



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Intervalos de confianza para la confiabilidad de sistemas coherentes no-reparables con estructura dependiente en la familia Weibull

**Osnamir Elias Bru Cordero**

Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín  
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística  
Colombia  
2021



# Intervalos de confianza para la confiabilidad de sistemas coherentes no-reparables con estructura dependiente en la familia Weibull

**Osnamir Elias Bru Cordero**

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Doctor en Ciencias Estadística**

Director: Ph.D, Mario César Jaramillo Elorza

Línea de Investigación: Confiabilidad  
Grupo de Investigación: Confiabilidad Industrial

Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín  
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística  
Colombia  
2021



## (Dedicatoria)

A Dios y a mi padre que ya no me acompaña en este mundo terrenal, pero siempre vive en mis pensamientos, a mi hijo Said Elias y a mi esposa Erika María que siempre me apoyan, a mi madre que con su ejemplo, tras superar una dura enfermedad, me dio una lección de vida y de amor por los sueños. TE AMO TULIA ESTER. A mis segundos padres Pacho y Liney; gracias por su amor y hacerme sentir en familia. Y a mis hermanos Waldir, Wilmer (Q.E.P.D), Samir, Sahir y Luly Karina.

He aquí mi secreto, que no puede ser más simple: sólo con el corazón se puede ver bien; lo esencial es invisible para los ojos:

*El principito*



# Agradecimientos

Agradezco de manera especial a todos los miembros de la escuela de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, en especial a mi mentor, Mario César Jaramillo Elorza y Sergio Yañez Canal, por darme la oportunidad de realizar este trabajo, el cual no fue fácil, por su disponibilidad siempre para ayudarme a seguir en este arduo camino. También, a Diana Arboleda por su disposición y consejos.

Además, se le agradece al gobierno Colombiano por el apoyo brindado a nuestro proyecto, por medio de la convocatoria 727 de Colciencias 2015. Igualmente, a la escuela de Ingeniería Industrial de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso en Chile, en especial a los profesores Víctor Leiva y Mauricio Huertas, por permitirme realizar con ellos mi pasantía doctoral y brindarme nuevas experiencias que me ayudaron a crecer como persona y como profesional. Mil gracias a todas esas personas que de una u otra forma me brindaron un apoyo en mi estancia en Chile. Fraternalmente a los compañeros, Francisco Tapia y Fredy Barriga.

Y no podrían faltar los agradecimientos para mis compañeros de lucha; Diogenes Ramirez, Cristian Correa y Javier Lozano, los cuales ya hacen parte de mi familia. Vaya el abrazo para ellos y toneladas de bendiciones. A mi compadre y hermano Osvaldo Polo, a mi colega y amiga Jessica Rojas Mora, mil gracias. Finalmente, a los mismos de siempre.



# Resumen

En este trabajo el objetivo central es calcular intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema con sólo dos componentes, cuyos tiempos de vida son dependientes. Para estimar la confiabilidad del sistema teniendo en cuenta la dependencia entre los tiempos de vida del sistema coherente no reparable, se utiliza un modelo cópula Gumbel, para distribuciones de la familia de log-localización y escala; en el mismo contexto se chequean algunos resultados ya existentes bajo el escenario donde los tiempos son independientes, el cual para nuestro trabajo es un caso particular. Estas situaciones abordadas en nuestro estudio, son validadas mediante estimación de probabilidades de cobertura, para tres métodos; verosimilitud, transformación logit y  $y_e$  en dos modelos de interés, modelo tradicional para riesgos competitivos con marginales Exponencial, Weibull y un modelo bivariado Marshall-Olkin Exponencial y Weibull. Se examina el comportamiento de los intervalos bajo la hipótesis de dependencia entre los tiempos de falla, y se observa que para tamaños muestrales pequeños se presenta un pequeño ruido en los intervalos, el cual fue corregido mediante una propuesta ( $y_e^*$ ). Al incluir el concepto de fragilidad en un sistema en serie con marginales Weibull, la cual hace referencia a la variabilidad entre los tiempos de cada una de las unidades y con la propuesta se nota un mejor comportamiento de los intervalos de confianza para dicha estimación en muestras pequeñas y por supuesto para muestras grandes.

**Palabras clave:** Confiabilidad; Sistemas coherentes; Componentes dependientes; Cópula; Fragilidad

# Confidence interval for systems reliability of coherent non-repairable with dependent structure in the Weibull family

## Abstract

In this work, the main objective is to compute confidence intervals for the reliability of a system with only two components, whose life times are dependent. To estimate the reliability of the system taking into account the dependence between the lifetimes of the coherent non-repairable system, a Gumbel copula model is used, for distributions of the log-location and scale family; In the same context, some existing results are checked under the scenario where the times are independent, which for our work is a particular case. These situations addressed in our study are validated by estimating coverage probabilities for three methods; likelihood, logit transformation and  $y_e$  in two models of interest, traditional model for competitive risks with marginal Exponential, Weibull and a Marshall-Olkin Exponential and Weibull bivariate model. The behavior of the intervals is examined under the hypothesis of dependence between the failure times, and it is observed that for small sample sizes there is a small noise in the intervals, which was corrected by a proposal ( $y_e^*$ ). By including the concept of frailty in a serial system with Weibull marginals, which refers to the variability between the times of each of the units and with the proposal, a better behavior of the confidence intervals for small and large samples.

**Keywords:** Reliability; Coherent systems; Dependent components; Copula; Frailty.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>XVII</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Sistemas coherentes no-reparables</b>	<b>6</b>
2.1 Función estructura de un sistema de componentes . . . . .	6
2.2 Modelo del tiempo de falla en componentes . . . . .	8
2.3 Estimación por máxima verosimilitud . . . . .	9
2.4 Intervalos de confianza (IC) para la confiabilidad de sistemas . . . . .	10
2.4.1 Interpretación de intervalos de confianza . . . . .	10
2.4.2 Procedimientos de IC con aproximación Normal para $t_p$ . . . . .	11
2.4.3 Procedimientos de IC con aproximación Normal para $F(t_e)$ . . . . .	14
2.4.4 Procedimientos de IC con aproximación Normal para $S(t_e)$ . . . . .	19
2.4.5 Procedimientos de IC basados en verosimilitud . . . . .	19
<b>3 Sistemas con componentes independientes</b>	<b>21</b>
3.1 Tiempos de falla distribuidos Exponencial . . . . .	22
3.2 Tiempos de falla distribuidos Weibull . . . . .	24
3.2.1 Distribución del tiempo mínimo para sistemas con dos componentes .	25
3.3 Tiempos de falla con distribución Marshall-Olkin . . . . .	28
3.3.1 Modelos de choques fatales . . . . .	30
3.3.2 Modelos de choques no fatales . . . . .	30
3.3.3 Modelo Marshall-Olkin bivariado Exponencial (MOBE) . . . . .	31
3.3.4 Modelo Marshall-Olkin bivariado Weibull (MOBW) . . . . .	32
3.3.5 Modelo y descripción de los datos (MOBW) . . . . .	33
3.3.6 Estimadores por máxima verosimilitud (MOBW) . . . . .	35
3.4 IC para la confiabilidad de sistemas con dos componentes . . . . .	37
3.4.1 IC para la confiabilidad de sistemas con componentes Exponencial . .	38
3.4.2 IC para la confiabilidad de sistemas con componentes Weibull . . . .	39

3.4.3	IC para la confiabilidad de sistemas con componentes Marshall-Olkin	40
3.4.4	Probabilidades de cobertura . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Sistemas con componentes dependientes</b>	<b>45</b>
4.1	Distribuciones bivariadas con marginales uniforme (Cópulas) . . . . .	47
4.2	Modelo vía cópula en sistemas coherentes . . . . .	48
4.2.1	Familia de cópulas Arquimedianas . . . . .	54
4.3	Tiempos de vida en sistemas coherentes con $m$ componentes dependientes . .	56
4.3.1	Sistemas coherentes con solo dos componentes . . . . .	57
4.3.2	IC para la confiabilidad de sistemas con componentes dependientes Exponencial . . . . .	62
4.3.3	IC para la confiabilidad de sistemas con componentes Weibull . . . . .	63
4.3.4	IC para la confiabilidad de sistemas con componentes dependientes Marshall-Olkin . . . . .	64
4.3.5	Esquema y resultados del estudio de simulación . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Modelos de fragilidad para tiempos de falla en riesgos competitivos</b>	<b>80</b>
5.1	Datos de riesgos competitivos . . . . .	81
5.1.1	Modelo propuesto . . . . .	81
5.1.2	Tau de Kendall . . . . .	83
5.1.3	Identificabilidad . . . . .	83
5.1.4	Inferencia basada en máxima verosimilitud . . . . .	84
5.2	Propuesta de IC para la confiabilidad del sistema . . . . .	85
5.2.1	Propuesta de IC con aproximación Normal para $t_p$ con fragilidad . . .	85
5.3	Escenarios de simulación y resultados . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>98</b>
6.1	Conclusiones . . . . .	98
6.2	Trabajo futuro . . . . .	99
	<b>Bibliografía</b>	<b>100</b>

# Lista de Figuras

<b>2-1</b>	Hong y Meeker (2014) Ilustración del procedimiento $\hat{F}$ y el procedimiento propuesto para obtener los IC para $F(t_e)$ . Recuperado; <a href="https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10985-013-9245-9">https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10985-013-9245-9</a> . . . . .	17
<b>3-1</b>	Intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema con componentes Exponencial independientes; $n = 50$ , $\beta_1 = \beta_2 = 1$ y $\eta_1 = \eta_2 = 5$ . Para el tiempo mínimo $\beta = 1$ y $\eta = 2.5$ . . . . .	39
<b>3-2</b>	Intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema con componentes Weibull independientes; $n = 50$ , $\beta_1 = \beta_2 = 1.5$ y $\eta_1 = \eta_2 = 5$ . Para el tiempo mínimo $\beta = 1.5$ y $\eta = 3.2$ . . . . .	40
<b>3-3</b>	Tiempo de falla distribuidos Marshall-Olkin con marginales Exponencial; $\eta_0 = 3$ , $\eta_1 = 1$ y $\eta_2 = 1/3$ . . . . .	41
<b>3-4</b>	Intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema en serie con componentes Marshall-Olkin Exponencial independientes; $n = 50$ , $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\eta_0 = 0$ y $\eta_1 = \eta_2 = 1.5$ . . . . .	41
<b>3-5</b>	Intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema en serie con componentes Marshall-Olkin Exponencial independientes; $n = 50$ , $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\eta_0 = 0$ , $\eta_1 = 1.5$ y $\eta_2 = 5$ . . . . .	42
<b>4-1</b>	Estimación para la función de confiabilidad de un sistema en paralelo con marginales Exponencial. . . . .	61
<b>4-2</b>	Estimación para la función de confiabilidad de un sistema en serie con marginales Exponencial. . . . .	62
<b>4-3</b>	Intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; $n = 50$ , porcentaje de falla; componente 1 (42%), componente 2 (58%), $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 5$ , $\tau = 0.25$ y 0% de censura. . . . .	63
<b>4-4</b>	Intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; $n = 50$ , porcentaje de falla; componente 1 (50%), componente 2 (50%), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau = 0.25$ y 0% de censura. . . . .	64

<b>4-5</b>	Intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema en serie Marshall-Olkin con componentes dependientes Exponencial; $n = 50$ , porcentaje de falla; componente 1 (52 %), componente 2 (48 %), $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\eta_1 = 1.5$ , $\eta_2 = 5$ , $\tau = 0.25$ y 0 % de censura. . . . .	65
<b>4-6</b>	Intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema en serie Marshall-Olkin con componentes dependientes Weibull; $n = 50$ , porcentaje de falla; componente 1 (55 %), componente 2 (45 %), ambos componentes 4 %, $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 1$ , $\tau = 0.25$ y 0 % de censura. . . . .	65
<b>4-7</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %), $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 5$ , $\tau = 0.25$ y 0 % de censura. . . . .	67
<b>4-8</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %), $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 5$ , $\tau = 0.50$ y 0 % de censura. . . . .	67
<b>4-9</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %), $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 5$ , $\tau = 0.75$ y 0 % de censura. . . . .	68
<b>4-10</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %), $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 5$ , $\tau = 0.25$ y 10 % de censura. . . . .	68
<b>4-11</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %), $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 5$ , $\tau = 0.50$ y 10 % de censura. . . . .	69
<b>4-12</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %), $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 5$ , $\tau = 0.75$ y 10 % de censura. . . . .	69
<b>4-13</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %), $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 5$ , $\tau = 0.25$ y 25 % de censura. . . . .	70
<b>4-14</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %), $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 5$ , $\tau = 0.50$ y 25 % de censura. . . . .	70

<b>4-15</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %), $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 5$ , $\tau = 0.75$ y 25 % de censura. . . . .	71
<b>4-16</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau = 0.25$ y 0 % de censura. . . . .	72
<b>4-17</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau = 0.50$ y 0 % de censura. . . . .	72
<b>4-18</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau = 0.75$ y 0 % de censura. . . . .	73
<b>4-19</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau = 0.25$ y 10 % de censura. . . . .	73
<b>4-20</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau = 0.50$ y 10 % de censura. . . . .	74
<b>4-21</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau = 0.75$ y 10 % de censura. . . . .	74
<b>4-22</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau = 0.25$ y 25 % de censura. . . . .	75
<b>4-23</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau = 0.50$ y 25 % de censura. . . . .	75
<b>4-24</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau = 0.75$ y 25 % de censura. . . . .	76

<b>4-25</b> Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema Marshall-Olkin bivariado Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (48 %), ambos (2 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau = 0.25$ y 0 % de censura. . . . .	76
<b>4-26</b> Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema Marshall-Olkin bivariado Exponencial, con porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (48 %), ambos (2 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau = 0.50$ y 0 % de censura. . . . .	77
<b>4-27</b> Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema Marshall-Olkin bivariado Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (48 %), ambos (2 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau = 0.75$ y 0 % de censura. . . . .	77
<b>4-28</b> Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema Marshall-Olkin bivariado Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (51 %), componente 2 (45 %), ambos (4 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau = 0.25$ y 0 % de censura. . . . .	78
<b>4-29</b> Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema Marshall-Olkin bivariado Weibull, con porcentaje de falla; componente 1 (51 %), componente 2 (45 %), ambos (4 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau = 0.50$ y 0 % de censura. . . . .	79
<b>4-30</b> Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema Marshall-Olkin bivariado Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (51 %), componente 2 (45 %), ambos componentes (4 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau = 0.75$ y 0 % de censura. . . . .	79

# Lista de Tablas

<b>3-1</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes independientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (46 %), componente 2 (54 %), $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 5$ , y porcentajes de censura 0 %.	43
<b>3-2</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes independientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (51 %), componente 2 (49 %), $\beta_1 = \beta_2 = 1.5$ , $\eta_1 = \eta_2 = 5$ , y porcentajes de censura 0 %.	43
<b>3-3</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza un sistema Marshall-Olkin bivariado Exponencial con tiempos independientes; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\eta_0 = 0$ , $\eta_1 = \eta_2 = 1.5$ , y porcentajes de censura 0 %.	44
<b>5-1</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau_\theta^{ Z} = 0.25(\theta = 0.33)$ y porcentajes de censura 0 %.	93
<b>5-2</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau_\theta^{ Z} = 0.50(\theta = 1)$ y porcentajes de censura 0 %.	93
<b>5-3</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau_\theta^{ Z} = 0.75(\theta = 3)$ y porcentajes de censura 0 %.	94

<b>5-4</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau_\theta^{ Z} = 0.25(\theta = 0.33)$ y porcentajes de censura 10 %.	94
<b>5-5</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau_\theta^{ Z} = 0.50(\theta = 1)$ y porcentajes de censura 10 %.	95
<b>5-6</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau_\theta^{ Z} = 0.75(\theta = 3)$ y porcentajes de censura 10 %.	95
<b>5-7</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau_\theta^{ Z} = 0.25(\theta = 0.33)$ y porcentajes de censura 25 %.	96
<b>5-8</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau_\theta^{ Z} = 0.50(\theta = 1)$ y porcentajes de censura 25 %.	96
<b>5-9</b>	Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %), $\beta_1 = 2$ , $\beta_2 = 1$ , $\eta_1 = \eta_2 = 3$ , $\tau_\theta^{ Z} = 0.75(\theta = 3)$ y porcentajes de censura 25 %.	97

# 1 Introducción

En la actualidad las industrias están enfrentadas a una competencia global intensa, una presión por ciclos de producción más cortos, costos restringidos, así como expectativas para mejorar la calidad y confiabilidad, de parte de los consumidores. En este contexto se presentan retos de administración, ingeniería y estadística (Escobar, Villa, y Yañez, 2003).

En el contexto del análisis para confiabilidad de sistemas en particular, Lawless (2011) define un sistema como el conjunto de componentes interconectados para cumplir una función y desde otro punto de vista, propone la confiabilidad de un producto o servicio el cual depende de la confiabilidad de las componentes que lo conforman y de su configuración operativa o nivel de redundancia.

Barlow y Proschan (1975) señalan que para el análisis de la confiabilidad, generalmente se supone que las componentes tienen distribuciones de vida independientes y en muchas situaciones de confiabilidad, es más realista asumir alguna forma o estructura de dependencia positiva entre las componentes, la cual surge de tensiones y choques ambientales comunes, de componentes que dependen de fuentes comunes de energía, entre otros. Estos autores modelan los tiempos de vida de las componentes de un sistema a partir de distribuciones multivariadas como la Exponencial, Weibull, Gamma y Normal.

Navarro y Durante (2017) afirman que la confiabilidad de un sistema depende de varios factores: la estructura del sistema, el comportamiento de cada unidad individual del sistema y la forma en que las unidades se asocian entre sí. En particular, este último aspecto ha sido investigado recientemente con la ayuda de cópulas. Para obtener más detalles sobre un enfoque de la confiabilidad vía cópula, ver Navarro y Durante (2017).

El análisis de sistemas de componentes considera dos grandes clases: sistemas reparables y sistemas no-reparables y en ambos se definen conceptos como estructura, redundancia, mantenimiento y disponibilidad del sistema. En general, en el análisis y modelación de datos en estas dos grandes áreas, se hace uso de procedimientos que requieren diferentes supuestos sobre las variables que relacionan la vida de las componentes con su dependencia y los tipos de falla (Lawless, 2003). Por otra parte, un sistema no-reparable es aquel que se descarta la primera vez que falla, por ejemplo: aislador eléctrico, diodo, transistor, circuito integrado, empaque plástico, entre otros.

Los datos obtenidos sobre la observación de un sistema reparable o no-reparable describe las tendencias y patrones de falla de un sistema completo. Estos datos requieren herramientas estadísticas especiales y pueden surgir, por ejemplo, del monitoreo de un conjunto de unidades reparables donde el evento de interés puede ser la falla de las unidades (para evaluar su confiabilidad), el costo de reparación (evaluar el costo de mantenimiento). Los datos de componentes o unidades reemplazables describen tiempos o degradación de unidades que no son reparadas. Una unidad no es reparada porque es más práctico o económico reemplazarla o es muy difícil repararla (Meeker y Escobar, 1998).

Hong y Meeker (2014) establecen para la teoría de sistemas de componentes, cuando hay datos disponibles a nivel de estas unidades, que la confiabilidad del sistema se puede calcular utilizando tal información. Los intervalos de confianza (IC), son necesarios para cuantificar la incertidumbre estadística en la estimación. Al obtener la confiabilidad del sistema, los procedimientos de los IC con buenas propiedades no son sencillos, especialmente cuando la estructura del sistema es compleja.

Un sistema se puede ver como un modelo de riesgos competitivos, algunos autores como; Crowder (2001), Crowder (2011), Feizjavadian y Hashemi (2015), David y Moeschberger (1978), Meeker y Escobar (1998) y Hong y Meeker (2014) presentan la forma y estructura de los datos, tanto para el caso paramétrico como en el no paramétrico y algunas aplicaciones. Adicionalmente, para este tipo de análisis es importante tener presente el mecanismo de falla y el tipo de censura con que se trabaja. Miyawaka (1982), Miyawaka (1984) y Kundu y Basu (2000) presentan una situación que es común en este tipo de aplicaciones, la cual hace referencia que en algunas situaciones se tiene el tiempo de falla de la unidad o componente, pero se desconoce la causa de falla, este tipo de situaciones se conocen como problemas con datos completos (donde se tiene el tiempo de falla y la causa) y datos incompletos (donde se tiene el tiempo de falla, pero no la causa específica de falla). Así mismo, se puede ver desde el punto de vista de un dato censurado, el cual se puede monitorear hasta el tiempo de interés y de no presentarse la falla, es llamado censura a derecha.

De otro lado, Aven y Jensen (2013) exponen lo difícil que resulta formular la dependencia de una manera matemáticamente estricta, así como obtener un modelo realista, en el caso que se consiga incorporar una contribución correcta a partir de los modos de falla común, lo cual depende del modelo propuesto por el analista.

Al definir las componentes de una manera adecuada, a menudo es posible evitar la dependencia, por ejemplo, los modos de falla común que son causados por una causa externa pueden identificarse y separarse para que las componentes se puedan considerar como independientes, otro método útil para la eliminación de la dependencia es redefinir las componentes,

---

por ejemplo, en lugar de incluir una estructura paralela de componentes dependientes en el sistema, esta estructura podría estar representada por un componente, así, esto no elimina la dependencia, pero la traslada a un nivel inferior del análisis (Aven y Jensen, 2013).

Los análisis tradicionales suponen que los datos llevan incluida la causa de falla de todas las unidades que han fallado hasta un tiempo específico; pero a menudo, los datos de vida contienen observaciones cuya causa exacta de falla no es conocida, estos datos son llamados datos enmascarados, es decir, no se conocen los tiempos exactos de falla, donde todas las unidades son sensibles a la causa de falla, pero dicha causa de falla no estaba disponible para ninguna de las fallas observadas (Chan y Meeker, 1999).

En sistemas un poco más complicados, las fallas que ocurren a nivel de las componentes pueden conducir a la falla del sistema. Por ejemplo, en un ajuste de riesgos competitivos (es decir, un sistema en serie), un sistema falla cuando el componente más débil falla. Meeker y Escobar (1998, página 383) describen una aplicación del dispositivo G, donde el sistema falla debido a uno de dos modos de falla concurrentes. Otras aplicaciones Lawless (2003), Kundu y Basu (2000), Meeker y Escobar (1998) y Hong y Meeker (2014). Paralelo a todo lo anterior, también existen otros modelos que trabajan un aspecto no menos importante, son los llamados modelos de choques, conocidos como el modelo Marshall-Olkin, introducidos por Marshall y Olkin (1967b), estos autores detallan este tipo de modelos, para el caso cuando la causa de falla del sistema se da por el fallo simultáneo en los dos modos de falla (una componente singular), o cuando la falla del sistema se produce por cualquiera de los dos modos, contextualizado en el caso de un sistema con sólo dos componentes.

El modelo Marshall-Olkin para el caso bivariado cuando las marginales son Exponencial, es llamado el modelo Marshall-Olkin Exponencial bivariado; Barlow y Proschan (1981), Singpurwalla (2006), McNeil, Frey, y Embrechts (2015), presentan varias aplicaciones para este modelo en particular. También, el modelo ya ha sido estudiado cuando las marginales están distribuidas Weibull, el cual es llamado el modelo Marshall-Olkin Weibull bivariado. Algunas generalizaciones se tienen para los modelos tipo Marshall-Olkin, Muliere y Scarsini (1987), X. Li y Pellerey (2011), Mirhosseini, Amini, Kundu, y Dolati (2015) y Feizjavadian y Hashemi (2015) para este caso se asume independencia entre los tiempos de falla del sistema.

Por otra parte, al momento de trabajar modelos con tiempos de falla dependientes, la cual no es una tarea sencilla y se convierte en un aspecto difícil en campo de la confiabilidad. Es difícil formular dependencia de una manera matemáticamente rigurosa y al mismo tiempo obtener un modelo realista, cuya finalidad sea proporcionar datos para dicho modelo propuesto Aven y Jensen (2013). La herramienta usada para la dependencia entre los tiempos de vida útil específicos de la causa de fallo, puede modelarse con una función de cópula Escarela y Carriere (2003). Algunas aplicaciones; Yáñez, Brango, Jaramillo, y Lope-

ra (2011) realizan comparaciones entre riesgos competitivos vía el estimador cópula-gráfico, Paz-Sabogal, Yáñez-Canal, y Lopera-Gómez (2014) presentan un estudio comparativo del efecto de la dependencia en modelos de riesgos competitivos con tres modos de falla vía estimadores basados en cópulas y Bru y Jaramillo (2019) usaron el método de combinación de riesgos para estimar la función de supervivencia en presencia de riesgos competitivos dependientes, entre otros.

Teniendo en cuenta los objetivos de este trabajo; el cual hace referencia a la construcción de intervalos de confianza para la confiabilidad del tiempo de vida de un sistema coherente no-reparable con sólo dos componentes dependientes y cuyos tiempos de vida marginal para cada componente son modelados por la familia Weibull, se procede a mostrar el contenido de todo el trabajo.

En el Capítulo 2, se describen los sistemas coherentes no-reparables, teniendo en cuenta la función estructura del sistema, modelos de tiempos de falla, estimación por máxima verosimilitud y se detalla el procedimiento planteado para los intervalos de confianza para la confiabilidad de dichos sistemas con  $m$  componentes (tiempos de falla independientes). En el Capítulo 3, se presenta un sistema con sólo dos componentes, asumiendo que los tiempos de las componentes tienen distribución Exponencial, Weibull y Marshall-Olkin con componentes Exponencial (MOBE) y Marshall-Olkin con componentes Weibull (MOBW), los cuales son independientes en el contexto de un sistema en serie. En el Capítulo 4, se presenta todo lo concerniente a sistemas coherentes, pero con tiempos de falla dependiente, presentamos el enfoque vía cópulas, y todo lo relacionado a las propiedades, orden e intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema con solo dos componentes. En el Capítulo 5, se incluye el concepto de fragilidad, específicamente fragilidad Gamma, la cual captura la heterogeneidad en los tiempos de vida en cada componente del sistema (solo dos componentes), es decir, tiene en cuenta unidades que son más frágiles (más propensas a fallar) o más robustas (menos propensas a fallar) de dichos sistemas, se asume un sistema con tiempos de falla distribuidos Weibull y una cópula Gumbell. En el Capítulo 6, se presentan las conclusiones y trabajos futuros. Es de resaltar que todos los procesos de simulación para cada uno de los escenarios estudiados se programaron en el Software R Core Team (2020).

Finalmente, a manera de conclusión de nuestro trabajo en el Capítulo 5, se presenta una propuesta de intervalos de confianza (intervalos de confianza corregidos) para la confiabilidad de un sistema con tiempos de falla dependientes, bajo el siguiente modelo; sistema en serie Weibull-Weibull. Para este caso se comparan los intervalos propuestos por Hong y Meeker (2014) para la confiabilidad del sistema, intervalos de confianza bajo verosimilitud e intervalos de confianza mediante una transformación Logit, al incluir la dependencia se evidencia un efecto en las estimaciones de las probabilidades de cobertura para tamaños de muestra pequeños y a medida que aumenta el tamaño de muestra, se evidencia que las propiedades

asintóticas de los intervalos bajo los tres métodos, al igual que nuestra propuesta, se cumplen. Adicionalmente, es posible adaptar toda la temática trabajada a los modelos Marshall-Olkin y su desempeño es relativamente bueno, los cuales puede ser de gran ayuda en el campo de las ingenierías.

## 2 Sistemas coherentes no-reparables

En esta sección se presenta una introducción a la teoría clásica de los sistemas coherentes. Primero se estudian algunos conceptos importantes para el desarrollo de este trabajo relacionados con la temática de interés. Barlow y Proschan (1975) presentan la relación existente entre un sistema y sus componentes. Considerando el sistema en un momento fijo del tiempo (digamos, el momento presente); se supone que el estado actual del sistema depende únicamente de los estados presentes de las componentes.

### 2.1. Función estructura de un sistema de componentes

Sea  $T$  el tiempo de vida del sistema coherente. En el sistema la función de distribución acumulada (cdf) se define de la siguiente manera:

$$F(t) = F(t; \boldsymbol{\theta}) = \Pr(T \leq t) \quad (2-1)$$

donde  $\boldsymbol{\theta}$  es un vector de parámetros del sistema. La cdf para el tiempo de falla de la componente  $i$  se denota por:

$$F_i(t; \boldsymbol{\theta}_i), \quad i = 1, \dots, m \quad (2-2)$$

donde  $\boldsymbol{\theta}_i$  es el vector de parámetros de la componente  $i$  y  $m$  es el número de componentes del sistema.

Barlow y Proschan (1975) y Aven y Jensen (2013) expresan la diferencia entre sólo dos estados del sistema: un estado en funcionamiento (funcional) y un estado de falla (fallido). Esta dicotomía se aplica tanto al sistema como a cada componente. Para indicar el estado de la  $i$ -ésima componente, asignamos una variable indicadora  $x_i$  a la componente  $i$ :

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si la componente } i \text{ funciona} \\ 0, & \text{si la componente } i \text{ no funciona} \end{cases} \quad (2-3)$$

para  $i = 1, \dots, m$ , donde  $m$  es el número de componentes del sistema. Similarmente, la variable binaria  $\phi$  indica el estado del sistema:

$$\phi = \begin{cases} 1, & \text{si el sistema funciona} \\ 0, & \text{si el sistema no funciona} \end{cases} \quad (2-4)$$

Se asume, que el estado del sistema es determinado completamente por el estado de las componentes, de modo que:

$$\phi = \phi(\mathbf{x})$$

donde

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$$

La función  $\phi(\mathbf{x})$  es llamada la función estructura del sistema. Conocer dicha función es conocer la estructura del sistema. El número de componentes del sistema determina el orden del sistema.

En la teoría de sistemas de componentes existen varios tipos:

- Un sistema en serie, es un sistema que funciona si y solo si todas las componentes funcionan.
- Un sistema en paralelo, es un sistema que funciona si y solo si al menos una componente funciona.
- Un sistema  $k$  de  $m$ , es un sistema que funciona si y solo si al menos  $k$  de las  $m$  componentes funcionan. Un sistema 1 de  $m$  es un sistema en paralelo, y un sistema  $m$  de  $m$  es un sistema en serie.

Los estudios sobre sistemas coherentes son importantes en la teoría de confiabilidad y en el análisis de supervivencia. De acuerdo con Barlow y Proschan (1975) un sistema coherente puede ser definido como una función de estructura, la cual es creciente en cada argumento y cada componente es relevante (una componente es irrelevante si no importa si está funcionando o no). A continuación, la definición formal:

**Definición 1.** *Un sistema de componentes es **coherente** si:*

- (i) *La función estructura  $\phi$  es creciente en cada uno de sus argumentos.*
- (ii) *Cada componente es relevante, en otras palabras;  $\phi(\mathbf{0}) = 0$  y  $\phi(\mathbf{1}) = 1$ .*

La condición (i) se refiere a que el sistema no puede deteriorarse (es decir, cambiar del estado funcional al estado fallido), al mejorar el rendimiento de cada componente. La condición (ii) dice que si todos los componentes están en estado de falla, entonces el sistema está en estado de falla y si todos los componentes están funcionando, entonces el sistema está en estado de funcionamiento.

Teniendo presente la definición anterior, restringimos la consideración a funciones de estructura que aumentan monotónicamente en cada argumento. Además, para evitar trivialidades, eliminaremos siempre que sea posible, la consideración de cualquier sistema cuyo estado no dependa del estado de sus componentes.

Barlow y Proschan (1975) muestran la relación entre la función de distribución acumulada (cdf) de un sistema y las funciones de distribución acumuladas (cdfs) de las componentes, las cuales se caracterizan por una función de estructura del sistema  $\phi$ . Bajo el supuesto de independencia de los tiempos de falla de las componentes, la función de distribución acumulada (cdf) para la distribución del tiempo de falla del sistema puede expresarse como:

$$F(t; \boldsymbol{\theta}) = \phi[F_1(t; \boldsymbol{\theta}_1), \dots, F_m(t; \boldsymbol{\theta}_m)] \quad (2-5)$$

donde  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}'_1, \dots, \boldsymbol{\theta}'_m)'$  y  $\phi = \phi(x_1, \dots, x_m)$ , la cual es una función de mapeo  $[0, 1]^m$  (un hipercubo  $m$  dimensional) en  $[0, 1]$ . Barlow y Proschan (1975), muestran que para cualquier sistema coherente con todas las  $F_i(t, \boldsymbol{\theta}_i)$  en  $(0, 1)$ , la función  $\phi$ , es una función estrictamente creciente y dos veces diferenciable con respecto a cada uno de sus argumentos. Hong y Meeker (2014) trabajan una forma general de la función  $\phi$ , donde la idea fue tomada de Hong (2013).

En este trabajo se tomarán algunas notaciones como; la función cdf ( $F(t; \boldsymbol{\theta})$ ), el cuantil  $p$  se define como el inverso de la función de distribución acumulada (cdf) y  $t_p = F^{-1}(p)$ . Para resolver  $t_p$ ,  $F(t_p; \boldsymbol{\theta}) = p$ , se requieren métodos numéricos. Además, dado un tiempo de falla  $T$  se denotará por  $Y = \log(T)$ . La función cuantil de  $Y$  se denota por  $y_p = \log(t_p)$ . Tenga en cuenta que tanto  $t_p$  como  $y_p$  dependen del vector de parámetros desconocido  $\boldsymbol{\theta}$ , esto es  $t_p = t_p(\boldsymbol{\theta})$  y  $y_p = y_p(\boldsymbol{\theta})$ .

## 2.2. Modelo del tiempo de falla en componentes

Meeker y Escobar (1998) ilustran cómo usar la familia de distribuciones de log-localización y escala para modelar el tiempo de falla de las componentes individuales de un sistema. La función de densidad de probabilidad (pdf) y la función de distribución acumulada (cdf), de una distribución de log-localización y escala se expresan como:

$$F(t; \mu, \sigma) = \Phi \left[ \frac{\log(t) - \mu}{\sigma} \right] \text{ y } f(t; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma t} \phi \left[ \frac{\log(t) - \mu}{\sigma} \right] \quad (2-6)$$

donde  $\Phi$  es la cdf estándar para la familia de log-localización y escala (localización 0 y escala 1),  $\mu$  es el parámetro de localización y  $\sigma$  el parámetro de escala, en la escala logarítmica. La cdf y pdf para la distribución lognormal pueden obtenerse al reemplazar  $\Phi$  y  $\phi$  por  $\Phi_{\text{nor}}$  y  $\phi_{\text{nor}}$ , la cdf y pdf, de la distribución normal estándar, respectivamente.

La cdf del tiempo de falla del componente se denota por

$$F_i(t; \boldsymbol{\theta}_i) = \Phi_i(z_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2-7)$$

(ya que la forma de la distribución no tiene que ser la misma para todas las componentes), donde  $\boldsymbol{\theta}_i = (\mu_i, \sigma_i)'$  y  $z_i = [\log(t) - \mu_i]/\sigma_i$ .

## 2.3. Estimación por máxima verosimilitud

El siguiente esquema de la recolección de los datos fue tomada del artículo de Hong y Meeker (2014). En efecto: supongamos que los datos se recopilan a nivel de componentes a partir de una prueba de vida o de campo. Los datos para la componente  $i$  se denotan por  $\mathcal{D}_i$ , los tiempos del evento para la componente  $i$  se denotan por  $t_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$  donde  $n_i$  es el número de observaciones en  $\mathcal{D}_i$ .

Para datos censurados, usamos el indicador de censura  $\delta_{ij}$ , es decir,  $\delta_{ij} = 1$  indica una falla y  $\delta_{ij} = 0$  indica una observación censurada. Para los datos de vida del sistema, se supone que los datos fueron recolectados de  $n$  unidades del sistema que fallan debido a un modelo de riesgos competitivos. Para los datos de las pruebas de laboratorio, se asume que cada componente es probado en una prueba de vida separada. De ahí que para datos de vida,  $n_i = n$ , y para los datos de pruebas de laboratorio, los  $n_i$ 's pueden ser diferentes. Se debe agregar que  $r_i$  denota el número de fallas en  $\mathcal{D}_i$ .

Se utiliza una distribución de log-localización y escala para describir el tiempo de falla de la componente  $i$ . Bajo el supuesto de que los tiempos de falla de las componentes del sistema son independientes, la verosimilitud se puede factorizar con factores separados para cada componente (Lawless, 2003, página 446).

La función de verosimilitud para  $\theta_i$  basada en datos  $\mathcal{D}_i$  es:

$$L_i(\theta_i | \mathcal{D}_i) \propto \prod_{j=1}^{n_i} \left\{ \frac{1}{\sigma_i t_{ij}} \phi_i \left[ \frac{\log(t_{ij}) - \mu_i}{\sigma_i} \right] \right\}^{\delta_{ij}} \left\{ 1 - \Phi_i \left[ \frac{\log(t_{ij}) - \mu_i}{\sigma_i} \right] \right\}^{1 - \delta_{ij}} \quad (2-8)$$

donde  $\phi_i(\cdot)$  es la pdf estándar de la distribución de localización y escala que corresponde a  $\Phi_i(\cdot)$ . Los estimadores de máxima verosimilitud (ML) de los parámetros de la componente  $i$  con base en los datos  $\mathcal{D}_i$ , son denotados por  $\hat{\theta}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Para muestras grandes y bajo condiciones de regularidad  $\hat{\theta}_i$ , se distribuye asintóticamente normal multivariada (MVN), esto es,  $\hat{\theta}_i \sim \text{MVN}(\theta_i, \Sigma_i)$ , donde  $\Sigma_i$  es la matriz de varianzas-covarianzas de  $\hat{\theta}_i$ . Hong y Meeker (2014) usan para estimar  $\Sigma_i$  la inversa de la matriz de información, la cual se puede escribir de la siguiente manera:

$$\hat{\Sigma}_i = \frac{\hat{\sigma}_i^2}{n_i} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{11i} & \hat{\lambda}_{12i} \\ \hat{\lambda}_{12i} & \hat{\lambda}_{22i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2-9)$$

donde  $\hat{\lambda}_{11i}$ ,  $\hat{\lambda}_{12i}$  y  $\hat{\lambda}_{22i}$  son estimaciones de los elementos de la matriz de varianzas y covarianzas. La matriz de información observada es el negativo de la matriz Hessiana evaluada en las estimaciones de ML. Los estimadores ML de los parámetros del sistema son:  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}'_1, \dots, \hat{\theta}'_m)'$ . Para este caso se supone que los tiempos de falla de las componentes son independientes, por tanto, los estimadores  $\hat{\theta}_i$  basados en  $\mathcal{D}_i$  también resultan independientes. De ahí que,  $\hat{\theta}$  también está asintóticamente distribuido MVN. Entonces,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim \text{MVN}[\boldsymbol{\theta}, \text{Diag}(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m)] \quad (2-10)$$

Para el caso de componentes dependientes, la matriz de varianzas y covarianzas ya no resulta ser una matriz diagonal en bloques, por tanto el manejo debe ser distinto. Se tienen que garantizar algunos supuestos para que el problema a trabajar resulte bien condicionado.

