



Propiedades emergentes de la apertura del juego de ajedrez.

Gustavo Adolfo Muñoz Lancheros

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de ciencias, Departamento de Física
Bogotá, D.C. Colombia
2022

Propiedades emergentes de la apertura del juego de ajedrez.

Gustavo Adolfo Muñoz Lancheros.

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias-Físicas.

Director:
Ph.D. Rafael Hurtado.
Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá, D.C. Colombia
2022

Dedicatoria.

A todos cuyo camino son los sueños.

Agradecimientos.

Se ha dicho que los logros son alcanzados por las personas que los buscan, yo diría, que los logros son la consecuencia de un esfuerzo personal y de todas las personas que de forma directa o indirecta, positiva y negativamente contribuyen en la ejecución de los mismos. Este trabajo es ante todo una muestra de gratitud y agradecimiento a todas las personas que hacen parte de mi universo, que mediante sus ápices y total compromiso logramos la terminación del proyecto. De forma particular, agradezco a mi familia que fueron y serán los principales motores de lucha y estriba a través del tiempo, para la conclusión de todas las facetas de educación de mi vida.

Resumen.

Propiedades emergentes de la apertura del juego de ajedrez.

Este trabajo consta de dos partes. En la primera se aplicó el formalismo de entropía para grado nodal y la fortaleza nodal en la teoría de redes complejas al primer movimiento de ajedrez a las olimpiadas de la FIDE, el congreso internacional de Hastings y un compendio histórico de partidas; para ello se construyó una representación de la apertura del juego del ajedrez a través de un grafo dirigido y valuado, el cual permite caracterizar propiedades emergentes de la evolución de las estrategias del juego. En la segunda parte se aplicó un modelo mecánico-estadístico aunado con las entropías de grado nodal y fortaleza nodal de la red a la apertura de los grandes maestros Anatoly Karpov, Garry Kasparov y Magnus Carlsen. Con las medidas de entropías se encontraron relaciones entre el primer movimiento con el resultado de las partidas, sucesos relevantes en la historia del ajedrez, y los cambios y la moda del uso de estrategias. Con el modelo mecánico-estadístico se encontró una forma de inferir la intencionalidad de los jugadores.

Palabras clave: Apertura ajedrez, Entropía, Evolución de Estrategias, Redes, Física Estadística.

Abstract.

Emergent properties of the chess opening.

This paper consists of two parts. In the first part, the entropy formalism for nodal degree and nodal strength in the theory of complex networks was applied to the first chess move to the FIDE Olympiads, the Hastings International Congress and a historical compendium of games; for this purpose, a representation of the chess opening was constructed through a directed and valued graph, which allows characterizing emergent properties of the evolution of the strategies of the game. In the second part, a mechanistic-statistical model coupled with the nodal degree entropies and nodal strength of the network was applied to the opening of the grandmasters Anatoly Karpov, Garry Kasparov and Magnus Carlsen. With the entropy measures, relationships were found between the first move with the outcome of the games, relevant events in the history of chess, and the changes and fashion of the use of strategies. With the mechanical-statistical model we found a way to infer the intentionality of the players.

Keywords: Chess Opening, Entropy, Evolution of Strategies, Networks, Statistical Physics.

Contenido

Agradecimientos.	IV
Resumen.	v
Abstract.	VI
Lista Abreviaturas y Símbolos.	IX
Lista de figuras.	x
Lista de tablas.	XI
Introducción.	XIII
1. Sobre el juego del ajedrez.	1
1.1. Una breve historia del ajedrez.	1
1.2. Torneos de ajedrez.	3
1.2.1. Olimpíadas de ajedrez.	3
1.2.2. Congreso internacional de Hastings.	4
1.3. Grandes Maestros.	4
1.3.1. Anatoly Karpov (1951).	5
1.3.2. Garry Kasparov (1963).	5
1.3.3. Magnus Carlsen (1990).	6
2. Sobre el análisis de redes.	7
2.1. Teoría de grafos.	7
2.1.1. Matriz de adyacencia y grado de un nodo.	8
2.1.2. Matriz valuada y fortaleza de un nodo.	9
2.2. Entropía nodal.	10
2.2.1. Entropía de grado de la red.	11
2.2.2. Entropía de fortaleza de la red.	13
2.2.3. Grafos Exponenciales.	14
2.2.4. Grafo exponencial: valuado y dirigido.	15

3. Exploración de los datos.	17
3.1. Bases de datos.	17
3.2. Procesamiento de los datos.	18
3.2.1. Representación.	20
4. Resultados y análisis.	23
4.1. Resultados torneos.	25
4.2. Resultados jugadores.	33
4.3. Grafos exponenciales.	44
4.4. Discusión.	49
5. Conclusiones.	52
Bibliografía	53
A. Anexo: Reglas básicas del ajedrez.	60
B. Anexo: Notación.	64
B.1. Notación algebraica.	64
B.2. Notación descriptiva.	64
C. Anexo: Principio de máxima entropía.	67

Lista Abreviaturas y Símbolos.

En esta tesis se usaron las siguientes abreviaturas y símbolos.

Abreviatura	Significado.
FIDE	Federación Internacional de Ajedrez.
pgn	Del inglés Portable game notation.
GM	Gran Maestro.

Símbolo	Significado.
G	Grafo.
N	Número de nodos.
\mathcal{L}	Conjunto de vínculos del grafo.
ℓ_i	Etiqueta del vínculo i .
\mathcal{N}	Conjunto de Nodos.
n_i	Etiqueta del nodo i .
L	Número de vínculos.
W	Matriz valuada.
w_{ij}	Elementos matriciales de peso W de los vínculos.
\mathcal{W}	Conjunto de pesos.
e_i	Pesos del vínculo i .
A	Matriz adyacencia.
a_{ij}	Elemento matricial de A .
k_i	Grado del nodo i .
s_i	Fortaleza del nodo i .
${}_gS_i$	Entropía nodal de grado del nodo i .
S	Entropía de grado de la red.
${}_fH_i$	Entropía nodal de fortaleza del nodo i .
H	Entropía de fortaleza de la red.
${}_gP_{ij}$	Probabilidad de grado.
${}_fP_{ij}$	Probabilidad de fortaleza.

Lista de figuras

1-1. Representación Chaturanga.	2
2-1. Ejemplo de grafos.	8
3-1. Evolución número de juegos.	19
3-2. Porcentaje de victoria de los torneos.	20
3-3. Ejemplo representación del sistema.	21
4-1. Entropías del compendio Histórico.	26
4-2. Diferencia $\Delta S(\mathbf{W})$ y $\Delta H(\mathbf{W})$ del compendio histórico	27
4-3. Diferencia $\Delta_{S_{out_sin}}$ y $\Delta_{H_{out_Hin}}$ del compendio histórico	28
4-4. Entropías de las Olimpiadas de ajedrez de la FIDE.	29
4-5. Diferencia $\Delta S(\mathbf{W})$ y $\Delta H(\mathbf{W})$ de las Olimpiadas de ajedrez de la FIDE	30
4-6. Diferencia $\Delta_{S_{out_sin}}$ y $\Delta_{H_{out_Hin}}$ del las Olimpiadas de ajedrez	30
4-7. Entropías del Torneo de Hastings.	31
4-8. Diferencia $\Delta S(\mathbf{W})$ y $\Delta H(\mathbf{W})$ del torneo de Hastings	32
4-9. Diferencia $\Delta_{S_{out_sin}}$ y $\Delta_{H_{out_Hin}}$ del torneo de Hastings	33
4-10. Entropías de red para Anatoly Karpov.	34
4-11. Diferencia $\Delta S(\mathbf{W})$ para Anatoly Karpov.	35
4-12. Diferencia $\Delta H(\mathbf{W})$ para Anatoly Karpov.	36
4-13. Diferencia $\Delta_{S_{out_sin}}$ y $\Delta_{H_{out_Hin}}$ para Anatoly Karpov.	37
4-14. Entropías de red para Garry Kasparov.	38
4-15. Diferencia $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$ para Garry Kasparov.	39
4-16. Diferencia $\Delta H(\mathbf{W})$ para Garry Kasparov.	40
4-17. Diferencia $\Delta_{S_{out_sin}}$ y $\Delta_{H_{out_Hin}}$ para Garry Kasparov.	40
4-18. Entropías de red para Magnus Carlsen.	41
4-19. Diferencia $\Delta S(\mathbf{W})$ para Magnus Carlsen.	42
4-20. Diferencia $\Delta H(\mathbf{W})$ para Magnus Carlsen.	43
4-21. Diferencia $\Delta_{S_{out_sin}}$ y $\Delta_{H_{out_Hin}}$ para Magnus Carlsen.	44
4-22. Matriz de probabilidad Anatoly Karpov	45
4-23. Intencionalidad de juego de Anatoly Karpov	46
4-24. Matriz de probabilidad de Garry Kasparov	46

4-25. Intencionalidad de juego de Garry Kasparov	47
4-26. Matriz de probabilidad de Magnus Carlsen	48
4-27. Intencionalidad de juego de Magnus Carlsen	48
A-1. Posición inicial de las piezas de Ajedrez.	61
A-2. Movimientos del Alfil, Torre y Dama.	62
A-3. Movimientos del Caballo, Peón y Rey.	62
B-1. Notación algebraica.	66
B-2. Notación descriptiva.	66

Lista de tablas

B-1. Relación de abreviaturas en la notación del ajedrez.	65
---	----

Introducción.

El ajedrez es un deporte destacado por su sofisticación, cuya complejidad se ha estimado como el número promedio de movimientos legales en una posición a la potencia de la duración de un juego típico 10^{120} [1]. La fascinación humana por el ajedrez, debido a la enorme riqueza del juego, ha inspirado diversos estudios sobre la apertura, los participantes y su relación con los torneos, análisis de posiciones, entre otros [2, 3, 4, 5, 6]. Desde la perspectiva científica, el ajedrez es interesante debido a la enorme cantidad de posibilidades de juegos cuyo entendimiento posee una inferencia en sistemas con iguales niveles de complejidad [1]. Desde el punto de vista deportivo, el ejercicio del juego consta básicamente de tres pilares de preparación: la teórica, la física y la del oponente.

Con el estudio realizado por Ruiz López de Segura a finales del siglo XV d.C [7] se inició el desarrollo teórico contemporáneo de las ventajas y desventajas de las aperturas, el medio juego y los finales. En el ajedrez, la apertura comprende principalmente los primeros movimientos de las piezas de ambos jugadores; a nivel profesional, la apertura viene supeditada a estructuras lógicas y teóricas cuyo objetivo define la estrategia y táctica de los oponentes [8, 9]. El conocimiento teórico de la apertura consta principalmente de la herencia y construcción de un conocimiento heurístico del juego[10].

La flexibilidad y confiabilidad del formalismo de análisis de redes para el entendimiento de diversos sistemas complejos, permite modelar los sistemas desde una perspectiva de sus componentes (ej. nodos, díadas, triadas) y las relaciones existentes entre ellos (ej. vínculos) para acceder a sus propiedades de estructura y dinámica [11]. Los nodos pueden representar individuos, computadoras, ciudades, especies en un ecosistema, etc. Las relaciones pueden referirse a interacciones materiales o simbólicas, como por ejemplo las interpersonales, las laborales, los cables de una red o las vías de una ciudad que conectan distintos lugares. Esta forma de representación de los sistemas complejos otorga al formalismo de las redes complejas la posibilidad de estudiar sistemas naturales, sociales o artificiales, como pueden comunidades, la semántica, el transporte, la comunicación, el comercio, la economía, o los ecosistemas, entre otros.

Dentro de esta teoría de la redes, la entropía de los grafos, con base en un conjunto de

medidas de estructura, permite acceder a las propiedades dinámicas del sistema [12]. En el ajedrez los estudios de entropía fuera de la teoría de redes fueron iniciados en 1977 por Nievergelt [13], quien realizó un estudio sobre la entropía o información necesaria que debía poseer un jugador profesional sobre el juego para acceder a un torneo, el cual abrió el campo al estudio de la información contenida en una posición dada en una partida [14, 15]. Estos estudios han llevado a que recientemente, en 2017, se utilizara la entropía en imágenes EEG (electroencefalografía) como medida de cognición [6], y en 2018 se estudiara la entropía de la inteligencia artificial AlphaZero desde una perspectiva de Shannon [16].

En el mundo de las redes, las redes complejas ofrece un modelo mecánico estadístico que permite establecer propiedades emergentes o macroscópicas de diversos sistemas [17, 18]. Típicamente, una red compleja posee un número de estados accesibles muy grande que se representan como grafos y se modelan como ensambles estadísticos. En 2004 Park y Newman [19] propusieron una metodología general para construir ensambles de redes con un número fijo N de nodos, que satisfacen ligaduras impuestas en valores esperados de los observables de la red. En 2011 Squartini et. al. [20] expanden el modelo planteado por Park y Newman, permitiendo obtener analíticamente propiedades topológicas, para cualquier red binaria, pesada, dirigida o no dirigida.

Entre los trabajos realizados sobre el ajedrez desde la perspectiva del análisis de redes, se encuentran modelos de sugerencia [2], estudios sobre los individuos participantes de este deporte [3, 4, 21], estudios a los movimiento del juegos [22, 5]. En particular cabe resaltar el trabajo realizado por Blasius y Tonjes en 2009 [5], donde mostró que el uso de los movimientos se distribuye según una ley de Zip's dependiendo de la profundidad del juego. En 2011, Sergei [23] demostró que, dada una posición de una partida la posibilidad de victoria o derrota está relacionada con la energía libre del sistema.

Teniendo presente que el estudio de la apertura del ajedrez es una de las principales tareas de un ajedrecista profesional, junto con la caracterización de contrincantes, aunado a que dentro de los trabajos de aplicación de las redes complejas no se encuentra el ajedrez y las medida de entropía de grado y fortaleza de red, el objetivo de este trabajo es identificar las propiedades estructurales y emergentes de las aperturas del ajedrez, usando el concepto de entropía en redes, y cómo esta perspectiva puede dar cuenta de la evolución en las olimpiadas de ajedrez de la Federación Internacional de ajedrez (de las siglas en francés FIDE), del congreso internacional de Hastings y de un compendio histórico y los grandes maestros Anatoly Karpov, Magnus Carlsen y Garry Kasparov. Además, se aplica el modelo mecánico-estadístico planteado por Squartini et. al. [20] a los grandes maestros.

La estructura de la presente tesis es la siguiente: En el capítulo 1 se presenta brevemente información correspondiente al juego del ajedrez. En el capítulo 2 se introducen los elementos

teóricos necesarios para esta tesis. En la sección 3 se explica el procesamiento realizado a las bases de datos trabajadas, junto con la representación diseñada en el presente trabajo. Finalmente, en el capítulo 4, se muestran los resultados obtenidos, y el documento termina con una sección de conclusiones.

Sobre el juego del ajedrez.

El ajedrez es un juego conocido por su dificultad. Habitualmente es un juego para dos jugadores que se practica sobre un tablero de 64 casillas, con 16 piezas para cada jugador¹, cuyo objetivo es dar “jaque mate” al oponente. A nivel competitivo el juego es organizado y arbitrado por la FIDE (por sus siglas en francés *Fédération Internationale des Échecs*).

En este capítulo abordaremos brevemente la historia del ajedrez, los torneos de Hastings y las Olimpiadas de ajedrez de la FIDE, y de los grandes maestros: Anatoly Karpov, Garry Kasparov y Magnus Carlsen, que corresponden a los objetos de estudio de la tesis.

1.1. Una breve historia del ajedrez.

Las primeras existencias documentales en que se menciona al ajedrez son anteriores al siglo VII d.C. La más antigua de estas referencias menciona al ajedrez en un romance persa “el *Kārnamak*” que se atribuye al reinado de Khusraw II Parwiz (570-628 d.C.). Por consiguiente, rastrear el origen del ajedrez a un ancestro común es complejo. Algunos eruditos de la historia del ajedrez plantean su origen en China y que proviene del Xiangqi [24], y otros aseguran que el predecesor del ajedrez es el juego egipcio Senet [25, 26], pero, la versión mas aceptada por historiadores remite su origen al juego indio Chaturanga [7, 27].

El Chaturanga proviene del sánscrito *chatur* (cuatro) y *anga* (miembros) [7, 28], que hace referencia a las unidades que conformaban al ejército indio (elefantes, caballería, carros de batalla e infantería). El Chaturanga representaba el conflicto entre dos o cuatro ejércitos, y su objetivo inmediato es la claudicación del enemigo, que se alcanza con el jaque mate y el descubrimiento del rey enemigo. El Chaturanga constaba de un tablero de 64 casillas monocromáticas proveniente de otro juego llamado *Ashtapada* [7], que por, un tiempo se jugó usando dados y en otros tiempos por combinación (turnos). Las piezas estaban conformadas

¹ver apéndice A para mayor información sobre las reglas del juego

por: peones (infantería), caballos (caballería), alfiles (elefantes), torres (carros de batalla), rey y ministro (también conocido como general, que en el ajedrez moderno se convierte en la dama). Las configuraciones iniciales de las piezas se pueden observar en la figura. 1-1 [7, 26].

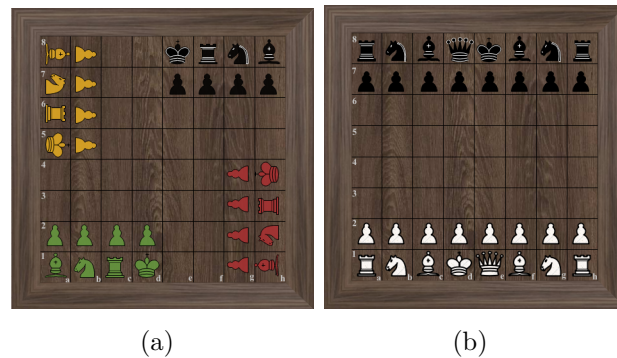


Figura 1-1: Representación de las dos posibles configuraciones iniciales de las piezas del Chaturanga (representación adecuada de [7]), a la izquierda la disposición para un juego de 4 jugadores y la derecha para 2 jugadores. Para Murray “la disposición de las fuerzas, probablemente solo se llegó después del experimento. La posición del caballo (b1, g1) es tan invariable en todas las formas de ajedrez, que debe haberse solucionado muy temprano”. Para saber más sobre el juego, las reglas y movimiento de las piezas ver [7, 29, 30, 25].

El Chaturanga llega a Persia (actual Irán) por medio de las rutas comerciales con la denominación de Chatrang cerca del siglo VI. El Chatrang se basa principalmente en el Chaturanga de dos jugadores por turnos con diferencias en movimientos de las piezas (mayor información en [7, 31, 32]). Bajo el imperio Persa surge la palabra persa Shahmat, de donde surge el “Jaque mate” que significa “el rey está perdido”.

Cuando los árabes conquistaron Persia hacia el año 638 d.C, adoptan el juego con la pronunciación Shatranj. El shatranj heredo gran parte de las características del Chatrang persia [7, 31, 32, 33]. El aporte de los árabes en el desarrollo del juego fue la generación de literatura² y su difusión en los países bajo el dominio musulmán³, y el estudio de la apertura, medio juego y finales, que corresponden a las tres facetas del juego que hoy en día existen. En el shatranj las aperturas se basaban principalmente en la búsqueda de posiciones, sin tener presente el juego del oponente⁴. En el estudio del medio se hacía uso del intelecto y principalmente se buscaban generar sugerencias para el intercambio de piezas como: no cambiar

²Los árabes son los primeros en dar el título de grande a un jugador de ajedrez.

³Entre los países conquistados, España tuvo un especial arraigo sobre el juego de shatranj, de donde posteriormente se origina la palabra en español Al-Xadraz, después a ecedrex, posteriormente a axedrez y por último ajedrez.

⁴En ocasiones no se respetaba el turno de cada jugador y unos hacían más movimientos que otros para llegar a dicha posición.

piezas si no hay una recompensa, o cambiar las piezas si su equivalencia⁵ era similar. Para los finales, la literatura árabe fue la más prolifera, los llamados mansubat o juegos de partido eran problemas donde se buscaba el Jaque mate al oponente, la aniquilación del ejercito o el estancamiento del oponente⁶.

Con la entrada a Europa del ajedrez por los árabes, la historia de desarrollo del ajedrez se sincroniza con la finalización de la edad media y la disruptiva adopción de los movimientos modernos de la dama y el alfil. Este ajedrez se ramificó en sus formas de juego⁷ dependiendo de la región en el que se practicaba [32], y sólo fue hasta 1924, con la creación de la FIDE, que se homogeneizaron las normas con las que hoy se practica en todo torneo profesional supeditado a la FIDE [34]. Otro aporte de la comunidad europea al juego se refleja en los estudios sobre la apertura, el medio juego y los finales, que inició Ruy López Segura en 1561 en su obra “*Libro de la invención liberal y arte del juego del ajedrez*”. Dentro de la vasta literatura del ajedrez, “*Ensayo sobre el juego de ajedrez*” de Phillip Stamma resalta por introducir la notación usada por la FIDE, “*The Chess Player’s Handbook*” de Howard Staunton se idea el modelo de las piezas que llevan su nombre y que son universalmente aceptadas.

1.2. Torneos de ajedrez.

En el mundo competitivo del ajedrez, los torneos son el medio usual para determinar un ganador, ya sea individual o en equipo. Dentro de los torneos individuales tenemos el Congreso Internacional de Hastings, del cual hablaremos en la siguiente secciones, y el torneo por equipos de las Olimpiadas de ajedrez de la FIDE.

1.2.1. Olimpiadas de ajedrez.

La historia de las Olimpiadas de ajedrez y la FIDE son difíciles de desligar. La necesidad de agrupación, el reconocimiento de títulos de los jugadores, el campeonato mundial y la estandarización de lineamientos del juego y torneos son las causantes de la creación de la FIDE [35]. Tras la creación de la FIDE, ésta ha organizado las Olimpiadas desde 1927 [32], y el nombre “olimpiada ” fue oficial hasta 1952 [36].

La olimpiada de ajedrez es categorizada, como uno de los eventos más relevantes del mundo del deporte [36]. Desde su primer evento en Londres (1927), donde se reunieron 16 países con

⁵Los árabes desarrollaron estudios sobre el valor de las piezas y su equivalencia entre ellas, usando como patrón la moneda dirhems [7].

⁶Los árabes introducen la primera forma de notación descriptiva del ajedrez.

⁷Las normas de juego cambiaban con temas referente a enroques, promociones, tipos de victoria, entre otras [7, 31, 25].

16 equipos [32], hasta la 44^a Olimpiada online en China, donde su número llegó a 152 naciones con 153 equipos en torneo abierto (Masculino), se demuestra la relevancia del deporte.

Desde sus comienzos, las Olimpiadas se han jugado por equipos. Estos equipos están formados por cuatro jugadores y un relevo (hoy día los equipos poseen un capitán y dos reservas). Los jugadores son designados por las federaciones participantes, lo cual implica que exista diferencia de fuerzas entre muchos equipos. Actualmente la competición consta de once rondas mediante un sistema suizo para evitar injusticia por la diferencia de nivel de juego entre los equipos [32].

1.2.2. Congreso internacional de Hastings.

El Congreso internacional de ajedrez de Hastings es un torneo anual de ajedrez que se lleva a cabo en Hastings, Inglaterra (con excepción de los años de guerra 1920-1966). Sobre los jugadores participes en los certámenes, no pesa restricción alguna, y en él se organizan según la fuerza de los participantes. El primer Congreso se organizó en 1920, y en él inicialmente sólo participaban jugadores locales. pero después de la tercera edición se enriqueció también con jugadores internacionales. El número de jugadores participes en el evento principal es alrededor de 16. Este torneo es categorizado como uno de los más importantes del mundo, y la lista de ganadores de los torneos hace alusión de esta categoría, ya que, en él prácticamente se encuentran todos los grandes jugadores de la época [32].

El evento principal tradicionalmente se juega Round-Robin, aunque hay algunas ediciones como la del 2004 que se jugó formato eliminatorio, o las de 2005 y 2006 que fueron jugados con el sistema suizo [37]. Los únicos grandes maestros que no participaron en este certámenes fueron Bobby Fischer y Garry Kasparov [37].

1.3. Grandes Maestros.

Al-Adli, un reconocido jugador de Shatranj del siglo IX d.C, fue la primera persona en clasificar a los jugadores en cinco clases, y a los fuertes les dio el título de Aliyat (Gran o Grandes)[7, 38]. No obstante, el término “Gran maestro” fue acuñado por primera vez en el periódico deportivo Bell’s Life el 18 de febrero de 1838, y en 1950 adoptó un estatus oficial en la FIDE. Desde 1950, la FIDE ha regulado la titulación de los jugadores inscritos, que desde 1970 se mantiene prácticamente invariante [39].

Para ostentar un título de gran maestro en el ajedrez, se necesita sin dudas de habilidades, actitudes y conocimientos [40, 41, 9]. Entre estos conocimientos es categórico el dominio de: varias aperturas, finales, planes estratégicos y tácticos, entre otros [9, 8]. Actualmente la

FIDE ha certificado a más de 1300 personas con el título de Gran Maestro [42]. Por cuestiones prácticas tomaremos de estudio a tres: Anatoly Karpov, Garry Kasparov y Magnus Carlsen.

1.3.1. Anatoly Karpov (1951).

Karpov nació en Zlatoust, en los Urales (Rusia). En 1969 se convirtió en Maestro Internacional (MI), un año después atesoraba el título de Gran Maestro (GM)[42]. El 24 de abril de 1975 se coronó campeón y retuvo el título hasta 1985, cuyo sucesor fue Garry Kasparov [32, 43].

