



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Modelos de poblaciones con crecimiento logístico y memoria

Jonnathan Ramírez Granada

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2021

Modelos de poblaciones con crecimiento logístico y memoria

Jonnathan Ramírez Granada

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ciencias: Matemática Aplicada

Director:
Ph.D. Carlos Enrique Mejía Salazar

Línea de Investigación:
Sistemas dinámicos
Grupo de Investigación:
Computación Científica

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2021

A Iván Mejía Uribe, uno de mis primeros profesores de matemáticas, a quien recuerdo gratamente cada que aplico alguno de los conceptos que aprendí de él durante mi adolescencia tanto en mi vida académica como laboral.

Agradecimientos

La culminación de diferentes procesos en la vida nos lleva a retroceder un poco para buscar a esas personas a las que debemos gratitud por su aporte en la labor finalizada. En esta situación, quiero exaltar a diferentes personas que han contribuido de diversas maneras a la realización de este trabajo.

Para empezar, debo agradecer profundamente a los docentes que estuvieron encargados de orientarme en la creación y redacción de este trabajo. Agradezco mucho al profesor Carlos Enrique Mejía Salazar por su disposición por su apoyo durante las dificultades presentadas, en especial los hechos que acontecieron al inicio de la realización de este trabajo, así como por su orientación en la selección del tema, su instrucción para la escritura de las rutinas para representar sistemas dinámicos en Matlab y su labor de supervisión y asesoría durante los semestres de ejecución de este trabajo. También, agradezco a Óscar Iván Giraldo Galeano por ser el principal orientador en el tema de sistemas dinámicos y por despertar el interés en el área.

Doy gracias a mis profesores del pregrado de Matemáticas por los conocimientos transmitidos. En particular, a Hugo Javier Arbeláez Pulgarín por todos los consejos y correcciones realizadas durante la escritura de mi trabajo de pregrado, consideraciones que se tuvieron en cuenta en la escritura de este trabajo final de maestría. También extendiendo mi gratitud a Fernando Alberto Morales Jauregui por una conversación que tuvimos cuando me dio el curso de sistemas dinámicos, conversación que hoy en día me ha servido como motivación para seguir mis estudios en el área de matemáticas.

En el ámbito personal, también quiero extender mis agradecimientos a las siguientes personas:

A mi familia por proporcionarme su compañía, por aceptar en la distancia una condición para la realización de mis proyectos, por la inquietud y la preocupación que manifiestan y que me han hecho sentir más motivado para obtener mejores resultados.

A mis compañeros de la maestría cuya dedicación por los estudios han representado un estímulo para finalizar apropiadamente este ciclo. En particular, quiero mencionar a Valentina Zapata Castro, Maria Camila López Posada, Johan Estiben López Cifuentes, Rafael Alexander Llinás Ramírez y Carlos Alberto Pérez López.

A personas maravillosas con las que me he encontrado en este trasegar de los que he aprendido mucho y que me han ayudado en la realización de este trabajo de muchas maneras: sugerencias en la organización de tiempo, revisión de la escritura, vigilancia en el cumplimiento de las metas establecidas, recomendaciones de salud, presencia en pausas activas y descanso. Ellas son Luisa Fernanda Cuartas Castrillón, Jessica Alejandra Avendaño Restrepo, Laura Ortiz Gaviria, Laura Bolívar Parra, Laura Valencia Ruiz, Ángela Rodríguez Gutiérrez, Elkin Hernán Gutiérrez Avendaño.

Por último y no menos importante, quiero manifestar mi completa gratitud a una persona sin

la cual este trabajo de grado no hubiera llegado a feliz término, una persona que con su actitud y desempeño profesional logró indiscutiblemente que este trabajo diera luz y pudiera realizarse acatando las disposiciones normativas de la Facultad de Ciencias. Muchas gracias, Maria Liliana Parra Osorno por estar pendiente de todos estos aspectos y contribuir de la mejor manera a mi crecimiento personal y profesional.

Resumen

La modelación matemática de sistemas biológicos está basada en el uso de diferentes herramientas, en particular en ecuaciones diferenciales y, por tanto, en sistemas dinámicos. Recientemente, se ha buscado que los modelos biológicos consideren el concepto de memoria, lo cual ha llevado a formular sistemas de ecuaciones en derivadas de orden fraccionario como el operador diferencial de Caputo. Con base en esto, se plantean varios objetivos dentro de esta investigación, incluyendo reconocer los resultados respecto a la estabilidad de las soluciones de equilibrio existentes, comparar el comportamiento cualitativo de los sistemas ordinario y fraccionario y aplicar estos resultados en modelos de poblaciones y transmisión de enfermedades. En aras de ello, se realiza el estudio de diferentes sistemas por medio de linealización y la construcción de los diagramas de fase usando el método predictor-corrector de Adams-Bashforth-Moulton. Los modelos estudiados corresponden a modelos predador-presa, de competencia y transmisión de epidemias, incluyendo algunos casos con crecimiento logístico. Respecto al comportamiento de los diferentes sistemas, se puede ver que el orden de la derivada es determinante en la estabilidad de los mismos, obteniendo casos en los que este valor corresponde a un parámetro de bifurcación, llegando inclusive a obtener comportamientos consistentes con bifurcaciones de Hopf.

Palabras clave: sistemas dinámicos, derivada de Caputo, memoria, Teorema de Matignon, linealización, crecimiento logístico.

Population models with logistic growth and memory

Abstract

Mathematical modeling of biological systems is based on the use of different tools, particularly differential equations and, therefore, dynamical systems. Recently, biological models have sought to consider the concept of memory, which has led to the formulation of systems of fractional order derivative equations such as the Caputo differential operator. Based on this, several objectives are raised within this research, including recognizing the results regarding the stability of existing equilibrium solutions, comparing the qualitative behavior of ordinary and fractional systems, and applying these results in models of populations and disease transmission. For this purpose, the study of different systems is carried out by means of linearization and the construction of phase diagrams using the Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector method. The studied models correspond to predator-prey, competition and epidemics transmission models, including some cases with logistic growth. Regarding the behavior of the different systems, it can be seen that the order of the derivative is determinant in their stability, obtaining cases in which this value corresponds to a bifurcation parameter, even obtaining behaviors consistent with Hopf bifurcations.

Keywords: dynamical systems, Caputo derivative, memory, Matignon Theorem, linearization, logistic growth.

Índice general

Introducción	1
1. Conceptos generales	3
1.1. Sistemas dinámicos	3
1.2. Cálculo fraccionario	17
2. Sistemas Dinámicos Fraccionarios en el sentido de Caputo	28
2.1. Ecuaciones diferenciales fraccionarias	28
2.2. Sistemas Lineales	30
2.3. Linealización de sistemas fraccionarios	35
2.4. Soluciones periódicas en sistemas autónomos fraccionarios	38
3. Aplicaciones	41
3.1. Solución numérica de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias: método de Adams-Bashforth-Moulton	41
3.2. Memoria	43
3.3. Modelos de interacción entre especies	44
3.3.1. Modelos predador-presa	44
3.3.2. Modelos de competencia entre especies	59
3.4. Modelos de epidemias	63
3.4.1. Modelo SIS	63
3.4.2. Modelos SIR	65
Conclusiones	76
Trabajo futuro	78
Apéndice	80

Índice de figuras

1.1. Retrato de fase para el sistema del Ejemplo 1.9 con $k = 1$	7
1.2. Retrato de fase para el sistema del Ejemplo 1.10, con $a = 0.1$, $b = 0.002$, $c = 0.0025$ y $d = 0.2$	8
1.3. Fig1	10
1.4. Diagramas de fase para sistemas lineales planos con valores propios complejos. . . .	10
1.5. Diagramas de fase para sistemas lineales con valores reales iguales no nulos y multiplicidad geométrica 2.	11
1.6. Diagrama de fase para sistemas lineales con valores reales iguales no nulos y multiplicidad geométrica 1.	11
1.7. Plano del fase del sistema definido en el Ejemplo 1.20 para diferentes valores de μ . .	15
1.8. Plano de fase para el sistema del Ejemplo 1.22 para diferentes valores de μ	16
2.1. Trayectorias descritas en el Ejemplo 2.13.	33
2.2. Trayectorias descritas en el Ejemplo 2.14.	34
2.3. Plano fase del Ejemplo 2.24	37
2.4. Trayectorias para el modelo de Lotka -Volterra fraccionario descritas en el Ejemplo 2.25.	37
2.5. Planos de fase del Ejemplo 2.26.	38
3.1. Trayectoria del Ejemplo 3.2 para órdenes (a) $\alpha = 0.98$, (b) $\alpha = 0.8$, (c) $\alpha = 0.5$. . .	46
3.2. Análisis del sistema (3.15) con $\alpha = 1$ y $m = 0.96$ (a) Evolución temporal, (b) plano de fase.	48
3.3. Análisis del sistema (3.15) con $\alpha = 1$ y $m = 0.1$ (a) Evolución temporal, (b) plano de fase.	48
3.4. Análisis del sistema (3.15) con $\alpha = 1$ y $m = 0$ (a) Evolución temporal, (b) plano de fase.	48
3.5. Análisis del sistema (3.15) con $\alpha = 0.98$ y $m = 0.96$ (a) Evolución temporal, (b) plano de fase.	49
3.6. Análisis del sistema (3.15) con $\alpha = 0.98$ y $m = 0.1$ (a) Evolución temporal, (b) plano de fase.	49
3.7. Análisis del sistema (3.15) con $\alpha = 0.98$ y $m = 0$ (a) Evolución temporal, (b) plano de fase.	49
3.8. Evolución temporal del sistema del Ejemplo 3.4 para (a) presas (b) predadores. . .	50
3.9. Plano de fase para el sistema (3.16) con $r_0 = 0.27$, $x_0 = 8$, $k_f = 0.1$ variando el valor de k : (a) $k = 1.1$ (b) $k = 1.3$ (c) $k = 1.35$ (d) $k = 1.6$	53
3.10. Plano de fase del sistema (3.17) con $r_0 = 0.27$, $x_0 = 8$, $k_f = 0.1$, $k = 1.6$ y (a) $\alpha = 0.9$, (b) $\alpha = 0.96$	55

3.11. Trayectoria del sistema (3.22) con valor inicial y parámetros dados en el Ejemplo 3.11 tomando $\alpha = 0.78$	58
3.12. Trayectoria del sistema (3.22) con valor inicial y parámetros dados en el Ejemplo 3.11 tomando $\alpha = 0.84$	58
3.13. Comportamiento temporal de las poblaciones consideradas en el sistema (3.22) con valor inicial y parámetros dados en el Ejemplo 3.11 tomando $\alpha = 0.84$	59
3.14. Plano de fase del sistema (3.28) con $\alpha = 0.9$, $\rho = 1$, $a_1 = 0.8$ y $a_2 = 1.2$	61
3.15. Plano de fase del sistema (3.28) con $\alpha = 0.9$, $\rho = 1$, $a_1 = 1.2$ y $a_2 = 0.8$	61
3.16. Plano de fase del sistema (3.28) con $\alpha = 0.9$, $\rho = 1$ y $a_1 = a_2 = 0.8$	62
3.17. Plano de fase del sistema (3.28) con $\alpha = 0.9$, $\rho = 1$ y $a_1 = a_2 = 1.2$	63
3.18. Población infectada para el sistema (3.31) con $N = 1000$, $I(0) = 30$, $c = -0.01$ y $\beta = 0.29$	65
3.19. Población infectada para el sistema (3.31) con $N = 1000$, $I(0) = 30$, $c = 0.01$ y $\beta = 0.31$	65
3.20. Evolución temporal del sistema (3.33) con los valores del Ejemplo 3.15 tomando $q = 0.9$ para (a) $\alpha = 0.8$, (b) $\alpha = 0.9$ y (c) $\alpha = 0.99$	68
3.21. Evolución temporal del sistema (3.33) con los valores del Ejemplo 3.15 tomando $q = 0.3$ para (a) $\alpha = 0.8$, (b) $\alpha = 0.9$ y (c) $\alpha = 0.99$	68
3.22. Evolución temporal del sistema (3.33) con los valores del Ejemplo 3.15 tomando $q = 0$ para (a) $\alpha = 0.8$, (b) $\alpha = 0.9$ y (c) $\alpha = 0.99$	69
3.23. Plano de fase para bifurcación de Hopf en $\delta = 0.075$ del sistema (3.34) con parámetros $k = 1.5$, $r = 0.1$, $a = 2$ y $\beta = 3$ con (a) $\delta = 0.075$ y (b) $\delta = 0.08$	72
3.24. Evolución temporal de las variables de estado para bifurcación de Hopf en $\delta = 0.075$ del sistema (3.34) con parámetros $k = 1.5$, $r = 0.1$, $a = 2$ y $\beta = 3$ con (a) $\delta = 0.075$ y (b) $\delta = 0.08$	72
3.25. Plano de fase para el sistema (3.36) con $k = 1$, $a = 2$, $\beta = 0.01$, $\delta = 0.04$, $r = 0.1$ para (a) $\alpha = 0.98$, (b) $\alpha = 0.75$	73
3.26. Plano de fase para el sistema (3.36) con $k = 1$, $a = 1$, $\beta = 0.7$, $\delta = 0.3$, $r = 0.2$ para (a) $\alpha = 0.98$, (b) $\alpha = 0.75$	73
3.27. Diferentes trayectorias para el sistema (3.36) con $k = 1.5$, $a = 2$, $\beta = 0.3$, $\delta = 0.05$, $r = 0.1$ y $\alpha = 0.93$	74
3.28. Diferentes trayectorias para el sistema (3.36) con $k = 1.5$, $a = 2$, $\beta = 0.3$, $\delta = 0.05$, $r = 0.1$ y $\alpha = 0.9$	74
3.29. Diferentes trayectorias para el sistema (3.36) con $k = 1.5$, $a = 2$, $\beta = 0.3$, $\delta = 0.05$, $r = 0.1$ y $\alpha = 0.95$	75

Introducción

La dinámica de poblaciones es un área de las ciencias que intenta explicar la variación en tamaños y composición de las poblaciones, incluyendo conocimientos de diferentes disciplinas como la biología, la medicina, la demografía y, en particular, las matemáticas (Bacaër, 2011). Para la representación del comportamiento temporal de las poblaciones se implementan diferentes modelos buscando replicar su dinámica entre los que se encuentran modelos discretos, continuos, determinísticos y estocásticos (Bacaër, 2011). Históricamente, los modelos continuos determinísticos asociados a sistemas de ecuaciones diferenciales han sido ampliamente utilizados para este propósito.

Uno de los primeros escenarios en los que aparecen las ecuaciones diferenciales para estudio de poblaciones es la demografía. Thomas Robert Malthus en 1798 expresó que la población crece en proporción geométrica mientras que los recursos para la subsistencia crecen en progresión aritmética (Bacaër, 2011). Posteriormente, Pierre-François Verlhulst, en 1838, sugiere que las poblaciones no pueden crecer geométricamente sino que la tasa de crecimiento de la población está afectada por el entorno (Bacaër, 2011), a lo cual asocia una cantidad conocida hoy en día como capacidad de carga. Estas dos situaciones siguen siendo consideradas como primeros modelos de estudio del crecimiento poblacional; el modelo enunciado por Malthus corresponde a un crecimiento exponencial que sigue siendo aplicado para estudiar crecimiento de bacterias mientras que el enunciado de Verlhulst es conocido ahora como modelo de crecimiento logístico, componente de muchos de los trabajos relacionados con crecimiento poblacional.

La aplicación de las ecuaciones diferenciales también se ha aplicado para estudiar la interacción entre especies. En 1920, Alfred James Lotka publica “Analytical notes on certain rythmic relations in organic systems” donde enuncia el sistema actualmente conocido como sistema predador-presa de Lotka-Volterra considerando la interacción entre vegetación y herbívoros (Bacaër, 2011). Posteriormente, en 1925, Vito Volterra utiliza el sistema introducido por Lotka para estudiar la proporción de peces cartilagosos y la pesca en diferentes locaciones del mar Mediterráneo en Italia (Bacaër, 2011). El trabajo de ambos ha sido de gran importancia en la biología matemática ya que muchos de los modelos actuales sobre interacción de especies se basan en este primer sistema de ecuaciones incluyendo modificaciones en el crecimiento de las especies y su interacción por medio de analogías con leyes físicas y químicas conocidas.

La medicina no ha escapado a la presencia de los sistemas de ecuaciones diferenciales, sobre todo en el campo de la epidemiología donde se hace necesario el estudio de la dinámica de las poblaciones infectadas, especialmente para tomar decisiones relacionadas con la salubridad pública. En 1911, Ronald Ross publica “The Prevention of Malaria” en el cual analiza el avance de la enfermedad por medio de ecuaciones diferenciales (Bacaër, 2011). Este trabajo fue estudiado por Anderson Gray McKendrick en su publicación de 1926 “Applications of mathematical to medical models”, en la cual propone por primera vez la interacción entre tres compartimientos de la población: susceptibles, infectados y recuperados. Posteriormente, McKendrick recibe la colaboración de William Ogilvy

Kermack en lo que se conoce actualmente como modelos SIR para la propagación de enfermedades (Bacaër, 2011). El modelo epidemiológico Kermack-McKendrick es uno de los más sencillos en el estudio de propagación de enfermedades, pero ha inspirado la creación de otros que incluyen aspectos como la vacunación, la incidencia del contacto por medio de funciones generalizadas y otros aspectos propios de la dinámica de cada enfermedad según sea el caso.

Hasta el momento se han mencionado modelos basados en el cálculo creado en el siglo XVII por Newton y Leibniz. Sin embargo, de manera paralela se estaba desarrollando un área diferente de las matemáticas que puede aportar herramientas para dilucidar el comportamiento de las poblaciones, la cual se conoce actualmente como cálculo fraccionario. La historia sitúa el nacimiento del cálculo fraccionario en 1695 en una correspondencia intercambiada entre Leibniz y L'Hôpital en la cual se expone que al tomar la habitual notación $\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$ si el significado de las derivadas de orden entero puede ser extendido a orden no entero, en particular a $n = \frac{1}{2}$ (Machado et al., 2010). En esta discusión aparecieron aportes de Euler, Laplace, Lagrange, Fourier y Abel. Dentro de estas investigaciones se buscaba propiamente definir un operador diferencial con orden fraccionario, labor que fue desarrollada por Bernhard Riemann al establecer propiamente la integración fraccionaria siguiendo el trabajo de Liouville (Machado et al., 2010). Posteriormente aparece la primera definición de una derivada fraccionaria, enunciada por Anton Grünwald y Aleksey Letnikov como el límite de una sumatoria (Machado et al., 2010). Con base en todos estos aportes se consolidó lo que hoy se conoce como cálculo fraccionario, una rama del análisis matemático enfocada en operadores integro-diferenciales donde las integrales son tipo convolución y exhiben kernels tipo leyes potenciales (Machado et al., 2011).

Desde mediados del siglo XX, el cálculo fraccionario ha tenido una amplia difusión en diferentes modelos de matemáticas aplicadas en diferentes áreas de las ciencias. En particular, uno de los temas que ha visto mayor número de aplicaciones de cálculo fraccionario ha sido el tema de viscoelasticidad, en el cual Caputo, en 1969, propone un operador diferencial para este propósito, el cual lleva su nombre. El uso de operadores fraccionarios en temas relacionados con las ciencias de los materiales debe a que estos permiten estudiar fenómenos hereditarios con memoria (Machado et al., 2011), lo que también ha tenido acogida para el estudio de control de sistemas, cálculo de variaciones, relaciones constitutivas con propiedades mecánicas, eléctricas y térmicas de materiales, procesamiento de imágenes, aplicaciones físicas de plasma, entre otros (Machado et al., 2011). El componente de memoria ha generado interés en los modelos biológicos ya que la experiencia sugiere que el estado de las poblaciones en un tiempo determinado tendrá influencia de los estados previos. Diversos modelos de sistemas de ecuaciones diferenciales en el contexto de la dinámica de poblaciones han sido implementados usando operadores fraccionarios, dentro de los cuales se mencionarán varios en el desarrollo de este trabajo.

En este trabajo se pretende mostrar diferencias cualitativas en modelos de dinámica de poblaciones que involucran la derivada ordinaria y operadores diferenciales de tipo fraccionario, para lo cual se plantea una estructura dividida en varios capítulos. En el Capítulo 1, se presentan los conceptos básicos para realizar dicha comparación empezando por los conceptos y resultados más importantes en el contexto de sistemas dinámicos en el sentido ordinario siguiendo con la introducción de los operadores diferenciales fraccionarios y sus propiedades. El Capítulo 2 se centra en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales fraccionarias aludiendo al concepto de estabilidad de puntos de equilibrio y el proceso de linealización. Con base en los capítulos precedentes, en el tercer capítulo se estudian diferentes sistemas de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario correspondientes a modelos predador-presa, de competencia y de propagación de enfermedades, haciendo énfasis en la estabilidad de las soluciones de equilibrio. Por último, se establecen conclusiones y líneas de posible trabajo futuro.

Capítulo 1

Conceptos generales

Este capítulo consta de las definiciones y propiedades consideradas sobre el uso de sistemas dinámicos, así como los resultados básicos en derivadas fraccionarias.

1.1. Sistemas dinámicos

Según Layek (2015), la dinámica hace referencia al estudio de los procesos que evolucionan en el tiempo, los cuales pueden ser determinísticos, no determinísticos o semi determinísticos. En particular, un proceso se considera determinístico cuando sus estados pasado y futuro pueden ser predecidos conociendo el estado presente y las leyes que gobiernan su evolución (Kuznetsov, 2013). De acuerdo con Kuznetsov (2013), el concepto de sistema dinámico es la formalización matemática de un proceso determinístico.

Con base en lo anterior, los sistemas dinámicos deben reunir tres características. Para empezar, deben considerar todos los posibles estados que puede tener el proceso determinístico asociado, los cuales corresponden a un conjunto X . A este espacio se le suele conocer como espacio fase. En segundo lugar, es necesario definir un conjunto numérico T sobre el cual se analizará la evolución del sistema dinámico, que suele hacer referencia a una variable temporal. De acuerdo al tiempo, los sistemas dinámicos pueden clasificarse como sistemas continuos o discretos. Por último, se necesita una ley de evolución, es decir, el componente que indica dado un estado inicial x_0 , cual es el estado del sistema en el tiempo t , es decir x_t . Esta ley de evolución corresponde a un mapeo φ que satisface las siguientes condiciones: dado $t \in T$, el mapeo

$$\varphi : X \times T \rightarrow X$$

es tal que un estado inicial $x_0 \in X$ es transformado en un estado $x_t \in X$, es decir, $x_t = \varphi(x_0, t)$.

Una de las suposiciones que se realizan sobre los procesos determinísticos consiste en tomar las leyes de evolución como invariantes en el tiempo (Kuznetsov, 2013). En particular, esta propiedad hace que la función φ mencionada previamente deba cumplir varias condiciones.

Para formalizar lo desarrollado anteriormente, acudiremos a la definición de sistema dinámico establecida en el texto de Krabs y Pickl (2010).

Definición 1.1 (Sistema dinámico). Sea (X, d) un espacio métrico. Además, sea T un semigrupo

aditivo de números reales, es decir,

$$\begin{aligned} 0 &\in T \\ t, s \in T &\Rightarrow t + s = s + t \in T \\ t, s, r \in T &\Rightarrow (t + s) + r = t + (s + r). \end{aligned}$$

Un sistema dinámico sobre X , también llamado flujo, es definido por un mapeo continuo

$$\phi : X \times T \rightarrow X$$

con las siguientes propiedades:

$$\phi(x, 0) = x, \quad \forall x \in X; \quad (1.1)$$

$$\phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, t + s), \quad \forall t, s \in T, \forall x \in X. \quad (1.2)$$

En particular, Krabs y Pickl (2010) establecen que el primer ejemplo de sistema dinámico corresponde a las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 1.2. Sea U un subconjunto no vacío, abierto y conexo de \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) y sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función tipo Lipschitz, es decir, existe una constante $K > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|, \quad x, y \in U, \quad (1.3)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en \mathbb{R}^n . El Teorema de Existencia y Unicidad establece que para cada $x_0 \in U$, el problema de valor inicial

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (1.4)$$

tiene una única solución $x(t) = \varphi(x_0, t) \in C^1(U, I)$, siendo I un intervalo abierto que contenga al cero.

Para comprobar que el problema anterior define un sistema dinámico, consideremos, sin pérdida de generalidad, que el intervalo de existencia anterior corresponde a toda la recta real, es decir, $I = \mathbb{R}$, tomemos como espacio de estados $X = U$ dotado con la métrica inducida por la norma euclidiana. Definimos el mapeo $\phi : X \times I \rightarrow X$ por

$$\phi(x, t) = \varphi(x, t), \quad \forall x \in X, t \in I.$$

Es decir, el flujo está definido por la solución del sistema cuya solución pasa por x en el instante $t = 0$. De lo anterior, se sigue que

$$\phi(x, 0) = \varphi(x, 0) = x, \quad \forall x \in X.$$

El mapeo ϕ satisface la propiedad (1.1). Para verificar que ϕ satisface la propiedad (1.2), fijemos $t \in I$. Podemos definir, para cada $x \in X$, la siguiente función:

$$\psi(x, s) = \varphi(x, t + s), \quad \forall s \in I.$$

De la definición de ψ y del sistema dinámico, se sigue que

$$\frac{d}{dt}\psi(x, s) = \frac{d}{dt}\varphi(x, t + s) = f(x(t + s)) = f(\psi(x, s)).$$

Además,

$$\psi(x, 0) = \varphi(x, t).$$

Es decir, $\psi(x, s)$ es solución del sistema autónomo (1.4) con $x_0 = \varphi(x, t)$. De la unicidad de las soluciones, se sigue que

$$\psi(x, s) = \varphi(x, t + s) = \varphi(\varphi(x, t), s).$$

De lo anterior, se sigue que ϕ satisface la propiedad (1.2). La continuidad de dicho mapeo es consecuencia del Teorema de Dependencia Continua de las Condiciones Iniciales.

La forma más común de definir un sistema dinámico continuo se basa en el hecho de utilizar las ecuaciones diferenciales como se ha discutido previamente (Kuznetsov, 2013). Tomando como espacio de estados $X = \mathbb{R}^n$, se tienen que todos los posibles estados se pueden escribir como $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Aquí, cada coordenada x_i será denominada variable de estado (Witelski y Bowen, 2015). En particular, por las características de los procesos determinísticos desarrolladas previamente, se pueden modelar las variables de estado bajo el supuesto de que su cambio temporal depende de las variables de estado, es decir

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

o bien, usando la forma vectorial descrita previamente

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.5}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función suficientemente suave. El sistema en (1.5) es conocido como un sistema autónomo de n ecuaciones diferenciales ordinarias. Ahora bien, existen sistemas de ecuaciones diferenciales en los cuales las tasas de cambio también dependen del tiempo. Pero, Layek (2015) muestra que en realidad se puede asociar a cualquier sistema de ecuaciones diferenciales un sistema autónomo introduciendo al tiempo como una nueva variable de estado. Es por eso que el estudio de los sistemas dinámicos continuos asociados a ecuaciones diferenciales suele empezar con el estudio de sistemas autónomos como el definido previamente.

De acuerdo con Witelski y Bowen (2015), se tienen dos problemas de interés particular relacionados con los sistemas dinámicos. Para empezar, se busca entender el comportamiento de una solución con condición inicial x_0 , lo que corresponde a la dinámica del sistema. Por otro lado, se quiere saber si es posible predecir el comportamiento de las soluciones al tomar diferentes condiciones iniciales, lo que corresponde a la estabilidad. El problema al que nos dedicaremos será el de estabilidad, por lo que tenemos que introducir varias definiciones y algunos teoremas clásicos de sistemas dinámicos.

Definición 1.3 (Órbita). Sea ϕ un sistema dinámico definido sobre el espacio métrico (X, d) . Sea $x_0 \in X$. El conjunto

$$\mathcal{O}(x_0) := \{x \in X : x = \phi(x_0, t), \text{ para todo } t \in T\}$$

es llamado la órbita o trayectoria a través de x_0 .

Las órbitas en un sistema dinámico continuo corresponden a curvas en el espacio de estados X que están parametrizadas por el tiempo t y orientadas en su dirección de crecimiento (Kuznetsov, 2013). Teniendo en cuenta la definición de órbita, cabe la posibilidad de que sean conjuntos con un único punto. Esto motiva definir el concepto de punto de equilibrio.

Definición 1.4 (Punto de equilibrio). Bajo las condiciones de la Definición 1.3, un punto $x_0 \in X$ es llamado punto de equilibrio si $\phi(x_0, t) = x_0$, para todo $t \in T$.

Nota. Si x_0 es un punto de equilibrio, entonces $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$. En particular, si tenemos el sistema dinámico asociado al sistema (1.5) con condición inicial x_0 resulta tener una solución constante. Es decir, $x(t) \equiv x_0$, para todo t . Reemplazando en (1.5),

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \Rightarrow 0 = f(x_0).$$

Se puede deducir entonces que los puntos de equilibrio del sistema dinámico asociado a (1.5) corresponden a las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.

Definición 1.5 (Ciclo). Bajo las condiciones de la Definición 1.3, se define ciclo como una órbita $L_0 = \mathcal{O}(x_0)$, donde x_0 no es un punto de equilibrio que satisface la siguiente condición: existe un $T_0 \in T$ tal que

$$\phi(x, t + T_0) = \phi(x, t),$$

para todo $x \in X$ y $t \in T$. El mínimo T_0 con esta propiedad se conoce como el periodo del ciclo L_0 .

En un sistema dinámico continuo, los ciclos corresponden a curvas cerradas. La existencia de ciclos es una pregunta recurrente en sistemas dinámicos aplicados, en particular para poder establecer un comportamiento periódico de las variables de estado. Dependiendo de los modelos que se trabajen, el número de ciclos pueden variar, sobre todo al trabajar en diferentes regiones de \mathbb{R}^n . Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.6 (Ciclo límite). Un ciclo de un sistema dinámico continuo en una vecindad en la cual no hay otros ciclos es llamado ciclo límite.

A parte de los puntos de equilibrio y ciclos, existen otro tipo de órbitas conocidas como homoclinicas y heteroclinicas, definidas por Müller y Kuttler (2015) como sigue:

Definición 1.7 (Órbitas homoclinicas y heteroclinicas). Una órbita que comience en un punto de equilibrio x_2 del sistema (1.5) y termine en un punto de equilibrio x_1 , i.e.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_2, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_1,$$

se llama

- (a) homoclinica, si $x_1 = x_2$
- (b) heteroclinica, si $x_1 \neq x_2$.

Un ciclo heteroclinico es un número finito de órbitas heteroclinicas conectando n puntos estacionarios.

Un análisis apropiado de las órbitas de un sistema dinámico nos puede dar mucha información sobre el comportamiento cualitativo del sistema. Una herramienta común en el trabajo con sistemas dinámicos es la construcción del plano o retrato de fase, que se define como sigue:

Definición 1.8 (Plano o retrato de fase). El retrato de fase de un sistema dinámico es un particionamiento del espacio fase en órbitas.

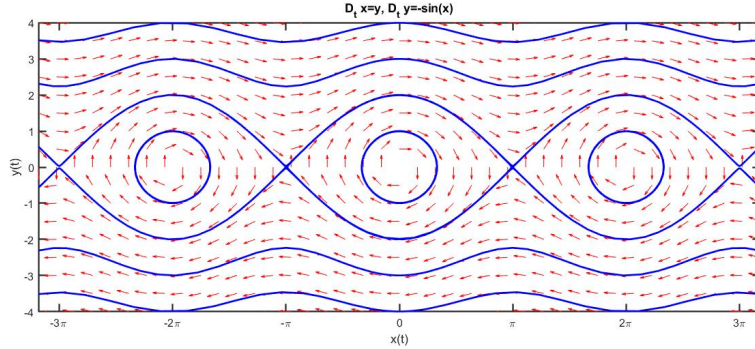


Figura 1.1: Retrato de fase para el sistema del Ejemplo 1.9 con $k = 1$.