## 2.4. Intervalos de confianza (IC) para la confiabilidad de sistemas

Hong y Meeker (2014) plantean para la confiabilidad de sistemas que encontrar procedimientos de intervalos de confianza con buenas propiedades no es sencillo, especialmente cuando la estructura del sistema es compleja. Con base en lo anterior los autores desarrollan un procedimiento general para la construcción de un intervalo de confianza para la función cuantil del tiempo de falla del sistema utilizando implícitamente el método Delta. También, los autores proponen un procedimiento general para construir un intervalo de confianza para la función de distribución acumulada del sistema. El procedimiento propuesto para la construcción de los intervalos de confianza para un tiempo específico, se trabajaron bajo aproximación Normal y censura tipo I, ver (Hong y Meeker, 2014) donde consideran un sistema con componentes independientes, pero dejan abierta la posibilidad de que dichos procedimientos se adopten para sistemas con componentes dependientes, por ejemplo, un sistema puede usar el mismo componente más de una vez dentro del sistema. En otras palabras, en algunos sistemas, dos o más componentes pueden compartir algunos, pero no todos los parámetros.

Por ejemplo, hay sistemas en los que el tiempo de vida de las componentes se pueden modelar con una distribución Weibull con parámetro de forma común, pero con parámetro de escala diferente. Por lo tanto, puede existir alguna redundancia en el vector de parámetros  $(\boldsymbol{\theta}'_1, \dots, \boldsymbol{\theta}'_m)'$ .

Se debe resaltar que los resultados de la sección 2.4, hacen parte del trabajo de Hong y Meeker (2014), se muestran su comportamiento para el caso de un sistema con tiempo independientes, y posteriormente, se presentan resultados para un sistema en seire con tiempo dependientes y modelos con singularidad (Marshall-Olkin).

### 2.4.1. Interpretación de intervalos de confianza

Un intervalo de confianza está basado en varios aspectos; en una muestra sujeta a variaciones aleatorias de muestreo y a un nivel de confianza. Algunas veces el intervalo de confianza que se calcula no contiene la cantidad de interés que debe tener, e incluso cuando cumplen todos los supuestos necesarios, se debe cuestionar la calidad de dichos intervalos estadísticos. En

relación a lo anterior, se puede afirmar que son correctos solo un porcentaje específico (por ejemplo 90 %, 95 % o 99 %) del tiempo en que se calculan, es decir, son correctos con un grado de confianza específico. El porcentaje de tales intervalos estadísticos que contienen lo que uno dice que contiene se conoce como el nivel de confianza asociado con el intervalo.

El nivel de confianza, al menos desde un punto de vista tradicional, es una propiedad del procedimiento para construir un intervalo estadístico particular, y no una propiedad del intervalo calculado en sí. Por lo tanto, el nivel de confianza es la probabilidad de que, en cualquier estudio, la muestra aleatoria dé como resultado un intervalo que contenga lo que se afirma que contiene Meeker, Hahn, y Escobar (2017).

Usando la interpretación clásica, un intervalo de confianza particular, por ejemplo, para que contenga la media de una población no puede describirse correctamente como un intervalo que contenga la media de una población real con una probabilidad específica. Todo lo que podemos decir es que al calcular muchos intervalos de confianza diferentes para contener medias de poblaciones de diferentes muestras aleatorias (independientes), el intervalo de confianza calculado contendrá realmente la media poblacional real con una probabilidad específica conocida como probabilidad de cobertura y, debido a la aleatoriedad, no estará en el dicho intervalo (Meeker et al., 2017).

En este trabajo, se evalúa la efectividad de los intervalos por medio de las probabilidades de cobertura y se decidirá cuál es el mejor intervalo en cada uno de los escenarios propuestos.

### 2.4.2. Procedimientos de IC con aproximación Normal para $t_p$

Inicialmente, se calcula la estimación para el error estándar de  $\hat{y}_p$  basado en el método Delta y la información observada:

$$\hat{se}_{\hat{y}_p} = \sqrt{\frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \text{Diag} \left( \hat{\Sigma}_1, \dots, \hat{\Sigma}_m \right) \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}} \quad (2-11)$$

Para simplificar la notación, se usa  $\partial \hat{y}_p / \partial \hat{\boldsymbol{\theta}}$  para denotar  $\partial \hat{y}_p / \partial \boldsymbol{\theta} |_{\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}}$ . Esto es  $\partial \hat{y}_p / \partial \hat{\boldsymbol{\theta}}$ , se obtiene derivando con respecto a cada parámetro y evaluándolo en los estimadores de ML. En muchas aplicaciones, no existe una forma cerrada para la expresión  $y_p = y_p(\boldsymbol{\theta})$ . Además, usando el método de la derivada implícita se calcula  $\partial \hat{y}_p / \partial \hat{\boldsymbol{\theta}}$ . En particular, para encontrar  $\partial \hat{y}_p / \partial \hat{\mu}_i$  y  $\partial \hat{y}_p / \partial \hat{\sigma}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

$$F(t_p; \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{p} = g\{F_1[\exp(\hat{y}_p); \hat{\boldsymbol{\theta}}_1], \dots, F_m[\exp(\hat{y}_p); \hat{\boldsymbol{\theta}}_m]\}. \quad (2-12)$$

La función  $g$  en este caso es la misma función estructura del sistema, es decir  $\phi$ . En efecto, tomando derivadas en ambos lados de (2-12) con respecto a  $\hat{\mu}_i$ , se tiene:

$$0 = \frac{\partial g}{\partial F_i} \frac{\partial F_i(\hat{y}_p)}{\partial \hat{\mu}_i} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial g}{\partial F_j} \frac{\partial F_j(\hat{y}_p)}{\partial \hat{\mu}_i} \quad (2-13)$$

Hallemos las siguientes derivadas,  $\partial F_i(\hat{y}_p)/\partial \hat{\mu}_i$  y  $\partial F_j(\hat{y}_p)/\partial \hat{\mu}_i$ . Sea  $\hat{z}_{ip} = (\hat{y}_p - \hat{\mu}_i)/\hat{\sigma}_i$ , con  $i = 1, \dots, m$ , en particular se debe tener presente que para la componente  $i$ ,  $\phi_i$  es la pdf de localización y escala. Por consiguiente, como  $F_j(\hat{y}_p) = \Phi_i(\hat{z}_{ip})$  se tiene que:

$$\frac{\partial F_i(\hat{y}_p)}{\partial \hat{\mu}_i} = f_i(\hat{y}_p) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\mu}_i} - 1 \right)$$

donde  $f_i(\hat{y}_p) = \phi_i(\hat{z}_{ip})/\hat{\sigma}_i$ . Por otro lado,

$$\frac{\partial F_j(\hat{y}_p)}{\partial \hat{\mu}_i} = f_j(\hat{y}_p) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\mu}_i} \right)$$

donde  $\hat{z}_{jp} = (\hat{y}_p - \hat{\mu}_j)/\hat{\sigma}_j$  y  $f_j(\hat{y}_p) = \phi_j(\hat{z}_{jp})/\hat{\sigma}_j$ . Sustituyendo las derivadas anteriores en (2-13), se sigue:

$$0 = \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\mu}_i} - 1 \right) + \sum_{j \neq i} \frac{\partial g}{\partial F_j} f_j(\hat{y}_p) \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\mu}_i}, \quad (2-14)$$

Despejando de la ecuación (2-14), se tiene que:

$$\frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\mu}_i} = \frac{\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Como  $g$  es una función estrictamente creciente, se tiene que  $\sum_{i=1}^m \partial g / \partial F_i(\hat{y}_p) f_i(\hat{y}_p) > 0$ . Así, resulta bien definida la expresión anterior.

Seguidamente, derivando (2-12) con respecto a  $\hat{\sigma}_i$ , se tiene

$$0 = \frac{\partial g}{\partial F_i} \frac{\partial F_i(\hat{y}_p)}{\partial \hat{\sigma}_i} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial g}{\partial F_j} \frac{\partial F_j(\hat{y}_p)}{\partial \hat{\sigma}_i} \quad (2-15)$$

En efecto, como  $F_j(\hat{y}_p) = \Phi_i(\hat{z}_{ip})$  entonces,

$$\frac{\partial F_i(\hat{y}_p)}{\partial \hat{\sigma}_i} = f_i(\hat{y}_p) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i} - \hat{z}_{ip} \right)$$

y

$$\frac{\partial F_j(\hat{y}_p)}{\partial \hat{\sigma}_i} = f_j(\hat{y}_p) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i} \right)$$

Sustituyendo las anteriores derivadas en (2-15) y despejando  $\partial \hat{y}_p / \partial \hat{\sigma}_i$ , se tiene que:

$$\frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i} = \frac{\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) \hat{z}_{ip}}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

donde  $\partial \hat{y}_p / \partial \hat{\sigma}_i = \partial y_p / \partial \sigma_i |_{\theta = \hat{\theta}}$ .

Avanzando en nuestro razonamiento, calculamos el error estandar para  $\hat{y}_p$ . Considerando la ecuación (2-11), procedemos a encontrar  $\partial \hat{y}_p / \partial \hat{\theta}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . En efecto:

$$\frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\theta}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\mu}_i} \\ \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)} \\ \frac{\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) \hat{z}_{ip}}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)} \end{bmatrix} = \frac{\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{z}_{ip} \end{bmatrix}$$

Asumiremos la siguiente notación;

$$\hat{\theta}_i = m_i \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{z}_{ip} \end{bmatrix}$$

con  $m_i = \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) / \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)$ ,  $r_i = \hat{\sigma}_i^2 / n_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Como  $\partial \hat{y}_p / \partial \hat{\theta}_i$  es un vector  $2 \times 1$  y  $\hat{\Sigma}_i$  es una matriz  $2 \times 2$ .

Para las  $m$  componentes, se tiene:

$$\sum_{i=1}^m \hat{\theta}_i' \hat{\Sigma}_i \hat{\theta}_i = \sum_{i=1}^m m_i^2 r_i \left[ \hat{\lambda}_{11i} + 2\hat{\lambda}_{12i} \hat{z}_{ip} + \hat{\lambda}_{22i} \hat{z}_{ip}^2 \right]$$

Por tanto;

$$\hat{s}e_{\hat{y}_p} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) \right]^2 \frac{\hat{\sigma}_i^2}{n_i} (\hat{\lambda}_{11i} + 2\hat{\lambda}_{12i} \hat{z}_{ip} + \hat{\lambda}_{22i} \hat{z}_{ip}^2)}}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)}. \quad (2-16)$$

Usando muestras grandes, resulta que:

$$\frac{\hat{y}_p - y_p}{\hat{s}e_{\hat{y}_p}} \sim N(0, 1) \quad (2-17)$$

**Resultado 1.** (Hong y Meeker, 2014) proponen un intervalo de confianza al  $100(1 - \alpha) \%$  para  $y_p$  como sigue:

$$[y_p, \tilde{y}_p] = \hat{y}_p \mp z_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) \right]^2 \frac{\hat{\sigma}_i^2}{n_i} (\hat{\lambda}_{11i} + 2\hat{\lambda}_{12i} \hat{z}_{ip} + \hat{\lambda}_{22i} \hat{z}_{ip}^2)}}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)}, \quad (2-18)$$

donde  $z_{1-\alpha/2}$ , es el cuantil de la distribución normal estándar. Un IC para  $t_p$  es

$$[t_p, \tilde{t}_p] = [\exp(\underline{y}_p), \exp(\tilde{y}_p)] \quad (2-19)$$

### 2.4.3. Procedimientos de IC con aproximación Normal para $F(t_e)$

Sea  $p = F(t_e; \boldsymbol{\theta})$  y  $\hat{p} = F(t_e; \hat{\boldsymbol{\theta}})$ . Como

$$\frac{(\hat{p} - p)}{\hat{se}_{\hat{p}}} \sim N(0, 1). \quad (2-20)$$

Un método directo para construir un IC para  $p$  es:

$$[\underline{p}, \tilde{p}] = [\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \hat{se}_{\hat{p}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \hat{se}_{\hat{p}}] \quad (2-21)$$

Aplicando el método Delta, se obtiene la expresión para el error estándar

$$\hat{se}_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}'} \text{Diag}(\hat{\Sigma}_1, \dots, \hat{\Sigma}_m) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}} \quad (2-22)$$

Partiendo de la ecuación (2-12), pero ahora para un tiempo específico  $t_e$ , con  $y_e = \log(t_e)$ ,  $f_i(y_e) = \phi_i(z_{ie})/\hat{\sigma}_i$  y  $\hat{z}_{ie} = (\hat{y}_e - \hat{\mu}_i)/\hat{\sigma}_i$ , con  $i = 1, \dots, m$ . En efecto:

$$\hat{p} = g\{F_1[\exp(\hat{y}_e); \hat{\boldsymbol{\theta}}_1], \dots, F_m[\exp(\hat{y}_e); \hat{\boldsymbol{\theta}}_m]\}. \quad (2-23)$$

Tomando derivadas con respecto a  $\hat{\mu}_i$  en ambos lados de (2-23), se sigue:

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\mu}_i} = \frac{\partial g}{\partial F_i} \frac{\partial F_i(\hat{y}_e)}{\partial \hat{\mu}_i} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial g}{\partial F_j} \frac{\partial F_j(\hat{y}_e)}{\partial \hat{\mu}_i} \quad (2-24)$$

Como  $F_j(\hat{y}_e) = \phi_j(\hat{z}_{je})$ ;

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i(\hat{y}_e)}{\partial \hat{\mu}_i} &= \phi_i(\hat{z}_{ie}) \frac{\partial \hat{z}_{ie}}{\partial \hat{\mu}_i} \\ &= \phi_i(\hat{z}_{ie}) \left( -\frac{1}{\hat{\sigma}_i} \right) \\ &= -\frac{\phi_i(\hat{z}_{ie})}{\hat{\sigma}_i} \\ &= -f_i(\hat{y}_e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_j(\hat{y}_e)}{\partial \hat{\mu}_i} &= \phi_j(\hat{z}_{je}) \frac{\partial \hat{z}_{je}}{\partial \hat{\mu}_i} \\ &= \phi_j(\hat{z}_{je}) (0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando en (2-24), las dos derivadas calculadas, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\mu}_i} &= \frac{\partial g}{\partial F_i} (-f_j(\hat{y}_e)) + \sum_{j \neq i} \frac{\partial g}{\partial F_i} (0) \\ &= -\frac{\partial g}{\partial F_i} (f_i(\hat{y}_e))\end{aligned}$$

Ahora bien, derivando (2-23) con respecto a  $\hat{\sigma}_i$ , en consecuencia, se sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\sigma}_i} &= \frac{\partial g}{\partial F_i} \frac{\partial F_i(\hat{y}_e)}{\partial \hat{\sigma}_i} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial g}{\partial F_j} \frac{\partial F_j(\hat{y}_e)}{\partial \hat{\sigma}_i} \tag{2-25} \\ \frac{\partial F_i(\hat{y}_e)}{\partial \hat{\sigma}_i} &= \phi_i(\hat{z}_{ie}) \frac{\partial \hat{z}_{ie}}{\partial \hat{\sigma}_i} \\ &= \phi_i(\hat{z}_{ie}) \left( \frac{\frac{\partial \hat{y}_e}{\partial \hat{\sigma}_i} \hat{\sigma}_i - (\hat{y}_e - \hat{\mu}_i)}{\hat{\sigma}_i^2} \right) \\ &= \left( \frac{\phi_i(\hat{z}_{ie})}{\hat{\sigma}_i} \right) \left( \frac{\partial \hat{y}_e}{\partial \hat{\sigma}_i} - \hat{z}_{ie} \right) \\ &= f_i(\hat{y}_e) (0 - \hat{z}_{ie}) \\ &= -f_i(\hat{y}_e) \hat{z}_{ie} \\ \frac{\partial F_j(\hat{y}_e)}{\partial \hat{\sigma}_i} &= \phi_j(\hat{z}_{je}) \frac{\partial \hat{z}_{je}}{\partial \hat{\sigma}_i} \\ &= \phi_j(\hat{z}_{je}) \left( \frac{1}{\hat{\sigma}_j} \right) \left( \frac{\partial \hat{y}_e}{\partial \hat{\sigma}_i} \right) \\ &= \left( \frac{\phi_j(\hat{z}_{je})}{\hat{\sigma}_j} \right) (0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Sustituyendo, las derivadas en (2-25), se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\sigma}_i} &= -\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_e) \hat{z}_{ie} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial g}{\partial F_j} (0) \\ &= -\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_e) \hat{z}_{ie}\end{aligned}$$

Usando (2-22), tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\theta}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\mu}_i} \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\sigma}_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_e) \\ -\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_e) \hat{z}_{ie} \end{bmatrix} = -\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_e) \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{z}_{ie} \end{bmatrix}$$

Ahora bien, reescribimos la ecuación anterior de la siguiente manera;

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\theta}_i} = m_i \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{z}_{ie} \end{bmatrix} \text{ con } m_i = -\partial g f_i(\hat{y}_p) / \partial F_i \text{ y además, } r_i = \hat{\sigma}_i^2 / n_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m.$$

De la ecuación (2-25) y realizando el mismo procedimiento que se hizo para la ecuación (2-16), se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{s}e_{\hat{p}} &= \sqrt{\sum_{i=1}^m m_i^2 r_i \left( \hat{\lambda}_{11i} + 2\hat{\lambda}_{12i} \hat{z}_{ie} + \hat{\lambda}_{22i} \hat{z}_{ie}^2 \right)} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \left[ -\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_e) \right]^2 \frac{\hat{\sigma}_i^2}{n_i} \left( \hat{\lambda}_{11i} + 2\hat{\lambda}_{12i} \hat{z}_{ie} + \hat{\lambda}_{22i} \hat{z}_{ie}^2 \right)} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_e) \right]^2 \frac{\hat{\sigma}_i^2}{n_i} \left( \hat{\lambda}_{11i} + 2\hat{\lambda}_{12i} \hat{z}_{ie} + \hat{\lambda}_{22i} \hat{z}_{ie}^2 \right)} \end{aligned}$$

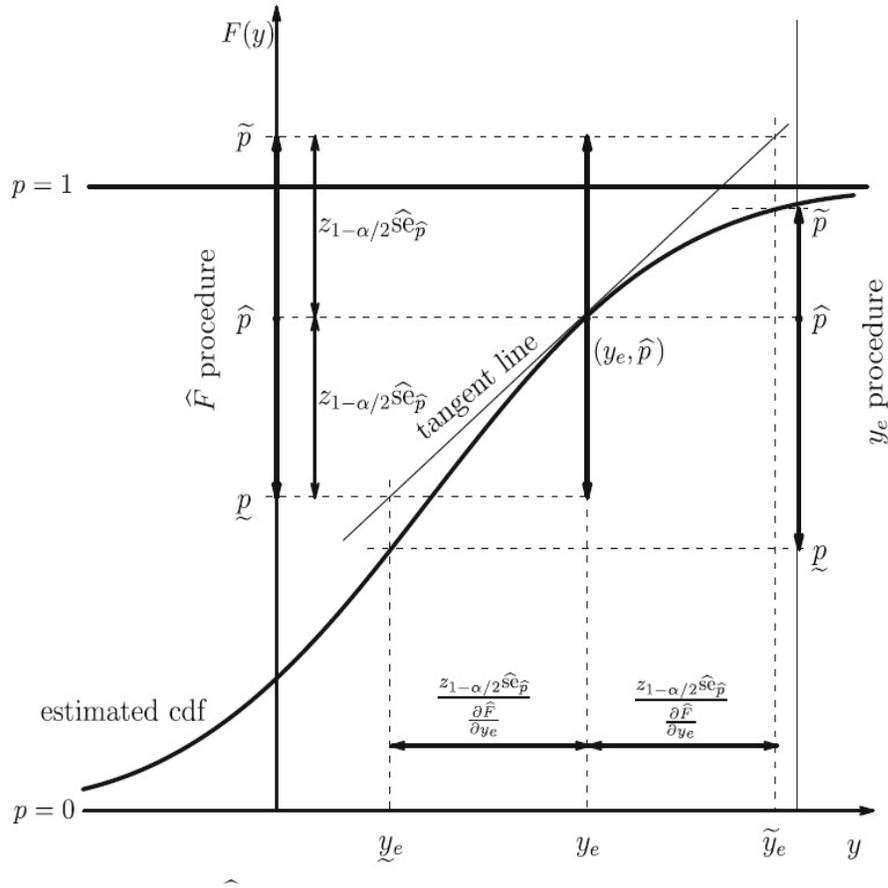
En consecuencia, la expresión para el error estándar de  $\hat{p}$  es:

$$\hat{s}e_{\hat{p}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_e) \right]^2 \left[ \frac{\hat{\sigma}_i^2}{n_i} (\hat{\lambda}_{11i} + 2\hat{\lambda}_{12i} \hat{z}_{ie} + \hat{\lambda}_{22i} \hat{z}_{ie}^2) \right]} \quad (2-26)$$

donde  $\partial \hat{p} / \partial \hat{\theta} = \partial p / \partial \theta |_{\theta = \hat{\theta}}$  y  $y_e = \log(t_e)$ ,  $f_i(y_e) = \phi_i(\hat{z}_{ie}) / \hat{\sigma}_i$  y  $\hat{z}_{ie} = (y_e - \hat{\mu}_i) / \hat{\sigma}_i$ . El procedimiento del IC propuesto en (2-21), puede producir IC con puntos finales fuera de  $[0, 1]$ , lo cual no es una propiedad deseable para los IC. Meeker y Escobar (1998) y Pascual y Gast (2010) proponen una transformación *logit* o alguna otra similar para restringir estos puntos finales. Este procedimiento puede tener una probabilidad mucho mayor de tener un comportamiento no monótono creciente (*bend-back*), para un sistema con un solo componente, ver detalles Hong, Meeker, y Escobar (2008).

El siguiente procedimiento alternativo, el cual es llamado  $y_e$  por sus autores Hong y Meeker (2014), el cual produce IC con puntos finales que siempre caen dentro del intervalo  $[0, 1]$  y tiene una probabilidad mucho menor de presentar un comportamiento no monótono creciente.

La construcción de los IC, se muestran en la figura **2-1**, se basa indirectamente, en los puntos finales obtenidos utilizando el procedimiento  $\hat{F}$ , como se muestra en (**2-1**), los puntos finales de los IC obtenidos por el procedimiento  $\hat{F}$ , es reflejado con respecto a la línea tangente de  $\hat{F}[\exp(y_e)]$  contra  $y_e = \log(t_e)$ , los cuales se denotan  $\underline{y}_e$  y  $\tilde{y}_e$ , respectivamente. En efecto,



**Figura 2-1:** Hong y Meeker (2014) Ilustración del procedimiento  $\widehat{F}$  y el procedimiento propuesto para obtener los IC para  $F(t_e)$ . Recuperado; <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10985-013-9245-9>

para el límite superior del IC, tenemos:

$$\frac{\partial \widehat{F}(\exp(y_e))}{\partial y_e} = \frac{\tilde{p} - \hat{p}}{\tilde{y}_e - y_e} = \frac{z_{1-\alpha/2} \widehat{se}_{\hat{p}}}{\tilde{y}_e - y_e}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial \widehat{F}(\exp(y_e))}{\partial y_e} = \frac{z_{1-\alpha/2} \widehat{se}_{\hat{p}}}{\tilde{y}_e - y_e} \tag{2-27}$$

Despejando  $\tilde{y}_e$ , se tiene:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_e - y_e &= \frac{z_{1-\alpha/2} \widehat{S} e_{\widehat{p}}}{\frac{\partial \widehat{F}[\exp(y_e)]}{\partial y_e}} \\ \tilde{y}_e &= y_e + \frac{z_{1-\alpha/2} \widehat{S} e_{\widehat{p}}}{\frac{\partial \widehat{F}[\exp(y_e)]}{\partial y_e}} \\ \tilde{y}_e &= y_e + z_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_e) \right]^2 \frac{\widehat{\sigma}_i^2}{n_i} (\widehat{\lambda}_{11i} + 2\widehat{\lambda}_{12i} \widehat{z}_{ie} + \widehat{\lambda}_{22i} \widehat{z}_{ie}^2)}}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_e)}\end{aligned}$$

A su vez, para el límite inferior del IC:

$$\frac{\partial \widehat{F}(\exp(y_e))}{\partial y_e} = \frac{\widehat{p} - \tilde{p}}{y_e - \underline{y}_e} = \frac{z_{1-\alpha/2} \widehat{S} e_{\widehat{p}}}{y_e - \underline{y}_e}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial \widehat{F}(\exp(y_e))}{\partial y_e} = \frac{z_{1-\alpha/2} \widehat{S} e_{\widehat{p}}}{y_e - \underline{y}_e} \quad (2-28)$$

Despejando  $\underline{y}_e$ , tenemos:

$$\begin{aligned}y_e - \underline{y}_e &= \frac{z_{1-\alpha/2} \widehat{S} e_{\widehat{p}}}{\frac{\partial \widehat{F}[\exp(y_e)]}{\partial y_e}} \\ \underline{y}_e &= y_e - \frac{z_{1-\alpha/2} \widehat{S} e_{\widehat{p}}}{\frac{\partial \widehat{F}[\exp(y_e)]}{\partial y_e}} \\ \underline{y}_e &= y_e - z_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_e) \right]^2 \frac{\widehat{\sigma}_i^2}{n_i} (\widehat{\lambda}_{11i} + 2\widehat{\lambda}_{12i} \widehat{z}_{ie} + \widehat{\lambda}_{22i} \widehat{z}_{ie}^2)}}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_e)},\end{aligned}$$

Los puntos finales inferior y superior del IC propuesto se obtienen evaluando  $F(t; \widehat{\theta})$  en  $\exp(\underline{y}_e)$  y  $\exp(\tilde{y}_e)$  respectivamente.

**Resultado 2.** (Hong y Meeker, 2014) un intervalo de confianza para muestras grandes del  $100(1 - \alpha)\%$ , para  $p = F(t_e; \theta)$  es:

$$[\underline{p}, \tilde{p}] = [\widehat{F}\{\exp(\underline{y}_e)\}, \widehat{F}\{\exp(\tilde{y}_e)\}]. \quad (2-29)$$

#### 2.4.4. Procedimientos de IC con aproximación Normal para $S(t_e)$

Por (2-29) se tiene un intervalo de confianza para  $F(t_e; \theta)$ , es decir:

$$\hat{F} [\exp(\underline{y}_e)] \leq F(t_e) \leq \hat{F} [\exp(\tilde{y}_e)]$$

Multiplicando por  $-1$  la desigualdad anterior y sumándole uno, se tiene:

$$1 - \hat{F} [\exp(\underline{y}_e)] \geq 1 - F(t_e) \geq 1 - \hat{F} [\exp(\tilde{y}_e)]$$

Así, un intervalo de confianza para  $S(t_e) = 1 - F(t_e)$ , es dado por:

$$1 - \hat{F} [\exp(\tilde{y}_e)] \leq S(t_e) \leq 1 - \hat{F} [\exp(\underline{y}_e)]$$

**Resultado 3.** *Un intervalo de confianza para muestras grandes del  $100(1-\alpha)\%$ , para  $S(t_e; \theta)$  es:*

$$[\underline{S}(t_e), \tilde{S}(t_e)] = \left[ 1 - \hat{F} [\exp(\tilde{y}_e)], 1 - \hat{F} [\exp(\underline{y}_e)] \right]. \quad (2-30)$$

#### 2.4.5. Procedimientos de IC basados en verosimilitud

En esta sección se presentan los procedimientos para intervalos de confianza basados en verosimilitud para  $t_p = t_p(\theta)$  y  $F(t_e) = F(t_e; \theta)$ . En general, no hay expresiones en forma cerrada para los procedimientos en intervalos de confianza basados en verosimilitud. Por tanto, es necesario apoyarnos en los métodos numéricos para calcular los IC y estos a su vez pueden requerir de un recurso computacional intensivo.

##### Procedimientos de IC basados en verosimilitud para $t_p$

Sea  $\ell(\theta) = \sum_{i=1}^m \ell_i(\theta)$  la función de log-verosimilitud de los datos y  $\ell_i(\theta) = \log[L_i(\theta)]$ , donde  $L_i(\theta)$  es como en (2-8). Apoyándonos en la teoría de muestras grandes para los MLE y bajo algunas condiciones de regularidad, se tiene: Pawitan (2001, página 241), Lehmann y Casella (1998, Capítulo 6); Meeker y Escobar (1998, página 177).

$$2 \left\{ \ell(\hat{\theta}) - \max_{\{\tilde{\theta}: F(t_p; \tilde{\theta})=p\}} \ell(\tilde{\theta}) \right\} \sim \chi_1^2 \quad (2-31)$$

para  $p$  fijo,  $0 < p < 1$  y  $t_p = t_p(\theta)$ . Los resultados de (2-31) proporcionan la base de una prueba de razón de verosimilitud para  $t_p$ .

Un IC al  $100(1-\alpha)\%$  basado en verosimilitud para  $t_p$ , se obtiene invirtiendo el test de razón de verosimilitud, es:

$$[\underline{t}_p, \tilde{t}_p] \quad (2-32)$$

con

$$t_p = \min \left\{ t : \max_{\{\tilde{\theta}: F(t_p; \tilde{\theta})=p\}} \ell(\tilde{\theta}) \geq \ell(\hat{\theta}) - \frac{1}{2} \chi_{1;1-\alpha}^2 \right\}$$

$$\tilde{t}_p = \max \left\{ t : \max_{\{\tilde{\theta}: F(t_p; \tilde{\theta})=p\}} \ell(\tilde{\theta}) \geq \ell(\hat{\theta}) - \frac{1}{2} \chi_{1;1-\alpha}^2 \right\}$$

donde  $\chi_{1;1-\alpha}^2$  es el cuantil  $(1 - \alpha)$  de la distribución  $\chi_1^2$ .

### Procedimientos de IC basados en verosimilitud para $F(t_e)$

En la teoría estandar de muestras grandes para los MLE, se proporciona el siguiente resultado:

$$2 \left\{ \ell(\hat{\theta}) - \max_{\{\tilde{\theta}: F(t_e; \tilde{\theta})=p\}} \ell(\tilde{\theta}) \right\} \sim \chi_1^2 \quad (2-33)$$

con  $t_e > 0$  fijo y  $p = F(t_e; \theta)$ . Un IC de verosimilitud del  $100(1 - \alpha)\%$  para  $p$  es:

$$[p, \tilde{p}] \quad (2-34)$$

donde

$$\tilde{p} = \min \left\{ u : \max_{\{\tilde{\theta}: F(t_e; \tilde{\theta})=u\}} \ell(\tilde{\theta}) \geq \ell(\hat{\theta}) - \frac{1}{2} \chi_{1;1-\alpha}^2 \right\}$$

$$\tilde{p} = \max \left\{ u : \max_{\{\tilde{\theta}: F(t_e; \tilde{\theta})=u\}} \ell(\tilde{\theta}) \geq \ell(\hat{\theta}) - \frac{1}{2} \chi_{1;1-\alpha}^2 \right\}$$

Los procedimientos en (2-32) y (2-34) son generalizaciones de los métodos que presentaron Meeker y Escobar (1998, página 182).

En este capítulo se presentaron los detalles necesarios para la construcción de los intervalos de confianza que se desarrollan en todo el documento. En el siguiente capítulo, se presenta el caso para sistemas con componentes independientes, posteriormente se asumen el caso bajo dependencia y finalmente se incluye el concepto de fragilidad.

## 3 Sistemas con componentes independientes

En algunos estudios de interés para el análisis de la confiabilidad o en estudios médicos, es bastante común que más de un factor de riesgo (o modo de falla) pueda estar presente al mismo tiempo. Un investigador a menudo está interesado en la evaluación de un riesgo específico en presencia de otros riesgos. En la literatura estadística es comúnmente conocido como el modelo de riesgos competitivos (estudios médicos) o un sistema en serie (análisis de confiabilidad) Lawless (2003).

La metodología de riesgos competitivos, tradicional se asume independencia entre los tiempos de falla para la estimación de la función de confiabilidad marginal, pero comúnmente este supuesto no se cumple. Para riesgos competitivos la estructura de los datos obtenidos no permite estimar la función de confiabilidad ni las densidades marginales, esto es el llamado problema de identificabilidad Tsiatis (1975), vale la pena anotar que bajo independencia el problema de identificabilidad no existe. Adicionalmente, cuando se asume independencia en un sistema donde realmente no es seguro que se tenga independencia, podemos incurrir en una subestimación significativa de la función de confiabilidad Yáñez et al. (2011).

En los siguientes apartados, se presentan las distribuciones Exponencial, Weibull, Marshall-Olkin Exponencial bivariado y Marshall-Olkin Weibull bivariado para sistemas en serie con dos componentes, cuyos tiempos de falla se asumen independientes. Se muestran las especificaciones del modelo, las estimaciones de los parámetros, la estimación de la función de confiabilidad y sus respectivos intervalos de confianza. Estos modelos son los ampliamente conocidos en el análisis de la confiabilidad de sistemas, algunas referencias; Muliere y Scarsini (1987), Meeker y Escobar (1998), Kundu y Basu (2000), Lawless (2003), Yáñez et al. (2011), X. Li y Pellerey (2011), Hong y Meeker (2014), Mirhosseini et al. (2015), Feizjavadian y Hashemi (2015), entre otros.

Finalmente, el propósito de este capítulo es rehacer los intervalos de confianza propuestos por Hong y Meeker (2014), para la confiabilidad de sistemas coherentes no-reparables con sólo dos componentes independientes, los cuales se verifican para sistemas con tiempos de falla Weibull, Exponencial y adicionalmente, se adaptan para modelos bivariados Marshall-Olkin Exponencial bivariado y Marshall-Olkin Weibull, los cuales incluyen una componente

de singularidad, el cual corresponde al caso cuando, el fallo del sistema se puede dar por ambos componentes.

### 3.1. Tiempos de falla distribuidos Exponencial

La distribución Exponencial presenta una característica importante, su función *hazard* es constante (no depende del tiempo), es decir, una *hazard* constante implica que para una unidad que no ha fallado al tiempo  $t$ , la probabilidad de fallar en el siguiente intervalo de tiempo es independiente a la edad de la unidad.

La distribución Exponencial es una distribución popular para algunos tipos de componentes electrónicos, por ejemplo, condensadores o circuitos integrados. La distribución Exponencial no es adecuada para modelar la vida útil de componentes mecánicos, por ejemplo, los rodamientos expuestos a alguna combinación de fatiga, corrosión o desgaste. En el campo de componentes electrónicos (LED, láseres o filamentos) (Meeker y Escobar, 1998).

Para un sistema con dos modos de falla, las cuales están distribuidas Exponencial, es decir, se asume que  $(T_{i1}, T_{i2})$ , con  $i = 1, \dots, n$  son  $n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d).

Sean  $T_{i1}$  y  $T_{i2}$  las cuales son independientes para todo  $i = 1, \dots, n$ . También, sea  $T_i = \min\{T_{i1}, T_{i2}\}$ . Sin pérdida de generalidad, se supone que las primeras  $k$  observaciones son tiempos de falla y las causas de falla conocidas, mientras que las últimas  $(n - k)$  son tiempos de falla, pero se desconoce la causa de falla. Los datos tendrán el siguiente esquema:

$$(t_1, \delta_1), (t_2, \delta_2), \dots, (t_k, \delta_k), (t_{k+1}, *), \dots, (t_n, *)$$

Se debe agregar que para analizar datos incompletos, se supone que los tiempos de falla son de la misma población de los datos completos, es decir, la población permanece sin cambios independientemente de la causa de falla ( $\delta_j$  indica el modo de falla del sistema  $j$ ). Se asume que  $k$  es fijo, estrictamente positivo y no al azar ( $k$  es dado).

Seguidamente, para cada componente, sean  $T_{ji}$ 's variables aleatorias distribuidas Exponencial con parámetros  $\lambda_i$  para  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, 2$ . La función de distribución acumulada  $F_j(\cdot)$  de  $T_{ji}$  tienen la siguiente forma:

$$F_j(t) = 1 - \exp\{-\lambda_j t\}, \quad j = 1, 2. \quad (3-1)$$

La función de verosimilitud para los datos observados  $t_j$ , en general tiene la siguiente forma:

$$L = \prod_{j=1}^k [dF_1(t_j)S_2(t_j)]^{I[\delta_j=1]} [dF_2(t_j)S_1(t_j)]^{I[\delta_j=2]} \prod_{j=k+1}^n dF(t_j) \quad (3-2)$$

Para nuestro caso particular, cuando  $F_1$  y  $F_2$  están distribuidos exponencial con parámetros  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente. La ecuación (3-2) estaría dada por:

$$L = \lambda_1^{r_1} \lambda_2^{r_2} (\lambda_1 + \lambda_2)^{n-k} \exp \left[ -(\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{j=1}^n t_j \right] \quad (3-3)$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  denotan el número de fallas por el modo 1 y por el modo 2, respectivamente. En efecto, para la primera componente, se tienen la cdf, la pdf y  $S(t)$ ;  $F_1(t) = 1 - \exp(-\lambda_1 t)$ ,  $dF_1(t) = \lambda_1 \exp(-\lambda_1 t)$  y  $S_1(t) = \exp(-\lambda_1 t)$ . Y para la segunda componente, se tiene la cdf, la pdf y la función de confiabilidad;  $F_2(t) = 1 - \exp(-\lambda_2 t)$ ,  $dF_2(t) = \lambda_2 \exp(-\lambda_2 t)$  y  $S_2(t) = \exp(-\lambda_2 t)$ .

Sustituyendo en (3-2), se tiene:

$$L = \prod_{j=1}^k [\lambda_1 \exp(-\lambda_1 t_j) \exp(-\lambda_2 t_j)]^{r_1} [\lambda_2 \exp(-\lambda_2 t_j) \exp(-\lambda_1 t_j)]^{r_2} \times \prod_{j=k+1}^n (\lambda_1 + \lambda_2) \exp \{ -(\lambda_1 + \lambda_2) t_j \} \quad (3-4)$$

puesto que  $T_i = \min(t_{i1}, t_{i2})$ , el cual está distribuido  $(\lambda_1 + \lambda_2) \exp \{ -(\lambda_1 + \lambda_2) t_j \}$ .

Aplicando logaritmo a (3-4), tenemos la siguiente expresión:

$$\ell = r_1 \log(\lambda_1) + r_2 \log(\lambda_2) + (n - k) \log(\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{j=1}^n t_j \quad (3-5)$$

Dado que, derivando parcialmente con respecto a  $\lambda_1$  y seguidamente con respecto a  $\lambda_2$  e igualando a cero, entonces los MLE para  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , son:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{nr_1}{k \sum_{j=1}^n t_j}$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{nr_2}{k \sum_{j=1}^n t_j}$$

Así mismo, la matriz de información de Fisher para los parámetros  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  es  $\mathbf{I}(\lambda_1, \lambda_2) = (\mathbf{I}_{ij}(\lambda_1, \lambda_2))$  para  $i, j = 1, 2$ .

$$\mathbf{I}_{ij}(\lambda_1, \lambda_2) = -E \left( \frac{\partial^2 \log L(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1 \lambda_2} \right) \quad (3-6)$$

Por tanto:

$$\mathbf{I}_{11}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{k\lambda_2 + n\lambda_1}{\lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_2)^2}$$

$$\mathbf{I}_{12}(\lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{I}_{21}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{n - k}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}$$

$$\mathbf{I}_{22}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{k\lambda_1 + n\lambda_2}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)^2}$$

Todo el esquema anterior fue tomado de Kundu y Basu (2000).

