

Introducción a la teoría estadística del riesgo

Introducción a la teoría estadística del riesgo

José Alfredo Jiménez Moscoso



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Bogotá, D. C., Colombia, febrero de 2022

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia

Jiménez Moscoso, José Alfredo, 1973-

Introducción a la teoría estadística del riesgo / José Alfredo Jiménez Moscoso. –

Primera edición. – Bogotá : Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Coordinación de publicaciones Facultad de Ciencias, 2022

1 recurso en línea (xviii, 459 páginas) : ilustraciones (principalmente a color), diagramas

Incluye referencias bibliográficas e índice

ISBN 978-958-794-879-0 (ebook)

DOI 10.36385/fcbog-13-0

1. Riesgo (Seguros) – Métodos estadísticos 2. Seguros contra todo riesgo 3. Gestión del riesgo – Métodos estadísticos 4. Evaluación de riesgos – Métodos estadísticos 5. Riesgo financiero – Métodos estadísticos 6. Estadística matemática 7. Probabilidades I. Título

CDD-23 368.01 / 2022

© Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

© José Alfredo Jiménez Moscoso

Primera edición, 2022

ISBN (digital): 978-958-794-879-0

Edición

Daniela Guerrero Acosta

Coordinación de publicaciones - Facultad de Ciencias

coopub_fcbog@unal.edu.co

Corrección de estilo:

Hernán Rojas Rodríguez

Diseño de la colección

Leonardo Fernández Suárez

Maqueta \LaTeX

Camilo Cubides

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales

Impreso y hecho en Bogotá, D. C., Colombia

Con amor y afecto este libro es dedicado a mi esposa, mi hija y mis padres.

Contenido

| | |
|---|----------|
| Lista de figuras | XI |
| Lista de tablas | XIII |
| Prefacio | XVII |
| Lista de siglas | XIX |
| | |
| Capítulo <i>uno</i> | |
| Preliminares | 1 |
| 1.1. Espacio muestral y eventos aleatorios | 3 |
| 1.2. Función de probabilidad y eventos independientes | 3 |
| 1.3. Definiciones de probabilidad | 4 |
| 1.3.1. Probabilidad clásica o ley de Laplace o <i>a priori</i> | 4 |
| 1.3.2. Probabilidad empírica, frecuencial o <i>a posteriori</i> | 4 |
| 1.3.3. Probabilidad axiomática o matemática de Kolmogorov | 5 |
| 1.3.4. Probabilidad condicional | 6 |
| 1.4. Regla de Bayes | 6 |
| 1.5. Distribuciones de probabilidad | 7 |
| 1.6. Valor esperado y varianza de una variable aleatoria | 10 |
| 1.7. Momentos de una variable aleatoria | 12 |
| 1.8. Función generadora de probabilidad | 14 |
| 1.9. Función generadora de momentos | 15 |
| 1.10. Distribución de probabilidad conjunta | 18 |
| 1.10.1. Función de distribución conjunta | 19 |
| 1.10.2. Valores esperados y momentos | 20 |
| 1.10.3. Valor esperado condicional | 20 |
| 1.10.4. Varianza condicional | 21 |
| 1.11. Convolución de variables | 22 |
| 1.12. Algunas distribuciones útiles | 24 |
| 1.12.1. Distribuciones de probabilidad | 24 |
| 1.12.2. Familia de distribuciones de Panjer | 27 |
| 1.12.3. Funciones de densidad de probabilidad | 31 |
| 1.12.4. Distribuciones de colas pesadas | 33 |

| | |
|---|----|
| 1.13. Aproximación Cornish-Fisher | 40 |
| 1.14. Desigualdades de probabilidad | 41 |
| 1.14.1. Desigualdad de Chebyshev | 42 |
| 1.14.2. Desigualdad de Bernstein | 42 |
| 1.14.3. Desigualdad de Jensen | 42 |
| 1.15. Teoremas límites | 44 |
| 1.16. Pruebas de bondad de ajuste | 46 |
| 1.16.1. Prueba chi-cuadrado | 46 |
| 1.16.2. Contraste de Kolmogorov-Smirnov | 47 |
| 1.16.3. Contraste de Anderson-Darling | 48 |

Capítulo *dos*

| | |
|---|-----------|
| Modelos de frecuencia | 49 |
| 2.1. Modelos para el número de reclamos o pérdidas | 51 |
| 2.1.1. Familia de distribuciones de Panjer | 54 |
| 2.1.2. Estimación de los parámetros de la familia de Panjer | 55 |
| 2.1.3. Distribución generalizada de Panjer | 59 |
| 2.2. Mezclas de dos distribuciones de frecuencias | 61 |
| 2.2.1. Modelos para conteos inflados con ceros | 61 |
| 2.3. Distribución Poisson con parámetro aleatorio | 72 |
| 2.4. Procesos de conteo para reclamos o pérdidas | 73 |
| 2.4.1. Proceso Poisson homogéneo | 73 |
| 2.4.2. Proceso Poisson mixto | 75 |
| 2.5. Ejercicios | 91 |

Capítulo *tres*

| | |
|--|-----------|
| Distribución del reclamo total | 95 |
| 3.1. Suma de variables aleatorias | 97 |
| 3.1.1. Forma alternativa para establecer la pdf de S | 103 |
| 3.2. Aproximación para la distribución de la suma | 105 |
| 3.3. Suma aleatoria | 106 |
| 3.4. Modelos compuestos para los reclamos totales | 108 |
| 3.4.1. Distribuciones para el monto total de reclamos | 110 |
| 3.5. Propiedades de la distribución Poisson compuesta | 112 |
| 3.6. Método de recurrencia | 116 |
| 3.7. Aproximación para la suma aleatoria | 118 |
| 3.7.1. Distribución gamma trasladada | 120 |
| 3.8. Proceso del reclamo total | 123 |
| 3.8.1. Tiempo operacional | 124 |

3.8.2. Distribuciones para el proceso del monto total de reclamos 126
 3.9. Ejercicios 128

Capítulo *cuatro*

Modelos básicos de riesgo 131
 4.1. Modelos para reclamos individuales 134
 4.1.1. Función de distribución de $X = IB$ 138
 4.2. Método aproximado 139
 4.3. Modelo de riesgo colectivo 143
 4.4. Aproximación del modelo individual 146
 4.5. Ejercicios 152

Capítulo *cinco*

Teoría de la utilidad y aversión al riesgo 155
 5.1. Principios de utilidad 158
 5.2. Supuestos básicos de la utilidad 159
 5.3. Teoría de la utilidad 160
 5.3.1. Utilidad esperada 161
 5.4. La paradoja de San Petersburgo 163
 5.5. Construcción de la función de utilidad 167
 5.6. Medidas de aversión al riesgo 169
 5.6.1. Desigualdad de Jensen 170
 5.7. Clases de funciones de utilidad 171
 5.7.1. Función de utilidad cuadrática 171
 5.7.2. Función de utilidad exponencial 172
 5.7.3. Función de utilidad potencial 172
 5.8. El seguro y la utilidad 174
 5.9. Principios para determinar la prima 176
 5.9.1. Principio de equivalencia 176
 5.9.2. Principio del valor esperado 178
 5.9.3. Principio de la varianza 178
 5.9.4. Principio de la desviación estándar 178
 5.9.5. Principio de utilidad cero 178
 5.9.6. Principio de Esscher 179
 5.9.7. Principio exponencial 180
 5.9.8. Principio percentil 182
 5.9.9. Principio de la pérdida máxima 183
 5.9.10. Principio del valor medio 183
 5.9.11. Principio de la prima ajustada 183

| | |
|---|-----|
| 5.10. Propiedades básicas de los principios de prima | 188 |
| 5.11. Reducción de primas a través de la cooperación | 192 |
| 5.12. Seguros con reembolso inferior a la prima | 193 |
| 5.13. Seguros con deducible eximido | 197 |
| 5.14. El efecto del deducible sobre la frecuencia de los reclamos | 198 |
| 5.15. Ejercicios | 200 |

Capítulo seis

Teoría de la ruina

207

| | |
|--|-----|
| 6.1. Evento de ruina | 210 |
| 6.1.1. Evento de ruina | 212 |
| 6.1.2. Probabilidad de ruina antes del tiempo t | 213 |
| 6.1.3. Probabilidad de ruina eventual | 213 |
| 6.2. Modelo de tiempo discreto | 214 |
| 6.2.1. Expresiones explícitas para la probabilidad de ruina | 215 |
| 6.2.2. Coeficiente de ajuste para el modelo de tiempo discreto | 220 |
| 6.2.3. Aproximaciones del coeficiente de ajuste | 222 |
| 6.3. Modelo de tiempo continuo | 228 |
| 6.3.1. Probabilidad de ruina eventual | 229 |
| 6.3.2. Coeficiente de ajuste para el modelo de tiempo continuo | 241 |
| 6.3.3. Determinación del coeficiente de ajuste | 244 |
| 6.4. Sumas negativas de riesgo | 250 |
| 6.5. La pérdida agregada máxima | 250 |
| 6.6. Aproximaciones de la probabilidad de ruina eventual | 257 |
| 6.6.1. Fórmula asintótica de Cramér | 257 |
| 6.6.2. Aproximación de De Vylder | 258 |
| 6.6.3. Aproximación de Tijms | 259 |
| 6.7. Probabilidad de ruina en horizonte finito | 260 |
| 6.8. Ejercicios | 262 |

Capítulo siete

Transferencia del riesgo: reaseguro

265

| | |
|---|-----|
| 7.1. Reaseguro y coaseguro | 267 |
| 7.1.1. Definición de términos | 268 |
| 7.2. Clases de contratos de reaseguros | 269 |
| 7.2.1. Contratos de reaseguro de participación o proporcional | 270 |
| 7.2.2. Contratos de reaseguros no-proporcionales | 270 |
| 7.3. El reaseguro y la teoría de la utilidad | 277 |
| 7.4. Efecto del reaseguro sobre la probabilidad de ruina | 280 |

| | |
|---|-----|
| 7.4.1. Reaseguro proporcional | 281 |
| 7.4.2. Reaseguro de exceso de pérdida | 285 |
| 7.5. Coaseguro | 289 |
| 7.6. Ejercicios | 291 |

Capítulo ocho

| | |
|--|------------|
| Selección de carteras | 295 |
| 8.1. El modelo de media-varianza | 298 |
| 8.2. Cartera constituida por 2 activos inciertos | 299 |
| 8.2.1. Cartera con rentabilidad preestablecida | 301 |
| 8.3. Formulación general de la teoría de carteras | 303 |
| 8.4. Cartera con rentabilidad preestablecida | 306 |
| 8.4.1. Otra forma de solución al problema de selección de cartera con rentabilidad preestablecida | 308 |
| 8.5. Representación geométrica de la cartera mínima | 312 |
| 8.6. Separación en dos fondos | 313 |
| 8.7. La línea del mercado de capitales | 315 |
| 8.8. Ejercicios | 318 |

Capítulo nueve

| | |
|--|------------|
| Valor en riesgo | 321 |
| 9.1. Conceptos básicos | 323 |
| 9.2. Métodos no paramétricos o de simulación histórica | 323 |
| 9.2.1. Ventajas del método | 324 |
| 9.3. Métodos paramétricos | 324 |
| 9.3.1. Método de simulaciones de Montecarlo | 324 |
| 9.4. Aproximaciones para calcular el <i>value at risk</i> (VaR) | 325 |
| 9.4.1. Método de varianza-covarianza | 325 |
| 9.4.2. Aproximación del VaR mediante una distribución arbitraria | 327 |
| 9.4.3. Aproximación Cornish-Fisher | 328 |
| 9.4.4. Aproximación usando la distribución $g - h$ de Tukey | 329 |
| 9.4.5. Aproximación usando la distribución normal sesgada | 331 |
| 9.4.6. Inconvenientes del VaR | 331 |
| 9.5. Aproximaciones del VaR de una cartera | 332 |
| 9.5.1. Método varianza-covarianza | 332 |
| 9.5.2. Método delta-gamma | 332 |
| 9.5.3. Aproximación Cornish-Fisher | 334 |
| 9.6. Medidas coherentes de riesgo | 335 |
| 9.7. Valor en riesgo condicional | 336 |

| | |
|--|-----|
| 9.7.1. Aproximación por Cornish-Fisher | 338 |
| 9.7.2. Aproximación por la distribución $g - h$ de Tukey | 339 |
| 9.7.3. Aproximación por la distribución normal sesgada | 340 |
| 9.8. Ejercicios | 346 |

Capítulo diez

| | |
|--|------------|
| Riesgo de crédito | 347 |
| 10.1. Medición del riesgo individual | 350 |
| 10.1.1. Medidas de riesgo asociadas a una cartera crediticia | 352 |
| 10.2. Sistemas de clasificación de créditos | 353 |
| 10.2.1. Sistema colombiano | 358 |
| 10.3. Métodos estadísticos para crear tablas de puntuación de crédito | 359 |
| 10.3.1. Técnicas de separación | 359 |
| 10.3.2. Análisis de discriminante: una forma de regresión lineal . | 361 |
| 10.3.3. Regresión logística | 363 |
| 10.4. Medición del riesgo en carteras crediticias | 364 |
| 10.4.1. Estimación estadística de probabilidades de incumplimiento | 365 |
| 10.5. Modelos estructurales del riesgo crediticio | 367 |
| 10.5.1. Modelo de valoración de Merton | 367 |
| 10.6. Métodos de puntaje | 371 |
| 10.6.1. Técnica Z -score de Altman | 371 |
| 10.7. Ejercicios | 372 |

Apéndice A

| | |
|---------------------------------------|------------|
| Nociones básicas de utilidad | 375 |
| A.1. Axiomas de preferencia | 377 |

Apéndice B

| | |
|--|------------|
| Series de Taylor | 383 |
| B.1. Series de Taylor para funciones univariadas | 385 |
| B.1.1. Series de Taylor de funciones elementales | 386 |
| B.2. Serie hipergeométrica | 388 |
| B.2.1. Propiedades de la función hipergeométrica | 389 |
| B.2.2. Casos particulares | 389 |
| B.2.3. Función hipergeométrica confluyente (función de Kummer) | 390 |

Apéndice C

| | |
|---|------------|
| Métodos de estimación | 391 |
| C.1. Método de momentos | 393 |
| C.2. Método de máxima verosimilitud | 393 |

Apéndice D

| | |
|--|------------|
| Transformada de Laplace | 397 |
| D.1. Transformada univariada de Laplace | 399 |
| D.1.1. Propiedades de la transformada de Laplace | 400 |
| D.2. Transformada inversa de Laplace | 402 |
| D.2.1. Propiedades de la transformada inversa de Laplace | 404 |
| D.3. Transformada bidimensional de Laplace | 404 |

Apéndice E

| | |
|--|------------|
| Formas cuadráticas | 409 |
| E.1. Primeros momentos de formas cuadráticas de variables normales | 412 |

Apéndice F

| | |
|-------------------------|------------|
| Códigos R | 415 |
| F.1. Ejemplo 2.2 | 417 |
| F.2. Ejemplo 2.6 | 421 |
| F.3. Ejemplo 3.2 | 425 |
| F.4. Ejemplo 3.7 | 427 |
| F.5. Ejemplo 3.11 | 428 |
| F.6. Ejemplo 3.13 | 430 |
| F.7. Ejemplo 8.2 | 431 |
| F.8. Ejemplo 8.3 | 431 |
| F.9. Ejemplo 8.4 | 432 |

Apéndice G

| | |
|---------------|------------|
| Tablas | 433 |
| | |
| Bibliografía | 441 |
| | |
| Índice | 457 |

Lista de figuras

| | |
|--|-----|
| 2.1. Regiones permitidas | 55 |
| 3.1. Región de integración con $\alpha = 10$ y $\beta = 15$ | 100 |
| 5.1. Determinación de una función de utilidad | 168 |
| 6.1. Un resultado típico del proceso de superávit | 212 |
| 6.2. Definición de R | 243 |
| 6.3. Un resultado típico del superávit del seguro | 253 |
| 8.1. Frontera eficiente | 313 |
| 9.1. Carteras eficientes (E, L) | 326 |
| 9.2. Cartera vs. pdf normal y distribución $g - h$ de Tukey | 342 |
| 9.3. Comparación de las metodologías VaR | 343 |
| 9.4. Comparación de metodologías <i>conditional value at risk</i> (CVaR) | 344 |
| 10.1. Distribución de la pérdida de una cartera crediticia | 352 |

Lista de tablas

| | | |
|-------|--|-----|
| 1.1. | Propiedades de las convoluciones | 23 |
| 1.2. | Resumen de estadísticas para los datos del ejemplo 1.1 | 24 |
| 1.3. | Valores de α y β para algunas distribuciones | 29 |
| 1.4. | Valores de g y h para algunas distribuciones | 37 |
| 2.1. | Índice de dispersión | 51 |
| 2.2. | Número de reclamos o pérdidas..... | 57 |
| 2.3. | Iteraciones de Newton Raphson para encontrar r | 58 |
| 2.4. | Estimaciones para ajustar <i>probability mass function</i> (pmf) clásicas | 58 |
| 2.5. | Comparación de distribuciones ajustadas | 59 |
| 2.6. | Estimaciones para ajustar mezclas de pmf..... | 71 |
| 2.7. | Comparación de mezclas ajustadas | 71 |
| 2.8. | Funciones de $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ para algunos procesos $N(t)$ | 81 |
| 2.9. | Valores de ξ , κ y ρ para los procesos $N(t)$ | 81 |
| 2.10. | Procesos de conteo clásicos obtenidos mediante $\mathcal{H}(1, q, \kappa)$. | 86 |
| 2.11. | Reclamos en vehículos de la categoría “negocio y turismo” .. | 89 |
| 2.12. | Iteraciones de Newton-Raphson para encontrar r | 90 |
| 2.13. | Estimaciones para ajustar procesos clásicos | 90 |
| 2.14. | Comparación de procesos de conteo ajustados | 91 |
| 2.15. | N.º de reclamos en pólizas de seguros de vehículos | 92 |
| 2.16. | Procesos de conteo clásicos obtenidos a partir de (2.87) | 93 |
| 3.1. | Niveles de frecuencia y severidad..... | 97 |
| 3.2. | Distribuciones de frecuencia..... | 99 |
| 3.3. | Distribución de S usando convoluciones | 99 |
| 3.4. | Distribuciones asociadas a $S = X + Y$ | 100 |
| 3.5. | Distribución de S usando la fórmula de convolución (3.17) . | 107 |
| 3.6. | Medidas estadísticas para distribuciones compuestas | 110 |
| 3.7. | Distribución de S usando la fórmula de convolución (3.17) . | 115 |
| 3.8. | Distribución de S usando el método alterno | 115 |
| 3.9. | Expresiones de $h_S(s)$ usando la relación (3.35)..... | 118 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 3.10. | Aproximaciones para la distribución del monto de los reclamos..... | 122 |
| 4.1. | Distribución de la póliza colectiva del ejemplo 4.5..... | 140 |
| 4.2. | Cálculo de media y varianza de los niveles de riesgo | 141 |
| 4.3. | Distribución de la póliza de autos del ejemplo 4.6 | 141 |
| 4.4. | Media y varianza de los niveles de riesgo del ejemplo 4.6 ... | 142 |
| 4.5. | Distribución de la póliza colectiva del ejemplo 4.9..... | 150 |
| 4.6. | Media y varianza de los niveles de riesgo del ejemplo 4.9 ... | 151 |
| 4.7. | Probabilidades del monto de los reclamos | 152 |
| 4.8. | Plan de beneficios de los asegurados | 153 |
| 4.9. | Distribución de la póliza del ejercicio 4.8 | 153 |
| 4.10. | Distribución de la póliza colectiva del ejercicio 4.9 | 154 |
| 5.1. | Decisión de apostar o no en las opciones del ejemplo 5.1 ... | 158 |
| 5.2. | Tabla de decisiones para el joven | 160 |
| 5.3. | Tabla de decisiones del posible asegurado | 160 |
| 5.4. | Tabla de utilidades para el joven..... | 162 |
| 5.5. | Decisiones del propietario ante el seguro | 177 |
| 5.6. | Funciones de utilidad de las partes involucradas..... | 185 |
| 5.7. | Probabilidades asociadas a las ganancias | 201 |
| 5.8. | Estadísticas de los reclamos que se presentan en el grupo ... | 204 |
| 6.1. | Notación de las probabilidades de solvencia | 211 |
| 6.2. | Comparaciones de la probabilidad de no ruina..... | 219 |
| 6.3. | Probabilidad de no ruina usando (6.67) | 232 |
| 6.4. | Cálculo numérico del coeficiente de ajuste | 246 |
| 6.5. | Cálculo numérico del coeficiente de ajuste | 247 |
| 7.1. | Montos asumidos por cada entidad | 271 |
| 7.2. | Distribución de la póliza colectiva del ejemplo 7.1..... | 272 |
| 7.3. | Cálculo de media y varianza de los niveles de riesgo | 272 |
| 7.4. | Distribución de la póliza colectiva del ejemplo 7.2..... | 273 |
| 7.5. | Media y varianza de los 5 niveles de riesgo | 274 |
| 7.6. | Montos asumidos por cada entidad | 276 |
| 7.7. | Coeficiente de ajuste para el reaseguro proporcional | 284 |
| 7.8. | Coeficiente de ajuste con reaseguro de exceso de pérdida ... | 288 |
| 7.9. | Coeficientes de ajustes con pagos iguales del reasegurador .. | 289 |
| 8.1. | Comparación entre los cubrimientos | 318 |
| 8.2. | Medidas estadísticas del ejercicio 8.2 | 319 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 8.3. | Medidas estadísticas del ejercicio 8.3 | 319 |
| 8.4. | Medidas estadísticas del ejercicio 8.4 | 320 |
| 9.1. | Comparación de metodologías VaR | 329 |
| 9.2. | Retornos en puntos básicos de las acciones del ejemplo 9.1 | 341 |
| 9.3. | Ponderaciones e inversiones en la <i>global minimum variance portfolio</i> (GMVP) del ejemplo 9.1 | 341 |
| 9.4. | Estadísticas descriptivas | 342 |
| 9.5. | Comparación de las metodologías VaR | 343 |
| 9.6. | Comparación de metodologías CVaR | 344 |
| 9.7. | Resumen de fórmulas para calcular el VaR y CVaR | 345 |
| 9.8. | Ponderaciones de inversión del ejercicio 9.4 | 346 |
| 10.1. | Criterios de valoración | 352 |
| 10.2. | Matriz de confusión | 354 |
| 10.3. | Matriz de confusión para empresas | 355 |
| 10.4. | Indicadores que se extraen de la matriz de confusión | 355 |
| 10.5. | Matriz de confusión | 357 |
| 10.6. | Proporción de solicitudes clasificadas correctamente | 357 |
| 10.7. | Clasificación del riesgo crediticio en n.º de meses en mora | 358 |
| 10.8. | Porcentaje mínimo de provisión neto de garantía | 358 |
| 10.9. | Interpretación del <i>Z-score</i> | 372 |
| 10.10 | Matriz de confusión | 373 |
| G.1. | Valores de la cdf normal estándar | 435 |
| G.2. | Valores de cuantiles de la cdf <i>t-Student</i> | 437 |
| G.3. | Valores de cuantiles de la cdf chi-cuadrada | 439 |

Prefacio

En la actualidad, el tratamiento tanto estadístico como matemático del riesgo forma parte de los conocimientos elementales necesarios para actuarios y financieros. Adicionalmente, estos conocimientos son elementos fundamentales para la gestión del riesgo y, hoy en día, son necesarios para economistas, ingenieros y profesionales gestores del riesgo.

A pesar de las distintas aplicaciones existentes en esta temática, una gran variedad de textos de probabilidad no abordan estos tópicos, esto conduce a que no se encuentre un libro que cumpla los objetivos y propósitos del plan de estudio de ciertas asignaturas. Este texto está basado en el curso de Teoría estadística del riesgo del programa curricular de Estadística de la Universidad Nacional de Colombia. En este material se abordan 2 grandes temáticas:

- Riesgo actuarial, cuyo contenido está basado en los textos clásicos [22], [37], [41], [54], [61], [82], [123], [127] y [181].
- Riesgo financiero, cuyo contenido está basado en los textos clásicos [52], [74], [121], [103], [122], [134], [142] y [166], entre otros.

Además, el libro brindará una ayuda a aquellos estudiantes que cursan varias asignaturas en las cuales deben tener, o les son convenientes, conocimientos de la teoría del riesgo. Aunque en algunas circunstancias es inadecuado comenzar un curso en esta temática, este material le permitirá al lector apropiarse de las herramientas necesarias para la medición, gestión, tratamiento y supervisión del riesgo.

El objetivo principal de este material es instruir al lector sobre las generalidades del riesgo para que adquiera destrezas que le permitan administrar y gestionar el riesgo. Dado que uno de los propósitos es mostrar un enfoque estadístico, se incluyó un primer capítulo que contiene los fundamentos estadísticos básicos y, de esta forma, brindarle al lector las herramientas necesarias para que pueda abordar el contenido del libro. También se implementaron ejemplos en el *software* libre estadístico **R** y, por ello, el apéndice **F** se dedicó a los respectivos códigos empleados, indicando las librerías pertinentes para su adecuada ejecución. Esto permitirá al lector replicar los

comandos, utilizarlos en los ejercicios que evalúan temas similares a los ejemplos planteados y construir sus propios códigos.

Para presentar los 2 tipos de riesgo (actuarial y financiero) en un solo libro, se unificó la notación. Esto permitirá que los lectores familiarizados con alguno de estos tipos de riesgo aprendan a gestionarlos sin mayor inconveniente. Por ello, los capítulos 2, 3 y 4, que llevan los títulos “Modelos de frecuencia”, “Distribución del reclamo total” y “Modelos básicos de riesgo” son dedicados a presentar la notación para poder efectuar y gestionar cualquiera de los 2 tipos de riesgo. En estos capítulos se explica en detalle la debida interpretación estadística de las variables empleadas en los riesgos actuariales y financieros. En particular, en el capítulo 2, se presenta un compendio sobre el modelamiento estadístico de la variable de frecuencia, temática que generalmente no se encuentra en los libros clásicos de riesgo.

Por otra parte, hay 3 capítulos dedicados exclusivamente a riesgo actuarial, los cuales son el 5, el 6 y el 7 cuyos títulos son, respectivamente, “Teoría de la utilidad y aversión al riesgo”, “Teoría de la ruina” y “Transferencia del riesgo: reaseguro”. Específicamente, el capítulo 5 contiene una parte de economía financiera que permite entender mejor el concepto de utilidad. Si el lector no tiene formación en economía, el apéndice “Nociones básicas de utilidad” explica el concepto de preferencia del consumidor (inversionista o asegurado).

Análogamente, 3 capítulos están consagrados únicamente al riesgo financiero, los cuales son el 8, el 9 y el 10, cuyos correspondientes títulos son “Selección de carteras”, “Valor en riesgo” y “Riesgo de crédito”.

Cabe resaltar que este material está escrito en forma secuencial, pues los contenidos previos son importantes para tener una mejor comprensión del desarrollo de cada sección posterior, lo cual ayudará al lector a alcanzar su principal objetivo. Además de proporcionar un medio individual para estudiar el tema expuesto, también es muy útil como texto autodidáctico y, así, le permitirá al lector avanzar a su propio ritmo. De esta manera, este ejemplar puede ser utilizado por estudiantes con diferentes aptitudes, conocimientos y velocidades de lectura.

Agradezco la colaboración de la coordinación de publicaciones de la Facultad de Ciencias, cuyo equipo editorial estuvo siempre dispuesto a ayudar y resolver cualquier inquietud.

Lista de siglas

AVaR *average value at risk*

BN *binomial negativa*

cdf *cumulative distribution function*

CF *Cornish-Fisher*

CML *capital market line*

CV *coefficient of variation*

CVaR *conditional value at risk*

ecdf *empirical cumulative distribution function*

epdf *empirical probability density function*

ES *expected shortfall*

ETL *expected tail loss*

GMVP *global minimum variance portfolio*

iid *independent and identically distributed*

mgf *moment generating function*

MPT *modern portfolio theory*

PC *Poisson compuesta*

pdf *probability density function*

pgf *probability generating function*

pmf *probability mass function*

TVaR *tail value at risk*

VaR *value at risk*

Capítulo
uno
Preliminares

Este capítulo es un compendio de algunos conceptos fundamentales de la *teoría de la probabilidad* que se usarán a lo largo de este texto. No se intenta, con la incorporación de este capítulo, dar las bases de probabilidad ya que el lector que esté interesado en entender el concepto de *riesgo* debe haber completado como mínimo un buen curso de probabilidad. Para una mejor comprensión de la terminología que se emplea en este material, se recomienda leer este capítulo; sin embargo, el lector que esté familiarizado con estos temas puede omitir el capítulo y pasar directamente al siguiente. Quien desee ampliar los conceptos presentados a continuación, puede consultar [72], [78], [99], [148], [193], entre otros.

1.1. Espacio muestral y eventos aleatorios

El *espacio muestral* es un conjunto constituido por los resultados que arroja un experimento aleatorio. Este espacio se denota por Ω y se denomina “discreto” si es contable y, en caso contrario, es llamado “continuo”.

Todo subconjunto del espacio muestral se denomina “evento”. Al llevar a cabo un experimento se dice que ocurre un evento A , si el resultado del experimento es un elemento de A . De esta manera, el espacio Ω denota el “evento seguro”, el cual siempre ocurre, y el conjunto vacío ϕ denota el “evento imposible”, el que nunca ocurre. Los subconjuntos del espacio Ω , que se reducen a un solo elemento, son llamados “eventos simples”.

Dados 2 eventos A y B , el “evento compuesto” $A \cup B$ se lleva a cabo cuando ocurre por lo menos uno de los eventos y el evento $A \cap B$ sucede cuando los eventos A y B ocurren simultáneamente. Si $A \cap B = \phi$ entonces A y B se denominan “eventos excluyentes”.

El evento opuesto “no A ”, denotado A^c , es un evento que se presenta cuando A no ocurre y se denomina “evento complementario” de A .

1.2. Función de probabilidad y eventos independientes

Antes de profundizar en la forma como se usan las probabilidades, es importante comprender de alguna manera de dónde provienen.

1.3. Definiciones de probabilidad

Hay 3 maneras de evaluar o estimar la probabilidad, la elección de cualquiera de los procedimientos dependerá de las condiciones del problema.

1.3.1. Probabilidad clásica o ley de Laplace o *a priori*

Esta definición es restringida, ya que necesita que se satisfagan las siguientes 2 condiciones:

1. El espacio muestral sea finito.
2. Los elementos del espacio muestral deben ser equiprobables.

De acuerdo con estos requisitos la probabilidad de A está dada por

$$P(A) = \frac{\eta(A)}{\eta(\Omega)}, \quad (1.1)$$

donde $\eta(A)$ denota el cardinal o número de elementos del evento A . Cuando el espacio Ω es continuo la probabilidad de un evento se halla de manera similar, después de establecer la longitud, el área o el volumen del evento y del espacio muestral, según sea el caso; los intervalos de la recta real; las regiones del plano o las regiones del espacio.

1.3.2. Probabilidad empírica, frecuencial o *a posteriori*

Esta definición emplea la frecuencia relativa asociada a la ocurrencia de un evento respecto a un elevado número de reiterados intentos. Aquí es importante considerar los siguientes aspectos:

1. La probabilidad así establecida es solo una estimación del valor real.
2. Cuanto mayor sea el número de intentos, mucho mejor será la estimación de la probabilidad; es decir, entre más grande sea el número de intentos más precisa será la estimación.
3. La probabilidad es inherente a la sucesión de ensayos similares a aquellos de los que se extrayeron los datos; o sea, la eficacia de emplear esta definición depende de que las condiciones en que se realizó el experimento sean reproducidas idénticamente.

Suponga que un experimento se realiza n veces y que en este proceso de n intentos el evento A ocurre exactamente n_A veces, entonces la frecuencia relativa del evento es

$$\tilde{f}(A) = \frac{n_A}{n}. \quad (1.2)$$

Nótese que este número no es una condición que depende únicamente de A , sino que está relacionado con un cierto espacio muestral y un experimento aleatorio. Entonces, decir que el evento A tiene probabilidad $P(A)$ significa que, ejecutando el experimento muchas veces, es casi seguro que la frecuencia relativa de A , $\tilde{f}(A)$, se aproxima a $P(A)$.

1.3.3. Probabilidad axiomática o matemática de Kolmogorov

Sean Ω cualquier espacio muestral, \mathcal{F} una colección de eventos de Ω y una función $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$. La función P se llama “probabilidad” si satisface las siguientes condiciones dadas en [128]:

1. $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ cuando $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \cap B = \phi$.

Los eventos A_1, A_2, \dots conforman una “colección excluyente” de \mathcal{F} , si en cada observación aleatoria ocurre uno, y solo uno, de los eventos A_i ; esto es, si $A_i \cap A_j = \phi$ para todo $i \neq j$. En este caso,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (1.3)$$

Teorema 1.1. Propiedades elementales de la probabilidad

La función $P(\cdot)$ satisface que

- i) $P(\phi) = 0$.
- ii) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo $A \subseteq \Omega$.
- iii) $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- iv) Si $A, B \subseteq \Omega$, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (1.4)$$

- v) Si $A, B \subseteq \Omega$ y $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$ (esto es, P es monótona creciente).

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [99].

□

1.3.4. Probabilidad condicional

Dados los eventos $A, B \subseteq \Omega$ con $P(B) > 0$, la probabilidad de A cuando B ha ocurrido es dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (1.5)$$

Si además $P(A) > 0$, se escribe

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$$

Si la probabilidad de que ocurra A o B no condiciona la ocurrencia del otro evento, entonces los eventos son “independientes”; esto es, si

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{y} \quad P(B|A) = P(B).$$

De esta definición se establece que A y B son independientes si y solo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (1.6)$$

Los eventos A_1, A_2, \dots, A_n son mutuamente independientes cuando

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i). \quad (1.7)$$

1.4. Regla de Bayes

Sea A_1, A_2, \dots una colección finita o contablemente infinita de eventos que conforman una partición excluyente del espacio muestral Ω , tal que $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$. Entonces para cualquier evento B se tiene que

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i). \quad (1.8)$$

Cuando las probabilidades $P(B|A_i)$ son conocidas y además $P(B) > 0$, se consiguen las probabilidades $P(A_k|B)$ usando la siguiente relación, conocida como la “fórmula de Bayes”:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}. \quad (1.9)$$

1.5. Distribuciones de probabilidad

Definición 1.1. Variable aleatoria

Una variable aleatoria X es una función de valor real con dominio en el espacio muestral Ω y cuyo rango (soporte) es un subconjunto de los números reales \mathbb{R} que relaciona a cada observación aleatoria ω con un valor real $X(\omega) = x$. Sobre un mismo espacio muestral es posible definir más de una variable aleatoria. La variable aleatoria se llama discreta si toma un número de valores contable, en caso contrario se llama continua.

Definición 1.2. Función de probabilidad o función de densidad

Una tabla, gráfica o expresión matemática (fórmula) que representa la pareja ordenada $(x, f_X(x))$, donde x es los distintos valores que puede tomar la variable aleatoria y $f_X(x)$ corresponde a las probabilidades asociadas a x , se denomina función de probabilidad de la variable aleatoria. Si se satisface que:

- $f_X(x) \geq 0$ para todos los valores de x

y

- $\sum_x f_X(x) = 1$

se llama función de masa de probabilidad (*probability mass function pmf*) si la variable aleatoria X es discreta. Por otro lado, si se cumple que

- $f_X(x) \geq 0$ para todos los valores de x

y

- $\int_x f_X(x) dx = 1$

se denomina función de densidad de probabilidad (*probability density function pdf*) si la variable aleatoria es continua.

Definición 1.3. Función de distribución acumulada

Sea X una variable aleatoria y $x \in \mathbb{R}$, si existe la probabilidad $P(X \leq x)$ que denota la probabilidad acumulada hasta el punto x , entonces la función de distribución acumulada (cumulative distribution function (*cdf*)) es

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{X \leq x} f_X(x) & \text{si } X \text{ es discreta,} \\ \int_{-\infty}^x f_X(u) du & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases}$$

Teorema 1.2. Propiedades de la función de distribución

Si $F_X(x)$ es una *cdf* de una variable aleatoria, satisface que:

- i) Es una función monótona creciente: si $x_1 < x_2$, entonces $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.
- ii) Es una función continua a derecha.
- iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = F_X(-\infty) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = F_X(\infty) = 1$.

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [99]. ☑

Nota 1.1. La *pdf* se puede definir como el “límite de la probabilidad en un intervalo corto”; esto es,

$$f_X(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + k)}{k} \quad (1.10)$$

cuando X es continua se define como la derivada de $F_X(x)$; es decir,

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = -\frac{d}{dx} [1 - F_X(x)]. \quad (1.11)$$

Definición 1.4. Función de tasa de falla

Sea X una variable aleatoria con *pdf* $f_X(x)$ y *cdf* $F_X(x)$. La función de riesgo de X , la cual expresa de manera condicional la tasa de falla durante un intervalo muy pequeño, está dada por

$$\begin{aligned} h_X(x) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{P[x < X < x + k | X \geq x]}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + k)}{kP(X > x)} \\ &= \frac{1}{P(X > x)} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + k)}{k} = \frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)} \\ &= \frac{-1}{\bar{F}_X(x)} \frac{d}{dx} (\bar{F}_X(x)) = -\frac{d}{dx} \ln [\bar{F}_X(x)], \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$. Esta función se denomina fuerza de mortalidad en actuaría y demografía, tasa de riesgo o tasa de intensidad en teoría de la relatividad y, en general, tasa de mortalidad condicional. Esta función resulta ser de gran interés y se caracteriza porque puede ser creciente, decreciente, constante y, en algunos casos, indica un proceso más complicado.

Definición 1.5. Sea X una variable aleatoria, el cuantil de orden q de X denotado por x_q ($0 < q < 1$) es el valor para el cual se tiene que

$$\begin{aligned} P(X < x_q) \leq q \quad & \text{y} \quad P(X \geq x_q) \geq 1 - q && \text{si } X \text{ es discreta} \\ P(X \leq x_q) = q & && \text{si } X \text{ es continua.} \end{aligned}$$

La expresión *cuantil* es la denominación genérica de una localización asociada a alguna partición; por ejemplo, percentiles, deciles, cuartiles.

Definición 1.6. Sea X una variable aleatoria continua con *pdf* $f_X(x)$ y *cdf* $F_X(x)$. Los métodos estadísticos clásicos consideran frecuentemente simetría de $f_X(x)$ alrededor de un valor conocido M , si se tiene que

$$f_X(x) = f_X(2M - x) \quad \text{para todo } x. \quad (1.13)$$

En otros casos, se determina que $f_X(x)$ es simétrica alrededor del punto M , planteando la siguiente hipótesis nula:

$$H_0 : F_X(x) = 1 - F_X(2M - x). \quad (1.14)$$

Se dice que $F_X(x)$ tiene centro de simetría en

$$M = \begin{cases} 0, & \text{si coincide con el origen,} \\ \mu_X, & \text{si corresponde a la media,} \\ x_{0.5}, & \text{si es la mediana.} \end{cases}$$

Definición 1.7. Si los cuantiles de una variable aleatoria X son simétricos alrededor de un punto fijo M ; es decir,

$$x_q - M = M - x_{1-q} \quad \text{para todo } q > 0.5, \quad (1.15)$$

entonces $f_X(x)$ es simétrica alrededor del punto M .

Definición 1.8. Distribuciones del mismo tipo

Dadas 2 *cdf* $F_X(x)$ y $G_X(x)$ y sus respectivas *pdf* $f_X(x)$ y $g_X(x)$, se dice que son del mismo tipo (clase) si satisfacen que

$$G(x) = F(ax + b), \quad g(x) = af(ax + b), \quad a > 0, \quad (1.16)$$

donde a se llama parámetro de escala por intervenir directamente sobre la dispersión de la variable aleatoria y b se denomina parámetro de localización ya que vincula la *pdf* con el origen del nivel de medida utilizado, situándola sobre el eje de abscisas (x) sin producir ninguna consecuencia sobre ella.

Teorema 1.3. Teorema de descomposición de Jordan

Toda *cdf* $F_X(x)$ se obtiene mediante una combinación lineal como sigue

$$F_X(x) = \omega F_{X_1}(x) + (1 - \omega) F_{X_2}(x), \quad 0 \leq \omega \leq 1, \quad (1.17)$$

donde X_1 y X_2 son una variable aleatoria discreta y una variable aleatoria continua, respectivamente.

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [72]. ☑

Definición 1.9. Mezcla de distribuciones

Una *cdf* $F_X(x)$ se llama mezcla si es una combinación lineal de la forma (1.17) con X_1 y X_2 ambas variables aleatorias discretas o continuas.

En general, si X_1, X_2, \dots, X_n son n variables aleatorias con *cdf* $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), \dots, F_{X_n}(x)$, se dice que la variable aleatoria Y sigue una mezcla finita de *cdf* si es expresada como (ver [127, pág. 43])

$$F_Y(y) = \sum_{k=1}^n \omega_k F_{X_k}(y), \quad \sum_{k=1}^n \omega_k = 1, \quad (1.18)$$

donde $\omega_k \in (0, 1)$ y es la ponderación de la k -ésima componente.

1.6. Valor esperado y varianza de una variable aleatoria

Definición 1.10. Sea X una variable aleatoria y h una función real tal que $h(X)$ es también una variable aleatoria. Entonces el valor esperado de $h(X)$ está dado por

$$\mathbb{E}[h(X)] = \begin{cases} \sum h(x)P[X = x], & \text{si } X \text{ es discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x) dx, & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases} \quad (1.19)$$

El valor esperado de una variable aleatoria X es un número fijo y una característica de la *pdf* de X , luego, no es una función de X . Nótese que el valor esperado existe si la respectiva suma (o integral) converge a un valor finito.

Teorema 1.4. Propiedades del valor esperado

Sean X y Y variables aleatorias, la función $\mathbb{E}(\cdot)$ tiene las siguientes propiedades:

- i) Si $X \geq 0$, entonces $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- ii) $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.
- iii) $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$, para toda $c \in \mathbb{R}$.
- iv) $\mathbb{E}(X \pm Y) = \mathbb{E}(X) \pm \mathbb{E}(Y)$.
- v) Si $X \leq Y$, entonces $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ (esto es, el valor esperado es monótonamente creciente).

vi) Si X y Y son independientes y existe $\mathbb{E}(XY)$,

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [99]. ☑

Definición 1.11. *Sea X una variable aleatoria, la varianza de X denotada por $\text{Var}(X)$ o σ_X^2 , se define por la relación*

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2. \quad (1.20)$$

La raíz cuadrada de la varianza de una variable X , $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$, se denomina desviación estándar de la variable X .

Teorema 1.5. Propiedades de la varianza

La función $\text{Var}(X)$ tiene las siguientes propiedades:

- i) $\text{Var}(X) = 0$ si y solo si X es constante.*
- ii) $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$, para toda $c \in \mathbb{R}$.*
- iii) Dadas X y Y variables aleatorias y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $\text{Var}(aX \pm bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) \pm 2ab \text{Cov}(X, Y)$, donde*

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y), \end{aligned} \quad (1.21)$$

es una relación conocida como covarianza.

Esta función covarianza, para cualesquiera variables aleatorias X, Y, Z y $a, b \in \mathbb{R}$, cumple las siguientes propiedades:

- i) $\text{Cov}(X, a) = \text{Cov}(a, X) = 0$.*
- ii) $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$. Si $X = Y$, entonces $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$.*
- iii) $\text{Cov}(X, Y) = 0$, si las variables X y Y son independientes.*
- iv) $\text{Cov}(aX + b, Y) = a\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, aY + b)$.*
- v) $\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$.*
- vi) $\text{Cov}(X, Y + Z) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Z)$.*

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [105]. ☑

1.7. Momentos de una variable aleatoria

Dada una variable aleatoria X , sus momentos corresponden a los valores esperados asociados a algunas funciones de X y constituyen un conjunto de medidas descriptivas que se usan para especificar la **cdf** de X cuando los momentos de X son todos conocidos. Aunque los momentos de X se definen en torno a cualquier punto referencial, con frecuencia se establecen alrededor del 0 o del valor esperado de X . Todas las expresiones referentes a los momentos dependen de la convergencia de las sumas (o integrales) que las definen.

Definición 1.12. Si X es una variable aleatoria, entonces el r -ésimo momento de X entorno al

- origen 0, se define como sigue:

$$\underbrace{\mathbb{E}(X^r)}_{\mu'_r(X)} = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^r P[X = x], & \text{si } X \text{ es discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x) dx, & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases} \quad (1.22)$$

y se denominan *momentos ordinarios de orden r de la variable X* .

- valor esperado de X , se define de la siguiente manera:

$$\underbrace{\mathbb{E}[(X - \mu)^r]}_{\mu_r(X)} = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r P[X = x], & \text{si } X \text{ es discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f_X(x) dx, & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases} \quad (1.23)$$

y se denominan *momentos centrales de orden r de la variable X* .

El primer momento alrededor del 0 ($\mu'_1(X)$) es la *media o valor esperado* de la variable aleatoria X y se denota por μ_X , y el segundo momento central ($\mu_2(X)$) se denomina *varianza* de la variable aleatoria X y se denota por σ_X^2 .

Las siguientes expresiones proporcionan los momentos centrales de una variable aleatoria X en términos de sus momentos ordinarios y viceversa:

$$\mu_r(X) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k \mu_X^k \mu'_{r-k}(X). \quad (1.24)$$

$$\mu'_r(X) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \mu_X^k \mu_{r-k}(X). \quad (1.25)$$

Definición 1.13. Medidas estadísticas

Si X es una variable aleatoria otras medidas principales son

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_X &= \frac{\mu_2(X) - \mu_1'(X)}{\mu_1'(X)} = I_X - 1 && \text{Razón de Katz} \\ CV_X &= \frac{\sqrt{\mu_2(X)}}{\mu_1'(X)} && \text{Coeficiente de variación} \\ \beta_1(X) &= \frac{\mu_3(X)}{\sqrt{\mu_2^3(X)}} && \text{Coeficiente de asimetría} \\ \beta_2(X) &= \frac{\mu_4(X)}{\mu_2^2(X)} && \text{Índice de curtosis} \end{aligned}$$

donde I_X denota el índice de dispersión de X . En general,

$$\beta_{r-2}(X) = \frac{\mu_r(X)}{\sqrt{\mu_2^r(X)}} \quad r = 3, 4, \dots$$

La expresión CV_X mide la dispersión de una variable aleatoria en relación con la media. El término $\beta_1(X)$ es una medida de la asimetría de una pdf sobre su dispersión. Una pdf es asimétrica positiva o negativamente, o simétrica, si $\beta_1(X) > 0$, $\beta_1(X) < 0$ o $\beta_1(X) = 0$, respectivamente.

La curtosis, $\beta_2(X)$, es una medida que nos indica qué tan *puntiaguda* es la pdf. Una pdf presenta 3 tipos de picos: relativamente alto, relativamente bajo (relativamente plana) o no exhibe un pico ni muy alto ni muy bajo, si $\beta_2(X) > 3$, $\beta_2(X) < 3$ o $\beta_2(X) = 3$, respectivamente.

Cualquier variable aleatoria X satisface la siguiente desigualdad dada en [212]:

$$\beta_2(X) - \beta_1^2(X) - 1 \geq 0.$$

Definición 1.14. El momento factorial de orden r de una variable aleatoria de valores enteros, X , se define como

$$\mu_{[r]}(X) = \mathbb{E} \left[\frac{\Gamma(X+1)}{\Gamma(X+1-r)} \right] = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-r)} P[X=k], \quad (1.26)$$

donde $r \in \mathbb{N}$ y $\Gamma(n)$ denota la función gamma; es decir, $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$.

La siguiente expresión permite establecer cualquier momento ordinario de una variable aleatoria X en términos de sus momentos factoriales

$$\mathbb{E}(X^r) = \mu_r'(X) = \sum_{k=0}^r \mathcal{S}_r^{(k)} \mu_{[k]}(X), \quad (1.27)$$

donde $\mathcal{S}_r^{(k)}$ denota los números de Stirling (ver expresión (B.4)).

1.8. Función generadora de probabilidad

Dada una función generadora $P(z) = \sum_k a_k z^k$, donde los coeficientes a_k se establecen usando derivación y mediante la fórmula $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ (coeficientes de la serie de Taylor, ver apéndice B), en la práctica, puede resultar imposible la obtención de expresiones explícitas; sin embargo, algunas veces resulta más sencillo usar una función auxiliar, $H_X(z) = z^X$, y encontrar su esperanza.

Definición 1.15. Sea X una variable aleatoria y $0 \leq z < 1$, la función generadora de probabilidad se define como el valor esperado (cuando exista) de la variable aleatoria z^X ; esto es,

$$\underbrace{\mathbb{E}(z^X)}_{\mathcal{G}_X(z)} = \begin{cases} \sum_x z^x P[X = x], & \text{si } X \text{ es discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} z^x f(x) dx, & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases} \quad (1.28)$$

La mayor utilidad de la función generadora de probabilidad se presenta cuando X es una variable aleatoria discreta. Luego, se consideran solo las funciones generadoras de probabilidad para este tipo de variables; esto es,

$$\mathcal{G}_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P[X = k], \quad \mathcal{G}_X(1) = 1.$$

Al derivar r veces esta ecuación respecto a z , se llega a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_X^{(r)}(z) &= \frac{d^r}{dz^r} \mathcal{G}_X(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{k!}{(k-r)!} z^{k-r} P[X = k] \\ &= r! \left\{ P[X = r] + \sum_{k=r+1}^{\infty} \binom{k}{k-r} z^{k-r} P[X = k] \right\}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Nótese que si $z = 0$, esta última expresión queda definida como

$$\mathcal{G}_X^{(r)}(0) = r! P[X = r], \quad (1.30)$$

donde $\mathcal{G}_X^{(0)}(0) \equiv \mathcal{G}_X(0)$. Se llega al mismo resultado mediante el desarrollo en serie de Taylor de la función $\mathcal{G}_X(z)$:

$$\mathcal{G}_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{G}_X^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

En otras palabras, la función $\mathcal{G}_X(z)$ se define por las $P[X = x]$ y, a su vez, esta define la $P[X = r]$ desde una expansión polinómica que es única.

Teorema 1.6. Sea X una variable aleatoria de valores enteros y $\mathcal{G}_X(z)$ la función generadora de probabilidad de X , si el r -ésimo momento factorial de X es finito, entonces

$$\left. \frac{d^r}{dz^r} \mathcal{G}_X(z) \right|_{z=1} = \mathcal{G}_X^{(r)}(1) = \mu_{[r]}(X). \quad (1.31)$$

Demostración. Si se hace $z = 1$ en la expresión (1.29) se llega al resultado. \square

Teorema 1.7. Propiedades de la función generadora de probabilidad

Sea X una variable aleatoria de valores enteros y $h(x)$ una función real cuya función generadora de probabilidad existe, entonces

$$\mathcal{G}_{\alpha h(X)+\beta}(z) = z^\beta \mathcal{G}_h(X)(z^\alpha) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+. \quad (1.32)$$

Demostración. Queda como ejercicio para el lector. \square

1.9. Función generadora de momentos

En muchos casos se evalúan los momentos explícitamente usando la definición; sin embargo, a veces resulta más sencillo usar la función auxiliar $g(z) = e^{zX}$ y calcular su esperanza; es decir:

$$\underbrace{\mathbb{E} [e^{zX}]}_{M_X(z)} = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{zx} P[X = x], & \text{si } X \text{ es discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x) dx, & \text{si } X \text{ es continua,} \end{cases} \quad (1.33)$$

donde $z \in (-\delta, \delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$ y $M_X(z)$ denota la función generadora de momentos (*moment generating function (mgf)*). Para ver cómo $M_X(z)$ genera momentos, suponga que $f(x)$ es una pdf para la cual la serie definida en (1.33) sea convergente y considere la expansión de e^x dada en (B.11). Para el caso discreto¹

$$M_X(z) = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zX)^k}{k!} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \mathbb{E} (X^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \mu'_k(X). \quad (1.34)$$

El r -ésimo momento de una variable aleatoria se establece más rápido evaluando la r -ésima derivada de $M_X(z)$, ya que

$$M_X^{(r)}(z) = \frac{d^r}{dz^r} M_X(z) = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^r e^{zx} P[X = x], & \text{si } X \text{ es discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{zx} f(x) dx, & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases}$$

¹Para el caso continuo se usa el resultado dado en [38, pág. 301].

Nótese que si $z = 0$, la expresión del lado derecho coincide con el r -ésimo momento ordinario de la variable aleatoria X :

$$M_X^{(r)}(0) = \left. \frac{d^r}{dz^r} M_X(z) \right|_{z=0} = \mathbb{E}(X^r) = \mu_r'(X). \quad (1.35)$$

Teorema 1.8. Unicidad de la función generadora de momentos

Sean X y Y variables aleatorias independientes y $M_X(z)$ y $M_Y(z)$ las funciones generadoras de momentos, respectivamente. Si para algún $\delta > 0$, $M_X(z) = M_Y(z) \forall z \in (-\delta, \delta)$, entonces $F_X(u) = F_Y(u) \forall u \in \mathbb{R}$.

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [99]. ✓

Definición 1.16. Sea X una variable aleatoria con pdf $f_X(x)$, entonces la función generadora de momentos de $h(X)$ está dada por

$$\underbrace{M_{h(X)}(z)}_{\mathbb{E}[e^{zh(X)}]} = \begin{cases} \sum_x e^{zh(x)} P[X = x], & \text{si } X \text{ es discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{zh(x)} f(x) dx, & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases} \quad (1.36)$$

Teorema 1.9. Propiedades de la función generadora de momentos

Sea X una variable aleatoria con pdf, $f_X(x)$, y $g(X)$ una función real cuya función generadora de momentos existe, entonces

$$M_{\alpha g(X) + \beta}(z) = e^{\beta z} M_{g(X)}(\alpha z) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.37)$$

Demostración. Se probará solo para el caso continuo. Como $h(x)$ en la expresión (1.36) denota una función arbitraria, se toma $h(x) = \alpha g(x) + \beta$; luego,

$$M_{\alpha g(X) + \beta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{z(\alpha g(X) + \beta)} f(x) dx = e^{\beta z} M_{g(X)}(\alpha z).$$

Con lo cual se tiene el resultado que se quería probar. ✓

Teorema 1.10. Sea X una variable aleatoria, las funciones generadoras de probabilidad y de momentos están relacionadas entre sí mediante las expresiones:

$$\mathcal{G}_X(e^z) = M_X(z) \quad \text{y} \quad M_X(\ln(z)) = \mathcal{G}_X(z). \quad (1.38)$$

Demostración. Al emplear las respectivas definiciones de las funciones generadoras de probabilidad y de momentos se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_X(e^z) &= \mathbb{E}[(e^z)^X] = \mathbb{E}[e^{zX}] = M_X(z), \\ M_X(\ln(z)) &= \mathbb{E}[e^{X \ln(z)}] = \mathbb{E}[z^X] = \mathcal{G}_X(z). \end{aligned}$$

Lo cual completa la prueba. ✓

Teorema 1.11. *Sea Y una variable aleatoria que sigue una mezcla de **cdf** $F_Y(y)$, entonces la función generadora de momentos está dada por:*

$$M_Y(z) = \sum_{k=1}^n \omega_k M_{X_k}(z), \quad 0 \leq \omega_k \leq 1, \quad \sum_{k=1}^n \omega_k = 1, \quad (1.39)$$

donde $M_{X_k}(z)$ es la función generadora de momentos asociada a la variable aleatoria X_k discreta o continua.

Demostración. Como Y es una mezcla de **cdf**, entonces por (1.18)

$$F_Y(y) = \sum_{k=1}^n \omega_k F_{X_k}(y), \quad 0 \leq \omega_k \leq 1, \quad \sum_{k=1}^n \omega_k = 1.$$

Sin pérdida de generalidad, se supone que las variables aleatorias X_k son todas continuas,

$$\begin{aligned} M_Y(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{zy} d[F_Y(y)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zy} d\left[\sum_{k=1}^n \omega_k F_{X_k}(y)\right] \\ &= \sum_{k=1}^n \omega_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{zy} d[F_{X_k}(y)] = \sum_{k=1}^n \omega_k M_{X_k}(z). \end{aligned}$$

Lo cual prueba el teorema. □

Definición 1.17. *Sea X una variable aleatoria con función generadora de momentos $M_X(z)$, los cocientes*

$$\gamma_r(X) = \frac{\mu'_r(X)}{\mu_X^r} = \frac{M_X^{(r)}(0)}{[M'_X(0)]^r}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (1.40)$$

se denominan índices de riesgo de orden r . Nótese que $\gamma_1(X) = 1$.

Los momentos centrales $\mu_r(X)$ de una variable aleatoria X se obtienen en términos de los índices de riesgo como sigue:

$$\mu_r(X) = \mu_X^r \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k \gamma_{r-k}(X). \quad (1.41)$$

Nota 1.2. *Las medidas presentadas anteriormente también son dadas como*

$$CV_X = \sqrt{\gamma_2(X) - 1}, \quad \gamma_2(X) > 1$$

$$\beta_1(X) = \frac{(\gamma_3(X) - 1) - 3(\gamma_2(X) - 1)}{\sqrt{(\gamma_2(X) - 1)^3}}, \quad \gamma_2(X) > 1$$

$$\beta_2(X) = \frac{(\gamma_4(X) - 1) - 4(\gamma_3(X) - 1) + 6(\gamma_2(X) - 1)}{(\gamma_2(X) - 1)^2}, \quad \gamma_2(X) > 1.$$

Una variable aleatoria X está distribuida normalmente si

$$\frac{\gamma_3(X) - 1}{\gamma_2(X) - 1} = 3 \quad y \quad \frac{\gamma_4(X) - 1}{\gamma_2(X) - 1} = 3(\gamma_2(X) - 1) + 6.$$

1.10. Distribución de probabilidad conjunta

En esta sección se desarrolla la teoría de la sección 1.5 para el caso en que se trabaje con 2 variables aleatorias.

■ Caso discreto:

Dadas X y Y variables aleatorias se llama *pmf conjunta* de X y Y a la función $p(x, y) = P[X = x, Y = y]$ si

- i) $p(x, y) \geq 0$ para todos los valores de X y Y
- ii) $\sum_x \sum_y p(x, y) = 1$.

Las *pmf marginales* de las variables aleatorias X y Y son dadas por

$$\underbrace{P(X = x)}_{p_X(x)} = \sum_y p(x, y) \quad y \quad \underbrace{P(Y = y)}_{p_Y(y)} = \sum_x p(x, y). \quad (1.42)$$

La *pmf condicional* de Y dado que $X = x$ es definida como sigue

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)} \quad \text{con} \quad p_X(x) > 0. \quad (1.43)$$

De manera similar se define la *pmf condicional* de X dado que $Y = y$.

Las variables aleatorias X y Y se denominan *independientes* si para todos los valores de x y y , se cumple que

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y). \quad (1.44)$$

■ Caso continuo:

Si X y Y son variables aleatorias, entonces la función $f(x, y)$ se dice que es la *pdf conjunta* de X y Y si

- i) $f(x, y) \geq 0$ para todos los valores de X y Y
- ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

Las *pdf marginales* de las variables aleatorias X y Y son dadas por las integrales

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad \text{y} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx. \quad (1.45)$$

En este caso, la *pdf condicional* de X dada $Y = y$ es definida como

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad \text{con} \quad f_Y(y) > 0. \quad (1.46)$$

De manera análoga se define la *pdf condicional* de Y dado que $X = x$. Por otra parte, las variables aleatorias X y Y son *estadísticamente independientes* si se satisface que

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y). \quad (1.47)$$

1.10.1. Función de distribución conjunta

La *cdf conjunta* de las variables aleatorias X y Y se define como

$$F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]. \quad (1.48)$$

Las *cdf marginales* de las variables aleatorias X y Y están dadas por

$$\underbrace{P[X \leq x]}_{F_X(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) \quad \text{y} \quad \underbrace{P[Y \leq y]}_{F_Y(y)} = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y). \quad (1.49)$$

Las *cdf condicionales* de X dada $Y = y$ y de Y dada $X = x$ son definidas como

$$F_{X|Y}(x|y) = \frac{F(x, y)}{F_Y(y)} \quad \text{y} \quad F_{Y|X}(y|x) = \frac{F(x, y)}{F_X(x)}, \quad (1.50)$$

con $F_X(x) > 0$ y $F_Y(y) > 0$.

Las variables aleatorias X y Y se denominan *independientes* cuando

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y). \quad (1.51)$$

Definición 1.18. Función de distribución truncada

Una *distribución truncada* es una parte de una distribución no truncada que está por encima (debajo) de un valor. Algunas *pmf* truncadas son:

1. Exclusión del valor 0: sea la variable aleatoria $Y := \{X|X > 0\}$. En este caso, el soporte de Y es el conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$ y su *pmf* está dada por:

$$P(Y = k) = P(X = k|X > 0) = \frac{P(X = k \cap X > 0)}{P(X > 0)} \quad (1.52)$$

donde $k > 0$.

2. Truncada por la derecha: sea la variable aleatoria $Y := \{X|X \leq a\}$. El soporte de Y es el conjunto $\{0, 1, 2, \dots, a - 1\}$ y su *pmf* está dada por:

$$P(Y = k) = P(X = k|X \leq a) = \frac{P(X = k \cap X \leq a)}{P(X \leq a)} \quad (1.53)$$

donde $0 \leq k \leq a$.

3. Truncada por la izquierda: sea la variable aleatoria $Y := \{X|X \geq a\}$. El soporte de Y es $\{a + 1, a + 2, \dots\}$, para $k \geq a$, y su *pmf* está dada por:

$$P(Y = k) = P(X = k|X \geq a) = \frac{P(X = k \cap X \geq a)}{P(X \geq a)} \quad (1.54)$$

Una variable aleatoria truncada es aquella cuya *pmf* está truncada.

1.10.2. Valores esperados y momentos

En esta sección, se estudiarán los conceptos de valor esperado y momentos para distribuciones de probabilidad conjuntas.

Definición 1.19. Sean X y Y variables aleatorias distribuidas conjuntamente. El valor esperado de una función de X y de Y , $h(x, y)$, se define como

$$\mathbb{E}[h(X, Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y h(x, y)P(X = x, Y = y) & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son discretas,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)f_{(X,Y)}(x, y) dy dx & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son continuas.} \end{cases}$$

1.10.3. Valor esperado condicional

Sean X y Y variables aleatorias distribuidas conjuntamente, entonces el valor esperado de la variable aleatoria Y , dada X se define como

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = \begin{cases} \sum_y y p_{Y|X}(y|x) & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son discretas,} \end{cases} \quad (1.57)$$

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son continuas.} \end{cases} \quad (1.58)$$

En general, $\mathbb{E}[Y^k|X = x]$ para $k = 1, 2, \dots$, se establece como sigue:

$$\mathbb{E}[Y^k|X = x] = \begin{cases} \sum_y y^k p_{Y|X}(y|x) & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son discretas,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} y^k f_{Y|X}(y|x) dy & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son continuas.} \end{cases} \quad (1.59)$$

Teorema 1.12. Propiedades del valor esperado condicional

Las propiedades fundamentales de $\mathbb{E}[Y|X = x]$ son las siguientes:

- i) Ley de esperanza total: el valor esperado de $\mathbb{E}[Y|X = x]$ respecto a la ley de probabilidad de X proporciona $\mathbb{E}(Y)$; es decir,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X = x]] = \mathbb{E}[Y] \quad (1.60)$$

- ii) El valor esperado condicional $\mathbb{E}[h(X)Y|X = x]$ de una variable aleatoria que es el producto de Y por una función $h(X)$ de la variable aleatoria X satisface

$$\mathbb{E}[h(X)Y|X = x] = h(x) \mathbb{E}[Y|X = x], \quad (1.61)$$

tal que $\mathbb{E}[h(X)Y]$ sea finita.

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [185, pág. 55]. \square

1.10.4. Varianza condicional

Sean X y Y variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio de probabilidad. Si $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$, la varianza condicional de Y , dada X se define por

$$\text{Var}[Y|X = x] = \mathbb{E}[Y^2|X = x] - (\mathbb{E}[Y|X = x])^2. \quad (1.62)$$

Teorema 1.13. Descomposición de la varianza

Si X y Y son variables aleatorias distribuidas conjuntamente, entonces la varianza de cualquiera de ellas se puede descomponer como:

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}[\mathbb{E}(Y|X)]. \quad (1.63)$$

Demostración. Tomando esperanza en la expresión (1.62) se obtiene

$$\mathbb{E}[\text{Var}(Y|X)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y^2|X]] - \mathbb{E}[(\mathbb{E}[Y|X])^2] = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}[\mathbb{E}^2(Y|X)].$$

Por otra parte,

$$\text{Var}[\mathbb{E}(Y|X)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}^2(Y|X)] - (\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)])^2 = \mathbb{E}[\mathbb{E}^2(Y|X)] - (\mathbb{E}(Y))^2.$$

Sumando estas expresiones se obtiene el resultado. \square

Teorema 1.14. Fórmula de descomposición de la covarianza

Si X y Y y Z son variables aleatorias sobre el mismo espacio de probabilidad y las covarianzas de X y Y son finitas, entonces

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(\text{Cov}(X, Y|Z)) + \text{Cov}(\mathbb{E}(X|Z), \mathbb{E}(Y|Z)). \quad (1.64)$$

Demostración. Usando la expresión (1.21) se tiene que

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Aplicando la ley de esperanza total condicionada por la variable aleatoria Z

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[XY|Z]] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Z]]\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|Z]].$$

Ahora, se reescribe el término dentro de la primera esperanza del lado derecho usando la definición de covarianza:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X, Y] &= \mathbb{E}[\text{Cov}[X, Y|Z] + \mathbb{E}[X|Z]\mathbb{E}[Y|Z]] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Z]]\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|Z]] \\ &= \mathbb{E}[\text{Cov}[X, Y|Z]] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Z]\mathbb{E}[Y|Z]] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Z]]\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|Z]]. \end{aligned}$$

Aquí se tuvo en cuenta el hecho de que el valor esperado es lineal. Finalmente, nótese que los 2 últimos términos equivalen a la covarianza de la esperanzas condicionales $\mathbb{E}[X|Z]$ y $\mathbb{E}[Y|Z]$:

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[\text{Cov}(X, Y|Z)] + \text{Cov}[\mathbb{E}(X|Z), \mathbb{E}(Y|Z)]. \quad \checkmark$$

1.11. Convolución de variables

Se pueden definir nuevas variables aleatorias como funciones de X y Y , en el caso de que estas variables sean no negativas; la variable $S = X + Y$ es de gran aplicabilidad práctica. Denotando las **cdf** de X y Y por F y G , respectivamente, la convolución entre las funciones F y G es un operador matemático que las convierte en una nueva función H , el cual representa la magnitud en la que se superponen F y una versión trasladada e invertida de G . Luego, la **pdf** $h_S(s)$ y la **cdf** $H_S(s)$ están dadas por

$$h_S(s) = \begin{cases} \sum_{y \leq s} P[X = s - y, Y = y] & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son discretas,} \\ \int_0^s f_{(X,Y)}(s - y, y) dy & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son continuas.} \end{cases} \quad (1.65)$$

$$H_S(s) = \begin{cases} \sum_{x+y \leq s} \sum P[X = x, Y = y] & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son discretas,} \\ \iint_{\{x+y \leq s\}} f_{(X,Y)}(x, y) dx dy & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son continuas.} \end{cases} \quad (1.66)$$

Además, si son independientes, entonces

$$h_S(s) = \begin{cases} \sum_{y \leq s} P[X = s - y]P[Y = y] & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son discretas,} \\ \int_0^s f_X(s - y)d[\mathcal{G}_Y(y)] & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son continuas.} \end{cases} \quad (1.69)$$

$$(1.70)$$

$$H_S(s) = \begin{cases} \sum_{y \leq s} F_X(s-y)P[Y=y] & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son discretas,} & (1.73) \\ \int_0^s F_X(s-y)d[G_Y(y)] & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son continuas.} & (1.74) \end{cases}$$

Por la propiedad de simetría, se pueden intercambiar las **cdf** F y G sin afectar el resultado. Las variables aleatorias positivas juegan un papel importante, por lo que es útil notar que si f y g están definidas en $(0, \infty)$ la convolución $f * g$ dada en (1.70) se reduce a:

$$(f * g)(s) = \int_0^s f_X(s-y)g_Y(y) dy \stackrel{x=s-y}{=} \int_0^s f_X(x)g_Y(s-x) dx. \quad (1.75)$$

Teorema 1.15. Propiedades fundamentales de las convoluciones

Las propiedades de la convolución se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 1.1. Propiedades de las convoluciones

| Propiedad | Notación matemática |
|-------------------------------|--|
| 1. Conmutatividad | $(f * g)(s) = (g * f)(s).$ |
| 2. Asociatividad | $[f * (g * h)](s) = [(f * g) * h](s).$ |
| 3. Distributividad | $[f * (g + h)](s) = (f * g)(s) + (f * h)(s).$ |
| 4. Multiplicación por escalar | $[\alpha(f * g)](s) = [(\alpha f) * g](s) = [f * (\alpha g)](s).$ |
| 5. Regla de derivación | $\mathcal{D}_s[(f * g)(s)] = [\mathcal{D}_s(f) * g](s) = [f * \mathcal{D}_s(g)](s).$ |

Donde $\mathcal{D}_s = \frac{d}{ds}$ denota el operador derivada.

Fuente: elaboración propia.

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [175]. ☑

Ejemplo 1.1. Considere una cartera con 2 pólizas de vida temporales con vigencia anual. Una de ellas tiene un beneficio de 30 000 con doble indemnización en caso de muerte accidental. Para la edad, salud y ocupación de una persona específica, las probabilidades de muerte por causa accidental y natural en el año son 0.002 y 0.008, respectivamente. La otra póliza tiene un beneficio de 35 000, con doble indemnización en caso de muerte accidental. Suponga que en esta póliza, las probabilidades de muerte por causa accidental y natural durante la vigencia son 0.003 y 0.018, respectivamente. Determine el valor esperado y la varianza de $S = X + Y$.

Solución. Usando la fórmula de Bayes, se establecen las distribuciones de las variables aleatorias X y Y como sigue

| | | | | | | | |
|--------|-------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
| x | 0 | 30 000 | 60 000 | y | 0 | 35 000 | 70 000 |
| $p(x)$ | 0.990 | 0.008 | 0.002 | $p(y)$ | 0.979 | 0.018 | 0.003 |

Entonces

Tabla 1.2. Resumen de estadísticas para los datos del ejemplo 1.1

| Medidas | X | Y | S |
|----------|------------|------------|------------|
| Media | 360 | 840 | 1 200 |
| Varianza | 14 270 400 | 36 044 400 | 50 314 800 |

Fuente: elaboración propia.

Aquí se tuvo en cuenta el hecho de que X y Y son independientes.

1.12. Algunas distribuciones útiles

En esta sección se presentan las distribuciones que se emplean con mayor frecuencia en la teoría del riesgo (ver [93]).

1.12.1. Distribuciones de probabilidad

Se consideran las siguientes distribuciones univariadas de probabilidad para variables aleatorias discretas.

Definición 1.20. Distribución de probabilidad binomial

Si X tiene pmf dada por

$$P(X = x) = \binom{m}{x} p^x q^{m-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, m \quad (1.76)$$

donde $0 < p < 1$ y $q = 1 - p$, el coeficiente $\binom{m}{x}$ se lee m combinado x , sus propiedades pueden ser consultadas en el apéndice B. Luego, se dice que X tiene distribución binomial con parámetros m y p y se denota $X \sim \text{Bin}(m, p)$. El valor esperado y la varianza son

$$\mathbb{E}[X] = mp \quad y \quad \text{Var}[X] = mpq. \quad (1.77)$$

Las funciones generadoras de probabilidad y momentos están dadas por

$$\mathcal{G}_X(z) = (q + pz)^m \quad y \quad M_X(z) = (q + pe^z)^m. \quad (1.78)$$

Definición 1.21. Distribución de probabilidad binomial negativa

Si X tiene pmf dada por

$$P(X = x) = \text{BN}(x; r, p) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x \quad x \geq 0, \quad (1.79)$$

donde $r > 0$, $0 < p < 1$ y $q = 1 - p$, entonces se dice que X tiene *pmf* binomial negativa con parámetros r y p , y se denota $X \sim BN(r, p)$. Esta *pmf* cuando $r \in \mathbb{N}$ se conoce como la *pmf* de Pascal. El valor esperado y la varianza son

$$\mathbb{E}[X] = r \frac{q}{p} \quad y \quad \text{Var}[X] = r \frac{q}{p^2}. \quad (1.80)$$

Las funciones generadoras de probabilidad y momentos están dadas por

$$\mathcal{G}_X(z) = \left(\frac{p}{1 - qz} \right)^r \quad y \quad M_X(z) = \left(\frac{p}{1 - qe^z} \right)^r. \quad (1.81)$$

Usando la expresión presentada en [76] y la propiedad dada en (B.8) sobre binomios con exponentes negativos, se obtiene

$$(\alpha - \beta)^{-r} = \alpha^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-r}{k} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^k = \alpha^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} (1 + \delta)^{-k}, \quad (1.82)$$

con $\delta = \beta^{-1}$ y $\alpha = 1 + \beta$. Si $q = (1 + \delta)^{-1}$ en la expresión (1.79) se tiene que

$$P(X = k) = \binom{r+k-1}{k} \left(\frac{\delta}{1 + \delta} \right)^r \left(\frac{1}{1 + \delta} \right)^k, \quad (1.83)$$

Puesto que $r > 0$, ($r \in \mathbb{R}$) se utiliza el símbolo de Pochhammer² dado en [1] para encontrar la combinatoria como sigue

$$\binom{r+k-1}{k} = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!} = \frac{(r)_k}{k!} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ \prod_{m=0}^{k-1} \frac{m+r}{m+1}, & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \quad (1.84)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ denota la función gamma.

Definición 1.22. Distribución de probabilidad geométrica generalizada

Si X tiene *pmf* dada por

$$P(X = x) = \begin{cases} aq^x p & \text{si } x \geq 1, \\ 1 - aq & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (1.85)$$

donde $0 < q < 1$, $p = 1 - q$ y $0 < a \leq \frac{1}{p}$. Luego, se dice que X tiene distribución geométrica generalizada con parámetros a y q y se denota $X \sim \text{Geom}(a, q)$. El valor esperado y la varianza son

$$\mathbb{E}[X] = \frac{aq}{p} \quad y \quad \text{Var}[X] = \frac{aq}{p^2} (1 - aq + q). \quad (1.86)$$

²En el entorno \mathbf{R} la función “Pochhammer” se encuentra en la librería *orthopolynom*.

Nótese que $P[X = 0] = 1 - aq$. La función generadora de probabilidad está dada por

$$\mathcal{G}_X(z) = 1 + \frac{aq(z-1)}{1-qz} = \frac{(1-aq) - (1-a)qz}{1-qz}. \quad (1.87)$$

La función generadora de momentos está dada por

$$M_X(z) = 1 + \frac{aq(e^z-1)}{1-qe^z} = \frac{(1-aq) - (1-a)qe^z}{1-qe^z}. \quad (1.88)$$

Nota 1.3. Si $a = 1$ se obtiene la *pmf* geométrica clásica, es decir, $X \sim \text{Geom}(q)$.

Definición 1.23. Distribución de probabilidad hipergeométrica

Sea M el número total de objetos en una población finita, con m de estos de un tipo y $M - m$ de otro. Al elegir una muestra aleatoria de la población constituida por n objetos, la probabilidad de que sean exactamente x de un tipo y $n - x$ sean del otro, está dada por la *pmf* hipergeométrica:

$$P[X = x] = \frac{\binom{m}{x} \binom{M-m}{n-x}}{\binom{M}{n}} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1.89)$$

donde los parámetros (M, m, n) satisfacen $n \leq M$, $m \leq M - n$. El valor esperado y la varianza son

$$\mathbb{E}[X] = n \frac{m}{M} \quad y \quad \text{Var}[X] = n \frac{m}{M} \left(1 - \frac{m}{M}\right) \frac{M-n}{M-1}. \quad (1.90)$$

El término $\frac{M-n}{M-1}$ se denomina factor de corrección de población finita.

Definición 1.24. Distribución de probabilidad logarítmica

Una variable aleatoria X con *pmf* dada por

$$P[X = x] = \frac{q^x}{x\lambda}, \quad x = 1, 2, \dots \quad (1.91)$$

donde $\lambda = \ln(1-q)^{-1}$ y $0 < q < 1$, entonces se dice que X tiene *pmf* logarítmica con parámetro q . El valor esperado y la varianza están dados por

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{1-q} \frac{q}{\lambda} \quad y \quad \text{Var}[X] = \left[\frac{1}{1-q} - \mathbb{E}[X] \right] \mathbb{E}[X]. \quad (1.92)$$

Las funciones generadoras de probabilidad y momentos están dadas por

$$\mathcal{G}_X(z) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-qz) \quad y \quad M_X(z) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-qe^z). \quad (1.93)$$

Definición 1.25. Distribución de probabilidad Poisson

Una variable aleatoria X con *pmf* dada por

$$P(X = x) = \mathcal{P}(x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad \lambda > 0, x = 0, 1, \dots, \quad (1.94)$$

se dice que X tiene *pmf* Poisson con parámetro λ y se denota $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. El valor esperado y la varianza son

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \quad y \quad \text{Var}[X] = \lambda. \quad (1.95)$$

Las funciones generadoras de probabilidad y momentos están dadas por

$$\mathcal{G}_X(z) = e^{\lambda(z-1)} \quad y \quad M_X(z) = e^{\lambda(e^z-1)}. \quad (1.96)$$

Definición 1.26. Distribución de probabilidad Westerberg

Si $X \sim \text{Geom}(a, q)$ con $a = \frac{1}{\lambda}(e^\lambda - 1)$ y $q = e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$, entonces X tiene *pmf* Westerberg y se denota $X \sim \text{Wester}(\lambda)$. El valor esperado y la varianza son

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \quad y \quad \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda} \left[\coth\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \frac{1}{\lambda} \right]. \quad (1.97)$$

1.12.2. Familia de distribuciones de Panjer

En esta sección se presenta un método recursivo que define una familia de distribuciones de variables aleatorias discretas X dada en [126] e implementada en el campo actuarial por [159].

Definición 1.27. Una *pmf* de una variable aleatoria X que satisface la relación

$$P[X = x] = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq k, \\ \left(\alpha + \frac{\beta}{x}\right)P[X = x - 1], & \text{si } x > k, \end{cases} \quad (1.98)$$

donde $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha < 1$ y $\alpha + \beta \geq 0$, se dice que pertenece a la familia de distribuciones de Panjer de clase k y se denota $\mathcal{P}(\alpha, \beta, k)$.

Al tomar $k = 0$ y reescribir la fórmula de recurrencia dada en (1.98) como sigue

$$P[X = x] = \frac{\alpha}{x} \left(\frac{\beta}{\alpha} + x \right) P[X = x - 1], \quad \alpha \neq 0,$$

y usándola de manera sucesiva, se tiene que

$$\begin{aligned} P[X = 1] &= \frac{\alpha}{1} \left(\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) P[X = 0] \\ P[X = 2] &= \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} + 2 \right) P[X = 1] = \frac{\alpha^2}{2!} \left(\frac{\beta}{\alpha} + 2 \right) \left(\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) P[X = 0], \end{aligned}$$

así sucesivamente:

$$P[X = x] = \frac{\alpha^x}{x!} \prod_{m=0}^{x-1} \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha} + m \right) P[X = 0], \quad x = 1, 2, \dots \quad (1.99)$$

Si $\alpha + \beta > 0$, por la expresión (1.84) se tiene que

$$\frac{\alpha^x}{x!} \prod_{m=0}^{x-1} \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha} + m \right) = \prod_{m=0}^{x-1} \left[\frac{\alpha}{m+1} \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha} + m \right) \right] = \binom{r+x-1}{x} \alpha^x, \quad (1.100)$$

donde $r = \frac{\alpha + \beta}{\alpha}$. Nótese que la serie

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(X = x) = P(X = 0) \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\alpha^x}{x!} \prod_{m=0}^{x-1} (r + m)$$

es absolutamente convergente siempre que $|\alpha| < 1$, pues por el criterio del cociente (o de D'Alembert):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{P(X = m+1)}{P(X = m)} \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha}{m+1} \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha} + m \right) \right| = |\alpha|.$$

Por otra parte, usando la serie binomial con exponente negativo (ver (B.3))

$$P[X = 0] = (1 - \alpha)^r, \quad (1.101)$$

y sustituyendo en (1.99), se llega a

$$P[X = x] = \begin{cases} \binom{r+x-1}{x} \alpha^x (1 - \alpha)^r, & \text{si } x \geq 0 \text{ y } \alpha + \beta > 0, \\ -\frac{x^{-1} \alpha^x}{\ln(1 - \alpha)}, & \text{si } x \geq 1 \text{ y } \alpha + \beta = 0. \end{cases} \quad (1.102)$$

Caso particular

Si se considera en (1.100) que $\alpha \rightarrow 0$, se llega a

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \prod_{m=0}^{x-1} \left[\frac{\alpha}{m+1} \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha} + m \right) \right] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \prod_{n=1}^x \frac{n\alpha + \beta}{n} = \frac{\beta^x}{x!}$$

Por otra parte,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 - \alpha)^{\frac{\alpha + \beta}{\alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[(1 - \alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \right]^{-\beta} = e^{-\beta}.$$

Por lo tanto, sustituyendo en (1.102) se obtiene que

$$P[X = x] = \frac{\beta^x}{x!} e^{-\beta},$$

la cual coincide con la pmf Poisson de parámetro β .

Usando (1.98) se obtienen los valores de α y β que aproximan a un conjunto seleccionado de pmf bien conocidas, los cuales se dan en la tabla 1.3.

Tabla 1.3. Valores de α y β para algunas distribuciones

| Distribución de probabilidad | $P[X = x]$ | Valores fijos | |
|------------------------------|---|----------------|--------------------|
| | | α | β |
| Poisson | $\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ | 0 | λ |
| Binomial negativa | $\binom{r+x-1}{x}p^r q^x$ | $1-p$ | $(r-1)q$ |
| Geométrica | pq^x y $0 < p < 1$ | $1-p$ | 0 |
| Binomial | $\binom{m}{x}p^x q^{m-x}$, $0 < p < 1$ | $-\frac{p}{q}$ | $(m+1)\frac{p}{q}$ |
| Logarítmica | $\frac{q^x}{x \ln(1-q)^{-1}}$ $0 < q < 1$ | q | $-q$ |

Fuente: tomada de [110, pág. 61].

Teorema 1.16. Si $X \sim \mathcal{P}(\alpha, \beta, 0)$, entonces la mgf es dada por

$$M_X(z) = \begin{cases} \left(\frac{1 - \alpha e^z}{1 - \alpha}\right)^{-r} & \text{si } \alpha + \beta > 0, \\ \frac{\ln(1 - \alpha e^z)}{\ln(1 - \alpha)} & \text{si } \alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad (1.103)$$

Demostración. Para el caso $\alpha + \beta > 0$ la prueba consiste en un cálculo directo

$$\begin{aligned} M_X(z) &= \mathbb{E}[e^{zx}] = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{\frac{\beta}{\alpha} + x}{x} (\alpha e^z)^x P(X = 0) \\ &= (1 - \alpha)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} \sum_{x=0}^{\infty} \binom{\frac{\beta}{\alpha} + x}{x} (\alpha e^z)^x = \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha e^z}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} \end{aligned}$$

aquí se uso la expresión (B.3), esto completa la primera parte de la prueba. Nótese que si $\alpha > 0$ esta expresión coincide con la función generadora de momentos de la distribución binomial negativa con parámetros

$$\alpha r = \alpha + \beta \quad \text{y} \quad q = \alpha.$$

El caso $\alpha + \beta = 0$ queda como ejercicio para el lector. ☑

Teorema 1.17. Si $X \sim \mathcal{P}(\alpha, \beta, 0)$, entonces los momentos factoriales satisfacen que

$$\mu_{[n]}(X) = \begin{cases} \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r)} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n = \prod_{m=1}^n \frac{m\alpha + \beta}{1-\alpha} & \text{si } \alpha + \beta > 0, \\ \frac{\Gamma(n)}{\ln(1-\alpha)^{-1}} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n & \text{si } \alpha + \beta = 0. \end{cases} \quad (1.104)$$

Demostración.

Queda como ejercicio para el lector. ✓

Observaciones

1. Si $\alpha + \beta > 0$ y la pmf de la variable aleatoria X satisface la recurrencia (1.98), entonces la media es

$$\mathbb{E}(X) = \mu_{[1]}(X) = \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha}, \quad (1.105)$$

por otra parte,

$$\mu_{[2]}(X) = \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha} \frac{2\alpha + \beta}{1 - \alpha};$$

luego, la varianza se establece como

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \left[\frac{2\alpha + \beta}{1 - \alpha} + 1 \right] \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha} - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \left[\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} - \mu_X \right] \mu_X = \frac{1}{1 - \alpha} \mu_X, \end{aligned} \quad (1.106)$$

por la expresión (1.27) el tercer momento ordinario, $\mu'_3(X)$, queda

$$\mu'_3(X) = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \mu_2(X) + 3 \mu_X \mu'_2(X) - 2\mu^3(X). \quad (1.107)$$

2. Cuando $\alpha + \beta = 0$ y $0 < \alpha < 1$, entonces el valor esperado es

$$\mathbb{E}(X) = \mu_{[1]}(X) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{1}{\ln(1 - \alpha)^{-1}}, \quad (1.108)$$

donde $P[X = 1]$ se establece a partir de (1.102) y la varianza es

$$\text{Var}(X) = \left[\frac{1}{1 - \alpha} - \mathbb{E}(X) \right] \mathbb{E}(X). \quad (1.109)$$

Definición 1.28. Familia de distribuciones exponencial

Este grupo de distribuciones tiene *pmf* de la forma general

$$f(x; \theta) = \exp \{A(\theta)B(x) + C(x) + D(\theta)\}, \quad (1.110)$$

donde A, B, C y D son funciones específicas y el parámetro canónico θ puede ser unidimensional o multidimensional.

Si $B(x) = x$, el valor esperado y varianza están dados por

$$\mu_X = \mu(\theta) = -\frac{D'(\theta)}{A'(\theta)} \quad y \quad \sigma_X^2 = \frac{\mu'(\theta)}{A'(\theta)}.$$

1.12.3. Funciones de densidad de probabilidad

Ahora se consideran las *pdf* para variables aleatorias continuas.

Definición 1.29. Distribución beta

Si X tiene distribución beta con parámetros α y β , entonces su *pdf* está dada por

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad 0 < x < 1, \quad (1.111)$$

donde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\Gamma(\cdot)$ indica la función gamma. Esta variable aleatoria se denota como $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$. El valor esperado y la varianza están dados por

$$\mu_X = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad y \quad \sigma_X^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

Los momentos ordinarios son

$$\mu'_n(X) = \frac{B(\alpha + n, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\Gamma(\alpha + n)\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + \beta + n)}. \quad (1.112)$$

Definición 1.30. Distribución exponencial

Si X tiene distribución exponencial con parámetro λ , entonces su *pdf* está dada por

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0, \lambda > 0 \quad (1.113)$$

el valor esperado y varianza están dados por

$$\mu_X = \frac{1}{\lambda} \quad y \quad \sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2},$$

la función generadora de momentos es

$$M_X(z) = \frac{\lambda}{\lambda - z} \quad z < \lambda. \quad (1.114)$$

Definición 1.31. Distribución normal

Si X tiene distribución normal con parámetros μ , σ^2 , entonces su *pdf* está dada por

$$\varphi_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.115)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Por la simetría de la *pdf* normal respecto de la media

$$\varphi_X(x, -\mu, \sigma) = \varphi_X(-x, \mu, \sigma). \quad (1.116)$$

El valor esperado y varianza están dados por

$$\mu_X = \mu \quad \text{y} \quad \sigma_X^2 = \sigma^2.$$

La *cdf* de una variable normal está dada por

$$\Phi_X(x, \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^x \varphi(u, \mu, \sigma) du. \quad (1.117)$$

La función generadora de momentos está dada por

$$M_X(z) = e^{\mu z + \frac{1}{2}z^2\sigma^2}. \quad (1.118)$$

Al hacer el cambio de variable

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma}, \quad (1.119)$$

se obtiene el caso particular $\mu = 0$, $\sigma = 1$ que se denota $U \sim N(0, 1)$ y se denomina *pdf normal estándar*³. En general, la probabilidad de que una variable $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ caiga por debajo de y está dada por

$$\Phi_X(y, \mu_X, \sigma_X) = \Phi_U\left(\frac{y - \mu_X}{\sigma_X}\right). \quad (1.120)$$

Una variable aleatoria con *pdf* normal tiene una curtosis de 3, independientemente de sus parámetros.

Definición 1.32. Distribución uniforme

Si X tiene distribución uniforme sobre el intervalo $[a, b]$, entonces su *pdf* está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.121)$$

³Una notación matemática unificada utilizada en este libro es

$$\varphi(x, 0, 1) = \varphi(x) \quad \text{y} \quad \Phi(x, 0, 1) = \Phi(x).$$

El valor esperado y la varianza están dados por

$$\mu_X = \frac{a+b}{2} \quad y \quad \sigma_X^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2, \quad (1.122)$$

los cuantiles x_p y x_{1-p} de esta distribución son

$$x_p = pb + (1-p)a \quad x_{1-p} = pa + (1-p)b. \quad (1.123)$$

Los momentos centrales son

$$\mu_n(X) = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^n \frac{dx}{b-a} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{(b-a)^n}{2^n(n+1)} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Además,

$$M_X(z) = \frac{e^{bz} - e^{az}}{(b-a)z}. \quad (1.124)$$

Definición 1.33. Familia de distribuciones exponencial lineal

La distribución de la familia exponencial lineal está dada por

$$f_X(x; \theta, \varphi) = \exp \left\{ \frac{\theta x - B(\theta)}{A(\varphi)} + C(x, \varphi) \right\} \quad (1.125)$$

para algunas funciones específicas $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ y $C(\cdot)$. Esta forma incluye una función de dispersión $A(\varphi)$ en vez de una simple constante φ . Si se conoce φ , este modelo coincide con (1.110) de parámetro canónico θ . Puede ser o no una familia exponencial de 2 parámetros si φ es desconocido. El valor esperado y la varianza están dados por

$$\mu_X = B'(\theta) \quad y \quad \sigma_X^2 = A(\varphi)B''(\theta).$$

La función generadora de momentos está dada por

$$M_X(z) = \exp \left\{ \frac{B(\theta + A(\varphi)z) - B(\theta)}{A(\varphi)} \right\}. \quad (1.126)$$

1.12.4. Distribuciones de colas pesadas

En riesgo son muy frecuentes las distribuciones de colas pesadas.

Definición 1.34. Distribución de cola integrada

Sea $F_X(\cdot)$ una *cdf* con $F_X(0) = 0$ y media $\mu_X > 0$. Se define

$$F_I(x) = \frac{\int_0^w \bar{F}_X(u) du}{\int_0^\infty \bar{F}_X(u) du} = \frac{1}{\mu_X} \int_0^x \bar{F}_X(u) du \quad \forall x \geq 0 \quad (1.127)$$

donde $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$, como $F_I(x)$ satisface las propiedades dadas en el teorema 1.2 es una *cdf* y se conoce como la distribución de cola integrada de F_X .

Definición 1.35. Función de distribución subexponencial

Una *cdf* F_X con soporte $(0, \infty)$ es subexponencial si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_X^{*n}}(x)}{\overline{F_X}(x)} = n, \quad \forall n \geq 2$$

donde $F_X^{*n}(x)$ denota la n -ésima convolución de $F_X(x)$. La clase de funciones de distribuciones subexponenciales se denota por \mathcal{S} (ver [66]).

Definición 1.36. Distribución lognormal

Si X tiene distribución lognormal con parámetros μ y σ^2 , entonces su *pdf* está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma \ln C} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\log_C x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \quad (1.128)$$

donde $x > 0$, $\sigma > 0$ y $\log_C x$ es el logaritmo en base C ($C > 1$) y se denota como $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$. El valor esperado y varianza están dados por

$$\mu_X = C^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \ln C} \quad y \quad \sigma_X^2 = C^{2\mu + \sigma^2 \ln C} (C^{\sigma^2 \ln C} - 1),$$

en la mayoría de textos se considera $C = e$.

Clases de distribución lognormal: en [4] se introducen 3 formas de la *pdf* lognormal:

- i) La distribución de 2 parámetros $\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$, la cual representa datos de sesgo positivo con un umbral en 0. La *pdf* fue dada en (1.128).
- ii) La distribución de 3 parámetros: si la variable aleatoria X tiene un umbral inferior (superior), λ (δ), distinto de 0, entonces
 - La variable trasladada $Y = X - \lambda$ tiene *pdf* lognormal con 2 parámetros; luego, X se distribuye lognormal con 3 parámetros y se denota como $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2, \lambda)$, esta permite describir datos de sesgo positivo con un umbral inferior de λ . La *pdf* es dada por

$$f_X(x; \lambda, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma(x - \lambda)} \varphi \left\{ \frac{\ln(x - \lambda) - \mu}{\sigma} \right\}, \quad (1.129)$$

donde $x > \lambda$ y $\sigma > 0$.

- La variable trasladada $Y = \delta - X$ tiene *pdf* lognormal con 2 parámetros, en este caso, X se distribuye lognormal con 3 parámetros y se denota como $\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2, \delta)$, esta se emplea para datos de

sesgo negativo que tengan un umbral superior de δ . La pdf es dada por

$$f_X(x; \delta, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma(\delta - x)} \varphi \left\{ \frac{\mu - \ln(\delta - x)}{\sigma} \right\}, \quad x < \delta, \sigma > 0.$$

iii) La distribución de 4 parámetros $\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2, \delta, \lambda)$, la cual describe datos sesgados con umbrales superior e inferior de δ y λ , respectivamente, tiene pdf dada por

$$f_X(x; \delta, \lambda, \mu, \sigma) = \frac{\delta - \lambda}{\sigma(x - \lambda)(\delta - x)} \varphi \left\{ \frac{1}{\sigma} \left[\ln \left(\frac{x - \lambda}{\delta - x} \right) - \mu \right] \right\},$$

donde $\lambda < x < \delta$ y $\sigma > 0$.

Definición 1.37. Distribución inversa gaussiana

Si X tiene distribución inversa gaussiana con parámetros λ y μ ($\lambda > 0$, $\mu > 0$), entonces su pdf está dada por

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{x} \left(\frac{x - \mu}{\mu} \right)^2 \right\} \quad x > 0. \quad (1.130)$$

Se denota como $X \sim IG(\mu, \lambda)$. El valor esperado y varianza son

$$\mu_X = \mu \quad y \quad \sigma_X^2 = \frac{\mu^3}{\lambda}.$$

La función generadora de momentos

$$M_X(z) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu^2}{\lambda} z} \right) \right\} \quad 0 \leq z \leq \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu^2}.$$

Definición 1.38. Distribución Gamma

Si X tiene distribución gamma con parámetros α y $\frac{1}{\beta}$, entonces su pdf está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad x > 0 \quad \alpha, \beta > 0. \quad (1.131)$$

La cdf de una variable aleatoria gamma está dada por

$$\mathcal{G}(x; \alpha, \beta^{-1}) = \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x u^{\alpha-1} e^{-\beta^{-1}u} du = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \gamma \left(\alpha, \frac{x}{\beta} \right). \quad (1.132)$$

Aquí $\gamma(\alpha, z)$ para $\alpha > 0$ denota la función gamma incompleta (ver [1]). Cuando $\alpha = n$, es un entero, entonces,

$$\bar{F}_X(x) = \int_x^\infty \frac{u^{n-1} e^{-\frac{u}{\beta}}}{\beta^n \Gamma(n)} du = e^{-\frac{x}{\beta}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x/\beta)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} = e^{-\frac{x}{\beta}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{x}{\beta} \right)^j. \quad (1.133)$$

Los momentos ordinarios son

$$\mu'_n(X) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \beta^n.$$

Además, la función generadora de momentos es dada por

$$M_X(z) = \left(\frac{1}{1 - \beta z} \right)^\alpha \quad 0 \leq z < \frac{1}{\beta}.$$

Definición 1.39. Distribución de Pareto

Si X tiene distribución de Pareto con parámetros α y β , entonces su *pdf* está dada por

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{\beta}{x} \right]^{\alpha+1} \quad x \geq \beta > 0, \alpha > 0 \quad (1.134)$$

el valor esperado y la varianza están dados por

$$\mu_X = \frac{\alpha \beta}{\alpha - 1} \quad y \quad \sigma_X^2 = \frac{\alpha \beta^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}, \quad (1.135)$$

los cuantiles x_p y x_{1-p} de esta distribución son

$$x_p = \frac{\beta}{\sqrt[\alpha]{1-p}} \quad x_{1-p} = \frac{\beta}{\sqrt[p]{1-p}} \quad (1.136)$$

Definición 1.40. Distribución de Weibull

Si X tiene distribución de Weibull con parámetros λ y β , entonces su *pdf* está dada por

$$f_X(x) = \lambda \beta (\lambda x)^{\beta-1} e^{-(\lambda x)^\beta} \quad x > 0, \lambda > 0, \beta > 0 \quad (1.137)$$

el valor esperado y la varianza están dados por

$$\mu_X = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad y \quad \sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right],$$

los cuantiles x_p y x_{1-p} de esta distribución son

$$x_p = \frac{1}{\lambda} [-\ln(1-p)]^{\frac{1}{\beta}} \quad y \quad x_{1-p} = \frac{1}{\lambda} [-\ln p]^{\frac{1}{\beta}} \quad (1.138)$$

1.12.4.1. Familia de distribuciones $g - h$ de Tukey

En [207] se introdujo una familia de distribuciones mediante 2 transformaciones no lineales, llamada la distribución $g - h$.

Definición 1.41. Una variable aleatoria Y que transforma una $Z \sim N(0, 1)$ en

$$Y = T_{g,h}(Z) = \frac{1}{g}(\exp\{gZ\} - 1) \exp\{hZ^2/2\}, \quad (1.139)$$

donde g y h son constantes, se denomina distribución $g - h$ de Tukey. Los parámetros g y h denotan el sesgo y curtosis de la distribución $g - h$ de Tukey, respectivamente.

Nótese que la distribución $g - h$ de Tukey está definida en términos de los cuantiles. Los cuantiles y_p y y_{1-p} de esta distribución son

$$y_p = T_{g,h}(z_p) \quad \text{y} \quad y_{1-p} = -e^{-gz_p} T_{g,h}(z_p). \quad (1.140)$$

La pdf de la distribución $g - h$ de Tukey, denotada por $t_{g,h}(y)$, está dada por

$$t_{g,h}(y_p) = \frac{\varphi(z_p)}{T'_{g,h}(z_p)} \quad \text{siempre que} \quad |h|z_p \frac{e^{-gz_p} - 1}{g} < 1, \quad (1.141)$$

donde y_p denota el p -ésimo cuantil de la transformación $Y = T_{g,h}(Z)$ y z_p denota el p -ésimo cuantil de la normal estándar. La cdf de la distribución $g - h$ de Tukey, denotada por $F_{g,h}(y)$, satisface lo siguiente:

$$\int_a^b t_{g,h}(u) du = \int_{T_{g,h}^{-1}(a)}^{T_{g,h}^{-1}(b)} \varphi(v) dv = \Phi(T_{g,h}^{-1}(b)) - \Phi(T_{g,h}^{-1}(a)), \quad (1.142)$$

donde $T_{g,h}^{-1}(\cdot)$ denota la función inversa de la transformación dada en (1.139).

En la tabla 1.4 se muestran los valores de g y h que aproximan un conjunto seleccionado de distribuciones bien conocidas.

Tabla 1.4. Valores de g y h para algunas distribuciones

| pdf | Parámetros | Valores estimados | | | |
|-------------|------------------------|---------------------------|---------------------|----------------|-------------------------|
| | | A | B | g | h |
| Cauchy | $\mu, \sigma > 0$ | μ | σ | 0 | 1 |
| Exponencial | $\lambda > 0$ | $\frac{1}{\lambda} \ln 2$ | $\frac{g}{\lambda}$ | 0.773 | -0.09445 |
| Laplace | $\alpha, \beta > 0$ | α | β | 0 | 0 |
| Logística | $\alpha, \beta > 0$ | α | β | 0 | 1.7771×10^{-3} |
| Lognormal | $\mu, \sigma^2, C > 0$ | C^μ | gC^μ | $\sigma \ln C$ | 0 |
| Normal | μ, σ^2 | μ | σ | 0 | 0 |
| $t_{(\nu)}$ | $\nu = 10$ | 0 | 1 | 0 | 5.7624×10^{-2} |

Fuente: tomada de [109, pág. 30].

En [115], se establecen los momentos ordinarios de orden n de la familia de distribuciones $g - h$ de Tukey para $h < \frac{1}{n}$, como sigue:

$$\mathbb{E}(Y^n) = \begin{cases} \frac{1}{g^n \sqrt{1-nh}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} M_Z\left(\frac{n-k}{\sqrt{1-nh}} g\right) & \text{si } g \neq 0 \\ \frac{1 + (-1)^n}{2^{\frac{n}{2}} [1-nh]^{\frac{n+1}{2}}} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n/2)} & \text{si } g = 0 \end{cases} \quad (1.143)$$

donde $M_Z(\cdot)$ es la **mgf** de la normal dada en (1.118) y $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma. Los *momentos centrales* de orden n de la variable aleatoria Y son menos atractivos debido al álgebra tediosa involucrada.

1.12.4.2. Distribución skew-normal

La distribución skew-normal fue introducida por primera vez por [16] y estudiada en detalle por [12].

Definición 1.42. Distribución skew-normal

Si una variable aleatoria Y sigue una distribución skew-normal con parámetro de asimetría $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces su **pdf** está dada por

$$f_Y(y; \mu, \sigma, \lambda) = 2\varphi(y, \mu, \sigma) \Phi\left(\lambda \frac{y - \mu}{\sigma}\right), \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \quad (1.144)$$

esta variable se denota como $Y \sim \mathcal{SN}(\mu, \sigma, \lambda)$.

Si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, entonces Y sigue una distribución skew-normal (estándar), es decir, $Y \sim \mathcal{SN}(\lambda)$. El parámetro λ controla la asimetría, la cual es positiva (negativa) si $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$). La **cdf** de $Y \sim \mathcal{SN}(\mu, \sigma, \lambda)$ es

$$\begin{aligned} F_Y(y; \mu, \sigma, \lambda) &= 2 \int_{-\infty}^y \varphi(w, \mu, \sigma) \Phi\left(\lambda \frac{w - \mu}{\sigma}\right) dw \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\lambda v} \varphi(v) \varphi(u) du dv = F_Y\left(\frac{y - \mu}{\sigma}; \lambda\right), \end{aligned} \quad (1.145)$$

donde $F_Y(y; 0, 1, \lambda)$ se denota por $F_Y(y; \lambda)$. La **cdf** $F_Y(\cdot)$ se reescribe como sigue:

$$F_Y(y; \mu, \sigma, \lambda) = \Phi(y, \mu, \sigma) - 2T\left(\frac{y - \mu}{\sigma}; 0, \lambda\right), \quad (1.146)$$

donde la función $T(z; \zeta, \lambda)$ con $\zeta \geq 0$ está dada por

$$T(z; \zeta, \lambda) = \text{sgn}(\lambda) \left[\frac{\arctan(|\lambda|)}{2\pi} - \int_{\zeta}^z \int_0^{|\lambda|x} \varphi(x, \zeta, 1) \varphi(y) dy dx \right], \quad (1.147)$$

y $\text{sgn}(\cdot)$ es la función signo. Las propiedades de la función $T(z, 0, \lambda)$ fueron estudiadas en [158].

Propiedades de la distribución skew-normal

Algunas propiedades básicas de la pdf $\mathcal{SN}(\mu, \sigma^2, \lambda)$ son dadas en [17, p. 25]:

- i) Si $\lambda = 0$, la pdf $\mathcal{SN}(\mu, \sigma^2, 0)$ es la densidad de $N(\mu, \sigma^2)$;
- ii) Si $Y \sim \mathcal{SN}(\mu, \sigma^2, \lambda)$, entonces $-Y \sim \mathcal{SN}(-\mu, \sigma^2, -\lambda)$;
- iii) Cuando $\lambda \rightarrow \pm\infty$, $Y \sim \mathcal{SN}(\mu, \sigma^2, \lambda)$ tiende a la pdf normal media, es decir, a la distribución de $\pm|Y|$ cuando $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- iv) Si $Y \sim \mathcal{SN}(\lambda)$, entonces $Y^2 \sim \chi_{(1)}^2$.
- v) En [65] se estableció que si $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$\mathbb{E}[\Phi(Z)] = \Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{1 + \sigma^2}}\right), \quad (1.148)$$

usando este resultado, si $Y \sim \mathcal{SN}(\mu, \sigma^2, \lambda)$, entonces su mgf es

$$M_Y(z) = 2 \exp\{\mu z + \sigma^2/2z^2\} \Phi(\rho\sigma z), \quad (1.149)$$

donde

$$\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \quad \text{con} \quad |\rho| < 1. \quad (1.150)$$

- vi) En [167] se demostró que si $Y \sim \mathcal{SN}(\mu, \sigma^2, \lambda)$, entonces su función característica es

$$\Psi_Y(z) = \exp\left\{it\mu - \frac{1}{2}z^2\sigma^2\right\} \left[1 + bi \int_0^{\rho\sigma t} e^{\frac{1}{2}u^2} du\right], \quad (1.151)$$

donde $i = \sqrt{-1}$, $b = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ y ρ es dada en (1.150).

- vi) En [12] se muestra que si $Y \sim \mathcal{SN}(\mu, \sigma^2, \lambda)$, entonces sus momentos son

$$\mathbb{E}[Y] = \mu + b\rho\sigma, \quad \text{Var}[Y] = [1 - (b\rho)^2]\sigma^2, \quad (1.152)$$

$$\beta_1(Y) = \frac{1}{2} \frac{(4 - \pi)(b\rho)^3}{[1 - (b\rho)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad \beta_2(Y) = 3 + 2 \frac{(\pi - 3)(b\rho)^4}{[1 - (b\rho)^2]^2}, \quad (1.153)$$

donde ρ es dado en (1.150) y $\beta_1(Y)$ y $\beta_2(Y)$ son las medidas de asimetría y curtosis, respectivamente. Se demuestra fácilmente que

$$|\beta_1(Y)| \leq \frac{4 - \pi}{\pi - 2} \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}}, \quad (1.154)$$

el exceso de curtosis, o simplemente las *colas gruesas* son

$$0 \leq [\beta_2(Y) - 3] \leq 2(\pi - 3) \left(\frac{b^2}{1 - b^2} \right)^2. \quad (1.155)$$

viii) Puesto que se satisface (1.116) entonces

$$f_Y(-y; \mu, \sigma, \lambda) = f_Y(y; -\mu, \sigma, -\lambda), \quad (1.156)$$

$$F_Y(-y; \mu, \sigma, \lambda) = 1 - F_Y(y; -\mu, \sigma, -\lambda). \quad (1.157)$$

Definición 1.43. Transformada de Esscher

Sea X una variable aleatoria con *pdf* $f_X(\cdot)$ y *mgf* dada por $M_X(z)$. La transformada de Esscher con parámetro θ introducida en [68], se define mediante la *cdf*

$$\tilde{F}_X(x; \theta) = \frac{1}{M_X(\theta)} \int_{-\infty}^x e^{\theta u} f_X(u) du, \quad (1.158)$$

cuando $\theta \rightarrow 0$, entonces $\tilde{F}_X(x; 0) = F_X(x)$.

La *mgf* de la transformada de Esscher es dada por

$$M_X(z; \theta) = \frac{M_X(z + \theta)}{M_X(\theta)}.$$

1.13. Aproximación Cornish-Fisher

Un enfoque muy utilizado en riesgo es la aproximación Cornish-Fisher (CF). Esta se basa en la expansión dada en [77], la cual permite determinar los percentiles de las distribuciones que están cerca de la normal. Esta expansión ofrece un factor de ajuste que se puede usar para estimar los percentiles de las distribuciones no normales. Este ajuste es confiable cuando las desviaciones a la normal son “pequeñas”.

Si x_q y z_q denotan los cuantiles de orden q de una variable aleatoria X y una normal estándar, respectivamente, entonces las correspondientes *cdf* evaluadas en estos cuantiles son iguales; es decir,

$$F_X(x_q) = \Phi(z_q) = q \quad q \in [0, 1]. \quad (1.159)$$

El interés se centra en despejar x_q de esta ecuación, en términos de z_q , por la definición de la *cdf* de una normal estándar se tiene que

$$\Phi(x_q) = \Phi(z_q) - \int_{x_q}^{z_q} \varphi(u) du.$$

Al encontrar x_q usando la expansión de [77], se obtiene⁴

$$\begin{aligned} x_q = F_X^{-1}(\Phi(z_q)) &= z_q + \frac{1}{6}(z_q^2 - 1)\beta_1(X) + \frac{1}{24}(z_q^3 - 3z_q)\gamma_2(X) \\ &\quad - \frac{1}{36}(2z_q^3 - 5z_q)\beta_1^2(X) - \frac{1}{24}(z_q^4 - 5z_q^2 + 2)\beta_1(X)\gamma_2(X), \end{aligned} \quad (1.160)$$

donde $\beta_1(X)$, $\gamma_2(X)$ denotan el coeficiente de asimetría y exceso de curtosis de la distribución de X , respectivamente. Nótese que si $\beta_1(X)$ y $\gamma_2(X)$ son 0, se obtiene el cuantil de la variable $N(0, 1)$.

Al considerar los términos de orden superior como insignificantes, lo que equivale a suponer que las desviaciones a la normal son “pequeñas”, este truncamiento queda

$$x_q = z_q + \frac{z_q^2 - 1}{6}\beta_1(X) + \frac{z_q^3 - 3z_q}{24}\gamma_2(X) - \frac{2z_q^3 - 5z_q}{36}\beta_1^2(X). \quad (1.161)$$

Para usar esta expansión, se reemplaza el término x_q obtenido en la expresión (1.161) como el percentil estimado. Esto es equivalente a ajustar el cuantil z_q de la variable aleatoria normal estándar por asimetría o curtosis.

1.14. Desigualdades de probabilidad

Algunas desigualdades empleadas ampliamente en el contexto de riesgo se abordan en esta sección.

Teorema 1.18. Desigualdad de Márkov

Si X es una variable aleatoria arbitraria entonces

$$P(|X| \geq k) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{k} \quad \forall k > 0. \quad (1.162)$$

Demostración. Para el evento $A = \{|X| \geq k\}$, sea I_A su variable aleatoria indicadora; esto es

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{si } |X| \geq k, \\ 0 & \text{si } |X| < k, \end{cases}$$

⁴Expresión dada en [1].

entonces $kI_{\{|X| \geq k\}} \leq |X|$. Luego,

$$\mathbb{E}(kI_{\{|X| \geq k\}}) \leq \mathbb{E}(|X|).$$

Nótese que el lado izquierdo de esta expresión corresponde a

$$k\mathbb{E}(I_{\{|X| \geq k\}}) = kP(|X| \geq k).$$

Por lo tanto, se tiene

$$kP(|X| \geq k) \leq \mathbb{E}(|X|)$$

y, dado que $k > 0$, se dividen ambos lados entre k . ✓

1.14.1. Desigualdad de Chebyshev

La desigualdad de Chebyshev se encuentra entre las metodologías de cálculo de mayor uso en probabilidad.

Teorema 1.19. Desigualdad de Chebyshev

Si X es una variable aleatoria y existe $\text{Var}(X)$, entonces

$$P(|X - \mu_X| \geq k\sigma_X) \leq \frac{1}{k^2}, \quad k > 0. \quad (1.163)$$

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [78]. ✓

1.14.2. Desigualdad de Bernstein

La desigualdad de Bernstein permite obtener una cota para la probabilidad de una variable aleatoria cuya función generadora de momentos existe.

Teorema 1.20. Desigualdad de Bernstein

Sea X una variable aleatoria tal que $M_X(z)$ existe para todo $z \in I_K$ donde el intervalo $I_K = [0, K]$, con $K > 0$. Entonces, para cada real u , se tiene que

$$P(X \geq u) \leq \inf_{z > 0} \{e^{-zu} M_X(z)\}. \quad (1.164)$$

1.14.3. Desigualdad de Jensen

Sea $h(x)$ una función continua definida en un intervalo abierto I y un punto $P = (x_0, h(x_0))$ sobre la curva. Una recta L que pasa por P se dice que soporta a $h(x)$ en x_0 si la gráfica de $h(x)$ está enteramente por encima de L o sobre L (esto excluye rectas verticales). Analíticamente, se necesita que

$$h(x) \geq h(x_0) + \alpha(x - x_0) \quad \forall x \in I. \quad (1.165)$$

donde $\alpha = h'(x_0)$ es la pendiente de L . A la función $h(x)$ se le denomina convexa en I si existe una recta de soporte en cada punto $x \in I$ (la función $h(x)$ es cóncava si $-h(x)$ es convexa).

Teorema 1.21. Desigualdad de Jensen

Sea X una variable aleatoria con valor esperado $\mathbb{E}(X)$,

i) Si $h(x)$ es una función cóncava hacia arriba (convexa), entonces

$$\mathbb{E}[h(X)] \geq h(\mathbb{E}(X)). \tag{1.166}$$

ii) Si $h(x)$ es una función cóncava hacia abajo (cóncava), entonces

$$\mathbb{E}[h(X)] \leq h(\mathbb{E}(X)). \tag{1.167}$$

Demostración.

i) Puesto que $h(x)$ es continua y convexa, al tomar valor esperado en ambos lados de (1.165), se tiene que

$$\mathbb{E}[h(X)] \geq h(x_0) + \alpha (\mathbb{E}(X) - x_0) \Rightarrow \mathbb{E}[h(X)] \geq h(\mathbb{E}(X)).$$

En la última expresión se tomó $x_0 = \mathbb{E}(X)$.

ii) La ecuación de la recta tangente a $h(x)$ en el punto $(x_0, h(x_0))$ es dada por

$$y = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0).$$

Debido a la característica estrictamente cóncava de $h(x)$, el gráfico de $h(x)$ estará por debajo de la recta tangente; esto es,

$$h(x) \leq h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x. \tag{1.168}$$

Si x se reemplaza por la variable aleatoria X y se toma valor esperado a cada lado de la desigualdad (1.168), se tiene que

$$\mathbb{E}[h(X)] \leq h(x_0) + h'(x_0) (\mathbb{E}(X) - x_0) \Rightarrow \mathbb{E}[h(X)] \leq h(\mathbb{E}(X)).$$

En la última expresión se tomó $x_0 = \mathbb{E}(X)$. ☑

Ejemplo 1.2. Aplique la desigualdad de Jensen a la función $h(x) = x^2$.

Solución. Nótese que la función $h(x)$ es convexa, ya que para cualesquiera 2 puntos x, y , y para cada $\theta \in [0, 1]$, se cumple que:

$$h(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta h(x) + (1 - \theta)h(y).$$

Luego, por la expresión (1.166), se tiene que

$$\mathbb{E}[X^2] \geq [\mathbb{E}(X)]^2,$$

lo cual nos indica que la varianza de X , medida que se determina como $\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, es no negativa. ☑

1.15. Teoremas límites

Los teoremas que se presentan en esta sección permiten tomar decisiones a partir de una muestra (ver [174]).

Teorema 1.22. Ley de los grandes números

Sean X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (independent and identically distributed (*iid*)), tales que $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ y $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ tienen un valor finito para $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces

$$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

es un estimador consistente de μ .

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [72]. ☑

Teorema 1.23. Ley débil de los grandes números

Sea $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión infinita de variables aleatorias *iid*, entonces existe una *cdf* $G(x)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\bar{X}_n \leq x \right] = G(x), \quad (1.169)$$

Si $X_1, X_2, \dots, X_r, \dots$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ , entonces la distribución límite queda:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \mu, \\ 1 & \text{si } x \geq \mu, \end{cases}$$

donde $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n$ en probabilidad.⁵

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [72]. ☑

Teorema 1.24. Teorema central del límite

Sean X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aleatorias *iid*, tales que $\mathbb{E}(X_i) = \mu_X$ y $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ son valores finitos para $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces la variable aleatoria

$$Y_n = \frac{\bar{X}_n - \mu_X}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (1.170)$$

se distribuye como una normal estándar cuando n tiende a infinito.

⁵Esto es, $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon \right] = 0$.

Demostración. Considérese la función generadora de momentos de Y_n , al aplicar las propiedades dadas en el teorema 1.9, se tiene

$$\begin{aligned} M_{Y_n}(z) &= M_{\bar{X}_n - \mu_X} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} z \right) = e^{-\mu_X \frac{\sqrt{n}}{\sigma} z} M_{S_n} \left(\frac{z}{\sigma \sqrt{n}} \right) \\ &= e^{-\mu_X \frac{\sqrt{n}}{\sigma} z} \prod_{i=1}^n \left[M_{X_i} \left(\frac{z}{\sigma \sqrt{n}} \right) \right] = e^{-\mu_X \frac{\sqrt{n}}{\sigma} z} \left[M_X \left(\frac{z}{\sigma \sqrt{n}} \right) \right]^n \end{aligned}$$

Al tomar logaritmo natural a ambos lados se tiene

$$\begin{aligned} \ln [M_{Y_n}(z)] &= -\mu_X \frac{\sqrt{n}}{\sigma} z + n \ln \left[M_X \left(\frac{z}{\sigma \sqrt{n}} \right) \right] \\ &= -\mu_X \frac{\sqrt{n}}{\sigma} z + n \ln \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{z}{\sigma \sqrt{n}} \right)^r \mu'_r(X) \right]. \end{aligned}$$

Si $|z| < \epsilon$, es suficientemente pequeño, el logaritmo del lado derecho es tratado como $\ln(1+z)$ y, usando el desarrollo de Taylor dado en (B.14), se obtiene

$$\ln [M_{Y_n}(z)] = -\mu_X \frac{\sqrt{n}}{\sigma} z + n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \left[\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{z}{\sigma \sqrt{n}} \right)^r \mu'_r(X) \right]^{k+1}.$$

Como $\mu'_1(X) = \mu_X$, agrupando los términos $k \geq 3$ en las potencias de z , se tiene

$$\ln [M_{Y_n}(z)] = \left(-\mu_X \frac{\sqrt{n}}{\sigma} + \mu_X \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right) z + \left(\frac{\mu'_2(X) - \mu_X^2}{\sigma^2} \right) \frac{z^2}{2!} + \text{términos en } z^k.$$

Dado que $\mu'_2(X) - \mu_X^2 = \sigma^2$, entonces

$$\ln [M_{Y_n}(z)] = \frac{z^2}{2!} + \text{términos en } z^k, \quad k \geq 3.$$

En una inspección a los términos en z^k , se nota que la única función de n que la contiene es el factor $n^{-\frac{k}{2}+1}$ y, como $k \geq 3$, tales términos tienden a 0 cuando n tiende a infinito; en consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln [M_{Y_n}(z)] = \frac{z^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M_{Y_n}(z) = e^{\frac{z^2}{2}}.$$

Nótese que esta última expresión es la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal estándar. \square

1.16. Pruebas de bondad de ajuste

En la construcción de un modelo de riesgo es importante determinar si una variable o un conjunto de datos sigue una pdf específica. En esta sección, se presentan algunas técnicas para realizar este tipo de contraste los cuales se denominan *pruebas de bondad de ajuste*.

1.16.1. Prueba chi-cuadrado

En [163] es propuesta la *prueba chi-cuadrado* (χ^2) como una medida de la discrepancia entre una pdf empírica (*empirical probability density function* (epdf)) y una pdf teórica. Este contraste no paramétrico indica en qué grado las diferencias existentes entre ambas, si existen, son causadas por el azar del contraste de hipótesis. Para emplear esta prueba, la información debe estar organizada en una tabla de distribución de frecuencias. La hipótesis nula de este contraste supone que los datos muestrales siguen una pdf, mientras la hipótesis alternativa nos dice que la muestra sigue otra pdf; es decir,

H_0 : la muestra sigue la pdf f_X con q parámetros,

H_1 : la muestra no sigue la pdf f_X .

Sea m el número de clases (categorías) y n_k el número de observaciones en la k -ésima clase (frecuencias absolutas). Se comparan los valores observados (frecuencias relativas) y los esperados (E_k) mediante las diferencias entre lo observado y lo teórico. Si no existe mucha diferencia, lo observado coincide con lo teórico, mientras que, si se observan grandes diferencias, lo observado y lo teórico no son similares. La fórmula de este estadístico de contraste es la siguiente:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^m \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = \sum_{k=1}^m \frac{(n_k - n\hat{p}_k)^2}{n\hat{p}_k},$$

donde

n : número total de observaciones en la muestra.

\hat{p}_k : frecuencia estimada mediante la distribución teórica.

Cuanto más cercano a 0 sea el valor de la chi-cuadrado, más ajustadas están ambas distribuciones. Recíprocamente, cuanto mayor sea el valor de χ^2 , menos aceptable es que la hipótesis sea verdadera. Esta prueba se aplica cuando se tiene una distribución teórica con q parámetros desconocidos. De acuerdo con [48], la distribución χ^2 tiene un grado de libertad menos por

cada parámetro estimado; es decir, los grados de libertad (gl) están dados por $gl = m - q - 1$.

Criterio de decisión: se rechaza H_0 cuando $\chi^2 > \chi_{gl, \alpha}^2$. En caso contrario, no existe evidencia significativa para rechazar. Aquí α denota el correspondiente nivel escogido de significancia estadística.

Nota 1.4. *Para que la convergencia a la distribución χ^2 sea aceptable, el número de observaciones esperadas en cada clase debe ser mayor o igual a 2. Cuando esto no ocurra se agrupan las observaciones de clases adyacentes hasta cumplir la condición. Al agrupar clases se reducen los grados de libertad de la chi-cuadrado.*

Los contrastes de Kolmogorov-Smirnov y Anderson-Darling son algunos de los más tradicionales de bondad de ajuste existentes y se fundamentan en la comparación directa del grado de coincidencia existente entre la **cdf** de una muestra y una **cdf** teórica específica.

1.16.2. Contraste de Kolmogorov-Smirnov

El test de Kolmogorov-Smirnov (KS) para una muestra dada es un mecanismo de “bondad de ajuste”. De acuerdo con [139] esta prueba compara la **cdf** teórica (F_t) con la **cdf** observada (F_{obs}) para encontrar el punto de divergencia máxima y así determina la probabilidad que existe de que una diferencia de esa medida se deba al azar.

La prueba KS es aplicable a variables continuas, es no paramétrica y consiste en contrastar 2 **cdf**, una muestral y otra teórica, con el propósito de determinar si los datos observados proceden de una población que sigue una **cdf** teórica específica, buscando probar que no existen diferencias significativas entre ambas **cdf**. Los datos deberán estar ordenados.

$$H_0 : F_n(x) = F_0(x) \quad \text{vs.} \quad H_1 : F_n(x) \neq F_0(x)$$

donde $F_0(x)$ es la **cdf** que se desea ajustar a la variable aleatoria X , es decir, la **cdf** que se supone sigue la muestra aleatoria (distribución teórica), $F_n(x)$ es la **cdf** empírica (*empirical cumulative distribution function* (ecdf)), calculada con base en los n valores observados de la muestra. Luego, $F_n(x)$ representa la proporción de valores observados, x_i , que son menores o iguales a x , y está dada por:

$$F_n(x) = P(X \leq x | \text{los resultados muestrales}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(x_i), \quad (1.171)$$

donde $I_{(-\infty, x]}(x_i)$ es la función indicadora de x_i en el intervalo $(-\infty, x]$.