Con base en las definiciones previas, vamos a hacer la construcción de los planos de fase de dos sistemas dinámicos clásicos. En primera instancia, vamos a considerar un modelo para el péndulo no lineal y, posteriormente, vamos a trabajar con el modelo depredador - presa de Lotka y Volterra.

Ejemplo 1.9. A partir de la Segunda Ley de Newton, puede deducirse que la dinámica de un péndulo ideal puede ser descrita por la ecuación diferencial

$$\ddot{\theta} = -k^2 \sin(\theta).$$

Si introducimos las variables de estado $x_1(t) = \theta(t)$, $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ con

- $x_1(t)$ es la posición del ángulo en radianes, en el instante t ,
- $x_2(t)$ es la velocidad angular, en radianes por unidad de tiempo, en el instante t

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{\theta}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{\theta}(t) = -k^2 \sin(\theta) = -k^2 \sin(x_1(t)) \end{aligned}$$

el cual se puede escribir como el sistema (1.5) tomando

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -k^2 \sin(x_1) \end{pmatrix}.$$

En la Figura 1.1 se observa el retrato de fase del sistema anterior tomando $k = 1$. Aquí se ve la presencia de ciclos, así como de otro tipos de órbitas. En particular, en cualquier bola abierta centrada en $(2n\pi, 0)^T$, $n \in \mathbb{N}$ y con radio positivo, se encuentra un número infinito de ciclos del sistema dinámico.

Ejemplo 1.10. Uno de los primeros modelos de interacción entre especies corresponde al modelo depredador - presa de Lotka - Volterra. En particular, consideremos las siguientes variables de estado:

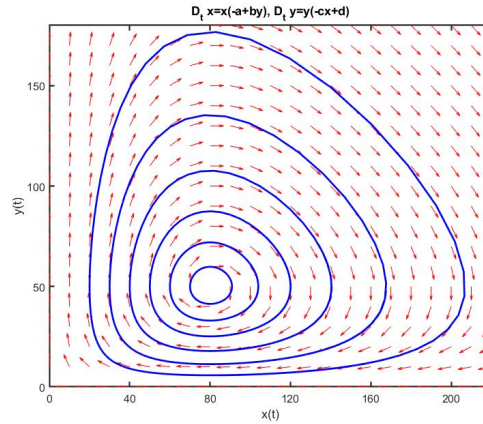


Figura 1.2: Retrato de fase para el sistema del Ejemplo 1.10, con $a = 0.1$, $b = 0.002$, $c = 0.0025$ y $d = 0.2$

- $x_1(t)$ es la población escalada de presas, en el instante t ,
- $x_2(t)$ es la población escalada de depredadores, en el instante t

Un modelo para describir las tasas de cambio temporales de las variables de estado corresponde al siguiente par de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1x_2 - dx_2\end{aligned}$$

De acuerdo con Lynch (2004), cada uno de los términos que aparecen al lado derecho del sistema de ecuaciones diferenciales se pueden interpretar como sigue:

- ax_1 representa el crecimiento de la presa en ausencia de depredadores,
- $-bx_1x_2$ y cx_1x_2 representan las interacciones entre las especies,
- $-dx_2$ representa el decrecimiento de los depredadores en ausencia de las presas.

Un ejemplo de este sistema se obtiene tomando los valores $a = 0.1$, $b = 0.002$, $c = 0.0025$ y $d = 0.2$. El plano de fase asociado se observa en la Figura 1.2. Se observa que todas las órbitas corresponden a ciclos. Con base en esto, se puede hablar del comportamiento de las especies cuando los parámetros tienen los valores mencionados. La población mínima de predadores se obtiene cuando la población de las presas es 80, de ahí la población de predadores aumenta mientras que la de presas disminuye hasta que llega a su mínimo valor cuando la población de predadores es de 50. Superado este punto, tanto la población de ambas especies comienza a crecer hasta que se obtiene el punto de máxima población de predadores nuevamente cuando la población de presas es 80. Posterior a este instante, la población de predadores empieza a disminuir mientras que la población de presas sigue creciendo maximizándose cuando la población de predadores es 50. Pasado este punto, ambas especies empiezan a decrecer hasta que la población de predadores llega a su punto mínimo.

Como se había mencionado previamente, uno de los problemas más estudiados en sistemas dinámicos corresponde a la estabilidad de las soluciones. En palabras de Wiggins (2003), una solución $x(t)$ del sistema (1.5) es estable si soluciones que estén “cerca” en un instante t_0 sigan estando “cerca” para los tiempos posteriores. Aquí debemos precisar a qué nos referimos con “cerca”. La siguiente definición aclara el sentido de cercanía mencionado.

Definición 1.11 (Estabilidad en el sentido de Lyapunov). Se dice que una solución $\bar{x}(t)$ del sistema (1.5) se dice estable (en el sentido de Lyapunov) si dado un $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que, para cualquier otra solución $y(t)$ del sistema se satisface que

$$\|\bar{x}(t_0) - y(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\bar{x}(t) - y(t)\| < \epsilon,$$

para $t > t_0$ y $t_0 \in \mathbb{R}$.

En particular, $\bar{x}(t)$ es llamada asintóticamente estable si es estable y para cualquier otra solución $y(t)$ existe una constante $b > 0$ tal que

$$\|\bar{x}(t_0) - y(t_0)\| < b \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\bar{x}(t) - y(t)\| = 0.$$

En muchas ocasiones, el estudio de las órbitas de un sistema dinámico puede ser dispendioso. Por eso, se busca encontrar sistemas dinámicos que cualitativamente tengan el mismo comportamiento pero que sean más fáciles de trabajar. La siguiente definición, presente en el texto de Lynch (2004), sintetiza esta situación.

Definición 1.12 (Sistemas dinámicos topológicamente equivalentes). Dos sistemas de primer orden son cualitativamente o topológicamente equivalentes si existe un mapeo invertible que mapea el plano de fase de uno de los sistemas en el otro plano de fase preservando la orientación de las trayectorias.

Los sistemas dinámicos más simples son los sistemas lineales. Para empezar, consideraremos los sistemas planos, los cuales se pueden escribir en la forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Para sistemas matriciales, tenemos que la relación de similaridad permite establecer sistemas topológicamente equivalentes. Entonces, se pueden considerar los sistemas dinámicos a partir de las formas canónicas Lynch (2004). Para toda matriz A existe una matriz invertible P tal que $J = P^{-1}AP$, las cuales se construyen con base en los valores y vectores propios de las matrices. Por ejemplo, si una matriz es singular, entonces tiene al menos un valor propio nulo y el sistema dinámico correspondiente estará representado por trayectorias equivalentes a líneas rectas o puntos, de acuerdo a la forma de la matriz (Layek, 2015). Los sistemas dinámicos de mayor interés se obtienen con matrices no singulares. Para el caso de matrices de orden 2×2 , dependiendo de los valores y vectores propios, existen cuatro posibilidades dadas por el Teorema 1.13 (Layek, 2015).

Teorema 1.13. Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Entonces, existe una matriz real no singular $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $P^{-1}AP$ es una de las siguientes matrices:

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad J_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

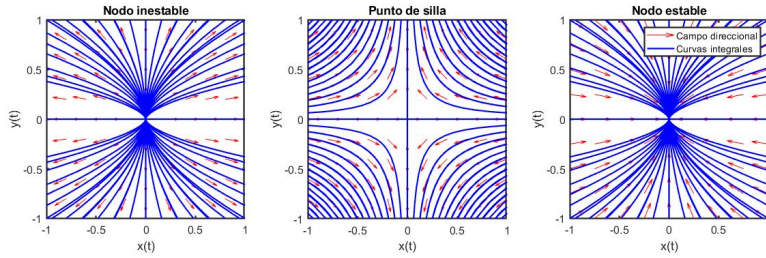


Figura 1.3: Diagramas de fase para sistemas lineales con dos valores propios reales diferentes.

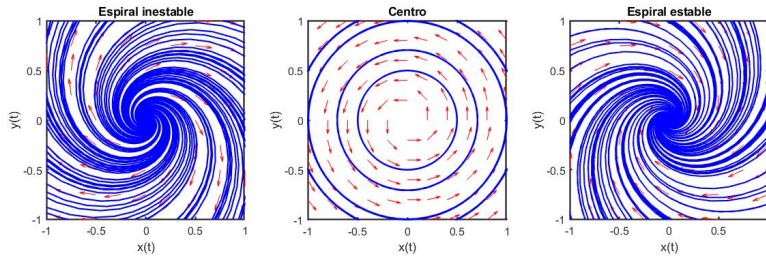


Figura 1.4: Diagramas de fase para sistemas lineales planos con valores propios complejos.

Con base en lo anterior, se puede establecer que el conjunto de posibles planos de fase de un sistema de la forma (1.6) debe ser equivalente a alguno de las siguientes posibilidades:

1. Si la matriz A es similar a la matriz J_1 , se tiene que la matriz A tiene dos valores propios reales diferentes. De acuerdo a los signos, se clasifican los puntos de equilibrio de la siguiente manera: si los dos valores propios son positivos, el equilibrio es llamado nodo inestable; si los dos valores tienen signos diferentes, el punto de equilibrio corresponde a un punto de silla (inestable); si los dos valores son negativos, el equilibrio es un nodo estable. Los posibles casos se muestran en la Figura 1.3.
2. Si la matriz A es semejante a la matriz J_2 , los valores propios de A son complejos con parte real α y parte imaginaria β . De acuerdo con el signo de α , el punto de equilibrio puede corresponder a una espiral estable ($\alpha < 0$), espiral inestable ($\alpha > 0$) o un centro estable ($\alpha = 0$) (ver Figura 1.4).
3. Si la matriz A es similar a la matriz J_3 , los valores propios de A son iguales, caso en el cual se tiene que el punto de equilibrio es un nodo singular o en estrella. Cuando los valores propios son negativos, el equilibrio es estable; si son positivos, el equilibrio es inestable (ver Figura 1.5).

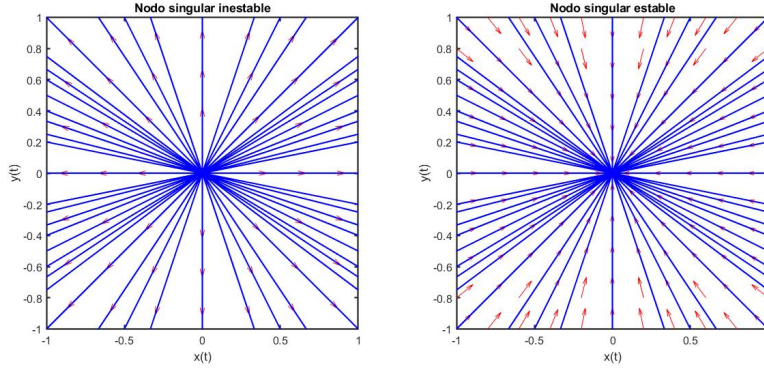


Figura 1.5: Diagramas de fase para sistemas lineales con valores reales iguales no nulos y multiplicidad geométrica 2.

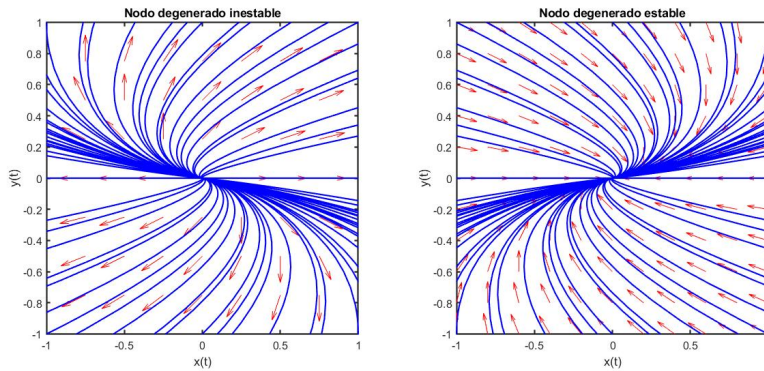


Figura 1.6: Diagrama de fase para sistemas lineales con valores reales iguales no nulos y multiplicidad geométrica 1.

4. Si la matriz A es similar a la matriz J_4 , tenemos valores propios repetidos pero un solo vector propio. En este caso, el equilibrio se considera un nodo degenerado. Al igual que en el numeral anterior, la clasificación del equilibrio está dada por el signo de los valores propios (ver Figura 1.6).

Como acabamos de ver, la estabilidad de $x = 0$ en el sistema (1.6) depende en esencia de los valores propios de la matriz A . Se puede estudiar la estabilidad sin necesidad de obtener los valores propios de la matriz. Para $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, se puede demostrar que su polinomio característico corresponde a

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A),$$

donde $\text{tr}(A)$ y $\det(A)$ corresponden a la traza y el determinante de A respectivamente. El discriminante de este polinomio es $\Delta = \text{tr}(A)^2 - 4\det(A)$. Como los valores propios λ_1, λ_2 de A son las raíces de $p(\lambda)$, se tiene que $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ y $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$. Además, se obtiene que los valores propios de la matriz A son

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Combinando esto con el análisis de los planos de fase realizados previamente, se obtiene un criterio de estabilidad. Layek (2015) menciona las condiciones para establecer la estabilidad del sistema (1.6), resumidas en el siguiente resultado:

Teorema 1.14. El origen del sistema (1.6) es

- (a) asintóticamente estable si $\text{tr}(A) < 0$ y $\det(A) > 0$,
- (b) estable si $\text{tr}(A) \leq 0$ y $\det(A) > 0$. Si $\text{tr}(A) = 0$, el sistema corresponde a un centro estable,
- (c) inestable si $\text{tr}(A) > 0$ o $\det(A) < 0$.

Con base en lo discutido previamente, se puede decir que todos los sistemas lineales planos están clasificados con base en sus planos de fase. Ahora bien, es posible que un sistema lineal nos dé información sobre la dinámica local de un sistema dinámico como el sistema (1.5), en particular la estabilidad de una solución asociada a un punto de equilibrio. Una herramienta utilizada con este fin corresponde a la linealización. Para ello, primero definimos la matriz derivada de la función f del sistema.

Definición 1.15 (Matriz jacobiana de una función f). Sea $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$. Entonces, la matriz

$$J_f(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$$

es llamada la matriz jacobiana (o derivada) de la función f .

Para hablar de linealización, seguiremos el esquema sugerido por Wiggins (2003). Consideremos una solución $\bar{x}(t)$ del sistema (1.5), debemos entender la naturaleza de las soluciones $x(t) = \bar{x}(t) + y(t)$. Reemplazando en el sistema y haciendo expansión en series de Taylor alrededor de $\bar{x}(t)$ tenemos

$$\dot{x}(t) = \dot{\bar{x}}(t) + \dot{y}(t) = f(\bar{x}(t)) + J_f(\bar{x}(t))y(t) + O(\|y(t)\|^2),$$

donde f debe ser al menos dos veces diferenciable. Usando el hecho de que $\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t))$, tenemos que

$$\dot{y}(t) = J_f(\bar{x}(t))y(t) + O(\|y(t)\|^2). \tag{1.8}$$

La ecuación (1.8) describe la evolución de las órbitas cerca de $\bar{x}(t)$. Nos interesa saber qué información de la estabilidad de la solución $\bar{x}(t)$ se puede obtener del sistema linealizado $\dot{y}(t) = J_f(\bar{x}(t))y(t)$. En aras de obtener esto, Wiggins (2003) dice que se requieren dos cosas:

- (i) determinar si la solución $y = 0$ es estable,
- (ii) mostrar que la estabilidad de $y = 0$ implica la estabilidad de $\bar{x}(t)$.

En general, las soluciones asociadas a puntos de equilibrios son las más analizadas por medio de la linealización. Sin embargo, como se ve en (ii) de la parte anterior, es posible que la estabilidad del origen en el sistema linealizado no garantice la estabilidad de la solución de equilibrio analizada. Para ello, vamos a ver bajo qué condiciones el sistema linealizado logra replicar las condiciones de estabilidad del sistema original. También se exhiben ejemplos en los cuales el sistema linealizado no aporta información acerca del sistema original. Para empezar, definamos punto de equilibrio hiperbólico.

Definición 1.16 (Punto de equilibrio hiperbólico). Sea \bar{x} un punto de equilibrio del sistema (1.5). Entonces \bar{x} es llamado un punto de equilibrio hiperbólico si ninguno de los valores propios de $J_f(\bar{x})$ tiene parte real nula.

Cuando se tiene un punto de equilibrio hiperbólico, el sistema linealizado brinda la información sobre la estabilidad de la solución asociada. Localmente, los planos de fase del sistema original y su linealización van a tener el mismo comportamiento cualitativo, es decir, van a ser topológicamente equivalentes. Este resultado se conoce como el Teorema de Hartman - Grobman. Aquí está el enunciado expuesto por Müller y Kuttler (2015):

Teorema 1.17 (Hartman - Grobman). Sea \bar{x} un punto de equilibrio hiperbólico del sistema (1.5). Entonces, existe una vecindad U de \bar{x} y un homeomorfismo $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $h(\bar{x}) = 0$ el cual mapea las trayectorias del sistema (1.5) de manera uno a uno en las trayectorias del sistema $\dot{z} = Az$, donde A es la matriz jacobiana de f evaluada en \bar{x} .

Vamos a desarrollar unos ejemplos respecto al tema de linealización.

Ejemplo 1.18. Volvamos al Ejemplo 1.9. Si igualamos la función f al vector cero, encontramos que los puntos de equilibrio del sistema corresponden a $(m\pi, 0)^T$, $m \in \mathbb{Z}$. La matriz jacobiana de f es

$$J_f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix}.$$

Si evaluamos los puntos de equilibrio en la matriz jacobiana, tendremos que

$$J_f \begin{pmatrix} m\pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix} \text{ si } m \text{ es par y } J_f \begin{pmatrix} m\pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k^2 & 0 \end{bmatrix} \text{ si } m \text{ es impar.}$$

Entonces, cuando m es par, los valores propios de la matriz jacobiana evaluada en el punto de equilibrio son $\lambda_{1,2} = \pm ki$, lo que corresponde a un punto de equilibrio no hiperbólico, por lo cual el Teorema de Hartman - Grobman no permite concluir. Sin embargo, del plano de fase presente en la Figura 1.1 se ve que estos puntos son estables. En el caso m impar, los valores propios son $\lambda_{1,2} = \pm k$, lo que corresponde a puntos hiperbólicos equivalentes a puntos de silla y por lo tanto son puntos de equilibrio inestable.

Ejemplo 1.19. En el Ejemplo 1.10 tenemos un sistema de la forma (1.5) con

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 - bx_1x_2 \\ cx_1x_2 - dx_2 \end{pmatrix}.$$

De allí, se obtienen dos puntos de equilibrio: $(0, 0)^T$ y $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})^T$. En el modelo de Lotka - Volterra, el segundo punto crítico es conocido como equilibrio de coexistencia de las especies. Para usar la

linealización en esos puntos, primero debemos calcular la matriz jacobiana de f . En este caso, se obtiene que

$$J_f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a - bx_2 & -bx_1 \\ cx_2 & cx_1 - d \end{bmatrix}.$$

Si evaluamos los puntos de equilibrio en la matriz jacobiana, tenemos que

$$J_f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}, \quad J_f \begin{pmatrix} \frac{d}{c} \\ \frac{a}{b} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{bmatrix}.$$

En el origen, los valores propios de la matriz jacobiana son $\lambda_1 = a$ y $\lambda_2 = -d$, lo que corresponde a un punto de equilibrio hiperbólico. Por tanto, el Teorema de Hartman - Grobman nos permite decir que localmente el sistema se comporta como un punto de silla, por lo que el origen es un punto de equilibrio inestable. Ahora bien, para el punto de coexistencia, la matriz jacobiana toma valores propios $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ad}$, por lo que es un punto de equilibrio no hiperbólico, con lo cual el Teorema de Hartman - Grobman no nos permite hacer conclusiones sobre la estabilidad. En el plano de fase presente en la Figura 1.2 se ve que este punto es estable.

Hasta el momento hemos visto dos situaciones en las que el Teorema de Hartman-Grobman no puede concluir la estabilidad de un punto de equilibrio pero aún así se tiene estabilidad. Vamos a tomar un ejemplo tomado del texto de Layek (2015) en el cual se muestra la limitación de la linealización.

Ejemplo 1.20. Consideremos el sistema de la forma (1.5) con

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 + \mu x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x_1 + \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Se obtiene un único punto de equilibrio que corresponde al origen. En este caso, se obtiene que la matriz jacobiana de f es

$$J_f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mu(3x_1^2 + x_2^2) & -1 + 2\mu x_1 x_2 \\ 1 + 2\mu x_1 x_2 & \mu(x_1^2 + 3x_2^2) \end{bmatrix}.$$

Si evaluamos en el origen, se obtiene que

$$J_f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En el origen, la matriz jacobiana toma valores propios $\lambda_{1,2} = \pm i$, por lo que es un punto de equilibrio no hiperbólico, con lo cual el Teorema de Hartman - Grobman no nos permite hacer conclusiones sobre la estabilidad. Ahora bien, la estabilidad se puede obtener mediante el uso de coordenadas polares. Aplicaremos las siguientes ecuaciones:

$$x_1 = r \cos(\theta), \quad x_2 = r \sin(\theta), \quad \dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}. \quad (1.9)$$

Con base en estas ecuaciones, obtenemos que $\dot{r} = \mu r^3$. Como r denota la distancia del origen, esta cantidad va a ser mayor o igual a cero, en cuyo caso tenemos que el comportamiento de esta variable depende de μ . Si $\mu < 0$, r será decreciente; si $\mu = 0$, r es constante y, si $\mu > 0$, r será creciente. En la Figura 1.7 se observa el comportamiento del sistema para diferentes valores de μ . Es decir, la estabilidad del origen depende del valor del parámetro μ . Ahora bien, la linealización siempre corresponde a centros, lo cual nos muestra que en este caso no es concluyente.

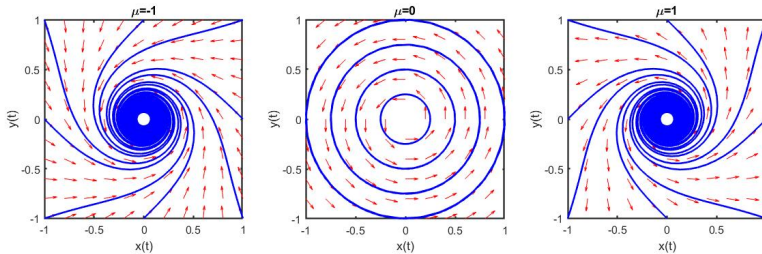


Figura 1.7: Plano del fase del sistema definido en el Ejemplo 1.20 para diferentes valores de μ .

En el ejemplo anterior, se vio que el comportamiento cualitativo de un sistema puede cambiar dependiendo de los valores que tome alguno de los parámetros del modelo. Esta condición se conoce como bifurcación. Para tener más precisión, usemos la definición dada en el texto de De Vries et al. (2006).

Definición 1.21. Consideremos un sistema dinámico continuo dependiente de un parámetro escalar, es decir, de la forma

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Aquí, μ es un parámetro y $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continuamente diferenciable. Decimos que \bar{x} es un punto de bifurcación y $\bar{\mu}$ es un parámetro de bifurcación si $f(\bar{x}, \bar{\mu}) = 0$ y los valores propios de la matriz $f_x(\bar{x}, \bar{\mu})$ tienen parte real nula.

En la definición anterior, $f_x(x, \mu) = \left[\frac{\partial f_i(x, \mu)}{\partial x_j} \right]_{i,j=1,\dots,n}$, es decir, la matriz derivada correspondiente a la variable x . Ahora bien, existen definiciones alternativas a la Definición 1.21, como la enunciada por Müller y Kuttler (2015). Se puede considerar para cada parámetro μ una función $f_\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con el correspondiente sistema

$$\dot{x} = f_\mu(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

Bajo estas nuevas condiciones, los puntos y parámetros de bifurcación satisfacen $f_{\bar{\mu}}(\bar{x}) = 0$ y los valores propios de la matriz $J_{f_{\bar{\mu}}}(\bar{x})$ tienen parte real nula.

Una de las bifurcaciones más estudiadas corresponde a la bifurcación de Hopf, en la cual la parte real de los valores propios de la matriz f_x cambia de signo al cambiar el parámetro μ pasando por el valor de bifurcación. Vamos a ilustrar esta situación con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.22. Consideremos el sistema de la forma (1.5) con

$$f_\mu \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) \\ x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Se obtiene un único punto de equilibrio que corresponde al origen. En este caso, se obtiene que la matriz jacobiana de f es

$$J_{f_\mu} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mu - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_1x_2 \\ 1 - 2x_1x_2 & \mu - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}.$$

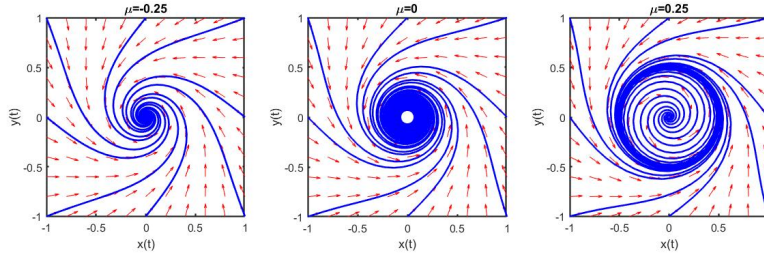


Figura 1.8: Plano de fase para el sistema del Ejemplo 1.22 para diferentes valores de μ .

Si evaluamos en el origen, se obtiene que

$$J_{f_\mu} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}.$$

En el origen, la matriz jacobiana toma valores propios $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$. El Teorema de Hartman - Grobman permite establecer que el origen es asintóticamente estable si $\mu < 0$ e inestable si $\mu > 0$. El valor $\bar{\mu} = 0$ corresponde a un parámetro de bifurcación. Aquí se produce una bifurcación de Hopf, ya que

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mu} \operatorname{Re}(\lambda(\mu)) \right|_{\mu=\bar{\mu}} = 1 > 0.$$

En la Figura 1.8 se observa el comportamiento del sistema al incrementar el valor μ . Para $\mu < 0$, se observa que el origen es asintóticamente estable. Cuando $\mu = 0$ observamos que las trayectorias se acercan al origen pero en una vecindad del origen se observa la existencia de ciclos, con lo que el sistema es estable. Cuando el valor μ es positivo, el origen se vuelve inestable, pero las trayectorias se acumulan alrededor de un ciclo límite. Una de las características de la bifurcación de Hopf es la aparición de ciclos al variar μ y pasar por el parámetro de bifurcación.

Si se aplican las ecuaciones (1.9), se obtiene $\dot{r} = r(\mu - r^2)$. Si $\mu > 0$, se tiene la solución $r = \sqrt{\mu}$, que corresponde a un ciclo del sistema. Analizando la estabilidad, se puede ver que $\dot{r} > 0$ para $r < \sqrt{\mu}$ y $\dot{r} < 0$ para $r > \mu$. Lo anterior hace que la solución periódica asociada al ciclo sea una solución estable. Es decir, este sistema tiene un ciclo límite estable.

En general, hemos estudiado la estabilidad de puntos de equilibrio, incluyendo la dependencia de un parámetro en el caso de la bifurcación de Hopf. Sin embargo, la definición de estabilidad deja abierta la posibilidad de tener diferentes soluciones que sean estables. Para hacer esto más amplio se suele introducir el concepto de conjunto ω - límite. Aquí vamos a trabajar con la definición trabajada por Müller y Kuttler (2015).

Definición 1.23 (Conjunto ω - límite de un punto). Consideremos una solución del sistema (1.5) con $x(0) = x_0$. El conjunto

$$\omega(x_0) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}} : t_k < t_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}; t_k \rightarrow +\infty; y = \lim_{k \rightarrow +\infty} x(t_k)\}$$

es llamado el conjunto ω - límite de x_0 .

En particular, para los sistemas planos, existe un resultado que permite establecer la estabilidad de ciertas soluciones usando el concepto de conjunto ω - límite y la noción de conjunto positivamente invariante: $D \subset \mathbb{R}^2$ es llamado positivamente invariante si una trayectoria puede entrar a D pero no salir (Müller y Kuttler, 2015). Este resultado se conoce como Teorema de Poincaré - Bendixson. Aquí se incluye el enunciado propuesto por Müller y Kuttler (2015).

Teorema 1.24 (Poincaré - Bendixson). Considere una solución $x(t) \in \mathbb{R}^2$ (o $x(t) \in D$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto, conexo y positivamente invariante) del sistema (1.5), con f suave con un número finito de raíces. Si $x(t)$ es acotada, entonces los posibles conjuntos ω - límites corresponden a una de las siguientes posibilidades:

- un punto de equilibrio,
- una órbita periódica,
- una órbita homoclínica o un ciclo heteroclínico.

El resultado anterior nos permite, hasta cierto punto, conocer la existencia de órbitas cerradas, en particular ciclos límites, analizando su estabilidad. Como hemos visto, el problema de determinar la estabilidad de una solución de un sistema dinámico tiene muchas herramientas a su disposición, cada una con sus ventajas y limitaciones, las cuales permitirán conocer el comportamiento cualitativo de las variables de estado.

1.2. Cálculo fraccionario

En esta sección se va a desarrollar la teoría básica sobre operadores fraccionarios y ecuaciones diferenciales fraccionarias. En particular, se seguirá el desarrollo establecido por Gorenflo y Mainardi (2008). Se va a complementar la información con resultados desarrollados en las referencias Diethelm (2010), Kaczorek (2011) y Milici et al. (2019).

Para empezar, se puede establecer la notación para operadores diferenciales e integrales en sentido ordinario.

Definición 1.25. (a) Por D , denotamos el operador que mapea una función diferenciable en su derivada, esto es,

$$Df(x) := f'(x).$$

(b) Suponiendo que f es una función Riemann - integrable sobre el intervalo $[a, b]$, denotamos por J_a a su primitiva centrada en a , esto es

$$J_a f(x) := \int_a^x f(t) dt$$

para $a \leq x \leq b$.

(c) Para $n \in \mathbb{N}$, usamos los símbolos D^n y J_a^n para denotar la n -ésima iteración de D y J_a respectivamente. En particular, tomamos $D^1 = D$, $J_a^1 = J_a$, $D^n = DD^{n-1}$ y $J_a^n = J_a J_a^{n-1}$, para $n \geq 2$.

Los operadores fraccionarios se basarán en generalizaciones de los operadores anteriores. En particular, para la integración fraccionaria se basará en el siguiente lema:

Lema 1.26. Sea f una función Riemann - integrable en el intervalo $[a, b]$. Entonces, para $a \leq x \leq b$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$J_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

Para extender la definición del operador J_a^n para cualquier orden $\alpha > 0$, usaremos la función Gamma. A partir de la propiedad $(n-1)! = \Gamma(n)$, se puede definir la integral fraccionaria de Riemann - Liouville de orden α de tal manera que la nueva definición coincida con el resultado del lema anterior cuando $\alpha \in \mathbb{N}$. Antes de introducir la integral fraccionaria, es necesario definir el conjunto de funciones sobre los que se va a aplicar dicho operador, para lo cual se utiliza la siguiente definición:

Definición 1.27. Sea $p \geq 1$, entonces definimos el espacio $L^p([a, b])$ como sigue:

$$L^p([a, b]) := \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es medible sobre } [a, b] \text{ y } \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Definición 1.28 (Integral fraccionaria de Riemann - Liouville). Sea $f \in L^1([a, b])$. La integral fraccionaria de Riemann - Liouville de orden $\alpha > 0$ se define como

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

para $a \leq x \leq b$.

