



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Método para la estimación de estado en procesos de molienda de minerales con molino semiautógeno

Carlos César Cortés Calle

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Minas
Departamento de Energía Eléctrica y Automática
Medellín, Colombia
2022

Método para la estimación de estado en procesos de molienda de minerales con molino semiautógeno

Carlos César Cortés Calle

Trabajo Final de Maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magíster En Ingeniería - Automatización Industrial

Director:
Ph.D. Héctor Antonio Botero Castro

Línea de Investigación:
Estimación de estado

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Minas
Departamento de Energía Eléctrica y Automática
Medellín, Colombia
2022

Lema

“Lo bueno de la ciencia es que es cierta independientemente de si crees o no en ella.”

Neil deGrasse Tyson.

Agradecimientos

Principalmente deseo agradecer a Dios, por permitirme seguir disfrutando de mi familia en estos momentos de pandemia. A mi padre Alfredo Rafael Cortés Calle, mi madre Ada Luz Calle Ruiz y a mi hermana María Carla Cortés Calle por su apoyo constante e incondicional.

Así mismo agradezco a mis compañeros de estudio y en especial a Andrés López Valencia, que en más de una ocasión hizo sus aportes a este logro. Igualmente mi agradecimiento infinito al profesor Héctor Antonio Botero Castro, quien me motivo en todo momento a continuar y sacar adelante este proyecto.

Finalmente agradezco a aquellas personas que fueron importantes para mí y al día de hoy ya no se encuentran, este logro también es posible por ellas.

Resumen

Método para la estimación de estado en procesos de molienda de minerales con molino semiautógeno

La implementación de controladores avanzados en procesos de molienda de minerales que permitan la optimización, por ejemplo la minimización en el consumo de agua, requiere la medición completa del estado. Sin embargo, esto es en muchos casos imposible debido a la no disponibilidad de sensores para ello. Por lo tanto, en este trabajo se diseñó un estimador de estado tipo filtro de Kalman, para el proceso de molienda de minerales conocido como molino semiautógeno (SAG). Para lograr lo anterior, se obtuvo un modelo semifísico de base fenomenológica del proceso de molienda, se probó la observabilidad no lineal del mismo, se discretizó el modelo, se diseñó el estimador de estado tipo filtro de Kalman extendido, se simuló su comportamiento ante perturbaciones y se verificó el correcto funcionamiento del estimador. Finalmente, se explicaron las condiciones necesarias para la implementación real del estimador y se presentaron esquemas para mejorar el desempeño en una planta industrial.

Palabras clave: Conminución, Filtro de Kalman Extendido, Molienda, Observabilidad, Control de rocesos, Estimación de estados y parámetros.

Abstract

Method for state estimation in mineral grinding processes with a semiautogenous mill

Implementing advanced controllers in mineral grinding processes that optimize the process, such as minimizing water consumption, requires the complete measurement of the states. However, it is impossible in many cases due to the unavailability of sensors. Therefore, in this work, a Kalman filter state estimator was designed for the grinding process known as a semi-autogenous mill (SAG). Thus, a phenomenologically based semi-physical grinding mill model was obtained, the nonlinear observability was tested, the model was discretized, the extended Kalman filter was designed, its behavior under disturbances was simulated, and the correct performance of the estimator was verified. Finally, the necessary conditions for implementing the estimator were explained, and schemes to improve performance in an industrial plant were presented.

Keywords: Comminution, Extended Kalman filter, Grinding mill, Observability, Process control, State and parameter estimation.

Lista de Figuras

2-1. Efecto de porcentaje de llenado en el consumo de potencia del molino.	13
2-2. Efecto de la velocidad crítica en el consumo de potencia del molino.	14
2-3. Efecto de la humedad en el consumo de potencia del molino.	15
3-1. Diagrama de procesos con molino semiautógeno en lazo abierto.	19
3-2. Diagrama de procesos con molino semiautógeno en lazo cerrado.	20
3-3. Sección transversal molino semiautógeno.	21
3-4. Sistemas de proceso	22
3-5. Diagrama de bloques con molino semiautógeno.	24
3-6. Flujos de alimentación del molino.	33
3-7. Salidas del sistema.	34
3-8. Estados del sistema - Volumen por componentes al interior del molino.	35
3-9. Salidas del modelo reducido contra el modelo ampliado	38
3-10. Estados del modelo reducido contra modelo ampliado	39
4-1. Entradas del modelo reducido	48
4-2. Salidas del modelo reducido.	49
4-3. Estados del modelo reducido	50
4-4. Entradas del modelo ampliado	53
4-5. Salidas del modelo ampliado	54
4-6. Estados del modelo ampliado	55
4-7. Esquema de diseño para filtro de Kalman extendido con modelo reducido.	56
4-8. Esquema de simulación.	61
5-1. Resultado filtro de Kalman extendido y modelo reducido entradas.	66
5-2. Resultados filtro de Kalman extendido y modelo reducido estimación de salidas.	67
5-3. Resultados filtro de Kalman extendido y modelo reducido estimación de estados del sistema.	68

5-4. Resultados filtro de Kalman extendido y modelo ampliado entradas. . .	71
5-5. Resultados filtro de Kalman extendido y modelo ampliado estimación de salidas.	72
5-6. Resultados filtro de Kalman extendido y modelo ampliado estimación de estados.	73
5-7. Resultados filtro de Kalman extendido y modelo ampliado entradas. . .	75
5-8. Resultados filtro de Kalman extendido y modelo ampliado estimación de salidas.	76
5-9. Resultados filtro de Kalman extendido y modelo ampliado estimación de estados.	77
5-10. Esquema de implementación.	80
5-11. Esquema de implementación con PLC.	80
5-12. Esquema de mejora de desempeño.	82

Contenido

Agradecimientos	IV
Resumen	V
Lista de figuras	VII
Lista de tablas	1
1. Introducción	2
1.1. Justificación	2
1.2. Antecedentes	3
1.3. Planteamiento del problema	6
1.4. Objetivos	7
1.4.1. Objetivo general	7
1.4.2. Objetivos específicos	7
1.5. Aporte de este trabajo y organización del documento	8
2. Generalidades del Proceso de Molienda de Minerales	10
2.1. Proceso de molienda	10
2.1.1. Tipos de molinos	11
2.1.2. Fuerzas dominantes	12
2.2. Principales factores que afecta la eficiencia de la molienda	12
2.2.1. Efecto del porcentaje o grado de llenado	12
2.2.2. Efecto de la velocidad de rotación	13
2.2.3. Efecto de la humedad	15
2.3. Resumen del capítulo	16
3. Modelado matemático del proceso de molienda con molino semi-autógeno	17
3.1. Modelo semifísico de base fenomenológica del molino semiautógenos	18

3.1.1.	Pre-construcción del modelo	18
3.1.2.	Construcción del modelo matemático	24
3.1.3.	Representación del modelo matemático en variables de estado	30
3.1.4.	Simulación del modelo computacional	31
3.1.5.	Reducción del modelo	36
3.2.	Análisis de algunas propiedades estructurales del modelo	40
3.2.1.	Concepto de observabilidad	40
3.2.2.	Observabilidad no lineal del modelo reducido	41
3.2.3.	Observabilidad no lineal del modelo ampliado	42
3.3.	Resumen del Capítulo	43
4.	Diseño de estimadores de estado para molinos SAG	45
4.1.	Discretización de los modelos	45
4.1.1.	Discretización del modelo reducido	46
4.1.2.	Discretización del modelo ampliado	51
4.2.	Diseño de un filtro de Kalman extendido para el modelo reducido	56
4.3.	Diseño de un filtro de Kalman extendido para el modelo ampliado	60
4.4.	Resumen del capítulo	62
5.	Simulación y análisis de resultados	64
5.1.	Simulación y análisis de resultados con el filtro de Kalman extendido y modelo reducido	64
5.2.	Simulación y análisis de resultados con el filtro de Kalman extendido y modelo ampliado	70
5.3.	Análisis de la implementabilidad de los filtros de Kalman extendido	79
5.3.1.	Condiciones para la implementación	79
5.3.2.	Condiciones y mejoras para el desempeño	82
5.4.	Resumen del capítulo	83
6.	Conclusiones y recomendaciones	84
6.1.	Conclusiones	84
6.2.	Recomendaciones	85
	Bibliografía	86

Lista de Tablas

1-1. Clasificación de la bibliografía	4
3-1. Definición variables y parámetros.	28
3-2. Ecuaciones constitutivas y evaluación de ecuaciones estructurales para parámetros funcionales del modelo.	29
3-3. Evaluación de ecuaciones estructurales, parámetros funcionales y definición de constantes estructurales.	30
3-4. Análisis de grados de libertad.	31
5-1. Raíz de la desviación cuadrática media de la estimación con filtro de Kalman extendido y modelo reducido.	69
5-2. Raíz de la desviación cuadrática media de la estimación con filtro de Kalman extendido y modelo ampliado.	74
5-3. Raíz de la desviación cuadrática media de la estimación con filtro de Kalman extendido y modelo ampliado.	78
5-4. Raíz de la desviación cuadrática media normalizada de la estimación con filtro de Kalman extendido y modelo reducido.	78
5-5. Raíz cuadrada del error cuadrático medio normalizado de la estimación con filtro de Kalman extendido y modelo ampliado.	78

Capítulo 1

Introducción

1.1. Justificación

El 2015 fue el año más caliente registrado en la historia de Colombia, y a pesar de todo lo que se piense al respecto, el cambio climático es causado por las acciones humanas lo cual afecta las especies y los ecosistemas, la producción de alimentos, la seguridad energética y la disponibilidad de agua [1]. Como resultado, las acciones del gobierno están encaminadas a reducir las emisiones contaminantes y a aumentar la capacidad de adaptación a los impactos del cambio climático. Lo anterior es una prioridad para las organizaciones, ya que existe el compromiso de cumplir con acuerdos internacionales como el acuerdo de París COP21 [2].

En este ámbito, los procesos y manejos de la minería de oro y carbón han sido muy cuestionados en cuanto a la capacidad de estos dos sectores para afectar el entorno y el ambiente de las comunidades que se encuentran en su área de influencia, en particular el recurso hídrico [3]. Por consiguiente, la escasez de agua, la protección del medio ambiente y los costos del tratamiento del agua son algunos de los desafíos críticos en la minería y el procesamiento de minerales [4]. El proceso de molienda es conocido como una de las operaciones unitarias más intensas e importantes en la industria de procesamiento de minerales [5]. Algunos autores describen el tratamiento físico esencial para la reducción de tamaño y la liberación de partículas, antes del proceso de concentración [4], [6]. Además, este subproceso representa el principal costo involucrado en el tratamiento físico de minerales, alcanzando por lo menos el 50 - 70 % del costo operativo de las plantas de beneficio [5],[7],[8]. En consecuencia, la optimización del proceso de molienda desde una perspectiva económica y de desempeño es uno de los principales objetivos de la industria minera [5].

Para ello, en algunas aplicaciones se muestran resultados de sistemas de control pre-

dictivo no lineal robusto, logrando controlar con éxito las variables importantes ante perturbaciones frecuentes en los circuitos de molienda a nivel de simulación. Sin embargo, este tipo de control no se logró implementar debido a las limitaciones de tiempo computacional en las plataformas de la época [9]. Además, ya se ha hecho análisis comparativos de distintas estrategias basadas en control predictivo para el proceso de molienda, cuyo resultado muestra que el control predictivo centralizado posee un mejor desempeño en términos de consumo energético durante su etapa de implementación [10].

A pesar de que un pésimo control en la alimentación de agua en los circuitos de molienda puede ocasionar un pobre desempeño en el procesamiento del mineral [11] e incluso malgastar este preciado recurso en el peor de los casos, en Colombia no se han encontrado aplicaciones en las cuales se logre la optimización en el consumo de agua utilizando las técnicas de control avanzado, ya que en general se opera con procedimientos empíricos, basados en la necesidad de producir lo máximo posible. Por consiguiente, la implementación de este tipo de sistemas de control avanzado en el proceso de molienda puede permitir un óptimo consumo del recurso hídrico con intención de cumplir los objetivos de desarrollo sostenible, en particular la escasez de agua, y el uso adecuado de los recursos naturales para un mismo beneficio económico y aumento de la producción sostenible [12].

Sin embargo, la implementación de dichos controladores avanzados requiere la medición completa del estado, lo cual es en muchos casos imposible debido a la no disponibilidad de sensores para ello. Por lo tanto, en esta propuesta se diseñará un estimador de estado para el proceso de molienda de minerales conocido como molino semiautógeno (SAG), con el fin de permitir la implementación de sistemas de control avanzado.

1.2. Antecedentes

Una recopilación de antecedentes sobre métodos de estimación y control en procesos de molienda se muestra en la Tabla **1-1**.

De la Tabla **1-1** se puede concluir que el estudio de sistemas de control avanzado para procesos de molienda es una temática importante en la literatura y con pertinencia actual. Sin embargo, hasta donde tenemos conocido, no existen casos reportados en la literatura que describan la implementación de estos sistemas de control, debido a la no disponibilidad de sensores para la medición completa del estado. Ahora bien, aunque existen en la literatura casos de estudio sobre estimación de estado, algunos autores asumen que las dinámicas del volumen de las rocas y las bolas al interior del

Tabla 1-1: Clasificación de la bibliografía

Autores	Base de Modelo	Aplicación	Características Especiales	Desventajas
Apelt, T. A., & Thornhill, N. F. (2009) [13]	Se propone una estrategia de control que considera un modelo lineal de estadística inferencial para predecir el comportamiento de la planta y obtener las leyes de control con respecto a una función objetivo específica.	Verificar la posibilidad de utilizar modelos inferenciales para realizar control del sistema.	En este diseño se realiza una serie de experimentos para la obtención de datos y a través de estadística inferencial obtener un modelo para el sistema, todos los lazos se aproximan a un modelo de primer orden con un tiempo muerto e integradores de rata de cambios.	Se asume que el molino semiautógeno es un sistema compuesto por puramente integrador, esta suposición elimina muchas dinámicas importantes del sistema.
César, G. Q., & Daniel, S. H. (2009) [14]	Se propone una estrategia de control que considera cinco subsistemas correspondientes a modelos para dos variables controladas, dos variables supervisadas con modelos semifísico no lineales basado en la fenomenología del sistema y se propone un algoritmo de optimización.	Operación del Sistema en una zona de operación óptima compensando perturbaciones y maximizando el desempeño.	En este diseño se considera la manipulación de la velocidad de alimentación y la velocidad del molino para que el molino SAG pueda operar en la zona óptima, sin violar ninguna restricción y compensar el efecto de perturbaciones inconmensurables, adicionalmente integran en la solución un sistema de supervisión para estimar los estados que no son medibles físicamente mediante un algoritmo de mínimos cuadrados recursivos.	Se asume que es posible medir el porcentaje de llenado del molino, la implementación de un sistema de medición que permita observar en que capacidad se encuentra el molino resulta bastante complejo.
Yang, J., Li, S., Chen, X., & Li, Q. (2010) [8]	Se propone un sistema de control que considera un modelo lineal aproximado para predecir el comportamiento de la planta y un modelo lineal para el comportamiento de las perturbaciones, se calculan los movimientos de control óptimos o las leyes de control con respecto a una función objetivo específica.	Reducir el efecto de perturbaciones como el tamaño de las partículas y la carga recirculante en el desempeño del molino.	Este diseño busca garantizar la estabilidad del sistema y rechazar perturbaciones medibles.	Se asume que es posible medir en tiempo real las perturbaciones lo cual dificulta la implementación del lazo de control.

Autores	Base de Modelo	Aplicación	Características Especiales	Desventajas
Naidoo, M. A., Olivier, L. E., & Craig, I. K. (2013) [15]	Se propone una estrategia de control que implementa un filtro Bayesiano recursivo por simulaciones de Monte Carlo, para la estimación se especifican cincuenta partículas y se entrena una red neuronal usando cuatrocientos ochenta horas de datos de simulación para estimar los datos del molino.	Estimación del sostenimiento y ocupación interna durante la molienda.	Este diseño incluye en sus datos de entrenamiento perturbaciones pequeñas entre los datos de entrenamiento.	Entrenar la red neuronal es muy difícil en la práctica, este método depende de la calidad de los datos de entrenamiento.
Salazar, J.-L., Valdés-González, H., Vyhmesiter, E., & Cubillos, F. (2014) [5].	Se propone una estrategia de control que considera un modelo no lineal basado en la fenomenología del sistema para predecir el comportamiento de la planta y calcular los movimientos de control óptimos con respecto a una función objetivo específica.	Controlar la reducción del tamaño de la partícula y el flujo de salida.	Este diseño busca garantizar la estabilidad del sistema y cumplir con criterios de desempeño.	Se asume que es posible medir la fracción de masa del mineral antes y después de la molienda, la implementación de un sistema de medición que permita observar esta variable resulta bastante complejo.
Le Roux, J. D., Steinboeck, A., Kugi, A., & Craig, I. K. (2017) [11].	Se propone una estrategia de estimación de estados con filtro de Kalman extendido partiendo de un modelo no lineal basado en la fenomenología del sistema.	Estimación del sostenimiento y ocupación interna durante la molienda.	Este diseño muestra que, con el caudal de descarga del molino, la densidad de descarga y las mediciones de retención volumétrica, los estados y parámetros del modelo son linealmente observables.	Se asume que es posible medir la primera derivada de la densidad de descarga.

Autores	Base de Modelo	Aplicación	Características Especiales	Desventajas
Maritz, M. G., Le Roux, J. D., & Craig, I. K. (2019) [16]	Se propone una estrategia de control que considera un modelo no lineal basado en la fenomenología del sistema para diseñar un control feedback - feedforward para rechazar las perturbaciones causadas por la variación del tamaño del mineral alimentando.	Reducir la variabilidad en el tamaño de partícula.	Este diseño busca mitigar el efecto de las perturbaciones causadas por cambios en la distribución del tamaño y la dureza del mineral de alimentación.	Se asume que es posible medir en tiempo real las perturbaciones lo cual dificulta la implementación del lazo de control feedforward.

molino son despreciables, por tanto, no consideran un flujo de alimentación de rocas o de bolas, lo cual es una suposición alejada del proceso real [17]. Así mismo, varias soluciones requieren las derivadas de variables de salida como el flujo o la densidad [11], [18]. Otros autores proponen redes neuronales, las cuales son difíciles de entrenar en la práctica, porqué dicho entrenamiento depende de la calidad los datos, la cual no siempre puede garantizarse ya que se requiere que las entradas sean de excitación persistente [15].

1.3. Planteamiento del problema

Actualmente existe un detrimento del medio habiente, debido al mal uso y desperdicio del agua, lo cual ocasiona que se desaproveche un recurso natural no renovable y que según el Objetivo de Desarrollo Sostenible 6, la escasez de agua o la falta de acceso a agua potable inciden en otros ámbitos del desarrollo humano como salud, educación o pobreza. Lograr el acceso universal al agua potable y a sistemas de saneamiento básico, y gestionar un adecuado uso del recurso hídrico, son condiciones esenciales para la vida [12]. En la industria minera, un gran porcentaje de los insumos necesarios vienen representados por el agua, que generalmente se trabaja en exceso con el fin de maximizar la producción, sin pensar en el mal uso y la carga contaminante que se vierte en los ríos. Para minimizar este impacto, algunos autores plantean el uso de controles predictivos basados en modelos mediante los cuales se optimicen los consumos de agua, energía, etc. Sin embargo, estas técnicas de control requieren la medición de todas las variables de estado en el sistema, las cuales generalmente no están disponibles debido al costo de los sensores o la imposibilidad de medición. Por lo tanto, estos desarrollos se limitan a estudios de simulación. Una solución a lo anterior es el diseño e implementación de sensores virtuales basados en modelo, mediante los cuales se puedan estimar las va-

riables de interés. Algunos de estos sensores se encuentran reportados en la literatura, como se mostró en los antecedentes, pero con condiciones poco reales debido a las simplificaciones del modelo. Por lo tanto, en este trabajo se propondrá un estimador de estado para el proceso de molienda con molino SAG, basado en trabajos previamente reportados, tal que considere un modelo lo más acorde posible a las variables que se tienen en un proceso real.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Proponer una técnica de estimación de estado para procesos de molienda con molino SAG, basada en modelos reportados en la literatura, lo más acorde posible con las variables que se tienen en un proceso real y con las mediciones típicas de estos procesos.

1.4.2. Objetivos específicos

Nivel perceptivo

- P1. Describir algunas de las técnicas convencionales y modernas más importantes de estimación de estado para procesos de molienda con molino SAG.
- P2. Identificar las principales ventajas y desventajas que tienen cada una de las técnicas de estimación de estado para procesos de molienda con molino SAG.
- P3. Explorar y enumerar algunos casos de aplicación de las técnicas de estimación de estado para procesos de molienda con molino SAG que se han reportado en la literatura.

Nivel aprehensivo

- A1. Definir los principios que generan un modelo de base fenomenológica para procesos de molienda con molino SAG.
- A2. Determinar algunas propiedades estructurales que tienen los modelos de base fenomenológica para procesos de molienda con molino SAG y cómo pueden ser utilizadas en el diseño de un estimador de estado.
- A3. Obtener desde la literatura la estructura y los parámetros para un modelo de circuito de molienda con molino SAG.

Nivel comprensivo

- C1. Desarrollar un estimador de estado para procesos de molienda con molino SAG.

Nivel integrativo

- I1. Verificar mediante simulación el comportamiento del estimador propuesto con un modelo de circuito de molienda SAG y compararlo con al menos un método convencional de estimación de estado no lineal.

1.5. Aporte de este trabajo y organización del documento

La medición de variables en procesos industriales es una tarea necesaria para lograr implementar lazos de control avanzado, sin embargo, la inexistencia de sensores, la imposibilidad de instalación de sensores existentes o los elevados costos de adquisición son los principales motivos por los cuales no siempre es posible realizar esas mediciones. Una posible solución para los motivos mencionados se basa en la estimación de las variables de proceso teniendo en cuenta la información de las variables que pueden ser medidas y su relación con las variables no medibles, partiendo de un modelo dinámico de predicción. Esta metodología es conocida como estimación de estados. En términos generales, el desempeño del proceso de molienda con molinos SAG depende de las dinámicas de las bolas de acero, el mineral y el agua al interior del molino, también llamados *sostenimientos*. Las medidas en tiempo real del sostenimiento de las variables anteriormente mencionadas no pueden ser obtenidas directamente por la instrumentación disponible en la actualidad. En el mejor de los casos es posible medir el sostenimiento total o porcentaje de llenado. La medición en línea de los inventarios descritos anteriormente pueden mejorar el desempeño y la calidad del producto de salida permitiendo la integración de lazos de control avanzados que garanticen la optimización del proceso [11].

Con este trabajo se propone una técnica de estimación de estado, basada en trabajos previos, para procesos de molienda con molino SAG, que permite medir de manera confiable los principales estados no medibles del proceso, con el fin de lograr la implementación de sistemas de control avanzados con optimización del proceso. Los resultados de estimación de estado son probados mediante simulación ante diferentes condiciones de operación.

Este documento se encuentra organizado de la siguiente manera: el primer capítulo es una introducción, donde se plantea el problema fundamental, se analiza el estado del arte, se plantean los objetivos del proyecto, y por último el aporte de este documento. En el segundo capítulo se presentan generalidades del proceso de molienda, como los tipos de molinos, las fuerzas que influyen y los principales factores que afectan la eficiencia de la molienda. En el tercer capítulo se obtiene desde la literatura un modelo de base fenomenológica de un molino semiautógeno, pero usando la metodología propuesta en [19] y mejorada en [20], adicionalmente se analizan algunas propiedades estructurales de los modelos obtenidos. En el cuarto capítulo se diseñan los estimadores de estado; para esto se realiza la discretización y se diseña un filtro de Kalman extendido discreto para los modelos obtenidos. En el quinto capítulo se realiza la simulación y el análisis de los resultados de los filtros de Kalman obtenidos y se analiza la implementabilidad de los filtros. En el sexto capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones obtenidas en este documento.

Capítulo 2

Generalidades del Proceso de Molienda de Minerales

En el presente capítulo se introduce al lector sobre el marco de referencia del proceso de molienda. En primer lugar, se fundamenta sobre el proceso de molienda y su objetivo en la industria de procesamiento de minerales y los principales tipos de tipos de molinos empleados. En segundo lugar, se analizan las principales variables que afectan la eficiencia del proceso de molienda.

2.1. Proceso de molienda

La molienda es la última etapa del proceso de fragmentación de la industria de minerales, normalmente precede al proceso de trituración. El objetivo de la molienda es disminuir el tamaño del mineral hasta que sea posible realizar una concentración diferenciada de las especies mineralógicas o alcanzar un tamaño en el cual sea posible la implementación de los procesos de separación posteriores. La molienda se diferencia del proceso de trituración principalmente por la reducción del tamaño del mineral al final del proceso, ya que en la molienda el mineral pueden alcanzar tamaños del orden de los milímetros o micrómetros. Los equipos de molienda encargados de cumplir con este objetivo son llamados molinos y según sus características de diseño pueden trabajar con la presencia de agua, en cuyo caso se habla de *molienda húmeda*, o ausencia de agua, denominada *molienda seca* [21].

Los molinos son grandes cilindros que giran sobre su eje longitudinal y en su interior existe una mezcla de medios de molienda junto con el mineral a moler. El molino dispone en uno de sus extremos de un área de alimentación por la cual se introduce el

mineral a moler, agua, si se debe ajustar el contenido de sólidos en peso o volumen, y los medios de molienda. En el otro extremo, según el tipo de vertido, se produce una salida continua de mineral molido, normalmente arrastrado por una corriente de agua o de aire. Básicamente, si la humedad de operación al interior del molino es menor al 4% se considera una *molienda seca*. Sin embargo, la *molienda húmeda* se caracteriza por ser una operación con rangos de humedad entre el 40% y el 70% [21].

Los molinos pueden trabajar de forma *discontinua*, cerrando el equipo y haciéndolo girar por un tiempo determinado para después vaciar el contenido y separar el material molido de los cuerpos moledores, pero en general, el método de trabajo es *continuo*. El trabajo en continuo hace que la granulometría producida siga un proceso estadístico, donde el *tiempo de residencia* dentro del molino afecta directamente esa granulometría. El tiempo de residencia es afectado por el tamaño del cilindro, el volumen útil y el caudal circulante, por lo que también la variación del caudal es una forma de regulación granulométrica y de adaptación del molino a las necesidades cambiantes.

2.1.1. Tipos de molinos

Los molinos se pueden separar en diversos tipos según las características de los medios utilizados en su interior para realizar la reducción de tamaño o también llamados *cuerpos moledores*. Los principales tipos de molinos se describen a continuación:

- Molinos de Barras: Son aquellos molinos que utilizan como cuerpos moledores barras de acero para reducir el tamaño del mineral. Operan generalmente en el proceso de trituración, son capaces de alcanzar tamaños de partículas entre 2 m y 0.5 m. En el tromel de salida las barras hacen un efecto de malla o tamiz permitiendo el paso de partículas y evitando aquellas que superan el valor de fragmentación que soportan, tanto de barras como de mineral. Este efecto ocasiona que este tipo de molinos no sea adecuado para producir partículas finas [21].
- Molinos de Bolas: Son aquellos molinos utilizan como cuerpos moledores bolas de acero para reducir el tamaño del mineral. Son de aplicación general en el proceso de molienda y son adecuados para producir partículas finas [21].
- Molinos de guijarros: Es constructivamente similar a los molinos de bolas con la diferencia de que los medios moledores suelen ser trozos de sílex o pedernal. El revestimiento es de doma o sílex en lugar de acero. La capacidad y el consumo de energía de este molino es del 30% del correspondiente a un molino de bolas.

