



Teoría Euleriana de Perturbaciones Cosmológicas a Segundo Orden

Diego Fernando Fonseca Moreno

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Observatorio Astronómico Nacional
Bogotá, Colombia
2020

Teoría Euleriana de Perturbaciones Cosmológicas a Segundo Orden

Diego Fernando Fonseca Moreno

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Astronomía

Director:

Dr. Rer. Nat. Leonardo Castañeda Colorado

Grupo de Investigación:

Astronomía Galáctica, Gravitación y Cosmología

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Observatorio Astronómico Nacional
Bogotá, Colombia
2020

A ti Julieth, caminar a tu lado ha sido espectacular...

Agradecimientos

Cuando miro hacia atrás y recuerdo a las personas que me ayudaron a construir este sueño, visualizo a mis padres Bertha Moreno y Marco Fonseca a lo lejos, como las bases de lo que he logrado construir. Un poco más cerca veo a mi hermano José Mauricio Fonseca con su valiosa compañía en todos mis proyectos y su disposición siempre para escucharme y hacerme sonreír en los momentos en donde me he sentido sin fuerzas para seguir avanzando, muy cerca a él como no mencionar a mis amigos Milena Hernández y Elkin Pineda con su inmensa ayuda día a día y su apoyo incondicional para complementar este sueño con el trabajo, en donde también tuve un gran aliado para progresar, gracias Pedro Mariño por su confianza, lealtad y amistad. Fijo más la atención, y visualizo a mi maestro Leonardo Castañeda, a quién infinitamente le agradeceré por creer en mi, por enseñarme física, cosmología, por cultivar en mi el deseo de seguir adelante en la academia haciendo las cosas bien y sobre todo por escucharme, transmitiendo esa buena forma de ver la vida, *“avance Diego disfrutando el camino y valorando lo que se da día a día”*...gracias profe Leo. Finalmente cuando vuelvo la mirada a mis manos, veo las tuyas Julieth y las de nuestros hijos Juan Diego y Juan Felipe, enlazando sus dedos a los nuestros como símbolo de creencia en quién soy. Ustedes siempre han sido y serán el motor que hay en mi para emprender nuestros sueños y hacerlos realidad.

Resumen

En cosmología uno de los grandes retos es proporcionar técnicas y modelos que permitan describir la formación de grandes estructuras en el universo. Así, en este trabajo, se retoma por medio de herramientas semianálíticas la construcción del espectro de potencias de materia a segundo orden. Para ello, inicialmente se construyen las ecuaciones de movimiento generales para un fluido de materia oscura, que debido a la alta complejidad en su solución, primero se abordan en un régimen lineal y luego son representadas en el espacio de Fourier para reproducir soluciones a segundo orden, que con ayuda de algunos elementos de la teoría cuántica de campos permiten obtener las correcciones deseadas a un loop. Finalmente, se presentan las ecuaciones de movimiento para un fluido mixto de materia oscura y bariónica.

Abstract

In cosmology one of the great challenges is to provide techniques and models that allow describing the formation of large structures in the universe. Thus, in this work, we rebuild through semi-analytical tools the matter power spectrum to second order. Therefore, initially we build the general movement equations for a dark matter fluid, that involving a the complex work in its solution, first we tackle a linear regime and then they are represented in the Fourier space to reproduce solutions to second order, with the help some elements of quantum field theory we obtain the desired solutions a one loop. Finally, we present the movement equations for a fluid mix of dark matter and baryonic.

Contenido

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Lista de símbolos	xii
Lista de figuras	xv
1. Introducción	1
2. Cosmología de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	2
2.1. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	2
2.2. Geometría espacial de la métrica FLRW	4
2.3. Parámetro de Hubble-Lemaître	5
2.4. Ecuaciones de Friedmann-Lemaître	5
3. Introducción a la Teoría de Perturbaciones	9
3.1. Ecuación de Boltzmann en cosmología	9
3.2. Dinámica euleriana	12
3.2.1. Teoría euleriana lineal de perturbaciones	12
3.2.2. Teoría euleriana No-Lineal de perturbaciones	20
4. Soluciones de la Teoría de Perturbaciones	23
4.1. Soluciones generales	23
4.2. Espectro de potencias a segundo orden	28
5. Materia Bariónica en la Teoría Euleriana de Perturbaciones	37
5.1. Ecuaciones de movimiento para CDM y Bariones	37
5.2. Ecuaciones de movimiento en el espacio de Fourier	40
6. Conclusiones y Perspectivas	42
A. Anexo: Algunos Cálculos para la Métrica de FLRW	45
A.1. Conexiones de Christoffel	45
A.2. Componentes del tensor de Ricci	46
A.3. Isotropía del tensor Momento-Energía	47

A.4. Deducción de la forma estándar de la métrica FLRW	48
A.5. Componentes del tensor de Riemann para la métrica de FLRW	50
A.6. Manipulación algebraica de las ecuaciones de campo	51
A.7. Ecuación de continuidad	52
A.8. Ecuaciones de campo cosmológicas	53
A.9. Ecuaciones de campo cosmológicas en tiempo conforme	54
B. Anexo: Ecuaciones hidrodinámicas a partir de los momentos de la ecuación de Vlasov	55
B.1. Conservación de masa y Ecuación de continuidad	55
B.2. Ecuación de Euler	56
C. Anexo: Aspectos algebraicos para la teoría de perturbaciones lineales	59
C.1. Relación de proporcionalidad entre $P(z)$ y $H(t)$	59
C.2. Ecuación para el factor de crecimiento y decrecimiento en función de z	60
C.3. Solución analítica a la integral (3-36) en un universo de Einstein-De Sitter	61
D. Anexo: Aspectos algebraicos para la teoría de perturbaciones No-Lineal	62
D.1. Representación en el espacio de Fourier de las ecuaciones de movimiento	62
D.2. Soluciones en el espacio de Fourier para el régimen lineal	65
D.3. Construcción de las ecuaciones (4-6) y (4-7)	66
D.4. Soluciones generales para el caso $n = 2$ y $n = 3$	68
D.5. Integrales que contribuyen al espectro de potencias a segundo orden	70
D.6. Contribuciones al espectro de potencias en coordenadas esféricas	74
D.7. Representación en el espacio de Fourier de la ecuación (5-21)	79
E. Códigos Python	81
E.1. Perturbaciones en el régimen lineal	81
E.2. Integral $P_{2,2}(k)$	82
E.3. Integral $P_{1,3}(k)$	83
Bibliografía	85

Lista de símbolos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición/Valor
c	Velocidad de la luz en el vacío	m/s	2.9979×10^8
G	Constante de gravitación universal	$\text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$	6.6726×10^{-11}
k	Parámetro de curvatura		-1, 0 y 1
t	Tiempo cosmológico	s	
$R(t)$	Factor de escala	Mpc	
H	Constante de Hubble-Lemaître	1/s	$H = \dot{R}(t)/R(t)$
P	Presión	$\text{kg}/\text{m} \cdot \text{s}^2$	
\mathcal{H}	Constante de Hubble en tiempo conforme	m/s	$\mathcal{H}(\tau) = H(t)R(t)$
\mathbf{r}	Coordenadas físicas		$\mathbf{r} = R(t)\mathbf{x}$
\mathbf{x}	Coordenadas comóviles		
z	Redshift		$\frac{R(t_0)}{R(t)} = z + 1$
A	Factor de amplificación		$A = D^+[z_{(e)}]/D^+[z_{(d)}]$
k	Número de onda	1/Mpc	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
Γ_{jk}^i	Conexiones de Christoffel		$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il} \left[\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right]$
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci	1/m	$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$
R	Escalar de curvatura	1/m	$R = R^\nu_{\nu}$

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$R^\alpha_{\mu\beta\nu}$	Tensor de Riemann	1/m	$R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu,\beta} + \Gamma^\alpha_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\mu\nu}$
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico		$g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$
T^ν_{μ}	Tensor momentum-energía		$T(x) = \rho_0 \mathbf{u}(x) \otimes \mathbf{u}(x)$
Λ	Constante cosmológica	1/m ²	
ρ	Densidad	kg/m ³	
Ω	Parámetros adimensionales		$\Omega(t) = \frac{8\pi G}{3H^2(t)}\rho(t)$
τ	Tiempo conforme		$d\tau = \int \frac{dt}{R(t)}$

Subíndices

Subíndice	Término
μ, α	Índices tensoriales con letras griegas
i, j, k	Índices espaciales con letras latinas

Superíndice

Superíndice	Término
ν, λ	Índices tensoriales con letras griegas
i, j, k	Índices espaciales con letras latinas

Abreviaturas

Abreviatura	Término
TGR	Teoría General de la Relatividad
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
PC	Perturbaciones Cosmológicas
CDM	Materia Oscura Fría
B	Materia Bariónica
CCC	Constante Cosmológica Cero

Abreviatura **Término**

UEE	Universo Estático de Einstein
UEDS	Universo Einstein-De Sitter
CAMB	Code for Anisotropies in the Microwave Background
CLASS	The Cosmic Linear Anisotropy Solving System

Lista de Figuras

3-1.	Factor de crecimiento de las perturbaciones en el régimen lineal.	17
3-2.	Factor de crecimiento para distintos valores en los parámetros $\Omega_{m,0}$ y $\Omega_{\Lambda,0}$. . .	19
3-3.	Comparación del factor de crecimiento de las perturbaciones en el régimen lineal para un universo de Einstein-De Sitter.	20
4-1.	Corrección a un Loop. Imagen tomada de [23].	29
4-2.	Representación en coordenadas esféricas.	30
4-3.	Espectro de potencias a primer orden para $z = 0$	31
4-4.	Espectro de potencias lineal y contribuciones $P_{2,2}(k)$ y $P_{1,3}(k)$ en $z = 0$	32
4-5.	Espectro de potencias no lineal $P(k)$ en $z = 0$	33
4-6.	Espectro lineal y no lineal para algunos valores en z	34
4-7.	Espectro de potencias no lineal $P(k)$ en $z = 0$	35
4-8.	Contribución $P_{2,2}(k)$ y $P_{1,3}(k)$	35
4-9.	Contribución al espectro de potencias a un loop $P_2(k) = P_{2,2}(k) + 2P_{1,3}(k)$. . .	36
4-10.	Espectro de potencias no lineal $P(k)$ en $z = 0, 1, 4$ y 9	36
D-1.	Acople de los vectores de onda para el kernel $F_3^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$	76

1. Introducción

En la cosmología moderna la dinámica de formación de estructuras a gran escala en el universo es uno de los grandes enigmas que se han investigado durante las últimas cinco décadas. La complejidad de abordar este problema, por sus descripciones altamente no lineales para evolucionar las ecuaciones de movimiento de un fluido compuesto en general por radiación, materia oscura, bariones y neutrinos, bajo el paradigma denominado Λ CDM, han llevado a la cosmología a articularse con diversas herramientas traídas de la mecánica de fluidos y la teoría cuántica de campos, con el objetivo de enriquecer la física que hay detrás de las herramientas numéricas, en especial de las simulaciones de N -cuerpos, que en la cosmología computacional son en gran medida dispendiosas en términos de sus costos y tiempos de computo. En especial, bajo este modelo de universo, poder describir las fluctuaciones de dicho fluido compuesto de varias especies y su transición de un régimen lineal al no lineal, es una tarea que en general no es sencilla[27]. Por lo tanto, en este trabajo se presenta una reconstrucción detallada del espectro de potencias para un fluido de materia oscura (con el esquema estándar para los estudios de formación de estructura[27]), herramienta indispensable en el modelo de halo[7, 20], bajo una modalidad semianalítica empleando teoría euleriana de perturbaciones cosmológicas a segundo orden.

Por lo tanto, para cumplir con este objetivo se dispone de la siguiente ruta: en el capítulo 2 se abordan los elementos necesarios, para los fines de este trabajo, de la cosmología estándar FLRW; seguido de ello, se encuentra el capítulo 3 en donde se presenta una introducción a la teoría de perturbaciones, con ayuda de la ecuación de Boltzmann y la dinámica euleriana abriendo paso a las ecuaciones de movimiento que describen la evolución de un fluido de materia oscura en términos de su campo de fluctuaciones y velocidades peculiares, enmarcadas en la época de dominio de materia, para un régimen no relativista y en la aproximación de subhorizonte. En este capítulo, además se presenta una solución completa de dichas ecuaciones en el régimen lineal[1, 8, 11], proporcionando el factor de crecimiento de las perturbaciones y se cierra éste con la representación de las mismas ecuaciones en el campo de la dinámica no lineal[4]. En capítulo 4, eje central del trabajo, se reconstruye la solución general para el régimen no lineal a las ecuaciones de movimiento con ayuda del método propuesto en[10, 13, 16] y se aborda la solución a segundo orden, permitiendo reproducir de forma gráfica y semianalítica el espectro de potencias de materia a segundo orden. Finalmente, en el capítulo 5, se complementa el trabajo con una descripción de las ecuaciones de movimiento, pero en esta oportunidad, para un fluido mixto de materia oscura y bariónica de la mano de investigaciones como las hechas por[17, 24, 27].

2. Cosmología de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

En este capítulo se realiza un acercamiento al marco teórico que permite la interpretación de diversos datos observacionales, de tal manera que propiedades de diversos objetos en el universo, tal como el corrimiento al rojo (redshift), luminosidad o tamaño, entre otras, pueden ser interpretadas de forma muy acertada. En contraste, la corriente teórica más aceptada es el modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW); este modelo, cimentado en la creencia de un universo gobernado por la Teoría General de la Relatividad (TGR) junto con un principio de homogeneidad e isotropía a gran escala, conforman la base para la explicación de la formación de estructura bajo el paradigma Λ CDM. Así en la sección 2.1, se hace una descripción detallada de la métrica que obedece al principio cosmológico¹, en la sección 2.2 se abordan los parámetros de Hubble-Lemaître y desaceleración, y se finaliza con la sección 2.3 en donde se presentan las ecuaciones de Friedmann-Lemaître.

2.1. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Partiendo del supuesto que el universo es homogéneo e isotrópico, se puede establecer, sobre el espacio-tiempo, un elemento de línea, llamado métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que satisfaga estas necesidades. Dados los lineamientos proporcionados[2, 28], inicialmente se establece la forma de una métrica que describa un espacio 4-dimensional que contenga un subespacio 3-dimensional de geometría homogénea. Así, bajo las hipótesis matemáticas en donde:

1. Las líneas de mundo de los objetos no se intersecan y a su vez son ortogonales a hipersuperficies como de espacio.
2. Existe una coordenada temporal x^0 para cada hipersuperficie.
3. Todo subespacio 3-dimensional, con valor constante en la coordenada temporal x^0 , es localmente isotrópico.
4. Todos los puntos sobre un subespacio 3-dimensional, con valor constante en la coordenada temporal x^0 , son equivalentes.

¹ Siguiendo a [26], las leyes de la física y la cosmología en cualquier otro lugar del universo son similares a las que se obtienen desde nuestra posición presente.

En virtud de las hipótesis 1 y 2 la métrica toma la forma $ds^2 = (dx^0)^2 + g_{ij} dx^i dx^j$. Respecto a las hipótesis 3 y 4, respectivamente, por un lado la isotropía local implica que las coordenadas espaciales en el elemento de línea evidencien simetría esférica y la equivalencia entre todos los puntos en la hipersuperficie, determina que la razón de las distancias propias entre dos puntos en el espacio, es constante en el tiempo, de tal forma que ds^2 toma la forma

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{g(x^0)+f(r)} [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (2-1)$$

Para determinar la forma explícita de los coeficientes de la métrica, se exploran las ecuaciones de campo de Einstein, con constante cosmológica, que en componentes mixtas toman la forma

$$R^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}Rg^\nu{}_\mu + \Lambda g^\nu{}_\mu = -\frac{8\pi G}{c^2}T^\nu{}_\mu. \quad (2-2)$$

Con el fin de cumplir el objetivo, es necesario vía las ecuaciones de Euler-Lagrange, obtener las conexiones de la métrica, ya que son indispensables para determinar el tensor de Ricci, así las componentes no nulas de dicho tensor son (ver Anexo A.1 y A.2)

$$R_{00} = \frac{3}{2}g'' + \frac{3}{4}(g')^2, \quad (2-3)$$

$$R_{11} = f'' + \frac{f''}{r} - e^{g(x^0)+f(r)} \left[\frac{1}{2}g'' + \frac{3}{4}(g')^2 \right], \quad (2-4)$$

$$R_{22} = r^2 \left[\frac{1}{2}f'' + \frac{1}{4}(f')^2 + \frac{3}{2r}f' - e^{g(x^0)+f(r)} \left(\frac{1}{2}g'' + \frac{3}{4}(g')^2 \right) \right], \quad (2-5)$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{2}f'' + \frac{1}{4}(f')^2 + \frac{3}{2r}f' - e^{g(x^0)+f(r)} \left(\frac{1}{2}g'' + \frac{3}{4}(g')^2 \right) \right]. \quad (2-6)$$

Escribiendo $R_{\mu\nu} \neq 0$, en componentes mixtas y calculando el escalar de curvatura (ver Anexo A.2), encontramos el sistema de relaciones dado por las ecuaciones de campo

$$-\frac{3}{4}(g')^2 + e^{-[g(x^0)+f(r)]} \left[f'' + 2\frac{f'}{r} + \frac{1}{4}(f')^2 \right] + \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^2}T^0{}_0, \quad (2-7)$$

$$-g'' - \frac{3}{4}(g')^2 + e^{-[g(x^0)+f(r)]} \left[\frac{f'}{r} + \frac{1}{4}(f')^2 \right] + \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^2}T^1{}_1, \quad (2-8)$$

$$-g'' - \frac{3}{4}(g')^2 + e^{-[g(x^0)+f(r)]} \left[\frac{1}{2}f'' + \frac{1}{2r}f' \right] + \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^2}T^2{}_2 = -\frac{8\pi G}{c^2}T^3{}_3, \quad (2-9)$$

que permiten simplificar y encontrar el elemento de línea; sin embargo, para completar esta tarea se debe discutir como se relaciona el supuesto de isotropía local sobre el tensor de momentum-energía. Ya que el tensor $T^\nu{}_\mu$, es invariante bajo una transformación ortogonal, en todo punto del espacio-tiempo, para cualquier sistema coordenado, las coordenadas espaciales cumplen la equivalencia $T^1{}_1 = T^2{}_2 = T^3{}_3$. De manera que, para el conjunto de ecuaciones (2-8) y (2-9), se puede establecer

$$f' = a r e^{f/2}, \quad (2-10)$$

con a como una constante de integración. De tal forma que la métrica que satisface el supuesto de isotropía en las componentes espaciales es (ver Anexo A.3)

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{g(x^0)} \frac{b^2}{\left[1 + \frac{k r^2}{4 r_0^2}\right]^2} [dr^2 + r^2(d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (2-11)$$

y al escribirse en su presentación estándar tiene la forma (ver Anexo A.4)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (2-12)$$

en donde $R(t)$ se conoce como el factor de escala y k toma valores de 0, 1 y -1 para un modelo de universo plano, cerrado y abierto, respectivamente.

2.2. Geometría espacial de la métrica FLRW

Para un primer acercamiento a la interpretación del factor de escala $R(t)$, véase el caso para $k = 1$, en la métrica (2-12). Considerando únicamente la parte espacial, y haciendo $r, \varphi = \text{constantes}$, se obtienen respectivamente la longitud de una curva (círculo), el área de una 2-esfera y la distancia física radial (con $t, \theta, \varphi = \text{constantes}$),

$$\begin{aligned} C &= 2 \int_0^\pi \sqrt{-g_{\theta\theta}} d\theta = \int_0^\pi \sqrt{-[-R^2(t)r^2]} d\theta = 2\pi r R(t), \\ A &= \int \int \sqrt{[r^2 R^2(t)] [r^2 R^2(t) \sin^2 \theta]} d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 R^2(t) \sin^2 \theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2 R^2(t), \\ d_{\text{física}} &= \int_0^r \frac{R(t)}{\sqrt{1 - kr^2}} dr = R(t) \sin^{-1}(r), \end{aligned}$$

presentando, especialmente en el último resultado, una interpretación física de la función $R(t)$ como un factor de escala, siendo éste un aspecto fundamental en la geometría espacial del modelo FLRW. Con la finalidad de proporcionar una idea más clara de la parte espacial de la métrica, recuérdese que el objeto geométrico indispensable, en la TGR, para determinar características geométricas del espacio, es conocido como el tensor de Riemann, así calculando las conexiones de Christoffel y posterior a ello las componentes no nulas de dicho tensor, se observa una dependencia directa con k (ver Anexo A.5); de tal forma, que para $k = 0$ se tiene un espacio plano, $k = 1$ un espacio de curvatura constante positiva y $k = -1$ un espacio de curvatura constante negativa[29].

2.3. Parámetro de Hubble-Lemaître

En esta sección se presenta una de las deducciones cinemáticas más sobresalientes de la geometría de FLRW². Para ello, suponga que en una hipersuperficie (nuestra galaxia) está localizada en $r = 0$ y cualquier otra galaxia en una hipersuperficie con coordenada r , así la distancia propia L , desde nuestra posición (considerando una línea radial $d\theta = d\varphi = 0$ y $dt = 0$) está mediada por la métrica de FLRW (2-12), de tal forma que

$$ds'^2 = -\frac{R^2(t)}{1 - kr^2} dr^2,$$

$$L = \int_0^r \sqrt{-g_{rr}} dr = \int_0^r \frac{R(t)}{\sqrt{1 - kr^2}} dr = R(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = R(t) f(r), \quad (2-13)$$

en donde $f(r)$ es una función de la coordenada r y su forma funcional depende de la elección para el parámetro k ; sin embargo, independiente de la elección en k [12], observe la relación de proporcionalidad dada entre el factor de escala y la distancia propia ecuación (2-13). En este sentido, la velocidad a la cual un objeto se aleja de un observador, tiene la forma

$$v = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} [R(t) f(r)] = \dot{R}(t) f(r) = \dot{R}(t) \frac{L}{R(t)} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} L = H(t) L, \quad (2-14)$$

en donde se ha definido $H(t) \equiv \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$, conocida como la constante de Hubble-Lemaître, con dimensiones de T^{-1} . Esta expresión se conoce como la Ley de Hubble-Lemaître y expresa lo siguiente: *cuanto más lejos está ahora un objeto (astrofísico) más rápido se aleja ahora de nosotros.*

2.4. Ecuaciones de Friedmann-Lemaître

Bajo el paradigma que el universo está gobernado por la TGR y además que la evolución, y formación de estructura a gran escala para éste, es controlada y modelada por medio de un fluido cosmológico compuesto de materia, radiación y energía oscura. Entonces, las ecuaciones de campo de Einstein son aquellas que modelan dicha evolución, ya que desde su misma esencia, la distribución de energía hace que el espacio se curve implicando una redistribución de materia. De manera que, utilizando las ecuaciones de campo (2-2), teniendo la forma explícita de la métrica [sección 2.1 ecuación (2-12)], la parte geométrica de las ecuaciones de campo es conocida (miembro izquierdo: tensor de Einstein) y si se determina una forma para el tensor de momentum-energía (miembro derecho) es posible encontrar una solución analítica o numérica para las ecuaciones de campo. En contraste, para los modelos de FLRW se considera una forma específica del tensor $T_{\mu\nu}$, ésta establece que el universo

²También se podrían realizar otras deducciones como definir distancias (de luminosidad o diametral angular), volúmenes, entre otras[29].

puede ser modelado por medio de un fluido perfecto compuesto por materia, radiación y energía oscura. Así, las componentes del tensor momentum-energía están descritas por

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}. \quad (2-15)$$

Con estas herramientas, dado que la geometría del espacio-tiempo está ligada al factor de escala $R(t)$ (2-12), ahora se deben resolver las ecuaciones de campo (2-2) para determinar dicho factor; sin embargo, para tal fin es conveniente escribir las ecuaciones de la forma (ver Anexo A.6)

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right] + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2-16)$$

considerando que el sistema coordenado comóvil tiene la cuadrivelocidad, en componentes covariantes, como $[u_\mu] = [c^2, 0, 0, 0] = c^2 \delta_\mu^0$, se logra escribir el tensor momento-energía de la forma $T = c^2 \rho - 3P$. Y manipulando el factor [...] de (2-16), se obtiene en general (ver Anexo A.6)

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left[(c^2 \rho + P) c^2 \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - \frac{1}{2} (c^2 \rho - P) g_{\mu\nu} \right] + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2-17)$$

Así para las componentes no nulas ($\mu = \nu$), con ayuda de los cálculos encontrados en el anexo A.5 en las ecuaciones (A-15) a (A-19), se encuentra el conjunto de relaciones para las componentes temporal y espacial

$$3 \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} = -\frac{4\pi G}{c^2} (c^2 \rho + 3P) + \Lambda c^2, \quad (2-18)$$

$$R(t) \ddot{R}(t) + 2\dot{R}^2(t) + 2c^2 k = \left[\frac{4\pi G}{c^4} (c^2 \rho - P) + \Lambda \right] c^2 R^2(t), \quad (2-19)$$

despejando $\ddot{R}(t)$ de la ecuación (2-18) y sustituyendo en (2-19), se obtienen las ecuaciones de campo cosmológicas (ecuaciones de Friedmann-Lemaître) que brindan información sobre la evolución temporal del factor de escala

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8\pi G}{3} R^2(t) \rho + \frac{1}{3} \Lambda R^2(t) c^2 - c^2 k, \quad (2-20)$$

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4\pi G}{3c^2} (c^2 \rho + 3P) R(t) + \frac{1}{3} c^2 \Lambda R(t). \quad (2-21)$$

Con ayuda del postulado de conservación de la energía, $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, y considerando (2-15) se tienen las ecuaciones, corriendo $i, j = 1, 2, 3$

$$T^{0\nu}{}_{;\nu} = T^{00}{}_{;0} + T^{0i}{}_{;i} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right)_{;\nu} (u^0 u^\nu) + \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) (u^0 u^\nu)_{;\nu} - g^{0\nu} P_{;\nu} = 0, \quad (2-22)$$

$$T^{i\nu}{}_{;\nu} = T^{i0}{}_{;0} + T^{ij}{}_{;j} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right)_{;\nu} (u^i u^\nu) + \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) (u^i u^\nu)_{;\nu} - g^{i\nu} P_{;\nu} = 0, \quad (2-23)$$

representando la ecuación de continuidad y la ecuación de Euler para un fluido perfecto, respectivamente. Téngase presente en este punto, que la densidad ρ únicamente es función del tiempo cósmico t y en el sistema comóvil la 4-velocidad es dada por el cuadrivector $[u^\mu] = [1, 0, 0, 0]$; por lo tanto, se puede confirmar con relativa facilidad que la ecuación (2-23) es una identidad, confirmando que las partículas del fluido tiene un movimiento uniforme geodésico. Por otro lado, dada la ecuación (2-22), puede establecerse una relación tipo barotrópica entre la densidad, la presión y el factor de escala (ver Anexo A.7)

$$\frac{d\rho}{dt} + \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) 3 \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = 0, \quad (2-24)$$

que al reorganizarse de forma alternativa, toma la estructura

$$\frac{d}{dR} [\rho R^3(t)] = -\frac{3P}{c^2} R^2(t). \quad (2-25)$$

Reconociendo que la densidad y la presión, para cada componente del fluido, se relacionan por medio de una ecuación de estado de la forma $P = \omega \rho c^2$, se puede determinar, resolviendo la ecuación diferencial para ρ (2-25), como la densidad de energía evoluciona como función del factor $R(t)$ en el tiempo cósmico

$$\rho(R) = CR(t)^{-3(\omega+1)}, \quad (2-26)$$

con C como una constante y $\omega = 0, 1/3, -1$, si se considera un fluido con presión nula, radiación y vacío (constante cosmológica), respectivamente. De está forma, para el fluido cosmológico, que consiste de tres componentes: materia, radiación y vacío, cada una de ellas con ecuación de estado diferente mediada por los valores normalizados de ω . La densidad de masa total en un tiempo cósmico t , empleando la relación (2-25), es

$$\rho(t) = \rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_\Lambda(t) = \rho_{m,0} \left[\frac{R(t_0)}{R(t)} \right]^3 + \rho_{r,0} \left[\frac{R(t_0)}{R(t)} \right]^4 + \rho_{\Lambda,0}, \quad (2-27)$$

en donde $\rho_{m,0}$, $\rho_{r,0}$ y $\rho_{\Lambda,0}$, son las densidades propias en el tiempo cósmico presente t_0 y así el modelo de universo considerado, se fija conociendo estos parámetros en algún tiempo cósmico particular. Definiendo parámetros adimensionales, conocidos como parámetros de densidad

$$\Omega_i(t) = \frac{8\pi G}{3H^2(t)} \rho_i(t), \quad i: \text{masa, radiación o vacío}, \quad (2-28)$$

$H(t)$ considerado como el parámetro de Hubble-Lemaître, cuyo valor estimado actualmente es aproximadamente $700 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, y registrando unos valores para $\Omega_{m,0} \approx 0.3$, $\Omega_{r,0} \approx 0.00005$ y $\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.7$. Se puede obtener una interpretación sobre la estructura geométrica del universo, incluyendo estos parámetros, de tal forma que manipulando la ecuación (2-20), se logra establecer que

$$1 = \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k + \Omega_r \mapsto \Omega \equiv 1 - \Omega_k = \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_r, \quad (2-29)$$

con $\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2(t)}\rho$, $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2(t)}$, $\Omega_k = -\frac{c^2 k}{H^2(t)R^2(t)}$ definido como el parámetro de curvatura y Ω entendido como el parámetro de densidad total. De este modo,

- si $\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k > 1$, se tiene un espacio con curvatura constante positiva ($k = 1$).
- si $\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$, se tiene un espacio con curvatura nula ($k = 0$).
- si $\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k < 1$, se tiene un espacio con curvatura constante negativa ($k = -1$).

Finalmente escribiendo las ecuaciones de campo cosmológicas (2-20) y (2-21), fijando las cantidades $H_0, \Omega_{m,0}, \Omega_{r,0}, \Omega_{\Lambda,0}$, se obtienen las expresiones (ver Anexo A.8)

$$H^2(t) = H^2(t_0) [\Omega_{m,0}(z+1)^3 + \Omega_{r,0}(z+1)^4 + \Omega_{k,0}(z+1)^2 + \Omega_{\Lambda,0}], \quad (2-30)$$

$$q(t) = \frac{1}{2} [\Omega_m + 2\Omega_r - 2\Omega_\Lambda], \quad (2-31)$$

en donde el subíndice cero, en las cantidades Ω , indica que estos parámetros son medidos en un tiempo cósmico actual, z denota el corrimiento al rojo cosmológico y la expresión $q(t) \equiv -R(t)\ddot{R}(t)/\dot{R}^2(t)$, es conocido como el parámetro de desaceleración.

En muchas ocasiones es útil fijar una nueva coordenada temporal, que usualmente es llamada tiempo conforme $d\tau = dt/R(t)$; por tanto, las ecuaciones de campo cosmológicas quedan escritas de la forma (ver Anexo A.9)

$$k = \frac{1}{c^2} \mathcal{H}^2(\tau) [\Omega - 1], \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{H}(\tau) = \left[\Omega_\Lambda(\tau) - \Omega_r(\tau) - \frac{1}{2} \Omega_m(\tau) \right] \mathcal{H}^2(\tau), \quad (2-32)$$

permitiendo normalizar la curvatura $k = 0, 1, -1$ asociada a un $\Omega = 1, \Omega > 1$ y $\Omega < 1$, respectivamente y tomando a $\mathcal{H}(\tau) = H(t)R(t)$.

3. Introducción a la Teoría de Perturbaciones

Con el fin de dominar las herramientas y conceptos necesarios para abordar la teoría de perturbaciones cosmológicas, se seguirán los lineamientos trazados en [26]. En esta dirección, este capítulo presenta inicialmente una descripción de la ecuación de Boltzmann en cosmología, sin colisiones denominada ecuación de Vlasov, y posterior a ello se expondrán y desarrollarán aspectos vitales de la teoría euleriana lineal y no lineal de perturbaciones.