Para $\alpha = 0$, definimos $J_a^\alpha := I$, el operador identidad.

Ahora, con base en la definición anterior, se pueden probar ciertas propiedades de dicho operador.

Teorema 1.29. Sea $f \in L^1([a, b])$ y $\alpha > 0$. Entonces $J_a^\alpha f(x)$ existe para casi todo $x \in [a, b]$. Además, $J_a^\alpha f$ es un elemento de $L^1([a, b])$.

Teorema 1.30. Sean $\alpha, \beta \geq 0$ y $f \in L^1([a, b])$. Entonces,

$$J_a^\alpha J_a^\beta f = J_a^{\alpha+\beta} f$$

casi en todas partes sobre el intervalo $[a, b]$.

Del resultado anterior, se desprende que

$$J_a^\alpha J_a^\beta = J_a^\beta J_a^\alpha, \quad \forall \alpha, \beta \geq 0.$$

En los dos resultados previos se muestra que al realizar una integral fraccionaria seguida de la otra se obtiene el mismo resultado que si se hiciera una sola vez la integral fraccionaria teniendo como orden la suma de los órdenes anteriores, lo que implica que se pueden intercambiar integrales fraccionarias sucesivas sin afectar el resultado. Esta conmutatividad es deseada para los operadores diferenciales en general. Más adelante vamos a definir dos operadores diferenciales fraccionarios y vamos a verificar si esta propiedad se satisface.

Teniendo en cuenta la importancia de la expansión de series de Taylor de una función en el contexto del análisis numérico, es necesario analizar como actúan los operadores fraccionarios sobre las funciones potencia. Por ello, mostramos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.31. Sea $f(x) = (x - a)^\gamma$, $x > a$. Si $\alpha > 0$ y $\gamma > -1$, entonces

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + 1 + \alpha)} (x - a)^{\gamma + \alpha}.$$

Notación. $f(a^+) := \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Ya se ha definido la integración de orden fraccionario. Ahora, queremos establecer una definición para la derivada de orden fraccionario. En particular, recordemos que $D^n J_a^n = I$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, al intercambiar el sentido de los operadores, se obtiene que

$$J_a^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a^+) \frac{(x - a)^k}{k!}. \quad (1.12)$$

Los diferentes operadores diferenciales introducidos buscan replicar estas propiedades. En particular, se verán dos enfoques diferentes. Para empezar, definimos la derivada fraccionaria en el sentido de Riemann - Liouville.

Definición 1.32 (Derivada fraccionaria de Riemann - Liouville). Sean $\alpha > 0$ y $m = \lceil \alpha \rceil$. El operador ${}^{RL}D_a^\alpha$, definido por

$${}^{RL}D_a^\alpha f(x) := D^m J_a^{m-\alpha} f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{m-\alpha-1} f(t) dt \right]$$

es llamado el operador diferencial fraccionario de Riemann-Liouville de orden α .

Ahora veamos el efecto de la derivada de Riemann - Liouville sobre funciones potencia.

Ejemplo 1.33. Sea $f(x) = (x - a)^\gamma$, $x > a$. Tomemos $\alpha > 0$ y $\gamma > -1$. Con base en el Ejemplo 1.31 y aplicando la Definición 1.32, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha f(x) &= D^{\lceil \alpha \rceil} J_a^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} f(x) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\lceil \alpha \rceil - \alpha + \gamma + 1)} D^{\lceil \alpha \rceil} [(\cdot - a)^{\lceil \alpha \rceil - \alpha + \gamma}] (x). \end{aligned}$$

Ahora bien, notemos que si $\alpha - \gamma$ es un número natural, con $1 \leq \alpha - \gamma \leq \lceil \alpha \rceil$, entonces el lado derecho en la expresión anterior corresponde a la derivada de orden $\lceil \alpha \rceil$ de un polinomio de grado a lo sumo $\lceil \alpha \rceil - 1$, la cual corresponde a la función constante cero. Con base en este análisis, se puede decir que

$${}^{RL}D_a^\alpha [(\cdot - a)^{\alpha - m}] (x) \equiv 0, \quad m \in \{1, 2, \dots, \lceil \alpha \rceil\}.$$

Por otro lado, cuando $\alpha - \gamma \notin \mathbb{N}$, teniendo en cuenta que $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, se puede llegar a la siguiente expresión:

$${}^{RL}D_a^\alpha [(\cdot - a)^\gamma] (x) = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + 1 - \alpha)} (x - a)^{\gamma - \alpha}.$$

A partir del resultado obtenido en el Ejemplo 1.33 se puede observar una característica muy particular del operador diferencial de Riemann-Liouville. Si se toma la función $f(x) \equiv 1$, se puede comprobar que para $\alpha \notin \mathbb{N}$

$${}^{RL}D_a^\alpha f(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \alpha \geq 0, \quad x > a.$$

Respecto a la integral fraccionaria de Riemann-Liouville, se comprobó que aplicación de dos operadores integrales conmuta y es igual a la integral cuyo orden es la suma de los órdenes de los operadores iniciales. Ahora bien, con el operador diferencial de Riemann-Liouville esta situación no se presenta. Veamos esto con el siguiente par de ejemplos.

Ejemplo 1.34. Sean $f(x) = x^{-1/2}$, $x > 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$. Tenemos entonces que $[\alpha_1] = 1$, con lo cual

$$J_0^{[\alpha_1]-\alpha_1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{1-\frac{1}{2}-1} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Se puede comprobar que

$$\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \pi, \quad x > 0.$$

Así, $J_0^{[\alpha_1]-\alpha_1} f(x)$ corresponde a una función constante. Por tanto

$${}^{RL}D_0^{\alpha_1} f(x) = D^{[\alpha_1]} J_0^{[\alpha_1]-\alpha_1} f(x) \equiv 0.$$

De igual manera, se tiene que ${}^{RL}D_0^{\alpha_2} f(x) \equiv 0$. Con base en esto, se tiene que

$${}^{RL}D_0^{\alpha_1} ({}^{RL}D_0^{\alpha_2} f(x)) = {}^{RL}D_0^{\alpha_2} ({}^{RL}D_0^{\alpha_1} f(x)).$$

En este caso, los operadores conmutan trivialmente. Sin embargo, no se satisface la propiedad establecida en el Teorema 1.30. En particular,

$${}^{RL}D_0^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = D^1 f(x) = -\frac{x^{-3/2}}{2}.$$

De lo anterior, se desprende que si $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, no necesariamente se tiene que

$${}^{RL}D_0^{\alpha_1} ({}^{RL}D_0^{\alpha_2} f(x)) = {}^{RL}D_0^{\alpha_1+\alpha_2} f(x).$$

Ejemplo 1.35. Sean $g(x) = x^{1/2}$, $x > 0$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{3}{2}$. Tenemos entonces que $[\alpha_1] = 1$, $[\alpha_2] = 2$, con lo cual

$$J_0^{[\alpha_1]-\alpha_1} g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{1-\frac{1}{2}-1} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} dt.$$

Haciendo la sustitución $t = xz$, se obtiene que

$$J_0^{[\alpha_1]-\alpha_1} g(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} x \int_0^1 (1-z)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} dz.$$

Por propiedades de las funciones Beta y Gamma, se tiene que

$$J_0^{[\alpha_1]-\alpha_1} g(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} x \Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{3}{2}) x.$$

Por lo tanto,

$${}^{RL}D_0^{\alpha_1}g(x) = \frac{d^{[\alpha_1]}}{dx^{[\alpha_1]}}J_0^{[\alpha_1]-\alpha_1}g(x) = \Gamma(\frac{3}{2}).$$

Sea $h(x) = \Gamma(\frac{3}{2})$. Entonces

$$J_0^{[\alpha_2]-\alpha_2}h(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\frac{3}{2})} \int_0^x (x-t)^{2-\frac{3}{2}-1} \Gamma(\frac{3}{2}) dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{3}{2}) dt.$$

Haciendo uso de propiedades de la función Gamma, se tiene que

$$J_0^{[\alpha_2]-\alpha_2}h(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt = (x-t)^{\frac{1}{2}} \Big|_{t=x}^{t=0} = x^{\frac{1}{2}}.$$

Aplicando la definición de la derivada de Riemann - Liouville, se llega a

$${}^{RL}D_0^{\alpha_2}h(x) = \frac{d^{[\alpha_2]}}{dx^{[\alpha_2]}}J_0^{[\alpha_2]-\alpha_2}h(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}.$$

De lo anterior, se obtiene

$${}^{RL}D_0^{\alpha_2}({}^{RL}D_0^{\alpha_1}g(x)) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}.$$

Ahora, hagamos las dos derivadas intercambiando órdenes.

$$J_0^{[\alpha_2]-\alpha_2}g(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} dt.$$

Nuevamente, por la sustitución $t = xz$,

$$J_0^{[\alpha_2]-\alpha_2}g(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} x \int_0^1 (1-z)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} dz = x\Gamma(\frac{3}{2}).$$

Tenemos que $J_0^{[\alpha_2]-\alpha_2}g(x)$ es un polinomio de grado uno, con lo cual

$${}^{RL}D_0^{\alpha_2}g(x) = \frac{d^{[\alpha_2]}}{dx^{[\alpha_2]}}J_0^{[\alpha_2]-\alpha_2}g(x) = 0.$$

Lo que nos permite afirmar que

$${}^{RL}D_0^{\alpha_1}({}^{RL}D_0^{\alpha_2}g(x)) = 0.$$

Con este ejemplo se comprueba que al aplicar dos derivadas fraccionarias de Riemann - Liouville el orden es importante.

Ahora veremos unas propiedades de la derivada fraccionaria de Riemann - Liouville. Las demostraciones aparecen en el texto de Diethelm (2010).

Teorema 1.36. Sean f_1 y f_2 dos funciones definidas sobre $[a, b]$ tal que ${}^{RL}D_a^\alpha f_1$ y ${}^{RL}D_a^\alpha f_2$ existen casi en toda parte. Además, sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Entonces, ${}^{RL}D_a^\alpha(c_1f_1 + c_2f_2)$ existe en casi toda parte y

$${}^{RL}D_a^\alpha(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1({}^{RL}D_a^\alpha f_1) + c_2({}^{RL}D_a^\alpha f_2).$$

Teorema 1.37. Sea $f \in C^m([a, b])$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim_{\alpha \rightarrow m^-} ({}^{RL}D_a^\alpha f) = D^m f.$$

Ahora nos dedicaremos a estudiar algunas propiedades de la derivada de Riemann - Liouville y su relación con el operador integral fraccionario. Las propiedades aparecen demostradas en muchos textos de cálculo fraccionario. Usaremos los resultados proporcionados por Diethelm (2010), en particular las condiciones que establece sobre las funciones.

Teorema 1.38. Sea $\alpha \geq 0$. Entonces, para $f \in L^1([a, b])$,

$${}^{RL}D_a^\alpha J_a^\alpha f = f.$$

Para los resultados relacionados con la relación entre la expansión en series de Taylor y la derivada fraccionaria de Riemann - Liouville, tendremos que introducir el concepto de función absolutamente continua.

Definición 1.39. Se dice que $f \in A^n([a, b])$ si la derivada de orden $n - 1$ de f es absolutamente continua en $[a, b]$, es decir, existe una función $g \in L^1([a, b])$ tal que

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

El siguiente resultado permite establecer diferencias entre la derivada en sentido ordinario y la derivada en sentido fraccionario. Esta comparación luego dará lugar a la expansión en series de Taylor. Analizando los operadores integral y derivada como ocurre en la Ecuación (1.12)

Teorema 1.40. Sea $\alpha > 0$ y $m = [\alpha] + 1$. Supongamos que f es tal que $J_a^{m-\alpha} f \in A^m([a, b])$. Entonces,

$$J_a^\alpha ({}^{RL}D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \lim_{z \rightarrow a^+} D^{m-k-1} J_a^{m-\alpha} f(z).$$

Específicamente, para $\alpha \in (0, 1)$,

$$J_a^\alpha ({}^{RL}D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{z \rightarrow a^+} J_a^{1-\alpha} f(z).$$

Teorema 1.41 (Expansión en series de Taylor con derivada de Riemann - Liouville). Bajo las hipótesis del Teorema 1.40,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)} \lim_{z \rightarrow a^+} J_a^{\alpha-m} f(z) \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(x-a)^{k+\alpha-m}}{\Gamma(k+\alpha-m+1)} \lim_{z \rightarrow a^+} ({}^{RL}D_a^{k+\alpha-m} f(z)) + J_a^\alpha ({}^{RL}D_a^\alpha f(x)). \end{aligned}$$

La expansión en series de Taylor con derivada de Riemann - Liouville va a ser un punto de partida para comparar diferencias en la implementación de esquemas numéricos así como en la resolución de ecuaciones diferenciales. Vamos a introducir un nuevo operador diferencial, llamado operador diferencial fraccionario de Caputo. Analizaremos las propiedades demostradas para el operador de Riemann - Liouville para ver cual se comporta mejor, en particular en el planteamiento de ecuaciones diferenciales.

Definición 1.42 (Derivada fraccionaria de Caputo). Sean $\alpha > 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$. Si $D^m f \in L^1([a, b])$, se define la derivada fraccionaria de Caputo de orden α como sigue:

$${}^C D_a^\alpha f(x) := J_a^{m-\alpha} D^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt.$$

Al igual que como se hizo con la derivada de Riemann - Liouville, veremos como es el efecto de la derivada de Caputo sobre las funciones potencia.

Ejemplo 1.43. Sea $f(x) = (x-a)^\gamma$, $x > a$. Tomemos $\alpha > 0$, $\gamma \geq 0$ y $m = \lceil \alpha \rceil$. Comencemos considerando el caso en el que $\gamma \in \{1, \dots, m-1\}$. Bajo esta suposición, $f(x)$ sería un polinomio de grado a lo sumo $m-1$, entonces $D^m f(x) \equiv 0$. Luego, por definición, se tiene que

$${}^C D_a^\alpha f(x) \equiv 0.$$

Ahora, tomemos $\gamma > m-1$. Aplicando la Definición 1.42, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha f(x) &= J_a^{m-\alpha} D^m f(x) \\ &= \frac{\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-m+1)}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} (t-a)^{\gamma-m} dt. \end{aligned}$$

Si se hace la sustitución $t = a + (x-a)z$, se obtiene que

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha f(x) &= \frac{\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-m+1)}{\Gamma(m-\alpha)} \cdot (x-a)^{\gamma-\alpha} \int_0^1 (1-z)^{m-\alpha-1} z^{\gamma-m} dz \\ &= \frac{\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-m+1)}{\Gamma(m-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\gamma-m+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} \cdot (x-a)^{\gamma-\alpha}. \end{aligned}$$

La simplificación de la integral en el paso anterior se realizó teniendo en cuenta la relación entre las funciones Beta y Gamma. Finalmente, se obtiene lo siguiente:

$${}^C D_a^\alpha [(\cdot - a)^\gamma] (x) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} (x-a)^{\gamma-\alpha}.$$

A diferencia de la derivada de Riemann - Liouville, tenemos que la derivada de Caputo aplicada a funciones constantes da como resultado la función constante cero. Sin embargo, los Ejemplos 1.33 y 1.43 nos permiten ver que en algunas circunstancias las derivadas coinciden. Los siguientes resultados nos permitirán ver la relación entre los dos operadores diferenciales calculados.

Teorema 1.44. Sea $\alpha \geq 0$ y $m = \lceil \alpha \rceil$. Supongamos que $f \in A^m([a, b])$, entonces

$${}^C D_a^\alpha f(x) = {}^{RL} D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{k!} (x-a)^k \right]. \quad (1.13)$$

La definición de la derivada fraccionaria de Caputo puede tomarse de diferentes maneras. La Definición 1.42 es implementada en diferentes textos como el artículo de Gorenflo y Mainardi (2008), mientras que la definición dada por la Ecuación 1.13 es trabajada por Diethelm (2010). El Teorema 1.44 relaciona las dos derivadas fraccionarias mencionadas. Vamos a seguir explorando las relaciones entre los dos operadores.

Lema 1.45. Sea $\alpha \geq 0$ y $m = \lceil \alpha \rceil$. Supongamos que f es tal que existen las dos derivadas fraccionarias. Entonces,

$${}^C D_a^\alpha f(x) = {}^{RL} D_a^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(D^k f)(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha}.$$

Teorema 1.46. Bajo las hipótesis del Lema 1.45, se tiene que ${}^{RL} D_a^\alpha f = {}^C D_a^\alpha f$ sí y sólo sí $(D^k f)(a) = 0$, para $k = 0, 1, \dots, m - 1$.

Al igual que como se hizo con la derivada de Riemann - Liouville, vamos a explorar la relación entre la derivada de Caputo y la integral fraccionaria. Los siguientes resultados aparecen probados en el texto de Diethelm (2010).

Teorema 1.47. Si f es continua y $\alpha \geq 0$, entonces

$${}^C D_a^\alpha J_a^\alpha f = f.$$

Teorema 1.48. Supongamos que $\alpha \geq 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$ y $f \in A^m([a, b])$. Entonces

$$J_a^\alpha ({}^C D_a^\alpha f(x)) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(D^k f)(a)}{k!} (x - a)^k.$$

A partir del Teorema 1.48, se puede obtener la expansión en serie de Taylor con base en la derivada de Caputo. El siguiente resultado condensa este hecho.

Teorema 1.49 (Expansión en series de Taylor para la derivada de Caputo). Bajo las hipótesis del Teorema 1.48, se tiene que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(D^k f)(a)}{k!} (x - a)^k + J_a^\alpha ({}^C D_a^\alpha f(x)).$$

Ahora, vamos a explorar algunas propiedades operacionales de la derivada de Caputo. Para empezar, se puede verificar de la definición que la derivada de Caputo es un operador lineal. Es decir, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.50. Sean $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que ${}^C D_a^\alpha f_1$ y ${}^C D_a^\alpha f_2$ existen casi en toda parte, y sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Entonces ${}^C D_a^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2)$ existe casi en toda parte y

$${}^C D_a^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 {}^C D_a^\alpha f_1 + c_2 {}^C D_a^\alpha f_2.$$

El resultado anterior y el hecho de que la derivada de Caputo de funciones constantes sea cero hace que este operador sea compatible con las técnicas de desplazamiento y re escalamiento usualmente aplicadas en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales. Estas características hacen que la aplicación de la derivada de Caputo en la implementación de sistemas de ecuaciones diferenciales esté más difundida en la literatura.

Por otro lado, como se comprobó con la derivada de Riemann - Liouville, se puede ver que la aplicación sucesiva de dos derivadas de Caputo no corresponde a la derivada cuyo orden es la suma de los órdenes de las dos derivadas. Vamos a ilustrar este hecho con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.51. Sean $f(x) = x$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{7}{10}$. Tenemos entonces que $[\alpha_1] = [\alpha_2] = 1$ y $[\alpha_1 + \alpha_2] = 2$. Para empezar, se tiene que

$${}^C D_0^{\alpha_1 + \alpha_2} f(x) = \frac{1}{\Gamma(2 - \frac{7}{5})} \int_0^x (x-t)^{2 - \frac{7}{5} - 1} f''(t) dt \equiv 0,$$

ya que $f''(x) \equiv 0$. Ahora bien,

$${}^C D_0^{\alpha_1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{7}{10})} \int_0^x (x-t)^{1 - \frac{7}{10} - 1} f'(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{10})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{7}{10}} dt.$$

Efectuando la integral anterior, se obtiene que

$${}^C D_0^{\alpha_1} f(x) = \frac{1}{\frac{3}{10} \Gamma(\frac{3}{10})} (x-t)^{\frac{3}{10}} \Big|_{t=x}^{t=0} = \frac{1}{\Gamma(\frac{13}{10})} x^{\frac{3}{10}}.$$

Si se aplica a este resultado la derivada de Caputo de orden α_2 se obtiene

$${}^C D_0^{\alpha_2} ({}^C D_0^{\alpha_1} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{10})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{7}{10}} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{10})} t^{-\frac{7}{10}} dt = \frac{1}{(\Gamma(\frac{3}{10}))^2} \int_0^x (x-t)^{-\frac{7}{10}} t^{-\frac{7}{10}} dt.$$

Haciendo la sustitución $t = xz$, tenemos que

$${}^C D_0^{\alpha_2} ({}^C D_0^{\alpha_1} f(x)) = \frac{1}{(\Gamma(\frac{3}{10}))^2} x^{-\frac{2}{5}} \int_0^1 (1-z)^{-\frac{7}{10}} z^{-\frac{7}{10}} dz.$$

Aplicando la relación entre las funciones Beta y Gamma, se obtiene que

$${}^C D_0^{\alpha_2} ({}^C D_0^{\alpha_1} f(x)) = \frac{1}{(\Gamma(\frac{3}{10}))^2} \frac{(\Gamma(\frac{3}{10}))^2}{\Gamma(\frac{3}{5})} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{x^{-\frac{2}{5}}}{\Gamma(\frac{3}{5})}.$$

De lo anterior, se desprende que si $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, no necesariamente se tiene que

$${}^C D_0^{\alpha_2} ({}^C D_0^{\alpha_1} f(x)) = {}^C D_0^{\alpha_1 + \alpha_2} f(x).$$

Ya hemos estudiado propiedades de los dos operadores diferenciales fraccionarios. Ahora, nos centraremos en su comportamiento en la solución de ecuaciones diferenciales. Un operador esencial utilizado en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias es la Transformada de Laplace. Si observamos la definición de la integral fraccionaria, se puede decir que

$$J_0^\alpha f(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} * f(x),$$

donde $*$ corresponde a la convolución en el sentido de la Transformada de Laplace. Si la transformada de la función f corresponde a $\mathcal{L}[f(x)](s)$, entonces se tiene que

$$\mathcal{L}[J_a^\alpha f(x)](s) = \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[f(x)](s).$$

Con base en lo anterior, se puede estudiar la transformada de Laplace de los operadores diferenciales fraccionarios. La deducción de estos resultados aparece en los textos de Kaczorek (2011) y Milici et al. (2019).

Teorema 1.52. Sean $\alpha > 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$, y $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$. La transformada de Laplace de la derivada de Riemann-Liouville de orden α de $f(t)$ tiene la forma

$$\mathcal{L}[^{RL}D_0^\alpha f(t)](s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=1}^m s^{m-k} D^{k-1} J_0^{m-\alpha} f(0^+). \quad (1.14)$$

Teorema 1.53. Sean $\alpha > 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$, y $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$. La transformada de Laplace de la derivada de Caputo de orden α de $f(t)$ tiene la forma

$$\mathcal{L}[^CD_0^\alpha f(t)](s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=1}^m s^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0^+). \quad (1.15)$$

En particular, se ve que hay una dificultad mayor en evaluar la transformada en la derivada de Riemann - Liouville ya que lo que corresponde a las condiciones iniciales de un problema de valor inicial, en este caso corresponde a las condiciones sobre una integral fraccionaria, lo cual puede ser dispendioso. Sin embargo, en el caso de la derivada de Caputo, las condiciones iniciales corresponden al mismo aspecto en la derivada ordinaria, lo que hace que sea más sencillo el tránsito de la formulación de un modelo entre las dos derivadas.

En el análisis de ecuaciones diferenciales, al aplicar transformada de Laplace, surge una función que va a desempeñar un rol importante en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias. A continuación vamos a definir las Funciones de Mittag - Leffler.

Definición 1.54 (Función de Mittag - Leffler de un parámetro). Sea $\alpha > 0$. La función E_α definida por

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (1.16)$$

siempre que la serie sea convergente, es llamada función de Mittag-Leffler de orden α .

Definición 1.55 (Función de Mittag - Leffler de dos parámetros). Sean $\alpha, \beta > 0$. La función $E_{\alpha, \beta}$ definida por

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (1.17)$$

siempre que la serie sea convergente, es llamada función de Mittag-Leffler de dos parámetros, con parámetros α y β .

De las definiciones anteriores, es claro que $E_\alpha(z) = E_{\alpha, 1}(z)$. Estas series funcionan como generalizaciones de la función exponencial. En particular, en el siguiente ejemplo vemos como es posible rescatar algunas funciones conocidas con base en funciones de Mittag - Leffler.

Ejemplo 1.56. Para $z \in \mathbb{C}$, se tienen las siguientes igualdades:

$$(a) \quad E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

$$(b) \quad E_2(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = \cos(z).$$

$$(c) E_{2,2}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sin(z)}{z}.$$

Como las funciones de Mittag - Leffler se definen en términos de series, es importante estudiar la región de convergencia de estas funciones, es decir, para qué valores está definida. Diethelm (2010) demuestra el siguiente resultado (Teorema 4.1.):

Teorema 1.57. Consideremos la función de dos parámetros $E_{\alpha,\beta}$ para $\alpha, \beta > 0$. La serie que define $E_{\alpha,\beta}(z)$ es convergente para todo $z \in \mathbb{C}$. En otras palabras, $E_{\alpha,\beta}$ es una función entera.

Las funciones de Mittag - Leffler van a desempeñar un rol importante en la teoría de ecuaciones diferenciales. En el sentido ordinario, las funciones exponenciales corresponden a eigenfunciones de la transformación derivada. Al analizar esta situación con el operador diferencial de Caputo, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 1.58. Sea $\alpha > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Definamos

$$y(x) = E_{\alpha}(\lambda x^{\alpha}), \quad x \geq 0.$$

Entonces

$${}^C D_0^{\alpha} y(x) = \lambda y(x).$$

Con base en lo anterior, se puede decir que las funciones de Mittag - Leffler van a permitir solucionar ecuaciones con coeficientes constantes. Posteriormente se verá que también se aplicará en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Debido a esto, el comportamiento asintótico de las funciones de Mittag - Leffler va a estar relacionado con el concepto de estabilidad de la solución de una ecuación diferencial fraccionaria. El siguiente resultado es probado por Diethelm (2010) (Teorema 4.4):

Teorema 1.59. Sea $\alpha > 0$. La función de Mittag - Leffler tiene el siguiente comportamiento:

- (a) $|E_{\alpha}(re^{i\phi})| \rightarrow 0$ para $r \rightarrow +\infty$ si $|\phi| > \alpha\pi/2$,
- (b) $E_{\alpha}(re^{i\phi})$ permanece acotada si $|\phi| = \alpha\pi/2$,
- (c) $|E_{\alpha}(re^{i\phi})| \rightarrow +\infty$ para $r \rightarrow +\infty$ si $|\phi| < \alpha\pi/2$.

Para finalizar, teniendo en cuenta que se ha hablado de la transformada de Laplace como un operador ampliamente utilizado en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias, vamos a mencionar dos resultados relacionados con este operador y las funciones de Mittag Leffler. Dichos resultados aparecen en Diethelm (2010).

Teorema 1.60. Sea $\alpha > 0$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Definamos $y(x) := E_{\alpha}(-\lambda x^{\alpha})$. Entonces la Transformada de Laplace de y está dada por

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + \lambda}.$$

Teorema 1.61. Sean $\alpha > 0$, $r > 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$ y $\lambda = re^{i\varphi}$. Si $y(x) := E_{\alpha}(-\lambda x^{\alpha})$, entonces

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ si $|\varphi| < \alpha\pi/2$,
- (b) $y(x)$ es no acotada si $|\varphi| > \alpha\pi/2$.

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos Fraccionarios en el sentido de Caputo

En este capítulo introduciremos los resultados básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales fraccionarias. Para empezar, vamos a estudiar los resultados básicos de problemas de valor inicial con derivada fraccionaria de Caputo, en particular los Teoremas de Existencia y Unicidad, así como algunos ejemplos típicos. Posteriormente, desarrollaremos la teoría para sistemas de ecuaciones. Con base en estos conceptos, definiremos sistemas dinámicos en el sentido de Caputo, estudiaremos el concepto de estabilidad de puntos de equilibrio y la existencia de ciclos.

2.1. Ecuaciones diferenciales fraccionarias

Sean $\alpha > 0$ y $m = \lceil \alpha \rceil$. Empezaremos estudiando ecuaciones diferenciales en el sentido de Caputo junto con condiciones iniciales apropiadas. Tenemos así, el siguiente problema con valores iniciales:

$$\begin{aligned} {}^C D_0^\alpha y(x) &= f(x, y(x)) \\ D^k y(0) &= y_0^{(k)}, k = 0, 1, \dots, m - 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Para empezar, debemos considerar los Teoremas de Existencia y Unicidad para el problema dado por (2.1). Estos resultados suelen ser probados replicando las pruebas de los resultados en el sentido ordinario y haciendo uso de herramientas de análisis funcional. Uno de los hechos más utilizados para este propósito es la posibilidad de formular el problema (2.1) como una ecuación integral de Volterra de segunda clase, resultado correspondiente al Lema 2.1.

Lema 2.1. Consideremos el problema con valores iniciales (2.1). Supongamos que la función $f : [0, h] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, para algún $h > 0$, es continua. Entonces, la función $y \in C[0, h]$ es una solución del problema con valor inicial (2.1) si y sólo si es una solución de la ecuación integral no lineal de Volterra de segunda clase

$$y(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \tag{2.2}$$

La demostración del Lema anterior está basada en la aplicación de la Transformada de Laplace y la posterior comprobación de que la solución presentada en (2.2) es solución del problema con

valores iniciales (2.1). Esto se puede consultar en los textos de Milici et al. (2019) y Diethelm (2010). Este resultado no solo es utilizado en la demostración de los resultados sobre existencia y unicidad, sino también en la implementación de métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Con base en lo anterior es posible demostrar la versión fraccionaria del Teorema de Existencia de Peano para el problema (2.1), lo que corresponde al siguiente resultado presentado por Diethelm (2010) (Teorema 6.1):

Teorema 2.2 (Existencia). Sea $\alpha > 0$ y $m = \lceil \alpha \rceil$. Además, sean $y_0^{(0)}, \dots, y_0^{(m-1)} \in \mathbb{R}$, $K > 0$ y $h^* > 0$. Definamos

$$G := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, h^*], \left| y - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} y_0^{(k)} \right| \leq K \right\}$$

y sea $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Definamos $M := \sup_{(x,z) \in G} |f(x, z)|$ y

$$h := \begin{cases} h^* & \text{si } M = 0, \\ \text{mín} \left\{ h^*, \left(\frac{K\Gamma(n+1)}{M} \right)^{1/n} \right\} & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Entonces existe una función $y \in C[0, h]$ que soluciona el problema con valores iniciales (2.1).

Al igual que en el caso ordinario, la condición Lipschitz de la función f también va a garantizar la existencia de las soluciones de un problema con valores iniciales.

Teorema 2.3 (Unicidad). Sean $\alpha > 0$ y $m = \lceil \alpha \rceil$. Además, sea G el conjunto definido en el Teorema 2.2 y sea $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con condición Lipschitz en la segunda variable, es decir,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

para algún $L > 0$ que es independiente de x , y_1 y y_2 . Entonces, denotando h como en el Teorema 2.2, existe una única solución $y \in C[0, h]$ del problema con valores iniciales (2.1).

Hasta el momento, los resultados de existencia y unicidad aseguran la solución del problema con valores iniciales (2.1) en un intervalo posiblemente más pequeño que el dominio en la primera variable de la función f . El siguiente resultado permite asegurar la existencia y unicidad en todo este intervalo.