- Molinos autógenos: Son aquellos molinos que utilizan como cuerpos moledores material de tamaño grueso del propio mineral a moler. En este tipo de molino el elemento que se muele no tiene mucha dureza, así que la trayectoria de caída debe ser mayor para conseguir la energía necesaria para la fragmentación, ocasionando que el diámetro de molino sea mayor [21].
- Molinos semiautógenos: Son en todo similares a los molinos de bolas, con la característica de que los cuerpos moledores los componen una mezcla de bolas de acero con material de tamaño grueso del propio mineral, permitiendo así obtener una mayor tasa de reducción de tamaño del mineral. Al igual que en el caso de molinos autógenos tiene un diámetro mayor frente al correspondiente molino de bolas [21].

2.1.2. Fuerzas dominantes

Los molinos utilizan una o varias fuerzas de manera dominante según su función. La principal acción en el interior de un molino es la abrasión o atrición. Esta se produce porqué al girar el cilindro la masa que se encuentra al interior se desplaza sobre si misma produciendo roce entre las partículas y los cuerpos moledores. Adicionalmente, no es despreciable el efecto del impacto de caída, el cual es función de la velocidad de rotación, ocasionando que los cuerpos moledores sean lanzados por el aire dibujando una trayectoria parabólica y golpeándose entre si o con la carcasa interna en el movimiento en cascada. De manera general, para producir partículas finas, predomina el efecto abrasivo y para tamaños mayores el impacto empieza a tener mayor relevancia en función de los cuerpos moledores. Otras fuerzas que pueden estar presentes son la compresión y el cizallamiento [21].

2.2. Principales factores que afecta la eficiencia de la molienda

2.2.1. Efecto del porcentaje o grado de llenado

El grado de llenado, es decir la proporción del volumen interno del molino que ocupa la carga, en conjunto con el mineral a moler y medios de molienda, es un factor que afecta directamente al rendimiento del molino. La potencia consumida por el molino es afectada en función del porcentaje o grado de llenado. Es posible observar que tiene un máximo en el entorno del 50-55 % de utilización del volumen interno. A partir de

este valor disminuye la potencia demandada por el molino hasta hacerse nula para un grado de llenado del 100 % [21].

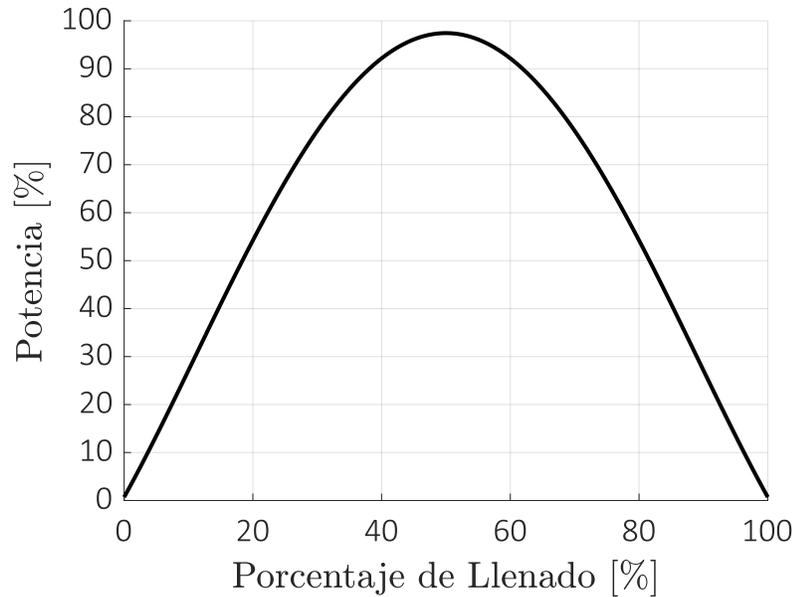


Figura 2-1: Efecto de porcentaje de llenado en el consumo de potencia del molino.

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de [21].

En la Figura 2-1 se presenta el efecto del porcentaje de llenado en el consumo de potencia. En la practica este grado de llenado se encuentra ubicado entre el 40-55 %, habitualmente el 45 % y lo forman los medios de molienda o el mineral a moler. El volumen ocupado lo producen normalmente los medios de molienda y entre estos se introduce el mineral a moler [21].

2.2.2. Efecto de la velocidad de rotación

La velocidad de rotación del molino, o velocidad de operación, es un parámetro de importancia tanto en el consumo de potencia como en la operación de la molienda. El giro del molino sobre su eje produce el desplazamiento de la carga hasta que el par resistente por el peso de la carga iguala al par motor transmitido y produce el movimiento relativo de los elementos que la componen entre si, produciéndose la fricción, choque, y las demás fuerzas que ocasionan la molienda del mineral y desgastando los medios de molienda que deben ser repuestos periódicamente.

La velocidad de rotación de un molino se define como un porcentaje de la *velocidad crítica teórica* o también llamada *velocidad crítica* del molino, y es aquella velocidad de rotación para la cual la primera fila de bolas en contacto con la carcasa o las protecciones y por el efecto centrífugo se adhiere a la carcasa y deja de producir el efecto de molienda, porque permanece adherida durante una vuelta completa. Esta velocidad es teórica y por el efecto de deslizamiento o el arrastre de los forros sufre ligeras modificaciones, pero siempre se considera una velocidad de referencia. La definición de velocidad crítica se refiere a aquella velocidad que centrifugaría una partícula infinitesimal situada en la periferia interna del molino [21].

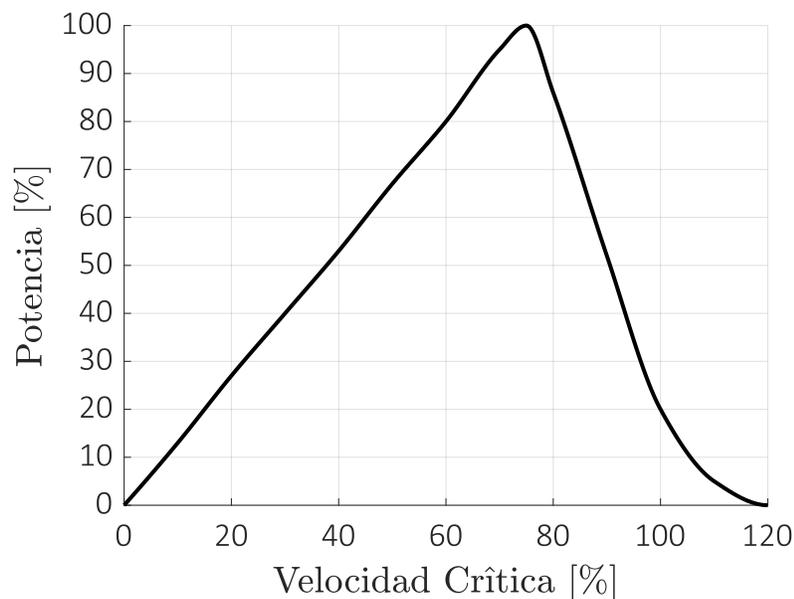


Figura 2-2: Efecto de la velocidad crítica en el consumo de potencia del molino.

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de [21].

En la Figura 2-2 se presenta el efecto de la velocidad crítica en el consumo de potencia. El concepto de velocidad crítica es aplicado porque representa la menor velocidad que produce el efecto en mención, además cualquier velocidad mayor produce dicho efecto de adherencia. En el momento que se alcanza la velocidad crítica, el molino pierde capacidad de molienda dado que hay una porción de la carga que no realiza trabajo [21].

2.2.3. Efecto de la humedad

El mayor rendimiento de la molienda se obtiene con operación en seco, pero no completamente en seco sino con una pequeña humedad (1 %) que por alguna razón favorece la rotura del mineral. Si la proporción de agua sigue aumentando, el rendimiento cae rápidamente hasta alcanzar una humedad del 10 %, debido a que se produce una pasta pegajosa que recubre las bolas y forros impidiendo los impactos y la abrasión. Luego de superar el 9 % nuevamente incrementa rápidamente el rendimiento de la molienda y se mantiene este rendimiento alto hasta alcanzar valores de humedad entre el 55-60 % de solidos en peso. Sin embargo, cuando la humedad supera al 70 % el rendimiento vuelve a disminuir debido a que la cantidad de agua dificulta el choque de las bolas con el mineral [21].

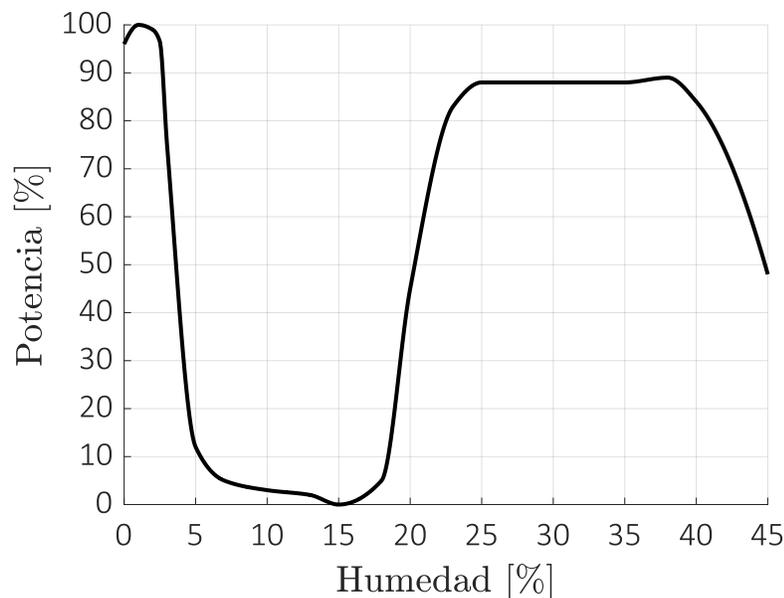


Figura 2-3: Efecto de la humedad en el consumo de potencia del molino.

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de [21].

En la Figura 2-3 se muestra el efecto de la humedad en el consumo de potencia. Por diferentes facilidades en la molienda (menos generación de polvo, disminución de los niveles de ruido, facilidad de transporte, entre otras) se prefiere la molienda en húmedo frente a la molienda en seco, con la salvedad hecha para aquellos productos a los que la humedad puede afectar (caso de fabricación de cemento) o hacer reacción (oxidación

o contaminación de mineral por otros efectos) o la evidente disponibilidad de agua en cantidad adecuada [21].

2.3. Resumen del capítulo

En este capítulo se explicaron las generalidades del proceso de molienda de minerales, donde se mostró en que consiste el proceso de molienda y su objetivo, los tipos de molinos utilizados, las principales fuerzas dominantes y los principales factores que afectan la eficiencia de la molienda. Se puede ver que es necesario tener un conocimiento de las principales variables para tener el mejor desempeño posible en el proceso de molienda. Por lo tanto, en el siguiente capítulo se describirá un modelo matemático del proceso de molienda con molino semiautógeno, con el fin de diseñar posteriormente un estimador de estado que permita analizar el comportamiento de las variables del proceso de molienda.

Capítulo 3

Modelado matemático del proceso de molienda con molino semiautógeno

En este capítulo, se obtendrá un modelo semifísico de base fenomenológica para un proceso de molienda de minerales con molino semiautógeno. Se utiliza este tipo de molino debido a que son equipos con mayor desempeño en el proceso de molienda en la actualidad. Para esto, se hace uso de una metodología para la construcción de modelos semifísico de base fenomenológica basada en la propuesta de [19] y mejorada en [20]. El procedimiento se enfoca principalmente en tres secciones: *La pre-construcción del modelo*, *la construcción del modelo* y *la simulación del modelo computacional*. La pre-construcción del modelo consiste de la elaboración de una descripción del proceso, la obtención del objetivo del modelo, la formulación de la hipótesis de modelado, la definición del nivel de detalle y la definición de los sistemas de proceso. La construcción del modelo contempla la aplicación de las leyes de conservación, la determinación de las estructuras básicas del modelo, la definición de variables, parámetros estructurales y constantes, seguido por la obtención de ecuaciones constitutivas para el modelo y finalmente la validación de los grados de libertad para la construcción de un modelo computacional y la formulación de un modelo de simulación. Este capítulo se encuentra dividido de la siguiente manera: en primer lugar, se encuentra la formulación de un modelo semifísico de base fenomenológica para el molino semiautógeno y su reducción de orden. En segundo lugar, se realiza el análisis de algunas propiedades estructurales fundamentales para los modelos obtenidos.

3.1. Modelo semifísico de base fenomenológica del molino semiautógenos

Un modelo matemático es construido para explicar o representar un fenómeno. Un fenómeno es descrito por completo matemáticamente haciendo uso de la experimentación. Sin embargo, en diversas ocasiones la experimentación puede probar el modelo que representa sin la necesidad de repetir experimentos. Los modelos que cumplen esta característica son modelos fenomenológicos. Entonces, los modelos fenomenológicos son basados en las teorías que gobiernan el fenómeno sin la necesidad de datos. Los modelos semifísico de base fenomenológica son una familia de modelos cuya construcción se basa en el conocimiento que describe el fenómeno, pero también utilizan datos para estimar parámetros representativos desconocidos que afectan la fenomenología de la realidad [19], [20].

3.1.1. Pre-construcción del modelo

Descripción del proceso y objetivo del modelo

El proceso de molienda es conocido como una de las operaciones unitarias más intensas e importantes en la industria de procesamiento de minerales. Brevemente se describe como el tratamiento físico esencial para la reducción de tamaño del mineral proveniente del proceso de trituración hasta obtener una granulometría requerida para permitir la liberación de partículas, antes del proceso de concentración.

Un diagrama de flujo para el proceso de molienda con molino semiautógeno en circuito abierto se describe en la Figura 3-1. Este modelo se basa en la descripción dada en [11]. Como entradas se tienen tres flujos: mineral, agua y bolas de acero denotados por MFO , MIW y MFB respectivamente; en los casos donde se tiene un circuito cerrado por un clasificador (hidrociclón) para el proceso como se muestra en la Figura 3-2, el *underflow* del clasificador es considerado como un flujo de entrada adicional en el sistema denotado por V_{CW} y V_{SW} (que representan los flujos volumétricos de agua y mineral que retorna al molino). Al interior del molino la carga se encuentra constituida por una mezcla de medios de molienda y pulpa. Los medios de molienda hacen referencia a las bolas de acero y el mineral de mayor tamaño que es utilizado para el chancado del mineral, denotados por x_b y x_r respectivamente, y la pulpa se refiere a la mezcla de agua y todo el mineral que exhibe las mismas características de flujo que el agua, denotados por x_w y x_s respectivamente. La fracción de volumen ocupada por la

carga al interior del molino se denota J_T . La potencia consumida por el molino P_{mill} es una indicación de energía cinética y potencial impartida sobre la carga. El flujo de descarga de pulpa a través del tromel de descarga es denominado Q y la densidad a la salida es denominada ρ_Q .

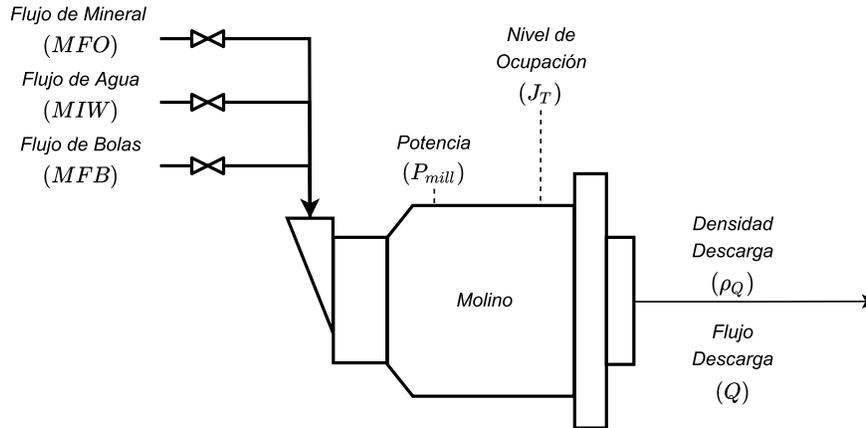


Figura 3-1: Diagrama de procesos con molino semiautógeno en lazo abierto.

Fuente: Elaboración propia a partir de [11].

El molino es una carcasa cilíndrica que gira sobre su eje longitudinal impulsado por un motor, como se muestra en la Figura 3-3, donde se presenta la sección transversal del molino en la cual es posible observar el comportamiento de los medios de molienda y la pulpa. Si la velocidad es la suficiente el revestimiento interior de la carcasa arrastrará la carga del molino hasta alcanzar una altura conocida como el *hombro de la carga*, lugar desde el cual la carga se despega del revestimiento e inicia un movimiento parabólico hasta alcanzar su punto de máxima altura llamado la *cabeza de la carga* desde donde continuará su recorrido en caída parabólica hasta hacer contacto con nuevamente con el revestimiento del molino en un lugar conocido como el *pie de la carga* y desde donde será arrastrada nuevamente. Esta caída causa que el mineral se rompa por el impacto, la abrasión y el desgaste entre medios de molienda, generando la acumulación de los mismos al interior del molino. La pulpa al interior del molino se extiende desde un lugar conocido como el *pie de la pulpa* hasta una altura conocida como el *hombro de la pulpa*. A medida que la pulpa incrementa, el pie de la pulpa se aproxima al pie de la carga. En el momento en que la carga es arrastrada a través del pie de la pulpa, es decir el flujo de pulpa circula a través de los intersticios de los medios de molienda, es posible asumir que la densidad de la pulpa al interior del molino y a la descarga es la misma. En el momento en que la pulpa salga del molino por el tromel de descarga

deberá pasar a través de una malla que limita el paso de las partículas por su tamaño. Finalmente, la molienda es la fracción del material en la descarga que pertenece a un tamaño específico e indica la eficiencia de chancado de material.

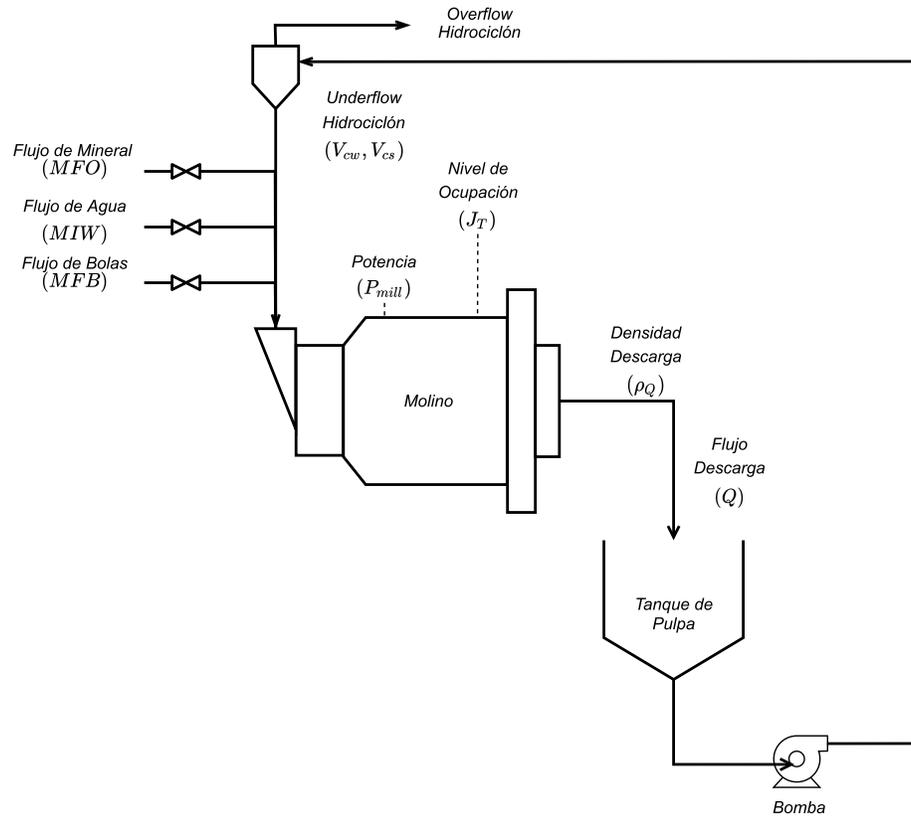


Figura 3-2: Diagrama de procesos con molino semiautógeno en lazo cerrado.

Fuente: Elaboración propia a partir de [11].

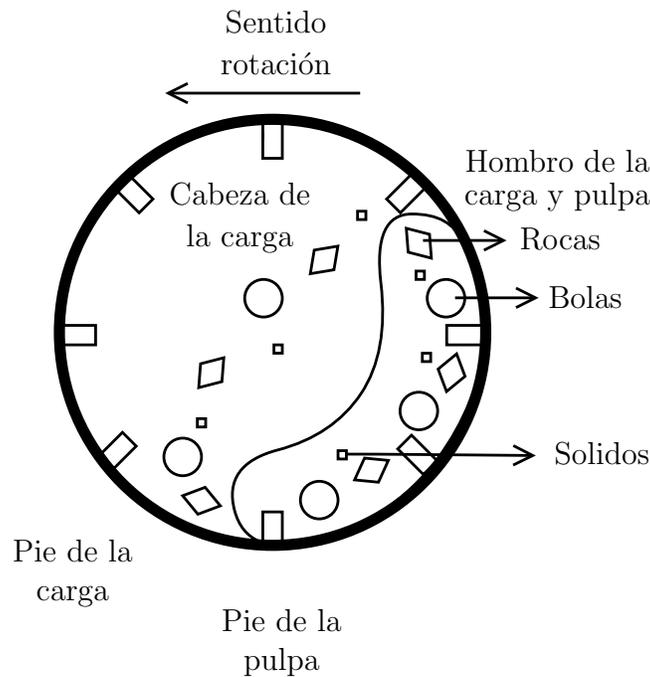


Figura 3-3: Sección transversal molino semiautógeno.

Fuente: Elaboración propia a partir de [11].

Hipótesis de modelado y nivel de detalle

De la descripción anterior del proceso de molienda con molino semiautógeno, la Figura 3-4 muestra un diagrama equivalente para el diagrama de proceso en lazo cerrado. Se propone una analogía que consiste en la interconexión de un sistema de tanques, donde el cambio en el volumen representa la variación de los componentes al interior del molino, es decir, la variación en agua, sólidos, rocas y bolas. Por un lado, la fracción del volumen ocupado por la carga es representada como la suma de los volúmenes de cada uno de los componentes y dividido por el volumen total del molino. Mientras que por otro lado se asume la potencia consumida por el molino posee el comportamiento descrito por el modelo descrito por Julius Kruttschnitt mencionado por Apelt en [13], el cual explica que la potencia total es una suma ponderada de dos potencias conocidas como *la potencia del molino sin carga* y *la potencia del molino atribuida a todos los componentes contenidos en el molino*, donde se utiliza un factor de ponderación para ajustar las pérdidas debido a la fricción interna, la energía de rompimiento por impacto y abrasión, la rotación de medios de molienda, la forma de la carga y otras imprecisiones. Finalmente, la descarga del molino se adapta del modelo presentado por Morrell y Stephenson en [22], donde la descarga de la carga del molino a través del

tromel de descarga consiste en el producto de dos mecanismos: El primer mecanismo es el transporte de fluido a través de la rejilla del molino y el segundo mecanismo es la clasificación de sólidos que pueden atravesar la rejilla del molino. Esta clasificación consiste en el diferenciado las partículas de mayor tamaño y menor tamaño, de modo que las partículas de mayor tamaño retornen nuevamente a la cámara de molienda para luego formar parte del flujo de descarga. La descarga es representada por un punto de suma de los flujos a la salida de los tanques que contiene como componente al agua y a los sólidos y se asume que las bolas al interior del molino se desgastan completamente en el interior del molino, de tal manera que estas no afectan la dinámica del flujo de descarga.

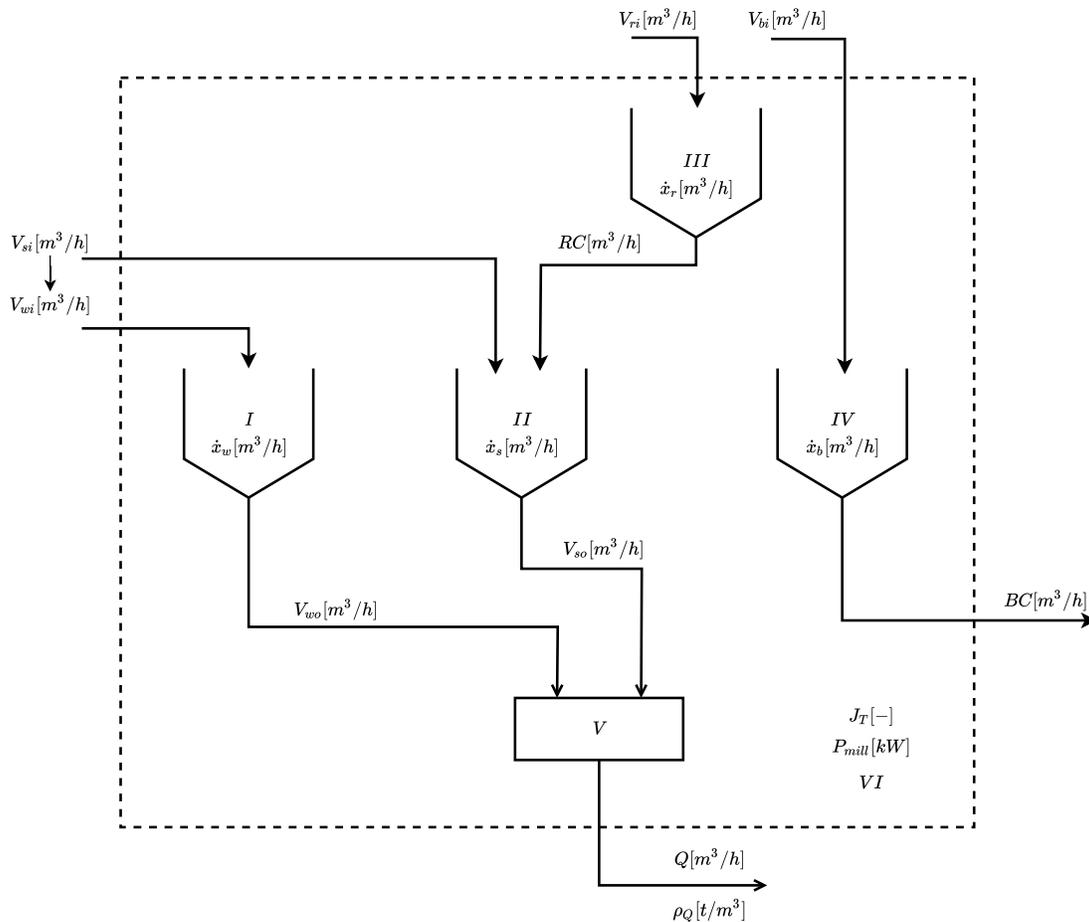


Figura 3-4: Sistemas de proceso

Fuente: Elaboración propia.

Definición de sistemas de proceso

Un *sistema de proceso* es una *abstracción del proceso* en la forma de un sistema usando un criterio específico de separación [19]. Según esta definición, cada sistema de proceso puede ser relacionado como un área en el cual ocurre un cambio en las propiedades de la o las sustancias de interés.

Para el caso de proceso de molienda con molino semiautógeno, se han definido seis sistemas de proceso, los cuales son mostrados en la Figura 3-5. El sistema de proceso *I*, representa el cambio del volumen de agua al interior del molino, el cual es afectado por los flujos de agua a la entrada del molino, es decir, una combinación entre el agua fresca que ingresa al molino *MIW* y la proporción de agua que retorna al molino del sistema de clasificación, y la proporción de agua que sale del molino en el flujo de salida. El sistema de proceso *II*, representa el cambio en el volumen de sólidos al interior del molino, el cual es afectado por una combinación entre la proporción de sólidos que ingresan a la entrada, es decir la fracción de mineral que ingresa en el molino *MFO* como sólidos y la proporción de sólidos proveniente del flujo de retorno del sistema de clasificación; la proporción de sólidos que se genera de la molienda por impacto, abrasión y desgaste de las rocas al interior del molino; y la proporción de sólidos que sale del molino el flujo de salida. El sistema de proceso *III*, representa el cambio en el volumen de rocas al interior del molino el cual es afectado por la proporción de rocas que ingresan al molino con el flujo de mineral *MFO* y la proporción de sólidos que se genera de la molienda por impacto, abrasión y desgaste de las rocas al interior del molino. El sistema de proceso *IV*, representa el cambio del volumen de bolas al interior del molino el cuales afectado por el flujo de bolas que son ingresadas al molino *MFB* y el flujo de consumo o desgaste de bolas. El sistema de proceso *V*, representa un punto de suma de flujos que serán evacuados en el trómel de salida del molino. El sistema de proceso *VI*, representa la capacidad del molino y el consumo de potencia.

