Unidad didáctica sobre el concepto de límite para el fortalecimiento de la argumentación.

Juan Sebastián Builes Peláez

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2020

Unidad didáctica sobre el concepto de límite para el fortalecimiento de la argumentación.

Juan Sebastián Builes Peláez

Trabajo final de maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Directora:
Anlly Viviana Montoya
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2020

Agradecimientos

Primeramente, agradezco a la Universidad Nacional de Colombia, por haberme brindado la oportunidad de fortalecer mis conocimientos.

Agradezco también a mi directora de tesis Mag. Anlly Viviana Montoya por haberme brindado su capacidad y conocimiento, durante el desarrollo de este trabajo, además de la paciencia que me tuvo durante el trascurso de la misma.

Resumen

En la presente propuesta de investigación documental se encuentra planteada una unidad didáctica para hacer frente a una de las problemáticas que se evidencia en las clases de matemáticas. Dicha aplicación didáctica parte del planteamiento de Yopp (2020), Yopp (2018), quien se propone el fortalecimiento de la argumentación a través de *contrapositivas* y *contraejemplos,* esta se desarrolla como una investigación documental, donde se realiza una revisión critica del estado del conocimiento y con esta información se realiza una unidad didáctica y se dan como resultados a modo de prospección por que no se pudo realizar la implementación por la coyuntura nacional de la emergencia sanitaria.

Palabras claves: enseñanza de las matemáticas, argumentación matemática, unidad didáctica.

Abstract

Didactic unity on the concept of limit for the strengthening of argumentation.

In the present proposal of documental investigation you will find a didactic unity to face one of the problematic that can be evidence in a class of mathematics. Such aplication of the didactics y bases on the aproach of Yopp (2020), Yopp (2018), who proposes the strenthening of argumentation through *counterexamples* and *contrapositive,* this is develop throught a documentary research, in wich is make a critical review of the state of the art and wiht this information a didactic unity is made, and the it gives a results in a way of what can induce this unity in the students, all of this due to the national situacion of the health emergency.

Key words: Mathematics teaching, mathematic argumentation and didactic unit.

Contenido

Lista de tablas

Capítulo 1. Diseño teórico

1.1 Selección y delimitación del problema

Fortalecimiento de la argumentación del concepto de límite.

1.2 Planteamiento del problema

El propósito de esta investigación documental es hacer una revisión crítica del estado del arte sobre el tema de la argumentación en la enseñanza de la matemática, la cual se considera pertinente para superar el aprendizaje netamente memorístico de los algoritmos, que deja a un lado la argumentación, el cual es un proceso que puede diversificar la perspectiva sobre las matemáticas y variar la concepción de su finalidad en los estudiantes como mencionan Jiménez y Pineda (2012). Es importante entonces mencionar, es una investigación documental, la cual constara de cuatro fases, la primera fase (diagnostica) es el establecimiento de la problemática desde unos referentes teóricos, la segunda fase (descriptiva) es el desarrollo de unos conceptos teóricos para ser usados para fortalecer la falencia encontrada, una tercera fase (diseño) es la elaboración de una unidad didáctica a la luz de los conceptos y una cuarta fase (conclusiones y recomendaciones) donde se mira el trabajo realizado en torno a los objetivos planteados. Para la realización de esto, es de vital importancia tener claridad a que se refiere cuando se habla de argumentación matemática, y esta puede definirse como el proceso en que los estudiantes toman afirmaciones y las validan o refutan mediante procesos lógicos matemáticos que no tienen que ser completamente formales (Yopp et al. (2020), Maher et al. (2018), Ayalon (2019)).

1.2.1 Descripción del problema

Los maestros deben estar pensando constantemente en cómo transformar sus prácticas actualizándose y preparándose a los nuevos retos que van apareciendo con el trascurso del tiempo, dado que la ciencia está en constante cambio por la continua investigación desde los diferentes campos, entre ellos la educación, es por esta razón que se hace de vital importancia atender unos incesantes replanteamientos sobre cómo enseñar y que enseñar, para generar más y mejores aprendizajes.

Las clases de matemáticas suelen estar llenas de aspectos de cálculo de diferentes cuestiones, que puede ser desde calcular distancias, áreas, volúmenes, pendientes, probabilidades, etc. Los cuáles son enseñados a partir de fórmulas que les permite determinar el valor de alguna variable, llegando como consecuencia de esto a una resolución de problemas en el mejor de los casos, esto de acuerdo con Marín et al (2018). El proceso recién descrito cumple la función para el desarrollo de una clase de matemáticas, dado que se logran presentar unas nociones de las matemáticas, pero ¿es realmente suficiente esto para la comprensión de las matemáticas?

Entonces, de acuerdo con esto, se puede establecer como fundamental cuando cuestionamos nuestra práctica docente del área de matemáticas y ciencias, ciertos elementos parecen ser ausentes, dado que el aprendizaje que se está logrando reside meramente, en unas habilidades que se pueden considerar memorísticas o mecánicas, donde no se entra a conjugar su conocimiento con su espacio natural, o presentándose de otra manera, existe una ausencia de crítica sobre lo que el estudiante está aprendiendo.

Desde lo anterior, haciendo una observación de lo que se encuentra en el aula de clase, se ve que los estudiantes llegan formados desde esta perspectiva se les facilita calcular variedad de cosas, pero de acuerdo con Marín et al (2018), los estudiantes no logran entender ni preocuparse por los fundamentos teóricos que hay detrás de todo esto, y como se establecen las bases de estos conceptos, hasta llegar al punto de no cuestionar los teoremas y asignarles un alto grado de veracidad sin si quiera evaluar mentalmente esa noción que se presenta. Es por esto que se hace necesario fortalecer este aspecto por medio de la argumentación para que tengan la capacidad poner en tela de juicio afirmaciones matemáticas.

Históricamente, se encuentra que las clases de matemáticas y ciencias, de acuerdo con Jiménez y Pineda (2012) han estado diseñadas de una manera unilateral, en la cual se percibe al estudiante como un mero receptor del conocimiento y estos únicamente aceptan las verdades sobre cierta temática especifica sin posibilidades de refutación, o de otra manera, ausente de posibilidades críticas o debate sobre lo que está conociendo, porque se da por hecho que lo que dice el profesor es cierto.

Pensando en la anterior idea, y tratando de encontrar una alternativa a esta posibilidad, se da los aspectos comunicativos, concretamente refiriéndose a la argumentación, el debate y la crítica, como una elección diferente, ya que como menciona Jiménez y Pineda (2012) la comunicación cumple un rol fundamental en la matemática, dado es un lenguaje y en muchos casos el lenguaje del profesor se puede diferenciar con el del estudiante, y si esto ocurre es imposible lograr un aprendizaje, debido a que no se comprende lo que se habla, pero en caso contrario, entendiendo esto como que ambos establecen unas bases comunes sobre los principales conceptos que se estén trabajando, pueden traer consigo aspectos que le permiten al estudiante cuestionar tanto su pensamiento, el de sus pares y el del profesor, habilitando posibilidades de debate, que pueden diferenciar su manera de pensamiento sobre las nociones matemáticas, como elaborador de su propio conocimiento y cambiar el rol de receptor a participante activo.

De acuerdo con el MEN (1998) el alumno debe enfocar su deber en clase de manera similar a lo que se encarga el científico, porque su rol no debe caer únicamente en aprenderse una gran cantidad de axiomas y teoremas, sino usar estas nociones y resolver problemas, y no solo esto, también es su deber preguntarse. Entonces un buen acercamiento a que debe centrarse el alumno es como dice el ministerio de educación nacional es:

> Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigiría que él actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca las que están conformes con la cultura, que tome las que le son útiles, etcétera. (MEN, 1998, p. 13)

Para desarrollar esta perspectiva, es necesario tener en cuenta ciertas nociones sobre qué rol deben cumplir las matemáticas en el pensamiento de los estudiantes, esto, desde el MEN (1998), es tener en consideración al conocimiento matemático como el resultado de un proceso humano que está en continuo desarrollo, expresándolo de otra manera como una ciencia no culminada que posee una parte formal pero que esta no es su totalidad.

Las matemáticas usualmente son un tópico que conlleva a muchas cargas en el pensamiento de los estudiantes, de que es un contenido difícil, esto puede ser explicado como dice Ramilia (2013) instaurando que las dificultades que encuentran los estudiantes caen a dos tipos de categorías, el primero es el ambiente, el cual es compuesto por su núcleo familiar, amigos y conocidos, los cuales llenan a los estudiantes de preconcepciones que pueden favorecer y entorpecer los procesos de aprendizajes por los supuestos que ellos traigan consigo; el segundo es la motivación, que es una variable que los docentes podemos alterar en los estudiantes dependiendo de la manera en que se presenten los tópicos, esto es lo que se busca cuando se cambia de metodologías de la enseñanza, y esto es lo que se intenta lograr con el medio de la argumentación dado que empodera a los estudiantes con el proceso de construcción del conocimiento.