Teorema 2.4. Sean $\alpha > 0$ y $m = \lceil \alpha \rceil$. Además, sean $y_0^{(0)}, \dots, y_0^{(m-1)} \in \mathbb{R}$ y $h^* > 0$. Definamos $G := [0, h^*] \times \mathbb{R}$ y sea $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ continua y Lipschitz con respecto a la segunda variable con constante $L > 0$ que es independiente de x , y_1 y y_2 . Entonces existe una única solución $y \in C[0, h^*]$ que soluciona el problema con valores iniciales (2.1).

Corolario 2.5. Sean $\alpha > 0$ y $m = \lceil \alpha \rceil$. Además, sean $y_0^{(0)}, \dots, y_0^{(m-1)} \in \mathbb{R}$. Definamos $G := [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ y sea $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ continua y Lipschitz con respecto a la segunda variable con constante $L > 0$ que es independiente de x , y_1 y y_2 . Entonces existe una única solución $y \in C[0, +\infty)$ que soluciona el problema con valores iniciales (2.1).

Ya con los Teoremas de Existencia y Unicidad mencionados, podemos empezar a indagar sobre las soluciones del problema de valor inicial como tal. El caso más sencillo corresponde a considerar la función $f(x, y(x)) = \lambda y(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. En este caso, la aplicación de la Transformada de Laplace nos va a permitir el determinar la naturaleza de la solución.

Teorema 2.6. Sean $\alpha > 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. La solución de problema con valores iniciales

$${}^C D_0^\alpha y(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y_0, \quad y^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 1, \dots, m-1)$$

está dada por

$$y(x) = y_0 E_\alpha(\lambda x^\alpha).$$

Este Teorema va a ser el punto de partida para el estudio de sistemas lineales con coeficientes constantes. En este caso, se va a requerir extender la definición de las funciones de Mittag - Leffler al caso de matrices.

2.2. Sistemas Lineales

Queremos estudiar el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial fraccionaria

$${}^C D_0^\alpha y(x) = Ay(x) + q(x), \quad (2.3)$$

con $0 < \alpha < 1$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $q : [0, h] \rightarrow \mathbb{C}^n$ y una solución $y : [0, h] \rightarrow \mathbb{C}^n$. Para empezar, consideremos el caso homogéneo, es decir, $q(x) \equiv 0$. Entonces, se tiene la ecuación

$${}^C D_0^\alpha y(x) = Ay(x). \quad (2.4)$$

Supongamos que la solución corresponde a combinaciones lineales de expresiones de la forma

$$z(x) = E_\alpha(\lambda x^\alpha)u.$$

con $u \in \mathbb{C}^n$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Insertando esto en la Ecuación (2.4) y teniendo en cuenta el Teorema 1.58, se obtiene que

$$E_\alpha(\lambda x^\alpha)\lambda u = E_\alpha(\lambda x^\alpha)Au.$$

Como $E_\alpha(\lambda x^\alpha) \neq 0$, se tiene que

$$\lambda u = Au,$$

es decir, λ debe ser un valor propio de la matriz A y u un vector propio correspondiente. De acuerdo a la naturaleza de los vectores propios, existen diferentes posibilidades de soluciones. Si la multiplicidad algebraica coincide con la multiplicidad geométrica, para todos los valores propios de A , aplicamos el siguiente resultado:

Teorema 2.7. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los valores propios de A y u_1, \dots, u_n vectores propios correspondientes. Entonces la solución general del problema (2.4) tiene la forma

$$y(x) = \sum_{l=1}^n c_l E_\alpha(\lambda_l x^\alpha) u_l$$

con ciertas constantes $c_l \in \mathbb{C}$. Además, si se impone la condición $y(0) = y_0$ en el problema dado, la única solución de esta ecuación diferencial estará caracterizada por el sistema lineal

$$y_0 = (u_1, \dots, u_n)(c_1, \dots, c_n)^T.$$

Cuando es posible formar una base para \mathbb{C}^n con vectores propios de la matriz A , se dice que A tiene un conjunto completo de valores propios. Bajo esta condición, se dice que la matriz A es diagonalizable. Ahora bien, no todas las matrices cumplen estas condiciones, pero siempre es posible definir la forma canónica de Jordan de una matriz A . En este aspecto, será recomendable analizar la solución del problema (2.4) por medio de otras herramientas. Para empezar, definamos la función de Mittag - Leffler con argumento matricial.

Definición 2.8 (Funciones Mittag - Leffler matriciales). Sean $\alpha, \beta > 0$. Dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la función de Mittag - Leffler evaluada en A está definida por medio de la siguiente serie convergente:

$$E_{\alpha, \beta}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (2.5)$$

Al igual que como se comentó en la Definición de las funciones de Mittag - Leffler, vamos a tomar $E_{\alpha}(A) = E_{\alpha, 1}(A)$. Ahora, notemos que

$$E_{1, 1}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = e^A.$$

La función de Mittag-Leffler evaluada sobre una matriz puede ser analizada para las formas canónicas de Jordan. Sadeghi y Cardoso (2018) muestran el siguiente resultado:

Teorema 2.9. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si existe una matriz S no singular tal que $A = SBS^{-1}$, entonces $E_{\alpha, \beta}(A) = SE_{\alpha, \beta}(B)S^{-1}$.

Con base en lo anterior, al estudiar la forma de las funciones de Mittag-Leffler evaluada sobre las formas canónicas de Jordan, se puede observar la forma general sobre una matriz cualquiera. Garrappa y Popolizio (2018) estudian la definición con base en el concepto de funciones definidas sobre el espectro de una matriz. También, Popolizio (2019) muestra la evaluación de las funciones Mittag-Leffler sobre matrices de la siguiente manera:

Definición 2.10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ los valores propios de A . Entonces A puede ser expresada en la forma canónica de Jordan con

$$A = ZJZ^{-1} = Z \text{diag}(J_1, \dots, J_p)Z^{-1},$$

con

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k}$$

y $m_1 + \dots + m_p = n$. Entonces

$$E_{\alpha, \beta}(A) = ZE_{\alpha, \beta}(J)Z^{-1} = Z \text{diag}(E_{\alpha, \beta}(J_1), \dots, E_{\alpha, \beta}(J_p))Z^{-1},$$

con

$$E_{\alpha,\beta}(J_k) = \begin{bmatrix} E_{\alpha,\beta}(\lambda_k) & E'_{\alpha,\beta}(\lambda_k) & \cdots & \frac{E_{\alpha,\beta}^{(m_k-1)}(\lambda_k)}{(m_k-1)!} \\ & E_{\alpha,\beta}(\lambda_k) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & E'_{\alpha,\beta}(\lambda_k) \\ 0 & & & E_{\alpha,\beta}(\lambda_k) \end{bmatrix}.$$

El estudio de las funciones de Mittag-Leffler evaluadas sobre matrices está justificada por el siguiente resultado.

Teorema 2.11. Consideremos el sistema (2.4) con la condición inicial $y(0) = y_0 \in \mathbb{C}^n$. Entonces, para $x \geq 0$, se tiene que $y(x) = E_\alpha(x^\alpha A)y_0$.

Se puede verificar que el Teorema anterior coincide con el Teorema 2.7 en el caso en que la matriz A es diagonalizable. En general, para las matrices canónicas de Jordan, se puede obtener varias formas de expresar la solución utilizando la Definición 2.10. La deducción de la solución evaluada en un bloque de Jordan es desarrollada por Deshpande y Daftardar-Gejji (2016).

$$E_\alpha(x^\alpha J_k) = \begin{bmatrix} E_\alpha(x^\alpha \lambda_k) & \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda_k} E_\alpha(x^\alpha \lambda_k) & \cdots & \frac{1}{(m_k-1)!} \frac{\partial^{(m_k-1)}}{\partial \lambda_k^{(m_k-1)}} E_\alpha(x^\alpha \lambda_k) \\ & E_\alpha(x^\alpha \lambda_k) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda_k} E_\alpha(x^\alpha \lambda_k) \\ 0 & & & E_\alpha(x^\alpha \lambda_k) \end{bmatrix}.$$

Ya conocida la relación entre las funciones de Mittag-Leffler con la solución de sistemas de la forma (2.4), se puede pasar a estudiar la estabilidad de estos sistemas como se realizó en el Capítulo 1. De acuerdo a Diethelm (2010), la estabilidad asociada a la solución $y \equiv 0$ del sistema (2.4) se puede estudiar con base en el Teorema 1.59. Este resultado fue probado por primera vez por Matignon (1996), por lo cual recibe su nombre.

Teorema 2.12 (Matignon). Considere el sistema diferencial fraccionario ${}^C D_0^\alpha y(t) = Ay(t)$, con A una matriz real arbitraria de tamaño $n \times n$.

1. La solución $y = 0$ del sistema es asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios λ_j ($j = 1, \dots, n$) de A satisfacen $|\arg(\lambda_j)| > \alpha \frac{\pi}{2}$.
2. La solución $y = 0$ del sistema es estable si y sólo si los valores propios λ_j de A satisfacen $|\arg \lambda_j| \geq \alpha \pi/2$ y todos los valores propios con $|\arg(\lambda_j)| = \alpha \pi/2$ tienen multiplicidad geométrica que coincide con la multiplicidad algebraica.

El Teorema de Matignon permite establecer la estabilidad con base en los valores propios de la matriz A del sistema lineal asociado. Con base en esto, se pueden clasificar los sistemas planos. En el Capítulo 1, mencionamos que si $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es una matriz invertible, se tienen cuatro diferentes posibilidades. En los tres casos para los cuales los valores propios son reales, el comportamiento del sistema en términos de estabilidad sigue siendo el mismo que en el caso ordinario, ya que el argumento de los valores propios solo tiene dos posibilidades: 0 o π . En cambio, en el caso de tener valores propios complejos con parte imaginaria no nula, la estabilidad va a estar asociada al orden del sistema fraccionario. Vamos a ilustrar esta situación con los siguientes ejemplos.

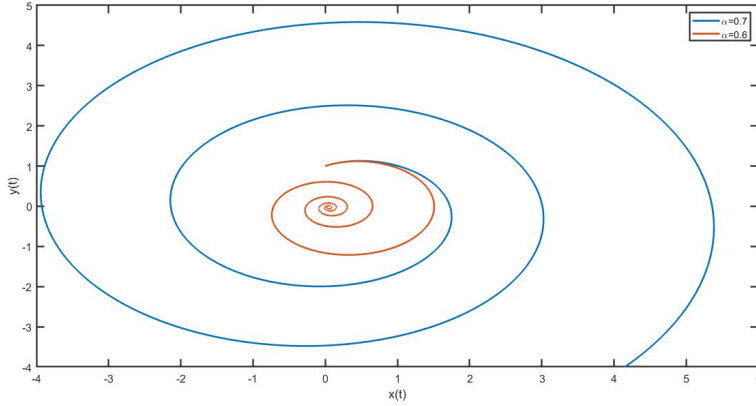


Figura 2.1: Trayectorias descritas en el Ejemplo 2.13.

Ejemplo 2.13. Sea $y(t) \in \mathbb{R}^2$. Consideremos el problema

$${}^C D_0^\alpha y(t) = Ay(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de A son $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Por lo tanto, se tiene que $|\arg(\lambda_{1,2})| = \frac{\pi}{3}$. Del Teorema de Matignon, se concluye que el sistema es asintóticamente estable si $\frac{\pi}{3} > \alpha\frac{\pi}{2}$, es decir, para órdenes $\alpha < \frac{2}{3}$, el sistema es asintóticamente estable. En la Figura 2.1, se observan las trayectorias correspondientes a órdenes $\alpha = 0.7$ y $\alpha = 0.6$. Para el primer orden, el origen es inestable, mientras que para el segundo orden, el origen corresponde a una solución estable.

El Ejemplo 2.13 muestra una de las diferencias entre los sistemas dinámicos en sentido ordinario y en sentido fraccionario. Si bien la matriz definida tiene valores propios con parte real positiva, es posible que el sistema sea estable, lo cual no ocurre para sistemas ordinarios.

Ejemplo 2.14. Sea $y(t) \in \mathbb{R}^2$. Consideremos el problema

$${}^C D_0^\alpha y(t) = Ay(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de A son $\lambda_{1,2} = \pm i$. Por lo tanto, se tiene que $|\arg(\lambda_{1,2})| = \frac{\pi}{2}$. Del Teorema de Matignon, se concluye que el sistema es asintóticamente estable si $\alpha < 1$. En la Figura 2.2, se observan las trayectorias correspondientes a órdenes $\alpha = 0.9$, $\alpha = 0.95$ y el sistema ordinario ($\alpha = 1$). Se observa que el origen que originalmente es estable en el sistema ordinario pasa a ser asintóticamente estable en los sistemas de orden $\alpha \in (0, 1)$.

El Ejemplo 2.14 hace pensar que los centros que habitualmente aparecen en los sistemas dinámicos planos con la derivada ordinaria no necesariamente se mantienen en modelos con derivadas fraccionarias. Con base en esta situación surge el interés por estudiar los ciclos en un sistema con derivada fraccionaria. Más adelante se estudiará este tema.

Para finalizar esta sección, vamos a caracterizar la estabilidad asintótica de los sistemas lineales homogéneos planos basados en la traza y el determinante de la matriz A , dado que con base en estos se puede determinar la naturaleza de los valores propios de la matriz. Para empezar, podemos ver un teorema trabajado por Ahmed et al. (2006).

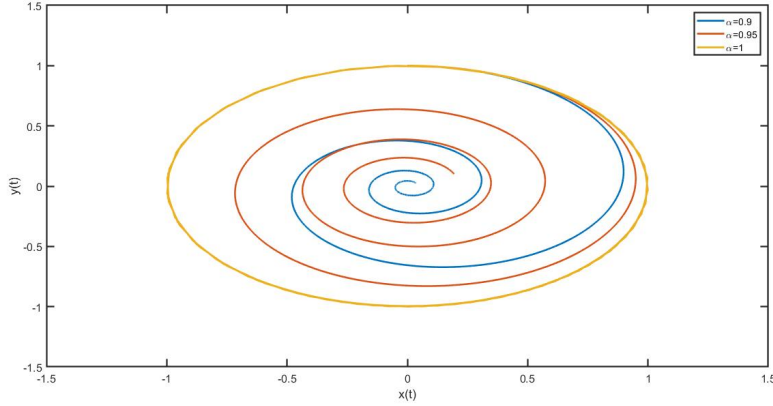


Figura 2.2: Trayectorias descritas en el Ejemplo 2.14.

Teorema 2.15. Considere el sistema ${}^C D_0^\alpha y = Ay$, $\alpha \in (0, 1)$, $y \in \mathbb{R}^2$ y $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Sea $p(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$ el polinomio característico de la matriz A . Entonces, el origen del sistema es asintóticamente estable si se tiene alguno de los dos siguientes casos:

1. $b > 0$ y $c > 0$;
2. $b \leq 0$, $4c > b^2$ y $\left| \arctan \left(\frac{\sqrt{4c - b^2}}{b} \right) \right| > \alpha \frac{\pi}{2}$.

Demostración. Recordemos que los valores propios son las raíces del polinomio característico, tomemos estos valores como λ_1 y λ_2 . Por propiedades de los polinomios, se tiene que

$$b = -(\lambda_1 + \lambda_2), \quad c = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$$

En el caso 1 del teorema se tiene que $c > 0$, lo que reduce esto a la posibilidad de tener dos valores propios reales o dos valores propios complejos conjugados. Si los valores propios son reales, entonces deben tener el mismo signo y, como $b > 0$, se tiene que $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, con lo cual se concluye que ambos valores propios reales son negativos. Así, tenemos que

$$\arg(\lambda_1) = \arg(\lambda_2) = \pi > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \forall \alpha \in (0, 1). \quad (2.6)$$

Del Teorema de Matignon, se sigue que el origen del sistema es asintóticamente estable para todo $\alpha \in (0, 1)$.

Cuando los valores propios son complejos conjugados, $-b$ es dos veces la parte real de dichos valores. Como $b > 0$ entonces los valores propios tienen parte real negativa, lo que conduce a que

$$|\arg(\lambda_{1,2})| > \frac{\pi}{2} > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Nuevamente, por el Teorema de Matignon, se tiene que el origen es asintóticamente estable.

En el caso 2, como $4c > b^2$, los valores propios son complejos conjugados y se pueden escribir como

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b}{2} \pm \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}.$$

Bajo esta consideración, se obtiene que

$$|\arg(\lambda_{1,2})| = \left| \arctan \left(\frac{\sqrt{4c - b^2}}{b} \right) \right| > \alpha \frac{\pi}{2},$$

así que el sistema es asintóticamente estable. ■

Con las condiciones del Teorema 2.15 y recordando que $b = -\text{tr}(A)$ y $c = \det(A)$, se puede reescribir este resultado con base en la traza y el determinante de A .

Corolario 2.16. Bajo las hipótesis del Teorema 2.15, se puede decir que el origen del sistema es asintóticamente estable si se tiene alguno de los dos siguientes casos:

1. $\text{tr}(A) < 0$ y $\det(A) > 0$;
2. $\text{tr}(A) \geq 0$, $4\det(A) > (\text{tr}(A))^2$ y $\left| \arctan \left(\frac{\sqrt{4\det(A) - (\text{tr}(A))^2}}{\text{tr}(A)} \right) \right| > \alpha \frac{\pi}{2}$.

Por último, se puede obtener la solución del sistema lineal no homogéneo (2.3) por medio de la Transformada de Laplace. Para ello, se puede consultar el siguiente resultado y enunciados equivalentes en los textos de Kaczorek (2011) y Diethelm (2010).

Teorema 2.17. Considere el sistema (2.3) con condición inicial $y(0) = y_0$. La solución tiene la forma

$$y(x) = E_\alpha(x^\alpha A)y_0 + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((x-t)^\alpha A)q(t)dt.$$

2.3. Linealización de sistemas fraccionarios

Al igual que en los sistemas autónomos ordinarios, queremos analizar que ocurre con un sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias en las cercanías de una solución. Para ello, buscaremos precisar el concepto de sistema dinámico asociado a sistemas diferenciales no lineales en el sentido de Caputo, es decir, definidos de la forma

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha x(t) = f(x(t)), & \alpha \in (0, 1) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

donde $x(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ y $t \geq 0$.

Inicialmente empezaremos por ver si los sistemas de la forma (2.7) definen sistemas dinámicos como se definió en el Capítulo 1. Sobre esto, Gallegos y Duarte-Mermoud (2016) demuestran el siguiente resultado:

Teorema 2.18. El sistema ${}^C D_0^\alpha x = f(x)$ con $x(0) \in \mathbb{R}^n$ y para $t \geq 0$ no corresponde a un sistema dinámico en los casos en que $\alpha \in (0, 1)$, f no es idénticamente cero o $x(0)$ no es un punto de equilibrio.

Con base en esto, se ha buscado definir sistema dinámico en el sentido de un operador fraccionario. En vista de que estamos centrados en el operador de Caputo, vamos a definir sistemas dinámicos en el sentido de este operador. Este trabajo es realizado por Li y Ma (2013), lo que se sintetiza en el siguiente teorema.

Teorema 2.19. Sean $f(x)$ una función continua y $x(t)$ una solución continua de (2.7). Entonces, existe ϕ_t tal que

- (a) $\phi_0 = I$, el mapeo identidad,
- (b) $\phi_{s+t} = \phi_t \circ \theta_t \circ \phi_s$, para $s, t \in \mathbb{R}^+$. Aquí, θ_t es un mapeo lineal que satisface

$$\theta_t \circ \phi_s(x_0) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (t + s - \tau)^{\alpha-1} f(\phi_\tau(x_0)) d\tau, \quad t \geq 0$$

y si $s = 0$, $\theta_t(x_0) = x_0$,

- (c) $(t, x_0) \rightarrow \phi_t(x_0)$ corresponde a un mapeo continuo de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ sobre Ω .

Con el Teorema 2.19, se puede establecer la noción de sistema dinámico en el sentido de Caputo.

Definición 2.20. El mapeo ϕ_t mencionado en el Teorema 2.19 es conocido como flujo fraccionario en el sentido de Caputo. A la tripleta $(\mathbb{R}^+, \Omega, \phi_t)$ se le denomina sistema dinámico fraccionario en el sentido de Caputo.

En el Teorema 2.19 se puede ver que para $\alpha = 1$, el operador θ_t corresponde al operador identidad, con lo cual ϕ correspondería al flujo del sistema dinámico ordinario.

Ahora, buscaremos sentar la noción del Teorema de Hartman - Grobman aplicado a sistemas autónomos fraccionarios de la forma

$${}^C D_0^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad \alpha \in (0, 1), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n. \quad (2.8)$$

Antes de introducir el Teorema de Hartman - Grobman, daremos algunas definiciones.

Definición 2.21 (Punto de equilibrio). El punto x_0 es un punto de equilibrio del sistema (2.8) si y sólo si $f(x_0) = 0$.

Definición 2.22 (Punto de equilibrio hiperbólico). Supongamos que x_0 es un punto de equilibrio del sistema (2.8). Supongamos que todos los valores propios λ_i de la matriz $J_f(x_0)$ (es decir, de la matriz de linealización de f en x_0) satisfacen que

$$|\lambda_i| \neq 0, \quad |\arg(\lambda_i)| \neq \frac{\alpha\pi}{2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Entonces x_0 es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema (2.8).

Teniendo en cuenta las nociones de estabilidad y sistemas topológicamente equivalentes, se procede a establecer la versión fraccionaria del Teorema de Hartman - Grobman. La demostración de este hecho se presenta en Li y Ma (2013).

Teorema 2.23 (Versión Fraccionaria del Teorema de Hartman - Grobman). Si el origen $O \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio hiperbólico del sistema (2.8), entonces el campo vectorial $f(x)$ es topológicamente equivalente con su campo linealizado $J_f(O)x$ en una vecindad del origen.

Ahora, vamos a ilustrar el funcionamiento del Teorema 2.23 con los siguientes ejemplos.

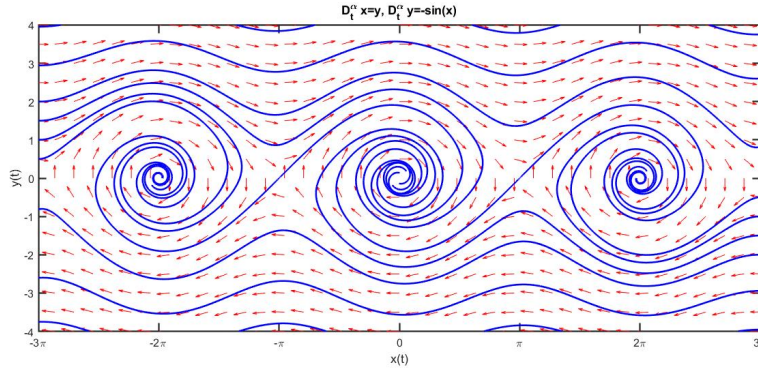


Figura 2.3: Plano fase del Ejemplo 2.24

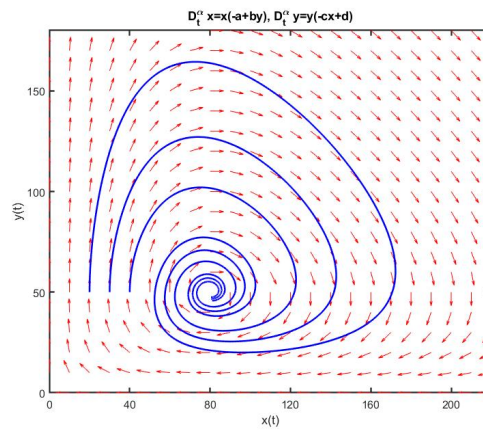


Figura 2.4: Trayectorias para el modelo de Lotka -Volterra fraccionario descritas en el Ejemplo 2.25.

Ejemplo 2.24. Retomemos el Ejemplo 1.9. Vamos a cambiar la derivada ordinaria por derivada fraccionaria de orden $\alpha = 0.9$, de lo cual se obtiene el plano de fase mostrado en la Figura 2.3. Sobre el eje x , en los múltiplos impares de π , persisten puntos inestables. Sin embargo, los puntos de equilibrios asociados a múltiplos pares de π pasan de ser centros a puntos asintóticamente estables. Al evaluar la matriz jacobiana en los últimos puntos mencionados, se obtiene que los valores propios son $\lambda_{1,2} = \pm i$, con lo cual el sistema será asintóticamente estable en una vecindad de estos puntos para $\alpha < 1$.

Ejemplo 2.25. Analicemos el Ejemplo 1.10 al igual que como se hizo en el Ejemplo anterior. Se tiene que $(80, 50)$ es el punto de equilibrio del sistema, correspondiendo a un centro. Sin embargo, al cambiar la derivada ordinaria por fraccionaria se obtiene que este punto de equilibrio se vuelve asintóticamente estable ya que $\alpha < 1$, de acuerdo con lo señalado por los Teoremas de Hartman - Grobman y Matignon. En la Figura 2.4 se grafican las trayectorias con valores iniciales $(20, 50)$, $(30, 50)$ y $(40, 50)$, tomando los valores $a = 0.1$, $b = 0.002$, $c = 0.0025$ y $d = 0.2$ para el modelo de Lotka - Volterra y reemplazando la derivada fraccionaria por derivada de Caputo de orden $\alpha = 0.9$.

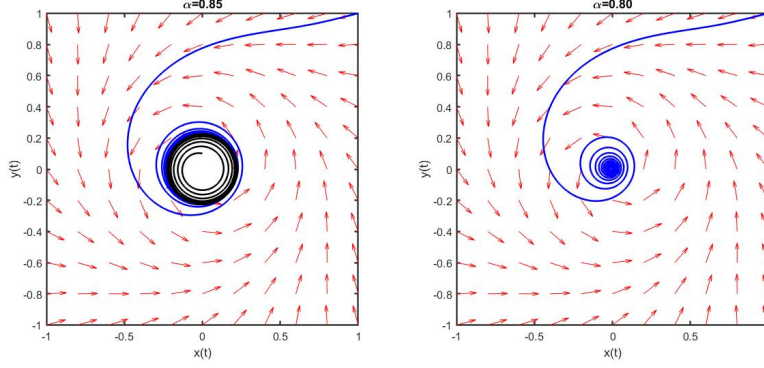


Figura 2.5: Planos de fase del Ejemplo 2.26.

Ejemplo 2.26. Consideremos la función f del Ejemplo 1.22 con $\mu = 0.25$. Consideremos el sistema ${}^C D_0^\alpha x = f(x)$. Los valores propios de la matriz jacobiana de f evaluada en el origen tiene valores propios $\lambda_{1,2} = 0.25 \pm i$. Para el sistema, tenemos que el origen es un punto de equilibrio hiperbólico para $\alpha \neq \frac{2}{\pi} \arctan(4) \approx 0.84$, casos en los que se aplica la Versión Fraccionaria del Teorema de Hartman - Grobman. Si $\alpha > 0.84$, tendremos que $|\arg(\lambda_{1,2})| < \alpha \frac{\pi}{2}$, así que del Teorema de Matignon se desprende que el sistema es inestable. En la Figura 2.5, se observa el diagrama de fase del sistema para $\alpha = 0.85$ en el cual se puede ver que el origen es inestable. En particular, el sistema muestra que existe una curva cerrada que funciona como un atractor. Para $\alpha < 0.84$, el Teorema de Matignon garantiza que el equilibrio es asintóticamente estable. En la Figura 2.5, se observa que para $\alpha = 0.80$ el origen es asintóticamente estable.

2.4. Soluciones periódicas en sistemas autónomos fraccionarios

En la Figura 2.5 asociada al sistema del Ejemplo 2.26 se observa la presencia de una curva cerrada a la cual se acercan las trayectorias del sistema. Sin embargo, no se puede afirmar que dicha curva corresponda a un ciclo del sistema, es decir, no se puede establecer la existencia de una solución periódica para dicho sistema. Vamos a estudiar la existencia de ciclos para sistemas lineales.

Los operadores diferenciales fraccionarios son operadores no locales, ya que cuando aparecen en una ecuación la solución evaluada en el tiempo t depende de todos los valores precedentes a t . En este caso se habla de que el sistema tiene una memoria. Yazdani y Salarieh (2011) prueban el siguiente Teorema para mostrar la influencia de la memoria en un sistema fraccionario.

Teorema 2.27. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función que satisface la condición de Lipschitz, entonces las soluciones del sistema

$${}^C D_a^\alpha x = f(x), \quad x(a) = x_a. \quad (2.9)$$

son dependientes de la memoria. Es decir, la solución del sistema (2.9), denotada por $\phi(t, x_a)$ y, la solución de

$${}^C D_b^\alpha y = f(y), \quad y(b) = y_b = \phi(b, x_a), \quad b > a, \quad (2.10)$$

denotada por $\psi(t, y_b)$, no coinciden para $t > b$.

Demostración. Razonemos por contradicción. Supongamos que $\phi(t, x_a) = \psi(t, y_b)$ para $t \geq b$. Por el Teorema 2.4, se tiene que la solución del sistema (2.9) es única. Aplicando el Lema 2.1, la solución se puede escribir como

$$\phi(t, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a)) d\tau. \quad (2.11)$$

Con base en esto, se puede escribir

$$y_b = \phi(b, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b - \tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a)) d\tau. \quad (2.12)$$

Similarmente,

$$\psi(t, y_b) = y_b + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\psi(\tau, y_b)) d\tau. \quad (2.13)$$

Sustituyendo y_b de la ecuación (2.12) en (2.13), se obtiene

$$\psi(t, y_b) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b - \tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a)) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\psi(\tau, y_b)) d\tau. \quad (2.14)$$

Con base en la suposición $\phi(t, x_a) = \psi(t, y_b)$ para $t \geq b$, de las ecuaciones (2.11) y (2.14) se puede deducir que

$$\int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a)) d\tau = \int_a^b (b - \tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a)) d\tau + \int_b^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a)) d\tau. \quad (2.15)$$

Reorganizando la expresión anterior, se obtiene que

$$\int_a^b (t - \tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a)) d\tau = \int_a^b (b - \tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a)) d\tau, \quad (2.16)$$

para todo $t \leq b$, lo cual es una contradicción. Se sigue entonces que $\phi(t, x_a)$ y $\psi(t, y_b)$ no coinciden para $t > b$, es decir, hay dependencia de la memoria. ■

El Teorema 2.27 está ligado al Teorema 2.19. Como mencionan Li y Ma (2013), la función θ_t en el Teorema 2.19 busca que las dos soluciones mencionadas en el Teorema 2.27 coincidan en cierto instante de tiempo. La dependencia de la memoria es una característica que hace que el sistema fraccionario no corresponda a un sistema dinámico en el sentido ordinario.

Basado en esto, Yazdani y Salarieh (2011) demuestran el siguiente resultado:

Teorema 2.28. El sistema de orden fraccionario invariante en el tiempo presentado en (2.9) no tiene soluciones periódicas a menos que el límite inferior sea $\pm\infty$.