Puesto que esta prueba busca la máxima desviación entre la *cdf* teórica y *empirical cumulative distribution function* (*ecdf*) para todo el rango de valores de x , bajo la hipótesis nula se anhela que estas desviaciones sean pequeñas y estén dentro de los límites de errores aleatorios. Por lo tanto, se evalúa la mayor desviación existente entre las 2 *cdf*; es decir,

$$D_n^{\text{KS}} = \text{máx} \{D_n^{\text{KS}^+}, D_n^{\text{KS}^-}\} \quad (1.172)$$

donde el contraste KS para la cola derecha e izquierda son, respectivamente,

$$D_n^{\text{KS}^+} = \text{máx}_x \{F_n(x) - F_0(x)\} \quad \text{y} \quad D_n^{\text{KS}^-} = \text{máx}_x \{F_0(x) - F_n(x)\}$$

La distribución de D_n^{KS} es conocida y depende del número n de observaciones. No existe diferencia significativa entre la *cdf* teórica y *ecdf* si el valor de D_n^{KS} es menor o igual que el valor crítico $D_n^{\text{KS}}(\alpha)$. Procedimiento:

1. Estimar las frecuencias esperadas de la $F_0(x)$ suponiendo un determinado número de clases, en un arreglo de rangos de menor a mayor.
2. Organizar estos valores teóricos en frecuencias acumuladas.
3. Establecer las frecuencias relativas acumuladas observadas.
4. Aplicar la ecuación (1.172), donde D_n^{KS} es la máxima discrepancia de ambas.
5. Comparar el valor estadístico D_n^{KS} en la tabla de valores críticos de $D_n^{\text{KS}}(\alpha)$.
6. Decidir si se rechaza o no la hipótesis nula.

1.16.3. Contraste de Anderson-Darling

La prueba de Anderson-Darling (AD), propuesta en [7], es un contraste no paramétrico que permite establecer si los datos observados y ordenados, $\{X_1 < X_2 < \dots < X_n\}$, proceden de una *cdf* específica $F_0(x)$. Claramente, es indispensable que los datos estén ordenados.

$$H_0 : F_n(x) = F_0(x) \quad \text{vs.} \quad H_1 : F_n(x) \neq F_0(x)$$

El estadístico de este contraste se calcula como sigue:

$$D_n^{\text{AD}} = \text{máx}_x \left\{ \frac{|F_n(x) - F_0(x)|}{\sqrt{F_0(x)(1 - F_0(x))}} \right\} \quad (1.173)$$

donde $F_0(x)$ es la *cdf* teórica y $F_n(x)$ es la *ecdf* dada en (1.171).

El contraste AD es una variación de la prueba KS en la que se le da más peso a las colas de la *cdf*, a diferencia de la prueba KS, en la que se ponderan más los datos que se localizan en el centro de la *cdf*.

Capítulo
dos
Modelos de
frecuencia

Para modelar el riesgo asociado a una cartera de pólizas o de inversión en un periodo fijo, se procede en varias etapas, analizando sucesivamente:

- El proceso de llegada de reclamos o pérdidas,
- El proceso de conteo de reclamos o pérdidas,
- El proceso total de reclamaciones o pérdidas y
- El proceso de reserva o excedentes.

El presente capítulo está destinado completamente a la modelación del número de reclamos (pérdidas). Las funciones de distribuciones de frecuencias, término usado en este capítulo para referirse a las pmf que se emplean para modelar riesgo, son menos que las utilizadas para la severidad. Una clasificación aproximada puede dividir las funciones de distribuciones de frecuencias en 3 clases: clásicas, cero infladas (ZI) y cero truncadas (ZT). Las clásicas son las pmf usuales de Poisson, geométrica, binomial, hipergeométrica, etc. Las cero infladas son las distribuciones en las que la posibilidad de obtener el valor 0 es muy alta. Estas distribuciones se construyen tomando una probabilidad para cero (frecuencia de este valor) y las probabilidades restantes se ajustan adecuadamente. Las cero truncadas no son muy útiles en riesgo.

Las funciones de distribuciones de frecuencias también se clasifican en términos de su estructura: simples o compuestas. Los miembros de la última clase se obtienen mezclando una pmf con otra. En este capítulo se muestra el modelo Pólya-Aeppli, que es una clase de distribución de frecuencia compuesta (Poisson-geométrica) que es muy popular en riesgo.

2.1. Modelos probabilísticos para modelar el número de reclamos o pérdidas

En esta sección, se considera el índice de dispersión para establecer la pmf que mejor se ajusta al modelar el número N de reclamos o pérdidas.

Tabla 2.1. Índice de dispersión

| Distribución frecuencia | Poisson | Binomial negativa | Binomial |
|-------------------------|---------|-------------------|----------|
| I_N | 1 | $\frac{1}{p}$ | q |

Donde I_N denota el índice de dispersión de N .

Fuente: elaboración propia.

En [126], con base en una muestra de tamaño M , se construye un intervalo de confianza (IC) para I_N del $100(1 - \alpha) \%$ dado por

$$IC_{(1-\alpha)}(I_N) = \left(d \pm z_{(1-\alpha/2)} d \sqrt{\frac{1}{M} \left[2 + \frac{(d-1)(3d-1)}{s_n^2} \right]} \right) \quad (2.1)$$

donde $d = \frac{s_n^2}{\bar{n}}$ es el índice de dispersión muestral y \bar{n} y s_n^2 son las medidas de media y varianza muestrales. A partir de los valores de la tabla 2.1 se propone un método empírico para elegir la pmf más adecuada que consiste en calcular d :

1. Cuando $d \approx 1$, se sugiere emplear la pmf de Poisson.

La estimación del parámetro λ , tanto por el método de momentos como por el método de máxima verosimilitud¹, es dada por

$$\hat{\lambda} = \frac{\text{La media del número de}}{\text{reclamos (pérdidas) observados}} = \bar{n}. \quad (2.2)$$

Este modelo es el más sencillo; sin embargo, se ha evidenciado que no es adecuado cuando la cartera es heterogénea, es decir, cuando se tienen distintos niveles de riesgo.

2. Si $d > 1$, existe sobredispersión. En este caso, se sugiere usar la pmf binomial negativa. Este modelo es una clase de Poisson heterogéneo y proporciona mejores ajustes cuando la cartera es heterogénea.

Las estimaciones de los parámetros r y q se pueden realizar mediante el método de momentos o el de máxima verosimilitud. Usando el primer método, se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{r} \frac{\hat{q}}{1 - \hat{q}} &= \frac{\text{La media del número de}}{\text{reclamos (pérdidas) observados}} = \bar{n} \\ \hat{r} \frac{\hat{q}}{(1 - \hat{q})^2} &= \frac{\text{La varianza del número de}}{\text{reclamos (pérdidas) observados}} = s_n^2. \end{aligned}$$

Luego,

$$\hat{q} = 1 - \frac{\bar{n}}{s_n^2} = 1 - \frac{1}{d} \quad \text{y} \quad \hat{r} = \frac{\bar{n}^2}{s_n^2 - \bar{n}} = \frac{\bar{n}}{d-1}. \quad (2.3)$$

¹El lector puede consultar el apéndice C.

Para estimar los parámetros por el método de máxima verosimilitud, se emplea la expresión (1.83). Luego, las ecuaciones (2.3) quedan

$$\widehat{r} \widehat{\beta} = \bar{n} \quad \text{y} \quad \widehat{r} \widehat{\beta} (1 + \widehat{\beta}) = s_n^2 \quad (2.4)$$

Por lo tanto,

$$\widehat{q} = \frac{\widehat{\beta}}{1 + \widehat{\beta}} = \frac{\bar{n}}{\bar{n} + \widehat{r}},$$

donde el parámetro \widehat{r} es la raíz de la función

$$f(r) = \ln \left(1 + \frac{\bar{n}}{r} \right) - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \left[\sum_{m=0}^{j-1} \frac{1}{m+r} \right] \quad \text{con} \quad \omega_j = \frac{n_j}{\sum_{i=0}^{\infty} n_i}.$$

Mediante el método de Newton-Raphson se establece que

$$r_{k+1} = r_k - \frac{f(r_k)}{f'(r_k)} \quad \text{con} \quad r_k \neq 0, \quad (2.5)$$

donde el valor inicial r_0 es el estimador de r obtenido por el método de los momentos y dado en (2.3). Por otra parte,

$$f'(r) = -\frac{\bar{n}}{r^2 + \bar{n}r} + \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \left[\sum_{m=0}^{j-1} \frac{1}{(m+r)^2} \right].$$

3. Cuando $d < 1$, hay presencia de subdispersión. Luego, se recomienda usar la **pmf** binomial.

Las estimaciones de los parámetros m y p se establecen por el método de los momentos o por el de máxima verosimilitud. Usando el primer método, se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{m} \widehat{p} &= \begin{array}{l} \text{La media del número de} \\ \text{reclamos (pérdidas) observados} \end{array} = \bar{n} \\ \widehat{m} \widehat{p} \widehat{q} &= \begin{array}{l} \text{La varianza del número de} \\ \text{reclamos (pérdidas) observados} \end{array} = s_n^2. \end{aligned}$$

Luego,

$$\widehat{p} = 1 - \frac{s_n^2}{\bar{n}} = 1 - d \quad \text{y} \quad \widehat{m} = \frac{\bar{n}^2}{\bar{n} - s_n^2} = \frac{\bar{n}}{1 - d}. \quad (2.6)$$

Al emplear el método de estimación de máxima verosimilitud, se tiene que la función de verosimilitud es

$$L(m, p) = \prod_{k=0}^m \left[\binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \right]^{n_k} \quad (2.7)$$

Al aplicar logaritmo natural se obtiene

$$\ln [L(m, p)] = \sum_{k=0}^m n_k \left[\ln \binom{m}{k} + k \ln p + (m - k) \ln(1 - p) \right]$$

Cuando m es conocido y fijo, solo se necesita calcular la derivada parcial de $\ln [L(m, p)]$ respecto a p ; es decir,

$$\frac{\partial}{\partial p} \ln [L(m, p)] = \sum_{k=0}^m n_k \left[\frac{k}{\widehat{p}} - \frac{m - k}{1 - \widehat{p}} \right]$$

Al igualar a cero se llega a

$$m \widehat{p} \sum_{k=0}^m n_k = \sum_{k=0}^m k n_k \quad \Rightarrow \quad \widehat{p} = \frac{\bar{n}}{m}.$$

2.1.1. Familia de distribuciones de Panjer

En esta sección se usa la familia de distribuciones de Panjer dada en la sección 1.12.2, para modelar la pmf del número N de reclamos o pérdidas.

Teorema 2.1. Si la pmf de N satisface la relación (1.98) y los parámetros α y β cumplen que $\alpha + \beta > 0$, se dice que existe

- i) *Equidispersión*, $\mathbb{E}(N) = \text{Var}(N)$, siempre que $\alpha = 0$.
- ii) *Sobredispersión*, $\mathbb{E}(N) < \text{Var}(N)$, cuando $0 < \alpha < 1$.
- iii) *Subdispersión*, $\mathbb{E}(N) > \text{Var}(N)$, siempre que $\alpha < 0$.

Demostración. Supóngase que $\alpha + \beta > 0$. La prueba consiste en un cálculo directo; para ello, se igualan las expresiones dadas en (1.105) y (1.106):

- i) Si $\mathbb{E}(N) = \text{Var}(N)$, entonces

$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{E}(N) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{1}{1 - \alpha}$$

lo cual se tiene si $\alpha = 0$.

- ii) Si $\mathbb{E}(N) < \text{Var}(N)$ entonces al resolver la desigualdad se tiene que $0 < \alpha < 1$.
- iii) Finalmente, cuando $\mathbb{E}(N) > \text{Var}(N)$, Luego, $1 - \alpha > 1$; es decir, $\alpha < 0$. ✓

La figura 2.1 muestra las regiones admitidas por la familia de Panjer.

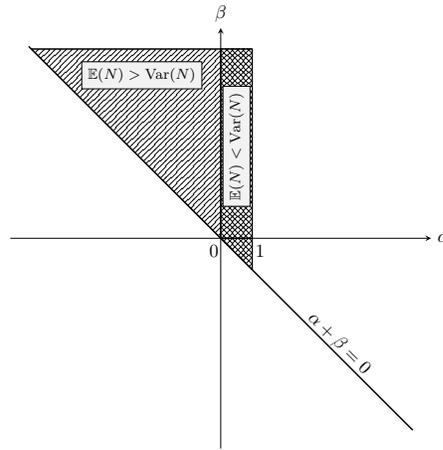


Figura 2.1. Regiones permitidas
Fuente: adaptada de [195, pág. 33]

2.1.2. Estimación de los parámetros de la familia de Panjer

Las estimaciones de los parámetros α y β se establecen por los siguientes métodos:

1. Método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO)

Si $P[N = k] \neq 0, \forall k$, la relación (1.98) se reescribe como sigue:

$$\frac{P[N = k]}{P[N = k - 1]} = \alpha + \frac{\beta}{k} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Luego, usando regresión hiperbólica se estiman por MCO los parámetros, donde

$$y_k = \frac{P[N = k]}{P[N = k - 1]} \quad \text{y} \quad x_k = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Por lo tanto, los parámetros son la solución del siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n \frac{y_k}{k} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Además, se puede realizar el contraste de significancia de cada uno de los parámetros estimados.

2. Método de momentos, si las estimaciones que se obtienen en (2.8) satisfacen que:

- $\alpha + \beta > 0$ y $\alpha < 1$. Despejando los parámetros de las expresiones dadas en (1.105) y (1.106), se tiene que

$$\widehat{\alpha} = 1 - \frac{\bar{n}}{s_n^2} \quad \text{y} \quad \widehat{\beta} = (1 - \widehat{\alpha})\bar{n} - \widehat{\alpha}. \quad (2.9)$$

Nótese que si $\widehat{\alpha} > 0$, entonces las estimaciones de $\widehat{\alpha}$ y $\frac{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}}{\widehat{\alpha}}$ coinciden con los parámetros estimados por el método de los momentos para la binomial negativa dados en (2.3).

- $\alpha + \beta = 0$ y $0 < \alpha < 1$. Despejando los parámetros de las expresiones dadas en (1.108) y (1.109), se llega a

$$\widehat{\alpha} = 1 - \frac{\bar{n}}{s_n^2 + \bar{n}^2} \quad \text{y} \quad \widehat{\beta} = -\widehat{\alpha}. \quad (2.10)$$

3. Método de máxima verosimilitud,

$$\widehat{\beta} = (1 - \widehat{\alpha})\bar{n} - \widehat{\alpha}, \quad (2.11)$$

y el parámetro $\widehat{\alpha}$ se determina numéricamente mediante el método de Newton-Raphson; es decir,

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f(\alpha_j)}{f'(\alpha_j)}, \quad \alpha_j \neq 0, \quad (2.12)$$

donde el valor inicial α_0 es el estimador de $\widehat{\alpha}$ obtenido por el método de los momentos y dado en (2.9). Por otra parte,

$$f(\alpha) = \ln(1 - \alpha) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \left[\sum_{m=0}^{j-1} \frac{\alpha}{m\alpha + (1 - \alpha)\bar{n}} \right], \quad \omega_j = \frac{n_j}{\sum_{i=0}^{\infty} n_i}$$

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{1 - \alpha} + \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \left[\sum_{m=0}^{j-1} \frac{\bar{n}}{(m\alpha + (1 - \alpha)\bar{n})^2} \right].$$

Cuando $\widehat{\alpha} > 0$ las estimaciones de los parámetros $\widehat{\alpha}$ y $\frac{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}}{\widehat{\alpha}}$ coinciden con los parámetros estimados por el método de máxima verosimilitud para la binomial negativa dados en (2.4).

Ejemplo 2.1. En la tabla 2.2 se presentan los datos dados en [8] correspondientes a la tercera feria sueca del seguro de automóvil. Determine las respectivas aproximaciones numéricas a las pmf que mejor ajustan los datos, proporcionando las estimaciones de sus parámetros.

Tabla 2.2. Número de reclamos o pérdidas

| Número de reclamos k | Frecuencia observada n_k |
|---------------------------|-------------------------------|
| 0 | 25 356 |
| 1 | 1 521 |
| 2 | 282 |
| 3 | 58 |
| 4 | 16 |
| 5 | 4 |
| ≥ 6 | 1 |
| Total | 27 238 |

Fuente: tomada de [8, pág. 15].

donde n_k es el número de vehículos que han tenido k siniestros reales.

Solución. Usando (1.2), se establece la frecuencia relativa $\tilde{f}(k) = \frac{n_k}{n}$ y, luego, se halla

$$\bar{n} = \frac{2\,349}{27\,238} \quad \text{y} \quad s_n^2 = \frac{91\,531\,193}{741\,908\,644}.$$

El intervalo de confianza al 95 % para I_N : (1.36818, 1.49297). Entre las distribuciones dadas se buscará la pmf que mejor ajuste los datos.

1. Distribución de Poisson

Aunque $d > 1$, se presenta también la respectiva aproximación con la pmf Poisson, con fines de comparación. Por los métodos de los momentos y máxima verosimilitud, se obtiene que $\hat{\lambda} = \bar{n}$.

2. Distribución binomial negativa

Por el método de los momentos se determinan los valores de los parámetros mediante la expresión (2.3). En este caso, se obtiene que

$$\hat{q} = \frac{27\,549\,131}{91\,531\,193} \approx 0.3009808 \quad \text{y} \quad \hat{r} = \frac{5\,517\,801}{27\,549\,131} \approx 0.20028947.$$

Por el método de máxima verosimilitud se determina el parámetro r de la pmf binomial negativa usando la expresión (2.5) y se llega a:

El valor de \hat{q} se despeja de la expresión (2.4), $\hat{q} = 0.303021419$.

3. Distribución de Panjer

Para determinar los parámetros de la familia de Panjer se usan las expresiones dadas en (2.9) y se llega a

$$\hat{\alpha} = \frac{27\,549\,131}{91\,531\,193}, \quad \text{y} \quad \hat{\beta} = -\frac{22\,031\,330}{91\,531\,193}.$$

Tabla 2.3. Iteraciones de Newton Raphson para encontrar r

| i | r_i |
|-----|-------------|
| 0 | 0.200289476 |
| 1 | 0.198363625 |
| 2 | 0.198359918 |
| 3 | 0.198359911 |
| 4 | 0.198359911 |
| 5 | 0.198359911 |

Fuente: elaboración propia.

Los resultados de los parámetros estimados se resumen en la tabla 2.4.

Tabla 2.4. Estimaciones para ajustar pmf clásicas

| Distribuciones teóricas | Parámetros estimados | |
|----------------------------|----------------------|------------|
| | λ, r, α | q, β |
| Poisson | 0.0862398 | - |
| BN | 0.1983599 | 0.3030214 |
| Panjer | 0.3009808 | -0.2406975 |

Fuente: elaboración propia.

Por otra parte, para ajustar la distribución de Panjer, la probabilidad inicial se evalúa reemplazando α y β en la expresión (1.102)

$$P(N = 0) = \left(1 - \frac{27\,549\,131}{91\,531\,193}\right)^{1 - \frac{22\,031\,330}{27\,549\,131}} = 0.93079235.$$

En la tabla 2.5 se presentan las aproximaciones. Emplear Panjer y BN resulta más apropiado para ajustar los datos que usar la pmf Poisson.

Para usar la prueba de bondad de ajuste chi-cuadrado dada en la sección 1.16.1, se necesita que se cumpla que $E_k \geq 2, \forall k$; por ende, las clases con frecuencia pequeña se agrupan con las clases adyacentes. Para 2 y 3 grados de libertad y $\alpha = 0.05$, de la tabla G.3 se obtiene que los límites de significancia de la χ^2 son

$$\chi_{2,\alpha}^2 = 5.99146 \quad \text{y} \quad \chi_{3,\alpha}^2 = 7.81473.$$

En este caso, se rechaza H_0 si $\chi_v^2 > 7.81473$. Para los valores de χ^2 menores a 7.81473 no hay evidencia suficiente para rechazar los modelos propuestos y, en consecuencia, al nivel de 5 %, las pmf BN y Panjer dan un ajuste razonable a los datos. \checkmark

Tabla 2.5. Comparación de distribuciones ajustadas

| N.º de rec. k | Reclamos observados | Distribución teórica ajustada | | | |
|--------------------|------------------------|-------------------------------|---------------------|--------------------------|--------------------------|
| | | Poisson | Panjer ¹ | Bin. negat. ¹ | Bin. negat. ² |
| 0 | 25 356 | 24 987.44 | 25 352.92 | 25 352.92 | 25 355.74 |
| 1 | 1 521 | 2 154.91 | 1 528.36 | 1 528.36 | 1 524.06 |
| 2 | 282 | 92.92 | 276.07 | 276.07 | 276.72 |
| 3 | 58 | 2.67 | 60.94 | 60.94 | 61.44 |
| 4 | 16 | 0.06 | 14.68 | 14.68 | 14.89 |
| 5 | 4 | 0.00 | 3.71 | 3.71 | 3.79 |
| ≥ 6 | 1 | 0.00 | 0.97 | 0.97 | 0.99 |
| Total | 27 238 | 27 238.00 | 27 237.65 | 27 237.65 | 27 237.63 |
| χ^2 | | 2 707.72 | 0.442 | 0.442 | 0.392 |
| ν | | 2 | 3 | 3 | 3 |

¹ Estimación por método de los momentos.

² Estimación por máxima verosimilitud.

Fuente: elaboración propia.

2.1.3. Distribución generalizada de Panjer

En [161] se presenta una clase de distribuciones de frecuencia de los reclamos (pérdidas) que tiene la propiedad de que las probabilidades sucesivas pueden ser escritas como la razón de 2 polinomios. Esta clase de distribuciones generaliza la distribución de Panjer y es dada por

$$P_N(n) = \frac{h_m(n)}{g_m(n)} P_N(n-1), \quad (2.13)$$

donde $g_m(n)$ y $h_m(n)$ son polinomios no nulos en la variable n y ambos de grado m ,

$$g_m(n) = \sum_{i=0}^m \frac{\Gamma(n+1)\alpha_i}{\Gamma(n+1-i)} \quad \text{y} \quad h_m(n) = \sum_{i=0}^m \frac{\Gamma(n)\beta_i}{\Gamma(n-i)}.$$

Nótese que los coeficientes de los polinomios se especifican hasta la constante de multiplicación.

2.1.3.1. Casos particulares

De acuerdo con [161], algunas pmf que satisfacen (2.13) son las siguientes:

1. Distribución de Panjer

Sea $m = 1$ en (2.13) entonces los polinomios quedan

$$g_1(n) = \alpha_0 + n\alpha_1 \quad \text{y} \quad h_1(n) = \beta_0 - \beta_1 + n\beta_1.$$

Luego,

$$(\alpha_0 + n\alpha_1)P_N(n) = (\beta_0 - \beta_1 + n\beta_1)P_N(n-1).$$

Al tomar $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$ y despejar se llega a

$$P_N(n) = \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_0 - \beta_1}{n\alpha_1} \right) P_N(n-1).$$

Cuando $\beta_1 < \alpha_1$ esta fórmula coincide con la pmf dada en (1.98).

2. Distribución hipergeométrica de parámetros (M, M_1, r) . En este caso,

$$P[N = n] = \frac{\binom{M_1}{n} \binom{M-M_1}{r-n}}{\binom{M}{r}}$$

donde $\max\{0, r - (M - M_1)\} \leq n \leq \min\{M_1, r\}$. Entonces,

$$\frac{P[N = n]}{P[N = n-1]} = \frac{\binom{M_1}{n} \binom{M-M_1}{r-n}}{\binom{M_1}{n-1} \binom{M-M_1}{r+1-n}}.$$

Este cociente se simplifica expandiendo los coeficientes binomiales mediante su forma factorial:

$$\begin{aligned} \frac{P[N = n]}{P[N = n-1]} &= \frac{r+1-n}{n} \frac{M_1 - n + 1}{M - M_1 - r + n} \\ &= \frac{n^2 - (M_1 + r + 2)n + (M_1 + 1)(r + 1)}{n^2 + (M - M_1 - r)n}. \end{aligned}$$

Por otra parte, si $m = 2$ en (2.13), entonces cada uno de los polinomios está dado por

$$\begin{aligned} g_2(n) &= \sum_{i=0}^2 \frac{\Gamma(n+1)\alpha_i}{\Gamma(n+1-i)} = \alpha_2 n^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)n + \alpha_0 \\ h_2(n) &= \sum_{i=0}^2 \frac{\Gamma(n)\beta_i}{\Gamma(n-i)} = \beta_2 n^2 + (\beta_1 - 3\beta_2)n + (\beta_0 - \beta_1 + 2\beta_2). \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes se llega a

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0, & \alpha_1 &= M - M_1 - r + 1, & \alpha_2 &= 1, \\ \beta_0 &= rM_1, & \beta_1 &= -(M_1 + r - 1), & \beta_2 &= 1. \end{aligned}$$

Teorema 2.2. Si la pmf de la variable aleatoria N , satisface la recursión (2.13) y $\alpha_j - \beta_j \neq 0$ para algún j , entonces

$$\sum_{j=1}^m [\alpha_j - \beta_j] \mu_{[j]}(N) = \alpha_0 P[N = 0] - (\alpha_0 - \beta_0), \quad m \geq 1, \quad (2.14)$$

donde $\mu_{[j]}(N)$ denota el momento factorial de orden j de N .

Demostración. Queda como ejercicio para el lector. ☑

2.2. Mezclas de dos distribuciones de frecuencias

En la sección anterior se mostró que la pmf asociada a la frecuencia exhibe sobredispersión y, por lo tanto, emplear la pmf Poisson no es adecuado. En esta sección, se indica cómo modelar la pmf de frecuencias usando mezclas de distribuciones, las cuales se basan en el artículo [45]. De acuerdo con (1.17) una variable aleatoria N se dice que sigue una mezcla de pmf si se expresa como

$$P(N = n) = \omega P(N_1 = n) + (1 - \omega) P(N_2 = n), \quad 0 \leq \omega \leq 1,$$

donde N_1 y N_2 son variables aleatorias discretas.

2.2.1. Modelos para conteos inflados con ceros

Este tipo de modelos es empleado cuando aparece una frecuencia alta de observaciones iguales a cero, en este apartado este fenómeno de exceso de ceros se modela de 2 maneras distintas.

2.2.1.1. Distribución Poisson inflada en ceros

En este tipo de distribución se considera la mezcla entre una pmf Poisson con parámetro λ y una pmf degenerada en cero; es decir,

$$P(N = n) = \begin{cases} \omega e^{-\lambda} + (1 - \omega), & \text{si } n = 0 \\ \omega \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, & \text{si } n > 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Nótese que el k -ésimo momento factorial de N está dado por

$$\mu_{[k]}(N) = \omega \lambda^k, \quad k \geq 1. \quad (2.16)$$

Las estimaciones de los parámetros se establecen por el método de los momentos; para ello, usando la expresión anterior, se obtiene

$$\mu_{[1]}(N) = \omega\lambda \quad \text{y} \quad \mu_{[2]}(N) = \omega\lambda^2.$$

Al igualar con los primeros momentos factoriales muestrales de N , se tiene

$$\widehat{\lambda} = \frac{m_{[2]}}{\bar{n}} \quad \text{y} \quad \widehat{\omega} = \frac{\bar{n}}{\widehat{\lambda}}.$$

Otra forma de estimar los parámetros es usando la frecuencia observada para $n = 0$ y el primer momento muestral de N ; es decir,

$$f(0) = P(N = 0) = 1 - \omega(1 - e^{-\lambda}) \quad \text{y} \quad \bar{n} = \omega\lambda.$$

Al multiplicar la primera expresión por λ , se obtiene

$$\lambda f(0) = \lambda - \bar{n}(1 - e^{-\lambda}) \quad \text{o} \quad \frac{1 - f(0)}{\bar{n}} = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

La estimación del parámetro λ se obtiene resolviendo esta ecuación por cualquier método numérico con valor inicial λ_0 igual al estimador de λ obtenido por el método de los momentos. Por otra parte,

$$I_N = 1 + (1 - \widehat{\omega})\widehat{\lambda}.$$

Luego, $I_N > 1$; es decir, esta mezcla permite capturar la sobredispersión.

2.2.1.2. Distribución binomial negativa inflada en ceros

En este caso, se considera una mezcla entre la **pmf** binomial negativa con parámetros (r, p) y la **pmf** degenerada en cero; luego,

$$P(N = n) = \begin{cases} \omega p^r + (1 - \omega), & \text{si } n = 0 \\ \omega \binom{r+n-1}{n} p^r q^n, & \text{si } n > 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Nótese que el k -ésimo momento factorial de N está dado por

$$\mu_{[k]}(N) = \omega \left(\frac{q}{p}\right)^k \prod_{j=0}^{k-1} (r+j), \quad k \geq 1 \quad (2.18)$$

y, además, satisfacen la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\mu_{[k+1]}(N) = (r+k) \frac{q}{p} \mu_{[k]}(N), \quad k \geq 1. \quad (2.19)$$

En esta expresión se ha eliminado ω . Las estimaciones de parámetros se establecen por el método de los momentos, usando la expresión (2.19) se obtiene

$$\mu_{[2]}(N) = (r+1)\frac{q}{p}\mu_{[1]}(N) \quad \text{y} \quad \mu_{[3]}(N) = (r+2)\frac{q}{p}\mu_{[2]}(N).$$

Al igualar con los primeros momentos factoriales muestrales de N , se tiene

$$\frac{1-\hat{p}}{\hat{p}} = \frac{\bar{n}m_{[3]} - m_{[2]}^2}{\bar{n}m_{[2]}} \quad \text{y} \quad \hat{r} = \frac{m_{[2]}^2}{\bar{n}m_{[3]} - m_{[2]}^2} - 1.$$

La estimación del parámetro ω se obtiene reemplazando estas estimaciones en la respectiva expresión del primer momento de N .

Otra forma de estimar los parámetros es usando la frecuencia observada para $n = 0$ y los 2 primeros momentos factoriales muestrales de N ; es decir,

$$f(0) = 1 - \omega(1 - p^r), \quad \bar{n} = \omega r \varrho, \quad m_{[2]} = \omega r(r+1)\varrho^2,$$

donde $\varrho = \frac{q}{p}$ es la razón de probabilidades. Luego, se obtiene

$$\frac{1-f(0)}{\bar{n}} = \frac{1 - (1 + \varrho)^{-r}}{r\varrho}.$$

Las estimaciones de los parámetros r y p se obtienen resolviendo esta ecuación por cualquier método numérico con valores iniciales r_0 y p_0 iguales a los estimadores de r y p obtenidos por el método de los momentos. Por otra parte,

$$I_N = 1 + [1 + (1 - \hat{\omega})\hat{r}]^{\frac{\hat{q}}{\hat{p}}},$$

luego, $I_N > 1$; es decir, esta mezcla permite capturar la sobredispersión.

2.2.1.3. Mezcla de dos pmf Poisson

En este caso, sea $N_j \sim \text{Poisson}(\lambda_j)$ para $j = 1, 2$; luego,

$$P(N = n) = \omega \frac{\lambda_1^n}{n!} e^{-\lambda_1} + (1 - \omega) \frac{\lambda_2^n}{n!} e^{-\lambda_2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

En lo que sigue, se supone sin pérdida de generalidad que $\lambda_1 > \lambda_2$. Nótese que el k -ésimo momento factorial de N está dado por

$$\mu_{[k]}(N) = \omega \lambda_1^k + (1 - \omega) \lambda_2^k, \quad (2.21)$$

y, además, satisfacen la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\mu_{[k+1]}(N) = \theta \mu_{[k]}(N) - \gamma \mu_{[k-1]}(N), \quad k \geq 1, \quad (2.22)$$

donde $\theta = \lambda_1 + \lambda_2$ y $\gamma = \lambda_1 \lambda_2$. En esta expresión se ha eliminado ω . Las estimaciones de parámetros se establecen por el método de los momentos. Para ello, usando la expresión dada en (2.22), se obtiene

$$\mu_{[2]}(N) = \theta \mu_N - \gamma \quad \text{y} \quad \mu_{[3]}(N) = \theta \mu_{[2]}(N) - \gamma \mu_N.$$

Al igualar con los primeros momentos factoriales muestrales de N , se tiene

$$\hat{\theta} = \frac{m_{[3]} - \bar{n}m_{[2]}}{m_{[2]} - \bar{n}^2} \quad \text{y} \quad \hat{\gamma} = \frac{\bar{n}m_{[3]} - m_{[2]}^2}{m_{[2]} - \bar{n}^2}.$$

Las estimaciones de los parámetros λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación

$$(m_{[2]} - \bar{n}^2)\lambda^2 - (m_{[3]} - \bar{n}m_{[2]})\lambda + (\bar{n}m_{[3]} - m_{[2]}^2) = 0.$$

Luego, las estimaciones están dadas por

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{\hat{\theta}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right)^2 - \hat{\gamma}} \quad \text{y} \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{\hat{\theta}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right)^2 - \hat{\gamma}} \quad (2.23)$$

Nótese que $\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2 = \sqrt{\hat{\theta}^2 - 4\hat{\gamma}}$; luego, $\hat{\theta}^2 > 4\hat{\gamma}$. Una vez se determinan los valores de $\widehat{\lambda}_1$ y $\widehat{\lambda}_2$, tomando $k = 1$ en (2.21), se obtiene la estimación de ω :

$$\widehat{\omega} = \frac{\mu(N) - \mu(N_2)}{\mu(N_1) - \mu(N_2)} = \frac{\bar{n} - \widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2}. \quad (2.24)$$

Por otra parte, nótese que $I_N > 1$, ya que

$$I_N = 1 + \frac{\widehat{\omega}(1 - \widehat{\omega}) (\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2)^2}{\widehat{\omega}\widehat{\lambda}_1 + (1 - \widehat{\omega})\widehat{\lambda}_2} = 1 + \theta - \bar{n} - \frac{\gamma}{\bar{n}}.$$

2.2.1.4. Mezcla de dos pmf binomiales negativas

En este caso, sea $N_j \sim BN(r, p_j)$ para $j = 1, 2$; luego,

$$P(N = n) = \binom{r+n-1}{n} [\omega p_1^r q_1^n + (1 - \omega) p_2^r q_2^n], \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.25)$$

En lo que sigue, se supone sin pérdida de generalidad que $p_2 > p_1$. Nótese que el k -ésimo momento factorial de N está dado por

$$\mu_{[k]}(N) = \left[\omega \left(\frac{q_1}{p_1} \right)^k + (1 - \omega) \left(\frac{q_2}{p_2} \right)^k \right] \prod_{j=0}^{k-1} (r + j), \quad k \geq 1. \quad (2.26)$$

Estos momentos satisfacen la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\mu_{[k+1]}(N) = (r + k) [\theta \mu_{[k]}(N) - (r + k - 1) \gamma \mu_{[k-1]}(N)], \quad (2.27)$$

donde $\theta = \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2}$ y $\gamma = \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2}$. En esta expresión se ha eliminado ω . De nuevo, las estimaciones de parámetros se establecen por el método de los momentos. Para ello, usando la expresión dada en (2.27), se obtiene que

$$\mu_{[2]}(N) = (r+1)[\theta \mu_N - r\gamma] \quad \text{y} \quad \mu_{[3]}(N) = (r+2)[\theta \mu_{[2]}(N) - (r+1)\gamma \mu_N],$$

al igualar con los primeros momentos factoriales muestrales de N , se tiene

$$\hat{\theta} = \frac{r m_{[3]} - (r+2) \bar{n} m_{[2]}}{(r+2)[r m_{[2]} - (r+1) \bar{n}^2]} \quad \text{y} \quad \hat{\gamma} = \frac{\bar{n} m_{[3]} - (r+1)^{-1} (r+2) m_{[2]}^2}{(r+2)[r m_{[2]} - (r+1) \bar{n}^2]},$$

entonces r es la raíz real más grande de la siguiente función cúbica

$$f(r) = 2m_{[3]}^2 + [(m_{[3]} - \bar{n}m_{[2]})^2 - (m_{[4]} - m_{[2]}^2)(m_{[2]} - \bar{n}^2)](r+1)^2(r+2) + [(m_{[4]} - 4m_{[3]}\bar{n} + 3m_{[2]}^2)m_{[2]}(r+1) - 2(m_{[3]}^2 - m_{[2]}^3)](r+2). \quad (2.28)$$

Si los primeros cuatro momentos factoriales muestrales satisfacen que

$$\frac{m_{[3]} - \bar{n}m_{[2]}}{m_{[2]} - \bar{n}^2} = \frac{m_{[4]} - m_{[2]}^2}{m_{[3]} - \bar{n}m_{[2]}} \quad (2.29)$$

entonces la solución de (2.28) está dada por

$$r = \frac{2m_{[3]}^2 - 11m_{[2]}^3 - 3m_{[4]}m_{[2]} + 12\bar{n}m_{[2]}m_{[3]}}{2m_{[2]}(m_{[4]} + 3m_{[2]}^2 - 4\bar{n}m_{[3]})} + \sqrt{\frac{(m_{[2]}m_{[4]} - 2m_{[3]}^2 + m_{[2]}^3 - 4\bar{n}m_{[3]}m_{[2]})^2 - 16m_{[3]}^2m_{[2]}^3}{4(m_{[2]}(m_{[4]} + 3m_{[2]}^2 - 4\bar{n}m_{[3]}))^2}}.$$

El valor de r debe ser tal que

$$\left| 2\hat{r} - \frac{\hat{\theta}\bar{n}}{\hat{\gamma}} \right| < \frac{\bar{n}}{\hat{\gamma}} \sqrt{\hat{\theta}^2 - 4\hat{\gamma}}.$$

Es claro que siempre $\widehat{\theta}^2 > 4\widehat{\gamma}$. Por otra parte, las estimaciones de las razones de probabilidades $\varrho = \frac{q}{p}$ son las raíces de la ecuación cuadrática

$$(rm_{[2]} - (r+1)\bar{n}^2)\varrho^2 - \left(\frac{rm_{[3]}}{r+2} - \bar{n}m_{[2]}\right)\varrho + \left(\frac{\bar{n}m_{[3]}}{r+2} - \frac{m_{[2]}^2}{r+1}\right) = 0.$$

Luego, las estimaciones de las razones de probabilidades están dadas por

$$\frac{1 - \widehat{p}_1}{\widehat{p}_1} = \frac{\widehat{\theta}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\widehat{\theta}}{2}\right)^2 - \widehat{\gamma}} \quad \text{y} \quad \frac{1 - \widehat{p}_2}{\widehat{p}_2} = \frac{\widehat{\theta}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\widehat{\theta}}{2}\right)^2 - \widehat{\gamma}}. \quad (2.30)$$

Despejando, se obtienen los parámetros p_1 y p_2 . Una vez se determinan p_1 y p_2 , la estimación de ω se obtiene como

$$\widehat{\omega} = \frac{\bar{n}\widehat{p}_2 - \widehat{r}\widehat{q}_2}{\widehat{p}_2 - \widehat{p}_1} \frac{\widehat{p}_1}{\widehat{r}}. \quad (2.31)$$

Nótese que $I_N > 1$, ya que

$$\begin{aligned} I_N &= 1 + \frac{r\omega(1-\omega)(p_1q_2 - p_2q_1)^2 + \omega p_2^2 q_1^2 + (1-\omega)p_1^2 q_2^2}{p_1 p_2 (\omega p_2 q_1 + (1-\omega)p_1 q_2)} \\ &= 1 - \bar{n} + (r+1)[\theta - r\gamma\bar{n}^{-1}]. \end{aligned}$$

2.2.1.5. Mezcla de dos pmf binomiales

En este caso, sea $N_j \sim \text{Bin}(m, p_j)$ para $j = 1, 2$; luego,

$$P(N = n) = \binom{m}{n} [\omega p_1^n q_1^{m-n} + (1-\omega)p_2^n q_2^{m-n}], \quad m \geq 3, \quad (2.32)$$

donde $n = 0, 1, \dots, m$. Se supone sin pérdida de generalidad que $p_1 > p_2$. Nótese que el k -ésimo momento factorial de N está dado por

$$\mu_{[k]}(N) = \frac{m!}{(m-k)!} [\omega p_1^k + (1-\omega)p_2^k] \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.33)$$

Estos momentos satisfacen la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\mu_{[k+1]}(N) = (m-k)[\theta \mu_{[k]}(N) - (m-k+1)\gamma \mu_{[k-1]}(N)], \quad (2.34)$$

donde $\theta = p_1 + p_2$ y $\gamma = p_1 p_2$. En esta expresión se ha eliminado ω . De nuevo, las estimaciones de parámetros se establecen por el método de los momentos. Para ello, usando la expresión dada en (2.34), se obtiene que

$$\begin{aligned} \mu_{[2]}(N) &= (m-1)[\theta \mu_N - m\gamma], \\ \mu_{[3]}(N) &= (m-2)[\theta \mu_{[2]}(N) - (m-1)\gamma \mu_N]. \end{aligned}$$

Al igualar con los primeros momentos factoriales muestrales de N , se tiene

$$\widehat{\theta} = \frac{mm_{[3]} - (m-2)\bar{n}m_{[2]}}{(m-2)[mm_{[2]} - (m-1)\bar{n}^2]} \quad \text{y} \quad \widehat{\gamma} = \frac{\bar{n}m_{[3]} - (m-1)^{-1}(m-2)m_{[2]}^2}{(m-2)[mm_{[2]} - (m-1)\bar{n}^2]}$$

donde m es la raíz real más grande de la siguiente función cúbica:

$$f(m) = 2m_{[3]}^2 + [(m_{[4]} - m_{[2]}^2)(m_{[2]} - \bar{n}^2) - (m_{[3]} - \bar{n}m_{[2]})^2](m-1)^2(m-2) \\ + [(m_{[4]} + 3m_{[2]}^2 - 4m_{[3]}\bar{n})m_{[2]}(m-1) + 2(m_{[3]}^2 - m_{[2]}^3)](m-2). \quad (2.35)$$

Esta cúbica coincide con la ecuación dada en [164, pág. 141]. Si (2.29) se satisface, entonces la solución de (2.35) está dada por

$$m = -\frac{2m_{[3]}^2 - 11m_{[2]}^3 - 3m_{[4]}m_{[2]} + 12\bar{n}m_{[2]}m_{[3]}}{2m_{[2]}(m_{[4]} + 3m_{[2]}^2 - 4\bar{n}m_{[3]})} \\ + \sqrt{\frac{(m_{[2]}m_{[4]} - 2m_{[3]}^2 + m_{[2]}^3 - 4\bar{n}m_{[3]}m_{[2]})^2 - 16m_{[3]}^2m_{[2]}^3}{4(m_{[2]}(m_{[4]} + 3m_{[2]}^2 - 4\bar{n}m_{[3]}))^2}}.$$

Nótese que $m = -r$ en la expresión (2.28). El valor de m debe ser tal que

$$\left| 2\widehat{m} - \widehat{\theta} \frac{\bar{n}}{\widehat{\gamma}} \right| < \frac{\bar{n}}{\widehat{\gamma}} \sqrt{\widehat{\theta}^2 - 4\widehat{\gamma}}$$

Es claro que siempre $\widehat{\theta}^2 > 4\widehat{\gamma}$. Por otra parte, las estimaciones de los parámetros p_1 y p_2 son las raíces de la ecuación cuadrática

$$(mm_{[2]} - (m-1)\bar{n}^2)p^2 - \left(\frac{mm_{[3]}}{m-2} - \bar{n}m_{[2]} \right)p + \left(\frac{\bar{n}m_{[3]}}{m-2} - \frac{m_{[2]}^2}{m-1} \right) = 0.$$

Luego, las estimaciones están dadas por

$$\widehat{p}_1 = \frac{\widehat{\theta}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\widehat{\theta}}{2} \right)^2 - \widehat{\gamma}} \quad \text{y} \quad \widehat{p}_2 = \frac{\widehat{\theta}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\widehat{\theta}}{2} \right)^2 - \widehat{\gamma}}. \quad (2.36)$$

Una vez se determinan p_1 y p_2 , la estimación de ω se obtiene como

$$\widehat{\omega} = \frac{\bar{n} - \widehat{m}\widehat{p}_2}{\widehat{m}(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2)}. \quad (2.37)$$

Nótese que $\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2 = \sqrt{\widehat{\theta}^2 - 4\widehat{\gamma}}$. Por otra parte, $I_N > 1$ ya que

$$I_N - 1 = \frac{m\omega(1-\omega)(p_1 - p_2)^2 - (\omega p_1^2 + (1-\omega)p_2^2)}{\omega p_1 + (1-\omega)p_2} = (m-1) \left[\theta - m \frac{\gamma}{\bar{n}} \right] - \bar{n}.$$

2.2.1.6. Mezcla entre una pmf Poisson y una pmf binomial negativa

Supóngase que una componente de la mezcla es $N_1 \sim Poisson(\lambda)$ y la otra $N_2 \sim BN(r, p)$. Luego, se tiene que

$$P(N = n) = \omega \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} + (1 - \omega) \binom{r+n-1}{n} p^r q^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.38)$$

En lo que sigue, se supone sin pérdida de generalidad que $\lambda > r \frac{q}{p}$. Es claro que el k -ésimo momento factorial de N está dado por

$$\mu_{[k]}(N) = \omega \lambda^k + (1 - \omega) \left(\frac{q}{p}\right)^k \prod_{j=0}^{k-1} (r + j), \quad k \geq 1. \quad (2.39)$$

Estos momentos satisfacen la siguiente fórmula de recurrencia

$$\begin{aligned} \mu_{[k+2]}(N) = & \lambda^2 (r + k - 1) \theta \mu_{[k-1]}(N) - \lambda (\lambda + 2(r + k) \theta) \mu_{[k]}(N) \\ & + (2\lambda + (r + k + 1) \theta) \mu_{[k+1]}(N), \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde $\theta = \frac{q}{p}$. En esta expresión se ha eliminado ω . De manera análoga a la de los casos anteriores, las estimaciones de los parámetros se realizan por el método de los momentos, igualando los momentos factoriales muestrales con los obtenidos mediante la expresión dada en (2.40). Luego,

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \frac{(m_{[2]}\lambda^2 - 2m_{[3]}\lambda + m_{[4]})(\lambda^2 - 2\bar{n}\lambda + m_{[2]}) - (\bar{n}\lambda^2 - 2m_{[2]}\lambda + m_{[3]})^2}{(\bar{n}\lambda^2 - m_{[3]})(\lambda^2 - m_{[2]}) - 4\lambda(m_{[2]}\lambda - m_{[3]})(\lambda - \bar{n})} \\ \hat{r} &= \frac{(\bar{n}\lambda^2 - 2m_{[2]}\lambda + m_{[3]})^2 + 2(m_{[2]}\lambda - m_{[3]})^2 - 2(m_{[3]}\lambda - m_{[4]})(\bar{n}\lambda - m_{[2]})}{(m_{[2]}\lambda^2 - 2m_{[3]}\lambda + m_{[4]})(\lambda^2 - 2\bar{n}\lambda + m_{[2]}) - (\bar{n}\lambda^2 - 2m_{[2]}\lambda + m_{[3]})^2}, \end{aligned}$$

aquí λ es una raíz real positiva del siguiente polinomio

$$f(\lambda) = \sum_{j=0}^8 (-1)^j a_j \lambda^j \quad (2.41)$$

y las expresiones de sus coeficientes son

$$\begin{aligned}
a_8 &= \bar{n}(m_{[2]}\bar{n}^2 + m_{[3]}\bar{n} - 2m_{[2]}^2), \\
a_7 &= (11m_{[2]}^2 + m_{[4]} - 2m_{[2]}\bar{n}^2)\bar{n}^2 + 4m_{[3]}\bar{n}m_{[2]} - 14m_{[2]}^3, \\
a_6 &= \bar{n}[(m_{[4]} + 2\bar{n}m_{[3]} - m_{[2]}^2)(8m_{[2]} - \bar{n}^2) + 6(m_{[2]}^3 + m_{[3]}^2)] \\
&\quad - 2m_{[2]}m_{[3]}(18m_{[2]} - 5\bar{n}^2), \\
a_5 &= (22m_{[3]}^2 + 7m_{[4]}m_{[2]} - 3m_{[2]}^3)\bar{n}^2 + (10m_{[4]} - 26m_{[2]}^2)m_{[3]}\bar{n} + 6m_{[4]}^2 \\
&\quad + 16m_{[2]}m_{[3]}\bar{n}^3 + 4m_{[4]}m_{[2]}^2 - 36m_{[2]}m_{[3]}^2, \\
a_4 &= (7m_{[2]}^2 + 16m_{[4]})m_{[3]}\bar{n}^2 + (6m_{[2]}^2m_{[4]} - 41m_{[2]}m_{[3]}^2 + 2m_{[4]}^2)\bar{n} \\
&\quad + (5m_{[2]}m_{[4]} + 14m_{[3]}^2)\bar{n}^3 + (2m_{[2]}^3 + 4m_{[2]}m_{[4]} - 15m_{[3]}^2)m_{[3]}, \\
a_3 &= 2\bar{n}[(4m_{[2]}^2m_{[4]} - m_{[2]}m_{[3]}^2 + m_{[4]}^2)\bar{n} + (5m_{[2]}^3 + 7m_{[2]}m_{[4]} - 12m_{[3]}^2)m_{[3]}] \\
&\quad + 4m_{[3]}m_{[4]}\bar{n}^3 + 4m_{[2]}^3m_{[4]} - 15m_{[2]}^2m_{[3]}^2 + 2m_{[2]}m_{[4]}^2 - 3m_{[3]}^2m_{[4]}, \\
a_2 &= (4m_{[4]}m_{[2]} - 6m_{[3]}^2)m_{[3]}\bar{n}^2 + (6m_{[4]}m_{[2]}^3 + m_{[4]}m_{[3]}^2 - 3m_{[2]}^2m_{[3]}^2)\bar{n} \\
&\quad + 2(3m_{[2]}^3 + 5m_{[4]}m_{[2]} - 9m_{[3]}^2)m_{[2]}m_{[3]}, \\
a_1 &= 2(2m_{[3]}^2 - m_{[2]}m_{[4]})m_{[4]}\bar{n}^2 + 4(m_{[2]}m_{[4]} - 3m_{[3]}^2)m_{[2]}m_{[3]}\bar{n} + 7m_{[2]}^3m_{[3]}^2 \\
&\quad - 2m_{[2]}^2m_{[4]}^2 + 7m_{[2]}m_{[3]}^2m_{[4]} - 6m_{[3]}^4 \\
a_0 &= (3m_{[3]}^2 - 2m_{[2]}m_{[4]})(m_{[2]}^2m_{[3]} + \bar{n}m_{[2]}m_{[4]} - 2\bar{n}m_{[3]}^2).
\end{aligned}$$

Empleando la regla de signos de Descartes se puede determinar la cantidad de raíces positivas, negativas o imaginarias que tiene este polinomio. El valor de λ debe ser tal que $\widehat{r\theta} < \bar{n} < \widehat{\lambda}$ para que $\omega \in [0, 1]$, las estimaciones de los otros parámetros son

$$\widehat{\omega} = \frac{\bar{n} - \widehat{r\theta}}{\widehat{\lambda} - \widehat{r\theta}} \quad \text{y} \quad \widehat{p} = \frac{1}{1 + \widehat{\theta}}. \quad (2.42)$$

Si $\widehat{\omega} < 0$, entonces se toma como $\widehat{\lambda}$ el valor anterior al máximo. Nótese que $I_N > 1$ y está dada por

$$I_N - 1 = \frac{1 - \omega}{p} \frac{\omega(p\lambda - rq)^2 + rq^2}{\omega p\lambda + (1 - \omega)rq} = \lambda + r\theta - \bar{n} + \frac{r\theta}{\bar{n}} \left[\frac{\lambda - \bar{n}}{\lambda - r\theta} \theta - \lambda \right].$$

2.2.1.7. Mezcla entre una pmf Poisson y una pmf binomial

Sean $N_1 \sim \text{Poisson}(\lambda)$ y $N_2 \sim \text{Bin}(m, p)$. Luego, se tiene que

$$P(N = n) = \omega \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} + (1 - \omega) \binom{m}{n} p^n q^{m-n}, \quad n = 0, 1, \dots, m. \quad (2.43)$$

En lo que sigue, se supone sin pérdida de generalidad que $\lambda > mp$. Es claro que el k -ésimo momento factorial de N está dado por

$$\mu_{[k]}(N) = \omega \lambda^k + (1 - \omega) \frac{m!}{(m - k)!} p^k \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.44)$$

Estos momentos satisfacen la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\begin{aligned} \mu_{[k+2]}(N) = & \lambda^2(m - k + 1)p \mu_{[k-1]}(N) - \lambda(\lambda + 2(m - k)p) \mu_{[k]}(N) \\ & + (2\lambda + (m - k - 1)p) \mu_{[k+1]}(N). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Las estimaciones de los parámetros de nuevo se realizan por el método de los momentos, igualando los momentos factoriales muestrales con los obtenidos usando la expresión (2.45). Suponiendo que λ es conocido se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{p} &= \frac{(\bar{n}\lambda^2 - 2m_{[2]}\lambda + m_{[3]})^2 - (m_{[2]}\lambda^2 - 2m_{[3]}\lambda + m_{[4]})(\lambda^2 - 2\bar{n}\lambda + m_{[2]})}{(\bar{n}\lambda^2 - m_{[3]})(\lambda^2 - m_{[2]}) - 4\lambda(m_{[2]}\lambda - m_{[3]})(\lambda - \bar{n})} \\ \widehat{m} &= \frac{(\bar{n}\lambda^2 - 2m_{[2]}\lambda + m_{[3]})^2 + 2(m_{[2]}\lambda - m_{[3]})^2 - 2(m_{[3]}\lambda - m_{[4]})(\bar{n}\lambda - m_{[2]})}{(\bar{n}\lambda^2 - 2m_{[2]}\lambda + m_{[3]})^2 - (m_{[2]}\lambda^2 - 2m_{[3]}\lambda + m_{[4]})(\lambda^2 - 2\bar{n}\lambda + m_{[2]})}, \end{aligned}$$

donde λ es una raíz real positiva del polinomio (2.41). El valor de λ debe ser tal que $\widehat{m}\widehat{p} < \bar{n} < \widehat{\lambda}$ para que $\omega \in [0, 1]$ y su estimación es dada por

$$\widehat{\omega} = \frac{\bar{n} - \widehat{m}\widehat{p}}{\widehat{\lambda} - \widehat{m}\widehat{p}}. \quad (2.46)$$

Nótese que

$$I_N - 1 = (1 - \omega) \frac{\omega(\lambda - mp)^2 - mp^2}{\omega\lambda + (1 - \omega)mp} = \lambda + mp - \bar{n} + \frac{mp}{\bar{n}} \left[\frac{\lambda - \bar{n}}{\lambda - mp} p - \lambda \right].$$

Luego, $I_N > 1$.

Ejemplo 2.2. Considerando los datos del ejemplo 2.1, ajuste una ZIP, una ZINB y una mezcla de 2 pmf Poisson y dos BN. Además, presente las respectivas aproximaciones de funciones de frecuencia con las estimaciones de sus parámetros.

Solución. En el ejemplo 2.1 se obtuvieron los primeros 2 momentos factoriales muestrales. Por otra parte,

$$m_{[3]} = 0.040091049 \quad \text{y} \quad m_{[4]} = 0.04493722. \quad (2.47)$$

En este caso, la función cúbica dada en (2.28) queda

$$f(r) = -0.00028101r^3 + 0.00052803r^2 + 0.00051366r - 0.00011830,$$

cuyas raíces son, $r_1 = 2.5347$, $r_2 = 0.19521$ y $r_3 = -0.85084$. Puesto que estas raíces son menores que 3 no se ajusta la mezcla de binomiales. En la tabla 2.6 se presentan las estimaciones de los parámetros de las mezclas de pmf.

Tabla 2.6. Estimaciones para ajustar mezclas de pmf

| Mezcla de distribuciones | Parámetros estimados | | | |
|--------------------------|----------------------|------------------|--------|----------|
| | λ_1, p_1 | λ_2, p_2 | r | ω |
| ZIP | - | 0.5168 | - | 0.1669 |
| ZINB | - | 0.7232 | 0.3505 | 0.6430 |
| Poisson | 0.9337 | 0.0424 | - | 0.0492 |
| BN | 0.8314 | 0.9887 | 2.5347 | 0.1182 |

Fuente: elaboración propia.

En la tabla 2.7 se muestra que la aproximación por mezcla resulta más apropiada para ajustar los datos que la obtenida con la pmf Poisson.

Tabla 2.7. Comparación de mezclas ajustadas de los datos de [8, pág. 15]

| N.º de rec. k | Reclamos observados | Mezcla teórica ajustada | | | |
|--------------------|---------------------|-------------------------|-----------|-----------|--------------------------|
| | | ZIP | ZINB | Poisson | Bin. negat. ¹ |
| 0 | 25 356 | 25 403.66 | 25 357.84 | 25 349.58 | 25 354.24 |
| 1 | 1 521 | 1 400.98 | 1 516.48 | 1 544.57 | 1 528.58 |
| 2 | 282 | 362.02 | 283.41 | 251.78 | 270.01 |
| 3 | 58 | 62.37 | 61.46 | 71.73 | 65.65 |
| 4 | 16 | 8.06 | 14.25 | 16.67 | 15.26 |
| 5 | 4 | 0.83 | 3.43 | 3.11 | 3.36 |
| ≥ 6 | 1 | 0.07 | 0.85 | 0.48 | 0.71 |
| Total | 27238 | 27237.99 | 27237.71 | 27237.93 | 27237.82 |
| χ^2 | | 44.5313 | 0.5525 | 7.1898 | 1.7068 |
| ν | | 2 | 2 | 2 | 1 |

¹ Estimación por el método de los momentos.

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con los valores encontrados en el ejemplo 2.1, se rechaza H_0 si $\chi^2_\nu > 5.99146$. Para los valores $\chi^2_\nu \leq 5.99146$, no hay evidencia suficiente para rechazar los modelos propuestos; en consecuencia, al nivel del 5%, las distribuciones ZINB y mezcla de BN dan un ajuste razonable a los datos. ☑

2.3. Distribución Poisson con parámetro aleatorio

Si el modelo de Poisson no se ajusta a la **pmf** de la variable aleatoria que modela el número de reclamaciones, esto se debe a que el comportamiento de los asegurados que componen la cartera es heterogéneo por lo que respecta a dicha variable. Una manera de validar esta heterogeneidad es suponiendo que la **pmf** del número de reclamaciones es Poisson con parámetro Λ no constante sino aleatorio.

Para el número de reclamos o pérdidas (N) supóngase que el parámetro de Poisson Λ es una variable aleatoria continua con **cdf** $U_\Lambda(\lambda)$ y **pdf** $u_\Lambda(\lambda)$ para $\lambda > 0$. Luego, se puede generar una familia de distribuciones cuya **pmf** condicional de la variable N dada $\Lambda = \lambda$ es una **pmf** Poisson con parámetro λ . En este caso, la probabilidad de que ocurran n reclamos es

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbb{E}[P[N=n|\Lambda]]}_{P[N=n]} &= \int_0^\infty P[N=n|\Lambda=\lambda] d[U(\lambda)] = \int_0^\infty P[N=n|\Lambda=\lambda] u(\lambda) d\lambda \\ P[N=n] &= \int_0^\infty \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} u(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Esta **pmf** está ligada a una variable mixta o compuesta con **pmf** Poisson que se denomina distribución Poisson mixta. De acuerdo con (1.60) y (1.63)

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(N|\Lambda)] = \mathbb{E}[\Lambda]$$

$$\text{Var}[N] = \mathbb{E}[\text{Var}(N|\Lambda)] + \text{Var}[\mathbb{E}(N|\Lambda)] = \mathbb{E}[\Lambda] + \text{Var}[\Lambda] \geq \mathbb{E}[N]$$

y

$$M_N(z) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(e^{zN}|\Lambda)] = \mathbb{E}[e^{\Lambda(e^z-1)}] = M_\Lambda(e^z - 1).$$

Ejemplo 2.3. [213, pág. 104]

Sea $u(\lambda)$ la **pdf** gamma con parámetros de forma α y escala $\frac{1}{\beta}$. Determine la **pmf** marginal de N .

Solución. De la fórmula dada en (1.131) y dado que la variable aleatoria Λ es continua, entonces reemplazando en (2.48) se obtiene

$$P[N=n] = \int_0^\infty \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \frac{\lambda^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} d\lambda = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(1+\frac{1}{\beta})} \lambda^{n+\alpha-1}}{n! \beta^\alpha \Gamma(\alpha)} d\lambda,$$

sea

$$v = (1 + \beta^{-1})\lambda, \quad \text{luego} \quad dv = (1 + \beta^{-1}) d\lambda.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 P_N(n) &= \frac{1}{n! \beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^{\alpha+n} \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha+n-1} dv = \frac{(\alpha)_n}{n!} \frac{\beta^n}{(1+\beta)^{\alpha+n}} \\
 &= \binom{\alpha+n-1}{n} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^n. \tag{2.49}
 \end{aligned}$$

Nótese que esta expresión coincide con la pmf dada en (1.83). También, se puede determinar mediante la función generadora de momentos como sigue:

$$M_\Lambda(z) = \left(\frac{1}{1-\beta z} \right)^\alpha \quad \Rightarrow \quad M_\Lambda(e^z - 1) = \left[\frac{(1+\beta)^{-1}}{1 - \frac{\beta}{1+\beta} e^z} \right]^\alpha.$$

La cual coincide con la función generadora de momentos de la pmf binomial negativa; luego, la combinación de distribuciones de Poisson y gamma conduce a una pmf binomial negativa con parámetros $p = (1+\beta)^{-1}$ y $r = \alpha$. En algunos textos a la pmf dada por la expresión (2.49) la denominan Poisson-Gamma. \square

2.4. Procesos de conteo para reclamos o pérdidas

En esta sección, $N(t)$ representa el número de reclamos o pérdidas que pueden ocurrir en un intervalo de tiempo $(0, t]$ con $t > 0$ y $N(0) = 0$.

Definición 2.1. *Un proceso estocástico discreto $\{N(t), t \geq 0\}$ se dice que es un proceso de conteo si $N(t)$ satisface que:*

1. $N(t) \geq 0$.
2. $N(t)$ es un valor entero.
3. Si $s < t$, entonces $N(s) \leq N(t)$.
4. Para $s < t$, entonces $N(t) - N(s)$ es igual al número de eventos que han ocurrido en el intervalo $(s, t]$.

2.4.1. Proceso Poisson homogéneo

Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ el proceso de conteo que representa la cantidad de veces que un evento ocurre en el tiempo $(0, t]$. Definiendo

$$P_{ij}(s, t) = P[N(t) = j | N(s) = i] \quad 0 \leq i \leq j; 0 \leq s \leq t$$

se satisfacen los siguientes supuestos:

1. Los eventos que ocurren en intervalos de tiempo no superpuestos son independientes entre sí.
2. Para una cantidad infinitesimal dt , existe una constante λ , tal que las probabilidades de ocurrencia de eventos en el intervalo $(t, t + dt]$ están dadas como sigue

$$P_{ij}(t, t + dt) = \begin{cases} 1 - \lambda dt + O(dt) & \text{si } j = i \\ \lambda dt + O(dt) & \text{si } j = i + 1 \\ O(dt) & \text{si } j \geq i + 2. \end{cases} \quad (2.50)$$

donde $O(dt)$ contiene todos los términos que tienden a cero mucho más rápido que dt y λ denota la tasa de ocurrencia por unidad de tiempo.

Suponga que $i = 0$, $j = n$ y $s = 0$, entonces

$$\begin{aligned} P_n(t) &= P_{0,n}(0, t) = P \{n \text{ reclamos (pérdidas) ocurren antes del tiempo } t\} \\ &= P [N(t) = n | N(0) = 0], \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Teorema 2.3. *Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso de conteo que satisface los supuestos anteriores. Entonces la distribución de transición del proceso $N(t)$ tiene una pmf de Poisson con parámetro λt ; es decir*

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp\{-\lambda t\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.51)$$

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [29]. ☑

Teorema 2.4. *Si un proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso Poisson homogéneo, se satisface lo siguiente:*

- I) $N(0) = 0$.
- II) *Es un proceso de incrementos independientes; es decir, los conteos de reclamos (pérdidas) en intervalos disyuntos de tiempo son independientes. En otras palabras, las variables aleatorias independientes $N(t) - N(s)$ y $N(v) - N(u)$ son independientes para $s < t \leq u < v$.*
- III) *Es un proceso de incrementos estacionarios; es decir, la distribución de cualquier incremento del proceso, en un intervalo de tiempo, solo depende de la longitud del intervalo y no de su localización. En otras palabras, la distribución de la variable aleatoria $N(t) - N(s)$ depende solo de la diferencia $t - s$; esto es,*

$$P[N(t) - N(s) = n] = \frac{[\lambda(t - s)]^n}{n!} \exp\{-\lambda(t - s)\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

iv) El número de reclamaciones en un intervalo de longitud t es una variable aleatoria Poisson con tasa λ y pmf dada por (2.51).

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [95]. ☑

El proceso dado en (2.51) satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de Kolmogorov (ver [92, pág. 732]):

$$\begin{aligned} P'_0(t) &= -\lambda P_0(t) \\ P'_n(t) &= \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.52)$$

con condiciones iniciales $P_0(0) = 1$ y $P_n(0) = 0$, $n \geq 1$.

2.4.2. Proceso Poisson mixto

Ahora se consideran alternativas al proceso Poisson homogéneo, las cuales surgen de la fluctuación de la intensidad del proceso en el tiempo. Si el proceso para determinar el número de reclamos o pérdidas $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso Poisson homogéneo, cuya intensidad del reclamo es una variable aleatoria Λ , entonces la pmf condicional de la variable $N(t)$, dada $\Lambda = \lambda$, es un proceso Poisson. Este proceso de conteo denominado modelo Poisson mixto fue introducido en [63] y estudiado en [87], [124] y [141].

1. Si la variable aleatoria Λ es discreta con (ver [5]):

$$P(\Lambda = \lambda_k) = \pi_k \quad k = 1, 2, \dots, m$$

entonces

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbb{E}[P[N(t) = n|\Lambda]]}_{P_n(t)} &= \sum_{k=1}^m P[N(t) = n|\Lambda = \lambda_k] P(\Lambda = \lambda_k) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\pi_k}{n!} (\lambda_k t)^n e^{-\lambda_k t}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

la cual corresponde a una mezcla finita de procesos de Poisson.

2. Cuando la variable aleatoria Λ es continua, se tiene que

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbb{E}[P[N(t) = n|\Lambda]]}_{P_n(t)} &= \int_0^\infty P[N(t) = n|\Lambda = \lambda] u(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} u(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (2.54)$$

y, particularmente, para $n = 0$ con $t > 0$,

$$P_0(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} u(\lambda) \, d\lambda = \mathcal{L}_u(t), \quad (2.55)$$

donde $\mathcal{L}_u(t)$ denota la transformada de Laplace² de la función $u(\cdot)$ evaluada en un punto t . Las derivadas de orden superior de esta expresión, están dadas por

$$P_0^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} P_0(t) = \int_0^{\infty} (-\lambda)^n e^{-\lambda t} u(\lambda) \, d\lambda. \quad (2.56)$$

Luego, la expresión (2.54) se puede establecer como

$$P_n(t) = \frac{t^n}{n!} \left[(-1)^n P_0^{(n)}(t) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.57)$$

Generalmente, se supone una pdf asociada a la variable de estructura, y a partir de esto la pmf del proceso Poisson mixto se calcula mediante (2.55) y (2.57). En [133] se define la probabilidad de que un reclamo ocurra entre el tiempo t y $t + dt$ como sigue:

$$\lambda_n(t) = -\frac{P_0^{(n+1)}(t)}{P_0^{(n)}(t)} = \frac{n+1}{t} \frac{P_{n+1}(t)}{P_n(t)}, \quad n \geq 0 \quad (2.58)$$

y se la denomina *tasa o intensidad del proceso*. Usando el hecho de que $P_0(t)$ es una función completamente monótona, se puede derivar logérmicamente la expresión (2.57) y se obtiene

$$\frac{P_n'(t)}{P_n(t)} = \frac{n}{t} + \frac{P_0^{(n+1)}(t)}{P_0^{(n)}(t)} \quad \Rightarrow \quad P_n'(t) = \frac{n}{t} P_n(t) - \lambda_n(t) P_n(t).$$

Esta expresión coincide con el resultado dado en [82]. Por otra parte,

$$\frac{n}{t} P_n(t) = \frac{(-1)^n t^{n-1}}{(n-1)!} P_0^{(n)}(t) = \frac{\lambda_{n-1}(t)}{(n-1)!} t^{n-1} \left[(-1)^{n-1} P_0^{(n-1)}(t) \right]. \quad (2.59)$$

Usando la relación (2.57) se obtiene que el proceso dado en (2.54) satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de Kolmogorov (ver [92, pág. 733]):

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda_0(t) P_0(t) \\ P_n'(t) &= \lambda_{n-1}(t) P_{n-1}(t) - \lambda_n(t) P_n(t), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.60)$$

con condiciones iniciales $P_0(0) = 1$ y $P_n(0) = 0$, $n \geq 1$.

²Si el lector no está habituado con la transformada de Laplace, puede ver el apéndice D.

De acuerdo con [133, pág. 33] la solución de (2.60) está dada por

$$P_n(t) = \int_0^t \lambda_{n-1}(u) P_{n-1}(u) \exp \left\{ - \int_u^t \lambda_n(v) dv \right\} du.$$

El tipo de relación dada en (2.57) ha sido estudiado desde [133] y esta clase de procesos es una clase de distribución infinitamente divisible. En [72, pág. 503] se establece que una función $\varphi(t)$ es la transformada de Laplace de una pdf infinitamente divisible si y solo si $\varphi(t) = e^{-\theta(t)}$, donde $\theta(t)$ tiene derivada completamente monótona en $[0, \infty)$ y $\theta(0) = 0$.

La pmf de Poisson es ampliamente usada para modelar el número de reclamaciones en los textos y artículos sobre teoría de riesgo, ya que este modelo resulta ser invariante respecto a la unidad de tiempo; este resultado es debido al análisis dado en [133] sobre los supuestos de estacionariedad e independencia del tiempo. Sin embargo, en [82] se consideran otras opciones como las distribuciones binomial, binomial negativa y geométrica, y en [181, cap. 2] se encuentra una discusión sobre la distribución a usar en función de los datos históricos. Además, se sugiere en [22] usar un proceso doblemente estocástico, donde la intensidad del proceso es también un proceso aleatorio.

Proposición 2.1. *Sea $\{N(t); t \geq 0\}$ un proceso de conteo y Λ la variable de estructura del proceso Poisson mixto asociado. Entonces:*

1. *Las intensidades de transición son tales que*

$$\mathbb{E} [\Lambda | N(t) = n] = \lambda_n(t) \quad (2.61)$$

y

$$\text{Var} [\Lambda | N(t) = n] = -\lambda'_n(t). \quad (2.62)$$

2. *La media de $N(t)$ es dada por*

$$\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[\Lambda]. \quad (2.63)$$

3. *La media de Λ es dada por*

$$\mathbb{E}[\Lambda] = -P'_0(0). \quad (2.64)$$

Demostración.

1. De la expresión (2.54), el valor esperado condicionado de Λ , dado el evento $\{N(t) = n\}$, está dado por

$$\mathbb{E} [\Lambda | N(t) = n] = \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^n u(\lambda)}{n! P[N(t) = n]} d\lambda = \frac{n+1}{t} \frac{P_{n+1}(t)}{P_n(t)}. \quad (2.65)$$

La cual coincide con (2.58). Análogamente, se muestra que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Lambda^2|N(t) = n] &= \int_0^\infty \frac{\lambda^2 e^{-\lambda t} (\lambda t)^n u(\lambda)}{n! P[N(t) = n]} d\lambda \\ &= \frac{(n+2)(n+1) P_{n+2}(t)}{t^2 P_n(t)}.\end{aligned}\quad (2.66)$$

Al sustituir (2.58) en (2.66) se obtiene

$$\mathbb{E}[\Lambda^2|N(t) = n] = \lambda_{n+1}(t)\lambda_n(t).$$

Entonces la varianza condicional de Λ dado el evento $\{N(t) = n\}$ es

$$\text{Var}[\Lambda|N(t) = n] = \lambda_{n+1}(t)\lambda_n(t) - \lambda_n^2(t).$$

Por otra parte, tomando la derivada de la expresión (2.58) se obtiene

$$\begin{aligned}\lambda'_n(t) &= -\frac{P_0^{(n+2)}(t) P_0^{(n+1)}(t)}{P_0^{(n+1)}(t) P_0^{(n)}(t)} + \left(-\frac{P_0^{(n+1)}(t)}{P_0^{(n)}(t)}\right)^2 \\ &= -\lambda_{n+1}(t)\lambda_n(t) + \lambda_n^2(t)\end{aligned}$$

y comparando con la expresión anterior se llega al resultado.

2. Usando la ley de esperanza total

$$\underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}(\Lambda|N(t) = n)]}_{\mathbb{E}[\Lambda]} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(\Lambda|N(t) = n)P_n(t) \underbrace{=}_{(2.65)} \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{t}.$$

3. La función generadora de probabilidad de $N(t)$ es definida como

$$\mathcal{G}_N(z; t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} u(\lambda) d\lambda.$$

Al intercambiar el orden de la suma y la integral, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_N(z; t) &= \int_0^\infty \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z\lambda t)^n}{n!} \right] e^{-\lambda t} u(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda(1-z)t} u(\lambda) d\lambda \\ &= P_0[(1-z)t] = M_\Lambda[(z-1)t].\end{aligned}\quad (2.67)$$

Tomando $z = 0$ en la expresión anterior, se obtiene $P_0(t) = M_\Lambda(-t)$.

Al derivar ambos lados con respecto a t , se llega a

$$P'_0(t) = -M'_\Lambda(-t)$$

y evaluando en $t = 0$ se completa la prueba. \checkmark

Ejemplo 2.4. [181, pág. 18]

Sea $u(\lambda)$ la *pdf* gamma con parámetros α y $\frac{1}{\beta}$. Determine la *pmf* de $N(t)$.

Solución. Por la fórmula (1.131) y dado que la variable aleatoria Λ es continua, entonces reemplazando en (2.48)

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} (\lambda t)^n \left(\frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{\beta}} \right) d\lambda \\ &= \frac{t^n}{n! \beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\lambda \left(t + \frac{1}{\beta}\right)} \lambda^{n+\alpha-1} d\lambda. \end{aligned}$$

Sea $v = (t + \beta^{-1})\lambda$; luego, $dv = (t + \beta^{-1}) d\lambda$. Al reemplazar y factorizar se llega a

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{t^n}{n! \beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{1 + \beta t} \right)^{\alpha+n} \int_0^\infty v^{\alpha+n-1} e^{-v} dv \\ &= \binom{\alpha+n-1}{n} \left(\frac{\delta}{t+\delta} \right)^\alpha \left(\frac{t}{t+\delta} \right)^n \quad \delta = \beta^{-1}. \quad (2.68) \end{aligned}$$

Nótese que esta expresión coincide con la *pmf* de un proceso binomial negativo (con parámetros $r = \alpha$ y $p = \frac{\delta}{t+\delta}$). \square

Ejemplo 2.5. [178, pág. 58]

Sea $u(\lambda)$ la *pdf* gamma trasladada a x_0 con parámetros α y κ . Determine la *pmf* marginal de $N(t)$.

Solución. La *pdf* gamma trasladada a x_0 con parámetros α y κ es dada por

$$u_\Lambda(\lambda) = \frac{1}{\kappa^\alpha \Gamma(\alpha)} (\lambda - x_0)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda-x_0}{\kappa}} \quad \lambda \geq x_0, \quad \alpha, \kappa > 0. \quad (2.69)$$

Puesto que la variable aleatoria Λ es continua, reemplazando en (2.54), se obtiene

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^\infty e^{-\lambda t} (\lambda t)^n \left(\frac{1}{\kappa^\alpha \Gamma(\alpha)} (\lambda - x_0)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda-x_0}{\kappa}} \right) d\lambda \\ &= \frac{t^n}{n! \kappa^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^\infty \lambda^n e^{-\left(\lambda t + \frac{\lambda-x_0}{\kappa}\right)} (\lambda - x_0)^{\alpha-1} d\lambda, \end{aligned}$$

sea $v = (\lambda - x_0)(t + \kappa^{-1})$; luego, $dv = (t + \kappa^{-1}) d\lambda$. Entonces,

$$P_n(t) = \frac{t^n e^{-x_0 t}}{n! \kappa^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{\kappa}{1 + \kappa t} \right)^\alpha \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha-1} \left(\frac{\kappa v}{1 + \kappa t} + x_0 \right)^n dv,$$

usando el binomio de Newton (ver (B.5)) se tiene que

$$\begin{aligned}
 P_n(t) &= \frac{t^n e^{-x_0 t}}{n! \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{1 + \kappa t} \right)^\alpha \int_0^\infty \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{\kappa v}{1 + \kappa t} \right)^j x_0^{n-j} e^{-v} v^{\alpha-1} dv \\
 &= \frac{t^n e^{-x_0 t}}{n! \Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(\alpha + j)}{j! (n-j)!} \frac{n! \kappa^j x_0^{n-j}}{(1 + \kappa t)^{\alpha+j}} \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{\alpha + j - 1}{j} \frac{(\kappa t)^j}{(1 + \kappa t)^{\alpha+j}} \frac{(x_0 t)^{n-j}}{(n-j)!} e^{-x_0 t}. \tag{2.70}
 \end{aligned}$$

Nótese que esta expresión coincide con la convolución entre un proceso binomial negativo (con parámetros $r = \alpha$ y $p = \frac{1}{1+\kappa t}$) y un proceso Poisson (con parámetro $x_0 t$). Si $t = 1$ la pmf dada en (2.70) es denominada la distribución Delaporte con parámetros x_0 , α y κ (ver [209]). \checkmark

Para este proceso Poisson mixto se estudian en las siguientes subsecciones 2 casos particulares de este proceso: Panjer y Hofmann.

2.4.2.1. Proceso de conteo de Panjer

En [58] se presenta el proceso de conteo asociado a la pmf dada en [159] como la siguiente recurrencia:

$$P_{n+1}(t) = \left(\alpha(t) + \frac{\beta(t)}{n+1} \right) P_n(t), \quad \forall n \geq 0, \tag{2.71}$$

donde $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son funciones continuas para $t \geq 0$ tal que $\alpha(t) \leq 1$, $\forall t$. Se denota como $N(t) \sim \mathcal{P}(\alpha(t), \beta(t))$. Nótese que si $t = 1$ se obtiene la expresión (1.98). Para $\alpha(t) \neq 0$ se definen las siguientes funciones de t :

$$\xi_t = \frac{\alpha(t) + \beta(t)}{1 - \alpha(t)}, \quad \kappa_t = \frac{\alpha(t)}{1 - \alpha(t)} \quad \text{y} \quad \rho_t = \frac{\xi_t}{\kappa_t}. \tag{2.72}$$

Para un valor fijo $t > 0$, en la tabla 2.8, se muestran las funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ que aproximan a algunos procesos de conteo clásicos bien conocidos.

Nótese que, en particular, para las funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ dadas en la tabla 2.8, sustituyendo en (2.72), se obtiene

$$\xi_t = \xi t, \quad \kappa_t = \kappa t \quad \text{y} \quad \rho_t = \rho, \tag{2.73}$$

donde ξ , κ y ρ son constantes. En la tabla 2.9 se presentan estas constantes para $\alpha(t) \neq 0$.

Tabla 2.8. Funciones de $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ para algunos procesos $N(t)$

| Proceso de conteo | $P[N(t) = n] = P_n(t)$ | Funciones | |
|---------------------------------|---|------------------------|------------------------------------|
| | | $\alpha(t)$ | $\beta(t)$ |
| Poisson homogéneo | $\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ | 0 | λt |
| Binomial negativo* (o Pólya) | $\binom{\gamma + n - 1}{n} \left(\frac{\delta}{\delta + t}\right)^\gamma \left(\frac{t}{\delta + t}\right)^n$ | $\frac{t}{\delta + t}$ | $\frac{t(\gamma - 1)}{\delta + t}$ |
| Geométrico | $\left(\frac{\delta}{\delta + t}\right) \left(\frac{t}{\delta + t}\right)^n, \delta > 0$ | $\frac{t}{\delta + t}$ | 0 |
| Binomial** | $\binom{m}{n} \left(\frac{t}{T}\right)^n \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{m-n}, t < T$ | $\frac{t}{T - t}$ | $\frac{(m + 1)t}{T - t}$ |

* Si $t = 1$ se obtiene la expresión dada en (1.83).

** Este proceso es dado en [87, pág. 106], pero no es un proceso de Poisson mixto.

Fuente: adaptada de [114, pág. 4].

Tabla 2.9. Valores de ξ , κ y ρ para los procesos $N(t)$

| Proceso de conteo | ξ | κ | ρ |
|-------------------|----------------------|---------------|----------|
| Binomial negativo | $\gamma \delta^{-1}$ | δ^{-1} | γ |
| Geométrico | δ^{-1} | δ^{-1} | 1 |
| Binomial | mT^{-1} | $-T^{-1}$ | $-m$ |

Fuente: tomada de [114, pág. 6].

2.4.2.1.1 Propiedades fundamentales del proceso de Panjer

Algunas de las propiedades del proceso de Panjer son las siguientes:

Teorema 2.5. Si $N(t) \sim \mathcal{P}(\alpha(t), \beta(t))$ en el intervalo de tiempo $(0, t]$, entonces

i) La función generadora de probabilidad está dada por

$$\underbrace{\mathcal{G}_N(z; t)}_{\mathbb{E}[z^{N(t)}]} = \begin{cases} (1 - \kappa_t(z - 1))^{-\rho_t} & \text{si } \alpha(t) \neq 0, \\ \exp\{\beta(t)(z - 1)\} & \text{si } \alpha(t) = 0, \end{cases} \quad (2.74)$$

donde κ_t y ρ_t son dadas en (2.72).

ii) La pmf de $N(t)$, para t fijo, está dada por

$$P_n(t) = \begin{cases} \binom{\rho + n - 1}{n} [\alpha(t)]^n P_0(t) & \text{si } \alpha(t) \neq 0, \\ \frac{(\beta(t))^n}{n!} P_0(t) & \text{si } \alpha(t) = 0. \end{cases} \quad (2.75)$$

iii) La pmf de $N(t)$, para $\alpha(t) + \beta(t) > 0$, satisface (2.57), donde

$$P_0(t) = \exp\{-\theta(t)\} \quad \text{con} \quad \theta(t) = \int_0^t \frac{\rho \kappa}{1 + \kappa v} dv. \quad (2.76)$$

iv) La pmf de $N(t)$ satisface la relación (2.58) y la tasa o intensidad del proceso es de la forma

$$\lambda_n(t) = \frac{\rho + n}{\kappa^{-1} + t} = \frac{\rho + n}{\rho} \lambda_0(t), \quad \kappa \neq 0. \quad (2.77)$$

v) Los momentos factoriales satisfacen la fórmula de recurrencia

$$\mu_{[n+1]}(N(t)) - \kappa_t(\rho_t + n) \mu_{[n]}(N(t)) = 0, \quad n \geq 0, \quad (2.78)$$

donde los parámetros ρ_t y κ_t son dados en (2.72).

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [114]. ☑

La expresión (2.77) permite determinar el proceso de conteo. Cuando el parámetro κ es positivo se tiene el proceso Pólya (ver [133, pág. 67]) y, si κ es negativo, se obtiene el proceso binomial (ver [87, pág. 106]).

2.4.2.1.2 Estimación de los parámetros del proceso de Panjer

Para estimar los parámetros del proceso de Panjer se emplea el método de los momentos. Los primeros 2 momentos centrales de la distribución $\mathcal{P}(\alpha(t), \beta(t))$ para t fijo se establecen usando (2.78):

$$\mathbb{E}[N(t)] = \rho \kappa t \quad \text{y} \quad \text{Var}[N(t)] = (1 + \kappa t) \mathbb{E}[N(t)].$$

Al igualar estas cantidades con sus momentos muestrales correspondientes y despejar ρ y κt , se obtienen los siguientes estimadores:

$$\hat{\rho} = \frac{\bar{n}^2}{s_n^2 - \bar{n}} = \frac{\bar{n}}{d-1} \quad \text{y} \quad \hat{\kappa}t = \frac{s_n^2}{\bar{n}} - 1 = d-1, \quad (2.79)$$

estas expresiones coinciden con los parámetros estimados por el método de los momentos para el modelo binomial negativo dados en (2.3).

Cuando $\hat{\alpha}_t = 0$ entonces $\hat{\lambda}t = \bar{n}$. Nótese que $I_{N_t} = 1 + \kappa t$, luego

$$I_{N_t} \begin{cases} > 1 & \text{si } \kappa > 0 \\ = 1 & \text{si } \kappa = 0 \\ < 1 & \text{si } \kappa < 0 \end{cases}$$

2.4.2.2. Proceso de Hofmann

De acuerdo con [169], en [100] se deduce para un proceso de Poisson mixto unidimensional una expresión general para $P_n(t)$ en términos de $P_0(t)$ sin conocer la pdf asociada a la variable de estructura. Esta subclase de los procesos Poisson mixto se define como sigue:

Definición 2.2. *Un proceso de conteo $\{N(t); t \geq 0\}$ se dice que proviene de una “familia Hofmann $\mathcal{H}(a, q, \kappa)$ ”, si (2.55) puede ser expresada como*

$$P_0(t) = \exp \{ -\theta(t) \} \quad \text{con} \quad \theta(t) = \int_0^t \lambda(v) \, dv \quad (2.80)$$

donde $P_n(t)$ es dada por (2.57) y la función $\lambda(t)$ tiene 3 parámetros: $a \geq 0$, $q > 0$ y $\kappa > 0$, es infinitamente derivable y está dada por

$$\lambda(t) = \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{1}{\mathcal{L}_u(t)} \right) = \frac{q}{(1 + \kappa t)^a} \quad \forall t > 0. \quad (2.81)$$

De acuerdo con el valor del parámetro a algunas expresiones para $P_0(t)$ son

$$P_0(t) = \begin{cases} \exp \left\{ -\frac{qt}{\kappa t} \frac{(1+\kappa t)^{1-a} - 1}{1-a} \right\} & \text{si } a \neq 1, \\ (1 + \kappa t)^{-\frac{qt}{\kappa t}} & \text{si } a = 1, \\ \exp \left\{ \frac{qt}{bt} (e^{-bt} - 1) \right\} \text{ con } \kappa = \frac{b}{a} & \text{si } a \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.82)$$

2.4.2.2.1 Propiedades fundamentales del proceso de Hofmann

A continuación, se deducen algunas relaciones de recurrencia similares a las encontradas para el proceso de Panjer para calcular las probabilidades.

Teorema 2.6. *Si $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Hofmann; es decir, la probabilidad de que $N(t)$ sea igual a n en el intervalo $(0, t]$ satisface (2.80). Entonces:*

i) La pmf de $N(t)$, para t fijo, está dada por la relación³

$$P_{n+1}(t) = \frac{qt}{n+1} \sum_{j=0}^n \binom{a+j-1}{j} \frac{(\kappa t)^j}{(1 + \kappa t)^{a+j}} P_{n-j}(t). \quad (2.83)$$

ii) Para todas constantes $a \geq 0$, $q > 0$ y $\kappa > 0$, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_1(t)}{t} = q.$$

³Este resultado para $a \geq 1$ coincide con el obtenido en [210].

III) La función generadora de probabilidad está dada por

$$\underbrace{\mathcal{G}_N(z; t)}_{P_0[(1-z)t]} = \begin{cases} \left[1 - \frac{\kappa t}{1+\kappa t} z\right]^{-\frac{q}{\kappa}} P_0(t), & \text{si } a = 1, \\ \exp\left\{-\int_t^{(1-z)t} \frac{q}{(1+\kappa v)^a} dv\right\} P_0(t), & \text{si } a \neq 1, \\ \exp\left\{\frac{qt}{bt}(e^{bzt} - 1)e^{-bt}\right\} P_0(t) \text{ con } \kappa = \frac{b}{a}, & \text{si } a \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Esta será consistente si $\mathcal{G}_N(1; t) = 1$.

IV) La función generadora de momentos es

$$M_N(z; t) = P_0[(1 - e^z)t], \quad (2.84)$$

V) Los momentos factoriales se establecen con la fórmula de recurrencia

$$\mu_{[r+1]}(N(t)) = \frac{qt}{\kappa t} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \frac{\Gamma(a+j)}{\Gamma(a)} (\kappa t)^{j+1} \mu_{[r-j]}(N(t)). \quad (2.85)$$

Demostración.

- i) Los detalles de la prueba pueden verse en [110].
- ii) Es una consecuencia inmediata de (2.83).
- iii) Los detalles de la prueba pueden verse en [110].
- iv) Se tiene de manera inmediata usando el teorema 1.10.
- v) De acuerdo con la expresión (1.31).

$$\mu_{[r]}(N(t)) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial^r}{\partial z^r} \mathcal{G}_N(z; t) = \left. \frac{\partial^r}{\partial z^r} \mathcal{G}_N(z; t) \right|_{z=1}.$$

Las derivadas de orden superior de la función $\lambda((1-z)t)$ satisfacen

$$\frac{\partial^j}{\partial z^j} \lambda((1-z)t) = \frac{\Gamma(a+j)}{\Gamma(a)} \left(\frac{\kappa t}{1 + \kappa(1-z)t} \right)^j \lambda((1-z)t), \quad a \neq 0.$$

En [110] se emplea la regla de Leibniz para la derivada de un producto dada en [1] y se obtiene que

$$\frac{\partial^{r+1}}{\partial z^{r+1}} \mathcal{G}_N(z; t) = t \lambda((1-z)t) \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (a)_j \left(\frac{\kappa t}{1 + \kappa(1-z)t} \right)^j \frac{\partial^{r-j}}{\partial z^{r-j}} \mathcal{G}_N(z; t),$$

donde $(a)_j$ es dado en (B.17). Finalmente, el límite cuando $z \rightarrow 1$ es

$$\underbrace{\left. \frac{\partial^{r+1}}{\partial z^{r+1}} \mathcal{G}_N(z; t) \right|_{z=1}}_{\mu_{[r+1]}(N(t))} = qt \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \frac{\Gamma(a+j)}{\Gamma(a)} (\kappa t)^j \underbrace{\left. \frac{\partial^{r-j}}{\partial z^{r-j}} \mathcal{G}_N(z; t) \right|_{z=1}}_{\mu_{[r-j]}(N(t))}.$$

Multiplicando y dividiendo por κt se completa la prueba. \square

Nota 2.1. Si $a \neq 1$, por la expresión (2.82) se tiene que

$$P_0(t) = \exp \left\{ -\frac{q}{\kappa(a-1)} \left[1 - \frac{1}{(1+\kappa t)^{a-1}} \right] \right\}. \quad (2.86)$$

Dado que $G_N(z; t) = P_0[(1-z)t]$; para $a > 1$, se obtiene

$$G_N(z; t) = \exp \left\{ \frac{q}{\kappa(a-1)} \left[\frac{1}{(1-\kappa t(z-1))^{a-1}} - 1 \right] \right\}, \quad (2.87)$$

lo cual coincide con la función generadora de probabilidad de la *pmf* Poisson-Pascal (ver [125], [160] y [162]).

2.4.2.2.2 Casos particulares

De acuerdo con [210, pág. 95], algunos procesos de conteo que se obtienen en forma explícita a partir de (2.82) variando el parámetro a son:

1. Si $a = 0$, al sustituir en la expresión (2.81), se tiene que

$$\lambda(t) = q \quad \forall t > 0.$$

Luego, $P_0(t) = e^{-qt}$; es decir, $\Lambda \sim \delta_q(\lambda)$. Por lo tanto,

$$\frac{d^n}{dt^n} P_0(t) = (-1)^n q^n e^{-qt}.$$

Al reemplazar en (2.57), se obtiene el proceso Poisson con media qt :

$$P_n(t) = \frac{(qt)^n}{n!} e^{-qt}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.88)$$

2. Si $a \neq 1$ y $P_n(t) \neq 0$, la expresión (2.83) se reescribe como

$$\frac{P_{n+1}(t)}{P_n(t)} = \frac{t\lambda(t)}{n+1} \left[1 + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{a+i}{i+1} \left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t} \right)^{i+1} \frac{P_{n-1-i}(t)}{P_n(t)} \right]. \quad (2.89)$$

3. Cuando $a = 1$, al sustituir en la expresión (2.81), se tiene que

$$\lambda(t) = \frac{q}{1+\kappa t} = \frac{q}{\kappa} \cdot \frac{d}{dt} \ln(1+\kappa t) \quad \forall t > 0.$$

Luego, $P_0(t) = (1+\kappa t)^{-\frac{q}{\kappa}}$; es decir, $\Lambda \sim \Gamma\left(\frac{q}{\kappa}, \frac{1}{\kappa}\right)$. Entonces la expresión (2.89) queda

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}(t)}{P_n(t)} &= \frac{t\lambda(t)}{n+1} \left[1 + \frac{\kappa t}{1+\kappa t} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t} \right)^i \frac{P_{n-1-i}(t)}{P_n(t)} \right] = \frac{t\lambda(t)}{n+1} \left[1 + n \frac{\kappa}{q} \right] \\ &= \frac{t\lambda(t)}{n+1} \frac{\kappa}{q} \left[\frac{q}{\kappa} + n \right] = \frac{\kappa t}{1+\kappa t} \left[1 + \frac{q/\kappa - 1}{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Esta última expresión coincide con la fórmula de recurrencia dada en (2.71) con parámetros

$$\alpha(t) = \frac{\kappa t}{1 + \kappa t} \quad \text{y} \quad \beta(t) = \left(\frac{q}{\kappa} - 1\right)\alpha(t) = \frac{qt - \kappa t}{1 + \kappa t}. \quad (2.91)$$

Puesto que $\kappa > 0$, entonces $0 < \alpha(t) < 1$, y la fórmula (2.90) permite obtener, por inducción con respecto a n ,

$$P_n(t) = \frac{(q/\kappa)_n}{n!} \left(\frac{\kappa t}{1 + \kappa t}\right)^n P_0(t) = \binom{\frac{q}{\kappa} + n - 1}{n} \left(\frac{\kappa t}{1 + \kappa t}\right)^n P_0(t), \quad n \geq 1,$$

lo cual coincide con la expresión dada en (2.75).

De acuerdo con esta última fórmula, en la tabla 2.10 se muestran los procesos clásicos que satisfacen (2.90) para $\alpha(t) + \beta(t) > 0$, con $0 < \alpha(t) < 1$.

Tabla 2.10. Procesos de conteo clásicos obtenidos mediante $\mathcal{H}(1, q, \kappa)$

| Valores supuestos | $P_n(t)$ | Proceso de conteo |
|--|---|----------------------|
| $\kappa \rightarrow 0, q > 0$ | $\frac{(qt)^n}{n!} e^{-qt}$ | Poisson homogéneo |
| $\kappa > 0, r = \frac{q}{\kappa} > 0$ | $\frac{\Gamma(r+n)}{n! \Gamma(r)} \left(\frac{\kappa t}{1 + \kappa t}\right)^n (1 + \kappa t)^{-r}$ | Binomial negativo |
| $\kappa > 0, r = \frac{q}{\kappa} = 1$ | $\left(\frac{\kappa t}{1 + \kappa t}\right)^n (1 + \kappa t)^{-1}$ | Geométrico |

Fuente: adaptada de [110, pág. 64].

4. Si $a = 2$, al sustituir en la expresión (2.81), se tiene que

$$\lambda(t) = \frac{q}{(1 + \kappa t)^2} = -\frac{q}{\kappa} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{1 + \kappa t} \right] \quad \forall t > 0.$$

Luego, $P_0(t) = \exp\left\{\frac{-qt}{1+\kappa t}\right\}$. Multiplicando por $(n+1)$ y sustituyendo el valor de a en la expresión (2.89), se obtiene

$$\begin{aligned} (n+1)\frac{P_{n+1}(t)}{P_n(t)} &= t\lambda(t)\left[1 + 2\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t}\right)^{i+1}\frac{P_{n-1-i}(t)}{P_n(t)}\right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{n-1}i\left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t}\right)^{i+1}\frac{P_{n-1-i}(t)}{P_n(t)}\right] \\ &= t\lambda(t) + \frac{2n\kappa t}{1+\kappa t} - t\lambda(t)\sum_{i=1}^{n-1}i\left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t}\right)^{i+1}\frac{P_{n-1-i}(t)}{P_n(t)} \\ &= \frac{2n\kappa t}{1+\kappa t} + t\lambda(t)\left[1 - \sum_{i=0}^{n-2}(i+1)\left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t}\right)^{i+2}\frac{P_{n-2-i}(t)}{P_n(t)}\right]. \end{aligned}$$

Simplificando, se llega a

$$(n+1)P_{n+1}(t) = \left(2n + \frac{q/\kappa}{1+\kappa t}\right)\alpha_t P_n(t) - (n-1)\alpha_t^2 P_{n-1}(t),$$

donde $\alpha_t = \alpha(t)$ es dada en (2.91). Luego, la pmf del proceso de conteo de reclamos $N(t)$, para $n \geq 1$, satisface la siguiente recurrencia:

$$P_{n+1}(t) - \left(2n + \frac{q/\kappa}{1+\kappa t}\right)\frac{\alpha_t P_n(t)}{n+1} + \frac{n-1}{n+1}\alpha_t^2 P_{n-1}(t) = 0. \quad (2.92)$$

Nótese que esta expresión coincide con la fórmula de recurrencia de la pmf Pólya-Aeppli dada en [69], con parámetros $m = qt$ y $\alpha = 2\kappa t$.

5. Si $\kappa = \frac{b}{a}$ y $a \rightarrow \infty$, al sustituir en la expresión (2.81), se tiene que

$$\lambda(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} q \left(1 + \frac{b}{a}t\right)^{-a} = qe^{-bt} \quad \forall t > 0.$$

Luego, $P_0(t) = \exp\left\{-\frac{qt}{bt}(1 - e^{-bt})\right\}$. Entonces, la expresión (2.83) queda

$$P_{n+1}(t) = \frac{qt}{n+1} \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(a+j)}{j! \Gamma(a)} \frac{(bt)^j}{(a+bt)^j} \left(1 + \frac{b}{a}t\right)^{-a} P_{n-j}(t). \quad (2.93)$$

Usando la fórmula dada en (1.84) se tiene que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(a+j)}{(a+bt)^j \Gamma(a)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \prod_{m=0}^{j-1} \frac{a+m}{a+bt} = 1 \quad \text{para } j \geq 1.$$

Por lo tanto, si en la expresión (2.93) $a \rightarrow \infty$, se obtiene

$$P_{n+1}(t) = \frac{qt}{n+1} e^{-bt} \sum_{j=0}^n \frac{(bt)^j}{j!} P_{n-j}(t). \quad (2.94)$$

Esta expresión coincide con la fórmula de recurrencia de la pmf de Neyman tipo A dada en [157] con parámetros $m_1 = \frac{q}{b}$ y $m_2 = bt$.

De acuerdo con los casos analizados, se tiene que la pmf dada en (2.83) satisface las siguientes relaciones:

$$P_{n+1}(t) = \begin{cases} \frac{t}{n+1} \frac{q/\kappa+n}{1/\kappa+t} P_n(t), \text{ con } \kappa > 0 & \text{si } a = 1, \\ \frac{qt}{n+1} \sum_{j=0}^n \text{BN}(j; a, \frac{1}{1+\kappa t}) P_{n-j}(t), & \text{si } a \neq 1, \\ \frac{qt}{n+1} \sum_{j=0}^n \mathcal{P}(j; bt) P_{n-j}(t), \text{ con } \kappa = \frac{b}{a}, & \text{si } a \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.95)$$

Las últimas 2 expresiones de (2.95) coinciden con las convoluciones entre un proceso de conteo de tipo $\text{BN}(x; a, \frac{1}{1+\kappa t})$ o $\mathcal{P}(x; bt)$ y un proceso de Hofmann $\mathcal{H}(a, q, \kappa)$. Por otra parte, el coeficiente $\frac{t}{n+1}$ indica que el intervalo $(0, t]$ se dividió entre el número de ocurrencias $n+1$, dando subintervalos de igual duración.

2.4.2.2.3 Estimación de los parámetros de la familia de Hofmann

De acuerdo con [104], para estimar los parámetros de la familia de Hofmann se usa el método de los momentos. Los primeros 3 momentos centrales del proceso $\mathcal{H}(a, q, \kappa)$, para t fijo, se establecen usando (2.85) y (1.27):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N(t)] &= qt, & \text{Var}[N(t)] &= (1 + a\kappa t)\mathbb{E}[N(t)], \\ \mathbb{E}[(N(t) - \mathbb{E}[N(t)])^3] &= qt[(1 + a\kappa t)^2 + a\kappa t(1 + \kappa t)]. \end{aligned}$$

Al igualar estas cantidades con sus momentos muestrales correspondientes y despejar a , qt y κt , se obtienen los siguientes estimadores:

$$\widehat{qt} = \bar{n} \quad \text{y} \quad \widehat{\kappa t} = \frac{1}{\bar{n}} \frac{m_3 - s_n^2}{d-1} - d-3, \quad (2.96)$$

y $\widehat{a} = \frac{d-1}{\widehat{\kappa t}}$, donde $d = \frac{s_n^2}{\bar{n}}$ y m_3 es el tercer momento central muestral. Cuando $\widehat{a} \neq 0$, entonces

$$\frac{\widehat{qt}}{\widehat{a}\widehat{\kappa t}} = \frac{\bar{n}^2}{s_n^2 - \bar{n}} \quad \text{y} \quad \frac{\widehat{a}\widehat{\kappa t}}{1 + \widehat{a}\widehat{\kappa t}} = 1 - \frac{\bar{n}}{s_n^2}$$

estas expresiones coinciden con las estimaciones por el método de los momentos para el modelo binomial negativo dadas en (2.3).

Nótese que $I_{N_t} = 1 + a\kappa t$. Luego,

$$I_{N_t} \begin{cases} > 1 & \text{si } a\kappa > 0, \\ = 1 & \text{si } a\kappa = 0. \end{cases}$$

Ejemplo 2.6. [181, pág. 16].

Los datos dados en [203] tabla 2.11 presentan tabulados el número de los reclamos en vehículos de la categoría “negocio y turismo” que pertenecen a 2 clases bajas de tarifas, registrada durante todo un año ($(0, t] = (0, 1]$).

Tabla 2.11. Reclamos en vehículos de la categoría “negocio y turismo”

| N.º de reclamos k | Frecuencia observada n_k |
|------------------------|-------------------------------|
| 0 | 7 840 |
| 1 | 1 317 |
| 2 | 239 |
| 3 | 42 |
| 4 | 14 |
| 5 | 4 |
| 6 | 4 |
| 7 | 1 |
| Total | 9461 |

Fuente: tomada de [203, pág. 153].

n_k es el número de vehículos que han sufrido k siniestros reales, eso significa la exclusión de los siniestros sin consecuencias que no han ocasionado ningún pago.

Aunque pertenecen a 2 clases de tarifas, los vehículos se agruparon en una única estadística, puesto que las tasas instantáneas de los siniestros en dichas clases resultaron extremadamente parecidas.

Determine las correspondientes aproximaciones numéricas a las pmf que mejor ajustan los datos, presentando las respectivas aproximaciones de funciones de frecuencia con la estimación de parámetros.

Solución. Usando (1.2) se establece la frecuencia relativa $\tilde{f}(k) = \frac{n_k}{n}$ y, luego, se halla

$$\bar{n} = \frac{2028}{9461} \quad \text{y} \quad s_n^2 = \frac{25\,859\,664}{89\,510\,521}.$$

El intervalo de confianza al 95 % para I_N : (1.28315, 1.41241).

1. Proceso Poisson

Aunque $d > 1$, se presenta también la respectiva aproximación con la pmf Poisson, para realizar comparaciones. Por los métodos de los momentos y máxima verosimilitud, se obtiene que $\hat{\lambda} = \bar{n}$.

2. Proceso binomial negativo

Para estimar los parámetros por el método de los momentos se usa la expresión (2.3). El parámetro r de la distribución binomial negativa se determina usando la expresión (2.5) y, se llega a

Tabla 2.12. Iteraciones de Newton-Raphson para encontrar r

| i | r_i |
|-----|------------|
| 0 | 0.61635462 |
| 1 | 0.69985097 |
| 2 | 0.70147998 |
| 3 | 0.70151157 |
| 4 | 0.70151218 |
| 5 | 0.70151219 |

Fuente: elaboración propia.

El valor de \hat{q} se despeja de la expresión (2.4), $\hat{q} = 0.23404482$.

3. Proceso de Hofmann $\mathcal{H}(a, q, c)$

Para determinar los parámetros de esta pmf se calcula m_3 y se obtiene

$$m_3 = \frac{457\,859\,367\,558}{846\,859\,039\,181},$$

tomando $t = 1$ y usando (2.96), se llega a $\hat{q} = \bar{n}$,

$$\hat{a} = 0.33786084 \quad \text{y} \quad \hat{\kappa} = 1.02934841.$$

Los resultados de los parámetros estimados se resumen en la tabla 2.13.

Tabla 2.13. Estimaciones para ajustar procesos clásicos

| Procesos teóricos | Parámetros estimados | | |
|-------------------|-----------------------------|------------|----------------|
| | $\lambda, \hat{r}, \hat{a}$ | \hat{q} | $\hat{\kappa}$ |
| Poisson | 0.21435366 | - | - |
| BN | 0.70151219 | 0.23404482 | - |
| Hofmann | 0.33786084 | 0.21435366 | 1.02934841 |

Puesto que $\hat{a} \neq 1$, ajustar un proceso de Panjer no es apropiado.

Fuente: elaboración propia.

La probabilidad inicial, $P_0(t)$, se determina usando (2.86) para $\theta(t)$. Las aproximaciones se muestran en la tabla 2.14. Nótese que las últimas 2 aproximaciones ajustan mejor los datos que el proceso Poisson.

Tabla 2.14. Comparación de procesos de conteo ajustados

| N.º de rec. k | Reclamos observados | Proceso teórico ajustado | | | |
|--------------------|------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| | | Poisson | Bin. negat. ¹ | Bin. negat. ² | $\mathcal{H}(a, q, c)^1$ |
| 0 | 7840 | 7635.622 | 7871.300 | 7847.011 | 7839.552 |
| 1 | 1317 | 1636.724 | 1251.871 | 1288.364 | 1323.056 |
| 2 | 239 | 175.419 | 261.065 | 256.533 | 225.012 |
| 3 | 42 | 12.534 | 58.750 | 54.066 | 51.058 |
| 4 | 14 | 0.672 | 13.706 | 11.710 | 14.629 |
| 5 | 4 | 0.029 | 3.265 | 2.577 | 4.831 |
| 6 | 4 | 0.000 | 0.789 | 0.573 | 1.741 |
| 7 | 1 | 0.000 | 0.192 | 0.128 | 0.665 |
| Total | 9461 | 9461.000 | 9460.937 | 9460.962 | 9460.546 |
| χ^2 | | 293.426 | 15.481 | 14.967 | 5.471 |
| ν | | 2 | 3 | 3 | 3 |

¹Estimación por el método de los momentos.

²Estimación por máxima verosimilitud.

Fuente: elaboración propia.

De manera análoga al ejemplo 2.1, se rechaza H_0 si $\chi^2_\nu > 7.8147$. Como el último valor de χ^2_ν es menor a 7.8147, no hay evidencia suficiente para rechazar este modelo; en consecuencia, al nivel de 5 %, el proceso de Hofmann brinda un ajuste razonable a los datos. \square

2.5. Ejercicios

2.1 Suponga que la probabilidad en el caso de que un paciente deba permanecer hospitalizado por un día es de 0.8. El paciente cuenta con una póliza de indemnización diaria que después de 5 días de hospitalización le otorga un pago fijo por una cobertura máxima de 6 días. ¿En qué porcentaje aumenta el costo esperado por hospitalización, si se incrementa el número máximo de cobertura de 6 a 15 días?

2.2 Suponga que el número N de reclamos o pérdidas es una variable aleatoria que tiene pmf Poisson con una media Λ y esta sigue:

- Una pmf BN con parámetros 4 y $\frac{1}{3}$. Encuentre $P[N = 0]$.
- Una pmf binomial con parámetros 4 y $\frac{1}{4}$. Encuentre $P[N = 1]$.
- Una pdf exponencial con media 4. Halle $P[N = 0]$ y $P[N = 1]$.

2.3 Suponga que la variable Λ sigue una pdf inversa gaussiana generalizada con parámetros $\beta > 0$, $\nu > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ dada por

$$u_{\Lambda}(\lambda) = \left(\frac{\beta}{\nu}\right)^{\frac{\gamma}{2}} \frac{\lambda^{\gamma-1}}{2K_{\gamma}(\sqrt{\nu\beta})} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\beta\lambda + \frac{\nu}{\lambda}\right)\right\}, \quad \lambda > 0, \quad (2.97)$$

donde $K_{\gamma}(z)$ es la función de Bessel modificada de segundo tipo, de orden γ y argumento z , su forma límite para argumentos pequeños, $z \rightarrow 0$, está dada en [1]. Demuestre que la pmf marginal de N es

$$P(N = n) = \frac{\nu^n (\delta_0)^{\gamma} K_{\gamma+n}(\delta_1)}{n! (\delta_1)^{\gamma+n} K_{\gamma}(\delta_0)},$$

donde $\delta_i = \sqrt{\nu(\beta + 2i)}$, $i = 0, 1$. Esta pmf se conoce como la distribución de Sichel desde la publicación [187].

2.4 Sea $u_{\Lambda}(\lambda)$ la pdf dada en (2.97). Demuestre que la pmf de $N(t)$ es

$$P_n(t) = \frac{(\nu t)^n (\delta_0)^{\gamma} K_{\gamma+n}(\delta_t)}{n! (\delta_t)^{\gamma+n} K_{\gamma}(\delta_0)},$$

en la que $\delta_t = \sqrt{\nu(\beta + 2t)}$, $t \geq 0$. Este proceso es conocido como el proceso compuesto de Sichel a partir del trabajo [188].

2.5 Los datos tomados de [101] (tabla 2.15) muestran el número de reclamos o pérdidas de las pólizas de seguros de automóviles en Australia durante un año.

Tabla 2.15. N.º de reclamos en pólizas de seguros de vehículos

| N.º de reclamos (k) | Frecuencia observada (n_k) |
|----------------------------|-----------------------------------|
| 0 | 565664 |
| 1 | 68714 |
| 2 | 5177 |
| 3 | 365 |
| 4 | 24 |
| 5 | 6 |
| ≥ 6 | 0 |
| Total | 639950 |

Fuente: tomada de [101, pág. 121].

Determine:

- a) La pmf que mejor ajusta los datos, presentando las respectivas aproximaciones de las pmf y estimaciones de sus parámetros.
- b) La mejor mezcla de pmf para ajustar los datos.
- c) El mejor proceso de conteo con $t = 1$.

2.6 Muestre que algunas formas límites, al modificar los parámetros de la distribución Poisson-Pascal, son dadas en la siguiente tabla

Tabla 2.16. Procesos de conteo clásicos obtenidos a partir de (2.87)

| Valores límites | $\mathcal{G}_N(z; t) = P_0[(1 - z)t]$ | Proceso de conteo |
|--|---|-------------------|
| $\kappa \rightarrow 0, q > 0$ | $e^{-qt(1-z)}$ | Poisson homogéneo |
| $a \rightarrow 1, r = \frac{q}{\kappa}$ | $(1 + \kappa t(1 - z))^{-r}$ | Binomial negativo |
| $\kappa = \frac{b}{a}, a \rightarrow \infty$ | $\exp\left\{\frac{q}{b}(e^{bt(z-1)} - 1)\right\}$ | Neyman tipo A |

Fuente: adaptada de [125, pág. 528].

Capítulo
tres
**Distribución del
reclamo total**

En algunos casos la ocurrencia de ciertos eventos pueden generar resultados financieramente negativos (pérdidas) que en cierta medida reducen las ganancias, fondos de caja, presupuestos de una entidad, individuo o empresa que está sujeto o centralizado en entornos que pueden provocar eventos catastróficos en diferentes grados que afectan de algún modo al individuo o empresa.

Una forma de calificar una pérdida (reclamo) es a través del concepto de riesgo. *Riesgo* es todo aquello que puede ocasionar un evento no deseado y conllevar a consecuencias negativas inesperadas.

Las variables aleatorias dentro del contexto de la estadística actuarial permiten explicar de forma apropiada las pérdidas en términos de la frecuencia y el monto (severidad) del daño. En la práctica se tienen las siguientes combinaciones (clasificaciones):

Tabla 3.1. Niveles de frecuencia y severidad

| Frecuencia Severidad | Baja | Alta |
|-------------------------|------------------------------------|---------------------|
| Baja | Riesgo con tendencia no asegurable | Riesgo asegurable |
| Alta | Riesgo asegurable | Riesgo inasegurable |

Fuente: elaboración propia.

Los casos extremos están relacionados con la palabra clave *riesgo* y, en estos casos, lo que se busca es minimizar el impacto de la pérdida que, por lo general, se interpreta en términos económicos dado un nivel de utilidad y un nivel de aversión al riesgo aceptable por parte del asegurado.

En estos casos, está implícita la idea de protegerse a través de un seguro o derivado financiero; esto depende de si se asume el *riesgo* o, por el contrario, es transferido a un tercero. En términos muy elementales este amparo implica un contrato entre las partes que de alguna forma establece explícitamente las cláusulas y condiciones bajo las cuales se aceptan y se pagan los reclamos.

3.1. Suma de variables aleatorias

Supóngase una cartera de n pólizas cuyos montos de reclamación están dados por las variables aleatorias X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sea

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n. \quad (3.1)$$

Luego, nos interesa determinar la **cdf** de S ; en otras palabras, $P(S \leq s)$ o $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq s)$, la cual se obtiene como

$$H_S(s) = \begin{cases} \sum_{k \leq s} P[S = k], & \text{si las } X_i \text{ son discretas} \\ \int_0^s h(u) du, & \text{si las } X_i \text{ son continuas.} \end{cases}$$

En algunos casos, esto puede ser muy complicado y hasta matemáticamente complejo. De acuerdo con la distribución elegida para las X_i se logra determinar una distribución analíticamente conocida para S_n . Cuando no sea posible establecer la **ecdf**, una alternativa es encontrarla a través de métodos de simulación. La **cdf** $H_S(\cdot)$ se obtiene de la siguiente manera:

$$H_S(s) = F_{X_n} * F_{X_{n-1}} * \cdots * F_{X_1}(s). \quad (3.2)$$

Si las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n son **iid** (es decir, $F_{X_i}(x) = F_X(x)$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$) entonces, $H_S(s)$ es llamada la n -ésima convolución de $F_X(s)$ y se denota por $F_X^{*n}(s)$. Esta convolución es la generalización de las expresiones (1.73) y (1.74). Para $n > 1$ se obtiene recurrentemente como sigue:

$$F_X^{*n}(s) = \begin{cases} \sum_{k=0}^s F_X^{*(n-1)}(s-k) f_X(k), & \text{caso discreto,} \\ \int_0^s F_X^{*(n-1)}(s-u) d[F_X(u)], & \text{caso continuo,} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$(3.4)$$

donde $F_X^{*1}(s) = F_X(s)$ y $F_X^{*0}(x)$ denota la **cdf** degenerada dada por

$$F_X^{*0}(s) = \mathcal{H}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0 \\ 1 & \text{si } s \geq 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $\mathcal{H}(x)$ representa la función escalón unitaria de Heaviside.

Ejemplo 3.1. [82, pág. 10]

Sean X y Y variables aleatorias independientes Poisson con parámetros λ y μ , respectivamente. Si $S = X + Y$, encuentre $h_S(s)$.

Solución. Usando la expresión dada para convolución en (1.69) se tiene

$$h_S(s) = \sum_{x \leq s} P[Y = s - x] P[X = x] = \sum_{x=0}^s e^{-\mu} \frac{\mu^{s-x}}{(s-x)!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!},$$

empleando el binomio de Newton (ver (B.5)) se tiene que

$$h_S(s) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{s!} \sum_{x=0}^s \binom{s}{x} \mu^{s-x} \lambda^x = \frac{(\mu + \lambda)^s}{s!} e^{-(\lambda+\mu)}.$$

Luego, S se distribuye Poisson con parámetro $\lambda + \mu$. Este resultado es generalizado en el teorema 3.1. ☑

Ejemplo 3.2. [37, pág. 35]

Suponga que las variables aleatorias X_1, X_2 y X_3 son independientes, con distribuciones definidas como sigue:

Tabla 3.2. Distribuciones de frecuencia

| x | $P(X_1 = x)$ | $P(X_2 = x)$ | $P(X_3 = x)$ |
|-----|--------------|--------------|--------------|
| 0 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
| 1 | 0.3 | 0.2 | 0.0 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.1 |
| 3 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| 4 | - | 0.1 | 0.1 |
| 5 | - | - | 0.1 |

Fuente: elaboración propia.

Encuentre $h_S(x)$ y $H_S(x)$, donde $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Solución. Usando la expresión (3.3) se obtiene la tabla 3.3.

Tabla 3.3. Distribución de S usando convoluciones

| x | $f_{X_1}(x)$ | $f_{X_2}(x)$ | $f_{X_3}(x)$ | $H_S^{*1}(x)$ | $H_S^{*2}(x)$ | $H_S^{*3}(x)$ | $h_S^{*2}(x)$ | $h_S^{*3}(x)$ |
|-----|--------------|--------------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.4 | 0.20 | 0.120 | 0.20 | 0.120 |
| 1 | 0.3 | 0.2 | 0.0 | 0.7 | 0.43 | 0.258 | 0.23 | 0.138 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.1 | 0.9 | 0.63 | 0.398 | 0.20 | 0.140 |
| 3 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 1.0 | 0.79 | 0.537 | 0.16 | 0.139 |
| 4 | - | 0.1 | 0.1 | 1.0 | 0.90 | 0.666 | 0.11 | 0.129 |
| 5 | - | - | 0.1 | 1.0 | 0.96 | 0.781 | 0.06 | 0.115 |
| 6 | - | - | - | 1.0 | 0.99 | 0.869 | 0.03 | 0.088 |
| 7 | - | - | - | 1.0 | 1.00 | 0.928 | 0.01 | 0.059 |
| 8 | - | - | - | 1.0 | 1.00 | 0.964 | - | 0.036 |
| 9 | - | - | - | 1.0 | 1.00 | 0.985 | - | 0.021 |
| 10 | - | - | - | 1.0 | 1.00 | 0.995 | - | 0.010 |
| 11 | - | - | - | 1.0 | 1.00 | 0.999 | - | 0.004 |
| 12 | - | - | - | 1.0 | 1.00 | 1.000 | - | 0.001 |

Fuente: adaptada de [37, pág. 36].

Nota 3.1. *A continuación, se presenta la pmf de S para algunas distribuciones discretas X, Y considerando que estas son variables aleatorias independientes*

Tabla 3.4. Distribuciones asociadas a $S = X + Y$

| pmf para X | pmf para Y | pmf de S |
|------------------------|------------------------|--------------------------|
| Bernoulli p | Bernoulli p | Binomial $2, p$ |
| Binomial m_1, p | Binomial m_2, p | Binomial $m_1 + m_2, p$ |
| Bin. negativa r_1, p | Bin. negativa r_2, p | Bin. neg. $r_1 + r_2, p$ |
| Geométrica p | Geométrica p | Bin. negativa $2, p$ |

Fuente: elaboración propia.

Ejemplo 3.3. *Sean X y Y variables aleatorias independientes uniformes en los intervalos $(0, \alpha)$ y $(0, \beta)$, con $\alpha \leq \beta$, respectivamente. Si $S = X + Y$, encuentre $h_S(s)$.*

Solución. En este caso, los posibles valores de $s \in (0, \alpha + \beta)$ y por la expresión (1.70) se calcula

$$h_S(s) = \int_0^s f_X(s-y)g_Y(y) dy \quad 0 < s < \alpha + \beta.$$

Considerando que $\alpha < \beta$, se subdivide el intervalo en $(0, \alpha)$, $[\alpha, \beta)$ y $[\beta, \alpha + \beta)$. Se tiene la figura 3.1.

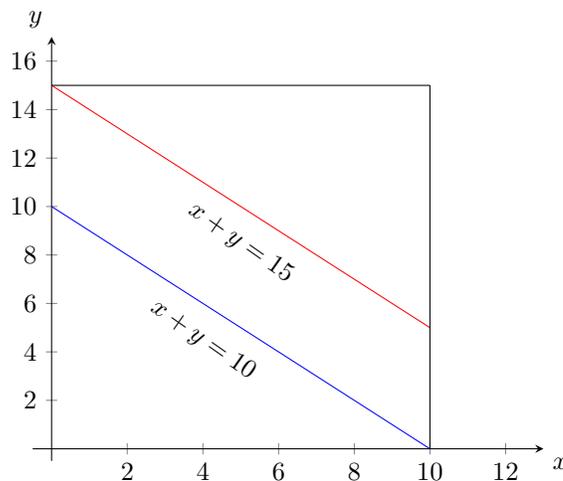


Figura 3.1. Región de integración con $\alpha = 10$ y $\beta = 15$

Fuente: elaboración propia.

Luego, se distinguen 3 casos:

- Si $0 < s < \alpha$, la recta $x + y = s$ interseca el eje X en $x = s$; por lo tanto:

$$h_S(s) = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\beta} \int_0^s dy = \frac{s}{\alpha \cdot \beta} \quad 0 < s < \alpha$$

- Para $\alpha \leq s < \beta$. En este caso, como $x \in (0, \alpha)$, entonces $0 < s - y < \alpha$ o $s - \alpha < y < s$. En consecuencia,

$$h_S(s) = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\beta} \int_{s-\alpha}^s dy = \frac{s - (s - \alpha)}{\alpha \cdot \beta} = \frac{1}{\beta} \quad \alpha \leq s < \beta$$

- Finalmente, para $\beta \leq s < \alpha + \beta$,

$$h_S(s) = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\beta} \int_s^{\alpha+\beta} dy = \frac{\alpha + \beta - s}{\alpha \cdot \beta} \quad \beta \leq s < \alpha + \beta$$

Por lo tanto,

$$h_S(s) = \begin{cases} \frac{s}{\alpha \cdot \beta}, & \text{si } 0 < s < \alpha \\ \frac{1}{\beta}, & \text{si } \alpha \leq s < \beta \\ \frac{\alpha + \beta - s}{\alpha \cdot \beta}, & \text{si } \beta \leq s < \alpha + \beta \\ 0, & \text{en otra parte.} \end{cases}$$

Su representación gráfica es un trapecio de altura $\frac{1}{\beta}$ y bases $\alpha + \beta$ y $\beta - \alpha$. Cuando $\alpha = \beta$, la gráfica es un triángulo. \square

Ejemplo 3.4. [194, pág. 207]

Sean X y Y variables aleatorias *iid* gamma con parámetros (α_1, β) y (α_2, β) , respectivamente. Si $S = X + Y$, encuentre $h_S(s)$.

Solución. Usando la expresión dada para convolución en (1.70) se tiene

$$\begin{aligned} h_S(s) &= \int_0^s f_X(s-y)g_Y(y) dy \\ &= \int_0^s \left[\frac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} (s-y)^{\alpha_1-1} e^{-\beta(s-y)} \right] \left[\frac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} y^{\alpha_2-1} e^{-\beta y} \right] dy \\ &= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta s} \int_0^s (s-y)^{\alpha_1-1} y^{\alpha_2-1} dy \\ &= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} s^{\alpha_1+\alpha_2-2} e^{-\beta s} \int_0^s \left(1 - \frac{y}{s}\right)^{\alpha_1-1} \left(\frac{y}{s}\right)^{\alpha_2-1} dy \end{aligned}$$

al hacer el cambio de variable

$$u = \frac{y}{s} \qquad du = \frac{dy}{s},$$

se obtiene

$$\begin{aligned} h_S(s) &= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} s^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta s} \int_0^1 (1-u)^{\alpha_1-1} u^{\alpha_2-1} du \\ &= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} s^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta s} \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} s^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta s}. \end{aligned}$$

Aquí se tuvo en cuenta el hecho de que la integral entre 0 y 1 de la pdf beta es igual a 1. Nótese que la última expresión coincide con la pdf gamma de parámetros $\alpha_1 + \alpha_2$ y β . \checkmark

Ejemplo 3.5. [61, pág. 20]

Determine la pdf para S , $h_S(s)$, si las variables aleatorias X_i se distribuyen idénticamente exponencial con parámetro β .

