conocida como SIS por sus siglas en inglés) [SKW06]. Haremos uso de (5-5) más adelante para contrastar los resultados de la reconstrucción.

Ahora bien, si queremos hacer uso de las elipticidades como un dato de entrada para restringir la reconstrucción, tal como vimos en la sección 3.7 tenemos que $\langle \epsilon \rangle$ (3-56) es un estimador del shear reducido g , por tanto, ya que tenemos κ necesitamos obtener el shear γ para poder crear un catálogo de elipticidades de prueba, así pues, aplicando la definición de γ (3-15), tenemos que su respectivas componentes son

$$\gamma_1 = \frac{R_0}{2} \left[\frac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{(\theta^2 + \theta_0^2)^{3/2}} \right] \quad \text{y} \quad \gamma_2 = -\frac{R_0 \theta_1 \theta_2}{(\theta^2 + \theta_0^2)^{3/2}}. \quad (5-6)$$

Por último, debemos solucionar la ecuación de la lente (3-12) para poder tener un catálogo de múltiples imágenes, por ende necesitamos el ángulo de deflexión α (3-10), con lo cual este toma la forma

$$\alpha = \nabla \psi = \frac{R_0 \theta}{\sqrt{\theta^2 + \theta_0^2}}, \quad (5-7)$$

lo que permite escribir la ecuación de la lente como

$$\beta = \left(1 - \frac{R_0}{\sqrt{\theta^2 + \theta_0^2}} \right) \theta \quad (5-8)$$

Es claro a partir de (5-8) que la posición real y aparente de la fuente son proporcionales, por lo cual las imágenes aparentes deben estar ubicadas sobre la recta que pasa por el origen de coordenadas y la posición real de la fuente. Por esta razón es conveniente escribir (5-8) solamente en términos de las respectivas coordenadas radiales, es decir

$$\beta = \left| 1 - \frac{R_0}{\sqrt{\theta^2 + \theta_0^2}} \right| \theta, \quad (5-9)$$

cuya solución arroja las posible imágenes asociadas a la fuente de interés. Si la solución implica que el término al interior del valor absoluto es negativo, eso quiere decir que hay un desfase de π radianes entre la coordenada angular de la fuente real y la respectiva imagen, si por el contrario dicho término es positivo entonces la fuente y su imagen poseen la misma coordenada angular.

Para entender la formación de imágenes en el sistema debemos determinar las correspondientes curvas críticas y cústicas, no obstante, como describimos en la sección 3.5 en general resolver $\det \mathcal{J} = 0$ no se puede hacer analíticamente, afortunadamente cuando la lente posee una simetría axial es posible hallar dichas curvas a través de la ecuación

$$\det \mathcal{J} = \frac{\beta}{\theta} \frac{d\beta}{d\theta} = 0 \quad \text{con} \quad \theta \neq 0, \quad (5-10)$$

¹Esta expresión para la masa es válida siempre y cuando se tengan θ y θ_0 en radianes.

la cual se puede obtener fácilmente a partir de (3-30) considerando coordenadas polares [SKW06]. Con (5-10) hay un mayor chance de poder hallar las curvas críticas de forma analítica pues éstas son resultado de resolver $\beta(\theta)/\theta = 0$ (cuya curva cáustica es el punto $\beta = \mathbf{0}$) y $d\beta(\theta)/d\theta = 0$. Como resultado para la NIS obtenemos dos curvas críticas con simetría axial respecto al eje de simetría de la lente, dando como resultado

$$\frac{\beta(\theta)}{\theta} = 0 \implies \overbrace{\theta^2 = R_0^2 - \theta_0^2}^{\text{Curva crítica 1}} \quad (5-11)$$

y

$$\frac{d\beta(\theta)}{d\theta} = 0 \implies \overbrace{\theta = \theta_0 R_0 \left[\left(\frac{\theta_0}{R_0} \right)^{1/3} - \frac{\theta_0}{R_0} \right]}^{\text{Curva crítica 2}}, \quad (5-12)$$

cuyas respectivas curvas cáusticas se obtiene al realizar el mapeo $\theta \rightarrow \beta$ (5-8), las cuales al igual que las curvas críticas poseen simetría axial respecto al eje de simetría de la lente, tal que

$$\text{Curva crítica 1} \implies \overbrace{\beta = \mathbf{0} \text{ o su equivalente } \beta^2 = 0}^{\text{Curva cáustica 1}} \quad (5-13)$$

y

$$\text{Curva crítica 2} \implies \overbrace{\beta^2 = \theta_0 R_0 \left[\left(\frac{\theta_0}{R_0} \right)^{1/3} - \frac{\theta_0}{R_0} \right] \left[1 - \left(\frac{R_0}{\theta_0} \right)^{2/3} \right]^2}^{\text{Curva cáustica 2}} \quad (5-14)$$

Es claro que la curva cáustica 1 está dada por un punto o un círculo de radio cero respecto al eje de simetría de la lente. Ahora bien, para lentes con simetría axial es posible obtener $\beta(\theta)$ de forma equivalente a (5-9), lo que facilita estudiar la formación de imágenes en el sistema de forma gráfica. Si graficamos $\beta(\theta)$ tenemos que para una fuente ubicada en $\beta_p = (\beta_p, \phi)$ es posible obtener el número de imágenes producidas por la lente y sus respectivas coordenadas radiales por medio de los puntos de corte entre la recta constante β_p y la curva $\beta(\theta)$, es decir son solución de la ecuación $\beta_p = \beta(\theta)$.

5.2.1. Modelo

Como continuación de la descripción realizada anteriormente respecto a las propiedades de una NIS, vamos a considerar como modelo de prueba una lente constituida por una NIS ubicada a un corrimiento al rojo $z_l = 0.375$ con $\sigma = 1500 \text{ km/s}$ y $\theta_0 = 0.375 \text{ arcmin}$. Tomaremos una fuente de referencia ubicada a un corrimiento al rojo $z = 9$. Bajo estas condiciones el perfil de masa dado por la convergencia asociada a la lente se muestra en la figura 5-1 (izquierda), y la masa encerrada en un radio θ (es decir $M(\leq \theta)$ (5-5)) se muestra en la figura 5-1 (derecha).

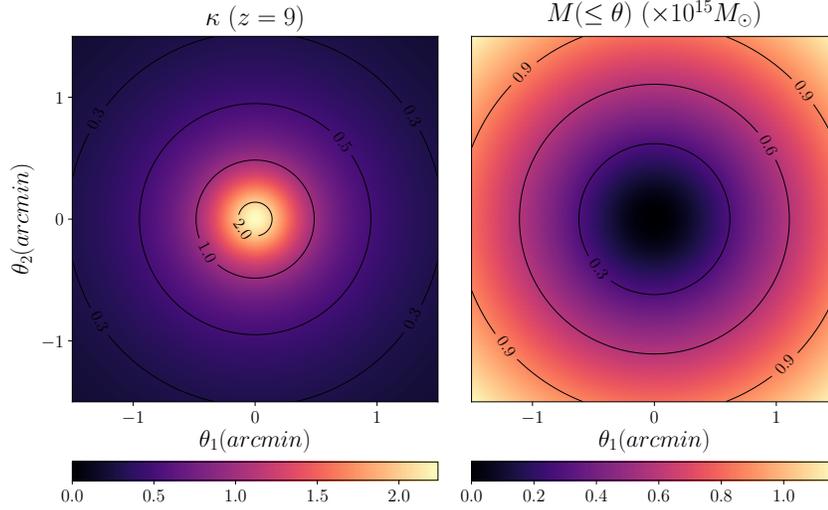


Figura 5-1.: A la izquierda se presenta la convergencia correspondiente al modelo de prueba para una fuente de referencia ubicada a un corrimiento al rojo $z = 9$, mientras que a la derecha se presenta la masa encerrada en un radio θ . Las curvas de nivel en la figura de la derecha indican la masa encerrada por dicha curva.

Por otro lado, un factor importante en la reconstrucción no es solo recobrar el perfil de masa sino también las curvas críticas y cáusticas, pues como discutimos en la sección 3.6 estas son indispensable para estudiar la formación de imágenes. Por tanto, recobrar estas curvas es un indicativo de la efectividad del método de reconstrucción. Como ya hemos mencionado, en general las curvas críticas deben obtenerse numéricamente, por esta razón aplicamos el método descrito en [Bar03], el cual para nuestro modelo arroja las curvas que se muestran en la figura 5-2 (izquierda), quienes coinciden con (5-11) y (5-12). En este caso particular conocemos la forma real de dichas curvas, lo que permite mostrar que el método numérico para hallarlas funciona y que se encuentra bien implementado. No obstante, para lentes que presentan una forma muy irregular, como sería el caso de un cúmulo galáctico real, podemos determinar si las curvas críticas halladas son correctas realizando la gráfica de $|\mu|$ (3-30) pues las curvas críticas corresponden a las regiones donde se presentan grandes magnificaciones (que tienden a infinito) tal como se muestra en la curva de color amarillo (región de gran magnificación) en la figura 5-2 (centro) para nuestro modelo. Como resultado podemos ver que en efecto la gráfica de $|\mu|$ en el dominio de interés indica la posición y forma de las curvas críticas ya que coinciden con las curvas halladas numéricamente tal como se presenta en la figura 5-2 (derecha).

Con el fin de entender el proceso de formación de imágenes vamos a considerar cuatro casos de estudio. Para ello supongamos que la fuente se encuentra ubicada en la posición $\beta = (\beta_p, \phi)$ con ϕ constante, tenemos entonces que $\beta(\theta)$ dada por (5-9) arroja como resultado la curva de color azul que se muestra en la figura 5-3, en donde la parte discontinua representa imágenes cuya coordenada angular es $\phi + \pi$, mientras que la parte sólida representa imágenes

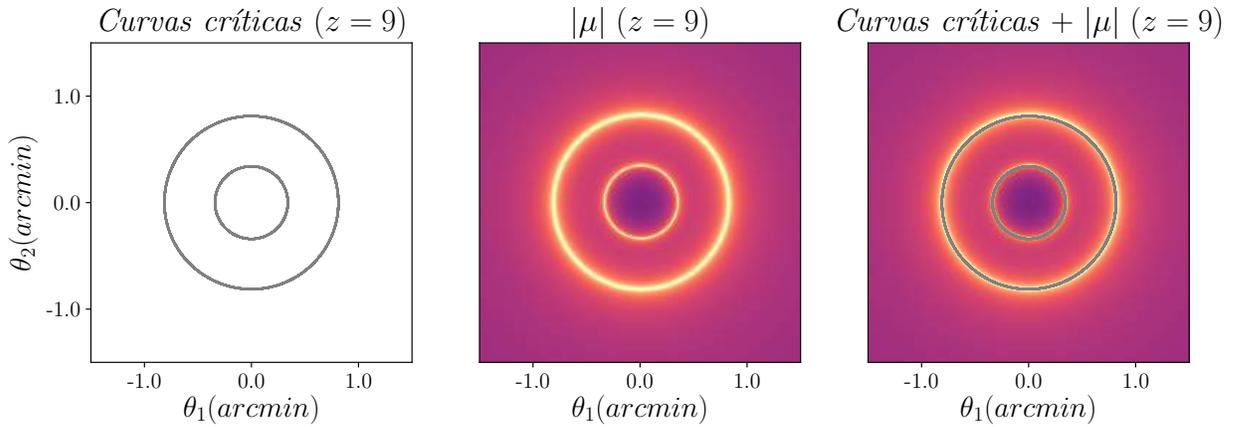


Figura 5-2.: A la izquierda se presentan las curvas críticas correspondiente al modelo de prueba para la fuente de referencia. En el centro se muestra en escala re colores logarítmica (para poder apreciar de forma clara su estructura) la gráfica de $|\mu|$ en la región de interés, donde las regiones de mayor intensidad (color amarillo) son aquellas que presentan mayor magnitud. Por último, a la derecha se presenta una superposición de las curvas críticas y $|\mu|$. La fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$.

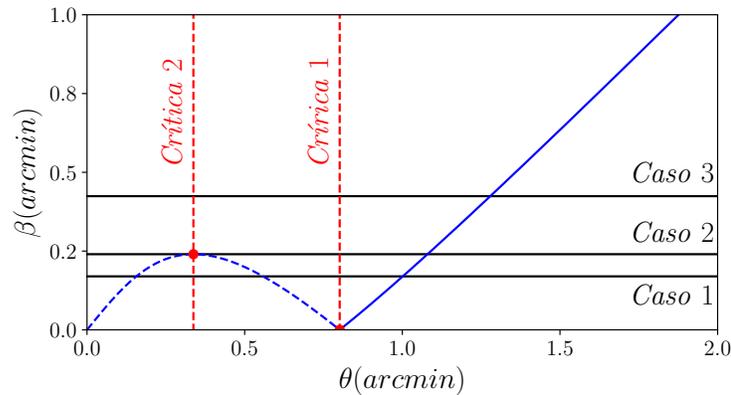


Figura 5-3.: Gráfica de $\beta(\theta)$ (color azul) donde se muestra formación de imágenes en tres casos diferentes dada una fuente en tres posiciones diferentes (recta horizontales de color negro). Las imágenes que se encuentren sobre la curva discontinua de color azul presentan un desfase de π radianes respecto a la coordenada angular de la fuente, mientras que las imágenes que se encuentren sobre la curva continua de color azul poseen la misma coordenada angular que la fuente. Los puntos rojos presentan la posición de las curvas críticas (al proyectar sobre el eje θ) y las curvas cáusticas (al proyectar sobre el eje β).

con ϕ como coordenada angular. En esta misma figura se muestra $\beta_p = \beta(\theta)$ para los casos 1 – 3, donde es claro que estas rectas cortan en tres, dos y un punto con la curva de color azul respectivamente. Como describimos anteriormente, estos puntos de corte nos indican la cantidad y posición de las imágenes. De forma adicional la figura 5-4 nos servirá de apoyo para confirmar dichas afirmaciones, Para dicha figura en cada caso tenemos que la figura de la izquierda representa la posición de la fuente (punto de color negro) respecto a las curvas cáusticas presentes (curvas de color gris). La figura del centro muestra la posición de la imágenes generadas por la lente (puntos de color negro) respecto a las curvas críticas (curvas de color gris). Por último, la figura de la derecha muestra el potencial de Fermat y sus respectivas curvas de nivel, donde se indica si la imagen producida es un máximo (punto de color rojo), un mínimo (puntos de color azul) ó un punto de silla (punto de color verde) de dicho potencial:

- **Caso 0:** Tomemos $\beta_p = 0$, en este caso la fuente se encuentra sobre la curva cáustica 1 (5-13), dando como resultado dos posibles imágenes: La primera imagen se forma en $\theta = 0$ y está débilmente magnificada, por lo cual en la práctica no podría ser observada. La segunda imagen está dada como un anillo producido sobre la curva crítica 1 (5-11). En este caso no es conveniente hacer uso del criterio de la segunda derivada (ver sección 3.6) ya que la fuente al encontrarse sobre una curva cáustica satisface $\det \mathcal{J} = 0$.
- **Caso 1:** Consideremos que β_p ha aumentado y ahora la fuente se encuentra entre las dos curvas cáusticas producidas en este sistema. En este caso se forman tres imágenes que es el número máximo de imágenes que puede generar el sistema. Dos de ellas se producen en el interior de las respectivas curvas críticas y poseen $\phi + \pi$ como coordenada angular, donde la imagen dentro de la curva crítica 2 corresponde a un mínimo del potencia de Fermat, mientras que la imagen que se encuentra entre las dos curvas críticas es un punto de silla del potencial de Fermat. Por último, la tercera imagen se produce fuera de la región crítica del sistema por lo cual corresponde a un mínimo del potencial de Fermat .
- **Caso 2:** Si β_p aumenta lo suficiente hasta coincidir con la curva cáustica 2 (5-14) se producen dos imágenes. Tenemos que las dos imágenes internas descritas en el caso anterior se mezcla en la curva crítica 2 (5-12) dando como resultado una imagen que corresponde a un punto de silla del potencial de Fermat. La segunda imagen producida fuera de la región crítica se encuentra fuera de la región crítica corresponde a ún mínimo del potencial de Fermat.
- **Caso 3:** Una vez la fuente está fuera de las curvas cáusticas tenemos como resultado una única imagen ubicada fuera de la región crítica la cual corresponde a un mínimo del potencial de Fermat.

Como resultado de evaluar estos cuatro casos podemos ver que las imágenes se crean y se destruyen en las curvas críticas produciendo un cambio de ± 2 imágenes. En este caso

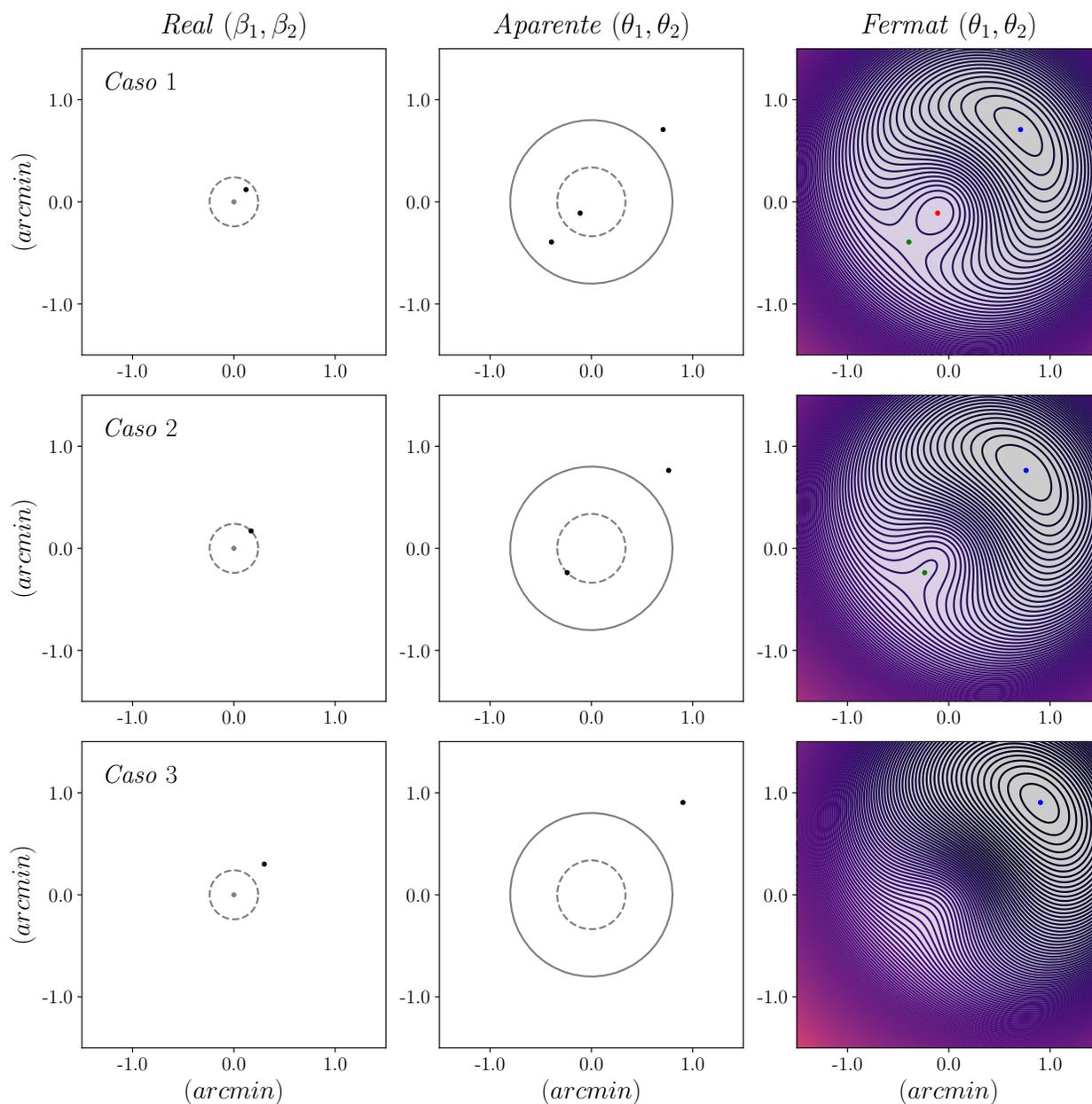


Figura 5-4.: Formación de imágenes para una NIS. A la derecha se presentan las curvas cáusticas y la fuente. En el centro se encuentran las respectivas curvas críticas y las imágenes producidas. A la derecha se presenta el potencial de Fermat y sus curvas de nivel. La fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$.

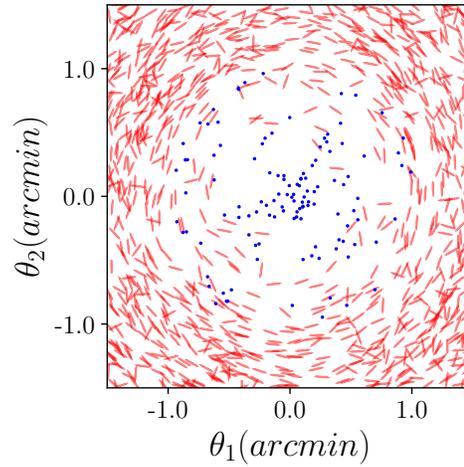


Figura 5-5.: Catálogo de prueba. Las curvas de color rojo representan la orientación observada de las fuentes, mientras que los puntos de color azul representan la posición de los sistemas de múltiples imágenes.

particular vemos que una lente caracterizada por una NIS satisface el teorema del número impar de imágenes descrito en la sección 3.6.

Para este modelo de lente los dos catálogos que usaremos se muestran en la figura 5-5, en donde los puntos de color azul representan las posiciones de las múltiples imágenes, mientras que las barras de color rojo representan la orientación de las fuentes para quienes se conoce su elipticidad. En el caso ideal donde no se considera ninguna fuente de error se tendría que la orientación de las fuentes sigue la forma de la curva crítica más externa; círculos en este caso, o en su defecto son tangenciales a las curvas de contorno del perfil. Respecto al catálogo correspondiente al régimen fuerte tenemos que los 40 sistemas considerados poseen tres imágenes, pues como discutimos en la sección anterior para una lente formada por una NIS solamente se puede tener tres ó dos múltiples imágenes, donde el segundo caso se da en dos situaciones muy particulares que son difíciles de conseguir cuando las fuentes se distribuyen de forma aleatoria tanto en posición como en corrimiento al rojo.

5.2.2. Reconstrucción

Con el objetivo de entender las capacidades del método vamos a realizar la reconstrucción solamente utilizando múltiples imágenes, y luego realizaremos la reconstrucción utilizando también las elipticidades de las fuentes de fondo. Además, recordemos que disponemos de dos funciones de penalización χ_s^2 , por tanto, analizaremos cuál de dichas funciones presenta mejores resultado ó si en su defecto son igualmente efectivas.

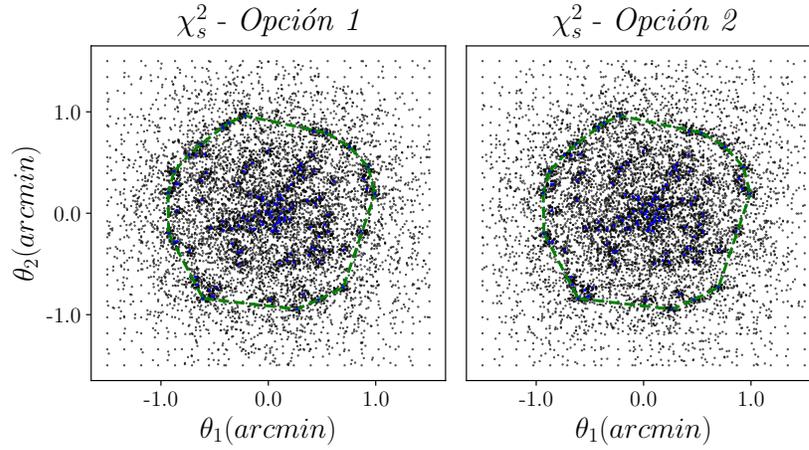


Figura 5-6.: Red final resultado de la reconstrucción para las dos funciones de penalización disponibles en el régimen fuerte (puntos de color negro. Los puntos de color azul corresponden a la posición de los sistemas de múltiples imágenes, mientras que la curva discontinua de color verde delimita este conjunto de puntos.

Régimen fuerte

En esta reconstrucción para las dos opciones de χ_s^2 hemos tomado una red inicial con 20×20 puntos de red definida sobre una región de 3×3 (*arcmin*)². En cada punto de red se ha impuesto $\psi^{(0)} = 0$, es decir que no estamos imponiendo ninguna condición inicial respecto a la forma del perfil. Ahora bien, en cuanto a la regularización los valores que mostraron un buen resultado son $\eta_\kappa = \eta_\gamma = 120$. Valores más grandes (a partir de 200) restringen la magnitud del pico central presente en el perfil, y valores más pequeños producen picos en toda la distribución que no corresponden con el perfil real. Por otro lado, los procesos de interpolación y obtención de derivadas se realizaron con 25 VC. Por otro lado, respecto al centro de la distribución en cada iteración externa se agregaron 1000 nuevos puntos de red siguiendo una distribución normal con una desviación estándar de 0.7 (*arcmin*); recordemos que estos puntos permiten una mejor resolución de las curvas críticas y del núcleo de la distribución. De forma análoga, el proceso de refinamiento se realizó tomando un radio inicial de 0.5 (*arcmin*) el cual se redujo en un factor de 0.7 en cada iteración externa. Para esta reconstrucción particular se realizaron 7 iteraciones externas.

