UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

El valor de Shapley para un juego diferencial de política económica monetaria y fiscal

Andrés Fernando Uscátegui Russi

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2020

El valor de Shapley para un juego diferencial de política económica monetaria y fiscal

Andrés Fernando Uscátegui Russi

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Maestría en Ciencias - Matemática Aplicada

Director(a):
Arcenio Pecha Castiblanco
Matemático

Grasping for a world that makes some sense

BANE

Agradecimientos

Agradezco al profesor Arcenio Pecha por su extenso apoyo y su constante paciencia que reflejaron su interes por sacar adelante este trabajo y poderlo haber culminado. Agradezco el apoyo de mi madre por su constante apoyo en todo sentido y por su motivación a ser una mejor persona. Agradezco al profesor René Mauricio Ramírez por su apoyo y consejos.

Resumen

Este trabajo busca implementar un mecanismo cooperativo de asignación o repartición estable de costos económicos entre la autoridad fiscal y monetaria en el contexto de la estabilización de la deuda pública con base en el juego diferencial lineal-cuadrático construido por Tabellini (1986). Esa asignación esta basada en el concepto-solución conocido como el valor de Shapley y se calcula haciendo uso del algoritmo creado por Petrosyan y Zaccour (2003). La importancia del algoritmo utilizado es que garantiza la estabilidad del acuerdo entre ambas autoridades en todo momento. De acuerdo a las ecuaciones que se obtuvieron de los parámetros, conjuntos e individuales, se asumieron dos escenarios: en el primero, ambas autoridades son igual de sensibles a los movimientos de la deuda en términos absolutos, y en el segundo, la autoridad monetaria no tiene en cuenta dichos movimientos de la deuda (banca central conservadora) pero la autoridad fiscal si. Los principales resultados son: (i) En el escenario uno ambas autoridades se reparten los mismos costos económicos. (ii) Y dicha asignación es intermedia con respecto a lo que perciben en el escenario dos donde la autoridad monetaria se le asigna menos costos que la fiscal (iii) bajo el escenario uno, ambas autoridades perciben menores costos económicos en el largo plazo si la diferencia entre objetivos individuales de política es menor.

Palabras clave: Estabilidad de la deuda pública, Juegos diferenciales, Valor de Shapley, Estabilidad dinámica.

Abstract

This paper seeks to implement a cooperative mechanism of allocation and distribution stable of economic costs between fiscal and monetary authorities in the context of public debt stabilisation. That allocation, it is based on the concept-solution known as Shapley value and it is compute using an algorithm made by Petrosyan and Zaccour (2003). The importance of the algorithm used is that it guarantees the stability of the agreement between both authorities in every moment. According to the equations computed of the joint and individual parameters, two scenarios were assumed: in the first one, both authorities are just as sensitive to debt movements in absolute terms, in the second one, monetary authority doesn't take into account such debt movements (conservative central banking) but fiscal authority does. The main results are: (i) In the first scenario, both authorities split the same economic costs (ii) And such allocation it is intermediate with respect to what they perceive in the second scenario where monetary authority is allocated with lower costs than fiscal authority. (iii) Under the first scenario, both authorities perceive lower economic costs in the long term if the gap between both individual policy targets is fewer.

Keywords: Stability of public debt, Differential games, Shapley value, Dynamic stability.

Contenido

Capítulo 1

Introducción

En el contexto macroeconómico de un país, las dos autoridades de política económica de notable importancia en la dinámica su economía son: la de política monetaria y la de fiscal. Con base en el marco institucional en el cual se desenvuelven ambas autoridades, estas cuentan con objetivos e instrumentos de política económica específicos que enmarcan sus actuaciones [7]. Por un lado, la autoridad monetaria[1] tiene dentro de sus funciones la emisión del dinero (u oferta monetaria) en la economía[2] [5], a través de distintos mecanismos. Esta autoridad, dependiendo del contexto en el que se encuentre, puede contar con distintos objetivos: ya sea mantener una inflación baja y estable [2], estabilizar la dinámica de deuda [18], entre otros[3] [7]. Por otro lado, la autoridad fiscal, tiene objetivos focalizados generalmente en mantener buenas condiciones para el crecimiento de la economía, mantener el déficit fiscal bajo e incluso muchas veces mejorar las condiciones distributivas de un país. Para esto, la autoridad fiscal utiliza mecanismos relacionados con la tributación y el gasto público.

En este sentido, dentro de los objetivos económicos con los que cuentan ambas autoridades, puede haber algunos que sean de comun interés y los cuales pueden ser afectados por las acciones de política que sean ejecutadas por ambas autoridades. Por ejemplo, en el problema de la estabilización de la deuda pública, ambas autoridades podrían buscar como objetivo la amortización de la misma y donde el manejo de sus instrumentos de política puede conllevar a que se acumule o desacumule deuda pública. En concreto, por un lado, la autoridad fiscal genera acumulación de deuda pública cuando sus gastos están por encima de sus ingresos (i.e. déficit fiscal primario), y por el otro, la autoridad monetaria desacumula deuda pública al monetizar parte de la misma a partir de la creación de dinero.

[1] Es el agente económico que en la mayoría de casos es representado por una banca central.

[2] Sin embargo, puede influir en forma importante sobre la oferta monetaria pero no de forma exclusiva [7].

[3] Aunque en muchos casos puede que también tenga dentro de sus objetivos de política las preocupaciones relacionadas al crecimiento económico y el desempleo.

Por consiguiente, el problema de la estabilización de la deuda pública es relevante desde un punto de vista *estratégico* teniendo en cuenta que: en primer lugar, ambas autoridades se encuentran constantemente en un contexto donde las acciones de cada una, dependen, directa o indirectamente, de las tomadas por la otra autoridad. Segundo, esta interdependencia se refleja en la repercusión de las acciones de política de ambas autoridades en la dinámica de la variable que es de comun interés, en este caso, la deuda pública. En este sentido, esta interacción estratégica entre la autoridad monetaria y la fiscal en el contexto de la estabilización de la deuda pública, ha sido estudiada bajo la teoría de juegos dinámicos, en específico, juegos diferenciales. Esto teniendo en cuenta que no solo existe interés de estudiar un contexto no-cooperativo y cooperativo entre ambas autoridades, sino que también se cree en la importancia de investigar esta interacción estratégica en un intervalo de tiempo establecido en el cual se estudia la implementación de acciones de política y la dinámica de la deuda pública como variable de interés.

Específicamente, los siguientes son los trabajos que han estudiado esta interacción a partir de juegos diferenciales como herramienta matemática: primero, en el trabajo de Tabellini (1986) [17] se analiza un contexto en donde cada autoridad tiene un objetivo individual, por ejemplo, el de la monetaria, es estabilizar la creación de dinero a un nivel deseado por preocupaciones inflacionarias, y el de la fiscal, es llevar el déficit fiscal primario a un nivel deseado. Sin embargo, ambas autoridades también tienen en consideración en sus funciones objetivo el stock de deuda pública como elemento de preocupación mutua. Además, en [17] se calculan las soluciones no-cooperativas (solución Nash *feedback* y *open-loop*) las cuales son las trayectorias de acción de política que resuelven los problemas de optimización individuales, y también la solución cooperativa que contiene las trayectorias o curso de acciones de política que resuelven el problema de optimización dinámica conjunto. Un trabajo posterior y extensión del trabajo de Tabellini[4], es el de Van Aarle *et. al.* [18], en el cual se calculan las soluciones cooperativas y las no-cooperativas (equilibrio de Nash *open-loop*) con base en elementos agregados al modelo de Tabellini, y además, se investigan las consecuencias de una autoridad monetaria más independiente y conservadora a partir del cálculo del equilibrio Stackerlberg *open-loop*.

En todo caso, una de las conclusiones más importantes de estos trabajos citados, es que la cooperación (o coordinación) en las acciones de política de ambas autoridades conlleva a mejores resultados si se compara el caso cuando ambas autoridades deciden no cooperar [17][18]. Puntualmente, la cooperación lleva a que exista un nivel más bajo en el estado estacionario de la deuda pública y una mayor velocidad de ajuste o convergencia [17]. De este modo, teniendo en cuenta lo beneficioso que puede ser una situación donde haya cooperación (coordinación en las acciones de política) bajo este problema en específico, sería relevante la implementación de un mecanismo el cual distribuya, de manera cooperativa y estable, los

[4]Por varias razones, como por ejemplo el incluir varios aspectos adicionales en las funciones objetivo, entre otras.

esfuerzos o costos (de carácter ecónomico) entre ambas autoridades asociados a estabilizar la deuda pública y a cumplir con los objetivos propios de política de cada autoridad. Esto último es básicamente el objetivo del presente trabajo.

Con el fin de llevar esto a cabo, se tendrán en cuenta los siguientes aspectos: en primer lugar, se va a utilizar el juego diferencial de Tabellini (1986) como base de estudio de la interacción estratégica y dinámica entre ambas autoridades en el contexto de la estabilización de la deuda pública [17], en segundo lugar, el mecanismo de distribución o asignación de los costos económicos entre ambas autoridades que se va emplear es el valor de Shapley como solución cooperativa. Y tercero, debido a la naturaleza dinámica del juego diferencial que se va a utilizar, una propiedad que es deseable en la situación interactiva descrita, es una en la cual cada autoridad se mantenga comprometida en el acuerdo en todo momento del tiempo de interacción, es decir, que no haya incentivo alguno para abandonarlo, esta propiedad se conoce como consistencia temporal o estabilidad dinámica. De este modo, para garantizar esta propiedad se implementará un algoritmo de descomposición de la asignación del valor Shapley construido por Petrosyan y Zaccour (2003) [13].

En el presente trabajo, debido a la complejidad algebraica de las ecuaciones en la cual se enmarcan los parámetros resultantes del problema, se asumen *dos escenarios* sobre los parámetros que no solo simplifican el análisis posterior de las asignaciones de cada autoridad, sino que pueden ser de interés para las cuestiones de política económica. En el primer escenario, ambas autoridades son igualmente sensibles, en términos absolutos, en sus acciones de política ante los movimientos de la deuda pública, es decir, podría pensarse como un escenario donde ambas autoridades en un acuerdo de cooperación están igual de comprometidas con la estabilización de la deuda. En el segundo escenario, la autoridad monetaria no tiene en cuenta en lo absoluto los movimientos de la deuda pública en la elección de sus acciones de política, mientras que la autoridad fiscal si lo hace, es decir, este escenario podría pensarse como uno en el cual aún cuando ambas autoridades están en un acuerdo de cooperación, la autoridad monetaria, en su actuar individual, es una autoridad totalmente independiente y conservadora, mientras que la autoridad fiscal está comprometida con la estabilización de la deuda pública.

Con base en estos dos escenarios propuestos, se calculan las asignaciones de cada autoridad y su respectiva descomposición para que sean asignaciones dinámicamente estables. Adicionalmente, con base en lo desarrollado y calculado en el presente trabajo se hallaron cuatro resultados de interés para el análisis de política con respecto al problema de la deuda pública.

El presente trabajo esta organizado de la siguiente manera:

- Capítulo 2: se abarca el marco teórico necesario para el presente trabajo. Primero, se dará una breve descripción de los problemas de optimización dinámica y control óptimo. Segundo, se abordan los juegos diferenciales no-cooperativos de horizonte finito e infinito. Tercero, se describirán los juegos diferenciales cooperativos a partir de la construcción de la función característica y el valor de Shapley. Por último, se describirá la metodología de Petrosyan y Zaccour para descomponer el valor de Shapley de tal manera que sea una asignación dinámicamente estable.

- Capítulo 3: se describirá el juego diferencial de horizonte infinito de Tabellini sobre el problema de la estabilización de la deuda pública creado por Tabellini (1986) [17]. Luego se empezará con lo propuesto en el presente trabajo de tesis donde en primer lugar se estudiará el juego diferencial de Tabellini bajo un marco cooperativo a partir de la construcción de la función característica, luego se encontrará la asignación de Shapley para luego implementar la metodología de Petrosyan y Zaccour. Posteriormente, se calcularán los parámetros del problema teniendo en cuenta dos escenarios propuestos para su análisis, y por último, se calculará y analizará la asignación descompuesta de costos económicos bajo los dos escenarios que se asumen. Para terminar, se exponen cuatro resultados obtenidos generales que se encontraron en este trabajo.

- Capítulo 4: hay unas breves conclusiones y recomendaciones del presente trabajo.

Capítulo 2

Marco teórico

De acuerdo al objetivo del presente trabajo, en este capítulo, se proporcionará una breve exposición sobre los siguientes temas: primero, lo que es un problema de optimización dinámica y de control óptimo para horizonte infinito y el método para su solución conocido como programación dinámica; segundo, la definición de lo que es un juego diferencial de horizonte finito y las soluciones para juegos no cooperativos; tercero, los juegos diferenciales con horizonte infinito y los métodos para encontrar la soluciones no-cooperativas, además; cuarto, el juego diferencial de horizonte infinito de Tabellini (1986) [17] sobre el problema de la estabilización de la deuda pública que será base para el presente trabajo; quinto, lo que es un juego diferencial cooperativo en su forma de función característica, el concepto-solución llamado el valor de Shapley y se describirá un proceso de descomposición de la asignación cooperativa valor de Shapley de tal manera que se garantice la estabilidad dinámica.

2.1. Optimización Dinámica y Control Óptimo

En el estudio de la toma de decisiones, se encuentra necesario hacer planes a futuro, debido a que las elecciones presentes afectan oportunidades futuras [4]. Este tipo de problemas en un contexto dinámico en el cual se busca optimizar el nivel de una medida específica en un intervalo de tiempo particular y teniendo en cuenta la evolución y dinámica de las variables involucradas, se pueden describir matemáticamente como problemas de *optimización dinámica*.

Dentro de los mismos, se define un *problema de control óptimo*, en estos, las variables pertinentes se dividen en dos clases: las variables de *control* y las de *estado* [11]. Las de *control* $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ son aquellas variables de decisión, mientras que las de *estado* $\mathbf{x}(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^m$ son aquellas que su dinámica esta descrita por una colección de ecuaciones diferenciales ordinarias, llamadas también *ecuaciones de estado* [6][4]. Un *problema de control óptimo* en el intervalo de tiempo $[t_0, T]$ es uno en el cual se buscan las trayectorias de $\mathbf{u}(t)$ tales que

$$\max_{\mathbf{u}(t)} \qquad J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{T} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt \tag{2.1}$$

$$\text{sujeto a} \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.2}$$

donde f y $\mathbf{g}$ se asumen funciones continuamente diferenciables en $(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))$, además las variables de control $\mathbf{u}(t)$ deben ser funciones puntualmente continuas en t [4]. En (2.1), la función f representa el pago instantáneo en t que recibe el agente que controla $\mathbf{u}(t)$ [6]. Se define la función $V(t_0, \mathbf{x}_0)$ (función de valor) como el máximo valor que puede ser obtenido a partir del momento t_0 y con el estado $\mathbf{x}_0$ [4]:

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{u}(t)} \quad \int_{t_0}^{T} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt$$

$$\text{sujeto a} \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Ahora, considere un problema de control óptimo de *horizonte infinito* con tasa de descuento constante [20]:

$$\max_{\mathbf{u}(t)} \qquad \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt \tag{2.3}$$

$$\text{sujeto a} \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.4}$$

donde $r > 0$ [19]. Para efectos de definir la función valor para este tipo de problemas (2.3)-(2.4), se considera el siguiente problema alternativo de control óptimo en un horizonte infinito, que será bajo el cual se estableceran las condiciones necesarias para su solución:

$$\max_{\mathbf{u}(t)} \qquad \int_{t}^{\infty} e^{-r(\tau-t)} f(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))d\tau \tag{2.5}$$

$$\text{sujeto a} \qquad \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)), \qquad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_t \tag{2.6}$$

Teniendo en cuenta que en (2.5)-(2.6) no aparece el tiempo (τ) explicitamente ni en f ni en $\mathbf{g}$, entonces es un problema *autónomo* de horizonte infinito. A partir del problema (2.5)-(2.6), la función de valor solo depende de los valores iniciales de las variables de estado $\mathbf{x}(t)$ más no del tiempo inicial [4][20], de acuerdo a como se define a continuación:

$$W(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{u}} \int_{t}^{\infty} e^{-r(\tau-t)} f(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))d\tau \tag{2.7}$$

Existen dos técnicas usualmente adoptadas para la solución de problemas de control óptimo: el **principio del máximo de Pontryagin** y el de **programación dinámica de Bellman** [20]. En cuanto a esta última técnica y para solucionar especificamente problemas como el (2.5)-(2.6) con tasa de descuento, esta dado el siguiente teorema[1].

[1] Ver prueba en [20] página 11.

Teorema 2.1.1 ***(Programación dinámica de Bellman)*** *Un vector de variables control* $\mathbf{u}^*(t)$ *es una solución óptima al problema de control óptimo con horizonte infinito (2.5)-(2.6), si existe la función continuamente diferenciable* $W(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *(función de valor) que satisface la siguiente ecuación:*

$$rW(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{u}}\{f(\mathbf{x},\mathbf{u}) + W'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u})\}$$

Esta última ecuación se suele llamar en la literatura como la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) donde r es la tasa de descuento intertemporal [4][6]. Note que uno de los términos de la expresión de la derecha de la ecuación HJB es un producto interno entre dos vectores teniendo en cuenta que $W'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = W'_{x_1}(\mathbf{x})g_1(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \cdots + W'_{x_m}(\mathbf{x})g_m(\mathbf{x},\mathbf{u})$.

2.2. Teoría de Juegos y Juegos Diferenciales

En la teoría de juegos se estudian aquellas situaciones de interacción no-cooperativa o cooperativa que involucran agentes racionales tomadores de decisión. Otra forma de definir la teoría de juegos es proporcionada por Myerson [10]: "*estudio de modelos matemáticos de conflicto* (no-cooperativos) *y cooperación entre tomadores de decisión inteligentes y racionales*". A partir del trabajo de Von Neumann y Morgerstern, *game theory and economic behavior*, se estudiaron tanto las situaciones estratégicas interactivas no cooperativas y algunas cooperativas [9].A partir de este libro, la forma más sencilla de definir un juego, en su *forma estratégica* es la siguiente: $\Gamma = \langle N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ donde $N = \{1, \ldots, n\} \neq \emptyset$ es el conjunto de jugadores, y para todo jugador $i \in N$, $C_i \neq \emptyset$ es el conjunto de estrategias que tiene disponible y $u_i : \prod_{j\in N} C_j \to \mathbb{R}$ es su función de pagos [10].

Esta teoría puede describir situaciones de no-cooperación y cooperación. En el primer caso, cada agente intenta maximizar su propio pago para cualquier posible resultado estratégico del juego. No obstante, en [9] se escribió sobre situaciones de tres individuos en las cuales la búsqueda de bienestar individual del primero de ellos puede poner en desventaja al segundo jugador, pudiendo pasar que el tercer jugador restante se vea beneficiado [8]. Entonces, este tipo de situaciones pueden llevar a crear coaliciones entre el conjunto de jugadores que de alguna manera podría beneficiarlos mutuamente al encontrar intereses comunes. Así, la conveniencia de formar coaliciones con otros son el tipo de situaciones de caracter cooperativo o coalicional que estudia la teoría de juegos. En este sentido, en un juego cooperativo los jugadores pueden hacer *acuerdos vinculantes* sobre la distribución de pagos o la elección de las estrategias [12].

Otra forma de dividir la teoría de juegos consiste en separar aquellos que se llevan a cabo en un instante de tiempo (estáticos) y los que involucran situaciones donde los jugadores toman decisiones interactivas a traves del tiempo, los cuales son llamados juegos dinámicos.

Dentro de estos últimos, existen los llamados *juegos diferenciales*, los cuales pueden ser vistos como una extensión de los problemas que estudia la teoría de control óptimo incorporando el comportamiento estratégico en este contexto [3][20]. En concreto, el cambio del contexto será del escenario donde solo hay un tomador de decisión[2] a uno en el cual interactúan varios y cada uno de ellos solucionando simultáneamente su propio problema teniendo en cuentas las acciones de los otros. Por lo cual, los juegos diferenciales estudian la toma de decisiones *interactivas* a lo largo del tiempo, es decir, situaciones donde las acciones o decisiones de los jugadores, cada uno actuando independientemente, tienen efecto en la (o las) variable(s) de estado y en cada uno de los pagos de los otros individuos a lo largo del tiempo [4].

Un *juego diferencial determinístico* en un intervalo de tiempo definido $[t_0, T]$ esta compuesto por [21][6]:

1. Un conjunto de jugadores $N = \{1, \dots, n\}$.

2. Un vector de variables control $\mathbf{u}(t) = (u_1, \dots, u_n)$ donde $u_i(t) \in \mathcal{U}_i$ es la variable control del jugador i para todo $i \in N$ y $\mathcal{U}_i$ es el conjunto de controles admisibles del jugador i.

3. Un vector de variables estado $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^m$. La evolución de las variables estado esta gobernado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.8}$$

4. Un funcional que representa el pago del jugador i:

$$J_i(\mathbf{u}(\cdot); \mathbf{x}_0, t_0) = \int_{t_0}^{T} f_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt + q_i(\mathbf{x}(T)) \tag{2.9}$$

   donde $f_i(\cdot)$ representa su pago instantáneo y $q_i(\cdot)$ representa su pago terminal (o de salvamento). Las funciones $\mathbf{g}(\cdot)$ y $f_i(\cdot)$ se asumen que son funciones diferenciables para todo $i \in N$ [20]. En un juego diferencial *no-cooperativo* de n jugadores, el objetivo del i-ésimo jugador es

$$\max_{u_i} \qquad J_i(\mathbf{u}(\cdot); \mathbf{x}_0, t_0) = \int_{t_0}^{T} f_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt + q_i(\mathbf{x}(T)) \tag{2.10}$$

$$\text{para } i \in N = \{1, \dots, n\}$$

$$\text{sujeto a} \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.11}$$

5. Estructura de información: en un juego diferencial se debe especificar la información disponible para cada jugador $i \in N$ cuando seleccionan su respectivo valor de su variable control u_i [21]. Las dos estructuras de información más comunes son: la **open-loop**

[2]Escenario clásico de un problema de control óptimo.

y la **feedback** (o **Markovian**). Bajo la primera estructura de información, las decisiones de los jugadores solo dependen del tiempo (además de las condiciones iniciales $\mathbf{x}_0$), mientras que bajo la segunda estructura, sus decisiones dependen del tiempo y del estado actual del sistema $(t, \mathbf{x}(t))$.

6. Una estrategia para cada jugador. Para cada $i \in N$ en el juego, una estrategia u_i^* es una *regla de decisión* escogida desde el principio del juego que soluciona (2.10)-(2.11) [21]. Una **estrategia feedback** es de la forma $u_i^* = u_i^*(t, \mathbf{x}(t))^3$, es decir, la acción estratégica del jugador i depende del tiempo y el estado corriente del juego $\mathbf{x}(t)$. Una **estrategia open-loop**, es una feedback degenerada, es decir, es de la forma $u_i^* = u_i^*(t)$ la cual implica que el jugador i al principio del juego decide un plan entero de acciones el cual sigue estrictamente a lo largo del horizonte temporal [6].

Dentro de los juegos diferenciales, entre los más conocidos se encuentran los *lineal-cuadráticos* (o juegos diferenciales LQ) los cuales se caracterizan por tener funciones objetivo o de pagos cuadráticas (2.10) y ecuaciones de estado lineales (2.11) [3][19].

Ahora, en un contexto no-cooperativo, la siguiente definición es fundamental de los juegos diferenciales [6]:

Definición* 2.2.1 *(Equilibrio de Nash): *Dada una estructura de información (open-loop o feedback), una $n-$tupla de estrategias o un perfil de estrategias $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ con $u_i^* \in \mathcal{U}_i$ para todo $i \in N$, se dice que es un* ***equilibrio de Nash****, si y sólo si,*

$$J_i(u_1^*, \dots, u_i^*, \dots, u_n^*) \geq J_i(u_1^*, \dots, u_i, \dots, u_n^*)$$

para toda $u_i \neq u_i^*$, $u_i \in \mathcal{U}_i$, y para todo $i \in N$.

