



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

# **Comparación de metodologías de optimización de sistemas mecánicos bajo incertidumbre**

**Rodrigo Andrés Calvo Ocampo**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica  
Bogotá, Colombia  
2020



# **Comparación de metodologías de optimización de sistemas mecánicos bajo incertidumbre**

**Rodrigo Andrés Calvo Ocampo**

Tesis de maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:

**Magister en Ingeniería Mecánica**

Director (a):

Ph.D Henry Octavio Cortés Ramos

Línea de Investigación:

Optimización en ingeniería

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Bogotá, Colombia

2020



*(Dedicatoria o lema)*

*A mis padres y hermana quienes me apoyaron todo el tiempo.*

*A las personas que me apoyaron mientras estaba trabajando en la industria.*

*A todas esas personas que han sido granitos de arena en mi día a día.*

*Para ellos es esta dedicatoria de tesis, pues es a ellos a quienes se las debo por su apoyo incondicional.*

*Not all those who wander are lost*

*J.R.R Tolkien*



## **Agradecimientos**

Dedico esta tesis a mi tutor y amigo Ph. D Henry Cortés profesor asistente del Departamento de Ing. Mecánica y Mecatrónica, quien fue un gran apoyo académico y emocional durante el tiempo en que escribía esta tesis. A la Universidad Nacional de Colombia por permitirme ser parte de esta Familia académica. Al departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica, y sus docentes por ser un gran apoyo y fuente de conocimiento.



## Resumen

En esta investigación se exploró el uso de diferentes formulaciones para la optimización bajo incertidumbre de sistemas mecánicos, con el fin de analizar su aplicabilidad y utilidad. Para ello, se abordan las principales formulaciones de optimización bajo incertidumbre consolidadas hasta la fecha en el área de optimización en ingeniería a saber: Optimización Basada en Confiabilidad (*RBDO, Reliability Based Design Optimization*), Optimización del Diseño Robusto (*RDO, Robust Design Optimization*), Optimización Bajo Riesgo (*RO, Risk Based Design Optimization*) y Optimización del diseño Robusto y basado en Confiabilidad (*RBRDO, Reliability Based Robust Design Optimization*). Adicionalmente se hizo una comparación de los resultados variando el algoritmo de optimización, para esto se usó: un algoritmo de búsqueda directa, un algoritmo basado en derivadas y un algoritmo genético. Se tomaron de la literatura ocho problemas (un problema matemático, un bastidor, un mecanismo, un sistema dinámico y cuatro problemas de estructuras). Para la formulación RDO los resultados muestran aplicabilidad alta en el 50% de los problemas y utilidad alta en el 63% de los problemas, destacando por su bajo costo computacional y robustez en la función objetivo. Para la formulación RBDO y RBRDO los resultados muestran una aplicabilidad alta en el 75% de los problemas y utilidad alta en el 50% de los problemas, destacando por su compromiso con el cumplimiento de la confiabilidad en las restricciones. Para la formulación RO los resultados muestran una aplicabilidad alta en el 38% de los problemas y utilidad alta en el 10% de los problemas, destacando por su equilibrio entre seguridad y economía (costo monetario).

**Palabras clave:** optimización basada en confiabilidad, optimización del diseño robusto, optimización bajo riesgo, algoritmos de optimización, incertidumbre, sistemas mecánicos, probabilidad de fallo.

## Abstract

In this research, the use of different formulations for the optimization under uncertainty of mechanical systems (machines and structures) was explored, in order to analyze their applicability and utility. To this end, the main optimization formulations under uncertainty consolidated to date in the area of engineering optimization are addressed, namely: Reliability Based Optimization (RBDO, Reliability Based Design Optimization), Robust Design Optimization (RDO) and Low Risk Optimization (RO, Risk Based Design Optimization). Additionally, a comparison of the results was made by varying the optimization algorithm, for this we used: a direct search algorithm, one based on derivatives and a genetic algorithm. To obtain the results, eight problems were taken from the literature (a mathematical problem, a frame, a mechanism, a mechanical system and 4 trusses). For the RDO formulation the results show high applicability in 50% of the problems and high utility in 63% of the problems. This stands out for its low computational cost and robustness in the objective function. For the RBDO formulation, the results show high applicability in 75% of the problems and high utility in 50% of the problems. It stands out for its commitment to complying with the reliability of the restrictions. For the RO formulation, the results show a high applicability in 38% of the problems and a high utility in 10% of the problems. This stands out for its balance between security and economy (monetary cost).

**Keywords:** Reliability-based optimization, Robust design optimization, risk optimization, optimization algorithms, uncertainty, mechanical systems, failure probability.

## **Objetivos**

### **Objetivo general**

- Evaluar la utilidad y la aplicabilidad de metodologías de optimización bajo incertidumbre en la optimización de máquinas y estructuras.

### **Objetivos específicos**

- Estudiar diferentes metodologías existentes de optimización estructural bajo incertidumbre para identificar las características de sus correspondientes formulaciones en relación a su utilidad y aplicabilidad.
- Caracterizar las diferentes metodologías de estimación de incertidumbre y los algoritmos de optimización empleados en la solución de las formulaciones de problemas de optimización de máquinas y estructuras bajo incertidumbre.
- Evaluar y comparar a través de la utilidad y la aplicabilidad del uso de algoritmos de optimización y técnicas de estimación de incertidumbre en problemas de optimización de máquinas y estructuras bajo incertidumbre.



## Justificación

En la actualidad el análisis y diseño de sistemas mecánicos han tenido un creciente interés por involucrar técnicas de optimización para lograr mejoras apreciables en el diseño y sus costos. La optimización de sistemas mecánicos generalmente parte de un planteamiento de modelos determinísticos, en los cuales no se tiene en cuenta las incertidumbres presentes en las variables de diseño de forma precisa, sino a través de factores de seguridad, penalizando el diseño óptimo obtenido, sobredimensionándolo y elevando su costo de construcción, incumpliendo las necesidades de alta confiabilidad.

Sin embargo, llevar esto a la práctica puede resultar en un diseño poco confiable, ya que existen sistemas mecánicos con una variabilidad apreciable en parámetros geométricos, propiedades mecánicas y/o condiciones de operación que deberían modelarse a través de la incertidumbre presente.

Algunos ejemplos de sistemas con alta variabilidad comprenden: vehículos aeroespaciales, carros, motos, vehículos sometidos a choques[4]–[6], estructuras de grande porte sometidas a cargas variables por viento y movimientos sísmicos [7]–[9] , sistemas mecánicos para obtención de energía (e.g. turbinas) [10], máquinas y otros sistemas multicuerpo sometidos a condiciones variables de operación[11], entre otros. En la actualidad, las metodologías de optimización bajo incertidumbre tienen desventajas en su aplicabilidad y utilidad, al no ser igual de efectivas en todos los campos de estudio (e.g. sistemas dinámicos y estructuras). Se debe tener en cuenta que el desempeño computacional es un factor importante en estas metodologías, esto se debe principalmente a que tanto las técnicas de estimación de incertidumbre y los algoritmos de optimización son procesos iterativos y computacionalmente intensivos.

Por ejemplo, la técnica de simulación por Monte Carlo[12] es una de las más precisas y antiguas, aunque puede requerir de millones de simulaciones para estimar la confiabilidad (probabilidad de falla). Posteriormente a Monte Carlo se desarrollaron técnicas avanzadas como *Subset Simulation*[13] y técnicas más recientes que usan modelos aproximados sustitutos, tales como la técnica de *Kriging*[14]. En la actualidad, se siguen desarrollando

nuevas técnicas eficientes como la técnica de caos polinomial[15], que es una técnica con un desempeño computacional superior a las otras técnicas.

Dentro de las metodologías de optimización bajo incertidumbre existen diferentes familias de algoritmos de optimización (e.g. heurísticos, de búsqueda directa, basados en gradientes), los cuales pueden intercambiarse para obtener mejoras en el rendimiento computacional[16], donde al ser acoplados a problemas de optimización de sistemas mecánicos bajo incertidumbre pueden favorecer o desfavorecer el desempeño computacional.

Por lo antes expuesto, en este contexto, el presente trabajo pretende responder y aportar información a la siguiente pregunta: **¿Cuál puede ser la mejor alternativa para hacer optimización bajo incertidumbre según la utilidad y aplicabilidad de las diferentes metodologías de optimización de sistemas mecánicos bajo incertidumbre?**

# Contenido

	Pág.
<b>Resumen .....</b>	<b>IX</b>
<b>Objetivos .....</b>	<b>XI</b>
<b>Justificación .....</b>	<b>XIII</b>
<b>Lista de figuras .....</b>	<b>XX</b>
<b>Lista de tablas .....</b>	<b>XXI</b>
<b>Introducción.....</b>	<b>1</b>
<b>1. Incertidumbre.....</b>	<b>3</b>
1.1 Tipos de incertidumbre.....	3
1.1.1 Incertidumbre aleatoria.....	3
1.1.2 Incertidumbre epistémica .....	4
1.1.3 Causas de la incertidumbre.....	4
<b>2. Algoritmos de optimización.....</b>	<b>7</b>
2.1 Algoritmos basados en derivadas.....	8
2.1.1 Algoritmo de punto interior ( <i>IPA, Interior Point Algorithm</i> ): .....	8
2.1.2 Algoritmo de programación cuadrática secuencial ( <i>SQP, sequential quadratic programming</i> ): .....	9
2.2 Algoritmos de búsqueda directa .....	10
2.3 Algoritmos bio-inspirados.....	11
2.3.1 Esquema del algoritmo[40].....	12
2.3.2 Población Inicial.....	12
<b>3. Optimización bajo incertidumbre.....</b>	<b>15</b>
3.1 Optimización del diseño basada en confiabilidad ( <i>RBDO, reliability-based design optimization</i> ) .....	16
3.1.1 Formulación básica de RBDO.....	17

3.2	Optimización basada en Riesgo ( <i>RO, Risk-based optimization</i> ) .....	21
3.2.1	Costo esperado de falla: .....	21
3.2.2	Formulación para optimización basada en Riesgo ( <i>RO, Risk-based optimization</i> ) .....	23
3.3	Optimización del diseño Robusto ( <i>RDO, Robust-design optimization</i> ) .....	24
3.3.1	Formulación para Optimización del diseño Robusto ( <i>RDO, Robust-design optimization</i> ) .....	24
3.4	Optimización del diseño Robusto y basado en Confiabilidad ( <i>RBRDO, Reliability based robust design optimization</i> ) .....	25
3.4.1	Formulación del diseño Robusto y Basado en Confiabilidad: .....	25

## **4. Aplicaciones.....29**

4.1	Entendiendo el Análisis de resultados .....	31
4.2	Aplicación Matemática .....	32
4.2.1	Formulación del diseño robusto (RDO) .....	33
4.2.2	Formulación basada en confiabilidad (RBDO) .....	33
4.2.3	Formulación del diseño robusta y basada en Confiabilidad (RBRDO) .....	33
4.2.4	Formulación bajo Riesgo (RO).....	33
4.2.5	Resultados.....	34
4.2.6	Análisis de resultados.....	37
4.3	Columna Corta .....	38
4.3.1	Formulación del diseño robusto (RDO): .....	39
4.3.2	Formulación basada en confiabilidad (RBDO) .....	39
4.3.3	Formulación del diseño robusto y basada en confiabilidad (RBRDO) .....	39
4.3.4	Formulación bajo Riesgo (RO).....	40
4.3.5	Resultados.....	40
4.3.6	Análisis de resultados.....	43
4.4	Bastidor .....	44
4.4.1	Formulación del diseño robusto (RDO): .....	46
4.4.2	Formulación basada en confiabilidad (RBDO) .....	46
4.4.3	Formulación del diseño robusto y Basada en confiabilidad (RBRDO).....	46
4.4.4	Formulación bajo Riesgo (RO).....	47
4.4.5	Resultados.....	47
4.4.6	Análisis de resultados Bastidor. ....	50
4.5	Mecanismo biela manivela o manivela corredera. ....	51
4.5.1	Formulación del diseño robusto (RDO): .....	53
4.5.2	Formulación basada en confiabilidad (RBDO) .....	53
4.5.3	Formulación del diseño robusto y Basada en confiabilidad (RBRDO).....	53
4.5.4	Formulación bajo Riesgo (RO).....	53
4.5.5	Resultados.....	54
4.5.6	Análisis de resultados biela manivela. ....	57
4.6	Amortiguador.....	57
4.6.1	Formulación del diseño robusto (RDO): .....	61
4.6.2	Formulación basada en confiabilidad (RBDO) .....	61
4.6.3	Formulación del diseño robusto y basada en confiabilidad (RBRDO) .....	62
4.6.4	Formulación bajo Riesgo (RO).....	62
4.6.5	Resultados.....	62
4.6.6	Análisis de resultados del amortiguador .....	66
4.7	Armadura de 10 barras .....	67

4.7.1 Formulación del diseño robusta (RDO): ..... 69

4.7.2 Formulación basada en confiabilidad (RBDO) ..... 69

4.7.3 Formulación del diseño robusta y basada en confiabilidad (RBRDO) ..... 70

4.7.4 Formulación bajo Riesgo (RO)..... 70

4.7.5 Resultados ..... 70

4.7.6 Análisis de resultados Armadura de 10 barras ..... 74

4.8 Armadura de 25 barras ..... 75

4.8.1 Formulación del diseño robusto (RDO): ..... 78

4.8.2 Formulación basada em confiabilidad (RBDO) ..... 78

4.8.3 Formulación del diseño robusto y Basada en confiabilidad (RBRDO)..... 79

4.8.4 Formulación bajo Riesgo (RO)..... 79

4.8.5 Resultados ..... 79

4.8.6 Análisis de resultados para la armadura de 25 barras. .... 83

4.9 Armadura 25 barras enfoque bajo Riesgo (RO)..... 83

4.9.1 Formulación del diseño robusto (RDO): ..... 86

4.9.2 Formulación basada en confiabilidad (RBDO) ..... 86

4.9.3 Formulación del diseño robusta y basada en confiabilidad (RBRDO) ..... 87

4.9.4 Formulación bajo Riesgo (RO)..... 87

4.9.5 Resultados ..... 87

4.9.6 Análisis de resultados Armadura de 25 Barras enfoque RO..... 91

4.9.7 Resumen de resultados para todos los problemas ..... 92

**5. Conclusiones ..... 97**

## Lista de figuras

Figura 2-1 Significado geométrico del vector de dirección en los métodos de programación cuadrática secuencial.[36].....	10
Figura 2-2 Exploración y búsqueda de patrones[36] .....	11
Figura 2-3 Población Inicial[40] .....	13
Figura 2-6 Población inicial y segunda generación[27] .....	14
Figura 3-1: Densidad de probabilidad para la función de estado limite $G(\cdot)$ , para un caso unidimensional. ....	17
Figura 3-2 ilustración de RIA (lado derechos) y PMA(lado izquierdo) .....	21
Figura 4-1 Función objetivo aplicación matemática. (Traducido [60]) .....	32
Figura 4-2 Resultados optimización para la formulación RDO.....	36
Figura 4-3 Resultados optimización para la formulación RO .....	37
Figura 4-4 Costo computacional aplicación matemática. ....	38
Figura 4-5 Resultados optimización para la formulación RDO.....	42
Figura 4-6 Resultados optimización para la formulación RBDO .....	42
Figura 4-7 Resultados optimización para la formulación RO .....	43
Figura 4-8 Costo computacional Columna Corta.....	44
Figura 4-9 Bastidor .....	44
Figura 4-10 Resultados optimización para la formulación RDO.....	49
Figura 4-11 Grafico de convergencia Resultados optimización para la formulación RBDO .....	49
Figura 4-12 Resultados optimización para la formulación RO .....	50
Figura 4-13 Mecanismo de Biela manivela .....	52
Figura 4-14 Resultados optimización para la formulación RDO.....	55
Figura 4-15 Grafico de convergencia de los resultados optimización para la formulación RBDO .....	56
Figura 4-16 Resultados optimización para la formulación RO .....	56
Figura 4-17 Costo computacional Biela Manivela.....	57
Figura 4-18 Amortiguador ( <i>TMD</i> )[7] .....	58
Figura 4-19 Resultados optimización para la formulación RDO.....	64
Figura 4-20 Grafico de convergencia para los resultados optimización para la formulación RBDO.....	65
Figura 4-21 Resultados optimización para la formulación RO .....	66
Figura 4-22 Costo computacional diseño de un amortiguador.....	67
Figura 4-23 Estructura plana articulada de 10 barras.....	67
Figura 4-24 Resultados optimización para la formulación RDO.....	73

---

Figura 4-25 Grafico de convergencia para los resultados optimización para la formulación RDO .....	73
Figura 4-26 Resultados optimización para la formulación RO .....	74
Figura 4-27 Costo computacional Armadura 10 barras .....	74
Figura 4-28 Estructura de 25 Barras .....	75
Figura 4-29 Resultados optimización para la formulación RDO.....	82
Figura 4-30 Grafico de convergencia para los resultados optimización para la formulación RBDO .....	82
Figura 4-31 Costo computacional armadura 25 barras. ....	83
Figura 4-32 Estructura de 25 barras Enfoque RO .....	84
Figura 4-33 los resultados optimización para la formulación RDO .....	90
Figura 4-34 Resultados optimización para la formulación RBDO .....	91
Figura 4-35 Costo computacional por formulación para la armadura de 25 barras con el enfoque bajo riesgo. ....	92
Figura 4-36 Costo computacional por formulación. ....	95

## Lista de tablas

Tabla 4-1: Resultados para cada una de las formulaciones de optimización bajo incertidumbre. ....	29
Tabla 4-2: Tabla ejemplo resultados de Optimización del diseño Robusto (RDO).....	29
Tabla 4-3: Tabla ejemplo resultados de Optimización del diseño bajo Riesgo (RO).....	30
Tabla 4-4 clasificación de los problemas por porte.....	31
Tabla 4-5 Datos estadísticos de las variables aleatorias para la Aplicación Matemática.	32
Tabla 4-6 Resultados de la literatura. ....	34
Tabla 4-7 Resultados optimización con un Algoritmo Genético bajo incertidumbre .....	34
Tabla 4-8 Resultados optimización con un Algoritmo de búsqueda directa bajo incertidumbre .....	35
Tabla 4-9 Resultados optimización con un Algoritmo Basado en derivadas bajo incertidumbre .....	35
Tabla 4-10 Resultados optimización para la formulación RDO.....	35
Tabla 4-11 Resultados optimización para la formulación RBDO .....	36
Tabla 4-12 Resultados optimización para la formulación RO.....	36
Tabla 4-13 Datos estadísticos de las variables aleatorias para el problema del diseño de la columna corta.....	39
Tabla 4-14 Resultados de la literatura. ....	40
Tabla 4-15 Resultados optimización con un Algoritmo Bio Inspirado bajo incertidumbre	41
Tabla 4-16 Resultados optimización con un Algoritmo de Búsqueda Directa bajo incertidumbre .....	41
Tabla 4-17 Resultados optimización con un Algoritmo Basado en derivadas bajo incertidumbre .....	41
Tabla 4-18 Resultados optimización para la formulación RDO.....	42
Tabla 4-19 Resultados optimización para la formulación RO.....	43
Tabla 4-20 Datos estadísticos de las variables aleatorias para el bastidor. ....	45
Tabla 4-21 Resultados de la literatura. ....	47
Tabla 4-22 Resultados optimización con un Algoritmo Genético bajo incertidumbre.....	48
Tabla 4-23 Resultados optimización con un Algoritmo de búsqueda directa bajo incertidumbre .....	48
Tabla 4-24 Resultados optimización con un Algoritmo Basado en derivadas bajo incertidumbre .....	48
Tabla 4-25 Resultados optimización para la formulación RDO.....	48
Tabla 4-26 Resultados optimización para la formulación RO.....	49
Tabla 4-27 Variables aleatorias para problema de Biela Manivela. ....	52
Tabla 4-28 Resultados optimización con un Algoritmo Genético bajo incertidumbre.....	54

Tabla 4-29 Resultados optimización con un Algoritmo de búsqueda directa bajo incertidumbre .....	54
Tabla 4-30 Resultados optimización con un Algoritmo Basado en derivadas bajo incertidumbre .....	54
Tabla 4-31 Resultados optimización para la formulación RDO .....	55
Tabla 4-32 Resultados optimización para la formulación RO.....	56
Tabla 4-33 Resultados de la literatura. ....	62
Tabla 4-34 Resultados optimización con un Algoritmo Genético bajo incertidumbre.....	63
Tabla 4-35 Resultados optimización con un Algoritmo de búsqueda directa bajo incertidumbre .....	63
Tabla 4-36 Resultados optimización con un Algoritmo Basado en derivadas bajo incertidumbre .....	64
Tabla 4-37 Resultados optimización para la formulación RDO .....	64
Tabla 4-38 Resultados optimización para la formulación RO.....	65
Tabla 4-39 Datos estadísticos de las variables aleatorias del problema de la estructura de 10 barras .....	68
Tabla 4-40 Resultados de la literatura. ....	70
Tabla 4-41 Resultados optimización con un Algoritmo Genético bajo incertidumbre.....	71
Tabla 4-42 Resultados optimización con un Algoritmo de Búsqueda Directa bajo incertidumbre .....	71
Tabla 4-43 Resultados optimización con un Algoritmo Basado en Derivadas bajo incertidumbre .....	72
Tabla 4-44 Resultados optimización para la formulación RDO .....	72
Tabla 4-45 Resultados optimización para la formulación RDO .....	73
Tabla 4-46 Grupo de elementos para la estructura de 25 barras.....	76
Tabla 4-47 Datos estadísticos de las variables aleatorias del problema de la estructura de 10 barras .....	76
Tabla 4-48 Resultados de la literatura. ....	79
Tabla 4-49 Resultados optimización con un Algoritmo Genético bajo incertidumbre.....	80
Tabla 4-50 Resultados optimización con un Algoritmo de búsqueda directa bajo incertidumbre .....	80
Tabla 4-51 Resultados optimización con un Algoritmo Basado en derivadas bajo incertidumbre .....	81
Tabla 4-52 Resultados optimización para la formulación RDO .....	81
Tabla 4-53 Grupo de elementos para la estructura de 25 barras.....	85
Tabla 4-54 Resultados de la literatura. ....	88
Tabla 4-55 Resultados optimización con un Algoritmo Genético bajo incertidumbre.....	88
Tabla 4-56 Resultados optimización con un Algoritmo de búsqueda directa bajo incertidumbre .....	88
Tabla 4-57 Resultados optimización con un Algoritmo Basado en derivadas bajo incertidumbre .....	89
Tabla 4-58 Resultados optimización para la formulación RDO .....	89
Tabla 4-59 Utilidad y Aplicabilidad en base a la formulación y algoritmo de optimización	93
Tabla 4-60 Resumen aplicabilidad y utilidad por formulación. ....	94

Tabla 4-61 Parámetros para los algoritmos de optimización usados por aplicación. .... 94

## Lista de Símbolos y abreviaturas

Símbolo	Definición
$a_n$	Aceleración máxima normalizada
$x$	Vector de variables de diseño
$X$	Vector de variables aleatorias
$c_T$	Coefficiente de amortiguación
$\theta$	Posición angular (radianes)
$A$	Área de la sección transversal
$S(X)$	Carga
$c_f$	Costo de Falla
$C_{ini}(d)$	Costo inicial
$C_T(x)$	Costo total
$d_{crit}$	Desplazamiento critico
$\sigma_G$	Desviación estándar de la función de estado límite
$q_v$	Desplazamiento nodal máximo
$J_{fi}$	Costo de incumplir la i-ésima restricción
$P[\cdot]$	Operador de probabilidad
$P_{fi}^t$	Probabilidad de falla admisible
$\sigma_k$	Tensión calculada en cada elemento por elementos finitos
$\sigma_k^{cr}$	Tensión critica de pandeo de Euler
$f_{yc}^i(x)$	Esfuerzo de pandeo de Euler
$\Phi(\cdot)$	Función de distribución acumulada
$G(X)$	Función de estado limite (Restricción probabilística)
$f(x)$	Función objetivo en formulación estándar
$J(x)$	Función objetivo en la formulación de los problemas
$\beta$	Índice de confiabilidad
$\beta_i^t$	Índice de confiabilidad objetivo
$I$	Momento de inercia de área
$P_k[\cdot]$	K-ésimo percentil
$f_y$	Modulo de elasticidad del material
$f_{yt}^i(x)$	Resistencia a fluencia del material
$m_T$	Masa
$\mu_G$	Media de la función de estado limite
$\alpha$	Percentil del diseño robusto
$p_f$	Probabilidad de falla
$u^*$	Punto más probable de falla
$R(X)$	Resistencia
$k_T$	Constante del resorte
$h(x)$	Restricción de igualdad determinística
$g(x)$	Restricción de desigualdad determinística

---

$f_{val}$	Valor de la función objetivo
$E [.]$	Valor esperado
$d^*$	Valor óptimo del vector $\mathbf{d}$
$f^*$	Valor óptimo de $f$
$x^*$	Valor óptimo del vector $\mathbf{x}$
$Var [.]$	Varianza
$\mathbf{d}$	Vector de variables de diseño
$\nabla f$	Vector gradiente de $f$
$\nabla g$	Vector gradiente de $g$
$\nabla h$	Vector gradiente de $h$
$\omega$	Velocidad angular



# Introducción

La cuantificación de la incertidumbre ha tomado gran fuerza en problemas donde la seguridad tiene gran importancia. Los sistemas mecánicos están sometidos a diferentes fuentes de incertidumbre en las geometrías, fuerzas externas y propiedades físicas de los materiales.

En términos más generales, la cuantificación de la incertidumbre es un campo que combina conceptos de matemática aplicada, ingeniería, métodos computacionales y estadística, produciendo metodologías y herramientas para tener mayor conocimiento de los sistemas reales que se modelan a través de los modelos computacionales

Como la incertidumbre es un concepto amplio, es posible y útil abordarlo de muchas maneras diferentes. Un enfoque bastante general que se ha aplicado con éxito a una amplia variedad de problemas es asignar explícita o implícitamente, una distribución de probabilidad a los diversos parámetros bajo incertidumbre. No hay implicación de que necesariamente exista una base estadística sólida para respaldar la elección de una distribución en particular.[17]

Actualmente es ampliamente reconocido que la optimización determinística no es robusta con respecto a las incertidumbres que afectan el diseño de ingeniería, entendiéndose optimización determinista como un modelo donde no se tiene en cuenta la incertidumbre. En la optimización determinística, los modos de falla potenciales del sistema de ingeniería se convierten en restricciones de diseño, y la incertidumbre se trata indirectamente, mediante coeficientes de seguridad y suposiciones conservadoras. Este enfoque es heredado del diseño a través de códigos de diseño, que es esencialmente no óptimo, ya que las decisiones son siempre conservadoras. Por lo tanto, los diseños óptimos deterministas son potencialmente menos seguros que sus contrapartes no óptimas.[18]

La importancia de considerar la incertidumbre presente en los sistemas de ingeniería dentro de un proceso de optimización llevó a la creación de diversas metodologías de optimización bajo incertidumbre. Dentro de estas metodologías sobresalen: optimización bajo riesgo (*RO, Risk-based Optimization*), optimización del diseño basada en confiabilidad

(*RBDO, Reliability-Based Design Optimization*) y optimización del diseño robusto (*RDO, Robust-Design Optimization*).

Generalmente la optimización del diseño robusto es usada en problemas de sistemas dinámicos como amortiguadores [7], [19], [20], mecanismos de biela manivela [7], [21], sistemas sometidos a vibraciones [21], [22], entre otros. Por otra parte los problemas que aborda la Optimización Basada en Confiabilidad, van enfocados hacia las estructuras en general [8], [14], [23], [24]. Por último, encontramos la optimización bajo riesgo que se aplica en problemas estructurales de gran porte para llegar a estructuras económicamente factibles incluyendo la cuantificación de la incertidumbre en la función objetivo. Algunos ejemplos de aplicación de esta metodología son: torres de transmisión eléctrica [25], [26] y estructuras en general [7], [26]–[28]. Estas tres formulaciones tienen características particulares, por ejemplo, RBDO busca mantener un alto margen de confiabilidad, RO aumenta el alcance del problema al incluir los costos esperados de falla en la función objetivo. De esta forma, la optimización de riesgos permite abordar los objetivos de economía y confiabilidad en el diseño de cualquier sistema de ingeniería [18]. El diseño robusto es un método importante para mejorar la respuesta de salida sea insensible (robusta) a variaciones (ruido) difíciles de controlar en la función objetivo [28].

# 1. Incertidumbre

La teoría de la probabilidad es el campo matemático que estudia los fenómenos caracterizados por la aleatoriedad y la incertidumbre. Los elementos centrales de la teoría de la probabilidad son las variables aleatorias, los procesos estocásticos y los eventos. En el momento de su desarrollo, el concepto de probabilidad era difícil de aplicar a sistemas complejos, porque las incertidumbres no eran fáciles de explicar, formular y manipular digitalmente[29]. El desarrollo de computadoras potentes ha hecho posible la solución numérica de problemas de sistemas grandes y complejos sujetos a incertidumbres. Por lo tanto, la aplicación de la teoría de la probabilidad en todos los campos de la ingeniería ha crecido en importancia en las últimas décadas. Los investigadores combinaron métodos de diseño tradicionales con métodos de cuantificación de incertidumbre. Estos nuevos métodos pueden proporcionar diseños robustos incluso en presencia de incertidumbres. Dichos métodos de análisis estocástico se han introducido en todas las áreas de la ciencia y la ingeniería (por ejemplo, física, meteorología, medicina, etc.).[29] La incertidumbre puede tener varios significados: la probabilidad de un evento, el nivel de confianza, la falta de conocimiento, la imprecisión, la variabilidad, etc. Una representación exacta de las incertidumbres es crucial, debido a que las diferentes representaciones pueden dar lugar a diferentes interpretaciones del sistema. Las características y limitaciones de las diferentes representaciones han llevado a una clasificación de la incertidumbre en dos categorías: aleatoria y epistémica.

## 1.1 Tipos de incertidumbre.

### 1.1.1 Incertidumbre aleatoria

Deriva su nombre de la palabra latina "*alea*" que se traduce como "el lanzamiento de los dados", se refiere a la incertidumbre sobre un fenómeno inherentemente variable.

Las incertidumbres aleatorias se refieren, por ejemplo, a la ocurrencia de los eventos que definen los diversos escenarios posibles de accidentes, el tiempo de falla de un componente o la variación aleatoria de las dimensiones geométricas reales y las propiedades del material de un componente o sistema; o la forma en cómo se llevó su construcción. Dos ejemplos de modelos probabilísticos clásicos utilizados para describir este tipo de incertidumbres son el modelo de Poisson para eventos que ocurren aleatoriamente en el tiempo (por ejemplo, variaciones aleatorias del estado operativo de una válvula) y el modelo binomial para eventos que ocurren "como consecuencia inmediata de un desafío "(por ejemplo, falla de una válvula de seguridad cuando la presión en un recipiente aumenta rápidamente) [30].

### 1.1.2 Incertidumbre epistémica

Deriva su nombre de la palabra griega "επιστήμη" (episteme) que se puede traducir como conocimiento, por lo tanto, se supone que la incertidumbre epistémica se deriva de la falta de conocimiento de la información sobre los fenómenos que dictan cómo debe comportarse un sistema, afectando en última instancia el resultado de un evento.

### 1.1.3 Causas de la incertidumbre.

Las diferentes causas de incertidumbre fueron resumidas y presentadas *por H.J. Zimmermann*[32], como se detalla a continuación:

- **Falta de información (o conocimiento):** la falta de información, conocimiento y / o datos sobre los fenómenos, sistemas y eventos a analizar es la principal fuente de incertidumbre: puede ser cuantitativa (por ejemplo, el analista no conoce el valor preciso de la probabilidad de un evento de interés determinado) o cualitativa (por ejemplo, el analista conoce las probabilidades de los eventos de interés, pero la información disponible no permite analizar una descripción determinista del problema).

- **Exceso de información (o conocimiento):** este tipo de incertidumbre se debe a la incapacidad humana de asimilar y elaborar muchos datos al mismo tiempo. En esta situación, el analista generalmente enfoca su atención solo en esos parámetros y datos que considera más importantes, descuidando a los demás. La identificación de un procedimiento riguroso (y posiblemente automatizado) para seleccionar (entre cientos o miles) los datos, la información y los parámetros relevantes para la aplicación en cuestión es el tema más crítico. El analista debe enfrentar este tipo de incertidumbre cuando, por ejemplo, tiene que elegir entre diferentes modelos para simular un fenómeno dado.
  