Solución. En este caso, para $i = 1, 2, \dots, n$, se tiene que

$$F_{X_i}(s) = 1 - e^{-\beta s} \qquad s \geq 0. \qquad (3.6)$$

Luego,

$$F_X^{*1}(s) = F_X(s) = \int_0^s \beta e^{-\beta u} du = 1 - e^{-\beta s},$$

entonces, por la expresión (3.4) y usando el método de integración tabular dado en [153], se obtiene que

$$F_X^{*2}(s) = \int_0^s \left(1 - e^{-\beta(s-u)}\right) \beta e^{-\beta u} du = 1 - e^{-\beta s} - \beta s e^{-\beta s},$$

$$\begin{aligned} F_X^{*3}(s) &= \int_0^s \left[1 - e^{-\beta(s-u)} - \beta(s-u)e^{-\beta(s-u)}\right] \beta e^{-\beta u} du \\ &= 1 - e^{-\beta s} - \beta s e^{-\beta s} - \frac{(\beta s)^2}{2!} e^{-\beta s}. \end{aligned}$$

En general, se tiene

$$F_X^{*n}(s) = 1 - e^{-\beta s} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta s)^j}{j!}, \qquad n \geq 1. \qquad (3.7)$$

Nótese que esta expresión es la cdf dada en (1.133). Por lo tanto,

$$h_S(s) = \frac{d}{ds} [F_X^{*n}(s)] = \frac{\beta^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\beta s} = \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-\beta s},$$

este resultado coincide con la pdf gamma de parámetros $\alpha = n$ y β . \checkmark

3.1.1. Forma alternativa para establecer la pdf de S

Otra manera de establecer la pdf de S es determinando los momentos de la distribución de pérdida agregada a partir de la pdf común $f_X(x)$ asociada a las variables aleatorias iid X_i ; en otras palabras,

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i],$$

y

$$\text{Var}(S) = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i].$$

Bajo el supuesto que las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n son iid, se tiene que el valor esperado es

$$\mathbb{E}(S) = n\mathbb{E}[X], \quad (3.8)$$

y la varianza de S está dada por

$$\text{Var}(S) = n \text{Var}[X]. \quad (3.9)$$

Además, se determina la distribución de la suma de variables aleatorias independientes, basándose en el teorema 1.8 de unicidad de la función generadora de momentos. Puesto que la función generadora de momentos de la suma establecida en (3.1) está dada por

$$M_S(z) = \mathbb{E}[e^{zS}] = \mathbb{E}[e^{zX_1} e^{zX_2} \dots e^{zX_n}].$$

Si X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes, se tiene que

$$M_S(z) = M_{X_1}(z)M_{X_2}(z) \dots M_{X_n}(z), \quad (3.10)$$

y si, además, las X_i son idénticamente distribuidas, entonces

$$M_S(z) = [M_X(z)]^n. \quad (3.11)$$

Teorema 3.1. Si X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes Poisson con parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, entonces S tiene distribución Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

Demostración. Como las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n son independientes, al sustituir la expresión (1.96) en (3.10) se tiene que

$$M_S(z) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(z) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(e^z - 1)} = \exp\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i (e^z - 1)\right\},$$

la cual coincide con la función generadora de momentos de una variable aleatoria Poisson con parámetro $\sum_{i=1}^n \lambda_i$. \square

Teorema 3.2. Si X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias *iid* geométricas con parámetro q , entonces S es una variable aleatoria binomial negativa con parámetros p y $r = n$.

Demostración. Puesto que las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n son *iid* geométricas. Al sustituir la expresión (1.88) en (3.11) se tiene que

$$M_S(z) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(z) = \left(\frac{p}{1 - qe^z} \right)^n,$$

la cual coincide con la función generadora de momentos de una variable aleatoria binomial negativa con parámetros p y $r = n$. \checkmark

Teorema 3.3. Si X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias *iid* exponenciales de parámetro β , entonces S es una variable aleatoria gamma con parámetros $\alpha = n$ y β .

Demostración. Como las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n son *iid* exponencial, al sustituir la expresión (1.114) en (3.11), se tiene que

$$M_S(z) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(z) = \left(\frac{\beta}{\beta - z} \right)^n,$$

la cual coincide con la función generadora de momentos de una variable aleatoria gamma con parámetros $\alpha = n$ y β . \checkmark

Teorema 3.4. Si X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes normales con medias $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ y varianzas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$, respectivamente, entonces S es una variable aleatoria normal con media $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$ y varianza $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$.

Demostración. Puesto que las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n son independientes, al sustituir la expresión (1.118) en (3.10), se tiene que

$$\begin{aligned} M_S(z) &= \prod_{i=1}^n M_{X_i}(z) = \prod_{i=1}^n e^{\mu_i z + \frac{1}{2} \sigma_i^2 z^2} \\ &= \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\mu_i z + \frac{1}{2} \sigma_i^2 z^2 \right) \right\} = \exp \left\{ z \sum_{i=1}^n \mu_i + \frac{1}{2} z^2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right\}, \end{aligned}$$

la cual coincide con la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal con parámetros $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$ y $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$. \checkmark

3.2. Aproximación para la distribución de la suma de variables aleatorias

El teorema central del límite ofrece un método sencillo para encontrar valores numéricos de la distribución de la suma de variables aleatorias independientes. Puesto que el teorema 1.24 se utiliza para alguna sucesión X_1, X_2, \dots, X_n de variables aleatorias iid; en este caso, se define

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad (3.12)$$

entonces, cuando n es grande,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1). \quad (3.13)$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^n X_i = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) \sim N(n\mu, n\sigma^2).$$

La aproximación normal para la cdf de la suma de variables independientes se usará para obtener de forma rápida resultados numéricos. Si S_n es dada por (3.1) entonces, su valor esperado es

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \quad (3.14)$$

y, si las variables X_i son mutuamente independientes, la varianza es

$$\text{Var}(S_n) = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i). \quad (3.15)$$

Para una aplicación solo se necesita calcular:

- Las medias y las varianzas de las variables aleatorias X_i .
- La suma de las n medidas anteriores y así obtener la media y la varianza del reclamo total.
- La aproximación normal.

3.3. Suma aleatoria de variables aleatorias mutuamente independientes

Sea N la variable aleatoria que denota el número de reclamos que produce una cartera de pólizas en un periodo dado de tiempo y sea X_i el monto del i -ésimo reclamo ($i = 1, 2, \dots, N$). Si S es la pérdida total, entonces:

$$S = \sum_{i=1}^N X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_N. \quad (3.16)$$

De manera análoga a la sección 3.1, se desea caracterizar la **cdf** de S , si las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_N son **iid**, con **cdf** común $F_X(x)$, $x > 0$, y **pdf** común $f_X(x)$. Cuando el número de reclamos N sea una variable aleatoria independiente de las X_i , definida sobre los enteros no negativos con **pmf** $P[N = n]$, entonces la **pdf** de los reclamos totales está dada por

$$h_S(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} P[N = n] f_X^{*n}(x) & \text{si } x > 0 \\ P[N = 0] & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

donde $f_X^{*n}(x)$ denota la n -ésima convolución de $f_X(x)$. Además, la **cdf** de los reclamos totales es

$$\begin{aligned} H_S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P[N = n] P[X_1 + X_2 + \dots + X_N \leq x | N = n] \\ &= P[N = 0] + \sum_{n=1}^{\infty} P[N = n] F_X^{*n}(x), \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde $F_X^{*n}(x)$ denota la n -ésima convolución de $F_X(x)$ dada en (3.3).

Ejemplo 3.6. [162, pág. 215]

Supóngase que el número N de reclamos es una variable aleatoria con **pmf** Poisson de parámetro λ . Los montos de reclamos X son independientes de N y también **iid** entre ellos con **pdf** exponencial de parámetro β . Determine la **pdf** de S .

Solución. Al reemplazar (3.7) en (3.18) se obtiene

$$H_S(x) = P[N = 0] + \sum_{n=1}^{\infty} P[N = n] \left[1 - e^{-\beta x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^j}{j!} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} e^{-\beta x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^j}{j!} \\
 &= 1 - e^{-\lambda - \beta x} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{(\beta x)^j}{j!}.
 \end{aligned}$$

Luego, la pdf está dada por

$$h_S(x) = \frac{d}{dx} [H_S(x)] = e^{-\lambda - \beta x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \beta)^n}{n!} \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)}, \quad x > 0.$$

Esta pdf no es sencilla, sin embargo, en [208] fue expresada como un miembro de la familia exponencial lineal dada en (1.125). ☑

Ejemplo 3.7. Considere una cartera de seguros que produce 0, 1, 2 o 3 reclamos en un periodo temporal con probabilidades 0.4, 0.3, 0.2 y 0.1, respectivamente. El valor de los reclamos es 1, 2 o 3 con probabilidades 0.5, 0.3 y 0.2, respectivamente. Encuentre $h_S(s)$ y $H_S(s)$.

Solución. Puesto que hay a lo más 3 reclamos y cada uno tiene un valor máximo de 3. El reclamo total tiene un valor máximo 9, razón por la cual se limitan los cálculos a $s = 0, 1, \dots, 9$, como se muestra a continuación en la tabla 3.5.

Tabla 3.5. Distribución de S usando la fórmula de convolución (3.17)

| s | $p^{*(0)}(s)$ | $p^{*(1)}(s)$ | $p^{*(2)}(s)$ | $p^{*(3)}(s)$ | $h_S(s)$ | $H_S(s)$ |
|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------|----------|
| 0 | 1 | | | | 0.4000 | 0.4000 |
| 1 | | 0.5 | | | 0.1500 | 0.5500 |
| 2 | | 0.3 | 0.2500 | | 0.1400 | 0.6900 |
| 3 | | 0.2 | 0.3000 | 0.1250 | 0.1325 | 0.8225 |
| 4 | | | 0.2900 | 0.2250 | 0.0805 | 0.9030 |
| 5 | | | 0.1200 | 0.2850 | 0.0525 | 0.9555 |
| 6 | | | 0.0400 | 0.2070 | 0.0287 | 0.9842 |
| 7 | | | | 0.1140 | 0.0114 | 0.9956 |
| 8 | | | | 0.0360 | 0.0036 | 0.9992 |
| 9 | | | | 0.0080 | 0.0008 | 1.0000 |
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | | |
| $P[N = n]$ | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | | |

Fuente: elaboración propia.

3.4. Modelos compuestos para los reclamos totales

Las expresiones (3.17) y (3.18), con las cuales se determinan la pdf y cdf del monto de los reclamos totales S , dependen de la pmf ajustada para la frecuencia de reclamos (N) y la distribución considerada para modelar las X_i . En general, estas fórmulas son complicadas de evaluar algebraicamente, debido a las convoluciones de órdenes superior. Por eso, en la sección 3.6 se presenta una forma de calcular (3.17) mediante un método recursivo. En esta sección, se usan los modelos de frecuencia estudiados en el capítulo 2, para presentar una forma alternativa para determinar la cdf de S que corresponde a los modelos compuestos.

Una forma más sencilla para establecer la pdf de los reclamos totales, (S), es determinando sus momentos. Para ello, se emplean los siguientes teoremas:

Teorema 3.5. Sean X_1, X_2, \dots variables iid con media y varianza finita, y suponga que son independientes de la variable aleatoria con valor entero no negativo N con esperanza finita, $\mathbb{E}[N] < \infty$. Si S es como en (3.16), entonces

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X]. \quad (3.19)$$

y

$$\text{Var}(S) = \mathbb{E}(N) \text{Var}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \text{Var}(N). \quad (3.20)$$

Demostración. Usando (1.60), se tiene que

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(S|N)] = \mathbb{E}[N\mathbb{E}(X)] = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$$

y, empleando la descomposición de la varianza (expresión (1.63)) se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Var}(S) &= \mathbb{E}[\text{Var}(S|N)] + \text{Var}[\mathbb{E}(S|N)] \\ &= \mathbb{E}[N \text{Var}(X)] + \text{Var}[N\mathbb{E}(X)] \\ &= \mathbb{E}(N) \text{Var}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \text{Var}(N). \quad \checkmark \end{aligned}$$

Teorema 3.6. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias iid con funciones generadoras de momentos comunes $M_X(z)$. Sea N una variable aleatoria independiente de las X_i con función generadora de momentos $M_N(z)$, y sea S como en (3.16), entonces la función generadora de momentos de S está dada por

$$M_S(z) = M_N[\ln(M_X(z))]. \quad (3.21)$$

Demostración. La función generadora de momentos de S se establece como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{zS}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{zS}|N]] = \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[e^{z(X_1+X_2+\dots+X_N)} \mid N\right]\right\} \\ M_S(z) &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}[e^{zX_1}] \mathbb{E}[e^{zX_2}] \dots \mathbb{E}[e^{zX_N}]\right\} \\ &= \mathbb{E}[M_{X_1}(z)M_{X_2}(z) \dots M_{X_N}(z)] = \mathbb{E}[M_X(z)^N] \\ &= \mathbb{E}[e^{N \ln(M_X(z))}] = M_N[\ln(M_X(z))],\end{aligned}$$

lo cual equivale a lo que se quería demostrar. □

Nota 3.2. Cuando N no es una variable aleatoria, se llega a los resultados obtenidos anteriormente.

$$\mathbb{E}[S] = n\mathbb{E}(X), \quad \text{Var}[S] = n \text{Var}(X) \quad \text{y} \quad M_S(z) = [M_X(z)]^n.$$

Corolario 3.6.1. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias *iid* con funciones generadoras de probabilidad comunes $G_X(z)$. Sea N una variable aleatoria independiente de las X_i con función generadora de probabilidad $G_N(z)$, y sea S como en (3.16), entonces la función generadora de probabilidad de S está dada por

$$G_S(z) = G_N[G_X(z)]. \quad (3.22)$$

Demostración. Este es un resultado directo del teorema 1.10. □

Ejemplo 3.8. [93, pág. 359]

En una compañía de seguros, el número N de reclamos en un día es una variable aleatoria Poisson con media $\lambda = 3$. Los montos de reclamos X son independientes de N e independientes entre ellos, y están distribuidos uniformemente sobre el intervalo $[0, 1000]$. Encuentre el valor esperado, la varianza del reclamo total S y el riesgo asociado en términos del coeficiente de variación.

Solución. Por las fórmulas dadas en (1.122), se tiene

$$\mathbb{E}[X] = 500, \quad \text{Var}[X] = \frac{500^2}{3} \quad \text{y} \quad M_X(z) = \frac{e^{1000z} - 1}{1000z}.$$

Luego,

$$\mathbb{E}[S] = \lambda \mathbb{E}[X] = 3(500) = 1500.$$

$$\text{Var}[S] = \lambda (\text{Var}[X] + (\mathbb{E}[X])^2) = 3 \left[\frac{500^2}{3} + 500^2 \right] = 4(500^2).$$

$$M_S(z) = \exp \left\{ 3 \left(\frac{e^{1000z} - 1}{1000z} - 1 \right) \right\}.$$

$$CV_S \approx 66,667\%.$$

□

3.4.1. Distribuciones para el monto total de reclamos

En este apartado se estudian algunos casos particulares para modelar la pérdida total S .

Si la distribución de N satisface la recurrencia (1.98), suponiendo que $\alpha + \beta > 0$, para determinar el valor esperado y la varianza del monto total de los reclamos (S), se usan las fórmulas (3.19) y (3.20). Así, se llega a

$$\mathbb{E}[S] = \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha} \mathbb{E}[X] = \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha} \mu_X \tag{3.23}$$

y

$$\text{Var}[S] = \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha} \left[\text{Var}[X] + \frac{\mu_X^2}{1 - \alpha} \right] = \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha} \left[\mathbb{E}(X^2) + \frac{\alpha \mu_X^2}{1 - \alpha} \right]. \tag{3.24}$$

Usando la fórmula (3.21) la función generadora de momentos de S es

$$M_S(z) = \begin{cases} \left(\frac{1 - \alpha M_X(z)}{1 - \alpha} \right)^{-r} & \text{si } \alpha \neq 0, \\ \exp\{\beta(M_X(z) - 1)\} & \text{si } \alpha = 0, \end{cases} \tag{3.25}$$

con $r = \frac{\alpha + \beta}{\alpha}$. Para los valores de α y β dados en la tabla 1.3 se tiene que:

Tabla 3.6. Medidas estadísticas para distribuciones compuestas

| pmf | $\mathbb{E}(S)$ | $\text{Var}(S)$ | $M_S(z)$ |
|--------------------|-----------------------|--|---|
| $Poisson(\lambda)$ | $\lambda \mu_X$ | $\lambda \mathbb{E}(X^2)$ | $e^{\lambda(M_X(z) - 1)}$ |
| $BN(r, p)$ | $r \frac{q}{p} \mu_X$ | $r \frac{q}{p} \left[\mathbb{E}(X^2) + \frac{q}{p} \mu_X^2 \right]$ | $\left(\frac{p}{1 - q M_X(z)} \right)^r$ |
| $Bin(m, p)$ | $mp \mu_X$ | $mp \left[\mathbb{E}(X^2) - p \mu_X^2 \right]$ | $(q + p M_X(z))^m$ |

Fuente: elaboración propia.

En este caso, la distribución de la pérdida total S es la distribución compuesta del monto con respecto al número de siniestros. Así, por ejemplo, si $N \sim Poisson(\lambda)$, entonces la distribución del monto total de los reclamos S es una distribución Poisson compuesta (PC) y se denota como $S \sim PC(\lambda)$.

Ejemplo 3.9. [37, pág. 371]

Supóngase que el número N de reclamos es una variable aleatoria con pmf geométrica de parámetro p ($0 < p < 1$). Los montos de reclamos X son independientes de N e independientes entre ellos, y siguen una pdf exponencial con media 1. Determine la función generadora de momentos de S e interprete.

Solución. En este caso, por la expresión (1.114) se tiene que

$$M_X(z) = \int_0^{\infty} e^{xz} e^{-x} dx = \frac{1}{1-z}. \quad (3.26)$$

Puesto que la distribución geométrica es un caso particular de la binomial negativa (BN) cuando $r = 1$, usando (3.25) se obtiene que

$$M_S(z) = \frac{p}{1-q M_X(z)} = \frac{p(1-z)}{p-z} = \frac{p(p+q-z)}{p-z} = p + q \frac{p}{p-z}.$$

Nótese que la última expresión coincide con la función generadora de momentos de la exponencial con parámetro p . Por el teorema 1.11, esta es la función generadora de momentos de una mezcla de distribuciones

$$H_S(s) = p + q(1 - e^{-ps}) = 1 - q e^{-ps}. \quad (3.27)$$

Luego, S no tiene distribución conocida. ☑

Ejemplo 3.10. [127, pág. 94]

Supóngase que el número de reclamos N es una variable aleatoria con pmf Poisson de parámetro λ , los montos de reclamos X son independientes de N e independientes entre ellos, y siguen una pmf logarítmica de parámetro q . Determine la pdf de S .

Solución. Como $N \sim Poisson(\lambda)$, por la expresión (1.96) se tiene que

$$M_N(z) = \exp \{ \lambda (e^z - 1) \}. \quad (3.28)$$

Por otra parte, usando la expresión (1.93), la función generadora de momentos de la variable aleatoria X es

$$M_X(z) = \frac{\ln(1 - q e^z)}{\ln(1 - q)}.$$

Por lo tanto, usando (3.25), se obtiene que

$$\begin{aligned} M_S(z) &= \exp \left\{ \lambda \left(\frac{\ln(1 - q e^z)}{\ln(1 - q)} - 1 \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\ln(1 - q)} [\ln(1 - q) - \ln(1 - q e^z)] \right\} \\ &= \left(\frac{1 - q}{1 - q e^z} \right)^{-\frac{\lambda}{\ln(1 - q)}}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Nótese que esta coincide con la función generadora de momentos de la pmf binomial negativa con parámetros $r = -\frac{\lambda}{\ln q}$ y $p = 1 - q$. ☑

3.5. Propiedades de la distribución Poisson compuesta

En esta sección se estudiará una forma alterna de definir la distribución Poisson compuesta, cuando la distribución del monto de los reclamos es discreta. Ahora, en vez de especificar el parámetro λ y la pmf $P_X(x)$, se definirá la distribución en términos de los valores discretos tomados por los montos individuales de los reclamos totales y los parámetros de las variables iid Poisson, asociadas con cada monto posible de los reclamos.

Teorema 3.7. Suma de Poisson compuestas es Poisson compuesta

Sean S_1, S_2, \dots, S_m variables aleatorias mutuamente independientes tales que $S_i \sim PC(\lambda_i)$ para $i = 1, 2, \dots, m$, y pmf del monto de los reclamos, $P(X_i = x)$, entonces

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_m,$$

tiene distribución Poisson compuesta con parámetro

$$\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad (3.30)$$

y sigue una mezcla finita de pmf dada por

$$P(S = x) = \sum_{j=1}^m \omega_j P(X_j = x) \quad \text{con} \quad \omega_j = \frac{\lambda_j}{\lambda}. \quad (3.31)$$

Demostración. Sea $M_j(z)$ la función generadora de momentos de X_j . De acuerdo con (3.25), la función generadora de momentos de S_j es

$$M_{S_j}(z) = \exp \{ \lambda_j [M_j(z) - 1] \}$$

por el supuesto de independencia de S_1, S_2, \dots, S_m , la función generadora de momentos de la suma es

$$\begin{aligned} M_S(z) &= \prod_{j=1}^m M_{S_j}(z) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j [M_j(z) - 1] \right\} = \exp \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j M_j(z) - \lambda \right\} \\ &= \exp \left\{ \lambda \left[\sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{\lambda} M_j(z) - 1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Esta expresión corresponde a la función generadora de momentos de la distribución Poisson compuesta, especificada por (3.30) y (3.31), lo cual prueba el teorema. \square

Este teorema tiene 2 aplicaciones importantes en la construcción de un modelo de seguros:

1. Si se agrupan m carteras de pólizas, en las que los reclamos totales de las carteras tienen distribuciones Poisson compuestas y son mutuamente independientes, entonces el reclamo total para la cartera combinada, tendrá también una distribución Poisson compuesta.
2. Si se considera una cartera de pólizas durante un periodo de m años y se supone independencia entre los m reclamos totales anuales, y los reclamos totales para cada año tienen distribución Poisson compuesta (no se necesita que las distribuciones de los reclamos totales anuales sean idénticas), entonces el reclamo total para el periodo de m años tendrá una distribución Poisson compuesta.

Sean x_1, x_2, \dots, x_m m números distintos y N_1, N_2, \dots, N_m variables aleatorias mutuamente independientes en las que cada $N_j \sim PC(\lambda_j)$, para $j = 1, 2, \dots, m$. Suponiendo que la variable aleatoria $S_j = x_j N_j$ tiene distribución Poisson compuesta con parámetro λ_j y distribución degenerada del monto de los reclamos en x_j , por el teorema 3.7 se tiene que

$$S = \sum_{j=1}^m S_j = \sum_{j=1}^m x_j N_j, \quad (3.32)$$

tiene distribución Poisson compuesta con parámetro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$ y pmf del monto de los reclamos $p(x)$, dada por

$$p(x_j) = P(X = x_j) = \begin{cases} \frac{\lambda_j}{\lambda} & \text{si } j = 1, 2, \dots, m \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (3.33)$$

En general, las N_j de (3.32) son dependientes. Sin embargo, en el caso particular en que S tenga distribución Poisson compuesta con una distribución discreta para el monto de los reclamos, estas resultan ser independientes, como se indica en el siguiente teorema.

Teorema 3.8. *Si la distribución de S dada en (3.32) tiene distribución Poisson compuesta con parámetro λ y la pmf del monto de los reclamos es $\pi_j = p(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$, entonces*

- i) *Las variables aleatorias N_1, \dots, N_m son mutuamente independientes.*
- ii) *$N_j \sim Poisson(\lambda_j)$ con $\lambda_j = \lambda \pi_j$, para $j = 1, 2, \dots, m$.*

Demostración. Sean $N = \sum_{j=1}^m N_j$ y $n = \sum_{j=1}^m n_j$; luego, la distribución condicional de $\{N_1, N_2, \dots, N_m | N = n\}$ es multinomial con parámetros n y

$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$, respectivamente. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P\{N_1 = n_1, \dots, N_m = n_m\} &= P\{N_1 = n_1, \dots, N_m = n_m | N = n\} P_N(n) \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots \pi_m^{n_m} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\ &= \prod_{j=1}^m \frac{\lambda_j^{n_j}}{n_j!} e^{-\lambda_j}. \end{aligned}$$

La **pmf** marginal de N_k se obtiene sumando sobre todos los n_j para $j \neq k$. Nótese que N_k tiene **pmf** Poisson con media $\lambda_k = \lambda \pi_k$. Por lo tanto, las variables N_j son independientes dado que

$$P\{N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_m = n_m\} = \prod_{k=1}^m P\{N_k = n_k\}. \quad \square$$

El teorema 3.8 y la fórmula (3.32) proveen un método alternativo, para tabular una distribución Poisson compuesta, con distribución discreta para el monto de los reclamos. Para ello, se necesita:

- Establecer la **pdf** de las variables $x_1 N_1, x_2 N_2, \dots, x_m N_m$.
- Calcular la convolución de estas m distribuciones para obtener la **cdf** de la suma S .

Este método es conveniente si m , el número de valores distintos de los posibles reclamos, es pequeño. Aun si los valores de los reclamos individuales tienen distribución continua, algunas veces se usan aproximaciones discretas con el método alternativo, para producir una aproximación satisfactoria a la distribución de la suma S .

La fórmula (3.32) y el teorema 3.8 tienen otra implicación. En lugar de definir una distribución Poisson compuesta de S especificando λ y $P(x)$, definen la distribución de S en términos de los posibles montos individuales x_1, x_2, \dots, x_m y de los respectivos parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ de las distribuciones Poisson asociadas, descritas en la parte II del teorema 3.8. Así, para cada x_i existe una distribución Poisson asociada a N_i , con parámetro λ_i . En términos de esta nueva definición se tiene

$$\mu_S = \mathbb{E}(S) = \sum_{j=1}^m x_j \lambda_j \quad \text{y} \quad \sigma_S^2 = \text{Var}(S) = \sum_{j=1}^m x_j^2 \lambda_j. \quad (3.34)$$

Ejemplo 3.11. [37, pág. 381]

El reclamo total $S \sim PC\left(\frac{4}{5}\right)$ y el valor individual de los reclamos tiene **pmf** $p(1) = 0.25$, $p(2) = 0.375$ y $p(3) = 0.375$. Encuentre $h_S(s) = P[S = s]$ para $s = 0, 1, \dots, 6$.

Solución. Por el método básico los cálculos son análogos a los efectuados en el ejemplo 3.7. En este caso,

$$P[N = k] = \frac{(0.8)^k}{k!} e^{-0.8}, \quad k = 0, 1, \dots$$

En la siguiente tabla se presentan los respectivos cálculos:

Tabla 3.7. Distribución de S usando la fórmula de convolución (3.17)

| x | $p^{*(0)}(x)$ | $p^{*(1)}(x)$ | $p^{*(2)}(x)$ | $p^{*(3)}(x)$ | $p^{*(4)}(x)$ | $p^{*(5)}(x)$ | $p^{*(6)}(x)$ | $h_S(x)$ |
|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------|
| 0 | 1.0000 | | | | | | | 0.4493 |
| 1 | | 0.2500 | | | | | | 0.0899 |
| 2 | | 0.3750 | 0.0625 | | | | | 0.1438 |
| 3 | | 0.3750 | 0.1875 | 0.0156 | | | | 0.1624 |
| 4 | | | 0.3281 | 0.0703 | 0.0039 | | | 0.0499 |
| 5 | | | 0.2813 | 0.1758 | 0.0234 | 0.0010 | | 0.0474 |
| 6 | | | 0.1406 | 0.2637 | 0.0762 | 0.0073 | 0.0002 | 0.0309 |
| n | 0.0000 | 1.0000 | 2.0000 | 3.0000 | 4.0000 | 5.0000 | 6.0000 | |
| P[N=n] | 0.4493 | 0.3595 | 0.1438 | 0.0383 | 0.0077 | 0.0012 | 0.0002 | |

Fuente: adaptada de [37, pág. 381].

En la tabla 3.8 se muestran los cálculos de $h_S(s)$ mediante el método alternativo descrito en esta sección; es decir,

$$h_S(s) = P[N_1 + 2N_2 + 3N_3 = s].$$

Tabla 3.8. Distribución de S usando el método alternativo

| x | $P(1N_1 = x)$ | $P(2N_2 = x)$ | $P(3N_3 = x)$ | $P(N_1 + 2N_2 = x)$ | $h_S(s)$ |
|-------------|---|---|---|---------------------|----------|
| 0 | 0.8187 | 0.7408 | 0.7408 | 0.6065 | 0.4493 |
| 1 | 0.1637 | | | 0.1213 | 0.0899 |
| 2 | 0.0164 | 0.2222 | | 0.1941 | 0.1438 |
| 3 | 0.0011 | | 0.2222 | 0.0372 | 0.1624 |
| 4 | 0.0001 | 0.0333 | | 0.0310 | 0.0499 |
| 5 | 0.0000 | | | 0.0057 | 0.0474 |
| 6 | 0.0000 | 0.0033 | 0.0333 | 0.0033 | 0.0309 |
| n | 1.0000 | 2.0000 | 3.0000 | | |
| λ_n | 0.2000 | 0.3000 | 0.3000 | | |
| | $\frac{\lambda_1^x}{x!} e^{-\lambda_1}$ | $\frac{\lambda_2^x}{x!} e^{-\lambda_2}$ | $\frac{\lambda_3^x}{x!} e^{-\lambda_3}$ | | |

Fuente: adaptada de [37, pág. 382].

Nótese que los valores obtenidos de $h_S(s)$ por ambos métodos coinciden. \square

3.6. Método de recurrencia

Para evaluar las probabilidades de algunas distribuciones compuestas, en esta sección se presenta otra forma: el *método de recurrencia*. Este se describe en los teoremas que se enuncian a continuación.

Lema 3.1. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias *iid* restringidas a enteros positivos, con pmf común $f_X(x)$, entonces la n -ésima convolución está dada por

$$(I) \quad h_S(x) = f_X^{*n}(x) = \sum_{k=1}^x f_X(k) f_X^{*(n-1)}(x-k)$$

$$(II) \quad h_S(x) = f_X^{*n}(x) = \frac{n}{x} \sum_{k=1}^x k f_X(k) f_X^{*(n-1)}(x-k)$$

Demostración. Para $n = 1$, las expresiones (I) y (II) quedan

$$f_X^{*1}(x) = f_X(x) f_X^{*(0)}(0).$$

(i) Para $n > 1$, se encuentra $h_S(x)$ mediante la ley de probabilidad total como sigue:

$$P(S_n = x) = \sum_{k=1}^x P(X_1 = k) P(S_n - X_1 = x - k),$$

donde S_n es dada por (3.1). Nótese que se pueden evaluar las probabilidades $P(S_n - X_1 = x - k)$ y $P(S_n = x)$ usando, respectivamente, la $(n - 1)$ -ésima y n -ésima convolución de $f_X(x)$.

(ii) Para $n > 1$ se establece $h_S(x)$ considerando las esperanzas condicionales $\mathbb{E}[X_i | S_n = x]$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Pero, por simetría, estas cantidades son iguales para todo k . Como la suma total es x , cada una es igual a $\frac{x}{n}$. Por la expresión (1.57) se tiene que:

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbb{E}[X_1 | S_n = x]}_{\frac{x}{n}} &= \sum_{k=1}^x k P(X_1 = k | S_n = x) \\ &= \sum_{k=1}^x k \frac{P(X_1 = k) P(S_n - X_1 = x - k)}{P(S_n = x)}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$P(S_n = x) = \frac{n}{x} \sum_{k=1}^x k P(X_1 = k) P(S_n - X_1 = x - k).$$

Nótese que $P(S_n - X_1 = x - k)$ y $P(S_n = x)$ pueden ser obtenidas, respectivamente, mediante la $(n - 1)$ -ésima y n -ésima convolución de $f_X(x)$. Resolviendo para $f_X^{*n}(x)$ se completa la prueba. \square

Teorema 3.9. Método de recurrencia de Panjer

Si la *pmf* del número de reclamos N satisface (1.98) y la distribución de los montos de los reclamos es restringida a enteros positivos con *pdf* común $f_X(x)$, entonces la *pdf* de S está dada por

$$h_S(s) = \sum_{i=1}^s \left(\alpha + \frac{\beta}{s} i \right) f_X(i) h_S(s-i), \quad s = 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

donde, teniendo en cuenta que $r = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$, se define

$$h_S(0) = \begin{cases} P[N=0] = (1-\alpha)^r & \text{si } f_X(0) = 0 \\ M_N[\ln f_X(0)] & \text{si } f_X(0) > 0. \end{cases}$$

Demostración. Al sustituir la expresión (1.98) en (3.17), se tiene que

$$\begin{aligned} h_S(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha + \frac{\beta}{n} \right) P(N=n-1) f_X^{*n}(s) \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n-1) \sum_{i=1}^s f_X(i) f_X^{*(n-1)}(s-i) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{n} P(N=n-1) \sum_{i=1}^s i f_X(i) f_X^{*(n-1)}(s-i). \end{aligned}$$

Aquí se usaron las 2 partes del lema 3.1. Por otra parte, si se intercambia el orden de las sumatorias, se obtiene

$$\begin{aligned} h_S(s) &= \alpha \sum_{i=1}^s f_X(i) \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n-1) f_X^{*(n-1)}(s-i) \\ &\quad + \frac{\beta}{s} \sum_{i=1}^s i f_X(i) \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n-1) f_X^{*(n-1)}(s-i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^s f_X(i) h_S(s-i) + \frac{\beta}{s} \sum_{i=1}^s i f_X(i) h_S(s-i) \\ &= \sum_{i=1}^s \left(\alpha + \frac{\beta}{s} i \right) f_X(i) h_S(s-i), \end{aligned}$$

que era lo que se quería demostrar. □

Para los valores de α y β dados en la tabla 1.3, en la siguiente tabla se presentan algunas *pdf* que satisfacen la fórmula de recurrencia dada en (3.35):

Tabla 3.9. Expresiones de $h_S(s)$ usando la relación (3.35)

| pmf | $h_S(s)$ | $h_S(0)$ |
|--------------------|---|----------------|
| $Poisson(\lambda)$ | $\frac{\lambda}{s} \sum_{i=1}^s i f_X(i) h_S(s-i)$ | $e^{-\lambda}$ |
| $BN(r, p)$ | $q \sum_{i=1}^s \left(1 + \frac{r-1}{s} i\right) f_X(i) h_S(s-i)$ | p^r |
| $Bin(m, p)$ | $\frac{p}{q} \sum_{i=1}^s \left(\frac{m+1}{s} i - 1\right) f_X(i) h_S(s-i)$ | q^m |

Fuente: elaboración propia.

Ejemplo 3.12. [37, pág. 448]

Supóngase que $S \sim PC(\lambda)$ con $\lambda = \frac{3}{2}$, $f_X(1) = \frac{2}{3}$, $f_X(2) = \frac{1}{3}$. Encuentre los valores de $h_S(s)$ y $H_S(s)$ para $s = 0, 1, \dots, 6$.

Solución. En este caso,

$$h_S(0) = H_S(0) = e^{-\lambda} = e^{-\frac{3}{2}} = 0.22313.$$

Nótese que para $j = 1, 2$, se tiene que $\lambda j f_X(j) = 1$, entonces,

$$h_S(s) = \frac{1}{s} [h_S(s-1) + h_S(s-2)] \quad s = 1, 2, \dots, 6.$$

Luego,

$$H_S(s) = H_S(s-1) + h_S(s).$$

Para el caso en que $s = 1$, $h_S(-1)$ es considerado idénticamente 0. ✓

3.7. Algunas aproximaciones para la pdf compuesta del reclamo total

En la sección 3.2 la pdf normal se empleó como una aproximación de la pdf de los reclamos totales.

Para la distribución Poisson compuesta (binomial negativa compuesta), los 2 parámetros de la aproximación normal son dados en la tabla 3.6. En cada uno de los 2 casos la aproximación es mejor cuando el número esperado de los reclamos es grande; en otras palabras, cuando los parámetros λ y r son grandes para las respectivas distribuciones. Estos 2 resultados están contenidos en el teorema 3.10, el cual se interpreta como una versión del teorema central del límite.

Teorema 3.10.

i) Si S tiene distribución Poisson compuesta, especificada por λ y $P_X(x)$, entonces, cuando $\lambda \rightarrow \infty$,

$$U = \frac{S - \lambda \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\lambda \mathbb{E}(X^2)}} \sim N(0, 1) \quad (3.36)$$

ii) Si S tiene distribución binomial negativa compuesta, especificada por r , p y $P_X(x)$, entonces, cuando $r \rightarrow \infty$,

$$U = \frac{S - r \frac{q}{p} \mathbb{E}(X)}{\frac{q}{p} \mathbb{E}(X) \sqrt{r \left(\frac{p}{q} \gamma_2(X) + 1 \right)}} \sim N(0, 1), \quad (3.37)$$

donde $\gamma_2(X)$ fue dada en (1.40).

Demostración.

i) Considérese la función generadora de momentos de U por las propiedades dadas en el teorema 1.9, se tiene

$$M_U(z) = M_{S - \lambda \mathbb{E}(X)}(v) = \exp \{ -\lambda v \mathbb{E}(X) \} M_S(v),$$

donde $v = \frac{z}{\sqrt{\lambda \mathbb{E}(X^2)}}$. Al sustituir la respectiva expresión de la tabla 3.6, se tiene

$$\begin{aligned} M_U(z) &= \exp \{ -\lambda [v \mathbb{E}(X) - (M_X(v) - 1)] \} \\ &= \exp \left\{ \lambda \left[\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{v^j}{j!} \mathbb{E}(X^j) \right) - v \mathbb{E}(X) - 1 \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \lambda \sum_{j=2}^{\infty} \frac{v^j}{j!} \mathbb{E}(X^j) \right\} = \exp \left\{ \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\lambda}{j!} \left(\frac{z}{\sqrt{\lambda \mathbb{E}(X^2)}} \right)^j \mathbb{E}(X^j) \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} M_U(z) &= \exp \left\{ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{z^2}{2} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{1-\frac{j}{2}} \left(\frac{z}{\sqrt{\lambda \mathbb{E}(X^2)}} \right)^j \mathbb{E}(X^j) \right] \right\} \\ &= e^{\frac{z^2}{2}} \end{aligned}$$

la cual es la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal estándar.

ii) Sea $\theta = \frac{q}{p}\mathbb{E}(X)\sqrt{\frac{p}{q}\gamma_2(X) + 1}$, entonces

$$\sigma_S = \theta\sqrt{r} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dr}\sigma_S = \frac{1}{2r}\sigma_S.$$

Nuevamente por las propiedades dadas en el teorema 1.9, la función generadora de momentos de U , queda

$$M_U(z) = M_{S-r\frac{q}{p}\mathbb{E}(X)}(w) = \exp\{-rqp^{-1}w\mathbb{E}(X)\}M_S(w),$$

donde $w = \frac{z}{\sigma_S}$. Usando la respectiva expresión de la tabla 3.6, se tiene

$$\begin{aligned} M_U(z) &= \exp\left\{r\left[\ln p - qp^{-1}w\mathbb{E}(X) - \ln(1 - qM_X(w))\right]\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{\ln p - qp^{-1}w\mathbb{E}(X) - \ln(1 - qM_X(w))}{r^{-1}}\right\}. \end{aligned}$$

Cuando $r \rightarrow \infty$, aplicando la regla de L'Hôpital, se obtiene

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M_U(z) = \exp\left\{\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{q}{2}w \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^{j+1}) + \frac{q}{p}\mu\mathbb{E}(X^j)}{j!} w^j}{\frac{p}{r} - \frac{q}{r} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w^j}{j!} \mathbb{E}(X^j)}\right\}.$$

Después de algunas simplificaciones algebraicas se llega a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M_U(z) = \exp\left\{\frac{z^2}{2} \frac{q}{p} \frac{\mathbb{E}(X^2) + \frac{q}{p}(\mathbb{E}(X))^2}{\theta^2}\right\} = e^{\frac{z^2}{2}},$$

la cual es la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal estándar. \checkmark

3.7.1. Distribución gamma trasladada

La distribución normal puede no ser la mejor aproximación para la distribución del reclamo total, ya que la normal es simétrica e insesgada. En esta sección, teniendo en cuenta este sesgo, se presenta una aproximación que se ajusta a la distribución del reclamo total.

En [37] se propone usar la distribución gamma por tener el tercer momento central positivo como lo tienen las distribuciones Poisson compuesta y binomial negativa compuesta, con valores positivos de los reclamos.

Definición 3.1. Para cualquier x_0 a partir de la *cdf* dada en (2.69) se define

$$H(x; \alpha, \beta^{-1}, x_0) = \mathcal{G}(x - x_0; \alpha, \beta^{-1}). \quad (3.38)$$

donde $\mathcal{G}(x; \alpha, \beta^{-1})$ es la *cdf* dada en (1.132). Entonces la función dada en (3.38) representa a $\mathcal{G}(x; \alpha, \beta^{-1})$ trasladada en x_0 .

La distribución de la variable aleatoria $S = X + x_0$ se aproxima mediante la pdf gamma trasladada dada en (2.69), donde los parámetros α , β^{-1} y x_0 son obtenidos mediante el método de momentos. Puesto que los momentos centrales de las distribuciones gamma trasladada y gamma clásica son los mismos, este procedimiento impone lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= x_0 + \alpha\beta, & \text{Var}(S) &= \alpha\beta^2, \\ \mathbb{E}[(S - \mathbb{E}(S))^3] &= 2\alpha\beta^3.\end{aligned}$$

Entonces,

$$2\beta = \sigma_S \beta_1(S), \quad \alpha = \frac{4}{\beta_1^2(S)} \quad \text{y} \quad x_0 = \mathbb{E}(S) - \frac{2\sigma_S}{\beta_1(S)} \quad (3.39)$$

donde $\beta_1(S)$ denota el coeficiente de asimetría. Si $S \sim PC(\lambda)$, entonces

$$2\beta = \frac{\mathbb{E}(X^3)}{\mathbb{E}(X^2)}, \quad \alpha = \lambda \frac{\mathbb{E}(X^2)}{\beta^2} \quad \text{y} \quad x_0 = \lambda \mathbb{E}(X) - \lambda \frac{\mathbb{E}(X^2)}{\beta}.$$

Cuando $\alpha \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow \infty$ y $x_0 \rightarrow -\infty$ tales que

$$\mathbb{E}(S) = \lambda \text{ (constante)} \quad \text{y} \quad \text{Var}(S) = \sigma^2 \text{ (constante)},$$

la cdf $H(x; \alpha, \beta, x_0)$ converge a la cdf $N(\lambda, \sigma^2)$. Por lo tanto, la familia de distribuciones normales, como distribuciones límites, está contenida en esta familia de distribuciones gamma con 3 parámetros. En este sentido, esta aproximación es una generalización de la aproximación normal.

Ejemplo 3.13. [37, pág. 389]

Suponga que $S \sim PC(\lambda)$ con $\lambda = 16$ y una distribución del monto de los reclamos degenerada en 1. Compare la distribución real con las aproximaciones realizadas usando las distribuciones:

- a) Gamma trasladada. b) Normal estándar.

Solución.

- a) En este caso,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X^3] = 1.$$

De las expresiones (3.39) se tiene que

$$\beta = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 64 \quad \text{y} \quad x_0 = -16.$$

- b) Para la aproximación normal, se usa

$$\mu = 16 \quad \text{y} \quad \sigma = 4.$$

Estas aproximaciones se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 3.10. Aproximaciones para la distribución del monto de los reclamos

| x | Exacta $H_S(x) = e^{-16} \sum_{k=0}^x \frac{16^k}{k!}$ | Aproximaciones $\mathcal{G}\left(x + 16.5; 64; \frac{1}{2}\right)$ | $\Phi\left(\frac{x+1/2-16}{4}\right)$ |
|-----|---|---|---------------------------------------|
| 5 | 0.001384 | 0.001636 | 0.004332 |
| 10 | 0.077396 | 0.077739 | 0.084566 |
| 20 | 0.868168 | 0.868093 | 0.869705 |
| 30 | 0.999433 | 0.999378 | 0.999855 |
| 40 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |

Fuente: adaptada de [37, pág. 389].

En las aproximaciones se realizó corrección por continuidad. ✓

Teorema 3.11. Si las variables aleatorias S_k , $k = 1, 2, \dots$, tienen *pmf* binomiales negativas compuestas con parámetros r y $p(k) = \frac{p}{p+kq}$ y *pmf* del monto de los reclamos $P(x)$ y, si los parámetros de las *pmf* binomiales negativas son tales que

$$\frac{q(k)}{p(k)} = k \frac{q}{p} \quad k = 1, 2, \dots,$$

donde $q = 1 - p$ es una constante, entonces

$$U_k = \frac{S_k}{\mathbb{E}[S_k]} \xrightarrow{D} \mathcal{G}\left(x; r, \frac{1}{r}\right).$$

Demostración. La función generadora de momentos de la distribución binomial negativa con parámetros r y $p(k)$ es

$$M_N(z) = \left[\frac{p(k)}{1 - q(k)e^z} \right]^r.$$

Por otra parte, la función generadora de momentos de U_k , al aplicar las propiedades dadas en el teorema 1.9, se obtiene

$$M_{U_k}(z) = M_{S_k}\left(\frac{z}{\mathbb{E}[S_k]}\right) = \left[\frac{p(k)}{1 - q(k)M_X\left(\frac{z}{\mathbb{E}[S_k]}\right)} \right]^r.$$

Usando el desarrollo de Taylor de la *mgf* se tiene

$$M_{U_k}(z) = \left\{ p(k) \left[1 - q(k) - q(k) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{z}{\mathbb{E}[S_k]} \right)^j \mathbb{E}(X^j) \right]^{-1} \right\}^r$$

como

$$\mathbb{E}[S_k] = r \frac{q(k)}{p(k)} \mathbb{E}[X] = r k \frac{q}{p} \mathbb{E}[X].$$

Al reemplazar, se tiene

$$\begin{aligned} M_{U_k}(z) &= \left\{ p(k) \left[1 - q(k) - q(k) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{p z}{r k q \mathbb{E}[X]} \right)^j \mathbb{E}(X^j) \right]^{-1} \right\}^r \\ &= \left\{ \left[\frac{1 - q(k)}{p(k)} - \frac{q(k)}{p(k)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{p z}{r k q \mathbb{E}[X]} \right)^j \mathbb{E}(X^j) \right]^{-1} \right\}^r. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} M_{U_k}(z) &= \left\{ \left[1 - \frac{1}{r} z - k \frac{q}{p} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{p z}{r k q \mathbb{E}[X]} \right)^j \mathbb{E}(X^j) \right]^{-1} \right\}^r \\ &= \left\{ \left[1 - \frac{1}{r} z - \lim_{k \rightarrow \infty} k \frac{q}{p} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{p z}{r k q \mathbb{E}[X]} \right)^j \mathbb{E}(X^j) \right]^{-1} \right\}^r \\ &= \left[1 - \frac{1}{r} z \right]^{-r} = \left(\frac{r}{r - z} \right)^r. \end{aligned}$$

Nótese que esta última expresión es la función generadora de momentos de una gamma con parámetros $\alpha = r$ y $\beta = \frac{1}{r}$. \square

3.8. Proceso del reclamo total

Supóngase que en el intervalo de tiempo $(0, \infty)$ las reclamaciones que proceden de una cartera de pólizas ocurren de acuerdo con un proceso Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ de intensidad $\lambda(t)$, $0 \leq t < \infty$. Aquí, las sumas pagadas por la compañía hasta el momento t : $X_1, X_2, \dots, X_{N(t)}$ son variables aleatorias iid, así como independientes del tiempo en el que ocurren las reclamaciones, con una cdf $F_X(x)$ tal que $F_X(0) = 0$; es decir, el monto total de las reclamaciones al tiempo t es la suma aleatoria:

$$S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)} \quad (3.40)$$

donde $\{S(t), t \geq 0\}$ es el “proceso del reclamo (pérdida) total”, que mide todos los reclamos (pérdidas) pagados hasta el tiempo t .

En el capítulo 2 se estudiaron algunas alternativas para modelar el número de reclamaciones. En [133] se propone una solución elegante para tratar la variabilidad en el tiempo descrita en esta sección.

3.8.1. Tiempo operacional

Si $\{N(t), t \geq 0\}$ sigue un proceso Poisson no homogéneo, la probabilidad de que antes del tiempo τ existan exactamente n reclamos es:

$$P[N(\tau) = n] = P_n(\tau) = \frac{[\mu(\tau)]^n}{n!} \exp\{-\mu(\tau)\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.41)$$

donde $\mu(\tau) = \int_0^\tau \lambda(v) dv$. En general, si el número de reclamaciones en un intervalo $(t_1, t_2]$ tiene pmf Poisson con parámetro $\int_{t_1}^{t_2} \lambda(v) dv$ y los incrementos sobre intervalos disyuntos son variables aleatorias independientes, entonces $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso Poisson no homogéneo.

En este caso, el modelo dado en (3.40) se denomina *proceso de Poisson compuesto no homogéneo* (es decir, de intensidad variable). Bajo la siguiente transformación en la escala de tiempo $t = t(\tau)$,

$$t = \frac{1}{\lambda} \mu(\tau) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\tau \lambda(v) dv, \quad \lambda > 0. \quad (3.42)$$

La expresión (3.41) se puede reformular como sigue

$$P[N(t) = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.43)$$

Nótese que este proceso de conteo de reclamos coincide con la expresión dada en (2.51), es decir, toma la forma de un proceso Poisson de intensidad constante, con tasa de reclamación por unidad de tiempo $\lambda > 0$.

Por lo tanto, el proceso sobre el *tiempo operacional* t , el cual se denota por $\{S(t), t \geq 0\}$, será un proceso Poisson compuesto homogéneo de intensidad λ , lo que significa que el monto total de las sumas pagadas por concepto de reclamaciones será un proceso estocástico con incrementos estacionarios e independientes, y, mediante la ley de probabilidad total, se deduce su cdf como sigue (ver [204]):

$$\begin{aligned} \underbrace{P[S(t) \leq x]} &= \sum_{n=0}^{\infty} P[X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)} \leq x | N(t) = n] P_n(t) \\ H_S(x; t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F_X^{*n}(x), \end{aligned} \quad (3.44)$$

donde $F_X^{*n}(x)$ denota la n -ésima convolución de $F_X(x)$.

El tiempo operacional permite presentar la teoría de manera más elegante, es una herramienta esencialmente poderosa en la estimación de la cdf de S , pues reemplaza el conocimiento detallado de la constitución y las

alternativas de la cartera de pólizas por una estimación del número esperado de reclamaciones durante el periodo futuro en consideración.

En lo sucesivo, se entenderá que $\{S(t), t \geq 0\}$ y $\{N(t), t \geq 0\}$ son procesos que se desarrollan en escala de tiempo operacional.

En este caso, si μ_X existe, usando la expresión (3.19), el monto esperado de siniestros totales pagados por la compañía en $(0, t]$ será:

$$\mathbb{E}[S(t)] = \lambda t \mu_X. \quad (3.45)$$

y, por similitud con (3.20), la varianza del monto total de siniestros pagados por la compañía será

$$\text{Var}[S(t)] = \lambda t [\mu_X^2 + \sigma_X^2] = \lambda t \mu'_2(X). \quad (3.46)$$

De manera análoga a la fórmula (3.21) la función generadora de momentos del proceso $S(t)$ es

$$\begin{aligned} M_S(z; t) &= \mathbb{E}[e^{zS_t}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{zS_t} | N(t) = N_t]] \\ &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[e^{z(X_1 + X_2 + \dots + X_{N_t})} \middle| N_t\right]\right\} = \mathbb{E}[M_X(z)^{N_t}] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{N_t \ln(M_X(z))}\right] = M_{N_t}[\ln(M_X(z))]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

La distribución del proceso $\{N(t), t \geq 0\}$ se define por 2 métodos:

- a) *Global*: para todo $t \geq 0$ y todo $h > 0$, se especifica la distribución condicional de $N(t+h) - N(t)$, dados los valores de $N(u)$ para $u \leq t$.
- b) *Discreto*: se especifica la distribución conjunta de los tiempos T_j para $j = 1, 2, \dots$, donde T_j denota el tiempo de ocurrencia del j -ésimo reclamo.

Ejemplo 3.14. [37, pág. 407]

Considere m individuos de edad x en el tiempo 0. Sea $N(t)$ el número de decesos que han ocurrido en el intervalo de tiempo $[0, t)$ y T_j el tiempo de ocurrencia del j -ésimo deceso ($j = 1, 2, \dots, m$). Supóngase que los tiempos futuros de vida son independientes entre sí. Especifique el proceso $\{N(t), t \geq 0\}$ para cada uno de los 2 métodos descritos.

Solución.

- a) La distribución condicional de $N(t+h) - N(t)$, dada $N(t) = j$, es binomial con parámetros $m - j$ y ${}_h q_{x+t}$, $j = 1, 2, \dots, m - 1$. Así,

$$P[N(t+h) - N(t) = k | N(t) = j] = \binom{m-j}{k} {}_h q_{x+t}^k (1 - {}_h q_{x+t})^{m-j-k},$$

donde $k = 0, 1, \dots, m - j$. Note que la distribución condicional depende de t y solo de $N(u)$ en $u = t$.

- b) Para $j = 1, 2, \dots, m - 1$, la distribución conjunta para el tiempo transcurrido entre reclamaciones sucesivas es

$$\begin{aligned} P[T_{j+1} - T_j > u | T_j = t] &= P[T_{j+1} > t + u | T_j = t] \\ &= P[N(t + u) - N(t) = 0 | N(t) = j] \\ &= (1 - {}_u q_{x+t})^{m-j}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

3.8.2. Distribuciones para el proceso del monto total de reclamos

En este apartado se consideran algunos casos particulares para modelar el proceso del reclamo total $S(t)$. Si la pmf del proceso $N(t)$ satisface la recurrencia (2.83), el valor esperado y la varianza del monto total $S(t)$ de los reclamos se determinan usando las fórmulas (3.45) y (3.46)

$$\mathbb{E}[S(t)] = q t \mathbb{E}[X] \quad (3.48)$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var}[S(t)] &= q t [\text{Var}[X] + (1 + a \kappa t) (\mathbb{E}[X])^2] \\ &= q t [\mathbb{E}[X^2] + a \kappa t (\mathbb{E}[X])^2]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

De acuerdo con (3.47) y usando (2.84) la función generadora de momentos de $S(t)$, queda

$$M_S(z; t) = \begin{cases} M_X(z; t)^{-\frac{q}{\kappa}}, & \text{si } a = 1, \\ \exp\left\{\frac{q}{\kappa(a-1)} [M_X(z; t)^{1-a} - 1]\right\}, & \text{si } a \neq 1, \\ \exp\left\{\frac{q}{b} (e^{-bt(1-M_X(z))} - 1)\right\}, \text{ con } \kappa = \frac{b}{a} & \text{si } a \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.50)$$

donde $M_X(z; t) = [1 + \kappa t - \kappa t M_X(z)]$.

Teorema 3.12. Método de recurrencia del proceso Hofmann

Si la pmf del número N de reclamos satisface (2.83) y la distribución de los montos de los reclamos es restringida a enteros positivos con pdf común $f_X(x)$, la pdf de $S(t)$, para $s = 1, 2, \dots$ está dada por

$$h_S(s; t) = \begin{cases} \frac{q t}{s} \sum_{i=1}^s i f_X(i) h_S(s - i; t), & \text{si } a \neq 1 \\ \frac{\kappa t}{1 + \kappa t} \sum_{i=1}^s \left(1 + \frac{q - \kappa}{\kappa} \frac{i}{s}\right) f_X(i) h_S(s - i; t), & \text{si } a = 1. \end{cases} \quad (3.51)$$

donde $q t = \mathbb{E}[N(t)]$ y $h_S(0; t) = P_0(t)$.

Demostración.

i) Para $a \neq 1$, sustituyendo (2.83) en la expresión (3.17), se tiene que

$$h_S(s; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t\lambda(t)}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{a+j-1}{j} \left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t} \right)^j P_{n-1-j}(t) f_X^{*n}(s).$$

Por otra parte, expresando como en (2.91)

$$\alpha_t = \frac{\kappa t}{1+\kappa t} \quad \text{y} \quad \rho_t = t\lambda(t) = \frac{qt}{(1+\kappa t)^a},$$

por la segunda parte del lema 3.1

$$\begin{aligned} h_S(s; t) &= \rho_t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(a)_j}{j!} \alpha_t^j P_{n-1-j}(t) \sum_{i=1}^s \frac{i}{s} f_X(i) f_X^{*(n-1)}(s-i) \\ &= \frac{\rho_t}{s} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{(a)_j}{j!} \alpha_t^j P_{n-j-1}(t) \sum_{i=1}^s i f_X(i) f_X^{*(n-j-1)}(s-i) \\ &= \frac{\rho_t}{s} \sum_{i=1}^s i f_X(i) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a+j-1}{j} \alpha_t^j \sum_{m=1}^{\infty} P_{m-1}(t) f_X^{*(m-1)}(s-i) \end{aligned}$$

al emplear la expresión (1.82) y reemplazar ρ_t , se tiene que

$$\begin{aligned} h_S(s; t) &= \frac{qt}{s} \sum_{i=1}^s i f_X(i) (1+\kappa t - \kappa t)^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} P_{m-1}(t) f_X^{*(m-1)}(s-i) \\ &= \frac{qt}{s} \sum_{i=1}^s i f_X(i) h_S(s-i; t). \end{aligned}$$

ii) El caso $a = 1$ queda como ejercicio para el lector. ☑

Casos particulares

Algunos procesos que satisfacen la relación (2.83) son:

1. Si el proceso de conteo $N(t)$ sigue un proceso Poisson con tasa de intensidad constante qt ; es decir, $N(t) \sim \mathcal{H}(0, q, \kappa)$. En este caso, la fórmula de recurrencia está dada por

$$h_S(s; t) = \frac{qt}{s} \sum_{i=1}^s i f_X(i) h_S(s-i; t) \quad \text{con} \quad h_S(0; t) = e^{-qt} \quad (3.52)$$

2. Para el caso que $N(t) \sim \mathcal{H}(1, q, \kappa)$ con $\kappa \neq 0$, el proceso de conteo $N(t)$ sigue un proceso de Panjer con parámetros dados en (2.91); luego, la fórmula de recurrencia queda

$$h_S(s; t) = \alpha_t \sum_{i=1}^s \left(1 + \frac{\rho - 1}{s} i\right) f_X(i) h_S(s - i; t), \quad (3.53)$$

donde $h_S(0; t) = (1 + \kappa t)^\rho$ y $\rho = \frac{q}{\kappa}$.

3.9. Ejercicios

- 3.1 El monto de reclamos sigue una pmf con $p(1) = 0.5$, $p(2) = 0.3$ y $p(3) = 0.2$. Encuentre la probabilidad de que el valor de los primeros 3 reclamos sea 8.
- 3.2 Suponga que S sigue una pdf exponencial con media Λ y Λ tiene una pmf Poisson con parámetro 6. Encuentre la varianza de la variable S .
- 3.3 La variable aleatoria X tiene pmf $p(x)$, $x = 1, 2$. Si $p^{*2}(2) = 0.25$, encuentre el valor esperado y la varianza de la variable X .
- 3.4 Si $S \sim PC(3)$ y $p(x) = 0.1x$, $x = 1, 2, 3, 4$, encuentre $P[S = 5]$.
- 3.5 Durante la vigencia de una cartera de seguros, se producen 0, 1, 2, 3 o 4 reclamos, por valor de 1 o 2. Si $H_S(6) = 0.935$, $H_S(7) = 0.976$ y $h_S^{*4}(7) = 0.432$, encuentre $h_S^{*4}(8)$.
- 3.6 La pmf del número N de reclamos es: $P[N = 0] = 0.40$, $P[N = 1] = 0.35$, $P[N = 2] = 0.15$ y $P[N = 3] = 0.10$. La pdf de las pérdidas individuales es normal con media 100 y varianza 9. Encuentre la probabilidad de que el total de los reclamos exceda 100.
- 3.7 En una compañía aseguradora se expiden 1250 pólizas de automóviles. El número de reclamos de un afiliado, durante la vigencia, es una variable aleatoria que sigue una pmf Poisson con parámetro 2. Los números de reclamos presentados por otros afiliados son independientes entre sí. ¿Cuál es la probabilidad de que, durante la vigencia, el número de reclamos esté entre 2450 y 2650? Use el teorema central del límite.
- 3.8 Considere una cartera de 500 pólizas de seguros de vida con vigencia anual y de beneficio 2. La probabilidad de deceso de cada asegurado es 0,002. Mediante el uso de la aproximación gamma trasladada, encuentre la probabilidad de que el pago total sea menor que 8.

3.9 Una variable aleatoria S tiene pdf mixta dada por

$$h_S(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } s = 20 \\ \frac{1}{40} & \text{si } 20 < s < 30 \\ \frac{1}{4} & \text{si } s = 30 \end{cases}$$

encuentre $\mathbb{E}(S|S > 26)$.

3.10 Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso de número de reclamos con parámetro $3t$ y sea X_k el monto del k -ésimo reclamo ($k = 1, 2, \dots$) con pdf común $f_X(1) = \frac{2}{3}$ y $f_X(2) = \frac{1}{3}$. Suponga que X_1, X_2, \dots , son independientes de $N(t)$. Encuentre el valor esperado y la varianza del reclamo total en el intervalo de tiempo $(1, 6)$.

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} F_{B_j}(x) & H_X(x) &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \\ &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} F_{B_j}(x) & H_X(x) &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \\ &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} F_{B_j}(x) & H_X(x) &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \\ &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} F_{B_j}(x) & H_X(x) &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \\ &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} F_{B_j}(x) & H_X(x) &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \\ &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} F_{B_j}(x) & H_X(x) &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \\ &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} F_{B_j}(x) & H_X(x) &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \\ &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} F_{B_j}(x) & H_X(x) &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \\ &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} F_{B_j}(x) & H_X(x) &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \\ &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} F_{B_j}(x) & H_X(x) &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \\ &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} F_{B_j}(x) & H_X(x) &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \\ &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} F_{B_j}(x) & H_X(x) &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \\ &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} F_{B_j}(x) & H_X(x) &= \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \end{aligned}$$

Capítulo
cuatro
Modelos básicos
de riesgo

En este capítulo se analizan solo modelos de riesgo con enfoque de “sistema cerrado”; es decir, el número de unidades aseguradas (invertidas) se conoce y se fija al comienzo de un periodo específico. Cabe aclarar que en un “sistema abierto” existen llegadas y salidas de clientes del sistema asegurador (financiero).

Como dato curioso, la teoría de riesgo fue desarrollada, en gran parte, de manera independiente de las nuevas contribuciones en teoría de probabilidades y estadística matemática. En [34] se indica que esta situación es debida a que, durante mucho tiempo, solamente en los juegos de azar y el ramo de los seguros se aplicaron conceptos de teoría de probabilidades. Los actuarios a lo largo del tiempo fueron resolviendo los problemas que aparecían frecuentemente en seguros, sin tratar de estudiarlos de forma general. A medida que la teoría de probabilidades se fue empleando en otras disciplinas, resultó más simple redescubrir estos resultados que rastrearlos en la literatura actualizada en el tema, los cuales permanecían ocultos en el ámbito actuarial.

En [49, p. 7] se establece el propósito de la teoría de riesgo actuarial: “la finalidad de la teoría de riesgo es suministrar un estudio matemático de las variaciones aleatorias en el ramo de seguros y discutir las distintas formas de protección contra efectos adversos”. [82] define de manera sencilla la teoría de riesgo como “la rama de la ciencia actuarial que permite modelar los ramos aseguradores usando variables aleatorias para el número y monto de los siniestros durante las respectivas vigencias”. Esta teoría busca superar las técnicas actuariales usuales basadas solo en frecuencias y montos promedio de reclamaciones, las cuales simplifican excesivamente los sucesos, ya que se reemplazan los riesgos por sus respectivos valores esperados.

La teoría clásica de riesgo, orgullo de las matemáticas actuariales, con alrededor de 3 siglos de antigüedad, tiene entre sus pioneros al astrónomo inglés Edmund Halley, quien desarrolló en 1693 el modelo “tabla de mortalidad”, y a Daniel Bernoulli, quien estableció una hipótesis sobre la toma de decisiones bajo incertidumbre [27] y su aplicación en el campo de los seguros. Esto ya había sido estudiado en 1728 por uno de sus contemporáneos, el matemático suizo Gabriel Cramer. Después de 7 décadas volvió a ser estudiado en la obra [129]. Los razonamientos de Bernoulli y Cramer dieron origen a las teorías de juegos y riesgo; además, propiciaron la construcción dada en [19] sobre una teoría completa y moderna del seguro de incendio, que lamentablemente fue ignorada por varias generaciones de actuarios hasta mediados del siglo pasado. Esto quizás impidió el crecimiento apropiado de la teoría de riesgo, en la que se considere al seguro como un activo que se logra comprar y vender a un precio (prima) establecido por la oferta y demanda del mercado.

En [32] se recopilan los resultados más relevantes de la teoría de riesgo, enfocados en especificar las desviaciones ocasionadas por las variaciones aleatorias de las pólizas individuales. Hasta ese momento el comportamiento de la cartera de pólizas o de inversiones se estimaba como la suma de los resultados de cada póliza o inversión de manera individual. La teoría, así planteada, suponía que la condición financiera de una aseguradora se podía describir completamente por una *cdf* $H_S(x - u)$, donde x denota los pagos por reclamaciones y u las reservas técnicas constituidas para enfrentar las pérdidas (reclamos)¹.

En el contexto real esta *cdf* cambia periódicamente, ya que tanto las primas como los reclamos son pagados continuamente, los contratos caducan y nuevos contratos de ramos se estipulan. Esto conllevaba un monitoreo (evaluación y análisis) permanente del estado financiero de la entidad aseguradora para ajustar la *cdf* $H_S(\cdot)$, a los nuevos requerimientos de reservas, lo cual en la práctica no era fácil de implementar y dio origen a la necesidad de explorar y formular modelos alternativos.

Este problema puede explicar la escasa atención que recibió la teoría de riesgo, además acrecentado por la insistencia de usar esta metodología en el seguro de vida, excluyendo otros tipos de seguros en los cuales existiera alguna aplicabilidad. Dada la estructura dinámica del cálculo actuarial de vida se hicieron explícitos los puntos frágiles de esta teoría.

4.1. Modelos para reclamos individuales

En términos generales, el resultado financiero durante el periodo de vigencia de una póliza (inversión), se refleja de 2 formas:

1. El asegurado (inversor) no tiene ningún reclamo (pérdida).
2. El asegurado (inversor) presenta un reclamo (pérdida).

La entidad aseguradora (financiera) no tiene ningún reclamo con la primera alternativa; sin embargo, tiene un reclamo con la segunda.

Aunque la entidad aseguradora (financiera) desconoce previamente los resultados, el análisis de algunos aspectos relevantes sobre las pérdidas resultan ser un buen indicador de cuál será el resultado de la póliza (inversión). Por ello, la entidad aseguradora (financiera) busca siempre asignar una probabilidad al evento de que el asegurado (inversor) genere un reclamo (pérdida) durante el periodo de vigencia de la póliza (inversión).

¹Aquí se usarán de manera indistinta los términos: reclamo, reclamación y pérdida.

Supóngase que el reclamo que enfrenta un asegurador, o cualquier entidad aseguradora (financiera), por la constitución de una póliza (inversión) se modela mediante una variable aleatoria X , compuesta por 2 variables aleatorias independientes: una que indica la ocurrencia del evento de reclamación de la póliza (inversión) y otra que modela el monto del reclamo.

La pérdida en una póliza (inversión) se modela a través de la siguiente variable indicadora:

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si ocurre alguna pérdida durante la vigencia,} \\ 0 & \text{si no ocurre pérdida durante la vigencia.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Además, se considera que esta sigue una pmf Bernoulli con parámetro q ; es decir,

$$P(I = k) = \begin{cases} q & \text{si } k = 1, \\ 1 - q & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Luego, $\mathbb{E}(I) = P(I = 1)$. Por otra parte, el monto del reclamo se modela mediante una variable aleatoria constante B dada por

$$B = \begin{cases} b & \text{monto del reclamo,} \\ 0 & \text{si no ocurre el reclamo.} \end{cases}$$

Por consiguiente, la variable aleatoria X queda definida como sigue

$$X = IB. \quad (4.2)$$

Este último planteamiento lleva al concepto de *probabilidad condicional*, con lo cual se plantea formalmente el modelo completo de la siguiente manera:

$$P(X|I) = \frac{P(X \cap I)}{P(I)}.$$

En este caso, el valor esperado y la varianza del monto de reclamación de una póliza (inversión) se establecen como sigue:

$$\mathbb{E}(X) = b\mathbb{E}(I) = bq \quad \text{Var}(X) = b^2 \text{Var}(I) = b^2q(1 - q). \quad (4.3)$$

Ahora, se presentan modelos más generales, en los cuales el monto del reclamo es una variable aleatoria y ocurre más de un reclamo en el periodo de vigencia. Al generalizar (4.2) se obtiene

$$X = IB, \quad (4.4)$$

donde B es una variable aleatoria que denota el monto total de los beneficios durante el periodo e I es la variable indicadora dada (4.1). Por lo tanto, la pmf de la variable aleatoria X se obtiene como sigue:

$$P(B = b) = P(X = b|I = 1) = \frac{P(X = b, I = 1)}{P(I = 1)}, \quad b \in A, \quad (4.5)$$

donde A es el conjunto de todos los valores posibles de los beneficios.

La media y la varianza del reclamo dada una reclamación de la póliza (inversión) se denotan como

$$\mathbb{E}(B) = \mathbb{E}(X|I = 1) \quad \text{y} \quad \text{Var}(B) = \text{Var}(X|I = 1). \quad (4.6)$$

Entonces, por la propiedad i) del teorema 1.12, se tiene que la media de la variable aleatoria X está dada por

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|I)]}_{\mathbb{E}[X]} &= \mathbb{E}(X|I = 0)P(I = 0) + \mathbb{E}(X|I = 1)P(I = 1) \\ &= (1 - q)\mathbb{E}(X|I = 0) + q\mathbb{E}(X|I = 1) = q\mathbb{E}(B). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nótese que la distribución condicional de $\{X|I = 0\}$ es irrelevante y, por el teorema 1.13, la varianza de X se establece como

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbb{E}[\text{Var}(X|I)] + \text{Var}[\mathbb{E}(X|I)]}_{\text{Var}(X)} &= \mathbb{E}[I \text{Var}(X)] + \text{Var}[I\mathbb{E}(X)] \\ &= \mathbb{E}(I) \text{Var}(X|I = 1) + (\mathbb{E}(X|I = 1))^2 \text{Var}(I) \\ &= q[\text{Var}(B) + (1 - q)(\mathbb{E}(B))^2]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ejemplo 4.1. Suponga que la probabilidad de pérdida en una póliza (inversión) es $q = 0.02$ y que B sigue una pdf uniforme en el intervalo $[1, 5]$. Determine el valor esperado y la varianza de la pérdida.

Solución. Puesto que B sigue una pdf uniforme, entonces

$$\mathbb{E}(B) = 3 \quad \text{y} \quad \text{Var}(B) = 4/3.$$

Luego,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|I = 1)] = q\mathbb{E}(B) = 0.02(3) = 0.06$$

y

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(I) \text{Var}(B) + (\mathbb{E}(B))^2 \text{Var}(I) = \frac{773}{3750}. \quad \checkmark$$

Ejemplo 4.2. Considere los datos de la primera póliza del ejemplo 1.1. Encuentre $\mathbb{E}(X)$ y $\text{Var}(X)$.

Solución. A partir de la información suministrada se tiene que

$$P\{X = 30\,000, I = 1\} = 0.008 \quad \text{y} \quad P\{X = 60\,000, I = 1\} = 0.002.$$

Luego,

$$P\{I = 1\} = 0.010 \quad \text{y} \quad P\{I = 0\} = 0.990.$$

En este caso, la pmf del monto B de los reclamos está dada por

$$P(B = b) = P(X = b|I = 1) = \begin{cases} \frac{4}{5} & \text{si } b = 30\,000 \\ \frac{1}{5} & \text{si } b = 60\,000, \end{cases}$$

entonces

$$\mu_B = \mathbb{E}(B) = 36\,000 \quad \text{y} \quad \sigma_B^2 = \text{Var}(B) = 1.44 \times 10^8.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}(X) = 0.010(36\,000) = 360 \quad \text{y} \quad \text{Var}(X) = 14\,270\,400. \quad \checkmark$$

Ejemplo 4.3. [37, pág. 29]

Considere un seguro de automóvil que cubre cualquier accidente por encima de un deducible de 250 hasta un reclamo máximo de 2000. En particular, para un individuo la probabilidad de un reclamo es 0.15 y no se recibe más de un reclamo por vigencia. Supóngase que B se modela por la siguiente pdf mixta:

$$f_B(x) = \begin{cases} k\left(1 - \frac{x}{2000}\right) & \text{si } 0 < x < 2000 \\ \frac{1}{10} & \text{si } x = 2000. \end{cases}$$

Supóngase también que el monto B del reclamo reportado a la entidad aseguradora no indica el monto total del daño causado. Encuentre $\mathbb{E}(X)$ y $\text{Var}(X)$.

Solución. A partir de la información suministrada se tiene que

$$P(I = 0) = 0.85 \quad \text{y} \quad P(I = 1) = 0.15.$$

El evento $\{I = 0\}$ incluye las pérdidas inferiores a 250 (la retención). Ahora, se determina el valor de k de la pdf $f_B(x)$, esto es,

$$\frac{9}{10} = \int_0^{2000} k\left(1 - \frac{x}{2000}\right) dx = -\frac{2000}{2} k \left(1 - \frac{x}{2000}\right) \Big|_0^{2000}.$$

Así, $k = \left(\frac{3}{100}\right)^2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mu = \mathbb{E}(B) &= \frac{1}{10}(2000) + \left(\frac{3}{100}\right)^2 \int_0^{2000} x \left(1 - \frac{x}{2000}\right) dx = 800, \\ \mathbb{E}(B^2) &= \frac{1}{10}(2000)^2 + \left(\frac{3}{100}\right)^2 \int_0^{2000} x^2 \left(1 - \frac{x}{2000}\right) dx = 1\,000\,000,\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 800(0.15) = 120 \\ \text{Var}(X) &= q[\mathbb{E}(B^2) - q(\mathbb{E}(B))^2] = 135\,600. \quad \checkmark\end{aligned}$$

4.1.1. Función de distribución de $X = IB$

La **cdf** de la variable aleatoria X se obtiene en términos de la **cdf** de la variable aleatoria B como sigue:

$$\begin{aligned}\underbrace{P(X \leq x)}_{F_X(x)} &= P(X \leq x | I = 0)P(I = 0) + P(X \leq x | I = 1)P(I = 1) \\ F_X(x) &= P(I = 0) + P(B \leq x)P(I = 1).\end{aligned}$$

Por el teorema 1.3 la variable aleatoria X tiene **cdf** mixta dada por

$$F_X(x) = p\mathcal{H}(x) + qF_B(x) \quad \text{con} \quad p = 1 - q.$$

Esta expresión permite establecer su **pdf** como

$$f_X(x) = \begin{cases} p = P(I = 0) & \text{si } x = 0 \\ qF'_B(x) = qf_B(x) & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donde $f_B(x)$ es la **pdf** de la variable aleatoria B .

La variable aleatoria X puede ser discreta no solo en un punto, sino en varios, como se plantea en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4. *En una entidad aseguradora los reclamos son de 2 tipos, cada uno de los cuales sigue la **pdf***

$$f_{B_k}(x) = \frac{2}{\alpha_k} \left(1 - \frac{x}{\alpha_k}\right), \quad 0 \leq x \leq \alpha_k.$$

El 70 % de estos son de tipo 1 con parámetro $\alpha_1 = 2000$ y el otro 30 % son de tipo 2 con parámetro $\alpha_2 = 5000$. Encuentre el reclamo total esperado.

Solución. La pdf del reclamo total está dada por la mezcla

$$f_B(x) = \frac{7}{10}f_{B_1}(x) + \frac{3}{10}f_{B_2}(x);$$

luego,

$$\mu_k = \mathbb{E}(B_k) = \int_0^{\alpha_k} \frac{2}{\alpha_k} x \left(1 - \frac{x}{\alpha_k}\right) dx = \frac{1}{\alpha_k} \left(x^2 - \frac{2}{3} \frac{x^3}{\alpha_k}\right) \Big|_0^{\alpha_k} = \frac{1}{3} \alpha_k.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B) &= \frac{7}{10} \mathbb{E}(B_1) + \frac{3}{10} \mathbb{E}(B_2) \\ &= \frac{7}{10} \frac{2000}{3} + \frac{3}{10} \frac{5000}{3} = \frac{2900}{3}. \end{aligned} \quad \checkmark$$

4.2. Método aproximado

Ahora, se buscará determinar la prima agregada adecuada (con la cual el asegurador cumplirá con sus obligaciones). Considere una cartera de n pólizas cuyos montos de reclamación están dados por las variables aleatorias X_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Sea la variable aleatoria S_n que denota el monto total de reclamación dada en (3.1). Si las variables aleatorias X_k son iid, en este caso, el asegurador recauda por cada suscriptor de póliza solo la prima pura $\mathbb{E}(X)$ y, por ende, tendrá un fondo con la cantidad

$$\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X) \quad \text{y} \quad \text{Var}(S_n) = n \text{Var}(X).$$

Si el asegurador busca incrementar la posibilidad de cumplir con sus obligaciones el asegurador recaudará una prima²

$$\mathcal{P}_I^* = (1 + \theta)\mathbb{E}(S_n) = n(1 + \theta)\mathbb{E}(X) = n\mathcal{P},$$

donde $\mathcal{P} = (1 + \theta)\mathbb{E}(X)$ denota la prima recaudada usando el principio del valor esperado por cada suscriptor de póliza. El recargo θ está relacionado con la probabilidad α de que la prima sea inadecuada. Así

$$\begin{aligned} \alpha &= P \left\{ \begin{array}{l} \text{El monto total} \\ \text{de los reclamos} \end{array} \geq \begin{array}{l} \text{La prima} \\ \text{recaudada} \end{array} \right\} = P(S_n \geq \mathcal{P}_I^*) \\ &= P[S_n \geq (1 + \theta)\mathbb{E}(S_n)] = P\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sigma_S} \geq \theta \frac{\mathbb{E}(S_n)}{\sigma_S}\right). \end{aligned}$$

²Se expresará por P , sigla de *premium*.

Así, $\theta \mathbb{E}(S_n) / \sigma_S$ es el percentil $100(1-\alpha) \%$ de la distribución normal estándar la cual se denota por $z_{(1-\alpha)}$. Luego,

$$\theta = z_{(1-\alpha)} \frac{\sigma_S}{\mathbb{E}(S_n)} = z_{(1-\alpha)} CV_S. \quad (4.9)$$

Si el asegurador recauda una prima total \mathcal{P}_I^* entonces tiene una ganancia (utilidad) de $\mathcal{P}_I^* - S_n$. Luego, su ganancia esperada es

$$\mathbb{E}[\mathcal{P}_I^* - S_n] = (1 + \theta)\mathbb{E}(S_n) - \mathbb{E}(S_n) = \theta\mathbb{E}(S_n),$$

lo cual constituye el recargo total por seguridad.

Ejemplo 4.5. [37, pág. 40]

Una entidad aseguradora suscribe una póliza colectiva de seguros temporales a un año. La tabla siguiente presenta el número de individuos n_k , en cada uno de los 4 niveles de riesgos, la probabilidad de reclamo q_k y el beneficio b_k .

Tabla 4.1. Distribución de la póliza colectiva del ejemplo 4.5

| Nivel de riesgo (k) | Número cubierto (n_k) | Probabilidad de reclamo (q_k) | Valor del beneficio (b_k) |
|----------------------------|------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|
| 1 | 500 | 0.02 | 1 |
| 2 | 500 | 0.02 | 2 |
| 3 | 300 | 0.10 | 1 |
| 4 | 500 | 0.10 | 2 |

Fuente: tomada de [37, pág. 40].

Encuentre el recargo relativo por seguridad, θ , tal que el reclamo total no exceda la cantidad recaudada de los 1800 asegurados con una probabilidad de 0.95.

Solución. En la tabla 4.2 se presentan los respectivos cálculos para determinar la media y la varianza.

Luego,

$$CV_S = \frac{\sqrt{256}}{160} = \frac{1}{10}.$$

El valor de z se busca en la tabla G.1 y se obtiene que

$$\theta = z_{0.95} CV_S = 1.645(0.1) = 0.1645. \quad \checkmark$$

Tabla 4.2. Cálculo de media y varianza de los niveles de riesgo

| n_k | q_k | b_k | Media | Varianza |
|-------|-------|-------|---------------------------|---------------------------------------|
| | | | $n_k \cdot b_k \cdot q_k$ | $n_k \cdot b_k^2 \cdot q_k \cdot p_k$ |
| 500 | 0.02 | 1 | 10 | 9.8 |
| 500 | 0.02 | 2 | 20 | 39.2 |
| 300 | 0.10 | 1 | 30 | 27 |
| 500 | 0.10 | 2 | 100 | 180 |
| 1800 | | | 160 | 256 |

Fuente: adaptada de [37, pág. 41].

Ejemplo 4.6. [37, pág. 42]

Los suscriptores de pólizas de una entidad de seguros de automóviles se dividen en 2 niveles de riesgos.

Tabla 4.3. Distribución de la póliza de autos del ejemplo 4.6

| Nivel de riesgo (k) | Número en el nivel (n_k) | Probabilidad de reclamo (q_k) | Distribución de los reclamos, B_k Exp. censurada con parámetros | |
|----------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|--|-----|
| | | | λ | L |
| 1 | 500 | 0.10 | 1 | 2.5 |
| 2 | 2000 | 0.05 | 2 | 5.0 |

Fuente: tomada de [37, pág. 42].

Supóngase que el recargo relativo por seguridad, θ , es igual para los 2 niveles. Encuentre el valor de θ de modo que el reclamo total no exceda la cantidad recaudada de los 2500 asegurados con una probabilidad de 0.95.

Solución. Puesto que la **cdf** exponencial con parámetro λ y censura por la derecha en L , está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leq x < L \\ 1 & \text{si } x \geq L. \end{cases}$$

Entonces, la **pdf** mixta de la variable B_k , condicionada por la ocurrencia, es

$$f(x|I_k = 1) = \begin{cases} \lambda_k e^{-\lambda_k x} & \text{si } 0 < x < L_k \\ e^{-\lambda_k L_k} & \text{si } x = L_k. \end{cases}$$

Dado que $X_k = I_k B_k$, usando la ley de esperanza total, se tiene que

$$\mu_k = \mathbb{E}(B_k) = \int_0^{L_k} x \lambda_k e^{-\lambda_k x} dx + L_k P[X \geq L_k] = \frac{1}{\lambda_k} (1 - e^{-\lambda_k L_k}),$$

$$\mathbb{E}(B_k^2) = \int_0^{L_k} x^2 \lambda_k e^{-\lambda_k x} dx + L_k^2 P[X \geq L_k] = \frac{2}{\lambda_k^2} (1 - e^{-\lambda_k L_k}) - \frac{2L_k}{\lambda_k} e^{-\lambda_k L_k},$$

luego de unos cálculos y simplificando,

$$\sigma_k^2 = \text{Var}(B_k) = \frac{1}{\lambda_k^2} (1 - 2L_k \lambda_k e^{-\lambda_k L_k} - e^{-2\lambda_k L_k}).$$

Usando estas fórmulas y los valores dados, se obtiene lo siguiente:

Tabla 4.4. Media y varianza de los niveles de riesgo del ejemplo 4.6

| n_k | q_k | μ_k | σ_k^2 | Media | Varianza |
|-------|-------|-------------------------|--------------|---------------------------|--|
| | | | | $\mu_k q_k$ | $\mu_k^2 q_k (1 - q_k) + \sigma_k^2 q_k$ |
| 500 | 0.10 | $1 - e^{-2.5}$ | 0.58284 | $\frac{1 - e^{-2.5}}{10}$ | $\frac{19 - 68e^{-2.5}}{100}$ |
| 2000 | 0.05 | $\frac{1 - e^{-10}}{2}$ | 0.24977 | $\frac{1 - e^{-10}}{40}$ | $\frac{39 - 238e^{-10} - e^{-20}}{1600}$ |

Fuente: adaptada de [37, pág. 43].

Por consiguiente,

$$\mathbb{E}(S) = 100 - 50(e^{-2.5} + e^{-10}) \approx 95.89556$$

y

$$\text{Var}(S) = 500 \frac{19 - 68e^{-2.5}}{100} + 2000 \frac{39 - 238e^{-10} - e^{-20}}{1600} \approx 115.78255.$$

Luego,

$$CV_S = \frac{\sqrt{115.7826}}{95.89348} = 0.11221.$$

El valor de z se busca en la tabla G.1 y se obtiene que

$$\theta = z_{0.95} CV_S = 1.645 (0.11221) = 0.18459. \quad \checkmark$$

4.3. Modelo de riesgo colectivo

En la administración de riesgo nos interesa el comportamiento de una cartera en su conjunto más que el estudio del modelo de riesgo individual, debido al propósito de analizar el riesgo al que está sujeto la entidad aseguradora (financiera), tanto por efectos de la suscripción (contrato) individual como por el comportamiento conjunto de la constitución de pólizas (inversiones). Puesto que los reclamos en una entidad aseguradora (financiera) son modelados como la suma de los reclamos de muchos asegurados (inversores), se suponen independientes en la mayoría de las aplicaciones.

En el modelo de riesgo colectivo se supone que cada uno de los m asegurados (inversores) expuestos al riesgo en la cartera, en un periodo de tiempo unitario ($\Delta t = 1$), es modelado por una variable aleatoria de reclamo individual X_j .

Un problema en este modelo radica en determinar la distribución del reclamo de la cartera en la que cada póliza (inversión) tiene su propia compensación y probabilidad de reclamación, las cuales no son necesariamente iguales. Para abordarlo, como se vio en el capítulo 3, existen varios métodos, como la convolución, la unicidad de la función generadora de momentos, o la aproximación normal, los cuales permiten establecer la distribución de una variable compuesta por la suma de variables aleatorias individuales.

El reclamo total derivado de una cartera de m pólizas (inversiones) individuales y rotuladas de 1 a m , está dado por

$$S_m = \sum_{j=1}^m X_j = X_1 + X_2 + \cdots + X_m. \quad (4.10)$$

donde X_j es el monto del reclamo que proviene de la j -ésima póliza (inversión). Se definen las variables aleatorias indicadoras I_j ($j = 1, 2, \dots, m$) como

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{si ocurre algún reclamo derivado de la } j\text{-ésima póliza,} \\ 0 & \text{si ningún reclamo es derivado de la } j\text{-ésima póliza.} \end{cases} \quad (4.11)$$

Luego, el número de reclamos observados n es determinado como

$$n = \sum_{j=1}^m I_j. \quad (4.12)$$

Cada una de las I_j sigue una pmf Bernoulli con parámetro q_j y se excluye la posibilidad de 2 o más reclamos por póliza (inversión); es decir,

$$P(I_j = k) = \begin{cases} q_j & \text{si } k = 1, \\ 1 - q_j & \text{si } k = 0. \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

En este caso, $\mathbb{E}(I_j) = P(I_j = 1)$. Sea B_j el monto del beneficio neto de la j -ésima póliza (inversión). Al diferenciar entre la ocurrencia de un reclamo y su valor, los reclamos de cada póliza (inversión) quedan definidos como:

$$X_j = I_j B_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4.13)$$

Por lo general, las variables X_1, X_2, \dots, X_m se suponen mutuamente independientes.

La pmf de la variable aleatoria B_j se obtiene como sigue:

$$P(B_j = b) = P(X_j = b | I_j = 1) = \frac{P(X_j = b, I_j = 1)}{P(I_j = 1)}, \quad (4.14)$$

donde $b \in A_j$ y A_j es el conjunto de todos los valores posibles de los reclamos derivados de la j -ésima póliza (inversión).

En general, usando el procedimiento dado en la sección anterior, la media y la varianza de X_j ($j = 1, 2, \dots, m$) están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_j) &= \mathbb{E}(B_j)q_j \quad \text{y} \quad \text{Var}(X_j) = \mathbb{E}(B_j^2)q_j - [\mathbb{E}(B_j)q_j]^2 \\ &= q_j [\text{Var}(B_j) + (1 - q_j) [\mathbb{E}(B_j)]^2]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Además, para $j = 1, 2, \dots, m$,

$$F_{X_j}(x) = p_j \mathcal{H}(x) + q_j F_{B_j}(x) \quad p_j = 1 - q_j.$$

La expresión anterior muestra que la variable aleatoria X tiene cdf mixta; luego, su pdf es dada por

$$f_{X_j}(x) = \begin{cases} p_j = P(I_j = 0) & \text{si } x = 0 \\ q_j f'_{B_j}(x) = q_j f_{B_j}(x) & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donde $f_{B_j}(x)$ es la pdf de la variable aleatoria B_j .

Bajo el supuesto de que las variables aleatorias X_j son mutuamente independientes, se obtiene, para el reclamo total S dado en la expresión (4.10), el valor esperado usando (4.15) y queda

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{j=1}^m \mathbb{E}(X_j) = \sum_{j=1}^m q_j \mathbb{E}(B_j) \quad (4.16)$$

y la varianza de S ,

$$\text{Var}(S) = \sum_{j=1}^m q_j [\text{Var}(B_j) + (1 - q_j) [\mathbb{E}(B_j)]^2]. \quad (4.17)$$

Ejemplo 4.7. Considere las 2 pólizas descritas en el ejemplo 1.1. Determine el valor esperado y la varianza del reclamo total.

Solución. Usando el procedimiento dado en el ejemplo 4.2, se tiene que

$$P\{X_2 = 35\,000, I_2 = 1\} = 0.018 \quad \text{y} \quad P\{X_2 = 70\,000, I_2 = 1\} = 0.003.$$

Luego,

$$P\{I_2 = 1\} = 0.021 \quad \text{y} \quad P\{I_2 = 0\} = 0.979.$$

La pmf del monto B de los beneficios está dada por

$$P(B_2 = b) = P(X_2 = b | I_2 = 1) = \begin{cases} \frac{6}{7} & \text{si } b = 35\,000 \\ \frac{1}{7} & \text{si } b = 70\,000, \end{cases}$$

entonces

$$\mu_2 = \mathbb{E}(B_2) = 40\,000 \quad \text{y} \quad \sigma_2^2 = \text{Var}(B_2) = 1.5 \times 10^8.$$

Por lo tanto, usando los resultados del ejemplo 4.2

$$\mathbb{E}(S) = 0.010(36\,000) + 0.021(40\,000) = 1\,200$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 &= 0.010(1.44 \times 10^8) + 0.021(1.5 \times 10^8) + (0.010)(0.990)(3.6 \times 10^4)^2 \\ &\quad + (0.021)(0.979)(4.0 \times 10^4)^2 = 50\,314\,800. \end{aligned}$$

Es posible establecer estos resultados usando las pmfs de las variables aleatorias X_1 y X_2 . En efecto, la pmf de la variable aleatoria X_j ($j = 1, 2$) se obtiene de la siguiente manera:

$$P(X_j = x) = P\{X_j = x | I_j = 0\}P\{I_j = 0\} + P\{X_j = x | I_j = 1\}P\{I_j = 1\}.$$

Así,

$$P(X_j = x) = \begin{cases} P\{I_j = 0\} & \text{si } x = 0 \\ P\{B_j = x\}P\{I_j = 1\} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

De esta expresión se obtiene que las pmfs de las variables X_1 y X_2 son

| | | | | | | | |
|--------|-------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
| b | 0 | 30 000 | 60 000 | b | 0 | 35 000 | 70 000 |
| $p(b)$ | 0.990 | 0.008 | 0.002 | $p(b)$ | 0.979 | 0.018 | 0.003 |

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1) &= 360 & \text{y} & & \text{Var}(X_1) &= 14\,270\,400, \\ \mathbb{E}(X_2) &= 840 & \text{y} & & \text{Var}(X_2) &= 36\,044\,400. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = 1200 \\ \text{Var}(S) &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) = 50\,314\,800. \quad \checkmark \end{aligned}$$

4.4. Aproximación del modelo individual

En esta sección, se desarrollan 2 métodos por los cuales la distribución Poisson compuesta, frecuentemente asociada con el modelo del riesgo colectivo, puede ser usada para aproximar la distribución de los reclamos totales en el modelo individual.

Sea $F_{B_j}(x)$ la cdf de cada B_j . Si un reclamo ocurre, la probabilidad de que este provenga de la j -ésima póliza (inversión), por la regla de Bayes, es aproximadamente

$$w_j = \frac{q_j}{\sum_{i=1}^m q_i}. \quad (4.18)$$

Entonces, la cdf del monto de los reclamos es aproximada por una mezcla finita como sigue:

$$H_X(x) = \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x). \quad (4.19)$$

Y la pdf del monto de los reclamos totales es

$$h_X(x) = \sum_{j=1}^m w_j f_{B_j}(x). \quad (4.20)$$

Ahora, para aproximar la cdf de S , por una distribución Poisson compuesta se consideran los siguientes 2 métodos:

- Usar la distribución Poisson compuesta con parámetro de Poisson

$$\lambda = \sum_{j=1}^m q_j \quad (4.21)$$

y la **cdf** del monto de los reclamos individuales que, en este caso, es una mezcla finita de m componentes:

$$H_X(x) = \sum_{j=1}^m w_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} F_{B_j}(x). \quad (4.22)$$

De la expresión (4.21) se tiene que el número esperado de los reclamos en el modelo Poisson compuesto es el mismo que en el modelo original del riesgo individual. Por otra parte, la expresión (4.22) indica que la distribución de un reclamo (dado que este ocurra), es la misma en los 2 modelos, como se vio en (4.19).

La distribución Poisson compuesta especificada por (4.21) y (4.22) también puede ser interpretada como sigue: en el modelo individual, el número de reclamos presentados por la j -ésima póliza (inversión) es una variable aleatoria de Bernoulli. Ahora, se aproxima su distribución por la **pmf** Poisson con parámetro q_j ; por otra parte, la distribución de X_j se aproxima por la distribución Poisson compuesta especificada por q_j y $F_{B_j}(x)$. Luego, se emplea el teorema 3.7 para aproximar la **pdf** de S mediante la distribución Poisson compuesta dada por (4.21) y (4.22).

De la expresión (4.22) se sigue que

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} \mathbb{E}(B_j^k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.23)$$

En particular,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} \mathbb{E}(B_j), \quad \mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{\lambda} \left[\text{Var}(B_j) + (\mathbb{E}(B_j))^2 \right].$$

Usando las expresiones (3.19) y (3.20), se obtiene

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{j=1}^m q_j \mathbb{E}(B_j) \quad \text{y} \quad \text{Var}(S) = \sum_{j=1}^m q_j \mathbb{E}(B_j^2). \quad (4.24)$$

Nótese que la media de la distribución aproximada de Poisson compuesta coincide con la expresión (4.16) dada para la media de los

reclamos totales en el modelo individual original. Por otra parte, la varianza de la distribución aproximada de Poisson compuesta excede a la varianza de los reclamos totales en el modelo individual (ver (4.17)). Sin embargo, si las q_j son pequeñas, las 2 expresiones son aproximadamente iguales.

- Emplear la distribución Poisson compuesta con parámetro Poisson

$$\tilde{\lambda} = \sum_{j=1}^m \tilde{\lambda}_j, \quad (4.25)$$

donde $\tilde{\lambda}_j = -\ln(1 - q_j)$; luego,

$$\tilde{\lambda} = -\sum_{j=1}^m \ln(1 - q_j) \quad \Rightarrow \quad e^{-\tilde{\lambda}} = \prod_{j=1}^m (1 - q_j)$$

y la **cdf** del monto de los reclamos individuales es una mezcla finita con m componentes:

$$\tilde{H}_X(x) = \sum_{j=1}^m \tilde{w}_j F_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}} F_{B_j}(x). \quad (4.26)$$

De la expresión (4.25) se tiene que el número esperado de los reclamos en el modelo Poisson compuesto es el mismo que en el modelo original del riesgo individual. Por otra parte, la expresión (4.26) indica que la distribución de un reclamo (dado que este ocurra), es la misma en los 2 modelos, como se vio en (4.19).

La distribución Poisson compuesta especificada por (4.25) y (4.26) también se interpreta como sigue: en el modelo individual, el número de reclamos presentados por la j -ésima póliza (inversión) es una variable aleatoria de Bernoulli. Ahora, se aproxima su distribución por una **pmf** Poisson con parámetro $\tilde{\lambda}_j$. Por otra parte, la distribución de X_j se aproxima por la distribución Poisson compuesta especificada por $\tilde{\lambda}_j$ y $F_{B_j}(x)$. Usando el teorema 3.7, se aproxima la distribución de S mediante la distribución Poisson compuesta dada por (4.25) y (4.26). De la expresión (4.26) se sigue que

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{j=1}^m \frac{\tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}} \mathbb{E}(B_j^k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.27)$$

En particular,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^m \frac{\tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}} \mathbb{E}(B_j), \quad \mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^m \frac{\tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}} \left[(\mathbb{E}(B_j))^2 + \text{Var}(B_j) \right].$$

Usando las expresiones (3.19) y (3.20), se obtiene

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{j=1}^m \tilde{\lambda}_j \mathbb{E}(B_j) \quad \text{y} \quad \text{Var}(S) = \sum_{j=1}^m \tilde{\lambda}_j \mathbb{E}(B_j^2). \quad (4.28)$$

Nótese que tanto la media como la varianza de la distribución aproximada de Poisson compuesta exceden las respectivas media y varianza de los reclamos totales en el modelo individual (ver (4.16) y (4.17)).

Nota 4.1. Si todos los q_j son pequeños, los 2 métodos de aproximación producen resultados muy similares, ya que

$$\tilde{\lambda}_j = -\ln(1 - q_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_j^k}{k} \approx q_j.$$

Ejemplo 4.8. [37, pág. 444]

Para los datos del ejemplo 4.5, determine el valor esperado y la varianza del reclamo total, usando los dos métodos de aproximación de la Poisson compuesta.

Solución. En el ejemplo 4.5 se obtuvo que

$$\mathbb{E}(S) = 160 \quad \text{y} \quad \text{Var}(S) = 256.$$

- Por el primer método se obtiene que

$$\lambda = \sum_{j=1}^{1800} q_j = 500(0.02) + 500(0.02) + 300(0.10) + 500(0.10) = 100.$$

De la expresión (4.20) se tiene

$$h_X(1) = \frac{1}{100} [500(0.02) + 300(0.10)] = \frac{2}{5}$$

$$h_X(2) = \frac{1}{100} [500(0.02) + 500(0.10)] = \frac{3}{5}.$$

Luego, $\mathbb{E}(X) = \frac{8}{5}$ y $\mathbb{E}(X^2) = \frac{14}{5}$; entonces

$$\mathbb{E}(S) = 160 \quad \text{y} \quad \text{Var}(S) = 280.$$

Nótese que la varianza obtenida usando este método excede a la varianza de los reclamos totales en el modelo individual.

- Mediante el segundo método se obtiene que

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda} &= - \sum_{j=1}^{1800} \ln(1 - q_j) = -500 \ln(0.98) - 500 \ln(0.98) - 300 \ln(0.90) \\ &\quad - 500 \ln(0.90) = 104.4911198.\end{aligned}$$

De la expresión (4.20), se tiene

$$\begin{aligned}h_X(1) &= \frac{500 \ln(0.98) + 300 \ln(0.90)}{1000 \ln(0.98) + 800 \ln(0.90)} = 0.399168 \\ h_X(2) &= \frac{500 \ln(0.98) + 500 \ln(0.90)}{1000 \ln(0.98) + 800 \ln(0.90)} = 0.600832.\end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{E}(X) = 1.600832$ y $\mathbb{E}(X^2) = 2.802496$; entonces

$$\mathbb{E}(S) = 167.272731 \quad \text{y} \quad \text{Var}(S) = 292.835954.$$

Mediante este método la media y varianza exceden la media y varianza de los reclamos totales obtenidas en el modelo individual. \checkmark

Ejemplo 4.9. Una entidad aseguradora expide una póliza colectiva de seguros de vida constituida por 900 contratos temporales de un año. Determine el valor esperado y la varianza del reclamo total usando los 2 métodos de aproximación de la Poisson compuesta. En la siguiente tabla se proporciona información sobre las cantidades cubiertas:

Tabla 4.5. Distribución de la póliza colectiva del ejemplo 4.9

| Nivel de riesgo (k) | Número cubierto (n_k) | Probabilidad de reclamo (q_k) | Valor del beneficio (b_k) |
|----------------------------|------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|
| 1 | 200 | 0.010 | 1 |
| 2 | 100 | 0.010 | 4 |
| 3 | 300 | 0.020 | 1 |
| 4 | 300 | 0.020 | 4 |

Fuente: elaboración propia.

Solución. Usando las fórmulas (4.16) y (4.17) y los valores dados, se obtienen los siguientes resultados:

$$\text{Por lo tanto, } \mathbb{E}[S] = 36 \text{ y } \text{Var}[S] = 117.78.$$

Tabla 4.6. Media y varianza de los niveles de riesgo del ejemplo 4.9

| k | n_k | q_k | b_k | Media | Varianza |
|-------|-------|-------|-------|---------------|---------------------------|
| | | | | $n_k b_k q_k$ | $b_k^2 n_k q_k (1 - q_k)$ |
| 1 | 200 | 0.01 | 1 | 2 | 1.98 |
| 2 | 100 | 0.01 | 4 | 4 | 15.84 |
| 3 | 300 | 0.02 | 1 | 6 | 5.88 |
| 4 | 300 | 0.02 | 4 | 24 | 94.08 |
| total | 900 | | | 36 | 117.78 |

Fuente: elaboración propia.

- Por el primer método se tiene que

$$\lambda = \sum_{j=1}^{900} q_j = 200(0.010) + 100(0.010) + 300(0.020) + 300(0.020) = 15.$$

De la expresión (4.20) se tiene

$$h_X(1) = \frac{1}{15} [200(0.01) + 300(0.02)] = \frac{8}{15}$$

$$h_X(4) = \frac{1}{15} [100(0.01) + 300(0.02)] = \frac{7}{15}.$$

Luego, $\mathbb{E}(X) = \frac{36}{15}$ y $\mathbb{E}(X^2) = 8$; entonces

$$\mathbb{E}(S) = 36 \quad \text{y} \quad \text{Var}(S) = 120.$$

La varianza obtenida mediante este método excede a la varianza de los reclamos totales en el modelo individual.

- Mediante el segundo método se obtiene que

$$\tilde{\lambda} = - \sum_{j=1}^{900} \ln(1 - q_j) = -200 \ln(0.99) - 100 \ln(0.99) - 300 \ln(0.98) - 300 \ln(0.98) = 15.136725.$$

De la expresión (4.20) se tiene

$$h_X(1) = \frac{200 \ln(0.99) + 300 \ln(0.98)}{300 \ln(0.99) + 600 \ln(0.98)} = 0.5331985$$

$$h_X(4) = \frac{100 \ln(0.99) + 300 \ln(0.98)}{300 \ln(0.99) + 600 \ln(0.98)} = 0.4668015.$$

Luego, $\mathbb{E}(X) = 2.4004045$ y $\mathbb{E}(X^2) = 8.0020225$; entonces

$$\mathbb{E}(S) = 36.33426281 \quad \text{y} \quad \text{Var}(S) = 121.124414.$$

Usando este método, la media y varianza exceden la media y varianza de los reclamos totales obtenidas en el modelo individual.

4.5. Ejercicios

- 4.1 Los eventos amparados durante una vigencia anual de una cartera se distribuyen así: el 20 % de las pólizas no sufre ningún reclamo y el 80 % restante de ellas, sufre un solo reclamo cuyo monto X sigue una pdf uniforme en el intervalo $[0, 60]$. La prima recaudada con recargos es 33. ¿Cuál es el cargo relativo por seguridad?
- 4.2 Considere una cartera con 3 tipos de riesgos independientes. En la siguiente tabla se proporciona la distribución del monto del reclamo en cada riesgo:

Tabla 4.7. Probabilidades del monto de los reclamos

| Nivel de riesgo | q_k | $P(B_k = b)$ | | | |
|-----------------|-------|--------------|---------|---------|---------|
| | | $b = 1$ | $b = 2$ | $b = 3$ | $b = 4$ |
| 1 | 0.2 | 0.10 | 0.20 | 0.30 | 0.40 |
| 2 | 0.4 | 0.20 | 0.25 | 0.25 | 0.30 |
| 3 | 0.3 | 0 | 0 | 0.50 | 0.50 |

Fuente: elaboración propia.

Suponga que se presenta como máximo 1 reclamo de cada riesgo. Encuentre:

- La probabilidad de que el reclamo total no exceda de 3.
 - La probabilidad de que los reclamos excedan de 2 si el tercer riesgo no produce reclamo.
 - El valor esperado y la varianza de los reclamos.
- 4.3 Para una póliza de seguros que cubre el cuidado domiciliario de individuos incapacitados, la duración promedio de los cuidados es de 440 días y el 30 % de los cuidados terminan en los primeros 30 días. Durante este periodo las terminaciones son distribuidas uniformemente. El seguro paga 28 diarios por los primeros 30 días y 100 diarios por los siguientes. Determine la compensación que se espera pagar por cada individuo asegurado.

- 4.4 Los reclamos de una entidad aseguradora siguen una pdf $N(194, 50^2)$. ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio de 25 reclamos seleccionados aleatoriamente exceda 199?
- 4.5 El valor total X de los reclamos para una póliza de seguros sigue una pdf exponencial con media 0.8. La prima de la póliza es 0.85. Si se venden 4 pólizas, ¿cuál es la probabilidad de que el valor de los reclamos exceda el valor de las primas recaudadas?
- 4.6 Considere una cartera de 3 pólizas. Para cada una de ellas la probabilidad de un reclamo es $\frac{1}{6}$ y el beneficio B , dado que haya un reclamo, sigue una pdf gamma con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = \frac{1}{3}$. Encuentre la probabilidad de que el total de los reclamos exceda a 3.5.
- 4.7 Un estudio de un grupo de asegurados revela los siguientes datos sobre una base anual.

Tabla 4.8. Plan de beneficios de los asegurados

| Plan de cubrimiento | n | Beneficios asegurados | |
|---------------------|-----|-----------------------|---------------------|
| | | Costo esperado | Desviación estándar |
| Individual | 786 | 76 | 42 |
| Familiar | 592 | 187 | 77 |

Fuente: adaptada de [162, pág. 130].

Use la aproximación normal para encontrar la probabilidad de que los reclamos excedan 175 000.

- 4.8 Considere 2 tipos de riesgo cada uno de los cuales sigue una pdf normal. Suponga que máximo se presenta 1 reclamo por riesgo. En la siguiente tabla se proporciona información de estos riesgos:

Tabla 4.9. Distribución de la póliza del ejercicio 4.8

| Nivel de riesgo | q_k | Valor del reclamo | |
|-----------------|-------|-------------------|---------------------|
| | | Media | Desviación estándar |
| 1 | 0.01 | 2000 | 20 |
| 2 | 0.02 | 3000 | 80 |

Fuente: elaboración propia.

Encuentre la probabilidad de que el reclamo total no exceda a 330.

- 4.9 Una compañía aseguradora expide una póliza colectiva de seguros de vida constituida por 3500 contratos temporales de 1 año, en las cantidades ilustradas en la siguiente tabla:

Tabla 4.10. Distribución de la póliza colectiva del ejercicio 4.9

| <i>Nivel de riesgo</i> (k) | <i>Número cubierto</i> (n_k) | <i>Probabilidad de reclamo</i> (q_k) | <i>Valor del beneficio</i> (b_k) |
|-----------------------------------|-------------------------------------|---|---|
| 1 | 1 000 | 0.01 | 10 |
| 2 | 2000 | 0.02 | 10 |
| 3 | 500 | 0.04 | 20 |

Fuente: elaboración propia.

Determine,

- La media y la varianza de los reclamos totales.
 - El recargo relativo por seguridad θ tal que el reclamo total no exceda la cantidad recaudada con una probabilidad de 0.95.
- 4.10 Suponga que los reclamos totales se modelan usando una **pmf** binomial negativa compuesta con parámetros 15 y $\frac{1}{5}$. Los valores de los reclamos sigue una **pdf** uniforme en el intervalo $[0, 10]$. Determine la prima tal que la probabilidad de que los reclamos exceda la prima sea 0.125 (use la aproximación normal).
- 4.11 En un modelo de riesgo colectivo el número N de reclamos tiene **pmf** geométrica con parámetro 0.8. Los valores de los reclamos siguen una **pdf** uniforme en el intervalo $[0, 4]$. Encuentre $P\left[N = 1, S \leq \frac{7}{2}\right]$.
- 4.12 Considere una cartera de seguros donde el número de pérdidas sigue una **pmf** de Poisson con parámetro 20 y la pérdida B sigue una **pdf** exponencial con media 100. Determine:
- La media y la varianza de los reclamos totales.
 - El recargo relativo por seguridad θ tal que 0.95 sea la probabilidad de que el reclamo total no exceda la cantidad recaudada.
 - El valor de la prima.

Capítulo
cinco
Teoría de la
utilidad y aversión
al riesgo

En muchas situaciones de la vida cotidiana no se controlan los efectos de las decisiones tomadas ya que están regidos por la aleatoriedad. Existen 2 tipos de incertidumbre: una debida al azar y la otra al desconocimiento de las leyes del azar (estados de la naturaleza) que intervienen. Supóngase que se conocen los estados de la naturaleza y la única clase de incertidumbre es producida por el azar. Entonces, ¿qué razonamientos se usan para tomar decisiones? Claramente, este problema es más simple que aquel en el que se desconoce el estado de la naturaleza.

Algunos casos en los que los eventos aleatorios pueden provocar impactos en el bienestar de los humanos son los siguientes:

- La destrucción de un bien raíz por incendio o inundación.
- Una enfermedad grave, crónica o degenerativa que se presenta de manera espontánea y puede ocasionar una pérdida económica.
- Un acto imprudente, usualmente considerado como un evento aleatorio que provoca una pérdida financiera.
- La muerte de un adulto joven que puede suceder mientras él tiene una deuda a largo plazo.

Para cada consumidor (inversionista o asegurado) el conjunto de reglas que determina en cada caso cuál de las posibles alternativas es elige es una estrategia. Bajo ciertos supuestos, se asigna un valor numérico llamado *utilidad* a las alternativas que escoge un consumidor; así, identifica las alternativas que le brindan una mayor utilidad, aspecto que se considera en el proceso de toma de decisiones.

En términos generales, esto es más fácil de decir que hacer, pero en muchas aplicaciones actuariales y en la mayoría de análisis sobre gestión de riesgo, ciertas propiedades simples de la utilidad hacen posible tomar decisiones óptimas.

Por lo general, los riesgos frecuentemente cambian, prescriben o surgen, de ahí la importancia de la gestión de riesgos, la cual permite al grupo de control de riesgos supervisar las decisiones y encontrar errores. La toma de decisiones se realiza bajo alguno de los siguientes escenarios:

- a) Certeza: el cual consta de un único estado de la naturaleza y la elección se toma con completa confianza.
- b) Riesgoso: compuesto por más de un estado de la naturaleza que puede presentarse. Las elecciones se basan en la teoría de probabilidad.
- c) Incertidumbre: constituido por más de un estado de la naturaleza, pero para algunos estados no se conocen a priori sus respectivas probabilidades de ocurrencia.

Las referencias empleadas en lo que respecta a *utilidad* en este capítulo han sido tomadas de [138].

5.1. Principios de utilidad

Ejemplo 5.1. *Suponga que se conocen los distintos estados de la naturaleza y se le proponen a un consumidor las siguientes opciones (cada una se ofrece una sola vez):*

- a) *Ganar \$ 2000 si una moneda (balanceada) muestra cara y pagar \$ 1000 si muestra sello.*
- b) *Recibir \$ 20 000 000 si la moneda cae cara y, en caso contrario, perder toda su fortuna, la cual asciende a \$ 10 000 000.*
- c) *Si ha planeado gastarse \$ 50 000 en diversión durante un fin de semana, puede obtener \$ 50 000 adicionales, si la moneda muestra cara y, en caso contrario, perderlos.*
- d) *Si desea asistir a la gran final de un juego y posee \$ 50 000 para comprar la boleto que cuesta \$ 80 000, puede recibir \$ 50 000 adicionales, si la moneda muestra cara, y perderlos en caso contrario.*

Solución. Suponga que las reacciones del consumidor a estas opciones son:

Tabla 5.1. Decisión de apostar o no en las opciones del ejemplo 5.1

| Apostar \ Opción | a) | b) | c) | d) |
|------------------|----|----|----|----|
| Sí | X | - | - | X |
| No | - | X | X | - |

Fuente: elaboración propia.

Si bien las opciones a) y b) son equivalentes en cuanto brindan probabilidades favorables de 2 a 1, la postura del agente decisor fue distinta ante cada una de ellas, aunque ambas opciones aparentan ser apropiadas o adecuadas en un contexto de probabilidades “parejas” (1 a 1). ¿Qué fue lo importante en la diferencia entre las 2 opciones? Al elaborar un análisis global de su comportamiento, se evidencia que en la opción a), las oportunidades de ganar o perder son iguales y la cantidad a ganar es mayor que la que puede perder. También en la opción b) se gana más dinero del que se apuesta, pero ganar \$20 000 000 incrementaría poco la riqueza para el agente decisor mientras que perder \$10 000 000 conduciría a una tristeza enorme. Es decir, en la opción b), hay más “placer” por perder que el que se tiene por ganar.

De manera análoga, para las opciones c) y d), se tiene que ambas están parejas dado que las probabilidades lo son también; no obstante, las respuestas han sido distintas. De nuevo, la diferencia radica en el valor del dinero que se gana o se pierde. El placer que genera al consumidor de diversión gastar \$100 000 en vez de \$50 000 es pequeño comparado con la nostalgia de verse privado de sus \$50 000 iniciales para diversión. Por otra parte, si le apasiona el juego y está impaciente por asistir, para el agente decisor, \$50 000 son tan valiosos como no tener nada, mientras que \$80 000 marca toda la diferencia en esta opción.

En otras palabras, las oportunidades “parejas” en apuestas de dinero pueden no ser apropiadas debido a que el *valor* del dinero para el agente decisor no siempre aparece de manera proporcional a la *cantidad* de dinero. Así pues, \$30 000 000 no tiene 3 veces el valor estimativo de \$10 000 000 para el millonario, pero la posibilidad de tener \$80 000 es mucho más apreciable que la certeza de \$50 000 para un fanático de un juego específico. Luego, resulta apropiada una medida del valor que no tenga la deficiencia anterior. Asimismo, sería conveniente aplicar esta medida a características relevantes de tipo no económico, tales como bienestar, reputación, etc. ✓

5.2. Supuestos básicos de la utilidad

Sea H el conjunto de todas las predicciones futuras de un consumidor, incluyendo sus alegrías y tristezas, supóngase que él debe seleccionar uno de 2 destinos posibles, H_1 y H_2 . En la vida real, a muchos consumidores se les dificulta elegir entre 2 destinos distintos, aunque por otra parte no tienen la oportunidad de escoger frecuentemente. Sin embargo, supóngase que siempre pueden decidir cuál destino prefieren o si ambos destinos les complacen igualmente.

Si al consumidor le predican su destino de acuerdo con un modelo ideal de azar (pdf), esta opción se considerará como una alternativa A_1 .

Cualquier problema de toma de decisiones bajo incertidumbre siempre es descrito mediante una tabla de decisiones en la que hay una columna para cada posible acción y una fila para cada posible evento. Cada celda en la tabla describe el efecto de una acción particular dado un evento particular.

Ejemplo 5.2. *Un joven arriesga su vida al cruzar una avenida por un lugar no permitido tras contemplar a una espléndida mujer que se encuentra al otro lado. Si logra cruzar con éxito la avenida, se presenta ante ella, se casa con ella y para resumir brevemente, vive feliz 60 años más. Si falla en su propósito, un automóvil lo atropella y fallece. Obtenga la tabla de decisiones para este joven.*

Solución. En la tabla 5.2 se muestran las decisiones del joven ante el riesgo que enfrenta al cruzar la calle.

Tabla 5.2. Tabla de decisiones para el joven

| | Atraviesa la avenida | |
|-----------|-------------------------------|------------------------------------|
| Accidente | Sí | No |
| Sí | A_0 : muere por imprudencia | A'_0 : herido accidentalmente |
| No | A_1 : se casa y vive feliz | A'_1 : no se casa y vive soltero |

Fuente: elaboración propia.

En esta tabla las filas representan los estados de la naturaleza; las columnas, las acciones; y las celdas, las opciones del joven. ✓

Ejemplo 5.3. Suponga que al propietario de un bien raíz de valor patrimonial total w , se le ofreció un seguro de incendio por una prima anual \mathcal{P} para cubrir una pérdida de monto X . Obtenga la tabla de decisiones para este posible asegurado.

Solución. El nivel de riqueza para cada decisión que toma el posible asegurado es dado en la tabla 5.3.

Tabla 5.3. Tabla de decisiones del posible asegurado

| | Patrimonio asegurado | |
|-----------|----------------------|---------|
| Siniestro | Sí | No |
| Sí | $w - \mathcal{P}$ | $w - X$ |
| No | $w - \mathcal{P}$ | w |

Fuente: elaboración propia.

Cada fila es un estado de la naturaleza y cada columna es una acción, cada una de las alternativas del propietario es una celda de la tabla. ✓

5.3. Teoría de la utilidad

A menudo no es apropiado medir la rentabilidad del dinero en la escala monetaria. Para explicar ciertos fenómenos, la rentabilidad del dinero debe medirse en una nueva escala. Así, la rentabilidad de $\$x$ es $u(x)$, la utilidad (o “el valor moral”) de $\$x$. Típicamente, x es la riqueza o una ganancia de una decisión tomada.

Definición 5.1. Se denomina *función de utilidad* al conjunto de pares ordenados $(x, u(x))$ donde x consta de las alternativas u opciones que elige un agente decisor y las preferencias de este se pueden describir por una función $u(x)$, la cual se compone de números reales llamados “utilidades” con las siguientes 2 propiedades básicas:

1. $u(x)$ es una función creciente de x .
2. $u(x)$ es una función estrictamente cóncava de x .

Adicionalmente, se supone que la función $u(x)$ es 2 veces diferenciable, entonces 1 y 2 indican que $u'(x) > 0$ y $u''(x) < 0$ para el caso de concavidad y $u'(x) > 0$ y $u''(x) > 0$ para el caso de convexidad.

Por lo general, la primera condición siempre se prefiere. Muchas razones se dan para la segunda condición. Una forma de razonar la segunda es que se desea que la utilidad marginal, $u'(\cdot)$, sea una función decreciente de la riqueza¹ w o, equivalentemente, que la ganancia obtenida de la utilidad de un beneficio monetario de \$ g (es decir, $u(w + g) - u(w)$), sea una función decreciente de w .

5.3.1. Utilidad esperada

Bajo los supuestos de las alternativas mixtas, se verá que existe una medida del dinero llamada *utilidad*, usada para cuantificar opciones o alternativas de tal manera que la toma de decisiones, algunas veces, sea relativamente fácil.

En la práctica existe una función de utilidad, $u(\cdot)$, en el conjunto de alternativas (ver apéndice A), respecto al conjunto de números. Esto es, a cada alternativa A se le asigna un número $u(A)$, llamado la utilidad de la alternativa A . Esta función satisface las siguientes propiedades:

Lema 5.1. Propiedades de la función de utilidad esperada

Una función u de valor real representa la relación de preferencia $>$ si satisface que

1. $\bar{u}(A_1) > \bar{u}(A_0)$ si y solo si $A_1 > A_0$.
2. Si \mathcal{A}_p es una alternativa mixta, entonces

$$\bar{u}(\mathcal{A}_p) = p\bar{u}(A_1) + (1 - p)\bar{u}(A_0) \quad (5.1)$$

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [74]. □

La primera propiedad señala que la utilidad esperada incrementa cuando la alternativa mejora y la segunda indica que la utilidad esperada, a diferencia del dinero, siempre se determina usando opciones parejas. En el caso en

¹Se expresará por w , sigla de *wealth*.

que todas las alternativas sean igualmente atractivas, no existe problema y la función de utilidad sería constante.

Dado que los distintos consumidores poseen diversos estilos, tendrán funciones de utilidad diferentes (siempre y cuando sus estilos satisfagan los supuestos y; por lo tanto, tengan funciones de utilidad). En la siguiente sección se presenta un esquema informal de los pasos principales de la prueba, partiendo de que los 2 supuestos anteriores implican la existencia de una función de utilidad con las propiedades dadas en la sección 5.2.

Una manera de tomar decisiones bajo escenarios de incertidumbre es construir una tabla de utilidades de la siguiente manera:

1. Asignar un valor numérico a cada alternativa (opción).
2. Otorgar una ponderación numérica (probabilidad) a cada evento.
3. Evaluar cada acción como el promedio ponderado de todos los valores distintos que podrían ser el resultado de esa acción.

El valor condicional de una acción, dado un evento particular, se define como el valor asignado al consumidor responsable de una opción entre las acciones adoptadas bajo la alternativa que esa acción particular tendrá si ocurre ese evento particular.

El valor esperado de una acción es un promedio ponderado de todos los valores condicionales de la acción. Cada valor condicional se pondera por su respectiva probabilidad.

Ejemplo 5.4. *Supóngase que la alternativa de vida casada atrae al joven del ejemplo 5.2, en cuyo caso $\bar{u}(A_0) = -3$ y $\bar{u}(A_1) = 5$. ¿Cuál sería la utilidad esperada de la alternativa mixta \mathcal{A}_p si la probabilidad de cruzar con éxito la calle es 0.8?*

Solución. En este caso, la tabla de utilidades está dada por

Tabla 5.4. Tabla de utilidades para el joven

| Accidente | Probabilidad | Cruzar |
|-----------|--------------|--------|
| Sí | 0.2 | -3 |
| No | 0.8 | 5 |

Fuente: elaboración propia.

Luego, la utilidad esperada de la alternativa mixta \mathcal{A}_p es igual a:

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathcal{A}_p) &= p\bar{u}(A_1) + (1 - p)\bar{u}(A_0) \\ &= 0.8(5) + 0.2(-3) = 3.4.\end{aligned}$$

Nótese que a medida que la probabilidad de cruzar la calle con éxito tiende hacia a 1, el valor de la utilidad de la alternativa mixta se mueve de $\bar{u}(A_0)$ a $\bar{u}(A_1)$. \square

5.4. La paradoja de San Petersburgo

En esta sección se estudia un problema muy interesante, discutido por primera vez en [27] y llamado “la paradoja de San Petersburgo”. Este fue planteado como sigue: supóngase que un consumidor lanza una moneda balanceada hasta que aparece cara; después, finaliza el juego. Él recibe $X = 2^{N-1}$ ducados², donde N denota el número de lanzamientos de la moneda. Así pues, si aparece cara por primera vez en el cuarto lanzamiento, cobra 8 ducados. Luego, para él es rentable obtener una partida larga de sellos antes de que aparezca cara. Con alta probabilidad, los sellos saldrán casualmente y recibirá determinada cantidad de dinero. ¿Cuál es el valor esperado de la cantidad de dinero que recibe? En otras palabras, ¿cuánto debe pagar por el privilegio de jugar este juego para que sea *justo*³? En la solución de este problema se debe encontrar el valor esperado, en este caso,

$$P(N = k) = 2^{-k} \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \dots;$$

es decir, $N \sim Geom(0.5)$. Por otra parte,

$$P(X = 2^{k-1}) = P(N = k) \quad k = 1, 2, \dots$$

Entonces, la ganancia esperada es

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} P(X = 2^{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} P(N = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} 2^{-k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty. \end{aligned}$$

Se formulan 3 preguntas en este problema.

1. ¿Qué significa que $\mathbb{E}(X) = \infty$? El supuesto $\mathbb{E}(X) = \infty$ significa que, independientemente de qué tan grande sea el número tomado, si el juego se ejecuta muchas veces, llegará un momento en que el promedio será mayor que esa cantidad por juego. Si se está dispuesto e interesado

²Moneda antigua de oro que se acuñó en varios países europeos y en distintos periodos.

³Un juego es justo si las ganancias del jugador X satisfacen que $\mathbb{E}(X) = 0$.

en jugar indefinidamente este juego, entonces no tendría suficiente dinero que apostar para hacer de este un juego justo. Paradójicamente, nadie ofrecería siquiera 5 ducados por jugar una sola vez este juego favorable.