Detrás de la Definición 2.2.1 esta el hecho de que cada jugador $i \in N$ esta buscando actuar de la mejor manera dado que los demás jugadores están buscando lo mismo, es decir, ningún jugador puede beneficiarse de desviarse del perfil de estrategias que son equilibrio de Nash, o dicho de otra manera, no existen incentivos unilaterales por parte de cada jugador de desviarse de un equilibrio de Nash [21][4]. Dependiendo de la estructura de información, los posibles equilibrios son [6]: **equilibrio de Nash open-loop** ($\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(t)$) y **equilibrio de Nash feedback** ($\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}(t))$).

2.3. Juegos Diferenciales de Horizonte Infinito

Sean las funciones objetivo f_i para todo $i \in N$ y las funciones de estado $\mathbf{g}$, todas funciones *autónomas*, es decir, que no dependen del tiempo t. Por ende, el problema que

[3]Esta función debe ser continua en t y Lipschitz continua en $\mathbf{x}$ para todo t [6].

tiene que resolver el jugador $i \in N$ bajo un *juego diferencial autónomo no-cooperativo de horizonte infinito* es el siguiente [20]:

$$\max_{u_i} \quad J_i(\mathbf{u}(\cdot); \mathbf{x}, t) = \int_t^{\infty} e^{-r(\tau - t)} f_i(\mathbf{x}(\tau), u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau)) d\tau \tag{2.12}$$

$$\text{para } i \in N = \{1, \ldots, n\}$$

$$\text{sujeto a} \quad \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(\tau), u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau)), \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_t \tag{2.13}$$

De la misma manera que un problema de control óptimo de horizonte infinito (2.5)-(2.6), las funciones de valor para cada jugador $i \in N$ son independiente del tiempo inicial, es decir, la función valor del problema (2.12)-(2.13) del jugador i sería

$$W^i(\mathbf{x}) = \max_{u_i} \int_t^{\infty} e^{-r(\tau - t)} f_i(\mathbf{x}(\tau), u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau)) d\tau$$

Para encontrar el equilibrio de Nash feedback y solucionar problemas del tipo (2.12)-(2.13) se utiliza el método de *programación dinámica de Bellman* adecuado para un juego diferencial de n jugadores, esto se sintetiza en el siguiente teorema[4]. En cuanto a la notación, se tendrá en cuenta que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}$.

Teorema 2.3.1 *Un perfil de estrategias* $\mathbf{u}^*(\tau, x) = (u_1^*(\tau, x), \ldots, u_n^*(\tau, x))$ *proporciona un* ***equilibrio de Nash feedback*** *como solución del juego de horizonte infinito (2.12)-(2.13), si existen unas funciones continuamente diferenciables* $W^i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$*, para* $i \in N$*, tal que el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales parciales se satisfagan:*

$$\begin{aligned} rW^i(\mathbf{x}) &= \max_{u_i}\{f_i(\mathbf{x}, u_1^*(\tau, \mathbf{x}), \ldots, u_{i-1}^*(\tau, \mathbf{x}), u_i(\tau, \mathbf{x}), u_{i+1}^*(\tau, \mathbf{x}), \ldots, u_n^*(\tau, \mathbf{x})) \\ &\quad + W_{\mathbf{x}}^i(\mathbf{x})\mathbf{g}(\tau, \mathbf{x}, u_1^*(\tau, \mathbf{x}), \ldots, u_{i-1}^*(\tau, \mathbf{x}), u_i(\tau, \mathbf{x}), u_{i+1}^*(\tau, \mathbf{x}), \ldots, u_n^*(\tau, \mathbf{x}))\} \\ &= f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*(\tau, \mathbf{x})) + W_{\mathbf{x}}^i(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}^*(\tau, \mathbf{x})) \qquad \textit{para todo} \quad i \in N \end{aligned}$$

Observe que la diferencia entre el Teorema 2.1.1 y el Teorema 2.3.1 es que el primero describe el método de programación dinámica de Bellman para la solución de un problema de control óptimo autónomo con horizonte infinito, mientras que el segundo, describe el mismo método para la solución simultánea de n problemas de control óptimo autónomos con horizonte infinito.

2.4. Juegos Cooperativos en Forma de Función Característica para Juegos Diferenciales

De acuerdo a lo descrito en sección 2.2, la teoría de juegos puede también describir situaciones cooperativas donde los jugadores deciden formar coaliciones y actuar de forma

[4]Ver prueba en [20] página 28.

coordinada[5] con el objetivo de conseguir el mayor pago conjunto que será luego distribuido entre los jugadores [21]. Dentro de los juegos cooperativos, existen dos categorias generales de modelación: juegos con *utilidad o pago transferible*[6] y juegos con *utilidad o pago no-transferible*.

Por esa razón, en un juego cooperativo con pagos transferibles para n jugadores, las distintas posilibidades de cooperación, o de los pagos recibidos por formar las distintas coaliciones, se pueden describir por una función v, llamada *función característica*, que asocia a cada coalición no-vacía de jugadores $S \subseteq N$ un número real $v(S)$ [10], es decir,

$$v: \; P(N) \to \mathbb{R} \tag{2.14}$$

$$S \mapsto v(S)$$

donde $P(N)$ es el conjunto potencia del conjunto N y $v(\emptyset) = 0$. La función característica lo que hace es darle un cierto valor "ex-ante", monetario o de otro tipo, a cualquier posible coalición[7] [8]. De esta manera, en la teoría de juegos, se define un juego cooperativo con pagos transferibles como la dupla $\langle N, v(.)\rangle$. Aún cuando la función característica sea el valor o pago que recibe cualquier posible coalición, no dice nada al respecto de la distribución de ese valor o pago entre cada uno de los jugadores. Esta distribución se determina a partir del *concepto-solución* que sea utilizado, que dentro de los más conocidos están, el núcleo, los conjuntos estables y el valor de Shapley [8]. En el presente trabajo se hará énfasis en el último.

Por otra parte, los juegos cooperativos también pueden ser estudiados al incorporar el tiempo como característica de la situación interactiva que se esta modelando. Las siguientes son algunas de las razones de incorporar el tiempo a los juegos cooperativos y de que los agentes económicos decidan realizar acuerdos cooperativos de largo plazo [21]: primero, que los agentes o jugadores lleguen a un acuerdo genera ciertos costos que hacen que tenga sentido el evitar la renegociación frecuente. Segundo, algunas situaciones o problemas son "inherentemente"dinámicos lo cual se refleja en el hecho de que las variables de interés en cierta situación tengan una dinámica específica. Y tercero, puede pasar que en un momento intermedio de tiempo en medio del desarrollo del acuerdo cooperativo establecido entre los jugadores, uno de ellos decida abandonar este acuerdo porque por ejemplo para al menos uno de ellos le conviene más actuar no-cooperativamente, esta característica en el contexto de juegos dinámicos se le conoce como *inconsistencia temporal* o *inestabilidad dinámica* [21][20].

[5] Coordinar las acciones o estrategias de cada jugador.

[6] La intuición detrás de lo que se entiende por *pagos transferibles* es que de alguna manera los pagos pueden medirse con base en un medio de cambio que los jugadores pueden transferir libremente [8].

[7] También se puede pensar como el poder, pago o fortaleza al conformar la coalición S [21].

2.4.1. Definición de un juego diferencial cooperativo y la construcción de la función característica

En el contexto de juegos diferenciales, se siguen considerando el conjunto de jugadores $N = \{1, \dots, n\}$, sin embargo, la función característica se define de una manera distinta teniendo en cuenta las particularidades dinámicas contenidas en este tipo de juegos [20].

No obstante, se deben tener en cuenta dos aspectos importantes: primero, se asume que los pagos de los jugadores (2.9) son *transferibles*. Segundo, se asume que los jugadores antes de empezar el juego diferencial se ponen de acuerdo en cual será el curso de sus acciones o estrategias (o controles), $\mathbf{u}^c = (u_1^c, \dots, u_n^c)$, a lo largo del tiempo, con las correspondientes trayectorias de las variables estado que satisfacen (2.8) y que serán llamadas *trayectorias condicionalmente óptimas* $\mathbf{x}^c(t)$ [20][14].

Para definir la función característica para un juego diferencial, en primer lugar, se define el valor de la coalición total (N), como $v(N; \mathbf{x}_0, T - t_0)$, que será igual a el valor máximo de la suma de los pagos (funcionales) de todos jugadores teniendo en cuenta el estado inicial del sistema $\mathbf{x}_0$, la duración del juego $T - t_0$ y la dinámica de las variables estado (2.8). Este valor para la coalición total, $v(N; \mathbf{x}_0, T - t_0)$, es basicamente la función de valor del siguiente problema de optimización:

$$\max_{u_1,\dots,u_n} \qquad \sum_{i=1}^{n} J_i(\mathbf{u}(\cdot); \mathbf{x}_0, t_0) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{t_0}^{T} f_i(t, \mathbf{x}(t), u_1(t), \dots, u_n(t))dt + q_i(\mathbf{x}(T)) \right\} \tag{2.15}$$

$$\text{sujeto a} \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u_1(t), \dots, u_n(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.16}$$

La intuición detrás de este problema de optimización dinámica (2.15)-(2.16) es la siguiente: el mejor resultado para todos los jugadores (i.e. $v(N; \mathbf{x}_0, T - t_0)$) se consigue si deciden coordinar las trayectorias de sus acciones $\mathbf{u}^c$ las cuales maximicen la suma de los pagos (funcionales) de todos jugadores (2.15) sujeto a la dinámica de las variables de estado (2.16) de donde se obtienen las trayectorias de estado condicionalmente óptimas $\mathbf{x}^c(t)$ [20], es decir [20]:

$$v(N; \mathbf{x}_0, T - t_0) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{t_0}^{T} f_i(t, \mathbf{x}^c(t), \mathbf{u}^c(t))dt + q_i(\mathbf{x}^c(T)) \right\} \tag{2.17}$$

Para resolver el problema de optimización dinámica (2.15)-(2.16) se puede hacer uso del método de programación dinámica (Teorema 2.1.1). Adicionalmente, hay juegos donde los valores de la función característica pueden representar algo negativo en vez de una ganancia conjunta que se conseguiría entre los jugadores. Esto debido a que los pagos (o funcionales) (2.9) pueden representar algo negativo como una función de costos o pérdida y por ende $v(N; \mathbf{x}_0, T - t_0)$ representaría en dichos casos el valor mínimo de la suma de los funcionales de todos los jugadores, lo cual se consigue si los jugadores deciden acordar el curso de sus acciones $\mathbf{u}^c$ de tal manera que garanticen la minimización de la pérdida conjunta[8]:

$$\min_{u_1,\ldots,u_n} \quad \sum_{i=1}^{n} J_i(\mathbf{u}(\cdot);\mathbf{x}_0,t_0) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\int_{t_0}^{T} f_i(t,\mathbf{x}(t),u_1(t),\ldots,u_n(t))dt + q_i(\mathbf{x}(T))\right\} \quad (2.18)$$

$$\text{sujeto a} \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t,\mathbf{x}(t),u_1(t),\ldots,u_n(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.19)$$

Siguiendo con la construcción de la función característica para juegos diferenciales [20], de acuerdo a la definición de $v(N;\mathbf{x}_0,T-t_0)$, para una coalición $S\subset N$, $v(S;\mathbf{x}_0,T-t_0)$ es el valor máximo (o mínimo) de la suma de pagos de los jugadores pertenecientes a la coalición S obtenido independientemente del comportamiento de los otros jugadores[9]. Para una coalición de un solo jugador, por ejemplo $\{i\}\subset N$, entonces $v(\{i\};\mathbf{x}_0,T-t_0)$ será el valor máximo (o mínimo) del funcional del jugador i teniendo en cuenta la dinámica de la(s) variable(s) estado, es decir, es el caso no-cooperativo donde el jugador i decide establecer una coalición solo y se preocupa por su propio bienestar (2.10)-(2.11), el valor de la función característica sería la función de valor del problema individual del jugador i.

Además, se asume que la función característica es superaditiva [20]. En el contexto de juegos diferenciales esta propiedad, bajo la misma idea que la teoría de juegos clásica, se describe de la siguiente manera: para $S'\subset S\subset N$ se tiene que $v(S';\mathbf{x}_0,T-t_0)\leq v(S;\mathbf{x}_0,T-t_0)$. Esto garantiza que sea ventajoso para los jugadores establecer la coalición total N para obtener un pago total máximo de $v(N;\mathbf{x}_0,T-t_0)$ [20]. Teniendo en cuenta lo comentado hasta el momento, se proporciona la siguiente definición [14]:

Definición* 2.4.1** *Un* ***juego diferencial cooperativo en la forma de función característica (con pagos transferibles)*, es un par $\langle N, v(S;\mathbf{x}_0,T-t_0)\rangle$ donde v es la función característica. Será denotado por $\Gamma_v(\mathbf{x}_0,T-t_0)$[10].*

Si el juego diferencial cooperativo se lleva a cabo en un horizonte infinito hay que considerar algunos aspectos importantes relacionados a la notación. Considerando a t cualquier tiempo inicial en el intervalo $[0,\infty)$. Sea el estado del juego como la pareja $(t,\mathbf{x}(t))$ y sea $\Gamma_v(\mathbf{x}(t),t)$ el subjuego que empieza desde t con los valores de las variables de estado $\mathbf{x}(t)$. Por ende, $\Gamma_v(\mathbf{x}^c(t),t)$ será el subjuego que empieza en t con los valores de la trayectoria cooperativa de estado $\mathbf{x}^c(t)=\mathbf{x}(t)$. El valor de la función característica para una coalición $S\subseteq N$ en el subjuego $\Gamma_v(x(t),t)$ será denotado para juegos con horizonte infinito por $v(S;\mathbf{x}(t),t)$ a partir del tiempo inicial t y con el estado inicial $\mathbf{x}(t)$. Teniendo en cuenta esta notación, el pago (o

[8]Un ejemplo puede ser encontrado en [13] donde el funcional de cada juagador, o en este caso país, es el flujo de costos asociados a la mitigación de la polución, entonces en este caso $v(N;\mathbf{x}_0,T-t_0)$ representaría el valor mínimo de los costos conjuntos para mitigar la polución con base en un acuerdo de acciones coordinadas.

[9]Aún cuando estos últimos formen una coalición $N\backslash S$ en contra de S [14]. Aunque también lo que se asume es que los que no pertencen a S siguen su estrategia Nash (Definición 2.2.1) [13].

[10]De hecho, en varios casos, un juego diferencial de n jugadores suele ser denotado como $\Gamma(\mathbf{x}_0,T-t_0)$ para enfatizar en la dependencia del juego en el estado inicial $\mathbf{x}_0$ y la duración del mismo $T-t_0$ [14].

costo) total cooperativo para ser distribuido o asignado entre los jugadores será $v(N; \mathbf{x}(0), 0)$ como valor en la función característica en el juego $\Gamma_v(\mathbf{x}(0), 0)$.

Por otro lado, debido a que la interacción se da en un intervalo de tiempo (finito o infinito), se asume que los jugadores acuerdan cooperar desde el principio del juego. Con base en lo anterior, se define el *principio de optimalidad de la solución* para un juego $\Gamma_v(\mathbf{x}_0, T-t_0)$ [20] con base en los dos elementos que componen este principio [20]:

1. Un acuerdo sobre un conjunto de acciones o estrategias (o controles) cooperativas
$$\mathbf{u}^c(t) = (u_1^c(t), \ldots, u_n^c(t)), \quad \text{para} \quad t \in [t_0, T]$$
2. Un mecanismo para distribuir el pago total entre los jugadores, o en otras palabras, una forma (concepto-solución) de *asignación* de pagos cooperativos.

En otras palabras, en una situación descrita por un juego diferencial, su estudio desde la perspectiva cooperativa y la subyacente solución bajo el principio de optimalidad, comprenden dos cosas: primero, las acciones o estrategias (o controles) las cuales todos los jugadores coordinaron desde el principio del juego t_0, y segundo, un mecanismo el cual distribuye los pagos (o costos según sea el caso) conseguidos al actuar cooperativamente (e.g. nucleo, valor de Shapley, etc.) [20].

A partir del segundo componente del principio de optimalidad de la solución sobre la distribución de los pagos cooperativos, en términos formales es un vector y es conocido como *imputación de la solución*, o *asignación de pagos* del juego cooperativo [20][8]. Sea $\xi_i(\mathbf{x}_0, T-t_0)$ la asignación (o porción) que recibe el jugador $i \in N$ del pago total $v(N; \mathbf{x}_0, T-t_0)$. Ahora, se considera la siguiente definición [20]:

***Definición* 2.4.2** *Un vector*
$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0, T-t_0) = (\xi_1(\mathbf{x}_0, T-t_0), \ldots, \xi_n(\mathbf{x}_0, T-t_0))$$
que satisface las condiciones:

(i) $\quad \xi_i(\mathbf{x}_0, T-t_0) \geq v(\{i\}; \mathbf{x}_0, T-t_0), \quad \textit{para todo} \quad i \in N$

(ii) $\quad \sum_{i\in N} \xi_i(\mathbf{x}_0, T-t_0) = v(N; \mathbf{x}_0, T-t_0)$

es llamado ***una imputación (o asignación de pagos)*** *del juego* $\Gamma_v(\mathbf{x}_0, T-t_0)$.

Para encontrar la imputación o asignación de pagos para todos los jugadores se llevará a cabo a partir del *concepto-solución* que se decida utilizar, que dentro de los más conocidos y el cual será utilizado en el presente trabajo es el valor de Shapley [8]. La siguiente es la definición del valor de Shapley para un juego diferencial cooperativo la cual es basada en el teorema de existencia de dicho valor demostrado por Shapley (1953) [16]:

***Definición* 2.4.3** *El vector*

$$\boldsymbol{\phi}^v(\mathbf{x}_0, T-t_0) = [\phi_1^v(\mathbf{x}_0, T-t_0), \ldots, \phi_n^v(\mathbf{x}_0, T-t_0)]$$

es llamado el ***valor de Shapley*** *si satisface las siguientes condiciones*

$$\phi_i^v(\mathbf{x}_0, T-t_0) = \sum_{i \notin S \subseteq N-\{i\}} \frac{|S|!(|N|-|S|-1)!}{|N|!}(v(S\cup\{i\}; \mathbf{x}_0, T-t_0) - v(S; \mathbf{x}_0, T-t_0))$$

Para describir la intuición y significado detrás de esta definición y la asignación que recibe el i-ésimo jugador a partir del valor de Shapley (i.e. $\phi_i^v(\mathbf{x}_0, T-t_0)$), se supone la siguiente situación [10][15]: suponga que se planea reunir todos los jugadores (i.e. N) en un salón[11], sin embargo, al entrar al salon uno por uno entonces los jugadores realizan una fila donde puede haber $|N|!$ maneras en la cuales se organicen los jugadores en la fila. Ahora, para cualquier coalición $S \subseteq N$ donde no este el jugador i (i.e. $i \notin S$), hay $|S|!(|N|-|S|-1)!$ posibles formas de ordenar los jugadores de tal manera que S es el conjunto de jugadores adelante de i, entonces la probabilidad de que el jugador i se integre a la coalición S (o que entre al salón y encuentre a S), es de $|S|!(|N|-|S|-1)!/|N|!$. Esta probabilidad de que i se integre a la coalición S es multiplicada por el aporte marginal de i a la coalición S, es decir, $v(S\cup\{i\}; \mathbf{x}_0, T-t_0) - v(S; \mathbf{x}_0, T-t_0)$[12], es así como el valor de Shapley, es la contribución (o aporte) marginal *esperada* para cada posible coalición $S \subseteq N$ en la que el jugador i podría estar. Por último, téngase en cuenta que el valor Shapley podría también ser encontrado para cualquier coalición S en la que *ya* está presente el jugador i (i.e. $i \in S$), entonces la siguiente definición para calcular el valor de Shapley es equivalente a la Definición 2.4.3 en cuanto a la solución que se obtiene, el valor o asignación de cada jugador i sería

***Definición* 2.4.4** *El vector*

$$\boldsymbol{\phi}^v(\mathbf{x}_0, T-t_0) = [\phi_1^v(\mathbf{x}_0, T-t_0), \ldots, \phi_n^v(\mathbf{x}_0, T-t_0)]$$

es llamado el ***valor de Shapley*** *si satisface las siguientes condiciones*

$$\phi_i^v(\mathbf{x}_0, T-t_0) = \sum_{i \in S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}(v(S; \mathbf{x}_0, T-t_0) - v(S\setminus\{i\}; \mathbf{x}_0, T-t_0))$$

Hay que tener en cuenta que para los juegos diferenciales cooperativos bajo un horizonte infinito el valor de Shapley para el subjuego $\Gamma_v(\mathbf{x}(t), t)$ será denotado de la siguiente manera: $\boldsymbol{\phi}^v(\mathbf{x}(t), t) = (\phi_1^v(\mathbf{x}(t), t), \ldots, \phi_n^v(\mathbf{x}(t), t))$.

[11] O integrar un proyecto [8]

[12] Entonces este valor es el aporte que puede aportar el jugador i cuando entra a el salón o un proyecto el cual ya esta integrado por la coalición S.

2.4.2. La estabilidad dinámica y la asignación estable del valor de Shapley

En los juegos diferenciales cooperativos[13], existe una propiedad deseable para la asignación cooperativa y la cual es conocida como *consistencia temporal* o *estabilidad dinámica*. Esta basicamente asume que los jugadores al principio del juego deciden cooperar guiados por la solución establecida por el principio de optimalidad adoptado inicialmente, y a lo largo del desarrollo y la consecución del mismo, los jugadores siguen guiados por el mismo principio y sin incentivo individual alguno para desviarse de las acciones o estrategias contempladas por la misma solución cooperativa adoptada inicialmente [20]. Entonces de alguna manera cuando una solución se caracteriza por cumplir esta condición de estabilidad dinámica es porque, si se quiere renegociar el acuerdo en un instante intermedio de tiempo dará como resultado la misma solución cooperativa y porque en cualquier momento del tiempo los pagos individuales para todos los jugadores por desviarse de la solución cooperativa son menores [21].

De esta manera, debido a la relevancia de la estabilidad de un acuerdo cooperativo a lo largo del tiempo, se han encontrado importantes resultados al respecto. En particular, Petrosyan y Zaccour (2003) [13] encontraron un procedimiento (algoritmo) para *descomponer* la asignación de pagos (o imputación) encontrada a partir del valor de Shapley, de tal manera que se garantice la estabilidad de la solución cooperativa en todo instante del juego.

Antes de describir este algoritmo es pertinente mostrar algunas definiciones y proposiciones relevantes establecidas por Petrosyan y Zaccour [13]. En este sentido, se define lo que es formalmente un procedimiento de descomposición de la asignación (o imputación) de pagos a partir del valor de Shapley para el subjuego $\Gamma_v(\mathbf{x}(0), 0)$ [13][21]:

Definición* 2.4.5** *El vector $\boldsymbol{\beta}(t) = (\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t))$ es un* ***procedimiento de distribución de una imputación (IDP) *si*

$$\phi_i^v(\mathbf{x}(0), 0) = \int_0^\infty e^{-\rho t}\beta_i(t)dt, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.20}$$

Detrás de la definición 2.4.5 esta la siguiente idea: la función temporal $\beta_i(t)$ clasifica para ser un IDP si esta descompone a lo largo del tiempo el pago (o costo) total del jugador i dado por su componente del valor Shapley para todo el juego $\Gamma_v(\mathbf{x}(0), 0)$, es decir, según (2.20) la suma de los pagos instantáneos descontados (con tasa de descuento ρ) es igual a $\phi_i^v(\mathbf{x}(0), 0)$ que es la asignación total que recibe el jugador i a partir del valor de Shapley. Ahora se introducirá otra definición necesaria para saber cuando un IDP se considera dinámicamente estable [13]:

[13] O inclusive los juegos dinámicos cooperativos en general.