En este trabajo se propenderá buscar una formación en matemáticas que permita lograr las competencias básicas del área de matemáticas, pero además lograr un nivel donde la argumentación sea la principal preocupación, ya que como lo mencionan Cardetti y LeMay (2019) la argumentación es una de las competencias fundamentales en todos los campos del conocimiento, con grandes implicaciones no solo sobre el mundo académico si no la parte social, el desarrollo de habilidades comunicativas y mejora de interacción con sus contra partes.

1.2.3 Antecedentes

Para una mejor comprensión del estado actual del hecho a investigar, es importante conocer como se ha dado la enseñanza de la matemática teniendo en cuenta la argumentación y las habilidades comunicativas, por esta razón se describirán ciertos trabajos que se consideran fundamentales para la interpretación y análisis de argumentos matemáticos en aulas de clase.

Se presentará entonces, la tabla 1.1 que es la búsqueda en EBSCO con el código de búsqueda Math AND Argumentation, la tabla 1.2 que es la búsqueda en Science direct; Argumentation in science education y la tabla 1.3 que es la búsqueda en Google Scholar; Argumentación y educación, todas estas tablas contienen diferentes propuestas que han sido realizadas en torno a la argumentación en matemáticas. Cada tabla contiene la siguiente información, en la primera columna están los autores, en la segunda en año de la realización del trabajo, la tercera columna el título del trabajo, la cuarta columna el lugar donde se realizó la investigación, la cuarta columna es un corto resumen del trabajo, la quinta columna las conclusiones y la sexta columna se encuentran los elementos a destacar y se mencionan porque son importantes estos trabajos y como contribuyeron estos a la realización de esta investigación.

Tabla 1.1

Antecedentes 1 (Ebsco; Math AND Argumentation)

Autor	Año	Titulo	Locación	Resumen	Conclusiones	Destacar
Cardetti, F. y LeMay, S.	2019	Argumentation: Building Students' Capacity for Reasoning Essential to Learning Mathematics and Sciences	Estados unidos	Es un estudio enfocado en los resultados de un trabajo para incrementar la argumentación en las matemáticas y ciencias en la universidad, identificando que hay	Ellos elaboran el desarrollo de esa categorización, mostrando los elementos que cada una aporta en el proceso de enriquecimiento de la argumentación, y compartiendo	Este trabajo permite entender la argumentación como una habilidad que se puede evaluar desde diferentes ángulos, siendo uno de estos los

				5 categorías argumentativas que son darle sentido a los procedimientos, analizar las concepciones, unir los conceptos, conexiones a conocimientos previos y las conexiones con las representaciones, entonces haciendo énfasis en esas categorías se llevan al aula como tareas matemáticas.	ejemplos de cómo desarrollar esas categorías teniendo en cuenta que estas pueden coexistir dentro de una misma actividad. Y también, señalan la importancia de trasnacional de una perspectiva enfocada a los algoritmos a una en torno a la argumentación y sus implicaciones a las demás áreas del conocimiento.	*contrajemeplos*, usados en la unidad didáctica.
Nodelman. V.	2019	Counterexamples in Mathematics Education: Why, Where, and How? – Software aspect.	Bielorrusia	Es un trabajo que busca involucrar el concepto de límite para el desarrollo del razonamiento matemático enfocado, a través de preguntas y software matemático, en donde las representaciones juegan un rol que se encarga de elaborar nociones con preguntas sobre estas representaciones.	No tiene	La unidad didáctica que se encuentra en el anexo 2 de este trabajo, en uno de sus momentos se basó en una de las actividades planteadas en este trabajo, la actividad constaba sobre la visualización por medio de software unos límites con respectivas preguntas a reflexionar por medio de los *contraejemplos*.
Max, B. y Welder, R.	2020	Mathematics Teacher Educators' Addressing the Common Core Standards for Mathematical Practice in Content Courses for Prospective Elementary Teachers: A Focus on Critiquing the Reasoning of Others	Estados unidos	En este trabajo se habla del currículo estadounidense en el cual está compuesto por ciertos estándares para la práctica matemática, donde se da énfasis al estándar número 3 asociado a la argumentación y la crítica al razonamiento de los pares dando a conocer como se está	Como conclusión, presentan la importancia del dialogo con los pares sobre los conceptos que se encuentren desarrollando dentro del aula de clase, además de lo mucho que se puede enriquecer el pensamiento de los estudiantes si el	El trabajo muestra como la discusión entre los pares, fortalece la argumentación, por eso en la unidad se ve como compartir ideas con los compañeros es un elemento que aparece constantemente.

				desarrollando este y el potencial que tiene.	profesor analiza como es el proceso de pensamiento que el estudiante usa, esto, para crear oportunidades de aprendizaje	
Meyer, M. y Schnell, S.	2020	What counts as a “good” argument in school?—how teachers grade students’ mathematical arguments	Alemania	Este trabajo, realizado en Alemania entonces se encuentra en un contexto en el cual la argumentación matemática hace parte del currículo escolar y los investigadores se preguntan sobre cómo se están desarrollando las evaluaciones de estos procesos y como se pueden realizar.	Como conclusión al trabajo, encuentran que a pesar de lo problemático que pueda llegar a evaluar los argumentos de los estudiantes, establecen tres dimensiones teóricas en los que se considera fundamental su evaluación por ser inherente a todo argumento, las cuales son estructura, contenido y orientación.	Se recalca que este trabajo no se puedo realizar una implementación, pero igual es importante enmarcar que elementos son los que deben ser tenidos en cuenta a la hora de realizar la evaluación de los argumentos de los estudiantes.

Fuente: Autor

Tabla 1.2.

Antecedentes 2 (Science direct; Argumentation in science education)

Autor	Año	Titulo	Locación	Resumen	Conclusiones	Destacar
Lazarou, D., Erduran, S. y Sutherland, R.	2017	Argumentation in science education as an evolving concept: Following the object of activity	Chipre	Este trabajo, es sobre la promoción de la argumentación en la enseñanza de las ciencias en primaria, donde realizan un trabajo empírico de dos años donde observan la trasformación del concepto argumentación.	Establecen como conclusión, que el concepto de argumentación no puede ser algo estático en un proceso formativo, si no como algo evolutivo	Se sigue destacando la argumentación como fundamental en los procesos de enseñanza, y que esta debe ser observada en cada una de las actividades que se realice para analizar el desarrollo de estaba habilidad dado que esta no es estática.
Yopp, D.	2017	Eliminating counterexamples:	Estados unidos	Se realiza un proceso personalizado con	Como resultado de la intervención el	Esta es la línea que se tomara en

		A Grade 8 student’s learning trajectory for contrapositive proving		estudiantes del grado octavo por medio de una estrategia que es eliminar el contraejemplo, que lo que se busca es usar afirmaciones y de esas afirmaciones encontrar su *contrapositiva* para después buscar que la afirmación no tiene *contrajemplos*,	autor halla que si hay un impacto positivo a la argumentación del estudiante cuando utiliza las *contrapositivas* porque mejora su habilidad de construir, criticar y validar afirmaciones	este trabajo para la realización de la propuesta didáctica que se va a presentar, asi que en el marco teórico se expande más sobre las nociones presentadas en este y otros textos de esta misma línea, como los elementos de los *contraejemplos*, las *contrapositivas*, las pruebas y los argumentos viables.
Martins, M. y Justi, R.	2019	Analysis of the relationships between students' argumentation and their views on nature of science	Brasil	El objetivo del trabajo es discutir las maneras de analizar las relaciones entre la argumentación de los estudiantes y su relación con sus perspectivas de la naturaleza de la ciencia en un debate socio científico, la información se recoge de una institución educativa publica con 18 estudiantes.	El reconocimiento de la naturaleza de la ciencia, logro en los estudiantes una posibilidad de mejorar sus argumentos que se presentaban en un debate entre sus compañeros, dando asi unos argumentos correspondientes con su comprensión de la naturaleza de la ciencia.	La naturaleza de la ciencia también fortalece la argumentación, por esto un modelo de unidad didáctica como el que plantea Alvarez (2013) es tan importante, porque en cada momento de la unidad se da un acercamiento a la historia y epistemología del concepto que se está trabajando.
Lobczowski, N., Allen, E., Firetto, C. y Greene, J.	2020	An exploration of social regulation of learning during scientific argumentation discourse	Estados unidos	La argumentación y el discurso científico son fundamentales para la educación del siglo XXI, y los estudiantes se encuentran en dificultades cuando participan en actividades que involucren estas nociones, entonces ellos investigan sobre la regulación social del aprendizaje, la	Ellos encuentran que la argumentación científica es una necesidad que debe ser abordada desde el aula de clase, dado que es una habilidad fundamental para el siglo XXI, ellos no afirman haber logrado un impacto causal en los estudiantes, si no, más bien un primer paso a establecer	Este trabajo da la comprensión sobre la argumentación como una habilidad que se vincula a muchos otros aspectos externos al aula, y acá se da cuenta como se vincula a aspectos de regulación social y las interacciones socioemocionales,

				argumentación científica y las interacciones socioemocionales del discurso de dos grupos de secundaria de física.	relaciones entre la argumentación científica, la regulación social y las interacciones socioemocionales.	elementos que se buscan lograr con esto.