Como producto de la reconstrucción se obtuvieron los perfiles que se presentan en la figura 5-7 los cuales están definidos sobre las redes dadas en la figura 5-6. Bajo estas condiciones tenemos que respecto a χ_s^2 la opción 1 arrojó en términos generales una mejor reproducción del perfil original (ver figura 5-7 (superior)) pues la región dentro de la curva discontinua de color verde (donde el régimen fuerte es dominante) la mayor parte de esta región presenta una diferencia relativa menor que el 10%. Un resultado común consiste en la presencia de una sobre estimación en la convergencia en una región en forma de anillo, la cual se

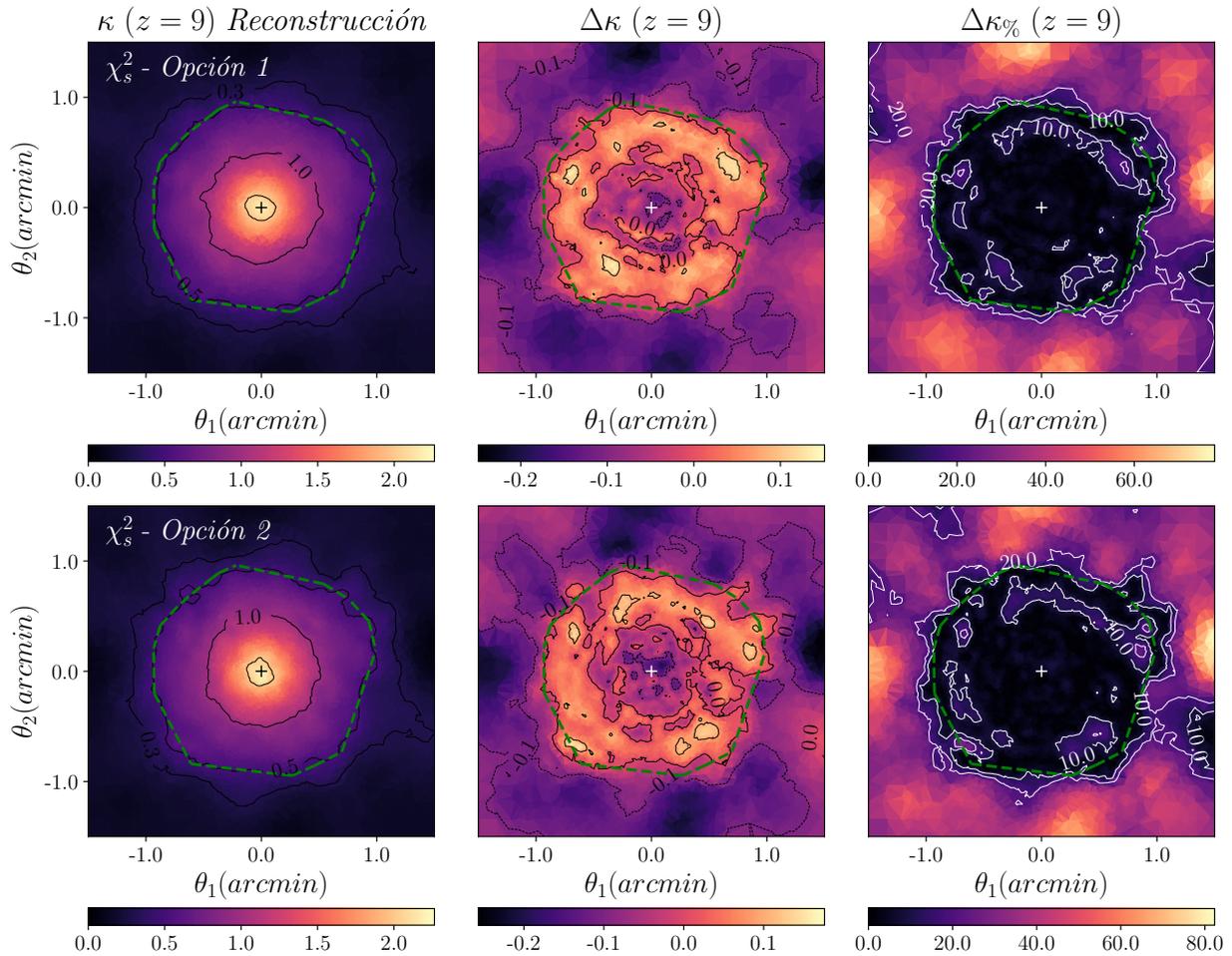


Figura 5-7.: Resultados obtenidos para una NIS utilizando solamente el catálogo de múltiples imágenes (régimen fuerte). Aquí la fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$. En las tres figuras la curva discontinua de color verde representa la frontera que encierra las múltiples imágenes. La figura de la izquierda representa la convergencia reconstruida, mientras que en el centro y a derecha tenemos respectivamente la diferencia (5-1) y la diferencia relativa porcentual (5-2) entre la convergencia reconstruida y la real (dada por el modelo)

presentó en las diversas reconstrucciones de prueba que se realizaron, la única diferencia radica en la magnitud de esta sobre estimación. Es claro que fuera de la región crítica no es posible hacer una estimación confiable del perfil. Esta afirmación toma mayor validez si consideramos la masa encerrada a un radio θ ($M(\leq \theta)$) dada en la figura 5-8. En ambos casos la diferencia relativa de masa entre el modelo y la reconstrucción es menor que el 10 % para $\theta \leq 1$ (arcmin), donde este radio corresponde al radio que cubren los sistemas de múltiples imágenes. A partir de este radio la densidad estimada por la reconstrucción disminuye, lo

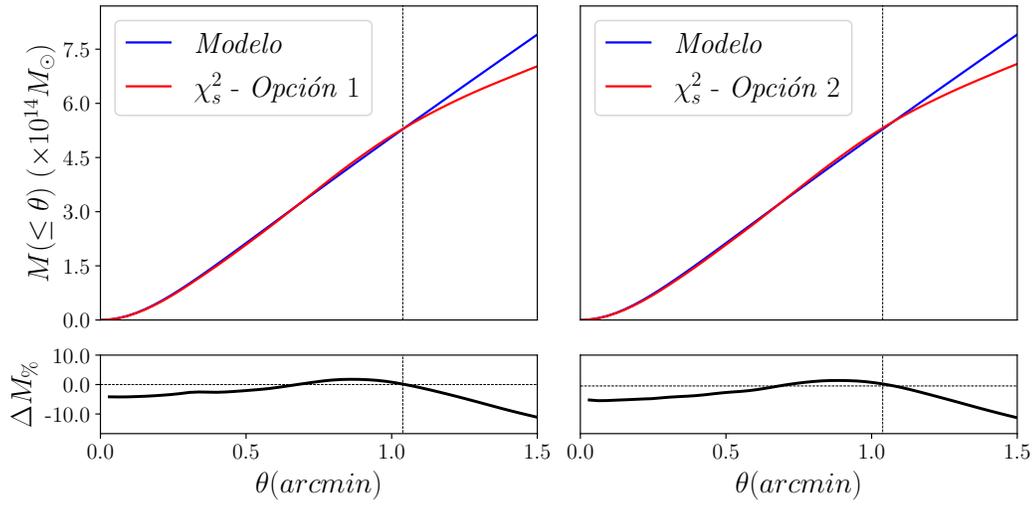


Figura 5-8.: Masa encerrada en un radio θ . La recta vertical en $\theta \approx 1.03$ (*arcmin*) marca el radio que delimita el sistema de múltiples imágenes.

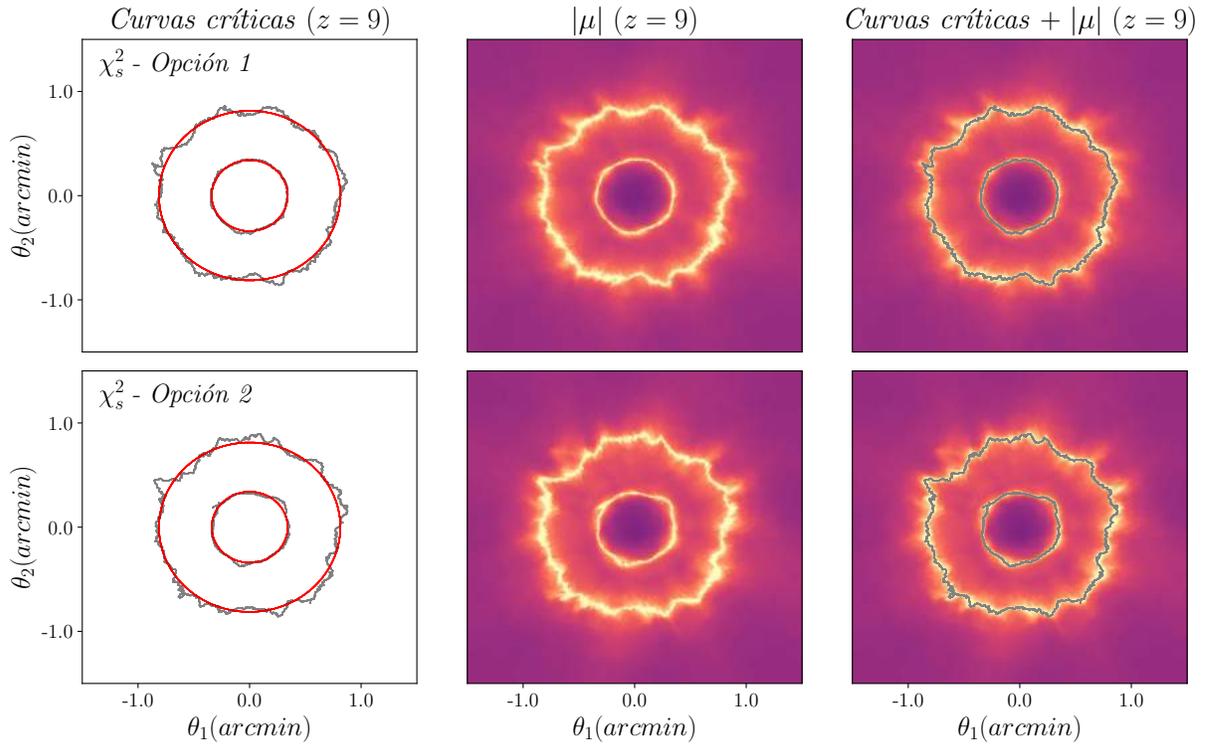


Figura 5-9.: Curvas críticas obtenidas a partir de la reconstrucción. Se comparan las curvas críticas dadas por el modelo (color rojo) con aquellas dadas por la reconstrucción (color gris). la fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$.

cual representa un disminución en la masa estimada.

Por otro lado, podemos ver que también se recobran las curvas críticas, no obstante, debemos tener presente que debido a la naturaleza del método las curvas no son igual de suaves que las reales o las que se podrían obtener con un método paramétrico.

Una característica que suelen compartir los métodos de forma libre es la dificultad para recobrar las posición de los sistemas de múltiples imágenes [SKW06]. En esta reconstrucción tenemos que para ambas funciones de penalización de los 40 sistemas empleados no fue posible recobrar de forma cerrada las imágenes para uno de ellos, pues como resultado de la reconstrucción la fuente (representada por un punto de color azul en la figura 5-10) se encuentra sobre la curva cáustica central. Vemos que el recobrar este sistema esta sujeto a la suavidad con la que sea posible recobrar las curvas críticas, más no necesariamente con el aumento de los puntos de red. Respecto a las curvas cáusticas resultado de la reconstrucción podemos ver que mantienen aproximadamente su simetría axial, sin embargo, su radio se ha reducido (como resultado del déficit en el valor de la convergencia en la región interior) y su centro se ha trasladado respecto a las curvas originales. Vale la pena agregar que según la descripción hecha respecto a la formación de imágenes para una NIS, si se forman múltiples imágenes las fuentes deben estar dentro de las curvas cáusticas, cosa que se satisface en ambos casos, tal como se puede apreciar en la figura 5-10.

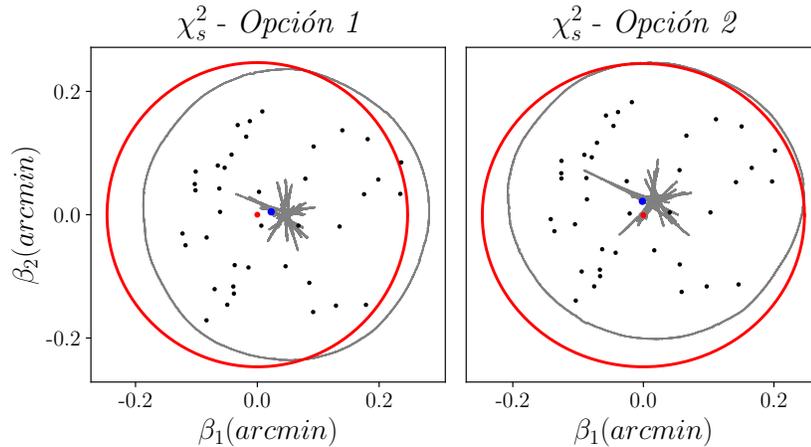


Figura 5-10.: Curvas cáusticas obtenidas en el régimen fuerte. En ambas figuras las curvas críticas dadas por el modelo son aquellas de color rojo, mientras que sus equivalentes dadas por la reconstrucción son de color gris. Los puntos de color negro corresponden a las posiciones de las fuentes obtenidas por cada reconstrucción, y el punto de color azul representa la posición de la fuente cuyas imágenes no fue posible recobrar de forma cerrada. La fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$.

Régimen fuerte + débil

Con respecto a las reconstrucciones anteriores las diferencias en este caso radican en la inclusión del catálogo de elipticidades, solamente se realizaron 6 iteraciones externas, con un aumento de 500 nuevos puntos de red en lugar de 1000. Este último cambio se debe a que al incluir las elipticidades se produce un aumento significativo en el número de puntos de red durante el proceso de refinamiento. Las demás cantidades se mantienen fijas con el fin de poder observar la influencia que tienen las elipticidades en la reconstrucción.

Los perfiles obtenidos resultado de la reconstrucción se pueden observar en la figura 5-12, los cuales se encuentran definidos respectivamente en las redes que se muestran en la figura 5-11. Es claro que hay una mejora substancial en los resultados pues se ha producido una disminución de al menos un 20 % en la diferencia relativa, y solamente son pequeñas regiones donde se produce una diferencia relativa mayor que el 20 %, especialmente en aquellas zonas de baja densidad. Además, respecto a χ_s^2 se ha producido una mejora en la estimación del perfil al interior de la región crítica en el caso de la opción 2, mientras que para la opción 1 ha habido un aumento en la estimación de la convergencia respecto a los resultados que se muestran en la figura 5-7. Si bien una región que presenta una diferencia relativa de alrededor del 40 % puede no parecer un resultado prometedor, al observar la masa encerrada en un radio θ como se muestra en la figura 5-13, es claro que a partir de $\theta = 1$ el déficit de masa presente en la figura 5-8 se reduce significativamente. Por tanto, incluir las elipticidades presenta un gran valor agregado en la reconstrucción, pues en efecto permite ampliar el campo de acción del método.

La dificultad que presenta el método para recobrar el perfil de masa en la región más externa

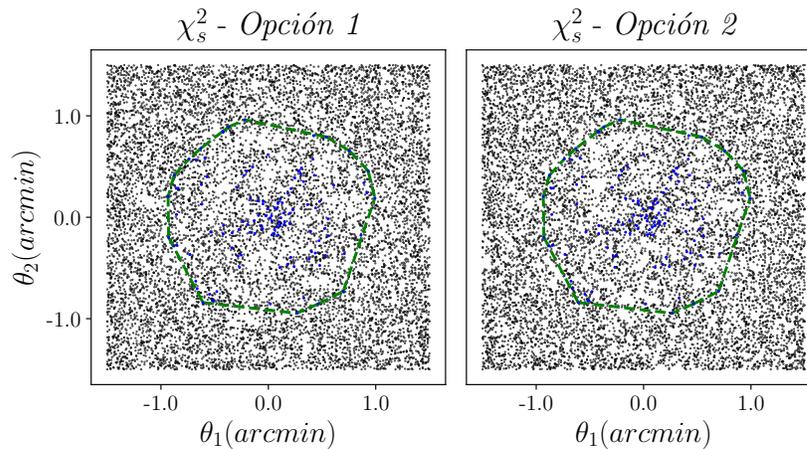


Figura 5-11.: Red final (puntos de color negro) cuando se incluyen múltiples imágenes y elipticidades. Los puntos de color azul corresponden a la posición de los sistemas de múltiples imágenes, mientras que la curva discontinua de color verde delimita este conjunto de puntos.

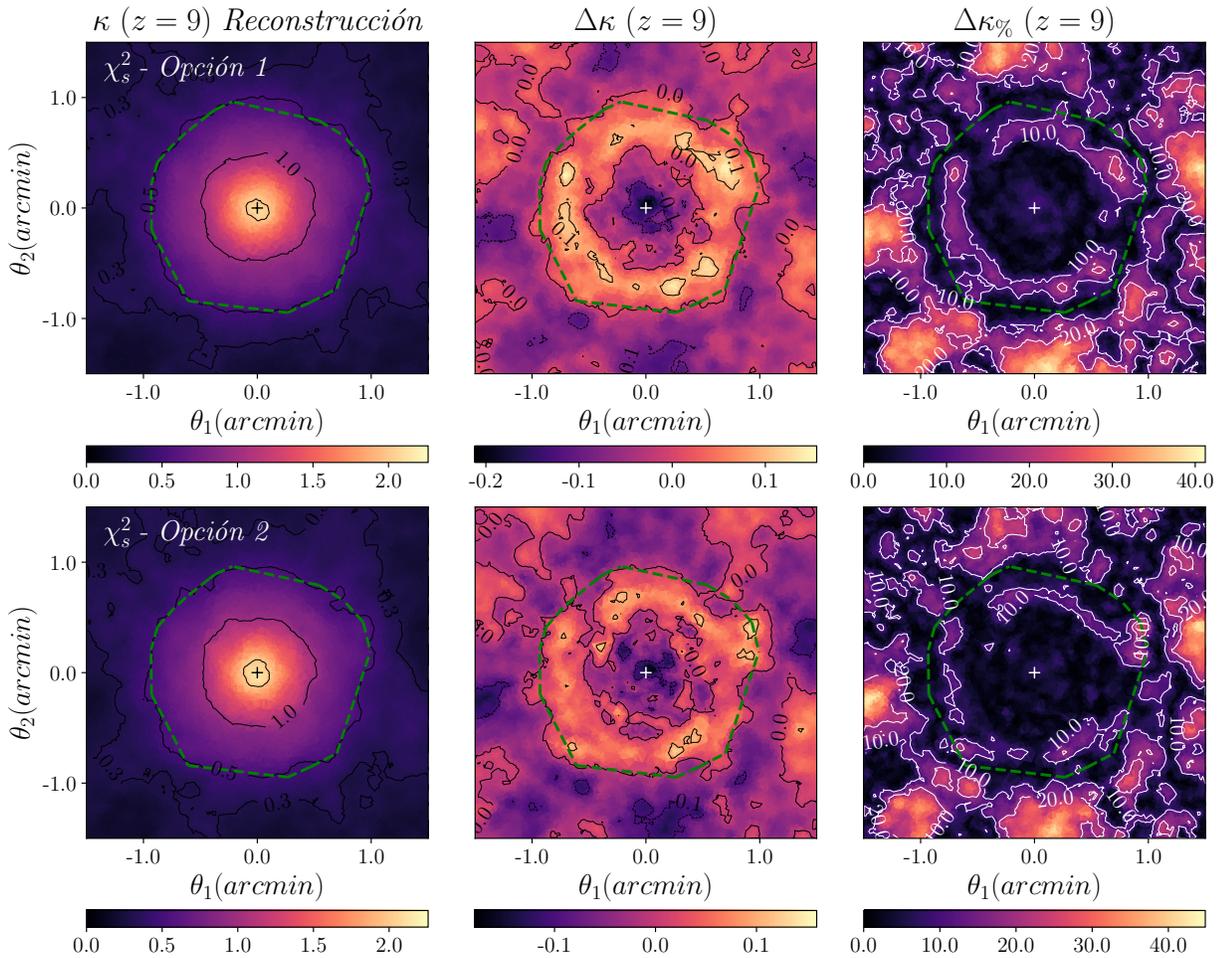


Figura 5-12.: Resultados obtenidos para una NIS utilizando los catálogos de múltiples imágenes y elipticidades (régimen fuerte + débil). Aquí la fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$. En las tres figuras la curva discontinua de color verde representa la frontera que encierra las múltiples imágenes. La figura de la izquierda representa la convergencia reconstruida, mientras que en el centro y a derecha tenemos respectivamente la diferencia (5-1) y la diferencia relativa porcentual (5-2) entre la convergencia reconstruida y la real (dada por el modelo)

en este caso particular se debe la orientación de las fuentes de fondo, ya que no son del todo tangenciales a las líneas de contorno del perfil (ver figura 5-5).

Ahora bien, la capacidad de recobrar la posición y forma aproximada de las curvas críticas se mantiene, tal como se puede verificar en la figura 5-14. Desafortunadamente, a pesar de la inclusión de las elipticidades aún se mantiene la dificultad de recobrar de forma cerrada las imágenes del mismo sistema presente cuando se utilizaron solamente las múltiples imágenes. Para ambas reconstrucciones la dificultad se presenta debido a que dicha fuente sigue

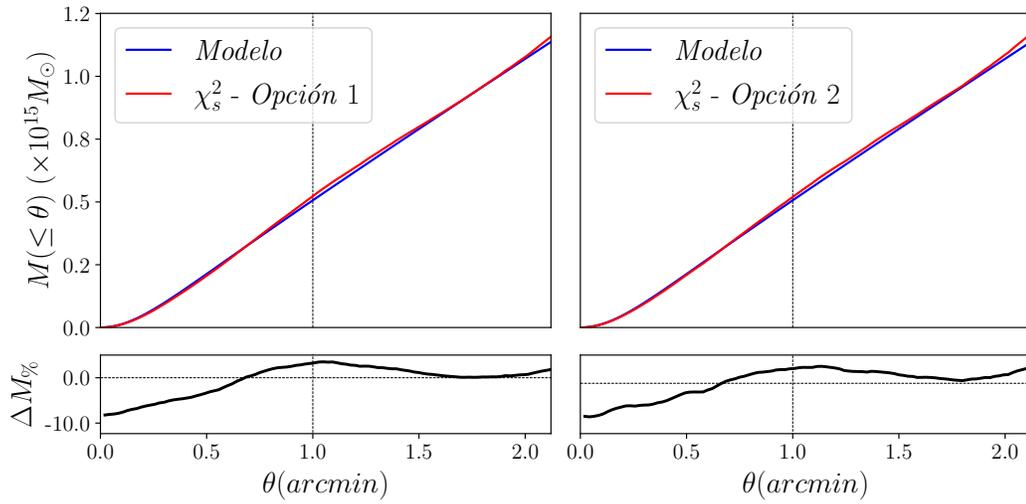


Figura 5-13.: Masa encerrada en un radio θ . La recta vertical en $\theta \approx 1$ (*arcmin*) marca el radio que delimita el sistema de múltiples imágenes.