- **Naturaleza conflictiva de piezas de información / datos:** puede ocurrir que algunas piezas de información y datos disponibles sugieran un comportamiento dado del sistema, mientras que otros sugieren uno diferente. En este caso, aumentar la cantidad de información y datos disponibles no disminuiría la incertidumbre, sino que aumentaría el conflicto entre diferentes piezas de información y datos. Este conflicto puede deberse al hecho de que i) algunos datos están afectados por errores, pero el analista no puede identificarlos, ii) algunos de los datos disponibles no son relevantes para el problema en cuestión o iii) el modelo del sistema utilizado por el analista no es correcto (por ejemplo, se presenta sesgo). Nuevamente, para reducir esta fuente de incertidumbre, el analista debe hacer una elección precisa entre los datos disponibles y posiblemente descartar algunos de ellos para reducir el conflicto.
  
- **Errores de medición:** este se presenta cuando la medición de una cantidad física (temperaturas, pesos, longitudes, etc.) siempre se ve afectada por la incertidumbre debido a i) la imprecisión del analista que realiza la medición o ii) la tolerancia mecánica del instrumento adoptado.



## 2. Algoritmos de optimización

La optimización es el proceso de maximizar o minimizar una función objetivo deseada mientras se satisfacen las restricciones prevalecientes. En muchas ocasiones un pequeño ahorro de material en una parte producida en masa dará como resultado ahorros sustanciales para la corporación. En los vehículos, la minimización del peso puede afectar la eficiencia del combustible, el aumento de la carga útil o el rendimiento. Se deben utilizar recursos materiales o laborales limitados para maximizar las ganancias. A menudo, la optimización de un proceso de diseño ahorra dinero a una empresa simplemente reduciendo el tiempo de desarrollo.

Por lo tanto, la optimización numérica resuelve el problema general: encontrar el conjunto de variables de diseño,  $X$ , que:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } F(X) && (2.1) \\ & \text{sujeto a:} \\ & g_i(X) \leq 0 && \dots \quad j = 1, M \\ & X_i^L \leq X_i \leq X_i^U && \dots \quad i = 1, n \\ & h_k(X) = 0 && \dots \quad j = 1, L \end{aligned}$$

La función  $F(X)$ , se conoce como la función objetivo y depende de los valores de las variables de diseño,  $X$ , que a su vez incluyen las dimensiones de los miembros o los límites en las variables o dados por  $X_i^L \leq X_i \leq X_i^U$ , se conocen como restricciones laterales y se usan para limitar la región de búsqueda para el óptimo; por ejemplo, no tendría sentido permitir que el espesor de pared de un tubo tomara valores negativos o sobredimensionados. En algunos problemas también se puede encontrar restricciones de igualdad definida como  $h_k(X)$ .

La función o funciones  $g_i(X)$  son denominadas restricciones de desigualdad y proporcionan límites en las respuestas de la función objetivo. Como ejemplo una restricción común es los límites impuestos a las tensiones presentes en una estructura; entonces, si

$\bar{\sigma}$  es el límite superior permitido en la tensión, la restricción puede ser escrita, de manera normalizada, como:

$$\frac{\sigma_{ijk}}{\bar{\sigma}} - 1 \leq 0 \quad (2.2)$$

$i = \text{elementos}$

$j = \text{componentes bajo tension}$

$k = \text{condicion de carga}$

Los algoritmos de optimización comparados en este trabajo e implementados en cada una de las formulaciones y problemas aplicados corresponden a algoritmos basados en derivadas, algoritmos de búsqueda directa, y algoritmos bioinspirados; incluyendo los algoritmos más representativos de cada categoría.

## 2.1 Algoritmos basados en derivadas

Para este trabajo se seleccionaron dos algoritmos de optimización para de esta familia; se seleccionaron el algoritmo de punto interior (*IPA, Interior Point Algorithm*) y el algoritmo de programación cuadrática secuencial (*SQP, sequential quadratic programming*). Estos se seleccionan por ser robustos y permitir cambiar sus parámetros:

### 2.1.1 Algoritmo de punto interior (*IPA, Interior Point Algorithm*):

En 1984[33] *Karmarkar* en su artículo introdujo un algoritmo de punto interior que el cual presenta de manera polinomial su convergencia, esto quiere decir que, se demuestra que la convergencia depende de  $n^a$  en oposición a un algoritmo exponencial que depende de  $\beta^n$ , donde  $n$  es la dimensión de problema.

Para entender este algoritmo se definirá de su forma estándar a continuación:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar } c^T x & (2.3) \\ & \text{s. a.: } Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Donde  $n$  es el número de variables en  $x$  y  $m$  es el número de restricciones que corresponden al número de filas en  $A$ . Las filas en  $A$  dan las direcciones normales a las restricciones. Por lo tanto, las columnas de  $A^T$  son normales las restricciones.  $c$  es la dirección de incremento. La ecuación (2.3 muestra un problema típico de dos variables.

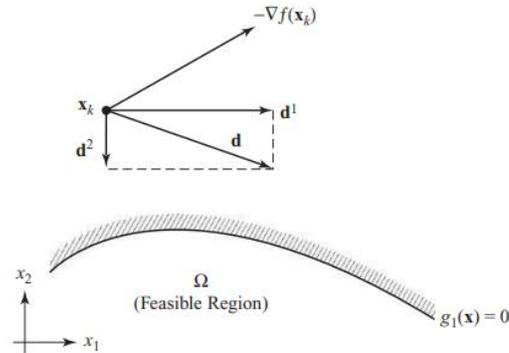
### 2.1.2 Algoritmo de programación cuadrática secuencial (SQP, *sequential quadratic programming*):

Los métodos de programación secuencial cuadrática (SQP) han recibido mucha atención en los últimos años debido a su tasa superior de convergencia[34]. Si bien los métodos SQP pueden interpretarse como el método de Newton aplicado a la solución de las condiciones de KKT. El método dado a continuación fue publicado por primera vez por *Pshenichny* en 1970[35], llamaron a su método SQP como "método de linealización" y probaron la convergencia bajo ciertas condiciones. Existen muchas variaciones de los métodos SQP en la literatura. El Algoritmo de programación cuadrática secuencial (QP, *Quadratic programming*) discutido aquí tiene elementos que lo convierten en atractivo como: el punto de partida puede ser inviable, solo se necesitan gradientes de restricciones activas y se pueden manejar las restricciones de igualdad además de las restricciones de desigualdades. Al igual que con todos los métodos de gradiente, hay dos tareas: búsqueda de dirección o "a dónde ir" en el espacio de diseño, y selección de tamaño de paso o "qué tan lejos ir". Entonces se obtiene un punto de diseño nuevo y mejorado como  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ . En este método, el vector de dirección en un punto dado  $x_k$  se determina a partir de la resolución de un subproblema de programación cuadrática QP (*Quadratic Programming*):

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } & \frac{1}{2} d^T d + \nabla f^T d & (2.4) \\ \text{s. a.: } & \nabla g_i^T d + g_i^k \leq 0 \quad \dots \quad i \in I_1 \\ & \nabla h_i^T d + h_i^k \leq 0 \quad \dots \quad i \in I_2 \\ & x^L \leq d + x_k \leq x^U \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que  $d_i, i = 1, \dots, n$  son variables en el QP mencionado anteriormente. Denotaremos la solución al QP anterior como  $d_k$ . Los vectores de gradiente  $\nabla f, \nabla g$  y  $\nabla h$  se evalúan en  $x_k$ . Como se muestra en la Figura 2-1.

**Figura 2-1** Significado geométrico del vector de dirección en los métodos de programación cuadrática secuencial.[36]

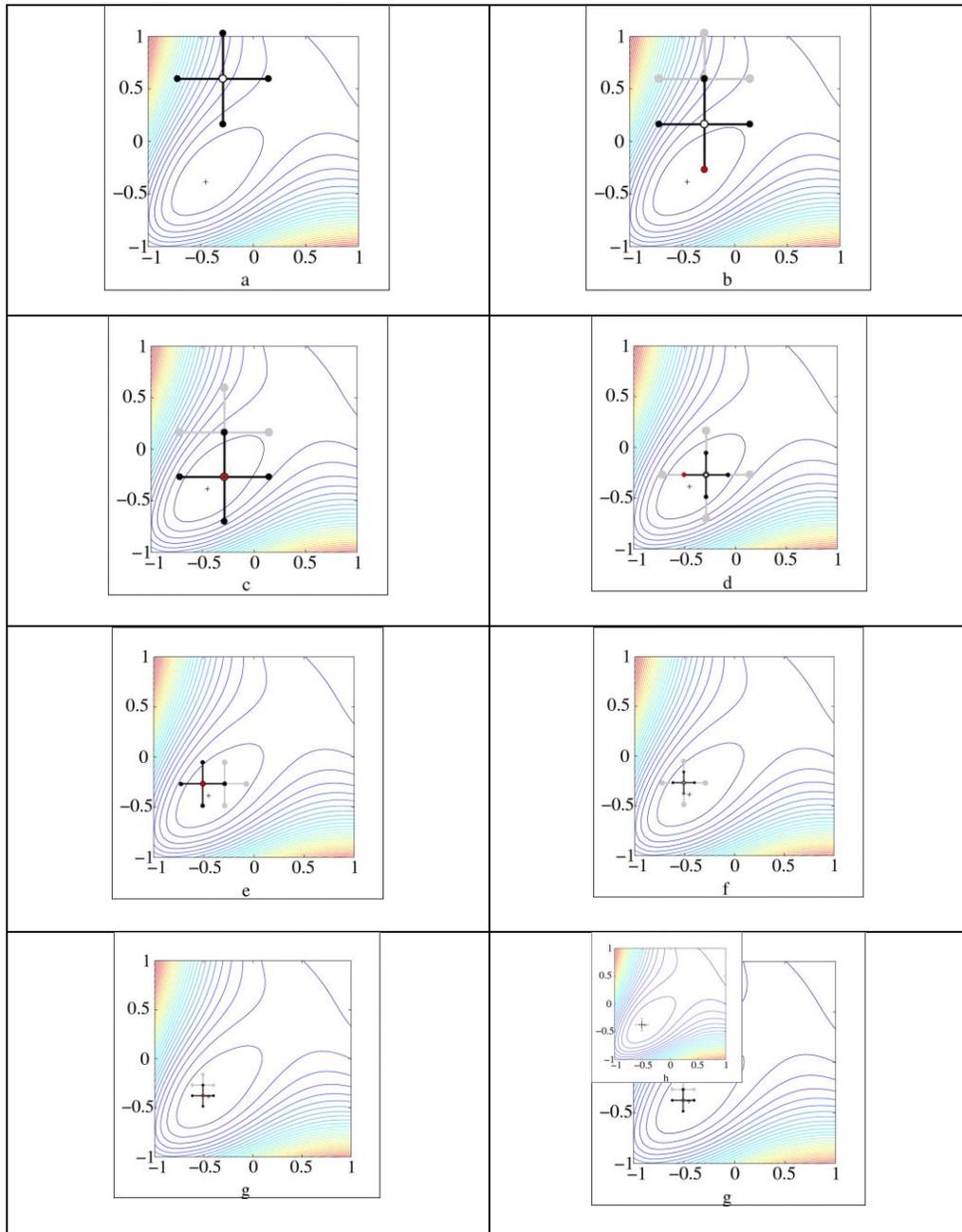


Los algoritmos basados en gradientes usados en este trabajo son implementados en la versión del algoritmo que está disponible en el *toolbox* de optimización de Matlab®, que corresponde a la referencia [37], el cual aplica técnicas de programación cuadrática secuencial (*SQP, sequential quadratic programming*), y usa la metodología de la región de confianza (*TR, trust región*), para asegurar la robustez y permitir el uso directo de derivadas de segundo orden.

## 2.2 Algoritmos de búsqueda directa

Este algoritmo elige un tamaño de paso inicial y la búsqueda se inicia desde un punto de partida dado[38]. El método implica pasos de exploración y búsqueda de patrones; el tamaño del paso puede elegirse en el rango de 0.05 a 1. Se pueden probar valores más allá de 1. La búsqueda se inicia desde el punto definido por el usuario, la primera exploración se hace desde el punto inicial, si la exploración no es exitosa sobre el punto base, el paso se reduce y regresa a su punto base para volver hacer la exploración en otra dirección. Si la exploración es exitosa (es exitosa cuando el nuevo punto explorado obtiene un valor óptimo menor al anterior)(ver figura Figura 2-2), la dirección del patrón se mantiene y continúa explorando en esa dirección, y este nuevo punto de exploración se convierte en el punto base, el cual es nuevamente explorado, hasta llegar a un punto óptimo donde no puede explorar más óptimos como se muestra en la

Figura 2-2 Exploración y búsqueda de patrones[36]



### 2.3 Algoritmos bio-inspirados

Los algoritmos genéticos son otra técnica de optimización que extrae su analogía de la naturaleza. El proceso de evolución natural intrigó a *John Holland* de la Universidad de Michigan a mediados de la década de 1960 [39]. Desarrolló técnicas computacionales que simularon el proceso de evolución y las aplicó a la programación matemática. Los

algoritmos genéticos giran en torno a los procesos de reproducción genética y las estrategias de "supervivencia del más apto". Los algoritmos genéticos siguen el orden natural de emular la evolución de las especies a partir de la recombinación de los genes buscando favorecer la supervivencia de la especie al privilegiar la reproducción del individuo más fuerte (que mejor se adapta). El problema para GA se define normalmente así:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar: } f(x) && (2.5) \\ & \text{s. a.: } l_i \leq x_i \leq u_i \quad i = 1 \text{ a } n \end{aligned}$$

### 2.3.1 Esquema del algoritmo.

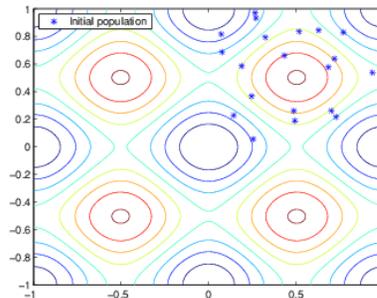
El siguiente esquema resume cómo funciona el algoritmo genético[40]:

1. El algoritmo comienza creando una población inicial aleatoria.
2. El algoritmo luego crea una secuencia de nuevas poblaciones. En cada paso, el algoritmo usa a los individuos de la generación actual para crear la siguiente población. Para crear la nueva población, el algoritmo realiza los siguientes pasos:
  - a. Califica a cada miembro de la población actual calculando su valor de aptitud. Estos valores se denominan puntajes de aptitud física sin procesar.
  - b. Escala los puntajes brutos de aptitud para convertirlos en un rango de valores más utilizable. Estos valores escalados se denominan valores esperados.
  - c. Selecciona miembros, llamados padres, en función de sus expectativas.
  - d. Algunos de los individuos en la población actual que tienen una condición física más baja son elegidos como *élite*. Estos individuos de élite pasan a la siguiente población.
  - e. Produce descendientes de los padres. Los descendientes se producen ya sea haciendo cambios aleatorios en un solo padre (mutación) o combinando las entradas de vector de un par de padres (cruzados).
  - f. Reemplaza la población actual con los niños para formar la próxima generación.
3. El algoritmo se detiene cuando se cumple uno de los criterios de detención.

### 2.3.2 Población Inicial

El algoritmo comienza creando una población inicial aleatoria, como se muestra en la siguiente Figura 2-3:

**Figura 2-3 Población Inicial[40]**



En este ejemplo, la población inicial contiene 20 individuos. Todos los individuos en la población inicial se encuentran en el cuadrante superior derecho de la imagen, es decir, sus coordenadas se encuentran entre 0 y 1. Para este ejemplo, el rango inicial en las opciones de Población es [0;1].

Si sabe aproximadamente dónde se encuentra el punto mínimo para una función, debe establecer el rango inicial para que el punto se encuentre cerca del medio de ese rango. Por ejemplo, si cree que el punto mínimo para la función de está cerca del punto [0 0], puede establecer el Rango inicial en [-1;1]. Sin embargo, como muestra este ejemplo, el algoritmo genético puede encontrar el mínimo incluso con una elección menos que óptima para el rango inicial.

### 2.3.3 Creando la próxima generación

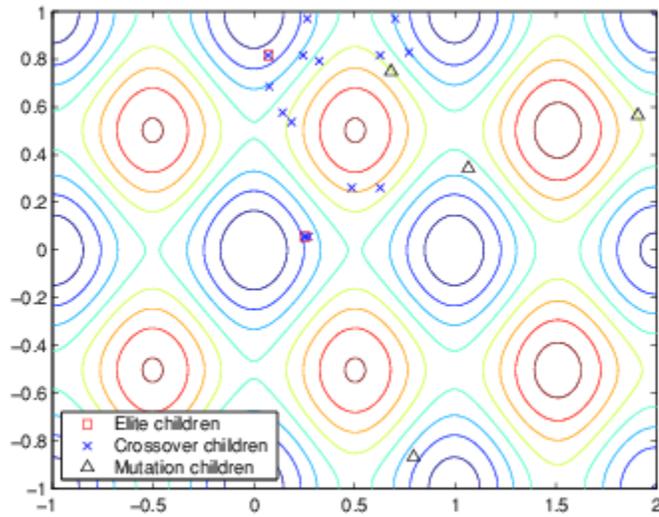
En cada paso, el algoritmo genético utiliza la población actual para crear la población que conforman la próxima generación. El algoritmo selecciona un grupo de individuos en la población actual, llamados padres, que contribuyen con sus genes, las entradas de sus vectores, a sus hijos. El algoritmo generalmente selecciona individuos que tienen mejores valores de condición física como padres. Puede especificar la función que utiliza el algoritmo para seleccionar los padres.

El algoritmo genético crea tres tipos de población para la próxima generación:

- Elite son las personas de la generación actual con los mejores valores de condición física. Estas personas sobreviven automáticamente a la próxima generación.
- Los crossover se crean combinando los vectores de un par de padres.
- Los niños mutantes se crean mediante la introducción de cambios aleatorios, o mutaciones, a un solo padre.

La siguiente figura muestra la población inicial, es decir, la población de la segunda generación.

**Figura 2-4** Población inicial y segunda generación[27]



### **3.Optimización bajo incertidumbre**

Actualmente se reconoce ampliamente que la optimización determinística no es robusta con respecto a las incertidumbres que afectan el diseño de ingeniería. En la optimización determinística, los modos de falla potenciales del sistema de ingeniería diseñado se convierten en restricciones de diseño, y la incertidumbre se aborda indirectamente, por medio de coeficientes de seguridad y supuestos conservadores. Este enfoque se hereda del diseño a través de códigos de diseño, que es esencialmente no óptimo (ya que las aproximaciones siempre son conservadoras). Por lo tanto, los diseños óptimos deterministas son potencialmente menos seguros que sus contrapartes deterministas. El reconocimiento de que el diseño óptimo debe ser robusto con respecto a las incertidumbres que afectan su desempeño condujo a distintas filosofías de optimización bajo incertidumbre, tales como: minimización de expectativas, minimización de desviaciones de los objetivos, minimización de costos máximos e inclusión de restricciones probabilísticas.[18], [41].

Las principales técnicas utilizadas para tener en cuenta las incertidumbres en la optimización son: programación estocástica y optimización del diseño basada en la fiabilidad. La optimización estocástica aborda la minimización de algunas respuestas del sistema, como la media, la desviación, y se ha empleado ampliamente en la planificación de la producción, logística, gestión de recursos, telecomunicaciones, finanzas y gestión de riesgos, entre otras áreas.[18] En la aplicación a problemas de ingeniería, la optimización estocástica se ha denominado optimización robusta [20], [22], [28], [42]–[44]. Los objetivos típicos para una optimización robusta son la maximización del rendimiento medio y la minimización de la varianza de la respuesta.

En la optimización estocástica o robusta, las incertidumbres se representan probabilísticamente, utilizando variables aleatorias. El enfoque probabilístico requiere información sobre las probabilidades de los eventos.

En la Optimización de diseño basada en confiabilidad (RBDO)[45]–[49], se busca la minimización de alguna función objetivo que generalmente implica costos de material o de fabricación, o la maximización del rendimiento del sistema, sujeto a restricciones en las probabilidades de falla. La formulación RBDO aborda explícitamente las incertidumbres que afectan el rendimiento del sistema y garantiza que el diseño óptimo mantenga un nivel de seguridad especificado.

La optimización del riesgo RO[25], [25], [27], [30], [50] aumenta el alcance del problema al incluir los costos esperados de falla en la función objetivo. De esta manera, la optimización de riesgos permite abordar el equilibrio entre economía y seguridad en el diseño de cualquier sistema de ingeniería. El objetivo de este capítulo es presentar los principales enfoques para la optimización de los sistemas de ingeniería en presencia de incertidumbre.

### 3.1 Optimización del diseño basada en confiabilidad (*RBDO, reliability-based design optimization*)

La optimización basada en confiabilidad tiene como objetivo buscar el mejor compromiso entre costo y seguridad por medio del control de las incertidumbres presentes en el proceso de diseño. Dentro de los diferentes métodos de RBDO, la estimación de la confiabilidad puede ser calculada por medio de la probabilidad de falla del sistema o a través del índice de confiabilidad.

Los métodos de cálculo de confiabilidad tienen como objetivo principal la evaluación de la probabilidad de fallo estructural al determinar si se superan los límites representados por las funciones de estado límite<sup>1</sup> [6]. Generalmente, en RBDO para el caso de estructuras la función de estado límite se puede definir como el margen de seguridad que hay entre la resistencia y la carga de una estructura. De esta manera la función de estado límite  $G(\cdot)$  y la probabilidad de fallo  $P_f$  se pueden definir como[51]:

$$G(X) = R(X) - S(X) \quad (3.1)$$

$$P_f = P[G(\cdot) < 0] \quad (3.2)$$

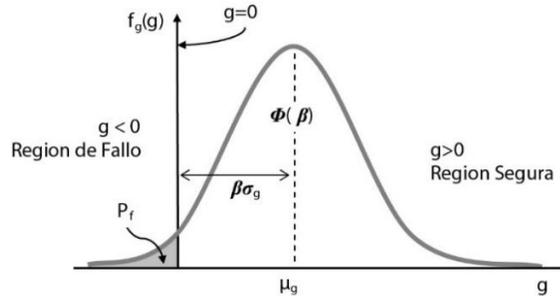
Donde  $R$  es la resistencia y  $S$  es la carga a la que está sometido el sistema. Tanto la resistencia  $R(\cdot)$  como la sollicitación  $S(\cdot)$  son funciones de las variables aleatorias  $X$ , por

---

<sup>1</sup> Se conoce como estado límite a la condición específica a partir de la cual la estructura o parte de esta es incapaz de desempeñarse como se requiere.

lo que la notación  $G(\cdot) < 0$  denota la región de fallo,  $G(\cdot) = 0$  indica la superficie de falla (estado limite) y  $G(\cdot) > 0$  representa la región segura como se muestra en la Figura 3-1.

**Figura 3-1:** Densidad de probabilidad para la función de estado limite  $G(\cdot)$ , para un caso unidimensional.



Para el caso especial con  $G(X)$  lineal, variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas, el índice de confiabilidad ( $\beta$ ) puede ser calculado como:

$$\beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \quad (3.3)$$

donde  $\mu_G$  representa la media y  $\sigma_G$  la desviación estándar de la función de estado límite  $G(X)$ .

Para el caso en que  $G(X)$  es no lineal,  $\mu_G$  y  $\sigma_G$  se obtienen a través de la linealización de la función  $G(X)$  a través de la expansión en serie de Taylor de primer orden. Este método se conoce como método de valor medio (*MVFOSM, mean value first-order second moment*), por lo que  $\mu_G$  y  $\sigma_G$  se calculan como [52], [53]:

$$\mu_G = G(\mu_X) \quad (3.4)$$

$$\sigma_G = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G(\mu_X)}{\partial X_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

### 3.1.1 Formulación básica de RBDO

La formulación general para un problema de *RBDO* consiste en minimizar la función objetivo sujeta a restricciones probabilísticas. En esta formulación hay dos tipos de variables: variables de diseño  $\mathbf{d}$  y variables aleatorias  $\mathbf{X}$ . Un problema de optimización estructural basada en confiabilidad se representa matemáticamente como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}}: & J(\mathbf{d}, \mathbf{X}) & (3.6) \\ \text{s. a.:} & \begin{cases} P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{d}$  es el vector de variables de diseño,  $\mathbf{X}$  es el vector de variables aleatorias,  $J$  es la función objetivo,  $G_i$  es la  $i$ -ésima función de estado límite,  $h_j$  son las restricciones determinísticas,  $P[\cdot]$  es el operador de probabilidad,  $P_{fi}^t$  es la probabilidad de fallo admisible,  $m$  es el número de funciones de estado límite y  $M$  es el número total de restricciones. Las restricciones determinísticas generalmente son límites inferiores y superiores de las variables de diseño. Las restricciones probabilísticas definen la región factible al restringir la probabilidad de fallo en el estado límite  $G_i$  por el valor objetivo  $P_{fi}^t$ , donde la probabilidad de fallo puede ser calculada por la siguiente integral:

$$P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] = \int \dots \int_{G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.7)$$

donde  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$  es la función de densidad de probabilidad acumulada de las variables aleatorias  $\mathbf{X}$ . Es poco práctico calcular esta integral de manera exacta. Para resolver un problema de RBDO en la actualidad existen diferentes enfoques, que se pueden clasificar por su formulación de la siguiente forma[54]:

- **Dos niveles:** La solución directa del problema RBDO (3.6) viene dada por un enfoque de dos niveles, donde el ciclo externo tiene como objetivo resolver el problema de optimización en términos de las variables de diseño  $\mathbf{d}$  y el ciclo interno tiene como objetivo resolver el problema de confiabilidad en términos de variables aleatorias  $\mathbf{X}$ . Con el fin de reducir el esfuerzo de cálculo, se han propuesto dos formulaciones principales para tratar las restricciones probabilísticas:
  - El enfoque del índice de confiabilidad (*RIA, The reliability index approach*)
  - El enfoque de la medida del rendimiento (*PMA, The performance measure approach*)

- **Mono nivel:** En RBDO de nivel único se genera un análisis a través de las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker donde se considera el costo total esperado al incluir los costos de falla esperados y se puede resolver mediante estas dos técnicas:
  - Karush-Kuhn-Tucker (*KKT, Karush-Kuhn-Tucker*)
  - Enfoque de bucle único (*SLA, Single loop approach*)
- **Desacoplado:** Aunque la optimización del diseño basada en la confiabilidad es diferente del diseño estructural determinista, es posible utilizar las ventajas de la optimización determinista para resolver el problema RBDO. La idea de los enfoques de RBDO desacoplados radica en transformar el RBDO en una secuencia de ciclos de optimización deterministas, incluido un análisis de confiabilidad independiente que permita actualizar el espacio de diseño admisible. Por lo tanto, las restricciones de la optimización determinista están relacionadas con los análisis de confiabilidad realizados (o cualquier análisis equivalente) para definir el espacio confiable donde se debe buscar el diseño óptimo. En estos enfoques, el diseño generalmente mejora en cada ciclo hasta la convergencia. El principal desafío radica en la especificación del problema RBDO equivalente que permite alcanzar la precisión adecuada a través de alguna de las siguientes técnicas:
  - Optimización secuencial y evaluación de confiabilidad (*SORA, Sequential optimization and reliability assessment*)
  - (SAP, Sequential approximate programming)

Para el presente estudio vamos a profundizar en RIA y PMA que son de interés para resolver las aplicaciones propuestas.

- **El enfoque del índice de confiabilidad (RIA, The reliability index approach)**

La aproximación del índice de confiabilidad (*RIA, reliability index approach*) [49] usa el método *FORM (First Order Reliability Method)* a través del algoritmo Hasofer and Lind (HL)[55] para el análisis de confiabilidad. Dentro de las formulaciones de *RBDO*, *RIA* es una de las aproximaciones clásicas del índice de confiabilidad y se define matemáticamente como:

$$\begin{aligned} \min_d: C(d) & \quad (3.8) \\ \text{s. a.: } & \begin{cases} \beta_i(d, X) \geq \beta_i^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(d) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases} \end{aligned}$$

Donde  $\beta_i$  y  $\beta_i^t$  son el índice de confiabilidad calculado y el índice de confiabilidad objetivo respectivamente para la  $i$ -ésima función de estado limite. Para transformar las variables aleatorias  $X$  en variables normalizadas no correlacionadas  $U$  (i.e  $U_i = \Phi^{-1}[f_{X_i}(X_i)] = T(X_i)$ )[6], el índice de confiabilidad se calcula resolviendo el problema de optimización restringida:

$$\begin{aligned} \min_u \|u\| & \quad (3.9) \\ \text{s. a.: } G_i(u) \leq 0 \end{aligned}$$

La solución de  $u^*$  es el punto más probable de falla (*MPFP, most probable failure point*), y el índice de confiabilidad está dado por  $\beta_i = \|u^*\|_i$ . La probabilidad de fallo de acuerdo con la aproximación de *FORM* está dada por:  $P_{fi} = \Phi(-\beta_i)$  donde  $\Phi(\cdot)$  es la función de distribución acumulada. Esta formulación RBDO tiene la ventaja de ser fácil de implementar en cualquier software de optimización de uso general.

- **El enfoque de la medida del rendimiento (PMA, The performance measure approach)**

El enfoque de medición del rendimiento se basa en el principio de que minimizar una función compleja bajo restricciones simples es más eficiente que minimizar una función simple bajo restricciones complejas. Por lo tanto, el PMA viene dado por un análisis inverso de confiabilidad:

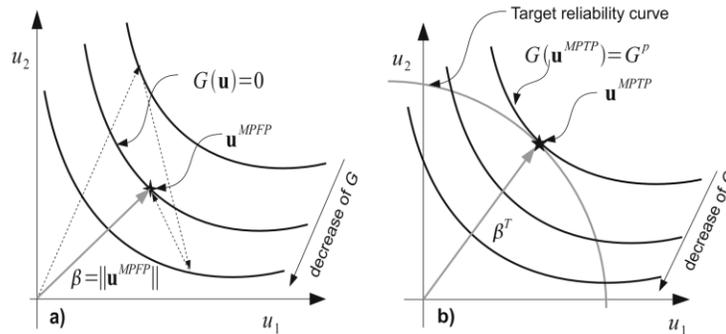
$$\begin{aligned} \min_d: C(d) & \quad (3.10) \\ \text{s. a.: } & \begin{cases} G_i^p \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(d) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases} \end{aligned}$$

Donde  $G_i^p$  es la medida del rendimiento que corresponde al objetivo del índice de fiabilidad  $\beta_i^t$  evaluado mediante un análisis de confiabilidad inverso, buscando el punto de falla correspondiente al desempeño más bajo que satisfaga el índice de confiabilidad objetivo:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} G_i(\mathbf{u}) & \quad (3.11) \\ \text{s. a. : } \|\mathbf{u}\| &= \beta_i^t \end{aligned}$$

Donde la solución es llamada punto objetivo de rendimiento mínimo (*MPTP*, *minimum performance target point*), donde  $\mathbf{u}^T = \mathbf{T}(\mathbf{x}^{*T})$ . La medida de rendimiento está dada por  $G_i^p = G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}^{*T})$ , donde  $\mathbf{x}^{*T}$  es la imagen de  $\mathbf{u}^{*T}$  en el espacio físico.

**Figura 3-2** ilustración de RIA (lado derechos) y PMA(lado izquierdo)



Como se muestra en la Figura 3-2, el esquema de búsqueda de PMA consiste en explorar el hyper-espacio con radio igual al índice de confiabilidad objetivo, contrario a RIA donde  $\mathbf{u}^*$  se busca bajo condición de estado límite negativo o cero (3.7). En el punto de solución  $\mathbf{u}^{*T}$ , la superficie de estado límite  $G_i$  es tangente a la hiperesfera con radio  $\beta_i^t$ . [54]

## 3.2 Optimización basada en Riesgo (RO, Risk-based optimization)

Para poder entender la optimización basada en riesgo es necesario primero definir ciertos conceptos que están involucrados en dicha metodología.

