

esto es, si no existen autovalores en el eje imaginario. Un equilibrio hiperbólico se denomina *silla hiperbólica* si $n_e n_i \neq 0$.

6.2. Estabilidad del Equilibrio

Según [63], un punto de equilibrio es *estable* si, para pequeñas perturbaciones fuera de éste, el sistema siempre permanece en una región finita que rodea dicho punto. Si, además, al final el sistema retorna siempre al punto de equilibrio, se dice que este último es *asintóticamente estable*. Un sistema es *inestable* respecto a un punto de equilibrio dentro de una región que rodea al punto de equilibrio si existe siempre alguna pequeña perturbación dentro de esta zona por la cual el sistema se sale de la misma. Un sistema puede ser *globalmente estable*, toda vez que su estabilidad no se limita a pequeñas alteraciones dentro de regiones finitas del espacio de estado. Muchos sistemas no-lineales presentan *estabilidad local*, esto es, se comportan de manera estable en regiones disyuntas del espacio de estado, pasando por medio de alteraciones bastante grandes de una región de estabilidad a otra.

6.2.1. Teorema de Hartman-Grobman

D.M. Grobman, en 1959, y P. Hartman, en 1963, probaron independientemente que, en la vecindad de un punto de equilibrio hiperbólico, un sistema no-lineal de dimensión n , presenta un comportamiento cualitativamente equivalente al del sistema lineal correspondiente. Por lo tanto, el *teorema de Hartman-Grobman* garantiza que la estabilidad de un punto de equilibrio hiperbólico es preservada cuando se linealiza el sistema no-lineal al rededor de ese punto, de modo que el retrato de fases¹ en la vecindad, es topológicamente orbitalmente equivalente al retrato de fases del sistema lineal asociado. Dos retratos de fase son topológicamente orbitalmente equivalentes cuando uno es una versión distorsionada del otro.

6.2.2. Teorema de las Variedades Hiperbólicas

Sea un sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{6.1}$$

¹Conjunto de curvas obtenidas por la evolución temporal del sistema a partir de todas las condiciones iniciales en las cuales \mathbf{f} es definido

con un campo vectorial f de clase r (o sea, f es r veces diferenciable). Sea x^{eq} un punto de equilibrio de f y considerando la matriz Jacobiana J_0 , calculada en el punto de equilibrio, a partir de la versión lineal. Los autovalores correspondientes a esa matriz pueden ser separados en tres grupos: σ_e , σ_i y σ_c , dependiendo del signo de la parte real de los autovalores. Las letras e , i y c son, respectivamente, las iniciales de estable, inestable y central, entonces:

$$\lambda \in \sigma_e \quad \text{si} \quad \text{Re}(\lambda) < 0$$

$$\lambda \in \sigma_i \quad \text{si} \quad \text{Re}(\lambda) > 0$$

$$\lambda \in \sigma_c \quad \text{si} \quad \text{Re}(\lambda) = 0$$

donde $\lambda \in \mathcal{C}$. El subespacio generado por los *vectores propios* (o autovectores) cuyos *valores propios* (o autovalores) pertenecen a σ_e es llamado *subespacio estable* E^e ; aquel generado por los vectores propios cuyos valores propios pertenecen a σ_i es llamado *subespacio inestable* E^i , y aquel correspondiente a σ_c es llamado *subespacio central* E^c . Es de notar que esos subespacios se refieren a la versión lineal del sistema de ecuaciones. Teniendo en cuenta que el teorema de Hartman-Grobman solamente es válido cuando $n_c = 0$, las soluciones pertenecientes a E^e presentan decaimiento exponencial, y las soluciones pertenecientes a E^i exhiben crecimiento exponencial.

Sea un sistema dinámico descrito por n ecuaciones diferenciales autónomas. Un conjunto S de puntos del espacio de fases n -dimensional es una *variedad invariante local* si, para x_0 perteneciente a S , la solución $x(t)$ con condición inicial x_0 está en S para $|t| < T$, con $T > 0$. Si eso es válido para $T \rightarrow \infty$, entonces S es una *variedad invariante*. Para sistemas autónomos, cada trayectoria en el espacio de fases es un conjunto invariante. Un punto de equilibrio es una variedad invariante de dimensión nula.

El *teorema de las variedades hiperbólicas*, probado de forma completa por A. Kelley, en 1967, afirma que, para un sistema no-lineal de clase r , existe una variedad estable W^e , invariante local, r veces diferenciable, tangente al subespacio E^e en el punto de equilibrio x^{eq} . Esa variedad posee la misma dimensión n_e de E^e y es única. Existe también una variedad inestable W^i , invariante local, r veces diferenciable, tangente al subespacio E^i en x^{eq} . Esa variedad posee la misma dimensión n_i de E^i y es única. Además, W^e y W^i presentan las mismas propiedades asintóticas de E^e y E^i , respectivamente. De esta manera, soluciones con condición inicial en W^e se aproximan a x^{eq} cuando $t \rightarrow \infty$ sin abandonar W^e ; soluciones

con condición inicial en W^i se apartan de x^{eq} cuando $t \rightarrow \infty$ sin abandonar W^i . La figura 6.1 ilustra estos resultados.

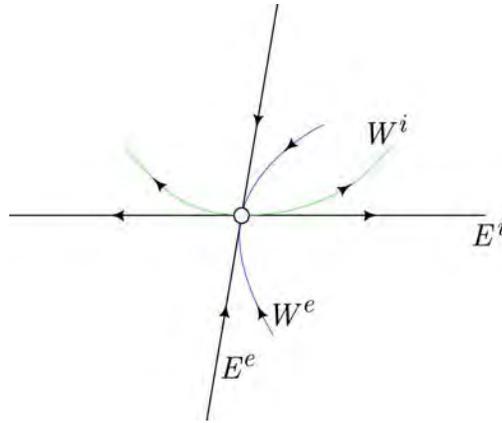


Figura 6.1: Variedades de un punto silla de un sistema no-lineal

6.2.3. Método de Linealización de Lyapunov

El método de linealización de Lyapunov, también conocido como método indirecto de Lyapunov, está relacionado con la estabilidad local de un sistema no-lineal. Este método se basa en la idea intuitiva de que un sistema no-lineal se comporta como un sistema lineal aproximado en la vecindad de un punto de operación.

Considerando el sistema autónomo descrito por la ecuación 6.1, y asumiendo que $f(x)$ es continuamente diferenciable. Entonces, el sistema dinámico puede ser escrito como:

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x^{eq}} x + f_{t.o.s}(x) \quad (6.2)$$

donde $f_{t.o.s}$ significa para términos de orden superior. Suponiendo que x^{eq} es un punto de equilibrio, es decir se cumple el hecho que $f(x^{eq}) = 0$. Se define la matriz J como,

$$J = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x^{eq}} \quad (6.3)$$

siendo J la matriz Jacobiana de f con respecto a x en $x = x^{eq}$. Así, el sistema,

$$\dot{x} = Jx \quad (6.4)$$

es denotado como el sistema lineal aproximado del sistema no-lineal original en el punto de equilibrio x^{eq} .

La relación entre la estabilidad local del sistema lineal (6.4) y el sistema no-lineal original (6.1), está dada bajo el siguiente teorema:

Teorema 6.2.1. (*Método indirecto de Lyapunov*)

- † Si el sistema linealizado es estrictamente estable, es decir, si todos los autovalores de \mathbf{J} se encuentran estrictamente en el semiplano izquierdo del plano complejo, entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable para el sistema no-lineal original.
- † Si el sistema linealizado es inestable, es decir, si al menos uno de los autovalores de \mathbf{J} se encuentra estrictamente en el semiplano derecho del plano complejo, entonces el punto de equilibrio es inestable para el sistema no-lineal original.
- † Si el sistema linealizado es marginalmente estable, es decir, todos los autovalores de \mathbf{J} se encuentran en el semiplano izquierdo, pero al menos uno de ellos está en el eje $j\omega$, entonces no se puede concluir nada acerca de la aproximación lineal, el punto de equilibrio puede ser estable, asintóticamente estable, o inestable para el sistema no-lineal original.

6.2.4. Diferenciales Generalizadas

Según [67, 39], la aproximación lineal está estrechamente relacionada con el subdiferencial de Clarke, también llamado *diferencial generalizado*. Sea $f(x)$ una función continua diferenciable a tramos con un quiebre en un valor de x . La derivada $f'(x)$ está definida como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en x . A pesar de que $f(x)$ no es absolutamente diferenciable en todo x , posee unas derivadas por la izquierda y por derecha definidas respectivamente como:

$$f'_-(x) = \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad f'_+(x) = \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad (6.5)$$

La derivada generalizada de f en x es definida como cualquier valor $f'_q(x)$ incluida entre sus derivadas por la izquierda y por la derecha. Este valor intermedio puede ser expresado como una combinación convexa de las derivadas por la izquierda y por la derecha, como:

$$f'_q(x) = (1 - q)f'_- + qf'_+, \quad 0 \leq q \leq 1 \quad (6.6)$$

Con referencia a la función $f(x) = |x|$ (Fig. 6.2(a)), geoméricamente, una derivada generalizada es la pendiente de una línea dibujada a través del punto $(x, f(x))$, y entre las líneas

tangentes por la izquierda y por la derecha (líneas a trazos). El conjunto de de todas las derivadas generalizadas de f en x , en general, la envolvente convexa de las derivadas extremas, es denotado con el nombre de *diferencial generalizado* de f en x , es decir:

$$\partial f(x) = \text{co}\{f'_-(x), f'_+(x)\} = \{f'_q(x) | f'_q(x) = (1 - q)f'_-(x) + qf'_+(x), \forall q | 0 \leq q \leq 1\} \quad (6.7)$$

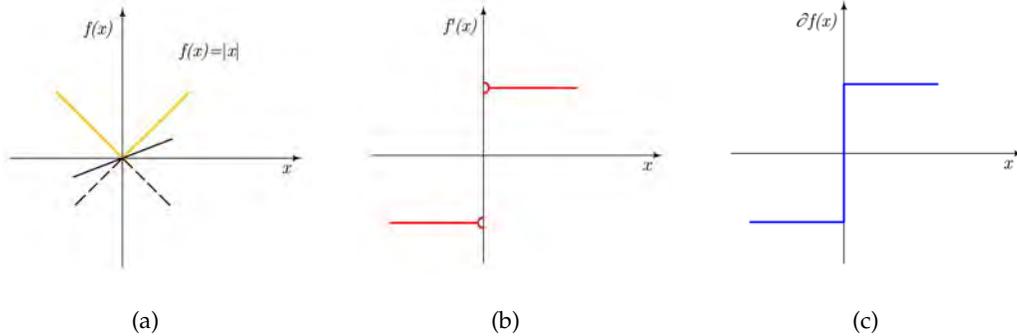


Figura 6.2: (a) Función $|x|$; (b) derivada clásica; (c) *derivada generalizada*

La diferencial generalizada es el conjunto de pendientes de todas las líneas incluidas en el cono delimitado por las rectas tangentes a la izquierda y a la derecha, y es un conjunto cerrado convexo. La figura 6.2(c) ilustra el significado de la diferencial generalizada como el cierre de la gráfica $f'(x)$ (Fig. 6.2(b)) en los puntos donde es discontinua.

Análogamente, el Jacobiano de una aproximación lineal \mathbf{J} , puede ser tratado como el Jacobiano generalizado en el sentido de Clarke, es decir, el diferencial generalizado del vector de campo \mathbf{f} con respecto al estado \mathbf{x} , esto es:

$$\tilde{\mathbf{J}}_q = \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f} = (1 - q)\mathbf{J}_- + q\mathbf{J}_+, \quad 0 \leq q \leq 1 \quad (6.8)$$

donde \mathbf{J}_- y \mathbf{J}_+ son, respectivamente, las matrices Jacobianas calculadas a la izquierda y a la derecha de un punto de equilibrio en cuestión.

6.3. Equilibrio y Estabilidad del Servosistema Neumático

El equilibrio del servomecanismo neumático en lazo abierto se determina a partir de su modelo dinámico definido por las ecuaciones (4.36)-(4.40), teniendo en cuenta las siguientes suposiciones:

† Los procesos termodinámicos en los volúmenes de control son isotérmicos ($n = 1$).

† El flujo de aire se encuentra en régimen subsónico.

† El actuador trabaja sin carga.

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones resultante, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, con $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$ y $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, es:

$$\dot{x}_1 = \frac{\frac{RT_{a0}}{A_e} \left(A_{rs1}(u) f \left(P_s, T_s, \frac{x_1}{P_s} \right) - A_{r5}(u) f \left(x_1, T_a, \frac{P_0}{x_1} \right) \right) - x_1 x_4}{x_3 + x_{ar} + \frac{V_{m1}}{A_e}} \quad (6.9)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-\frac{RT_{b0}}{A_e} \left(A_{r3}(u) f \left(x_2, T_b, \frac{P_0}{x_2} \right) - A_{rs2}(u) f \left(P_s, T_s, \frac{x_2}{P_s} \right) \right) + x_2 x_4}{L - x_3 + x_{br} + \frac{V_{m2}}{A_e}} \quad (6.10)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (6.11)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{A_e (x_1 - x_2) - F_f(x_4, x_5)}{m_e} \quad (6.12)$$

$$\dot{x}_5 = x_4 - \frac{\sigma_0 |x_4|}{g(x_4)} x_5 \quad (6.13)$$

donde

$$f \left(P_u, T_u, \frac{P_d}{P_u} \right) = P_u C \rho_n \sqrt{\frac{T_n}{T_u}} \sqrt{1 - \left(\frac{P_d - b}{1 - b} \right)^2}$$

De acuerdo con el teorema 6.1, el equilibrio del sistema se obtiene igualando a cero el anterior sistema de ecuaciones y resolviendo para las variables de estado.