Definición* 2.4.6** *El vector $\boldsymbol{\beta}(t) = (\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t))$ es un* ***IDP dinámicamente estable (o temporalmente consistente) *si en $(\mathbf{x}^c(t), t)$, $\forall t \in [0, \infty)$ la siguiente condición se satisface:*

$$\phi_i^v(\mathbf{x}(0), 0) = \int_0^t e^{-\rho\tau}\beta_i(\tau)d\tau + e^{-\rho t}\phi_i^v(\mathbf{x}^c(t), t) \tag{2.21}$$

Para interpretar la Definición 2.4.6 y la ecuación (2.21), en [21][13] se explica de la siguiente manera: asuma que los jugadores, en un momento intermedio del tiempo t quisieran renegociar el acuerdo inicial aplicado hasta el momento en el juego $\Gamma_v(\mathbf{x}^c(0), 0)$. En ese momento t, el estado del sistema es $(\mathbf{x}^c(t), t)$, significando que la cooperación ha prevalecido en el intervalo temporal $[0, t]$, y por ende, a cada i-ésimo jugador le hubieran sido asignados una suma de flujo descontado de una cantidad (monetaria) dada por el primer término de la derecha de (2.24). Ahora, si el subjuego $\Gamma_v(\mathbf{x}^c(t), t)$, empezando con la condición inicial $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^c(t)$, es jugado cooperativamente, entonces el i-ésimo jugador obtendrá su componente del valor de Shapley en este juego específico dado por el segundo término de la derecha de (2.21). Si lo que le ha sido asignado al jugador i hasta t y lo que le será asignado desde esa fecha hacia adelante suman el pago (o costo) total del acuerdo original, es decir, su componente del valor de Shapley $\phi_i^v(\mathbf{x}(0), 0)$, entonces esta renegociación dejaría el acuerdo original inalterado.

Por otro lado, si uno quisiera encontrar un IDP $\boldsymbol{\beta}(t) = (\beta_i(t), \ldots, \beta_n(t)$ tal que se satisfaga (2.21), es decir, que sea dinámicamente estable, esto es lo que resulta de la siguiente proposición:

***Proposición* 2.4.1** *El vector $\boldsymbol{\beta}(t) = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ donde $\beta_i(t)$ esta dada por*

$$\beta_i(t) = \rho\phi_i^v(\mathbf{x}^c(t), t) - \frac{d}{dt}\phi_i^v(\mathbf{x}^c(t), t) \tag{2.22}$$

es un IDP dinámicamente estable (o temporalmente consistente)[14].

Con base en la Proposición 2.4.1 se muestra que si se utiliza β_i descrita por (2.22) se garantiza que sea una descomposición de los pagos (o costos) asignados a cada jugador que sea consistente o estable a lo largo del juego bajo la solución cooperativa, es decir, que sea una IDP dinámicamente estable o temporalmente consistente.

De acuerdo a [13], la ecuación (2.22) tiene una interpretación económica interesante: dado que asigna en cada momento del tiempo al jugador i el pago (o costo) β_i correspondiente al pago de interés (tasa de interés multiplicado por el costo bajo cooperación) menos la variación en el tiempo de ese mismo costo bajo cooperación[15], es decir, de alguna manera esa descomposición es un mecanismo de compensación dado que si el pago (o costo) cooperativo esta creciendo en t el pago (o costo) "descompuesto" en t es menor que el pago (o costo)

[14] Ver demostración en [20] página 66.

[15] Este ejemplo muestra que es posible escojer un IDP significativo en términos de interpretación [21].

cooperativo al valor de este momento t (y viceversa). Otra manera de expresar la idea de la ecuación (2.22), es que bajo esa descomposición del pago (o costo), se le dará a cada jugador i en cada momento del tiempo el pago (o costo) establecido por la solución cooperativa a valor de ese momento, restándole si se le esta asignando cada vez más o sumándole si se le esta asignado cada vez menos.

El algoritmo de Petrosyan y Zaccour (2003)

El algoritmo o metodología para juegos diferenciales cooperativos construida por Petrosyan y Zaccour (2003)[16] comprende tres partes que se pueden dividir en seis pasos [13]:

(i) Calcular los valores de la función característica del juego cooperativo.

- *Paso 1: Calcular el valor de la función característica para la coalición total: maximizar (o minimizar) el pago (o costo) total de la coalición total.*

  El valor de la función característica para la coalición total en un juego diferencial cooperativo bajo un horizonte infinito (i.e. $v(N;\mathbf{x},t)$) es la correspondiente función de valor del problema de optimización dinámica (2.15)-(2.16) con $T \to \infty$ y la cual será denotada por $W(N,\mathbf{x})$[17], para el estado inicial en t, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ [20]. Por lo tanto, $v(N;\mathbf{x},t) = W(N,\mathbf{x})$.

- *Paso 2: Calcular los valores de la función característica para las coaliciones de un jugador: a partir del equilibrio de Nash como solución no-cooperativa.*

  Para encontrar los valores de la función característica para coaliciones de un solo jugador (del i-ésimo) en un juego diferencial cooperativo de horizonte infinito $v(\{i\};\mathbf{x},t)$, se deben calcular para cada jugador $i \in N$ la función de valor del problema individual (2.12)-(2.13), que será denotada por $V^i(\mathbf{x})$. Por lo tanto, $v(\{i\};\mathbf{x},t) = V^i(\mathbf{x})$.

- *Paso 3: Calcular los valores de función característica para todas las coaliciones restantes.*

  El valor de la función característica para un juego diferencial cooperativo con horizonte infinito para cualquier posible subconjunto de jugadores $S \subseteq N$ conteniendo más de uno y descartando la coalición total se encuentra por medio del valor de la función de valor del problema de esta coalición, es decir, $v(S,\mathbf{x}(t),t) = W(S,\mathbf{x})$. Se asume [13][20] que los jugadores que quedaron por fuera de la coalición S (o pertenecen a la coalición $N \backslash S$) tomarán sus valores Nash calculados en el paso 2, como sus valores de las variables de decisión (estrategias).

[16] En [13] ellos aplican este algoritmo aplicandolo al problema de la asignación de costos de reducción de la polución.

[17] Al ser un problema autónomo solo depende de la variable estado en su estado inicial en t.

- *Paso 4: Definición de la función característica.*

  La función característica $v(S; \mathbf{x}(t), t)$ (con $t \in [0, \infty)$) del juego diferencial cooperativo es definida de la siguiente manera:

$$v(\{i\}; \mathbf{x}(t), t) = V^i(\mathbf{x}(t)), \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$v(S; \mathbf{x}(t), t) = W(S, \mathbf{x}(t)), \qquad S \subseteq N$$

(ii) Asignación entre los jugadores del pago (o costo) total cooperativo basado en el valor de Shapley.

- *Paso 5: Cálculo del valor de Shapley.*

  Para un juego diferencial cooperativo de horizonte infinito, se denota por $\boldsymbol{\phi}^v(\mathbf{x}, t) = (\phi_1^v(\mathbf{x}(t), t), \ldots, \phi_n^v(\mathbf{x}(t), t))$ el valor de Shapley en el juego (o subjuego) $\Gamma_v(\mathbf{x}(t), t)$. Teniendo en cuenta la Definición 2.4.4., el componente i-ésimo del valor de Shapley (a partir de t) estará dado por

$$\phi_i^v(\mathbf{x}(t), t) = \sum_{i \in S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} (v(S; \mathbf{x}(t), t) - v(S \setminus \{i\}; \mathbf{x}(t), t))$$

  Particularmente, si la cooperación esta en vigor para toda la duración del juego, entonces el pago (o costo) total asignado al jugador i estaría dado por su valor de Shapley en el juego $\Gamma_v(\mathbf{x}(0), 0)$, es decir,

$$\phi_i^v(\mathbf{x}(0), 0) = \sum_{i \in S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} (v(S; \mathbf{x}(0), 0) - v(S \setminus \{i\}; \mathbf{x}(0), 0))$$

(iii) Asignación a lo largo del tiempo del valor de Shapley a cada jugador teniendo la propiedad de ser dinámicamente estable (o temporalmente consistente).

- *Paso 6: Definir un procedimiento de distribución de pagos (IDP) dinámicamente estable (o temporalmente consistente).*

  De acuerdo a la Proposición 2.4.1 el pago (o costo) corriente generado a partir de la descomposición del valor de Shapley que cumpla la propiedad que sea temporalmente consistente, esta dado para cada $t \in [0, \infty)$ por la ecuación (2.22).

Capítulo 3

Una asignación estable de los costos económicos en el contexto de la estabilización de la deuda pública

Este capítulo se desarrollará de la siguiente manera: primero, se va a describir el juego diferencial LQ de horizonte infinito de Tabellini (1986) [17] entre la autoridad monetaria y fiscal en el contexto de la estabilización de la deuda pública; segundo, la aplicación del algoritmo de Petrosyan y Zaccour (2003) en el juego diferencial de Tabellini (1986) con el objeto de hayar la asignación de costos económicos a partir del valor de Shapley y descomponer dicha asignación de tal forma que sea estable como acuerdo en el tiempo; tercero, se llevará a cabo el cálculo de los parámetros y el establecimiento de dos escenarios como hipótesis sobre los parámetros, y así calcular para dichos escenarios la asignación descompuesta de costos económicos; y cuarto, se proponen algunos resultados particulares de análisis sobre lo encontrado hasta el momento, que es de interés en el estudio de la política económica.

3.1. Juego diferencial de Tabellini (1986) sobre la estabilización de la deuda pública

Este trabajo fue el precursor en el estudio de la interacción estratégica entre la autoridad monetaria y fiscal en el marco de juegos diferenciales en el problema de la estabilización del stock de la deuda pública. En este trabajo se estudia el entorno interactivo que enfrentan ambas autoridades, teniendo en cuenta que dentro del marco de sus acciones de política no solo hay consideraciones con respecto a sus propios objetivos (fiscales y monetarios) sino a la influencia que juegan en la dinámica de la deuda pública que es un elemento de interés común. Debido a este interés común, ambas autoridades enfrentan el siguiente dilema [17]: ya sea que ambas ajustan sus instrumentos de política para desacelerar el crecimiento de la deuda pública (para llevarla a su nivel deseable) donde estarían renunciando en parte a cumplir sus propios objetivos de política (monetaria y fiscal), o simplemente intentar focalizarse en sus propios objetivos dejándole mayor carga a la otra autoridad en el ajuste de la deuda.

Para entender con más profundidad esta interacción entre la autoridad fiscal y monetaria en el problema de estabilizar la deuda pública descrito en [17], se deben explicar algunos conceptos económicos relacionados en este modelo. En primer lugar, un gobierno que no cubre sus gastos con los ingresos acumulados por medio de la tributación, se dice que tiene un *déficit fiscal*. Cuando ocurren este tipo de problemáticas, una primera forma de solventar el problema es acudir al endeudamiento para cubrir este déficit presupuestario[1] [7]. Entonces, existe una relación positiva, entre el crecimiento del stock de la deuda pública y el déficit fiscal (flujo) que tiene un gobierno [7]. Este déficit fiscal puede descomponerse en dos componentes, el primero, es el pago de la deuda pública pendiente (con intereses) a la cual el gobierno se endeudó, y el segundo, es el *déficit primario* el cual es el déficit fiscal del gobierno excluyendo pagos a la deuda [7].

Una segunda forma de solventar el problema de déficit fiscal del gobierno es por medio de la creación del dinero o proceso más conocido como *señoriaje*. Este último es un procedimiento bajo el cual el gobierno percibe un ingreso como resultado de poner en circulación dinero en un periodo de tiempo dado [7]. En estricto sentido, lo que ocurre es la compra de la deuda pública por parte de la banca central que se financia en la práctica por medio de la oferta monetaria [7]. El problema de este mecanismo que puede tener el gobierno con el objeto de solventar su déficit presupuestario, es que por lo general, genera inflación[2] lo que en esencia se puede ver como un impuesto (impuesto-inflación) [7].

A partir de este marco conceptual, se explicará el juego diferencial construido por Tabellini (1986). En primer lugar, se asume que la política fiscal y monetaria son controladas por instituciones distintas (lo cual ocurre la mayoría de las veces), entonces el juego contiene dos jugadores, la autoridad monetaria y la fiscal $N = \{M, F\}$. Además, estos dos jugadores se encuentran en una situación donde tienen que planificar sus decisiones de política para un horizonte infinito teniendo completa información[3]

En segundo lugar, se define $d(t)$ como el stock de deuda pública pendiente de pago, y en el modelo es la variable de estado del modelo para ambas autoridades, $f(t)$ como el déficit primario como variable control de la autoridad fiscal, $m(t)$ representa la creación de dinero (o crecimiento de la base monetaria) y la variable de control de la autoridad monetaria. Hay que tener en cuenta que estas tres variables están expresadas como porcentaje del ingreso nominal $Y(t)$ de acuerdo a [17], es decir, se podrían describir respectivamente de manera más explicita de la siguiente forma $d(t) = D(t)/Y(t)$, $m(t) = (dM(t)/dt)/Y(t)$ y $f(t) = F(t)/Y(t)$, donde

[1] Hay ocasiones que el gobierno emite bonos al público, a bancos o a la misma banca central [7].

[2] Aumento generalizado de los precios.

[3] Información sobre todas las condiciones del juego como estrategias, funciones de pago, etc.

$D(t)$ es el stock total de deuda pública, $M(t)$ es la base monetaria y $F(t)$ es el déficit total primario. Adicionalmente, se define r como un parámetro que representa la diferencia entre la tasa de interés de la deuda pública pendiente y la tasa de crecimiento del producto.

En tercer lugar, la siguiente ecuación diferencial representa la dinámica de la deuda pública involucrando las acciones de la autoridad fiscal f y monetaria m, esta es usualmente llamada *restricción presupuestal dinámica del gobierno* [17][18]:

$$\dot{d}(t) = rd(t) + f(t) - m(t), \qquad d(0) = d_0 > 0 \tag{3.1}$$

La ecuación (3.1) expresa lo anteriormente explicado donde para financiar el gobierno su déficit fiscal $rd(t) + f(t)$, compuesto por el pago de intereses a la deuda pública, $rd(t)$, y el déficit primario $f(t)$, se financia a partir de acumulación del *stock* deuda pública[4] $\dot{d}(t) = \frac{d}{dt}(d(t))$, o por medio de la creación de dinero o señoriaje $m(t)$. De esta manera, la estabilización de la deuda del gobierno puede alcanzarse por dos medios (3.1): o por medio de reducciones en el déficit primario $f(t)$ o incrementando la creación de dinero $m(t)$.

Por otro lado, una parte importante de un juego diferencial son los objetivos individuales que persigue cada jugador bajo un contexto no cooperativo. En esta situación interactiva [17], cada autoridad tiene un funcional que describe el flujo de pérdidas o "costos económicos"descontados y es el cual busca minimizar. En particular, la autoridad fiscal tiene como objetivo controlar el déficit primario $f(t)$ de tal manera que minimize su funcional [17][3]:

$$J^F(d(0)) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left\{(f(\tau) - \bar{f})^2 + \lambda d(\tau)^2\right\} e^{-\delta\tau} d\tau, \qquad \lambda > 0 \tag{3.2}$$

sujeto a la restricción presupuestal dinámica del gobierno y la deuda pública inicial $d(0)$ (3.1). Por otro lado, la autoridad monetaria tiene como objetivo decidir el crecimiento de la base monetaria o creación de dinero $m(t)$ (variable de control de la autoridad monetaria) de tal manera que minimice su respectivo funcional[17][3]:

$$J^M(d(0)) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left\{(m(\tau) - \bar{m})^2 + \kappa d(\tau)^2\right\} e^{-\delta\tau} d\tau, \qquad \kappa > 0 \tag{3.3}$$

sujeto a la restricción presupuestal dinámica del gobierno, la deuda pública inicial $d(0)$ (3.1). Con respecto a (3.2)-(3.3), se asume que δ es la tasa de descuento para ambas autoridades, es decir, descuentan las pérdidas futuras de la misma manera y el cual debe ser positivo (i.e. $\delta > 0$). Además, las constantes $\bar{f}$ y $\bar{m}$ representan los niveles objetivos de política del déficit fiscal y de creación de dinero, respectivamente[5], los cuales son los mismos para ambas

[4]La deuda pública es una variable *stock* en el sentido que es una magnitud medida en un momento del tiempo, mientras que el déficit fiscal es una variable *flujo* en el sentido de que es una magnitud económica medida como una tasa por unidad de tiempo [7]. En este sentido, sin tener en cuenta la creación de dinero y con tiempo discreto, el stock de deuda pública (DP) aumenta cuando hay que cubrir un déficit presupuestario (DF), es decir, $DP_t - DP_{t-1} = DF_t$ [7].

[5]Estos pueden ser vistos como puntos de referencia o niveles deseables que reflejan las estructuras políticas e institucionales bajo las cuales toman lugar las decisiones de política macroeconómica [18].

autoridades [17][18]. Bajo este modelo el nivel objetivo de deuda pública por parte de ambas autoridades es de cero.

Adicionalmente, los coeficientes λ y κ presentes en la función objetivo de (3.2)-(3.3) se interpretan respectivamente de la siguiente manera [18]: primero, λ en (3.2) es el peso o ponderación que establece la autoridad fiscal al problema de la estabilización de la deuda pública, es decir, si $\lambda = 0$ (i.e. $\frac{1}{\lambda} \to \infty$) dicha autoridad simplemente no le da importancia a la dinámica de la deuda y solo se enfoca en sus intereses de política fiscal; segundo, κ en (3.3) es el peso o ponderación que establece la autoridad monetaria al problema de la estabilización de la deuda pública, es decir, si $\kappa = 0$ (i.e. $\frac{1}{\kappa} \to \infty$) esta autoridad es totalmente independiente y solo le importa controlar el crecimiento del dinero con el objetivo de mantener la estabilidad de precios (autoridad ultraconservadora) [18].

En este sentido, el objetivo individual de cada autoridad teniendo en cuenta (3.2)-(3.3) es el de escoger la trayectoria temporal de sus instrumentos de política ($f(t)$ y $m(t)$) de tal manera que no solo sea una trayectoria que este cada vez más cercana al nivel deseado establecido institucionalmente ($\bar{f}$ y $\bar{m}$)[6], sino también al mismo tiempo que estas acciones de política busque llevar la deuda pública al nivel menor posible. Además, de acuerdo a los funcionales de ambas autoridades (3.2)-(3.3), estos pueden ser interpretados como un "flujo" de "costos económicos" los cuales cada autoridad busca minimizar. Por ejemplo, si los niveles de los instrumentos de política de ambas autoridades como los de la deuda difieren en una gran cantidad a sus niveles deseables, entonces los "costos económicos" vistos desde la perspectiva de cada autoridad serán mayores.

Teniendo en cuenta este juego diferencial LQ [17], desde la perspectiva no-cooperativa (encontrando estrategias feedback y open-loop) como desde de la cooperativa[7], Tabellini encontró lo siguiente [17]: primero, la trayectoria de la deuda pública ya sea en un entorno cooperativo o no-cooperativo puede ser estable incluso si $r > 0$; segundo, la cooperación o coordinación de las estrategias de ambas autoridades resulta en menores niveles de la deuda pública de estado estacionario y con más rápido ajuste (o velocidad de ajuste mayor) que si no cooperan ambas autoridades; tercero, la velocidad de ajuste y el nivel de estado estacionario de la deuda a partir de las estrategias open-loop fue más cercano a lo obtenido por las estrategias de cooperación que lo obtenido a partir de las estrategias feedback; cuarto, incrementar los parámetros de la importancia relativa a los propios objetivos de cada autoridad tiene como efecto una menor velocidad de ajuste y le asigna mayor carga a la otra autoridad en el esfuerzo de este ajuste de la deuda pública.

[6]En el caso de una economía cerrada, $\bar{m}$ se establece con base en el tasa deseada de crecimiento en el ingreso nominal o de los precios [17].

[7]La situación cooperativa se estudia minimizando la suma ponderada de los funcionales de ambas autoridades $V^M + wV^F$ con respecto a f y m de lo cual se obtienen las acciones de política de ambas autoridades bajo un marco cooperativo [17].

3.2. Aplicación del algoritmo de Petrosyan y Zaccour (2003) en el juego diferencial de Tabellini (1986)

De acuerdo a lo descrito anteriormente, en el juego diferencial de Tabellini (sección 3.1) se obtienen mejores resultados para ambas autoridades a partir de cooperar y el actuar de manera coordinada que con respecto al escenario de no-cooperación [17][8]. Teniendo en cuenta lo beneficioso que es que ambas autoridades cooperen es pertinente la implementación de un mecanismo de tal manera que se distribuyan las cargas o costos económicos en el contexto de la estabilización de la deuda en el largo plazo y que haya garantía de que sea un acuerdo estable.

Para llevar a cabo tal implementación de la asignación de costos económicos entre ambas autoridades garantizando la estabilidad, se seguirá la metodología o algoritmo descrito por Petrosyan y Zaccour (2003) [13] (Sección 2.4.2) utilizando el juego diferencial de la estabilización de la deuda pública construido por Tabellini (1986) (Sección 2.3.1) [17].

A pesar de que haya juegos diferenciales más complejos en los cuales se estudia esta interacción bajo el problema de la deuda pública [18], se toma en cuenta el juego base de Tabellini (1986) por la razón de que se considera una situación en la cual cada autoridad encuentra único interés en estabilizar tanto su instrumento de política como también la deuda pública (a sus niveles deseados), siendo este último el elemento de preocupació común.

Antes de empezar a implementar la metodología propuesta por Petrosyan y Zaccour (2003) en el juego diferencial de Tabellini (1986), se asumiran en el presente trabajo los siguientes tres supuestos: primero, se asume que la relativa importancia que les dan ambas autoridades al problema de la deuda pública son no negativas[9], es decir, se asume $\lambda, \kappa \geq 0$[10]. Segundo, se asume que desde el inicio de la interacción, ambas autoridades deciden actuar cooperativamente, es decir, ambas deciden coordinar el movimiento de sus variables control de tal manera intentar cumplir sus propios objetivos de política, y el mismo tiempo, estabilizar la acumulación de deuda en el largo plazo. La forma de entender ese segundo supuesto es que la cooperación entre la autoridad fiscal y moneraria está guiada por un elemento central que puede ser el parlamento y el cual está en función de todas las preocupaciones económicas de la sociedad dentro de las cuales no solo se encuentran el ajuste de la creación de dinero y el déficit primario a niveles deseables, sino también la estabilización de la deuda pública en el largo plazo [17][18].

El tercer supuesto es que se pueda llevar a cabo el problema de minimización de la suma

[8] La explicación dada por [18] es que es debido a que en el escenario cooperativo ambas autoridades internalizan las "externalidades positivas"(*positive spillovers*) de los esfuerzos en estabilizar la deuda pública.

[9] Tabellini las asume $\lambda, \kappa > 0$ (3.2)-(3.3).

[10] Esto último para ver su respectiva implicación en la asignación de costos económicos cuando la importancia relativa a la dinámica de la deuda es nula por parte de la autoridad monetaria (i.e. $\kappa = 0$).

de los funcionales de ambas autoridades (3.2)-(3.3), es decir, que sea un juego diferencial cooperativo con *pagos transferibles* (o en este caso *costos transferibles*), donde haya un eje coordinador (e.g. el parlamento) que valore bajo la misma medida los costos económicos supuestos en las funciones de pérdida de cada autoridad. En últimas, lo que se esta intentando describir es como una entidad central como el parlamento no solo direccione las acciones de política de ambas autoridades de manera cooperativa sino que distribuya los costos de índole económico entre la autoridad fiscal y la monetaria de modo de estabilizar la deuda pública en el largo plazo, aún cuando ambas autoridades compartan distintos objetivos y valoren de manera distinta la dinámica de la deuda pública.