## 3.2. Tiempos de falla distribuidos Weibull

La distribución Weibull se usa frecuentemente en ingeniería. Es conveniente en desarrollos teóricos, por su estabilidad en los cálculos numéricos. La distribución Weibull puede ser adecuada para modelar el tiempo hasta el primer fallo de un gran número de componentes similares en un sistema (por ejemplo, el eslabón más débil de una cadena). Esta distribución es flexible y se puede usar para modelar datos de tiempos de falla con una función *hazard* creciente, decreciente o constante, ver (Meeker y Escobar, 1998) y (Kundu y Dey, 2009).

Sean  $T_{ij}$  variables aleatorias Weibull con parámetros de forma y escala respectivamente;  $(\eta_i, \beta)$  con  $i = 1, 2$  y  $j = 1, \dots, n$ . La función de distribución es:

$$F_i(t) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{\eta_i} \right)^\beta \right] \quad (3-7)$$

Se asumen que los tiempos de falla para las diferentes causas se distribuyen Weibull con parámetros de escala diferentes, pero con parámetros de forma iguales.

La función de sobrevivencia o confiabilidad está dada por:

$$S_i(t) = \exp \left[ - \left( \frac{t}{\eta_i} \right)^\beta \right]$$

La tasa de riesgo o función *hazard*:

$$\frac{f_i(t)}{S_i(t)} = \frac{\beta}{\eta_i} t^{\beta-1}$$

La función *hazard* es creciente ( $\beta > 1$ ) o decreciente ( $\beta < 1$ ) o es constante ( $\beta = 1$ ).

La función de log-verosimilitud está dada por:

$$\ln(L) = n \ln(\beta) + r_1 \ln(\eta_1) + r_2 \ln(\eta_2) + (\beta - 1) \sum_{j=1}^n \ln(t_j)$$

$$- (\eta_1 - \eta_2) \sum_{j=1}^n t_j^\beta + (n - k) \ln(\eta_1 + \eta_2)$$

Derivando con respecto a los parámetros conocidos  $\beta$ ,  $\eta_1$  y  $\eta_2$ , e igualando a cero, se tiene:

$$\hat{\eta}_1(\beta) = \frac{n}{k} \frac{r_1}{\sum_{j=1}^n t_j^\beta}$$

$$\hat{\eta}_2(\beta) = \frac{n}{k} \frac{r_2}{\sum_{j=1}^n t_j^\beta}$$

Colocando  $\hat{\eta}_1$  y  $\hat{\eta}_2$  en la función de log-verosimilitud y maximizar con respecto a  $\beta$ . No tenemos ninguna expresión explícita para  $\hat{\beta}$ . Obtenemos  $\hat{\beta}$  maximizando con respecto a  $\beta$ .

$$\begin{aligned} \ln(L(\beta)) &= n \ln(\beta) + r_1 \ln(\hat{\eta}_1(\beta)) + r_2 \ln(\hat{\eta}_2(\beta)) + (\beta - 1) \sum_{j=1}^n \ln(t_j) \\ &\quad - (\hat{\eta}_1(\beta) - \hat{\eta}_2(\beta)) \sum_{j=1}^n t_j^\beta + (n - k) \ln(\hat{\eta}_1(\beta) + \hat{\eta}_2(\beta)) \end{aligned}$$

Los estimadores de máxima verosimilitud de  $\eta_1$  y  $\eta_2$  como  $\hat{\eta}_1(\beta)$  y  $\hat{\eta}_2(\beta)$ , respectivamente. Por el principio de invarianza de los MLE, podemos tener el riesgo relativo para la causa 1:

$$\hat{\pi} = \frac{\hat{\eta}_1(\hat{\beta})}{\hat{\eta}_1(\hat{\beta}) + \hat{\eta}_2(\hat{\beta})}$$

$$\left( \hat{\beta} - \beta, \hat{\eta}_1 - \eta_1, \hat{\eta}_2 - \eta_2 \right) \longrightarrow N_3 \left( \mathbf{0}, \mathbf{I}^{-1}(\beta, \eta_1, \eta_2) \right)$$

donde  $\mathbf{I}^{-1}(\beta, \eta_1, \eta_2)$  es la matriz de información de Fisher para los parámetros  $(\beta, \eta_1, \eta_2)$ . La matriz  $\mathbf{I} = ((I_{ji}))$  para  $i, j = 1, 2$ , tienen la siguiente forma:

$$I_{11}(\beta, \eta_1, \eta_2) = n \left[ \frac{1}{\beta^2} + (\eta_1 + \eta_2) V \right]$$

$$I_{12}(\beta, \eta_1, \eta_2) = nU = I_{21}(\beta, \eta_1, \eta_2)$$

$$I_{22} = \frac{k\eta_2 + n\eta_1}{\eta_1 (\eta_1 + \eta_2)^2}$$

aquí  $U = E(X^\beta \ln(X))$  y  $V = E(X^\beta \ln(X) \ln(X))$ , donde  $X$  esta distribuido Weibull  $(\beta, (\eta_1 + \eta_2))$ , tomado de Kundu y Basu (2000).

### 3.2.1. Distribución del tiempo mínimo para sistemas con dos componentes

Pintilie (2006) definen el tiempo de falla de un sistema con múltiples modos de falla puede ser modelado como un sistema en serie o un modelo de riesgos competitivos. El tiempo de falla

observado es el mínimo de esos tiempos potenciales individuales, donde cada unidad tiene un tiempo potencial de falla, para nuestro caso sólo se trabaja un modelo con dos modos de falla, lo que quiere decir que el sistema fallará cuando algunos de los dos modos de falla ocurran, de lo contrario el sistema funcionará hasta un tiempo determinado, conocido en algunos casos como tiempo de censura del sistema. A continuación, se presentan toda la teoría respectiva para un sistema es serie, cuyos tiempos de falla están distribuidos Weibull, y finalmente se muestra el caso Exponencial, como un caso particular de la distribución Weibull.

Sean  $T_{ij}$  variables aleatorias independientes distribuidas Weibull con parámetros  $(\beta_j, \eta_j)$  con  $i = 1, 2$  y para  $j = 1, \dots, n$ . La función de distribución  $F_j(\cdot)$  de  $T_{ij}$  tiene la siguiente forma:

$$F_j(t) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{\eta_i} \right)^{\beta_i} \right] \quad i = 1, 2. \quad (3-8)$$

Sean  $T_1 \sim \text{Weibull}(\beta_1, \eta_1)$  y  $T_2 \sim \text{Weibull}(\beta_2, \eta_2)$ . Sea  $T = \min(T_1, T_2)$ , el cual tiene como función de distribución acumulada la siguiente:

$$\begin{aligned} F_m(t) &= \Pr(T \leq t) \\ &= 1 - \Pr(T > t) \\ &= 1 - \Pr(T_1 > t, T_2 > t) \\ &= 1 - \{\Pr(T_1 > t) \Pr(T_2 > t)\} \\ &= 1 - \{[1 - F_1(t)] [1 - F_2(t)]\}, \text{ con } T_1 \text{ y } T_2 \text{ independientes} \\ &= 1 - \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{t}{\eta_1} \right)^{\beta_1} \right] \exp \left[ - \left( \frac{t}{\eta_2} \right)^{\beta_2} \right] \right\} \end{aligned}$$

Así:

$$F_m(t) = 1 - \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{t}{\eta_1} \right)^{\beta_1} \right] \exp \left[ - \left( \frac{t}{\eta_2} \right)^{\beta_2} \right] \right\} \quad (3-9)$$

Derivando (3-9) con respecto a  $t$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
f_m(t) &= -\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\beta_1}\right]\left[-\frac{\beta_2}{\eta_2}\left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{\beta_2-1}\right]\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{\beta_2}\right] \\
&\quad -\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\beta_1}\right]\left[-\frac{\beta_1}{\eta_1}\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\beta_1-1}\right]\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{\beta_2}\right] \\
&= \frac{\beta_1}{\eta_1}\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\beta_1-1}\exp\left\{-\left[\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\beta_1} + \left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{\beta_2}\right]\right\} + \frac{\beta_2}{\eta_2}\left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{\beta_2-1}\exp\left\{-\left[\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\beta_1} + \left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{\beta_2}\right]\right\} \\
&= \left[\frac{\beta_1}{\eta_1}\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\beta_1-1} + \frac{\beta_2}{\eta_2}\left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{\beta_2-1}\right]\exp\left\{-\left[\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\beta_1} + \left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{\beta_2}\right]\right\}
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$f_m(t) = \left[\frac{\beta_1}{\eta_1}\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\beta_1-1} + \frac{\beta_2}{\eta_2}\left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{\beta_2-1}\right]\exp\left\{-\left[\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\beta_1} + \left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{\beta_2}\right]\right\} \quad (3-10)$$

Para el caso donde el de parámetro de forma es igual, es decir,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ , se tiene para la ecuación (3-10):

$$\begin{aligned}
f_m(t) &= \left[\frac{\beta}{\eta_1}\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\beta-1} + \frac{\beta}{\eta_2}\left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{\beta-1}\right]\exp\left\{-\left[\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\beta} + \left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{\beta}\right]\right\} \\
&= \left[\beta t^{\beta-1}\left(\frac{1}{\eta_1^{\beta}} + \frac{1}{\eta_2^{\beta}}\right)\right]\exp\left\{-\left[t^{\beta}\left(\frac{1}{\eta_1^{\beta}} + \frac{1}{\eta_2^{\beta}}\right)\right]\right\} \\
&= \left[\beta t^{\beta-1}\left(\frac{\eta_1^{\beta} + \eta_2^{\beta}}{\eta_1^{\beta}\eta_2^{\beta}}\right)\right]\exp\left\{-\left[t^{\beta}\left(\frac{\eta_1^{\beta} + \eta_2^{\beta}}{\eta_1^{\beta}\eta_2^{\beta}}\right)\right]\right\} \\
&= \frac{\beta t^{\beta-1}}{\left[\frac{\eta_1\eta_2}{(\eta_1^{\beta} + \eta_2^{\beta})^{1/\beta}}\right]^{\beta}}\exp\left\{-\left[\frac{t}{\frac{\eta_1\eta_2}{(\eta_1^{\beta} + \eta_2^{\beta})^{1/\beta}}}\right]^{\beta}\right\}
\end{aligned}$$

Así;

$$f_m(t) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\left[ \frac{\eta_1 \eta_2}{(\eta_1^\beta + \eta_2^\beta)^{1/\beta}} \right]^\beta} \exp \left\{ - \left[ \frac{t}{\frac{\eta_1 \eta_2}{(\eta_1^\beta + \eta_2^\beta)^{1/\beta}}} \right]^\beta \right\} \quad (3-11)$$

Tomando  $\eta = \frac{\eta_1 \eta_2}{(\eta_1^\beta + \eta_2^\beta)^{1/\beta}}$ , entonces se tiene:

$$\begin{aligned} f_m(t) &= \frac{\beta t^{\beta-1}}{\eta^\beta} \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\eta} \right)^\beta \right\} \\ &= \frac{\beta t^{\beta-1}}{\eta \eta^{\beta-1}} \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\eta} \right)^\beta \right\} \\ &= \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\eta} \right)^\beta \right\} \end{aligned}$$

Luego:

$$f_m(t) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\eta} \right)^\beta \right\} \quad (3-12)$$

Así,  $T = \min(T_1, T_2) \sim \text{Weibull}(\beta, \eta)$  con  $\eta = \eta_1 \eta_2 / (\eta_1^\beta + \eta_2^\beta)^{1/\beta}$  y  $\beta = \beta_1 = \beta_2$ .

Por el resultado anterior y tomando  $\beta = 1$ , tenemos el caso para la distribución Exponencial, es decir,  $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$  y  $T_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$  (en este caso  $\eta_1 = 1/\lambda_1$  y  $\eta_2 = 1/\lambda_2$ ). En otras palabras, dado  $T = \min(T_1, T_2)$ , entonces  $T \sim \text{Exp}(\lambda)$  con  $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)$ . ((Meeker y Escobar, 1998) y (Yáñez, Escobar, y González, 2014)).

Adicionalmente, Yáñez et al. (2014) muestran como resultado la forma para  $\eta$ , cuando  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ , tiempo de vida dependiente (parámetro de dependencia  $\theta \geq 1$ ) y  $T = \min(T_1, T_2) \sim \text{Weibull}(\beta, \eta)$  con  $\eta = \eta_1 \eta_2 / (\eta_1^{\theta\beta} + \eta_2^{\theta\beta})^{1/\theta\beta}$ . Para  $\theta = 1$ , se tiene el caso cuando los riesgos son independientes con distribución Weibull.

### 3.3. Tiempos de falla con distribución Marshall-Olkin

Al considerar el problema general de construir distribuciones bivariadas  $H$  con marginales  $F$  y  $G$ , Fréchet (1960) obtuvo la condición:

$$\max [F(x) + G(y) - 1, 0] \leq H(x, y) \leq \min [F(x), G(y)]$$

Estos límites superior e inferior son, en sí mismos distribuciones bivariadas con marginales dadas y, por tanto, constituyen soluciones al problema. Plackett (1965) construye una familia de distribuciones bivariadas de un parámetro que incluyen estas soluciones, así como la siguiente solución:

$$H(x, y) = F(x)G(y)$$

También, se presentan algunos trabajos sobre el tema Marshall y Olkin (1967b). A continuación, se presentan la familia de soluciones Plackett (1965):

$$H(x, y) = F(x)G(y) \{1 + \alpha [1 - F(x)][1 - G(y)]\}, \quad |\alpha| \leq 1.$$

Debido a Morgenstern (1956), ha sido estudiado por Gumbel (1960), cuando  $F$  y  $G$  son Exponenciales. Gumbel (1960) también estudió la distribución bivariada:

$$H(x, y) = 1 - \exp\{-x\} - \exp\{-y\} + \exp\{-x - y - \delta xy\}, \quad 0 \leq \delta \leq 1.$$

Que tienen marginales Exponenciales. Sin embargo, hasta esa fecha no se conocían modelos u otras bases para determinar cómo pueden surgir estas distribuciones en la práctica. Posteriormente, Marshall y Olkin (1967b) proponen modelos y caracterizaciones que conducen a la distribución multivariada con marginales Exponenciales, que en el caso bivariado está dada por:

$$\Pr(X > x, Y > y) = \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} \max(x, y)\}, \quad x, y \geq 0.$$

Dicha distribución con marginales Exponenciales, la cual también tiene la propiedad bivariada de falta de memoria, es decir, se basa en una extensión bivariada de una propiedad central de la distribución Exponencial, la cual dice que la distribución de vida útil es independiente de la edad de las componentes. Se ha realizado un amplio trabajo en el desarrollo del procedimiento de inferencia sobre el modelo MOBE y su caracterización. Kotz, Balakrishnan, y Johnson (2004) proporcionaron una excelente revisión de esta distribución, ver también Kundu y Dey (2009).

A continuación se deduce la distribución bivariada Exponencial, es decir, se trabajará un modelo para un sistema de dos componentes que sobreviven o fallan de acuerdo a la ocurrencia de choques en cada uno de los componentes, varios autores han utilizado modelos de choques en una dimensión, por ejemplo Esary (1957), Epstein (1958), Gaver (1963), Marshall y Olkin (1967b), Kundu y Dey (2009), entre otros.

### 3.3.1. Modelos de choques fatales

Supóngase un sistema con dos componentes, el cual recibe una descarga y sus componentes fallan. Sean los procesos de Poisson independientes:  $Z_1(t; \lambda_1)$ ,  $Z_2(t; \lambda_2)$  y  $Z_{12}(t; \lambda_{12})$  los cuales gobiernan los choques; para  $Z(t; \lambda) \equiv \{Z(t); t \geq 0; \lambda\}$  nos referimos a un proceso Poisson con parámetro  $\lambda$ . Eventos en el proceso  $Z_1(t; \lambda_1)$  son choques en la que afectan a la componente 1, eventos en el proceso  $Z_2(t; \lambda_2)$  son choques en la componente 2, y eventos del proceso  $Z_{12}(t; \lambda_{12})$  son choques en ambos componentes.

Si  $X$  e  $Y$  denotan el tiempo de vida útil del primer componente y el segundo componente, entonces;

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \Pr(X > x, Y > y) \\ &= \Pr(Z_1(x; \lambda_1) = 0, Z_2(y; \lambda_2) = 0, Z_{12}(\text{máx}(x, y); \lambda_{12}) = 0) \\ &= \exp\{-\lambda_1 x\} \exp\{-\lambda_2 y\} \exp\{-\lambda_{12} \text{máx}(x, y)\} \\ &= \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} \text{máx}(x, y)\} \end{aligned}$$

### 3.3.2. Modelos de choques no fatales

Considere un sistema con dos componentes y tres procesos Poisson independientes  $Z_1(t; \delta_1)$ ,  $Z_2(t; \delta_2)$ , y  $Z_{12}(t; \delta_{12})$  gobiernan las ocurrencias de los choques, con la modificación de que los choques no son necesariamente fatales.

Seguidamente, se describen los estados del sistema por los siguientes pares ordenados;  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ , y  $(1, 1)$  donde 1 en el primera (o segunda) componente indica que el primero (o segundo) componente está funcionando y 0 indica lo contrario. Supóngase que los eventos en el proceso  $Z_1(t; \delta_1)$  son choques al primer componente que causa una transición de  $(1, 1)$  a  $(0, 1)$  con probabilidad  $p_1$ , y para  $(1, 1)$  a  $(1, 1)$  con probabilidad  $1 - p_1$ . Similarmente, eventos en el proceso  $Z_2(t; \delta_2)$  son choques al segundo componente que causa una transición de  $(1, 1)$  a  $(1, 0)$  o  $(1, 1)$  con probabilidad de ocurrencia de  $p_2$  y  $1 - p_2$ , respectivamente. Eventos en el proceso  $Z_{12}(t; \delta_{12})$  son choques en ambas componentes causando una transición del estado  $(1, 1)$  a los estados  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  y  $(1, 1)$  con probabilidades respectivas de  $p_{00}$ ,  $p_{01}$ ,  $p_{10}$  y  $p_{11}$ . Además, suponga que cada choque representa una oportunidad independiente para el fallo del sistema. El esquema anterior fue tomado de (Marshall y Olkin, 1967b).

Sean  $X$  e  $Y$  los tiempos de vida útil de la primera y segunda componente, Así  $Z_1(t; \delta_1)$ ,  $Z_2(t; \delta_2)$ , y  $Z_{12}(t; \delta_{12})$  son independientes y tienen incrementos independientes, tenemos para todo  $t, s \geq 0$ ;

$$\begin{aligned} \Pr(X > x, Y > y) &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-\delta_1 x\} \frac{(\delta_1 x)^k}{k!} (1-p_1)^k \right\} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \exp\{-\delta_2 x\} \frac{(\delta_2 x)^l}{l!} (1-p_2)^l \right\} \\ &\quad \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \exp\{-\delta_{12} x\} \frac{(\delta_{12} x)^m}{m!} p_{11}^m \right] \left[ \exp\{-\delta_{12}(y-x)\} \frac{(\delta_{12}(y-x))^n}{n!} (p_{11} + p_{01})^n \right] \\ &= \exp\{x(\delta_1 p_1 + \delta_{12} p_{01}) - y(\delta_2 p_2 + \delta_{12}(1 - p_{11} - p_{01}))\} \end{aligned}$$

Por simetría, para  $x \geq y \geq 0$ ;

$$\Pr(X > x, Y > y) = \exp\{-x[\delta_1 p_1 + \delta_{12}(1 - p_{11} - p_{10})] - y(\delta_2 p_2 + \delta_{12} p_{10})\}$$

Por consecuencia, se tiene:

$$\Pr(X > x, Y > y) = \exp[-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} \max(x, y)]$$

donde  $\lambda_1 = \delta_1 p_1 + \delta_{12} p_{01}$ ,  $\lambda_2 = \delta_2 p_2 + \delta_{12} p_{10}$  y  $\lambda_{12} = \delta_{12} p_{00}$ . Cuando  $p_1 = p_2 = 1$  y  $p_{00} = 1$ , se tiene el modelo especializado de choque fatal. Cuando  $p_1 = p_2 = 0$ , se eliminan los dos primeros procesos; pero la distribución conjunta del proceso  $Z_{12}$  es de la misma forma, ver (Marshall y Olkin, 1967b).

### 3.3.3. Modelo Marshall-Olkin bivariado Exponencial (MOBE)

Una distribución conjunta bien conocida y apropiada para describir las vidas aleatorias de un sistema de dos componentes, es la distribución Exponencial bivariada propuesta por Marshall y Olkin (1967a), cuya función de confiabilidad se define de la siguiente manera:

$$S(x_1, x_2) = P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = \exp\{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 \max\{x_1, x_2\}\}$$

donde  $x_1, x_2 \geq 0$  y  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Por ejemplo, en la teoría de la confiabilidad, esta estructura puede describir las vidas de dos componentes que operan en un entorno aleatorio y están sujetos a un choque fatal gobernado por un proceso de Poisson, mientras que en la teoría del riesgo de crédito  $X_1$  y  $X_2$  pueden verse como los tiempos de incumplimiento de dos contrapartes, sujetas a tres eventos económicos o financieros subyacentes, Singpurwalla (2006).

Otra alternativa propuesta por Marshall y Olkin (1967a), es la llamada representación estocástica para el caso de un modelo Marshall-Olkin bivariado Exponencial.

$$(X_1, X_2) = [\min(T_1, T_3), \min(T_2, T_3)]$$

donde  $T_1, T_2$ , y  $T_3$  son variables aleatorias no-negativas independientes. El modelo Marshall-Olkin (M-O) bivariado asume independencia de manera individual y el choque común, representada por las variables  $T_1, T_2$  y  $T_3$ , respectivamente.

La existencia de un choque común (fatal) identificado por la variable  $T_3$  implica que el modelo M-O tiene una componente absolutamente continua y una parte singular concentrada en la línea  $\{x = y\}$  en el primer cuadrante. En este orden de ideas, podemos replantear la situación dado que los choques son procesos Poisson homogéneos independientes y los  $T_i$  están distribuidos Exponencial con parámetros  $\lambda_i$  con  $i = 1, 2, 3$ , luego el modelo M-O bivariado Exponencial estaría dado por:

$$S(x, y) = \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 \max(x, y)\} \quad x, y \geq 0.$$

Debido al choque común, caracterizado por  $T_3$ , la distribución de la componente singular a lo largo de la línea  $\{x = y\}$  en  $\mathbb{R}_+^2$  tiene el siguiente paso:

$$\Pr(X = Y) = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} > 0.$$

Por lo tanto, la distribución M-O Exponencial bivariada no es absolutamente continua, es decir, no tiene una densidad de probabilidad con respecto a la medida de Lebesgue bidimensional, ver Marshall y Olkin (1967a).

### 3.3.4. Modelo Marshall-Olkin bivariado Weibull (MOBW)

La distribución Exponencial bivariada de Marshall-Olkin, ver Marshall y Olkin (1967b), es una distribución singular, la cual fue abordada en la sección anterior. Para esta distribución en particular, las distribuciones marginales tienen distribución Exponencial, pero pueden ser iguales con una probabilidad positiva. Por la razón anterior, si en un conjunto de datos bivariados, dos componentes toman valores iguales, la distribución exponencial bivariada de Marshall-Olkin (MOBE) se puede usar de manera bastante efectiva, para analizar dichos conjuntos de datos. Pero, si la distribución MOBE tiene marginales Exponencial, y si los datos bivariados indican una función de densidad de probabilidad marginal unimodal o una función Hazard no constante, entonces la distribución MOBE puede no ser apropiada para dicho ajuste, Kundu y Dey (2009).

Debido a la anterior restricción, Marshall y Olkin (1967b) proponen una distribución Weibull bivariada (MOBW) más flexible, donde las distribuciones marginales son distribuciones Weibull y se pueden obtener de la misma forma que el modelo MOBE. Este modelo puede observarse como un modelo de choque cuando los choques son modelados por un proceso de Poisson no homogéneo. De hecho, la mayoría de las otras interpretaciones que son válidas para la distribución MOBE pueden ser fácilmente generalizadas para la distribución MOBW. Claramente, el modelo MOBW es más flexible que el modelo MOBE, debido a la presencia del parámetro de forma. Además, este modelo se puede usar con bastante eficacia si los datos bivariados indican una función de densidad de probabilidad marginal unimodal o una función de riesgo no constante Kundu y Dey (2009).

Adicionalmente, se ha realizado un trabajo extenso en el modelo MOBE, no se ha hecho mucho trabajo para el modelo MOBW. Una de las razones podría deberse a la complejidad computacional involucrada en la búsqueda de las estimaciones de los parámetros del modelo MOBW.

Lawless (2003) considera un modelo de riesgos competitivos bivariado con variables aleatorias de tiempos de vida  $X$  e  $Y$  y obtiene la función de verosimilitud de la siguiente manera:

$$L \propto \prod_{i=1}^n [f_{X,Y}(t_{x_i}, t_{y_i})]^{\delta_{i0}} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} S_{X,Y}(x, y)|_{x=t_{x_i}, y=t_{y_i}} \right]^{\delta_{i1}} \\ \times \left[ -\frac{\partial}{\partial y} S_{X,Y}(x, y)|_{x=t_{x_i}, y=t_{y_i}} \right]^{\delta_{i2}} [S_{X,Y}(t_{x_i}, t_{y_i})]^{1-\delta_{i0}-\delta_{i1}-\delta_{i2}}$$

donde  $f_{X,Y}(\cdot, \cdot)$  es la función de densidad de probabilidad conjunta (pdf) y  $S_{X,Y}(\cdot, \cdot)$  es la función de sobrevivencia conjunta correspondiente para  $f_{X,Y}(\cdot, \cdot)$ . Además,  $\delta_{ij}$ ,  $j = 0, 1, 2$  son los eventos indicadores para especificar las causas de falla.

Debido a la existencia de la parte singular, las variables aleatorias pueden tener valores iguales con probabilidad positiva. Entonces, en un modelo de riesgos competitivos en el que la vida útil de un sujeto o sistema sigue una distribución MOBW con una probabilidad positiva, la falla del sistema puede atribuirse a los dos riesgos o componentes. Adicionalmente, la distribución MOBW tiene un parámetro que controla la correlación, el cual fue examinado a través de simulaciones Lai, Dong Lin, Govindaraju, y Pirikahu (2017), y es usada para el caso de riesgos competitivos dependientes (ver capítulo 4).

Adicionalmente, en este trabajo se usa un concepto muy común en el análisis de sobrevivencia o confiabilidad, es el concepto de censura, el cual es muy común cuando se hacen pruebas para tiempos de vida. Los investigadores han explorado la censura de datos por varias razones, como la limitación de tiempo y el retiro del tratamiento, entre otros, lo que lleva a la introducción de varios tipos de censura, tipo I y tipo II. en la censura tipo I, el tiempo de finalización del experimento está predeterminado, pero el número de fallas observadas es una variable aleatoria. En contraste con la censura tipo II, el esquema específico previamente el número de observaciones, mientras que el tiempo de finalización del experimento es aleatorio, es este trabajo se hace referencia a la censura tipo I.

### 3.3.5. Modelo y descripción de los datos (MOBW)

Sea  $U_0$ ,  $U_1$  y  $U_2$  variables aleatorias independientes para los tiempos de vida y  $U_i \sim \text{Weibull}(\beta, \eta_i)$   $i = 0, 1, 2$ . la cual denota la distribución Weibull con parámetro de forma  $\beta$

y parámetro de escala  $\eta_i$ . La función de sobrevivencia o confiabilidad para una variable aleatoria Weibull es:

$$S_{\text{WE}}(x; \beta, \eta) = \exp \left\{ - \left( \frac{x}{\eta} \right)^\beta \right\} \quad (3-13)$$

con función de densidad de probabilidad

$$f_{\text{WE}}(x; \beta, \eta) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{x}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left\{ - \left( \frac{x}{\eta} \right)^\beta \right\} \quad (3-14)$$

Ahora, supongase que  $X_1 = \min(U_0, U_1)$  y  $X_2 = \min(U_0, U_2)$ , entonces la pareja de variables aleatorias se dice que sigue la distribución Marshall-Olkin bivariada Weibull con parámetro de forma  $\beta$  y parámetro de escala  $\eta_0, \eta_1$  y  $\eta_2$ , denotado por:

$$(X_1, X_2) \sim \text{MOBW}(\beta, \eta_0, \eta_1, \eta_2)$$

Se debe tener presente que las variables aleatorias  $U_0, U_1$  y  $U_2$  tienen en común el parámetro de forma. Esto asegura que las distribuciones marginales de  $X_1$  y  $X_2$  son Weibull( $\beta, \eta_0 + \eta_1$ ) y Weibull( $\beta, \eta_0 + \eta_2$ ), respectivamente. Además, la distribución de  $Y = \min(X_1, X_2)$  es Weibull( $\beta, \eta_0 + \eta_1 + \eta_2$ ).

Un caso especial, donde  $\beta = 1$ , se reduce a la distribución MOBE y es expresada como MOBE( $\eta_0, \eta_1, \eta_2$ ). Adicionalmente, cuando  $\eta_0 = 0$ , las variables aleatorias  $X_1$  y  $X_2$  son independientes; de lo contrario, las variables aleatorias  $X_1$  y  $X_2$  serán dependientes, por lo tanto  $\eta_0$  es considerado como un parámetro de control de correlación Kundu y Dey (2009).

La función de sobrevivencia conjunta de  $(X_1, X_2)$  es:

$$\begin{aligned} S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= \Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\ &= \Pr(U_0 > z, U_1 > x_1, U_2 > x_2) \\ &= S_{\text{WE}}(z; \beta, \eta_0) S_{\text{WE}}(x_1; \beta, \eta_1) S_{\text{WE}}(x_2; \beta, \eta_2) \end{aligned}$$

donde  $z = \max(x_1, x_2)$ . Entonces

$$S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} S_{\text{WE}}(x_1; \beta, \eta_1) S_{\text{WE}}(x_2; \beta, \eta_0 + \eta_2), & \text{si } x_1 < x_2 \\ S_{\text{WE}}(x_1; \beta, \eta_0 + \eta_1) S_{\text{WE}}(x_2; \beta, \eta_2), & \text{si } x_1 > x_2 \\ S_{\text{WE}}(x; \beta, \eta_0 + \eta_1 + \eta_2), & \text{si } x_1 = x_2 = x \end{cases} \quad (3-15)$$

La función de densidad de probabilidad conjunta de  $(X_1, X_2)$  es la siguiente:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2), & \text{si } x_1 < x_2 \\ f_2(x_1, x_2), & \text{si } x_1 > x_2 \\ f_0(x, x), & \text{si } x_1 = x_2 = x \end{cases} \quad (3-16)$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= f_{WE}(x_1; \beta, \eta_1) f_{WE}(x_2; \beta, \eta_0 + \eta_2) \\ f_2(x_1, x_2) &= f_{WE}(x_1; \beta, \eta_0 + \eta_1) f_{WE}(x_2; \beta, \eta_2) \\ f_0(x) &= \frac{\eta_0}{\eta_0 + \eta_1 + \eta_2} f_{WE}(x; \beta, \eta_0 + \eta_1 + \eta_2) \end{aligned}$$

Las ecuaciones  $f_1$  y  $f_2$  son continuas y  $f_0$  es la parte singular de la distribución MOBW, ver Marshall y Olkin (1967a).

### 3.3.6. Estimadores por máxima verosimilitud (MOBW)

Se considera un modelo bivariado de riesgos competitivos con dos variables aleatorias,  $X_1$  y  $X_2$  que indican los tiempos de falla para el primer componente (o riesgo) y el segundo componente, respectivamente. Si  $(X_1, X_2)$  sigue una distribución MOBW( $\beta, \eta_0, \eta_1, \eta_2$ ), la función de verosimilitud para un modelo de riesgos competitivos bajo censura tipo I y un conjunto de datos constituidos  $\{(y_1, \delta_1^*, r_1), \dots, (y_m, \delta_m^*, r_m)\}$ , entonces la función de verosimilitud es:

$$\begin{aligned} L &\propto \prod_{i=1}^n [f_{X_1, X_2}(y_i, y_i)]^{\delta_{i0}} \left[ -\frac{\partial}{\partial x_1} S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \Big|_{(y_i, y_i)} \right]^{\delta_{i1}} \\ &\times \left[ -\frac{\partial}{\partial x_2} S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \Big|_{(y_i, y_i)} \right]^{\delta_{i2}} [S_{X_1, X_2}(y_i, y_i)]^{r_i} \end{aligned}$$

donde el primer factor es la probabilidad conjunta del fallo del sistema por las dos componentes simultáneamente, y el segundo y tercer término son las probabilidades de fallo del sistema por la componente uno y dos en  $y_i$ , respectivamente. El último término denota la probabilidad conjunta de censura del sistema en  $y_i$ ; además,  $\delta_{ij}$ ,  $j = 0, 1, 2$  es el evento indicador para especificar las causas de fallo que pueden determinarse de manera única por los valores de  $\delta_i^*$ . Reescribiendo todo en términos de los factores que intervienen, se tiene:

$$\begin{aligned} f_{X_1, X_2}(y_i, y_i) &= \frac{\eta_0}{\eta_0 + \eta_1 + \eta_2} f_{WE}(y_i; \beta, \eta_0 + \eta_1 + \eta_2) \\ -\frac{\partial S_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1} \Big|_{(y_i, y_i)} &= f_{WE}(y_i; \beta, \eta_1) S_{WE}(y_i; \beta, \eta_0 + \eta_2) \\ -\frac{\partial S_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{\partial x_2} \Big|_{(y_i, y_i)} &= S_{WE}(y_i; \beta, \eta_0 + \eta_1) f_{WE}(y_i; \beta, \eta_2) \end{aligned}$$

Se debe tener presente que si no existen fallas del sistema, donde fallan ambas componentes, los estimadores por máxima verosimilitud no existen, cuando se tienen una distribución

Exponencial MOBE (con  $\beta = 1$ ), este fue un problema trabajado por Bemis, Bain, y Higgins (1972). Pero posteriormente Kundu y Dey (2009) obtienen los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros desconocidos donde  $n_i > 0$ , bajo la distribución MOBW, considerando el caso de que al menos una falla del sistema se dé por el fallo de ambos componentes.

Haciendo uso de una reparametrización de la distribución Weibull, la cual facilita los calculos, sea  $\lambda_j = 1/\eta_j^\beta$  con  $j = 0, 1, 2$ . La función de verosimilitud basada en el conjunto de datos observados con censura tipo I, es de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L(\beta, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) &\propto \prod_{i=1}^n [f_{X,Y}(y_i, y_i)]^{\delta_{i0}} \left[ -\frac{\partial}{\partial x_1} S_{X_1, X_2}(x_1, x_2)|_{(y_i, y_i)} \right]^{\delta_{i1}} \\ &\times \left[ -\frac{\partial}{\partial x_2} S_{X_1, X_2}(x_1, x_2)|_{(y_i, y_i)} \right]^{\delta_{i2}} [S_{X_1, X_2}(y_i, y_i)]^{r_i} \\ &= \beta^m \lambda_0^{m_0} \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \left( \prod_{i=1}^m y_i^{\beta-1} \right) \exp \left\{ -(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \sum_{i=m+1}^n (r_i + 1) y_i^\beta \right\} \end{aligned}$$

donde  $m_0 = \sum_{i=1}^m \delta_{i0}$ ,  $m_1 = \sum_{i=1}^m \delta_{i1}$ ,  $m_2 = \sum_{i=1}^m \delta_{i2}$  ( $m_i > 0$  para  $i = 0, 1, 2$  y  $m = \sum_{i=0}^2 m_i$ ) son el número de fallas por ambos componentes, el primer y segundo componente, respectivamente. Maximizando el logaritmo de la función de verosimilitud, se obtienen los MLE de los parámetros desconocidos. Derivando con respecto a  $\beta$ ,  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , se tiene:

- $\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{m}{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^m \log y_i - (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \sum_{i=1}^m (r_i + 1) y_i^{\hat{\beta}} \log y_i = 0$
- $\frac{\partial \log L}{\partial \lambda_0} = \frac{m_0}{\hat{\lambda}_0} - \sum_{i=1}^m (r_i + 1) y_i^{\hat{\beta}} = 0$
- $\frac{\partial \log L}{\partial \lambda_1} = \frac{m_1}{\hat{\lambda}_1} - \sum_{i=1}^m (r_i + 1) y_i^{\hat{\beta}} = 0$
- $\frac{\partial \log L}{\partial \lambda_2} = \frac{m_2}{\hat{\lambda}_2} - \sum_{i=1}^m (r_i + 1) y_i^{\hat{\beta}} = 0$

Resolviendo las ecuaciones anteriores, se sigue:

$$\hat{\lambda}_j(\beta) = \frac{m_j}{\sum_{i=1}^m (r_i + 1) y_i^\beta} \quad j = 0, 1, 2. \quad (3-17)$$

Sustituyendo el valor de  $\hat{\lambda}_j(\beta)$  en derivada, se tiene:

$$\frac{m}{\beta} + \sum_{i=1}^m \log y_i - \left( \hat{\lambda}_0(\beta) + \hat{\lambda}_1(\beta) + \hat{\lambda}_2(\beta) \right) \left[ \sum_{i=1}^m (r_i + 1) y_i^\beta \log y_i \right] = 0$$

o

$$\frac{m}{\beta} + \sum_{i=1}^m \log y_i - \frac{m \sum_{i=1}^m (r_i + 1) y_i^\beta \log y_i}{\sum_{i=1}^m (r_i + 1) y_i^\beta} = 0$$

Para obtener una solución, podemos utilizar un método iterativo como los que ya fueron utilizados por Kundu (2007). El proceso de estimación es:

$$\beta = h(\beta)$$

donde

$$h(\beta) = \frac{m}{m \sum_{i=1}^m (r_i + 1) y_i^\beta \log y_i - \sum_{i=1}^m \log y_i \sum_{i=1}^m (r_i + 1) y_i^\beta}$$

Se considera un valor inicial para  $\beta$ , es decir  $\beta^{(0)}$ . Sustituir  $\beta^{(0)}$  en  $h(\beta)$  y se obtiene  $\beta^{(1)} = h(\beta^{(0)})$ , se continua el proceso hasta que se cumpla la condición  $|\beta^{(p)} - \beta^{(p-1)}| < \epsilon$ , esta condición sugiere un valor a prior de  $\epsilon$ . El resultado de  $\beta^{(p)}$  puede considerarse como la estimación del parámetro de forma de la distribución mediante el método del punto fijo. Dado que se tiene el estimador de máxima verosimilitud del parámetro de forma  $\beta$ , pero los MLE de los parámetros de escala no tienen forma explícita, por tanto, se trabajan con reparametrizaciones y aproximaciones de los MLE, ver detalles en Kundu y Dey (2009).

Pareek, Kundu, y Kumar (2009) consideran un modelo de riesgos competitivos, donde asumen dos distribuciones Weibull independientes, e ignorando las causas de falla, estos autores consiguieron estimadores aproximados de máxima verosimilitud (AMLE) utilizando el mismo enfoque que adoptaron Kundu y Dey (2009) y Mokhtari, Rad, y Yousefzadeh (2011). Usando ese esquema,  $(X_{1i}, X_{2i}) \sim \text{MOBW}(\beta, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$  e ignorando las causas de falla, si  $Y_i = \min(X_{1i}, X_{2i}) \sim \text{Weibull}(\beta, \lambda)$ , donde  $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$ . Entonces, la pdf de  $Y_i^* = \log Y_i$ , se puede escribir de la siguiente manera:

$$f_{Y_i^*}(y_i^*; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp \left[ \left( \frac{y_i^* - \mu}{\sigma} \right) - \exp \left( \frac{y_i^* - \mu}{\sigma} \right) \right] \quad y_i^* \in \mathbb{R}$$

donde  $\mu = -\sigma \log \lambda$  y  $\sigma = 1/\beta$  que es una función de densidad de probabilidad de valor extremo con parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ .