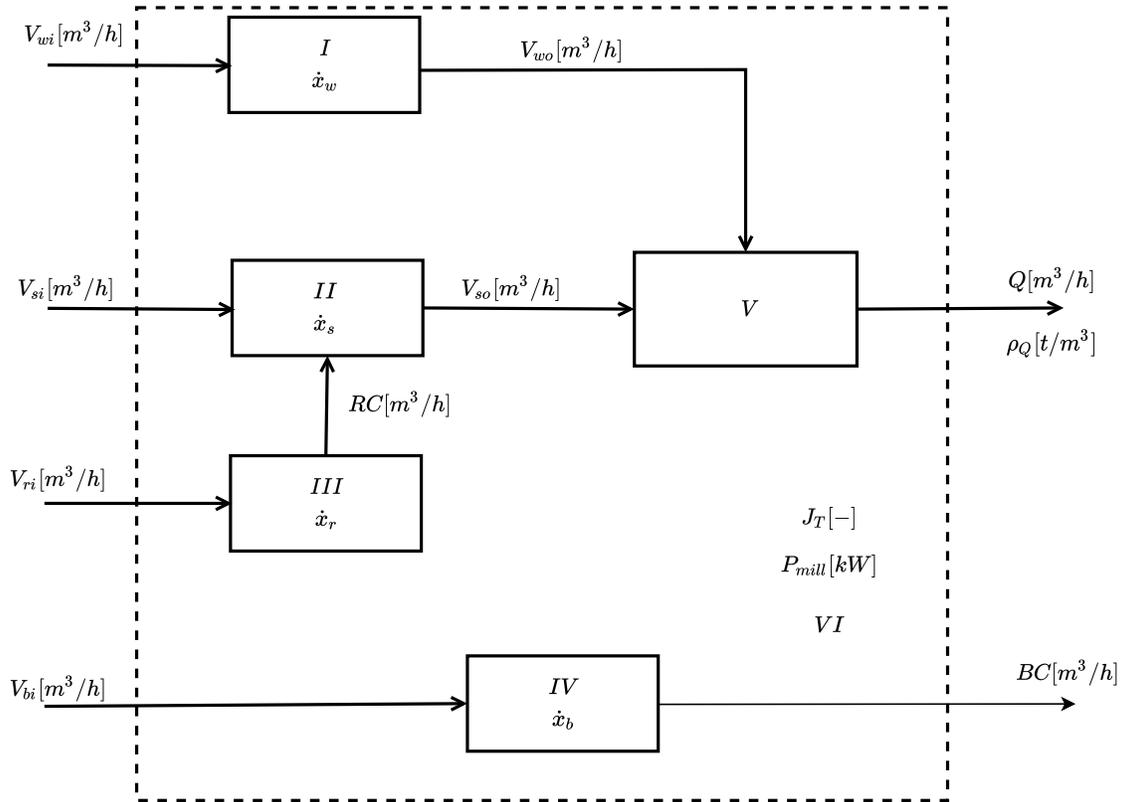


Figura 3-5: Diagrama de bloques con molino semiautógeno.

Fuente: Elaboración propia.

3.1.2. Construcción del modelo matemático

Aplicación del principio de conservación

Los *balances poblacionales*, explican de diversas maneras la forma en que las partículas de un estado en específico pueden formarse o desaparecer de un sistema [23]. Cuando los estados de las partículas son continuos, los procesos tienen variaciones suaves en el tiempo, contribuyendo en la tasa de formación y desaparición de los tipos de partículas. Estos procesos pueden verse como *procesos convectivos*, puesto que, son resultado del movimiento convectivo en el espacio de estados de partículas. Estos procesos no generan cambios en el número total de partículas en el sistema, excepto cuando las partículas se apartan de los límites del sistema. Ahora bien, una manera para cambiar el número de partículas es mediante el proceso de crear nuevas partículas o *procesos de nacimiento* y destrucción de las partículas existentes o *procesos de muerte*. Los procesos de nacimiento de partículas pueden ocurrir debido a procesos de rotura o división, procesos de agregación, procesos de nucleación, entre otros. Sin embargo, los procesos

de rotura y agregación también contribuyen a los procesos de muerte, porque un tipo de partícula que se rompe (en otras partículas) se agrega a otra partícula y ya no existe luego del evento [23].

El contenido fenomenológico de los modelos con balance poblacional radica en los procesos convectivos, así como en los procesos de nacimiento y procesos de muerte. Estos modelos relacionan el comportamiento de partículas individuales, uno a uno (como, por ejemplo, la división de partículas debido a las fuerzas que surgen en la fase ambiental), en pares (como en los procesos de agregación binaria) y así sucesivamente, pero con la condición importante de la dependencia del contexto poblacional en el que ocurre [23]. En el contexto del proceso de modelado matemático se aplican balances poblacionales, a los sistemas de proceso I, II, III y IV para explicar las diversas formas en que las partículas pueden formarse o desaparecer en el sistema.

Balance de masa. El balance de masa total será definido de la siguiente manera:

$$\frac{dM}{dt} = \dot{m}_i + \dot{m}_o \pm \dot{m}_G \quad (3-1)$$

Donde, M es la masa del componente de interés, \dot{m}_i y \dot{m}_o son los flujos másicos de entrada y salida al sistema de proceso y \dot{m}_G corresponde al flujo másico generado o consumido en el sistema de proceso.

Balance poblacional en el sistema de proceso I - Balance de agua: Como se mencionó anteriormente, el sistema de proceso I es representado como un sistema de llenado y vaciado de un tanque. La acumulación del agua al interior del tanque puede ser representada por el balance de masas:

$$\frac{dM_w}{dt} = \dot{m}_{wi} - \dot{m}_{wo} \quad (3-2)$$

$$\frac{d\rho_w V_w}{dt} = \rho_w V_{wi} - \rho_w V_{wo} \quad (3-3)$$

$$\frac{dx_w}{dt} = V_{wi} - V_{wo} \quad (3-4)$$

$$x_w = V_{wi} - V_{wo} \quad (3-5)$$

Donde, M_w es la masa del agua al interior del tanque, x_w es el volumen de agua al interior del tanque, ρ_w es la densidad del agua, \dot{m}_{wi} y \dot{m}_{wo} son los flujos másicos de agua que ingresan y salen del tanque, V_{wi} y V_{wo} son los flujos volumétricos de agua que ingresan y salen del tanque. Otra manera de mostrar la ecuación 3-4, es la utilizada en la ecuación 3-5.

Balance poblacional en el sistema de proceso II - Balance de sólidos: Como se mencionó anteriormente, el sistema de proceso II es representado como un sistema de llenado y vaciado de un tanque. La acumulación de sólidos al interior del tanque puede ser representada por el balance:

$$\dot{x}_s = V_{si} - V_{so} + RC \quad (3-6)$$

Donde, x_s es el volumen de sólidos al interior del tanque, ρ_s es la densidad de sólidos, V_{si} y V_{so} son los flujos volumétricos de sólidos que ingresan y salen del tanque y RC es el flujo volumétrico de sólidos generados debido al consumo rocas proveniente del sistema de proceso III.

Balance poblacional en el sistema de proceso III - Balance de rocas: Como se mencionó anteriormente, el sistema de proceso III es representado como un sistema de llenado y vaciado de un tanque. La acumulación de rocas al interior del tanque puede ser representada por el balance:

$$\dot{x}_r = V_{ri} - RC \quad (3-7)$$

Donde, x_r es el volumen de rocas al interior del tanque, ρ_s es la densidad de sólidos, V_{ri} son los flujos volumétricos de rocas que ingresan y RC es el flujo volumétrico de sólidos generados debido al consumo rocas.

Balance poblacional en el sistema de proceso IV - Balance de bolas: Como se mencionó anteriormente, el sistema de proceso IV es representado como un sistema de llenado y vaciado de un tanque. La acumulación de bolas al interior del tanque puede ser representada por el balance:

$$\dot{x}_b = V_{bi} - BC \quad (3-8)$$

Donde, x_b es el volumen de bolas al interior del tanque, ρ_b es la densidad de las bolas, V_{bi} son los flujos volumétricos de rocas que ingresan y BC es el flujo volumétrico de bolas consumidas al interior del molino.

Sistema de proceso V - Flujo y densidad descarga: El sistema de proceso V es representado como un punto de suma de fluidos. Para el flujo de descarga se dispone de la ecuación constitutiva descrita en 3-9, tomada de [11].

$$Q = \varphi d_H x_w \quad (3-9)$$

Donde, φ es una función empírica llamada *factor de reología*, d_H es el coeficiente de descarga del molino y x_w es el volumen de agua al interior del molino.

La densidad de descarga es un promedio ponderado de la densidad de los elementos que salen del molino, donde el factor de ponderación de cada componente el volumen de dicho elemento en el interior del molino 3-10, tomada de [11].

$$\rho_Q = \frac{\rho_w x_w + \rho_s x_s}{x_w + x_s} \quad (3-10)$$

Sistema de proceso VI - Fracción del volumen ocupado por la carga y consumo de potencia del molino: Por un lado, el sistema de proceso VI representa una relación interna entre todos los sistemas de proceso la cual se muestra en la ecuación 3-11.

$$J_T = \frac{x_w + x_s + x_r + x_b}{v_{mill}} \quad (3-11)$$

Por otro lado, la potencia total consumida por el molino es representada por la ecuación 3-12, tomada de [11].

$$P_{mill} = P_{NL} + k_p P_C \quad (3-12)$$

Estructura básica del modelo

En esta sección, se utilizan las ecuaciones deducidas anteriormente con la información relevante para responder las preguntas del modelo y se usan para formar la estructura básica del modelo. En consecuencia, las ecuaciones son desde la ecuación 3-5 a la ecuación 3-12.

Variables y parámetros.

En esta sección todos los símbolos que conforman las ecuaciones seleccionadas para la estructura del modelo son clasificados como variables y parámetros. Las variables se definen como incógnitas que serán determinadas por el modelo, las cuales son puestas intencionalmente al lado izquierdo de las ecuaciones, mientras que los parámetros

son valores universales o valores fijos determinados por el autor. Un resumen de los parámetros estructurales y constantes para cada sistema de proceso se muestra en la Tabla **3-1**.

Tabla 3-1: Definición variables y parámetros.

	I	II	III	IV	V	VI
<i>Variables</i>	x_w	x_s	x_r	x_b	Q, ρ_Q	J_T, P_{mill}
<i>Parámetros</i>	ρ_w	ρ_s	ρ_s	ρ_b	φ, d_H	$v_{mill}, P_{NL}, k_p, P_C$

Ecuaciones constitutivas y evaluación de ecuaciones estructurales, parámetros funcionales y definición de constantes

Las ecuaciones constitutivas y de evaluación son generalmente ecuaciones algebraicas que se utilizan para definir parámetros desconocidos de cada uno de los sistemas de proceso. Una ecuación constitutiva aproxima la respuesta de una cantidad física a estímulos externos usando una ley o principio [19]. En algunos casos, cuando no es posible utilizar una ley o un principio para definir un parámetro desconocido, es posible utilizar una correlación empírica [19]. Por otro lado, una ecuación de evaluación es una relación matemática para evaluar el valor numérico de un parámetro, sin ninguna intención de vincular descriptivamente el valor numérico calculado con los fenómenos que ocurren en el proceso que se está modelando [19]. Los nuevos parámetros que aparecen en las ecuaciones constitutivas se denominan parámetros funcionales. Las ecuaciones constitutivas y de evaluación utilizadas para definir parámetros tanto estructurales como funcionales constituyen la estructura ampliada del modelo.

Cuando se utiliza una nueva ecuación matemática para definir un parámetro, aparece un nuevo nivel de especificación. El nivel de especificación puede ofrecer nuevos conocimientos sobre el proceso y puede proporcionar información útil para producir el resultado del modelo. En otras palabras, los niveles de especificación pueden incrementar el conocimiento sobre el proceso de interés. Se abrirán nuevos niveles de especificación hasta tener todos los parámetros del modelo definidos como valor numérico. El desarrollador del modelo determina las ecuaciones constitutivas y de evaluación de la estructura extendida porque cada ecuación puede establecerse con un nivel de detalle diferente siguiendo las preferencias específicas o el conocimiento disponible de los fenómenos [19].

Las ecuaciones constitutivas y de evaluación que definen los parámetros estructurales del modelo del proceso de molienda con molino semiautógeno y su rol en el proceso están reportados en la Tabla **3-2**, la cual fue elaborada a partir de la información de los artículos [11] y [13].

Tabla 3-2: Ecuaciones constitutivas y evaluación de ecuaciones estructurales para parámetros funcionales del modelo.

#	Descripción	Ecuaciones Constitutivas	Ref.
1	Flujo volumétrico de agua a la entrada del molino	$V_{wi} = MIW + V_{cw}$	[11]
2	Flujo volumétrico de solidos a la entrada del molino	$V_{si} = MFO \frac{1-\alpha_r}{\rho_o} + V_{cs}$	[11]
3	Flujo volumétrico de rocas a la entrada del molino	$V_{ri} = MFO \frac{\alpha_r}{\rho_o}$	[11]
4	Flujo volumétrico de bolas a la entrada del molino	$V_{bi} = \frac{MFB}{\rho_b}$	[11]
5	Flujo volumétrico de agua a la salida del molino	$V_{wo} = \varphi d_H x_w \frac{x_w}{x_w + x_s}$	[11]
6	Flujo volumétrico de solidos a la salida del molino	$V_{so} = \varphi d_H x_w \frac{x_s}{x_w + x_s}$	[11]
7	Consumo de rocas al interior del molino	$RC = \frac{\varphi P_{mill} x_r}{\rho_o k_r (x_r + x_s)}$	[11]
8	Consumo de bolas al interior del molino	$BC = \frac{\varphi P_{mill} x_b}{k_b (\rho_o (x_r + x_s) + \rho_b x_b)}$	[11]
9	Factor de reología	$\varphi = [max[0, 1 - (\frac{1}{\epsilon_{sv}} - 1) \frac{x_w}{x_s}]]^{1/2}$	[11]
10	Consumo de bolas al interior del molino	$BC = \frac{\varphi P_{mill} x_b}{k_b (\rho_o (x_r + x_s) + \rho_b x_b)}$	[11]
11	Potencia del molino atribuida a los componentes de la carga	$P_C = P_{Net} + P_{Cone}$	[13]

Finalmente, las ecuaciones de evaluación o valores de parámetros fijados y constantes del modelo están presentados en la Tabla **3-3**, elaborada a partir de los datos de [11], [13].

Análisis de grados de libertad

El modelo matemático puede ser resuelto solo si el numero de incógnitas en el modelo, incluyendo las variables, parámetros estructurales y funcionales del modelo, y el numero de ecuaciones es igual. El análisis de grados de libertad se deriva de un modelo resumido en la Tabla **3-4**. Las ecuaciones constitutivas para definir parámetros funcionales esta reportados en la Tabla **3-2** y considerando en total el número de parámetros funcionales reportados en la Tabla **3-3**

Tabla 3-3: Evaluación de ecuaciones estructurales, parámetros funcionales y definición de constantes estructurales.

Símbolo	Descripción	Valor	Unidad	Referencia
MIW	Flujo másico de agua a la entrada del molino	4,64	m^3/h	[11]
MFO	Flujo másico de mineral a la entrada del molino	65,2	t/h	[11]
MFB	Flujo másico de bolas a la entrada del molino	5,68	t/h	[11]
ρ_w	Densidad agua	1,0	t/m^3	[11]
ρ_s	Densidad del mineral	3,2	t/m^3	[11]
ρ_b	Densidad de las bolas	7,85	t/m^3	[11]
α_r	Fracción de roca en el flujo de mineral alimentado	0,47	–	[11]
V_{cs}	Flujo de solidos del hidrociclón a la entrada del molino	96,9	m^3/h	[11]
V_{cw}	Flujo de agua del hidrociclón a la entrada del molino	112,0	m^3/h	[11]
v_{mill}	Volumen total del molino	59,12	m^3	[11]
d_H	Constante de descarga del molino	88,0	$1/h$	[11]
ϵ_{sv}	Máxima fracción de solidos por volumen de pulpa en condiciones de flujo cero	0,6	–	[11]
ϕ_c	Fracción de velocidad crítica del molino	0,72	–	[11]
D_m	Diámetro interno del molino ($D_m = 2r_m$)	4,07	m	[11]
r_t	Radio del trunnion de alimentación del molino	0,46	m	[11]
L_c	Longitud del cono del molino	0	m	[11]
L_m	Longitud cilíndrica del molino	4,54	m	[11]
g	Constante gravitacional	9,81	m/s^2	[11]
k_b	Parámetro energético de abrasión para las bolas de acero	90,0	kWh/t	[11]
k_r	Parámetro energético de abrasión para las rocas	6,72	kWh/t	[11]
k_p	Parámetro de ajuste para el consumo de energía del molino	0,97	–	[11]
P_{NL}	Consumo de potencia del molino en condiciones de cero carga	93,7	kW	[11]
P_{Net}	Consumo de potencia del molino atribuible a la sección de la carcasa cilíndrica	–	kW	[13]
P_{Cone}	Consumo de potencia del molino atribuible a la sección cónica	–	kW	[13]

3.1.3. Representación del modelo matemático en variables de estado

El modelo matemático no lineal descrito en la sección 3.1.2, es escrito en su representación de variables de estado:

Tabla 3-4: Análisis de grados de libertad.

	V	SP	FP	Net	DoF
<i>Ecuaciones</i>	8	10	26	44	0
<i>Incógnitas</i>	8	10	26	44	

Abreviaturas. *V*: variables, *SP*: parámetros estructurales, *FP*: parámetros funcionales *Net*: suma de *SP* + *FP* + *V*, y *Dof*: grados de libertad (diferencia entre el número de incógnitas y el número de ecuaciones)

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} V_{wi} - \varphi d_H x_w \left(\frac{x_w}{x_s + x_w} \right) \\ V_{si} - \varphi d_H x_w \left(\frac{x_s}{x_s + x_w} \right) + \frac{\varphi P_{mill} x_r}{\rho_o k_r (x_r + x_s)} \\ V_{ri} - \frac{\varphi P_{mill} x_r}{\rho_o k_r (x_r + x_s)} \\ V_{bi} - \frac{\varphi P_{mill} x_b}{k_b [\rho_o (x_r + x_s) + \rho_b x_b]} \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

$$y = h(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{x_w + x_s + x_r + x_b}{v_{mill}} \\ \varphi d_H x_w \\ \frac{\rho_o x_s + \rho_w x_w}{x_s + x_w} \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

Donde, $x = [x_w, x_s, x_r, x_b]^T$ es el vector de estados; $u = [V_{wi}, V_{si}, V_{ri}, V_{bi}]^T$ es el vector de entradas del sistema, $y = [J_T, Q, \rho_Q]^T$ es el vector de salidas del sistema

3.1.4. Simulación del modelo computacional

Construcción del modelo computacional

El modelo descrito en la sección 3.1.3 fue programado y resuelto con MatLab[®]. El modelo matemático fue probado con parámetros reportados en la literatura. Para la solución del modelo se utilizó el método de Euler para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales con un periodo de muestreo de $T_s = 0,002h$ durante un tiempo total de simulación de $T_{sym} = 120h$. Las condiciones de simulación para validar el modelo se describen a continuación.

Validación del modelo

Para la excitación del sistema se realizaron variaciones en las diferentes entradas y se verificó funcionalmente el modelo, teniendo en cuenta lo que ocurriría en un molino

semiautógeno industrial como se muestra en la Figura **3-6**. A continuación se listan las variaciones realizadas en las entradas del sistema durante el proceso de simulación:

- Las entradas del sistema inician en un punto de operación que permite mantener los estados del sistema en estado estacionario durante las primeras 30 horas de simulación, ver Figura **3-6**.
- A las 30 horas se realizó un cambio tipo escalón en el flujo de alimentación de agua del molino (V_{wi}) equivalente a +5 % de su punto de operación, donde luego se mantiene en el mismo valor durante el resto del tiempo de simulación, ver Figura 3.6(a).
- A las 60 horas se realizó un cambio tipo escalón en el flujo de alimentación de sólidos (V_{si}) y rocas (V_{ri}) del molino equivalente a +5 % de su punto de operación, donde luego se mantiene constante durante el resto del tiempo de simulación, ver Figura 3.6(b) y Figura 3.6(c).
- El flujo de alimentación de bolas (V_{bi}) del molino se mantuvo en el punto de operación durante todo el tiempo de simulación, ver Figura 3.6(d).

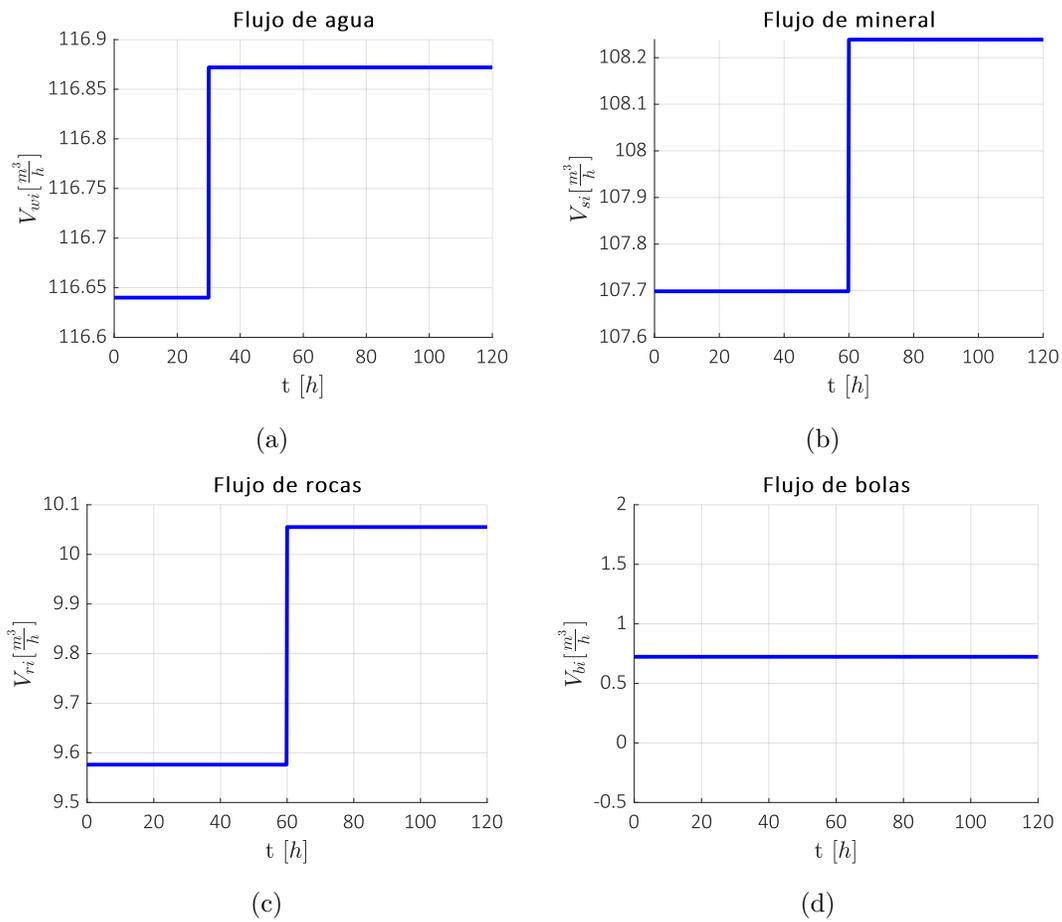


Figura 3-6: Flujos de alimentación del molino.

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados de la simulación se muestran en las Figuras 3-7 a 3-8:

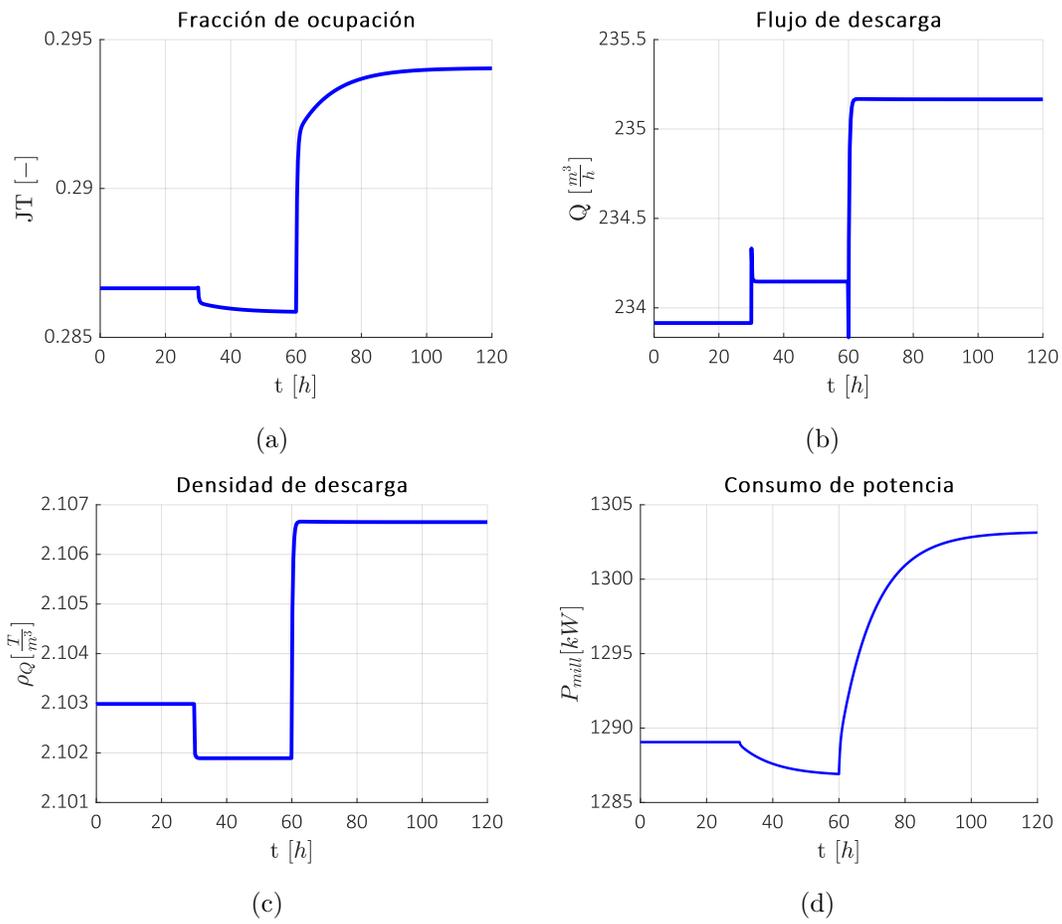


Figura 3-7: Salidas del sistema.

Fuente: Elaboración propia.