### 3.2.1 Costo esperado de falla:

El costo del ciclo de vida de un sistema estructural sujeto a falla puede descomponerse en un costo inicial o de construcción, costo de operación, costo de inspecciones y mantenimiento, costo de disposición y costos esperados de falla. Para cada posible modo de falla del sistema, el costo esperado de falla ( $C_{EF}$ ), o riesgo de falla, viene dado por el producto de un costo de falla ( $cf$ ) por una probabilidad de falla:

$$C_{EF}(\mathbf{d}) = cf(\mathbf{d})P_f(\mathbf{d}) \quad (3.12)$$

Los costos de falla incluyen los costos de reparar o reemplazar miembros estructurales dañados, quitar una estructura colapsada, reconstruirla, costo de indisponibilidad, costo de compensación por lesiones o muerte de empleados o usuarios en general, sanciones por daños ambientales, etc. En (3.12), todas las consecuencias del fracaso deben expresarse en términos de unidades monetarias. Esto puede ser un problema cuando se trata de lesiones humanas, muerte humana o daños ambientales. La evaluación de tales consecuencias del fracaso en términos del monto de los pagos de compensación puede permitir que se formule el problema, sin abordar directamente los asuntos sobre el valor de la vida humana[50], [57]. En otros problemas, los costos del fracaso pueden ser intangibles y difíciles de traducir a unidades monetarias; para tales problemas, la formulación de optimización de riesgos puede no aplicarse. Para cada modo de falla del sistema, hay un término de costo de falla correspondiente. El costo total o ciclo de vida esperado ( $C_{ET}$ ) de un sistema estructural se convierte en:

$$\begin{aligned} (C_{ET}) = & C_{inicial}(\mathbf{d}) \\ & + C_{operacion}(\mathbf{d}) \\ & + C_{inspeccion\ y\ mantenimiento}(\mathbf{d}) \\ & + C_{disposicion}(\mathbf{d}) \\ & + \sum_{\text{modos de falla}} cf(\mathbf{d}) P_f(\mathbf{d}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

El costo inicial o de construcción aumenta con los coeficientes de seguridad utilizados en el diseño y con el nivel practicado de garantía de calidad. Más seguridad en la operación implica más equipos de seguridad, más redundancia y más conservadurismo en la operación. El costo de la inspección depende de los intervalos, la elección del método de inspección y la calidad del equipo. Los costos de mantenimiento dependen del plan de mantenimiento, la frecuencia del mantenimiento preventivo, etc. Cuando se aumenta el nivel general de seguridad, la mayoría de los términos de costos aumentan, pero los costos esperados de la falla se reducen. Es probable que cualquier cambio en ( $\mathbf{d}$ ) que afecte los términos de costo afecte el costo esperado de la falla. Los cambios en ( $\mathbf{d}$ ) que reducen los costos pueden generar mayores probabilidades de falla; por lo tanto, aumente los costos esperados de falla. La reducción en los costos de falla esperados se puede lograr mediante cambios específicos en ( $\mathbf{d}$ ), que generalmente aumentan los costos. Este compromiso

entre seguridad y costos es típico de los sistemas estructurales y mecánicos. Genéricamente, también se puede ver como un compromiso entre seguridad y rendimiento.[7]

### 3.2.2 Formulación para optimización basada en Riesgo (RO, Risk-based optimization)

En Optimización de Diseño Basado en Confiabilidad (RBDO), se busca la minimización de alguna función objetiva que involucre costos de materiales o fabricación, o la maximización del rendimiento del sistema, sujeto a restricciones en las probabilidades de falla. La formulación RBDO aborda explícitamente las incertidumbres que afectan el rendimiento del sistema y garantiza un nivel mínimo de seguridad especificado por el diseño óptimo.[14], [49], [51], [56]

La formulación general para un problema de RBDO consiste en minimizar la función objetivo sujeta a restricciones probabilísticas. En esta formulación hay dos tipos de variables: variables de diseño  $\mathbf{d}$  y variables aleatorias  $\mathbf{X}$ . Un problema de optimización estructural basada en confiabilidad se representa matemáticamente como:

$$\min: J(\mathbf{d}, \mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{n_c} P_{fi} * J_{fi} \quad (3.14)$$

donde  $\mathbf{d}$  es el vector de variables de diseño,  $\mathbf{X}$  es el vector de variables aleatorias,  $J$  (función original, *RBDO*) es la función objetivo a ser minimizada,  $P_{fi}$  es la probabilidad de fallo para la  $i$ -ésima función de estado límite  $G_i$  y  $J_{fi}$  es el costo de exceder la  $i$ -ésima restricción o costo de falla (*cf*).[25]

donde esta formulación también se puede resolver teniendo en cuenta que la optimización de riesgos busca el punto óptimo de equilibrio entre los objetivos conflictivos de rendimiento y seguridad:

$$\mathbf{d}^* = \min[C_{ET}(\mathbf{d}): \mathbf{d} \in S] \quad (3.15)$$

donde  $C_{ET}(\mathbf{d})$  es el costo total esperado dado por (3.13) y  $S = [\mathbf{d}_l, \mathbf{d}_u]$ , es el; vector de restricciones de diseño, siendo  $\mathbf{d}_l$  y  $\mathbf{d}_u$  limite super e inferior respectivamente en las variables de diseño. En comparación con RBDO, la optimización de riesgos es, por defecto, un problema de optimización sin restricciones, ya que las "restricciones" de probabilidad de falla se incluyen en la función objetivo. Tenga en cuenta que la solución de (3.13)

produce  $\mathbf{d}^*$ , que está asociada al nivel óptimo de seguridad  $P_f^*(\mathbf{d}^*)$  a (3.7). Se puede suponer que algunos de los términos de costo en (4) son independientes del vector aleatorio  $X$ , pero los costos esperados de falla ya explican la incertidumbre a través de (3.7).[7]

La optimización del riesgo se puede lograr controlando las probabilidades de falla y / o las consecuencias de la falla. La mitigación de riesgos a través de la preparación, educación, capacitación, etc., está fuera del alcance de esta investigación. Aunque los costos de falla generalmente se consideran constantes, es importante tener en cuenta que la presente formulación permite un equilibrio entre los modos de falla "competidores" con costos de falla distintos.[7] Por lo tanto, la capacidad de servicio y los estados límite finales, con sus costos de, se contabilizan fácilmente en la formulación de RO propuesta por (*Papadopoulos y Lagaros*,[58]) y simplificada por (H. López, et al.,[7]). Si hay consecuencias sociales, no monetarias o intangibles de la falla (por ejemplo, muerte humana o daño ambiental), las restricciones de probabilidad de falla también pueden incluirse en la formulación de RO:

$$\mathbf{d}^* = \min[C_{ET}(\mathbf{d}): \mathbf{d} \in S, P_f(\mathbf{d}) \leq P_{f_{permitida}}] \quad (3.16)$$

Cabe resaltar que en este caso la probabilidad de falla aparece en la función objetivo y en las restricciones. También en este caso, solo los costos cuantificables de falla pueden incluirse en la función objetivo

### **3.3 Optimización del diseño Robusto (*RDO, Robust-design optimization*)**

El diseño robusto a través del tiempo ha tenido cambios en su formulación, iniciado por el precursor de esta metodología *Taguchi* [59], pasando por la formulación de *mínima sensibilidad* [44] y llegando por último a la optimización del diseño robusto[42]. Esta última es de interés para el presente trabajo y está definida a continuación.

#### **3.3.1 Formulación para Optimización del diseño Robusto (*RDO, Robust-design optimization*)**

El diseño robusto es un método importante para mejorar el diseño del producto o del proceso de fabricación al hacer que la respuesta de salida sea insensible (robusta) a variaciones (ruido) difíciles de controlar.[42]

$$\text{Min: } \mathit{stat}[J(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (3.17)$$

$$\text{s. a.: } g_i(\mathbf{d}) < 0 \quad \dots \quad i = 1, \dots, m$$

donde  $\mathbf{d}$  es el vector de variables de diseño,  $\mathbf{X}$  es el vector de variables aleatorias,  $J$  es la función objetivo,  $g_i$  es la  $i$ -ésima función de estado límite (esta es determinista), y  $\mathit{stat}$  se define como los diferentes parámetros que se van a minimizar de la función objetivo y se puede ver como:

$$P_k [.] : k^{\text{th}} \text{ percentiles}; \quad (3.18)$$

$$E [.] : \text{Valor esperado};$$

$$\text{Var} [.] : \text{Varianza};$$

$$\alpha E [.] + (1 - \alpha) P_k [.] : \text{Problema multiobjetivo};$$

$$\alpha E [.] + (1 - \alpha) \text{Var} [.] : \text{Problema multiobjetivo convencional}$$

Las últimas dos líneas de (3.18) son problemas multiobjetivo, donde  $0 \leq \alpha \leq 1$  es una constante. La primera y la cuarta líneas de (3.18) implican el percentil  $k$  de la función de rendimiento; cuando este percentil está asociado a la probabilidad de falla, se observa una gran similitud entre las optimizaciones robustas y las basadas en el riesgo.

### 3.4 Optimización del diseño Robusto y basado en Confiabilidad (**RBRDO, Reliability based robust design optimization**)

Recientemente se han venido publicando artículos [45]–[47] donde se propone mezclar las metodologías de optimización basadas en diseño *robusto* y *Basado en Confiabilidad*, esto con el fin de formar una nueva metodología de cuantificación de incertidumbre, donde *robusto* se centra en cuantificar la incertidumbre en la función objetivo, y *la metodología basada en confiabilidad* cuantifica la incertidumbre en las restricciones; propone juntar estas dos formulaciones para generar diseños más confiables y robustos

#### 3.4.1 Formulación del diseño Robusto y Basado en Confiabilidad:

La formulación viene dada por [60]:

$$\text{Min: } \mathit{stat}[J(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (3.19)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases}$$

donde  $\mathbf{d}$  es el vector de variables de diseño,  $\mathbf{X}$  es el vector de variables aleatorias,  $C$  es la función objetivo,  $G_i$  es la  $i$ -ésima función de estado límite,  $h_j$  son las restricciones determinísticas,  $P[\cdot]$  es el operador de probabilidad,  $P_{fi}^t$  es la probabilidad de fallo admisible,  $m$  es el número de funciones de estado límite y  $M$  es el número total de restricciones. Las restricciones determinísticas generalmente son límites inferiores y superiores de las variables de diseño. Las restricciones probabilísticas definen la región factible al restringir la probabilidad a violar en el estado límite  $G_i$  para la probabilidad de fallo  $P_{fi}^t$ , y  $\text{stat}$  se define como los diferentes parámetros que se van a minimizar de la función objetivo y se puede ver como:

$$P_k [\cdot] : k^{\text{th}} \text{ percentiles}; \quad (3.20)$$

$$E [\cdot] : \text{Valor esperado};$$

$$\text{Var} [\cdot] : \text{Varianza};$$

$$\alpha E [\cdot] + (1 - \alpha) P_k [\cdot] : \text{Problema multiobjetivo};$$

$$E [\cdot] + (1 - \alpha) \text{Var} [\cdot] : \text{Problema multiobjetivo convencional}$$

Las últimas dos líneas de (3.18) son problemas multiobjetivo, donde  $0 \leq \alpha \leq 1$  es una constante. La primera y la cuarta líneas de (3.18) implican el percentil  $k$  de la función de rendimiento; cuando este percentil está asociado a la probabilidad de falla, se observa una gran similitud entre las optimizaciones robustas y las basadas en el riesgo.

En el diseño de ingeniería, la economía y la seguridad generalmente se consideran metas contrapuestas. De hecho, aumentar la seguridad implica mayores costos inmediatos y reducir los costos puede comprometer la seguridad. Por lo tanto, el diseño de sistemas estructurales implicaría una compensación entre seguridad y economía. En la práctica de ingeniería común, este intercambio se aborda de forma subjetiva. Cuando se utilizan códigos de diseño estructural, el compromiso ya ha sido decidido por un comité de códigos, que especifica los coeficientes de seguridad que se utilizarán en el diseño y las medidas de seguridad básicas que se adoptarán en la construcción y operación.

## Optimización bajo incertidumbre

---

En la optimización determinística, esta compensación se descuida por completo, porque las probabilidades de falla no se cuantifican. En la clásica Optimización del Diseño Basada en la Confiabilidad (Sec 3.2), la compensación entre seguridad y economía tampoco se aborda, porque las probabilidades de falla son restricciones y no variables de diseño. La optimización del diseño Robusto (Sec. 3.3) busca diseños que sean menos sensibles a las incertidumbres existentes, pero las soluciones de seguridad y economía tampoco se abordan.

Sin embargo, cuando los costos de falla previstos se incluyen en la ecuación de diseño, se destaca que la economía y la seguridad no son objetivos contrapuestos. La seguridad es solo otra variable de diseño que afecta directamente los costos esperados de falla. Como las probabilidades de falla y las consecuencias de la falla se ven directamente afectadas por el diseño estructural, el diseño óptimo (costo mínimo) solo se puede lograr al cuantificar las incertidumbres y las probabilidades.[18]



## 4. Aplicaciones

En capítulo de aplicaciones se encuentran varios problemas típicos de optimización bajo incertidumbre en sistemas mecánicos que son en su mayoría problemas de prueba (*benchmark*) en las diferentes metodologías propuestas. Todos los problemas serán evaluados en las diferentes formulaciones de optimización estudiadas en este documento y sus resultados se presentan como se muestra en la Tabla 4-1:

**Tabla 4-1:** Resultados para cada una de las formulaciones de optimización bajo incertidumbre.

	Función Objetivo X, P determinísticos	Función Objetivo X, P Incertidumbre	Función Objetivo X, P Incertidumbre
No Restricciones Función	Diseño Optimo	Diseño Robusto (RDO)	Diseño basado en riesgo (RO)
Restricciones X, P determinísticas	Diseño optimo y admisible (Optimización bajo restricciones)	Diseño Robusto y admisible (RDO)	
Restricciones X, P Incertidumbre	Diseño basado en confiabilidad (RBDO)	Diseño Robusto y Basado en Confiabilidad (RBRDO)	

Para cada algoritmo los resultados se presentan siguiendo el formato de la Tabla 4-1.

**Tabla 4-2:** Tabla ejemplo resultados de Optimización del diseño Robusto (RDO)

Diseño Robusto (RDO)		
Robust( $\alpha$ )	Fval	x
0,100		
0,200		
0,300		
0,400		
0,500		
0,600		
0,700		
0,800		
0,900		
0,100		

Los resultados para la formulación de optimización del diseño robusto (RDO) se presentarán de la siguiente forma (ver Tabla 4-2). En esta tabla se muestra la variación

que se le da a los pesos de los percentiles en la función objetivo, **Fval** representa el valor de la función objetivo para el valor tomado de **Robust**, y  $x$  los valores de las variables de diseño del problema a resolver.

Por último, los resultados para la metodología de optimización del diseño basada en riesgo (RO) se presentarán de la siguiente forma (Ver Tabla 4-3). Donde **Risk** representa la variación de la variable  $cf$  (Costo de falla), la cual tiene como referencia valores entre 2 y 20,  $pf$  representa probabilidad de falla para el valor tomado de  $cf$ .

**Tabla 4-3:** Tabla ejemplo resultados de Optimización del diseño bajo Riesgo (RO)

Diseño Basado en Riesgo (RO)			
Risk	Pf	Fval	x
2,000	0,000		
3,000	0,000		
4,000	0,000		
5,000	0,000		
7,000	0,000		
9,000	0,000		
11,000	0,000		
15,000	0,000		
20,000	0,000		

**Nota 1:** El resultado mostrado en la tabla Tabla 4-1, muestra un resumen de resultados, en los cuales se toma para Optimización del diseño bajo Riesgo (RO) el valor de  $cf = 20$ , y para Optimización del diseño Robusto (RDO) se toma el valor del percentil  $\alpha = 0.80$ .

**Nota 2:** En los resultados con el algoritmo genético se muestra el valor medio obtenido de dos ejecuciones.

#### Obtención de resultados:

#### Software:

Para esta investigación se implementaron todos los códigos en el sistema operativo de Windows 10 Pro 64 bits, en el programa Matlab© (versión 2019a, licencia estudiantil), en el cual se usó el *toolbox* de optimización y la librería de cuantificación de incertidumbre la cual permitió implementar el método RIA y PMA para el cálculo de los índices de confiabilidad y la probabilidad de falla; este último fue desarrollado por Kostandyan E.E.

[61]. Para los problemas estructurales que requieren de elementos finitos se usó la librería de elementos finitos CALFEM [62].

**Hardware:**

Procesador: Intel Core i9-9900k CPU @ 3.60 GHz(16 CPUs)

Memoria Ram: 16384 MB

## 4.1 Entendiendo el Análisis de resultados

El objetivo principal de esta investigación es evaluar la utilidad y la aplicabilidad de formulación de optimización bajo incertidumbre en la optimización de sistemas mecánicos, para ello primero se definen los términos utilidad y aplicabilidad, basados en la definición por la RAE.

**Aplicabilidad:** Calidad de ser relevante o apropiado.

**Utilidad:** Capacidad de servir o de ser aprovechado para un fin determinado.

A continuación, se especifica el contexto y el sentido, en que se entienden estos términos para este trabajo:

**Aplicabilidad:**

- Relevancia o conexión válida al aplicar la formulación en el problema.

**Utilidad:**

- Obtención de un óptimo provechoso (útil) para el contexto del problema.

Estas se van a medir en dos niveles alto y bajo, como se explicó anteriormente con los parámetros definidos.

Para facilitar la interpretación de los resultados se van a clasificar los problemas para este trabajo en tres categorías según el costo computacional que cada aplicación requiere para la solución como se muestra en la Tabla 4-4.

**Tabla 4-4 clasificación de los problemas por porte.**

Aplicación	Bajo Porte	Mediano Porte	Gran porte
Aplicación Matemática	x		
Columna Corta		x	
Bastidor		x	
Mecanismo de Biela Manivela		x	
Amortiguador(sistema dinámico)		x	
Armadura 10 barras		x	
Armadura 25 barras			x
Armadura 25 barras (Enfoque Bajo Riesgo)			x

## 4.2 Aplicación Matemática

El primer problema es una aplicación matemática basada en una sola variable de optimización (ver Figura 4-1). La ecuación 4-1 corresponde a la función objetivo que se desea maximizar:

$$f(X) = 9 + 6 \exp(-14 + X) \sin(15 - X) - \frac{1}{8}(8 - X)^2 \quad (4.1)$$

Este problema está sujeto a la restricción definida por la ecuación 4-2:

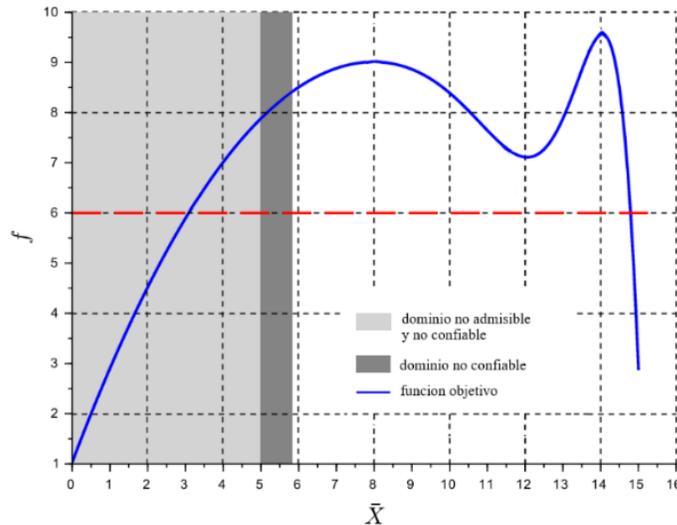
$$g(X) = X - 5 \quad (4.2)$$

Donde  $X$  tiene una distribución Normal y una desviación estándar de 0.1, como se muestra en la Tabla 4-5. Para este problema se toma un beta de referencia  $\beta^t = 2.32$  o una probabilidad de falla de  $p_f = 10^{-2}$ .

**Tabla 4-5** Datos estadísticos de las variables aleatorias para la Aplicación Matemática.

Variable	Distribución	Media	Des.Estd
$X$	(-)	Normal	$\mu_X$
			0.1

**Figura 4-1** Función objetivo aplicación matemática. (Traducido [60])



A continuación, se presenta la formulación para cada una de las formulaciones.

### 4.2.1 Formulación del diseño robusto (RDO)

$$\max_{\mathbf{d}}: \text{stat}[f(\mathbf{d}, X)] \quad (4.3)$$

$$\text{s. a.: } g_i(d) < 0 \quad \dots \quad i = 1, \dots, m$$

$$\max_{\mathbf{d}}: \alpha E \left[ 9 + 6 \exp(-14 + X) \sin(15 - X) - \frac{1}{8} (8 - X)^2 \right] \quad (4.4)$$

$$+ (1 - \alpha) \text{Var} \left[ 9 + 6 \exp(-14 + X) \sin(15 - X) - \frac{1}{8} (8 - X)^2 \right]$$

$$\text{s. a.: } g(X) = X - 5 < 0 \quad ; \quad 0.1 \leq \alpha \leq 1$$

### 4.2.2 Formulación basada en confiabilidad (RBDO)

$$\max_{\mathbf{d}}: J(\mathbf{d}, X) \quad (4.5)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P[G_i(\mathbf{d}, X) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases}$$

$$\max_{\mathbf{d}}: 9 + 6 \exp(-14 + X) \sin(15 - X) - \frac{1}{8} (8 - X)^2 \quad (4.6)$$

$$\text{s. a.: } \{P[G_i(\mathbf{d}, X) = X - 5 \leq 0] \leq P_{fi}^t \quad i = 1, \dots, m$$

### 4.2.3 Formulación del diseño robusta y basada en Confiabilidad (RBRDO)

$$\max_{\mathbf{d}}: \alpha E \left[ 9 + 6 \exp(-14 + X) \sin(15 - X) - \frac{1}{8} (8 - X)^2 \right] \quad (4.7)$$

$$+ (1 - \alpha) \text{Var} \left[ 9 + 6 \exp(-14 + X) \sin(15 - X) - \frac{1}{8} (8 - X)^2 \right]$$

$$\text{s. a.: } \{P[G_i(\mathbf{d}, X) = X - 5 \leq 0] \leq P_{fi}^t \quad i = 1, \dots, m$$

$$0.1 \leq \alpha \leq 1$$

### 4.2.4 Formulación bajo Riesgo (RO)

$$\max_{\mathbf{d}}: J(\mathbf{d}, X) + \sum_{i=1}^{n_c} P_{fi} * cf * J_{fi} \quad (4.8)$$

$$\max_{\mathbf{d}}: 9 + 6 \exp(-14 + X) \sin(15 - X) - \frac{1}{8} (8 - X)^2 + P_{fi} * cf * (X - 5) \quad (4.9)$$

$$0.1 \leq cf \leq 1$$

## 4.2.5 Resultados

### Resultados de la literatura para la aplicación matemática

Tabla 4-6 Resultados de la literatura.

Resultados Literatura				
		Función Objetivo X, P determinístico	Función Objetivo X, P Incertidumbre	Función Objetivo X, P Incertidumbre
No Restricciones	x	14,040	3,420	-
	fval	9,560	6,380	-
Restricciones X, P determinístico	x	14,040	11,630	
	fval	9,560	7,230	
Restricciones X, P Incertidumbre	x	14,040	11,630	
	fval	9,560	7,230	

#### Características de los resultados de la literatura:

- **Algoritmo de optimización usado:** algoritmo *Nelder-Mead*[63]
- **Tolerancia de convergencia de los algoritmos de optimización:** No se indicia en el artículo la tolerancia.
- **Técnica de cuantificación de incertidumbre:** Para el cálculo de la probabilidad de falla es usada la técnica del método de índice de fiabilidad de primer orden (*FORM, First order reliability method*).
- **$\beta$  de referencia:** 2.32.
- **$p_f$  de referencia:**  $10^{-2}$ .
- **Resultados tomados del artículo:** *On the consideration of uncertainty in design: optimization - reliability – robustness*[60].

#### Algoritmo bio inspirado

Tabla 4-7 Resultados optimización con un Algoritmo Genético bajo incertidumbre

Algoritmo genético				
		Función Objetivo X, P determinístico	Función Objetivo X, P Incertidumbre	Función Objetivo X, P Incertidumbre
No Restricciones	x	14,000	3,000	14,043
	fval	9,556	6,310	9,556
Restricciones X, P determinístico	x	14,999	14,043	
	fval	8,461	9,556	
Restricciones X, P Incertidumbre	x	14,043	14,043	
	fval	9,556	7,644	

### Algoritmo de búsqueda directa

**Tabla 4-8** Resultados optimización con un Algoritmo de búsqueda directa bajo incertidumbre

Algoritmo búsqueda directa				
		Función Objetivo X, P determinístico	Función Objetivo X, P Incertidumbre	Función Objetivo X, P Incertidumbre
No Restricciones	x	14,000	3,001	14,043
	fval	9,556	6,312	9,556
Restricciones X, P determinístico	x	13,990	14,043	
	fval	9,545	9,556	
Restricciones X, P Incertidumbre	x	14,043	14,043	
	fval	9,556	7,644	

### Algoritmo basado en derivadas

**Tabla 4-9** Resultados optimización con un Algoritmo Basado en derivadas bajo incertidumbre

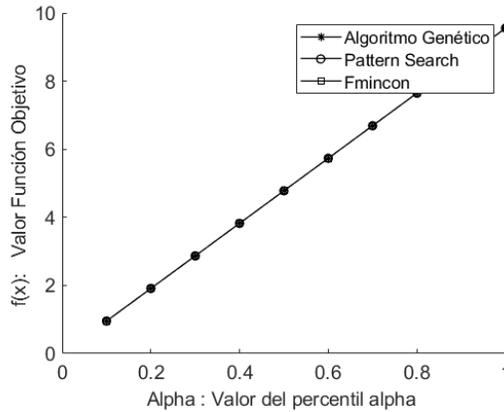
Algoritmo basado en derivadas				
		Función Objetivo X, P determinístico	Función Objetivo X, P Incertidumbre	Función Objetivo X, P Incertidumbre
No Restricciones	x	14,000	3,010	14,043
	fval	9,556	6,311	9,556
Restricciones X, P determinístico	x	14,000	14,043	
	fval	9,548	9,556	
Restricciones X, P Incertidumbre	x	14,043	14,043	
	fval	9,556	7,644	

### Resultados Formulación del diseño robusto (RDO)

**Tabla 4-10** Resultados optimización para la formulación RDO

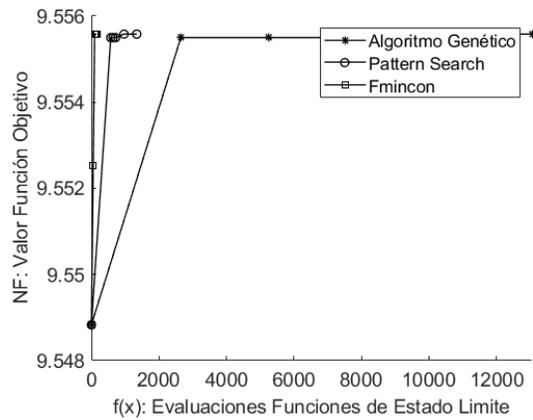
Algoritmo genético			Algoritmo búsqueda directa			Algoritmo basado en derivadas		
Robust	Fval	x	Robust	Fval	x	Robust	Fval	x
0,100	0,954	14,043	0,100	0,954	14,043	0,100	0,954	14,043
0,200	1,911	14,043	0,200	1,911	14,043	0,200	1,911	14,043
0,300	2,867	14,043	0,300	2,867	14,043	0,300	2,867	14,043
0,400	3,822	14,043	0,400	3,822	14,043	0,400	3,822	14,043
0,500	4,778	14,043	0,500	4,778	14,043	0,500	4,778	14,043
0,600	5,734	14,043	0,600	5,734	14,043	0,600	5,734	14,043
0,700	6,689	14,043	0,700	6,689	14,043	0,700	6,689	14,043
0,800	7,645	14,043	0,800	7,645	14,043	0,800	7,645	14,043
0,900	8,599	14,043	0,900	8,599	14,043	0,900	8,599	14,043
1,000	9,556	14,043	1,000	9,556	14,043	1,000	9,556	14,043

**Figura 4-2** Resultados optimización para la formulación RDO



**Resultados formulación Basada en confiabilidad (RBDO)**

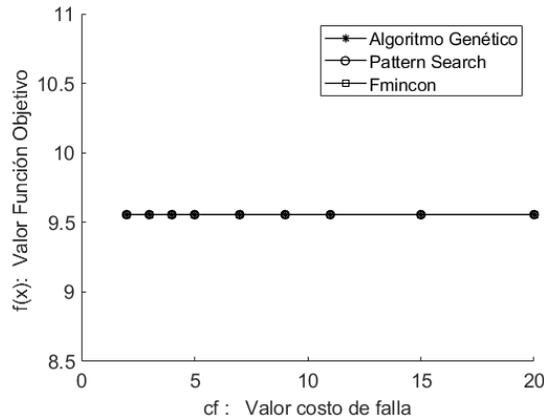
**Tabla 4-11** Resultados optimización para la formulación RBDO



**Resultados formulación Bajo Riesgo (RO)**

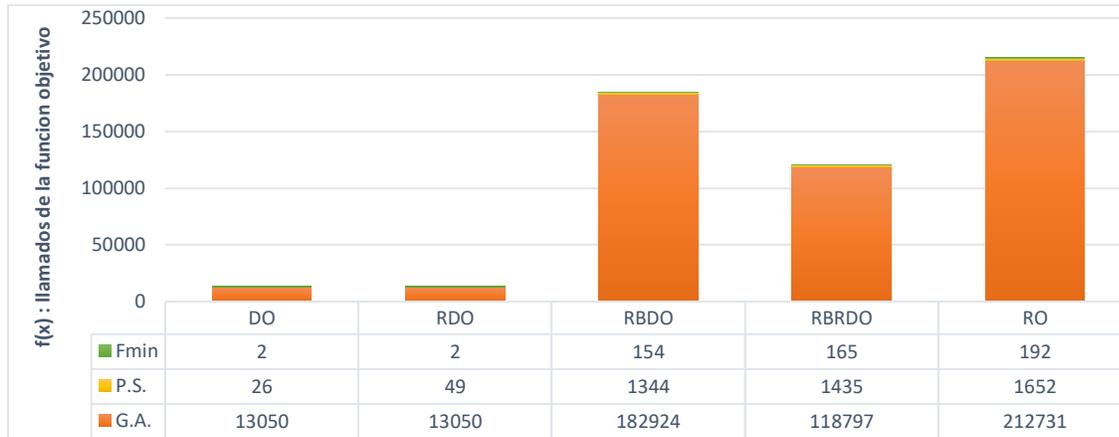
**Tabla 4-12** Resultados optimización para la formulación RO

Algoritmo Genético				Búsqueda Directa				Basado en derivadas			
Risk	Pf	Fval	x	Risk	Pf	Fval	x	Risk	Pf	Fval	x
2,000	0,000	9,556	14,043	2,000	0,000	9,556	14,043	2,000	0,000	9,556	14,043
3,000	0,000	9,556	14,043	3,000	0,000	9,556	14,043	3,000	0,000	9,556	14,043
4,000	0,000	9,556	14,043	4,000	0,000	9,556	14,043	4,000	0,000	9,556	14,043
5,000	0,000	9,556	14,043	5,000	0,000	9,556	14,043	5,000	0,000	9,556	14,043
7,000	0,000	9,556	14,043	7,000	0,000	9,556	14,043	7,000	0,000	9,556	14,043
9,000	0,000	9,556	14,043	9,000	0,000	9,556	14,043	9,000	0,000	9,556	14,043
11,000	0,000	9,556	14,043	11,000	0,000	9,556	14,043	11,000	0,000	9,556	14,043
15,000	0,000	9,556	14,043	15,000	0,000	9,556	14,043	15,000	0,000	9,556	14,043
20,000	0,000	9,556	14,043	20,000	0,000	9,556	14,043	20,000	0,000	9,556	14,043

**Figura 4-3** Resultados optimización para la formulación RO

#### 4.2.6 Análisis de resultados

Para este problema se obtuvo el mismo resultado óptimo para las tres formulaciones (RO, RDO y RBDO), con un valor de  $x^* = \{14.043\}$  y  $f^* = \{9.556\}$ ; siendo estos aproximadamente iguales a los de la literatura los cuales fueron  $x^* = \{14.044\}$  y  $f^* = \{9.56\}$ . Para los resultados de la formulación RO, los resultados tanto de la función como del óptimo  $x$  es afectado por la variación del valor  $cf$ , dando como respuesta en todos los casos un valor de la probabilidad de fallo de  $pf = 0$ , lo que nos indica que para todos los casos los óptimos lograron satisfacer y mantener de manera segura el rendimiento de la función planteada. Por otra parte, los valores de  $x$  para la formulación RDO para los diferentes valores del percentil ( $0.1 \leq \alpha \leq 1$ ) es igual en todos los casos  $x^* = \{14.044\}$  a diferencia de los valores que toma el rendimiento de la función variando desde  $f^* = \{0.954\}$  para el menor valor del percentil hasta  $f^* = \{9.56\}$  para el mayor valor del percentil. En este problema al ser de bajo porte se puede concluir que para la única formulación que tiene una alta aplicabilidad y utilidad es para la formulación de RDO. Con la formulación de RBDO y RO a pesar de que se obtienen los mismos resultados óptimos, no se consideran útiles por el coste computacional adicional que requieren (ver Figura 4-4).