Un último aspecto para tener en cuenta y que será de importancia para el desarrollo del presente trabajo es el siguiente: teniendo en cuenta las particularidades de los problemas de optimización dinámica que se van a realizar en este trabajo, la solución matemática de la función de valor de cada uno de ellos tiene cierta forma particular, la cual es solución general de cierta ecuación diferencial, por lo tanto, solo restaría por encontrar los parámetros de dicha solución. En el presente trabajo, se desarrollará la consecución de pasos del algoritmo de Petrosyan y Zaccour con base en las soluciones generales de la función de valor, dejando para lo último el análisis de los parámetros de dichas soluciones y bajo las cuales se asumiran dos escenarios: un primero en cual se asume que ambas autoridades son igualmente sensibles en términos absolutos a los movimientos de la deuda, y segundo, un escenario en el cual la autoridad monetaria es totalmente independiente, es decir, no existe importancia alguna a los movimientos de la deuda en el establecimiento de sus acciones de política, mientras que la autoridad fiscal si tiene una sensibilidad distinta de cero a los movimientos de la deuda.

3.2.1. Función característica

En este apartado, se va a construir la función característica del juego diferencial de la estabilización de la deuda pública de Tabellini (1986). De acuerdo con lo descrito en la Sección 3.1, debido a que es un juego diferencial comprendido por dos jugadores (i.e. $N = \{F, M\}$), se tienen que construir tres valores de la función característica para tres posibles coaliciones: la coalición total conformada por ambas autoridades ($N = \{F, M\}$), y las dos posibles coaliciones en las que cada autoridad se encuentra aislada (i.e. $\{M\}$ y $\{F\}$).

Paso 1: *Calcular el valor de la función característica para la coalición total: minimizar el costo total de la coalición total.*

Para llevar a cabo este paso, se debe tener presente los funcionales de la autoridad fiscal (3.2) y de la autoridad monetaria (3.3). Como el valor de la función característica coalición total es la función valor de Bellman del problema conjunto, entonces esta última se encuentra al minimizar la suma de los funcionales de ambas autoridades sujeto a (3.1) teniendo como deuda inicial la trayectoria cooperativa de la misma:

$$\begin{aligned} W(N, d(t)) &= \min_{f,m} \quad J^F(d(t)) + J^M(d(t)) \\ &= \min_{f,m} \quad \frac{1}{2}\int_t^{\infty} \left\{(f(\tau)-\bar{f})^2 + (m(\tau)-\bar{m})^2 + (\lambda+\kappa)d(\tau)^2\right\} e^{-\delta(\tau-t)}d\tau \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\text{sujeto a} \qquad \dot{d}(\tau) = rd(\tau) + f(\tau) - m(\tau), \quad d(t) = d^c(t) \quad (3.5)$$

donde $\lambda, \kappa \geq 0$ y $W(N, d(t))$ es la función de valor del problema (3.4)-(3.5) que representa el costo económico mínimo para la coalición total a partir de t. Teniendo en cuenta que el problema de optimización dinámica (3.4)-(3.5) es un problema lineal-cuadrático (LQ), por ende de acuerdo a Lambertini [6][11], la función de valor es lineal-cuadrática se podría suponer que tenga la siguiente forma:

$$W(N, d) = \varepsilon_1 d^2 + \varepsilon_2 d + \varepsilon_3 \quad (3.6)$$

como solución general [6]. Por lo tanto, esta función de valor debe satisfacer el Teorema 2.3.1. y la ecuación Isaacs-Bellman [20]:

$$\delta W(N, d) = \min_{f,m} \left\{\frac{1}{2}(f-\bar{f})^2 + \frac{1}{2}(m-\bar{m})^2 + \left(\frac{\lambda+\kappa}{2}\right)d^2 + W_d'(N, d)(rd + f - m)\right\} \quad (3.7)$$

donde $d(t) = d$, $m(t) = m$ y $f(t) = f$. Debido a que en (3.7) la expresión de la derecha es una forma convexa estricta con respecto a f y m, si se deriva con respecto a esas mismas variables e igualando a cero, se obtienen los argumentos minimizadores:

$$f^c = \bar{f} - W_d'(N, d) \quad (3.8)$$

$$m^c = \bar{m} + W_d'(N, d) \quad (3.9)$$

Ahora, sustituyendo (3.8)-(3.9) en (3.7) se obtiene,

$$0 = -\left(W_d'(N, d)\right)^2 + (rd + \bar{f} - \bar{m})W_d'(N, d) - \delta W(N, d) + \left(\frac{\lambda+\kappa}{2}\right)d^2 \quad (3.10)$$

La ecuación (3.10) la debe satisfacer la función de Bellman como solución general $W(N, d) = \varepsilon_1 d^2 + \varepsilon_2 d + \varepsilon_3$, sin embargo, dado que más adelante se desarrollará el análisis de los parámetros, entonces después será pertinente hacer la sustitución de (3.6) en (3.10). Por el momento, sustituyendo (3.6) en (3.8)-(3.9), se encuentran las trayectorias de acción de ambas autoridades bajo un marco cooperativo como solución general:

$$f^c(t, d(t)) = \bar{f} - 2\varepsilon_1 d - \varepsilon_2 \quad (3.11)$$

$$m^c(t, d(t)) = \bar{m} + 2\varepsilon_1 d + \varepsilon_2 \quad (3.12)$$

[11] Página 7 y 8 del libro de Lambertini [6].

Antes de seguir con el siguiente paso en la construcción de función característica, de acuerdo a lo realizado por Tabellini [17] la trayectoria de la deuda pública cuando ambas autoridades deciden cooperar se encuentra sustituyendo (3.11)-(3.12) en (3.1) y encontrando la solución general de la ecuación diferencial (3.1) para cualquier posible parámetro ε_1 y ε_2:

$$d^c(t) = \left(d^c(0) - \tilde{d}\right) e^{-\gamma^c t} + \tilde{d} \quad \text{donde} \quad \gamma^c = 4\varepsilon_1 - r \quad \text{y} \quad \tilde{d} = \frac{\bar{f} - \bar{m} - 2\varepsilon_2}{\gamma^c} \tag{3.13}$$

donde en (3.10), γ^c es la velocidad de ajuste y $\tilde{d}$ es el estado estacionario de la deuda pública. Al igual que en [17][18] se asumirá que $d(0) > \tilde{d}$, lo cual es un supuesto plausible a la luz del problema[12]. La deuda pública converje a ese estado estacionario (3.13) siempre y cuando $\gamma^c = 4\varepsilon_1 - r > 0$ [17]. Esto último se analizará con más detalle más adelante cuando se examine con cuidado los parámetros.

Paso 2: *Calcular los valores de la función característica para las coaliciones de un jugador: a partir del equilibrio de Nash como solución no-cooperativa.*

La función valor de Bellman de la autoridad fiscal es la generada por el problema de optimización dinámica en el cual se minimiza (3.2) sujeto a (3.1), sin embargo, como este problema de optimización dinámica también es LQ se puede suponer una solución general de la forma [6]

$$V^F(d) = \varepsilon_1^F d^2 + \varepsilon_2^F d + \varepsilon_3^F \tag{3.14}$$

la cual también debe satisfacer el Teorema 2.3.1 y la ecuación Isaacs-Bellman:

$$\delta V^F(d) = \min_f \left\{ \frac{1}{2}(f - \bar{f})^2 + \frac{\lambda}{2} d^2 + V_d^{F\prime}(d) \left[rd + f - m^* \right] \right\} \tag{3.15}$$

Note que en (3.15) la autoridad fiscal resuelve su problema de optimización no-cooperativo teniendo en cuenta que esta autoridad sabe lo mejor que puede hacer la autoridad monetaria, recuerde que de esta manera se encuentran las estrategias que son equilibrio de Nash (Definición 2.2.1 y Teorema 2.3.1 en específico feedback). De la misma manera, el argumento minimizador de (3.12) es [17]:

$$f^* = \bar{f} - V_d^{F\prime}(d(t)) \tag{3.16}$$

Ahora sustituyendo (3.16) en (3.15), se obtiene lo siguiente

$$0 = -\frac{1}{2} \left(V_d^{F\prime}(d) \right)^2 + (rd + \bar{f} - m^*) V_d^{F\prime}(d) - \delta V^F(d) + \frac{\lambda}{2} d^2 \tag{3.17}$$

Dado que (3.14) es la ecuación que tiene que satisfacer $V^F(d) = \varepsilon_1^F d^2 + \varepsilon_2^F d + \varepsilon_3^F$, evaluando $V^F(d)$ en esta ecuación se encuentran los parámetros de dicha función lo cual se hará más adelante teniendo en cuenta el análisis de parámetros. Sustituyendo (3.14) en (3.16), la

[12]Debido a que ambas autoridades parten de una deuda por encima de su valor de largo plazo donde se espera que converja la deuda.

trayectoria de acciones o estrategias Nash feedback para la autoridad fiscal sería lineal con respecto a d:

$$f^*(t, d(t)) = \bar{f} - 2\varepsilon_1^F d - \varepsilon_2^F \tag{3.18}$$

De la misma manera, se va a realizar todo el mismo procedimiento (3.14)-(3.18) pero ahora con respecto a la autoridad monetaria. Por lo cual, su respectiva función de valor del problema de minimización de (3.3) sujeto a (3.1) se podría suponer de la siguiente forma [6]:

$$V^M(d) = \varepsilon_1^M d^2 + \varepsilon_2^M d + \varepsilon_3^M \tag{3.19}$$

y la cual debe satisfacer el Teorema 2.3.1. y la ecuación de Isaacs-Bellman:

$$\delta V^M(d) = \min_m \left\{ \frac{1}{2}(m - \bar{m})^2 + \frac{\kappa}{2} d^2 + V_d^{M\prime}(d) \left[rd + f^* - m\right] \right\} \tag{3.20}$$

y resolviendo el problema de minimización de (3.20) se obtiene

$$m^* = \bar{m} + V_d^M(d) \tag{3.21}$$

Ahora sustituyendo (3.21) en (3.20) se obtiene

$$0 = -\frac{1}{2}\left(V_d^{M\prime}(d)\right)^2 + (rd + f^* - \bar{m})V_d^{M\prime}(d) - \delta V^{M\prime}(d) + \frac{\kappa}{2} d^2 \tag{3.22}$$

Similarmente, (3.22) es la ecuación que tiene que satisfacer (3.19) lo cual se verá en el análisis de parámetros. Sustituyendo (3.19) en (3.21), se obtiene la trayectoria de acciones o estrategias Nash feedback para la autoridad monetaria [17]:

$$m^*(t, d(t)) = \bar{m} + 2\varepsilon_1^M d + \varepsilon_2^M \tag{3.23}$$

Cuando ambas autoridades actúan de manera individual, la deuda pública tiene una trayectoria específica teniendo en cuenta que esta construida con base en los parámetros individuales y su análisis de convergencia se puede encontrar en el Anexo A.1..

Paso 3: *Calcular los valores de función característica para todas las coaliciones restantes.*

No se lleva a cabo dado que en este juego diferencial solo hay dos jugadores (i.e. $|N| = 2$) y se calculan los valores de la función característica para la coalición total $N = \{F, M\}$ y para las coaliciones donde solo está cada una de las autoridades $\{F\}$ y $\{M\}$.

Paso 4: *Definición de la función característica.*

La función característica $v(S; d(t), t)$ con $t \in [0, \infty)$ del juego diferencial de Tabellini (1986) esta definida de la siguiente manera:

$$v(\{F\}; d(t), t) = V^F(d(t)) = \varepsilon_1^F d^2 + \varepsilon_2^F d + \varepsilon_3^F \tag{3.24}$$

$$v(\{M\}; d(t), t) = V^M(d(t)) = \varepsilon_1^M d^2 + \varepsilon_2^M d + \varepsilon_3^M \tag{3.25}$$

$$v(N; d(t), t) = W(N; d(t)) = \varepsilon_1 d^2 + \varepsilon_2 d + \varepsilon_3, \qquad \text{donde} \qquad N = \{F, M\} \tag{3.26}$$

Hay que tener en cuenta, que para juegos diferenciales cooperativos, e inclusive para el marco clásico de juegos cooperativos, se tiene que el valor de la coalición donde no está ningún jugador, tiene valor cero (i.e. $v(\emptyset; d(t), t)$=0).

3.2.2. El valor de Shapley y su descomposición dinámicamente estable

Paso 5: *Calcular el valor de Shapley.*

Considerando la Definición 2.4.4. del valor de Shapley y su notación para juegos diferenciales cooperativos con horizonte infinito vista en la página 18 y los valores de la función característica para este juego calculados en su solución general en (3.6), (3.14) y (3.19), lo siguiente es el cálculo del componente del valor de Shapley para la autoridad fiscal para el subjuego $\Gamma_v(d(t), t)$:

$$\begin{aligned}
\phi_F^v(d(t), t) &= \sum_{i \in S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}(v(S; d(t), t) - v(S \setminus \{i\}; d(t), t)) \\
&= \frac{(|\{F\}|-1)!(|\{F, M\}|-|\{F\}|)!}{|\{F, M\}|!}\,(v(\{F\}; d(t), t) - v(\{F\} \setminus \{F\}; d(t), t)) \\
&\quad + \frac{(|\{F, M\}|-1)!(|\{F, M\}|-|\{F, M\}|)!}{|\{F, M\}|!}\,(v(\{F, M\}; d(t), t) - v(\{F, M\} \setminus \{F\}; d(t), t)) \\
&= \frac{(1-1)!(2-1)!}{2!}\,(v(\{F\}; d(t), t) - v(\emptyset; d(t), t)) \\
&\quad + \frac{(2-1)!(2-2)!}{2!}\,(v(\{F, M\}; d(t), t) - v(\{M\}; d(t), t)) \\
&= \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_1^F - \varepsilon_1^M}{2}\right) d^2 + \left(\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_2^F - \varepsilon_2^M}{2}\right) d + \left(\frac{\varepsilon_3 + \varepsilon_3^F - \varepsilon_3^M}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Ahora, se realiza el cálculo del componente del valor de Shapley para la autoridad monetaria:

$$
\begin{aligned}
\phi_M^v(d(t),t) &= \sum_{i\in S\subseteq N} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}(v(S;d(t),t)-v(S\setminus\{i\};d(t),t)) \\
&= \frac{(|\{M\}|-1)!(|\{F,M\}|-|\{M\}|)!}{|\{F,M\}|!}\left(v(\{M\};d(t),t)-v(\{M\}\setminus\{M\};d(t),t)\right) \\
&\quad + \frac{(|\{F,M\}|-1)!(|\{F,M\}|-|\{F,M\}|)!}{|\{F,M\}|!}\left(v(\{F,M\};d(t),t)-v(\{F,M\}\setminus\{M\};d(t),t)\right) \\
&= \frac{(1-1)!(2-1)!}{2!}\left(v(\{M\};d(t),t)-v(\emptyset;d(t),t)\right) \\
&\quad + \frac{(2-1)!(2-2)!}{2!}\left(v(\{F,M\};d(t),t)-v(\{F\};d(t),t)\right) \\
&= \left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_1^M-\varepsilon_1^F}{2}\right)d^2+\left(\frac{\varepsilon_2+\varepsilon_2^M-\varepsilon_2^F}{2}\right)d+\left(\frac{\varepsilon_3+\varepsilon_3^M-\varepsilon_3^F}{2}\right) \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Ambos componentes del valor de Shapley (3.27)-(3.28) se pueden resumir de la siguiente manera:

$$
\phi_i^v(d(t),t) = \left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_1^i-\varepsilon_1^j}{2}\right)d^2+\left(\frac{\varepsilon_2+\varepsilon_2^i-\varepsilon_2^j}{2}\right)d+\left(\frac{\varepsilon_3+\varepsilon_3^i-\varepsilon_3^j}{2}\right) \quad \text{donde} \quad i,j\in\{F,M\},\ i\neq j \tag{3.29}
$$

Ahora, teniendo en cuenta (3.27)-(3.28), note que existe una relación entre ambos componentes del valor del Shapley la cual se describe en la siguiente ecuación:

$$
\phi_F^v(d(t),t) = \phi_M^v(d(t),t)+\varepsilon_1^F d^2+\varepsilon_2^F d+\varepsilon_3^F-(\varepsilon_1^M d^2+\varepsilon_2^M d+\varepsilon_3^M) \tag{3.30}
$$

Y de esta relación (3.30), sustituyendo (3.24)-(3.5) se obtiene al final la siguiente ecuación:

$$
\phi_F^v(d(t),t) = \phi_M^v(d(t),t)+v(\{F\};d(t),t)-v(\{M\};d(t),t) \tag{3.31}
$$

La ecuación (3.31) puede ser interpretada para este juego diferencial, e inclusive para cualquier otro, de la siguiente manera: el jugador que tenga los costos económicos mayores actuando de manera individual, tendrá que afrontar una mayor asignación de costos económicos cooperativos. O si por el contrario, cuando ambos se les asigna el mismo costo económico cooperativo por el valor de Shapley, es debido a que al actuar individualmente deben afrontar los mismos costos económicos. Otra forma de ver la ecuación (3.31) es de la siguiente manera

$$
\phi_F^v(d(t),t)-v(\{F\};d(t),t) = \phi_M^v(d(t),t)-v(\{M\};d(t),t) \tag{3.32}
$$

donde la asignación de Shapley es tal que asigna de una cierta manera en la cual diferencia de dicha asignación de los costos económicos con respecto a lo obtenido al actuar de manera aislada sea igual para ambos jugadores (3.32). Esto último también muestra de cierta forma, lo relativamente justo que puede llegar a ser el valor de Shapley como concepto-solución, dado que mantiene la misma proporción de diferencia entre asignaciones efectivas y los niveles individualmente deseables.

Por otro lado, de acuerdo a [13] se evaluarán los componentes de la asignación del valor de Shapley bajo la trayectoria de la deuda pública en un entorno cooperativo $d^c(t)$, es decir, evaluar (3.13) en (3.29), teniendo en cuenta que bajo esta trayectoria ambos jugadores consiguen el costo conjunto mínimo (ver página 11):

$$\begin{aligned}\phi_i^v(d^c(t),t) &= \left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_1^i-\varepsilon_1^j}{2}\right)\left(\left(d^c(0)-\tilde{d}\right)e^{-\gamma^c t}+\tilde{d}\right)^2 \\ &\quad+\left(\frac{\varepsilon_2+\varepsilon_2^i-\varepsilon_2^j}{2}\right)\left(\left(d^c(0)-\tilde{d}\right)e^{-\gamma^c t}+\tilde{d}\right)+\left(\frac{\varepsilon_3+\varepsilon_3^i-\varepsilon_3^j}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_1^i-\varepsilon_1^j}{2}\right)\left(d^c(0)-\tilde{d}\right)^2 e^{-2\gamma^c t}+\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_1^i-\varepsilon_1^j}{2}\right)\tilde{d}^2+\left(\frac{\varepsilon_3+\varepsilon_3^i-\varepsilon_3^j}{2}\right) \\ &\quad+\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_1^i-\varepsilon_1^j)\tilde{d}+\frac{\varepsilon_2+\varepsilon_2^i-\varepsilon_2^j}{2}\right]\left(d^c(0)-\tilde{d}\right)e^{-\gamma^c t}+\left(\frac{\varepsilon_2+\varepsilon_2^i-\varepsilon_2^j}{2}\right)\tilde{d}\end{aligned} \tag{3.33}$$

donde $i,j\in\{F,M\},\ i\neq j$.

Paso 6: *Definir una IDP dinámicamente estable (o temporalmente consistente).*

De esta manera, teniendo presente los componentes del valor de Shapley encontrados en (3.33) bajo la trayectoria cooperativa de la deuda pública y sustituyéndolos en (2.22) para encontrar la descomposición de los costos económicos que recibiría cada autoridad en cada momento del tiempo y la cual garantice una asignación dinámicamente estable de la asignación Shapley:

$$\begin{aligned}\beta_i(t) &= \delta\phi_i^v(d^c(t),t)-\frac{d}{dt}\phi_i^v(d^c(t),t) \\ &= (\delta+2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_1^i-\varepsilon_1^j}{2}\right)\left(d^c(0)-\tilde{d}\right)^2 e^{-2\gamma^c t}+\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_1^i-\varepsilon_1^j}{2}\right)\delta\tilde{d}+\frac{\delta(\varepsilon_3+\varepsilon_3^i-\varepsilon_3^j)}{2} \\ &\quad+(\delta+\gamma^c)\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_1^i-\varepsilon_1^j)\tilde{d}+\frac{\varepsilon_2+\varepsilon_2^i-\varepsilon_2^j}{2}\right]\left(d^c(0)-\tilde{d}\right)e^{-\gamma^c t}+\left(\frac{\varepsilon_2+\varepsilon_2^i-\varepsilon_2^j}{2}\right)\delta\tilde{d}\end{aligned} \tag{3.34}$$

donde $i,j\in\{F,M\},\ i\neq j$. Ahora se van a describir algunos aspectos importantes característicos de dicha asignación descompuesta de costos económicos (3.34). El primero de ellos que se analizará será es el comportamiento de la trayectoria de los mismos (3.34). Esto es de vital importancia, dado que se analizarán las condiciones bajo las cuales dichos costos económicos (asociados a la deuda pública y el nivel en que las acciones de política estén por encima del nivel deseable) se estabilizan o ajustan a cierto valor. Para analizar este hecho las asignaciones de costos descompuestos (o corrientes) de acuerdo a (3.34) tienen la siguiente estructura,

$$\beta_i(t) = A_i e^{-2\gamma^c t} + B_i e^{-\gamma^c t} + C_i \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
\text{donde} \quad A_i &= (\delta + 2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_1^i - \varepsilon_1^j}{2}\right)\left(d^c(0) - \tilde{d}\right)^2 \\
B_i &= (\delta + \gamma^c)\left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_1^i - \varepsilon_1^j)\tilde{d} + \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_2^i - \varepsilon_2^j}{2}\right]\left(d^c(0) - \tilde{d}\right) \\
C_i &= \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_1^i - \varepsilon_1^j}{2}\right)\delta\tilde{d}^2 + \left(\frac{\delta(\varepsilon_3 + \varepsilon_3^i - \varepsilon_3^j)}{2}\right) + \left(\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_2^i - \varepsilon_2^j}{2}\right)\delta\tilde{d} \\
&\text{donde} \quad i, j \in \{F, M\} \quad \text{y} \quad i \neq j
\end{aligned}$$

La estructura de la asignación descompuesta (3.35) la comprende la suma de tres términos: dos funciones exponenciales y un término constante. Además, el costo económico inicial con el que inician la interacción ambas autoridades es el siguiente

$$\begin{aligned}
\beta_i(0) &= A_i e^{-2\gamma^c(0)} + B_i e^{-\gamma^c(0)} + C_i \\
&= A_i e^0 + B_i e^0 + C_i \\
&= A_i + B_i + C_i \quad \text{donde} \quad i \in \{M, F\}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Por otro lado, una característica importante para analizar de la trayectoria de los costos económicos descompuestos (3.35) es el determinante de su convergencia cuando $t \to \infty$. Para mostrar esto, hay que considerar que la deuda pública converje a su estado estacionario bajo cooperación si $\gamma^c = 4\varepsilon_1 - r > 0$ teniendo en cuenta (3.13). Y de esta manera, si se tiene que $\gamma^c > 0$, esto es suficiente para garantizar que la asignación descompuesta de costos económicos de la deuda pública convergerán a un estado estacionario como lo muestra la siguiente prueba:

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_i = \lim_{t\to\infty} \beta_i(t) &= \lim_{t\to\infty} \left(A_i e^{-2\gamma^c t} + B_i e^{-\gamma^c t} + C_i\right) \\
&= C_i \quad \text{si} \quad \gamma^c > 0 \quad \text{donde} \quad i \in \{F, M\}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Por lo tanto, la misma condición que garantiza que se estabilice la deuda pública a su estado estacionario, es la misma que garantiza que los costos económicos descompuestos asociados a estabilizar los propios obejtivos de política y la deuda pública, se estabilicen o converjan a su valor de estado estacionario C_i para $i \in \{F, M\}$ (3.37).