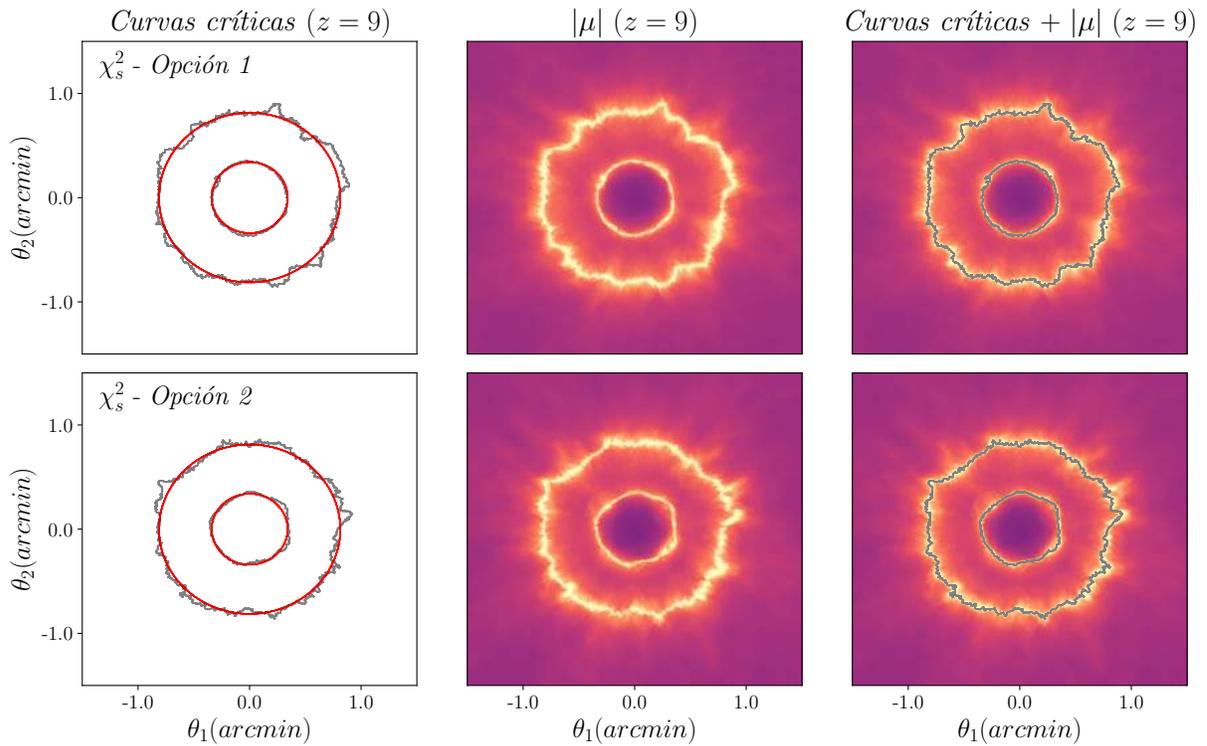


Figura 5-14.: Curvas críticas obtenidas a partir de la reconstrucción. Se comparan las curvas críticas dadas por el modelo (color rojo) con aquellas dadas por la reconstrucción (color gris). La fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$.

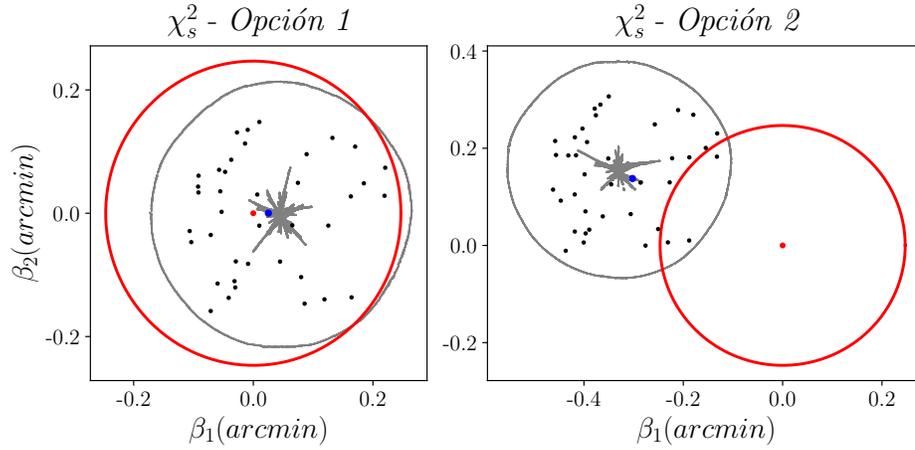


Figura 5-15.: Curvas cáusticas obtenidas en el régimen tanto fuerte como débil. En ambas figuras las curvas críticas dadas por el modelo están son aquellas de color rojo, mientras que sus equivalentes dadas por la reconstrucción son de color gris. Los puntos de color negro corresponden a las posiciones de las fuentes obtenidas por cada reconstrucción, y el punto de color azul representa la posición de la fuente cuyas imágenes no fue posible recobrar de forma cerrada. La fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$.

ubicándose sobre la respectiva curva cáustica interna.

La única forma de solucionar este problema es encontrando una combinación de parámetros que permitan suavizar los contornos de la reconstrucción y por ende de las curvas críticas. Una posibilidad es el aumentando del número de VC que se utilizan para los procesos de interpolación y cálculo de derivadas, o también es posible modificando las constantes de regularización. En el caso de aumentar el número de VC como consecuencia se produce un aumento importante en el número de puntos de red en cada iteración externa, y por tanto un aumento en el tiempo de cálculo de cada iteración interna. Se debe ser prudente con el valor que se asigna estos parámetros, pues si bien pueden suavizar la reconstrucción también pueden conducir a una sobre estimación de densidad (significativa en muchos casos) en las regiones externas de la distribución, al igual que producir una dificultad en la reproducción del perfil en las regiones de mayor densidad. Por ende, es conveniente implementar diferentes combinaciones de parámetros iniciales con modelos de prueba, para establecer un rango en el que es posible obtener buenos resultados y luego pasar a una distribución real.

Respecto a las curvas cáusticas tenemos que para la opción 1 (ver figura 5-15) no se presenta un cambio significativo al incluir las elipticidades, pues el radio de la curva externa ha disminuido respecto a la curva original, y su centro se ha movido hacia la derecha una pequeña fracción, no obstante, en esta ocasión todas las fuentes están dentro de la curva cáustica externa original. Por otro lado, para la opción 2 las curvas cáusticas presentan un cambio importante, pues el corrimiento del centro de las curvas es de mas de 0.2 (*arcmin*), haciendo

que este se encuentre incluso por fuera de la curva cáustica externa original. Este corrimiento tanto de las fuentes como de las curvas cáusticas respecto al modelo real son consecuencia de la libre evolución que presente el potencial deflector a lo largo de la reconstrucción. A continuación vamos a discutir cómo disminuir este efecto a la hora de obtener las curvas cáusticas.

5.2.3. Corrección

Hasta el momento hemos dejado que el potencial deflector evolucione libremente a lo largo de la reconstrucción, y como vimos anteriormente funciona bastante bien. El problema radica en el escalamiento por el cual se ve afectado el potencial deflector [BSLE05]

$$\psi \rightarrow \psi + \psi_0 + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\theta}, \quad (5-15)$$

donde ψ_0 es un escalar y \mathbf{a} un vector bidimensional. Ambas cantidades son constantes. Esta transformación mantiene κ y γ invariantes, sin embargo, el ángulo de deflexión se ve afectado, tal que $\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{a}$. Esto se traduce en una traslación del plano de la fuente, lo que permite corregir el problema presente en la figura 5-15. Por esta razón, para mantener fija dicha traslación lo que haremos es fijar el potencial deflector en tres puntos de la red, en particular tomaremos $\psi = 0$ en tres de las cuatro esquinas de la red.

Si aplicamos esta corrección y realizamos la reconstrucción bajo las mismas condiciones empleadas anteriormente, obtenemos que para la opción 1 el método presenta problemas para adaptarse y arroja un perfil con valores de convergencia negativa y que en general no describe el perfil real. Para solucionar este problema se puede modificar la tolerancia de la reconstrucción para que la solución converja más rápido y así evitar el punto donde la reconstrucción arroja valores sin sentido físico, o se pueden modificar los parámetros iniciales. Por otro lado, para la opción 2 no hay problema alguno, y se obtienen resultados análogos a los presentados anteriormente, salvo la corrección en la posición de las curvas cáusticas y la posición de las fuentes que es lo que buscábamos.

Las figuras 5-16 y 5-17 muestran que sí es posible corregir la traslación del plano de la fuente, aunque muestra ser más efectiva para la opción 2.

A partir de este punto los resultados presentados son tales que para la opción 1 dejaremos que el potencial deflector evolucione libremente, esto para evitar los problemas descritos anteriormente. Podemos hacer esto ya que las posiciones en el plano de la lente no son observables, y en particular para esta opción la traslación del plano de la fuente no es significativa. Por otro lado, ya que para la opción 2 los desplazamientos que se presentan en el plano de la fuente son importantes (a pesar de no afectar las cantidades físicas de interés), vamos a realizar dicha corrección fijando el potencial deflector en tres esquinas de la red, lo que es posible gracias a que el método no presenta cambios que afecten su rendimiento más allá de quizás requerir más iteraciones internas para convergir dada una tolerancia.

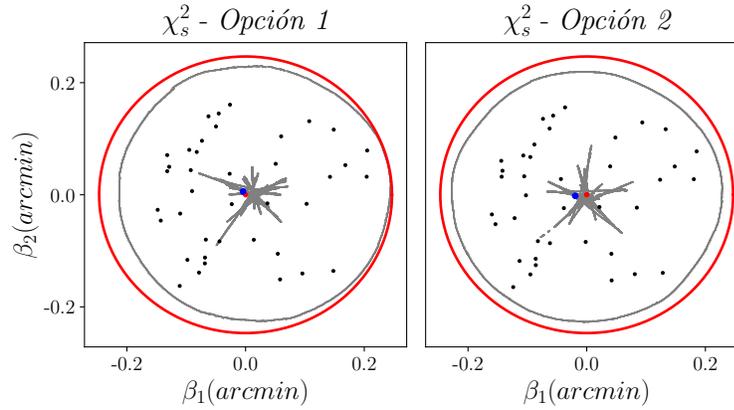


Figura 5-16.: Curvas cáusticas obtenidas en el régimen fuerte manteniendo el potencial deflector fijo en tres puntos de red. En ambas figuras las curvas críticas dadas por el modelo están son aquellas de color rojo, mientras que sus equivalentes dadas por la reconstrucción son de color gris. Los puntos de color negro corresponden a las posiciones de las fuentes obtenidas por cada reconstrucción, y el punto de color azul representa la posición de la fuente cuyas imágenes no fue posible recobrar de forma cerrada. La fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$.

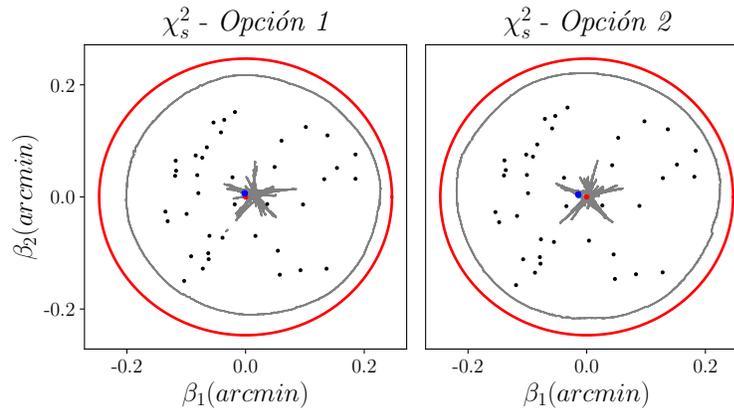


Figura 5-17.: Curvas cáusticas obtenidas en el régimen fuerte + débil manteniendo el potencial deflector fijo en tres puntos de red. En ambas figuras las curvas críticas dadas por el modelo están son aquellas de color rojo, mientras que sus equivalentes dadas por la reconstrucción son de color gris. Los puntos de color negro corresponden a las posiciones de las fuentes obtenidas por cada reconstrucción, y el punto de color azul representa la posición de la fuente cuyas imágenes no fue posible recobrar de forma cerrada. La fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$.

5.3. Prueba 2: 2NIS

Como segunda prueba vamos a aplicar el método a una lente constituida por dos NIS. Aprovechando que bajo la aproximación de campo débil y lente delgada el efecto de lente gravitacional satisface el principio de superposición, entonces como caso general si la lente está formada por N NIS (claramente ubicadas al mismo corrimiento al rojo z_l) tenemos que a partir de (5-3) el potencial deflector de esta distribución se puede escribir como

$$\psi = \sum_{i=1}^N \psi_i = \sum_{i=1}^N R_{0,i} \sqrt{|\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_{c,i}|^2 + \theta_{0,i}^2} \quad \text{con} \quad R_{0,i} := \frac{4\pi\sigma_i^2 D_{lf}}{c^2 D_f}, \quad (5-16)$$

donde σ_i es la dispersión de velocidades de cada NIS, $\boldsymbol{\theta}_{c,i} = (\theta_{1c,i}, \theta_{2c,i})$ es la posición angular del centro de cada NIS mientras que $\theta_{0,i}$ representa el respectivo tamaño angular de su núcleo. Gracias a la ecuación de Poisson (3-14) y al potencial deflector (5-16) es claro que la convergencia toma la forma

$$\kappa = \frac{1}{2} \nabla^2 \psi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \nabla^2 \psi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N R_{0,i} \left[\frac{|\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_{c,i}|^2 + 2\theta_{0,i}^2}{(|\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_{c,i}|^2 + \theta_{0,i}^2)^{3/2}} \right], \quad (5-17)$$

tal que la masa encerrada en un radio angular θ respecto al centro de la lente se obtiene al realizar la integral

$$M(\leq \theta) = \Sigma_{cr} D_l^2 \int_{\mathbb{R}^2} \kappa d^2\theta \quad (5-18)$$

la cual en esta ocasión es conveniente resolverla numéricamente. De forma análoga las componentes del shear (3-15) son

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N R_{0,i} \left[\frac{(\theta_{2,i} - \theta_{2c,i})^2 - (\theta_{1,i} - \theta_{1c,i})^2}{(|\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_{c,i}|^2 + \theta_{0,i}^2)^{3/2}} \right] \quad (5-19)$$

y

$$\gamma_2 = \sum_{i=1}^N \frac{R_{0,i}(\theta_{2,i} - \theta_{2c,i})(\theta_{1,i} - \theta_{1c,i})}{(|\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_{c,i}|^2 + \theta_{0,i}^2)^{3/2}}. \quad (5-20)$$

Por último, el ángulo de deflexión (3-10) se puede escribir de la forma

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^N \frac{R_{0,i}(\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_{c,i})}{\sqrt{|\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_{c,i}|^2 + \theta_{0,i}^2}}, \quad (5-21)$$

dando como resultado la ecuación de la lente

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \sum_{i=1}^N \frac{R_{0,i}(\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_{c,i})}{\sqrt{|\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_{c,i}|^2 + \theta_{0,i}^2}}, \quad (5-22)$$

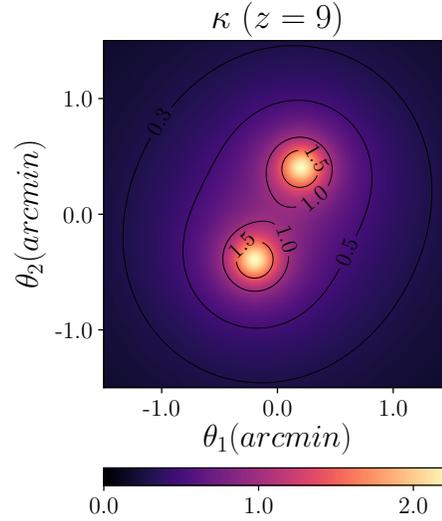


Figura 5-18.: Convergencia correspondiente al modelo de prueba para una fuente de referencia ubicada a un corrimiento al rojo $z = 9$.

cuyas soluciones deben obtenerse numéricamente, pues a menos que las NIS sean concéntricas la lente no posee simetría axial, por lo que no es posible escribir (5-22) en términos de β y θ con el fin de obtener una expresión análoga a (5-9), y con ello simplificar el problema. Como consecuencia de esta asimetría en la lente no es posible obtener las curvas críticas analíticamente, y debemos acudir de nuevo a una solución numérica. La forma de dichas curvas y por ende la cantidad de imágenes que puede producir la lente depende especialmente de la separación de las NIS y el tamaño de sus núcleos.

5.3.1. Modelo

A partir de este punto vamos a concentrarnos en una lente formada por dos NIS ($N=2$ en la descripción anterior). Por ello, como modelo de prueba consideremos que la lente se encuentra ubicada a un corrimiento al rojo $z = 0.375$, donde las dos NIS que la conforman son idénticas y están centradas en $\theta_{c,1} = -\theta_{c,2} = (0.2, 0.4)$ (*arcmin*), mientras que su dispersión de velocidades y el tamaño de sus núcleos son respectivamente $\sigma_1 = \sigma_2 = 1000$ *km/s* y $\theta_{0,1} = \theta_{0,2} = 0.2$ (*arcmin*). Adicionalmente, vamos a tomar $z = 9$ como el corrimiento a rojo de referencia.

Esta lente posee un perfil como el que se muestra en la figura 5-18, el cual abarca $3 \times 3(\text{arcmin})^2$. Para la fuente de referencia las curvas cáusticas y críticas que genera la lente son más complejas que las obtenidas por una sola NIS, sin embargo, como se muestra en las curvas de color gris en la figura 5-20 (curvas cáusticas a la izquierda y curvas críticas en el centro) éstas poseen simetría especular respecto a la recta que es perpendicular a la recta que une los centros de las NIS. Dicha simetría se debe a que las NIS son idénticas. En

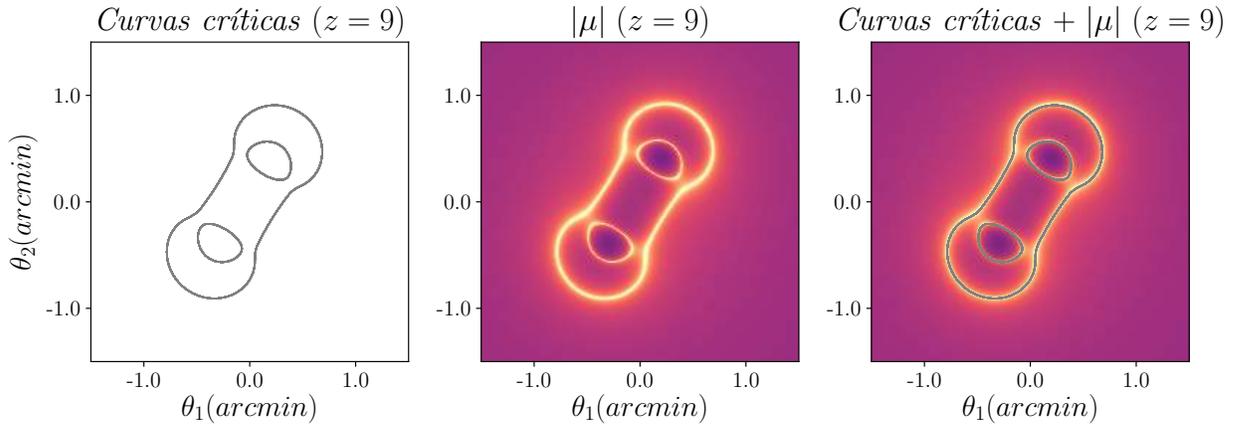


Figura 5-19.: A la izquierda se presentan las curvas críticas correspondiente al modelo de prueba para la fuente de referencia. En el centro se muestra en escala de colores logarítmica (para poder apreciar de forma clara su estructura) la gráfica de $|\mu|$ en la región de interés, donde las regiones de mayor intensidad (color amarillo) son aquellas que presentan mayor magnitud. Por último, a la derecha se presenta una superposición de las curvas críticas y $|\mu|$.

la figura 5-19 se puede apreciar que las curvas obtenidas numéricamente que se muestran como curvas críticas en efecto los son, pues coinciden con las curvas de gran magnificación en la lente (centro y derecha).

Veamos ahora cómo es el proceso de formación de imágenes para este modelo. Tomemos cuatro casos particulares, donde la figura 5-20 nos servirá de apoyo. En cada caso tenemos que la figura de la izquierda representa la posición de la fuente (punto de color negro) respecto a las curvas cóusticas presentes (curvas de color gris). La figura del centro muestra la posición de la imágenes generadas por la lente (puntos de color negro) respecto a las curvas críticas (curvas de color gris). Por último, la figura de la derecha muestra el potencial de Fermat y sus respectivas curvas de nivel, donde se indica si la imagen producida es un máximo (punto de color rojo), un mínimo (puntos de color azul) ó un punto de silla (punto de color verde) de dicho potencial:

- **Caso 0:** Consideremos que la fuente se encuentra ubicada en $\beta_p = \mathbf{0}$. Para esta posición la fuente se encuentra dentro de todas las curvas cóusticas que posee el sistema, y cuando esto sucede se obtiene el máximo número de imágenes que puede producir la lente, siendo siete para este modelo. De ellas dos son máximos, dos son mínimos y tres son puntos de silla del potencial de Fermat.
- **Caso 1:** Aquí la fuente ha salido de la curva cóustica interna por lo cual debe producirse una disminución de dos imágenes cada una de diferente paridad; es claro que debe desaparecer un punto de silla del potencial de Fermat (paridad negativa). En este caso

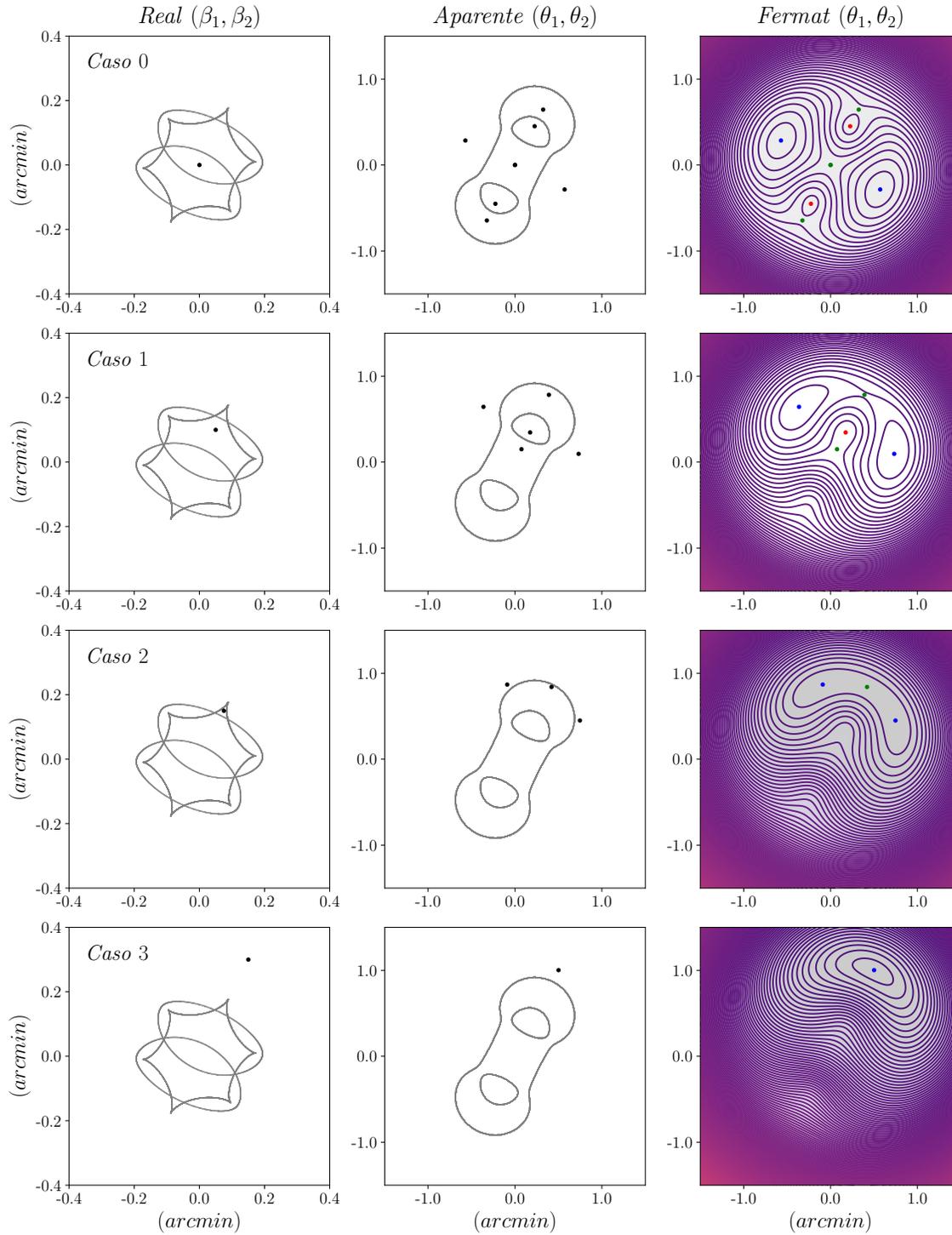


Figura 5-20.: Formación de imágenes para dos NIS. A la derecha se presentan las curvas cáusticas y la fuente. En el centro se encuentran las respectivas curvas críticas y las imágenes producidas. A la derecha se presenta el potencial de Fermat y sus curvas de nivel. La fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$.

particular debido al desplazamiento de la fuente las dos imágenes ubicadas en la parte inferior se combinan y destruyen al entrar en contacto con la curva crítica más cercana a ellas, dejando como resultado un máximo, dos mínimos y dos puntos de silla del potencial de Fermat. Por ende en este caso se producen cinco imágenes.