6.3.1. Equilibrio Pre-deslizamiento

En esta situación de equilibrio pre-deslizamiento, $\mathbf{x}^{eq} = [x_1^{eq}, x_2^{eq}, x_3^{eq}, x_4^{eq}, x_5^{eq}]^T$, está representado por:

$$x_1^{eq} = \frac{\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_2 + \epsilon_3}}{\epsilon_4} \quad (6.14)$$

$$x_2^{eq} = \frac{\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_2 + \epsilon_3}}{\epsilon_4} \quad (6.15)$$

$$x_3^{eq} = x_3, \quad x_3 \in [0, L] \quad (6.16)$$

$$x_4^{eq} = 0 \quad (6.17)$$

$$x_5^{eq} = \frac{A_e (x_1^{eq} - x_2^{eq})}{\sigma_0} \quad (6.18)$$

donde

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= b (A_{rs_1}^2(u)P_s T_{a_0} - A_{r_5}^2(u)P_0 T_s) \\ \epsilon_2 &= (b^2 - 2b + 1) \left[(A_{rs_1}^2(u)P_s T_{a_0})^2 + (A_{r_5}^2(u)P_0 T_s)^2 \right] \\ \epsilon_3 &= A_{rs_1}^2(u)A_{r_5}(u)^2 T_s T_{a_0} \left[P_s^2 (4b^2 - 4b + 1) + P_0^2 - 2b^2 P_s P_0 \right] \\ \epsilon_4 &= A_{rs_1}^2(u)T_{a_0} - (2b - 1) A_{r_5}^2(u)T_s\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= b (A_{rs_2}^2(u)P_s T_{b_0} - A_{r_3}^2(u)P_0 T_s) \\ \epsilon_2 &= (b^2 - 2b + 1) \left[(A_{rs_2}^2(u)P_s T_{b_0})^2 + (A_{r_3}^2(u)P_0 T_s)^2 \right] \\ \epsilon_3 &= A_{rs_2}(u)^2 A_{r_3}(u)^2 T_s T_{b_0} \left[P_s^2 (4b^2 - 4b + 1) + P_0^2 - 2b^2 P_s P_0 \right] \\ \epsilon_4 &= A_{rs_2}^2(u)T_{b_0} - (2b - 1) A_{r_3}^2(u)T_s\end{aligned}$$

La ecuación (6.16) indica la presencia de un subespacio de *equilibrio unidimensional*, puesto que x_3 puede adoptar cualquier valor en el intervalo $0 \leq x_3 \leq L$, sin que se altere el equilibrio para los demás estados. El émbolo permanece estático si $|x_5^{eq}| \leq \frac{F_s}{\sigma_0}$ [68], por lo tanto, el voltaje aplicado para u que satisface esta condición se encuentra dentro del intervalo $[u_a, u_b] = [4.748, 5.335] V$. La figura 6.3 muestra el equilibrio pre-deslizamiento del servosistema neumático con $|x_5^{eq}| \leq \frac{F_s}{\sigma_0}$. En esta situación de equilibrio el cilindro forma dos cámaras a cada lado del émbolo, el volumen V de cada cámara depende de la posición de equilibrio del émbolo x_3^{eq} . El comportamiento en estado estable de x_1 y x_2 , mostrado en la figura 6.3(a), no depende de la *capacitancia*² c , de cada cámara, la cual puede expresarse como:

$$c_j(x_3^{eq}) = \frac{V_j(x_3^{eq})}{RT} \quad (6.19)$$

donde $j = 1$ para la cámara A y $j = 2$ para la cámara B del cilindro. Por lo tanto, los equilibrios x_1^{eq} y x_2^{eq} no dependen de la posición x_3^{eq} con $x_3^{eq} \in [0, L]$, y coinciden con la función presión-sígnal de la válvula conectada a dos cámaras de volumen constante (véase la figura 6.4). El equilibrio x_3^{eq} puede adoptar cualquier valor dentro del intervalo $[0, L]$ para un valor de voltaje aplicado u dentro del intervalo $[u_a, u_b]$, formando así una región de equilibrio, tal como se indica en la figura 6.3(b). La figura 6.3(c) muestra el equilibrio x_4^{eq} , el cual es invariante e igual a cero para todo el intervalo $[u_a, u_b]$. El equilibrio x_5^{eq} adopta valores negativos y positivos según el sentido de la fuerza efectiva en el émbolo $A_e(x_1^{eq} - x_2^{eq})$ que depende de la diferencia de presiones, tal como se muestra en la figura 6.3(d). El valor teórico

²En un recipiente de presión neumática, la capacitancia se define como el cambio de la masa de aire en el recipiente, requerido para hacer un cambio unitario en la presión.

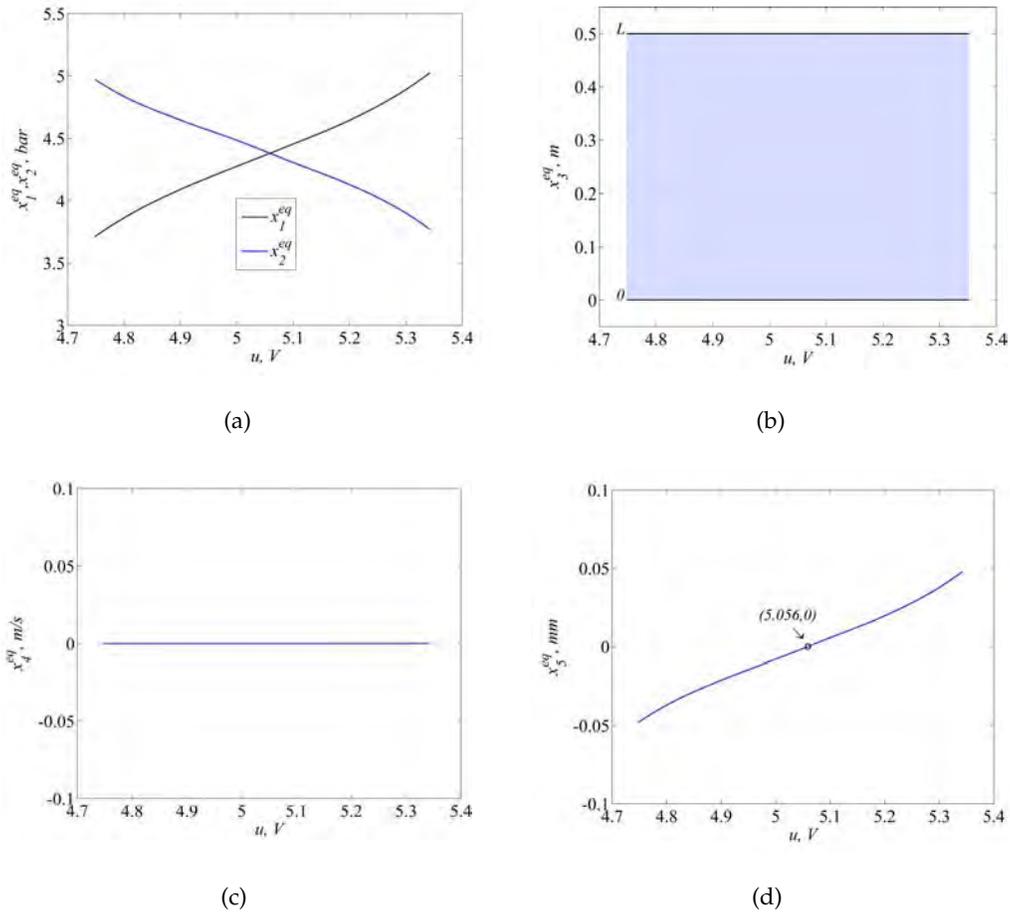


Figura 6.3: Equilibrio pre-deslizamiento del sistema con $|x_5^{eq}| \leq \frac{F_s}{\sigma_0}$. (a) Equilibrios x_1^{eq} y x_2^{eq} ; (b) Equilibrio x_3^{eq} ; (c) Equilibrio x_4^{eq} ; (d) Equilibrio x_5^{eq}

del voltaje para la posición media de la válvula u^* , para el cual se cumple que $x_1^{eq} = x_2^{eq}$, $x_3^{eq} = x_3$, $x_4^{eq} = 0$ y $x_5^{eq} = 0$, corresponde al punto de cruce por cero del equilibrio x_5^{eq} , para este punto, el voltaje obtenido es $u^* = 5.056$ V.

Estabilidad.

Para determinar la estabilidad local del servosistema en equilibrio pre-deslizamiento se aplicó el método indirecto de Lyapunov. La matriz Jacobiana del sistema evaluada en el punto de equilibrio está definida como:

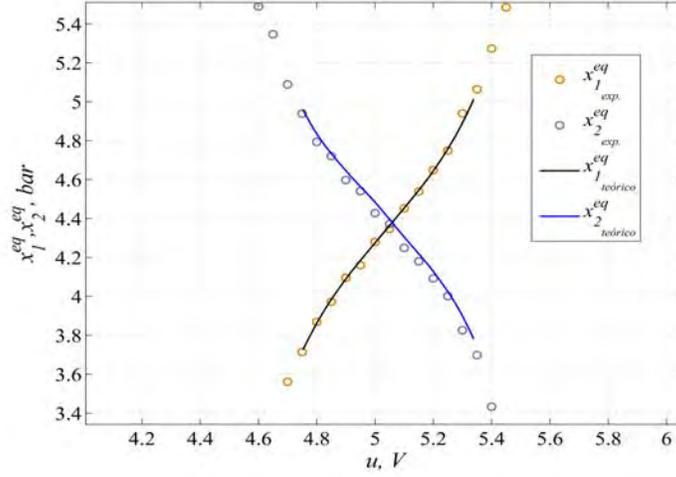


Figura 6.4: Equilibrios x_1^{eq} y x_2^{eq} frente a la función presión-senal de la válvula

$$\mathbf{J}_0 = \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f}_{\{\mathbf{x}^{eq}\}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1}{\partial x_5} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_5} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} & \frac{\partial f_4}{\partial x_5} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5}{\partial x_4} & \frac{\partial f_5}{\partial x_5} \end{pmatrix} \{\mathbf{x}^{eq}\}$$

donde $\mathbf{x}^{eq} = [x_1^{eq}, x_2^{eq}, x_3^{eq}, x_4^{eq}, x_5^{eq}]^T$. Las derivadas parciales que conforman el Jacobiano están descritas por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\left[\frac{RT_{a0}}{A_e} \left(A_{rs1}(u) \frac{\partial f}{\partial P_d} \left(P_s, T_s, \frac{x_1}{P_s} \right) - A_{r5}(u) \frac{\partial f}{\partial P_u} \left(x_1, T_a, \frac{P_0}{x_1} \right) \right) - x_4 \right]}{x_3 + x_{ar} + \frac{V_{m1}}{A_e}} \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0 \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = - \frac{\left[\frac{RT_{a0}}{A_e} \left(A_{rs1}(u) f \left(P_s, T_s, \frac{x_1}{P_s} \right) - A_{r5}(u) f \left(x_1, T_a, \frac{P_0}{x_1} \right) \right) - x_1 x_4 \right]}{\left(x_3 + x_{ar} + \frac{V_{m1}}{A_e} \right)^2} \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = - \frac{x_1}{x_3 + x_{ar} + \frac{V_{m1}}{A_e}} \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_5} = 0 \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\left[-\frac{RT_{b0}}{A_e} \left(A_{r3}(u) \frac{\partial f}{\partial P_u} \left(x_2, T_b, \frac{P_0}{x_2} \right) - A_{rs2}(u) \frac{\partial f}{\partial P_d} \left(P_s, T_s, \frac{x_2}{P_s} \right) \right) + x_4 \right]}{L - x_3 + x_{br} + \frac{V_{m2}}{A_e}} \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\left[-\frac{RT_{b0}}{A_e} \left(A_{r3}(u) f \left(x_2, T_b, \frac{P_0}{x_2} \right) - A_{rs2}(u) f \left(P_s, T_s, \frac{x_2}{P_s} \right) \right) + x_2 x_4 \right]}{\left(L - x_3 + x_{br} + \frac{V_{m2}}{A_e} \right)^2} \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4} = \frac{x_2}{L - x_3 + x_{br} + \frac{V_{m2}}{A_e}} \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_5} = 0 \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0 \quad (6.30)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0 \quad (6.31)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0 \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_4} = 1 \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_5} = 0 \quad (6.34)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \frac{A_e}{m_e} \quad (6.35)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_2} = -\frac{A_e}{m_e} \quad (6.36)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3} = 0 \quad (6.37)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_4} = -\frac{1}{m_e} \frac{\partial F_f(x_4, x_5)}{\partial x_4} \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_5} = -\frac{1}{m_e} \frac{\partial F_f(x_4, x_5)}{\partial x_5} \quad (6.39)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_1} = 0 \quad (6.40)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_2} = 0 \quad (6.41)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_3} = 0 \quad (6.42)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_4} = H(x_4, x_5) \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_5} = -\frac{\sigma_0 |x_4|}{g(x_4)} \quad (6.44)$$

con

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial P_u} \left(P_u, T_u, \frac{P_d}{P_u} \right) &= \frac{\frac{P_d}{P_u} C \rho_n \sqrt{\frac{T_n}{T_u}} \left(\frac{P_d}{P_u} - b \right)}{(1-b)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{P_d}{P_u} - b}{1-b} \right)^2}} + \frac{f \left(P_u, T_u, \frac{P_d}{P_u} \right)}{P_u} \\ \frac{\partial f}{\partial P_d} \left(P_u, T_u, \frac{P_d}{P_u} \right) &= - \frac{C \rho_n \sqrt{\frac{T_n}{T_u}} \left(\frac{P_d}{P_u} - b \right)}{(1-b)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{P_d}{P_u} - b}{1-b} \right)^2}} \\ \frac{\partial F_f(x_4, x_5)}{\partial x_4} &= \sigma_1 H(x_4, x_5) + B \\ \frac{\partial F_f(x_4, x_5)}{\partial x_5} &= \sigma_0 \left(1 - \frac{\sigma_1 |x_4|}{g(x_4)} \right)\end{aligned}$$

donde

$$H(x_4, x_5) = 1 - \sigma_0 x_5 \left(\frac{\text{sgn}(x_4)}{g(x_4)} - \frac{|x_4| g'(x_4)}{g^2(x_4)} \right)$$