**Figura 4-4 Costo computacional aplicación matemática.**

### 4.3 Columna Corta

Este problema fue propuesto en el 2009 por Y. Aoues y A. Chateaufneuf [54], usando el algoritmo de optimización *SQP* y diferentes estrategias de *RBDO* como *RIA*, *PMA* (*performance measure approach*) y *SORA* (*sequential optimization and reliability assessment*). Consiste en minimizar el área de la sección transversal de una columna corta,  $A(\mathbf{d}, \mathbf{X}) = \mu_b \mu_h$ . La columna tiene una sección transversal rectangular de dimensiones  $b$  y  $h$ , está sometida a una fuerza aleatoria  $F$  y a momentos de flexión biaxial  $M_1$  y  $M_2$ . De acuerdo con la ley constitutiva elástico-plástica, la función de estado límite está dada por:

$$G(X) = 1 - \frac{4M_1}{bh^2f_y} - \frac{4M_2}{b^2hf_y} - \frac{F^2}{(bhf_y)^2} \quad (4.10)$$

El índice de confiabilidad objetivo es de  $\beta^t = 3$ ; las variables de diseño  $\mathbf{d} = \{\mu_b, \mu_h\}$  son los valores medios de la base y la altura de la sección transversal, el punto inicial de diseño es:  $\mathbf{d}^0 = [0.5, 0.5]$ . Las variables aleatorias son el límite elástico del material  $f_y$ , los momentos flexionantes aplicados  $M_1$  y  $M_2$ , la fuerza normal aplicada  $F$ , la base  $b$  y la altura  $h$  de la sección transversal. Todas las variables aleatorias de este problema tienen distribución normal como se muestra en la Tabla 4-13. Se aplica el coeficiente de variación para  $h$  y  $b$ : 0.10.

**Tabla 4-13** Datos estadísticos de las variables aleatorias para el problema del diseño de la columna corta

Variable	Distribución	Media	C.O.V
$b$ (m)	Normal	$\mu_b$	0.1
$h$ (m)	Normal	$\mu_h$	0.1
$M_1$ (kN.m)	Normal	250	0.3
$M_2$ kN.m	Normal	125	0.3
$F$ kN	Normal	250	0.2
$F_y$ MPa	Normal	40	0.1

### 4.3.1 Formulación del diseño robusto (RDO):

$$\min_d: \text{stat}[J(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.11)$$

$$\text{s. a.: } g_i(\mathbf{d}) < 0 \quad \dots \quad i = 1, \dots, m$$

$$\min_d: \alpha E [\mu_b \mu_h] + (1 - \alpha) \text{Var} [\mu_b \mu_h] \quad (4.12)$$

$$\text{s. a.: } g(X) < 0 = 1 - \frac{4M_1}{bh^2 f_y} - \frac{4M_2}{b^2 h f_y} - \frac{F^2}{(bh f_y)^2}; \quad 0.1 \leq \alpha \leq 1$$

### 4.3.2 Formulación basada en confiabilidad (RBDO)

$$\min_d: J(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \quad (4.13)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases}$$

$$\min_d: \mu_b \mu_h \quad (4.14)$$

$$\text{s. t.: } \begin{cases} P(G(X) < 0) \leq P_f \\ 0.5 \leq \mu_b / \mu_h \leq 2 \end{cases}$$

### 4.3.3 Formulación del diseño robusto y basada en confiabilidad (RBRDO)

$$\min_d: \alpha E [\mu_b \mu_h] + (1 - \alpha) \text{Var} [\mu_b \mu_h] \quad (4.15)$$

$$\text{s. t.: } \begin{cases} P(G(X) < 0) \leq P_f \\ 0.5 \leq \mu_b / \mu_h \leq 2 \end{cases}$$

#### 4.3.4 Formulación bajo Riesgo (RO)

$$\min_d J(d, X) + \sum_{i=1}^{n_c} P_{fi} * cf * J_{fi} \quad (4.16)$$

$$\min_d: \mu_b \mu_h + P_{fi} * cf * \left( 1 - \frac{4M_1}{bh^2 f_y} - \frac{4M_2}{b^2 h f_y} - \frac{F^2}{(bh f_y)^2} \right) \quad (4.17)$$

$$0.1 \leq cf \leq 1$$

#### 4.3.5 Resultados

##### Resultados de la literatura para la Columna corta

Tabla 4-14 Resultados de la literatura.

Resultados de la literatura							
		Función Objetivo X, P determinístico		Función Objetivo X, P Incertidumbre		Función Objetivo X, P Incertidumbre	
No Restricciones	x	-	-	-	-	-	-
	fval	-	-	-	-	-	-
Restricciones X, P determinístico	x	-	-	-	-	-	-
	fval	-	-	-	-	-	-
Restricciones X, P Incertidumbre	x	0,389	0,610	-	-	-	-
	fval	0,237		-	-	-	-

##### Características de los resultados de la literatura:

- **Algoritmo de optimización usado:** Algoritmo de programación cuadrática secuencial (SQP, sequential quadratic programming)
- **Tolerancia de convergencia de los algoritmos de optimización:** la tolerancia para el cambio en las restricciones, los valores en la función objetivo y las restricciones es de  $10^{-3}$
- **Técnica de cuantificación de incertidumbre:** Para el cálculo de la probabilidad de falla es usada la técnica del método de índice de fiabilidad de primer orden (FORM, First order reliability method), sin embargo este artículo aborda más técnicas las cuales son comparadas entre sí; estas son SLA, SORA y PMA, las cuales fueron nombradas anteriormente en la sección 3.1.
- **$\beta$  de referencia:** 3.71
- **$p_f$  de referencia:**  $10^{-4}$ .

- **Resultados tomados del artículo:** *Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization*[54]

### Algoritmo bio inspirado

**Tabla 4-15** Resultados optimización con un Algoritmo Bio Inspirado bajo incertidumbre

Algoritmo genético							
		Función Objetivo X, P determinístico		Función Objetivo X, P Incertidumbre		Función Objetivo X, P Incertidumbre	
No Restricciones	x	0,000	0,000	0,000	0,000	nc	nc
	fval	0,000		0,000		nc	
Restricciones X, P determinístico	x	0,500	0,559	0,277	0,138		
	fval	0,250		0,032			
Restricciones X, P Incertidumbre	x	nc	nc	nc	nc		
	fval	nc		nc			

### Algoritmo de búsqueda directa

**Tabla 4-16** Resultados optimización con un Algoritmo de Búsqueda Directa bajo incertidumbre

Búsqueda Directa							
		Función Objetivo X, P determinístico		Función Objetivo X, P Incertidumbre		Función Objetivo X, P Incertidumbre	
No Restricciones	x	0,000	0,000	0,000	0,000	0,329	0,657
	fval	0,000		0,000		0,233	
Restricciones X, P determinístico	x	0,500	0,500	0,500	0,500		
	fval	0,250		0,225			
Restricciones X, P Incertidumbre	x	0,490	0,500	0,490	0,500		
	fval	0,245		0,232			

### Algoritmo basado en derivadas

**Tabla 4-17** Resultados optimización con un Algoritmo Basado en derivadas bajo incertidumbre

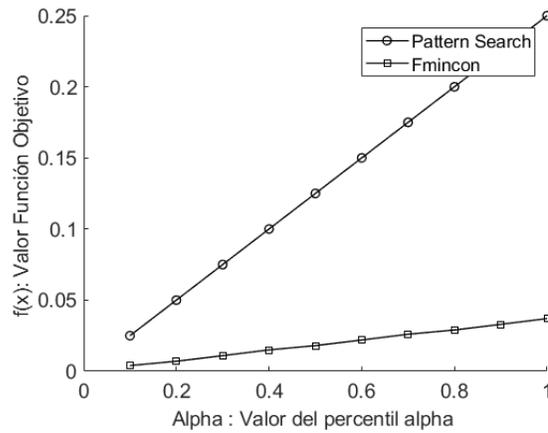
Basado en derivadas							
		Función Objetivo X, P determinístico		Función Objetivo X, P Incertidumbre		Función Objetivo X, P Incertidumbre	
No Restricciones	x	0,000	0,000	0,040	0,040	0,334	0,646
	fval	0,000		0,000		0,233	
Restricciones X, P determinístico	x	0,275	0,134	0,275	0,134		
	fval	0,037		0,033			
Restricciones X, P Incertidumbre	x	0,358	0,662	0,347	0,683		
	fval	0,237		0,225			

**Resultados Formulación del diseño robusta (RDO)**

**Tabla 4-18** Resultados optimización para la formulación RDO

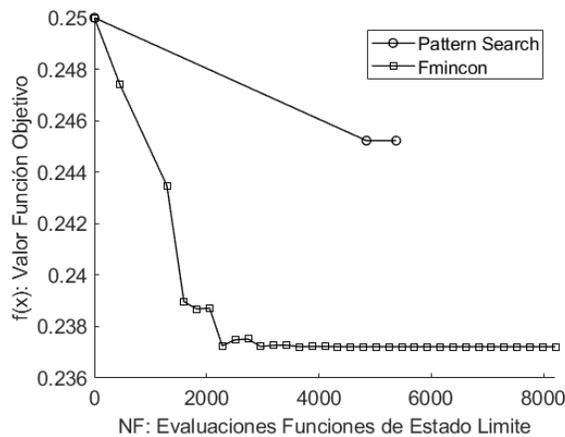
Algoritmo Genético			Búsqueda Directa				Basado en derivadas			
Robust	Fval	x	Robust	Fval	x		Robust	Fval	x	
0,100	nc		0,100	0,025	0,500	0,500	0,100	0,004	0,275	0,134
0,200	nc		0,200	0,050	0,500	0,500	0,200	0,007	0,275	0,133
0,300	nc		0,300	0,075	0,500	0,500	0,300	0,011	0,275	0,134
0,400	nc		0,400	0,100	0,500	0,500	0,400	0,015	0,275	0,134
0,500	nc		0,500	0,125	0,500	0,500	0,500	0,018	0,275	0,134
0,600	nc		0,600	0,150	0,500	0,500	0,600	0,022	0,275	0,134
0,700	nc		0,700	0,175	0,500	0,500	0,700	0,026	0,275	0,134
0,800	nc		0,800	0,200	0,500	0,500	0,800	0,029	0,275	0,134
0,900	nc		0,900	0,225	0,500	0,500	0,900	0,033	0,275	0,134
1,000	nc		1,000	0,250	0,500	0,500	1,000	0,037	0,275	0,134

**Figura 4-5** Resultados optimización para la formulación RDO



**Resultados formulación Basada en confiabilidad (RBDO)**

**Figura 4-6** Resultados optimización para la formulación RBDO

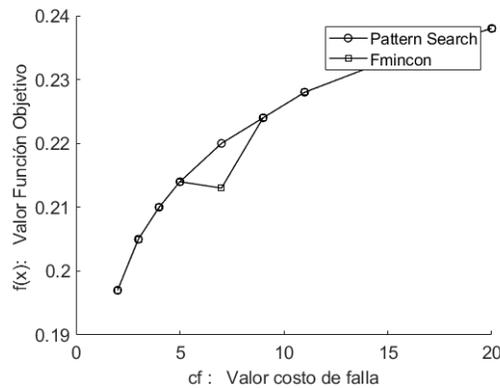


## Resultados formulación Bajo Riesgo (RO)

Tabla 4-19 Resultados optimización para la formulación RO

Algoritmo genético				búsqueda Directa					Basado en Derivadas				
Risk	Pf	Fval	x	Risk	Pf	Fval	x		Risk	Pf	Fval	x	
2,000		nc		2,000	0,056	0,197	0,297	0,595	2,000	0,056	0,197	0,303	0,584
3,000		nc		3,000	0,336	0,205	0,305	0,610	3,000	0,033	0,205	0,311	0,598
4,000		nc		4,000	0,237	0,210	0,310	0,619	4,000	0,024	0,210	0,315	0,608
5,000		nc		5,000	0,200	0,214	0,321	0,606	5,000	0,018	0,214	0,319	0,615
7,000		nc		7,000	0,012	0,220	0,318	0,636	7,000	0,012	0,213	0,324	0,622
9,000		nc		9,000	0,009	0,224	0,322	0,643	9,000	0,009	0,224	0,326	0,633
11,000		nc		11,000	0,007	0,228	0,325	0,648	11,000	0,007	0,228	0,330	0,638
15,000		nc		15,000	0,005	0,233	0,329	0,657	15,000	0,005	0,233	0,334	0,646
20,000		nc		20,000	0,004	0,238	0,333	0,665	20,000	0,004	0,238	0,338	0,654

Figura 4-7 Resultados optimización para la formulación RO

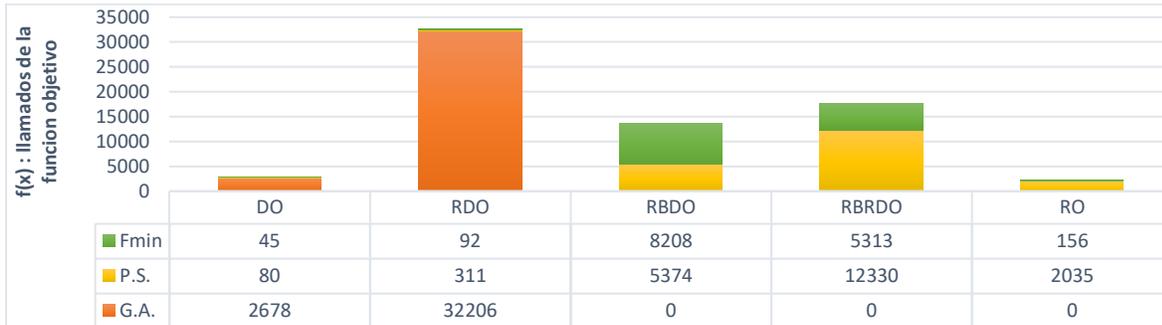


### 4.3.6 Análisis de resultados

Como se mencionó este problema está en base a la formulación RBDO propuesta por el autor y fue adaptado para las formulaciones RDO, RO y RBRDO. Se considera este problema como mediano porte; para este problema los resultados óptimos obtenidos en este trabajo son  $x^* = \{0.358, 0.662\}$  y  $f^* = \{0.237\}$ ; los cuales coinciden con los obtenidos por el autor  $x^* = \{0.389, 0.610\}$  y  $f^* = \{0.237\}$  (formulación RBDO, con el algoritmo de optimización SQP); para la formulación RDO los óptimos son  $x^* = \{0.275, 0.134\}$  y  $f^* = \{0.033\}$ , este valor es semejante a los obtenidos por una optimización determinística, lo que indica que el resultado no se puede considerar como útil en esa formulación; para la formulación RO los resultados obtenidos son  $x^* = \{0.334, 0.646\}$  y  $f^* = \{0.2331\}$ , estos valores indican que esta formulación obtuvo valores cercanos a los obtenidos por el autor, sin embargo, este problema es de mediano porte, se considera que su utilidad no tiene relevancia en el considerar los costos ( $cf$ ), sin embargo, cabe destacar que para la

formulación RO el costo computacional es bajo en comparación con RBDO, como se muestra en Figura 4-8.

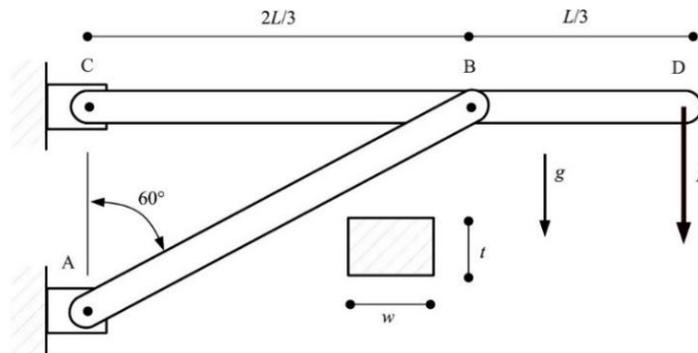
**Figura 4-8 Costo computacional Columna Corta**



## 4.4 Bastidor

Este problema fue presentado por *Tsompanakis, Y et. al.* [8] y *Dubourg, V et. al.* [14] empelando *SORA, RIA y Kriging*. Como se muestra en la Figura 4-9, soporta la carga de su propio peso debido a la gravedad y una carga adicional  $P$  en su extremo derecho. Los elementos tienen sección transversal rectangular  $W_{ab} \times W_t$  y  $W_{cd} \times W_t$

**Figura 4-9 Bastidor**



El problema *RBO* consiste en minimizar la masa total de la estructura, sujeto a dos restricciones estocásticas en los esfuerzos permisibles y a dos restricciones determinísticas sobre las variables de optimización  $\mathbf{d} = \{\mu_t, \mu_{W_{AB}}, \mu_{W_{CD}}\}$ , que corresponden a las dimensiones de las secciones transversales de los elementos. La formulación matemática del problema es:

$$\min_{\mathbf{d}} W(\mathbf{d}, \mathbf{X}) = \rho \mu_t L \left( \frac{4\sqrt{3}}{9} \mu_{W_{AB}} + \mu_{W_{CD}} \right) \quad (4.18)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} \beta_1 \geq 2 \text{ y } \beta_2 \geq 2 \\ 0.05 \text{ m} \leq d_j \leq 0.300 \text{ m} \end{cases}$$

$\beta_1$  y  $\beta_2$  representan los índices de confiabilidad definidos para las funciones de estado límite  $G_1(X)$  y  $G_2(X)$  respectivamente, que están definidas por las ecuaciones (4.19) y (4.20). El modelo probabilístico para este ejemplo comprende variables aleatorias independientes cuyos datos están consignados en la Tabla 4-20

$G_1(X)$  restringe el esfuerzo máximo debido a flexión en la viga horizontal (CD, en el punto B), el cual no debe exceder el límite de elasticidad del material  $f_y$  de manera que la primera función de estado límite es la siguiente:

$$G_1(X) = f_y - \sigma_b \quad (4.19)$$

con:

$$\sigma_b = \frac{6M_B}{W_{CD}\mu_t^2}, \quad M_B = \frac{PL}{3} + \frac{\rho g \mu_{W_{CD}} \mu_t L^2}{18}$$

$G_2(X)$  restringe la máxima carga axial permisible en el elemento AB, la cual no debe exceder la carga crítica por pandeo de Euler  $F_{pandeo}$  (despreciando su propio peso).

$$G_2(X) = F_{pandeo} - F_{AB} \quad (4.20)$$

con:

$$F_{pandeo} = \frac{\pi^2 EI}{L_{AB}^2} = \frac{\pi^2 E \mu_t \mu_{W_{AB}}^3 9 \sin^2 \theta}{48L^2} \quad \text{y} \quad F_{AB} = \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{3P}{2} + \frac{3\rho g \mu_{W_{CD}} \mu_t L}{4} \right)$$

**Tabla 4-20** Datos estadísticos de las variables aleatorias para el bastidor.

Variable	Distribución	Media	COV
$\mu_t$ $m$	Normal	0.275	0.05
$\mu_{W_{AB}}$ $m$	Normal	0.06	0.05
$\mu_{W_{CD}}$ $m$	Normal	0.2	0.05
$P$ $kN$	Gumbel	100	0.15
$E$ $GPa$	Gumbel	200	0.08
$F_y$ $MPa$	Log-normal	225	0.08
$\rho$ $kg/m^3$	Weibull	7860	0.10
$L$ $m$	Normal	5	0.05

**4.4.1 Formulación del diseño robusto (RDO):**

$$\min_{\mathbf{d}}: \text{stat}[J(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.21)$$

$$\text{s. a.: } g_i(\mathbf{d}) < 0 \quad \dots \quad i = 1, \dots, m$$

$$\min_{\mathbf{d}}: \alpha E [W(\mathbf{d}, \mathbf{X})] + (1 - \alpha) \text{Var} [W(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.22)$$

$$\text{s. a.: } \{0.05 \text{ m} \leq d_j \leq 0.300 \text{ m}; 0.1 \leq \alpha \leq 1$$

**4.4.2 Formulación basada en confiabilidad (RBDO)**

$$\min_{\mathbf{d}}: J(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \quad (4.23)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases}$$

$$\min_{\mathbf{d}} W(\mathbf{d}, \mathbf{X}) = \rho \mu_t L \left( \frac{4\sqrt{3}}{9} \mu_{W_{AB}} + \mu_{W_{CD}} \right) \quad (4.24)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} \beta_1 \geq 2 \text{ y } \beta_2 \geq 2 \\ 0.05 \text{ m} \leq d_j \leq 0.300 \text{ m} \end{cases}$$

**4.4.3 Formulación del diseño robusto y Basada en confiabilidad (RBRDO)**

$$\min_{\mathbf{d}}: \text{stat}[J(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.25)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases}$$

$$\min_{\mathbf{d}}: \alpha E [W(\mathbf{d}, \mathbf{X})] + (1 - \alpha) \text{Var} [W(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.26)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} \beta_1 \geq 2 \text{ y } \beta_2 \geq 2 \\ 0.1 \leq \alpha \leq 1 \\ 0.05 \text{ m} \leq d_j \leq 0.300 \text{ m} \end{cases}$$

#### 4.4.4 Formulación bajo Riesgo (RO)

$$\min_d: J(d, X) + \sum_{i=1}^{n_c} P_{fi} * cf * J_{fi} \quad (4.27)$$

$$\min_d: \rho \mu_t L \left( \frac{4\sqrt{3}}{9} \mu_{W_{AB}} + \mu_{W_{CD}} \right) + P_{fi} * cf * G_i(X) \quad (4.28)$$

$$\text{con: } 0.1 \leq cf \leq 1$$

#### 4.4.5 Resultados

##### Resultados de la literatura para el diseño de un Bastidor

Tabla 4-21 Resultados de la literatura.

Resultados de la Literatura										
		Función Objetivo X, P determinístico			Función Objetivo X, P Incertidumbre			Función Objetivo X, P Incertidumbre		
No Restricciones	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	fval									
Restricciones X, P determinístico	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	fval									
Restricciones X, P Incertidumbre	x	0,209	0,061	0,202	-	-	-			
	fval		1.550,000							

##### Características de los resultados de la literatura:

- **Algoritmo de optimización usado:** Algoritmo de programación cuadrática secuencial (SQP, sequential quadratic programming)
- **Tolerancia de convergencia de los algoritmos de optimización:** No se indica en el artículo la tolerancia.
- **Técnica de cuantificación de incertidumbre:** Para el cálculo de la probabilidad de falla es usada la técnica del método de índice de fiabilidad de primer orden (FORM, First order reliability method).
- **$\beta$  de referencia:** 2.
- **$p_f$  de referencia:**  $10^{-1.5}$ .
- **Resultados tomados del artículo:** Reliability-based design optimization using kriging surrogates and subset simulation[14]

**Algoritmo bio inspirados****Tabla 4-22** Resultados optimización con un Algoritmo Genético bajo incertidumbre

Algoritmo genético										
		Función Objetivo X, P determinístico			Función Objetivo X, P Incertidumbre			Función Objetivo X, P Incertidumbre		
No Restricciones	x	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,286	0,070	0,104
	fval	174,036			130,451			1.870,316		
Restricciones X, P determinístico	x	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050			
	fval	173,911			156,529					
Restricciones X, P Incertidumbre	x	0,265	0,064	0,968	0,274	0,063	0,091			
	fval	1.524,040			1.278,232					

**Algoritmo de búsqueda directa****Tabla 4-23** Resultados optimización con un Algoritmo de búsqueda directa bajo incertidumbre

Búsqueda Directa										
		Función Objetivo X, P determinístico			Función Objetivo X, P Incertidumbre			Función Objetivo X, P Incertidumbre		
No Restricciones	x	0,275	0,060	0,200	0,275	0,060	0,200	0,300	0,069	0,092
	fval	2.660,670			1.995,507			1.827,376		
Restricciones X, P determinístico	x	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,299			
	fval	173,882			598,619					
Restricciones X, P Incertidumbre	x	0,272	0,063	0,092	0,263	0,064	0,099			
	fval	1.507,598			1.300,912					

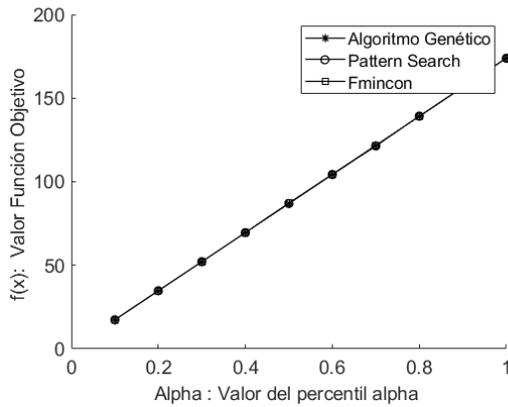
**Algoritmo basado en derivadas****Tabla 4-24** Resultados optimización con un Algoritmo Basado en derivadas bajo incertidumbre

Basado en derivadas										
		Función Objetivo X, P determinístico			Función Objetivo X, P Incertidumbre			Función Objetivo X, P Incertidumbre		
No Restricciones	x	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,299	0,069	0,091
	fval	173,388			134,412			1.827,367		
Restricciones X, P determinístico	x	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050			
	fval	173,882			156,494					
Restricciones X, P Incertidumbre	x	0,299	0,061	0,076	0,300	0,061	0,076			
	fval	1.449,990			1.232,332					

**Resultados Formulación del diseño robusto (RDO)****Tabla 4-25** Resultados optimización para la formulación RDO

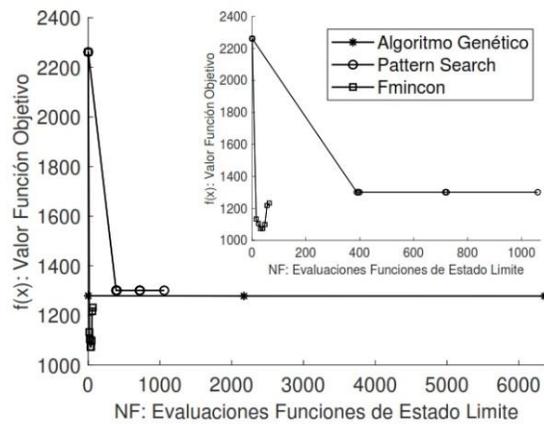
Algoritmo Genético					Búsqueda Directa					Basado en Derivadas				
Rob	Fval	x			Rob	Fval	x			Rob	Fval	x		
0,1	17,389	0,050	0,050	0,050	0,1	17,388	0,050	0,050	0,050	0,1	17,394	0,050	0,050	0,050
0,2	34,785	0,050	0,050	0,050	0,2	34,777	0,050	0,050	0,050	0,2	34,827	0,050	0,050	0,050
0,3	52,174	0,050	0,050	0,050	0,3	52,165	0,050	0,050	0,050	0,3	52,165	0,050	0,050	0,050
0,4	69,568	0,050	0,050	0,050	0,4	69,553	0,050	0,050	0,050	0,4	69,553	0,050	0,050	0,050
0,5	86,947	0,050	0,050	0,050	0,5	86,941	0,050	0,050	0,050	0,5	87,158	0,050	0,050	0,050
0,6	104,352	0,050	0,050	0,050	0,6	104,329	0,050	0,050	0,050	0,6	104,393	0,050	0,050	0,050
0,7	121,730	0,050	0,050	0,050	0,7	121,414	0,050	0,050	0,050	0,7	121,718	0,050	0,050	0,050
0,8	139,123	0,050	0,050	0,050	0,8	139,265	0,050	0,050	0,050	0,8	139,107	0,050	0,050	0,050
0,9	156,667	0,050	0,050	0,050	0,9	156,494	0,050	0,050	0,050	0,9	156,494	0,050	0,050	0,050
1,0	173,929	0,050	0,050	0,050	1,0	173,882	0,050	0,050	0,050	1,0	173,882	0,050	0,050	0,050

Figura 4-10 Resultados optimización para la formulación RDO



**Resultados formulación basada en confiabilidad (RBDO)**

Figura 4-11 Grafico de convergencia Resultados optimización para la formulación RBDO



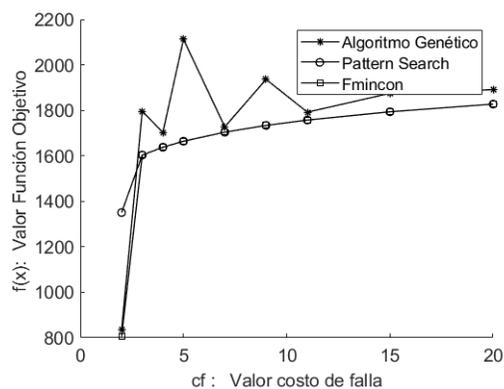
**Resultados formulación Bajo Riesgo (RO)**

Tabla 4-26 Resultados optimización para la formulación RO

Algoritmo Genético						Búsqueda Directa					
Risk	Pf	Fval	x			Risk	Pf	Fval	x		
2	1,000	834,134	0,051	0,107	0,052	2	0,035	1554,292	0,300	0,064	0,072
3	0,015	1795,846	0,235	0,072	0,130	3	0,022	1603,312	0,300	0,065	0,076
4	0,015	1702,977	0,272	0,068	0,097	4	0,016	1637,700	0,300	0,065	0,078
5	0,010	2112,000	0,189	0,078	0,208	5	0,013	1664,237	0,300	0,066	0,080
7	0,008	1727,350	0,290	0,068	0,090	7	0,009	1704,022	0,300	0,067	0,083
9	0,006	1936,000	0,236	0,074	0,139	9	0,007	1733,602	0,300	0,067	0,085
11	0,003	1792,004	0,291	0,069	0,097	11	0,005	1757,223	0,300	0,068	0,087
15	0,004	1874,554	0,271	0,072	0,111	15	0,004	1793,635	0,300	0,068	0,895
20	0,002	1890,809	0,279	0,072	0,109	20	0,003	1827,376	0,300	0,069	0,092

Basado en derivadas					
Risk	Pf	Fval	x		
2	1,000	805,184	0,050	0,108	0,050
3	0,022	1603,331	0,300	0,065	0,076
4	0,016	1637,720	0,300	0,065	0,078
5	0,013	1664,213	0,300	0,066	0,080
7	0,009	1703,997	0,300	0,067	0,083
9	0,007	1733,602	0,300	0,067	0,085
11	0,005	1757,215	0,300	0,068	0,087
15	0,004	1793,625	0,300	0,068	0,090
20	0,003	1827,367	0,299	0,069	0,091

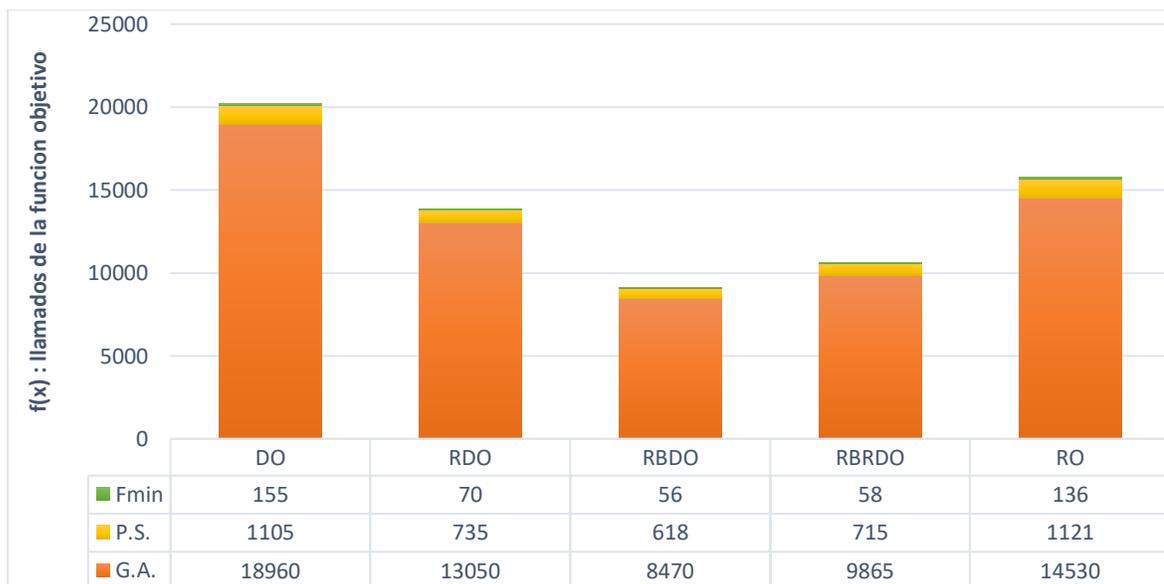
Figura 4-12 Resultados optimización para la formulación RO



#### 4.4.6 Análisis de resultados Bastidor.

Este problema está en base a la formulación RBDO propuesta por el autor y fue adaptado para las formulaciones RDO, RO y RBRDO, los resultados obtenidos para la formulación

RBDO en este trabajo son  $x^* = \{0.299, 0.061, 0.076\}$  y  $f^* = \{1449.99\}$ ; los cuales coinciden con los obtenidos por el autor  $x^* = \{0.209, 0.061, 0.202\}$  y  $f^* = \{1550.00\}$ ; los resultados para RDO son  $x^* = \{0.050, 0.050, 0.050\}$  y  $f^* = \{156.49\}$ , estos a pesar de llegar a un óptimo no se consideran útiles debido a su óptimo es muy cercano a los obtenidos por la optimización determinística, y si son comparados con los resultados obtenidos por la formulación RBDO o RO corresponde aproximadamente a 108% menos, lo que nos indica que esta formulación no está considerando la incertidumbre en la formulación de manera apropiada. Para la formulación RO los resultados son  $x^* = \{0.299, 0.069, 0.091\}$  y  $f^* = \{1827.367\}$ ; el incremento en el valor de la función objetivo se ve afectado por el valor de  $cf=20$ , estos resultados tienen una  $pf = 3\%$ , sin embargo, se considera que es poco útil considerar en este problema los costos de falla que pueda sufrir al ser un problema de mediano porte, se considera con mayor relevancia buscar un nivel de seguridad alto, adicionalmente su costo computacional es un 17% más alto que el problema analizado por RBDO.