Fuente: Autor

Tabla 1.3.

Antecedentes 3 (Google Scholar; Argumentación y educación)

Autor	Año	Titulo	Locación	Resumen	Conclusiones	Destacar
Alvarez, I., Angel, L., Carranza, E. y Soler, M.	2013	Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar	Colombia	Ellos establecen elementos que se consideran de gran importancia a la hora de argumentar, que es su perspectiva para aproximarse a esta noción, que es determinando que es una conjetura, como se visualizan, como comprobar estas conjeturas, la generalización de estas y como esto concluye en un proceso argumentativo, una vez ellos sientan esta base, muestran como sería una serie de actividades que se ajustan hacer a este modelo tomando como método de análisis el trabajo de Toulmin,	Como reflexión final dejan claro que es de gran importancia llevar estos elementos a la clase porque permiten la crítica y el desarrollo de procesos que son matemáticos pero desarrollando esta habilidad que es general para las demás áreas.	Este trabajo, mostro una de las posibilidades a como trabajar la argumentación en un ambiente escolar desde el modelo de Toulmin para la argumentación, pero en el desarrollo de la unidad didáctica no se trabajó desde esta perspectiva, pero es importante reconocer esta modalidad.
Marin, F., Castillo, J., Torregroza, Y., y Peña, C.	2018	Competencia argumentativa matemática en sexto grado. una propuesta centrada en los recursos educativos digitales abiertos	Colombia	Es un trabajo que se realiza en el contexto de Colombia, y se encargan de realizar una unidad didáctica para mejorar la argumentación de los estudiantes mediante recursos	marcan que los recursos digitales deben hacer parte de las construcciones de unidades didácticas y que estas pueden fortalecer el desarrollo	Los recursos digitales como los señala el trabajo anterior pueden desempeñar un rol muy importante a la hora de enseñar, dado que les permite a los estudiantes

				educativos digitales, ellos resaltan la importancia de la realización de pre test que permiten conocer el estado argumentativo	argumentativo de los estudiantes.	aproximarse desde una postura diferente a los conceptos, por esto en un momento de la unidad didáctica se ve fundamental involucrar estos recursos.
Salgado, M., Alsina, Á. y Filgueira, S.	2020	Argumentación matemática a través de actividades STEAM en educación infantil		Comienzan mencionando la importancia de la argumentación y como es un proceso que no debe ser relegado a los últimos años de formación, por esto ellos deciden realizar un trabajo con estudiantes de 5 años trabajando desde una perspectiva STEAM donde vinculan la ciencia y la matemática enfocada a las cualidades del agua, donde se hacen preguntas por las forma del agua y ellos deben sacar conclusiones sobre la información que visualizaban mediante experimentos	Los investigadores concluyen que los niños pueden generar argumentos viables basadas en el lenguaje matemático pero en muy pocos casos logran hacerlo de manera simbólica	Este trabajo presenta una noción muy importante, y es la interdisciplinariedad de los procesos argumentativos y lo necesario que se ha vuelto para esta sociedad esta habilidad, y como esta debe ser trabajada desde las diferentes áreas.

1.2.2 Formulación de la pregunta

Articulando los elementos que se consideraron a destacar se identifica que hay posibilidades de mejora, para la cual podemos considerar diferentes formas de acercarse al problema, por lo tanto, este trabajo se aproximará a la solución de la problemática descrita a través de la innovación en enseñanza de las matemáticas desde el campo de argumentación matemática aplicado al estudio de los límites con enfoque en la siguiente pregunta:

¿En qué medida se puede fortalecer la argumentación en estudiantes a través de la implementación de una unidad didáctica fundamente en *contraejemplos* y *contrapositivas* de Yopp (2017)?

1.3 Justificación

La investigación, en el caso de que hubiera posibilitado su implementación, mostraría los impactos que puede tener una formación matemática basada en la argumentación que conlleve a los estudiantes a un posible desarrollo de estos procesos argumentativos dentro de la matemática y que ellos puedan trasladar esto a su vida como ciudadanos que pueden generar afirmaciones, validarlas o refutarlas mediante un proceso lógico legítimo.

En la vida, constantemente se encuentra en encrucijadas sobre decisiones que permean el ambiente, por lo tanto, la argumentación como proceso fundamental de interacción de ideas y concepciones, empoderara a los estudiantes con la posibilidad de ratificar o rebatir, aspectos de su diario vivir, para tomar decisiones más consientes con ellos y con sus alrededores.

Con esto, se puede debatir la relevancia de aspectos argumentativos en las clases de matemáticas, en las cuales son principalmente trabajadas desde un enfoque de resolución de ejercicios, que este no es que tenga un rol de menos importancia a la hora de enseñar esta área, pero como maestros se debe a los estudiantes mostrarles diferentes perspectivas sobre el conocimiento científico, conocimiento que debe tener repercusiones en la manera en que ellos se ven y se desenvuelvan en el mundo.

Establecer entonces, una posibilidad para la enseñanza de las matemáticas y que estas se vinculen con los procesos argumentativos, para que los profesores puedan nutrir sus clases con elementos argumentativos, podría ser un elemento diferenciador sobre el conocimiento.

Entonces, este trabajo podrá entregar una vasta comprensión sobre la argumentación que permite a los profesores vincular y adaptar estas nociones a su labor como complemento al trabajo que ellos desarrollan en su contexto natural, como exploración a diferentes cursos en los cuales se pueden realizar las clases de matemáticas.

Para finalizar, Se espera que la construcción derivada de este proceso sirva de herramienta de trabajo para profesores de matemáticas interesados en fortalecer los procesos de argumentación de estudiantes de grado once de básica secundaria.

1.4 Objetivos

En la tesis debe estar orientada a la resolución de objetivos, que nos permitan tener una guía que es lo que se debe hacer, para este trabajo son los siguientes.

1.4.1 General

Diseñar una unidad didáctica la cual posibilite un mayor desarrollo de la argumentación en conceptos introductorios al cálculo en estudiantes de la media

1.4.2 Especifico

Identificar trabajos que busquen fortalecer procesos argumentativos susceptibles de ser abordados con estudiantes de básica secundaria.

Diseñar una unidad didáctica que fortalezca el desarrollo de argumentos de conceptos matemáticos.

Analizar las implicaciones que podría tener en el caso de ser desarrollada la unidad didáctica fundamentada en la argumentación en conceptos introductorios al cálculo.

1.5 Marco referencial

Para la realización del trabajo, debe haber nociones claras sobre lo que se considera importante, en términos de lo que busca este trabajo, donde se presentaran nociones sobre la argumentación enfocada desde la enseñanza de las matemáticas, específicamente a través de los contra ejemplos, la formación de los elementos históricos y conceptuales del cálculo, las normativas que rigen la educación matemática en Colombia y la institución educativa para la cual se recomienda la realización de un trabajo de este tipo.

1.5.1 Marco teórico

En este trabajo se tiene por preocupación la enseñanza de las matemáticas, y un aspecto especifico a ella, que es la enseñanza por medio de los contraejemplos, porque esto es lo que nos permite llegar a aspectos que involucran la argumentación, entonces se pasara a hacer una descripción de estos elementos para que queden expresados de una manera clara y concisa y se puede hacer una lectura de la tesis bajo la luz de estos aspectos.

Primero se establece porque es necesario una formación de matemáticas basada en la argumentación, en aras de lograr esto, recaemos en los autores Hernández et al (2019), Ayalon (2019) y Yopp et al. (2020) que menciona que una de las principales competencias del siglo XXI es la argumentación dado que esta nos conlleva a dar una fuerza a nuestras ideas, pero permitiendo cambiarlas cuando encontramos fallas a nuestro proceso lógico, atender a las críticas planteadas por los pares, además de escuchar las de ellos y evaluar las fortalezas y debilidades en lo que se nos presenta. Tengamos en cuenta lo siguiente

> La enseñanza de las matemáticas que fortalezca la argumentación provee oportunidades para que los estudiantes participen activamente en la construcción de argumentos, compartir, considerar las ideas otros y críticamente evaluar su validez. (Ayalon, 2019, p. 192)

Hay un gran abanico de premisas y afirmaciones en matemáticas, que se usan con la mayor tranquilidad y nunca pasa por la cabeza de los estudiantes de matemáticas e incluso profesores llegar a cuestionar estas premisas, Klymchuk (2009) habla sobre esto, como una naturalización de la veracidad de las premisas.