3.2.3. Cálculo de los párametros a partir las soluciones generales, hipótesis sobre los parámetros y la asignación descompuesta de costos económicos

En esta sección se van a calcular los parámetros pendientes explicitos de cada solución general de las funciones de valor, o valores de la función característica, para las tres posibles coaliciones de este juego diferencial (3.24)-(3.26), es decir, $\varepsilon_j, \varepsilon_j^i$ con $j = 1, 2, 3$ y $i \in \{F, M\}$. Habrá casos donde simplemente no es necesario averiguar explícitamente la fórmula de cada parámetro sino su respectivo comportamiento.

Como se dijo con anterioridad, las funciones de valor (3.6), (3.14) y (3.19), deben satisfacer respectivamente las ecuaciones (3.10), (3.17) y (3.22). En este sentido, se sustituirán (3.6), (3.14) y (3.19) en (3.10), (3.17) y (3.22), respectivamente, de modo que se obtiene un sistema de ecuaciones de los parámetros de las funciones de valor [6].

Parámetros de $W(N, d)$ ***(3.6)***

Sustituyendo (3.6) en (3.10) se obtiene

$$0 = \left(-4\varepsilon_1^2 + (2r-\delta)\varepsilon_1 + \frac{\lambda+\kappa}{2}\right)d^2 + \left(-4\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2(\bar{f}-\bar{m})\varepsilon_1 + (r-\delta)\varepsilon_2\right)d + \left(-\varepsilon_2^2 + \varepsilon_2(\bar{f}-\bar{m}) - \delta\varepsilon_3\right) \quad (3.38)$$

De acuerdo a Lambertini [6][13], note que (3.31) es una expresión del tipo cuadrática que se puede escribir en términos generales (como también lo hace Lambertini) $0 = g_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)d^2 + g_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)d + g_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ donde los polinomios $g_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ con $k = 1, 2, 3$ contienen los parámetros indeterminados y forman un sistema de ecuaciones teniendo en cuenta que cada polinomio $g_k(\cdot)$ debe satisfacer lo siguiente

$$g_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = 0 \qquad \text{donde} \qquad k = 1, 2, 3$$

Con base en lo anterior y considerando (3.38) se obtiene el siguiente sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas (ε_1, ε_2 y ε_3)[14],

$$-4\varepsilon_1^2 + (2r-\delta)\varepsilon_1 + \frac{\lambda+\kappa}{2} = 0 \quad (3.39)$$

$$-4\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2(\bar{f}-\bar{m})\varepsilon_1 + (r-\delta)\varepsilon_2 = 0 \quad (3.40)$$

$$-\varepsilon_2^2 + \varepsilon_2(\bar{f}-\bar{m}) - \delta\varepsilon_3 = 0 \quad (3.41)$$

Para resolver el sistema (3.39)-(3.41), se puede empezar por la ecuación (3.39) de lo cual se obtiene

$$\varepsilon_1 = \frac{-(2r-\delta) \pm \sqrt{(2r-\delta)^2 + 8(\kappa+\lambda)}}{-8} \quad (3.42)$$

[13]Ver página 8 de [6].

[14]Sistema que fue en primer lugar analizado por Tabellini (1986) [17].

por lo cual

$$\varepsilon_1^- = \frac{(2r-\delta) - \sqrt{(2r-\delta)^2 + 8(\kappa+\lambda)}}{8} \tag{3.43a}$$

$$\varepsilon_1^+ = \frac{(2r-\delta) + \sqrt{(2r-\delta)^2 + 8(\kappa+\lambda)}}{8} \tag{3.43b}$$

Con respecto a (3.42)-(3.43) en la sección A.2.1. de los anexos se comprueba que $\varepsilon_1^- \leq 0$ y $\varepsilon_1^+ \geq 0$ teniendo en cuenta que se asumió que $\kappa, \lambda \geq 0$. Aunque Tabellini [17] fue el precursor en mostrar los signos que toman dichos parámetros (sin que puedan ser nulos), se vuelven a analizar debido a los supuestos que se asumieron en este trabajo y las implicaciones que traen en el desarrollo del mismo. Ahora, con respecto a la ecuación (3.40), se va a resolver con respecto a ε_2 de lo cual se obtiene

$$-4\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2(\bar{f} - \bar{m})\varepsilon_1 + (r-\delta)\varepsilon_2 = 0$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2(\bar{f} - \bar{m})\varepsilon_1}{4\varepsilon_1 - r + \delta} \tag{3.44}$$

De acuerdo a (3.44) en la sección A.2.2. de los anexos se comprueba que si $\bar{f} \geq \bar{m}$ se obtiene que $\varepsilon_2^- \leq 0$ y $\varepsilon_2^+ \geq 0$ y si por el contrario se tiene que $\bar{f} \leq \bar{m}$ se obtiene $\varepsilon_2^- \geq 0$ y $\varepsilon_2^+ \leq 0$. Por un instante, en [18] se supone que $r\bar{d} + \bar{f} > \bar{m}$ (en el trabajo de Tabellini se asume que $\bar{d} = 0$) lo cual asume cierta tensión en los objetivos deseables de política teniendo en cuenta que se asume una autoridad fiscal más laxa con respecto al déficit primario objetivo y una autoridad monetaria restrictiva en el nivel deseado de creación de dinero.

Ahora, por último, la ecuación (3.41) se resuelve con respecto a ε_3,

$$-\varepsilon_2^2 + \varepsilon_2(\bar{f} - \bar{m}) - \delta\varepsilon_3 = 0$$

$$\varepsilon_3 = \frac{-\varepsilon_2^2 + \varepsilon_2(\bar{f} - \bar{m})}{\delta} \tag{3.45}$$

A partir de (3.45), lo que se comprueba en la sección A.2.3. de los anexos es que $\varepsilon_3^- \leq 0$ y $\varepsilon_3^+ \geq 0$.

Por otro lado, un aspecto importante que se debe verificar, de acuerdo a lo comprobado por Tabellini, es la estabilidad de la deuda pública bajo un marco de cooperación teniendo en cuenta las raíces del parámetro ε_1 (3.42)-(3.43), bajo las cuales la raíz positiva ε_1^+ (3.43b) [17] es la que podría hacer converger la deuda mientras que la negativa ε_1^- (3.43a) es la que hace que la deuda diverja.

De acuerdo al contexto de cooperación, la convergencia de la deuda pública se llevaría a cabo si (3.13)

$$-\gamma^c = r - 4\varepsilon_1 < 0 \tag{3.46}$$

De acuerdo a Tabellini la convergencia (3.46) de la deuda pública puede garantizarse aún cuando r (tasa de interés neta) sea positiva o negativa [17]. El primer caso es menos favorable (i.e. $r > 0$) dado que la tasa de ínteres real es mayor al crecimiento económico y se necesitaría esfuerzos por parte de ambas autoridades para aplacar este problema y esto se ve reflejado por la importancia conjunta que le dan a los movimientos de la deuda en sus acciones de política ε_1 (3.8)-(3.9). En el segundo caso, más favorable (i.e. $r < 0$), se da cuando el crecimiento de la economía y sus ingresos crecen de manera más rápida que el precio asociado a pagar la deuda pública [17], lo que implica el ajuste de la deuda de manera autónoma.

En este sentido, para que la condición (3.46) se satisfaga, es decir, para que se estabilice la deuda pública en el largo plazo ($t \to \infty$), se comprobará que con ε_1^+ (3.43b) la deuda puede que converja, mientras que para ε_1^- la deuda diverge. En primer lugar, con (3.43a) en (3.46) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} r - 4\varepsilon_1^- &= r - 4\left(\frac{(2r-\delta) - \sqrt{(2r-\delta)^2 + 8(\kappa+\lambda)}}{8}\right) \\ &= \delta + \sqrt{(2r-\delta)^2 + 8(\kappa+\lambda)} > 0 \end{aligned}$$

En segundo lugar, ahora con (3.43b) en (3.46) se obtiene

$$\begin{aligned} r - 4\varepsilon_1^+ &= r - 4\left(\frac{(2r-\delta) + \sqrt{(2r-\delta)^2 + 8(\kappa+\lambda)}}{8}\right) \\ &= r^2 - \delta r + 2(\kappa+\lambda) \end{aligned} \tag{3.47}$$

A partir de (3.47) puede pasar, de acuerdo a ciertos parámetros específicos, que se cumpla (3.46) y la deuda converja. Adicionalmente, en la sección A.2.4. de los anexos se analiza con detalle el valor del estado estacionario de la deuda bajo cooperación.

Parámetros de $V^F(d)$ ***y*** $V^M(d)$

Sustituyendo la solución general de la función de valor de la autoridad fiscal (3.14) y la solución general de equilibrio de Nash feedback de la autoridad monetaria (3.23) en (3.17) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 = &\left[-2(\varepsilon_1^F)^2 + 2r\varepsilon_1^F - 4\varepsilon_1^F\varepsilon_1^M - \delta\varepsilon_1^F + \frac{\lambda}{2}\right] d^2 \\ &+ \left[-2\varepsilon_1^F\varepsilon_2^F + 2(\bar{f} - \bar{m})\varepsilon_1^F - 2\varepsilon_1^F\varepsilon_2^M + r\varepsilon_2^F - 2\varepsilon_2^F\varepsilon_1^M - \delta\varepsilon_2^F\right] d \\ &+ \left[-\frac{(\varepsilon_2^F)^2}{2} + (\bar{f} - \bar{m})\varepsilon_2^F - \varepsilon_2^F\varepsilon_2^M - \delta\varepsilon_3^F\right] \end{aligned} \tag{3.48}$$

De acuerdo a lo anteriormente realizado en (3.38)[15] a partir de (3.48) se plantea el siguiente sistema de ecuaciones de los parámetros indeterminados bajo el problema de la autoridad

[15] Páginas 31 y 32.

fiscal,

$$-2(\varepsilon_1^F)^2 + (2r-\delta)\varepsilon_1^F - 4\varepsilon_1^F\varepsilon_1^M + \frac{\lambda}{2} = 0 \tag{3.49}$$

$$-2\varepsilon_1^F\varepsilon_2^F + 2(\bar{f}-\bar{m})\varepsilon_1^F - 2\varepsilon_1^F\varepsilon_2^M + (r-\delta)\varepsilon_2^F - 2\varepsilon_2^F\varepsilon_1^M = 0 \tag{3.50}$$

$$-\frac{(\varepsilon_2^F)^2}{2} + (\bar{f}-\bar{m})\varepsilon_2^F - \varepsilon_2^F\varepsilon_2^M - \delta\varepsilon_3^F = 0 \tag{3.51}$$

Del mismo modo para la autoridad monetaria, se va a sustituir (3.18)-(3.19) en (3.22) de lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} 0 = &\left[-2(\varepsilon_1^M)^2 + 2r\varepsilon_1^M - 4\varepsilon_1^M\varepsilon_1^F - \delta\varepsilon_1^M + \frac{\kappa}{2}\right]d^2 \\ &+ \left[-2\varepsilon_1^M\varepsilon_2^M + 2(\bar{f}-\bar{m})\varepsilon_1^M - 2\varepsilon_1^M\varepsilon_2^F + r\varepsilon_2^M - 2\varepsilon_2^M\varepsilon_1^F - \delta\varepsilon_2^M\right]d \\ &+ \left[-\frac{(\varepsilon_2^M)^2}{2} + (\bar{f}-\bar{m})\varepsilon_2^M - \varepsilon_2^M\varepsilon_2^F - \delta\varepsilon_3^M\right] \end{aligned} \tag{3.52}$$

Al igual que (3.38) y (3.48), a partir de (3.52) se obtiene el sistema de ecuaciones de parámetros indeterminados del problema de la autoridad monetaria, es decir,

$$-2(\varepsilon_1^M)^2 + (2r-\delta)\varepsilon_1^M - 4\varepsilon_1^M\varepsilon_1^F + \frac{\kappa}{2} = 0 \tag{3.53}$$

$$-2\varepsilon_1^M\varepsilon_2^M + 2(\bar{f}-\bar{m})\varepsilon_1^M - 2\varepsilon_1^M\varepsilon_2^F + (r-\delta)\varepsilon_2^M - 2\varepsilon_2^M\varepsilon_1^F = 0 \tag{3.54}$$

$$-\frac{(\varepsilon_2^M)^2}{2} + (\bar{f}-\bar{m})\varepsilon_2^M - \varepsilon_2^M\varepsilon_2^F - \delta\varepsilon_3^M = 0 \tag{3.55}$$

Al final, las ecuaciones (3.49)-(3.51) y (3.53)-(3.55) forman un sistema de ecuaciones no lineales con seis ecuaciones y seis incógnitas (ε_j^i donde $j = 1, 2, 3$ e $i \in \{F, M\}$) de parámetros indeterminados de los parámetros individuales de $V^F(d)$ y $V^M(d)$. Teniendo en cuenta la complejidad de obtener soluciones análiticas de este sistema, en el presente trabajo se asumiran dos escenarios sobre los parámetros individuales con el objetivo de flexibilizar el análisis, pero también, de establecer supuestos plausibles para el análisis económico.

Adicionalmente, antes de empezar a analizar los parámetros individuales, es pertinente hacer un comentario con respecto al trabajo de Tabellini (1986) [17]. En el trabajo de Tabellini se demostró que si la velocidad de ajuste de la deuda pública en un contexto no-cooperativo es positiva, $\gamma^* = 2\varepsilon_1^F + 2\varepsilon_1^M - r > 0$, (Sección A.1. de los anexos), se garantiza la convergencia. Por lo tanto, en el presente trabajo, se tomarán en cuenta los parámetros individuales que posibiliten lo encontrado por Tabellini con respecto a la convergencia de la deuda bajo el escenario no-cooperativo.

Escenario 1: $\varepsilon_1^F = \varepsilon_1^M$

Asumiendo este primer escenario y teniendo en cuenta el equilibrio de Nash feedback, (3.18) y (3.23), implicaría que ambas autoridades tienen una sensibilidad proporcional, en términos de magnitud, en la elección de sus acciones de política a los movimientos de la deuda teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial f^*}{\partial d} = -2\varepsilon_1^F, \qquad \frac{\partial g^*}{\partial d} = 2\varepsilon_1^M$$
$$\frac{\partial f^*}{\partial d} = -\frac{\partial g^*}{\partial d}$$

Considerando el sistema (3.49)-(3.51) y (3.53)-(3.55), de la ecuación (3.49) con $\varepsilon_1^F = \varepsilon_1^M = \widehat{\varepsilon_1}$ se obtiene que,

$$-6(\widehat{\varepsilon_1})^2 + (2r-\delta)\widehat{\varepsilon_1} + \frac{\lambda}{2} = 0 \tag{3.56}$$

Solucionando la ecuación (3.56) se obtiene que

$$\widehat{\varepsilon_1} = \frac{-(2r-\delta) \pm \sqrt{(2r-\delta)^2 + 12\lambda}}{-12} \tag{3.57}$$

$$\widehat{\varepsilon_1}^- = \frac{(2r-\delta) - \sqrt{(2r-\delta)^2 + 12\lambda}}{12} \tag{3.58a}$$

$$\widehat{\varepsilon_1}^+ = \frac{(2r-\delta) + \sqrt{(2r-\delta)^2 + 12\lambda}}{12} \tag{3.58b}$$

A partir de lo obtenido en (3.57)-(3.58), en la sección A.3.1. de los anexos se comprueba que $\widehat{\varepsilon_1}^- \leq 0$ y $\widehat{\varepsilon_1}^+ \geq 0$ dado que $\lambda \geq 0$. De manera similar y bajo el suspuesto que $\varepsilon_1^F = \varepsilon_1^M = \widehat{\varepsilon_1}$, se analiza ahora la ecuación (3.53), de lo cual se obtiene lo siguiente

$$-6(\widehat{\varepsilon_1})^2 + (2r-\delta)\widehat{\varepsilon_1} + \frac{\kappa}{2} = 0 \tag{3.59}$$

Solucionando la ecuación (3.59), se obtiene lo siguiente

$$\widehat{\varepsilon_1} = \frac{-(2r-\delta) \pm \sqrt{(2r-\delta)^2 + 12\kappa}}{-12} \tag{3.60}$$

$$\widehat{\varepsilon_1}^- = \frac{(2r-\delta) - \sqrt{(2r-\delta)^2 + 12\kappa}}{12} \tag{3.61a}$$

$$\widehat{\varepsilon_1}^+ = \frac{(2r-\delta) + \sqrt{(2r-\delta)^2 + 12\kappa}}{12} \tag{3.61b}$$

Note que a partir de (3.61), también se puede demostrar como al igual que para (3.58) se tiene que $\widehat{\varepsilon_1}^- \leq 0$ y $\widehat{\varepsilon_1}^+ \geq 0$ dado que $\kappa \geq 0$. Además, note que si se compara (3.57) con (3.60) para que $\widehat{\varepsilon_1}$ sea el mismo en ambos casos, es necesario que $\lambda = \kappa$, es decir, una de la primeras consecuencias de asumir que $\varepsilon_1^F = \varepsilon_1^M$ es que $\lambda = \kappa$[16].

[16] Con base en esto último, podría pensarse como un escenario donde ambas autoridades siguen los lineamientos establecidos por una entidad intermedia o central (e.g. parlamento) que coordina sus acciones para conseguir la solución cooperativa, y donde además ambas autoridades son *igualmente* conscientes o valoran de la misma manera el problema de la estabilización de la deuda que intenta resolver de una mejor manera el acuerdo.

Por otro lado, se seguira solucionando el sistema teniendo en cuenta lo asumido $\varepsilon_1^F = \varepsilon_1^M = \widehat{\varepsilon_1}$, por ende, de las ecuaciones (3.50) y (3.54) se obtiene

$$(4\widehat{\varepsilon_1} - (r-\delta))\varepsilon_2^F + 2\widehat{\varepsilon_1}\varepsilon_2^M = 2(\bar{f} - \bar{m})\widehat{\varepsilon_1} \tag{3.62}$$

$$2\widehat{\varepsilon_1}\varepsilon_2^F + (4\widehat{\varepsilon_1} - (r-\delta))\varepsilon_2^M = 2(\bar{f} - \bar{m})\widehat{\varepsilon_1} \tag{3.63}$$

De (3.62)-(3.63) se tiene un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (ε_2^F y ε_2^M). Resolviendo este sistema, se obtiene

$$\varepsilon_2^F = \varepsilon_2^M = \frac{2(\bar{f} - \bar{m})\widehat{\varepsilon_1}}{6\widehat{\varepsilon_1} - (r-\delta)} \tag{3.64}$$

Por lo tanto, del sistema (3.62)-(3.63) se obtiene que $\varepsilon_2^F = \varepsilon_2^M$, y ese valor igual se denotará por $\widehat{\varepsilon_2}$. Además, note que la existencia de $\widehat{\varepsilon_2}$ (3.64) depende de que $6\widehat{\varepsilon_1} - (r-\delta) \neq 0$ lo cual se garantiza con el parámetro $\widehat{\varepsilon_1}^+$ debido a que $4\widehat{\varepsilon_1} - r > 0$ y dado que $\delta > 0$ (Sección A.1. de los anexos). Por lo tanto, al asumir que $\varepsilon_1^F = \varepsilon_1^M$ se está asumiendo a la vez que $\kappa = \lambda$, lo cual implica que $\varepsilon_2^F = \varepsilon_2^M$. En este sentido, de la ecuación (3.51) se obtiene,

$$\varepsilon_3^F = \frac{-3(\widehat{\varepsilon_2})^2 + 2(\bar{f} - \bar{m})\widehat{\varepsilon_2}}{2\delta} \tag{3.65}$$

Ahora de (3.55) se obtiene lo siguiente

$$\varepsilon_3^M = \frac{-3(\widehat{\varepsilon_2})^2 + 2(\bar{f} - \bar{m})\widehat{\varepsilon_2}}{2\delta} \tag{3.66}$$

Similarmente, a partir de (3.65)-(3.66) se obtiene que $\varepsilon_3^F = \varepsilon_3^M$ el cual se denotará por $\widehat{\varepsilon_3}$. Por lo tanto, al suponer que $\varepsilon_1^F = \varepsilon_1^M$, esto implica que $\varepsilon_2^F = \varepsilon_2^M$ y $\varepsilon_3^F = \varepsilon_3^M$, sin embargo, al obtener estos resultados dichos parámetros individuales dejan de ser importante para los costos económicos descompuestos y solo van a depender de los parámetros conjuntos (ε_j con $j = 1, 2, 3$) y por ende terminan siendo iguales para ambas autoridades. Esto se muestra a partir de (3.34)-(3.35), donde la asignación descompuesta de costos económicos para la autoridad fiscal y monetaria bajo el escenario 1 es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\beta^{E_1}(t) = \beta_M^{E_1}(t) = \beta_F^{E_1}(t) &= A^{E_1}e^{-2\gamma^c t} + B^{E_1}e^{-\gamma^c t} + C^{E_1} \\
&= (\delta + 2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(d^c(0) - \tilde{d}\right)^2 e^{-2\gamma^c t} \\
&+ (\delta + \gamma^c)\left[\varepsilon_1\tilde{d} + \frac{\varepsilon_2}{2}\right]\left(d^c(0) - \tilde{d}\right)e^{-\gamma^c t} \\
&+ \delta\left(\frac{\varepsilon_1\tilde{d}^2 + \varepsilon_2\tilde{d} + \varepsilon_3}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Escenario 2: $\varepsilon_1^M = 0$ **y** $\varepsilon_1^F \neq 0$

Bajo este escenario se supondrá que la autoridad monetaria de manera invididual (ver (3.12) y (3.23)) es indiferente ante los movimientos de la deuda pública en la elección de sus acciones de política, a pesar de que esta involucrada en un acuerdo de estabilización de la deuda. Mientras que la autoridad fiscal si toma en cuenta los movimientos de la deuda pública en la elección de sus decisiones de política. Este caso es de expreso interés porque se plantea un escenario donde se tiene una autoridad monetaria conservadora e independiente que en sus acciones de política individual (3.19) no considera los movimientos de la deuda y están en función exclusiva de la estabilización de la creación de dinero e implícitamente de los precios de la economía.