La linealización del modelo al rededor de un punto de equilibrio arbitrario recibe especial atención puesto que el modelo de fricción no es diferenciable en cero debido a la presencia de la función valor absoluto de la velocidad $|x_4|$. Retomando lo expuesto en el capítulo 3, en lo concerniente a la linealización del modelo de fricción, se tiene que para el equilibrio pre-deslizamiento, la linealización corresponde al caso donde $x_4^{eq} = 0$ y $x_5^{eq} \neq 0$. Por lo tanto, la función $H(x_4, x_5)$ se evalúa como:

$$H(\delta x_4, x_5^{eq}) = \begin{cases} 1 - \frac{\sigma_0 x_5^{eq}}{g(0^+)} & \text{si } \delta x_4 > 0 \\ 1 + \frac{\sigma_0 x_5^{eq}}{g(0^-)} & \text{si } \delta x_4 < 0 \end{cases}$$

donde $g(0^+)$ y $g(0^-)$ denotan los valores de la función $g(x_4)$ evaluada para velocidades ligeramente mayores y menores que cero, respectivamente. El Jacobiano generalizado evaluado en el punto de equilibrio queda expresado como:

$$\tilde{\mathbf{J}}_{0_q} = (1-q)\mathbf{J}_{0_-} + q\mathbf{J}_{0_+}, \quad 0 \leq q \leq 1 \quad (6.45)$$

donde \mathbf{J}_{0_-} y \mathbf{J}_{0_+} son los Jacobianos evaluados a la izquierda y a la derecha de $x_4^{eq} = 0$, respectivamente. Por lo tanto, la matriz Jacobiana generalizada del servosistema neumático

en una matriz 5×5 , la cual depende del voltaje aplicado u , del parámetro de convexidad q y del valor que adopte el equilibrio x_3^{eq} .

Los valores propios o autovalores del sistema linealizado se determinan resolviendo el polinomio característico resultante de la ecuación:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{J}}_{0,q}) = 0 \quad (6.46)$$

Variando u en el intervalo $[u_a, u_b]$, la solución numérica de la ecuación (6.54) permite establecer que los autovalores λ_1 y λ_2 varían con u y q , en cambio los autovalores λ_3 y λ_4 varían con u y x_3^{eq} , el autovalor λ_5 es invariante e igual a cero. La figura 6.5 muestra el comportamiento de la parte real de los autovalores $\text{Re}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, 5$ frente al voltaje aplicado u . La figura 6.5(a) muestra el comportamiento de $\text{Re}(\lambda_1)$ vs. u , determinado para 20 valores de q dentro del intervalo $[0, 1]$. Como se puede observar en la figura, las curvas de la parte real de los autovalores $\text{Re}(\lambda_1)$ forman dos regiones comprendidas entre $\text{Re}(\lambda_1)$ para $q = 0$ y $\text{Re}(\lambda_1)$ para $q = 1$, y se encuentran a cada lado de $u^* = 5.06 \text{ V}$, puesto que todas las curvas se cruzan en dicho valor. La figura 6.5(b) muestra el comportamiento de la parte real de los autovalores $\text{Re}(\lambda_2)$ frente al voltaje u dentro del intervalo $[u_a, u_b]$. Las curvas de $\text{Re}(\lambda_2)$ se comportan de manera similar a las de $\text{Re}(\lambda_1)$, formando dos regiones a cada lado de u^* . El comportamiento de la parte real de los autovalores $\text{Re}(\lambda_3)$ vs. u su muestra en la figura 6.5(c), determinado para 20 valores del equilibrio x_3^{eq} en el intervalo $[0, L]$. $\text{Re}(\lambda_3)$ forma una región comprendida entre $\text{Re}(\lambda_3)$ para $x_3^{eq} = 0$ y $\text{Re}(\lambda_3)$ para $x_3^{eq} = L$. La figura 6.5(d) muestra el comportamiento de la parte real $\text{Re}(\lambda_4)$ frente al voltaje u , el cual es semejante al comportamiento presentado por $\text{Re}(\lambda_3)$. La parte real de los autovalores $\text{Re}(\lambda_5)$ es invariante e igual a cero, como lo indica la figura 6.5(e). De las figuras 6.5(a) - 6.5(e) se puede comprobar la existencia del subespacio de equilibrio unidimensional debido a que $\text{Re}(\lambda_5)$ es invariante e igual a cero. Las regiones formadas por $\text{Re}(\lambda_1)$, $\text{Re}(\lambda_2)$, $\text{Re}(\lambda_3)$ y $\text{Re}(\lambda_4)$ se encuentra ubicadas por debajo de cero, por lo tanto, el subespacio de equilibrio unidimensional para el equilibrio pre-deslizamiento con $|x_5^{eq}| \leq \frac{F_s}{\sigma_0}$ es *asintóticamente estable*.

Estabilidad con modelo suave. La función valor absoluto de la velocidad $|x_4|$, presente en el modelo de fricción del servosistema puede aproximarse por el modelo suave:

$$m(x_4) = \frac{2x_4 \text{atan}(k_v x_4)}{\pi} \approx |x_4| \quad (6.47)$$

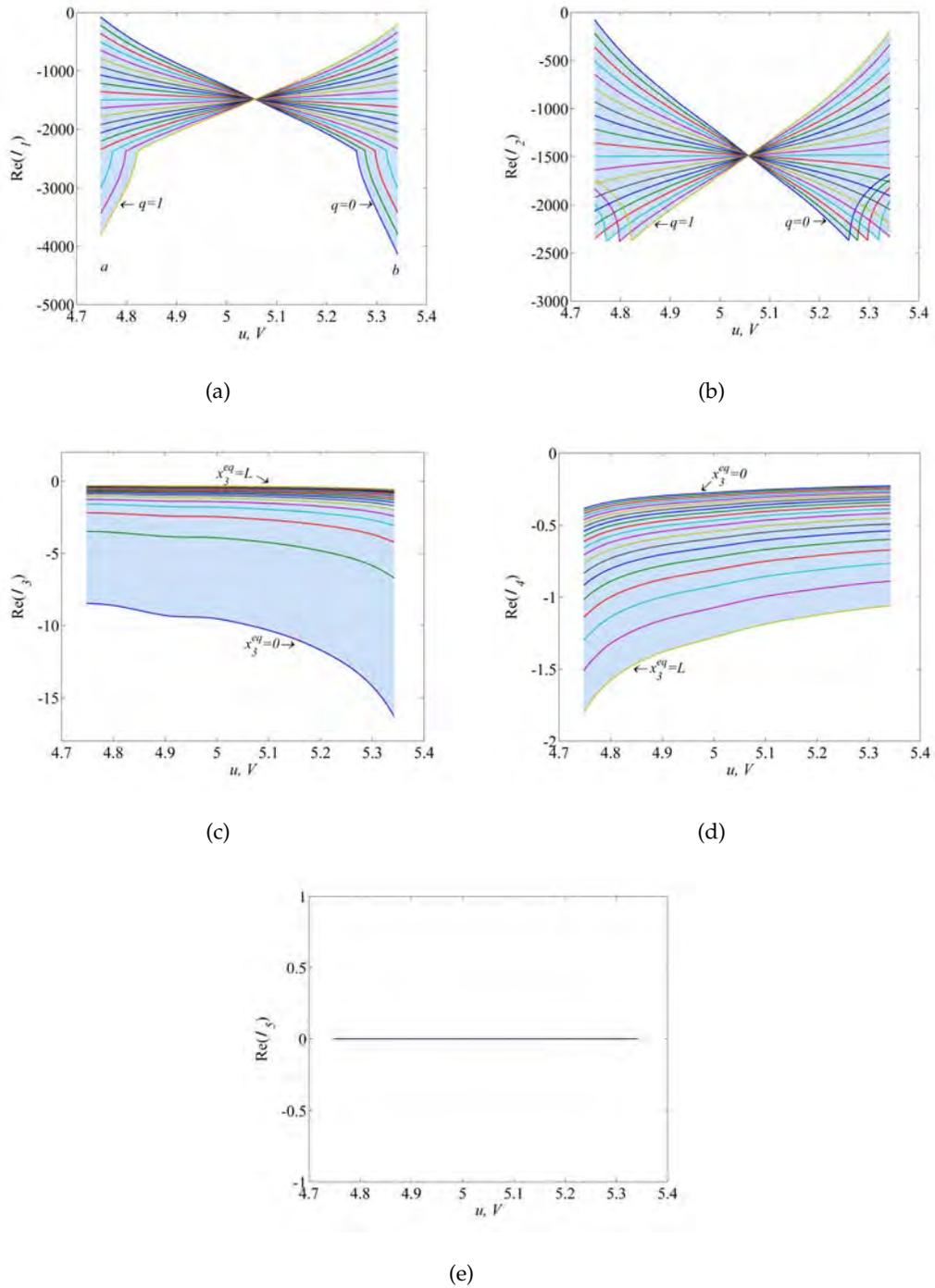


Figura 6.5: Comportamiento de la parte real de los valores propios $\text{Re}(\lambda_i)$ frente al voltaje aplicado u . (a) $\text{Re}(\lambda_1)$ vs. u ; (b) $\text{Re}(\lambda_2)$ vs. u ; (c) $\text{Re}(\lambda_3)$ vs. u ; (d) $\text{Re}(\lambda_4)$ vs. u ; (e) $\text{Re}(\lambda_5)$ vs. u

donde k_v es una constante positiva. Por consiguiente, la dinámica para la variable de estado x_5 se puede escribir como:

$$\dot{x}_5 = x_4 - \sigma_0 \gamma(x_4) x_5 \quad (6.48)$$

donde $\gamma(x_4) = \frac{m(x_4)}{g(x_4)}$.

La matriz Jacobiana del sistema suavizado evaluada en el punto de equilibrio se define como:

$$\mathbf{J}_0^s = \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f}_{\{\mathbf{x}^{eq}\}}^s \quad (6.49)$$

donde \mathbf{f}^s es el vector de campo suave del sistema. Por lo tanto, las ecuaciones (6.38), (6.39), (6.43) y (6.44) se transforman en:

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_4} = -\frac{1}{m_e} [\sigma_1 (1 - \sigma_0 x_5 \gamma'(x_4)) + B] \quad (6.50)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_5} = -\frac{\sigma_0}{m_e} (1 - \sigma_1 \gamma(x_4)) \quad (6.51)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_4} = 1 - \sigma_0 x_5 \gamma'(x_4) \quad (6.52)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_5} = -\sigma_0 \gamma(x_4) \quad (6.53)$$

Los valores propios del sistema lineal aproximado correspondiente al sistema no-lineal suave se obtienen resolviendo el polinomio característico resultante de la ecuación:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}_0^s) = 0 \quad (6.54)$$

La figura 6.6 muestra el comportamiento de la parte real de los autovalores $\text{Re}(\lambda_i)$ del sistema suavizado frente al voltaje aplicado u , donde $\text{Re}(\lambda_1)$ y $\text{Re}(\lambda_2)$ son iguales entre si, $\text{Re}(\lambda_3)$ y $\text{Re}(\lambda_4)$ forman dos regiones, respectivamente, dependiendo del valor que tome el equilibrio x_3^{eq} en el intervalo $[0, L]$, y $\text{Re}(\lambda_5)$ es invariante e igual a cero. A partir de la figura 6.6, se comprueba nuevamente que para el equilibrio pre-deslizamiento con $|x_5^{eq}| \leq \frac{F_s}{\sigma_0}$, existe un subespacio de equilibrio asintóticamente estable, ya que $\text{Re}(\lambda_5) = 0$, $\text{Re}(\lambda_1)$ y $\text{Re}(\lambda_2)$ son negativos, y las regiones formadas por $\text{Re}(\lambda_3)$ y $\text{Re}(\lambda_4)$ se encuentran por debajo de cero.