### 3.4. IC para la confiabilidad de sistemas con dos componentes

En esta sección se muestran los intervalos propuestos por Hong y Meeker (2014), para tiempos de falla independientes, pero dejaron abierta la posibilidad de usarlos para el caso donde exista dependencia entre los tiempos de falla del sistema.

En efecto, tomando  $m = 2$  en (2-16), se tiene que el error estándar es:

$$\widehat{se}_{\widehat{y}_p} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^2 \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_p) \right]^2 \frac{\widehat{\sigma}_i^2}{n_i} (\widehat{\lambda}_{11i} + 2\widehat{\lambda}_{12i}\widehat{z}_{ip} + \widehat{\lambda}_{22i}\widehat{z}_{ip}^2)}}{\sum_{i=1}^2 \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_p)}. \quad (3-18)$$

Así, por el resultado (1) el intervalo de confianza al  $100(1 - \alpha)\%$  para  $y_p$  es:

$$[\underline{y}_p, \bar{y}_p] = \widehat{y}_p \mp z_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^2 \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_p) \right]^2 \frac{\widehat{\sigma}_i^2}{n_i} (\widehat{\lambda}_{11i} + 2\widehat{\lambda}_{12i}\widehat{z}_{ip} + \widehat{\lambda}_{22i}\widehat{z}_{ip}^2)}}{\sum_{i=1}^2 \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_p)}, \quad (3-19)$$

donde  $z_{1-\alpha/2}$ , es un cuantil de la distribución normal estándar. Al final, para conseguir un IC para  $t_p$ , sólo es tomarle exponencial a los límites de la ecuación (3-19), similarmente a lo obtenido en la ecuación (5-22).

Por otra parte, un IC para  $F(t_e)$ , inicialmente se debe calcular el error estándar para  $\widehat{p}$ , por (2-26), se tiene:

$$\widehat{se}_{\widehat{p}} = \sqrt{\sum_{i=1}^2 \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_e) \right]^2 \left[ \frac{\widehat{\sigma}_i^2}{n_i} (\widehat{\lambda}_{11i} + 2\widehat{\lambda}_{12i}\widehat{z}_{ie} + \widehat{\lambda}_{22i}\widehat{z}_{ie}^2) \right]} \quad (3-20)$$

Los límites del intervalo están dados de la siguiente manera:

$$\bar{y}_e = y_e + z_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^2 \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_e) \right]^2 \frac{\widehat{\sigma}_i^2}{n_i} (\widehat{\lambda}_{11i} + 2\widehat{\lambda}_{12i}\widehat{z}_{ie} + \widehat{\lambda}_{22i}\widehat{z}_{ie}^2)}}{\sum_{i=1}^2 \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_e)} \quad (3-21)$$

y

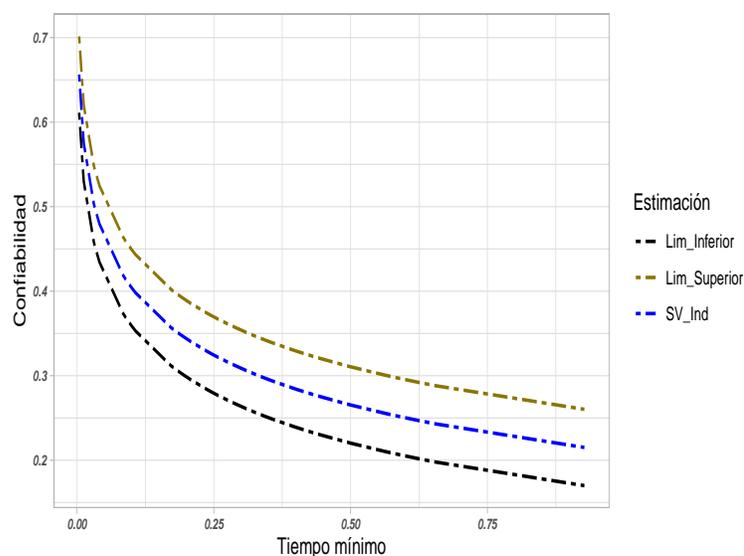
$$\underline{y}_e = y_e - z_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^2 \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_e) \right]^2 \frac{\widehat{\sigma}_i^2}{n_i} (\widehat{\lambda}_{11i} + 2\widehat{\lambda}_{12i}\widehat{z}_{ie} + \widehat{\lambda}_{22i}\widehat{z}_{ie}^2)}}{\sum_{i=1}^2 \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_e)} \quad (3-22)$$

Por el Resultado (2), un IC para muestras grandes del  $100(1 - \alpha)\%$ , para  $p = F(t_e; \theta)$  se obtiene evaluando  $F(t; \widehat{\theta})$  en  $\exp(\underline{y}_e)$  y  $\exp(\bar{y}_e)$ , respectivamente. Finalmente, como en (2-30), se obtiene el IC para la confiabilidad del sistema con dos componentes.

### 3.4.1. IC para la confiabilidad de sistemas con componentes Exponencial

Para efectos de ilustrar los (IC) propuestos por Hong y Meeker (2014) en el caso de tiempos de falla independientes, en la figura (3-1) se muestra el caso de un sistema en serie con

componentes Exponenciales independientes, se simularon tiempos Exponencial con parámetros conocidos, se calcula el mínimo de los tiempos de vida del sistema, de tal forma que el porcentaje de falla para cada componente sea equilibrado, es decir que no se presente un número de fallas en alguna de las componentes que conlleve a que la componente donde se presentó el mayor número de fallas domine la estimación de la confiabilidad del sistema. Para este caso se tienen datos completos, es decir no se presentan censuras. Posteriormente, se calculan los estimadores por máxima verosimilitud, la respectiva matriz de información y se procede al cálculo de los intervalos de confianza para la confiabilidad del sistema. La simulación tiene como objetivo constatar que lo propuesto por Hong y Meeker (2014) efectivamente presentan un buen comportamiento para dicha situación, es decir, para presentar (IC) de un sistema en serie (riesgos competitivos) con marginales distribuidas Exponenciales e independientes.

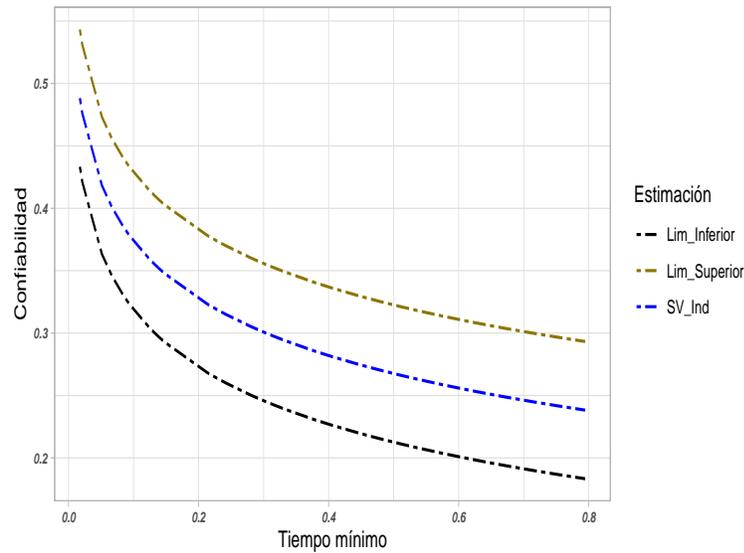


**Figura 3-1:** Intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema con componentes Exponencial independientes;  $n = 50$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$  y  $\eta_1 = \eta_2 = 5$ . Para el tiempo mínimo  $\beta = 1$  y  $\eta = 2.5$

### 3.4.2. IC para la confiabilidad de sistemas con componentes Weibull

En la figura (3-2), se presenta la estimación para la confiabilidad de un sistema con distribuciones marginales Weibull independientes, conservado la condición que compartan el mismo parámetro de forma. En esta se le adicionan los respectivos (IC) propuestos por Hong y Meeker (2014), lo cuales muestran un buen comportamiento teniendo en cuenta la forma presentada por la estimación para el tiempo mínimo de falla del sistema con dos componentes. Es de resaltar que para este caso se tienen datos completos, es decir no se tienen tiempos

de falla censurados. Adicionalmente, el porcentaje de falla por cada componente fue del 46 % para la componente uno y del 54 % para la componente dos.

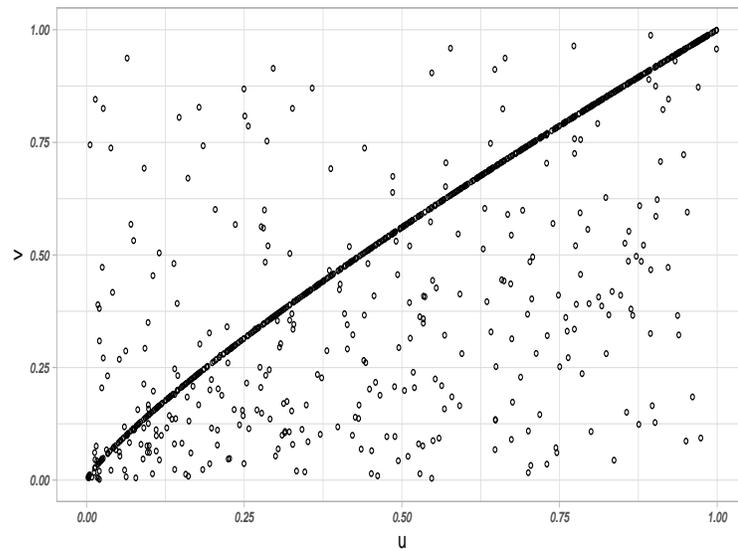


**Figura 3-2:** Intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema con componentes Weibull independientes;  $n = 50$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1.5$  y  $\eta_1 = \eta_2 = 5$ . Para el tiempo mínimo  $\beta = 1.5$  y  $\eta = 3.2$

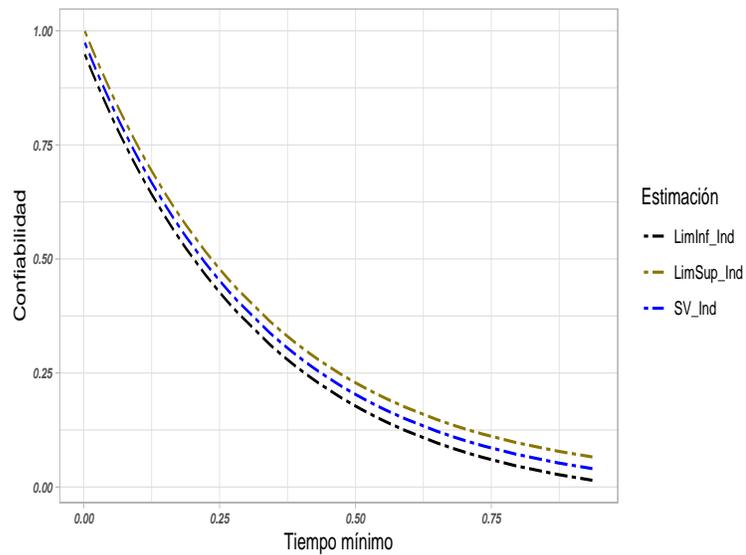
### 3.4.3. IC para la confiabilidad de sistemas con componentes Marshall-Olkin

La motivación de implementar en esta temática modelos Marshall-Olkin, es de una u otra forma no despreciar la información para el caso donde los tiempos de falla de las componentes coincidan y como se toma el tiempo mínimo, no queda especificado a que componente se le asigna dicha falla en el sistema. Los sistemas con distribución Marshall-Olkin nos brinda la posibilidad de incluir una componente singular en el modelo y de esta forma enriquecer la estimación de la función de confiabilidad del sistema, ver figura (3-3).

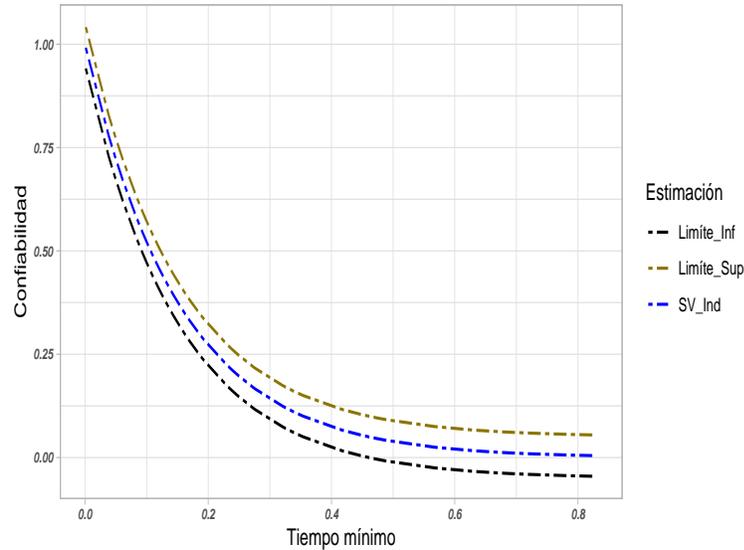
En las figuras (3-4) y (3-5), se muestran las estimaciones de la confiabilidad para un sistema con distribución Marshall-Olkin con marginales Exponencial, se ilustra la forma como van variando los parámetros de dicha distribución, la estimación cambia suavemente. Adicionalmente, se muestran los intervalos de confianza propuestos por (Hong y Meeker, 2014), donde se cumplen las condiciones para poder aplicarlos y estos muestran un comportamiento aceptable, frente a el comportamiento de la estimación de la confiabilidad de un sistema en serie.



**Figura 3-3:** Tiempo de falla distribuidos Marshall-Olkin con marginales Exponencial;  $\eta_0 = 3$ ,  $\eta_1 = 1$  y  $\eta_2 = 1/3$



**Figura 3-4:** Intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema en serie con componentes Marshall-Olkin Exponencial independientes;  $n = 50$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\eta_0 = 0$  y  $\eta_1 = \eta_2 = 1.5$ .



**Figura 3-5:** Intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema en serie con componentes Marshall-Olkin Exponencial independientes;  $n = 50$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\eta_0 = 0$ ,  $\eta_1 = 1.5$  y  $\eta_2 = 5$ .

#### 3.4.4. Probabilidades de cobertura

La probabilidad de cobertura real puede ser menor o mayor que la estimación de la probabilidad de cobertura nominal. Cuando la probabilidad de cobertura real es mayor que la probabilidad de cobertura nominal, el intervalo se denomina conservador, si es menor que la probabilidad de cobertura nominal, el intervalo se denomina anti-conservador o permisivo, Meeker et al. (2017). Para nuestro estudio se calculan las probabilidades de cobertura y así poder ver el desempeño de estos intervalos de confianza para la confiabilidad de sistemas con sólo dos componentes, con tiempo de falla independientes. Para la interpretación de los resultados,  $p$  el percentil,  $y_e$  la propuesta de Hong y Meeker (2014), Mv estimación por máxima verosimilitud y Logit, a la transformación Logit.

En las tablas (3-1), (3-2) y (3-3) se constatan los resultados obtenidos por Hong y Meeker (2014), los cuales presentaron las estimaciones para las probabilidades de cobertura. En este estudio los valores de las estimaciones para las probabilidades presentan un comportamiento similar, sin embargo, en este estudio se adicionaron los modelos Marshall-Olkin, los cuales presentan un comportamiento bueno en cuanto a probabilidades de cobertura. Es de resaltar que cuando se tienen tiempos de falla independientes, los cálculos y desarrollos son un poco más sencillos y los recursos computacionales son relativamente sencillos, en el siguiente capítulo, se presenta el caso cuando se tienen tiempos de falla dependientes.

**Tabla 3-1:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes independientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (46 %), componente 2 (54 %),  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 5$ , y porcentajes de censura 0 %.

$n$	$p$	$y_e$	Mv	Logit	$n$	$p$	$y_e$	Mv	Logit
50	0.05	0.952	0.950	0.952	100	0.05	0.946	0.950	0.945
	0.25	0.952	0.950	0.951		0.25	0.945	0.950	0.946
	0.50	0.951	0.950	0.950		0.50	0.946	0.950	0.947
	0.75	0.950	0.950	0.951		0.75	0.948	0.950	0.947
	0.95	0.951	0.950	0.948		0.95	0.947	0.950	0.947
500	0.05	0.950	0.950	0.950	1000	0.05	0.950	0.950	0.950
	0.25	0.948	0.950	0.951		0.25	0.952	0.950	0.951
	0.50	0.949	0.950	0.949		0.50	0.951	0.950	0.951
	0.75	0.948	0.950	0.949		0.75	0.952	0.950	0.951
	0.95	0.948	0.950	0.949		0.95	0.952	0.950	0.951

**Tabla 3-2:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes independientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (51 %), componente 2 (49 %),  $\beta_1 = \beta_2 = 1.5$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 5$ , y porcentajes de censura 0 %.

$n$	$p$	$y_e$	Mv	Logit	$n$	$p$	$y_e$	Mv	Logit
50	0.05	0.952	0.950	0.952	100	0.05	0.945	0.950	0.945
	0.25	0.952	0.950	0.951		0.25	0.948	0.950	0.945
	0.50	0.951	0.950	0.950		0.50	0.946	0.950	0.947
	0.75	0.950	0.950	0.951		0.75	0.948	0.950	0.948
	0.95	0.951	0.950	0.948		0.95	0.948	0.950	0.948
500	0.05	0.949	0.950	0.952	1000	0.05	0.950	0.950	0.949
	0.25	0.948	0.950	0.950		0.25	0.951	0.950	0.948
	0.50	0.948	0.950	0.950		0.50	0.951	0.950	0.948
	0.75	0.945	0.950	0.950		0.75	0.950	0.950	0.950
	0.95	0.947	0.950	0.948		0.95	0.950	0.950	0.950

**Tabla 3-3:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza un sistema Marshall-Olkin bivariado Exponencial con tiempos independientes; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\eta_0 = 0$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 1.5$ , y porcentajes de censura 0 %.

$n$	$p$	$y_e$	Mv	Logit	$n$	$p$	$y_e$	Mv	Logit
50	0.05	0.947	0.950	0.945	100	0.05	0.945	0.950	0.946
	0.25	0.947	0.950	0.945		0.25	0.944	0.950	0.948
	0.50	0.946	0.950	0.948		0.50	0.944	0.950	0.946
	0.75	0.945	0.950	0.946		0.75	0.946	0.950	0.949
	0.95	0.948	0.950	0.949		0.95	0.949	0.950	0.946
500	0.05	0.950	0.950	0.950	1000	0.05	0.950	0.950	0.950
	0.25	0.950	0.950	0.950		0.25	0.950	0.950	0.950
	0.50	0.949	0.950	0.948		0.50	0.950	0.950	0.948
	0.75	0.950	0.950	0.949		0.75	0.950	0.950	0.950
	0.95	0.950	0.950	0.946		0.95	0.949	0.950	0.948

## 4 Sistemas con componentes dependientes

Una de las tareas más difíciles en confiabilidad es analizar componentes dependientes (a menudo denominados fallas de modo común). Es difícil formular dependencia de una manera matemáticamente rigurosa y al mismo tiempo obtener un modelo realista, cuya finalidad sea proporcionar datos para dicho modelo propuesto (Aven y Jensen, 2013).

En el análisis de confiabilidad de sistemas, ciertas dependencias se tienen en cuenta, de forma directa y explícitamente, porque surgen de las interrelaciones funcionales o físicas entre los componentes y los subsistemas, como parte del diseño básico del sistema. Las técnicas de modelado lógico; como el árbol de fallas y el diagrama de bloques de confiabilidad, proporcionan el mecanismo para la representación explícita de tales dependencias. Las dependencias en cascada o propagadas, dicho de otra manera, como la falla de un componente propicia la falla de otro. Así mismo, pueden modelarse y explicarse explícitamente la estructura de dependencia en el modelo lógico del sistema. Además, al considerar las dependencias lógicas y funcionales, la práctica común en el análisis de confiabilidad se ha basado en gran medida, en el supuesto de independencia de los eventos básicos del modelo lógico del sistema (Ota y Kimura, 2017).

En consecuencia, a manera de ilustración, encontramos que los algoritmos cuantitativos de casi todos los códigos de computadora comúnmente utilizados para el análisis de confiabilidad de sistemas, asumen que los eventos básicos en los modelos son probabilísticamente independientes. Sin embargo, la experiencia operativa con sistemas tecnológicos de alta confiabilidad muestra consistentemente que hay muchas fuentes de dependencia entre fallas de componentes y sistemas, aparte de las dependencias lógicas y funcionales más obvias (Aven y Jensen, 2013).

En este orden de ideas, hacer que un sistema sea redundante combinando sus componentes idénticos es una forma útil de garantizar que un sistema sea altamente confiable. Existen muchos estudios sobre el análisis de confiabilidad para sistemas redundantes construidos con componentes idénticos. Sin embargo, los componentes de tales sistemas pueden fallar simultáneamente y la confiabilidad del sistema disminuye. Por lo tanto, el análisis de confiabilidad teniendo presente la dependencia entre los componentes es importante a la hora de evaluar la confiabilidad del sistema. Desde el punto de vista de la redundancia del sistema, combinar componentes comunes es una forma útil de hacer que un sistema sea más confiable que un sistema de un solo componente. Sin embargo, en la práctica real, estos componentes pueden fallar simultáneamente debido a que comparten cargas de trabajo; calor, choques, tareas, entre otros (Ota y Kimura, 2017).

En general, cuanta mayor redundancia tenga un sistema, más probable es que ocurra una falla dependiente en el sistema. El principal problema de la falla dependiente es que puede causar un grave deterioro de la confiabilidad del sistema redundante. Así mismo, estamos obligados a estimar incorrectamente la confiabilidad del sistema a menos que consideremos la posibilidad de que ocurra una falla dependiente. Por lo tanto, es necesario un análisis de confiabilidad considerando la dependencia entre los componentes (Meeker y Escobar, 1998).

Escarela y Carriere (2003) proponen un modelo totalmente paramétrico para el análisis de datos de sistemas en serie, donde los tipos de falla pueden no ser independientes. Ilustran cómo la dependencia entre los tiempos de vida útil específicos de la causa puede modelarse con una función de cópula. Los métodos se aplican a un conjunto de datos de cáncer de próstata (se toma el sistema como un modelo de riesgos competitivos). Encontrando que con el modelo cópula, se obtienen inferencias más precisas que con el uso de un modelo más simple como el enfoque bajo independencia para un modelo de riesgos competitivos.

Igualmente, otra forma de tener en cuenta la dependencia es consiguiendo límites para la confiabilidad del sistema, suponiendo que los componentes están asociados y no necesariamente independientes. La asociación es un tipo de dependencia positiva, por ejemplo, como resultado de componentes que soportan cargas. La definición matemática formal y precisa se puede ver en Barlow y Proschan (1975).

Ahora bien, en el contexto de en teoría de probabilidad las funciones llamadas cópulas son en realidad funciones de distribución que representan las relaciones de dependencia entre las variables aleatorias. Las funciones cópula bidimensionales son funciones bivariadas que unen o bien copulan dos funciones de distribución univariadas para construir funciones de distribución bivariadas. La cópula representa una forma paramétrica conveniente para modelar la estructura de dependencia en distribuciones conjuntas de variables aleatorias, vale la pena resaltar que no es la única técnica usada para ese objetivo, pero en nuestro trabajo hacemos uso sólo de dicha técnica. Este concepto de cópula permite construir modelos que van más allá de los estándares en el análisis de dependencia entre variables estocásticas. La metodología de cópula es capaz de capturar relaciones no lineales y en particular permite relacionar eventos extremos que ocurren en la naturaleza Nelsen (2006).

Por otra parte, Navarro y Durante (2017) afirman que la confiabilidad de un sistema depende de varios factores: la estructura del sistema, el comportamiento de cada unidad individual del sistema y la forma en que las unidades se asocian entre sí. En particular, este último aspecto ha sido investigado recientemente con la ayuda de cópulas. Para obtener más detalles sobre un enfoque de la confiabilidad vía cópula, ver por ejemplo, Nelsen (2006) y Navarro y Durante (2017).

Finalmente, el propósito de este capítulo es inicialmente verificar el comportamiento de los intervalos de confianza propuestos por Hong y Meeker (2014), para la confiabilidad de un sistema con sólo dos componentes, con tiempos de falla dependientes, distribuidos Exponencial y Weibull. Adicionalmente, proponer dichos intervalos de confianza para la confiabilidad de sistemas con tiempos

de falla bivariados Marshall-Olkin Exponencial y Marshall-Olkin Weibull. A continuación, se introduce el concepto de cópula, el cual es muy importante al momento de hablar de dependencia entre tiempos de vida de las componentes de un sistema, la anterior temática permite construir modelos que van más allá de los estándares en el análisis de dependencia entre variables estocásticas.

## 4.1. Distribuciones bivariadas con marginales uniforme (Cópulas)

Los modelos cópulas son clases de distribuciones de confiabilidad bivariada, específicamente en términos de las funciones de confiabilidad marginal y una función cópula, que es una función de distribución continua bivariada sobre el cuadrado unitario  $\mathbf{I}^2 = [0, 1]^2$  con marginales uniformes Nelsen (2006).

Una característica de la clase cópula es que la determinación de las marginales a través de la cópula ayuda a modelar y entender eficazmente la estructura de dependencia. En el contexto de sistemas, es posible especificar la distribución de confiabilidad conjunta en términos de las distribuciones de confiabilidad marginal y una cópula que permite relacionar la dependencia entre las variables aleatorias individuales que corresponden a cada modo de falla, Escarela y Carriere (2003). Seguidamente, se presenta la definición formal de una cópula bivariada.

**Definición 2.** Una cópula bivariada es una función  $C : \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{I} = [0, 1]$  que satisface las siguientes condiciones:

- (i)  $C(0, t) = C(t, 0) = 0$  y  $C(1, t) = C(t, 1) = t$ , para todo  $t \in \mathbf{I}$ .
- (ii)  $C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0$ , para todo  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbf{I}$ , tal que  $u_1 < u_2$  y  $v_1 < v_2$ .

**Teorema 1.** (Teorema de Sklar) Sean  $T_1$  y  $T_2$  variables aleatorias con función de distribución conjunta  $F$ , con marginales  $F_1$  y  $F_2$ , respectivamente. Entonces existe una cópula  $C$  tal que:

$$F(t_1, t_2) = C(F_1(t_1), F_2(t_2)) \quad (4-1)$$

Si  $F_1$  y  $F_2$  son continuas, entonces  $C$  es única. Inversamente, si  $C$  es una cópula y  $F_1$  y  $F_2$  son funciones de distribución, entonces  $F$  es una función de distribución conjunta con marginales  $F_1$  y  $F_2$ .

El teorema de Sklar existe para una versión multivariada (ver detalles de la demostración en Schweizer y Sklar, 1983 y Nelsen 2006).

**Corolario 1.** Dada una función de distribución conjunta  $F$  con marginales continuas  $F_1$  y  $F_2$ , como está indicado en el teorema de Sklar, para construir la cópula correspondiente como se muestra a continuación:

$$C(u, v) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) \quad (4-2)$$

donde  $F_j^{-1}$  es la función cuasi-inversa de  $F_j$  dada por  $F_j[F_j^{-1}(u)] = u$  si  $u \in \text{rango } F_j$ , o por  $F_j^{-1}(u) = \sup\{z | F_j(z) \leq u\}$  si  $u \notin \text{rango } F_j$  para  $j = 1, 2$ . Notese que si  $F_1$  y  $F_2$  son funciones de distribución marginales, entonces  $C$  es la función de distribución conjunta de  $u = F_1^{-1}(u)$  y  $v = F_2^{-1}(v)$  ya que se distribuyen uniforme en  $\mathbf{I} = [0, 1]$ .

Partiendo de la base del teorema de Sklar, podemos inferir algunas características de las cópulas. El siguiente teorema muestra que la cópula producto  $\Pi(u, v) = uv$  caracteriza variables aleatorias independientes cuando las funciones de distribución son continuas. Su demostración se desprende del Teorema de Sklar.

**Teorema 2.** *Sea  $X$  y  $Y$  variables aleatorias continuas. Entonces  $X$  y  $Y$  son independientes si y solo si  $C_{XY} = \Pi(X, Y)$ .*

Gran parte de la utilidad de las cópulas en el estudio de la estadística no paramétrica se deriva del hecho de que, para transformaciones estrictamente monótonas de las variables aleatorias, las cópulas son invariantes o cambian de manera predecible. Recuerde que si la función de distribución de una variable aleatoria  $X$  es continua, y si  $\alpha$  es una función estrictamente monótona cuyo dominio contiene  $\text{Ran}X$  (rango de  $X$ ), entonces la función de distribución de la variable aleatoria  $\alpha(X)$  también es continua. En este trabajo trataremos el caso solo para transformaciones estrictamente crecientes.

## 4.2. Modelo vía cópula en sistemas coherentes

En la literatura, existen cópulas aplicadas a la confiabilidad de sistemas, las cuales son llamadas cópulas de confiabilidad. En el contexto de sistemas en serie, es posible especificar la función de decremento múltiple en términos de dos distribuciones de confiabilidad marginal y una cópula que permite las relaciones de dependencia entre las variables aleatorias individuales correspondientes a cada modo de falla (Escarela y Carriere, 2003).

Consideraremos un sistema complejo el cual tiene  $m$  componentes. La vida útil de los componentes se describen mediante las variables aleatorias  $T_1, \dots, T_m$ , donde  $T_i$  tiene una función de distribución continua  $F_i$  con soporte en  $\mathbb{R}_+$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Por lo general, se supone que los tiempos de vida útil son estocásticamente independientes. Pero en una serie de casos, no es probable que tal suposición sea cierta. Por ejemplo, si todos los componentes de un sistema están expuestos a las mismas condiciones ambientales o de estrés. A su vez, se pretende extender el modelo a tiempos de vida posiblemente dependientes, apoyándonos con la función de distribución conjunta  $F$ .

$$F(t_1, \dots, t_m) = \Pr(T_1 \leq t_1, \dots, T_m \leq t_m) \quad (4-3)$$

Para investigar la influencia de la estructura de dependencia en la confiabilidad del sistema, resulta útil suponer que la estructura del sistema está dada por una cópula, tal cópula  $C$  se define como una función de distribución  $m$ -variada en el cubo  $[0, 1]^m$  con marginales que son distribuciones uniformes en  $[0, 1]$ , es decir;

- (i)  $C(u) = 0$  para cualquier  $u \in [0, 1]^m$ , si al menos una de las coordenadas de  $u = (u_1, \dots, u_m)$  es 0.
- (ii)  $C(u) = u_i$  para cualquier  $u \in [0, 1]^m$ , si todas las coordenadas de  $u$  son 1 excepto en  $u_i$ .

El enlace entre la función de distribución conjunta  $F$  y las funciones marginales  $F_i$  de las variables aleatorias  $T_i$  está dado por una cópula  $C$ . De acuerdo con el Teorema de Sklar; para cualquier distribución  $m$ -variada  $F$  con marginales  $F_i$ , existe una cópula  $C$  tal que:

$$F(t_1, \dots, t_m) = C(F_1(t_1), \dots, F_m(t_m)), \forall t_1, t_2, \dots, t_m \quad (4-4)$$

Si  $F_1, \dots, F_m$  son continuas, entonces por consecuencia del Teorema Sklar, la cópula  $C$  está determinada de forma única, (Nelsen, 2006, página 15).

Sea  $X_t(i) = I(T_i > t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , describe el estado del  $i$ -ésimo componente al tiempo  $t$ ,  $t \in \mathbf{R}_+$ , donde  $I$  es la función indicadora.

$$F^s(t) = \Pr[\phi(X_t(1), \dots, X_t(m)) = 0] \quad (4-5)$$

La ecuación (4-5) es la función de distribución de la vida útil del sistema. La función estructura  $\phi$ , también depende de la cópula  $C$ . Uno de los objetivos de investigar cómo la estructura de dependencia determina la distribución de la vida útil  $F^s$  del sistema y en particular, de qué manera las propiedades como la esperanza (valor esperado) o los cuantiles dependen de la cópula. Para este fin, necesitamos que la distribución de la vida útil del sistema  $F^s$  se tenga explícitamente en términos de  $\phi$  y  $C$  de la siguiente manera (Gandy, 2005).

Sean  $\Phi : \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}$  una función monótona y  $C$  una cópula  $m$ -dimensional. Sea  $\tilde{C}$  la medida de probabilidad inducida en  $(\mathfrak{R}^m, B(\mathfrak{R}^m))$ , donde  $B(\mathfrak{R}^m)$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel. Note que el soporte de la cópula  $C$  es  $[0, 1]^m$ , tenemos que  $\tilde{C}([0, 1]^m) = 1$ . Para  $0 \leq s \leq 1$ , denominamos los intervalos  $B_0^s = [0, s]$  y  $B_1^s = (s, 1]$  donde  $B_1^1 = \phi$ . Definamos la función  $G_{\phi, C} : \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}$  con

$$F^s(t) := \Pr(\phi(X_t(1), \dots, X_t(m)) = 0) = G_{\phi, C}(F_1(t), \dots, F_m(t)) \quad (4-6)$$

La función de distribución de tiempos de vida  $F^s$  depende de  $\phi$  y de  $C$ . La función  $G_{\phi, C}$  se puede determinar de la siguiente manera (ver detalles en Gandy (2005)). En el siguiente teorema, se presenta formalmente la función  $G_{\phi, C}$ :

**Teorema 3.** *La distribución del tiempo de vida del sistema  $F^s$  viene dado para todo  $t \geq 0$  por*

$$F^s(t) = G_{\phi, C}(F_1(t), \dots, F_m(t))$$

donde

$$G_{\phi, C}(t_1, \dots, t_m) = 1 - \sum_{\mathbf{X} \in \{0, 1\}^m} \phi(\mathbf{X}) \tilde{C} \left( \prod_{i=1}^m B_{x_i}^{t_i} \right)$$

Para la demostración del Teorema 3, ver detalles en Gandy (2005). Por ejemplo, para el caso  $m = 2$ , que es el caso de nuestro interés. Sea  $T_1$  y  $T_2$  variables distribuidas uniforme en  $[0, 1]$  con función de distribución conjunta, como sigue:

$$C(t_1, t_2) = \Pr(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2); \quad t_1, t_2 \in [0, 1] \quad (4-7)$$

y la medida de probabilidad inducida  $\tilde{C}$ . Para los conjuntos  $D_1 = B_0^{t_1} \times B_0^{t_2}$ ,  $D_2 = B_0^{t_1} \times B_1^{t_2}$ ,  $D_3 = B_1^{t_1} \times B_1^{t_2}$  y  $D_4 = B_1^{t_1} \times B_0^{t_2}$ . En efecto:

$$(i) \quad \tilde{C}(D_1) = \Pr(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2) = C(t_1, t_2)$$

$$(ii) \quad \tilde{C}(D_2) = \Pr(T_1 \leq t_1, t_2 \leq T_2 \leq 1) = C(t_1, 1) - C(t_1, t_2) = t_1 - C(t_1, t_2)$$

$$(iii) \quad \tilde{C}(D_3) = \Pr(t_1 < T_1 \leq 1, t_2 < T_2 \leq 1) = 1 - C(1, t_2) - C(t_1, 1) + C(t_1, t_2) = 1 - t_2 - t_1 + C(t_1, t_2)$$

$$(iv) \quad \tilde{C}(D_4) = \Pr(t_1 < T_1 \leq 1, T_2 \leq t_2) = C(1, t_2) - C(t_1, t_2) = t_2 - C(t_1, t_2)$$

A continuación presentaremos dos ejemplos, tomados de Aven y Jensen (2013), para ambientar un poco la deferencia entre un sistema en serie y un sistema en paralelo:

1. Para el caso de un sistema en paralelo con  $m$  componentes, la función estructura del sistema está dada por:

$$\phi(x_1, \dots, x_m) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - x_i)$$

la cual es cero si y solo si  $x = (0, \dots, 0)$ . Entonces, la suma en  $G_{\phi, C}$ , se extiende sobre todos los posibles valores de  $x$  excepto para el vector nulo.

$$\begin{aligned} G_{\phi, C}(t_1, \dots, t_m) &= 1 - \left( 1 - \tilde{C} \left( \prod_{i=1}^m B_0^{t_i} \right) \right) \\ &= 1 - 1 + \tilde{C} \left( \prod_{i=1}^m B_0^{t_i} \right) \\ &= C(t_1, \dots, t_m) \end{aligned}$$

Se sigue que:

$$F^s(t) = G_{\phi, C}(F(t)) = C(F_1(t), \dots, F_m(t)) = F(t, \dots, t).$$

2. En el caso de un sistema en serie con  $m$  componentes, se tiene:

$$\phi(x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m x_i$$

la cual es uno, si y solo si  $x = (1, \dots, 1)$ . Luego:

$$G_{\phi, C}(t_1, \dots, t_m) = 1 - \tilde{C} \left( \prod_{i=1}^m B_1^{t_i} \right)$$

Si denotamos  $\bar{F}(t_1, \dots, t_m) = \Pr(T_1 > t_1, \dots, T_m > t_m)$ , la función de confiabilidad de  $F$  y  $\bar{C}$  la función de confiabilidad  $n$ -dimensional correspondiente de  $C$ , entonces obtenemos la distribución del tiempo de vida útil de un sistema en serie, como sigue:

$$\begin{aligned} F^s(t) &= 1 - \bar{F}(t, \dots, t) \\ &= 1 - \bar{C}(F_1(t), \dots, F_m(t)) \end{aligned}$$

Para el caso particular con  $n = 2$ , se tiene que  $G_{\phi, C} = t_1 + t_2 - C(t_1, t_2)$ , luego se tiene que:

$$F^s(t) = F_1(t) + F_2(t) - C(F_1(t), F_2(t))$$

Por otra parte, Aven y Jensen (2013) muestran la influencia de la cópula en los tiempos de vida útil del sistema, lo cual es de interés investigar de qué manera la estructura de dependencia afecta al sistema, es decir, la cópula, influye en las propiedades unidimensionales  $q(F^s)$  de la distribución de los tiempos de vida del sistema.  $F^s(t)$ , donde el funcional  $q : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  el cual es un mapeo desde el espacio  $D$  de funciones de distribución de variables aleatorias no negativas a  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Algunos ejemplos importantes de estos funcionales son:

- La confiabilidad del sistema, la cual denotaremos  $R_t$  en un tiempo fijo  $t$ , se define:

$$\begin{aligned} R_t(F^s) &= \Pr(\phi(X_t(t), \dots, X_n(t)) = 1) \\ &= 1 - F^s(t) \\ &= \bar{F}^s(t). \end{aligned}$$

- El valor esperado  $E$ :

$$E(F^s) = \int_0^{\infty} \bar{F}^s(t) dt$$

- El  $p$ -ésimo cuantil  $Q_p$  de la distribución del tiempo de vida del sistema:

$$Q_p(F^s) = \inf \{t \in \mathbf{R}_+ : F^s(t) \geq p\}, \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Para investigar la influencia de la cópula en estas cantidades unidimensionales, primero tenemos que comparar diferentes distribuciones multivariadas. Existen muchos métodos de comparación, los cuales se detallan en Müller y Stoyan (2002) y Joe (1997). Además, algunos aspectos relacionados con cópulas en Nelsen (2006)).