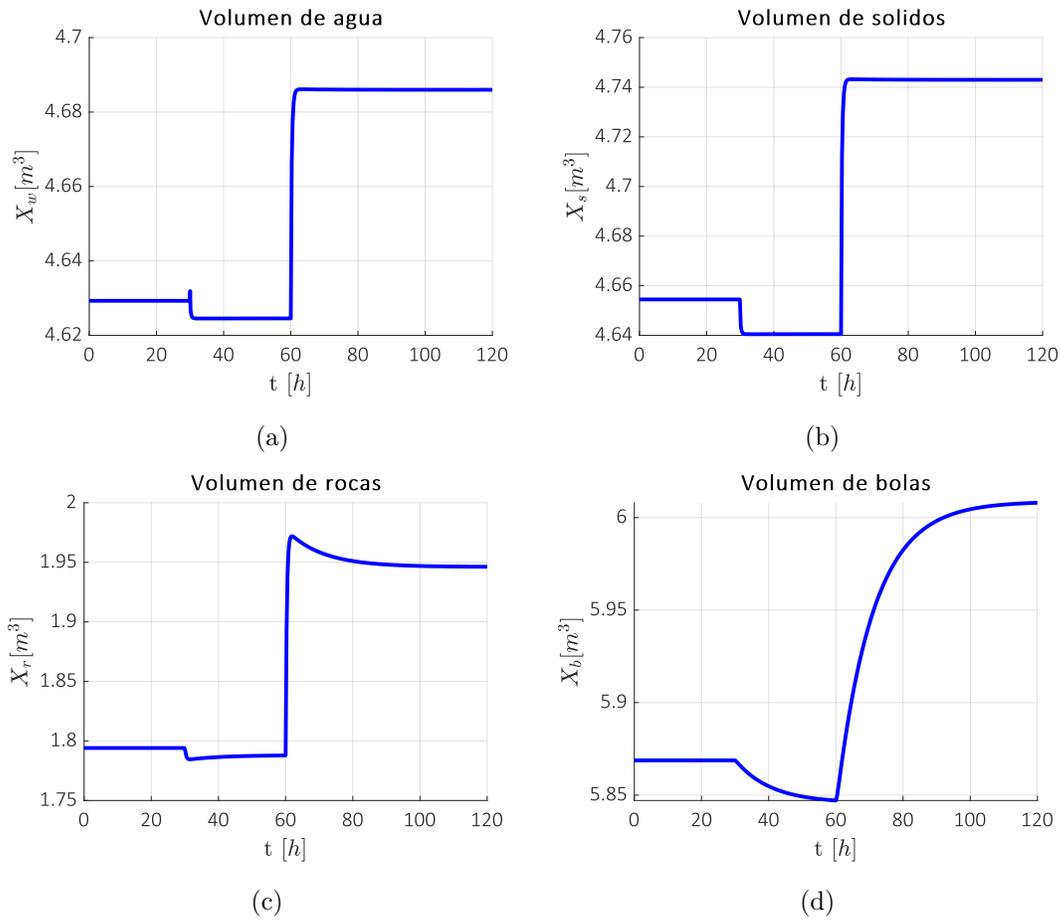


Figura 3-8: Estados del sistema - Volumen por componentes al interior del molino.

Fuente: Elaboración propia.

El análisis de los resultados es como sigue:

- En $t = 0$ las variables del proceso se encuentran en estado estacionario, incluida la potencia consumida por el molino hasta las primeras 30 horas, esto quiere decir que no hay cambio en las variables de proceso durante este lapso de tiempo.
- En el momento de realizar el cambio en el flujo de alimentación de agua 3.6(a), ocurre un incremento en el flujo de descarga del molino como se muestra en la Figura 3.7(b). Esto causa un efecto de mayor arrastre de los solidos contenidos en el interior y que serán evacuados en la descarga como se ilustra en la Figura 3.8(b). Por lo tanto, el volumen de solidos y el volumen de agua al interior del molino deben disminuir como se puede comprobar en las Figuras 3.8(a) y 3.8(b), disminuyendo la ocupación del molino y a su vez minimizando el consumo de potencia hasta las 60 horas, como se ilustra en las Figuras 3.7(a) y 3.7(d).

- En $t = 60$ h, al aumentar el flujo de alimentación de rocas y sólidos, se genera un incremento en la acumulación de medios de molienda como se ilustra en las Figuras 3.8(c) y 3.8(d), debido a que estos se desgastan de una manera más lenta que el agua o los sólidos. Adicionalmente, se incrementa el volumen de sólidos al interior del molino (Figura **3-8**), debido a que existe una mayor cantidad de rocas que permiten la generación de sólidos y al igual que en el evento anterior también se incrementa el flujo de descarga del molino Figura (**3-7**). Sin embargo, en este caso existe una acumulación de agua al interior del molino (Figura **3-8**), causada por el incremento en la densidad del flujo de descarga. En consecuencia, se incrementa la ocupación del molino y a su vez incrementa el consumo de potencia (Figura **3-7**).

Todo el comportamiento, tanto en los tiempos de respuesta como en las magnitudes y formas de las diferentes señales, cumple con las condiciones de funcionamiento de un molino semiautógeno real, según la experiencia del autor, quien lleva tres años trabajando con este tipo de procesos. De todas formas, para contrastar esta validación, se consultó a un profesor experto en el tema, quien también estuvo de acuerdo con los resultados obtenidos.

3.1.5. Reducción del modelo

El modelo matemático descrito en la sección 3.1.3, se puede reducir de modo que se pueda operar más fácil matemáticamente. Para esto autores como le Roux en [11] proponen asumir que la dinámica de la pulpa (agua y sólidos) es mucho más rápida que la dinámica de los medios de molienda (rocas y bolas), esto quiere decir que la dinámica de las rocas x_r y las bolas x_b en el sistema se mantiene estática en todo momento. Por lo tanto, es posible asumir un nuevo estado en el sistema el cual reemplaza las dinámicas anteriores, representando la suma de todos los medios de molienda x_{rb} . En consecuencia, se hace necesaria la aparición de otro estado que representa la generación de sólidos en el sistema χ el cual también se mantiene constante. A continuación se asume que es posible medir la primera derivada de la densidad de descarga $\dot{\rho}_Q$ para ampliar el número de salidas del sistemas. Finalmente, se asume que el flujo de salida del molino puede ser representado como una función cuadrática que depende de un nuevo estado llamado *tasa de descarga por volumen de pulpa* η y del contenido total de pulpa que se sostiene en el interior del molino $x_w + x_s$. Así pues, el modelo reducido en variables de estados basado en [11], se muestra a continuación:

$$\dot{x} = f_{RM}(x, u) = \begin{bmatrix} V_{wi} - \eta(x_w + x_s)x_w \\ V_{si} - \eta x_w + x_s)x_s + \chi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

$$y = h_{RM}(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{x_w + x_s + x_{rb}}{v_{mill}} \\ \eta(x_w + x_s)^2 \\ \frac{\rho_o x_s + \rho_w x_w}{x_s + x_w} \\ \frac{(\rho_o - \rho_w)(\chi x_w + x_w V_{si} - x_s V_{wi})}{(x_s + x_w)^2} \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

Donde, $x = [x_w, x_s, x_{rb}, \eta, \chi]^T$ es el vector de estados; $u = [V_{wi}, V_{si}]$ es el vector de entradas del sistema; $y = [J_T, Q, \rho_Q, \rho_Q]^T$ el vector de salidas.

Para comparar las dinámicas de los estados del modelo reducido en la ecuación 3-15, con los estados del modelo obtenido en la sección 3.1.3 se requiere utilizar las siguientes relaciones [17]:

$$x_{rb} = x_r + x_b \quad (3-17)$$

$$\eta = \frac{\varphi d_H x_w}{(x_w + x_s)^2} \quad (3-18)$$

$$\chi = \frac{\varphi P_{mill} x_r}{\rho_o k_r (x_r + x_s)} \quad (3-19)$$

En este punto es necesario verificar el comportamiento descrito por el modelo reducido propuesto por [11]. Por lo tanto, se explican las condiciones de simulación para la comparación de ambos sistemas:

- Periodo de muestreo de $T_s = 0,002h$ y tiempo total de simulación de $T_{sym} = 120h$
- Se inicia la simulación en un punto de operación, donde los estados del sistemas se encuentran en estado estacionario durante las primeras 30 horas, ver Figura 3-6.

- Se realiza cambio de tipo escalón en el flujo de alimentación de agua (V_{wi}) equivalente a +5% de su punto de operación y se mantiene en el mismo valor durante el resto del tiempo de simulación, ver Figura 3.6(a).
- A las 60 horas se realizó un cambio tipo escalón en el flujo de alimentación de sólidos (V_{si}) y rocas (V_{ri}) del molino equivalente a +5% de su punto de operación, donde luego se mantiene constante durante el resto del tiempo de simulación, ver Figura 3.6(b) y Figura 3.6(c).
- El flujo de alimentación de bolas (V_{bi}) del molino se mantuvo en el punto de operación durante todo el tiempo de simulación, ver Figura 3.6(d).

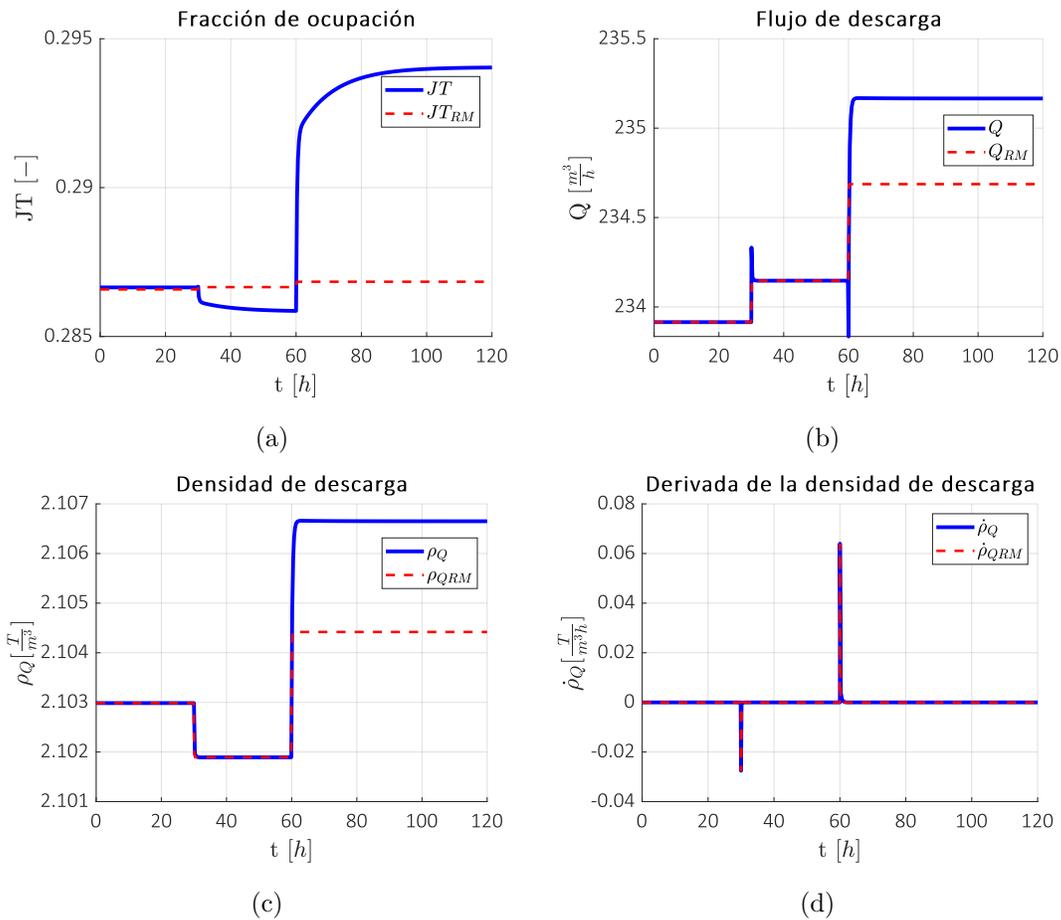


Figura 3-9: Salidas del modelo reducido contra el modelo ampliado

Fuente: Elaboración propia.

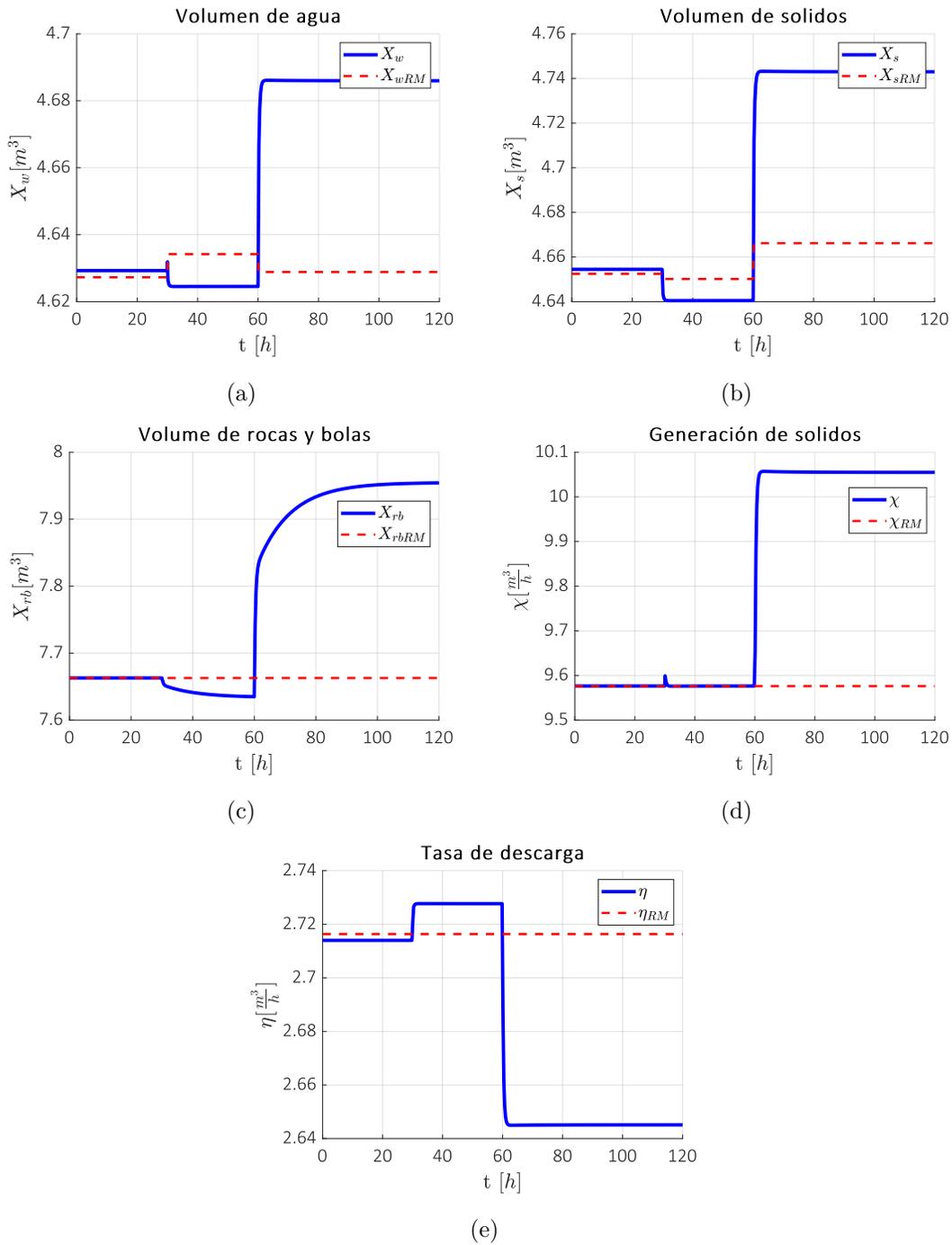


Figura 3-10: Estados del modelo reducido contra modelo ampliado

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 3-9 y Figura 3-10 muestran el comportamiento del descrito por el modelo ampliado (en color azul) y el modelo reducido (en color rojo) donde es posible observar que el comportamiento de las salidas del modelo reducido posee dinámicas muy parecida

a la salida del modelo ampliado. Aunque, los comportamiento de los estados del modelo reducido posee en sus dinámicas diferentes a su equivalente en el modelo ampliado, esto se debe a que se ignoran dinámicas importantes que gobiernan el comportamiento real de un molino semiautógeno. Sin embargo, es un modelo que puede ser utilizado para otro tipo de aplicaciones donde no se requieren altos niveles de precisión en la respuesta del sistema.

3.2. Análisis de algunas propiedades estructurales del modelo

En esta sección se analizan los conceptos que describen la interacción entre variables externas del sistema (las entrada y salidas) y las variables internas del sistema (los estados). Esta sección se encuentra distribuida de la siguiente manera: En primer lugar, se describe el concepto de observabilidad para los sistema dinámicos no lineales. En segundo lugar, se aplica el concepto de observabilidad no lineal para el modelo reducido obtenido. En último lugar, se analiza el concepto de observabilidad no lineal para el modelo ampliado ante diferentes condiciones de operación.

3.2.1. Concepto de observabilidad

La observabilidad es aquella propiedad que indica si el comportamiento interno del sistema puede aproximarse a partir de las salidas de un sistema. Esta propiedad asegura la determinación del conjunto total de estado del proceso, tomando como conjunto de datos las mediciones de un conjunto dado de sensores. Básicamente se dice que un sistema es observable si dadas las entradas u y las salidas y del Sistema en un intervalo de tiempo finito, es posible determinar el valor de los estados x basándose de los valores u, y , en las derivadas de esos valores \dot{u} , \dot{y} , y de un modelo del sistema en variables de estados [24].

Observabilidad de sistemas no lineales

Un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas de la forma no lineal afín en el espacio de estados con $\dim(x) = n$ y $\dim(y) = m$ puede ser escrito de la forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u; \quad y = h(x) \quad (3-20)$$

El sistema 3-20 diremos que es localmente observable en x_0 si existe en la vecindad de X_0 de x_0 tal que para cualquier x_1 elemento contenido en el vecindad $X_1 \subset X_0$ de x_0 . Un estado indistinguible x_0 y x_1 implica que $x_0 = x_1$. Dos estados x_1 y x_0 diremos que son indistinguibles si para cada entrada u admisible la salida y para el estado inicial x_0 y para el estado inicial x_1 es idéntica [24]. Si el sistema satisface la entonces llamada condición de observabilidad de rango, entonces, la matriz de distribución de observabilidad x_0

$$dO = \text{span}\{dh_j, dL_f h_j, \dots, dL_f^{n-1} h_j\}; \quad j = 1, \dots, m \quad (3-21)$$

tiene dimensión n para x_0 , entonces el sistema es localmente observable. Note que L_f^k hace referencia a la k -ésima derivada de Lie en función de $h_j(x)$ a lo largo del campo vectorial $f(x)$ y d es el operador derivativo. Para el caso de sistemas lineales la distribución de observabilidad $O^T = [C^T, A^T C^T, \dots, (A^{n-1})^T C^T]$ donde $C = \frac{\partial h}{\partial x}|_{x=x_0}$ y $A = \frac{\partial}{\partial x}(f(x) + g(x)u)|_{x=x_0, u=u_0}$

3.2.2. Observabilidad no lineal del modelo reducido

Observabilidad no lineal para sistema reducido con completa medición de salidas

Al sistema obtenido en la sección 3.1.5 se le calculó la matriz de distribución de observabilidad dO teniendo en cuenta la medición de todas las variables de salida especificadas por el sistema. Para esto se utilizó el software Maple. La matriz de distribución de observabilidad es de rango columna completo. Sin embargo se realiza un análisis más detallado se calcula el determinante de las primeras cinco filas y columnas de la matriz de distribución de observabilidad:

$$\det(O_{[1.,5,1.,5]}) = \frac{(\rho_o - \rho_w)\rho\dot{Q}}{V_{mill}^2} \quad (3-22)$$

Debido a la importancia de la propiedad de observabilidad para este sistema, es necesario realizar un análisis completo de las condiciones posibles donde el determinante de la ecuación 3-22 es igual a cero, condición suficiente para la pérdida de observabilidad. El resultado del análisis se muestra a continuación:

- $V_{mill} \rightarrow \infty$, es un parámetro de diseño del molino. Si este parámetro incrementara considerablemente el sistema perdería observabilidad.

- $\rho_0 = \rho_w$, si la densidad del agua y el mineral son la misma entonces no existe manera de diferenciar que es cada elemento, una condición muy inusual pero posible en algunas ocasiones durante labores de mantenimiento cuando se necesita desocupar completamente el molino.
- $\dot{\rho}_q = 0$, esto quiere decir que si el sistema se encuentra en estado estacionario el modelo pierde observabilidad. Por lo tanto, para la utilización de este modelo es necesario tener entradas de excitación persistente.

3.2.3. Observabilidad no lineal del modelo ampliado

Observabilidad no lineal con medición completa de las salidas

Al sistema obtenido en la sección 3.1.3 se le calculó la matriz de distribución de observabilidad dO teniendo en cuenta la medición de todas las variables de salida especificadas por el sistema. Para esto se utilizó el software Maple. La matriz de distribución de observabilidad es de rango columna completo. Sin embargo, se realiza un análisis más detallado se calcula el determinante de las primeras cuatro filas y columnas de la matriz de distribución de observabilidad:

$$\det(O_{[1,4,1,4]}) = \frac{-dH(\rho_o - \rho_w)P_{mill}\rho_o(x_r + x_s + x_b)\left(\frac{x_s\epsilon_{sv} + \epsilon_{sv}x_w - x_s}{\epsilon_{sv}x_w}\right)^{1,0}x_w}{(x_s + x_w)^2V_{mill}^2K_b(\rho_b x_b + \rho_o x_r + \rho_o x_s)^2} \quad (3-23)$$

Debido a la importancia de la propiedad de observabilidad para este sistema, es necesario realizar un análisis completo de las condiciones posibles donde el determinante de la ecuación 3-23 es igual a cero, condición suficiente para la pérdida de observabilidad. El resultado del análisis se muestra a continuación:

- $V_{mill} \rightarrow \infty$, es un parámetro que puede incrementar debido al diseño del molino. Pero aunque este parámetro incremente considerablemente, el sistema no perdería observabilidad debido a que se incrementaría a su vez la potencia consumida por el molino, esto quiere decir que se complementan mutuamente.
- $\rho_0 = \rho_w$, si la densidad del agua y el mineral son iguales entonces no existe manera de diferenciar qué es cada elemento, una condición muy inusual pero posible en algunas ocasiones durante labores de mantenimiento cuando se necesita desocupar completamente el molino.

- $x_w = 0$, esto quiere decir que no hay volumen de agua al interior del molino durante la molienda, Es una condición bastante inusual que puede ocurrir durante labores de mantenimiento, más no en la ejecución normal del proceso.
- $dH = 0$, la constante de descarga del molino es un parámetro visto como el producto de dos mecanismos, el fluido que transporta a través de la rejilla y los solidos que se clasifican por la rejilla. Este parámetro representa la diferencia entre las partículas que retornan a la cámara de molienda y las que salen por el flujo de descarga. Un valor de cero para este parámetro es equivalente a decir que no hay partículas a la salida del molino, una condición casi equivalente a que la densidad del mineral y la densidad del agua es la misma, una condición muy inusual pero posible en algunas ocasiones durante labores de mantenimiento cuando se necesita desocupar completamente el molino.
- $x_w = \frac{2x_s}{3}$ es la condición más crítica para la pérdida de observabilidad, puede ocurrir durante la operación normal del molino en ocasiones como la pérdida de suministro de agua o el defecto de un actuador. En la practica, la pérdida del suministro de agua ocasiona paros de la molienda, por lo cual es una condición muy manejable.

Observabilidad no lineal con medición incompleta de salidas

Al sistema obtenido en la sección 3.1.3 se le calculó la matriz de distribución de observabilidad dO teniendo en cuenta la medición de dos variables de salida especificadas por el sistema ($y = [J_T, Q]^T$). Para esto se utilizó el software Maple. Al igual que en el caso anterior la matriz de distribución de observabilidad es de rango columna completo, pero a diferencia del caso anterior existen demasiadas condiciones para la pérdida de la observabilidad. Entonces dicho análisis es mucho mas complejo que el mencionado anteriormente.

3.3. Resumen del Capítulo

En este capítulo se determinó un modelo semifísico de base fenomenológica para un molino semiautógeno partiendo de modelos propuestos por varios autores. Se aplicó una metodología de modelado para hacer mas clara la comprensión del modelo. El modelo obtenido fue probado mediante simulación y valorado por un experto indicando que el comportamiento dinámico es correcto. Adicionalmente, este modelo fue reducido para obtener un modelo más fácil de operar matemáticamente y fue comparado con

el modelo semifísico de base fenomenológica con el fin de analizar su comportamiento dinámico. Finalmente, se analizó el concepto de observabilidad no lineal para ambos modelos. Se puede ver que el modelo reducido pierde la observabilidad en condiciones muy probables del proceso normal obligando que la implementación de un estimador de estado requiera la utilización de entradas de excitación persistente para lograr un correcto funcionamiento. En cambio, el modelo ampliado no requiere entradas de excitación persistente para lograr la condición de observabilidad. esto no quiere decir que no exista alguna condición para la pérdida de observabilidad. Por lo tanto, en el siguiente capítulo se diseñará un estimador de estado para el modelo reducido y otro para el modelo ampliado los cuales serán simulados con el fin de analizar su desempeño.

Capítulo 4

Diseño de estimadores de estado para molinos SAG

En este capítulo se diseñarán dos estimadores de estados para el proceso de molienda con molino semiautógeno a partir de los modelos en variables de estado obtenidos en el capítulo 3. Los estimadores propuestos se basan en el método de estimación de estado desarrollado por *Rudolf E. Kalman* para sistemas no lineales en tiempo discreto o también conocido como filtro de Kalman extendido discreto. Este capítulo se encuentra distribuido de la siguiente manera: En primer lugar, se realiza la discretización de los modelos obtenidos en el capítulo 3. A continuación, se realiza el diseño de los filtros de Kalman extendido discreto para el modelo reducido y el modelo ampliado.

4.1. Discretización de los modelos

Teniendo en cuenta que los modelos obtenidos en el capítulo 3 se encuentran en tiempo continuo y como el desarrollo de un filtro de Kalman extendido discreto requiere de un modelo de tiempo discreto, es necesario realizar una discretización de los modelos. Sin embargo, para esto es necesario una correcta selección del período de muestreo. Debido a que la manera más común de obtener un período de muestreo correcto es conociendo las dinámicas de los polos dominantes del sistema, se realizará una linealización de los modelos obtenidos en tiempo continuo, utilizando el método de aproximación lineal con *series de Taylor* o modelo de pequeña señal, seguidamente se valida el modelo linealizado obtenido mediante simulación comparándose respecto el modelo inicial, verificando que las dinámicas de ambos tengan comportamientos similares ante variaciones de pequeña señal. Esta sección se encuentra distribuida de la siguiente manera: En primer lugar, se determina un modelo discretizado para el modelo reducido y se

valida mediante simulación la coherencia del modelo. En segundo lugar, se determina un modelo discretizado para el modelo ampliado el cual también se valida por medio de simulación con el fin de determinar su coherencia.

4.1.1. Discretización del modelo reducido

Como se mencionó anteriormente para discretizar el modelo reducido procedemos en primera lugar a la obtener un modelo linealizado. Debido a que la linealización requiere de un punto de equilibrio para el modelo, en este caso se utilizó el comando *fsolve* como método numérico en MatLab[®] para encontrar una solución donde las dinámicas sean nulas. Se parte de la condición inicial propuesta por los autores en [11] y teniendo en cuenta que $x = [x_w, x_s, x_{rb}, \eta, \chi]^T$ es el vector de estados; $u = [V_{wi}, V_{si}]^T$ es el vector de entradas, $y = [J_T, Q, \rho_Q, \dot{\rho}_Q]^T$ es el vector de salidas. Entonces se obtiene como resultado el siguiente punto de equilibrio:

$$u_{ss} = \begin{bmatrix} 116,6400 \\ 107,6988 \end{bmatrix}; \quad x_{ss} = \begin{bmatrix} 4,6293 \\ 4,6545 \\ 7,6629 \\ 2,7198 \\ 9,5761 \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

Al aplicar el método de linealización por aproximación lineal con *series de Taylor* en el modelo descrito en la sección 3.1.5 se obtiene el siguiente modelo linealizado en variables de desviación:

$$\Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} -37,8402 & -12,5906 & 0 & -42,9771 & 0 \\ -12,6591 & -37,9088 & 0 & -43,2111 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta u \quad (4-2)$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 0,017 & 0,017 & 0,017 & 0 & 0 \\ 50,499 & 50,499 & 0 & 86,188 & 0 \\ -0,119 & 0,118 & 0 & 0 & 0 \\ 2,994 & -2,977 & 0 & 0 & 0,118 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0,119 & 0,118 \end{bmatrix} \Delta u \quad (4-3)$$

Para obtener periodo de muestreo adecuado para la discretización del modelo reducido se analizaron las dinámicas de los polos dominantes la matriz A del modelo linealizado

4-2. El vector de valores propios de la matriz A se muestra a continuación:

$$eig(A) = \begin{bmatrix} -25,2497 \\ -50,4993 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

De la ecuación 4-4 se observa que el polo que posee la dinámica más rápida es $-50,4993$, con un tiempo de establecimiento aproximado de $\tau = 0,0198h$. Ahora bien, teniendo en cuenta el *teorema del muestreo de Nyquist - Shannon*, utilizando una proporción de $\frac{\tau}{10}$ y se obtiene un periodo de muestreo de $0,002h$ como el adecuado para la discretización del modelo reducido.