En sus primeros años de ajedrecista su teoría de aperturas era limitada, pero en 1966 alcanzó un nivel superior [43, 44, 45]. Durante el periodo 1970-1984 cosechó todos los beneficios de la revolución teórica de las aperturas generada por el ascenso de Fischer, siendo él, el líder de esa generación [46]. Grandes Maestros a través de su vida ajedrecista lo ha elogiado por poseer fuerza espiritual, diligencia y modestia, además de tenacidad y una variedad de recursos defensivos que lo hicieron famoso [44, 45]. Karpov fue un destacado jugador de medio juego y finales con una fuerte intuición estratégica [44], que Kasparov resume así: “Su dominio de un estilo de maniobra prudente dio como resultado la introducción del adjetivo “karpoviano” en el vocabulario del ajedrez. Define una estrategia de estrangulación del adversario metódica y silenciosa, como la de una pitón” [40].

En el torneo por el título mundial del año 1984, Karpov y Kasparov iniciarían una de las confrontaciones más intensas de la historia del deporte. La confrontación de dos juegos antagónicos; Karpov: equilibrado, preciso y conservador; Kasparov: riesgoso, tormentoso y con gran preparación teórica en aperturas; cinco años después daría como resultado una diferencia de dos victorias a favor de Kasparov [40].

1.3.2. Garry Kasparov (1963).

Kasparov Nació en Bakú, Azerbaiyán (Antiguamente perteneciente a la URSS). En 1979 se convirtió en Maestro internacional (MI), y un año después era GM[42]. El 10 de noviembre de 1985 se coronó campeón del mundo, y retuvo el título de la FIDE hasta 1993, y fue campeón mundial de PCA⁸ de 1993 a 2000 [48].

En sus inicios, Kasparov no poseía un buen juego, aunque sí una excelente disciplina, memoria e intensidad en la preparación ajedrecística [40], que, le permitió dominar el juego rápidamente a través de la teoría y con ataques violentos [47]. Kasparov fue ajedrecista prodigio desde joven, ganando sin mayor dificultad a otros GM en torneos importantes. En la

⁸PCA Asociación profesional de ajedrez, la cual fue creada por el propio Kasparov por irregularidades con la FIDE [47].

lucha por el título mundial de 1985 y posteriores con Karpov, se construyó como la imagen más valorada del ajedrez hasta el momento [40]. Kasparov es una leyenda en vida. Su juego fuerte en la apertura aunado a su capacidad de concentración y de adaptación a nuevos estilos de ajedrez con increíble dinámica y agresividad [40], le dio el apelativo para algunos del mejor jugador de todos los tiempos.

1.3.3. Magnus Carlsen (1990).

Carlsen Nació en Tonsberg Noruega. En 2004 es titulado como GM [42] y desde el 28 de noviembre del 2013 hasta el presente (2021) posee el título de campeón del mundo [42, 49].

Carlsen fue un niño prodigio que ascendió rápidamente al número uno en rating, entrenado por Garry Kasparov en el año 2009. Es considerado un excelente jugador en la era de la información y la computación [50], donde el uso de estas herramientas le desarrolló el aspecto analítico. El nivel de su apertura es variado, mas no es su fuerza de juego hasta el momento [50]. Su fuerte es el medio juego y finales, cuando demuestra habilidad para encontrar soluciones específicas a problemas, mas no es un estratega en el juego [50, 49].

Sobre el análisis de redes.

En este capítulo se introduce el formalismo del análisis de redes, particularmente, se trata sobre las propiedades topológicas fundamentales de las redes, que son el grado y la fortaleza. El capítulo inicia con unos primeros conceptos sobre grafos y los elementos constituyentes de los mismos. Posteriormente, se aborda la entropía en las redes y, por último, se enfoca brevemente en el formalismo de la mecánica estadística en el contexto de las redes y se concluye con el análisis estadístico del modelo de estudio.

2.1. Teoría de grafos.

El primer grafo de la historia fue introducido por Euler en 1763 para representar el problema de los puentes de Königsberg [11, 51]. La consecuencia que Euler exhibió es que ciertos problemas no se pueden solucionar con la geometría o el cálculo, y que existen problemas que dependen de lo interconectados que se encuentran los objetos que componen el sistema [11]. Básicamente, una red es un conjunto de entidades (objetos, nodos o vértices) que interactúan o se interconectan entre ellos a través de enlaces (vínculos, bordes) [51, 11, 18, 52]. Estas redes se representan en una estructura abstracta utilizando los objetos matemáticos definidos como grafos, y la teoría de grafos se encarga de su estudio [51]. En este trabajo tomaremos “red” y “grafo” sin distinción.

Como un grafo queda definido a partir de sus nodos y sus vínculos, estos se pueden etiquetar con nombres o valores con el fin de obtener más detalles del sistema [18]. Así mismo, estos definen cualquier medida estructural o “dinámica” de la red [18, 11]. Los nodos representan entidades que son etiquetables o distinguibles, y su cantidad en una red es N [51, 11]. Los vínculos que unen los nodos de la red definen el tipo de grafo. Siguiendo a Latora y Estrada [51, 11]:

Definición 1. *Grafo no dirigido.* Un grafo no dirigido $\mathbf{G}(\mathcal{N}, \mathcal{L})$, consiste de dos conjuntos, $\mathcal{N} \neq \emptyset$ y \mathcal{L} . Los elementos de $\mathcal{N} := \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ corresponden a los nodos del grafo

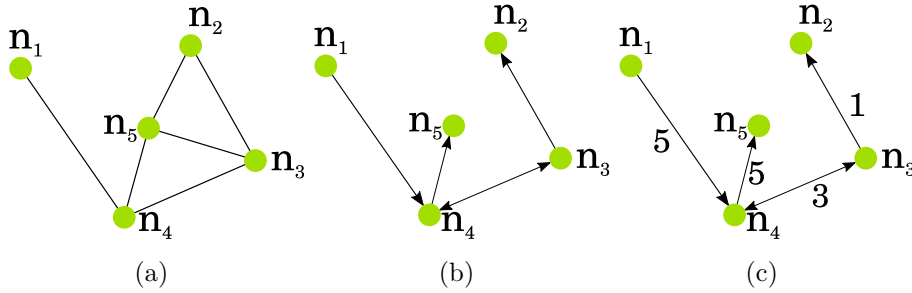


Figura 2-1: Ejemplo de un grafo, a) no dirigido, b) dirigido, c) dirigido y valuado.

G. Los elementos de $\mathcal{L} := \{l_1, l_2, \dots, l_L\}$ son los vínculos que unen **sin** dirección los elementos de \mathcal{N} (ver figura 2.1(a)), siendo L el numero de vínculos en el grafo **G**.

Definición 2. *Grafo dirigido.* Un grafo dirigido $\mathbf{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$, consiste de dos conjuntos, $\mathcal{N} \neq \emptyset$ y \mathcal{L} . Los elementos de $\mathcal{N} := \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ corresponden a los nodos del grafo **G**. Los elementos de $\mathcal{L} := \{l_1, l_2, \dots, l_L\}$ son los vínculos que unen **con** dirección los elementos de \mathcal{N} (ver figura 2.1(b)).

Cuando los vínculos poseen un valor o peso en un grafo dirigido, la red toma el nombre de grafo valuado y dirigido, y se define [51, 18]

Definición 3. *Grafo valuado y dirigido.* Un grafo valuado y dirigido $\mathbf{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{L}, \mathcal{W})$, consta de tres conjuntos, $\mathcal{N} \neq \emptyset$, \mathcal{L} y \mathcal{W} . Los elementos de $\mathcal{N} := \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ corresponden a los nodos del grafo **G**. Los elementos de $\mathcal{L} := \{l_1, l_2, \dots, l_L\}$ son los vínculos que unen **con** dirección los elementos de \mathcal{N} . $\mathcal{W} := \{e_1, e_2, \dots, e_L\}$ corresponden al peso o valor numérico positivo de los vínculos en la red (ver figura 2.1(c)).

2.1.1. Matriz de adyacencia y grado de un nodo.

En teoría de grafos, la representación matemática de una red se realiza mediante el uso de matrices [18]. Entre estas matrices, la matriz **A** de adyacencia indica cuáles nodos y cómo están conectados [18]. La matriz de adyacencia **A** es una matriz cuadrada de $N \times N$, cuyos elementos indican la adyacencia entre dos nodos, y tiene valores [18]

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } i \text{ e } j \text{ son adyacentes,} \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (2-1)$$

Se dice que dos nodos n_i y n_j son adyacentes si están unidos por un vínculo $a_{ij} = 1$, donde el índice ij indica el vinculo entre los nodos i y j [18]. En el caso de la red no dirigida de la

figura 2.1(a) la matriz \mathbf{A} es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2-2)$$

donde se observa que los elementos a_{ij} y a_{ji} son iguales. Cuando la red es dirigida los elementos a_{ij} y a_{ji} pueden ser diferentes. Por ejemplo la figura 2.1(b) tiene la matriz de adyacencia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2-3)$$

Una propiedad topológica importante del nodo es el grado. El grado mide la actividad de un nodo con el número de vínculos incidentes a él [51]. Cuando el grafo es dirigido, el grado tiene dos componentes para un nodo; el grado de entrada y el de salida [18]. El grado de entrada se define como el número de vínculos entrantes conectados a un nodo i [18],

$$k_i^{in} = \sum_j^N a_{ji}. \quad (2-4)$$

El grado de salida de forma análoga, corresponde al número de vínculos salientes al nodo i [18]

$$k_i^{out} = \sum_j^N a_{ij}. \quad (2-5)$$

El grado total del nodo i se define por la superposición [51]

$$k_i^{total} = \sum_i^N (k_i^{out} + k_i^{in}). \quad (2-6)$$

2.1.2. Matriz valuada y fortaleza de un nodo.

Cuando una red es valuada (o valuada y dirigida) es posible calcular todas sus características con la matriz valuada [17]. La matriz valuada permite medir la adyacencia entre nodos y cuantificar el peso que poseen los vínculos del grafo [20]. La matriz valuada \mathbf{W} , o matriz de pesos de un grafo es una matriz cuadrada $N \times N$ cuyos elementos $w_{ij} \geq 0$ identifican el peso del vínculo entre los nodos i e j [51]. Cuando $w_{ij} = 0$ los nodos no están conectados. En casos contrarios los nodos son adyacentes [18].

Cuando se trabaja con una red dirigida y valuada, la función de Heaviside $\Theta(w_{ij}) = a_{ij}$ permite relacionar la matriz valuada con la matriz de adyacencia [53]. Para el caso de la imagen 2.1(c) se tiene que la matriz valuada correspondiente es

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2-7)$$

Con la función Heaviside y la matriz valuada es posible calcular el grado de salida y entrada de un nodo i como

$$k_i^{out} = \sum_j^N \Theta(w_{ij}), \quad k_i^{in} = \sum_j^N \Theta(w_{ji}). \quad (2-8)$$

La matriz de adyacencia permite fácilmente determinar la conectividad de un nodo, y la matriz valuada permite calcular la fuerza de la conexión entre elementos de la red [54]. En analogía al grado de un nodo, se construye la fortaleza de un nodo cuando el grafo es valuado. La fortaleza de un nodo i en una red dirigida y valuada se define como [51]

$$s_i^{out} = \sum_j^N w_{ij}, \quad s_i^{in} = \sum_j^N w_{ji}. \quad (2-9)$$

Con fortaleza total del nodo i

$$s_i^{total} = s_i^{out} + s_i^{in}. \quad (2-10)$$

2.2. Entropía nodal.

La entropía como concepto ha sido utilizada ampliamente en termodinámica, mecánica estadística y teoría de la información [55]. La primera formulación aparece en la termodinámica con los trabajos de Calusius en 1850, donde la entropía es relacionada con la segunda ley de la termodinámica y la reversibilidad de los sistemas [55]. En el siglo XVIII, con sus trabajos en teoría cinética de gases, Boltzmann formula una entropía que es proporcional al número de estados microscópicos de un sistema, cuya interpretación está relacionada con el desorden del sistema [55, 56]. Posteriormente, en 1948 Claude Shannon [57] establece la teoría de la información, aunando al concepto de entropía la medida de incertidumbre [55].

De forma general, el conocimiento de un sistema discreto puede ser descrito como una distribución de probabilidad p_i sobre los estados i , con incertidumbre o entropía

$$S = -k_B \langle \ln p_i \rangle = -k_B \sum_i^{\Omega} p_i \ln p_i, \quad (2-11)$$

donde k_B es una constante que se relaciona con la mecánica estadística (constante de Boltzmann) o la teoría de la información [55] y Ω , el número de estados del sistema. La ecuación (2-11) corresponde a la generalización de la entropía de sistemas fuera del equilibrio [55], además, permite cuantificar la cantidad de aleatoriedad o libertad de elección [58, 59]. Cuando la constante k_B^1 se normaliza, se conoce como entropía de Shannon [57]. La ecuación (2-11) tiene las siguientes propiedades

- Es máxima para estados de igual probabilidad

$$S(1/N, 1/N, 1/N, \dots, 1/N) > S(p_1, p_2, p_3, \dots, p_N),$$

salvo $p_i = 1/N$ cuyo valor $S = k_B \ln N$. Este máximo indica la máxima ignorancia sobre el sistema [55, 60].

- La entropía no cambia con estados adicionales de probabilidad cero [55],

$$S(p_1, \dots, p_N, 0, \dots, 0) = S(p_1, \dots, p_N).$$

- Cuando la probabilidad $p_i = 1$ (certidumbre de un evento), la entropía es cero [58, 60].
- Para resultados equiprobables, el valor de la entropía S aumenta con N [58, 60].

En el ámbito de las redes, la entropía es usada como una medida de complejidad [58, 61, 62, 63], ya que, la complejidad se relaciona con la cantidad de información necesaria para describir un sistema [11]. En cuanto a la dinámica del sistema, la entropía depende de la selección de probabilidad y su granularidad [58]. La primera hace referencia a los diferentes atributos del grafo sobre los que puede basarse la probabilidad (ejemplo: grado, fortaleza, entre otros [58]), y la granularidad tiene en cuenta si el atributo seleccionado como probabilidad mide una cantidad local o de estructura [59, 58, 61]. Para el presente trabajo fundamentamos la probabilidad y su entropía en función del grado y fortaleza del nodo con una granularidad local, que llamaremos entropía nodal de grado y entropía nodal de fortaleza respectivamente.

2.2.1. Entropía de grado de la red.

La entropía nodal de grado permite cuantificar la diversidad, accesibilidad, actividad o heterogeneidad de un nodo con los nodos vecinos. La distribución de probabilidad se construye con el grado de un nodo i como [58, 12, 60]

$${}_g p_{ij} = \frac{a_{ij}}{k_i}, \quad (2-12)$$

¹la constante puede tomar diferentes valores sin perder generalidad la entropía.

donde el subíndice i de ${}_g p_{ij}$ indica el nodo y j los nodos adyacentes a i . Para un grafo valuado y dirigido, esta probabilidad puede ser descompuesta en dos cantidades dependientes de \mathbf{W} como

$${}_g p_{ij}^{out} = \frac{\Theta(w_{ij})}{\sum_i^N \Theta(w_{ij})} = \frac{a_{ij}}{k_i^{out}}, \quad {}_g p_{ij}^{in} = \frac{\Theta(w_{ji})}{\sum_i^N \Theta(w_{ji})} = \frac{a_{ji}}{k_i^{in}} \quad (2-13)$$

donde ${}_g p_{ij}^{out}$ y ${}_g p_{ij}^{in}$ son las probabilidades de grado de salida y entrada respectivamente para el nodo i . Estas probabilidades cumplen con la condición de normalización

$$\sum_j^N {}_g p_{ij}^{out} = 1, \quad \sum_j^N {}_g p_{ij}^{in} = 1. \quad (2-14)$$

Con el fin que la entropía del nodo sea cero cuando este no este conectado con otros, se define a ${}_g p_{ij}^{out} = 0$ y ${}_g p_{ij}^{in} = 0$ cuando los grados del nodo $k_i^{out} = 0$ y $k_i^{in} = 0$ respectivamente. Teniendo presente las probabilidades (2-13), se obtiene las entropías nodales de grado ${}_g S_i(\mathbf{W})^{out}$ y ${}_g S_i(\mathbf{W})^{in}$ así

$$\begin{aligned} {}_g S_i(\mathbf{W})^{out} &= - \sum_j^N {}_g p_{ij} \ln {}_g p_{ij} \\ &= - \sum_j^N \frac{a_{ij}}{k_i^{out}} \ln \frac{a_{ij}}{k_i^{out}}, \end{aligned}$$

como a_{ij} toma valores enteros de 0 o 1, podemos reescribir facilmente la entropía a

$${}_g S_i(\mathbf{W})^{out} = \ln k_i^{out}. \quad (2-15)$$

De forma similar se encuentra que la entropía ${}_g S_i(\mathbf{W})^{in}$ es

$${}_g S_i(\mathbf{W})^{in} = \ln k_i^{in}. \quad (2-16)$$

En (2-15) y (2-16), N corresponde al número de nodos de la red. El valor máximo de estas entropías, que corresponde cuando un nodo está conectado con todos los demás incluso así mismo², es ${}_g S_i(\mathbf{W})^{out} = {}_g S_i(\mathbf{W})^{in} = \ln N$.

En analogía con la medida de estructura de entropía de red propuesta por Marc Wiedermann et.al en [12], donde se mide la tendencia de un grafo para formar ramas, se tiene que la entropía de grado de la red out ${}_g S_i(\mathbf{W})^{out}$ e in ${}_g S_i(\mathbf{W})^{in}$ es

$$S(\mathbf{W})^{out} = \sum_i^N {}_g S_i(\mathbf{W})^{out}, \quad S(\mathbf{W})^{in} = \sum_i^N {}_g S_i(\mathbf{W})^{in}. \quad (2-17)$$

²cuando es una red sin loops su maximo valor es $\ln(N - 1)$

Estas entropías exponen una medida de regularidad u orden en el grafo con respecto a la diversidad de los nodos. Cuando los nodos están bien conectados con los demás da un aumento en la entropía, y cuando están poco conectados la disminuyen. En el caso donde todos los estados (vínculos) sea accesibles, se tiene un máximo de entropía con valor $S(\mathbf{W})^{out} = N \ln N$ e $S(\mathbf{W})^{in} = N \ln N$.

2.2.2. Entropía de fortaleza de la red.

Una segunda métrica de entropía usada en este trabajo se basa en la fortaleza del nodo, que es la extensión de las entropías (2-15) y (2-16). Las probabilidades de fortaleza fP_{ij} para un grafo valuado y dirigido se construyen como [58, 61, 60]

$$fP_{ij}^{out} = \frac{w_{ij}}{\sum_j^N w_{ij}} = \frac{w_{ij}}{s_i^{out}}, \quad fP_{ij}^{in} = \frac{w_{ji}}{\sum_j^N w_{ji}} = \frac{w_{ji}}{s_i^{in}}, \quad (2-18)$$

que cumplen con la condición de normalización

$$\sum_j^N fP_{ij}^{out} = 1, \quad y \quad \sum_j^N fP_{ij}^{in} = 1. \quad (2-19)$$

Se tiene que $fP_{ij}^{out} = 0$ y $fP_{ij}^{in} = 0$ cuando la fortaleza del nodo $s_i^{out} = 0$ y $s_i^{in} = 0$. Con las probabilidades (2-18) tenemos que las entropías nodales de fortaleza $fH_i(\mathbf{W})^{out}$ y $fH_i(\mathbf{W})^{in}$ son

$$fH_i(\mathbf{W})^{out} = - \sum_j^N \frac{w_{ij}}{s_i^{out}} \ln \frac{w_{ij}}{s_i^{out}}, \quad fH_i(\mathbf{W})^{in} = - \sum_j^N \frac{w_{ji}}{s_i^{in}} \ln \frac{w_{ji}}{s_i^{in}}. \quad (2-20)$$

El valor máximo de estas entropías ocurre cuando un nodo está conectado con todos, y el peso de sus vínculos ij es el mismo para todo j . Usando el principio de máxima entropía (ver apéndice C) para $fH_i(\mathbf{W})^{out}$, se encuentra que la distribución de probabilidad que maximiza la entropía es

$$\delta \left(fH_i(\mathbf{W})^{out} + \lambda \sum_j^N fP_{ij}^{out} \right) = 0, \\ fP_{ij}^{out} = e^{(1-\lambda)} = c,$$

que remplazando en la condición de normalización (2-19) corresponde a

$$fP_{ij}^{out} = \frac{1}{N}. \quad (2-21)$$

De forma similar se encuentra que la probabilidad que maximiza la entropía $fH_i(\mathbf{W})^{in}$ es $fP_{ij}^{in} = 1/N$. La entropía (2-20) tiene como particularidad, evaluar la actividad o la fuerza que tiene un nodo [61, 64], y describe la influencia de un nodo sobre sus vecinos [58]. Si definiendo la entropía de fortaleza de la red $H(\mathbf{W})^{out}$ y $H(\mathbf{W})^{in}$ como

$$H(\mathbf{W})^{out} = \sum_i^N fH_i(\mathbf{W})^{out} \quad y \quad H(\mathbf{W})^{in} = \sum_i^N fH_i(\mathbf{W})^{in}, \quad (2-22)$$

una reducción de la entropía corresponde al aumento de pesos w_{ij} en vínculos ij específicos. Cuando el peso es igual en todos los vínculos del grafo la entropía se maximiza a $H(\mathbf{W})^{out} = N \ln N$ y $H(\mathbf{W})^{in} = N \ln N$.

2.2.3. Grafos Exponenciales.

Si se toma un conjunto o ensamble de grafos tal que los valores esperados de observables (ligaduras) del ensamble coincidan con los medidos en el grafo real [17, 65, 66, 67], y se denota una red genérica como \mathbf{G} , y \mathbf{G}^* la red original y la selección de las ligaduras $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}(\mathbf{G}^*)$, entonces el ensamble consiste en todos los posibles grafos $\{\mathbf{G} + \mathbf{G}^*\}$ que poseen el mismo número de nodos N , características de los vínculos y ligaduras del grafo \mathbf{G}^* (dirigido y valuado en nuestro caso). Cada grafo \mathbf{G} en el ensamble tienen la misma probabilidad de ocurrencia a priori $\mathbf{P}(\mathbf{G})$, cuya forma funcional es determinada por las ligaduras de la red. Esta probabilidad satisface la condición de normalización

$$\sum_{\mathbf{G}} \mathbf{P}(\mathbf{G}) = 1, \quad (2-23)$$

donde esta suma corre para todos los grafos del ensamble. El valor de expectación o valor medio de cualquier propiedad topológica X es

$$\langle X \rangle = \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{X}(\mathbf{G}) \mathbf{P}(\mathbf{G}). \quad (2-24)$$

Con la entropía de Gibbs-Shannon

$$S(\mathbf{P}) = - \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{P}(\mathbf{G}) \ln \mathbf{P}(\mathbf{G}), \quad (2-25)$$

que indica la medida de los niveles de incertidumbre o aleatoriedad. Para encontrar la probabilidad $\mathbf{P}(\mathbf{G})$ que maximice la entropía $S(\mathbf{P})$ supeditada a ligaduras, donde se designa la ligadura promedio para el ensamble igual a \mathbf{C}^* [66, 17], en otras palabras

$$\langle \mathbf{C} \rangle = \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{C}(\mathbf{G}) \mathbf{P}(\mathbf{G}) = \mathbf{C}^*. \quad (2-26)$$

Usado esta restricción para maximizar la entropía se encuentra que la probabilidad que maximiza $S(\mathbf{P})$ es

$$\mathbf{P}(\mathbf{G}|\boldsymbol{\lambda}) = \frac{e^{-\mathbf{H}(\mathbf{G},\boldsymbol{\lambda})}}{\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda})}, \quad (2-27)$$

donde $\mathbf{H}(\mathbf{G}, \boldsymbol{\lambda})$ es el Hamiltoniano del grafo y es definido como la combinación lineal

$$\mathbf{H}(\mathbf{G}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\mathbf{a}} \lambda_{\mathbf{a}} C_{\mathbf{a}}(\mathbf{G}) \quad (2-28)$$

con $\lambda_{\mathbf{a}}$ los multiplicadores de Lagrange y $C_{\mathbf{a}}(\mathbf{G})$ las ligaduras, y la constante de normalización $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda})$ es la función de partición definida por

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\mathbf{G}} e^{-\mathbf{H}(\mathbf{G},\boldsymbol{\lambda})}. \quad (2-29)$$

2.2.4. Grafo exponencial: valuado y dirigido.

Una aplicación del formalismo mostrado en la sección anterior es el grafo \mathbf{G}^* valuado y dirigido. Suponiendo que el ensamble de grafos $\{\mathbf{G} + \mathbf{G}^*\}$ posee el mismo número de nodos N y, asimismo, son dirigidos y valuados, con dependencia de la matriz valuada \mathbf{W}^* , cuyos elementos $\{w_{ij}\}$ son enteros que representan el peso del vínculo entre el nodo i e j . Tomando como ligaduras las secuencias de fortaleza, que corresponden a un vector de N dimensiones que posee la fortaleza *Out* e *In* (2-9) de todos los nodos $\{s_i(\mathbf{W})^{out}\}, \{s_i(\mathbf{W})^{in}\}$ [17], donde

$$s_i(\mathbf{W})^{out} = \sum_j w_{ij} \quad y, \quad s_i(\mathbf{W})^{in} = \sum_j w_{ji}, \quad (2-30)$$

el Hamiltoniano de este sistema se escribe como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{W}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) &= \sum_i \left[\theta_i s_i(\mathbf{W})^{in} + \beta_i s_i(\mathbf{W})^{out} \right], \\ &= \sum_{ij} (\beta_i + \theta_j) w_{ij}, \end{aligned} \quad (2-31)$$

con $\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\beta}$ multiplicadores de Lagrange. La función de partición por consiguiente se escribe como

$$Z(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{\mathbf{W}} e^{-\sum_{ij} (\beta_i + \theta_j) w_{ij}} = \prod_{ij} \sum_{w_{ij}=0}^{w^*} e^{-(\beta_i + \theta_j) w_{ij}}. \quad (2-32)$$

La suma es una serie geométrica, donde w^* es el máximo valor de fortaleza del grafo original y los valores w_{ij} son enteros mayores o iguales a cero. Suponiendo que w^* es grande, se tiene

$$Z(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) = \prod_{ij} \frac{1}{1 - x_i y_j} \quad (2-33)$$

donde $x_i = e^{-\beta_i}$ y $y_j = e^{-\theta_j}$. La probabilidad de encontrar un grafo \mathbf{G} es por consiguiente

$$\mathbf{P}(\mathbf{W}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) = \prod_{ij} p_{ij}^{w_{ij}} (1 - p_{ij}) \quad (2-34)$$

donde $p_{ij} = x_i y_j$ es la probabilidad de que exista un vínculo entre el nodo i e j , y $q_{ij}(w) = p_{ij}^w (1 - p_{ij})$ la función de probabilidad de masa geométrica [65]. Para encontrar los multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\beta}$, se usa el método de la máxima verosimilitud planteado por Squartini y Garlaschelli en [20]. El principio de máxima verosimilitud para ensambles definidos por (2-27) es una clase particular de modelo que permite estimar los parámetros $\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\beta}$, garantizando que la elección de estos cumpla con las ligaduras planteadas (2-30). En particular, la probabilidad logarítmica es

$$\Gamma(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) \equiv \ln P(\mathbf{G}^*, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i,j} \left\{ w_{ij} \ln(x_i^* y_j^*) + \ln(1 - x_i^* y_j^*) \right\}. \quad (2-35)$$

Maximizando respecto a x_i y y_j se encuentra

$$\begin{aligned} s_i(\mathbf{W})^{out} &= \sum_j^N \frac{x_i^* y_j^*}{1 - x_i^* y_j^*}, \\ s_i(\mathbf{W})^{in} &= \sum_j^N \frac{x_j^* y_i^*}{1 - x_j^* y_i^*}. \end{aligned} \tag{2-36}$$

Estas ecuaciones constituyen un sistema de ecuaciones de $2N$ incógnitas con $2N$ ecuaciones cuya región de solución se encuentra en $0 \leq x_i^* < 1$ y $0 \leq y_i^* < 1$.