De esta manera, se van a calcular los parámetros obtenidos a partir de este escenario supuesto con base en el sistema (3.49)-(3.51) y (3.53)-(3.55). Sustituyendo $\varepsilon_1^M = 0$ en la ecuación (3.49) de lo cual se obtiene que

$$-2(\varepsilon_1^F)^2 + (2r-\delta)\varepsilon_1^F + \frac{\lambda}{2} = 0 \tag{3.68}$$

Al resolver (3.68) con la fórmula cuadrática se obtiene que

$$\varepsilon_1^F = \frac{-(2r-\delta) \pm \sqrt{(2r-\delta)^2 + 4\lambda}}{-4} \tag{3.69}$$

$$\varepsilon_1^{F-} = \frac{(2r-\delta) - \sqrt{(2r-\delta)^2 + 4\lambda}}{4} \tag{3.70a}$$

$$\varepsilon_1^{F+} = \frac{(2r-\delta) + \sqrt{(2r-\delta)^2 + 4\lambda}}{4} \tag{3.70b}$$

En la sección A.3.2. de los anexos se comprueba que de acuerdo a lo obtenido en (3.69)-(3.70), se tiene que $\varepsilon_1^{F-} \leq 0$ y $\varepsilon_1^{F+} \geq 0$, teniendo en cuenta que $\lambda \geq 0$. Similarmente, para garantizar que $\varepsilon_1^F \neq 0$, es decir que $\varepsilon_1^{F-} < 0$ y $\varepsilon_1^{F+} > 0$, es suficiente con que $\kappa > 0$. Ahora, al sustituir $\varepsilon_1^M = 0$ en (3.53) se obtiene lo siguiente

$$\kappa = 0 \tag{3.71}$$

De $\varepsilon_1^M = 0$ se tiene que $\kappa = 0$, lo cual es consistente con el hecho de que si se asume que la autoridad monetaria de manera individual es independiente a los movimientos de la deuda, por ende, no tiene valoración alguna a los movimientos de la misma (κ en el funcional $V^M(d)$). Este escenario muestra que a pesar de que hay un acuerdo establecido por una entidad intermediadora (e.g. parlamento) de coordinar las acciones de ambas autoridades para estabilizar la deuda pública, el modo de actuar de la autoridad monetaria individualmente es el caracterizado por tener solo en cuenta sus objetivos de política. Por otro lado, ahora se incorporá $\varepsilon_1^M = 0$ en la ecuación (3.50) y se obtiene que

$$-2\varepsilon_1^F\varepsilon_2^F + 2(\bar{f} - \bar{m})\varepsilon_1^F - 2\varepsilon_1^F(0) + (r-\delta)\varepsilon_2^F - 2\varepsilon_2^F(0) = 0$$

$$\varepsilon_2^F = \frac{2(\bar{f} - \bar{m})\varepsilon_1^F}{2\varepsilon_1^F - (r-\delta)} \tag{3.72}$$

Para que exista ε_2^F en (3.72) es necesario que $2\varepsilon_1^F - (r-\delta) \neq 0$, de hecho, esto último se cumple si la deuda pública converje $2\varepsilon_1^F - (r-\delta) > 0$ (ver sección A.3.3. de los anexos). Además, debido a que ε_2^F tiene denominador positivo a partir de asumir la convergencia, puede tomar los siguientes signos con base en (3.72) de la siguiente manera: $\varepsilon_2^{F-} \geq 0$ y $\varepsilon_2^{F+} \leq 0$ si $\bar{f} \leq \bar{m}$, o por el contrario, $\varepsilon_2^{F-} \leq 0$ y $\varepsilon_2^{F+} \geq 0$ si $\bar{f} \geq \bar{m}$. Ahora sustituyendo $\varepsilon_1^M = 0$ en (3.54) se obtiene lo siguiente

$$-2(0)\varepsilon_2^M + 2(\bar{f}-\bar{m})(0) - 2(0)\varepsilon_2^F + (r-\delta)\varepsilon_2^M - 2\varepsilon_2^M\varepsilon_1^F = 0$$

$$\varepsilon_2^M((r-\delta) - 2\varepsilon_1^F) = 0 \tag{3.73}$$

Cuando se garantiza la estabilidad de la deuda no solo se garantiza la existencia de ε_2^F (3.72) sino que con base en (3.73) se obtiene lo siguiente

$$\varepsilon_2^M = 0 \tag{3.74}$$

Considerando lo obtenido en (3.74), de la ecuación (3.51) se obtiene que

$$-\frac{(\varepsilon_2^F)^2}{2} + (\bar{f}-\bar{m})\varepsilon_2^F - \varepsilon_2^F(0) - \delta\varepsilon_3^F = 0$$

$$\varepsilon_3^F = \frac{-(\varepsilon_2^F)^2 + 2(\bar{f}-\bar{m})\varepsilon_2^F}{2\delta} \tag{3.75}$$

Con respecto a (3.75) en la sección A.3.4. de los anexos se comprueba que $\varepsilon_3^{F+} \geq 0$ siempre y cuando $\delta \geq r$. Ahora, teniendo en cuenta (3.74) se obtiene de la ecuación (3.55) es lo siguiente,

$$-\frac{(0)^2}{2} + (\bar{f}-\bar{m})(0) - (0)\varepsilon_2^F - \delta\varepsilon_3^M = 0$$

$$-\delta\varepsilon_3^M = 0$$

Como $\delta > 0$, se concluye lo siguiente

$$\varepsilon_3^M = 0 \tag{3.76}$$

Bajo este escenario se utilizarán los parámetros individuales que posibilitan la estabilidad de la deuda los cuales son: $\varepsilon_1^{F+} > 0$, ε_2^{F+} y ε_3^{F+} teniendo en cuenta que $\varepsilon_1^M = 0$. Además, a partir de lo obtenido con respecto a los parámetros individuales bajo este escenario la asignación de costos económicos descompuestos para la autoridad monetaria bajo el escenario 2 es:

$$\begin{aligned}
\beta_M^{E_2}(t) &= A_M^{E_2}e^{-2\gamma^c t} + B_M^{E_2}e^{-\gamma^c t} + C_M^{E_2} \\
&= (\delta + 2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_1^F}{2}\right)\left(d^c(0) - \tilde{d}\right)^2 e^{-2\gamma^c t} \\
&+ (\delta + \gamma^c)\left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^F)\tilde{d} + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_2^F)}{2}\right]\left(d^c(0) - \tilde{d}\right) e^{-\gamma^c t} \\
&+ \delta\left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^F)\tilde{d}^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_2^F)\tilde{d} + (\varepsilon_3 - \varepsilon_3^F)}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Mientras que la asignación de costos económicos descompuestos para la autoridad fiscal bajo el escenario 2 es:

$$\begin{aligned}
\beta_F^{E_2}(t) &= A_F^{E_2} e^{-2\gamma^c t} + B_F^{E_2} e^{-\gamma^c t} + C_F^{E_2} \\
&= (\delta + 2\gamma^c) \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_1^F}{2} \right) \left(d^c(0) - \tilde{d} \right)^2 e^{-2\gamma^c t} \\
&+ (\delta + \gamma^c) \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_1^F)\tilde{d} + \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_2^F)}{2} \right] \left(d^c(0) - \tilde{d} \right) e^{-\gamma^c t} \\
&+ \delta \left(\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_1^M)\tilde{d}^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_2^M)\tilde{d} + (\varepsilon_3 + \varepsilon_3^M)}{2} \right)
\end{aligned} \tag{3.78}$$

3.3. Un análisis sobre la asignación descompuesta de costos económicos cooperativos relativos a la estabilización de la deuda pública

De acuerdo, a la asignación descompuesta de costos económicos de cada autoridad con base en los dos escenarios considerados, en (3.67) y (3.77)-(3.78), en esta sección se proporcionan unos resultados donde se verá la importancia de los parámetros individuales en dicha solución cooperativa del juego diferencial de Tabellini. El siguiente resultado muestra las implicaciones de tener una autoridad monetaria conservadora e independiente (escenario 2) y se compara con lo obtenido bajo el escenario 1 donde ambas autoridades son igualmente sensibles, en términos absolutos, ante los movimientos de la deuda.

***Proposición* 3.3.1** *Sean las trayectorias de la asignación estable cooperativa de costos económicos descompuestos para ambas autoridades en la estabilización de la deuda pública bajo el escenario 1* $\beta^{E_1}(t)$ *(3.67) y sean las mismas bajo el escenario 2* $\beta_i^{E_2}(t)$ *con* $i \in \{F, M\}$ *(3.77)-(3.78). Asumiendo la convergencia de la deuda* $\gamma^c > 0$ *bajo los parámetros que la posibilitan: los conjuntos* $\varepsilon_1^+ > 0$, ε_2^+ *y* ε_3^+ *e individuales de la autoridad fiscal bajo el escenario 2* $\varepsilon_1^{F+} > 0$, ε_2^{F+} *y* ε_3^{F+} *con* $\lambda > 0$. *Si se tiene que* $\bar{f} > \bar{m}$ *y* $\delta > r$, *entonces se concluye que* $\beta_M^{E_2}(t) < \beta^{E_1}(t) < \beta_F^{E_2}(t)$ *para todo* $t \in [0, \infty)$.

Prueba: ver sección A.4. de los anexos.

Lo que muestra la Proposición 3.3.1 es que bajo el contexto de una deuda pública convergente si $\bar{f} > \bar{m}$[17] y $\delta > r$[18] y bajo el escenario 2 donde $\varepsilon_1^M = 0$ y $\varepsilon_1^F \neq 0$, es decir, la autoridad monetaria individualmente es muy conservadora en sus objetivos de política, y a pesar de que está involucrada en un acuerdo cooperativo de estabilización de la deuda pública dado que su sensibilidad a este problema comun entre ambas autoridades es nulo, sus costos económicos descompuestos asociados a esta estabilización serán menores que los que tiene que afrontar la autoridad fiscal dado que internaliza esa importancia que le da a una estabilización y por ende termina sacrificando más en este acuerdo (i.e. $\beta_M^{E_2}(t) < \beta_F^{E_2}(t)$).

Además si comparan la asignación de costos económicos determinados en este escenario 2 con respecto al 1 donde ambas autoridades son proporcionalmente sensibles ante los movimientos de la deuda, se obtiene un resultado peor para la autoridad monetaria porque adquiere mayor carga cuando valora de la misma manera la deuda que la autoridad fiscal (i.e. $\beta_M^{E_2}(t) < \beta^{E_1}(t)$), y esta última encuentra beneficioso este escenario 1 con respecto al 2 debido a que disminuye su esfuerzo por la estabilización de la deuda debido a que se distribuyen de una manera más equitativa las cargas de ambas autoridades (i.e. $\beta^{E_1}(t) < \beta_F^{E_2}(t)$). Por ende, a una autoridad fiscal envuelta en esta situación le conviene hacer un acuerdo de cooperación como el planteado en este juego diferencial con una autoridad monetaria menos independiente y conservadora en su propio objetivo de política y que tenga una mayor valoración e interés en el objetivo de comun interés planteado en este juego. Esto nos muestra la importancia que juegan los parámetros individuales de ambas autoridades en la asignación de costos económicos, aún cuando en ambas situaciones los costos económicos conjuntos sean los mismos, es decir, $2\beta^{E_1}(t) = \beta_F^{E_2}(t) + \beta_M^{E_2}(t)$.

Adicionalmente, dado que las funciones $\beta_i(t)$ que son el costo económico descompuesto (o corriente) para cada autoridad i implementada por un IDP dinámicamente estable, por lo cual, si se suman de manera descontada para todo el intervalo temporal $[0, \infty)$ se obtiene el valor de Shapley desde el inicio del juego (Definición 2.4.5). Con todo esto de acuerdo a lo encontrado en la proposición 3.3.1, se obtiene la siguiente proposición.

***Proposición* 3.3.2** *Sean las trayectorias de la asignación estable cooperativa de costos económicos descompuestos para ambas autoridades en la estabilización de la deuda pública bajo el escenario 1 $\beta^{E_1}(t)$(3.67). Y sean las mismas bajo el escenario 2 $\beta_i^{E_2}(t)$ con $i \in \{F, M\}$ (3.77)-(3.78). Asumiendo la convergencia de la deuda $\gamma^c > 0$ bajo los parámetros que la posibilitan: los conjuntos $\varepsilon_1^+ > 0$, ε_2^+ y ε_3^+ e individuales de la autoridad fiscal bajo el escenario 2 $\varepsilon_1^{F+} > 0$, ε_2^{F+} y ε_3^{F+} con $\lambda > 0$. Si se tiene que $\bar{f} > \bar{m}$ y $\delta > r$, entonces se concluye que $\phi_M^{E_2}(d(0), 0) < \phi^{E_1}(d(0), 0) < \phi_F^{E_2}(d(0), 0)$ para todo $t \in [0, \infty)$.*

[17] Este umbral de acuerdo a [18] supone una tensión entre los objetivos de ambas autoridades el cual es un elemento importante en la determinación de la acumulación de la deuda pública del gobierno. Note que si este umbral es más amplio, entonces más fuerte será la tensión entre los objetivos de ambas autoridades dado que por ejemplo la autoridad fiscal es más flexible en el déficit primario deseable ($\bar{f}$ alto) mientras que la autoridad monetaria es muy restrictiva en cuanto a su nivel deseable de creación de dinero y de inflación objetivo ($\bar{m}$), entonces una tendencia menor a que la deuda se estabilice.

[18] Es decir, si ambas autoridades son lo suficientemente pacientes.

Prueba: ver sección A.5. de los anexos.

Teniendo en cuenta que aquí se demostró que los costos económicos descompuestos (o corrientes) cumplen la propiedad de que $\beta_M^{E_2}(t) < \beta^{E_1}(t) < \beta_F^{E_2}(t)$ para todo $t \in [0, \infty)$ y dado que la suma acumulada descontada de todos los costos corrientes es la asignación Shapley, entonces los costos económicos acumulados (i.e. el valor de Shapley) a lo largo de todo el acuerdo, cumplen que $\phi_M^{E_2}(d(0), 0) < \phi^{E_1}(d(0), 0) < \phi_F^{E_2}(d(0), 0)$.

Ahora, este contexto construido donde ambas autoridades se ponen de acuerdo (e.g. a traves de una entidad central como el parlamento) en dividir los costos económicos para estabilizar la deuda pública (y cumplir con sus objetivos propios) y los cuales son determinados de tal manera que permanezcan en el acuerdo en el largo plazo, una pregunta fundamental sería: ¿Qué se podría hacer para que los costos económicos en que tienen que incurrir ambas autoridades sean menores? Mientras las Proposiciones 3.3.1 responden parcialmente a lo que determina la distribución de los costos económicos conjuntos para estabilizar la deuda pública, ahora se va a estudiar qué tipo de fuerzas pueden hacer que sean menores esos costos económicos *para ambas autoridades*.

Para intentar responder parcialmente a esta pregunta, una variable que es crucial en este juego diferencial es el umbral que existe entre los objetivos deseables de política de ambas autoridades, el cual se denotará $\Delta = \bar{f} - \bar{m}$. A partir de la siguiente proposición se mostrará que es más beneficioso en el largo plazo para ambas autoridades que $\Delta = 0$ si se compara con la situación donde exista alguna tensión entre ambos objetivos $\Delta > 0$. Para mostrar este resultado se utiliza la asignación descompuesta de costos obtenida en el escenario 1 (3.67) y su valor cuando $t \to \infty$, es decir, C^{E_1} si $\gamma^c > 0$. Esto último debido a que en el escenario 1 se tiene: primero, la simplicidad en probar la siguiente proposición; segundo, mostrar el rol que juega ese umbral (Δ) en el esfuerzo conjunto de ambas autoridades no solo por cumplir con sus propios objetivos sino también estabilizar la deuda pública.

***Proposición* 3.3.3** *Sean las trayectorias de la asignación estable cooperativa de costos económicos descompuestos para ambas autoridades en la estabilización de la deuda pública bajo el escenario 1 $\beta^{E_1}(t)$ (3.67) y sea C^{E_1} su valor de largo plazo cuando $t \to \infty$*[19] *cuando $\gamma^c > 0$. Asumiendo la convergencia de la deuda $\gamma^c > 0$ bajo los parámetros conjuntos que la posibilitan $\varepsilon_1^+ > 0$, ε_2^+ y ε_3^+ con $\lambda, \kappa > 0$. Si se tiene que $\delta > r$, entonces se concluye que $C^{E_1}(t)|_{\Delta>0} > C^{E_1}(t)|_{\Delta=0}$.*

Prueba: ver sección A.6. de los anexos.

Por otro lado, otra forma de mostrar el rol que juega el umbral entre niveles objetivo de política Δ y de lo provechoso que es tener uno cada vez menor, es a partir de la siguiente

[19]Entiéndase este valor como el nivel en el que se van estabilizando los costos económicos de cada autoridad en el largo plazo $t \to \infty$ (3.71), asociados con el esfuerzo por cumplir el objetivo propio de política, así como también estabilizar la deuda pública.

proposición, donde se muestra bajo un análisis de sensibilidad el efecto que tiene dicho umbral en el nivel en que se estabiliza (cuando $t \to \infty$) la asignación de costos económicos descompuesta bajo el escenario 1, C^{E_1}, siempre y cuando $\gamma^c > 0$.

***Proposición* 3.3.4** *Sean las trayectorias de la asignación estable cooperativa de costos económicos descompuestos para ambas autoridades en la estabilización de la deuda pública bajo el escenario 1 $\beta^{E_1}(t)$ (3.67) y sea C^{E_1} su valor de largo plazo cuando $t \to \infty$ cuando $\gamma^c > 0$. Asumiendo la convergencia de la deuda $\gamma^c > 0$ bajo los parámetros conjuntos que la posibilitan $\varepsilon_1^+ > 0$, ε_2^+ y ε_3^+ con $\lambda, \kappa > 0$. Si $\Delta = \bar{f} - \bar{m} > 0$, $\delta > r$, entonces $\partial C^{E_1}/\partial\Delta > 0$.*

Prueba: ver sección A.7. de los anexos.

Esta proposición muestra que si ambas autoridades son lo suficientemente pacientes e igualmente comprometidas con el acuerdo de dividirse los costos económicos cooperativos, estos costos en el largo plazo se incrementarán (disminuirán) si la tensión entre los objetivos de política es mayor (menor), es decir, la autoridad fiscal se vuelve más flexible (austera) o la autoridad monetaria más austera (flexible).

Capítulo 4

Conclusiones y recomendaciones

4.1. Conclusiones

De acuerdo al juego diferencial LQ construido por Tabellini [17], donde dos autoridades independientes, la fiscal y la monetaria, buscan estabilizar no solo sus propios objetivos de política (el déficit fiscal primario y la creación de dinero, respectivamente), sino la dinámica de una variable de comun interés que es la deuda pública y cuyo vínculo de ambas autoridades con esta variable se encuentra decrito por la restricción presupuestal dinámica del gobierno (3.1) que es la ecuación diferencial que describe la dinámica de la deuda. Teniendo en cuenta que los resultados obtenidos por la cooperación (coordinación) son más deseables y mejores que los obtenidos cuando ambas autoridades deciden no cooperar [17][18], en el presente trabajo se implementó un mecanismo de distribución del flujo conjunto de pérdidas o "costos económicos" asociados no solo a la estabilización de sus propias variables individuales objetivo sino también a la estabilización de la deuda pública como problema de común interés. Para esto se utilizo el algoritmo propuesto por Petrosyan & Zaccour [13], donde a partir del valor de Shapley como concepto-solución utilizado, se descompone la asignación de Shapley para que garantice la repartición periodo tras periodo que debe soportar cada autoridad y con la deseable propiedad de juegos dinámicos cooperativos de estabilidad dinámica la cual garantiza la permanencia de ambas autoridades en el acuerdo.

El contexto cooperativo construido por Tabellini [17] bajo este juego diferencial, se describe como uno en el cual una autoridad central que busca minimizar el flujo de pérdidas o costos económicos conjuntos (suma de los funcionales). Según Tabellini, esta autoridad central puede ser descrita por el parlamento, que bajo este contexto, coordina las estrategias o acciones de política de ambas autoridades con el objetivo de minimizar dicha pérdida conjunta. Y que además, bajo el contexto construido en el presente trabajo, fuera una autoridad central que construyera una repartición, entre la autoridad fiscal y monetaria, de costos económicos que sea dinámicamente estable de modo de cumplir con el objetivo conjunto, sin incentivo alguno a que ninguna de las dos autoridades abandone el acuerdo en un momento intermedio de la interacción.

En la construcción de dicha asignación, se mostró la complejidad del sistema de ecuaciones de los parámetros individuales al cual se llegó, por lo cual se asumieron dos escenarios con base en dichos parámetros que resultarán de posible interés para el análisis de política económica. El primero, ambas autoridades tienen una sensibilidad igual en términos absolutos de sus acciones de política ante los movimientos de la deuda pública (i.e. $\varepsilon_1^F = \varepsilon_1^M$), es decir, un escenario donde la importancia que le dan ambas autoridades al problema de comun interés es proporcionalmente la misma. El segundo escenario, la autoridad monetaria es totalmente independiente a los movimientos de la deuda (i.e. $\varepsilon_1^M = 0$) y la autoridad fiscal si es sensible ante los movimientos de la misma (i.e. $\varepsilon_1^F \neq 0$), es decir, un escenario donde a pesar de que hay una intervención central de tal manera que garantice la cooperación entre ambas autoridades, la valoración individual al problema de la deuda dice que la autoridad fiscal, preocupada no solo por estabilizar el déficit primario, sino también la deuda, mientras que la autoridad monetaria es independiente y conservadora en el sentido en que su única preocupación es la estabilización de la creación de dinero y de precios.

Bajo estos escenarios planteados y la asignación estable de costos económicos, y asumiendo la convergencia de la deuda (utilizando los parámetros bajo los cuales podría haber convergencia), un ambiente tenso en los niveles objetivo de acciones de política (i.e. $\bar{f} > \bar{m}$) y ambas autoridades lo suficientemente pacientes (i.e. $\delta > r$), se llegaron a cuatro principales resultados en el presente trabajo.

Primero, bajo el escenario dos y para todo momento de interacción, los costos económicos descompuestos correspondientes son mayores para la autoridad fiscal que para la monetaria, $\beta_M^{E_2}(t) < \beta_F^{E_2}(t)$, debido al esfuerzo que tiene que internalizar la primera autoridad dada la importancia que le da al problema conjunto de estabilizar la deuda y estar interactuando con una autoridad monetaria totalmente independiente que le resta importancia exclusivamente al control del crecimiento de dinero. Sin embargo, si ambas autoridades se encuentran bajo el escenario uno, es decir, ambas son igualmente sensibles (en términos absolutos) a los movimientos de la deuda, recibirán la misma asignación descompuesta de costos $\beta_M^{E_1}(t) = \beta_F^{E_1}(t) = \beta^{E_1}(t)$ y será una asignación intermedia entre la obtenida en el escenario dos[1], es decir, $\beta_M^{E_2}(t) < \beta^{E_1}(t) < \beta_F^{E_2}(t)$. Adicionalmente, que los costos económicos descompuestos asignados para cada momento del intervalo temporal cumplen que $\beta_M^{E_2}(t) < \beta^{E_1}(t) < \beta_F^{E_2}(t)$, por ende, los costos económicos totales asignados (asignación Shapley) siguen el mismo orden, $\phi_M^{E_3}(d(0), 0) < \phi^{E_1}(d(0), 0) < \phi_F^{E_3}(d(0), 0)$, algo que era esperable.

Segundo, una variable o parámetro fundamental en el presente problema es el umbral entre niveles objetivo de política ($\Delta = \bar{f} - \bar{m}$) donde a partir del primer escenario se en-

[1]Mayor a la que recibe la autoridad monetaria bajo el escenario dos y menor a la que recibe la autoridad fiscal bajo el mismo escenario dos.

contró que, en el largo plazo, el nivel al que se estabiliza la asignación de costos económicos descompuestos es mayor si existe cierta tensión entre una autoridad fiscal flexible y una autoridad monetaria restrictiva, $\Delta > 0$, que si se compara con el contexto donde no existe tensión alguna $\Delta = 0$ y ambas autoridades buscan establecer al mismo nivel sus objetivos de política. Y por último, se encontró que el nivel de largo plazo al cual se estabilizan los costos económicos descompuestos para cada autoridad bajo el escenario uno, aumentan si hay un aumento en la tensión en los niveles objetivo de política (aumento en Δ). Estos últimos dos resultados son muestra de que una coordinación adicional en el establecimiento de niveles objetivo de política fiscal y monetaria que sea en magnitud similares le sirve al hecho de que habrá menores costos económicos en el largo plazo para ambas autoridades en el contexto de la estabilización de la deuda pública.

4.2. Recomendaciones

Los resultados obtenidos en este trabajo se hicieron con la imposición de supuestos sobre los parámetros individuales de ambas autoridades, donde se deja la posibilidad no solo de conjeturar de otra manera con respecto a dichos parámetros que le puedan ayudar al análisis económico e intentar analizarlos con más profundidad tanto de manera analítica como de forma numérica.