En matemáticas hay un principio básico de acuerdo con Yopp et al. (2020), y es que una afirmación puede ser verdadera o falsa, que sea verdadera significa que para esta premisa no existe ninguna situación que contradiga esa afirmación, para el caso de que sea falsa es porque existe al menos un ejemplo donde cumple la condición, pero no se llega a conclusión.

Yopp (2017), también muestra que este proceso se puede alimentar evaluando la contra positiva de la afirmación, lo que quiere decir que si se tiene una proposición de la forma $p \rightarrow q$, esta se puede transformar a $\sim q \rightarrow \sim p$ (teniendo en cuenta que este símbolo $\sim$ se refiere a negar la proposición) y probar que esa afirmación es verdadera o falsa implicara que la afirmación original también lo es. Esta es la noción en la que se basa el trabajo de contra ejemplos, que como Yopp et al. (2020) menciona este trabajo tiene un impacto directo a la argumentación de los estudiantes permitiéndoles evaluar diferentes afirmaciones.

Yopp et al. (2020), nos introduce a unos conceptos como es el de prueba, que se establece para dar a entender un razonamiento que sirve como este elemento que nos muestra porque la premisa no funciona o es invalida para ciertos casos, además, también se tiene en cuenta argumentos no tan poderoso para desaprobar las premisas que es el de argumento viable, que este nos permite ver que hay comprensión sobre la invalidez del argumento pero este no es tan formal y faltan elementos para valerse como una verdadera prueba contra el argumento.

Las pruebas en matemáticas tienen una finalidad, y esta es la que lleva a que el estudiante muestre su conocimiento sobre los temas, desde Yopp (2011) citando a Bell´s (1976) que las pruebas conducen a los estudiantes a las siguientes actividades que son verificación o justificación (establecer la verdad), Iluminación (explicar por qué) y sistematización (organizar axiomas y resultados importantes), pero a estas Yopp (2011) citando a Villiers (1999) les hace la siguiente modificación Cambia iluminación por explicación (proveer perspectiva porque es verdadero), descubrimiento (descubrir o inventar nuevos resultados), comunicación (la transmisión de conocimiento matemático), desafío intelectual (la realización de construir una prueba) y Yopp (2011) citando a Villiers (1999) hace una recomienda una secuencia para estas que es explicación, descubrimiento, desafío intelectual, verificación y sistematización. Es importante mencionar que incluso aún no se sabe que constituye una prueba como dice Tall (1991), dado a que la matemática puede variar su desarrollo de persona a persona.

1.5.2 Marco conceptual

En el siguiente marco conceptual se expresará como nace el concepto de función y limite, dado que podemos decir que son estos conceptos los que conforman gran parte de la preocupación para la elaboración conceptual del cálculo, entonces, es necesario reconocer como aparecen estos en el campo de las matemáticas siendo este aspecto fundamental desde el modelo de unidad didáctica en el cual se basa este trabajo, además, se busca mostrar cómo es que se da la construcción de conceptos matemáticos y esto se muestra desde concepciones psicológicas.

Empezando por la construcción del concepto de función Díaz (2013) establece que el concepto de función, puede ser rastreado y dependiendo de la perspectiva, ya que algunos autores que Díaz (2013) cita, como Kleiner (1989), y Youschkevitch (1976), muestran cómo puede localizar esta idea en el transcurso de la historia de la humanidad, en lo que si concuerdan ambos es que en ciertos momentos hubo avances cruciales y eso es lo que se describirá. Entonces, Diaz (2013) menciona tres momentos importantes, la antigüedad el cual sería el periodo desde 2000 a.C. a 600 a.C., también la edad media que sería el periodo del año 500 a

1500 de las cuales se marcan dos fases, y el periodo moderno que es a partir del siglo XVIII en adelante.

De acuerdo con Stewart (2012) “una función es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E” (p, 11). Esta definición es crucial, porque de acuerdo con Díaz (2013) podríamos reducir el concepto de función a una fórmula matemática la cual sería una perspectiva real solo para ciertos contextos, pero si se hace un análisis a profundidad de lo que se dice con esa definición se ve que aplica a situaciones donde se tiene un objeto se aplica una regla y este genera un nuevo objeto, por esto esta noción puede observarse en diversos momentos históricos.

Se puede observar como dice Díaz (2013), debido a que la función desde su perspectiva que trasciende a una noción de ecuación desde los tiempos de los babilonios se podían encontrar estas reglas en numerosas tablas, pero una noción matemática no se encontrara hasta mucho después.

En la edad media, en la época que Díaz (2013) llama no latina que abarca desde 500 a.C. hasta 1200, que se empieza a acercar, a esta noción dado que ellos resuelven ecuaciones, pero no llegaban a esta relación incluso teniendo dos incógnitas en las cuales podía aparecer un término independiente y otro dependiente. En la siguiente época que de acuerdo con Diaz (2013), la fase latina que abarca temporalmente desde el siglo XII hasta el siglo XVIII aparecen nociones de la forma $y = kx^n$ donde n es un numero perteneciente a los racionales, porque en ese momento se enfocaron bastante en el trabajo de relaciones.

En cuanto al concepto de limite, siempre que hacemos referencia a este estamos hablando a lo que se refiere entorno al cálculo, de acuerdo con Dunham (2005) en su libro cuenta como esta idea es perteneciente a Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, aunque al primero se hace más referencia por ser un físico y al segundo como un filósofo.

El primer apunte sobre cálculo de acuerdo con Merzbach y Boyer (2011), aparece en Philosophiae Naturalis Principia Mathematica que fue publicado en 1687, el texto comienza hablando de unos lemas que el necesita para desarrollar su trabajo posterior entre los cuales encontramos el siguiente

> Cantidades, y las proporciones de cantidades, que en cualquier tiempo finito convergen continuamente a la igualdad, y antes de que finalice ese tiempo acercarnos más a entre sí que por cualquier diferencia dada, se vuelven finalmente iguales. (Merzbach y Boyer, 2011, p. 364)

Cuando se lee entonces, esa información anterior inmediatamente la podemos relaciones a lo que conocemos como límites.

En cuanto a Gottfried Wilhelm Leibniz los autores Merzbach y Boyer (2011) mencionan, que él llega a la misma conclusión con respecto al calculo que Isaac Newton, pero él llega posteriormente a esta, pero con un resultado mucho más general que el de Newton. Pero en términos generales usaremos la siguiente definición para límite que es tomada de Nodelman (2019) y dice que el límite de f(x), mientras x se aproxima a un valor *a*, es igual a L. Si podemos hacer f(X) arbitrariamente cerca a L, tomando x suficientemente cerca a *a* (a cualquier lado de a) pero no igual a *a*.

Entender cómo es que los matemáticos comprenden las matemáticas es fundamental para poder pensar en un aprendizaje sobre estas, teniendo en cuenta esto Tall (1991), menciona que podemos ver tres tendencias en las matemáticas modernas, la primera es Kronecker que tiene una perspectiva intuicionista; Hilbert que tenía una perspectiva formal hacia estas mencionando que la matemática es una significativa manipulación de marcas sin sentido en una hoja de papel; y la perspectiva lógica de Russell que las matemáticas consisten en deducción usando las leyes de la lógica.

Lo anterior entonces lleva a que los procesos realizados en la matemática tienen muchas variaciones, ya que si se observan los procesos de alguien pueden diferenciarse radicalmente del de otro, y aun así ser ambos válidos, todo esto de acuerdo con lo que dice de acuerdo con Tall (2014). No existe entonces una única manera de pensar en las matemáticas, esto es lo que señala la psicológica de acuerdo con Tall (1991), dado que las matemáticas deben ser vistas en el contexto de que son un desarrollo cultural y del pensamiento humano.

Entonces, cuando tratamos de aprender matemáticas usualmente nos encontramos con obstáculos, como dice Tall (1991) esto es un problema al tratar de acomodar ideas en la estructura de pensamiento, por las preconcepciones que se tengan sobre la idea a tratar de aprender, dado que se intenta ajustar a modelos que ya se conocen pero al enfrentarse a un nuevo problema puede no ser satisfactorio para la solución de la nueva situación a enfrentarse, El problema aparece cuando se trata de extrapolar algoritmos o maneras de solución a situaciones donde no aplican, entonces hay una tendencia en términos de Tall (1991) citando a Tall (1986) la mente del estudiante asume propiedades que son propias de un contextos a ser implícitas en los demás lo cual pude no ser cierto.

1.5.3 Marco legal

En este apartado se realizará un normograma en el que se referenciarán normas que son consideradas de gran importancia para el desarrollo de la educación en el país, porque este será el marco en cual se sustenta tanto la necesidad del trabajo como el sustento en el que se basa, entonces se menciona la constitución política de Colombia de 1991, la ley 115 de 1994, el plan decenal 2016 – 2026 y los derechos básicos de aprendizaje.