Exploración de los datos.

En el siguiente apartado se presentan las preparaciones realizadas a las bases de datos trabajadas.

3.1. Bases de datos.

Las bases de datos del ajedrez están constituidas por la acumulación de partidas usando como notación el sistema algebraico (ver apéndice B). En general una juego de ajedrez es guardado en un formato de archivo pgn (de sus siglas en ingles *portable game notation*), cuya mínima información recopila

Evento: Corresponde al evento en el cual se realizó la partida (ejm. Olimpiadas, torneos internacionales, copa mundial de ajedrez, etc.).

Lugar: Indica la ciudad o país donde se practicó la partida.

Fecha: Señala el año, mes y día en que se efectuó la partida.

Blancas: Denota el nombre del jugador de piezas blancas.

Negras: Referencia el nombre del jugador de piezas negras.

Resultado: Da alusión al resultado de la partida. Gana las blancas $1 - 0$, negras ganan $0 - 1$, y la partida queda empatada $1/2 - 1/2$.

Partida: Conriene a todos los movimientos realizados durante la partida.

Un ejemplo de un archivo pgn es


```
[Event "Saint_Louis_Rapid_2017"]
[Site "Saint_Louis_USA"]
[Date "2017.08.15"]
[Round "6.1"]
[White "Anand,_Viswanathan"]
[Black "Kasparov,_Garry"]
[Result "1/2-1/2"]
[WhiteElo "2783"]
[BlackElo "2812"]
[ECO "B51"]
[EventDate "2017.08.14"]

1. e4 c5 2. Nf3 d6 3. Bb5+ Nd7 4. d4 cxd4 5. Qxd4 a6 6. Bxd7+ Bxd7 7. Nc3
e5 8. Qd3 h6 9. Nd2 Be6 10. Nc4 Rc8 11. Ne3 Nf6 12. O-O Be7 13. Rd1 O-O
14. Bd2 Rc5 15. a4 Qc8 16. Be1 Rd8 17. b4 Rc7 18. a5 Bc4 19. Qd2 d5 20.
Ncxd5 Nxd5 21. exd5 Bg5 22. d6 Rcd7 23. Qc3 Bxe3 24. Qxe3 Rxd6 25. Rxd6
Rxd6 26. Qxe5 Qc6 27. Qc5 Qxc5 28. bxc5 Re6 29. Bc3 Bd5 30. Re1 Rxe1+ 31.
Bxe1 f6 1/2-1/2
```

En este trabajo se obtuvieron y analizaron las bases de datos de las Olimpiadas de ajedrez, el Congreso internacional de Hastings y un breve compendio histórico del juego de los GM Anatoly Karpov, Garry Kasparov y Magnus Carlsen. Las Olimpiadas de ajedrez fueron obtenidas de *OlimpBase* [36], el cual es un sitio web diseñado para brindar las partidas y estadísticas de los eventos de equipos internacionales más importantes avalados por la FIDE. La base de datos de *OlimpBase* ofrece más de 90000 juegos en total, ordenados desde la olimpiada efectuada en 1924 hasta la olimpiada del 2018. Los archivos del Congreso internacional de Hastings fueron obtenidos del sitio web *PGN Mentor* [68]; esta pagina web ofrece un programa de manejo de base de datos y estudio para el ajedrez y asimismo de bases de datos de jugadores, aperturas y eventos. Entre estos eventos se encuentran los de Hastings efectuados entre 1895 a 2004. Los datos del compendio histórico se obtuvo de la base de datos de 3.45 millones de partidas de humanos comprendida entre 1800 hasta 2020 del sitio web *Home of the dutch rebel* [69]. Al igual que *PGN Mentor*, *Home of the dutch rebel* ofrece bases de datos y programas para el estudio del ajedrez. Por último, las partidas de los GM fueron obtenidas del servidor, sitio web de noticias, red social y, base de datos de ajedrez en línea *Chess.com* [70]. En la figura 3-1 se puede observar el número de juegos en funcion del tiempo, para las Olimpiadas el Congreso de Hastings y el compendio histórico.

3.2. Procesamiento de los datos.

Teniendo presente la información suministrada por las bases de datos y los archivos .pgn, en el presente trabajo la información se procesó teniendo presente la fecha y el resultado de las partidas. En particular, para las bases de datos de los GM se agregó un filtro para las

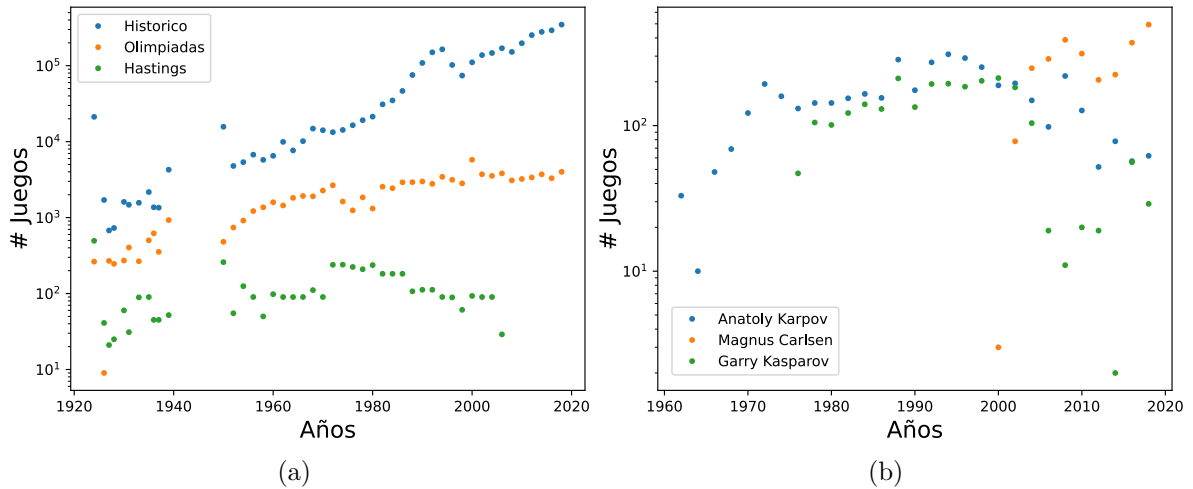


Figura 3-1: Número de juegos por año para (a): las Olimpiadas de ajedrez, Congreso internacional de Hastings y compendio histórico; y grandes maestros (b) Anatoly Karpov, Magnus Carlsen y Garry Kasparov.

partidas cuando juegan con piezas blancas y negras.

Con la fecha, se depuraron las partidas en las bases de datos según el año que se realizaron (Se toman los años, debido a que existen partidas donde sólo aparece el año de ejecución). Esto permite, restrear el número de juegos realizados en un periodo temporal (ver figura.3-1) y observar los cambios de juego a través del tiempo, confiando la posibilidad de observar las entropías en diversas épocas y su comportamiento en la evolución del juego. Con el resultado, se depuraron las partidas de las bases de datos con los siguientes criterios:

- blancas ganan,
- negras ganan,
- empates,
- toda la base de datos.

Un primer uso de la colimación de los datos por el resultado aunado con la fecha, se observa en la figura 3-2, donde se determina el porcentaje de victorias y empates en el tiempo de las Olimpiadas, el torneo de Hastings y el compendio histórico. En el presente trabajo, por cuestiones prácticas usaremos los terminos: “blancas” para las partidas donde las blancas ganan, “negras” para partidas donde las negras ganan, “empates” para las partidas donde el resultado son las tablas y “todas” haciendose referencia a que se toma todas las partidas efectuadas en un año determinado. Los terminos “juega con” y “piezas” negras o blancas se limitarán para referir que se trata de los movimientos o jugadas (estrategías) realizadas por las blancas o negras.

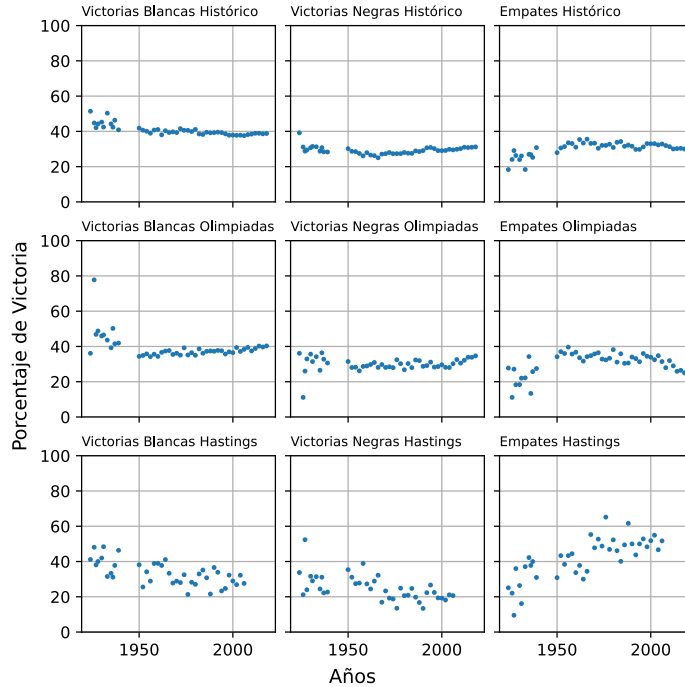


Figura 3-2: Porcentaje de victorias y empates para las Olimpiadas de ajedrez (arriba), Congreso internacional de Hastings (medio) y compendio histórico (abajo), para victorias con piezas blancas, negras y empates

3.2.1. Representación.

Para representar el primer movimiento de una partida de ajedrez en un grafo, hacemos uso de la notación descriptiva (ver apéndice B). Como primera medida, transformamos los movimientos de notación algebraica en notación descriptiva. Posteriormente se construye el grafo valuado y dirigido, donde los nodos de la red simbolizan las 20 primeras posibilidades de movimientos¹ legales². Los vínculos relacionan el movimiento de las piezas blancas (cola del vínculo) con la respuesta de las negras (cabeza del vínculo). El peso del vínculo establece el número de veces que se efectuó una combinación de movimientos de las blancas y las negras (un ejemplo se ve en la figura.3-3)

En el trabajo usamos la representación matricial de los grafos para la realización de los cálculos de entropía y de ensamblajes de la red. En consecuencia, la representación se tiene con dos matrices: adyacencia \mathbf{A} y valuada \mathbf{W} . Siguiendo a manera de ejemplo la figura.3-3,

¹16 posibles movimientos para peones y 4 para los caballos.

²Para mayor información sobre las reglas básicas de ajedrez necesarias para el desarrollo de la tesis ir al apéndice A.

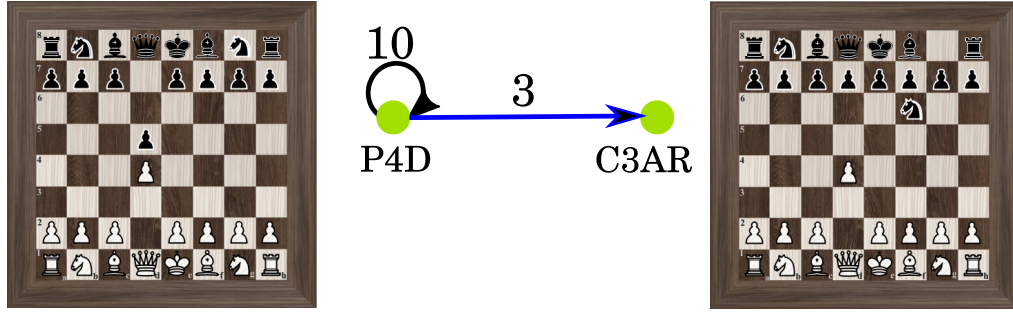


Figura 3-3: Ejemplo de la representación del sistema. El lazo en negro (loop) corresponde a la jugada $P4D$ de las blancas con respuesta de las negras $P4D$ (imagen izquierda), el numero 10 en el vínculo indica que esa combinación $P4D P4D$ se efectuó 10 veces. El lazo azul corresponde a la representación en el grafo de las jugadas $P4D C3AR$ (imagen izquierda), con una aparición de 3 veces.

tenemos la matriz de adyacencia \mathbf{A} para este caso es

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} \vdots \\ P4D \\ P4R \\ \vdots \\ C3TR \\ C3AR \\ \vdots \end{matrix} \begin{pmatrix} \dots & P4D & P4R & \dots & C3TR & C3AR & \dots \\ & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ & & & \dots & & & \end{pmatrix}, \quad (3-1)$$

donde los elementos de las filas representan el movimiento realizado por las blancas y las columnas el movimiento realizado por las negras. Esta matriz posee un tamaño de 20×20 , que corresponde a los 20 movimientos posibles de las blancas³ y las 20 respuestas posibles de las negras. Los elementos $a_{ij} = 1$ de \mathbf{A} , indican que el movimiento i de las blancas tuvo como respuesta el movimiento j ($P4D P4D$ y $P4D C3AR$). De forma general, la construcción de estas matrices y posteriores calculos se realizaron con el uso del lenguaje C++. En particular, las probabilidades (2-13) gP_{ij}^{out} y gP_{ij}^{in} en el trabajo tienen el siguiente significado

gP_{ij}^{out} : probabilidad de que blancas juegan i entonces negras respondan j .

gP_{ij}^{in} : probabilidad de que para la respuesta de las negras i la jugada de las blancas haya sido j .

De forma análoga a la matriz de adyacencia, la matriz valuada \mathbf{W} de la figura 3-3 se

³ P3TD, P3CD, P3AD, P3D, P3R, P3AR, P3CR, P3TR, P4TD, P4CD, P4AD, P4D, P4R, P4AR, P4CR, P4TR, C3TR, C3AR, C3AD, C3TD.

construye como

$$\mathbf{W} = \begin{matrix} \vdots \\ P4D \\ P4R \\ \vdots \\ C3TR \\ C3AR \\ \vdots \end{matrix} \begin{pmatrix} \dots & P4D & P4R & \dots & C3TR & C3AR & \dots \\ & 10 & 0 & \dots & 0 & 3 & \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \vdots & & & \dots & & & \end{pmatrix}, \quad (3-2)$$

donde los elementos $w_{ij} > 0$ expresan la frecuencia con la cual fue realizada una jugada de las blancas i con respuesta de las negras j . La matriz valuada \mathbf{W} en el presente trabajo se relaciona con las distribuciones de probabilidad (2-18), con significado

fP_{ij}^{out} : probabilidad de ocurrencia de que blancas juegan i y entonces negras respondan j ,

fP_{ij}^{in} : probabilidad de ocurrencia que para la respuesta de las negras i la jugada de las blancas haya sido j .

Resultados y análisis.

En este capítulo se presentan y discuten los resultados obtenidos de las bases de datos empíricamente, y los obtenidos teóricamente del modelo mecánico-estadístico para los jugadores. En la primera sección del capítulo se encuentran los resultados de torneos y en la segunda sección se presentan los resultados para los GM.

Con el propósito de presentar de forma clara y sencilla los resultados, se exponen previamente las herramientas usadas para entender los resultados con las especificaciones para su presentación. De manera general, calculamos las entropías de grado de red (2-17) y de fortaleza de red (2-22), para los torneos y GM, teniendo presentes los filtros de blancas, negras, empates y todas. Por otra parte, con el tiempo como colimador útil para entender la evolución de la apertura del ajedrez a través del tiempo, se calculan las entropías (2-17) y (2-22) en diferentes años considerando la superposición

$$\mathbf{G}_t = \sum_{i=0}^t \mathbf{G}_{t-i}, \quad (4-1)$$

donde \mathbf{G}_t es el grafo que contiene la suma de todos los primeros movimientos de las piezas blancas y negras efectuadas hasta el año t . La selección de estos años t se asocia con las temporadas de las Olimpiadas de ajedrez, debido a que estas no se efectúan anualmente, además de que permite comparar los resultados entre torneos y jugadores en las mismas temporadas.

Tomando las entropías de grado de red $S(\mathbf{W})^{out}$ y $S(\mathbf{W})^{in}$ (ecuaciones 2-17), se tiene que en el ajedrez su interpretación está ligada con indicadores de complejidad o diversidad de movimientos de las piezas negras ($S(\mathbf{W})^{out}$) y las piezas blancas¹ ($S(\mathbf{W})^{in}$), y poseen como máximo valor $N \ln N = 20 \ln 20 \approx 59.9$ que corresponde al uso de todos los movimientos legales de las piezas.

¹Los terminos “juega con” y “piezas” negras o blancas se utilizan para referir el movimiento o jugada (estrategías) realizados por las blancas o negras.

Las entropías de fortaleza de red $H(\mathbf{W})^{out}$ y $H(\mathbf{W})^{in}$ en el ajedrez (ecuaciones 2-22), adquieren el significado de indicadores de preferencia o primacía en los movimientos de las piezas negras ($H(\mathbf{W})^{out}$) y las blancas ($H(\mathbf{W})^{in}$). Estas entropías poseen como característica tener el mismo limite que las entropías de grado (2-17), que se alcanza cuando el peso o ocurrencia de las combinaciones de las jugadas en el ajedrez es igual para todas las jugadas, con lo cual $H(\mathbf{W})^{out/in} \approx S(\mathbf{W})^{out/in}$ ², con lo cual una no preferencia en el uso de movimientos. Y caso contrario indica preferencia en ciertas estrategias.

Dentro de los resultados se introducen algunas medidas que permiten un proceso comparativo más limpio que el ofrecido por las gráficas de entropía de grado o fortaleza. Como primera medida, se relaciona las entropías de grado de red *out* e *in* (ecuaciones 2-17) como

$$\Delta S(\mathbf{W})^{out} = S(\mathbf{W}_t)^{out} - S(\mathbf{W}_{t-1})^{out} \quad \text{y} \quad \Delta S(\mathbf{W})^{in} = S(\mathbf{W}_t)^{in} - S(\mathbf{W}_{t-1})^{in}. \quad (4-2)$$

Estas diferencias permiten identificar los cambios de entropía de grado de la red en un año t determinado con respecto al periodo anterior $t-1$. En ajedrez esta medida permite identificar la introducción de estrategias nuevas de las piezas blancas ($\Delta S(\mathbf{W})^{in}$) o de las piezas negras ($\Delta S(\mathbf{W})^{out}$). Así, $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in} > 0$ indica la introducción de nuevas estrategias. En analogía con las diferencias de entropías de grado de red, las entropías de fortaleza *out* e *in* (ecuaciones 2-22) las relacionamos como

$$\Delta H(\mathbf{W})^{out} = H(\mathbf{W}_t)^{out} - H(\mathbf{W}_{t-1})^{out} \quad \text{y} \quad \Delta H(\mathbf{W})^{in} = H(\mathbf{W}_t)^{in} - H(\mathbf{W}_{t-1})^{in}. \quad (4-3)$$

Característicamente estas diferencias de entropías representan una disminución, constancia o aumento en la preferencia de los movimientos de las piezas blancas ($\Delta H(\mathbf{W})^{in}$) o negras ($\Delta H(\mathbf{W})^{out}$). La disminución de preferencia se encuentra cuando $\Delta H(\mathbf{W})^{out/in} > 0$, la invariancia en las preferencias sucede cuando $\Delta H(\mathbf{W})^{out/in} = 0$ y la disminución ocurre si $\Delta H(\mathbf{W})^{out/in} < 0$.

Para representar los resultados de $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$ e $\Delta H(\mathbf{W})^{out/in}$, se grafican por separado los casos todas i), blancas ii), negras iii) y empates iv). Además, se agregan intervalos temporales que corresponden a eventos relevantes dentro del mundo del ajedrez. El primer intervalo, que comprende desde 1924 hasta 1960 (franjas color morado en graficas de $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$ e $\Delta H(\mathbf{W})^{out/in}$) corresponde a una época que llamaremos pre-Fischer³ y que hace parte de toda la evolución del ajedrez hasta la entrada de Fischer al ajedrez. El segundo intervalo, comprende entre 1960 y 1972 (franja color amarillo), que llamaremos época Fischer, y corresponde a la entrada de Fischer en la escena internacional del ajedrez. El tercer intervalo se encuentra entre 1972 y 1997 (franja color rojo), que llamaremos época pos-Fischer, y comprende el periodo en que él desaparece de la escena ajedrecística y finaliza con la entrada

² $H(\mathbf{W})^{out/in}$ y $S(\mathbf{W})^{out/in}$ es la forma abreviada de $H(\mathbf{W})^{out}$ y $H(\mathbf{W})^{in}$, $S(\mathbf{W})^{out}$ y $S(\mathbf{W})^{in}$

³**Bobby Fischer:** GM de ajedrez, considerado por muchos uno de los mejores jugadores de todos los tiempos, además, de vencer la hegemonía rusa contra Borís Spasky en 1972[44].

triumfante de la computación⁴. El último periodo temporal es desde 1997 en adelante (franja color verde), y corresponde la llegada del Internet y la computación al juego, que llamaremos época computacional.

Otra medida realizada para mejorar el entendimiento de los datos se relaciona con comparar la diferencia de entropía *out* e *in*. Para la entropía de grado de la red definimos

$$\Delta_{S^{out}-S^{in}} = S(\mathbf{W}_t)^{out} - S(\mathbf{W}_t)^{in}, \quad (4-4)$$

el cual, representa en un año específico t si las estrategias de las piezas blancas ($\Delta_{S^{out}-S^{in}} < 0$) o las negras ($\Delta_{S^{out}-S^{in}} > 0$) es mayor con su contra parte. El caso $\Delta_{S^{out}-S^{in}} = 0$ corresponde a que las piezas blancas y negras son igualmente diversas en estrategias. En semejanza a la entropía de grado de red, se tiene que la diferencia *out* e *in* de entropía de fortaleza de la red es

$$\Delta_{H^{out}-H^{in}} = H(\mathbf{W}_t)^{out} - H(\mathbf{W}_t)^{in}, \quad (4-5)$$

cuya interpretación se relaciona con la identificación de las piezas que son más recurrentes a estrategias específicas en una temporada o año determinado t . Cuando $\Delta_{H^{out}-H^{in}} > 0$ denota que las piezas blancas son más preferentes en el uso de las estrategias, e implica que las piezas negras usan más estrategias que las piezas blancas. Para el caso en que $\Delta_{H^{out}-H^{in}} = 0$, la primacía de estrategias tanto de las piezas blancas como negras es igual. Con $\Delta_{H^{out}-H^{in}} < 0$ se relaciona una mayor preferencia a estrategias de las piezas negras, con consecuencia en que es más diverso el uso de estrategias de las piezas blancas.

4.1. Resultados torneos.

Los resultados de los torneos se exponen siguiendo el orden: Compendio histórico, Olimpíadas de ajedrez y el Congreso internacional de Hastings.

Compendio histórico.

Dado los resultados de las entropías $S(\mathbf{W})^{out/in}$ que se observan en la figura 4-1 (a), tomando el caso general (ver todas, marcadores amarillos), con líneas punteadas rojas para el máximo de entropía de las piezas negras y líneas punteadas verdes para el máximo de entropía de las piezas blancas, se encuentra que los máximos de entropía tanto de las piezas negras como blancas son cercanos entre sí, pero inferiores al máximo permitido ($N \ln N = 20 \ln 20 \approx 59.9$), entonces las 400 posibles combinaciones⁵ permitidas a nivel profesional no se han efectuado.

⁴Macht entre Garry Kasparov y Deep Blue [71].

⁵Corresponde a la combinaciones de las 20 jugadas permitidas por las piezas blancas con las posibles 20 jugadas de respuesta de las piezas negras

La cercanía de los máximos de las piezas blancas con las negras exponen que la diversidad de estrategias de las piezas blancas y negras es similar aunque no es la misma. Para los resultados de los filtros de blancas, negras y empates, la separación con respecto al caso general (todas) pone en evidencia una dependencia del primer movimiento de ambas piezas en el resultado de la partida, ya que si el primer movimiento de alguno de los jugadores es independiente entonces se obtendría que los valores de las entropías de todas, blancas, negras y empates serían el mismo.