3.1. Ecuación de Boltzmann en cosmología

En el capítulo anterior se considero un universo modelado a partir de un principio de homogeneidad e isotropía; sin embargo, ahora se quieren introducir perturbaciones en la densidad de materia que consecuentemente implica perturbaciones en la métrica (2-12) de dicho modelo de universo[26]. En otras palabras, si se quieren dar avances sobre la formación de estructura, es necesario conocer, de acuerdo a las ecuaciones de campo (2-2), como estas perturbaciones afectan las componentes de la métrica y simultáneamente las componentes que describen el contenido de materia en el universo. De tal forma que, siguiendo a [26], el punto inicial para este tratamiento es la ecuación de Boltzmann

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{dp^i}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = c[f], \quad (3-1)$$

en donde $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau)$ es una función de distribución, que describe como varían los estados, de un sistema, en el espacio posiciones y momentos respecto al tiempo conforme τ ; el término $c[f]$ relaciona las posibles formas funcionales de interacción entre las partículas, el término $\partial f / \partial \tau$ está relacionado con la fuerza ejercida sobre las partículas por una influencia externa (gravedad) y el término restante es asociado con un efecto de difusión.

En este punto, se hace conveniente fijar que el análisis de interés, es decir, el sistema a estudiar, es un fluido de materia oscura (CDM), ya que en principio ésta, domina la densidad de materia y se desacopla de la radiación mucho antes que la materia ordinaria[26]. Para el análisis del fluido, se posible suponer que éste se encuentra en el interior de una esfera de Hubble, cuyo radio (Horizonte de Hubble) equivale a la distancia comóvil, para la cual la recesión es idénticamente igual a la velocidad de la luz. Además de esto, se considera el

sistema compuesto de partículas, con masa m , no relativistas y no colisionantes ($c[f] = 0$), de manera que la ecuación de Boltzmann se ve reducida a

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0, \quad (3-2)$$

denominada ecuación de Vlasov. Dados estos supuestos, es posible usar la gravedad newtoniana para dar razón de la evolución, en tiempo conforme, del fluido de materia oscura[5]. Así, al usar la teoría newtoniana, para describir las ecuaciones de movimiento de partículas, de materia oscura, bajo la acción del potencial

$$\Phi = -G \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \longrightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = G \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} d^3\mathbf{r}', \quad (3-3)$$

se debe efectuar una redefinición de la posición y el momentum de las partículas, de tal forma que desde este punto en adelante, la coordenada física (posición) será representada por medio de un conjunto de coordenadas eulerianas de la forma $\mathbf{r} = R(t)\mathbf{x}$, que obedecen a un conjunto de coordenadas comóviles para cada punto de la variedad. En este sentido, el campo de velocidad física respecto a la hipersuperficie comóvil será

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{d\tau} [R(t)\mathbf{x}] \frac{1}{R(t)} = \dot{R}(t) \frac{dt}{d\tau} \mathbf{x} \frac{1}{R(t)} + R(t) \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \frac{1}{R(t)}, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) &= H(t)R(t)\mathbf{x} + \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathcal{H}(\tau)\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau), \end{aligned} \quad (3-4)$$

con $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$, definida como la velocidad peculiar respecto a la grilla comóvil. A su vez, para describir las perturbaciones cosmológicas, es conveniente fijar la densidad de fluido de materia oscura, denominada densidad de contraste, de la forma

$$\rho(\mathbf{x}, \tau) \equiv \bar{\rho}(\tau)[1 + \delta(\mathbf{x}, \tau)], \quad (3-5)$$

siendo $\delta(\mathbf{x}, \tau)$ el campo de fluctuaciones y $\bar{\rho}(\tau)$ la densidad media del fluido. De está forma, el potencial newtoniano (3-3) asociado al fluido de materia oscura, denotado de la forma Φ_{CDM} , es descrito como

$$\Phi_{\text{CDM}} = -GR^2(t) \int \frac{\bar{\rho}(\tau)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' - GR^2(t) \int \frac{\bar{\rho}(\tau)\delta(\mathbf{x}', \tau)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}', \quad (3-6)$$

en donde el primer término de la expresión habla sobre la componente homogénea del potencial y el segundo se relaciona directamente con el término perturbador. Por lo tanto, el potencial en general puede ser entendido

$$\Phi_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) = \Phi_{\text{HOM}}(\mathbf{x}, \tau) + \Phi_{\text{PER}}(\mathbf{x}, \tau), \quad (3-7)$$

cuyas ecuaciones de Poisson asociadas, en coordenadas eulerianas y tiempo conforme, serán $[1/R^2(t)]\nabla_{\mathbf{x}}^2\Phi_{\text{HOM}}(\mathbf{x}, \tau) = 4\pi G\bar{\rho}(\tau)$ para el potencial homogéneo y para el potencial perturbador será

$$\frac{1}{R^2(t)}\nabla_{\mathbf{x}}^2\Phi_{\text{PER}}(\mathbf{x}, \tau) = 4\pi G\bar{\rho}(\tau)\delta(\mathbf{x}, \tau), \quad (3-8)$$

y haciendo uso de los parámetros adimensionales $\rho_m(\tau) = \frac{3\mathcal{H}^2(\tau)\Omega_m(\tau)}{8\pi GR^2(t)}$, se obtiene el potencial debido a las perturbaciones en densidad

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \Phi_{\text{PER}}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) \delta(\mathbf{x}, \tau). \quad (3-9)$$

Finalmente las ecuaciones de movimiento mediadas por este potencial, y por la definición de la cantidad de movimiento lineal, $\mathbf{p} = mR(t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$, proporcionada por el segundo y tercer término de la ecuación

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} [\mathcal{H}(\tau)\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)] = \frac{1}{R(t)} \left[\frac{d\mathcal{H}(\tau)}{d\tau} \mathbf{x} + \mathcal{H}(\tau) \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} + \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \right], \quad (3-10)$$

permiten encontrar ecuaciones diferenciales para partículas de materia oscura, en términos del tiempo conforme, de la forma

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -mR(t)\nabla_{\mathbf{x}}\Phi_{\text{PER}}, \quad (3-11)$$

$$\begin{aligned} m \left[\frac{dR(t)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \mathbf{u} + R(t) \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \right] &= -mR(t)\nabla_{\mathbf{x}}\Phi_{\text{PER}}, \\ \frac{dR(t)}{d\tau} R(t) \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} + R(t) \frac{d}{d\tau} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} &= -R(t)\nabla_{\mathbf{x}}\Phi_{\text{PER}}, \\ \frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} + \mathcal{H}(\tau) \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} &= -\nabla_{\mathbf{x}}\Phi_{\text{PER}}, \end{aligned} \quad (3-12)$$

y en tiempo cosmológico

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + H(t) \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\frac{1}{R^2(t)} \nabla_{\mathbf{x}}\Phi_{\text{PER}}, \quad (3-13)$$

que a nivel computacional son de gran utilidad para simulaciones de N cuerpos en cosmología. Así la ecuación que describe la función de distribución de partículas de materia oscura en términos de coordenadas comóviles, tiempo conforme y del potencial perturbador, está dada, con ayuda de la cantidad de movimiento lineal, las ecuaciones (3-2) y (3-11), por

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\mathbf{p}}{mR(t)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f - mR(t)\nabla_{\mathbf{x}}\Phi_{\text{PER}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0. \quad (3-14)$$

Cabe resaltar, que hasta el momento no se conocen soluciones analíticas al conjunto de ecuaciones (3-9) y (3-14) y resolver este sistema implica una ardua tarea analítica y computacional en caso de que se conozca alguna solución general explícita para la función de distribución $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau)$. Ya con las ecuaciones descritas en esta sección, es posible, para la intención de este trabajo, aproximar soluciones, de forma analítica, que permitan dar cuenta de la evolución del campo de densidad de materia, tarea que se presentará en las secciones siguientes.

3.2. Dinámica euleriana

Inicialmente es importante reconocer que no es necesario dar cuenta de las soluciones analíticas de la ecuación (3-14). En vez de ello, se recurre a los momentos y función generadora de momentos, establecidos por medio de las relaciones[26]

$$\int d^3 \mathbf{p} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \equiv \rho(\mathbf{x}, \tau) = \bar{\rho}(\tau) [1 + \delta(\mathbf{x}, \tau)], \quad (3-15)$$

$$\int d^3 \mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{R(t)m} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \equiv \rho(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau), \quad (3-16)$$

$$\int d^3 \mathbf{p} \frac{p_i p_j}{R^2(t)m^2} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \equiv \rho(\mathbf{x}, \tau) u_i(\mathbf{x}, \tau) u_j(\mathbf{x}, \tau) + \sigma_{ij}(\mathbf{x}, \tau), \quad (3-17)$$

en donde $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$ es definido como el campo de velocidades peculiares y $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, \tau)$ representa el tensor de esfuerzos, que jugará un papel importante en la evolución de las ecuaciones para un fluido que incluya diversas especies como por ejemplo bariones o neutrinos. Ahora, observe que si se toma el primer momento de la ecuación de Vlasov (3-4) e integrando sobre el espacio de momentos (ver Anexo B.1), se obtiene la ecuación de continuidad para la densidad de contraste

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(\mathbf{x}, \tau)] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[[1 + \delta(\mathbf{x}, \tau)] \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \right] = 0. \quad (3-18)$$

Y de la misma forma, multiplicando la ecuación de Vlasov por el momentum e integrando de nuevo sobre el espacio de momentos, se encuentra la ecuación de Euler para fluidos (ver Anexo B.2)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) + [\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}] \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = -\nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}} - \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, \tau)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \sigma(\mathbf{x}, \tau). \quad (3-19)$$

Así pues el problema central, se liga a resolver el sistema de ecuaciones dado por el conjunto de relaciones proporcionadas en (3-9), (3-18) y (3-19), permitiendo encontrar la densidad de contraste $\delta(\mathbf{x}, \tau)$ y el campo de velocidades peculiares $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$. Para ello, es posible dar solución a este sistema de ecuaciones vía dos regímenes que serán expuestos en detalle a continuación y de vital importancia para el desarrollo del trabajo.

3.2.1. Teoría euleriana lineal de perturbaciones

La solución al sistema de ecuaciones mencionado está orientada, por lo menos, en este trabajo a entender la formación de estructura en el dominio de materia, regida por un modelo de universo tipo FLRW, que como ya se señaló tiene base fundamental, la visión de un universo homogéneo e isotrópico a gran escala. En este sentido, considerando en una primera aproximación la solución del sistema de ecuaciones, ligada a pequeñas fluctuaciones, en la densidad y campo de velocidades peculiares, respecto al fondo cosmológico, es posible

contemplar que los términos a segundo orden, orden superior y cruzados (productos) tanto en la densidad de contraste como en el campo de velocidades peculiares, pueden ser despreciados, de manera que

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\delta(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)] = 0; \quad [\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}] \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = 0, \quad (3-20)$$

y a su vez asumiendo el tensor de esfuerzos como nulo (para un fluido de materia oscura), se establece el conjunto de ecuaciones es reducido a

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\mathbf{x}, \tau) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = 0, \quad (3-21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = -\nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}}. \quad (3-22)$$

Ahora, como cualquier campo vectorial, el campo de velocidades peculiares puede ser completamente descrito por su divergencia y su vorticidad,

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \theta(\mathbf{x}, \tau); \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau), \quad (3-23)$$

de tal forma que calculando la divergencia sobre la ecuación (3-22) y luego empleando (3-9), se obtiene,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \right] &= -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) &= -\nabla_{\mathbf{x}}^2 \Phi_{\text{PER}}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \theta(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \theta(\mathbf{x}, \tau) + \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Phi_{\text{PER}} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \theta(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \theta(\mathbf{x}, \tau) + \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) \delta(\mathbf{x}, \tau) &= 0. \end{aligned} \quad (3-24)$$

Y de la misma forma aplicando el rotacional, en la misma ecuación

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \times \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \right] &= -\nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) &= 0, \end{aligned}$$

en donde se utilizó la identidad vectorial $\nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}} = 0$, la expresión toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau) = 0. \quad (3-25)$$

Asumiendo que la vorticidad, $\mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau)$, depende únicamente del tiempo conforme fácilmente se puede verificar, para la ecuación diferencial (3-25), que cualquier vorticidad en el fluido cosmológico, decae por la expansión del universo, mediada por el factor de escala, de la

forma $w(\tau) \propto [R(t)]^{-1}$. Así, haciendo uso de la divergencia de la ecuación (3-21) como $\theta(\mathbf{x}, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\mathbf{x}, \tau)$ y aplicándola en (3-24), se obtiene la ecuación diferencial, de segundo orden lineal y homogénea para la densidad de contraste

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \delta(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\mathbf{x}, \tau) - \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) \delta(\mathbf{x}, \tau) = 0. \quad (3-26)$$

Esta última ecuación será el objetivo a resolver para esta sección, ya que describe de forma aproximada como evoluciona, en tiempo conforme, el campo de fluctuaciones $\delta(\mathbf{x}, \tau)$. De manera que, proponiendo una solución de la forma $\delta(\mathbf{x}, \tau) = D(\tau) \delta(\mathbf{x}, \tau_i)$ con $D(\tau)$ conocido como el factor de crecimiento, $D^{(+)}(\tau)$, o decrecimiento lineal $D^{(-)}(\tau)$. En tiempo conforme igual a cero, $\delta(\mathbf{x}, \tau) = D(\tau) \delta(\mathbf{x})$, se logra establecer para (3-26) una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \delta(\mathbf{x}) D(\tau) + \mathcal{H}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\mathbf{x}) D(\tau) - \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) \delta(\mathbf{x}) D(\tau) &= 0, \\ \frac{d^2}{d\tau^2} D(\tau) + \mathcal{H}(\tau) \frac{d}{d\tau} D(\tau) - \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) D(\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (3-27)$$

Relación que, junto con las ecuaciones de campo cosmológicas (2-32) determinan el crecimiento en la densidad de perturbaciones, en un régimen lineal, en función del tiempo conforme τ . De igual manera, la ecuación (3-27) puede ser escrita en función del tiempo cósmico t ; identificando la función compuesta $D[\tau(t)]$ y escribiendo las siguientes líneas

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= \frac{dD}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dD}{d\tau} \frac{1}{R(t)} \mapsto \frac{dD}{d\tau} = R(t) \frac{dD}{dt}, \quad \text{recordando que } d\tau = \frac{dt}{R(t)}, \\ \frac{d^2 D}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{dD}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{dD}{d\tau} \frac{1}{R(t)} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{dD}{d\tau} \right] \frac{1}{R(t)} - \frac{\dot{R}(t)}{R^2(t)} \frac{dD}{d\tau} = \frac{1}{R^2(t)} \frac{d^2 D}{d\tau^2} - \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \frac{dD}{dt}, \\ \frac{d^2 D}{d\tau^2} &= R^2(t) \frac{d^2 D}{dt^2} + \dot{R}(t) R(t) \frac{dD}{dt}, \end{aligned}$$

pues al aplicar en (3-27) las expresiones para la primera y segunda derivada de D en τ , además de utilizar los parámetros adimensionales (2-28), se obtiene una ecuación diferencial con la estructura

$$\frac{d^2}{dt^2} D(t) + 2 \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \frac{d}{dt} D(t) = 4\pi G \rho_m(t) D(t). \quad (3-28)$$

Por otro lado, se puede declarar que las ecuaciones de campo cosmológicas (2-20), permiten encontrar una relación entre la constante de Hubble-Lemaître y los parámetros adimensionales (2-28), dada por (ver Anexo A.8)

$$H^2(t) = H^2(t_0) \left[\frac{\Omega_{m,0}}{R^3(t)} + \frac{\Omega_{r,0}}{R^4(t)} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0} - \Omega_{\Lambda,0}}{R^2(t)} \right], \quad (3-29)$$

que al ser derivada una y dos veces, ésta última equivalencia, con respecto al tiempo cósmico t , se obtiene el par de ecuaciones

$$2\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\dot{H}(t) = -H^2(t_0) \left[3\frac{\Omega_{m,0}}{R^3(t)} + 4\frac{\Omega_{r,0}}{R^4(t)} + 2\frac{1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0} - \Omega_{\Lambda,0}}{R^2(t)} \right] \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}, \quad (3-30)$$

$$\ddot{H}(t) = H^2(t_0) \left[\frac{9}{2}\frac{\Omega_{m,0}}{R^3(t)} + 8\frac{\Omega_{r,0}}{R^4(t)} + 2\frac{1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0} - \Omega_{\Lambda,0}}{R^2(t)} \right] H(t). \quad (3-31)$$

Sumando, las ecuaciones (3-30) y (3-31), y adicionalmente despreciando la contribución de radiación, se encuentra

$$\begin{aligned} \ddot{H}(t) + 2\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\dot{H}(t) &= H^2(t_0) \left[\frac{3}{2}\frac{\Omega_{m,0}}{R^3(t)} + 4\frac{\Omega_{r,0}}{R^4(t)} \right] H(t) = H^2(t_0) \left[\frac{3}{2R^3(t)} \frac{8\pi G}{3H^2(t_0)} \rho_{m,0} \right] H(t), \\ &= 4\pi G \frac{\rho_{m,0}}{R^3(t)} H(t) = 4\pi G \rho_m(t) H(t), \end{aligned}$$

en donde se ha invocando la ecuación (2-27), $\rho_m(t) = \frac{\rho_{m,0}}{R^3(t)}$. Debido a lo cual se determina

$$\ddot{H}(t) + 2\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\dot{H}(t) = 4\pi G \rho_m(t) H(t). \quad (3-32)$$

Concluyendo, por comparación directa entre (3-28) y (3-32), que $D(t)$ y $H(t)$, son directamente proporcionales. En virtud de ello, este análisis induce una solución, en la ecuación (3-28), que consiste en afirmar que el factor de decrecimiento lineal es

$$D^{(-)}(t) = CH(t),$$

con C como una constante de proporcionalidad. Y haciendo uso del método de reducción de orden, dada ya una solución a la ecuación (3-28), para ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} D^{(+)}(t) &= CD^{(-)}(t) \int \frac{e^{-2 \int H(t) dt}}{[D^{(-)}(t)]^2} dt = CH(t) \int \frac{e^{-2 \int [\dot{R}(t)/R(t)] dt}}{[H(t)]^2} dt, \\ &= CH(t) \int \frac{[R(t)]^{-2}}{H^2(t)} dt = CH(t) \int \frac{dt}{R^2(t)H^2(t)}, \\ D^{(+)}(t) &= CH(t) \int_0^t \frac{dl}{R^2(l)H^2(l)}, \end{aligned} \quad (3-33)$$

con $H^2(l)$ proporcionado por la relación (3-29)¹. Para poder determinar la solución de la ecuación (3-33), se seguirán los lineamientos dados en[11], de tal forma que en primera

¹En la ecuación (3-33), simplemente se efectuó un cambio de variable de t en l .

instancia se reescribirá la ecuación (3-27) en términos del redshift z , esto se logra por medio de la sustitución[11] (ver Anexo C.2)

$$\frac{dz}{dt} = -H(t_0)(z+1)P^{1/2}(z), \quad (3-34)$$

con $P(z) = \Omega_{m,0}z^3 + \left[\frac{3}{2}\Omega_{m,0} + q(t_0) + 1\right]z^2 + 2[1 + q(t_0)]z + 1$, que cumple con la relación $P(z) = \frac{H^2(t)}{H^2(t_0)}$. De manera que, la ecuación (3-27) toma la forma (ver Anexos C.1 y C.2)

$$(z+1)P(z)\frac{d^2D}{dz^2} + Q(z)\frac{dD}{dz} - \frac{3}{2}\Omega_{m,0}(z+1)^2D = 0. \quad (3-35)$$

Por lo tanto si $D(t) \propto H(t) \propto P(z)$, entonces $D^{(-)}(z) = CP^{1/2}(z)$, con C como una constante. Por lo tanto, empleando la solución (3-33), se puede establecer

$$\begin{aligned} D^{(+)}(z) &= CH(t) \int \frac{dt}{[R(t)]^2 H^2(t)} = CH(t_0)P^{1/2}(z) \int \frac{-[H(t_0)(z+1)P^{1/2}(z)]^{-1}}{[R(t_0)(z+1)^{-1}]^2 H^2(t_0)P(z)} dz, \\ &= -CH(t_0)P^{1/2}(z) \int \frac{(z+1)^2}{H^3(t_0)R^2(t_0)(z+1)P^{3/2}(z)} dz, \\ D^{(+)}(z) &= CP^{1/2}(z) \int_z^\infty \frac{s+1}{P^{3/2}(s)} ds, \end{aligned} \quad (3-36)$$

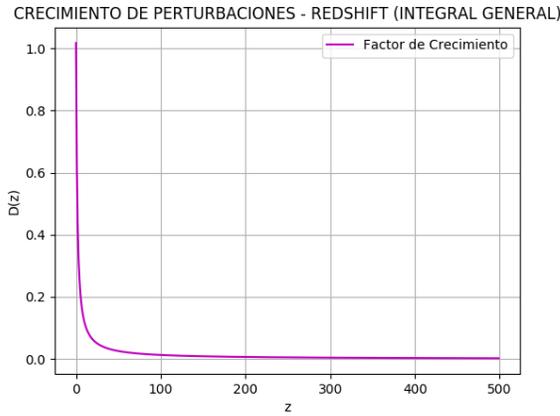
ecuación equivalente a (3-33) y que si se quiere profundizar, en los esfuerzos, por dar cuenta de soluciones analíticas, bajo ciertas consideraciones, se recomienda seguir las investigaciones realizadas por Heath y otros[8, 11]. Con el fin de encontrar una interpretación a la evolución de las perturbaciones en el régimen lineal, en este trabajo se obtuvo la solución a la ecuación (3-36), por medio del método de integración de Simpson 1/3 en lenguaje de programación Python, obteniendo los gráficos presentados en la Figura 3-1, por lo menos inicialmente, para tres tipos de universos. Para obtener los gráficos se utilizaron los parámetros adimensionales reportados por el satélite artificial Planck[6], con los siguientes valores para el parámetro de masa $\Omega_{m,0} = 0.308 \pm 0.092$ y el parámetro de desaceleración $q(t_0) = -0.538 \pm 0.013$. Además, se considero la constante de integración C , en (3-36), como la unidad, recurriendo al hecho de que un múltiplo constante, para una solución a (3-36) también es solución a la ecuación diferencial (3-35).

En la Figura 3-1(a), se puede apreciar la solución general de la ecuación (3-36), representando un factor de crecimiento en las perturbaciones, para la época actual, muy cercano a la unidad ≈ 1.0176 . Sin embargo, la pregunta que se podría formular sería ¿qué tan grande debe ser la perturbación, en el campo de densidad de energía, para el momento de desacople, de manera que un objeto astrofísico, por ejemplo una galaxia, crezca en el intervalo de tiempo permitido? Siguiendo a [8, 11]; es posible, para un periodo determinado de tiempo, estimar el crecimiento de las perturbaciones, con ayuda de la razón entre el valor del factor de

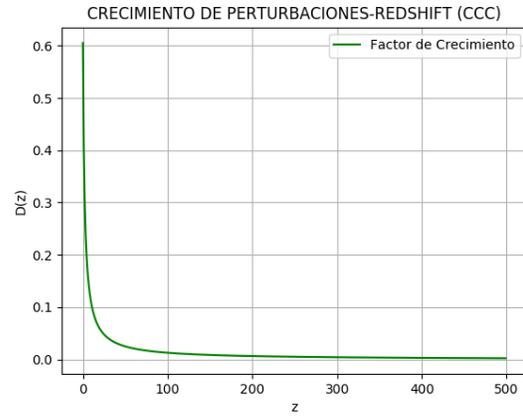
crecimiento de las perturbaciones en una época de finalización, $D^{(+)}[z_{(e)}]$, y el mismo factor evaluado en la época de desacople radiación-materia (inicio) $D^{(+)}[z_{(d)}]$, llamado factor de amplificación

$$A \equiv \frac{D^{(+)}[z_{(e)}]}{D^{(+)}[z_{(d)}]}, \quad (3-37)$$

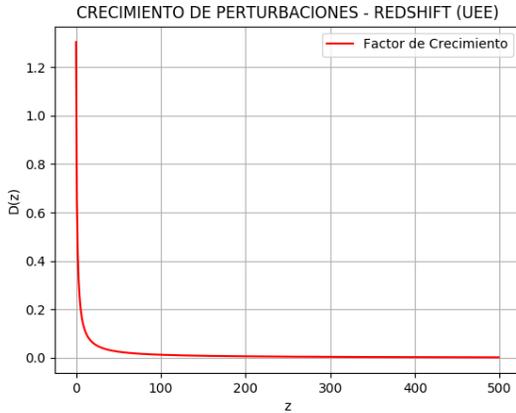
así, considerando valores para un $z_{(d)} \approx 1000$ y $z_{(e)} \approx 4$, justificados en los registros hechos por [8, 11, 26] y la integración numérica de (3-36), se obtiene un valor para el factor de amplificación igual a 7.99×10^4 . Y el recíproco de este valor conocido como la fluctuación de desacople, para que la densidad de contraste alcance el valor de la unidad es 1.25×10^{-5} , permitiéndonos responder a la pregunta planteada. En los gráficos 3-1(b) a 3-1(d), se exploraron algunos casos particulares, diferenciados por medio de la función $P(z)$, tales como:



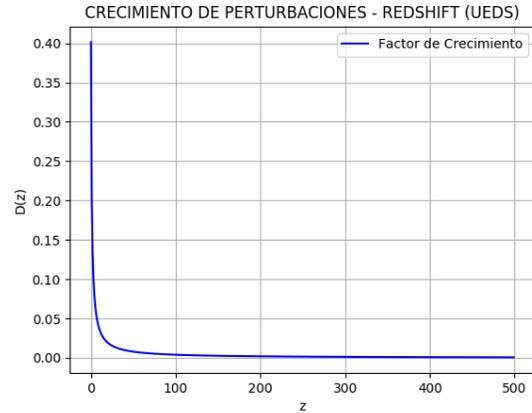
(a) Solución general.



(b) CCC: Constante Cosmológica Cero.



(c) UEE: Universo Estático de Einstein.



(d) UEDS: Universo Einsten-De Sitter

Figura 3-1.: Factor de crecimiento de las perturbaciones en el régimen lineal.

3-1(b): Universo modelado con constante cosmológica cero (CCC): con ayuda de la función, propuesta por [11], $P(z) = (\Omega_{m,0}z + 1)(z + 1)^2$. Se observa un crecimiento en la perturbaciones inferior respecto a la solución general en la época actual ≈ 0.60533 . Y valores para el factor de amplificación y fluctuación de desacople dados por 6.44×10^4 y 1.55×10^{-5} , respectivamente.

3-1(c): Universo estático de Einstein (UEE): con ayuda de la función, propuesta por [11], $P(z) = \frac{4}{27\Omega_{m,0}^2} \left(\frac{3}{2}\Omega_{m,0}z + q_0 + 1 \right)^2 \left(3\Omega_{m,0}z + \frac{9}{2}\Omega_{m,0} - 1 - q_0 \right)$. Es curioso apreciar, que en este modelo de universo, se presenta el mayor valor para el factor de crecimiento, en la época actual ≈ 1.3033 . Si es estático el universo ¿cómo se puede entender la amplificación de las perturbaciones? Además, en este modelo se registran los valores para el factor de amplificación y fluctuación de desacople dados por 6.68×10^4 y 1.50×10^{-5} , respectivamente.

3-1(d): Universo de Einstein-De Sitter (UEDS), con $P(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 1$. Representa el modelo con el valor más bajo en el factor de crecimiento en las perturbaciones, en la época actual ≈ 0.40141 . y valores para el factor de amplificación y fluctuación de desacople dados por 8.02×10^4 y 1.25×10^{-5} , respectivamente.

Dados estos casos particulares para la integración de la ecuación (3-36) y sus respectivos valores en el factor de crecimiento, también es posible partir de una cosmología arbitraria tomando valores arbitrarios para los parámetros adimensionales de $\Omega_{m,0}$ y $\Omega_{\Lambda,0}$, tal que cumplan la regla de suma cósmica $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$. De manera que, sea posible decir cuál o cuáles serían los posibles escenarios del factor de crecimiento $D^{(+)}(z)$. En virtud de ello, como se puede apreciar en la Figura 3-2, se concluye que independiente de los valores que se tomen, éste factor, aumenta a medida que z disminuye abriendo paso a la formación de estructura; sin embargo, no aumentará indefinidamente ya que al expansión, en el dominio de energía oscura, es muy rápida y esto implica que las perturbaciones dejen de crecer [1, 18].

Es de especial importancia identificar que tomando de manera arbitraria valores a los parámetros en cuestión, normalizada su suma a la unidad, el resultado obtenido para el factor de crecimiento con los datos registrados por Planck [6], Figura 3-1(a), tiene una diferencia porcentual de 2.1 % para el caso de $\Omega_{m,0} = 0.3$ (línea roja) en la Figura 3-2. Por último vale la pena, para los fines de este trabajo, profundizar un poco más en el modelo Einstein-De Sitter; ya que, considerando este tipo de universo, se puede obtener una solución analítica a (3-36) y de está forma, se tendrá una manera de comparar sobre los resultados numéricos de ésta, descritos arriba en la Figura 3-1(d). En contraste con lo anterior, reescribiendo la ecuación diferencial (3-35) con los valores para los parámetros $\Omega_{m,0} = 1$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0$ y $q(t_0) = 1/2$, en donde se ha utilizado la ecuación (2-31), se tiene tanto para $P(z)$ como para $Q(z)$

$$P(z) = (z + 1)^3, \quad Q(z) = \frac{1}{2}(z + 1)^3,$$

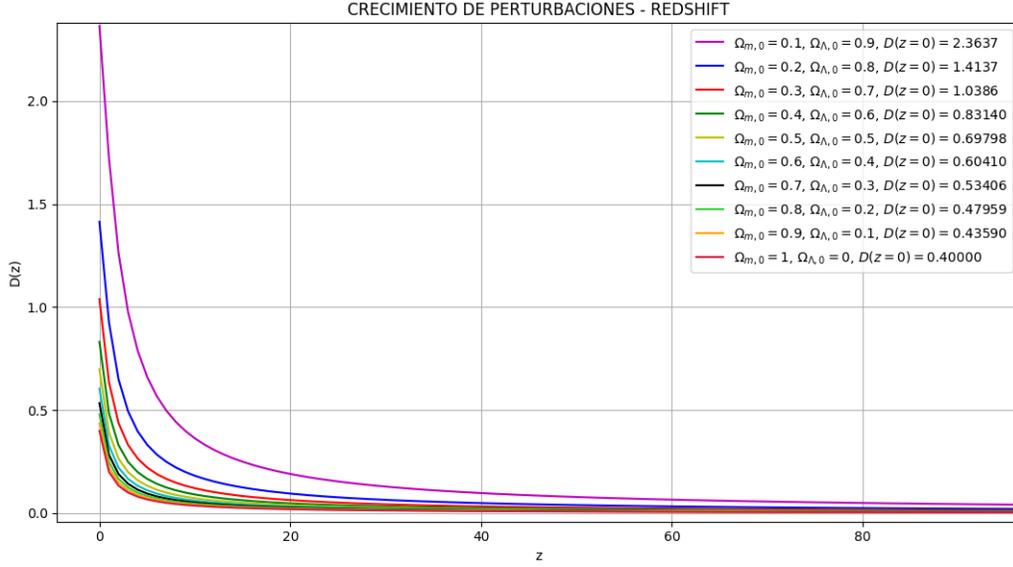


Figura 3-2.: Factor de crecimiento para distintos valores en los parámetros $\Omega_{m,0}$ y $\Omega_{\Lambda,0}$.

de aquí la ecuación diferencial toma la forma

$$(z+1)^4 \frac{d^2 D}{dz^2} + \frac{1}{2}(z+1)^3 \frac{dD}{dz} - \frac{3}{2}(z+1)^2 D = 0, \quad \text{dividiendo entre } (z+1)^2,$$

$$(z+1)^2 \frac{d^2 D}{dz^2} + \frac{1}{2}(z+1) \frac{dD}{dz} - \frac{3}{2} D = 0,$$

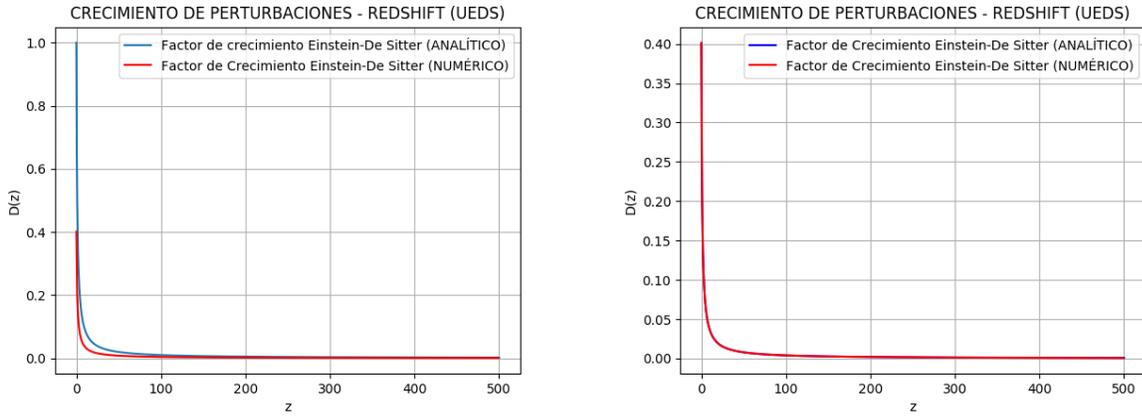
y efectuando la sustitución $u = z + 1 \rightarrow dz = du$,

$$u^2 \frac{d^2 D}{du^2} + \frac{1}{2} u \frac{dD}{du} - \frac{3}{2} D = 0, \quad (3-38)$$

que al resolver por medio de la sustitución $D = u^r$ (ecuación de Cauchy-Euler), se obtienen los valores para la ecuación característica $r = 3/2$ y $r = -1$. De manera que, se encuentran las soluciones para el factor de decrecimiento $D^-(z) = (z+1)^{3/2}$ y crecimiento $D^+(z) = (z+1)^{-1}$. Sin embargo, recuerde que estas soluciones están ligadas a constantes de proporcionalidad, cuyos valores pueden ser encontrados, imponiendo algún problema de valor inicial sobre la ecuación (3-38).