- **Caso 2:** Si la fuente sigue la misma dirección de movimiento que el caso anterior, quedando ahora solamente dentro de una curva cáustica después de haber salido de la segunda curva cáustica, tenemos que de nuevo se debe producirse una disminución de dos imágenes de diferente paridad. En este caso las dos imágenes más cercanas a la curva crítica más interna se mezclan y destruyen al llegar a ella, dando como resultado las tres imágenes esperadas que son ahora dos mínimos y un punto de silla del potencial de Fermat.
- **Caso 3:** Por último, tan pronto la fuente está fuera de las curvas cáusticas ya no se producen múltiples imágenes (aunque la imagen resultante puede estar fuertemente deformada), donde la imagen resultante corresponde a un mínimo del potencial de Fermat. En este caso las imágenes se combinaron al pasar por la curva crítica.

Podemos ver que este modelo satisface el teorema del número impar de imágenes, y que en efecto hay un cambio de ± 2 imágenes al atravesar una curva crítica, en particular se crea o destruye un punto de silla del potencial de Fermat.

Ahora bien, nuestro modelo arroja los catálogos que se muestran en la figura **5-21**, donde las curvas de color rojo representan la orientación de las fuentes, mientras que los puntos de color azul corresponden a la posición de las múltiples imágenes. Como discutimos hace un momento, este sistema es capaz de producir un máximo de siete imágenes cuando la fuente se encuentra encerrada por todas las curvas cáusticas, por tal razón, ya que al crear el catálogo las fuentes se distribuyen de forma aleatoria tanto en posición como en corrimiento al rojo (lo que afecta el tamaño de las curvas cáusticas) no es sencillo obtener un sistema con siete imágenes. En el catálogo aquí presentado se tienen sistemas con máximo cinco imágenes.

5.3.2. Reconstrucción

Vamos a estudiar el comportamiento del método en una situación un poco más compleja siguiendo los resultados de las reconstrucciones obtenidas con el modelo 1.

Régimen fuerte

A partir de los resultados obtenidos con el modelo 1 hemos decidido usar unos parámetros iniciales similares. Para las dos opciones de χ_s^2 hemos tomado una red inicial con 25×25 puntos de red definida sobre una región de 3×3 (*arcmin*)², lo cual permite que se manifieste con mayor precisión los deflectores de forma individual. En cada punto de red se ha impuesto $\psi^{(0)} = 0$, es decir que no estamos imponiendo ninguna condición inicial respecto a la forma

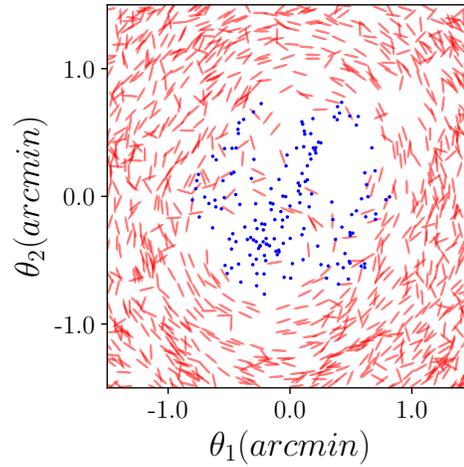


Figura 5-21.: Catálogo de prueba. Las curvas de color rojo representan la orientación observada de las fuentes, mientras que los puntos de color azul representan la posición de los sistemas de múltiples imágenes.

del perfil. En cuanto a la regularización hemos mantenido los valores $\eta_\kappa = \eta_\gamma = 120$. Por otro lado, los procesos de interpolación y obtención de derivadas se realizaron con 36 VC. Respecto al centro de cada deflector se agregan 500 nuevos puntos de red siguiendo una distribución normal con una desviación estándar de 0.4 (arcmin). De forma análoga, el proceso de refinamiento se realizó tomando un radio inicial de 0.5 (arcmin) el cual se redujo

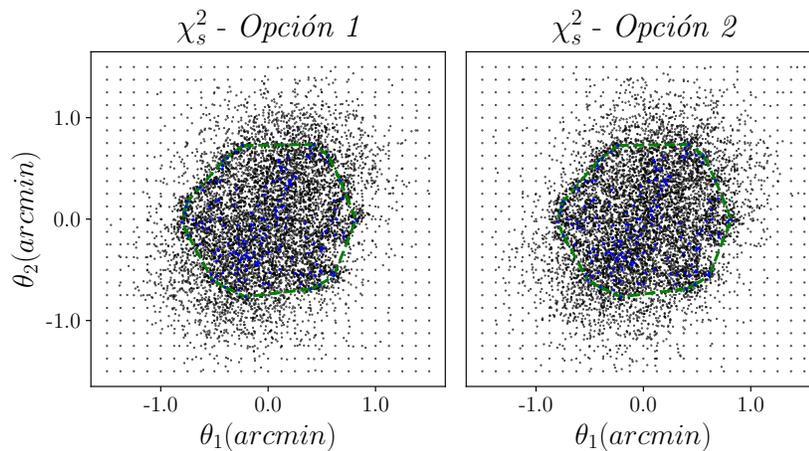


Figura 5-22.: Red final resultado de la reconstrucción para las dos funciones de penalización disponibles en el régimen fuerte (puntos de color negro). Los puntos de color azul corresponden a la posición de los sistemas de múltiples imágenes, mientras que la curva discontinua de color verde delimita este conjunto de puntos.

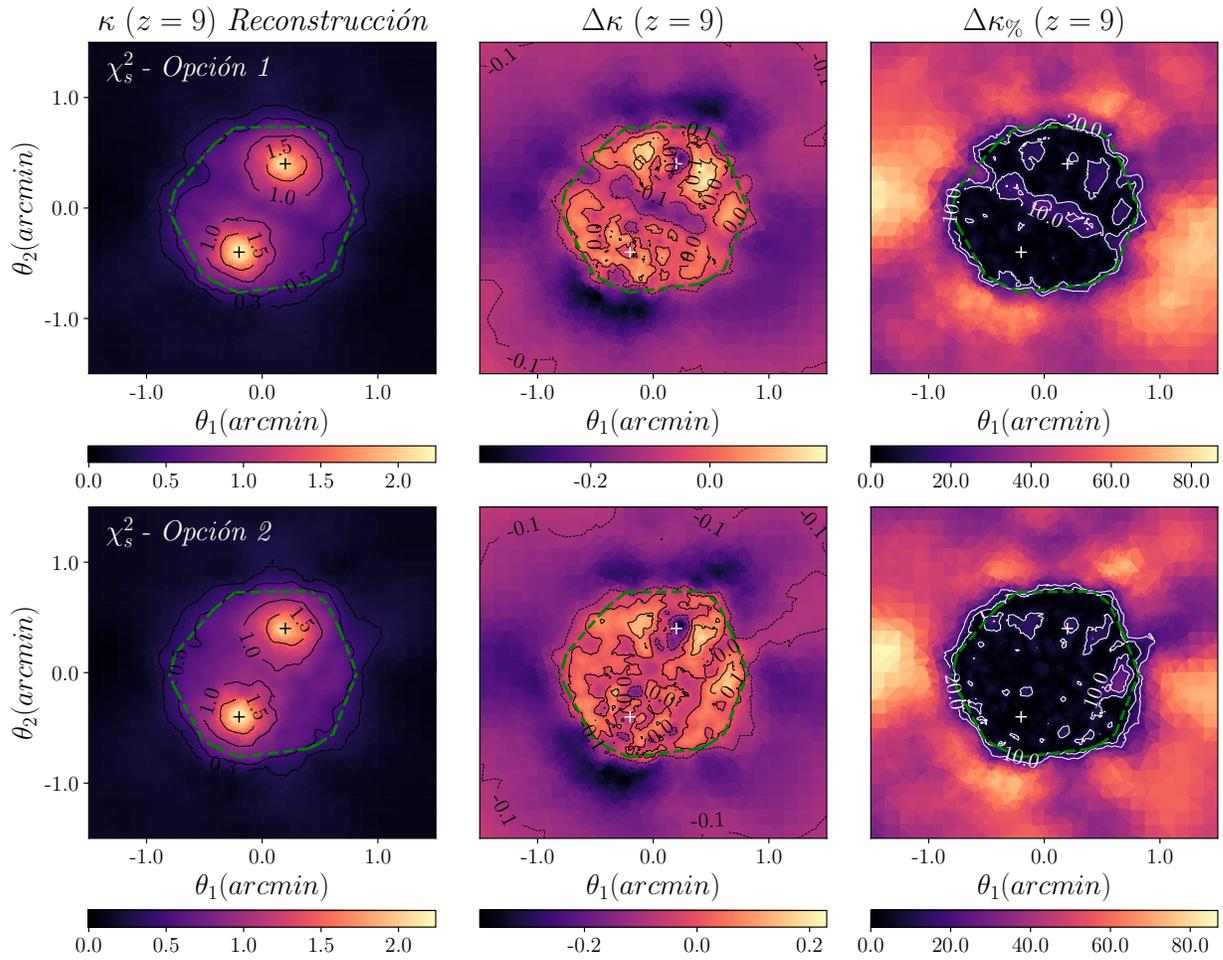


Figura 5-23.: Resultados obtenidos para 2NIS utilizando solamente el catálogo de múltiples imágenes (régimen fuerte). Aquí la fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$. En las tres figuras la curva discontinua de color verde representa la frontera que encierra las múltiples imágenes. La figura de la izquierda representa la convergencia reconstruida, mientras que en el centro y a derecha tenemos respectivamente la diferencia (5-1) y la diferencia relativa porcentual (5-2) entre la convergencia reconstruida y la real (dada por el modelo)

en un factor de 0.7 en cada iteración una de las 7 iteraciones externas. Es proceso arrojo como resultado la red final que se muestra en la figura 5-22.

Los resultados obtenidos de la reconstrucción se muestran en la figura 5-23. Podemos ver de nuevo que la reconstrucción es efectiva solamente en el interior de la región delimitada por las múltiples imágenes o región crítica. Para ambas funciones de penalización χ_s^2 es claro que en la mayor parte de la región crítica se presenta una diferencia relativa menor que el 10%, y solamente se presenta una diferencia relativa mayor que el 20% en una pequeña región.

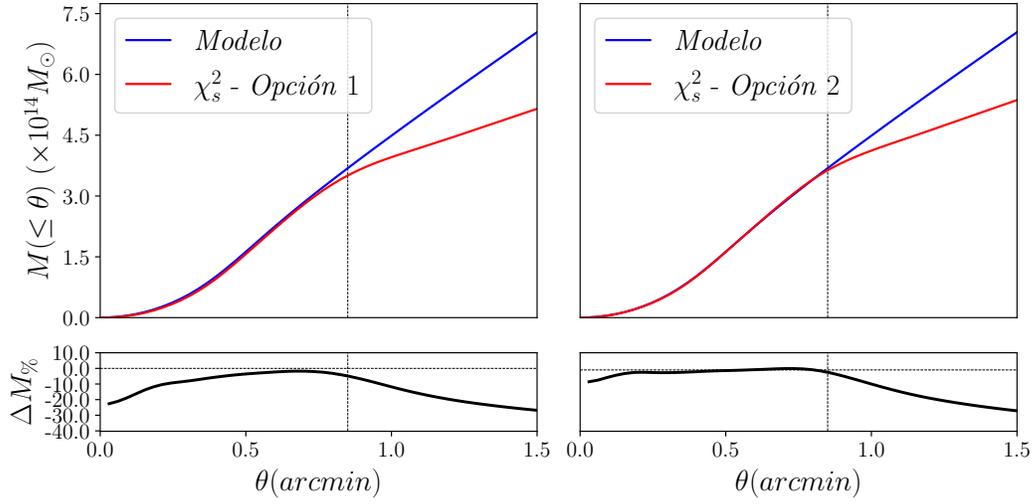


Figura 5-24.: Masa encerrada en un radio θ . La recta vertical en $\theta \approx 0.85$ (*arcmin*) marca el radio que delimita el sistema de múltiples imágenes.

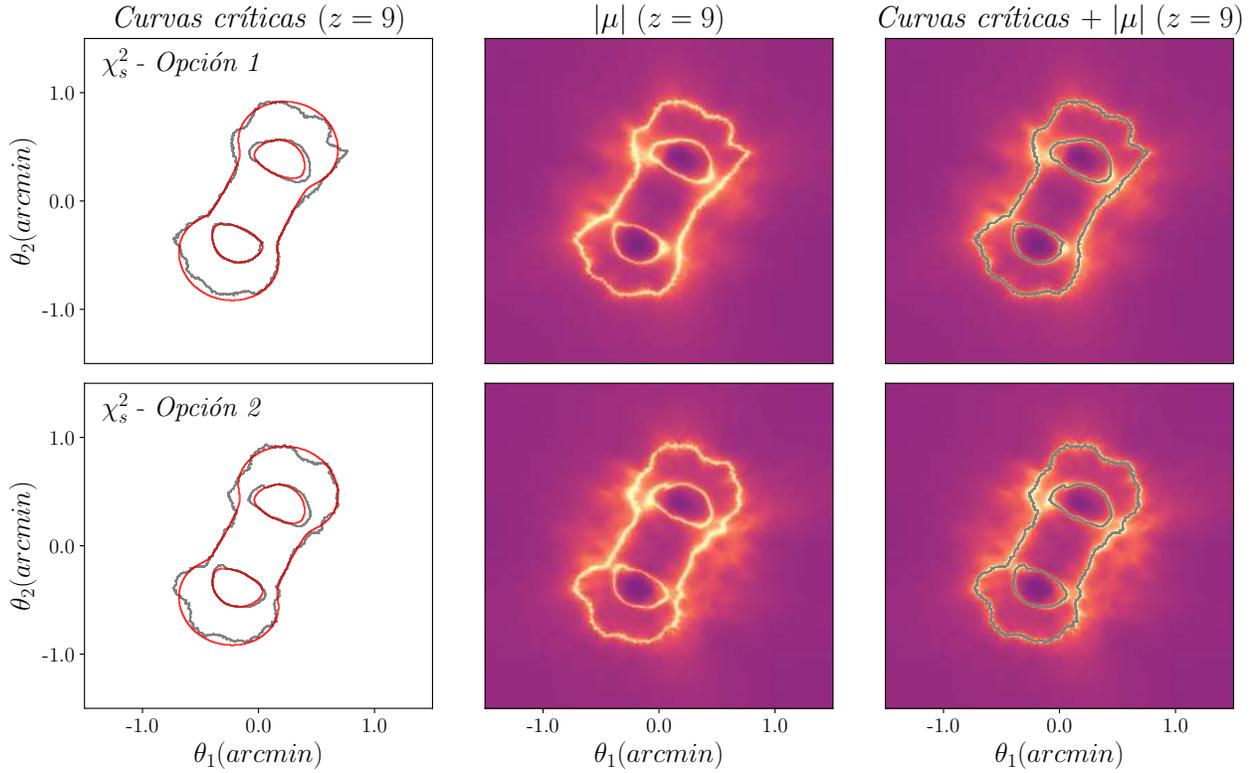


Figura 5-25.: Curvas críticas obtenidas a partir de la reconstrucción. Se comparan las curvas críticas dadas por el modelo (color rojo) con aquellas dadas por la reconstrucción (color gris). La fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$.

Fuera de la región crítica la diferencia relativa escala hasta un poco más del 80%.

Al comparar la reconstrucción con el modelo original (ver figura 5-18), vemos que se recobran los dos deflectores, donde las posiciones de los centros reales están representadas por las cruces presentes en la figura 5-23. Los deflectores centrados en la posición $(0.2, 0.4)$ (*arcmin*) y $(-0.2, -0.4)$ (*arcmin*) los denominaremos respectivamente deflector superior e inferior. A partir de la figura 5-23 es claro que dentro de la región crítica para ambas reconstrucciones la mayor diferencia relativa se presenta en la región alrededor del deflector superior, lo que se puede explicar debido a la ausencia de múltiples imágenes en esta región. Si nos fijamos en la posición de las múltiples imágenes (ver figura 5-21) podemos ver una mayor concentración de múltiples imágenes alrededor del deflector inferior, lo que permite que el método se adapte mejor en dicha región.

Como se muestra en la figura 5-24, la masa estimada dentro de círculos centrados en $\theta = \mathbf{0}$ con radio máximo $\theta \approx 0.85$ (*arcmin*) (siendo este radió el radio límite de la región crítica para este sistema) coincide de forma satisfactoria con la masa correspondiente al modelo, especialmente en el caso de la opción 2, pues dentro de la región crítica presenta una diferencia relativa no mayor que el 10%. Con respecto a la opción 1 hay un déficit de masa en la región central del perfil, lo que produce una diferencia relativa de hasta un 30%. En esta ocasión la opción 2 ha presentado mejores resultados. Ambas reconstrucciones muestran ser efectivas a la hora de recuperar las curvas críticas tanto en posición como en forma, lo que se evidencia en la figura 5-25.

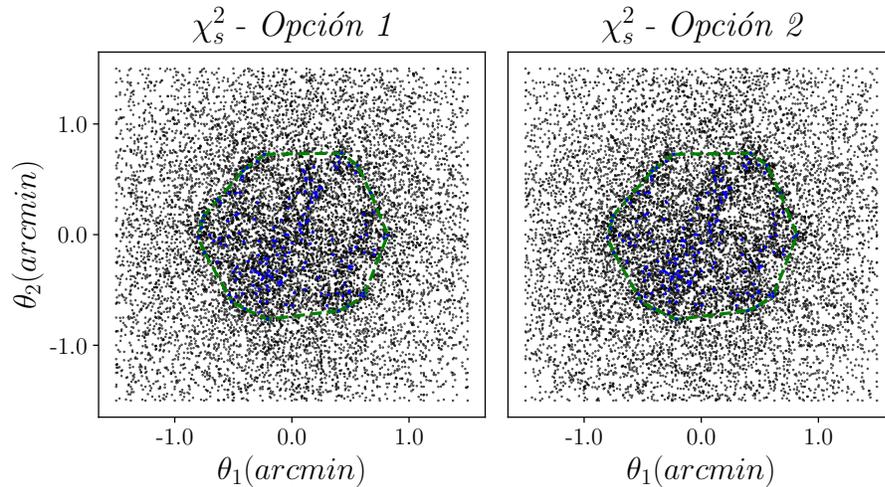


Figura 5-26.: Red final resultado de la reconstrucción para las dos funciones de penalización disponibles en el régimen fuerte +débil (puntos de color negro). Los puntos de color azul corresponden a la posición de los sistemas de múltiples imágenes, mientras que la curva discontinua de color verde delimita este conjunto de puntos.

Régimen fuerte + débil

En esta ocasión la única diferencia presente en los parámetros de la reconstrucción respecto a la reconstrucción anterior, radica en que para cada iteración externa se agregaron 1000 nuevos puntos de red distribuidos por medio de una distribución normal con desviación estándar de 1 (*arcmin*) centrada en cada deflector. De esta forma es posible también producir un refinamiento de la red fuera de la región crítica. Como resultado se obtiene un red final como la que se muestra en la figura 5-26.

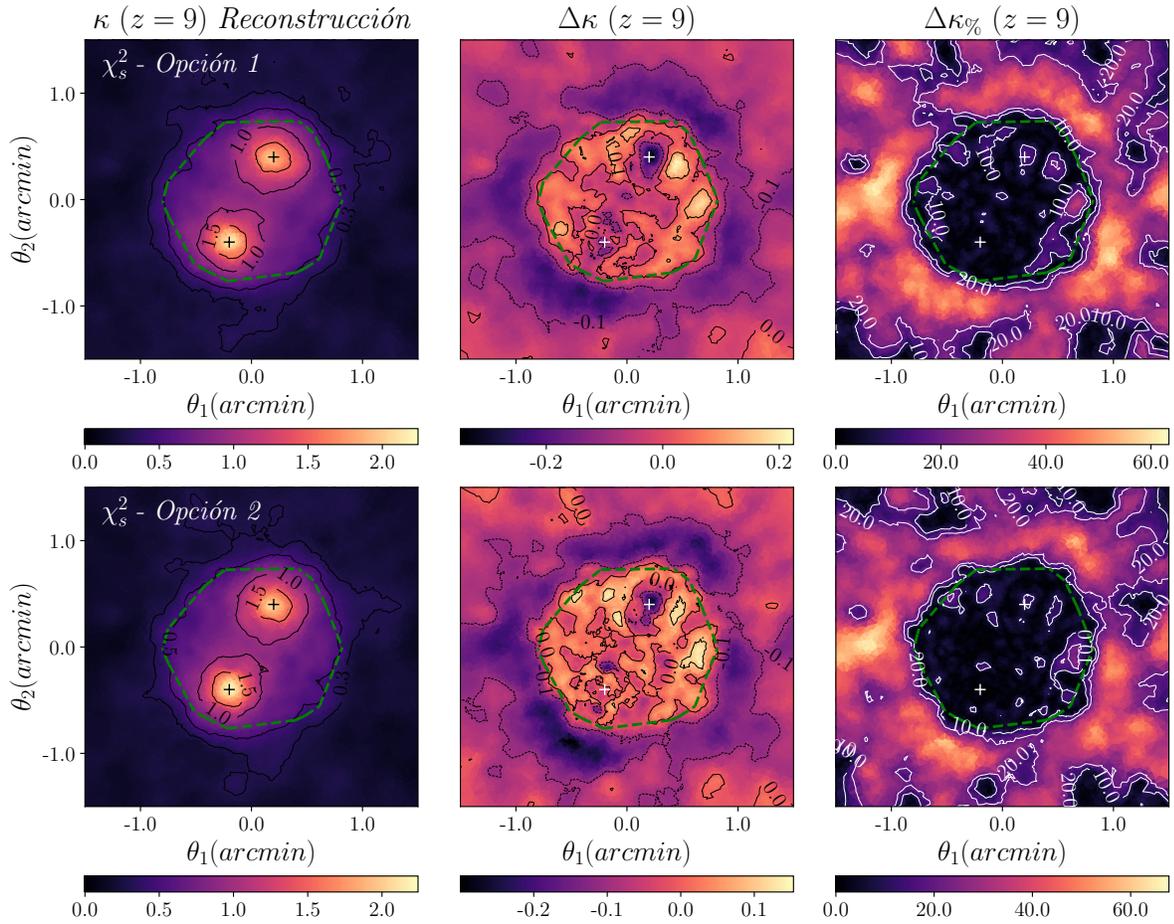


Figura 5-27.: Resultados obtenidos para 2NIS utilizando los catálogos de múltiples imágenes y elipticidades (régimen fuerte + débil). Aquí la fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$. En las tres figuras la curva discontinua de color verde representa la frontera que encierra las múltiples imágenes. La figura de la izquierda representa la convergencia reconstruida, mientras que en el centro y a derecha tenemos respectivamente la diferencia (5-1) y la diferencia relativa porcentual (5-2) entre la convergencia reconstruida y la real (dada por el modelo)

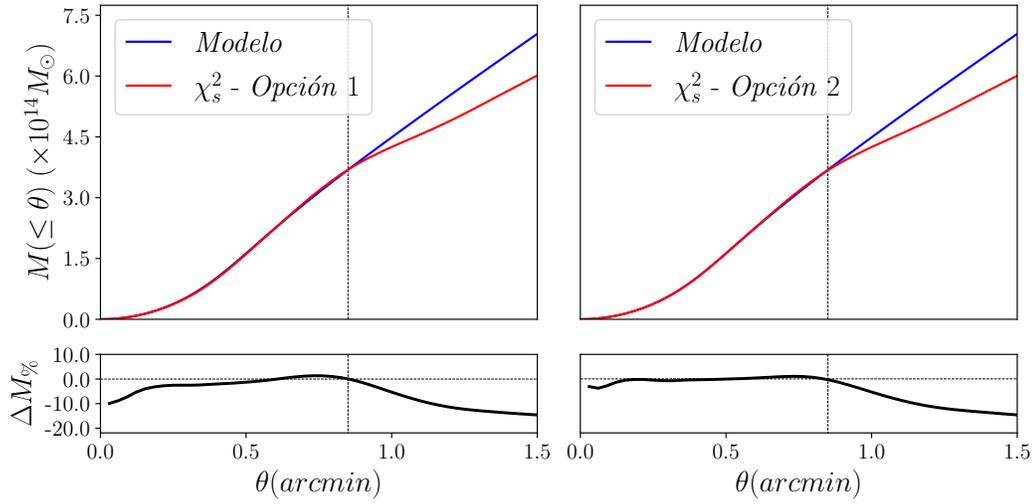


Figura 5-28.: Masa encerrada en un radio θ . La recta vertical en $\theta \approx 0.85$ (*arcmin*) marca el radio que delimita el sistema de múltiples imágenes.