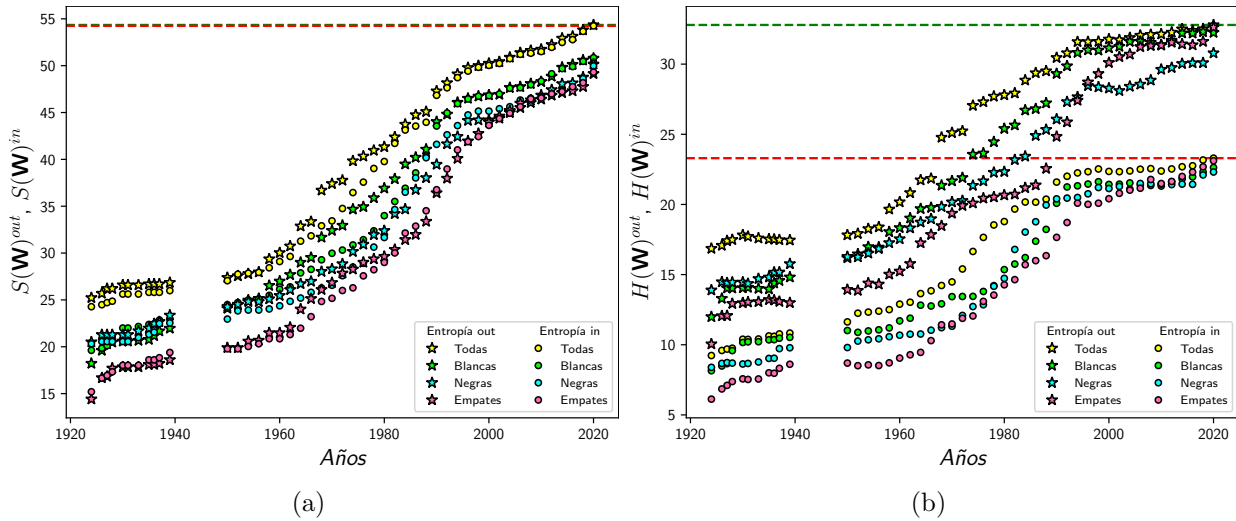


Figura 4-1: Entropía nodal de red de grado (a) y de fortaleza (b) para la base de datos histórica de *Home of the dutch rebel*. Las líneas punteadas indican el máximo valor de las entropías *out* (verde) e *in* (rojas) (Los máximos de $S(\mathbf{W})^{out/in}$ son cercanos entre sí).

Con los resultados de la entropía de fortaleza (figura 4-1 (b)), se encuentra que los máximos del caso todas (marcadores amarillo) para las piezas blancas (círculos) y negras (estrellas) son inferiores al máximo posible, donde la entropía de las piezas negras es mayor a la entropía de las piezas blancas. Esta diferencia de máximos de entropía se debe a la utilización de un número mayor de estrategias para las piezas negras. En comparación con la medida de entropía de grado de red $S(\mathbf{W})^{out/in}$ que mide la diversidad de juego, se expone que dentro del abanico de jugadas posibles los ajedrecistas tienen preferencia en el uso de las estrategias. En otras palabras, los ajedrecistas suelen preferir un uso específico de estrategias. En la representación de $H(\mathbf{W})^{out/in}$ también se nota la separación entre los resultados de blancas, negras y empates con relación al caso general todas.

Con base en los resultados de $\Delta S(\mathbf{W}_t)^{out/in}$ que se observan en la figura 4-2 (a), se tiene que tomando del caso general (todas i) cada pico corresponde a la introducción de nuevas estrategias (piezas blancas círculos azules y piezas negras estrellas rojas). En la región pre Fischer (morado) se encuentra que en el caso general, existen cambios que inician después

de 1950 y en la región Fischer se encuentra los mayores cambios de estrategias. En la época pos Fischer y de la computación se observa un decaimiento en la introducción de estrategias. En particular, mirando los cambios de estrategia entre las piezas blancas y las negras para el caso todas (i), se tiene que en la región pre Fischer y Fischer la tendencia de cambio es mayor para las piezas negras, en las regiones pos Fischer la tendencia de cambio es mayor para las piezas blancas. Con los resultados de blancas (ii), negras (iii) y empates (iv) se tiene que cambios de estrategias en estos casos no implica un cambio en el caso general. Este resultado es esperado debido a que el primer movimientos de las piezas negras o blancas no siempre asegura la victoria.

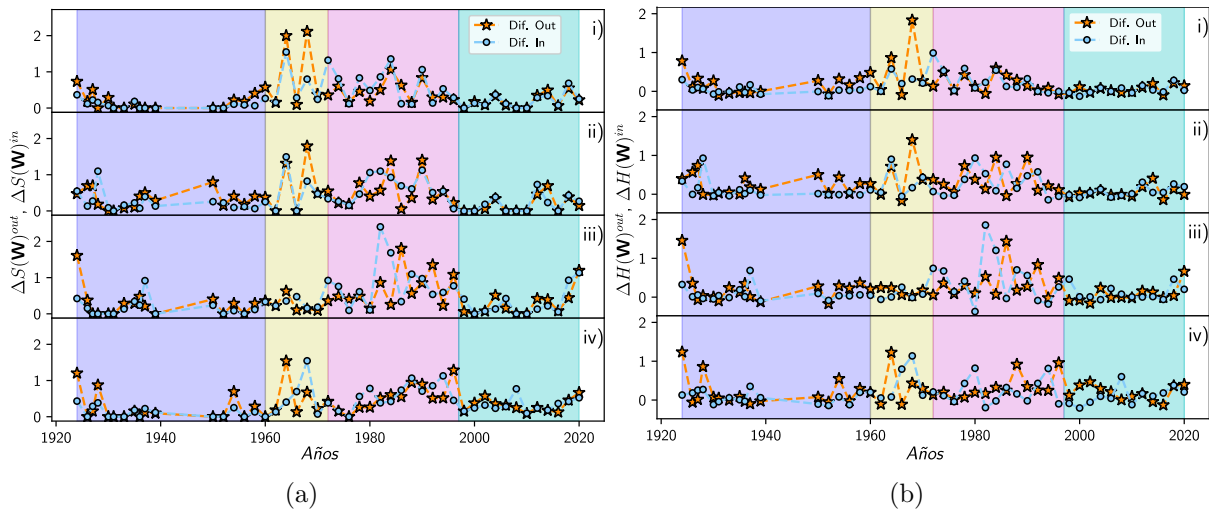


Figura 4-2: Diferencia de entropía de red de grado (a) y de fortaleza (b) para la base de datos histórica de *Home of the dutch rebel*. Donde los resultados corresponde a i) todas, ii) blancas, iii) negras y iv) empates; la región en morado corresponde a los cambios de entropía desde 1924 hasta 1960, la franja en color amarillo comprende el periodo 1960-1972, la banda roja se encuentra entre 1972-1997 y por ultimo la franja verde que se encuentra entre 1997-2018.

Tomando los resultados de la figura 4-2 (b) que corresponden a $\Delta H(\mathbf{W}_t)^{out/in}$, el caso de todas (i) en la región pre Fischer la tendencia visual inicia desde 1950 y termina en la región Fischer, siendo las piezas negras las que poseen mayor diversidad de recurrencia en el uso de estrategias. En la región pos Fischer y computación se observa un decaimiento en la preferencia de las estrategias. En concordancia con los resultados de la figura 4-2 (a) para blancas, negras y empates con respecto a todas, se evidencia que la disminución o aumento de preferencia en las estrategias no implica cambios estratégicos en el caso general todas. Realizando un paralelismo con las figuras 4-2 (a) y 4-2 (b), se tiene una correlación entre puntos de todas de $\Delta S(\mathbf{W}_t)^{out/in}$ e $\Delta H(\mathbf{W}_t)^{out/in}$. Esto implica que los cambios de estrategia en el ajedrez ocurre en un proceso de apropiación, exploración o “moda” de las estrategias.

Con referencia a la región pre Fischer y Fischer se observa categóricamente un cambio disruptivo en el uso e introducción de nuevas estrategias para el ajedrez que inicia cerca de 1950 con máximo alrededor 1972.

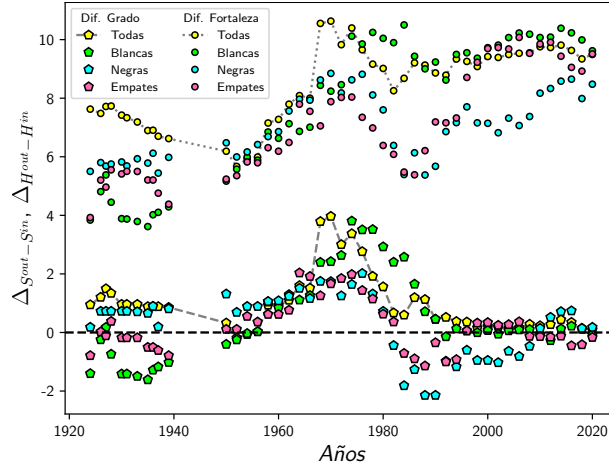


Figura 4-3: Diferencia *out* e *in* entre las entropía de red de grado (pentágonos) y de fortaleza (círculos), para la base de datos histórica de *Home of the dutch rebel*.

Con la diferencia $\Delta_{S^{out}-S^{in}}$ (ver figura 4-3 pentágonos) y el resultado de todas (marcadores color amarillo), se tiene que la diversidad en cada periodo temporal es preferentemente mayor para las piezas negras; tomando los resultados de blancas, negras y empates con todas, se observa que aproximadamente desde 1950 hasta 1980 la diversidad de las piezas negras es mayor que la diversidad de las piezas blancas, y con un máximo de diversidad alrededor de 1972. Otra característica se ubica después del año 2000, cuando tanto en el caso general como demás resultados se observa un acercamiento hacia el valor cero, indicando que la diversidad de estrategias tanto de las piezas negras como blancas es igualmente numerosa.

Para los resultados de $\Delta_{H^{out}-H^{in}}$ que se observan en la figura 4-3 círculos, se obtiene que la mayor preferencia de estrategias esta dada para las piezas negras. Aunando $\Delta_{S^{out}-S^{in}}$ con $\Delta_{H^{out}-H^{in}}$, se pone en evidencia que en el caso general (todas) la evolución del ajedrez siempre posee una mayor diversidad y frecuencia de uso de estrategias de las piezas negras.

Olimpiadas de ajedrez.

En las Olimpiadas, se tiene que los resultados de la entropía de red de grado (2-17) y de fortaleza (2-22) se encuentra en la figura 4-4 (a) y (b) respectivamente. De la figura 4-4 (a) y para el caso de todas, tenemos que el máximo de las entropías $S(\mathbf{W})^{out/in}$ es inferior al máximo permitido (59.9). Para los resultados de blancas, negras y empates en comparación con el resultado de todas, se observa una clara separación para los resultados de la entropía

de las piezas negras y blancas. Esto pone en evidencia nuevamente la dependencia del primer movimiento en el resultado de la partida.

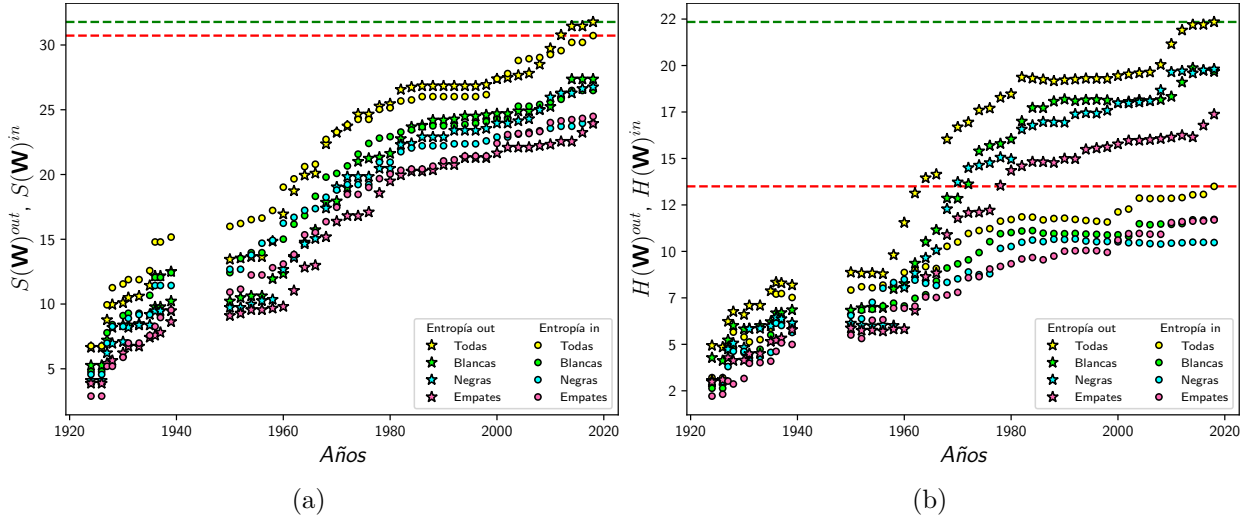


Figura 4-4: Entropía nodal de red de grado (a) y de fortaleza (b) para la base de datos de Olimpíadas de ajedrez de la FIDE. Las líneas punteadas indican el máximo valor de las entropías *out* (verdes) e *in* (rojas).

Con los resultados de la figura 4-4 (b) se observa que para el caso general, los máximos de entropía de las blancas ($H(\mathbf{W})^{in}$) y las negras ($H(\mathbf{W})^{out}$) se encuentran mas distanciadas entre si. Esta separación de máximos indica una menor primacía en estrategias de piezas negras. Con $H(\mathbf{W})^{out/in}$ para los resultados de blancas, negras y empates, se expone una clara separación con respecto al caso general.

Con los resultados de $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$ en la figura 4-5 (a), se observa cambios de estrategias que inician antes de 1960, son máximos en la región Fischer y, finaliza en la mitad de la región pos-Fischer. En la región de la computación se expone que las innovaciones de estrategias reales (caso todas) no corresponden cambios de estrategias en algunos de los tres casos restantes (blancas, negras y empates).

Para $\Delta H(\mathbf{W})^{out/in}$ en la figura 4-5 (b), se observa que la preferencia de movimientos aumento desde finales de la epoca pre-Fischer, es máxima en la región Fischer y finaliza en la mitad de la región pos-Fischer. La franja de la computación expone un nuevo cambio de preferencias de estrategias con la singularidad que los cambios de entropía son mayoritariamente a favor de las piezas negras. Ahora, teniendo presente los resultados de blancas, negras y empates con respecto a los resultados de todas, se pone en evidencia que el aumento en la preferencia en el caso genera no esta asociado al aumento de jugadas de preferencia en algunos de los tres casos restantes.

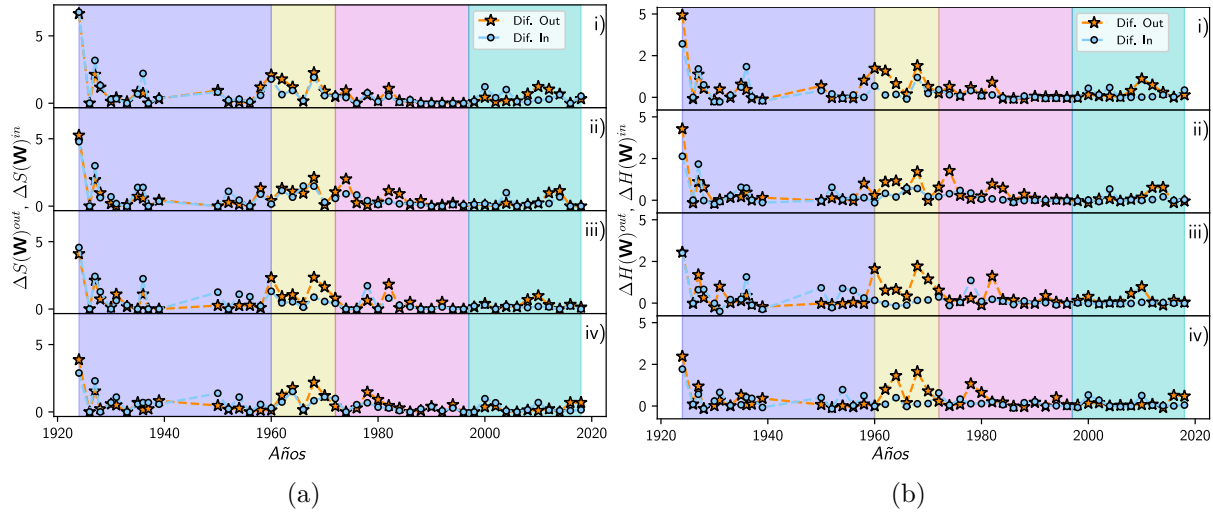


Figura 4-5: Diferencia de entropía de red de grado (a) y de fortaleza (b) para las Olimpiadas de ajedrez. Donde los resultados corresponden a i) todas, ii) blancas, iii) negras y iv) empates. La región en morado corresponde a los cambios de entropía desde 1924 hasta 1960, la franja en color amarillo comprende el periodo 1960-1972, la banda roja se encuentra entre 1972-1997 y por ultimo la franja verde que se encuentra entre 1997-2018.

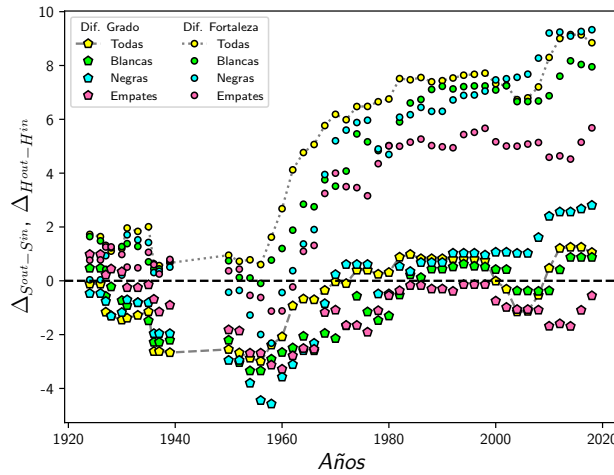


Figura 4-6: Diferencia *out* e *in* entre las entropía de red de grado (pentágonos) y de fortaleza (círculos), para las Olimpiadas de ajedrez de la FIDE.

Dado los resultados de $\Delta_{S^{out}-S^{in}}$ y $\Delta_{H^{out}-H^{in}}$ para las olimpiadas (ver figura 4-6). Tenemos que la diferencia $\Delta_{S^{out}-S^{in}}$ (pentágonos) en el caso de todas (marcadores amarillos) no se encuentra una tendencia determinista en la diversidad de estrategias. En particular, para las ultimas Olimpiadas efectuadas en el 2018 la diversidad de estrategias es mayor para las piezas negras. Con $\Delta_{H^{out}-H^{in}}$ y los resultados de todas (círculos amarillos), se expone claramente la tendencia de una mayor diversidad de uso de estrategias para las piezas negras incluso en

los años donde la diversidad de estrategias era mayor para las piezas blancas (ejem. intervalo 1960- 1970).

Torneo internacional de Hastings.

Como primera medida tomaremos los eventos efectuados desde 1950 en adelante, debido a que el numero de juegos no es lo suficientemente grande en los periodos anteriores (ver figura 3-1). Los resultados de entropía de grado y de fortaleza de la red para el torneo de Hastings se evidencia en la figura 4-7. En particular, el resultado para $S(\mathbf{W})^{out/in}$, que corresponde a la figura 4-7 (a) en el caso de todas, posee un máximo de entropía *in* mayor que la entropía *out* e inferior a 59.9. Este valor, contrario con respecto a las Olimpiadas y al histórico, es influenciado por la excelsa participación de GM. Con respecto a los resultados de blancas, negras y empates se evidencia nuevamente la separación con el caso general, el cual expone nuevamente la relación entre el primer movimiento y el resultado de la partida.

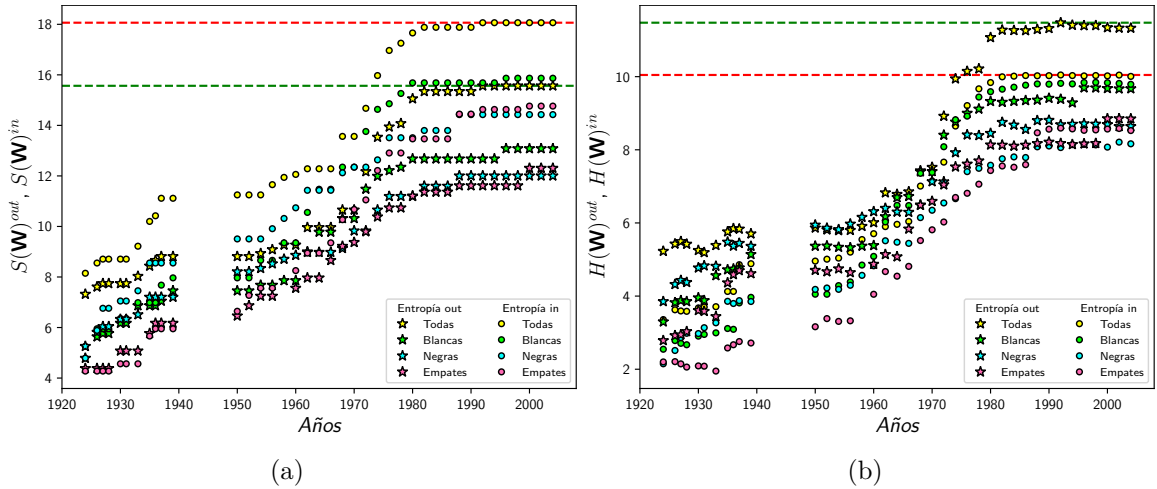


Figura 4-7: Entropía nodal de red de grado (a) y de fortaleza (b) para la base de datos del Congreso internacional de Hastings. Las líneas punteadas indican el máximo valor de las entropías *out* (verdes) e *in* (rojas).

Para los resultados de $H(\mathbf{W})^{out/in}$ que se muestran en la figura 4-7 (b), se tiene que para el caso general los máximos de las entropías son menores a 59.9. Además, la entropía de las piezas negras es superior a la de la piezas blancas. Comparando la medida de $S(\mathbf{W})^{out/in}$ en el caso general con $H(\mathbf{W})^{out/in}$, se tiene que el máximo de $S(\mathbf{W})$ es de las piezas blancas, mientras el máximo de $H(\mathbf{W})$ corresponde a las piezas negras. Esta diferencia demarca que en el torneo existen más estrategias planteadas por las piezas blancas, por las piezas negras usan mas diversamente las estrategias.

Con los resultados de la diferencia de entropía $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$ que se encuentran en la figura 4-8 (a), se toma el caso de todas (i) en el final de la región de Fischer, donde se da inicio de cambios de estrategias, con una culminación en la región pos Fischer. Examinando el año de 1972 en todas, los cambios de estrategias son mayores para las piezas negras, pero en la región pos Fischer es visualmente mayor para las piezas blancas. Es interesante resaltar que en la mitad del periodo pos Fischer en adelante la diversidad de ambas piezas permanece constante. Para los casos de blancas (ii), negras (iii) y empates (iv) se resalta el hecho de la independencia de los cambios de entropía con el general (i).

Con los resultados de la figura 4-8 (b), que corresponde a $\Delta H(\mathbf{W})^{out/in}$, en el caso general (i) la región Fischer al igual que en $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$ da comienzo al los cambio de aumento de preferencia de estrategias, cuya finalización se encuentra en la mitad del periodo pos Fischer. Si se observa el año de 1972 y se correlaciona en las dos graficas de la figura 4-8 para el resultado de todas, se expone que el mayor cambio y disminución de preferencia de estrategias se correlaciona en este año. El indicador $\Delta H(\mathbf{W})^{out/in}$ muestra que en la mitad del periodo pos Fischer en adelante para el caso general, la preferencia de jugadas para las piezas blancas y negras no tuvo cambios.

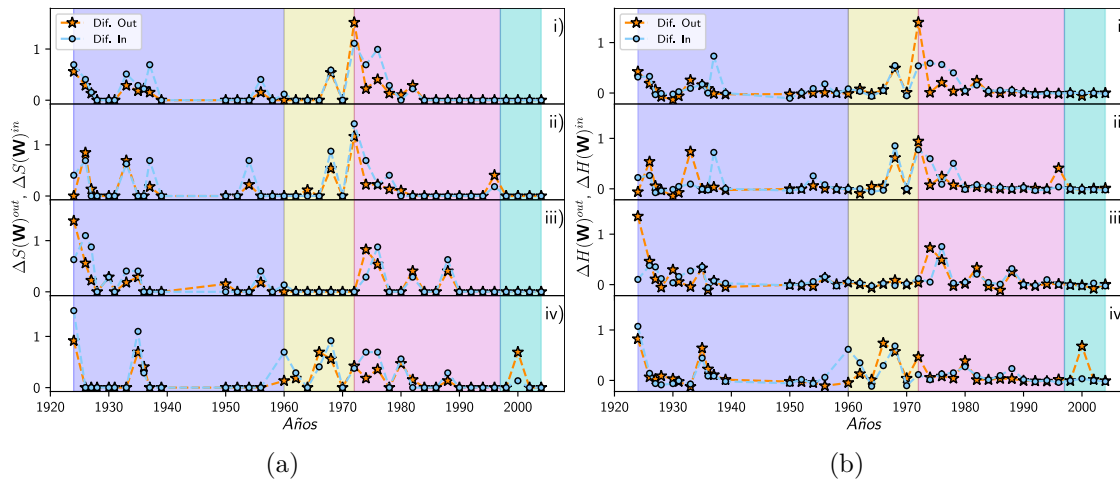


Figura 4-8: Diferencia de entropía de red de grado (a) y de fortaleza (b) para el Congreso internacional de Hastings. Donde los resultados corresponden a i) todas, ii) blancas, iii) negras y iv) empates. La región en morado corresponde a los cambios de entropía desde 1924 hasta 1960, la franja en color amarillo comprende el periodo 1960-1972, la banda roja se encuentra entre 1972-1997 y por ultimo la franja verde que se encuentra entre 1997-2018.