2. Si se considera el saldo disponible en la cuenta bancaria del jugador para encontrar la esperanza de las ganancias; entonces, ¿cuánto debería pagar para que este juego restringido sea un juego justo? Suponga que el jugador es relativamente pobre y tiene solamente 2^r ducados, entonces, mientras $X < 2^r$, él cobra X ducados. Si $X \geq 2^r$ —esto es, si obtiene r sellos seguidos y, por lo tanto, $N > r$ —, cobraría toda su fortuna o sea simplemente 2^r ducados y nada más. Sea Y la utilidad de este juego restringido. ¿Cuál es $\mathbb{E}(Y)$? En este caso,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^r 2^{k-1} P(Y = 2^{k-1}) + \sum_{k=r+1}^{\infty} 2^r P(Y = 2^{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^r 2^{k-1} 2^{-k} + \sum_{k=r+1}^{\infty} 2^r 2^{-k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r 1 + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \\ &= \frac{r}{2} + 1 = \frac{r+2}{2}.\end{aligned}$$

Así, por ejemplo, si $r = 24$, entonces el jugador participa con menos de 16 777 216 ducados en su cuenta bancaria y el juego valdría solamente 13 ducados desde el enfoque de la esperanza del dinero.

3. ¿Cuánto está dispuesto a pagar un consumidor por el privilegio de jugar una vez cualquiera de los juegos (el ilimitado o el restringido)? Un consumidor, decide que pagaría alrededor de 10 ducados por cualquiera de los 2 juegos. Esta cantidad es menor que la esperanza. La razón para ello involucra las formas de sus utilidades para el dinero. Si él estuviera muy interesado en conocer una estimación más precisa de lo que vale el juego, debería trazar una gráfica de la función de utilidad del dinero. Entonces, un cálculo simple le brindaría una solución aproximada.

Otro enfoque importante de esta “paradoja” se presenta en el caso en que el consumidor desee saber si su función de utilidad es no acotada. Dado un número cualquiera, ¿puede estar seguro de encontrar una alternativa A tan maravillosa que $u(A)$ sea mayor que dicho número? *La respuesta es no.*

De esta paradoja se concluye que ningún consumidor tiene alternativas competentes de ser descritas mediante una función de utilidad completamente lineal en el intervalo abierto $(0, \infty)$. Esto nos lleva a concluir que

la función $u(x)$ debe ser acotada, observación realizada inicialmente por Bernoulli y Cramer, y luego expresada en [143].

Si $u(x)$ es ilimitada se puede encontrar un número N a partir de un cierto valor x menor que N , tal que se cumpla la desigualdad

$$u(x) < (1 - \epsilon)u(0) + \epsilon u(N), \quad (5.2)$$

donde $\epsilon > 0$ es una probabilidad arbitraria pequeña. Esto significa que, por muy pequeñas que sean las probabilidades de triunfo, siempre se podrá encontrar un precio que hará que el juego sea más atractivo que cualquier cantidad de dinero pagado con seguridad.

Usualmente, las alternativas relevantes son combinaciones de resultados con utilidades conocidas. Sean A_1, A_2, \dots, A_n , las n alternativas que elige un agente decisor. La alternativa mixta \mathcal{A} que conduce a A_i con probabilidad p_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), es

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n p_i A_i, \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (5.3)$$

Entonces, la utilidad esperada de esta combinación se determina como

$$\bar{u}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n p_i u(A_i) = \mathbb{E}[u(\mathbf{A})], \quad (5.4)$$

ya que \mathcal{A} puede ser considerada una observación del resultado aleatorio \mathbf{A} con utilidades aleatorias $u(\mathbf{A})$. De aquí en adelante, esta propiedad se denominará la *segunda propiedad de la función de utilidad esperada*.

Teorema 5.1. Aditividad contable

Si \mathcal{A} es una alternativa mixta que genera A_i con probabilidad p_i , entonces

$$\bar{u}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i u(A_i) = \mathbb{E}[u(\mathbf{A})]. \quad (5.5)$$

Demostración. De la expresión finita dada en (5.4), se tiene

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathcal{A}) &= \sum_{i=1}^n p_i u(A_i) + u\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} p_i A_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i u(A_i) + \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} p_i\right) u\left[\sum_{i=n+1}^{\infty} p_i \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} p_i\right)^{-1} A_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^n p_i u(A_i) + r_n u(R_n), \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde,

$$r_n = 1 - \sum_{i=1}^n p_i \quad \text{y} \quad R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{p_i}{r_n} A_i. \quad (5.7)$$

Como se verá en el teorema 5.2, $u(R_n)$ es acotada y, puesto que $r_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, el segundo término de la derecha de la expresión (5.6) tiende a 0 a medida que n crece. Por consiguiente,

$$\bar{u}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i u(A_i) = \mathbb{E}[u(\mathbf{A})]. \quad \checkmark$$

Teorema 5.2. *La función de utilidad esperada es acotada.*

Demostración. Supóngase que la función de utilidad esperada $\bar{u}(x)$, no es acotada superiormente, entonces existen n alternativas A_1, A_2, \dots tales que $u(A_i) \geq 2^i$ para $i = 1, 2, \dots$. Por el teorema 5.1, la alternativa mixta \mathcal{A} que genera A_i con probabilidad $p_i = 2^{-i}$ tiene la siguiente utilidad esperada:

$$\bar{u}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n p_i u(A_i) + r_n u(R_n), \quad (5.8)$$

donde $r_n = 2^{-n}$ a partir de (5.7). Puesto que $u(A_i) \geq 2^i$, se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathcal{A}) &\geq \sum_{i=1}^n 2^{-i} 2^i + 2^{-n} u(R_n) && \text{con} && R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{n-i} A_i \\ &= n + 2^{-n} u(R_n) && \text{para} && n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Supóngase que $A_k > B$ para todo k mayor que algún m . Luego,

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{n-i} A_i \stackrel{k=i-n}{=} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} A_{n+k} \geq B \quad \text{para cada} \quad n \geq m.$$

Por consiguiente,

$$\bar{u}(\mathcal{A}) \geq n + 2^{-n} u(B) \quad \text{para} \quad n = m + 1, m + 2, \dots$$

Pero esto es imposible, puesto que \mathcal{A} es una alternativa y su utilidad es un número (finito). Luego, $\bar{u}(x)$ es acotada superiormente. Similarmente, se demuestra que $u(x)$ es acotada inferiormente. En adelante, este hecho se llamará *la tercera propiedad de la función de utilidad*. \checkmark

5.5. Construcción de la función de utilidad

En esta sección, se considerará la forma en que se establecen los valores de la función de utilidad. En el ejemplo 5.4, se explicó la forma de evaluar $\bar{u}(\mathcal{A})$ para una \mathcal{A} arbitraria una vez que se conoce el valor de u para 2 alternativas cualesquiera, A_1 y A_0 (que tienen utilidades distintas). ¿Cómo se encuentra $\bar{u}(A_1)$ y $\bar{u}(A_0)$? De acuerdo con [149], para hacerlo es necesario que se puedan fijar arbitrariamente estas 2 utilidades en 2 valores cualesquiera, de modo que el valor más grande se adjudica a la opción preferida. Para ello, se supone que hay n alternativas o resultados, A_1, A_2, \dots, A_n , con sus respectivas utilidades $u(A_1), u(A_2), \dots, u(A_n)$. El proceso de deducir los valores de estas utilidades se inicia con una clasificación de estos resultados, en orden de preferencia, desde el peor hasta el mejor. Sean estos A_1 y A_n , respectivamente.

Las utilidades esperadas $\bar{u}(A_1)$ y $\bar{u}(A_n)$ son asignadas arbitrariamente y para derivar las utilidades intermedias se introduce una lotería de referencia, la cual es estrictamente hipotética y consiste en un juego que tiene los premios A_n si gana y A_1 si pierde. Por el lema 5.1, la función real u representa una preferencia mediante la relación, $u(A_n) \geq u(A_1)$.

La probabilidad de ganar (perder) el premio A_n (A_1) cambia según las preferencias del agente decisor. Luego, sea q_i la probabilidad de ganar un resultado intermedio (el premio A_i , $i = 2, 3, \dots, n - 1$). El valor de esta probabilidad debe ser tal que el agente decisor adopte una posición neutral entre obtener el resultado A_i con certeza o jugar la lotería de referencia.

Por lo tanto, se puede inferir que el agente decisor prefiere igualmente el resultado A_i que la alternativa mixta $\mathcal{A}_{q_i} = (A_n, A_1, q_i)$; esto es

$$\bar{u}(A_i) = q_i u(A_n) + (1 - q_i) u(A_1).$$

Otro procedimiento para derivar los valores de las utilidades usado en la teoría del riesgo consiste en asignar 1 utilidad a 2 niveles de riqueza; es decir, A_1 y A_2 , donde $0 \leq u(A_1) \leq u(A_2) \leq w$ y donde, a su vez, w es la fortuna del agente decisor. Luego, se determina un punto adicional preguntándole al agente decisor ¿cuál es la máxima cantidad que pagaría por un cubrimiento completo que le permita conservar una fortuna A_2 con probabilidad p o reducir su fortuna a A_1 con probabilidad $1 - p$? Al agente decisor se le solicita que fije un valor G tal que

$$\bar{u}(A_2 - G) = (1 - p) u(A_1) + p u(A_2). \quad (5.9)$$

Una vez el valor $A_2 - G = A_3$ es conocido, el punto $(A_3, u(A_3))$ es obtenido como otro punto de la función de utilidad.

Ejemplo 5.5. [37, pág. 4]

Considere un agente decisor con una fortuna (en miles) de 20 y cuyas preferencias se pueden describir por una función de utilidad $u(x)$, donde arbitrariamente se han fijado los valores $u(0) = -1$ y $u(20) = 0$. Suponga que el agente decisor conserva su fortuna con probabilidad 0.6 y la pierde con probabilidad 0.4. Obtenga una aproximación de la función $u(x)$.

Solución. Sea \mathcal{P} la máxima cantidad que el agente decisor está decidido a pagar por un seguro que lo proteja completamente contra la pérdida aleatoria. Luego,

$$\bar{u}(20 - \mathcal{P}) = 0.4u(0) + 0.6u(20) = -0.40$$

En la figura 5.1 se muestran los 4 puntos identificados

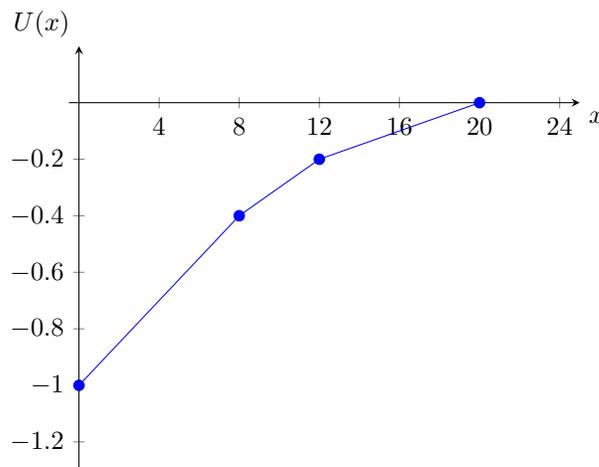


Figura 5.1. Determinación de una función de utilidad

Fuente: elaboración propia, adaptada de [37, pág. 4].

Supóngase que para el agente decisor $\mathcal{P} = 12$, cantidad mayor que la pérdida esperada:

$$\bar{u}(20 - 12) = \bar{u}(8) = 0.4u(0) + 0.6u(20) = -0.40.$$

Otro nuevo punto se determina suponiendo que $\mathcal{P} = 8$, entonces

$$\bar{u}(20 - 8) = \bar{u}(12) = 0.4u(8) + 0.6u(20) = -0.16. \quad \checkmark$$

Una vez el agente decisor establece que sus preferencias se pueden describir por una función de utilidad específica, esta puede ser usada para comparar 2 resultados económicos aleatorios, es decir, **A** y **B**. El podrá expresar alguna preferencia por una de las distribuciones de las opciones o indiferencia por ellas. Además, las preferencias deben satisfacer ciertos requerimientos de

consistencia. Si es así, la función de utilidad $u(x)$ es tal que, si la distribución de \mathbf{A} es preferida a la distribución de \mathbf{B} , $\mathbb{E}[u(\mathbf{A})] > \mathbb{E}[u(\mathbf{B})]$ y, si el agente decisor es neutral ante las 2 distribuciones, $\mathbb{E}[u(\mathbf{A})] = \mathbb{E}[u(\mathbf{B})]$.

5.6. Medidas de aversión al riesgo

Dado que en la toma de decisiones se debe tener capacidad para aceptar riesgos, ser creativo y encontrar soluciones a los problemas o retos aún no existentes, en esta sección, se dan unas medidas de fácil aplicación que usan la curvatura de la función de utilidad para determinar si es cóncava (aversa al riesgo), lineal (neutral al riesgo) o convexa (propensa al riesgo).

Definición 5.2. Sea $u(x)$ una función de utilidad. Se llama función de riesgo local o coeficiente de aversión absoluta al riesgo, al siguiente cociente introducido por [13] y [171]:

$$r_u(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{d}{dx} \ln [u'(x)] \quad \forall x, \quad (5.10)$$

tal que $u'(x) \neq 0$. Aunque este cociente depende de la función $u(x)$, el subíndice u de r se omite si no hay confusión.

Nota 5.1.

- Si $r(X) > 0$, entonces $u(x)$ es una función de utilidad que describe las preferencias de un consumidor averso al riesgo.
- Si $r(X) < 0$, entonces $u(x)$ es una función de utilidad que representa las preferencias de un consumidor propenso al riesgo.
- Si $r(X) = 0$, entonces $u(x)$ describe las preferencias de un consumidor neutral al riesgo.

Al resolver la ecuación diferencial dada en (5.10) se tiene que

$$\begin{aligned} \ln [u'(x)] = - \int r(x) dx + c & \Rightarrow u'(x) = \exp \left\{ - \int r(x) dx + c \right\} \\ u(x) = \int C e^{-\int r(x) dx} dx & \quad (5.11) \end{aligned}$$

Nota 5.2. Si la función de riesgo local es constante, $r(x) = k$, entonces por (5.11)

$$u(x) \propto \begin{cases} x, & \text{si } r(x) = 0, \\ -e^{-kx}, & \text{si } r(x) = k > 0, \\ e^{-kx}, & \text{si } r(x) = k < 0. \end{cases}$$

Es decir, las utilidades son lineal, estrictamente cóncava y estrictamente convexa, respectivamente.

Definición 5.3. Sea $u(x)$ una función de utilidad. La función de riesgo proporcional local está dada por

$$r^*(x) = x r(x). \quad (5.12)$$

Nota 5.3.

- Si $r^*(X) > 0$, entonces $u(x)$ es una función de utilidad que describe las preferencias de un consumidor averso al riesgo.
- Si $r^*(X) < 0$, entonces $u(x)$ es una función de utilidad que representa las preferencias de un consumidor propenso al riesgo.
- Si $r^*(X) = 0$, entonces $u(x)$ describe las preferencias de un consumidor neutral al riesgo.

Al reescribir la ecuación (5.12), se tiene

$$\frac{r^*(x)}{x} = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{d}{dx} \ln [u'(x)].$$

Por lo tanto, al resolver esta ecuación diferencial, se llega a

$$\begin{aligned} \ln [u'(x)] = -\int \frac{r^*(x)}{x} dx + c &\quad \Rightarrow \quad u'(x) = \exp \left\{ -\int \frac{r^*(x)}{x} dx + c \right\} \\ u(x) = \int C \exp \left\{ -\int \frac{r^*(x)}{x} dx \right\} dx &\quad (5.13) \end{aligned}$$

Nota 5.4. Nótese que, si la función de aversión de riesgo proporcional local es constante (es decir, $r^*(x) = k$), entonces empleando (5.13)

$$u(x) \propto \begin{cases} \ln x, & \text{si } r^*(x) = 1, \\ x^{1-k}, & \text{si } r^*(x) = k < 1, \\ -x^{1-k}, & \text{si } r^*(x) = k > 1. \end{cases}$$

Es decir, las utilidades son logarítmica, estrictamente cóncava y estrictamente convexa, respectivamente.

5.6.1. Desigualdad de Jensen

Si la función de utilidad que describe las preferencias de un agente decisor es estrictamente creciente, se hace uso de la desigualdad de Jensen dada en el teorema 1.21, la cual es estricta, excepto cuando X es constante. Discutiendo las decisiones de seguros que usan las funciones de utilidad crecientes estrictamente cóncavas (convexas). Se usará una de las formas de la desigualdad de Jensen. Luego, si las preferencias del agente decisor se describen mediante:

1. Una función de utilidad cóncava, es decir, satisface que $u'(x) > 0$ y $u''(x) < 0$. La aplicación de la desigualdad de Jensen produce

$$\bar{u}(X) = \mathbb{E}[u(X)] \leq u(\mathbb{E}(X)). \quad (5.14)$$

2. Una función de utilidad convexa, es decir, satisface que $u'(x) > 0$ y $u''(x) > 0$. La aplicación de la desigualdad de Jensen produce

$$\bar{u}(X) = \mathbb{E}[u(X)] \geq u(\mathbb{E}(X)). \quad (5.15)$$

5.7. Clases de funciones de utilidad

Las preferencias de un agente decisor frente al riesgo se describen mediante una función de utilidad esperada $\bar{u}(X)$, pues es necesario que el agente decisor estime numéricamente sus preferencias entre las opciones que él considera tienen el fin de analizar las tomas de decisiones. En este caso, las funciones de utilidad sirven para que el agente decisor establezca sus preferencias según la clasificación que él haga de las opciones o alternativas.

En esta sección, se presentan las principales características de algunas funciones de utilidad empleadas en la teoría del riesgo (ver [85]).

5.7.1. Función de utilidad cuadrática

La función de utilidad cuadrática se representa de la siguiente forma:

$$u(x) = bx - ax^2 \quad a > 0, b \in \mathbb{R}, x < \frac{b}{2a}. \quad (5.16)$$

Esta satisface las propiedades dadas en la definición 5.1:

1. Es creciente, ya que

$$u'(x) = b - 2ax > 0.$$

2. Es una función cóncava, pues

$$u''(x) = -2a < 0.$$

Esta función de utilidad muestra aversión al riesgo absoluta creciente:

$$r_u(x) = -\frac{-2a}{b - 2ax} = \frac{2a}{b - 2ax} > 0.$$

5.7.2. Función de utilidad exponencial

Esta función de utilidad se suele encontrar de la siguiente forma:

$$u(x) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha x}) \quad \alpha > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (5.17)$$

nótese que esta expresión coincide con el valor presente actuarial de $\bar{a}_{\overline{x}|}$ con tasa instantánea de interés α . Cumple las propiedades de la definición 5.1:

1. Es creciente, ya que

$$u'(x) = e^{-\alpha x} > 0, \quad \forall x.$$

2. Es una función cóncava, pues

$$u''(x) = -\alpha e^{-\alpha x} < 0, \quad \forall x.$$

Esta función de utilidad muestra aversión absoluta al riesgo constante

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \alpha > 0 \quad \forall x. \quad (5.18)$$

Esta clase de funciones de utilidad satisfacen la siguiente propiedad para cualquier valor k (ver [177, pág. 92]):

$$\begin{aligned} u(x+k) &= \alpha u(x)u(k) + u(x)u'(k) + u'(x)u(k) \\ &= u(x) + u'(x)u(k). \end{aligned} \quad (5.19)$$

5.7.3. Función de utilidad potencial

Esta función de utilidad tiene la forma funcional

$$u(x) = \frac{\alpha}{m} \left[1 - \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right)^m \right] \quad 0 \leq x < \alpha, m > 1. \quad (5.20)$$

Si $m = 1$, se obtiene la función identidad. La función de utilidad potencial satisface las propiedades dadas en la definición 5.1:

1. Es creciente, ya que

$$u'(x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right)^{m-1} > 0 \quad 0 \leq x < \alpha, m > 1.$$

2. Es una función cóncava, pues

$$u''(x) = -\frac{m-1}{\alpha} \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right)^{m-2} < 0 \quad 0 \leq x < \alpha, m > 1.$$

Esta función de utilidad cumple que

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{m-1}{\alpha-x} \quad 0 \leq x < \alpha. \quad (5.21)$$

Luego, la función es estrictamente creciente.

Ejemplo 5.6. [37, pág. 11]

La función de utilidad que describe las preferencias de un agente decisor es exponencial de parámetro $\alpha = 5$. Sean X_1 y X_2 los 2 resultados económicos aleatorios que enfrenta el agente decisor con distribuciones $N(5, 2)$ y $N(6, 2.5)$. ¿Cuál de los 2 resultados es preferible para el agente decisor?

Solución. En este caso, $u(x) = \frac{1}{5}(1 - e^{-5x})$ y dado que X_k es una variable aleatoria con pdf normal de parámetros μ_k y σ_k^2 , entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u(X_k)] &= \frac{1}{5} \left[1 - \mathbb{E}(e^{-5X_k}) \right] = \frac{1}{5} \left[1 - M_{X_k}(-5) \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[1 - \exp \left\{ \mu_k(-5) + \frac{\sigma_k^2}{2}(-5)^2 \right\} \right]. \end{aligned}$$

Al reemplazar los valores de los parámetros, se obtiene que

$$\mathbb{E}[u(X_1)] = \frac{1}{5} [1 - \exp\{0\}] > \frac{1}{5} \left[1 - \exp \left\{ \frac{5}{4} \right\} \right] = \mathbb{E}[u(X_2)].$$

Luego, $X_1 > X_2$. ☑

Ejemplo 5.7. La función de utilidad que describe las preferencias de un agente decisor es exponencial de parámetro α . Sean X_1 y X_2 los 2 resultados económicos aleatorios que enfrenta el agente decisor. Estos siguen pdf exponenciales de parámetros β_1 y β_2 , respectivamente. ¿Cuál de los 2 resultados es preferible para el agente decisor?

Solución. En este caso, $u(x) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x})$ y, dado que X_k es una variable aleatoria con pdf exponencial de parámetro β_k , entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u(X_k)] &= \frac{1}{\alpha} [1 - \mathbb{E}(e^{-\alpha X_k})] = \frac{1}{\alpha} [1 - M_{X_k}(-\alpha)] \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[1 - \frac{\beta_k}{\beta_k + \alpha} \right] = \frac{1}{\beta_k + \alpha}. \end{aligned}$$

Luego, si $\beta_1 < \beta_2$, al reemplazar los valores de los parámetros, se tiene que

$$\mathbb{E}[u(X_1)] = \frac{1}{\beta_1 + \alpha} > \frac{1}{\beta_2 + \alpha} = \mathbb{E}[u(X_2)].$$

Por lo tanto, $X_1 > X_2$. ☑

5.8. El seguro y la utilidad

Los seguros están concebidos para enfrentar las pérdidas financieras que se originan por eventos aleatorios y que frustran los planes de los consumidores. Sin embargo, existen ciertas restricciones básicas en el cubrimiento de un seguro⁴ dado que este:

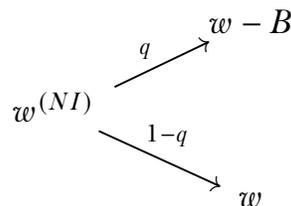
1. Busca reducir los efectos de eventos aleatorios que pueden ser medidos en términos económicos.
2. No disminuye directamente la probabilidad de pérdida.

Ejemplo 5.8. [152, pág. 554]

Suponga que el monto de pérdida $X = IB$ ($X < w$), para el posible asegurado del ejemplo 5.3 es una variable aleatoria con pdf conocida y probabilidad de reclamo q . Considere que el propietario del bien describe sus preferencias por una función de utilidad $u(\cdot)$. Determine el valor de la prima \mathcal{P} para que el propietario asuma una posición neutral entre comprar el seguro o enfrentar él mismo el riesgo.

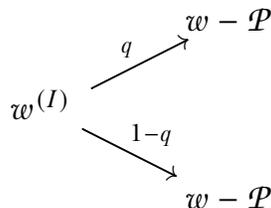
Solución. De acuerdo con la información suministrada en la tabla 5.3:

(i) Si no se asegura (NI), su riqueza final es



$$\mathbb{E}[u(w^{(NI)})] = q \cdot u(w - B) + (1 - q) \cdot u(w).$$

(ii) Si compra el seguro (I), su riqueza final es



$$\mathbb{E}[u(w^{(I)})] = q \cdot u(w - \mathcal{P}) + (1 - q) \cdot u(w - \mathcal{P}).$$

⁴Se expresará como I , sigla de *insurance*.

Luego, el agente decisor será neutral entre (i) y (ii) si se cumple que

$$u(w - \mathcal{P}) = q \cdot u(w - B) + (1 - q) \cdot u(w).$$

donde $u(w - \mathcal{P})$ denota la utilidad del propietario después de pagar \mathcal{P} por un amparo completo. \square

En general, si el agente decisor es neutral ante el riesgo se satisface que

$$u(w - \mathcal{P}) = \mathbb{E}[u(w - X)] \quad (5.22)$$

donde $\mathbb{E}[u(w - X)]$ denota la utilidad esperada. Usando la expansión de Taylor (ver (B.1)) para la función de utilidad $u(y)$, alrededor del punto y_0 , se tiene que

$$u(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(k)}(y_0)}{k!} (y - y_0)^k. \quad (5.23)$$

Haciendo el cambio de variable

$$y = w - X \quad y \quad y_0 = \mathbb{E}(y) = w - \mu_X$$

se obtiene

$$u(w - X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(k)}(w - \mu_X)}{k!} (\mu_X - X)^k, \quad (5.24)$$

tomando valor esperado a ambos lados de la última expresión

$$\mathbb{E}[u(w - X)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(k)}(w - \mu_X)}{k!} (-1)^k \mathbb{E}[(X - \mu_X)^k],$$

y sustituyendo (5.22), se llega a

$$u(w - \mathcal{P}) = u(w - \mu_X) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} u^{(k)}(w - \mu_X) \mu_k(X).$$

Al restar las utilidades, por el teorema del valor medio se tiene que

$$(\mu_X - \mathcal{P}) u'(w - \mu_X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} u^{(k)}(w - \mu_X) \mu_k(X).$$

Al despejar \mathcal{P} y dado que $\mu_1(X) = 0$, se obtiene que

$$\mathcal{P} = \mu_X - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{u^{(k)}(w - \mu_X)}{u'(w - \mu_X)} \mu_k(X). \quad (5.25)$$

A partir de los primeros términos de la serie (5.25) se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &\approx \mu_X - \frac{1}{2} \frac{u''(w - \mu_X)}{u'(w - \mu_X)} \mu_2(X) + \frac{1}{3!} \frac{u'''(w - \mu_X)}{u'(w - \mu_X)} \mu_3(X) \\ &\approx \mu_X + \frac{\sigma_X^2}{2} r(w - \mu_X) + \frac{[r(w - \mu_X)]^2 - r'(w - \mu_X)}{6} \mu_3(X).\end{aligned}\quad (5.26)$$

donde $r(\cdot)$ es definida en (5.10). Si la pdf de X es simétrica alrededor de su media, se tiene que $\mu_3(X) = 0$. En este caso,

$$\mathcal{P} \approx \mu_X + \frac{1}{2} r(w - \mu_X) \text{Var}(X).\quad (5.27)$$

Esta aproximación es la más usada para determinar \mathcal{P} . Nótese que:

- Si $r(w - \mu_X) = 0$, entonces $\mathcal{P} = \mathbb{E}(X)$.
- Si $r(w - \mu_X) > 0$, entonces $\mathcal{P} > \mathbb{E}(X)$.
- Si $r(w - \mu_X) < 0$, entonces $\mathcal{P} < \mathbb{E}(X)$.

Es conocido que ningún asegurador vende pólizas por un valor inferior a la pérdida esperada; por lo tanto, el último caso no es realista.

5.9. Principios para determinar la prima

En esta sección, se presentan algunos principios de prima que se utilizan tanto a nivel de pólizas como a nivel de carteras (o portafolios). Los principios de prima dependen exclusivamente de la pdf marginal de la variable aleatoria. Supóngase que X es una variable aleatoria acotada. La mayoría de principios de prima también se aplican a los reclamos ilimitados y posiblemente negativos. Esto puede producir una prima infinita que implica que el riesgo no es asegurable. Las referencias empleadas en la elaboración de esta sección fueron [82, cap. 5], [86] y [123, cap. 5].

5.9.1. Principio de equivalencia

Para una póliza de seguro individual, la función de utilidad que describe las preferencias del asegurador se podría aproximar mediante una línea recta. En este caso, el asegurador adoptaría el principio del valor esperado, para determinar la prima; esto es, el asegurador cobraría por el cubrimiento total del seguro, una prima igual a la pérdida esperada:

$$\mathcal{P} = \mathbb{E}(X) = \mu_X,$$

donde μ_X denota la “prima neta” de la póliza del seguro en una vigencia.

Ejemplo 5.9. *Supóngase que un agente decisor debe elegir entre las opciones 1, 2, ..., n que dan lugar a los resultados financieros X_1, X_2, \dots, X_n respectivamente. ¿Cómo se comparan estas opciones?, ¿cuál debe ser la escogida?*

Solución. Por la desigualdad de Chebychev (teorema 1.19), es muy probable que una variable aleatoria X esté ubicada a 2 desviaciones estándar de su media; es decir,

$$P[|X - \mathbb{E}(X)| < 2\sigma_X] \geq \frac{3}{4}. \quad (5.28)$$

Luego, el agente decisor podría justificar sus decisiones en los valores esperados $\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2), \dots, \mathbb{E}(X_n)$ mediante el *principio de equivalencia*: él escogería la opción k tal que $\mathbb{E}(X_k)$ sea óptimo. \square

Ejemplo 5.10. *Retomando la información del ejemplo 5.3, ¿qué opción escogería el propietario del bien raíz de acuerdo con el principio de equivalencia?*

Solución. Las opciones del propietario del bien raíz se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 5.5. Decisiones del propietario ante el seguro

| Opción | Asegurar | Pérdida |
|--------|----------|---------------|
| 1 | Sí | \mathcal{P} |
| 2 | No | X |

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con el principio de equivalencia, el propietario del bien raíz elegiría la opción que minimice la pérdida esperada, es decir, si

$$\mathcal{P} \begin{cases} > \mathbb{E}(X), & \text{no asegura;} \\ < \mathbb{E}(X), & \text{sí asegura;} \\ = \mathbb{E}(X), & \text{es indiferente.} \end{cases}$$

Por lo tanto, el principio de equivalencia falla en describir la acción de los consumidores que suscriben pólizas. \square

Hay 2 deficiencias importantes en este principio:

- i) Este no refleja la actitud del agente decisor frente al riesgo. Por ejemplo, si X_1 y X_2 representan las posibles pérdidas con $\mathbb{E}(X_1) = \mu_X$ y $\mathbb{E}(X_2) = \mu_X + \epsilon$, $\epsilon > 0$, entonces por comparación la opción 1 sería la elegida, sin importar si σ_{X_1} fue mayor que σ_{X_2} .
- ii) Este no considera la fortuna del agente decisor. Un consumidor que enfrenta una pérdida, si su fortuna es elevada, podría soportarla.

5.9.2. Principio del valor esperado

Si a la prima neta se le agregan los gastos, los impuestos, las ganancias, etc., esta prima, expresada con \mathcal{P} , se establece como

$$\mathcal{P} = (1 + \theta)\mu_X, \quad \theta > 0, \quad \mu_X = \mathbb{E}[X] \quad (5.29)$$

donde la cantidad $\theta \mu_X$ se denomina *recargo por seguridad* y la proporción θ de este recargo se llama *recargo relativo por seguridad*. Luego, la llamada *prima con cargos* se determina como sigue:

$$\mathcal{P} = (1 + \theta)\mu_X + c, \quad c > 0 \quad (5.30)$$

donde c representa los gastos fijos que no varían con la pérdida.

5.9.3. Principio de la varianza

En este principio de prima, el factor de recargo es proporcional a la varianza, y muestra una prima recargada de modo explícito.

$$\mathcal{P} = \mu_X + \theta \text{Var}(X), \quad \theta > 0, \quad (5.31)$$

esta expresión coincide con (5.27) para $\theta = \frac{1}{2} r(w - \mu_X)$. Esta medida de riesgo adiciona el factor de recargo de seguridad para lograr enfrentar las desviaciones aleatorias que tenga la variable aleatoria de las pérdidas.

5.9.4. Principio de la desviación estándar

Bajo este principio de prima, la pdf de las pérdidas que tengan una mayor dispersión (valores más alejados de la media) tendrá un riesgo mayor.

$$\mathcal{P} = \mu_X + \theta \sigma_X, \quad \theta > 0 \quad (5.32)$$

donde θ es el factor de recargo y σ_X es la desviación estándar, mostrando una prima recargada de modo explícito. Este principio es análogo a la medida de riesgo basada en el principio de la varianza.

5.9.5. Principio de utilidad cero

Sea $v(x)$ la función de utilidad que describe las preferencias del asegurador y ω_I su fortuna corriente. Entonces, la prima mínima aceptable \mathcal{P}_I^* , por

aceptar la pérdida aleatoria X , desde el enfoque del asegurador, puede ser determinada a partir de la ecuación

$$v(\omega_I) = \mathbb{E}\left[v(\omega_I + \underbrace{\mathcal{P}_I^* - X}\right). \quad (5.33)$$

El lado izquierdo de (5.33) es la utilidad asignada a la fortuna corriente del asegurador y el lado derecho es la utilidad esperada, asociada con la recolección de la prima \mathcal{P}_I^* y el pago de la pérdida aleatoria X . Aquí, \mathcal{P}_I^* depende de ω_I , la función de utilidad y la distribución de X . Si el asegurador es averso al riesgo por la desigualdad de Jensen dada en (1.167) se obtiene

$$v(\omega_I) = \mathbb{E}\left[v(\omega_I + \mathcal{P}_I^* - X)\right] \leq v(\omega_I + \mathcal{P}_I^* - \mu_X). \quad (5.34)$$

Puesto que, $v(x)$ es estrictamente creciente, se concluye que $\mathcal{P}_I^* \geq \mu_X$. En la medida en que se establece la prima en un momento dado de tiempo y para un valor particular de ω_I , se puede introducir una nueva función:

$$\widehat{v}(y) = v(\omega_I + y),$$

Aquí, $\widehat{v}(y)$ denota la utilidad de monto y y la fórmula (5.33) se convierte en

$$\widehat{v}(0) = \mathbb{E}\left[\widehat{v}(\mathcal{P}_I^* - X)\right]. \quad (5.35)$$

Nótese que la función $\widehat{v}(\cdot)$ tiene las mismas propiedades de monotonicidad y concavidad que la función $v(\cdot)$.

5.9.6. Principio de Esscher

Supóngase que un riesgo X es una variable aleatoria positiva, con pdf f y cdf F . Según el principio de Esscher, la prima es definida por

$$\mathcal{P}(X, \theta) = \frac{\mathbb{E}[Xe^{\theta X}]}{\mathbb{E}[e^{\theta X}]} = \frac{d}{d\theta} \ln [M_X(\theta)], \quad \theta > 0 \quad (5.36)$$

y se interpreta como la prima pura de un riesgo \widetilde{X} con pdf y cdf dadas por

$$\widetilde{f}(x, \theta) = \frac{e^{\theta x} f(x)}{M_X(\theta)} \quad \text{y} \quad \widetilde{F}(x, \theta) = \frac{1}{M_X(\theta)} \int_0^x e^{\theta u} f(u) du,$$

esta última expresión corresponde a la transformada de Esscher dada en (1.158). Luego, la función generadora de momentos está dada por

$$M_{\widetilde{X}}(z) = \frac{M_X(\theta + z)}{M_X(\theta)}. \quad (5.37)$$

Ejemplo 5.11. [61, pág. 45]

Suponga un riesgo X con pdf exponencial de parámetro λ y cdf F . Determine la prima según el principio de Esscher con parámetro θ ($\theta < \lambda$), y la transformada de Esscher.

Solución. Por la expresión (1.114) la función generadora de momentos del riesgo X está dada por

$$M_X(z) = \frac{\lambda}{\lambda - z}, \quad z < \lambda.$$

Entonces

$$M_{\tilde{X}}(z) = \frac{\lambda - \theta}{\lambda - \theta - z}, \quad z + \theta < \lambda.$$

Así, el riesgo \tilde{X} tiene pdf exponencial con parámetro $\lambda - \theta$. Por lo tanto, la prima, según el principio de Esscher, es

$$\mathcal{P}(X, \theta) = \mathbb{E}(\tilde{X}) = \frac{d}{d\theta} \ln [M_X(\theta)] = \frac{1}{\lambda - \theta}, \quad \theta < \lambda$$

y la transformada de Esscher está dada por

$$\tilde{F}(x, \theta) = 1 - \exp \{ -(\lambda - \theta)x \}. \quad \checkmark$$

5.9.7. Principio exponencial

Esta prima se determina suponiendo que las preferencias del agente decisor se describen por la función de utilidad dada en (5.17). La prima \mathcal{P} se establece resolviendo (5.22) bajo indiferencia al riesgo:

$$u(w - \mathcal{P}) = \mathbb{E}[u(w - X)].$$

Al sustituir (5.19) se tiene que

$$u(w) + e^{-\alpha w} u(-\mathcal{P}) = \mathbb{E}[u(w) + e^{-\alpha w} u(-X)].$$

Luego,

$$u(-\mathcal{P}) = \mathbb{E}[u(-X)] \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - e^{\alpha \mathcal{P}}}{\alpha} = \frac{1 - \mathbb{E}(e^{\alpha X})}{\alpha}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\alpha} \ln [\mathbb{E}(e^{\alpha X})] = \frac{1}{\alpha} \ln [M_X(\alpha)]. \quad (5.38)$$

Nótese que \mathcal{P} depende únicamente de α ; luego, cuando $M_X(\alpha)$ no sea conocida, se reescribe como

$$\mathcal{P}(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \ln \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \alpha^r \mu'_r(X) \right].$$

Usando la serie de Taylor del logaritmo natural dada en (B.14), se obtiene

$$\mathcal{P}(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \left[\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \alpha^r \mu'_r(X) \right]^{k+1}.$$

Al agrupar los términos en las potencias de α se tiene

$$\mathcal{P}(\alpha) = \mu'_1(X) + \frac{\alpha}{2!} \left(\mu'_2(X) - (\mu'_1(X))^2 \right) + \text{términos en } \alpha^k, \quad k \geq 3.$$

Como $\mu'_1(X) = \mu_X$ y $\mu'_2(X) - (\mu'_1(X))^2 = \sigma_X^2$, entonces

$$\mathcal{P}(\alpha) = \mu_X + \frac{1}{2} \alpha \sigma_X^2 + \text{términos en } \alpha^k, \quad k \geq 3.$$

Luego, la prima es más elevada, cuanto más grande sea el parámetro α . La prima máxima \mathcal{P} que se paga por un riesgo X es aproximadamente

$$\mathcal{P}(\alpha) \approx \mu_X + \frac{1}{2} \alpha \sigma_X^2. \quad (5.39)$$

Al comparar con la expresión (5.27) se tiene $\alpha = r(w - \mu_X)$, valor obtenido para la función de riesgo local en (5.18).

Ejemplo 5.12. [37, pág. 14]

Determine la prima del asegurador, suponiendo que sus preferencias se describen por una función de utilidad exponencial con parámetro $\alpha = 0.005$ y el monto de reclamo X tiene pdf exponencial con parámetro $\beta = 0.01$.

Solución. Por la expresión (1.114) la función generadora de momentos es

$$M_X(\alpha) = \frac{0.01}{0.01 - \alpha} = \frac{1}{1 - 100\alpha}.$$

En este caso, la prima se establece por (5.38):

$$\mathcal{P} = 200 \ln \left(\frac{1}{1 - 0.5} \right) = 200 \ln(2) \approx 138.63.$$

Por lo tanto, el asegurado podría no aceptar asegurar ya que la prima neta $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\beta} = 100$. La aproximación (5.39) para este ejemplo nos da

$$\mathcal{P} = 100 + \frac{1}{2} \frac{1}{200} 100^2 = 125. \quad \checkmark$$

Ejemplo 5.13. [61, pág. 32]

Determine la prima del asegurador, suponiendo que sus preferencias se describen por una función de utilidad exponencial con parámetro α y el monto de reclamo X tiene pdf normal con parámetros μ y σ^2 .

Solución. Usando la mgf de la normal dada en (1.118), se tiene que

$$M_X(\alpha) = \exp \left\{ \mu\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 \right\}.$$

Por lo tanto, la prima que el consumidor pagaría sería

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\alpha} \left[\mu\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 \right] = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha.$$

Esta prima coincide con la expresión dada en (5.31) con $\theta = \frac{\alpha}{2}$. ✓

5.9.8. Principio percentil

Sea $0 < \alpha < 1$, entonces \mathcal{P}_I^* es determinada de tal manera que la probabilidad de una pérdida extrema del contrato, sea igual a α ; es decir, \mathcal{P}_I^* es la solución de $F_X(\mathcal{P}_I^*) = 1 - \alpha$. Esto significa que \mathcal{P}_I^* es el respectivo percentil de la cdf de X . Entonces \mathcal{P}_I^* se deduce de la condición más general:

$$\mathcal{P}_I^* = \min \{q | F_X(q) \geq 1 - \alpha\} = x_\alpha. \quad (5.40)$$

Es decir, \mathcal{P}_I^* es la prima más pequeña tal que la probabilidad para una pérdida extrema es como máximo α . En la sección 1.13 se presentó la expansión CF dada en [77] la cual permite aproximar el α -ésimo cuantil de X (percentil x_α) en términos de los cumulantes de la variable estandarizada de X y el percentil de la normal estándar z_α . Usando la relación (1.119),

$$\frac{x_\alpha - \mu_X}{\sigma_X} = \omega_\alpha. \quad (5.41)$$

El lado derecho se sustituye por $I + II + III$; es decir, se ajusta por I , II y III de la página 214 del artículo [77]. Puesto que el lado izquierdo está estandarizado, por la expresión (1.160) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_I^* = x_\alpha = \mu_X + \sigma_X \left[z_\alpha + \frac{z_\alpha^2 - 1}{6} \beta_1(X) + \frac{z_\alpha^3 - 3z_\alpha}{24} (\beta_2(X) - 3) \right. \\ \left. - \frac{2z_\alpha^3 - 5z_\alpha}{36} \beta_1^2(X) - \frac{z_\alpha^4 - 5z_\alpha^2 + 2}{24} \beta_1(X)(\beta_2(X) - 3) \right], \end{aligned}$$

donde μ_X , σ_X , $\beta_1(X)$ y $\beta_2(X)$ denotan la media, desviación estándar y, los coeficientes de asimetría y curtosis de la distribución de X , respectivamente.

5.9.9. Principio de la pérdida máxima

Sea $0 < q < 1$, entonces \mathcal{P}_I^* es determinada tal que la probabilidad para la pérdida máxima del contrato sea igual a 1; es decir, \mathcal{P}_I^* está dada por

$$\mathcal{P}_I^* = \min\{q | F_X(q) = 1\}. \quad (5.42)$$

5.9.10. Principio del valor medio

Sea $v(x)$ una función convexa (es decir, $v'(X) > 0$ y $v''(X) > 0$). Entonces, aplicando la desigualdad de Jensen a la función $v(x)$, se puede determinar $\mathcal{P}_I^* = \mathbb{E}(X)$ como la solución de la ecuación

$$v(\mathcal{P}_I^*) \leq \mathbb{E}[v(X)] \quad \text{o} \quad \mathcal{P}_I^* \leq v^{-1}(\mathbb{E}[v(X)]). \quad (5.43)$$

En este caso se toma \mathcal{P}_I^* igual al valor máximo. El principio exponencial se puede obtener como un caso particular, para $v(x) = \exp(\alpha x)$, $\alpha > 0$.

5.9.11. Principio de la prima ajustada

Supóngase que el riesgo X es una variable aleatoria positiva con *cdf* F . Según el principio de la prima ajustada, la prima es definida por

$$\mathcal{P} = \int_0^{\infty} [P(X > x)]^{\frac{1}{\varrho}} dx = \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)]^{\frac{1}{\varrho}} dx. \quad (5.44)$$

donde ϱ ($\varrho \geq 1$), denota el “índice de riesgo”. Si $\varrho = 1$, este principio de prima coincide con el principio de equivalencia.

Ejemplo 5.14. [61, pág. 48]

Sea X un riesgo que sigue una *pdf* de Pareto(α , β). Encuentre la prima ajustada.

Solución. La *cdf* de este riesgo X es dada por

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{\alpha}, \quad x > 0. \quad (5.45)$$

Luego, la prima ajustada \mathcal{P} se establece como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)]^{\frac{1}{\varrho}} dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{\frac{\alpha}{\varrho}} dx \\ &= \left[-\frac{1}{\frac{\alpha}{\varrho} - 1} \frac{\beta^{\frac{\alpha}{\varrho}}}{(\beta + x)^{\frac{\alpha}{\varrho} - 1}} \right]_0^{\infty} = \frac{\beta \varrho}{\alpha - \varrho}, \quad \varrho < \alpha. \quad \square \end{aligned}$$

Si el propietario describe sus preferencias por una función de utilidad lineal y creciente (es decir, $u(x) = ax + b$), él adoptará el principio de equivalencia. De acuerdo con (5.22), se tiene que $\mathcal{P} = \mu_X$. Cuando el asegurador, para evitar un ingreso insuficiente, cobra una prima superior a la pérdida esperada, el propietario no debe usar una función de utilidad lineal. Usando la desigualdad de Jensen en la expresión (5.22) se tiene que

$$u(w - \mathcal{P}) = \mathbb{E}[u(w - X)] \leq u(w - \mu_X). \quad (5.46)$$

Puesto que $u(x)$ es una función creciente, se tiene de (5.46) que $\mathcal{P} \geq \mu_X$. Cuando X sea constante entonces $\mathcal{P} > \mu_X$. En conclusión, si $u(x)$ es cóncava (es decir, $u'(x) > 0$ y $u''(x) < 0$), el agente decisor pagará una cantidad mayor que la pérdida esperada para el seguro y se dirá que tal agente decisor es averso al riesgo. Si la prima \mathcal{P} , determinada por el agente decisor resolviendo (5.46) es tal que $\mathcal{P} \geq \mathcal{P}_I^* \geq \mu_X$, entonces es factible una póliza de seguro que no disminuya la utilidad esperada de las partes contratantes.

Ejemplo 5.15. [80, pág. 521]

Determine la prima del asegurador, suponiendo que sus preferencias se pueden describir mediante la función de utilidad dada en (5.17) con parámetro α_I .

Solución. La prima para el asegurador se obtiene sustituyendo la función de utilidad exponencial en la expresión (5.33):

$$\mathcal{P}_I^* = \frac{1}{\alpha_I} \ln \left[\mathbb{E}(e^{\alpha_I X}) \right] = \frac{1}{\alpha_I} \ln [M_X(\alpha_I)]. \quad (5.47)$$

Nótese que las primas \mathcal{P} y \mathcal{P}_I^* no dependen de las respectivas fortunas de los agentes decisores. ☑

Ejemplo 5.16. *Un consumidor con fortuna w y cuyas preferencias se pueden describir por la función de utilidad exponencial de parámetro α , enfrenta una pérdida X . Suponga que $X = 0$ con probabilidad p y para $X > 0$ sigue una pdf exponencial de parámetro β . Determine la pérdida esperada y la prima máxima que el consumidor pagaría.*

Solución. La pérdida esperada se establece como sigue

$$\mathbb{E}(X) = (0)p + (1 - p)\beta \int_0^{\infty} x e^{-\beta x} dx = \frac{1 - p}{\beta}.$$

Para encontrar la prima máxima que el agente decisor pagaría se emplea la ecuación (5.22) que en este caso queda de la forma

$$\begin{aligned}
 u(w - \mathcal{P}) &= pu(w) + (1 - p)\beta \int_0^\infty u(w - x)e^{-\beta x} dx \\
 u(w) + e^{-\alpha w} u(-\mathcal{P}) &= pu(w) + (1 - p)\beta \int_0^\infty [u(w) + e^{-\alpha w} u(-x)]e^{-\beta x} dx \\
 u(w) + e^{-\alpha w} u(-\mathcal{P}) &= pu(w) + (1 - p)u(w) + (1 - p)e^{-\alpha w} \beta \int_0^\infty u(-x)e^{-\beta x} dx.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la función $u(x)$ dada en (5.17), se tiene que

$$\begin{aligned}
 e^{-\alpha w} u(-\mathcal{P}) &= e^{-\alpha w} \frac{1 - p}{\alpha} \left[1 - \frac{\beta}{\beta - \alpha} \right] & \beta > \alpha \\
 \frac{1 - e^{\alpha \mathcal{P}}}{\alpha} &= - \frac{1 - p}{\beta - \alpha}.
 \end{aligned}$$

Luego, la prima no depende de w y será

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\alpha} \ln \left[1 + \frac{(1 - p)\alpha}{\beta - \alpha} \right].$$

Según las preferencias del agente decisor, él pagaría hasta $\mathcal{P} - \mathbb{E}(X)$ en exceso de la pérdida esperada para tomar un seguro que cubra todas las pérdidas. ☑

Ejemplo 5.17. *Considere la información de la tabla, muestre que es viable expedir una póliza de seguro que no reduzca la utilidad esperada del asegurado y del asegurador, supóngase que ambos aceptan la prima bajo indiferencia al riesgo. Una pérdida de 5 ocurre con probabilidad $q = 1/5$.*

Tabla 5.6. Funciones de utilidad de las partes involucradas

| | Asegurado | Asegurador |
|---------------------|---|------------------------|
| Fortuna (riqueza) | w | w_I |
| Función de utilidad | $\exp \left\{ \frac{\ln 2}{5} \right\}$ | $a + bx$, con $b > 0$ |

Fuente: elaboración propia.

Solución. Para encontrar la prima máxima que el asegurado pagaría se emplea la ecuación (5.22) que en este caso queda de la forma

$$\begin{aligned}
 u(w - \mathcal{P}) &= \mathbb{E}[u(w - X)] \\
 u(w - \mathcal{P}) &= q \cdot u(w - 5) + (1 - q) \cdot u(w) \\
 u(w) + e^{-\alpha w} u(-\mathcal{P}) &= q \cdot [u(w) + e^{-\alpha w} u(-5)] + (1 - q) \cdot u(w) \\
 e^{-\alpha w} u(-\mathcal{P}) &= q e^{-\alpha w} u(-5)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la función $u(x)$ dada en (5.17), se tiene que

$$\frac{1 - e^{\alpha P}}{\alpha} = q \frac{1 - e^{5\alpha}}{\alpha}.$$

Al reemplazar los valores y despejar, se tiene que $P = 5 \log_2(1.2) \approx 1.3152$.

Por otra parte, la prima \mathcal{P}_I^* , correspondiente al asegurador, se encuentra resolviendo (5.33):

$$\begin{aligned} v(w_I) &= \mathbb{E}[v(w_I + \mathcal{P}_I^* - X)] \\ v(w_I) &= q \cdot v(w_I + \mathcal{P}_I^* - 5) + (1 - q) \cdot v(w_I + \mathcal{P}_I^*) \\ a + b \cdot w_I &= q \cdot [a + b \cdot (w_I + \mathcal{P}_I^* - 5)] + (1 - q) \cdot [a + b \cdot (w_I + \mathcal{P}_I^*)] \\ \cancel{b} \cdot w_I &= \cancel{b} \cdot (w_I + \mathcal{P}_I^*) - 5q \cancel{b}. \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{P}_I^* = 5q = 1$. Nótese que tanto \mathcal{P} como P no dependen del nivel de fortuna. Finalmente, se obtiene que la pérdida esperada es

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = 5(0.2) + 0(0.8) = 1.$$

Como $\mathcal{P} > P = \mu_X$ se tiene que la expedición de la póliza con las características dadas es viable. ✓

Ejemplo 5.18. [85]

Determine la prima del asegurado y del asegurador, suponiendo que ambos describen sus preferencias mediante la función de utilidad dada en (5.20) con $m = 2$ y parámetros α y β , respectivamente.

Solución. La prima \mathcal{P} , correspondiente al asegurado con fortuna w , se encuentra al sustituir en (5.22):

$$\begin{aligned} u(w - \mathcal{P}) &= \mathbb{E}[u(w - X)] \\ (w - \mathcal{P}) \left(1 - \frac{w - \mathcal{P}}{2\alpha}\right) &= \mathbb{E} \left[(w - X) \left(1 - \frac{w - X}{2\alpha}\right) \right] \\ 2(w - \mathcal{P})\alpha - (w - \mathcal{P})^2 &= \mathbb{E} [2(w - X)\alpha - (w - X)^2] \\ 2w\alpha - 2\mathcal{P}\alpha - (w^2 - 2w\mathcal{P} + \mathcal{P}^2) &= \mathbb{E} [2w\alpha - 2X\alpha - (w^2 - 2wX + X^2)] \\ 2(w - \alpha)\mathcal{P} - \mathcal{P}^2 &= 2(w - \alpha)\mu_X - \mathbb{E}[X^2]. \end{aligned}$$

Reescribiendo esta ecuación, se tiene que

$$\mathcal{P}^2 + 2(\alpha - w)\mathcal{P} - [\mu_X + 2(\alpha - w)]\mu_X - \sigma_X^2 = 0.$$

Al aplicar cuadrática, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= (w - \alpha) + \sqrt{(\alpha - w + \mu_X)^2 + \sigma_X^2}, \\ &= (w - \alpha) + (\alpha - w + \mu_X) \sqrt{1 + \left[\frac{\sigma_X}{\alpha - w + \mu_X} \right]^2}.\end{aligned}$$

Sumando y restando al lado derecho de la igualdad μ_X , se obtiene que

$$\mathcal{P} = \mu_X + (\alpha - w + \mu_X) \left[\sqrt{1 + \left[\frac{\sigma_X}{\alpha - w + \mu_X} \right]^2} - 1 \right]. \quad (5.48)$$

Si α se elige suficientemente grande, la raíz cuadrada de la derecha es tratada de la forma $\sqrt{1+z}$. Al usar el desarrollo de Taylor dado en (B.9), se obtiene

$$\mathcal{P} = \mu_X + (\alpha - w + \mu_X) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \left[\frac{\sigma_X}{\alpha - w + \mu_X} \right]^{2k} \prod_{j=0}^{k-1} (2j - 1),$$

y, considerando el primer término de esta serie,

$$\mathcal{P} \approx \mu_X + \frac{1}{2} \frac{\sigma_X^2}{\alpha - (w - \mu_X)}.$$

En virtud de (5.21), se escribe esta expresión como

$$\mathcal{P} \approx \mu_X + \frac{1}{2} r(w - \mu_X) \sigma_X^2,$$

la cual coincide con (5.27). De manera análoga, la prima para el asegurador se obtiene sustituyendo la función de utilidad en la expresión (5.33),

$$\begin{aligned}v(\omega_I) &= \mathbb{E}[v(\omega_I + \mathcal{P}_I - X)] \\ \omega_I \left(1 - \frac{\omega_I}{2\beta} \right) &= \mathbb{E} \left[(\omega_I + \mathcal{P}_I - X) \left(1 - \frac{\omega_I + \mathcal{P}_I - X}{2\beta} \right) \right] \\ 2\omega_I \beta - \omega_I^2 &= \mathbb{E} [2(\omega_I + \mathcal{P}_I - X)\beta - (\omega_I + \mathcal{P}_I - X)^2] \\ 2\omega_I \beta - \omega_I^2 &= \mathbb{E} [2(\omega_I + \mathcal{P}_I)\beta - 2\beta X - (\omega_I + \mathcal{P}_I)^2 + 2(\omega_I + \mathcal{P}_I)X - X^2] \\ 0 &= 2(\omega_I - \beta)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}[X^2] - 2(\omega_I - \beta - \mathbb{E}(X))\mathcal{P}_I - \mathcal{P}_I^2.\end{aligned}$$

Al reescribir esta última expresión se obtiene que

$$\mathcal{P}_I^2 - 2[\mathbb{E}(X) + (\beta - \omega_I)]\mathcal{P}_I + [\mathbb{E}(X) + 2(\beta - \omega_I)]\mathbb{E}(X) + \sigma_X^2 = 0.$$

Al aplicar cuadrática, se obtiene

$$\mathcal{P}_I = \mathbb{E}(X) + (\beta - \omega_I) - \sqrt{(\beta - \omega_I)^2 - \sigma_X^2}. \quad (5.49)$$

Si $\omega_I = 0$, esta expresión coincide con el resultado dado en [39], el cual corresponde al valor de la prima bajo el principio de utilidad cero. Por otra parte, usando de nuevo la serie de Taylor dada en (B.9), se obtiene

$$\mathcal{P}_I = \mu_X - (\beta - w_I) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} \left(\frac{\sigma_X}{\beta - w_I} \right)^{2k} \prod_{j=0}^{k-1} (2j - 1),$$

y, considerando el primer término de esta serie,

$$\mathcal{P}_I \approx \mu_X + \frac{1}{2} \frac{\sigma_X^2}{\beta - w_I} \approx \mu_X + \frac{1}{2} r(w_I) \sigma_X^2.$$

Aquí, de nuevo se utilizó (5.21). Nótese que la última expresión coincide con (5.27). \checkmark

5.10. Propiedades básicas de los principios de prima

La prima \mathcal{P} , mediante el principio de equivalencia, es el valor que compensa el costo de los reclamos que se producen durante la vigencia de un seguro. En esta sección, se usarán ambas notaciones $\mathcal{P} = H[F_X]$ y $\mathcal{P} = H[X]$ para la prima de X , si $F_X(x)$ es la cdf de X (ver [123]).

Definición 5.4. Si X denota los riesgos acumulados en un horizonte temporal, la función $H : X \rightarrow (0, \infty)$, que asigna a cada valor X un número no negativo $H(X)$, se denomina prima.

Las siguientes propiedades son adecuadas para los principios de prima:

1. Recargo por seguridad no-negativo

$$H[X] \geq \mathbb{E}[X]; \quad (5.50)$$

esto es, la prima debe ser mayor que el valor esperado de los reclamos.

2. No estafa (truncamiento): la prima cobrada no debe exceder el máximo beneficio posible; es decir,

$$H[X] \leq \min \{p | F_X(p) = 1\}. \quad (5.51)$$

3. Invariante por traslación (consistencia): si el monto de reclamo X es afectado “aditivamente” en un monto constante $c > 0$, entonces la prima se debe afectar de igual manera; es decir,

$$H[X + c] = H[X] + c. \quad (5.52)$$

Esto significa que si el beneficio se incrementa por una constante positiva, entonces a la prima se le debe adicionar esta constante.

4. Aditividad: si X y Y son 2 riesgos independientes, entonces

$$H[X + Y] = H[X] + H[Y]. \quad (5.53)$$

Esto es, la prima de riesgo combinada es igual a la suma de las primas de los riesgos individuales. Así, la unión de riesgos independientes no debe afectar la prima total.

5. Iteratividad: si X y Y son 2 riesgos cualquiera, entonces

$$H[H(X|Y)] = H[X]. \quad (5.54)$$

6. Invariante en escala (proporcionalidad): dado un riesgo X , entonces

$$H[\rho X] = \rho H[X] \quad \forall \rho \geq 0. \quad (5.55)$$

No todos los principios de prima satisfacen la última propiedad. Otras propiedades útiles, como conservar el orden —lo cual implica que las primas asociadas a riesgos “pequeños” deben ser inferiores—, no se consideran.

Ejemplo 5.19. *Determine si el principio exponencial satisface todas las propiedades.*

Solución. Por la expresión (5.38) se tiene que $H[X] = \frac{1}{\alpha} \ln [M_X(\alpha)]$.

1. Recargo por seguridad positivo: de la expresión (5.39), se tiene de manera inmediata.
2. No estafa: queda como ejercicio para el lector.
3. Consistencia:

$$\begin{aligned} H[X + c] &= \frac{1}{\alpha} \ln [M_{X+c}(\alpha)] = \frac{1}{\alpha} \ln [e^{c\alpha} M_X(\alpha)] \\ &= \frac{1}{\alpha} \{c\alpha + \ln [M_X(\alpha)]\} = c + H[X]. \end{aligned}$$

4. Aditividad:

$$\begin{aligned} H[X + Y] &= \frac{1}{\alpha} \ln [M_{X+Y}(\alpha)] = \frac{1}{\alpha} \ln [M_X(\alpha) M_Y(\alpha)] \\ &= \frac{1}{\alpha} \{ \ln [M_X(\alpha)] + \ln [M_Y(\alpha)] \} = H[X] + H[Y]. \end{aligned}$$

5. Iteratividad:

$$\begin{aligned} H[H(X|Y)] &= \frac{1}{\alpha} \ln [M_{H(X|Y)}(\alpha)] = \frac{1}{\alpha} \ln [\mathbb{E}(e^{\alpha H(X|Y)})] \\ &= \frac{1}{\alpha} \ln \left[\mathbb{E} \left(\exp \left\{ \alpha \frac{1}{\alpha} \ln [M_{X|Y}(\alpha)] \right\} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \ln [\mathbb{E}(\exp \{ \ln [\mathbb{E}(e^{\alpha X}|Y)] \})] \\ &= \frac{1}{\alpha} \ln [\mathbb{E}[\mathbb{E}(e^{\alpha X}|Y)]] = \frac{1}{\alpha} \ln [\mathbb{E}[e^{\alpha X}]]. \end{aligned}$$

6. Invariante en escala:

$$\begin{aligned} H[\rho X] &= \frac{1}{\alpha} \ln [M_{\rho X}(\alpha)] = \frac{1}{\alpha} \ln [M_X(\rho \alpha)] \\ &= \rho \left[\frac{1}{\rho \alpha} \ln [M_X(\rho \alpha)] \right] = \rho H^*[X]. \end{aligned}$$

Luego, no cumple la propiedad de proporcionalidad. \checkmark

Ejemplo 5.20. [61, pág. 46]

Determine si el principio de Esscher cumple todas las propiedades.

Solución. Usando la expresión (5.36):

1. Recargo por seguridad positivo: según el principio de Esscher, la prima tiene un cargo no negativo. Para comprobar esta afirmación nótese que

$$\underbrace{H(X, \theta)}_{\mathbb{E}(\tilde{X})} = \begin{cases} \mathbb{E}(X) & \text{si } \theta = 0 \\ \frac{M'_X(\theta)}{M_X(\theta)} & \text{si } \theta > 0, \end{cases}$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} H(X, \theta) &= \frac{M''_X(\theta)M_X(\theta) - [M'_X(\theta)]^2}{[M_X(\theta)]^2} \\ &=_{\theta \rightarrow 0} \mathbb{E}(\tilde{X}^2) - [\mathbb{E}(\tilde{X})]^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Entonces, $H(X, \theta)$ es una función no decreciente de θ y, por lo tanto, $H(X, \theta) \geq \mathbb{E}[X]$ para todo $\theta \geq 0$.

2. No estafa: queda como ejercicio para el lector.
3. Consistencia:

$$\begin{aligned} H[X + c, \theta] &= \frac{\mathbb{E}[(X + c)e^{\theta(X+c)}]}{\mathbb{E}[e^{\theta(X+c)}]} = \frac{e^{c\theta} \mathbb{E}[Xe^{\theta X}] + ce^{c\theta} \mathbb{E}[e^{\theta X}]}{e^{c\theta} \mathbb{E}[e^{\theta X}]} \\ &= \frac{\mathbb{E}[Xe^{\theta X}]}{\mathbb{E}[e^{\theta X}]} + c = H[X, \theta] + c. \end{aligned}$$

4. Aditividad:

$$\begin{aligned} H[X + Y] &= \frac{\mathbb{E}[(X + Y)e^{\theta(X+Y)}]}{\mathbb{E}[e^{\theta(X+Y)}]} = \frac{\mathbb{E}[Xe^{\theta X}]\mathbb{E}[e^{\theta Y}] + \mathbb{E}[Ye^{\theta Y}]\mathbb{E}[e^{\theta X}]}{\mathbb{E}[e^{\theta X}]\mathbb{E}[e^{\theta Y}]} \\ &= \frac{\mathbb{E}[Xe^{\theta X}]}{\mathbb{E}[e^{\theta X}]} + \frac{\mathbb{E}[Ye^{\theta Y}]}{\mathbb{E}[e^{\theta Y}]} = H[X, \theta] + H[Y, \theta]. \end{aligned}$$

6. Proporcionalidad: este principio no es de escala constante. En efecto, para $\rho > 0$,

$$H(\rho X, \theta) = \frac{\mathbb{E}[\rho X e^{\theta \rho X}]}{\mathbb{E}[e^{\theta \rho X}]} \neq \rho H(X, \theta).$$

La demostración de las otras propiedades quedan como ejercicios para el lector. ☑

Ejemplo 5.21. [61, pág. 49]

Determine si la prima ajustada cumple todas las propiedades.

Solución. Por la expresión (5.44) se tiene que

$$H(X) = \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)]^{\frac{1}{\theta}} dx.$$

1. Recargo por seguridad positivo: de la expresión (5.39), se tiene de manera inmediata.
2. No estafa: queda como ejercicio para el lector.
3. Consistencia: sea $U = X + c$, entonces

$$P(U > u) = P(X + c > u) = P(X > u - c) = 1 - F_X(u - c).$$

Luego,

$$1 - F_U(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u < c, \\ 1 - F_X(u - c) & \text{si } u \geq c. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$H(U) = \int_0^c du + \int_c^{\infty} [1 - F_X(u - c)]^{\frac{1}{\theta}} du.$$

Haciendo el cambio de variable $u = x + c$, se tiene

$$H(X + c) = c + \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)]^{\frac{1}{\theta}} dx = H(X) + c$$

6. Proporcionalidad: sea $U = \rho X$, entonces

$$P(U > u) = P(\rho X > u) = P\left(X > \frac{u}{\rho}\right) = 1 - F_X\left(\frac{u}{\rho}\right).$$

Luego,

$$H(U) = \int_0^\infty [1 - F_U(u)]^{\frac{1}{\rho}} du = \int_0^\infty \left[1 - F_X\left(\frac{u}{\rho}\right)\right]^{\frac{1}{\rho}} du.$$

Haciendo el cambio de variable $u = \rho x$, se tiene

$$H(\rho X) = \rho \int_0^\infty [1 - F_X(x)]^{\frac{1}{\rho}} dx = \rho H(X). \quad \checkmark$$

5.11. Reducción de primas a través de la cooperación

En [40] se considera que n compañías de seguros se unen para enfrentar un riesgo S . Cada una emplea el principio de prima exponencial con parámetros α_k , $k = 1, 2, \dots, n$, y distribuyen el riesgo de la siguiente manera:

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n,$$

donde S_k denota el riesgo asegurado (asumido) por la k -ésima compañía. Entonces, la prima total es

$$H[S] = H\left[\sum_{k=1}^n S_k\right] = \sum_{k=1}^n H[S_k] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k} \ln [M_{S_k}(\alpha_k)]. \quad (5.56)$$

Esta prima total depende de la escogencia de la S_k . Los cubrimientos de la opción óptima \tilde{S}_k de cada uno de los aseguradores se dan cuando ellos aseguran una parte fija de S ; es decir,

$$\tilde{S}_k = \frac{\alpha}{\alpha_k} S \quad \text{con} \quad \frac{1}{\alpha} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k}.$$

Así, cada asegurador cubre una porción del riesgo agrupado, que es proporcional al recíproco de su aversión de riesgo. La correspondiente prima total mínima es

$$\tilde{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k} \ln [\mathbb{E}(e^{\alpha_k \tilde{S}_k})] = \frac{1}{\alpha} \ln [\mathbb{E}(e^{\alpha S})]. \quad (5.57)$$

5.12. Seguros con reembolso inferior a la prima

Supóngase que un agente decisor con fortuna w enfrenta una pérdida X para el siguiente periodo. Previamente se vio que él pagaba una prima \mathcal{P} y el asegurador aceptaba la pérdida total X . En esta sección se considera el caso en el que las pérdidas son compartidas por el agente decisor y el asegurador; en otras palabras, se considera el caso en que el seguro solo cubre una parte de la pérdida total. Bajo estas condiciones se supone que el agente decisor compra una póliza de seguros que en caso de pérdida, le paga o reembolsa la cantidad $I_d(X) < X$. La prima \mathcal{P} se establece resolviendo la siguiente generalización de la ecuación bajo indiferencia al riesgo (5.22):

$$\mathbb{E}[u(w - \mathcal{P} - [X - I_d(X)])] = \mathbb{E}[u(w - X)], \quad (5.58)$$

donde $X - I_d(X)$ denota la pérdida asumida o cubierta por el asegurado. Este tipo de seguros es llamado *seguro con deducible*. En un contrato de seguros con deducible d , la cantidad que paga el asegurador al asegurado es

$$I_d(X) = (X - d)_+ = \begin{cases} 0, & \text{si } X \leq d \\ X - d, & \text{si } X > d. \end{cases} \quad (5.59)$$

En este caso, el valor del reclamo asumido por el asegurado es

$$X - I_d(X) = X - (X - d)_+ = \begin{cases} X, & \text{si } X \leq d \\ d, & \text{si } X > d. \end{cases} \quad (5.60)$$

Así, el valor retenido es acotado por d .

Ahora, se aplicarán métodos para calcular $\mathbb{E}[I_d(X)]$, la prima neta para el seguro con deducible:

1. Si X es continua: sea $F_X(x)$ la **cdf** de X y supóngase que X tiene una **pdf** $f_X(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_d(X)] &= \int_d^\infty (x - d)f_X(x) dx & (5.61) \\ &= \int_d^\infty x f_X(x) dx - d \int_d^\infty f_X(x) dx \end{aligned}$$

$$= \int_d^{\infty} x f_X(x) dx - d[1 - F_X(d)] \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} (x - d) f_X(x) dx - \int_0^d (x - d) f_X(x) dx \\ &= \mathbb{E}(X) - d + \int_0^d (d - x) f_X(x) dx. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Usando la expresión (1.11) se tiene que

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbb{E}[I_d(X)]}_{\mathcal{P}} &= - \int_d^{\infty} (x - d) d[1 - F_X(x)] \\ &= \int_d^{\infty} [1 - F_X(x)] dx \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$= \mathbb{E}(X) - \int_0^d [1 - F_X(x)] dx. \quad (5.65)$$

2. Si X es discreta, se denota la **cdf** por $F_X(x) = P[X \leq x]$ y la **pdf** por $f_X(x) = P[X = x]$. Supóngase que d es un entero, entonces

$$\underbrace{\mathbb{E}[I_d(X)]}_{\mathcal{P}} = \sum_{x=d+1}^{\infty} (x - d) f_X(x) \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \sum_{x=d+1}^{\infty} x f_X(x) - d \sum_{x=d+1}^{\infty} f_X(x) \\ &= \sum_{x=d+1}^{\infty} x f_X(x) - d[1 - F_X(d)] \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{x=0}^{\infty} (x - d) f_X(x) - \sum_{x=0}^d (x - d) f_X(x) \\ &= \mathbb{E}(X) - d + \sum_{x=0}^d (d - x) f_X(x). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Puesto que $F_X(x)$ es constante a trozos, se tiene también que

$$\mathbb{E}[I_d(X)] = \sum_{x=d}^{\infty} [1 - F_X(x)] \quad (5.69)$$

$$= \mathbb{E}(X) - \sum_{x=0}^d [1 - F_X(x)]. \quad (5.70)$$

Si en la expresión(5.69) $d \in \mathbb{Z}$, se obtiene la fórmula recursiva

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I_{d+1}(X)] &= \sum_{x=d+1}^{\infty} [1 - F_X(x)] + [1 - F_X(d)] - [1 - F_X(d)] \\ &= \sum_{x=d}^{\infty} [1 - F_X(x)] - [1 - F_X(d)] \\ &= \mathbb{E}[I_d(X)] - [1 - F_X(d)]\end{aligned}\quad (5.71)$$

Ejemplo 5.22. [127, pág. 130]

Determine la prima cuando el deducible ordinario es igual a 50 y la pérdida X sigue una *pdf* de Pareto con parámetros $\alpha = 3$ y $\beta = 200$.

Solución. En este caso, la *cdf* está dada por (5.45) y usando la expresión (5.64), se tiene que la prima $\mathcal{P} = \mathbb{E}[I_d(X)]$ es

$$\mathcal{P} = \int_d^{\infty} [1 - F_X(x)] dx = \int_d^{\infty} \left[1 - \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta + x} \right)^\alpha \right) \right] dx.$$

Sustituyendo los valores dados,

$$\mathbb{E}[I_{50}(X)] = \int_{50}^{\infty} \left(\frac{200}{200 + x} \right)^3 dx = -\frac{200}{2} \left(\frac{200}{200 + x} \right)^2 \Big|_{x=50}^{x \rightarrow \infty} = \frac{320}{5} = 64.$$

En este caso, la prima neta $\mathbb{E}[X] = \frac{\beta}{\alpha - 1} = 100$. ☑

Cuando el seguro cubre solo una proporción de la pérdida total, recibe el nombre de *seguro proporcional*. En este caso, la pérdida del asegurador se escribe como sigue:

$$I(X) = \alpha X, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Así $(1 - \alpha)X$ representa la pérdida retenida por el agente decisor. A continuación, se menciona un teorema que expone un resultado principal:

Teorema 5.3.

Si un agente decisor averso al riesgo con fortuna ω :

- i) Enfrenta una pérdida aleatoria X y paga una prima P , $0 < P < \mu_X$.
- ii) Todas las pólizas con pago $I_d(X)$ ($0 \leq I_d(X) \leq X$), están disponibles y pueden ser compradas por su pérdida esperada, $\mathbb{E}[I_d(X)]$.

Entonces, la utilidad esperada del agente decisor será maximizada, comprando una póliza de seguros con

$$I_{d^*}(x) = (x - d^*)_+ = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq d^* \\ x - d^*, & \text{si } x > d^*, \end{cases} \quad (5.72)$$

donde d^* es la solución de la ecuación

$$P - \int_d^\infty (x - d)f_X(x) dx = 0.$$

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [37, cap. 1]. \square

El teorema 5.3 es un resultado importante, pero tiene ciertas restricciones sobre su aplicabilidad. Primero, un seguro comercial no se compra por el valor de los reclamos esperados; los gastos, la ganancia y los recargos por seguridad hacen que el valor cobrado sea mayor que los reclamos esperados. Segundo, el teorema no ayuda al agente decisor a encontrar la cantidad óptima que debe gastar en el seguro, ya que P es fija.

Ejemplo 5.23. Un agente decisor, con fortuna inicial $\omega = 100$ y cuyas preferencias se describen por la función de utilidad $u(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, está expuesto a una pérdida aleatoria X con pdf uniforme sobre el intervalo $(0, 100)$. Si él puede adquirir un seguro con deducible d por un valor de 18, que es igual al pago de la pérdida esperada del asegurador, determine su utilidad esperada máxima.

Solución. Por el teorema 5.3, el agente decisor maximiza su utilidad comprando un seguro con deducible d , donde d es solución de la expresión

$$18 - \int_d^{100} \frac{x - d}{100} dx = 0.$$

La solución exacta es $d = 40$; luego, la pérdida asumida del agente decisor es

$$X - I_d(X) = X - (X - d)_+ = \begin{cases} X, & \text{si } X \leq 40 \\ 40, & \text{si } X > 40. \end{cases}$$

Por lo tanto, la utilidad esperada máxima es

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{u(100 - 18 - [X - I_d(X)])\} &= \frac{1}{100} \left[\int_0^{40} \sqrt{82 - x} dx + \int_{40}^{100} \sqrt{42} dx \right] \\ &= \frac{8}{25} \sqrt{42} + \frac{41}{75} \sqrt{82} \approx 7.0241. \quad \square \end{aligned}$$

5.13. Seguros con deducible eximido

Este tipo de contrato de seguros difiere del seguro con deducible ordinario, ya que cuando la pérdida excede al deducible d^* , el monto de siniestro se paga en su totalidad; es decir, la cantidad que paga el asegurador al asegurado, “costo por pérdida”, es dada por

$$I_{d^*}(X) = (X - d^*)_+ = \begin{cases} 0, & \text{si } X \leq d^* \\ X, & \text{si } X > d^*. \end{cases} \quad (5.73)$$

Este tipo de seguros es llamado *seguro con deducible eximido*.

La variable aleatoria “costo por pago”, dada por $Y = \{I_{d^*}(X) | X > d^*\}$, está definida solo cuando hay un pago (no existe para $X \leq d^*$). La *cdf* truncada por la izquierda en d^* correspondiente al costo por pago Y es

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{I_{d^*}(X) | X > d^*\} = P\{X \leq y | X > d^*\} \\ &= \frac{F_X(y) - F_X(d^*)}{1 - F_X(d^*)}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

En este caso, la pérdida retenida o cubierta por el agente decisor (es decir, el valor del reclamo asumido por el asegurado) es

$$X - I_{d^*}(X) = X - (X - d^*)_+ = \begin{cases} X, & \text{si } X \leq d^* \\ 0, & \text{si } X > d^*. \end{cases} \quad (5.75)$$

Nótese que el valor retenido por el asegurado ya no es acotado por d^* .

Ejemplo 5.24. *Considere los datos del ejemplo 5.22. Determine el costo esperado por pérdida cuando el deducible es eximido.*

Solución. En este caso, la prima $\mathcal{P} = \mathbb{E}[I_{d^*}(X)]$ está dada por

$$\mathcal{P} = \int_{d^*}^{\infty} x f_X(x) dx = - \int_{d^*}^{\infty} x d[1 - F_X(x)].$$

Usando integración por partes, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int_{d^*}^{\infty} [1 - F_X(x)] dx + d^* [1 - F_X(d^*)] \\ &= \int_{d^*}^{\infty} \left[1 - \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta + x} \right)^\alpha \right) \right] dx + d^* \left[1 - \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta + d^*} \right)^\alpha \right) \right]. \end{aligned}$$

Al sustituir los valores dados,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{I_{50^*}(X)\} &= \int_{50}^{\infty} \left(\frac{200}{200+x}\right)^3 dx + 50 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \\ &= -\frac{200}{2} \left(\frac{200}{200+x}\right)^2 \Big|_{x=50}^{\infty} + \frac{128}{5} = \frac{448}{5} = 89.6. \quad \checkmark\end{aligned}$$

5.14. El efecto del deducible sobre la frecuencia de los reclamos

En el análisis del efecto que producen las modificaciones que se hacen a las pólizas, se considera el comportamiento de la frecuencia de los pagos cuando se impone o se cambia el deducible (ordinario o eximido). Cuando un deducible es impuesto o incrementado, habrá menos pagos por periodo, mientras que, si el deducible es eximido, habrá más pagos (ver [127]).

Sean N el número de reclamos que pueden ocurrir en un periodo dado de tiempo, N^P el número de pagos que se hacen en el periodo y $X_j = I_j B_j$ el valor del j -ésimo reclamo, $j = 1, 2, \dots, N$. La variable aleatoria N^P se reescribe como en (4.12):

$$N^P = \sum_{j=1}^N I_j$$

donde $I_j \sim \text{Geom}(q_j)$, para cada j . Por otra parte, la función generadora de momentos de la variable indicadora I_j está dada por

$$M_{I_j}(z) = 1 - q_j(1 - e^z) \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Supóngase que las I_j son variables aleatorias iid con media ν , donde ν es la probabilidad de que un reclamo dé lugar a un pago. Por lo tanto,

$$M_{I_j}(z) = 1 - \nu(1 - e^z) \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Luego, la función generadora de momentos de N^P se obtiene como sigue

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{zN^P}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{zN^P} | N]] = \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[e^{z(I_1+I_2+\dots+I_N)} \mid N\right]\right\} \\ M_{N^P}(z) &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}[e^{zI_1}] \mathbb{E}[e^{zI_2}] \dots \mathbb{E}[e^{zI_N}]\right\} \\ &= \mathbb{E}\left[M_{I_1}(z) M_{I_2}(z) \dots M_{I_N}(z)\right] = \mathbb{E}\left[M_I(z)^N\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{N \ln(M_I(z))}\right] = M_N[\ln(M_I(z))] \\ &= M_N[\ln(1 - \nu(1 - e^z))].\end{aligned} \tag{5.76}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[N^P] = \left. \frac{d}{dz} M_{N^P}(z) \right|_{z=0} = \nu \mathbb{E}[N] < \mathbb{E}[N].$$

En algunos casos se necesita establecer la **pmf** del número N de reclamos que pueden ocurrir a partir del número N^P de pagos que se hacen. En este caso, la función generadora de momentos de la variable aleatoria N está dada por

$$M_N(z) = M_{N^P}[\ln(1 - \nu^{-1}(1 - e^z))]. \quad (5.77)$$

Ejemplo 5.25. [127, pág. 141]

Supóngase que el reclamo B sigue la **pdf** dada en el ejemplo 5.22 y el número de reclamos sigue una **pmf** binomial negativa con media 6 y varianza 24. Determine el número esperado de pagos.

Solución. De la información dada sobre el número de reclamos se deduce que la variable aleatoria N sigue una **pmf** binomial negativa con parámetros $r = 2$ y $p = \frac{1}{4}$. Luego, la función generadora de momentos de N es

$$M_N(z) = \left(\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{4}e^z} \right)^2.$$

Usando la expresión (5.76), se tiene que la función generadora de momentos del número de pagos es

$$M_{N^P}(z) = \left[\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{4}(1 + \nu(e^z - 1))} \right]^2 = \left[\frac{1}{1 - 3\nu(e^z - 1)} \right]^2 = \left[\frac{\frac{1}{1+3\nu}}{1 - \frac{3\nu}{1+3\nu}e^z} \right]^2.$$

Luego, la variable aleatoria N^P tiene **pmf** binomial negativa con parámetros $r = 2$ y $p = (1 + 3\nu)^{-1}$, entonces $\mathbb{E}[N^P] = \nu \mathbb{E}[N]$.

Sea X la variable aleatoria que señala el valor de las reclamos. Entonces, la probabilidad de que un reclamo dé lugar a un pago es

$$\nu = P(X > 50) = \left(\frac{200}{200 + 50} \right)^3 = \left(\frac{4}{5} \right)^3 \approx 0.512.$$

Por lo tanto, el número esperado de pagos sería

$$\mathbb{E}[N^P] = 6\nu = 3.072.$$

Este valor esperado es menor que el promedio de reclamos iniciales. \checkmark

5.15. Ejercicios

- 5.1 Si $u(A_1) = 12$ y $u(A_2) = 20$, encuentre $u(A)$ en el caso en que el consumidor tenga una posición neutral entre A_1 y la alternativa mixta $\mathcal{A}_q = (A, A_2, q)$, en la que él elige a A con probabilidad $q = 0.75$. Determine el orden de preferencia de la alternativa $(10, 25)$.
- 5.2 Un consumidor que enfrenta 4 alternativas, A_1, \dots, A_4 , mantiene una posición neutral entre A_2 y la alternativa mixta $\mathcal{A}_q = (A_1, A_3, q)$, y entre A_3 y la alternativa mixta $\mathcal{A}'_q = (A_1, A_4, q)$. Determine el orden de preferencia de los resultados, suponga que $u(A_1) = 7$, $u(A_2) = 14$ y que el consumidor con probabilidad $q = 0.6$ enfrenta a A_1 .
- 5.3 Considere un consumidor averso al riesgo cuyas preferencias se describen por una función de utilidad $u(x)$, para $0 \leq x \leq 100$. En la siguiente tabla se muestran algunos puntos de la función de utilidad:

| | | | |
|--------|------|------|------|
| x | 9 | 14 | 30 |
| $u(x)$ | 0.14 | 0.18 | 0.25 |

¿Cuáles de los siguientes valores pertenecen a la función de utilidad?

| | | | |
|--------|------|------|------|
| x | 5 | 22 | 40 |
| $u(x)$ | 0.09 | 0.20 | 0.22 |

- 5.4 Sea X la pérdida que enfrenta un agente decisor, la cual tiene un valor de 0 con probabilidad 0.7. Por un seguro de cubrimiento completo estaría dispuesto a pagar una cantidad \mathcal{P} . Si el agente decisor tiene una fortuna de 10 y sus preferencias se describen por una función de utilidad $u(x)$ con $u(0) = -1$ y $u(10) = 0$, dados los siguientes 3 valores de X y \mathcal{P} :

| | | | |
|---------------|----|---|---|
| X | 10 | 6 | 3 |
| \mathcal{P} | 6 | 3 | 1 |

determine los respectivos valores de la función $u(x)$.

- 5.5 Verifique las propiedades de la función de utilidad para la función:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1 - x^{-m}}{m}, & \text{si } m > 0, & (5.80) \\ \ln x, & \text{si } m = 0, & (5.81) \end{cases}$$

donde $x > 0$. Esta función representa 3 diferentes perfiles de riesgo: conservador ($m > 1$), moderado ($m = 1$) o agresivo ($0 < m < 1$).

5.6 Sea $u(x) = \alpha x + \beta$ con $\alpha > 0$. Muestre que

$$\mathbb{E}(X) > \mathbb{E}(Y) \quad \text{si y solo si} \quad \mathbb{E}[u(X)] > \mathbb{E}[u(Y)].$$

5.7 A un agente decisor cuyas preferencias se describen por la función de utilidad $u(x) = \sqrt{x}$ le dan a escoger 2 alternativas de inversión (en millones) con las siguientes características:

Tabla 5.7. Probabilidades asociadas a las ganancias

| Alternativa de inversión | $P(G_i = k)$ | | | |
|-----------------------------|--------------|---------|---------|----------|
| | $k = 1$ | $k = 4$ | $k = 9$ | $k = 16$ |
| 1 | 0.0 | 0.8 | 0.2 | 0.0 |
| 2 | 0.6 | 0.0 | 0.0 | 0.4 |

Fuente: elaboración propia.

Determine si el agente decisor tiene una posición neutral al escoger entre una u otra alternativa.

5.8 Suponga que un agente decisor desea invertir una cantidad c en un negocio y que el beneficio X que obtendrá es una variable aleatoria que tiene pdf exponencial con media 10. Encuentre el valor de c para que el agente decisor tenga una posición neutral entre realizar o no el negocio, si sus preferencias se describen por la función de utilidad:

- Exponencial con parámetro $\alpha = 2$.
- Dada en (5.16) con parámetros $a = 1/4$ y $b = 12$.

5.9 Considere un agente decisor con una fortuna de 8 que desea participar en un juego en el cual gana $2c$ con probabilidad q o pierde c con probabilidad $1 - q$. Para que el agente decisor sea indiferente entre participar o no en el juego, determine:

- El valor de q si sus preferencias se describen por la función de utilidad $u(x) = 2x - 7$.
- Cuánto debe apostar si sus preferencias se describen por la función de utilidad $u(x) = 2x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{54}$ y $q = 0.5$.

5.10 Un agente decisor cuyas preferencias se describen por la función de utilidad $u(x) = \sqrt{x}$ enfrenta 2 eventos fortuitos, X_1 y X_2 , que siguen pdf exponenciales con medias 2 y 4, respectivamente. ¿Cuál de los 2 eventos es preferible para el agente decisor?

- 5.11 A un agente decisor con una fortuna de 100 y cuyas preferencias se describen por la función de utilidad $u(x) = \sqrt{x}$ le dan a escoger 2 alternativas de inversión que incrementarán su fortuna en X_1 y X_2 , respectivamente. Si X_1 tiene pdf uniforme sobre el intervalo $(0, 100)$ y X_2 sigue una pdf gamma con parámetros 2 y 0.04, determine:
- La prima que pagaría para tener una posición neutral entre escoger una u otra alternativa, usando el principio de equivalencia.
 - ¿Cuál alternativa tiene mayor utilidad esperada?
- 5.12 Un agente decisor cuyas preferencias se describen por la función de utilidad $u(x) = x^2$ estaría dispuesto a pagar una prima de 4 para cubrir una pérdida X que tiene pdf uniforme sobre el intervalo $(0, 18)$. Si él mantiene una posición neutral entre asegurarse o no, determine su fortuna.
- 5.13 Un agente decisor cuyas preferencias se describen por la función de utilidad $u(x) = k \ln x$ tiene una fortuna de 10. Determine la prima máxima que pagaría el agente decisor, si la pérdida X que enfrenta sigue una pdf uniforme sobre el intervalo $I_\theta = (0, \theta)$ si
- $\theta = 1$.
 - $\theta = 4$.
- 5.14 Suponga que la fortuna del propietario de un inmueble es 25 y sus preferencias se describen mediante la función de utilidad $u(x) = \sqrt{x}$. La probabilidad de que el inmueble no sufra daño es 0.64. Las pérdidas siguen una pdf uniforme sobre el intervalo $(0, 9)$. Determine el porcentaje de recargo sobre la prima neta que él estaría dispuesto a pagar para asegurar el inmueble.
- 5.15 Considere un riesgo X que sigue una pdf $\Gamma(3, 1)$. Según el principio del valor esperado, la prima con cargos satisface que

$$H(\mathcal{P}) = \mathbb{E}[H(X)]$$

donde $H(x) = x^2$, $x > 0$. Determine el valor de \mathcal{P} .

- 5.16 Considere un agente decisor con fortuna ω y cuyas preferencias se describen por una función de utilidad de tipo exponencial con parámetro $\alpha = \ln(2)$. Un evento fortuito le causará una pérdida de 2 con probabilidad 0.2 y ninguna pérdida con probabilidad 0.8. Determine:

- a) El cargo sobre la prima pura que acepta el agente decisor bajo indiferencia al riesgo.
- b) El porcentaje de la prima pura que constituiría este cargo.
- 5.17 Suponga que una pérdida X sigue una pdf exponencial de parámetro $1/5$, las preferencias tanto del asegurado como del asegurador se describen mediante funciones de utilidad exponencial de parámetros $1/10$ y $1/20$, respectivamente. Encuentre el rango de valores de las correspondientes primas que satisface a ambos.
- 5.18 Considere que tanto las preferencias del asegurado como del asegurador se describen mediante la función de utilidad dada en (5.81), si ambos poseen una fortuna de 100. Determine:
- a) El cargo aproximado sobre el principio de equivalencia que aceptaría el agente decisor si está dispuesto a pagar una prima de 21 para cubrir una pérdida que tiene varianza 324.
- b) La prima de utilidad 0 que cobraría la entidad por aceptar una pérdida S con función de frecuencia $H_S(0) = H_S(20) = 0.5$.
- 5.19 Verifique si satisfacen todas las propiedades básicas de primas los principios del valor esperado, de la desviación estándar y de la varianza.
- 5.20 Suponga que un riesgo X sigue una pdf $\Gamma(4; 1/20)$ y que la prima $\mathcal{P} = 250$ fue calculada por el principio de Esscher con parámetro h . Determine el valor de h .
- 5.21 Suponga que en el ejercicio 5.15 se tiene que X sigue una pmf de Poisson con media 2. Encuentre la transformada de Esscher con parámetro $\ln(1.70)$.
- 5.22 Un plan dental de un grupo de consumidores tiene un deducible anual de 100 y reembolsa a un miembro de él todos sus gastos dentales que sobrepasen a 100, hasta un reembolso máximo de 1000. Suponga que el 25 % de los miembros tienen gastos menores de 100, el 5 % tienen gastos mayores a 1100 y los gastos del 70 % restante siguen una pdf uniforme entre 100 y 1100. Según el principio de Esscher con un parámetro de 0.0001, determine la prima individual.
- 5.23 Una cartera consta de 100 pólizas, de las cuales el 5 % de ellas incurren en un único reclamo durante el periodo de vigencia y las restantes no presentan ningún reclamo. El valor X del reclamo tiene pdf uniforme

sobre el intervalo $[0, 600]$. Según el principio de la prima ajustada y con un índice del riesgo de 1.2, determine la prima total de la cartera.

5.24 Determine la prima ajustada asociada a un riesgo X que sigue una pdf:

- Exponencial de parámetro 4, con índice de riesgo 3.0.
- Uniforme en el intervalo (2, 6), si el índice del riesgo es 1.5.

5.25 Determine para un riesgo X con pdf χ^2 de 2 grados de libertad:

- La prima mediante el principio de Esscher de parámetro $\frac{1}{3}$.
- El valor del índice de riesgo ρ , si la prima ajustada asociada al riesgo $3x + 2$ es 12.8.

5.26 Una compañía de seguros ofrece un plan de cubrimiento especial, el 95% de las pólizas no experimentan reclamo (pérdida) alguno durante el periodo de vigencia. Supóngase que máximo es posible un reclamo (pérdida) por año; $\frac{3}{4}$ de los reclamos (pérdidas) son por un valor (en millones) de 1 y $\frac{1}{4}$ son por un valor (en millones) de 2. La compañía cobra 190 000 como cargo por seguridad. Según el principio de la varianza, ¿cuál es el cargo relativo por seguridad?

5.27 La probabilidad de incendio en cierta edificación, en un periodo dado de tiempo, es 0.02. Si ocurre un incendio, el daño causado X de la edificación tiene pdf uniforme sobre el intervalo $[0, 24]$. La prima única con cargos es $1/3$. Según el principio de la desviación estándar, ¿cuál es el cargo relativo por seguridad?

5.28 Un grupo de clientes potenciales desea contratar un plan de seguros. La composición del grupo por género es de la siguiente manera:

Tabla 5.8. Estadísticas de los reclamos que se presentan en el grupo

| Género cliente | n | Reclamos (pérdidas) | |
|----------------|-----|---------------------|------------|
| | | Promedio | Desviación |
| Femenino | 50 | 40 | 18 |
| Masculino | 70 | 50 | 20 |

Fuente: elaboración propia.

Cada prima tiene un cargo relativo por seguridad de 10%. Determine la prima mediante el principio de la desviación estándar.

- 5.29 Suponga un cubrimiento con deducible eximido de 5 y una pérdida que sigue una pmf binomial negativa compuesta con media $\frac{3}{4}$ y varianza $\frac{20}{9}$. Determine el costo esperado por pérdida.

Capítulo
seis

Teoría de la ruina

El interés por una teoría “dinámica” del seguro dio origen a la *teoría de riesgo colectivo*. El inventor fue Ernst Filip Oskar Lundberg, quien, en 1903, en la Universidad de Uppsala, presentó las bases de este modelo. En 1909 se realizó la presentación de las bases de esta nueva teoría en el Congreso Internacional de Actuarios de Viena y a partir de ahí ha sido generalizada y perfeccionada por unos pocos actuarios de origen escandinavo, entre los años 30 y 50, quienes se enfocaron en analizar las *pmf* de la frecuencia y las *pdf* del monto de los reclamos, así como en la obtención de la *probabilidad de ruina eventual*.

En [132] Lundberg plantea una teoría usando procesos estocásticos en tiempo continuo unos 30 años antes de la definición de este concepto de forma rigurosa. Por esta razón y por la casualidad de que ambos fueron ignorados por sus contemporáneos, en [34] Borch lo compara con Bachelier. La terminología netamente actuarial que utilizó implicó que los matemáticos no acostumbrados a los seguros identificaran teoremas inéditos en su obra. Por mucho tiempo se esperó que los seguidores de Lundberg lograran mostrar un enfoque claro de sus hallazgos; sin embargo, solo Cramér y Segerdahl lo lograron.

El modelo propuesto por Lundberg es funcional y eficiente: bajo este enfoque no es esencial considerar cada póliza en la cartera para encontrar la *pdf* del monto total de los reclamos. Como se vio en el capítulo 3, esta distribución se establece a partir de la *pmf* de la frecuencia en un determinado periodo y de la *pdf* del monto de los reclamos efectuados en ese periodo (ambas pueden ser estimadas a partir de los datos históricos de las entidades). Su principal utilidad consiste en su naturaleza dinámica, en este modelo se incluye el factor tiempo.

Es respecto a este modelo que aparece el concepto de “probabilidad de ruina”, como medición del nivel de variabilidad de la solvencia de la aseguradora, la cual denota la probabilidad de que las reservas constituidas por la compañía no sean adecuadas para enfrentar las pérdidas derivadas de sus pólizas.

Sin embargo, los sorprendentes resultados alcanzados bajo este método no han tenido la utilidad que se deseaba, a pesar del amplio análisis de los principios del seguro que impulsó. Los múltiples cálculos obligatorios para establecer medidas de riesgo tales como la probabilidad de ruina, la máxima pérdida esperada, el establecimiento de contratos de reaseguros óptimos, entre otros mecanismos, aparecieron en una época en la que tampoco existía una tecnología básica para ejecutarlos. Los métodos de aproximación carecían en ese momento tanto de límites de confianza bien definidos como de supuestos verificables en su utilización. Por otra parte, el emplear un solo

número (como la probabilidad de ruina) no proporciona de manera completa, detallada y definitiva el real estado de la compañía, más aún si la estimación de los parámetros del modelo muestran gran sensibilidad respecto al uso de información histórica derivada de los registros de la compañía. Las ciencias físicas y la investigación de operaciones fueron más beneficiadas por estos hallazgos que la misma práctica actuarial.

Las referencias empleadas en la elaboración de este capítulo han sido principalmente [37], [181, cap. 4] y [182].

6.1. Evento de ruina

En esta sección, nos interesa construir un modelo para el proceso de excedentes con el propósito de determinar (medir en probabilidad) si las reservas en un tiempo t alcanzan un valor negativo condicionado por un nivel inicial de reservas $U(0)$.

El proceso de excedentes de la cartera en el tiempo t está dado por:

$$U(t) = \omega + P(t) - S(t), \quad t \geq 0, \quad (6.1)$$

donde $\omega = U(0)$ y denota el excedente inicial, y los procesos siguientes:

- $\{P(t)|t \geq 0\}$, que describe el comportamiento de las primas (netas de gastos) recaudadas hasta el tiempo t .
- $\{S(t)|t \geq 0\}$, que representa los reclamos pagados hasta el tiempo t , el cual fue dado en (3.40).

La representación de este proceso en tiempo discreto es

$$U_n = \omega + P_n - S_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6.2)$$

donde $\omega = U(0)$ y denota el excedente inicial, y:

- P_n son las primas recaudadas o ganadas, como más convenga.
- S_n son los reclamos pagados o incurridos, como sea apropiado.
- P_n puede depender de $S_{\tilde{n}}$, para $\tilde{n} < n$.

Definición 6.1. *La probabilidad de solvencia según el horizonte temporal y tipo de dominio de tiempo se define como sigue:*

1. *En horizonte infinito y tiempo continuo mediante*

$$\phi(\omega) := P\{U(t) \geq 0, \forall t \geq 0 | U(0) = \omega\}$$

2. En horizonte infinito y tiempo discreto como

$$\tilde{\phi}(\omega) := P\{U_n \geq 0, \forall n, n = 0, 1, \dots | U(0) = \omega\}$$

3. En horizonte finito $[0, \tau]$ y tiempo continuo usando

$$\phi(\omega, \tau) := P\{U(t) \geq 0, \forall t \geq 0 \text{ tal que } t \leq \tau | U(0) = \omega\}$$

4. En horizonte finito $t = 0, 1, \dots, \tau$ y tiempo discreto empleando

$$\tilde{\phi}(\omega, \tau) := P\{U_n \geq 0, \forall n, n = 0, 1, \dots, \tau | U(0) = \omega\}$$

En la siguiente tabla se resumen estas clases:

Tabla 6.1. Notación de las probabilidades de solvencia

| Horizonte \ Tiempo | Infinito | Finito |
|--------------------|---|---|
| Continuo | $\underbrace{P\{U(t) \geq 0, \forall t \geq 0\}}_{\phi(\omega)}$ | $\underbrace{P\{U(t) \geq 0, t \in [0, \tau]\}}_{\phi(\omega, \tau)}$ |
| Discreto | $\underbrace{P\{U_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}\}}_{\tilde{\phi}(\omega)}$ | $\underbrace{P\{U_n \geq 0, 0 \leq n \leq \tau\}}_{\tilde{\phi}(\omega, \tau)}$ |

Fuente: elaboración propia.

Definición 6.2. *El superávit (beneficio) es el excedente resultante por unidad económica después de deducir, del total de ingresos, los conceptos considerados como gastos. En otras palabras, se entiende por superávit, en el sentido contable, la diferencia entre la reserva inicial más las primas recaudadas y la parte pagada en reclamos; es decir, expresa las reservas en exceso que no se necesitan (para cumplir con los reclamos contractuales de las póliza-habientes) si la vigencia de la póliza terminara hoy.*

Para emplear el modelo propuesto en la expresión (6.1) y, en particular, el proceso (3.40), se necesita dar tanto valores numéricos a sus parámetros como valores iniciales a las variables por analizar. Su implementación, a partir de estadísticas y algunas experiencias previas, se realiza mediante métodos de estimación que no son tratados en este texto, los cuales son presentados, por ejemplo, en [20, cap. 6]. Las dificultades derivadas por el desconocimiento cierto de los parámetros deben ser, si no contempladas en el modelo explícitamente, sí consideradas como un factor subyacente de gran relevancia: no será suficiente aplicar técnicas muy avanzadas para lograr resultados precisos si los datos iniciales no son adecuados o eficientes. La

elección de los enfoques y aproximaciones consistentes con el problema por tratar es una labor cotidiana de la profesión actuarial.

La figura 6.1 ilustra esquemáticamente un resultado típico de este proceso de “excedentes” $\{U(t), t \geq 0\}$.

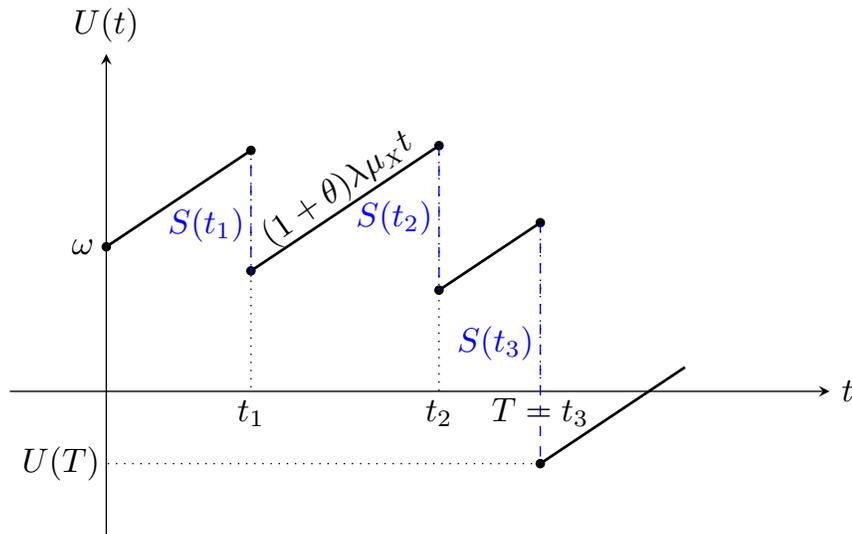


Figura 6.1. Un resultado típico del proceso de superávit
Fuente: elaboración propia, adaptada de [37, pág. 400].

6.1.1. Evento de ruina

Nótese que el proceso de excedentes $\{U(t), t \geq 0\}$, ilustrado en la figura 6.1, puede llegar a ser negativo en algunos periodos. En el momento en que esto acontece por primera vez, se dice que la ruina ocurrió. Esta expresión técnica no es análoga a insolvencia, puesto que, cuando todas las componentes son consideradas, es factible que el excedente sea positivo. Una medida útil para valorar el riesgo financiero relacionado con una entidad de seguros es encontrar la probabilidad de ruina para esta compañía. Se entenderá por ruina el evento en el cual el excedente toma un valor negativo. Sea

$$T_\omega = \text{mín} \{t | U(t) < 0\} \quad (6.3)$$

el tiempo en que ocurre la ruina. En el caso en que $U(t) > 0$, para toda t , la ruina nunca ocurre y se denota por $T_\omega = \infty$.

Cuando el proceso de excedentes sea en tiempo discreto

$$\tilde{T} = \text{mín} \{n : U_n < 0\} \quad (6.4)$$

denota el tiempo en que ocurre la ruina. En el caso en que $U_n > 0$, para toda n , la ruina nunca ocurre y se denota $\tilde{T} = \infty$.

6.1.2. Probabilidad de ruina antes del tiempo t

El comportamiento de la probabilidad de ruina, tanto en horizonte finito como en infinito, ha sido extensamente investigado no solamente por su interés práctico, sino también por la dificultad que involucra el cálculo explícito de las expresiones desarrolladas.

En la práctica, la mayoría de los aseguradores están preocupados por la ruina solo en un periodo largo, pero finito. Sea $\psi(\omega, t)$ la probabilidad de que $U(\cdot)$ tome un valor negativo antes del tiempo t , se tiene que

$$\psi(\omega, t) = P[T_\omega < t]$$

o también, despejando de (6.1), se tiene

$$\psi(\omega, t) = P \left\{ \max_{0 \leq \tau \leq t} [S(\tau) - P(\tau)] > \omega \right\}. \quad (6.5)$$

La probabilidad del evento complementario

$$\phi(\omega, t) = 1 - \psi(\omega, t),$$

es llamada *probabilidad de no ruina*, la cual se establece como

$$\phi(\omega, t) = P\{U_\tau > 0 | U(0) = \omega\} \quad 0 \leq \tau \leq t.$$

6.1.3. Probabilidad de ruina eventual

La probabilidad de que $U(t)$ sea negativo en algún instante, se denomina probabilidad de ruina eventual (horizonte infinito) y es una cota superior para $\psi(\omega, t)$:

$$\psi(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(\omega, t) \quad (6.6)$$

al tomar $t \rightarrow \infty$ en la expresión (6.5) se llega a

$$\psi(\omega) = P \left\{ \max_{0 \leq \tau \leq \infty} [S(\tau) - P(\tau)] > \omega \right\}. \quad (6.7)$$

La probabilidad del evento complementario será

$$\phi(\omega) = 1 - \psi(\omega). \quad (6.8)$$

Nótese que, si el capital inicial es infinito, entonces la probabilidad de ruina se define como 0; es decir,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \psi(\omega) = 0. \quad (6.9)$$

Cuando el proceso de excedentes se da en tiempo discreto, la probabilidad de que U_n tome un valor negativo antes del tiempo t se expresa como $\tilde{\psi}(\omega)$; es decir,

$$\tilde{\psi}(\omega) = P[\tau < \infty] \quad (6.10)$$

o también

$$\tilde{\psi}(\omega) = P\left\{\max_{0 \leq n \leq \infty} [S_n - cn] > \omega\right\}. \quad (6.11)$$

La probabilidad del evento complementario,

$$\tilde{\phi}(\omega) = 1 - \tilde{\psi}(\omega), \quad (6.12)$$

es llamada *probabilidad de no ruina*. Nótese que, si el capital inicial es infinito, entonces la probabilidad de ruina se define como 0; es decir,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tilde{\psi}(\omega) = 0. \quad (6.13)$$

6.2. Modelo de tiempo discreto

En esta sección, se presenta un modelo matemático de riesgo colectivo para las variaciones en el superávit obtenido en un periodo extenso de tiempo.

Definición 6.3. Si U_n denota el excedente al tiempo n , entonces $\{U_n | n \geq 0\}$ denotará el proceso de excedentes.

Considere que el tiempo $n = 0$ es el instante inicial en que se empieza a observar y analizar el proceso, $\omega = U_0$ es el superávit inicial (“condición inicial”). Supóngase que S_n dado en (6.2) denota la suma de todos los reclamos de los primeros n periodos:

$$S_n = \sum_{k=1}^n W_k = W_1 + W_2 + \cdots + W_n, \quad (6.14)$$

donde W_k es la suma de los reclamos en el k -ésimo periodo y W_1, W_2, \dots, W_n son variables aleatorias iid.

Si se supone que $S_n \sim PC(\lambda n)$ y que las primas son recaudadas en cada periodo bajo el principio del valor esperado, entonces

$$P_n = (1 + \theta)\mathbb{E}(S_n) = cn \quad \text{con} \quad c = (1 + \theta)\lambda\mathbb{E}[W]. \quad (6.15)$$

Es claro que $\mu_W = \mathbb{E}[W] < c$, donde la variable aleatoria W tiene la pdf común de las variables W_k . Es importante señalar que $c > \lambda\mu_W$, implica que

cualquier realización del proceso $\{U_n : n \in \mathbf{N}\}$ tendrá una tendencia que crece sin cota para $t \rightarrow \infty$, pero la pregunta es si lo hace sin tomar nunca un valor negativo. Por consiguiente, el excedente del asegurador en el tiempo n es

$$U_n = \omega + nc - S_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.16)$$

Nótese que (6.16) se puede expresar de la siguiente manera:

$$U_n = \omega + \sum_{k=1}^n (c - W_k) = \omega + \sum_{k=1}^n G_k, \quad (6.17)$$

donde G_k denota la ganancia del asegurador durante el intervalo de tiempo $(k-1, k]$, con $P[G_k < 0] > 0$, pero $\mathbb{E}[G_k] = c - \mu_W > 0$. El excedente (6.16) también se establece como sigue:

$$\begin{aligned} U_n &= \omega + (n-1)c - \sum_{k=1}^{n-1} W_k + c - W_n \\ &= U_{n-1} + c - W_n = U_{n-1} + G_n. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Si se reinvierte a una tasa de interés i el excedente, la última expresión queda

$$\widehat{U}_n = (1+i)U_{n-1} + G_n, \quad (6.19)$$

usándola de manera sucesiva, se tiene que

$$\widehat{U}_n = (1+i)^n \omega + \frac{(1+i)^n - 1}{i} c - \sum_{k=1}^n (1+i)^{n-k} W_k.$$

6.2.1. Expresiones explícitas para la probabilidad de ruina

En esta sección, se presentan 2 expresiones que permiten determinar las probabilidades de ruina para el modelo discreto. El lector que desee profundizar en este tema puede consultar [180].

6.2.1.1. Caminata aleatoria

Supóngase que en el proceso (6.16) la prima recaudada es $c = 1$, la cual se paga al comienzo de cada periodo y que ocurre como máximo un reclamo en el k -ésimo periodo de monto $X_k = I_k B_k$, donde $B_k = b$, $\forall k$ ($b \in \mathbb{Z}^+$). La sucesión I_1, I_2, \dots son variables aleatorias iid Bernoulli de parámetro q .

Teorema 6.1. *Sea $\omega \in \mathbb{Z}^+$ el excedente inicial. Entonces, la probabilidad de no ruina está dada por*

$$\tilde{\phi}(\omega) = (1 - bq) \sum_{k=0}^{\lceil \frac{\omega-1}{b} \rceil} \binom{-(\omega - bk)}{k} q^k p^{(b-1)k - \omega} \quad (6.20)$$

donde $\lceil x \rceil = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$ y b denota el reclamo total en el periodo.

Demostración. En este caso, la probabilidad de no ruina está dada por

$$\tilde{\phi}(\omega) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} P[\{I_n^* = 1\}] \tilde{\phi}(\omega + n - b), & \text{si } \omega > 0 \\ 0, & \text{si } \omega \leq 0. \end{cases}$$

donde $\{I_n^* = 1\}$ denota el evento (siniestro) ocurre hasta el n -ésimo periodo; es decir, $P(I_n^* = 1) = qp^{n-1}$. Sea $k = \omega + n - 1$; luego,

$$\tilde{\phi}(\omega) = qp^{-\omega} \sum_{k=\omega}^{\infty} p^k \tilde{\phi}(k + 1 - b). \quad (6.21)$$

Al determinar la función generadora de probabilidad de $\tilde{\phi}(\omega)$ se obtiene

$$\mathcal{G}(r) = \sum_{\omega=0}^{\infty} r^\omega \tilde{\phi}(\omega) = \tilde{\phi}(0) + \sum_{\omega=1}^{\infty} r^\omega \tilde{\phi}(\omega) \quad \text{con } 0 \leq r < 1, \quad (6.22)$$

pero, dado que $\tilde{\phi}(0) = 0$, sustituyendo (6.21), se llega a

$$\mathcal{G}(r) = q \sum_{\omega=1}^{\infty} r^\omega p^{-\omega} \sum_{k=\omega}^{\infty} p^k \tilde{\phi}(k + 1 - b) = q \sum_{k=1}^{\infty} p^k \tilde{\phi}(k + 1 - b) \sum_{\omega=1}^k \left(\frac{r}{p}\right)^\omega.$$

Puesto que $\sum_{\omega=1}^k \left(\frac{r}{p}\right)^\omega = \frac{r}{p-r} \left[1 - \left(\frac{r}{p}\right)^k\right]$ y dado que $\tilde{\phi}(\omega) = 0$ si $\omega \leq 0$, se tiene

$$\mathcal{G}(r) = \frac{qr}{p-r} \sum_{k=b}^{\infty} [p^k - r^k] \tilde{\phi}(k + 1 - b),$$

sea $z = k + 1 - b$, entonces

$$\mathcal{G}(r) = \frac{qr}{p-r} \sum_{z=1}^{\infty} [p^{z+b-1} - r^{z+b-1}] \tilde{\phi}(z) = \frac{qr}{p-r} [p^{b-1} \mathcal{G}(p) - r^{b-1} \mathcal{G}(r)].$$

Al despejar $\mathcal{G}(r)$, se obtiene que

$$\mathcal{G}(r) = \frac{qr}{p-r+qr^b} p^{b-1} \mathcal{G}(p). \quad (6.23)$$

Suponga que $\omega = 1$ en la expresión (6.21); luego,

$$\tilde{\phi}(1) = qp^{-1} \sum_{k=b}^{\infty} p^k \tilde{\phi}(k+1-b).$$

Usando de nuevo el cambio de variable $z = k+1-b$ y empleando (6.22), se tiene que

$$\tilde{\phi}(1) = qp^{b-2} \sum_{z=1}^{\infty} p^z \tilde{\phi}(z) = qp^{b-2} \mathcal{G}(p).$$

Este resultado coincide con la primera derivada de la expresión (6.23); es decir, $\tilde{\phi}(1) = \mathcal{G}'(r)|_{r=0}$. Sustituyendo en (6.23), se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(r) &= \sum_{z=1}^{\infty} r^z \tilde{\phi}(z) = \frac{pr}{p-r+qr^b} \tilde{\phi}(1) \\ &= r [1 - rp^{-1}(1 - qr^{b-1})]^{-1} \tilde{\phi}(1). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Suponga que $|r - qr^b| < p$, el coeficiente de $\tilde{\phi}(1)$ en la expresión (6.24) se establece usando la serie geométrica como sigue:

$$\begin{aligned} r \left[1 - \frac{r}{p}(1 - qr^{b-1}) \right]^{-1} &= r \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r}{p} \right)^j (1 - qr^{b-1})^j \\ &= r \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r}{p} \right)^j \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-qr^{b-1})^k. \end{aligned}$$

En esta expresión se empleó el binomio de Newton. Al intercambiar el orden de las sumatorias, tras algunas operaciones y simplificando se llega a

$$r \left[1 - \frac{r}{p}(1 - qr^{b-1}) \right]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} (-1)^k \binom{j}{k} p^{-j} q^k r^{j+(b-1)k+1}.$$

Al realizar el cambio de variable $\omega = j + (b-1)k + 1$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{pr}{p-r+qr^b} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\omega=kb+1}^{\infty} (-1)^k \binom{\omega-1-(b-1)k}{k} p^{1-\omega} (qp^{b-1})^k r^{\omega} \\ &= p \sum_{\omega=1}^{\infty} \left(\frac{r}{p} \right)^{\omega} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\omega-1}{b} \rfloor} (-1)^k \binom{\omega-1-(b-1)k}{k} (qp^{b-1})^k. \end{aligned}$$

Usando la expresión (B.3) y sustituyendo en (6.24), se llega a

$$\sum_{\omega=1}^{\infty} r^{\omega} \tilde{\phi}(\omega) = \sum_{\omega=1}^{\infty} r^{\omega} \frac{\tilde{\phi}(1)}{p^{\omega-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\omega-1}{b} \rfloor} \binom{bk-\omega}{k} (qp^{b-1})^k.$$

Por la unicidad de la función generadora de probabilidad, se tiene que

$$\tilde{\phi}(\omega) = \tilde{\phi}(1) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\omega-1}{b} \rfloor} \binom{k - \gamma(k) - 1}{k} q^k p^{-\gamma(k)}, \quad (6.25)$$

donde $\gamma(k) = \omega - 1 - (b - 1)k$. Nótese que esta expresión es similar a la [cdf](#) de la binomial negativa con parámetros p y $-\gamma(k)$. Luego,

$$\tilde{\phi}(\omega) = \tilde{\phi}(1) \left[p^{1-\omega} + p^{-\gamma(k)} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{\omega-1}{b} \rfloor} \frac{1}{k!} \prod_{m=0}^{k-1} [(\gamma(k) - m)q] \right] = \tilde{\phi}(1)H(\omega).$$

Este resultado es similar al dado en [\[42\]](#). Por otra parte, en [\[181\]](#), se establece que

$$\tilde{\phi}(1) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\phi}(\omega)}{H(\omega)} = \frac{1 - bq}{p}, \quad (6.26)$$

con $bq < 1$. Al reemplazar en [\(6.25\)](#) se obtiene [\(6.20\)](#). \square

6.2.1.2. Aproximación numérica

Al reescribir la expresión dada en [\(6.24\)](#) como

$$\mathcal{G}(r) = \frac{f(r)}{g(r)} \tilde{\phi}(1),$$

donde $f(r) = pr$ y $g(r)$ es la función polinómica en r

$$g(r) = p - (r - qr^b) = (1 - r) - q(1 - r^b), \quad (6.27)$$

y usando fracciones parciales al coeficiente de $\tilde{\phi}(1)$, se llega a

$$\mathcal{G}(r) = \frac{1 - bq}{p} \sum_{i=1}^b \frac{c_i}{r_i - r},$$

De acuerdo con la expresión [\(D.13\)](#), los coeficientes c_i están dados por

$$c_i = -\frac{f(r_i)}{g'(r_i)} = \frac{p r_i}{1 - b q r_i^{b-1}} = \frac{p r_i^2}{r_i - b q r_i^b}.$$

Como r_i es una raíz del polinomio [\(6.27\)](#), entonces

$$c_i = \frac{p r_i^2}{p b + (1 - b) r_i}, \quad i = 1, 2, \dots, b.$$

Por otra parte, por la expresión (1.30), se tiene que

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\omega) &= \frac{1}{\omega!} \mathcal{G}^{(\omega)}(r) \Big|_{r=0} = \frac{1-bq}{p} \sum_{i=1}^b \frac{c_i}{r_i^{\omega+1}} \\ &= \sum_{i=1}^b \frac{(1-bq) r_i^{-(\omega+1)}}{pb + (1-b)r_i}.\end{aligned}\quad (6.28)$$

Puesto que el polinomio (6.27) es de grado b , por la *regla de los signos de Descartes*, como máximo 2 raíces son reales y positivas, una de las cuales es $r_1 = 1$ y la otra $r_2 > 1$. Dado que el número de raíces negativas de este polinomio no es mayor que el número de cambios de signos en la expresión de $g(-r)$, entonces solo existe una única raíz negativa si b es impar y tanto su módulo como el módulo de todas las raíces imaginarias es más grande que $|r_2|$.

Por consiguiente, expandiendo la serie (6.28),

$$\tilde{\phi}(\omega) \approx 1 + \frac{(1-bq) r_2^{-(\omega+1)}}{pb + (1-b)r_2}, \quad (6.29)$$

donde r_2 es la raíz real positiva más grande de (6.27).

Ejemplo 6.1. [181, pág. 102]

Sean $b = 9$ y $q = 0.1$, determine $\tilde{\phi}(\omega)$ para $\omega = 10, 20, 30, \dots$

Solución. Como b es impar, las raíces reales de $g(r)$ son $r = \{-1.41801065, 1, 1.02612161\}$. En la siguiente tabla se comparan los resultados de la probabilidad de no ruina mediante las expresiones (6.20) y (6.29):

Tabla 6.2. Comparaciones de la probabilidad de no ruina

| ω | $\tilde{\phi}(\omega)^a$ | $\tilde{\phi}(\omega)^b$ | ω | $\tilde{\phi}(\omega)^a$ | $\tilde{\phi}(\omega)^b$ |
|----------|--------------------------|--------------------------|----------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 0.111111 | 0.082341 | 70 | 0.845132 | 0.845132 |
| 10 | 0.274452 | 0.272401 | 80 | 0.880333 | 0.880333 |
| 20 | 0.437621 | 0.437783 | 90 | 0.907533 | 0.907533 |
| 30 | 0.565582 | 0.565575 | 100 | 0.928551 | 0.928551 |
| 40 | 0.664319 | 0.664319 | 110 | 0.944791 | 0.944791 |
| 50 | 0.740619 | 0.740619 | 120 | 0.957340 | 0.957340 |
| 60 | 0.799576 | 0.799576 | 130 | 0.967037 | 0.967037 |

^aUsando la expresión dada en (6.20).

^bUsando la expresión dada en (6.29).

Fuente: adaptada de [181, pág. 103-104].

Los valores numéricos coinciden con los valores exactos para $\omega \geq 30$. Nótese que a medida que crece ω se tiene que $\tilde{\phi}(\omega) \rightarrow 1$. \checkmark

6.2.2. Coeficiente de ajuste para el modelo de tiempo discreto

Debido a las dificultades mostradas anteriormente para calcular en forma exacta las probabilidades de ruina, gran parte de las investigaciones se han dedicado a la obtención de aproximaciones prácticas.

Ejemplo 6.2. Sea $G = \sum_{k=1}^n G_k$, donde G_k denota la ganancia del asegurador. Determine la función generadora de momentos.

Solución. Dado que las variables G_1, G_2, \dots son **iid**, entonces

$$M_G(-r) = e^{-c nr} M_{\sum_{k=1}^n W_k}(r) = e^{-c nr} [M_W(r)]^n. \quad (6.30)$$

donde $c = (1 + \theta)\mu_W$. Pero, como $\mathbb{E}[G] > 0$ y $P[G < 0] > 0$, se tiene que

$$M'_G(0) > 0 \quad \text{y} \quad M''_G(-r) = \mathbb{E}[G^2 e^{-Gr}] > 0.$$

Puesto que $M_G(0) = 1$ y $M_G(-r) \rightarrow \infty$ para $r \rightarrow \infty$, entonces $M_G(-r)$ es una función convexa. \checkmark

La más sencilla y conocida de las desigualdades para la probabilidad eventual de ruina es

$$\tilde{\psi}(\omega) \leq e^{-\tilde{R}\omega}, \quad (6.31)$$

donde \tilde{R} es llamado el coeficiente de ajuste (o coeficiente de Lundberg) y es la única raíz positiva de la ecuación

$$\begin{aligned} M_{S_n - c n}(r) &= e^{-c nr} M_{S_n}(r) \\ &= e^{-c nr} [M_W(r)]^n = 1 \end{aligned} \quad (6.32)$$

Al tomar logaritmo natural a ambos lados se obtiene

$$\ln [M_W(r)] - c r = 0. \quad (6.33)$$

Ejemplo 6.3. [37, pág. 402]

Determine el coeficiente de ajuste cuando la distribución del monto de los reclamos W_i es normal con parámetros μ_W y σ_W^2 .

Solución. Usando la expresión (1.118) se tiene que

$$M_W(r) = \exp \left\{ \mu_W r + \frac{1}{2} \sigma_W^2 r^2 \right\}.$$

Al sustituir en la ecuación (6.33), se obtiene que

$$\mu_W r + \frac{1}{2} \sigma_W^2 r^2 = c r.$$

Luego, para $r \neq 0$, el coeficiente de ajuste es

$$\tilde{R} = 2 \frac{c - \mu_W}{\sigma_W^2} \quad \text{con} \quad c > \mu_W. \quad (6.34)$$

En este caso, el coeficiente de ajuste es el doble del valor esperado de la ganancia anual dividido por su varianza. \square

Ejemplo 6.4. Determine el coeficiente de ajuste cuando la distribución del monto de los reclamos W_i es exponencial con parámetro β .

Solución. Usando la expresión (1.114) se tiene que

$$M_W(r) = \frac{\beta}{\beta - r} \quad \text{con} \quad \frac{r}{\beta} < 1.$$

Al sustituir en la ecuación (6.33), se obtiene que

$$c r = \ln \left(\frac{\beta}{\beta - r} \right) = -\ln \left(\frac{\beta - r}{\beta} \right) = -\ln \left(1 - \frac{r}{\beta} \right).$$

Empleando la serie de Taylor dada en (B.15), para $r \neq 0$, se tiene que

$$c r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{r}{\beta} \right)^k,$$

considerando solo los 2 primeros términos, el coeficiente de ajuste es

$$\tilde{R} \approx 2 \frac{c - 1/\beta}{1/\beta^2}, \quad (6.35)$$

donde $c > \frac{1}{\beta}$. \square

Existe una relación intrínseca entre el coeficiente de ajuste y la probabilidad de ruina dada en el siguiente teorema:

Teorema 6.2. *La probabilidad de ruina para $\omega \geq 0$ satisface*

$$\tilde{\psi}(\omega) = \frac{e^{-\tilde{R}\omega}}{\mathbb{E}\left[e^{-\tilde{R}U_{\tilde{T}}}\mathbb{1}_{\{\tilde{T} < \infty\}}\right]}, \quad (6.36)$$

donde \tilde{R} es el coeficiente de ajuste (ver expresión (6.33)).