Como se pudo apreciar en párrafos anteriores, si se gráfica directamente la solución para (3-36), bajo un modelo de universo de Einstein-De Sitter, Figura 3-1(d); y el factor de crecimiento, $D^+(z)$, encontrado resolviendo la ecuación diferencial (3-38), se evidencia una discrepancia considerable entre la solución analítica y numérica como se muestra en la Figura 3-3(a). Está discrepancia, evidentemente, puede ser ajustada considerando las constantes de integración desconocidas en la solución a (3-38) por falta de una condición inicial en las

perturbaciones. Sin embargo, desarrollando la integral (3-36), de forma simbólica se obtiene el resultado presentado en el anexo C.3. en donde se hace evidente el factor de $2/5$, que difiere de la solución encontrada vía la ecuación diferencial (3-38) y que al ser representada de forma gráfica, Figura 3-3(b), se obtiene un excelente ajuste a la solución numérica presentada en la Figura 3-1(d).



(a) Comparación directa de soluciones.

(b) Comparación analítica y numérica.

Figura 3-3.: Comparación del factor de crecimiento de las perturbaciones en el régimen lineal para un universo de Einstein-De Sitter.

3.2.2. Teoría euleriana No-Lineal de perturbaciones

Considerando ahora la evolución en los campos de densidad de materia y velocidades peculiares más allá de la teoría lineal, descrita en la sección anterior, es posible erigir un conjunto de ecuaciones que respondan a ésta necesidad, estableciendo la suposición que: *expandiendo los campos de densidad de materia y velocidad de contraste alrededor de soluciones lineales, tratando la varianza (parámetro perturbativo) de las fluctuaciones lineales como un parámetro pequeño ($\sigma^2 \leq 1$) y asumiendo vorticidad nula en el campo de velocidades a lo largo de toda la evolución*, es viable encontrar soluciones que permitan describir la evolución de dichos campos en un régimen no lineal. En virtud de esto, y retomando el conjunto de ecuaciones (3-9), (3-18) y (3-19), se buscan soluciones de la forma,

$$\delta(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n(\mathbf{x}, \tau); \quad \theta(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n(\mathbf{x}, \tau), \quad (3-39)$$

en donde δ^1 y θ^1 representan la solución al tratamiento lineal, δ^2 y θ^2 corresponden a términos cuadráticos de las soluciones lineales y así sucesivamente. Así, en correspondencia con la suposición, establecida arriba, al aplicar rotacional sobre la ecuación (3-19), y considerando

nuevamente como nulo el tensor de esfuerzos, para el fluido de materia oscura

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} [\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)] + \mathcal{H}(\tau) [\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)] + \nabla_{\mathbf{x}} \times \left[[\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}] \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \right] &= -\nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau) + \nabla_{\mathbf{x}} \times \left[[\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}] \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \right] &= 0, \end{aligned} \quad (3-40)$$

en donde se ha utilizado la identidad $\nabla \times \nabla \varphi = 0$ y la ecuación (3-23) para la vorticidad del fluido. Ahora explorando el tercer término, de la última expresión, por medio de la relación vectorial

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A},$$

pues para la ecuación (3-40), se puede emplear como

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) &= \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \\ \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) &= \mathbf{u} \times \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \\ \nabla(u^2) &= 2\mathbf{u} \times \mathbf{w} + 2(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \frac{1}{2} \nabla(u^2) - \mathbf{u} \times \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (3-41)$$

de manera que aplicando (3-41) sobre (3-40), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau) + \nabla_{\mathbf{x}} \times \left[\frac{1}{2} \nabla [u^2(\mathbf{x}, \tau)] - \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \times \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau) \right] = 0,$$

encontrando finalmente, la ecuación para la vorticidad

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau) - \nabla_{\mathbf{x}} \times [\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \times \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau)] = 0.$$

Reorganizando (3-18) y aplicando divergencia sobre (3-19), se tiene respectivamente, el par de ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\mathbf{x}, \tau) + \theta(\mathbf{x}, \tau) = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\delta(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)], \quad (3-42)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \theta(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \theta(\mathbf{x}, \tau) + \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) \delta(\mathbf{x}, \tau) = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[[\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}] \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \right], \quad (3-43)$$

en donde se ha hecho uso de la ecuación (3-9) sobre la la ecuación (3-43). A gran escala, la teoría lineal de perturbaciones cosmológicas proporciona una descripción apropiada de los campos en cuestión, siempre y cuando las fluctuaciones de estos sean pequeñas[4]. Sin embargo, si se quiere entender la formación de estructura en etapas tempranas del universo, específicamente, para los fines de este trabajo, en los primeros momentos de la era de materia, se deben explorar las no linealidades de los campos en densidad y velocidades peculiares. De

manera que, las no linealidades pueden ser entendidas como acoples de modos lineales. Por lo tanto, para cuantificar la amplificación de las fluctuaciones en los campos mencionados, es conveniente hacer una representación de éstos en un espacio de Fourier, de manera que los diferentes modos de Fourier se desarrollarán de manera independientemente y las no linealidades se introducirán por medio de acoples entre los posibles modos. Así, utilizando la transformada de Fourier para cada campo y recordando que el campo de velocidades peculiares queda caracterizado por su divergencia $\theta(\mathbf{x}, \tau)$, se tienen las transformadas[13] (ver Anexo D.1)

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) = \int \frac{e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{x}, \tau) d^3\mathbf{x}, \quad \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) = \int \frac{e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}}{(2\pi)^3} \theta(\mathbf{x}, \tau) d^3\mathbf{x}. \quad (3-44)$$

De manera que, las ecuaciones de movimiento (3-42) y (3-43) pueden reescribirse, respectivamente en términos de una representación de Fourier, de la forma[4, 13]

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) + \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) = - \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_1 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \tilde{\delta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau), \quad (3-45)$$

con la función $\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 1 + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)/k_2^2$. Y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau} \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) + \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) \\ = - \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_1 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau), \end{aligned} \quad (3-46)$$

con la función $\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) / 2k_1^2 k_2^2$. En donde estas funciones, están relacionadas con la no linealidad de la evolución de los campos y surgen de considerar los términos no lineales de las ecuaciones de movimiento para el fluido de materia oscura. Por lo tanto, es posible asumir que la evolución en los campos de densidad $\tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau)$ y velocidades peculiares, mediado por la divergencia $\tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau)$, estará determinada por la forma de acoplamiento de los vectores de onda \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 y su suma representada como \mathbf{k} , encontrados de forma explícita en las ecuaciones (3-45) y (3-46)[4, 23, 27].

4. Soluciones de la Teoría de Perturbaciones

En este capítulo se seguirá el método usual de abordar la solución a las ecuaciones de movimiento (3-45) y (3-46); que consiste en un método analítico, fundamentado en una expansión perturbativa de los campos en cuestión. Está técnica desarrollada en [10] y abordada por diversos expertos en el tema [4, 13, 23], será expuesta en esta sección, de tal forma que se harán explícitas las expresiones para determinar el espectro de potencias a primer y segundo orden.

4.1. Soluciones generales

Con las ecuaciones de movimiento para el fluido de materia oscura, se direcciona el trabajo a encontrar soluciones de forma perturbativa, como son abordadas por [10, 16] y referentes para varios autores en la teoría de perturbaciones cosmológicas. De manera que, retomando las ecuaciones (3-39), las soluciones perturbativas para los campos en cuestión son

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) &= \tilde{\delta}^1(\mathbf{k}, \tau) + \tilde{\delta}^2(\mathbf{k}, \tau) + \tilde{\delta}^3(\mathbf{k}, \tau) + \dots, \\ \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) &= \tilde{\theta}^1(\mathbf{k}, \tau) + \tilde{\theta}^2(\mathbf{k}, \tau) + \tilde{\theta}^3(\mathbf{k}, \tau) + \dots,\end{aligned}$$

que al mantener, por el momento, los términos a primer orden en (3-45) y (3-46), se tienen asociadas las ecuaciones en el espacio de Fourier

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) + \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) + \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) &= 0,\end{aligned}$$

de donde, si $\tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau)$ es posible establecer que

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) - \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) = 0, \quad (4-1)$$

ecuación similar a la encontrada en (3-26). Identificando $\mathcal{H}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \log R = H(t)R(t)$ y la evolución del factor de escala viene dada por la expresión[12]

$$\left[\frac{dR}{dt} \right]^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m,0} \frac{1}{R(t)} + \Omega_{r,0} \frac{1}{R^2(t)} + \Omega_{\Lambda,0} R^2(t) + 1 - \left(\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} \right) \right], \quad (4-2)$$

es posible determinar la equivalencia $\mathcal{H}(\tau) = 2\tau^{-1}$, para un universo tipo Einstein-De Sitter. Al ser aplicado éste resultado en la ecuación (4-1), se obtienen las soluciones para el régimen lineal (ver Anexo D.2)

$$\tilde{\delta}^1(\mathbf{k}, \tau) = R(\tau), \quad \tilde{\theta}^1(\mathbf{k}, \tau) = -R(\tau)\mathcal{H}(\tau). \quad (4-3)$$

De manera que, considerando la expansión perturbativa alrededor de estas soluciones lineales [16], se escribe

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} R^n(\tau) \delta^n(\mathbf{k}), \quad (4-4)$$

$$\tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) = -\mathcal{H}(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} R^n(\tau) \theta^n(\mathbf{k}), \quad (4-5)$$

que al considerar un valor para $R(\tau) \rightarrow 0$, claramente se aprecia que las series están dominadas por el primer término; es decir, $\tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) = R^1(\tau)\delta^1(\mathbf{k})$ y $\tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) = -\mathcal{H}(\tau)R^1(\tau)\theta^1(\mathbf{k})$. Al ser utilizadas estas soluciones a los campos en la ecuación de continuidad para el régimen lineal, se pueden determinar las equivalencias

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) &= -\tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau), \\ \frac{\partial}{\partial \tau} [R^1(\tau)\delta^1(\mathbf{k})] &= -[-\mathcal{H}(\tau)R^1(\tau)\theta^1(\mathbf{k})], \\ \frac{\partial R^1(\tau)}{\partial \tau} \delta^1(\mathbf{k}) &= \frac{\partial R^1(\tau)}{\partial \tau} \frac{R^1(\tau)}{R^1(\tau)} \theta^1(\mathbf{k}), \\ \delta^1(\mathbf{k}) &= \theta^1(\mathbf{k}), \end{aligned}$$

estableciendo que el campo de densidad de energía caracteriza las fluctuaciones lineales al igual que la divergencia del campo. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento (3-45) y (3-46), al poseer la solución a los campos $\delta^n(\mathbf{k})$ y $\theta^n(\mathbf{k})$, a todos los ordenes, respecto a las fluctuaciones lineales, pueden reescribirse, para $n \geq 2$ como (ver Anexo D.3)

$$n\delta^n(\mathbf{k}) - \theta^n(\mathbf{k}) = A^n(\mathbf{k}), \quad (4-6)$$

$$[1 + 2n]\theta^n(\mathbf{k}) - 3\delta^n(\mathbf{k}) = B^n(\mathbf{k}), \quad (4-7)$$

en donde se han tomado las definiciones para

$$A^n(\mathbf{k}) \equiv \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \sum_{m=1}^{n-1} \delta^m(\mathbf{k}_1) \theta^{n-m}(\mathbf{k}_2), \quad (4-8)$$

$$B^n(\mathbf{k}) \equiv \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) 2\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \sum_{m=1}^{n-1} \theta^m(\mathbf{k}_1) \theta^{n-m}(\mathbf{k}_2). \quad (4-9)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas (4-6) y (4-7) para $\theta^n(\mathbf{k})$ y $\delta^n(\mathbf{k})$ multiplicando la ecuación (4-7) por n y (4-6) por 3, con la intención de eliminar $\delta^n(\mathbf{k})$, se obtiene

$$n[1 + 2n]\theta^n(\mathbf{k}) - 3\theta^n(\mathbf{k}) = nB^n(\mathbf{k}) + 3A^n(\mathbf{k}),$$

$$\begin{aligned} [2n^2 + n - 3]\theta^n(\mathbf{k}) &= nB^n(\mathbf{k}) + 3A^n(\mathbf{k}), \\ \theta^n(\mathbf{k}) &= \frac{nB^n(\mathbf{k}) + 3A^n(\mathbf{k})}{2n^2 + n - 3} = \frac{nB^n(\mathbf{k}) + 3A^n(\mathbf{k})}{(2n + 3)(n - 1)}, \end{aligned} \quad (4-10)$$

y para el campo $\delta^n(\mathbf{k})$, de la ecuación (4-6), utilizando (4-10)

$$\begin{aligned} \delta^n(\mathbf{k}) &= \frac{A^n(\mathbf{k}) + \theta^n(\mathbf{k})}{n} = \frac{A^n(\mathbf{k}) [2n^2 + n - 3] + nB^n(\mathbf{k}) + 3A^n(\mathbf{k})}{n(2n + 3)(n - 1)}, \\ \delta^n(\mathbf{k}) &= \frac{(2n + 1)A^n(\mathbf{k}) + B^n(\mathbf{k})}{(2n + 3)(n - 1)}. \end{aligned} \quad (4-11)$$

De manera que la solución general, a los campos en cuestión, puede ser escrita por medio de las relaciones, respectivamente para (4-11) y (4-10), como

$$\begin{aligned} \delta^n(\mathbf{k}) &= \frac{(2n + 1)}{(2n + 3)(n - 1)} \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \sum_{m=1}^{n-1} \delta^m(\mathbf{k}_1) \theta^{n-m}(\mathbf{k}_2) \\ &+ \frac{1}{(2n + 3)(n - 1)} \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) 2\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \sum_{m=1}^{n-1} \theta^m(\mathbf{k}_1) \theta^{n-m}(\mathbf{k}_2), \end{aligned}$$

reescribiéndose de la forma

$$\delta^n(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\theta^{n-m}(\mathbf{k}_2)}{(2n + 3)(n - 1)} \left[\alpha(1 + 2n)\delta^m(\mathbf{k}_1) + 2\beta\theta^m(\mathbf{k}_1) \right] \right\}. \quad (4-12)$$

Y para la divergencia del campo

$$\begin{aligned} \theta^n(\mathbf{k}) &= \frac{n}{(2n + 3)(n - 1)} \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) 2\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \sum_{m=1}^{n-1} \theta^m(\mathbf{k}_1) \theta^{n-m}(\mathbf{k}_2) \\ &+ \frac{3}{(2n + 3)(n - 1)} \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \sum_{m=1}^{n-1} \delta^m(\mathbf{k}_1) \theta^{n-m}(\mathbf{k}_2), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\theta^n(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\theta^{n-m}(\mathbf{k}_2)}{(2n + 3)(n - 1)} \left[2n\beta\theta^m(\mathbf{k}_1) + 3\alpha\delta^m(\mathbf{k}_1) \right] \right\}. \quad (4-13)$$

Que al ser expandidas para todo $n \geq 2$, se pueden escribir a través de funciones de grado cero, con dependencia de los vectores de onda $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n\}$ (ver Anexo D.4, para ver detalles de equivalencia entre las ecuaciones (4-12) a (4-17), por lo menos para uno de los casos de interés $n = 2$), estas funciones son¹:

$$F_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{G_m(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m)}{(2n+3)(n-1)} \left[(1+2n)\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)F_{n-m}(\mathbf{q}_{m+1}, \dots, \mathbf{q}_n) \right. \\ \left. + 2\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)G_{n-m}(\mathbf{q}_{m+1}, \dots, \mathbf{q}_n) \right], \quad (4-14)$$

y la relación para

$$G_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{G_m(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m)}{(2n+3)(n-1)} \left[3\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)F_{n-m}(\mathbf{q}_{m+1}, \dots, \mathbf{q}_n) \right. \\ \left. + 2n\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)G_{n-m}(\mathbf{q}_{m+1}, \dots, \mathbf{q}_n) \right], \quad (4-15)$$

donde $\mathbf{k}_1 \equiv \mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_m$, $\mathbf{k}_2 \equiv \mathbf{q}_{m+1} + \dots + \mathbf{q}_n$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, y $F_1 = G_1 \equiv 1^2$. Así, las ecuaciones (4-12) y (4-13), pueden ser escritas como

$$\delta^n(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{q}_1 \dots \int d^3\mathbf{q}_n \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \dots - \mathbf{q}_n) F_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \delta^1(\mathbf{q}_1) \dots \delta^1(\mathbf{q}_n), \quad (4-16)$$

$$\theta^n(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{q}_1 \dots \int d^3\mathbf{q}_n \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \dots - \mathbf{q}_n) G_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \delta^1(\mathbf{q}_1) \dots \delta^1(\mathbf{q}_n). \quad (4-17)$$

Ahora haciendo uso de la simetrización de las funciones F_n y G_n con el objetivo de permitir todas las posibles permutaciones entre los vectores de onda, se escribe[23]

$$F_n^{(s)}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} F_n[\mathbf{q}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{q}_{\pi(n)}], \quad (4-18)$$

$$G_n^{(s)}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} G_n[\mathbf{q}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{q}_{\pi(n)}], \quad (4-19)$$

con $\pi = \{1, 2, \dots, n\}$. En el caso particular, tomando el segundo orden ($n = 2$) para las ecuaciones descritas en este capítulo, se puede establecer para el núcleo $F_2^{(s)}$ la forma³

$$F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{1}{2!} \sum_{\pi=1}^2 F_2(\mathbf{q}_{\pi(1)}, \mathbf{q}_{\pi(2)}) = \frac{1}{2} [F_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + F_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1)], \quad (4-20)$$

¹Revisar [10, 16] para precisar detalles sobre la construcción de las expresiones (4-16) y (4-17).

²Para conocer algunas propiedades de estas funciones ver [4] y para profundizar [19].

³Es importante reconocer la física que hay en cada uno de estos núcleos asociando respectivamente de izquierda a derecha la contribución de monopolo, dipolo y cuadrupolo para la ecuación (4-21).

y con ayuda de las definiciones para α y β , dadas en el final del capítulo 3 (Ver Anexo D.4),

$$F_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{1}{7}[5\alpha + 2\beta] = \frac{1}{7} \left[5 \left(1 + \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_2^2} \right) + 2 \frac{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|^2 (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)}{2q_1^2 q_2^2} \right],$$

$$F_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) = \frac{1}{7}[5\alpha + 2\beta] = \frac{1}{7} \left[5 \left(1 + \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_1^2} \right) + 2 \frac{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|^2 (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)}{2q_1^2 q_2^2} \right],$$

que al ser sustituidas en (4-20), se obtienen las siguientes líneas de álgebra

$$\begin{aligned} F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &= \frac{1}{2} \left[2\frac{5}{7} + \frac{5}{7} \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_2^2} + 2\frac{1}{7} \frac{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|^2 (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)}{q_1^2 q_2^2} + \frac{5}{7} \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_1^2} \right], \\ &= \frac{5}{7} + \frac{5}{14} \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_2^2} + \frac{1}{7} \frac{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|^2 (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)}{q_1^2 q_2^2} + \frac{5}{14} \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_1^2}, \\ &= \frac{5}{7} + \frac{5}{14} \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_2^2} + \frac{5}{14} \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_1^2} + \frac{1}{7} \frac{(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_1 \cdot (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)}{q_1^2 q_2^2} \\ &\quad + \frac{1}{7} \frac{(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_2 \cdot (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)}{q_1^2 q_2^2}, \\ F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &= \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_1^2 q_2^2} [q_1^2 + q_2^2] + \frac{2}{7} \frac{(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2}{q_1^2 q_2^2}. \end{aligned} \quad (4-21)$$

Y de la misma forma para

$$G_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{1}{2!} \sum_{\pi=1}^2 G_2(\mathbf{q}_{\pi(1)}, \mathbf{q}_{\pi(2)}) = \frac{1}{2} [G_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + G_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1)], \quad (4-22)$$

junto a las definiciones para α y β , nuevamente,

$$G_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{1}{7}[3\alpha + 4\beta] = \frac{1}{7} \left[3 \left(1 + \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_2^2} \right) + 4 \frac{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|^2 (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)}{2q_1^2 q_2^2} \right],$$

$$G_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) = \frac{1}{7}[3\alpha + 4\beta] = \frac{1}{7} \left[3 \left(1 + \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_1^2} \right) + 4 \frac{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|^2 (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)}{2q_1^2 q_2^2} \right],$$

al ser reemplazadas en (4-22), se desarrollan las siguientes líneas de álgebra

$$\begin{aligned} G_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &= \frac{1}{2} \left[2\frac{3}{7} + \frac{3}{7} \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_2^2} + \frac{4}{7} \frac{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|^2 (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)}{q_1^2 q_2^2} + \frac{3}{7} \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_1^2} \right], \\ &= \frac{3}{7} + \frac{3}{14} \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_2^2} + \frac{2}{7} \frac{|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|^2 (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)}{q_1^2 q_2^2} + \frac{3}{14} \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_1^2}, \\ &= \frac{3}{7} + \frac{3}{14} \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_2^2} + \frac{3}{14} \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_1^2} + \frac{2}{7} \frac{(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_1 \cdot (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)}{q_1^2 q_2^2} \\ &\quad + \frac{2}{7} \frac{(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_2 \cdot (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)}{q_1^2 q_2^2}, \\ G_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &= \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_1^2 q_2^2} [q_1^2 + q_2^2] + \frac{4}{7} \frac{(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2}{q_1^2 q_2^2}. \end{aligned} \quad (4-23)$$

Con las funciones propuestas en (4-21) y (4-23), es posible encontrar soluciones a las integrales (4-16) y (4-17) a segundo orden.

4.2. Espectro de potencias a segundo orden

Considerando el universo como un conjunto estadístico, en donde se asume la hipótesis ergódica[20]: como la parte observable de éste, existen muchas otras independientes. Así, las fluctuaciones en los campos de densidad de materia y velocidades peculiares, y en general cualquier otro campo, pueden ser abordadas por medio de campos aleatorios estadísticamente homogéneos e isotrópicos; es decir, si el conjunto de puntos de la función de distribución de probabilidad permanecen invariantes bajo una traslación y rotación, respectivamente, de coordenadas en el espacio[4]. Por lo tanto, el espectro de potencias, para el campo $\delta(\mathbf{x}, \tau)$ está definido como el conjunto promedio del producto escalar de dos variables aleatorias, del campo de densidad de materia en dos ubicaciones diferentes, de manera que la función de correlación entre dos puntos se definirá como

$$\left\langle \delta(\mathbf{x}, \tau) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \tau) \right\rangle \equiv \xi(r), \quad (4-24)$$

la cual es dependiente únicamente de la norma de \mathbf{r} , en virtud de la homogeneidad e isotropía. Recordando el par de ecuaciones (D-1), encontradas en el anexo D, la función de correlación de dos puntos, con $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, en el espacio de Fourier será calculada de la forma

$$\begin{aligned} \left\langle \delta(\mathbf{k}_1, \tau) \delta(\mathbf{k}_2, \tau) \right\rangle &= \left\langle \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x}, \tau) \int \frac{d^3 \mathbf{x}'}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}'} \delta(\mathbf{x}', \tau) \right\rangle, \\ &= \left\langle \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x}, \tau) \int \frac{d^3 \mathbf{r}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{r})} \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \tau) \right\rangle, \\ &= \left\langle \int \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{r}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{r})} \delta(\mathbf{x}, \tau) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \tau) \right\rangle, \\ &= \int \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{r}}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} - i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \left\langle \delta(\mathbf{x}, \tau) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \tau) \right\rangle, \end{aligned}$$

utilizando (4-24), el teorema de Fubini y la representación delta de Dirac en el espacio de Fourier, se establece

$$\begin{aligned} &= \int \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{r}}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} - i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \xi(r), \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \int \frac{d^3 \mathbf{r}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \xi(r), \\ &= \delta^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \int \frac{d^3 \mathbf{r}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \xi(r), \\ \left\langle \delta(\mathbf{k}_1, \tau) \delta(\mathbf{k}_2, \tau) \right\rangle &= \delta^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P(k_2), \quad \text{con } P(k) := \int \frac{d^3 \mathbf{r}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \xi(r), \quad (4-25) \end{aligned}$$

definido como el espectro de potencias en densidad. Por lo tanto, para determinar este espectro a cualquier orden, será necesario utilizar las relaciones de recursión encontradas en

(4-14) y (4-15). De manera que, empleando la solución en el régimen lineal (4-4), se tiene

$$\begin{aligned}
\left\langle \delta(\mathbf{k}_1, \tau) \delta(\mathbf{k}_2, \tau) \right\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} R^n(\tau) \delta^n(\mathbf{k}_1) \sum_{n=1}^{\infty} R^n(\tau) \delta^n(\mathbf{k}_2) \right\rangle, \\
&= R^2(\tau) \langle \delta^1(\mathbf{k}_1) \delta^1(\mathbf{k}_2) \rangle + R^3(\tau) \left[\langle \delta^1(\mathbf{k}_1) \delta^2(\mathbf{k}_2) \rangle + \langle \delta^2(\mathbf{k}_1) \delta^1(\mathbf{k}_2) \rangle \right] \\
&+ R^4(\tau) \left[\langle \delta^1(\mathbf{k}_1) \delta^3(\mathbf{k}_2) \rangle + \langle \delta^2(\mathbf{k}_1) \delta^2(\mathbf{k}_2) \rangle + \langle \delta^3(\mathbf{k}_1) \delta^1(\mathbf{k}_2) \rangle \right] \\
&+ R^5(\tau) \left[\langle \delta^1(\mathbf{k}_1) \delta^4(\mathbf{k}_2) \rangle + \langle \delta^2(\mathbf{k}_1) \delta^3(\mathbf{k}_2) \rangle + \langle \delta^3(\mathbf{k}_1) \delta^2(\mathbf{k}_2) \rangle \right] + \dots, \\
\left\langle \delta(\mathbf{k}_1, \tau) \delta(\mathbf{k}_2, \tau) \right\rangle &= R^2(\tau) \langle \delta^1(\mathbf{k}_1) \delta^1(\mathbf{k}_2) \rangle + R^4(\tau) \left[\langle \delta^1(\mathbf{k}_1) \delta^3(\mathbf{k}_2) \rangle + \langle \delta^2(\mathbf{k}_1) \delta^2(\mathbf{k}_2) \rangle \right. \\
&\left. + \langle \delta^3(\mathbf{k}_1) \delta^1(\mathbf{k}_2) \rangle \right] + R^6(\tau) O[\delta^6(\mathbf{k})],
\end{aligned}$$

asumiendo que en general $\langle \delta^m(\mathbf{k}) \delta^{n-m}(\mathbf{k}') \rangle \equiv P_{m,n-m}(\mathbf{k}) \delta^D(\mathbf{k}+\mathbf{k}')$, se consideran únicamente las contribuciones a cuarto orden en el campo de densidad y segundo orden en el espectro de potencias, así empleando (4-25) sobre el miembro izquierdo

$$\begin{aligned}
\delta^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P(k_2) &= R^2(\tau) P_{1,1}(k_2) \delta^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) + R^4(\tau) [P_{2,2}(k_2) + 2P_{1,3}(k_2)] \delta^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \\
P(k) &= R^2(\tau) P_{1,1}(k) + R^4(\tau) [P_{2,2}(k) + 2P_{1,3}(k)], \\
P(k) &= R^2(\tau) P_{1,1}(k) + R^4(\tau) P_2(k),
\end{aligned} \tag{4-26}$$

con $P_{1,1}(k)$ como el espectro de potencias en el régimen lineal, proporcionado por paradigmas inflacionarios y que para el fin de este trabajo se empleará como se establece en [3, 13] y $P_2(k) = P_{2,2}(k) + 2P_{1,3}(k)$, que corresponde a la contribución a segundo orden al espectro de potencias, también conocida en teoría cuántica de campos como corrección a un loop [22, 23, 25], representada en la Figura 4-1.

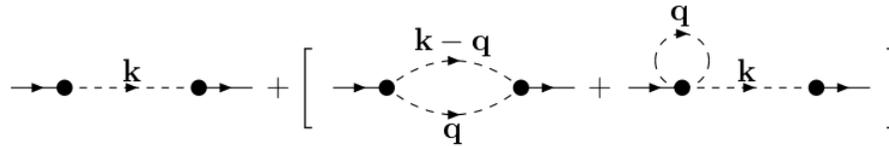


Figura 4-1.: Corrección a un Loop. Imagen tomada de [23].

En consecuencia, para poder determinar el espectro de potencias a segundo orden se establecen las expresiones para $P_2(k)$, (ver Anexo D.5)

$$P_{2,2}(k) = 2 \int d^3 \mathbf{q} P_{1,1}(q) P_{1,1}(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) [F_2^{(s)}(\mathbf{q}, \mathbf{k} - \mathbf{q})]^2, \tag{4-27}$$

$$2P_{1,3}(k) = 6P_{1,1}(k) \int d^3 \mathbf{q} P_{1,1}(q) F_3^{(s)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{k}). \tag{4-28}$$

En donde se ha utilizado una técnica traída de la teoría cuántica de campos conocida como el teorema de Wick[4], para poder evaluar la función de correlación de cuatro puntos del campo de densidad, en el régimen lineal, en cada una de las últimas dos ecuaciones (4-27) y (4-28). De manera que, la forma funcional del espectro de potencias a segundo orden será

$$P_2(k) = R^2(\tau)P_{1,1}(k) + R^4(\tau) \left[2 \int d^3\mathbf{q} P_{1,1}(q) P_{1,1}(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \left[F_2^{(s)}(\mathbf{q}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) \right]^2 + 6P_{1,1}(k) \int d^3\mathbf{q} P_{1,1}(q) F_3^{(s)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{k}) \right], \quad (4-29)$$

ecuación que para los fines del trabajo será objetivo a resolver con la técnica empleada por [10, 13, 16]⁴. Así, reescribiendo las integrales en coordenadas esféricas (q, θ, φ) (Figura 4-2), en donde $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) = (q \sin \theta \cos \varphi, q \sin \theta \sin \varphi, q \cos \theta)$, con θ entendido como el ángulo polar y φ como el ángulo azimutal. Para el elemento de volumen en las coordenadas q , se tiene una representación en coordenadas esféricas de la forma⁵

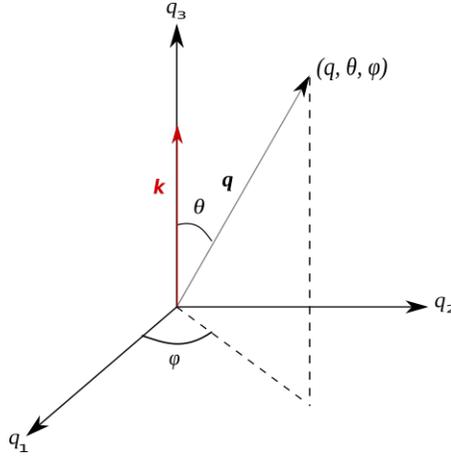


Figura 4-2.: Representación en coordenadas esféricas.

$$\int d^3\mathbf{q} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint dq_1 dq_2 dq_3 = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint q^2 \sin \theta dq d\theta d\varphi, \\ \int d^3\mathbf{q} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint q^2 dq d(\cos \theta), \quad (4-30)$$

de manera que para la contribución $P_{2,2}(k)$, se tiene la integral (Ver Anexo D.6),

$$P_{2,2}(k) = \frac{k^3}{98(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 dr dx P_{1,1}(kr) P_{1,1} [k(1+r^2-2rx)^{1/2}] \frac{(3r+7x-10rx^2)^2}{(1+r^2-2rx)^2}, \quad (4-31)$$

⁴Para el desarrollo de estas integrales se han empleado diversos métodos, tanto analíticos como numéricos, ver por ejemplo[22, 23, 25, 27].