También se deja la posibilidad de analizar las implicaciones de otras variables y parámetros en la asignación de costos económicos descompuestos para estabilizar la deuda pública que en varios casos no fueron claras, pero que serían de ínteres para que un contexto como el planteado en este trabajo sea más beneficioso para la autoridad fiscal y monetaria en el consecución de dicho acuerdo.

Apéndice A

Anexos

A.1. Trayectoria de la deuda pública bajo el equilibrio de Nash feedback

Teniendo en cuenta la solución general de equilibrio de Nash feedback (3.16) y (3.23), existe una correspondiente trayectoria de la deuda pública encontrada por Tabellini (1986), que es cuando no existe cooperación. Esta trayectoria se encuentra sustituyendo en (3.16) y (3.23) en la ecuación diferencial (3.1) y resolviéndola se obtiene

$$\dot{d} = rd + f^* - m^*$$

$$\dot{d} + (2\varepsilon_1^F + 2\varepsilon_1^M - r)d = (\bar{f} - \bar{m}) - (\varepsilon_2^F + \varepsilon_1^M)$$

$$d^*(t) = \left(d^*(0) - \tilde{d}^*\right) e^{-\gamma^* t} + \tilde{d}^* \quad \text{donde} \quad \gamma^* = 2\varepsilon_1^F + 2\varepsilon_1^M - r \quad \text{y} \quad \tilde{d}^* = \frac{(\bar{f} - \bar{m}) - (\varepsilon_2^F + \varepsilon_2^M)}{\gamma^*} \tag{A.1}$$

Teniendo en cuenta lo dicho por Tabellini [17], la trayectoria de la deuda pública bajo un marco de no cooperación convergerá o llegará a ajustarse a su estado estacionario $\tilde{d}^*$ si $\gamma^* = 2\varepsilon_1^F + 2\varepsilon_1^M - r > 0$ donde γ^* es la velocidad de ajuste bajo este contexto.

A.2. Parámetros de $W(N, d)$

A.2.1. Comprobación de $\varepsilon_1^+ \geq 0$ y $\varepsilon_1^- \leq 0$

Teniendo en cuenta (3.43) y dado que se asumió que $\kappa, \lambda \geq 0$, se obtiene,

$$8(\kappa + \lambda) \geq 0$$

$$\begin{aligned}
(2r-\delta)^2 + 8(\kappa+\lambda) &\geq (2r-\delta)^2 \\
\sqrt{(2r-\delta)^2 + 8(\kappa+\lambda)} &\geq \sqrt{(2r-\delta)^2} = |2r-\delta| \\
\sqrt{(2r-\delta)^2 + 8(\kappa+\lambda)} &\geq |2r-\delta| \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}$$

A partir de (A.2) se obtiene en primer lugar que,

$$\begin{aligned}
\sqrt{(2r-\delta)^2 + 8(\kappa+\lambda)} &\geq (2r-\delta) \\
0 &\geq (2r-\delta) - \sqrt{(2r-\delta)^2 + 8(\kappa+\lambda)} \\
0 &\geq \frac{(2r-\delta) - \sqrt{(2r-\delta)^2 + 8(\kappa+\lambda)}}{8} \\
0 &\geq \varepsilon_1^-
\end{aligned}$$

Y otra vez a partir de (A.2) en segundo lugar se obtiene que

$$\begin{aligned}
\sqrt{(2r-\delta)^2 + 8(\kappa+\lambda)} &\geq -(2r-\delta) \\
(2r-\delta) + \sqrt{(2r-\delta)^2 + 8(\kappa+\lambda)} &\geq 0 \\
\frac{(2r-\delta) + \sqrt{(2r-\delta)^2 + 8(\kappa+\lambda)}}{8} &\geq 0 \\
\varepsilon_1^+ &\geq 0
\end{aligned}$$

A.2.2. Signos de ε_2^+ y ε_2^-

De acuerdo a (3.44) note que tiene un denominador estrictamente positivo en la medida que se garantice la convergencia de la deuda, es decir, si $\gamma^c = 4\varepsilon_1 - r > 0$ y teniendo en cuenta que $\delta > 0$, es decir, que el signo que tome ε_2 será el siguiente teniendo en cuenta que $\varepsilon_1^- \leq 0$ y $\varepsilon_1^+ \geq 0$ y lo relativo al signo que tome $\bar{f} - \bar{m}$.

$$\varepsilon_2^+ = \frac{2(\bar{f}-\bar{m})\varepsilon_1^+}{\gamma^c + \delta} = \begin{cases} \leq 0 & \text{si} \quad \bar{f} \leq \bar{m} \\ \geq 0 & \text{si} \quad \bar{f} \geq \bar{m} \end{cases} \tag{A.3a}$$

$$\varepsilon_2^- = \frac{2(\bar{f}-\bar{m})\varepsilon_1^-}{\gamma^c + \delta} = \begin{cases} \leq 0 & \text{si} \quad \bar{f} \geq \bar{m} \\ \geq 0 & \text{si} \quad \bar{f} \leq \bar{m} \end{cases} \tag{A.3b}$$

A.2.3. Comprobación de $\varepsilon_3^- \leq 0$ y $\varepsilon_3^+ \geq 0$

Teniendo en cuenta (A.3) y que $\delta > 0$ y asumiendo $\gamma^c > 0$, primero se comprobará que $\varepsilon_3^+ \leq 0$. Esto se hará escribiendo de la sigiente manera (3.45),

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2(-\varepsilon_2 + (\bar{f} - \bar{m}))}{\delta} \tag{A.4}$$

De acuerdo a (A.3a) si $\bar{f} \leq \bar{m}$, entonces $\varepsilon_2^- \geq 0$, por lo cual $-\varepsilon_2^- + (\bar{f} - \bar{m}) \leq 0$, por lo cual $\varepsilon_2^-(-\varepsilon_2^- + (\bar{f} - \bar{m})) \leq 0$, y de acuerdo a (A.4) se puede concluir que $\varepsilon_3^- \leq 0$ si $\bar{f} \leq \bar{m}$. Pero si por el contrario $\bar{f} \geq \bar{m}$, se tiene que $\varepsilon_2^- \leq 0$ por (A.3b), por lo cual $-\varepsilon_2^- + (\bar{f} - \bar{m}) \geq 0$, por lo cual $\varepsilon_2^-(-\varepsilon_2^- + (\bar{f} - \bar{m})) \leq 0$, y de acuerdo a (A.4) se puede concluir que $\varepsilon_3^- \leq 0$ si $\bar{f} \geq \bar{m}$. Por lo cual en cualquier caso $\varepsilon_3^- \leq 0$.

Ahora se comprobará que $\varepsilon_3^+ \geq 0$, para esto se simplificará (A.4)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_3^+ &= \frac{\varepsilon_2^+(-\varepsilon_2^+ + (\bar{f} - \bar{m}))}{\delta} \\
&= \frac{1}{\delta}\frac{2(\bar{f} - \bar{m})\varepsilon_1^+}{\gamma^c + \delta}\left(-\frac{2(\bar{f} - \bar{m})\varepsilon_1^+}{\gamma^c + \delta} + (\bar{f} - \bar{m})\right) \\
&= \frac{(\bar{f} - \bar{m})^2}{\delta(\gamma^c + \delta)^2} 2\varepsilon_1^+ \left(-2\varepsilon_1^+ + \gamma^c + \delta\right)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Note que el primer termino de (A.5) es no negativo, $\frac{(\bar{f} - \bar{m})^2}{\delta(\gamma^c + \delta)^2} 2\varepsilon_1^+ \geq 0$, teniendo en cuenta que $\delta > 0$ y $\varepsilon_1^+ \geq 0$. Solo restaría en comprobar que $-2\varepsilon_1^+ + \gamma^c + \delta > 0$ lo cual se comprueba utilizando (3.43b) de lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}
-2\varepsilon_1^+ + \gamma^c + \delta &= -2\varepsilon_1^+ + 4\varepsilon_1^+ - r + \delta \\
&= 2\varepsilon_1^+ - r + \delta \\
&= 2\left(\frac{(2r - \delta) + \sqrt{(2r - \delta)^2 + 8(\kappa + \lambda)}}{8}\right) - r + \delta \\
&= -2\varepsilon_1^- + \frac{\delta}{2} > 0
\end{aligned} \tag{A.6}$$

teniendo presente que $\varepsilon_1^- \leq 0$ y $\delta > 0$. Por lo tanto se comprueba que $\varepsilon_3^+ \geq 0$.

A.2.4. Valor de estado estacionario de la deuda pública bajo un marco de cooperación

Otro aspecto importante a encontrar y analizar, y que se ha trabajado en [17][18], es el valor de estado estacionario de la deuda pública bajo el acuerdo de cooperación. Teniendo en cuenta (3.13), bajo el supuesto de que γ^c se obtiene de la siguiente manera

$$\lim_{t\to\infty} d^c(t) = \tilde{d} = \frac{\bar{f} - \bar{m} - 2\varepsilon_2}{\gamma^c} \tag{A.7}$$

Para expresar de manera más explicita (A.7), se sustituye ε_2^+ (B.3b)[1] en (A.7) de lo cual se obtiene que

$$\begin{aligned} \tilde{d} &= \frac{\bar{f} - \bar{m} - 2\varepsilon_2^-}{\gamma^c} \\ &= \frac{(\bar{f} - \bar{m})(\delta - r)}{\gamma^c(\gamma^c + \delta)} \end{aligned} \tag{A.8}$$

Sin embargo, otra forma de expresar (A.8) con ε_1^+ (3.43b), de lo que se obtiene

$$\tilde{d} = \frac{(\bar{f} - \bar{m})(\delta - r)}{r^2 - \delta r + 2(\kappa + \lambda)} \tag{A.9}$$

Al final, a partir de (A.8) se muestra que la existancia del valor del estado estacionario de la deuda pública esta determinada por la misma converga $\gamma^c > 0$, lo cual parece algo trivial.

A.3. Parámetros de $V^F(d)$ y $V^M(d)$

A.3.1. Escenario 1 ($\varepsilon_1^F = \varepsilon_1^M$): comprobación de $\widehat{\varepsilon_1}^- \leq 0$ y $\widehat{\varepsilon_1}^+ \geq 0$

Teniendo en cuenta (3.48)-(3.49) y que $\lambda \geq 0$,

$$12\lambda \geq 0$$

$$\begin{aligned} (2r - \delta)^2 + 12\lambda &\geq (2r - \delta)^2 \\ \sqrt{(2r - \delta)^2 + 12\lambda} &\geq \sqrt{(2r - \delta)^2} = |2r - \delta| \\ \sqrt{(2r - \delta)^2 + 12\lambda} &\geq |2r - \delta| \end{aligned} \tag{A.10}$$

A partir del primer caso del valor absoluto en (A.10) se obtiene que

$$\sqrt{(2r - \delta)^2 + 12\lambda} \geq (2r - \delta)$$

$$0 \geq (2r - \delta) - \sqrt{(2r - \delta)^2 + 12\lambda}$$

$$0 \geq \frac{(2r - \delta) - \sqrt{(2r - \delta)^2 + 12\lambda}}{12}$$

[1] Se tiene en cuenta el ε_2^+ y no ε_2^-, debido a que ε_2^+ esta expresado en términos de ε_1^+ que es el cual podría haber convergencia de la deuda.

$$0 \geq \widehat{\varepsilon_1}^+$$

Y a partir del segundo caso del valor absoluto en (A.10) se obtiene que

$$\sqrt{(2r-\delta)^2+12\lambda} \geq -(2r-\delta)$$

$$(2r-\delta)+\sqrt{(2r-\delta)^2+12\lambda} \geq 0$$

$$\frac{(2r-\delta)+\sqrt{(2r-\delta)^2+12\lambda}}{12} \geq 0$$

$$\widehat{\varepsilon_1}^- \geq 0$$

A.3.2. Escenario 2 ($\varepsilon_1^M = 0$ y $\varepsilon_1^F \neq 0$): comprobación de $\widehat{\varepsilon_1}^{F-} \leq 0$ y $\widehat{\varepsilon_1}^{F+} \geq 0$

Teniendo en cuenta (3.70) y con $\lambda \geq 0$.

$$4\lambda \geq 0$$

$$(2r-\delta)^2+4\lambda \geq (2r-\delta)^2$$

$$\sqrt{(2r-\delta)^2+4}\lambda \geq \sqrt{(2r-\delta)^2} = |2r-\delta| \tag{A.11}$$

Para el primer caso del valor absoluto en (A.11) se obtiene de lo siguiente

$$\sqrt{(2r-\delta)^2+4}\lambda \geq (2r-\delta)$$

$$0 \geq (2r-\delta)-\sqrt{(2r-\delta)^2+4}\lambda$$

$$0 \geq \frac{(2r-\delta)-\sqrt{(2r-\delta)^2+4}\lambda}{4}$$

$$0 \geq \varepsilon_1^{F-} \tag{A.12}$$

Ahora bajo el segunda caso del valor absoluto de (A.11) se obtiene que

$$\sqrt{(2r-\delta)^2+4}\lambda \geq -(2r-\delta)$$

$$(2r-\delta)+\sqrt{(2r-\delta)^2+4}\lambda \geq 0$$

$$\frac{(2r-\delta)+\sqrt{(2r-\delta)^2+4}\lambda}{4} \geq 0$$

$$\varepsilon_1^{F+} \geq 0 \tag{A.13}$$

A.3.3. Escenario 2 ($\varepsilon_1^M = 0$ y $\varepsilon_1^F \neq 0$): convergencia de la deuda pública

En este anexo se va a demostrar que bajo el escenario 3 donde se supone $\varepsilon_1^M = 0$ y $\varepsilon_1^F \neq 0$ y teniendo en cuenta (3.69)-(3.70), la deuda pública es inestable con el parámetro ε_1^{F-}, y puede ser estable con ε_1^{F+}. Para demostrar lo primero note que para garantizar la convergencia se necesita que $2\varepsilon_1^F + 2\varepsilon_1^M - r > 0$ (ver sección A.1. de los anexos) lo cual no se cumple para ε_1^{M-}:

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_1^F + 2\varepsilon_1^M - r &= 2\varepsilon_1^{F-} + 2(0) - r \\
&= 2\left(\frac{(2r-\delta) - \sqrt{(2r-\delta)^2 + 4\lambda}}{4}\right) - r \\
&= \frac{(2r-\delta) - \sqrt{(2r-\delta)^2 + 4\lambda}}{2} - r \\
&= \frac{-\delta - \sqrt{(2r-\delta)^2 + 4\lambda}}{2} < 0
\end{aligned} \tag{A.14}$$

donde $\delta < 0$. Por otro lado, con el parámetro ε_1^{F+} si podría haber convergencia de la deuda, incluso si $r > 0$, siempre y cuando

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_1^F + 2\varepsilon_1^M - r &= 2\varepsilon_1^{F-} + 2(0) - r \\
&= 2\left(\frac{(2r-\delta) + \sqrt{(2r-\delta)^2 + 4\lambda}}{4}\right) - r \\
&= \frac{(2r-\delta) + \sqrt{(2r-\delta)^2 + 4\lambda}}{2} - r \\
&= \frac{-\delta + \sqrt{(2r-\delta)^2 + 4\lambda}}{2} > 0
\end{aligned} \tag{A.15}$$

donde la desigualdad (A.15) se puede escribir de manera más simplificada de la siguiente manera:

$$\begin{gathered}
\frac{-\delta + \sqrt{(2r-\delta)^2 + 4\lambda}}{2} > 0 \\
-\delta + \sqrt{(2r-\delta)^2 + 4\lambda} > 0 \\
(2r-\delta)^2 + 4\lambda > \delta^2 \\
4r^2 - 4r\delta + \delta^2 + 4\lambda > \delta^2 \\
4r^2 - 4r\delta + 4\lambda > 0 \\
r^2 - r\delta + \lambda > 0
\end{gathered} \tag{A.16}$$

A.3.4. Escenario 2 ($\varepsilon_1^M = 0$ y $\varepsilon_1^F \neq 0$): comprobación de que $\varepsilon_3^{F+} \geq 0$ si $\delta \geq r$

Partiendo de (3.67),

$$\varepsilon_3^{F+} = \frac{-(\varepsilon_2^{F+})^2 + 2(\bar{f} - \bar{m})\varepsilon_2^{F+}}{2\delta}$$

$$\varepsilon_3^{F} = \frac{\varepsilon_2^{F+}(-\varepsilon_2^{F+} + 2(\bar{f} - \bar{m}))}{2\delta} \tag{A.17}$$

Sustituyendo (3.72) en (A.17) se obtiene que

$$\varepsilon_3^{F+} = \frac{\left(\frac{2(\bar{f}-\bar{m})\varepsilon_1^{F+}}{2\varepsilon_1^{F+}-(r-\delta)}\right)\left(-\frac{2(\bar{f}-\bar{m})\varepsilon_1^{F+}}{2\varepsilon_1^{F+}-(r-\delta)} + 2(\bar{f} - \bar{m})\right)}{2\delta}$$

$$\varepsilon_3^{F+} = \frac{2(\bar{f} - \bar{m})^2}{2\delta}\left(\frac{\varepsilon_1^{F+}}{2\varepsilon_1^{F+} - (r-\delta)}\right)\left(\frac{-\varepsilon_1^{F+}}{2\varepsilon_1^{F+} - (r-\delta)} + 1\right)$$

$$\varepsilon_3^{F+} = \frac{(\bar{f} - \bar{m})^2}{\delta}\left(\frac{\varepsilon_1^{F+}}{2\varepsilon_1^{F+} - (r-\delta)}\right)\left(\frac{\varepsilon_1^{F+} - (r-\delta)}{2\varepsilon_1^{F+} - (r-\delta)}\right)$$

$$\varepsilon_3^{F+} = \frac{(\bar{f} - \bar{m})^2\varepsilon_1^{F+}}{\delta(2\varepsilon_1^{F+} - (r-\delta))^2}\left(\varepsilon_1^{F+} + (\delta - r)\right)$$

Teniendo en cuenta que $\delta > 0$ y $\varepsilon_1^{F+} \geq 0$ según se mostró en (A.13) (ver sección A.3.2. de los anexos), se puede concluir que

$$\varepsilon_3^{F+} = \frac{(\bar{f} - \bar{m})^2\varepsilon_1^{F+}}{\delta(2\varepsilon_1^{F+} - (r-\delta))^2}\left(\varepsilon_1^{F+} + (\delta - r)\right) \geq 0 \quad \text{si} \quad \delta \geq r \tag{A.18}$$

A.4. Prueba de la Proposición 3.3.1

Teniendo en cuenta (3.67), (3.77) y (3.78) se tiene que comprobar que $\beta_M^{E_2}(t) < \beta^{E_1}(t) < \beta_F^{E_2}(t)$, esto se va a realizar demostrando independientemente $\beta_M^{E_2}(t) < \beta^{E_1}(t)$ y $\beta^{E_1}(t) < \beta_F^{E_2}(t)$. Entonces, en primer lugar teniendo en cuenta (3.67) y (3.77) se busca comprobar que

$$\beta_M^{E_2}(t) < \beta^{E_1}(t)$$

$$A_M^{E_2}e^{-2\gamma^c t} + B_M^{E_2}e^{-\gamma^c t} + C_M^{E_2} < A^{E_1}e^{-2\gamma^c t} + B^{E_1}e^{-\gamma^c t} + C^{E_1}$$

$$0 < (A^{E_1} - A_M^{E_2})e^{-2\gamma^c t} + (B^{E_1} - B_M^{E_2})e^{-\gamma^c t} + (C^{E_1} - C_M^{E_2}) \tag{A.19}$$

En segundo lugar, con (3.67) y (3.78) se busca comprobar que

$$\beta^{E_1}(t) < \beta_F^{E_2}(t)$$

$$A^{E_1}e^{-2\gamma^c t} + B^{E_1}e^{-\gamma^c t} + C^{E_1} < A_F^{E_2}e^{-2\gamma^c t} + B_F^{E_2}e^{-\gamma^c t} + C_F^{E_2}$$
$$0 < (A_F^{E_2} - A^{E_1})e^{-2\gamma^c t} + (B_F^{E_2} - B^{E_1})e^{-\gamma^c t} + C_F^{E_2} - C^{E_1} \tag{A.20}$$

Dado que $e^{-2\gamma^c t} > 0$ y $e^{-2\gamma^c t} > 0$ para todo $t \in [0, \infty)$, entonces para demostrar (A.19)-(A.20) se hará a partir de demostrar las siguientes seis desigualdades: $A^{E_1} > A_M^{E_2}$, $A_F^{E_2} > A^{E_1}$, $B^{E_1} > B_M^{E_2}$, $B_F^{E_2} > B^{E_1}$, $C^{E_1} > C_M^{E_2}$ y $C_F^{E_2} > C^{E_1}$. En cuanto a la primera desigualdad, se obtiene

$$A^{E_1} > A_M^{E_2}$$
$$(\delta + 2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1^+}{2}\right)\left(d^c(0) - \tilde{d}\right)^2 > (\delta + 2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1^+ - \varepsilon_1^{F+}}{2}\right)\left(d^c(0) - \tilde{d}\right)^2$$
$$\frac{\varepsilon_1^+}{2} > \frac{\varepsilon_1^+ - \varepsilon_1^{F+}}{2}$$
$$\frac{\varepsilon_1^+}{2} > \frac{\varepsilon_1^+}{2} - \frac{\varepsilon_1^{F+}}{2}$$
$$0 > -\frac{\varepsilon_1^{F+}}{2}$$
$$\frac{\varepsilon_1^{F+}}{2} > 0$$
$$\varepsilon_1^{F+} > 0 \tag{A.21}$$

Lo que comprueba (A.21) es (A.13) dado que $\varepsilon_1^{F+} > 0$ siempre y cuando $\lambda > 0$. Con respecto a la segunda desigualdad que se debe demostrar se llega a la misma condición que (A.21)

$$A^{E_1} < A_F^{E_2}$$
$$(\delta + 2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1^+}{2}\right)\left(d^c(0) - \tilde{d}\right)^2 < (\delta + 2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1^+ + \varepsilon_1^{F+}}{2}\right)\left(d^c(0) - \tilde{d}\right)^2$$
$$\frac{\varepsilon_1^+}{2} < \frac{\varepsilon_1^+ + \varepsilon_1^{F+}}{2}$$
$$\frac{\varepsilon_1^+}{2} < \frac{\varepsilon_1^+}{2} + \frac{\varepsilon_1^{F+}}{2}$$
$$0 < \frac{\varepsilon_1^{F+}}{2}$$
$$\varepsilon_1^{F+} > 0 \tag{A.22}$$

Ahora se comprueba la tercera desigualdad por demostrar

$$B^{E_1} > B_M^{E_2}$$
$$(\delta + \gamma^c)\left[\varepsilon_1^+\tilde{d} + \frac{\varepsilon_2^+}{2}\right]\left(d^c(0) - \tilde{d}\right) > (\delta + \gamma^c)\left[(\varepsilon_1^+ - \varepsilon_1^{F+})\tilde{d} + \frac{(\varepsilon_2^+ - \varepsilon_2^{F+})}{2}\right]\left(d^c(0) - \tilde{d}\right)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^+\tilde{d} + \frac{\varepsilon_2^+}{2} &> (\varepsilon_1^+ - \varepsilon_1^{F+})\tilde{d} + \frac{(\varepsilon_2^+ - \varepsilon_2^{F+})}{2} \\
\varepsilon_1^+\tilde{d} + \frac{\varepsilon_2^+}{2} &> \varepsilon_1^+\tilde{d} - \varepsilon_1^{F+}\tilde{d} + \frac{\varepsilon_2^+}{2} - \frac{\varepsilon_2^{F+}}{2} \\
0 &> -\varepsilon_1^{F+}\tilde{d} - \frac{\varepsilon_2^{F+}}{2} \\
\varepsilon_1^{F+}\tilde{d} + \frac{\varepsilon_2^{F+}}{2} &> 0 \\
2\varepsilon_1^{F+}\tilde{d} + \varepsilon_2^{F+} &> 0 \qquad \text{(A.23)}
\end{aligned}$$