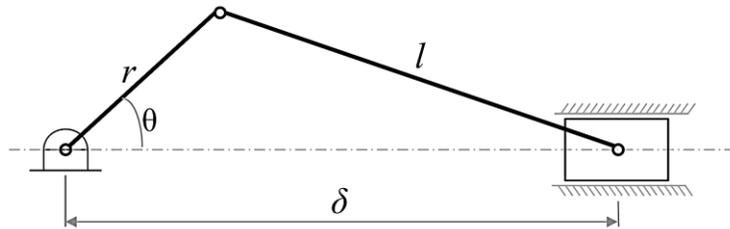


## 4.5 Mecanismo biela manivela o manivela corredera.

Esta aplicación se basa en el diseño propuesto por Andre T. beck et. al [7], sin embargo, el enfoque que se propone con este trabajo es el diseño del mecanismo de biela manivela, ilustrado en la Figura 4-13. La manivela gira a una velocidad angular constante  $\omega =$

100 rad / s. Las variables de diseño son las longitudes de la manivela  $r$  y la biela  $l$ , por lo tanto  $d = \{r, l\}$ . El objetivo es minimizar la aceleración máxima normalizada de la corredera  $a_n$ .

**Figura 4-13** Mecanismo de Biela manivela



Para garantizar una rotación de  $360^\circ$  de la manivela, el mecanismo debe cumplir el criterio de Grashof:  $l \geq 2.5r$  con  $\theta_r = 30^\circ$ . Las variables aleatorias son las longitudes de la manivela y de la biela, por lo tanto,  $X = \{r, l\}$ . La incertidumbre refleja las tolerancias de fabricación para el mecanismo. Las variables de diseño son las medias de las variables aleatorias:  $E[X] = d = \{r, l\}$ .

**Tabla 4-27** Variables aleatorias para problema de Biela Manivela.

Variable Aleatoria	Descripción	Distribución	Valor Medio (Inicial)	Desviación Estándar
$X_1$	$r$	Normal	$r$	0,1
$X_2$	$l$	Normal	$l$	0,1

La Tabla 4-27 muestra los parámetros del vector aleatorio  $X$ . La aceleración máxima de la corredera viene dada por  $a_n = \frac{a_4}{\omega_2^2 L}$  (ver referencia [64], sección 5.4.2 y sección 7.8.1). El estado límite está relacionado con el alargamiento máximo  $\delta$ , que se obtiene para  $\theta = 0^\circ$  (Figura 4-13), y está dado por  $\delta = r + l$ . La función de estado límite se escribe como:

$$g(\mathbf{d}, \mathbf{X}) = \delta_{crit} - (R + L) = 0 \quad (4.29)$$

donde  $\delta_{crit} = 100\text{mm}$  es la posición crítica. Para  $\delta \geq \delta_{crit}$ , el mecanismo impactaría una pared o un equipo sensible, lo que conduce a una falla del sistema. Entonces, el problema de optimización viene dado por:

$$\begin{aligned} \min \alpha_n(\mathbf{d}, \mathbf{X}) & \quad (4.30) \\ \text{s. a.: } \{g(\mathbf{d}, \mathbf{X}) = \delta_{crit} - (R + L) = 0 \\ & l \geq 2.5r, r > 0 \end{aligned}$$

#### 4.5.1 Formulación del diseño robusto (RDO):

$$\min_{\mathbf{d}}: \mathit{stat}[J(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.31)$$

$$\text{s. a.: } g_i(\mathbf{d}) < 0 \quad \dots \quad i = 1, \dots, m$$

$$\min_{\mathbf{d}}: \alpha E [\alpha_n(\mathbf{d}, \mathbf{X})] + (1 - \alpha) \text{Var} [\alpha_n(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.32)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} 0.1 \leq \alpha \leq 1 \\ g(\mathbf{d}, \mathbf{X}) = \delta_{crit} - (R + L) = 0 \end{cases}$$

#### 4.5.2 Formulación basada en confiabilidad (RBDO)

$$\min_{\mathbf{d}}: J(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \quad (4.33)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases}$$

$$\min \alpha_n(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \quad (4.34)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} \beta_1 \geq 3 \\ g(\mathbf{d}, \mathbf{X}) = \delta_{crit} - (R + L) = 0 \end{cases}$$

#### 4.5.3 Formulación del diseño robusto y Basada en confiabilidad (RBRDO)

$$\mathit{Min}: \mathit{stat}[J(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.35)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases}$$

$$\min_{\mathbf{d}}: \alpha E [\alpha_n(\mathbf{d}, \mathbf{X})] + (1 - \alpha) \text{Var} [\alpha_n(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.36)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} 0.1 \leq \alpha \leq 1 \\ \beta_1 \geq 3 \\ g(\mathbf{d}, \mathbf{X}) = \delta_{crit} - (R + L) = 0 \end{cases}$$

#### 4.5.4 Formulación bajo Riesgo (RO)

$$\min_{\mathbf{d}}: J(\mathbf{d}, \mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{n_c} P_{fi} * cf * J_{fi} \quad (4.37)$$

$$\text{con: } 0.1 \leq cf \leq 1$$

$$\min_{\mathbf{d}}: \alpha_n(\mathbf{d}, \mathbf{X}) + P_{fi} * cf * G_i(X) \quad (4.38)$$

con:  $0.1 \leq cf \leq 1$

## 4.5.5 Resultados

### Algoritmos bio inspirados

**Tabla 4-28** Resultados optimización con un Algoritmo Genético bajo incertidumbre

Algoritmo Genético							
		Función Objetivo X, P determinístico		Función Objetivo X, P Incertidumbre		Función Objetivo X, P Incertidumbre	
No Restricciones	x	58,700	57,999	69,574	68,743	16,786	41,984
	fval	-7820,172		-7102,570		-27,525	
Restricciones X, P determinístico	x	30,998	77,493	31,794	79,484		
	fval	-14,450		-12,344			
Restricciones X, P Incertidumbre	x	31,498	78,744	31,996	79,989		
	fval	-13,989		-12,177			

### Algoritmos de búsqueda directa

**Tabla 4-29** Resultados optimización con un Algoritmo de búsqueda directa bajo incertidumbre

Búsqueda Directa							
		Función Objetivo X, P determinístico		Función Objetivo X, P Incertidumbre		Función Objetivo X, P Incertidumbre	
No Restricciones	x	80,967	80,000	80,967	80,000	29,588	73,969
	fval	-8303,219		-7472,898		-330,727	
Restricciones X, P determinístico	x	29,588	73,969	29,588	73,969		
	fval	-15,749		-14,174			
Restricciones X, P Incertidumbre	x	28,788	71,968	28,788	71,968		
	fval	-16,486		-14,837			

### Algoritmos basados en derivadas

**Tabla 4-30** Resultados optimización con un Algoritmo Basado en derivadas bajo incertidumbre

Basado en derivadas							
		Función Objetivo X, P determinístico		Función Objetivo X, P Incertidumbre		Función Objetivo X, P Incertidumbre	
No Restricciones	x	53,628	52,987	53,857	53,214	28,699	71,747
	fval	-7707,252		-6930,982		-347,662	
	x	28,571	71,429	28,571	71,429		

Restricciones X, P determinístico	fval	-16,985		-15,017		
	x	28,450	71,126	28,450	71,126	
Restricciones X, P Incertidumbre	fval	-16,797		-15,117		

**Resultados Formulación del diseño robusto (RDO)**

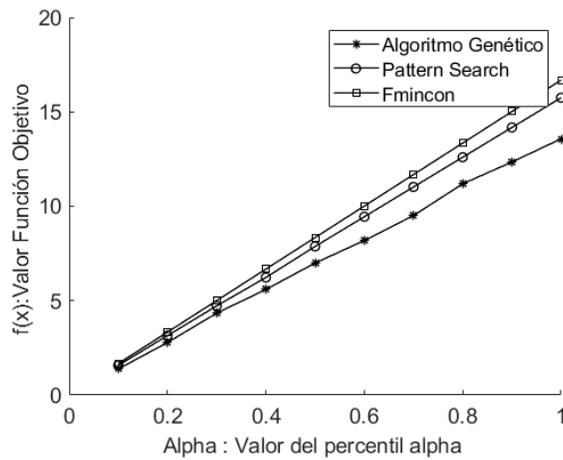
Tabla 4-31 Resultados optimización para la formulación RDO

Algoritmo Genético			
Robust	Fval	x	
0,1	-1,382	31,676	79,188
0,2	-2,787	31,554	78,885
0,3	-4,340	30,971	77,447
0,4	-5,595	31,500	78,750
0,5	-6,995	31,498	78,430
0,6	-8,186	31,873	79,682
0,7	-9,508	31,939	79,845
0,8	-11,190	31,499	78,748
0,9	-12,344	31,794	79,484
1,0	-13,573	31,949	79,871

Búsqueda Directa			
Robust	Fval	x	
0,1	-1,574	29,587	73,969
0,2	-3,150	29,588	73,969
0,3	-4,725	29,588	73,967
0,4	-6,230	29,588	73,968
0,5	-7,874	29,588	73,969
0,6	-9,445	29,588	73,969
0,7	-11,024	29,588	73,969
0,8	-12,599	59,588	73,969
0,9	-14,174	29,588	73,969
1,0	-15,749	29,588	73,969

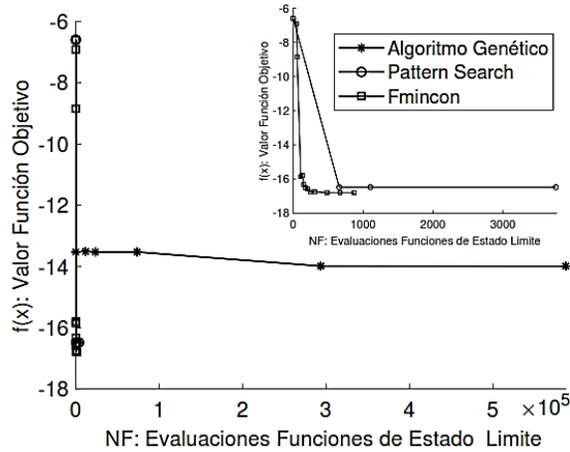
Basado en derivadas			
Robust	Fval	x	
0,1	-1,669	28,571	71,429
0,2	-3,337	28,571	71,429
0,3	-5,006	28,571	71,429
0,4	-6,674	28,571	71,429
0,5	-8,343	28,571	71,429
0,6	-10,012	28,571	71,429
0,7	-11,680	28,571	71,429
0,8	-13,348	28,571	71,429
0,9	-15,017	28,571	71,429
1,0	-16,685	28,571	71,429

Figura 4-14 Resultados optimización para la formulación RDO



**Resultados formulación Basada en confiabilidad (RBDO)**

**Figura 4-15 Grafico de convergencia de los resultados optimización para la formulación RBDO**

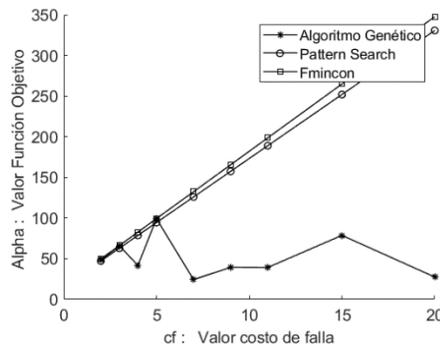


**Resultados formulación Bajo Riesgo (RO)**

**Tabla 4-32 Resultados optimización para la formulación RO**

Algoritmo Genético					Búsqueda Directa					Basado en derivadas				
Risk	Pf	Fval	x		Risk	Pf	Fval	x		Risk	Pf	Fval	x	
2	0,077	-48,596	29,100	72,750	2	0,078	-47,247	29,588	73,969	2	0,085	-49,677	28,696	71,741
3	0,085	-65,871	28,808	72,020	3	0,078	-62,996	29,588	73,969	3	0,085	-66,232	28,698	71,744
4	1,000	-41,788	1,352	3,378	4	0,078	-78,745	29,588	73,969	4	0,085	-82,786	28,699	71,747
5	0,085	-99,321	28,711	71,777	5	0,078	-94,494	29,588	73,969	5	0,085	-99,341	28,699	71,747
7	0,110	-24,294	20,311	50,782	7	0,078	-125,991	29,588	73,969	7	0,085	-132,450	28,699	71,747
9	1,000	-39,470	9,850	9,625	9	0,078	-157,489	29,588	73,969	9	0,085	-165,559	28,699	71,747
11	1,000	-39,243	4,097	10,243	11	0,078	-188,987	29,588	73,969	11	0,085	-198,669	28,699	71,747
15	0,076	-78,745	29,588	73,969	15	0,078	-251,983	29,588	73,969	15	0,085	-264,888	28,699	71,747
20	0,120	-27,525	16,786	41,984	20	0,078	-330,727	29,588	73,969	20	0,085	-347,662	28,699	71,747

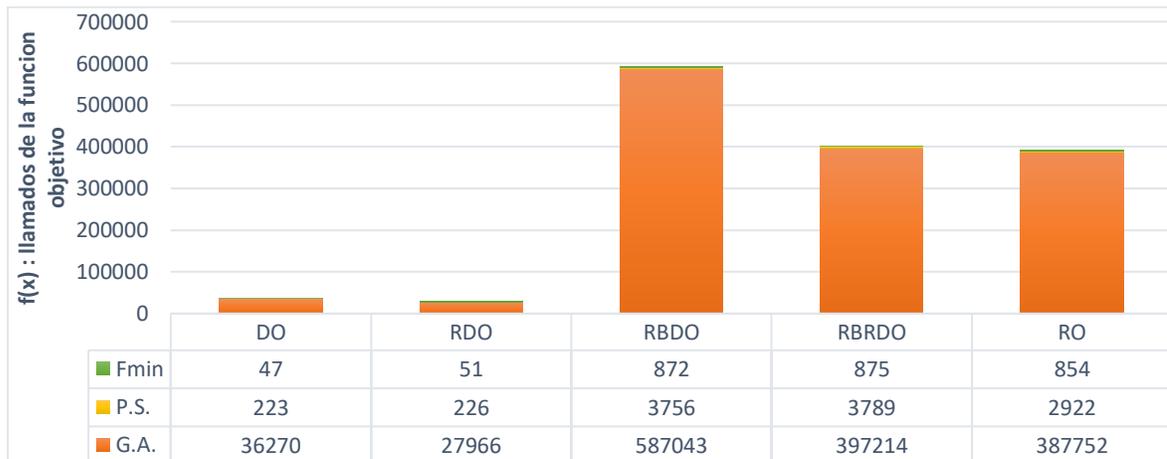
**Figura 4-16 Resultados optimización para la formulación RO**



### 4.5.6 Análisis de resultados biela manivela.

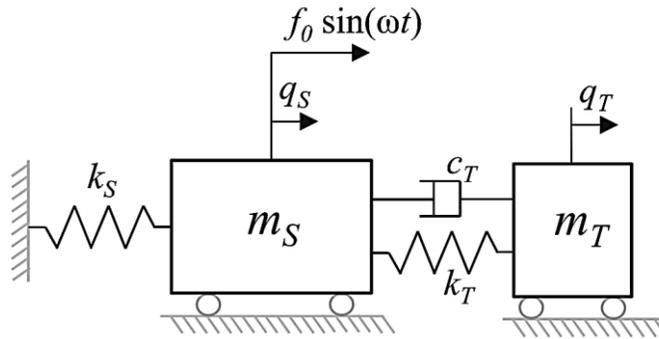
Para este problema los resultados obtenidos en las formulaciones DO, RBDO, RDO y RBRDO son aproximadamente iguales con  $x^* \cong \{28.450, 71.126\}$  y  $f^* \cong \{-16.797\}$ ; y para la formulación RO son  $x^* = \{28.699, 71.747\}$  y  $f^* = \{-347.662\}$ , lo que nos indica que el valor de las variables de diseño son aproximadamente iguales para todas las formulaciones, sin embargo, el valor de la función objetivo se ve incrementado debido al valor de  $cf = 20$ , teniendo éste como referencia un valor de  $pf = 8.5\%$ . Con estos resultados se puede concluir que para la formulación RO y RBDO no se encuentra utilidad en los resultados debido al alto costo computacional (ver Figura 4-17) respecto a los resultados obtenidos con RDO. Con esto se quiere decir que, para este problema en específico, se obtuvieron aproximadamente los mismos resultados en las tres formulaciones, sin embargo, en el costo computacional se presentan diferencias considerables (ver Figura 4-17).

**Figura 4-17 Costo computacional Biela Manivela.**



## 4.6 Amortiguador

Este problema se refiere al diseño de un absorbedor de vibraciones de masa sintonizada (*TMD, Tunned Mass Damper*) y se basa en (Zang et al. 2005)[65], quienes lo propusieron originalmente para la formulación de Optimización del diseño Robusto, luego (André T. Beck et al ,2015)[7] modificaron el problema para proponer una formulación de optimización bajo Riesgo y comparar los resultados de las dos formulaciones.

**Figura 4-18** Amortiguador (*TMD*)[7]

El sistema principal está compuesto por una masa ( $m_S$ ) y un resorte ( $k_S$ ), y el absorbedor de vibraciones está compuesto por una masa ( $m_T$ ), un resorte ( $k_T$ ) y un amortiguador ( $c_T$ ), como se ilustra en la Figura 4-18. El principio detrás de un sistema *TMD* es que la masa, la rigidez y la amortiguación del absorbedor de vibraciones *TMD* se pueden ajustar para dividir la frecuencia natural del sistema principal en dos, reduciendo el nivel general de vibraciones en un amplio rango de frecuencias. Las ecuaciones de movimiento para un sistema de dos grados de libertad son:

$$\begin{aligned} m_S \ddot{q}_S + c_T(\dot{q}_S - \dot{q}_T) + k_S q_S + k_T(q_S - q_T) &= f_0 \sin(\omega t) \\ m_T \ddot{q}_T + c_T(\dot{q}_T - \dot{q}_S) + k_T(q_T - q_S) &= 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde  $q_S$  y  $q_T$  son los desplazamientos del sistema principal y del *TMD*, respectivamente; los puntos representan las derivadas respecto al tiempo, y  $f_0 \sin(\omega t)$  es la excitación. Resolver estas ecuaciones para la solución de estado es la que produce la máxima amplitud no dimensional de vibración como:

$$\delta_S(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (4.40)$$

$$= k_S \left[ \frac{c_T^2 \omega^2 + (k_T - m_T \omega^2)^2}{c_T^2 \omega^2 (k_S - m_S \omega^2 - m_T \omega^2)^2 + (m_T k_T \omega^2 - (k_S - m_S \omega^2)(k_T - m_T \omega^2))^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\delta_T(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{d})$$

$$= k_T \left[ \frac{c_T^2 \omega^2 + k_T^2}{c_T^2 \omega^2 (k_S - m_S \omega^2 - m_T \omega^2)^2 + (m_T k_T \omega^2 - (k_S - m_S \omega^2)(k_T - m_T \omega^2))^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

El problema del diseño consiste en encontrar los parámetros óptimos del sistema bajo incertidumbre en los parámetros del sistema principal ( $m_S$  y  $k_S$ ); por lo tanto, el vector de diseño es  $\mathbf{d} = \{m_T, k_T, c_T\}$  y el vector aleatorio es  $\mathbf{X} = \{M_S, K_S\}$ . Los parámetros óptimos anteriores se refieren a los objetivos de la Formulación del diseño robusto (RDO) y de optimización de riesgo (RO). Los límites inferior y superior en las variables de diseño están dados por  $d_l = \{10, 100, 10\}$  y  $d_u = \{2000, 10^6, 2000\}$ . Para fines computacionales, los valores medios de los parámetros principales del sistema se toman como  $m_S = 10 \text{ ton}$  y  $k_S = 1 \text{ MN/m}$ . Por lo tanto, la frecuencia natural media del sistema principal es  $\omega_S = E \left[ \sqrt{\frac{k_S}{m_S}} \right] = \sqrt{k_S/m_S} = 10$ . El rango de frecuencias de excitación se toma como ( $1 \leq \omega \leq 20$ ); por lo tanto, incluye la frecuencia natural del sistema principal. Se supone que el sistema principal está sujeto a una variación del 10% en sus parámetros; por lo tanto,  $\Delta m_S = 1 \text{ Ton}$  y  $\Delta k_S = 0.1 \text{ MN/m}$ . Se supone que los parámetros del sistema inciertos se distribuyen uniformemente en el rango ( $m_S \pm \Delta m_S$ ) y ( $k_S \pm \Delta k_S$ ); por lo tanto, las desviaciones estándar son  $\sigma_m = \Delta m_S / 3$  y  $\sigma_k = \Delta k_S / 3$ . Para el problema de optimización bajo riesgo, se supone que el desplazamiento crítico no dimensional es  $\delta_{crit} = 25$ . Si el sistema principal es un puente o un edificio, este desplazamiento correspondería a la distancia a las estructuras adyacentes; por lo tanto, desplazamientos mayores conducirían a golpes entre las estructuras. La probabilidad de falla se evalúa como:

$$P_f(\mathbf{d}) = P \left[ d_{crit} - \max_{1 \leq \omega \leq 20} (\delta_S(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{d})) \leq 0 \right] \quad (4.41)$$

donde  $P$  [.] significa probabilidad. Para la optimización robusta, los objetivos convencionales son minimizar la media y la varianza de la amplitud de desplazamiento máxima para el sistema principal. Basado en una aproximación de Taylor de primer orden, el valor esperado y la varianza se evalúan como:

$$\mu_\delta(\mathbf{d}) = E \left[ \max_{1 \leq \omega \leq 20} (\delta_S(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{d})) \right] \quad (4.42)$$

$$\sigma_\delta(\mathbf{d}) = E \left[ \max_{1 \leq \omega \leq 20} \left( \sqrt{\left( \frac{\partial \delta_S(\omega, \mathbf{X}, \mathbf{d})}{\partial m_S} \right)^2 \sigma_m^2 + \left( \frac{\partial \delta_S(\omega, \mathbf{X}, \mathbf{d})}{\partial m_S} \right)^2 \sigma_m^2} \right) \right]$$

donde  $E [.]$  representa el valor esperado. Cuando el sistema principal está bajo resonancia, como es el caso, el rendimiento de  $TMD$  más eficiente se obtiene cuando la frecuencia natural de  $TMD$  coincide con la del sistema principal. Por lo tanto, para simplificar el problema, se supuso que:

$$\omega_T = \sqrt{\frac{k_T}{m_T}} = \omega_S; \text{ con } k_T = \omega_S^2 m_T \quad (4.43)$$

Esto reduce la dimensionalidad del problema, ya que las tres variables de diseño se reducen realmente a dos.

### Formulación para Optimización del diseño Robusto[65]

Una formulación típica de optimización robusta implica una compensación entre la minimización de la media de respuesta y la desviación estándar en (4.42). Por lo tanto, un problema de optimización robusto convencional puede establecerse como:

$$\mathbf{d}^* = \min \left[ \alpha \frac{\mu_\delta}{\mu_\delta^*} + \left( 1 - \alpha \frac{\sigma_\delta}{\sigma_\delta^*} \right) : \mathbf{d}_l \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}_u \right] \quad (4.44)$$

Con  $0 \leq \alpha \leq 1$

donde  $\mu_\delta^*$  y  $\sigma_\delta^*$  son los puntos utópicos, obtenidos al minimizar  $\mu_\delta$  y  $\sigma_\delta$  uno a la vez. Sin embargo, resulta que maximizar la amortiguación de  $TMD$  ( $c_T$ ) reduce tanto la  $\mu_\delta$  media como la desviación estándar  $\sigma_\delta$  de la respuesta.

### Formulación para Optimización bajo Riesgo[65]

La existencia de un desplazamiento crítico (e.g. Golpes), permite formular una función de estado límite, para que el diseño del amortiguador de vibraciones se convierta en un problema de optimización bajo riesgo. Además, se debe recordar que aumentar la masa, la rigidez y la amortiguación del  $TMD$  tiene un costo que no se aborda en la optimización robusta anterior. Por lo tanto, se logra una programación de compromiso adecuada diseñando para minimizar el costo asociado a  $d = \{m_T, k_T, c_T\}$  y los costos esperados de falla (por ejemplo, debido a golpes). La función objetivo se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \min(\mathbf{d}, cf) &= cost_{TMD} + \varphi P_f(\mathbf{d})cf \\ &= \left( \frac{m_T}{m_S} + \frac{k_T}{k_S} + \frac{c_T}{c_{max}} \right) + \left( \frac{m_0}{m_S} + \frac{k_0}{k_S} + \frac{c_0}{c_{max}} \right) P_f(\mathbf{d})cf \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde  $cost_{TMD}$  es el costo inicial de  $TMD$ ,  $\varphi$  es una constante de normalización para el costo de falla ( $cf$ ),  $c_{max} = 104 \text{ Ns} / m$  es un límite superior en la amortiguación y  $d_0 = \{m_0, k_0, c_0\} = \{200, 2 \times 104, 200\}$  es una solución de referencia con referencia al costo del falla. El límite superior de la amortiguación es diferente del límite superior de diseño de  $c_T$ , ya que la función de  $c_{max}$  es controlar la contribución relativa de la amortiguación, con relación a la rigidez y masa, en el costo inicial de la  $TMD$ . En una situación de diseño práctico, los términos de costo relativo deben reflejar el costo real de producir tal  $TMD$ .

#### 4.6.1 Formulación del diseño robusto (RDO):

$$\min_{\mathbf{d}}: \text{stat}[J(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.46)$$

$$\text{s. a.: } g_i(\mathbf{d}) < 0 \quad \dots \quad i = 1, \dots, m$$

$$\min: \left[ \alpha \frac{\mu_\delta}{\mu_\delta^*} + \left( 1 - \alpha \frac{\sigma_\delta}{\sigma_\delta^*} \right) \right] \quad (4.47)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} 0.1 \leq \alpha \leq 1 \\ d_l \leq d \leq d_u \end{cases}$$

#### 4.6.2 Formulación basada en confiabilidad (RBDO)

$$\min_{\mathbf{d}}: J(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \quad (4.48)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases}$$

$$\min_{\mathbf{d}}: \left( \frac{m_T}{m_S} + \frac{k_T}{k_S} + \frac{c_T}{c_{max}} \right) + \left( \frac{m_0}{m_S} + \frac{k_0}{k_S} + \frac{c_0}{c_{max}} \right) \quad (4.49)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P \left[ d_{crit} - \max_{1 \leq \omega \leq 20} (\delta_S(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{d})) \leq 0 \right] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ d_l \leq d \leq d_u & j = m + 1, \dots, M \end{cases}$$

### 4.6.3 Formulación del diseño robusto y basada en confiabilidad (RBRDO)

$$\text{Min: } \text{stat}[J(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.50)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases}$$

$$\text{min: } \left[ \alpha \frac{\mu_\delta}{\mu_\delta^*} + \left( 1 - \alpha \frac{\sigma_\delta}{\sigma_\delta^*} \right) \right] \quad (4.51)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P \left[ d_{crit} - \max_{1 \leq \omega \leq 20} (\delta_s(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{d})) \leq 0 \right] \leq P_{fi}^t \\ 0.1 \leq \alpha \leq 1 \\ d_l \leq d \leq d_u \end{cases}$$

### 4.6.4 Formulación bajo Riesgo (RO)

$$\text{min}_d: J(\mathbf{d}, \mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{n_c} P_{fi} * cf * J_{fi} \quad (4.52)$$

$$\text{min}_d: = \left( \frac{m_T}{m_S} + \frac{k_T}{k_S} + \frac{c_T}{c_{max}} \right) + \left( \frac{m_0}{m_S} + \frac{k_0}{k_S} + \frac{c_0}{c_{max}} \right) P_f(\mathbf{d}) cf \quad (4.53)$$

### 4.6.5 Resultados

Resultados de la literatura para el diseño de un Amortiguador

Tabla 4-33 Resultados de la literatura.