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [82, cap. 9]. \square

Como $U_{\tilde{T}} < 0$ por definición, se sigue que

$$\tilde{\psi}(\omega) \leq e^{-\tilde{R}\omega}. \quad (6.37)$$

6.2.3. Aproximaciones del coeficiente de ajuste

A continuación, se presentan algunos métodos para determinar la solución de la ecuación (6.33) cuando no se pueda resolver explícitamente.

1. Solución por series de potencia

Para utilizar series de potencias, se emplea la expresión dada para la función generadora de momentos en (1.34) y el desarrollo de Taylor dado en (B.14). Se tiene

$$\ln [M_W(r)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} r^j \mu'_j(W) \right]^{k+1}.$$

Como $\mu'_1(W) = \mu_W$ y $\mu'_2(W) - \mu_W^2 = \sigma_W^2$, al agrupar los términos en las potencias de r , se obtiene

$$\begin{aligned} \ln [M_W(r)] = & \mu_W r + \sigma_W^2 \frac{r^2}{2!} + (\mu'_3(W) - 3\mu_W \mu'_2(W) + 2\mu_W^3) \frac{r^3}{3!} \\ & + \text{términos en } r^k, \end{aligned} \quad (6.38)$$

para $k \geq 4$; al reemplazar los 2 primeros términos de (6.38) en la ecuación (6.33), se tiene

$$\mu_W r + \sigma_W^2 \frac{r^2}{2!} \approx c r.$$

Al factorizar

$$\left[\mu_W + \sigma_W^2 \frac{r}{2} \right] r \approx c r \quad \Rightarrow_{r \neq 0} \quad \tilde{R} \approx 2 \frac{c - \mu_W}{\sigma_W^2}. \quad (6.39)$$

Al emplear los 3 primeros términos de (6.38), se llega a

$$\mu_W r + \sigma_W^2 \frac{r^2}{2!} + \mu_3(W) \frac{r^3}{3!} \approx c r,$$

donde $\mu_3(W)$ es el tercer momento central, al simplificar

$$\alpha_3 \sigma_W^3 r^2 + 3 \sigma_W^2 r - 6(c - \mu_W) \approx 0.$$

Aquí, α_3 denota el coeficiente de asimetría. Cuando $\alpha_3 \neq 0$, las soluciones de esta ecuación cuadrática son

$$\tilde{R} \approx \left[\sqrt{1 + 2 \left(2 \frac{c - \mu_W}{\sigma_W^2} \right) \left(\frac{2}{3} \alpha_3 \sigma_W \right)} - 1 \right] \left(\frac{2}{3} \alpha_3 \sigma_W \right)^{-1}. \quad (6.40)$$

La otra cota no es válida por ser negativa.

2. Solución numérica

Para utilizar el método de Newton-Raphson, se define

$$f(r) = \ln [M_W(r)] - c r.$$

Derivando respecto a r , se obtiene

$$f'(r) = \frac{M'_W(r)}{M_W(r)} - c.$$

Por lo tanto,

$$r_{n+1} = r_n - \frac{\ln [M_W(r_n)] - c r_n}{M'_W(r_n) - c M_W(r_n)} M_W(r_n), \quad r_n \neq 0. \quad (6.41)$$

Aquí, se utiliza como valor inicial la cota superior $r = 2 \frac{c - \mu_W}{\sigma_W^2}$ obtenida en (6.39).

Nota 6.1. Si S tiene distribución compuesta y $c = (1 + \theta) \mu_S$, entonces al remplazar en (6.39), las expresiones dadas en (3.19) y (3.20) se obtiene

$$\tilde{R} \approx \frac{2 \theta \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(N) \text{Var}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \text{Var}(N)} = \frac{2 \theta}{I_X + \mathbb{E}(X) I_N} \quad (6.42)$$

donde I indica el índice de dispersión.

Ejemplo 6.5. [37, pág. 404]

Determine el valor aproximado de \tilde{R} cuando:

a) N sigue una pmf de Poisson con parámetro λ .

b) N sigue una *pmf* binomial negativa con parámetros r y p .

Solución.

a) Si $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, entonces $\mathbb{E}(N) = \text{Var}(N) = \lambda$. Luego, $I_N = 1$ y (6.42) se reduce a

$$\tilde{R} \approx \frac{2\theta \mathbb{E}(X)}{\text{Var}(X) + (\mathbb{E}(X))^2} \approx 2 \frac{\mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(X^2)} \theta. \quad (6.43)$$

En este caso, $\tilde{R} = R$.

b) Si $N \sim \text{BN}(r, p)$, entonces $\mathbb{E}(N) = r \frac{q}{p}$ y $\text{Var}(N) = \frac{1}{p} \mathbb{E}(N)$. Luego, $I_N = \frac{1}{p}$ y la expresión (6.42) se reduce a

$$\tilde{R} \approx \frac{2\theta \mathbb{E}(X)}{\text{Var}(X) + \frac{1}{p} (\mathbb{E}(X))^2} \approx \frac{2\theta \mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(X^2) + \left(\frac{1}{p} - 1\right) (\mathbb{E}(X))^2}. \quad (6.44)$$

Nótese que, si $p \rightarrow 1$, se obtiene el resultado dado en (6.43). \square

En muchos casos, no se satisface el supuesto de independencia entre los montos de los reclamos de diferentes periodos. Con el fin de ver esto en la siguiente sección se considera un modelo autorregresivo para los montos de los reclamos, el cual generaliza el modelo tratado en esta sección y permite la correlación entre los reclamos de periodos sucesivos.

6.2.3.1. Modelo autorregresivo de primer orden

Suponga que la suma de los reclamos del i -ésimo periodo W_i , está relacionada con la suma de los reclamos del periodo inmediatamente anterior W_{i-1} mediante la ecuación lineal de autorregresión:

$$W_i = qW_{i-1} + X_i \quad i = 1, 2, \dots, \quad (6.45)$$

donde $|q| < 1$ se denomina coeficiente de autocorrelación y X_i es independiente de W_{i-j} para todo j positivo y X_1, X_2, \dots son variables aleatorias iid con $\mathbb{E}[X] < (1 - q)c$.

De acuerdo con [37, pág. 405], el modelo (6.45) satisface las propiedades principales del proceso autorregresivo de primer orden (AR(1)):

1. Si el valor inicial $W_0 = \zeta$, al iterar sucesivamente la ecuación (6.45), se tiene

$$\begin{aligned} W_1 &= q\zeta + X_1 \\ W_2 &= qW_1 + X_2 = q(q\zeta + X_1) + X_2 = q^2\zeta + qX_1 + X_2 \\ &\vdots \\ W_k &= qW_{k-1} + X_k = q^k\zeta + q^{k-1}X_1 + q^{k-2}X_2 + \cdots + qX_{k-1} + X_k. \end{aligned}$$

Luego,

$$W_k = q^k \zeta + \sum_{j=1}^k q^{k-j} X_j \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.46)$$

2. *Función de medias.* Como W_{i-1} y X_i son independientes, al tomar esperanzas, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_k] &= q^k \zeta + \sum_{j=1}^k q^{k-j} \mathbb{E}[X_j] = q^k \zeta + \mathbb{E}[X] \sum_{j=1}^k q^{k-j} \\ &= q^k \zeta + \frac{1 - q^k}{1 - q} \mathbb{E}[X] \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.47)$$

y el proceso solo puede ser estacionario si $|q| < 1$. Entonces, después de un periodo transitorio inicial, cuando $k \rightarrow \infty$, $q^k \rightarrow 0$, todas las variables W_k tendrán la misma esperanza:

$$\mathbb{E}[W_k] = \frac{1}{1 - q} \mathbb{E}[X] \quad k = 1, 2, \dots;$$

es decir, el proceso alcanzará la estabilidad independiente de las condiciones iniciales.

3. *Función de varianzas.* Como W_{i-1} y X_i son independientes, entonces

$$\begin{aligned} \text{Var}[W_k] &= \sum_{j=1}^k q^{2(k-j)} \text{Var}[X_j] = \text{Var}[X] \sum_{j=1}^k q^{2(k-j)} \\ &= \frac{1 - q^{2k}}{1 - q^2} \text{Var}[X] \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.48)$$

cuando $k \rightarrow \infty$, $q^{2k} \rightarrow 0$; luego, la expresión anterior queda

$$\text{Var}[W_k] = \frac{1}{1 - q^2} \text{Var}[X] \quad k = 1, 2, \dots$$

aquí $|q| < 1$ es necesario para que $\text{Var}[W_k]$ sea finita y positiva.

Usando (6.46) los reclamos totales en los primeros n periodos son

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n W_k = \sum_{k=1}^n \left[q^k \zeta + \sum_{j=1}^k q^{k-j} X_j \right] = \zeta \sum_{k=1}^n q^k + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k q^{k-j} X_j \\
&= \zeta \sum_{k=1}^n q^k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n q^{k-j} X_j = \zeta q \sum_{k=0}^{n-1} q^k + \sum_{j=1}^n X_j \sum_{l=0}^{n-j} q^l \\
&= q \frac{1-q^n}{1-q} \zeta + \sum_{j=1}^n \frac{1-q^{n-j+1}}{1-q} X_j \\
&= \frac{1}{1-q} \left[q(1-q^n) \zeta + \sum_{j=1}^n (1-q^{n-j+1}) X_j \right]. \tag{6.49}
\end{aligned}$$

Al reagrupar términos, y empleando (6.46), se llega a

$$S_n = \frac{1}{1-q} \left[q(\zeta - W_n) + \sum_{j=1}^n X_j \right]. \tag{6.50}$$

Usando (6.47), se establece el valor esperado de S_n :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n] &= \frac{1}{1-q} \left[q(\zeta - \mathbb{E}[W_n]) + \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[X_j] \right] \\
&= \frac{1}{1-q} \left[q(1-q^n) \left(\zeta - \frac{\mathbb{E}(X)}{1-q} \right) + n\mathbb{E}(X) \right]. \tag{6.51}
\end{aligned}$$

Y la función generadora de momentos de S_n , usando la expresión (6.49), está dada por

$$\begin{aligned}
M_{S_n}(r) &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ r^* \left(q(1-q^n) \zeta + \sum_{j=1}^n (1-q^{n-j+1}) X_j \right) \right\} \right] \\
&= \exp \{ r^* q(1-q^n) \zeta \} \mathbb{E} \left[\exp \left\{ r^* \sum_{j=1}^n (1-q^{n-j+1}) X_j \right\} \right] \\
&= \exp \{ r^* q(1-q^n) \zeta \} \prod_{j=1}^n \{ M_{X_j}(r^*) \}^{1-q^{n-j+1}} \\
&= \exp \{ r^* q(1-q^n) \zeta \} [M_X(r^*)]_{j=1}^{\sum_{j=1}^n (1-q^{n-j+1})} \\
&= [M_X(r^*)]^n [e^{-\zeta r} M_X(r^*)]^{-q \frac{1-q^n}{1-q}},
\end{aligned}$$

donde $r^* = \frac{r}{1-q}$. Este modelo generaliza y extiende el modelo anterior, el cual corresponde al caso particular $q = 0$. Al reemplazar en (6.32), se obtiene

$$\left[e^{-cr} M_X(r^*) \right]^n \left[e^{-\zeta r} M_X(r^*) \right]^{-q \frac{1-q^n}{1-q}} = 1.$$

Al tomar logaritmo natural a ambos lados, se tiene

$$\begin{aligned} n [cr - \ln(M_X(r^*))] &= q \frac{1-q^n}{1-q} [r\zeta - \ln(M_X(r^*))] \\ cr - \ln[M_X(r^*)] &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q^k [r\zeta - \ln(M_X(r^*))], \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$, el término del lado derecho tiende a 0 y, en este caso, el coeficiente de ajuste \tilde{R} se obtiene como la solución positiva de la ecuación

$$(1-q)cr^* - \ln[M_X(r^*)] = 0.$$

Ahora \tilde{R} depende de la pdf común de las X_i y de los valores de q y c .

En este caso, el excedente U_n del asegurador definido en (6.16) y \tilde{T} , el tiempo de la ruina dado por (6.4), llevan a que la probabilidad de ruina

$$\tilde{\psi}(\omega, \zeta) = P\{\tilde{T} < \infty\} \quad (6.52)$$

es ahora una función de 2 variables.

El siguiente teorema generaliza al teorema 6.2:

Teorema 6.3. *La probabilidad de ruina para $\omega \geq 0$ satisface*

$$\tilde{\psi}(\omega, \zeta) = \frac{\exp\{-\tilde{R} \cdot \hat{w}\}}{\mathbb{E}\left[\exp\{-\tilde{R} \cdot \hat{U}_{\tilde{T}}\} \mid \tilde{T} < \infty\right]}. \quad (6.53)$$

Demostración. Los detalles son similares a la prueba del teorema 6.2. \square

Bajo la siguiente notación (ver [172])

$$\hat{U}_n = U_n - \frac{q}{1-q} W_n \quad \text{y} \quad \hat{w} = \hat{U}_0, \quad (6.54)$$

donde \hat{U}_n es el excedente U_n ajustado por todos los reclamos futuros relacionados con W_n .

El siguiente cálculo brinda una fórmula de recursión simple para el excedente modificado:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{U_k - \frac{q}{1-q}W_k}_{\widehat{U}_k} &= U_{k-1} + c - W_k - \frac{q}{1-q}W_k \\
 \widehat{U}_k &= U_{k-1} + c - \frac{1}{1-q}W_k \\
 &= U_{k-1} + c - \frac{1}{1-q}(qW_{k-1} + X_k) \\
 &= \widehat{U}_{k-1} + c - \frac{1}{1-q}X_k \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.55)
 \end{aligned}$$

Corolario 6.3.1. Si $0 \leq q < 1$, se sigue que $\widehat{U}_{\bar{T}} \leq U_{\bar{T}} < 0$. En este caso, el denominador de (6.53) es mayor que 1 y así se consigue un límite superior simplificado para la probabilidad de ruina:

$$\tilde{\psi}(\omega, \zeta) < \exp\{-\bar{R} \cdot \widehat{\omega}\}, \quad (6.56)$$

la cual es una generalización de (6.37).

6.3. Modelo de tiempo continuo

En esta sección se examina un modelo que puede ser considerado análogo, en tiempo continuo, al modelo desarrollado en las secciones precedentes.

Supóngase que $S(t) \sim PC(\lambda t)$ es el reclamo total hasta el tiempo t y que las primas son recaudadas continuamente en cada periodo bajo el principio del valor esperado. Entonces,

$$P(t) = (1 + \theta)\mathbb{E}[S(t)] = ct \quad \text{con} \quad c = (1 + \theta)\lambda\mathbb{E}[W]. \quad (6.57)$$

Sea $U(t)$ el excedente del asegurador en el tiempo t . Si $U(0) = \omega$ es el excedente inicial en el tiempo 0, entonces, como resultado de operaciones pasadas,

$$U(t) = \omega + ct - S(t), \quad 0 \leq t < \infty. \quad (6.58)$$

Por otra parte, a partir de las expresiones (3.45) y (3.46), se tiene que

$$\mathbb{E}[U(t)] = \omega + \theta\lambda t\mu_w \quad \text{y} \quad \text{Var}[U(t)] = \lambda t\mu'_2(W). \quad (6.59)$$

Nótese que en el modelo (6.58) se ignora el interés y los factores distintos a las primas y a los reclamos que podrían afectar al excedente. Por ejemplo, se ignoran los gastos y los dividendos de los suscriptores de pólizas o de los accionistas, y los gastos y recargos asociados con flujo de dinero.

6.3.1. Probabilidad de ruina eventual

La probabilidad de ruina eventual (horizonte infinito) es más fácil de calcular matemáticamente y la literatura es principalmente abundante sobre este tema.

Para valores fijos de τ y t con $0 < \tau < \tau + t$, los procesos de excedentes en cada uno de estos instantes están dados por la expresión (6.58):

$$U(\tau) = \omega + c\tau - S(\tau) \quad \text{y} \quad U(\tau + t) = \omega + c(\tau + t) - S(\tau + t).$$

Restando estas expresiones, se tiene

$$U(\tau + t) - U(\tau) = ct - [S(\tau + t) - S(\tau)] = ct - \sum_{j=N(\tau)+1}^{N(\tau+t)} X_j. \quad (6.60)$$

Esta expresión corresponde al excedente en el intervalo $(\tau, \tau + t)$.

6.3.1.1. Ruina eventual con reclamos constantes

En este apartado se analiza el caso en que todas las sumas de los reclamos totales son iguales a b . Sea $S(t)$ como en (3.40) y considérese un intervalo infinitesimal $I = (\tau, \tau + d\tau)$; luego, hay 4 posibles escenarios (ver [49]):

- i) Ningún reclamo ocurre en I .
- ii) Un reclamo ocurre en I , pero el monto de la severidad no causa la ruina.
- iii) Un reclamo ocurre en I y el monto de la severidad causa la ruina.
- iv) Dos o más reclamos ocurren en I .

Dado que $\{N(\tau), \tau \geq 0\}$ es un proceso Poisson homogéneo, las probabilidades anteriores se establecen mediante (2.50). Por otra parte, la probabilidad de que el reclamo ocurrido en el tiempo $\tau + d\tau$ sea tal que el monto de su severidad cause la ruina es igual al producto de las probabilidades de los eventos independientes:

- a) Ningún reclamo ocurre en $(0, \tau]$ que produzca la ruina; es decir, $P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$.
- b) Un reclamo ocurre en I y el monto de la severidad causa la ruina; esto es, $P_1(\tau, \tau + d\tau) = \lambda d\tau$.

Luego, la probabilidad está dada por $\lambda e^{-\lambda\tau} d\tau$ y la interpretación analítica es que, bajo el supuesto de un proceso Poisson homogéneo, la pdf de los tiempos transcurridos entre reclamos sucesivos es exponencial.

Teorema 6.4. Si $\omega \geq 0$, entonces la probabilidad de no ruina se establece como

$$\phi(\omega) = \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\omega}{b} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\omega/b - k}{1+\theta} \right)^k \exp \left\{ \frac{\omega/b - k}{1+\theta} \right\}, \quad (6.61)$$

donde $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$ y b denota el promedio de los reclamos totales.

Demostración. La probabilidad de no ruina se establece como

$$\phi(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} \phi(\omega + c\tau - b) \lambda d\tau, \quad \omega \geq 0$$

donde la prima recaudada (6.57) se reescribe como $c = (1 + \theta)\lambda b = \lambda b + \alpha$.

Al hacer el cambio de variable $z = \omega + c\tau$ se obtiene

$$\frac{c}{\lambda} \phi(\omega) = \int_{\omega}^{\infty} e^{-\lambda \frac{z-\omega}{c}} \phi(z - b) dz = e^{\frac{\lambda}{c}\omega} \int_{\omega}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{c}z} \phi(z - b) dz. \quad (6.62)$$

Al derivar respecto a ω se tiene

$$\frac{c}{\lambda} \phi'(\omega) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}\omega} \int_{\omega}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{c}z} \phi(z - b) dz - \phi(\omega - b) = \phi(\omega) - \phi(\omega - b).$$

Dividiendo ambos lados por b se tiene

$$(1 + \theta) \phi'(\omega) = \frac{\phi(\omega) - \phi(\omega - b)}{b}.$$

Al aplicar transformada de Laplace a ambos lados, se llega a

$$\begin{aligned} c \mathcal{L}\{\phi'(\omega)\} &= \lambda [\mathcal{L}\{\phi(\omega)\} - \mathcal{L}\{\phi(\omega - b)\}] \\ c [r \mathcal{L}\{\phi(\omega)\} - \phi(0)] &= \lambda [1 - e^{-rb}] \mathcal{L}\{\phi(\omega)\}. \end{aligned}$$

Al despejar $\mathcal{L}\{\phi(\omega)\}$, se tiene

$$\mathcal{L}\{\phi(\omega)\} = \frac{c}{cr - \lambda + \lambda e^{-br}} \phi(0). \quad (6.63)$$

Al considerar $\omega = 0$ en la expresión (6.62), se tiene

$$\phi(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{c}z} \phi(z - b) dz = \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}b} \mathcal{L}_{\phi} \left(\frac{\lambda}{c} \right) = e^{-\frac{\lambda}{c}b} \phi(b). \quad (6.64)$$

Al reescribir la expresión (6.63),

$$\mathcal{L}\{\phi(\omega)\} = \frac{c}{cr - \lambda} \left[1 + \frac{\lambda e^{-br}}{cr - \lambda} \right]^{-1} \phi(0). \quad (6.65)$$

Nótese que el denominador de la expresión anterior es 0 cuando $r = \frac{\lambda}{c}$. Supóngase que $\frac{\lambda e^{-br}}{\lambda - cr} < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{\lambda e^{-br}}{\lambda - cr} \right]^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda e^{-br}}{\lambda - cr} \right)^k \frac{\Gamma(k+1)}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda e^{-br}}{cr - \lambda} \right)^k \int_0^{\infty} x^k e^{-x} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^k e^{-kbr} \int_0^{\infty} \left(\frac{cx}{cr - \lambda} \right)^k e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Al hacer el cambio de variable $z = \frac{cx}{cr - \lambda}$, se obtiene

$$\left[1 - \frac{\lambda e^{-br}}{\lambda - cr} \right]^{-1} = \frac{cr - \lambda}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^k \int_0^{\infty} e^{-rz} z^k e^{\frac{\lambda}{c} z} dz,$$

la integral del lado derecho es la transformada de Laplace de la función

$$g(z) = z^k e^{\frac{\lambda}{c} z}. \quad (6.66)$$

Al sustituir en (6.65), se obtiene

$$\mathcal{L}\{\phi(\omega)\} = \phi(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^k e^{-kbr} \mathcal{L}_g(r).$$

Aplicando transformada inversa de Laplace en ambos lados, se llega a

$$\phi(\omega) = \phi(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^k g(\omega - kb) \mathcal{H}(\omega - kb),$$

donde $\mathcal{H}(\cdot)$ es la función de Heaviside dada en (3.5). Luego,

$$\phi(\omega) = \phi(0) e^{\frac{\lambda}{c}\omega} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\omega}{b} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{c} b e^{-\frac{\lambda}{c}b} \right)^k \left(\frac{\omega}{b} - k \right)^k, \quad \omega > 0. \quad (6.67)$$

En [181], se establece que

$$\phi(0) = \frac{c - \lambda b}{c} = \frac{\theta}{1 + \theta}. \quad (6.68)$$

Al reemplazar en (6.67) y sustituir el valor de c se obtiene (6.61). \square

La expresión (6.61) coincide con el resultado de [184, pág. 88].

Ejemplo 6.6. [181, pág. 95]

Determine $\phi(\omega)$ para el ejemplo 6.1, con $\theta = 1/9$ y $b = 9$.

Solución. En la siguiente tabla se presentan los resultados de la probabilidad de no ruina mediante la expresión (6.67):

Tabla 6.3. Probabilidad de no ruina usando (6.67)

| ω | $\phi(\omega)$ | ω | $\phi(\omega)$ |
|----------|----------------|----------|----------------|
| 0 | 0.100000 | 60 | 0.765431 |
| 10 | 0.260776 | 70 | 0.813657 |
| 20 | 0.410890 | 80 | 0.851968 |
| 30 | 0.532099 | 90 | 0.882403 |
| 40 | 0.628305 | 100 | 0.906580 |
| 50 | 0.704723 | 110 | 0.925787 |

Fuente: adaptada de [181, pág. 96].

Nótese que a medida que ω aumenta la $\phi(\omega) \rightarrow 1$. ☑

6.3.1.2. Ruina eventual con reclamos aleatorios

En esta sección se analiza el caso general. Como se mencionó antes la probabilidad de ruina eventual es más fácil de calcular matemáticamente.

Teorema 6.5. Si $\omega \geq 0$ y $f_w(x)$ es la pdf de los reclamos individuales, entonces la probabilidad de no ruina eventual se establece como

$$\phi(\omega) = \alpha \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{cr - \lambda + \lambda \mathcal{L}_f(r)} \right\}, \tag{6.69}$$

donde $\alpha = c - \lambda \mu_w$ y la función polinómica en r del denominador,

$$cr = \lambda [1 - \mathcal{L}_f(r)], \tag{6.70}$$

se denomina ecuación “fundamental” de Lundberg cuando $r = -R$.

Demostración. La probabilidad de no ruina se puede establecer como

$$\phi(\omega) = P\{\omega + G(t) > 0, \forall t > 0\}, \tag{6.71}$$

donde $G(t) = P(t) - S(t)$ denota la ganancia hasta el tiempo t . Supóngase que $S(t) \sim PC(\lambda t)$ y que la prima $P(t)$ es dada por (6.57). Puesto que el proceso Poisson homogéneo es un proceso de renovación (ver [72]), si en la expresión (6.60) se toma $t = d\tau$ y T_1 denota el primer tiempo de renovación

después de τ , y dado que no puede ocurrir la ruina en el intervalo $(0, T_1)$, se tiene que

$$\phi(\omega) = \int_0^{\infty} P\{\omega + G(t) > 0, \forall t | T_1 = \tau\} \lambda e^{-\lambda \tau} d\tau$$

Otra condición implícita es el monto del reclamo ocurrido en T_1 , digamos X_1 , esto implica que para todo t

$$P\{\omega + G(t) > 0 | T_1 = \tau\} = \int_0^{\infty} P\{\omega + G(t) > 0 | X_1 = y, T_1 = \tau\} f_W(y) dy.$$

El proceso $U(t)$ dado en (6.58) se renueva inmediatamente después de un tiempo τ preservando el nuevo capital inicial $\omega + c\tau - y$, dado $T_1 = \tau$, $X_1 = y$. Por lo tanto,

$$\phi(\omega + c\tau - y) = P\{\omega + G(t) > 0, \forall t | X_1 = y, T_1 = \tau\}.$$

Puesto que $\phi(z) = 0$ para $z < 0$, entonces (ver [87, p. 216])

$$\phi(\omega) = \mathbb{E}[\phi(\omega + cT_1 - X_1)] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \tau} \left(\int_0^{\omega + c\tau} \phi(\omega + c\tau - y) f_W(y) dy \right) \lambda d\tau.$$

Al hacer el cambio de variable $z = \omega + c\tau$, el lado derecho queda

$$\phi(\omega) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}\omega} \int_{\omega}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{c}z} \left(\int_0^z \phi(z - y) f_W(y) dy \right) dz. \quad (6.72)$$

Al derivar respecto a ω , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(\omega) &= \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}\omega} \int_{\omega}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{c}z} \left(\int_0^z \phi(z - y) f_W(y) dy \right) dz \\ &\quad - \int_0^{\omega} \phi(\omega - y) f_W(y) dy. \end{aligned}$$

Nótese que la primera integral del lado derecho de esta última expresión corresponde a (6.72); luego,

$$\frac{c}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(\omega) = \phi(\omega) - \int_0^{\omega} \phi(\omega - y) f_W(y) dy \quad (6.73)$$

y, al aplicar transformada de Laplace, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(\omega) \right\} &= \mathcal{L} \{ \phi(\omega) \} - \mathcal{L} \left\{ \int_0^{\omega} \phi(\omega - y) f_W(y) dy \right\} \\ \frac{c}{\lambda} [r \mathcal{L} \{ \phi(\omega) \} - \phi(0)] &= [1 - \mathcal{L}_f(r)] \mathcal{L} \{ \phi(\omega) \}, \end{aligned}$$

al despejar $\mathcal{L}\{\phi(\omega)\}$, se obtiene

$$\mathcal{L}\{\phi(\omega)\} = \frac{c \phi(0)}{c r - \lambda + \lambda \mathcal{L}_f(r)}. \quad (6.74)$$

Por otra parte, el lado derecho de (6.73) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \phi(\omega) - \int_0^\omega \phi(\omega - y) f_W(y) dy &= \phi(\omega) + \int_0^\omega \phi(\omega - y) d[\bar{F}_W(y)] \\ &= \phi(\omega) + \phi(\omega - y) \bar{F}_W(y) \Big|_0^\omega + \int_0^\omega \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(\omega - y) \bar{F}_W(y) dy \\ &= \phi(\omega) + \phi(0) \bar{F}_W(\omega) - \phi(\omega) + \int_0^\omega \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(\omega - y) \bar{F}_W(y) dy \end{aligned}$$

donde $\bar{F}_W(y) = [1 - F_W(y)]$. Agrupando términos, se obtiene

$$\phi(\omega) - \int_0^\omega \phi(\omega - y) f_W(y) dy = \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^\omega \phi(\omega - y) \bar{F}_W(y) dy.$$

Al sustituir en (6.73), se llega a la ecuación integro diferencial

$$\frac{c}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(\omega) = \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^\omega \phi(\omega - y) \bar{F}_W(y) dy. \quad (6.75)$$

La expresión (6.75) coincide con la expresión dada en [10], la cual se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left[\phi(\omega) - \frac{\lambda}{c} \int_0^\omega \phi(\omega - y) \bar{F}_W(y) dy \right] = 0.$$

Puesto que la derivada de una constante es 0, entonces

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= k + \frac{\lambda}{c} \int_0^\omega \phi(\omega - y) \bar{F}_W(y) dy \\ &= \phi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^\omega \phi(\omega - y) \bar{F}_W(y) dy. \end{aligned} \quad (6.76)$$

La constante de integración fue determinada tomando en esta expresión $\omega \rightarrow 0$. Nótese que la transformada de Laplace de la ecuación de renovación dada en (6.76) coincide con (6.74). Si se hace $\omega \rightarrow \infty$ en (6.76) se llega a

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi(\omega) = \phi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \bar{F}_W(y) dy = \phi(0) + \frac{\lambda}{c} \mu_W.$$

Puesto que $\phi(\infty) = 1$ entonces la probabilidad de ruina sin reserva inicial es

$$\phi(0) = \frac{\alpha}{c} = \frac{\theta}{1 + \theta}. \quad (6.77)$$

Al sustituir este valor en la ecuación (6.74) y usando transformada inversa de Laplace se obtiene lo que se quería demostrar. \square

Ejemplo 6.7. [162, pág. 373]

Encuentre la probabilidad de no ruina eventual cuando la *pdf* del monto de los reclamos es exponencial con parámetro β .

Solución. En este caso,

$$\mathcal{L}_f(r) = M_W(-r) = \frac{\beta}{\beta - (-r)} = \frac{\beta}{\beta + r}. \quad (6.78)$$

Como $\mu_W = \beta^{-1}$, entonces la expresión (6.74) queda

$$\mathcal{L}\{\phi(\omega)\} = \frac{(1 + \theta)\lambda\phi(0)}{(1 + \theta)\lambda r - \lambda\beta + \frac{\beta^2}{\beta+r}\lambda} = \frac{(1 + \theta)(\beta + r)\phi(0)}{r[(1 + \theta)(\beta + r) - \beta]}.$$

Aplicando fracciones parciales al coeficiente de $\phi(0)$, se llega a

$$\mathcal{L}\{\phi(\omega)\} = \phi(0) \sum_{i=1}^2 \frac{c_i}{r_i - r}.$$

Aquí, las constantes c_i son determinadas usando la expresión (D.13),

$$c_i = -\frac{f(r_i)}{g'(r_i)} = -\frac{\beta + r_i}{2r_i + \beta\phi(0)},$$

donde r_i es una de las raíces de la ecuación (6.70). Luego,

$$r_1 = 0 \quad \text{o} \quad r_2 = -\beta\phi(0),$$

donde $\phi(0)$ es dado en (6.77). Por lo tanto, se llega a

$$\mathcal{L}\{\phi(\omega)\} = \frac{1}{r} - \frac{1 - \phi(0)}{r + \beta\phi(0)}.$$

Al aplicar transformada inversa de Laplace, se obtiene

$$\phi(\omega) = 1 - \frac{1}{1 + \theta} \exp\left\{-\frac{\theta\beta}{1 + \theta}\omega\right\}. \quad (6.79)$$

Esta fórmula coincide con la obtenida en [23, pág. 189].

Ejemplo 6.8. [173, pág. 455]

Sea el recargo por seguridad igual a θ y $f_W(x)$ dada por

$$f_W(x) = p\gamma e^{-\gamma x} + q\beta e^{-\beta x}, \quad x > 0, \quad (6.80)$$

donde $p + q = 1$. Encuentre la probabilidad de no ruina eventual.

Solución. En este caso,

$$\mathcal{L}_f(r) = M_W(-r) = \left[\frac{p\gamma}{\gamma - (-r)} + \frac{q\beta}{\beta - (-r)} \right] = \frac{\beta\gamma + (p\gamma + q\beta)r}{(\gamma + r)(\beta + r)}. \quad (6.81)$$

Puesto que $\alpha = \theta \lambda \mu_W$, la expresión (6.74) queda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\phi(\omega)\} &= \frac{\theta \lambda \mu_W}{\frac{p\beta + q\gamma}{\beta\gamma} (1 + \theta) \lambda r - \lambda + \frac{\beta\gamma + (p\gamma + q\beta)r}{(\gamma + r)(\beta + r)} \lambda} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\theta(r + \gamma)(r + \beta)(p\beta + q\gamma)}{r r (p\beta (r + \beta) + q\gamma(r + \gamma)) + \theta (r + \beta) (r + \gamma)(p\beta + q\gamma)} \end{aligned}$$

y factorizando el denominador para aplicar fracciones parciales se llega a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\phi(\omega)\} &= \frac{1}{r} \frac{(r + \gamma)(r + \beta)\phi(0)}{r^2 + \left(\frac{p\beta^2 + q\gamma^2}{p\beta + q\gamma} + \frac{\beta\gamma\phi(0)}{p\beta + q\gamma} \right) r + \gamma\beta\phi(0)} \\ &= \frac{1}{r} - \frac{1 - \phi(0)}{r^2 + \left(\frac{p\beta^2 + q\gamma^2}{p\beta + q\gamma} + \frac{\beta\gamma\phi(0)}{p\beta + q\gamma} \right) r + \gamma\beta\phi(0)} \left[r + \frac{p\beta^2 + q\gamma^2}{p\beta + q\gamma} \right], \end{aligned}$$

donde $\phi(0)$ es dado en (6.77). Las raíces del polinomio cuadrático del denominador son

$$r_k = \frac{\beta\gamma(1 + \theta)^{-1}}{2(p\beta + q\gamma)} - \frac{\beta + \gamma}{2} - (-1)^k \sqrt{\left[\frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\beta\gamma(1 + \theta)^{-1}}{2(p\beta + q\gamma)} \right]^2 - \frac{\beta\gamma\theta}{1 + \theta}}, \quad (6.82)$$

para $k = 1, 2$, y las constantes c_k son determinadas con la expresión (D.13):

$$c_1 = \frac{(1 + \theta)^{-1}}{r_2 - r_1} \left(\frac{\beta\gamma\phi(0)}{p\beta + q\gamma} + r_2 \right) \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{(1 + \theta)^{-1}}{r_1 - r_2} \left(\frac{\beta\gamma\phi(0)}{p\beta + q\gamma} + r_1 \right). \quad (6.83)$$

Usando fracciones parciales, se llega a

$$\mathcal{L}\{\phi(\omega)\} = \frac{1}{r} - \frac{c_1}{r - r_1} - \frac{c_2}{r - r_2}$$

y al aplicar transformada inversa de Laplace, se obtiene

$$\phi(\omega) = 1 - c_1 e^{r_1 \omega} - c_2 e^{r_2 \omega}. \quad (6.84)$$

Nótese que $\phi(0) = 1 - (c_1 + c_2) = 1 - (1 + \theta)^{-1}$. Cuando $\gamma = \beta$ se obtiene que $c_2 = 0$ y esta última expresión coincide con (6.79). \square

Ejemplo 6.9. [123, pág. 107]

Sean $\theta = \frac{2}{5}$ y $f_W(x)$ dada por

$$f_W(x) = \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{7}{2}e^{-7x}, \quad x > 0.$$

Encuentre la probabilidad de no ruina eventual.

Solución. Siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior, se tiene que

$$\mathcal{L}_f(r) = M_W(-r) = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{3 - (-r)} + \frac{7}{7 - (-r)} \right] = \frac{21 + 5r}{(3 + r)(7 + r)}. \quad (6.85)$$

Puesto que $\alpha = \theta \lambda$ $\mu_W = \frac{2}{21}\lambda$, la expresión (6.74) queda

$$\mathcal{L}\{\phi(\omega)\} = \frac{\frac{2}{21}\lambda}{\frac{5}{21}(1 + \theta)\lambda r - \lambda + \frac{21 + 5r}{(3 + r)(7 + r)}\lambda} = \frac{2}{7} \frac{(3 + r)(7 + r)}{r(1 + r)(6 + r)}.$$

Al emplear fracciones parciales, se llega a

$$\mathcal{L}\{\phi(\omega)\} = \frac{1}{r} - \frac{24}{35} \frac{1}{r + 1} - \frac{1}{35} \frac{1}{r + 6}.$$

Finalmente, al aplicar transformada inversa de Laplace, se obtiene que

$$\phi(\omega) = 1 - \frac{24}{35}e^{-\omega} - \frac{1}{35}e^{-6\omega}. \quad (6.86)$$

Nótese que $\phi(0) = \frac{\theta}{1 + \theta}$. ☑

6.3.1.3. Método de aproximación

Al reescribir la expresión (6.74), se tiene que

$$\mathcal{L}\{\phi(\omega)\} = \frac{\alpha}{cr - \lambda} \left[1 + \frac{\lambda \mathcal{L}_f(r)}{cr - \lambda} \right]^{-1}. \quad (6.87)$$

Nótese que el denominador de la expresión anterior es cero cuando $r = \frac{\lambda}{c}$.

Supóngase que $\frac{\lambda \mathcal{L}_f(r)}{cr - \lambda} < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{\lambda \mathcal{L}_f(r)}{cr - \lambda} \right]^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\lambda \mathcal{L}_f(r)}{cr - \lambda} \right)^k \frac{\Gamma(k + 1)}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda \mathcal{L}_f(r)}{cr - \lambda} \right)^k \int_0^{\infty} x^k e^{-x} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{c} \mathcal{L}_f(r) \right)^k \int_0^{\infty} \left(\frac{cx}{cr - \lambda} \right)^k e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Al hacer el cambio de variable $z = \frac{cx}{cr-\lambda}$, se obtiene

$$\left[1 + \frac{\lambda \mathcal{L}_f(r)}{cr - \lambda}\right]^{-1} = \frac{cr - \lambda}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{c}\right)^k [\mathcal{L}_f(r)]^k \int_0^{\infty} e^{-rz} z^k e^{\frac{\lambda}{c}z} dz.$$

La última integral otra vez corresponde a la transformada de Laplace de la función dada en (6.66).

Al sustituir en (6.87), se obtiene

$$\mathcal{L}\{\phi(\omega)\} = \phi(0) \left[\frac{c}{cr - \lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{c}\right)^k [\mathcal{L}_f(r)]^k \mathcal{L}_g(r) \right].$$

Por la propiedad de convolución de la transformada de Laplace (ver (D.10)),

$$[\mathcal{L}_f(r)]^k = \left[\int_0^{\infty} e^{-ry} d[F_w(y)] \right]^k = \int_0^{\infty} e^{-ry} d[F_w^{*k}(y)].$$

Luego, al tomar a ambos lados transformada inversa de Laplace y empleando la propiedad de convolución, se llega a

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \phi(0)e^{\frac{\lambda}{c}\omega} + \phi(0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{c}\right)^k \int_0^{\omega} (\omega - y)^k e^{\frac{\lambda}{c}(\omega-y)} d[F_w^{*k}(y)] \\ &= \phi(0)e^{\frac{\lambda}{c}\omega} + \phi_k(\omega) \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.88)$$

Ejemplo 6.10. Encuentre la probabilidad de no ruina eventual usando la expresión (6.88) y empleando la información del ejemplo 6.7.

Solución. Del ejemplo 3.5 se tiene que para $k \geq 1$

$$F_w^{*k}(y) = 1 - e^{-\beta y} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\beta y)^j}{j!} \quad y \quad \frac{d}{dy} [F_w^{*k}(y)] = \frac{\beta^k}{\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-\beta y}.$$

Al sustituir en $\phi_k(\omega)$ dada en (6.88), se obtiene

$$\begin{aligned} \phi_k(\omega) &= \phi(0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{c}\right)^k \int_0^{\omega} (\omega - y)^k e^{\frac{\lambda}{c}(\omega-y)} \frac{\beta^k}{\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-\beta y} dy \\ &= \phi(0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k)} \left(\frac{\lambda}{c} \beta\right)^k e^{\frac{\lambda}{c}\omega} \int_0^{\omega} (\omega - y)^k y^{k-1} e^{-(\frac{\lambda}{c} + \beta)y} dy. \end{aligned}$$

Sea $\omega z = \omega - y$, entonces

$$\phi_k(\omega) = \phi(0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k)} \left[\frac{\lambda}{c} \beta \omega^2 \right]^k e^{-\beta \omega} \int_0^1 z^k (1 - z)^{k-1} e^{(\frac{\lambda}{c} + \beta)\omega z} dz.$$

Usando los momentos ordinarios de orden m de una variable aleatoria *beta*; es decir, $Z \sim \text{Beta}(k+1, k)$, y por la expresión (1.112) se tiene que

$$\mathbb{E}(Z^m) = \int_0^1 \frac{z^{m+k}(1-z)^{k-1}}{B(k+1, k)} dz = \frac{B(k+m+1, k)}{B(k+1, k)} = \frac{(k+1)_m}{(2k+1)_m}.$$

Luego, empleando la serie de Taylor de la función exponencial

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{\nu z} z^k (1-z)^{k-1} dz &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\nu^m}{m!} \int_0^1 z^{m+k} (1-z)^{k-1} dz \\ &= B(k+1, k) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k+1)_m}{(2k+1)_m} \frac{\nu^m}{m!} \\ &= B(k+1, k) {}_1F_1(k+1; 2k+1; \nu), \end{aligned}$$

donde ${}_1F_1(a; b; \nu)$ denota la función hipergeométrica de Gauss (ver expresión (B.25)). Al sustituir en (6.88) se llega a

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \phi(0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-\beta\omega}}{\Gamma(2k+1)} \left[\frac{\lambda}{c} \beta \omega^2 \right]^k {}_1F_1 \left[k+1; 2k+1; \left(\frac{\lambda}{c} + \beta \right) \omega \right] \\ &\quad + \phi(0) e^{\frac{\lambda}{c}\omega}. \end{aligned} \quad \square$$

Una fórmula más accesible —dada a continuación— es presentada en [23]. Este método es estudiado en [37] y en este libro se aborda en la sección 6.5.

Teorema 6.6. Fórmula de convolución de Beekman

Si $\omega \geq 0$, entonces la probabilidad de no ruina se establece como

$$\phi(\omega) = \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (1+\theta)^{-n} H_W^{*n}(\omega), \quad (6.89)$$

donde $H_W^{*n}(\omega)$ denota la n -ésima convolución de la *cdf* integrada (ver (1.127)):

$$H_W(\omega) = \frac{1}{\mu_W} \int_0^{\omega} [1 - F_W(y)] dy.$$

Demostración. De acuerdo con [23] la función $\phi(\cdot)$ satisface (6.76). Luego,

$$\phi(\omega) = \phi_0 + \rho \int_0^{\omega} \phi(\omega - y_1) d[H_W(y_1)],$$

donde $\phi_0 = \phi(0)$ y $\rho = 1 - \phi_0$. Al sustituir $\phi(\omega - y_1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \phi_0 + \rho \int_0^{\omega} \left\{ \phi_0 + \rho \int_0^{\omega - y_1} \phi(\omega - y_1 - y_2) d[H_W(y_2)] \right\} d[H_W(y_1)] \\ &= \phi_0 + \phi_0 \rho \int_0^{\omega} d[H_W(y_1)] \\ &\quad + \rho^2 \int_0^{\omega} \int_0^{\omega - y_1} \phi(\omega - y_1 - y_2) d[H_W(y_2)] d[H_W(y_1)]. \end{aligned}$$

Usándola de manera sucesiva, se llega a

$$\begin{aligned} \phi(\omega) = & \phi_0 \left\{ 1 + \rho H_W(\omega) + \rho^2 \int_0^\omega \left[\int_0^{\omega-y_1} d[H_W(y_2)] \right] d[H_W(y_1)] + \dots \right\} \\ & + \phi_0 \rho^n \int_0^\omega \int_0^{\omega-y_1} \dots \int_0^{\omega-\sum_{k=1}^{n-1} y_k} d[H_W(y_n)] \dots d[H_W(y_2)] d[H_W(y_1)] \\ & + \rho^{n+1} \int_0^\omega \dots \int_0^{\omega-\sum_{k=1}^n y_k} \phi\left(\omega - \sum_{k=1}^{n+1} y_k\right) d[H_W(y_{n+1})] \dots d[H_W(y_1)]. \end{aligned}$$

Por propiedades de la convolución y considerando que $\phi(z) = 0$ para $z < 0$ y $H_W^{*k}(0) = 0$ para $k > 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(\omega) = & \phi_0 [1 + \rho H_W(\omega) + \rho^2 H_W^{*2}(\omega) + \dots + \rho^n H_W^{*n}(\omega) + \dots] \\ = & \phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n H_W^{*n}(\omega). \end{aligned}$$

Reemplazando ρ se obtiene que la solución analítica de la ecuación (6.76) tiene la forma (6.89). \checkmark

Nótese que la fórmula (6.89) es similar a la expresión (3.44); sin embargo, a pesar de que parece ofrecer un cálculo directo de $\psi(\omega)$, en la práctica su evaluación es extremadamente difícil excepto en los casos en que la pdf del monto de los reclamos es exponencial o una mezcla de exponenciales. Cuando $H_X(x)$ está totalmente determinada, $\psi(\omega)$ se obtiene usando métodos de integración numérica a partir de $H_X^{*n}(\omega)$.

Ejemplo 6.11. [181, pág. 125]

Encuentre la probabilidad de no ruina eventual usando la fórmula (6.89) si la pdf del monto de los reclamos es exponencial con parámetro β .

Solución. Usando la expresión (1.127) de la cdf de cola integrada de X se tiene

$$H_X(\omega) = \beta \int_0^\omega e^{-\beta x} dx = 1 - e^{-\beta\omega}.$$

Del ejemplo 3.5 se tiene que para $n \geq 1$

$$H_X^{*n}(\omega) = 1 - e^{-\beta\omega} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta\omega)^j}{j!}.$$

Al sustituir en la fórmula dada en (6.89), se obtiene

$$\begin{aligned}
 \phi(\omega) &= \frac{\theta}{1+\theta} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1+\theta)^{-n} \left[1 - e^{-\beta\omega} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta\omega)^j}{j!} \right] \right\} \\
 &= \frac{\theta}{1+\theta} \left[1 + \frac{1}{\theta} - e^{-\beta\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} (1+\theta)^{-n} \frac{(\beta\omega)^j}{j!} \right] \\
 &= 1 - \frac{\theta}{1+\theta} e^{-\beta\omega} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta\omega)^j}{j!} \sum_{n=j+1}^{\infty} (1+\theta)^{-n} \\
 &= 1 - \frac{\theta}{1+\theta} e^{-\beta\omega} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta\omega)^j (1+\theta)^{-j}}{j! \theta} \\
 &= 1 - \frac{1}{1+\theta} \exp \left\{ -\beta\omega + \frac{\beta\omega}{1+\theta} \right\} \\
 &= 1 - \frac{1}{1+\theta} \exp \left\{ -\frac{\theta\beta}{1+\theta} \omega \right\},
 \end{aligned}$$

la cual coincide con la expresión (6.79). ☑

6.3.2. Coeficiente de ajuste para el modelo de tiempo continuo

Debido a las dificultades para determinar en forma exacta las probabilidades de ruina, gran parte de las investigaciones se han dedicado a la obtención de aproximaciones prácticas. La más sencilla y conocida de las aproximaciones para la probabilidad de ruina eventual es

$$\psi(\omega) \approx e^{-R\omega}, \quad (6.90)$$

donde R es llamado el coeficiente de ajuste (o coeficiente de Lundberg) y es la única raíz positiva de la ecuación:

$$\begin{aligned}
 M_{S(t)-ct}(r) &= e^{-rct} M_{S(t)}(r) = e^{-rct} M_{N_t} [\ln(M_W(r))] \\
 &= e^{-rct} \exp\{\lambda t [M_W(r) - 1]\} = 1.
 \end{aligned} \quad (6.91)$$

Aquí se usó la expresión (3.47). Al tomar logaritmo natural a ambos lados, se obtiene la ecuación fundamental de Lundberg:

$$cr = \lambda [M_W(r) - 1], \quad \text{con} \quad c = (1 + \theta) \lambda \mu_W. \quad (6.92)$$

Esta última expresión coincide con la ecuación (6.70) cambiando r por $-r$. Al sustituir el valor de c y cancelar λ , se obtiene

$$(1 + \theta)\mu_w r = M_w(r) - 1. \quad (6.93)$$

Esta ecuación tiene al menos 2 raíces reales, una de las cuales es $r = 0$.

Proposición 6.1. *La ecuación (6.92) tiene una posible solución $r > 0$ si y solo si, se satisface que*

$$\int_0^{\infty} e^{ry} \bar{F}_w(y) dy = \frac{c}{\lambda}, \quad (6.94)$$

donde $\bar{F}_w(y) = 1 - F_w(y)$ y en la que a su vez $F_w(y)$ es la *cdf* de los reclamos.

Demostración. La función generadora de momentos de W está dada por

$$\begin{aligned} M_w(r) &= \int_0^{\infty} e^{ry} f_w(y) dy = - \int_0^{\infty} e^{ry} d[1 - F_w(y)] \\ &= 1 + r \int_0^{\infty} e^{ry} [1 - F_w(y)] dy. \end{aligned}$$

Al sustituir en la expresión (6.93) se tiene

$$\begin{aligned} \underbrace{\lambda [M_w(r) - 1] - cr}_0 &= \lambda r \int_0^{\infty} e^{ry} [1 - F_w(y)] dy - cr \\ &= r \left[\lambda \int_0^{\infty} e^{ry} [1 - F_w(y)] dy - c \right]. \end{aligned}$$

Despejando la integral se obtiene la prueba del resultado. \square

Sea $(-\infty, \gamma)$ el intervalo en el que existe la función generadora de momentos común de las variables W_i . Suponga $\gamma > 0$ y que $M_w(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \gamma$ (esto no siempre se cumple cuando γ es finito; por ejemplo, una distribución concentrada en $x > 1$ con *pdf* proporcional a $x^{-2}e^{-x}$).

El lado izquierdo de (6.93) es una función lineal de r , mientras que, $M_w(r)$ es una función creciente que tiende a infinito cuando $r \rightarrow \gamma$. Además, $M_w''(r) > 0$ así que $M_w(r)$ es una función convexa.

El supuesto $c > \lambda \mu_w$ ($\theta > 0$), significa que la pendiente $(1 + \theta)\mu_w$ es mayor que la pendiente $M_w'(r) = \mu_w$, para $r = 0$. En general, el coeficiente de ajuste es una función creciente del recargo relativo por seguridad θ , esto puede verse en la figura 6.2. Cuando θ incrementa, la pendiente de la línea recta que pasa por el punto $(0, 1)$ también incrementa, de manera que, el punto de intersección de la línea y la curva se mueve hacia arriba y a la derecha.

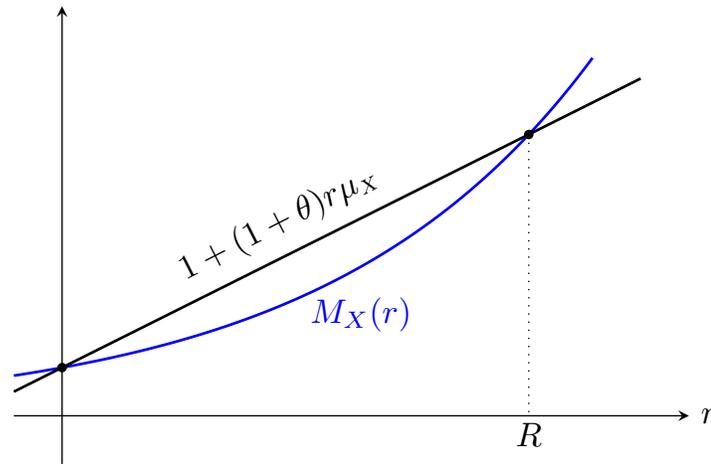


Figura 6.2. Definición de R
Fuente: adaptada de [37, pág. 410].

Ejemplo 6.12. [37, pág. 411]

Si W sigue la *pdf* dada en el ejemplo 6.7, determine el coeficiente de ajuste.

Solución. Para la distribución exponencial se tiene que

$$\mathbb{E}[W] = \frac{1}{\beta} \quad \text{y} \quad M_w(r) = \frac{\beta}{\beta - r}.$$

Al sustituir en la ecuación (6.93), se tiene que

$$(1 + \theta)r \frac{1}{\beta} = \frac{\beta}{\beta - r} - 1$$

simplificando, se llega a

$$r[(1 + \theta)r - \theta\beta] = 0.$$

Luego, el coeficiente de ajuste es $R = \frac{\theta}{1 + \theta} \beta$. ☑

Ejemplo 6.13. [82, pág. 118]

Si W sigue la *pdf* dada en el ejemplo 6.8, determine el coeficiente de ajuste.

Solución. Para esta mixtura de exponenciales se tiene que

$$\mathbb{E}[W] = \frac{p}{\gamma} + \frac{q}{\beta} \quad \text{y} \quad M_w(r) = \frac{p\gamma}{\gamma - r} + \frac{q\beta}{\beta - r}.$$

Al sustituir en la ecuación (6.93), se tiene que

$$(1 + \theta)r \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{q}{\beta} \right) = \frac{p\gamma}{\gamma - r} + \frac{q\beta}{\beta - r} - 1.$$

Simplificando, se llega a

$$(1 + \theta)r \left[(p\beta + q\gamma)r^2 - \left(p\beta^2 + q\gamma^2 + \frac{\theta\beta\gamma}{1 + \theta} \right)r + (p\beta + q\gamma) \frac{\theta\beta\gamma}{1 + \theta} \right] = 0.$$

Las raíces del polinomio cuadrático son

$$r = \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\beta\gamma(1 + \theta)^{-1}}{2(p\beta + q\gamma)} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\beta\gamma(1 + \theta)^{-1}}{2(p\beta + q\gamma)} \right)^2 - \frac{\theta\beta\gamma}{1 + \theta}}.$$

En este caso, el coeficiente de ajuste es la raíz positiva más pequeña. Cuando $\gamma = \beta$ se obtiene el coeficiente de ajuste del ejemplo 6.12. \checkmark

6.3.3. Determinación del coeficiente de ajuste

Ahora se presentan algunos métodos para determinar la solución de la ecuación (6.93) cuando no se pueda resolver explícitamente.

1. Solución por series de potencia

Para utilizar series de potencias, se emplea la expresión dada para la función generadora de momentos en (1.34) y, al reemplazarla en la ecuación (6.93), se tiene

$$(1 + \theta)\mu_W r = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \mu'_k(W).$$

Empleando los primeros términos del desarrollo de la serie, se llega a

$$(1 + \theta)r \mu_W > r \mu_W + \frac{r^2}{2!} \mu'_2(W).$$

Al simplificar,

$$\theta r \mu_W > \frac{r^2}{2!} \mu'_2(W) \quad \Rightarrow_{r \neq 0} \quad R < \frac{2\theta \mu_W}{\mu'_2(W)}. \quad (6.95)$$

Usando los 4 primeros términos del desarrollo de la serie, se llega a

$$(1 + \theta)r \mu_W > r \mu_W + \frac{r^2}{2!} \mu'_2(W) + \frac{r^3}{3!} \mu'_3(W)$$

Al simplificar, se obtiene

$$\theta r \mu_W > r \left[\frac{r}{2} \mu'_2(W) + \frac{r^2}{6} \mu'_3(W) \right] \Rightarrow_{r \neq 0} r^2 \mu'_3(W) + 3r \mu'_2(W) - 6\theta \mu_W < 0.$$

Al hallar las soluciones de la cuadrática se tiene que

$$R < \frac{3}{2} \frac{\mu'_2(W)}{\mu'_3(W)} \left[\sqrt{1 + \frac{4\theta \mu_W}{\mu'_2(W)} \left(\frac{2}{3} \frac{\mu'_3(W)}{\mu'_2(W)} \right) - 1} \right]. \quad (6.96)$$

Esta cota coincide con la expresión dada en [22, pág. 313]. En [199] se establece la siguiente aproximación:

$$R \approx \frac{2\theta \mu_W^2}{\mu'_2(W)} - \frac{1}{3} \frac{\mu'_3(W)}{\mu'_2(W)} \left(\frac{2\theta \mu_W^2}{\mu'_2(W)} \right)^2 \left[\frac{1}{\mu_W} - \frac{2\theta}{\mu'_2(W)} \left(\frac{2}{3} \frac{\mu_W^3}{\mu'_2(W)} - \frac{1}{4} \frac{\mu'_4(W)}{\mu'_3(W)} \right) \right].$$

2. Solución numérica

Para utilizar el método de Newton-Raphson, se define

$$f(r) = M_W(r) - (1 + \theta) \mu_W r - 1.$$

Derivando respecto a r , se obtiene

$$f'(r) = M'_W(r) - (1 + \theta) \mu_W.$$

Por lo tanto,

$$r_{n+1} = r_n - \frac{M_W(r_n) - (1 + \theta) \mu_W r_n - 1}{M'_W(r_n) - (1 + \theta) \mu_W}, \quad r_n \neq 0. \quad (6.97)$$

El valor inicial es la cota superior $r = 2 \frac{\theta \mu_W}{\mu'_2(X)}$, obtenida en (6.95).

Ejemplo 6.14. [37, pág. 452]

Una cartera de seguros produce reclamos totales anuales que son independientes e idénticamente distribuidas con distribución Poisson compuesta común, dada por $\lambda = \frac{3}{2}$, $f_W(1) = \frac{2}{3}$, $f_W(2) = \frac{1}{3}$ (ver ejemplo 3.12). Las primas anuales recibidas son $c = \frac{5}{2}$. Determine el coeficiente de ajuste que resulta de esta cartera.

Solución. En este caso, se obtiene R de la ecuación (6.93):

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{2}r = \frac{3}{2} \left[\frac{2}{3} e^r + \frac{1}{3} e^{2r} \right] \quad \Rightarrow \quad 5r = (e^r + 3)(e^r - 1).$$

Usando (6.97) se tiene que $R \approx 0.2826438554$. ☑

Ejemplo 6.15. [37, pág. 411]

Suponga que todos los reclamos son de monto 1, determine el coeficiente de ajuste.

Solución. En este caso, se tiene que

$$M_W(r) = e^r \quad \text{y} \quad M_W^{(k)}(r) \Big|_{r \rightarrow 0} = \mu'_k(W) = 1, \quad \forall k.$$

Al sustituir en la ecuación (6.93), se llega a

$$(1 + \theta)r = e^r - 1.$$

Usando las expresiones (6.96) y (6.97), para distintos valores de θ , se obtienen los valores presentados en la siguiente tabla:

Tabla 6.4. Cálculo numérico del coeficiente de ajuste

| j | θ_j | $R^{(1)}$ | $R^{(2)}$ |
|-----|------------|-----------|-----------|
| 1 | 0.2 | 0.3574176 | 0.354199 |
| 2 | 0.4 | 0.6563859 | 0.639030 |
| 3 | 0.6 | 0.9186773 | 0.876405 |
| 4 | 0.8 | 1.1551836 | 1.079406 |
| 5 | 1.0 | 1.3722813 | 1.256431 |
| 6 | 1.2 | 1.5740852 | 1.413177 |
| 7 | 1.4 | 1.7634338 | 1.553676 |

⁽¹⁾Cota superior para R usando la ecuación (6.96).

⁽²⁾Valores obtenidos mediante la expresión (6.97).

Fuente: adaptada de [37, pág. 411].

Nótese que el valor de R es directamente proporcional a θ . ☑

Ejemplo 6.16. *Suponga que todos los reclamos W tienen pdf $U(0, 1)$, determine el coeficiente de ajuste.*

Solución. En este caso, por la expresión (1.124), se tiene que

$$M_W(r) = \frac{e^r - 1}{r} \quad \text{y} \quad \mu'_k(W) = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k + 1}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Al sustituir en la ecuación (6.93), se tiene que

$$(1 + \theta)\mu_W r = \frac{e^r - 1}{r} - 1.$$

Usando las expresiones (6.96) y (6.97), para distintos valores de θ , se obtienen los valores presentados en la siguiente tabla:

Tabla 6.5. Cálculo numérico del coeficiente de ajuste

| j | θ_j | $R^{(1)}$ | $R^{(2)}$ |
|-----|------------|-----------|-----------|
| 1 | 0.2 | 0.5298221 | 0.523605 |
| 2 | 0.4 | 0.9664794 | 0.933923 |
| 3 | 0.6 | 1.3466401 | 1.268991 |
| 4 | 0.8 | 1.6878178 | 1.550845 |
| 5 | 1.0 | 2.0000000 | 1.793282 |
| 6 | 1.2 | 2.2895221 | 2.005463 |
| 7 | 1.4 | 2.5607017 | 2.193755 |

⁽¹⁾Cota superior para R usando la ecuación (6.96).

⁽²⁾Valores obtenidos mediante la expresión (6.97).

Fuente: elaboración propia.

Nótese que el valor de R es directamente proporcional a θ . ☑

6.3.3.1. Método martingala para la probabilidad de ruina eventual

En [84] se presenta mediante la teoría de martingalas una relación intrínseca entre el coeficiente de ajuste y la probabilidad de ruina eventual, que está dada por el siguiente teorema presentado en [37].

Teorema 6.7. *Sea $S(t) \sim PC(\lambda t)$, entonces la probabilidad de ruina para $w \geq 0$ está dada por*

$$\psi(\omega) = \frac{e^{-R\omega}}{\mathbb{E}[e^{-R.U(T)} | T < \infty]}. \quad (6.98)$$

Donde R es el coeficiente de ajuste (ver expresión (6.93)).

Demostración. Para $t > 0$ y $r > 0$, por la ley de esperanza total se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[e^{-r.U(t)} | t]\right] &= \mathbb{E}[e^{-r.U(t)} | T \leq t]P[T \leq t] \\ &\quad + \mathbb{E}[e^{-r.U(t)} | T > t]P[T > t]. \end{aligned} \quad (6.99)$$

Empleando (6.58) se obtiene que

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[e^{-r.U(t)} | t]\right] = \mathbb{E}[e^{-r.U(t)}] = e^{-r\omega} M_{S(t)-ct}(r).$$

Por la expresión (6.91) se tiene que $M_{S(t)-ct}(R) = 1$ y, por lo tanto,

$$\mathbb{E}[e^{-R.U(t)}] = e^{-R\omega}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} U(t) &= U(T) + [U(t) - U(T)] \\ &= U(T) + c(t - T) - [S(t) - S(T)], \end{aligned}$$

para un T dado, $[S(t) - S(T)] \sim PC(\lambda(t - T))$ y es independiente de $U(T)$. Luego, el valor esperado que aparece en el primer término del lado derecho de la expresión (6.99) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-r.U(t)} | T \leq t] &= \mathbb{E}[e^{-r.U(T)} e^{-rc(t-T) + \lambda(t-T)[M_W(r) - 1]} | T \leq t] \\ &= \mathbb{E}[e^{-r.U(T)} e^{(t-T)[-rc + \lambda(M_W(r) - 1)]} | T \leq t]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el resultado dado en la expresión (6.92), se puede concluir que $cR = \lambda(M_W(R) - 1)$ y, por lo tanto, si se reemplaza $r = R$ en (6.99) se obtiene que

$$\mathbb{E}[e^{-R.U(t)}] = \mathbb{E}[e^{-R.U(T)} | T \leq t] P[T \leq t] + \mathbb{E}[e^{-R.U(t)} | T > t] P[T > t].$$

Nótese que si $t \rightarrow \infty$, el primer término del lado derecho de la expresión anterior converge a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e^{-R.U(T)} | T \leq t] P[T \leq t] = \mathbb{E}[e^{-R.U(T)} | T < \infty] \psi(\omega).$$

Si $T > t$, significa que hasta el tiempo t no ha ocurrido la ruina; es decir, si $T > t$, entonces $U(t) \geq 0$ y, por lo tanto, $e^{-R.U(t)} \leq 1$. Luego,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e^{-R.U(t)} | T > t] P[T > t] = 0.$$

Este límite se evalúa en [37, pág. 427] haciendo uso de la desigualdad de Chebyshev. Finalmente, si en (6.99) se reemplaza $r = R$ y se toma $t \rightarrow \infty$, se llega a

$$e^{-R\omega} = \mathbb{E}[e^{-R.U(t)}] = \mathbb{E}[e^{-R.U(T)} | T < \infty] \psi(\omega).$$

Al despejar $\psi(\omega)$, se completa la prueba. ☑

En general, no es posible realizar una evaluación explícita del denominador de la fórmula (6.98). Sin embargo, obtener la probabilidad de ruina en los casos en que $\omega = 0$ o cuando la pdf del monto de los reclamos es exponencial es sencillo. Además, nótese que en el instante de ruina, el excedente $U(T)$ es obviamente negativo y, en consecuencia, $e^{-RU(T)} > 1$. Al utilizar la fórmula (6.98) se concluye que, aunque la aproximación dada en (6.90) es en general poco precisa, sirve como cota superior de $\psi(\omega)$. Por ello, en [37]

se utiliza el teorema 6.7 para establecer desigualdades. Como $U(t)$, dado $T < \infty$, es negativo, el denominador de (6.98) excede a 1 y entonces

$$\psi(\omega) < e^{-R.\omega}. \quad (6.100)$$

Si la cdf del monto de los reclamos es acotada de manera que $H_s(m) = 1$ para algún m finito, se sigue que, dado $T < \infty$, $U(t) > -m$, puesto que la reserva por riesgo, justo antes del reclamo, debe haber sido positiva. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[e^{-R.U(T)} | T < \infty] < e^{R.m}.$$

Así,

$$\psi(\omega) > e^{-R.(\omega+m)}. \quad (6.101)$$

Por ello, algunos autores sugieren el uso de la aproximación dada en (6.90), la cual observando (6.100), sobrevalora la probabilidad de ruina eventual.

Ejemplo 6.17. [37, pág. 414]

Encuentre la probabilidad de ruina eventual para la pdf dada en el ejemplo 6.7.

Solución. Sean $\widehat{\omega}$ la reserva por riesgo justo antes del tiempo T de la ruina y X el monto del reclamo que causa la ruina. Entonces, la reserva por riesgo en el tiempo T se expresa como $U(t) = \widehat{\omega} - X$ y, así,

$$P[-U(t) > y | T < \infty] = P[X > \widehat{\omega} + y | X > \widehat{\omega}] = e^{-\beta y} = 1 - F_X(y);$$

es decir, $-U(t)$, dado $T < \infty$, sigue una pdf exponencial con parámetro β . Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[e^{-R.U(T)} | T < \infty] = \frac{\beta}{\beta - R}.$$

Sustituyendo en la expresión (6.98) se obtiene que

$$\psi(\omega) = \frac{\beta - R}{\beta} e^{-R.\omega}.$$

Reemplazando el coeficiente de ajuste encontrado en el ejemplo 6.12, se tiene

$$\psi(\omega) = \frac{1}{1 + \theta} \exp\left\{-\frac{\theta}{1 + \theta} \beta \omega\right\} = \frac{1}{1 + \theta} \exp\left\{-\frac{\theta}{1 + \theta} \frac{\omega}{\mu_X}\right\}.$$

Nótese que $\psi(\omega) = 1 - \phi(\omega)$, donde $\phi(\omega)$ se obtuvo en el ejemplo 6.7. \square

6.4. Sumas negativas de riesgo

Existen pólizas de seguro con comportamientos diferentes en el excedente. Para modelarlas basta cambiar el significado de las variables consideradas en el modelo original.

Ejemplo 6.18. *Considérese un negocio de pensiones en el cual la compañía paga al asegurado una renta vitalicia a cambio del pago de la prima. Sea una cartera de pólizas como las arriba descritas y cuyas sumas aseguradas contratadas (valor de las anualidades) tienen una distribución en cualquier instante igual a una muestra aleatoria de una cdf $F_W(\cdot)$. Establezca una fórmula para $U(t)$.*

Solución. La compañía paga a los asegurados a una tasa $\mu_W - d$, $d > 0$, donde d es la retención que aplica la compañía. Luego, la cuenta que reúne las primas netas pagadas también registrará una cdf $F(\cdot)$ para dichas primas y, en caso de fallecer uno de los asegurados, la prima neta de su póliza ingresará a la reserva. Se expresa con $P(t)$ las primas recaudadas hasta el instante t que ingresaron mediante este mecanismo a $U(t)$.

Bajo estos supuestos se construye la siguiente fórmula para el excedente de este seguro:

$$U(t) = \omega + P(t) - (\mu_W - d)t, \quad (6.102)$$

que es el modelo original con $\mu_W < 0$, $d < 0$, $X_i < 0$, $\forall i$ e intensidad unitaria. \square

6.5. La pérdida agregada máxima

Sean $X_1, X_2, \dots, X_{N(t)}$ variables aleatorias iid. Si se define

$$\mathcal{M}(t) = \max\{X_1, X_2, \dots, X_{N(t)}\}.$$

entonces la cdf de la pérdida máxima está dada por

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{M}}(x; t) &= P(\mathcal{M}(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P[\mathcal{M}(t) \leq x | N(t) = n] P_n(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P[\mathcal{M}_n \leq x] P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) [F_X(x)]^n, \end{aligned}$$

donde $P_n(t) = P[N(t) = n]$, para $t > 0$ y $\mathcal{M}_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

Luego,

$$H_{\mathcal{M}}(x; t) = \mathcal{G}_N(F_X(x); t), \quad (6.103)$$

donde $\mathcal{G}_N(\cdot)$ denota la función generadora de probabilidad de N . Sea L_1 el monto aleatorio por el cual el excedente cae por primera vez, debajo del nivel inicial, dado que esto ocurre. La pdf de L_1 es la derivada de (1.127)

$$f_{L_1}(y) = \frac{1}{\mu_X} [1 - H_X(y)] = \frac{1}{\mu_X} \int_y^\infty h_X(z) dz, \quad y > 0. \quad (6.104)$$

La función generadora de momentos de L_1 está dada por:

$$M_{L_1}(r) = \frac{1}{\mu_X} \int_0^\infty e^{ry} \left[\int_y^\infty h_X(z) dz \right] dy.$$

Usando integración por partes con

$$u = \int_y^\infty h_X(z) dz \quad \text{y} \quad dv = e^{ry} dy,$$

se obtiene la relación entre la función generadora de momentos de L_1 y la función generadora de momentos del monto de los reclamos X :

$$\begin{aligned} M_{L_1}(r) &= \frac{e^{ry}}{r} \left[\int_y^\infty h_X(z) dz \right] \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{ry}}{r} h_X(y) dy \\ &= \frac{M_X(r) - 1}{r \mu_X}. \end{aligned} \quad (6.105)$$

Ejemplo 6.19. [37, pág. 417]

Determine la distribución de L_1 si el monto de los reclamos sigue una pdf exponencial con parámetro β .

Solución. Puesto que $X \sim \exp(\beta)$ entonces

$$\mu_X = \beta^{-1} \quad \text{y} \quad M_X(r) = \frac{\beta}{\beta - r}.$$

Sustituyendo en la expresión (6.105), se tiene que

$$M_{L_1}(r) = \frac{\beta}{r} \left[\frac{\beta}{\beta - r} - 1 \right] = \frac{\beta}{\beta - r}.$$

Luego, L_1 también sigue una pdf exponencial con parámetro β . \square

Sea el proceso de la pérdida total $\{S(t) - ct, t \geq 0\}$, el cual describe el exceso de pérdidas agregadas sobre las primas recaudadas:

$$L = \max_{t \geq 0} \{S(t) - ct\}. \quad (6.106)$$

La **cdf** de la variable L se establece como sigue:

$$\begin{aligned} \underbrace{P[L \leq \omega]}_{\phi(\omega)} &= 1 - P \left[\max_{t \geq 0} \{S(t) - ct\} > \omega \right] \\ &= 1 - \psi(\omega). \end{aligned} \quad (6.107)$$

En particular, como $L \geq 0$, se tiene que

$$P[L = 0] = 1 - \psi(0) = \frac{\theta}{1 + \theta}. \quad (6.108)$$

Así, se concluye que la **cdf** de L es una mezcla tal que existe una masa puntual de $1 - \psi(0)$ en el origen, con las restantes probabilidades distribuidas continuamente para valores positivos de L . Por lo tanto,

$$P[L \leq \omega] = F_L(\omega) = \begin{cases} \frac{\theta}{1 + \theta}, & \text{si } \omega = 0 \\ 1 - \psi(\omega), & \text{si } \omega > 0. \end{cases} \quad (6.109)$$

Luego,

$$f_L(\omega) = F'_L(\omega) = \begin{cases} \frac{\theta}{1 + \theta}, & \text{si } \omega = 0 \\ -\psi'(\omega), & \text{si } \omega > 0. \end{cases} \quad (6.110)$$

Como la **cdf** de L es una mezcla, la función generadora de momentos se establece como sigue:

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1 + \theta} + \int_0^{\infty} e^{r\omega} (-\psi'(\omega)) d\omega. \quad (6.111)$$

Por otra parte, el valor esperado de L está dado por

$$\mathbb{E}(L) = \int_0^{\infty} [1 - F_L(u)] du = \int_0^{\infty} \psi(u) du. \quad (6.112)$$

Al considerar en (6.106) los tiempos en que L registra reclamos acumulados mayores a los anteriores, L se descompone como

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_N, \quad (6.113)$$

donde N es el número de veces que se registra un reclamo máximo y L_j denota la diferencia en términos de la pérdida agregada entre los máximos $(j - 1)$ y j . En la fórmula de convolución dada en [23] y [24] se supone que

la probabilidad de que ocurra un siniestro sigue una pmf geométrica con parámetro $\psi(0)$, entonces

$$P[N = n] = \phi(0)(1 - \phi(0))^n = \theta \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^{n+1} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.114)$$

Por lo tanto, la expresión (6.107) es equivalente a (6.89). La gráfica 6.3 representa el proceso dado en (6.113)

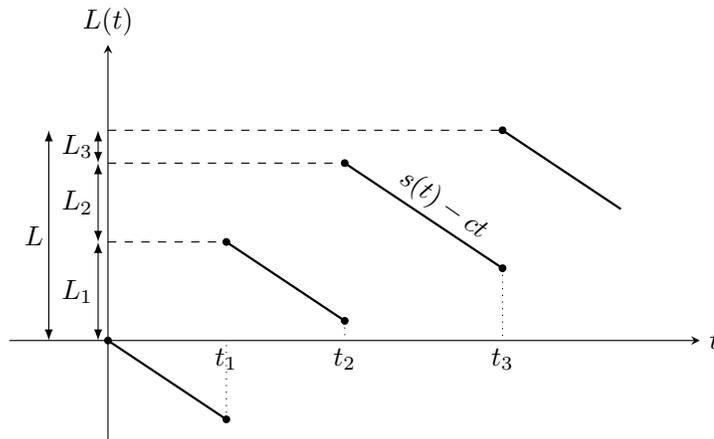


Figura 6.3. Un resultado típico del superávit del seguro
Fuente: adaptada de [37, pág. 418].

Puesto que en la expresión (6.113) se supone que las variables aleatorias L_j son iid e independientes de N , entonces de manera análoga a la expresión (3.21) se tiene que la función generadora de momentos está dada por

$$M_L(r) = M_N [\ln (M_{L_1}(r))] = \frac{\theta}{1 + \theta - M_{L_1}(r)}. \quad (6.115)$$

Al sustituir en esta última ecuación la expresión (6.105) se obtiene

$$M_L(r) = \frac{\theta \mu_x r}{1 + (1 + \theta) \mu_x r - M_X(r)}. \quad (6.116)$$

La cual se puede reescribir como

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1 + \theta} \left[1 + \frac{M_X(r) - 1}{1 + (1 + \theta) \mu_x r - M_X(r)} \right]. \quad (6.117)$$

Al comparar esta última ecuación con la expresión (6.111), se obtiene

$$\int_0^\infty e^{r\omega} d[-\psi(\omega)] = \frac{\theta}{1 + \theta} \frac{M_X(r) - 1}{1 + (1 + \theta) \mu_x r - M_X(r)}, \quad (6.118)$$

donde la ecuación fundamental de Lundberg está dada por (6.93). Para determinar la probabilidad de ruina $\psi(\omega)$ se necesita de la inversión de la transformada de Laplace de la fórmula (6.118). Este proceso es sencillo solo para ciertas familias de pdf asociadas a los montos de los reclamos. Una de tales familias es la mezcla de pdf exponenciales de la forma (ver [64]):

$$h_x(x) = \sum_{i=1}^n q_i \beta_i e^{-\beta_i x}, \quad \beta_i > 0, x > 0.$$

Por la expresión (1.18), las ponderaciones q_i satisfacen que

$$\sum_{i=1}^n q_i = 1, \quad q_i > 0, \text{ para cada } i.$$

Usando (1.39) la función generadora de momentos es

$$M_X(r) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{\beta_i}{\beta_i - r} = 1 + r \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\beta_i - r}. \quad (6.119)$$

Al sustituir esta expresión en (6.118), el lado derecho de la expresión es una función racional de r , la cual al aplicar el método de las fracciones parciales se reescribe como

$$\int_0^{\infty} e^{r\omega} [-\psi'(\omega)] d\omega = \sum_{k=1}^n c_k \frac{r_k}{r_k - r} = \sum_{k=1}^n c_k + r \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{r_k - r}. \quad (6.120)$$

Sea $r = -z$, entonces el lado izquierdo es la transformada de Laplace de la derivada de la función $\psi(\omega)$ (ver (D.3)); por lo tanto,

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathcal{L}\{-\psi'(\omega)\}} &= \sum_{k=1}^n c_k - z \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{r_k + z} \\ \psi(0) - z\mathcal{L}\{\psi(\omega)\} &= \sum_{k=1}^n c_k - z \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z + r_k}. \end{aligned}$$

Igualando términos homólogos,

$$\sum_{k=1}^n c_k = \psi(0) = 1 - \phi(0) = \frac{1}{1 + \theta}$$

esto generaliza el resultado obtenido en el ejemplo 6.8, por otra parte

$$\psi(\omega) = \sum_{k=1}^n \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_k}{s + r_k}\right\} = \sum_{k=1}^n c_k e^{-r_k \omega}. \quad (6.121)$$

Nótese que $\psi(\infty) = 0$. Si r_k es una raíz de la ecuación (6.93), usando la expresión (D.13), los coeficientes $c_k r_k$ de (6.120) se determinan como sigue:

$$c_k r_k = -\frac{\theta}{1 + \theta} \frac{M_X(r_k) - 1}{(1 + \theta)\mu_X - M'_X(r_k)}. \quad (6.122)$$

El numerador de (6.122) se simplifica usando (6.93) y, luego, (6.119):

$$M_X(r_k) - 1 = (1 + \theta)\mu_X r_k \quad \text{o} \quad r_k \cancel{\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\beta_i - r_k}} = r_k (1 + \theta) \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\beta_i}.$$

Y al derivar (6.119) el denominador de la expresión (6.122) se factoriza como

$$(1 + \theta)\mu_X - M'_X(r_k) = (1 + \theta) \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\beta_i} - \sum_{i=1}^n \frac{q_i \beta_i}{(\beta_i - r_k)^2} = \sum_{i=1}^n \frac{-r_k q_i}{(\beta_i - r_k)^2}.$$

Al sustituir estas expresiones en (6.122) se llega a

$$c_k r_k = \frac{\theta}{1 + \theta} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\beta_i - r_k}}{\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{(\beta_i - r_k)^2}} = \theta \frac{\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\beta_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{(\beta_i - r_k)^2}}. \quad (6.123)$$

Cuando $q_i = \frac{1}{n}$ para $i = 1, 2, \dots, n$, se obtiene

$$c_k r_k = \frac{\theta \cdot \sum_{i=1}^n \beta_i^{-1}}{\sum_{i=1}^n (\beta_i - r_k)^{-2}} \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.124)$$

Ejemplo 6.20. [37, pág. 421]

Encuentre la probabilidad de ruina eventual por el método expuesto en esta sección para el ejemplo 6.9 y determine la máxima pérdida total esperada $\mathbb{E}(L)$.

Solución. En este caso, de la expresión (6.85) se tiene que

$$M_X(r) = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{3-r} + \frac{7}{7-r} \right] = \frac{21-5r}{(3-r)(7-r)}.$$

Por lo tanto, la expresión (6.118) queda

$$\int_0^{\infty} e^{r\omega} d[-\psi(\omega)] = \frac{6}{7} \frac{5-r}{(1-r)(6-r)}.$$

Luego, $r_1 = 1$ y $r_2 = 6$. De la expresión (6.124) se tiene

$$c_1 r_1 = c_1 = \frac{24}{35} \quad \text{y} \quad c_2 r_2 = 6c_2 = \frac{6}{35}.$$

Al sustituir en (6.121), se llega a

$$\psi(\omega) = \frac{24}{35} e^{-\omega} + \frac{1}{35} e^{-6\omega}.$$

Nótese que esta expresión es el complemento de (6.86). Por otra parte,

$$\mathbb{E}(L) = \int_0^{\infty} \psi(u) du = \frac{29}{42}. \quad \checkmark$$

Los problemas prácticos necesitan la consideración de distribuciones de los reclamos que no sean combinaciones de distribuciones exponenciales. Para algunas distribuciones puede ser difícil establecer el coeficiente de ajuste para aproximar las probabilidades de la ruina. Un método basado en los 2 primeros momentos de la pdf del monto de los reclamos es fácil de usar y parece dar resultados satisfactorios para valores moderados de u . Puesto que el número N de datos históricos nuevos se consideró con pmf geométrica de parámetro $\phi(0)$ y los reclamos L_j son iid, se tiene que

$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{\theta} \quad \text{y} \quad \mathbb{E}(L_1) = \frac{\mu'_2(X)}{2\mu'_1(X)} = \frac{\mu'_2(X)}{2\mu_X},$$

donde $\mu'_k(X)$ es el k -ésimo momento del monto común de los reclamos individuales. Entonces,

$$\mathbb{E}(L) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(L|N)] = \mathbb{E}[N\mathbb{E}(L_1)] = \frac{\mu'_2(X)}{2\theta\mu_X}. \quad (6.125)$$

Por otra parte, se sabe que

$$\psi(0) = (1 + \theta)^{-1} \quad \text{y} \quad \psi(\omega) \leq e^{-R\omega}.$$

Luego, surge la siguiente aproximación:

$$1 - F_L(\omega) = \psi(\omega) \approx \psi(0)e^{-\kappa\omega}, \quad \omega > 0,$$

donde κ es escogida tal que el valor aproximado de $\mathbb{E}(L)$ sea igual al dado en (6.125). Por la expresión (6.112) se tiene

$$\mathbb{E}(L) = \int_0^{\infty} \psi(u) du \approx \frac{1}{1 + \theta} \left(-\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa u} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1 + \theta} \frac{1}{\kappa}.$$

Así que

$$(1 + \theta)\kappa \approx \frac{2\theta\mu_x}{\mu'_2(X)}.$$

Esta expresión coincide con (6.43). Luego, la probabilidad de ruina es

$$\psi(\omega) \approx \frac{1}{1 + \theta} \exp \left\{ - \frac{2\theta\mu_x}{(1 + \theta)\mu'_2(X)} \omega \right\}, \quad \omega > 0. \quad (6.126)$$

Nótese que si la pdf de los reclamos es exponencial con media μ_x , entonces $\mu'_2(X) = 2\mu_x^2$ y el resultado es exacto.

6.6. Aproximaciones de la probabilidad de ruina eventual

En esta sección se presentan algunas aproximaciones de la probabilidad de ruina eventual (horizonte infinito) cuando las reclamaciones se distribuyen exponencialmente.

6.6.1. Fórmula asintótica de Cramér

En el siguiente teorema se presenta la fórmula asintótica dada en [49] para la probabilidad de ruina.

Teorema 6.8. Fórmula asintótica de Cramér

Suponga que R satisface la expresión (6.70), entonces la probabilidad de ruina satisface

$$\psi_C(\omega) = k_C e^{-R\omega}, \quad \omega \rightarrow \infty \quad (6.127)$$

donde

$$k_C = \frac{\theta\mu_w}{M'_w(R) - (1 + \theta)\mu_w}. \quad (6.128)$$

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [177]. ☑

Para emplear esta aproximación se necesita que el coeficiente de ajuste exista; por lo tanto, solo las distribuciones de montos de reclamación que tengan cola ligera pueden ser consideradas.

6.6.2. Aproximación de De Vylder

Considere nuevamente el modelo de riesgo de Cramér-Lundberg dado en (6.1). La aproximación propuesta en [56] consiste en utilizar el siguiente modelo asociado:

$$\tilde{U}(t) = \omega + \tilde{c}t - \tilde{S}(t) = \omega + \tilde{c}t - \sum_{k=1}^{\tilde{N}(t)} \tilde{W}_k, \quad (6.129)$$

donde \tilde{c} es la prima por unidad de tiempo, $\{\tilde{N}_t, t \geq 0\}$ es un proceso homogéneo de Poisson de parámetro $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{S}(t) \sim PC(\tilde{\lambda}t)$ y las variables aleatorias \tilde{W}_k tienen pdf exponencial con parámetro $\tilde{\beta}$. La idea es aproximar la probabilidad de ruina del riesgo (6.1) por la del riesgo (6.129). Para ello, se deben encontrar los valores de los parámetros \tilde{c} , $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\beta}$ en términos de los parámetros del riesgo original, y esto es lo que se plantea en la siguiente proposición.

Proposición 6.2. Aproximación de De Vylder

La probabilidad de ruina del riesgo (6.1) tiene como aproximación la fórmula

$$\psi_V(\omega) \approx \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}\tilde{\beta}} \exp \left\{ - \left(\tilde{\beta} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}} \right) \omega \right\}, \quad (6.130)$$

donde

$$\tilde{\beta} = 3 \frac{\mu'_2}{\mu'_3}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{9}{2} \lambda \frac{(\mu'_2)^3}{(\mu'_3)^2}, \quad y \quad \tilde{c} = c - \lambda \mu + \frac{3}{2} \lambda \frac{(\mu'_2)^2}{\mu'_3}.$$

Demostración. Puesto que $S(t) \sim PC(\lambda t)$, entonces

$$\mathbb{E}(S(t)) = \lambda t \mu_w, \quad \mu_2(S(t)) = \lambda t \mu'_2(W), \quad \mu_3(S(t)) = \lambda t \mu'_3(W).$$

Luego, se igualan los 3 primeros momentos de los procesos $U(t)$ y $\tilde{U}(t)$, suponiendo la existencia de tales medidas. Los pasos que se aplican son:

1. Los valores esperados se igualan (es decir, $\mathbb{E}(U(t)) = \mathbb{E}(\tilde{U}(t))$) y se obtiene

$$\omega + ct - \lambda t \mu_w = \omega + \tilde{c}t - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\beta}} t.$$

De esta igualdad se llega a

$$\tilde{c} = c - \lambda \mu_w + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\beta}}. \quad (6.131)$$

2. Se igualan las varianzas (es decir, $\text{Var}[U(t)] = \text{Var}[\tilde{U}(t)]$) y se obtiene

$$\lambda t \mu'_2(W) = \frac{2\tilde{\lambda}}{\tilde{\beta}^2} t. \quad (6.132)$$

Aquí se tuvo en cuenta que, si $\tilde{W} \sim \exp(\tilde{\beta})$, $\mathbb{E}(\tilde{W}^2) = 2\tilde{\beta}^{-2}$.

3. Finalmente, se igualan los momentos centrales de tercer orden (es decir, $\mathbb{E}[U(t) - \mathbb{E}(U(t))]^3 = \mathbb{E}[\tilde{U}(t) - \mathbb{E}(\tilde{U}(t))]^3$) y se obtiene

$$\lambda t \mu'_3(W) = \frac{6\tilde{\lambda}}{\tilde{\beta}^3} t. \quad (6.133)$$

Aquí se tuvo en cuenta que, si $\tilde{W} \sim \exp(\tilde{\beta})$, $\mathbb{E}(\tilde{W}^3) = 6\tilde{\beta}^{-3}$. Dividiendo (6.132) entre (6.133) se obtiene

$$\frac{\tilde{\beta}}{3} = \frac{\mu'_2(W)}{\mu'_3(W)}. \quad (6.134)$$

Sustituyendo en la expresión (6.132),

$$\tilde{\lambda} = \frac{9 (\mu'_2(W))^3}{2 (\mu'_3(W))^2} \lambda. \quad (6.135)$$

Sustituyendo (6.134) y (6.135) en (6.131),

$$\tilde{c} = c - \lambda \mu_W + \frac{3 (\mu'_2(W))^2}{2 \mu'_3(W)} \lambda.$$

De esta forma se determinan los parámetros \tilde{c} , $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\beta}$ en términos de los parámetros del riesgo original c , λ y los momentos de W . \square

6.6.3. Aproximación de Tijms

De acuerdo con [127] la expresión analítica dada en [205] se basa en agregar un término exponencial a (6.127) para mejorar la aproximación de la probabilidad de ruina, cuando el superávit inicial es pequeño. Esta aproximación es definida como

$$\psi_T(\omega) = k_C e^{-R\omega} + \left(\frac{1}{1+\theta} - k_C \right) e^{-A\omega}, \quad (6.136)$$

donde R satisface la expresión (6.70) y

$$A = \frac{\frac{1}{1+\theta} - k_C}{\frac{\mu'_2(W)}{2\theta \mu_W} - \frac{k_C}{R}}.$$

En particular, $\psi_T(\omega) = \psi(\omega)$ cuando la pdf del monto individual de los reclamos sigue la pdf mixta

$$f_W(x) = p\beta e^{-\beta x} + (1-p)\beta^2 x e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

6.7. Probabilidad de ruina en horizonte finito

El siguiente teorema, cuya prueba es análoga a la del teorema 6.5, permite determinar la probabilidad de ruina en horizonte finito.

Teorema 6.9. Si $\omega > 0$ y $\tau > 0$ entonces la probabilidad de no ruina se establece como

$$\phi(\omega, \tau) = \mathcal{L}_1^{-1} \left\{ \frac{1}{r} \mathcal{L}_2^{-1} \left\{ \left[1 - \frac{r}{\rho(s)} \right] \left[s + 1 - \frac{c}{\lambda} r - \mathcal{L}_f(r) \right]^{-1} \right\} \right\}, \quad (6.137)$$

donde $\rho(s)$ es la única raíz real positiva de la ecuación “fundamental” de Lundberg

$$\frac{c}{\lambda} r - 1 + \mathcal{L}_f(r) = s, \quad s \geq 0. \quad (6.138)$$

Demostración. Supóngase que $0 \leq t \leq \tau$. Luego, la probabilidad de no caer en ruina en el periodo de tiempo $\tau - t$, se establece como

$$\phi(\omega, \tau) = \mathbb{E}[\phi(\omega + P(T) - S(T), \tau - T)].$$

Suponiendo que $S(t) \sim PC(\lambda t)$, entonces $P(t) = (1 + \theta)\lambda t \mu_W = ct$. Así,

$$\phi(\omega, \tau) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_0^{\omega+ct} \phi(\omega + ct - y, \tau - t) f_W(y) dy \right) \lambda dt.$$

Como $\phi(\omega, 0) = 1, \forall \omega \geq 0$. Al hacer el cambio de variable $z = \omega + ct$ se obtiene

$$\phi(\omega, \tau) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}\omega} \int_\omega^\infty e^{-\frac{\lambda}{c}z} \left(\int_0^z \phi\left(z - y, \tau - \frac{z - \omega}{c}\right) f_W(y) dy \right) dz. \quad (6.139)$$

Al derivar respecto a ω se tiene

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(\omega, \tau) &= \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}\omega} \int_\omega^\infty e^{-\frac{\lambda}{c}z} \left\{ \int_0^z \left[\phi\left(z - y, \tau - \frac{z - \omega}{c}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \phi\left(z - y, \tau - \frac{z - \omega}{c}\right) \right] f_W(y) dy \right\} dz - \int_0^\omega \phi(\omega - y, \tau) d[F_W(y)]. \end{aligned}$$

Las integrales dobles del lado derecho de esta última expresión son, la primera, (6.139) y, la segunda, la derivada de (6.139) respecto a τ ; luego,

$$\frac{c}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(\omega, \tau) = \phi(\omega, \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} \phi(\omega, \tau) - \int_0^\omega \phi(\omega - y, \tau) f_W(y) dy. \quad (6.140)$$

Para resolver esta ecuación integrodiferencial, se aplica transformada bidimensional de Laplace (D.20) y se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda} \mathcal{B}\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(\omega, \tau) \right\} &= \mathcal{B}\mathcal{L} \{ \phi(\omega, \tau) \} + \mathcal{B}\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \phi(\omega, \tau) \right\} \\ &\quad - \mathcal{B}\mathcal{L} \left\{ \int_0^\omega \phi(\omega - y, \tau) f_W(y) dy \right\}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda} [r \mathcal{L}_\phi(r, s) - \mathcal{L}_\phi(s)] &= (1 + s) \mathcal{L}_\phi(r, s) - \int_0^\infty e^{-rz} \phi(z, 0) dz \\ &\quad - \mathcal{L}_f(r) \mathcal{L}_\phi(r, s), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}_\phi(s) = \int_0^\infty e^{-st} \phi(0, t) dt$. Agrupando el término $\mathcal{L}_\phi(r, s)$, se obtiene

$$\lambda \left[\frac{c}{\lambda} r - 1 + \mathcal{L}_f(r) - s \right] \mathcal{L}_\phi(r, s) = c \mathcal{L}_\phi(s) - \frac{\lambda}{r}. \quad (6.141)$$

Si $\rho(s)$ es la única raíz real positiva de la ecuación dada en (6.138), entonces el coeficiente de $\mathcal{L}_\phi(r, s)$ en (6.141) se anula cuando $r = \rho(s)$ y

$$\mathcal{L}_\phi(s) = \frac{\lambda}{c \rho(s)}.$$

Si (6.138) no se satisface, despejando $\mathcal{L}_\phi(r, s)$ en (6.141) se tiene

$$\mathcal{L}_\phi(r, s) = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{r}{\rho(s)} \right] \left[s + 1 - \frac{c}{\lambda} r - \mathcal{L}_f(r) \right]^{-1}.$$

Tomando inversa de la transformada bidimensional de Laplace se obtiene el resultado. \square

Nótese que para obtener las probabilidades de no ruina usando (6.137) se necesita de la inversión de la transformada bidimensional de Laplace, lo cual según [181] implica problemas de cálculo.

6.8. Ejercicios

- 6.1 Suponga un proceso de reclamos, determinado por la información proporcionada hasta el tiempo $t = 4.25$.

| | | | | | |
|----------------|------|------|------|------|------|
| Tiempo (t) | 0.50 | 1.25 | 2.75 | 3.50 | 4.25 |
| Monto (X) | 2 | 10 | 6 | 8 | 1 |

El capital inicial disponible es 4 y las primas son pagadas continuamente a una tasa anual de 6. Determine:

- La representación gráfica y algebraica del proceso de excedentes $U(t)$. ¿Ocurre la ruina? Si es así, ¿cuál es el tiempo de la ruina?
 - El cargo mínimo relativo por seguridad tal que la ruina no ocurra en el intervalo de tiempo dado.
 - El valor mínimo de la prima anual para que la ruina no ocurra en el intervalo de tiempo dado, si el valor de la prima se cambia a 4.
- 6.2 El cargo relativo por seguridad es $(3.2 - \ln 4)/\ln 4$ y todos los reclamos tienen el valor $\ln 2$. Determine el coeficiente de ajuste.
- 6.3 Un proceso **PC** tiene un coeficiente de ajuste de 12. Otro proceso **PC** es idéntico al primero excepto que, los montos de los reclamos y las primas, duplican a los montos del primer proceso. Determine el coeficiente de ajuste para el segundo proceso.
- 6.4 Para un proceso de excedentes de tiempo discreto U_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, sea la ganancia $G_n = U_n - U_{n-1}$. Supóngase que G_1, G_2, \dots son variables **iid** tales que,

$$G_n = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \frac{2}{3}, \\ 0 & \text{con probabilidad } \frac{1}{6}, \\ -1 & \text{con probabilidad } \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Determine el coeficiente de ajuste.

- 6.5 En un modelo de tiempo discreto, la ganancia G_n de un asegurador en el n -ésimo periodo de tiempo es

$$G_n = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \frac{3}{5}, \\ -1 & \text{con probabilidad } \frac{2}{5}. \end{cases}$$

El excedente inicial es 1 y la tasa anual de las primas es 1. Encuentre la probabilidad de la ruina.

- 6.6 La probabilidad de ruina con un excedente inicial $\omega = 0$, es $\frac{5}{7}$ y el monto individual de los reclamos sigue una pdf exponencial con parámetro 4. Encuentre la probabilidad de ruina cuando el excedente inicial es 1.4.
- 6.7 Un excedente tiene un proceso de reclamos que sigue un PC. El monto de los reclamos sigue una pdf exponencial con media 5. El cargo relativo por seguridad es 0.30 y el excedente inicial es 8. Determine la cantidad adicional del excedente para reducir la probabilidad de ruina en un 65 %.
- 6.8 Los montos de los reclamos son 0 o 1 con probabilidades $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{5}$, respectivamente. El excedente inicial es 2 y la tasa anual de las primas es $\frac{1}{2}$. Encuentre la probabilidad de ruina.
- 6.9 Suponga que $S(t) \sim PC(3t)$, las primas se recaudan a una tasa $c = 1$, el excedente inicial es $\ln(\frac{5}{3})$ y el monto individual de los reclamos sigue la pdf mixta,

$$f_X(x) = \frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{16}{3}e^{-6x}, \quad x > 0.$$

Encuentre la probabilidad de ruina.

- 6.10 Un proceso de excedentes es PC y todos sus reclamos son iguales a 6. El excedente inicial es 10. Dado que el excedente cae por debajo de 10. Encuentre la probabilidad condicional de que en la primera vez que esto ocurra el nuevo excedente sea menor que 8.
- 6.11 Demuestre que la pdf común de las variables L_1, L_2, \dots es dada por (6.104).
- 6.12 Demuestre que

$$\mathbb{E}[L_1] = \frac{\mu'_2(X)}{2\mu'_1(X)} \quad \text{y} \quad \text{Var}[L_1] = \frac{\mu'_3(X)}{3\mu'_1(X)} - \left(\frac{\mu'_2(X)}{2\mu'_1(X)} \right)^2$$

- 6.13 A partir de la información dada en el ejercicio 6.1, determine:
- La pérdida total máxima.
 - Los valores observados de N, L_1, \dots, L_N .
- 6.14 Encuentre $\mathbb{E}[L_1]$ cuando el monto de los reclamos sigue la pdf mixta,

$$f_X(x) = \frac{5}{3}e^{-5x} + \frac{16}{3}e^{-8x}, \quad x > 0.$$

- 6.15 La función generadora de momentos del monto de los reclamos es, $M_X(r) = \frac{4}{7} + \frac{3}{7}e^{2r}$. Si $\psi_C(\omega) = (3/5)^{\omega+1}$, $\omega \geq 0$, determine el cargo relativo por seguridad.

- 6.16 El excedente inicial es $\ln 6$, el cargo relativo por seguridad es 20% y el monto de los reclamos sigue una pdf exponencial con parámetro 3. Encuentre la probabilidad de ruina, usando la aproximación de De Vylder.
- 6.17 El excedente inicial es 14 y el monto individual de los reclamos sigue una pdf exponencial con parámetro 4. La probabilidad de ruina es $\psi_V(14) = \frac{5}{8}e^{-21}$. Determine el coeficiente de ajuste.
- 6.18 Un excedente tiene un proceso de reclamos que sigue un PC. El monto de los reclamos sigue una pdf exponencial con parámetro 2. El coeficiente de ajuste es 1. Determine el valor inicial del excedente que se necesita para que $\psi_V(\omega) = 0.05$.
- 6.19 A partir de la información dada en el ejercicio 6.9, encuentre la probabilidad $\psi_T(\ln(\frac{5}{3}))$.
- 6.20 El coeficiente de ajuste es $\ln 2$ y el monto de los reclamos sigue una pdf con $f(1) = \frac{3}{4}$ y $f(2) = \frac{1}{4}$. Encuentre la probabilidad $\psi_T(\frac{11}{10})$.
- 6.21 El cargo relativo por seguridad es, $(3 - \ln 4)/\ln 4$ y todos los reclamos son iguales a $\ln 2$. Encuentre la probabilidad $\psi_T(2.5)$.

Capítulo
siete
**Transferencia del
riesgo: reaseguro**

En el capítulo 5 se abordó de manera general cómo un agente decisor se cubre mediante el seguro con el fin de reducir el efecto adverso financiero de algunos eventos aleatorios. Por agente decisor se entendía un individuo o una organización en busca de protección contra la pérdida de un bien, capital o ingreso. En efecto, la organización puede ser una compañía de seguros buscando amparo contra la pérdida de fondos debido a numerosos reclamos por un individuo o por su cartera o portafolio de asegurados. Dicho amparo, denominado *reaseguro*, es estudiado en este capítulo.

Una de las maneras de limitar la pérdida frente a eventos catastróficos, los cuales ocurren en cualquier momento y se caracterizan por una baja frecuencia, pero alta severidad, es justamente transferir parte del riesgo aceptado a una tercera parte. Esto lo que implica en realidad es no quedarse con la totalidad del riesgo, sino con una fracción.

El reaseguro es esencialmente transferir parte del riesgo a otro asegurador. Existen diferentes tipos de transferencia parcial de riesgos, algunos de los cuales son abordados en este capítulo.

7.1. Reaseguro y coaseguro

Cuando ocurren siniestros de cuantiosas pérdidas o montos excesivos que deben ser aceptados por una única entidad aseguradora, o cuando una entidad enfrenta varios riesgos de escasos volúmenes, surge la necesidad de preservar una estabilidad de los riesgos aceptados que permita a las entidades aseguradoras cubrir aquellos contratos en los cuales los posibles desembolsos (pagos) de indemnizaciones sean por montos que no eliminen dicho equilibrio. Por eso, es importante que las entidades seleccionen muy bien los riesgos que aceptan y a sus asegurados, conservando una distribución de la cartera viable, segura y rentable.

El reaseguro es una herramienta técnica que la entidad aseguradora emplea para lograr la estabilidad económica en cada periodo, nivelando u homogeneizando los riesgos que componen su cartera de pólizas aseguradas mediante la cesión de parte de los riesgos a otras entidades. Con este mecanismo se distribuye entre otros aseguradores los excesos de los riesgos de mayor volumen, permitiendo al asegurador directo (reasegurado) tomar un conjunto de riesgos homogéneos. También se puede participar en el cúmulo de riesgos homogéneos de otra entidad y, por lo tanto, incrementar el número de riesgos similares de una empresa.

El reaseguro considera transacciones en las que el asegurador directo acepta un riesgo que excede su pleno de retención y cede el exceso a otro

asegurador denominado *reasegurador*. El vínculo jurídico entre ellos es completamente independiente del que existe entre el asegurador directo y el asegurado, por lo que frente a este el único responsable es el asegurador directo. Este sistema requiere un conocimiento perfecto de los distintos ramos y mercados, de las posibles soluciones a los problemas de cubrimiento, del tipo de reaseguro más adecuado para cada cubrimiento, etc. Las 3 variables de decisión empleadas para preservar la estabilidad financiera de la empresa cedente son el recargo de seguridad, la constitución de reservas y el reaseguro. Estas permiten protegerse de aquellos siniestros que podrían ocasionar pérdidas potenciales y, por ende, graves problemas financieros.

Si cooperan 2 o más entidades aseguradoras en el cubrimiento de un mismo riesgo con el fin de distribuir los riesgos admitidos por el asegurador directo se denomina *coaseguro*. Técnicamente, este sistema es usado para homogeneizar de manera cuantitativa la composición de la cartera. Desde una perspectiva jurídica, el coaseguro aventaja al reaseguro —que técnicamente realizaría la misma función: dispersión o redistribución de riesgos —porque cada asegurador solo se compromete a reconocer la participación admitida, mientras que en el reaseguro se responde por todo el riesgo, aunque (ocurrido el siniestro) se puede recuperar la participación.

7.1.1. Definición de términos

Reaseguro es la denominación dada a distintas formas de amparo que son similares a las del seguro mismo, de manera que las compañías de seguros e instituciones especializadas en reaseguro suscriben entre ellas un contrato con el fin de cubrir recíprocamente sus propias carteras de seguros y de reaseguros. En un principio, el reaseguro era simplemente un conjunto de ofertas y acogidas de riesgos individuales; sin embargo, en la actualidad, brinda cada vez más un constante flujo de productos en el mercado mundial a través de tratados de reaseguro pactados a nivel internacional.

A continuación, se definen los principales términos usados en el mercado de reaseguro:

- a) Asegurador cedente: compañía que coloca un reaseguro.
- b) Asegurador directo: entidad que acepta el riesgo directamente al postulante, ante quien es responsable por la obligación admitida.
- c) Cesión: cantidad dada a través de reaseguro y, por lo tanto, monto aceptado por el reasegurador.
- d) Comisión de reaseguro: comisión que abona el reasegurador a su compañía cedente por las primas transferidas. Esta incluye la comisión

- inicial más unas bonificaciones, con el fin de retribuir los costos de la cedente.
- e) **Garantía:** documento emitido por un reasegurador a una compañía cedente como garantía de legalización del reaseguro facultativo.
 - f) **Límite de retención:** monto por debajo del cual una compañía cedente retiene el seguro y por encima del cual compra un reaseguro. Esto es, la aseguradora cubre los pagos hasta el monto límite de cada póliza y compra un reaseguro para responder por los desembolsos superiores al límite.
 - g) **Participación en beneficios:** proporción de las utilidades obtenidas por el reasegurador que este acuerda pagar al asegurador directo por considerar que dichas ganancias son debidas a las estrategias exitosas en la administración y gestión del negocio por parte del asegurador directo.
 - h) **Pleno:** cantidad retenida por el asegurador directo. Un reasegurador puede aceptar uno o más plenos (o una porción de un pleno).
 - i) **Pool:** acuerdo en el que un número de aseguradores decide colocar todas las transacciones de cierta clase (o una selección de todas ellas) en un fondo común y dividir estas transacciones, primas, siniestros, gastos y utilidades en una proporción establecida para dicho fin.
 - j) **Reasegurador:** entidad que acepta el reaseguro del asegurador directo.
 - k) **Reaseguro facultativo:** proceso en el que el reasegurador estudia cada solicitud de reaseguro por separado para aceptarla o rechazarla.
 - l) **Reciprocidad:** transacción ofrecida a una compañía cedente en contra-prestación por la recibida de ella.
 - m) **Retención:** parte del riesgo que el asegurador directo retiene por cuenta propia.
 - n) **Retrocesión:** reaseguro de un reaseguro, que se realiza si el reasegurador desea mitigar sus obligaciones respecto a la transacción aceptada.
 - ñ) **Tratado de reaseguro:** acuerdo por el cual el asegurador directo asume que cede y el reasegurador acuerda que acepta automáticamente todos los reaseguros que caigan dentro de los límites del tratado.

7.2. Clases de contratos de reaseguros

Las modalidades de reaseguro se dividen en 2 categorías:

1. **Contratos de reaseguro de participación de riesgos:** en este, para cada una de las pérdidas, las indemnizaciones por parte del asegurador directo y el reasegurador son proporcionales a unas escalas establecidas

previamente. Hasta tiempos recientes era el único tipo de reaseguro. Estos contratos abarcan facultativo, tratados (cuota y excedente) y *pools*.

2. *Contratos de reaseguro sobre condiciones distintas al contrato inicial*: son conocidos como reaseguro no-proporcional. Incluyen exceso de pérdida, *stop-loss* y otras formas de tratado y de reaseguro facultativo.

7.2.1. Contratos de reaseguro de participación o proporcional

Los reaseguros de participación de riesgos o reaseguros proporcionales abarcan gran parte del mercado reasegurador. En esta clase de contrato se supone lo siguiente:

- Proporción de desembolso: $0 < \alpha < 1$.
- Monto total de la pérdida: $S \sim h_s(s)$.
- Monto reconocido: S_R .

En general, la compañía reconoce una proporción α de los reclamos totales y la compensación del reasegurador es la fracción restante. Luego, el monto reconocido por el reasegurador es $S_R = (1 - \alpha)S$.

7.2.2. Contratos de reaseguros no-proporcionales

Estos tipos de contrato de reaseguro de riesgos, en la actualidad, han tenido una ascendente relevancia. Entre estos se tienen los siguientes:

7.2.2.1. Reaseguro de exceso de pérdida

El principal interés en esta clase de contratos radica en el amparo que se constituye para afrontar siniestros que afectan a conglomerados de retenciones netas de la entidad aseguradora. La característica principal del reaseguro de exceso de pérdida, en cuanto afecta a las partes que lo suscriben (asegurador directo y reasegurador), es que las escalas en que se pacta no están sujetas a los montos retenidos por una o cedidos a la otra, sino por la posibilidad de siniestros de mayor o menor relevancia que se produzcan a efecto de un accidente o conjunto de estos.

El concepto de un seguro con deducible visto en la sección 5.12 permite establecer la prima de este tipo de contrato de reaseguro, también conocido con el nombre de *stop-loss*, el cual está dirigido a pagar el exceso de pérdida (stop) equivalente a δ que se especifica como un deducible conocido.

El monto total reconocido por el reasegurador se efectúa bajo un criterio maximal que se resume como

$$S_R = I_\delta(S) = \frac{\text{máx}\{S - \delta, 0\}}{(S - \delta)_+} = \begin{cases} 0, & \text{si } S \leq \delta \\ S - \delta, & \text{si } S > \delta. \end{cases}$$

En este caso, la variable aleatoria que denota el monto total de siniestros asumidos por el asegurador (reasegurador) se determina como sigue:

Tabla 7.1. Montos asumidos por cada entidad

| Monto total de siniestros (S) | Monto cubierto por | |
|-----------------------------------|--------------------|---------------|
| | Aseguradora | Reaseguradora |
| $0 < S \leq \delta$ | S | 0 |
| $S > \delta$ | δ | $S - \delta$ |

Fuente: adaptada de [156, pág. 16].

Bajo el reaseguro proporcional, como antes se señaló, el asegurador directo desembolsa a su reaseguradora una prima directamente proporcional a la cuantía del negocio que le transfiere a cambio del cubrimiento que este le brinda, pero en el reaseguro de exceso de pérdida la prima que se paga al reasegurador es calculada como un porcentaje del total de las primas concernientes a la cartera que se le brinda el amparo.

De manera análoga a (5.74) se define la *cdf* truncada por la izquierda en δ correspondiente al costo por pago $S_R^P = \{S - \delta | S > \delta\}$ como sigue:

$$\begin{aligned} H_{S_R^P}(y) &= P\{I_\delta(S) | S > \delta\} = P\{S - \delta \leq y | S > \delta\} \\ &= \frac{H_S(y + \delta) - H_S(\delta)}{1 - H_S(\delta)}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Usando la expresión (5.64), el costo esperado por pago está dado por

$$\mathbb{E}[S_R^P] = \frac{1}{1 - H_S(\delta)} \int_\delta^\infty [1 - H_S(y + \delta)] dy = \frac{\mathbb{E}[S] - \mathbb{E}[(S \wedge \delta)]}{1 - H_S(\delta)}, \tag{7.2}$$

donde $(S \wedge \delta) = \text{mín}\{S, \delta\}$. Por otra parte, nótese que el m -ésimo momento de la pérdida limitada cuando S es continua está dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S \wedge \delta)^m] &= \int_{-\infty}^\delta s^m h_S(s) ds + \int_\delta^\infty \delta^m h_S(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^0 s^m d[H_S(s)] + \int_0^\delta s^m d[\overline{H}_S(s)] + \delta^m \overline{H}_S(\delta), \end{aligned} \tag{7.3}$$

y, cuando S es una variable discreta, es

$$\mathbb{E}[(S \wedge \delta)^m] = \sum_{s_i \leq \delta} s_i^m P(S = s_i) + \delta^m [1 - P(S \leq \delta)]. \quad (7.4)$$

Ejemplo 7.1. Una compañía aseguradora expide una póliza colectiva de seguros de vida constituida por 1000 contratos temporales de un año, en las cantidades ilustradas en la siguiente tabla:

Tabla 7.2. Distribución de la póliza colectiva del ejemplo 7.1

| Nivel de riesgo (k) | Número cubierto (n_k) | Probabilidad de reclamo (q_k) | Valor del beneficio (b_k) |
|----------------------------|------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|
| 1 | 500 | 0.025 | 10 000 |
| 2 | 300 | 0.025 | 20 000 |
| 3 | 200 | 0.025 | 40 000 |

Fuente: Elaboración propia.

Suponga que la política de la compañía es retener hasta 20 000. El reaseguro tiene un costo de 3% por unidad transferida (no retenida) por la entidad. Considere el negocio cerrado; es decir, no se incluyen las pólizas nuevas vendidas durante el año. Determine la prima que cobra la compañía, si la estima como

$$\mathcal{P}_I = (1 + \theta)\mathbb{E}(S) + R, \quad (7.5)$$

donde S es la pérdida asociada al nivel de riesgo retenido y R el costo del reaseguro.

Solución. De la política de la compañía de seguros se tiene que esta asumirá el riesgo de los 2 primeros grupos de la población bajo estudio. En el caso de los individuos clasificados en el nivel de riesgo 3, la empresa solo cubrirá los primeros 20 000 y el beneficio restante lo traslada al reaseguro. Los cálculos para la cartera retenida se establecen (en unidades de 1 000) usando (4.15):

Tabla 7.3. Cálculo de media y varianza de los niveles de riesgo

| Nivel (k) | n_k | q_k | b_k | Media | Varianza | Beneficio | |
|------------------|-------|-------|-------|---------------|---------------------|-----------|--------|
| | | | | $b_k n_k q_k$ | $b_k^2 n_k p_k q_k$ | Total | Cedido |
| 1 | 500 | 0.025 | 10 | 125 | 1218.75 | 5000 | 0 |
| 2 | 300 | 0.025 | 20 | 150 | 2925.0 | 6000 | 0 |
| 3 | 200 | 0.025 | 20 | 100 | 1950.0 | 8000 | 4000 |
| Total | | | | 375 | 6093.75 | 19 000 | 4000 |

Fuente: elaboración propia.

Por lo tanto, el coeficiente de variación está dado por

$$CV_s = \frac{\sqrt{\text{Var}(S)}}{\mathbb{E}(S)} = \frac{1}{30} \sqrt{39} \approx 0.20817.$$

Como no se dio la probabilidad, se considera $\alpha = 0.975$ y, buscando en la tabla G.1, se tiene que

$$\theta = z_{0.975} CV_s = 1.96 \frac{1}{30} \sqrt{39} \approx 0.40801.$$

Por otra parte, el costo del reaseguro es $R = 0.03(4\,000) = 120$.

Luego, la prima que cobra la compañía a los individuos afiliados a este plan de beneficios para asumir el riesgo antes descrito se estima en

$$\mathcal{P}_I = (1 + \theta)\mathbb{E}(S) + R = (1.40801)375 + 120 = 648. \quad \checkmark$$

Ejemplo 7.2. [37, pág. 43]

Una compañía aseguradora expide una póliza colectiva de seguros de vida constituida por 16 000 contratos temporales de un año, en las cantidades ilustradas en la siguiente tabla:

Tabla 7.4. Distribución de la póliza colectiva del ejemplo 7.2

| Nivel de riesgo (k) | Número cubierto (n_k) | Probabilidad de reclamo (q_k) | Valor del beneficio (b_k) |
|----------------------------|------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|
| 1 | 8 000 | 0.02 | 10 000 |
| 2 | 3 500 | 0.02 | 20 000 |
| 3 | 2 500 | 0.02 | 30 000 |
| 4 | 1 500 | 0.02 | 50 000 |
| 5 | 500 | 0.02 | 100 000 |

Fuente: tomada de [37, pág. 43].

Considere el negocio cerrado; es decir, no se incluyen las pólizas nuevas vendidas durante el año. Suponga que la política de la entidad aseguradora es colocar un límite de retención de 20 000. El reaseguro tiene un costo de 2.5 % por unidad de cubrimiento y la prima que cobra la compañía se estima usando (7.5). Encuentre la probabilidad de que los reclamos retenidos por la compañía más el costo del reaseguro excedan el monto 8 250 000.

Solución. De la política de la compañía de seguros se tiene que esta asumirá el riesgo de los 2 primeros grupos de la población bajo estudio. En el caso

de los individuos clasificados en el nivel de riesgo 3, la empresa solo cubrirá a los primeros 20 000 y el beneficio restante lo traslada al reaseguro.

Los cálculos para la cartera retenida se establecen (en unidades de 1 000) usando (4.15):

Tabla 7.5. Media y varianza de los 5 niveles de riesgo

| Niveles (k) | n_k | q_k | b_k | Media | Varianza |
|--------------------|-------|-------|-------|---------------|---------------------|
| | | | | $b_k n_k q_k$ | $b_k^2 n_k p_k q_k$ |
| 1 | 8 000 | 0.02 | 10 | 1 600 | 15 680 |
| 2 - 5 | 8 000 | 0.02 | 20 | 3 200 | 62 720 |
| Total | | | | 4 800 | 78 400 |

Fuente: elaboración propia.

Por lo tanto, el coeficiente de variación está dado por

$$CV_s = \frac{\sqrt{78\,400}}{4\,800} = \frac{7}{120} \approx 5.8333 \times 10^{-2}.$$

Como no se dio la probabilidad, se considera $\alpha = 0.975$ y, buscando en la tabla G.1, se obtiene que

$$\theta = z_{0.975} CV_s = 1.96 \left(5.8333 \times 10^{-2} \right) = 0.114333.$$

Por otra parte, se tiene:

- Cubrimiento total en el plan:

$$8000(10) + 3500(20) + 2500(30) + 1500(50) + 500(100) = 350000$$

- Cantidad retenida:

$$8000(10) + 3500(20) + 2500(20) + 1500(20) + 500(20) = 240000$$

- Monto transferido al reasegurador: $350000 - 240000 = 110000$
- Costo del reaseguro: $R = 0.025(110000) = 2750$.

Luego, la prima que cobra la compañía se estima usando (7.5):

$$\mathcal{P}_I = (1.114333)4800 + 2750 = 8098.8$$

Y la probabilidad solicitada es

$$\begin{aligned} P[S + 2750 > 8250] &= P\left[\frac{S - \mu_s}{\sigma_s} > \frac{5500 - 4800}{280} \right] \\ &= 1 - P[Z < 2.5] \approx 0.0062. \end{aligned}$$

Nótese que esta probabilidad es inferior al 1%.



Observaciones

1. Si $S_R = \alpha S + \beta$, $\alpha > 0$, y la retención del reaseguro es δ , entonces

$$\underbrace{\mathbb{E}[(\alpha S + \beta - \delta)_+]} = \alpha \mathbb{E}\left[\left(S - \frac{\delta - \beta}{\alpha}\right)_+\right] \quad (7.6)$$

$$\mathbb{E}[(S_R - \delta)_+] = \alpha \left[\int_{\delta^*}^{\infty} s h_s(s) ds - \delta^* [1 - H_s(\delta^*)] \right], \quad (7.7)$$

donde $\delta^* = \frac{\delta - \beta}{\alpha}$

2. Caso discreto: si δ no es entero, la prima neta por el exceso de pérdida puede ser obtenida mediante interpolación lineal, como sigue

$$\mathbb{E}[I_{\delta+\alpha}(S)] = \alpha \mathbb{E}[I_{\delta+1}(S)] + (1-\alpha) \mathbb{E}[I_{\delta}(S)], \quad 0 < \alpha < 1. \quad (7.8)$$

Al sustituir (5.71), se llega a

$$\mathbb{E}[I_{\delta+\alpha}(S)] = \mathbb{E}[I_{\delta}(S)] - \alpha [1 - H_s(\delta)], \quad \delta = 0, 1, \dots \quad (7.9)$$

Ejemplo 7.3. [123, pág. 67]

Si $S \sim N(\mu, \sigma^2)$, ¿cuál es la prima del contrato de exceso de pérdida para S si la retención es δ ?

Solución. Al estandarizar la variable S mediante la expresión (1.119), se tiene que $S = \mu + \sigma Z$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S - \delta)_+] &= \mathbb{E}[(\sigma Z + \mu - \delta)_+] = \sigma \mathbb{E}\left[\left(Z - \frac{\delta - \mu}{\sigma}\right)_+\right] \\ &= \sigma \left[\int_{\frac{\delta - \mu}{\sigma}}^{\infty} z \varphi(z) dz - \frac{\delta - \mu}{\sigma} \left[1 - \Phi\left(\frac{\delta - \mu}{\sigma}\right)\right] \right] \\ &= \sigma \left(-\varphi(z) \Big|_{\frac{\delta - \mu}{\sigma}}^{\infty} \right) - (\delta - \mu) \left[1 - \Phi\left(\frac{\delta - \mu}{\sigma}\right)\right] \\ &= \sigma \left[\varphi\left(\frac{\mu - \delta}{\sigma}\right) + \frac{\mu - \delta}{\sigma} \Phi\left(\frac{\mu - \delta}{\sigma}\right) \right], \end{aligned}$$

donde $\varphi(\cdot)$ y $\Phi(\cdot)$ denotan la pdf y cdf de una normal estándar, respectivamente. □

Ejemplo 7.4. [37, pág. 446]

Si S tiene distribución gamma con parámetros α y θ , ¿cuál es la prima de exceso de pérdida para S si la retención es δ ?

Solución. Usando la expresión (5.62), se obtiene

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[I_\delta(S)] &= \int_\delta^\infty s h_s(s) ds - \delta [1 - H_s(\delta)] \\
 &= \int_\delta^\infty \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} s^\alpha e^{-\theta s} ds - \delta [1 - H_s(\delta)] \\
 &= \frac{\alpha}{\theta} \int_\delta^\infty \frac{\theta^{\alpha+1}}{\alpha \Gamma(\alpha)} s^\alpha e^{-\theta s} ds - \delta \left[1 - \frac{\gamma(\alpha, \theta \delta)}{\Gamma(\alpha)} \right] \\
 &= \frac{\alpha}{\theta} \left[1 - \frac{\gamma(\alpha + 1, \theta \delta)}{\Gamma(\alpha + 1)} \right] - \delta \left[1 - \frac{\gamma(\alpha, \theta \delta)}{\Gamma(\alpha)} \right], \tag{7.10}
 \end{aligned}$$

donde $\gamma(\alpha, \theta z)$ fue dada en (1.132); es decir,

$$\gamma(\alpha, \theta z) = \int_0^z \theta^\alpha u^{\alpha-1} e^{-\theta u} du. \quad \checkmark$$

7.2.2.2. Reaseguro con límite

En este tipo de contrato de reaseguro las entidades estipulan un límite máximo u sobre las pérdidas y también se considera la retención. Lo cual lleva a que el monto reconocido por el reasegurador sea

$$S_R = \underbrace{\min\{I_\delta(S), u\}}_{I_\delta(S) \wedge u} = \begin{cases} 0, & \text{si } S \leq \delta \\ S - \delta, & \text{si } \delta < S \leq u + \delta \\ u, & \text{si } S > u + \delta. \end{cases}$$

La variable $I_\delta(S) \wedge u$, también se denomina *variable restringida a derecha*. En este caso, la variable aleatoria que denota el monto total de siniestros asumidos por el asegurador (reasegurador) se determina como sigue:

Tabla 7.6. Montos asumidos por cada entidad

| Monto total de siniestros (S) | Monto cubierto por | |
|-----------------------------------|--------------------|---------------|
| | Aseguradora | Reaseguradora |
| $0 < S \leq \delta$ | S | 0 |
| $\delta < S \leq u + \delta$ | δ | $S - \delta$ |
| $S > u + \delta$ | $S - u$ | u |

Fuente: adaptada de [156, pág. 16].

Nótese que este tipo de operación es equivalente algebraicamente a un stop-loss con deducible δ menos un *stop-loss* con deducible $u + \delta$; es decir,

$$S_R = I_\delta(S) - I_{\delta+u}(S). \tag{7.11}$$

Ejemplo 7.5. Suponga que S sigue una *pdf* exponencial de parámetro θ . Si la compañía hace una retención de monto δ y el límite de pérdida es u , determine la prima del reaseguro.