Finalmente, se obtiene un modelo discretizado utilizando un retenedor de orden cero para modelo linealizado de las ecuaciones 4-2 y 4-3:

$$\Delta x_{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0,927 & -0,023 & 0 & -0,082 & 0 \\ -0,023 & 0,927 & 0 & -0,082 & 0,002 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta x_{(k)} + \begin{bmatrix} 0,002 & 0 \\ 0 & 0,002 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta u_{(k)} \quad (4-5)$$

$$\Delta y_{(k)} = \begin{bmatrix} 0,017 & 0,017 & 0,017 & 0 & 0 \\ 50,499 & 50,499 & 0 & 86,188 & 0 \\ -0,119 & 0,118 & 0 & 0 & 0 \\ 2,994 & -2,977 & 0 & 0 & 0,118 \end{bmatrix} \Delta x_{(k)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0,119 & 0,118 \end{bmatrix} \Delta u_{(k)} \quad (4-6)$$

Nuevamente es necesario verificar el comportamiento del modelo linealizado obtenido, para esto se realiza una simulación con las siguientes condiciones de operación para ambos sistemas:

- Periodo de muestreo de $T_s = 0,002h$ y tiempo total de simulación de $T_{sym} = 30h$, ver Figura 4-1.

- Se inicia la simulación en un punto de operación, donde los estados del sistemas se encuentran en estado estacionario durante las primeras 10 horas.
- A las 10 horas se realiza cambio de tipo escalón en el flujo de alimentación (V_{wi}) de agua equivalente a +5 % de su punto de operación y se mantiene en el mismo valor durante el resto del tiempo de simulación, ver Figura 4.1(a).
- A las 20 horas se realizó un cambio tipo escalón en el flujo de alimentación de solidos (V_{si}) y rocas (V_{ri}) del molino equivalente a +5 % de su punto de operación, donde luego se mantiene constante durante el resto del tiempo de simulación, ver Figura 4.1(b) y Figura 4.1(c).
- El flujo de alimentación de bolas (V_{bi}) del molino se mantuvo en el punto de operación durante todo el tiempo de simulación, ver Figura 4.1(d).

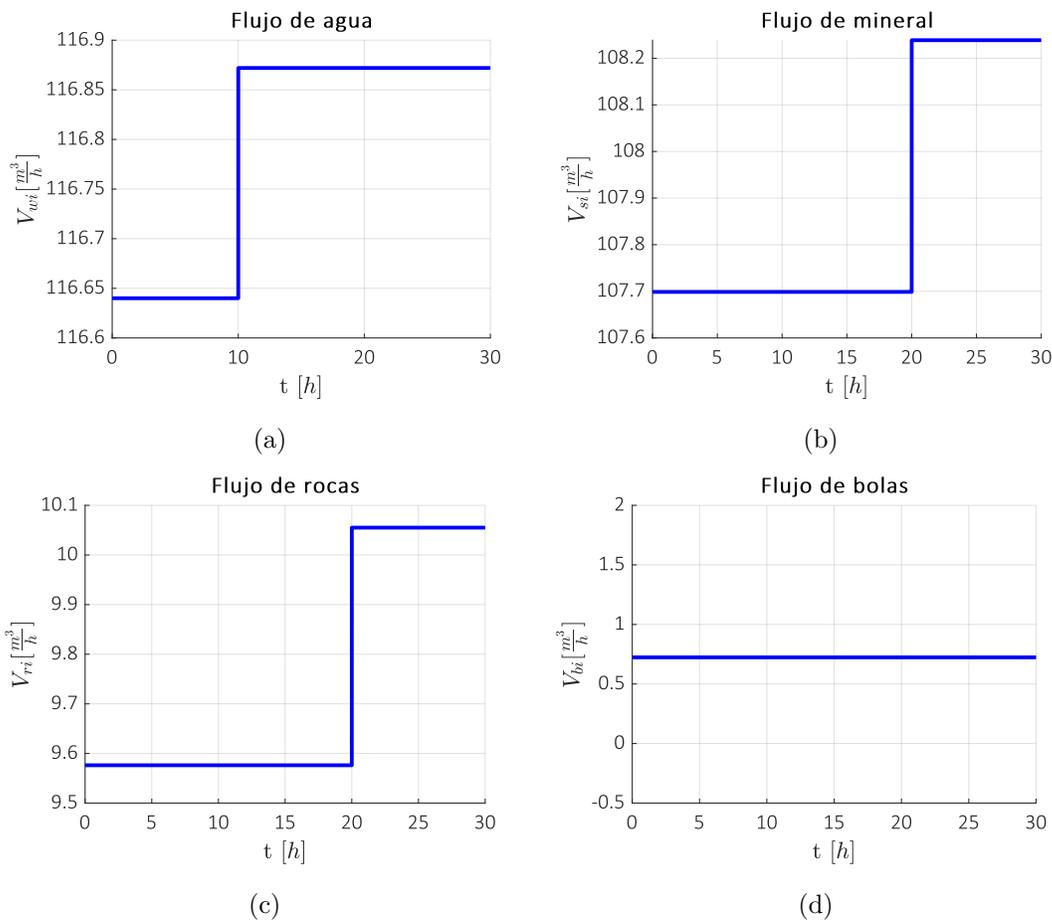


Figura 4-1: Entradas del modelo reducido

Fuente: Elaboración propia.

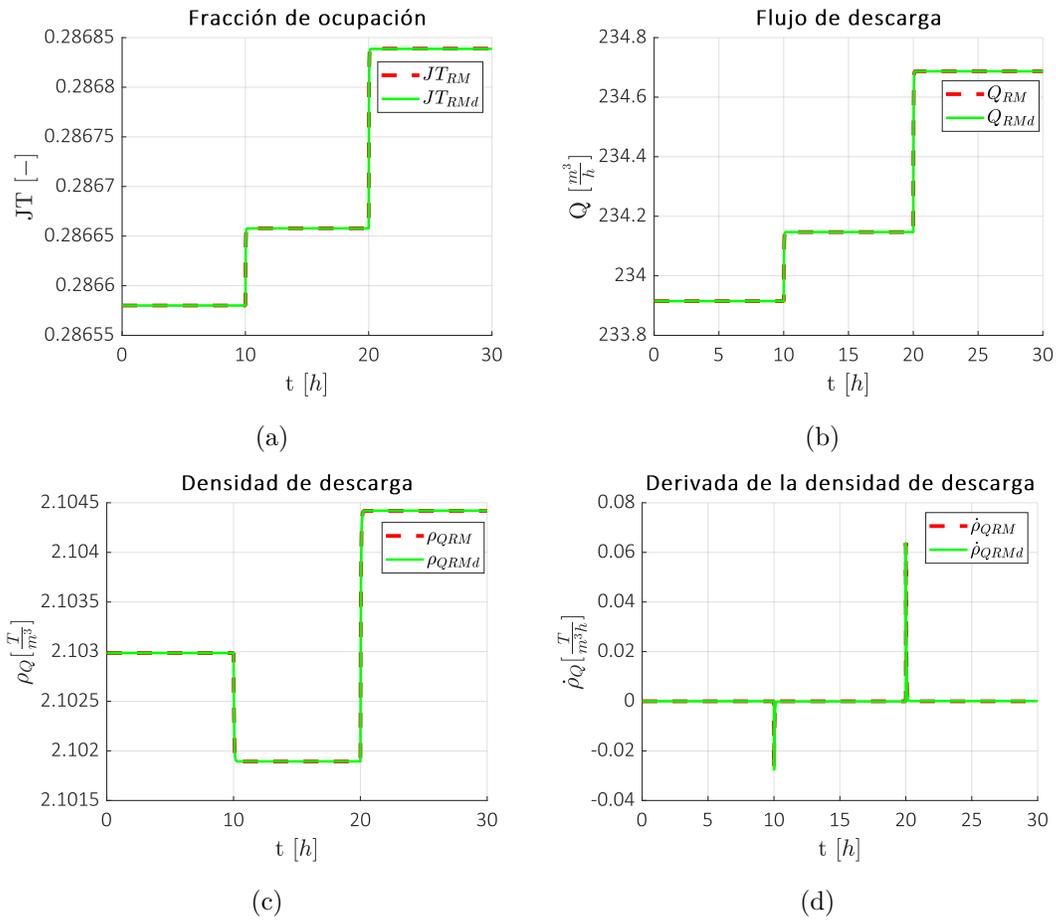


Figura 4-2: Salidas del modelo reducido.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 4-2 se muestra el comportamiento dinámico descrito por las salidas del modelo reducido (con color rojo) y el modelo linealizado (con color verde). Es posible observar que las dinámicas de las salidas del modelo linealizado son aproximadas a las del modelo reducido ante variaciones de pequeña señal.

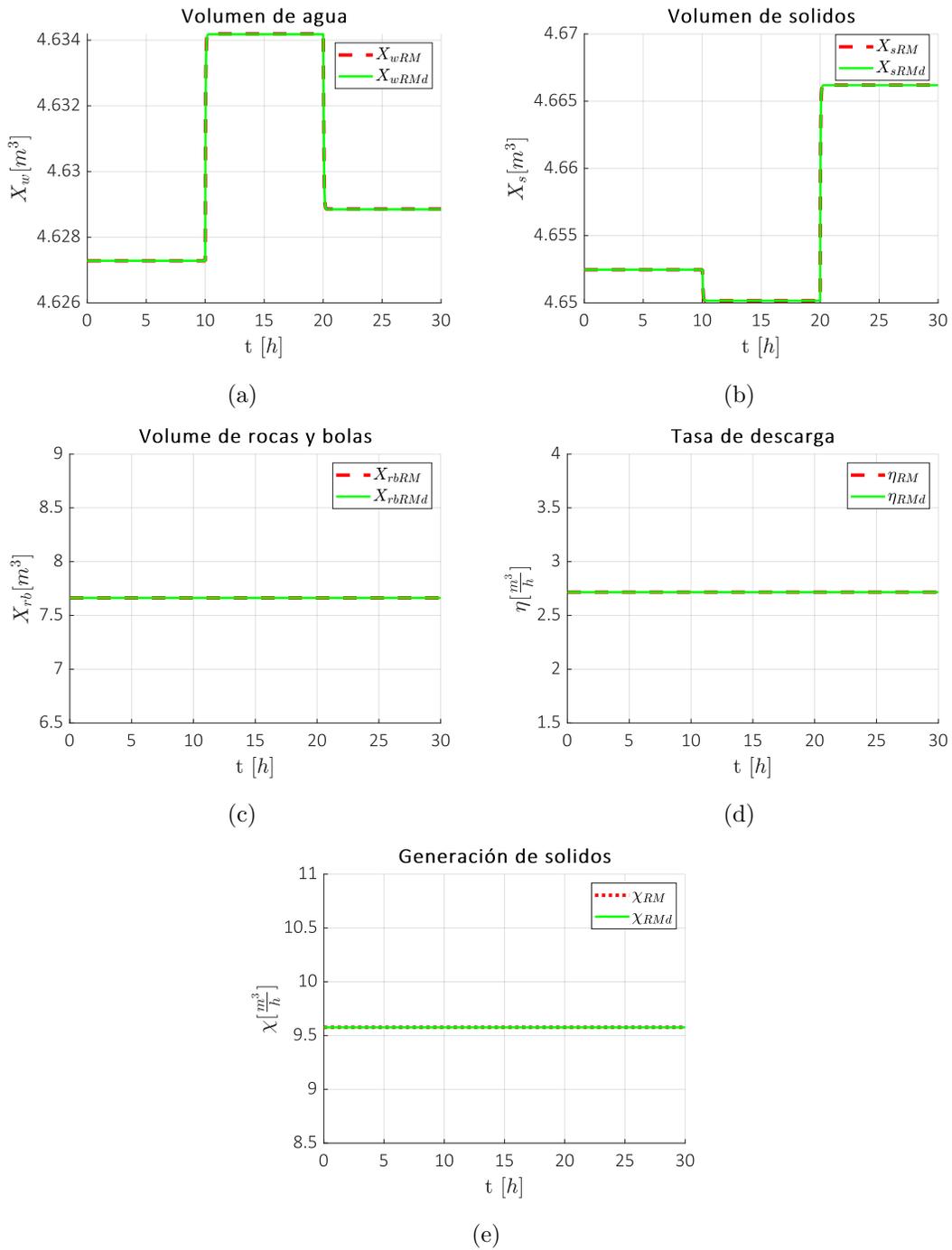


Figura 4-3: Estados del modelo reducido

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 4-3 se muestra el comportamiento dinámico descrito por los estados del modelo reducido (con color rojo) y el modelo linealizado (con color verde). En este caso también es posible observar que la dinámica de los estados del modelo linealizado es

aproximado al del modelo reducido ante variaciones de pequeña señal. Se puede ver que el punto de operación encontrado es un punto de equilibrio, debido a que el comportamiento dinámico de las salidas y estados del sistema se mantiene en estado estacionario durante las primeras 10 horas. En segundo lugar, el periodo de muestreo calculado es suficiente para representar todas las dinámicas del modelo reducido durante el proceso de linealización. En secciones posteriores se utilizará el periodo de muestreo obtenido para realizar una discretización en línea del modelo reducido con el fin de realizar el cálculo de un filtro de Kalman extendido discreto.

4.1.2. Discretización del modelo ampliado

Al igual que en el caso anterior para obtener un modelo discretizado del modelo ampliado se procede a obtener primero un modelo linealizado. El punto de equilibrio para el modelo ampliado también fue obtenido con el comando *fsolve* de MatLab®, partiendo de la condición inicial propuesta por los autores en [11] y teniendo en cuenta que $x = [x_w, x_s, x_r, x_b]^T$ es el vector de estados; $u = [V_{wi}, V_{si}, V_{ri}, V_{bi}]^T$ es el vector de entradas, $y = [J_T, Q, \rho_Q]^T$ es el vector de salidas:

$$u_{ss} = \begin{bmatrix} 116,6400 \\ 107,6988 \\ 9,5762 \\ 0,7235 \end{bmatrix}; \quad x_{ss} = \begin{bmatrix} 4,6293 \\ 4,6545 \\ 1,7941 \\ 5,8688 \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

Al aplicar el método de linealización por aproximación lineal con *series de Taylor* en el modelo descrito en la sección 3.1.3, se obtiene el siguiente modelo linealizado en variables de desviación:

$$\Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} -63,4406 & 38,0374 & 0 & 0 \\ -36,5247 & 9,5709 & 3,9517 & 0,6779 \\ -1,9280 & 3,4774 & -3,9517 & -0,6779 \\ -0,1457 & 0,1852 & 0,0272 & -0,0893 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta u \quad (4-8)$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 0,0169 & 0,0169 & 0,0169 & 0,0169 \\ 101,8933 & -51,0857 & 0 & 0 \\ -0,1188 & 0,1182 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta u \quad (4-9)$$

Nuevamente para obtener periodo de muestreo adecuado para discretización se analizó las dinámicas de los polos dominantes la matriz A del modelo linealizado 4-8. El vector de valores propios de la matriz A se muestra a continuación:

$$\text{eig}(A) = \begin{bmatrix} -27,3691 + 7,9559i \\ -27,3691 - 7,9559i \\ -3,0782 \\ -0,0943 \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

De la ecuación 4-10 se analiza que el polo que posee la dinámica más rápida posee su parte real en $-27,3691$ y además dispone de un tiempo de establecimiento aproximado de $\tau = 0,0365h$. Ahora bien, teniendo en cuenta el *teorema del muestreo de Nyquist - Shannon*, utilizando una proporción de $\frac{\tau}{10}$, se obtiene que con un periodo de muestreo de aproximado de $0,002h$ es adecuado para la discretización del modelo ampliado y además es el mismo que para el modelo reducido.

Finalmente, se obtiene un modelo discretizado utilizando un retenedor de orden cero para modelo linealizado de las ecuaciones 4-8 y 4-9. El modelo dicretizado se muestra a continuación:

$$\Delta x_{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0,878 & 0,072 & 0,0003 & 0 \\ -0,069 & 1,017 & 0,0079 & 0,001 \\ -0,004 & 0,007 & 0,9922 & -0,001 \\ 0 & 0 & 0 & 0,910 \end{bmatrix} \Delta x_{(k)} + 1e^{-2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Delta u_{(k)} \quad (4-11)$$

$$\Delta y_{(k)} = \begin{bmatrix} 0,0169 & 0,0169 & 0,0169 & 0,0169 \\ 101,893 & -51,085 & 0 & 0 \\ -0,119 & 0,118 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta x_{(k)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta u_{(k)} \quad (4-12)$$

Al igual que en el caso anterior también es necesario verificar el comportamiento del modelo linealizado obtenido. Para esto se realiza una simulación con las siguientes condiciones de operación para ambos sistemas:

- Periodo de muestreo de $T_s = 0,002h$ y tiempo total de simulación de $T_{sym} = 80h$, ver Figura 4-4.
- Se inicia la simulación en un punto de operación, donde los estados del sistemas se encuentran en estado estacionario durante las primeras 5 horas.

- A las 5 horas se realiza un cambio de tipo escalón en el flujo de alimentación de agua (V_{wi}) equivalente a +5 % de su punto de operación y se mantiene en el mismo valor durante el resto del tiempo de simulación, ver Figura 4.4(a).
- A las 35 horas se realiza un cambio tipo escalón en el flujo de alimentación de solidos (V_{si}) y rocas (V_{ri}) del molino equivalente a +5 % de su punto de operación, donde luego se mantiene constante durante el resto del tiempo de simulación, ver Figura 4.4(b) y Figura 4.4(c).
- El flujo de alimentación de bolas (V_{bi}) del molino se mantuvo en el punto de operación durante todo el tiempo de simulación, ver Figura 4.4(d).

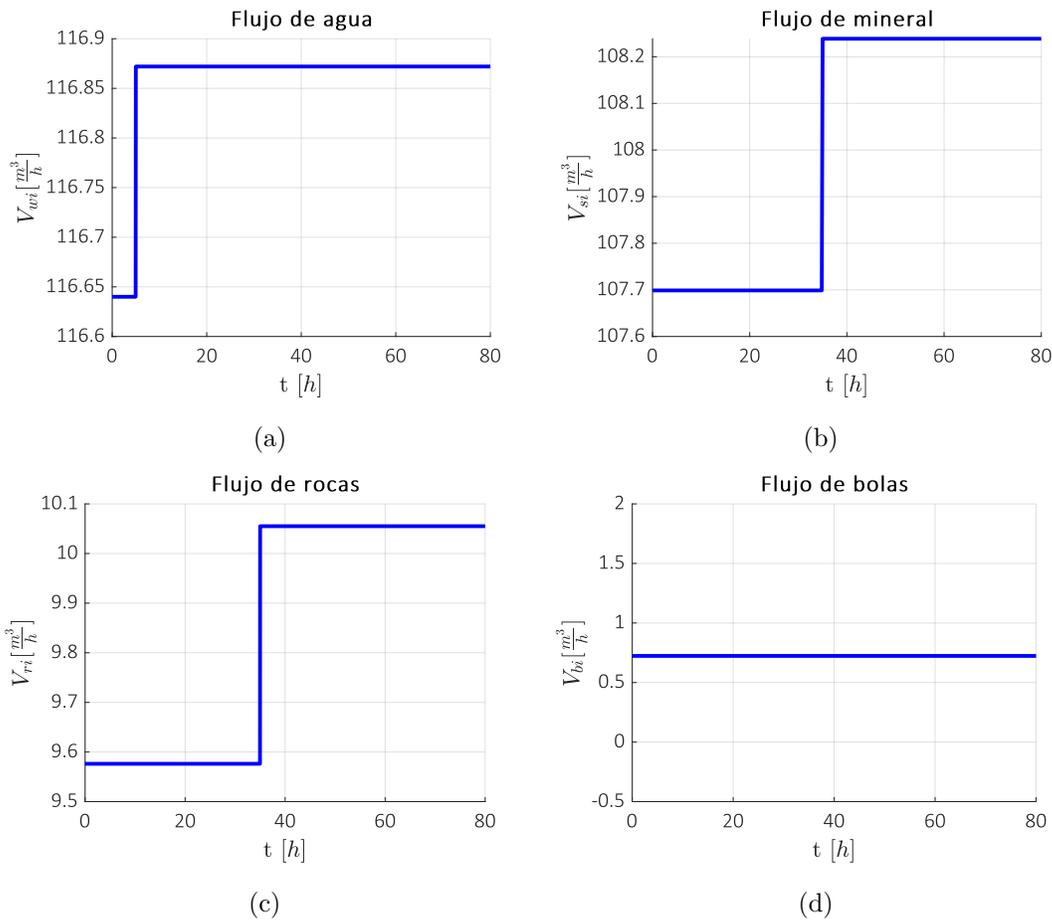


Figura 4-4: Entradas del modelo ampliado

Fuente: Elaboración propia.

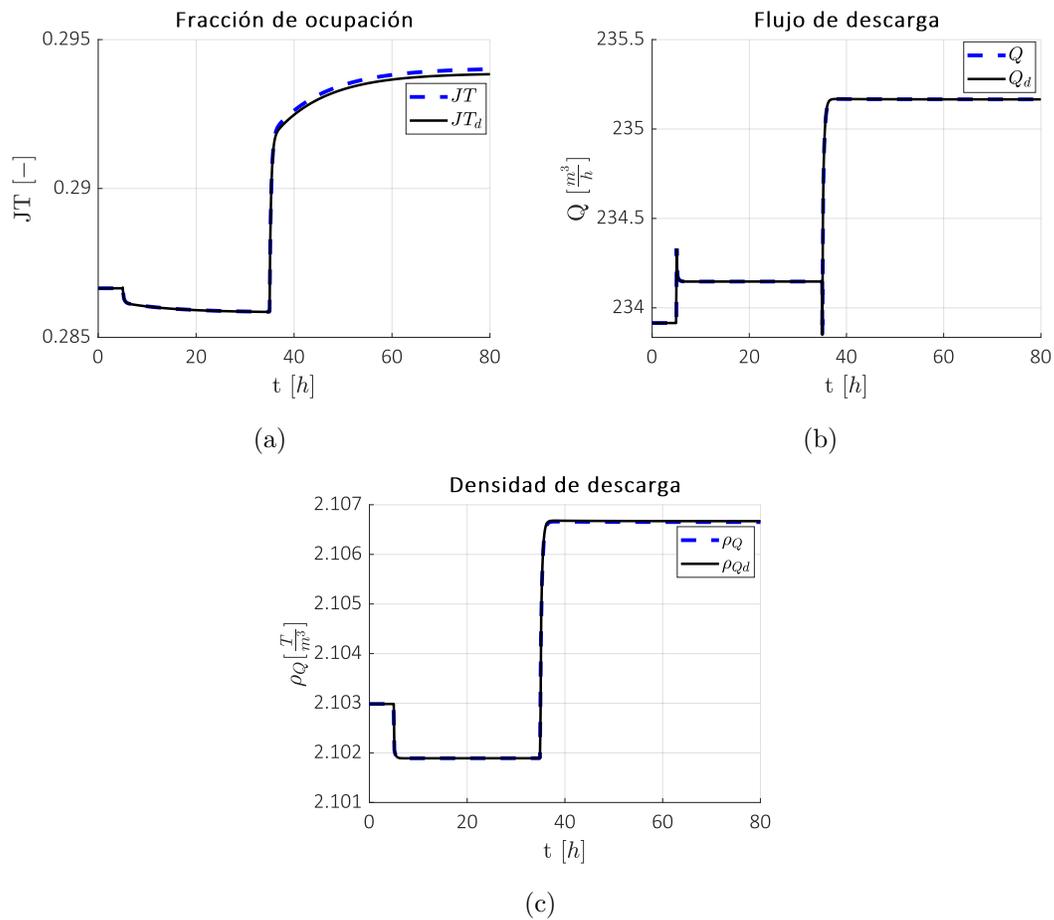


Figura 4-5: Salidas del modelo ampliado

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 4-5 se muestra el comportamiento dinámico descrito por las salidas del modelo ampliado (con color azul) y el modelo linealizado (con color negro). Es posible observar que las dinámicas de las salidas del modelo linealizado se aproximan a las del modelo ampliado ante variaciones de pequeña señal.

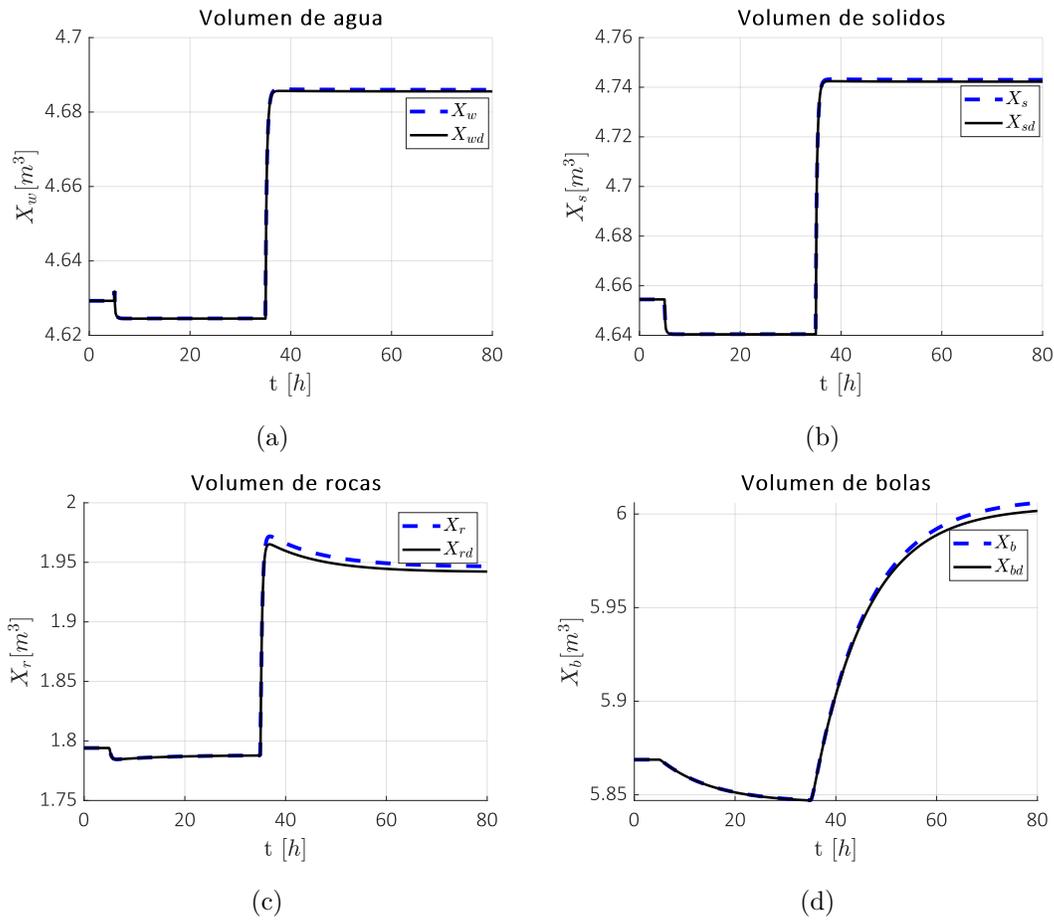


Figura 4-6: Estados del modelo ampliado

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 4-6 se muestra el comportamiento dinámico descrito por los estados del modelo ampliado (con color azul) y el modelo linealizado (con color negro). En este caso también es posible observar que la dinámica de los estados del modelo linealizado se aproxima a la del modelo ampliado ante variaciones de pequeña señal. Se puede además ver que el punto de operación encontrado es un punto de equilibrio debido a que el comportamiento dinámico de las salidas y los estados del sistema se mantiene en estado estacionario durante las primeras 5 horas. En segundo lugar, el periodo de muestreo calculado es suficiente para representar todas las dinámicas del modelo reducido durante el proceso de linealización. En las secciones posteriores de este documento utilizaremos el periodo de muestreo obtenido para realizar una discretización en línea del modelo ampliado con el fin de calcular un filtro de Kalman extendido discreto.