Teniendo en cuenta el análisis de estabilidad anterior, el equilibrio pre-deslizamiento es localmente estable si $|x_5| \leq \frac{F_s}{\sigma_0}$, fuera de esta condición el sistema puede entrar en dinámicas inestables. Al variar u dentro de $[4.5, 5.5] V$, q dentro de $[0, 1]$, y al calcular los valores propios del sistema utilizando el Jacobiano generalizado, se obtiene el comportamiento de la parte

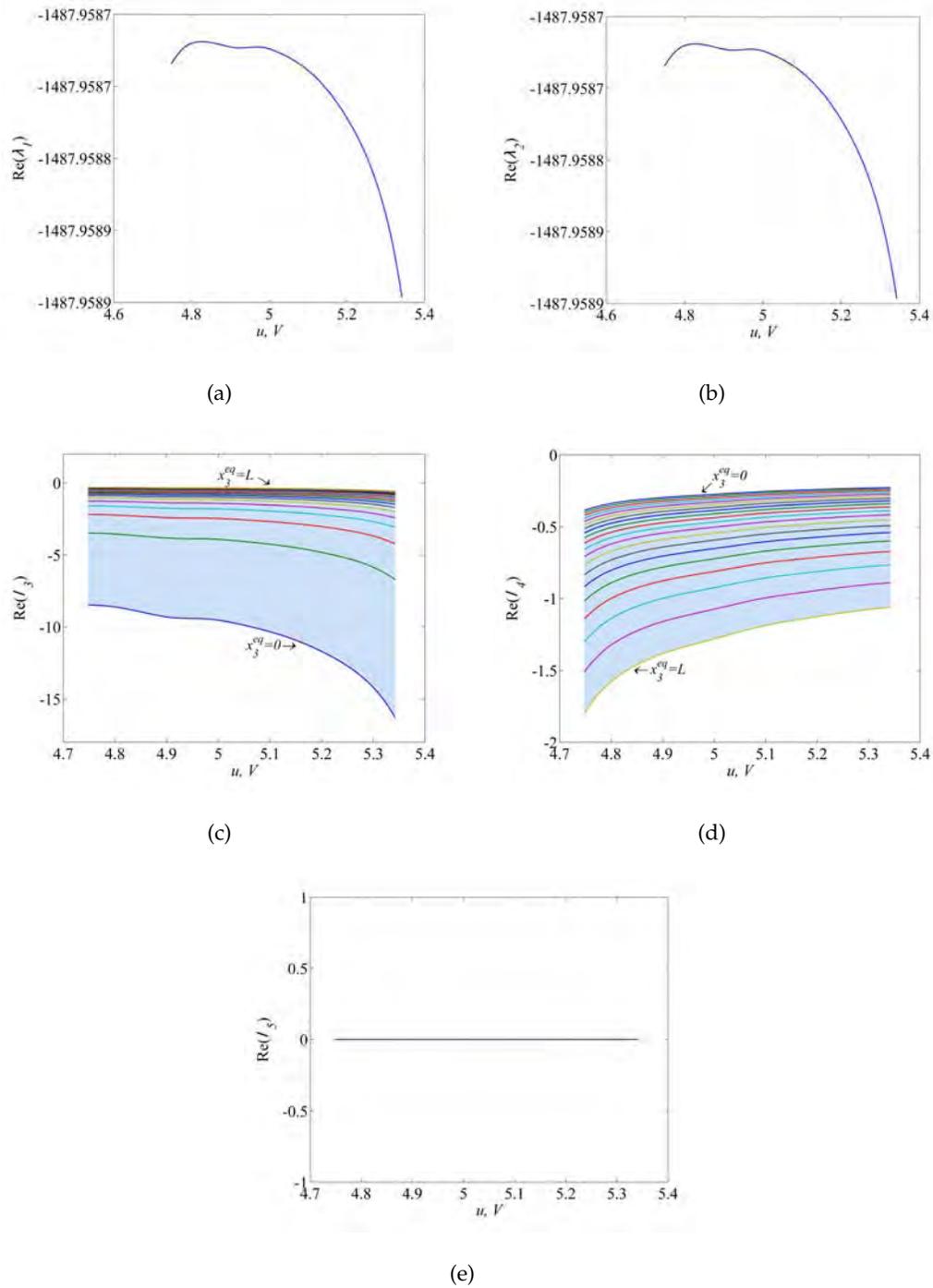


Figura 6.6: Comportamiento de la parte real de los valores propios $\text{Re}(\lambda_i)$ frente al voltaje aplicado u , para el sistema suave. (a) $\text{Re}(\lambda_1)$ vs. u ; (b) $\text{Re}(\lambda_2)$ vs. u ; (c) $\text{Re}(\lambda_3)$ vs. u ; (d) $\text{Re}(\lambda_4)$ vs. u ; (e) $\text{Re}(\lambda_5)$ vs. u

real $Re(\lambda_1)$ y $Re(\lambda_2)$ mostrado en la figura 6.7, donde la parte real $Re(\lambda_2)$ cruza el cero para $q = 0$ en $u = 5.337 V$ y $q = 1$ en $u = 4.745 V$, formándose así dos regiones por encima de cero, las cuales indican la presencia de dinámicas inestables en el servosistema neumático.

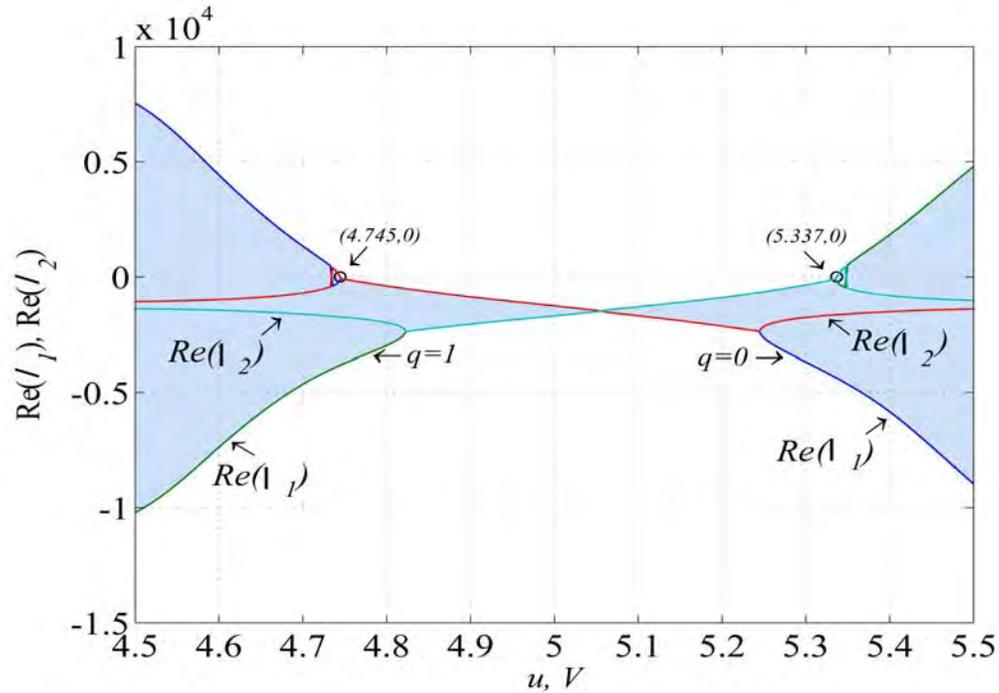


Figura 6.7: Comportamiento de $Re(\lambda_1)$ y $Re(\lambda_2)$ para $4.5 \leq u \leq 5.5 V$

6.3.2. Equilibrio en los Extremos

En esta situación de equilibrio el émbolo se encuentra en contacto con las tapas laterales de los extremos de la camisa del cilindro, sometido a la acción de la fuerza efectiva debido a la diferencia de presiones $A_e(x_1 - x_2)$, la fuerza de fricción F_f y la fuerza de impacto F_i . La ecuación dinámica para x_4 se tiene como:

$$\dot{x}_4 = \frac{A_e(x_1 - x_2) - F_f(x_4, x_5) - F_i}{m_e} \quad (6.55)$$

Ahora, si $x_2 > x_1$, y $|A_e(x_1 - x_2)| > F_{sn}$, entonces $F_i = k_e x_3 + B_e x_4$, con $x_3 < 0$. De (6.13) se puede establecer que:

$$x_5 = \frac{g(x_4)}{\sigma_0} \frac{x_4}{|x_4|} \quad (6.56)$$

Por consiguiente, el equilibrio x_5^{eq} se obtiene como:

$$x_5^{eq} = \lim_{x_4 \rightarrow 0^-} \frac{F_c + (F_s - F_c)e^{-\left(\frac{x_4}{v_s}\right)^2}}{\sigma_0} \frac{x_4}{|x_4|} = -\frac{F_s}{\sigma_0} = \frac{F_{s_n}}{\sigma_{0_n}} \quad (6.57)$$

Así, el equilibrio del sistema en el extremo izquierdo del cilindro queda expresado por las ecuaciones:

$$x_1^{eq} = \frac{\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_2 + \epsilon_3}}{\epsilon_4} \quad (6.58)$$

$$x_2^{eq} = \frac{\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}}{\varepsilon_4} \quad (6.59)$$

$$x_3^{eq} = \frac{A_e(x_1^{eq} - x_2^{eq}) - F_{s_n}}{k_e} \quad (6.60)$$

$$x_4^{eq} = 0 \quad (6.61)$$

$$x_5^{eq} = \frac{F_{s_n}}{\sigma_{0_n}} \quad (6.62)$$

El equilibrio para en el extremo izquierdo del cilindro se muestra en la figura 6.8 La estabilidad del equilibrio en el extremo izquierdo se determina a partir del Jacobiano del sistema suavizado \mathbf{J}_0^s , cuyos valores propios presentan en sus partes reales $\text{Re}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, 5$, el comportamiento mostrado en la figura 6.9. Puesto que $\text{Re}(\lambda_5) = 0$, y $\text{Re}(\lambda_1)$, $\text{Re}(\lambda_2)$, $\text{Re}(\lambda_3)$ y $\text{Re}(\lambda_4)$ son negativos, entonces, el servosistema neumático presenta un equilibrio asintóticamente estable en el extremo izquierdo, dentro del intervalo $0 \leq u < 4.744 V$.

Si $x_1 > x_2$ y $|A_e(x_1 - x_2)| > F_{s_p}$, entonces $F_i = k_e(x_3 - L) + B_e x_4$, con $x_3 > 0$. El equilibrio para el extremo derecho del cilindro se puede escribir como:

$$x_1^{eq} = \frac{\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_2 + \epsilon_3}}{\epsilon_4} \quad (6.63)$$

$$x_2^{eq} = \frac{\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}}{\varepsilon_4} \quad (6.64)$$

$$x_3^{eq} = \frac{A_e(x_1^{eq} - x_2^{eq})}{k_e} + L \quad (6.65)$$

$$x_4^{eq} = 0 \quad (6.66)$$

$$x_5^{eq} = \frac{F_{s_p}}{\sigma_{0_p}} \quad (6.67)$$

En las figuras 6.10 y 6.11 se muestran respectivamente el equilibrio en el extremo derecho del servosistema neumático y el comportamiento de la parte real de los autovalores obtenidos a partir del Jacobiano del sistema suavizado \mathbf{J}_0^s . El equilibrio en el extremo derecho tiene un comportamiento similar al del extremo izquierdo. Puesto que $\text{Re}(\lambda_5) = 0$, y $\text{Re}(\lambda_1)$, $\text{Re}(\lambda_2)$,

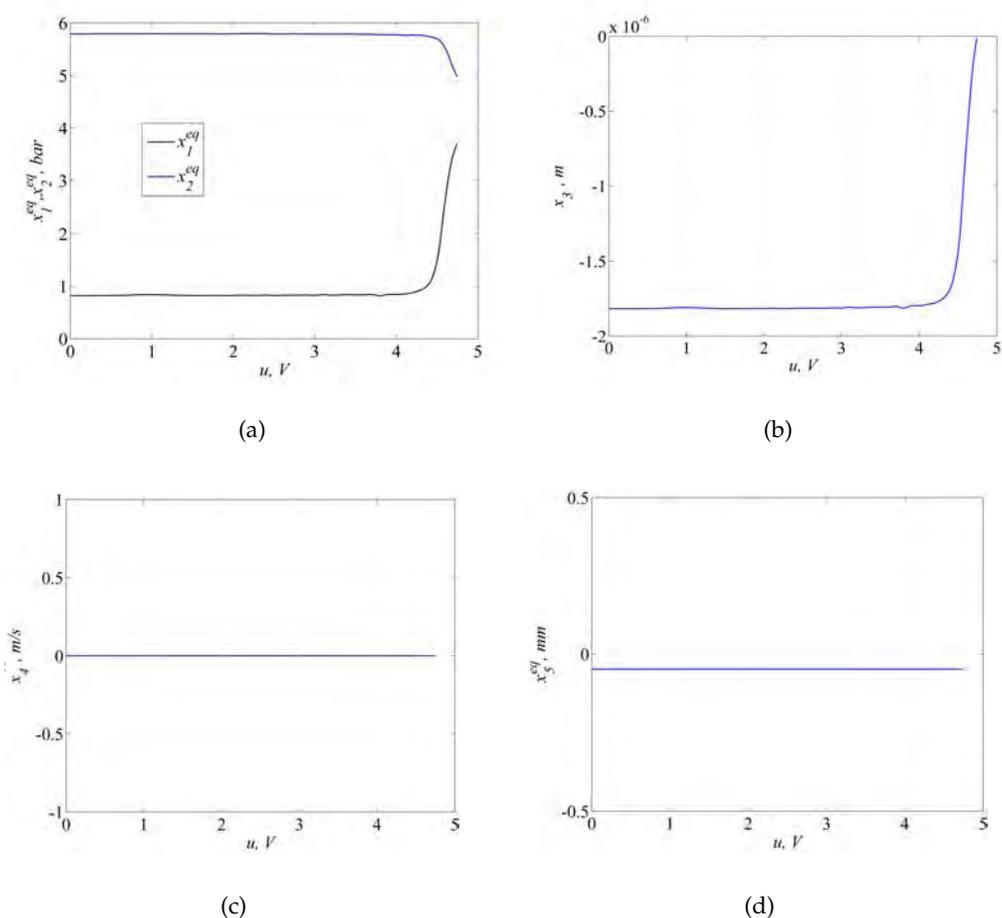


Figura 6.8: Equilibrio en el extremo izquierdo del cilindro. (a) Equilibrios x_1^{eq} , x_2^{eq} ; (b) Equilibrio x_3^{eq} ; (c) Equilibrio x_4^{eq} ; (d) Equilibrio x_5^{eq}

$\text{Re}(\lambda_3)$ y $\text{Re}(\lambda_4)$ son negativos, por lo tanto, el servosistema neumático presenta un equilibrio asintóticamente estable en el extremo derecho, dentro del intervalo $5.341 \leq u \leq 10$ V. El análisis de estabilidad local sobre los puntos de equilibrio en los extremos del cilindro neumático son corroborados por los resultados obtenidos en [69].

6.4. Comportamiento con Movimiento Uniforme

En esta situación el émbolo se desplaza a lo largo de la carrera del cilindro con velocidad uniforme y a la vez constante si $F_c \leq |A_e(x_1 - x_2)| < F_s$. Este comportamiento no corresponde a un equilibrio del sistema puesto que $x_4 \neq 0$.