Solución. Usando el principio de equivalencia y la expresión (7.10) para $\alpha = 1$, se tiene que

$$\mathbb{E}[I_\delta(S)] = \frac{1}{\theta} \left[1 - \frac{\gamma(2, \theta\delta)}{\Gamma(2)} \right] - \delta \left[1 - \frac{\gamma(1, \theta\delta)}{\Gamma(1)} \right] = \frac{1}{\theta} e^{-\delta\theta}.$$

Luego, la prima se establece empleando la expresión (7.11):

$$\mathbb{E}[S_R] = \frac{1}{\theta} e^{-\delta\theta} [1 - e^{-\theta u}]. \quad \checkmark$$

7.3. El reaseguro y la teoría de la utilidad

En esta sección, se indica cómo se usa la teoría de la utilidad para determinar el nivel óptimo de retención bajo los reaseguros proporcional y de exceso de pérdida.

Para establecer el valor del reaseguro, el asegurador podría adoptar una función de utilidad y, luego, seleccionar entre todos los reaseguros disponibles el que le produzca la utilidad esperada más alta. Esta aproximación que en concepto es muy simple, no es de uso común en la práctica. Con el propósito de obtener una aproximación se considera que la prima del asegurador, c , tiene un recargo relativo por seguridad θ y por la expresión (6.15), el valor de c es $(1 + \theta)\lambda \mu$. Para un análisis más extenso del reaseguro se define un recargo θ_h del reaseguro mediante la fórmula

$$c_h = (1 + \theta_h)E_h, \quad (7.12)$$

donde el subíndice h indica que se tiene un contrato de reaseguro $h(x)$, c_h es la prima del reaseguro y $E_h = \mathbb{E}[h(X)]$ es el pago esperado del reaseguro. Aquí, la prima c_h es determinada por el reasegurador e incluye provisiones para el pago del reaseguro, gastos, seguridad y ganancias. En particular, para la prima neta por el exceso de reclamo $\mathbb{E}(I_d)$, el recargo $\theta_h = 0$.

En [80] se explora la función de utilidad dada en (5.17) como un método para determinar los recargos de riesgo en el establecimiento de las primas de seguros, es decir, supone que las preferencias del asegurador se pueden describir con una función de utilidad exponencial de parámetro α . La prima c_h se establece resolviendo (5.22), bajo indiferencia al riesgo

$$\mathbb{E}[u(w_I + c - S)] = \mathbb{E}[u(w_I + c - c_h - S_I)],$$

donde w_I es la fortuna del asegurador al comienzo del año y S_I es el monto de los reclamos a cargo del asegurador. Al sustituir (5.19) se tiene que

$$\mathbb{E}\left[\overbrace{u(w_I + c)} + e^{-\alpha(w_I + c)} u(-S)\right] = \mathbb{E}\left[\overbrace{u(w_I + c)} + e^{-\alpha(w_I + c)} u(-c_h - S_I)\right].$$

Luego,

$$\mathbb{E}[u(-S)] = \mathbb{E}[u(-c_h - S_I)] \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - \mathbb{E}(e^{\alpha S})}{\alpha} = \frac{1 - e^{\alpha c_h} \mathbb{E}(e^{\alpha S_I})}{\alpha}.$$

Por lo tanto,

$$c_h = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{\mathbb{E}(e^{\alpha S})}{\mathbb{E}(e^{\alpha S_I})} \right] = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{M_S(\alpha)}{M_{S_I}(\alpha)} \right]. \quad (7.13)$$

Esta expresión, que fue dada en [59], plantea que en este caso el objetivo es encontrar el nivel de retención que maximiza la utilidad esperada del asegurador al final del año, es decir, solo maximizar

$$\mathbb{E}[u(w_I + c - c_h - S_I)].$$

Nuevamente, sustituyendo (5.19) se tiene que

$$u(w_I + c) + e^{-\alpha(w_I + c)} \mathbb{E}[u(-c_h - S_I)].$$

Puesto que w_I y c no dependen del nivel de retención, entonces el objetivo es maximizar

$$-e^{\alpha c_h} \mathbb{E}[e^{\alpha S_I}] \quad \text{o} \quad -e^{\alpha c_h} M_{S_I}(\alpha).$$

Finalmente, se supone que el reclamo total $S_I \sim PC(\lambda)$ y el monto individual X de los reclamos tiene cdf $F_X(\cdot)$, tal que $F_X(0) = 0$. Por la expresión (3.21), el objetivo es minimizar

$$e^{\alpha c_h} M_{S_I}(\alpha) = e^{\alpha c_h} M_N[\ln(M_X(\alpha))] = \exp\{\alpha c_h + \lambda(M_X(\alpha) - 1)\}. \quad (7.14)$$

Ejemplo 7.6. [61, pág. 212]

Un asegurador cede un porcentaje b de todos los riesgos a un reasegurador. La prima anual del reaseguro es determinada por el principio exponencial con parámetro α_h . Supóngase que el reclamo total $S_R \sim PC(\lambda)$ y el monto individual de los reclamos es $(1 - b)X$. Encuentre el valor de b que maximiza la utilidad esperada del asegurador.

Solución. Dado que $S = S_I + S_R$, usando (7.13) se establece la prima del reasegurador como

$$c_h = \frac{1}{\alpha_h} \ln [M_{S_R}(\alpha_h)] = \frac{\lambda}{\alpha_h} \left\{ \mathbb{E}[\exp\{(1 - b)\alpha_h X\}] - 1 \right\}$$

Como $S_I \sim PC(\lambda)$ y el monto individual de los reclamos, $Y = bX$, la expresión (7.14) queda

$$\begin{aligned} e^{\alpha c_h} M_{S_I}(\alpha) &= \exp \left\{ \alpha c_h + \lambda (M_X(b\alpha) - 1) \right\} \\ &= \exp \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{\lambda \alpha}{\alpha_h} e^{(1-b)\alpha_h X} + \lambda e^{b\alpha X} \right] - \frac{\lambda \alpha}{\alpha_h} - \lambda \right\}. \end{aligned}$$

El valor de b que minimiza esta expresión es el mismo valor de b que minimiza $g(b)$ donde

$$g(b) = \mathbb{E} \left[\frac{\lambda \alpha}{\alpha_h} e^{(1-b)\alpha_h X} + \lambda e^{b\alpha X} \right].$$

Nótese que existe un punto crítico cuando

$$g'(b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-b)\alpha_h = b\alpha$$

y como $g''(b) > 0$, se concluye que, el valor de b que maximiza la utilidad esperada del asegurador al final del año es

$$b^* = \frac{\alpha_h}{\alpha_h + \alpha}.$$

Esta expresión coincide con el resultado dado en [59]. Nótese que el nivel óptimo de retención es independiente de la distribución del monto individual de los reclamos y solo depende del parámetro de la función de utilidad del asegurador y del parámetro del principio de la prima del reasegurador.

Puesto que b aumenta (disminuye) a medida que incrementa el coeficiente α_h (α) de aversión al riesgo del reasegurador (asegurador), esto implica que entre más averso al riesgo sea el reasegurador (asegurador), mayor será la prima del reaseguro. Por consiguiente, es lógico que el asegurador retenga una mayor porción del seguro y, por ende, sea menor su participación en cada reclamo. \square

Ejemplo 7.7. [61, pág. 213]

Un asegurador elige el reaseguro de exceso de pérdida, con un nivel de retención u . La prima anual del reaseguro es calculada por el principio del valor esperado, con un cargo relativo por seguridad θ . El reclamo total $S_I \sim PC(\lambda)$ y el monto individual de los reclamos es distribuido como $[X]^u = \min\{X, u\}$, donde X es el monto individual de los reclamos. Determine el valor de u que maximiza la utilidad esperada del asegurador.

Solución. La prima del reasegurador se establece usando (7.12); es decir,

$$c_h = (1 + \theta) \mathbb{E}[I_u(S)] = (1 + \theta) \lambda \int_u^\infty (x - u) f_X(x) dx.$$

Dado que $S_I \sim PC(\lambda)$ y el monto individual de los reclamos, $Y = [X]^u$, la expresión (7.14) queda

$$\begin{aligned} e^{\alpha c_h} M_{S_I}(\alpha) &= \exp \left\{ \alpha c_h + \lambda (M_Y(\alpha) - 1) \right\} \\ &= \exp \left\{ (1 + \theta) \lambda \alpha \int_u^\infty (x - u) f_X(x) dx + \right. \\ &\quad \left. \lambda \left[\int_0^u e^{\alpha x} f_X(x) dx + e^{\alpha u} \bar{F}_X(u) - 1 \right] \right\}, \end{aligned}$$

donde $\bar{F}_X(u) = 1 - F_X(u)$. El valor de u que minimiza esta expresión es el mismo valor de u que minimiza $g(u)$ donde

$$g(u) = \lambda \left[(1 + \theta) \alpha \int_u^\infty (x - u) f_X(x) dx + \int_0^u e^{\alpha x} f_X(x) dx + e^{\alpha u} \bar{F}_X(u) \right]$$

Nótese que

$$\begin{aligned} g'(u) &= \lambda \left[- (1 + \theta) \alpha \int_u^\infty f_X(x) dx + \alpha e^{\alpha u} (1 - F_X(u)) \right] \\ &= \lambda \alpha (1 - F_X(u)) [e^{\alpha u} - (1 + \theta)] \\ &= 0, \quad \text{cuando} \quad e^{\alpha u} = 1 + \theta, \end{aligned}$$

y puesto que $g''(u) > 0$, se concluye que el valor de u que maximiza la utilidad esperada del asegurador al final del año es

$$u^* = \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \theta).$$

En este caso, el nivel óptimo de retención solo depende de los parámetros α y θ , y no de la distribución individual de los reclamos.

Por lo tanto, u^* es una función creciente de θ y decreciente de α . Nótese que, a medida que el costo del reaseguro aumenta, el asegurador retiene una mayor parte de cada reclamo y entre más averso sea él al riesgo, menor será su nivel de retención. \checkmark

7.4. Efecto del reaseguro sobre la probabilidad de ruina

Dado que la compra de un reaseguro es un compromiso entre la ganancia esperada y la seguridad. Una medida particular de la seguridad es la probabilidad de la ruina. Por ejemplo, se podría requerir que la probabilidad de

la ruina no sea mayor que el 1 %. Puesto que solo en casos especiales están disponibles las fórmulas explícitas para la probabilidad de ruina, estas se restringirán a los efectos que varios reaseguros tienen sobre el coeficiente de ajuste. Las afirmaciones sobre el coeficiente de ajuste pueden ser usadas para obtener información de la probabilidad de la ruina. En este momento el nombre *coeficiente de ajuste* revela su significado: si cierto contrato de reaseguro produce un valor de U_h (o \widetilde{U}_h) que no es suficientemente grande, el contrato necesita ser ajustado. El proceso de excedentes dado en (6.1) bajo un contrato de reaseguro queda expresado como

$$U_h(t) = U(0) + (c - c_h)t - S_h(t) \quad (7.15)$$

donde $S_h(t)$ denota los siniestros retenidos. Al considerar el modelo Poisson compuesto de tiempo continuo analizado en el capítulo 3, se supone que las primas del reaseguro se pagan continuamente a la tasa c_h . En este caso, el coeficiente de ajuste, R_h , es la solución no trivial de la ecuación

$$(c - c_h)r_h = \lambda M_{X-h(X)}(r_h) - \lambda. \quad (7.16)$$

Esta ecuación se sigue de (6.93) puesto que el asegurador recibe ahora un ingreso a una tasa neta $c - c_h$ y paga $X - h(X)$ por un reclamo de monto X . Por lo tanto, la ruina no se alcanza si en una unidad de tiempo se tiene que

$$c - c_h > \lambda \mathbb{E}[X - h(X)]. \quad (7.17)$$

7.4.1. Reaseguro proporcional

Para un contrato de reaseguro proporcional, es decir, $h(x) = \alpha x$, usando las propiedades dadas en el teorema 1.9, la ecuación (7.16) queda

$$\begin{aligned} [(1 + \theta) - (1 + \theta_h)\alpha] \lambda \mu_X r_h &= \lambda M_{X-\alpha X}(r_h) - \lambda, \\ [(1 - \alpha)(1 + \theta_h) + (\theta - \theta_h)] \mu_X r_h &= M_X[(1 - \alpha)r_h] - 1. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Cuando $\theta_h = \theta$, se obtiene

$$(1 + \theta)(1 - \alpha)\mu_X r_h = M_X[(1 - \alpha)r_h] - 1. \quad (7.19)$$

Al comparar (7.19) con la ecuación (6.93), se tiene que

$$r = (1 - \alpha)r_h. \quad (7.20)$$

Ejemplo 7.8. [61, pág. 224]

Suponga que el monto individual de los reclamos sigue una pdf exponencial con parámetro β , encuentre la probabilidad de ruina, bajo un reaseguro proporcional de proporción α .

Solución. De acuerdo con el ejemplo (6.7) la probabilidad de ruina es

$$\psi(w) = 1 - \phi(w) = \frac{1}{1 + \theta} \exp \left\{ - \frac{\theta \beta}{1 + \theta} w \right\}.$$

En términos de la prima recaudada, $c = (1 + \theta) \frac{\lambda}{\beta}$, se tiene

$$\psi(w) = \frac{\lambda}{\beta c} \exp \left\{ - \left(\beta - \frac{\lambda}{c} \right) w \right\}.$$

Esta expresión es parecida a la dada en (6.129). Por otra parte, la probabilidad de ruina bajo reaseguro es

$$\psi(w) = \frac{1}{1 + \theta_h} \exp \left\{ - \frac{\theta_h \beta}{1 + \theta_h} w \right\}.$$

En términos de la prima retenida, $c_h = (1 + \theta_h) \frac{\alpha \lambda}{\beta}$, se tiene

$$\psi(w) = \frac{\alpha \lambda}{\beta c_h} \exp \left\{ - \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\lambda}{c_h} \right) w \right\}. \quad \checkmark$$

7.4.1.1. Determinación del coeficiente de ajuste

A continuación, se presentan algunos métodos para determinar la solución de la ecuación (7.18) cuando no se pueda resolver explícitamente.

1. Solución por series de potencia

Para utilizar series de potencias, se emplea la expresión dada para la función generadora de momentos en (1.34) y al reemplazarla en la ecuación (7.18), se tiene

$$[(1 - \alpha) + (\theta - \theta_h \alpha)] \mu_x r_h = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(1 - \alpha) r_h]^k}{k!} \mu'_k(X).$$

Empleando los primeros términos del desarrollo de la serie, se llega a

$$[(1 - \alpha) + (\theta - \theta_h \alpha)] \mu_x r_h > r_h (1 - \alpha) \mu_x + (1 - \alpha)^2 \frac{r_h^2}{2!} \mu'_2(X).$$

Al simplificar

$$(\theta - \theta_h \alpha) r_h \mu_x > \frac{\rho_h^2}{2!} \mu'_2(X) \quad \Rightarrow_{\rho_h \neq 0} R_h < \frac{2 \mu_x}{\mu'_2(X)} \frac{\theta - \theta_h \alpha}{(1 - \alpha)^2}, \quad (7.21)$$

donde $\rho_h = (1 - \alpha)r_h$. Puesto que se busca una raíz positiva de (7.18), se tiene $R_h > 0$, cuando

$$\alpha < \theta_h^{-1}\theta. \quad (7.22)$$

Usando los primeros 4 términos del desarrollo de la serie, se llega a

$$\rho_h \mu_x + (\theta - \theta_h \alpha) \mu_x r_h > \rho_h \mu_x + \frac{\rho_h^2}{2!} \mu'_2(X) + \frac{\rho_h^3}{3!} \mu'_3(X).$$

Al simplificar

$$(\theta - \theta_h \alpha) r_h \mu_x > (1 - \alpha)^2 r_h \left[\frac{r_h}{2} \mu'_2(X) + (1 - \alpha) \frac{r_h^2}{6} \mu'_3(X) \right].$$

Luego, para $r_h \neq 0$ y $\alpha \neq 1$,

$$(1 - \alpha)^3 \mu'_3(X) r_h^2 + 3(1 - \alpha)^2 \mu'_2(X) r_h - 6\mu_x(\theta - \theta_h \alpha) < 0. \quad (7.23)$$

El coeficiente de ajuste corresponde a la raíz positiva; es decir,

$$R_h < \left[\sqrt{1 + \frac{8\mu_x}{3} \frac{\mu'_3(X)}{(\mu'_2(X))^2} \frac{\theta - \alpha\theta_h}{1 - \alpha}} - 1 \right] \left[\frac{2}{3} \frac{\mu'_3(X)}{\mu'_2(X)} (1 - \alpha) \right]^{-1}. \quad (7.24)$$

2. Solución numérica

Para utilizar el método de Newton-Raphson, se define

$$f(r_h) = M_x(\rho_h) - 1 - [(1 - \alpha) + (\theta - \theta_h \alpha)] \mu_x r_h,$$

donde $\rho_h = (1 - \alpha)r_h$. Derivando respecto a r_h , se obtiene

$$f'(r_h) = (1 - \alpha)M'_x(\rho_h) - [(1 - \alpha) + (\theta - \theta_h \alpha)] \mu_x.$$

Por facilidad se supone que $r = r_h$; por lo tanto, para $r_n \neq 0$,

$$r_{n+1} = r_n - \frac{M_x(\rho_n) - 1 - \rho_n \mu_x - (\theta - \theta_h \alpha) \mu_x r_n}{(1 - \alpha)[M'_x(\rho_n) - \mu_x] - (\theta - \theta_h \alpha) \mu_x}. \quad (7.25)$$

Aquí, se utiliza como valor inicial la cota superior obtenida en (7.21); es decir, $r = 2 \frac{\mu_x}{\mu'_2(X)} \frac{\theta - \theta_h \alpha}{(1 - \alpha)^2}$.

Ejemplo 7.9. [83, pág. 175]

Suponga que los reclamos para un proceso Poisson compuesto son dados por $\lambda = 1$, $X \sim U(0, 1)$ y las primas son recaudadas a una tasa $c = 1$. Determine el coeficiente de ajuste si el reaseguro proporcional se contrata en las proporciones $\alpha = \{0, 0.1, 0.2, \dots, 1\}$ y si el recargo por reaseguro es igual a

a) 100 %

y

b) 140 %

Solución. En este caso, de la expresión (7.12), se obtiene

$$c_h = (1 + \theta_h)\mathbb{E}[h(X)] = (1 + \theta_h)\lambda\mathbb{E}(\alpha X) = \frac{1}{2}(1 + \theta_h)\lambda\alpha. \quad (7.26)$$

Luego, $c - c_h = 1 - \frac{1}{2}(1 + \theta_h)\alpha$.

a) Para $\theta_h = 1$, sustituyendo (7.26) en la ecuación (7.18), queda

$$1 + (1 - \alpha)r = M_x((1 - \alpha)r) = \frac{e^{(1-\alpha)r} - 1}{(1 - \alpha)r}. \quad (7.27)$$

Aquí, el recargo por reaseguro ($\theta_h = 1$) coincide con el recargo relativo por seguridad para el asegurador ($\theta = 1$) y, por lo tanto, R es una función creciente de α .

b) Para $\theta_h = 1.4$, sustituyendo (7.26) la ecuación (7.18), queda

$$1 + (1 - 1.2\alpha)r = M_x((1 - \alpha)r) = \frac{e^{(1-\alpha)r} - 1}{(1 - \alpha)r}. \quad (7.28)$$

En esta parte, $\theta_h > \theta$ y por la expresión (7.22) existe una raíz positiva de (7.18) siempre que $\alpha < \frac{1}{1.4} = \frac{5}{7}$. Luego, para $\alpha > \frac{5}{7}$, la ruina es cierta. A continuación, se comparan las soluciones numéricas (7.27) y (7.28).

Tabla 7.7. Coeficiente de ajuste para el reaseguro proporcional

| α | Considerando un recargo θ_h igual a | | | |
|----------|--|-----------|-----------|-----------|
| | 100 % | | 140 % | |
| | $R^{(1)}$ | $R^{(2)}$ | $R^{(1)}$ | $R^{(2)}$ |
| 0.0 | 2.0000 | 1.7933 | 2.0000 | 1.7933 |
| 0.1 | 2.2222 | 1.9925 | 2.1475 | 1.9359 |
| 0.2 | 2.5000 | 2.2416 | 2.3089 | 2.0954 |
| 0.3 | 2.8571 | 2.5618 | 2.4773 | 2.2681 |
| 0.4 | 3.3333 | 2.9888 | 2.6295 | 2.4364 |
| 0.5 | 4.0000 | 3.5866 | 2.6933 | 2.5380 |
| 0.6 | 5.0000 | 4.4832 | 2.4162 | 2.3348 |
| 0.7 | 6.6667 | 5.9776 | 0.6363 | 0.6352 |
| 0.8 | 10.0000 | 8.9664 | – | – |
| 0.9 | 20.0000 | 17.9328 | – | – |
| 1.0 | ∞ | ∞ | – | – |

$R^{(1)}$: la cota superior para R mediante la ecuación (7.24).

$R^{(2)}$: los valores obtenidos usando la expresión (7.25).

Fuente: adaptada de [83, pág. 176].

Para calcular $R^{(2)}$, se utilizó como valor inicial $R^{(1)}$.



7.4.2. Reaseguro de exceso de pérdida

Para un contrato de reaseguro de exceso de pérdida con retención δ ; es decir, $h(x) = I_\delta(x)$ la ecuación (7.16) queda

$$\left[(1 + \theta) \mu_x - (1 + \theta_h) \int_\delta^\infty (x - \delta) f(x) dx \right] \lambda r_h = \lambda M_{X-h(X)}(r_h) - \lambda.$$

Usando la expresión (5.63) y dado que $\lambda > 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} \left[(\theta - \theta_h) \mu_x + (1 + \theta_h) \delta + (1 + \theta_h) \int_0^\delta (x - \delta) f(x) dx \right] r_h = & (M_x(r_h) - 1) \\ & + \int_\delta^\infty (e^{r_h \delta} - e^{r_h x}) f(x) dx \end{aligned} \quad (7.29)$$

Ejemplo 7.10. [61, pág. 224]

Suponga que $S(t) \sim PC(\lambda t)$ y el monto individual de los reclamos sigue una pdf exponencial con parámetro β . Determine el nivel mínimo de retención δ para que el asegurador contrate un reaseguro de exceso de pérdida.

Solución. De acuerdo con la expresión (7.29)

$$\left[\frac{1 + \theta}{\beta} - (1 + \theta_h) \int_\delta^\infty \beta \frac{x - \delta}{e^{\beta x}} dx \right] r_h = \frac{r_h}{\beta - r_h} + \int_\delta^\infty \beta \frac{e^{r_h \delta} - e^{r_h x}}{e^{\beta x}} dx.$$

Después de algunos cálculos y simplificar, se obtiene

$$\left[(1 + \theta) - (1 + \theta_h) e^{-\beta \delta} \right] \frac{r_h}{\beta} = \frac{r_h}{\beta - r_h} [1 - e^{-(\beta - r_h) \delta}], \quad \beta > r_h.$$

De acuerdo con la expresión (7.17) la prima que recauda el asegurador debe ser mayor al pago que espera hacer,

$$\frac{\lambda}{\beta} [(1 + \theta) - (1 + \theta_h) e^{-\beta \delta}] > \frac{\lambda}{\beta} [1 - e^{-\beta \delta}];$$

esto es, $\delta > \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\theta_h}{\theta} \right)$. Luego, el nivel de retención del asegurador debe ser mayor a dicho umbral. □

7.4.2.1. Determinación del coeficiente de ajuste

Ahora se presentan algunos métodos para determinar la solución de la ecuación (7.29) cuando no se pueda resolver explícitamente.

1. Solución por series de potencia

Bajo este método, se determina la función generadora de momentos de $X - h(X)$ y se reemplaza en la ecuación (7.29); es decir,

$$\left[(\theta - \theta_h)\mu_x + (1 + \theta_h)\delta + (1 + \theta_h) \int_0^\delta (x - \delta)f(x) dx \right] r_h = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_h^k}{k!} \mu'_k(X) + \int_\delta^\infty \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_h^k}{k!} (\delta^k - x^k) \right] f(x) dx.$$

Usando los primeros términos del desarrollo de la serie, se llega a

$$\left[(\theta - \theta_h)\mu_x + (1 + \theta_h)\delta + (1 + \theta_h) \int_0^\delta (x - \delta)f(x) dx \right] r_h > r_h \mu_x + \frac{r_h^2}{2!} \mu'_2(X) + r_h \int_\delta^\infty (\delta - x)f(x) dx + \frac{r_h^2}{2!} \int_\delta^\infty (\delta^2 - x^2)f(x) dx.$$

Puesto que $r_h = 0$ es solución de (7.29) y se está buscando otra raíz que sea positiva, al simplificar se llega a

$$(\theta - 1 - \theta_h)\mu_x + (1 + \theta_h)\delta + (1 + \theta_h) \int_0^\delta (x - \delta)f(x) dx > \frac{r_h}{2} \mu'_2(X) - \int_\delta^\infty (x - \delta)f(x) dx - \frac{r_h}{2} \int_\delta^\infty (x^2 - \delta^2)f(x) dx.$$

Agrupando términos se obtiene que

$$\theta \mu_x + \theta_h \left[(\delta - \mu_x) + \int_0^\delta (x - \delta)f(x) dx \right] > \frac{r_h}{2} \left[\int_0^\infty x^2 f(x) dx - \int_\delta^\infty (x^2 - \delta^2)f(x) dx \right].$$

Al despejar se tiene que

$$R < 2 \frac{\theta \mu_x - \theta_h \int_\delta^\infty (x - \delta)f(x) dx}{\delta^2 + \int_0^\delta (x^2 - \delta^2)f(x) dx}. \quad (7.30)$$

2. Solución numérica

Para utilizar el método de Newton-Raphson, se define

$$g(r_h) = -r_h \left[(\theta - \theta_h)\mu_x + (1 + \theta_h)\delta + (1 + \theta_h) \int_0^\delta (x - \delta)f_X(x) dx \right] + M_X(r_h) - 1 + \int_\delta^\infty (e^{r_h \delta} - e^{r_h x})f_X(x) dx.$$

Derivando respecto a r_h , se obtiene

$$g'(r_h) = - \left[(\theta - \theta_h) \mu_x + (1 + \theta_h) \delta + (1 + \theta_h) \int_0^\delta (x - \delta) f_X(x) dx \right] + M'_X(r_h) + \int_\delta^\infty (\delta e^{r_h \delta} - x e^{r_h x}) f_X(x) dx.$$

Para evitar confusión se usa $r_h = r$; por lo tanto, para $r_n \neq 0$,

$$r_{n+1} = r_n - \frac{g(r_n)}{g'(r_n)}. \quad (7.31)$$

Aquí, se utiliza como valor inicial la cota superior dada en (7.30).

Ejemplo 7.11. [83, pág. 176]

Suponga que el asegurador del ejemplo 7.9 compra un reaseguro de exceso de pérdida con valores $\delta = \{0, 0.1, 0.2, \dots, 1\}$. Determine el coeficiente de ajuste si el recargo por reaseguro es igual a

$$a) \quad 100\% \qquad \qquad \qquad y \qquad \qquad \qquad b) \quad 140\%$$

Solución. En este caso, de la expresión (7.12) se obtiene

$$\begin{aligned} c_h &= (1 + \theta_h) \mathbb{E}[h(X)] = (1 + \theta_h) \lambda \int_\delta^1 (x - \delta) dx \\ &= \frac{1 + \theta_h}{2} \lambda (x - \delta)^2 \Big|_{x=\delta}^1 = \frac{1 + \theta_h}{2} \lambda (1 - \delta)^2. \end{aligned} \quad (7.32)$$

a) Para $\theta_h = 1$, sustituyendo (7.32) en la ecuación (7.16), queda

$$\begin{aligned} 1 + \delta(2 - \delta)r &= \int_0^\delta e^{rx} dx + \int_\delta^1 e^{r\delta} dx \\ &= \frac{e^{\delta r} - 1}{r} + (1 - \delta)e^{\delta r}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Aquí, el recargo por reaseguro ($\theta_h = 1$) coincide con el recargo relativo por seguridad para el asegurador ($\theta = 1$) y, por lo tanto, el coeficiente de ajuste se incrementa con el recargo del reaseguro.

b) Para $\theta_h = 1.4$, sustituyendo (7.32) en la ecuación (7.16), queda

$$1 + [1 - 1.2(1 - \delta)^2] r = \frac{e^{\delta r} - 1}{r} + (1 - \delta)e^{\delta r}. \quad (7.34)$$

Puesto que $\theta_h > \theta$, por la expresión (7.17) existe una raíz positiva de (7.16) siempre que

$$1 - 1.2(1 - \delta)^2 > \delta + \int_0^\delta (x - \delta) dx.$$

Al realizar la integral y agrupar términos se obtiene que

$$\frac{7}{10}\delta^2 - \frac{7}{5}\delta + \frac{1}{5} > 0.$$

Luego, para $\delta \notin \left(1 - \frac{1}{7}\sqrt{35}, 1 + \frac{1}{7}\sqrt{35}\right)$, la ruina es cierta.

En la tabla 7.8, se comparan los resultados de (7.33) y (7.34). ☑

Tabla 7.8. Coeficiente de ajuste con reaseguro de exceso de pérdida

| δ | Considerando un recargo θ_h igual a | |
|----------|--|--------|
| | 100 % | 140 % |
| 1.0 | 1.7933 | 1.7933 |
| 0.9 | 1.8328 | 1.8281 |
| 0.8 | 1.9403 | 1.9196 |
| 0.7 | 2.1162 | 2.0618 |
| 0.6 | 2.3784 | 2.2587 |
| 0.5 | 2.7681 | 2.5182 |
| 0.4 | 3.3728 | 2.8402 |
| 0.3 | 4.4003 | 3.1384 |
| 0.2 | 6.4779 | 2.5253 |
| 0.1 | 12.7460 | — |
| 0.0 | ∞ | — |

Fuente: Elaboración propia, adaptada de [83, pág. 177].

Ejemplo 7.12. [83, pág. 177]

Compare los resultados de los ejemplos 7.9 y 7.11 para parejas de valores α y δ tales que los pagos esperados del reasegurador sean los mismos.

Solución. Las primas c_h obtenidas en los ejemplos 7.9 y 7.11, se igualan

$$\frac{1 + \theta_h}{2} \lambda \alpha = \frac{1 + \theta_h}{2} \lambda (1 - \delta)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (1 - \delta)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \delta = 1 - \sqrt{\alpha}.$$

En la siguiente tabla se comparan las soluciones numéricas

Tabla 7.9. Coeficientes de ajustes con pagos iguales del reasegurador

| α | δ | Considerando un recargo por reaseguro θ_h igual a | | | |
|----------|----------|--|----------|--------------|--------|
| | | 100 % | | 140 % | |
| | | Proporcional | Exceso | Proporcional | Exceso |
| 0.00 | 1.0 | 1.7933 | 1.7933 | 1.7933 | 1.7933 |
| 0.01 | 0.9 | 1.8114 | 1.8328 | 1.8068 | 1.8281 |
| 0.04 | 0.8 | 1.8680 | 1.9403 | 1.8483 | 1.9196 |
| 0.09 | 0.7 | 1.9706 | 2.1162 | 1.9208 | 2.0618 |
| 0.16 | 0.6 | 2.1349 | 2.3784 | 2.0297 | 2.2587 |
| 0.25 | 0.5 | 2.3910 | 2.7681 | 2.1807 | 2.5182 |
| 0.36 | 0.4 | 2.8020 | 3.3728 | 2.3719 | 2.8402 |
| 0.49 | 0.3 | 3.5162 | 4.4003 | 2.5349 | 3.1384 |
| 0.64 | 0.2 | 4.9813 | 6.4779 | 1.9922 | 2.5253 |
| 0.81 | 0.1 | 9.4383 | 12.7460 | — | — |
| 1.00 | 0.0 | ∞ | ∞ | — | — |

Fuente: adaptada de [83, pág. 178].

El coeficiente de ajuste del reaseguro de exceso de pérdida es mayor que el calculado para el reaseguro proporcional. ☑

7.5. Coaseguro

En este tipo de contrato la entidad de seguros paga una proporción κ de la pérdida y el titular de la póliza paga la porción restante. La proporción κ , es llamada *factor del coaseguro* o *factor de proporcionalidad*, el cual se paga después de que se han aplicado los otros rubros (tales como deducibles o límites). Algunas veces la palabra *coaseguro* se refiere a la proporción que paga el titular de la póliza.

Si el coaseguro es el único rubro, la variable aleatoria S , que denota la pérdida total, se cambia por la variable aleatoria, $Y = \kappa S$, que indica la pérdida cubierta por el asegurador. Cuando se presentan los rubros, se tiene la siguiente generalización de la pérdida cubierta por el asegurador:

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{si } S < \delta \\ \kappa(S - \delta), & \text{si } \delta \leq S < u \\ \kappa(u - \delta), & \text{si } S \geq u. \end{cases} \quad (7.35)$$

La cantidad $\kappa(u - \delta)$ es el beneficio máximo que se paga y, por ello, se llama el *límite de la póliza*. La cantidad u denota la pérdida máxima cubierta; esto es, u es la pérdida por encima de la cual ningún beneficio adicional se paga. La variable aleatoria costo por pago, Y^P , no está definida para $S < \delta$.

Los resultados anteriores se pueden combinar para obtener el costo esperado por pérdida como sigue:

$$\mathbb{E}[Y] = \kappa [\mathbb{E}(S \wedge u) - \mathbb{E}(S \wedge \delta)]. \quad (7.36)$$

Luego, el respectivo costo esperado por pago está dado por

$$\mathbb{E}[Y^P] = \frac{\mathbb{E}[Y]}{1 - H_s(\delta)}. \quad (7.37)$$

Los segundos momentos de las variables que representan la pérdida y el pago están dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y^2] = & \kappa^2 [\mathbb{E}[(S \wedge u)^2] - \mathbb{E}[(S \wedge \delta)^2] \\ & - 2\delta [\mathbb{E}(S \wedge u) - \mathbb{E}(S \wedge \delta)]] \end{aligned} \quad (7.38)$$

y

$$\mathbb{E}[(Y^P)^2] = \frac{\mathbb{E}[Y^2]}{1 - H_s(\delta)}. \quad (7.39)$$

Ejemplo 7.13. [127, pág. 138]

Suponga que la pérdida B sigue la pdf dada en el ejemplo 5.22, determine la varianza del costo esperado por pérdida, si el contrato tiene un deducible de 50 y un límite de póliza de 250. Nótese que la pérdida máxima cubierta es 300.

Solución. Usando la expresión (7.3), para $k = 1, 2$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S \wedge u)] &= \int_0^u s h_s(s) ds + u [1 - H_s(u)] \\ &= \int_0^u [1 - H_s(s)] ds = \frac{\beta}{\alpha - 1} \left[1 - \left(\frac{\beta}{\beta + u} \right)^{\alpha - 1} \right] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S \wedge u)^2] &= \int_0^u s^2 h_s(s) ds + u^2 [1 - H_s(u)] \\ &= 2 \int_0^u s [1 - H_s(s)] ds \\ &= \beta^2 \left(\frac{u}{\beta + u} \right)^\alpha + u^2 \left(\frac{\beta}{\beta + u} \right)^\alpha. \end{aligned}$$

Al reemplazar los valores de α y β dados en el ejemplo 5.22, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S \wedge 50) &= 36 & \mathbb{E}(S \wedge 300) &= 84 \\ \mathbb{E}\left[(S \wedge 50)^2\right] &= 1600 & \mathbb{E}\left[(S \wedge 300)^2\right] &= 14400. \end{aligned}$$

Tomando $\kappa = 1$ en las fórmulas (7.36) y (7.38) se obtiene

$$\mathbb{E}(Y) = 48 \quad \text{y} \quad \mathbb{E}(Y^2) = 8000$$

Por lo tanto, $\text{Var}(Y) = 5696$. ☑

7.6. Ejercicios

7.1 Suponiendo que los posibles reclamos son enteros, muestre que

$$\mathbb{E}(I_\delta^2(S)) = \mathbb{E}(I_{\delta-1}^2(S)) - 2\mathbb{E}(I_{\delta-1}(S)) + 1 - H_s(\delta - 1)$$

7.2 Si $S \sim PC(4)$, $p(1) = \frac{5}{6}$ y $p(2) = \frac{1}{6}$, encuentre $\mathbb{E}[I_2(S)]$.

7.3 Un asegurador ampara una cartera de 5 pólizas de seguros de vigencia anual por monto de 1000 cada una. Las probabilidades de deceso son todas iguales a 0.16. Si el asegurador reasegura el exceso de pérdida con una retención de 1, encuentre la prima pura que él debe pagar.

7.4 Un reasegurador paga el monto de los reclamos en exceso de δ y en compensación recibe la prima por el exceso de pérdida

$$\mathbb{E}[(S - \delta)_+] = \begin{cases} 14 & \text{si } \delta = 100, \\ 10 & \text{si } \delta = 120. \end{cases}$$

Además, $P[80 < S \leq 120] = 0$. Determine la probabilidad de que el monto total de los reclamos sea menor o igual que 80.

7.5 Suponga que el número de reclamos sigue una pmf binomial con parámetros 6 y 0.2. El monto individual de los reclamos sigue una pdf exponencial de media 2. Considere un deducible de 2. Encuentre la probabilidad de que el reasegurador pague 2 reclamos.

7.6 Suponga que el número de reclamos sigue una pmf geométrica con parámetro $\frac{3}{10}$. El monto individual de los reclamos sigue una pmf binomial con parámetro 4 y $\frac{1}{3}$. Considere un deducible de 1. Encuentre la probabilidad de que el reasegurador pague máximo un reclamo.

7.7 Suponga que $S \sim PC(3)$ y el monto individual de los reclamos sigue una pdf de Pareto $(3, 9)$. El asegurador de este riesgo reasegura el exceso de pérdida con un nivel de retención de 3. Encuentre la probabilidad de que el monto de los reclamos, pagados por el asegurador sea menor que 15. Use la aproximación normal.

7.8 Considere que $S \sim PC(\lambda)$ y los montos de los reclamos individuales siguen una pdf exponencial con parámetro β . Suponga que la función de utilidad que describe las preferencias del asegurador es exponencial de parámetro α y se elige el tipo de reaseguro:

- a) Proporcional, cuya prima es calculada según el principio del valor esperado con un cargo relativo por seguridad θ_h . Muestre que el porcentaje retenido por el asegurador y que maximiza su utilidad esperada es

$$\alpha^* = \frac{\beta}{\alpha} \left[1 - (1 + \theta_h)^{-\frac{1}{2}} \right].$$

- b) Exceso de pérdida, cuya prima es calculada según el principio de la varianza con parámetro θ . Muestre que el nivel de retención del asegurador que maximiza su utilidad esperada es

$$\delta^* = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{2\theta}{\beta} \right).$$

- c) Exceso de pérdida con un nivel de retención δ y la prima se calcula por el principio de Esscher con parámetro $\tilde{\theta} < \beta$.
- i) Muestre que la prima del reaseguro es

$$c_h = \frac{\lambda \beta e^{-\beta \delta}}{(\beta - \tilde{\theta})^2}.$$

- ii) Si δ^* es el nivel de retención que maximiza la utilidad esperada del asegurador con $0 < \alpha < \beta$. Muestre que,

$$\delta^* = \frac{2}{\alpha} \ln \left(\frac{\beta}{\beta - \tilde{\theta}} \right).$$

7.9 Suponga que $S(t) \sim PC(\lambda t)$ y los montos de los reclamos individuales siguen una pdf $\Gamma(2; 0.1)$. El asegurador calcula la prima del riesgo con un factor de cargo del 30% y elige el reaseguro proporcional. El asegurador tiene la posibilidad de retener el 40% o el 80% de cada reclamo y, en cada caso, la prima del reaseguro es calculada con un factor de cargo del 40%. ¿Qué nivel de retención debe elegir el asegurador?

- 7.10 Considere que $S(t) \sim PC(\lambda t)$ y los montos de los reclamos individuales tienen pdf exponencial con parámetro 0.3. El cargo relativo por seguridad del asegurador es 30 %. El asegurador de este riesgo elige el reaseguro proporcional y el cargo relativo por seguridad del reaseguro es 0.40. Determine el coeficiente de ajuste del proceso de reaseguro.
- 7.11 Suponga que $S(t) \sim PC(\lambda t)$ y los montos de los reclamos individuales siguen una pdf $\chi_{(4)}^2$. El cargo relativo por seguridad del asegurador es del 30 %. Un reasegurador acepta el riesgo sobre el 35 % de cada reclamo por una prima del 150 % del monto esperado de los reclamos reasegurados. Encuentre el coeficiente de ajuste.
- 7.12 Considere que $S(t) \sim PC(\lambda t)$ y los montos de los reclamos individuales siguen una pdf uniforme sobre el intervalo $[0, 2]$. El cargo relativo por seguridad es del 100 %. El asegurador compra un reaseguro proporcional donde el reasegurador paga el 100 % de cada reclamo individual. El reasegurador tiene un cargo relativo por seguridad del 100 %. Determine el coeficiente de ajuste del proceso de reaseguro.
- 7.13 Suponga que $S(t) \sim PC(\lambda t)$ y los montos de los reclamos individuales siguen una pdf exponencial con media 1. El cargo relativo por seguridad es del 54 %. El asegurador reasegura el exceso de pérdida con un deducible de 1.40. El reasegurador tiene un cargo relativo por seguridad del 100 %. Encuentre el coeficiente de ajuste con reaseguro.
- 7.14 Considere que $S(t) \sim PC(\lambda t)$ y los montos de los reclamos individuales siguen una pdf exponencial de media 5. Sin reaseguro, la pérdida total máxima esperada es 10. El asegurador elige el reaseguro proporcional y el cargo relativo por seguridad del 85 %. Encuentre el valor mínimo de la pérdida total máxima esperada.
- 7.15 Suponga que $S(t) \sim PC(\lambda t)$ y los montos de los reclamos individuales siguen una pdf exponencial con parámetro β . La probabilidad de la ruina sin reaseguro y con un cargo relativo por seguridad del 50 % es 0.40. El asegurador reasegura el 55 % de su deuda. Encuentre la probabilidad de la ruina con reaseguro.

Capítulo
ocho
Selección de
carteras

Actualmente, el trabajo desarrollado en [55] ha atraído el interés de economistas y financieros porque, entre otros motivos, al explorar este artículo se encuentran con que muchos de los conceptos que se exponen son fundamentos teóricos de la economía financiera. Por este trabajo de 1940 De Finetti puede ser considerado uno de los pioneros de la teoría de la cartera.

Acerca de este folleto (ide 88 páginas!) todavía no hay un consenso unificado sobre cuál es la traducción más apropiada del título. Ha sido traducido como “El problema de los riesgos totales en seguros”, pero también podría ser “El problema de los niveles óptimos de retención en reaseguro proporcional”. El artículo de De Finetti fue el resultado de un concurso realizado para determinar “la suma máxima que una compañía de seguros retiene en su exposición al riesgo” y fue postulado para publicación en diciembre de 1938.

Para De Finetti, en su artículo [55], “se evalúan los distintos aspectos del problema de los riesgos debido al cubrimiento de una cartera de seguros [para] así optimizar las proporciones de retención, es decir, estudiar los métodos más eficientes para reasegurar una parte de tales seguros de tal manera que se disminuya el riesgo dentro de los límites establecidos, mientras se minimiza la pérdida de beneficios. Los distintos planteamientos que se consideran son: el riesgo dentro de un mismo periodo contable (cap. i), el riesgo de toda la cartera existente (cap. ii), el riesgo asociado con todo el desarrollo futuro de la empresa (cap. iii). Algunos comentarios finales que resultan del estudio (cap. iv)”.

Por otra parte, en [135] y [136], se introdujo un modelo de selección de carteras que llegó a ser conocido como *la teoría moderna de cartera (modern portfolio theory (MPT))*. En esta teoría, se supone que las rentabilidades esperadas de los activos de la cartera tienen una distribución normal multivariada, hipótesis análoga a las otras teorías que constituyen los fundamentos de las matemáticas financieras tradicionales. Este supuesto es una aproximación inicial que conduce a teorías analíticamente sencillas. La optimización de las carteras de inversión en el contexto media-varianza, en un sentido extenso, se ha convertido en uno de los instrumentos más utilizados en la toma de decisiones financieras de inversión y financiación. En esta se buscan las carteras que generan un mayor rendimiento que el mínimo que un inversor puede aceptar; es decir, el inversor puede seleccionar:

1. Un nivel de riesgo (volatilidad), según su aversión a este y buscar la cartera que mayor rentabilidad le ofrezca.
2. Una rentabilidad esperada y hallar la cartera que minimice el riesgo.

La cartera de varianza mínima global (**GMVP**) es de interés particular, porque los pesos o ponderaciones de los activos se establecen a partir de la matriz

de varianza-covarianza. Las referencias empleadas en la elaboración de este capítulo fueron [134, cap. 5] y [166, cap. 5].

8.1. El modelo de media-varianza

En esta sección, se plantea el problema de programación cuadrática de selección de carteras; para ello, se hace uso de algunos conceptos de formas cuadráticas (ver apéndice E).

Un supuesto fundamental de la **MPT** es que los inversores buscarán maximizar una función de utilidad asociada a los factores: media y varianza de los retornos de su cartera. Además, se considera que la **epdf** de los retornos de los activos queda determinada por sus 2 primeros momentos y se generan las carteras eficientes (combinaciones óptimas de riesgo y retorno) resolviendo un problema clásico de programación cuadrática. Sin embargo, hay que tener en cuenta que estamos en el presente y que las ganancias o pérdidas se verán en el futuro; luego, existe un riesgo al realizar este tipo de inversiones.

En el enfoque de media-varianza, si un inversor debe escoger entre 2 activos disponibles, entonces preferirá:

1. El de mayor retorno esperado si ambos tienen el mismo riesgo.
2. El de menor riesgo si ambos brindan el mismo retorno esperado.

Bajo este contexto se consideran 2 supuestos:

1. El inversor posee una función de utilidad cuadrática
2. La **epdf** de los rendimientos es normal.

La serie de tiempo de los rendimientos para cada activo, a partir de los precios de estos, se establece usando crecimientos:

- Absolutos: la rentabilidad para el periodo t se obtiene como

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_0} \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (8.1)$$

donde P_0 es fijo para toda la serie de tiempo.

- Aritmético: en el cual la rentabilidad es evaluada a partir de un proceso de capitalización compuesta

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (8.2)$$

El procedimiento es análogo al de crecimientos relativos, solo que ahora el denominador no es fijo, sino que cambia.

- Logarítmicos: la rentabilidad para el periodo t se consigue suponiendo un proceso de capitalización continua

$$R_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (8.3)$$

Definición 8.1. Cartera eficiente

Una cartera es eficiente en el contexto media-varianza si, para una combinación óptima de rentabilidad-riesgo, se satisface que:

1. Dada una rentabilidad esperada fija, el riesgo asociado es el menor de todas las posibles carteras que ofrecen la misma rentabilidad.
2. Dado un riesgo fijo, la rentabilidad esperada es la máxima de todas las posibles carteras con el mismo riesgo.

La composición de todas las carteras eficientes se denomina frontera eficiente.

Definición 8.2. Cartera óptima

Es aquella cartera eficiente que mejor se ajusta a las preferencias y conveniencias del inversor. Es decir, dentro de las combinaciones de mayor rentabilidad y menor riesgo, se supone que el inversor escoge aquella combinación que, de acuerdo con su perfil de riesgo, le ofrezca más utilidad.

8.2. Cartera de 2 activos inciertos en el contexto media-varianza

Puesto que una cartera de 2 activos financieros es constituida por una combinación entre ellos, este problema es análogo al de elegir una cartera óptima entre una colección de carteras factibles. Esta técnica comúnmente se denomina el *problema de selección de carteras*.

Supóngase que solo se tienen 2 activos inciertos, X_1 y X_2 , con vectores de rendimientos \vec{r}_1 y \vec{r}_2 . Luego, la descomposición de Cholesky de la matriz de varianza-covarianza de los rendimientos está dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \rho\sigma_2 \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 \end{bmatrix}, \quad (8.4)$$

donde $|\rho| \leq 1$. Si $\rho \neq \{-1, 1\}$, entonces $\det(\Sigma) \neq 0$. Sea $\vec{w}_c^t = [\omega_1 \ \omega_2]$ el vector de pesos o ponderaciones de cada activo en la **GMVP**, que resuelve el siguiente problema de programación cuadrática:

$$\min_{\vec{w}_c} \sigma_c^2 = \min_{\vec{w}_c} \vec{w}_c^t \Sigma \vec{w}_c, \quad \text{sujeto a} \quad \vec{w}_c^t \mathbf{1}_2 = \mathbf{1}_2^t \vec{w}_c = 1, \quad (8.5)$$

donde $\mathbf{1}_2$ es un vector columna de unos de tamaño 2×1 . Para resolver este problema, se establece la función lagrangiana como sigue:

$$\mathcal{L} = \sigma_c^2 - 2\delta(\vec{w}_c^t \mathbf{1}_2 - 1),$$

donde $\delta \in \mathbb{R}$ es el respectivo multiplicador de Lagrange. Luego, las condiciones de primer orden (CPO) están dadas por

$$\frac{\partial}{\partial \vec{w}_c} \mathcal{L} = 2\Sigma \vec{w}_c - 2\delta \mathbf{1}_2 = \vec{0} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \delta} \mathcal{L} = \mathbf{1}_2^t \vec{w}_c - 1 = 0.$$

Expresando este sistema de ecuaciones en forma matricial, queda

$$\begin{bmatrix} \Sigma & -\mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{w}_c \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8.6)$$

Al sustituir Σ en la expresión (8.6), se llega a

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & -1 \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (8.7)$$

donde $\sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2$. Al resolver este sistema se obtiene

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & -1 \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 - \sigma_{12} \\ \sigma_1^2 - \sigma_{12} \\ (1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2 \end{bmatrix}. \quad (8.8)$$

Luego, las ponderaciones que minimizan la **GMVP** son

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 - \sigma_{12} \\ \sigma_1^2 - \sigma_{12} \end{bmatrix},$$

con $-1 < \rho < 1$. Nótese que si $\sigma_1 = \sigma_2$, entonces las ponderaciones son iguales. Por otra parte, para $|\rho| < 1$ el riesgo de la **GMVP** es

$$\underbrace{\vec{w}_c^t \Sigma \vec{w}_c}_{\delta} = \frac{(1 - \rho)(1 + \rho)\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} = \frac{(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_{12})(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_{12})}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}.$$

1. Para el caso $\rho = 1$ la descomposición dada en (8.4) para la matriz Σ queda

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

y la solución del sistema dado en (8.8) está dada por

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \delta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \begin{bmatrix} (\sigma_2 - \sigma_1)\sigma_2 \\ (\sigma_1 - \sigma_2)\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} \\ -\frac{\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } \sigma_1 \neq \sigma_2.$$

Bajo esta estrategia de inversión se obtiene una venta en corto¹ y, en este caso, el riesgo de la cartera resultante es 0.

2. Cuando $\rho = -1$ la descomposición dada en (8.4) para la matriz Σ queda

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ -\sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & -\sigma_2 \end{bmatrix}.$$

La solución del sistema dado en (8.8) está dada por

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \delta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_1^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \begin{bmatrix} (\sigma_2 + \sigma_1)\sigma_2 \\ (\sigma_1 + \sigma_2)\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aunque no se obtienen ventas en corto, de nuevo se concluye que con esta estrategia el riesgo de la cartera resultante es nulo.

8.2.1. Cartera con rentabilidad preestablecida

En este caso, se supone que a los inversores solo les interesa la rentabilidad esperada (*su media*) y la varianza de dichos rendimientos (*riesgo*). Considérese de nuevo 2 activos inciertos con rentabilidades esperadas $\mu_1 = \mathbb{E}(\vec{r}_1)$ y $\mu_2 = \mathbb{E}(\vec{r}_2)$, tal que $\mu_1 \neq \mu_2$, y una rentabilidad mínima esperada de la inversión $\tilde{E} = \mathbb{E}(R_c)$. Luego, el problema es el siguiente:

$$\min_{\vec{w}_c} \sigma_c^2 = \min_{\vec{w}_c} \vec{w}_c^t \Sigma \vec{w}_c. \quad (8.9)$$

Pero sujeto a las condiciones

$$\vec{w}_c^t \mathbb{E}(\vec{r}) = \mathbb{E}(\vec{r})^t \vec{w}_c = \tilde{E} \quad \text{y} \quad \vec{w}_c^t \mathbf{1}_2 = \mathbf{1}_2^t \vec{w}_c = 1,$$

donde $\mathbb{E}(\vec{r}) = [\mu_1 \ \mu_2]^t$ es el vector de rendimientos esperados y $\vec{w}_c \in \mathbb{R}^2$ denota el vector de ponderaciones. En forma matricial, se tiene que

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}(\vec{r})^t \\ \mathbf{1}_2^t \end{bmatrix} \vec{w}_c = \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_{12}^t \vec{w}_c = \vec{R}. \quad (8.10)$$

¹Es una transacción en la que el inversor le cede acciones a su agente de bolsa para ser vendidas de inmediato y espera una caída en los precios para comprarlas de nuevo en el mercado y devolverlas, de tal modo que se beneficia de la diferencia entre el precio de venta original y el de compra final.

Al establecer la función lagrangiana, se obtiene

$$L = \tilde{w}_c^t \Sigma \tilde{w}_c - 2\tilde{\delta}^t (\mathbf{V}_{12}^t \tilde{w}_c - \tilde{R}),$$

donde $\tilde{\delta} = [\delta_1 \ \delta_2]^t$, ($\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$), es el correspondiente vector multiplicador de Lagrange. Las CPO estándar para un punto crítico son

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{w}_c} L = 2\Sigma \tilde{w}_c - 2\mathbf{V}_{12} \tilde{\delta} = \vec{0} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{\delta}} L = -2(\mathbf{V}_{12}^t \tilde{w}_c - \tilde{R}) = \vec{0}. \quad (8.11)$$

Expresando estas CPO en forma matricial quedan:

$$\begin{bmatrix} \Sigma & -\mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{12}^t & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_c \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \tilde{R} \end{bmatrix}. \quad (8.12)$$

Reemplazando las respectivas matrices, se tiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 & -\mu_1 & -1 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & -\mu_2 & -1 \\ \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{E} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si $\det(\Sigma) \neq 0$ y $\det(\mathbf{V}_{12}^t \Sigma^{-1} \mathbf{V}_{12}) \neq 0$, la solución del sistema (8.12) está dada por

$$\begin{bmatrix} \tilde{w}_c \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & (\mathbf{V}_{12}^t)^{-1} \\ -\mathbf{V}_{12}^{-1} & (\mathbf{V}_{12}^t \Sigma^{-1} \mathbf{V}_{12})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \tilde{R} \end{bmatrix}.$$

Al reemplazar las respectivas matrices, se obtiene

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{E} - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \\ \frac{\mu_1 - \tilde{E}}{\mu_1 - \mu_2} \\ \frac{\tilde{E} - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \frac{\sigma_1 - \rho\sigma_2}{\mu_1 - \mu_2} \sigma_1 - \frac{\mu_1 - \tilde{E}}{\mu_1 - \mu_2} \frac{\sigma_2 - \rho\sigma_1}{\mu_1 - \mu_2} \sigma_2 \\ \frac{\tilde{E} - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \frac{\rho\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1}{\mu_1 - \mu_2} \sigma_1 - \frac{\mu_1 - \tilde{E}}{\mu_1 - \mu_2} \frac{\rho\mu_2\sigma_1 - \mu_1\sigma_2}{\mu_1 - \mu_2} \sigma_2 \end{bmatrix};$$

es decir, el vector de ponderaciones está dado por

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{V}_{12}^t)^{-1} \tilde{R} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \begin{bmatrix} \tilde{E} - \mu_2 \\ \mu_1 - \tilde{E} \end{bmatrix}.$$

Estas ponderaciones son funciones de las rentabilidades de los activos y son positivas cuando $\mu_1 < \tilde{E} \leq \mu_2$ o $\mu_2 < \tilde{E} \leq \mu_1$. En los siguientes casos $\mu_1 < \mu_2 < \tilde{E}$ o $\mu_2 < \mu_1 < \tilde{E}$ se tienen ventas en corto.

Por otra parte, si $\mu_2 \neq \mu_1$ los multiplicadores de Lagrange quedan

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{V}_{12}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \vec{w}_c = \begin{bmatrix} \mu_1 & 1 \\ \mu_2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tilde{E} - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \\ \frac{\mu_1 - \tilde{E}}{\mu_1 - \mu_2} \end{bmatrix};$$

es decir, son combinaciones del vector de ponderaciones. El riesgo asociado a la **GMVP** es

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 &= \begin{bmatrix} \frac{\tilde{E} - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} & \frac{\mu_1 - \tilde{E}}{\mu_1 - \mu_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tilde{E} - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \\ \frac{\mu_1 - \tilde{E}}{\mu_1 - \mu_2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)^2} \begin{bmatrix} \tilde{E} - \mu_2 & \mu_1 - \tilde{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E} - \mu_2 \\ \mu_1 - \tilde{E} \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\mu_1 - \mu_2} \right)^2 \begin{bmatrix} \frac{\tilde{E} - \mu_2}{\sigma_2} & \frac{\mu_1 - \tilde{E}}{\sigma_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tilde{E} - \mu_2}{\sigma_2} \\ \frac{\mu_1 - \tilde{E}}{\sigma_1} \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\mu_1 - \mu_2} \right)^2 \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\theta_j = \frac{\mu_j - \tilde{E}}{\sigma_j} \quad j = 1, 2. \quad (8.13)$$

Cuando \tilde{E} es igual a la rentabilidad del activo libre de riesgo, R_f , el cociente anterior se denomina *precio de riesgo* del j -ésimo activo o el *índice de Sharpe* del j -ésimo activo (ver [186]). Este índice denota el cociente entre la prima esperada de riesgo del j -ésimo activo, $\mu_j - R_f$, y la desviación estándar de la prima de riesgo², $\sigma_j = \sqrt{\text{Var}(\tilde{r}_j - R_f \mathbf{1}_m)}$ con $j = 1, 2, \dots, m$.

8.3. Formulación general de la teoría de carteras

En esta sección, se considera que existen m activos riesgosos que se negocian en un mercado financiero, con precios $p_{10}, p_{20}, \dots, p_{m0} > 0$ en el instante inicial $t = 0$. Los precios de estos activos riesgosos en el tiempo final $t = T$, $p_{1T}, p_{2T}, \dots, p_{mT}$, no son previsible. Los precios se modelan como variables

²Retorno adicional esperado por realizar una inversión riesgosa en vez de una inversión segura o libre de riesgo.

aleatorias no negativas. De acuerdo con (8.2), el vector de rentabilidades del i -ésimo activo se establece como

$$r_{it} = \ln \left(\frac{p_{it}}{P_{i,t-1}} \right) \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Sea $\mathbf{X} = [\vec{r}_1 \quad \vec{r}_2 \quad \dots \quad \vec{r}_m]$ la matriz de rentabilidades de tamaño $T \times m$. Entonces

- $\mathbb{E}[\mathbf{X}]$ es el vector de los rendimientos esperados de los activos de tamaño $m \times 1$.
- $\mathbf{\Sigma} = \text{Var}(\mathbf{X})$ es la matriz de varianza-covarianza de los rendimientos de los activos de tamaño $m \times m$.

Supóngase que ninguna rentabilidad es expresada como una combinación lineal de las otras rentabilidades, entonces la matriz de varianza-covarianza de las rentabilidades, $\mathbf{\Sigma} = [\sigma_{ij}]$, es no singular. La frontera de todas las carteras factibles que se construyen con estos m activos se define como el lugar de carteras factibles que tienen la variación más pequeña para una rentabilidad esperada prescrita. Sean $w_i \{i = 1, \dots, m\}$ constantes que determinan la ponderación de cada activo dentro de la cartera de tal forma que $\sum_{i=1}^m w_i = 1$; es decir, w_i denota la proporción de riqueza invertida en el i -ésimo activo. No se consideran ventas en corto y, por lo tanto, el rango de valores permitido para cada w_i se restringe al intervalo $[0, 1]$.

Dada la matriz de varianza-covarianza $\mathbf{\Sigma}$, la **GMVP** es la cartera con ponderaciones $\vec{w} = [w_i]$ que soluciona el siguiente problema de programación cuadrática:

$$\min_{\vec{w}_c} \sigma_c^2 = \min_{\vec{w}_c} \vec{w}_c^t \mathbf{\Sigma} \vec{w}_c, \quad \text{sujeto a} \quad \vec{w}_c^t \mathbf{1}_m = \mathbf{1}_m^t \vec{w}_c = 1, \quad (8.14)$$

donde $\mathbf{1}_m$ es un vector columna de unos de tamaño $m \times 1$, \vec{w} es el vector columna de tamaño $m \times 1$ cuyos elementos son las ponderaciones de la cartera. Al formar la función lagrangiana se tiene

$$\mathcal{L} = \sigma_c^2 - 2\delta(\vec{w}^t \mathbf{1}_m - 1),$$

con $\delta \in \mathbb{R}$ el respectivo multiplicador de Lagrange. Luego, se obtienen las siguientes CPO:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{w}_c} \mathcal{L} = 2\mathbf{\Sigma} \vec{w}_c - 2\delta \mathbf{1}_m = \vec{0} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \delta} \mathcal{L} = \mathbf{1}_m^t \vec{w}_c - 1 = 0.$$

Expresando estas CPO en forma matricial quedan

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & -\mathbf{1}_m \\ \mathbf{1}_m^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{w}_c \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8.15)$$

Si $\det(\boldsymbol{\Sigma}) \neq 0$, entonces la solución está dada por

$$\begin{bmatrix} \vec{w}_c \\ \delta \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathbf{1}_m^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_m} \begin{bmatrix} (\mathbf{1}_m^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_m) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{J}_m \boldsymbol{\Sigma}^{-1} & \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_m \\ -\mathbf{1}_m^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{J}_m = \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^t$, es una matriz de unos de tamaño $m \times m$; por lo tanto,

$$\vec{w} = \delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_m \quad \text{y} \quad \delta = (\mathbf{1}_m^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_m)^{-1}. \quad (8.16)$$

Si el modelo fue adecuadamente descrito por la varianza-covarianza condicional, entonces se esperaría que la variación de cualquier cartera con ponderaciones \vec{w} sea $\vec{w}^t \boldsymbol{\Sigma} \vec{w}$. Las variaciones de la cartera que son también relativamente pequeñas para la varianza pronosticada son señal de exceso de correlación, mientras que las variaciones que son demasiado grandes evidencian subestimación de la correlación. Luego, al sustituir en (8.14), se llega a

$$\sigma_{Mc}^2 = \delta,$$

donde σ_{Mc}^2 denota la varianza mínima y, bajo las CPO dadas o condiciones supuestas, está especificada de manera única y solo depende de la matriz $\boldsymbol{\Sigma}$.

Ejemplo 8.1. Modelo básico de inversión

Considere 3 instrumentos de inversión: activos inmobiliarios (x_1), CDT (x_2) y acciones (x_3). Determine las ponderaciones de la **GMVP**, si la matriz de varianza-covarianza es

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & \frac{27}{50} & -\frac{3}{10} \\ \frac{27}{50} & \frac{36}{25} & \frac{6}{125} \\ -\frac{3}{10} & \frac{6}{125} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}. \quad (8.17)$$

Solución. Supóngase que se invierte el mismo porcentaje en cada instrumento; es decir, $w_i = \frac{1}{3}$. Luego,

$$\sigma_c^2 = \vec{w}_c^t \boldsymbol{\Sigma} \vec{w}_c = \frac{1}{9} \mathbf{1}_3^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{1}_3 = \frac{2453}{4500} = 0.54511.$$

Para determinar las ponderaciones de la **GMVP** se construye el sistema dado en (8.15):

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{4} & \frac{27}{50} & -\frac{3}{10} & -1 \\ \frac{27}{50} & \frac{36}{25} & \frac{6}{125} & -1 \\ -\frac{3}{10} & \frac{6}{125} & \frac{16}{25} & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cuya solución permite establecer el vector de ponderaciones

$$\vec{w}_c = \frac{1}{8461} \begin{bmatrix} 1766 \\ 1250 \\ 5445 \end{bmatrix}.$$

Luego, las respectivas ponderaciones en la **GMVP** de este inversor son aproximadamente 20.88 % en activos inmobiliarios, 14.77 % en CDT y 64.35 % en acciones. Nótese que estas ponderaciones muestran claras ventajas en la diversificación de la cartera; es decir, combinando los activos disponibles, se logra disminuir parte del riesgo (varianza). El riesgo de esta **GMVP** es

$$\sigma_{M_c}^2 = \vec{w}_c^t \Sigma \vec{w}_c = \frac{3015}{8461} = 0.3563.$$

Nótese que la varianza de la **GMVP** (0.3563) es más pequeña que la obtenida tomando igual ponderación en cada uno de los instrumentos. \checkmark

8.4. Cartera con rentabilidad preestablecida

En este caso, la **GMVP** estará constituida por las ponderaciones \vec{w} que minimizan la varianza de la cartera para el nivel de rentabilidad esperado fijado por el inversor; luego, el problema de programación cuadrática que se debe resolver en el caso de m activos es el siguiente:

$$\min_{\vec{w}} \sigma_c^2 = \min_{\vec{w}} \vec{w}^t \Sigma \vec{w}. \quad (8.18)$$

Pero, sujeto a las condiciones,

$$\vec{w}^t \mathbb{E}(\vec{r}) = \mathbb{E}(\vec{r})^t \vec{w} = \tilde{E} \quad \text{y} \quad \vec{w}^t \mathbf{1}_m = \mathbf{1}_m^t \vec{w} = 1,$$

donde $\mathbb{E}(\vec{r})$ es el vector de rendimientos esperados, $\tilde{E} = \mathbb{E}(R_c)$ es la rentabilidad mínima esperada de la inversión y \vec{w} es el vector $m \times 1$ de ponderaciones. En forma matricial, estas condiciones quedan

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}(\vec{r})^t \\ \mathbf{1}_m^t \end{bmatrix} \vec{w} = \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_{12}^t \vec{w} = \vec{R}, \quad (8.19)$$

y, al establecer la función lagrangiana, se obtiene

$$\mathbf{L} = \vec{w}^t \Sigma \vec{w} - 2\delta^t (\mathbf{V}_{12}^t \vec{w} - \vec{R}),$$

donde $\vec{\delta} = [\delta_1 \ \delta_2]^t$ con $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ es el respectivo vector multiplicador de Lagrange. Las CPO estándar para un punto crítico son

$$\frac{\partial}{\partial \vec{w}} \mathbf{L} = 2\mathbf{\Sigma}\vec{w} - 2\mathbf{V}_{12}\vec{\delta} = \vec{0} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{\delta}} \mathbf{L} = -2(\mathbf{V}_{12}^t\vec{w} - \vec{R}) = \vec{0}. \quad (8.20)$$

Si estas CPO se expresan matricialmente, se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & -\mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{12}^t & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{w} \\ \vec{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{R} \end{bmatrix}. \quad (8.21)$$

Si $\det(\mathbf{\Sigma}) \neq 0$ y $\det(\mathbf{V}_{12}^t\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{V}_{12}) \neq 0$, se tiene única solución, entonces

$$\begin{bmatrix} \vec{w}_c \\ \vec{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{-1} - \mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}^t\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Omega})^{-1}\mathbf{\Omega}^t & \mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}^t\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Omega})^{-1} \\ -(\mathbf{\Omega}^t\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Omega})^{-1}\mathbf{\Omega}^t & (\mathbf{\Omega}^t\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Omega})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}\vec{\delta} \\ (\mathbf{\Omega}^t\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Omega})^{-1}\vec{R} \end{bmatrix} \quad (8.22)$$

donde $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{V}_{12}$. Por lo tanto, al sustituir en (8.18), se obtiene la varianza mínima de esta cartera

$$\begin{aligned} \sigma_{M_c}^2 &= \vec{w}_c^t\mathbf{\Sigma}\vec{w}_c = \vec{R}^t(\mathbf{\Omega}^t\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Omega})^{-1}\vec{R} = \vec{R}^t(\mathbf{V}_{12}^t\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{V}_{12})^{-1}\vec{R} \\ &= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \tilde{E} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -A \\ -A^t & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

donde las constantes A, B, C y D son definidas³ como en [144]

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{E}(\vec{r})^t\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_m, & B &= \mathbb{E}(\vec{r})^t\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbb{E}(\vec{r}), \\ C &= \mathbf{1}_m^t\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_m, & D &= B C - A^t A. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Nótese que $\sigma_{M_c}^2$ está especificada de manera única, pero en este caso depende de la rentabilidad fija \tilde{E} y la matriz $\mathbf{\Sigma}$.

Ejemplo 8.2. Modelo de inversión

Para el modelo de inversión dado en el ejemplo 8.1, supóngase que los rendimientos medios son $\mathbb{E}(\vec{r}) = [8\% \ 6\% \ 10\%]^t$ y la rentabilidad esperada mínima es de $\tilde{E} = 9.5\%$. Determine el vector de ponderaciones en cada uno de los instrumentos de inversión para que el riesgo sea mínimo.

Solución. De manera análoga que en el ejemplo 8.1 primero se supone que se invierte el mismo porcentaje en cada instrumento; luego,

$$R_c = \vec{w}^t\mathbb{E}(\vec{r}) = \frac{1}{3}\mathbf{1}_3^t\mathbb{E}(\vec{r}) = \frac{2}{25} = 8\%.$$

³Las expresiones B y C son formas cuadráticas de $\mathbf{\Sigma}^{-1}$; luego, son estrictamente positivas, mientras que A es una forma bilineal simétrica de $\mathbf{\Sigma}^{-1}$.

Se desea encontrar unas ponderaciones que permitan obtener un menor riesgo; para ello, se construye la submatriz \mathbf{V}_{12} como

$$\mathbf{V}_{12} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{E}(\vec{r}) & \mathbf{1}_3 \\ \hline \frac{2}{25} & 1 \\ \frac{3}{50} & 1 \\ \frac{1}{10} & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \frac{2}{25} & 1 \\ \frac{3}{50} & 1 \\ \frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & \frac{27}{50} & -\frac{3}{10} \\ \frac{27}{50} & \frac{36}{25} & \frac{6}{125} \\ -\frac{3}{10} & \frac{6}{125} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{2}{25} & 1 \\ \frac{3}{50} & 1 \\ \frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1414}{25125} & \frac{1766}{3015} \\ \frac{35}{250} & \frac{250}{603} \\ \frac{2412}{3649} & \frac{121}{67} \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, la matriz mertoniana queda

$$\mathbf{\Omega}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} B & A \\ A' & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4926}{209375} & \frac{38039}{150750} \\ \frac{38039}{150750} & \frac{8461}{3015} \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, el vector de ponderaciones es

$$\vec{w}_c = \mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Omega})^{-1}\vec{R} = \frac{1}{10216} \begin{bmatrix} 2356 \\ 99 \\ 7761 \end{bmatrix}.$$

Es decir, las ponderaciones de la cartera óptima en que se debe invertir están constituidas aproximadamente por un 23.06 % en activos inmobiliarios, un 0.97 % en CDT y un 75.97 % en acciones. Nótese que con estas ponderaciones existen claras ventajas en la diversificación de la cartera; es decir, combinando los activos disponibles, se logra disminuir parte del riesgo (varianza). El riesgo de esta cartera es

$$\vec{w}_c'\mathbf{\Sigma}\vec{w}_c = [0.095 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{4926}{209375} & \frac{38039}{150750} \\ \frac{38039}{150750} & \frac{8461}{3015} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.095 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{988821}{2554000} = 0.38717.$$

Nótese que la varianza de la cartera óptima (0.38717) es más pequeña que la obtenida suponiendo igual ponderación en cada uno de los instrumentos. Cabe aclarar que con las nuevas ponderaciones, la rentabilidad de la cartera es mayor que la que se obtiene tomando ponderaciones iguales en cada uno de los instrumentos. \checkmark

8.4.1. Otra forma de solución al problema de selección de cartera con rentabilidad preestablecida

En [112] se reescriben las CPO dadas en (8.21) como sigue:

$$\mathbf{\Sigma}\vec{w}_c = \mathbf{V}_{12}\vec{\delta}, \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_{12}'\vec{w}_c = \vec{R} \quad (8.25)$$

y, si $\det(\Sigma) \neq 0$, entonces la primera ecuación anterior queda

$$\vec{w}_c = \Sigma^{-1} \mathbf{V}_{12} \vec{\delta}. \quad (8.26)$$

Para determinar el vector multiplicador de Lagrange que satisface (8.20), se multiplica la ecuación (8.26) por la izquierda por la matriz \mathbf{V}_{12} transpuesta y se obtiene

$$\mathbf{V}_{12}^t \vec{w}_c = \vec{R} = \mathbf{V}_{12}^t \Sigma^{-1} \mathbf{V}_{12} \vec{\delta}.$$

Este sistema de ecuaciones escrito de forma explícita tiene la forma

$$\begin{bmatrix} B & A \\ A^t & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (8.27)$$

donde las constantes A , B y C están dadas en (8.24). La solución sería

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ A^t & C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} C & -A \\ -A^t & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8.28)$$

Puesto que⁴ $A = A^t$, la solución para $\vec{\delta}$ en (8.28) se reescribe como

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{V}_{12}^t \Sigma^{-1} \mathbf{V}_{12})^{-1} \vec{R} = -\frac{1}{D} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}_{12}^t \Sigma^{-1} \mathbf{V}_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La solución dada en (8.28) para $\vec{\delta}$ coincide con la obtenida en (8.22).

Al sustituir en (8.26) el vector obtenido en (8.28), se llega a

$$\begin{aligned} \vec{w} &= -\frac{1}{D} \Sigma^{-1} \mathbf{V}_{12} Q \mathbf{V}_{12}^t \Sigma^{-1} \mathbf{V}_{12} Q \vec{R} \\ &= -\frac{1}{D} \Sigma^{-1} \mathbf{W}_1 \Sigma^{-1} \mathbf{V}_{12} Q \vec{R}, \end{aligned} \quad (8.29)$$

donde las matrices

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{W}_1 = \mathbf{V}_{12} Q \mathbf{V}_{12}^t = \mathbb{E}(\vec{r}) \mathbf{1}_m^t - \mathbf{1}_m \mathbb{E}(\vec{r})^t$$

son antisimétricas. La matriz \mathbf{W}_1 será nula solo cuando todas las rentabilidades esperadas de los m activos sean iguales. Nótese que en el vector de ponderaciones (8.29) ya no aparecen los multiplicadores de Lagrange; además, al sustituir (8.19), se obtiene

$$\vec{w} = -D^{-1} \Sigma^{-1} \mathbf{W}_1 \Sigma^{-1} \mathbf{V}_{12} Q \mathbf{V}_{12}^t \vec{w} = -D^{-1} (\Sigma^{-1} \mathbf{W}_1)^2 \vec{w}.$$

⁴Nótese que, como estas 2 formas cuadráticas son equivalentes y D es el determinante de la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática del lado derecho, entonces es positivo.

Reescribiendo esta última expresión, se llega a

$$(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{W}_1)^2\vec{w} = -D\vec{w}; \quad (8.30)$$

es decir, el vector de ponderaciones es el vector propio de la matriz $(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{W}_1)^2$ asociado al valor propio real $-D = (\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_m)^t\mathbf{W}_1(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\vec{E}(r))$. Nótese que la expresión (8.30) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} [(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{W}_1)^2 - (-D)I_m]\vec{w} &= \vec{0} \\ [\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{W}_1 - i\sqrt{D}I_m][\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{W}_1 - \bar{i}\sqrt{D}I_m]\vec{w} &= \vec{0}, \end{aligned}$$

donde i, \bar{i} ($i\bar{i} = 1$) denotan la unidad imaginaria y su conjugado complejo, respectivamente. Puesto que el vector de ponderaciones $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$, este se construye mediante una combinación lineal de las respectivas partes real e imaginaria del vector propio complejo, $\vec{u} \in \mathbb{C}^m$, asociado al valor propio $i\sqrt{D}$ de la matriz $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{W}_1$.

Dado que el vector de ponderaciones es una combinación lineal de las respectivas partes real e imaginaria del vector propio complejo $\vec{u} \in \mathbb{C}^m$, se tiene que

$$\vec{w}_c = \frac{1}{\Delta}\mathbf{W}_2\mathbf{V}_{12}Q\vec{R}, \quad (8.31)$$

donde $\Delta = \mathbf{1}_m^t\mathbf{W}_2\vec{E}(r)$ y la matriz antisimétrica \mathbf{W}_2 es

$$\mathbf{W}_2 = \boldsymbol{\Omega}Q\boldsymbol{\Omega}^t = \kappa\widetilde{\mathbf{W}}_2 = \kappa \begin{bmatrix} \text{Re}(\vec{u}) & \text{Im}(\vec{u}) \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} \text{Re}(\vec{u}) & \text{Im}(\vec{u}) \end{bmatrix}^t, \quad (8.32)$$

aquí κ corresponde al determinante de la matriz de los coeficientes asociados a las combinaciones lineales y $\rho(\widetilde{\mathbf{W}}_2) = 2$.

Al multiplicar el lado izquierdo de la expresión (8.25) por \vec{w}_c^t y sustituir (8.28), se obtiene que la varianza mínima de esta cartera es

$$\vec{w}_c^t\boldsymbol{\Sigma}\vec{w}_c = \vec{w}_c^t\mathbf{V}_{12} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \widetilde{E} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -A \\ -A^t & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{E} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8.33)$$

Sustituyendo las relaciones (8.24), se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{w}_c^t\boldsymbol{\Sigma}\vec{w}_c &= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \widetilde{E} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_m^t \\ -\vec{E}(r)^t \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_m & -\vec{E}(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{E} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{D} (\mathbf{W}_1\vec{w}_c)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{W}_1\vec{w}_c), \end{aligned} \quad (8.34)$$

donde $\mathbf{W}_1\vec{w}_c$ es simplemente lo siguiente

$$\mathbf{W}_1\vec{w}_c = \vec{E}(r) - \widetilde{E}\mathbf{1}_m.$$

Ejemplo 8.3. Para el modelo de inversión dado en el ejemplo 8.2, determine el vector de ponderaciones por el método anterior.

Solución. En el ejemplo 8.2 se obtuvo la matriz \mathbf{V}_{12} ; luego, la matriz \mathbf{W}_1 se establece como

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{V}_{12} \mathbf{Q} \mathbf{V}_{12}^t = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nótese que esta matriz es una matriz antisimétrica. Ahora,

$$\Sigma^{-1} \mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \frac{532}{1005} & -\frac{125}{603} & \frac{53}{201} \\ -\frac{125}{603} & \frac{625}{804} & -\frac{125}{804} \\ \frac{53}{201} & -\frac{125}{804} & \frac{455}{268} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{50} & -\frac{1}{50} \\ -\frac{1}{50} & 0 & -\frac{1}{25} \\ \frac{1}{50} & \frac{1}{25} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{142}{15075} & \frac{177}{8375} & -\frac{173}{75375} \\ -\frac{5}{268} & -\frac{2412}{1471} & -\frac{65}{20100} \\ \frac{149}{4020} & \frac{1471}{20100} & \frac{19}{20100} \end{bmatrix}.$$

Según la expresión (8.30), el vector de ponderaciones es el vector propio asociado al valor propio $\lambda = -D$ de esta última matriz elevada al cuadrado; luego,

$$(\Sigma^{-1} \mathbf{W}_1)^2 = \begin{bmatrix} \frac{142}{15075} & \frac{177}{8375} & -\frac{173}{75375} \\ -\frac{5}{268} & -\frac{2412}{1471} & -\frac{65}{20100} \\ \frac{149}{4020} & \frac{1471}{20100} & \frac{19}{20100} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{53}{135675} & -\frac{17}{90450} & -\frac{161}{271350} \\ -\frac{71}{72360} & -\frac{271350}{180900} & \frac{161}{542700} \\ -\frac{71}{72360} & \frac{17}{180900} & -\frac{31}{15075} \end{bmatrix},$$

y la ecuación característica es

$$\lambda \left(\lambda + \frac{1277}{542700} \right)^2 = 0.$$

Al calcular el vector propio correspondiente a $\lambda_1 = 0$, se tiene

$$\vec{v}_1^t = [-2 \quad 1 \quad 1],$$

y los vectores propios correspondientes a $\lambda_2 = -\frac{1277}{542700}$ son

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 34 \\ 355 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 322 \\ 0 \\ 1065 \end{bmatrix}.$$

Puesto que \vec{w} no es único debe ser una combinación lineal de los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = -D$; entonces, usando (8.32),

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{W}}_2 &= \begin{bmatrix} 34 & 322 \\ 355 & 0 \\ 0 & 1065 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34 & 355 & 0 \\ 322 & 0 & 1065 \end{bmatrix} \\ &= 355 \begin{bmatrix} 0 & -322 & 102 \\ 322 & 0 & 1065 \\ -102 & -1065 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Al realizar el producto dado en (8.31), se obtiene

$$\vec{w}_c = \frac{25}{1277} \begin{bmatrix} 0 & -322 & 102 \\ 322 & 0 & 1065 \\ -102 & -1065 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{200} \\ \frac{7}{200} \\ -\frac{1}{200} \end{bmatrix} = \frac{1}{10\,216} \begin{bmatrix} 2356 \\ 99 \\ 7761 \end{bmatrix};$$

luego, el riesgo de la cartera óptima es

$$\vec{w}^t \Sigma \vec{w} = \frac{988\,821}{2\,554\,000} = 0.38717.$$

Nótese que estos valores coinciden con los obtenidos en el ejemplo 8.2.

Este problema se puede solucionar mediante métodos numéricos, empleando un modelo de programación no lineal (NLP), puesto que la función objetivo fue expresada empleando una forma cuadrática. \checkmark

8.5. Representación geométrica de la cartera mínima con rentabilidad preestablecida

La forma cuadrática dada en (8.23) se puede reescribir como

$$\vec{w}^t \Sigma \vec{w} = \frac{1}{D} (C\tilde{E}^2 - 2A\tilde{E} + B) = \frac{C}{D} \left(\tilde{E} - \frac{A}{C} \right)^2 + \frac{1}{C}.$$

Al multiplicar por C , esta expresión se transforma en la siguiente ecuación cuadrática:

$$C \vec{w}^t \Sigma \vec{w} - \frac{C^2}{D} \left(\tilde{E} - \frac{A}{C} \right)^2 = 1. \quad (8.35)$$

Luego, la frontera en el espacio media-varianza está determinada por una hipérbola con centro en $(0, \frac{A}{C})$, eje focal sobre la recta horizontal $\tilde{E}_{\min} = \frac{A}{C}$ y asíntotas dadas por

$$\tilde{E} = \frac{A}{C} \pm \sqrt{\frac{D}{C}} \sigma_c, \quad \text{con} \quad \sigma_c = \sqrt{\vec{w}^t \Sigma \vec{w}}.$$

Al sustituir en (8.28) el valor mínimo \tilde{E}_{\min} , se obtiene que

$$\delta_1 = 0 \quad \text{y} \quad \delta_2 = \frac{1}{C},$$

y, al reemplazar en la ecuación (8.26), se reduce a

$$\vec{w} = \frac{1}{C} \Sigma^{-1} \mathbf{1}_m. \quad (8.36)$$

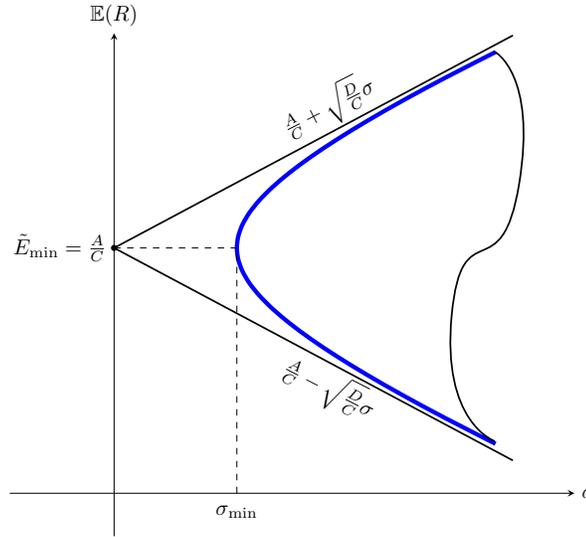


Figura 8.1. Frontera eficiente
Fuente: tomada de [112, pág. 498].

Luego, al sustituir en (8.18), se llega a

$$\sigma_{M_c}^2 = \delta_2.$$

Nótese que estos últimos resultados son los mismos que se obtuvieron en la sección 8.3. Al reescribir la expresión (8.35) se obtiene

$$\left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{\min}}\right)^2 - \frac{1}{D} \left(\frac{\mathbb{E}(R_c) - \tilde{E}_{\min}}{\sigma_{\min}^2}\right)^2 = 1. \quad (8.37)$$

8.6. Separación en dos fondos

Ahora se presenta un teorema dado en [206] que garantiza que cualquier cartera y, en especial, una cartera eficiente es generada por la composición de 2 carteras eficientes cualesquiera.

Teorema 8.1. *Todas las carteras eficientes en el contexto media-varianza se obtienen como el promedio ponderado de 2 cualesquiera carteras eficientes.*

Demostración. Del sistema matricial dado en (8.21) se tiene que las CPO son

$$\Sigma \vec{w}_c = \mathbf{V}_{12} \vec{\delta} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_{12}^t \vec{w}_c = \vec{R}$$

si $\det(\Sigma) \neq 0$, entonces la primera ecuación de las CPO queda

$$\vec{w}_c = \delta_1 \Sigma^{-1} \mathbb{E}(\vec{r}) + \delta_2 \Sigma^{-1} \mathbf{1}_m. \quad (8.38)$$

Al multiplicar esta última ecuación por el vector de unos transpuesto se llega a la segunda ecuación del sistema (8.27):

$$1 = \delta_1 A^t + \delta_2 C = w_{ep} + w_{eq}, \quad (8.39)$$

donde w_{ep} y w_{eq} son las respectivas ponderaciones en las carteras eficientes p y q . Al reemplazar la solución dada en (8.28) para $\vec{\delta} = [\delta_1 \ \delta_2]^t$, se tiene

$$w_{ep} = \frac{A^t}{D} [C\tilde{E} - A] \quad \text{y} \quad w_{eq} = \frac{C}{D} [B - A^t\tilde{E}]. \quad (8.40)$$

Puesto que A y C son escalares, despejando en (8.39) los multiplicadores de Lagrange y reemplazando en el vector de ponderaciones dado en (8.38) se obtiene:

$$\vec{w}_c = \frac{w_{ep}}{A^t} \Sigma^{-1} \mathbb{E}(\vec{r}) + \frac{w_{eq}}{C} \Sigma^{-1} \mathbf{1}_m = w_{ep} \vec{w}_p + w_{eq} \vec{w}_q; \quad (8.41)$$

es decir, el vector de ponderaciones \vec{w}_c se establece como una combinación lineal de los siguientes vectores \vec{w}_p y \vec{w}_q :

$$\vec{w}_p = \frac{1}{A^t} \Sigma^{-1} \mathbb{E}(\vec{r}) \quad \text{y} \quad \vec{w}_q = \frac{1}{C} \Sigma^{-1} \mathbf{1}_m. \quad (8.42)$$

Nótese que el vector de ponderaciones \vec{w}_q coincide con el vector de ponderaciones de la **GMVP** dado en (8.16); luego, la cartera eficiente q corresponde a la **GMVP**. Por otra parte, al multiplicar \vec{w}_c por $\mathbb{E}(\vec{r})$ transpuesto se obtiene el rendimiento de la cartera; es decir,

$$\vec{\mathbb{E}}(\vec{r})^t \vec{w}_c = w_{ep} \vec{\mathbb{E}}(\vec{r})^t \vec{w}_p + w_{eq} \vec{\mathbb{E}}(\vec{r})^t \vec{w}_q = w_{ep} \tilde{E}_p + w_{eq} \tilde{E}_q$$

o, en otras palabras, el rendimiento de la cartera es el resultado de combinar los rendimientos de las carteras eficientes p y q con ponderaciones w_{ep} y w_{eq} , respectivamente. Por lo tanto, el conjunto de carteras de menor varianza contiene todas las combinaciones lineales de las carteras p y q que satisfacen (8.41). Luego, al sustituir en (8.14), se llega a

$$\begin{aligned} \vec{w}_c^t \Sigma \vec{w}_c &= (w_{ep} \vec{w}_p + w_{eq} \vec{w}_q)^t \Sigma (w_{ep} \vec{w}_p + w_{eq} \vec{w}_q) \\ \sigma_{M_c}^2 &= w_{ep}^2 \sigma_p^2 + w_{eq}^2 \sigma_q^2 + 2w_{ep} w_{eq} \sigma_{pq}. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Puesto que los valores de δ_1 y δ_2 que se consideran son los que producen una solución factible del problema dado en (8.23), se tiene que

$$\sigma_{M_c}^2 = [\delta_1 \ \delta_2] \begin{bmatrix} B & A \\ A^t & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}.$$

Al reemplazar $\delta_1 = 0$ en (8.39) se tiene que $\delta_2 = 1/C$ y, sustituyendo estos valores en la expresión anterior, $\sigma_{M_c}^2 = 1/C$. \checkmark

8.7. La línea del mercado de capitales

En las primeras secciones se midió el riesgo de una acción mediante su varianza. Sin embargo, una gran parte de ese riesgo se puede reducir mediante la tenencia de otras acciones en una “cartera”, es decir, construyendo una cartera para diversificar la tenencia de un conjunto de activos. Esto significa que la forma correcta de medir el riesgo de una acción no es mediante su varianza, sino más bien mediante su covarianza con el mercado.

Un resultado del teorema anterior es la línea que se obtiene de combinar el activo libre de riesgo⁵, R_f , y la cartera tangente a la frontera de carteras eficientes que se denomina *línea del mercado de capitales* (*capital market line* (CML)). Nótese que cualquier pareja sobre esta recta es eficiente en el sentido media-varianza.

Sean ω la ponderación en la cartera tangente (T) de activos inciertos y $(1 - \omega)$ la asignación en R_f , entonces el rendimiento esperado de cualquier cartera sobre la recta es

$$\mathbb{E}(R_c) = \omega\mathbb{E}(R_T) + (1 - \omega)R_f \quad (8.44)$$

y su varianza está dada por

$$\sigma_c^2 = \omega^2\sigma_T^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_c = |\omega|\sigma_T. \quad (8.45)$$

Luego, $|\omega| = \sigma_c/\sigma_T$. Sustituyendo en (8.44) se obtiene la CML

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_c) &= \frac{\sigma_c}{\sigma_T}\mathbb{E}(R_T) + \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_T}\right)R_f \\ &= R_f + \theta_T\sigma_c, \end{aligned} \quad (8.46)$$

donde θ_T denota el índice de Sharpe (ver expresión (8.13)); es decir,

$$\theta_T = \frac{\mathbb{E}(R_T) - R_f}{\sigma_T}. \quad (8.47)$$

Reescribiendo la cónica dada en (8.37) en términos del índice dado en (8.13), se obtiene

$$\left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{\min}}\right)^2 - \frac{1}{D}\left(\frac{\theta_c}{\sigma_{\min}}\frac{\sigma_c}{\sigma_{\min}} - \frac{\theta_{\min}}{\sigma_{\min}}\right)^2 = 1. \quad (8.48)$$

Para establecer la expresión de la tangente a la cónica (8.35) que pasa por el punto $P(0, R_f)$ se debe resolver

$$C\sigma_T^2 - \frac{C^2}{D}\left[\theta_T\sigma_T - (\tilde{E}_{\min} - R_f)\right]^2 = 1.$$

⁵En la práctica, el activo libre de riesgo a menudo se considera como la tasa de interés de la deuda pública a corto plazo.

Nótese que el discriminante de esta ecuación cuadrática es nulo cuando

$$\theta_T^2 = CR_f^2 - 2AR_f + B \quad \Rightarrow \quad \sigma_T = \frac{\sqrt{CR_f^2 - 2AR_f + B}}{|A - CR_f|}, \quad (8.49)$$

donde las constantes A , B y C están dadas en (8.24), o empleando la expresión (8.48) se tiene que

$$\theta_T^2 = \theta_{\min}^2 + D\sigma_{\min}^2 \quad \text{y} \quad \frac{\theta_T}{\sigma_T} = \frac{\theta_{\min}}{\sigma_{\min}}. \quad (8.50)$$

Supóngase que \vec{w}_c son las ponderaciones de una cartera arbitraria con riesgo $\sigma_c = \sqrt{\vec{w}_c^t \Sigma \vec{w}_c}$ y rendimiento $R_c = \vec{w}_c^t \mathbb{E}(\vec{r})$. Luego, si se desea maximizar el índice de Sharpe se debe resolver el siguiente problema de programación cuadrática:

$$\max_{\vec{w}_c} \theta_c = \max_{\vec{w}_c} \frac{\vec{w}_c^t (\mathbb{E}(\vec{r}) - R_f \mathbf{1}_m)}{\sqrt{\vec{w}_c^t \Sigma \vec{w}_c}}, \quad (8.51)$$

sujeto a $\vec{w}_c^t \mathbf{1}_m = \mathbf{1}_m^t \vec{w}_c = 1$. Al formar la función lagrangiana se tiene

$$\mathcal{L} = \theta_c - \delta (\vec{w}_c^t \mathbf{1}_m - 1), \quad \delta \in \mathbb{R}$$

Luego, se obtienen las siguientes CPO:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{w}_c} \mathcal{L} = \frac{\mathbb{E}(\vec{r}) - R_f \mathbf{1}_m}{\sqrt{\vec{w}_c^t \Sigma \vec{w}_c}} - \frac{\theta_c}{\vec{w}_c^t \Sigma \vec{w}_c} \Sigma \vec{w}_c - \delta \mathbf{1}_m = \vec{0}, \quad (8.52)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \mathcal{L} = \mathbf{1}_m^t \vec{w}_c - 1 = 0. \quad (8.53)$$

Puesto que $\vec{w}_c \neq \vec{0}$, al multiplicar a la izquierda ambos términos de la ecuación (8.52) por este vector de ponderaciones transpuesto, se llega a

$$\frac{\vec{w}_c^t (\mathbb{E}(\vec{r}) - R_f \mathbf{1}_m)}{\sqrt{\vec{w}_c^t \Sigma \vec{w}_c}} - \frac{\theta_c}{\vec{w}_c^t \Sigma \vec{w}_c} \vec{w}_c^t \Sigma \vec{w}_c - \delta (\vec{w}_c^t \mathbf{1}_m) = 0.$$

Luego, $\delta = 0$. Por consiguiente,

$$\theta_c \Sigma \vec{w}_c = \sigma_c (\mathbb{E}(\vec{r}) - R_f \mathbf{1}_m).$$

Suponiendo que $\det(\Sigma) \neq 0$ y sustituyendo las expresiones dadas en (8.49), se tiene que el vector de ponderaciones está dado por

$$\vec{w}_T = \frac{1}{|A - CR_f|} \Sigma^{-1} [\mathbb{E}(\vec{r}) - R_f \mathbf{1}_m]. \quad (8.54)$$

Ejemplo 8.4. Modelo tangente

Para el modelo de inversión dado en el ejemplo 8.2, tome $R_f = 3.5\%$ y determine el vector de ponderaciones de la cartera tangente.

Solución. Para encontrar las ponderaciones de la cartera tangente, primero se construye el vector $\mathbb{E}(\vec{r}) - R_f \mathbf{1}_3$:

$$\mathbb{E}(\vec{r}) - R_f \mathbf{1}_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{25} \\ \frac{3}{50} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix} - \frac{7}{200} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5\% \\ 2.5\% \\ 6.5\% \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$\Sigma^{-1} [\mathbb{E}(\vec{r}) - R_f \mathbf{1}_3] = \begin{bmatrix} \frac{532}{1005} & -\frac{125}{603} & \frac{53}{201} \\ -\frac{125}{603} & \frac{625}{804} & -\frac{125}{804} \\ \frac{53}{201} & -\frac{125}{804} & \frac{455}{268} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{9}{200} \\ \frac{1}{40} \\ \frac{13}{200} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{161}{4500} \\ 0 \\ \frac{71}{600} \end{bmatrix}.$$

Del ejemplo 8.2, se tiene que $A = \frac{38039}{150750}$ y $C = \frac{8461}{3015}$. Por consiguiente, el vector de ponderaciones es

$$\vec{w}_T = \frac{9000}{1387} \begin{bmatrix} \frac{161}{4500} \\ 0 \\ \frac{71}{600} \end{bmatrix} = \frac{1}{1387} \begin{bmatrix} 322 \\ 0 \\ 1065 \end{bmatrix};$$

es decir, la cartera tangente en que el inversor debe destinar sus recursos está conformada aproximadamente por un 23.22% en activos inmobiliarios, un 0% en CDT y un 76.78% en acciones. El riesgo de esta cartera tangente es

$$\vec{w}_T^t \Sigma \vec{w}_T = 0.3916.$$

Nótese que la varianza de la cartera tangente es más grande que la obtenida para la **GMVP**, pero menor que la varianza de la cartera equiponderada. ✓

La metodología empleada para el problema de selección de carteras y descrita en este capítulo es aplicable para el cubrimiento de reaseguro. En la siguiente tabla se resume la correspondencia entre los 2 métodos.

Tabla 8.1. Comparación entre los cubrimientos

| Selección de carteras | Cubrimiento de reaseguros |
|--|---|
| <p>En el modelo de selección de carteras, se supone que existen en el mercado m activos financieros y se eligen las proporciones w_1, w_2, \dots, w_m para invertir. El objetivo es minimizar la varianza de los retornos, σ_c^2, sujeto a condiciones lineales, para un retorno esperado, \tilde{E}:</p> $\min_{\vec{w}} \sigma_c^2 = \min_{\vec{w}} \vec{w}^t \Sigma \vec{w},$ <p>Sujeto a $\begin{cases} \mathbf{1}_m^t \vec{w}_c \leq 1 \\ \vec{\mu}^t \vec{w}_c = \tilde{E} \end{cases}$ <p>donde $\vec{w}_c^t = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ con $0 \leq w_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$)</p> $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}.$ <p>$\sigma_{ij} = Cov(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$, $\mu_j = \mathbb{E}(\vec{r}_j)$.</p> <p>$\vec{\mu}^t = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m]$ y σ_c^2, \tilde{E} son escalares.</p> </p> | <p>En el modelo de reaseguro, se supone que se posee una cartera de m ramos de seguros y se esogen las fracciones x_1, x_2, \dots, x_m para reasegurar. El objetivo es minimizar la varianza de los siniestros retenidos, V, sujeto a condiciones lineales, para un monto de siniestros esperados F:</p> $\min_{\vec{x}} V = \min_{\vec{x}} (\mathbf{1}_m + \vec{x})^t \Sigma (\mathbf{1}_m + \vec{x})$ <p>Sujeto a $\begin{cases} \mathbf{1}_m^t (\mathbf{1}_m + \vec{x}) \leq m \\ \vec{v}^t (\mathbf{1}_m + \vec{x}) = F \end{cases}$ <p>donde $\vec{x}^t = [x_1, x_2, \dots, x_m]$ con $-1 \leq x_i \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Para</p> $\min_{\vec{Z}} V = \min_{\vec{Z}} \vec{Z}^t \Psi \vec{Z}$ $\Psi = \begin{bmatrix} \Sigma & \vdots & \Sigma \mathbf{1}_m \\ \dots & . & \dots \\ \mathbf{1}_m^t \Sigma & \vdots & \mathbf{1}_m^t \Sigma \mathbf{1}_m \end{bmatrix}$ <p>$\vec{Z}^t = [x_1, x_2, \dots, x_m, 1]$, $\vec{v}^t = [v_1, v_2, \dots, v_m]$, $\det(\Psi) = 0$ y V, F son escalares.</p> </p> |

Fuente: elaboración propia.

8.8. Ejercicios

8.1 Seleccione 4 acciones que se negocien en la Bolsa de Valores de Colombia (BVC). Determine los rendimientos históricos y encuentre:

- La **GMVP** suponiendo una inversión de \$10 000 000.
- La línea del mercado de capitales si $R_f = 4\%$.

8.2 Considere un individuo que dispone de \$20 000 000 para invertir. En el mercado existen 2 activos, X y Y , cuyos rendimientos anuales históricos tienen:

Tabla 8.2. Medidas estadísticas del ejercicio 8.2

| Activo (j) | Media (μ_j) | Desviación (σ_j) |
|-------------------|----------------------|------------------------------|
| X | 8 % | 1.7 % |
| Y | 10 % | 2.7 % |

Fuente: elaboración propia.

Además, el coeficiente de correlación lineal es $\rho_{XY} = 0.348$.

- a) ¿Cuáles son las ponderaciones de la **GMVP**? ¿Cuáles son la media y varianza de la **GMVP**?
- b) Si el inversor desea una rentabilidad mínima de 9 %, ¿cuáles son las ponderaciones de esta cartera? ¿Cuáles son la media y varianza de esta cartera?
- c) Si el activo libre de riesgo tiene una rentabilidad de 5 %, obtenga la composición, el rendimiento esperado y la varianza de la cartera tangente.

8.3 Suponga que se tienen 2 activos, X y Y, cuyos rendimientos anuales históricos tienen:

Tabla 8.3. Medidas estadísticas del ejercicio 8.3

| Activo (j) | Media (μ_j) | Varianza (σ_j^2) |
|-------------------|----------------------|------------------------------|
| X | 10 % | 0.10 |
| Y | 9 % | 0.15 |

Fuente: elaboración propia.

y la covarianza entre ellos es -0.10 .

- a) ¿Cuáles son las ponderaciones de la **GMVP**? ¿Cuáles son la media y varianza de la **GMVP**?
- b) Si el inversor desea una rentabilidad mínima de 9 %, ¿cuáles son las ponderaciones de esta cartera? ¿Cuáles son la media y varianza de esta cartera?
- c) Si el activo libre de riesgo tiene una rentabilidad de 5 %, obtenga la composición, el rendimiento esperado y la varianza de la cartera tangente.

8.4 Suponga que se tiene la siguiente información sobre 3 activos riesgosos X, Y y Z :

Tabla 8.4. Medidas estadísticas del ejercicio 8.4

| Activo (j) | Media (μ_j) | Desviación (σ_j) | Correlaciones | | |
|-------------------|----------------------|------------------------------|---------------|-------------|-------------|
| | | | ρ_{Xj} | ρ_{Yj} | ρ_{Zj} |
| X | 10 % | 20 % | 1.0 | 0.5 | 0.3 |
| Y | 7 % | 18 % | 0.5 | 1.0 | -0.5 |
| Z | 5 % | 15 % | 0.3 | -0.5 | 1.0 |

Fuente: elaboración propia.

- ¿Cuáles son las ponderaciones de la **GMVP**? ¿Cuáles son la media y varianza de la **GMVP**?
- Si el inversor desea una rentabilidad mínima de 8 %, ¿cuáles son las ponderaciones de esta cartera? ¿Cuáles son la media y varianza de esta cartera?
- Si el activo libre de riesgo tiene una rentabilidad de 6 %, obtenga la composición, el rendimiento esperado y la varianza de la cartera tangente.

Capítulo
nueve
Valor en riesgo

Un mecanismo de medición estándar para los riesgos financieros es el valor en riesgo (*VaR*) (ver [120]). El *VaR* es una estimación de la cuantía que se pierde en una inversión en un horizonte temporal concreto para un nivel de confianza predeterminado. Los horizontes más empleados comúnmente van desde un día hasta un mes o un año.

9.1. Conceptos básicos

El valor en riesgo (*VaR*) es una técnica estadística que permite calcular la exposición al riesgo de mercado.

Definición 9.1. *El valor en riesgo es una medida que permite cuantificar el monto máximo que una cartera de inversiones perdería durante un periodo temporal a un nivel de confianza o una probabilidad α %. Este es calculado usando:*

$$\text{Métodos} \begin{cases} \text{No paramétricos} \\ \text{Paramétricos} \end{cases}$$

En general, las técnicas estadísticas que se emplean para su estimación utilizan los rendimientos históricos, para pronosticar volatilidades y correlaciones; luego, las distribuciones de los activos se modelan, por ejemplo, usando saltos de precios, volatilidades estocásticas (GARCH), series históricas o simulaciones de Montecarlo, o contemplando simulaciones de escenarios.

9.2. Métodos no paramétricos o de simulación histórica

Bajo este procedimiento se emplea la *epdf* de los datos históricos. Para poder usar este método se necesita una serie histórica de precios de la exposición de riesgo (cartera) y se crea una serie temporal de rendimientos simulados, bajo el supuesto de que la composición de la cartera no cambia durante el periodo temporal de la serie histórica. Para emplear esta metodología se identifican primero las ponderaciones de los activos de la cartera; para ello, se considera la información de precios históricos por día para un periodo que varía entre 250 y 500 días. A partir de la *epdf* de los rendimientos simulados se calcula el cuantil respectivo (por ejemplo, primer percentil si el nivel de confianza es del 99 %).

Como se vio en la sección 8.1, existen 3 clases de simulación histórica que dependen de cómo se establece la serie temporal de los rendimientos.

9.2.1. Ventajas del método

La metodología de simulación histórica tiene varias ventajas, entre ellas las siguientes:

1. Facilita la comprensión por parte de directivos que no son especialistas en conceptos estadísticos.
2. Es realista, ya que se obtiene a partir de una serie temporal de datos reales.
3. No se basa en suposiciones de correlaciones y volatilidades que en situaciones de movimientos imprevistos e inesperados de los mercados no se cumplen. Las correlaciones y volatilidades están tácitas en el cálculo del VaR.
4. No necesita remuestreo de posiciones y opera sin ningún supuesto (incluso el supuesto de normalidad en distribución).
5. Se puede ajustar a instrumentos financieros no lineales (opciones).

9.3. Métodos paramétricos

En estos métodos, por lo general, se supone que los rendimientos de los activos siguen una pdf $N(0, \sigma^2)$. Sin embargo, bajo este supuesto de normalidad usado para facilitar los cálculos, se incurre en un error de medición del VaR puesto que las epdfs de los rendimientos son, además de asimétricas, significativamente leptocúrticas, es decir, son distribuciones de colas pesadas. Por lo tanto, el VaR encontrado es tan solo una aproximación.

9.3.1. Método de simulaciones de Montecarlo

Este método conlleva un alto consumo de tiempo, dado que se necesita recalcular el valor de la cartera en cada simulación. Esta aproximación es muy útil si en la cartera aparecen activos de pagos no lineales sobre las variables de mercado, como las opciones. En este caso, no hay formulaciones concretas para determinar el VaR, por eso se consideran frecuentemente las simulaciones de Montecarlo.

9.4. Aproximaciones para calcular el VaR

Existen varios procedimientos para determinar el VaR de una cartera. En [154] y [70] se presentan un compendio de metodologías para medir el VaR. Un enfoque tradicional usado por RiskMetrics (ver [150]) es suponer que las variaciones en el valor de los distintos activos siguen una pdf normal multivariada.

En este capítulo no se realiza una explicación explícita sobre cada método; sin embargo, algunas de las metodologías “tradicionales” son presentadas para la estimación del VaR.

9.4.1. Método de varianza-covarianza

En la literatura financiera se tiene la convicción de que el valor en riesgo (VaR) es un nuevo concepto para gestionar y controlar el riesgo; sin embargo, el método paramétrico, de varianza-covarianza, para calcular el VaR fue introducido hace medio siglo en [21], como un criterio límite inferior de confianza L .

Supóngase un nivel de confianza fijo $\alpha \in (0, 1]$ y un horizonte temporal de T días, el VaR es calculado de modo fácil y directo a partir de σ usando la siguiente expresión:

$$\text{VaR}_\alpha(V) = \mu_V - \Phi^{-1}(\alpha)\sigma_V\sqrt{T} \quad (9.1)$$

En general, bajo el supuesto de normalidad, el modelo tradicional que determina el VaR de una posición es el siguiente:

$$\text{VaR}_\alpha(V) = -z_\alpha \cdot V_0 \cdot \sigma_V \cdot \sqrt{T}, \quad (9.2)$$

donde

z_α : α -ésimo cuantil de una $N(0, 1)$.

V_0 : inversión total o exposición total al riesgo.

σ_V : desviación estándar de los rendimientos de los activos.

T : horizonte temporal usado para el cálculo del VaR.

En [21], se propone que una cartera de inversión está casi segura si, al presentar una desviación estándar (σ) relativamente alta, su valor esperado (E) es suficientemente alto. En la figura 9.1 se presenta gráficamente.

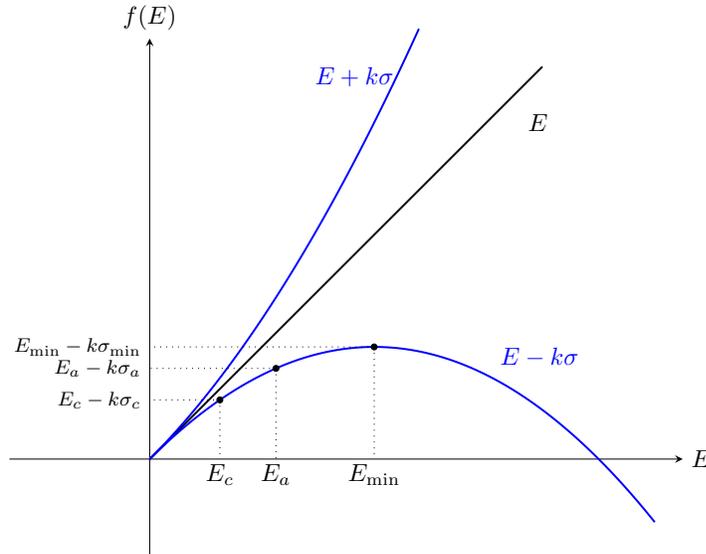


Figura 9.1. Carteras eficientes (E, L)

Fuente: tomada de [21, pág. 178].

En [21] se determina la proporción de carteras eficientes¹ (E, σ_c) que además son (E, L) eficientes. Puesto que la frontera eficiente en el enfoque media-varianza está determinada por la ecuación cuadrática dada en (8.35); es decir,

$$C \sigma_c^2 - \frac{C^2}{D} \left(E - \frac{A}{C} \right)^2 = 1, \quad (9.3)$$

entonces $\sigma_c = f(E)$. Si L denota el límite inferior de confianza, entonces es determinado como

$$L = E - \kappa \sigma_c = E - \kappa f(E) \quad \text{con} \quad \kappa \in \mathbb{R}; \quad (9.4)$$

luego, L es función de E .

Por otra parte, el conjunto de combinaciones (E, L) de carteras eficientes debe ser de carteras que brindan valores esperados más altos que E y están determinadas por los valores más bajos de L ; es decir, estas carteras eficientes deben estar representadas por una función estrictamente cóncava. Luego, para que (E, L) sea eficiente se necesita que $\frac{dL}{dE} < 0$. Al derivar (9.4), usando la regla de la cadena, se tiene que

$$\frac{dL}{dE} = 1 - \kappa \frac{d\sigma_c}{dE} = 1 - \kappa \frac{CE - A}{D\sigma_c}.$$

¹ Si en el conjunto de combinaciones rentabilidad-riesgo (E, σ_c) , una cartera V es ineficiente, entonces no puede ser (E, L) eficiente.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\kappa(CE - A) &> D\sqrt{(CE^2 - 2AE + B)/D} \\ \kappa^2(CE - A)^2 &> D(CE^2 - 2AE + B).\end{aligned}$$

Esto conduce a la ecuación cuadrática

$$C(C\kappa^2 - D)E^2 - 2A(C\kappa^2 - D)E + (A^2\kappa^2 - BD) > 0.$$

Al resolver esta ecuación, respecto a E , se obtiene

$$E > \frac{A(C\kappa^2 - D) \pm D\sqrt{C\kappa^2 - D}}{C(C\kappa^2 - D)}.$$

Por consiguiente,

$$\kappa > \sqrt{\frac{D}{C}} = \sqrt{B - \left(\frac{E_{\min}}{\sigma_{\min}}\right)^2}.$$

Al comparar las expresiones (9.1) y (9.4), se tiene que

$$\Phi^{-1}(\alpha) > \sqrt{\frac{D}{C}} \quad \alpha > \Phi\left(\sqrt{\frac{D}{C}}\right),$$

donde $\Phi(x)$ es la *cdf* normal estándar.

9.4.2. Aproximación del VaR mediante una distribución arbitraria

Proposición 9.1. *Sea Y una variable aleatoria continua con *cdf* $F_Y(y)$ y *pdf* $f_Y(y)$. Si V es la variable aleatoria transformada $V = A + BY$ con parámetros de localización (A) y de escala (B), entonces el VaR para V está dado por*

$$\text{VaR}_\alpha(V) = A + BF_Y^{-1}(\alpha), \quad (9.5)$$

donde α es el único número que satisface que $F_Y(y_\alpha) = \alpha$.

Demostración. Considérese un nivel de confianza α ; luego, el VaR se calcula como sigue:

$$1 - \alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(V - \text{VaR}_\alpha(V))g(V) dV,$$

donde $g(V)$ es la pdf de V y $\mathcal{H}(x)$ denota la función escalón unitaria de Heaviside dada en (3.5). Si V se aproxima por $V = A + BY$, entonces

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(V - \text{VaR}_\alpha(V)) f_Y(y) dy = \int_{\frac{\text{VaR}_\alpha(V) - A}{B}}^{\infty} f_Y(y) dy \\ &= 1 - F_Y\left(\frac{\text{VaR}_\alpha(V) - A}{B}\right). \end{aligned}$$

Por último, si $F_Y(\cdot)$ es invertible, el VaR es también dado por

$$F_Y\left(\frac{\text{VaR}_\alpha(V) - A}{B}\right) = \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{VaR}_\alpha(V) - A}{B} = F_Y^{-1}(\alpha),$$

al despejar el término VaR, se obtiene

$$\text{VaR}_\alpha(V) = A + BF_Y^{-1}(\alpha), \quad (9.6)$$

que era lo que se quería demostrar. \checkmark

En el contexto estadístico, esto equivale al α -ésimo cuantil de la epdf de pérdidas del activo; es decir, representa la pérdida máxima en que incurre un activo en el $100\alpha\%$ mejor de los casos (en relación con las pérdidas más pequeñas), esto se interpreta como que la pérdida en una inversión no superará el VaR a un nivel de confianza α .

9.4.3. Aproximación Cornish-Fisher

Usando la expansión CF dada en la sección (1.13), en [218] se aproximan los percentiles de la epdf de V y se establece el VaR para un nivel específico de confianza $\alpha\%$ y un horizonte temporal de T días como sigue

$$\text{VaR}_\alpha^{\text{CF}}(V) = \mathbb{E}(V) - \omega_\alpha \sigma_V \sqrt{T}, \quad (9.7)$$

donde ω_α fue dado en (1.160).

Nota 9.1. Al emplear la aproximación CF es importante revisar el número de términos de la expansión, pues con pocos términos proporcionará una “adecuada” (“incorrecta”) aproximación solo si las colas de la epdf son “parecidas” (“distintas”) a la normal. Para ilustrar esta situación, supóngase que los datos de ganancia/pérdida ($P \& L$, Profit and Loss) siguen una pdf t -Student con $\nu = 5$ grados de libertad. Teóricamente, esta pdf tiene exceso de curtosis, $\gamma_2 = \frac{6}{\nu-4}$, y sus cuantiles solo son similares a los de la normal estándar cuando $\nu > 30$. En este caso $\gamma_2 = 6$, esto indica que está distante de la curtosis de la normal ($\beta_2 = 3$). En la tabla 9.1 se presenta el VaR real (es decir, $t_{(5)}$), el VaR-normal y el VaR usando la aproximación CF, para distintos niveles de confianza. Nótese que la aproximación CF es, en general, muy deficiente.

Tabla 9.1. Comparación de metodologías VaR

| VaR | Niveles de confianza | | | |
|--------------------------|----------------------|-----------------|------------------|-----------------|
| | $\alpha = 0.90$ | $\alpha = 0.95$ | $\alpha = 0.975$ | $\alpha = 0.99$ |
| <i>t</i> -Student (real) | 1.5608 | 1.9912 | 2.4503 | 3.1233 |
| normal | 1.2816 | 1.6449 | 1.9599 | 2.3263 |
| Cornish-Fisher | 0.8466 | 1.5238 | 2.3723 | 3.7291 |

Fuente: tomada de [111, pág. 123].

Alrededor de un nivel de confianza de 95 %, la aproximación CF generalmente produce un cálculo del VaR que es peor que la estimación (deficiente) que se obtiene considerando normalidad. De acuerdo con las estimaciones dadas en la tabla 9.1 se debe emplear con cierto cuidado la aproximación CF, pues pueden desmejorar las estimaciones del VaR.

9.4.4. Aproximación usando la distribución $g - h$ de Tukey

En el caso del VaR, específicamente vía estimación paramétrica, se supone que la pdf es normal, lo que permite una aproximación parsimoniosa de la epdf de los datos, ya que se describe de modo completo solo por sus 2 primeros momentos (media y varianza); sin embargo, como se mencionó antes, para algunas pdf los momentos de órdenes superiores —y en particular, los relacionados con el coeficiente de asimetría y curtosis— son consideradas medidas relevantes para realizar una estimación del VaR.

En [113] se aproxima la variable V como sigue:

$$V = A + BY, \quad \text{con} \quad Y \sim T_{g,h}(Z), \quad (9.8)$$

donde $T_{g,h}(Z)$ fue dada en (1.139) y por la expresión (1.142) se obtiene

$$1 - \alpha = \int_{T_{g,h}^{-1}\left(\frac{\text{VaR}_\alpha(V) - A}{B}\right)}^{\infty} \varphi(v) dv = 1 - \Phi\left(T_{g,h}^{-1}\left(\frac{\text{VaR}_\alpha(V) - A}{B}\right)\right).$$

Finalmente, como $\Phi(\cdot)$ es invertible, se determina el **VaR** como

$$T_{g,h}^{-1}\left(\frac{\text{VaR}_\alpha(V) - A}{B}\right) = \Phi(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{VaR}_\alpha(V) - A}{B} = T_{g,h}(z_\alpha)$$

Al despejar el término **VaR** y usando (1.140), para $\alpha > 0.5$, se obtiene

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(V) &= A + BT_{g,h}(z_\alpha) \\ \text{VaR}_{1-\alpha}(V) &= A - B \exp\{-gz_\alpha\}T_{g,h}(z_\alpha). \end{aligned} \quad (9.9)$$

La última expresión anterior coincide con el resultado dado en [155].

9.4.4.1. Casos particulares

Algunos casos particulares presentados en [113] son los siguientes:

1. Cuando $h = 0$, la expresión (9.9) queda

$$\text{VaR}_\alpha(V) = A + \frac{B}{g} (e^{gz_\alpha} - 1) = e^{\mu_V + \sigma_V z_\alpha} + \theta, \quad (9.10)$$

donde $\theta = A - e^{\mu_V}$ y $g = \sigma_V$. En [116] se estableció que en este caso la pdf es de la forma (1.129) y, por lo tanto, la variable aleatoria $W = \ln(V - \theta)$ sigue una pdf normal $N(\mu_W, \sigma_W^2)$; luego,

$$\mu_V = \exp\left\{\mu_W + \frac{1}{2}\sigma_W^2\right\} + \theta \quad \text{y} \quad \sigma_V^2 = (\mu_V - \theta)^2 [\exp\{\sigma_W^2\} - 1].$$

Al determinar μ_W y σ_W , y sustituyendo en (9.10), resulta

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(V) &= \theta + \exp\left\{\ln\left[\frac{(\mu_V - \theta)^2}{\sqrt{(\mu_V - \theta)^2 + \sigma_V^2}}\right] + z_\alpha \sqrt{\ln\left[1 + \frac{\sigma_V^2}{(\mu_V - \theta)^2}\right]}\right\} \\ &= \theta + \frac{|\mu_V - \theta|}{\sqrt{1 + \rho_V^2}} \exp\left\{z_\alpha \sqrt{\ln(1 + \rho_V^2)}\right\}, \end{aligned} \quad (9.11)$$

donde $\rho_V = \frac{\sigma_V}{\mu_V - \theta}$. Esta expresión es análoga al coeficiente de variación de la variable aleatoria V , cuando $\theta = 0$.

2. Considerando que $g = 0$, al reemplazar en (9.9) se obtiene

$$\text{VaR}_\alpha(V) = A + Bz_\alpha e^{\frac{1}{2}hz_\alpha^2}.$$

Cuando $h = 1$ se tiene la pdf de Cauchy con parámetros μ y σ ; es decir

$$\text{VaR}_\alpha(V) = \mu + \sigma z_\alpha e^{\frac{1}{2}z_\alpha^2}.$$

3. Si $g = h = 0$, utilizando los valores dados en [109] para los parámetros de localización y escala, se obtiene

$$\text{VaR}_\alpha(V) = \mu + \sigma z_\alpha.$$

Esta última expresión es análoga a la fórmula clásica de VaR (ver [121]).

9.4.5. Aproximación usando la distribución normal sesgada

Si la variable V es modelada linealmente como

$$V = A + BY \quad \text{con} \quad Y \sim \mathcal{SN}(\mu, \sigma, \lambda), \quad (9.12)$$

donde $\mathcal{SN}(\mu, \sigma, \lambda)$ fue dada en (1.144) y, por la expresión (9.5), el VaR es

$$\text{VaR}_\alpha(V) = A + By_\alpha. \quad (9.13)$$

De manera análoga, como en (5.41), aquí se utiliza la expansión de CF para aproximar el α -ésimo cuantil de Y . Entonces

$$y_\alpha = \mu_Y + \sigma_Y \left[z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\beta_1(Y) + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)\gamma_2(Y) - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)\beta_1^2(Y) - \frac{1}{24}(z_\alpha^4 - 5z_\alpha^2 + 2)\beta_1(Y)\gamma_2(Y) \right], \quad (9.14)$$

donde μ_Y , σ_Y , $\beta_1(Y)$ y $\gamma_2(Y)$ son dados en (1.152).

9.4.6. Inconvenientes del VaR

Algunos problemas en el cálculo del VaR son:

- Muestra alta relación con los supuestos considerados, en particular, con las estructuras de correlación y varianza.
- Presenta inconvenientes en la recopilación de datos u observaciones.
- No involucra el problema de exceso de curtosis y, por tanto, no se sabe hasta cuánto llegarían a ser las pérdidas en 1 % o 5 % de las veces.

- Da una inadecuada interpretación, es decir, es relacionado con el peor escenario posible en la exposición total al riesgo y producir un nivel de confianza incorrecto.

9.5. Aproximaciones del VaR de una cartera

En esta sección, se presentan algunas aproximaciones para calcular el VaR de una cartera de inversiones.

9.5.1. Método varianza-covarianza

Sea $\mathbf{R} = [\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_m]$ la matriz de retornos de m activos durante un determinado periodo y suponga que $V = \mathbf{R}\vec{\omega}$ es una cartera de estos activos con ponderaciones $\vec{\omega}$, entonces el VaR para un nivel de confianza de $\alpha\%$ y un horizonte temporal de T días, se establece como

$$\text{VaR}_\alpha(V) = \vec{\omega}^t \mathbb{E}[\vec{\mathbf{R}}] + z_\alpha \sqrt{\vec{\omega}^t \Sigma \vec{\omega}} \sqrt{T} \quad (9.15)$$

donde $\mathbb{E}[\vec{\mathbf{R}}]$ es el vector de retornos y $\Sigma = [\sigma_{ij}]$ con $\sigma_{ij} = \text{Cov}(\vec{R}_i, \vec{R}_j)$.

9.5.2. Método delta-gamma

Este modelo fue propuesto en [73]; sin embargo, en este apartado se utiliza la notación dada en [103].