Resultados de la literatura										
		Función Objetivo X, P determinístico			Función Objetivo X, P Incertidumbre			Función Objetivo X, P Incertidumbre		
No Restricciones	x							270,0	27.000,0	600,0
	fval							NA		
Restricciones X, P determinístico	x				700,0	14.000,0	2.000,0			
	fval				NA					
Restricciones X, P Incertidumbre	x									
	fval									

Características de los resultados de la literatura:

- **Algoritmo de optimización usado:** No se indica
- **Tolerancia de convergencia de los algoritmos de optimización:** No se indica
- **Técnica de cuantificación de incertidumbre:** Para el cálculo de la probabilidad de falla se usa el análisis por Monte Carlo.
- **$\beta$  de referencia:** no indica
- **$p_f$  de referencia:** no se indica, sin embargo, el valor que se obtiene al desarrollar la formulación RO es de  $1.0^{-2}$ .
- **Resultados tomados del artículo:** *A comparison between robust and risk-based optimization under uncertainty*[65]

### Algoritmo bio inspirado

**Tabla 4-34** Resultados optimización con un Algoritmo Genético bajo incertidumbre

Algoritmo genético										
		Función Objetivo X, P determinístico			Función Objetivo X, P Incertidumbre			Función Objetivo X, P Incertidumbre		
No Restricciones	x	1.709,2	35.038,7	1.999,8	1.706,8	35.037,9	2.000,0	302,5	30.167,7	1.903,4
	fval	0,5403			0,2701			0,0665		
Restricciones X, P determinístico	x	1.709,2	35.038,7	1.999,8	1.706,8	35.037,9	2.000,0			
	fval	0,5403			0,2701					
Restricciones X, P Incertidumbre	x	nc	nc	nc	nc	nc	nc			
	fval	nc			nc					

### Algoritmo de búsqueda directa

**Tabla 4-35** Resultados optimización con un Algoritmo de búsqueda directa bajo incertidumbre

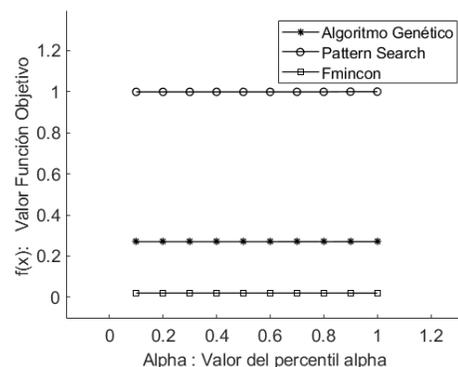
Búsqueda directa										
		Función Objetivo X, P determinístico			Función Objetivo X, P Incertidumbre			Función Objetivo X, P Incertidumbre		
No Restricciones	x	200,0	29.912,5	19,9	200,0	34.500,0	2.000,0	270,0	22.192,0	232,0
	fval	0,0435			1,0000			0,0452		
Restricciones X, P determinístico	x	200,0	29.912,5	19,9	200,0	34.500,0	2.000,0			
	fval	0,0435			1,0000					
Restricciones X, P Incertidumbre	x	270,0	14.000,0	232,0	270,0	14.000,0	232,0			
	fval	0,06229			0,05481					

**Algoritmo basado en derivadas****Tabla 4-36** Resultados optimización con un Algoritmo Basado en derivadas bajo incertidumbre

Basado en derivadas										
		Función Objetivo X, P determinístico			Función Objetivo X, P Incertidumbre			Función Objetivo X, P Incertidumbre		
No Restricciones	x	240,6	35.022,1	27,2	197,8	34.966,1	240,7	270,0	22.175,0	232,0
	fval	0,0459			0,0199			0,0452		
Restricciones X, P determinístico	x	240,6	35.022,1	27,2	197,8	34.966,1	240,7			
	fval	0,0459			0,0199					
Restricciones X, P Incertidumbre	x	270,0	14.000,0	200,0	270,0	14.000,0	200,0			
	fval	0,06229			0,0548					

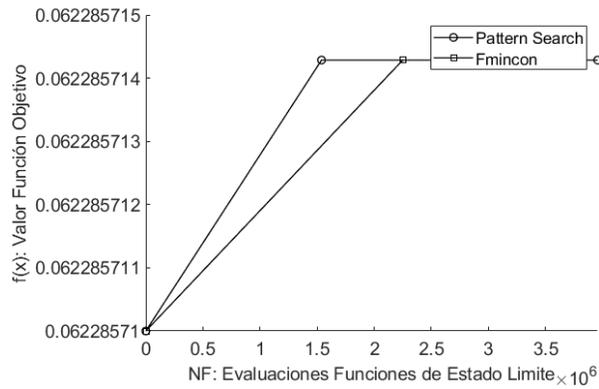
**Resultados Formulación del diseño robusto (RDO)****Tabla 4-37** Resultados optimización para la formulación RDO

Algoritmo genético					Búsqueda Directa					Basado en derivadas				
Robust	Fval	x			Robust	Fval	x			Robust	Fval	x		
0,1	0,3	1717,3	35023,6	20000,0	0,1	1,0	200,0	34500,0	2000,0	0,1	0,0	197,8	34966,1	240,7
0,2	0,3	1709,0	35032,5	2000,0	0,2	1,0	200,0	34500,0	2000,0	0,2	0,0	197,8	34496,1	240,8
0,3	0,3	1705,1	35040,2	2000,0	0,3	1,0	200,0	34500,0	2000,0	0,3	0,0	197,8	34966,1	240,8
0,4	0,3	1713,9	35030,0	2000,0	0,4	1,0	200,0	34500,0	2000,0	0,4	0,0	197,9	34965,7	242,1
0,5	0,3	1707,7	35032,0	2000,0	0,5	1,0	200,0	34500,0	2000,0	0,5	0,0	197,8	34966,1	240,7
0,6	0,3	1717,6	35031,0	2000,0	0,6	1,0	200,0	34500,0	2000,0	0,6	0,0	197,9	34965,8	242,1
0,7	0,3	1709,1	35033,4	2000,0	0,7	1,0	200,0	34500,0	2000,0	0,7	0,0	197,8	34966,1	240,7
0,8	0,3	1714,0	35037,0	2000,0	0,8	1,0	200,0	34500,0	2000,0	0,8	0,0	197,8	34966,1	240,9
0,9	0,3	1706,8	35037,9	2000,0	0,9	1,0	200,0	34500,0	2000,0	0,9	0,0	197,8	34966,1	240,7
1,0	0,3	1710,0	35034,1	2000,0	1,0	1,0	200,0	34500,0	2000,0	1,0	0,0	198,9	34963,3	251,4

**Figura 4-19** Resultados optimización para la formulación RDO

**Resultados formulación basada en confiabilidad (RBDO)**

**Figura 4-20** Grafico de convergencia para los resultados optimización para la formulación RBDO

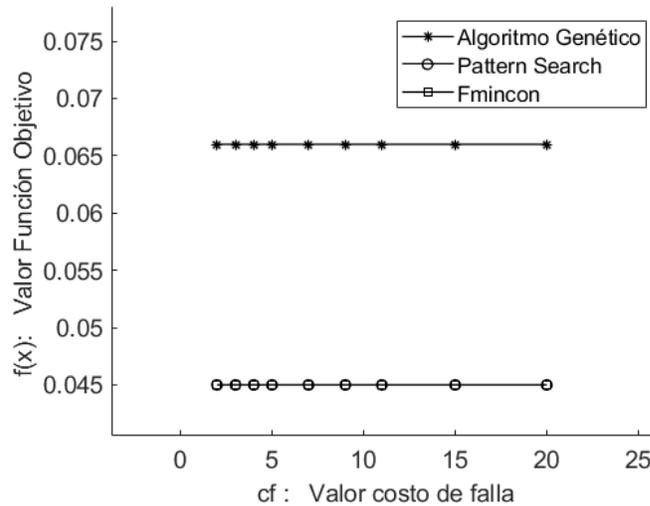


**Resultados formulación Bajo Riesgo (RO)**

**Tabla 4-38** Resultados optimización para la formulación RO

Algoritmo Genético						Búsqueda directa					
Risk	Pf	Fval	x			Risk	Pf	Fval	x		
2,0	0,035	0,066	302,5	30167,7	1903,4	2,0	0,015	0,045	270,0	22192,0	232,0
3,0	0,035	0,066	302,5	30167,7	1903,4	3,0	0,015	0,045	270,0	22192,0	232,0
4,0	0,035	0,066	302,5	30167,7	1903,4	4,0	0,015	0,045	270,0	22192,0	232,0
5,0	0,035	0,066	302,5	30167,7	1903,4	5,0	0,015	0,045	270,0	22192,0	232,0
7,0	0,035	0,066	302,5	30167,7	1903,4	7,0	0,015	0,045	270,0	22192,0	232,0
9,0	0,035	0,066	302,5	30167,7	1903,4	9,0	0,015	0,045	270,0	22192,0	232,0
11,0	0,035	0,066	302,5	30167,7	1903,4	11,0	0,015	0,045	270,0	22192,0	232,0
15,0	0,035	0,066	302,5	30167,7	1903,4	15,0	0,015	0,045	270,0	22192,0	232,0
20,0	0,035	0,066	302,5	30167,7	1903,4	20,0	0,015	0,045	270,0	22192,0	232,0

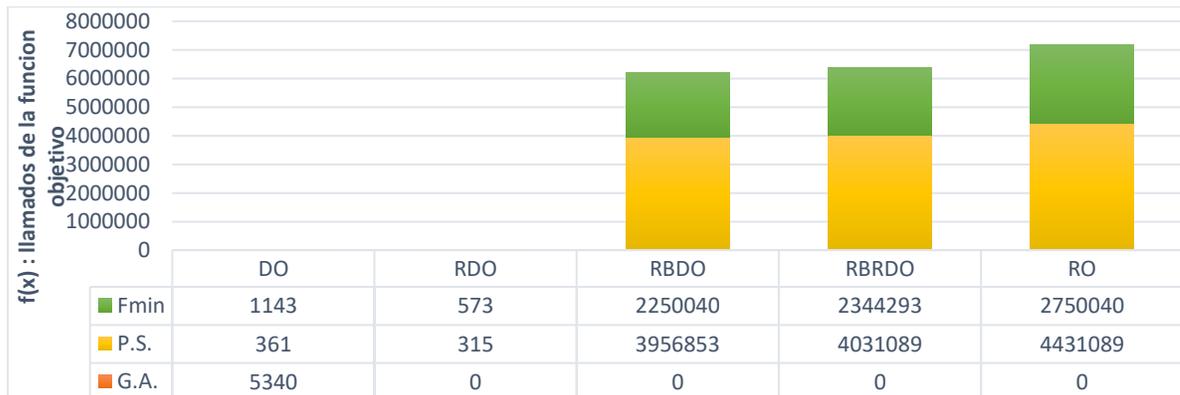
Basado en Derivadas					
Risk	Pf	Fval	x		
2,0	0,015	0,045	270,0	22175,0	232,0
3,0	0,015	0,045	270,0	22175,0	232,0
4,0	0,015	0,045	270,0	22175,0	232,0
5,0	0,015	0,045	270,0	22175,0	232,0
7,0	0,015	0,045	270,0	22175,0	232,0
9,0	0,015	0,045	270,0	22175,0	232,0
11,0	0,015	0,045	270,0	22175,0	232,0
15,0	0,015	0,045	270,0	22175,0	232,0
20,0	0,015	0,045	270,0	22175,0	232,0

**Figura 4-21** Resultados optimización para la formulación RO

#### 4.6.6 Análisis de resultados del amortiguador

Este problema fue propuesto por la formulación RDO y RO propuesta por el autor y fue adaptado para las formulaciones RBDO. Los resultados obtenidos para la formulación RDO y RO por el autor son respectivamente  $x^* = \{700, 14000, 2000\}$ ,  $f^* = \{N.A.\}$  y  $x^* = \{270, 27000, 600\}$ ,  $f^* = \{N.A.\}$ . Estos fueron obtenidos haciendo 1000 muestras de la evaluación de la probabilidad de falla; los resultados obtenidos en este trabajo para la formulación RBDO, RBRDO son  $x^* \cong \{270, 14000, 200\}$  y  $f^* \cong \{0.06229\}$  respectivamente. Hay una diferencia grande en los valores de las variables de diseño si comparamos los resultados obtenidos por el autor y por este trabajo. Esto se debe a la limitante de la evaluación de la probabilidad de falla que propone el autor. En el presente trabajo no se limitó de ninguna forma el análisis tanto de la incertidumbre como de la optimización. La probabilidad de fallo obtenida es de  $p_f = 0.015$  (1.5%), lo que indica que los resultados tienen un margen de seguridad alto, sin embargo, como se muestra en la Figura 4-21 el costo computacional de analizar este problema tanto por RO como RBDO es muy alto en comparación con los resultados obtenidos por RDO  $x^* = \{270, 34966.1, 240.7\}$ ,  $f^* = \{0.0199\}$ . Con estos resultados se puede concluir que la formulación RO y RBDO, no se considera útil por su alto costo computacional, a pesar de que consigan un óptimo; a diferencia de la formulación RDO que consigue un equilibrio entre el óptimo y un costo computacional eficiente.

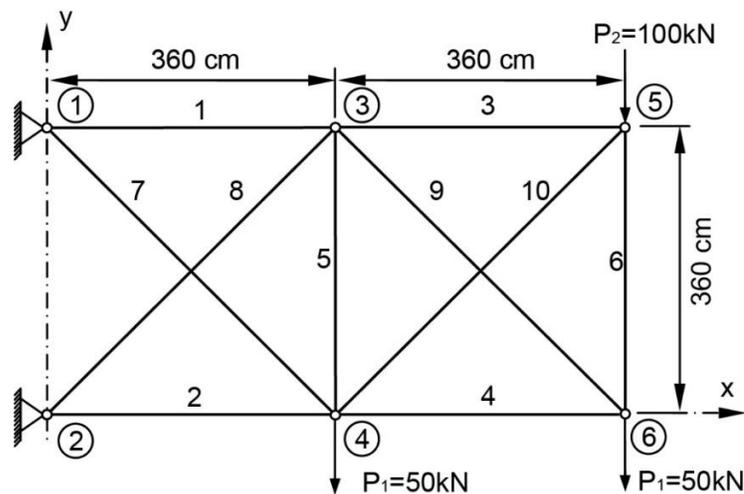
**Figura 4-22** Costo computacional diseño de un amortiguador.



## 4.7 Armadura de 10 barras

Este ejemplo consiste en la optimización basada en confiabilidad de una estructura plana articulada de 10 barras, mostrada en la Figura 4-23, sometida a restricciones de desplazamientos y de tensiones [66].

**Figura 4-23** Estructura plana articulada de 10 barras



Este ejemplo sirve para analizar el comportamiento de métodos *RBDO* con un problema estructural en el que las funciones de estado límite dependen de forma implícita de las variables de diseño. El problema *RBDO* para la estructura articulada de 10 barras consiste en minimizar el volumen de la estructura sujeto a restricciones de confiabilidad sobre las tensiones, desplazamientos y pandeo. La estructura está soportando las siguientes cargas aleatorias:  $P_1=100$  kN aplicada al nodo 5 y  $P_2=50$  kN aplicada en los

odos 4 y 6. Las barras son de acero y sección transversal rectangular maciza. Se considera que las barras de la estructura están agrupadas por motivos de fabricación en tres grupos correspondientes a las barras horizontales ( $A_1$ ), verticales ( $A_2$ ) y diagonales ( $A_3$ ). El problema *RBO* considera estos tres grupos como las variables de diseño  $\mathbf{d} = \{\mu_{A_1}, \mu_{A_2}, \mu_{A_3}\}$ , que corresponden a las áreas de las secciones transversales de las barras de cada grupo. El módulo de elasticidad  $E$  y la tensión admisible  $\sigma^a$  son variables aleatorias, definidas en la Tabla 4-39.

**Tabla 4-39** Datos estadísticos de las variables aleatorias del problema de la estructura de 10 barras

Variable	Distribución	Media	COV	
$\mu_{A_1}$	$cm^2$	Log-Normal	20	0.05
$\mu_{A_2}$	$cm^2$	Log-Normal	20	0.05
$\mu_{A_3}$	$cm^2$	Log-Normal	20	0.05
$E$	$kN/cm^2$	Log-Normal	21000	0.05
$\sigma_a$	$kN/cm^2$	Log-Normal	21	0.05
$P_1$	$kN$	Log-Normal	100	0.20
$P_1$	$kN$	Log-Normal	50	0.05

La formulación matemática del problema es:

$$\min_{\mathbf{d}} V(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \quad (4.54)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) < 0) \leq P_{f_i}^t \\ \text{con } \beta_i^t = 3.7 \quad i = 1, \dots, 22. \\ 5cm^2 \leq d_j \leq 75cm^2 \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

La restricción del desplazamiento vertical en el nodo 6 ( $q_v$ ) está definida por la ecuación (4.55) para desplazamientos positivos y por la ecuación (4.56) para desplazamientos negativos, limitado por un desplazamiento máximo admisible de  $q_v^a = 3.5 \text{ cm}$ .

$$G_1(X) = 1 + \frac{q_v}{q_v^a} \quad (4.55)$$

$$G_2(X) = \frac{q_v}{-q_v^a} - 1 \quad (4.56)$$

Las restricciones de tensión en los elementos de la estructura están dadas por la ecuación (4.57), limitadas por la tensión admisible  $\sigma_k^a$  que puede soportar cada elemento y está dada por (donde  $\sigma_k$  es la tensión calculada en cada elemento):

$$G_i(X) = 1 - \frac{\sigma_k}{\sigma_k^a} \quad k = 1, \dots, 10.; i = 3, \dots, 12. \quad (4.57)$$

Las restricciones de compresión en los elementos de la estructura están dadas por la ecuación (4.58), limitadas por la tensión crítica de pandeo de Euler  $\sigma^k$ .

$$G_i(X) = 1 + \frac{\sigma_k}{\sigma_k^{cr}} \quad k = 1, \dots, 10.; i = 13, \dots, 22. \quad (4.58)$$

con

$$\sigma_k^{cr} = \frac{\pi^2 E I_k}{L_k^2 A_k}$$

donde  $I_k$  es el momento de inercia mínimo de la sección transversal,  $L_k$  la longitud del elemento y  $A_k$  es el área de sección trasversal de la  $k$ -ésima barra.

#### 4.7.1 Formulación del diseño robusta (RDO):

$$\min_d: \text{stat}[J(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.59)$$

$$\text{s. a.: } g_i(d) < 0 \quad \dots \quad i = 1, \dots, m$$

$$\min_d: \alpha E [V(\mathbf{d}, \mathbf{X})] + (1 - \alpha) \text{Var} [V(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.60)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} 0.1 \leq \alpha \leq 1 \\ 5\text{cm}^2 \leq d_j \leq 75\text{cm}^2 \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

#### 4.7.2 Formulación basada en confiabilidad (RBDO)

$$\min_d: J(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \quad (4.61)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases}$$

$$\min_d V(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \quad (4.62)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) < 0) \leq P_{fi}^t \\ \text{con } \beta_i^t = 3.7 & i = 1, \dots, 22. \\ 5\text{cm}^2 \leq d_j \leq 75\text{cm}^2 & j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

**4.7.3 Formulación del diseño robusta y basada en confiabilidad (RBRDO)**

$$\min_d: \text{stat}[J(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.63)$$

$$\text{s. a.:} \begin{cases} P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases}$$

$$\min_d: \alpha E[V(\mathbf{d}, \mathbf{X})] + (1 - \alpha) \text{Var}[V(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.64)$$

$$\text{s. a.:} \begin{cases} P(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) < 0) \leq P_{fi}^t \\ \text{con } \beta_i^t = 3.7 & i = 1, \dots, 22. \\ 0.1 \leq \alpha \leq 1 \\ 5\text{cm}^2 \leq d_j \leq 75\text{cm}^2 & j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

**4.7.4 Formulación bajo Riesgo (RO)**

$$\min_d: J(\mathbf{d}, \mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{n_c} P_{fi} * cf * J_{fi} \quad (4.65)$$

$$\min_d: V(\mathbf{d}, \mathbf{X}) + P_{fi} * cf * G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \quad (4.66)$$

**4.7.5 Resultados**

Resultados de la literatura para la armadura de 10 barras.

Tabla 4-40 Resultados de la literatura.

Resultados literatura										
		Función Objetivo X, P determinístico			Función Objetivo X, P Incertidumbre			Función Objetivo X, P Incertidumbre		
No Restricciones	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	fval	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Restricciones X, P determinístico	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	fval	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Restricciones X, P Incertidumbre	x	55,886	22,810	60,118	-	-	-	-	-	-
	fval	219.326,189			-	-	-	-	-	-

Características de los resultados de la literatura:

- **Algoritmo de optimización usado:** Algoritmo de programación cuadrática secuencial (SQP, sequential quadratic programming)

- **Tolerancia de convergencia de los algoritmos de optimización:** los valores en la función objetivo y las restricciones es de  $10^{-3}$
- **Técnica de cuantificación de incertidumbre:** Para el cálculo de la probabilidad de falla es usada la técnica del método de índice de fiabilidad de primer orden (FORM, First order reliability method).
- **$\beta$  de referencia:** 3.7.
- **$p_f$  de referencia:**  $1.0780^{-4}$ .
- **Resultados tomados de la tesis de Doctorado:** Metodología eficiente de optimización de diseño basada en fiabilidad aplicada a estructuras[66]

### Algoritmo bio inspirado

**Tabla 4-41** Resultados optimización con un Algoritmo Genético bajo incertidumbre

Algoritmo genético										
		Función Objetivo X, P determinístico			Función Objetivo X, P Incertidumbre			Función Objetivo X, P Incertidumbre		
No Restricciones	x	5,000	5,000	5,000	5,000	40,230	50,145	5,000	5,000	5,000
	fval	20.982,330			6.289,566			21.015,909		
Restricciones X, P determinístico	x	43,993	13,155	44,119	43,994	13,156	44,119			
	fval	162.670,136			146.402,977					
Restricciones X, P Incertidumbre	x	58,683	21,086	57,419	62,071	21,251	57,189			
	fval	216.617,323			199.031,440					

### Algoritmo de búsqueda directa

**Tabla 4-42** Resultados optimización con un Algoritmo de Búsqueda Directa bajo incertidumbre

Búsqueda Directa										
		Función Objetivo X, P determinístico			Función Objetivo X, P Incertidumbre			Función Objetivo X, P Incertidumbre		
No Restricciones	x	5,000	5,000	5,000	5,000	36,612	13,665	5,000	5,000	5,000
	fval	21.015,909			6.298,217			21.015,909		
Restricciones X, P determinístico	x	65,145	19,478	65,332	65,145	19,478	65,332			
	fval	240.880,583			216.206,627					
Restricciones X, P Incertidumbre	x	57,816	23,116	57,567	57,816	23,116	57,567			
	fval	217.131,429			195.418,325					

**Algoritmo basado en derivadas****Tabla 4-43** Resultados optimización con un Algoritmo Basado en Derivadas bajo incertidumbre

Basado en Derivadas										
		Función Objetivo X, P determinístico			Función Objetivo X, P Incertidumbre			Función Objetivo X, P Incertidumbre		
No Restricciones	x	5,000	5,000	5,000	20,000	20,000	20,000	5,006	5,006	5,002
	fval	21.001,161			22.028,765			21.018,948		
Restricciones X, P determinístico	x	44,009	13,162	44,133	44,016	13,162	44,141			
	fval	162.727,193			146.476,126					
Restricciones X, P Incertidumbre	x	54,893	21,150	54,727	57,837	21,148	54,664			
	fval	205.723,605			184.962,255					

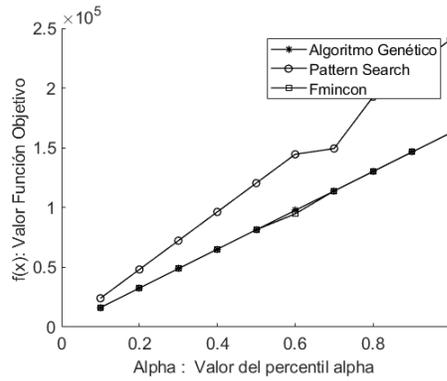
**Resultados Formulación del diseño robusta (RDO)****Tabla 4-44** Resultados optimización para la formulación RDO

Algoritmo Genético				
Robust	Fval	x		
0,1	16266,996	43,994	13,156	44,119
0,2	32534,007	43,994	13,156	44,119
0,3	48800,992	43,994	13,156	44,119
0,4	65068,066	43,994	13,156	44,119
0,5	81335,001	43,994	13,156	44,119
0,6	97601,988	43,994	13,156	44,119
0,7	113868,963	43,994	13,156	44,119
0,8	130136,019	43,994	13,156	44,119
0,9	146402,977	43,994	13,156	44,119
1,0	162670,028	43,994	13,156	44,119

Búsqueda Directa				
Robust	Fval	x		
0,1	24088,025	65,145	19,478	65,332
0,2	48172,715	65,145	19,478	65,324
0,3	72264,104	65,145	19,478	65,332
0,4	96352,201	65,145	19,478	65,332
0,5	120439,076	65,145	19,478	65,332
0,6	144528,204	65,145	19,478	65,332
0,7	149392,834	65,145	19,478	65,332
0,8	192651,448	65,145	19,478	65,332
0,9	216206,627	65,145	19,478	65,332
1,0	240880,583	65,145	19,478	65,332

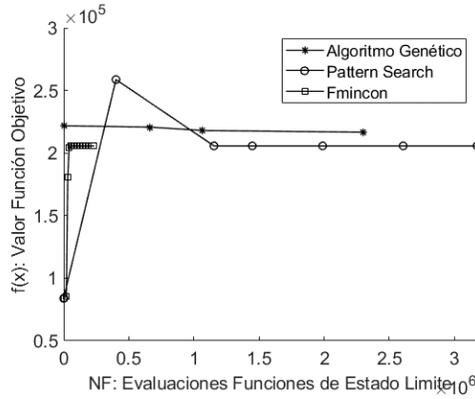
Basado en Derivadas				
Robust	Fval	x		
0,1	16275,126	44,016	13,162	44,141
0,2	32550,251	44,016	13,162	44,141
0,3	48825,377	44,016	13,162	44,141
0,4	65100,503	44,016	13,162	44,141
0,5	81375,628	44,016	13,162	44,141
0,6	94650,753	44,016	13,162	44,141
0,7	113925,878	44,016	13,162	44,141
0,8	130201,002	44,016	13,162	44,141
0,9	146476,126	44,016	13,162	44,141
1,0	162451,251	44,016	13,162	44,141

**Figura 4-24** Resultados optimización para la formulación RDO



**Resultados formulación basada en confiabilidad (RBDO)**

**Figura 4-25** Grafico de convergencia para los resultados optimización para la formulación RDO

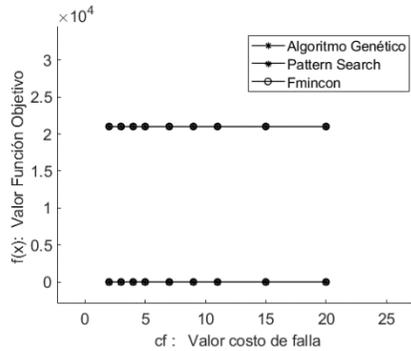


**Resultados formulación Bajo Riesgo (RO)**

**Tabla 4-45** Resultados optimización para la formulación RDO

Algoritmo Genético					Búsqueda Directa					Basado en Derivadas							
Risk	Pf	Fval	x			Risk	Pf	Fval	x			Risk	Pf	Fval	x		
2,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	2,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	2,0	0,9	21018,9	5,0	5,0	5,0
3,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	3,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	3,0	0,9	21018,9	5,0	5,0	5,0
4,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	4,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	4,0	0,9	21018,9	5,0	5,0	5,0
5,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	5,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	5,0	0,9	21018,9	5,0	5,0	5,0
7,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	7,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	7,0	0,9	21018,9	5,0	5,0	5,0
9,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	9,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	9,0	0,9	21018,9	5,0	5,0	5,0
11,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	11,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	11,0	0,9	21018,9	5,0	5,0	5,0
15,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	15,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	15,0	0,9	21018,9	5,0	5,0	5,0
20,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	20,0	0,9	21015,9	5,0	5,0	5,0	20,0	0,9	21018,9	5,0	5,0	5,0

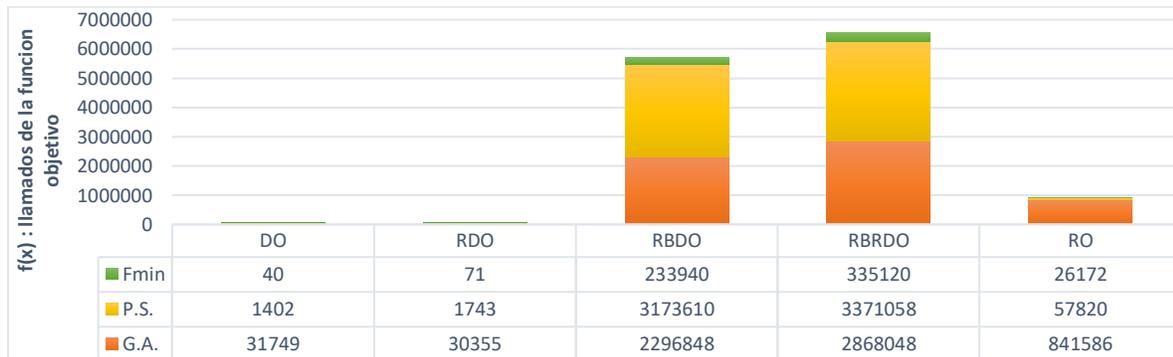
**Figura 4-26** Resultados optimización para la formulación RO



### 4.7.6 Análisis de resultados Armadura de 10 barras

Este problema está en base a la formulación RBDO propuesta por el autor y fue adaptado para las formulaciones RDO, RO y RBRDO. Los resultados obtenidos para la formulación RBDO en este trabajo son  $x^* = \{57.837, 21.148, 54.664\}$  y  $f^* = \{184962.2547\}$ ; los cuales coinciden con los obtenidos por el autor  $x^* = \{55.886, 22.810, 60.118\}$  y  $f^* = \{219326.189\}$ ; los resultados para RO son  $x^* = \{5.006, 5.006, 5.002\}$  y  $f^* = \{21015.909\}$ , con una probabilidad de fallo  $pf = 0.9(90\%)$ , lo cual indica que no son útiles los resultados obtenidos con esta formulación. Los resultados para RDO son  $x^* = \{44.016, 13.162, 44.441\}$  y  $f^* = \{146476.126\}$ , los cuales son interesantes si son comparados con los obtenidos con la formulación original(RBDO), ya que son bastante cercanos y la diferencia del valor de la función objetivo es mayor para RBDO en un 8%, adicionalmente su costo computacional es significativamente menor. Con esto se podría concluir que la formulación RDO es útil al igual que la RBDO cuando se busca satisfacer completamente los parámetros de seguridad.

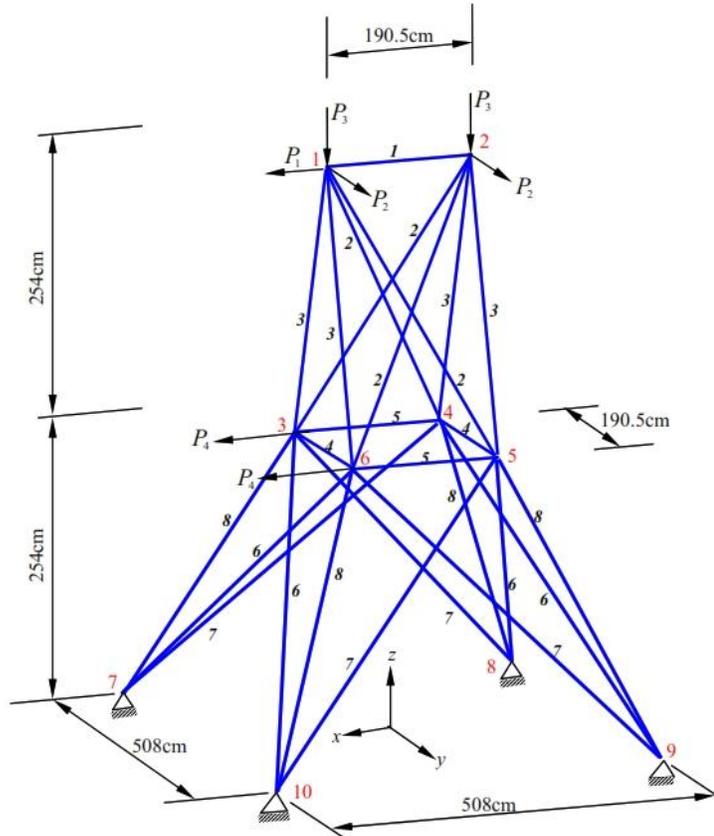
**Figura 4-27** Costo computacional Armadura 10 barras



## 4.8 Armadura de 25 barras

Este problema está basado en la formulación RBDO de una estructura espacial de 25 barras mostrada en la Figura 4-288.

**Figura 4-28** Estructura de 25 Barras



Esta estructura de 25 barras es un problema clásico de la optimización estructural. Lo que hace a este problema interesante es que su forma es similar a la de las torres que se emplean para sostener cables eléctricos o de comunicación. El problema consiste en minimizar el volumen (peso) de la estructura, sujeta a 29 restricciones de fiabilidad, por lo tanto, la formulación del problema está dada por[66]:

$$\min_{\mathbf{d}} V(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \quad (4.67)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) < 0) \leq P_{fi}^t \\ \text{con } \beta_i^t = 3.7 \quad i = 1, \dots, 29. \\ 2\text{cm}^2 \leq d_j \leq 20\text{cm}^2 \quad j = 1, \dots, 8. \end{cases}$$

Los parámetros del material son deterministas:

- Módulo de Elasticidad:  $E = 20700 \text{ kN/cm}^2$
- Tensión Admisible:  $\sigma^a = 27.5 \text{ kN/cm}^2$

Los elementos tipo barra están agrupados por razones constructivas y de fabricación en ocho grupos. Los elementos de cada grupo son iguales como se define a continuación:

**Tabla 4-46 Grupo de elementos para la estructura de 25 barras**

Grupo	Barras	Grupo	Barras
1	1	5	12-13
2	2-5	6	14-17
3	6-9	7	18-21
4	10-11	8	22-25

Las variables aleatorias del problema son las áreas de las secciones transversales de las barras y las cargas aplicadas. Estas variables aleatorias son independientes. Los valores medios de las áreas de cada grupo son las variables de diseño del problema. Los datos sobre estas variables se incluyen en la siguiente tabla (ver Tabla 4-1)

**Tabla 4-47 Datos estadísticos de las variables aleatorias del problema de la estructura de 10 barras**

Variable Aleatoria	Descripción	Distribución	Valor Medio (Inicial)	Desviación Estándar	Variable de Diseño
$X_1$	$A_1$	Normal	$10 \text{ cm}^2$	$1 \text{ cm}^2$	$\mu_{(X_1)}$
$X_2$	$A_2$	Normal	$10 \text{ cm}^2$	$1 \text{ cm}^2$	$\mu_{(X_2)}$
$X_3$	$A_3$	Normal	$10 \text{ cm}^2$	$1 \text{ cm}^2$	$\mu_{(X_3)}$
$X_4$	$A_4$	Normal	$20 \text{ cm}^2$	$2 \text{ cm}^2$	$\mu_{(X_4)}$
$X_5$	$A_5$	Normal	$20 \text{ cm}^2$	$2 \text{ cm}^2$	$\mu_{(X_5)}$
$X_6$	$A_6$	Normal	$25 \text{ cm}^2$	$25 \text{ cm}^2$	$\mu_{(X_6)}$
$X_7$	$A_7$	Normal	$25 \text{ cm}^2$	$25 \text{ cm}^2$	$\mu_{(X_7)}$
$X_8$	$A_8$	Normal	$25 \text{ cm}^2$	$25 \text{ cm}^2$	$\mu_{(X_8)}$
$X_9$	$P_1$	Normal	$30 \text{ kN}$	$3 \text{ kN}$	(-)
$X_{10}$	$P_2$	Normal	$50 \text{ kN}$	$5 \text{ kN}$	(-)
$X_{11}$	$P_3$	Normal	$100 \text{ kN}$	$10 \text{ kN}$	(-)
$X_{12}$	$P_4$	Normal	$30 \text{ kN}$	$3 \text{ kN}$	(-)

Las restricciones de desplazamientos son definidas como  $G_1(X)$ ,  $G_2(X)$ ,  $G_3(X)$  y  $G_4(X)$  y están definidas por las siguientes ecuaciones:

- $q_x^1$  es el desplazamiento admisible que corresponde al nodo 1 sobre el eje x:

$$G_1(X) = 1 - \frac{q_x^1}{q_v^a} \quad (4.68)$$

- $q_y^1$  es el desplazamiento admisible que corresponde al nodo 1 sobre el eje y:

$$G_2(X) = 1 - \frac{q_y^1}{q_v^a} \quad (4.69)$$

- $q_x^1$  es el desplazamiento admisible que corresponde al nodo 2 sobre el eje x:

$$G_3(X) = 1 - \frac{q_x^2}{q_v^a} \quad (4.70)$$

- $q_y^1$  es el desplazamiento admisible que corresponde al nodo 2 sobre el eje y:

$$G_4(X) = 1 - \frac{q_y^2}{q_v^a} \quad (4.71)$$

Donde  $q_v^a$  es el valor de referencia permitido para los nodos y tiene un valor de 0.3 cm.