⁵Observe que el vector de onda \mathbf{k} se ha alineado con uno de los ejes coordenados en el espacio de las \mathbf{q} por simplicidad, para efectos del cálculo y reescritura de las integrales.

y para la contribución $P_{1,3}(k)$ (Ver Anexo D.6),

$$2P_{1,3}(k) = \frac{k^3}{252(2\pi)^2} P_{1,1}(k) \int_0^\infty dr P_{1,1}(kr) \left[\frac{12}{r^2} - 158 + 100r^2 - 42r^4 + \frac{3}{r^3} (r^2 - 1)^3 (7r^2 + 2) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| \right], \quad (4-32)$$

que coinciden con el método desarrollado por Goroff y Makino [10, 16] y corresponden al objetivo central de este trabajo, tanto en su construcción matemática como en su comparación, con el régimen lineal, y reconstrucción del espectro de potencias en un régimen no lineal o corrección a un loop⁶. Se observa directamente de las ecuaciones (4-31) y (4-32) la dependencia de estas contribuciones de la función $P_{1,1}(k)$ ⁷, ecuación (4-33), cuya estructura general es [3, 13]⁸

$$P(k, \tau) = [D^+(\tau)]^2 P_L(k) = A [D^+(\tau)]^2 k^{n_p} T^2(k),$$

$$P_{1,1}(k) = Ak \left[\frac{\ln(1 + 9.36k)}{9.36k} [1 + 15.6k + (64.4k)^2 + (21.8k)^3 + (26.8k)^4]^{-1/4} \right]^2, \quad (4-33)$$

aquí se ha tomado el resultado obtenido en el capítulo 3, respecto a la normalización del factor de crecimiento $D^{(+)}(z) = 1$, recuperado del régimen lineal para la época actual, como

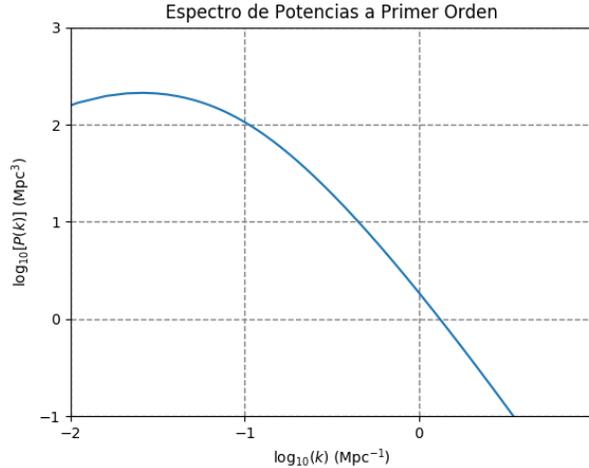


Figura 4-3.: Espectro de potencias a primer orden para $z = 0$.

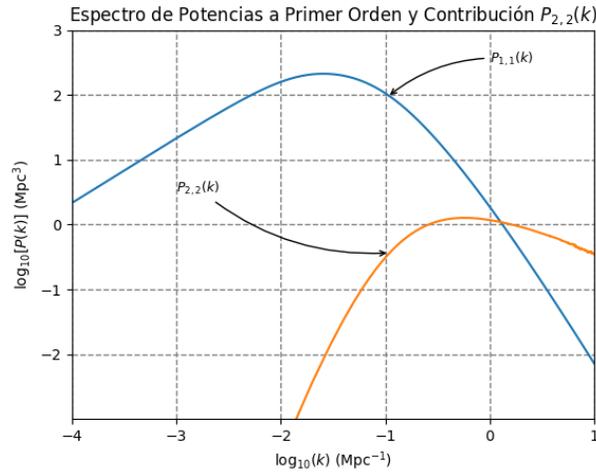
índice espectral $n_p = 1$, esto es lo que se conoce en la literatura como el espectro de potencias de Harrison-Zeldovich y finalmente $T(k)$ llamada función de transferencia que describe

⁶Un procedimiento análogo se puede efectuar para el campo de velocidades peculiares[8].

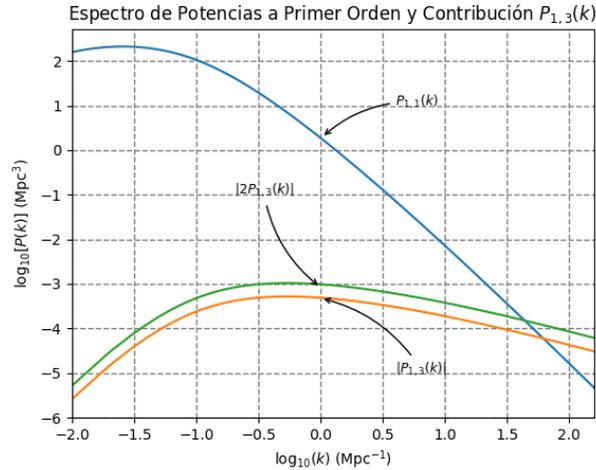
⁷Esta deriva de la evolución lineal de las fluctuaciones en el campo de densidad a través de la época de radiación y su posterior desacople con la materia[4].

⁸Modernamente son empleados códigos Boltzmann como por ejemplo los desarrollados por CAMB o CLASS para obtener este tipo de funciones.

la evolución de las perturbaciones en el campo de densidad hasta el dominio de materia. Además se toman los valores de $A = 2.19 \times 10^4 \text{ Mpc}^4$ conocida como amplitud de campo primordial y se asumen los parámetros $\Omega_m = 1$, (modelo de universo tipo Einstein-De Sitter), $H_0 = 70.0 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}$ (constante de Hubble-Lemaître) y $\sigma_8 = 1$ (amplitud del espectro de potencias), como parámetro de suma importancia en el crecimiento de las fluctuaciones en el universo temprano. En la figura 4-3, se presenta un gráfico del espectro de potencias lineal⁹, ecuación (4-33), en escala \log_{10} - \log_{10} para la época actual en $z = 0$.



(a) EP a primer orden y contribución $P_{2,2}(k)$.



(b) EP a primer orden y contribución $|P_{1,3}(k)|$.

Figura 4-4.: Espectro de potencias lineal y contribuciones $P_{2,2}(k)$ y $P_{1,3}(k)$ en $z = 0$.

Ahora, identificando cada contribución en $P_2(k)$, ecuación (4-26), y representándola junto al

⁹Recuerde que el espectro de potencias se define como la transformada de Fourier de la función de correlación y permite determinar la distribución de potencia de una señal en un intervalo de frecuencias.

espectro lineal $P_{1,1}(k)$, para $z = 0$, se obtienen respectivamente los gráficos encontrados en la Figura 4-4, que muestran una tendencia similar para cada integral (4-31) y (4-32), pero con una contribución mucho mayor, al espectro de potencias, de la componente $P_{2,2}(k)$ que la componente, casi nula, de $P_{1,3}(k)$ para un intervalo dado de número de onda k . Estos gráficos, fueron construidos con ayuda del lenguaje de programación Python y las rutinas para integrales dobles encontradas en la biblioteca SciPy, específicamente con el módulo nquad, para un intervalo de 5000 puntos en k . La gráfica en la Figura 4-5, muestra el objetivo cen-

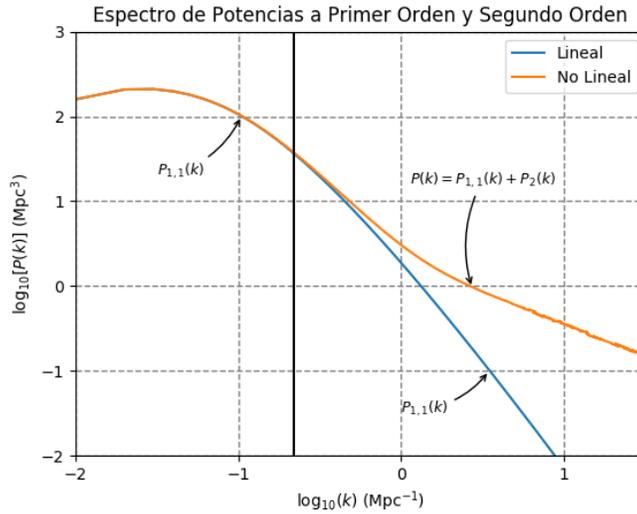
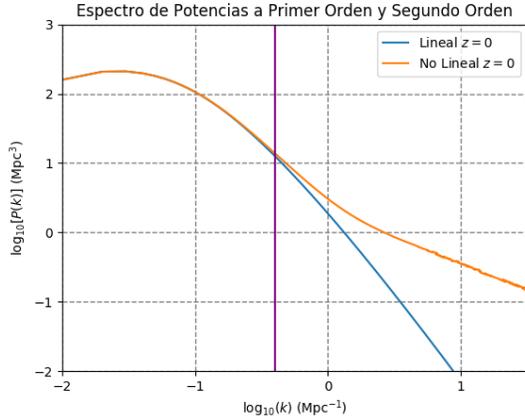
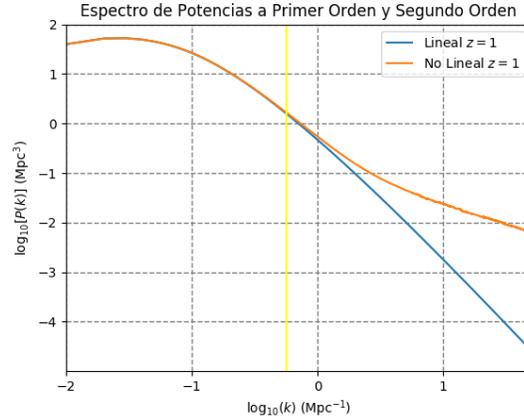
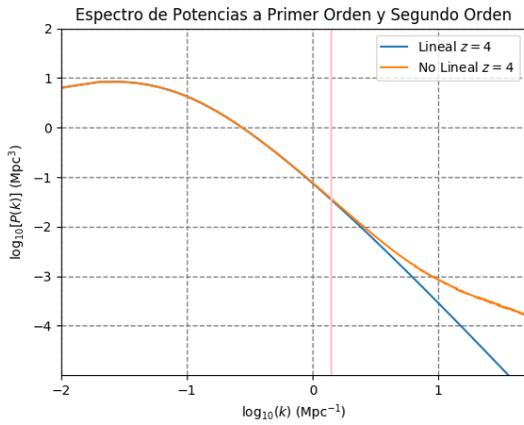
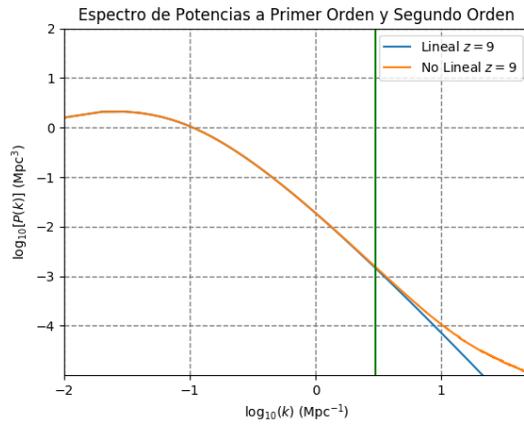


Figura 4-5.: Espectro de potencias no lineal $P(k)$ en $z = 0$.

tral de este trabajo que consiste en determinar el espectro de potencias a segundo orden; es decir, identificar como con las correcciones a un loop se presenta el espectro de potencias del campo aleatorio $\delta(\mathbf{x})$ y así, de esta manera, cuantificar la densidad de perturbación en términos de una superposición de ondas caracterizadas, cada una, con un número de onda $k = 2\pi/\lambda$. En ésta, un primer acercamiento, permite identificar que tanto el régimen lineal como el no lineal (a segundo orden) para valores pequeños de k , aproximadamente $k < 0.22 \text{ Mpc}^{-1}$, representado por la recta negra vertical, coinciden. De manera que, en este intervalo los efectos no lineales pueden ser despreciados. Y en contraste, para valores mayores a 0.22 Mpc^{-1} los efectos no lineales comienzan a presentarse considerables.

En la Figura 4-6 se presenta la evolución del espectro de potencias a segundo orden para diferentes redshift, con valores de 0, 1, 4 y 9, correspondientes a un factor de escala de 1, 0.5, 0.2 y 0.1 respectivamente. Es de especial importancia, apreciar que independiente de la ubicación en términos de su valor en z , tanto el régimen lineal como el no lineal son prácticamente indistinguibles para ciertos intervalos en k , como se puede identificar en este conjunto de cuatro graficas, desde aquí puede observarse que la tendencia en la contribución no lineal se mantiene para diferentes valores en redshift. En contraste, es preciso identificar el rango de k para determinar el intervalo en el que los efectos no lineales son considerables; de manera

(a) $z = 0$, Lineal $k \lesssim 0.224$ (línea púrpura).(b) $z = 1$, Lineal $k \lesssim 0.575$ (línea amarilla).(c) $z = 4$, Lineal $k \lesssim 1.38$ (línea rosada).(d) $z = 9$, Lineal $k \lesssim 3.01$ (línea verde).**Figura 4-6.:** Espectro lineal y no lineal para algunos valores en z .

que, visualizando la Figura 4-6, se asocia que los efectos no lineales, por lo menos a segundo orden, se desplazan a medida que tomamos valores cada vez más cercanos a la unidad en el factor de escala. En este sentido, si se efectúa una lectura de los gráficos de (d) a (a), en la Figura 4-5, cuando se observa más lejos, los efectos de la dinámica no lineal no son considerables o apreciables por está teoría a un loop. Esto coincide con algo que se esperaba, dado que las consecuencias perturbativas, no son significativas a medida que k se desplaza hacia valores mayores, pues el cambio fraccional en la densidad de materia es menor o igual a 1, $\delta\rho/\rho \leq 1$, y los efectos de la dinámica no lineal serían despreciables comparados con el régimen lineal[13, 20]. En está instancia, además, se ha querido evaluar las integrales numéricas tomando un intervalo de 20000 puntos en k con la intención de identificar que el espectro de potencias tiene un comportamiento decreciente para valores mayores en k , acompañado esto con una magnitud mayor para el espectro de potencias, respecto al espectro lineal, como se identifica claramente en la Figura 4-7.

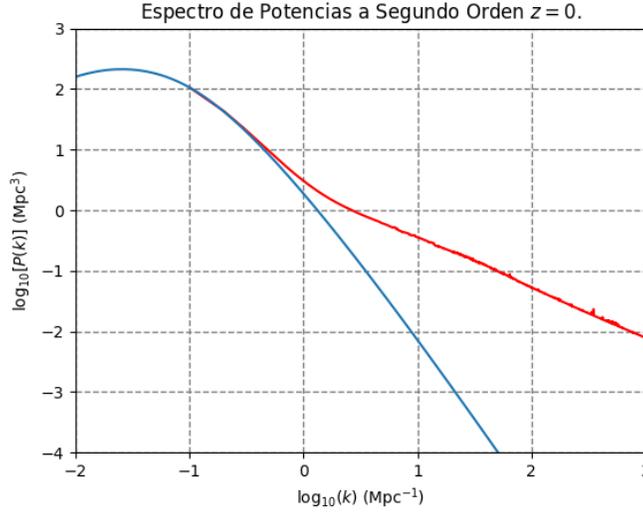
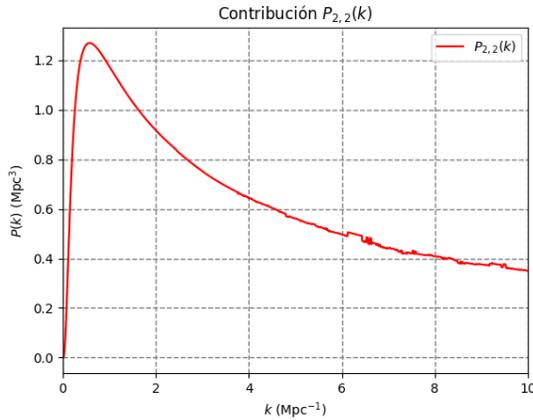
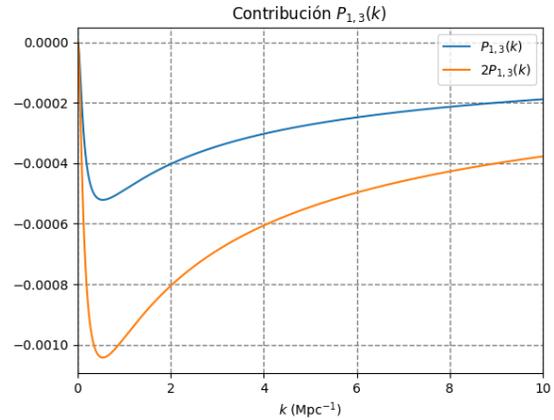


Figura 4-7.: Espectro de potencias no lineal $P(k)$ en $z = 0$.

Al considerar únicamente las contribuciones a segundo orden $P_{2,2}(k)$ y $P_{1,3}(k)$ representadas en la Figura 4-8, puede apreciarse, que la contribución dominante viene dada por la integral (4-31), pues la integral (4-32) proporciona valores en $P_2(k)$ que se encuentran en un orden de magnitud entre 10^{-6} y 10^{-3} en sus valores numéricos Figura 4-8 (b).



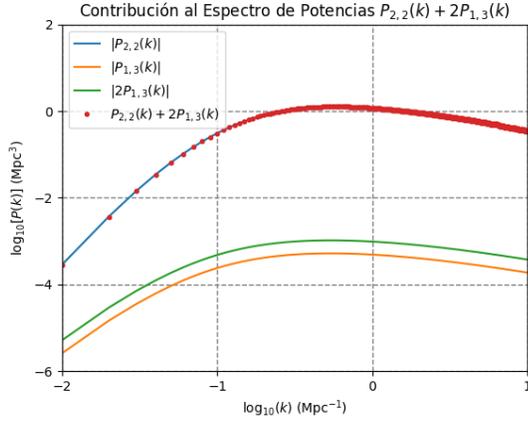
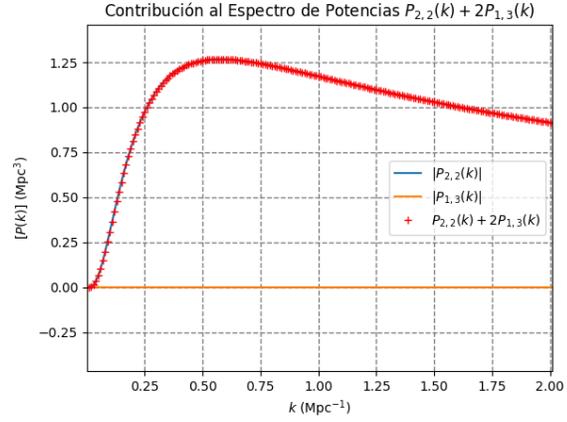
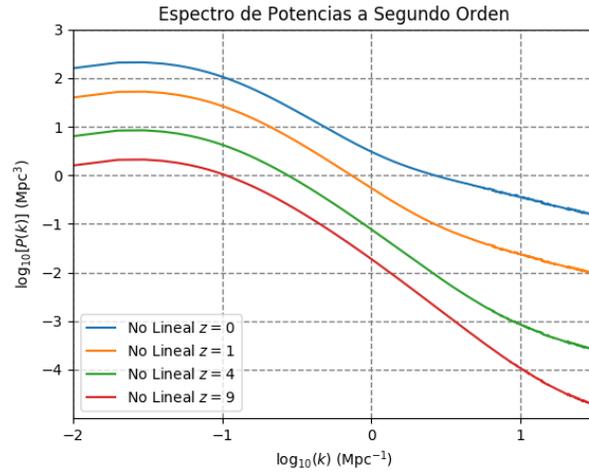
(a) Contribución $P_{2,2}(k)$ con $z = 0$.



(b) Contribución $P_{1,3}(k)$ con $z = 0$.

Figura 4-8.: Contribución $P_{2,2}(k)$ y $P_{1,3}(k)$.

Adicionalmente, es posible identificar que al considerar solamente la contribución a un loop $P_2(k)$, ecuación (4-26), identificada por las cruces y puntos rojos, en la Figura 4-9, tiende a cero a medida que el número de onda crece, lo cual también justifica lo discutido en el párrafo anterior y nuevamente se evidencia un problema para esta teoría. Como aspecto final, la Figura 4-10 muestra un compendio de la construcción del espectro a segundo orden para

(a) Contribución $P_{2,2}(k)$ y $P_{1,3}(k)$ con $z = 0$.(b) Contribución $P_{2,2}(k)$ y $P_{1,3}(k)$ con $z = 0$.**Figura 4-9.:** Contribución al espectro de potencias a un loop $P_2(k) = P_{2,2}(k) + 2P_{1,3}(k)$.**Figura 4-10.:** Espectro de potencias no lineal $P(k)$ en $z = 0, 1, 4$ y 9 .

diferentes valores en z y como es posible discernir, independiente del valor en este parámetro, la tendencia del espectro de potencias es la misma, indicando que la correlación que existe en el espacio para la formación de grandes estructuras obedece al principio cosmológico, por lo menos para el paradigma Λ CDM.

5. Materia Bariónica en la Teoría Euleriana de Perturbaciones

En este capítulo final, el propósito consiste en escribir las ecuaciones de movimiento para un fluido de varias especies, en especial de materia oscura fría (CDM) y materia bariónica (B), escribiéndolas tanto en el espacio real como en el espacio de Fourier. De manera que, se pueda abrir un espacio de discusión y análisis, con respecto a la estructura matemática y contenido físico de las ecuaciones de movimiento a lo largo de todo el capítulo, cuando se es incluida materia bariónica para comprender la formación de estructura a gran escala.

5.1. Ecuaciones de movimiento para CDM y Bariones

Uno de los objetivos principales de este trabajo fue encontrar soluciones perturbativas a la densidad de contraste $\delta(\mathbf{x}, \tau)$, para un fluido de materia oscura, en donde el gradiente de presión fue despreciado. Ahora, se construirá este mismo conjunto de ecuaciones, de forma simultanea, para un fluido de materia bariónica en donde el gradiente de presión es considerado. De manera que, ésta será la única diferencia física entre estos dos fluidos que evolucionan a pequeñas escalas, bajo las mismas condiciones iniciales, ya sea como un sistema único o como un fluido de dos componentes[27]. Utilizando nuevamente la estructura desarrollada en la sección 3.2, es posible plantear las ecuaciones de continuidad para un fluido de CDM y materia bariónica, respectivamente

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [\delta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau)] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[[1 + \delta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau)] \mathbf{u}_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) \right] = 0, \quad (5-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [\delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[[1 + \delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)] \mathbf{u}_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) \right] = 0, \quad (5-2)$$

y las ecuaciones de Euler, para materia oscura

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{u}_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \mathbf{u}_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) + [\mathbf{u}_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}] \mathbf{u}_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) = -\nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}}, \quad (5-3)$$

y materia bariónica

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{u}_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \mathbf{u}_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) + [\mathbf{u}_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}] \mathbf{u}_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) = -\nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}} - \frac{\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \sigma(\mathbf{x}, \tau)}{\rho_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)}. \quad (5-4)$$

En donde la ecuación (5-3) está caracterizada, a diferencia de (5-4), por considerar el tensor de esfuerzos y deformaciones aproximadamente nulo, es decir $\sigma(\mathbf{x}, \tau) \approx 0$.

Siguiendo a [4, 14], los efectos de presión, incluidos en la ecuación de Euler para el fluido de materia bariónica, pueden ser incluidos vía el tensor de esfuerzos para un fluido newtoniano $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \eta \left[\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \xi\delta_{ij}\nabla \cdot \mathbf{u}$, en virtud del límite establecido en la sección 3.1., con η y ξ conocidas como primera y segunda viscosidad respectivamente. Considerando estas viscosidades nulas y asumiendo una ecuación barotrópica $P(\rho)$, es plausible establecer para el segundo término del miembro derecho de la ecuación (5-4), las siguientes líneas

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \sigma(\mathbf{x}, \tau)}{\rho_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)} &= \frac{\nabla_i [-P(\rho)\delta_{ij}]}{\rho_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)} = -\frac{1}{\rho_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)} \frac{\partial}{\partial x^i} P(\rho)\delta_{ij} = -\frac{1}{\rho_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)} \frac{\partial}{\partial x^j} P(\rho) \\ &= -\frac{1}{\rho_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)} \frac{\partial P}{\partial \rho_{\text{B}}} \frac{\partial \rho_{\text{B}}}{\partial x^j} = -\frac{C_s^2(\mathbf{x}, \tau)}{\rho_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)} \frac{\partial \rho_{\text{B}}}{\partial x^j} = -\frac{C_s^2(\mathbf{x}, \tau)}{\rho_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\bar{\rho}_{\text{B}}(\tau) [1 + \delta_{\text{B}}(x_j, \tau)] \right] \\ &= -\frac{C_s^2(\mathbf{x}, \tau)\bar{\rho}_{\text{B}}(\tau)}{\rho_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)} \frac{\partial}{\partial x^j} \delta_{\text{B}}(x_j, \tau) = -\frac{C_s^2(\mathbf{x}, \tau)\bar{\rho}_{\text{B}}(\tau)}{\bar{\rho}_{\text{B}}(\tau) [1 + \delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)]} \frac{\partial}{\partial x^j} \delta_{\text{B}}(x_j, \tau), \end{aligned}$$

de manera que $\frac{\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \sigma(\mathbf{x}, \tau)}{\rho_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)} = -\frac{C_s^2(\mathbf{x}, \tau)\nabla_{\mathbf{x}}\delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)}{1 + \delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)}$, por lo tanto la ecuación (5-4) toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{u}_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau)\mathbf{u}_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) + [\mathbf{u}_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}] \mathbf{u}_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) = -\nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}} + \frac{C_s^2(\mathbf{x}, \tau)\nabla_{\mathbf{x}}\delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)}{1 + \delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)}. \quad (5-5)$$

Es importante resaltar que está ecuación viene acompañada de un aspecto físico de relevancia, ya que para la especie de fluido que se quiera trabajar, se puede asumir que la variación de la presión respecto a la densidad de energía, corresponde a la velocidad efectiva del fluido en un proceso adiabático[1]. Y junto a la ecuación de Poisson, para el potencial perturbador debido a esta combinación de fluidos

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Phi_{\text{PER}}(\mathbf{x}, \tau) &= 4\pi G R^2(t) \left[\bar{\rho}_{\text{CDM}}(\tau)\delta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) + \bar{\rho}_{\text{B}}(\tau)\delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) \right], \\ \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Phi_{\text{PER}}(\mathbf{x}, \tau) &= \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(\tau)\delta(\mathbf{x}, \tau) = \frac{6}{\tau^2}\delta(\mathbf{x}, \tau), \end{aligned} \quad (5-6)$$

en donde se ha utilizado nuevamente el parámetro adimensional $\Omega_m(\tau)$ y se ha definido la densidad de contraste para esta mezcla de fluidos como $\delta(\mathbf{x}, \tau) = f_{\text{CDM}}\delta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) + f_{\text{B}}\delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)$ con la fracción de materia oscura $f_{\text{CDM}} \equiv \frac{\Omega_{\text{CDM}}}{\Omega_m} = \frac{\bar{\rho}_{\text{CDM}}}{\bar{\rho}_{\text{CDM}} + \bar{\rho}_{\text{B}}}$ y la fracción de materia bariónica $f_{\text{B}} \equiv \frac{\Omega_{\text{B}}}{\Omega_m} = \frac{\bar{\rho}_{\text{B}}}{\bar{\rho}_{\text{CDM}} + \bar{\rho}_{\text{B}}}$ [27, 24]. Reescribiendo las ecuaciones de continuidad (ecuaciones equivalentes a 3-42)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \delta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) + \theta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\delta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{u}_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) \right], \quad (5-7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) + \theta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{u}_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) \right], \quad (5-8)$$

en donde se ha definido la divergencia del campo de velocidades peculiares, para cada componente del fluido, como $\theta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau)$ y $\theta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)$. Calculando la divergencia para las ecuaciones de Euler

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \theta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) + \frac{2}{\tau} \theta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) + \frac{6}{\tau^2} \Omega_m(\tau) \delta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) \\ = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[[\mathbf{u}_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}] \mathbf{u}_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) \right], \end{aligned} \quad (5-9)$$

ecuación equivalente a la encontrada en (3-43). Y para materia bariónica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \theta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) + \frac{2}{\tau} \theta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) + \frac{6}{\tau^2} \Omega_m(\tau) \delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[[\mathbf{u}_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}] \mathbf{u}_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) \right] \\ + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\frac{C_s^2(\mathbf{x}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}} \delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)}{1 + \delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)} \right], \end{aligned} \quad (5-10)$$

en donde se ha utilizado, para estas últimas dos expresiones la ecuación de Poisson (5-6). Este conjunto de ecuaciones, (5-6) a (5-10), proporcionan una generalización de las ecuaciones de continuidad, de Euler y Poisson (válida para la suma de los fluidos) y son las ecuaciones de movimiento para el fluido mixto de materia oscura fría y bariónica que permitirían dar cuenta de la evolución tanto del campo de velocidades peculiares, caracterizado por su divergencia y la densidad de contraste[17, 24]. Es sustancial identificar, que este grupo de ecuaciones son altamente no lineales; representado este hecho, por medio de los términos del miembro derecho de cada ecuación [excepto un término incluido en el segundo término del miembro derecho de la ecuación (5-10)] y por lo tanto, la presencia de ellos desprende una complejidad enorme para suministrar soluciones de carácter analítico y numérico.

Si se asume que la velocidad del sonido es homogénea, respecto a las coordenadas comóviles, es decir, que depende únicamente del tiempo conforme, la ecuación de Euler para el fluido de materia bariónica toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \theta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) + \frac{2}{\tau} \theta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) + \frac{6}{\tau^2} \Omega_m(\tau) \delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[[\mathbf{u}_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}] \mathbf{u}_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) \right] \\ + C_s^2 \left[\nabla_{\mathbf{x}}^2 [\delta_b(\mathbf{x}, \tau)] - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\delta_b(\mathbf{x}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}} \delta_b(\mathbf{x}, \tau)] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\delta_b(\mathbf{x}, \tau))^2 \nabla_{\mathbf{x}} \delta_b(\mathbf{x}, \tau)] + \mathcal{O}(\delta^4) \right]. \end{aligned}$$

Así pues, las ecuaciones de movimiento en el espacio real para el régimen lineal, se pueden escribir como

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \delta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) + \theta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) = 0, \quad (5-11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) + \theta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) = 0, \quad (5-12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \theta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) + \frac{2}{\tau} \theta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) + \frac{6}{\tau^2} \Omega_m(\tau) \delta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) = 0, \quad (5-13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \theta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) + \frac{2}{\tau} \theta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) + \frac{6}{\tau^2} \Omega_m(\tau) \delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) = C_s^2 \nabla_{\mathbf{x}}^2 \delta_b(\mathbf{x}, \tau), \quad (5-14)$$

que generan las ecuaciones diferenciales, de segundo orden, para la densidad de contraste,

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \delta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) + \frac{2}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) - \frac{6}{\tau^2} \Omega_m(\tau) \delta_{\text{CDM}}(\mathbf{x}, \tau) = 0, \quad (5-15)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) + \frac{2}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) - \frac{6}{\tau^2} \Omega_m(\tau) \delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau) = -C_s^2 \nabla_{\mathbf{x}}^2 \delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau). \quad (5-16)$$

Observe que la ecuación (5-15) fue aquella que se resolvió en la sección 3.2.1 con la ayuda de herramientas básicas de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para la ecuación (5-16) el escenario no es tan simple ya que representa una ecuación diferencial parcial para el campo $\delta(\mathbf{x}, \tau)$ y el mismo método empleado en la ecuación para materia oscura no podría ser empleado de forma análoga, por lo tanto es más práctico llevar este grupo de ecuaciones al espacio de Fourier.