Proposición 9.2. *Sea ΔV el cambio en V en un intervalo pequeño de tiempo ΔT . El VaR para un nivel de confianza de $\alpha\%$ está dado por*

$$\text{VaR}_\alpha[\Delta V] = \mathbb{E}[\Delta V] + z_\alpha \sigma[\Delta V] \sqrt{\Delta T}. \quad (9.16)$$

Demostración. Para ello, el incremento de V se reescribe como sigue:

$$\Delta V = \vec{X}^t \vec{\delta} + \vec{X}^t \Gamma \vec{X} \quad (9.17)$$

donde

$$\Delta R_i = \frac{\Delta x_i}{x_i}, \quad \delta_i = \frac{\partial V}{\partial x_i};$$

es decir, ΔR_i denota el retorno del i -ésimo activo en un día y δ_i es la tasa de variación de la cartera respecto al valor del i -ésimo activo x_i . Luego,

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix}$$

donde

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Considerando que \vec{X} es un vector aleatorio con distribución normal multivariada $N(\vec{0}, \Sigma)$, con $\Sigma = [\sigma_{ij}]$ donde $\sigma_{ij} = Cov(\Delta x_i, \Delta x_j)$. Entonces, por las expresiones (E.9) y (E.10), se tiene que

$$\mathbb{E}[\Delta V] = \mathbb{E}[\vec{X}^t \vec{\delta}] + \frac{1}{2} \mathbb{E}[\vec{X}^t \Gamma \vec{X}] = \frac{1}{2} \text{tr}(\Gamma V). \quad (9.18)$$

Nótese que

$$\Gamma \Sigma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$\text{tr}(\Gamma \Sigma) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \sigma_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\Delta \Sigma)^2] &= \mathbb{E} \left[\left(\vec{X}^t \vec{\delta} + \frac{1}{2} \vec{X}^t \Gamma \vec{X} \right) \left(\vec{X}^t \vec{\delta} + \frac{1}{2} \vec{X}^t \Gamma \vec{X} \right)^t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(\vec{X}^t \vec{\delta})(\vec{\delta}^t \vec{X}) + (\vec{X}^t \Gamma \vec{X})(\vec{X}^t \vec{\delta}) + \frac{1}{4} (\vec{X}^t \Gamma \vec{X})^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\vec{X}^t (\vec{\delta} \vec{\delta}^t) \vec{X} \right] + \mathbb{E} \left[(\vec{X}^t \Gamma \vec{X})(\vec{X}^t \vec{\delta}) \right] + \frac{1}{4} \mathbb{E} \left[(\vec{X}^t \Gamma \vec{X})^2 \right] \\ &= \text{tr}[\Lambda \Sigma] + \frac{1}{4} [\text{tr}(\Gamma \Sigma)]^2 + \frac{1}{2} \text{tr}[(\Gamma \Sigma)^2]. \end{aligned}$$

Aquí se toma el producto $B\vec{c} = \vec{\delta}$ para usar (E.11) y $\Lambda = \vec{\delta} \vec{\delta}^t$; es decir,

$$\Lambda = [\lambda_{ij}] \quad \text{con} \quad \lambda_{ij} = \begin{cases} \delta_j^2, & \text{si } i = j, \\ \delta_i \delta_j, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Por lo tanto, por la expresión (1.20) se tiene que

$$\text{Var} [\Delta V] = \sigma^2 [\Delta V] = \text{tr} [\Lambda \Sigma] + \frac{1}{2} \text{tr} [(\Gamma \Sigma)^2]. \quad (9.19)$$

Reemplazando (9.18) y (9.19) en (9.1) se obtiene el resultado. \square

9.5.3. Aproximación Cornish-Fisher

Al emplear la expansión de CF, se tiene que los percentiles de la pdf de ΔV son aproximados como sigue:

$$\text{VaR}_q (\Delta V) = \frac{1}{2} \text{tr} (\Gamma \Sigma) + \omega_q \sqrt{\text{tr} [\Lambda \Sigma] + \frac{1}{2} \text{tr} [(\Gamma \Sigma)^2]},$$

donde $\omega_q = z_q + \frac{1}{6}(z_q^2 - 1)\xi_{\Delta V}$. Para establecer $\xi_{\Delta V}$, primero se encuentra

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\Delta V)^3] &= \mathbb{E} \left[\left(\vec{X}^t \vec{\delta} + \frac{1}{2} \vec{X}^t \Gamma \vec{X} \right) \left(\vec{X}^t \vec{\delta} + \frac{1}{2} \vec{X}^t \Gamma \vec{X} \right)^t \left(\vec{X}^t \vec{\delta} + \frac{1}{2} \vec{X}^t \Gamma \vec{X} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left[\vec{X}^t \Lambda \vec{X} + (\vec{X}^t \Gamma \vec{X})(\vec{X}^t \vec{\delta}) + \frac{1}{4} (\vec{X}^t \Gamma \vec{X})^2 \right] \left(\vec{X}^t \vec{\delta} + \frac{1}{2} \vec{X}^t \Gamma \vec{X} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Al distribuir el producto sobre la suma se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\Delta V)^3] &= \mathbb{E} \left[(\vec{X}^t \Lambda \vec{X}) \vec{X}^t \vec{\delta} \right] + \mathbb{E} \left[(\vec{X}^t \Gamma \vec{X})(\vec{X}^t \vec{\delta})(\vec{X}^t \vec{\delta}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \mathbb{E} \left[(\vec{X}^t \Gamma \vec{X})^2 (\vec{X}^t \vec{\delta}) \right] + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[(\vec{X}^t \Lambda \vec{X})(\vec{X}^t \Gamma \vec{X}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[(\vec{X}^t \Gamma \vec{X})(\vec{X}^t \vec{\delta})(\vec{X}^t \Gamma \vec{X}) \right] + \frac{1}{8} \mathbb{E} \left[(\vec{X}^t \Gamma \vec{X})^3 \right]. \end{aligned}$$

Puesto que $(\vec{X}^t \vec{\delta}) = (\vec{X}^t \vec{\delta})^t$, usando las expresiones (E.11) y (E.13), se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\Delta V)^3] &= \mathbb{E} \left[(\vec{X}^t \Lambda \vec{X}) \vec{X}^t \vec{\delta} \right] + \frac{3}{2} \mathbb{E} \left[(\vec{X}^t \Lambda \vec{X})(\vec{X}^t \Gamma \vec{X}) \right] \\ &\quad + \frac{3}{4} \mathbb{E} \left[(\vec{X}^t \Gamma \vec{X})^2 \vec{X}^t \vec{\delta} \right] + \frac{1}{8} \mathbb{E} \left[(\vec{X}^t \Gamma \vec{X})^3 \right]. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\Delta V)^3] &= \frac{3}{2} [\text{tr}(\Lambda \Sigma)] [\text{tr}(\Gamma \Sigma)] + 3 \text{tr}(\Lambda \Sigma \Gamma \Sigma) + \frac{1}{8} [\text{tr}(\Gamma \Sigma)]^3 \\ &\quad + \frac{3}{4} [\text{tr}(\Gamma \Sigma)] [\text{tr}(\Gamma \Sigma)^2] + [\text{tr}(\Gamma \Sigma)^3].\end{aligned}$$

Por lo tanto, el coeficiente de asimetría sería

$$\begin{aligned}\xi_{\Delta V} &= \frac{1}{\sigma^3[\Delta V]} \left(\mathbb{E}[(\Delta V)^3] - 3\mathbb{E}[(\Delta V)^2]\mathbb{E}[\Delta V] + 2(\mathbb{E}[\Delta V])^3 \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^3[\Delta \Sigma]} \{ 3 \text{tr}(\Lambda \Sigma \Gamma \Sigma) + \text{tr}[(\Gamma \Sigma)^3] \},\end{aligned}$$

donde $\sigma^2[\Delta V]$ fue dada en (9.19).

9.6. Medidas coherentes de riesgo

Cuando se determina el VaR usando la aproximación delta normal, se da poca relevancia a las pérdidas más imprevistas, ya sea porque no se recogen apropiadamente o la *epdf* asociada exhibe asimetría o exceso de curtosis. En este caso, bajo el supuesto de normalidad, el VaR es subestimado para valores de percentiles bajos y, por el contrario, es sobreestimado para valores altos. Estos corresponden a eventos inesperados. Debido a este problema, en [14] se plantea una nueva medida de riesgo con propiedades de subaditividad y consistencia.

Para establecer la eficiencia de un buen indicador del riesgo de mercado, en [14] se propone que se deben satisfacer 4 propiedades básicas para que una medida de riesgo se denomine “coherente”.

Definición 9.2. Medida de riesgo coherente

Una medida de riesgo coherente es un indicador de riesgo ρ , que cumple los siguientes axiomas:

1. *Homogeneidad positiva*

Dado cualquier $\lambda > 0$, $\rho(\lambda u) = \lambda \rho(u)$. Si el valor de la cartera aumenta en λ , el riesgo también aumenta en λ .

2. *Monotonicidad*

Si $u \leq v$ entonces $\rho(u) \leq \rho(v)$. Si la cartera u tiene un retorno sistemáticamente inferior al de la cartera de v , entonces el riesgo debe ser menor.

3. *Invariante en traslación*

Dado cualquier $\alpha > 0$, $\rho(u + \alpha) = \rho(u) + \alpha$. Adicionar un monto de capital en efectivo α aumenta el riesgo en α .

4. *Subaditividad o diversificación*

$\rho(u + v) \leq \rho(u) + \rho(v)$. No debe aumentar el riesgo en una estrategia de composición de carteras.

9.7. Valor en riesgo condicional

Definición 9.3. *El déficit esperado (expected shortfall (ES)) de una muestra se define como*

$$ES_\alpha(V) = \mathbb{E}[X | X > \text{VaR}_\alpha(V)]. \quad (9.20)$$

El **ES** mide la pérdida promedio de una cartera, dado que la pérdida es mayor que un cierto límite.

La medida de riesgo **ES** es subaditiva y, por lo tanto, coherente en el sentido propuesto por [2]. Esta medida muestra el tamaño promedio que tienen las pérdidas que están por encima del nivel de **VaR** estimado, de modo que suministra información complementaria de la cola de la distribución de pérdidas y ganancias del activo o cartera. El **ES** considera la forma de la distribución condicional del $(1 - \alpha)$ % de los peores eventos, en cambio el **VaR** no los considera.

Esta medida también se denomina *valor en riesgo condicional (CVaR)*, *pérdida esperada en la cola (expected tail loss (ETL))*, “valor medio en riesgo” (*average value at risk (AVaR)*) y *valor en riesgo en la cola (tail value at risk (TVaR))*.

Definición 9.4. *El CVaR se define como la pérdida esperada, dado que es mayor o igual que el VaR. Esta medida es el promedio de pérdidas a un nivel de probabilidad α %, es decir, las pérdidas esperadas con esta probabilidad. El CVaR de una muestra se obtiene como sigue:*

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_\alpha(V) &= \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_q(V) \, dq \\ \text{CVaR}_{1-\alpha}(V) &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_q(V) \, dq. \end{aligned} \quad (9.21)$$

El hecho de que el **VaR** mida la pérdida máxima en condiciones normales de mercado significa que se enfoca (o debe enfocarse) en los acontecimientos ordinarios (hasta un nivel de confianza del 95 %) y no en los eventos extremos o extraordinarios, esto hace necesaria la implementación de una medida de riesgo complementaria como el **CVaR**. Por definición, el **VaR** no abarca todos los aspectos del riesgo de mercado; es decir, el **VaR** no estima, ni

pronostica los eventos extremos de los mercados. Aquí, el **CVaR** juega un papel fundamental.

Como medida de riesgo, el **CVaR** brinda significativas ventajas con relación al **VaR**, en especial cuando la **pdf** del retorno no sea continua y esté lejana del supuesto de normalidad (esto particularmente sucede cuando se utilizan series históricas o series completas disponibles para los activos con baja frecuencia de transacciones). Las propiedades del **CVaR** se estudian en detalle en [2] y [176].

Proposición 9.3. Sean $f_X(x)$ y $F_X(x)$ la **pdf** y **cdf** de una variable aleatoria continua X , respectivamente. Si $F'_X(x)$ nunca es cero, entonces $F_X^{-1}(x)$ es diferenciable y satisface

$$\int_{\alpha}^1 F_X^{-1}(q) dq = \int_{x_{\alpha}}^{\infty} w f_X(w) dw, \quad (9.22)$$

donde q es el único número que satisface que $F_X(x_q) = q$.

Demostración. Siguiendo a [113], se supone que x_q es el menor número que cumple $F_X(x_q) = q$, es decir, es el q -ésimo cuantil de X . Al hacer el cambio de variable

$$w = x_q = F_X^{-1}(q) \quad dw = dx_q = \frac{dq}{F'_X(x_q)}.$$

Aquí se utilizó el teorema de la derivada de la función inversa. Puesto que $F'_X(w) = f_X(w)$ y dado que $f_X(w)$ es una función con dominio la recta real y recorrido el intervalo infinito $[0, \infty)$, al despejar el término dq se obtiene

$$\int_{\alpha}^1 F_X^{-1}(q) dq = \int_{x_{\alpha}}^{\infty} w f_X(w) dw.$$

Es el primer momento incompleto de X . Nótese que si $\alpha \rightarrow 0$, entonces

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} F_X^{-1}(\alpha) \rightarrow -\infty. \quad \checkmark$$

Sustituyendo la expresión (9.1) en (9.21) y usando la proposición 9.3, se obtiene

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_{\alpha}(V) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 \left(\mu_V - \Phi^{-1}(q) \sigma_V \sqrt{T} \right) dq \\ &= \mu_V - \frac{\sigma_V \sqrt{T}}{1-\alpha} \int_{z_{\alpha}}^{\infty} w \varphi(w) dw. \end{aligned} \quad (9.23)$$

En general, bajo el supuesto de normalidad, el modelo paramétrico que determina el **CVaR** de una posición es

$$\text{CVaR}_\alpha(V) = \mu_V - \frac{\sigma_V \sqrt{T}}{1 - \alpha} \varphi(z_\alpha). \quad (9.24)$$

Esta última fórmula es análoga a la expresión dada por [119, pág. 335] y [142, pág. 45].

Proposición 9.4. Propiedades del CVaR

Sea V una variable aleatoria de pérdida, el **CVaR** satisface que

- (i) $\text{CVaR}_\alpha(V) \geq \text{VaR}_\alpha(V)$ para todo nivel de confianza α .
- (ii) Si $[V]^c = \min\{V, c\}$ es la variable censurada por la izquierda en c , entonces

$$\text{CVaR}_\alpha(V) = \sup\{\beta : \text{CVaR}_\alpha([V]^\beta) = \beta\}$$

- (iii) Si V es no negativa, entonces

$$\left[\frac{\mathbb{E}(V^n) - (1 - \alpha) \text{CVaR}_\alpha(V^n)}{\alpha} \right]^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{VaR}_\alpha(V).$$

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [168]. ☑

Además, en [168] se demuestra que el **CVaR** es “coherente” pues satisface los axiomas de homogeneidad positiva, monotonía e invarianza en translación, a diferencia del **VaR**, que no cumple el axioma de subaditividad para pdf no normales.

9.7.1. Aproximación por Cornish-Fisher

Para establecer el **CVaR** por medio de la expansión **CF** para un nivel de confianza α % y un horizonte temporal de T días, se sustituye la ecuación (1.159) en la expresión (9.22) y se obtiene

$$\int_\alpha^1 F_X^{-1}(q) dq = \int_{z_\alpha}^\infty F_X^{-1}(\Phi(w)) \varphi(w) dw \approx \int_{z_\alpha}^\infty w \varphi(w) dw.$$

Luego, el **CVaR** se aproxima como sigue:

$$\text{CVaR}_\alpha(V) = \mathbb{E}(V) - \frac{\sigma_V \sqrt{T}}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 \omega_q dq, \quad (9.25)$$

donde ω_q es dado en (1.160). A partir de (9.22) se llega a

$$\int_{\alpha}^1 z_q^m dq = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)} 2^k (z_{\alpha}^2)^{n-k} \varphi(z_{\alpha}) & \text{si } m = 2n + 1 \\ z_{\alpha}^{2n-1} \varphi(z_{\alpha}) + (2n-1) \int_{\alpha}^1 z_q^{2(n-1)} dq & \text{si } m = 2n. \end{cases}$$

Por lo tanto, se obtiene que

$$\int_{\alpha}^1 \omega_q dq = \left\{ 1 + \frac{z_{\alpha}}{6} \beta_1(V) + \frac{z_{\alpha}^2 - 1}{24} \gamma_2(V) - \frac{2z_{\alpha}^2 - 1}{36} \beta_1^2(V) - \frac{z_{\alpha}^3 - 2z_{\alpha}}{24} \beta_1(V) \gamma_2(V) \right\} \varphi(z_{\alpha}). \quad (9.26)$$

Nótese que si el coeficiente de asimetría $\beta_1(V)$ y el exceso de curtosis $\gamma_2(V)$ son iguales a 0, entonces esta expresión se simplifica a la dada en (9.24).

9.7.2. Aproximación por la distribución $g-h$ de Tukey

La aproximación de CVaR a través de la distribución $g-h$ de Tukey, a un nivel de confianza $\alpha\%$ ($\alpha > 0.5$), está dada por

$$\text{CVaR}_{\alpha}(V) = A + \frac{B}{1-\alpha} \left[\frac{e^{\frac{1}{2} \frac{g^2}{1-h}}}{g \sqrt{1-h}} \Phi(\delta_{2\alpha}) - \frac{1}{g \sqrt{1-h}} \Phi(\delta_{1\alpha}) \right]. \quad (9.27)$$

donde

$$\delta_{1\alpha} = -\sqrt{1-h} z_{\alpha} \quad \text{y} \quad \delta_{2\alpha} = \delta_{1\alpha} + \frac{g}{\sqrt{1-h}}.$$

Usando la expresión (1.143) con $g \neq 0$ y $n = 1$, se obtienen 2 casos:

1. El CVaR a un nivel de confianza $\alpha\%$ está dado por

$$\text{CVaR}_{\alpha}(V) = A + \frac{B}{1-\alpha} \left[\mu_{g,h} \Phi(\delta_{2\alpha}) + \frac{1}{1-h} \frac{\Phi(\delta_{2\alpha}) - \Phi(\delta_{1\alpha})}{\delta_{2\alpha} - \delta_{1\alpha}} \right].$$

2. El CVaR a un nivel de confianza $(1-\alpha)\%$ está dado por

$$\text{CVaR}_{1-\alpha}(V) = A + \frac{B}{\alpha} \left[\mu_{g,h} \Phi(-\delta_{2\alpha}) - \frac{1}{1-h} \frac{\Phi(\delta_{2\alpha}) - \Phi(\delta_{1\alpha})}{\delta_{2\alpha} - \delta_{1\alpha}} \right].$$

9.7.2.1. Casos particulares

De manera análoga, al VaR para esta medida se tienen los siguientes casos:

1. Si $h = 0$, entonces

$$\text{CVaR}_\alpha(V) = \theta + \frac{\Phi(\sigma - z_\alpha)}{1 - \alpha} e^{\mu + \sigma^2/2}, \quad (9.28)$$

donde $\theta = A - e^\mu$. Siguiendo el enfoque usado en [116], se determinan μ y σ . Luego, reemplazando en (9.28), se obtiene

$$\text{CVaR}_\alpha(V) = \theta + \frac{\mu_V - \theta}{1 - \alpha} \left\{ \Phi \left[\sqrt{\ln(1 + \rho_V^2)} - z_\alpha \right] \right\}, \quad (9.29)$$

donde $\rho_V = \frac{\sigma_V}{\mu_V - \theta}$, este es análogo al coeficiente de variación de la variable aleatoria V , cuando $\theta = 0$.

2. Considerando que $g = 0$ y usando el teorema del valor medio,

$$\frac{\Phi(b) - \Phi(a)}{b - a} \approx \varphi(c), \quad \text{con} \quad c \in (a, b).$$

Por consiguiente, se tiene que

$$\text{CVaR}_\alpha(V) = A + \frac{B}{1 - \alpha} \frac{\varphi(\sqrt{1 - h} z_\alpha)}{1 - h}.$$

3. Cuando $g = h = 0$, utilizando los valores dados en [109] para los parámetros de localización y escala, se tiene

$$\text{CVaR}_\alpha(V) = \mu_V - \frac{\sigma_V}{1 - \alpha} \varphi(z_\alpha).$$

Nótese que esta última expresión es análoga a la fórmula para el CVaR dada en (9.24).

9.7.3. Aproximación por la distribución normal sesgada

Cuando se emplea la pdf normal sesgada, el CVaR a un nivel de confianza α % ($\alpha > 0.5$) es aproximado sustituyendo la pdf dada en (1.144) en (9.22); en este caso, el CVaR está dado por

$$\text{CVaR}_\alpha(V) = \frac{1}{1 - \alpha} \left[2\varphi(y_\alpha)\Phi(\lambda y_\alpha) + \rho b \left(1 - \Phi\left(\sqrt{1 + \lambda^2} y_\alpha\right) \right) \right] \quad (9.30)$$

donde $b = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, ρ es dada en (1.150) y y_α es dado por (9.14). Esta fórmula es análoga a la expresión dada por [26]. Nótese que si en la última expresión $\lambda \rightarrow 0$ esta fórmula es análoga a la expresión dada por [119, pág. 335] y [142, pág. 45].

Ejemplo 9.1. *Considérese la cartera construida en [113] usando 3 grandes acciones de capitalización de mercado²: BBVA, ELE y SAN, la muestra abarca 2081 días hábiles desde 01/01/2003 hasta 17/01/2011 y suponga una inversión de $V_0 = \$1\,000\,000$. Determine el VaR y $CVaR$ por medio del método clásico, la simulación histórica y la aproximación CF.*

Solución. Usando (8.2) se establece para cada uno de los activos sus respectivas tasas de retornos diarias y se obtiene

Tabla 9.2. Retornos en puntos básicos de las acciones del ejemplo 9.1

| Activo | Retorno (0.01 %) |
|--------|------------------|
| BBVA | 1.63312757 |
| ELE | 4.24676054 |
| SAN | 3.51851054 |

Fuente: adaptada de [113].

Luego, la matriz de varianza-covarianza de la cartera es

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4.325674189 & 1.714872578 & 4.100211925 \\ 1.714872578 & 2.961638820 & 1.738771858 \\ 4.100211925 & 1.738771858 & 4.677008713 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, las ponderaciones e inversiones en la **GMVP** son las que se pueden ver en la tabla 9.3.

Tabla 9.3. Ponderaciones e inversiones en la **GMVP** del ejemplo 9.1

| Activo | Ponderación (%) | Inversión |
|--------|-----------------|-----------|
| BBVA | 25.574446 | 255 744 |
| ELE | 67.213809 | 672 138 |
| SAN | 7.211744 | 72 117 |

Fuente: adaptada de [113].

Luego, $\mu_V = w'r = 352.58188$ y $\sigma_V^2 = 2.55459 \times 10^8$.

En la tabla 9.4 se muestran las estadísticas del rendimiento de la **GMVP**.

²Datos tomados de <http://es.finance.yahoo.com>

Tabla 9.4. Estadísticas descriptivas

| Medidas | Valores |
|------------|---------------|
| Media | 352.58188 |
| Mediana | 270.60724 |
| Desv. Est. | 15 983.10112 |
| Mínimo | -174 798.6684 |
| Máximo | 121 477.92095 |
| Asimetría | -0.33695 |
| Curtosis | 15.80073 |
| Prueba JB | 14 240.4450 |

Fuente: adaptada de [113].

Las medidas estadísticas de curtosis, asimetría y prueba propuesta por [106] que se muestran en la tabla 9.4 indican que se rechaza la hipótesis nula de normalidad en los retornos. En la figura 9.2 se evidencia que existe diferencia entre la *epdf* de la *GMVP* (gráfica del histograma) y la *pdf* normal. Por ello, se aproxima la variable V por (9.8) y esta expresión queda

$$V = 243.9427 - 11\,968.1342 \frac{1}{g} \left[\exp\{gZ\} - 1 \right] \exp \left\{ \frac{h}{2} Z^2 \right\};$$

donde $g = -0.29507$ y $h = 0.11718$.

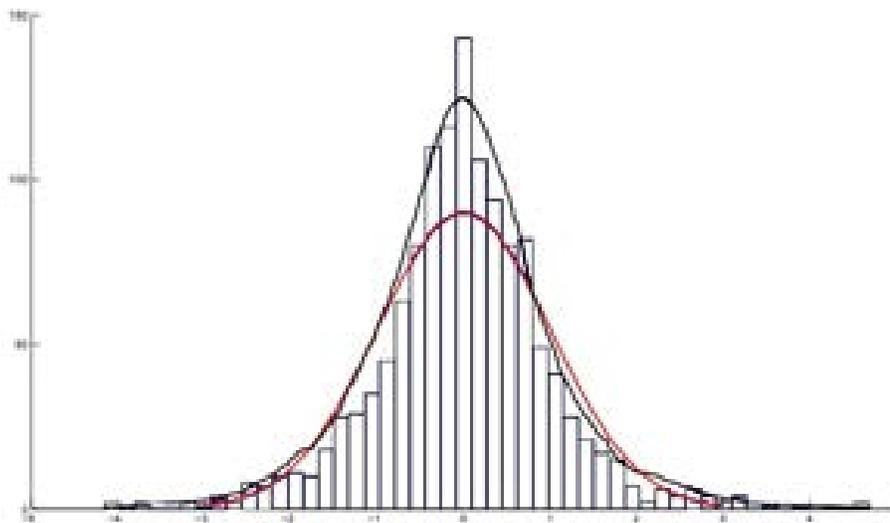


Figura 9.2. Cartera vs. *pdf* normal y distribución $g - h$ de Tukey

Fuente: adaptada de [113].

Como se muestra en la figura 9.2, la distribución $g - h$ de Tukey se aproxima mejor a la *epdf*. La *pdf* de los rendimientos de la *GMVP*, tiene un leve sesgo a la derecha y tiende a ser más leptocúrtica que la *pdf* normal; luego, tiene colas más pesadas.

En este caso, inicialmente, el cálculo de *VaR* se estima considerando que los retornos son normales. En la tabla 9.5 se presentan las pérdidas del *VaR* para la *GMVP* a distintos niveles de confianza: 90 %, 95 %, 97.5 % y 99 %.

Tabla 9.5. Comparación de las metodologías *VaR*

| <i>VaR</i> | Niveles de confianza | | | |
|---------------------|----------------------|-----------------|------------------|-----------------|
| | $\alpha = 0.90$ | $\alpha = 0.95$ | $\alpha = 0.975$ | $\alpha = 0.99$ |
| Clásico | 20 130 | 25 937 | 30 973 | 36 829 |
| Histórico | 15 279 | 22 262 | 28 423 | 48 198 |
| Cornish-Fisher | 19 553 | 24 406 | 48 381 | 32 869 |
| GH (A, B, g, h) | 20 279 | 29 448 | 39 533 | 54 704 |

Fuente: adaptada de [113].

Como se muestra en la figura 9.3 existen diferencias claras entre las metodologías *VaR*.

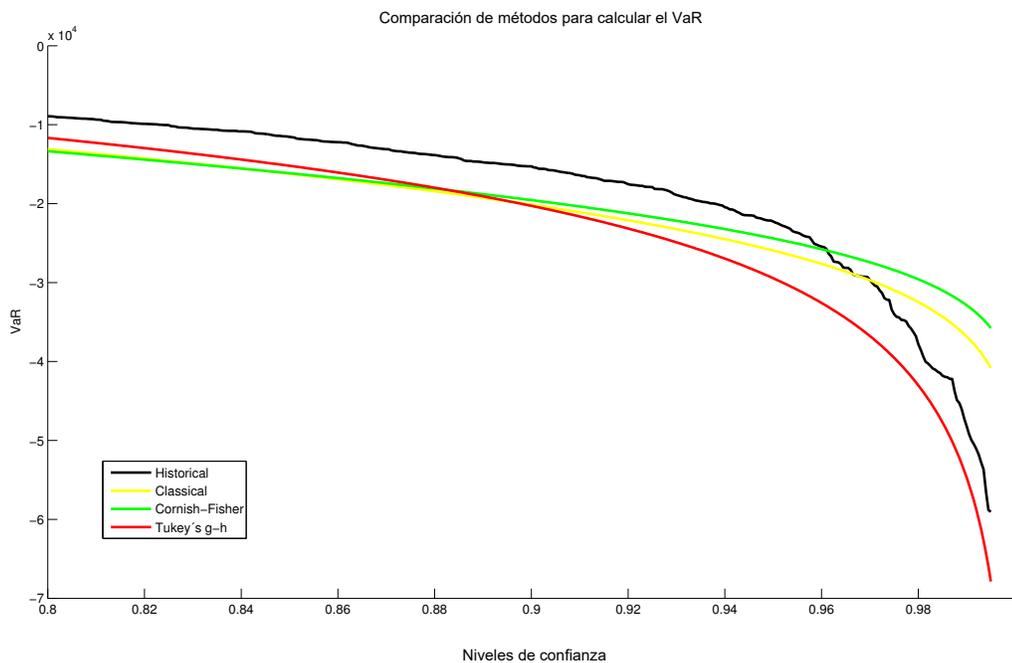


Figura 9.3. Comparación de las metodologías *VaR*

Fuente: tomada de [113].

En la tabla 9.6 se presentan las pérdidas admisibles de CVaR para la GMVP a distintos niveles de confianza: 90 %, 95 %, 97.5 % y 99 %.

Tabla 9.6. Comparación de metodologías CVaR

| CVaR | Niveles de confianza | | | |
|---------------------|----------------------|-----------------|------------------|-----------------|
| | $\alpha = 0.90$ | $\alpha = 0.95$ | $\alpha = 0.975$ | $\alpha = 0.99$ |
| Clásico | 27 697 | 32 615 | 37 012 | 42 245 |
| Cornish-Fisher | 35 087 | 59 102 | 88 740 | 135 600 |
| GH (A, B, g, h) | 41 660 | 67 612 | 115 401 | 252 015 |

Fuente: adaptada de [113].

En la figura 9.4 se muestra que existen diferencias entre las metodologías CVaR.

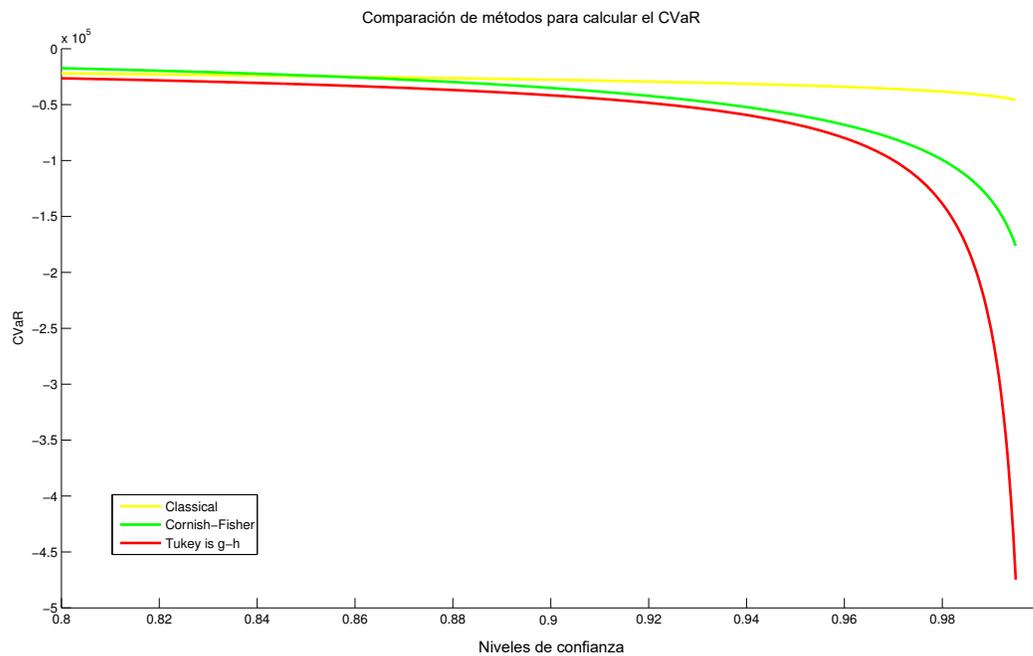


Figura 9.4. Comparación de metodologías CVaR

Fuente: tomada de [113]

Nótese que para cada uno de los métodos las pérdidas de CVaR son mayores que las pérdidas de VaR. ✓

En este capítulo se analizaron algunos procedimientos para el cálculo de VaR y CVaR. En la tabla 9.7 se resumen las fórmulas para calcular estas medidas usando distintas distribuciones univariadas.

Tabla 9.7. Resumen de fórmulas para calcular el VaR y CVaR

| Distribución | pdf ¹ | VaR _α (X) | CVaR _α (X) |
|------------------|---|---|---|
| Normal | $\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\}$ | $\mu + \sigma z_\alpha$ | $\mu + \frac{\sigma}{1-\alpha} \varphi(z_\alpha)$ |
| t-Student | $f_X(x) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma[\nu/2]} \left[1 + \frac{x^2}{\nu}\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}$ | $t_{\alpha, \nu} \sigma \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}$ | $\frac{\sigma}{1-\alpha} \frac{\Gamma(\nu)}{\nu-1} \frac{\sqrt{\nu-2}}{[\Gamma(\frac{\nu}{2})]^2} \left(4 \frac{\nu+t_{\alpha, \nu}^2}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\nu}}$ |
| Valor extremo | $f_X(x) = \frac{e^{-z}}{\sigma} \exp\{-\exp\{-z\}\}$ | $\mu - \sigma \ln[-\ln \alpha]$ | $\mu - \frac{\sigma}{1-\alpha} \int_0^{-\ln \alpha} e^{-u} \ln u \, du$ |
| Weibull | $f_X(x) = c \frac{x^{c-1}}{b^c} \exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^c\right\}$ | $b \sqrt[-c]{-\ln(1-\alpha)}$ | $\frac{b}{1-\alpha} \int_{-\ln(1-\alpha)}^\infty \sqrt{u} e^{-u} \, du$ |
| Lognormal | $f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\left(\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right\}$ | $\exp\{\mu + \sigma z_\alpha\}$ | $\exp\left\{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right\} \frac{[1-\Phi(z_\alpha-\sigma)]}{1-\alpha}$ |
| Pareto | $f_X(x) = \frac{c}{a} \left[\frac{a}{x}\right]^{c+1}, x \geq a > 0$ | $\frac{a}{\sqrt[1-\alpha]{1-\alpha}}$ | $\frac{ac}{c-1} \frac{1}{\sqrt[1-\alpha]{1-\alpha}}$ |
| g - h de Tukey | $t_{g,h}(y_p) = \frac{\varphi(z_p)}{T_{g,h}^*(z_p)}$ | $A + BT_{g,h}(z_\alpha)$ | $A + \frac{B}{1-\alpha} \left[\mu_{g,h} \Phi(\delta_{2\alpha}) + \frac{1}{1-h} \frac{\Phi(\delta_{2\alpha}) - \Phi(\delta_{1\alpha})}{\delta_{2\alpha} - \delta_{1\alpha}} \right]$ |
| Normal sesgada | $\phi_{SN}(z; \mu, \sigma, \lambda) = \frac{2}{\sigma} \varphi(z) \Phi(\lambda z)$ | z_α | $\frac{1}{1-\alpha} [\phi_{SN}(z_\alpha; \lambda) + \rho b (1 - \Phi(\sqrt{1 + \lambda^2 z_\alpha}))]$ |
| SGN ² | $f_Y(y; \mu, \sigma^2, \lambda) = \frac{\lambda \varphi(y, \mu, \sigma^2)}{[\lambda + \lambda \Phi(y, \mu, \sigma^2)]^2}$ | $\mu - \sigma \Phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{1-\lambda\alpha}\right)$ | $\mu - \frac{\sigma}{\alpha} \frac{\varphi(z_\alpha)}{(1-\alpha)^2} \left[(1-\alpha) \frac{1+\lambda}{\lambda} + \frac{2\lambda}{\lambda} \ln\left(\frac{\lambda}{1-\lambda\alpha}\right) \right]$ |

¹Donde $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

²Esta pdf es un caso particular de la técnica dada en [137].

Fuente: tomada de [111, pág. 134].

9.8. Ejercicios

- 9.1 Suponga una inversión de \$10 000 000 en un activo que tiene un rendimiento diario esperado de 1.5 % y desviación estándar de 4 %. Obtenga el **VaR** mediante simulación Montecarlo.
- 9.2 Considere las 4 acciones del ejercicio 8.1, encuentre el portafolio de mínima varianza y obtenga las medidas de riesgo de **VaR** y **CVaR** para este portafolio considerando una inversión inicial de \$10 000 000.
- 9.3 Encuentre $\text{VaR}_{0.95}(X)$ y $\text{CVaR}_{0.95}(X)$, si X sigue una de estas pdf:
- Distribución uniforme en el intervalo (0, 1000).
 - Distribución de Pareto con $\alpha = 2$ y $\beta = 1000$.
 - Distribución exponencial con media 1000.
 - Distribución lognormal con $\mu = 5$ y $\sigma = 2$.
 - Distribución normal con media 1000 y desviación estándar 1000.
- 9.4 Considere los 2 activos riesgosos del ejercicio 8.2. Suponga que 2 inversionistas, A y B , pueden invertir en estos activos \$12 000 000 y \$8 000 000, respectivamente.
- Si A invierte en X y B invierte en Y , ¿cuál de los 2 tiene un mayor **VaR** anual?
 - Si los 2 inversionistas deciden aliarse y constituir uno de los portafolios consignados en la tabla 9.8, ¿cuál de los 2 portafolios tiene un mayor **VaR** anual?

Tabla 9.8. Ponderaciones de inversión del ejercicio 9.4

| Portafolio | X | Y |
|------------|------|------|
| 1 | 40 % | 60 % |
| 2 | 60 % | 40 % |

Fuente: elaboración propia.

En diciembre de 1974, hace más de 4 décadas, los gerentes generales de los bancos centrales del denominado Grupo de los Diez¹ crearon el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (Basel Committee on Banking Supervision (BCBS)) conocido comúnmente como Comité de Basilea. Este surgió como reacción a la crisis financiera desatada tras la quiebra en 1974 de Bankhaus Herstatt en Colonia, Alemania, que generó pérdidas aproximadas a los USD\$200 000 000 en operaciones con moneda extranjera. El objetivo principal del BCBS es crear herramientas apropiadas para la administración del riesgo financiero y de esta forma evitar crisis financieras similares a la mencionada anteriormente. La formalidad de sus planteamientos y como ha logrado influir de forma significativa en las políticas de los reguladores, le han hecho acreedor de un gran prestigio en el mundo y lo han convertido en un referente obligado para la administración de los siguientes 3 riesgos: crediticio, de mercado y operacional.

Los estudios de créditos monetarios, dado que el recobro se realiza mediante cuotas que incluyen los intereses y la amortización (abono a capital), consisten en determinar la capacidad y disponibilidad de pago de los eventuales deudores o clientes; es decir, si el crédito es viable o no. Al principio para realizar la gestión del riesgo crediticio se debía establecer, según las características de cada cliente, cuánto se le puede prestar, cuánto se le puede cobrar, qué respaldo o aval se le debe exigir, cómo se le va a cobrar, cómo se van a recuperar las deudas y los créditos impagables, qué tanto capital propio se debe asegurar o reservar para solventar una incapacidad de pago. En las últimas décadas, la manera de gestionar el riesgo crediticio ha tenido un cambio radical, debido a los cambios en el entorno. Por ejemplo, los cambios de las condiciones económicas son una fuente de riesgo; por lo tanto, se hace necesario realizar un análisis del entorno social y político.

En la actualidad se han implementado sofisticadas técnicas probabilísticas y estadísticas con el fin de administrar el riesgo tanto personal como en carteras crediticias. Además, se han adoptado sistemas de calificación (*rating*) de créditos para grandes deudores y sistemas de puntajes (*scoring*) para pequeños deudores.

Las referencias empleadas en la elaboración de este capítulo han sido [31], [122], [131], [179] y [201].

¹El G10, grupo conformado por los países del Acuerdo General de Prestamos (General Arrangement to Borrow (GAB)). El GAB fue constituido en 1962 por 8 gobiernos de estados miembros del Fondo Monetario Internacional (FMI), entre los cuales estaban Bélgica, Canadá, Estados Unidos, Francia, Italia, Japón, Países Bajos y Reino Unido, y 2 bancos centrales europeos (Alemania y Suecia), los cuales acordaron contribuir con más recursos para incrementar los montos de dinero que se otorgan en créditos del FMI.

10.1. Medición del riesgo individual

De manera análoga a la que se planteó en el capítulo 4, se necesita establecer el monto de pérdida crediticia; por eso, se modela tanto el riesgo individual (tarjeta habiente) como el riesgo colectivo (cartera crediticia). En general, los factores que se contemplan en la gestión del riesgo crediticio son: la probabilidad de incumplimiento asociada a un deudor, la migración de una calificación crediticia a otra, las asociaciones (correlaciones) entre incumplimientos, la exposición crediticia a un deudor, la concentración en la cartera crediticia y la respectiva tasa de recuperación en caso de incumplimiento.

Definición 10.1. Distancia al incumplimiento

Esta medida expresada como DD (Distance to Default), establece la distancia entre un valor inicial de los activos (V_0) y los pasivos (P), expresada en unidades de desviaciones estándar (σ_V). Matemáticamente se obtiene como

$$DD = \frac{V_0 - P}{\sigma_V}, \quad (10.1)$$

donde P denota el nivel de insolvencia y se define como los pasivos a corto plazo más la mitad de los demás pasivos.

Definición 10.2. Probabilidad de incumplimiento

La probabilidad de incumplimiento (Probability of Default (PD)) es una medida extensamente usada para caracterizar un crédito individual, está asociada a cada cliente y denota la probabilidad de que este no cumpla con un compromiso crediticio. Usualmente, la tasa de incumplimiento para cada tipo de crédito se estima o calcula usando datos históricos y está dada por

$$PD = \frac{N.^{\circ} \text{ de créditos que incumplen en un horizonte temporal}}{N.^{\circ} \text{ total de créditos vigentes otorgados en el periodo anterior}}. \quad (10.2)$$

Definición 10.3. Correlación entre incumplimientos

El grado de dependencia o vínculo entre la tendencia crediticia de 2 deudores es medido mediante la correlación a pares. Esta medida está acotada entre -1 y 1 , y depende de la estrecha tendencia en la conducta de la pareja de deudores. Una correlación positiva (negativa) significa que el incumplimiento de uno de los deudores hace que sea más posible el incumplimiento (cumplimiento) del otro. Como la correlación es simétrica, puede interpretarse como si un deudor cumple con su obligación, es muy viable que también el otro cumpla. Una correlación nula significa que el incumplimiento de un deudor no incide en la conducta crediticia de otro cliente.

Definición 10.4. Medición de la concentración de cartera

La concentración cuantifica el exceso de crédito en pocos clientes ya que la escasa diversificación genera riesgo. Esta aparece de distintas maneras y es más riesgosa si se manifiesta en sectores inciertos de la cartera. Por ejemplo, se puede presentar en un sector productivo (automotriz, comercial, servicios, textil, etc.), en una región específica geográfica o en alguna modalidad de crédito (fiduciario, hipotecario, rotativo, etc.). Usando un indicador grupal se establece en un único número cómo es la distribución del saldo de la cartera crediticia o la segmentación por tipo de producto.

Una medida estadística muy usada para establecer la concentración de una cartera crediticia es el índice de Herfindahl-Hirshmann (IHH), la cual considera tanto el número de deudores como el porcentaje del monto de deuda en la cartera, y se calcula como²:

$$IHH = \sum_{i=1}^N \left(\frac{L_i}{L} \right)^2 \quad \text{con} \quad L = \sum_{i=1}^N L_i. \quad (10.3)$$

Aquí, $\frac{L_i}{L}$ es el porcentaje de deuda del i -ésimo crédito y N es el número total de créditos en la cartera. Nótese que sus valores están en el intervalo $(1/N, 1)$. Luego, una cartera diversificada completamente en la que todos los deudores adeudan montos iguales, produce un índice de $1/N$, mientras que un índice igual a 1, indica que los créditos están concentrados completamente en un único préstamo o cliente. El recíproco de este índice, se llama equivalente numérico (ver [3]) y corresponde al menor número de créditos de igual monto que producirían ese valor de índice.

Definición 10.5. Exposición crediticia

La EAD (Exposure at Default) es el monto de deuda del cliente en caso de incumplimiento en un periodo dado. De manera sencilla en la banca, esta medida se establece como el saldo principal del crédito más un interés acumulado. En los derivados, esta medida depende de si el contrato tiene un valor de mercado positivo (o negativo) y de los cambios futuros en dicho valor.

Definición 10.6. Severidad de la pérdida

La severidad se denota por LGD (Loss Given Default) y representa el monto de la deuda no recuperable por la entidad crediticia debido al incumplimiento del deudor. Esta es proporcional a la exposición crediticia. El complemento (es decir, $1 - LGD$, se denomina tasa de recuperación del crédito). De acuerdo con este concepto, la severidad es lo que se pierde por incumplir un deudor después de dicha recuperación, es decir, una vez se consideren todos los costos involucrados (costo de cobranza, costos judiciales, etc.).

²La letra L se usa como acrónimo de “Loan”.

10.1.1. Medidas de riesgo asociadas a una cartera crediticia

La metodología de riesgo en carteras crediticias es descrita en [50], [91], [215] y [216]. Como ya se señaló la medida de riesgo más usada en un crédito individual es la PD. Para el caso de una cartera de n créditos, se necesita encontrar una *epdf* para modelar las pérdidas y ganancias (P & L) de la cartera crediticia.

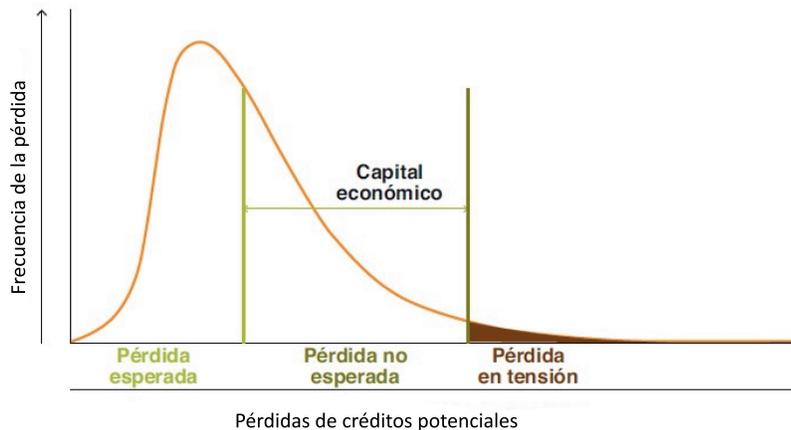


Figura 10.1. Distribución de la pérdida de una cartera crediticia

Fuente: adaptada de [165].

Las siguientes medidas están asociadas a la distribución de P & L:

Definición 10.7. Valor en riesgo crediticio

*De manera similar, como en el capítulo 9, el VaR de una cartera crediticia es el cuantil de la *epdf* de P&L, para un nivel de confianza y periodo temporal predeterminado. Usualmente, la *epdf* se descompone en 2 regiones: la pérdida esperada y la no-esperada. La aceptación como medida de riesgo crediticio del VaR es un paso lógico porque con los ajustes del caso facilita sumarlo al riesgo de mercado.*

Tabla 10.1. Criterios de valoración

| Tipo riesgo | VaR |
|-------------|--------------|
| Bajo | $\leq 20\%$ |
| Medio-bajo | (20 %, 30 %] |
| Medio-alto | (30 %, 40 %] |
| Alto | $> 40\%$ |

Fuente: elaboración propia.

Definición 10.8. Pérdida esperada de una cartera crediticia

La pérdida esperada (EL , Expected Loss) de una cartera crediticia está asociada con la política de reservas y garantías que la entidad crediticia establece para los créditos otorgados. Se estima como sigue:

$$EL_C = \sum_{j=1}^n \omega_j \cdot EL_j \quad \text{con} \quad EL_j = (PD)_j \cdot (LGD)_j \cdot (EAD)_j. \quad (10.4)$$

Definición 10.9. Pérdida no esperada de una cartera crediticia

La pérdida no esperada (UL , Unexpected Loss) es aquella en la que puede incurrir una entidad crediticia como resultado del incumplimiento de sus deudores, es medida como

$$UL_C = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} w_i w_j UL_i UL_j} \quad \text{con} \quad UL_j = VaR_j - EL_j. \quad (10.5)$$

Es expresada en términos de algún múltiplo de desviaciones estándar de la *epdf* de P&L. Esta medida determina el patrimonio necesario para que la entidad crediticia pueda enfrentar pérdidas no anticipadas.

Definición 10.10. Medida de frecuencias esperadas de incumplimiento

La EDFM (Expected Default Frequency Measures) se establece como la proporción entre el número de empresas que están a igual distancia de incumplimiento que realmente incumplieron y el número total de empresas que están a esta distancia de incumplimiento; es decir,

$$EDFM = \frac{N.^{\circ} \text{ de empresas a una DD que incumplieron}}{N.^{\circ} \text{ total de empresas a una DD}}. \quad (10.6)$$

Cabe aclarar que esta medida se sustenta en datos históricos.

10.2. Sistemas de clasificación de créditos

En el riesgo crediticio es esencial evaluar tanto las condiciones de pago como la capacidad de pago de los clientes. Actualmente, se han buscado instrumentos sistemáticos, precisos y flexibles que permitan determinar la “categoría” crediticia de los clientes.

Los modelos estadísticos más usados son los de calificación (*rating*) y de puntaje (*scoring*). Dentro de las principales agencias calificadoras de riesgo se encuentran Moody’s, Standard & Poor’s (S&P) y Fitch.

Aunque las empresas han tenido siempre trato preferencial en el otorgamiento de deuda, esto no las exime de ser calificadas; además, fueron

las primeras en ser catalogadas y con dicho instrumento se informaba a las entidades crediticias sobre la solvencia financiera que estas tenían.

Para pequeños deudores se aplican los sistemas de puntaje, los cuales se realizan automáticamente en un sistema mecanizado que usa técnicas estadísticas de análisis de discriminante para separar a los clientes “malos” de los “buenos”.

Algunas consideraciones para la elaboración de Scorecard son:

1. Definir la muestra piloto que permita clasificar en buenas y malas las solicitudes de crédito presentadas por los clientes.
2. Establecer categorías que permitan calificar o cuantificar las características de una solicitud de crédito, para luego catalogar a un deudor como malo, pues recíprocamente lo que no es malo es bueno.
3. Seleccionar el umbral que clasifique en buenas y malas las solicitudes de crédito.

El número de requisitos exigidos a una característica puede ser distinto según la entidad crediticia. Por ejemplo, en las solicitudes de crédito un aspecto valorado es “tipo de residencia”. Una entidad crediticia puede conformarse con solo 2 atributos: “propia-arrendada”, mientras que otra puede exigir más factores: “propia sin hipoteca”, “propia con hipoteca”, “alquilada amueblada”, “alquilada sin amueblar” y “vivienda familiar”. Suponiendo que se asigna una puntuación de 1 a 5 a cada aspecto, tal que a mayor calificación, menor riesgo y viceversa, entonces para las características valoradas sus puntuaciones son distintas.

Definición 10.11. Tabla de clasificación o matriz de confusión

Es una tabla cruzada que suministra un análisis comparativo de las frecuencias de los riesgos observados y clasificados en la muestra piloto. La distribución de la matriz de confusión se muestra en la tabla (10.2).

Tabla 10.2. Matriz de confusión

| Riesgo observado | Riesgo clasificado | | Total |
|------------------|--------------------|-------|-------|
| | Bueno | Malo | |
| Bueno | Bb | Bm | n_B |
| Malo | Mb | Mm | n_M |
| Total | n_b | n_m | n |

Fuente: adaptada de [201, pág. 109].

Aquí $n_B(n_M)$ denota el número de solicitudes de crédito “buenas” (“malas”) clasificadas apropiadamente y $n_b(n_m)$ el número de solicitudes de crédito “buenas” (“malas”) clasificadas erróneamente.

Para empresas, la matriz de confusión es dada en la tabla (10.3).

Tabla 10.3. Matriz de confusión para empresas

| Riesgo observado | Riesgo clasificado | | Total |
|------------------|--------------------|------------|----------|
| | No quiebra | Bancarrota | |
| No quiebra | n_{11} | n_{12} | $n_{1.}$ |
| Bancarrota | n_{21} | n_{22} | $n_{2.}$ |
| Total | $n_{.1}$ | $n_{.2}$ | n |

Fuente: Elaboración propia, adaptada de [6, pág. 599].

Aquí, n_{ij} denota el número de empresas del grupo i que se clasifican en el grupo j .

Considerando los elementos n_{ij} de la matriz de confusión, se cuantifican las proporciones de verdaderos positivos y falsos positivos. Luego, los verdaderos (falsos) positivos son aquellos malos (buenos) riesgos clasificados como malos (en la matriz de confusión, el elemento Mm (Bm)).

Tabla 10.4. Indicadores que se extraen de la matriz de confusión

| Indicador | Fórmula | Interpretación |
|----------------------------------|----------------------------------|--|
| Sensibilidad | $\frac{Mm}{n_M} \times 100\%$ | Proporción de solicitudes malas que son clasificadas como malas. |
| Especificidad | $\frac{Bb}{n_B} \times 100\%$ | Proporción de solicitudes buenas que son clasificadas como buenas. |
| Proporción de aceptar malos | $\frac{Mb}{n_M} \times 100\%$ | Cociente de solicitudes malas aceptadas por el modelo sobre el número de malos. |
| Proporción de rechazo | $\frac{n_m}{n} \times 100\%$ | Cociente de solicitudes de crédito que el modelo clasifica como malos sobre el número total de solicitudes de crédito. |
| Proporción de falso positivo | $\frac{Mb}{n_b} \times 100\%$ | Proporción de solicitudes malas que son aceptadas. |
| Proporción de falso negativo | $\frac{Bm}{n_m} \times 100\%$ | Proporción de solicitudes buenas que son rechazadas. |
| Tasa de acierto óptima | $\frac{Bb + Mm}{n} \times 100\%$ | Cociente de solicitudes de crédito que el modelo clasifica correctamente sobre el total de solicitudes de crédito. |
| Tasa de error óptima o Bayesiana | $\frac{Mb + Bm}{n} \times 100\%$ | Cociente de solicitudes de crédito que el modelo clasifica erróneamente sobre el total de solicitudes de crédito. |

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con [151] las probabilidades asociadas a la clasificación de una solicitud de crédito como “buena” son expresadas así:

p : probabilidad a posteriori y π : probabilidad a priori.

Si se define la variable indicadora I como sigue:

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si la solicitud es clasificada como “buena”,} \\ 0 & \text{si la solicitud es clasificada como “mala”,} \end{cases} \quad (10.7)$$

la cual tiene distribución Bernoulli de parámetro π , entonces se tiene que la probabilidad de que una solicitud de crédito haya sido clasificada apropiadamente está dada por

$$\begin{aligned} P(\text{correcta}) &= P(\text{correcta}|I = 1)P(I = 1) + P(\text{correcta}|I = 0)P(I = 0) \\ &= p\pi + (1 - p)(1 - \pi). \end{aligned} \quad (10.8)$$

Puesto que ningún mecanismo de clasificación es perfecto, algunas solicitudes de clientes “buenos” son clasificadas como “malas” y viceversa. De manera análoga a la propuesta dada en [130] se establece la siguiente definición permite determinar el costo esperado de clasificar mal un cliente.

Definición 10.12. Costo de clasificación errónea

Dada una solicitud con probabilidad a priori π de pertenecer a un cliente “bueno”. El costo esperado de clasificar erróneamente la solicitud se calcula como

$$\begin{aligned} \text{costo} &= C_1 \cdot \pi \cdot P(M|I = 1) + C_2 \cdot (1 - \pi) \cdot P(B|I = 0) \\ &= C_1 \cdot \pi \cdot \frac{Mb}{n_b} + C_2 \cdot (1 - \pi) \cdot \frac{Bm}{n_m}, \end{aligned} \quad (10.9)$$

donde C_1 y C_2 son los costos de clasificar erróneamente una solicitud de un cliente “bueno” y “malo”, respectivamente.

Por otra parte, la entidad crediticia incurre en un costo proveniente por dichos errores:

1. Cuando el solicitante “bueno” es catalogado como “malo” la entidad perderá una “utilidad esperada” (u) que el cliente le generaría.
2. Cuando el solicitante “malo” es catalogado como “bueno”, se generará una “deuda esperada incurrida” (d) para la entidad si el cliente cae en incumplimiento.

Suponiendo que cada solicitante produce igual utilidad (deuda) en estos casos, la pérdida esperada por cliente está dada por

$$\text{pérdida} = \frac{uMb + dBm}{n}. \quad (10.10)$$

Nótese que esta última expresión se obtiene a partir de (10.9) haciendo los cambios $C_1 = u$, $C_2 = d$ y $\pi = n_b/n$.

Ejemplo 10.1. [201, pág. 109]

Para la matriz de confusión que se muestra en la tabla (10.5).

Tabla 10.5. Matriz de confusión

| Riesgo observado | Riesgo clasificado | | Total |
|------------------|--------------------|------|-------|
| | Bueno | Malo | |
| Bueno | 600 | 150 | 750 |
| Malo | 100 | 150 | 250 |
| Total | 700 | 300 | 1000 |

Fuente: adaptada de [201, pág. 109].

Considere que la pérdida por “utilidad esperada” es $u = 100$ y la pérdida por “deuda esperada incurrida” es $d = 500$. Determine la tasa de error óptima y la pérdida real por cliente.

Solución. A partir de la información suministrada en la matriz de confusión se tiene:

Tabla 10.6. Proporción de solicitudes clasificadas correctamente

| Clasificación de solicitud | Número correcto | Total correctas | Porcentaje correctas | Porcentaje de error |
|----------------------------|-----------------|-----------------|----------------------|---------------------|
| Buena | 600 | 750 | 80 % | 20 % |
| Mala | 150 | 250 | 60 % | 40 % |
| Total | 750 | 1000 | 75 % | 25 % |

Fuente: elaboración propia.

Luego, la tasa de error óptima es igual a 25 %. La pérdida real por cliente

$$\frac{uMb + dBm}{n} = \frac{(100 \cdot 150) + (500 \cdot 100)}{1000} = 65. \quad \checkmark$$

10.2.1. Sistema colombiano

La clasificación del crédito en Colombia está reglamentada en el capítulo II de la circular básica contable y financiera (circular externa n.º 100 de 1995) y modificada mediante circular externa n.º 016 de julio 2 de 2019 emitida por la Superintendencia Financiera de Colombia (SFC). Las siguientes condiciones objetivas se establecen como suficientes para clasificar un crédito en cada categoría:

Tabla 10.7. Clasificación del riesgo crediticio en n.º de meses en mora

| Categoría del crédito | Modalidad de crédito | | | | Calificación del riesgo |
|-----------------------|----------------------|---------|--------------|----------|-------------------------|
| | Comercial | Consumo | Microcrédito | Vivienda | |
| A | 0-1 | 0-1 | 0-1 | 0-2 | Normal |
| B | 1-3 | 1-2 | 1-2 | 2-5 | Aceptable |
| C | 3-6 | 2-3 | 2-3 | 5-12 | Apreciable |
| D | 6-12 | 3-6 | 3-4 | 12-18 | Significativo |
| E | > 12 | > 6 | > 4 | > 18 | Incobrabilidad |

En la categoría E, crédito irrecuperable, están aquellos créditos que se estiman incobrables.

Fuente: adaptada de [197].

Estas categorías de calificación de crédito están basadas en los tiempos de morosidad del crédito o en su probabilidad de incumplimiento, y son las categorías estándar de regulación. No obstante, las entidades crediticias son autónomas para clasificar aquellos deudores que, cumpliendo con las condiciones anteriores, muestran mayor riesgo por otras causas.

El porcentaje de provisión mínimo por categoría que se debe mantener en todo momento, en relación con las operaciones, según la clase de crédito, se encuentra establecido para nuestro país en los porcentajes dados en la tabla 10.8.

Tabla 10.8. Porcentaje mínimo de provisión neto de garantía

| Categoría del crédito | Porcentaje mínimo de provisión | |
|-----------------------|--------------------------------|----------|
| | CCM | Vivienda |
| A | 0 % | 1 % |
| B | 1 % | 3.2 % |
| C | 20 % | 10 % |
| D | 50 % | 20 % |
| E | 100 % | 30 % |

CCM: comercial, consumo y microcrédito.

Fuente: adaptada de [196].

Además, se establece un indicador de categoría de la cartera que representa la proporción de cartera vencida en relación con el total de cartera bruta. En el país se considera que este indicador es aceptable si está por debajo del 7%.

10.3. Métodos estadísticos para crear tablas de puntuación de crédito

10.3.1. Técnicas de separación

Sea $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ el vector aleatorio m dimensional que describe la información disponible de los solicitantes de crédito (buenos/malos). El valor observado de estas variables asociadas al i -ésimo solicitante, se expresa como $\vec{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$, donde x_{ij} es el valor del atributo del i -ésimo solicitante para la j -ésima característica. Sean

$$p(\vec{x}|B) = \frac{P[\text{solicitante sea bueno y posea el atributo } \vec{x}]}{p_B} \quad (10.11)$$

donde $p_B = P[\text{solicitante sea bueno}]$. De manera análoga, se obtiene $p(\vec{x}|M)$ para los malos y $p_M = P[\text{solicitante sea malo}]$. Por otra parte,

$$q(B|\vec{x}) = \frac{P[\text{solicitante sea bueno y posea el atributo } \vec{x}]}{p(\vec{x})} \quad (10.12)$$

donde $p(\vec{x}) = P[\text{solicitante posea el atributo } \vec{x}]$. Al reescribir las expresiones (10.11) y (10.12) como

$$P \left\{ \begin{array}{l} \text{solicitante sea bueno y} \\ \text{posea el atributo } \vec{x} \end{array} \right\} = p(\vec{x}|B)p_B = q(B|\vec{x})p(\vec{x}). \quad (10.13)$$

Por la regla de Bayes se tiene que

$$q(B|\vec{x}) = \frac{p(\vec{x}|B)p_B}{p(\vec{x})}. \quad (10.14)$$

De manera análoga,

$$q(M|\vec{x}) = \frac{p(\vec{x}|M)p_M}{p(\vec{x})}. \quad (10.15)$$

Al dividir la expresión (10.15) por la expresión (10.14), se llega a

$$\frac{q(M|\vec{x})}{q(B|\vec{x})} = \frac{p(\vec{x}|M)p_M}{p(\vec{x}|B)p_B}. \quad (10.16)$$

Supóngase que la pérdida por clasificar erróneamente una solicitud de crédito es cuantificable en unidades homogéneas y sea A el conjunto de todos los posibles atributos asociados a las solicitudes de créditos, es decir, los valores que \vec{X} puede tomar. El propósito es encontrar una regla que segmente el conjunto A en 2 subconjuntos A_B y A_M de tal manera que las solicitudes cuyas respuestas están en A_B son catalogadas como “buenas” y, por ende, se aceptan sus solicitudes, mientras que las solicitudes cuyas respuestas están en A_M son catalogadas como “malas” y sus solicitudes son rechazadas. Al establecer esta partición disyunta se debe garantizar que se minimice la pérdida esperada para la entidad crediticia. Luego, la pérdida esperada por cliente, expresión (10.10), si se aceptan las solicitudes malas con atributos en A_B y se rechazan aquellas buenas con atributos en A_M es

$$u \sum_{\vec{x} \in A_M} p(\vec{x}|B)p_B + d \sum_{\vec{x} \in A_B} p(\vec{x}|M)p_M = u \sum_{\vec{x} \in A_M} q(B|\vec{x})p(\vec{x}) + d \sum_{\vec{x} \in A_B} q(M|\vec{x})p(\vec{x}). \quad (10.17)$$

Dado que para la entidad crediticia es más grave aceptar clientes eventualmente malos, que rechazar clientes eventualmente buenos, entonces la expresión (10.17) se minimiza si se clasifica \vec{x} en A_B solo si

$$d \cdot p(\vec{x}|M)p_M \leq u \cdot p(\vec{x}|B)p_B.$$

Luego, el subconjunto A_B que minimiza la pérdida esperada es el siguiente:

$$A_B = \{\vec{x} \in A | d \cdot p(\vec{x}|M)p_M \leq u \cdot p(\vec{x}|B)p_B\}. \quad (10.18)$$

En [165] se presenta el siguiente teorema, en el cual, fijando un número pequeño θ , se logra identificar el mejor conjunto $A_B \subset A$, en el sentido en que $P(A_B|M) \leq \theta$, y $P(A_M|B)$ es lo más pequeña posible o, equivalentemente, que su complemento $P(A_B|B) = 1 - P(A_M|B)$ es muy grande.

Teorema 10.1. *Dado el conjunto*

$$A_B = \left\{ \vec{x} \in A \mid \frac{P(\vec{x}|M)}{P(\vec{x}|B)} \leq \lambda_\theta \right\} \quad (10.19)$$

tal que $P(A_B|M) = \theta$, entonces $P(A_B|B) > P(C|B)$ para todo $C \subset A$ que satisface $P(C|M) = \theta$.

Demostración. Los conjuntos A_B y C se pueden escribir como

$$A_B = (A_B \cap C) \cup (A_B \cap C^c) \quad \text{y} \quad C = (A_B \cap C) \cup (A_B^c \cap C).$$

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} P(A_B|M) &= P(A_B \cap C|M) + P(A_B \cap C^c|M) & \text{y} \\ P(C|M) &= P(A_B \cap C|M) + P(A_B^c \cap C|M) \end{aligned}$$

y como $P(A_B|M) = P(C|M) = \theta$, entonces restando estas ecuaciones se obtiene que $P(A_B \cap C^c|M) = P(A_B^c \cap C|M)$. Por la definición de A_B se sigue que cuando $\vec{x} \in (A_B \cap C^c) \subset A_B$ entonces $P(\vec{x}|M) \leq \lambda P(\vec{x}|B)$ y cuando $\vec{x} \in (A_B^c \cap C) \subset A_B^c$ entonces $P(\vec{x}|M) > \lambda P(\vec{x}|B)$; por lo tanto,

$$\lambda P(A_B^c \cap C|B) < P(A_B^c \cap C|M) = P(A_B \cap C^c|M) \leq \lambda P(A_B \cap C^c|B).$$

De aquí, se sigue que $P(C|B) < P(A_B|B)$. ☑

10.3.2. Análisis de discriminante: una forma de regresión lineal

En [75] se presenta por primera vez una aproximación para la clasificación multivariante en el caso de 2 grupos. Los coeficientes que estableció se emplean solo para la clasificación. Al emplear esta opción se obtiene una función de clasificación para cada grupo.

Sea Y_i una variable “dependiente” que es también una indicadora con la siguiente codificación:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ésima solicitud es clasificada como “buena”,} \\ 0 & \text{si la } i\text{-ésima solicitud es clasificada como “mala”} \end{cases} \quad (10.20)$$

y supóngase el siguiente modelo:

$$y_i = \sum_{j=0}^m \omega_j x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10.21)$$

donde $x_{i0} = 1$ para todo i . Al expresar el sistema de ecuaciones (10.21) de forma matricial como:

$$\vec{Y} = \mathbf{X}\vec{w}, \quad (10.22)$$

donde:

\vec{Y} : es un vector columna de tamaño $n \times 1$, de clasificaciones de las solicitudes de crédito.

\mathbf{X} : es una matriz de tamaño $n \times (m + 1)$, $m + 1 \leq n$, de información conocida de las solicitudes de crédito, donde la primera columna es de unos y tiene rango igual a $k \leq m + 1$.

\vec{w} : es un vector columna de tamaño $(m + 1) \times 1$, de parámetros desconocidos w_0, w_1, \dots, w_m , coeficientes de discriminantes.

n : es el tamaño de la muestra piloto; es decir, $n = n_B + n_M$, donde, a su vez, n_B es el número de solicitudes aceptadas que resultaron ser buenas y n_M es el número de solicitudes rechazadas que resultaron ser malas.

Si se detectan primero los buenos y después los malos, entonces

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{para } i = 1, 2, \dots, n_B \\ 0, & \text{para } i = n_B + 1, n_B + 2, \dots, n. \end{cases}$$

En notación matricial, se reescribe (10.22) como sigue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_B \\ \vec{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_B & \mathbf{X}_B \\ \mathbf{1}_M & \mathbf{X}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \vec{w} \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{1}_B$ ($\mathbf{1}_M$) es un vector columna de unos de tamaño $n_B \times 1$ ($n_M \times 1$). Al expresar $\mathbf{r}(\vec{w}) = \mathbf{X}\vec{w} - \vec{y}$, su norma euclídea se obtiene como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}(\vec{w})\|^2 &= \underbrace{\mathbf{r}(\vec{w})^t \mathbf{r}(\vec{w})}_{F(\vec{w})} = (\mathbf{X}\vec{w} - \vec{y})^t (\mathbf{X}\vec{w} - \vec{y}) = (\vec{w}^t \mathbf{X}^t - \vec{y}^t) (\mathbf{X}\vec{w} - \vec{y}) \\ &= \vec{w}^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} \vec{w} - \vec{y}^t \mathbf{X} \vec{w} - \vec{w}^t \mathbf{X}^t \vec{y} + \vec{y}^t \vec{y}. \end{aligned}$$

Para determinar el \vec{w} que minimiza esta suma de cuadrados de los residuos, se calculan las derivadas parciales de $F(\vec{w})$ con respecto a \vec{w}

$$\frac{\partial F(\vec{w})}{\partial \vec{w}} = 2\mathbf{X}^t \mathbf{X} \vec{w} - 2\mathbf{X}^t \vec{y} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{w} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \vec{y}. \quad (10.23)$$

Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_0 \\ \vec{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n & \mathbf{1}_B^t \mathbf{X}_B + \mathbf{1}_M^t \mathbf{X}_M \\ \mathbf{X}_B^t \mathbf{1}_B + \mathbf{X}_M^t \mathbf{1}_M & \mathbf{X}_B^t \mathbf{X}_B + \mathbf{X}_M^t \mathbf{X}_M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_B^t & \mathbf{1}_M^t \\ \mathbf{X}_B^t & \mathbf{X}_M^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_B \\ \vec{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n & n_B \mathbf{m}_B + n_M \mathbf{m}_M \\ n_B \mathbf{m}_B^t + n_M \mathbf{m}_M^t & \mathbf{X}_B^t \mathbf{X}_B + \mathbf{X}_M^t \mathbf{X}_M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_B \\ \mathbf{X}_B^t \mathbf{1}_B \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde \mathbf{m}_B y \mathbf{m}_M son los vectores de medias muestrales de las solicitudes buenas y malas, respectivamente. Esto significa que

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}|B) = \mathbf{m}_B \quad \text{y} \quad \mathbb{E}(\mathbf{X}|M) = \mathbf{m}_M.$$

Luego,

$$\mathbb{E}(\vec{Y}|B) = \vec{w}^t \mathbf{m}_B \quad \text{y} \quad \mathbb{E}(\vec{Y}|M) = \vec{w}^t \mathbf{m}_M.$$

La diferencia entre estas expresiones se maximiza cuando $\sum_{j=1}^m w_j = 1$. Suponiendo que los 2 grupos tienen una varianza muestral común entonces una medida sensible de separación está dada por

$$MS = \frac{\text{Distancia entre las medias muestrales}}{\text{Desviación estándar de la muestra}};$$

es decir,

$$MS = \vec{w}^t \frac{\mathbf{m}_B - \mathbf{m}_M}{\sqrt{\text{Var}(\vec{Y})}}. \quad (10.24)$$

10.3.3. Regresión logística

El enfoque de regresión lineal para la discriminación de grupos tiene un defecto evidente por ser la variable respuesta binaria. Los datos cuantitativos se pueden transformar mediante la agrupación en clases, y las variables indicadoras usadas para las clases de la nueva variable independiente. En la expresión (10.21), el lado derecho puede tomar cualquier valor real, pero el lado izquierdo es la variable indicadora dada en (10.20) y; por lo tanto, solo puede tomar los valores 0 y 1. Luego, sería más conveniente que el lado izquierdo fuera una función de y_i , lo que podría brindar una gama de valores más extensa. Esto es más apropiado, ya que no tiene el problema de que todos los conjuntos de datos produzcan valores muy similares de las variables dependientes o de que la ecuación de regresión pronostique clasificaciones que sean menores que 0 o mayores que 1. Una de estas funciones es el logaritmo del cociente de probabilidades de $y = 1$ contra $y = 0$. Esto nos lleva a plantear el siguiente modelo de regresión logística³:

$$\ln\left(\frac{y_i}{1-y_i}\right) = \sum_{j=0}^m w_j x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.25)$$

Nótese que, si $y_i \geq 0$ entonces $\frac{y_i}{1-y_i}$ toma valores entre 0 y ∞ y, por ende, $\ln\left(\frac{y_i}{1-y_i}\right)$ toma cualquier valor real. Tomando exponenciales a ambos lados de (10.25) se llega a la ecuación

$$y_i = \left[1 + \exp\left\{-\sum_{j=0}^m w_j x_{ij}\right\} \right]^{-1} \quad (10.26)$$

Nótese que esta es la **cdf** de la logística y se conoce como el supuesto de la regresión logística. Además, suponiendo que la **epdf** de las variables de

³El trabajo de [211] fue una de las publicaciones pioneras sobre puntuación de crédito.

los buenos X_B y de los malos X_M es normal multivariante, con medias \mathbf{m}_B entre los buenos y \mathbf{m}_M entre los malos y con matriz de varianza-covarianza común Σ , entonces se cumple el supuesto de la regresión logística.

10.4. Medición del riesgo en carteras crediticias

Este tipo de riesgo es complicado de medir por las siguientes razones:

1. Cada crédito tiene una PD distinta a las demás.
2. Los incumplimientos entre clientes pueden estar correlacionados.
3. La diferencia de los montos de los créditos hace que las pérdidas dado el incumplimiento son distintas entre cliente y cliente.

Sea S el reclamo total proveniente de una cartera de m créditos. Por la expresión (4.10) se tiene que el monto de este incumplimiento es dado por

$$S = \sum_{j=1}^m X_j = X_1 + X_2 + \dots + X_m, \quad (10.27)$$

donde X_j es el incumplimiento proveniente del j -ésimo crédito. Sea q_j la probabilidad de que el j -ésimo crédito presente morosidad en un periodo y el complemento $p_j = 1 - q_j$ la probabilidad de que el j -ésimo crédito no produzca incumplimiento alguno. Se excluye la posibilidad de 2 o más incumplimientos por crédito en un periodo. En este caso, las variables aleatorias indicadoras I_j dadas en (4.11) se definen como

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{si el } j\text{-ésimo crédito cae en mora,} \\ 0, & \text{si el } j\text{-ésimo crédito cumple con sus obligaciones.} \end{cases}$$

Cada una de estas sigue una pmf de Bernoulli con parámetro q_j ; es decir,

$$P(I_j = k) = \begin{cases} q_j & \text{si } k = 1, \\ 1 - q_j & \text{si } k = 0. \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Luego, el número total de créditos que caerán en morosidad es igual a

$$N = \sum_{j=1}^m I_j = I_1 + I_2 + \dots + I_m.$$

Sea M_j el monto por morosidad del j -ésimo crédito. Esta variable depende del monto otorgado en crédito C_j , ($0 \leq M_j \leq C_j$). Estos factores se deben

considerar para calcular la pérdida esperada y la varianza del j -ésimo crédito. Luego,

$$\mathbb{E}(M_j) = C_j(1 - r_j) \quad \text{Var}(M_j) = C_j^2(1 - r_j)r_j, \quad (10.28)$$

donde r_j denota la tasa de recuperación del j -ésimo crédito y $1 - r_j$ es una medida asociada a la pérdida que tendría la entidad crediticia después de haber realizado todos los trámites para recuperar lo adeudado por el j -ésimo crédito que ha sido incumplido.

Al distinguir entre la ocurrencia de un incumplimiento y su monto, los incumplimientos de cada crédito quedan definidos de la siguiente manera:

$$X_j = I_j M_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (10.29)$$

Usualmente se supone que las variables X_1, X_2, \dots, X_m son mutuamente independientes.

De manera similar al procedimiento seguido en el capítulo 4, la media y la varianza de cada una de las X_j ($j = 1, 2, \dots, m$) está dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_j) = \mathbb{E}(M_j)q_j \quad \text{y} \quad \text{Var}(X_j) = \mathbb{E}(M_j^2)q_j - [\mathbb{E}(M_j)q_j]^2 \\ = \text{Var}(M_j)q_j + [\mathbb{E}(M_j)]^2 q_j(1 - q_j). \end{aligned} \quad (10.30)$$

Bajo el supuesto de que las variables X_j son mutuamente independientes, para la expresión (10.27) y usando (10.30), se obtiene el valor esperado de la siguiente forma:

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{j=1}^m \mathbb{E}(X_j) = \sum_{j=1}^m q_j \mathbb{E}(M_j).$$

Y la varianza de S se obtiene como:

$$\text{Var}(S) = \sum_{j=1}^m [\text{Var}(M_j)q_j + [\mathbb{E}(M_j)]^2 q_j(1 - q_j)].$$

10.4.1. Estimación estadística de probabilidades de incumplimiento

Supóngase que en una cartera crediticia la probabilidad de incumplimiento (q) de un crédito es la misma en un cierto horizonte temporal de T periodos.

10.4.1.1. Estimador de máxima verosimilitud

Considere que en la cartera crediticia se conoce el número de créditos vigentes en cada periodo durante el horizonte temporal fijo T . Sean

N_t : n.º créditos en el periodo t .

n_t : n.º créditos otorgados en $t - 1$ que incumplen en el periodo t .

Luego, denotando π_t la PD en cada periodo t , se tiene

$$\pi_t = \frac{n_t}{N_{t-1}} \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (10.31)$$

Al suponer que los créditos que incumplen son eventos con pmf Bernoulli, la variable aleatoria que denota el número de créditos que incumplen en cada periodo t sigue una pmf binomial; es decir,

$$P \left\{ \begin{array}{l} \text{N.º créditos que} \\ \text{incumplen en } t \end{array} = n_t; q \right\} = \binom{N_{t-1}}{n_t} q^{n_t} (1 - q)^{N_{t-1} - n_t} \quad (10.32)$$

para $t = 1, 2, \dots, T$. Si los créditos que incumplen de un periodo a otro son independientes, entonces para estimar q se emplea el método de máxima verosimilitud. Usando la función de verosimilitud dada en (2.7) se tiene

$$L(q) = \prod_{t=1}^T \binom{N_{t-1}}{n_t} q^{n_t} (1 - q)^{N_{t-1} - n_t}. \quad (10.33)$$

Al tomar logaritmo natural se obtiene

$$\ln [L(q)] = \sum_{t=1}^T \left[\ln \binom{N_{t-1}}{n_t} + n_t \ln q + (N_{t-1} - n_t) \ln(1 - q) \right]$$

Puesto que los coeficientes $\binom{N_{t-1}}{n_t}$ son constantes, al calcular la derivada de $\ln[L(q)]$ respecto a q , se obtiene

$$\frac{d}{dq} \ln [L(q)] = \frac{n}{\hat{q}} - \frac{m}{1 - \hat{q}},$$

donde $n = \sum_{t=1}^T n_t$ y $m = \sum_{t=1}^T (N_{t-1} - n_t)$. Al igualar a 0 se llega a

$$\hat{q} = \frac{n}{n + m} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^T n_t \quad \text{con} \quad N = \sum_{t=1}^T N_{t-1}. \quad (10.34)$$

Al despejar de (10.31) y sustituir en esta última expresión se tiene

$$\hat{q} = \frac{\sum_{t=1}^T N_{t-1} \pi_t}{\sum_{t=1}^T N_{t-1}} = \sum_{t=1}^T \omega_{t-1} \pi_t \quad \text{con} \quad \omega_{t-1} = \frac{N_{t-1}}{\sum_{t=1}^T N_{t-1}}. \quad (10.35)$$

10.5. Modelos estructurales del riesgo crediticio

En el año 1989 en San Francisco fue creada la corporación KMV por Stephen Kealhofer, John McQuown y Oldrich Vasicek, la cual en 2002 fue adquirida por Moody's. Es una empresa de tecnología financiera pionera en el uso de modelos estructurales para la valoración de crédito. Construyó un procedimiento para estimar la probabilidad de incumplimiento (PD) de una empresa, el cual se basa conceptualmente en el enfoque de teoría expuesta en [145] sobre valoración de opciones de bonos corporativos, cupón nulo.

10.5.1. Modelo de valoración de Merton

El modelo de Merton asocia el riesgo de incumplimiento con la teoría de valoración de opciones financieras y la estructura o composición de capital de una empresa (proporciones relativas entre deuda, acciones y otros valores); considera las acciones como una opción de compra (*call*) sobre el valor de los activos de la empresa y establece que el incumplimiento ocurrirá cuando los pasivos de la empresa sean superiores a los activos.

Bajo esta metodología, se considera que la empresa puede cotizar sus acciones en la bolsa, el pasivo de la empresa se emite en un solo bono cupón nulo con valor nominal L y vencimiento en T (es decir, no hay pagos hasta T) y los accionistas esperarán hasta T para decidir si se declaran o no en incumplimiento (si entra en mora antes de T quedan privados de la oportunidad de beneficiarse de un aumento en el valor del activo). Por lo tanto, la empresa entrará en incumplimiento en el tiempo T , si el valor de los activos es inferior al valor de los pasivos.

En este caso, el valor de mercado del patrimonio, el cual se expresa como el valor de una opción de compra, está dado por

$$\text{Valor de mercado del capital} = f(L_t, V_t, \sigma_V, T),$$

donde el vencimiento $T = t + \tau$ y

- L_t : valor contable de los pasivos en el tiempo actual t .
- V_t : valor de mercado de los activos en el tiempo actual t .
- τ : horizonte temporal.
- σ_V : desviación estándar (volatilidad) de porcentaje del valor de los activos.

En el tiempo T , se puede determinar la ecuación fundamental de la contabilidad, es decir, activos = pasivos + patrimonio. Por lo tanto, si el valor de los activos está por debajo del valor de los pasivos, el valor del patrimonio neto es 0 ya que todos los activos son reclamados por los acreedores. Una empresa puede ejercer la opción de declararse en bancarrota si el valor de los pasivos es superior al valor de los activos. En Colombia existe un régimen de insolvencia económica para empresas y está reglamentado por la Ley 1116 de 2006.

Matemáticamente, el pago de compensación a los accionistas puede ser descrito como

$$E_T = \text{máx}\{V_T - L, 0\}. \quad (10.36)$$

En este modelo las variables conocidas son el valor de mercado del patrimonio (E_T), la volatilidad del capital (σ_E , estimada con datos históricos), el valor contable de los pasivos (L), y el horizonte temporal (τ). Las 2 variables desconocidas (incógnitas) son el valor de mercado de los activos (V_T) y la volatilidad de los activos (σ_V).

Para ofrecer un enfoque más concreto se usa la fórmula de valoración del modelo de [30]:

$$e^{r\tau} C_t(L) = \mathbb{E}[\text{máx}\{V_T - L, 0\}] = \int_L^\infty (V_T - L)g(V_T) dV_T. \quad (10.37)$$

Esta expresión representa el precio de una opción *call* al tiempo t comprada por los accionistas de la empresa; por otro lado, la deuda de la empresa se entiende como una opción *put* vendida a la empresa por los acreedores. Bajo el supuesto de que la rentabilidad de los activos financieros sigue una pdf normal y partiendo desde t (el periodo actual), por la expresión (8.3), entonces $\ln\left(\frac{V_{t+1}}{V_t}\right)$ se distribuye normalmente. Usando (1.128) se tiene que

$$\text{LogN}(V_T; \mu_V, \sigma_V^2\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}V_T\sigma_V} \exp\left\{-\left[\frac{\ln(V_T) - \mu_V}{\sqrt{2\tau}\sigma_V}\right]^2\right\},$$

donde $\mu_V = \mathbb{E}[\ln(V_T)]$ y $\text{LogN}(V_T; \mu_V, \sigma_V^2\tau)$ denota la pdf dada en (1.128).

El valor del log-activo en T sigue una pdf normal con los siguientes parámetros:

$$\mathbb{E}[\ln(V_T)] = \ln(V_t) + (\mu_V - \sigma_V^2/2)\tau \quad \text{y} \quad \text{Var}[\ln(V_T)] = \sigma_V^2\tau. \quad (10.38)$$

Suponiendo que el rendimiento esperado del valor de mercado de los activos es la tasa de interés libre de riesgo (es decir, $\mu_V = r_f$) y dado que en una

economía libre de arbitraje, el valor esperado futuro descontado a la tasa de interés libre de riesgo es una martingala (ver [96]), esto es

$$\mathbb{E}[e^{-r_f \tau} V_T] = V_t, \quad \tau > 0. \quad (10.39)$$

Al sustituir en (10.37) se obtiene para el valor patrimonial la siguiente expresión:

$$E_t = V_t \Phi(d_1) - L e^{-r_f \tau} \Phi(d_2), \quad (10.40)$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la cdf normal estándar y

- E_t : valor de la opción del capital en el tiempo actual t .
- r_f : tasa de interés libre de riesgo.
- Los coeficientes d_1 y d_2 son

$$d_1 = \frac{1}{\sigma_V \sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{V_t}{L} e^{r_f \tau}\right) + \frac{1}{2} \sigma_V \sqrt{\tau} \quad \text{y} \quad d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{\tau}. \quad (10.41)$$

En este análisis se consideró que la empresa cae en incumplimiento cuando el valor total de mercado de sus activos cae por debajo del valor contable de sus pasivos. Por otra parte, de la expresión (10.40) y $D_t = V_t - E_t$, se obtiene la ecuación para el valor de mercado de la deuda riesgosa como

$$D_t = V_t [1 - \Phi(d_1)] + L e^{-r_f \tau} \Phi(d_2) = V_t \Phi(-d_1) + L e^{-r_f \tau} \Phi(d_2). \quad (10.42)$$

Definición 10.13. Coeficiente de endeudamiento

El coeficiente de endeudamiento (Debt ratio [DR]) representa la proporción de activos de una empresa que se financia con deuda. Esta medida, que indica el grado de apalancamiento de una empresa, está dada por la siguiente expresión presentada en [145]:

$$DR = \frac{L e^{-r_f \tau}}{V_t} = \frac{L}{\mathbb{E}[V_T]}. \quad (10.43)$$

Luego, el coeficiente d_1 se determina en términos de DR como

$$d_1 = -\frac{1}{\sigma_V \sqrt{\tau}} \ln(DR) + \frac{1}{2} \sigma_V \sqrt{\tau}. \quad (10.44)$$

De acuerdo con [51] la probabilidad de incumplimiento, es decir, la probabilidad de que en el tiempo T el valor de los activos (V_T) sea inferior al valor de los pasivos (L), está dada por

$$PD = P(V_T < L) = P(\ln(V_T) < \ln(L)).$$

Usando la fórmula (1.119) y las expresiones (10.38) se tiene que

$$\begin{aligned} \text{PD} = P(V_T < L) &= P\left(\frac{\ln(V_T) - \mathbb{E}[\ln(V_T)]}{\sqrt{\text{Var}[\ln(V_T)]}} < \frac{\ln(L) - \mathbb{E}[\ln(V_T)]}{\sqrt{\text{Var}[\ln(V_T)]}}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{\ln(L) - (\ln(V_t) + (\mu_V - \sigma_V^2/2)\tau)}{\sigma_V \sqrt{\tau}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\ln L - \ln V_t - (\mu_V - \sigma_V^2/2)\tau}{\sigma_V \sqrt{\tau}}\right). \end{aligned}$$

Luego, la expresión (10.1) queda

$$\text{DD} = \frac{\ln V_t + (\mu_V - \sigma_V^2/2)\tau - \ln L}{\sigma_V \sqrt{\tau}}. \quad (10.45)$$

Por lo tanto,

$$\text{PD} = \Phi(-\text{DD}). \quad (10.46)$$

Suponiendo que $\mu_V = r_f$, se obtiene que

$$\text{PD} = \Phi(-d_2) \quad \text{y} \quad \text{DD} = d_2. \quad (10.47)$$

Nótese que la estimación de la probabilidad de incumplimiento de una empresa se establece siempre que se conozcan las 6 variables que intervienen en la fórmula. En general, V_t es desconocida; luego, σ tampoco es conocida y; por lo tanto, no es posible evaluar las fórmulas (10.45) y (10.46), con las cuales se determina la probabilidad de incumplimiento. El valor de mercado de los activos (V_t) es una variable inobservable. Cabe aclarar que el valor contable del activo sí es observable sin embargo, lo que se necesita para aplicar las fórmulas es el valor de mercado del activo.

Ejemplo 10.2. [18, pág. 489]

Suponga que una empresa obtiene un préstamo a un año y se compromete a pagarle al prestamista 100 unidades monetarias (UM) un año después de otorgado el crédito. La tasa de interés sin riesgo, r_f , para un periodo de un año es del 6%. La empresa tiene un coeficiente de endeudamiento, DR, de 0.90. La volatilidad de la tasa de cambio en el valor de los activos de la empresa, σ_V , es del 12%. ¿Cuál es la probabilidad de incumplimiento?

Solución. A partir de la información suministrada se tiene que

$$Le^{-r_f\tau} = 100 \cdot e^{-0.06} = 94.1764 \quad \text{y} \quad \text{DR} = 0.9.$$

Luego,

$$d_1 = -\frac{1}{0.12} \ln(DR) + \frac{0.12}{2} = 0.938 \quad \text{y} \quad d_2 = d_1 - 0.12 = 0.818.$$

Por lo tanto, buscando en la tabla G.1 se obtiene que

$$\Phi(-d_1) = 0.174121 \quad \text{y} \quad \Phi(d_2) = 0.793323$$

Al sustituir en (10.42), se obtiene que

$$\begin{aligned} D_t &= Le^{-r\tau} \left[\frac{1}{DR} \Phi(-d_1) + \Phi(d_2) \right] \\ &= 94.1764 [(0.9)^{-1} (0.174121) + 0.793323] = 92.9325 \text{ UM.} \end{aligned}$$

La probabilidad de incumplimiento se obtiene a partir de (10.47)

$$PD = \Phi(-d_2) = 1 - \Phi(d_2) = 0.206677. \quad \square$$

10.6. Métodos de puntaje

Los sistemas de puntaje representan el primer intento formal de evaluar el riesgo que significa un deudor individual con una herramienta científica y dentro de un proceso automatizado.

10.6.1. Técnica *Z-score* de Altman

En [6] se presenta una técnica de puntaje para pronosticar el riesgo de quiebra de una empresa, conocida como *Z-score*. Esta propuesta usa la técnica estadística de análisis de discriminante y busca predecir los valores predeterminados de las siguientes 5 relaciones contables:

X_1 : (activos corrientes - pasivos corrientes)/activos totales.

X_2 : utilidades retenidas/activos totales.

X_3 : ganancias antes de intereses e impuestos/activos totales.

X_4 : valor de mercado de las acciones/pasivos totales.

X_5 : ventas/activos totales.

En su trabajo Altman obtuvo la siguiente función de discriminante para distinguir entre las empresas sanas y las que tienen alta probabilidad de quiebra:

$$Z = \frac{1}{1000} [12X_1 + 14X_2 + 33X_3 + 6X_4 + 999X_5]. \quad (10.48)$$

Este *Z-score* se interpreta de la siguiente manera:

Tabla 10.9. Interpretación del Z -score

| Límites de Z -score | Interpretación |
|-----------------------|--|
| $Z < 1.8$ | Existe una alta probabilidad de quiebra. |
| $1.8 \leq Z < 2.7$ | Existe probabilidad de impago. |
| $2.7 \leq Z < 3.0$ | Se debe estar alerta. |
| $Z \geq 3.0$ | Existe poca probabilidad de quiebra. |

Fuente: elaboración propia.

Ejemplo 10.3. [103, pág. 258]

Considere una empresa para la cual el capital de trabajo es de USD 170 000, los activos totales son USD 670 000, las ganancias antes de intereses e impuestos son de USD 60 000, las ventas son de USD 2 200 000, el valor de mercado de las acciones es de USD 380 000, los pasivos totales son de USD 240 000, y las ganancias retenidas son de USD 300 000. Determine el puntaje Z .

Solución. A partir de la información suministrada se tiene que

$$X_1 = \frac{170\,000}{670\,000} = 0.254, \quad X_2 = \frac{300\,000}{670\,000} = 0.448,$$

$$X_3 = \frac{60\,000}{670\,000} = 0.0896, \quad X_4 = \frac{380\,000}{240\,000} = 3.284$$

y $X_5 = \frac{2\,200\,000}{670\,000} = 1.583$. El puntaje Z está dado por (10.48):

$$z = \frac{1}{1000} \left[12 \times \frac{17}{67} + 14 \times \frac{30}{67} + 33 \times \frac{6}{67} + 6 \times \frac{19}{12} + 999 \times \frac{220}{67} \right]$$

$$= \frac{442\,477}{134\,000} = 3.302.$$

Este puntaje Z nos indica que la compañía no está en peligro de incumplimiento en un futuro próximo.

10.7. Ejercicios

10.1 Para la matriz de confusión que se muestra en la tabla (10.10).

Considere que la pérdida por “utilidad esperada” es $u = 100$ y la pérdida por “deuda esperada incurrida” es $d = 300$. Determine:

- La tasa de error óptima y la pérdida real por cliente.
- Cada uno de los indicadores dados en la tabla 10.4.

Tabla 10.10. Matriz de confusión

| Riesgo observado | Riesgo clasificado | | Total |
|------------------|--------------------|------|-------|
| | Bueno | Malo | |
| Bueno | 550 | 150 | 700 |
| Malo | 100 | 200 | 300 |
| Total | 650 | 350 | 1000 |

Fuente: elaboración propia.

- 10.2 Suponga que una empresa obtiene un préstamo bancario a un año y se compromete a pagarle al banco 200 000 000 un año después de otorgado el crédito. La tasa de interés sin riesgo r_f para un periodo de un año es del 5%. La empresa tiene un coeficiente de endeudamiento (DR) de 0.70. La volatilidad de la tasa de cambio en el valor de los activos de la empresa (σ_V) es del 10%. ¿Cuál es la probabilidad de incumplimiento?
- 10.3 Considere una empresa para la cual el capital de trabajo es de 200 000, los activos totales son 600 000, las ganancias antes de intereses e impuestos son de 50 000, las ventas son de 2 000 000, el valor de mercado de las acciones es de 400 000, los pasivos totales son de 200 000, y las ganancias retenidas son de 250 000. Determine el puntaje Z .

Apéndice

A

Nociones básicas de utilidad

En este apéndice se presentan algunos conceptos y axiomas de teoría de la utilidad que permiten al lector entender ciertos temas dados en este texto. El lector que desee profundizar esta temática puede consultar [74] y [94].

Definición A.1. Alternativa mixta

Una alternativa mixta \mathcal{A}_p es una terna (A_1, A_0, p) que denota la alternativa ofrecida a un consumidor que elige entre 2 alternativas A_1 y A_0 con probabilidades p y $1 - p$, respectivamente; es decir,

$$\mathcal{A}_p = p A_1 + (1 - p)A_0 \quad \text{con} \quad p \in [0, 1]. \quad (\text{A.1})$$

A.1. Axiomas de preferencia

Dado un conjunto de alternativas y la relación estricta $>$ que permite compararlas, se pueden establecer los siguientes supuestos:

- S1. Si un consumidor elige entre dos alternativas A_1 y A_0 preferirá la alternativa A_1 sobre la A_0 ($A_1 > A_0$), o bien ser indiferente a ambas ($A_1 \sim A_0$); es decir,

$$A_1 \sim A_0 \text{ si y solo si } A_1 \not> A_0 \text{ y } A_0 \not> A_1, \quad (\text{A.2})$$

o si prefiere A_0 sobre A_1 ($A_0 > A_1$).

- S2. Si A_1 es por lo menos tan buena como A_2 ($A_1 \geq A_2$ si y solo si $A_1 > A_2$ o $A_1 \sim A_2$) y A_2 por lo menos tan bueno como A_3 , entonces A_1 es por lo menos tan buena como A_3 . Es decir,

$$(A_1 \geq A_2, A_2 \geq A_3) \Rightarrow A_1 \geq A_3.$$

- S3. Axioma de independencia: si A_1 se prefiere sobre A_2 y se considera otra alternativa A_3 . Entonces, la alternativa mixta (A_1, A_3, p) se preferirá a la alternativa mixta (A_2, A_3, p) . Es decir,

$$A_1 > A_2 \Rightarrow p A_1 + (1 - p)A_3 > p A_2 + (1 - p)A_3 \quad \forall p \in [0, 1]. \quad (\text{A.3})$$

- S4. Axioma arquimedeano: si A_1 se prefiere sobre A_2 y esta se prefiere sobre A_3 , entonces existe una alternativa mixta de A_1 y A_3 que se prefiere sobre A_2 , y también existe una alternativa mixta de A_1 y A_3 sobre la cual se prefiere a A_2 . En otras palabras,

$$(A_1 > A_2, A_2 > A_3) \Rightarrow \begin{cases} p A_1 + (1 - p)A_3 > A_2, \\ A_2 > q A_1 + (1 - q)A_3. \end{cases} \quad p, q \in (0, 1).$$

Supóngase que existen, por lo menos, 2 alternativas A_0 y A_1 que no son igualmente atractivas. De acuerdo con la condición establecida en S1, se prefiere una de ellas a la otra. Considérese que $A_1 > A_0$.

Teorema A.1. Propiedades de las alternativas mixtas

Sea \mathcal{A}_p una alternativa mixta, para cualesquiera 2 alternativas A_1 y A_0 ; con $p, q \in [0, 1]$, se cumple que:

$$C1. 1A_1 + 0A_0 \sim A_1.$$

$$C2. pA_1 + (1-p)A_0 \sim (1-p)A_0 + pA_1.$$

$$C3. pqA_1 + (1-pq)A_0 \sim q[pA_1 + (1-p)A_0] + (1-q)A_0.$$

Si en C3 se supone que $\alpha = pq$, entonces \mathcal{A}_α denota la alternativa mixta $(A_p, A_0, \frac{\alpha}{p})$. Además, de las condiciones anteriores, la alternativa \mathcal{A}_α cumple que:

$$C4. pA_1 + (1-p)A_1 \sim A_1.$$

$$C5. Si p \leq q y r \in [0, 1], entonces$$

$$\begin{aligned} & [rp + (1-r)q]A_1 + [r(1-p) + (1-r)(1-q)]A_0 \\ & \sim r[pA_1 + (1-p)A_0] + (1-r)[qA_1 + (1-q)A_0]. \end{aligned}$$

Demostración. La demostración consiste en un cálculo directo:

C3. Si $0 < pq < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{pq} & \sim pqA_1 + (1-pq)A_0 && \text{por (A.1)} \\ & \sim pqA_1 + [q(1-p) + (1-q)]A_0 \\ & \sim q \underbrace{[pA_1 + (1-p)A_0]}_{\mathcal{A}_p} + (1-q)A_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C4. pA_1 + (1-p)A_1 & \sim p[1A_1 + 0A_1] + (1-p)A_1 && \text{por C1} \\ & \sim p[0A_1 + 1A_1] + (1-p)A_1 && \text{por C2} \\ & \sim 0A_1 + 1A_1 && \text{por C3} \\ & \sim 1A_1 + 0A_1 \sim A_1 && \text{por C2 y C1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C5. [rp + (1-r)q]A_1 + [r(1-p) + (1-r)(1-q)]A_0 \\ & \sim q \left[r \frac{p}{q} + (1-r) \right] A_1 + \left\{ 1 - q \left[r \frac{p}{q} + (1-r) \right] \right\} A_0 \\ & \sim \left[r \frac{p}{q} + (1-r) \right] [qA_1 + (1-q)A_0] + \left[1 - r \frac{p}{q} - (1-r) \right] A_0 \quad \text{por C3} \end{aligned}$$

Agrupando términos

$$\sim r\left(1 - \frac{p}{q}\right)A_0 + \left[1 - r\left(1 - \frac{p}{q}\right)\right][qA_1 + (1 - q)A_0] \quad \text{por C2}$$

$$\sim r\left\{\left(1 - \frac{p}{q}\right)A_0 + \frac{p}{q}[qA_1 + (1 - q)A_0]\right\} \\ + (1 - r)[qA_1 + (1 - q)A_0] \quad \text{por C3}$$

$$\sim r\left\{\frac{p}{q}[qA_1 + (1 - q)A_0] + \left(1 - \frac{p}{q}\right)A_0\right\} \\ + (1 - r)[qA_1 + (1 - q)A_0] \quad \text{por C2}$$

$$\sim r[pA_1 + (1 - p)A_0] + (1 - r)[qA_1 + (1 - q)A_0] \quad \text{por C3.}$$

Lo cual completa la prueba. ☑

De acuerdo con la condición establecida en S3 se tiene que:

Lema A.1. \mathcal{A}_1 se prefiere a \mathcal{A}_p si $0 < p < 1$; es decir,

$$(A_1 > A_0, 0 < p < 1) \Rightarrow 1A_1 + 0A_0 > pA_1 + (1 - p)A_0$$

Nótese que si un consumidor prefiere la alternativa A_1 sobre A_0 , es lógico suponer que él prefiera la alternativa mixta \mathcal{A}_p que otorga mayor probabilidad a A_1 que a A_0 .

Demostración. La demostración consiste en un cálculo directo.

$$\begin{aligned} 1A_1 + 0A_0 &\sim A_1 && \text{por C1} \\ &\sim pA_1 + (1 - p)A_1 && \text{por C4} \\ &\sim (1 - p)A_1 + pA_1 && \text{por C2} \\ &> (1 - p)A_0 + pA_1 && \text{por S3} \\ &\sim pA_1 + (1 - p)A_0 && \text{por C2} \quad \text{☑} \end{aligned}$$

Lema A.2. \mathcal{A}_p se prefiere a \mathcal{A}_q siempre que $0 \leq q < p \leq 1$. Es decir,

$$(A_1 > A_0, 0 \leq q < p \leq 1) \Rightarrow pA_1 + (1 - p)A_0 > qA_1 + (1 - q)A_0.$$

Demostración.

- Si $p = 1$, entonces

$$A_1 > qA_1 + (1 - q)A_0 \quad \text{por el lema A.1.}$$

- Si $p < 1$, entonces

$$\underbrace{p A_1 + (1 - p) A_1}_{A_1} > p A_1 + (1 - p) A_0 \quad \text{por S3}$$

$$A_1 > p A_1 + (1 - p) A_0 \quad \text{por C4}$$

- Si $0 < q < p$, entonces

$$p A_1 + (1 - p) A_0 \sim \mathcal{A}_p \sim r \mathcal{A}_p + (1 - r) \mathcal{A}_p \quad \text{por C4}$$

$$\sim \frac{q}{p} \mathcal{A}_p + \left(1 - \frac{q}{p}\right) [p A_1 + (1 - p) A_0] \quad \text{con } r = \frac{q}{p}$$

$$> \frac{q}{p} \mathcal{A}_p + \left(1 - \frac{q}{p}\right) A_0 \quad \text{por S3}$$

$$\sim q A_1 + (1 - q) A_0 \quad \text{por C3 y C4}$$

- Si $q = 0$, entonces

$$p A_1 + (1 - p) A_0 > q A_1 + (1 - q) A_0 \quad \text{por C1 y C2.} \quad \checkmark$$

Lema A.3. Si A_1 se prefiere sobre A_0 y A_0 es por lo menos tan buena como \mathcal{A} , entonces A_1 se prefiere sobre \mathcal{A} . Es decir,

$$(A_1 > A_0, A_0 \geq \mathcal{A}) \Rightarrow A_1 > \mathcal{A}.$$

Si A_1 es por lo menos tan buena como A_0 y A_0 se prefiere sobre \mathcal{A} , entonces A_1 se prefiere sobre \mathcal{A} . Es decir,

$$(A_1 \geq A_0, A_0 > \mathcal{A}) \Rightarrow A_1 > \mathcal{A}.$$

Demostración. Queda como ejercicio para el lector. \checkmark

Lema A.4. Si A_1 es por lo menos tan bueno como \mathcal{A} y \mathcal{A} es por lo menos tan bueno como A_0 , entonces existe un único número $p \in (0, 1)$ tal que \mathcal{A} y \mathcal{A}_p son igualmente atrayentes. Es decir,

$$(A_1 \geq \mathcal{A}, \mathcal{A} \geq A_0, A_1 > A_0) \Rightarrow \mathcal{A} \sim p A_1 + (1 - p) A_0.$$

Demostración. Suponga que

$$\mathcal{A} \sim A_1$$

$$\sim 1A_1 + 0A_0 \quad \text{por C1}$$

$$> qA_1 + (1 - q)A_0 \quad \text{para cada } q < 1 \quad \text{por el lema A.1.}$$

Entonces, por transitividad, $p = 1$ es el único $p \in [0, 1]$, para el cual

$$\mathcal{A} \sim p A_1 + (1 - p) A_0.$$

Una prueba análoga se tiene si $\mathcal{A} \sim A_0$ (en cuyo caso $p = 0$). \checkmark

Lema A.5. Si A_1 se prefiere sobre A_0 y A_3 se prefiere sobre A_2 , entonces el consumidor preferirá una alternativa mixta de A_1 y A_3 a la alternativa mixta análoga entre A_0 y A_2 . Es decir,

$$(A_1 > A_0, A_3 > A_2, 0 < p < 1) \Rightarrow pA_1 + (1-p)A_3 > pA_0 + (1-p)A_2.$$

Demostración. Si $0 < p < 1$, entonces

$$\begin{aligned} pA_1 + (1-p)A_3 &> pA_0 + (1-p)A_3 && \text{por S3} \\ &\sim (1-p)A_3 + pA_0 && \text{por C2} \\ &> (1-p)A_2 + pA_0 && \text{por S3} \\ &\sim pA_0 + (1-p)A_2 && \text{por C2.} \quad \checkmark \end{aligned}$$

S3*. Axioma de independencia extendido: si A_i es por lo menos tan bueno como B_i para $i = 1, 2, \dots$, entonces cualquier alternativa mixta de las A_i es por lo menos tan buena como la alternativa mixta similar de las B_i . Es decir,

$$\left(A_i \geq B_i, p_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots; \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} p_i A_i \geq \sum_{i=1}^{\infty} p_i B_i.$$

La conocida serie de Taylor es una eficaz herramienta matemática en cálculo y en algunas aplicaciones.

B.1. Series de Taylor para funciones univariadas

Teorema B.1. Polinomio de Taylor

Sea $f(x)$ continua en un intervalo I y $x_0 \in I$; entonces existe una serie de potencias con centro en x_0 que representa a $f(x)$; la cual tiene la forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \quad \text{con} \quad c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0); \quad (\text{B.1})$$

donde c_k es el k -ésimo coeficiente de la serie. Esta representación es válida en el disco abierto más grande con centro en x_0 que esté contenido en I .

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [192]. ☑

Nota B.1. El caso particular $x_0 = 0$ se conoce como serie de Maclaurin de $f(x)$.

Definición B.1. Una combinación de n elementos elegidos de k en k , denotado por $C_{n,k}$, es el número de subconjuntos de k elementos que son escogidos de un conjunto de n elementos y se calcula como

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad k \leq n. \quad (\text{B.2})$$

Proposición B.1. Propiedades de la combinatoria

La combinatoria satisface las siguientes condiciones:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$
3. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$
4. $\binom{n+k-1}{k} = (-1)^k \binom{-n}{k}.$
5. $\sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n-m}{k-j} = \binom{n}{k}.$
6. $\sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{n}{j} = \binom{n-1}{m}.$

Demostración. En todas las expresiones, basta con desarrollar los respectivos términos y realizar las comparaciones pertinentes. A continuación, se

presenta la prueba de la propiedad 4. de los binomios negativos:

$$\begin{aligned} \binom{n+k-1}{k} &= \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (n+j) = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} [(-1)(-n-j)] \\ &= \frac{(-1)^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (-n-j) = (-1)^k \binom{-n}{k}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

La propiedad 5. es conocida como la convolución de Vandermonde. \checkmark

Definición B.2. Números de Stirling

Las distintas particiones de k subconjuntos que se eligen de un conjunto de n elementos se llaman números de Stirling de segundo tipo y se denotan, por $\mathcal{S}_n^{(k)}$. Estas son calculadas por

$$\mathcal{S}_n^{(k)} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n. \quad (\text{B.4})$$

Proposición B.2. Propiedades de los números de Stirling

Los números de Stirling satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} 1. \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1. & 2. \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} &= k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}. \\ 3. \quad \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}. & 4. \quad \sum_{j=0}^k j \left\{ \begin{matrix} n+j \\ j \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} n+k+1 \\ k \end{matrix} \right\}. \\ 5. \quad \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} (k+1)^{n-j} &= \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}. & 6. \quad \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n &= k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Demostración. En todas las expresiones, basta con desarrollar los respectivos términos y compararlos. \checkmark

B.1.1. Series de Taylor de funciones elementales

B.1.1.1. Serie binomial

El teorema del binomio de Newton es dado como

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B.5})$$

donde $\binom{n}{k}$ es definido como en (B.2).

B.1.1.1.1 Casos particulares

$$f(x) = (1 \pm x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\pm x)^k. \quad (\text{B.6})$$

Si $n \notin \mathbb{Z}$, digamos $n = t$, el desarrollo de Maclaurin está dado por

$$f(x) = (1 \pm x)^t = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t}{k} (\pm x)^k. \quad (\text{B.7})$$

Cuando $t = -m$, $m \in \mathbb{Z}$, se tiene

$$f(x) = (1 \pm x)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m}{k} (\pm x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} (\mp x)^k. \quad (\text{B.8})$$

En estas expresiones se empleó la propiedad 4. de las combinatorias. Si $t = \frac{1}{2}$, se obtiene

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \prod_{j=0}^{k-1} (2j-1)x^k \quad |x| < 1. \quad (\text{B.9})$$

B.1.1.2. Serie geométrica

Sea $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Las derivadas de orden superior de $f(x)$ satisfacen que

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}, \quad f^{(k)}(0) = k!.$$

De la expresión (B.1), se obtiene la serie de Maclaurin geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k. \quad (\text{B.10})$$

B.1.1.3. Función exponencial

Dado que la función exponencial e^x es continua para todo x y además

$$f^{(k)}(x) = e^x, \quad f^{(k)}(0) = 1.$$

De la expresión (B.1), se obtiene la serie de Maclaurin

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \quad (\text{B.11})$$

B.1.1.4. Función logaritmo

Si $f(x) = \ln(1 + |x|)$, al derivar se tiene que

$$f'(x) = \frac{\pm 1}{1 \pm x} = \pm \sum_{k=0}^{\infty} (\mp x)^k, \quad |x| < 1.$$

Al integrar a ambos lados, se llega a

$$\ln(1 + |x|) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{k+1}}{k+1}, & \text{si } -1 < x < 0. \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

$$(\text{B.15})$$

B.2. Serie hipergeométrica

La *serie hipergeométrica* es una serie de potencias en la que c_n es una función racional de n . Por lo general, estas funciones hipergeométricas pueden ser representadas usando las notaciones

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; z) \quad \text{o} \quad {}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots \\ b_1, b_2, \dots \end{matrix}; z \right].$$

El lector que desee profundizar esta temática puede consultar [140].

Definición B.3. Forma general de la función hipergeométrica

En esta serie se introducen p parámetros en el numerador y q parámetros en el denominador. Esta se encuentra dada por

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (\text{B.16})$$

donde el factorial desplazado

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{B.17})$$

denota el símbolo de Pochhammer dado en [1].

Si la serie (B.16) es convergente, define una función hipergeométrica cuyo dominio es un subconjunto de \mathbb{C} . El primer estudio sobre esta serie se

le atribuye a Gauss y se denomina “función hipergeométrica ordinaria” o “gaussiana” ${}_2F_1(a, b; c; z)$. Esta se encuentra dada por

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}. \quad (\text{B.18})$$

La representación integral de esta función está dada por

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1} (1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt, \quad (\text{B.19})$$

donde $\text{Re}(c) > \text{Re}(b) > 0$.

B.2.1. Propiedades de la función hipergeométrica

Las propiedades básicas de las series hipergeométricas son las siguientes,

1. Propiedad de simetría (fórmula de Euler)

$${}_2F_1(a, b; c; z) = {}_2F_1(b, a; c; z) \quad (\text{B.20})$$

2. Traslación

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z). \quad (\text{B.21})$$

3. Derivadas de órdenes superior

$$\frac{d^m}{dz^m} {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} {}_2F_1(a+m, b+m; c+m; z), \quad (\text{B.22})$$

para $m = 1, 2, 3, \dots$ donde $(x)_m$ fue dado en (B.17).

B.2.2. Casos particulares

Muchas de las funciones especiales de matemática aplicada se pueden expresar en términos de la función hipergeométrica de Gauss. Algunas de estas son:

$$(1+z)^a = {}_2F_1(-a, b; b; -z), \quad \ln(1+z) = z \cdot {}_2F_1(1, 1; 2; -z),$$

$$\arcsin(z) = z \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right), \quad \arctan(z) = z \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right),$$

donde $|z| < 1$.

También se pueden expresar mediante series hipergeométricas de Gauss los polinomios ortogonales clásicos, como:

- Los polinomios de Jacobi

$$P^{(a,b)}(x) = \frac{(a+1)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, n+a+b+1; a+1; \frac{1-x}{2}\right). \quad (\text{B.23})$$

- Los polinomios de Legendre

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right). \quad (\text{B.24})$$

B.2.3. Función hipergeométrica confluyente (función de Kummer)

Si en la expresión (B.18) se toma $z = x/b$, entonces

$${}_2F_1\left(a, b; c; \frac{x}{b}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \left(\frac{x}{b}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{j}{b}\right).$$

Al hacer que $b \rightarrow \infty$, se obtiene

$${}_1F_1(a; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!}. \quad (\text{B.25})$$

Esta última se denomina función de Kummer.

Apéndice
C
Métodos de
estimación

En estadística inferencial se conoce como estimación al conjunto de técnicas que arrojan un valor aproximado de un parámetro poblacional desconocido a partir de las medidas estadísticas obtenidas en una muestra. Por ejemplo, una estimación de la media poblacional podría ser la respectiva media muestral. Los conocidos métodos de momentos y máxima verosimilitud son herramientas eficaces para la estimación de parámetros.

C.1. Método de momentos

Este método consiste en suponer como estimadores de los parámetros poblacionales los respectivos momentos muestrales. En términos operativos se busca solucionar el sistema de ecuaciones obtenido al igualar los momentos empíricos (muestrales) y los teóricos (poblacionales).

C.2. Método de máxima verosimilitud

Este método, conocido también como EMV, consiste en maximizar la pdf conjunta asociada a una muestra de n variables aleatorias seleccionadas de la población, para así obtener el estimador de un parámetro (o vector de estimadores). Sea $f(x; \theta)$ la pdf poblacional cuyo parámetro θ es desconocido. Supóngase que x_1, x_2, \dots, x_n son valores observados aleatorios iid, seleccionados de dicha población. La pdf conjunta $L(\cdot)$ de n variables aleatorias extraídas de una muestra se denomina *función de verosimilitud muestral*; es decir,

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta). \quad (\text{C.1})$$

Puesto que las variables aleatorias son independientes, se tiene

$$L(\theta) = f(x_1; \theta)f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta) = \prod_{k=1}^n f(x_k; \theta). \quad (\text{C.2})$$

El EMV del parámetro θ es $\hat{\theta}$ siempre que $L(\hat{\theta})$ sea el valor que maximiza la función de verosimilitud L .

Nótese que la función de verosimilitud dada en (C.2) depende del parámetro θ , ya que en el proceso de optimización se supone que las x_k son constantes una vez se determina la muestra aleatoria.

Dado que la función logaritmo natural es continua y creciente, maximizar $L(\theta)$ equivale a maximizar $\ln(L(\theta))$. Luego,

$$\mathcal{L}(\theta) = \ln(L(\theta)) = \ln\left(\prod_{k=1}^n f(x_k; \theta)\right) = \sum_{k=1}^n \ln(f(x_k; \theta)). \quad (\text{C.3})$$

Para determinar los puntos críticos, se calcula

$$\mathcal{L}'(\theta) = \sum_{k=1}^n \frac{f'(x_k; \theta)}{f(x_k; \theta)} = 0. \quad (\text{C.4})$$

Por otra parte,

$$\mathcal{L}''(\theta) = \sum_{k=1}^n \frac{f''(x_k; \theta)}{f(x_k; \theta)} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{f'(x_k; \theta)}{f(x_k; \theta)} \right)^2. \quad (\text{C.5})$$

Luego, si θ maximiza a $L(\theta)$ entonces $\mathcal{L}''(\theta) < 0$.

Ejemplo C.1. [?]

Sea X una variable aleatoria con pmf BN de parámetros r y $q = (1 + \delta)^{-1}$, estime los parámetros usando el EMV.

Solución. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de $X \sim BN(r, q)$. Usando la expresión (1.83), la función de verosimilitud queda

$$L(r, \delta) = \prod_{k=0}^{\infty} \left[\binom{r+k-1}{k} \left(\frac{\delta}{1+\delta} \right)^r \left(\frac{1}{1+\delta} \right)^k \right]^{x_k},$$

donde x_k es el número de veces que k es observado en la muestra. Al tomar logaritmo natural, se obtiene

$$\ln [L(r, \delta)] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \left[\ln \binom{r+k-1}{k} + r \ln \left(\frac{\delta}{1+\delta} \right) - k \ln(1+\delta) \right].$$

Empleando la expresión (1.84), se tiene que la función de logverosimilitud se puede expresar como

$$\begin{aligned} \ln [L(r, \delta)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k \left[\sum_{m=0}^{k-1} \ln(m+r) - \ln k! + r \ln \delta - r \ln(1+\delta) \right] \\ &\quad - \ln(1+\delta) \sum_{k=1}^{\infty} k x_k. \end{aligned}$$

Al calcular las derivadas parciales de $\ln \{L(r, \delta)\}$ con respecto a δ y a r , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \{L(r, \delta)\} &= \widehat{r} \left(\frac{1}{\widehat{\delta}} - \frac{1}{1+\widehat{\delta}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} x_k - \frac{1}{1+\widehat{\delta}} \sum_{k=1}^{\infty} k x_k \\ \frac{\partial}{\partial r} \ln [L(r, \delta)] &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \left[\sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m+\widehat{r}} \right] - \ln \left(\frac{1+\widehat{\delta}}{\widehat{\delta}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} x_k. \end{aligned}$$

Las condiciones necesarias para alcanzar el máximo se obtienen al igualar a 0 las anteriores derivadas parciales; es decir,

$$\frac{\widehat{r}}{\widehat{\delta}} = \sum_{k=1}^{\infty} k \omega_k = \bar{x} \quad \text{con} \quad \omega_k = \frac{x_k}{\sum_{k=0}^{\infty} x_k}$$

y

$$\ln \left(\frac{1 + \widehat{\delta}}{\widehat{\delta}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \left[\sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m + \widehat{r}} \right].$$

Al despejar de la primera expresión el término $\widehat{\delta}$ y reemplazar en la segunda, el valor de \widehat{r} es obtenido como la solución de la ecuación

$$\ln \left(1 + \frac{\bar{x}}{\widehat{r}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \left[\sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m + \widehat{r}} \right]. \quad (\text{C.6})$$

La ecuación (C.6) se puede resolver numéricamente mediante el método de Newton-Raphson. Para ello, se define

$$f(r) = \ln \left(1 + \frac{\bar{x}}{r} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \left[\sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m + \widehat{r}} \right].$$

Derivando respecto a r , se obtiene

$$f'(r) = -\frac{\bar{x}}{r^2 + \bar{x}r} + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \left[\sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{(m + \widehat{r})^2} \right].$$

Por lo tanto,

$$r_{n+1} = r_n - \frac{f(r_n)}{f'(r_n)}, \quad r_n \neq 0. \quad (\text{C.7})$$

Aquí, se usa como valor inicial r_0 el estimador dado de r en (2.3), obtenido por el método de los momentos. Por lo tanto, la estimación de q , se obtiene como

$$\widehat{q} = \frac{\bar{x}}{\bar{x} + \widehat{r}}. \quad (\text{C.8})$$

La ecuación (C.6) también se obtiene si se emplea la expresión (1.84), $\psi(z)$. En este caso, al derivar parcialmente respecto a r la función de logverosimilitud se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial r} \ln \{L(\widehat{r}, \widehat{\delta})\} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k [\psi(\widehat{r} + k) - \psi(\widehat{r})] - \ln \left(\frac{1 + \widehat{\delta}}{\widehat{\delta}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} x_k,$$

donde $\psi(\cdot)$ denota la función digamma y está dada por

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln [\Gamma(z)], \quad z \neq 0. \quad (\text{C.9})$$

Al igualar a 0,

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1 + \widehat{\delta}}{\widehat{\delta}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} x_k &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k [\psi(\widehat{r} + k) - \psi(\widehat{r})] \\ \ln \left(1 + \frac{\bar{x}}{\widehat{r}} \right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k [\psi(\widehat{r} + k) - \psi(\widehat{r})]. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Usando la expresión de recurrencia (6.3.6) dada en [1],

$$\psi(z + k) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m + z} + \psi(z),$$

se tiene que

$$\psi(\widehat{r} + k) - \psi(\widehat{r}) = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 0 \\ \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m + \widehat{r}}, & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Al reemplazar en (C.10) se llega a la ecuación (C.6). ☑

Puesto que el concepto de transformada de Laplace se utiliza en algunas partes del libro y dado que algunos lectores quizás tengan solo una breve noción de esta temática, este apéndice contiene un breve repaso de las propiedades más importantes de esta transformada. El lector que desee profundizar puede consultar [191] y [202].

D.1. Transformada univariada de Laplace

Definición D.1. Sea $f(t)$ una función de t definida para $t \geq 0$, entonces la transformada de Laplace-Stieltjes de $f(t)$, denotada por $\mathcal{L}\{f(t)\}$, es definida por

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}_f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (\text{D.1})$$

donde el parámetro s es real.

La transformada de Laplace de $f(t)$ se dice que existe si la integral (D.1) converge para algún valor de s . En otro caso no existe.

Definición D.2. Una función $f(t)$ se dice que es seccionalmente continua (continua por tramos) en un intervalo $0 \leq a < t \leq b$ si el intervalo puede subdividirse en un número finito de puntos t_k , $k = 1, 2, \dots, n$ ($t_{k-1} < t_k$), en los cuales $f(t)$ tiene discontinuidades de salto y, en cada uno de los intervalos abiertos $t_{k-1} < t < t_k$, es continua.

Definición D.3. Una función $f(t)$ se dice que es de orden exponencial c si existen constantes c , $M > 0$ y $T > 0$ tal que para todo $t \geq T$,

$$|e^{-ct} f(t)| \leq M \quad \text{o} \quad |f(t)| \leq M e^{ct}$$

Teorema D.1. Si $f(t)$ es seccionalmente continua en el intervalo $[0, \infty)$ y de orden exponencial c para $t > T$, entonces $\mathcal{L}_f(s)$ existe para todo $s > c$.

Demostración. Para cualquier número positivo T ,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Puesto que $f(t)$ es una función seccionalmente continua en cada intervalo finito $0 \leq t \leq T$, la primera integral del lado derecho existe.

Ahora, si se considera que $s > c$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| &\leq \int_T^{\infty} |e^{-st} f(t)| dt \leq M \int_T^{\infty} e^{-st} e^{ct} dt \\ &= M \int_T^{\infty} e^{-(s-c)t} dt = -\frac{M e^{-(s-c)t}}{s-c} \Bigg|_{t=T}^{\infty} = \frac{M e^{-(s-c)T}}{s-c}, \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema de comparación para integrales impropias, si $M \int_T^\infty e^{-(s-c)t} dt$ converge, la integral $\int_T^\infty |e^{-st} f(t)| dt$ converge. Luego, la existencia de las 2 integrales implica que $\mathcal{L}_f(s)$ existe para todo $s > c$. \square

D.1.1. Propiedades de la transformada de Laplace

Para cada uno de los teoremas que se mencionan a continuación, se supone que todas las funciones satisfacen las condiciones del teorema D.1; es decir, existen las respectivas transformadas de Laplace.

Teorema D.2. Sean $f(t)$ y $g(t)$ ambas seccionalmente continuas en el intervalo $[0, \infty)$ y de orden exponencial c , con transformadas de Laplace $\mathcal{L}_f(s)$ y $\mathcal{L}_g(s)$, respectivamente. Entonces,

1) *Propiedad de linealidad*

Si c_1 y c_2 son constantes se tiene que

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 \mathcal{L}_f(s) + c_2 \mathcal{L}_g(s) \quad (\text{D.2})$$

2) *Transformada de Laplace de derivadas*

- Si $f'(t)$ es seccionalmente continua para $0 \leq t \leq T$, entonces

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}_f(s) - f(0). \quad (\text{D.3})$$

- Si $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ son continuas para $0 \leq t \leq T$ y de orden exponencial c para $t > T$, mientras que $f^{(n)}(t)$ es seccionalmente continua para $0 \leq t \leq T$, entonces

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}_f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0). \quad (\text{D.4})$$

3) *Transformada de Laplace de una integral*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}_f(s). \quad (\text{D.5})$$

4) *Transformada de la convolución*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}_f(s) \mathcal{L}_g(s) \quad (\text{D.6})$$

donde la convolución de f y g está dada por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(w) g(t-w) dw = \int_0^t f(t-w) g(w) dw. \quad (\text{D.7})$$

Demostración. Supóngase que $f(t)$ y $g(t)$ son de orden exponencial.