Tabla 1.4

Normograma

La constitución política de Colombia de 1991	Artículo 67 “La educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura.” (p. 11)
Ley 115 de 1994	Artículo 5 “El desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de la vida de la población, a la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país.” (p. 2)
Plan decenal 2016 - 2026	“Se propenderá, además, por una formación integral del ciudadano que promueva el emprendimiento, la convivencia, la innovación, la investigación y el desarrollo de la ciencia, para que los colombianos ejerzan sus actividades sociales, personales y productivas en un marco de respeto por las personas y las instituciones, tengan la posibilidad de aprovechar las nuevas tecnologías en la enseñanza, el aprendizaje y la vida diaria y procuren la sostenibilidad y preservación del medio ambiente.” (p. 15)
Derechos básicos del aprendizaje	“La educación de calidad es un derecho fundamental y social que debe ser garantizado para todos. Presupone el desarrollo de conocimientos, habilidades y valores que forman a la persona de manera integral. Este derecho deber ser extensivo a todos los ciudadanos en tanto es condición esencial para la democracia y la igualdad de oportunidades.” (p. 15)

Fuente: Autor

1.5.4 Marco contextual

Este trabajo es realizado para que su implementación ocurra en un espacio de un aula de clase de un grado once, en el cual se piense dar reflexión sobre las concepciones matemáticas, de cómo se forman los conceptos e ideas pertenecientes a esta área, para esta finalidad es propicio que los estudiantes se permitan evaluar y cuestionar sus ideas y las de sus pares académicos para ellos poder trascender sobre sus nociones de la ciencia misma.

Capitulo II. Diseño metodológico

2.1 Enfoque

En este trabajo se guía bajo los lineamientos de una investigación cualitativa, dado los aspectos interpretativos que de gran utilidad son para la investigación en enseñanza, todo esto tomando en consideración lo que una investigación cualitativa con lleva de acuerdo con Hernandez et al. (2014) que esta permite explorar los fenómenos dando una gran importancia a la perspectiva de la persona involucrada dentro de la investigación, reconociendo el contexto en el cual se desarrolla, los significados desarrollados.

2.2 Método

Para la realización del trabajo es necesario establecer un proceso que se va a seguir, cada uno con objetivos claros sobre que se hará y que se obtendrá de estos, entonces este proceso se establecerá, de acuerdo con Tena y Rivas (1995) de lo que ellos proponen se tomaron cuatro fases, que son propuestas dado que es una investigación documental, la primera fase (diagnostica) es instaurar unas bases sobre una situación problema; una segunda fase (descriptiva) que es el establecimiento de unos conceptuales teóricos, con los cuales se puede abordar la situación problema, esclareciendo como se produce esta, como se interpreta y como se puede plantear una propuesta de solución; fase (diseño y evaluación) que es la construcción del instrumento con el cual se plantea atacar la situación problema, que para este trabajo es un instrumento que consta de una prueba inicial y final para evaluar el estado de entrada y salida sobre la argumentación de los estudiantes, y una unidad didáctica que toma el modelo de Álvarez (2013), la cual está conformada por tres momentos, donde cada momento contiene aspectos enfocados a las ideas previas, la historia y epistemología, múltiples medios semióticos y metacognición, para así alcanzar la evolución conceptual; y una cuarta fase (conclusiones y recomendaciones) que esta fase se analiza lo que fue construido.

2.3 Instrumentos para la recolección de información

Siendo esta una investigación documental, los instrumentos de recolección de información están dados en términos de los espacios de los cuales se buscan y recolecta información. Para este trabajo entonces se usaron bases de datos como:

- Ebsco: is the leading provider of research databases, e-journals, magazine subscriptions, e-books and discovery service to libraries of all kinds.
- Scielo: biblioteca electrónica que incluye una colección seleccionada de revistas científicas chilenas, en todas las áreas del conocimiento (CONICYT – Chile)
- Redalyc: Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal (Universidad Autónoma del Estado de México).
- Dialnet: visibilidad a la literatura científica hispana (Universidad de la Rioja – España).
- Science direct: ScienceDirect is the world's leading source for scientific, technical, and medical research.
- Eric: is an online library of education research and information, sponsored by the Institute of Education Sciences (IES) of the U.S. Department of Education.
- Google scholar: Google Scholar provides a simple way to broadly search for scholarly literature.

Entonces, en estas bases de datos se realizaron búsquedas usando los términos tanto en español como en ingles de, argumentación, enseñanza de la matemática, enseñanza de las ciencias, enseñanza por medio de la argumentación, entre otros. Donde estos términos eran pertenecientes a las palabras clave, los resúmenes, introducción y conclusiones de los trabajos.

De esta búsqueda, se establecieron unas bases que dieron a conocer las categorías que fueron el énfasis del trabajo que se terminó centrando en el trabajo de la argumentación, *contraejemplos* y las *contrapositivas*.

2.4 Cronograma

Tabla 2.3.

Planificación de actividades.

FASE	OBJETIVOS	ACTIVIDADES
Fase 1: Diagnóstico	Identificación de un problema de aprendizaje y enseñanza. Delimitación del problema. Justificación de la propuesta. Planteamiento de objetivos entorno a la situación problema	1. 1.1. Identificación de un problema de enseñanza, aprendizaje. 2. 1.2 Establecimiento tanto del objetivo general como específicos. 3. 1.3 Justificación de la propuesta. 4. 1.4. Revisión bibliográfica de los documentos del MEN enfocados a los estándares en la enseñanza de las matemáticas
Fase 2: Descriptiva	Identificación de un problema de aprendizaje y enseñanza. Delimitación del problema. Justificación de la propuesta. Planteamiento de objetivos entorno a la situación problema	1. 2.1. Revisión bibliográfica sobre la argumentación en la enseñanza de las matemáticas por medio de los contraejemplos. 2. 2.2. Revisión bibliográfica sobre lo contra ejemplos. 3. 2.3. Recolección y revisión de documentos de divulgación de matemática.
Fase 2: Diseño	Diseñar actividades con la información recogida que permita fomentar habilidades argumentativas en los estudiantes.	1. 3.1 Diseño y construcción de actividades para evaluación de los preconceptos. 2. 3.2 Elaborar actividades para la enseñanza de los conceptos de introducción al cálculo, específicamente sobre funciones, recta tangente, asíntotas y límites. 3. 3.3. Buscar y construir de actividades evaluativas que harán parte la

		intervención de la estrategia didáctica propuesta.
Fase 4: Conclusiones y recomendación es	Determinar si los objetivos del trabajo fueron desarrollados y hasta que nivel se logró, y plantear aspectos a mejorar.	1. 4.1. Analizar y sacar las conclusiones del trabajo teniendo en cuenta los objetivos planteados al inicio del desarrollo de la propuesta 2. 4.2. Sugerir aspectos a mejorar de acuerdo con las falencias del trabajo.

Fuente: Autor

Con base en estas fases establecidas, se realizará un cronograma de actividades

Tabla 2.4.

Cronograma de actividades

Actividades	Semanas															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Actividad 1.1	x	x	x													
Actividad 1.2	x	x	x	x												
Actividad 1.3		x	x	x												
Actividad 1.4		x	x	x	x	x										
Actividad 2.1		x	x	x	x	x	x									
Actividad 2.2			x	x	x	x	x									
Actividad 2.3				x	x	x	x	x								
Actividad 3.1					x	x	x	x	x							
Actividad 3.2					x	x	x	x	x	x						
Actividad 3.3					x	x	x	x	x	x	x	x				
Actividad 4.1								x	x	x	x	x	x	x		
Actividad 4.2													x	x	x	x

Fuente: Autor

Capitulo III. Sistematización de la monografía

3.1 Resultados y análisis de la monografía

Como resultado de esta tesis, se tiene una unidad didáctica bajo el modelo de Álvarez (2013), que se encuentra en el anexo dos de este trabajo, que está fundamentada en elementos encontrados principalmente en el trabajo de Yopp (2011), Yopp (2017), Yopp (2018), Yopp et al (2020), Yopp (2020), primero que todo, encontraremos que a lo largo de la unidad didáctica los estudiantes se van a enfrentar a muchas premisas, que de no ser por el acercamiento que se da, pasarían inmediatamente a creer que todas son ciertas, pero se verá que ahora se entra a cuestionar cada una y este proceso se podrá realizar de la manera en la que el estudiante se sienta mejor, porque además se le darán un conjunto de herramientas como son los *contraejemplos*, las *contrapositivas*, como medio de afrontar estas afirmaciones. Por esto, se hará un análisis de las relaciones entre los conceptos que se discutieron en el marco teórico y su relación con la unidad didáctica.