5.2. Ecuaciones de movimiento en el espacio de Fourier

La representación en el espacio de Fourier para las ecuaciones (5-7) y (5-9) serían exactamente iguales a las ecuaciones (3-45) y (3-46) demostradas en el anexo D.1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\delta}_{\text{CDM}}(\mathbf{k}, \tau) + \tilde{\theta}_{\text{CDM}}(\mathbf{k}, \tau) \\ = - \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_1 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \tilde{\delta}_{\text{CDM}}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}_{\text{CDM}}(\mathbf{k}_2, \tau), \end{aligned} \quad (5-17)$$

con la función $\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 1 + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)/k_2^2$. Y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\theta}_{\text{CDM}}(\mathbf{k}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \tilde{\theta}_{\text{CDM}}(\mathbf{k}, \tau) + \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) \tilde{\delta}_{\text{CDM}}(\mathbf{k}, \tau) \\ = - \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_1 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \tilde{\theta}_{\text{CDM}}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}_{\text{CDM}}(\mathbf{k}_2, \tau), \end{aligned} \quad (5-18)$$

con la función $\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) / 2k_1^2 k_2^2$. Para el caso de los bariones, tenemos un procedimiento análogo con una pequeñas diferencia sobre el término que incluye los efectos de presión, como se muestra a continuación: (1) la representación de la ecuación (5-8) es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\delta}_{\text{B}}(\mathbf{k}, \tau) + \tilde{\theta}_{\text{B}}(\mathbf{k}, \tau) \\ = - \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_1 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \tilde{\delta}_{\text{B}}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}_{\text{B}}(\mathbf{k}_2, \tau), \end{aligned} \quad (5-19)$$

idéntica a (5-17) y (2) la representación de la ecuación (5-10) es análoga a la de la ecuación (5-18), a diferencia del último término,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\theta}_{\text{B}}(\mathbf{k}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \tilde{\theta}_{\text{B}}(\mathbf{k}, \tau) + \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) \tilde{\delta}_{\text{B}}(\mathbf{k}, \tau) \\ = - \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_1 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \tilde{\theta}_{\text{B}}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}_{\text{B}}(\mathbf{k}_2, \tau) + \mathcal{F}\{H(\mathbf{x}, \tau)\}, \end{aligned} \quad (5-20)$$

con $\mathcal{F}\{H(\mathbf{x}, \tau)\}$, para una teoría a segundo orden, como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{H(\mathbf{x}, \tau)\} &= \mathcal{F}\left\{\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\frac{C_s^2(\mathbf{x}, \tau)\nabla_{\mathbf{x}}\delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)}{1 + \delta_{\text{B}}(\mathbf{x}, \tau)}\right]\right\}, \\ \mathcal{F}\{H(\mathbf{x}, \tau)\} &= -C_s^2 k^2 \left[\tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) - \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_1 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \tilde{\delta}_{\text{B}}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\delta}_{\text{B}}(\mathbf{k}_2, \tau)\right]. \end{aligned}$$

De manera que la ecuación (5-20), para una expansión a segundo orden en la transformada de Fourier para el término que vincula los efectos de presión, toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\theta}_{\text{B}}(\mathbf{k}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \tilde{\theta}_{\text{B}}(\mathbf{k}, \tau) + \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) \tilde{\delta}_{\text{B}}(\mathbf{k}, \tau) \\ = - \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_1 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \tilde{\theta}_{\text{B}}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}_{\text{B}}(\mathbf{k}_2, \tau) \\ - C_s^2 k^2 \left[\tilde{\delta}_{\text{B}}(\mathbf{k}, \tau) - \frac{1}{k^2} \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_1 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \right. \\ \left. \tilde{\delta}_{\text{B}}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\delta}_{\text{B}}(\mathbf{k}_2, \tau) \right]. \quad (5-21) \end{aligned}$$

en donde las expresiones encontradas en el paréntesis $[\dots]$, corresponden a los efectos de presión asociados a la materia bariónica.

6. Conclusiones y Perspectivas

La motivación principal de este trabajo siempre estuvo ligada a perseguir, resaltar, valorar, comprender y sobre todo abrir caminos que permitan describir de forma clara del gran trabajo analítico y semianalítico, realizado por varios investigadores de primer nivel[1, 10, 11, 13, 24, 25, 27], entre otros, que buscan proponer métodos para acceder a soluciones en gran parte analíticas, respecto al cálculo del espectro de potencias de materia y sus respectivas correcciones a diferentes loops, con el objetivo de que dichas soluciones puedan ser contrastadas con las simulaciones para N -cuerpos[9, 15] y de ésta manera aprender mucho más sobre la cosmología física que hay de fondo en las muy elaboradas tareas computacionales para poder responder a uno de los más importantes enigmas de la cosmología como lo es la formación de las grandes estructuras en el universo. De manera tal, que la realización de esta tesis permite fijar las siguientes conclusiones y perspectivas de trabajo futuro:

- A lo largo del capítulo 3 se presentó un desarrollo completo de la teoría lineal de perturbaciones cosmológicas a primer orden, logrando obtener de forma general, valores para el factor de crecimiento $D^+(z)$, presentados en la Figura 3-2 que justifican su normalización a la unidad para la época actual, con valores para los parámetros cosmológicos tanto en densidad de energía del vacío $\Omega_{\Lambda,0}$ y materia $\Omega_{m,0}$ acordes a los registros proporcionados por las observaciones[27].
- Al plantearse como uno de los objetivos principales, la reconstrucción del espectro de potencias a segundo orden, el trabajo expuesto proporciona un documento de referencia sólido frente a la manipulación matemática de las ecuaciones de movimiento, del fluido de materia oscura y bariónica, escritas en términos, naturalmente, del campo de velocidades peculiares y densidad. En consecuencia a ello, en este trabajo se logra exponer de forma detallada la necesidad de representar éstas en un espacio de Fourier, tarea reflejada con procedimientos ricos en matemáticas explícitos en el anexo D. Vale la pena destacar la valiosa tarea analítica, que emprendimos, para obtener la representación de las contribuciones a un loop, soportadas por los trabajos de [10, 13, 16], y desarrolladas en los anexos D.5 y D.6.
- Los resultados obtenidos en el capítulo 4, con respecto a la reconstrucción del espectro de potencias a segundo orden, en donde se utilizó el método desarrollado por[13, 16], evidencian un esfuerzo considerable para mostrar la gran tarea, que hay de fondo, puesto que las contribuciones a un loop son reproducidas y representadas por medio

de integrales que en su solución no implican un alto costo computacional, el desarrollo expuesto aquí tuvo en gran medida éxito por lo siguiente:

1. El código Python empleado, registrado en el anexo E, nos proporciono los datos para reconstruir el espectro de potencias de la Figura 4-5, considerando $z = 0$. Aquí, se visualiza la importancia de considerar los efectos no lineales a partir de un valor en $k \gtrsim 0.22 \text{ Mpc}^{-1}$, valor que se aproxima de forma considerable al reportado en la literatura con un valor de referencia de 0.20 Mpc^{-1} como se presenta en [7] pág 341.
 2. Las contribuciones a un loop que se obtuvieron de manera independiente, en este trabajo para $P_{2,2}(k)$ y $P_{1,3}(k)$ (Figura 4-4), presentan la misma tendencia a los resultados reportados en [22, 25]. En contraste, la técnica empleada en estas investigaciones (bastante elaboradas y robustas), en donde [22] es fundamento de las ideas expuestas en [25], parten de generar el espectro de potencias en el régimen lineal a partir de la expansión de éste como una superposición de ley de potencias [25] y que es obtenido igualmente, por medio de una transformada rápida de Fourier en [22]. Este es un aspecto de especial atención para identificar la diferencia de valores obtenidos en estos gráficos, ya que en nuestro trabajo se tomo como punto de partida el espectro lineal proporcionado en [13].
 3. Por medio de las representaciones hechas en las Figuras 4-8 y 4-9 para las contribuciones $P_{2,2}(k)$ y $P_{1,3}(k)$, se logro confirmar que la contribución a un loop se anula a medida que se toma un alto valor en k , ya que una contribución se cancela respectivamente con la otra y así el espectro de potencias se reduce nuevamente a su régimen lineal. En este punto se hace pertinente considerar el importante y profundo análisis que se debe realizar a cada contribución para concluir ello no solo por una tendencia grafica sino también por un riguroso análisis matemático como se muestra en [16, 21].
- La construcción del espectro de potencias de materia resulta uno de los ingredientes más sobresalientes para abordar el problema dinámico sobre la formación y evolución de las grandes estructuras en el universo. Si se visualiza el universo bajo la óptica del modelo Λ CDM, suponiendo que la materia se distribuye, de forma disyunta, en halos de materia oscura (modelo de Press & Schechter) y su distribución espacial es gaussiana, es posible establecer una función de masa para objetos colapsados de forma jerárquica que tiene como soporte la elección de un espectro de potencias. De manera que, la elección más empleada es tomar el espectro lineal y una elección más fina está relacionada con la elección del espectro no lineal, como el espectro de potencias a segundo orden, para un fluido de materia oscura, como el reproducido de forma semianálitica a lo largo de este trabajo.

Perspectivas

- El trabajo realizado a lo largo de esta tesis podría, eventualmente, servir como punto de partida para profundizar y proponer métodos cuya finalidad sea la inclusión de materia bariónica con el firme propósito de aprender más alrededor de la física con bariones y su importancia en la formación de estructuras a gran escala en el universo, ya que los métodos analíticos y simulaciones con este tipo de especies no sobresalen de manera considerable.
- El desarrollo expuesto en esta tesis, que tiene como base la teoría de perturbaciones cosmológicas estándar, nos permitirá abordar, técnicas más avanzadas, como lo es la teoría de perturbaciones para bariones en el marco de la teoría renormalizada de perturbaciones.
- A lo largo de la tesis se abordaron herramientas que consideramos pueden extenderse a teorías de gravedad modificada tipo $f(R)$.
- En el capítulo 5 se plantean las ecuaciones de movimiento generales para un fluido mixto de materia oscura y bariónica, escribiéndolas en un espacio de Fourier a segundo orden en el campo de densidad y dejando abierta la posibilidad de una extensión del método desarrollado aquí para el caso de materia oscura.

A. Anexo: Algunos Cálculos para la Métrica de FLRW

A.1. Conexiones de Christoffel

Dado el elemento de línea (2-1), reconociendo que $L = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$ y utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, se pueden determinar las ecuaciones de movimiento del sistema

$$\begin{aligned}\frac{ds^2}{dt^2} &= \left[\frac{dx^0}{dt}\right]^2 - e^{g(x^0)+f(r)} \left[\frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{d\theta^2}{dt^2} + r^2\sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right], \\ (\dot{s})^2 &= (\dot{x}^0)^2 - e^{G(x^0,r)} \left[(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\theta})^2 + r^2\sin^2\theta(\dot{\varphi})^2\right],\end{aligned}$$

en donde $G(x^0, r) = g(x^0) + f(r)$. De tal forma, que para cada etiqueta, $(x^0, r, \theta, \varphi)$, se tiene asociada una ecuación de movimiento

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} \right] - \frac{\partial L}{\partial x^0} &= 0, \\ \frac{d}{dt} [2\dot{x}^0] - \frac{\partial}{\partial x^0} \left[(\dot{x}^0)^2 - e^{G(x^0,r)} \left[(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\theta})^2 + r^2\sin^2\theta(\dot{\varphi})^2 \right] \right] &= 0, \\ \ddot{x}^0 + \frac{1}{2}e^{G(x^0,r)}g' \left[(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\theta})^2 + r^2\sin^2\theta(\dot{\varphi})^2 \right] &= 0.\end{aligned}\quad (\text{A-1})$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} \right] - \frac{\partial L}{\partial x^1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} [-2e^{G(x^0,r)}\dot{r}] - \frac{\partial}{\partial x^1} \left[(\dot{x}^0)^2 - e^{G(x^0,r)} \left[(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\theta})^2 + r^2\sin^2\theta(\dot{\varphi})^2 \right] \right] &= 0, \\ \ddot{r} + \frac{1}{2}f'(\dot{r})^2 + g'\dot{x}^0\dot{r} - \left(\frac{f'}{2} + \frac{1}{r} \right) \left[r^2(\dot{\theta})^2 + r^2\sin^2\theta(\dot{\varphi})^2 \right] &= 0.\end{aligned}\quad (\text{A-2})$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2} \right] - \frac{\partial L}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{d}{dt} [-2r^2e^{G(x^0,r)}\dot{\theta}] - \frac{\partial}{\partial x^2} \left[(\dot{x}^0)^2 - e^{G(x^0,r)} \left[(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\theta})^2 + r^2\sin^2\theta(\dot{\varphi})^2 \right] \right] &= 0, \\ \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \left[\frac{1}{r} + \frac{f'}{2} \right] + g'\dot{x}^0\dot{\theta} - (\sin\theta\cos\theta)(\dot{\varphi})^2 &= 0.\end{aligned}\quad (\text{A-3})$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^3} \right] - \frac{\partial L}{\partial x^3} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[-2r^2 \sin^2 \theta e^{G(x^0, r)} \dot{\varphi} \right] - \frac{\partial}{\partial x^3} \left[(\dot{x}^0)^2 - e^{G(x^0, r)} \left[(\dot{r})^2 + r^2 (\dot{\theta})^2 + r^2 \sin^2 \theta (\dot{\varphi})^2 \right] \right] = 0, \\ \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \left[\frac{f'}{2} + \frac{1}{r} \right] + g' \dot{x}^0 \dot{\varphi} + 2(\cot \theta) \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

Así desde el sistema de ecuaciones de (A-1) a (A-4), se identifican los símbolos de Christoffel no nulos de la métrica. Esto es posible ya que, por comparación, al sustituir el lagrangiano en las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene la ecuación geodésica para un parámetro afín, de manera que para cada coordenada se encuentra

$$\begin{aligned} \ddot{x}^0 + \Gamma_{\mu\nu}^0 \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \\ \ddot{x}^0 + \Gamma_{11}^0 (\dot{r})^2 + \Gamma_{22}^0 (\dot{\theta})^2 + \Gamma_{33}^0 (\dot{\varphi})^2 = 0, \end{aligned}$$

comparando con (A-1)

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} e^{G(x^0, r)} g', \quad \Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2} e^{G(x^0, r)} g' r^2, \quad \Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2} e^{G(x^0, r)} g' r^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{A-5})$$

de la misma forma para las coordenadas espaciales,

$$\begin{aligned} \ddot{x}^1 + \Gamma_{\mu\nu}^1 \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \\ \ddot{r} + \Gamma_{01}^1 \dot{x}^0 \dot{r} + \Gamma_{10}^1 \dot{r} \dot{x}^0 + \Gamma_{22}^1 (\dot{\theta})^2 + \Gamma_{33}^1 (\dot{\varphi})^2 + \Gamma_{11}^1 (\dot{r})^2 = 0, \\ \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} g', \quad \Gamma_{22}^1 = -r^2 \left(\frac{f'}{2} + \frac{1}{r} \right), \quad \Gamma_{33}^1 = -r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{f'}{r} + \frac{1}{r} \right), \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} f', \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}^2 + \Gamma_{\mu\nu}^2 \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \\ \ddot{\theta} + \Gamma_{02}^2 \dot{x}^0 \dot{\theta} + \Gamma_{12}^2 \dot{r} \dot{\theta} + \Gamma_{21}^2 \dot{r} \dot{\theta} + \Gamma_{20}^2 \dot{\theta} \dot{x}^0 + \Gamma_{33}^2 (\dot{\varphi})^2 = 0, \\ \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2} g', \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} + \frac{f'}{2}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}^3 + \Gamma_{\mu\nu}^3 \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \\ \ddot{\varphi} + \Gamma_{03}^3 \dot{x}^0 \dot{\varphi} + \Gamma_{13}^3 \dot{r} \dot{\varphi} + \Gamma_{23}^3 \dot{\theta} \dot{\varphi} + \Gamma_{30}^3 \dot{\varphi} \dot{x}^0 + \Gamma_{31}^3 \dot{\varphi} \dot{r} + \Gamma_{32}^3 \dot{\varphi} \dot{\theta} = 0, \\ \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2} g', \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} + \frac{f'}{2}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta. \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

A.2. Componentes del tensor de Ricci

Dado que el tensor de Ricci se define como una contracción del tensor de Riemann, así

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\alpha\mu, \nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu, \alpha}^\alpha + \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda - \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \left[\ln \sqrt{-|g|} \right]_{, \nu} - \Gamma_{\mu\nu, \alpha}^\alpha + \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu} \left[\ln \sqrt{-|g|} \right]_{, \lambda},$$

con $\ln \sqrt{|-g|} = \frac{3}{2}g(x^0) + \frac{3}{2}f(r) + 2\ln(r) + \ln|\sin\theta|$, para la métrica. En términos de componentes mixtas, $g^{\lambda\mu}R_{\lambda\nu}$, se tienen las siguientes componentes no nulas

$$R^\mu{}_\nu = g^{0\mu}R_{0\nu} + g^{1\mu}R_{1\nu} + g^{2\mu}R_{2\nu} + g^{3\mu}R_{3\nu},$$

así utilizando las relaciones dadas de (2-3) a (2-6) y las componentes contravariantes del tensor métrico (2-1), se obtiene

$$R^0{}_0 = \frac{3}{2}g'' + \frac{3}{4}(g')^2, \quad (\text{A-9})$$

$$R^1{}_1 = \frac{1}{2}g'' + \frac{3}{4}(g')^2 - e^{G(x^0,r)} \left[f'' + \frac{f'}{r} \right], \quad (\text{A-10})$$

$$R^2{}_2 = \frac{1}{2}g'' + \frac{3}{4}(g')^2 - e^{-G(x^0,r)} \left(\frac{1}{2}f'' + \frac{1}{4}(f')^2 + \frac{3}{2r}f' \right), \quad (\text{A-11})$$

$$R^3{}_3 = \frac{1}{2}g'' + \frac{3}{4}(g')^2 - e^{-G(x^0,r)} \left(\frac{1}{2}f'' + \frac{1}{4}(f')^2 + \frac{3}{2r}f' \right). \quad (\text{A-12})$$

Finalmente aplicando contracción sobre el tensor de Ricci, se obtiene el escalar de curvatura para la métrica que obedece al principio cosmológico

$$\begin{aligned} R &= R^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\mu, \\ R &= R^0{}_0 + R^1{}_1 + R^2{}_2 + R^3{}_3, \\ R &= 3 \left[g'' + (g')^2 \right] - 2e^{-G(x^0,r)} \left[f'' + 2\frac{f'}{r} + \frac{1}{4}(f')^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

A.3. Isotropía del tensor Momento-Energía

Dada la invarianza del tensor momento-energía $T^1{}_1 = T^2{}_2 = T^3{}_3$, se permite encontrar la primera integral de la función $f(r)$, por lo tanto desde (2-8) y (2-9), se puede concluir:

$$\begin{aligned} T^1{}_1 &= T^2{}_2, \\ \frac{f'}{r} + \frac{1}{4}(f')^2 &= \frac{1}{2}f'' + \frac{1}{2}\frac{f'}{r}, \\ \frac{1}{2}f'' - \frac{f'}{2r} - \frac{1}{4}(f')^2 &= 0, \\ \frac{f''}{f'} &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2}f', \\ \frac{d}{dr} [\ln(f')] &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2}f', \text{ integrando respecto a } r, \\ \ln(f') &= \ln(r) + \frac{1}{2}f + a, \longrightarrow f'(r) = ar e^{f(r)/2}, \end{aligned}$$

que al resolver deja la solución general

$$\begin{aligned}
\int e^{-f(r)/2} d[f(r)] &= a \int r dr, \text{ efectuado la sustitución simple a } u = -f(r)/2, \\
-2e^u &= \frac{1}{2} ar^2 + c, \\
e^{f(r)/2} &= \frac{1}{c \left[1 - \frac{ar^2}{4c} \right]}, \text{ definiendo la constante } b \equiv 1/c, \\
e^{f(r)} &= \frac{b^2}{\left[1 - \frac{ab}{4} r^2 \right]^2}. \tag{A-14}
\end{aligned}$$

Definiendo ab en términos de una dimensión inversa a la longitud, es decir, $ab \equiv -k/r_0^2$, con $k = -1, 0$ y 1 , que al sustituir en el elemento de línea (2-1), la métrica toma la forma dada en (2-11).

A.4. Deducción de la forma estándar de la métrica FLRW

Con el fin de presentar la métrica (2-11) en su forma tradicional, reportada en la gran mayoría de la literatura, sígase el siguiente procedimiento algebraico. Dada la métrica

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{g(x^0)} \frac{b^2}{\left[1 + \frac{k r^2}{4 r_0^2} \right]^2} [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2],$$

reescribiendo la métrica toma la forma $ds^2 = (dx^0)^2 - e^{g(x^0)} b^2 F(r) [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2]$, en donde se ha definido $F(r) \equiv \left[1 + \frac{k r^2}{4 r_0^2} \right]^{-2}$, así

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{g(x^0)} b^2 [F(r) dr^2 + F(r) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

Haciendo el cambio de variable $x^2 = F(r)r^2$, y diferenciando ésta implícitamente respecto a r , se obtiene la relación

$$2x \frac{dx}{dr} = 2rF(r) + r^2 F'(r) \longrightarrow dr = \frac{2x dx}{2rF(r) + r^2 F'(r)},$$

de manera que para el término de la métrica $F(r) dr^2$,

$$F(r) dr^2 = F(r) \left[\frac{2x dx}{2rF(r) + r^2 F'(r)} \right]^2 = \frac{(x^2/r^2) 4x^2 dx^2}{4 \left[rF(r) \left(1 + \frac{rF'(r)}{2F(r)} \right) \right]^2} = \frac{x^4 dx^2}{r^4 F^2(r) \left[1 + \frac{rF'(r)}{2F(r)} \right]^2},$$

$$F(r)dr^2 = \left[1 + \frac{rF'(r)}{2F(r)}\right]^{-2} dx^2.$$

Ahora, trabajando sobre la razón $F'(r)/F(r)$, pero primero recordando que

$$F(r) = \left[1 + \frac{k r^2}{4 r_0^2}\right]^{-2} \longrightarrow F'(r) = -2 \left[1 + \frac{k r^2}{4 r_0^2}\right]^{-3} \frac{kr}{2r_0^2},$$

como consecuencia, se obtiene para el cociente $\frac{F'(r)}{F(r)} = -\frac{kr}{r_0^2}[F(r)]^{1/2}$. Por lo tanto

$$F(r)dr^2 = \frac{dx^2}{\left[1 - \frac{r}{2} \left(\frac{kr}{r_0^2} \left(1 + \frac{k r^2}{4 r_0^2}\right)^{-1}\right)\right]^2},$$

trabajando sobre la expresión que se encuentra dentro del cuadrado del denominador

$$1 - \frac{r}{2} \left(\frac{kr}{r_0^2} \left(1 + \frac{k r^2}{4 r_0^2}\right)^{-1}\right) = 1 - \frac{kr^2}{2r_0^2} \frac{1}{1 + \frac{kr^2}{4r_0^2}} = \frac{1 - \frac{kr^2}{4r_0^2}}{1 + \frac{kr^2}{4r_0^2}},$$

y recordando que $x^2 = r^2 \left[1 + \frac{kr^2}{4r_0^2}\right]^{-2}$, se obtiene una ecuación de segundo grado en r , de la

forma $\frac{kx}{4r_0^2}r^2 - r + x = 0$, cuya raíz es $r = \frac{1 + \sqrt{1 - (kx^2/r_0^2)}}{kx/2r_0^2}$; de manera que, después de algunos procedimientos algebraicos

$$\frac{1 - \frac{kr^2}{4r_0^2}}{1 + \frac{kr^2}{4r_0^2}} = \frac{2 - \frac{k}{2r_0^2} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{kx^2}{r_0^2}}\right) / \frac{kx}{2r_0^2} \right]^2}{2 + \frac{k}{2r_0^2} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{kx^2}{r_0^2}}\right) / \frac{kx}{2r_0^2} \right]^2} = -\sqrt{1 - \frac{kx^2}{r_0^2}},$$

por lo tanto $F(r)dr^2 = dx^2/[1 - (kx^2/r_0^2)]$. Así el elemento de línea, toma la forma

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{g(x^0)}b^2 \left[\frac{dx^2}{1 - (kx^2/r_0^2)} + x^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right].$$

Y recurriendo a la transformación $x \rightarrow r \equiv \frac{x}{r_0}$, en donde r puede ser entendida como una coordenada adimensional, quedando la métrica como

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{g(x^0)}b^2r_0^2 \left[\frac{1}{1 - kr^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right].$$

Finalmente definiendo la expresión $R(t) \equiv e^{g(x^0)}b^2r_0^2$, como el factor de escala, se encuentra la forma estándar de la métrica de Robertson-Walker, explícita en la ecuación (2-12).

A.5. Componentes del tensor de Riemann para la métrica de FLRW

Considerando las componentes espaciales del tensor métrico (2-12),

$$g_{11} = -\frac{R^2(t)}{1 - kr^2}, \quad g_{22} = -R^2(t)r^2, \quad g_{33} = -R^2(t)r^2 \sin^2 \theta,$$

y calculando las conexiones no nulas de Christoffel, $\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il} \left[\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right]$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1 - kr^2}, & \Gamma_{33}^1 &= (kr^2 - 1)r \sin^2 \theta, & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, & & & & \\ \Gamma_{22}^1 &= (kr^2 - 1)r, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta. \end{aligned}$$

Así las componentes no nulas del tensor $R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu,\beta}^\alpha + \Gamma_{\rho\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\rho - \Gamma_{\rho\beta}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\rho$, llamado tensor de Riemann, son:

$$\begin{aligned} R^1_{221} &= -R^1_{212} = kr^2, & R^2_{332} &= -R^2_{323} = kr^2 \sin^2 \theta, \\ R^1_{331} &= -R^1_{313} = kr^2 \sin^2 \theta, & R^3_{131} &= -R^3_{113} = -\frac{k}{1 - kr^2}, \\ R^2_{121} &= -R^2_{112} = -\frac{k}{1 - kr^2}, & R^3_{232} &= -R^3_{223} = -kr^2. \end{aligned}$$

obsérvese que las componentes no nulas del tensor de Riemann todas dependen de k , así si éste parámetro es nulo, se tiene un espacio plano (Riemann totalmente nulo). Finalmente, las componentes del tensor de Ricci y el escalar de curvatura, para el tensor métrico de FLRW (2-12), considerando su componente temporal y calculando las conexiones,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{R\dot{R}}{c^2(1 - kr^2)}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1 - kr^2}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{c^2}R\dot{R}r^2, & \Gamma_{22}^1 &= -r(1 - kr^2), & \Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{R}}{R}, \\ \Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{c^2}R\dot{R}r^2 \sin^2 \theta, & \Gamma_{33}^1 &= -(1 - kr^2)r \sin^2 \theta, & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{R}}{R}, & \Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{20}^2 = \frac{\dot{R}}{R}, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, & & & & \end{aligned}$$

para Ricci igual a $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = R^0_{\mu 0\nu} + R^1_{\mu 1\nu} + R^2_{\mu 2\nu} + R^3_{\mu 3\nu}$, se determina

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^0_{000} + R^1_{010} + R^2_{020} + R^3_{030}, \\ R_{00} &= 0 + \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{R}}{R} = 3\frac{\ddot{R}}{R}, \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= R^0_{101} + R^1_{111} + R^2_{121} + R^3_{131}, \\ R_{11} &= -\frac{R\ddot{R}}{c^2(1-kr^2)} + 0 - \frac{c^2k + \dot{R}^2}{c^2(1-kr^2)} - \frac{c^2k + \dot{R}^2}{c^2(1-kr^2)} = -\frac{R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2k}{c^2(1-kr^2)}, \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= R^0_{202} + R^1_{212} + R^2_{222} + R^3_{232}, \\ R_{22} &= -\frac{R\ddot{R}r^2}{c^2} - \frac{r^2(kc^2 + \dot{R}^2)}{c^2} + 0 - \frac{r^2(kc^2 + \dot{R}^2)}{c^2} = -\frac{r^2(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2kc^2)}{c^2}, \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

$$\begin{aligned} R_{33} &= R^0_{303} + R^1_{313} + R^2_{323} + R^3_{333}, \\ &= -\frac{R\ddot{R}r^2 \sin^2 \theta}{c^2} - \frac{r^2 \sin^2 \theta (c^2k + \dot{R}^2)}{c^2} - \frac{r^2 \sin^2 \theta (c^2k + \dot{R}^2)}{c^2}, \\ R_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2k}{c^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A-18})$$

Y calculando el escalar de curvatura,

$$\begin{aligned} R &= g^{\alpha\nu} R_{\alpha\nu} = R^\nu_{\nu}, \\ &= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}, \\ &= \frac{1}{c^2} \left[3\frac{\ddot{R}}{R} \right] - \frac{1-kr^2}{R^2} \left[-\frac{R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2k}{c^2(1-kr^2)} \right] - \frac{1}{R^2 r^2} \left[-\frac{r^2(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2kc^2)}{c^2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{r^2 R^2 \sin^2 \theta} \left[-r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2k}{c^2} \right] \right], \\ R &= \frac{6}{c^2 R^2} \left[\ddot{R}R + \dot{R}^2 + c^2k \right]. \end{aligned} \quad (\text{A-19})$$

A.6. Manipulación algebraica de las ecuaciones de campo

Dadas las ecuaciones de campo de Einstein en componentes mixtas (2-2), es correcto afirmar lo siguiente

$$\begin{aligned} R^\mu_{\nu} &= g^{\alpha\mu} R_{\alpha\nu}, \quad \text{si } \mu = \nu \rightarrow R^\mu_{\mu} = R, \\ g^\mu_{\nu} &= g^{\alpha\mu} g_{\alpha\nu}, \quad \text{si } \mu = \nu \rightarrow g^{\alpha\mu} g_{\alpha\mu} = 4, \\ T^\mu_{\nu} &= g^{\alpha\mu} T_{\alpha\nu}, \quad \text{si } \mu = \nu \rightarrow g^{\alpha\mu} T_{\alpha\mu} = T^\mu_{\mu} \equiv T, \end{aligned}$$

de tal forma que sustituyendo sobre (2-2)

$$R - \frac{1}{2}R(4) + \Lambda(4) = -\frac{8\pi G}{c^4}T \rightarrow R = 4\Lambda + \frac{8\pi G}{c^4}T,$$

y así las ecuaciones de campo en componentes covariantes se reescriben de la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left[4\Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T \right] g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

efectuando algunos renglones de álgebra se obtiene

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right] + \Lambda g_{\mu\nu}.$$

Por otro lado, con el fin de reescribir el tensor momento-energía para el fluido perfecto, considérese que la 4-velocidad del fluido en componentes covariantes y contravariantes tiene la forma en el sistema comóvil

$$\begin{aligned} [u_\mu] &= [c^2, 0, 0, 0] = c^2 \delta_\mu^0, \\ [u^\mu] &= [1, 0, 0, 0] = \delta_\mu^0, \end{aligned}$$

por lo cual el tensor $T_{\mu\nu}$, se puede reescribir como

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \\ g^{\alpha\mu} T_{\alpha\mu} &= \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) g^{\alpha\mu} u_\alpha u_\mu - P g^{\alpha\mu} g^{\mu\alpha}, \\ T^\mu{}_\mu &= \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu u_\mu - 4P = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) c^2 - 4P = c^2 \rho - 3P \equiv T. \end{aligned}$$