Seguidamente, resumimos algunas nociones que se necesitan para trabajar detalles que se tendrán presente en esta parte del documento. Consideraremos  $m$  variables aleatorias  $T_1, \dots, T_m$  con función de distribución conjunta  $F$ , con distribuciones marginales  $F_1, \dots, F_m$ , y función de confiabilidad, la cual se define a continuación:

$$S(t_1, \dots, t_m) = \Pr(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n) \tag{4-8}$$

Para el caso  $n = 2$ , tenemos la siguiente relación;

$$S(t_1, t_2) = 1 - F_1(t_1) - F_2(t_2) + F(t_1, t_2) \quad (4-9)$$

Se tiene que mencionar la forma para comparar dos distribuciones  $m$ -variadas  $H$  y  $G$ , las cuales pertenecen a  $D(F_1, \dots, F_m)$ , es decir, pertenecen al conjunto de funciones de distribuciones con marginales  $F_1, \dots, F_m$  donde cada una tiene soporte  $\mathbf{R}_+$ . Veamos la definición formal para el orden.

**Definición 3.** Sean  $H, G \in D(F_1, \dots, F_m)$ ,  $m \geq 2$ ;

- (i)  $G$  es la menor ortante dependiente más positiva (PLOD) que  $H$ , denotada  $H \prec_{cL} G$ , si  $H(\mathbf{t}) \leq G(\mathbf{t})$  para todo  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbf{R}^m$ .
- (ii)  $G$  es la mayor ortante dependiente más positiva (PUOD) que  $H$ , denotada  $H \prec_{cU} G$ , si  $\bar{H}(\mathbf{t}) \leq \bar{G}(\mathbf{t})$ ,  $\forall \mathbf{t}$ .
- (iii)  $G$  es más concordante que  $H$ , denotado  $H \prec_c G$ , si se cumple que  $H(\mathbf{t}) \leq G(\mathbf{t})$  y  $\bar{H}(\mathbf{t}) \leq \bar{G}(\mathbf{t})$ ,  $\forall \mathbf{t}$ .

Para  $m = 2$ , la parte (i) y (ii) de la definición anterior son equivalentes para la función de distribución acumulada y la función de confiabilidad, pero lo anterior no es cierto para altas dimensiones Aven y Jensen (2013, capítulo 2). Para comparar dos distribuciones  $H, G \in D(F_1, \dots, F_m)$  con marginales fijas, es suficiente comparar sus correspondientes cópulas.

Las variables aleatorias  $X, Y$  con funciones de distribución acumuladas y una cópula  $C$ , existen medidas bien conocidas para medir el grado de dependencia, estas son las llamadas tau de Kendall ( $\tau_{x,y}$ ) y rho de Spearman ( $\rho_{x,y}$ ). Las expresiones de las medidas en términos de cópulas son:

$$\tau_{x,y} = 4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) d_{C(u,v)} - 1$$

y

$$\rho_{x,y} = 12 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) d_u d_v - 3$$

Esto muestra que la monotonicidad de las cópulas con respecto a la relación *PLOD* hereda la monotonicidad del tau Kendall y rho Spearman. De manera similar, se pretende analizar el efecto de un aumento de la dependencia en las propiedades unidimensionales  $q(F^s)$  para la distribución de vida útil del sistema.

A continuación, presentamos algunos aspectos que son válidos solo para sistemas en paralelo y sistemas en serie. Para ello necesitamos el habitual orden estocástico, es decir: para  $D : F \leq_s G$  si y solo si  $F(t) \geq G(t)$ , para todo  $t \geq 0$ .

**Teorema 4.** Sea el funcional  $q : D \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  no decreciente con respecto al orden estocástico habitual en  $D$  y cualquiera cópulas  $m$ -dimensionales  $C_1$  y  $C_2$ .

1. Para un sistema en paralelo, si  $C_1 \prec_{cL} C_2$ , entonces  $q(F_{C_2}) \leq q(F_{C_1})$ .
2. Para un sistema en serie, si  $C_1 \prec_{cU} C_2$ , entonces  $q(F_{C_1}) \leq q(F_{C_2})$

Si  $q$  es no creciente, las desigualdades en (1) y en (2) se invierten. Para la prueba ver detalles en Aven y Jensen (2013). Usando el teorema anterior, se aplicará a los tres funcionales mencionados con anticipación, para la confiabilidad del sistema;  $R_t(F^s)$ ,  $E(F^s)$  y  $Q_p(F^s)$ . Nótese que estas funciones son no decrecientes con respecto al usual orden estocástico.

Es común estar interesados en los límites para la confiabilidad del sistema, en los casos donde las distribuciones marginales son (aproximadamente) conocidas, pero la estructura de dependencia es desconocida. Para esto podemos utilizar los llamados límites de Fréchet-Hoeffding (Nelsen, 2006).

$$W(u_1, \dots, u_m) = \max \left\{ 1 - n + \sum_{i=1}^m u_i, 0 \right\}$$

y

$$M(u_1, \dots, u_m) = \min \{u_1, \dots, u_m\}$$

Por Nelsen (2006, página 26), se sabe que toda cópula  $C$  se encuentra dentro de los límites, es decir:

$$W \prec_{cL} C \prec_{cL} M$$

Haciendo uso del Teorema (4) y tomando lo propuesto por Aven y Jensen (2013), se tiene:

(i) Para un sistema en paralelo, tenemos:

$$R_t(F_M^s) \leq R_t(F_C^s) \leq R_t(F_W^s)$$

$$E(F_M^s) \leq E(F_C^s) \leq E(F_W^s)$$

$$Q_p(F_M^s) \leq Q_p(F_C^s) \leq Q_p(F_W^s)$$

donde  $F_C^s$  denota la distribución del tiempo de vida útil del sistema bajo la cópula  $C$ .

(ii) En el caso  $m = 2$ , la relación  $W \prec_{cU} C \prec_{cU} M$  se cumple, pero produce desigualdades contrarias para un sistema en serie:

$$R_t(F_W^s) \leq R_t(F_C^s) \leq R_t(F_M^s)$$

$$E(F_W^s) \leq E(F_C^s) \leq E(F_M^s)$$

$$Q_p(F_W^s) \leq Q_p(F_C^s) \leq Q_p(F_M^s)$$

Lo anterior, nos proporciona un límite superior  $Q_p(F_W^s)$  y un límite inferior  $Q_p(F_M^s)$ , respectivamente, para el cuantil  $Q_p(F_C^s)$  de un sistema en paralelo. Además, para un sistema en serie, tenemos que el límite inferior es  $Q_p(F_W^s)$  y el límite superior es  $Q_p(F_M^s)$ . Nótese que el límite inferior de un sistema en paralelo coincide con el límite superior de un sistema en serie. Lo anterior, también verifica que cuanto más fuerte es la dependencia entre los tiempos de vida de las componentes en un sistema en serie, más confiable es el sistema. Pero para un sistema en paralelo sucede todo lo contrario, el sistema se debilita cuanto más fuerte es la dependencia, siempre bajo el supuesto de que las funciones de distribución marginal sean las mismas (Aven y Jensen, 2013, página 48).

H. Li (2008) comenta que en el estudio de dependencia extrema, la cópula de confiabilidad (supervivencia) es más efectiva. Considere un vector aleatorio  $(T_1, \dots, T_m)$  con funciones de distribución marginales  $F_1, \dots, F_m$  y una cópula  $C$ . Dado que  $S_i(T_i) = 1 - F_i(T_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , distribuidas uniformemente en  $[0, 1]$ , entonces:

$$\bar{C}(u_1, \dots, u_m) = \Pr [S_1(T_1) \leq u_1, \dots, S_m(T_m) \leq u_m]$$

Seguidamente contextualizaremos lo visto, otra familia de cópula, son las llamadas cópula de confiabilidad (o de supervivencia) de  $(T_1, \dots, T_m)$ . La función de confiabilidad del vector aleatorio  $(T_1, \dots, T_m)$ , se puede expresar como:

$$S(t_1, \dots, t_m) = \Pr (T_1 > t_1, \dots, T_m > t_m) = \bar{C}(S_1(t_1), \dots, S_m(t_m)), (t_1, \dots, t_m) \in \mathbf{R}^m.$$

También, se deduce que para cualquier  $(u_1, \dots, u_m) \in [0, 1]^m$ ,

$$\bar{C}(u_1, \dots, u_m) = \Pr (F_1(T_1) > u_1, \dots, F_m(T_m) > u_m) = 1 - C(1 - u_1, \dots, 1 - u_m)$$

donde  $\bar{C}$  es la función de supervivencia conjunta de la cópula  $C$ . La dependencia de la cola de una distribución bivariada se ha discutido ampliamente en la literatura estadística Joe (1997).

Para el caso de dos componentes, sea la cópula de confiabilidad  $\bar{C}_\alpha$  con  $\alpha \in \mathbf{R}$  para dos variables aleatorias  $T_1$  y  $T_2$ , donde  $\alpha$  representa el parámetro de dependencia o asociación entre las dos variables.

Si  $(T_1, T_2)$  proviene de una cópula para algún  $\alpha$ , entonces la función de confiabilidad conjunta de  $(T_1, T_2)$  está dada por:

$$S(t) = \bar{C}_\alpha [S_1(t_1), S_2(t_2)] \tag{4-10}$$

con  $S_1(t_1)$  y  $S_2(t_2)$  las respectivas funciones de confiabilidad marginales. Lo anterior se puede generalizar para el caso multivariado, pero hay que tener presente algunos aspectos. Carrière (1995) demostró que si las marginales  $\bar{F}_1(t_1)$  y  $\bar{F}_2(t_2)$  son continuas y  $C$  existe, entonces  $C$  es única.

### 4.2.1. Familia de cópulas Arquimedianas

En general, no es fácil verificar de ante mano si las cópulas multivariadas están ordenadas; PLOD, PUOD o CONCORDANTE. Pero para una subclase importante, llamadas cópulas Arquimedianas, el orden de concordancia puede verificarse investigando las propiedades de los generadores de las cópulas Arquimedianas Nelsen (2006, página 109).

En lo que sigue, presentaremos las definiciones para la familia de cópulas Arquimedianas. Una función  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$  es un generador (de una cópula Arquimediana  $m$ -dimensional), si  $\varphi$  es continua, estrictamente decreciente,  $\varphi(0) = \infty$ ,  $\varphi(1) = 0$  y la inversa  $\varphi^{-1}$  es completamente monótona, es decir:

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \varphi^{-1}(t) \geq 0; t \geq 0, k = 0, 1, \dots$$

La función  $C : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ , definida por:

$$C(\mathbf{u}) = \varphi^{-1}[\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)]$$

En investigaciones recientes, las cuales se han enfocado principalmente en el estudio de datos bivariados de tiempo de falla, teniendo como objetivo principal el uso de una subclase de cópulas que es invariable bajo transformaciones monótonas continuas de cada componente. La función de decremento bivariada correspondiente a esta familia de cópulas, su forma general es de la siguiente manera:

$$S(t_1, t_2) = \varphi_\theta [\varphi_\theta^{-1}\{S_1(t_1)\}, \varphi_\theta^{-1}\{S_2(t_2)\}] \quad (4-11)$$

donde  $\varphi_\theta(\cdot)$  es la función generadora,  $\varphi_\theta(\cdot) : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ , la cual es dos veces diferenciable con  $\varphi_\theta(0) = 1$ ,  $\varphi_\theta'(\cdot) < 0$ ,  $\varphi_\theta''(\cdot) < 0$  y  $\varphi_\theta^{-1}(\cdot)$  es su función inversa. Los modelos en la clase de cópulas Arquimedianas incluyen las cópulas Gumbel, Frank, Clayton y Hougaard Nelsen (2006, página 89). En teoría, cualquier distribución marginal para variables aleatorias no negativas puede ser apropiada. En este trabajo, consideramos la familia Weibull de distribuciones de confiabilidad cuya función de confiabilidad está especificada por  $S_j(t) = \exp[-(t/\eta_j)^{\beta_j}]$ , con  $\eta_j, \beta_j > 0$  para  $j = 1, 2$ . Por lo tanto, cuando a la función de confiabilidad bivariada definida por el modelo de Frank se le asignan marginales Weibull, se obtiene una Weibull bivariada con continuidad absoluta.

**Definición 4.** Una función  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  es subaditiva, si para todo  $x_1, \dots, x_m \in \mathbf{R}_+$

$$f(x_1 + \dots + x_m) \leq f(x_1) + \dots + f(x_m)$$

Usando esta definición, el siguiente teorema nos proporciona una condición suficiente y necesaria para verificar el orden de concordancia de dos cópulas Arquimedianas  $C_1$  y  $C_2$  con generadores  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , respectivamente.

**Teorema 5.** (Nelsen, 2006) Sean  $C_1$  y  $C_2$  cópulas Arquimedianas  $m$ -dimensionales con generadores  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ . Entonces  $C_1 \prec_{cL} C_2$  si y solo si  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  es subaditiva.

Al mismo tiempo, enunciamos tres condiciones suficientes para la subaditividad en el siguiente corolario. Las pruebas se pueden ver con más detalles en Nelsen (2006), para el caso  $m = 2$  que puede extenderse fácilmente al caso general  $m \geq 2$ .

**Corolario 2.** (Nelsen, 2006) Bajo los supuestos del Teorema 5,  $C_1 \prec_{cL} C_2$  es verdadero si se cumplen alguna de las siguientes condiciones:

(i)  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  es cóncava.

(ii)  $\varphi_1/\varphi_2$  es no decreciente en  $(0, 1)$ .

(iii) Si  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son continuamente diferenciables en  $(0, 1)$  y  $\varphi_1'/\varphi_2'$  son no decreciente en  $(0, 1)$ .

### 4.3. Tiempos de vida en sistemas coherentes con $m$ componentes dependientes

Con respecto a la forma como se modelan los tiempos de vida para sistemas coherentes, a continuación presentaremos de manera formal algunos aspectos importantes, los cuales fueron propuestos por Navarro y Durante (2017).

Sea  $T$  el tiempo de vida de un sistema coherente con función de estructura  $\phi$  y  $m$  componentes posiblemente dependientes que tienen vidas útiles (no negativas)  $T_1, \dots, T_m$ . La función de confiabilidad (o sobrevivencia) conjunta de  $(T_1, \dots, T_m)$ , se puede escribir de la siguiente manera:

$$\bar{F}(t_1, \dots, t_m) = \Pr(T_1 > t_1, \dots, T_m > t_m) = C(\bar{F}_1(t_1), \dots, \bar{F}_m(t_m)) \quad (4-12)$$

donde  $\bar{F}_i(t) = \Pr(T_i > t)$  es la función de confiabilidad de  $T_i$  para cada  $i = 1, \dots, m$  y  $C$  es la cópula de sobrevivencia de  $(T_1, \dots, T_m)$ . Es conocido que  $C$  es una función de distribución  $m$ -dimensional con marginales uniformes en  $(0, 1)$ . Para mayor información sobre cópulas, ver Nelsen (2006). Asumiremos que  $\bar{\mathbf{F}}$  es absolutamente continua. Una representación de la confiabilidad del sistema  $\bar{F}_T = \Pr(T > t)$ , es

$$\bar{F}_T(t) = \bar{Q}(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_m(t)), \quad (4-13)$$

donde  $\bar{C} : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$  sólo depende de la estructura del sistema y de la cópula de sobrevivencia  $C$ . Una representación similar para la función de distribución de  $T$  sería:

$$F_T(t) = Q(F_1(t), \dots, F_m(t)), \quad (4-14)$$

donde  $Q(u_1, \dots, u_m) = 1 - \bar{Q}(1 - u_1, \dots, 1 - u_m)$ , es decir, la distribución del sistema es una generalización de las distribuciones de las componentes, ver Nelsen (2006). Cuando  $T_1, \dots, T_m$  están distribuidos idénticamente (ID), es decir,  $F_1 = \dots = F_m$ , la representaciones anteriores se reducen a:

$$\bar{F}_T(t) = \bar{q}(\bar{F}_1(t)) \text{ y } F_T(t) = q(F_1(t)), \quad (4-15)$$

donde  $\bar{q}(u) = \bar{Q}(u, \dots, u)$  y  $q(u) = Q(u, \dots, u) = 1 - \bar{q}(1 - u)$ .

En particular, para un sistema en serie con  $m$  componentes,

$$T = X_{(1:m)} = \text{mín}(T_1, \dots, T_m)$$

y

$$\bar{F}_{(1:m)}(t) = \Pr(T_1 > t, \dots, T_m > t) = K(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_m(t)),$$

con  $\bar{Q} = K$  una cópula conocida. Análogamente, para un sistema en paralelo con  $m$  componentes,  $T = X_{m:m} = \text{máx}(T_1, \dots, T_m)$  y

$$\bar{F}_{m:m}(t) = 1 - \Pr(T_1 \leq t, \dots, T_m \leq t) = 1 - C(F_1(t), \dots, F_m(t)), \quad (4-16)$$

con  $Q = C$  y  $\bar{Q}(u_1, \dots, u_m) = 1 - C(1 - u_1, \dots, 1 - u_m)$ , donde  $C$  es la cópula conjunta de  $(X_1, \dots, X_m)$ . A manera de observación, se debe tener presente que tanto  $Q$  como  $\bar{Q}$  no siempre son cópulas. Además, la función  $\bar{Q}$  no determina de manera única la distribución conjunta de  $(X_1, \dots, X_m)$ .

### 4.3.1. Sistemas coherentes con solo dos componentes

Inicialmente, consideraremos para efectos de ilustración, un sistema en paralelo y un sistema en serie con  $m = 2$  componentes, cuyos tiempos de vida  $T_1$  y  $T_2$  están distribuidos exponencialmente con el mismo parámetro  $\lambda > 0$ . Para modelar la dependencia entre los tiempos consideraremos la familia de cópulas Clayton.

$$C_\theta(u, v) = \left[ u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1 \right]^{-1/\theta}; \quad \theta \in [-1, \infty) - \{0\}. \quad (4-17)$$

con generador  $\varphi_\theta(t) = (1/\theta)(t^{-\theta} - 1)$ . Para verificar si la familia Clayton es ordenada positivamente, podemos usar el Corolario 2, parte (iii). El generador  $\varphi_\theta$  es continuamente diferenciable en  $(0, 1)$  con  $\varphi'_\theta = -t^{-\theta-1}$ . La razón  $\varphi'_{\theta_1}/\varphi'_{\theta_2} = -t^{-\theta_1-1}/-t^{-\theta_2-1} = t^{\theta_2-\theta_1}$  es no decreciente en  $(0, 1)$  para  $\theta_1 \leq \theta_2$ , lo cual es suficiente para probar que  $C_{\theta_1} \prec_C C_{\theta_2}$ , es decir el grado de dependencia aumenta cuando aumenta  $\theta$ . Los casos extremos  $\theta = -1$  y  $\theta \rightarrow \infty$  son los límites de Fréchet-Hoeffding;  $C_{-1} = W$  y  $C_\infty = M$ . El caso limitante  $\theta \rightarrow 0$ , produce la cópula producto;  $C_0 = \Pi(u, v)$  (independiente). A continuación, se presentan los detalles presentados por Aven y Jensen (2013), para sistemas paralelos y en serie.

#### Sistema en paralelo

El tiempo de vida  $T = T_1 \vee T_2$  de un sistema en paralelo, tiene una función de distribución conjunta:

$$F_{C_\theta}^{\text{par}}(t) = \Pr(T \leq t) = C_\theta(F_1(t), F_2(t))$$

Dado que  $C_\theta$  es de orden positivo (orden concordante), la esperanza o el valor esperado es:

$$E \left[ F_{C_\theta}^{\text{par}}(t) \right] = \int_0^\infty (1 - C_\theta[F_1(t), F_2(t)]) dt$$

el cual es decreciente en  $\theta$ . Los casos extremos y especiales son:

- (i) Para  $\theta = -1$ , entonces  $C_{-1} = W$  :  $E(F_W^{\text{par}}) = \int_0^\infty (1 - W[F_1(t), F_2(t)]) dt$ , para el caso Exponencial  $F_1(t) = F_2(t) = F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ , obtenemos;

$$E(F_W^{\text{par}}) = \int_0^\infty [1 - (2F(t) - 1)] dt = (1 + \ln(2)) / \lambda.$$

- (ii) Si  $\theta = 0$ ,  $C_0 = \Pi(\cdot, \cdot)$  :  $E(F_\Pi^{\text{par}}) = \int_0^\infty (1 - F_1(t)F_2(t)) dt$ , en el caso Exponencial  $F_1(t) = F_2(t) = F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ , se tiene:

$$E(F_\Pi^{\text{par}}) = \int_0^\infty [1 - F^2(t)] dt = 3/2\lambda$$

- (iii) Para  $\theta = \infty$ ,  $C_\infty = M$  :  $E(F_M^{\text{par}}) = \int_0^\infty [1 - M(F_1(t), F_2(t))] dt$ , en el caso Exponencial  $F_1(t) = F_2(t) = F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ , tenemos:

$$E(F_M^{\text{par}}) = \int_0^\infty [1 - F(t)] dt = 1/\lambda.$$

### Sistema en serie

El tiempo de vida  $T = T_1 \wedge T_2$  de un sistema en serie, tiene función de distribución conjunta

$$F_{C_\theta}^{\text{ser}}(t) = \Pr(T \leq t) = F_1(t) + F_2(t) - C_\theta(F_1(t), F_2(t))$$

La esperanza o el valor esperado del tiempo de vida del sistema es:

$$E(F_{C_\theta}^{\text{ser}}(t)) = E(T_1) + E(T_2) - E(T_1 \vee T_2)$$

Por lo tanto, las propiedades de la esperanza se puede inferir desde el sistema en paralelo.

- (i) Si  $\theta = -1$ ,  $C_{-1} = W$  :  $E(F_W^{\text{ser}}) = E(T_1) + E(T_2) - \int_0^\infty (1 - W(F_1(t), F_2(t))) dt$ , para el caso de la distribución Exponencial, se tiene:

$$E(F_W^{\text{ser}}(t)) = \frac{1 - \ln(2)}{\lambda}$$

- (ii) Para  $\theta = 0$ ,  $C_0 = \Pi$  :  $E(F_\Pi^{\text{ser}}(t)) = E(T_1) + E(T_2) - \int_0^\infty (1 - F_1(t)F_2(t)) dt$ , en el caso de la distribución Exponencial, tenemos:

$$E(F_\Pi^{\text{ser}}(t)) = \frac{1}{2\lambda}$$

- (iii) Si  $\theta = \infty$ ,  $C_\infty = M$  :  $E(F_M^{\text{ser}}) = E(T_1) + E(T_2) - \int_0^\infty (1 - M(F_1(t), F_2(t))) dt$ , para el caso de la distribución Exponencial, se tiene:

$$E(F_M^{\text{ser}}) = \frac{1}{\lambda}$$

### Distribución Marshall-Olkin (M-O)

Se considera la distribución bivariada de Marshall-Olkin (M-O), miremos la influencia del grado de dependencia en la confiabilidad del sistema. La distribución (M-O) es interesante en la medida en que puede interpretarse físicamente Marshall y Olkin (1967a) y Marshall y Olkin (1967b).

Al mismo tiempo, se considera un sistema complejo con dos componentes. El sistema está sujeto a choques o cargas que siempre son fatales para un componente o para ambos. Los choques ocurren de la siguiente manera;  $Z_1, Z_2, Z_{12}$ , donde diferenciaremos si solo el primero, solo el segundo, o ambos componentes se destruyen. Se supone que las variables son aleatorias e independientes, distribuidas Exponencial con parámetros  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_{12}$ , respectivamente.

Sean  $T_1$  y  $T_2$  los tiempos de vida útil para las componentes 1 y 2, respectivamente. Estamos interesados en calcular la función de confiabilidad conjunta:

$$S(T_1, T_2) = \Pr(T_1 > t_1, T_2 > t_2)$$

Lo anterior es la probabilidad de que el componente 1 no falle (sobreviva) más allá del tiempo  $t_1$  y que el componente 2 sobreviva más allá del tiempo  $t_2$ . Suponga que los “choques” a los componentes

forman tres procesos de Poisson independientes con parámetros  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_{12}$ ; dependiendo si el choque afecta solo al componente 1, solo al componente 2 o ambos componentes simultaneamente. Los tiempos de ocurrencia  $Z_1$ ,  $Z_2$  y  $Z_{12}$  de estos tres eventos son variables aleatorias Exponenciales independientes con parámetros  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_{12}$ , respectivamente. Entonces, sean  $T_1 = \min(Z_1, Z_{12})$  y  $T_2 = \min(Z_2, Z_{12})$ , para todo  $t_1, t_2$  no negativos.

$$\begin{aligned}\bar{F}(t_1, t_2) &= \Pr(Z_1 > t_1) \Pr(Z_2 > t_2) \Pr(Z_{12} > \max(t_1, t_2)) \\ &= \exp\{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} \max(t_1, t_2)\}\end{aligned}$$

Las distribuciones de confiabilidad marginales son:  $S_1(t_1) = \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_{12})t_1\}$  y  $S_2(t_2) = \exp\{-(\lambda_2 + \lambda_{12})t_2\}$ , los tiempos de vida de los componentes  $T_1$  y  $T_2$ , cuyas distribuciones son Exponenciales con parámetros  $\lambda_1 + \lambda_{12}$  y  $\lambda_2 + \lambda_{12}$ , respectivamente.

Por otra parte, para encontrar la cópula de confiabilidad o supervivencia  $\bar{C}(u, v)$  para esta distribución, primero se expresa  $\bar{F}(t_1, t_2)$  en términos de  $S_1(t_1)$  y  $S_2(t_2)$ , recordando que:

$$S(t_1, t_2) = \bar{C}(S_1(t_1), S_2(t_2))$$

Inicialmente, se sustituye el  $\max(t_1, t_2)$  por  $t_1 + t_2 - \min(t_1, t_2)$ , entonces:

$$\begin{aligned}S(t_1, t_2) &= \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_{12})t_1 - (\lambda_2 + \lambda_{12})t_2 + \lambda_{12} \min(t_1, t_2)\} \\ &= S_1(t_1) S_2(t_2) \min(\exp\{\lambda_{12}t_1\}, \exp\{\lambda_{12}t_2\})\end{aligned}$$

Sean  $u = S_1(t_1)$  y  $v = S_2(t_2)$  y por conveniencia, sean  $\alpha = \lambda_{12}/(\lambda_1 + \lambda_{12})$  y  $\beta = \lambda_{12}/(\lambda_2 + \lambda_{12})$ . Entonces,  $e^{\lambda_{12}t_1} = u^{-\alpha}$  y  $e^{\lambda_{12}t_2} = v^{-\beta}$ . Ahora bien, usando el método de inversión Nelsen (2006, página 51),. La cópula de confiabilidad  $\bar{C}$  es dada por:

$$\begin{aligned}\bar{C}(u, v) &= uv \min(u^{-\alpha}, v^{-\beta}) \\ &= \min(u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta})\end{aligned}$$

Tener en cuenta que como  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_{12}$  son positivos, entonces  $\alpha$  y  $\beta$  satisfacen que  $0 < \alpha, \beta < 1$ . Por lo tanto, la cópula de confiabilidad para la distribución Exponencial bivariada de Marshall-Olkin producen una familia de cópulas de dos parámetros dados por:

$$C_{\alpha, \beta}(u, v) = \min(u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta}) = \begin{cases} u^{1-\alpha}v, & \text{si } u^\alpha \geq v^\beta \\ uv^{1-\beta}, & \text{si } u^\alpha \leq v^\beta \end{cases}$$

Esta familia es conocida como la familia *Marshall-Olkin* o la familia generalizada de *Cuadras-Augé*.

Por otra parte, la distribución conjunta de  $T_1$  y  $T_2$ , es llamada función de distribución conjunta de Marshall-Olkin:

$$\begin{aligned}F(t_1, t_2) &= S(t_1, t_2) + F_1(t_1) + F_2(t_2) - 1 \\ &= \exp\{\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12}(t_1 \vee t_2)\} - \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_{12})t_1\} - \exp\{-(\lambda_2 + \lambda_{12})t_2\} + 1, \quad t_1, t_2 \geq 0.\end{aligned}$$

La cópula M-O asociada es:

$$C_{\alpha,\beta}(u_1, u_2) = \text{mín} \left( (1 - u_1)^{1-\alpha} (1 - u_2), (1 - u_1) (1 - u_2)^{1-\beta} \right) + u_1 + u_2 - 1$$

donde  $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$  y  $\alpha = \lambda_{12}/(\lambda_1 + \lambda_{12})$ ,  $\beta = \lambda_{12}/(\lambda_2 + \lambda_{12})$ . Como casos especiales para la cópula M-O, tenemos:

$$C_{0,0}(u_1, u_2) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} C_{\alpha,\beta}(u_1, u_2) = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} C_{\alpha,\beta}(u_1, u_2) = \Pi(u_1, u_2) = u_1 u_2.$$

Esto implica que el límite cuando  $\lambda_1 \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_2 \rightarrow \infty$  o  $\lambda_{12} = 0$  resulta la cópula producto, mientras que cuando el límite  $\lambda_{12} \rightarrow \infty$  o  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , se obtiene el límite superior de Fréchet-Hoeffding. La familia  $C_{\alpha,\beta}$ ,  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$  está ordenada positivamente con respecto a la concordancia ordenada en  $\alpha$  ( $\beta$  fijo), así como en  $\beta$  ( $\alpha$  fijo). (Ver, Aven y Jensen 2013, página 52).

Para  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ , se tiene: (Teorema 2.2.3, Nelsen 2006, página 11)

$$\Pi \prec_c C_{\alpha,\beta} \prec_c M$$

Ahora se tienen las condiciones para comparar las funciones de confiabilidad;  $R_t(F_C^{\text{par}})$  y  $R_t(F_C^{\text{ser}})$ , mediante el teorema para diferentes cópulas y para todo  $t \geq 0$ :

$$R_t(F_{\Pi}^{\text{ser}}) \leq R_t(F_{C_{\alpha,\beta}}^{\text{ser}}) \leq R_t(F_M^{\text{ser}}) = R_t(F_M^{\text{par}}) \leq R_t(F_{C_{\alpha,\beta}}^{\text{par}}) \leq R_t(F_{\Pi}^{\text{par}}). \quad (4-18)$$

### Sistema en paralelo M-O

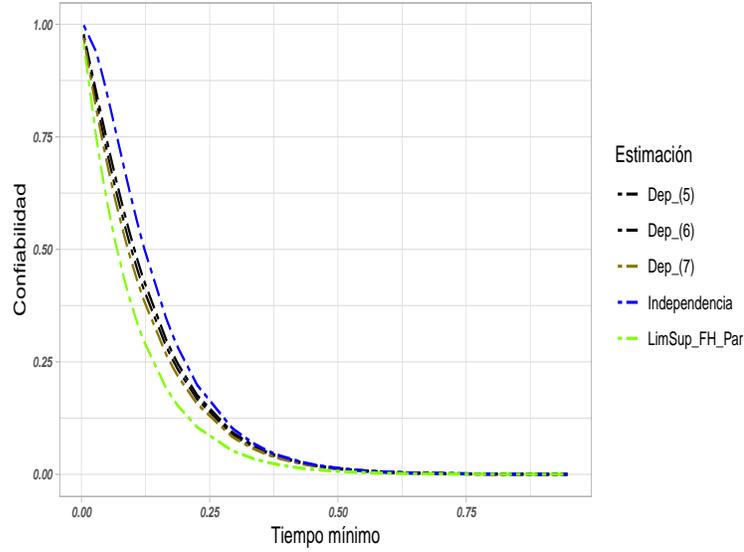
Para un sistema en paralelo, la confiabilidad  $R_t(F_{C_{\alpha,\beta}}^{\text{par}})$  se puede determinar explícitamente como sigue:

$$\begin{aligned} R_t(F_{C_{\alpha,\beta}}^{\text{par}}) &= \bar{F}^S(t) \\ &= 1 - C_{\alpha,\beta}(F_1(t), F_2(t)) \\ &= 1 - \text{mín} \left\{ (1 - F_1(t))^{1-\alpha} (1 - F_2(t)), (1 - F_1(t)) (1 - F_2(t))^{1-\beta} \right\} \\ &\quad - F_1(t) - F_2(t) + 1 \\ &= 1 - \exp\{- (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}) t\} - (1 - \exp\{- (\lambda_1 + \lambda_{12}) t\}) - (1 - \exp\{- (\lambda_2 + \lambda_{12}) t\}) + 1 \\ &= \exp\{- (\lambda_1 + \lambda_{12}) t\} + \exp\{- (\lambda_2 + \lambda_{12}) t\} - \exp\{- (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}) t\} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$R_t(F_{C_{\alpha,\beta}}^{\text{par}}) = \exp\{- (\lambda_1 + \lambda_{12}) t\} + \exp\{- (\lambda_2 + \lambda_{12}) t\} - \exp\{- (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}) t\}$$

En la figura 4-1, la línea azul representa la estimación para el caso bajo independencia  $\lambda_1 = 10$ ,  $\lambda_2 = 10$  y  $\lambda_{12} = 0$ . La línea amarilla representa el límite superior de Fréchet-Hoeffding con parámetros  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$  y  $\lambda_{12} = 10$ . Las líneas para la estimación variando los parámetros, ilustran los casos bajo dependencia: caso dependencia 5;  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 5$  y  $\lambda_{12} = 5$ , caso dependencia 6;  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 4$  y  $\lambda_{12} = 6$  y caso dependencia 7;  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 3$  y  $\lambda_{12} = 7$ .



**Figura 4-1:** Estimación para la función de confiabilidad de un sistema en paralelo con marginales Exponencial.

### Sistema en serie M-O

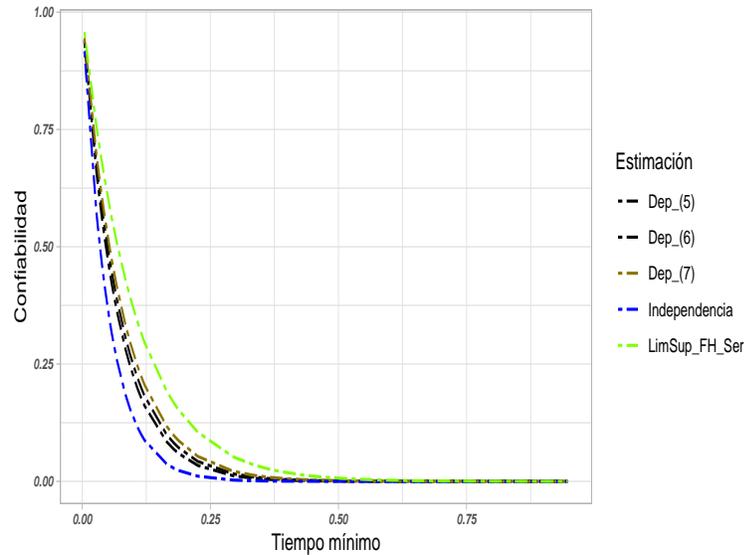
De manera análoga, podemos analizar la confiabilidad de un sistema en serie en las mismas condiciones, es decir, con las mismas marginales. La confiabilidad del sistema es:

$$\begin{aligned}
 R_t \left( F_{C_{\alpha,\beta}}^{\text{ser}} \right) &= \bar{F}^s(t) \\
 &= 1 - F_1(t) - F_2(t) + C_{\alpha,\beta}(F_1(t), F_2(t)) \\
 &= 1 - F_1(t) - F_2(t) + \min \left\{ [1 - F_1(t)]^{1-\alpha} [1 - F_2(t)], [1 - F_1(t)] [1 - F_2(t)]^{1-\beta} \right\} \\
 &\quad + F_1(t) + F_2(t) - 1 \\
 &= \min \left\{ (1 - F_1(t))^{1-\alpha} (1 - F_2(t)), (1 - F_1(t)) (1 - F_2(t))^{1-\beta} \right\} \\
 &= \exp \{ -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}) t \}
 \end{aligned}$$

Así;

$$R_t \left( F_{C_{\alpha,\beta}}^{\text{ser}} \right) = \exp \{ -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}) t \}, t \geq 0.$$

La figura 4-2, se muestra la estimación de la función de confiabilidad para un sistema en serie, donde la línea azul es la estimación para el caso bajo independencia  $\lambda_1 = 10$ ,  $\lambda_2 = 10$  y  $\lambda_{12} = 0$ . La línea amarilla representa el límite superior de Fréchet-Hoeffding con parámetros  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$  y  $\lambda_{12} = 10$ . Las líneas para la estimación variando los parámetros, ilustran los casos bajo dependencia: caso dependencia (5);  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 5$  y  $\lambda_{12} = 5$ , caso dependencia (6);  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 4$  y  $\lambda_{12} = 6$  y caso dependencia (7);  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 3$  y  $\lambda_{12} = 7$ .



**Figura 4-2:** Estimación para la función de confiabilidad de un sistema en serie con marginales Exponencial.

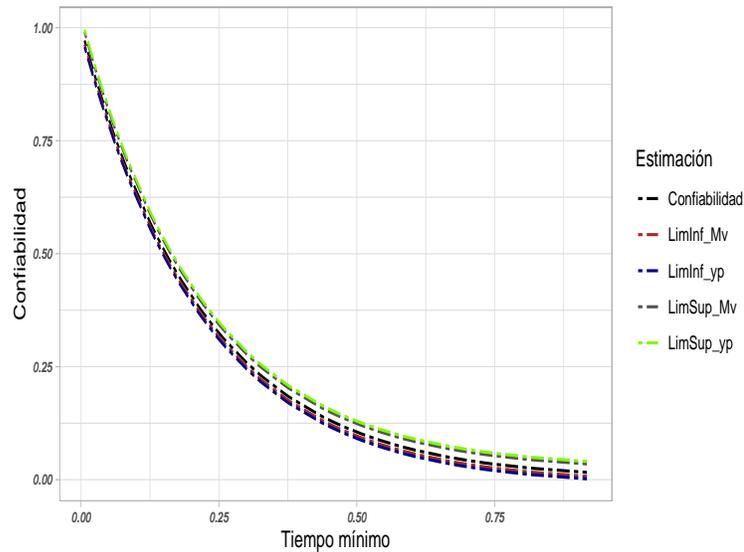
En resumen, con una dependencia que va incrementado, el sistema en serie mejora porque aumenta su confiabilidad. Además, un sistema en paralelo siempre es más confiable que un sistema en serie cuando se mantiene la condición de que las marginales siguen la misma distribución. Así mismo, para el límite superior de Fréchet-Hoeffding, las funciones de confiabilidad de un sistema en paralelo y un sistema en serie coinciden, es decir, los mejores sistemas en serie son tan confiables como el peor de los sistemas en paralelo. En este caso particular, la correlación entre los tiempos de vida de los componentes es  $\rho(T_1, T_2)$ , Aven y Jensen (2013, página 55).

Seguidamente, se presentan los intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema en serie con solo dos componentes, cuyas distribuciones para la primera y segunda componente respectivamente son: Exponencial – Exponencial, Weibull – Weibull, Marshall-Olkin Exponencial y Marshall-Olkin Weibull, asumiendo dependencia e inicialmente para datos completos (no existen datos censurados).