Entonces, en el primer momento de la unidad didáctica lo que se intenta lograr es acercar a los estudiantes a la lógica proposicional, esta noción es proveniente de Yopp (2017), para que entiendan que es una premisa o afirmación y que puedan tomar estas, y replantearlas de manera *contrapositiva*, para de esta manera puedan usar el acercamiento a probar el razonamiento que hay en esa afirmación, además de que existen cuantificadores con los cuales pueden limitar también las afirmaciones a un campo en que sean verdaderas o falsas.

En el segundo momento, es tiempo de que aplique estas nociones de lógica y cuantificadores a verdaderas premisas sobre conceptos como funciones, tangentes y asíntotas, conceptos necesarios para la elaboración de la idea del límite, entonces aquí es donde aparece un elemento mencionado en el marco teórico que es la noción de prueba desde Yopp (2011), porque ahora debe utilizar su conocimiento para justificar explicar y organizar esa información que tanto usara como la que encontrara como resultado de su comprobación.

Y un último momento, en el cual ya se explora el concepto de limite desde el uso de software como graficadoras hechas en geogebra, ya que como mencionan Marín et al (2018) los estudiantes se alimentan mucho de este proceso, entonces examinará las funciones y establecerá los limites desde la misma definición, aplicándola a diferentes funciones y viendo cómo se dan las variaciones de esta, entorno a las funciones, y pudiendo así justificar, explicar y entender el concepto de limite desde una perspectiva más completa.

Mediante esta propuesta que apunta a resolver una problemática que se observa en las aulas de clase, se busca complementar el aprendizaje de las matemáticas por medio de un acercamiento mediante la argumentación, entonces después de su aplicación se espera que los estudiantes puedan abordar situaciones que requieran de ellos análisis e interpretación de nociones y de sus implicaciones de estas que pueden ser afirmaciones

Se espera entonces, como resultado de este trabajo, no tenga únicamente implicaciones directas a su argumentación matemática, si no que esta se pueda expandir a otras áreas de su vida, que puedan integrar estas nociones a diferentes aspectos de su vida, en la manera que se desenvuelven en el mundo e interactúan con los demás, permitiéndoles ser unas personas criticas ante las múltiples situaciones a las que se ven enfrentados en su cotidianidad, tomando postura sobre los hechos, evaluando las posibilidades y reconociendo sus falencias.

3.2 Conclusiones y recomendaciones

3.2.1 Conclusiones

La argumentación es una habilidad que se ha dejado de lado en cuanto a las preocupaciones de lo que ocurre en el aula de clase, no únicamente en matemáticas, pero es una problemática en la cual cada vez se ve una intención de la comunidad educativa de entrar a generar un cambio, una tendencia a nivel mundial en tratar de desarrollar propuestas que involucran la argumentación como eje central, donde encontraremos trabajos como los de Alvarez et al (2014) donde muestran fortalezas de la argumentación trabajada desde Toulmin; Salgado et al (2020) que da una aproximación a un trabajo STEM con niños de 5 años enfocándolo a su argumentación; Marin et al (2018) que vinculaban recursos digitales con trabajo argumentativos; y por supuesto el trabajo de Yopp (2017) en el cual se desarrolla bajo los lineamientos de los *contrapositivas* y *contraejemplos*, para el proceso de argumentar la veracidad o falsedad de premisas matemáticas . De lo anteriormente mencionado y muchos otros trabajos, dan como resultado que han nacido diferentes posibilidades de involucrar la argumentación en las discusiones, encontrando muy buenos resultados en los estudiantes que se ven permeados por estas nociones.

El *contraejemplo* es una herramienta que está olvidada para el trabajo de comprobar afirmaciones, que puede ser generalizada a otros espacios dado que nos ayuda a dar un poco más de visión sobre los que queremos comprobar, de acuerdo a los trabajos Yopp (2011), Yopp (2017), Yopp (2018), Yopp et al (2020), Yopp (2020) da a entender cómo se genera otras posibilidades en el caso de que la afirmación original no sea muy clara usar la *contrapositiva* y buscar un *contraejemplo* para esta hace que el trabajo tenga un mayor espectro de caminos a desarrollar, y como esta impacta directamente su forma de criticar premisas y su razonamiento entorno a estas premisas, por esta razón tener esta asociación al espacio argumentativo será fortalecido.

Con esta perspectiva, podemos desarrollar habilidades en nuestros estudiantes que les permitirán desarrollar aspectos de sus competencias ciudadanas como mencionan Cardetti y LeMay (2019), dado que su interacción y solución a problemas siempre se encuentra mediada por su argumentación, dado que es la que ellos acuden cuando necesitan evaluar las múltiples situaciones a la que los estudiantes se encuentra, entonces se espera que haya una mejora en las interacciones de su diario vivir.

3.2.2 Limitaciones y recomendaciones

Debido a la coyuntura nacional de la pandemia Covid – 19, y el estado de emergencia sanitaria que se encuentra Colombia no se dio la posibilidad para la aplicación de la propuesta didáctica planteada en el anterior trabajo, cuando se reanude la normalidad escolar se podrá generar el espacio de aplicación de esta propuesta y se podrá hacer un análisis de las implicaciones que tendrá esta, por la necesidad que se ve de la interacción de estudiante a estudiante para el perfeccionamiento de las ideas.

Por último, se espera que este trabajo sea un ancla para iniciar a cuestionar lo que ocurre dentro del aula de matemáticas, e involucrar la competencia comunicativa dando a conocer a los profesores sobre las tendencias de enseñanza y es una invitación a trasformar lo que es el que hacer docente.

Referencias

Alvarez, O. (2013) Las unidades didácticas en la enseñanza de las Ciencias Naturales, Educación Ambiental y Pensamiento Lógico Matemático. *Itinerario Educativo* • ISSN 0121-2753 • Año xxvii, n.°62 • Julio - diciembre de 2013 • p. 115-135

Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E. y Soler, M. (2014) Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. *Revista didáctica de las matemáticas.* Volumen 85, marzo de 2014, páginas 75-90

Ayalon, M. (2019) Exploring changes in mathematics teachers' envisioning of potential argumentation situations in the classroom. *Teaching and Teacher Education* 85 (2019) 190e203. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2019.06.019

Cardetti, F. y LeMay, S. (2019) Argumentation: Building Students Capacity for Reasoning Essential to Learning Mathematics and Sciences, PRIMUS, 29:8, 775-798, https://doi.org/10.1080/10511970.2018.1482581

Díaz, J. (2013) El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *El Cálculo y su Enseñanza*, Volumen 4, © 2013, Cinvestav-IPN, México, D.F.

Dunham, W. (2005) *The calculus gallery. Masterpieces from Newton to Lebesgue*. Princeton university press

Jiménez, A. y Pineda, L. (2012) Comunicación y argumentación en clase de matemáticas *Educación y ciencia* - núm. 16 . año 2013. Pág. 101 – 116

Hahn, U. (2020) Argument quality in real world argumentation. *Trends in Cognitive Sciences.* Volume 24, Issue 5. https://doi.org/10.1016/j.tics.2020.01.004.

Hernández, J., Locia, E., Morales, A. y Sigarreta, J. (2019) El Contraejemplo en la Elaboración de la Definición de Función Convexa por Estudiantes Universitarios. *Información Tecnológica.* Vol. 30(1), 185-202 (2019)

Hernandez, R., Fernandez, C. y Baptista, P. (2014) *Metodología de la investigación.* McGRAW-HILL

Klymchuk, S. (2009) Counterexamples in Calculus. *Mathematical Association of America*.

Lazarou, D., Erduran, S. y Sutherland, R. (2017) Argumentation in science education as an evolving concept: Following the object of activity. *Learning, Culture and Social Interaction.* 14 (2017) pp. 51-66. http://dx.doi.org/10.1016/j.lcsi.2017.05.003

Lobczowski, N., Allen, E., Firetto, C. y Greene, J. (2020) An exploration of social regulation of learning during scientific. *Contemporary Educational Psychology.* 63 (2020) 101925. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2020.101925

Marin, F., Castillo, J., Torregroza, Y. y Peña, C. (2018) Competencia argumentativa matemática en sexto grado. una propuesta centrada en los recursos educativos digitales abiertos. *Revista de Pedagogía*, vol. 39, no 104, 2018, pp. 61-85

Martins, M. y Justi, R. (2019) Analysis of the relationships between students' argumentation and their views on nature of science. *Learning, Culture and Social Interaction.* https://doi.org/10.1016/j.lcsi.2019.100366

Maher, C., Sigley, R., Sullivan, P. y Wilkinson, L (2018 An international perspective on knowledge in teaching mathematics. *Journal of Mathematical Behavior* 51 (2018) 71–79. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.05.002

Max, B. y Welder, R. (2020) Mathematics Teacher Educators' Addressing the Common Core Standards for Mathematical Practice in Content Courses for Prospective Elementary