Reescribiendo el término $T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} &= \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (c^2 \rho - 3P) g_{\mu\nu}, \\ &= (c^2 \rho - P) c^2 \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - P g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} c^2 \rho g_{\mu\nu} + \frac{3}{2} P g_{\mu\nu}, \\ T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} &= (c^2 \rho + P) c^2 \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - \frac{1}{2} (c^2 \rho - P) g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

A.7. Ecuación de continuidad

Desde la ecuación (2-22)

$$\begin{aligned} T^{0\nu}{}_{;\nu} &= T^{00}{}_{;0} + T^{0i}{}_{;i} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right)_{;\nu} (u^0 u^\nu) + \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) (u^0 u^\nu)_{;\nu} = 0, \\ \left[\rho_{;\nu} + \left(\frac{P}{c^2} \right)_{;\nu} \right] (u^0 u^\nu) &+ \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) [(u^0)_{;\nu} u^\nu + u^0 (u^\nu)_{;\nu}] = 0, \\ \rho_{;\nu} (u^0 u^\nu) &+ \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^0 (u^\nu)_{;\nu} = 0, \end{aligned}$$

calculando la derivada covariante y utilizando las conexiones de Christoffel (ver Anexo A.5)

$$u^\nu{}_{;\nu} = \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\nu_{\lambda\nu} u^\lambda = \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\nu_{0\nu} u^0 = \Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03} = 3 \frac{\dot{R}}{R} = 3H,$$

por lo tanto, se concluye,

$$\begin{aligned} \rho_{;0}(u^0 u^0) + \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^0 3H &= 0, \\ \frac{d\rho}{dt} + \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) 3 \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A-20})$$

A.8. Ecuaciones de campo cosmológicas

Dividiendo la ecuación (2-20) entre $R^2(t)$ e identificando a ρ , como la densidad de materia, radiación y constante cosmológica, se obtiene

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{1}{3} \Lambda c^2 - \frac{c^2 k}{R^2(t)} = \frac{8\pi G}{3} \left(\sum_i \rho_i \right) - \frac{c^2 k}{R^2(t)},$$

de tal forma, que introduciendo los parámetros adimensionales (2-28), y la solución (2-26),

$$\begin{aligned} H^2(t) &= \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_{m,0} \left(\frac{R(t_0)}{R(t)} \right)^3 + \rho_{r,0} \left(\frac{R(t_0)}{R(t)} \right)^4 + \rho_{\Lambda,0} \right] - \frac{c^2 k_0}{R^2(t)}, \\ &= \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{3H^2(t_0)}{8\pi G} \left[\Omega_{m,0} \left(\frac{R(t_0)}{R(t)} \right)^3 + \Omega_{r,0} \left(\frac{R(t_0)}{R(t)} \right)^4 + \Omega_{\Lambda,0} \right] \right] + H^2(t_0) \Omega_{k,0} \left(\frac{R(t_0)}{R(t)} \right)^2, \\ H^2(t) &= H^2(t_0) \left[\Omega_{m,0}(z+1)^3 + \Omega_{r,0}(z+1)^4 + \Omega_{k,0}(z+1)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \right]. \end{aligned}$$

En donde se ha utilizado la definición de corrimiento al rojo $z+1 = \frac{R(t_0)}{R(t)}$ [12]. Ahora para

la ecuación (2-21), multiplicando por $\frac{R(t)}{\dot{R}^2(t)}$, se identifica

$$\begin{aligned} \frac{R(t)\ddot{R}(t)}{\dot{R}^2(t)} &= -\frac{4\pi G}{3c^2} (c^2 \rho + 3P) \frac{R^2(t)}{\dot{R}^2(t)} + \frac{1}{3} c^2 \Lambda \frac{R^2(t)}{\dot{R}^2(t)}, \\ &= -\frac{4\pi G}{3H^2(t)} \left[\rho(1+3\omega) - \frac{c^2 \Lambda}{4\pi G} \right] = -\frac{4\pi G}{3H^2(t)} \sum_i \rho_i (1+3\omega_i), \\ \frac{R(t)\ddot{R}(t)}{\dot{R}^2(t)} &= -\frac{4\pi G}{3H^2(t)} [\rho_m + 2\rho_r - 2\rho_\Lambda], \end{aligned}$$

y utilizando, nuevamente los parámetros adimensionales y de desaceleración $q(t)$

$$\frac{R(t)\ddot{R}(t)}{\dot{R}^2(t)} = -\frac{1}{2}\Omega_m(t) - \Omega_r(t) + \Omega_\Lambda(t),$$

$$q(t) = \frac{1}{2}[\Omega_m(t) + 2\Omega_r(t) - 2\Omega_\Lambda(t)].$$

A.9. Ecuaciones de campo cosmológicas en tiempo conforme

Dadas las ecuaciones de Friedmann en sus componentes espaciales (2-20),

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda c^2 - \frac{c^2 k}{R^2(t)} = \frac{8\pi G}{3}[\rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_\Lambda(t)] - \frac{c^2 k}{R^2(t)},$$

e introduciendo las densidades de materia en función del tiempo conforme

$$H^2(t)R^2(t) = \frac{8\pi G}{3}[\rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_\Lambda(t)]R^2(t) - c^2 k,$$

con $\mathcal{H}(\tau) \equiv \frac{d}{d\tau}R[t^{-1}(\tau)] = \frac{dR}{dt} \frac{dt}{d\tau} \frac{1}{R(t)} = H(t)R(t)$,

$$\mathcal{H}^2(\tau) = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{3\mathcal{H}^2(\tau)}{8\pi G} \Omega_m(\tau) + \frac{3\mathcal{H}^2(\tau)}{8\pi G} \Omega_r(\tau) + \frac{3\mathcal{H}^2(\tau)}{8\pi G} \Omega_\Lambda(\tau) \right] - c^2 k,$$

$$\mathcal{H}^2(\tau) = \mathcal{H}^2(\tau)\Omega(\tau) - c^2 k, \quad \text{con } \Omega(\tau) = \Omega_m(\tau) + \Omega_r(\tau) + \Omega_\Lambda(\tau),$$

$$1 = \Omega(\tau) - \frac{c^2 k}{\mathcal{H}^2(\tau)},$$

$$k = [\Omega(\tau) - 1] \frac{\mathcal{H}^2(\tau)}{c^2}.$$

Y para la componente temporal $\ddot{R}(t) = -\frac{4\pi G}{3c^2}(c^2\rho + 3P)R(t) + \frac{1}{3}c^2\Lambda R(t)$, se establece

$$\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(c^2\rho + 3P) + \frac{1}{3}\Lambda c^2,$$

$$= -\frac{4\pi G}{3} \left[\sum \rho_i (1 + 3\omega_i) \right],$$

$$= -\frac{4\pi G}{3} [\rho_m + 2\rho_r - 2\rho_\Lambda]$$

$$\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} R^2(t) = -\frac{4\pi G}{3} [\rho_m + 2\rho_r - 2\rho_\Lambda] R^2(t),$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\tau)}{\partial \tau} = -\frac{4\pi G}{3} \left[\frac{3\mathcal{H}^2(\tau)\Omega_m(\tau)}{8\pi G} + 2\frac{3\mathcal{H}^2(\tau)\Omega_r(\tau)}{8\pi G} - 2\frac{3\mathcal{H}^2(\tau)\Omega_\Lambda(\tau)}{8\pi G} \right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\tau)}{\partial \tau} = \left[\Omega_\Lambda(\tau) - \Omega_r(\tau) - \frac{1}{2}\Omega_m(\tau) \right] \mathcal{H}^2(\tau).$$

B. Anexo: Ecuaciones hidrodinámicas a partir de los momentos de la ecuación de Vlasov

B.1. Conservación de masa y Ecuación de continuidad

Para el desarrollo de este anexo se seguirá a [5]. Integrando sobre el espacio de momentos la ecuación (3-14)

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{\partial}{\partial \tau} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) + \frac{\mathbf{p}}{mR(t)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) - mR(t) \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \right] d^3 \mathbf{p} &= 0, \\ \int d^3 \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial \tau} + \int d^3 \mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{mR(t)} [\nabla_{\mathbf{x}} \cdot f] - mR(t) \int d^3 \mathbf{p} (\nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \int d^3 \mathbf{p} f + \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{mR(t)} \left[\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{p} f) - f \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p} \right] - mR(t) \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}} \cdot \int d^3 \mathbf{p} \nabla_{\mathbf{p}} f &= 0, \end{aligned}$$

asumiendo que no hay flujo neto sobre la superficie de momentos, por el teorema de la divergencia, $\int_{\text{sup}} d^3 \mathbf{p} (\nabla_{\mathbf{p}} f) = \oint_{\text{sup}} d^2 \mathbf{S} f = 0$, se encuentra

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int d^3 \mathbf{p} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int d^3 \mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{mR(t)} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) - \int d^3 \mathbf{p} \frac{f}{mR(t)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p} = 0,$$

reconociendo que $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p} = 0$, pues éstas son variables conjugadas

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int d^3 \mathbf{p} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int d^3 \mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{mR(t)} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = 0,$$

y haciendo uso de las definiciones para el momento cero y primer momento (3-15) y (3-16), es posible escribir la ecuación de continuidad para este fluido de materia oscura, en el marco comóvil, de la forma

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho(\mathbf{x}, \tau) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\rho(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \right] = 0. \quad (\text{B-1})$$

Junto con la ecuación de continuidad para la densidad de contraste $\delta(\mathbf{x}, \tau)$ del fluido de materia oscura,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(\mathbf{x}, \tau)] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[[1 + \delta(\mathbf{x}, \tau)] \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \right] = 0. \quad (\text{B-2})$$

B.2. Ecuación de Euler

Para obtener la conservación de momentum, inicialmente se multiplica por el cociente entre el momentum p_i y $mR(t)$, la ecuación (3-14) e integrando, nuevamente, en el espacio de momentos,

$$\int \left[\frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{p_i}{mR(t)} + \frac{\mathbf{p}p_i}{m^2 R^2(t)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f - (p_i) \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f \right] d^3 \mathbf{p} = 0,$$

$$\int d^3 \mathbf{p} \left[\frac{\partial f}{\partial \tau} \right] \frac{p_i}{mR(t)} + \int d^3 \mathbf{p} \left[\frac{\mathbf{p}p_i}{m^2 R^2(t)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f \right] - \int d^3 \mathbf{p} [(p_i) \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f] = 0, \quad (\text{B-3})$$

Analizando término a término está ecuación, para la primera integral, se determina (por medio de la regla del producto)

$$\begin{aligned} \int d^3 \mathbf{p} \left[\frac{\partial f}{\partial \tau} \right] \frac{p_i}{mR(t)} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \int d^3 \mathbf{p} \frac{f p_i}{mR(t)} - \int d^3 \mathbf{p} f \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{p_i}{mR(t)}, \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \int d^3 \mathbf{p} \frac{f p_i}{mR(t)} - \int d^3 \mathbf{p} f \frac{\partial u_i}{\partial \tau}, \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \int d^3 \mathbf{p} \frac{f p_i}{mR(t)} - \int d^3 \mathbf{p} f \left[-\nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}} - \frac{p_i}{mR(t)} \mathcal{H}(\tau) \right], \end{aligned}$$

en donde se ha explorado la derivada $\frac{\partial u_i}{\partial \tau} = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{p_i}{R(t)}$ utilizando la regla del cociente y usando la relación (3-11), de manera que

$$= \frac{\partial}{\partial \tau} \int d^3 \mathbf{p} \frac{f p_i}{mR(t)} + \int d^3 \mathbf{p} f \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}} + \mathcal{H}(\tau) \int d^3 \mathbf{p} \frac{f p_i}{mR(t)},$$

empleando de nuevo el teorema de Gauss sobre la segunda integral,

$$= \frac{\partial}{\partial \tau} \int d^3 \mathbf{p} \frac{f p_i}{mR(t)} + \mathcal{H}(\tau) \int d^3 \mathbf{p} \frac{f p_i}{mR(t)},$$

y utilizando la definición del primer momento (3-16)

$$\int d^3 \mathbf{p} \left[\frac{\partial f}{\partial \tau} \right] \frac{p_i}{mR(t)} = \frac{\partial}{\partial \tau} [\rho(\mathbf{x}, \tau) u_i(\mathbf{x}, \tau)] + \mathcal{H}(\tau) [\rho(\mathbf{x}, \tau) u_i(\mathbf{x}, \tau)]. \quad (\text{B-4})$$

Para la segunda integral de (B-3), se tiene (nuevamente con la regla del producto)

$$\begin{aligned} \int d^3 \mathbf{p} \left[\frac{\mathbf{p}p_i \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f}{m^2 R^2(t)} \right] &= \int d^3 \mathbf{p} \frac{p_i}{R^2(t) m^2} [\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (f \mathbf{p}) - f \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p}], \\ &= \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int d^3 \mathbf{p} \frac{p_i f \mathbf{p}}{m^2 R^2(t)} - \int d^3 \mathbf{p} \frac{p_i f \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p}}{m^2 R^2(t)}, \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int d^3 \mathbf{p} \frac{f p_j p_i}{R^2(t) m^2}, \end{aligned}$$

en donde se ha hecho uso del convenio de suma de Einstein (está herramienta se seguirá empleando a lo largo de este anexo). Utilizando el segundo momento (3-17) y primer momento (3-16), respectivamente

$$\int d^3 \mathbf{p} \left[\frac{\mathbf{p} p_i \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f}{m^2 R^2(t)} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho(\mathbf{x}, \tau) u_i(\mathbf{x}, \tau) u_j(\mathbf{x}, \tau) + \sigma_{ij}(\mathbf{x}, \tau) \right]. \quad (\text{B-5})$$

Y finalmente para la tercera integral de (B-3), se presentan los siguientes desarrollos

$$\int d^3 \mathbf{p} [(p_i) \nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f] = \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi_{\text{PER}} \int d^3 \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial p_j} p_i,$$

identificando que $\frac{\partial}{\partial p_j} (f p_i) = f \frac{\partial p_i}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial p_j} p_i$,

$$\frac{\partial f}{\partial p_j} p_i = \frac{\partial}{\partial p_j} (f p_i) - f \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} (f p_i) - f \delta_{ij}.$$

De manera que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi_{\text{PER}} \int d^3 \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial p_j} p_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi_{\text{PER}} \int d^3 \mathbf{p} \left[\frac{\partial}{\partial p_j} (f p_i) - f \delta_{ij} \right], \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi_{\text{PER}} \int d^3 \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial p_j} (f p_i) - \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi_{\text{PER}} \int d^3 \mathbf{p} f \delta_{ij}, \end{aligned}$$

haciendo uso del teorema de Gauss sobre la primera integral, se puede apreciar que este término es nulo. así, si se considera $i = j$ y después de ello se aplica el momento cero (3-15), se establece

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Phi_{\text{PER}} \int d^3 \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial p_j} p_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_{\text{PER}} \int d^3 \mathbf{p} f = -\frac{\partial \Phi_{\text{PER}}}{\partial x_i} \rho(\mathbf{x}, \tau). \quad (\text{B-6})$$

Por lo tanto, aplicando (B-4), (B-5) y (B-6), la ecuación de Vlasov (B-7) toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} [\rho(\mathbf{x}, \tau) u_i(\mathbf{x}, \tau)] + \mathcal{H}(\tau) [\rho(\mathbf{x}, \tau) u_i(\mathbf{x}, \tau)] + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho(\mathbf{x}, \tau) u_i(\mathbf{x}, \tau) u_j(\mathbf{x}, \tau) + \sigma_{ij}(\mathbf{x}, \tau)] \\ + \frac{\partial \Phi_{\text{PER}}}{\partial x_i} \rho(\mathbf{x}, \tau) = 0, \end{aligned}$$

y restando a ésta, $u_i(\mathbf{x}, \tau)$ veces la ecuación

$$u_i(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \rho(\mathbf{x}, \tau) + u_i(\mathbf{x}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)] = 0,$$

se obtiene la expresión, en términos de índices

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} [\rho(\mathbf{x}, \tau) u_i(\mathbf{x}, \tau)] + \mathcal{H}(\tau) [\rho(\mathbf{x}, \tau) u_i(\mathbf{x}, \tau)] + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho(\mathbf{x}, \tau) u_i(\mathbf{x}, \tau) u_j(\mathbf{x}, \tau)] \\ - u_i(\mathbf{x}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)] = -\frac{\partial \Phi_{\text{PER}}}{\partial x_i} \rho(\mathbf{x}, \tau) - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, \tau), \end{aligned}$$

desarrollando la regla del producto en el primer y tercer término, y luego simplificando

$$\begin{aligned} & \rho(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [u_i(\mathbf{x}, \tau)] + \mathcal{H}(\tau) \rho(\mathbf{x}, \tau) u_i(\mathbf{x}, \tau) + u_i(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho(\mathbf{x}, \tau) u_j(\mathbf{x}, \tau)] \\ & + \rho(\mathbf{x}, \tau) u_j(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial x_j} [u_i(\mathbf{x}, \tau)] - u_i(\mathbf{x}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)] = -\frac{\partial \Phi_{\text{PER}}}{\partial x_i} \rho(\mathbf{x}, \tau) - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, \tau), \end{aligned}$$

se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} & \rho(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [u_i(\mathbf{x}, \tau)] + \mathcal{H}(\tau) \rho(\mathbf{x}, \tau) u_i(\mathbf{x}, \tau) + \rho(\mathbf{x}, \tau) u_j(\mathbf{x}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \\ & = -\frac{\partial \Phi_{\text{PER}}}{\partial x_i} \rho(\mathbf{x}, \tau) - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, \tau), \end{aligned}$$

que al ser escrita de forma vectorial, se encuentra la ecuación de Euler para el campo de velocidades peculiares.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [\mathbf{u}(\tau, \mathbf{x})] + \mathcal{H}(\tau) \mathbf{u}(\tau, \mathbf{x}) + [\mathbf{u}(\tau, \mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}] \mathbf{u}(\tau, \mathbf{x}) = -\nabla_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{PER}} - \frac{1}{\rho(\tau, \mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\sigma(\tau, \mathbf{x})]. \quad (\text{B-7})$$

C. Anexo: Aspectos algebraicos para la teoría de perturbaciones lineales

C.1. Relación de proporcionalidad entre $P(z)$ y $H(t)$

Recordando que las ecuaciones de campo (2-20) pueden ser escritas como

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \left[\sum_i \rho_i \right] - \frac{c^2 k}{R^2(t)},$$

haciendo uso del anexo A.8, y considerando $\Omega_{r,0}$ como nulo, estas pueden reescribirse como

$$H^2(t) = H^2(t_0) [\Omega_{m,0}(z+1)^3 + \Omega_{k,0}(z+1)^2 + \Omega_{\Lambda,0}],$$

de tal forma que al utilizar la definición de los parámetros de densidad para la constante cosmologica $\Omega_{\Lambda,0} = \frac{\Lambda_0 c^2}{3H^2(t_0)}$ y curvatura $\Omega_{k,0} = -\frac{c^2 k_0}{H^2(t_0)R^2(t_0)}$, se puede escribir

$$H^2(t) = H^2(t_0) \left[\Omega_{m,0}(z+1)^3 + \frac{\Lambda_0 c^2}{3H^2(t_0)} - \frac{c^2 k_0}{H^2(t_0)R^2(t_0)}(z+1)^2 \right]. \quad (\text{C-1})$$

Es conveniente recordar que la constante cosmológica y la curvatura pueden ser escritas en términos de los parámetros de densidad (2-28) y desaceleración (2-31). En este sentido, manipulando al ecuación (2-31) y (2-20), se obtiene respectivamente

$$\Lambda = \frac{3H^2(t)}{c^2} \left[\frac{\Omega_m}{2} + \Omega_r - q(t) \right], \quad (\text{C-2})$$

$$k = \frac{H^2(t)R^2(t)}{c^2} \left[\frac{3}{2}\Omega_m + \Omega_r - q(t) - 1 \right], \quad (\text{C-3})$$

que al ser aplicadas sobre (C-1), y despreciando nuevamente el párametro de radiación

$$H^2(t) = H^2(t_0) \left[\Omega_{m,0}(z+1)^3 + \frac{1}{2}\Omega_{m,0} - q(t_0) - \left(\frac{3}{2}\Omega_{m,0} - q(t_0) - 1 \right) (z+1)^2 \right], \quad (\text{C-4})$$

logrando obtener

$$\frac{H^2(t)}{H^2(t_0)} = \Omega_{m,0} z^3 + \left(\frac{3}{2}\Omega_{m,0} + q(t_0) + 1 \right) z^2 + 2[q(t_0) + 1]z + 1 \equiv P(z). \quad (\text{C-5})$$

C.2. Ecuación para el factor de crecimiento y decrecimiento en función de z

Dada la ecuación diferencial (3-28) y la sustitución (3-34), considerando que $D(t(z))$, se establecen los diferenciales

$$\begin{aligned}
 \frac{dD}{dz} &= \frac{dD}{dt} \frac{dt}{dz} \longrightarrow \frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{dD}{dz} \left[-H(t_0)(z+1)P^{1/2}(z) \right], \\
 \frac{dD}{dt} &= -H(t_0)(z+1)P^{1/2}(z) \frac{dD}{dz}, \tag{C-6} \\
 \frac{d^2D}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{dD}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[-H(t_0)(z+1)P^{1/2}(z) \frac{dD}{dz} \right] = -H(t_0) \frac{d}{dt} \left[(z+1)P^{1/2}(z) \frac{dD}{dz} \right], \\
 &= -H(t_0) \left[\frac{d}{dt}(z+1) \right] P^{1/2}(z) \frac{dD}{dz} - H(t_0)(z+1) \frac{d}{dt} \left[P^{1/2}(z) \frac{dD}{dz} \right], \\
 &= -H(t_0) \frac{dz}{dt} P^{1/2}(z) \frac{dD}{dz} - H(t_0)(z+1) \left[\frac{1}{2} P^{-1/2}(z) \frac{dP}{dz} \frac{dz}{dt} \frac{dD}{dz} + P^{1/2}(z) \frac{d^2D}{dt dz} \right],
 \end{aligned}$$

utilizando la sustitución (3-38), sobre los diferenciales $\frac{dz}{dt}$,

$$\begin{aligned}
 &= H^2(t_0)(z+1)P(z) \frac{dD}{dz} - \frac{1}{2} H(t_0)(z+1)P^{-1/2}(z) \frac{dP}{dz} \left[-H(t_0)(z+1)P^{1/2}(z) \right] \frac{dD}{dz} \\
 &+ H^2(t_0)(z+1)^2 P(z) \frac{d^2D}{dz^2}, \\
 \frac{d^2D}{dt^2} &= H^2(t_0)(z+1)P(z) \frac{dD}{dz} + \frac{1}{2} H^2(t_0)(z+1)^2 \frac{dP}{dz} \frac{dD}{dz} + H^2(t_0)(z+1)^2 P(z) \frac{d^2D}{dz^2}, \tag{C-7}
 \end{aligned}$$

de manera que, sustituyendo (C-6) y (C-7) en (3-30), se obtiene la equivalencia

$$\begin{aligned}
 0 &= H^2(t_0)(z+1)P(z) \frac{dD}{dz} + \frac{1}{2} H^2(t_0)(z+1)^2 \frac{dP}{dz} \frac{dD}{dz} + H^2(t_0)(z+1)^2 P(z) \frac{d^2D}{dz^2} \\
 &- 2 \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \left[-H(t_0)(z+1)P^{1/2}(z) \frac{dD}{dz} \right] - 4\pi G \rho_{m,0}(z+1)^3 D. \tag{C-8}
 \end{aligned}$$

En donde sobre el último término se ha utilizado la solución a la ecuación (2-26), y considerando la relación entre el redshift y el factor de escala, $R(t) = R(t_0)/(z+1)$, se tiene la expresión

$$\begin{aligned}
 \dot{R}(t) &= R(t_0) \frac{dz}{dt} = -R(t_0)H(t_0)(z+1)P^{1/2}(z), \\
 \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} &= -\frac{R(t_0)H(t_0)(z+1)P^{1/2}(z)}{R(t_0)(z+1)} = -H(t_0)P^{1/2}(z),
 \end{aligned}$$

que al ser sustituida en (C-8), junto con $4\pi G\rho_{m,0} = \frac{3}{2}\Omega_{m,0}H^2(t_0)$, y reagrupando algunos términos se obtiene la ecuación

$$(z+1)^2 P(z) \frac{d^2 D}{dz^2} + (z+1) \left[\frac{1}{2}(z+1) \frac{dP}{dz} - P(z) \right] \frac{dD}{dz} - \frac{3}{2}\Omega_{m,0}(z+1)^3 D = 0.$$

Analizando el término $\frac{1}{2}(z+1) \frac{dP}{dz} - P(z)$, con ayuda de la igualdad [establecida en el anexo anterior, ecuación (C-5)] $P(z) = \Omega_{m,0}z^3 + \left(\frac{3}{2}\Omega_{m,0} + q(t_0) + 1 \right) z^2 + 2[1 + q(t_0)]z + 1$, y después de varias líneas de álgebra, es posible establecer y definir

$$\frac{1}{2}(z+1) \frac{dP}{dz} - P(z) = \frac{1}{2}\Omega_{m,0}z^3 + \frac{3}{2}\Omega_{m,0}z^2 + \frac{3}{2}\Omega_{m,0}z + q(t_0) \equiv Q(z),$$

así, finalmente la ecuación diferencial (C-8), toma la forma

$$(z+1)P(z) \frac{d^2 D}{dz^2} + Q(z) \frac{dD}{dz} - \frac{3}{2}\Omega_{m,0}(z+1)^2 D = 0. \quad (\text{C-9})$$

C.3. Solución analítica a la integral (3-36) en un universo de Einstein-De Sitter

Dada la integral (3-36), que describe la evolución del factor de crecimiento de las perturbaciones $D^{(+)}(z)$, en el régimen lineal, como función del redshift z . Es posible encontrar una solución analítica a ésta, en un universo de Einstein-De Sitter, ayudados de la expresión para $P(z) = (z+1)^3$. Pues, se tiene la integral,

$$D^{(+)}(z) = P^{1/2}(z) \int_z^\infty \frac{s+1}{P^{3/2}(s)} ds = (z+1)^{3/2} \int_z^\infty \frac{s+1}{(s+1)^{9/2}} ds = (z+1)^{3/2} \int_z^\infty \frac{1}{(s+1)^{7/2}} ds,$$

efectuando la sustitución $u = s+1$ con $ds = du$,

$$\begin{aligned} D^{(+)}(z) &= (z+1)^{3/2} \int_z^\infty u^{-7/2} du = -\frac{2}{5}(z+1)^{3/2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{(s+1)^{5/2}} \right|_z^b, \\ &= -\frac{2}{5}(z+1)^{3/2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(b+1)^{5/2}} - \frac{1}{(z+1)^{5/2}} \right] = \frac{2}{5}(z+1)^{3/2} \frac{1}{(z+1)^{5/2}}, \\ D^{(+)}(z) &= \frac{2}{5} \frac{1}{z+1}. \end{aligned} \quad (\text{C-10})$$

D. Anexo: Aspectos algebraicos para la teoría de perturbaciones No-Lineal

D.1. Representación en el espacio de Fourier de las ecuaciones de movimiento

Dado que los campos $\delta(\mathbf{x}, \tau)$ y $\theta(\mathbf{x}, \tau)$, pueden reescribirse de la forma[27]

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau)\} &= \delta(\mathbf{x}, \tau) = \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau), \\ \mathcal{F}\{\delta(\mathbf{x}, \tau)\} &= \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x}, \tau),\end{aligned}\tag{D-1}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau)\} &= \theta(\mathbf{x}, \tau) = \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau), \\ \mathcal{F}\{\theta(\mathbf{x}, \tau)\} &= \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \theta(\mathbf{x}, \tau),\end{aligned}\tag{D-2}$$

y como se ha asumido que el campo de velocidades peculiares $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$ es irrotacional, de manera que existe un campo escalar $v(\mathbf{x}, \tau)$, tal que siempre es posible escribir el campo de velocidades como $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = -\nabla_{\mathbf{x}}v(\mathbf{x}, \tau)$. Así, inicialmente se establecen las siguientes relaciones (con i como una componente vectorial e $i = \sqrt{-1}$):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{u_i(\mathbf{x}, \tau)\} &= -\mathcal{F}\{\partial_{x_i}v(\mathbf{x}, \tau)\} \longrightarrow \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{u}_i(\mathbf{k}, \tau) = -ik_i \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{v}(\mathbf{x}, \tau), \\ 0 &= \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [\tilde{u}_i(\mathbf{k}, \tau) + ik_i \tilde{v}(\mathbf{k}, \tau)], \\ \tilde{u}_i(\mathbf{k}, \tau) &= -ik_i \tilde{v}(\mathbf{k}, \tau).\end{aligned}\tag{D-3}$$

Trabajando la divergencia del campo,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\theta(\mathbf{x}, \tau)\} &= \mathcal{F}\{\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)\} = \mathcal{F}\{\partial_{x_i} u_i(\mathbf{x}, \tau)\}, \\ \mathcal{F}\{\theta(\mathbf{x}, \tau)\} &= ik_i \mathcal{F}\{u_i(\mathbf{x}, \tau)\}, \\ \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) &= ik_i \tilde{u}_i(\mathbf{k}, \tau) \longrightarrow \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) = ik_i [-ik_i \tilde{v}(\mathbf{k}, \tau)] = k_i k_i \tilde{v}(\mathbf{k}, \tau), \\ \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) &= k^2 \tilde{v}(\mathbf{k}, \tau).\end{aligned}\tag{D-4}$$

De manera que, haciendo uso de (D-3) y (D-4), se tiene

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \tau) = -i\mathbf{k} \frac{\tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau)}{k^2}. \quad (\text{D-5})$$

luego, para la ecuación de movimiento (3-42), si se define $f(\mathbf{x}, \tau) \equiv -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\delta(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \right]$, aplicando las representaciones en el espacio de Fourier (D-1) y (D-2), se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\delta(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \right] &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\int d^3\mathbf{k}_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} \tilde{\delta}(\mathbf{k}_1, \tau) \int d^3\mathbf{k}_2 e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}} \tilde{u}_i(\mathbf{k}_2, \tau) \right], \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_1 e^{i(k_{1i} + k_{2i})x_i} \tilde{\delta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{u}_i(\mathbf{k}_2, \tau) \right], \\ &= \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_1 i(k_{1i} + k_{2i}) e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \tilde{\delta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_2, \tau), \\ &= \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_1 i(k_{1i} + k_{2i}) e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \tilde{\delta}(\mathbf{k}_1, \tau) \left[-ik_{2i} \frac{\tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau)}{k_2^2} \right], \end{aligned}$$

en donde se ha empleado (D-5), en componentes, así

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\delta(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \right] = \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_1 \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^2} e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \tilde{\delta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau).$$

De manera que la ecuación de movimiento (3-42), toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\mathbf{x}, \tau) + \theta(\mathbf{x}, \tau) = - \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_1 \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^2} e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \tilde{\delta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau),$$

y aplicando transformada de Fourier, sobre toda la ecuación

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\mathbf{x}, \tau) + \theta(\mathbf{x}, \tau) \right\} = -\mathcal{F} \left\{ \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_1 \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^2} e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \tilde{\delta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau) \right\},$$

y trabajando sobre el miembro derecho de esta ecuación, recordando que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ f(\mathbf{x}, \tau) \} &= \tilde{f}(\mathbf{k}, \tau) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \tau), \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left[\int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_1 \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^2} e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \tilde{\delta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau) \right], \\ &= \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} \left[\int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \right] d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_1 \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^2} \tilde{\delta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau), \end{aligned}$$

haciendo uso de la representación integral de la función delta de Dirac en tres dimensiones

$$\delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} d^3\mathbf{x}$$

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, \tau) = \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_1 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^2} \tilde{\delta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau),$$

se obtiene finalmente la ecuación de movimiento (3-45), en el espacio de Fourier

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) + \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) = - \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_1 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \tilde{\delta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau), \quad (\text{D-6})$$

con $\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \equiv \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^2} = 1 + \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^2}$. De la misma forma para la ecuación de movimiento (3-43), se reescribe el miembro derecho de la ecuación

$$g(\mathbf{x}, \tau) \equiv -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[[\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}] \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \right] = -\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)] \right],$$

en donde se ha utilizado la propiedad (3-41), con el hecho de que la vorticidad decae con la expansión, así la expresión toma la forma