Demostración. Supongamos que la ecuación (2.9) tiene una solución periódica con periodo T denotada $\phi(t, x_a)$. Del Lema 2.1 se tiene que

$$\phi(t, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a)) d\tau. \quad (2.17)$$

$$\phi(t + T, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t+T} (t + T - \tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a)) d\tau. \quad (2.18)$$

Haciendo el cambio de variable $z = \tau - T$ en (2.18) y teniendo en cuenta la periodicidad de $\phi(t, x_a)$, se obtiene que

$$\phi(t, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a-T}^t (t-z)^{\alpha-1} f(\phi(z, x_a)) dz. \quad (2.19)$$

Sustrayendo término a término la ecuación (2.17) de la ecuación (2.19) se obtiene que

$$0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a-T}^a (t-z)^{\alpha-1} f(\phi(z, x_a)) dz, \quad (2.20)$$

para todo t . Ahora, como $f(\phi(z, x_a)) \neq 0$, entonces debe cumplirse que $a = a - T$, lo que es una contradicción. Luego, el sistema (2.9) no tiene soluciones periódicas. ■

El Teorema 2.28 indica que en el plano de fase de un sistema autónomo de orden fraccionario no es posible la existencia de ciclos, es decir, no hay curvas cerradas correspondientes a soluciones del sistema. Si volvemos al Ejemplo 2.26, la curva cerrada estable que se muestra en la Figura 2.5 no puede ser considerada un ciclo.

Capítulo 3

Aplicaciones

3.1. Solución numérica de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias: método de Adams-Bashforth-Moulton

Para la solución del sistema (2.1) existen diferentes esquemas numéricos los cuales suelen estar basados en reglas de cuadratura y métodos numéricos para la estimación de integrales debido a la forma en que está definido el operador de Caputo. Baleanu et al. (2012) establecen dos clasificaciones para dichos métodos: los métodos directos donde la discretización numérica es aplicada directamente sobre el operador diferencial que aparece en la ecuación y los métodos indirectos que se aplican sobre algún problema equivalente como la formulación correspondiente al Lema 2.1. En Diethelm et al. (2004) se hace la deducción de un método numérico indirecto para el sistema (2.1). Para empezar, se considera el método clásico de Adams-Bashforth-Moulton utilizado en la aproximación del problema

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(0) = y_0, \quad x \in [0, T].$$

Para ello se puede recurrir a una malla temporal uniforme tomando $h = \frac{T}{N}$, para algún entero N , tomando como puntos de malla $\{x_j = jh : j = 0, 1, \dots, N\}$. Suponiendo que ya se han calculado las aproximaciones $y_j \approx y(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, k$ así que intentamos obtener la aproximación y_{k+1} mediante la ecuación

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(z, y(z)) dz.$$

Aquí se puede aplicar una regla de cuadratura para estimar la integral como la regla trapezoidal, la cual lleva al siguiente esquema

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]. \quad (3.1)$$

Al aparecer y_{k+1} en ambos términos de la ecuación anterior se tiene un método implícito. Aquí la dificultad radica en despejar y_{k+1} , razón por la cual se considera utilizar una aproximación inicial a y_{k+1} . La aproximación preliminar y_{k+1}^P llamada predictor es obtenida de manera similar al esquema anterior cambiando la regla de cuadratura de trapezoidal a rectangular, de lo cual se obtiene lo siguiente:

$$y_{k+1}^P = y_k + hf(x_k, y_k). \quad (3.2)$$

Ahora, reemplazando esto en el lado derecho de la ecuación (3.1) se llega a

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^P)]. \quad (3.3)$$

Este esquema es llamado el método de Adams-Bashforth-Moulton, el cual es convergente de grado 2, es decir,

$$\max_{j=0, \dots, N} |y(x_j) - y_j| = O(h^2).$$

Ahora bien, al escribir el sistema (2.1) en forma de integral de Volterra de segunda clase, es necesario aplicar reglas de cuadratura a la integral

$$\int_0^x (x-z)^{\alpha-1} f(z, y(z)) dz.$$

En este caso, se estima la integral de 0 a x_{k+1} debido a la estructura no local del operador de Caputo. Para construir la aproximación usamos la regla producto de cuadratura trapezoidal con respecto a la función de peso $(x_{k+1} - \cdot)^{\alpha-1}$ para reemplazar la integral, por tanto se considera que

$$\int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{\alpha-1} g(z) dz \approx \int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz$$

donde \tilde{g}_{k+1} es el interpolante lineal a trozos con nodos escogidos en los x_j , $j = 0, 1, \dots, k+1$. Usando técnicas de cuadratura, la integral puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz \approx \sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} g(x_j).$$

Aquí, los coeficientes $a_{j,k+1}$ para una malla uniforme se pueden expresar como sigue:

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^\alpha [k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha]}{\alpha(\alpha+1)}, & \text{si } j = 0, \\ \frac{h^\alpha [(k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}]}{\alpha(\alpha+1)}, & \text{si } 1 \leq j \leq k, \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}, & \text{si } j = k+1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Así, se puede llegar a una formulación similar a la ecuación (3.1) para el sistema fraccionario

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} \frac{x_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[a_{k+1,k+1} f(x_{k+1}, y_{k+1}^P) + \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(x_j, y_j) \right]. \quad (3.5)$$

Al igual que en el caso ordinario, el predictor y_{k+1}^P se estima usando en la integral una regla producto de cuadratura rectangular que termina en la siguiente expresión

$$\int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{\alpha-1} g(z) dz \approx \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} g(x_j),$$

donde

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} [(k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha]. \quad (3.6)$$

Con base en estos coeficientes se hace una primera estimación de y_{k+1} lo que corresponde al predictor

$$y_{k+1}^P = \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} \frac{x_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(x_j, y_j). \quad (3.7)$$

Este predictor se calcula para reemplazar en el esquema que inicialmente era implícito, el cual se conoce como corrector. De allí, se obtiene el esquema de Adams-Bashforth-Moulton de orden fraccionario. Respecto a la convergencia, se tiene el siguiente resultado del texto de Diethelm et al. (2004) (Teorema 3.2.):

Teorema 3.1. Sean $\alpha > 0$ y ${}^C D_0^\alpha y \in C^2([0, T])$ para algún T apropiado. Entonces,

$$\max_{j=0, \dots, N} |y(x_j) - y_j| = \begin{cases} O(h^2), & \text{si } \alpha \geq 1, \\ O(h^{1+\alpha}), & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

En este trabajo todas las gráficas relacionadas con sistemas de ecuaciones diferenciales fraccionarias fueron elaboradas haciendo uso de una rutina propia para aproximar las soluciones por medio de la versión fraccionaria de Adams-Bashforth-Moulton.

3.2. Memoria

Para introducir el concepto de memoria nos basaremos en el trabajo de Saeedian et al. (2017), lo cual se basa en un modelo SIR. En este modelo se suele suponer que los contactos transmiten la enfermedad con la misma probabilidad, además de que las tasas de transmisión y recuperación son constantes, con lo cual el estado del sistema en cada instante no depende de la historia previa, es decir que el sistema no tiene memoria, lo que se conoce como un sistema Markoviano. Sin embargo, hay evidencias de que los modelos de transmisión de enfermedades exhiben un comportamiento diferente. Por ejemplo, el conocimiento de la enfermedad puede afectar su dinámica, lo cual sugiere que estos sistemas exhiben la característica de memoria con menos influencia para los valores iniciales. En Stanislavsky (2000), se estudian los efectos de memoria, en un caso particular se obtiene que el operador fraccionario de Caputo exhibe un comportamiento apropiado para representar la memoria. Al reemplazar la derivada ordinaria por la derivada fraccionaria, aparece una función kernel de memoria correspondiente a una ley potencial que hace que la contribución de los primeros valores sea menor que la de los valores en instantes de tiempo posteriores (Saeedian et al., 2017).

Para implementar un sistema con memoria, comenzaremos considerando un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x(t)), \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \geq t_0, \quad (3.8)$$

para algún tiempo t_0 . Si en vez de considerar directamente las funciones f_i introducimos un efecto de memoria usando una integral de convolución obtendremos que

$$\dot{x}_i(t) = \int_{t_0}^t k(t-\tau) f_i(x(\tau)) d\tau, \quad (3.9)$$

donde el kernel k depende del tiempo. En el caso del sistema ordinario, sin memoria, se tiene que $k(t - \tau) = \delta(t - \tau)$, donde δ es la distribución Delta de Dirac (Saeedian et al., 2017). Ahora, si tomamos el kernel

$$k(t - \tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)}(t - \tau)^{\alpha-2}, \quad \alpha \in (0, 1],$$

tendremos en la ecuación (3.8)

$$\dot{x}_i(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-2} f_i(x(\tau)) d\tau = J_{t_0}^{\alpha-1} f_i(x(t)). \quad (3.10)$$

Aplicando a ambos lados de la ecuación (3.10) el operador $J_{t_0}^{1-\alpha}$, se obtiene

$${}^C D_{t_0}^{\alpha} x_i(t) = f_i(x(t)). \quad (3.11)$$

En este caso, la introducción de memoria por medio de una ley potencial nos lleva a obtener un sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias. A medida que α decrece, tendremos que la función de potencia decrece más lentamente, lo que hará que el efecto de memoria se prolongue en el tiempo (Saeedian et al., 2017), mientras que para α cercanos a 1 el efecto de la memoria decrece. También, es posible utilizar diferentes valores de α en cada una de las variables de estado cambiando el efecto de memoria en cada una de estas (Saeedian et al., 2017), sin embargo en este trabajo siempre se considerará el mismo efecto de memoria.

3.3. Modelos de interacción entre especies

3.3.1. Modelos predador-presa

Para empezar, comenzaremos por el análisis del modelo predador-presa realizado por Elsadany y Matouk (2015).

$$\begin{cases} \frac{dN}{dT}(T) = N(T)(a - bN(T) - cP(T)), \\ \frac{dP}{dT}(T) = P(T)(-f + ceN(T)), \end{cases} \quad (3.12)$$

donde

- N, P representan las densidades poblacionales de las presas y los predadores respectivamente,
- a es la tasa máxima de nacimiento per cápita de la presa,
- f es la tasa de mortalidad per cápita del predador,
- b es la magnitud de la competencia intraespecífica de las presas,
- c es la magnitud de la competencia intraespecífica entre predadores y presas,
- e es la eficiencia de conversión de las presas ingeridas en nuevos predadores.

Para el estudio de este sistema se hará el cambio de variables

$$x(t) = \frac{ea}{f}N(T), \quad y(t) = \frac{c}{f}P(T), \quad t = fT.$$

obteniendo el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = x(t)(r - kx(t) - y(t)), \\ \frac{dy}{dt}(t) = y(t)(-1 + \beta x(t)), \end{cases} \quad (3.13)$$

donde

$$r = \frac{a}{f}, \quad k = \frac{b}{ae}, \quad \beta = \frac{c}{a}.$$

Entonces, analizaremos el sistema fraccionario

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha x = x(r - kx - y), \\ {}^C D_0^\alpha y = y(-1 + \beta x). \end{cases} \quad (3.14)$$

Este sistema tiene dos puntos de equilibrio fijos: $E_0 = (0, 0)^T$ y $E_1 = (\frac{r}{k}, 0)^T$. Además, si $\beta r > k$, se tiene un punto de equilibrio de coexistencia de las dos especies $E_2 = (\frac{1}{\beta}, \frac{\beta r - k}{\beta})^T$. Para analizar su estabilidad local, recurrimos a los Teoremas de Hartman - Grobman y Matignon. Para empezar, debemos encontrar la matriz jacobiana asociada al sistema. En este caso, tenemos que

$$J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r - 2kx - y & -x \\ \beta y & -1 + \beta x \end{bmatrix}.$$

Iniciaremos por analizar la estabilidad de E_0 y E_1 . Al evaluar los puntos de equilibrio en la matriz jacobiana tenemos que

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J(E_1) = \begin{bmatrix} -r & -\frac{r}{k} \\ 0 & \frac{\beta r}{k} - 1 \end{bmatrix}.$$

Para el origen, tenemos que la matriz jacobiana tiene valores propios $\lambda_1 = r$ y $\lambda_2 = -1$. Como $|\arg(\lambda_1)| < \alpha \frac{\pi}{2}$, para cualquier $\alpha \in (0, 1)$, se tiene que esta solución es inestable. Para E_1 se tiene que $\lambda_1 = -r$ y $\lambda_2 = \frac{\beta r}{k} - 1$. La estabilidad de este punto depende del valor λ_2 . Si $\frac{\beta r}{k} < 1$ este valor propio es negativo, lo que hace el punto de equilibrio sea asintóticamente estable. Si $\frac{\beta r}{k} > 1$, el valor propio es positivo, por tanto se trata de punto de equilibrio inestable.

En el caso $\frac{\beta r}{k} > 1$, E_0 y E_1 son puntos críticos inestables; analicemos bajo estas circunstancias la estabilidad de E_2 . Para ello, evaluemos en la matriz jacobiana.

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -\frac{k}{\beta} & -\frac{1}{\beta} \\ \beta r - k & 0 \end{bmatrix}.$$

Usaremos el Corolario 2.16 para determinar la estabilidad del punto. Tenemos que

$$\text{tr}(J(E_2)) = -\frac{k}{\beta} < 0, \quad \det(J(E_2)) = \frac{\beta r - k}{\beta} > 0,$$

lo que nos permite concluir que este equilibrio es asintóticamente estable. Vamos a ilustrar este comportamiento mediante el siguiente ejemplo.

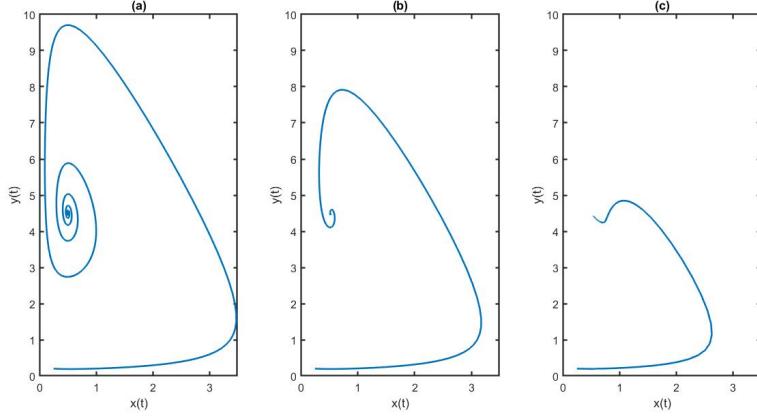


Figura 3.1: Trayectoria del Ejemplo 3.2 para órdenes (a) $\alpha = 0.98$, (b) $\alpha = 0.8$, (c) $\alpha = 0.5$.

Ejemplo 3.2. Consideraremos el sistema (3.14) con valor inicial $(0.25, 0.2)^T$ y parámetros $r = 5$, $k = 1$, $\beta = 2$. Con estos parámetros, se tiene que $E_2 = (0.5, 4.5)^T$ es asintóticamente estable, mientras que el origen y $E_1 = (5, 0)^T$ son inestables independiente del valor de α . En la Figura 3.1 se confirma este comportamiento al tomar tres valores distintos del orden de la derivada fraccionaria. También, se puede decir que a medida que el orden de la derivada se reduce, la variación de las poblaciones también se reduce.

Ahora analicemos un modelo en el cual el crecimiento de las presas, en ausencia de predadores, corresponde a un esquema logístico. Tomemos para ello el sistema presentado por Li et al. (2016): la versión ordinaria del sistema

$$\begin{cases} {}^C D_{t_0}^\alpha x(t) = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - c(1-m)xy, & x(t_0) = x_{t_0} \\ {}^C D_{t_0}^\alpha y(t) = ec(1-m)xy - dy, & y(t_0) = y_{t_0}. \end{cases} \quad (3.15)$$

En este modelo se presenta una variable de interés llamada refugio. Según Li et al. (2016), la versión ordinaria de este modelo corresponde a la forma tradicional de estudiar sistemas con refugio. En este problema se incluyen las siguientes variables:

- $x(t)$, $y(t)$ denotan las densidades de presas y predadores en el instante t ,
- r es la tasa de crecimiento intrínseca de la presa,
- k es la capacidad de carga ambiental de las presas,
- c es la tasa de ataque de los predadores a las presas,
- e es la tasa de conversión que denota el número de predadores nacidos por cada presa capturada,
- d es la tasa de mortalidad de los predadores.

El sistema (3.15) tiene equilibrios en $E_0 = (0, 0)^T$, $E_1 = (k, 0)^T$ para todos los parámetros. Además, si $m < 1 - \frac{d}{eck}$, existe un equilibrio de coexistencia de las dos especies, $E_2 = (x^*, y^*)^T$ con

$$x^* = \frac{d}{ec(1-m)}, \quad y^* = \frac{r}{kc(1-m)}(k - x^*).$$

Nuevamente analizaremos la estabilidad local de los puntos de equilibrio por medio de la linealización. En este caso, se obtiene que

$$J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{k}(k - 2x) - c(1 - m)y & -c(1 - m)x \\ ec(1 - m)y & ec(1 - m)x - d \end{bmatrix}.$$

Empecemos por analizar los puntos E_0 y E_1 obteniendo la matriz jacobiana evaluada en estos puntos.

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}, \quad J(E_1) = \begin{bmatrix} -r & -c(1 - m)k \\ 0 & ec(1 - m)k - d \end{bmatrix}.$$

En este caso, tenemos que el origen del sistema es inestable debido a que los valores propios de $J(E_0)$ son $\lambda_1 = r$ y $\lambda_2 = -d$. Para $J(E_1)$, se tiene que los valores propios son $\lambda_1 = -r$ y $\lambda_2 = ec(1 - m)k - d$. Para garantizar la estabilidad asintótica, debemos verificar que $\lambda_2 < 0$. Si tomamos $m^* = 1 - \frac{d}{eck}$, tendremos que $\lambda_2 < 0$ si $m > m^*$; si $m < m^*$, E_1 es inestable.

Ahora analicemos el punto de coexistencia E_2 , el cual existe cuando $m < m^*$. Para este punto, al hallar la matriz jacobiana se tiene que

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -\frac{r}{k}x^* & -c(1 - m)x^* \\ ec(1 - m)y^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Se tiene que $\text{tr}(J(E_2)) = -\frac{r}{k}x^* < 0$ y $\det(J(E_2)) = ec^2(1 - m)^2x^*y^* > 0$ lo que permite establecer que E_2 es localmente asintóticamente estable debido al Corolario 2.16.

Vamos a ilustrar el comportamiento del sistema (3.15) con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.3. Para el sistema (3.15), asignemos a los parámetros del modelo los valores

$$r = 1.2, \quad k = 40, \quad c = 1, \quad d = 0.4, \quad e = 0.2.$$

Vamos a analizar la influencia del parámetro m en la estabilidad del sistema. Con estos valores se tiene que $m^* = 0.95$.

Comenzaremos haciendo el análisis del sistema con $\alpha = 1$. Al considerar $m = 0.96$, se tiene que solo aparecen los puntos críticos E_0 y E_1 , siendo este último asintóticamente estable, lo que conlleva a que la población predatora se extingue, comportamiento reflejado en la Figura 3.2. Al variar m tomando valores por debajo de m^* se observa que aparece el punto de coexistencia de las especies. En las Figuras 3.3 y 3.4 se observa el comportamiento cualitativo del sistema con valores $m = 0.1$ y $m = 0$, respectivamente. El cambio del valor m por debajo de m^* hace que el punto de equilibrio se desplace haciendo que el valor límite de las especies se reduzca.

Para analizar la influencia del sistema fraccionario, se toma $\alpha = 0.98$ con las mismas constantes descritas. Con esto, se obtienen las Figuras 3.5 a 3.7. El comportamiento cualitativo del sistema con $\alpha = 0.98$ es el mismo del sistema ordinario.

Ejemplo 3.4. Consideremos el sistema (3.15) con los siguientes parámetros $r = 1.2$, $k = 40$, $c = 1$, $d = 0.4$, $e = 0.2$, $m = 0.1$ y condición inicial $(2.2, 1)^T$, condiciones con las cuales se construye la Figura 3.8. Al variar el orden de la derivada se observa que a medida que el orden de la derivada se hace menor, la variación de la población es menor, se requiere más tiempo para llegar al estado de coexistencia.

Hasta el momento hemos analizado modelos predador-presa en los cuales no aparecen soluciones con comportamiento periódico. Del Teorema 2.28, sabemos que no existen soluciones periódicas

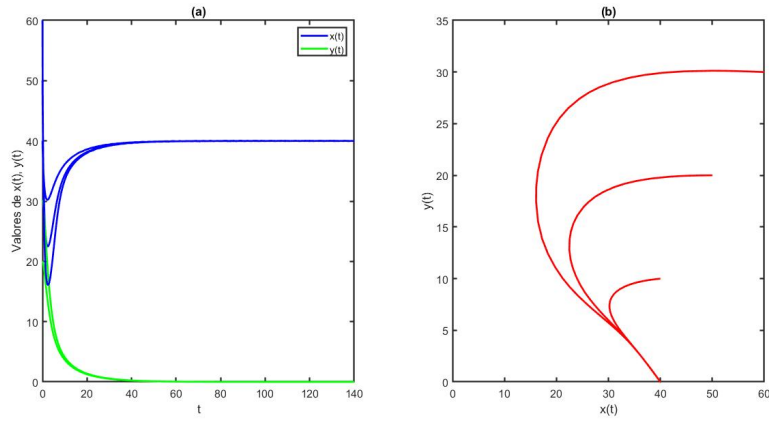


Figura 3.2: Análisis del sistema (3.15) con $\alpha = 1$ y $m = 0.96$ (a) Evolución temporal, (b) plano de fase.

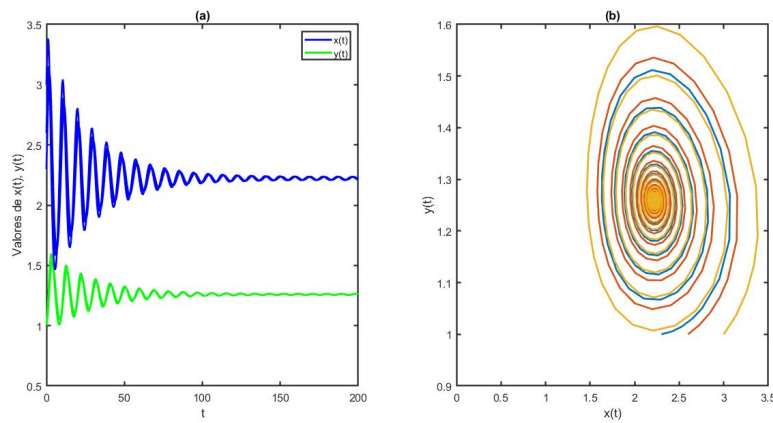


Figura 3.3: Análisis del sistema (3.15) con $\alpha = 1$ y $m = 0.1$ (a) Evolución temporal, (b) plano de fase.

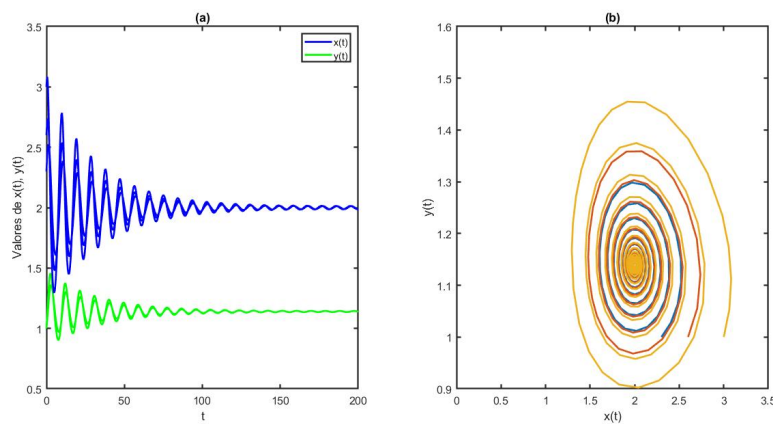


Figura 3.4: Análisis del sistema (3.15) con $\alpha = 1$ y $m = 0$ (a) Evolución temporal, (b) plano de fase.

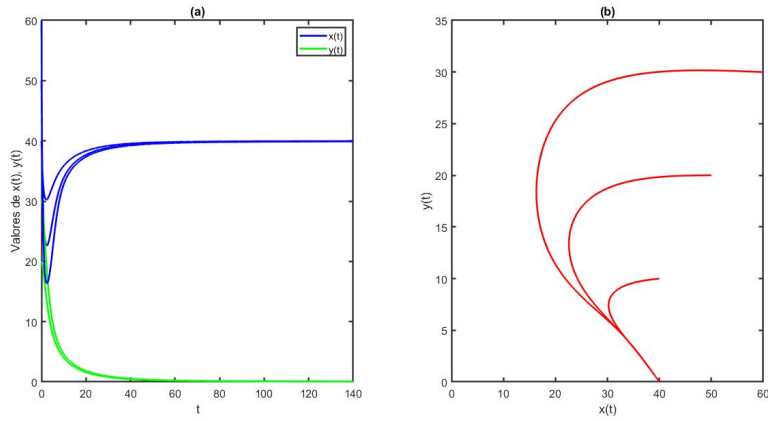


Figura 3.5: Análisis del sistema (3.15) con $\alpha = 0.98$ y $m = 0.96$ (a) Evolución temporal, (b) plano de fase.

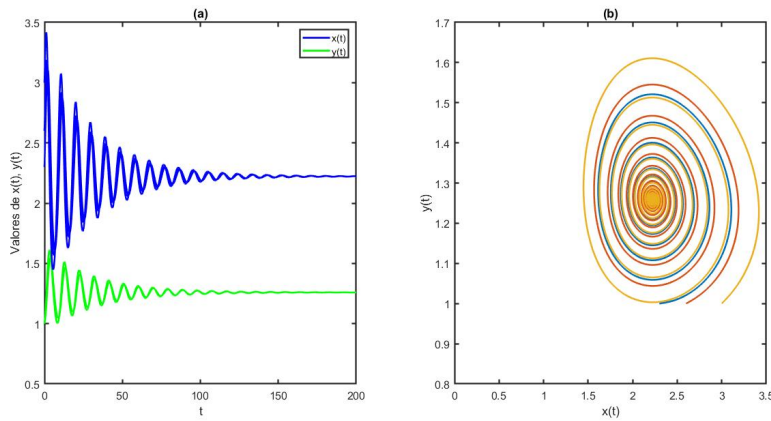


Figura 3.6: Análisis del sistema (3.15) con $\alpha = 0.98$ y $m = 0.1$ (a) Evolución temporal, (b) plano de fase.

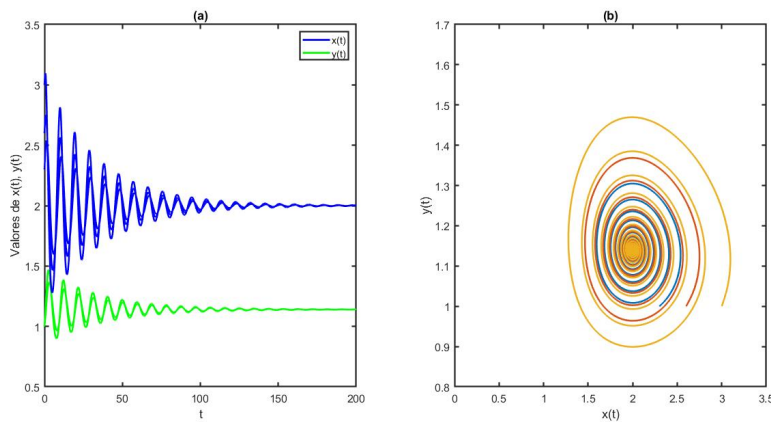


Figura 3.7: Análisis del sistema (3.15) con $\alpha = 0.98$ y $m = 0$ (a) Evolución temporal, (b) plano de fase.

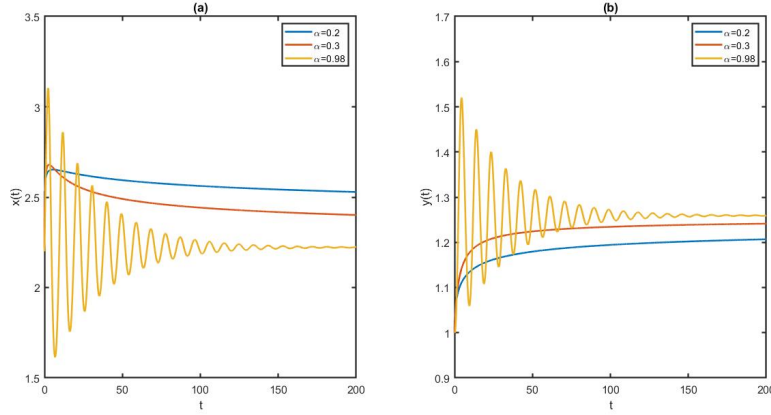


Figura 3.8: Evolución temporal del sistema del Ejemplo 3.4 para (a) presas (b) predadores.

para los sistemas autónomos de operadores diferenciales con el operador de Caputo que hemos definido, pero es posible que el conjunto ω -límite de las soluciones corresponda a una órbita cerrada, como apreciamos en el Ejemplo 2.26, lo corresponde a un comportamiento cuasi periódico.

De acuerdo a Müller y Kuttler (2015), se espera un comportamiento periódico en las soluciones, lo que lleva a cambiar la respuesta funcional, es decir, la tasa a la cual los depredadores capturan a la presa. En los modelos (3.12) y (3.15), la respuesta funcional se considera lineal, lo que Müller y Kuttler (2015) llaman respuesta funcional tipo I. En este caso, se espera que haya un tipo de saturación ya que el depredador no puede consumir una cantidad ilimitada de presas de inmediato, atraparla y capturarla le requiere un tiempo (Müller y Kuttler, 2015). Con este concepto de saturación es posible considerar que la tasa de ingesta desacelera y se acerca a un máximo porque los predadores necesitan tiempo para capturar la presa y consumirla, para lo cual se propone una respuesta funcional de la forma

$$\phi(x) = \frac{cx}{a+x}.$$

Esta respuesta funcional también es conocida como respuesta funcional de Holling. Vamos a analizar un sistema de ecuaciones basado en el modelo de Rosenzweig y MacArthur (1963) que incluye una respuesta funcional del tipo II.

Ghosh et al. (2020) introducen el modelo predador-presa de Bazykin, representado por medio del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dN(T)}{dT} = rN(T) - c(N(T))^2 - \frac{k_1N(T)P(T)}{k_2 + aN(T)}, \\ \frac{dP(T)}{dT} = \frac{ek_1N(T)P(T)}{k_2 + aN(T)} - k_3R(T) - k_4(R(T))^2. \end{cases} \quad (3.16)$$

donde N , P , r y e tienen el mismo significado que en el sistema (3.12). Además, tenemos que c es la competencia intra-específica de la presa, k_1 es la tasa de ataque del predador a la presa, k_2 es la saturación media, k_3 es la tasa de mortalidad de la especie depredadora, k_4 es la magnitud de la competencia intra-específica entre los depredadores y a es un coeficiente de distorsión. Para propósitos del modelo, tomaremos el coeficiente de distorsión como $a = 1$. En ausencia de depredadores, la tasa de crecimiento de las presas está representada por una función cuadrática, consistente con un crecimiento logístico.

Para el análisis del modelo (3.16) Ghosh et al. (2020) realizan el siguiente cambio de variables:

$$t = k_3 T, \quad N = k_2 x, \quad R = e k_2 y,$$

con el cual se obtiene el sistema de ecuaciones fraccionarias asociado

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha x = r_0 x \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) - \frac{kxy}{1+x}, \\ {}^C D_0^\alpha y = \frac{kxy}{1+x} - y - k_f y^2. \end{cases} \quad (3.17)$$

donde

$$r_0 = \frac{r}{k_3}, \quad x_0 = \frac{r}{ck_2}, \quad k_f = \frac{ek_2k_4}{k_3}.$$

Analizando la ausencia de predadores, se tiene que las presas siguen el modelo logístico sugerido en el modelo (3.15) siendo x_0 la capacidad de carga ambiental de las presas para el sistema re escalado.