### 4.3.2. IC para la confiabilidad de sistemas con componentes dependientes Exponencial

En la figura 4-3, se presentan intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema en serie con tiempos de falla dependientes y cada una de las componentes siguen una distribuidas Exponencial (dos componentes). En primera instancia se quiere ilustrar el desempeño de los intervalos de confianza propuestos por Hong y Meeker (2014), los cuales originalmente son presentados para la función de distribución acumulada del sistema y en este caso son usados para reproducir un intervalo de confianza para la confiabilidad de dicho sistema. Adicionalmente, se pintan intervalos

de confianza basados en la verosimilitud (Meeker y Escobar, 1998) para tener un referente y poder analizar el comportamiento de estos intervalos, se evidencia que los intervalos propuestos por Hong y Meeker (2014) son ligeramente más amplios que los intervalos basados en verosimilitud, es de resaltar que la dependencia usada para los tiempos de falla es de 0.25, el cual corresponde al  $\tau$  de Kendall (estructura simulada por medio de una cópula Gumbel, Nelsen 2006, página 51 ) y se tienen datos completos, es decir no se presentan datos censurados.



**Figura 4-3:** Intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial;  $n = 50$ , porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %),  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 5$ ,  $\tau = 0.25$  y 0% de censura.

### 4.3.3. IC para la confiabilidad de sistemas con componentes Weibull

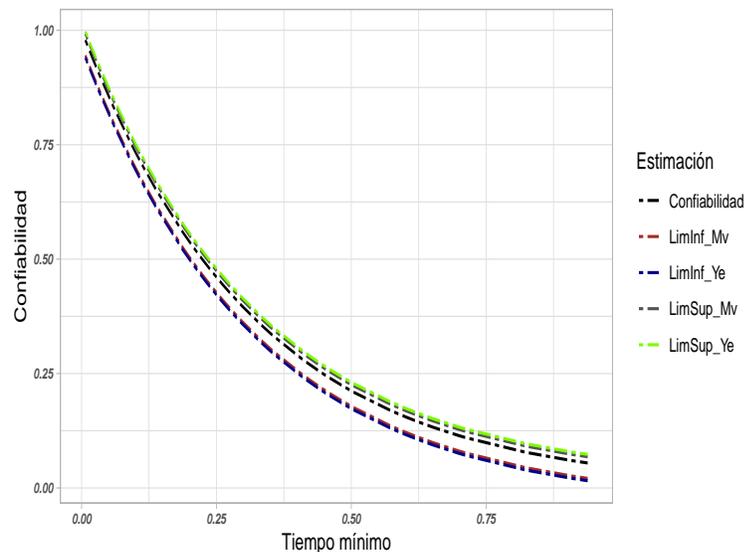
En la figura 4-4, se presentan intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema en serie con tiempos de falla dependientes para cada una de las componentes distribuidos Weibull, en estos se presenta el desempeño de los intervalos de confianza propuestos por (Hong y Meeker, 2014) para la confiabilidad del sistema. Posteriormente, se incluyen intervalos de confianza basados en la verosimilitud (Meeker y Escobar, 1998) para tener un referente y poder analizar el comportamiento de estos intervalos, se evidencia que los intervalos propuestos por (Hong y Meeker, 2014) son ligeramente más amplios que los intervalos basados en verosimilitud, igual que el caso anterior, es de resaltar que la dependencia usada para los tiempos de falla es del 0.25.

#### 4.3.4. IC para la confiabilidad de sistemas con componentes dependientes Marshall-Olkin

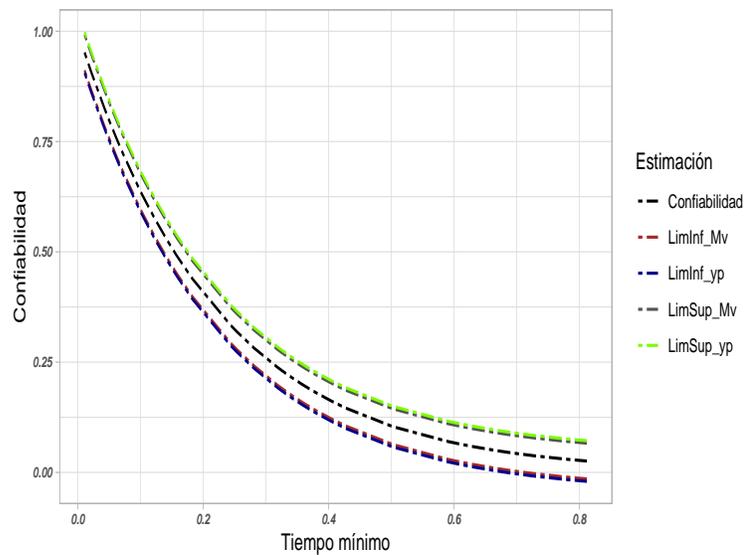
Para el caso de un sistema en serie, pero bajo un modelo Marshall-Olkin, el cual tiene en cuenta una componente singular, es decir que el fallo del sistema se puede dar por el fallo exacto de las dos componentes, en las figuras 4-5 y 4-6, se muestran los intervalos de confianza para la confiabilidad del sistema y a su vez los intervalos de confianza basados en la verosimilitud, lo cual muestra que los intervalos propuestos son ligeramente más amplios que los intervalos de verosimilitud. Lo anterior nos lleva a realizar un análisis un poco más detallado, donde se tiene en cuenta distintos tamaños de muestra, distintos niveles de dependencia y de porcentaje de censura, finalmente se calculan las probabilidades de cobertura y la longitud de dichos intervalos. Con todo lo anterior, el objetivo es caracterizar el comportamiento de dichos intervalos y proponer una corrección para estos, si es necesario.

#### 4.3.5. Esquema y resultados del estudio de simulación

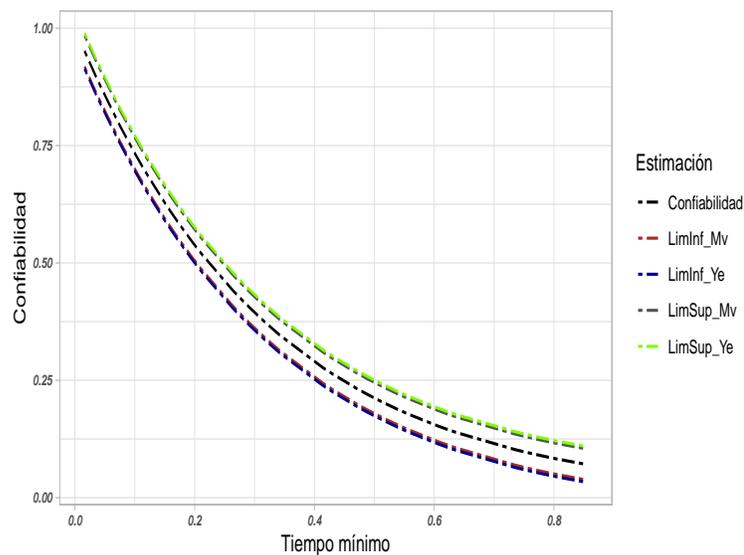
En esta sección se presentan los resultados obtenidos del estudio de simulación planteado para comparar los intervalos de confianza de la confiabilidad de un sistema con solo dos componentes, propuestos por Hong y Meeker (2014), los cuales en su trabajo ilustran el comportamiento de estos para el caso, cuando los tiempos de falla son independientes y en este trabajo se ilustra el caso donde los tiempos son dependientes (cópula Gumbel). Adicionalmente, se presentan los intervalos de confian-



**Figura 4-4:** Intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull;  $n = 50$ , porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau = 0.25$  y 0 % de censura.



**Figura 4-5:** Intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema en serie Marshall-Olkin con componentes dependientes Exponencial;  $n = 50$ , porcentaje de falla; componente 1 (52%), componente 2 (48%),  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = 1.5$ ,  $\eta_2 = 5$ ,  $\tau = 0.25$  y 0% de censura.



**Figura 4-6:** Intervalos de confianza para la confiabilidad de un sistema en serie Marshall-Olkin con componentes dependientes Weibull;  $n = 50$ , porcentaje de falla; componente 1 (55%), componente 2 (45%), ambos componentes 4%,  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 1$ ,  $\tau = 0.25$  y 0% de censura.

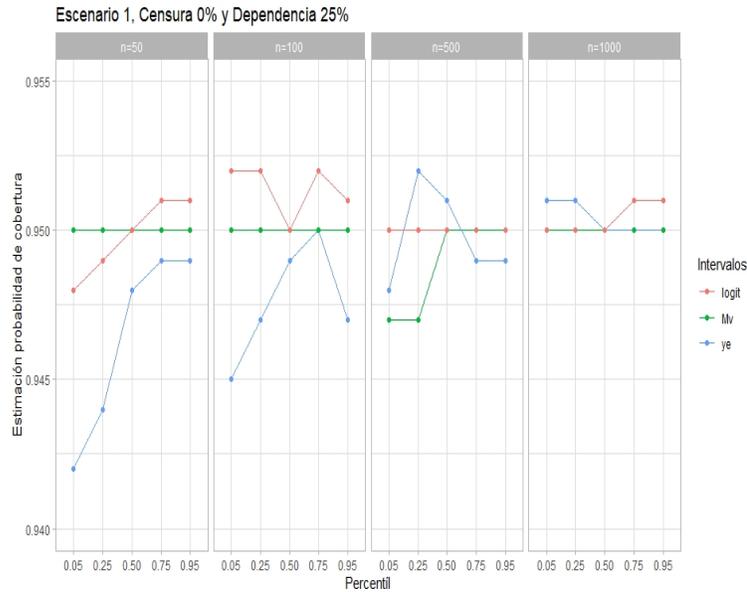
za basados en la verosimilitud para el mismo sistema, y tener un escenario de comparación. Por otra parte, en dicho esquema se asumen diferentes niveles para la dependencia ( $\tau = 0.25, 0.50$  y  $0.75$ ), distintos porcentajes de censura ( $0\%$ ,  $10\%$  y  $25\%$ ), tamaños de muestras ( $n = 50, 100, 500, 1000$ ) y los tiempos de falla considerados están distribuidos Exponencial-Exponencial, Weibull-Weibull, Marshall-Olkin bivariado Exponencial y Marshall-Olkin bivariado Weibull. También se controla el porcentaje de falla por cada componente, para no caer en un caso de que una componente tenga mayor presencia y al momento de la estimación domine dicha estimación. Es importante dejar claro que se presentan algunos valores para cada uno de los parámetros de dichas distribuciones y poder abarcar un amplio comportamiento de las distribuciones estudiadas.

Puntualmente, para realizar las comparaciones del tiempo mínimo del sistema (sistema en serie), se calculan los percentiles  $p = 0.05, 0.25, 0.50, 0.75, 0.95$ , luego se calculan los intervalos de confianza propuestos por Hong y Meeker (2014), donde vale la pena resaltar que inicialmente son propuestos para la función de distribución acumulada del sistema y en este caso se reproducen para la confiabilidad del sistema. Para esos mismos percentiles se sobreponen los intervalos de confianza basados en la verosimilitud. Por último, se calcula la probabilidad de cobertura de dichos intervalos en los respectivos percentiles; para el cálculo de las probabilidades de cobertura nominal ( $0.95$ ) se tienen el tiempo mínimo de falla del sistema y por medio de bootstrap (se usa una librería de R) se obtienen 10000 submuestras, donde se les calcula el percentil estudiando. Luego sobre estos, se calculan los intervalos (propuestos y basados en la verosimilitud) y se cuentan cuántos de los intervalos contienen el valor verdadero de la confiabilidad.

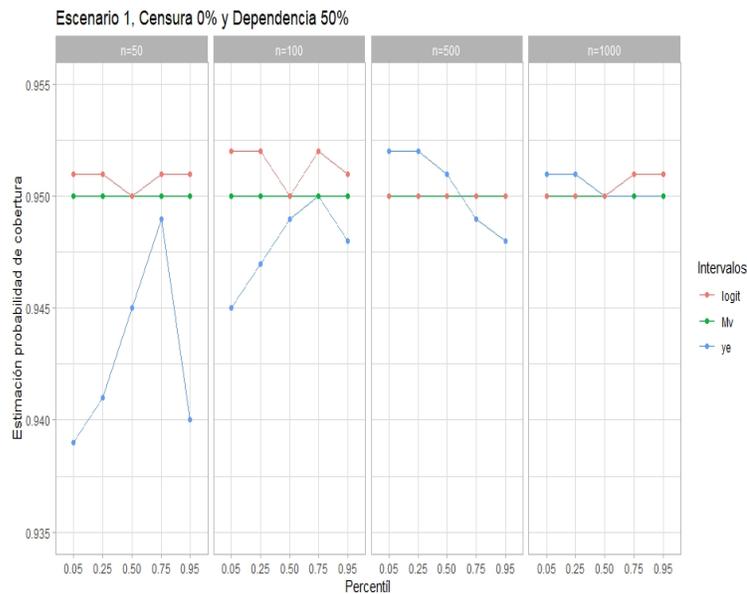
A continuación, se presentan los 4 escenarios que se ilustran en el esquema de simulación, los cuales hacen referencia a las distribuciones Exponencial, Weibull, Marshall-Olkin bivariado Exponencial y Marshall-Olkin bivariado Weibull, en los respectivos tiempos de vida de las componentes de los sistemas en serie estudiados.

En el escenario 1, se presenta un sistema en serie, donde las dos componentes están distribuidas Exponencial. En las figuras **4-7**, **4-8** y **4-9**, se presentan los intervalos de verosimilitud, bajo una transformación *logit* y la propuesta ( $y_e$ ) de Hong y Meeker (2014). Se evidencia que el comportamiento en la estimación de la probabilidad de cobertura nominal  $95\%$ , se ve afectada por la dependencia considerada en el estudio. Adicionalmente para un tamaño de muestra pequeño se nota la baja cobertura en relación a los otros dos métodos y a medida que el tamaño de muestra aumenta, las probabilidades de cobertura se acercan a la probabilidad de cobertura nominal. Vale la pena resaltar que el método  $y_e$ , siempre caen en el intervalo  $(0, 1)$ , lo cual lo hace más ventajoso frente a los intervalos de verosimilitud y la transformación *logit* (Hong y Meeker, 2014).

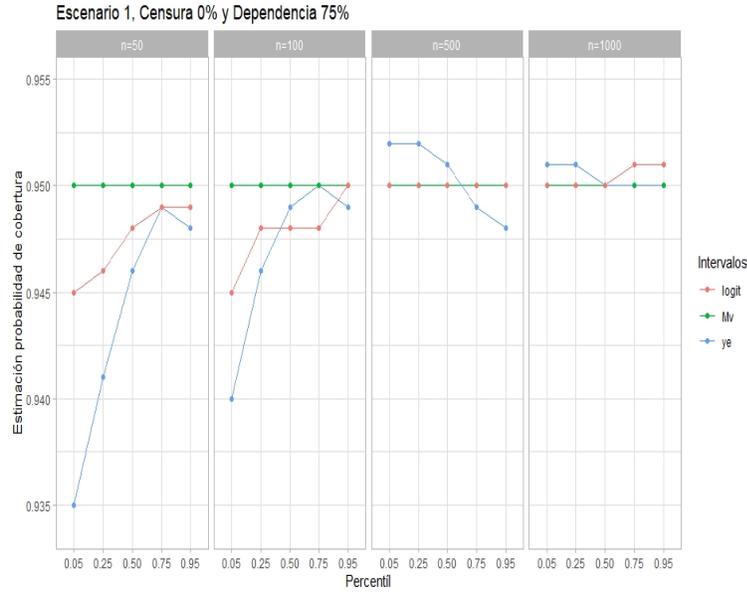
En las figuras **4-10**, **4-11** y **4-12**, se presentan muestras cuando se asume un porcentaje de censura del  $10\%$ , se evidencia que en general para la propuesta de Hong y Meeker (2014) y la transformación *logit* no alcanzan la probabilidad de cobertura nominal, lo que nos hace pensar que el porcentaje de censura influye en este aspecto. Al igual que en las figuras **4-13**, **4-14** y **4-15** aún es más marcado que los intervalos no alcanzan la probabilidad de cobertura estimada nominal, cuando se asume un



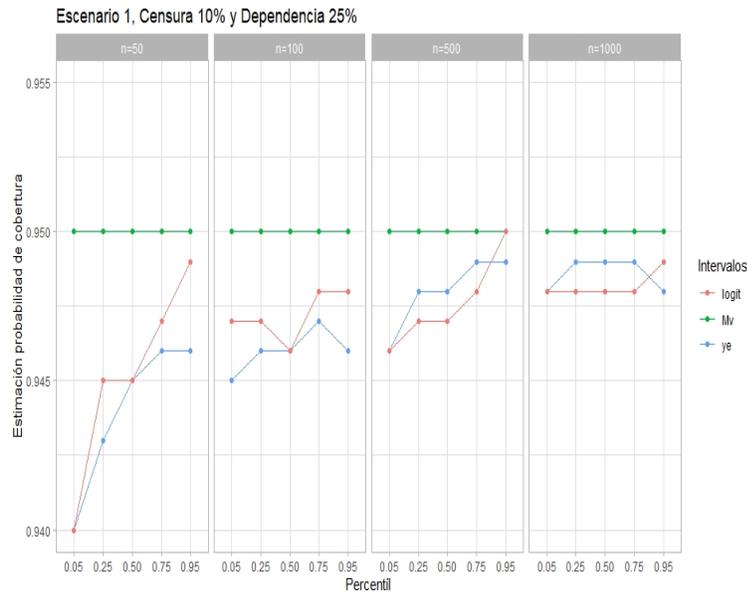
**Figura 4-7:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %),  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 5$ ,  $\tau = 0.25$  y 0 % de censura.



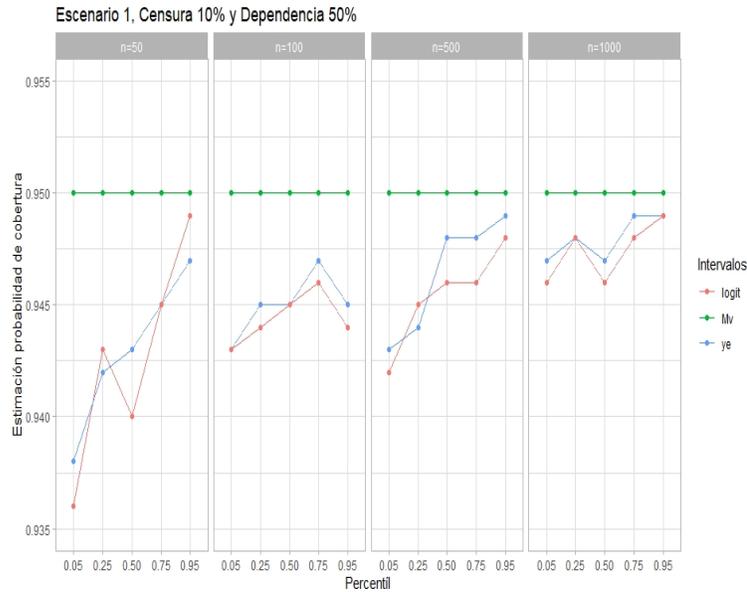
**Figura 4-8:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %),  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 5$ ,  $\tau = 0.50$  y 0 % de censura.



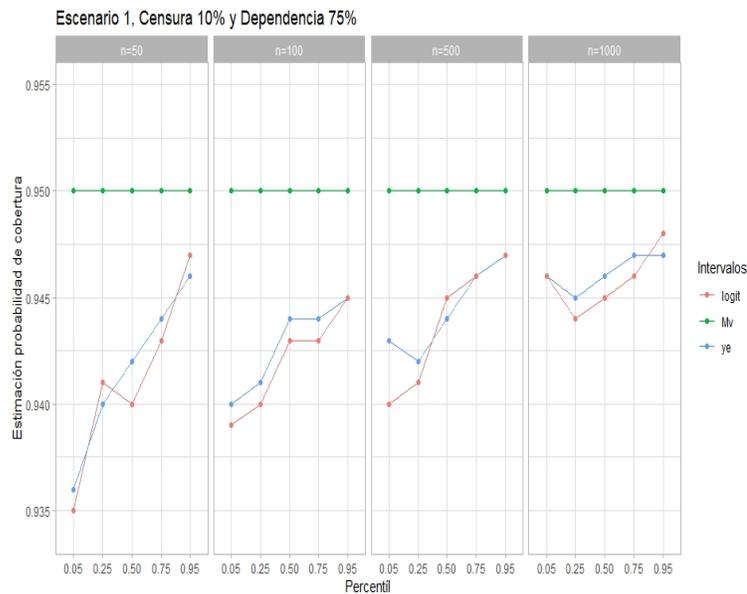
**Figura 4-9:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %),  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 5$ ,  $\tau = 0.75$  y 0 % de censura.



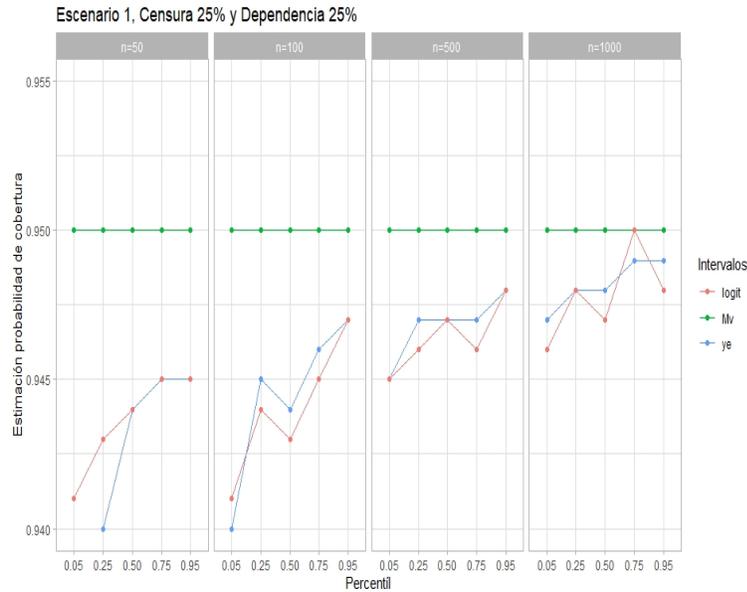
**Figura 4-10:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %),  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 5$ ,  $\tau = 0.25$  y 10 % de censura.



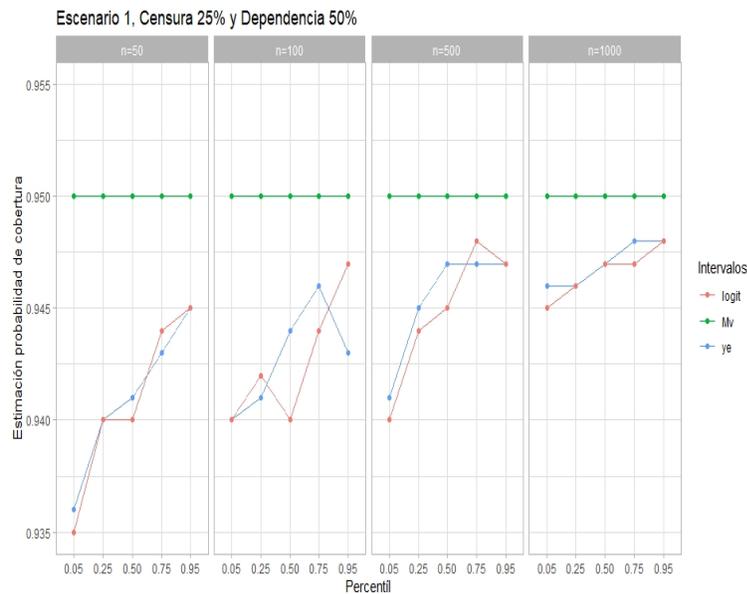
**Figura 4-11:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %),  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 5$ ,  $\tau = 0.50$  y 10 % de censura.



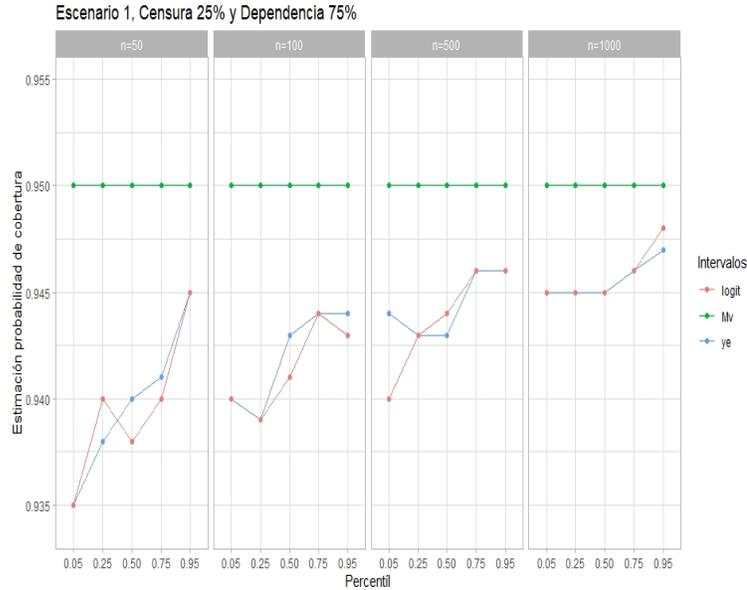
**Figura 4-12:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %),  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 5$ ,  $\tau = 0.75$  y 10 % de censura.



**Figura 4-13:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %),  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 5$ ,  $\tau = 0.25$  y 25 % de censura.



**Figura 4-14:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %),  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 5$ ,  $\tau = 0.50$  y 25 % de censura.

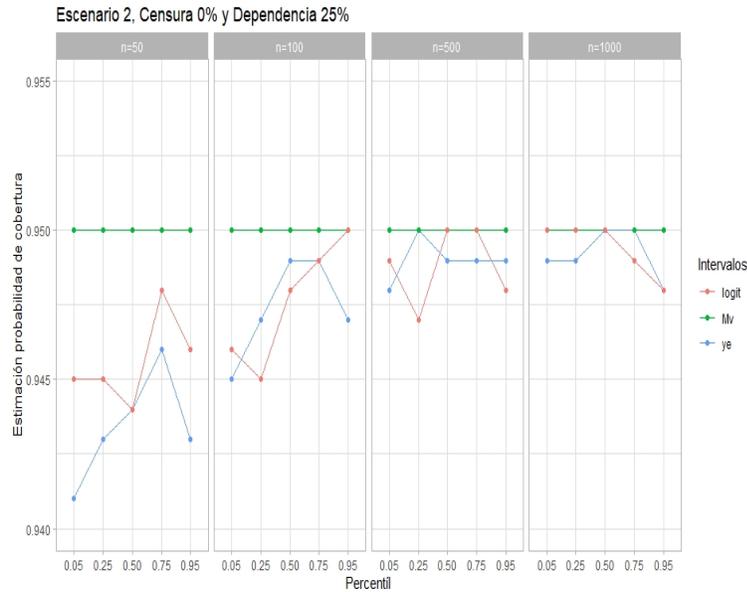


**Figura 4-15:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (42 %), componente 2 (58 %),  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 5$ ,  $\tau = 0.75$  y 25 % de censura.

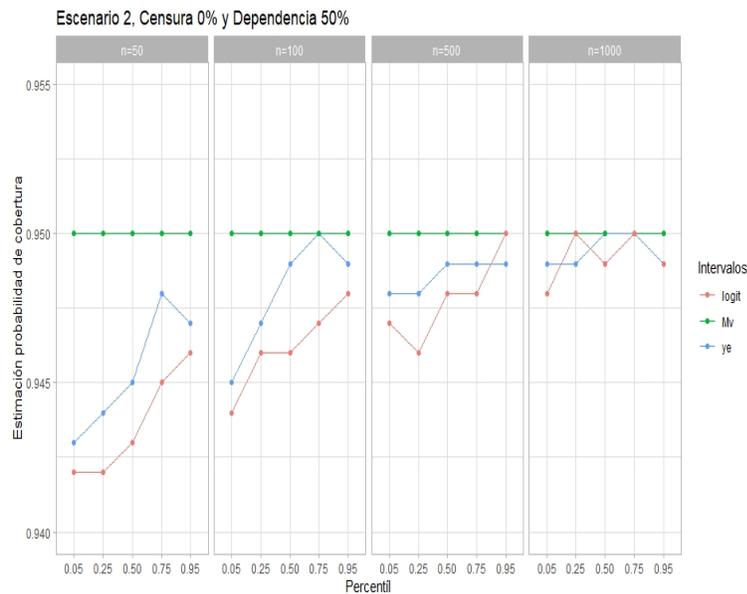
porcentaje de censura 25 %.

En el escenario 2, se presenta un sistema en serie, donde las dos componentes están distribuidas Weibull. En las figuras 4-16, 4-17 y 4-18, para un sistema en serie con componentes Weibull, se presentan los intervalos de verosimilitud, bajo una transformación *logit* y la propuesta ( $y_e$ ). Se evidencia que el comportamiento en la estimación de la probabilidad de cobertura nominal 95 %, es afectada por la dependencia considerada en el estudio. Adicionalmente para un tamaño de muestra pequeño se nota aún más la baja cobertura en relación a los otros dos métodos y a medida que el tamaño de muestra aumenta, las probabilidades de cobertura se acercan a la probabilidad de cobertura nominal.

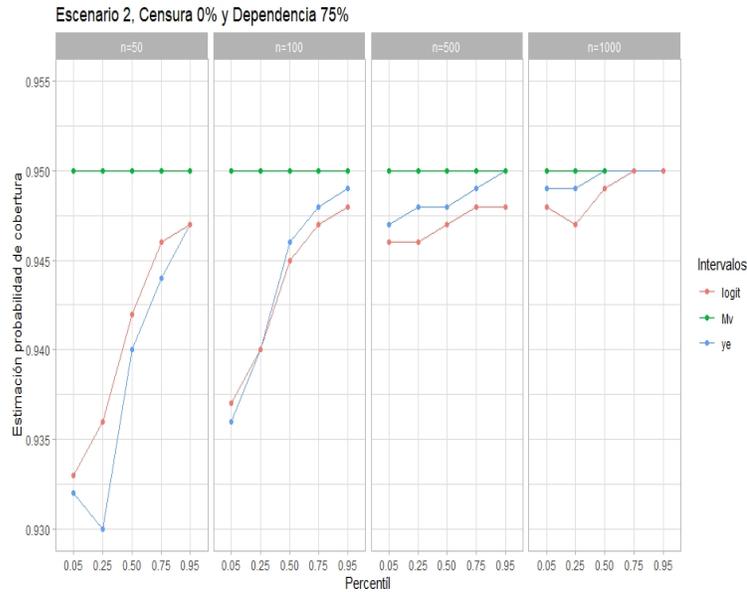
Como si fuera poco, se presentan los escenarios donde se toman porcentajes de censura del 10 y 25 porcientos, en dichos escenarios, también se muestran los distintos valores en la dependencia, se muestra que a medida que aumenta el porcentaje de censura las estimaciones de las probabilidades de cobertura inician lejos de la estimación nominal, pero a medida que aumenta el tamaño de muestra, los métodos  $y_e$  y *logit* alcanzan el valor de cobertura nominal. Al mismo tiempo podemos afirmar que para porcentajes de censura mayor, podemos incurrir en un problema para la estimación de la confiabilidad del sistema, y más en tamaños de muestras pequeños. Con todo y lo anterior, los intervalos se ven afectados por la dependencia y no por la censura, tópico no mucho menor. Ver figuras 4-19, 4-20, 4-21, 4-22, 4-23 y 4-24.



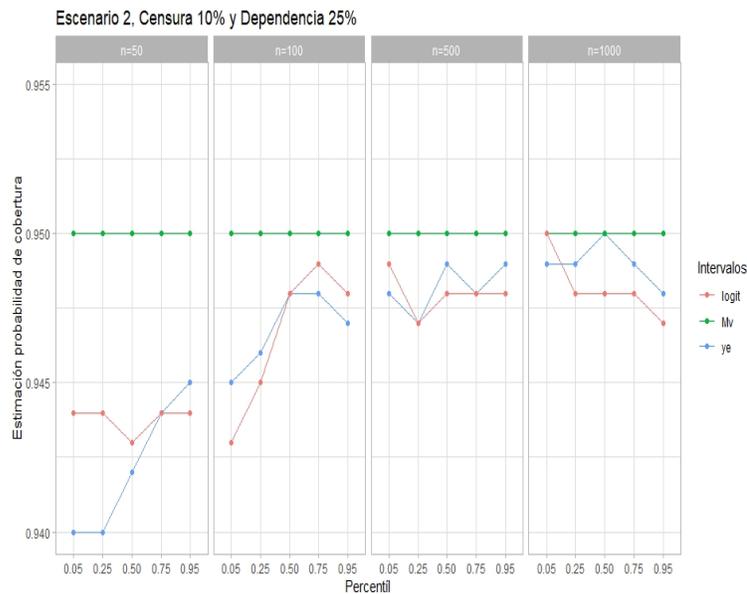
**Figura 4-16:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau = 0.25$  y 0 % de censura.



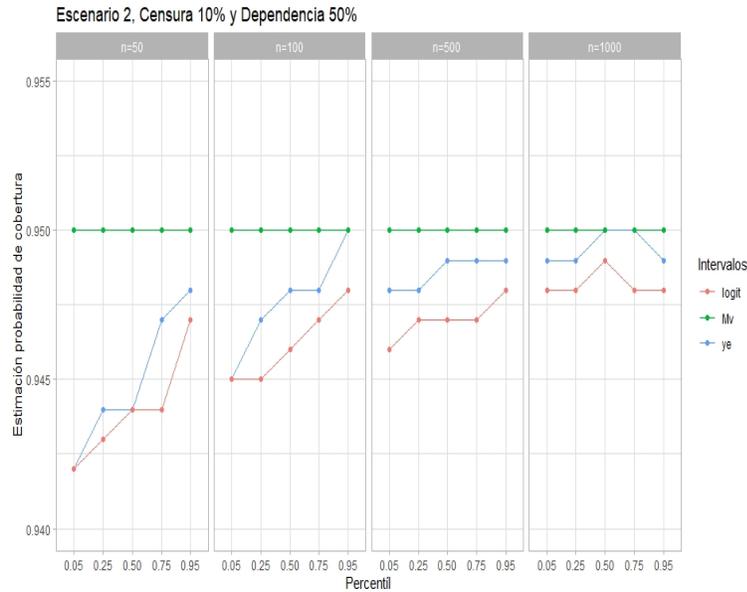
**Figura 4-17:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau = 0.50$  y 0 % de censura.



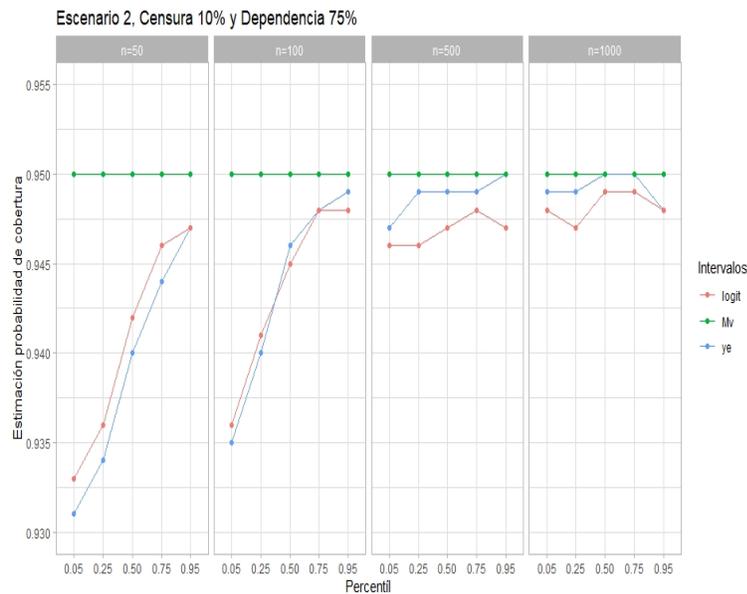
**Figura 4-18:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau = 0.75$  y 0 % de censura.



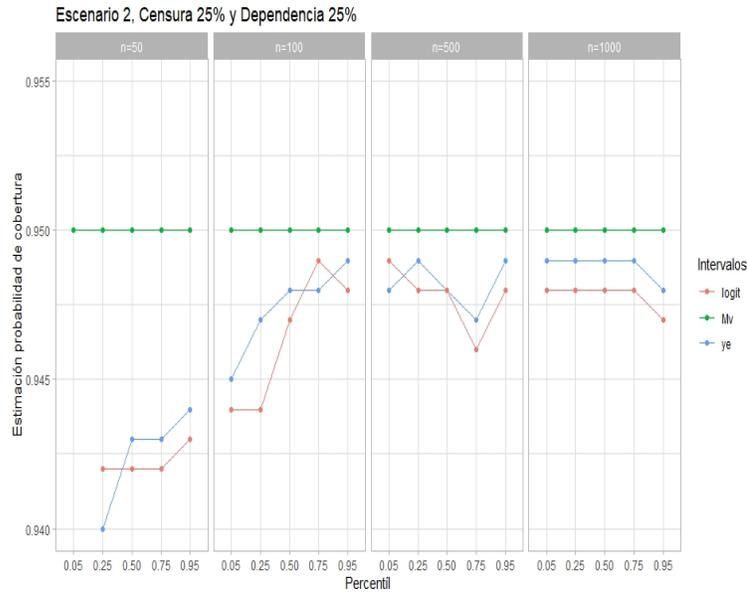
**Figura 4-19:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau = 0.25$  y 10 % de censura.



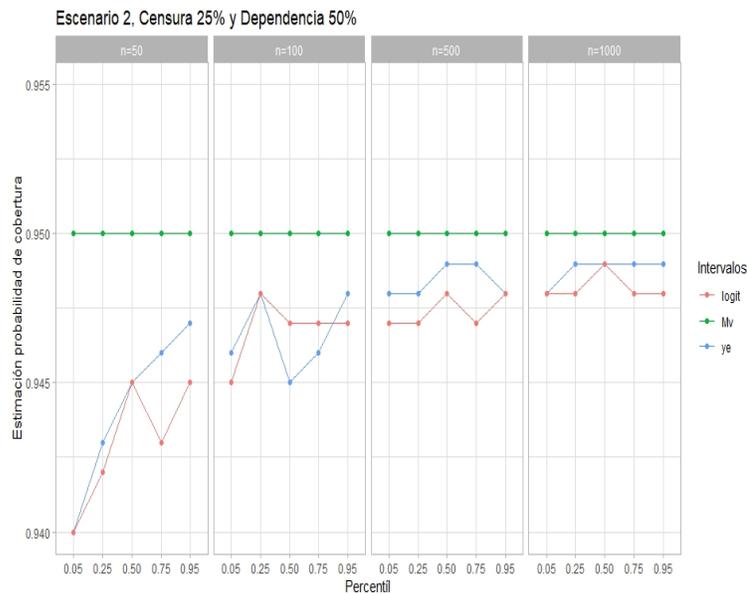
**Figura 4-20:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau = 0.50$  y 10 % de censura.



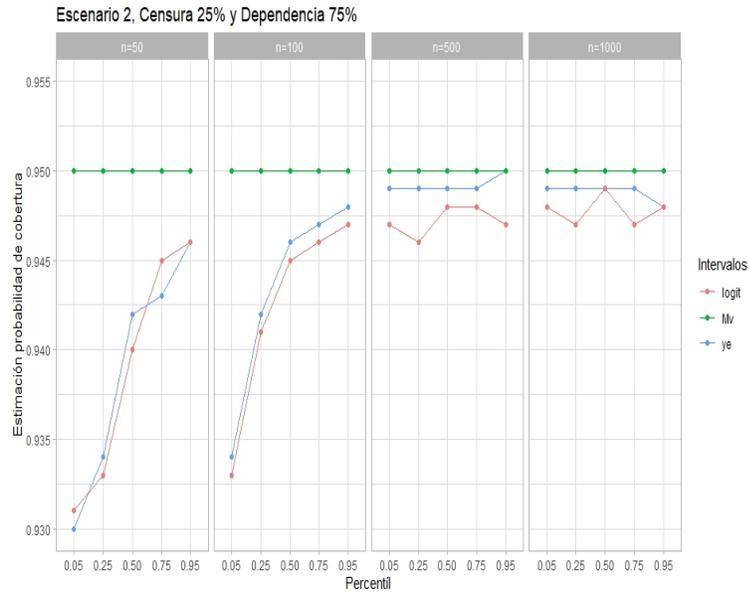
**Figura 4-21:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau = 0.75$  y 10 % de censura.