Las restricciones de tensión en los elementos de la estructura están dadas por la ecuación (4.72), limitadas por la tensión admisible  $\sigma_k^a$  que puede soportar cada elemento y está dada por:

$$G_i(X) = 1 - \frac{\sigma_k}{\sigma_k^a} \quad k = 1, \dots, 25.; i = 5, \dots, 29. \quad (4.72)$$

donde  $\sigma_k$  es la tensión calculada en cada elemento.

Las restricciones de compresión en los elementos de la estructura están dadas por la ecuación (4.73), limitadas por la tensión crítica de pandeo de Euler  $\sigma_k^{cr}$ .

$$G_i(X) = 1 + \frac{\sigma_k}{\sigma_k^{cr}} \quad k = 1, \dots, 25.; i = 5, \dots, 29. \quad (4.73)$$

con

$$\sigma_k^{cr} = \frac{\pi^2 E I_k}{L_k^2 A_k}$$

donde  $I_k$  es el momento de inercia mínimo de la sección transversal,  $L_k$  la longitud del elemento y  $A_k$  es el área de sección trasversal de la  $k$ -ésima barra.

Para el momento de inercia se considera que la sección transversal de las barras es tubular. La relación entre el momento de inercia mínimo de la sección ( $I_{min}$ ) y el área de la sección transversal  $A$  se obtiene manteniendo fija la relación entre el diámetro externo e interno de los perfiles:

$$I_{min} = \frac{\left(1 + \left(\frac{d_i}{d_e}\right)^2\right) A^2}{4\pi \left(1 - \left(\frac{d_i}{d_e}\right)^2\right)} \quad (4.74)$$

Donde  $d_i$  y  $d_e$  son respectivamente los diámetros interno y externo del perfil tubular y la relación  $d_i/d_e = 0.8$ .

En el artículo de origen proponen resolver el problema por medio de un algoritmo basado en derivadas, conocido como SQP (*Sequential quadratic programming*), con tolerancias de convergencia para la optimización de  $10^{-2}$ . Como se muestra en la Figura 4-28, la estructura está soportando las siguientes cargas aleatorias:  $P_1=30$  kN aplicada en el nodo 1,  $P_2=50$  kN aplicada en los nodos 1 y 2,  $P_3=100$  kN aplicada en los nodos 1 y 2; y  $P_4=30$  kN aplicada en los nodos 3 y 6.

#### 4.8.1 Formulación del diseño robusto (RDO):

$$\min_{\mathbf{d}}: \text{stat}[J(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.75)$$

$$\text{s. a.: } g_i(\mathbf{d}) < 0 \quad \dots \quad i = 1, \dots, m$$

$$\min_{\mathbf{d}}: \alpha E [V(\mathbf{d}, \mathbf{X})] + (1 - \alpha) \text{Var} [V(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.76)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} 0.1 \leq \alpha \leq 1 \\ 2cm^2 \leq d_j \leq 20cm^2 \quad j = 1 \dots 8. \\ g_i(\mathbf{d}) < 0 \quad \dots \quad i = 5, \dots, 29 \end{cases}$$

#### 4.8.2 Formulación basada em confiabilidad (RBDO)

$$\min_{\mathbf{d}}: J(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \quad (4.77)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases}$$

$$\min_{\mathbf{d}} V(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \quad (4.78)$$

$$\text{s. a.: } \begin{cases} P(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) < 0) \leq P_{fi}^t \\ \text{con } \beta_i^t = 3.7 & i = 1, \dots, 29. \\ 2cm^2 \leq d_j \leq 20cm^2 \quad j = 1, \dots, 8. \end{cases}$$

### 4.8.3 Formulación del diseño robusto y Basada en confiabilidad (RBRDO)

$$\min_d: \text{stat}[J(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \tag{4.79}$$

$$\text{s. a.:} \begin{cases} P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases}$$

$$\min_d: \alpha E [V(\mathbf{d}, \mathbf{X})] + (1 - \alpha) \text{Var} [V(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \tag{4.80}$$

$$\text{s. a.:} \begin{cases} P(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) < 0) \leq P_{fi}^t \\ \text{con } \beta_i^t = 3.7 & i = 1, \dots, 29. \\ 2\text{cm}^2 \leq d_j \leq 20\text{cm}^2 & j = 1, \dots, 8. \\ 0.1 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

### 4.8.4 Formulación bajo Riesgo (RO)

$$\min_d: J(\mathbf{d}, \mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{n_c} P_{fi} * cf * J_{fi} \tag{4.81}$$

$$\min_d: V(\mathbf{d}, \mathbf{X}) + P_{fi} * cf * G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \tag{4.82}$$

### 4.8.5 Resultados

Resultados de la literatura para Estructura de 25 barras

Tabla 4-48 Resultados de la literatura.

Resultados Literatura																		
		Función Objetivo X, P determinístico					Función Objetivo X, P Incertidumbre							Función Objetivo X, P Incertidumbre				
No Restricciones	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	fval	-					-							-				
Restricciones X, P determinístico	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	fval	-					-							-				
Restricciones X, P Incertidumbre	x	-	-	-	-	-	2,00	9,47	24,80	2,00	4,08	12,45	14,08	27,69				
	fval	-					128.523,84											

Características de los resultados de la literatura:

- **Algoritmo de optimización usado:** Algoritmo de programación cuadrática secuencial (*SQP, sequential quadratic programming*)
- **Tolerancia de convergencia de los algoritmos de optimización:** los valores en la función objetivo y las restricciones es de  $10^{-2}$
- **Técnica de cuantificación de incertidumbre:** El enfoque de la medida del rendimiento (*PMA, The performance measure approach*), puesto que con la técnica del método de índice de fiabilidad de primer orden (*FORM, First order reliability method*) no se logra convergencia del problema
- **$\beta$  de referencia:** 3.0.
- **$p_f$  de referencia:**  $10^{-3}$ .
- **Resultados tomados del artículo:** Metodología eficiente de optimización de diseño basada en fiabilidad aplicada a estructuras[66]

### Algoritmo bio inspirado

**Tabla 4-49** Resultados optimización con un Algoritmo Genético bajo incertidumbre

Algoritmo genético																	
		Función Objetivo X, P determinístico								Función Objetivo X, P Incertidumbre							
No Restricciones	x	8,13	5,48	13,80	9,42	2,93	18,84	10,91	12,44	19,14	10,56	17,16	8,33	6,44	5,22	9,63	9,39
	fval	100.161,76								61.481,45							
Restricciones X, P determinístico	x	15,55	3,35	18,20	13,79	5,15	17,51	20,00	17,18	18,95	18,20	20,00	4,17	10,49	18,22	16,72	13,22
	fval	126.697,44								123.533,40							
Restricciones X, P Incertidumbre	x	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
	fval	nc								nc							

### Algoritmo de búsqueda directa

**Tabla 4-50** Resultados optimización con un Algoritmo de búsqueda directa bajo incertidumbre

Búsqueda Directa																	
		Función Objetivo X, P determinístico								Función Objetivo X, P Incertidumbre							
No Restricciones	x	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
	fval	168.000,68								12.600,46							
Restricciones X, P determinístico	x	15,88	19,77	20,00	2,20	2,43	19,86	20,00	12,10	15,88	19,77	20,00	2,20	2,43	19,86	20,00	12,10
	fval	142.467,69								128.220,92							
Restricciones X, P Incertidumbre	x	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
	fval	nc								nc							

### Algoritmo basado en derivadas

**Tabla 4-51** Resultados optimización con un Algoritmo Basado en derivadas bajo incertidumbre

Basado en Derivadas																	
		Función Objetivo X, P determinístico								Función Objetivo X, P Incertidumbre							
No Restricciones	x	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
	fval	16.800,61								12.600,46							
Restricciones X, P determinístico	x	11,88	9,89	20,00	2,00	2,10	7,49	10,48	20,00	11,88	9,89	20,00	2,00	2,10	7,49	10,48	20,00
	fval	98.820,94								88.938,85							
Restricciones X, P Incertidumbre	x	18,53	11,75	19,54	2,00	2,00	20,00	18,96	20,00	18,53	11,75	19,54	2,00	2,00	20,00	18,96	20,00
	fval	112.531,85								104.598,66							

### Resultados formulación del diseño robusto (RDO)

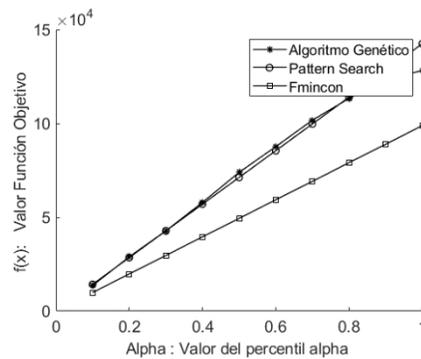
**Tabla 4-52** Resultados optimización para la formulación RDO

Algoritmo Genético										
Robust	Fval	x								
0,100	13608,015	17,034	16,627	16,453	13,370	10,657	15,072	20,000	14,185	
0,200	28898,678	16,216	18,907	17,002	6,911	13,860	19,422	19,869	13,023	
0,300	42755,309	19,678	20,000	13,962	10,115	4,059	19,109	19,664	15,002	
0,400	57905,609	12,839	16,199	19,996	15,900	10,565	19,914	18,992	12,877	
0,500	73934,246	19,302	19,488	19,818	17,568	16,369	16,689	19,896	12,232	
0,600	87607,439	19,870	16,176	9,874	11,862	14,295	20,000	20,000	20,000	
0,700	101742,499	17,883	20,000	7,371	7,405	11,405	20,000	19,739	20,000	
0,800	113316,000	13,846	12,330	20,000	12,683	12,618	20,000	20,000	13,054	
0,900	123533,400	18,954	18,198	20,000	4,166	10,486	18,223	16,721	13,217	
1,000	128176,734	16,664	20,000	9,767	9,068	4,737	17,805	12,356	20,000	

Búsqueda Directa										
Robust	Fval	x								
0,100	14246,769	15,876	19,770	20,000	2,202	2,431	19,860	20,000	12,098	
0,200	28493,537	15,876	19,770	20,000	2,202	2,431	19,860	20,000	12,098	
0,300	42740,306	15,876	19,770	20,000	2,202	2,431	19,860	20,000	12,098	
0,400	56987,075	15,876	19,770	20,000	2,202	2,431	19,860	20,000	12,098	
0,500	71233,843	15,876	19,770	20,000	2,202	2,431	19,860	20,000	12,098	
0,600	85480,612	15,876	19,770	20,000	2,202	2,431	19,860	20,000	12,098	
0,700	99727,381	15,876	19,770	20,000	2,202	2,431	19,860	20,000	12,098	
0,800	113974,150	15,876	19,770	20,000	2,202	2,431	19,860	20,000	12,098	
0,900	128220,918	15,876	19,770	20,000	2,202	2,431	19,860	20,000	12,098	
1,000	142467,687	15,876	19,770	20,000	2,202	2,431	19,860	20,000	12,098	

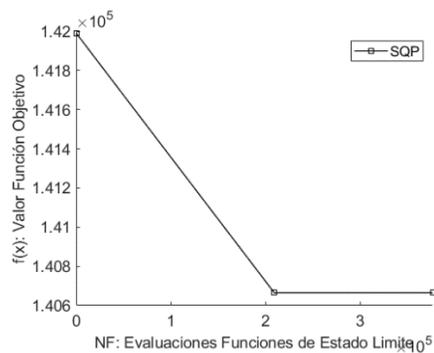
Basado en Derivadas									
Robust	Fval	x							
0,100	9882,094	11,882	9,885	20,000	2,000	2,099	7,486	10,482	20,000
0,200	19764,188	11,882	9,886	20,000	2,000	2,098	7,485	10,482	20,000
0,300	29646,282	11,882	9,886	20,000	2,000	2,098	7,485	10,482	20,000
0,400	39528,376	11,882	9,886	20,000	2,000	2,098	7,485	10,482	20,000
0,500	49410,470	11,882	9,886	20,000	2,000	2,098	7,485	10,482	20,000
0,600	59292,565	11,882	9,886	20,000	2,000	2,098	7,485	10,482	20,000
0,700	69174,659	11,882	9,886	20,000	2,000	2,098	7,485	10,482	20,000
0,800	79056,752	11,882	9,886	20,000	2,000	2,098	7,485	10,482	20,000
0,900	88938,846	11,882	9,886	20,000	2,000	2,098	7,485	10,482	20,000
1,000	98820,941	11,882	9,886	20,000	2,000	2,098	7,485	10,482	20,000

**Figura 4-29** Resultados optimización para la formulación RDO



### Resultados formulación basada en confiabilidad (RBDO)

**Figura 4-30** Grafico de convergencia para los resultados optimización para la formulación RBDO



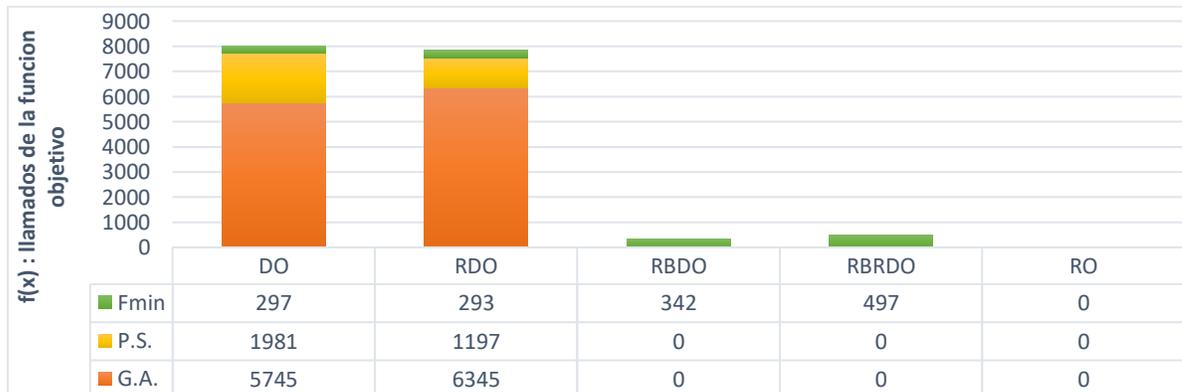
### Resultados formulación Bajo Riesgo (RO)

Para este problema no se obtuvo convergencia con ninguno de los algoritmos de optimización en la formulación Bajo Riesgo (RO).

#### 4.8.6 Análisis de resultados para la armadura de 25 barras.

Este problema está en base a la formulación RBDO propuesta por el autor y fue adaptado para las formulaciones RDO, RO y RBRDO. Los resultados obtenidos por el autor presentan inconsistencias, debido que los resultados no cumplen con las restricciones laterales (ver (4.42), estos resultados fueron:  $x^* = \{2.00, 9.47, 24.80, 2.00, 4.08, 12.45, 14.08, 27.69\}$  y  $f^* = \{128523.84\}$ . Los resultados obtenidos con este trabajo son  $x^* = \{18.53, 11.75, 19.54, 2.00, 2.00, 20.00, 18.96, 20.00\}$  y  $f^* = \{112531.85\}$ . Los resultados para RO, no lograron convergencia con ninguno de los tres algoritmos de optimización propuestos, por lo cual su utilidad no es relevante para este problema. Los resultados para la formulación RDO son  $x^* = \{11.88, 9.89, 20.00, 2.00, 2.10, 7.49, 10.48, 20.00\}$  y  $f^* = \{88938.8463\}$ ; estos resultados son interesantes por su bajo costo computacional, sin embargo, su costo computacional es 8% menor (ver Figura 4-31) comparados con los obtenidos por RBDO. En conclusión, lo anterior muestra que la formulación asociada al problema original es útil, ya que con la formulación RBDO al asignar un  $\beta$  hace que sea más confiable el resultado.

Figura 4-31 Costo computacional armadura 25 barras.



### 4.9 Armadura 25 barras enfoque bajo Riesgo (RO)

Para una estructura dada[67], considerándola como un sistema en serie y describiendo la falla de cada miembro por una función de estado límite específica, la falla del sistema ocurre siempre que al menos una de las funciones de estado límite asume un valor menor o igual a cero. En base a estos supuestos, para una estructura de celosía determinada, sujeta a algunas condiciones de carga, se realizan los siguientes pasos para evaluar su probabilidad de falla. Primero, se aplica el método de matriz de rigidez (un análisis

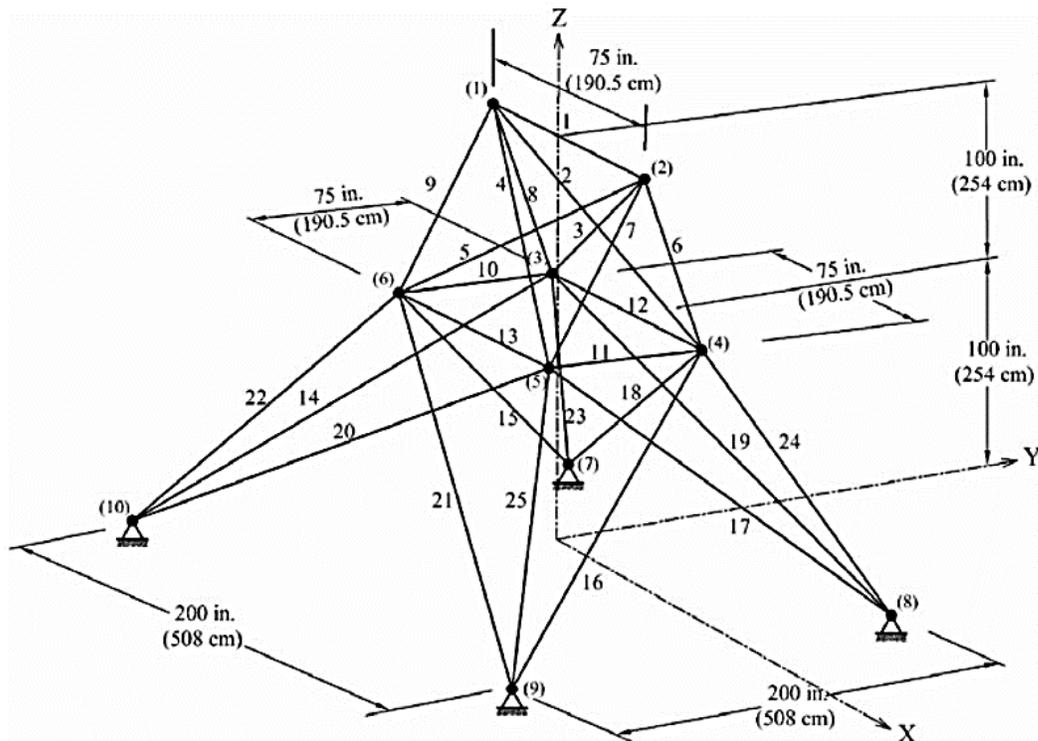
estructural lineal) para determinar las fuerzas internas axiales,  $N_x$ , en cada miembro de la estructura. Luego, para cada barra, se define una función de estado límite por su capacidad máxima, según[54]. La capacidad de tracción está dada por el límite elástico  $f_{yt}$  y la capacidad de compresión está dada por el esfuerzo de pandeo de Euler  $f_{yc} = \pi^2 E / \lambda_i^2$ , donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material y  $\lambda$  es la relación de esbeltez. La función de estado límite para la barra  $i$ -ésima viene dada por el valor mínimo entre de las siguientes funciones:

$$g_t^i(x, d) = f_{yt}^i(x) A_i(d) - N_x^i(x, d) \quad (4.83)$$

$$g_c^i(x, d) = f_{yc}^i(x) A_i(d) + N_x^i(x, d)$$

donde:  $A_i$  es el área de la barra  $i$ -ésima, que es una función de las variables de diseño;  $f_{yt}$  y  $f_{yc}$  están relacionados con las propiedades mecánicas del material, por esto, son variables aleatorias.

**Figura 4-32** Estructura de 25 barras Enfoque RO



Para cada modo de falla de la estructura se puede calcular un costo esperado de falla o riesgo de falla, dado por la probabilidad de falla multiplicada por las respectivas

consecuencias monetarias de la falla,  $C_{fail}$ . Al sumar los costos esperados de falla y el costo total de la estructura se obtiene el llamado costo total esperado. El costo total puede incluir, por ejemplo, costos de material, construcción y mantenimiento. Teniendo en cuenta que todos los costos son nulos, excepto el costo inicial,  $C_{ini}$  y los costos de falla esperados, se obtiene la función objetivo adoptada aquí:

$$C_T(d) = C_{ini}(d) + \sum_{\text{modos de falla}} C_{fail} * P_f(x, d) \quad (4.84)$$

Para un costo unitario por unidad de peso ( $\$/kg$ ), el costo inicial corresponde al peso de la estructura, que se calcula considerando una densidad de material  $\rho = 0.00785kg/cm^3$ . El costo de falla se adopta como diez veces el costo inicial para una configuración de referencia dada,  $d_0$ . Por lo tanto, el problema de optimización del riesgo resultante se puede definir como:

$$d^* = \min [C_T(d)] \quad (4.85)$$

$$d_l \leq d \leq d_u$$

Este caso consiste en una armadura espacial de 25 barras[67], [68], la estructura se ilustra en la. Las 25 barras se dividen en ocho grupos, como se describe en la Tabla 4-53, y cada grupo tiene sus propiedades estadísticas, lo que da como resultado un total de ocho variables de diseño, un área de sección transversal por grupo y dieciocho variables aleatorias. Las variables aleatorias son las áreas  $A_i$ , la resistencia a la tracción del material,  $f_{yt}$ , el módulo de elasticidad,  $E$ , de cada grupo y las fuerzas aplicadas  $P_y$  y  $P_z$ . La fuerza concentrada  $P_y$  se aplica en el nodo (1), en la dirección “y” positiva, y en el nodo (2), en la dirección “y” negativa.  $P_z$  se aplica en los nodos (1) y (2), en la dirección negativa. Esta condición de carga corresponde al caso 1 presentado en *Kaveh y Talatahari (2009)*[68].

**Tabla 4-53 Grupo de elementos para la estructura de 25 barras**

Grupo	Barras	Grupo	Barras
1	1	5	12-13
2	2-5	6	14-17
3	6-9	7	18-21
4	10-11	8	22-25

Se supone que todas las variables aleatorias siguen distribuciones normales, como se describe a continuación en la Tabla 4-54:

Tabla 4-54 Variables aleatorias

Variable Aleatoria	Desc.	Distribución	Valor Medio (Inicial)	Desviación Estándar	Variable de Diseño
$X_1$	$A_1$	Normal	$50 \text{ cm}^2$	$5 \text{ cm}^2$	$\mu_{X_1}$
$X_2$	$A_2$	Normal	$50 \text{ cm}^2$	$5 \text{ cm}^2$	$\mu_{X_2}$
$X_3$	$A_3$	Normal	$50 \text{ cm}^2$	$5 \text{ cm}^2$	$\mu_{X_3}$
$X_4$	$A_4$	Normal	$50 \text{ cm}^2$	$5 \text{ cm}^2$	$\mu_{X_4}$
$X_5$	$A_5$	Normal	$50 \text{ cm}^2$	$5 \text{ cm}^2$	$\mu_{X_5}$
$X_6$	$A_6$	Normal	$50 \text{ cm}^2$	$5 \text{ cm}^2$	$\mu_{X_6}$
$X_7$	$A_7$	Normal	$50 \text{ cm}^2$	$5 \text{ cm}^2$	$\mu_{X_7}$
$X_8$	$A_8$	Normal	$50 \text{ cm}^2$	$5 \text{ cm}^2$	$\mu_{X_8}$
$X_9$	$f_{yt}$	Normal	$27,58 \text{ kN}/(\text{cm}^2)$	$2,758 \text{ kN}/(\text{cm}^2)$	(-)
$X_{10}$	$E$	Normal	$6895 \text{ kN}/(\text{cm}^2)$	$689,5 \text{ kN}/(\text{cm}^2)$	(-)
$X_{11}$	$P_y$	Normal	$89 \text{ kN}$	$8,9 \text{ kN}$	(-)
$X_{12}$	$P_z$	Normal	$22,25 \text{ kN}$	$4,45 \text{ kN}$	(-)

El punto de partida,  $d_0 = \{A_1, A_2, \dots, A_8\}$ , para el algoritmo de optimización, se fija en  $A_i = 50 \text{ cm}^2$ , con  $C_{ini} = 659.42$  y  $C_{fail} = 6594.24$ .

#### 4.9.1 Formulación del diseño robusto (RDO):

$$\min_{\mathbf{d}}: \text{stat}[J(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.86)$$

$$s. a.: g_i(\mathbf{d}) < 0 \quad \dots \quad i = 1, \dots, m$$

$$\min_{\mathbf{d}}: \alpha E[V(\mathbf{d}, \mathbf{X})] + (1 - \alpha) \text{Var}[V(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.87)$$

$$s. a.: g_t^i(x, \mathbf{d}) = f_{yt}^i(x) A_i(\mathbf{d}) - N_x^i(x, \mathbf{d})$$

$$g_c^i(x, \mathbf{d}) = f_{yc}^i(x) A_i(\mathbf{d}) + N_x^i(x, \mathbf{d})$$

$$d_l \leq \mathbf{d} \leq d_u$$

#### 4.9.2 Formulación basada en confiabilidad (RBDO)

$$\min_{\mathbf{d}}: J(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \quad (4.88)$$

$$s. a.: \begin{cases} P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}}: J(\mathbf{d}, \mathbf{X}) & \quad (4.89) \\ \text{s. a.:} \begin{cases} P[g_t^i(x, d) = f_{yt}^i(x)A_i(d) - N_x^i(x, d) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ P[g_c^i(x, d) = f_{yc}^i(x)A_i(d) + N_x^i(x, d) \leq 0] \leq P_{fi}^t & j = m + 1, \dots, M \\ \text{con } \beta_i^t = 3.0 & i = 1, \dots, 8 \\ d_l \leq d \leq d_u \end{cases} \end{aligned}$$

### 4.9.3 Formulación del diseño robusta y basada en confiabilidad (RBRDO)

$$\text{Min: } \mathit{stat}[J(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.90)$$

$$\text{s. a.:} \begin{cases} P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases}$$

$$\min_{\mathbf{d}}: \alpha E[V(\mathbf{d}, \mathbf{X})] + (1 - \alpha) \text{Var}[V(\mathbf{d}, \mathbf{X})] \quad (4.91)$$

$$\text{s. a.:} \begin{cases} P[g_t^i(x, d) = f_{yt}^i(x)A_i(d) - N_x^i(x, d) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ P[g_c^i(x, d) = f_{yc}^i(x)A_i(d) + N_x^i(x, d) \leq 0] \leq P_{fi}^t & j = m + 1, \dots, M \\ \text{con } \beta_i^t = 3.0 & i = 1, \dots, 8 \\ d_l \leq d \leq d_u \end{cases}$$

### 4.9.4 Formulación bajo Riesgo (RO)

$$\min_{\mathbf{d}}: J(\mathbf{d}, \mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{n_c} P_{fi} * cf * J_{fi} \quad (4.92)$$

$$\min [C_T(d, X)] \quad (4.93)$$

$$d_l \leq d \leq d_u$$

### 4.9.5 Resultados

**Características de los resultados de la literatura:**

- **Algoritmo de optimización usado:** La optimización se realiza mediante el método BFGS(Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno algorithm)[69] y una búsqueda lineal basada en el algoritmo Davies, Swann y Campey (Himmelblau, 1972)[70]. En todos los casos, se permite un máximo de diez iteraciones del algoritmo BFGS.

- **Tolerancia de convergencia de los algoritmos de optimización:** No se indicia en el artículo la tolerancia. la tolerancia para el cambio en las restricciones, los valores en la función objetivo y las restricciones es de  $10^{-3}$
- **Técnica de cuantificación de incertidumbre:** Para el cálculo de la probabilidad de falla es usada la técnica del método de índice de fiabilidad de primer orden (FORM, First order reliability method).
- **$\beta$  de referencia:** 3.0.
- **$p_f$  de referencia:**  $9.84444 \cdot 10^{-3}$ ..