Teachers: A Focus on Critiquing the Reasoning of Others. *The Mathematics Enthusiast*, ISSN 1551-3440, vol. 17, nos. 2&3, pp. 843-881

Merzbach, U. y Boyer, C. (2011) *A History of Mathematics.* John Wiley & Sons,

Meyer, M. y Schnell, S. (2020) What counts as a "good" argument in school?—how teachers grade students' mathematical arguments. *Educational Studies in Mathematics* (2020) 105:35–51 https://doi.org/10.1007/s10649-020-09974-z

Nodelman, V. (2019) Counterexamples in Mathematics Education: Why, Where, and How? – Software aspect. Limit of a Function. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, Volume 13, Number 1, ISSN 1933-2823

Palacio, C. (2016) La argumentación científica escolar desarrollada desde un enfoque de resolución de problemas como propuesta didáctica en la clase de ciencias. *Seres, saberes y contextos.* Vol 2. pp 83 – 89

Ramlia, F., Shafieb, N. y Ahmad, R. (2013) Exploring studet`s in-depth learning difficulties in Mathematics throught teacher`s perspective. *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 97 (2013) 339 – 345. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.10.243

Salgado, M., Alsina Á. y Filgueira, S. (2020) Argumentación matemática a través de actividades STEAM en educación infantil. *Revista de Educación Matemática*. 2020, nº 104, 45-57

Stewart, J. (2012) *Calculo de una variable trascendente tempranas*. Clengage Learning, séptima edición.

Tall, D. (1991) The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. DOI: 10.1007/0-306-47203-1_1

Tena, A. y Rivas, R. (1995) *Manual de investigación documental. Elaboración de tesinas.* Plaza y Valdez

Yopp, D. (2011) How some research mathematicians and statisticians use proof in undergraduate mathematics. *Journal of Mathematical Behavior* 30 (2011) 115–130. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.01.002

Yopp, D. (2017) Eliminating counterexamples: A Grade 8 student's learning trajectory for contrapositive proving. *Journal of Mathematical Behavior* 45 (2017) 150–166. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.01.003.

Yopp, D. (2018) When an argument is the content: Rational number comprehension through conversions across registers. *Journal of Mathematical Behavior* 50 (2018) 42–56. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.01.001

Yopp, D. (2020) Eliminating counterexamples: An intervention for improving adolescents' contrapositive reasoning. *Journal of Mathematical Behavior* 59 (2020) 100794. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100794

Yopp, D., Elyb, R., Adamsc, A., Nielsenb, A. y Corwined, E. (2020) Eliminating counterexamples: A case study intervention for improving adolescents' ability to critique direct arguments. *Journal of Mathematical Behavior* 57 (2020) 100751. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100751

Anexos

Anexo 1. Prueba inicial y final

Esta es la prueba inicial, que constara de unas afirmaciones en las cuales se deben poner en tela de juicio, en las cuales se buscara evidenciar como son los modelos de prueba y argumentos viables de acuerdo con Yopp et al (2020) los estudiantes puedan formar para discernir sobre si las premisas son ciertas o falsas. Y como, también es la prueba final será la responsable de mostrar si los estudiantes fueron capaces de mejorar sus argumentos para aprobar o desaprobar dichas afirmaciones ya sea por el camino del *contraejemplo* o *contrapositiva.*

A continuación, encontraras 7 afirmaciones que estarán compuestas de una condición y una afirmación, use la tabla para probar si es verdadera o falsa, use gráficas, ejemplos, procesos matemáticos, cualquier medio que le sea útil para responder a cada una de las afirmaciones.

1. Si un cuadrilátero es un paralelogramo, entonces sus diagonales deben se bisecadas
2. Si $x^2 > y^2$, entonces $x > y$
3. Si $x > 0$ y $x^2 > y^2$, entonces $x > y$
4. Si dos líneas son cortadas por una trasversal, si los ángulos alternos internos son congruentes, entonces las líneas son paralelas
5. Sea b un numero natural. Si b^2 es impar, entonces b es impar
6. Si $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.
7. Si $x + y > 10$, entonces $x > 6$ o $y > 4$.

Tabla 3.1

Para la construcción de ejemplos y contraejemplos

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Conclusión</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Condición</td><td></td><td>Se llega a la conclusión</td><td>No se llega a la conclusión</td></tr>
<tr><td>Se llega a la condición</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>No se llega a la condición</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Nota: tabla tomada de Yopp (2020)

Afirmaciones tomadas de Eliminating counterexamples: A Grade 8 student’s learning trajectory for contrapositive proving de David Yopp.

Anexo 2. Unidad didáctica

A continuación, se tiene la unidad didáctica, bajo el modelo de Álvarez (2013), que consta de tres momentos; el primer momento es sobre lógica proposicional, que contiene unas etapas de ideas previas, historia y epistemología del concepto de lógica, múltiples medios semióticos y TIC y reflexión metacognitiva, todos centrados en formar argumentos desde la lógica y establecer la demostración por la *contrapositiva* que se vinculara con el proceso argumentativo; un segundo momento que será introductorio al concepto de limite, o sea que se cubren las bases necesarias para llegar a este concepto desde unas premisas fundamentales para la comprensión y deberá involucrar la argumentación sobre estas afirmaciones que se encontrara y todo esto con unas etapas que son ideas previas, historia y epistemología del concepto del concepto de función, múltiples medios semióticos y TIC y reflexión metacognitiva; y un tercer momento sobre el concepto de limite que involucra un trabajo por medio de las TIC sobre graficación de funciones y se analizaran esas gráficas para buscar el limite ahí y requerirá que el entienda a que se refiere cuando se habla de limite y deberá generar argumentos viables y dar pruebas sobre eso, teniendo en cuenta que este momento consistirá de unas etapas que son historia y epistemología del concepto de limite, múltiples medios semióticos y TIC, reflexión metacognitiva e ideas previas, y estos momentos conducen a la evolución conceptual.

Unidad didáctica

MOMENTO 1 Lógica proposicional		
Etapa	**Tiempo**	
Ideas previas	20 minutos Sesión 1	Actividad de reconocimiento Para establecer un punto de partida sobre que conocemos sobre la argumentación en matemáticas y la lógica responde las siguientes preguntas desde tu conocimiento. 1. Que crees que es argumentar en matemáticas 2. Que impacto crees que puede generar en ti argumentar mejor 3. Qué es la lógica para ti 4. Comparte con tus compañeros las respuestas
Historia y Epistemología del concepto de lógica	30 minutos Sesión 1	Observa el siguiente video detenidamente https://www.youtube.com/watch?v=6isDhahJve0 Has la siguiente actividad Realiza un mapa mental donde se establezcan los elementos de la lógica, los tipos de lógica
Múltiples modos semiótico y TIC	40 minutos Sesión 2	**Lógica proposicional** Tomaremos una referenica a los conceptos básicos desde el texto de Cálculo de Purcell, Varberg y Rigdon, Un teorema es un resultado importante de las matemáticas el cual permite su uso para resolver situaciones problema (por ejemplo, teorema de Pitágoras). Los teoremas siempre se deben demostrar de acuerdo con sus axiomas y definiciones. Muchos teoremas son establecidos de la forma “si p entonces q”. La abreviación de si “p entonces q” es $p \to q$, que también se lee p implica q. Se llama p la hipótesis y q la conclusión del teorema. Nótese que si $p \to q$ no significa que $q \to p$ que sería su reciproco. Si “Juan es de Medellín” entonces “Juan es colombiano”, esta es una proposición verdadera, pero su reciproco no necesariamente. Si “Juan es colombiano” entonces “Juan es de Medellín” puede no ser cierta.

		La negación de la proposición p es $\sim p$. Por ejemplo si p es la proposición “está lloviendo”, entonces $\sim p$ es la proposición “no está lloviendo”. La proposición $\sim q \rightarrow \sim p$ se denomina contrapositiva de la proposición $p \rightarrow q$ y se relacionan de manera de que si $p \rightarrow q$ es verdadera entonces $\sim q \rightarrow \sim p$ también debe ser verdadera. De esto, podemos afirmar que siempre que estemos realizando una demostración podemos usar su contrapositiva. Tomado Calculo Purcell, Varberg y Rigdon, Novena edición. Se resalta que hay entonces una forma común, en la cual se expresan las proposiciones matemáticas, primero que todo encontramos una parte **Forma, como en el ejemplo antes, 3 proposiciones que sean ciertas como en el ejemplo y 3 proposiciones que no sean ciertas, y de estas, muestra su contrapositiva.** **Cuantificadores** Muchas proposiciones matemáticas incluyen una variable x, y la validez de un enunciado depende del valor de x. Por ejemplo la proposición “$\sqrt{x}$ *es un numero racional*" depende del valor de x; es verdadero para algunos valores de x, como $x = 1,4,9$ y falso para otros valores como $x = 2,3,77,\pi$ Algunas proposiciones, tales como "$x^2 \geq 0$" son verdaderas para todo número real x, y otras proposiciones tales como “x es un entero par mayor que 2 y x es un numero primo” siempre son falsas. Denotaremos $P(x)$ un enunciado cuyo valor de verdad depende de x. Decimos “para toda x, $P(x)$” o “para cada x, P(x)” cuando la proposición P(x) es verdadera para cada valor de x. Cuando al menos existe un valor de x para el cual es verdadera decimos “existe un x tal que P(x)”. Los dos importantes cuantificadores son “para todo” o “existe”. Tomado Calculo Purcell, Varberg y Rigdon, Novena edición.