4.2. Diseño de un filtro de Kalman extendido para el modelo reducido

En esta sección utilizaremos el esquema de la Figura 4-7 para realizar el diseño del filtro de Kalman extendido.

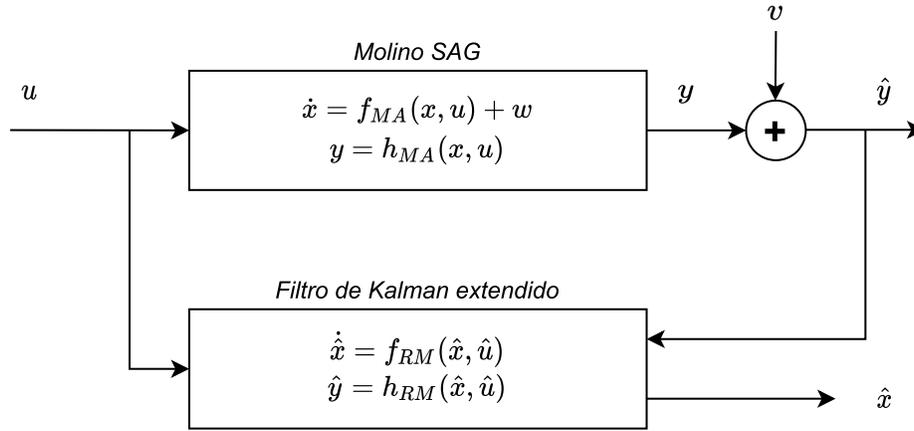


Figura 4-7: Esquema de diseño para filtro de Kalman extendido con modelo reducido.

Fuente: Elaboración propia.

Donde $x = [x_w, x_s, x_r, x_b]^T$ es el vector de estados correspondiente al modelo ampliado; $u = [V_{wi}, V_{si}, V_{ri}, V_{bi}]^T$ es el vector de entradas del modelo ampliado, $y = [J_T, Q, \rho_Q]^T$ es el vector de salidas del modelo ampliado, $\hat{x} = [x_w, x_s, x_{rb}, \eta, \chi]^T$ es el vector de estados estimado a partir del modelo reducido; $\hat{u} = [V_{wi}, V_{si}]^T$ es el vector de entradas del modelo reducido, $\hat{y} = [J_T, Q, \rho_Q, \rho_Q]^T$ es el vector de salidas estimadas a partir del modelo reducido. Ahora bien, el método propuesto por Kalman para el desarrollo de un filtro extendido discreto considera la siguiente estructura para las ecuaciones del sistema y de las mediciones:

$$x_k = f_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) \quad (4-13)$$

$$y_k = h_k(x_k, u_k, v_k) \quad (4-14)$$

Donde $w_k \sim (0, Q_k)$ corresponde al error de modelado y $v_k \sim (0, R_k)$ es el ruido de medición en todo instante de tiempo. Para llevar las ecuaciones 3-12 y 3-13 a la forma descrita en las ecuaciones 4-13 y 4-14 se utilizará el método de *Euler* para resolver ecuaciones diferenciales en tiempo discreto de la siguiente manera:

$$x_k = \begin{bmatrix} x_w(k-1) + \Delta T(V_{wi(k-1)} - \eta_{(k-1)}(x_w(k-1) + x_s(k-1)x_w(k-1))) \\ x_s(k-1) + \Delta T(V_{si(k-1)} - \eta_{(k-1)}(x_w(k-1) + x_s(k-1))x_s(k-1) + \chi_{(k-1)}) \\ x_{rb(k-1)} + \Delta T(0) \\ \eta_{(k-1)} + \Delta T(0) \\ \chi_{(k-1)} + \Delta T(0) \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} \frac{x_w(k-1) + x_s(k-1) + x_{rb(k-1)}}{v_{mill}} \\ \eta_{(k-1)}(x_w(k-1) + x_s(k-1))^2 \\ \frac{\rho_o x_s(k-1) + \rho_w x_w(k-1)}{x_s(k-1) + x_w(k-1)} \\ \frac{(\rho_o - \rho_w)(\chi_{(k-1)}x_w(k-1) + x_w(k-1)V_{si(k-1)} - x_s(k-1)V_{wi(k-1)})}{(x_s(k-1) + x_w(k-1))^2} \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

Donde, $x_k = [x_w(k), x_s(k), x_{rb(k)}, \eta(k), \chi(k)]^T$ es el vector de estados; $u_k = [V_{wi(k)}, V_{si(k)}]^T$ es el vector de entradas del sistema; $y_k = [J_T(k), Q(k), \rho_{Q(k)}, \rho_{\dot{Q}(k)}]^T$ el vector de salidas y ΔT es el periodo de muestreo obtenido en la sección 4.1.1. Ahora, teniendo en cuenta que cada medición del estado estimado a priori \hat{x}_k^- es dado por la ecuación 4-17 y la estimación de la matriz del error de covarianza a priori P_k^- evoluciona de acuerdo con las mediciones de las dinámicas no lineales mostrada en la ecuación 4-17.

$$\hat{x}_k^- = F_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0) \quad (4-17)$$

$$P_k^- = F_{k-1}P_{k-1}^+ F_{k-1}^T + L_{k-1}Q_{k-1}L_{k-1}^T \quad (4-18)$$

Donde, $F_{k-1} = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} |_{\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0}$, y $L_{k-1} = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial w_{k-1}} |_{\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0}$, la actualización del estado estimado a posteriori se encuentra definido en la ecuación 4-20 y la covarianza a posteriori P_k^+ es actualizada con la ecuación 4-21 por:

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + M_k R_k M_k^T)^{-1} \quad (4-19)$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - h_k(\hat{x}_k^-, u_k)) \quad (4-20)$$

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (4-21)$$

Ahora bien, se requieren los valores de los elementos de la diagonal de la matriz R del ruido de medición proveniente de los transmisores utilizados para las medidas directas o indirectas de las salidas. Para esto se realizó el análisis de la instrumentación requerida para la lectura de las salidas del sistema, los cuales se describen a continuación:

Medición flujo másico de solidos, rocas y bolas - Pesómetro para bandas transportadoras

El Archweigh Dual HP® Belt Scale es un sistema de pesaje en línea que ofrece la empresa Arch Environmental Equipment, INC. posee una alta precisión y es capaz de autoajustarse al movimiento de la banda transportadora debido a su diseño de ingeniería y a las celdas de carga de doble extremo patentadas de Arch [25].

Precisión: $\pm 0,25\%$ del valor medido.

Tiempo de respuesta: Configurable, el fabricante recomienda para aplicaciones generales un valor entre 1 – 20s.

Resolución: 0,0055t.

Intervalo de medición: 0 – 100 $\frac{t}{h}$.

Medición de lodos, agua de proceso - Caudalímetro para tubería

El Sitrans F M Transmag 2 es un caudalímetro electromagnético con campo alterno pulsante desarrollado por Siemens AG, ideal para aplicaciones difíciles como lodos de minería con partículas magnéticas o lodos pesados de minería. El caudalímetro completo consta de un sensor de caudal 911/E y del transmisor Sitrans F M Transmag 2 [26].

Precisión: $\pm 0,5\%$ del valor medido.

Tiempo de respuesta: Configurable el fabricante recomienda para aplicaciones generales 3s.

Resolución: Depende del diámetro del elemento primario de medida.

Intervalo de medición: Depende del diámetro del elemento primario de medida.

Medición indirecta de porcentaje de llenado - Transmisor de Peso

El transmisor de peso STC-2200 Advanced Series elaborado por la empresa Rice Lake permite, en compañía de las celdas de carga de torsión anular RTN elaboradas por HBM, la lectura de peso en diferentes de capacidades nominales (1 a 470 toneladas). Todas las celdas de carga mencionadas son compactas y, al mismo tiempo, extremadamente robustas con un elevado grado de protección (IP 68/IP 69K). Por tal motivo, son

idóneas para un amplio espectro de aplicaciones de pesaje para contenedores, grandes básculas de plataforma y construcción de básculas de vehículos e incluso aplicaciones en condiciones ambientales desfavorables [27]; [28].

Precisión: $\pm 0,05\%$ del valor medido.

Tiempo de respuesta: Configurable el fabricante recomienda para aplicaciones generales un valor entre 1 – 20s.

Resolución: 0,26t.

Intervalo de medición: 0 – 470t.

Medición de densidad de lodos - Densímetro para tubería

El medidor de densidad de lodos *Slurry Density Meter* - SDM es un densímetro que utiliza tecnología ultrasónica y se encuentra diseñado específicamente para aplicaciones de dragado y procesamiento de minerales. Fue patentado por la empresa Rhosonics. El SDM utiliza un sensor ultrasónico no intrusivo para medir la densidad en tiempo real de los lodos minerales en niveles de alta densidad y en tuberías muy grandes [29].

Precisión: $\pm 0,5\%$ del valor medido.

Tiempo de respuesta: Configurable el fabricante recomienda para aplicaciones generales un valor entre 5 – 20s.

Resolución: $0,0002 \frac{t}{m^3}$.

Intervalo de medición: $0,7 - 3,0 \frac{t}{m^3}$.

Cálculo de derivada densidad de lodos

Debido a que no existe un instrumento que permita medir la derivada de la densidad de lodos, se programa vía software un método numérico que permita aproximar esta señal a partir de la medición de la densidad de lodos. El método utilizado es *Aproximación por diferencias finitas* [30], como de muestra a continuación.

$$\dot{\rho}_{Q(k)} \approx \frac{\rho_{Q(k)} - \rho_{Q(k-1)}}{\Delta T} \quad (4-22)$$

Precisión: $\pm \Delta T^2$.

Tiempo de respuesta: Tiempo de muestreo del algoritmo.

Resolución: No aplica.

Intervalo de medición: No aplica.

Por lo tanto, con base en los datos anteriores:

$$R = 1e4 \begin{bmatrix} 0,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5\frac{m^3}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5\frac{t}{m^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,002\frac{t}{hm^3} \end{bmatrix}^2 \quad (4-23)$$

Adicionalmente, dado que el modelo reducido posee incertidumbre de modelado, obtenemos la matriz Q y la covarianza en el primer instante de tiempo P_0^+ partiendo de los valores suministrados por LeRoux en [11]:

$$Q = 1e3 \begin{bmatrix} 0,2m^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5m^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1m^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,12\frac{1}{hm^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{m^3}{h} \end{bmatrix}^2 \quad (4-24)$$

$$P_0^+ = \begin{bmatrix} 2m^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{1}{hm^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{m^3}{h} \end{bmatrix}^2 \quad (4-25)$$

Para la simulación del filtro de Kalman se usan las expresiones 4-17 a la 4-21.

4.3. Diseño de un filtro de Kalman extendido para el modelo ampliado

En esta sección utilizaremos el esquema de la Figura 4-8 para realizar el diseño del filtro de Kalman extendido.

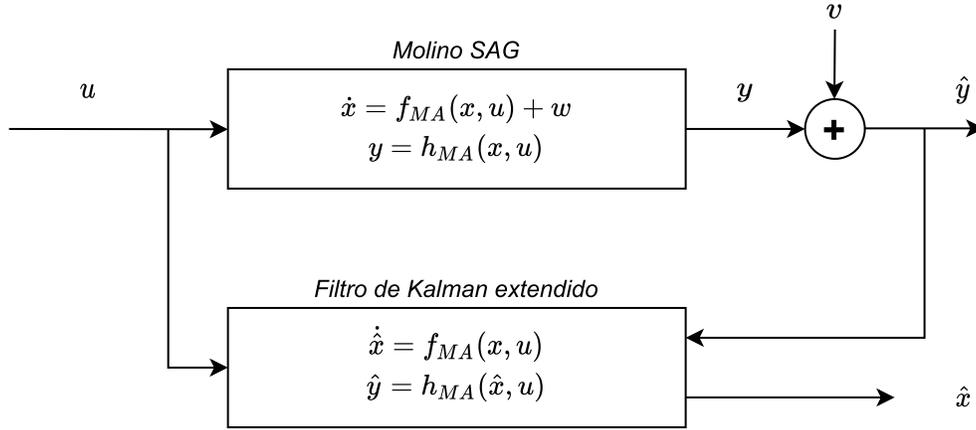


Figura 4-8: Esquema de simulación.

Fuente: Elaboración propia.

Donde $x = [x_w, x_s, x_r, x_b]^T$ es el vector de estados del modelo ampliado; $u = [V_{wi}, V_{si}, V_{ri}, V_{bi}]^T$ es el vector de entradas del modelo ampliado, $y = [J_T, Q, \rho_Q]^T$ es el vector de salidas del modelo ampliado, $\hat{x} = [x_w, x_s, x_r, x_b]^T$ es el vector de estados estimado a partir del modelo ampliado, $\hat{y} = [J_T, Q, \rho_Q]^T$ es el vector de salidas estimadas a partir del modelo ampliado. A continuación, nuevamente se utiliza el método propuesto por Kalman para el desarrollo de un filtro extendido discreto el cual ya fue explicado en la sección anterior. Sin embargo, en este caso se usan las ecuaciones 3-10 y 3-11 en conjunto con el método de *Euler* para transformar en línea el sistema de ecuaciones en el dominio del tiempo continuo al dominio del tiempo discreto quedando de la siguiente manera:

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{w(k-1)} + \Delta T(V_{wi(k-1)} - \varphi d_H x_{w(k-1)} (\frac{x_{w(k-1)}}{x_{s(k-1)} + x_{w(k-1)}})) \\ x_{s(k-1)} + \Delta T(V_{si(k-1)} - \varphi d_H x_{w(k-1)} (\frac{x_{s(k-1)}}{x_{s(k-1)} + x_{w(k-1)}}) + \frac{\varphi P_{mill} x_{r(k-1)}}{\rho_o k_r (x_{r(k-1)} + x_{s(k-1)})}) \\ x_{r(k-1)} + \Delta T(V_{ri(k-1)} - \frac{\varphi P_{mill} x_{r(k-1)}}{\rho_o k_r (x_{r(k-1)} + x_{s(k-1)})}) \\ x_{b(k-1)} + \Delta T(V_{bi(k-1)} - \frac{\varphi P_{mill} x_{b(k-1)}}{k_b [\rho_o (x_{r(k-1)} + x_{s(k-1)}) + \rho_b x_{b(k-1)}]}) \end{bmatrix} \quad (4-26)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} \frac{x_{w(k-1)} + x_{s(k-1)} + x_{r(k-1)} + x_{b(k-1)}}{v_{mill}} \\ \varphi d_H x_{w(k-1)} \\ \frac{\rho_o x_{s(k-1)} + \rho_w x_{w(k-1)}}{x_{s(k-1)} + x_{w(k-1)}} \end{bmatrix} \quad (4-27)$$

Donde, $x_k = [x_w(k), x_s(k), x_r(k), x_b(k)]^T$ es el vector de estados; $u_k = [V_{wi(k)}, V_{si(k)}, V_{ri(k)}, V_{bi(k)}]^T$ es el vector de entradas del sistema; $y_k = [J_{T(k)}, Q_{(k)}, \rho_{Q(K)}]^T$ el vector de salidas y ΔT es el periodo de muestreo obtenido en la sección 4.1.2.

Ahora bien, para la obtención de los valores diagonales de la matriz R del ruido de medición proveniente de los transmisores utilizados para las medidas directas o indirectas de las salidas, se usa el análisis de la instrumentación requerida para la lectura de las salidas del sistema, los cuales también fueron descritos en la sección anterior. Sin embargo, para este modelo no es necesario utilizar un método numérico para la obtención de una de las salidas, ya que no se requiere de esta variable. Por lo tanto:

$$R = 1e3 \begin{bmatrix} 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 \frac{m^3}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \frac{t}{m^3} \end{bmatrix}^2 \quad (4-28)$$

Adicionalmente, dado que el modelo ampliado también tiene incertidumbre de modelado, se obtiene la matriz Q y la covarianza en el primer instante de tiempo P_0^+ desde los valores suministrados por LeRoux en [11]:

$$Q = 1e3 \begin{bmatrix} 1m^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1m^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1m^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1m^3 \end{bmatrix}^2 \quad (4-29)$$

$$P_0^+ = \begin{bmatrix} 2m^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2m^3 \end{bmatrix}^2 \quad (4-30)$$

Para la simulación del filtro de Kalman se usan las expresiones 4-17 a la 4-21, pero las matrices F , G y H se toman como los Jacobianos del modelo no lineal ampliado 3-13 y 3-14.

4.4. Resumen del capítulo

En este capítulo se determinó un modelo discretizado para un modelo semifísico de base fenomenológica de un molino semiautógeno. Para ello, se partió de la linealización de

dicho modelo, siendo necesario obtener un punto de equilibrio con el fin de obtener un periodo de muestreo. El modelo discretizado obtenido fue probado mediante simulación y luego se diseñó un estimador de estados no lineal del tipo filtro de Kalman extendido discreto de modo que fuera posible estimar los estados no medibles. La matriz de ruido de medición fue obtenida a partir de la hoja de datos de algunos sensores disponibles en el mercado, aptos para el proceso de molienda con molino semiautógeno. La matriz de error de modelado y la covarianza en el primer instante de tiempo se obtienen de datos disponibles en la literatura del modelo semifísico de base fenomenológica utilizado. En el siguiente capítulo se analizará por medio de simulación el funcionamiento del estimador de estados obtenido tanto para el modelo reducido como para el modelo ampliado.

Capítulo 5

Simulación y análisis de resultados

En este capítulo se realiza el análisis de los resultados de simulación obtenido para los estimadores de estados desarrollados en el capítulo 4 para el proceso de molienda con molino semiautógeno utilizando la metodología de *Rudolf E. Kalman*. Este capítulo se encuentra distribuido de la siguiente manera: En primer lugar, se realiza la simulación y el análisis de resultados con el filtro de Kalman extendido y modelo reducido. En segundo lugar, se realiza la simulación y el análisis de resultado con el filtro de Kalman extendido y modelo ampliado. Finalmente, se realiza un análisis de implementabilidad de los filtros de Kalman extendido.

5.1. Simulación y análisis de resultados con el filtro de Kalman extendido y modelo reducido

Con el fin de realizar una correcta validación del filtro de Kalman extendido diseñado a partir del modelo reducido, se utiliza el modelo ampliado como planta base para la estimación. En la Figura 4-7 se puede visualizar de manera gráfica el esquema utilizado durante la validación. Los valores de los parámetros de simulación para el modelo ampliado fueron tomados del artículo de LeRoux en [11].

A continuación se listan condiciones de operación para las entradas del modelo ampliado y el estimador de estados:

- Periodo de muestreo de $T_s = 0,002h$ y tiempo total de simulación de $T_{sym} = 120h$, ver Figura 5-1.
- Se inicia la simulación en un punto de operación, donde los estados del modelo ampliado $([x_w, x_s, x_r, x_b]^T)$ se encuentran en estado estacionario durante las pri-

meras 30 horas, pero el estimador se encuentra en condiciones iniciales diferentes a las de modelo ampliado.

- Se realiza cambio de tipo sinusoidal en el flujo de alimentación de agua (V_{wi}) equivalente a $\pm 1\%$ de su punto de operación y se mantiene en el mismo valor durante el resto del tiempo de simulación, ver Figura 5.1(a). En el mismo instante de tiempo se realiza una variación tipo escalón en el flujo de alimentación de mineral (V_{si}) y rocas (V_{ri}) equivalente a -2% de su punto de operación y se mantiene oscilando con un comportamiento sinusoidal alrededor de ese valor con una amplitud del $\pm 0,01\%$ durante el resto del tiempo de simulación, ver Figura 5.1(b) y 5.1(c).
- El flujo de alimentación de bolas (V_{bi}) del molino se mantuvo en el punto de operación durante todo el tiempo de simulación, ver Figura 5.1(d).
- Las salidas medibles del sistema ($[J_T, Q, \rho_Q, \dot{\rho}_Q]^T$) poseen ruido de medición con las magnitudes especificadas en el capítulo 4.2.

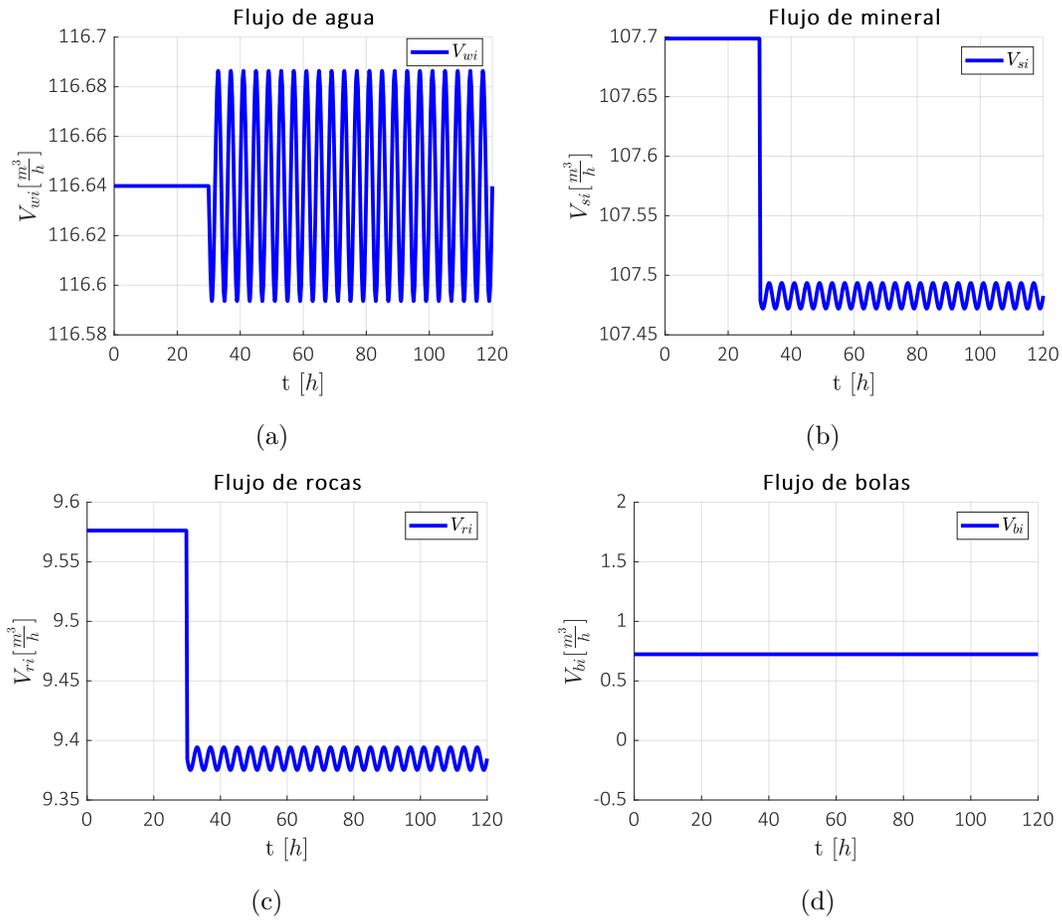


Figura 5-1: Resultado filtro de Kalman extendido y modelo reducido entradas.

Fuente: Elaboración propia.

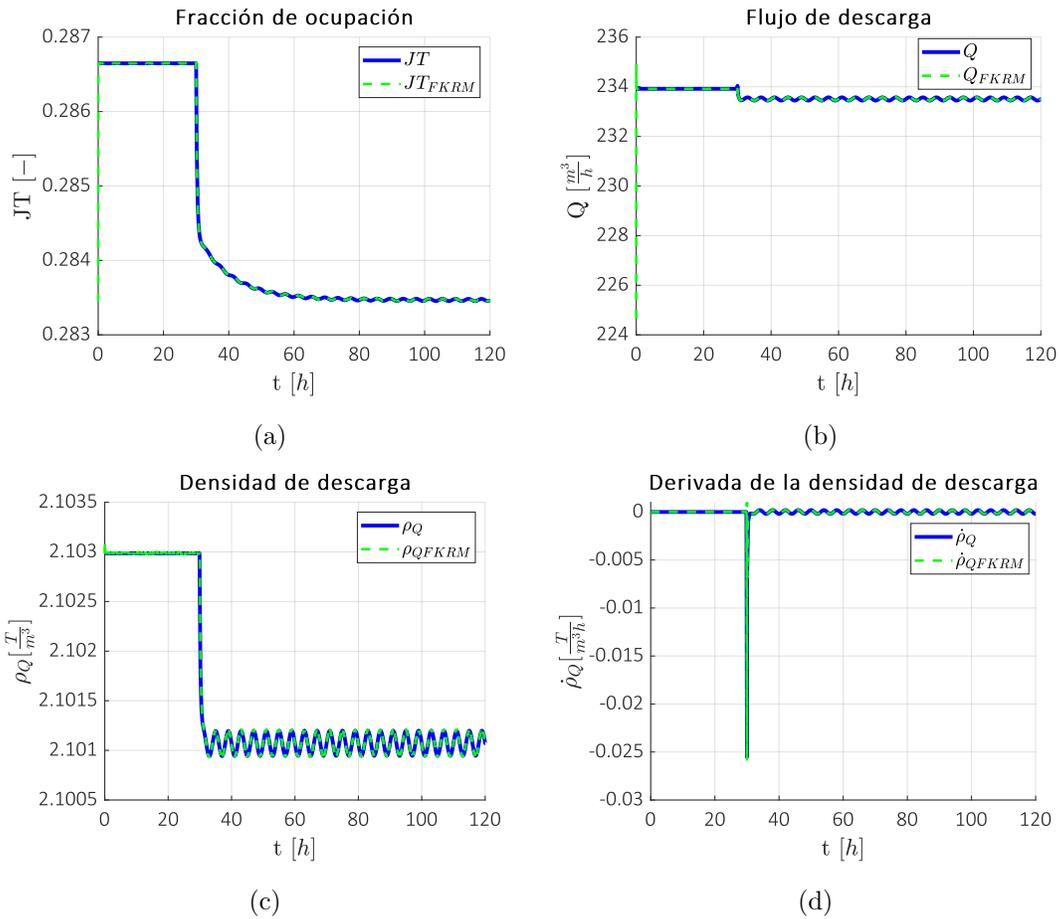


Figura 5-2: Resultados filtro de Kalman extendido y modelo reducido estimación de salidas.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 5-2 se muestra el comportamiento dinámico descrito por las salidas del modelo ampliado (con color azul) y del filtro de Kalman extendido discreto y modelo reducido (con color verde). Como es posible observar, el filtro obtenido en la sección 4.2 es capaz de sincronizar las salidas medibles del sistema ampliado con un error despreciable para las condiciones de operación asignadas.