Por ultimo, los resultados de Δ_{Sout_Sin} y Δ_{Hout_Hin} se relacionan en la figura 4-9. En el caso de Δ_{Sout_Sin} (pentágonos) para el resultado de todas (marcadores amarillos), se observa categóricamente que en todas las versiones del torneo las piezas blancas han tenido mayor diversidad. Para Δ_{Hout_Hin} (círculos) con los resultados generales (amarillos), se observa

indisolublemente que las piezas que juegan con menor preferencia corresponden a las piezas negras.

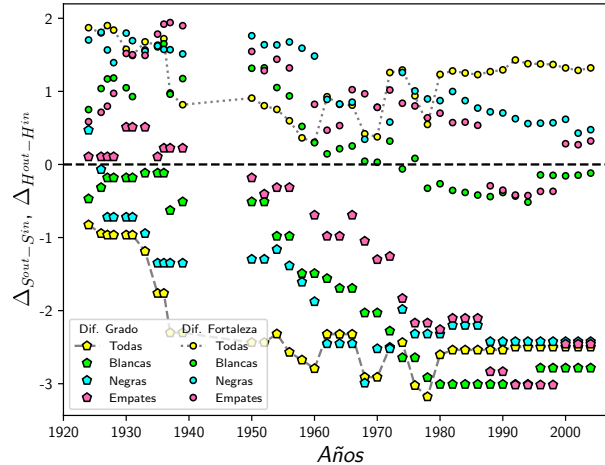


Figura 4-9: Diferencia *out* e *in* entre las entropía de red de grado (pentágonos) y de fortaleza (círculos), para el Congreso internacional de Hastings.

4.2. Resultados jugadores.

Para los GM Anatoly Karpov, Garry Kasparov, Bobby Fischer y Magnus Carlsen se aplicaron los calculos efectuados a los torneos agregando un colimador extra a la bases de datos. Este filtro extra, corresponde al color de las piezas con el cual el GM jugó. También, se aplicó el modelo estadístico de grafos exponencial de la seccion 2.2.4 con una aplicación en la inferencia del movimiento. Teniendo presente que el porcentaje de victoria a nivel profesional oscila alrededor del 30 % cuando juegan con piezas blancas, 20 % cuando juegan con piezas negras y el 50 % cuando empatan (ver figura 3-2 torneo de Hastings), en algunos años los GM no poseen informacion en ciertos filtros posibles, por consiguiente para representar graficamente que el jugador posee un vacio en la base de datos se deja sin graficar el punto⁶.

Anatoly Karpov.

Karpov a lo largo de su vida ajedrecistica consiguió un 41 % de victorias, 46 % de empates y 13 % de perdidas. Cuando juega con las piezas blancas el 50 % han sido victorias, el 41 % empates y el 9 % perdidas. Con las piezas negras Karpov ha cosechado un 31 % en victorias, 46 % en empates y 18 % en pérdidas. Haciendo uso de la efectividad de Karpov anteriormente mencionada, aunado al hecho de que el número de juegos realizados por Karpov es lo suficientemente grande desde 1970 (ver figura 3-1 (b)), los resultados se consideran desde

⁶Por ejm. En la figura 4-11 (a) en el resultado de negras no existen los rotuladores correspondientes a 1924 y 2020.

1972 en adelante.

Para Anatoly Karpov los cálculos de las entropías de grado $S(\mathbf{W})^{out/in}$ cuando juega con piezas blancas se muestran en la figura 4-10 (a) (parte superior, marcadores amarillos). Consultando los valores del caso general (puntos amarillos), el máximo de entropía *in* es mayor que la entropía *out*, el cual implica que a lo largo de su vida profesional Karpov ha usado más estrategias con piezas blancas que sus contrincantes de piezas negras. Para las entropías $H(\mathbf{W})^{out/in}$ cuando juega con piezas blancas (ver figura 4-10 (a) inferior puntos), Karpov en los máximos de entropía en todas expone que la preferencia de juego de sus contrincantes es mayor. Comparando $S(\mathbf{W})^{out/in}$ y $H(\mathbf{W})^{out/in}$ con respecto a los máximos de entropías, se tiene que el juego de Karpov con piezas blancas históricamente es mas diverso y menos preferente que el de la contra parte. Si se compara los resultados de blancas y empates de $S(\mathbf{W})^{in}$ e $H(\mathbf{W})^{in}$ para el caso general respectivos, aparece nuevamente la dependencia del primer movimiento con el resultado de la partida. Por otra parte, los resultados $S(\mathbf{W})^{out}$ e $H(\mathbf{W})^{out}$ para los filtros blancas, negras y empates equiparados con todas demuestran más cercanía entre si, lo que exponen la independencia de las estrategias usadas por las piezas negras con el resultado de la partida.

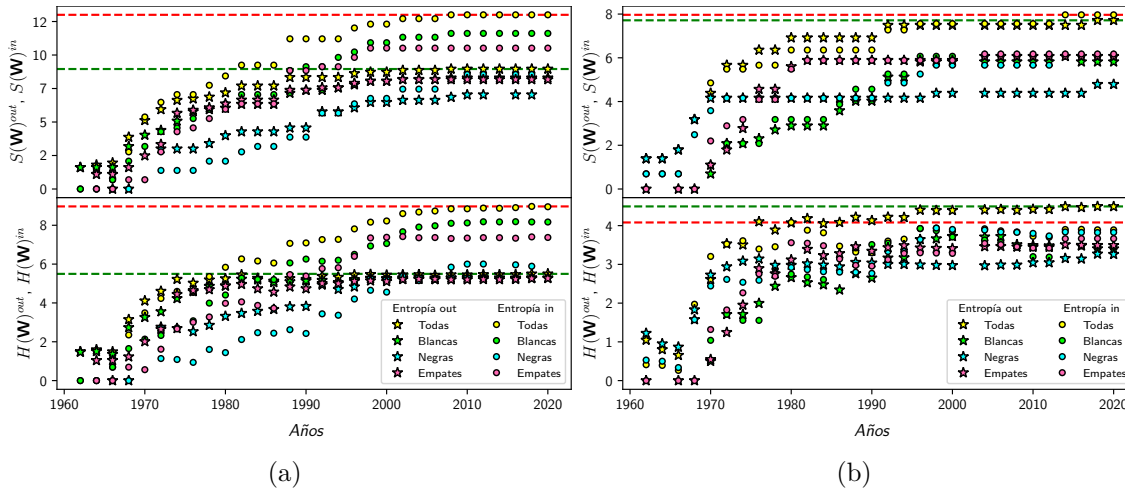


Figura 4-10: Entropía nodal de red de grado (arriba) y de fortaleza (abajo) para Anatoly Karpov cuando juega con piezas blancas (a) y piezas negras (b). Las líneas punteadas indican el máximo valor de las entropías *out* (verdes) e *in* (rojas).

Con respecto a la solución de $S(\mathbf{W})^{out/in}$ para Karpov, cuando juega con piezas negras (ver figura 4-10 (b) arriba estrellas), se tiene que la diversidad máxima alcanzada en su vida es muy cercana a la de sus oponentes. Para los resultados de la figura 4-10 (b) abajo estrellas que corresponde a $H(\mathbf{W})^{out/in}$, en el caso general, la entropía máxima alcanzada por Karpov es mayor a la de sus oponentes que juegan con piezas blancas. Asociando los resultados de $S(\mathbf{W})^{out/in}$ e $H(\mathbf{W})^{out/in}$ para Karpov jugando con piezas negras, se analiza

que las estrategias son menores que la de sus oponentes, pero existe una menor preferencia en el uso de estas. Juntando los cálculos de la figura 4-10, Karpov posee más estrategias y menos preferencia cuando juega con piezas blancas.

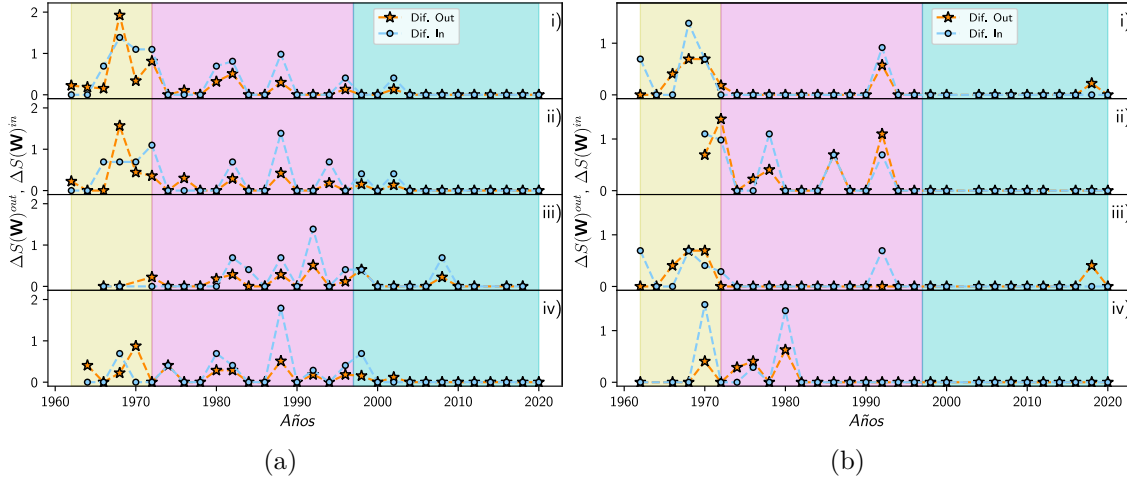


Figura 4-11: Diferencia de entropía de red de grado de Anatoly Karpov para cuando juega con piezas blancas (a) y piezas negras (b) . Donde los resultados corresponden a i) todas, ii) blancas, iii) negras y iv) empates. La región en color amarillo comprende el periodo 1960-1972, la banda roja se encuentra entre 1972-1997 y por ultimo la franja verde que se encuentra entre 1997-2018.

Los cálculos derivados de las diferencias de entropías de grado $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$ para Anatoly Karpov cuando juega con piezas blancas se encuentran en la figura 4-11 (a) puntos. En el caso de todas (i), se observa que el periodo pos Fischer corresponde al periodo de mayor actividad de cambios de estrategias. Así mismo, en este periodo temporal se encuentra que Karpov realizaba más cambios de sus estrategias que sus contrincantes. Para la solución de $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$ cuando Karpov juega con piezas negras (ver figura 4-11 (b) estrellas), se tiene que el caso de todas (i) posee un único cambio en la región pos Fischer. Este resultado pone en evidencia que el juego de Karpov con piezas negras no realizó grandes cambios. Para los casos en que gana con las piezas blancas se tiene una gran actividad de cambio, la cual no implica que los cambios se relacionen a victorias (figura 4-11 (a) puntos ii). Con el caso en que gana con piezas negras se expone que la gran parte de su carrera profesional obtuvo la victoria con estrategias conocidas.

Con los resultados de $\Delta H(\mathbf{W})^{out/in}$, para Karpov cuando juega con piezas blancas en el caso general (figura 4-12 (a) puntos (i)), se tiene que la región pos Fischer es la que mayor cambios de preferencia de estrategias tuvo. Dentro de estos cambios de entropía se percibe que los cambios de Karpov son en magnitud más grandes que las de sus adversarios. Por otra parte, la naturaleza de estos cambios de preferencia para Karpov en algunos años son

negativos (1982-1984) en otros positivos y en la región computacional invariante. Con los resultados de $\Delta H(\mathbf{W})^{out/in}$ para Karpov jugando con piezas negras acoplado con los cálculos de todas (ver figura 4-12 (b) estrellas (i)), se encuentra que la franja pos Fischer es la única con cambios de preferencia.

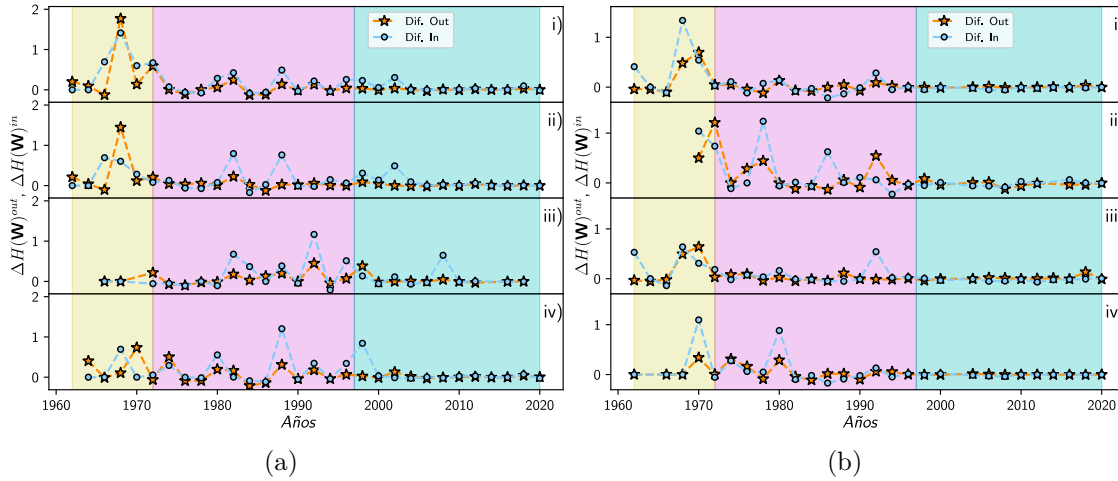


Figura 4-12: Diferencia de entropía de red de fortaleza de Anatoly Karpov para cuando juega con piezas blancas (a) y piezas negras (b) . Donde los resultados corresponden a i) todas, ii) blancas, iii) negras y iv) empates. La región en color amarillo comprende el periodo 1960-1972, la banda roja se encuentra entre 1972-1997 y por ultimo la franja verde que se encuentra entre 1997-2018.

Con los resultados de la diferencia $\Delta_{S_{out}-S_{in}}$, para Karpov cuando juega con piezas blancas (ver figura 4-13 (a) pentágonos) se observa que de forma general la diversidad mayor se encuentra para las piezas blancas. Con $\Delta_{H_{out}-H_{in}}$ (ver figura 4-13 (a) círculos) se observa una tendencia similar, donde las piezas blancas posee una menor preferencia en el uso de estrategias. De estos dos resultados se expone que las estrategias y uso de estas es mayor a la de sus contrincantes. Una posible inferencia a partir de estos resultados se relaciona con el hecho que Anatoly Karpov como GM juega con piezas blancas como desea, y la gente no responde bajo estrategias nuevas, sino consolidadas.

Los resultados de $\Delta_{S_{out}-S_{in}}$ para Karpov cuando juega con piezas negras se detallan en la figura 4-13 (b) pentágonos, donde en el caso general se observan dos periodos diferentes. El primero que inicia después de 1970 y finaliza en 1990, y el segundo, que se encuentra después de 1990 en adelante. En el primer periodo se encuentra que la diversidad de juego es mayor para las piezas negras, y en el segundo periodo que la diversidad es mayor para las piezas blancas. Ahora, con respecto a los resultados de $\Delta_{H_{out}-H_{in}}$ que se encuentran en la figura 4-13 (b) círculos, se observa que en el caso todas (amarillo) la tendencia es mayoritariamente relaciona con una menor preferencia de estrategias de las piezas negras.

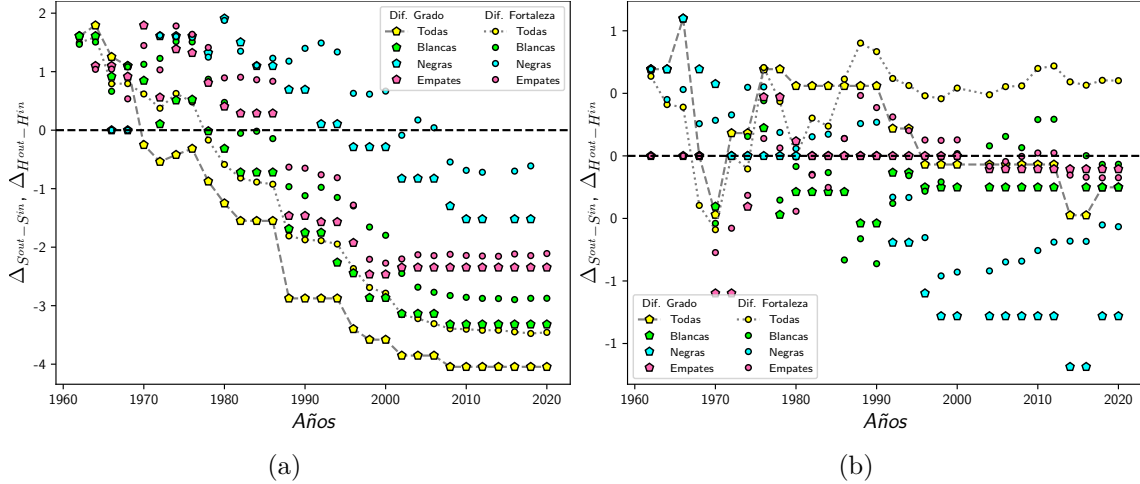


Figura 4-13: Diferencia *out* e *in* entre las entropía de red de grado (pentágonos) y de fortaleza (círculos), para Anatoly Karpov cuando juega con piezas blancas (a) y piezas negras (b).

Garry Kasparov.

Garry Kasparov en su trayectoria ajedrecística a consolidado un 49% de victorias, un 42% de empates y 9% en pérdidas. Para las partidas donde juega con piezas blancas tiene un 59% de victorias, 35% empates y 6% de pérdidas. Con las piezas negras ha logrado un 37% de victorias, 50% empates y 13% pérdidas. Con la figura 3-1 (b) y los porcentajes de eficiencia se estima que los análisis y resultados de Kasparov se toman después de 1982.

Partimos de los resultados de las entropías de red de grado y fortaleza para Kasparov cuando juega con piezas blancas que se encuentran en la figura 4-14 (a) (puntos). Los resultados del caso general para la medida $S(\mathbf{W})^{out/in}$ cuyos máximos de entropía dan como resultado, que las piezas blancas son las que más poseen diversidad. Con los máximos $H(\mathbf{W})^{out/in}$ para el caso general se encuentra que la diversidad de uso de estrategias es mayoritaria para las piezas blancas. Contemplando los resultados de todas y confrontándolos con los resultados de blancas, empates y negras de $S(\mathbf{W})^{out}$ y $H(\mathbf{W})^{out}$, se determina que los resultados de Kasparov demuestran la separación con respecto al caso general y caso contrario con los valores de los oponentes.

Para los resultados de Kasparov para la entropía de red de grado y fortaleza cuando juega con piezas negras que se observa en la figura 4-14 (b) (estrellas). Con los resultados de todas para $S(\mathbf{W})^{out/in}$, se nota que el máximo de diversidad de las piezas negras es menor. Con los cálculos de máxima entropía $H(\mathbf{W})^{out/in}$ para el resultado todas, se tiene que la diversidad

de uso de estrategias es mayor para las piezas blancas. Comparando los resultados mostrados en 4-14 se encuentra que la diversidad de juego de Kasparov es mayor cuando juega con piezas blancas.

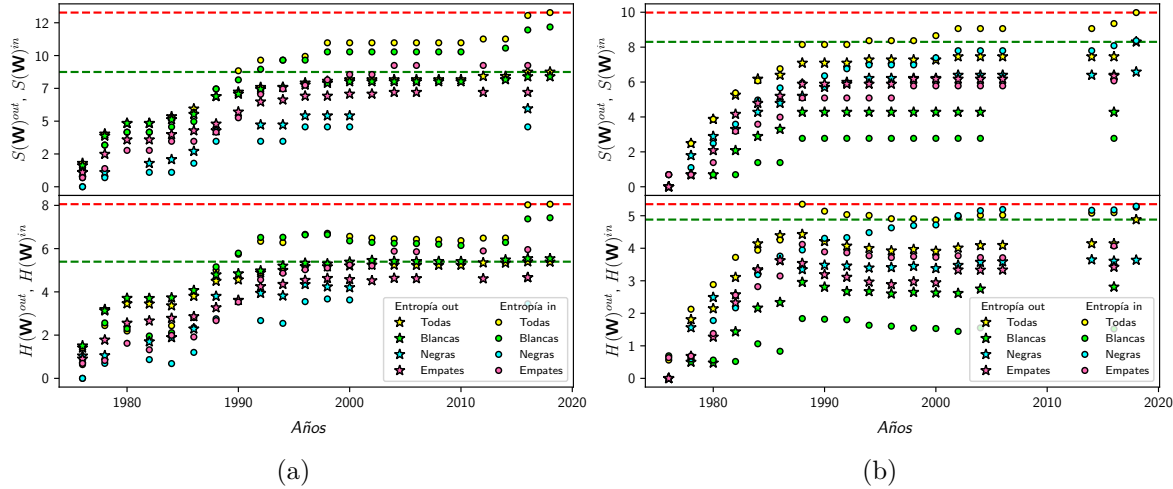


Figura 4-14: Entropía nodal de red de grado (arriba) y de fortaleza (abajo) para Garry Kasparov cuando juega con piezas blancas (a) y piezas negras (b). Las líneas punteadas indican el máximo valor de las entropías *out* (verdes) e *in* (rojas).

Las diferencias de entropías $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$ para Kasparov, cuando juega con piezas blancas (ver figura 4-15 (a) puntos), determina que el periodo de exploración y/o aprendizaje de nuevas estrategias se encuentra entre 1985 y 1997. En particular para todas i), se observa un inicio de cambio de estrategias en 1982 y finaliza en 1992, además, estos cambios de entropía es superior para Kasparov. Con la época de la computación se examina que en el caso general, no existe grandes variación de entropía.

Dado los resultados $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$ para Kasparov, cuando juega con piezas negras (ver figura 4-15 (b) estrellas), se tiene de forma general pocos cambio de diversidad. Para el caso de todas (i), se observa un cambio entre 1982 y 1992 aunque en menor cuantía que cuando juega con piezas blancas. Con la época computacional al igual que en 4-15 (a) se observa poco cambios de estrategias. Combinando los resultados de 4-15, el periodo de mayor actividad de cambios de estrategias se encuentra en la región pos Fischer (1982- 1990). También, se reitera el hecho de que Kasparov cambió más la diversidad de juego con las piezas blancas.

La diferencia $\Delta H(\mathbf{W})^{out/in}$ para Kasparov cuando juega con piezas blancas se encuentra en la figura 4-16 (a) puntos. Tomando el caso general (i), se determina que el periodo de mayor fluctuación se encuentra en la región pos Fischer, con una invariancia en la preferencia de juego para ambas piezas en la franja computacional. Estos cambio de entropía en la región pos Fischer son mayoritariamente a favor de Kasparov. También se destaca que la naturaleza

de estos cambios de entropía son positivos, o que en otras palabras, Kasparov disminuyó la preferencia en el uso de estrategias.

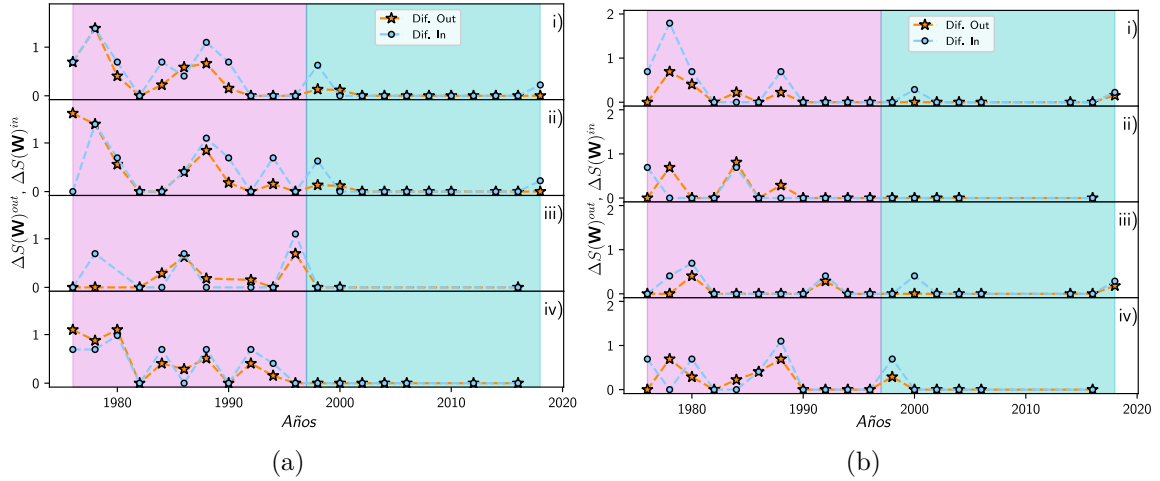


Figura 4-15: Diferencia de entropía de red de grado de Garry Kasparov para cuando juega con piezas blancas (a) y piezas negras (b) . Donde los resultados corresponden a i) todas, ii) blancas, iii) negras y iv) empates. La banda roja se encuentra entre 1972-1997 y por ultimo la franja verde que se encuentra entre 1997-2018.

Cuando Garry Kasparov juega con piezas negras y se calcula las diferencias $\Delta H(\mathbf{W})^{out/in}$, da como resultado la figura 4-16 (b) estrellas. De esta gráfica, y en particular los resultados de todas (i), demuestra un cambio de entropía relevante en 1985 y posteriormente cambios con menor magnitud. De estos cambios, algunos son negativo y otros positivos, pero la tendencia se encuentra en la invariancia. Haciendo un paralelo con los resultados de $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$ y $\Delta H(\mathbf{W})^{out/in}$, los cambios de entropía de Kasparov son mayores para cuando él juega con las piezas blancas.