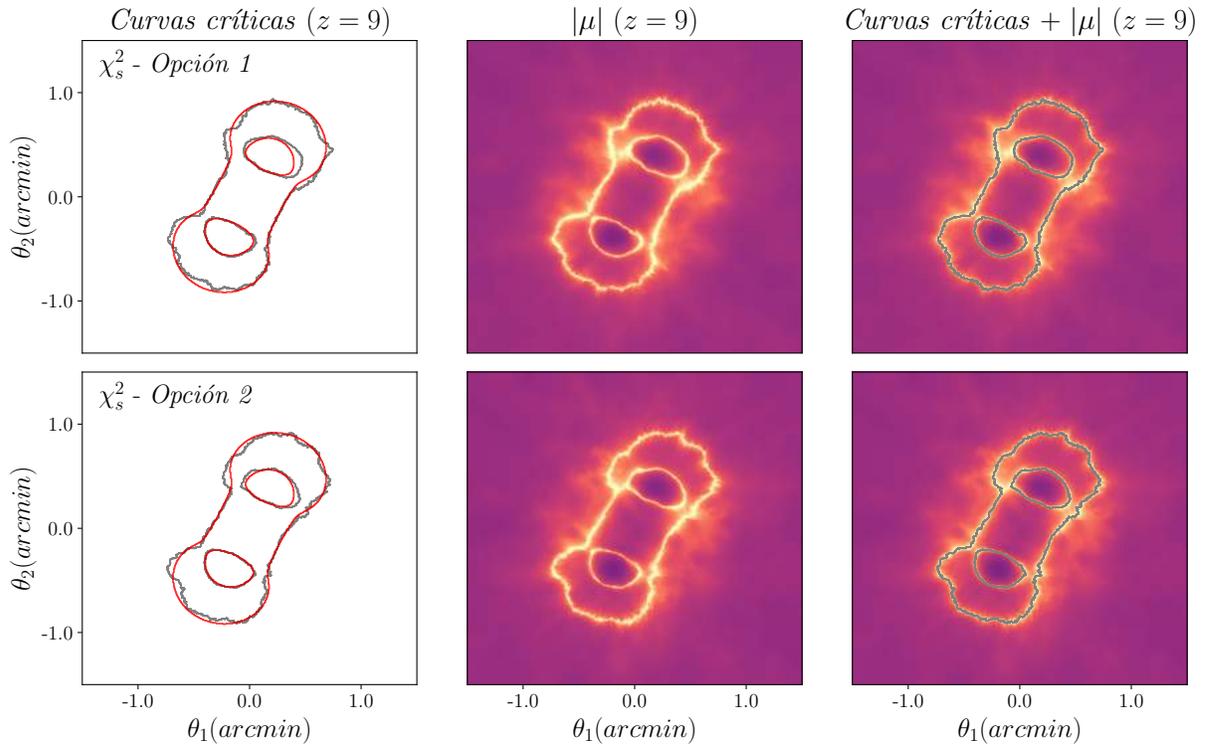


Figura 5-29.: Curvas críticas obtenidas a partir de la reconstrucción. Se comparan las curvas críticas dadas por el modelo (color rojo) con aquellas dadas por la reconstrucción (color gris). La fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$.

Como resultado global tenemos que se mantiene la recuperación de las curvas críticas como se muestra en la figura **5-29**, y se presenta una mejora en la reconstrucción como mínimo del 20 % fuera de la región crítica, tal como se puede observar en la figura **5-27** (derecha), sin embargo, los resultados fuera de la región crítica no han presentado una mejora de igual magnitud respecto a los resultados obtenidos con el modelo 1. Con el objetivo de mejorar los resultados se intentaron diferentes combinaciones de parámetros iniciales en la reconstrucción, no obstante, el resultado siempre fue análogo. Respecto a la masa tenemos que fuera de la región crítica se presenta una disminución en la diferencia relativa de aproximadamente un 10 %. En este caso el método no es capaz de escalar de forma significativa fuera de la región crítica aún con la inclusión de las elipticidades.

6. Abell 370

El cúmulo galáctico Abell 370 (A370) ubicado a un corrimiento al rojo $z_l = 0.375$ presenta una de las manifestaciones más significativas del efecto de lente gravitacional a estas escalas, pues presenta un prominente arco [LP86, SFMP87] (ver figura **6-1**). Dicha característica llevo a A370 a ser el primer cúmulo galáctico en donde el efecto de lente gravitacional fue aplicado de forma exitosa [Sou87, MSFM88, SMF⁺88, GN89]. Los modelos de A370 como lente gravitacional se han llevado a cabo aplicando métodos paramétricos (e.g. [RKL⁺10, LRC⁺17]) al igual que métodos de forma libre (e.g. [ASW98a, DSB⁺18, SBH⁺18]). Como se puede apreciar en la comparación de los mapas de magnificación $|\mu|$ realizada en [SBH⁺18] respecto a los diferentes modelos producto del programa HFF, las curvas críticas muestran que hay una propiedad común que presenta A370 en los diferentes modelos (y por tanto es de esperar que sea propia de A370), que corresponde a la presencia dominante de dos galaxias que consideraremos los deflectores o componentes principales de la lente. Es de esperar entonces que la efectividad de nuestra implementación este sujeta a la capacidad de recobrar esta característica, a igual que reproducir el prominente arco presente en el cúmulo. En este capítulo aplicaremos el método de reconstrucción descrito en el capítulo 4, por lo cual presentaremos la respectiva reconstrucción y un análisis de los resultados.

6.1. Reconstrucción

En esta reconstrucción en el régimen fuerte aplicaremos el catálogo con 45 sistemas de múltiples imágenes, donde el sistema más lejano constituido por dos imágenes se encuentra a un corrimiento a rojo $z_f = 8.593 \pm 0.432$ [LRB⁺19], mientras que en el régimen débil aplicaremos el catálogo de elipticidades usado en [SBH⁺18], y disponible en la página del programa HFF¹. Las disposición de estos catálogos se presentan en la figura **6-2**.

Al igual que se hizo en el capítulo anterior para cada caso de prueba, vamos a realizar la reconstrucción solamente tomando los sistemas de múltiples imágenes, y luego agregaremos las elipticidades para así poder hacer una estimación de la efectividad del método cuando no se dispone de elipticidades. Por lo tanto, para llevar a cabo la reconstrucción tomaremos $\sigma_s = 0.3$ (*arcsec*) como la incertidumbre en cada componente de la posición de cada imagen, y respecto a las elipticidades tomaremos $\sigma_{e_s} = 0.2$ y $\sigma_{err} = 0.1$.

¹<https://archive.stsci.edu/pub/hlsp/frontier/abell370/models/bradac/v4.1/>

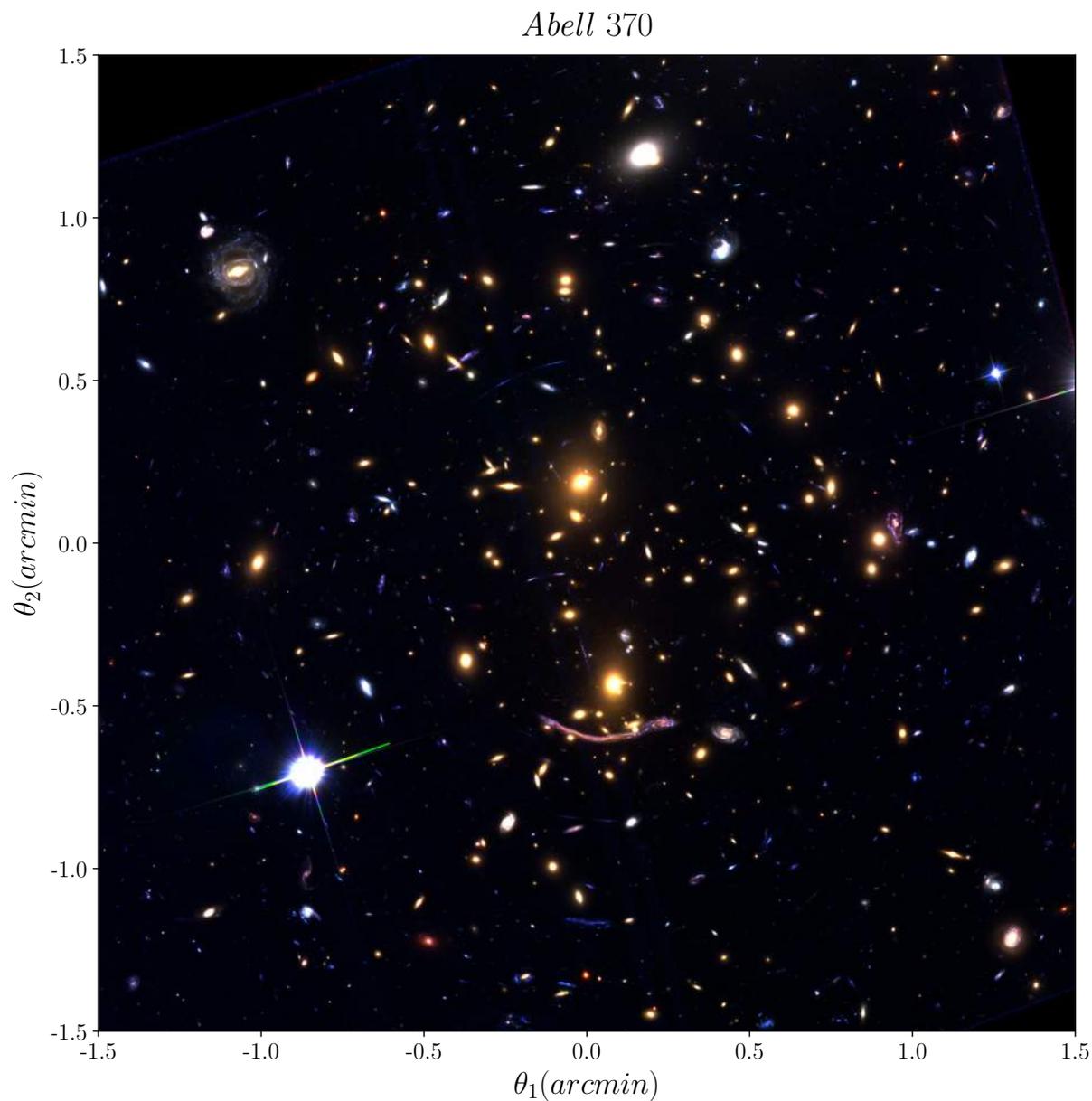


Figura 6-1.: Abell 370 centrada en $Ra = 39.970^\circ$ (θ_1) y $Dec = -1.575^\circ$ (θ_2). Aquí Ra se ha tomado creciente hacia la derecha. Esta imagen compuesta fue obtenida a partir de las imágenes en los filtros F435W, F606W, y F814W tomadas con la cámara (ACS) por el Telescopio Espacial Hubble como parte de programa HFF. Las imágenes se pueden encontrar en: <https://archive.stsci.edu/pub/hlsp/frontier/abell370/images/>.

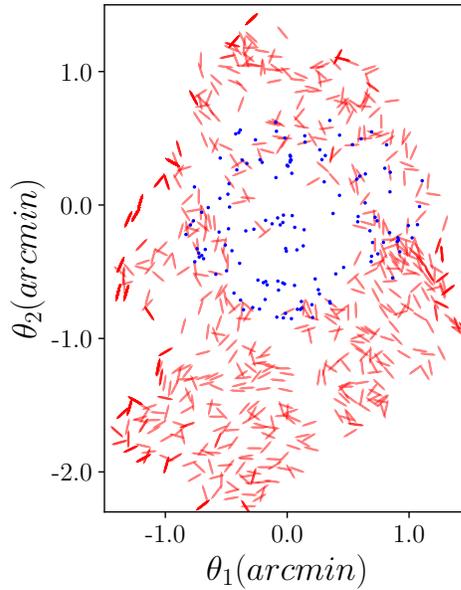


Figura 6-2.: Catálogo para A370. Las curvas de color rojo representan la orientación observada de las fuentes, mientras que los puntos de color azul representan la posición de los sistemas de múltiples imágenes.

Régimen fuerte

Para esta reconstrucción hemos tomado una red inicial de 20×20 puntos de red definidos sobre una región de 3×3 ($arcmin$)². En cada punto de red se ha impuesto $\psi^{(0)} = 0$, por lo cual no hemos impuesto ninguna condición inicial respecto a la forma del perfil al igual que se hizo en los dos modelos de prueba. Con respecto a la regularización tomamos $\eta_\kappa = \eta_\gamma = 120$, como consecuencia de los resultados obtenidos en las reconstrucciones de prueba. Por otro lado, los procesos de interpolación y obtención de derivadas se realizaron con 36 VC. En cada iteración externa respecto al centro de los deflectores más brillantes se agregaron 500 nuevos puntos de red siguiendo una distribución normal con una desviación estándar de 0.4 ($arcmin$). El proceso de refinamiento se realizó tomando un radio inicial de 0.5 ($arcmin$) el cual se redujo en un factor de 0.7 en cada una de las 7 iteraciones externas aplicadas.

La reconstrucción dada en la figura **6-3** muestra ser efectiva en recobrar la posición de los dos principales deflectores, especialmente para la opción 2, pues para la opción 1 la posición del deflector superior está desplazada un poco. En particular, la opción 1 muestra un valor menor de convergencia para el deflector inferior, el cual sin embargo no afecta significativamente los resultados pues la diferencia se presenta en una región pequeña. Como vemos en la figura **6-4** la masa encerrada en un radio θ respecto al centro del perfil en ambos casos es en esencia la misma. La diferencia presentada es del orden de $10^{12} M_\odot$, que corresponde a dos ordenes de magnitud que la masa estimada del cúmulo. A un radio $\theta \approx 1.1$ ($arcmin$) la masa encerrada es del orden de $4.5 \times 10^{14} M_\odot$, la cual es consistente con el valor estimado en [RKL⁺10].

Tanto el perfil como las curvas críticas resultado de la reconstrucción (dadas por las curvas de color amarillo en la figura 6-3 (derecha)) presentan características morfológicas análogas a los resultados presentados en [SBH⁺18].

Aunque el método falla en recobrar en su totalidad los sistemas de múltiples imágenes, este es capaz de reproducir de forma aproximada el arco característico de A370, tal como se puede apreciar en la figura 6-5. Aquí se ha tomado de forma aproximada el contorno de la galaxia que produce el arco (ver [RKL⁺10]), dado por la curva de color rojo en la figura 6-5 (superior). Luego, este contorno se puede llevar al plano de la lente por medio del potencial deflector reconstruido, así que, una vez se tiene la forma de la fuente podemos determinar

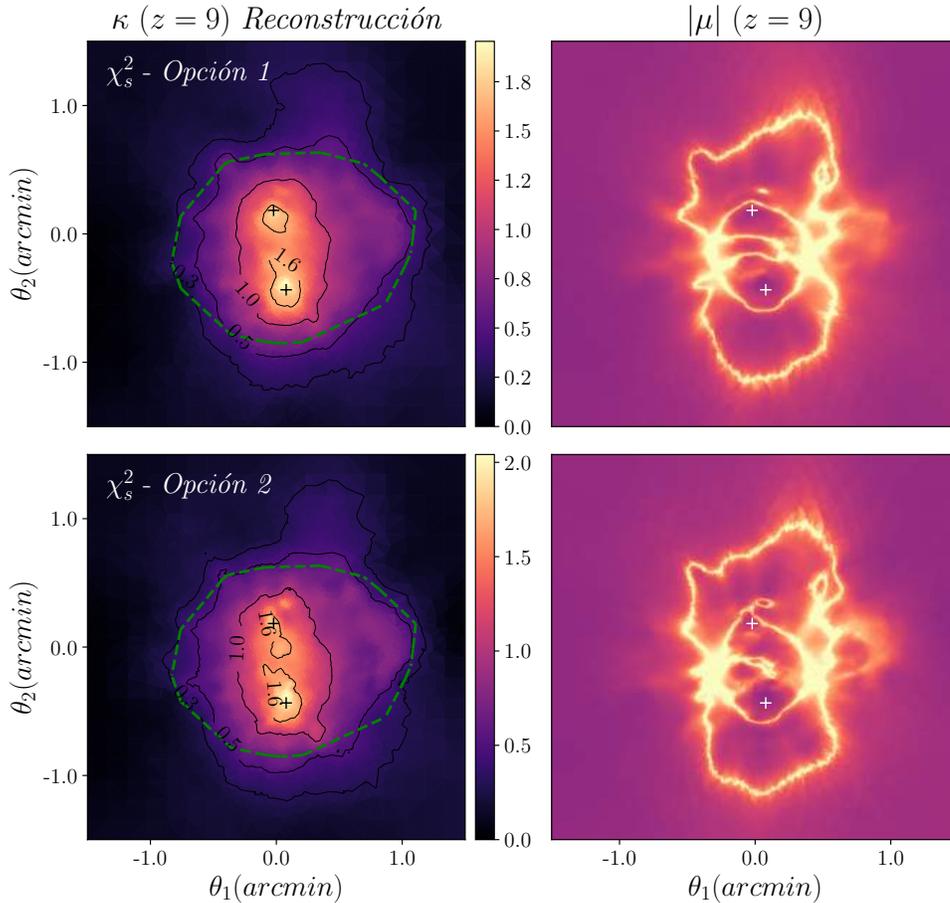


Figura 6-3.: Resultados obtenidos en el régimen fuerte para las dos posibles funciones de penalización χ_s^2 . La curva discontinua de color verde representa la frontera que encierra las múltiples imágenes. La figura de la izquierda representa la convergencia reconstruida, mientras en la figura de la derecha tenemos la magnitud de la magnificación. Las cruces marcan la posición de los deflectores mas brillantes del cúmulo. La fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$.

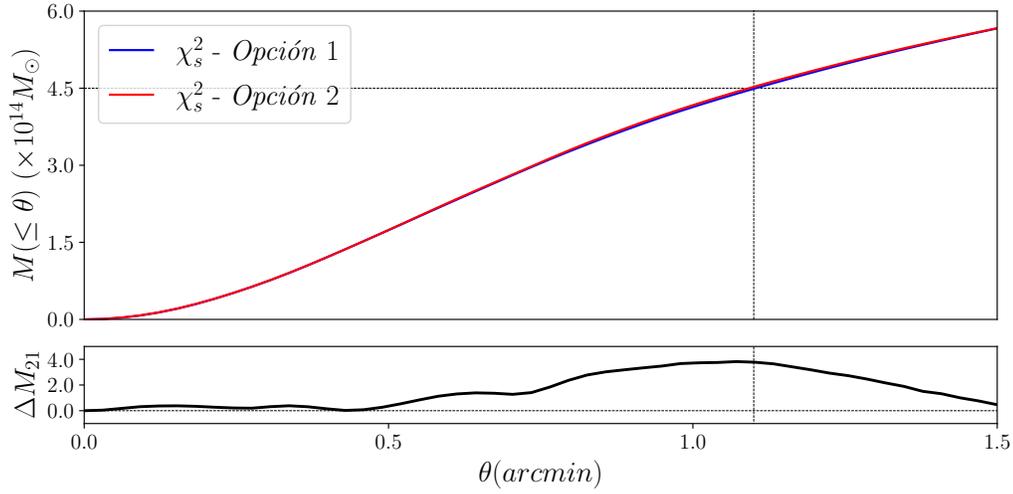


Figura 6-4.: Masa encerrada dentro de un radio $\theta \approx 1.1$ (*arcmin*), el cual delimita la región crítica del cúmulo. Aquí $\Delta M_{21} = (M_2 - M_1)(\leq \theta)(\times 10^{12} M_\odot)$.

su forma al ser afectada por el cúmulo. Su forma se puede obtener solucionando de forma directa la ecuación de la lente, o se pueden usar curvas de contorno como se sugiere en [SEF92], pues permite obtener una mejor estimación del contorno de las posibles imágenes cuando la fuente no es puntual.

Para hallar el contorno de las posibles imágenes vamos a tener presente que al igual que el contorno que se muestra en la figura 6-5 (superior), la fuente posee un contorno elíptico, descrito por una ecuación de la forma

$$f(\beta_1, \beta_2) = a\beta_1^2 + b\beta_1\beta_2 + c\beta_2^2 + d\beta_1 + e\beta_2 = 1, \quad (6-1)$$

con a, b, c, d y e constantes. El valor de estas constantes está sujeto a la forma de la elipse, y se pueden obtener usando algún método de optimización, en particular usamos el método ltsq (least-squares). Una vez se tienen dichas constantes, el contorno de la fuente corresponde a la curva de nivel de f dada por (6-1). Para obtener el contorno de las imágenes simplemente se debe considerar que por medio de la ecuación de la lente se satisface

$$\beta_1 = \theta_1 - Z\alpha_{1,r} \quad \text{y} \quad \beta_2 = \theta_2 - Z\alpha_{2,r}, \quad (6-2)$$

donde Z representa el peso cosmológico de la fuente (en el caso del arco de A370 tenemos que $Z = Z(0.725)$), y α_r corresponde al ángulo de deflexión para el observador de referencia (ubicado a un corrimiento al rojo $z = 9$ en nuestro caso). Como consecuencia del mapeo las curvas de nivel en general cambian tanto en tamaño como en forma. Las imágenes corresponden a las curvas de nivel $f(\theta_1, \theta_2) = 1$.

La opción 2 muestra un mejor ajuste del arco tanto en posición como en forma. Para ambas opciones no es posible reproducir el extremo izquierdo del arco, sin embargo, esto es consecuencia de la forma del contorno que se ha tomado de la galaxia (ver figura 6-5 (superior)).

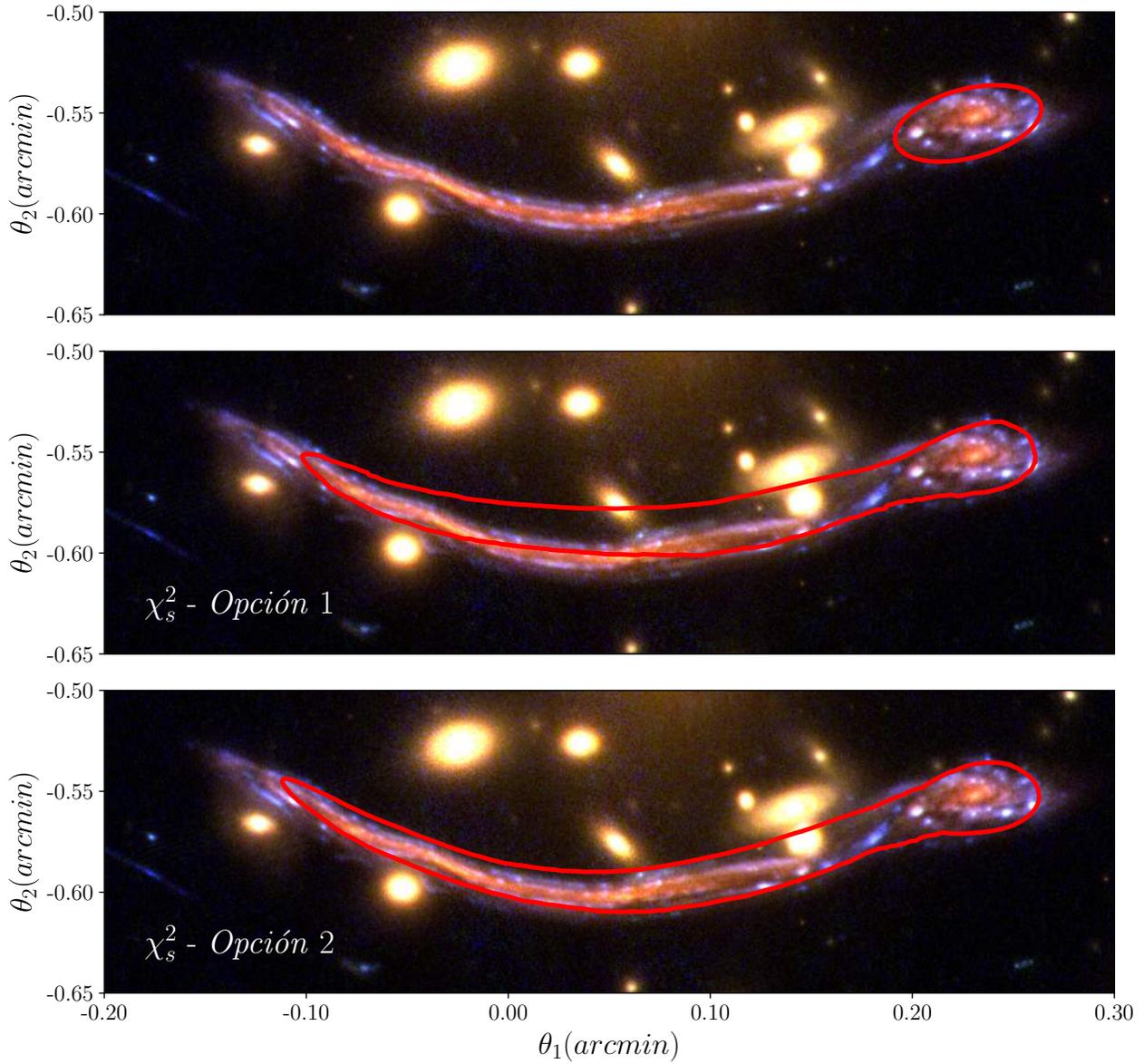


Figura 6-5.: En la figura superior se muestra un contorno de color rojo que aproximadamente encierra a la galaxia que forma el característico arco de A370. En la figura del medio y en la figura inferior se presenta el contorno de la galaxia predicha por la reconstrucción para las dos posibles funciones de penalización cuando se hace uso solamente del régimen fuerte.

Debido a la distorsión que experimenta la fuente no es sencillo obtener un contorno elíptico que encierre a toda la galaxia.