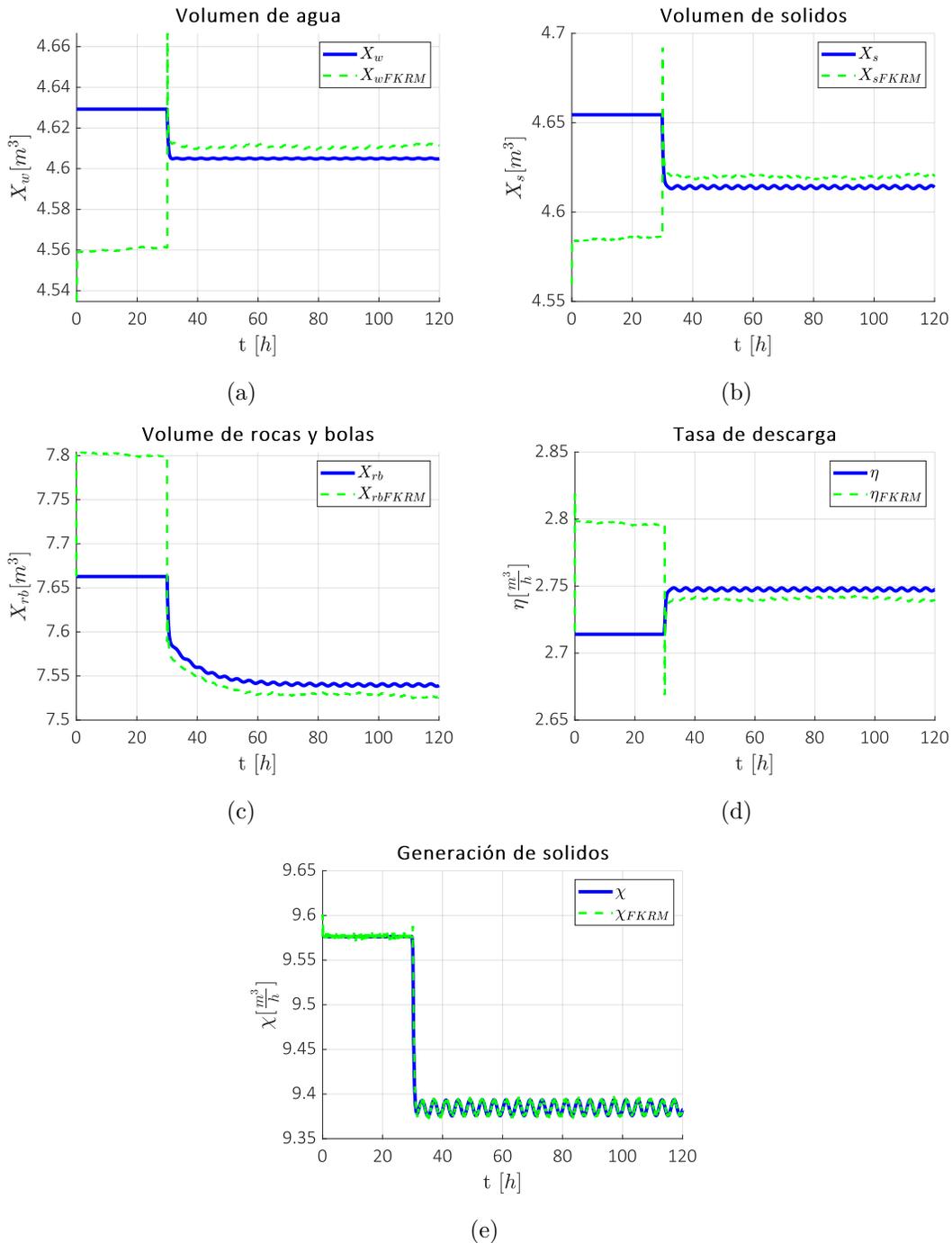


Figura 5-3: Resultados filtro de Kalman extendido y modelo reducido estimación de estados del sistema.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 5-3 se muestra el comportamiento dinámico descrito por los estados del modelo ampliado (con color azul) y del filtro de Kalman extendido discreto y modelo

reducido (con color verde). Como es posible observar, el filtro obtenido en la sección 4.2 en el intervalo de tiempo de $0 - 20h$ no es capaz de sincronizar los estados del sistema ampliado y mantiene un error de estado estacionario para las condiciones de operación asignadas. Esto se debe a que la salida ρ_Q en ese intervalo de tiempo se encuentra en un valor igual a $0 \frac{T}{m^3h}$. En la sección 3.2.2 se concluyó que el modelo reducido pierde observabilidad si la densidad de la salida se mantiene estable, por lo tanto el estimador no es capaz de sincronizar el modelo ampliado si no posee entradas de excitación persistente. Además, luego de los cambios realizados en el intervalo de $20 - 120h$ el estimador permite aproximar los estados del modelo ampliado, resultado de ingresar cambios de excitación persistente en las entradas del sistema. Finalmente, dado que luego de estabilizarse todas las dinámicas aun persiste un error en estado estacionario notable en los valores estimados del sistema, se procede a utilizar la raíz de la desviación cuadrática media (*RMSE* en inglés) como método para estimar la precisión con la que este filtro de Kalman predice los estados del modelo ampliado.

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\Lambda - \hat{\Lambda})^2}{M}} \tag{5-1}$$

La ecuación 5-1 describe matemáticamente el cálculo de la raíz de la desviación cuadrática media, donde Λ es el valor real, $\hat{\Lambda}$ es el valor estimado y M es el número de datos estimados. Teniendo en cuenta que mientras menores sean los valores del *RMSE* la estimación tendrá un mejor ajuste, los valores obtenidos se pueden observar en la Tabla 5-1.

Tabla 5-1: Raíz de la desviación cuadrática media de la estimación con filtro de Kalman extendido y modelo reducido.

	X_w	X_s	X_{rb}	η	χ
<i>RMSE</i>	3,49 %	3,51 %	6,99 %	0,25 %	4,18 %

Al analizar los valores de la Tabla 5-1 es posible observar que todos los estados estimados, excepto la tasa de descarga (η), poseen una desviación superior al 3 %. Adicionalmente, en el caso del volumen de rocas y bolas (X_{rb}) se posee una desviación superior al 5 %. Cuantitativamente el filtro obtenido posee un desempeño aceptable para una estimación numérica de los estados del proceso teniendo en cuenta que presenta limitaciones en termino de observabilidad y presenta una desviación alta (superior al 5%) en alguna de sus variables estimadas. Sin embargo, es posible que no sea apto para su uso con sistemas de control avanzado.

5.2. Simulación y análisis de resultados con el filtro de Kalman extendido y modelo ampliado

Con el fin de realizar una correcta validación del filtro de Kalman extendido diseñado a partir del modelo ampliado, se utiliza el modelo ampliado como planta base para la estimación. En la Figura 4-8 se puede visualizar de manera gráfica el esquema utilizado durante la validación. Los valores de los parámetros de simulación para el modelo ampliado fueron tomados del artículo de LeRoux en [11].

La validación del modelo se plantea en dos escenarios. En el primer caso se valida la operación del filtro de Kalman si modificaciones de parámetros, como se realizó la validación del filtro de Kalman con modelo reducido. En el segundo caso, se pretende observar el comportamiento del filtro de Kalman luego de un cambio de parámetros en el modelo del molino SAG.

Escenario 1: A continuación se listan condiciones de operación para las entradas del modelo ampliado y el estimador de estados:

- Periodo de muestreo de $T_s = 0,002h$ y tiempo total de simulación de $T_{sym} = 80h$, ver Figura 5-4.
- Se inicia la simulación en un punto de operación, donde los estados del modelo ampliado $([x_w, x_s, x_r, x_b]^T)$ se encuentran en estado estacionario durante las primeras 30 horas, pero el estimador se encuentra en condiciones iniciales diferentes a las de modelo ampliado.
- Se realiza cambio de tipo sinusoidal en el flujo de alimentación de agua (V_{wi}) equivalente a $\pm 1\%$ de su punto de operación y se mantiene en el mismo valor durante el resto del tiempo de simulación, ver Figura 5.4(a). En el mismo instante de tiempo se realiza una variación tipo escalón en el flujo de alimentación de mineral (V_{si}) y rocas (V_{ri}) equivalente a -2% de su punto de operación y se mantiene oscilando con un comportamiento sinusoidal alrededor de ese valor con una amplitud del $\pm 0,1\%$ durante el resto del tiempo de simulación, ver Figura 5.4(b) y 5.4(c).
- El flujo de alimentación de bolas (V_{bi}) del molino se mantuvo en el punto de operación durante todo el tiempo de simulación, ver Figura 5.4(d).
- Las salidas medibles del sistema $([J_T, Q, \rho_Q]^T)$ poseen ruido de medición con las magnitudes especificadas en el capítulo 4.3.

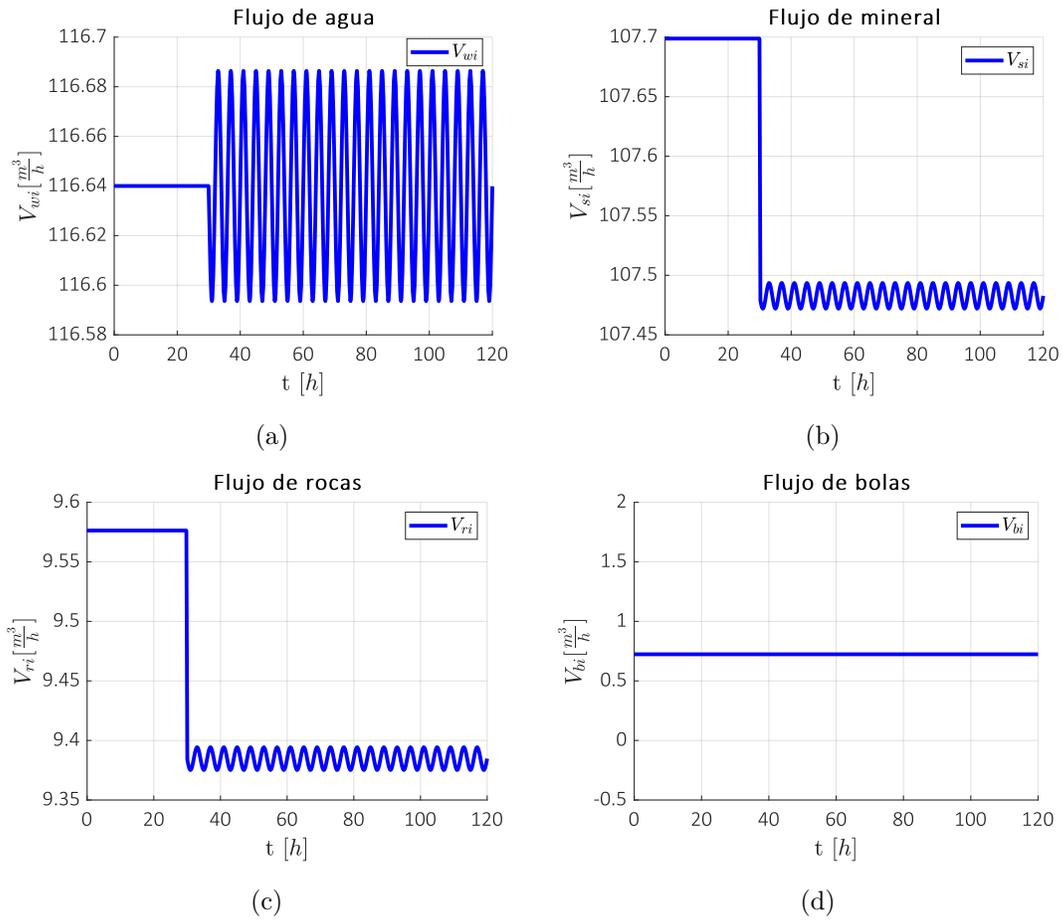


Figura 5-4: Resultados filtro de Kalman extendido y modelo ampliado entradas.

Fuente: Elaboración propia.

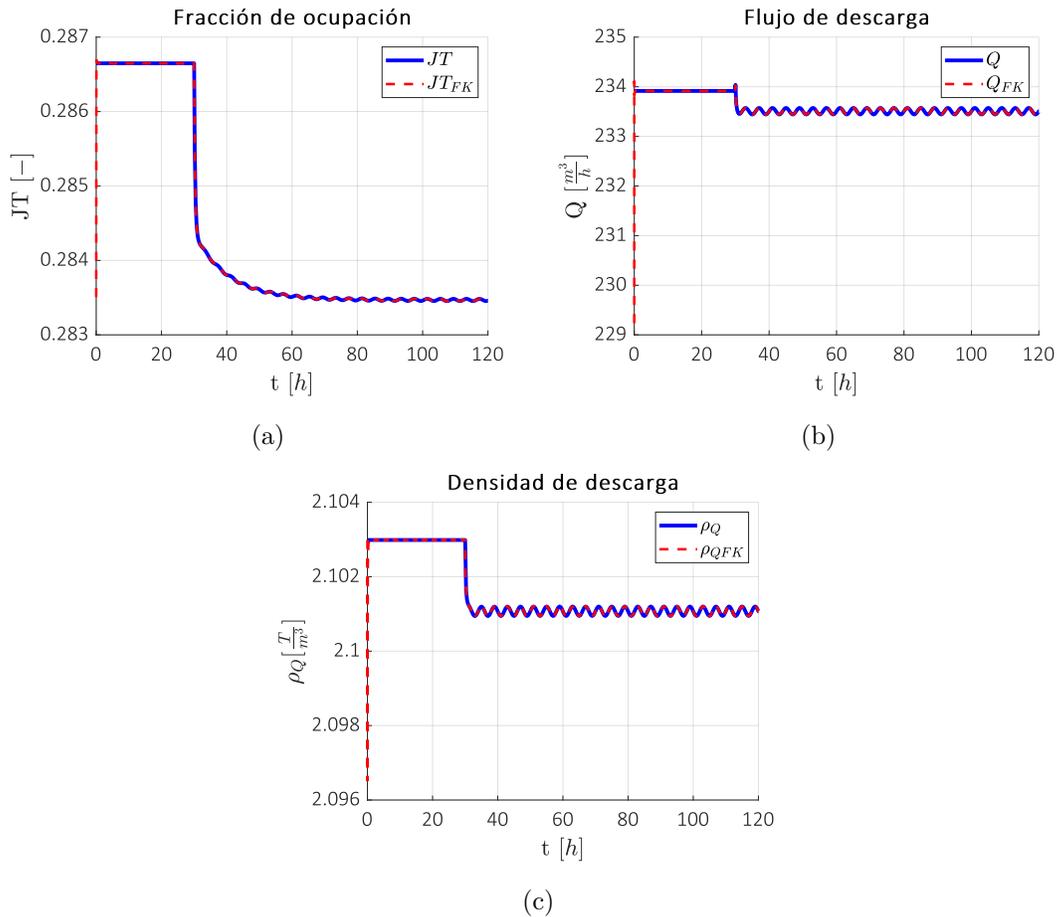


Figura 5-5: Resultados filtro de Kalman extendido y modelo ampliado estimación de salidas.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 5-5 se muestra el comportamiento dinámico descrito por las salidas del modelo ampliado (con color azul) y del filtro de Kalman extendido discreto y modelo ampliado (con color rojo). Como es posible observar, el filtro obtenido en la sección 4.3 es capaz de sincronizar las salidas medibles del sistema ampliado con un error despreciable para las condiciones de operación asignadas.

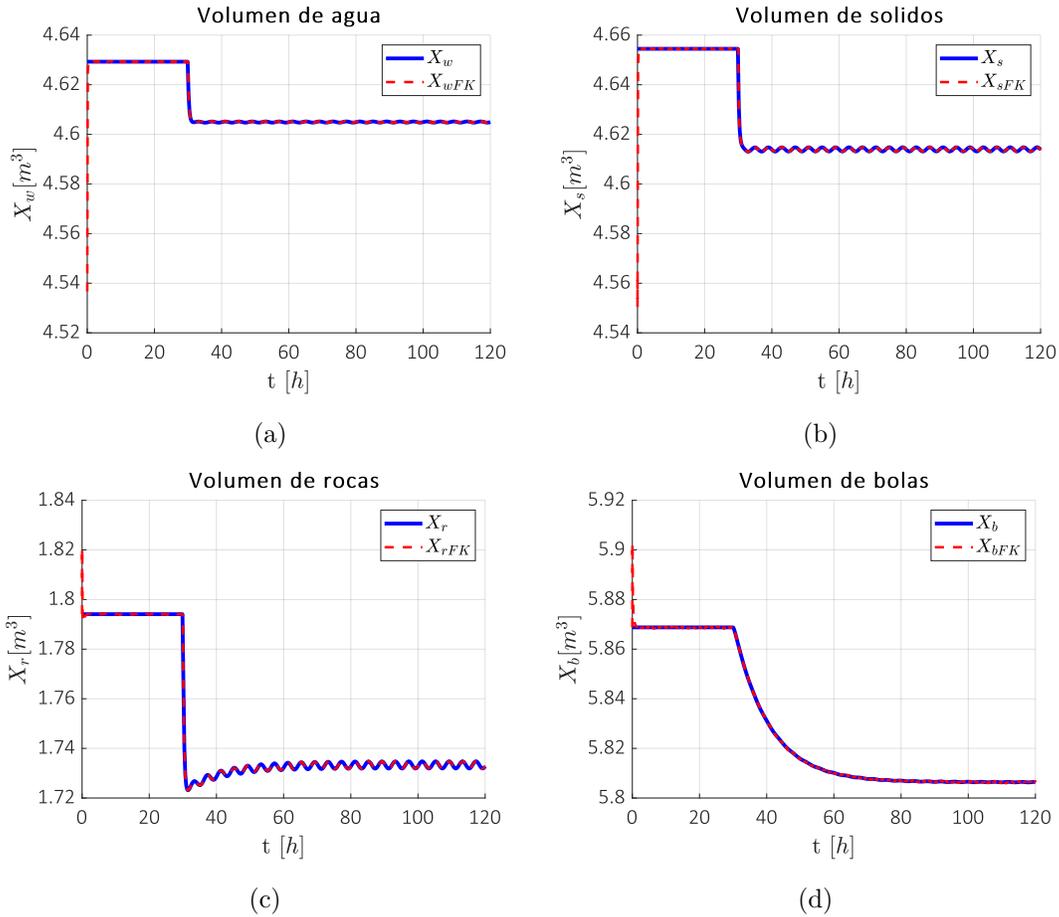


Figura 5-6: Resultados filtro de Kalman extendido y modelo ampliado estimación de estados.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 5-6 se muestra el comportamiento dinámico descrito por los estados del modelo ampliado (con color azul) y del filtro de Kalman extendido discreto y modelo reducido (con color rojo). Como es posible observar, el filtro obtenido en la sección 4.3 en el intervalo de tiempo de $0 - 20h$ es capaz de sincronizar los estados del sistema ampliado sin error de estado estacionario para las condiciones de operación asignadas. En la sección 3.2.3 se concluyó que el modelo ampliado no pierde observabilidad en estado estacionario, por lo tanto, el estimador es capaz de tener buenos resultados sin necesidad de tener entradas de excitación persistente. Además, luego de los cambios realizados en el intervalo de $20 - 120h$, el estimador permite sincronizar los estados del modelo ampliado. Finalmente, al igual que en el caso anterior se procede a utilizar el *RMSE* como método para estimar la precisión con la que el filtro de Kalman predice los estados del modelo ampliado, los valores obtenidos se pueden observar en la Tabla

5-2:

Tabla 5-2: Raíz de la desviación cuadrática media de la estimación con filtro de Kalman extendido y modelo ampliado.

	X_w	X_s	X_r	X_b
<i>RMSE</i>	0,08 %	0,14 %	0,06 %	0,09 %

Al analizar los valores de la Tabla **5-2** es posible observar que todos los estados estimados poseen una desviación inferior al 0,2 %. Lo cual lo hace apto para su uso con sistemas de control avanzado.

Escenario 2: A continuación se listan condiciones de operación para las entradas del modelo ampliado y el estimador de estados:

- Periodo de muestreo de $T_s = 0,002h$ y tiempo total de simulación de $T_{sym} = 80h$, ver Figura **5-7**.
- Se inicia la simulación en un punto de operación, donde los estados del modelo ampliado $([x_w, x_s, x_r, x_b]^T)$ se encuentran en estado estacionario durante las primeras 30 horas, pero el estimador se encuentra en condiciones iniciales diferentes al modelo ampliado.
- Se realiza un cambio de tipo sinusoidal en el flujo de alimentación de agua (V_{wi}) equivalente a $\pm 1\%$ de su punto de operación y se mantiene en el mismo valor durante el resto del tiempo de simulación, ver Figura 5.7(a). En el mismo instante de tiempo se realiza una variación tipo escalón en el flujo de alimentación de mineral (V_{si}) y rocas (V_{ri}) equivalente a -2% de su punto de operación y se mantiene oscilando con un comportamiento sinusoidal alrededor de ese valor con una amplitud del $\pm 0,1\%$, ver Figura 5.7(b) y 5.7(c).
- Se realiza un cambio paramétrico en la densidad del mineral que ingresa al molino (ρ_o) equivalente al $0,98\%$ de su valor inicial y se mantiene durante el resto del tiempo de simulación. Se observa un cambio el flujo de alimentación de mineral (V_{si}) y rocas (V_{ri}) debido que dependen directamente de la densidad de alimentación, ver Figura 5.7(b) y 5.7(c).
- El flujo de alimentación de bolas (V_{bi}) del molino se mantuvo en el punto de operación durante todo el tiempo de simulación, ver Figura 5.7(d).

- Las salidas medibles del sistema ($[J_T, Q, \rho_Q]^T$) poseen ruido de medición con las magnitudes especificadas en el capítulo 4.3.

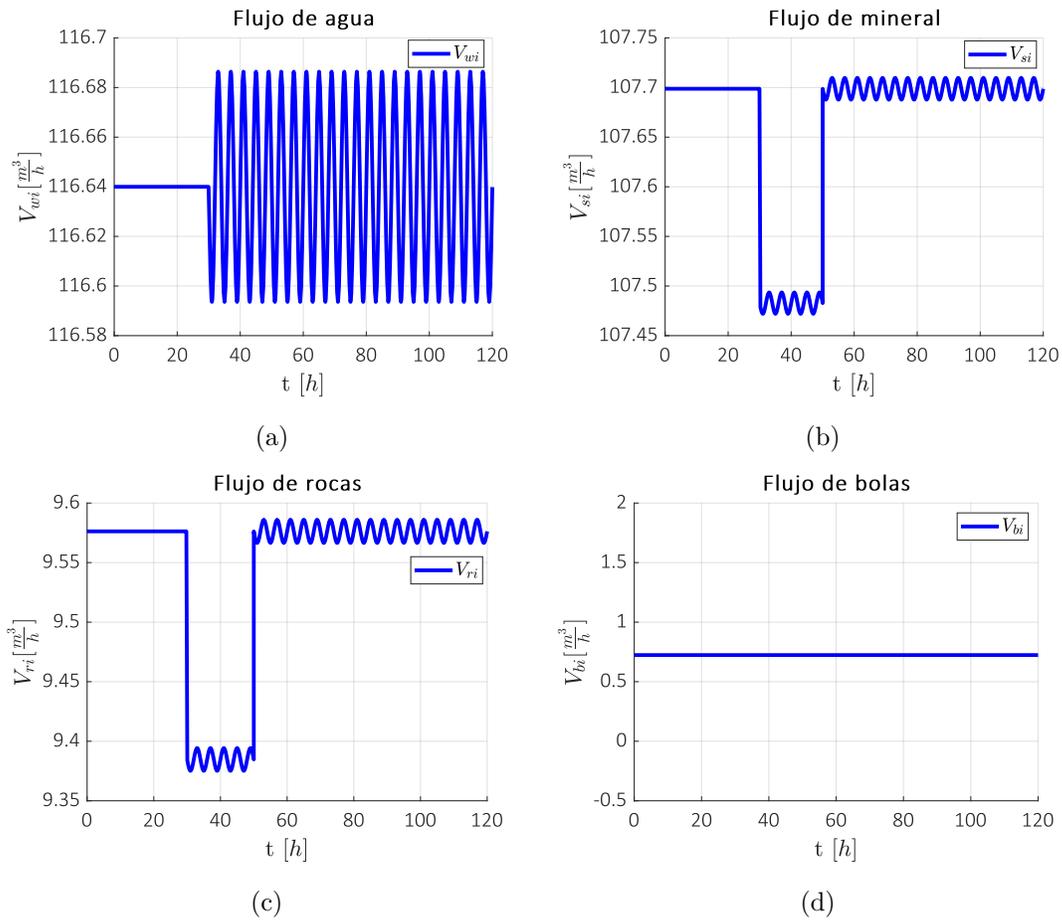


Figura 5-7: Resultados filtro de Kalman extendido y modelo ampliado entradas.

Fuente: Elaboración propia.

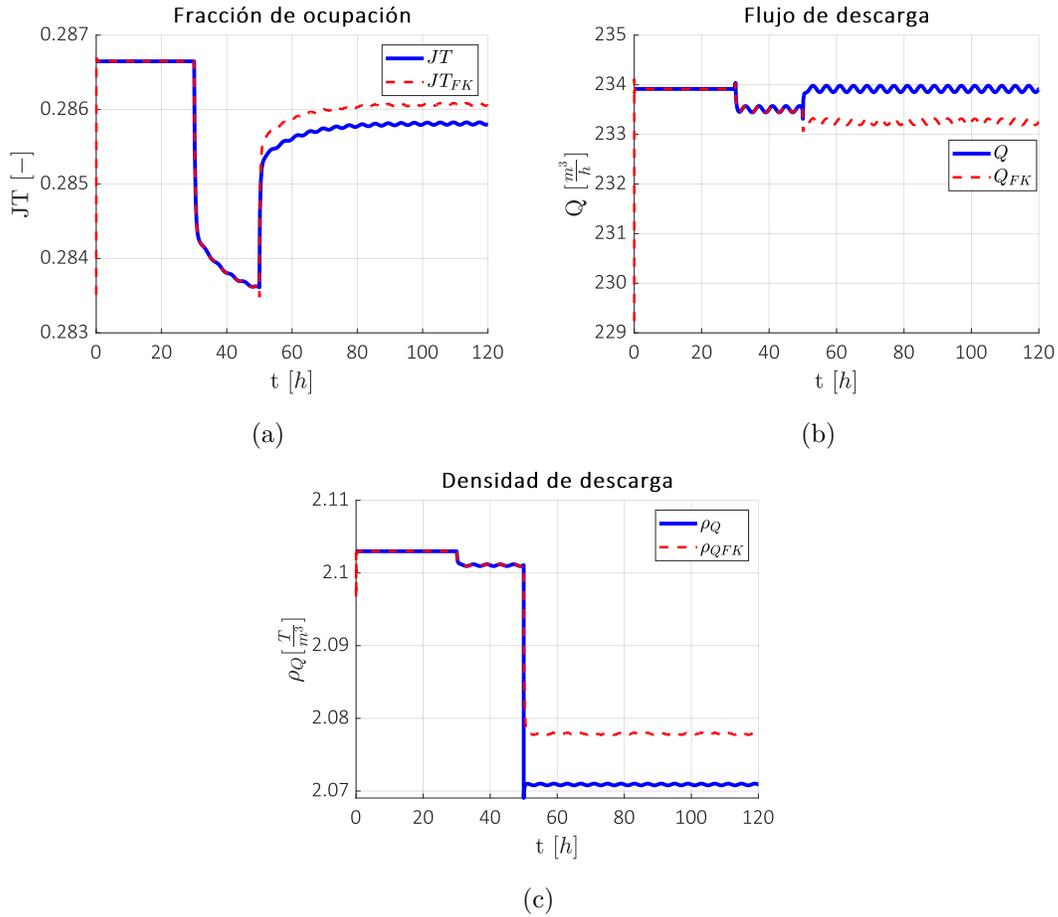


Figura 5-8: Resultados filtro de Kalman extendido y modelo ampliado estimación de salidas.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 5-8 se muestra el comportamiento dinámico descrito por las salidas del modelo ampliado (con color azul) y del filtro de Kalman extendido discreto y modelo ampliado (con color rojo). Como es posible observar, el filtro obtenido es capaz de sincronizar las salidas medibles del sistema ampliado con un error despreciable hasta antes de realizar el cambio paramétrico en el instante de tiempo de $50h$. Luego del cambio paramétrico, las salidas del filtro se desvían completamente del valor del modelo ampliado durante el resto del tiempo de simulación.