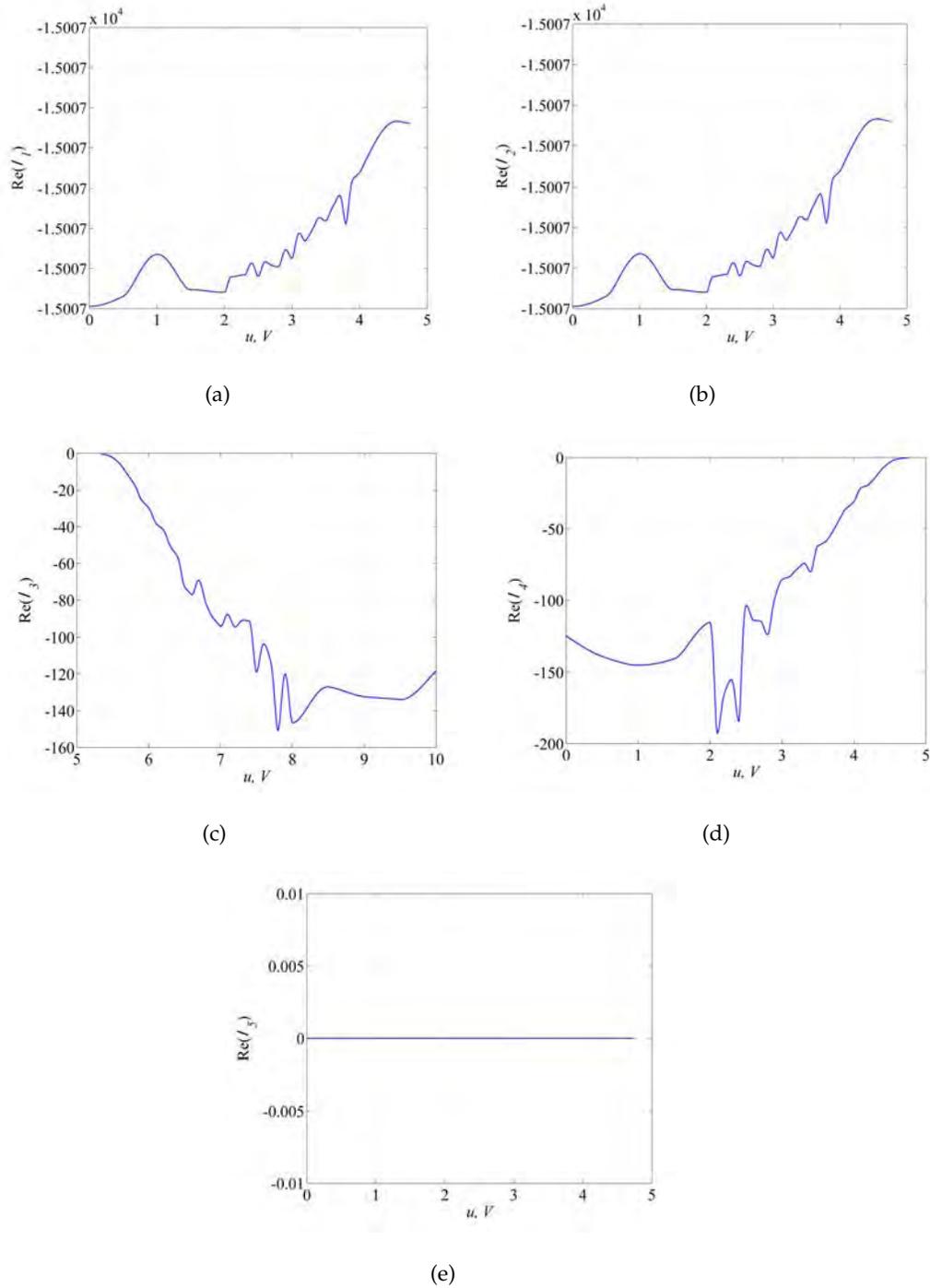


Figura 6.9: Comportamiento de la parte real de los autovalores $\text{Re}(\lambda_i)$ vs. u , para el equilibrio en el extremo izquierdo del cilindro. (a) $\text{Re}(\lambda_1)$ vs. u ; (b) $\text{Re}(\lambda_2)$ vs. u ; (c) $\text{Re}(\lambda_3)$ vs. u ; (d) $\text{Re}(\lambda_4)$ vs. u ; (e) $\text{Re}(\lambda_5)$ vs. u

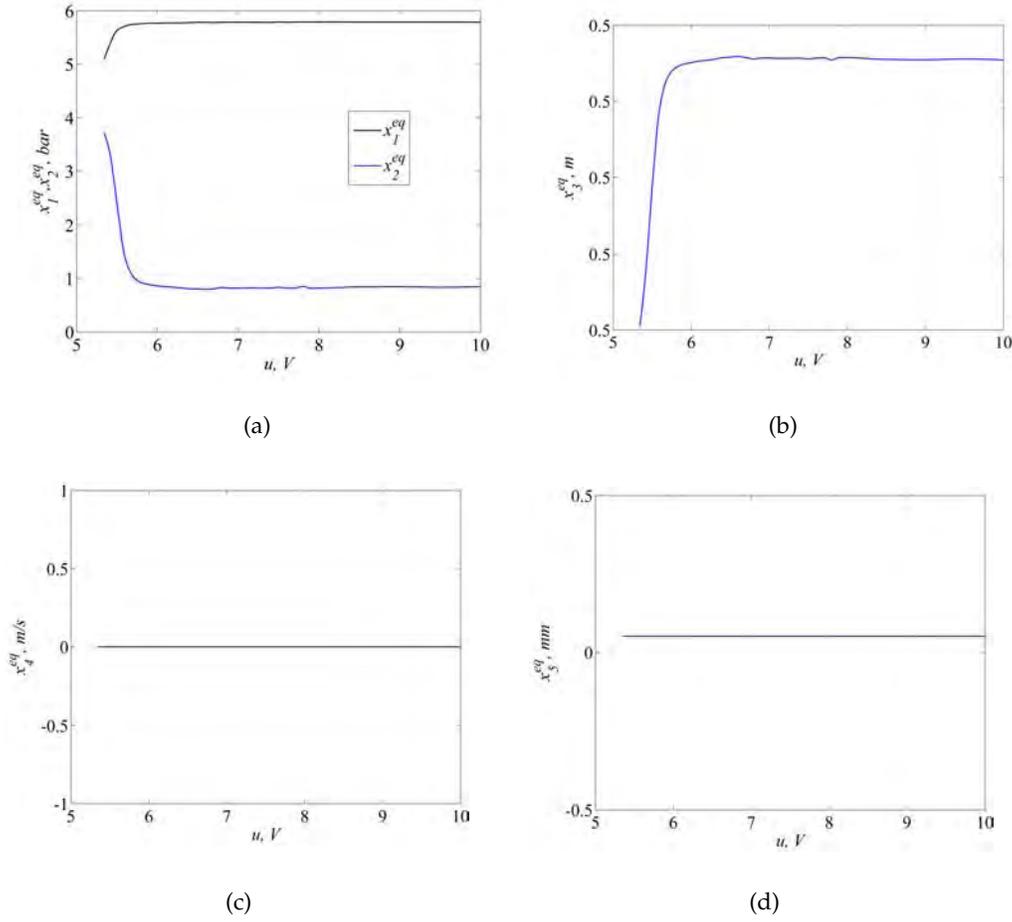


Figura 6.10: Equilibrio en el extremo derecho del cilindro. (a) Equilibrios x_1^{eq}, x_2^{eq} ; (b) Equilibrio x_3^{eq} ; (c) Equilibrio x_4^{eq} ; (d) Equilibrio x_5^{eq}

En estado estacionario $\dot{x}_5 = 0$, por lo tanto:

$$x_{4_{ss}} = \frac{x_{5_{ss}}}{\sigma_0} \text{sgn}(x_{4_{ss}})$$

y la fuerza de fricción en estado estacionario se puede escribir como:

$$F_{ss}(x_{4_{ss}}) = g(x_{4_{ss}}) \text{sgn}(x_{4_{ss}}) + Bx_{4_{ss}} \quad (6.68)$$

De acuerdo con [53, 36, 29], el émbolo empezará a deslizarse con velocidad constante si,

$$\frac{dF_{ss}}{dx_{4_{ss}}} > 0$$

donde

$$\frac{dF_{ss}}{dx_{4_{ss}}} = -\frac{2x_{4_{ss}}(F_s - F_c)e^{-\left(\frac{x_{4_{ss}}}{v_s}\right)^2} \text{sgn}(x_{4_{ss}})}{v_s^2} + B$$

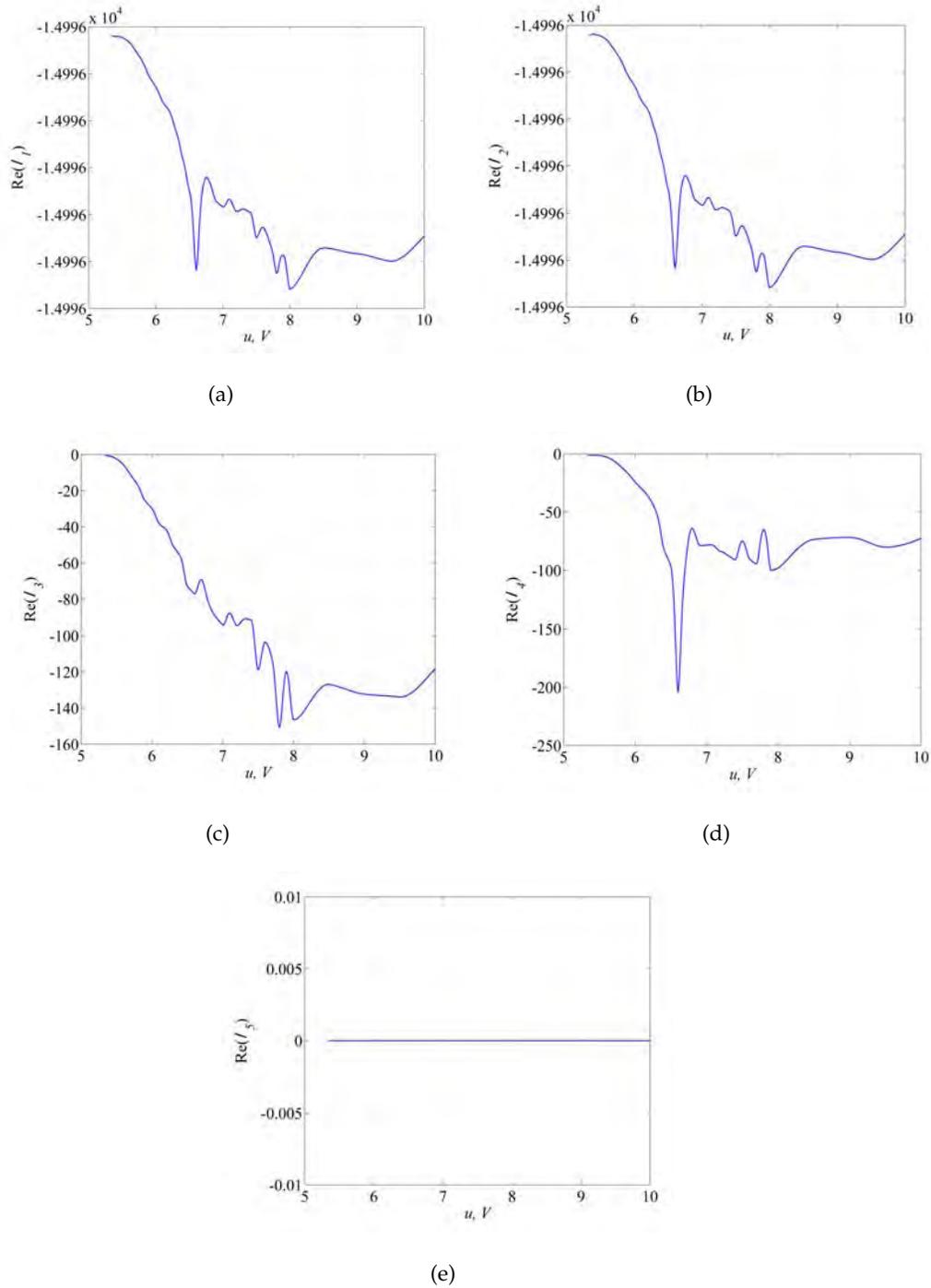


Figura 6.11: Comportamiento de la parte real de los autovalores $\text{Re}(\lambda_i)$ vs. u , para el equilibrio en el extremo derecho del cilindro. (a) $\text{Re}(\lambda_1)$ vs. u ; (b) $\text{Re}(\lambda_2)$ vs. u ; (c) $\text{Re}(\lambda_3)$ vs. u ; (d) $\text{Re}(\lambda_4)$ vs. u ; (e) $\text{Re}(\lambda_5)$ vs. u

con $x_{4_{ss}} \neq 0$. Para velocidades positivas ($x_{4_{ss}} > 0$) el émbolo empieza a deslizarse en forma estable para $x_{4_{ss}} > 0.0228 \text{ m/s}$, valor que se obtiene numéricamente de la gráfica 6.12.

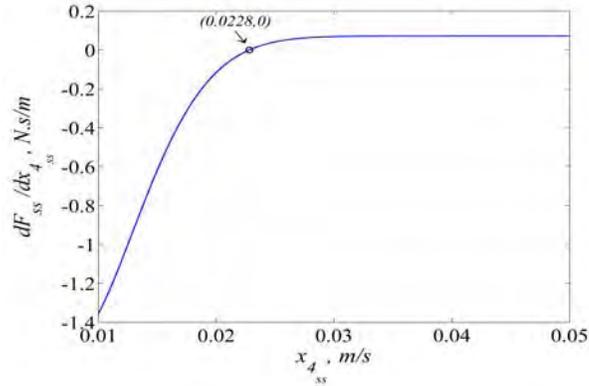


Figura 6.12: Variación de la fricción en estado estacionario para $x_4 > 0$

En forma similar, para velocidades negativas ($x_{4_{ss}} < 0$) el émbolo empieza a deslizarse en forma estable para $x_{4_{ss}} < -0.0280 \text{ m/s}$, tal como lo indica la figura 6.13.