Régimen fuerte + débil

Para realizar la reconstrucción involucrando tanto el régimen fuerte como el régimen débil, hemos implementado unas condiciones consistentes con las descritas anteriormente. En particular, ya que la región que abarcan las elipticidades es mayor que la región la implementada para la reconstrucción anterior, vamos a tomar una red inicial de 20×25 puntos de red

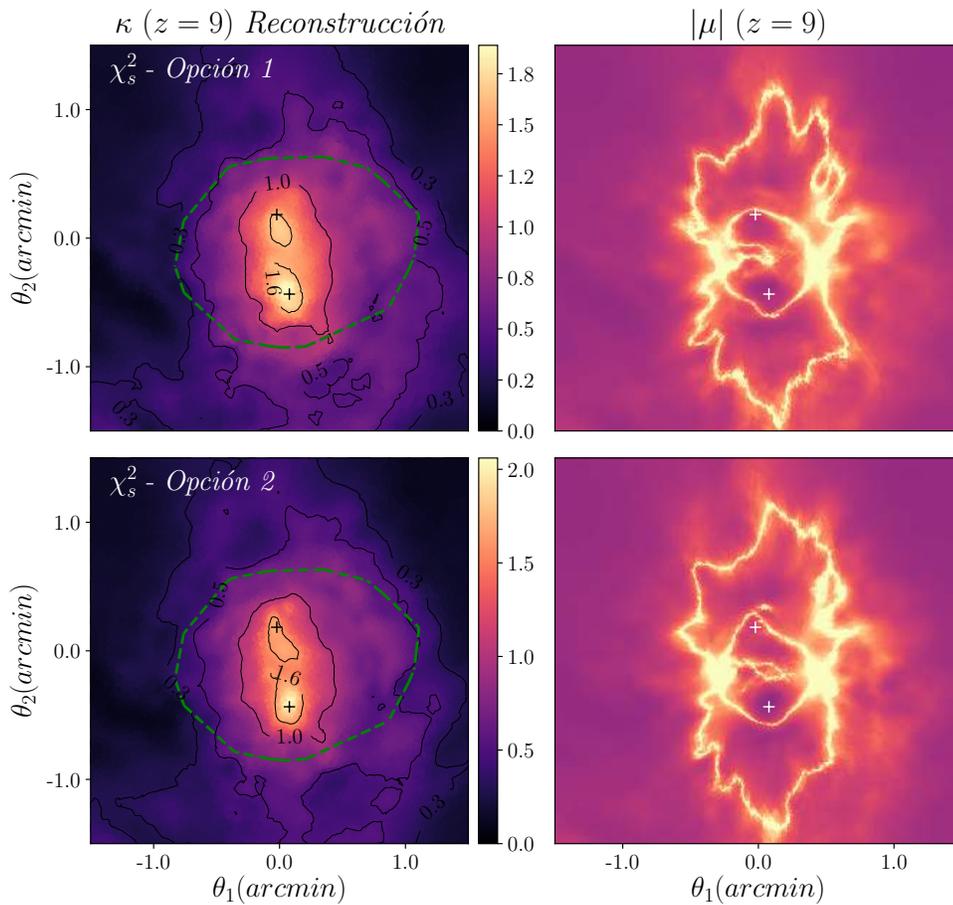


Figura 6-6.: Resultados obtenidos considerando tanto el régimen fuerte como régimen débil para las dos posibles funciones de penalización χ_s^2 . La curva discontinua de color verde representa la frontera que encierra las múltiples imágenes. La figura de la izquierda representa la convergencia reconstruida, mientras en la figura de la derecha tenemos la magnitud de la magnificación. Las cruces marcan la posición de los deflectores mas brillantes del cúmulo. La fuente de referencia se encuentra a un corrimiento al rojo $z = 9$.

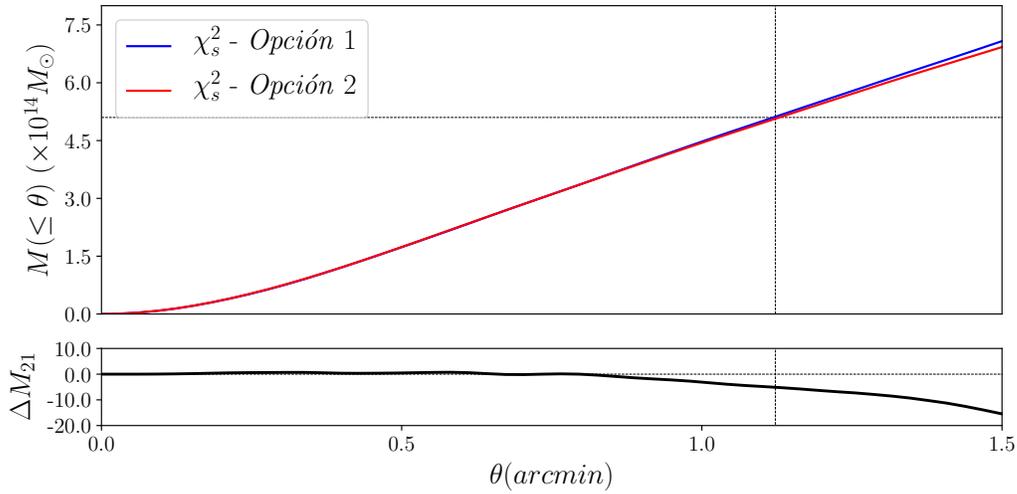


Figura 6-7.: Masa encerrada dentro de un radio $\theta \approx 1.1$ (*arcmin*), el cual delimita la región crítica del cúmulo. Aquí $\Delta M_{21} = (M_2 - M_1)(\leq \theta)(\times 10^{12} M_\odot)$.

definidos sobre una región de 3×3.8 (*arcmin*)². Para realizar el refinamiento de la red, respecto a cada iteración externa se agregaron 1000 nuevos puntos de red siguiendo una distribución normal con una desviación estándar de 1 (*arcmin*) centrada en cada deflector. Esto con el fin de abarcar una mayor área. Por último, el proceso de adaptación de la red se llevo a cabo solamente para las posiciones de las múltiples imágenes. Esto es posible ya que las elipticidades nos interesan a nivel local en una pequeña región, más no en un punto particular del espacio, pues el shear reducido provee una estimación del promedio de las elipticidades y no de un valor particular. Por tanto, no es necesario que la resolución de la red sea demasiado alta en dichas regiones. Los demás parámetros son idénticos a aquellos usados en la reconstrucción anterior.

Como vimos especialmente en la reconstrucción del modelo 1, aquí también tenemos que la introducción de las elipticidades permite cubrir una región mayor fuera de la región crítica. No obstante, esta mejora está limitada a la región donde haya elipticidades. Si comparamos los perfiles obtenidos a partir de la reconstrucción, que se muestran en la figura 6-6, y la región que cubren los catálogos (ver figura 6-2), es claro que en las regiones donde no hay elipticidades el método no es capaz de escalar allí. Es posible forzar un escalamiento, por ejemplo tomando un número inicial de puntos de red menor que el usado en la reconstrucción. También se puede lograr disminuyendo tanto η_κ como η_γ , o en su defecto tomando $\eta_\gamma > \eta_\kappa$, sin embargo, no es conveniente forzar este escalamiento pues no sabemos hasta qué punto estamos introduciendo más error del aceptable. Esto fue observado en las reconstrucciones de prueba, pues al forzar el escalamiento se obtuvieron valores en la convergencia por encima de los valores reales, produciendo un rápido aumento en la masa de la distribución. También fue observado que esto puede producir tanto una disminución o aumento significativo en la convergencia en la regiones donde se espera una alta concentración de masa. Esto depende

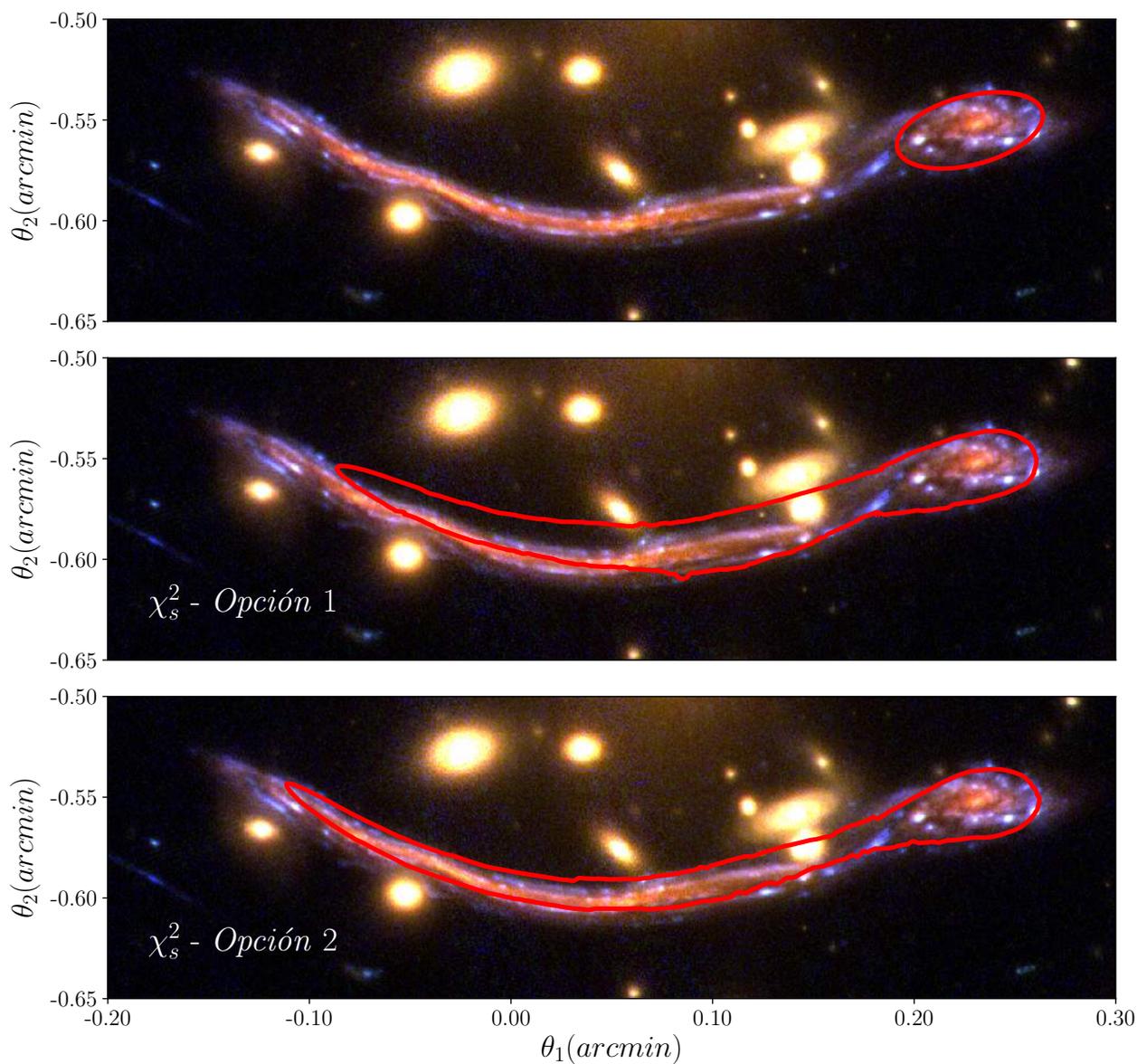


Figura 6-8.: En la figura superior se muestra un contorno de color rojo que aproximadamente encierra a la galaxia que forma el característico arco de A370. En la figura del medio y en la figura inferior se presenta el contorno de la galaxia predicha por la reconstrucción para las dos posibles funciones de penalización cuando se hace uso tanto del régimen fuerte como del régimen débil.

de cómo se ha forzado el escalamiento. Una última opción consiste en tomar un potencial deflector inicial diferente de cero, sin embargo se debe ser cuidadoso, pues si la convergencia inicial posee valores mayores que los reales el método muestra dificultades en producir una reconstrucción satisfactoria.

Como resultado de la reconstrucción se ha producido un aumento en la masa estimada del cúmulo, en particular fuera de la región crítica. Dentro del límite de dicha región la masa estimada es de aproximadamente $4.7 \times 10^{14} M_{\odot}$, valor que no ha variado significativamente respecto al valor obtenido en caso donde no se incluyen las elipticidades, y que es consistente con el valor obtenido en [RKL⁺10]. La forma de las curvas críticas internas se mantiene, mostrando así la importancia de los deflectores principales. En esta ocasión se ha producido una mejora en la estimación del arco, en especial para la opción 2, aunque no es significativa.

7. Conclusiones

En este trabajo hemos descrito un método de reconstrucción libre que permite hacer una estimación del perfil de masa de un cúmulo galáctico haciendo uso del efecto de lente gravitacional, donde se toman como observables las posiciones de las múltiples imágenes existentes (régimen fuerte), y las elipticidades aparentes de fuentes de fondo (régimen débil), y los cuales se comparan con cantidades propias del efecto de lente gravitacional por medio de lo que se conoce como una función de penalización. En el caso del régimen fuerte hemos considerados dos posibles funciones de penalización que hemos denominado opción 1 y opción 2.

Para evaluar la efectividad del método este fue aplicado a dos modelos de prueba, donde se realizó la reconstrucción utilizando solamente las múltiples imágenes, y luego agregando las elipticidades. Como resultado de estas pruebas obtuvimos que al considerar solamente las múltiples imágenes el método es efectivo en recobrar el perfil de masa dentro de la región delimitada por las múltiples imágenes (que hemos llamado región crítica). En particular, respecto a los modelos de prueba la diferencia relativa de la convergencia en la mayor parte de la región crítica ha sido menor que el 10 %, y solamente en pequeñas regiones ha sido del orden del 20 %. Fuera de la región crítica la diferencia relativa escala rápidamente a valores incluso por encima del 80 %. En consecuencia, se obtiene una estimación confiable de la masa encerrada dentro de la región crítica. Por otro lado, se han recuperado de forma satisfactoria las curvas críticas, y las curvas causticas, sin embargo estas últimas en general se encuentran trasladadas respecto a su posición real. Esta traslación no es un observable, por lo que no afecta la estimación del perfil de masa.

Estos resultados abren la posibilidad de obtener una estimación del perfil de masa de un cúmulo galáctico dentro de la región crítica cuando no se dispone de información propia del régimen débil. La calidad de la reconstrucción está sujeta a la cantidad de sistemas de múltiples imágenes que se disponga, pues si son pocos el método no es capaz de dar una estimación confiable del perfil. En cada reconstrucción de prueba utilizamos 40 sistemas de múltiples imágenes.

Una vez se introducen las elipticidades el campo de acción del método se amplía, sin embargo, está limitado a las regiones en donde se tengan dichas elipticidades. Se espera que al poseer una mayor densidad de elipticidades a un mismo corrimiento al rojo se obtenga un mejor ajuste fuera de la región crítica, pues disminuye la influencia de la elipticidad intrínseca de las fuentes. Aún así, tenemos que la introducción de las elipticidades induce en el peor de los casos una mejora de al menos un 20 % en la diferencia relativa fuera de la región crítica para

la convergencia, y por tanto, también se produce una mejora en la estimación de la masa de la lente fuera de la región crítica.

Vale la pena resaltar que en las reconstrucciones presentadas en este trabajo se ha considerado que el potencial deflector es igual que cero en todo el espacio de interés, lo que implica que no hemos impuesto ningún modelo inicial en la reconstrucción. Esto afianza aún más el poder del método. Por otro lado, entre las debilidades del método tenemos que no es sencillo obtener una reconstrucción con una alta resolución debido a la naturaleza propia del método, lo que lleva a que se produzcan ciertas irregularidades en la estimación de las curvas críticas y cáusticas, lo que a su vez no permite que en algunos casos se recobren todas las múltiples imágenes. Por otro lado, el método no permite obtener una estimación de la incertidumbre de la reconstrucción.

Dada la efectividad del método, lo hemos aplicado al cúmulo galáctico Abell 370, donde se obtienen resultados satisfactorios, los cuales están de acuerdo con la reconstrucción presentada en [SBH⁺18], donde se aplicó un método análogo al que hemos usado. Para hacer una estimación de la calidad de la reconstrucción hemos considerado la capacidad del método de recobrar el gran arco que caracteriza a este cúmulo (lo cual no fue realizado en [SBH⁺18]), el cual corresponde a una galaxia ubicada a un corrimiento al rojo $z = 0.725$. Para esta tarea siguiendo [RKL⁺10] hemos seleccionado el contorno aproximado de una de las imágenes de dicha galaxia, y como resultado fue posible recobrar casi en su totalidad el arco tanto en posición como en forma. En particular, respecto a la función de penalización en el régimen fuerte tenemos que la opción 2 presenta un mejor resultado. La introducción de las elipticidades induce una mejora en la estimación del arco. En cuanto a la masa del cúmulo, hemos obtenido una estimación de aproximadamente $(4.5 - 4.7) \times 10^{14} M_{\odot}$ dentro de un radio $\theta \approx 1.1$ (*arcmin*). Este valor de masa es consistente con estimaciones previas [RKL⁺10].

En nuestra implementación del método, se observó que bajo ciertas combinaciones de los parámetros iniciales que rigen la reconstrucción es posible aumentar la suavidad de las curvas críticas, y también es posible recobrar casi en su totalidad (si no es que todas) las múltiples imágenes. Por tanto, a futuro es conveniente explorar en mayor detalle el comportamiento del método para poder restringir tanto como sea posible el rango de los parámetros que llevan a una reconstrucción tan certera como sea posible. Con este rango de parámetros establecido es posible realizar varias reconstrucciones y promediar el resultado de cada una de ellas, y con ello sería posible hacer una estimación de la incertidumbre que presenta la reconstrucción. Sin embargo, esto no es posible para nosotros actualmente, pues nuestra implementación lleva a un gran consumo de recursos computacionales, y con el aumento de la resolución también crece rápidamente el tiempo de cálculo, por lo cual, a futuro se busca optimizar el método de forma tal que sea más versátil y permita estudiar en más detalle los objetos de interés.

A. Anexo: Coeficientes

En este anexo presentaremos la deducción detallada de los coeficientes que caracterizan el sistema de ecuaciones lineales discutido en el capítulo 4, y que corresponde al núcleo del método. Recordemos que todo término que no sea lineal respecto al potencial deflector se considera constante, y se obtienen a partir de los resultados de la iteración inmediatamente anterior (ya sea interior o exterior).

Por otro lado, en las diferentes contribuciones que dan forma a la función de penalización χ^2 tenemos que κ , γ y α entran en juego, así que debemos recordar que estas cantidades se pueden escribir en términos del potencial deflector ψ como se muestra en (4-4), la cual permite obtener fácilmente su correspondiente derivada respecto a un ψ_k arbitrario, dando como resultado

$$\frac{\partial \kappa_i}{\partial \psi_k} = \sum_{j=1}^N \mathcal{K}_{ij} \frac{\partial \psi_j}{\partial \psi_k} = \sum_{j=1}^N \mathcal{K}_{ij} \delta_{jk} = \mathcal{K}_{ik}, \quad (\text{A-1})$$

$$\frac{\partial \gamma_{q,i}}{\partial \psi_k} = \sum_{j=1}^N \mathcal{G}_{q,ij} \frac{\partial \psi_j}{\partial \psi_k} = \sum_{j=1}^N \mathcal{G}_{q,ij} \delta_{jk} = \mathcal{G}_{q,ik} \quad \text{con } q \in \{1, 2\} \quad (\text{A-2})$$

y

$$\frac{\partial \alpha_{q,i}}{\partial \psi_k} = \sum_{j=1}^N \mathcal{D}_{q,ij} \frac{\partial \psi_j}{\partial \psi_k} = \sum_{j=1}^N \mathcal{D}_{q,ij} \delta_{jk} = \mathcal{D}_{q,ik} \quad \text{con } q \in \{1, 2\}. \quad (\text{A-3})$$

Aquí δ_{ij} representa la delta de Kronecker. Este resultado lo vamos a usar de forma extensiva a lo largo de este anexo.

En cada una de las siguientes secciones una vez tengamos definida la respectiva función de penalización el paso que sigue es derivar dicha expresión respecto a un ψ_k , con lo cual podremos determinar el peso que tiene cada punto de red, que son equivalentes a los coeficientes que definen el sistema de ecuaciones lineales que requerimos.

A.1. Régimen débil

En este régimen tenemos que la función de penalización χ_w^2 toma dos formas diferentes dadas por (4-10) y (4-11), las cuales por conveniencia se pueden escribir de forma compacta como

$$\chi_w^2 = \sum_{i=1}^{N_w} X_i^{(w)}, \quad (\text{A-4})$$

así que al tomar su derivada respecto ψ_k obtenemos la expresión

$$\frac{\partial \chi_w^2}{\partial \psi_k} = \sum_{i=1}^{N_w} \frac{\partial X_i^{(w)}}{\partial \psi_k}. \quad (\text{A-5})$$

Por tanto, una vez la forma funcional de $X_i^{(w)}$ este definida dependiendo de si estamos trabajando con $|g_i| \leq 1$ o $|g_i| > 1$ podemos obtener fácilmente la contribución del régimen débil al sistema de ecuaciones lineales que nos interesa. A continuación vamos a evaluar cada uno de estos casos.

A.1.1. Caso $|g_i| \leq 1$

Si expandimos (4-10) tenemos que $X_i^{(w)}$ toma la forma

$$X_i^{(w)} = \frac{\left(\epsilon_{1,i} - Z_i \epsilon_{1,i} \kappa_i - Z_i \gamma_{1,i}\right)^2 + \left(\epsilon_{2,i} - Z_i \epsilon_{2,i} \kappa_i - Z_i \gamma_{2,i}\right)^2}{\sigma_{\leq,i}^2}, \quad (\text{A-6})$$

donde tomaremos $\sigma_{\leq,i}^2 := (1 - Z_i \kappa_i)^2 \sigma_i^2$ como una cantidad constante. Así pues, la derivada de (A-6) con respecto a ψ_k es

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_i^{(w)}}{\partial \psi_k} &= -\frac{2Z_i}{\sigma_{\leq,i}^2} \left(\epsilon_{1,i} - Z_i \epsilon_{1,i} \kappa_i - Z_i \gamma_{1,i}\right) \left(\epsilon_{1,i} \frac{\partial \kappa_i}{\partial \psi_k} + \frac{\partial \gamma_{1,i}}{\partial \psi_k}\right) \\ &\quad - \frac{2Z_i}{\sigma_{\leq,i}^2} \left(\epsilon_{2,i} - Z_i \epsilon_{2,i} \kappa_i - Z_i \gamma_{2,i}\right) \left(\epsilon_{2,i} \frac{\partial \kappa_i}{\partial \psi_k} + \frac{\partial \gamma_{2,i}}{\partial \psi_k}\right) \\ &= \frac{2Z_i^2}{\sigma_{\leq,i}^2} \left[\epsilon_{1,i} \left(\kappa_i \frac{\partial \gamma_{1,i}}{\partial \psi_k} + \gamma_{1,i} \frac{\partial \kappa_i}{\partial \psi_k} \right) + \epsilon_{2,i} \left(\kappa_i \frac{\partial \gamma_{2,i}}{\partial \psi_k} + \gamma_{2,i} \frac{\partial \kappa_i}{\partial \psi_k} \right) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{1,i} \frac{\partial \gamma_{1,i}}{\partial \psi_k} + \gamma_{2,i} \frac{\partial \gamma_{2,i}}{\partial \psi_k} + \left(\epsilon_{1,i}^2 + \epsilon_{2,i}^2\right) \kappa_i \frac{\partial \kappa_i}{\partial \psi_k} \right] \\ &\quad - \frac{2Z_i}{\sigma_{\leq,i}^2} \left[\epsilon_{1,i} \frac{\partial \gamma_{1,i}}{\partial \psi_k} + \epsilon_{2,i} \frac{\partial \gamma_{2,i}}{\partial \psi_k} + \left(\epsilon_{1,i}^2 + \epsilon_{2,i}^2\right) \frac{\partial \kappa_i}{\partial \psi_k} \right] \\ &= 2 \sum_{j=1}^N \frac{Z_i^2}{\sigma_{\leq,i}^2} \left[\epsilon_{1,i} \left(\mathcal{G}_{1,ik} \mathcal{K}_{ij} + \mathcal{K}_{ik} \mathcal{G}_{1,ij} \right) + \epsilon_{2,i} \left(\mathcal{G}_{2,ik} \mathcal{K}_{ij} + \mathcal{K}_{ik} \mathcal{G}_{2,ij} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{G}_{1,ik} \mathcal{G}_{1,ij} + \mathcal{G}_{2,ik} \mathcal{G}_{2,ij} + |\epsilon_i|^2 \mathcal{K}_{ik} \mathcal{K}_{ij} \right] \psi_j \\ &\quad - \frac{2Z_i}{\sigma_{\leq,i}^2} \left(\epsilon_{1,i} \mathcal{G}_{1,ik} + \epsilon_{2,i} \mathcal{G}_{2,ik} + |\epsilon_i|^2 \mathcal{K}_{ik} \right) \\ &= 2 \sum_{j=1}^N W_{ikj}^{(w)} \psi_j - 2V_{ik}^{(w)}, \quad (\text{A-7}) \end{aligned}$$

donde se ha definido

$$W_{ikj}^{(w)} := A_{1,i} \left(\mathcal{G}_{1,ik} \mathcal{K}_{ij} + \mathcal{K}_{ik} \mathcal{G}_{1,ij} \right) + A_{2,i} \left(\mathcal{G}_{2,ik} \mathcal{K}_{ij} + \mathcal{K}_{ik} \mathcal{G}_{2,ij} \right) \\ + A_{3,i} \mathcal{G}_{1,ik} \mathcal{G}_{1,ij} + A_{4,i} \mathcal{G}_{2,ik} \mathcal{G}_{2,ij} + A_{5,i} \mathcal{K}_{ik} \mathcal{K}_{ij}$$

y

$$V_{ik}^w := a_{1,i} \mathcal{G}_{1,ik} + a_{2,i} \mathcal{G}_{2,ik} + a_{3,i} \mathcal{K}_{ik}, \quad (\text{A-8})$$

con

$$A_{1,i} = \frac{Z_i^2}{\sigma_{\leq,i}^2} \epsilon_{1,i}, \quad A_{2,i} = \frac{Z_i^2}{\sigma_{\leq,i}^2} \epsilon_{2,i}, \quad A_{3,i} = A_{4,i} = \frac{Z_i^2}{\sigma_{\leq,i}^2}, \quad A_{5,i} = \frac{Z_i^2}{\sigma_{\leq,i}^2} |\epsilon_i|^2, \quad (\text{A-9})$$

y

$$a_{1,i} = \frac{Z_i}{\sigma_{\leq,i}^2} \epsilon_{1,i}, \quad a_{2,i} = \frac{Z_i}{\sigma_{\leq,i}^2} \epsilon_{2,i}, \quad a_{3,i} = \frac{Z_i}{\sigma_{\leq,i}^2} |\epsilon_i|^2. \quad (\text{A-10})$$