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \tau) &= -\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\nabla_{\mathbf{x}} \left[\int_{\mathbf{k}_1} d^3 \mathbf{k}_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_1, \tau) \cdot \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_2, \tau) \right] \right], \\ &= -\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\nabla_{\mathbf{x}} \left[\int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_1 e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_1, \tau) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_2, \tau) \right] \right], \end{aligned}$$

utilizando (D-5),

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\nabla_{\mathbf{x}} \left[\int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_1 e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \left(-i\mathbf{k}_1 \frac{\tilde{\theta}(\mathbf{k}_1, \tau)}{k_1^2} \right) \cdot \left(-i\mathbf{k}_2 \frac{\tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau)}{k_2^2} \right) \right] \right], \\ &= \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\nabla_{\mathbf{x}} \left[\int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_1 e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2 k_2^2} \tilde{\theta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau) \right] \right], \\ &= \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_1 i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2 k_2^2} \tilde{\theta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau) \right], \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_1 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2 k_2^2} \tilde{\theta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau), \\ g(\mathbf{x}, \tau) &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_1 e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \frac{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{k_1^2 k_2^2} \tilde{\theta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau), \end{aligned}$$

por lo tanto la ecuación (3-43), queda escrita de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \theta(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \theta(\mathbf{x}, \tau) + \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) \delta(\mathbf{x}, \tau) \\ = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_1 e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \frac{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{k_1^2 k_2^2} \tilde{\theta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau), \end{aligned}$$

de manera que aplicando transformada de Fourier,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \theta(\mathbf{x}, \tau) \right\} + \mathcal{F} \left\{ \mathcal{H}(\tau) \theta(\mathbf{x}, \tau) \right\} + \frac{3}{2} \mathcal{F} \left\{ \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) \delta(\mathbf{x}, \tau) \right\} \\ = -\mathcal{F} \left\{ \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_1 e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \frac{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{2k_1^2 k_2^2} \tilde{\theta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau) \right\}, \end{aligned}$$

y para el término derecho, de la misma forma como se hizo para la ecuación (D-6),

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\mathbf{k}, \tau) &= \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} g(\mathbf{x}, \tau), \\ \tilde{g}(\mathbf{k}, \tau) &= \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[\int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_1 e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{x}} \frac{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{2k_1^2 k_2^2} \tilde{\theta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau) \right],\end{aligned}$$

que permite obtener finalmente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) + \mathcal{H}(\tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) + \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) \\ = - \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_1 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau),\end{aligned}\quad (\text{D-7})$$

$$\text{con } \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{2k_1^2 k_2^2}.$$

D.2. Soluciones en el espacio de Fourier para el régimen lineal

Para entender la construcción de las soluciones en el régimen lineal (4-3), es plausible establecer el siguiente procedimiento: dada la ecuación de evolución del factor de escala (4-2) y considerando un universo tipo Einstein-De Sitter, se establece que

$$\begin{aligned}\left[\frac{dR}{dt} \right]^2 &= \frac{H_0^2}{R(t)}, \\ \frac{dR}{dt} &= H_0 [R(t)]^{-1/2} \longrightarrow \int_0^R \sqrt{R'(t)} dR' = H_0 \int_0^t dt' \longrightarrow R(t) = \left[\frac{3}{2} H_0 \right]^{2/3} t^{2/3}, \\ R(t) &\propto t^{2/3},\end{aligned}$$

de manera que, como se describió en el capítulo 2, si $\tau = \int \frac{dt}{R(t)}$, se encuentra

$$\tau = \left[\frac{2}{3H_0} \right]^{2/3} \int_0^t \frac{dt'}{t'^{2/3}} = \left[\frac{2}{3H_0} \right]^{2/3} 3t^{1/3} = \left[\frac{12}{H_0^2} \right]^{1/3} t^{1/3},$$

y despejando, $t = \frac{H_0^2}{12} \tau^3$, se establece

$$R = \left[\frac{3}{2} H_0 \left(\frac{H_0^2}{12} \tau^3 \right) \right]^{2/3} = \left[\frac{H_0^3}{8} \tau^3 \right]^{2/3} = \frac{H_0^2}{4} \tau^2 \longrightarrow R \propto \tau^2.$$

Por lo tanto, $\mathcal{H}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \log R = \frac{d}{d\tau} \log \left[\frac{H_0^2}{4} \tau^2 \right] = \frac{2}{\tau}$. Resultado que al ser sustituido en la ecuación (4-1), proporciona una ecuación diferencial de Cauchy-Euler,

$$\tau^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) + 2\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) - 6\tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) = 0, \quad (\text{D-8})$$

cuya solución es obtenida por el conjunto de funciones $\tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) = \tau^n$, $\tilde{\delta}'(\mathbf{k}, \tau) = n\tau^{n-1}$ y $\tilde{\delta}''(\mathbf{k}, \tau) = n(n-1)\tau^{n-2}$; en donde, los primados denotan derivadas respecto al tiempo conforme τ . Así, para la ecuación (D-8), se tiene

$$\begin{aligned}\tau^2 [n(n-1)\tau^{n-2}] + 2\tau [n\tau^{n-1}] - 6\tau^n &= 0, \\ \tau^n [n^2 + n - 6] &= 0,\end{aligned}$$

cuyas soluciones para $\tau^n \neq 0$, son $n = -3$ y $n = 2$. Permitiendo escribir la solución general, recordando que $\tau^2 \propto R$, en términos de R , como

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) = C_1\tau^{-3} + C_2\tau^2 = C_1R^{-3/2} + C_2R.$$

En donde C_1 y C_2 son constantes. Enfocado el trabajo únicamente en el análisis del factor de crecimiento, la solución para la densidad de energía, en el régimen lineal, junto al campo de velocidades peculiares, caracterizado por su divergencia, es

$$\tilde{\delta}^1(\mathbf{k}, \tau) = R(\tau), \tag{D-9}$$

$$\tilde{\theta}^1(\mathbf{k}, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) = -\frac{\partial R}{\partial \tau} = -R(\tau)\mathcal{H}(\tau). \tag{D-10}$$

D.3. Construcción de las ecuaciones (4-6) y (4-7)

Sustituyendo las relaciones (4-4) y (4-5) en las ecuaciones de movimiento (3-45) y (3-46), para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}& \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{n=1}^{\infty} R^n(\tau) \delta^n(\mathbf{k}) - \mathcal{H}(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} R^n(\tau) \theta^n(\mathbf{k}) \\ &= - \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \left[\sum_{n=1}^{\infty} R^n(\tau) \delta^n(\mathbf{k}_1) \right] \left[-\mathcal{H}(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} R^n(\tau) \theta^n(\mathbf{k}_2) \right], \\ & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[nR^{n-1}(\tau) \frac{\partial R(\tau)}{\partial \tau} \delta^n(\mathbf{k}) - \mathcal{H}(\tau) R^n(\tau) \theta^n(\mathbf{k}) \right] \\ &= \mathcal{H}(\tau) \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \left[\sum_{n=1}^{\infty} R^n(\tau) \delta^n(\mathbf{k}_1) \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} R^n(\tau) \theta^n(\mathbf{k}_2) \right],\end{aligned}$$

Reescribiendo el producto de sumatorias encontrado en el miembro derecho de la última expresión, como

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} R^n(\tau) \delta^n(\mathbf{k}_1) \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} R^n(\tau) \theta^n(\mathbf{k}_2) \right] = \sum_{n=2m=1}^{\infty} \sum_{n-1} \delta^m(\mathbf{k}_1) R^n(\tau) \theta^{n-m}(\mathbf{k}_2),$$

de manera que, se tiene

$$\begin{aligned} nR^{n-1}(\tau)\frac{\partial R(\tau)}{\partial\tau}\delta^n(\mathbf{k}) - \mathcal{H}(\tau)R^n(\tau)\theta^n(\mathbf{k}) \\ = \mathcal{H}(\tau)\int_{\mathbf{k}_2}\int_{\mathbf{k}_1}d^3\mathbf{k}_1d^3\mathbf{k}_2\delta^D(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\alpha(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\sum_{m=1}^{n-1}\delta^m(\mathbf{k}_1)R^n(\tau)\theta^{n-m}(\mathbf{k}_2). \end{aligned}$$

Dividiendo la ultima expresión por $R^{n-1}(\tau)\frac{\partial R(\tau)}{\partial\tau}$,

$$\begin{aligned} \frac{nR^{n-1}(\tau)}{R^{n-1}(\tau)}\frac{\partial R(\tau)}{\partial\tau}\delta^n(\mathbf{k}) - \frac{\mathcal{H}(\tau)R^n(\tau)}{R^{n-1}(\tau)\frac{\partial R(\tau)}{\partial\tau}}\theta^n(\mathbf{k}) \\ = \frac{\mathcal{H}(\tau)}{R^{(n-1)}(\tau)\frac{\partial R(\tau)}{\partial\tau}}\int_{\mathbf{k}_2}\int_{\mathbf{k}_1}d^3\mathbf{k}_1d^3\mathbf{k}_2\delta^D(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\alpha(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\sum_{m=1}^{n-1}\delta^m(\mathbf{k}_1)R^n(\tau)\theta^{n-m}(\mathbf{k}_2), \end{aligned}$$

y simplificando se obtiene la ecuación (4-6),

$$n\delta^n(\mathbf{k}) - \theta^n(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{k}_2}\int_{\mathbf{k}_1}d^3\mathbf{k}_1d^3\mathbf{k}_2\delta^D(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\alpha(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\sum_{m=1}^{n-1}\delta^m(\mathbf{k}_1)\theta^{n-m}(\mathbf{k}_2). \quad (\text{D-11})$$

Y para la ecuación de movimiento (3-46) con $\Omega_m(\tau) = 1$, con un procedimiento similar al descrito para (3-47),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau}\left[-\mathcal{H}(\tau)\sum_{n=1}^{\infty}R^n(\tau)\theta^n(\mathbf{k})\right] + \mathcal{H}(\tau)\left[-\mathcal{H}(\tau)\sum_{n=1}^{\infty}R^n(\tau)\theta^n(\mathbf{k})\right] \\ + \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(\tau)\left[\sum_{n=1}^{\infty}R^n(\tau)\delta^n(\mathbf{k})\right] \\ = -\int_{\mathbf{k}_2}\int_{\mathbf{k}_1}d^3\mathbf{k}_1d^3\mathbf{k}_2\delta^D(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\beta(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\mathcal{H}^2(\tau)\left[\sum_{n=1}^{\infty}R^n(\tau)\theta^n(\mathbf{k}_1)\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty}R^n(\tau)\theta^n(\mathbf{k}_2)\right], \\ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}[2\mathcal{H}(\tau)R^n(\tau)]\theta^n(\mathbf{k}) + 2\mathcal{H}^2(\tau)R^n(\tau)\theta^n(\mathbf{k}) - 3\mathcal{H}^2(\tau)R^n(\tau)\delta^n(\mathbf{k})\right\} \\ = \int_{\mathbf{k}_2}\int_{\mathbf{k}_1}d^3\mathbf{k}_1d^3\mathbf{k}_2\delta^D(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)2\beta(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\mathcal{H}^2(\tau)\left[\sum_{n=1}^{\infty}R^n(\tau)\theta^n(\mathbf{k}_1)\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty}R^n(\tau)\theta^n(\mathbf{k}_2)\right]. \end{aligned}$$

Reescribiendo el producto de sumatorias y la derivada del primer término del miembro izquierdo de la última ecuación,

$$\begin{aligned} \left[\sum_{n=1}^{\infty}R^n(\tau)\theta^n(\mathbf{k}_1)\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty}R^n(\tau)\theta^n(\mathbf{k}_2)\right] = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\theta^m(\mathbf{k}_1)R^n(\tau)\theta^{n-m}(\mathbf{k}_2), \\ \frac{\partial}{\partial\tau}[\mathcal{H}(\tau)R^n(\tau)] = -2\tau^{-2}R^n(\tau) + \mathcal{H}(\tau)nR^{n-1}(\tau)\frac{\partial R(\tau)}{\partial\tau}, \end{aligned}$$

así para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{4}{\tau^2} R^n(\tau) + 2\mathcal{H}(\tau)nR^{n-1}(\tau) \frac{\partial R(\tau)}{\partial \tau} \right] \theta^n(\mathbf{k}) - 3\mathcal{H}^2(\tau)R^n(\tau)\delta^n(\mathbf{k}) \\ &= \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) 2\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \mathcal{H}^2(\tau) \sum_{m=1}^{n-1} \theta^m(\mathbf{k}_1) R^n(\tau) \theta^{n-m}(\mathbf{k}_2), \end{aligned}$$

dividiendo toda la expresión entre $\mathcal{H}^2(\tau)R^n(\tau)$,

$$\begin{aligned} & \left[\mathcal{H}^2(\tau)R^n(\tau) + 2\mathcal{H}(\tau)nR^{n-1}(\tau) \frac{\partial R(\tau)}{\partial \tau} \right] \frac{\theta^n(\mathbf{k})}{\mathcal{H}^2(\tau)R^n(\tau)} - 3 \frac{\mathcal{H}^2(\tau)R^n(\tau)\delta^n(\mathbf{k})}{\mathcal{H}^2(\tau)R^n(\tau)} \\ &= \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) 2\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\mathcal{H}^2(\tau)}{\mathcal{H}^2(\tau)R^n(\tau)} \theta^m(\mathbf{k}_1) R^n(\tau) \theta^{n-m}(\mathbf{k}_2), \end{aligned}$$

quedando finalmente la ecuación (4-7),

$$\begin{aligned} & [1 + 2n] \theta^n(\mathbf{k}) - 3\delta^n(\mathbf{k}) \\ &= \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) 2\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \sum_{m=1}^{n-1} \theta^m(\mathbf{k}_1) \theta^{n-m}(\mathbf{k}_2). \quad (\text{D-12}) \end{aligned}$$

D.4. Soluciones generales para el caso $n = 2$ y $n = 3$.

Dadas las ecuaciones (4-12) y (4-13) para el caso de $n = 2$, se tienen las expresiones a segundo orden para los campos,

$$\begin{aligned} \delta^2(\mathbf{k}) &= \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \left\{ \frac{\theta^1(\mathbf{k}_2)}{7} [5\alpha\delta^1(\mathbf{k}_1) + 2\beta\theta^1(\mathbf{k}_1)] \right\}, \\ \delta^2(\mathbf{k}) &= \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \left\{ \frac{1}{7} [5\alpha + 2\beta] \right\} \delta^1(\mathbf{k}_1) \delta^1(\mathbf{k}_2), \quad (\text{D-13}) \end{aligned}$$

con $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{7}[5\alpha + 2\beta]$ y $G(\mathbf{k}_1) = 1$.

$$\begin{aligned} \theta^2(\mathbf{k}) &= \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \left\{ \frac{\theta^1(\mathbf{k}_2)}{7} [4\beta\theta^1(\mathbf{k}_1) + 3\alpha\delta^1(\mathbf{k}_1)] \right\}, \\ \theta^2(\mathbf{k}) &= \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \left\{ \frac{1}{7} [4\beta + 3\alpha] \right\} \delta^1(\mathbf{k}_1) \delta^1(\mathbf{k}_2), \quad (\text{D-14}) \end{aligned}$$

con $G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{7}[4\beta + 3\alpha]$ y $F(\mathbf{k}_1) = 1$. Cuando $n = 3$, se tienen las soluciones, a los campos, a tercer orden de la forma

$$\delta^3(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \left\{ \sum_{m=1}^2 \frac{\theta^{3-m}(\mathbf{k}_2)}{18} [7\alpha\delta^m(\mathbf{k}_1) + 2\beta\theta^m(\mathbf{k}_1)] \right\},$$

$$\theta^3(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{k}_1} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \left\{ \sum_{m=1}^2 \frac{\theta^{3-m}(\mathbf{k}_2)}{18} [6\beta\theta^m(\mathbf{k}_1) + 3\alpha\delta^m(\mathbf{k}_1)] \right\}.$$

Ahora utilizando las soluciones generales dadas por [10, 16] y presentadas en este escrito en las ecuaciones (4-16) y (4-17), se obtiene para $n = 2$

$$\delta^2(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{q}_1 \int d^3\mathbf{q}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) F_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \delta^1(\mathbf{q}_1) \delta^1(\mathbf{q}_2),$$

$$\theta^2(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{q}_1 \int d^3\mathbf{q}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) G_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \delta^1(\mathbf{q}_1) \delta^1(\mathbf{q}_2),$$

con (4-14) y (4-15)

$$F_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \sum_{m=1}^{2-1} \frac{G_m(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m)}{7} \left[5\alpha F_{2-m}(\mathbf{q}_{m+1}, \dots, \mathbf{q}_2) + 2\beta G_{2-m}(\mathbf{q}_{m+1}, \dots, \mathbf{q}_2) \right],$$

$$F_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{G_1(\mathbf{q}_1)}{7} [5\alpha F_1(\mathbf{q}_2) + 2\beta G_1(\mathbf{q}_2)] = \frac{1}{7} [5\alpha + 2\beta],$$

$$G_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \sum_{m=1}^{2-1} \frac{G_m(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m)}{7} \left[3\alpha F_{2-m}(\mathbf{q}_{m+1}, \dots, \mathbf{q}_2) + 4\beta G_{2-m}(\mathbf{q}_{m+1}, \dots, \mathbf{q}_2) \right],$$

$$G_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{G_1(\mathbf{q}_1)}{7} [3\alpha F_1(\mathbf{q}_2) + 4\beta G_1(\mathbf{q}_2)] = \frac{1}{7} [3\alpha + 4\beta],$$

de manera que, se obtienen ecuaciones equivalentes a las proporcionadas en (D-13) y (D-14).

$$\delta^2(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{q}_1 \int d^3\mathbf{q}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \frac{1}{7} [5\alpha + 2\beta] \delta^1(\mathbf{q}_1) \delta^1(\mathbf{q}_2), \quad (\text{D-15})$$

$$\theta^2(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{q}_1 \int d^3\mathbf{q}_2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \frac{1}{7} [3\alpha + 4\beta] \delta^1(\mathbf{q}_1) \delta^1(\mathbf{q}_2). \quad (\text{D-16})$$

Procediendo de la misma forma para $n = 3$, se encuentran las soluciones a los campos

$$\delta^3(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{q}_1 \int d^3\mathbf{q}_2 \int d^3\mathbf{q}_3 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) F_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \delta^1(\mathbf{q}_1) \delta^1(\mathbf{q}_2) \delta^1(\mathbf{q}_3)$$

$$\theta^3(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{q}_1 \int d^3\mathbf{q}_2 \int d^3\mathbf{q}_3 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) G_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \delta^1(\mathbf{q}_1) \delta^1(\mathbf{q}_2) \delta^1(\mathbf{q}_3)$$

Con estos desarrollos para $n = 2$ y $n = 3$ (segundo y tercer orden), se ha mostrado la equivalencia de las ecuaciones (4-12) y (4-13) con las expresiones generales (4-16) y (4-17), respectivamente, y se evidencia la necesidad de un proceso que se efectúa de manera iterativa para la solución de las ecuaciones de movimiento. Cada vez que se incrementa el orden, debe conocerse la solución a ordenes anteriores.

D.5. Integrales que contribuyen al espectro de potencias a segundo orden

En este apéndice se mostrará como es posible obtener las expresiones (4-27) y (4-28). Siguiendo a [4]. Se considera que cualquier ensamble promedio de un producto de variables puede ser obtenido por medio del producto de ensambles de pares promedios, de manera que, citando el teorema de Wick,

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{k}_1) \cdots \delta(\mathbf{k}_{2p+1}) \rangle &= 0, \\ \langle \delta(\mathbf{k}_1) \cdots \delta(\mathbf{k}_{2p}) \rangle &= \sum_{\text{todos los pares } p \text{ parejas}(i,j)} \prod \langle \delta(\mathbf{k}_i) \delta(\mathbf{k}_j) \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para el fin de esta sección se determina que la función de correlación de cuatro puntos, en el campo de densidad, es

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_4) \rangle &= \langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \rangle \langle \delta(\mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_4) \rangle + \langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_3) \rangle \langle \delta(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_4) \rangle \\ &\quad + \langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_4) \rangle \langle \delta(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3) \rangle, \end{aligned}$$

y utilizando la generalización $\langle \delta^m(\mathbf{k}) \delta^{n-m}(\mathbf{k}') \rangle = P_{m,n-m}(\mathbf{k}) \delta^D(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$, con $m = n - m = 1$, se establece para la función de correlación

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_4) \rangle &= P_{1,1}(k_2) \delta^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P_{1,1}(k_4) \delta^D(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \\ &\quad + P_{1,1}(k_3) \delta^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) P_{1,1}(k_4) \delta^D(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4) \\ &\quad + P_{1,1}(k_4) \delta^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4) P_{1,1}(k_3) \delta^D(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3). \quad (\text{D-17}) \end{aligned}$$

Así para cada contribución a un loop, $P_{2,2}(k)$ y $2P_{1,3}(k)$, se tiene

$$P_{2,2}(k) \delta^D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') = \langle \delta_2(\mathbf{k}, \tau) \delta_2(\mathbf{k}', \tau) \rangle,$$

utilizando la ecuación (4-16), para el caso de interés $n = 2$, y utilizando (D-17)

$$\begin{aligned} &= \left\langle \int d^3 \mathbf{q}_1 \int d^3 \mathbf{q}_3 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \delta^1(\mathbf{q}_1) \delta^1(\mathbf{q}_3) \right. \\ &\quad \left. \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_4 \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) F_2^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) \delta^1(\mathbf{q}_2) \delta^1(\mathbf{q}_4) \right\rangle, \\ &= \int d^3 \mathbf{q}_1 \int d^3 \mathbf{q}_3 \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_4 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) F_2^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) \\ &\quad \left\langle \delta^1(\mathbf{q}_1) \delta^1(\mathbf{q}_2) \delta^1(\mathbf{q}_3) \delta^1(\mathbf{q}_4) \right\rangle, \\ &= \int d^3 \mathbf{q}_1 \int d^3 \mathbf{q}_3 \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_4 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) F_2^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) \\ &\quad [P_{1,1}(q_2) P_{1,1}(q_4) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta^D(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4) + P_{1,1}(q_3) P_{1,1}(q_4) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_4) \\ &\quad + P_{1,1}(q_4) P_{1,1}(q_3) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3)], \end{aligned}$$

D.5 Integrales que contribuyen al espectro de potencias a segundo orden 71

analizando, respectivamente cada una de las tres integrales

$$\begin{aligned}
& \int d^3 \mathbf{q}_1 \int d^3 \mathbf{q}_3 \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_4 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) F_2^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) \\
& \quad P_{1,1}(q_1) P_{1,1}(q_3) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta^D(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4), \\
& = \int d^3 \mathbf{q}_1 \int d^3 \mathbf{q}_3 F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) P_{1,1}(q_1) P_{1,1}(q_3) \left\{ \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_4 F_2^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) \right. \\
& \quad \left. \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta^D(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4) \right\}. \quad (\text{D-18})
\end{aligned}$$

Desarrollando la integral que se encuentra dentro de corchetes

$$\begin{aligned}
& \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_4 F_2^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta^D(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4), \\
& = \int d^3 \mathbf{q}_2 \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \int d^3 \mathbf{q}_4 F_2^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4),
\end{aligned}$$

reconociendo la simetría, en la función $F_2^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) = F_2^{(s)}(-\mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_4)$,

$$= \int d^3 \mathbf{q}_2 \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \int d^3 \mathbf{q}_4 F_2^{(s)}(-\mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4),$$

utilizando la propiedad $\delta^D(\mathbf{q}_3 - [-\mathbf{q}_4]) F_2^{(s)}(-\mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_4) = \delta^D(\mathbf{q}_3 - [-\mathbf{q}_4]) F_2^{(s)}(-\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$,

$$\begin{aligned}
& = \int d^3 \mathbf{q}_2 \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \int d^3 \mathbf{q}_4 F_2^{(s)}(-\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4), \\
& = \int d^3 \mathbf{q}_2 \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) F_2^{(s)}(-\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \int d^3 \mathbf{q}_4 \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4), \\
& = \int d^3 \mathbf{q}_2 \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) F_2^{(s)}(-\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3),
\end{aligned}$$

empleando de nuevo la propiedad $\delta^D(\mathbf{q}_1 - [-\mathbf{q}_2]) F_2^{(s)}(-\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \delta^D(\mathbf{q}_1 - [-\mathbf{q}_2]) F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3)$,

$$\begin{aligned}
& = \int d^3 \mathbf{q}_2 \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3), \\
& = F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \int d^3 \mathbf{q}_2 \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3), \\
& = F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{k}' + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3).
\end{aligned}$$

De manera que, aplicando sobre (D-18),

$$= \int d^3 \mathbf{q}_1 \int d^3 \mathbf{q}_3 \left[F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \right]^2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) P_{1,1}(q_1) P_{1,1}(q_3) \delta^D(\mathbf{k}' + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3),$$

identificando a $\mathbf{k}' = \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_4$ y $\mathbf{k} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3$,

$$= \int d^3 \mathbf{q}_1 \int d^3 \mathbf{q}_3 \left[F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \right]^2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) P_{1,1}(q_1) P_{1,1}(q_3) \delta^D(\mathbf{k}' + \mathbf{k}),$$

aplicando propiedades e integrando sobre \mathbf{q}_3 ,

$$\begin{aligned} &= \int d^3 \mathbf{q}_1 P_{1,1}(q_1) \int d^3 \mathbf{q}_3 \left[F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{k} - \mathbf{q}_1) \right]^2 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) P_{1,1}(|\mathbf{k} - \mathbf{q}_1|) \delta^D(\mathbf{k}' + \mathbf{k}), \\ &= \delta^D(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \int d^3 \mathbf{q}_1 P_{1,1}(q_1) \left[F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{k} - \mathbf{q}_1) \right]^2 P_{1,1}(|\mathbf{k} - \mathbf{q}_1|) \int d^3 \mathbf{q}_3 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3), \end{aligned}$$

finalmente la integral (D-18), será equivalente a

$$= \delta^D(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \int d^3 \mathbf{q}_1 P_{1,1}(q_1) \left[F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{k} - \mathbf{q}_1) \right]^2 P_{1,1}(|\mathbf{k} - \mathbf{q}_1|). \quad (\text{D-19})$$

Para la segunda integral, se considera

$$\begin{aligned} &\int d^3 \mathbf{q}_1 \int d^3 \mathbf{q}_3 \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_4 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) F_2^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) \\ &\quad P_{1,1}(q_1) P_{1,1}(q_2) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_4), \\ &= \int d^3 \mathbf{q}_1 \int d^3 \mathbf{q}_3 F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) P_{1,1}(q_1) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3) \left\{ \int d^3 \mathbf{q}_2 P_{1,1}(q_2) \right. \\ &\quad \left. \int d^3 \mathbf{q}_4 F_2^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_4) \right\}, \quad (\text{D-20}) \end{aligned}$$

resolviendo la última integral relacionada en (D-20),

$$\begin{aligned} &\int d^3 \mathbf{q}_4 F_2^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{q}_2 - [-\mathbf{q}_4]) \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) \\ &= \int d^3 \mathbf{q}_4 F_2^{(s)}(\mathbf{q}_4, -\mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) = 0, \end{aligned}$$

se encuentra que ésta es idénticamente igual a cero, ya que de acuerdo con la simetría de los núcleos, establecidos en (4-14) y (4-15), $F_2^{(s)}(\mathbf{q}_4, -\mathbf{q}_4) = 0$ [20]. Para la tercera integral proporcionada en (D-18),

$$\begin{aligned} &\int d^3 \mathbf{q}_1 \int d^3 \mathbf{q}_3 \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_4 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) F_2^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) \\ &\quad P_{1,1}(q_1) P_{1,1}(q_3) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3), \\ &= \int d^3 \mathbf{q}_1 \int d^3 \mathbf{q}_3 F_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) P_{1,1}(q_1) P_{1,1}(q_3) \left\{ \int d^3 \mathbf{q}_2 \delta^D(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) \right. \\ &\quad \left. \int d^3 \mathbf{q}_4 F_2^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{k}' - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_4) \right\}. \quad (\text{D-21}) \end{aligned}$$

D.5 Integrales que contribuyen al espectro de potencias a segundo orden 73

De forma que por argumentos semejantes a los empleados para las ecuaciones entre (D-18) y (D-19), es posible dar cuenta, que la integral es la misma relación encontrada en (D-19); por lo tanto la contribución $P_{2,2}(k)$, será

$$P_{2,2}(k) = 2 \int d^3 \mathbf{q}_1 P_{1,1}(q) \left[F_2^{(s)}(\mathbf{q}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) \right]^2 P_{1,1}(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|), \quad (\text{D-22})$$

quedando demostrada la ecuación (4-27). Para (4-28) se procederá de forma equivalente:

$$P_{1,3}(k) \delta^D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') = \langle \delta_1(\mathbf{k}, \tau) \delta_3(\mathbf{k}, \tau) \rangle,$$

en donde se hace evidente, la necesidad de utilizar la expansión del campo de densidad a tercer orden, encontrado en el par de ecuaciones finales del anexo D.4. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &= \left\langle \delta^1(\mathbf{q}_1) \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_3 \int d^3 \mathbf{q}_4 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) F_3(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \delta^1(\mathbf{q}_2) \delta^1(\mathbf{q}_3) \delta^1(\mathbf{q}_4) \right\rangle, \\ &= \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_3 \int d^3 \mathbf{q}_4 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) F_3(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \left\langle \delta^1(\mathbf{q}_1) \delta^1(\mathbf{q}_2) \delta^1(\mathbf{q}_3) \delta^1(\mathbf{q}_4) \right\rangle, \end{aligned}$$

utilizando (D-17),

$$\begin{aligned} &= \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_3 \int d^3 \mathbf{q}_4 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) F_3^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \\ &\quad \left[P_{1,1}(q_1) P_{1,1}(q_3) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta^D(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4) + P_{1,1}(q_1) P_{1,1}(q_2) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_4) \right. \\ &\quad \left. + P_{1,1}(q_1) P_{1,1}(q_3) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) \right], \quad (\text{D-23}) \end{aligned}$$

y resolviendo cada integral por separado, respectivamente se encuentra:

$$\begin{aligned} &P_{1,1}(q_1) \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_3 \int d^3 \mathbf{q}_4 P_{1,1}(q_3) \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) F_3^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \\ &\quad \delta^D(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4), \\ &= P_{1,1}(q_1) \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_3 P_{1,1}(q_3) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \int d^3 \mathbf{q}_4 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) F_3^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \\ &\quad \delta^D(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4), \\ &= P_{1,1}(q_1) \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_3 P_{1,1}(q_3) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \int d^3 \mathbf{q}_4 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) F_3^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, -\mathbf{q}_3) \\ &\quad \delta^D(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4), \\ &= P_{1,1}(q_1) \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_3 P_{1,1}(q_3) F_3^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, -\mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \int d^3 \mathbf{q}_4 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) \\ &\quad \delta^D(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4), \\ &= P_{1,1}(q_1) \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_3 P_{1,1}(q_3) F_3^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, -\mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_2), \\ &= P_{1,1}(q_1) \int d^3 \mathbf{q}_2 \int d^3 \mathbf{q}_3 P_{1,1}(q_3) F_3^{(s)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}_3, -\mathbf{q}_3) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P_{1,1}(q_1) \int d^3 \mathbf{q}_2 \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{q}_2) \int d^3 \mathbf{q}_3 P_{1,1}(q_3) F_3^{(s)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}_3, -\mathbf{q}_3), \\
 &= P_{1,1}(q_1) \delta^D(\mathbf{q}_1 + \mathbf{k}) \int d^3 \mathbf{q}_3 P_{1,1}(q_3) F_3^{(s)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}_3, -\mathbf{q}_3), \\
 &= P_{1,1}(k) \delta^D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \int d^3 \mathbf{q}_3 P_{1,1}(q_3) F_3^{(s)}(\mathbf{q}_3, -\mathbf{q}_3, \mathbf{k}). \tag{D-24}
 \end{aligned}$$

Y de la misma forma para las dos integrales restantes de la ecuación (D-23), se obtiene una expresión idéntica a (D-24); de manera que, se tiene para esta contribución

$$\begin{aligned}
 2P_{1,3}(k) \delta^D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') &= 6P_{1,1}(k) \delta^D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \int d^3 \mathbf{q}_3 P_{1,1}(q_3) F_3^{(s)}(\mathbf{q}_3, -\mathbf{q}_3, \mathbf{k}), \\
 2P_{1,3}(k) &= 6P_{1,1}(k) \int d^3 \mathbf{q} P_{1,1}(q) F_3^{(s)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{k}), \tag{D-25}
 \end{aligned}$$

quedando demostrada también la ecuación (4-28).