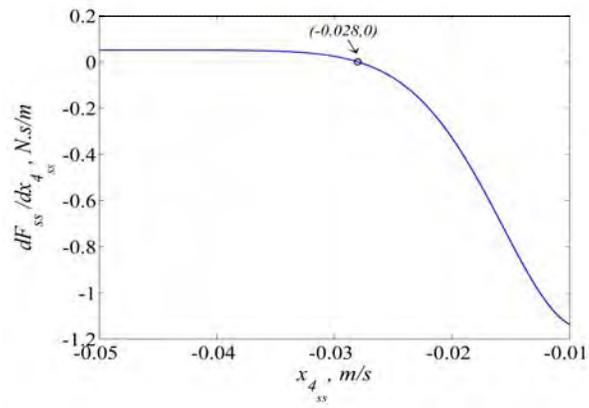


Figura 6.13: Variación de la fricción en estado estacionario para $x_4 < 0$

El comportamiento en estado estacionario con movimiento uniforme se muestra en la figura 6.14. Para velocidades negativas el émbolo se desplaza a velocidad constante en el rango $[u_c, u_d] = [4.396, 4.662] \text{ V}$; para velocidades positivas el émbolo se desplaza con velocidad constante en el rango $[u_e, u_f] = [5.391, 5.634] \text{ V}$.

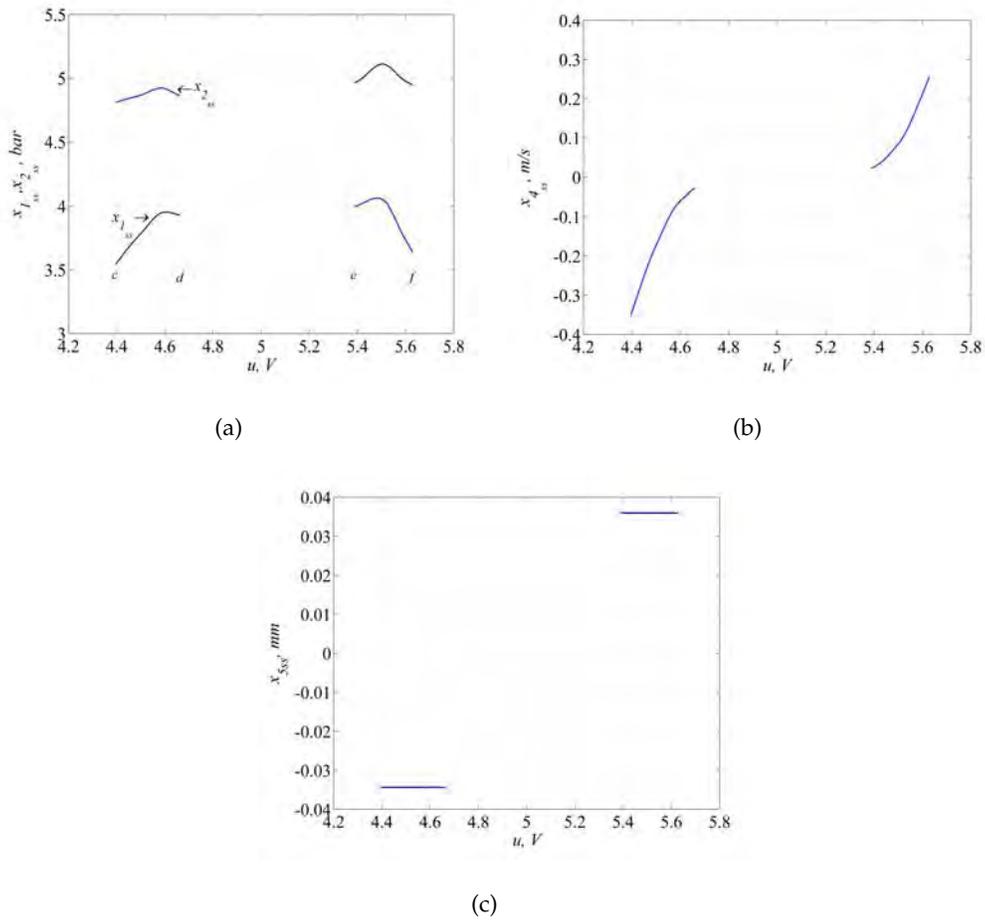


Figura 6.14: Comportamiento en estado estacionario con velocidad uniforme. (a) $x_{1,ss}$, $x_{2,ss}$ vs. u ; (b) $x_{4,ss}$ vs. u ; (c) $x_{5,ss}$ vs. u

6.5. Comportamiento Oscilatorio

La figura 6.15 muestra el mapa de velocidad en estado estacionario frente al voltaje u . En el intervalo $[u_a, u_b]$ la velocidad es cero puesto que allí se presenta el equilibrio pre-deslizamiento con $|x_5^{eq}| \leq \frac{F_s}{\sigma_0}$. En los intervalos $[u_c, u_d]$ y $[u_e, u_f]$ el émbolo se desplaza a velocidad constante. En los intervalos (u_d, u_a) y (u_b, u_e) el émbolo presenta un comportamiento caracterizado por la presencia de oscilaciones que pueden pertenecer al fenómeno adherencia-deslizamiento o tener carácter caótico. Según [40], los cilindros neumáticos cuando viajan a velocidades muy bajas, presentan oscilaciones debido a la interacción entre la fuerza motriz generada por la presión del aire y la fuerza de rozamiento del émbolo. Este

comportamiento es de vital importancia puesto que se debe evitar, sobre todo en tareas de posicionamiento.

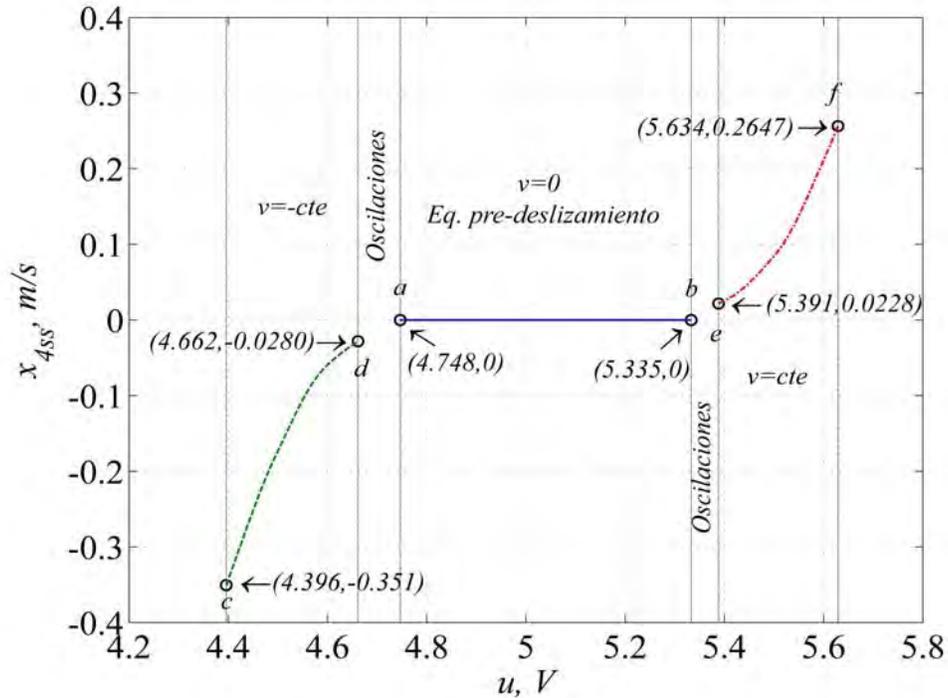


Figura 6.15: Comportamiento de la velocidad del émbolo x_4 frente al voltaje aplicado u

La figura 6.16 muestra el comportamiento oscilatorio del sistema con respecto al tiempo dentro del intervalo (u_d, u_a) , tanto en forma experimental, como aquel obtenido por simulación numérica. En esta figura se puede observar que los datos obtenidos por simulación numérica presentan cierta discrepancia con respecto a los datos experimentales, esto se debe principalmente a la variación de los parámetros de fricción con respecto al desplazamiento del émbolo, hecho en el que se hizo claridad en la validación del modelo. Las simulaciones numéricas junto con los resultados experimentales muestran cualitativamente una tendencia de aumento de la frecuencia en las oscilaciones a medida que voltaje aplicado u se traslada de los límites de la región donde la velocidad es cero hacia los límites donde empieza a deslizarse a velocidad constante. Esto se comprueba experimentalmente en la figura 6.17, donde se muestra el comportamiento dinámico del sistema en el intervalo (u_d, u_a) . Es claro que para $u = 4.74$ V la frecuencia de oscilación disminuye ya que éste voltaje está más cerca

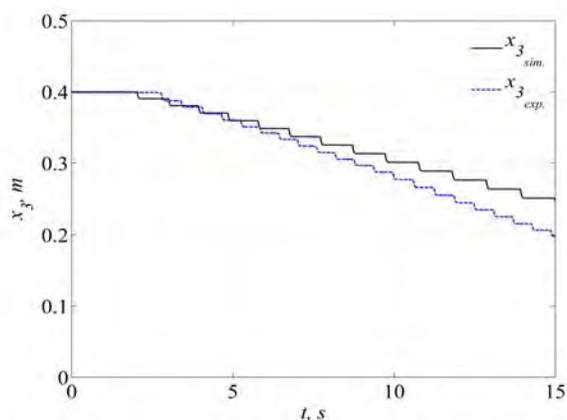


Figura 6.16: Comportamiento oscilatorio para $u = 4.70 V$

de u_a .

Según [40] el carácter de las oscilaciones es caótico, el cual se determina mediante la aplicación a los datos experimentales de tres índices de caos: el espectro de potencia, la función de auto-correlación y el máximo exponente de Lyapunov. Con el fin de determinar la naturaleza de las oscilaciones del cilindro en estudio, se aplicó el método del espectro de potencia a los datos obtenidos por simulación y experimentales. En la figura 6.18 se muestran los comportamientos oscilatorios de la velocidad obtenidos mediante simulación y experimentalmente cuando se aplica un voltaje de entrada $u = 4.70 V$, y los correspondientes espectros de potencia media. De acuerdo con [40, 64], en ambos casos, el espectro de potencia media corresponde a una señal de carácter caótico.

6.6. Resumen

El servomecanismo neumático de posicionamiento presenta en lazo abierto un equilibrio pre-deslizamiento caracterizado por un subespacio unidimensional asintóticamente estable para $|x_5^{eq}| \leq \frac{F_s}{\sigma_0}$, esto implica que el émbolo permanece estacionario dentro del intervalo para el voltaje de entrada $[u_a, u_b] = [4.748, 5.335] V$. Fuera de este intervalo el equilibrio se torna inestable.

En cada extremo de la carrera del cilindro neumático, el sistema presenta un equilibrio asintóticamente estable, siempre y cuando la fuerza de impacto F_i sea igual a la fuerza resultante debido a la diferencia de presiones y a la fricción en el émbolo.

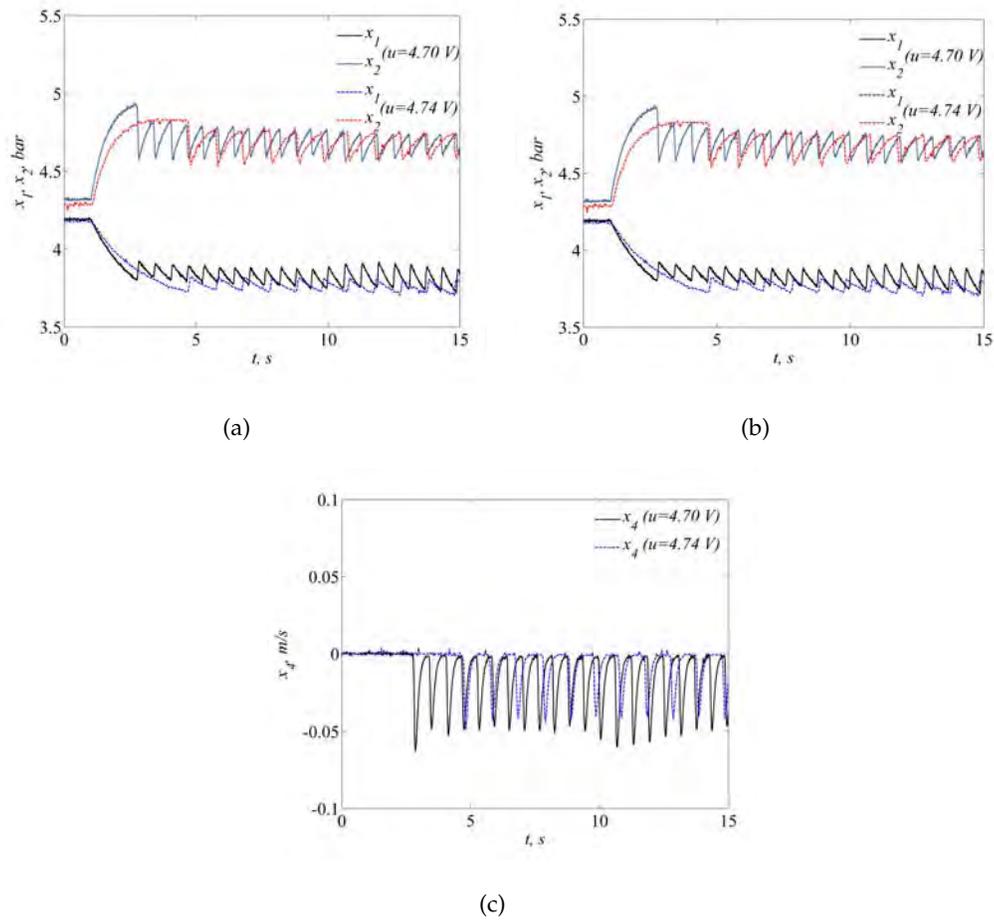


Figura 6.17: Comportamiento oscilatorio experimental frente a la variación del voltaje. (a) x_1, x_2 vs. t ; (b) x_3 vs. t ; (c) x_4 vs. t

El sistema presenta un comportamiento donde el émbolo se desplaza con velocidad uniforme. Este comportamiento no corresponde a un punto de equilibrio pese a que las presiones en el sistema x_1 y x_2 y la variable de fricción x_5 se mantienen estables. Este comportamiento se presenta en los intervalos del voltaje de entrada $[u_c, u_d] = [4.396, 4.662]$ V y $[u_e, u_f] = [5.391, 5.634]$ V.