		Establece dos proposiciones que deban incluir cuantificadores, para mostrar los casos en que si se cumple y en los cuales no se cumple
Reflexión Metacognitiva	10 minutos Sesión 2	**Reflexión**: Responde a las siguientes preguntas 1. ¿Qué aprendí? 2. ¿Cómo lo aprendí? 3. ¿Hubo dificultades para aprenderlo? ¿Cuáles? 4. ¿Para qué me sirve lo que aprendí? 5. ¿Dónde o cómo aplicar lo que aprendí? ¿Cómo mejorar lo aprendido?

MOMENTO 2 Introducción al limite		
Etapa	**Tiempo**	
Ideas previas	20 minutos Sesión 3	Desde sus conocimientos trate de hacer una descripción de los siguientes conceptos, déjese llevar por sus creencias y defina cada una de estos. Recta tangente Asíntota Función cuadrática Limite Tome sus respuestas y háblelas con sus compañeros y establezcan un paralelo con sus diferencias y similitudes.
Historia y Epistemología del concepto de función	30 minutos Sesión 3	Observa el siguiente video detenidamente https://www.youtube.com/watch?v=xezP7sAzMHw Realiza una línea del tiempo sobre el concepto de función.
Múltiples modos semiótico y TIC	40 minutos Sesión 4	**Recta Tangente** Las líneas tangentes son un concepto necesario para desarrollar el trabajo de cálculo, para esto entonces debemos preguntar para comenzar ¿Qué es una recta secante? Una definición de recta secante de manera muy sencilla podría ser una recta que corta una línea curva en dos o más puntos. Con esto claro **dibuja una curva y traza una línea una línea recta que la corte en dos partes** Ahora, ya que tenemos una imagen sobre lo que es una recta secante, aproximémonos más a la idea de recta tangente. La primera definición que tendremos de esta recta, que se encontrara de manera introductoria en los libros de cálculo es que una recta tangente es una línea que corta una curva en uno y solo uno de sus puntos, pero encontraremos que esta definición posee dificultades para ciertos casos. Nuevamente **traza una línea curva, y traza una línea recta que solo la corte en un punto.** **Afirmación 1** La línea tangente a una curva en un punto no puede tocar la curva en otros puntos.

Puedes escribir esta afirmación en forma de la lógica proposicional
Traza diferentes líneas curvas y busca una que no sea consecuente con lo que dice la afirmación.
¿Habría un cuantificador que puedas usar para hacer esta proposición verdadera?
Comparte con tus compañeros y discute si existe o no esa recta tangente.

Afirmación 2

La tangente a una curva en un punto es la línea que toca la curva en ese punto, pero no la cruza ahí.
Puedes escribir esta afirmación en forma de la lógica proposicional
Traza diferentes líneas curvas y busca una que no sea consecuente con lo que dice la afirmación.
Comparte con tus compañeros y discute si existe o no esa recta tangente.
¿Habría un cuantificador que puedas usar para hacer esta proposición verdadera?

Con esto podrías formar una mejor definición que la inicial que se te da ¿Cuál sería esa proposición?

Asíntotas

En los términos más básicos, podríamos definir una asíntota como una recta a la cual una función siempre se está acercando, pero jamás llega a ella.
Con esta información estudie la siguiente afirmación.

Afirmación 3

Si $g(a) = 0$ entonces la función

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Tiene una asíntota vertical en $x = a$

		Puedes escribir esta afirmación en forma de la lógica proposicional **Grafica diferentes funciones y mira si la proposición cumple** **Cuál sería la contrapositiva de esta proposición** **Puedes probar la veracidad o falsedad de esta proposición o de su contrapositiva** **Funciones cuadráticas** Una función cuadrática, se puede definir como una función la cual al graficarla forma una parábola, esta definición está dada en los términos más sencillos. Con esta información estudie la siguiente afirmación. **Afirmación 4** Una función cuadrática de x es una en la cual su potencia de x es 2 **Puedes escribir esta afirmación en forma de la lógica proposicional** **Grafica diferentes funciones y mira si la proposición cumple** **Cuál sería la contrapositiva de esta proposición** **Puedes probar la veracidad o falsedad de esta proposición o de su contrapositiva** **Habla con tus compañeros y mira a que resultados llegaron ellos, discutan y retroaliméntense**

		Las afirmaciones salieron de Counter examples in calculus de Sergy Klymchuk
Reflexión Metacognitiva	10 minutos Sesión 4	**Reflexión**: Responde a las siguientes preguntas 6. ¿Qué aprendí? 7. ¿Cómo lo aprendí? 8. ¿Hubo dificultades para aprenderlo? ¿Cuáles? 9. ¿Para qué me sirve lo que aprendí? 10. ¿Dónde o cómo aplicar lo que aprendí? 11. ¿Cómo mejorar lo aprendido?

MOMENTO 3 Limites		
Etapa	**Tiempo**	
Historia y Epistemología del concepto de limite	35 minutos Sesión 5	Observe detenidamente el siguiente video https://www.youtube.com/watch?v=eCB_Jr_VKyg Realice un escrito donde exponga donde nace el concepto, implicaciones del límite, significado del concepto, que efectos tuvo en la ciencia y la noción de ciencia.
Múltiples modos semiótico y TIC	55 minutos Sesión 5 - 6	La definición de limite la podemos encontrar así: **Afirmación 1** El límite de $f(x)$, mientras x se aproxima a un valor a, es igual a L. Si podemos hacer $f(X)$ arbitrariamente cerca a L, tomando x suficientemente cerca a a (a cualquier lado de a) pero no igual a a. Entonces, preguntémonos por esa definición de cerca de un valor a que se usa en la definición. Para esto debemos se usarán unas funciones ejemplo en geómetra https://www.geogebra.org/m/RRf336ZC Realiza las siguientes tareas y responde las preguntas 1. Grafique la función $y = 0.2(x^3 - 2x^2)/(x-2)$ en el geogebra 2. Cambie el valor de delta δ y vuélvalo lo más pequeño posible ¿qué pasa en la gráfica? ¿Qué identificas del grafico? ¿Cuál es el valor del límite para $x_0 = 3$ 3. Repite el paso 2 para $x_0 = 2, -1, 0$ ... 4. ¿El rango es simétrico con respecto al límite? 5. ¿Es la mayor distancia de puntos en rango del límite igual o mayor a delta? 6. Considere los siguientes casos (a) Grafique la función $y = x + 1(x-1)$ - Coloca el valor $x = 0.5$, qué resultado tiene ese límite si lo tiene - Coloca el valor $x = 1$, qué resultado tiene ese límite si lo tiene

		- ¿Cuál es la principal diferencia entre $x = 0.5$ y $x = 1$? - ¿Cómo puedes ver esta diferencia solo mirando la gráfica? - Dale otros tres valores a x y encuentra el limite sin usar el geogebra - Puedes encontrar el valor x para el cual el limite no existe (b) Grafica la función $y = (x^4 - x^2)/(x^2 - 1)$, cuando el límite de x tiende a 1 - Que es similar y que es diferente con el caso anterior - Juega con el parámetro delta - ¿La función tiene límite para el valor 1? Si la respuesta es sí cual es el valor del límite de $f(a)$ Si la respuesta es no, préstale más atención la definición inicial y su condición final Actividad tomada de Counterexamples in Mathematics Education: Why, Where, and How? – Software aspect. Limit of a Function de Vladimir Nodelman
Reflexión Metacognitiva	10 minutos Sesión 6	**Reflexión**: Responde a las siguientes preguntas 1. ¿Qué aprendí? 2. ¿Cómo lo aprendí? 3. ¿Hubo dificultades para aprenderlo? ¿Cuáles? 4. ¿Para qué me sirve lo que aprendí? 5. ¿Dónde o cómo aplicar lo que aprendí? ¿Cómo mejorar lo aprendido?
Ideas previas	30 minutos Sesión 6 - 7	De acuerdo con lo trabajado realiza un crucigrama que contenga los siguientes conceptos 1. Tangente 2. Asíntota 3. Monótona 4. Función 5. Cuadrática 6. Limite 7. Matemáticas 8. Graficar 9. Ciencia