Ahora, analicemos los puntos de equilibrio. Al igual que en los primeros dos modelos, tenemos al origen $E_0 = (0, 0)^T$ y un punto libre de predadores $E_1(x_0, 0)^T$. Al analizar la posibilidad de un punto de coexistencia de las especies, se llega a las siguientes ecuaciones

$$\frac{r_0}{x_0}(x_0 - x) - \frac{ky}{1+x} = 0, \quad \frac{kx}{1+x} - 1 - k_f y = 0. \quad (3.18)$$

Eliminando la variable y , se obtiene la ecuación $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$, con

$$a_0 = \frac{k_f r_0}{x_0}, \quad a_1 = (2 - x_0)a_0, \quad a_2 = k(k - 1) - 2k_f r_0 + a_0, \quad a_3 = -(k + k_f r_0).$$

Como $a_3 < 0$ y $a_0 > 0$, el polinomio tiene al menos una raíz positiva x^* , a partir de la cual se puede definir y^* como

$$y^* = \frac{r_0(x_0 - x^*)(1 + x^*)}{kx_0}.$$

Por último, tenemos en cuenta el criterio de Ghosh et al. (2020) según el cual se debe seleccionar el punto de coexistencia de tal manera que $x^* < x_0$.

Ya determinados los puntos críticos, pasamos a estudiar la estabilidad. En este caso la matriz jacobiana corresponde a

$$J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_0}{x_0}(x_0 - 2x) - \frac{ky}{(1+x)^2} & -\frac{kx}{1+x} \\ \frac{ky}{(1+x)^2} & \frac{kx}{1+x} - 1 - 2k_f y \end{bmatrix}.$$

Para el estudio de la estabilidad usaremos un criterio equivalente a las condiciones del Teorema de Matignon y usada en los trabajos de Ghosh et al. (2020), Abdelouahab et al. (2012) y Li y Wu (2014).

Lema 3.5. Consideremos el sistema fraccionario ${}^C D_0^\alpha y = Ay$, $\alpha \in (0, 1)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $y \in \mathbb{R}^n$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los valores propios de A . Definimos

$$m(\alpha) := \frac{\alpha\pi}{2} - \min_{1 \leq j \leq n} \{|\arg(\lambda_j)|\}. \quad (3.19)$$

Entonces, la solución trivial del sistema es estable si $m(\alpha) < 0$ e inestable si $m(\alpha) > 0$.

Para empezar, analicemos la estabilidad de E_0 y E_1 . Al evaluar la matriz jacobiana en estos puntos se obtienen, respectivamente,

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J(E_1) = \begin{bmatrix} -r_0 & -\frac{kx_0}{1+x_0} \\ 0 & \frac{kx_0}{1+x_0} - 1 \end{bmatrix}.$$

Con estas matrices entrariamos a aplicar el Lema 3.5 en los correspondientes sistemas linealizados en E_0 y E_1 . $J(E_0)$ tiene por valores propios $\lambda_1 = r > 0$ y $\lambda_2 = -1$. Entonces,

$$m(\alpha) = \frac{\alpha\pi}{2} - \min\{0, \pi\} = \frac{\alpha\pi}{2} > 0, \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Del Lema 3.5 se concluye que el origen es inestable. Ahora, $J(E_1)$ tiene como valores propios $\lambda_1 = -r_0 < 0$ y $\lambda_2 = \frac{kx_0}{1+x_0} - 1$. En este caso, hay una dependencia de los valores del parámetro. Tenemos entonces que si $\frac{kx_0}{1+x_0} < 1$,

$$m(\alpha) = \frac{\alpha\pi}{2} - \min\{\pi, \pi\} = \frac{\pi(\alpha-2)}{2} < 0, \quad \forall \alpha \in (0, 1),$$

lo que garantiza que E_1 es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable. Por otro lado, si $\frac{kx_0}{1+x_0} > 1$ se tiene la misma situación que en el origen, así que el punto sería inestable. En este último caso se observa la dependencia de la estabilidad de los parámetros del sistema.

Consideremos ahora la presencia de un punto de coexistencia $E^* = (x^*, y^*)$. Recordemos el sistema de ecuaciones (3.18) de las cuales es solución E^* , de donde se puede deducir que

$$\frac{r_0}{x_0}(x_0 - x^*) = \frac{ky^*}{1+x^*}, \quad \frac{kx^*}{1+x^*} - 1 = k_f y^*.$$

Teniendo en cuenta lo anterior a la hora de reemplazar en la matriz jacobiana, se obtiene que

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\frac{r_0 x^*}{x_0} + \frac{kx^* y^*}{(1+x^*)^2} & -\frac{kx^*}{1+x^*} \\ \frac{ky^*}{(1+x^*)^2} & -k_f y^* \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica para $J(E^*)$ se puede escribir como $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta$, con

$$\tau = -\frac{r_0 x^*}{x_0} + \frac{kx^* y^*}{(1+x^*)^2} - k_f y^*, \quad \Delta = \frac{r_0 k_f x^* y^*}{x_0} - \frac{k k_f x^* (y^*)^2}{(1+x^*)^2} + \frac{k^2 x^* y^*}{(1+x^*)^3}. \quad (3.20)$$

A diferencia de los primeros dos puntos de equilibrio en los que se podía caracterizar directamente la estabilidad, aquí se tiene un rango de posibilidades dependiendo de los valores que tomen los parámetros del modelo. La aplicación del Lema 3.5 o del Corolario 2.16 debe realizarse una vez se determinen los valores de τ y Δ .

Ejemplo 3.6. Consideremos el sistema ordinario asociado al sistema (3.17) tomando como parámetro de bifurcación el parámetro k y estableciendo los valores $r_0 = 0.27$, $x_0 = 8$ y $k_f = 0.1$. Al variar k se observa un cambio en la dinámica del sistema como se puede ver en la Figura 3.9. Para $k < 1.125$ el punto libre de predadores es asintóticamente estable mientras que si $k > 1.125$ este punto pasa a ser inestable y aparece el punto de coexistencia E^* que es asintóticamente estable. En Ghosh et al. (2020) se muestra que existe un valor k_c tal que para $k < k_c$ la matriz de linealización en E^* posee valores propios reales mientras que para $k > k_c$ los valores pasan a ser complejos, lo que se observa en la Figura 3.9 al notar el punto de espiral estable que surge. Por último, va a existir un punto k_H en el cual E^* se desestabiliza y aparece un ciclo límite estable.

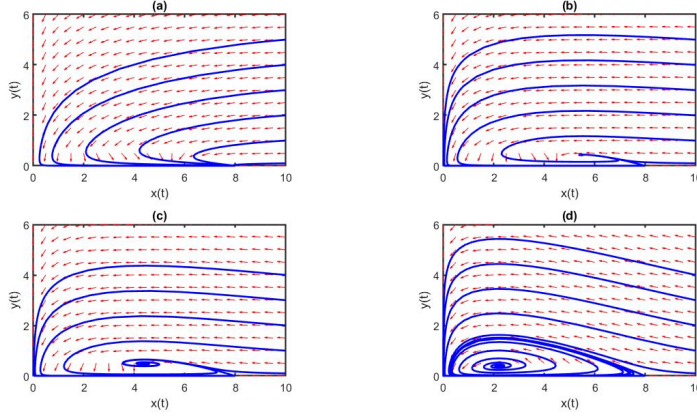


Figura 3.9: Plano de fase para el sistema (3.16) con $r_0 = 0.27$, $x_0 = 8$, $k_f = 0.1$ variando el valor de k : (a) $k = 1.1$ (b) $k = 1.3$ (c) $k = 1.35$ (d) $k = 1.6$.

Del Ejemplo 3.6 se tiene que el sistema ordinario de Bazykin sufre una bifurcación de Hopf al variar el parámetro k . Ahora, vamos a ver como se produce dicha bifurcación en el sistema fraccionario. Para ello, debemos establecer las condiciones de la existencia de una bifurcación de Hopf para sistemas fraccionarios, para lo cual nos basaremos en el trabajo de Deshpande et al. (2017).

Teniendo en cuenta la Definición 1.21, podemos considerar un sistema de ecuaciones fraccionarias dependiente de un parámetro

$${}^C D_0^\alpha x = f_\mu(x), \quad x(0) \in \mathbb{R}^n, \quad (3.21)$$

con $\alpha \in (0, 1]$. Sean $\bar{x}(\mu)$ un punto de equilibrio y $\lambda_1(\mu), \dots, \lambda_n(\mu)$ los valores propios de la matriz $J_{f_\mu}(\bar{x})$ con al menos un par de ellos valores complejos conjugados, supongamos que son $\lambda_1(\mu)$ y $\lambda_2(\mu)$. El sistema (3.21) sufre una bifurcación de Hopf si existe un parámetro $\mu = \mu_h$ tal que

1. $\lambda_1(\mu_h)$ y $\lambda_2(\mu_h)$ satisfacen $|\arg(\lambda_j)| = \frac{\alpha\pi}{2}$, con $j = 1, 2$,
2. $|\arg(\lambda_j)| \neq \frac{\alpha\pi}{2}$, con $j = 3, \dots, n$,
3. $\frac{\partial}{\partial \mu} |\arg(\lambda_j(\mu))| \Big|_{\mu=\mu_h} \neq 0$, $j = 1, 2$.

Las condiciones 1. y 2. son llamadas condiciones de singularidad mientras que la condición 3. recibe el nombre de condición de transversalidad. En este caso, nos centraremos en el análisis del orden α como parámetro de bifurcación, para lo cual se utiliza la función $m(\alpha)$ definida en (3.19).

En Ghosh et al. (2020) se analiza la bifurcación del sistema (3.17) en el punto de coexistencia. Supongamos que el punto de coexistencia es inestable de tal manera que la matriz del sistema linealizado tenga valores propios complejos. Bajo esta consideración, se tiene que el módulo del argumento de los valores propios cae en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, por lo que aplicando el Lema 3.5, se tiene que

$$m(\alpha) = \frac{\alpha\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{4\Delta - \tau^2}}{\tau}\right) > 0,$$

con $\tau > 0$ y $\tau^2 < 4\Delta$, para algún $\alpha \in (0, 1]$. En esta caso, es posible hallar un α_h de tal manera que se cumplan las condiciones de singularidad, lo que corresponde a $m(\alpha_h) = 0$. Ghosh et al. (2020) muestran que al pasar α por α_h , el punto de coexistencia sufre una bifurcación de Hopf, lo que se sintetiza en el siguiente teorema:

Teorema 3.7. Supongamos que un equilibrio de coexistencia $E^* = (x^*, y^*)^T$ del sistema (3.17) es inestable con $\tau > 0$ y $\tau^2 < 4\Delta$. E^* sufre una bifurcación de Hopf en $\alpha = \alpha_h$ donde

$$\alpha_h = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\sqrt{4\Delta - \tau^2}}{\tau} \right).$$

Demostración. Si $\tau > 0$ y $\tau^2 < 4\Delta$, la matriz $J(E^*)$ tiene valores propios complejos conjugados con parte real positiva, con lo cual la estabilidad del sistema depende del parámetro α . Como E^* es inestable, se tiene que el orden α satisface

$$0 < |\arg(\lambda_j)| = \arctan \left(\frac{\sqrt{4\Delta - \tau^2}}{\tau} \right) < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad j = 1, 2,$$

para algún $\alpha \in (0, 1]$. De lo anterior, se sigue que

$$m(\alpha) = \frac{\alpha\pi}{2} - \min_{1 \leq j \leq 2} |\arg(\lambda_j)| > 0.$$

Ahora bien, podemos escoger α tal que $m(\alpha) = 0$, valor que denotaremos como α_h , lo que garantiza las condiciones de singularidad de la bifurcación de Hopf. Con base en lo anterior, se obtiene

$$\alpha_h = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\sqrt{4\Delta - \tau^2}}{\tau} \right).$$

Por último, notemos que

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} m(\alpha) \right|_{\alpha=\alpha_h} = \frac{\pi}{2} \neq 0,$$

lo que asegura el cumplimiento de la condición de transversalidad. Al satisfacerse las condiciones de singularidad y transversalidad se puede establecer que el punto de coexistencia del sistema (3.17) sufre una bifurcación de Hopf en $\alpha = \alpha_h$. ■

En este caso, la demostración de la existencia de una bifurcación de Hopf se simplifica debido a que los valores propios de la linealización no dependen del parámetro α , pero el cambio del orden si cambia la estabilidad asegurando las condiciones necesarias para que se produzca dicha bifurcación. Vamos a ilustrar esto mediante un ejemplo.

Ejemplo 3.8. Consideremos el sistema (3.17) con parámetros $r_0 = 0.27$, $x_0 = 8$, $k_f = 0.1$ y $k = 1.6$. Con estos valores, se obtiene que $\tau = 0.0356$ y $\Delta = 0.0732$, por lo que los valores propios asociados al punto de coexistencia son $\lambda_{1,2} = 0.0178 \pm 0.2699i$. Con base en lo anterior, se tiene que para $\alpha = 1$ el punto de coexistencia es inestable, lo cual se observa en la parte (d) de la Figura 3.9. De acuerdo al Teorema 3.7, en el valor umbral $\alpha_h = 0.9580$ el sistema sufre una bifurcación de Hopf, lo que se comprueba en la Figura 3.10 tomando $\alpha = 0.9$ y $\alpha = 0.96$. Para valores $\alpha < \alpha_h$, el punto de coexistencia es asintóticamente estable mientras que para $\alpha > \alpha_h$ este punto de equilibrio se desestabiliza y aparece una curva cerrada alrededor de la cual se acumulan las trayectorias del sistema.

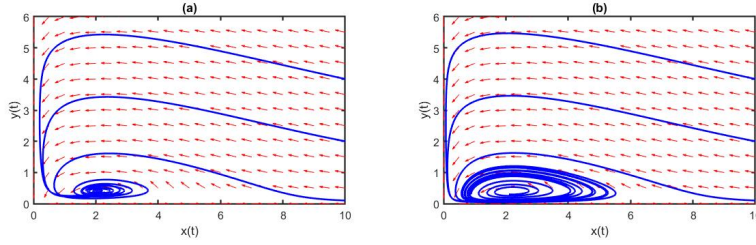


Figura 3.10: Plano de fase del sistema (3.17) con $r_0 = 0.27$, $x_0 = 8$, $k_f = 0.1$, $k = 1.6$ y (a) $\alpha = 0.9$, (b) $\alpha = 0.96$.

Para terminar esta sección, consideraremos un sistema fraccionario que considera una población de presas y dos predadores el cual es estudiado por Tian et al. (2014). Este sistema está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha x_1(t) = x_1(t)(b_1 - a_{11}x_1(t) - a_{12}x_2(t) - a_{13}x_3(t)) \\ {}^C D_0^\alpha x_2(t) = x_2(t)(-b_2 + a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t)) \\ {}^C D_0^\alpha x_3(t) = x_3(t)(-b_3 + a_{31}x_1(t) - a_{33}x_3(t)) \end{cases} \quad (3.22)$$

con $\alpha \in (0, 1)$, $a_{11} < 0$ y el resto de constantes son positivas. En el instante t , $x_1(t)$ representa la densidad poblacional de las presas mientras que $x_2(t)$ y $x_3(t)$ corresponden a las densidades de dos especies predatoras, sistema (3.22) que corresponde a un modelo predador-presa de Lotka-Volterra. Este sistema exhibe diferentes soluciones de equilibrio, pero solo nos preocuparemos por la solución asociada a la coexistencia entre especies. Para ello, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 - a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 - a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (3.23)$$

Para resolver este sistema, utilizaremos la regla de Cramer. Si

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & -a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces tenemos un punto de equilibrio de la forma $E^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^T = \left(\frac{d_{11}}{d}, \frac{d_{22}}{d}, \frac{d_{33}}{d}\right)^T$ con

$$d_{11} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & -a_{22} & 0 \\ b_3 & 0 & -a_{33} \end{vmatrix}, \quad d_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & 0 \\ a_{31} & b_3 & -a_{33} \end{vmatrix}, \quad d_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & -a_{22} & b_2 \\ a_{31} & 0 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Para el sistema (3.22), la matriz jacobiana asociada es

$$J \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - 2a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 & -a_{12}x_1 & -a_{13}x_1 \\ a_{21}x_2 & -b_2 + a_{21}x_1 - 2a_{22}x_2 & 0 \\ a_{31}x_3 & 0 & -b_3 + a_{31}x_1 - 2a_{33}x_3 \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que E^* es solución del sistema (3.23), la evaluación de la matriz jacobiana sobre este punto crítico nos conduce a

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1^* & -a_{12}x_1^* & -a_{13}x_1^* \\ a_{21}x_2^* & -a_{22}x_2^* & 0 \\ a_{31}x_3^* & 0 & -a_{33}x_3^* \end{bmatrix}.$$

En aras de obtener un sistema más simple para la manipulación algebraica, Tian et al. (2014) imponen las siguientes condiciones sobre los parámetros del sistema:

$$b_2 = b_3, \quad a_{22} = a_{33}, \quad a_{21} = a_{31} = -a_{11}. \quad (3.24)$$

Resultado de estas condiciones, el polinomio característico de la matriz $J(E^*)$ se puede escribir como

$$(\lambda - b)(\lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - c), \quad (3.25)$$

donde $a = -a_{11}x_1^*$, $b = -a_{22}x_2^* = -a_{33}x_3^*$, $c = -a_{12}a_{21}x_1^*x_2^* - a_{13}a_{31}x_1^*x_3^*$. Del primer factor de dicho polinomio se puede decir que $\lambda_1 = b$, valor que es negativo debido a las condiciones impuestas sobre las constantes del modelo. La estabilidad de esta solución estará dada por las soluciones del factor cuadrático presente en la ecuación (3.25), correspondientes a los valores propios λ_2 y λ_3 . Siguiendo un análisis similar al expuesto en el Teorema 2.15, se puede concluir que para obtener estabilidad asintótica local de E^* se deben satisfacer las siguientes condiciones:

1. $b < 0$,
2. $ab - c > 0$,
3. $|\arg(\lambda_j)| = \arccos\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab-c}}\right) > \alpha\frac{\pi}{2}$, para $j = 2, 3$.

Un análisis más detallado de la estabilidad lleva a Tian et al. (2014) a la siguiente proposición:

Proposición 3.9. Con respecto al sistema (3.22), si $b < 0$ y $ab - c > 0$, se tienen las siguientes afirmaciones:

- (a) Si $a+b \leq 0$, el punto de equilibrio E^* es localmente asintóticamente estable para todo $\alpha \in (0, 1)$.
- (b) Si $0 < a + b < 2\sqrt{ab - c}$, E^* es localmente asintóticamente estable si y sólo si $\alpha \in (0, \alpha^*)$, donde

$$\alpha^* = \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab-c}}\right).$$

- (c) Si $a + b \geq 2\sqrt{ab - c}$, E^* es inestable para todo $\alpha \in (0, 1)$.

Demostración. (a) Como $ab - c > 0$, las raíces de $\lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - c$ son reales del mismo signo o números complejos. Si son reales, como $a + b \leq 0$ se tiene que ambas son negativas, entonces

$$\arg(\lambda_{2,3}) = \pi > \alpha \frac{\pi}{2},$$

para todo $\alpha \in (0, 1)$. Si las raíces son complejas, entonces la parte real tiene el mismo signo de $a + b$, con lo cual

$$|\arg(\lambda_{2,3})| \geq \frac{\pi}{2} > \alpha \frac{\pi}{2},$$

para todo $\alpha \in (0, 1)$. Así, E^* es localmente asintóticamente estable para $\alpha \in (0, 1)$.

(b) Si $0 < a + b < 2\sqrt{ab - c}$, los valores propios $\lambda_{2,3}$ son complejos conjugados con parte real no nula, así que se desprende del Teorema de Matignon que el punto de equilibrio es localmente asintóticamente estable si

$$|\arg(\lambda_{2,3})| = \arccos\left(\frac{a + b}{2\sqrt{ab - c}}\right) > \alpha \frac{\pi}{2},$$

es decir, si

$$0 < \alpha < \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{a + b}{2\sqrt{ab - c}}\right).$$

(c) Si $a + b \geq 2\sqrt{ab - c}$, los valores propios $\lambda_{2,3}$ son reales positivos, con lo cual

$$\arg(\lambda_{2,3}) = 0 < \alpha \frac{\pi}{2},$$

para todo $\alpha \in (0, 1)$, por lo que se desprende del Teorema de Matignon que el punto de equilibrio es inestable. ■

El caso (b) en el Teorema anterior es de especial importancia dado que se espera que se produzca una bifurcación de Hopf cuando α toma el valor α^* . Si se toma α^* como orden del sistema (3.22), se obtienen las condiciones de singularidad de la bifurcación de Hopf. Además, al variar el parámetro α se produce un cambio de estabilidad, lo que sería consistente con la condición de transversalidad.

Un último teorema es probado por Tian et al. (2014) especificando más condiciones sobre los parámetros del sistema antes de hacer implementaciones numéricas.

Teorema 3.10. Con respecto al sistema (3.22), si

(i) $b_2 = b_3, a_{22} = a_{33}, a_{21} = a_{31} = -a_{11};$

(ii) $a_{12} + a_{13} - a_{22} > 0$

entonces E^* es localmente asintóticamente estable si y sólo si $\alpha \in (0, \alpha^*)$, con α^* definido de la misma manera que se enuncia en la Proposición 3.9.

En la demostración de este Teorema la condiciones (i) y (ii) garantizan la condición (b) de la Proposición 3.9, así como que E^* se encuentre en el primer octante. Vamos a representar esto mediante el siguiente ejemplo.

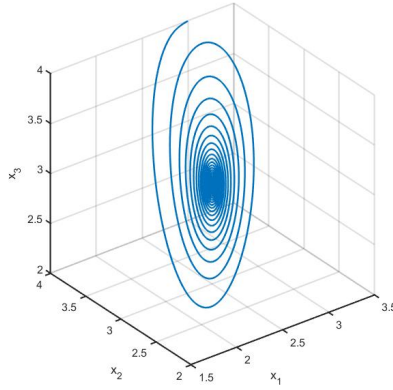


Figura 3.11: Trayectoria del sistema (3.22) con valor inicial y parámetros dados en el Ejemplo 3.11 tomando $\alpha = 0.78$.

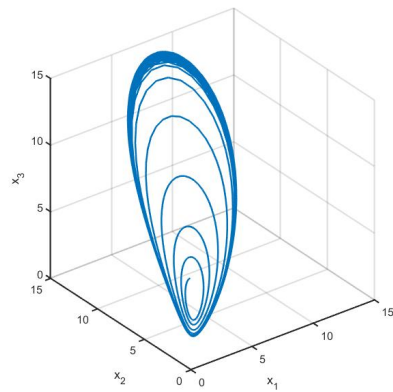


Figura 3.12: Trayectoria del sistema (3.22) con valor inicial y parámetros dados en el Ejemplo 3.11 tomando $\alpha = 0.84$.

Ejemplo 3.11. Para el sistema (3.22) se bosquejan las soluciones con valor inicial $(3, 4, 4)^T$ y tomando los valores de parámetro

$$b_1 = a_{12} = a_{13} = a_{22} = a_{33} = 1, \quad b_2 = b_3 = a_{21} = a_{31} = 2, \quad a_{11} = -2.$$

Con esta selección de valores, se tiene que el punto de coexistencia es $E^* = (2.5, 3, 3)^T$ y el orden crítico es $\alpha^* = 0.8337$. Para comparar el comportamiento se analiza la trayectoria calculada con valor inicial previamente mencionado tomando dos valores diferentes de α . En la Figura 3.11, se observa el sistema con $\alpha = 0.78 < \alpha^*$, valor con el cual la Proposición 3.9 asegura que el equilibrio es localmente asintóticamente estable. En la Figura 3.12 se observa el sistema descrito con $\alpha = 0.84$, allí se ve que el punto de coexistencia pasa a ser inestable y aparece una curva cerrada alrededor de la cual se acumula la trayectoria calculada, resultado que coincide con la suposición realizada sobre la bifurcación de Hopf. Para confirmar la acumulación en la curva cerrada, se construye la Figura 3.13 que muestra el comportamiento temporal de las poblaciones consideradas, correspondiente a un proceso cuasi periódico en todas las poblaciones.

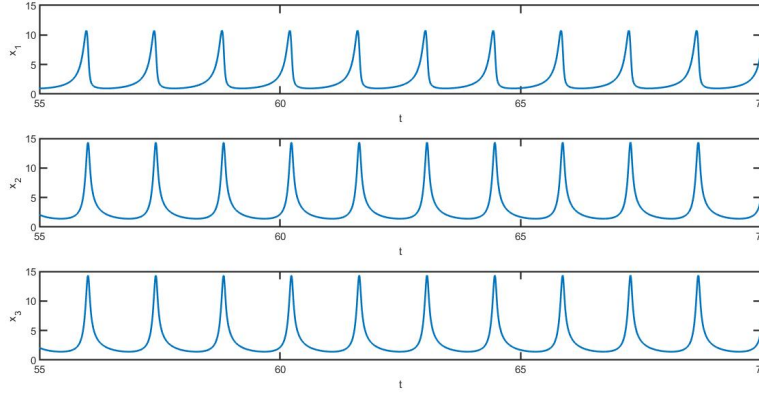


Figura 3.13: Comportamiento temporal de las poblaciones consideradas en el sistema (3.22) con valor inicial y parámetros dados en el Ejemplo 3.11 tomando $\alpha = 0.84$.

3.3.2. Modelos de competencia entre especies

A diferencia de los modelos predador-presa, en los modelos de competencias no hay una jerarquía como la que corresponde a las redes tróficas, lo que hace que el sistema sea menos complejo Müller y Kuttler (2015). El análisis de estos sistemas se centra en la determinación de estados estacionarios, acompañado del estudio de la persistencia de las especies (Müller y Kuttler, 2015). Para este caso, trabajaremos en el modelo de competencia establecido por Volterra.

De acuerdo con Müller y Kuttler (2015), Volterra propuso un modelo genérico de competencia entre dos especies suponiendo dos propiedades básicas:

- Dos especies compiten por la misma fuente de alimento que es limitada, por ejemplo puede haber una lucha por el dominio de un territorio para acceder a los recursos.
- Cada especie crece siguiendo el modelo de Verlhust, es decir, un modelo logístico. Además, cada especie participa en la capacidad de carga de la otra especie.

Con base en lo anterior, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dx_1(\tau)}{d\tau} = r_1 x_1(\tau) \left(1 - \frac{x_1(\tau) + b_1 x_2(\tau)}{K_1} \right) \\ \frac{dx_2(\tau)}{d\tau} = r_2 x_2(\tau) \left(1 - \frac{x_2(\tau) + b_2 x_1(\tau)}{K_2} \right) \end{cases} \quad (3.26)$$

donde se tienen las siguientes variables

- $x_i(\tau)$ corresponde a la densidad de la especie i en el instante τ ,
- K_i denota la capacidad de carga de la especie i ,
- b_i indica como participa la otra especie en la disponibilidad de los recursos para la especie i , también llamado el efecto competitivo. Si las dos especies tienen efectos similares sobre la otra, se suele tomar $b_1 = b_2 = 1$,
- r_i es la tasa de crecimiento de la especie i .

Para simplificar el modelo se hará el siguiente re escalamiento:

$$u_1 = \frac{x_1}{K_1}, \quad u_2 = \frac{x_2}{K_2}, \quad t = r_1\tau, \quad \rho = \frac{r_1}{r_2}, \quad a_1 = b_1 \frac{K_2}{K_1}, \quad a_2 = b_2 \frac{K_1}{K_2}.$$

Haciendo las sustituciones apropiadas, se llega al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{du_1(t)}{dt} = u_1(t)(1 - u_1(t) - a_1u_2(t)) \\ \frac{du_2(t)}{dt} = \rho u_2(t)(1 - u_2(t) - a_2u_1(t)). \end{cases} \quad (3.27)$$

Con base en este sistema, se formula el correspondiente sistema fraccionario.

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha u_1 = u_1(1 - u_1 - a_1u_2) \\ {}^C D_0^\alpha u_2 = \rho u_2(1 - u_2 - a_2u_1). \end{cases} \quad (3.28)$$

El sistema (3.28) al menos tiene tres puntos de equilibrio: $E_0 = (0, 0)^T$, $E_1 = (1, 0)^T$ y $E_2 = (0, 1)^T$. Para analizar la estabilidad local debemos determinar la matriz jacobiana asociada al sistema, la cual corresponde a

$$J \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2u_1 - a_1u_2 & -a_1u_1 \\ -\rho a_2u_2 & \rho(1 - 2u_2 - a_2u_1) \end{bmatrix}.$$

Evaluando la matriz jacobiana en cada uno de los equilibrios que tenemos hasta el momento, obtenemos

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}, \quad J(E_1) = \begin{bmatrix} -1 & -a_1 \\ 0 & \rho(1 - a_2) \end{bmatrix}, \quad J(E_2) = \begin{bmatrix} 1 - a_1 & 0 \\ -\rho a_2 & -\rho \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de $J(E_0)$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \rho$. En este caso, tenemos

$$\arg(\lambda_j) = 0 < \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \forall \alpha \in (0, 1), \quad i \in \{1, 2\}.$$

El Teorema de Matignon implica que el origen del sistema es inestable para todo orden $\alpha \in (0, 1)$. Para los equilibrios axiales, la estabilidad dependerá de los valores de a_1 y a_2 . En el caso de E_1 , la matriz de linealización asociada tiene por valores propios $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = \rho(1 - a_2)$, para que haya estabilidad debe satisfacerse que $a_2 > 1$. Ahora, al considerar E_2 , la matriz $J(E_2)$ tiene valores propios $\lambda_1 = -\rho$ y $\lambda_2 = 1 - a_1$, para que haya estabilidad debe satisfacerse que $a_1 > 1$. Con base en esto, se tienen los siguientes casos:

- Si $a_1 < 1 < a_2$, E_1 es localmente asintóticamente estable y E_2 es inestable.
- Si $a_2 < 1 < a_1$, E_1 es inestable y E_2 es localmente asintóticamente estable.
- Si $a_1 < 1$ y $a_2 < 1$, los puntos de equilibrio axial son inestables.
- Si $a_1 > 1$ y $a_2 > 1$, los puntos de equilibrio axial son localmente asintóticamente estables.

Ejemplo 3.12. Construyamos los diagramas de fase del sistema (3.28) con $\alpha = 0.9$ y $\rho = 1$. Para empezar, se asignan los valores $a_1 = 0.8$ y $a_2 = 1.2$, así que $a_1 < 1 < a_2$, por lo que E_1 es localmente asintóticamente estable mientras que E_2 es inestable, comportamiento que se observa en la Figura 3.14.

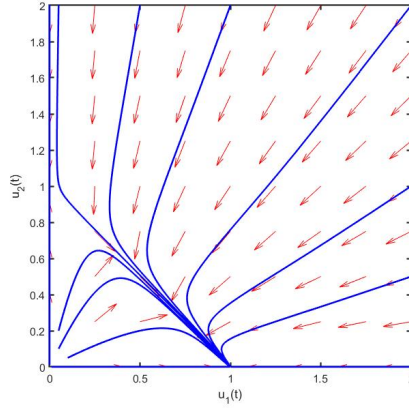


Figura 3.14: Plano de fase del sistema (3.28) con $\alpha = 0.9$, $\rho = 1$, $a_1 = 0.8$ y $a_2 = 1.2$.