Ahora, tomando las medidas $\Delta_{Sout-Sin}$ y $\Delta_{Hout-Hin}$ para Kasparov cuando juega con piezas blancas (ver figura 4-17 (a) pentágonos y círculos), y especificando los resultados del caso todas (marcadores amarillos), se determina que en cada periodo temporal la diversidad de juego es mayor para las piezas blancas, y éstas a su vez tienen una menor preferencia en el uso. Este resultado implica que el juego de Kasparov en un año t es mas diverso y con menor preferencia que el juego de sus contrincantes. Para $\Delta_{Sout-Sin}$ y $\Delta_{Hout-Hin}$, cuando Garry Kasparov juega con piezas negras (ver figura 4-17 (b) pentágonos y círculos), se tiene que los resultados generales (marcadores amarillos) indican que el juego de las piezas blancas o contrincantes en un año t es más diverso y menos preferente que el de Kasparov.

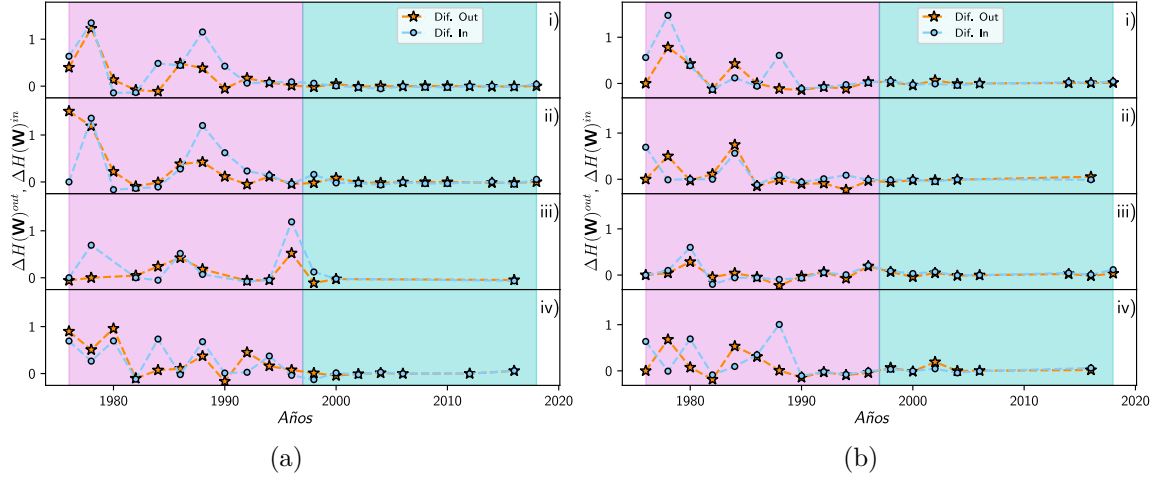


Figura 4-16: Diferencia de entropía de red de fortaleza de Garry Kasparov para cuando juega con piezas blancas (a) y piezas negras (b) . Donde los resultados corresponden a i) todas, ii) blancas, iii) negras y iv) empates. La banda roja se encuentra entre 1972-1997 y por ultimo la franja verde que se encuentra entre 1997-2018.

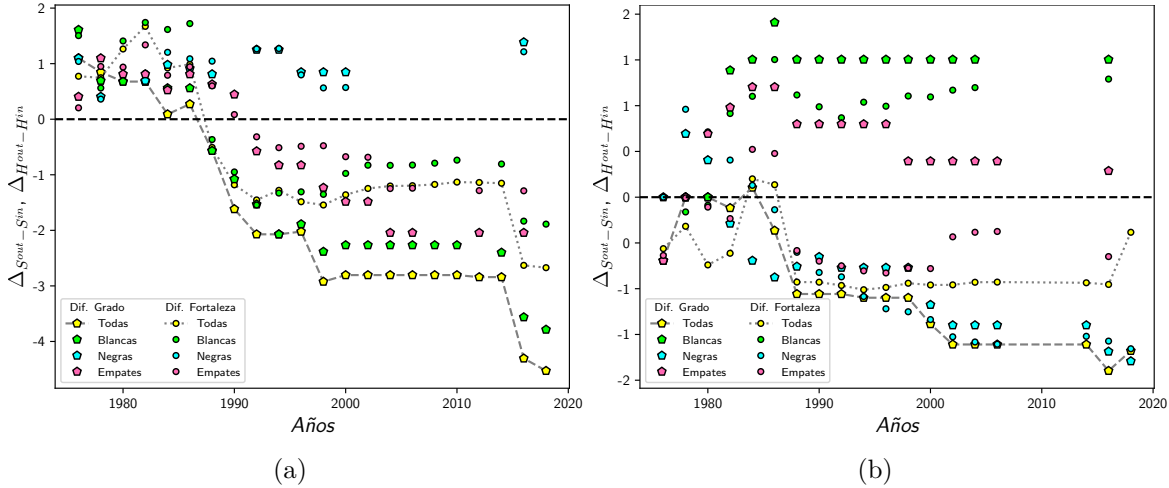


Figura 4-17: Diferencia *out* e *in* entre las entropía de red de grado (pentágonos) y de fortaleza (círculos), para Garry Kasparov cuando juega con piezas blancas (a) y piezas negras (b).

Magnus Carlsen.

Magnus Carlsen hasta el 2020 ha consolidado un 44 % de victorias, 41 % de empates y 15 % de perdidas. Cuando juega con piezas blancas su porcentaje corresponde a un 51 % victorias, 36 % empates y 13 % de perdidas. Cuando juega con piezas negras, Magnus posee un 36 % de victorias, un 46 % de perdidas y 18 % de empates. Con la información suministrada en la figura 3-1 (b) e integrando la información anterior, se toma los resultados desde el 2005 en adelante.

Como primera medida para Magnus Carlsen cabe resaltar que, aunque su periodo de activada comparado con los demás casos de estudio es mas corto, su número de juegos en total es proporcionalmente similar al de Karpov y Kasparov. Los resultados de entropías de red de grado y de fortaleza para Magnus cuando juega con piezas blancas se observan en la figura 4-18 (a) puntos. Con la entropía de red de grado (gráfica arriba), se observa que el máximo de entropía de las piezas blancas es mayor que el juego de las piezas negras. Para la entropía de fortaleza (gráfica abajo) tenemos que el máximo corresponde al juego de las piezas negras, implicando que el juego de Magnus en el 2020 recurre en menor proporción a estrategias que las piezas negras, o que el juego es mas preferente en la apertura.

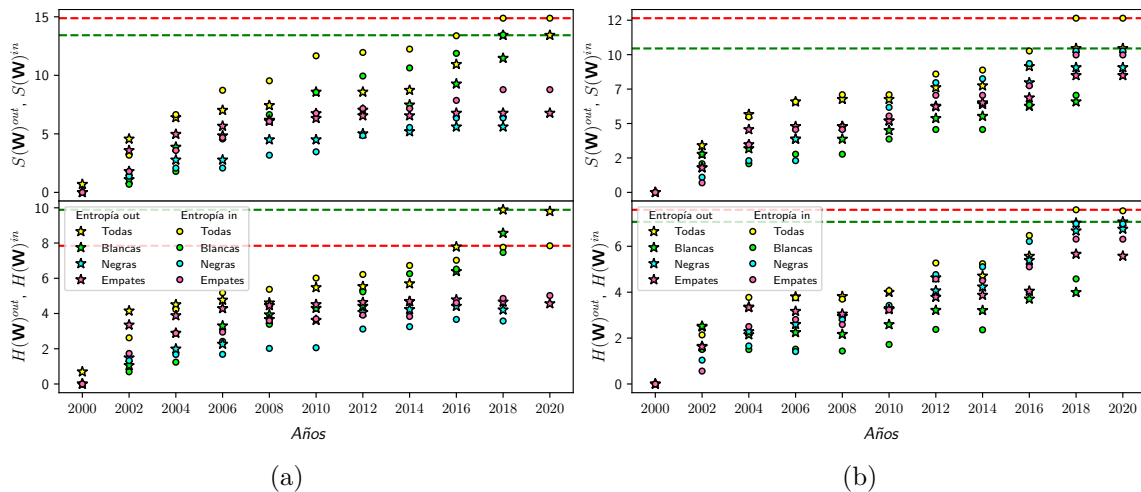


Figura 4-18: Entropía nodal de red de grado (arriba) y de fortaleza (abajo) para Magnus Carlsen cuando juega con piezas blancas (a) y piezas negras (b). Las líneas punteadas indican el máximo valor de las entropías *out* (verdes) e *in* (rojas).

En el caso en el cual Magnus Carlsen juega con piezas negras, los resultados de las entropías nodal y fortaleza de la red se encuentran en la figura 4-18 (b) estrellas. Para la entropía de red de grado (gráfica superior), el máximo de entropía de las piezas blancas es superior al de las negras. Esto indica que la diversidad de estrategias de Magnus es menor que la de sus adversarios, y se puede entender como consecuencia o dependencia del juego planteado por

las piezas blancas. En los resultados de la entropía de fortaleza (gráfica inferior), se encuentra que la diversidad de frecuencia de estrategias de las piezas blancas es mayor.

Con los resultados de diferencia de entropía $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$ para Magnus cuando juega con piezas blancas (ver figura 4-19 (a) puntos), se encuentra que en los resultados de todas (i) los cambios de estrategias están en el 2010 y 2016. Con estos cambios cabe resaltar que en el primer pico (2010) los cambios de estrategias fueron mayores para Magnus, y en el segundo pico los cambios de estrategia fue mayor para los oponentes.

Para el resultado de la diferencia $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$ de Magnus cuando juega con piezas negras y con el caso todas (ver figura 4-19 (b) estrellas), se encuentra un pico en el 2018 que inició desde 2012. Estos cambios de entropía poseen como característica ser mayores a cero, implicando un aumento o introducción de estrategias por parte de Magnus ($\Delta S(\mathbf{W})^{in}$) y de los adversarios ($\Delta S(\mathbf{W})^{out}$).

Usando los resultados de la diferencia $\Delta H(\mathbf{W})^{out/in}$ para Carlsen jugando con piezas blancas y con el caso general (ver figura 4-20 (a) puntos (i)), se observan dos picos de cambio de entropía. El primero se ubica en el 2010, y su naturaleza es mayor a cero con consecuencia en la disminución de la preferencia de estrategias. El segundo pico con menor magnitud y ubicado después del 2014, tiene como característica ser mayor a cero.

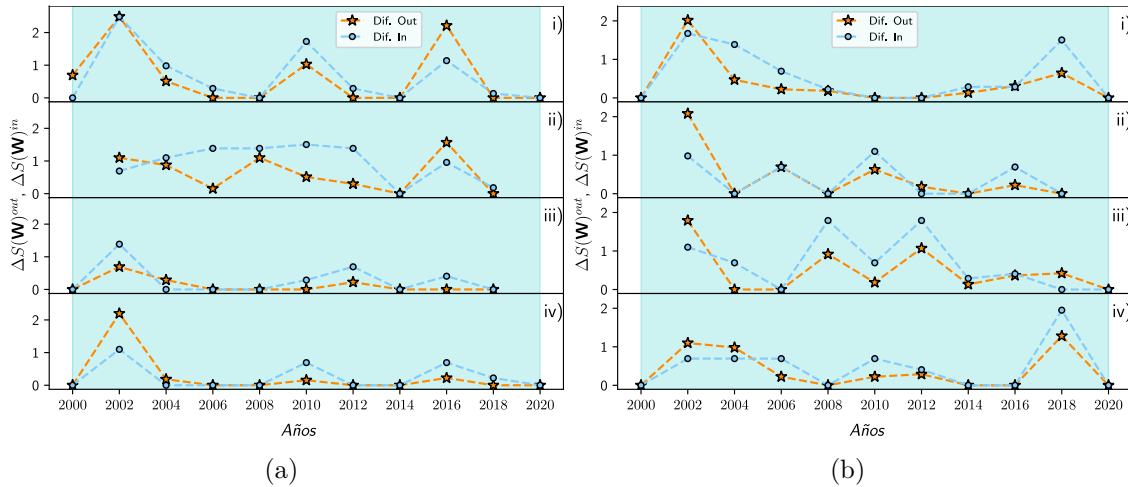


Figura 4-19: Diferencia de entropía de red de grado de Magnus para cuando juega con piezas blancas (a) y piezas negras (b) . Donde los resultados corresponden a i) todas, ii) blancas, iii) negras y iv) empates.

Los resultados $\Delta H(\mathbf{W})$ en la figura 4-20 (b) estrellas, corresponde a Magnus jugando con piezas negras. Tomando los cálculos de todas (i) se encuentra dos cambios de entropía significativos. El primer pico situado en 2012 con valor positivo demuestra una disminución en

la preferencia de juego. El segundo pico y cuya magnitud es mayor al primero, tiene como naturaleza ser mayor a cero. Observando los puntos correspondientes a Carlsen, la diferencia de entropías son mayores o igual a cero el cual implica una disminución o constancia en la preferencia de juegos con las piezas negras.

La solución de las diferencias $\Delta_{S^{out}_{-}S^{in}}$ y $\Delta_{H^{out}_{-}H^{in}}$ de Magnus cuando juega con piezas blancas se detallan en la figura 4-21 (a). Para $\Delta_{S^{out}_{-}S^{in}}$ (pentágonos) en el caso general (todas) se observa que la diversidad de estrategias en casi todos los años corresponde a las piezas blancas y existe un mínimo en el 2014. Para $\Delta_{H^{out}_{-}H^{in}}$ (círculos) se detalla que para el caso de todas, entre los 2007 y 2015 se tiene que el juego de Magnus era más diverso, y caso contrario ocurre posterior ha esta fecha.

Con la diferencia $\Delta_{S^{out}_{-}S^{in}}$ y $\Delta_{H^{out}_{-}H^{in}}$ para Magnus cuando juega con piezas negras se obtienen los resultado de la figura 4-21 (b). El resultado $\Delta_{S^{out}_{-}S^{in}}$ para todas (pentágonos amarillos) se observa que las piezas blancas poseen mayor diversidad en cada año. Para $\Delta_{H^{out}_{-}H^{in}}$ (círculos) en todas se observa que la mayor diversidad de frecuencia corresponde a las piezas blancas. Aunado los resultados de $\Delta_{S^{out}_{-}S^{in}}$ y $\Delta_{H^{out}_{-}H^{in}}$, se expone nuevamente que el juego de Magnus es más rico en estrategias con piezas blancas.

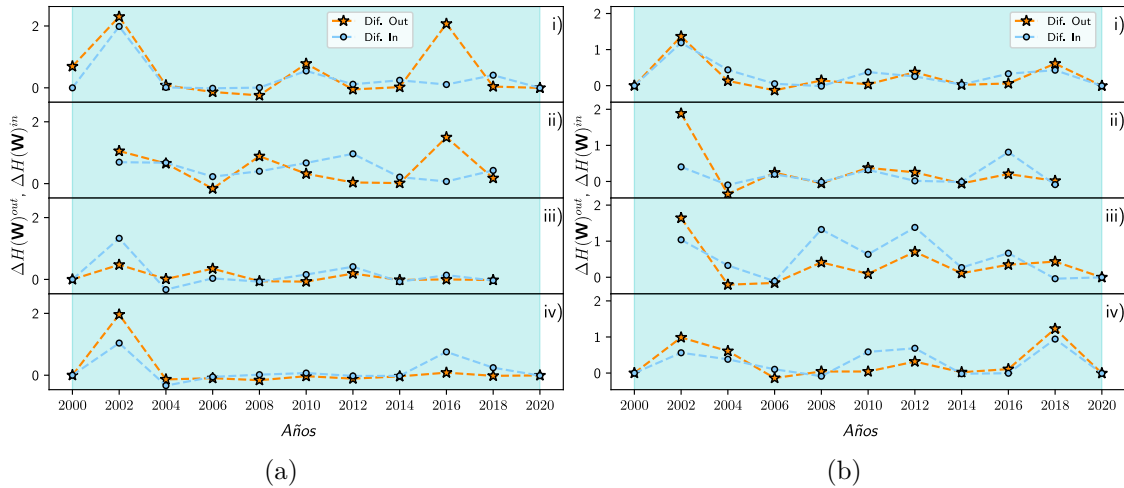


Figura 4-20: Diferencia de entropías de red de fortaleza de Magnus Carlsen para cuando juega con piezas blancas (a) y piezas negras (b) . Donde los resultados corresponden a i) todas, ii) blancas, iii) negras y iv) empates.

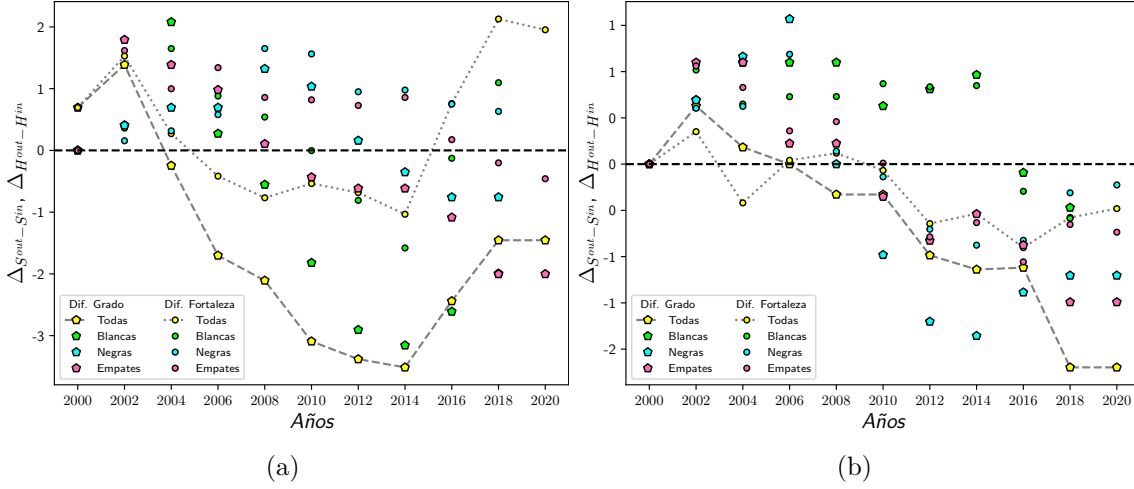


Figura 4-21: Diferencia *out* e *in* entre las entropía de red de grado (pentágonos) y de fortaleza (círculos), para Magnus Carlsen cuando juega con piezas blancas (a) y piezas negras (b).

4.3. Grafos exponenciales.

Para la aplicación del método mecánico-estadístico planteado en la sección 2.2.4 para los GM Anatoly Karpov, Garry Kasparov y Magnus Carlsen se usa el grafo \mathbf{G}_t correspondiente al año 2020. se toma el último grafo para poder inferir de cada uno de estos profesionales las jugadas más probables cuando juegan con piezas blancas y negras. También, sólo tomaremos los grafos cuya información contiene toda la información y el filtro cuando juegan con piezas blancas o negras.

Para obtener la probabilidad de ocurrencia del grafo valuado y dirigido (2-34), sujeto a las ligaduras (2-30), se construye y soluciona con el uso de Matlab el sistema de ecuaciones (2-36) que permite encontrar las variables ocultas x_i y y_j . De forma general se presentará una matriz de probabilidad, cuyos elementos $p_{ij} = x_i y_j$ corresponde a la probabilidad de que exista un vínculo entre el nodo i y el nodo j . También se presenta la intencionalidad de juego, que la definimos como

$$I_i \equiv \frac{1}{N} \sum_j \langle \Theta(w_{ij}) \rangle = \sum_j \frac{p_{ij}}{N}, \quad (4-6)$$

donde $\langle \Theta(w_{ij}) \rangle$ corresponde a la esperanza de existencia de un vínculo entre los nodos i e j en el ensamble. Como el sistema es un grafo dirigido, se tiene que la intencionalidad de juego con piezas blancas o *out* es

$$I_i^{out} = \sum_j \frac{p_{ij}}{N}, \quad (4-7)$$

y la intencionalidad de las piezas negras o *in* corresponde a

$$I_i^{in} = \sum_j \frac{p_{ji}}{N}. \tag{4-8}$$

Los valores de I_i^{out} e I_i^{in} son máximos ($I_i^{out} = I_i^{in} = 1$) para el movimiento i si la probabilidad p_{ij} es máxima para los movimientos adyacentes j .

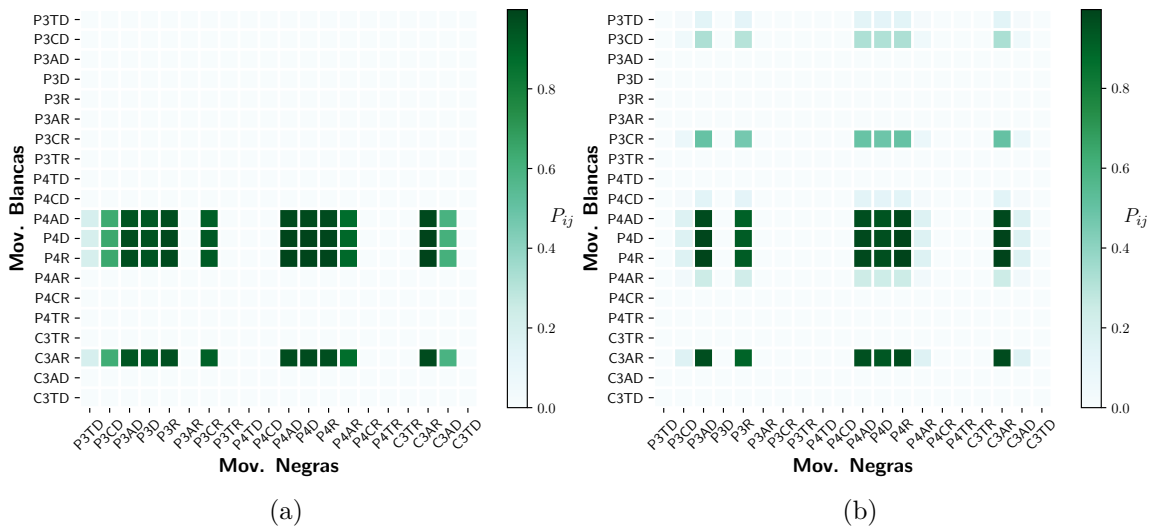


Figura 4-22: Matriz de probabilidad de Anatoly Karpov cuando juega con piezas (a) blancas y (b) negras. Los elementos p_{ij} es la probabilidad de que una jugada de las piezas blancas i tenga una respuesta de las piezas negras j .

Anatoly Karpov.

Para el GM Anatoly Karpov, tenemos que la matriz de probabilidad de combinación de jugadas cuando juega con piezas blancas (ver figura 4-22 (a)) da como resultado 32 combinaciones con probabilidad cercana a uno. Aunando los resultados de intencionalidad de la figura 4-23 se determina que el juego de Karpov cuando juega con piezas blancas se relaciona con 4 jugadas en particular: P4AD, P4D, P4R y C3AR.

Para Anatoly Karpov jugando con piezas negras se tiene que con el modelo mecánico-estadístico (ver figura 4-22 (b)) se encuentra que 24 posibles combinaciones tiene una probabilidad de ocurrencia cercana a la unidad, y 12 con una probabilidad cerca a 0.5. Con la intencionalidad de movimiento de la figura 4-23 tenemos que 6 jugadas son igualmente probables de ser implementadas. Esta medida de intencionalidad para cuando Karpov juega con piezas negras es muy dependiente del juego planteado por las piezas blancas, así que, la representación de la figura 4-22 (b) es más completa, ya que permite rastrear las posibles respuestas al juego que se le plantee.

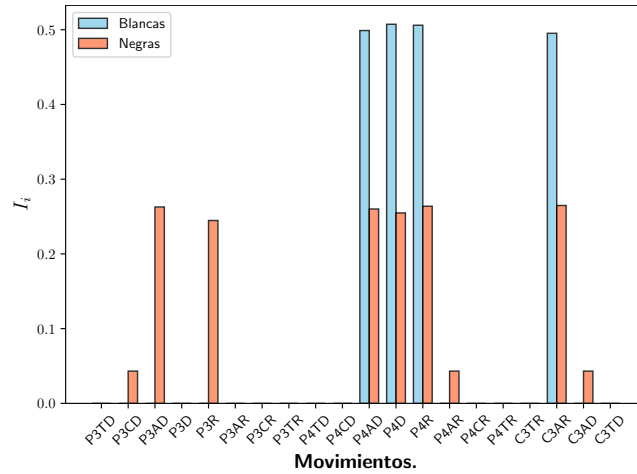


Figura 4-23: Intencionalidad de juego de Karpov cuando juega con piezas blancas (azul) y negras (cafe).

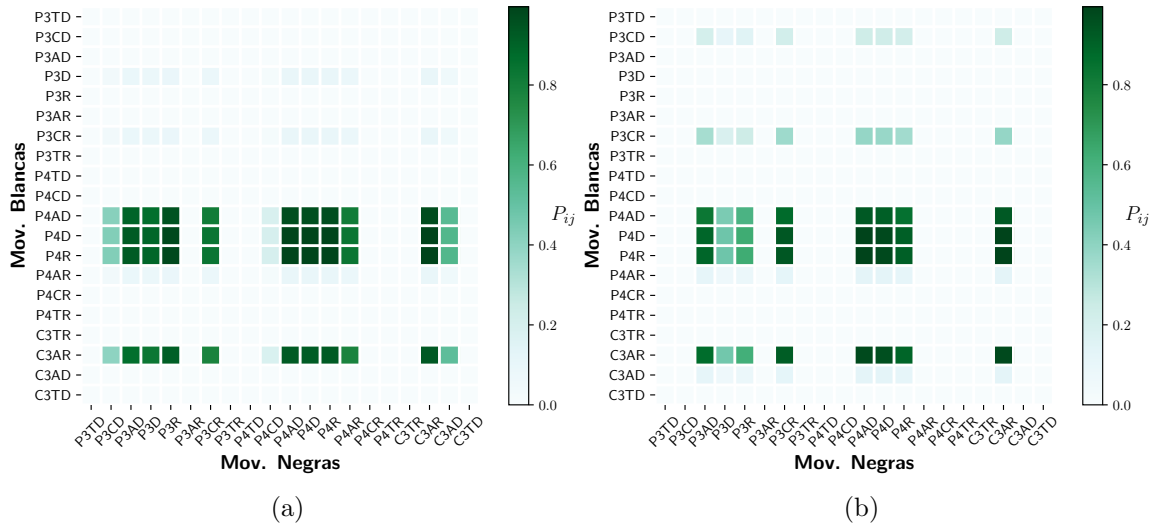


Figura 4-24: Matriz de probabilidad de Garry Kasparov cuando juega con piezas (a) blancas y (b) negras. Los elementos p_{ij} es la probabilidad que una jugada de las piezas blancas i tenga una respuesta de las piezas negras j .