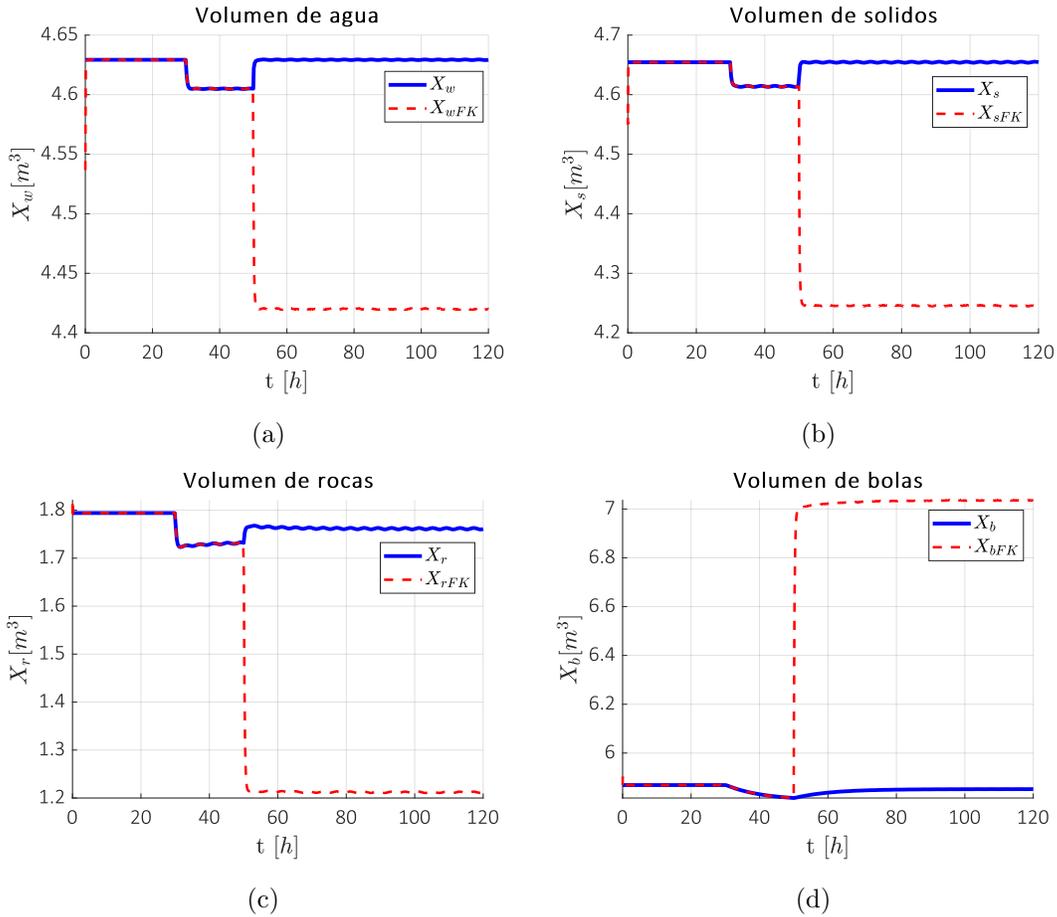


Figura 5-9: Resultados filtro de Kalman extendido y modelo ampliado estimación de estados.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 5-9 se muestra el comportamiento dinámico descrito por las salidas del modelo ampliado (con color azul) y del filtro de Kalman extendido discreto y modelo ampliado (con color rojo). Es posible observar que el filtro obtenido en el intervalo de tiempo de $0 - 50h$ es capaz de sincronizar los estados del sistema ampliado sin error de estado estacionario para las condiciones de operación asignadas. Sin embargo, luego del cambio paramétrico realizado en el intervalo de $50 - 120h$ al igual que las salidas estimadas, los estados estimados se desvían completamente del valor del modelo ampliado durante el resto del tiempo de simulación. En este caso nuevamente se utiliza el *RMSE* para estimar la precisión con la que el filtro de Kalman predice los estados del modelo ampliado, los valores obtenidos se pueden observar en la Tabla 5-3.

Tabla 5-3: Raíz de la desviación cuadrática media de la estimación con filtro de Kalman extendido y modelo ampliado.

	X_w	X_s	X_r	X_b
<i>RMSE</i>	15,96 %	31,17 %	41,88 %	90,17 %

Al analizar los valores de la Tabla **5-3** es posible observar que todos los estados estimados poseen una desviación superior al 15,96 %, lo cual representa un problema para su uso con sistemas de control avanzado.

Con el fin de obtener una comparación de los resultados obtenidos por el filtro de Kalman extendido y modelo reducido y el filtro de Kalman extendido y modelo ampliado (Escenario 1, sin variación paramétrica), se utiliza la desviación cuadrática media normalizada (*NRMSE* en inglés) como se describe a continuación:

$$NRMSE = \frac{1}{\bar{\Lambda}} \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\Lambda - \hat{\Lambda})^2}{M}} \quad (5-2)$$

Donde Λ es el valor real, $\hat{\Lambda}$ es el valor estimado, $\bar{\Lambda}$ es el valor promedio de la variable a estimar en el intervalo de estimación y M es el número de datos estimados. Teniendo en cuenta que mientras menores sean los valores del *NRMSE* la estimación tendrá un mejor ajuste. Los resultados tanto para el filtro de Kalman extendido y modelo reducido como para el filtro de Kalman extendido y modelo ampliado se pueden ver en la Tabla **5-4** y la Tabla **5-5** respectivamente.

Tabla 5-4: Raíz de la desviación cuadrática media normalizada de la estimación con filtro de Kalman extendido y modelo reducido.

	X_w	X_s	X_{rb}	η	χ
<i>NRMSE</i>	0,76 %	0,76 %	0,92 %	0,03 %	1,53 %

Tabla 5-5: Raíz cuadrada del error cuadrático medio normalizado de la estimación con filtro de Kalman extendido y modelo ampliado.

	X_w	X_s	X_r	X_b
<i>NRMSE</i>	0,02 %	0,03 %	0,03 %	0,02 %

De los resultados de la Tabla **5-4** y la Tabla **5-5**, se tiene que el filtro de Kalman extendido y modelo ampliado ajusta mejor los estados estimados con respecto al filtro

de Kalman extendido y modelo reducido. Adicionalmente, al no requerir entradas de excitación persistente se facilita su implementación.

5.3. Análisis de la implementabilidad de los filtros de Kalman extendido

Para la implementación es necesario realizar un análisis que tenga en cuenta los requerimientos de los filtros de Kalman extendido obtenidos en el capítulo 4 de manera que cualquier persona interesada pueda aportar en la misma. Esta sección se encuentra distribuida de la siguiente manera: inicialmente, se analizan las condiciones para la implementación de los filtros obtenidos y finalmente se analizan las condiciones y mejoras para el desempeño de los mismos.

5.3.1. Condiciones para la implementación

La etapa de implementación inicia con la recolección de información de piso de planta proveniente de las señales de proceso del molino. Por ejemplo, el flujo másico de sólidos, rocas y bolas, la medición de caudal de lodos y agua, el porcentaje de llenado y medición de densidad de lodos. Para esto es necesario que la arquitectura de estimación integre un equipo capaz de recolectar dicha información. Es muy frecuente para estos casos utilizar controladores lógicos programables (*PLC* en inglés), ya que por su diseño poseen la capacidad de recolectar señales de campo, ya sea vía un protocolo de comunicación o a través de señales eléctricas cableadas con el transmisor, y luego por medio de tecnología de comunicación industrial, basada en tecnología de Microsoft (*OPC* en inglés), enviar la información a un computador de alto desempeño con software dedicados. A partir de esa información, el computador puede realizar el cálculo numérico en variable simbólica y matricial de alta complejidad (Por ejemplo, LabView o MatLab® & Simulink). Para la comunicación entre el PLC y el computador se puede usar comunicación OPC entre LabView y un PLC del fabricante Siemens AG [31] o comunicación OPC entre MatLab® & Simulink y un PLC del fabricante Siemens AG como en [32].

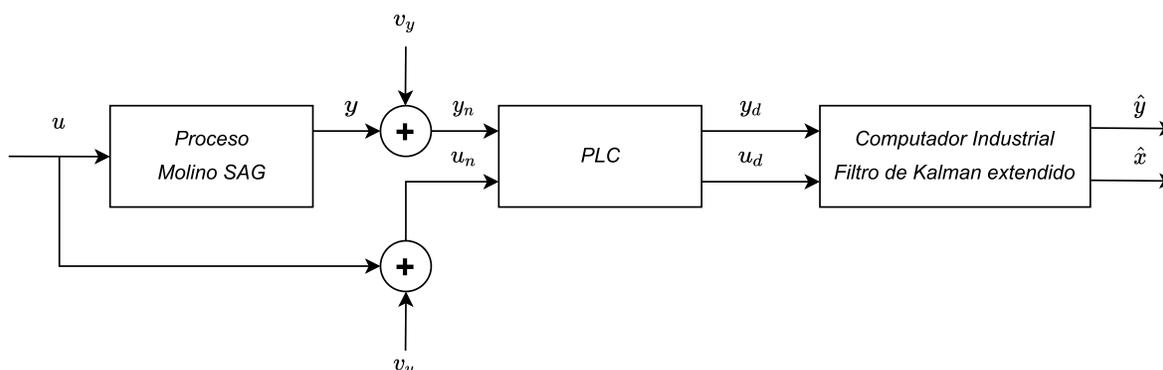


Figura 5-10: Esquema de implementación.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 5-10 se puede observar el esquema de implementación mencionado, donde u e y son los vectores de entradas y salidas medibles, u_n y y_n son los vectores de entradas y salidas medidas con ruido de medición, v_u y v_y son los vectores de ruido de medición para las entradas y salidas, u_d e y_d son los vectores de entradas y salidas digitalizadas por el PLC, y \hat{y} y \hat{x} son los vectores de estados y salidas estimados por el filtro de Kalman extendido.

Existen casos, en los que algunos fabricantes de PLC's poseen en su portafolio herramientas para la sintonización de filtros de Kalman, por ejemplo, Siemens AG y su sistema de control distribuido (*Simatic PCS7* en inglés), el cual permite facilitar la implementación de este tipo de sistemas de estimación en los procesos controlados por sus PLC's de mayor gama [33].

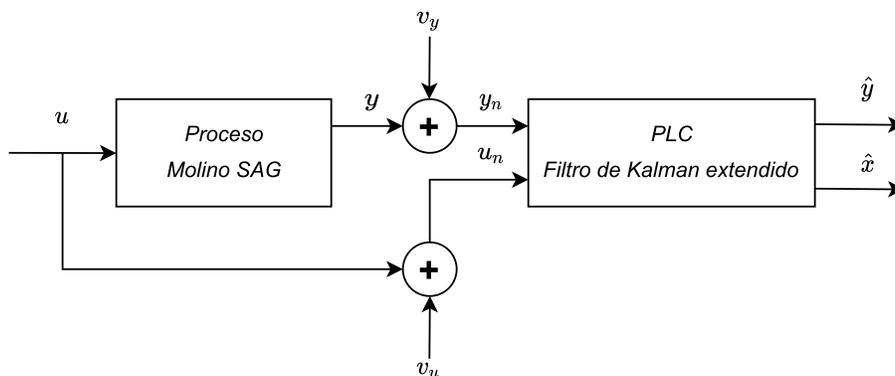


Figura 5-11: Esquema de implementación con PLC.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 5-11 se puede observar el esquema de implementación mencionado, donde u e y son los vectores de entradas y salidas, u_n e y_n son los vectores de entradas y salidas medidas con ruido de medición, v_u y v_y son los vectores de ruido de medición para las entradas y salidas, y \hat{y} y \hat{x} son los vectores de estados y salidas estimados por el filtro de Kalman extendido implementado en el PLC.

Para lograr una correcta implementación, basada en el método propuesto en la Figura 5-10, se requiere que el computador seleccionado sea capaz de realizar los cálculos del filtro de Kalman extendido en un tiempo de muestreo máximo de $7,2s$. Con el fin de estimar el tiempo requerido para la ejecución del algoritmo tomando como base una implementación con MatLab® & Simulink, se utilizó el comando *tic - toc* de MatLab® para obtener el tiempo máximo de la ejecución de cada ciclo y se obtuvo como resultado un tiempo máximo de ejecución de $3,5\frac{s}{ciclo}$. El computador utilizado para la ejecución del código posee las siguientes especificaciones técnicas:

Marca: ASUS.

Modelo: 510UNR.

Procesador: Intel(R) Core(TM) i7-8550U CPU 1.80GHz 1.99 GHz.

Memoria RAM: 8,00 GB DDR4 SK Hynix.

Disco Duro: 1TB SSD ST1000LM035-1RK172.

Sistema Operativo: Microsoft Windows 10 Home.

Tipo de Sistema: x64- Based PC.

Tarjeta de Vídeo: NVIDIA GeForce MX150.

Pese a que en el mercado existen equipos con mayores especificaciones técnicas enfocadas para actividades de entorno industrial, el equipo utilizado fue capaz de ejecutar el código para la ejecución del filtro de Kalman obtenido con un tiempo de muestreo mucho menor al requerido ($7,2s$). Es de esperarse que un equipo con mayores especificaciones pueda ejecutar el filtro diseñado en un tiempo menor al que fue obtenido en este caso.

El proceso de molienda debe disponer de la instrumentación ya instalada o en proceso de implementación. La instrumentación mencionada en este documento requiere de un proceso de selección. Son necesarios otros valores como los rangos de medición y el tipos de tubería que dependen directamente del proceso y son diferentes para cada proceso. Además, es necesario mencionar que en los molinos que ya se encuentran operando y no se dispone de medición indirecta del porcentaje de llenado, se puede complicar la

instalación del pesaje con celdas de carga.

Aunque existe instrumentación para la medición de flujo y densidad, la instalación de estos equipos requiere algunas condiciones específicas para el montaje. Por ejemplo, el elemento primario de medición debe instalarse en una tubería horizontal o vertical, de tal forma que la tubería quede completamente inundada. Un caso en el cual algunas veces es imposible cumplir esas condiciones es la descarga del molino, debido a que generalmente la descarga ocurre por efecto de la fuerza de la gravedad. Finalmente, es necesario tener en cuenta las condiciones de observabilidad del modelo ampliado descritas en el capítulo 3.2.3 con el fin de garantizar en todo momento la convergencia de los estados estimados.

5.3.2. Condiciones y mejoras para el desempeño

En el Escenario 2 de la sección 5.2 se determinó que uno de los defectos del filtro de Kalman obtenido se encuentra en el cambio de densidad de mineral que se alimenta al molino (ρ_o), ocasionando que los estados estimados se desvíen completamente del proceso real. En el proceso de molienda es muy frecuente que material a moler sea proveniente de diferentes zonas de extracción, ocasionando que las propiedades mineralógicas de dicho material sean diferentes.

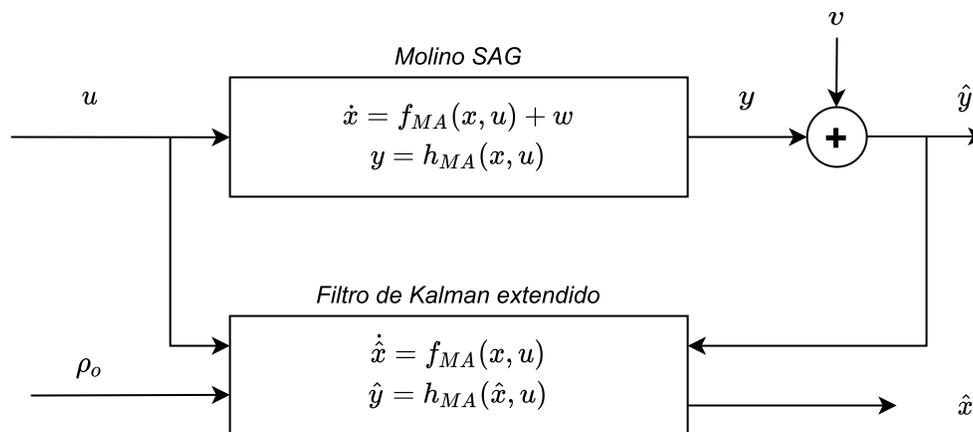


Figura 5-12: Esquema de mejora de desempeño.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 5-12 se propone una arquitectura mejorada para rechazar perturbaciones paramétricas como variaciones en la densidad de mineral de alimentación. Donde $x = [x_w, x_s, x_r, x_b]^T$ es el vector de estados del modelo ampliado; $u = [V_{wi}, V_{si}, V_{ri}, V_{bi}]^T$

es el vector de entradas del modelo ampliado, $y = [J_T, Q, \rho_Q]^T$ es el vector de salidas del modelo ampliado, $\hat{x} = [x_w, x_s, x_r, x_b]^T$ es el vector de estados estimado a partir del modelo ampliado, $\hat{y} = [J_T, Q, \rho_Q]^T$ es el vector de salidas estimadas a partir del modelo ampliado y ρ_o es la densidad del mineral de alimentación.

Al ingresar la densidad del mineral al filtro de Kalman obtenido es posible corregir la convergencia del estimador de estados. Autores como Maritz en [16] proponen implementar un sistema de detección de la distribución de tamaño del mineral alimentado de modo que la corrección se realice de manera automática en la estimación. Otra opción, es analizar la posibilidad de implementar un observador asintótico basado en la teoría por Bastin y Dochain en [34] que se encuentra enfocada actualmente para bioprocesos.

5.4. Resumen del capítulo

En este capítulo se analizaron los resultados obtenidos por medio de simulación para los estimados de estados desarrollados en el capítulo anterior para el proceso de molienda. Por un lado, se evidenció que el filtro de Kalman extendido con modelo reducido requiere de entradas de excitación persistente para lograr un buen desempeño durante la estimación de estados. Por otro lado, se constató que el filtro de Kalman extendido con modelo ampliado posee cuantitativamente un mejor desempeño que el filtro de Kalman extendido con modelo reducido durante la estimación de estados y no requiere de entradas de excitación persistente para su operación. Sin embargo, el filtro de Kalman extendido con modelo ampliado presentó error ante variaciones paramétricas en el proceso, como el cambio en la densidad del mineral. Luego, se analizaron las condiciones para la implementación de los estimadores y se presentan los posibles esquemas para la misma. Para el caso donde se utiliza un computador industrial para la ejecución del estimador de estados, se obtuvo una base de tiempo para la ejecución de este. Finalmente, se proponen esquemas para mejorar el desempeño del filtro de Kalman extendido con modelo ampliado desarrollado en este documento, con el fin de rechazar una perturbación provocada por la variación de la densidad del mineral de alimentación.

Capítulo 6

Conclusiones y recomendaciones

6.1. Conclusiones

En este trabajo se explicaron las generalidades del proceso de molienda de minerales con molino semiautógeno, resaltando en qué consiste el proceso de molienda y su objetivo, los tipos de molinos utilizados, las principales fuerzas dominantes y los principales factores que afectan la eficiencia de la molienda. De esta información, se puede concluir que es necesario tener un conocimiento de las principales variables para lograr el mejor desempeño posible en el proceso de molienda y optimizar el consumo de agua.

Adicionalmente, se realizó una revisión de la literatura sobre el control y la estimación de estado en procesos de molienda con molino semiautógeno, de la cual se pudo verificar que esta es una área de estudio importante y que actualmente se sigue avanzando en el tema. Por lo tanto, este trabajo es un aporte en este campo ya que propone una técnica de estimación de estado la cual es implementable en el ambiente industrial.

En este trabajo, se utilizó una metodología de modelado propuesta por varios autores, con el fin de obtener dos modelos semifísicos de base fenomenológica para un molino semiautógeno. La aplicación de la metodología permitió comprender de manera más detallada y clara el funcionamiento del proceso y las relaciones existentes entre las variables. Los resultados de la simulación del modelo ante entradas perturbadoras fueron completamente satisfactorios y valorados por un experto en el tema. Además, se analizó la observabilidad no lineal de los modelos, de manera que se garantizara la misma bajo condiciones reales de operación.

Se diseñaron dos estimadores de estados no lineales tipo filtro de Kalman extendido

para los modelos semifísicos de base fenomenológica obtenidos. Las matrices correspondientes a la covarianza del ruido de medición se determinaron a partir de la hoja de datos de algunos sensores disponibles en el mercado, comúnmente usados en el proceso de molienda con molino semiautógeno. La matriz de covarianza del error de modelado y la matriz de covarianza inicial se obtuvieron de la literatura disponible.

En este trabajo, se verificó, vía simulación, el funcionamiento de los estimadores de estado. Por un lado, se evidenció que el filtro de Kalman extendido con modelo reducido requiere de entradas de excitación persistente para lograr un buen desempeño. Por otro lado, se constató que el filtro de Kalman extendido con modelo ampliado posee cuantitativamente un mejor desempeño que el filtro de Kalman extendido con modelo reducido y no requiere entradas de excitación persistente para lograr un buen desempeño. Así mismo, se encontró que variaciones paramétricas en la planta influyen directamente en la convergencia del estimador.

Finalmente, se presentaron las condiciones para la implementación de los estimadores en una planta real, donde se incluyeron los posibles esquemas de implementación y se obtuvo una base de tiempo para la ejecución del estimador. Para ello, se propusieron esquemas para mejorar el desempeño de los estimadores, con el fin de rechazar una perturbación provocada por la variación de la densidad del mineral de alimentación.

6.2. Recomendaciones

De la experiencia obtenida con este proyecto se encuentra que hasta el momento no existen casos exitosos de implementación de estimadores de estado en molinos semiautógenos. Por lo tanto, se recomienda a futuros investigadores interesados en esta temática aportar en la etapa de implementación. Como punto de partida se propone experimentar con pruebas basadas en hardware-in-the-loop, las cuales consisten en conectar un sistema de control industrial con una computadora que ejecuta el modelo matemático de la planta tal que permita realizar la simulación del sistema real.

Adicionalmente, se recomienda a los investigadores interesados en realizar la implementación de estos estimadores, verificar las propiedades estadísticas de media y covarianza de los instrumentos reales de medición, ya que normalmente solo se tienen los datos suministrados por los fabricantes y con el paso del tiempo los instrumentos no mantienen estos valores fijos.

Bibliografía

- [1] R. y. R. S. C. García Arbeláez, C.; Barrera, X.; Gómez, *El ABC de los compromisos de Colombia para la COP21*. 2015.
- [2] M. . L. . H. y. E. . M. . E. García Arbeláez, C ., G . Vallejo, *El Acuerdo de París. Así actuará Colombia frente al cambio climático*. 2016.
- [3] M. de minas y energía, Unidad de Planeación Minero Energética, and Universidad de Córdoba, “Incidencia real de la minería del carbón, del oro y del uso del mercurio en la calidad ambiental con énfasis especial en el recurso hídrico - diseño de herramientas para la planeación,” p. 663, 2015.
- [4] S. C. Chelgani, M. Parian, P. S. Parapari, Y. Ghorbani, and J. Rosenkranz, “A comparative study on the effects of dry and wetgrinding on mineral flotation separation-a review,” *Journal of Materials Research and Technology*, no. x x, pp. 1–8, 2019.
- [5] J. L. Salazar, H. Valdés-González, E. Vyhmesiter, and F. Cubillos, “Model predictive control of semiautogenous mills (sag),” *Minerals Engineering*, vol. 64, pp. 92–96, 2014.
- [6] A. Jankovic, S. Suthers, T. Wills, and W. Valery, “Evaluation of dry grinding using HPGR in closed circuit with an air classifier,” *Minerals Engineering*, vol. 71, pp. 133–138, 2015.
- [7] D. Sbarbaro, J. Barriga, H. Valenzuela, and G. Cortes, “A multi-input-single-output Smith predictor for feeders control in SAG grinding plants,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 13, no. 6, pp. 1069–1075, 2005.
- [8] J. Yang, S. Li, X. Chen, and Q. Li, “Disturbance rejection of ball mill grinding circuits using DOB and MPC,” *Powder Technology*, vol. 198, no. 2, pp. 219–228, 2010.

-
- [9] L. C. Coetzee, I. K. Craig, and E. C. Kerrigan, “Robust nonlinear model predictive control of a run-of-mine ore milling circuit,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 18, no. 1, pp. 222–229, 2010.
- [10] P. Karelovic, R. Razzetto, and A. Cipriano, *Evaluation of MPC strategies for mineral grinding*, vol. 15. IFAC, 2013.
- [11] J. D. le Roux, A. Steinboeck, A. Kugi, and I. K. Craig, “An EKF observer to estimate semi-autogenous grinding mill hold-ups,” *Journal of Process Control*, vol. 51, pp. 27–41, 2017.
- [12] F. Herrera, “Objetivos De Desarrollo Sostenible en Colombia: Los Retos para 2030,” *Pnud*, p. 74, 2018.
- [13] T. A. Apelt and N. F. Thornhill, “Inferential measurement of SAG mill parameters V: MPC simulation,” *Minerals Engineering*, vol. 22, no. 12, pp. 1045–1052, 2009.
- [14] G. Q. César and S. H. Daniel, *Multivariable Model Predictive Control of a Simulated SAG plant*, vol. 42. IFAC, 2009.
- [15] M. A. Naidoo, L. E. Olivier, and I. K. Craig, *Combined neural network and particle filter state estimation with application to a run-of-mine ore mill*, vol. 46. IFAC, 2013.
- [16] M. G. Maritz, J. D. Le Roux, and I. K. Craig, “Feed Size Distribution Feedforward Control for a Grinding Mill Circuit,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 52, no. 14, pp. 7–12, 2019.
- [17] P. Varas, R. Carvajal, and J. C. Aguero, “State Estimation for SAG Mills utilizing a simplified model with an alternative measurement,” *IEEE CHILEAN Conference on Electrical, Electronics Engineering, Information and Communication Technologies, CHILECON 2019*, pp. 1–7, 2019.
- [18] J. D. Roux and I. K. Craig, “Requirements for estimating the volume of rocks and balls in a grinding mill,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 1169–1174, 2017.
- [19] “14 - process modelling for control and diagnostic purposes,” in *Process Modelling and Model Analysis* (K. Hangos and I. Cameron, eds.), vol. 4 of *Process Systems Engineering*, pp. 363–386, Academic Press, 2001.
- [20] H. Alvarez, R. Lamanna, P. Vega, and S. Revollar, “Metodología para la obtención de modelos semifísicos de base fenomenológica aplicada a una sulfitadora de jugo

- de caña de azúcar,” *RIAI - Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial*, vol. 6, no. 3, pp. 10–20, 2009.
- [21] E. A. Blanco, “Molienda Capítulo 8.,” *Universidad De Cantabria*, p. 55, 2019.
- [22] S. Morrell and I. Stephenson, “Slurry discharge capacity of autogenous and semi-autogenous mills and the effect of grate design,” *International Journal of Mineral Processing*, vol. 46, no. 1-2, pp. 53–72, 1996.
- [23] D. Ramkrishna, *Population balances: Theory and applications to particulate systems in engineering*. Elsevier, 2000.
- [24] G. Besançon, “Nonlinear observers and applications,” Springer, 2007.
- [25] A. E. E. Inc., “Archweigh dual hp belt scale ®,” 2022.
- [26] S. AG, “Caudalímetros electromagnéticos Sitrans F M,” 2010.
- [27] W. S. Rice Lake, “Transmitter Weight SCT-2200 Advanced Series,” 2020.
- [28] HBM, “RTN Load Cell Special features,” 2021.
- [29] Rhosonics, “Serie sdm - medidor de densidad del lodo,” 2022.
- [30] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Métodos numéricos para ingenieros*. McGraw-Hill Interamericana, 5 ed., 2007.
- [31] D. Domínguez, *Proyecto de automatización con PLC Siemens y Scada en Matlab mediante comunicación OPC para un sistema de mecanizado de piezas con control de velocidad de un motor de C.C.* PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia, 2018.
- [32] Y. Triviño and D. Castelblanco, *Desarrollo de una interfaz gráfica con LabView para la planta T5555*. PhD thesis, Universidad Distrita Francisco José de Caldas, 2017.
- [33] Siemens AG, “PCS 7 Unit Template ” Stirred tank reactor with Kalman filter using the example of the Chemical Industry,” 2018.
- [34] G. Bastin and D. Dochain, “Chapter 4 - state and parameter estimation with unknown yield coefficients,” in *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors* (G. Bastin and D. Dochain, eds.), Process Measurement and Control, pp. 201–250, Amsterdam: Elsevier, 1990.