A.1.2. Caso $|g_i| > 1$

De forma análoga al caso anterior, al expandir (4-11) tenemos que $X_i^{(w)}$ se puede escribir como

$$X_i^{(w)} = \frac{\left(Z_i \kappa_i + Z_i \epsilon_{1,i} \gamma_{1,i} + Z_i \epsilon_{2,i} \gamma_{2,i} - 1 \right)^2 + Z_i^2 \left(\epsilon_{2,i} \gamma_{1,i} - \epsilon_{1,i} \gamma_{2,i} \right)^2}{\sigma_{>,i}^2} \quad (\text{A-11})$$

con $\sigma_{>,i}^2 := Z_i^2 |\gamma_i|^2 \sigma_i^2$, el cual tomaremos como una cantidad constante. Así pues, la derivada de (A-11) con respecto a ψ_k es

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_i^{(w)}}{\partial \psi_k} &= \frac{2Z_i}{\sigma_{>,i}^2} \left(Z_i \kappa_i + Z_i \epsilon_{1,i} \gamma_{1,i} + Z_i \epsilon_{2,i} \gamma_{2,i} - 1 \right) \left(\frac{\partial \kappa_i}{\partial \psi_k} + \epsilon_{1,i} \frac{\partial \gamma_{1,i}}{\partial \psi_k} + \epsilon_{2,i} \frac{\partial \gamma_{2,i}}{\partial \psi_k} \right) \\ &\quad + \frac{2Z_i^2}{\sigma_{>,i}^2} \left(\epsilon_{2,i} \gamma_{1,i} - \epsilon_{1,i} \gamma_{2,i} \right) \left(\epsilon_{2,i} \frac{\partial \gamma_{1,i}}{\partial \psi_k} - \epsilon_{1,i} \frac{\partial \gamma_{2,i}}{\partial \psi_k} \right) \\ &= \frac{2Z_i^2}{\sigma_{>,i}^2} \left[\epsilon_{1,i} \left(\kappa_i \frac{\partial \gamma_{1,i}}{\partial \psi_k} + \gamma_{1,i} \frac{\partial \kappa_i}{\partial \psi_k} \right) + \epsilon_{2,i} \left(\kappa_i \frac{\partial \gamma_{2,i}}{\partial \psi_k} + \gamma_{2,i} \frac{\partial \kappa_i}{\partial \psi_k} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\epsilon_{1,i}^2 + \epsilon_{2,i}^2 \right) \left(\gamma_{1,i} \frac{\partial \gamma_{1,i}}{\partial \psi_k} + \gamma_{2,i} \frac{\partial \gamma_{2,i}}{\partial \psi_k} \right) + \kappa_i \frac{\partial \kappa_i}{\partial \psi_k} \right] \\ &\quad - \frac{2Z_i}{\sigma_{>,i}^2} \left(\epsilon_{1,i} \frac{\partial \gamma_{1,i}}{\partial \psi_k} + \epsilon_{2,i} \frac{\partial \gamma_{2,i}}{\partial \psi_k} + \frac{\partial \kappa_i}{\partial \psi_k} \right) \\ &= 2 \sum_{j=1}^N \frac{Z_i^2}{\sigma_{>,i}^2} \left[\epsilon_{1,i} \left(\mathcal{G}_{1,ik} \mathcal{K}_{ij} + \mathcal{K}_{ik} \mathcal{G}_{1,ij} \right) + \epsilon_{2,i} \left(\mathcal{G}_{2,ik} \mathcal{K}_{ij} + \mathcal{K}_{ik} \mathcal{G}_{2,ij} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

$$\begin{aligned}
& + |\epsilon_i|^2 \mathcal{G}_{1,ik} \mathcal{G}_{1,ij} + |\epsilon_i|^2 \mathcal{G}_{2,ik} \mathcal{G}_{2,ij} + \mathcal{K}_{ik} \mathcal{K}_{ij} \Big] \psi_j \\
& - \frac{2Z_i}{\sigma_{\leq,i}^2} \left(\epsilon_{1,i} \mathcal{G}_{1,ik} + \epsilon_{2,i} \mathcal{G}_{2,ik} + |\epsilon_i|^2 \mathcal{K}_{ik} \right) \\
& = 2 \sum_{j=1}^N W_{ikj}^{(w)} \psi_k - 2V_{ik}^{(w)}, \tag{A-13}
\end{aligned}$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned}
W_{ikj}^{(w)} := & A_{1,i} \left(\mathcal{G}_{1,ik} \mathcal{K}_{ij} + \mathcal{K}_{ik} \mathcal{G}_{1,ij} \right) + A_{2,i} \left(\mathcal{G}_{2,ik} \mathcal{K}_{ij} + \mathcal{K}_{ik} \mathcal{G}_{2,ij} \right) \\
& + A_{3,i} \mathcal{G}_{1,ik} \mathcal{G}_{1,ij} + A_{4,i} \mathcal{G}_{2,ik} \mathcal{G}_{2,ij} + A_{5,i} \mathcal{K}_{ik} \mathcal{K}_{ij},
\end{aligned}$$

y

$$V_{ik}^w := a_{1,i} \mathcal{G}_{1,ik} + a_{2,i} \mathcal{G}_{2,ik} + a_{3,i} \mathcal{K}_{ik}, \tag{A-14}$$

con

$$A_{1,i} = \frac{Z_i^2}{\sigma_{>,i}^2} \epsilon_{1,i}, \quad A_{2,i} = \frac{Z_i^2}{\sigma_{>,i}^2} \epsilon_{2,i}, \quad A_{3,i} = A_{4,i} = \frac{Z_i^2}{\sigma_{>,i}^2} |\epsilon_i|^2, \quad A_{5,i} = \frac{Z_i^2}{\sigma_{>,i}^2}, \tag{A-15}$$

y

$$a_{1,i} = \frac{Z_i}{\sigma_{>,i}^2} \epsilon_{1,i}, \quad a_{2,i} = \frac{Z_i}{\sigma_{>,i}^2} \epsilon_{2,i}, \quad a_{3,i} = \frac{Z_i}{\sigma_{>,i}^2}. \tag{A-16}$$

A.1.3. Coeficientes

Como consecuencia de los resultados anteriores es claro que (A-5) se puede escribir para ambos casos como

$$\frac{\partial \chi_w^2}{\partial \psi_k} = \sum_{i=1}^N \left(2 \sum_{j=1}^N W_{ikj}^{(w)} \psi_j - 2V_{ik}^{(w)} \right) = 2 \sum_{j=1}^N \mathcal{W}_{kj}^{(w)} \psi_j - 2\mathcal{V}_k^{(w)}, \tag{A-17}$$

con

$$\mathcal{W}_{kj}^{(w)} = \sum_{i=1}^{N_w} W_{ikj}^{(w)} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_k^{(w)} = \sum_{i=1}^{N_w} V_{ik}^{(w)}, \tag{A-18}$$

cuya forma funcional está sujeta a las condiciones $|g_i| \leq 1$ y $|g_i| > 1$, tal como discutimos en las dos secciones anteriores.

A.2. Régimen Fuerte

En este trabajo para el régimen fuerte estamos considerando dos posibles funciones de penalización χ_s^2 , por lo cual determinaremos la contribución de cada una de estas funciones al sistema de ecuaciones lineal que nos interesa. A diferencia del régimen débil las funciones de penalización aquí consideradas no es posible escribirlas de forma equivalente donde las funciones involucradas simplemente cambien según sea necesario, por tal motivo trabajaremos con cada función de penalización de forma independiente.

A.2.1. Opción 1

La primera función de penalización definida para este régimen dada por (4-20) se puede escribir de forma más práctica como

$$\chi_s^2 = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_i} X_{in}^{(s)}, \quad (\text{A-19})$$

tal que al expandir (4-20) es claro que $X_{in}^{(s)}$ es

$$\begin{aligned} X_{in}^{(s)} = & \frac{\mu_{in}^2}{\sigma_{1,in}^2} \left[m_{in}^{(11)} (\theta_{1,in} - Z_i \alpha_{1,in} - \langle \beta_{1,i} \rangle) + m_{in}^{(12)} (\theta_{2,in} - Z_i \alpha_{2,in} - \langle \beta_{2,i} \rangle) \right]^2 \\ & + \frac{\mu_{in}^2}{\sigma_{2,in}^2} \left[m_{in}^{(21)} (\theta_{1,in} - Z_i \alpha_{1,in} - \langle \beta_{1,i} \rangle) + m_{in}^{(22)} (\theta_{2,in} - Z_i \alpha_{2,in} - \langle \beta_{2,i} \rangle) \right]^2, \end{aligned} \quad (\text{A-20})$$

donde tomaremos $S_{l,in}$ (4-19), \mathcal{M}_{in} (4-22), y $\langle \beta_i \rangle$ como constantes (ver sección 4.2 para más detalles). Ahora bien, la derivada de (A-19) respecto a un ψ_k arbitrario toma la forma

$$\frac{\partial \chi_s^2}{\partial \psi_k} = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_i} \frac{\partial X_{in}^{(s)}}{\partial \psi_k}, \quad (\text{A-21})$$

lo que nos lleva a la expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_{in}^{(s)}}{\partial \psi_k} = & \frac{2\mu_{in}^2}{\sigma_{1,in}^2} \left[m_{1,in} (\theta_{1,in} - Z_i \alpha_{1,in} - \langle \beta_{1,i} \rangle) + m_{2,in} (\theta_{2,in} - Z_i \alpha_{2,in} - \langle \beta_{2,i} \rangle) \right] \\ & \times \left(-Z_i m_{1,in} \frac{\partial \alpha_{1,in}}{\partial \psi_k} - Z_i m_{2,in} \frac{\partial \alpha_{2,in}}{\partial \psi_k} \right) \\ & + \frac{2\mu_{in}^2}{\sigma_{2,in}^2} \left[m_{3,in} (\theta_{1,in} - Z_i \alpha_{1,in} - \langle \beta_{1,i} \rangle) + m_{4,in} (\theta_{2,in} - Z_i \alpha_{2,in} - \langle \beta_{2,i} \rangle) \right] \\ & \times \left(-Z_i m_{3,in} \frac{\partial \alpha_{1,in}}{\partial \psi_k} - Z_i m_{4,in} \frac{\partial \alpha_{2,in}}{\partial \psi_k} \right) \Big\} \\ = & 2 \left[Z_i^2 \mu_{in}^2 \left(\frac{m_{1,in}^2}{\sigma_{1,in}^2} + \frac{m_{3,in}^2}{\sigma_{2,in}^2} \right) \alpha_{1,in} \frac{\partial \alpha_{1,in}}{\partial \psi_k} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Z_i^2 \mu_{in}^2 \left(\frac{m_{1,in} m_{2,in}}{\sigma_{1,in}^2} + \frac{m_{3,in} m_{4,in}}{\sigma_{2,in}^2} \right) \alpha_{2,in} \frac{\partial \alpha_{1,in}}{\partial \psi_k} \\
& + Z_i^2 \mu_{in}^2 \left(\frac{m_{1,in} m_{2,in}}{\sigma_{1,in}^2} + \frac{m_{3,in} m_{4,in}}{\sigma_{2,in}^2} \right) \alpha_{1,in} \frac{\partial \alpha_{2,in}}{\partial \psi_k} \\
& + Z_i^2 \mu_{in}^2 \left(\frac{m_{2,in}^2}{\sigma_{1,in}^2} + \frac{m_{4,in}^2}{\sigma_{2,in}^2} \right) \alpha_{2,in} \frac{\partial \alpha_{2,in}}{\partial \psi_k} \\
& - Z_i \mu_{in}^2 \left(\frac{m_{1,in}^2}{\sigma_{1,in}^2} + \frac{m_{3,in}^2}{\sigma_{2,in}^2} \right) (\theta_{1,in} - \langle \beta_{1,i} \rangle) \frac{\partial \alpha_{1,in}}{\partial \psi_k} \\
& - Z_i \mu_{in}^2 \left(\frac{m_{1,in} m_{2,in}}{\sigma_{1,in}^2} + \frac{m_{3,in} m_{4,in}}{\sigma_{2,in}^2} \right) (\theta_{2,in} - \langle \beta_{2,i} \rangle) \frac{\partial \alpha_{1,in}}{\partial \psi_k} \\
& - Z_i \mu_{in}^2 \left(\frac{m_{1,in} m_{2,in}}{\sigma_{1,in}^2} + \frac{m_{3,in} m_{4,in}}{\sigma_{2,in}^2} \right) (\theta_{1,in} - \langle \beta_{1,i} \rangle) \frac{\partial \alpha_{2,in}}{\partial \psi_k} \\
& - Z_i \mu_{in}^2 \left(\frac{m_{2,in}^2}{\sigma_{1,in}^2} + \frac{m_{4,in}^2}{\sigma_{2,in}^2} \right) (\theta_{2,in} - \langle \beta_{2,i} \rangle) \frac{\partial \alpha_{2,in}}{\partial \psi_k} \Big] \\
& = 2 \left[B_{1,in} \alpha_{1,in} \frac{\partial \alpha_{1,in}}{\partial \psi_k} + B_{2,in} \alpha_{2,in} \frac{\partial \alpha_{1,in}}{\partial \psi_k} \right. \\
& \quad + B_{2,in} \alpha_{1,in} \frac{\partial \alpha_{2,in}}{\partial \psi_k} + B_{3,in} \alpha_{2,in} \frac{\partial \alpha_{2,in}}{\partial \psi_k} \\
& \quad \left. - b_{1,in} \frac{\partial \alpha_{1,in}}{\partial \psi_k} - b_{2,in} \frac{\partial \alpha_{1,in}}{\partial \psi_k} - b_{3,in} \frac{\partial \alpha_{2,in}}{\partial \psi_k} - b_{4,in} \frac{\partial \alpha_{2,in}}{\partial \psi_k} \right], \tag{A-22}
\end{aligned}$$

Aquí por simplicidad se ha definido

$$B_{1,in} := Z_i^2 \mu_{in}^2 \Delta m_{1,in}, \quad B_{2,in} := Z_i^2 \mu_{in}^2 \Delta m_{2,in}, \quad B_{3,in} := Z_i^2 \mu_{in}^2 \Delta m_{3,in}, \tag{A-23}$$

y

$$\begin{aligned}
b_{1,in} &:= Z_i \mu_{in}^2 \Delta m_{1,in} (\theta_{1,in} - \langle \beta_{1,i} \rangle), & b_{2,in} &:= Z_i \mu_{in}^2 \Delta m_{2,in} (\theta_{2,in} - \langle \beta_{2,i} \rangle), \\
b_{3,in} &:= Z_i \mu_{in}^2 \Delta m_{2,in} (\theta_{1,in} - \langle \beta_{1,i} \rangle), & b_{4,in} &:= Z_i \mu_{in}^2 \Delta m_{3,in} (\theta_{2,in} - \langle \beta_{2,i} \rangle),
\end{aligned} \tag{A-24}$$

con

$$\begin{aligned}
\Delta m_{1,in} &:= \left(\frac{m_{1,in}^2}{\sigma_{1,in}^2} + \frac{m_{3,in}^2}{\sigma_{2,in}^2} \right), & \Delta m_{2,in} &:= \left(\frac{m_{1,in} m_{2,in}}{\sigma_{1,in}^2} + \frac{m_{3,in} m_{4,in}}{\sigma_{2,in}^2} \right) \\
\Delta m_{3,in} &:= \left(\frac{m_{2,in}^2}{\sigma_{1,in}^2} + \frac{m_{4,in}^2}{\sigma_{2,in}^2} \right).
\end{aligned} \tag{A-25}$$

Continuando con nuestro cálculo tenemos que

$$\frac{\partial X_{in}^{(s)}}{\partial \psi_k} = 2 \sum_{j=1}^N \left(B_{1,in} \mathcal{D}_{1,ink} \mathcal{D}_{1,inj} + B_{2,in} \mathcal{D}_{1,ink} \mathcal{D}_{2,inj} \right. \\ \left. + B_{2,in} \mathcal{D}_{2,ink} \mathcal{D}_{1,inj} + B_{3,in} \mathcal{D}_{2,ink} \mathcal{D}_{2,inj} \right) \psi_j \quad (\text{A-26})$$

$$- 2 \left(b_{1,in} \mathcal{D}_{1,ink} + b_{2,in} \mathcal{D}_{1,ink} + b_{3,in} \mathcal{D}_{2,ink} + b_{4,in} \mathcal{D}_{2,ink} \right) \quad (\text{A-27})$$

$$= 2 \sum_{j=1}^N W_{inkj}^{(s)} \psi_j - 2V_{ink}^{(s)},$$

donde se ha definido

$$W_{inkj}^{(s)} := B_{1,in} \mathcal{D}_{1,ink} \mathcal{D}_{1,inj} + B_{2,in} \mathcal{D}_{1,ink} \mathcal{D}_{2,inj} + B_{2,in} \mathcal{D}_{2,ink} \mathcal{D}_{1,inj} + B_{3,in} \mathcal{D}_{2,ink} \mathcal{D}_{2,inj}, \quad (\text{A-28})$$

y

$$V_{ink}^{(s)} := b_{1,in} \mathcal{D}_{1,ink} + b_{2,in} \mathcal{D}_{1,ink} + b_{3,in} \mathcal{D}_{2,ink} + b_{4,in} \mathcal{D}_{2,ink}. \quad (\text{A-29})$$

Como resultado tenemos que (A-21) es finalmente

$$\frac{\partial \chi_s^2}{\partial \psi_k} = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_i} \left(2 \sum_{j=1}^N W_{inkj}^{(s)} \psi_k - 2V_{ink}^{(s)} \right) = 2 \sum_{j=1}^N \mathcal{W}_{kj}^{(s)} \psi_j - 2\mathcal{V}_k^{(s)}, \quad (\text{A-30})$$

siendo

$$\mathcal{W}_{kj}^{(s)} = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_i} W_{inkj}^{(s)} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_k^{(s)} = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_i} V_{ink}^{(s)}. \quad (\text{A-31})$$

A.2.2. Opción 2

Al igual que hicimos en el esquema anterior, vamos a escribir (4-27) de la forma

$$\chi_s^2 = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_i-1} \sum_{m=n+1}^{N_i} X_{inm}^{(s)}, \quad (\text{A-32})$$

tal que al expandir (4-27) obtenemos que

$$X_{inm}^{(s)} = \frac{\left(\theta_{1,in} - Z_i \alpha_{1,in} - \theta_{1,im} + Z_i \alpha_{1,im} \right)^2}{\sigma_{1,inm}^2} + \frac{\left(\theta_{2,in} - Z_i \alpha_{2,in} - \theta_{2,im} + Z_i \alpha_{2,im} \right)^2}{\sigma_{2,inm}^2}, \quad (\text{A-33})$$

donde tomaremos $S_{l,inm}$ (4-28) como una constante. Por tanto, la derivada de (A-32) respecto ψ_k es ahora

$$\frac{\partial \chi_s^2}{\partial \psi_k} = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_i-1} \sum_{m=n+1}^{N_i} \frac{\partial X_{inm}^{(s)}}{\partial \psi_k}, \quad (\text{A-34})$$

lo que nos lleva a la expresión

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_{inm}^{(s)}}{\partial \psi_k} &= \frac{2Z_i}{\sigma_{1,inm}^2} \left(\theta_{1,in} - Z_i \alpha_{1,in} - \theta_{1,im} + Z_i \alpha_{1,im} \right) \left(-\frac{\partial \alpha_{1,in}}{\partial \psi_k} + \frac{\partial \alpha_{1,im}}{\partial \psi_k} \right) \\
&\quad + \frac{2Z_i}{\sigma_{2,inm}^2} \left(\theta_{2,in} - Z_i \alpha_{2,in} - \theta_{2,im} + Z_i \alpha_{2,im} \right) \left(-\frac{\partial \alpha_{2,in}}{\partial \psi_k} + \frac{\partial \alpha_{2,im}}{\partial \psi_k} \right) \\
&= -\frac{2Z_i}{\sigma_{1,inm}^2} \left(\theta_{1,in} - \theta_{1,im} \right) \left(\frac{\partial \alpha_{1,in}}{\partial \psi_k} - \frac{\partial \alpha_{1,im}}{\partial \psi_k} \right) \\
&\quad - \frac{2Z_i}{\sigma_{1,inm}^2} \left(\theta_{2,in} - \theta_{2,im} \right) \left(\frac{\partial \alpha_{2,in}}{\partial \psi_k} - \frac{\partial \alpha_{2,im}}{\partial \psi_k} \right) \\
&\quad + \frac{2Z_i^2}{\sigma_{1,inm}^2} \left(\alpha_{1,in} - \alpha_{1,im} \right) \left(\frac{\partial \alpha_{1,in}}{\partial \psi_k} - \frac{\partial \alpha_{1,im}}{\partial \psi_k} \right) \\
&\quad + \frac{2Z_i^2}{\sigma_{2,inm}^2} \left(\alpha_{2,in} - \alpha_{2,im} \right) \left(\frac{\partial \alpha_{2,in}}{\partial \psi_k} - \frac{\partial \alpha_{2,im}}{\partial \psi_k} \right) \\
&= -\frac{2Z_i}{\sigma_{1,inm}^2} \left(\mathcal{D}_{1,ink} - \mathcal{D}_{1,imk} \right) \left(\theta_{1,in} - \theta_{1,im} \right) \\
&\quad - \frac{2Z_i}{\sigma_{2,inm}^2} \left(\mathcal{D}_{2,ink} - \mathcal{D}_{2,imk} \right) \left(\theta_{2,in} - \theta_{2,im} \right) \\
&\quad + \frac{2Z_i^2}{\sigma_{1,inm}^2} \left(\mathcal{D}_{1,ink} - \mathcal{D}_{1,imk} \right) \left[\sum_{j=1}^N \left(\mathcal{D}_{1,inj} - \mathcal{D}_{1,imj} \right) \psi_j \right] \\
&\quad + \frac{2Z_i^2}{\sigma_{2,inm}^2} \left(\mathcal{D}_{2,ink} - \mathcal{D}_{2,imk} \right) \left[\sum_{j=1}^N \left(\mathcal{D}_{2,inj} - \mathcal{D}_{2,imj} \right) \psi_j \right] \\
&= 2 \sum_{j=1}^N W_{inmkj}^{(s)} \psi_j - 2V_{inmk}^{(s)}, \tag{A-35}
\end{aligned}$$

donde se ha definido

$$W_{inmkj}^{(s)} := \frac{Z_i^2}{\sigma_{1,inm}^2} \Delta \mathcal{D}_{1,inmk} \Delta \mathcal{D}_{1,inmj} + \frac{Z_i^2}{\sigma_{2,inm}^2} \Delta \mathcal{D}_{2,inmk} \Delta \mathcal{D}_{2,inmj} \tag{A-36}$$

y

$$V_{inmk}^{(s)} := \frac{Z_i}{\sigma_{1,inm}^2} \Delta \mathcal{D}_{1,inmk} \Delta \theta_{1,inm} + \frac{Z_i}{\sigma_{2,inm}^2} \Delta \mathcal{D}_{2,inmk} \Delta \theta_{2,inm}, \tag{A-37}$$

con

$$\Delta \mathcal{D}_{p,inmq} := \mathcal{D}_{p,inq} - \mathcal{D}_{p,imq} \quad \text{y} \quad \Delta \theta_{p,inm} := \theta_{p,in} - \theta_{p,im}, \quad \text{con} \quad q \in \{1, 2\}. \tag{A-38}$$