Garry Kasparov.

Con Garry Kasparov tenemos que los resultados de la matriz de probabilidad jugando con piezas blancas se encuentra en la figura 4-24 (a). De esta gráfica se encuentra que el numero de combinaciones más probables es 11, y si relacionamos este numero de combinaciones con la intencionalidad de juego con las piezas blancas de Kasparov (figura 4-25) se observa que las jugadas con mas intencionalidad son P4AD, P4D, P4R y C3AR. En la figura 4-25 para las

piezas blancas, también se observa que las jugadas P3D, P3CR y P4AR tienen una aparición pero con menor recurrencia.

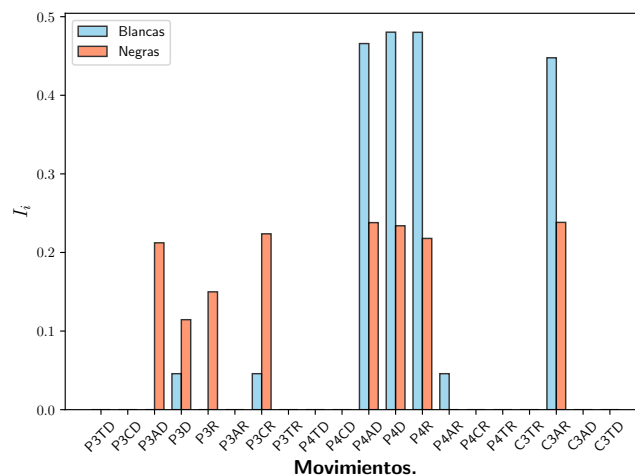


Figura 4-25: Intencionalidad de juego de Kasparov cuando juega con piezas blancas (azul) y negras (café).

Para el caso en que Kasparov juega con piezas negras, la matriz de probabilidad de existencia de combinaciones se observa en figura 4-24 (b). De esta matriz, se tiene que 24 combinaciones tienen probabilidad cercanas a uno y 12 combinaciones tiene una probabilidad de ocurrencia cercanas a 0.5. En relación con los resultados de intencionalidad de juego en la figura 4-25, se tiene que Kasparov cuando juega con piezas negras las jugadas de repuesta más ocurrentes corresponden a P3AD, P3R, P3CR, P4AD, P4D, P4R y C3AR, y con respuesta menos usuales P3R y P3D.

Magnus Carlsen.

Los resultados de la matriz de probabilidad de Magnus Carlsen cuando juega con piezas blancas se observa en la figura 4-26 (a). De estos cálculos se observa que existen 32 combinaciones con una probabilidad de ocurrencia cercana a la unidad y 11 combinaciones con probabilidades cercanas a 0.5. Aunando los resultados de intencionalidad de juego con las piezas blancas (ver figura 4-27), se tiene que Magnus juega en mayor proporción P4AD, P4D, P4R y C3AR que las aperturas P3TD, P3CD, P3R, P3CR, P4TD, P4AR, C3AD y C3TD.

Para el caso en que Carlsen juega con piezas negras los cálculos de la matriz de probabilidad se encuentran en la figura 4-26 (b). Con estos resultados tenemos que 48 combinaciones de jugadas tienen una probabilidad de ocurrencia cercana a la unidad, y 13 una probabilidad de aparición próximo a 0.5. Asociando los valores de intencionalidad, se tiene que Magnus

es más recurrente a las respuesta P3AD, P3R, P3CR, P4AD, P4D, P4R y C3AR que a los movimientos de respuesta P3CD, P3D, P4TD, P4CD, P4AR y C3AD.

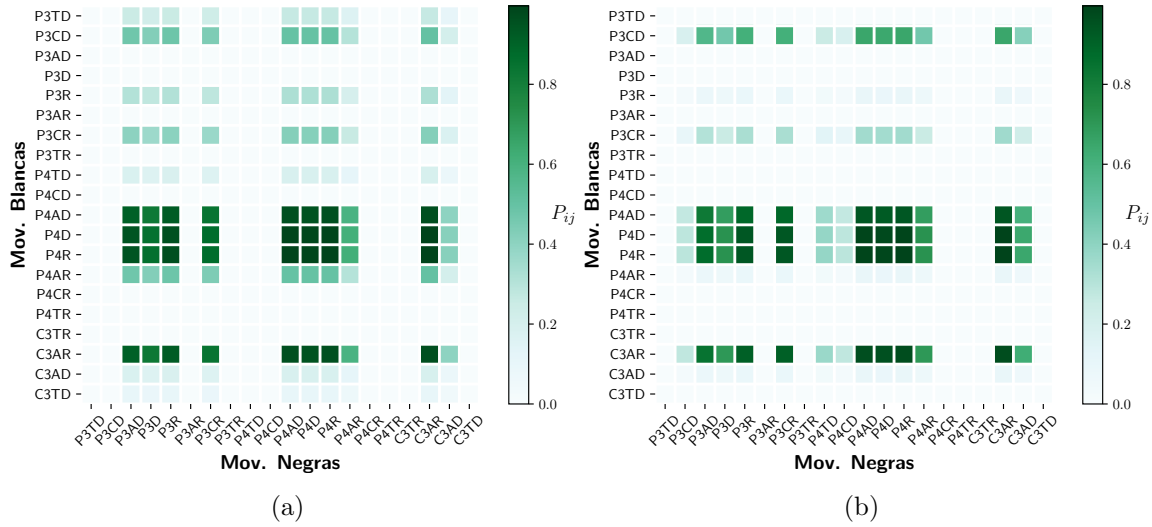


Figura 4-26: Matriz de probabilidad de Magnus Carlsen cuando juega con piezas (a) blancas y (b) negras. Los elementos p_{ij} es la probabilidad que una jugada de las piezas blancas i tenga una respuesta de las piezas negras j .

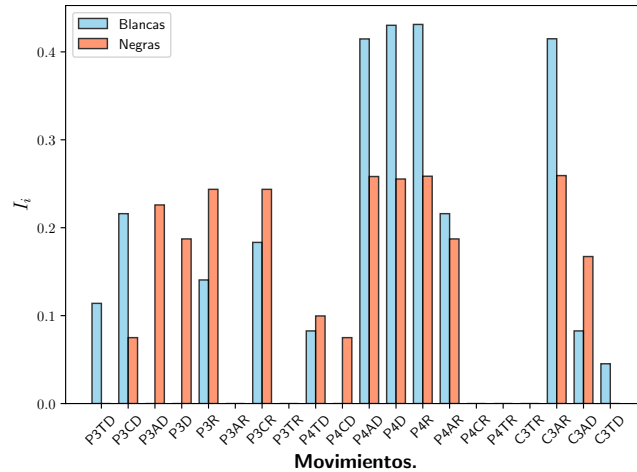


Figura 4-27: Intencionalidad de juego de Carlsen cuando juega con piezas blancas (azul) y negras (cafe).

4.4. Discusión.

Relacionando número de juegos de las bases de datos con respecto al número de combinaciones permitidas en la apertura de ajedrez (400), se tiene que en el compendio histórico en 1924 el número de juegos fue del orden de 2×10^4 y en 2020 alrededor de 3.4×10^6 . Para las Olimpiadas de ajedrez los juegos inician en 1924 con un poco más de 250 y finalizan en el 2020 con alrededor de 9.2×10^4 , mientras que el torneo de Hastings inicia en 1924 con cerca de 495 juegos y finaliza con 4710 (ver figura 3-1 (a)). Para los jugadores tenemos que en el 2020 el número de juegos realizados para Karpov, Kasparov y Magnus son de 4346, 2420 y 2886 respectivamente. Con esta información, junto a las tendencias de entropías $S(W)^{out/in}$ y $H(W)^{out/in}$ encontradas en el caso general (todas) de las bases de datos trabajadas, es evidente que la evolución y el cambio de entropías no está ligada a procesos aleatorios.

Enlazando los máximos de la entropía de $S(\mathbf{W})^{out/in}$ obtenidos de los torneos y los GM, se encuentra que el compendio histórico es el que posee mayor diversidad de estrategias tanto para $S(\mathbf{W})^{out}$ como para $S(\mathbf{W})^{in}$. Además, la diversidad de preferencias por las estrategias $H(W)^{out/in}$ de las piezas negras es mayor en el compendio histórico y las Olimpiadas lo cual se relaciona con un menor profesionalismo en estos torneos. Esta diferencia de máximos de entropías del compendio histórico y las Olimpiadas con respecto a las demás bases de datos, se asocia y siguiendo a Almeida et. al. [3] a que jugadores de mayor fuerza o de Elo eligen torneos o eventos donde se enfrentan los mejores jugadores. Por consiguiente, el uso del primer movimiento de la apertura está ligado generalmente a teorías bien establecidas y aceptadas en la academia ajedrecista. Al mirar los máximos de las entropías de los GM y el torneo de Hastings, la diversidad de estrategias de las piezas blancas es mayor que su contraparte, este resultado se entiende con el hecho de que las piezas negras tienen como objetivo contrarrestar las estrategias planteadas por las piezas blancas, lo cual obliga a los jugadores con piezas negras a seguir caminos cuyo conocimiento los lleve a posiciones favorables o con iguales condiciones.

Tomando ahora los resultados de $H(\mathbf{W})^{out/in}$ en todas las bases de datos, se expone que esta medida mide la preferencia de utilización de estrategias, mientras que la entropía de grado $S(\mathbf{W})^{out/in}$ expone las estrategias existentes en el sistema. Con los máximos de $H(\mathbf{W})^{out/in}$ se tiene que en los torneos las piezas con menor preferencia en el uso de estrategias corresponde a las negras (en otras palabras usan más uniformemente las estrategias disponibles); para los GM esta medida no lleva a un patrón, pero sí expresa el conocimiento y manejo de amplias estrategias con piezas negras o blancas.

Si tomamos las medidas de $S(\mathbf{W})^{out/in}$ y $H(\mathbf{W})^{out/in}$ conjuntamente, se encuentra que aunque el abanico de estrategias es amplio existe una moda en el uso de éstas, lo cual el modelo planteado concuerda con los resultados de Blasius y Tönjes en [5] donde concluyen que

la mayoría de los juegos son distribuidos entre un pequeño número de aperturas de moda. Si se aúna el hecho de que estas medidas indican una dependencia en el primer movimiento con respecto al resultado (separación entre los resultados de blancas, negras y empates con todas), las medidas de entropía determinan que este movimiento como estrategia no lleva a posiciones equilibradas, así como lo muestra Ribeiro et. al. en [22]. Otra cara característica de estas medidas de entropía es relacionarlas con la complejidad, ya que estas entropías exponen una medida de regularidad u orden en el grafo respecto a la diversidad de los movimientos, donde los valores de estas entropías permiten cuantificar la complejidad de las estrategias ($S(\mathbf{W})^{out/in}$) con respecto a la complejidad de su uso ($H(\mathbf{W})^{out/in}$), en analogía y complementando el trabajo realizado en [60].

Para las diferencias de entropía $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$ y sus correspondientes resultados, se tiene que de forma general un cambio de estrategias en el primer movimiento no implica una certidumbre en el resultado de una partida, así como también lo demuestra Munshi en [72]. Tomando los resultados específicos de los torneos, se evidencia un cambio de estrategias que inicia en la región pre-Fischer, es máxima en la región Fischer y decae en la región pos Fischer, lo cual plantea el hecho de que el modelo permite ampliar o dar luz de forma cuantitativa sobre las discusiones frente a los sucesos históricos y las implicaciones que estos han tendido en la historia del ajedrez. Con respecto a los GM, la diferencia de entropía $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$ permite identificar los periodos en que cada jugador realiza cambios de estrategias, además de permitir cuantificar de forma indirecta cambios de conocimiento. Dentro de estos resultados cabe resaltar la correlación entre los cambios ubicados en la región pos-Fischer de Karpov y Kasparov (1985-1990) en el caso en que juegan con piezas blancas, el cual corresponde al periodo en que se enfrentaron e indica que en dicho proceso por ostentar el campeonato del mundo los jugadores ampliaron el número de estrategias.

Con los resultados de $\Delta H(\mathbf{W})^{out/in}$ y $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$ se observa que poseen una relación entre ellos, que corresponde a la relación entre cambios de estrategia y cambios de preferencia de estrategias, que asociamos a un proceso de exploración y posterior estabilización de las estrategias introducidas. Las diferencias de entropías $\Delta H(\mathbf{W})^{out/in}$ (2-22) ayudan a la discusión, porque permiten de manera general en la red definir si un cambio de estrategia implica consolidarla o abandonarla (reforzar un vínculo), y también determinan en paralelo si las estrategias de las piezas blancas o negras crecen con el número de juegos introducidos en la red.

Por otra lado, las diferencias de entropías $\Delta_{S_{out}-S_{in}}$, que en el modelo permite estimar cuáles piezas tienen la mayor diversidad de estrategias en un periodo temporal, y tomando las base de datos del compendio histórico junto con los resultados de los cambios de entropías $\Delta S(\mathbf{W})^{out/in}$, se encuentra que aproximadamente desde 1960 hasta 1990 la variación de entropías se relaciona con la aparición, el cenit y la influencia del GM Bobby Fischer en el mundo del ajedrez. Con las diferencias $\Delta_{H_{out}-H_{in}}$, que en analogía a $\Delta_{S_{out}-S_{in}}$ mide cuál

pieza desarrolla mejores o menores preferencias de estrategias en un año determinado, se observa que las piezas negras son las que menos preferencia de estrategias usan; este resultado sustenta el hecho de que las negras responden con mayor diversidad a las estrategias planteadas por las piezas blancas y que en cada periodo temporal el juego de las piezas negras a nivel profesional está supeditado al juego de las blancas. Al nivel de los GM las diferencias de entropías $\Delta_{H^{out}-H^{in}}$ y $\Delta_{S^{out}-S^{in}}$, permite relacionar la diversidad de estrategias usadas con respecto a sus oponentes. En el caso de Anatoly Karpov se encuentra que el uso de estrategias fue mayor que el de sus oponentes de forma independiente a las piezas que juega.

Por último, con el modelo mecánico-estadístico se encuentra que la probabilidad p_{ij} de que dada una jugada de las piezas blancas i con respuesta de las negras j es distinta a la probabilidad p_{ji} de que dada la jugada j de las piezas blancas las negras respondan i , lo cual responde al hecho que las estrategias de las piezas blancas y negras son distintas. Además, cuando se juega con piezas blancas los movimientos más probables se relacionan a P4AD, P4D, P4R y C3AR que corresponden a la aperturas mas frecuentes. Con respecto a cuando se juega con piezas negras las probabilidades de existencia de una combinación, permite identificar la relación entre la estrategia de las piezas blancas y la respuesta dada por las piezas negras. Aunque el modelo permite encontrar la intencionalidad y la probabilidad p_{ij} con relación a la información suministrada por las bases de datos, éste permite generar un perfilamiento de los jugadores que podría ayudar al estudio de estilos de juegos.

Conclusiones.

- Con las medidas realizadas de entropía al ajedrez en el formalismo de las redes complejas, se identifica que los cambios de estrategia y el uso de las estrategias se encuentra principalmente concentrado entre 1960 y 1990 lo cual permite generar o ampliar cuantitativamente la discusión frente a sucesos históricos en el ajedrez.
- Los máximos de entropía encontrados en las bases de datos demuestran que a nivel profesional existen estrategias aún no utilizadas en los últimos 100 años de practica del juego.
- Las medidas de entropías $S(\mathbf{W})^{out/in}$ y $H(\mathbf{W})^{out/in}$ encuentran una dependencia del primer movimiento de las piezas blancas y negras con el resultado de la partida. Además, permiten estimar la complejidad de decisiones y con la ayuda del modelo mecánico estadístico identificar la relación entre jugadas.
- La introducción de estrategias de un año a otro implican cambios del uso de preferencia de estrategias, el cual se relaciona con la moda del uso de estrategias planteado por Blasius y Tönjes en [5].
- Los cambios de estrategias y cambios de preferencia de un periodo temporal a otro no se relacionan ni están supeditadas a quién tiene más estrategias o quién es menos preferente en usarlas en un año determinado. Los cambios de estrategia de las piezas blancas no indican que son más diversas en un año t que las piezas negras, o viceversa.

Bibliografía

- [1] Shannon CE. XXII. Programming a computer for playing chess. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1950;41(314):256–275.
- [2] Rudolph-Lilith M. ChessY: A Mathematica toolbox for the generation, visualization and analysis of positional chess graphs. SoftwareX. 2019;9:39–43.
- [3] Almeida N, Schaigorodsky AL, Perotti JI, Billoni OV. Structure constrained by meta-data in networks of chess players. Scientific reports. 2017;7(1):1–10.
- [4] Blanch A, Aluja A, Cornadó MP. Sex differences in chess performance: Analyzing participation rates, age, and practice in chess tournaments. Personality and Individual Differences. 2015;86:117–121.
- [5] Blasius B, Tönjes R. Zipf’s law in the popularity distribution of chess openings. Physical Review Letters. 2009;103(21):218701.
- [6] Rocha FT, Da Silva LR, Cesar FHG, Giraldi GA, Thomaz CE. Chess Experience and EEG Brain Cortical Organisation: An Analysis Using Entropy, Multivariate Statistics and Loreta Sources. In: 2017 30th SIBGRAPI Conference on Graphics, Patterns and Images (SIBGRAPI). IEEE; 2017. p. 185–192.
- [7] Murray HJR. A History of Chess: The Original 1913 Edition. Skyhorse; 2015. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=dNSBCgAAQBAJ>.
- [8] Capablanca JR. Fundamentos del ajedrez. Club de Ajedrez. Editorial Fundamentos; 1984. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=cAzYQQAACAAJ>.
- [9] Grau RG. Tratado general de ajedrez: rudimentos. Tratado general de ajedrez. Editorial la Casa del Ajedrez; 2000. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=snSVRAAACAAJ>.
- [10] Bronstein D. El ajedrez de torneo. Club de ajedrez. Fundamentos; 2000. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=YFZhNvKmbEwC>.

-
- [11] Estrada E. The Structure of Complex Networks: Theory and Applications. EBSCO ebook academic collection. OUP Oxford; 2012. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=7z3yku1zI-oC>.
- [12] Wiedermann M, Donges JF, Kurths J, Donner RV. Mapping and discrimination of networks in the complexity-entropy plane. *Physical Review E*. 2017;96(4):042304.
- [13] Nievergelt J. Information content of chess positions. *ACM SIGART Bulletin*. 1977;(62):13–15.
- [14] Koza JR, Poli R. Genetic programming. In: *Search methodologies*. Springer; 2005. p. 127–164.
- [15] McKenzie P. Full chess retrieval. 1994;.
- [16] Zhang B, Chen B, Peng JI. The Entropy of Artificial Intelligence and a Case Study of AlphaZero from Shannon’s Perspective. *arXiv preprint arXiv:181205794*. 2018;.
- [17] Squartini T, Garlaschelli D. Maximum-Entropy Networks: Pattern Detection, Network Reconstruction and Graph Combinatorics. *Understanding Complex Systems*. Springer International Publishing; 2017. Available from: https://books.google.com.co/books?id=gOs_DwAAQBAJ.
- [18] Newman M. *Networks*. OUP Oxford; 2018. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=YdZjDwAAQBAJ>.
- [19] Park J, Newman ME. Statistical mechanics of networks. *Physical Review E*. 2004;70(6):066117.
- [20] Squartini T, Garlaschelli D. Analytical maximum-likelihood method to detect patterns in real networks. *New Journal of Physics*. 2011;13(8):083001.
- [21] Breznik K, Batagelj V. FIDE Chess Network. *Austrian Journal of Statistics*. 2011;40(4):225–239.
- [22] Ribeiro HV, Mendes RS, Lenzi EK, del Castillo-Mussot M, Amaral LA. Move-by-move dynamics of the advantage in chess matches reveals population-level learning of the game. *PLoS One*. 2013;8(1):e54165.
- [23] Krivov SV. Optimal dimensionality reduction of complex dynamics: the chess game as diffusion on a free-energy landscape. *Physical Review E*. 2011;84(1):011135.
- [24] Png JHC. *Understanding the Elephant: A Xiangqi Primer Part 1: History of Xiangqi*. *Understanding the Elephant: A Xiangqi Primer*. Rui xing tu shu gu fen you xian gong si; 2016. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=eTxTvgAACAAJ>.

- [25] Averbakh Y, Kasparov G. A History of Chess: From Chaturanga to the Present Day. Russell Enterprises, Incorporated; 2012. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=uJBXDwAAQBAJ>.
- [26] Luis FJ, Manuel GJ, Luis FA. Una historia de ajedrez mendocino. Editorial Dunken; 2013. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=xRLWAwAAQBAJ>.
- [27] Shenk D. The Immortal Game: A History of Chess. Profile; 2011. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=aSqGDwAAQBAJ>.
- [28] Forbes D. The History of Chess: From the Time of the Early Invention of the Game in India Till the Period of Its Establishment in Western and Central Europe. W. H. Allen & Company; 1860. Available from: https://books.google.com.co/books?id=J_9dAAAAcAAJ.
- [29] Falkener E. Games Ancient and Oriental and How to Play Them: Being the Games of the Ancient Egyptians; The Hiera Gramme of the Greeks, the Ludus Latrunculorum of the Romans and the Oriental Games of Chess, Draughts, Backgammon and Magic Squares (Classic Reprint). Fb&c Limited; 2017. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=voXVswEACAAJ>.
- [30] Ganzo J. Historia general del ajedrez. R. Aguilera; 1970. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=GBQinwEACAAJ>.
- [31] Bird HE. Chess History and Reminiscences. Alpha Editions; 2021. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=Wn-qzgEACAAJ>.
- [32] Golombek H. Chess: A History. Putnam; 1976. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=5jZwAAAAMAAJ>.
- [33] Castro FLC. Mitología Del Ajedrez. Edicomunicación, S.A.; 2000. Available from: https://books.google.com.co/books?id=_Hf7PAAACAAJ.
- [34] Chairman Abdulrahim VAKH Mahdi. FIDE ARBITERS' COMMISSION ARBITERS' MANUAL 2021; 2021.
- [35] Blanco H UJ. Arbitraje del Ajedrez para Docentes. Gráficas Linero S.R.L; 1999.
- [36] Bartelski W. OlimpBase the encyclopaedia of team chess;. Accessed: 2021-11-17. <https://www.olimpbase.org/index.php>.
- [37] by MH Themes MMWT. Congress history;. Accessed: 2022-2-7. <http://hastingschess.com/congress-history/>.
- [38] Chess Player's Chronicle. v. 16. R. Hastings.; 1855. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=-s1eAAAAcAAJ>.

- [39] Commission TQ. Regulations for the FIDE Online Olympiad; 2021.
- [40] Kasparov G. *Cómo la vida imita al ajedrez*. Bestseller. Penguin Random House Grupo Editorial México; 2016. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=MDsiDAAAQBAJ>.
- [41] Capablanca JR. *Artes y Secretos De Ajedrez*. Editorial Quetzal; 2009.
- [42] International Chess Federation;. Accessed: 2021-11-17. <https://www.fide.com/>.
- [43] Karolyi T, Karpov A, Aplin N. *Endgame Virtuoso Anatoly Karpov*. New in Chess; 2007.
- [44] Kasparov G. *Garry Kasparov on My Great Predecessors, Part Five*. Everyman chess. Everyman Chess; 2006. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=TduzxQEACAAJ>.
- [45] Karolyi T, Aplin N. *Endgame Virtuoso: Anatoly Karpov*. New in Chess; 2007. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=ow0oLgAACAAJ>.
- [46] Kasparov G. *Garry Kasparov on Modern Chess: Kasparov V Karpov, 1988-2009*. Everyman chess. Everyman Chess; 2010. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=Eb2WSQAACAAJ>.
- [47] Kasparov G, Wade B, Speelman J. *EL AJEDREZ COMBATIVO DE KASPAROV*. Colección Caissa. Paidotribo; 2002. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=3l0BI7Db33gC>.
- [48] Martin A. *Garri Kasparov*. Barcelona: Martinez Roca; 1986.
- [49] Agdestein S. *How Magnus Carlsen Became the Youngest Chess Grandmaster in the World: The Story and the Games*. New in Chess; 2013. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=tCBBCwAAQBAJ>.
- [50] Mykhalchyshyn A. *Fighting chess with Magnus Carlsen*. Hombrechtikon/Zurich: Edition Olms; 2012.
- [51] Latora V, Nicosia V, Russo G. *Complex Networks: Principles, Methods and Applications*. Cambridge University Press; 2017. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=qV0yDwAAQBAJ>.
- [52] Dorogovtsev SN, Mendes JFF. *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*. OUP Oxford; 2013. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=JhobAgAAQBAJ>.