D.6. Contribuciones al espectro de potencias en coordenadas esféricas

Considerando que el vector \mathbf{k} está alineado con el eje q_3 , es posible establecer las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k} - \mathbf{q} &= (0, 0, k) - (q \sin \vartheta \cos \varphi, q \sin \vartheta \sin \varphi, q \cos \vartheta), \\
 \mathbf{k} - \mathbf{q} &= (-q \sin \vartheta \cos \varphi, -q \sin \vartheta \sin \varphi, k - q \cos \vartheta), \\
 |\mathbf{k} - \mathbf{q}| &= \sqrt{q^2 + k^2 - 2kq \cos \vartheta} = k \sqrt{1 + \frac{q^2}{k^2} - 2\frac{q}{k} \cos \vartheta}
 \end{aligned}$$

definiendo a $r = q/k$, junto con $\cos \vartheta \equiv x$

$$|\mathbf{k} - \mathbf{q}| = k \sqrt{1 + r^2 - 2rx}.$$

Por consiguiente, para el kernel $F_2^{(s)}(\mathbf{q}, \mathbf{k} - \mathbf{q})$, con ayuda de la ecuación (4-21), se puede escribir de la forma

$$F_2^{(s)}(\mathbf{q}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) = \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q})}{q^2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2} [q^2 + |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2] + \frac{2}{7} \frac{[\mathbf{q} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q})]^2}{q^2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2},$$

reconociendo que el producto escalar entre los vectores \mathbf{k} y \mathbf{q} , se puede expresar como $\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} = qk \cos \vartheta = kqx$

$$\begin{aligned}
 F_2^{(s)}(\mathbf{q}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) &= \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \frac{qkx - q^2}{q^2 k^2 (1 + r^2 - 2rx)} [q^2 + k^2 (1 - r^2 - 2rx)] + \frac{2}{7} \frac{(qkx - q^2)^2}{q^2 k^2 (1 + r^2 - 2rx)}, \\
 &= \frac{5}{7} + \frac{kx - q}{qk^2 (1 + r^2 - 2rx)} \left[\frac{1}{2} (q^2 + k^2 (1 - r^2 - 2rx)) + \frac{2}{7} q(kx - q) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5}{7} + \frac{kx - q}{qk^2(1 + r^2 - 2rx)} \left[\frac{3q^2 + 7k^2 + 7k^2r^2 - 14k^2rx + 4qkx}{14} \right], \\
 &= \frac{70qk^2(1 + r^2 - 2rx) + (7kx - 7q)[3q^2 + 7k^2 + 7k^2r^2 - 14k^2rx + 4qkx]}{98qk^2(1 + r^2 - 2rx)}, \\
 &= \frac{10rk^3 + 10r^3k^3 - 20r^2k^3x + k(x - r)(3r^2k^2 + 7k^2 + 7k^2r^2 - 14k^2rx + 4rk^2x)}{14rk^3(1 + r^2 - 2rx)}, \\
 &= \frac{10r + 10r^3 - 20r^2x + (x - r)(10r^2 + 7 - 10rx)}{14r(1 + r^2 - 2rx)},
 \end{aligned}$$

así

$$F_2^{(s)}(\mathbf{q}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) = \frac{3r + 7x - 10rx^2}{14r(1 + r^2 - 2rx)}.$$

Por lo tanto la contribución $P_{2,2}(k)$, toma la forma

$$\begin{aligned}
 P_{2,2}(k) &= \frac{2}{(2\pi)^2} \iint r^2 k^2 d(rk) dx P_{1,1}(kr) P_{1,1}[k\sqrt{1 + r^2 - 2rx}] \left[\frac{3r + 7x - 10rx^2}{14r(1 + r^2 - 2rx)} \right]^2, \\
 P_{2,2}(k) &= \frac{k^3}{98(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 dr dx P_{1,1}(kr) P_{1,1}[k(1 + r^2 - 2rx)^{1/2}] \frac{(3r + 7x - 10rx^2)^2}{(1 + r^2 - 2rx)^2}, \quad (\text{D-26})
 \end{aligned}$$

que corresponde a la ecuación (4-31). Para determinar la contribución $P_{1,3}(k)$, se realiza un procedimiento análogo al que se llevo para la ecuación (D-26), con la finalidad de obtener el Kernel $F_3^{(s)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{k})$. Por lo tanto, de la ecuación (4-18),

$$F_3^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \frac{1}{3!} \sum_{\pi}^6 F_3[\mathbf{q}_{\pi(1)}, \mathbf{q}_{\pi(2)}, \mathbf{q}_{\pi(3)}],$$

De marea que, todas los posibles permutaciones para los vectores de onda, serán

$$\begin{aligned}
 F_3^{(\text{sim})}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) &= \frac{1}{3!} [F_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) + F_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_2) + F_3(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) + F_3(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1) \\
 &\quad + F_3(\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + F_3(\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1)].
 \end{aligned}$$

Así asociando pares de términos [19],

$$F_3^{(\text{sim})}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \frac{1}{3} \left[F_3^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) + F_3^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1) + F_3^{(s)}(\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \right], \quad (\text{D-27})$$

haciendo uso de las funciones (4-14) y (4-15) para $n = 3$, se encuentra

$$\begin{aligned}
 F_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) &= \sum_{m=1}^2 \frac{G_m(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m)}{18} \left[7 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1}{k_1^2} F_{3-m}(\mathbf{q}_{m+1}, \dots, \mathbf{q}_3) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k^2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{k_1^2 k_2^2} G_{3-m}(\mathbf{q}_{m+1}, \dots, \mathbf{q}_3) \right],
 \end{aligned}$$

de manera que corriendo la sumatoria

$$F_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \frac{G_1(\mathbf{q}_1)}{18} \overbrace{\left[7 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1}{k_1^2} F_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) + \frac{k^2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{k_1^2 k_2^2} G_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \right]}^{n=3, m=1} + \underbrace{\frac{G_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)}{18} \left[7 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1}{k_1^2} F_1(\mathbf{q}_3) + \frac{k^2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{k_1^2 k_2^2} G_1(\mathbf{q}_3) \right]}_{n=3, m=2},$$

y reescribiendo en términos de las funciones $\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{\mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{k}_1}{k_1^2}$ y $\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{k_{12}^2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{2k_1^2 k_2^2}$,

$$F_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \frac{1}{18} \left[7\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) F_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) + 2\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) G_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) + 7\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) G_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + 2\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) G_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \right],$$

reconociendo para el primer término ($n = 3, m = 1$) los acoples en los vectores de onda como $\mathbf{k}_1 = \mathbf{q}_1$ y $\mathbf{k}_2 = \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_{23}$ y para el segundo término ($n = 3, m = 2$) como $\mathbf{k}_1 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_{12}$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{q}_3$ y para ambos $\mathbf{k} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3$, se puede escribir, para todas las permutaciones

$$F_3^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \frac{1}{18} \left[7\alpha(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_{23}) F_2^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) + 2\beta(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_{23}) G_2^{(s)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) + 7\alpha(\mathbf{q}_{12}, \mathbf{q}_3) G_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + 2\beta(\mathbf{q}_{12}, \mathbf{q}_3) G_2^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \right] \quad (\text{D-28})$$

Es importante resaltar, como se aborda en [19], que cualquier Kernel, a cualquier orden en la teoría de perturbaciones puede reconstruirse si se conoce la forma en que se acoplan los vectores de onda. Por ejemplo, para este caso particular los primeros dos términos de la ecuación (D-28) evidencian un acople, sobre un primer vértice, entre los vectores de onda

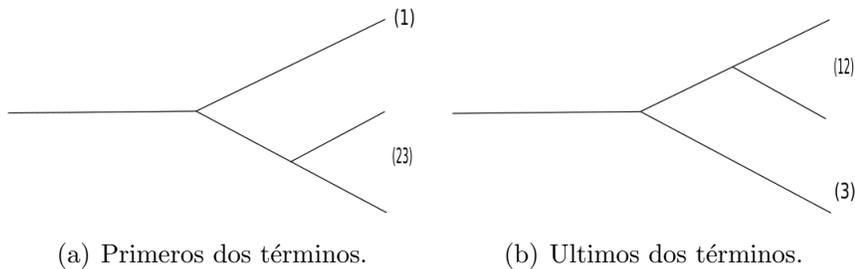


Figura D-1.: Acople de los vectores de onda para el kernel $F_3^{(s)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$.

\mathbf{q}_2 y \mathbf{q}_3 cuyo resultado se acopla a un segundo vértice con \mathbf{q}_1 , Figura D-1(a), y de la misma

forma los últimos dos términos de la ecuación discutida, presentan un acople inicial entre \mathbf{q}_1 y \mathbf{q}_2 que luego se acopla en un segundo vértice con \mathbf{q}_3 , como lo muestra la Figura D-1(b). Introduciendo (D-28) en (D-27), reescrita está última como

$$F_3^{(\text{sim})}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{k}) = \frac{1}{3} \left[F_3^{(s)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{k}) + F_3^{(s)}(-\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{k}) + F_3^{(s)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, -\mathbf{q}) \right],$$

de acuerdo a las necesidades explicitas en (4-28). Por lo tanto, con ayuda de las propiedades en [4], las ecuaciones (4-21) y (4-22), después de algunas líneas de álgebra

$$\begin{aligned} F_3^{(\text{sim})}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{k}) = & \frac{1}{54} \left[-7 \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2}{q^4 k^2} (k^2 + q^2) + \frac{6 k^2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - q^2}{7 q^2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2} - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q^4} (k^2 + q^2) \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - q^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2} \right. \\ & + \frac{8 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - q^2}{7 q^4 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2} - \frac{6 k^2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} + q^2}{7 q^2 |\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2} - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q^4} (k^2 + q^2) \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{k} + q^2}{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2} - \frac{8 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} + q^2}{7 q^4 |\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2} \\ & + 3 \frac{k^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{|\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2} - \frac{7 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{2 k^2 q^2} (k^2 + q^2) \frac{k^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{|\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2} + 4 \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2 k^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{k^2 q^2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2} + 3 \frac{k^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2} \\ & \left. + \frac{7 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{2 k^2 q^2} (k^2 + q^2) \frac{k^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2} + 4 \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2 k^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{k^2 q^2 |\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2} \right], \quad (\text{D-29}) \end{aligned}$$

que con el cambio de coordenadas establecido en el comienzo de este anexo, junto con la relación $|\mathbf{k} + \mathbf{q}| = \sqrt{q^2 + k^2 + 2kq \cos \vartheta} = k \sqrt{1 + \frac{q^2}{k^2} + 2 \frac{q}{k} \cos \vartheta} = k \sqrt{1 + r^2 + 2rx}$, e integrando cada componente de la última ecuación, en el intervalo de $[-1, 1]$ para x , se obtienen las integrales y las funciones

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 7 \frac{x^2}{r^2} (1 + r^2) dx &= \frac{14}{3} \frac{1 + r^2}{r^2}, \\ \int_{-1}^1 \frac{6}{7r} \frac{x - r}{1 + r^2 - 2rx} dx &= -\frac{3}{7r^3} \left[(r^2 - 1) \ln \left| \frac{1 + r}{1 - r} \right| + 2r \right], \\ \int_{-1}^1 \frac{1}{r^2} \frac{x(1 + r^2)(x - r)}{1 + r^2 - 2rx} dx &= -\frac{1}{4r^5} (1 + r^2) \left[(r^4 - 1) \ln \left| \frac{1 + r}{1 - r} \right| - 2r^3 + 2r \right], \\ \int_{-1}^1 \frac{8}{7r} \frac{x^2(x - r)}{1 + r^2 - 2rx} dx &= -\frac{1}{7r^5} \left[(1 + r^2)^2 (r^2 - 1) \ln \left| \frac{1 + r}{1 - r} \right| - 2r^5 + \frac{8}{3} r^3 + 2r \right], \\ \int_{-1}^1 \frac{6}{7r} \frac{x + r}{1 + r^2 + 2rx} dx &= \frac{3}{7r^3} \left[(r^2 - 1) \ln \left| \frac{1 + r}{1 - r} \right| + 2r \right], \\ \int_{-1}^1 \frac{1}{r^2} \frac{x(1 + r^2)(x + r)}{1 + r^2 + 2rx} dx &= \frac{1}{4r^5} (1 + r^2) \left[(1 - r^4) \ln \left| \frac{1 + r}{1 - r} \right| + 2r^3 - 2r \right], \\ \int_{-1}^1 \frac{8}{7r} \frac{x^2(x + r)}{1 + r^2 + 2rx} dx &= \frac{1}{7r^5} \left[(1 + r^2)^2 (r^2 - 1) \ln \left| \frac{1 + r}{1 - r} \right| - 2r^5 + \frac{8}{3} r^3 + 2r \right], \\ \int_{-1}^1 3 \frac{1 - rx}{1 + r^2 - 2rx} dx &= -\frac{3}{2r} \left[(r^2 - 1) \ln \left| \frac{1 + r}{1 - r} \right| - 2r \right], \\ \int_{-1}^1 \frac{7}{2r} (1 + r^2) \frac{x(1 - rx)}{1 + r^2 - 2rx} dx &= -\frac{7}{8r^3} (1 + r^2) \left[(r^4 - 1) \ln \left| \frac{1 + r}{1 - r} \right| - 2r^3 + 2r \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 4 \frac{x^2(1-rx)}{1+r^2-2rx} dx &= -\frac{1}{2r^3} \left[(1+r^2)^2(r^2-1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| - 2r^5 - \frac{8}{3}r^3 + 2r \right], \\
 \int_{-1}^1 3 \frac{1+rx}{1+r^2+2rx} dx &= \frac{3}{2r} \left[(1-r^2) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + 2r \right], \\
 \int_{-1}^1 \frac{7}{2r} \frac{x(1+r^2)(1+rx)}{1+r^2+2rx} dx &= \frac{7}{8r^3}(1+r^2) \left[(r^4-1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| - 2r^3 + 2r \right], \\
 \int_{-1}^1 4 \frac{x^2(1+rx)}{1+r^2+2rx} dx &= -\frac{1}{2r^3} \left[(1+r^2)^2(r^2-1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| - 2r^5 - \frac{8}{3}r^3 - 2r \right].
 \end{aligned}$$

Introduciendo el conjunto de estas 13 integrales en (D-29), se encuentra para $F_3^{(\text{sim})}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{k})$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{54} \left[-\frac{14}{3} \frac{(r^2+1)}{r^2} - \frac{6}{7r^3} \left[(r^2-1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + 2r \right] \right. \\
 \left. + \frac{1}{2r^5}(1+r^2) \left[(r^4-1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + 2r - 2r^3 \right] \right. \\
 \left. - \frac{2}{7r^5} \left[(1+r^2)^2(r^2-1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| - 2r^5 + \frac{8}{3}r^3 + 2r \right] - \frac{3}{r} \left[(r^2-1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| - 2r \right] \right. \\
 \left. + \frac{7}{4r^3}(1+r^2) \left[(r^4-1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| - 2r^3 + 2r \right] \right. \\
 \left. - \frac{1}{r^3} \left[(1+r^2)^2(r^2-1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| - 2r^5 - \frac{8}{3}r^3 + 2r \right] \right].
 \end{aligned}$$

Después de efectuar los productos, agrupar los términos que tienen el logaritmo y los que no lo tienen, finalmente se obtiene el Kernel

$$F_3^{(s)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{k}) = \frac{1}{54} \left[\frac{25}{7} - \frac{79}{14} \frac{1}{r^2} + \frac{3}{7} \frac{1}{r^4} - \frac{3}{2} r^2 + \frac{3}{28} \frac{(r^2-1)^3}{r^5} (7r^2+2) \right], \quad (\text{D-30})$$

que al ser sustituido, para una de las contribuciones a un loop

$$\begin{aligned}
 2P_{1,3}(k) &= 6P_{1,1}(k) \int d^3q P_{1,1}(q) F_3^{(s)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{k}), \\
 &= 6P_{1,1}(k) \int (2\pi)r^2 k^2 d(rk) P_{1,1}(kr) \frac{1}{54} \left[\frac{25}{7} - \frac{79}{14} \frac{1}{r^2} + \frac{3}{7} \frac{1}{r^4} - \frac{3}{2} r^2 + \frac{3}{28} \frac{(r^2-1)^3}{r^5} (7r^2+2) \right], \\
 &= P_{1,1}(k) (2\pi) k^3 \int dr P_{1,1}(kr) \left[\frac{25}{63} r^2 - \frac{79}{126} + \frac{3}{63} \frac{1}{r^2} - \frac{3}{18} r^4 + \frac{3}{252} \frac{(r^2-1)^3}{r^3} (7r^2+2) \right],
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 2P_{1,3}(k) &= \frac{P_{1,1}(k)k^3}{252(2\pi)^2} \int dr P_{1,1}(kr) \left[100r^2 - 158 + 12 \frac{1}{r^2} - 42r^4 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{r^3} (r^2-1)^3 (7r^2+2) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| \right], \quad (\text{D-31})
 \end{aligned}$$

que corresponde a la ecuación (4-32).

D.7. Representación en el espacio de Fourier de la ecuación (5-21)

Para la representación de la ecuación (5-20) en el espacio de Fourier; el miembro izquierdo junto con el primer término del miembro derecho, tienen un procedimiento igual al encontrado en el anexo D.1. En este anexo, por lo tanto, se quiere presentar al detalle la representación del término que incluye los efectos de presión debido a la presencia de materia bariónica en una teoría a segundo orden. De manera que considerando únicamente la expresión

$$H(\mathbf{x}, \tau) \equiv \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\frac{C_s^2(\mathbf{x}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}} \delta_B(\mathbf{x}, \tau)}{1 + \delta_B(\mathbf{x}, \tau)} \right] = C_s^2 \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\frac{\nabla_{\mathbf{x}} \delta_B(\mathbf{x}, \tau)}{1 + \delta_B(\mathbf{x}, \tau)} \right].$$

Aplicando transformada de Fourier $\mathcal{F}\{H(\mathbf{x}, \tau)\}$ y expandiendo al función al interior de los paréntesis cuadrados $[\dots]$, que para los efectos de este trabajo se presentará únicamente para un teoría a segundo orden, se encuentra

$$\begin{aligned} &= C_s^2 \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \delta_B(x_i, \tau) \right) [1 + \delta_B(x_i, \tau)]^{-1} \right] \right\}, \\ &= C_s^2 \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \delta_B(x_i, \tau) \right) [1 - \delta_B(x_i, \tau)] \right] \right\}, \\ &= C_s^2 \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \delta_B(x_i, \tau) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\delta_B(x_i, \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} \delta_B(x_i, \tau) \right] \right\}, \\ &= C_s^2 \left[\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \delta_B(x_i, \tau) \right\} - \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\delta_B(x_i, \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} \delta_B(x_i, \tau) \right] \right\} \right], \\ &= C_s^2 \left[i^2 k^2 \mathcal{F} \{ \delta_B(x_i, \tau) \} - \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\int_{k_{1i}} d^3 k_{1i} e^{ik_{1i} x_i} \tilde{\delta}_B(k_{1i}, \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{k_{2i}} d^3 k_{2i} e^{ik_{2i} x_i} \tilde{\delta}_B(k_{2i}, \tau) \right] \right\} \right], \\ &= C_s^2 \left[i^2 k^2 \mathcal{F} \{ \delta_B(x_i, \tau) \} - \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\int_{k_{1i}} \int_{k_{2i}} d^3 k_{2i} d^3 k_{1i} e^{i(k_{1i} + k_{2i}) x_i} \tilde{\delta}_B(k_{1i}, \tau) i k_{2i} \tilde{\delta}_B(k_{2i}, \tau) \right] \right\} \right], \end{aligned}$$

derivando nuevamente el integrando,

$$\begin{aligned} &= C_s^2 \left[i^2 k^2 \mathcal{F} \{ \delta_B(x_i, \tau) \} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{F} \left\{ \left[\int_{k_{1i}} \int_{k_{2i}} d^3 k_{2i} d^3 k_{1i} e^{i(k_{1i} + k_{2i}) x_i} \tilde{\delta}_B(k_{1i}, \tau) k_{2i} (k_{1i} + k_{2i}) \tilde{\delta}_B(k_{2i}, \tau) \right] \right\} \right], \end{aligned}$$

factorizando,

$$\begin{aligned} &= -C_s^2 k^2 \left[\mathcal{F} \{ \delta_B(x_i, \tau) \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{k^2} \mathcal{F} \left\{ \left[\int_{k_{1i}} \int_{k_{2i}} d^3 k_{2i} d^3 k_{1i} e^{i(k_{1i} + k_{2i}) x_i} k_{2i} (k_{1i} + k_{2i}) \tilde{\delta}_B(k_{1i}, \tau) \tilde{\delta}_B(k_{2i}, \tau) \right] \right\} \right], \\ &= -C_s^2 k^2 \left[\tilde{\delta}_B(\mathbf{k}, \tau) - \frac{1}{k^2} \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_1 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \tilde{\delta}_B(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\delta}_B(\mathbf{k}_2, \tau) \right]. \end{aligned}$$

De manera que la transformada de Fourier $\mathcal{F}\{H(\mathbf{x}, \tau)\}$, toma la forma

$$-C_s^2 k^2 \left[\tilde{\delta}_B(\mathbf{k}, \tau) - \frac{1}{k^2} \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_1 \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \tilde{\delta}_B(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\delta}_B(\mathbf{k}_2, \tau) \right].$$

Este término revela la inclusión de materia bariónica y sus efectos de presión, considerados en las ecuaciones de movimiento para este fluido mixto. Es posible apreciar que, de la misma forma para materia oscura, se obtiene una función que representa la inclusión de los términos no lineales en su evolución, por lo menos a segundo orden.

E. Códigos Python

En este anexo se vinculan los códigos empleados para el desarrollo de las integrales $P_{2,2}(k)$ y $P_{1,3}(k)$, para las correcciones a un loop, ecuaciones reescritas en el capítulo 4 y etiquetadas con los números (4-31) y (4-32).

E.1. Perturbaciones en el régimen lineal

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import colors as mcolors

def p(z):
    return ((z+1)/((0.308*z**3)+(0.924*z**2)+(0.924*z)+1)**(3/2))

def simpson13(p,a,b):
    m=(a+b)/2
    integral=(b-a)/6*(p(a)+4*p(m)+p(b))
    return integral

y=[]; ha=[]

for a in range(500):
    def h(a):
        return (((0.308*a**3)+(0.924*a**2)+(0.924*a)+1)**(1/2))

    ha.append(h(a))
b=1000
n=2000
h=(b-a)/n
suma=0
for i in range(n):
    b= a+h
    area=(simpson13(p,a,b))
```

```

suma=suma+area
a=b
y.append(suma)
print(y)
print(ha)
print(len(y))
print(len(ha))

import operator
producto=list(map(operator.mul, y, ha))
print(producto)
print(len(producto))
fig = plt.figure()
plt.plot(producto, 'm-')
plt.grid()
plt.xlabel('z')
plt.ylabel('D(z)')
plt.title('CRECIMIENTO DE PERTURBACIONES – REDSHIFT (INTEGRAL GENERAL)')
plt.legend(['Factor de Crecimiento'], loc='upper right')
plt.show()
fig.savefig("1.png");

```

E.2. Integral $P_{2,2}(k)$

```

import numpy as np
from scipy import integrate
from scipy.integrate import nquad
import csv

def F1(r,k):
    return
    (((np.log(1+9.36*k*r))/(9.36*k*r)**2)*((1+(15.6*k*r)
    +(64.4*k*r)**2+(21.8*k*r)**3+(26.8*k*r)**4)**(-1/4))**2

def F2(x,r,k):
    return
    (((np.log(1+9.36*k*pow((1+pow(r,2)-2*r*x),0.5)))
    /(9.36*k*pow((1+pow(r,2)-2*r*x),0.5))**2)
    *((1+(15.6*k*pow((1+pow(r,2)-2*r*x),0.5))
    + (64.4*k*pow((1+pow(r,2)-2*r*x),0.5))**2

```

```

+ (21.8*k*pow((1+pow(r,2)-2*r*x),0.5))**3
+(26.8*k*pow((1+pow(r,2)-2*r*x),0.5))**4)**(-1/4)**2

def f1(x, r, n, k):
    return
    n*(pow(k,3)/((98)*(2*np.pi)**2))*(4.80*pow(10,8))
    *(pow(k,2)*r*pow((1+pow(r,2)-2*r*x),0.5)*F1(r,k)
    *F2(x,r,k)*(pow((3*r+7*x-10*r*pow(x,2)),2)
    /(pow((1+pow(r,2)-2*r*x),2))))

def expint(n, k):
    return nquad(f1, [[-1, 1],[0, np.inf]], args=(n, k))[0]

vec_expint = np.vectorize(expint)
vec_expint(1,np.arange(0.1,2000,0.1))

with open('DATOS1.csv','w',newline='') as file:
    writer = csv.writer(file,delimiter=',')
    writer.writerow(vec_expint(1,np.arange(0.1,2000,0.1)))

print(vec_expint(1,np.arange(0.1,2000,0.1)))

```

E.3. Integral $P_{1,3}(k)$

```

import numpy as np
from scipy import integrate
from scipy.integrate import nquad
import csv

def T(k):
    return
    (((np.log(1+9.36*k))/(9.36*k))**2)*((1+(15.6*k)
    +(64.4*k)**2+(21.8*k)**3+(26.8*k)**4)**(-1/4))**2)

def P(k):
    return ((2.19*(10**(4))))*k*T(k)

def F1(r,k):
    return
    (((np.log(1+9.36*k*r))/(9.36*k*r))**2)*((1+(15.6*k*r)

```

```
+(64.4*k*r)**2+(21.8*k*r)**3+(26.8*k*r)**4**(-1/4)**2
```

```
def f(k):
    return (pow(k,3)/((252)*(2*np.pi)**2))*P(k)
```

```
def f2(r, n, k):
    return
    n*0.5*f(k)*(F1(r,k))*((6/pow(r,2))-79+50*pow(r,2)
    -21*pow(r,4)+(3/2)*((pow((pow(r,2)-1),3))/pow(r,3))
    *(7*pow(r,2)+2)*(np.log(np.absolute((1+r)/(1-r))))))
```

```
def expint(n, k):
    return nquad(f2, [[0.00001, np.inf]], args=(n, k))[0]
```

```
vec_expint = np.vectorize(expint)
vec_expint(1,np.arange(0.1,2000,0.1))
```

```
with open('DATOS2.csv','w',newline='') as file:
    writer = csv.writer(file, delimiter=',')
    writer.writerow(vec_expint(1, np.arange(0.1,2000,0.1)))
```

```
print(vec_expint(1,np.arange(0.1,2000,0.1)))
```

Bibliografía

- [1] L. Abramo, R. Batista, and Rosenfeld R. Liberato, L. Structure formation in the presence of dark energy perturbations. *arXiv:0707.2882v3*, 2007.
- [2] R. Adler, M. Bazin, and M. Schiffwe. *Introduction to General Relativity*. McGraw-Hill, Tokyo, 1975.
- [3] J.M. Bardeen, J.R. Bond, N. Kaiser, and Szalay A. S. The statistics of peaks of gaussian random fields. *The astrophysical journal*, 304:15–61, 1986.
- [4] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztañaga, and R. Scoccimarro. Large-structure of the universe and cosmological perturbation theory. *arXiv:astro-ph/0112551v1*, 2001.
- [5] L. Castañeda. *Introducción a la cosmología*. Notas de clase en preparación, Bogotá, Colombia.
- [6] G. P. da Silva. Estimando parâmetros cosmológicos a partir de dados observacionais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 640:e2318–2–e2318–12, 2018.
- [7] S. Dodelson and F. Schimdt. *Modern Cosmology*. Academic Press, London, 2021.
- [8] D. Edwards and D. Heath. The rate of growth of density perturbations in simple big-bang model universes. *School of Mathematics, Thames Polytechinc, London, England*, 1975.
- [9] G. Efstathiou, M. Davis, C. S. Frenk, and S. D. M. White. Numerical techniques for large cosmological N-body simulations. *Astrophysical Journal Supplement Series*, 1985.
- [10] M. Goroff, B. Grinstein, S. Rey, and M. Wise. Coupling of modes of cosmological mass density fluctuations. *The Astrophysical Journal*, 311:6–14, 1986.
- [11] D. J. Heath. The growth of density perturbations in zero pressure friedmann-lemaitre universes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 6:351–358, 1977.
- [12] M.P. Hobson, G.P. Efstathiou, and A.N. Lasenbv. *General Relativity An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, London, 2006.
- [13] B. Jain and E. Bertschinger. Second order power spectrum and nonlinear evolution at high redshift. *arXiv:astro-ph/9311070v1*, 1997.

-
- [14] L. Landau and E. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1987.
- [15] Baugh C. M. and Efstathiou G. A comparison of the evolution of density fields in perturbation theory and numerical simulations -1. non-linear evolution of the power spectrum. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1994.
- [16] N. Makino, M. Sasiki, and Y. Suto. Analytic approach to the perturbative expansion of nonlinear gravitational fluctuations in cosmological density and velocity fields. *The American Physical Society*, 46:585–602, 1992.
- [17] S. Matarrese and R. Mohayaee. The growth of structure in the intergalactic medium. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2002.
- [18] R. Noriega. *Distorsiones al corrimiento al rojo producidas en teorías modificadas de gravedad*. Tesis de pregrado, Universidad Autónoma del Estado de México, 2017.
- [19] P. Reimberg. On the symmetry properties of the PT kernels and recurrence relations. *arXiv:1610.07455v1*, 2016.
- [20] S. Rodríguez. *Función de Correlación halo-halo. Comparación con la Teoría de Perturbaciones*. Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Colombia, 2011.
- [21] Sugiyama N. S. and Futamase T. An application of the wiener hermite expansion to the nonlinear evolution of dark matter. *The Astrophysical Journal*, 2012.
- [22] M. Schmittfull, Z. Vlah, and McDonald P. Fast large scale structure perturbation theory using 1D FFTs. *arXiv:1603.04405v2*, 2016.
- [23] R. Scoccimarro and J. Friedmann. Loop corrections in non-linear cosmological perturbation theory II. two-point statistics and self-similarity. *arXiv:astro-ph/9602070v1*, 1996.
- [24] M. Shoji and E. Komatsu. Third order perturbation theory with nonlinear pressure. *The Astrophysical Journal*, 2009.
- [25] M. Simonović, T. Baldauf, Zaldarriaga M., J. Carrasco, and Kollmeier J. Cosmological perturbation theory using the FFTlog: Formalism and connection to QFT loop integrals. *arXiv:1708.08130v1*, 2017.
- [26] K. Skovbo. *Analytical Approaches to Non-Linear Cosmological Structure Formation*. Tesis de doctorado, University Aarhus, 2011.
- [27] G. Somogyi and R. Smith. Cosmological perturbation theory for baryons and dark matter: One-loop corrections in the renormalized perturbation theory framework. *Physical Review D*, 2010.

-
- [28] J.M. Tejeiro. *Principios de Relatividad General*. Universidad Nacional de Colombia, Unibiblos, Bogotá, Colombia, 2005.
- [29] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc, United States, 1972.