En consecuencia, la expresión (A-34) se reduce a

$$\frac{\partial \chi_s^2}{\partial \psi_k} = \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{n=1}^{N_i-1} \sum_{m=n+1}^{N_i} \left(2 \sum_{j=1}^N W_{inmkj}^{(s)} \psi_k - 2V_{inmk}^{(s)} \right) = 2 \sum_{j=1}^N \mathcal{W}_{kj}^{(s)} \psi_j - 2\mathcal{V}_k^{(s)}, \tag{A-39}$$

siendo

$$\mathcal{W}_{kj}^{(s)} = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_i-1} \sum_{m=n+1}^{N_i} W_{inmkj}^{(s)} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_k^{(s)} = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_i-1} \sum_{m=n+1}^{N_i} V_{inmk}^{(s)}. \quad (\text{A-40})$$

A.3. Regularización

Según lo descrito en la sección 4.2.3 vemos que (4-34) se puede escribir como

$$\chi_{\gamma}^2 = \chi_{\gamma_1}^2 + \chi_{\gamma_2}^2 = \eta_{\gamma} \sum_{i=1}^N \left(\gamma_{1,i} - \gamma_{1,i}^{(0)} \right)^2 + \eta_{\gamma} \sum_{i=1}^N \left(\gamma_{2,i} - \gamma_{2,i}^{(0)} \right)^2, \quad (\text{A-41})$$

con lo cual es claro que χ_{κ}^2 , $\chi_{\gamma_1}^2$ y $\chi_{\gamma_2}^2$ tienen una forma funcional similar. Así pues, estas tres funciones de penalización se pueden escribir de forma general como

$$\chi_r^2 = \eta_r \sum_{i=1}^N \left(r_i - r_i^{(0)} \right)^2, \quad (\text{A-42})$$

donde solamente hay que reemplazar r en (A-42) por κ , γ_1 ó γ_2 (según corresponda) para recobrar (4-33) y (4-34). Aquí $\eta_{\gamma} = \eta_{\gamma_1} = \eta_{\gamma_2}$. Ahora, el siguiente paso es derivar (A-42) respecto a ψ_k , con lo cual se obtiene que

$$\frac{\chi_r^2}{\partial \psi_k} := 2\eta_r \sum_{i=1}^N \left(r_i - r_i^{(0)} \right) \frac{\partial r_i}{\partial \psi_k}, \quad (\text{A-43})$$

donde $r_i^{(0)}$ es constante. Entonces, siguiendo (4-4) podemos escribir r_i como

$$r(\boldsymbol{\theta}_i) = \sum_{j=1}^N \mathcal{R}_{ij} \psi_j, \quad (\text{A-44})$$

con lo cual (A-43) toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\chi_r^2}{\partial \psi_k} &:= 2\eta_r \sum_{i,j=1}^N \mathcal{R}_{ik} \mathcal{R}_{ij} \psi_j - 2\eta_r \sum_{i=1}^N \kappa_i^{(0)} \mathcal{R}_{ik} \\ &= 2\eta_r \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{R}_{ik} \mathcal{R}_{ij} \right) \psi_j - 2\eta_r \sum_{i=1}^N \kappa_i^{(0)} \mathcal{R}_{ik} \\ &= 2 \sum_{j=1}^N \mathcal{W}_{kj}^{(r)} \psi_j - 2\mathcal{V}_k^{(r)}, \end{aligned} \quad (\text{A-45})$$

siendo

$$\mathcal{W}_{kj}^{(r)} := \eta_r \sum_{i=1}^N \mathcal{R}_{ik} \mathcal{R}_{ij} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_k^{(r)} := \eta_r \sum_{i=1}^N r_i^{(0)} \mathcal{R}_{ik}. \quad (\text{A-46})$$

A.3.1. Coeficientes

Como resultado de la descripción anterior, la derivada de (4-33) respecto a ψ_k se puede escribir como

$$\frac{\partial \chi_{\kappa(R)}^2}{\partial \psi_k} = 2 \sum_{j=1}^N \mathcal{W}_{kj}^{(\kappa)} \psi_j - 2\mathcal{V}_k^{(\kappa)}, \quad (\text{A-47})$$

con

$$\mathcal{W}_{kj}^{(\kappa)} := \eta_\kappa \sum_{i=1}^N \mathcal{K}_{ik} \mathcal{K}_{ij} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_k^{(\kappa)} := \eta_\kappa \sum_{i=1}^N \kappa_i^{(0)} \mathcal{K}_{ik}, \quad (\text{A-48})$$

mientras que la derivada de (4-34) (y por tanto (A-41)) respecto a ψ_k toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_{\gamma(R)}^2}{\partial \psi_k} &= \frac{\partial \chi_{\gamma_1(R)}^2}{\partial \psi_k} + \frac{\partial \chi_{\gamma_2(R)}^2}{\partial \psi_k} = 2 \sum_{j=1}^N \left(\mathcal{W}_{kj}^{(\gamma_1)} + \mathcal{W}_{kj}^{(\gamma_2)} \right) \psi_j - 2 \left(\mathcal{V}_k^{(\gamma_1)} + \mathcal{V}_k^{(\gamma_2)} \right) \\ &= 2 \sum_{j=1}^N \mathcal{W}_{kj}^{(\gamma)} \psi_j - 2\mathcal{V}_k^{(\gamma)}, \end{aligned} \quad (\text{A-49})$$

donde

$$\mathcal{W}_{kj}^{(\gamma)} := \eta_\gamma \sum_{i=1}^N \left(\mathcal{G}_{1,ik} \mathcal{G}_{1,ij} + \mathcal{G}_{2,ik} \mathcal{G}_{2,ij} \right) \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_k^{(\gamma)} := \eta_\gamma \sum_{i=1}^N \left(\gamma_{1,i}^{(0)} \mathcal{G}_{1,ik} + \gamma_{2,i}^{(0)} \mathcal{G}_{2,ik} \right), \quad (\text{A-50})$$

Bibliografía

- [AAA⁺20] Nabila Aghanim, Yashar Akrami, M Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, 2020.
- [AEM11] S. W. Allen, A. E. Evrard, and A. B. Mantz. Cosmological parameters from observations of galaxy clusters. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 49:409–470, 2011.
- [ASW98a] H. M. AbdelSalam, P. Saha, and L. L. R. Williams. Non-parametric reconstruction of cluster mass distribution from strong lensing: modelling abell 370. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 294(4):734–746, 1998.
- [ASW98b] H. M. AbdelSalam, P. Saha, and L. L. R. Williams. Nonparametric reconstruction of abell 2218 from combined weak and strong lensing. *The Astronomical Journal*, 116(4):1541, 1998.
- [Bar03] M. Bartelmann. Numerical methods in gravitational lensing. *arXiv preprint astro-ph/0304162*, 2003.
- [BCG⁺06] M. Bradač, D. Clowe, A. H. Gonzalez, P. Marshall, W. Forman, C. Jones, M. Markevitch, S. Randall, T. Schrabback, and D. Zaritsky. Strong and weak lensing united. iii. measuring the mass distribution of the merging galaxy cluster 1es 0657–558. *The Astrophysical Journal*, 652(2):937, 2006.
- [BES⁺05] M. Bradač, T. Erben, P. Schneider, H. Hildebrandt, M. Lombardi, M. Schirmer, J. M. Miralles, D. Clowe, and S. Schindler. Strong and weak lensing united-ii. the cluster mass distribution of the most x-ray luminous cluster rx j1347. 5-1145. *Astronomy & Astrophysics*, 437(1):49–60, 2005.
- [BLS04] M. Bradač, M. Lombardi, and P. Schneider. Mass-sheet degeneracy: Fundamental limit on the cluster mass reconstruction from statistical (weak) lensing. *Astronomy & Astrophysics*, 424(1):13–22, 2004.
- [BN86] R. Blandford and R. Narayan. Fermat’s principle, caustics, and the classification of gravitational lens images. *The Astrophysical Journal*, 310:568–582, 1986.

- [BS01] M. Bartelmann and P. Schneider. Weak gravitational lensing. *Physics Reports*, 340(4-5):291–472, 2001.
- [BSLE05] M. Bradač, P. Schneider, M. Lombardi, and T. Erben. Strong and weak lensing united-i. the combined strong and weak lensing cluster mass reconstruction method. *Astronomy & Astrophysics*, 437(1):39–48, 2005.
- [BTA⁺09] M. Bradač, T. Treu, D. Applegate, A. H. Gonzalez, D. Clowe, W. Forman, C. Jones, P. Marshall, P. Schneider, and D. Zaritsky. Focusing cosmic telescopes: Exploring redshift z 5-6 galaxies with the bullet cluster 1e0657–56. *The Astrophysical Journal*, 706(2):1201, 2009.
- [BTP95] T. J. Broadhurst, A. N. Taylor, and J. A. Peacock. Mapping cluster mass distributions via gravitational lensing of background galaxies. *The Astrophysical Journal*, 438, 1995.
- [Bur81] W. L. Burke. Multiple gravitational imaging by distributed masses. *Astrophysical Journal*, 244:L1, 1981.
- [Car19] S. M. Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [Cas00] L. Castañeda. Efecto de la constante cosmológica en la probabilidad de lentes gravitacionales. Master’s thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2000.
- [CBM10] N. Coe, D. Benítez, T. Broadhurst, and L. A. Moustakas. A high-resolution mass map of galaxy cluster substructure: Lensperfect analysis of a1689. *The Astrophysical Journal*, 723(2):1678, 2010.
- [CBMM06] M. Cacciato, M. Bartelmann, M. Meneghetti, and L. Moscardini. Combining weak and strong lensing in cluster potential reconstruction. *Astronomy & Astrophysics*, 458(2):349–356, 2006.
- [CFB⁺08] D. Coe, E. Fuselier, N. Benítez, T. Broadhurst, B. Frye, and H. Ford. Lensperfect: gravitational lens mass map reconstructions yielding exact reproduction of all multiple images. *The Astrophysical Journal*, 681(2):814, 2008.
- [CK18] A. B. Congdon and C. R. Keeton. *Principles of Gravitational Lensing*. Springer, 2018.
- [CL03] P. Coles and F. Lucchin. *Cosmology: The origin and evolution of cosmic structure*. John Wiley & Sons, 2003.
- [CUS⁺18] I. N. Chiu, K. Umetsu, M. Sereno, S. Ettori, M. Meneghetti, J. Merten, J. Sayers, and A. Zitrin. Clump-3d: three-dimensional shape and structure of 20 clash galaxy clusters from combined weak and strong lensing. *The Astrophysical Journal*, 860(2):126, 2018.

- [DBC⁺16] J. M. Diego, T. Broadhurst, C. Chen, J. Lim, A. Zitrin, B. Chan, D. Coe, H. C. Ford, D. Lam, and W. Zheng. A free-form prediction for the reappearance of supernova refsdal in the hubble frontier fields cluster macsj1149. 5+ 2223. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 456(1):356–365, 2016.
- [DHHJ16] C. A. J. Duncan, C. Heymans, A. F. Heavens, and B. Joachimi. Cluster mass profile reconstruction with size and flux magnification on the hst stages survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 457(1):764–785, 2016.
- [DPST05] J. M. Diego, P. Protopapas, H. B. Sandvik, and M. Tegmark. Non-parametric inversion of strong lensing systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 360(2):477–491, 2005.
- [DR73] C. C. Dyer and R. C. Roeder. Distance-redshift relations for universes with some intergalactic medium. *The Astrophysical Journal*, 180:L31, 1973.
- [DR80] C. C. Dyer and R. C. Roeder. Possible multiple imaging by spherical galaxies. *The Astrophysical Journal*, 238:L67–L70, 1980.
- [DSB⁺18] J. M. Diego, K. B. Schmidt, T. Broadhurst, D. Lam, J. Vega-Ferrero, W. Zheng, S. Lee, T. Morishita, G. Bernstein, J. Lim, J. Silk, and H. Ford. A free-form lensing model of a370 revealing stellar mass dominated bcgs, in hubble frontier fields images. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 473(4):4279–4296, 2018.
- [DTPS07] J. M. Diego, M. Tegmark, P. Protopapas, and H. B. Sandvik. Combined reconstruction of weak and strong lensing data with wslap. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 375(3):958–970, 2007.
- [FGS85] E. E. Falco, M. V. Gorenstein, and I. I. Shapiro. On model-dependent bounds on $h(0)$ from gravitational images application of q0957+ 561a, b. *The Astrophysical Journal*, 289:L1–L4, 1985.
- [FTH08] J. A. Frieman, M. S. Turner, and D. Huterer. Dark energy and the accelerating universe. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 46:385–432, 2008.
- [GFS88] M. V. Gorenstein, E. E. Falco, and I. I. Shapiro. Degeneracies in parameter estimates for models of gravitational lens systems. *The Astrophysical Journal*, 327:693–711, 1988.
- [GL99] F. Giannoni and M. Lombardi. Gravitational lenses: odd or even images? *Classical and Quantum Gravity*, 16(6):1689, 1999.
- [GN89] S. A. Grossman and R. Narayan. Gravitationally lensed images in abell 370. *The Astrophysical Journal*, 344:637–644, 1989.

- [GWL20] A. Ghosh, L. L. R. Williams, and J. Liesenborgs. Free-form grale lens inversion of galaxy clusters with up to 1000 multiple images. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 494(3):3998–4014, 2020.
- [HBD⁺13] H. Hoekstra, M. Bartelmann, H. Dahle, H. Israel, M. Limousin, and M. Meneghetti. Masses of galaxy clusters from gravitational lensing. *Space Science Reviews*, 177(1-4):75–118, 2013.
- [HBH⁺15] A. Hoag, M. Bradač, K. H. Huang, R. E. Ryan Jr, K. Sharon, T. Schrabback, K. B. Schmidt, B. Cain, A. H. Gonzalez, H. Hildebrandt, J. Hinz, B. C. Lemaux, von der Linden A., L. M. Lubin, T. Treu, and D. Zaritsky. Rcs2 j232727. 6-020437: An efficient cosmic telescope at $z=0.6986$. *The Astrophysical Journal*, 813(1):37, 2015.
- [HCT14] R. Hurtado, L. Castañeda, and J. Tejeiro. Gravitational lensing by spherical lenses. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, 4(2):340–352, 2014.
- [HTM⁺19] K. Huber, C. Tchernin, J. Merten, S. Hilbert, and M. Bartelmann. Joint cluster reconstructions-combing free-form lensing and x-rays. *Astronomy & Astrophysics*, 627:A143, 2019.
- [Hub29] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15(3):168–173, 1929.
- [JK09] E. Jullo and J. P. Kneib. Multiscale cluster lens mass mapping–i. strong lensing modelling. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 395(3):1319–1332, 2009.
- [JKL⁺07] E. Jullo, J. P. Kneib, M. Limousin, A. Eliasdottir, P. J. Marshall, and T. Verdugo. A bayesian approach to strong lensing modelling of galaxy clusters. *New Journal of Physics*, 9(12):447, 2007.
- [KES⁺96] J.P. Kneib, R. S. Ellis, I. Smail, W. J. Couch, and R. M. Sharples. Hubble space telescope observations of the lensing cluster abell 2218. *The Astrophysical Journal*, 471(2):643, 1996.
- [KN11] J.P. Kneib and P. Natarajan. Cluster lenses. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 19(1):47, 2011.
- [LDRD06] J. Liesenborgs, S. De Rijcke, and H. Dejonghe. A genetic algorithm for the non-parametric inversion of strong lensing systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 367(3):1209–1216, 2006.

- [LDRDB09] J. Liesenborgs, S. De Rijcke, H. Dejonghe, and P. Bekaert. Non-parametric strong lens inversion of sdss j1004+ 4112. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 397(1):341–349, 2009.
- [LGHM07] A. Leonard, D. M. Goldberg, J. L. Haaga, and R. Massey. Gravitational shear, flexion, and strong lensing in abell 1689. *The Astrophysical Journal*, 666(1):51, 2007.
- [LP86] R. Lynds and V. Petrosian. Giant luminous arcs in galaxy clusters. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 18, page 1014, 1986.
- [LRB⁺19] D. J. Lagattuta, J. Richard, F. E. Bauer, B. Clément, G. Mahler, G. Soucail, D. Carton, J. P. Kneib, N. Laporte, J. Martinez, P. Vera, A. V. Payne, R. Pello, B. Kasper, K. B. Schmidt, and G. de la Vieuville. Probing 3d structure with a large muse mosaic: extending the mass model of frontier field abell 370. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 485(3):3738–3760, 2019.
- [LRC⁺17] D. J. Lagattuta, J. Richard, B. Clément, G. Mahler, V. Patrício, R. Pelló, G. Soucail, K. B. Schmidt, L. Wisotzki, J. Martinez, and D. Bina. Lens modelling abell 370: crowning the final frontier field with muse. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 469(4):3946–3964, 2017.
- [LWWDR20] J. Liesenborgs, L. L. R. Williams, J. Wagner, and S. De Rijcke. Extended lens reconstructions with grale: exploiting time-domain, substructural, and weak lensing information. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 494(3):3253–3274, 2020.
- [MCD⁺11] J. Merten, D. Coe, R. Dupke, R. Massey, A. Zitrin, E. S. Cypriano, N. Okabe, B. Frye, F. G. Braglia, Y. Jiménez-Teja, N. Benítez, T. Broadhurst, J. Rhodes, M. Meneghetti, A. Moustakas, L. Sodré Jr, J. Krick, and J. N. Bregman. Creation of cosmic structure in the complex galaxy cluster merger abell 2744. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 417(1):333–347, 2011.
- [McK85] R. H. McKenzie. A gravitational lens produces an odd number of images. *Journal of mathematical physics*, 26(7):1592–1596, 1985.
- [MCM⁺09] J. Merten, M. Cacciato, M. Meneghetti, C. Mignone, and M. Bartelmann. Combining weak and strong cluster lensing: applications to simulations and ms 2137. *Astronomy & Astrophysics*, 500(2):681–691, 2009.
- [Mer16] J. Merten. Mesh-free free-form lensing–i. methodology and application to mass reconstruction. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 461(3):2328–2345, 2016.

- [MR02] S. Mollerach and E. Roulet. *Gravitational lensing and microlensing*. World Scientific, 2002.
- [MSFM88] Y. Mellier, G. Soucail, B. Fort, and G. Mathez. Photometry, spectroscopy and content of the distant cluster of galaxies abell 370. *Astronomy and Astrophysics*, 199:13–28, 1988.
- [MVdBW10] H. Mo, F. Van den Bosch, and S. White. *Galaxy formation and evolution*. Cambridge University Press, 2010.
- [NJJ⁺20] A. Niemiec, M. Jauzac, E. Jullo, M. Limousin, K. Sharon, J. P. Kneib, P. Natarajan, and J. Richard. hybrid-lenstool: a self-consistent algorithm to model galaxy clusters with strong-and weak-lensing simultaneously. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 493(3):3331–3340, 2020.
- [OBD⁺12] M. Oguri, M. B. Bayliss, H. Dahle, K. Sharon, M. D. Gladders, P. Natarajan, J. F. Hennawi, and B. P. Koester. Combined strong and weak lensing analysis of 28 clusters from the sloan giant arcs survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 420(4):3213–3239, 2012.
- [Ogu10] M. Oguri. The mass distribution of sdss j1004 +4112 revisited. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 62(4):1017–1024, 2010.
- [PAB⁺19] G. W. Pratt, M. Arnaud, A. Biviano, D. Eckert, S. Ettori, D. Nagai, N. Okabe, and T. H. Reiprich. The galaxy cluster mass scale and its impact on cosmological constraints from the cluster population. *Space Science Reviews*, 215(2):1–82, 2019.
- [PGL⁺18] T. Petrushevska, A. Goobar, D. J. Lagattuta, R. Amanullah, L. Hangard, S. Fabbro, C. Lidman, K. Paech, J. Richard, and J. P. Kneib. Searching for supernovae in the multiply-imaged galaxies behind the gravitational telescope a370. *Astronomy & Astrophysics*, 614:A103, 2018.
- [PW10] A. O. Petters and M. C. Werner. Mathematics of gravitational lensing: multiple imaging and magnification. *General Relativity and Gravitation*, 42(9):2011–2046, 2010.
- [RKL⁺10] J. Richard, J. P. Kneib, M. Limousin, A. Edge, and E. Jullo. Abell 370 revisited: refurbished hubble imaging of the first strong lensing cluster. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 402(1):L44–L48, 2010.
- [Rob35] H. P. Robertson. Kinematics and world-structure. *The Astrophysical Journal*, 82:284, 1935.

- [Sah00] P. Saha. Lensing degeneracies revisited. *The Astronomical Journal*, 120(4):1654, 2000.
- [SBH⁺18] V. Strait, M. Bradač, A. Hoag, K. H. Huang, T. Treu, X. Wang, R. Amorin, M. Castellano, A. Fontana, B. C. Lemaux, E. Merlin, K. B. Schmidt, T. Schrabback, M. Trenti, and B. Vulcani. Mass and light of abell 370: A strong and weak lensing analysis. *The Astrophysical Journal*, 868(2):129, 2018.
- [Sch84] P. Schneider. The amplification caused by gravitational bending of light. *Astronomy and Astrophysics*, 140:119–124, 1984.
- [SDBL14] I. Sendra, J. M. Diego, T. Broadhurst, and R. Lazkoz. Enabling non-parametric strong lensing models to derive reliable cluster mass distributions—wslap+. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 437(3):2642–2651, 2014.
- [SE08] P. Schneider and X. Er. Weak lensing goes bananas: what flexion really measures. *Astronomy & Astrophysics*, 485(2):363–376, 2008.
- [SEF92] P. Schneider, J. Ehlers, and E. Falco. *Gravitational Lenses*. Springer, 1992.
- [SFK20] C. Schäfer, G. Fourestey, and J. P. Kneib. Lenstool-hpc: A high performance computing based mass modelling tool for cluster-scale gravitational lenses. *Astronomy and Computing*, 30:100360, 2020.
- [SFMP87] G. Soucail, B. Fort, Y. Mellier, and J. P. Picat. A blue ring-like structure in the center of the a 370 cluster of galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 172:L14–L16, 1987.
- [SKW06] P. Schneider, C. Kochanek, and J. Wambsganss. *Gravitational lensing: strong, weak and micro: Saas-Fee advanced course 33*, volume 33. Springer Science & Business Media, 2006.
- [SMF⁺88] G. Soucail, Y. Mellier, B. Fort, G. Mathez, and M. Cailloux. The giant arc in a 370-spectroscopic evidence for gravitational lensing from a source at $z=0.724$. *Astronomy and Astrophysics*, 191:L19–L21, 1988.
- [Sou87] G. Soucail. The giant luminous arc in the centre of the a 370 cluster of galaxies. *The Messenger*, 48:43, 1987.
- [SS92] S. Seitz and P. Schneider. Two theorems in multiple deflection gravitational lens theory. *Astronomy and Astrophysics*, 265:1–8, 1992.
- [SS95] P. Schneider and C. Seitz. Steps towards nonlinear cluster inversion through gravitational distortions. i. basic considerations and circular clusters. *Astronomy and Astrophysics*, 294:411–431, 1995.

- [SS97] C. Seitz and P. Schneider. Steps towards nonlinear cluster inversion through gravitational distortions. iii. including a redshift distribution of the sources. *Astronomy and Astrophysics*, 318:687–699, 1997.
- [SU11] M. Sereno and K. Umetsu. Weak-and strong-lensing analyses of the triaxial matter distribution of abell 1689. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 416(4):3187–3200, 2011.
- [UBZ⁺11] K. Umetsu, T. Broadhurst, A. Zitrin, E. Medezinski, and L.Y. Hsu. Cluster mass profiles from a bayesian analysis of weak-lensing distortion and magnification measurements: applications to subaru data. *The Astrophysical Journal*, 729(2):127, 2011.
- [Ume13] K. Umetsu. Model-free multi-probe lensing reconstruction of cluster mass profiles. *The Astrophysical Journal*, 769(1):13, 2013.
- [Ume20] K. Umetsu. Cluster–galaxy weak lensing. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 28(1):1–106, 2020.
- [UMN⁺14] K. Umetsu, E. Medezinski, M. Nonino, J. Merten, M. Postman, M. Meneghetti, M. Donahue, N. Czakon, A. Molino, S. Seitz, et al. Clash: weak-lensing shear-and-magnification analysis of 20 galaxy clusters. *The Astrophysical Journal*, 795(2):163, 2014.
- [Wal37] A. G. Walker. On milne’s theory of world-structure. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1):90–127, 1937.
- [Wei08] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford university press, 2008.