El sistema además presenta un comportamiento oscilatorio en la transición entre el equilibrio predeslizamiento y el estado en donde se desplaza a velocidad uniforme. Estas oscilaciones se presentan en los intervalos del voltaje de entrada $(u_d, u_a) = (4.396, 4.748)$ y $(u_b, u_e) = (5.335, 5.634)$. De acuerdo con el análisis realizado a las oscilaciones, éstas presentan un comportamiento de carácter caótico.

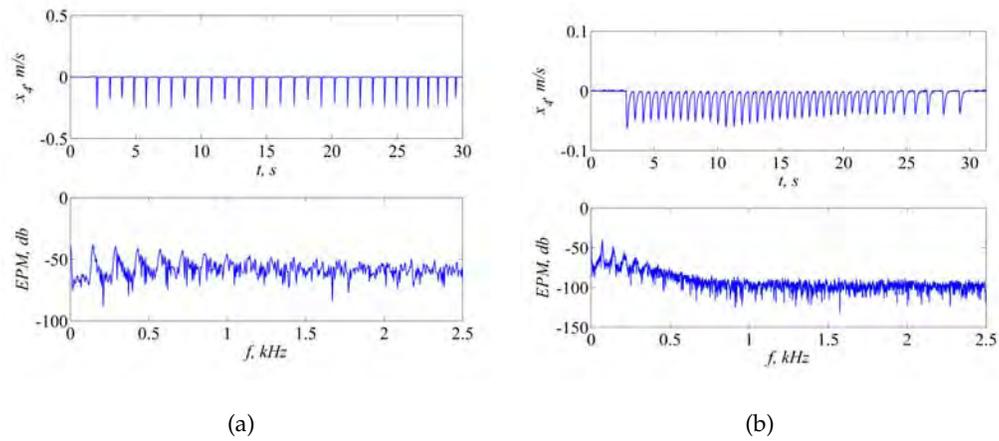


Figura 6.18: Movimiento oscilatorio y espectro de potencia. (a) Simulación; (b) Experimental

Se destaca la buena correspondencia del modelo con los resultados experimentales en el análisis del equilibrio del sistema.

Capítulo 7

Control No-lineal para Posicionamiento del Servomecanismo Neumático

EL CONTROL DE POSICIÓN en un servomecanismo neumático es un problema de gran importancia debido a las ventajas y aplicaciones que tienen estos sistemas en tareas de posicionamiento y manipulación de piezas. Sin embargo, factores como la compresibilidad del aire y la fricción, hacen que el diseño de una estrategia adecuada de control continúe siendo un reto, sobre todo cuando se requiere bastante precisión. En este capítulo se presenta en detalle el diseño de dos estrategias de control no-lineal, la primera basada en el método de *linealización por realimentación* y la segunda por *modo deslizante*.

7.1. Técnicas de Control No-lineal

En los últimos tiempos, las tareas de control de alguna variable en una planta o proceso han sido mejoradas en gran medida por las técnicas de control no-lineal. Factores como las no-linealidades, incluyendo aquellas de naturaleza discontinua que no admiten linealización, son compensadas en forma más efectiva mediante controladores no-lineales, garantizando más estabilidad en todo el rango de operación de la planta.

Una de las ventajas más importantes de las técnicas de control no-lineal es que permiten trabajar con modelos de plantas que contengan parámetros estimados con cierta incertidum-

bre. En general, el control no-lineal presenta un mejor desempeño comparado con algún método de control lineal, hecho que lo cataloga como una herramienta eficaz en la búsqueda de estrategias de control avanzadas para plantas de naturaleza compleja y de alta no-linealidad.

7.1.1. Linealización mediante Realimentación

La técnica no-lineal de linealización por realimentación se basa en la idea cancelar las no-linealidades en un sistema no-lineal de modo que la dinámica en lazo cerrado del sistema sea lineal [70, 71, 72, 73].

Linealización Entrada-Salida para Sistemas SISO

Una gran parte de sistemas no-lineales SISO (single input single output) pueden ser llevados a tener un comportamiento lineal entrada-salida por medio de la selección de una ley de control basada en linealización por realimentación [66]. Sea el sistema no-lineal SISO

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{7.1}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$, \mathbf{f} , \mathbf{g} son los vectores de campo en \mathfrak{R}^n y h es una función no-lineal suave¹. Si \mathbf{f} y \mathbf{g} son vectores de campo infinitamente diferenciables con series de Taylor convergentes, y además, si $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, un subconjunto de \mathfrak{R}^n abierto donde se encuentra \mathbf{x}^{eq} del sistema no controlado, tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{eq}) = 0$. Derivando y con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ &:= L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})u\end{aligned}\tag{7.2}$$

donde $L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}$ y $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}$ son las *derivadas de Lie* de h con respecto a \mathbf{f} y \mathbf{g} , respectivamente. Así, $L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})$ es una función que indica la razón de cambio de h a lo largo del flujo del vector de campo \mathbf{f} ; de igual manera para $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})$. Si $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})$ es diferente de cero para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, la ley de control por realimentación de estados u , está dada por:

$$u = \frac{1}{L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})} (-L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + v)\tag{7.3}$$

¹Función infinitamente diferenciable

de donde se obtiene el sistema lineal de primer orden que relaciona la nueva entrada v con la salida y :

$$\dot{y} = v \quad (7.4)$$

Por lo tanto, existen funciones $\alpha(\mathbf{x}), \beta(\mathbf{x})$ tales que la ley de control $u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})v$. Si el sistema original (7.1) fuera mínimo (observable y controlable), entonces la ley de control (7.3) tiene el efecto de tornar $(n - 1)$ de los estados del sistema (7.1) en no-observables a través de la realimentación. En la instancia que $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{U}$, se debe diferenciar (7.1) para obtener:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{\partial L_{\mathbf{f}}h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial L_{\mathbf{f}}h}{\partial x} \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ &:= L_{\mathbf{f}}^2 h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})u \end{aligned} \quad (7.5)$$

En la ecuación (7.5), $L_{\mathbf{f}}^2 h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}h)(\mathbf{x})$ y $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{g}}(L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}))$. Ahora, si $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})$ es diferente de cero para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, la ley de control es:

$$u = \frac{1}{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})} (-L_{\mathbf{f}}^2 h(\mathbf{x}) + v) \quad (7.6)$$

dando como resultado el sistema lineal de segundo orden:

$$\ddot{y} = v \quad (7.7)$$

En forma general, si γ es el menor entero para el cual $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^i h(\mathbf{x}) = 0$ en \mathbf{U} para $i = 0, \dots, \gamma - 2$ y $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{\gamma-1} h(\mathbf{x})$ es diferente de cero en \mathbf{U} , entonces la ley de control puede expresarse como:

$$u = \frac{1}{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{\gamma-1} h(\mathbf{x})} (-L_{\mathbf{f}}^{\gamma} h(\mathbf{x}) + v) \quad (7.8)$$

obteniéndose el sistema lineal de orden γ :

$$y^{\gamma} = L_{\mathbf{f}}^{\gamma} h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{\gamma-1} h(\mathbf{x})u = v \quad (7.9)$$

El procedimiento descrito anteriormente termina en algún finito γ , bajo algunas condiciones específicas. Esta teoría es considerablemente más complicada si $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^i h(\mathbf{x}) = 0$ no es idéntico a cero en \mathbf{U} , pero es igual a cero para algunos valores de $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$.

Definición 7.1.1. *El sistema no-lineal SISO (7.1) se dice que tiene un grado estricto relativo γ en $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{U}$ si*

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^i h(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{U}, i = 0, \dots, \gamma - 2, \quad (7.10)$$

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{\gamma-1} h(\mathbf{x}_0) \neq 0 \quad (7.11)$$

Difeomorfismos y Transformaciones de Estado

El concepto de difeomorfismo puede ser visto como una generalización de la familia de conceptos de transformación de coordenadas. Un difeomorfismo puede ser definido como:

Definición 7.1.1. Sea una función $\phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, definida en una región U , se le denomina difeomorfismo si es suave, y si su inversa ϕ^{-1} existe y es suave.

Si la región U está en todo el espacio \mathbb{R}^n , entonces el difeomorfismo $\phi(\mathbf{x})$ es global. La mayoría de difeomorfismos son locales, o sea, transformaciones definidas únicamente en una vecindad finita de un punto dado. Una función no-lineal $\phi(\mathbf{x})$ definida en una región U en \mathbb{R}^n es un difeomorfismo local en una subregión de U si la matriz Jacobiana $\nabla\phi$ es no-singular para todo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \in U$.

Forma Normal para Sistemas No-lineales SISO

Cuando el grado relativo γ es definido y $\gamma < n$, el sistema no-lineal (7.1) puede ser transformado, usando $y, \dot{y}, \dots, y^{(\gamma-1)}$ como parte de nuevas componentes de estado, en una denominada *forma normal* [70]. Sea

$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_\gamma]^T = [y \ \dot{y} \ \dots \ y^{(\gamma-1)}]^T \quad (7.12)$$

En una vecindad U de un punto \mathbf{x}_0 , la forma normal del sistema puede ser escrita como:

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \dots \\ \dots \\ \mu_\gamma \\ a(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\psi}) + b(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\psi})u \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{w}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\psi}) \quad (7.14)$$

con la salida definida como:

$$y = \mu_1 \quad (7.15)$$

donde μ_i y ψ_j son las coordenadas normales o estados normales en U (o en \mathbf{x}_0), $a(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\psi}) = L_f^\gamma h(\mathbf{x})$ y $b(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\psi}) = L_g L_f^{\gamma-1} h(\mathbf{x})$ Ahora, definiendo el *difeomorfismo* local:

$$\phi(\mathbf{x}) = [\mu_1 \ \dots \ \mu_\gamma \ \psi_1 \ \dots \ \psi_{n-\gamma}]^T \quad (7.16)$$

este difeomorfismo es válido si su jacobiano es invertible, o sea, los gradientes $\nabla\mu_i$ y $\nabla\psi_j$ son linealmente independientes.

Lema 7.1.1. *Si el grado relativo del sistema (7.1) es γ en la región \mathbf{U} , entonces los gradientes $\nabla\mu_1, \nabla\mu_2, \dots, \nabla\mu_\gamma$ son linealmente independientes en \mathbf{U} .*

La Dinámica-Cero

Por medio de la linealización entrada-salida, la dinámica de un sistema dinámico no-lineal es descompuesta en una parte externa y una parte interna inobservable. Ya que la parte externa esta representada por una relación lineal entre y y v (o equivalentemente, por una forma canónica controlable entre y y u , como en (7.13)). La dinámica interna está asociada con la linealización entrada-salida simplemente corresponde a las últimas $(n - \gamma)$ ecuaciones $\dot{\psi} = \mathbf{w}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\psi})$ de la forma normal. Generalmente, esta dinámica depende de los estados de salida $\boldsymbol{\mu}$. Si la salida y se mantiene en cero, se denomina a esta dinámica con el nombre de *dinámica-cero*, la cual permite estudiar la estabilidad de la dinámica interna. Si la salida y es igual a cero implica que todas sus derivadas son cero. Así, la correspondiente dinámica interna del sistema, o *dinámica-cero*, describe un movimiento restringido a la superficie suave $(n - \gamma)$ -dimensional M_0 definida por $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. Para que el sistema opere en *dinámica-cero*, o sea, el estado \mathbf{x} permanezca en la superficie M_0 , el estado inicial del sistema \mathbf{x}_0 debe estar en la superficie, y, además, la entrada u debe ser igual a:

$$u_0(\mathbf{x}) = -\frac{L_{\mathbf{f}}^\gamma h(\mathbf{x})}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{\gamma-1} h(\mathbf{x})} \quad (7.17)$$

con lo cual $y^\gamma = 0$. Correspondiendo a esta entrada, y asumiendo que realmente el estado inicial del sistema está sobre la superficie M_0 , o sea, $\boldsymbol{\mu}(0) = \mathbf{0}$, la dinámica del sistema puede ser simplemente escrita en la forma normal como:

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0} \quad (7.18)$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{w}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}) \quad (7.19)$$

Por definición, la ecuación (7.19) es la *dinámica-cero* del sistema no-lineal. Ahora, en coordenadas normales, la entrada de control u_0 puede ser escrita únicamente en función de los estados internos $\boldsymbol{\psi}$, así:

$$u_0(\boldsymbol{\psi}) = -\frac{a(\mathbf{0}, \boldsymbol{\psi})}{b(\mathbf{0}, \boldsymbol{\psi})} \quad (7.20)$$

Definición 7.1.1. *El sistema no lineal (7.1) es asintóticamente de fase mínima si su dinámica-cero es asintóticamente estable.*

Estabilización Asintótica Local

Teniendo en cuenta la ecuación (7.9), si

$$v = -k_{\gamma-1}y^{\gamma-1} - \dots - k_1\dot{y} - k_0y \quad (7.21)$$

donde los coeficientes k_i son seleccionados de tal manera que el polinomio:

$$K(p) = p^\gamma + k_{\gamma-1}p^{\gamma-1} + \dots + k_1p + k_0 \quad (7.22)$$

tiene todas sus raíces estrictamente en el semiplano izquierdo (con parte real negativa). La ley de control u , puede ser escrita como:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{\gamma-1}y} [-L_{\mathbf{f}}^\gamma y - k_{\gamma-1}y^{\gamma-1} - \dots - k_1\dot{y} - k_0y] \quad (7.23)$$

Se puede demostrar que si un sistema dinámico no-lineal presenta una dinámica-cero asintóticamente estable, entonces esta ley de control estabiliza el sistema localmente.