De antemano ya se sabe que si $\lambda > 0$, entonces $\varepsilon_1^{F+} > 0$ (A.13), y si además por hipótesis se tiene que $\gamma^c > 0$, $\bar{f} > \bar{m}$ y $\delta > r$, por (A.8) y (A.3a) es suficiente para comprobar que $\tilde{d} > 0$ y ε_2^{F+} lo cual comprueba (A.23). La cuarta desigualdad para demostrar se utiliza el mismo argumento que se utilizo en (A.24):

$$\begin{aligned}
B^{E_1} &< B_F^{E_2} \\
(\delta + \gamma^c)\left[\varepsilon_1^+\tilde{d} + \frac{\varepsilon_2^+}{2}\right]\left(d^c(0) - \tilde{d}\right) &< (\delta + \gamma^c)\left[(\varepsilon_1^+ + \varepsilon_1^{F+})\tilde{d} + \frac{(\varepsilon_2^+ + \varepsilon_2^{F+})}{2}\right]\left(d^c(0) - \tilde{d}\right) \\
\varepsilon_1^+\tilde{d} + \frac{\varepsilon_2^+}{2} &< (\varepsilon_1^+ + \varepsilon_1^{F+})\tilde{d} + \frac{(\varepsilon_2^+ + \varepsilon_2^{F+})}{2} \\
\varepsilon_1^+\tilde{d} + \frac{\varepsilon_2^+}{2} &< \varepsilon_1^+\tilde{d} + \varepsilon_1^{F+}\tilde{d} + \frac{\varepsilon_2^+}{2} + \frac{\varepsilon_2^{F+}}{2} \\
0 &< \varepsilon_1^{F+}\tilde{d} + \frac{\varepsilon_2^{F+}}{2} \\
2\varepsilon_1^{F+}\tilde{d} + \varepsilon_2^{F+} &> 0 \qquad \text{(A.24)}
\end{aligned}$$

En tercer lugar, de la quinta desigualdad por demostrar se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
C_M^{E_2} &< C^{E_1} \\
\delta\left(\frac{(\varepsilon_1^+ - \varepsilon_1^{F+})\tilde{d}^2 + (\varepsilon_2^+ - \varepsilon_2^{F+})\tilde{d} + (\varepsilon_3^+ - \varepsilon_3^{F+})}{2}\right) &< \delta\left(\frac{\varepsilon_1^+\tilde{d}^2 + \varepsilon_2^+\tilde{d} + \varepsilon_3^+}{2}\right) \\
(\varepsilon_1^+ - \varepsilon_1^{F+})\tilde{d}^2 + (\varepsilon_2^+ - \varepsilon_2^{F+})\tilde{d} + (\varepsilon_3^+ - \varepsilon_3^{F+}) &< \varepsilon_1^+\tilde{d}^2 + \varepsilon_2^+\tilde{d} + \varepsilon_3^+ \\
\varepsilon_1^+\tilde{d}^2 - \varepsilon_1^{F+}\tilde{d}^2 + \varepsilon_2^+\tilde{d} - \varepsilon_2^{F+}\tilde{d} + \varepsilon_3^+ - \varepsilon_3^{F+} &< \varepsilon_1^+\tilde{d}^2 + \varepsilon_2^+\tilde{d} + \varepsilon_3^+ \\
-\varepsilon_1^{F+}\tilde{d}^2 - \varepsilon_2^{F+}\tilde{d} - \varepsilon_3^{F+} &< 0 \\
\varepsilon_1^{F+}\tilde{d}^2 + \varepsilon_2^{F+}\tilde{d} + \varepsilon_3^{F+} &> 0 \\
\tilde{d}(\varepsilon_1^{F+}\tilde{d} + \varepsilon_2^{F+}) + \varepsilon_3^{F+} &> 0 \qquad \text{(A.25)}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo demostrado en (A.23)-(A.24) y que si $\delta > r$ y $\varepsilon_1^+ > 0$ (por $\lambda > 0$) a partir de (A.18) se obtiene que $\varepsilon_3^{F+} > 0$, todo lo cual demuestra (A.25). Con respecto a la sexta y última desigualdad se utiliza el mismo argumento que pra demostrar (A.25) debido a que se llega a la misma expresión

$$
\begin{aligned}
C_F^{E_2} &> C^{E_1} \\
\delta\left(\frac{(\varepsilon_1^+ + \varepsilon_1^{F+})\tilde{d}^2 + (\varepsilon_2^+ + \varepsilon_2^{F+})\tilde{d} + (\varepsilon_3^+ + \varepsilon_3^{F+})}{2}\right) &> \delta\left(\frac{\varepsilon_1^+\tilde{d}^2 + \varepsilon_2^+\tilde{d} + \varepsilon_3^+}{2}\right) \\
(\varepsilon_1^+ + \varepsilon_1^{F+})\tilde{d}^2 + (\varepsilon_2^+ + \varepsilon_2^{F+})\tilde{d} + (\varepsilon_3^+ + \varepsilon_3^{F+}) &> \varepsilon_1^+\tilde{d}^2 + \varepsilon_2^+\tilde{d} + \varepsilon_3^+ \\
\varepsilon_1^+\tilde{d}^2 + \varepsilon_1^{F+}\tilde{d}^2 + \varepsilon_2^+\tilde{d} + \varepsilon_2^{F+}\tilde{d} + \varepsilon_3^+ + \varepsilon_3^{F+} &> \varepsilon_1^+\tilde{d}^2 + \varepsilon_2^+\tilde{d} + \varepsilon_3^+ \\
\varepsilon_1^{F+}\tilde{d}^2 + \varepsilon_2^{F+}\tilde{d} + \varepsilon_3^{F+} &> 0 \\
\tilde{d}(\varepsilon_1^{F+}\tilde{d} + \varepsilon_2^{F+}) + \varepsilon_3^{F+} &> 0 \qquad \text{(A.26)}
\end{aligned}
$$

Para concluir, habiendo comprobado las seis desigualdades propuestas (A.21)-(A.26) bajo las hipótesis establecidas, se concluye al final que $\beta_M^{E_2}(t) < \beta^{E_1}(t)$ y $\beta^{E_1}(t) < \beta_F^{E_2}(t)$, y por ende, $\beta_M^{E_2}(t) < \beta^{E_1}(t) < \beta_F^{E_2}(t)$.

A.5. Prueba de la Proposición 3.3.2

Teniendo en cuenta que las asignaciónes de costos económicos descumpuestas encontradas (3.67) y (3.77)-(3.78) son cada una un IDP dinámicamente estable (Definición 2.4.6-Proposición 2.4.1) que satisfacen (2.22) y por lo cual si se suman de manera descontada para todo el intervalo temporal $[0,\infty)$ se obtiene el valor de Shapley desde el inicio del juego

$$\phi_M^{E_2}(d(0),0) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\beta_M^{E_2}(t)dt \qquad \text{(A.27)}$$

$$\phi_F^{E_2}(d(0),0) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\beta_F^{E_2}(t)dt \qquad \text{(A.28)}$$

$$\phi^{E_1}(d(0),0) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\beta^{E_1}(t)dt \qquad \text{(A.29)}$$

Teniendo en cuenta la Proposición 3.3.1 si se tiene que $\bar{f} > \bar{m}$, $\gamma^c > 0$ y $\delta > r$, entonces se tiene que $\beta_M^{E_2}(t) < \beta^{E_1}(t) < \beta_F^{E_2}(t)$ para todo $t \in [0,\infty)$, y por lo cual se llega a que [1]

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}\beta_M^{E_2}(t)dt < \int_0^\infty e^{-\delta t}\beta^{E_1}(t)dt < \int_0^\infty e^{-\delta t}\beta_F^{E_2}(t)dt$$

Y por lo cual

$$\phi_M^{E_2}(d(0),0) < \phi^{E_1}(d(0),0) < \phi_F^{E_2}(d(0),0) \qquad \text{(A.30)}$$

A.6. Prueba de la Proposición 3.3.3

En primer lugar note que al considerar $\Delta = \bar{f} - \bar{m} = 0$, se obtiene que $\tilde{d} = 0$ y $\varepsilon_2^- = 0$ teniendo en cuenta (A.8) y (A.3a). Por lo cual, de (3.67) se obtiene que

$$\beta^{E_1}(t)|_{\Delta=0} = (\delta + 2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1^+}{2}\right)(d^c(0) - 0)^2 e^{-2\gamma^c t} + (\delta + \gamma^c)\left[\varepsilon_1^+(0) + \frac{0}{2}\right](d^c(0) - 0)\, e^{-\gamma^c t} + \delta\left(\frac{\varepsilon_1^+(0)^2 + \varepsilon_2^+(0) + \varepsilon_3}{2}\right)$$

$$\beta^{E_1}(t)|_{\Delta=0} = (\delta + 2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1^+}{2}\right)(d^c(0))^2 e^{-2\gamma^c t} + \frac{\delta\varepsilon_3^+}{2} \tag{A.31}$$

Por otro lado, si por el contrario se establece $\Delta = \bar{f} - \bar{m} > 0$ en (3.67) se obtiene que

$$\beta^{E_1}(t)|_{\Delta>0} = (\delta + 2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1^+}{2}\right)\left(d^c(0) - \tilde{d}\right)^2 e^{-2\gamma^c t} + (\delta + \gamma^c)\left[\varepsilon_1^+\tilde{d} + \frac{\varepsilon_2^+}{2}\right]\left(d^c(0) - \tilde{d}\right) e^{-\gamma^c t} + \delta\left(\frac{\varepsilon_1^+\tilde{d}^2 + \varepsilon_2^+\tilde{d} + \varepsilon_3^+}{2}\right) \tag{A.32}$$

Como por hipótesis se tiene que $\gamma^c > 0$, a partir de (A.31)-(A.32) se obtiene que

$$\begin{aligned} C^{E_1}|_{\Delta=0} &= \lim_{t\to\infty} \beta^{E_1}(t)|_{\Delta=0} \\ &= \lim_{t\to\infty} (\delta + 2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1^+}{2}\right)(d^c(0))^2 e^{-2\gamma^c t} + \frac{\delta\varepsilon_3^+}{2} \\ &= (\delta + 2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1^+}{2}\right)(d^c(0))^2 \lim_{t\to\infty} e^{-2\gamma^c t} + \lim_{t\to\infty} \frac{\delta\varepsilon_3^+}{2} \\ &= (\delta + 2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1^+}{2}\right)(d^c(0))^2 (0) + \frac{\delta\varepsilon_3^+}{2} \\ &= \frac{\delta\varepsilon_3^+}{2} \end{aligned} \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned}
C^{E_1}|_{\Delta>0} &= \lim_{t\to\infty} \beta^{E_1}(t)|_{\Delta>0} \\
&= \lim_{t\to\infty} (\delta+2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1^+}{2}\right)\left(d^c(0)-\tilde{d}\right)^2 e^{-2\gamma^c t} \\
&+ (\delta+\gamma^c)\left[\varepsilon_1^+\tilde{d}+\frac{\varepsilon_2^+}{2}\right]\left(d^c(0)-\tilde{d}\right)e^{-\gamma^c t} + \delta\left(\frac{\varepsilon_1^+\tilde{d}^2+\varepsilon_2^+\tilde{d}+\varepsilon_3^+}{2}\right) \\
&= (\delta+2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1^+}{2}\right)\left(d^c(0)-\tilde{d}\right)^2 \lim_{t\to\infty} e^{-2\gamma^c t} \\
&+ (\delta+\gamma^c)\left[\varepsilon_1^+\tilde{d}+\frac{\varepsilon_2^+}{2}\right]\left(d^c(0)-\tilde{d}\right)\lim_{t\to\infty} e^{-\gamma^c t} + \lim_{t\to\infty}\delta\left(\frac{\varepsilon_1^+\tilde{d}^2+\varepsilon_2^+\tilde{d}+\varepsilon_3^+}{2}\right) \\
&= (\delta+2\gamma^c)\left(\frac{\varepsilon_1^+}{2}\right)\left(d^c(0)-\tilde{d}\right)^2 (0) \\
&+ (\delta+\gamma^c)\left[\varepsilon_1^+\tilde{d}+\frac{\varepsilon_2^+}{2}\right]\left(d^c(0)-\tilde{d}\right)(0) + \delta\left(\frac{\varepsilon_1^+\tilde{d}^2+\varepsilon_2^+\tilde{d}+\varepsilon_3^+}{2}\right) \\
&= \delta\left(\frac{\varepsilon_1^+\tilde{d}^2+\varepsilon_2^+\tilde{d}+\varepsilon_3^+}{2}\right) \qquad \text{(A.34)}
\end{aligned}$$

Comparando (A.33) con (A.34) se obtiene que

$$\begin{gathered}
C^{E_1}|_{\Delta>0} > C^{E_1}|_{\Delta=0} \\
\delta\left(\frac{\varepsilon_1^+\tilde{d}^2+\varepsilon_2^+\tilde{d}+\varepsilon_3^+}{2}\right) > \frac{\delta\varepsilon_3^+}{2} \\
\delta\left(\frac{\varepsilon_1^+\tilde{d}^2+\varepsilon_2^+\tilde{d}}{2}\right) + \frac{\delta\varepsilon_3^+}{2} > \frac{\delta\varepsilon_3^+}{2} \\
\delta\left(\frac{\varepsilon_1^+\tilde{d}^2+\varepsilon_2^+\tilde{d}}{2}\right) > 0 \\
\frac{\delta}{2}\tilde{d}\left(\varepsilon_1^+\tilde{d}+\varepsilon_2^+\right) > 0 \qquad \text{(A.35)}
\end{gathered}$$

Como los parámetros restantes en (A.35) vienen del caso donde $\Delta = \bar{f} - \bar{m} > 0$, además teniendo en cuenta por hipótesis que $\delta > r$ y $\lambda, \kappa > 0$, por lo cual $\varepsilon_1^+ > 0$ (ver sección A.2.1 de los anexos), $\varepsilon_2^+ > 0$ debido a que $\bar{f} - \bar{m} > 0$ y $\varepsilon_1^+ > 0$ (A.3a), y por último $\tilde{d} > 0$ por $\bar{f} - \bar{m} > 0$ y $\delta > r$, todo lo anterior comprueba (A.35) y por ende la proposición.

A.7. Prueba de la Proposición 3.3.4

De acuerdo a lo visto de (3.67) en la Proposición 3.3.3 si el valor que toma $\beta^{E_1}(t)$ cuando $t \to \infty$ teniendo en cuenta que $\gamma^c > 0$ y $\Delta = \bar{f} - \bar{m} > 0$ es el encontrado como C^{E_1} en

(A.34). Derivandolo con respecto a Δ se obtiene lo siguiente

$$\frac{\partial C^{E_1}}{\partial \Delta} = \frac{\delta}{2}\left(\varepsilon_1^+ 2\tilde{d}\frac{\partial \tilde{d}}{\partial \Delta} + \frac{\partial \varepsilon_2^+}{\partial \Delta}\tilde{d} + \varepsilon_2^+\frac{\partial \tilde{d}}{\partial \Delta} + \frac{\partial \varepsilon_3^+}{\partial \Delta}\right)$$

$$\frac{\partial C^{E_1}}{\partial \Delta} = \frac{\delta}{2}\left((2\varepsilon_1^+\tilde{d} + \varepsilon_2^+)\frac{\partial \tilde{d}}{\partial \Delta} + \frac{\partial \varepsilon_2^+}{\partial \Delta}\tilde{d} + \frac{\partial \varepsilon_3^+}{\partial \Delta}\right) \tag{A.36}$$

Para probar que (A.36) sea positivo, hay que tener en cuenta que el término $2\varepsilon_1^+\tilde{d} + \varepsilon_2^+$ es positivo como se demostró en (A.35) con las mismas hipótesis necesarias para que sea así. Por lo tanto, dado que $\delta > 0$ solo resta en demostrar que $\frac{\partial \tilde{d}}{\partial \Delta}, \frac{\partial \varepsilon_2^+}{\partial \Delta}, \frac{\partial \varepsilon_3^+}{\partial \Delta} > 0$. En primer lugar, se demostrará que $\frac{\partial \varepsilon_2^+}{\partial \Delta} > 0$, teniendo en cuenta ε_2^+ en (A.3a) con $\Delta = \bar{f} - \bar{m}$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\varepsilon_2^+ = \frac{2\Delta\varepsilon_1^+}{\gamma^c + \delta} \tag{A.37}$$

de lo cual se obtiene que

$$\frac{\partial \varepsilon_2^+}{\partial \Delta} = \frac{2\varepsilon_1^+}{\gamma^c + \delta} \tag{A.38}$$

Teniendo en cuenta $\delta > 0$ y por hipótesis se tiene que $\gamma^c > 0$ y que $\lambda, \kappa > 0$ de lo cual se obtiene que $\varepsilon_1^+ > 0$ (ver sección A.2.1. de los anexos), todo esto comprueba que $\frac{\partial \varepsilon_2^+}{\partial \Delta} > 0$ (A.38). Note que considerando (A.37)-(A.38) se tiene la siguiente relación $\frac{\partial \varepsilon_2^+}{\partial \Delta}\Delta = \varepsilon_2^+$.

Ahora se va a probar que $\frac{\partial \varepsilon_3^+}{\partial \Delta} > 0$. Partiendo de ε_3^+ en (3.45) expresandolo de la siguiente manera se tiene que

$$\varepsilon_3^+ = \frac{-(\varepsilon_2^+)^2 + \varepsilon_2^+\Delta}{\delta} \tag{A.39}$$

Derivando (A.39) con respecto a Δ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_3^+}{\partial \Delta} &= \frac{1}{\delta}\left(-2\varepsilon_2^+\frac{\partial \varepsilon_2^+}{\partial \Delta} + \frac{\partial \varepsilon_2^+}{\partial \Delta}\Delta + \varepsilon_2^+\right) \\
&= \frac{1}{\delta}\left(-2\varepsilon_2^+\frac{\partial \varepsilon_2^+}{\partial \Delta} + \varepsilon_2^+ + \varepsilon_2^+\right) \\
&= \frac{1}{\delta}\left(-2\varepsilon_2^+\frac{\partial \varepsilon_2^+}{\partial \Delta} + 2\varepsilon_2^+\right) \\
&= \frac{2\varepsilon_2^+}{\delta}\left(-\frac{\partial \varepsilon_2^+}{\partial \Delta} + 1\right) \\
&= \frac{2\varepsilon_2^+}{\delta}\left(\frac{-2\varepsilon_1^+}{\gamma^c + \delta} + 1\right) \\
&= \frac{2\varepsilon_2^+}{\delta}\left(\frac{-2\varepsilon_1^+}{4\varepsilon_1^+ - r + \delta} + 1\right) \\
&= \frac{2\varepsilon_2^+}{\delta}\left(\frac{-2\varepsilon_1^+ + 4\varepsilon_1^+ - r + \delta}{4\varepsilon_1^+ - r + \delta}\right) \\
&= \frac{2\varepsilon_2^+}{\delta}\left(\frac{2\varepsilon_1^+ - r + \delta}{4\varepsilon_1^+ - r + \delta}\right) \\
&= \frac{2\varepsilon_2^+}{\delta}\left(\frac{2\varepsilon_1^+ + (\delta - r)}{\gamma^c + \delta}\right)
\end{aligned} \tag{A.40}$$

Teniendo en cuenta que $\delta > 0$ y que por hipótesis $\gamma^c > 0$, $\varepsilon_1^+ > 0$ a partir de que $\lambda, \kappa > 0$, además que a partir de (A.37) se obtiene que $\varepsilon_2^+ > 0$ por $\gamma^c, \varepsilon_1^-, \Delta > 0$ y por último que se asumiera que $\delta > r$, todo esto implica que $\frac{\partial \varepsilon_3^+}{\partial \Delta} > 0$ (A.40). Por último para mostrar que $\frac{\partial \tilde{d}}{\partial \Delta} > 0$ se va a expresar a $\tilde{d}$ (A.8) de la siguiente manera

$$\tilde{d} = \frac{\Delta\,(\delta - r)}{\gamma^c(\gamma^c + \delta)} \tag{A.41}$$

Derivando (A.41) con respecto a Δ se obtiene que

$$\frac{\partial \tilde{d}}{\partial \Delta} = \frac{(\delta - r)}{\gamma^c(\gamma^c + \delta)} = \frac{\tilde{d}}{\Delta} \tag{A.42}$$

Dado que $\delta > 0$ y a partir de las hipótesis $\gamma^c > 0$ y $\delta > r$, se comprueba que $\frac{\partial \tilde{d}}{\partial \Delta} > 0$ (A.42). Habiendo probado que $\frac{\partial \tilde{d}}{\partial \Delta}, \frac{\partial \varepsilon_2^+}{\partial \Delta}, \frac{\partial \varepsilon_3^+}{\partial \Delta} > 0$ bajo las hipótesis propuestas se demuestra que $\frac{\partial C^{E_1}}{\partial \Delta} > 0$ (A.36).

Bibliografía

[1] Apostol, Tom M. ; Cantarell, Francisco V.: *Calculus: volumen 1. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Reverté, 1999

[2] Bernanke, Ben S. ; Laubach, Thomas ; Mishkin, Frederic S. ; Posen, Adam S.: *Inflation targeting: lessons from the international experience*. Princeton University Press, 2018

[3] Engwerda, Jacob: *LQ dynamic optimization and differential games*. John Wiley & Sons, 2005

[4] Kamien, Morton I. ; Schwartz, Nancy L.: *Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management*. Courier Corporation, 2012

[5] Labonte, Marc ; Makinen, Gail E.: *Monetary policy and price stability*. Nova Publishers, 2006

[6] Lambertini, Luca: *Differential games in industrial economics*. Cambridge University Press, 2018

[7] Larraín, Felipe ; Sachs, Jeffrey D.: *Macroeconomía en la economía global*. Pearson Educación, 2002

[8] Monsalve, Sergio ; Arévalo, Julián [u. a.]: Un curso de teoría de juegos clásica. En: *Books* 1 (2005)

[9] Morgenstern, Oskar ; Von Neumann, John: *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press, 1953

[10] Myerson, Roger B.: *Game theory*. Harvard university press, 2013

[11] Pecha, Arsenio: *Optimización estática y dinámica en economía*. Univ. Nacional de Colombia, 2005

[12] Peleg, Bezalel ; Sudhölter, Peter: *Introduction to the theory of cooperative games*. Vol. 34. Springer Science & Business Media, 2007

[13] Petrosjan, Leon ; Zaccour, Georges: Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction. En: *Journal of economic dynamics and control* 27 (2003), Nr. 3, p. 381–398

[14] Petrosjan, Leon A.: Cooperative differential games. En: *Advances in Dynamic Games Applications to Economics, Finance, Optimization, and Stochastic Control*. Springer, 2005, p. 183–200

[15] Roth, Alvin E.: *The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley*. Cambridge University Press, 1988

[16] Shapley, Lloyd S.: A value for n-person games. En: *Contributions to the Theory of Games* 2 (1953), Nr. 28, p. 307–317

[17] Tabellini, Guido: Money, debt and deficits in a dynamic game. En: *Journal of Economic Dynamics and Control* 10 (1986), Nr. 4, p. 427–442

[18] Van Aarle, Bas ; Bovenberg, Lans ; Raith, Matthias: Monetary and fiscal policy interaction and government debt stabilization. En: *Journal of Economics* 62 (1995), Nr. 2, p. 111–140

[19] Weber, Thomas A. [u. a.]: Optimal control theory with applications in economics. En: *MIT Press Books* 1 (2011)

[20] Yeung, David W. ; Petrosjan, Leon A.: *Cooperative stochastic differential games*. Springer Science & Business Media, 2006

[21] Zaccour, Georges: Time consistency in cooperative differential games: A tutorial. En: *INFOR: Information Systems and Operational Research* 46 (2008), Nr. 1, p. 81–92