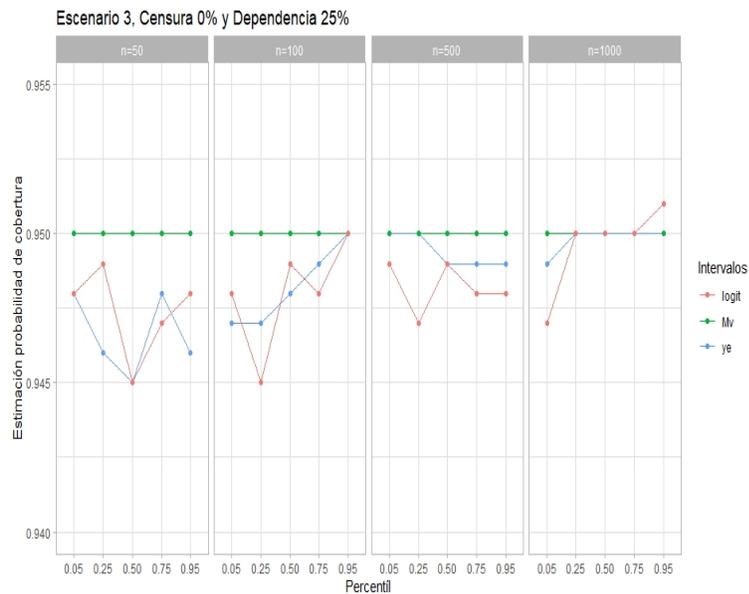
**Figura 4-22:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau = 0.25$  y 25 % de censura.



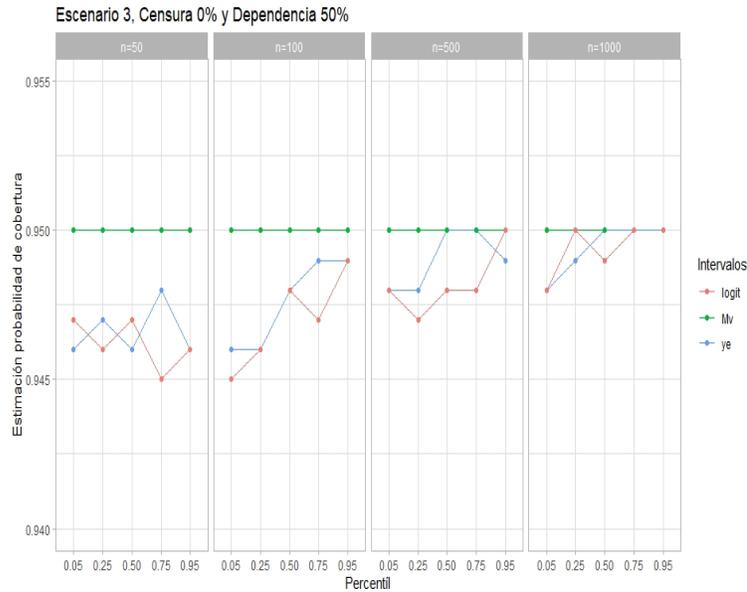
**Figura 4-23:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau = 0.50$  y 25 % de censura.



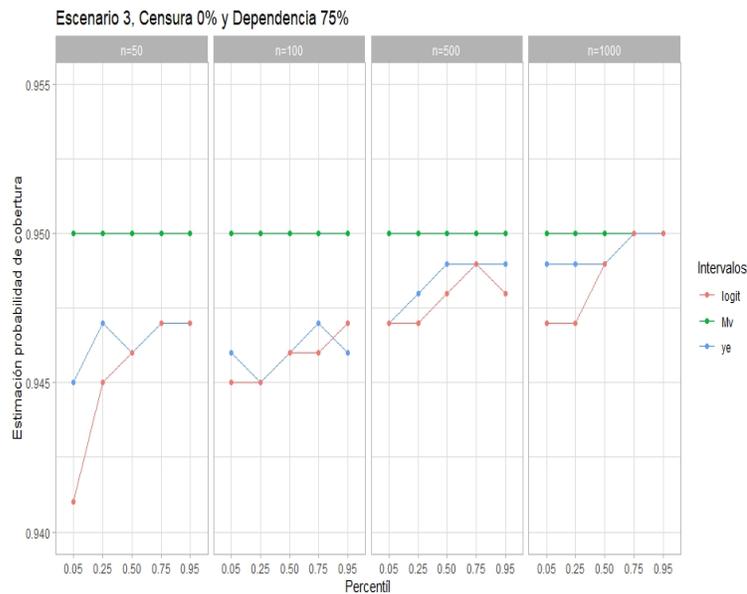
**Figura 4-24:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau = 0.75$  y 25 % de censura.



**Figura 4-25:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema Marshall-Olkin bivariado Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (48 %), ambos (2 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau = 0.25$  y 0 % de censura.

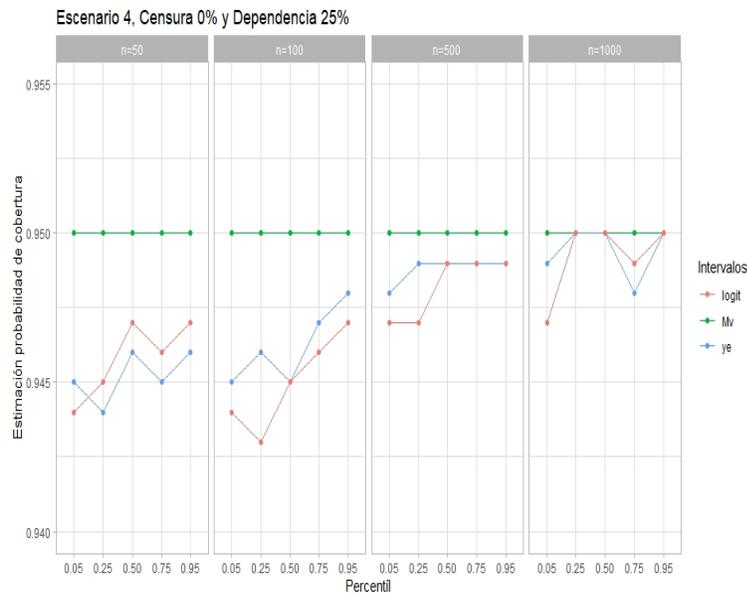


**Figura 4-26:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema Marshall-Olkin bivariado Exponencial, con porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (48 %), ambos (2 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau = 0.50$  y 0 % de censura.



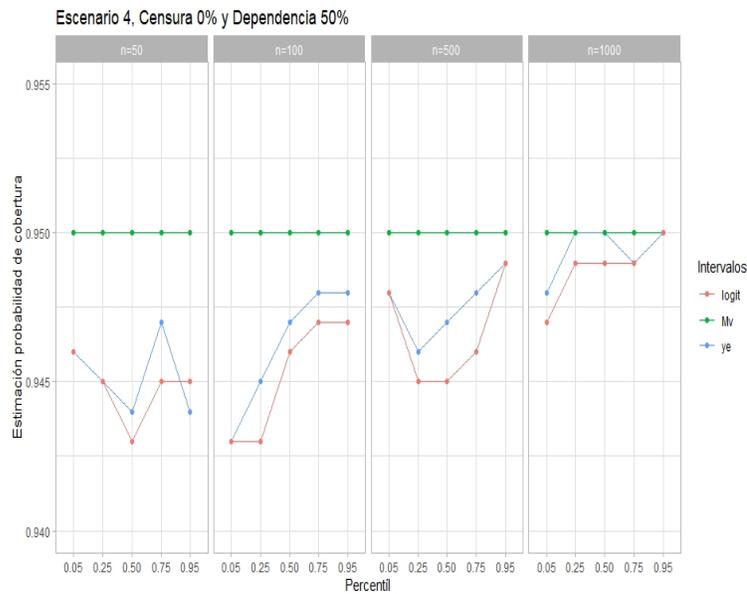
**Figura 4-27:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema Marshall-Olkin bivariado Exponencial; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (48 %), ambos (2 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau = 0.75$  y 0 % de censura.

En el escenario 3, se presenta un sistema Marshall-Olkin bivariado Exponencial. En las figuras 4-25, 4-26 y 4-27, para un sistema Marshall-Olkin, se muestran los intervalos de verosimilitud, bajo una transformación *logit* y la propuesta ( $y_e$ ). Se evidencia que el comportamiento en la estimación de la probabilidad de cobertura nominal 95 %, es en menor escala afectada por la dependencia considerada en el estudio. Adicionalmente, para un tamaño de muestra pequeño se nota que los tres métodos presentan coberturas similares, manteniendo la tendencia a medida que el tamaño de muestra aumenta, estas probabilidades de cobertura se acercan a la probabilidad de cobertura nominal.

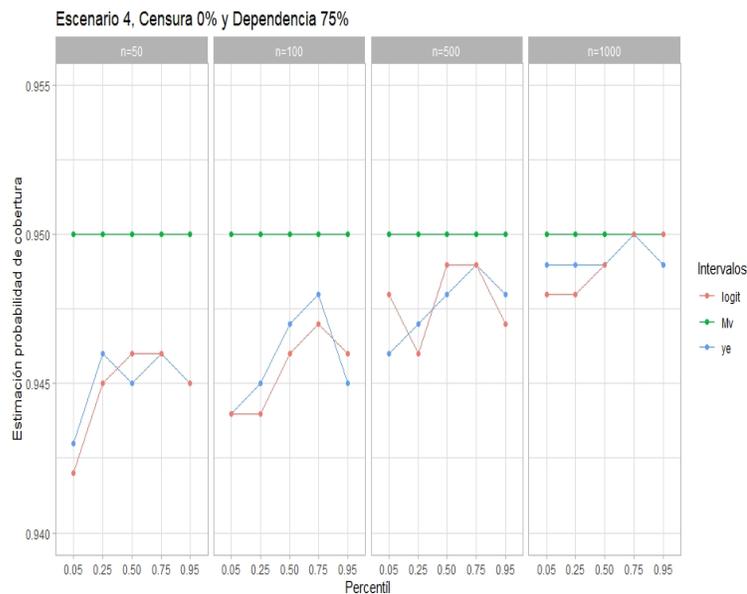


**Figura 4-28:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema Marshall-Olkin bivariado Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (51 %), componente 2 (45 %), ambos (4 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau = 0.25$  y 0 % de censura.

En el escenario 4, se presenta un sistema Marshall-Olkin bivariado Weibull. En las figuras 4-28, 4-29 y 4-30 para un sistema Marshall-Olkin bivariado Weibull, se muestran los intervalos de verosimilitud, bajo una transformación *logit* y la propuesta ( $y_e$ ). Se evidencia que el comportamiento en la estimación de la probabilidad de cobertura nominal 95 %, se mantiene la misma tendencia en el desempeño de los intervalos, los cuales por efecto de la dependencia inician con probabilidad de cobertura menor y a medida que el tamaño de muestra aumenta, suben las probabilidades de cobertura nominales.



**Figura 4-29:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema Marshall-Olkin bivariado Weibull, con porcentaje de falla; componente 1 (51 %), componente 2 (45 %), ambos (4 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau = 0.50$  y 0 % de censura.



**Figura 4-30:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza de un sistema Marshall-Olkin bivariado Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (51 %), componente 2 (45 %), ambos componentes (4 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau = 0.75$  y 0 % de censura.

# 5 Modelos de fragilidad para tiempos de falla en riesgos competitivos

En este capítulo se presenta el concepto de fragilidad. Un modelo de fragilidad es un modelo de riesgos competitivos que consta de tres componentes: una fragilidad (efecto aleatorio), una función de riesgo de línea de base (paramétrica o no paramétrica), y un término que modela la influencia de las covariables observadas (efectos fijos) (Wienke, 2010). En nuestro caso, incluiremos la componente de fragilidad en sistemas con sólo dos componentes Weibull, la idea es adaptada del trabajo de Wang, Emura, Fan, Lo, y Wilke (2020).

En los modelos univariados, todas las duraciones son descritas por el tiempo hasta el evento, y los tiempos de estos eventos se consideran independientes. Por tal razón se hace el énfasis principal sobre los modelos de fragilidad correlacionados, como extensiones naturales de los modelos de fragilidad compartida (extenderlo al caso de tiempos de falla dependientes) (Duchateau y Janssen, 2007).

Ibrahim, Chen, y Sinha (2014) consideran modelos de fragilidad compartida paramétricos y semiparamétricos, basados en un enfoque Bayesiano. Tableman y Kim (2003) consideran la aplicación del algoritmo EM en modelos semiparamétricos de fragilidad compartida. Algunos autores han realizado otras aplicaciones, tales como; Aalen, Borgan, y Gjessing (2008), Hougaard (2012), Lin y Zelterman (2002), entre otros.

Se incorpora el concepto de fragilidad en un sistema en serie (riesgos competitivos), cuyas marginales siguen una distribución Weibull. La idea surge para investigar el caso cuando se tiene dependencia entre los tiempos de falla de dicho sistema. Teniendo presente que la fragilidad toma la heterogeneidad de los tiempos de falla de cada uno de las componentes, y la relaciona con el parámetro de dependencia, en este sentido se presenta el análisis solo para uno de los cuatro modelos estudiados en el capítulo anterior, y algunos casos de relación entre la varianza de los tiempos de falla, y la dependencia entre los tiempos de vida del sistema (sólo dos componentes o unidades). Finalmente, se presenta una adaptación en la construcción de los intervalos de confianza propuestos por Hong y Meeker (2014), para la función de distribución del sistema, y en nuestro caso adaptado a la confiabilidad del sistema, incluyendo en la matriz de covarianzas del modelo de verosimilitud, y el parámetro de dependencia entre los tiempos de falla.

## 5.1. Datos de riesgos competitivos

Sea  $T_{ij}$  el tiempo de falla continuo de una componente  $i = 1, \dots, n$ , con tipos de falla  $j = 1, 2$ . Sea  $C_i$  un período fijo de duración de la prueba (censura Tipo I). Se puede observar el tiempo del primer evento que ocurre  $T_i = \min(T_{1i}, T_{2i}, C_i)$ , y uno de los tres eventos (falla por la componente 1, falla por la componente 2 y censura).

### 5.1.1. Modelo propuesto

Para este tipo de modelos la heterogeneidad, es incluida por medio de un término de fragilidad no observada  $Z_i$ , la cual es una variable aleatoria positiva (Wienke, 2010). En este trabajo se considera específicamente un modelo de fragilidad Gamma, el cual es el más comúnmente usado. A continuación, se presenta su función de densidad de probabilidad:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\Gamma(1/\eta) \eta^{1/\eta}} z^{1/\eta-1} \exp\left(-\frac{z}{\eta}\right), \quad \eta > 0, z > 0 \quad (5-1)$$

con media 1 y varianza  $\eta$ . El término de fragilidad  $Z_i$  afecta a los dos tipos de falla. Se dice que una unidad o componente es robusta, si tiene un valor pequeño de  $Z_i$ , pero se dice que es frágil para valores grandes de  $Z_i$ . La varianza  $\eta$  representa el grado de heterogeneidad.

Un aspecto importante que se tiene en este tipo de modelos, son los modelos de fragilidad compartida (Duchateau y Janssen, 2007). En el contexto de modelos estándar de supervivencia, los modelos de fragilidad compartida, también son ampliamente usados. Por ejemplo, los modelos de fragilidad compartida asumen valores de fragilidad comunes para grupos de sujetos, y explica las correlaciones entre individuos agrupados.

Se define la función de supervivencia condicional de  $T_{ij}$  dada  $Z_i$  para una distribución Weibull.

$$\begin{aligned} S_{T_{ij}|Z_i}(t|Z_i = z) &= \Pr(T_{ij} > t|Z_i = z) \\ &= \Pr(T_{ij} > t|Z_i = 1)^z \\ &= \left( \exp \left[ - \left\{ \frac{t}{\exp(\mu_j)} \right\}^{1/\sigma_j} \right] \right)^z \\ &= \exp \left[ -z \left\{ \frac{t}{\exp(\mu_j)} \right\}^{1/\sigma_j} \right] \end{aligned}$$

donde  $\mu_j$  es el parámetro de localización y  $\sigma_j$  es el parámetro de escala. El modelo implica que el valor de la heterogeneidad no observada  $Z_i = z$ , actúa en la escala sin afectar la forma, ver algunas discusiones sobre heterogeneidad para tiempos de falla Weibull, en Vallejos y Steel (2017).

Liu (2012) propone para un modelo en riesgos competitivos, analizar este modelo bajo el supuesto, de que los pares  $(T_{i1}, T_{i2})$  son condicionalmente independientes, es decir:

$$\Pr(T_{i1} > t_1, T_{i2} > t_2 | z) = \exp \left[ -z \left\{ \frac{t_1}{\exp \mu_1} \right\}^{1/\sigma_1} \right] \exp \left[ -z \left\{ \frac{t_2}{\exp \mu_2} \right\}^{1/\sigma_2} \right] \quad (5-2)$$

Emura, Nakatochi, Murotani, y Rondeau (2017) ampliaron el modelo presentado anteriormente, para el análisis de datos en riesgos competitivos, cuando se relaja el supuesto de independencia condicional. Estos autores, en particular trabajaron en el caso cuando los tiempos de falla se correlacionan condicionalmente en el término de fragilidad. Esta es una generalización importante, ya que no debería haber razón para que la independencia condicional se mantenga siempre. En este orden de ideas, los tiempos de falla pueden estar correlacionados positivamente, pero en este tipo de trabajos se sugiere utilizar una función cópula para modelar dicha dependencia. En particular, se trabaja con la cópula Gumbel.

$$C_\theta(u, v) = \exp \left[ - \left\{ (-\log u)^{\theta+1} + (-\log v)^{\theta+1} \right\}^{\frac{1}{\theta+1}} \right] \quad (5-3)$$

donde  $\theta \geq 0$  es el parámetro de dependencia.

Liu (2012) propone un modelo de supervivencia bivariado, que generaliza la supervivencia condicional específica para el riesgo, y la estructura de dependencia entre los riesgos, a través de un parámetro adicional  $\theta$ .

$$\begin{aligned} S_{T_{i1}, T_{i2} | Z_i}(t_1, t_2 | z) &= \Pr(T_{i1} > t_1, T_{i2} > t_2) \\ &= \exp \left\{ - \left( [-\log \{S_{T_{i1} | Z_i}(t_1 | z)\}]^{\theta+1} + [-\log \{S_{T_{i2} | Z_i}(t_2 | z)\}]^{\theta+1} \right)^{\frac{1}{\theta+1}} \right\} \\ &= \exp \left( -z \left[ \left\{ \frac{t_1}{\exp(\mu_1)} \right\}^{\frac{\theta+1}{\sigma_1}} + \left\{ \frac{t_2}{\exp(\mu_2)} \right\}^{\frac{\theta+1}{\sigma_2}} \right]^{\frac{1}{\theta+1}} \right) \end{aligned}$$

En consecuencia, el modelo anterior, el cual llamaremos Modelo I, se reduce para  $\theta = 0$ , al caso cuando los tiempos de falla son independientes. También, se reduce a un modelo cópula Gumbel para riesgos competitivos bivariados, cuando  $z = 1$  (Wu, Shi, y Zhang, 2017). Denotaremos como modelo II, a el modelo donde se incluye un factor no observado  $Z_i = z$ , este modelo no es directamente aplicable por contener dicho factor. Al integrar con respecto a  $z$ , la función de supervivencia bivariada es:

$$\begin{aligned} S_{T_{i1}, T_{i2}}(t_1, t_2) &= \Pr(T_{i1} > t_1, T_{i2} > t_2) \\ &= \int_0^\infty S_{T_{i1}, T_{i2} | z}(t_1, t_2 | z) f_Z(z) dz \\ &= \left( 1 + \eta \left[ \left\{ \frac{t_1}{\exp(\mu_1)} \right\}^{\frac{\theta+1}{\sigma_1}} + \left\{ \frac{t_2}{\exp(\mu_2)} \right\}^{\frac{\theta+1}{\sigma_2}} \right]^{\frac{1}{\theta+1}} \right)^{-\frac{1}{\eta}} \end{aligned}$$

Para el modelo anterior, los supuestos de la cópula Gumbel y la fragilidad Gamma son esenciales, puesto que para otras cópulas u otras distribuciones de fragilidad, pueden no alcanzar una forma

cerrada. El modelo anterior es equivalente al modelo de Lu y Bhattacharyya (1990).

La función de sobrevivencia marginal y la función cuantil  $p$ -ésimo, siguen respectivamente los supuestos del modelo Burr XII, propuesto por Burr (1942), el cual a menudo es utilizado en la teoría de confiabilidad Watkins (1999), Murthy, Xie, y Jiang (2004), y Belaghi y Asl (2019), entre otros.

$$S_{T_{ij}}(t) = \left[ 1 + \eta \left\{ \frac{t}{\exp(\mu_j)} \right\}^{\frac{1}{\sigma_j}} \right]^{-\frac{1}{\eta}} \quad (5-4)$$

$$t_{p,j} = \exp(\mu_j) \left\{ \frac{(1-p)^{-\eta}}{\eta} \right\}^{\sigma_j}, \quad j = 1, 2. \quad (5-5)$$

La media y la varianza son:

$$E(T_{ij}) = \frac{\exp(\mu_j)\Gamma(1/\eta - \sigma_j)\Gamma(\sigma_j + 1)}{\eta^{\sigma_j+1}\Gamma(1/\eta + 1)} \quad (5-6)$$

$$\text{Var}(T_{ij}) = \frac{\exp(2\mu_j)}{\eta^{2\sigma_j+2}} \left[ \eta \frac{\Gamma(1/\eta - 2\sigma_j)\Gamma(2\sigma_j + 1)}{\Gamma(1/\eta + 1)} - \left\{ \frac{\Gamma(1/\eta - \sigma_j)\Gamma(\sigma_j + 1)}{\Gamma(1/\eta + 1)} \right\}^2 \right], \quad \eta > 0. \quad (5-7)$$

### 5.1.2. Tau de Kendall

Para medir la dependencia entre los tiempos  $T_{1i}$  y  $T_{2i}$  se hace uso el tau de Kendall. Es de resaltar que es usado el tau de Kendall, por algunas propiedades; es simple de calcular, no se deja influenciar por las distribuciones marginales y nos permite hacer uso de algunas propiedades de las cópulas Arquimedianas (Nelsen, 2006). El tau de Kendall para el par  $(T_{i1}, T_{i2})$  está dado por:

$$\tau_{\theta,\eta} = 1 - \frac{2}{(\theta + 1)(\eta + 2)}, \quad \theta \geq 0, \eta > 0. \quad (5-8)$$

Para el modelo propuesto es  $\tau_{\theta,\eta} = \eta/(\eta + 2)$ . El tau de Kendall condicional es:

$$\tau_{\theta}^{Z_i} = \tau_{\theta,\eta=0} = \frac{\theta}{\theta + 1} < \tau_{\theta,\eta}, \quad \theta \geq 0, \eta > 0 \quad (5-9)$$

Esto es relevante para el modelo condicional  $(T_{1i}, T_{2i}|Z_i)$  y es igual al tau de Kendall para la cópula de Gumbel.

### 5.1.3. Identificabilidad

Para modelos de riesgos competitivos, la aproximación tradicional para especificar dicho modelo es vía tiempos de falla latente. Es decir, se tiene observaciones de  $T_{i1}$  o  $T_{i2}$  (pero no ambos), si es el caso de un modelo con sólo dos causas de falla. Como  $T_{i1}$  y  $T_{i2}$  no se pueden observar simultáneamente, lo que quiere decir que es imposible identificar las distribuciones marginales, a partir solamente de los datos de riesgos competitivos. En ese contexto surge el denominado problema de identificabilidad (Tsiatis, 1975).

Existen algunas posibles soluciones para el problema; asumir independencia, lo cual es frecuentemente no realista o asumir una estructura de dependencia conocida, haciendo uso de una cópula conocida, para reproducir la distribución conjunta de las causas de falla del sistema, para este caso (Zheng y Klein, 1995) proponen el estimador cópula gráfico, el cual es un estimador no paramétrico o finalmente, especificar un modelo paramétrico. En el contexto de modelos de fragilidad, podemos enfrentarnos el problema de la identificabilidad conjunta de  $\theta$  y  $\eta$ . La solución más simple al problema es asumir un valor para  $\theta$ , y estimar  $\eta$ . Wang et al. (2020) proponen un supuesto de identificabilidad más general, permitiendo que  $\eta$  sea desconocido y  $\theta = \omega(\eta)$ , el cual es restringido con una función de enlace  $\omega(\cdot)$ .

#### 5.1.4. Inferencia basada en máxima verosimilitud

Para realizar las estimaciones de los parámetros del modelo, se usa el método de máxima verosimilitud. La función de subdensidad de la función  $f(t, j)$  para el  $j$ -ésimo tipo de falla es:

$$\begin{aligned} f(t, j) &= -\frac{\partial S_{T_{i1}, T_{i2}}(t_1, t_2)}{\partial t_j} \\ &= \left( 1 + \eta \left[ \left\{ \frac{t}{\exp(\mu_1)} \right\}^{\frac{\theta+1}{\sigma_1}} + \left\{ \frac{t}{\exp(\mu_2)} \right\}^{\frac{\theta+1}{\sigma_2}} \right]^{\frac{1}{\theta+1}} \right)^{-\frac{1+\eta}{\eta}} \\ &\quad \times \left[ \left\{ \frac{t}{\exp(\mu_1)} \right\}^{\frac{\theta+1}{\sigma_1}} + \left\{ \frac{t}{\exp(\mu_2)} \right\}^{\frac{\theta+1}{\sigma_2}} \right]^{\frac{1}{\theta+1}-1} \frac{t^{\frac{\theta+1}{\sigma_j}} - 1}{\sigma_j \exp \left\{ \mu_j \left( \frac{\theta+1}{\sigma_j} \right) \right\}} \end{aligned}$$

La función de verosimilitud está dada por:

$$L(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \eta, \theta) = \prod_{i=1}^n f(T_i, 1)^{\delta_i} f(T_i, 2)^{\delta_i^*} S_{T_{i1}, T_{i2}}(T_i, T_i)^{1-\delta_i-\delta_i^*} \quad (5-10)$$

La función log-verosimilitud viene dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \ell(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \eta, \theta) &= - \left\{ m \log \sigma_1 + m^* \log \sigma_2 + (\theta + 1) \frac{m\mu_1}{\sigma_1} + (\theta + 1) \frac{m^*\mu_2}{\sigma_2} \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \left( \frac{\theta+1}{\sigma_1} - 1 \right) + \delta_i^* \left( \frac{\theta+1}{\sigma_2} - 1 \right) \right\} \log T_i \\ &\quad - \frac{\theta}{\theta+1} \sum_{i=1}^n (\delta_i + \delta_i^*) \log \left[ \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{T_i}{\exp(\mu_k)} \right\}^{\frac{\theta+1}{\sigma_k}} \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left( \delta_i + \delta_i^* + \frac{1}{\eta} \right) \log \left( 1 + \eta \left[ \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{T_i}{\exp(\mu_k)} \right\}^{\frac{\theta+1}{\sigma_k}} \right]^{\frac{1}{\theta+1}} \right) \end{aligned}$$

donde  $m = \sum_{i=1}^n \delta_i$  y  $m^* = \sum_{i=1}^n \delta_i^*$ . Bajo alguna restricción de identificación de  $\theta = \omega(\eta)$ , se obtienen los MLE, maximizando  $\ell(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \eta, \theta = \omega(\eta))$  sobre los rangos de los parámetros:  $\mu_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\mu_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma_1 \in (0, \infty)$ ,  $\sigma_2 \in (0, \infty)$ ,  $\theta \in [0, \infty)$  y  $\eta \in (0, \infty)$ .

## 5.2. Propuesta de IC para la confiabilidad del sistema

La propuesta nace teniendo presente los resultados obtenidos en el capítulo anterior, donde se evidencia que la dependencia entre los tiempos de vida, afectan para tamaños de muestras pequeños, la estimación de la probabilidad de cobertura, en los intervalos de confianza propuestos, donde se tiene que bajo el supuesto de independencia tiene buen comportamiento, pero al adicionar el supuesto de dependencia, estos se ven afectados. Se tiene presente que los resultados asintóticos bajo este escenario, son similares a los obtenidos anteriormente. Básicamente lo que se propone es incluir en la matriz de varianzas y covarianzas el parámetro de dependencia, y se adiciona un factor que nos da cuenta del parámetro de dependencia.

Los detalles de la propuesta para los intervalos de confianza de la confiabilidad de un sistema en serie, cuyas distribuciones marginales siguen una distribución Weibull, y los tiempos de vida del sistema admiten dependencia, y a su vez para un caso particular la independencia. A continuación, se presenta la modificación de los intervalos de confianza:

### 5.2.1. Propuesta de IC con aproximación Normal para $t_p$ con fragilidad

Los detalles de la propuesta para los IC, fue tomada de los procedimientos descritos en la Sección 2.4.2. Se calcula la estimación para el error estándar de  $\hat{y}_p$ , basado en el método Delta y la información observada:

$$\widehat{se}_{\hat{y}_p} = \sqrt{\frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\theta}'} \text{Diag}(\hat{\Sigma}_1, \dots, \hat{\Sigma}_m) \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\theta}}} \quad (5-11)$$

Por simplicidad se usa  $\partial \hat{y}_p / \partial \hat{\theta}$  para denotar  $\partial \hat{y}_p / \partial \theta|_{\theta=\hat{\theta}}$ . Esto es  $\partial \hat{y}_p / \partial \hat{\theta}$ , se obtiene derivando con respecto a cada parámetro y evaluándolo en los estimadores de ML.

Haciendo uso del método de la derivada implícita, se tiene  $\partial \hat{y}_p / \partial \hat{\theta}$ . En particular, para encontrar  $\partial \hat{y}_p / \partial \hat{\mu}_i$  y  $\partial \hat{y}_p / \partial \hat{\sigma}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

$$F(t_p; \hat{\theta}) = \hat{p} = g\{F_1[\exp(\hat{y}_p); \hat{\theta}_1], \dots, F_m[\exp(\hat{y}_p); \hat{\theta}_m]\}. \quad (5-12)$$

Tomando derivadas en ambos lados de (5-12) con respecto a  $\hat{\mu}_i$ , se tiene:

$$0 = \frac{\partial g}{\partial F_i} \frac{\partial F_i(\hat{y}_p)}{\partial \hat{\mu}_i} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial g}{\partial F_j} \frac{\partial F_j(\hat{y}_p)}{\partial \hat{\mu}_i} \quad (5-13)$$

Para conseguir cada uno de los factores, se tiene que;  $\partial F_i(\hat{y}_p) / \partial \hat{\mu}_i$  y  $\partial F_j(\hat{y}_p) / \partial \hat{\mu}_i$ . Sea  $\hat{z}_{ip} = (\hat{y}_p - \hat{\mu}_i) / \hat{\sigma}_i$ , con  $i = 1, \dots, m$ , en particular se debe tener present, que para la componente  $i$ ,  $\phi_i$  es la pdf

de localización y escala. Como  $F_j(\hat{y}_p) = \Phi_i(\hat{z}_{ip})$  se sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i(\hat{y}_p)}{\partial \hat{\mu}_i} &= \phi_i(\hat{z}_{ip}) \frac{\partial \hat{z}_{ip}}{\partial \hat{\mu}_i} \\ &= \phi_i(\hat{z}_{ip}) \left( \frac{1}{\hat{\sigma}_i} \right) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\mu}_i} - 1 \right) \\ &= \left( \frac{\phi_i(\hat{z}_{ip})}{\hat{\sigma}_i} \right) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\mu}_i} - 1 \right) \\ &= f_i(\hat{y}_p) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\mu}_i} - 1 \right) \end{aligned}$$

donde  $f_i(\hat{y}_p) = \phi_i(\hat{z}_{ip})/\hat{\sigma}_i$ .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_j(\hat{y}_p)}{\partial \hat{\mu}_i} &= \phi_j(\hat{z}_{jp}) \frac{\partial \hat{z}_{jp}}{\partial \hat{\mu}_i} \\ &= \phi_j(\hat{z}_{jp}) \left( \frac{1}{\hat{\sigma}_j} \right) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\mu}_i} - 0 \right) \\ &= \left( \frac{\phi_j(\hat{z}_{jp})}{\hat{\sigma}_j} \right) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\mu}_i} \right) \\ &= f_j(\hat{y}_p) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\mu}_i} \right) \end{aligned}$$

donde  $\hat{z}_{jp} = (\hat{y}_p - \hat{\mu}_j)/\hat{\sigma}_j$  y  $f_j(\hat{y}_p) = \phi_j(\hat{z}_{jp})/\hat{\sigma}_j$ . Sustituyendo las derivadas anteriores en (5-13), se sigue:

$$0 = \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\mu}_i} - 1 \right) + \sum_{j \neq i} \frac{\partial g}{\partial F_j} f_j(\hat{y}_p) \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\mu}_i}, \quad (5-14)$$

Despejando de la ecuación (5-14), se tiene que:

$$\frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\mu}_i} = \frac{\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Como  $g$  es una función estrictamente creciente, se tiene que  $\sum_{i=1}^m \partial g / \partial F_i(\hat{y}_p) f_i(\hat{y}_p) > 0$ . Teniendo presente, los resultados obtenidos en el capítulo 4, donde los intervalos propuestos por Hong y Meeker (2014), se ven afectados a medida que aumenta la dependencia, se propone incluir en el denominador, un factor que nos relaciona el parámetro de dependencia con la fragilidad. Es decir,

$$\sum_{i=1}^m \partial g / \partial F_i(\hat{y}_p) f_i(\hat{y}_p) + \hat{s}\hat{e}(\theta = \omega(\eta)).$$

Seguidamente, derivando (5-12) con respecto a  $\hat{\sigma}_i$ , se tiene

$$0 = \frac{\partial g}{\partial F_i} \frac{\partial F_i(\hat{y}_p)}{\partial \hat{\sigma}_i} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial g}{\partial F_j} \frac{\partial F_j(\hat{y}_p)}{\partial \hat{\sigma}_i} \quad (5-15)$$

En efecto, como  $F_j(\hat{y}_p) = \Phi_i(\hat{z}_{ip})$  entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i(\hat{y}_p)}{\partial \hat{\sigma}_i} &= \phi_i(\hat{z}_{ip}) \frac{\partial \hat{z}_{ip}}{\partial \hat{\sigma}_i} \\ &= \phi_i(\hat{z}_{ip}) \left( \frac{1}{\hat{\sigma}_i} \right) \left( \frac{\frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i} \hat{\sigma}_i - (\hat{y}_p - \hat{\mu}_i)}{\hat{\sigma}_i} \right) \\ &= \left( \frac{\phi_i(\hat{z}_{ip})}{\hat{\sigma}_i} \right) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i} - \hat{z}_{ip} \right) \\ &= f_i(\hat{y}_p) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i} - \hat{z}_{ip} \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_j(\hat{y}_p)}{\partial \hat{\sigma}_i} &= \phi_j(\hat{z}_{jp}) \frac{\partial \hat{z}_{jp}}{\partial \hat{\sigma}_i} \\ &= \phi_j(\hat{z}_{jp}) \left( \frac{1}{\hat{\sigma}_j} \right) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i} \right) \\ &= \left( \frac{\phi_j(\hat{z}_{jp})}{\hat{\sigma}_j} \right) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i} \right) \\ &= f_j(\hat{y}_p) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i} \right) \end{aligned}$$

Sustituyendo las anteriores derivadas en (5-15) y despejando  $\partial \hat{y}_p / \partial \hat{\sigma}_i$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i} - \hat{z}_{ip} \right) + \sum_{j \neq i} \frac{\partial g}{\partial F_j} f_j(\hat{y}_p) \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i} \\ 0 &= \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i} \right) - \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) \hat{z}_{ip} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial g}{\partial F_j} f_j(\hat{y}_p) \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) \hat{z}_{ip} = \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) \left( \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i} \right) + \sum_{j \neq i} \frac{\partial g}{\partial F_j} f_j(\hat{y}_p) \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i}$$

$$\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) \hat{z}_{ip} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_j} f_j(\hat{y}_p) \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i}$$

$$\frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{\sigma}_i} = \frac{\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) \hat{z}_{ip}}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

donde  $\partial \hat{y}_p / \partial \hat{\sigma}_i = \partial y_p / \partial \sigma_i |_{\theta = \hat{\theta}}$ .

Avanzando en nuestro razonamiento, calculamos el error estandar para  $\hat{y}_p$ . Considerando la ecuación (5-11), procedemos a encontrar  $\partial\hat{y}_p/\partial\hat{\theta}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . En efecto:

$$\frac{\partial\hat{y}_p}{\partial\hat{\theta}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\hat{y}_p}{\partial\hat{\mu}_i} \\ \frac{\partial\hat{y}_p}{\partial\hat{\sigma}_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)} \\ \frac{\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) \hat{z}_{ip}}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)} \end{bmatrix} = \frac{\frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{z}_{ip} \end{bmatrix}$$

Asumiremos la siguiente notación;

$$\hat{\theta}_i = m_i \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{z}_{ip} \end{bmatrix}$$

con  $m_i = \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) / \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p)$ ,  $r_i = \hat{\sigma}_i^2 / n_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Como  $\partial\hat{y}_p/\partial\hat{\theta}_i$  es un vector  $2 \times 1$  y  $\hat{\Sigma}_i$  es una matriz  $2 \times 2$ .