**Resultados de la literatura para la armadura de 25 barras enfoque bajo riesgo**

**Tabla 4-55** Resultados de la literatura.

Resultados literatura																											
		Función Objetivo X, P determinístico								Función Objetivo X, P Incertidumbre								Función Objetivo X, P Incertidumbre									
No Restricciones	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	43,2	44,1	41,1	36,1	36,1	22,9	54,6	22,1
	fval	-								-								2.489,4									
Restricciones X, P determinístico	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	fval	-								-								-									
Restricciones X, P Incertidumbre	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	fval	-								-								-									

**Algoritmo bio inspirado**

**Tabla 4-56** Resultados optimización con un Algoritmo Genético bajo incertidumbre

Algoritmo genético																													
		Función Objetivo X, P determinístico								Función Objetivo X, P Incertidumbre								Función Objetivo X, P Incertidumbre											
No Restricciones	x	26,8	20,0	20,0	22,8	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	nc									
	fval	1.337,7								1.187,0								nc											
Restric. X, P determinístico	x	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0										
	fval	3.297,1								3.297,1																			
Restric. X, P Incertidumbre	x	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc										
	fval	nc								nc																			

**Algoritmo de búsqueda directa**

**Tabla 4-57** Resultados optimización con un Algoritmo de búsqueda directa bajo incertidumbre

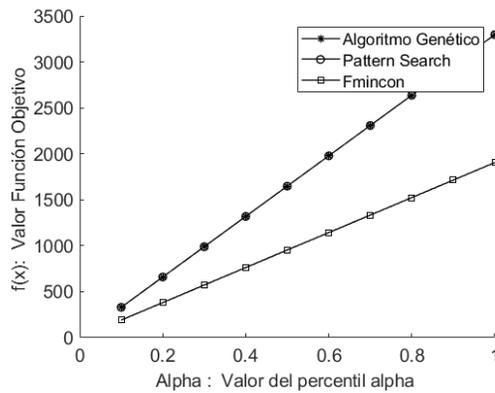


Búsqueda directa									
Robust	Fval	x							
0,100	329,712	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000
0,200	659,424	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000
0,300	989,136	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000
0,400	1318,848	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000
0,500	1648,560	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000
0,600	1978,272	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000
0,700	2307,984	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000
0,800	2637,696	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000
0,900	2967,400	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000
1,000	3297,120	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000	50,000

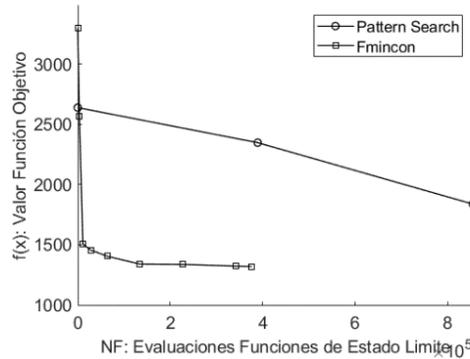
Basado en Derivadas									
Robust	Fval	x							
0,100	190,664	27,770	28,761	20,000	20,000	20,000	37,272	36,589	20,000
0,200	381,321	27,770	28,761	20,000	20,000	20,000	37,272	36,589	20,000
0,300	571,876	27,770	28,761	20,000	20,000	20,000	37,272	36,589	20,000
0,400	762,565	27,770	28,761	20,000	20,000	20,000	37,272	36,589	20,000
0,500	953,213	27,770	28,761	20,000	20,000	20,000	37,272	36,589	20,000
0,600	1142,846	27,770	28,761	20,000	20,000	20,000	37,272	36,589	20,000
0,700	1333,291	27,770	28,761	20,000	20,000	20,000	37,272	36,589	20,000
0,800	1523,895	27,770	28,761	20,000	20,000	20,000	37,272	36,589	20,000
0,900	1714,309	23,771	28,761	20,000	20,000	20,000	37,271	36,582	20,000
1,000	1904,934	23,771	28,762	20,000	20,000	20,000	37,275	36,589	20,000

Figura 4-33 los resultados optimización para la formulación RDO



## Resultados formulación Basada en confiabilidad (RBDO)

Figura 4-34 Resultados optimización para la formulación RBDO



## Resultados formulación Bajo Riesgo (RO)

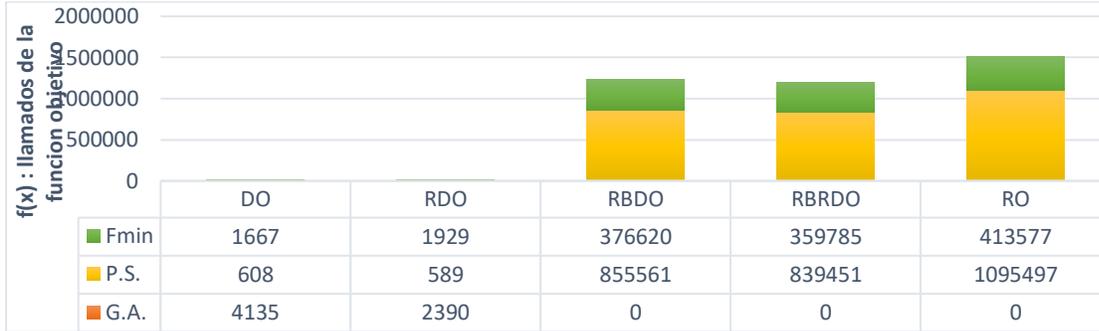
Para la formulación bajo Riesgo no hay variación en el  $cf$ , el problema propuesto por el autor da como valor conocido este y lo deja fijo. (Revisar descripción de problema)

### 4.9.6 Análisis de resultados Armadura de 25 Barras enfoque RO

Este problema está en base a la formulación RO, propuesta por el autor y fue adaptado para las formulaciones RDO, RBDO y RBRDO. Los resultados obtenidos por el autor son  $x^* = \{43.2, 44.1, 41.1, 36.1, 36.1, 22.9, 54.6, 22.1\}$  y  $f^* = \{2489.4\}$ ; los resultados obtenidos en este trabajo para la formulación RO son  $x^* = \{46.9, 28.3, 32.2, 43.7, 43.7, 20.0, 20.0, 27.8\}$  y  $f^* = \{1773.70\}$ , con una probabilidad de fallo de  $pf = 0.01$  (1%); lo que indica que las variables satisfacen la seguridad para la que se está diseñando. Los resultados para la formulación RDO son  $x^* = \{23.8, 28.8, 20.0, 20.0, 20.0, 37.3, 36.6, 20.0\}$  y  $f^* = \{1904.9\}$ , los resultados obtenidos son interesantes, no obstante, cuatro de las variables aleatorias no consiguen obtener un resultado diferente al valor de la restricción de barrera inferior, a diferencia de las demás formulaciones que sí consiguen valores diferentes, indicando que el resultado no es útil. Los resultados para RBDO son  $x^* = \{22.1, 21.4, 23.7, 31.4, 38.0, 34.2, 22.1, 23.3\}$  y  $f^* = \{1554.8\}$ , tanto para RO como para RBDO el costo computacional es aproximadamente igual, la diferencia entre las dos es que RO está asumiendo el costo de falla de la estructura, lo cual la hace interesante si se piensa en el diseño de esta estructura a nivel industrial, donde se requieren una cantidad de estas para cubrir una zona urbana. En este caso se optaría por optar a usar la formulación RO, que tiene un equilibrio entre la seguridad y la economía, pero no se puede dejar de lado

los resultados que también se consideran útiles si el único fin del diseño de la estructura es buscar la seguridad.

**Figura 4-35 Costo computacional por formulación para la armadura de 25 barras con el enfoque bajo riesgo.**



### 4.9.7 Resumen de resultados para todos los problemas

En la Tabla 4-60 se muestran los resultados de la utilidad y aplicabilidad por problema y formulación. En esta tabla se usan las siglas H para alta y L para baja.

**Tabla 4-60 Utilidad y Aplicabilidad de las formulaciones de optimización bajo incertidumbre para cada aplicación**

Aplicación	Metodología Algoritmo optimización	Diseño Bajo Confiabilidad		Diseño Robusto		Diseño Bajo Riesgo		Diseño Bajo Confiabilidad Y Robusto	
		Aplicab.	Utilidad	Aplicab.	Utilidad	Aplicab.	Utilidad	Aplicab.	Utilidad
Aplicación Matemática	Algoritmo Genético	L	L	H	H	L	L	L	L
	Algoritmo de Búsqueda Directa	L	L	H	H	L	L	L	L
	Algoritmo Basado en Derivadas	L	L	H	H	L	L	L	L
Columna Corta	Algoritmo Genético	H	H	H	L	L	L	H	H
	Algoritmo de Búsqueda Directa	H	H	H	L	L	L	H	H
	Algoritmo Basado en Derivadas	H	H	H	L	L	L	H	H
Bastidor	Algoritmo Genético	H	H	L	L	L	L	H	H
	Algoritmo de Búsqueda Directa	H	H	L	L	L	L	H	H
	Algoritmo Basado en Derivadas	H	H	L	L	L	L	H	H
Mecanismo de Biela Manivela	Algoritmo Genético	H	L	H	H	L	L	H	L
	Algoritmo de Búsqueda Directa	H	L	H	H	L	L	H	L
	Algoritmo Basado en Derivadas	H	L	H	H	L	L	H	L
Amortiguador	Algoritmo Genético	L	L	H	H	L	L	L	L
	Algoritmo de Búsqueda Directa	L	L	H	H	L	L	L	L
	Algoritmo Basado en Derivadas	L	L	H	H	L	L	L	L
Armadura 10 barras	Algoritmo Genético	H	H	L	H	H	L	H	H
	Algoritmo de Búsqueda Directa	H	H	L	H	H	L	H	H
	Algoritmo Basado en Derivadas	H	H	L	H	H	L	H	H
Armadura 25 barras	Algoritmo Genético	H	L	L	H	H	L	H	L
	Algoritmo de Búsqueda Directa	H	L	L	H	H	L	H	L
	Algoritmo Basado en Derivadas	H	H	L	H	H	L	H	H
Armadura 25 barras (Enfoque Bajo Riesgo)	Algoritmo Genético	H	L	L	L	H	L	H	L
	Algoritmo de Búsqueda Directa	H	H	L	L	H	H	H	H
	Algoritmo Basado en Derivadas	H	H	L	L	H	H	H	H

En la tabla Tabla 4-61 se hace un conteo por formulación por su utilidad y aplicabilidad en las aplicaciones propuestas.

**Tabla 4-61 Resumen aplicabilidad y utilidad por formulación.**

Resumen	Diseño Bajo Confiabilidad		Diseño Robusto		Diseño Bajo Riesgo		Diseño Bajo Confiabilidad Y Robusto	
	Aplicab.	Utilidad	Aplicab.	Utilidad	Aplicab.	Utilidad	Aplicab.	Utilidad
Alta (H)	18	12	12	15	9	2	18	12
Baja (L)	6	12	12	9	15	22	6	12

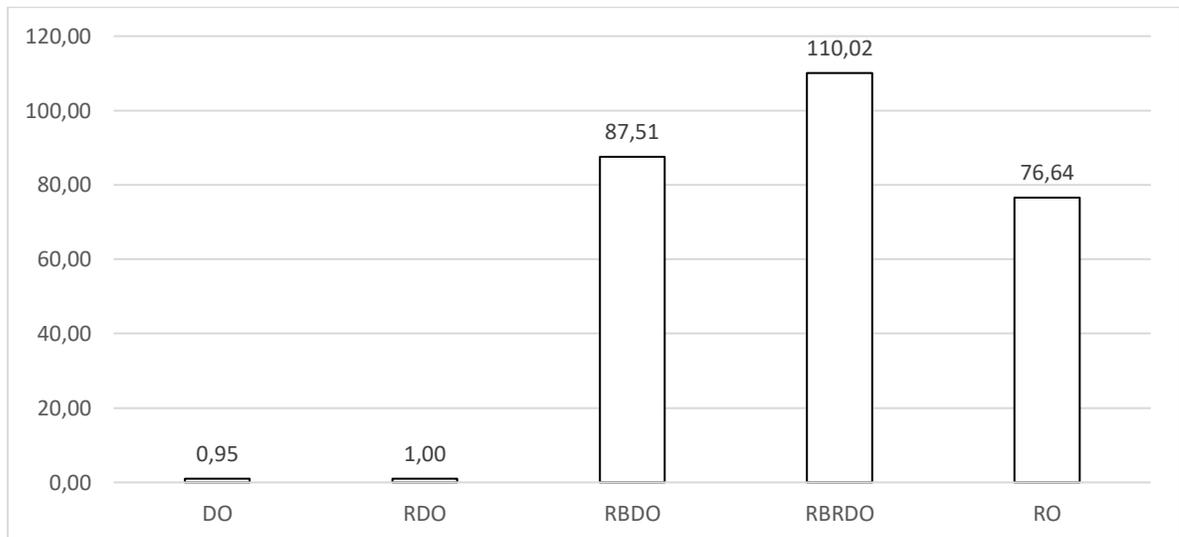
**Tabla 4-62 Parámetros para los algoritmos de optimización usados por aplicación.**

Aplicación	Algoritmo optimización	Parámetros			
		Tol C	Tol F	Tol X	PS
Aplicación Matemática	Algoritmo Genético	6,00E-09	6,00E-09		20
	Algoritmo de Búsqueda Directa	6,00E-09	6,00E-09	9,00E-09	
	Algoritmo Basado en Derivadas	1,00E-09	1,00E-09	1,40E-09	
Columna Corta	Algoritmo Genético	5,00E-09	5,00E-09		20
	Algoritmo de Búsqueda Directa	8,00E-09	8,00E-09	1,20E-09	
	Algoritmo Basado en Derivadas	8,00E-09	8,00E-09	1,20E-09	
Bastidor	Algoritmo Genético	5,00E-09	5,00E-09		20
	Algoritmo de Búsqueda Directa	1,00E-09	1,00E-09	1,20E-09	
	Algoritmo Basado en Derivadas	1,00E-09	1,00E-09	1,20E-09	
Mecanismo de Biela Manivela	Algoritmo Genético	5,00E-09	5,00E-09		20
	Algoritmo de Búsqueda Directa	6,00E-09	6,00E-09	9,00E-09	
	Algoritmo Basado en Derivadas	6,00E-09	6,00E-09	9,00E-09	
Amortiguador	Algoritmo Genético	5,00E-09	5,00E-09		20
	Algoritmo de Búsqueda Directa	1,00E-09	1,00E-09	1,40E-09	
	Algoritmo Basado en Derivadas	1,00E-09	1,00E-09	1,40E-09	
Armadura 10 barras	Algoritmo Genético	3,00E-09	3,00E-09		6
	Algoritmo de Búsqueda Directa	3,00E-09	3,00E-09	4,00E-09	
	Algoritmo Basado en Derivadas	3,00E-09	3,00E-09	4,00E-09	
Armadura 25 barras	Algoritmo Genético	3,00E-09	3,00E-09		8
	Algoritmo de Búsqueda Directa	3,00E-09	3,00E-09	4,00E-09	
	Algoritmo Basado en Derivadas	3,00E-09	3,00E-09	4,00E-09	
Armadura 25 barras (Enfoque Bajo Riesgo)	Algoritmo Genético	3,00E-09	3,00E-09		24
	Algoritmo de Búsqueda Directa	3,00E-09	3,00E-09	4,00E-09	
	Algoritmo Basado en Derivadas	3,00E-09	3,00E-09	4,00E-09	

En la Tabla 4-62 están consignados los parámetros usados para las aplicaciones propuesta en este trabajo, cabe aclarar, que para todas las formulaciones se mantuvieron las tolerancias en cada aplicación. Los demás parámetros de los algoritmos se dejaron por defecto como están en Matlab®.

La comparación directa entre las tres formulaciones que se implementaron para los 8 problemas de optimización bajo incertidumbre muestra que RDO fue la de menor costo computacional por requerir menos evaluaciones de las funciones de estado límite (NF), seguida por RO, RBDO y por último RBRDO. Estos resultados comparativos de eficiencia computacional se observan claramente en el diagrama de barras de la Figura 4-36, que compara el cociente del NF de cada una de las formulaciones y el NF de la formulación más eficiente (el de menor NF).

**Figura 4-36 Costo computacional por formulación.**



—



# 5. Conclusiones

## Conclusiones

Como se observa en el capítulo 3 de optimización bajo incertidumbre se analizaron diferentes metodologías existentes de optimización estructural bajo incertidumbre y se identificaron sus características correspondientes a sus formulaciones en relación a su utilidad y aplicabilidad (ver el primer apartado del capítulo 4 de aplicaciones para entender el concepto de utilidad y aplicabilidad). RDO presentó en su formulación un nivel de confiabilidad aceptable en la función objetivo en problemas del tipo dinámico, RO su formulación destaca por buscar un equilibrio entre economía y seguridad a través la probabilidad de fallo y costo de falla en la función objetivo, RBDO presentó en su formulación un compromiso muy alto por la seguridad en su compromiso con las restricciones a través de la probabilidad de fallo propuesta por el diseñador, y para la formulación RBRDO destaca su equilibrio entre la robustez de la función objetivo y el compromiso por la alta seguridad en sus restricciones.

Como se observa en el capítulo 3 se caracterizó las diferentes metodologías de estimación de incertidumbre donde RDO se destacó por su bajo costo computacional, sin embargo, su compromiso con la seguridad no es medible ni controlable. RO destacó por su equilibrio entre el costo de falla y la seguridad para problemas estructurales en el cual logra desempeñarse de manera satisfactoria, sin embargo, su costo computacional es alto. RBDO destacó por su alto compromiso con la seguridad en todos los problemas de prueba, sin embargo, su costo computacional es alto. RBRDO destacó por generar diseños más robustos y confiables, sin embargo, su costo computacional es el más alto de las metodologías estudiadas. Se complementó en el capítulo 2 con la caracterización de los algoritmos de optimización empleados en la solución de las formulaciones de problemas de optimización de máquinas y estructuras bajo incertidumbre, en lo cual se encontró que los algoritmos basados en derivadas son los que menor costo computacional tienen, seguidos de los algoritmos de búsqueda directa y por último los algoritmos bioinspirados.

Al estudiar las tres formulaciones de optimización bajo incertidumbre abordadas en este trabajo, la de mayor aplicabilidad es RBDO con una aplicabilidad alta en 6 de los 8 problemas, seguida por RDO que tiene una aplicabilidad alta en 4 de los 8 problemas y por último RO con aplicabilidad alta en 3 de los 8 problemas. Esta última presenta una aplicabilidad baja en problemas de bajo y mediano porte, ya que en estos problemas no se ve necesario tener en cuenta el costo de falla ( $c_f$ ).

RBDO presentó aplicabilidad alta en los problemas que requieren una alta confiabilidad en el cumplimiento de las restricciones sin tener en cuenta la incertidumbre en la función objetivo. Por esto es una de las más usadas en optimización estructural de porte bajo y mediano. RDO presentó aplicabilidad alta en los problemas en los cuales se necesita un nivel de confiabilidad aceptable en la función objetivo y no se tiene en cuenta la incertidumbre en el cumplimiento de las restricciones. RO presentó aplicabilidad alta en problemas estructurales de gran porte, sin embargo, de los tres problemas estructurales de gran porte solamente logró obtener óptimos confiables en 1 de ellos, posiblemente debido al error inherente en las restricciones probabilísticas que al ser ponderadas por los costos de falla y sumadas en la función objetivo generan una inestabilidad en la determinación de una dirección de descenso confiable.

Como se observa en la Tabla 4-61 las formulaciones RBDO y RDO son las que muestran mayor utilidad respecto a los problemas que fueron sometidos a prueba. RDO presenta un bajo costo computacional, sin embargo, esta no controla de manera precisa el nivel de confiabilidad deseado, mientras que RBDO lo hace a través del índice de confiabilidad ( $\beta$ ) a expensas de un mayor costo computacional.

La formulación del diseño robusto y basada en confiabilidad (RBRDO), a pesar de que busca un equilibrio entre la formulación RDO y RBDO, obtuvo resultados que coinciden con los de RBDO en todos los problemas, llegando al mismo valor en las variables de diseño, por lo cual, su aplicabilidad y utilidad está más relacionada con RBDO.

La formulación RBDO es la única en lograr óptimos confiables en todos los problemas, seguidos por RDO y RO que lograron óptimos confiables en 6 de los 8 problemas.

La formulación de optimización bajo incertidumbre que tuvo el menor costo computacional fue RDO, seguida por RO, RBDO y RBRDO. Se ratifica que el algoritmo basado en

derivadas presentó el menor costo computacional, seguido por el algoritmo de búsqueda directa y por el bioinspirado[16].



## Bibliografía

- [1] L. Duan, G. Li, A. Cheng, G. Sun, and K. Song, "Multi-objective system reliability-based optimization method for design of a fully parametric concept car body," *Eng. Optim.*, vol. 49, no. 7, pp. 1247–1263, 2017, doi: 10.1080/0305215X.2016.1241780.
- [2] S. S. Rane, A. Srividya, and A. K. Verma, "Multi-objective reliability based design optimization and risk analysis of motorcycle frame with strength based failure limit," *Int. J. Syst. Assur. Eng. Manag.*, vol. 3, no. 1, pp. 33–39, 2012, doi: 10.1007/s13198-012-0080-2.
- [3] W. Yao, X. Chen, W. Luo, M. Van Tooren, and J. Guo, "Review of uncertainty-based multidisciplinary design optimization methods for aerospace vehicles," *Prog. Aerosp. Sci.*, vol. 47, no. 6, pp. 450–479, 2011, doi: 10.1016/j.paerosci.2011.05.001.
- [4] X. Lv, X. Gu, L. He, D. Zhou, and W. Liu, "Reliability design optimization of vehicle front-end structure for pedestrian lower extremity protection under multiple impact cases," *Thin-Walled Struct.*, vol. 94, pp. 500–511, 2015, doi: 10.1016/j.tws.2015.05.014.
- [5] B. D. Youn, K. K. Choi, R.-J. Yang, and L. Gu, "Reliability-based design optimization for crashworthiness of vehicle side impact," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 26, no. 3–4, pp. 272–283, 2004, doi: 10.1007/s00158-003-0345-0.
- [6] X. Gu, J. Lu, and H. Wang, "Reliability-based design optimization for vehicle occupant protection system based on ensemble of metamodels," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 51, no. 2, pp. 533–546, 2015, doi: 10.1007/s00158-014-1150-7.
- [7] A. T. Beck, W. J. S. Gomes, R. H. Lopez, and L. F. F. Miguel, "A comparison between robust and risk-based optimization under uncertainty," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 52, no. 3, pp. 479–492, 2015, doi: 10.1007/s00158-015-1253-9.
- [8] Y. Tsompanakis, N. D. Lagaros, and M. Papadrakakis, *Structural design*

- optimization considering uncertainties (Structures and Infrastructures 1)*, vol. 1. London: Taylor & Francis, 2008.
- [9] S. M. J. Spence and M. Gioffré, "Efficient algorithms for the reliability optimization of tall buildings," *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, vol. 99, no. 6–7, pp. 691–699, 2011, doi: 10.1016/j.jweia.2011.01.017.
- [10] M. Schelbergen, "Structural Optimization of Multi-Megawatt, Offshore Vertical Axis Wind Turbine Rotors," *Am. Inst. Aeronaut. Astronaut.*, pp. 1–19, 2013, doi: 10.2514/6.2014-1082.
- [11] A. T. Beck and W. J. D. S. Gomes, "A comparison of deterministic, reliability-based and risk-based structural optimization under uncertainty," *Probabilistic Eng. Mech.*, vol. 28, pp. 18–29, 2012, doi: 10.1016/j.probengmech.2011.08.007.
- [12] R. Reuven Y., *Simulation and the Monte Carlo method*, 1st ed. New York: John Wiley & Sons., 1981.
- [13] S. K. Au and J. L. Beck, "Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation," *Probabilistic Eng. Mech.*, vol. 16, no. 4, pp. 263–277, 2001, doi: 10.1016/S0266-8920(01)00019-4.
- [14] V. Dubourg, B. Sudret, and J. M. Bourinet, "Reliability-based design optimization using kriging surrogates and subset simulation," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 44, no. 5, pp. 673–690, 2011, doi: 10.1007/s00158-011-0653-8.
- [15] B. Sudret, "Meta-models for structural reliability and uncertainty quantification," *Fifth Asian-Pacific Symp. Struct. Reliab. its Appl.*, pp. 53–76, 2012.
- [16] H. O. Cortés-Ramos, R. A. Calvo-Ocampo, and C. J. Camacho-López, "Comparación de algoritmos para optimización estructural basada en confiabilidad," *Rev. Int. Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ing.*, pp. 1–9, 2017, doi: DOI: 10.23967/j.rimni.2017.7.003.
- [17] R. J.-B. Wets, "Chapter VIII Stochastic programming," *Handbooks Oper. Res. Manag. Sci.*, vol. 1, pp. 573–629, 1989, doi: 10.1016/S0927-0507(89)01009-1.
- [18] R. H. Lopez and A. T. Beck, "Optimization Under Uncertainties," in *Optimization of Structures and Components*, vol. 43, 2013, pp. 117–143.
- [19] G. C. Marano, R. Greco, and S. Sgobba, "A comparison between different robust optimum design approaches: Application to tuned mass dampers," *Probabilistic Eng. Mech.*, vol. 25, no. 1, pp. 108–118, 2010, doi: 10.1016/j.probengmech.2009.08.004.

- [20] B. K. Roy, S. Chakraborty, and S. K. Mihsra, "Robust optimum design of base isolation system in seismic vibration control of structures under uncertain bounded system parameters," *JVC/Journal Vib. Control*, vol. 20, no. 5, pp. 786–800, 2014, doi: 10.1177/1077546312466577.
- [21] W. Wang, S. Caro, F. Bennis, R. Soto, and B. Crawford, "Multi-Objective Robust Optimization Using a Postoptimality Sensitivity Analysis Technique: Application to a Wind Turbine Design," *J. Mech. Des.*, vol. 137, no. 1, p. 011403, 2015, doi: 10.1115/1.4028755.
- [22] G. C. Marano, S. Sgobba, R. Greco, and M. Mezzina, "Robust optimum design of tuned mass dampers devices in random vibrations mitigation," *J. Sound Vib.*, vol. 313, no. 3–5, pp. 472–492, 2008, doi: 10.1016/j.jsv.2007.12.020.
- [23] R. H. ; Lopez and A. T. Beck, "Reliability-based design optimization strategies based on FORM: a review," *J. Brazilian Soc. Mech. Sci. Eng.*, vol. XXXIV, no. 4, pp. 506–514, 2012, doi: 10.1590/S1678-58782012000400012.
- [24] L. L. Corso, H. M. Gomes, G. P. Mezzomo, and A. Molter, "Otimização baseada em confiabilidade para uma célula de carga multiaxial utilizando algoritmos genéticos," *Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing.*, vol. 32, no. 4, pp. 221–229, 2016, doi: 10.1016/j.rimni.2015.07.002.
- [25] A. T. Beck and C. C. Verzenhassi, "Risk optimization of a steel frame communications tower subject to tornado winds," *Lat. Am. J. Solids Struct.*, vol. 5, no. 3, pp. 187–203, 2008.
- [26] W. J. S. Gomes and A. T. Beck, "A Novel Approach to Efficient Risk-Based Optimization," *Vulnerability, Uncertainty, Risk*, pp. 155–164, 2014, doi: 10.1061/9780784413609.016.
- [27] H. Hu and G. Li, "Granular Risk-Based Design Optimization," vol. 23, no. 2, pp. 340–353, 2015.
- [28] A. T. Beck, W. J. S. Gomes, and F. A. V. Bazan, "on the Robustness of Structural Risk Optimization With Respect To Epistemic Uncertainties," *Int. J. Uncertain. Quantif.*, vol. 2, no. 1, pp. 1–20, 2012, doi: 10.1615//Int.J.UncertaintyQuantification.2011003415.
- [29] R. Ghanem, D. Higdon, and H. Owhadi, *Handbook of Uncertainty Quantification*. 2016.
- [30] E. Zio and N. Pedroni, "Risk Analysis - Uncertainty Characterization in Risk

- Analysis for Decision- Making Practice,” p. 50, 2012, [Online]. Available: <http://www.foncsi.org/fr/>.
- [31] T. J. Sullivan, *Introduction to Uncertainty*, vol. 8. Springer, 2011.
- [32] H. J. Zimmermann, “Application-oriented view of modeling uncertainty,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 122, no. 2, pp. 190–198, 2000, doi: 10.1016/S0377-2217(99)00228-3.
- [33] N. Karmarkar, “A new polynomial-time algorithm for linear programming,” *Combinatorica*, vol. 4, no. April, pp. 373–395, 1984, doi: <https://doi.org/10.1007/BF02579150>.
- [34] P. Taylor, M. Street, L. Wt, and D. Kadelka, “Mathematische Operationsforschung und Statistik . Series Optimization : A Journal of Mathematical Programming and Operations Research On inventory problems with arbitrary cost pattern , demand pattern and demand distribution,” no. August 2013, pp. 37–41, 2007.
- [35] B. N. Pshenichny and Y. M. Danilin, *Numerical Methods in Extremal Problems*. Moscow : Mir Publishers, 1978.
- [36] A. D. Belegundu and C. Tirupathi R, *OPTIMIZATION CONCEPTS AND APPLICATIONS IN ENGINEERING*, vol. 53, no. 9. 2013.
- [37] R. H. Byrd, J. C. Gilbert, and J. Nocedal, “A Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming,” *Math. Program. Ser. B*, vol. 89, no. 1, pp. 149–185, 2000, doi: 10.1007/PL00011391.
- [38] R. Hooke and T. A. Jeeves, ““Direct Search”” Solution of Numerical and Statistical Problems,” *J. ACM*, vol. 8, no. 2, pp. 212–229, 1961, doi: 10.1145/321062.321069.
- [39] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, 1st ed. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [40] C. Mathworks, “Datafeed Toolbox <sup>TM</sup> User ’ s Guide R 2019 a,” 2019.
- [41] N. V. Sahinidis, “Optimization under uncertainty: State-of-the-art and opportunities,” *Comput. Chem. Eng.*, vol. 28, no. 6–7, pp. 971–983, 2004, doi: 10.1016/j.compchemeng.2003.09.017.
- [42] K. L. Tsui, “Robust design optimization for multiple characteristic problems,” *Int. J. Prod. Res.*, vol. 37, no. 2, pp. 433–445, 1999, doi: 10.1080/002075499191850.
- [43] H. G. Beyer and B. Sendhoff, “Robust optimization - A comprehensive survey,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 196, no. 33–34, pp. 3190–3218, 2007, doi: 10.1016/j.cma.2007.03.003.

- [44] A. D. Belegundu and S. Zhang, "Robustness of Design Through inimum Sensitivity," *J. Mech. Des.*, vol. 114, no. April 1990, pp. 213–217, 2016, doi: doi:10.1115/1.2916933.
- [45] V. Rathod, O. P. Yadav, A. Rathore, and R. Jain, "Reliability-based robust design optimization: A comparative study," *IEEE Int. Conf. Ind. Eng. Eng. Manag.*, pp. 1558–1563, 2011, doi: 10.1109/IEEM.2011.6118179.
- [46] S. Wang, Q. Li, and G. J. Savage, "Reliability-based robust design optimization of structures considering uncertainty in design variables," *Math. Probl. Eng.*, vol. 2015, 2015, doi: 10.1155/2015/280940.
- [47] A. Forouzandeh Shahraki and R. Noorossana, "Reliability-based robust design optimization: A general methodology using genetic algorithm," *Comput. Ind. Eng.*, vol. 74, no. 1, pp. 199–207, 2014, doi: 10.1016/j.cie.2014.05.013.
- [48] V. Dubourg, B. Sudret, and B. J.-M., "Reliability-based design optimization using kriging surrogates and subset simulation," *Struct. Multidisciplinary Optim.*, 2011.
- [49] E. Nikolaidis and R. Burdisso, "Reliability based optimization: A safety index approach," *Comput. Struct.*, vol. 28, no. 6, pp. 781–788, 1988, doi: 10.1016/0045-7949(88)90418-X.
- [50] R. Rackwitz, "Optimization and risk acceptability based on the life quality index," *Struct. Saf.*, vol. 24, no. 2–4, pp. 297–331, 2002, doi: 10.1016/S0167-4730(02)00029-2.
- [51] S.-K. Choi, R. V. . Grandhi, and R. A. Canfield, *Reliability-based Structural Design*. London: Springer, 2007.
- [52] A. M. Hasofer and N. C. Lind, "An Exact and Invariant First-order Reliability Format," *J. Eng. Mech. Div.*, pp. 111–121, 1973.
- [53] C. A. Cornell, "A probability-based structural code," *J. Am. Concr. Inst.*, vol. 66, no. 12, pp. 974–985, 1969.
- [54] Y. Aoues and A. Chateauneuf, "Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 41, no. 2, pp. 277–294, 2009, doi: 10.1007/s00158-009-0412-2.
- [55] A. M. Hasofer and N. C. Lind, "Exact and Invariant Second-Moment Code Format," *J. Eng. Mech. Div.*, vol. 100, no. 1, pp. 111–121, 1974.
- [56] O. Ditlevsen and P. Bjerager, "Methods of Structural Systems Reliability," *Struct. Saf.*, vol. 3, no. 3, pp. 195–229, 1986, doi: 10.1016/0167-4730(86)90004-4.

- [57] O. Ditlevsen, "Life quality index revisited," *Struct. Saf.*, vol. 26, no. 4, pp. 443–451, 2004, doi: 10.1016/j.strusafe.2004.03.003.
- [58] V. Papadopoulos and N. D. Lagaros, "Vulnerability-based robust design optimization of imperfect shell structures," *Struct. Saf.*, vol. 31, no. 6, pp. 475–482, 2009, doi: 10.1016/j.strusafe.2009.06.006.
- [59] K. L. Tsui, "An Overview of Taguchi Method and Newly Developed Statistical Methods for Robust Design," *IIE Trans. (Institute Ind. Eng.)*, vol. 24, no. 5, pp. 44–57, 1992, doi: 10.1080/07408179208964244.
- [60] N. Lelièvre, P. Beaurepaire, C. Mattrand, N. Gayton, and A. Otsmane, "On the consideration of uncertainty in design: optimization - reliability - robustness," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 54, no. 6, pp. 1423–1437, 2016, doi: 10.1007/s00158-016-1556-5.
- [61] E. E. Kostandyan and J. D. Sorensen, "Reliability assessment of IGBT modules modeled as systems with correlated components," *Proc. - Annu. Reliab. Maintainab. Symp.*, no. 2, pp. 1–6, 2013, doi: 10.1109/RAMS.2013.6517663.
- [62] P.-E. AUSTRELL, O. DAHLBLOM, J. LINDEMANN, and A. OLSSON, *CALFEM-a finite element toolbox, version 3.4*. Sweden: Lund University, 2004.
- [63] J. A. Nelder and R. Mead, "A Simplex Method for Function Minimization," *Comput. J.*, vol. 7, no. 4, pp. 308–313, 1965, doi: 10.1093/comjnl/7.4.308.
- [64] C. Montanaro, *Machines and mechanisms*. 2019.
- [65] C. Zang, M. I. Friswell, and J. E. Mottershead, "A review of robust optimal design and its application in dynamics," *Comput. Struct.*, vol. 83, no. 4–5, pp. 315–326, 2005, doi: 10.1016/j.compstruc.2004.10.007.
- [66] L. Cerrolio, "Metodología eficiente de optimización de diseño basada en fiabilidad aplicada a estructuras," Ph.D. Thesis, Universidad de la Rioja, Logroño, España, 2013.
- [67] W. J. S. Gomes, "Risk optimization of trusses using a new gradient estimation method," *12th Int. Conf. Appl. Stat. Probab. Civ. Eng. ICASP 2015*, no. August, 2015.
- [68] A. Kaveh and S. Talatahari, "Size optimization of space trusses using Big Bang-Big Crunch algorithm," *Comput. Struct.*, vol. 87, no. 17–18, pp. 1129–1140, 2009, doi: 10.1016/j.compstruc.2009.04.011.
- [69] R. Fletcher, *Practical methods of optimization*. Wiley, 1987.

- [70] D. M. Himmelblau, *Applied Nonlinear Programming*. McGraw-Hill, 1972.