Teorema 7.1.1. *Si el sistema (7.1) tiene grado relativo γ , y su dinámica-cero es localmente asintóticamente estable. Seleccionando las constantes k_i tal que el polinomio (7.22) tenga sus raíces con parte real negativa. Entonces, la ley de control (7.23) produce un sistema en lazo cerrado localmente asintóticamente estable.*

Control de Seguimiento

Considerando el sistema (7.1), sea y_d una trayectoria deseada, se puede definir:

$$\boldsymbol{\mu}_d = [y_d \dot{y}_d \dots y_d^{\gamma-1}]^T \quad (7.24)$$

y definiendo el error de seguimiento como:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) = \boldsymbol{\mu}(t) - \boldsymbol{\mu}_d(t) \quad (7.25)$$

se obtiene:

Teorema 7.1.1. *Si el sistema (7.1) tiene grado relativo γ , μ_d es suave y acotado, y la solución de la ecuación:*

$$\dot{\psi}_d = \mathbf{w}(\mu_d, \psi_d), \quad \psi_d(0) = \mathbf{0} \quad (7.26)$$

existe, es acotada, y es uniformemente asintóticamente estable. Seleccionando las constantes k_i tal que el polinomio (7.22) tenga sus raíces con parte real negativa. Entonces, usando la ley de control:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\gamma-1} \mu_1} [-L_f^{\gamma} \mu_1 + y_d^{\gamma} - k_{\gamma-1} \tilde{\mu}_r - \dots - k_0 \tilde{\mu}_1] \quad (7.27)$$

todos los estados se mantienen acotados y el error de seguimiento $\tilde{\mu}$ converge a cero exponencialmente.

7.1.2. Control por Modo Deslizante

El Control por Modo Deslizante (Sliding Mode Control (SMC)) es un caso particular de Control por Estructura Variable (Variable Structure Control (VSC)), desarrollado en la Unión Soviética en la década de los 60 [74, 75].

Según [70], el control por modo deslizante es un tipo de control no-lineal empleado en sistemas cuyos modelos presenten imprecisiones. Las imprecisiones del modelo pueden surgir de la incertidumbre real de la planta relacionada con algunos parámetros desconocidos, o del proceso de modelado debido a las suposiciones adoptadas en el modelo. Desde el punto de vista del control, las incertidumbres del modelo pueden ser clasificadas en:

- † Incertidumbres estructurales ó paramétricas.
- † Incertidumbres no-estructurales ó dinámicas no-modeladas.

Siendo las primeras producidas por las inexactitudes de parámetros reales incluidos en el modelo, mientras que las segundas se generan por las inexactitudes en el orden del sistema. Las inexactitudes del modelo pueden ocasionar fuertes efectos adversos en sistemas de control no-lineal, por consiguiente, todo diseño práctico debe abordarlas explícitamente.

Las incertidumbres en el modelo a sido tratadas mediante dos técnicas de control: el *control robusto* y el *control adaptativo*. El control robusto posee una estructura típica compuesta de una parte nominal, similar a una linealización por realimentación o ley de control inversa, y de una parte de términos adicionales encaminados a tratar la incertidumbre del modelo. La estructura del un control adaptativo es similar, pero además el modelo es actualizado durante la operación de control, basado en el desempeño medido.

El control por modo deslizante es un simple enfoque del control robusto. En forma intuitiva, esta metodología de control se basa en la observación que es mucho más fácil controlar sistemas de primer orden, ya sean no-lineales o con incertidumbre, que controlar sistemas generales de orden n . En consecuencia, una simplificación de notación es introducida, la cual, en efecto, permite que problemas de orden n sean reemplazados por problemas equivalentes de primer orden. Por lo tanto, se puede demostrar con facilidad que para los problemas transformados, el desempeño “perfecto” puede ser alcanzado en presencia de incertidumbres paramétricas arbitrarias. Sin embargo, tal desempeño se obtiene a costa de una actividad de control extremadamente alta. Esto está típicamente en desacuerdo con la otra fuente de incertidumbre en el modelo, es decir la presencia de dinámicas despreciadas, que la alta actividad de control puede excitar. Lo anterior conlleva a una modificación de las leyes de control dirigida a lograr una compensación efectiva entre el desempeño de seguimiento y la incertidumbre paramétrica, dada la actividad de control admisible.

Para el tipo de sistemas a los que se aplica, el control por modo deslizante brinda un enfoque sistemático al problema de mantener la estabilidad y un consistente desempeño en presencia de incertidumbres en el modelado del sistema. Los sistemas de control por modo deslizante han demostrado ser una eficiente herramienta para el control de plantas complejas con un alto grado de no-linealidad bajo condiciones de incertidumbre, siendo éste un problema común en muchos procesos de la tecnología moderna. El control por modo deslizante ha sido aplicado con excelentes resultados en robots, submarinos, maquinas eléctricas, servomecanismos y sistemas de potencia.

Superficies de Deslizamiento

Sea el sistema no-lineal SISO

$$x^{(n)} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u, \quad (7.28)$$

donde el escalar x es la salida de interés (posición de un sistema mecánico), el escalar u es la entrada de control (fuerza de accionamiento), y $\mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ \dots \ x^{(n-1)}]$ es el vector de estado. En la ecuación (7.28) la función $f(\mathbf{x})$ (generalmente no-lineal) no es exactamente conocida, pero el grado de imprecisión en $f(\mathbf{x})$ es limitado en su parte superior por una función conocida continua de x ; en forma similar, la ganancia de control $b(\mathbf{x})$ no es exactamente conocida,

pero se conoce su signo y limitada por una función continua de \mathbf{x} . En sistemas mecánicos la inercia se conoce con cierta exactitud, y los modelos de fricción únicamente describen parte de las fuerzas de fricción reales. El problema de control consiste en conseguir que el estado \mathbf{x} siga a un estado variante específico $\mathbf{x}_d = [x_d \dot{x}_d \dots x_d^{(n-1)}]^T$ en presencia de imprecisiones del modelo en $f(\mathbf{x})$ y $b(\mathbf{x})$.

Para lograr la tarea de seguimiento por medio de una señal de control u , es necesario que el estado inicial deseado o de referencia $\mathbf{x}_d(0)$ sea tal que:

$$\mathbf{x}_d(0) = \mathbf{x}(0) \quad (7.29)$$

Considerando un sistema mecánico de segundo orden, la posición o la velocidad no pueden “saltar”, de tal manera, cualquier trayectoria deseada factible desde un tiempo $t = 0$ necesariamente arranca con la misma posición y velocidad como las de la planta. De lo contrario, el seguimiento puede ser alcanzado únicamente después del transitorio.

Ley de Control por Modo Deslizante

Sea $\tilde{x} = x - x_d$ el error de seguimiento en la variable x , y

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = [\tilde{x}_d \dot{\tilde{x}}_d \dots \tilde{x}_d^{(n-1)}]$$

el vector de error de seguimiento. Además, se define en el espacio de estados \mathfrak{R}^n una superficie variante en el tiempo $S(t)$ mediante la ecuación escalar $s(\mathbf{x}; t) = 0$, como:

$$s(\mathbf{x}; t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x} \quad (7.30)$$

donde λ es una constante positiva y n es el orden del sistema.

Dada la condición inicial de la ecuación (7.29), el problema de seguimiento $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_d$ es equivalente a la del resto de la superficie $S(t)$ para todo $t > 0$; en realidad $S \equiv 0$ representa una ecuación diferencial cuya única solución es $\tilde{\mathbf{x}} \equiv 0$, dadas las condiciones iniciales de (7.29). De esta manera, el seguimiento del vector de dimensión n , \mathbf{x}_d , puede reducirse a mantener la cantidad escalar s en cero.

Además, los límites en S pueden ser directamente trasladados dentro de los límites del vector de error de seguimiento $\tilde{\mathbf{x}}$, y por lo tanto el escalar S representa un valor verdadero de la medida del desempeño del seguimiento. Asumiendo que $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$, se tiene:

$$\forall t \geq 0, |s(t)| \leq \Phi \Rightarrow \forall t \geq 0, |\tilde{x}^{(i)}(t)| \leq (2\lambda)^i \varepsilon \quad (7.31)$$

donde $\varepsilon = \Phi/\lambda^{n-1}$. En efecto, por la definición 7.30, el error de seguimiento \tilde{x} se obtiene de S a través de una serie de filtros pasa-baja de primer orden, logrando así reemplazar un problema de seguimiento de orden n por un problema de estabilización de primer orden.

La convergencia de la trayectoria en dirección a la superficie de deslizamiento puede ser obtenida por medio de una ley de control u , tal que:

$$\frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt} \leq -\eta |S| \quad (7.32)$$

donde η es una constante estrictamente positiva. La ecuación 7.32 establece que la “distancia cuadrada” a la superficie (medida por s^2), decrece a lo largo de cualquier trayectoria del sistema, debido a que su tasa de variación es estrictamente negativa. En particular, una vez en la superficie, las trayectorias del sistema permanecen en ella. La *condición de deslizamiento* expresada en (7.32) hace que la superficie S sea un *conjunto invariante*. Además, la condición de deslizamiento también implica que algunas perturbaciones o incertidumbres dinámicas pueden ser toleradas mientras se mantenga la superficie como un conjunto invariante. Cuando un sistema se comporta cumpliendo con la condición de deslizamiento, la superficie $S(t)$ se la denomina *superficie de deslizamiento* (véase la figura 7.1) y el comportamiento del sistema recibe el nombre de *régimen deslizante* o *modo deslizante*.

Sin embargo, con el fin de tener en cuenta la presencia de imprecisiones de modelado y de perturbaciones, la ley de control tiene que ser *discontinua a través de $s(t)$* . La implementación del control de conmutación asociado es imperfecto, esto ocasiona el fenómeno conocido como *chattering* (véase la figura 7.2). Este fenómeno es indeseable en la práctica, ya que implica una actividad de control alta que podría generar dinámicas de frecuencia alta no tenidas en cuenta en el modelado.

De acuerdo con [75], sea un sistema dinámico que describe un proceso a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales no-lineales en un espacio de estado n -dimensional con un vector de control m -dimensional (véase la figura 7.3), es decir:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) \quad (7.33)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^m$, y t es el tiempo. La acción de control es calculada como una función

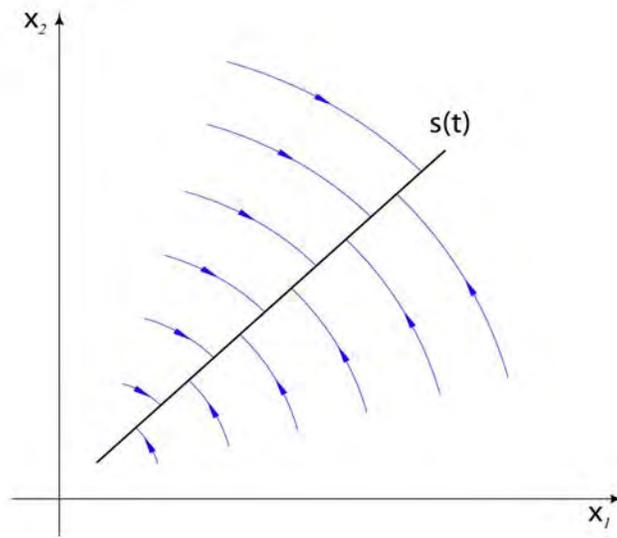


Figura 7.1: La condición de deslizamiento

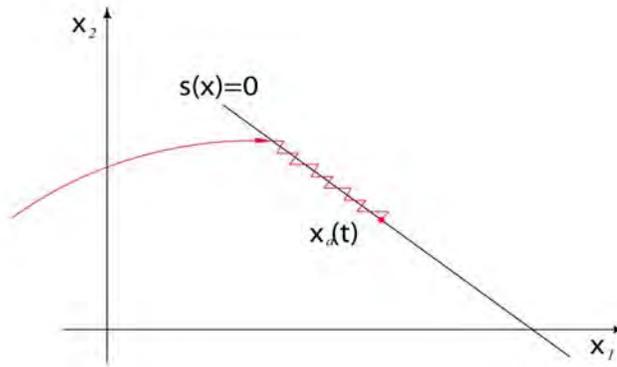


Figura 7.2: Fenómeno chattering

discontinua. Así, cada componente de control u_i puede tener discontinuidades en algunas superficies no-lineales $s_i(\mathbf{x}) = 0$ en el espacio de estado (véase la figura 7.3), es decir:

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(\mathbf{x}, t) & \text{si } s_i(\mathbf{x}) > 0 \\ u_i^-(\mathbf{x}, t) & \text{si } s_i(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (7.34)$$

donde $u_i^+(\mathbf{x}, t)$, $u_i^-(\mathbf{x}, t)$, $i = 1, \dots, m$, y $s(\mathbf{x})$ son funciones continuas de estado, con $u_i^+(\mathbf{x}, t) \neq u_i^-(\mathbf{x}, t)$.