Seguidamente, sustituyendo en la ecuación (5-11), se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_i' \hat{\Sigma}_i \hat{\theta}_i &= m_i \begin{bmatrix} 1 & \hat{z}_{ip} \end{bmatrix} r_i \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{11i} & \hat{\lambda}_{12i} \\ \hat{\lambda}_{12i} & \hat{\lambda}_{22i} \end{bmatrix} m_i \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{z}_{ip} \end{bmatrix} \\ &= m_i^2 r_i \begin{bmatrix} 1 & \hat{z}_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{11i} & \hat{\lambda}_{12i} \\ \hat{\lambda}_{12i} & \hat{\lambda}_{22i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{z}_{ip} \end{bmatrix} \\ &= m_i^2 r_i \left[ \hat{\lambda}_{11i} + 2\hat{\lambda}_{12i}\hat{z}_{ip} + \hat{\lambda}_{22i}\hat{z}_{ip}^2 \right] \end{aligned}$$

Para las  $m$  componentes, se tiene:

$$\sum_{i=1}^m \hat{\theta}_i' \hat{\Sigma}_i \hat{\theta}_i = \sum_{i=1}^m m_i^2 r_i \left[ \hat{\lambda}_{11i} + 2\hat{\lambda}_{12i}\hat{z}_{ip} + \hat{\lambda}_{22i}\hat{z}_{ip}^2 \right]$$

Así,

$$\begin{aligned}
\widehat{se}_{\widehat{y}_p} &= \sqrt{\sum_{i=1}^m m_i^2 r_i \left( \widehat{\lambda}_{11i} + 2\widehat{\lambda}_{12i}\widehat{z}_{ip} + \widehat{\lambda}_{22i}\widehat{z}_{ip}^2 \right)} \\
&= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_p) \right]^2 \frac{\widehat{\sigma}_i^2}{n_i} \left( \widehat{\lambda}_{11i} + 2\widehat{\lambda}_{12i}\widehat{z}_{ip} + \widehat{\lambda}_{22i}\widehat{z}_{ip}^2 \right)}{\left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_p) \right)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_p) \right]^2 \frac{\widehat{\sigma}_i^2}{n_i} \left( \widehat{\lambda}_{11i} + 2\widehat{\lambda}_{12i}\widehat{z}_{ip} + \widehat{\lambda}_{22i}\widehat{z}_{ip}^2 \right)}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_p)}}
\end{aligned}$$

Por tanto;

$$\widehat{se}_{\widehat{y}_p} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_p) \right]^2 \frac{\widehat{\sigma}_i^2}{n_i} \left( \widehat{\lambda}_{11i} + 2\widehat{\lambda}_{12i}\widehat{z}_{ip} + \widehat{\lambda}_{22i}\widehat{z}_{ip}^2 \right)}}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_p)}. \quad (5-16)$$

La expresión modificada es:

$$\widehat{se}_{*\widehat{y}_p} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_p) \right]^2 \frac{\widehat{\sigma}_i^2}{n_i} \left( \widehat{\lambda}_{11i} + 2\widehat{\lambda}_{12i}\widehat{z}_{ip} + \widehat{\lambda}_{22i}\widehat{z}_{ip}^2 \right)}}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_p) + \widehat{se}(\theta = \omega(\eta))}. \quad (5-17)$$

Usando muestras grandes, resulta que:

$$\frac{\widehat{y}_p - y_p}{\widehat{se}_{*\widehat{y}_p}} \sim N(0, 1) \quad (5-18)$$

**Resultado 4.** Un intervalo de confianza al  $100(1 - \alpha)\%$  para  $y_p$  es:

$$[y_p, \widetilde{y}_p] = \widehat{y}_p \mp z_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_p) \right]^2 \frac{\widehat{\sigma}_i^2}{n_i} \left( \widehat{\lambda}_{11i} + 2\widehat{\lambda}_{12i}\widehat{z}_{ip} + \widehat{\lambda}_{22i}\widehat{z}_{ip}^2 \right)}}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\widehat{y}_p) + \widehat{se}(\theta = \omega(\eta))}, \quad (5-19)$$

donde  $z_{1-\alpha/2}$ , es el cuantil de la distribución normal estándar. Un IC para  $t_p$  es

$$[t_p, \widetilde{t}_p] = [\exp(y_p), \exp(\widetilde{y}_p)] \quad (5-20)$$

**Resultado 5.** *Un intervalo de confianza al  $100(1 - \alpha)\%$  para  $y_p$  propuesto es:*

$$[\underline{y}_p^*, \tilde{y}_p^*] = \hat{y}_p \mp z_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) \right]^2 \frac{\hat{\sigma}_i^2}{n_i} (\hat{\lambda}_{11i} + 2\hat{\lambda}_{12i}\hat{z}_{ip} + \hat{\lambda}_{22i}\hat{z}_{ip}^2)}}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) + \hat{s}\hat{e}(\theta = \omega(\eta))}, \quad (5-21)$$

donde  $z_{1-\alpha/2}$ , es el cuantil de la distribución normal estándar. Un IC para  $t_p$  es

$$[\underline{t}_p^*, \tilde{t}_p^*] = [\exp(\underline{y}_p^*), \exp(\tilde{y}_p^*)] \quad (5-22)$$

### Prueba

Se asumen que  $n_1, n_2, \dots, n_m$  tienen el mismo orden y cada uno de los  $r_i/n_i$  se mantienen constantes, donde  $r_i$  es el número de fallas o el número esperado de fallas para el  $i$ -ésimo componente. Para demostrar que el procedimiento para los intervalos de confianza es asintóticamente válido, se debe inicialmente calcular la probabilidad de cobertura real (TCP) para dichos intervalos. En efecto:

$$\begin{aligned} \text{TCP} &= \Pr \left\{ \hat{F} [\exp(y_e)] \leq F(t_e) \leq \hat{F} [\exp(\tilde{y}_e)] \right\} \\ &= \Pr \left\{ F(t_e) \leq \hat{F} [\exp(\tilde{y}_e)] \right\} - \Pr \left\{ F(t_e) \leq \hat{F} [\exp(y_e)] \right\} \\ &\rightarrow 1 - \alpha \text{ cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\text{Sea } \Delta_1 = \frac{\partial \hat{F} [\exp(y_e)]}{\partial y_e} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(y_e), \Delta_1^* = \Delta_1 + \hat{s}\hat{e}(\theta) \text{ y}$$

$$\Delta_2 = \hat{s}\hat{e}_{\hat{p}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial g}{\partial F_i} f_i(\hat{y}_p) \right]^2 \frac{\hat{\sigma}_i^2}{n_i} (\hat{\lambda}_{11i} + 2\hat{\lambda}_{12i}\hat{z}_{ip} + \hat{\lambda}_{22i}\hat{z}_{ip}^2)}$$

donde  $\Delta_2$  es  $o_p(1)$  (es decir,  $\Delta_2$  puede ser lo suficientemente pequeño, cuando el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande). Entonces,  $\tilde{y}_e = y_e + z_{1-\alpha/2}\Delta_2/\Delta_1^*$ . Considerando la expansión en series de Taylor de  $\hat{F} [\exp(\tilde{y}_e)]$  al rededor de  $y_e$ .

$$\begin{aligned} \hat{F} [\exp(\tilde{y}_e)] &= \hat{F} [\exp(y_e)] + \frac{\partial \hat{F} [\exp(y_e)]}{\partial y_e} z_{1-\alpha/2} \frac{\Delta_2}{\Delta_1^*} \\ &\quad + \frac{\partial^2 \hat{F} [\exp(y_e)]}{\partial y_e^2} (\xi_{1e}) \left( z_{1-\alpha/2} \frac{\Delta_2}{\Delta_1^*} \right) \\ &= \hat{F}(t_e) + z_{1-\alpha/2}\Delta_2 + D_1\Delta_2 \end{aligned}$$

Así;

$$\hat{F} [\exp(\tilde{y}_e)] = \hat{F}(t_e) + z_{1-\alpha/2}\Delta_2 + D_1\Delta_2 \quad (5-23)$$

donde  $\xi_{ie}$  esta entre  $y_e$  y  $y_e + z_{1-\alpha/2}\Delta_2/\Delta_1^*$ .

$$D_1 = \frac{\partial^2 \hat{F} [\exp(y_e)]}{\partial y_e^2} (\xi_{1e}) \left( z_{1-\alpha/2} \frac{\Delta_2}{\Delta_1^*} \right)$$

Similarmente, considere la expansión en series de Taylor de  $\widehat{F}[\exp(\underline{y}_e)]$  en  $y_e$ .

$$\widehat{F}[\exp(\underline{y}_e)] = \widehat{t}_e - z_{1-\alpha/2}\Delta_2 + D_2\Delta_2 \quad (5-24)$$

donde

$$D_2 = \frac{\partial^2 \widehat{F}[\exp(y_e)]}{\partial y_e^2}(\xi_{2e}) \left( z_{1-\alpha/2} \frac{\Delta_2}{\Delta_1^*} \right)$$

y  $\xi_{2e}$  está entre  $y_e - z_{1-\alpha/2}\Delta_2/\Delta_1^*$  y  $y_e$ .

Por (5-23) se sigue:

$$\begin{aligned} \Pr \left\{ F(t_e) \leq \widehat{F}[\exp(\underline{y}_e)] \right\} &= \Pr \left[ F(t_e) \leq \widehat{F}(t_e) + z_{1-\alpha/2}\Delta_2 + D_1\Delta_2 \right] \\ &= \Pr \left[ \frac{F(t_e) - \widehat{F}(t_e)}{\Delta_2} \leq z_{1-\alpha/2} + D_1 \right] \\ &= \Pr \left[ \frac{F(t_e) - \widehat{F}(t_e)}{\widehat{se}(\widehat{p})} - D_1 \leq z_{1-\alpha/2} \right] \end{aligned}$$

Además, por (5-24), se tiene:

$$\begin{aligned} \Pr \left\{ F(t_e) \leq \widehat{F}[\exp(\underline{y}_e)] \right\} &= \Pr \left[ F(t_e) \leq \widehat{F}(t_e) - z_{1-\alpha/2}\Delta_2 + D_2\Delta_2 \right] \\ &= \Pr \left[ \frac{F(t_e) - \widehat{F}(t_e)}{\Delta_2} \leq -z_{1-\alpha/2} + D_2 \right] \\ &= \Pr \left[ \frac{F(t_e) - \widehat{F}(t_e)}{\widehat{se}(\widehat{p})} - D_2 \leq -z_{1-\alpha/2} \right] \end{aligned}$$

Suponiendo que  $\partial^2 g/\partial F_i^2$  y  $\partial f_i/\partial y_e$  están acotados en una vecindad de  $y_e$  (condiciones que satisfacen la gran mayoría de las funciones estructuras  $g$  y la distribución de tiempos de vida de las componentes).

Como  $D_1$  y  $D_2$  son  $o_p(1)$ , entonces se tiene que:

$$\frac{F(t_e) - \widehat{F}(t_e)}{\widehat{se}(\widehat{p})} \xrightarrow{d} N(0, 1) \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (5-25)$$

Finalmente, como  $D_1$  y  $D_2$  son  $o_p(1)$  y haciendo uso del teorema de Slutsky, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{TCP} &= \Pr \left[ \frac{F(t_e) - \widehat{F}(t_e)}{\widehat{se}(\widehat{p})} - D_1 \leq z_{1-\alpha/2} \right] - \Pr \left[ \frac{F(t_e) - \widehat{F}(t_e)}{\widehat{se}(\widehat{p})} - D_2 \leq -z_{1-\alpha/2} \right] \\ &\rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha \text{ cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Por lo anterior, se demostró que para muestras grandes, el procedimiento de intervalos de confianza tiene una probabilidad de cobertura aproximada de  $1 - \alpha$ .

### 5.3. Escenarios de simulación y resultados

En esta sección, se presenta el mismo escenario de simulación propuesto en el capítulo 4, para el caso de un sistema en serie, con tiempos de vida distribuidos Weibull, adicionándole la componente de fragilidad, la cual nos lleva a una dependencia condicionada por el parámetro de fragilidad. Es de resaltar que cuando el parámetro de fragilidad es ( $z = 1$ ), se reproduce el modelo bivariado con componentes Weibull, estudiado en el capítulo anterior, el objetivo era evaluar si al incluir el parámetro de fragilidad en la construcción de los intervalos, para la confiabilidad del sistema, se evidenciaba alguna mejoría al momento de estimar las probabilidades de cobertura y compararlas con las nominales.

En las tablas (5-1), (5-2) y (5-3), se evidencia que a medida que aumenta el parámetro de dependencia, las probabilidades de cobertura son menores para los intervalos propuestos por Hong y Meeker (2014). A su vez los intervalos bajo una transformación *logit* presentan el mismo comportamiento, pero para el caso de nuestra propuesta de intervalos corregidos ( $y_e^*$ ), los cuales incluyen el parámetro de la cópula en la estructura de correlación de la matriz de varianzas y covarianzas del modelo propuesto, y para tamaños de muestra pequeños ( $n = 50$ ), la mejora es evidente, puesto que las estimaciones de las probabilidades de cobertura son un poco menor, aunque para la propuesta se puede observar que para todos los tamaños muestrales, las probabilidades de cobertura son más cercanas a la cobertura nominal.

En las tablas (5-4), (5-5) y (5-6), se presentan los resultados donde se mantienen los mismos parámetros de la distribución, pero se aumenta el porcentaje de censura en las muestras. Para este caso se evidencia el mismo comportamiento en las estimaciones de las probabilidades de cobertura, las cuales para tamaños de muestra pequeño se muestran un poco alejados de la cobertura nominal, pero a medida que se aumenta el tamaño de muestra, se acercan al valor de la cobertura nominal. Es de resaltar que en estos escenarios, también afecta un poco las estimaciones de las probabilidades a medida que se va aumentando el nivel de dependencia.

Adicionalmente, en este trabajo se aborda el aspecto del porcentaje de censuras, los resultados son satisfactorios hasta un 25 % de datos censurados, dado que como se trabaja con tiempos de vida dependientes entre las componentes del sistema, y este aspecto se trabaja vía modelos cópulas, en algunos casos se puede estar incurriendo en un problema de identificabilidad, lo anterior se corrobora con los resultados mostrados en las tablas (5-7), (5-8) y (5-9). A su vez, se controló que las fallas presentadas en cada uno de los componentes fueran balanceadas, para que la estimación de la confiabilidad del sistema no se vea dominada por cualquiera de las dos componentes.

**Tabla 5-1:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau_\theta^{1Z} = 0.25(\theta = 0.33)$  y porcentajes de censura 0 %.

$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit	$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit
50	0.05	0.943	0.943	0.950	0.942	100	0.05	0.945	0.946	0.950	0.944
	0.25	0.944	0.945	0.950	0.942		0.25	0.947	0.947	0.950	0.946
	0.50	0.945	0.945	0.950	0.943		0.50	0.949	0.949	0.950	0.946
	0.75	0.948	0.949	0.950	0.945		0.75	0.950	0.950	0.950	0.947
	0.95	0.947	0.949	0.950	0.946		0.95	0.949	0.949	0.950	0.948
500	0.05	0.948	0.948	0.950	0.947	1000	0.05	0.949	0.949	0.950	0.948
	0.25	0.948	0.949	0.950	0.946		0.25	0.949	0.950	0.950	0.950
	0.50	0.949	0.949	0.950	0.948		0.50	0.950	0.950	0.950	0.949
	0.75	0.949	0.950	0.950	0.948		0.75	0.950	0.949	0.950	0.950
	0.95	0.949	0.950	0.950	0.950		0.95	0.949	0.949	0.950	0.949

**Tabla 5-2:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau_\theta^{1Z} = 0.50(\theta = 1)$  y porcentajes de censura 0 %.

$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit	$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit
50	0.05	0.932	0.945	0.950	0.933	100	0.05	0.936	0.946	0.950	0.943
	0.25	0.930	0.945	0.950	0.936		0.25	0.940	0.946	0.950	0.940
	0.50	0.940	0.946	0.950	0.942		0.50	0.946	0.948	0.950	0.945
	0.75	0.944	0.946	0.950	0.946		0.75	0.948	0.948	0.950	0.947
	0.95	0.947	0.948	0.950	0.947		0.95	0.949	0.949	0.950	0.948
500	0.05	0.947	0.948	0.950	0.946	1000	0.05	0.949	0.949	0.950	0.948
	0.25	0.948	0.948	0.950	0.946		0.25	0.949	0.949	0.950	0.947
	0.50	0.948	0.949	0.950	0.947		0.50	0.950	0.950	0.950	0.949
	0.75	0.949	0.950	0.950	0.948		0.75	0.950	0.950	0.950	0.950
	0.95	0.950	0.950	0.950	0.948		0.95	0.950	0.949	0.950	0.950

**Tabla 5-3:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau_\theta^{|Z} = 0.75(\theta = 3)$  y porcentajes de censura 0 %.

$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit	$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit
50	0.05	0.930	0.944	0.950	0.928	100	0.05	0.935	0.946	0.950	0.940
	0.25	0.929	0.945	0.950	0.929		0.25	0.939	0.946	0.950	0.940
	0.50	0.935	0.945	0.950	0.937		0.50	0.940	0.947	0.950	0.942
	0.75	0.936	0.946	0.950	0.940		0.75	0.940	0.947	0.950	0.937
	0.95	0.940	0.947	0.950	0.940		0.95	0.942	0.948	0.950	0.938
500	0.05	0.947	0.948	0.950	0.946	1000	0.05	0.948	0.949	0.950	0.946
	0.25	0.947	0.948	0.950	0.945		0.25	0.948	0.949	0.950	0.947
	0.50	0.945	0.950	0.950	0.945		0.50	0.949	0.949	0.950	0.946
	0.75	0.947	0.950	0.950	0.948		0.75	0.949	0.949	0.950	0.946
	0.95	0.949	0.949	0.950	0.945		0.95	0.948	0.949	0.950	0.947

**Tabla 5-4:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau_\theta^{|Z} = 0.25(\theta = 0.33)$  y porcentajes de censura 10 %.

$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit	$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit
50	0.05	0.945	0.945	0.950	0.939	100	0.05	0.945	0.945	0.950	0.943
	0.25	0.942	0.947	0.950	0.939		0.25	0.945	0.945	0.950	0.943
	0.50	0.941	0.946	0.950	0.945		0.50	0.947	0.946	0.950	0.944
	0.75	0.944	0.946	0.950	0.947		0.75	0.948	0.947	0.950	0.947
	0.95	0.946	0.949	0.950	0.948		0.95	0.947	0.949	0.950	0.945
500	0.05	0.945	0.947	0.950	0.945	1000	0.05	0.948	0.948	0.950	0.949
	0.25	0.945	0.947	0.950	0.945		0.25	0.948	0.949	0.950	0.949
	0.50	0.946	0.949	0.950	0.946		0.50	0.949	0.950	0.950	0.949
	0.75	0.947	0.949	0.950	0.947		0.75	0.950	0.950	0.950	0.949
	0.95	0.948	0.950	0.950	0.947		0.95	0.950	0.950	0.950	0.950

**Tabla 5-5:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau_\theta^{1Z} = 0.50(\theta = 1)$  y porcentajes de censura 10 %.

$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit	$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit
50	0.05	0.940	0.943	0.950	0.941	100	0.05	0.945	0.945	0.950	0.945
	0.25	0.941	0.946	0.950	0.941		0.25	0.945	0.948	0.950	0.944
	0.50	0.942	0.944	0.950	0.944		0.50	0.943	0.948	0.950	0.945
	0.75	0.941	0.943	0.950	0.943		0.75	0.942	0.947	0.950	0.946
	0.95	0.945	0.947	0.950	0.944		0.95	0.944	0.947	0.950	0.947
500	0.05	0.940	0.946	0.950	0.946	1000	0.05	0.948	0.949	0.950	0.947
	0.25	0.947	0.947	0.950	0.950		0.25	0.947	0.948	0.950	0.949
	0.50	0.948	0.946	0.950	0.948		0.50	0.948	0.950	0.950	0.948
	0.75	0.947	0.950	0.950	0.947		0.75	0.948	0.950	0.950	0.950
	0.95	0.948	0.949	0.950	0.948		0.95	0.949	0.949	0.950	0.950

**Tabla 5-6:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau_\theta^{1Z} = 0.75(\theta = 3)$  y porcentajes de censura 10 %.

$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit	$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit
50	0.05	0.935	0.935	0.950	0.932	100	0.05	0.942	0.941	0.950	0.945
	0.25	0.935	0.936	0.950	0.932		0.25	0.941	0.942	0.950	0.940
	0.50	0.938	0.939	0.950	0.938		0.50	0.943	0.945	0.950	0.939
	0.75	0.937	0.940	0.950	0.940		0.75	0.940	0.941	0.950	0.940
	0.95	0.936	0.936	0.950	0.939		0.95	0.941	0.940	0.950	0.939
500	0.05	0.940	0.940	0.950	0.940	1000	0.05	0.946	0.948	0.950	0.948
	0.25	0.942	0.941	0.950	0.940		0.25	0.947	0.949	0.950	0.948
	0.50	0.939	0.943	0.950	0.940		0.50	0.946	0.948	0.950	0.950
	0.75	0.943	0.945	0.950	0.945		0.75	0.945	0.949	0.950	0.947
	0.95	0.945	0.945	0.950	0.943		0.95	0.948	0.950	0.950	0.948

**Tabla 5-7:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau_\theta^Z = 0.25(\theta = 0.33)$  y porcentajes de censura 25 %.

$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit	$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit
50	0.05	0.932	0.938	0.950	0.933	100	0.05	0.940	0.940	0.950	0.940
	0.25	0.934	0.940	0.950	0.934		0.25	0.940	0.939	0.950	0.939
	0.50	0.935	0.940	0.950	0.935		0.50	0.939	0.940	0.950	0.940
	0.75	0.936	0.937	0.950	0.936		0.75	0.939	0.940	0.950	0.941
	0.95	0.935	0.939	0.950	0.940		0.95	0.936	0.939	0.950	0.940
500	0.05	0.942	0.945	0.950	0.945	1000	0.05	0.945	0.948	0.950	0.947
	0.25	0.942	0.945	0.950	0.944		0.25	0.945	0.945	0.950	0.948
	0.50	0.942	0.945	0.950	0.944		0.50	0.946	0.945	0.950	0.948
	0.75	0.940	0.944	0.950	0.944		0.75	0.946	0.949	0.950	0.947
	0.95	0.944	0.947	0.950	0.945		0.95	0.947	0.948	0.950	0.949

**Tabla 5-8:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau_\theta^Z = 0.50(\theta = 1)$  y porcentajes de censura 25 %.

$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit	$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit
50	0.05	0.932	0.935	0.950	0.940	100	0.05	0.943	0.942	0.950	0.942
	0.25	0.932	0.932	0.950	0.938		0.25	0.943	0.944	0.950	0.944
	0.50	0.932	0.933	0.950	0.940		0.50	0.942	0.944	0.950	0.942
	0.75	0.930	0.932	0.950	0.941		0.75	0.942	0.945	0.950	0.944
	0.95	0.930	0.934	0.950	0.940		0.95	0.943	0.945	0.950	0.945
500	0.05	0.941	0.945	0.950	0.946	1000	0.05	0.947	0.948	0.950	0.946
	0.25	0.945	0.947	0.950	0.948		0.25	0.946	0.948	0.950	0.947
	0.50	0.946	0.946	0.950	0.948		0.50	0.947	0.948	0.950	0.948
	0.75	0.945	0.948	0.950	0.948		0.75	0.946	0.948	0.950	0.948
	0.95	0.945	0.947	0.950	0.949		0.95	0.947	0.949	0.950	0.948

**Tabla 5-9:** Estimación de la probabilidad de cobertura nominal del 95 % para los procedimientos de intervalos de confianza para un sistema en serie con componentes dependientes Weibull; porcentaje de falla; componente 1 (50 %), componente 2 (50 %),  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 3$ ,  $\tau_\theta^{|Z} = 0.75(\theta = 3)$  y porcentajes de censura 25 %.

$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit	$n$	$p$	$y_e$	$y_e^*$	Mv	Logit
50	0.05	0.931	0.932	0.950	0.934	100	0.05	0.936	0.938	0.950	0.939
	0.25	0.930	0.934	0.950	0.933		0.25	0.935	0.937	0.950	0.938
	0.50	0.931	0.935	0.950	0.934		0.50	0.936	0.938	0.950	0.938
	0.75	0.932	0.939	0.950	0.940		0.75	0.937	0.939	0.950	0.940
	0.95	0.935	0.938	0.950	0.938		0.95	0.940	0.940	0.950	0.938
500	0.05	0.941	0.942	0.950	0.941	1000	0.05	0.945	0.947	0.950	0.946
	0.25	0.941	0.940	0.950	0.941		0.25	0.948	0.948	0.950	0.947
	0.50	0.938	0.942	0.950	0.941		0.50	0.944	0.949	0.950	0.949
	0.75	0.942	0.946	0.950	0.944		0.75	0.948	0.946	0.950	0.946
	0.95	0.944	0.944	0.950	0.945		0.95	0.949	0.949	0.950	0.947

# 6 Conclusiones y trabajo futuro

## 6.1. Conclusiones

Del estudio realizado se obtienen las siguientes conclusiones:

Se presentan intervalos de confianza para la confiabilidad de cuatro modelos con tiempos de falla dependientes; sistema en serie Exponencial-Exponencial, Weibull-Weibull, modelos bivariados Marshall-Olkin Exponencial y modelo bivariado Marshall-Olkin Weibull. Para estos casos se compararon los intervalos propuestos por Hong y Meeker (2014), intervalos de confianza bajo verosimilitud e intervalos de confianza bajo una transformación *logit*, al incluir la dependencia se evidencia un efecto en las estimaciones de las probabilidades de cobertura, para tamaños de muestra pequeños y a medida que se aumenta el tamaño de muestra se cumplen las propiedades asintóticas de los intervalos bajo los tres métodos, al igual que nuestra propuesta, se cumplen. Adicionalmente, se adapta toda la temática trabajada a los modelos Marshall-Olkin, su desempeño es relativamente bueno y puede ser de gran ayuda en el campo de las ingenierías. En nuestro contexto fue de gran valor, dado que ahora podemos abordar un problema de riesgos competitivos, donde el tiempo mínimo de fallo, puede darse en ambos componentes y se trabaja como una componente singular del modelo planteado. Algo más que añadir, es que el caso bajo independencia entre los tiempos de vida de las componentes, es un caso particular en nuestra investigación bajo los cuatro modelos estudiados. Es importante dejar claro que para los sistemas en serie con marginales Exponencial y Weibull, se les introdujo porcentajes de censura 0% (datos completos), 10% y 25%, en este contexto, se puede notar que la censura afecta el modelo en general y a su vez las probabilidades de cobertura de dichos intervalos, la cual no es alcanzada, inclusive para tamaños de muestra de 1000. Para el caso de los modelos bivariados Marshall-Olkin, sólo se presentan escenarios para datos completos (0%).

Se propone una adaptación para los intervalos de confianza para la confiabilidad del sistema bajo el supuesto de dependencia entre los tiempos de fallo, propuesto por Hong y Meeker (2014). Este fue posible, luego de introducir una componente de fragilidad, la cual tiene en cuenta la variabilidad entre los tiempos de fallo y el parámetro de dependencia entre los tiempos de vida de las componentes del sistema con marginales Weibull. En los resultados de nuestra propuesta se evidencia, que, al incluir la corrección, se nota que a medida que va aumentando la dependencia entre los tiempos de falla, se ve afectada la estimación de las probabilidades de cobertura nominal de dichos intervalos.

Adicionalmente, se evidencia que a medida que aumenta el parámetro de dependencia, las probabilidades de cobertura son menores para los intervalos propuestos por Hong y Meeker (2014).

A su vez los intervalos bajo una transformación *logit* presentan el mismo comportamiento, pero para el caso de nuestra propuesta de intervalos corregidos ( $y_e^*$ ), los cuales incluyen el parámetro de la cópula en la estructura de correlación de la matriz de varianzas y covarianzas del modelo propuesto, y para tamaños de muestra pequeños ( $n = 50$ ), la mejora es evidente, puesto que las estimaciones de las probabilidades de cobertura son un poco menor, aunque para la propuesta se puede observar que para todos los tamaños muestrales, las probabilidades de cobertura son más cercanas a la cobertura nominal.

Para tener claro que la dependencia es crucial, se trabajaron datos completos, de tal manera que al momento de tener censuras no se pudiera identificar cual era la fuente que estaría afectando, el no alcanzar las probabilidades de cobertura nominal. Para poder definir concretamente los escenarios objetivos de esta investigación, se realiza previamente un estudio para poder escoger los valores de los parámetros del modelo Weibull, teniendo presente el comportamiento de la función *hazard* de dicha distribución, en nuestro grupo de investigación en Estadística Industrial de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, se han trabajado ampliamente este tipo de problemas y en este estudio tomamos algunas de esas experiencias de trabajos previos.

Para el tema de la dependencia de los tiempos de vida de las componentes del sistema, se trabajó mediante el enfoque de una cópula Gumbel, la cual fue escogida por que se deseaba trabajar con dependencias positivas, las cuales debían estar en el cuadrante positivo. También, se chequearon los resultados bajo una cópula Clayton y los resultados fueron similares, pero siempre tomando valores para el parámetro de la cópula positivos. En realidad, una cópula de la familia Arquimediana podría funcionar, pero se debe tener presente el problema de identificabilidad, el cual puede surgir en altas dimensiones.

## 6.2. Trabajo futuro

En nuestra propuesta, sólo se trabajó bajo censura a derecha, podría ser de interés trabajar bajo el caso de censura a intervalo, lo cual le daría una amplia gama de aplicaciones, donde el objetivo sea medir el evento de interés en un intervalo de tiempo cualquiera, o extender todo al caso que sea una censura aleatoria. Adicionalmente, sería interesante ver el problema bajo el enfoque bayesiano; proponer distribuciones a priori para los parámetros del modelo o proponer intervalos bayesianos para los parámetros, y poder reproducir intervalos de credibilidad para la confiabilidad del sistema. Otro aspecto que puede ser de interés, puede ser usar enfoques con cópulas discretas, dependiendo el problema que se quiera trabajar.

# Referencias

- Aalen, O., Borgan, O., y Gjessing, H. (2008). *Survival and Event History Analysis: A Process Point of View*. Springer Science & Business Media.
- Aven, T., y Jensen, U. (2013). *Stochastic Models in Reliability*. Springer.
- Barlow, R., y Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*. John Wiley & Sons.
- Barlow, R., y Proschan, F. (1981). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. To Begin With.
- Belaghi, R. A., y Asl, M. N. (2019). Estimation based on progressively type-I hybrid censored data from the Burr XII distribution. *Statistical Papers*, 60, 761–803.
- Bemis, B. M., Bain, L. J., y Higgins, J. J. (1972). Estimation and hypothesis testing for the parameters of a bivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 67, 927–929.
- Bru, O. E. C., y Jaramillo, M. C. E. (2019). Uso del método “Combinación de Riesgos” para estimar la función de supervivencia en presencia de riesgos competitivos dependientes: Un estudio de simulación. *Ciencia en Desarrollo*, 10, 67–77.
- Burr, I. W. (1942). Cumulative frequency functions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 13, 215–232.
- Carrière, J. F. (1995). Removing cancer when it is correlated with other causes of death. *Biometrical Journal*, 37, 339–350.
- Chan, V., y Meeker, W. Q. (1999). A failure-time model for infant-mortality and wearout failure modes. *IEEE Transactions on Reliability*, 48, 377–387.
- Crowder, M. J. (2001). *Classical Competing Risks*. New York: Chapman & Hall/CRC.
- Crowder, M. J. (2011). *Multivariate Survival Analysis and Competing Risks*. New York: Chapman & Hall/CRC.
- David, H. A., y Moeschberger, M. L. (1978). *The Theory of Competing Risks*. C. Griffin.
- Duchateau, L., y Janssen, P. (2007). *The Frailty Model*. Springer Science & Business Media.
- Emura, T., Nakatochi, M., Murotani, K., y Rondeau, V. (2017). A joint frailty-copula model between tumour progression and death for meta-analysis. *Statistical Methods in Medical Research*, 26, 2649–2666.
- Epstein, B. (1958). *The Exponential Distribution and its Role in Life Testing*. Wayne State University Detroit MI.
- Esary, J. D. (1957). *A Stochastic Theory of Accident Survival and Fatality*. University of California, Berkeley.

- Escarela, G., y Carriere, J. (2003). Fitting competing risks with an assumed copula. *Statistical Methods in Medical Research*, 12, 33–349.
- Escobar, L. A., Villa, E. R., y Yañez, S. (2003). Confiabilidad: Historia, estado del arte y desafíos futuros. *Dyna*, 70, 5–21.
- Feizjavadian, S., y Hashemi, R. (2015). Analysis of dependent competing risks in the presence of progressive hybrid censoring using Marshall–Olkin bivariate Weibull distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, 82, 19–34.
- Fréchet, M. (1960). Sur les tableaux dont les marges et des bornes sont données. *Revue de l'Institut International de Statistique*, 10–32.
- Gandy, A. (2005). Effects of uncertainties in components on the survival of complex systems with given dependencies. *Modern Statistical and Mathematical Methods in Reliability*. World Scientific, New Jersey, 177–189.
- Gaver, D. (1963). Random hazard in reliability problems. *Technometrics*, 5, 211–226.
- Gumbel, E. J. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 55, 698–707.
- Hong, Y. (2013). On computing the distribution function for the Poisson binomial distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, 59, 41–51.
- Hong, Y., y Meeker, W. Q. (2014). Confidence interval procedures for system reliability and applications to competing risks models. *Lifetime Data Analysis*, 20, 161–184.
- Hong, Y., Meeker, W. Q., y Escobar, L. A. (2008). Avoiding problems with normal approximation confidence intervals for probabilities. *Technometrics*, 50, 64–68.
- Hougaard, P. (2012). *Analysis of Multivariate Survival Data*. Springer Science & Business Media.
- Ibrahim, J. G., Chen, M.-H., y Sinha, D. (2014). Bayesian Survival Analysis. *John Wiley & Sons: Statistics Reference Online*.
- Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Multivariate Dependence Concepts*. CRC Press.
- Kotz, S., Balakrishnan, N., y Johnson, N. L. (2004). *Continuous Multivariate Distributions, Volume 1: Models and Applications*. John Wiley & Sons.
- Kundu, D. (2007). On hybrid censored Weibull distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137, 2127–2142.
- Kundu, D., y Basu, S. (2000). Analysis of incomplete data in presence of competing risks. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 87, 221–239.
- Kundu, D., y Dey, A. K. (2009). Estimating the parameters of the Marshall–Olkin bivariate Weibull distribution by EM algorithm. *Computational Statistics & Data Analysis*, 53, 956–965.
- Lai, C.-D., Dong Lin, G., Govindaraju, K., y Pirikahu, S. (2017). A simulation study on the correlation structure of Marshall–Olkin bivariate Weibull distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 87, 156–170.
- Lawless, J. F. (2003). Statistics in reliability. *Journal of the American Statistical Association*, 95, 989–992.

- Lawless, J. F. (2011). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley & Sons - Interscience.
- Lehmann, E., y Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation, Second Edition*. Springer.
- Li, H. (2008). Tail dependence comparison of survival Marshall–Olkin copulas. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 10, 39–54.
- Li, X., y Pellerey, F. (2011). Generalized Marshall–Olkin distributions and related bivariate aging properties. *Journal of Multivariate Analysis*, 102, 1399–1409.
- Lin, H., y Zelterman, D. (2002). *Modeling Survival Data: Extending the Cox Model*. Taylor & Francis.
- Liu, X. (2012). Planning of accelerated life tests with dependent failure modes based on a gamma frailty model. *Technometrics*, 54, 398–409.
- Lu, J.-C., y Bhattacharyya, G. K. (1990). Some new constructions of bivariate Weibull models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 42, 543–559.
- Marshall, A. W., y Olkin, I. (1967a). A generalized bivariate exponential distribution. *Journal of Applied Probability*, 4, 291–302.
- Marshall, A. W., y Olkin, I. (1967b). A multivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 62, 30–44.
- McNeil, A. J., Frey, R., y Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools-Revised Edition*. Princeton University Press.
- Meecker, W. Q., y Escobar, L. A. (1998). *Statistical Methods for Reliability Data*. New York: John Wiley & Sons.
- Meecker, W. Q., Hahn, G. J., y Escobar, L. A. (2017). *Statistical Intervals: A Guide for Practitioners and Researchers*. John Wiley & Sons.
- Mirhosseini, S. M., Amini, M., Kundu, D., y Dolati, A. (2015). On a new absolutely continuous bivariate generalized exponential distribution. *Statistical Methods & Applications*, 24, 61–83.
- Miyawaka, M. (1982). Statistical analysis of incomplete data in competing risks model. *J. Japanese Society. Quantity Control*, 12, 49–52.
- Miyawaka, M. (1984). Analysis of incomplete data in competing risks model. *IEEE Transactions on Reliability*, 33, 293–296.
- Mokhtari, E. B., Rad, A. H., y Yousefzadeh, F. (2011). Inference for Weibull distribution based on progressively type-II hybrid censored data. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141, 2824–2838.
- Morgenstern, D. (1956). Einfache beispiele zweidimensionaler verteilungen. *Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik*, 8, 234–235.
- Muliere, P., y Scarsini, M. (1987). Characterization of a Marshall–Olkin type class of distributions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 39, 429–441.
- Müller, A., y Stoyan, D. (2002). *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. John Wiley & Sons.
- Murthy, D. P., Xie, M., y Jiang, R. (2004). *Weibull Models*. John Wiley & Sons.

- Navarro, J., y Durante, F. (2017). Copula-based representations for the reliability of the residual lifetimes of coherent systems with dependent components. *Journal of Multivariate Analysis*, 158, 87–102.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer.
- Ota, S., y Kimura, M. (2017). A statistical dependent failure detection method for n-component parallel systems. *Reliability Engineering & System Safety*, 167, 376–382.
- Pareek, B., Kundu, D., y Kumar, S. (2009). On progressively censored competing risks data for Weibull distributions. *Computational Statistics & Data Analysis*, 53, 4083–4094.
- Pascual, F. G., y Gast, C. (2010). Probability plotting with independent competing risks. En *Advances in Degradation Modeling* (pp. 397–414.). Springer.
- Pawitan, Y. (2001). *In All Likelihood: Statistical Modelling and Inference Using Likelihood*. Oxford University Press.
- Paz-Sabogal, M. C., Yáñez-Canal, S., y Lopera-Gómez, C. M. (2014). Comparative study of the dependence effect on competing risks models with three modes of failure via estimators copula based. *Ingeniería y Competitividad*, 16, 169–183.
- Pintilie, M. (2006). *Competing Risks: A Practical Perspective*. John Wiley & Sons.
- Plackett, R. L. (1965). A class of bivariate distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 60, 516–522.
- R Core Team. (2020). R: A Language and Environment for Statistical Computing [Manual de software informático]. Vienna, Austria. Descargado de <https://www.R-project.org/>
- Singpurwalla, N. D. (2006). *Reliability and Risk: A Bayesian Perspective*. John Wiley & Sons.
- Tableman, M., y Kim, J. S. (2003). *Survival Analysis Using S: Analysis of Time-to-Event Data*. CRC press.
- Tsiatis, A. (1975). A nonidentifiability aspect of the problem of competing risks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 72, 20–22.
- Vallejos, C. A., y Steel, M. F. (2017). Incorporating unobserved heterogeneity in Weibull survival models: A Bayesian approach. *Econometrics and Statistics*, 3, 73–88.
- Wang, Y.-C., Emura, T., Fan, T.-H., Lo, S. M., y Wilke, R. A. (2020). Likelihood-based inference for a frailty-copula model based on competing risks failure time data. *Quality and Reliability Engineering International*, 36, 1622–1638.
- Watkins, A. J. (1999). An algorithm for maximum likelihood estimation in the three parameter Burr XII distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, 32, 19–27.
- Wienke, A. (2010). *Frailty Models in Survival Analysis*. CRC press.
- Wu, M., Shi, Y., y Zhang, C. (2017). Statistical analysis of dependent competing risks model in accelerated life testing under progressively hybrid censoring using copula function. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46, 4004–4017.
- Yáñez, S., Brango, H., Jaramillo, M. C., y Lopera, C. M. (2011). Comparación entre riesgos competitivos vía el estimador cópula-gráfico. *Revista Colombiana de Estadística*, 34,

231–248.

- Yáñez, S., Escobar, L. A., y González, N. (2014). Characteristics of two competing risks models with Weibull distributed risks. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 38, 298–311.
- Zheng, M., y Klein, J. P. (1995). Estimates of marginal survival for dependent competing risks based on an assumed copula. *Biometrika*, 82, 127–138.