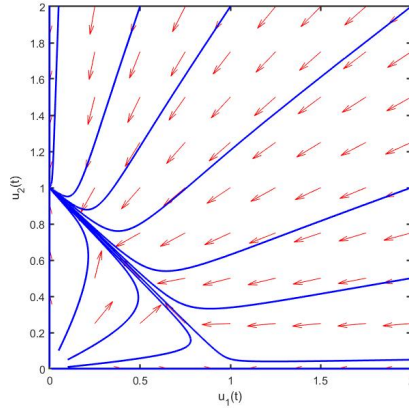


Figura 3.15: Plano de fase del sistema (3.28) con $\alpha = 0.9$, $\rho = 1$, $a_1 = 1.2$ y $a_2 = 0.8$.

Ahora, al asignar los valores $a_1 = 1.2$ y $a_2 = 0.8$, se observa que $a_2 < 1 < a_1$, por lo que E_1 es inestable mientras que E_2 es localmente asintóticamente estable, información que corresponde con el plano de fase presente en la Figura 3.15.

En el ejemplo anterior vimos configuraciones del sistema (3.28) en las que solo estaban presente los tres puntos de equilibrio que se han analizado. Sin embargo, cuando se tiene que $a_1, a_2 \in (0, 1)$ o $a_1, a_2 > 1$ aparece un punto de equilibrio de coexistencia

$$E_3 = \left(\frac{1 - a_1}{1 - a_1 a_2}, \frac{1 - a_2}{1 - a_1 a_2} \right).$$

Para determinar el comportamiento local del punto de coexistencia, reemplazamos en la matriz jacobiana, de donde se obtiene

$$J(E_3) = \frac{1}{1 - a_1 a_2} \begin{bmatrix} -(1 - a_1) & -a_1(1 - a_1) \\ -\rho a_2(1 - a_2) & -\rho(1 - a_2) \end{bmatrix}.$$

Para estudiar la estabilidad del sistema, analizaremos la traza y el determinante de la matriz $J(E_3)$,

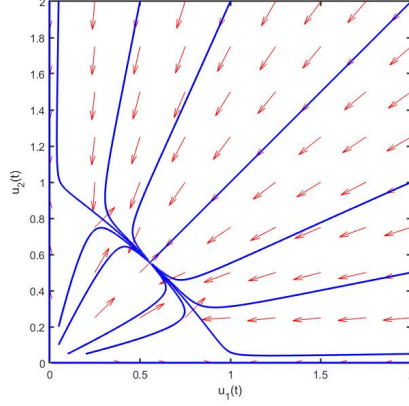


Figura 3.16: Plano de fase del sistema (3.28) con $\alpha = 0.9$, $\rho = 1$ y $a_1 = a_2 = 0.8$.

$$\text{tr}(J(E_3)) = -\frac{(1 - a_1) + \rho(1 - a_2)}{1 - a_1 a_2}, \quad \det(J(E_3)) = \frac{\rho(1 - a_1)(1 - a_2)}{1 - a_1 a_2}.$$

Consideremos las posibilidades que tenemos para los valores a_1 y a_2 . Si $a_1, a_2 < 1$, se tiene que $1 - a_1 a_2 > 0$, por lo que $\det(J(E_3)) > 0$ y $\text{tr}(J(E_3)) < 0$, lo que significa que los valores propios de $J(E_3)$ son reales negativos, así que

$$\arg(\lambda_j) = \pi > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \forall \alpha \in (0, 1), j \in \{1, 2\}.$$

Del Teorema de Matignon se sigue que para la restricción de los parámetros especificada el punto de coexistencia es localmente asintóticamente estable. Por otro lado, si $a_1, a_2 > 1$, $\det(J(E_3)) < 0$, así que $J(E_3)$ tiene dos valores propios reales con signo diferente, por lo que el punto de equilibrio es inestable.

Ilustremos la situación del punto de equilibrio con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.13. Construyamos el plano de fase del sistema (3.28) con $\alpha = 0.9$ y $\rho = 1$ en los casos correspondientes a la presencia del punto de coexistencia. Si se toma $a_1 = a_2 = 0.8$, el punto de equilibrio de coexistencia corresponde a $E_3 = (\frac{5}{9}, \frac{5}{9})$ y, por el análisis previo, sería localmente asintóticamente estable. En la Figura 3.16 se observa que bajo estas condiciones los equilibrios axiales son inestables y el punto de coexistencia es un atractor.

Además, si tomamos $a_1 = a_2 = 1.2$, el punto de coexistencia corresponde a $E_3 = (\frac{5}{11}, \frac{5}{11})$ el cual es inestable, mientras que los equilibrios axiales son localmente asintóticamente estables. A diferencia del caso previo, se alcanza el punto de coexistencia dependiendo de las condiciones iniciales del sistema, una pequeña perturbación en las condiciones iniciales hará que una de las poblaciones se extinga. La dinámica del sistema bajo esta selección de parámetros se observa en la Figura 3.17.

Para finalizar, analicemos el único caso para el cual se tiene coexistencia de las especies, es decir, cuando

$$a_1 = b_1 \frac{K_2}{K_1} < 1, \quad a_2 = b_2 \frac{K_1}{K_2} < 1.$$

De acuerdo a Müller y Kuttler (2015), la anterior relación implica que los valores b_1 y b_2 no deben tener una magnitud apreciable lo que conlleva a pensar en dos poblaciones que subsisten de

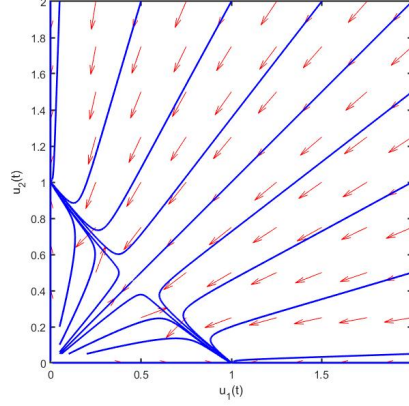


Figura 3.17: Plano de fase del sistema (3.28) con $\alpha = 0.9$, $\rho = 1$ y $a_1 = a_2 = 1.2$.

diferentes recursos y tienen una competencia débil. En los otros casos la competencia tiene mayor magnitud, lo que conlleva a que solo sobreviva una de las especies, condición conocida como el principio de exclusión de Volterra (Müller y Kuttler, 2015).

En este modelo no se observaron diferencias apreciables con el modelo ordinario lo que se debe a la naturaleza de los puntos de equilibrio. Sintetizando los resultados de la linealización alrededor de cada uno de los puntos, se observa que en ninguno se presentaron valores propios complejos, valores que llevan a que se presenten fenómenos asociados con comportamientos periódicos como la bifurcación de Hopf. Como se mencionó al principio de la sección, los puntos de equilibrio para el modelo de competencia de Volterra brindan la mayor información sobre el comportamiento cualitativo del sistema independiente del orden del sistema de ecuaciones diferenciales de Caputo.

3.4. Modelos de epidemias

3.4.1. Modelo SIS

Vamos a trabajar el modelo SIS presentado por Hassouna et al. (2018). En este modelo, se considera una población N constante en el tiempo que ha sido dividido en dos compartimentos: en el instante t , $S(t)$ corresponde al número de individuos susceptibles mientras que $I(t)$ corresponde al número de infectados. Por lo anterior, se tiene que $S(t) + I(t) = N$. Este modelo se puede aplicar para enfermedades en las cuales los individuos no adquieren inmunidad.

Propiamente, el sistema de ecuaciones asociado al modelo SIS corresponde a

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta \frac{SI}{N} + (e + \gamma)I, & S(0) = N - I_0 \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - (e + \gamma)I, & I(0) = I_0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Aquí, e es la tasa de mortalidad de los infectados, γ es la tasa de curación de los infectados y β es la tasa de contacto. Teniendo en cuenta que $S(t) + I(t) = N$, la segunda ecuación del sistema (3.29) se puede reducir a

$$\frac{dI(t)}{dt} = cI - \frac{\beta}{N}I^2. \quad (3.30)$$

con $c = \beta - (e + \gamma)$. A partir de la ecuación (3.30) se puede establecer el comportamiento asintótico de la población infectada.

- Si $c \leq 0$, entonces $\dot{I} < 0$, es decir que para cualquier condición inicial $I(0) > 0$, el número de infectados se aproximará a cero a medida que el tiempo pase.
- Si $c > 0$, la ecuación diferencial tiene una solución de equilibrio estable: $I(t) \equiv \frac{c}{\beta}N$, entonces para cualquier valor inicial, la población infectada se acercará a este valor umbral a medida que el tiempo aumenta, es decir, la infección permanece en la población.

De acuerdo al análisis anterior, para erradicar la enfermedad de una comunidad, es necesario que la cantidad c tome valores negativos. Como una primera medida, se pueden tomar acciones para que el valor β disminuya, es decir, que la tasa de contacto se reduzca. En una comunidad donde este modelo represente bien la enfermedad, las cuarentenas y restricciones de movilidad de las personas serían buenas medidas para buscar la reducción de la enfermedad.

Ahora, planteemos el sistema de orden fraccionario.

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha S(t) = -\beta \frac{SI}{N} + (e + \gamma)I, & S(0) = N - I_0 \\ {}^C D_0^\alpha I(t) = \beta \frac{SI}{N} - (e + \gamma)I, & I(0) = I_0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Por la linealidad del operador de Caputo y el hecho de que anule las funciones constantes, se puede llegar a que

$${}^C D_0^\alpha I(t) = cI - \frac{\beta}{N}I^2,$$

razón por la cual se espera que el comportamiento cualitativo de las soluciones calculadas no difiera mucho de las correspondientes para el sistema ordinario. Para ilustrar esta situación veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.14. Para el sistema (3.31), consideremos una población con $N = 1000$ individuos. Tomemos una población infectada inicial de $I(0) = 30$ individuos. Analicemos el comportamiento de la población infectada para órdenes α 0.9, 0.95 y 0.99.

Inicialmente, tomemos valores $c = -0.01$ y $\beta = 0.29$. Como se mencionó previamente, al tomar c valores negativos, la población infectada $I(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, además de que dicha población siempre se está reduciendo en el tiempo. Para el sistema fraccionario, los resultados numéricos se muestran en la Figura 3.18. Al implementar el sistema fraccionario se observa que al tomar un orden de derivada menor, se requiere de un tiempo mayor para que la población infectada se reduzca hasta un valor esperado, o sea que el tiempo de erradicación de la infección aumenta. Según Hassouna et al. (2018), este hecho se debe a la influencia de la memoria dentro del modelo fraccionario.

Si en el sistema (3.31) tomamos $c = 0.01$ y $\beta = 0.31$, con población y condición inicial como las mencionadas previamente, se obtiene el comportamiento para diferentes órdenes α en la Figura 3.19. Debido a que $c > 0$ se espera la presencia de una solución de equilibrio, en este caso sería $I(t) \equiv \frac{1000}{31} \approx 32.26$. Como la condición inicial está por debajo del valor de equilibrio, la solución asociada va a ser creciente. En la Figura 3.19 se observa que a medida que el orden de la derivada disminuye, la velocidad de crecimiento se reduce.

Para finalizar con este ejemplo, notemos que los datos suministrados pueden ser interpretados como un aumento de la tasa de contacto manteniendo las tasas de mortalidad y recuperación constantes. En el primer caso, $c < 0$ para la tasa de contacto dada, lo que permite que el impacto

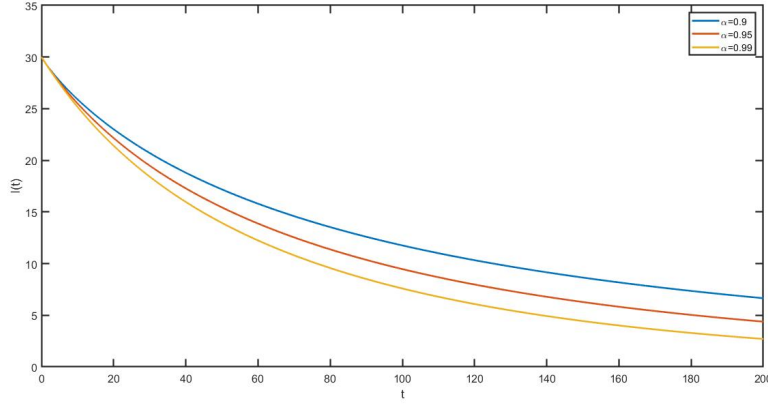


Figura 3.18: Población infectada para el sistema (3.31) con $N = 1000$, $I(0) = 30$, $c = -0.01$ y $\beta = 0.29$.

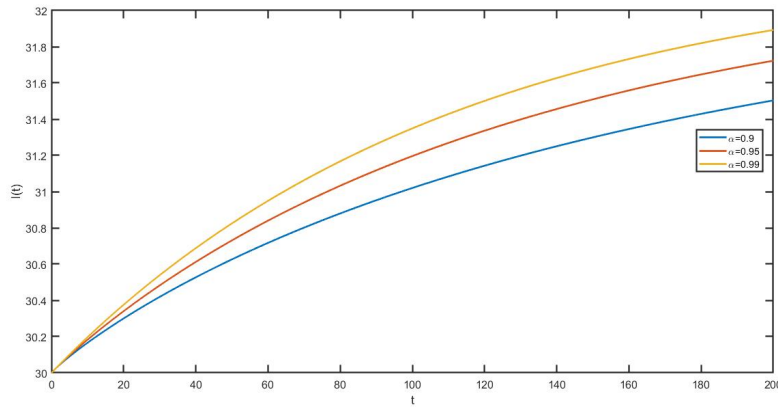


Figura 3.19: Población infectada para el sistema (3.31) con $N = 1000$, $I(0) = 30$, $c = 0.01$ y $\beta = 0.31$.

de la infección sobre la comunidad se reduzca. Sin embargo, en el segundo caso β aumenta, con lo cual c adquiere un valor positivo, haciendo que la infección persista.

3.4.2. Modelos SIR

Empezaremos por el modelo presentado por Kumar y Kumar (2014), el cual corresponde a un modelo SIR con tasa de vacunación constante. Para empezar, la población en el instante t , $N(t)$, se divide en tres compartimientos: individuos susceptibles ($S(t)$), infectados ($I(t)$) y recuperados ($R(t)$).

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha S(t) = \mu(1 - q)N - \beta \frac{SI}{N} - \mu S, \\ {}^C D_0^\alpha I(t) = \beta \frac{SI}{N} - (\gamma + \mu)I, \\ {}^C D_0^\alpha R(t) = \mu Nq + \gamma I - \mu R. \end{cases} \quad (3.32)$$

Kumar y Kumar (2014) establece que la construcción del modelo se hace con base en las siguientes suposiciones:

- La tasa de crecimiento del número de individuos susceptibles es proporcional al número total de individuos.
- La tasas de natalidad y mortalidad se suponen constantes e iguales a μ .
- Un individuo susceptible pasa a ser infectado después de la infección.
- Los individuos susceptibles pasan a ser infectados por contacto. La tasa de contacto se toma como la constante β . Los individuos infectados se recuperan a una tasa constante γ .
- q es la tasa de vacunación de la población susceptible.
- Se considera una tasa de incidencia estándar, $\beta \frac{SI}{N}$.

Introduzcamos el siguiente cambio de variables:

$$s = \frac{S}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad r = \frac{R}{N}.$$

Con base en las propiedades de la derivada de Caputo, se transforma el sistema (3.32) en

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha s(t) = \mu(1 - q) - \beta si - \mu s, \\ {}^C D_0^\alpha i(t) = \beta si - (\gamma + \mu)i, \\ {}^C D_0^\alpha r(t) = \mu q + \gamma i - \mu r. \end{cases} \quad (3.33)$$

El sistema (3.33) siempre exhibe dos puntos de equilibrio: el origen $E_0 = (0, 0, 0)^T$ y el punto libre de infección $E_1 = (1 - q, 0, q)^T$. Ahora, cuando $\beta(1 - q) - (\gamma + \mu) > 0$, el sistema tiene un tercer punto de equilibrio, $E^* = (s^*, i^*, r^*)^T$, donde

$$s^* = \frac{\gamma + \mu}{\beta}, \quad i^* = \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\beta(1 - q)}{\gamma + \mu} - 1 \right), \quad r^* = 1 - s^* - i^*.$$

En E^* aparece la cantidad

$$R_0 = \frac{\beta(1 - q)}{\gamma + \mu}.$$

Esta es llamada número básico de reproducción, el cual es definido como el número promedio de infecciones que son producidas cuando un individuo infectado es introducido a un grupo de individuos susceptibles (Kumar y Kumar, 2014). R_0 va a desempeñar un papel importante en la determinación de la estabilidad de los puntos de equilibrio en consideración. Analicemos la estabilidad local de los puntos de equilibrio E_1 y E^* , para ello, escribimos la matriz jacobiana asociada al sistema (3.33)

$$J \begin{pmatrix} s \\ i \\ r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta i - \mu & -\beta s & 0 \\ \beta i & \beta s - (\gamma + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Al evaluar en el punto de equilibrio libre de enfermedad (E_1), se tiene que

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta(1 - q) & 0 \\ 0 & \beta(1 - q) - (\gamma + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de $J(E_1)$ corresponde a

$$(\lambda + \mu)^2(\lambda - \beta(1 - q) + (\gamma + \mu)),$$

de donde se desprende que los valores propios de $J(E_1)$ son $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu$ y $\lambda_3 = \beta(1 - q) - (\gamma + \mu)$. Para λ_1 y λ_2 , se tiene que

$$\arg(\lambda_j) = \pi > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \forall \alpha \in (0, 1), j \in \{1, 2\}.$$

Para λ_3 se tienen dos posibilidades: si $\beta(1 - q) > (\gamma + \mu)$, $\arg(\lambda_3) = 0 < \alpha \frac{\pi}{2}$, así que E_1 es inestable; si $\beta(1 - q) < (\gamma + \mu)$, entonces $\arg(\lambda_3) = \pi > \alpha \frac{\pi}{2}$, haciendo que E_1 sea estable.

Ahora bien, las condiciones expresadas anteriormente se pueden escribir en términos del número básico de reproducción: $\beta(1 - q) > (\gamma + \mu)$ es equivalente a $R_0 > 1$ mientras que $\beta(1 - q) < (\gamma + \mu)$ es equivalente a $R_0 < 1$. Así, se puede afirmar que el punto libre de enfermedad es localmente asintóticamente estable si $R_0 < 1$ e inestable si $R_0 > 1$.

Para el punto E^* , se debe tener en cuenta que este existe si $R_0 > 1$. Bajo esta condición, analizamos la estabilidad local por medio de la linealización usando la matriz

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\mu R_0 & -(\gamma + \mu) & 0 \\ \mu(R_0 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de $J(E^*)$ se puede escribir como

$$(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu R_0 \lambda + \mu(R_0 - 1)),$$

de donde se desprende que los valores propios de $J(E^*)$ son $\lambda_1 = -\mu$ y los otros dos valores son las soluciones de $\lambda^2 + \mu R_0 \lambda + \mu(R_0 - 1)$. Como $\mu(R_0 - 1) > 0$ y $\mu R_0 > 0$, se sigue que los dos valores propios restantes son reales negativos, por lo que se cumple la siguiente relación:

$$\arg(\lambda_j) = \pi > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \forall \alpha \in (0, 1), j \in \{1, 2, 3\}.$$

Del Teorema de Matignon se sigue que E^* es localmente asintóticamente estable si $R_0 > 1$. Vamos a ilustrar esto mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.15. Consideremos el sistema (3.33) con condición inicial $(0.8, 0.2, 0)^T$ y valores de los parámetros $\beta = 0.8$, $\gamma = 0.03$ y $\mu = 0.4$. Analicemos la influencia de la vacunación en el sistema. Si tomamos $q = 0.9$, el número básico de reproducción es igual a 0.1860, así que el punto libre de enfermedad es asintóticamente estable. En la Figura 3.20 se observa la evolución temporal del sistema viendo claramente como la proporción de la población infectada tiende a cero, la población susceptible se reduce como efecto de la vacunación acercándose al 10% de la población y la población recuperada se acerca al 90%. También se observan diferentes órdenes α , las gráficas muestran que al aumentar el orden la población infectada y susceptible se reducen más rápido mientras que la población recuperada aumenta una mayor cantidad en menor cantidad de tiempo. Este comportamiento es consistente con el efecto de la memoria en el sistema.

Al variar la vacunación por $q = 0.3$, se obtiene que el número básico de reproducción es 1.3023, así que el punto libre de enfermedad es inestable mientras que E^* es asintóticamente estable. Con esta configuración de valores se tiene que $E^* = (0.5375, 0.1512, 0.3113)^T$. En la Figura 3.21 se observa la tendencia de las poblaciones acercándose a los valores correspondientes del punto de equilibrio. Para finalizar, al considerar $q = 0$, el número básico de reproducción es

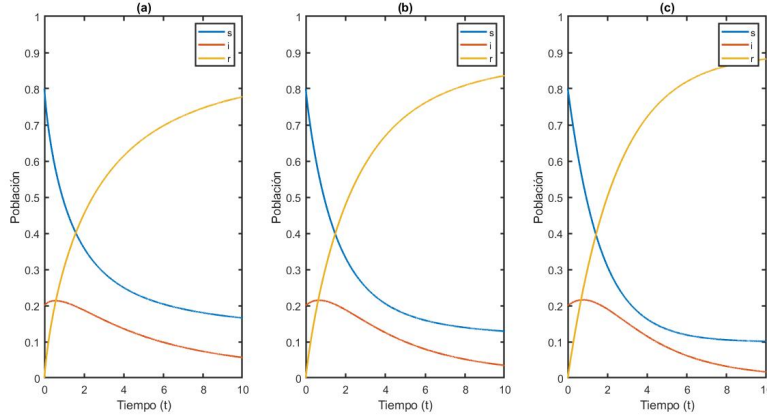


Figura 3.20: Evolución temporal del sistema (3.33) con los valores del Ejemplo 3.15 tomando $q = 0.9$ para (a) $\alpha = 0.8$, (b) $\alpha = 0.9$ y (c) $\alpha = 0.99$.

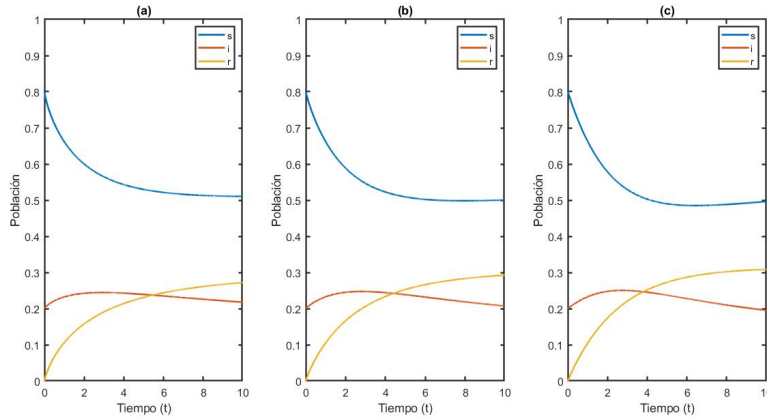


Figura 3.21: Evolución temporal del sistema (3.33) con los valores del Ejemplo 3.15 tomando $q = 0.3$ para (a) $\alpha = 0.8$, (b) $\alpha = 0.9$ y (c) $\alpha = 0.99$.

1.8605 y $E^* = (0.5375, 0.4301, 0.0323)$. En la Figura 3.22 se muestra el escenario en el que no hay vacunación, resaltando el crecimiento de la población infectada durante todo el tiempo reduciendo su crecimiento a medida que se acerca al valor límite.

De la expresión del número básico de reproducción y los ejemplos presentados se puede concluir que la inmunización apropiada de la población brinda la posibilidad de reducir la cantidad de infectados en el tiempo. También, al reducir el número de contactos, el número de reproducción disminuye, lo que contribuye a la reducción de la proporción de infectados.

Ahora, consideraremos un modelo en el que la población susceptible crece de manera logística. Para ello, recurriremos al trabajo de Akrami y Atabaigi (2020). Para empezar, se estudia la dinámica del sistema ordinario

$$\begin{cases} \dot{S} = rS \left(1 - \frac{S}{k}\right) - \frac{\beta SI}{1+aS}, \\ \dot{I} = \frac{\beta SI}{1+aS} - (\eta + \gamma + \mu)I, \\ \dot{R} = \gamma I - \mu R. \end{cases} \quad (3.34)$$

donde S , I y R denotan el número de individuos susceptibles, infectados y recuperados. Además,

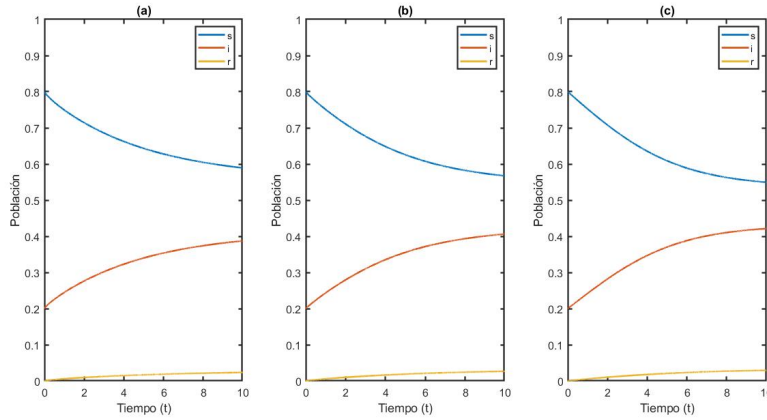


Figura 3.22: Evolución temporal del sistema (3.33) con los valores del Ejemplo 3.15 tomando $q = 0$ para (a) $\alpha = 0.8$, (b) $\alpha = 0.9$ y (c) $\alpha = 0.99$.

se tienen los siguientes parámetros:

- r es la tasa de crecimiento intrínseca de la población susceptible,
- k es la capacidad de carga,
- η es la tasa de mortalidad inducida por la enfermedad,
- γ es la tasa de recuperación de los infectados,
- μ es la tasa de muerte de la población,
- $\frac{\beta SI}{1+aS}$ ($\beta > 0$, $a > 0$) denota la tasa de contacto saturada.

De aquí en adelante, se tomará $\delta := \eta + \gamma + \mu$. Para el sistema (3.34) se tiene la presencia de al menos dos puntos de equilibrio: $E_0 = (0, 0, 0)^T$ y $E_1 = (k, 0, 0)^T$. En este caso, E_1 corresponde al punto libre de enfermedad. Para este modelo también es posible determinar el número básico de reproducción, que en este caso corresponde a

$$R_0 = \frac{k\beta}{\delta(1+ak)}.$$

Cuando $R_0 > 1$, se tiene un punto de equilibrio adicional, $E_2 = (S^*, I^*, R^*)^T$, con

$$S^* = \frac{\delta}{\beta - a\delta}, \quad I^* = \frac{r(k\beta - \delta(1+ak))}{k(\beta - a\delta)^2}, \quad R^* = \frac{r}{\mu}I^*.$$

Este punto recibe el nombre de punto de equilibrio endémico (Akrami y Atabaigi, 2020).

En vista de que las primeras dos ecuaciones son independientes de la tercera, Akrami y Atabaigi (2020) deciden analizar la estabilidad del sistema

$$\begin{cases} \dot{S} = rS \left(1 - \frac{S}{k}\right) - \frac{\beta SI}{1+aS}, \\ \dot{I} = \frac{\beta SI}{1+aS} - \delta I \end{cases}, \quad (3.35)$$

por lo cual se calcula la matriz jacobiana asociada a este último sistema, la cual es

$$J \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{k}(k - 2S) - \frac{\beta I}{(1+aS)^2} & -\frac{\beta S}{1+aS} \\ \frac{\beta I}{(1+aS)^2} & \frac{\beta S}{1+aS} - \delta \end{bmatrix}.$$

Al evaluar los puntos $e_0 = (0, 0)^T$ y $e_1 = (k, 0)^T$, se obtiene

$$J(e_0) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix}, \quad J(e_1) = \begin{bmatrix} -r & -\delta R_0 \\ 0 & \delta(R_0 - 1) \end{bmatrix}.$$

La linealización en el origen tiene valores propios $\lambda_1 = r > 0$ y $\lambda_2 = -\delta < 0$, por lo que corresponde a un punto de silla (inestable) mientras que para el punto libre de enfermedad los valores propios son $\lambda_1 = -r < 0$ y $\lambda_2 = \delta(R_0 - 1)$, lo que implica que la estabilidad local del segundo punto de equilibrio depende del número básico de reproducción. Si $R_0 < 1$, el segundo valor propio es negativo, así que el sistema tendría dos valores propios negativos, siendo localmente asintóticamente estable; para $R_0 > 1$, se tendrían dos valores propios reales con signo diferente, correspondiente a un punto de silla (inestable).

Procedamos de manera similar con el punto $e_2 = (S^*, I^*)^T$, empezando por evaluar este punto en la matriz jacobiana para determinar la estabilidad local.

$$J(e_2) = \begin{bmatrix} \frac{r\delta}{\beta - a\delta} \left(\frac{a(k\beta - \delta(1+ak)) - \beta}{k\beta} \right) & -\delta \\ \frac{r}{k\beta}(k\beta - \delta(1+ak)) & 0 \end{bmatrix}.$$

Analizaremos la estabilidad a través de la traza y el determinante de esta matriz. En este caso,

$$\text{tr}(J(e_2)) = \frac{r\delta(a(k\beta - \delta(1+ak)) - \beta)}{k\beta(\beta - a\delta)}, \quad \det(J(e_2)) = \frac{r\delta(k\beta - \delta(1+ak))}{k\beta}.$$

Para considerar la existencia de la solución de equilibrio e_2 es necesario que $R_0 > 1$, lo cual garantiza que $\det(J(e_2)) > 0$, por lo que los valores propios de dicha matriz deben ser reales del mismo signo o complejos conjugados. El signo de la parte real corresponde al signo de la traza, por lo cual la estabilidad estará dada con base en este valor. En particular, $\text{tr}(J(e_2)) = 0$ si δ toma el valor

$$\delta_h := \frac{\beta(ak - 1)}{a(ak + 1)}.$$

Para $\delta > \delta_h$, se tiene que $\text{tr}(J(e_2)) < 0$, entonces e_2 es localmente asintóticamente estable; si $\delta = \delta_h$, el sistema linealizado corresponde a un centro y para $\delta < \delta_h$, e_2 es un punto de equilibrio inestable.

De lo anterior se tiene que δ_h corresponde a un valor de bifurcación del sistema (3.35). En efecto, al variar el valor δ se produce una bifurcación de Hopf. Akrami y Atabaigi (2020) demuestran el siguiente teorema:

Teorema 3.16. Sean $R_0 > 1$ y $ak > 1$. Entonces existe una familia de ciclos límites estables del sistema (3.35) si δ es menor o cercano a δ_h , es decir, ocurre una bifurcación de Hopf cuando δ para a través de δ_h .

Ahora, analicemos la estabilidad del sistema fraccionario

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha S(t) = rS \left(1 - \frac{S}{k}\right) - \frac{\beta SI}{1+aS}, \\ {}^C D_0^\alpha I(t) = \frac{\beta SI}{1+aS} - \delta I. \end{cases} \quad (3.36)$$

Debido a que e_0 es un punto de silla en el sistema ordinario, el comportamiento para el sistema fraccionario será el mismo. De igual manera, debido a que los valores propios de la linealización de e_1 son reales, el comportamiento seguirá siendo el mismo, es decir, el punto libre de enfermedad será localmente asintóticamente estable si $R_0 < 1$ e inestable si $R_0 > 1$. Lo anteriormente discutido será válido para todo $\alpha \in (0, 1]$.