- [53] Garlaschelli D, Loffredo MI. Generalized bose-fermi statistics and structural correlations in weighted networks. *Physical review letters*. 2009;102(3):038701.
- [54] Fornito A, Zalesky A, Bullmore E. *Fundamentals of brain network analysis*. Academic Press; 2016.
- [55] Sethna JP. *Statistical Mechanics: Entropy, Order Parameters, and Complexity: Second Edition*. Oxford Master Series in Physics. OUP Oxford; 2021. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=anEWEAAAQBAJ>.
- [56] Amit DJ, The OUOI, Verbin Y. *Statistical Physics: An Introductory Course*. Statistical Physics: An Introductory Course. World Scientific Publishing Company; 1999. Available from: <https://books.google.com.co/books?id=1907DQAAQBAJ>.
- [57] Shannon C. 1J A mathematical theory of communication. *Bell System Tech. J.* 27, 379-423, 623-656 (1948).-[2. Certain results in coding theory for noisy channels *Inform and Controll*. 1957;p. 6–25.
- [58] Omar YM, Plapper P. A Survey of Information Entropy Metrics for Complex Networks. *Entropy*. 2020;22(12):1417.
- [59] Zenil H, Kiani NA, Tegnér J. A review of graph and network complexity from an algorithmic information perspective. *Entropy*. 2018;20(8):551.
- [60] Ni C, Yang J, Kong D. Sequential seeding strategy for social influence diffusion with improved entropy-based centrality. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2020;545:123659.
- [61] Qiao T, Shan W, Yu G, Liu C. A novel entropy-based centrality approach for identifying vital nodes in weighted networks. *Entropy*. 2018;20(4):261.
- [62] Dehmer M, Mowshowitz A. A history of graph entropy measures. *Information Sciences*. 2011;181(1):57–78.
- [63] Lee MJ, Lee E, Lee B, Jeong H, Lee DS, Lee SH, et al. Uncovering hidden dependency in weighted networks via information entropy. *Physical Review Research*. 2021;3(4):043136.
- [64] Wang L, Dai W, Luo G, Zhao Y. A Novel Approach to Support Failure Mode, Effects, and Criticality Analysis Based on Complex Networks. *Entropy*. 2019;21(12):1230.
- [65] Squartini T, Garlaschelli D. Analytical maximum-likelihood method to detect patterns in real networks. *New Journal of Physics*. 2011;13(8):083001.
- [66] Park J, Newman ME. Statistical mechanics of networks. *Physical Review E*. 2004;70(6):066117.

-
- [67] Bargigli L. Statistical ensembles for economic networks. *Journal of Statistical Physics*. 2014;155(4):810–825.
- [68] Squares. PGN mentor;. Accessed: 2022-1-14. <https://www.pgnmentor.com/>.
- [69] Home of the dutch rebel;. Accessed: 2022-1-14. <http://rebel13.nl/>.
- [70] Jay, Erik. Chess.com; 2005. Accessed: 2022-1-14. <https://www.chess.com>.
- [71] Hassabis D. Artificial intelligence: Chess match of the century. *Nature*. 2017;544(7651):413–414.
- [72] Munshi J. A method for comparing chess openings. Available at SSRN 2415203. 2014;.
- [73] Willard Gibbs J. *Elementary Principles of Statistical Mechanics*. Scribner's, New York. 1902;.
- [74] Rosenkrantz R. Where do we stand on maximum entropy?(1978). In: ET Jaynes: Papers on probability, statistics and statistical physics. Springer; 1989. p. 210–314.
- [75] Tribus M. *Thermostatistics and thermodynamics*. 1961;.
- [76] Katz A. *Principles of statistical mechanics: the information theory approach*. WH Freeman; 1967.
- [77] Karmeshu J. *Entropy measures, maximum entropy principle and emerging applications*. vol. 119. Springer Science & Business Media; 2003.
- [78] Harte J. *Maximum entropy and ecology: a theory of abundance, distribution, and energetics*. OUP Oxford; 2011.
- [79] Smith CR, Grandy Jr WT. *Maximum-Entropy and bayesian methods in inverse problems*. vol. 14. Springer Science & Business Media; 2013.
- [80] King DM, Strantzen JB. Maximum entropy of cycles of even period. 152. *American Mathematical Soc.*; 2001.
- [81] Henryk G. *The method of maximum entropy*. vol. 29. World scientific; 1995.
- [82] Jaynes ET. Information theory and statistical mechanics. *Physical review*. 1957;106(4):620.
- [83] Jaynes ET. Information theory and statistical mechanics. II. *Physical review*. 1957;108(2):171.
- [84] Jaynes ET. On the rationale of maximum-entropy methods. *Proceedings of the IEEE*. 1982;70(9):939–952.

- [85] Wu N. The maximum entropy method. vol. 32. Springer Science & Business Media; 2012.

Anexo: Reglas básicas del ajedrez.

En esta sección extraemos algunos fragmentos de “**FIDE ARBITERS’ COMMISSION**” necesarios para el desarrollo de la tesis [34]. En particular el capítulo 2 sección “**Basic Rules of Play**”, el cual expresa el objetivo natural de juego del ajedrez, la posición inicial de las piezas en el tablero, el movimiento de las piezas entre otros temas. Citando a “**FIDE ARBITERS’ COMMISSION**”, tenemos:

Artículo 1: El objetivo del juego de ajedrez.

- 1.1 La partida de ajedrez se juega entre dos adversarios que mueven alternativamente sus propias piezas sobre un tablero cuadrado, llamado “tablero de ajedrez”.
- 1.2 El jugador con las piezas claras (el Blanco) realiza el primer movimiento, y posteriormente los jugadores mueven alternativamente, con lo que el jugador con las piezas oscuras (el Negro) realiza el siguiente movimiento.
- 1.3 Se dice que un jugador “tiene que mover” cuando se ha realizado el movimiento de su adversario.
- 1.4 El objetivo de cada jugador es situar al rey de su adversario “bajo ataque”, de tal forma que el adversario no disponga de ningún movimiento legal.
 - 1.4.1 Del jugador que alcanza este objetivo se dice que ha dado “mate” al rey de su adversario y que ha ganado la partida. No está permitido dejar el propio rey bajo ataque, ni exponerlo al ataque ni capturar el rey del oponente.
 - 1.4.2 El adversario, cuyo rey ha recibido mate, pierde la partida.
- 1.5 Si la posición es tal que ninguno de los jugadores puede dar mate, la partida es tablas.

Artículo 2: La posición inicial de las piezas sobre el tablero.

- 2.1 El tablero de ajedrez es un cuadrado dividido en 64 casillas cuadradas del mismo tamaño, con distribución 8 x 8, alternativamente claras (las casillas “blancas”)

y oscuras (las casillas “negras”). El tablero se coloca entre los jugadores de tal forma que la casilla de la esquina derecha más cercana a cada jugador sea blanca.

2.2 Al comienzo de la partida, el Blanco dispone de 16 piezas de color claro (las piezas “blancas”); el Negro tiene 16 piezas de color oscuro (las piezas “negras”).

2.3 La posición inicial de las piezas sobre el tablero es la observa en [A-1](#).



Figura A-1: Posición inicial de las piezas de Ajedrez.

Artículo 3: El movimiento de las piezas.

- 3.1 No está permitido mover una pieza a una casilla ocupada por una pieza del mismo color.
 - 3.1.1 Si una pieza se mueve a una casilla ocupada por una pieza de su adversario, ésta es capturada y retirada del tablero como parte del mismo movimiento.
 - 3.1.2 Se dice que una pieza ataca a otra del adversario si puede efectuar una captura en esa casilla conforme a los Artículos 3.2 a 3.8.
 - 3.1.3 Se considera que una pieza ataca una casilla, incluso si esta, no puede ser movida a dicha casilla porque este movimiento dejaría o colocaría su propio rey bajo ataque.
- 3.2 El alfil puede ser movido a cualquier casilla a lo largo de una de las diagonales sobre las que se encuentra (ver [A.2\(a\)](#)).
- 3.3 La torre puede ser movida a cualquier casilla a lo largo de la fila o columna en las que se encuentra (ver [A.2\(b\)](#)).
- 3.4 La dama puede ser movida a cualquier casilla a lo largo de la fila, columna o diagonal en las que se encuentra (ver [A.2\(c\)](#)).
- 3.5 Al realizar estos movimientos, el alfil, la torre o la dama no pueden pasar sobre ninguna otra pieza.
- 3.6 El caballo puede ser movido a una de las casillas más próximas a la que se encuentra, sin ser de la misma fila, columna o diagonal (ver [A.3\(a\)](#)).

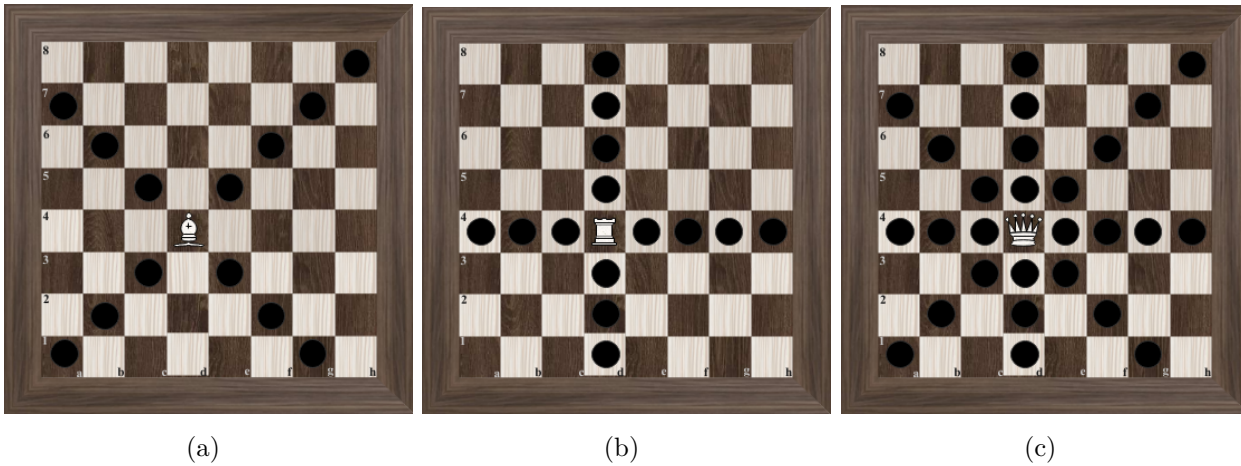


Figura A-2: Moviminetos legales de (a) Alfil, (b) Torre. (c) Dama.

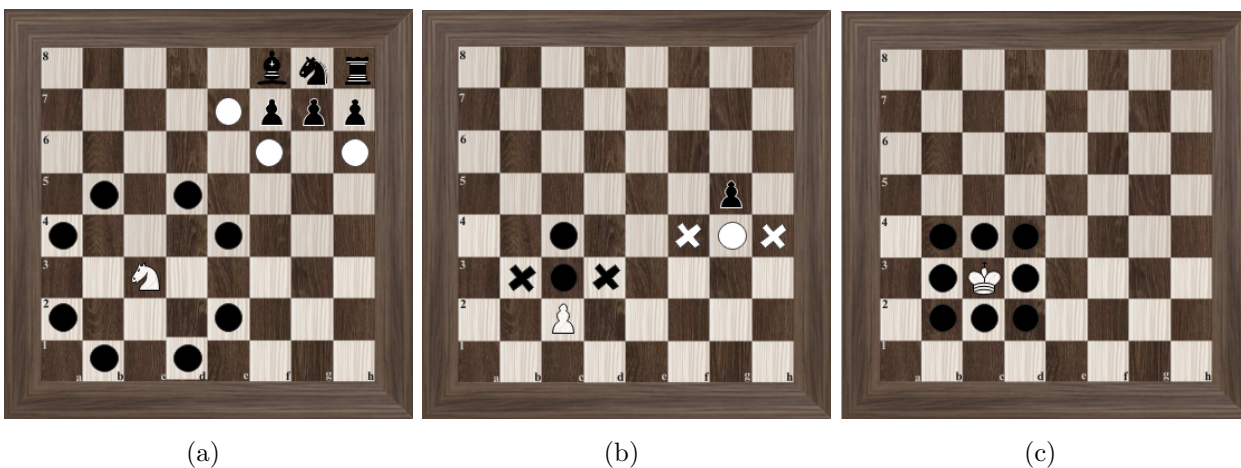


Figura A-3: Moviminetos del (a) Caballo, (b) Peón, (c) Rey.

- 3.7.1 El peón puede ser movido hacia adelante a la casilla inmediatamente delante suyo en la misma columna, siempre que dicha casilla esté desocupada; o (ver [A.3\(b\)](#))
- 3.7.2 En su primer movimiento el peón puede ser movido como en 3.7.1; alternatively, puede avanzar dos casillas a lo largo de la misma columna, siempre que ambas casillas estén desocupadas; o (ver [A.3\(b\)](#))
- 3.7.3 El peón puede ser movido a una casilla ocupada por una pieza del adversario que esté en diagonal delante suyo, sobre una columna adyacente, capturando dicha pieza (ver [A.3\(b\)](#)).
- 3.8 Hay dos formas diferentes de mover el rey:
- 3.8.1 Desplazándolo a cualquier casilla adyacente (ver [A.3\(c\)](#)),

Artículo 5: La finalización de la partida

- 5.1.1 La partida es ganada por el jugador que ha dado mate al rey de su adversario.
- 5.1.2 La partida es ganada por el jugador cuyo adversario declara que abandona.
- 5.2.1 La partida es tablas cuando el jugador que está en juego no puede hacer ningún movimiento legal y su rey no está en jaque.
- 5.2.2 La partida es tablas cuando se alcanza una posición en la que ningún jugador puede dar mate al rey del adversario con cualquier serie de movimientos legales. Se dice entonces que la partida termina en una “posición muerta”.
- 5.2.3 La partida es tablas por acuerdo entre los dos jugadores durante el desarrollo de la misma, siempre y cuando ambos jugadores hayan efectuado al menos un movimiento. Esto finaliza inmediatamente la partida.

Anexo: Notación.

Para describir el movimientos de las piezas por el tablero, es necesario un uso de lenguaje o notación propia al ajedrez. Estos estilos de notación ha cambiado a través del tiempo. En particular tomaremos la notación descriptiva y algebraica, siendo esta ultima la aceptada por la FIDE y mas usado en el mundo. Por fines prácticos y necesarios para el desarrollo de esta tesis, solo se explicarán las nociones básicas de estas notaciones. Si se desea mayor información buscar en [34, 32, 9].

B.1. Notación algebraica.

En esta notación, las columnas del tablero se nombran desde la letra **a** hasta la **h**, de izquierda a derecha y siempre desde el punto de vista de las blancas, y a filas se les asigna un numero del 1 a 8, de abajo hacia arriba. De esta manera, cada escaque queda definido por la combinación de una letra con un numero (ver figura. **B-1** (a)).

Las piezas son designadas mediante sus iniciales. Con excepción del peón, que no lleva ninguna. Comúnmente se usan las iniciales de habla inglesa, tal como se puede observar en la tabla **B-1**. Para denotar un movimiento de una pieza, se toma la inicial de la letra y posteriormente se escribe la casilla donde llega la pieza, ejm. e4 Nf6 (ver figura **B-1**(b)). Cuando la pieza lleva a cabo una captura, se inserta una X entre la letra de la pieza que captura y el escaque de llegada ejm. Nxd5 (ver figura **B-1**(c)).

B.2. Notación descriptiva.

La notación descriptiva paso en desuso para competiciones oficiales de la FIDE el 1 de enero de 1981. En particular, esta notación permite explotar la simetría del tablero y su configuración. En esta notación, las columnas del tablero se nombran según la inicial de la pieza que las ocupan en la posición inicial, de derecha a izquierda y dividiendo el tablero en flanco







Pieza (Símbolo).	Nombre.	Notación Algebraica.	Notación Descriptiva.
	Rey	K (King)	R
	Dama	Q (Queen)	D
	Torre	R (Rook)	T
	Caballo	N (Knight)	C
	Alfil	B(Bishop)	A
	Peón		P

Tabla B-1: Abreviación de las piezas de ajedrez para la notación algebraica y descriptiva.

de dama y flanco de rey: TD, CD, AD, D, R, AR, CR, TR (Este proceso se realiza para las blancas y las negras); las filas se enumeran del 1 al 8 de abajo hacia arriba tanto para las blancas como las negras. Con esto, cada casilla se puede definir por el número de la fila aunado al nombre de la columna (ver figura. [B-2](#) (a) y [B-2](#) (b)).

Las piezas se denotan mediante su inicial (ver tabla [B-1](#)), y para simbolizar un movimiento se toma la letra de la pieza que se desea mover y consecuentemente se escribe el escaque donde llega la pieza ejm. P4R C3AR (ver figura [B-2](#) (c).). Cuando la pieza realiza una captura se inserta una X entre la letra de la pieza que captura y el escaque de llegada ejm. Cx4R.

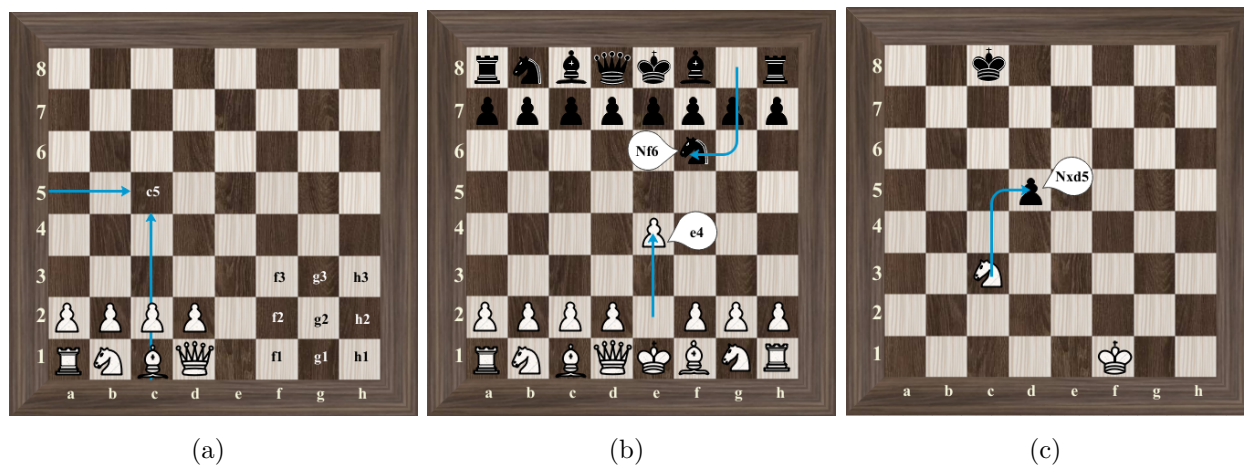


Figura B-1: Notación algebraica. (a) El escaque es definido con la letra de la columna y el numero de la fila. (b) Representación del movimiento del jugador blanco e4 (el peón de la posición e2 se mueve a e4) con la respuesta de las piezas negras Nf6. (c) Representación de la captura Nxd5.

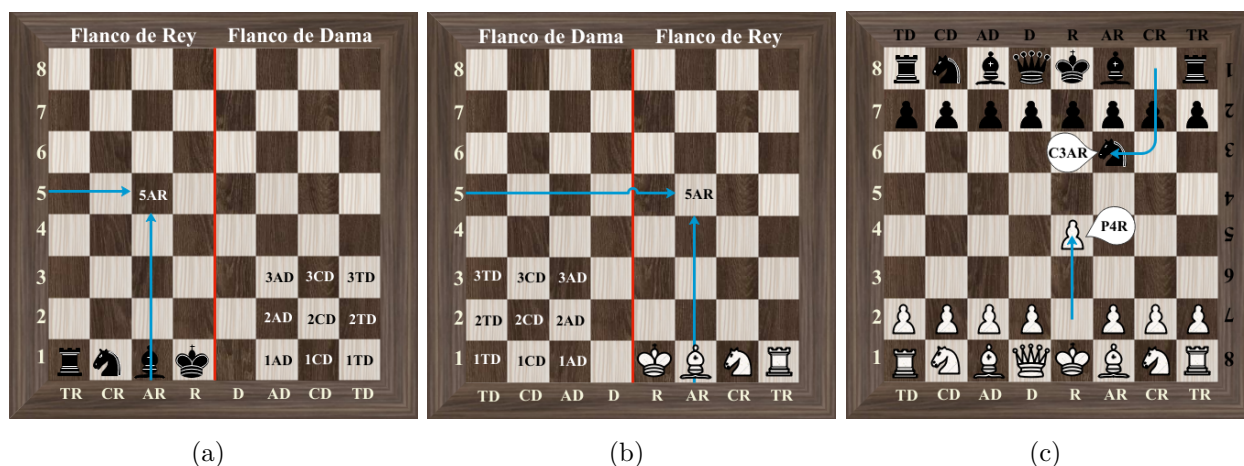


Figura B-2: Notación descriptiva. La etiqueta de la casilla se define dependiendo del observador (a) negro y (b) blanco. (c) El movimiento de las piezas blancas se representa por la combinación entre la abreviatura de la pieza más el nombre del escaque según las blancas P4R, para las negras se realiza de forma análoga pero usando el nombre del escaque de las negras C3AR.

Anexo: Principio de máxima entropía.

Gibbs menciono y notó, que la distribución canónica es la que maximiza la entropía bajo ligaduras impuestas por la energía media y la normalización [73]. Sin embargo, fue Jaynes quien, inspirado por ideas de la teoría de la información, elevó el principio de máxima entropía al estado del postulado en la mecánica estadística [74, 75, 76].

El principio de máxima entropía proporciona una base racional, que resuelve problemas reales no triviales que no pueden ser abordados por otros métodos estadísticos, y, se extrapola a las matemáticas, ingeniería, Biología, economía, análisis espectral, restauración de imágenes, informática, entre otras [77, 78, 79, 80, 81]. El principio de máxima entropía propuesto por Jaynes [82, 83, 84], se basa en la información disponible de un observador acerca de un sistema estocástico. e tiene que asignar probabilidades a los estados del sistema cuando sólo se proporciona información parcial o incompleta en forma de momentos y/o límites (ligaduras). El principio busca el valor de equilibrio de un parámetro microscópico supeditado a las ligaduras del sistema. Este valor es el que maximiza la entropía.

La solución a un problema con el uso del principio de máxima entropía, implica que esta tenga las tres propiedades de una solución: existencia, singularidad y estabilidad [85]. La existencia de una solución a un problema se relaciona a inferir la forma de la distribución de probabilidad más uniforme sujeta a las limitaciones de nuestro conocimiento a priori del sistema (o la que maximiza nuestra ignorancia [81] o incertidumbre [77]). La singularidad se garantiza y se asocia con la existencia de una solución al problema y al criterio de “entropía máxima”, y la estabilidad se asocia con el equilibrio del sistema.

Matemáticamente, si se tiene un problema que se describe con muchas posibilidades de distribución de probabilidad, entonces, existe una única distribución que maximiza la entropía. Tomando un conjunto de probabilidades $\{P_i\}$ en el equilibrio. Sea χ una variable aleatoria que cumple

- Evento de $\chi = \{x_i\}$, con $i = 1, 2, \dots, n$

- Información: Dada por los valores esperados de las funciones

$$\{f_r(\chi)\} \quad (\text{C-1})$$

con $r = 1, 2, \dots, n$

- Ligaduras

- normalización.

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1 \quad (\text{C-2})$$

- Valor Esperado.

$$\sum_{i=1}^n P_i f_r(x_i) = \langle f_r(\chi) \rangle = F_r \quad (\text{C-3})$$

- Entropía

$$S(P_1, P_2, \dots, P_n) = -k \sum_{i=1}^n P_i \ln P_i. \quad (\text{C-4})$$

Como el principio de máxima entropía es un problema de optimización, donde se debe encontrar el máximo de la función entropía $S(P_1, P_2, \dots, P_n)$, sujeto a las ligaduras [C-2](#), [C-3](#), podemos utilizar el método de Multiplicadores de Lagrange para encontrar la distribución P que maximice la entropía [C-4](#)

$$\delta \left[S(P_1, P_2, \dots, P_n) + k \sum_{r=1}^n \lambda_r \left(\sum_{i=1}^n P_i f_r(x_i) - F_r \right) + k \lambda_0 \left(\sum_{i=1}^n P_i - 1 \right) \right], \quad (\text{C-5})$$

donde λ_0 y λ_r son los multiplicadores de Lagrange asociados a las ligaduras del sistema. Como el estado se encuentra en equilibrio, se tiene

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial P_i} + k \sum_{r=1}^n \lambda_r f_r(x_i) + k \lambda_0 \right) \delta P_i = 0. \quad (\text{C-6})$$

Como δP_i son independientes y S está definido en la ecuación [\(C-4\)](#), tenemos

$$\ln P_i + \vec{\lambda} \cdot f(\vec{x}_i) + \mu_0 = 0, \quad (\text{C-7})$$

donde $\mu_0 = \lambda_0 + 1$ y $\vec{\lambda} \cdot f(\vec{x}_i) = \sum_{r=1}^n \lambda_r f_r(x_i)$. Despejando P_i se encuentra la distribución que maximiza la entropía

$$P_i = e^{-(\mu_0 + \vec{\lambda} \cdot f(\vec{x}_i))}. \quad (\text{C-8})$$

Con las ligaduras de normalización, se tiene

$$e^{\mu_0} = \sum_{i=1}^n e^{-\vec{\lambda} \cdot f(\vec{x}_i)} = Z(\vec{\lambda}), \quad (\text{C-9})$$

que corresponde a la función de partición del sistema. Con el valor esperado se tiene

$$F_r = -\frac{\partial \ln Z(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_r}, \quad (\text{C-10})$$

que corresponden a la solución de los multiplicadores de Lagrange. Así tenemos que la distribución que maximiza la entropía es

$$P_i = \frac{1}{Z(\vec{\lambda})} e^{-\vec{\lambda} \cdot f(\vec{x}_i)}. \quad (\text{C-11})$$

Al reemplazar esta distribución de probabilidad en la entropía, se obtiene

$$S = K \ln Z(\vec{\lambda}) + k\vec{\lambda} \cdot \vec{F}, \quad (\text{C-12})$$

donde $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z(\vec{\lambda})} f(\vec{x}_i) \exp(-\vec{\lambda} \cdot f(\vec{x}_i))$.