Para el punto e_2 , teniendo en cuenta lo discutido previamente y usando el Teorema 2.15 se puede llegar a la siguiente proposición:

Proposición 3.17. Sean $R_0 > 1$ y $\Lambda = (\text{tr}(J(e_2)))^2 - 4 \det(J(e_2))$, entonces

(i) e_2 es un punto de equilibrio estable si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

(a) $\Lambda \geq 0$, $\delta < \delta_h$ y $q \in (0, 1)$;

(b) $\Lambda < 0$ y se cumple que $\text{tr}(e_2) \leq 0$ o $q < \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{-\Lambda}}{\text{tr}(J(e_2))}\right)$.

(ii) e_2 es un punto de equilibrio inestable si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

(a) $\Lambda \geq 0$, $\delta > \delta_h$ y $\alpha \in (0, 1)$;

(b) $\Lambda < 0$ y $\alpha > \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{-\Lambda}}{\text{tr}(J(e_2))}\right)$.

La prueba de esta proposición aparece en Akrami y Aatabaigi (2020). Como se ha discutido previamente, la diferencia sustancial en la estabilidad de los puntos de equilibrio radica en la presencia de valores propios complejos, razón por la cual aparecen los casos (b) en la Proposición. En este caso, observemos que si $\Lambda < 0$, existe un valor umbral

$$\alpha_h := \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{-\Lambda}}{\text{tr}(J(e_2))}\right)$$

en el cual hay un cambio de estabilidad. Replicando la prueba del Teorema 3.7, se puede demostrar que si $\Lambda < 0$ el punto de equilibrio e_2 del sistema (3.36) sufre una bifurcación de Hopf cuando $\alpha = \alpha_h$.

Para terminar esta sección, mostraremos algunos ejemplos numéricos. Para empezar, analizaremos el sistema ordinario sobre todo el comportamiento del punto en el interior del primer cuadrante. Posteriormente, veremos el comportamiento del sistema fraccionario observando los cambios en el sistema ante la variación del orden.

Ejemplo 3.18. Consideremos el modelo ordinario (3.35) con $k = 1$, $r = 0.01$, $a = 2$ y $\beta = 0.3$. En este caso, el parámetro δ sirve como parámetro de bifurcación, siendo $\delta_h = 0.075$. En la Figura 3.23 se muestra la existencia de la bifurcación de Hopf en el punto endémico cuando $\delta = \delta_h$. Además, cuando $\delta > \delta_h$, el punto endémico se vuelve localmente asintóticamente estable.

En la Figura 3.24 se observa la evolución temporal del sistema (3.35) cuando se impone como condición inicial $(2, 0.5)^T$. Se muestra que para $\delta = 0.075$ las poblaciones eventualmente se comportan como si fueran funciones periódicas, lo cual es consistente con la existencia de ciclos límite, mientras que para $\delta = 0.08$ el comportamiento asintótico corresponde a la existencia de un límite lo que concuerda con la estabilidad asintótica del punto endémico.

Ejemplo 3.19. Consideremos el modelo fraccionario (3.36) con $k = 1$, $a = 2$, $\beta = 0.01$, $\delta = 0.04$ y $r = 0.1$. Bajo estas condiciones, el número básico de reproducción es $R_0 = 0.0833$, así que no hay un punto de equilibrio endémico y el punto libre de enfermedad es localmente asintóticamente

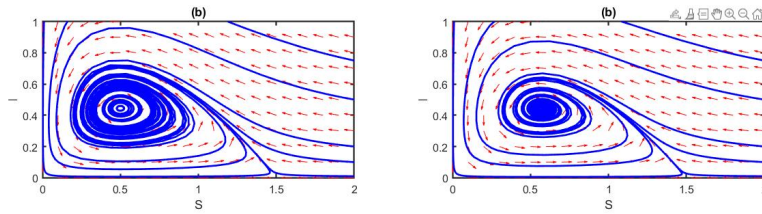


Figura 3.23: Plano de fase para bifurcación de Hopf en $\delta = 0.075$ del sistema (3.34) con parámetros $k = 1.5$, $r = 0.1$, $a = 2$ y $\beta = 3$ con (a) $\delta = 0.075$ y (b) $\delta = 0.08$.

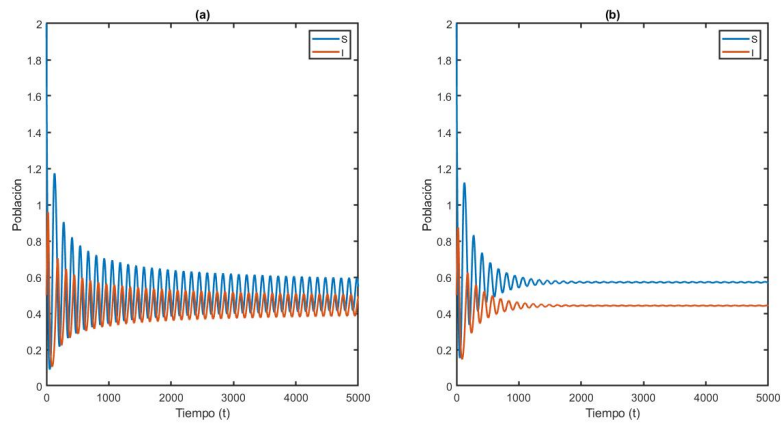


Figura 3.24: Evolución temporal de las variables de estado para bifurcación de Hopf en $\delta = 0.075$ del sistema (3.34) con parámetros $k = 1.5$, $r = 0.1$, $a = 2$ y $\beta = 3$ con (a) $\delta = 0.075$ y (b) $\delta = 0.08$.

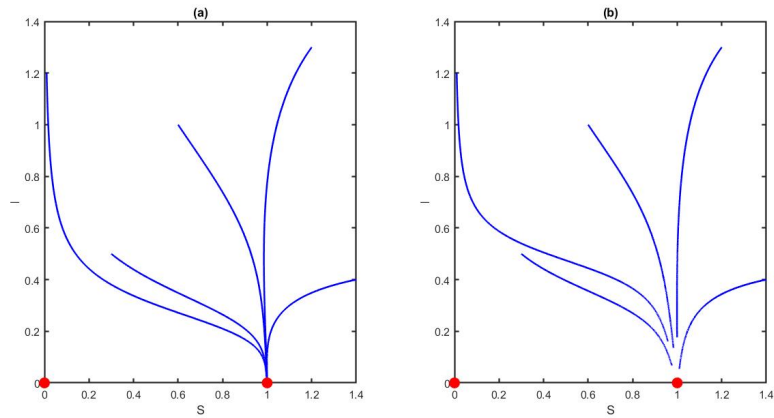


Figura 3.25: Plano de fase para el sistema (3.36) con $k = 1$, $a = 2$, $\beta = 0.01$, $\delta = 0.04$, $r = 0.1$ para (a) $\alpha = 0.98$, (b) $\alpha = 0.75$.

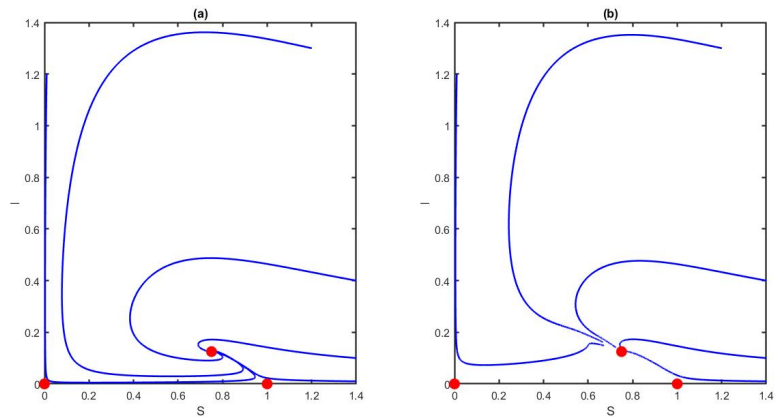


Figura 3.26: Plano de fase para el sistema (3.36) con $k = 1$, $a = 1$, $\beta = 0.7$, $\delta = 0.3$, $r = 0.2$ para (a) $\alpha = 0.98$, (b) $\alpha = 0.75$.

estable para todo $\alpha \in (0, 1)$. En la Figura 3.25 se observa el plano de fase del sistema descrito con dos órdenes de la derivada: $\alpha = 0.98$ y $\alpha = 0.75$. Se nota que las trayectorias no logran acercarse tanto al equilibrio cuando $\alpha = 0.75$ como lo hacen con $\alpha = 0.98$, evidencia del efecto de la memoria en el sistema.

Ahora impongamos los valores $k = 1$, $a = 1$, $\beta = 0.7$, $\delta = 0.3$ y $r = 2$ en el sistema (3.36). Con estos valores supuestos, el número básico de reproducción es $R_0 = 1.1667$, razón por la cual existe el punto endémico con coordenadas $(0.75, 1.25)$ correspondiente a un atractor local; también, el punto libre de enfermedad pasa a comportarse como un punto de silla, como se observa en la Figura 3.26.

Ejemplo 3.20. Nuevamente tomemos el sistema (3.36) y establezcamos los valores $k = 1.5$, $a = 2$, $\beta = 0.3$, $\delta = 0.05$ y $r = 0.1$. Consideremos a α como parámetro de bifurcación, en cuyo caso se tiene que en $\alpha = \alpha_h = 0.9328$ el punto endémico sufre una bifurcación de Hopf. Para $\alpha < \alpha_h$ se tiene que el punto endémico es estable. En la Figura 3.27 se considera un valor $\alpha = 0.93$, se observa como las trayectorias del sistema se acumulan alrededor de curvas cerradas cercanas al punto endémico, lo cual se debe a la cercanía del valor α con el valor crítico. En la Figura 3.28

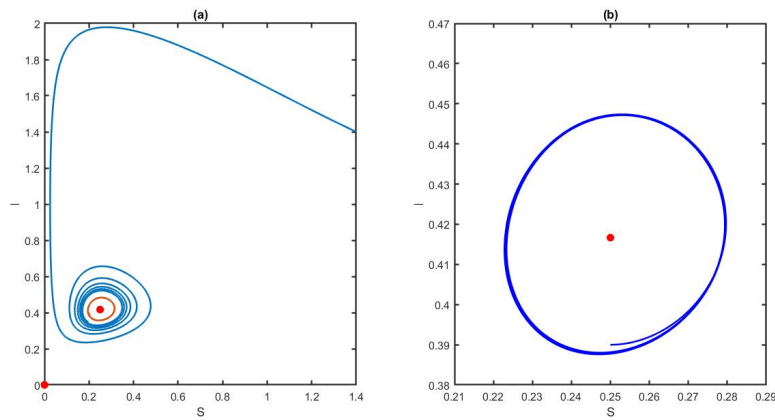


Figura 3.27: Diferentes trayectorias para el sistema (3.36) con $k = 1.5$, $a = 2$, $\beta = 0.3$, $\delta = 0.05$, $r = 0.1$ y $\alpha = 0.93$.

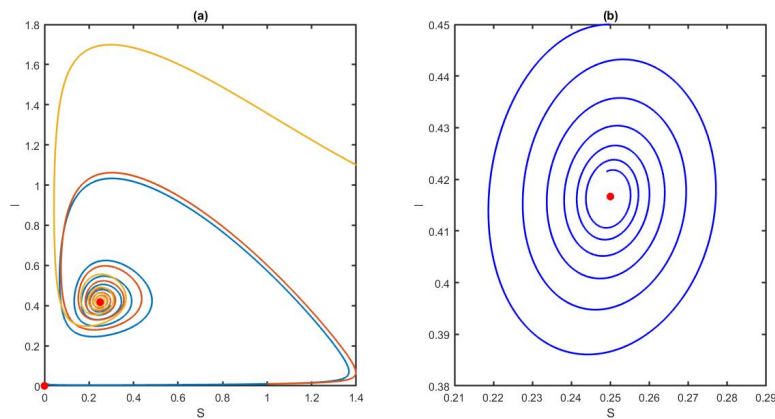


Figura 3.28: Diferentes trayectorias para el sistema (3.36) con $k = 1.5$, $a = 2$, $\beta = 0.3$, $\delta = 0.05$, $r = 0.1$ y $\alpha = 0.9$.

el orden de la derivada es $\alpha = 0.9$, aquí la convergencia de las soluciones al punto endémico se acelera debido al cambio de orden.

Por último, conservando la misma configuración de parámetros, se tiene que para $\alpha > \alpha_h$, el punto endémico es inestable. Si tomamos $\alpha = 0.95$ se tiene que aparece una curva cerrada que atrae a las soluciones. En el interior de dicha curva cerrada está el punto endémico y las trayectorias con valores iniciales en el interior se alejan del punto endémico enrollándose en la curva cerrada.

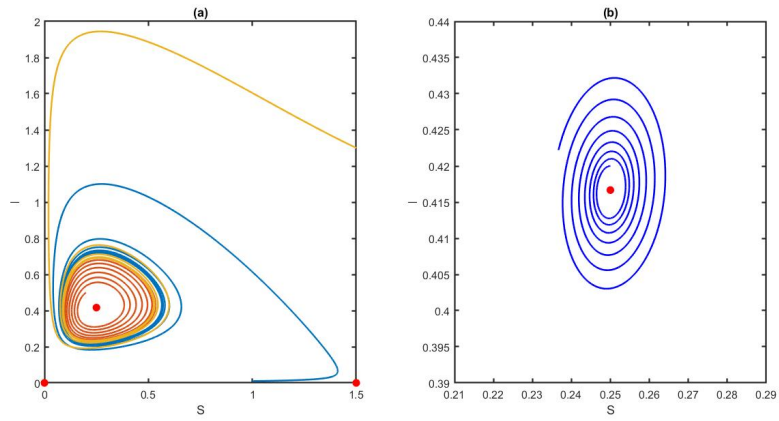


Figura 3.29: Diferentes trayectorias para el sistema (3.36) con $k = 1.5$, $a = 2$, $\beta = 0.3$, $\delta = 0.05$, $r = 0.1$ y $\alpha = 0.95$.

Conclusiones

1. Los sistemas dinámicos siguen siendo una herramienta muy importante en la modelación de dinámicas poblacionales, sobre todo el estudio de la estabilidad de soluciones permite hacer inferencias sobre el comportamiento futuro de diferentes poblaciones. Sin embargo, al analizar el componente de memoria, se ve que los sistemas dinámicos en sentido ordinario no reflejan apropiadamente este aspecto sobre todo en situaciones como la dispersión de enfermedades, para la cual se conoce que el estado actual de las población infectada está influenciado por el estado de la población en tiempos previos. De allí surge la necesidad de implementar modelos que integren la memoria siendo una alternativa el cambio del operador diferencial ordinario por el operador de Caputo.
2. Al escoger un operador fraccionario para la implementación de un modelo con memoria, el operador de Caputo ofrece más ventajas con respecto a lo operativo. Para empezar, la derivada de Caputo de una función constante va a ser idénticamente cero, para cualquier orden de la derivada; esto permite que las técnicas de re escalamiento y traslación de ejes procedan sin mayor dificultad. También, la Transformada de Laplace del operador de Caputo requiere de las condiciones iniciales de un problema de valor inicial ordinario, a diferencia de la transformada aplicada sobre el operador de Riemann-Liouville para el cual se requiere evaluar una integral fraccionaria junto con algunas de sus derivadas.
3. Un modelo con derivada de Caputo necesita de la incorporación de un nuevo parámetro: el orden de la derivada, α . Este valor α va a ser fundamental para determinar la estabilidad de las soluciones de equilibrio atendiendo al Teorema de Matignon y la versión fraccionaria del Teorema de Hartman-Grobman. Se ha comprobado que pequeñas variaciones del orden de la derivada en el sistema pueden generar cambios notables en la estabilidad de un punto de equilibrio, por ello el orden puede ser considerado en algunos casos como un parámetro de bifurcación. Al comparar los puntos de equilibrio del sistema ordinario con el sistema fraccionario se observa que si $\alpha \in (0, 1)$ hay más posibilidades de que las soluciones sean asintóticamente estables, además de que no aparecen órbitas periódicas.
4. Se implementaron varios modelos de poblaciones haciendo uso del operador diferencial de Caputo y un método predictor-corrector, obteniendo en casos como el modelo de Lotka-Volterra condiciones dinámicas diferentes al análogo modelo ordinario mientras que en otros casos la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas dados no se vio alterada por la aparición del término fraccionario, logrando inclusive rescatar características como la bifurcación de Hopf. Algo común en todos los casos es que al reducir el orden de la derivada fraccionaria, aumenta el tiempo requerido para que el sistema llegue a un estado indicado.
5. Existen soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales fraccionarias haciendo uso de las funciones de Mittag-Leffler. Sin embargo, el cálculo de estas funciones es dispendioso, por lo

cual se opta por implementaciones numéricas. En particular, se tiene que la manipulación de funciones matriciales de Mittag-Leffler requiere una mayor capacidad de cómputo que en el caso de la matriz exponencial.

6. En la realización de este trabajo se pudo comprobar que el método numérico de Adams-Bashford-Moulton logra replicar apropiadamente la dinámica de los modelos considerados por las diferentes fuentes consultadas. Sin embargo, se debe mencionar que al comparar el tiempo de ejecución de este método es mayor que el tiempo demandado por métodos para solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto se debe al componente de memoria, puesto que dentro de las rutinas deben guardarse todos los valores previos al instante que se va a calcular, lo que demanda espacio de almacenamiento y un número mayor de operaciones por realizar.

Trabajo futuro

1. En el presente trabajo siempre se consideraron sistemas de ecuaciones fraccionarias para los cuales las derivadas de las variables de estado tienen el mismo orden de la derivada, sistemas conocidos como sistemas conmensurados. Rivero et al. (2011) considera sistemas no conmensurados, es decir, con órdenes de derivación diferentes en las variables de estado. Los sistemas no conmensurados aparecen al considerar que el efecto de memoria en cada una de las variables de estado es diferente, como comentan Saeedian et al. (2017). Para este tipo de sistemas, se debe estudiar la estabilidad de las soluciones de equilibrio haciendo uso de una versión diferente del Teorema de Matignon presentado en este trabajo. En vista del cambio de condiciones de estabilidad, también se requiere el estudio de los planos de fase y la influencia de los órdenes en posibles bifurcaciones.
2. En el trabajo se realizaron los cálculos numéricos con base en el método predictor - corrector de Adams-Bashford-Moulton, el cual es un método multipaso basado en reglas de cuadratura. Sin embargo, este no es el único método desarrollado bajo esta metodología. Existen muchos métodos basados en la solución numérica de ecuaciones diferenciales no lineales. En particular, Milici et al. (2019) presenta los métodos de polinomios de Adomian, decomposición en ecuaciones no lineales, método de perturbación, aproximaciones sucesivas.
3. En este trabajo se consideraron modelos SIS y SIR para la transmisión de enfermedades, considerando a lo sumo tres variables de estado. Existen modelos con mayor complejidad, ya sea por considerar un número mayor de variables de estado o por considerar funciones de respuesta más complejas para representar el crecimiento y la incidencia de cada una de las poblaciones involucradas.
4. A parte del Teorema de Matignon y la versión fraccionaria del Teorema de Hartman-Grobman, existen diferentes resultados de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales que tienen un equivalente fraccionario como el criterio de Routh-Hurwitz para estabilidad (Ahmed et al., 2006), la teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov (Gallegos y Duarte-Mermoud, 2016), la estabilidad global de un punto de equilibrio dada por funciones de Lyapunov (Aguila-Camacho et al. (2014); Boukhouima et al. (2020); Vargas-De-León (2015)), teoremas de la variedad estable (Deshpande y Daftardar-Gejji, 2016) y centro (Ma y Li (2016); Sayevand (2016)), los cuales pueden ser tenidos en cuenta para investigaciones futuras.
5. El trabajo se centró en el análisis de sistemas dinámicos asociados a problemas biológicos, pero esta no es la única herramienta de modelación que se implementa en problemas relacionados con evolución de poblaciones. En algunas situaciones particulares aparecen términos difusivos, los cuales suelen ser representados mediante el uso de ecuaciones diferenciales parciales. Se puede extender el uso de sistemas fraccionarios a la incorporación de ecuaciones

diferenciales parciales fraccionarias como se hace en el artículo de Belmahi y Shawagfeh (2020).

6. En el trabajo se analizaron diferentes modelos con parámetros determinados previamente. Ahora bien, una fuente de futuras investigaciones sería el poder estimar los parámetros con base en unos datos de población ya conocidos. Dentro de los parámetros, la determinación de los órdenes de las derivadas fraccionarias sería crucial para determinar las características de estabilidad propias del sistema, así como la influencia de la memoria.

Apéndice

Resultados sobre ecuaciones diferenciales

En el trabajo se requirieron resultados de la teoría de ecuaciones diferenciales que no fueron enunciados en la realización del trabajo, sobre todo en la sección introductoria de sistemas dinámicos y en ecuaciones diferenciales fraccionarias. En particular, se destacan por su importancia en el desarrollo de estos temas el Teorema de existencia y unicidad que permite establecer con propiedad el concepto de sistema dinámico y cuya prueba se replica hasta cierto punto para ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Teorema (Existencia y unicidad o Picard-Lindelöf). Sean $y \in \mathbb{R}^n$, $f(t, y)$ una función continua sobre un paralelepípedo

$$R = \{(t, y) : t_0 \leq t \leq t_0 + a, \|y - y_0\| \leq b\}$$

y uniformemente Lipschitz con respecto a y . Sea M una cota para $|f(t, y)|$ sobre R , $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. Entonces

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

tiene una solución única $y = y(t)$ sobre $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Demostración. Ver Hartman (1982). ■

También, fue necesario el Teorema de dependencia continua de las condiciones iniciales en el desarrollo de los conceptos de sistemas dinámicos, razón por la cual se incluye a continuación:

Teorema (Dependencia continua de las condiciones iniciales). Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene a x_0 y supongamos que $f \in C^1(E)$, entonces existe un $a > 0$ y $\delta > 0$ tal que para todo $y \in B_\delta(x_0)$, el problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x) \quad x(0) = y,$$

tiene una única solución $u(t, y)$ con $u \in C^1(G)$ donde $G = [-a, a] \times B_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Demostración. Ver Perko (2013). ■

Propiedades de la función Gamma

En la definición de los operadores diferenciales fraccionarios trabajados aparece siempre la función Gamma, la cual corresponde a la siguiente definición:

Definición (Función Gamma). La función Gamma se define como sigue:

$$\Gamma(p) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx.$$

En la realización de los diferentes ejemplos suministrados sobre operadores diferenciales se requirió el dominio de propiedades de la función Gamma, aquí mencionamos algunas de ellas.

Teorema (Propiedades de la función Gamma). La función Gamma, $\Gamma(p)$, tiene las siguientes propiedades:

1. converge para todo $p > 0$,
2. es continua para todo $p > 0$,
3. $\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p)$,
4. $\Gamma(n + 1) = n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Ver Milici et al. (2019). ■

En varios ejemplos realizados sobre los operadores fraccionarios aparecieron integrales que se acomodaban mediante sustituciones a una función Beta, lo que justifica la siguiente definición:

Definición (Función Beta). La función Beta se define como

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx,$$

cuando las partes reales de p y q son positivas.

En operadores diferenciales fraccionarios, al aparecer constantemente la función Gamma, también se hace necesario el manejo de la función Beta debido a la siguiente relación:

Teorema (Relación entre las funciones Gamma y Beta). Para todo $p > 0$, $q > 0$,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Demostración. Ver Milici et al. (2019). ■

Transformada de Laplace

De acuerdo a Diethelm (2010), la Transformada de Laplace es un operador fundamental en el trabajo con ecuaciones diferenciales ordinarias y fraccionarias. Es por ello que mencionamos acá su definición.

Definición (Transformada de Laplace). Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada. La función F definida por

$$F(s) = \mathcal{L}[f](s) := \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx$$

es llamada la Transformada de Laplace de f cuando esta integral existe.

Como se discutió en varias partes del trabajo, los operadores diferenciales fraccionarios pueden ser descritos en términos de convolución, por ello una de las propiedades más importantes de la transformada de Laplace corresponde a como actúa sobre la convolución de dos funciones, lo que se ve reflejado en el siguiente Teorema.

Teorema. Supongamos que f_1 , f_2 y f_3 están definidas en $[0, \infty)$ y son tales que sus transformadas existen para todo $s \geq s_0$, con $s_0 \in \mathbb{R}$. Entonces si f_3 es la convolución de f_1 y f_2 en el sentido de Laplace, es decir,

$$f_3(x) = \int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt,$$

se sigue que

$$\mathcal{L}[f_3](s) = \mathcal{L}[f_1](s) \cdot \mathcal{L}[f_2](s).$$

Demostración. Ver Doetsch (2012). ■

Bibliografía

- Abdelouahab, M.-S., Hamri, N.-E., y Wang, J. (2012). Hopf bifurcation and chaos in fractional-order modified hybrid optical system. *Nonlinear Dynamics*, 69(1):275–284.
- Aguila-Camacho, N., Duarte-Mermoud, M. A., y Gallegos, J. A. (2014). Lyapunov functions for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(9):2951–2957.
- Ahmed, E., El-Sayed, A., y El-Saka, H. A. (2006). On some Routh–Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems. *Physics Letters A*, 358(1):1–4.
- Akrami, M. H. y Atabaigi, A. (2020). Hopf and forward bifurcation of an integer and fractional-order SIR epidemic model with logistic growth of the susceptible individuals. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 64:615–633.
- Bacaër, N. (2011). *A short history of mathematical population dynamics*. Springer Science & Business Media.
- Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E., y Trujillo, J. J. (2012). *Fractional calculus: models and numerical methods*, volume 3. World Scientific.
- Belmahi, N. y Shawagfeh, N. (2020). A new mathematical model for the glycolysis phenomenon involving Caputo fractional derivative: Well posedness, stability and bifurcation. *Chaos, Solitons & Fractals*, page 110520.
- Boukhouima, A., Hattaf, K., Lotfi, E. M., Mahrouf, M., Torres, D. F., y Yousfi, N. (2020). Lyapunov functions for fractional-order systems in biology: Methods and applications. *Chaos, Solitons & Fractals*, 140:110224.
- De Vries, G., Hillen, T., Lewis, M., Müller, J., y Schönfisch, B. (2006). *A course in mathematical biology: quantitative modeling with mathematical and computational methods*. SIAM.
- Deshpande, A. y Daftardar-Gejji, V. (2016). Local stable manifold theorem for fractional systems. *Nonlinear Dynamics*, 83(4):2435–2452.
- Deshpande, A. S., Daftardar-Gejji, V., y Sukale, Y. V. (2017). On hopf bifurcation in fractional dynamical systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 98:189–198.
- Diethelm, K. (2010). *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer Science & Business Media.

- Diethelm, K., Ford, N. J., y Freed, A. D. (2004). Detailed error analysis for a fractional Adams method. *Numerical algorithms*, 36(1):31–52.
- Doetsch, G. (2012). *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Springer Science & Business Media.
- Elsadany, A. y Matouk, A. (2015). Dynamical behaviors of fractional-order Lotka–Volterra predator–prey model and its discretization. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 49(1):269–283.
- Gallegos, J. A. y Duarte-Mermoud, M. A. (2016). On the Lyapunov theory for fractional order systems. *Applied Mathematics and Computation*, 287:161–170.
- Garrappa, R. y Popolizio, M. (2018). Computing the matrix Mittag-Leffler function with applications to fractional calculus. *Journal of Scientific Computing*, 77(1):129–153.
- Ghosh, U., Pal, S., y Banerjee, M. (2020). Memory effect on Bazykin’s prey-predator model: Stability and bifurcation analysis. *Chaos, Solitons & Fractals*, 143.
- Gorenflo, R. y Mainardi, F. (2008). Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. *arXiv:0885.3823v1*.
- Hartman, P. (1982). *Ordinary Differential Equations: Second Edition*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- Hassouna, M., Ouhadan, A., y El Kinani, E. H. (2018). On the solution of fractional order SIS epidemic model. *Chaos, Solitons & Fractals*, 117:168–174.
- Kaczorek, T. (2011). *Selected problems of fractional systems theory*. Springer Science & Business Media.
- Krabs, W. y Pickl, S. (2010). *Dynamical systems: stability, controllability and chaotic behavior*. Springer Science & Business Media.
- Kumar, R. y Kumar, S. (2014). A new fractional modelling on susceptible-infected-recovered equations with constant vaccination rate. *Nonlinear Engineering*, 3(1):11–19.
- Kuznetsov, Y. A. (2013). *Elements of applied bifurcation theory*. Springer Science & Business Media.
- Layek, G. (2015). *An introduction to dynamical systems and chaos*. Springer.
- Li, C. y Ma, Y. (2013). Fractional dynamical system and its linearization theorem. *Nonlinear Dynamics*, 71(4):621–633.
- Li, H.-L., Zhang, L., Hu, C., Jiang, Y.-L., y Teng, Z. (2016). Dynamical analysis of a fractional-order predator-prey model incorporating a prey refuge. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 54(1-2):435–449.
- Li, X. y Wu, R. (2014). Hopf bifurcation analysis of a new commensurate fractional-order hyperchaotic system. *Nonlinear Dynamics*, 78(1):279–288.
- Lynch, S. (2004). *Dynamical systems with applications using MATLAB*. Springer.

- Ma, L. y Li, C. (2016). Center manifold of fractional dynamical system. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 11(2).
- Machado, J. T., Kiryakova, V., y Mainardi, F. (2011). Recent history of fractional calculus. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, 16(3):1140–1153.
- Machado, T., Kiryakova, V., y Mainardi, F. (2010). A poster about the recent history of fractional calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 13(3):329p–334p.
- Matignon, D. (1996). Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In *Computational engineering in systems applications*, volume 2, pages 963–968. Lille, France.
- Milici, C., Drăgănescu, G., y Machado, J. T. (2019). *Introduction to fractional differential equations*. Springer.
- Müller, J. y Kuttler, C. (2015). Methods and models in mathematical biology. *Lecture Notes on Mathematical Modelling in the Life Sciences*, Springer, Heidelberg, Germany.
- Perko, L. (2013). *Differential equations and dynamical systems*. Springer Science & Business Media.
- Popolizio, M. (2019). On the Matrix Mittag–Leffler Function: Theoretical Properties and Numerical Computation. *Mathematics*, 7(12):1140.
- Rivero, M., Trujillo, J. J., Vázquez, L., y Velasco, M. P. (2011). Fractional dynamics of populations. *Applied Mathematics and Computation*, 218(3):1089–1095.
- Rosenzweig, M. L. y MacArthur, R. H. (1963). Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions. *The American Naturalist*, 97(895):209–223.
- Sadeghi, A. y Cardoso, J. R. (2018). Some notes on properties of the matrix Mittag-Leffler function. *Applied Mathematics and Computation*, 338:733–738.
- Saeedian, M., Khalighi, M., Azimi-Tafreshi, N., Jafari, G., y Ausloos, M. (2017). Memory effects on epidemic evolution: The susceptible-infected-recovered epidemic model. *Physical Review E*, 95(2):022409.
- Sayevand, K. (2016). Fractional dynamical systems: A fresh view on the local qualitative theorems. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 7(2):303–318.
- Stanislavsky, A. (2000). Memory effects and macroscopic manifestation of randomness. *Physical Review E*, 61(5):4752.
- Tian, J., Yu, Y., y Wang, H. (2014). Stability and bifurcation of two kinds of three-dimensional fractional lotka-volterra systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014.
- Vargas-De-León, C. (2015). Volterra-type Lyapunov functions for fractional-order epidemic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 24(1-3):75–85.
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer Science & Business Media.

Witelski, T. y Bowen, M. (2015). *Methods of mathematical modelling*. Springer.

Yazdani, M. y Salarieh, H. (2011). On the existence of periodic solutions in time-invariant fractional order systems. *Automatica*, 47(8):1834–1837.