1) Propiedad de linealidad

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} [c_1 f(t) + c_2 g(t)] dt \\ &= c_1 \mathcal{L}_f(s) + c_2 \mathcal{L}_g(s)\end{aligned}$$

2) Transformada de Laplace de derivadas

Si $f'(t)$ es continua para $t \geq 0$, por integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_{t=0}^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= -f(0) + s \mathcal{L}_f(s) = s \mathcal{L}_f(s) - f(0).\end{aligned}$$

De manera análoga, con ayuda de la ecuación (D.3),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f''(t) dt = e^{-st} f'(t) \Big|_{t=0}^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \\ &= -f'(0) + s \mathcal{L}\{f'(t)\} = s[s \mathcal{L}_f(s) - f(0)] - f'(0).\end{aligned}$$

3) Transformada de Laplace de una integral

Sea $F(t) = \int_0^t f(u) du$, luego $F'(t) = f(t)$ y puesto que

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s \mathcal{L}_F(s) - F(0),$$

como $F(0) = 0$, despejando se tiene lo que se quería demostrar.

4) Propiedad de convolución.

Sea $h(t) = \int_0^t f(t-w)g(w) dw$; luego,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{h(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int_0^t f(t-w)g(w) dw \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sw} g(w) \left[\int_w^{\infty} e^{-s(t-w)} f(t-w) dt \right] dw.\end{aligned}$$

Al hacer el cambio de variable $z = t - w$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{h(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-sw} g(w) \left[\int_0^{\infty} e^{-sz} f(z) dz \right] dw \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sw} g(w) dw \int_0^{\infty} e^{-sz} f(z) dz \\ &= \mathcal{L}_f(s) \mathcal{L}_g(s).\end{aligned}$$

Nótese que si $f = g$, entonces

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{f^{*2}(t)\} = [\mathcal{L}_f(s)]^2.$$

Este resultado es útil cuando $f(\cdot)$ es la pdf asociada a una variable aleatoria continua. \checkmark

Nota D.1. Si X es una variable aleatoria con pdf $f_X(x)$, $x \geq 0$ y $M_X(s)$ denota su función generadora de momentos, entonces la transformada de Laplace y la función generadora de momentos están relacionadas como sigue:

$$\mathcal{L}\{f_X(x)\} = \mathcal{L}_f(s) = M_X(-s). \quad (\text{D.8})$$

Por otra parte, si $F_X(x)$ es su cdf, entonces (D.1) queda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_X(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-sw} f_X(w) dw = \int_0^{\infty} e^{-sw} d[F_X(w)] \\ &= s \int_0^{\infty} e^{-sw} F_X(w) dw - F_X(0) = s\mathcal{L}_F(s) - F_X(0). \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Si se expresa $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\bar{F}_X(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-sw} \bar{F}_X(w) dw = \int_0^{\infty} e^{-sw} \left(\int_w^{\infty} d[F_X(z)] \right) dw \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^z e^{-sw} dw \right) d[F_X(z)] = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} (1 - e^{-sz}) d[F_X(z)] \\ &= \frac{1}{s} [1 - \mathcal{L}_F(s)] \end{aligned}$$

Si X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias iid con pdf común $f_X(x)$, entonces la pdf de $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ denotada por $h_S(x) = f_X^{*n}(x)$ satisface que

$$\mathcal{L}\{h_S(x)\} = \mathcal{L}\{f_X^{*n}(x)\} = [\mathcal{L}_f(s)]^n. \quad (\text{D.10})$$

D.2. Transformada inversa de Laplace

En muchos problemas en los que se emplea transformada inversa de Laplace es necesario utilizar fracciones parciales. En estos casos, se puede usar el siguiente teorema:

Teorema D.3. Teorema de expansión de Heaviside

Si $F(x)$ es una función racional simplificada (cociente de polinomios)

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m} \quad (\text{D.11})$$

donde

- Los coeficientes a_k y b_k son todos reales.
- Los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen raíces comunes.
- Los grados de los polinomios son distintos, $m > n$.
- $Q(x)$ tiene m raíces reales distintas x_1, x_2, \dots, x_m , tal que

$$Q(x) = \prod_{i=1}^m (x - x_i),$$

Entonces $F(x)$ se descompone en fracciones parciales así:

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{x - x_i}, \quad (\text{D.12})$$

donde c_i son constantes determinadas como sigue:

$$c_i = \frac{P(x_i)}{Q'(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (\text{D.13})$$

Demostración. Para encontrar c_k se multiplica (D.12) por $x - x_k$; es decir,

$$(x - x_k)F(x) = \sum_{i=1}^m \frac{x - x_k}{x - x_i} c_i. \quad (\text{D.14})$$

Suponiendo que $Q(x_k) = 0$, la expresión anterior se reescribe

$$\frac{x - x_k}{Q(x) - Q(x_k)} P(x) = c_k + \sum_{i \neq k} \frac{x - x_k}{x - x_i} c_i.$$

Cuando $x \rightarrow x_k$, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \frac{x - x_k}{Q(x) - Q(x_k)} P(x) = c_k.$$

Luego, los coeficientes se establecen con la siguiente expresión

$$c_k = P(x_k) \lim_{x \rightarrow x_k} \left(\frac{Q(x) - Q(x_k)}{x - x_k} \right)^{-1} \Rightarrow c_k = \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)}. \quad \square$$

Definición D.4. Si $\mathcal{L}_f(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(t)$, entonces $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $\mathcal{L}_f(s)$ y se expresa como $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}_f(s)\}$, donde \mathcal{L}^{-1} denota el operador inverso de la transformada de Laplace.

D.2.1. Propiedades de la transformada inversa de Laplace

En los teoremas que se mencionan a continuación se muestran las propiedades más importantes de la transformada inversa de Laplace. Estas propiedades son análogas a las dadas en la sección [D.1.1](#).

Teorema D.4. Sean $\mathcal{L}_f(s)$ y $\mathcal{L}_g(s)$ las transformadas de Laplace de las funciones $f(t)$ y $g(t)$, respectivamente, entonces

1) *Propiedad de linealidad.*

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 \mathcal{L}_f(s) + c_2 \mathcal{L}_g(s)\} = c_1 f(t) + c_2 g(t) \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.15})$$

2) *Transformada inversa de Laplace de derivadas*

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}_f^{(n)}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}_f(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t). \quad (\text{D.16})$$

3) *Transformada inversa de Laplace de una integral*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty \mathcal{L}_f(u) du\right\} = \frac{f(t)}{t}. \quad (\text{D.17})$$

4) *Propiedad de convolución*

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}_f(s) \mathcal{L}_g(s)\} = \int_0^t f(w) g(t-w) dw = (f * g)(t). \quad (\text{D.18})$$

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [\[202\]](#). ✓

D.3. Transformada bidimensional de Laplace

El lector que desee profundizar puede consultar [\[28\]](#), [\[46\]](#), [\[57\]](#) y [\[62\]](#).

Definición D.5. Sea $f(u, v)$ una función de 2 variables definida en la región $\mathbf{R} = \{(u, v) | u \geq 0, v \geq 0\}$, entonces la integral doble

$$\mathcal{BL}\{f(u, v)\} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-r u - s v} f(u, v) du dv, \quad (\text{D.19})$$

donde los parámetros r y s son reales, se llama transformada bidimensional de Laplace de $f(u, v)$ siempre y cuando la integral [\(D.19\)](#) exista.

Si $f(u, v)$ es una función continua en la región \mathbf{R} entonces

$$\underbrace{\mathcal{BL}\{f(u, v)\}}_{\mathcal{L}_f(r, s)} = \int_0^\infty e^{-sv} \left[\int_0^\infty e^{-ru} f(u, v) du \right] dv$$

$$\mathcal{L}_f(r, s) = \mathcal{L}_2\{\mathcal{L}_1\{f(u, v)\}\}. \quad (\text{D.20})$$

Aquí, $\mathcal{L}_1\{f(u, v)\}$ indica que v permanece fija y se aplica transformada univariada de Laplace respecto a u . Análogamente, $\mathcal{L}_2\{f(u, v)\}$ indica que u permanece fija y se aplica transformada univariada de Laplace respecto a v .

Teorema D.5. Sean $f(u, v)$ y $g(u, v)$ ambas funciones continuas en la región \mathbf{R} , con transformadas bidimensionales de Laplace $\mathcal{L}_f(r, s)$ y $\mathcal{L}_g(r, s)$, respectivamente; entonces

1) Propiedad de linealidad

Si c_1 y c_2 son constantes, entonces

$$\mathcal{BL}\{c_1 f(u, v) + c_2 g(u, v)\} = c_1 \mathcal{L}_f(r, s) + c_2 \mathcal{L}_g(r, s) \quad (\text{D.21})$$

2) Transformada bidimensional de Laplace de derivadas

a) Si $f(u, v)$ tiene derivada parcial continua con respecto a u , entonces

$$\mathcal{BL}\left\{\frac{\partial}{\partial u} f(u, v)\right\} = r \mathcal{L}_f(r, s) - \mathcal{L}_f(0, s), \quad (\text{D.22})$$

donde $\mathcal{L}_f(s) = \int_0^\infty e^{-sv} f(0, v) dv$.

b) Si $f(u, v)$ tiene derivada parcial continua con respecto a v , entonces

$$\mathcal{BL}\left\{\frac{\partial}{\partial v} f(u, v)\right\} = s \mathcal{L}_f(r, s) - \mathcal{L}_f(r, 0), \quad (\text{D.23})$$

donde $\mathcal{L}_f(r) = \int_0^\infty e^{-ru} f(u, 0) du$.

c) Si $f(u, v)$ tiene segunda derivada parcial continua con respecto a u , entonces

$$\mathcal{BL}\left\{\frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u^2}\right\} = r^2 \mathcal{L}_f(r, s) - r \mathcal{L}_f(0, s) - \mathcal{L}_{f_u}(0, s), \quad (\text{D.24})$$

donde $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$.

d) Si $f(u, v)$ tiene segunda derivada parcial continua con respecto a v , entonces

$$\mathcal{BL}\left\{\frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial v^2}\right\} = s^2 \mathcal{L}_f(r, s) - s \mathcal{L}_f(r, 0) - \mathcal{L}_{f_v}(r, 0), \quad (\text{D.25})$$

donde $f_v = \frac{\partial f}{\partial v}$.

e) Si $f(u, v)$ tiene derivadas parciales mixtas continuas, entonces

$$\mathcal{BL}\left\{\frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u \partial v}\right\} = rs\mathcal{L}_f(r, s) - r\mathcal{L}_f(r, 0) - s\mathcal{L}_f(0, s) + f(0, 0). \quad (\text{D.26})$$

3) Transformada bidimensional de Laplace de una integral

a) Integrales simples

$$\mathcal{L}_1\left\{\int_0^t f(u, v) du\right\} = \frac{1}{r}\mathcal{L}_1\{f(u, v)\} \quad r > 0, \quad (\text{D.27})$$

$$\mathcal{L}_2\left\{\int_0^x f(u, v) dv\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}_2\{f(u, v)\} \quad s > 0. \quad (\text{D.28})$$

b) Integrales dobles

$$\mathcal{BL}\left\{\int_0^x \int_0^t f(u, v) du dv\right\} = \frac{1}{rs}\mathcal{L}_f(r, s) \quad rs > 0. \quad (\text{D.29})$$

4) Transformada de la convolución

$$\mathcal{BL}\{(f * g)(u, v)\} = \mathcal{BL}\{f(u, v)\} \mathcal{BL}\{g(u, v)\} = \mathcal{L}_f(r, s) \mathcal{L}_g(r, s) \quad (\text{D.30})$$

donde si $\tau = t - w$ la convolución de f y g está dada por

$$(f * g)(u, v) = \int_0^u f(w, v)g(\tau, v) dw = \int_0^u f(\tau, v)g(w, v) dw. \quad (\text{D.31})$$

Demostración. Las funciones $f(u, v)$ y $g(u, v)$ son continuas.

1) Propiedad de linealidad

Sea $h(u, v) = c_1 f(u, v) + c_2 g(u, v)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{BL}\{h(u, v)\} &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sv} e^{-ru} [c_1 f(u, v) + c_2 g(u, v)] du dv \\ &= c_1 \mathcal{BL}\{f(u, v)\} + c_2 \mathcal{BL}\{g(u, v)\} \\ &= c_1 \mathcal{L}_f(r, s) + c_2 \mathcal{L}_g(r, s) \end{aligned}$$

2) Transformadas bidimensionales de Laplace de derivadas

Como las pruebas de a) y b) son análogas, solo se verifica b)

$$\mathcal{BL}\left\{\frac{\partial}{\partial v} f(u, v)\right\} = \int_0^\infty e^{-sv} \left[\int_0^\infty e^{-ru} \frac{\partial}{\partial v} f(u, v) du \right] dv.$$

Lo cual equivale a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{L}_1 \{ f(u, v) \} \right\} &= \int_0^\infty e^{-sv} \left[\frac{\partial}{\partial v} \int_0^\infty e^{-ru} f(u, v) du \right] dv \\
 &= \int_0^\infty e^{-ru} \left[\int_0^\infty e^{-sv} \frac{d[f(u, v)]}{dv} dv \right] du \\
 &= \int_0^\infty e^{-ru} \left[e^{-sv} f(u, v) \Big|_{v=0}^\infty + s \int_0^\infty e^{-sv} f(u, v) dv \right] du \\
 &= s \mathcal{L}_f(r, s) - \int_0^\infty e^{-ru} f(u, 0) du \\
 &= s \mathcal{L}_f(r, s) - \mathcal{L}_f(r, 0).
 \end{aligned}$$

Si $f(u, v)$ tiene derivada parcial mixta continua, usando integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} f(u, v) \right\} &= \int_0^\infty e^{-ru} \int_0^\infty e^{-sv} \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial}{\partial v} f(u, v) dv \right] du \\
 &= \int_0^\infty e^{-ru} \frac{\partial}{\partial u} \left[\int_0^\infty e^{-sv} \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} dv \right] du \\
 &= \int_0^\infty e^{-ru} \frac{\partial}{\partial u} \left[e^{-sv} f(u, v) \Big|_{v=0}^\infty + s \int_0^\infty e^{-sv} f(u, v) dv \right] du \\
 &= s \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ru-sv} \frac{\partial}{\partial u} f(u, v) du dv - \int_0^\infty e^{-ru} \frac{\partial}{\partial u} f(u, 0) du. \\
 &= s \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ru-sv} \frac{\partial}{\partial u} f(u, v) du dv \\
 &\quad - \left[e^{-ru} f(u, 0) \Big|_{u=0}^\infty + r \int_0^\infty e^{-ru} f(u, 0) du \right].
 \end{aligned}$$

Por la expresión (D.22) se obtiene que

$$\mathcal{B}\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} f(u, v) \right\} = r \mathcal{L}_f(r, s) - \mathcal{L}_f(0, s).$$

Luego,

$$\mathcal{B}\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} f(u, v) \right\} = s [r \mathcal{L}_f(r, s) - \mathcal{L}_f(0, s)] - r \mathcal{L}_f(r, 0) + f(0, 0).$$

3a) Transformada bidimensional de Laplace de una integral simple

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_1 \left\{ \int_0^w f(u, v) du \right\} &= \int_0^\infty e^{-rw} \left[\int_0^w f(u, v) du \right] dw \\
 &= \int_0^\infty f(u, v) \left[\int_u^\infty e^{-rw} dw \right] du \\
 &= \frac{1}{r} \int_0^\infty e^{-ru} f(u, v) du = \frac{1}{r} \mathcal{L}_1 \{ f(u, v) \}.
 \end{aligned}$$

3b) Transformada bidimensional de Laplace de una integral doble

Sea $F(u, v) = \int_0^v \int_0^u f(x, y) dx dy$. Luego, $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F(u, v) = f(u, v)$ y dado que

$$\mathcal{B}\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F(u, v) \right\} = s [r \mathcal{L}_F(r, s) - \mathcal{L}_F(0, s)] - r \mathcal{L}_F(r, 0) + F(0, 0),$$

como $\mathcal{L}_F(r, 0) = \mathcal{L}_F(0, s) = F(0, 0) = 0$, despejando se tiene lo que se quería demostrar.

4) Propiedad de convolución. Sea $z = u - w$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \left\{ \int_0^u f(z, v) g(w, v) dw \right\} &= \int_0^\infty e^{-ru} \left[\int_0^u f(z, v) g(w, v) dw \right] du \\ &= \int_0^\infty g(w, v) \left[\int_w^\infty e^{-ru} f(z, v) du \right] dw \\ &= \int_0^\infty e^{-rw} g(w, v) \left[\int_w^\infty e^{-rz} f(z, v) dz \right] dw \\ &= \int_0^\infty e^{-rw} g(w, v) \left[\int_0^\infty e^{-rz} f(z, v) dz \right] dw \\ &= \mathcal{L}_1 \{ f(u, v) \} \mathcal{L}_1 \{ g(u, v) \}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Puesto que el concepto de formas cuadráticas se usa en algunas partes del libro y dado que algunos lectores quizás tengan solo una breve noción de esta temática, este apéndice contiene un breve repaso sobre formas cuadráticas. El lector que desee profundizar puede consultar [89] y [112, cap. 5].

Definición E.1. Sea $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal sobre \mathbb{R}^m y A una matriz cuadrada de tamaño $m \times m$. Entonces g es simétrica, si para todo $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^m$, se cumple que

$$g_A(\vec{v}, \vec{w}) = g_A(\vec{w}, \vec{v}). \quad (\text{E.1})$$

Una forma cuadrática determinada por g es una función $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$F(\vec{v}) = g_A(\vec{v}, \vec{v}) = \vec{v}^t A \vec{v}. \quad (\text{E.2})$$

La matriz A es llamada la matriz de la forma bilineal.

Teorema E.1. Una matriz real A de tamaño $m \times m$ representa una forma cuadrática si y solo si es una matriz simétrica.

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [89]. □

Ejemplo E.1. Sea $\vec{R} = (r_{t+1}, r_{t+2}, \dots, r_{t+k})^t$ el vector k -dimensional que representa las k -observaciones. Al reemplazar cada v_i en (E.2) por $r_i - \mu_r$, muestre que

$$F(\vec{v}) = k \sigma_t^2 = \sum_{i=1}^k (r_{t+i} - \mu_r)^2 = \vec{v}^t I_k \vec{v}, \quad (\text{E.3})$$

Solución. Puesto que \vec{v} se puede reescribir como

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} r_{t+1} - \mu_{r_k} \\ r_{t+2} - \mu_{r_k} \\ \vdots \\ r_{t+j} - \mu_{r_k} \\ \vdots \\ r_{t+k} - \mu_{r_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{t+1} \\ r_{t+2} \\ \vdots \\ r_{t+j} \\ \vdots \\ r_{t+k} \end{bmatrix} - \mu_{r_k} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{R} - \mathbf{1}_k \mu_{r_k}, \quad (\text{E.4})$$

donde $\mathbf{1}_k$ es un vector columna de 1 de tamaño $k \times 1$. Luego, μ_{r_k} se puede expresar como sigue:

$$\mu_{r_k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r_{t+i} = \frac{1}{k} \mathbf{1}_k^t \vec{R}_t. \quad (\text{E.5})$$

Si se reemplaza (E.5) en (E.4), se obtiene

$$\vec{v} = \vec{R} - \frac{1}{k} J_{kk} \vec{R} = \left(I_k - \frac{1}{k} J_{kk} \right) \vec{R}, \quad (\text{E.6})$$

donde $J_{kk} = \mathbf{1}_k \mathbf{1}_k^t$. Al sustituir en (E.3) se tiene que

$$\begin{aligned} F \left[\left(I_k - \frac{1}{k} J_{kk} \right) \vec{R} \right] &= \left[\left(I_k - \frac{1}{k} J_{kk} \right) \vec{R} \right]^t I_k \left[\left(I_k - \frac{1}{k} \mathbf{1}_k \mathbf{1}_k^t \right) \vec{R} \right] \\ &= \vec{R}^t \left(I_k - \frac{1}{k} J_{kk} \right) \left(I_k - \frac{1}{k} J_{kk} \right) \vec{R} \\ &= \vec{R}^t \left(I_k - \frac{1}{k} J_{kk} - \frac{1}{k} J_{kk} + \frac{1}{k^2} \mathbf{1}_k \underbrace{\mathbf{1}_k^t \mathbf{1}_k}_{\mathbf{1}_k^t \mathbf{1}_k} \mathbf{1}_k \right) \vec{R}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el hecho de que $\mathbf{1}_k^t \mathbf{1}_k = k$, se llega finalmente a que

$$F \left[\left(I_k - \frac{1}{k} J_{kk} \right) \vec{R} \right] = \vec{R}^t \left(I_k - \frac{1}{k} J_{kk} \right) \vec{R}. \quad (\text{E.7})$$

Luego,

$$k \sigma_t^2 = \vec{R}^t \left(I_k - \frac{1}{k} J_{kk} \right) \vec{R} = \vec{R}^t \left(I_k - \bar{J}_{kk} \right) \vec{R}. \quad (\text{E.8})$$

Por lo tanto, la matriz asociada a la forma cuadrática es

$$A = I_k - \bar{J}_{kk} \quad \text{y} \quad \rho(A) = k - 1.$$

Nótese que la matriz A es simétrica e idempotente. ☑

E.1. Primeros momentos de formas cuadráticas de variables normales

Teorema E.2. Sea $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio con distribución normal multivariada $N(\vec{0}, \Sigma)$. Además, sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices simétricas de tamaño $n \times n$, con $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ y el vector fijo $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$1) \quad \mathbb{E}[\vec{X}^t \vec{u}] = \mathbf{0} \quad (\text{E.9})$$

$$2) \quad \mathbb{E}[\vec{X}^t A \vec{X}] = \text{tr}(A \Sigma) \quad (\text{E.10})$$

$$3) \quad \mathbb{E}[(\vec{X}^t A \vec{X})(\vec{X}^t B \vec{X})] = [\text{tr}(A \Sigma)] [\text{tr}(B \Sigma)] + 2 \text{tr}(A \Sigma B \Sigma) \quad (\text{E.11})$$

$$4) \mathbb{E} \left[(\vec{X}^t A \vec{X}) (\vec{X}^t B \vec{u}) \right] = 0 \quad (\text{E.12})$$

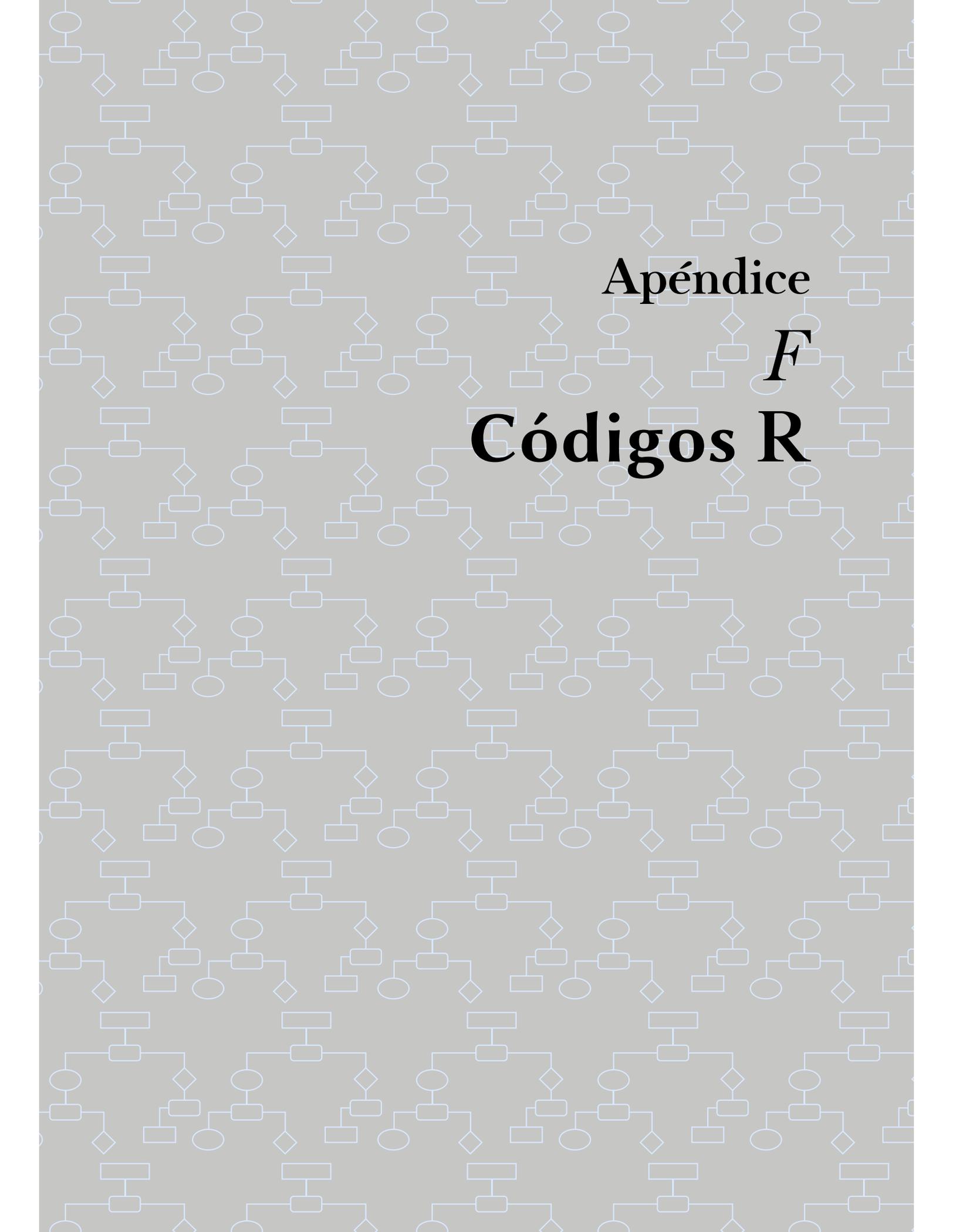
$$5) \mathbb{E} \left[(\vec{X}^t A \vec{X})^3 \right] = [\text{tr}(A\Sigma)]^3 + 6 \text{tr}(A\Sigma) \text{tr} \left[(A\Sigma)^2 \right] + 8 \text{tr} \left[(A\Sigma)^3 \right]. \quad (\text{E.13})$$

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [183]. ☑

Corolario E.2.1. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz simétrica y $\vec{X} \sim N(\vec{0}, \Sigma)$ definida positiva. Defínase $Z = \vec{X}^t A \vec{X}$. El valor esperado, la varianza, la asimetría y el exceso de curtosis de Z son

$$\begin{aligned} \mu_1(Z) &= \text{tr}(A\Sigma) & \mu_2(Z) &= 2 \text{tr} \left[(A\Sigma)^2 \right] \\ \beta_1(Z) &= 2\sqrt{2} \frac{\text{tr} \left[(A\Sigma)^3 \right]}{\sqrt{[\text{tr}(A\Sigma)^2]^3}} & \gamma_2(Z) &= 12 \frac{\text{tr} \left[(A\Sigma)^4 \right]}{[\text{tr}(A\Sigma)^2]^2}. \end{aligned}$$

Demostración. Los detalles de la prueba pueden verse en [183]. ☑



Apéndice

F

Códigos R



En este apéndice se presentan los códigos en el *software* estadístico **R** que se usaron en los ejemplos numéricos que aparecen en este texto.

F.1. Ejemplo 2.2

El código respectivo está dado por

```
# Numero de reclamos, el 6 identifica los mayores a 6
library(polynom)
k<-c(0:6)
n_k<-c(25356, 1521, 282, 58, 16, 4, 1)
Tcasos<-sum(n_k)
# Frecuencia relativa
freqrel<-(n_k/Tcasos)
# Estimadores
n_bar <- sum(k*n_k)/Tcasos
s_cua <- (sum(k^2*n_k)/Tcasos)-(n_bar^2)
n_bar;s_cua

### Prueba Chicuadrado
Chi_cua<-function(obs, esp, alpha=0.05, m=7, gl=3){
chi<-sum((obs-esp)^2/esp)
vchi<-qchisq(1-alpha, df = gl )
if(chi<vchi){
return(list("No hay evidencia para rechazar H_0",
"Estadistica"=chi, "Valor critico"=vchi))
}

if(chi>=vchi){
return(list("Hay evidencia para rechazar H_0",
"Estadistica"=chi, "Valor critico"=vchi))
}
}

# Momentos -----

m_4=0
for(k in 4:(length(n_k)-1)){
m_4<-((gamma(k+1)/(gamma(k-3))) * freqrel[k+1])+m_4
}

m_3=0
for(k in 3:(length(n_k)-1)){
m_3<-((gamma(k+1)/(gamma(k-2))) * freqrel[k+1])+m_3
```

```

}

m_2=0
for(k in 2:(length(n_k)-1)){
m_2<-((gamma(k+1)/(gamma(k-1))) * freqrel[k+1])+m_2
}

m_1=0
for(k in 1:(length(n_k)-1)){
m_1<-((gamma(k+1)/(gamma(k))) * freqrel[k+1])+m_1
}

#ZIP -----
lambZI <- m_2/m_1
omegaZI <- m_1/lambZI

#ZINB -----
rZINB <- (m_2^2)/((n_bar*m_3)-m_2^2)-1
pqZINB <- ((n_bar*m_3)-m_2^2)/(n_bar*m_2)
pZINB <- (1+pqZINB)^(-1)
wZINB <- n_bar/(rZINB*pqZINB)

#Mixtura Distribucion Poisson-----
lambda<-n_bar

#Calculo de los lambdas-----
coef1<-((n_bar*m_3)-m_2^2)
coef2<-(m_3-(n_bar*m_2))
coef3<-(m_2-(n_bar^2))

# Construccion del polinomio
polLam <- polynomial(c(coef1, -coef2, coef3))
r1 <- solve(polLam) # raíces

# lambda1 -----
lam1 <- max(r1)
#Lambda 2-----
lam2 <- min(r1)

# Theta -----
theta<- coef2/coef3
# Gamma-----
gamma<- coef1/coef3

#omega-----

```

```

omega_1 <- (n_bar-lam2)/(lam1-lam2)
lam1;lam2;omega_1

##### Mixtura de Binomiales Negativas-----
# parametros -----

q_bin <- 1-(n_bar/s_cua)
r_bin <- n_bar^2/(s_cua-n_bar)
q_bin;r_bin

#Calculo del r-----
a1 <- n_bar*m_2*m_3
coef1<-(m_2^3+m_3^2-m_2*m_4+n_bar^2*m_4-2*a1)
coef2<-(7*m_2^3+4*m_3^2-3*m_2*m_4+4*n_bar^2*m_4 -12*a1)
coef3<-(16*m_2^3+3*m_3^2-2*m_2*m_4+5*n_bar^2*m_4-22*a1)
coef4<-(2*(6*m_2^3+n_bar^2*m_4-6*a1))

# Construccion del polinomio
polr <- polynomial(c(coef4, coef3, coef2, coef1))
r2 <- solve(polr)
r=max(r2)
denpar <- ((r+2)*((r*m_2)-((r+1)*n_bar^2)))
# Theta-----
thetabn <- ((r*m_3)-((r+2)*n_bar*m_2))/denpar
# gamma -----
gammabn <-((n_bar*m_3)-((r+1)^(-1)*(r+2)*m_2^2))/denpar

## Estimacion de P
p_1 <- 1/((thetabn/2)+sqrt((thetabn/2)^2-gammabn)+1)
p_2 <- 1/((thetabn/2)-sqrt((thetabn/2)^2-gammabn)+1)

## Estimacion del omega
omega_2 <- ((n_bar*p_2-r*(1-p_2))*p_1)/(r*(p_2-p_1))
p_1;p_2;r;omega_2

#Tabla de comparacion-----

#Estimacion de las probabilidades ZIP
Est_poisZI1 <-omegaZI*dpois(x = k,lambda = lambZI)
Est_poisZI0 <- (1-omegaZI)*c(1,0,0,0,0,0,0)
Est_poisZI <- (Est_poisZI0+Est_poisZI1)
#Estimacion No. de casos con Poisson
est_pZI<-round(Est_poisZI*Tcasos,3)
#Casos Totales con Poisson
sum(est_pZI)

```

```

#Se agrupan los datos
ajuspoisZI <- c(est_pZI[1:4],sum(est_pZI[5:7]))
# Se agrupa de la misma manera los observados
n_ka<-c(n_k[1:4],sum(n_k[5:7]))
Chi_pZI<-sum((n_ka-ajuspoisZI)^2/ajuspoisZI)
# Se hace la prueba Chi-cuadrado
Chi_cua(obs = n_ka,esp=ajuspoisZI,gl = 2)

#Estimacion de las probabilidades ZINB
Est_ZINB1 <-wZINB*dnbinom(x = k,size = rZINB,prob = (pZINB))
Est_ZINB0 <- (1-wZINB)*c(1,0,0,0,0,0,0)
Est_ZINB <- (Est_ZINB0+Est_ZINB1)
#Estimacion No. de casos con Poisson
est_dZINB<-round(Est_ZINB*Tcasos,3)
#Casos Totales con Poisson
sum(est_dZINB)
#Se agrupan los datos
ajusZINB <- c(est_dZINB[1:5],sum(est_dZINB[6:7]))
# Se agrupa de la misma manera los observados
n_ka<-c(n_k[1:5],sum(n_k[6:7]))
Chi_ZINB<-sum((n_ka-ajusZINB)^2/ajusZINB)
# Se hace la prueba Chi-cuadrado
Chi_cua(obs = n_ka,esp=ajusZINB,gl = 2)

#Estimacion de las probabilidades
Est_mix_pois <-omega_1*dpois(x = k,lambda = lam1)+
(1-omega_1)*dpois(x = k,lambda = lam2)
#Estimacion No. de casos con Poisson
est_mix_p<-round(Est_mix_pois*Tcasos,3)
#Casos Totales con Poisson
sum(est_mix_p)
#Se agrupan los datos
ajuspois1 <- c(est_mix_p[1:5],sum(est_mix_p[6:7]))
# Se agrupa de la misma manera los observados
n_ka<-c(n_k[1:5],sum(n_k[6:7]))
Chi_mix_p<-sum((n_ka-ajuspois1)^2/ajuspois1)
# Se hace la prueba Chi-cuadrado
Chi_cua(obs = n_ka,esp=ajuspois1,gl = 3)

# Estimacion de probabilidades con binomial
# negativa por el metodo de los momentos
dbnp1 <- dnbinom(x = k,size = r,prob = (p_1));
dbnp2 <- dnbinom(x = k,size = r,prob = (p_2));
Est_mix_binom <-dbnp1*omega_2+dbnp2*(1-omega_2)
# Estimacion No. de casos binomial negativa, por momentos

```

```

est_mix_binn1 <- round(Est_mix_binom*Tcasos,3)
# Casos Totales con la estimacion binomial negativa
# por el metodo de los momentos
sum(est_mix_binn1)
ajusbinn1 <- c(est_mix_binn1[1:5],sum(est_mix_binn1[6:7]))
# Se agrupa de la misma manera los observados
n_ka<-c(n_k[1:5],sum(n_k[6:7]))
Chi_mix_binn1<-sum((n_ka-ajusbinn1)^2/ajusbinn1)
# Se hace la prueba Chi-cuadrado
Chi_cua(obs = n_ka,esp=ajusbinn1)

### Salida Final
test=c("test", ".", round(Chi_pZI,4), round(Chi_ZINB,4),
       round(Chi_mix_p,4), round(Chi_mix_binn1,4))
salida=cbind(k,n_k,est_pZI,est_dZINB,est_mix_p,
est_mix_binn1)
salida=rbind(salida,test)
salida

```

F.2. Ejemplo 2.6

En este caso, el código es

```

library(orthopolynom)
### Numero de reclamos
k<-c(0:7)
n_k<-c(7840,1317,239,42,14,4,4,1)
Tcasos<-sum(n_k)
freqrel<-(n_k/Tcasos)
eps=0.000001;
### Prueba Chicuadrado

Chi_cua<- function(obs, esp,alpha=0.05,m=7,gl=3){
chi<-sum((obs-esp)^2/esp)
vchi<-qchisq(1-alpha,df = gl )
if(chi<vchi){
return(list("No hay evidencia para rechazar H_0",
chi,"Valor critico"=vchi))
}
if(chi>=vchi){
return(list("Existe evidencia para rechazar H_0",
chi, "Valor critico"=vchi))
}
}

```

```

# Estimadores-----
n_bar <- sum(k*n_k)/Tcasos
s_cua <- (sum(k^2*n_k)/Tcasos)-(n_bar^2)
n_bar;s_cua

# Estimación de parámetros

# Distribucion Poisson-----
lambda<-n_bar

# Binomial Negativa (método de momentos)

q_bin <- 1-(n_bar/s_cua)
r_bin <- round(n_bar^2/(s_cua-n_bar),10)
q_bin;r_bin

# Metodo Newton Raphson

# Funcion f(r)-----
f_r<-function(r,n_bar= n_bar,n_k= n_k){
as=0;al=0;sol=0
for(k in 1:(length(n_k)-1)){
for(m in 0:(k-1)){
as<-(1/(m+r))+as
}
al<- (n_k[k+1]*as)+al
as=0
}
sol<-(log(1+(n_bar/r))*Tcasos)-al
return(sol)
}

# Funcion f'(r)-----
f_der<- function(r,n_bar,n_k){
as=0;al=0;sol=0
for(k in 1:(length(n_k)-1)){
for(m in 0:(k-1)){
as<-(1/(m+r)^2)+as
}
al<-(n_k[k+1]*as)+al
as=0
}
sol <- (-n_bar/(r^2+(n_bar*r)))*Tcasos+al
return(sol)
}

```

```

i=0
r<-r_bin
repeat{
r1<-r-(f_r(r = r,n_bar = n_bar,n_k = n_k)/
      f_der(r = r,n_bar = n_bar,n_k = n_k))
i=i+1
if(abs(r1-r)<eps){break}
r=r1
r1=0
}
r1
#### Estimacion de q usando (2.3)
q<-n_bar/(n_bar+r1)
q

# Familia Hofmann-----

# Momentos-----

q_t <- n_bar
k_t <- (s_cua-n_bar)/n_bar
m_3 <-sum((k-n_bar)^3*freqrel)
c_t <- (m_3-s_cua)/(n_bar*k_t)-k_t-2
a_t <- k_t/c_t

q_t;k_t;m_3;c_t;a_t

# Distribución de Hofmann
Lamb<- q_t*(1+c_t)^(-a_t)
p0<- exp(-(q_t/c_t)*(((1+c_t)^(1-a_t)-1)/(1-a_t)))

Hofmann <- function(p_0,n,a,q,c){
p1=0;pa=0
valores<-numeric(n+1)
valores[1]<-p_0

for(i in 1:n){
for(k in 0:(i-1)){pa=
( pochhammer(a,k)/factorial(k)*((c^k)/((1+c)^(a+k))))*
valores[i-k]}+pa
}
p1=(q/(i))*pa
valores[i+1]<-p1
pa=0

```

```

}
return(valores)
}

# Tabla de Comparación-----

# Estimación de las probabilidades
Estpois <- dpois(x = k, lambda = lambda)
# Estimacion No. de casos con Poisson
estp<-round(Estpois*Tcasos,3)
sum(estp) # Casos Totales con Poisson
ajuspois1 <- c(estp[1:3],sum(estp[4:8]))
# Se agrupan los datos
n_ka<-c(n_k[1:3],sum(n_k[4:8]))
# Se agrupa de la misma manera los observados
Chi_p<-sum((n_ka-ajuspois1)^2/ajuspois1)
# Se hace la prueba Chi-cuadrado
Chi_cua(obs = n_ka,esp=ajuspois1,gl = 2)

# Estimacion de probabilidades con Binomial
# negativa por el metodo de los momentos
Estbinom1 <- dnbinom(x=k,size=r_bin,prob=(1-q_bin))
# Estimación número de casos con binomial negativa
estbinn1 <- round(Estbinom1*Tcasos,3)
# Casos Totales con la estimación binomial negativa
sum(estbinn1)
ajusbinn11 <- c(estbinn1[1:5],sum(estbinn1[6:8]))
n_ka<-c(n_k[1:5],sum(n_k[6:8]))
# Se agrupa de la misma manera los observados
Chi_binn1<-sum((n_ka-ajusbinn11)^2/ajusbinn11)
# Se hace la prueba Chi-cuadrado
Chi_cua(obs = n_ka,esp=ajusbinn11)

# Estimacion de probabilidades con Binomial
# negativa por el metodo MV
Estbinom2 <- dnbinom(x = k,size = r1,prob = (1-q))
# Estimacion No. de casos con binomial negativa, por MV
estbinn2 <- round(Estbinom2*Tcasos,3)
# Casos Totales con la estimacion binomial negativa por MV
sum(estbinn2)
ajusbinn21 <- c(estbinn2[1:5],sum(estbinn2[6:8]))
# Se agrupa de la misma manera los observados
n_ka<-c(n_k[1:5],sum(n_k[6:8]))
Chi_binn2<-sum((n_ka-ajusbinn21)^2/ajusbinn21)
# Se hace la prueba Chi-cuadrado

```

```

Chi_cua(obs = n_ka, esp=ajusbinn21)

Est_hof<-Hofmann(p_0 = p0, n = 7, a = a_t, q = q_t, c = c_t)
est_hof <- round(Est_hof*Tcasos, 3)
sum(est_hof)
ajushof <- c(est_hof[1:6], sum(est_hof[7:8]))
n_ka<-c(n_k[1:6], sum(n_k[7:8]))
Chi_hof<-sum((n_ka-ajushof)^2/ajushof)
# Se hace la prueba Chi-cuadrado
Chi_cua(obs = n_ka, esp=ajushof)

### Salida Final
test=c("test", ".", round(Chi_p, 3), round(Chi_binn1, 3),
round(Chi_binn2, 3), round(Chi_hof, 3))
salida=cbind(k, n_k, estp, estbinn1, estbinn2, est_hof)
salida=rbind(salida, test)
salida

```

F.3. Ejemplo 3.2

En este caso, el código es

```

x_1<-c(0.4, .3, .2, .1)
lx_1 <- seq(from=0, to=(length(x_1)-1))
x_2 <- c(.5, .2, .1, .1, .1)
lx_2 <- seq(from=0, to=(length(x_2)-1))
x_3 <- c(.6, 0, .1, .1, .1, .1)
lx_3 <- seq(from=0, to=(length(x_3)-1))
n=(length(x_1))+(length(x_2))+(length(x_3))
# Calculo de H_s^1
H_s1 <- function(n,x){
pre<-rep(1,n)
a=0
for(i in 1:length(x)){
a<-x[i]+a
pre[i]<-a}
return(pre)
}

# Función para calcular las H_s^n
Hs_n <- function(x_n, Hsn_1, n){
pa=0

```

```

lx_n <- seq(from=0,to=(length(x_n)-1))
Hsn<-numeric()
lHsn_1 <- seq(from=0,to=(length(Hsn_1)-1))
for(k in 0:n){
  for(i in 1:length(lx_n)){
    for(j in 1:length(lHsn_1)){
      if((lx_n[i]+lHsn_1[j])==k){
        pa=(x_n[i]*Hsn_1[j])+pa
      } } }
    Hsn[k+1]=pa
    pa=0
  }
  return(Hsn)
}

# Funciones Densidad-----
hs_n <- function(Hs_n){
  hsn<-numeric()
  hsn[1]<-Hs_n[1]
  for(i in 2:length(Hs_n)){
    hsn[i]<-Hs_n[i]-Hs_n[i-1]
  }
  return(hsn)
}

# Cálculo de las funciones de distribución acumuladas
Hs1 <- H_s1(13,x_1)
Hs2 <- Hs_n(x_n = x_2,Hsn_1 = Hs1,12)
Hs3 <- Hs_n(x_n = x_3,Hsn_1 = Hs2,12)

# Cálculo funciones de Densidad
hs2 <- hs_n(Hs2)
hs3 <- hs_n(Hs3)

# Tabla
tb<-cbind(seq(0,12),c(x_1,rep(0,(13-length(x_1)))),
  c(x_2,rep(0,(13-length(x_2)))),
  c(x_3,rep(0,(13-length(x_3))))),Hs1,Hs2,Hs3,hs2,hs3)
colnames(tb)<-c("x","fx_1","fx_2","fx_3","Hs1","Hs2",
  "Hs3","hs2","hs3")
tb

```

F.4. Ejemplo 3.7

El respectivo código está dado por

```
# Función para el calculo de p_n-----
p_n <- function(p_a,s_a,p_b,s_b){
  lim_1 <-c(min(s_a)+min(s_b),max(s_a)+max(s_b))
  a=0;pa=0;f=0
  pn <- numeric()
  for(k in lim_1[1]:lim_1[2]){
    f=f+1
    for(i in min(s_a):max(s_a)){
      for(j in min(s_b):max(s_b)){
        fg<-(min(s_a)-1);fh=(min(s_b)-1)
        if((s_a[i-fg]+s_b[j-fh])==k & a<1){
          if(i==j){a=a+1}
          pa=(p_a[i-fg]*p_b[j-fh])+pa
        }
      }
    }
    a=0
  }
  pn[f]<-pa
  pa <- 0
}

return(pn)
}

#p2 y p3 -----
p1<-c(.5,.3,.2)
s1 <- c(1:3)
p2<-p_n(p_a = p1,s_a = s1,p_b = p1,s_b = s1)
s2<-c(2:6)
p3<-p_n(p_a = p1,s_a = s1,p_b = p2,s_b = s2)

# Matriz-----

p_0 <- c(1,rep(0,9))
p_1 <- c(0,p1,rep(0,6))
p_2 <- c(rep(0,2),p2,rep(0,3))
p_3 <- c(rep(0,3),p3)

hs<-(0.4*p_0)+(0.3*p_1)+(0.2*p_2)+(0.1*p_3)
Hs<-numeric()
for(i in 1:length(hs)){
```

```
Hs[i] <- sum(hs[1:i])
}
cbind(p_0,p_1,p_2,p_3,hs,Hs)
```

F.5. Ejemplo 3.11

El respectivo código está dado por

```
# Función para el calculo de p_n-----
p_n <- function(p_a,s_a,p_b,s_b){
  lim_1 <-c(min(s_a)+min(s_b),max(s_a)+max(s_b))
  a=0;pa=0;f=0
  pn <- numeric()
  for(k in lim_1[1]:lim_1[2]){
    f=f+1
    for(i in min(s_a):max(s_a)){
      for(j in min(s_b):max(s_b)){
        fg<-(min(s_a)-1);fh=(min(s_b)-1)
        if((s_a[i-fg]+s_b[j-fh])==k & a<1){
          if(i==j){a=a+1}
          pa=(p_a[i-fg]*p_b[j-fh])+pa
        } }
      a=0
    }
    pn[f]<-pa
    pa <- 0
  }
  return(pn)
}

# Función para convolución-segunda parte-----

conv<- function(p_a,s_a,p_b,s_b,p_0){
  a=0;pa=0;f=1
  pn <- numeric()

  pn[1] <-p_0
  for(k in 1:6){
    f=f+1
    for(i in 1:length(s_a)){
      for(j in 1:length(s_b)){
        if((s_a[i]+s_b[j])==k & a<1){
          if(i==j){a=a+1}

```

```

pa=(p_a[i]*p_b[j])+pa }
}
a=0
}
pn[f]<-pa
pa <- 0
}
return(pn)
}

# p's-----
p1<-c(.25,.375,.375)
s1<-c(1:3)

p2 <- p_n(p_a = p1,s_a = s1,p_b = p1,s_b = s1)
s2<-c(2:6)

p3<-p_n(p_a = p1,s_a = s1,p_b = p2,s_b = s2)
s3<-c(3:6)

p4 <- p_n(p_a = p1,s_a = s1,p_b = p3,s_b = s3)
s4 <- c(4:6)

p5 <- p_n(p_a = p1,s_a = s1,p_b = p4,s_b =s4 )
s5 <- c(5:6)

p6<-p_n(p_a = p1,s_a = s1,p_b = p5,s_b = s5)

#Matriz-----
p_0<-c(1,rep(0,6))
p_1 <- c(0,p1,rep(0,3))
p_2<-c(rep(0,2),p2[1:5])
p_3 <- c(rep(0,3),p3[1:4])
p_4 <- c(rep(0,4),p4[1:3])
p_5 <- c(rep(0,5),p5[1:2])
p_6 <- c(rep(0,6),p6[1])

pois <- dpois(x = c(0:6),lambda = 0.8)
hs <- (pois[1]*p_0)+(pois[2]*p_1)+(pois[3]*p_2)
      +(pois[4]*p_3)+(pois[5]*p_4)
      +(pois[6]*p_5)+(pois[7]*p_6)

cbind(p_0,p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,hs)

#Segundo método-----

```

```

lambda <- 0.8
pi_k <- c(.25, .375, .375)
lambda_k <- lambda*pi_k
#p0N0<-dpois(c(0:6),lambda = lambda_k[1])
p1N1<-dpois(c(0:6),lambda = lambda_k[1])
p2N2<-dpois(c(0:3),lambda = lambda_k[2])
p3N3<-dpois(c(0:2),lambda = lambda_k[3])
s_1N<-c(0:6)
s_2N<-c(2*(0:3))
p0<-dpois(0,sum(lambda_k[1:2]))
pN12N2 <- conv(p_a = p1N1,s_a = s_1N,p_b = p2N2,
s_b = s_2N,p_0 = p0)

s_3N<-c(3*(0:2))
s_con <-c(0:6)
p0<-dpois(0,sum(lambda_k[1:3]))
pS <- conv(p_a = p3N3,s_a = s_3N,p_b = pN12N2,
s_b = s_con,p_0 = p0)

cbind(k,p1N1,p2N2,p3N3,pN12N2,pS)

```

F.6. Ejemplo 3.13

El respectivo código está dado por

```

lambda_1<-16
k<-c(5,10,20,30,40)
p1<- ppois(q = k,lambda = lambda_1)#Distribución exacta

# Gamma Tradladada -----
#Corregida por discreta
alpha<-64
beta<-0.5
x_0<--16
p2<- pgamma(q = k-(x_0-0.5),shape = alpha,scale = beta)

#Distribución Normal-----
#Corregida por discreta
mu<-16
sigma<-4
p3<- pnorm(q = k+0.5,mean = mu,sd = sigma)

cbind(k,p1,p2,p3)

```

F.7. Ejemplo 8.2

El respectivo código está dado por

```
Rent_E <- 9
Sigma <- matrix(c(9/4, 27/50, -3/10, 27/50, 36/25, 6/125,
                 -3/10, 6/125, 16/25), nrow = 3)
E_r <- c(2/25, 3/50, 1/10)
w_1 <- rep(1/3, 3)
R_c <- w_1 %>% E_r
sigma_c <- t(w_1) %>% Sigma %>% (w_1)
V <- cbind(E_r, rep(1, 3))
Omega <- solve(Sigma) %>% V

mit <- t(Omega) %>% Sigma %>% (Omega)
R <- c(Rent_E, 1)
w <- Omega %>% solve(mit) %>% R
t(w) %>% Sigma %>% w
t(R) %>% solve(mit) %>% R
```

F.8. Ejemplo 8.3

El respectivo código está dado por

```
library(matlib)
Rent_E <- 0.095
Sigma <- matrix(c(9/4, 27/50, -3/10, 27/50, 36/25, 6/125,
                 -3/10, 6/125, 16/25), nrow = 3)
E_r <- c(2/25, 3/50, 1/10)
R <- c(Rent_E, 1)
V <- cbind(E_r, rep(1, 3))
W <- matrix(c(0, -1, 1, 0), nrow = 2)
K_1 <- (V) %>% W %>% t(V)
b <- (solve(Sigma) %>% K_1)
b2 <- b %>% b
Valp <- eigen(b2)
M <- eigen(b2)$vectors
valor <- M[, 1:2]
K_2 <- (valor) %>% W %>% t(valor)

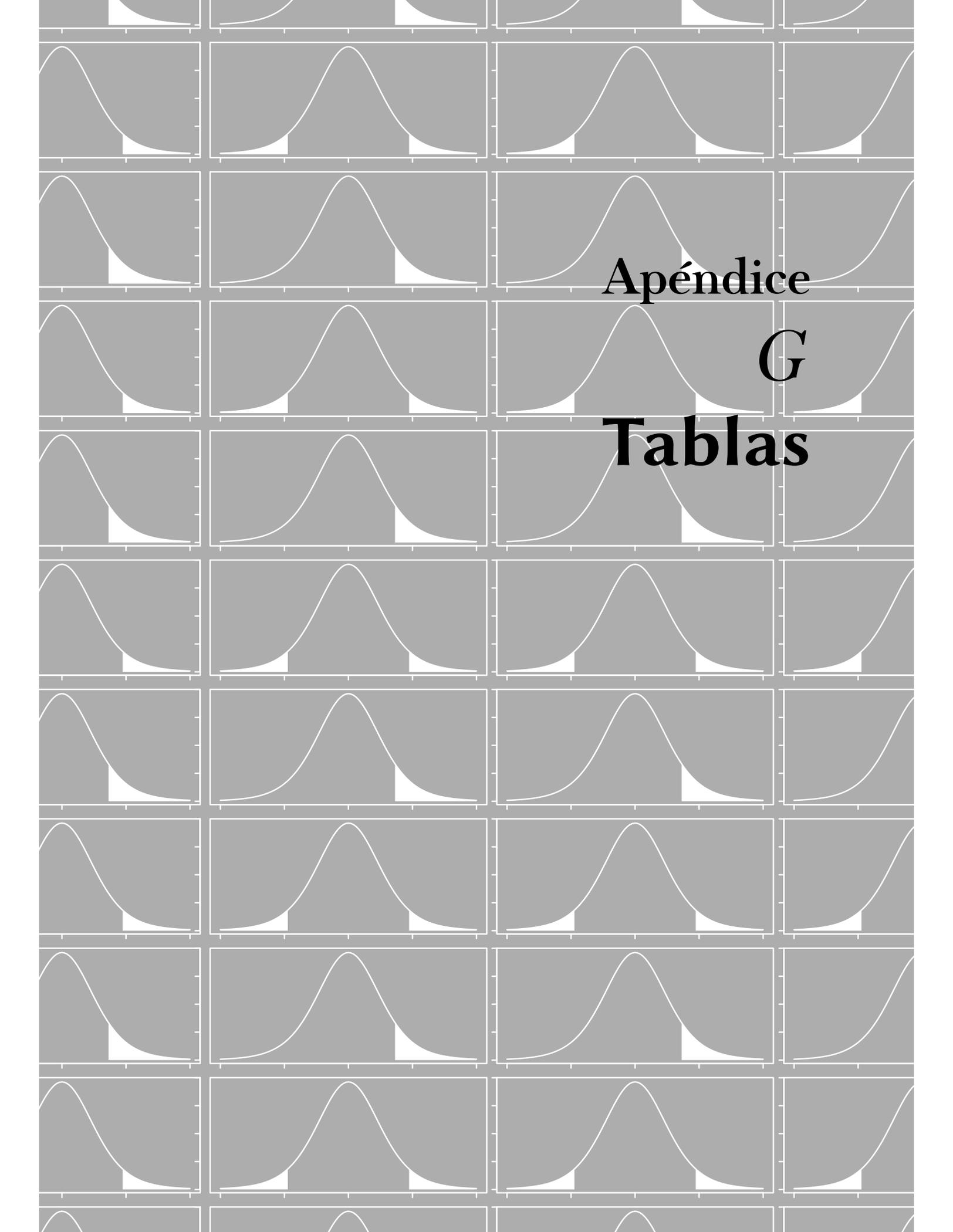
Delt <- (rep(1, 3) %>% K_2 %>% E_r)
w <- c(K_2 %>% V %>% W %>% (c(Rent_E, 1))) / c(Delt)
t(w) %>% Sigma %>% (w)
```

F.9. Ejemplo 8.4

El respectivo código está dado por

```
Rent_E <- 7/200
Sigma <- matrix(c(9/4,27/50,-3/10,27/50,36/25,6/125,
                 -3/10,6/125,16/25),nrow = 3)
E_r <- c(2/25,3/50,1/10)
R<-c(Rent_E,1)
V <- cbind(E_r,rep(1,3))
W <- matrix(c(0,-1,1,0),nrow = 2)
R_f<-0.05
Valor <- solve(Sigma)%*%(E_r-R_f*rep(1,3))
A <- rep(1,3)%*%solve(Sigma)%*%E_r
C <- rep(1,3)%*%solve(Sigma)%*%(rep(1,3))
w <- c(1/(A-C*R_f))*c(Valor)

t(w)%*%Sigma%*%(w)
```



Apéndice

G

Tablas

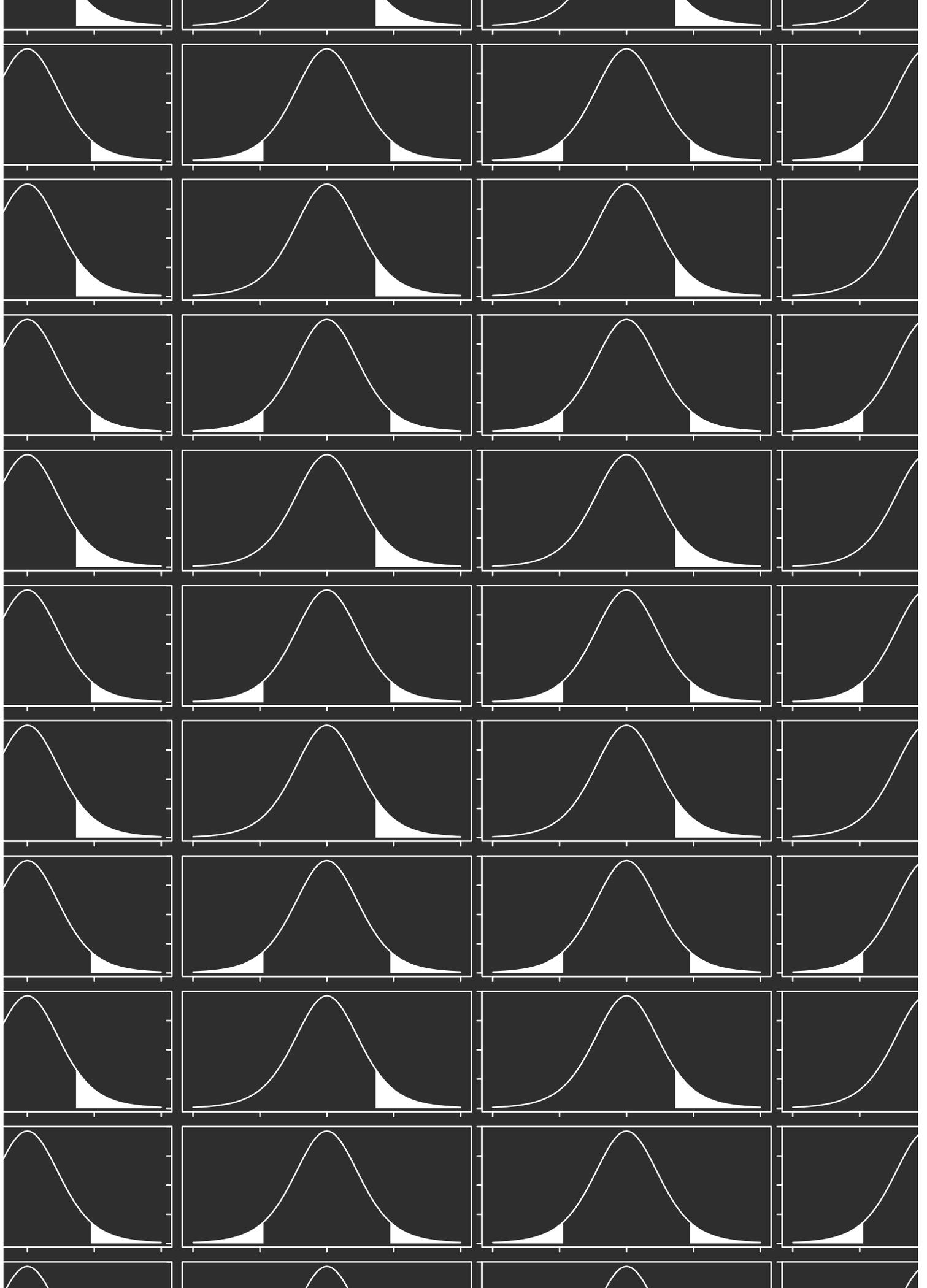


Tabla G.1. Valores de la **cdf** normal estándar

| z | 0.0000 | 0.0100 | 0.0200 | 0.0300 | 0.0400 | 0.0500 | 0.0600 | 0.0700 | 0.0800 | 0.0900 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| -3.9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -3.8 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 |
| -3.7 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 |
| -3.6 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 |
| -3.5 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 |
| -3.4 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0002 |
| -3.3 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0003 |
| -3.2 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 |
| -3.1 | 0.0010 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0007 | 0.0007 |
| -3.0 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0012 | 0.0012 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0010 | 0.0010 |
| -2.9 | 0.0019 | 0.0018 | 0.0018 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0014 | 0.0014 |
| -2.8 | 0.0026 | 0.0025 | 0.0024 | 0.0023 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0019 |
| -2.7 | 0.0035 | 0.0034 | 0.0033 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 |
| -2.6 | 0.0047 | 0.0045 | 0.0044 | 0.0043 | 0.0041 | 0.0040 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0037 | 0.0036 |
| -2.5 | 0.0062 | 0.0060 | 0.0059 | 0.0057 | 0.0055 | 0.0054 | 0.0052 | 0.0051 | 0.0049 | 0.0048 |
| -2.4 | 0.0082 | 0.0080 | 0.0078 | 0.0075 | 0.0073 | 0.0071 | 0.0069 | 0.0068 | 0.0066 | 0.0064 |
| -2.3 | 0.0107 | 0.0104 | 0.0102 | 0.0099 | 0.0096 | 0.0094 | 0.0091 | 0.0089 | 0.0087 | 0.0084 |
| -2.2 | 0.0139 | 0.0136 | 0.0132 | 0.0129 | 0.0125 | 0.0122 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0113 | 0.0110 |
| -2.1 | 0.0179 | 0.0174 | 0.0170 | 0.0166 | 0.0162 | 0.0158 | 0.0154 | 0.0150 | 0.0146 | 0.0143 |
| -2.0 | 0.0228 | 0.0222 | 0.0217 | 0.0212 | 0.0207 | 0.0202 | 0.0197 | 0.0192 | 0.0188 | 0.0183 |
| -1.9 | 0.0287 | 0.0281 | 0.0274 | 0.0268 | 0.0262 | 0.0256 | 0.0250 | 0.0244 | 0.0239 | 0.0233 |
| -1.8 | 0.0359 | 0.0351 | 0.0344 | 0.0336 | 0.0329 | 0.0322 | 0.0314 | 0.0307 | 0.0301 | 0.0294 |
| -1.7 | 0.0446 | 0.0436 | 0.0427 | 0.0418 | 0.0409 | 0.0401 | 0.0392 | 0.0384 | 0.0375 | 0.0367 |
| -1.6 | 0.0548 | 0.0537 | 0.0526 | 0.0516 | 0.0505 | 0.0495 | 0.0485 | 0.0475 | 0.0465 | 0.0455 |
| -1.5 | 0.0668 | 0.0655 | 0.0643 | 0.0630 | 0.0618 | 0.0606 | 0.0594 | 0.0582 | 0.0571 | 0.0559 |
| -1.4 | 0.0808 | 0.0793 | 0.0778 | 0.0764 | 0.0749 | 0.0735 | 0.0721 | 0.0708 | 0.0694 | 0.0681 |
| -1.3 | 0.0968 | 0.0951 | 0.0934 | 0.0918 | 0.0901 | 0.0885 | 0.0869 | 0.0853 | 0.0838 | 0.0823 |
| -1.2 | 0.1151 | 0.1131 | 0.1112 | 0.1093 | 0.1075 | 0.1056 | 0.1038 | 0.1020 | 0.1003 | 0.0985 |
| -1.1 | 0.1357 | 0.1335 | 0.1314 | 0.1292 | 0.1271 | 0.1251 | 0.1230 | 0.1210 | 0.1190 | 0.1170 |
| -1.0 | 0.1587 | 0.1562 | 0.1539 | 0.1515 | 0.1492 | 0.1469 | 0.1446 | 0.1423 | 0.1401 | 0.1379 |
| -0.9 | 0.1841 | 0.1814 | 0.1788 | 0.1762 | 0.1736 | 0.1711 | 0.1685 | 0.1660 | 0.1635 | 0.1611 |
| -0.8 | 0.2119 | 0.2090 | 0.2061 | 0.2033 | 0.2005 | 0.1977 | 0.1949 | 0.1922 | 0.1894 | 0.1867 |
| -0.7 | 0.2420 | 0.2389 | 0.2358 | 0.2327 | 0.2296 | 0.2266 | 0.2236 | 0.2206 | 0.2177 | 0.2148 |
| -0.6 | 0.2743 | 0.2709 | 0.2676 | 0.2643 | 0.2611 | 0.2578 | 0.2546 | 0.2514 | 0.2483 | 0.2451 |
| -0.5 | 0.3085 | 0.3050 | 0.3015 | 0.2981 | 0.2946 | 0.2912 | 0.2877 | 0.2843 | 0.2810 | 0.2776 |
| -0.4 | 0.3446 | 0.3409 | 0.3372 | 0.3336 | 0.3300 | 0.3264 | 0.3228 | 0.3192 | 0.3156 | 0.3121 |
| -0.3 | 0.3821 | 0.3783 | 0.3745 | 0.3707 | 0.3669 | 0.3632 | 0.3594 | 0.3557 | 0.3520 | 0.3483 |
| -0.2 | 0.4207 | 0.4168 | 0.4129 | 0.4090 | 0.4052 | 0.4013 | 0.3974 | 0.3936 | 0.3897 | 0.3859 |
| -0.1 | 0.4602 | 0.4562 | 0.4522 | 0.4483 | 0.4443 | 0.4404 | 0.4364 | 0.4325 | 0.4286 | 0.4247 |
| -0.0 | 0.5000 | 0.4960 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4840 | 0.4801 | 0.4761 | 0.4721 | 0.4681 | 0.4641 |

Continúa en la siguiente página

Tabla G.1: Continuación de la tabla

| z | 0.0000 | 0.0100 | 0.0200 | 0.0300 | 0.0400 | 0.0500 | 0.0600 | 0.0700 | 0.0800 | 0.0900 |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.7 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.8 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

Fuente: elaboración propia.

Tabla G.2. Valores de cuantiles de la *cdf* *t*-Student

| ν | $t_{0.001}$ | $t_{0.005}$ | $t_{0.01}$ | $t_{0.025}$ | $t_{0.05}$ | $t_{0.1}$ | $t_{0.2}$ |
|-------|-------------|-------------|------------|-------------|------------|-----------|-----------|
| 1 | -318.3088 | -63.6567 | -31.8205 | -12.7062 | -6.3138 | -3.0777 | -1.3764 |
| 2 | -22.3271 | -9.9248 | -6.9646 | -4.3027 | -2.9200 | -1.8856 | -1.0607 |
| 3 | -10.2145 | -5.8409 | -4.5407 | -3.1824 | -2.3534 | -1.6377 | -0.9785 |
| 4 | -7.1732 | -4.6041 | -3.7469 | -2.7764 | -2.1318 | -1.5332 | -0.9410 |
| 5 | -5.8934 | -4.0321 | -3.3649 | -2.5706 | -2.0150 | -1.4759 | -0.9195 |
| 6 | -5.2076 | -3.7074 | -3.1427 | -2.4469 | -1.9432 | -1.4398 | -0.9057 |
| 7 | -4.7853 | -3.4995 | -2.9980 | -2.3646 | -1.8946 | -1.4149 | -0.8960 |
| 8 | -4.5008 | -3.3554 | -2.8965 | -2.3060 | -1.8595 | -1.3968 | -0.8889 |
| 9 | -4.2968 | -3.2498 | -2.8214 | -2.2622 | -1.8331 | -1.3830 | -0.8834 |
| 10 | -4.1437 | -3.1693 | -2.7638 | -2.2281 | -1.8125 | -1.3722 | -0.8791 |
| 11 | -4.0247 | -3.1058 | -2.7181 | -2.2010 | -1.7959 | -1.3634 | -0.8755 |
| 12 | -3.9296 | -3.0545 | -2.6810 | -2.1788 | -1.7823 | -1.3562 | -0.8726 |
| 13 | -3.8520 | -3.0123 | -2.6503 | -2.1604 | -1.7709 | -1.3502 | -0.8702 |
| 14 | -3.7874 | -2.9768 | -2.6245 | -2.1448 | -1.7613 | -1.3450 | -0.8681 |
| 15 | -3.7328 | -2.9467 | -2.6025 | -2.1314 | -1.7531 | -1.3406 | -0.8662 |
| 16 | -3.6862 | -2.9208 | -2.5835 | -2.1199 | -1.7459 | -1.3368 | -0.8647 |
| 17 | -3.6458 | -2.8982 | -2.5669 | -2.1098 | -1.7396 | -1.3334 | -0.8633 |
| 18 | -3.6105 | -2.8784 | -2.5524 | -2.1009 | -1.7341 | -1.3304 | -0.8620 |
| 19 | -3.5794 | -2.8609 | -2.5395 | -2.0930 | -1.7291 | -1.3277 | -0.8610 |
| 20 | -3.5518 | -2.8453 | -2.5280 | -2.0860 | -1.7247 | -1.3253 | -0.8600 |
| 21 | -3.5272 | -2.8314 | -2.5176 | -2.0796 | -1.7207 | -1.3232 | -0.8591 |
| 22 | -3.5050 | -2.8188 | -2.5083 | -2.0739 | -1.7171 | -1.3212 | -0.8583 |
| 23 | -3.4850 | -2.8073 | -2.4999 | -2.0687 | -1.7139 | -1.3195 | -0.8575 |
| 24 | -3.4668 | -2.7969 | -2.4922 | -2.0639 | -1.7109 | -1.3178 | -0.8569 |
| 25 | -3.4502 | -2.7874 | -2.4851 | -2.0595 | -1.7081 | -1.3163 | -0.8562 |
| 26 | -3.4350 | -2.7787 | -2.4786 | -2.0555 | -1.7056 | -1.3150 | -0.8557 |
| 27 | -3.4210 | -2.7707 | -2.4727 | -2.0518 | -1.7033 | -1.3137 | -0.8551 |
| 28 | -3.4082 | -2.7633 | -2.4671 | -2.0484 | -1.7011 | -1.3125 | -0.8546 |
| 29 | -3.3962 | -2.7564 | -2.4620 | -2.0452 | -1.6991 | -1.3114 | -0.8542 |
| 30 | -3.3852 | -2.7500 | -2.4573 | -2.0423 | -1.6973 | -1.3104 | -0.8538 |
| 35 | -3.3400 | -2.7238 | -2.4377 | -2.0301 | -1.6896 | -1.3062 | -0.8520 |
| 40 | -3.3069 | -2.7045 | -2.4233 | -2.0211 | -1.6839 | -1.3031 | -0.8507 |
| 45 | -3.2815 | -2.6896 | -2.4121 | -2.0141 | -1.6794 | -1.3006 | -0.8497 |
| 50 | -3.2614 | -2.6778 | -2.4033 | -2.0086 | -1.6759 | -1.2987 | -0.8489 |
| 60 | -3.2317 | -2.6603 | -2.3901 | -2.0003 | -1.6706 | -1.2958 | -0.8477 |
| 70 | -3.2108 | -2.6479 | -2.3808 | -1.9944 | -1.6669 | -1.2938 | -0.8468 |
| 80 | -3.1953 | -2.6387 | -2.3739 | -1.9901 | -1.6641 | -1.2922 | -0.8461 |
| 90 | -3.1833 | -2.6316 | -2.3685 | -1.9867 | -1.6620 | -1.2910 | -0.8456 |
| 100 | -3.1737 | -2.6259 | -2.3642 | -1.9840 | -1.6602 | -1.2901 | -0.8452 |
| 200 | -3.1315 | -2.6006 | -2.3451 | -1.9719 | -1.6525 | -1.2858 | -0.8434 |
| 500 | -3.1066 | -2.5857 | -2.3338 | -1.9647 | -1.6479 | -1.2832 | -0.8423 |

Continúa en la siguiente página

Tabla G.2: Continuación tabla

| ν | $t_{0.8}$ | $t_{0.9}$ | $t_{0.95}$ | $t_{0.975}$ | $t_{0.99}$ | $t_{0.995}$ | $t_{0.999}$ |
|-------|-----------|-----------|------------|-------------|------------|-------------|-------------|
| 1 | 1.3764 | 3.0777 | 6.3138 | 12.7062 | 31.8205 | 63.6567 | 318.3088 |
| 2 | 1.0607 | 1.8856 | 2.9200 | 4.3027 | 6.9646 | 9.9248 | 22.3271 |
| 3 | 0.9785 | 1.6377 | 2.3534 | 3.1824 | 4.5407 | 5.8409 | 0.2145 |
| 4 | 0.9410 | 1.5332 | 2.1318 | 2.7764 | 3.7469 | 4.6041 | 7.1732 |
| 5 | 0.9195 | 1.4759 | 2.0150 | 2.5706 | 3.3649 | 4.0321 | 5.8934 |
| 6 | 0.9057 | 1.4398 | 1.9432 | 2.4469 | 3.1427 | 3.7074 | 5.2076 |
| 7 | 0.8960 | 1.4149 | 1.8946 | 2.3646 | 2.9980 | 3.4995 | 4.7853 |
| 8 | 0.8889 | 1.3968 | 1.8595 | 2.3060 | 2.8965 | 3.3554 | 4.5008 |
| 9 | 0.8834 | 1.3830 | 1.8331 | 2.2622 | 2.8214 | 3.2498 | 4.2968 |
| 10 | 0.8791 | 1.3722 | 1.8125 | 2.2281 | 2.7638 | 3.1693 | 4.1437 |
| 11 | 0.8755 | 1.3634 | 1.7959 | 2.2010 | 2.7181 | 3.1058 | 4.0247 |
| 12 | 0.8726 | 1.3562 | 1.7823 | 2.1788 | 2.6810 | 3.0545 | 3.9296 |
| 13 | 0.8702 | 1.3502 | 1.7709 | 2.1604 | 2.6503 | 3.0123 | 3.8520 |
| 14 | 0.8681 | 1.3450 | 1.7613 | 2.1448 | 2.6245 | 2.9768 | 3.7874 |
| 15 | 0.8662 | 1.3406 | 1.7531 | 2.1314 | 2.6025 | 2.9467 | 3.7328 |
| 16 | 0.8647 | 1.3368 | 1.7459 | 2.1199 | 2.5835 | 2.9208 | 3.6862 |
| 17 | 0.8633 | 1.3334 | 1.7396 | 2.1098 | 2.5669 | 2.8982 | 3.6458 |
| 18 | 0.8620 | 1.3304 | 1.7341 | 2.1009 | 2.5524 | 2.8784 | 3.6105 |
| 19 | 0.8610 | 1.3277 | 1.7291 | 2.0930 | 2.5395 | 2.8609 | 3.5794 |
| 20 | 0.8600 | 1.3253 | 1.7247 | 2.0860 | 2.5280 | 2.8453 | 3.5518 |
| 21 | 0.8591 | 1.3232 | 1.7207 | 2.0796 | 2.5176 | 2.8314 | 3.5272 |
| 22 | 0.8583 | 1.3212 | 1.7171 | 2.0739 | 2.5083 | 2.8188 | 3.5050 |
| 23 | 0.8575 | 1.3195 | 1.7139 | 2.0687 | 2.4999 | 2.8073 | 3.4850 |
| 24 | 0.8569 | 1.3178 | 1.7109 | 2.0639 | 2.4922 | 2.7969 | 3.4668 |
| 25 | 0.8562 | 1.3163 | 1.7081 | 2.0595 | 2.4851 | 2.7874 | 3.4502 |
| 26 | 0.8557 | 1.3150 | 1.7056 | 2.0555 | 2.4786 | 2.7787 | 3.4350 |
| 27 | 0.8551 | 1.3137 | 1.7033 | 2.0518 | 2.4727 | 2.7707 | 3.4210 |
| 28 | 0.8546 | 1.3125 | 1.7011 | 2.0484 | 2.4671 | 2.7633 | 3.4082 |
| 29 | 0.8542 | 1.3114 | 1.6991 | 2.0452 | 2.4620 | 2.7564 | 3.3962 |
| 30 | 0.8538 | 1.3104 | 1.6973 | 2.0423 | 2.4573 | 2.7500 | 3.3852 |
| 35 | 0.8520 | 1.3062 | 1.6896 | 2.0301 | 2.4377 | 2.7238 | 3.3400 |
| 40 | 0.8507 | 1.3031 | 1.6839 | 2.0211 | 2.4233 | 2.7045 | 3.3069 |
| 45 | 0.8497 | 1.3006 | 1.6794 | 2.0141 | 2.4121 | 2.6896 | 3.2815 |
| 50 | 0.8489 | 1.2987 | 1.6759 | 2.0086 | 2.4033 | 2.6778 | 3.2614 |
| 60 | 0.8477 | 1.2958 | 1.6706 | 2.0003 | 2.3901 | 2.6603 | 3.2317 |
| 70 | 0.8468 | 1.2938 | 1.6669 | 1.9944 | 2.3808 | 2.6479 | 3.2108 |
| 80 | 0.8461 | 1.2922 | 1.6641 | 1.9901 | 2.3739 | 2.6387 | 3.1953 |
| 90 | 0.8456 | 1.2910 | 1.6620 | 1.9867 | 2.3685 | 2.6316 | 3.1833 |
| 100 | 0.8452 | 1.2901 | 1.6602 | 1.9840 | 2.3642 | 2.6259 | 3.1737 |
| 200 | 0.8434 | 1.2858 | 1.6525 | 1.9719 | 2.3451 | 2.6006 | 3.1315 |
| 500 | 0.8423 | 1.2832 | 1.6479 | 1.9647 | 2.3338 | 2.5857 | 3.1066 |

Fuente: elaboración propia.

Tabla G.3. Valores de cuantiles de la cdf chi-cuadrada.

| ν | $\chi^2_{0.005}$ | $\chi^2_{0.010}$ | $\chi^2_{0.025}$ | $\chi^2_{0.050}$ | $\chi^2_{0.10}$ | $\chi^2_{0.9}$ | $\chi^2_{0.95}$ | $\chi^2_{0.975}$ | $\chi^2_{0.99}$ | $\chi^2_{0.995}$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|----------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|
| 1 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0010 | 0.0039 | 0.0158 | 2.7055 | 3.8415 | 5.0239 | 6.6349 | 7.8794 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0506 | 0.1026 | 0.2107 | 4.6052 | 5.9915 | 7.3778 | 9.2103 | 10.5966 |
| 3 | 0.0717 | 0.1148 | 0.2158 | 0.3518 | 0.5844 | 6.2514 | 7.8147 | 9.3484 | 11.3449 | 12.8382 |
| 4 | 0.2070 | 0.2971 | 0.4844 | 0.7107 | 1.0636 | 7.7794 | 9.4877 | 11.1433 | 13.2767 | 14.8603 |
| 5 | 0.4117 | 0.5543 | 0.8312 | 1.1455 | 1.6103 | 9.2364 | 11.0705 | 12.8325 | 15.0863 | 16.7496 |
| 6 | 0.6757 | 0.8721 | 1.2373 | 1.6354 | 2.2041 | 10.6446 | 12.5916 | 14.4494 | 16.8119 | 18.5476 |
| 7 | 0.9893 | 1.2390 | 1.6899 | 2.1673 | 2.8331 | 12.0170 | 14.0671 | 16.0128 | 18.4753 | 20.2777 |
| 8 | 1.3444 | 1.6465 | 2.1797 | 2.7326 | 3.4895 | 13.3616 | 15.5073 | 17.5345 | 20.0902 | 21.9550 |
| 9 | 1.7349 | 2.0879 | 2.7004 | 3.3251 | 4.1682 | 14.6837 | 16.9190 | 19.0228 | 21.6660 | 23.5894 |
| 10 | 2.1559 | 2.5582 | 3.2470 | 3.9403 | 4.8652 | 15.9872 | 18.3070 | 20.4832 | 23.2093 | 25.1882 |
| 11 | 2.6032 | 3.0535 | 3.8157 | 4.5748 | 5.5778 | 17.2750 | 19.6751 | 21.9200 | 24.7250 | 26.7568 |
| 12 | 3.0738 | 3.5706 | 4.4038 | 5.2260 | 6.3038 | 18.5493 | 21.0261 | 23.3367 | 26.2170 | 28.2995 |
| 13 | 3.5650 | 4.1069 | 5.0088 | 5.8919 | 7.0415 | 19.8119 | 22.3620 | 24.7356 | 27.6882 | 29.8195 |
| 14 | 4.0747 | 4.6604 | 5.6287 | 6.5706 | 7.7895 | 21.0641 | 23.6848 | 26.1189 | 29.1412 | 31.3193 |
| 15 | 4.6009 | 5.2293 | 6.2621 | 7.2609 | 8.5468 | 22.3071 | 24.9958 | 27.4884 | 30.5779 | 32.8013 |
| 16 | 5.1422 | 5.8122 | 6.9077 | 7.9616 | 9.3122 | 23.5418 | 26.2962 | 28.8454 | 31.9999 | 34.2672 |
| 17 | 5.6972 | 6.4078 | 7.5642 | 8.6718 | 10.0852 | 24.7690 | 27.5871 | 30.1910 | 33.4087 | 35.7185 |
| 18 | 6.2648 | 7.0149 | 8.2307 | 9.3905 | 10.8649 | 25.9894 | 28.8693 | 31.5264 | 34.8053 | 37.1565 |
| 19 | 6.8440 | 7.6327 | 8.9065 | 10.1170 | 11.6509 | 27.2036 | 30.1435 | 32.8523 | 36.1909 | 38.5823 |
| 20 | 7.4338 | 8.2604 | 9.5908 | 10.8508 | 12.4426 | 28.4120 | 31.4104 | 34.1696 | 37.5662 | 39.9968 |
| 21 | 8.0337 | 8.8972 | 10.2829 | 11.5913 | 13.2396 | 29.6151 | 32.6706 | 35.4789 | 38.9322 | 41.4011 |
| 22 | 8.6427 | 9.5425 | 10.9823 | 12.3380 | 14.0415 | 30.8133 | 33.9244 | 36.7807 | 40.2894 | 42.7957 |
| 23 | 9.2604 | 10.1957 | 11.6886 | 13.0905 | 14.8480 | 32.0069 | 35.1725 | 38.0756 | 41.6384 | 44.1813 |
| 24 | 9.8862 | 10.8564 | 12.4012 | 13.8484 | 15.6587 | 33.1962 | 36.4150 | 39.3641 | 42.9798 | 45.5585 |
| 25 | 10.5197 | 11.5240 | 13.1197 | 14.6114 | 16.4734 | 34.3816 | 37.6525 | 40.6465 | 44.3141 | 46.9279 |

Continúa en la siguiente página

Tabla G.3: Continuación tabla

| ν | $\chi^2_{0.005}$ | $\chi^2_{0.010}$ | $\chi^2_{0.025}$ | $\chi^2_{0.050}$ | $\chi^2_{0.10}$ | $\chi^2_{0.9}$ | $\chi^2_{0.95}$ | $\chi^2_{0.975}$ | $\chi^2_{0.99}$ | $\chi^2_{0.995}$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|----------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|
| 26 | 11.1602 | 12.1981 | 13.8439 | 15.3792 | 17.2919 | 35.5682 | 38.8851 | 41.9232 | 45.6417 | 48.2899 |
| 27 | 11.8076 | 12.8785 | 14.5734 | 16.1514 | 18.1139 | 36.7412 | 40.1133 | 43.1945 | 46.9629 | 49.6449 |
| 28 | 12.4613 | 13.5647 | 15.3079 | 16.9279 | 18.9392 | 37.9159 | 41.3371 | 44.4608 | 48.2782 | 50.9934 |
| 29 | 13.1211 | 14.2565 | 16.0471 | 17.7084 | 19.7677 | 39.0875 | 42.5570 | 45.7223 | 49.5879 | 52.3356 |
| 30 | 13.7867 | 14.9535 | 16.7908 | 18.4927 | 20.5992 | 40.2560 | 43.7730 | 46.9792 | 50.8922 | 53.6720 |
| 35 | 17.1918 | 18.5089 | 20.5694 | 22.4650 | 24.7967 | 46.0588 | 49.8018 | 53.2033 | 57.3421 | 60.2748 |
| 40 | 20.7065 | 22.1643 | 24.4330 | 26.5093 | 29.0505 | 51.8051 | 55.7585 | 59.3417 | 63.6907 | 66.7660 |
| 45 | 24.3110 | 25.9013 | 28.3662 | 30.6123 | 33.3504 | 57.5053 | 61.6562 | 65.4102 | 69.9568 | 73.1661 |
| 50 | 27.9907 | 29.7067 | 32.3574 | 34.7643 | 37.6886 | 63.1671 | 67.5048 | 71.4202 | 76.1539 | 79.4900 |
| 55 | 31.7348 | 33.5705 | 36.3981 | 38.9580 | 42.0596 | 68.7962 | 73.3115 | 77.3805 | 82.2921 | 85.7490 |
| 60 | 35.5345 | 37.4849 | 40.4817 | 43.1880 | 46.4589 | 74.3970 | 79.0819 | 83.2977 | 88.3794 | 91.9517 |
| 65 | 39.3831 | 41.4436 | 44.6030 | 47.4496 | 50.8829 | 79.9730 | 84.8206 | 89.1771 | 94.4221 | 98.1051 |
| 70 | 43.2752 | 45.4417 | 48.7576 | 51.7393 | 55.3289 | 85.5270 | 90.5312 | 95.0232 | 100.4252 | 104.2149 |
| 75 | 47.2060 | 49.4750 | 52.9419 | 56.0541 | 59.7946 | 91.0615 | 96.2167 | 100.8393 | 106.3929 | 110.2856 |
| 80 | 51.1719 | 53.5401 | 57.1532 | 60.3915 | 64.2778 | 96.5782 | 101.8795 | 106.6286 | 112.3288 | 116.3211 |
| 85 | 55.1696 | 57.6339 | 61.3888 | 64.7494 | 68.7772 | 102.0789 | 107.5217 | 112.3934 | 118.2357 | 122.3246 |
| 90 | 59.1963 | 61.7541 | 65.6466 | 69.1260 | 73.2911 | 107.5650 | 113.1453 | 118.1359 | 124.1163 | 128.2989 |
| 95 | 63.2496 | 65.8984 | 69.9249 | 73.5198 | 77.8184 | 113.0377 | 118.7516 | 123.8580 | 129.9727 | 134.2465 |
| 100 | 67.3276 | 70.0649 | 74.2219 | 77.9295 | 82.3581 | 118.4980 | 124.3421 | 129.5612 | 135.8067 | 140.1695 |

Fuente: elaboración propia.

Bibliografía

- [1] M. Abramowitz y I. Stegun, *Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs and mathematical tables*, Nueva York: Dover Publications Inc., 1965.
- [2] C. Acerbi y D. Tasche, “On the coherence of expected shortfall”, *Journal of Banking & Finance*, vol. 26, n.º 7, pp. 1487-1503, 2002. [https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(02\)00283-2](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00283-2).
- [3] M. A. Adelman, “Comment on the ‘H’ concentration measure as a numbers equivalent”, *The Review of Economics and Statistics*, vol. 51, n.º 1, pp. 99-101, 1969. <https://doi.org/10.2307/1926955>.
- [4] J. Aitchison y J. Brown, *The lognormal distribution*, Reino Unido: Cambridge University Press, 1957.
- [5] P. Albrecht, “On some statistical methods connected with the mixed Poisson process”, *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1982, n.º 1, pp. 1-14, 1982. <https://doi.org/10.1080/03461238.1982.10405427>.
- [6] E. I. Altman, “Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy”, *The Journal of Finance*, vol. 23, n.º 4, pp. 589-609, 1968. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1968.tb00843.x>.
- [7] T. W. Anderson y D. A. Darling, “A test of goodness of fit”, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 49, n.º 268, 1954, 765-769. <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.1954.10501232>.
- [8] G. Andreasson, “Distribution free approximations in applied risk theory”, *Astin Bulletin*, vol. 4, n.º 1, pp. 11-18, 1966. <https://doi.org/10.1017/s0515036100008862>.
- [9] T. M. Apostol, *Calculus*, vol. I y II, Barcelona: Editorial Reverté S. A., 1985.
- [10] G. Arfwedson, “Some problems in the collective theory of risk”, *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1950, n.º 2, pp. 1-38. <https://doi.org/10.1080/03461238.1950.10414170>.
- [11] G. Arfwedson, “Research in collective risk theory”, *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1954, n.º 2, 191-223, 1954. <https://doi.org/10.1080/03461238.1954.10414209>.

- [12] B. C. Arnold, R. J. Beaver, R. A. Groeneveld y W. Q. Meeker, “The non-truncated marginal of a truncated bivariate normal distribution”, *Psychometrika*, vol. 58, n.º 3, pp. 471-488, 1993. <https://doi.org/10.1007/bf02294652>.
- [13] K. J. Arrow, *Aspects of the theory of risk-bearing*, Helsinki: Yrjö Jahnsson lectures, Yrjö Jahnssonin Säätiö, 1965.
- [14] P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber y D. Heath, “Thinking coherently”, *Risk*, vol. 10, n.º 11, pp. 68-71, 1997.
- [15] P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber y D. Heath, Coherent measures of risk, *Mathematical Finance* vol. 9, n.º 3, pp. 203-228, 1999. <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068>.
- [16] A. Azzalini, “A class of distributions which includes the normal ones”, *Scandinavian Journal of Statistics*, vol. 12, n.º 2, pp. 171-178. <https://doi.org/10.2307/4615982>.
- [17] A. Azzalini y A. Capitanio, *The skew-normal and related families*, Nueva York: Institute of Mathematical Statistics monographs, Cambridge University Press, 2014.
- [18] D. F. Babbel, “Insuring banks against systematic credit risk”, *Journal of Futures Markets* vol. 9, 1989, pp. 487-505. <https://doi.org/10.1002/fut.3990090603>.
- [19] M. T. Barrois, *Essai sur l'application du calcul des probabilités aux assurances contre l'incendie*, Mémoires de la société royale des sciences de Lille, 1834.
- [20] I. V. Basawa and B. L. S. Prakasa Rao, *Statistical inference for stochastic processes: Theory and methods*, Londres: Elsevier Ltda., Academic Press, 1980.
- [21] W. J. Baumol, “An expected gain confidence limit criterion for portfolio selection”, *Management Science*, vol. 10, n.º 1, pp. 174-182, 1963. <https://doi.org/10.1287/mnsc.10.1.174>.
- [22] R. E. Beard, T. Pentikäinen y E. Pesonen, *Risk theory: The stochastic basis of insurance*, 3.^a ed. Nueva York: Chapman & Hall, 1984.
- [23] J. A. Beekman, “Collective risk results”, *Transactions of Society of Actuaries*, vol. 20, n.º 57, pp. 182-200, 1968. <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.453.49>.
- [24] J. A. Beekman, “A series for infinite time ruin probabilities”, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 4, n.º 2, pp. 129-134, 1985. [https://doi.org/10.1016/0167-6687\(85\)90007-1](https://doi.org/10.1016/0167-6687(85)90007-1).
- [25] J. A. Beekman y C. P. Fuelling, “Risk convolution calculations”, *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1981, n.º 3, pp. 151-164. <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03461238.1981.10432015>.

- [26] M. Bernardi, “Risk measures for skew normal mixtures”, *Statistics & Probability Letters*, vol. 83, n.º 8, pp. 1819-1824, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2013.04.016>.
- [27] D. Bernoulli, “Specimen theoriae novae de mensura sortis”, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, vol. 5, pp. 175-192, 1738.
- [28] D. L. Bernstein, “The double laplace integral”, *Duke Mathematical Journal*, vol. 8, n.º 3, pp. 460-496, 1941. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-41-00839-6>.
- [29] U. N. Bhat, *Elements of applied stochastic processes*, EE. UU.: John Wiley & Sons, 1984.
- [30] F. Black y M. Scholes, “The pricing of options and corporate liabilities”, *Journal of Political Economy*, vol. 81, n.º 3, pp. 637-654, 1973. <https://doi.org/10.1086/260062>.
- [31] C. Bluhm, L. Overbeck y C. Wagner, *An introduction to credit risk modelling*, 2.ª ed., EE. UU.: Chapman & Hall, CRC Press, 2010.
- [32] G. Bohlmann, “Die theorie des mittleren risikos in der lebensversicherung”, *Reports, Memoirs and Proceedings of the Sixth International Congress of Actuaries*, tomo I, pp. 593-673, 1909.
- [33] H. Bohman y F. Esscher, “Studies in risk theory with numerical illustrations concerning distribution functions and stop loss premiums, part I”, *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1963, n.º 3-4, pp. 173-225, 1963. <https://doi.org/10.1080/03461238.1963.10410609>.
- [34] K. H. Borch, “The theory of risk”, *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 29, n.º 3, pp. 432-467, 1967. <http://doi.org/10.2307/2984385>.
- [35] K. H. Borch, *La economía de la incertidumbre*, Madrid: Editorial Tecnos, S. A., 1977.
- [36] N. L. Bowers, “Expansion of probability density functions as a sum of gamma densities with applications in risk theory”, *Transactions of Society of Actuaries*, vol. 18, n.º 52, pp. 125-147, 1966.
- [37] N. L. Bowers, H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones y C. J. Nesbitt, *Actuarial mathematics*, 2.ª ed., EE. UU.: The Society of Actuaries, 1997.
- [38] T. J. I. Bromwich, *An introduction to the theory of infinite series*, Londres: Macmillan and Co., 1908.
- [39] H. Bühlmann, “Individual, co-operative, and competitive pricing of risks”, en *Risk and Uncertainty: Proceedings of a Conference held by the International Economic Association*; K. Borch y J. Mossin (eds.), Reino Unido: Palgrave Macmillan, 1968, pp. 265-282.
- [40] H. Bühlmann, *Mathematical methods in risk theory*, Nueva York: Springer-Verlag, 1970.

- [41] H. Bühlmann, “An economic premium principle”, *Astin Bulletin*, vol. 11, n.º 1, pp. 52-60, 1980. <https://doi.org/10.1017/s0515036100006619>.
- [42] J. P. Burman, “Sequential sampling formulae for a binomial population”, *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 8, n.º 1, pp. 98-103, 1946. <https://doi.org/10.2307/2983614>.
- [43] G. C. Canavos, *Probabilidad y estadística: Aplicaciones y métodos*, México: McGraw-Hill, 1988.
- [44] M. J. Castelo y L. A. Guardiola, *Diccionario Mapfre de seguros*, Madrid: Editorial Fundación Maphre Estudios, 1992.
- [45] A. C. Cohen, “Estimation in mixtures of discrete distributions”, en *Classical and contagious discrete distributions*, vol. 1; G. P. Patil (ed.), Oxford, Nueva York, Calcuta: Statistical Publishing Society, Pergamon Press, 1965, pp. 373-378.
- [46] G. A. Coon y D. L. Bernstein, “Some properties of the double laplace transformation”, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 74, n.º 1, pp. 135-176, 1953. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1953-0052556-4>.
- [47] E. A. Cornish y R. A. Fisher, “Moments and cumulants in the specification of distributions”, *Review of the International Statistical Institute*, vol. 5, n.º 4, pp. 307-320, 1938. <https://doi.org/10.2307/1400905>.
- [48] H. Cramér, *Mathematical methods of statistics*, 9.^a ed., Nueva York: Princeton University Press, 1962.
- [49] H. Cramér, “On the mathematical theory of risk”, en *Collected Works*; A. Martin-Löf (ed.), vol. II, Nueva York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994, pp. 7-84.
- [50] Credit Suisse Financial Products, *Creditrisk+: A credit risk management framework*, Tech. report, Technical report, Londres: Credit Suisse First Boston, 1997.
- [51] P. Crosbie y J. Bohn, *Modeling default risk: modeling methodology*, Moody's KMV Company, 2003.
- [52] M. Cruz, *Modeling, measuring and hedging operational risk*, Nueva York: John Wiley & Sons, LTD, 2002.
- [53] S. Das, *Credit derivatives: Trading & management of credit & default risk*, Singapur: John Wiley & Sons, LTD, 1998.
- [54] C. D. Daykin, T. Pentikäinen y M. Pesonen, *Practical risk theory for actuaries*, Reino Unido: Chapman & Hall/CRC, 1994.
- [55] B. De Finetti, “Il problema dei ‘pieni’”, *Giornale dell'Istituto italiano degli Attuari*, vol. 9, 1-88, 1940.

- [56] F. E. De Vylder, “A practical solution to the problem of ultimate ruin probability”, *Scandinavian Actuarial Journal*, n.º 2, 1978, pp. 114-119. <https://doi.org/10.1080/03461238.1978.10419484>.
- [57] L. Debnath, “The double laplace transforms and their properties with applications to functional, integral and partial differential equations”, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, vol. 2, n.º 2, pp. 223-241, 2016. <https://doi.org/10.1007/s40819-015-0057-3>.
- [58] P. W. Den Iseger, M. A. J. Smith y R. Dekker, “Computing compound distributions faster!”, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 20, n.º 1, pp. 23-34, 1997. [https://doi.org/10.1016/S0167-6687\(97\)00002-4](https://doi.org/10.1016/S0167-6687(97)00002-4).
- [59] O. Deprez y H. U. Gerber, “On convex principles of premium calculation”, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 4, n.º 3, pp. 179-189, 1985. [https://doi.org/10.1016/0167-6687\(85\)90014-9](https://doi.org/10.1016/0167-6687(85)90014-9).
- [60] S. Dharmadhikari y K. Joag-Dev, *Unimodality, convexity, and applications*, 1.ª ed., EE. UU.: Academic Press Inc., 1988.
- [61] D. C. M. Dickson, *Insurance risk and ruin*, 2.ª ed., Reino Unido: Cambridge University Press, 2016.
- [62] V. A. Ditkin y A. Platonowitsch Prudnikov, *Operational calculus in two variables and its applications*, Reino Unido: Pergamon Press, 1962.
- [63] J. Dubourdieu, “Remarques relatives à la théorie mathématique de l’assurance accidents”, *Bulletin Trimestriel de l’Institut des Actuaire Français*, vol. 44, pp. 79-126, 1938.
- [64] F. Dufresne y H. U. Gerber, “Three methods to calculate the probability of ruin”, *Astin Bulletin*, vol. 19, n.º 1, pp. 71-90, 1989. <https://doi.org/10.2143/AST.19.1.2014916>.
- [65] B. E. Ellison, “Two theorems for inferences about the normal distribution with applications in acceptance sampling”, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 59, n.º 305, pp. 89-95, 1964. <https://doi.org/10.2307/2282860>.
- [66] P. Embrechts, “Subexponential distribution functions and their applications: A review”, En *Proceedings of the Seventh Conference on Probability Theory*, Bucaresti, Romania: Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, 1985, pp. 125-136. <https://doi.org/10.1515/9783112314036-015>.
- [67] P. Embrechts y C. Klüppelberg, “Some aspects of insurance mathematics”, *Theory of Probability & Its Applications*, vol. 38, n.º 2, 1994, pp. 262-295. <https://doi.org/10.1137/1138025>.
- [68] F. Esscher, “On the probability function in the collective theory of risk”, *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1932, n.º 3, 1932, pp. 175-195. <https://doi.org/10.1080/03461238.1932.10405883>.

- [69] D. A. Evans, *Experimental evidence concerning contagious distributions in ecology*, *Biometrika*, vol. 40, n.º 1-2, pp. 186-211, 1953. <https://doi.org/10.2307/2333108>.
- [70] W. Fallon, *Calculating value-at-risk*, documento en proceso 96-49, Wharton Financial Institutions Center's Conference on Risk Management in Banking, noviembre de 1996.
- [71] W. Feller, "On the theory of stochastic processes, with particular reference to applications", *Proceedings of the [First] Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Jerzy Neyman, ed.), Berkeley: University of California Press, 1949, pp. 403-432.
- [72] W. Feller, *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*, vol. I y II, 2.ª ed., México D. F.: Editorial Limusa, 1989.
- [73] A. Feuerverger and A. C. M. Wong, "Computation of value-at-risk for nonlinear portfolios", *Journal of Risk*, vol. 3, n.º 1, pp. 37-55, 2000.
- [74] P. C. Fishburn, *Utility theory for decision making*, EE. UU.: John Wiley & Sons Inc., 1970.
- [75] R. A. Fisher, "The use of multiple measurements in taxonomic problems", *Annals of Human Genetics*, vol. 7, n.º 2, pp. 179-188, 1936. <https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1936.tb02137.x>.
- [76] R. A. Fisher, "The negative binomial distribution", *Annals of Eugenics*, vol. 11, n.º 1, pp. 182-187, 1941. <https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1941.tb02284.x>.
- [77] R. A. Fisher y E. A. Cornish, "The percentile points of distributions having known cumulants", *Technometrics*, vol. 2, n.º 2, pp. 209-225, 1960. <https://doi.org/10.2307/1266546>.
- [78] M. Fisz, *Probability theory and mathematical statistics*, 3.ª ed., EE. UU.: John Wiley & Sons, 1967.
- [79] C. Forbes, M. Evans, N. Hastings y B. Peacock, *Statistical distributions*, 4.ª ed., EE. UU.: John Wiley & Sons, 2011.
- [80] L. R. Freifelder, "Exponential utility theory ratemaking: An alternative rate-making approach", *Journal of Risk and Insurance*, vol. 46, n.º 3, pp. 515-530, 1979. <https://doi.org/10.2307/252462>.
- [81] K. D. Garbade, "Assessing risk and capital adequacy for treasury securities", *Topics in Money and Securities Markets*, vol. 22, pp. 17-29, 1986.
- [82] H. U. Gerber, *An introduction to mathematical risk theory*, Barcelona: Huebner Foundation, Homewood III, 1979.
- [83] H. U. Gerber, "The impact of reinsurance on the insurer's risk", en *Premium Calculation in Insurance*, F. de Vylder, M. Goovaerts y J. Haezendonck, (eds.), Louvain, Bélgica: Springer Netherlands, 1.ª ed., 1984, pp. 171-182.

- [84] H. U. Gerber, “Martingales in risk theory”, *Bulletin of Swiss Association of Actuaries*, Springer, vol. 73, pp. 205-216, 1973. <https://doi.org/10.5169/seals-555465>
- [85] H. U. Gerber y G. Pafum, “Utility functions: from risk theory to finance”, *North American Actuarial Journal*, vol. 2, n.º 3, pp. 74-100, 1998. <https://doi.org/10.1080/10920277.1998.10595728>.
- [86] M. J. Goovaerts, F. Vyllder y J. Haezendonck, *Insurance premiums: Theory and applications*, Amsterdam: North-Holland, 1984.
- [87] J. Grandell, *Mixed Poisson processes*, Londres: Chapman & Hall, crc, 1997.
- [88] J. Grandell y C. O. Segerdahl, “A comparison of some approximations of ruin probabilities”, *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1971, n.º 3-4, pp. 143-158, 1971. <https://doi.org/10.1080/03461238.1971.10404672>.
- [89] F. A. Graybill, *Matrices with applications in statistics*, 2.^a ed., EE. UU.: Wadsworth & Brooks, Cole, 1983.
- [90] T. M. Guldimann, *A risk measurement framework*, Nueva York: Riskmetrics, 1995.
- [91] G. M. Gupton, C. C. Finger y M. Bhatia, *Creditmetrics: technical document*, Nueva York: JP Morgan & Co., 1997.
- [92] A. H. Hald, *Statistical theory with engineering applications*, Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1965.
- [93] M. J. Hassett y D. G. Stewart, *Probability for risk management*, 2.^a ed., EE. UU.: Actex Publications, 2006.
- [94] I. N. Herstein y J. Milnor, “An axiomatic approach to measurable utility”, *Econometrica*, vol. 21, n.º 2, pp. 291-297, 1953. <https://doi.org/10.2307/1905540>.
- [95] D. P. Heyman y M. J. Sobel, *Stochastic models in operations research: Stochastic processes and operating characteristics*, Nueva York: McGraw-Hill, 1984.
- [96] A. Hirsa y S. N. Neftci, *An introduction to the mathematics of financial derivatives*, 3.^a ed., EE. UU.: Academic Press, 2014.
- [97] I. I. Hirschman y D. V. Widder, *The convolution transform*, Mineola, NY: Dover, 2005.
- [98] P. G. Hoel, *Introduction to mathematical statistics*, 2.^a ed., EE. UU.: Wiley Publications in Statistics, 1958.
- [99] P. G. Hoel, S. C. Port y C. J. Stone, *Introduction to probability theory*, EE. UU.: Brooks Cole, 1971.

- [100] M. Hofmann, *Über zusammengesetzte Poisson-prozesse und ihre anwendungen in der unfallversicherung*, tesis Ph. D., Swiss Federal Institute of Technology in Zürich (ETH Zürich), Germany, 1955. <https://doi.org/10.3929/ethz-a-000091775>.
- [101] I. B. Hossack, J. H. Pollard, y B. Zehwirth, *Introductory statistics with applications in general insurance*, 2.^a ed., EE. UU.: Cambridge University Press, 1999.
- [102] D. A. Hsieh, “Implications of nonlinear dynamics for financial risk management”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 28, n.º 1, pp. 41-64, 1993. <https://doi.org/10.2307/2331150>.
- [103] J. C. Hull, *Risk management and financial institutions*, 4.^a ed., Nueva Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2015.
- [104] W. Hürlimann, On maximum likelihood estimation for count data models, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 9, n.º 1, pp. 39-49, 1990. [http://doi.org/10.1016/0167-6687\(90\)90014-5](http://doi.org/10.1016/0167-6687(90)90014-5).
- [105] B. R. James, *Probabilidade: um curso em nível intermediário*, 2.^a ed., Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- [106] C. M. Jarque y A. K. Bera, “A test for normality of observations and regression residuals”, *International Statistical Review*, vol. 55, n.º 2, pp. 163-172, 1987. <https://doi.org/10.2307/1403192>.
- [107] J. L. W. V. Jensen, “Om konvekse funktioner og uligheder imellem midelværdier”, *Nyt tidsskrift for matematik*, vol. 16, n.º 49-68, 1905. <http://www.jstor.org/stable/24528332>.
- [108] J. L. W. V. Jensen, “Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes”, *Acta Mathematica*, vol. 30, n.º 175-193, 1906. <https://doi.org/10.1007/BF02418571>.
- [109] J. A. Jiménez, *Aproximaciones de las funciones de riesgo del tiempo de sobrevivencia mediante la distribución g-h de Tukey*, trabajo de grado (especialización en actuaría), Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, 2004.
- [110] J. A. Jiménez, “Una relación entre la distribución de Hofmann y distribución de Panjer”, *Revista Integración*, vol. 31, n.º 1, pp. 59-67, 2013.
- [111] J. A. Jiménez, *Distribuciones de probabilidad alternativas para la gestión de riesgo en mercados financieros*, tesis Ph. D., Universidad de Valencia, España, 2014.
- [112] J. A. Jiménez, *Álgebra matricial con aplicaciones en estadística*, 3.^a ed., Bogotá, Colombia: Unibiblos, 2017.

- [113] J. A. Jiménez y V. Arunachalam, “Using Tukey’s g and h family of distributions to calculate value at risk and conditional value at risk”, *Journal of Risk*, vol. 13, n.º 4, pp. 95-116, 2011. <https://doi.org/10.21314/jor.2011.230>.
- [114] J. A. Jiménez y V. Arunachalam, “Evaluating operational risk by an inhomogeneous counting process based on Panjer recursión”, *Journal of Operational Risk*, vol. 11, n.º 1, pp. 1-21, 2016. <https://doi.org/10.21314/jop.2016.169>.
- [115] J. A. Jiménez, V. Arunachalam y G. M. Serna, “A generalization of Tukey’s g-h family of distributions”, *Journal of Statistical Theory and Applications*, vol. 14, n.º 1, pp. 28-44, 2015. <https://doi.org/10.2991/jsta.2015.14.1.3>.
- [116] J. A. Jiménez y J. Martínez, “Una estimación del parámetro de la distribución g de Tukey”, *Revista Colombiana de Estadística*, vol. 29, n.º 1, pp. 1-16, 2006.
- [117] M. E. Johnson y V. W. Lowe, “Bounds on the sample skewness and kurtosis”, *Technometrics*, vol. 21, n.º 3, pp. 377-378, 1979. <https://doi.org/10.2307/1267763>.
- [118] N. L. Johnson, A.W. Kemp, and S. Kotz, *Univariate discrete distributions*, 3.^a ed., Wiley Series in Probability and Statistics, Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- [119] É. Jondeau, S. Poon y M. Rockinger, *Financial Modeling under non-gaussian distributions*, Nueva York: Springer-Verlag, 2009.
- [120] P. Jorion, “Risk: Measuring the risk in value at risk”, *Financial Analysts Journal*, vol. 52, n.º 6, pp. 47-56, 1996. <https://doi.org/10.2307/4479959>.
- [121] P. Jorion, *Value at risk: The new benchmark for managing financial risk*, 3.^a ed., Singapur: McGraw-Hill, 2007.
- [122] C. Joseph, *Advanced credit risk analysis and management*, Reino Unido: John Wiley & Sons, 2013.
- [123] R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene y M. Denuit, *Modern actuarial risk theory: Using R*, 2.^a ed., Nueva York: Springer, 2008.
- [124] D. Karlis y E. Xekalaki, “Mixed Poisson distributions”, *International Statistical Review*, vol. 73, n.º 1, pp. 35-58, 2005. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2005.tb00250.x>.
- [125] S. K. Katti y J. Gurland, “The Poisson pascal distribution”, *Biometrics*, vol. 17, n.º 4, pp. 527-538, 1961. <https://doi.org/10.2307/2527853>.
- [126] L. Katz, “Unified treatment of a broad class of discrete probability distributions”, en *Classical and contagious discrete distributions*, vol. 1, G. P. Patil (ed.), Oxford, Nueva York, Calcuta: Statistical Publishing Society, Pergamon Press, 1965, pp. 175-182.

- [127] S. A. Klugman, H. H. Panjer y G. E. Willmot, *Loss models: From data to decisions*, 4.^a ed., EE. UU.: John Wiley & sons, 2012.
- [128] A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitsrechnung*, an English translation: “Foundations of the theory of probability” by N. Morrison, Berlín: Springer, 1933.
- [129] P. S. Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, An English translation: “Philosophical Essay on Probabilities” by Andrew I. Dale, París: Successeur de Madame Veuve Courcier, 1814.
- [130] J. M. Liittschwager y C. Wang, “Integer programming solution of a classification problema”, *Management Science*, vol. 24, n.º 14, pp. 1515-1525, 1978. <https://doi.org/10.1287/mnsc.24.14.1515>.
- [131] G. Loeffler y P. N. Posch, *Credit risk modeling using excel and vba*, Reino Unido: John Wiley & sons, 2011.
- [132] E. F. O. Lundberg, *Approximerad framställning af sannolikhetsfunktioner: Aterförsäkring af kollektivrisker*, tesis Ph. D., Akademisk afhandling, Upsala, 1903.
- [133] O. Lundberg, *On random processes and their application to sickness and accident statistics*, Suecia: Chapman and Hall, CRC, Uppsala: Almqvist & Wiksells, 1940.
- [134] J. M. Marín y G. Rubio, *Economía financiera*, Barcelona: Antoni Bosch, 2001.
- [135] H. M. Markowitz, “Portfolio selection”, *The Journal of Finance*, vol. 7, n.º 1, pp. 77-91, 1952. <http://dx.doi.org/10.2307/2975974>.
- [136] H. M. Markowitz, *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*, Nueva York: John Wiley & sons, 1959.
- [137] A. W. Marshall y I. Olkin, “A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and weibull families”, *Biometrika*, vol. 84, n.º 3, pp. 641-652, 1997. <https://doi.org/10.1093/biomet/84.3.641>.
- [138] A. Mas-Colell, M. D. Whinston y J. R. Green, *Microeconomic theory*, Nueva York: Oxford University Press, 1995.
- [139] F. J. Massey, “The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit”, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 46, n.º 253, pp. 68-78, 1951. <https://doi.org/10.2307/2280095>.
- [140] A. M. Mathai y R. K. Saxena, *Generalized hypergeometric functions with applications in statistics and physical sciences*, Berlín, Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.
- [141] J. A. McFadden, “The mixed Poisson process”, *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, serie A (1961-2002), 27, n.º 1, pp. 83-92, 1965. <http://www.jstor.org/stable/25049354>.

- [142] A. McNeil, R. Frey y P. Embrechts, *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*, EE. UU.: Princeton University Press, 2005.
- [143] K. Menger, “The role of uncertainty in economics”, en *Essays in Mathematical Economics*, Martin Shubik (ed.), Princeton University Press, 1967, pp. 211-231.
- [144] R. C. Merton, “An analytic derivation of the efficient portfolio frontier”, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 7, n.º 4, pp. 1851-1872, 1972. <https://doi.org/10.2307/2329621>.
- [145] R. C. Merton, “On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates”, *The Journal of Finance*, vol. 29, n.º 2, pp. 449-470, 1974. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1974.tb03058.x>.
- [146] R. C. Merton, “The impact on option pricing of specification error in the underlying stock price returns”, *The Journal of Finance*, vol. 31, n.º 2, pp. 333-350, 1976. <https://doi.org/10.2307/2326606>.
- [147] J. Mina y A. Ulmer, *Delta-gamma four ways*, Risk Metrics Group, Citeseer, 1999.
- [148] A. Mood y F. Graybill, *Introduction to the theory of statistics*, 3.ª ed., Singapur: McGraw-Hill, 1974.
- [149] L. G. Moreno, *Teoría de la decisión*, 1.ª ed., Bogotá: Unibiblos, 2010.
- [150] J. P. Morgan y Reuters, *Riskmetrics*, Morgan Guaranty Trust Company of New York, diciembre de 1996.
- [151] D. G. Morrison, “On the interpretation of discriminant analysis”, *Journal of Marketing Research*, vol. 6, n.º 2, pp. 156-163, 1969. <https://doi.org/10.2307/3149666>.
- [152] J. Mossin, Aspects of rational insurance purchasing, *Journal of Political Economy*, vol. 76, n.º 4, 1968, Part 1, pp. 553-568. <http://doi.org/10.1086/259427>.
- [153] V. N. Murty, “Integration by parts”, *The Two-Year College Mathematics Journal*, vol. 11, 1980, n.º 2, pp. 90-94, 1969. <https://doi.org/10.2307/3026660>.
- [154] S. Nadarajah y S. Chan, “Estimation methods for value at risk”, en *Extreme Events in Finance: A Handbook of Extreme Value Theory and Its Applications*, François Longin (ed.); Chichester: John Wiley and sons, 2016, pp. 303-373.
- [155] D. Nam y B. E. Gup, “A quantile-fitting approach to value at risk for options”, *The Journal of Risk Finance*, vol. 5, n.º 1, pp. 40-50, 2003. <https://doi.org/10.1108/eb022978>.
- [156] R. Nava-R. y T. Sinha, *Métodos prácticos para obtener la prima del reaseguro de stop loss en el seguro de vida*, Tech. report, México, Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, 1998. <https://documentacion>.

fundacionmapfre.org/documentacion/publico/es/consulta/registro.do?id=59656.

- [157] J. Neyman, On a new class of “contagious” distributions, applicable in entomology and bacteriology, *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 10, n.º 1, 1939, pp. 35-57. <http://doi.org/10.2307/2235986>.
- [158] D. B. Owen, “Tables for computing bivariate normal probabilities”, *The annals of mathematical statistics*, vol. 27, n.º 4, pp. 1075-1090, 1956. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177728074>.
- [159] H. H. Panjer, “Recursive evaluation of a family of compound distributions”, *Astin Bulletin* vol. 12, n.º 1, pp. 22-26, 1981. <https://doi.org/10.1017/s0515036100006796>.
- [160] H. H. Panjer, “Models of claim frequency”, en *Actuarial Science: Advances in the Statistical Sciences Festschrift in Honor of Professor V.M. Joshi's 70th Birthday*, vol. vi; I. B. MacNeill, G. J. Umphrey, B. S. C. Chan y S. B. Provost, (eds.), Dordrecht: Springer Netherlands, 1987, pp. 115-125. https://doi.org/10.1007/978-94-009-4796-2_8.
- [161] H. H. Panjer y G. E. Willmot, “Recursions for compound distributions”, *Astin Bulletin*, vol. 13, n.º 1, pp. 1-11, 1982. <https://doi.org/10.1017/S0515036100006796>.
- [162] H. H. Panjer y G. E. Willmot, *Insurance risk models*, EE. UU.: Society of Actuaries, 1992.
- [163] K. Pearson, K. Pearson, “On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 50, n.º 302, pp. 157-175, 1900. <https://doi.org/10.1080/14786440009463897>.
- [164] K. Pearson, “On certain types of compound frequency distributions in which the components can be individually described by binomial series”, *Biometrika*, vol. 11, n.º 1/2, pp. 139-144, 1915. <https://doi.org/10.2307/2331886>.
- [165] B. R. Pérez, “El riesgo crediticio”, *ContactoS*, vol. 90, pp. 23-30, 2013.
- [166] S. Peterson, *Investment theory and risk management*, EE. UU.: John Wiley & sons, 2012.
- [167] A. Pewsey, “The wrapped skew-normal distribution on the circle”, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, vol. 29, n.º 11, pp. 2459-2472, 2000. <https://doi.org/10.1080/03610920008832616>.
- [168] G. C. Pflug, “Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk”, *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*; S. P. Uryasev (ed.), 1.ª ed., EE. UU.: Springer U. S., 2000, pp. 272-281.

- [169] C. Philipson, “Note on the application of compound Poisson processes to sickness and accident statistics”, *Astin Bulletin* 1, n.º 4, pp. 224-237, 1960. <https://doi.org/10.1017/s0515036100009582>.
- [170] C. Philipson, “A review of the collective theory of risk”, *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1968, 1968, pp. 45-68. : <https://doi.org/10.1080/03461238.1968.10413263>.
- [171] J. W. Pratt, “Risk aversion in the small and in the large”, *Econometrika*, vol. 32, n.º 1-2, pp. 122-136, 1964. <https://doi.org/10.2307/1913738>.
- [172] S. D. Promislow, “The probability of ruin in a process with dependent increments”, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 10, n.º 2, pp. 99-107, 1991. [https://doi.org/10.1016/0167-6687\(91\)90003-G](https://doi.org/10.1016/0167-6687(91)90003-G).
- [173] C. M. Ramsay, “A practical algorithm for approximating the probability of ruin”, *Transactions of the Society of Actuaries*, vol. 44, pp. 443-477, 1992.
- [174] J. A. Rice, *Mathematical statistics and data analysis*, 3.^a ed., Duxbury Advanced, Duxbury Press, 2006.
- [175] M. J. Roberts, *Web appendix D: derivations of convolution properties* [en línea], 2007. <http://www.ece.utk.edu/~roberts/WebAppendices/DConvProperties.pdf>.
- [176] R. T. Rockafellar y S. Uryasev, “Conditional value-at-risk for general loss distributions”, *Journal of Banking & Finance*, vol. 26, n.º 7, pp. 1443-1471, 2002. [https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(02\)00271-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00271-6).
- [177] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt y J. Teugels, *Stochastic processes for insurance and finance*, 1.^a ed., Nueva York: John Wiley & sons, 1999.
- [178] M. Ruohonen, “On a model for the claim number process”, *Astin Bulletin*, vol. 18, n.º 1, pp. 57-68, 1988. <https://doi.org/10.2143/AST.18.1.2014960>.
- [179] A. Saunders y L. Allen, *Credit risk management in and out of the financial crisis: New approaches to value at risk and other paradigms*, Nueva Jersey: John Wiley & sons, 2010.
- [180] H. L. Seal, “The random walk of a simple risk business”, *Astin Bulletin*, vol. 4, n.º 1, pp. 19-28, 1966. <https://doi.org/10.1017/s0515036100008874>.
- [181] H. L. Seal, *Stochastic theory of a risk business*, EE. UU.: John Wiley & sons, 1969.
- [182] H. L. Seal, *Survival probabilities: the goal of risk theory*, Reino Unido: John Wiley & sons, 1978.
- [183] S. Searle, *Linear models*, Nueva York: John Wiley & sons, 1971.

- [184] C. O. Segerdahl, *On homogeneous random processes and collective risk theory*, Uppsala: Almqvist & Wiksells Boktryckeri, 1939.
- [185] T. A. Severini, *Elements of distribution theory*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Nueva York: Cambridge University Press, 2005.
- [186] W. F. Sharpe, “The sharpe ratio”, *The Journal of Portfolio Management*, vol. 21, n.º 1, pp. 49-58, 1994. <https://doi.org/10.3905/jpm.1994.409501>.
- [187] H. S. Sichel, “On a distribution representing sentence-length in written prose”, *Journal of the Royal Statistical Society Series A (General)*, vol. 137, n.º 1, pp. 25-34, 1974. <https://doi.org/10.2307/2345142>.
- [188] H. S. Sichel, “Repeat-buying and the generalized inverse gaussian-Poisson distribution”, *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, vol. 31, n.º 3, pp. 193-204, 1982. <https://doi.org/10.2307/2347993>.
- [189] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions*, edición reenumerada, Cambridge: Cambridge University Press, 1966.
- [190] M. Spiegel, S. Lipschutz y J. Liu, *Schaum's outline of mathematical handbook of formulas and tables*, 3.ª ed., EE. UU.: McGraw-Hill Professional, 2008.
- [191] M. R. Spiegel, *Theory and problems of laplace transforms*, Nueva York: McGraw-Hill, 1965.
- [192] M. Spivak, *Calculus*, 4.ª ed., EE. UU.: Reverté, 2012.
- [193] A. Stuart y J. K. Ord, *Kendall's advanced theory of statistics*, 6.ª ed, vol. 1, Londres: Griffin, 1994.
- [194] B. Sundt, *An introduction to non-life insurance mathematics*, 3.ª ed., Karlsruhe: Veröffentlichungen des Instituts für Versicherungswissenschaft der Universität Mannheim, Verlag Versicherungswirtschaft, 1993.
- [195] B. Sundt y W. S. Jewell, “Further results on recursive evaluation of compound distributions”, *Astin Bulletin*, vol. 12, n.º 1, 1981, pp. 27-39. <https://doi.org/10.1017/S0515036100006802>.
- [196] Superintendencia Financiera de Colombia (SFC), Circular externa N.º 040 de 2007. Modifica el capítulo II de la circular básica contable y financiera - gestión del riesgo de crédito, 2007. https://normograma.info/findeter/docs/circular_superbancaria_anexos_capitulos.htm.
- [197] Superintendencia Financiera de Colombia (SFC), Circular externa N.º 016 de 2019. Modifica el capítulo II de la circular básica contable y financiera - gestión del riesgo de crédito, 2019. https://normograma.info/findeter/docs/circular_superfinanciera_0016_2019.htm.

- [198] L. Takács, *Combinatorial methods in the theory of stochastic processes*, Nueva York: Robert E. Krieger Publishing Company, 1977.
- [199] G. Taylor y R. Buchanan, *The management of solvency*, en *Classical Insurance Solvency Theory*; J. D. Cummins y R. A. Derrig (eds.), EE. UU.: Insurance and Economic Security, 1988, pp. 49-155.
- [200] R Core Team, *R: A language and environment for statistical computing*, Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing, 2011. www.R-project.org.
- [201] L. C. Thomas, D. B. Edelman y J. N. Crook, *Credit scoring and its applications*, EE. UU.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [202] W. T. Thomson, *Laplace transformation*, 2.^a ed., EE. UU.: Prentice-Hall, 1960.
- [203] P. Thyron, “Contribution a l’étude du bonus pour non sinistre en assurance automobile”, *Astin Bulletin*, vol. 1, n.º 3, pp. 142-162, 1960. <https://doi.org/10.1017/s0515036100007534>.
- [204]] P. Thyron, Extension of the collective risk theory, *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1969, 1968, pp. 84-98. <http://doi.org/10.1080/03461238.1969.10404611>.
- [205] H. C. Tijms, *Stochastic modeling and analysis: A computational approach*, EE. UU.: John Wiley & sons, 1986.
- [206] J. Tobin, “Liquidity preference as behavior towards risk”, *The Review of Economic Studies* vol. 25, n.º 2, pp. 65-86, 1958. <https://doi.org/10.2307/2296205>.
- [207] J. W. Tukey, *Modern techniques in data analysis*, SF-Sponsored Regional Research Conference at Southern Massachusetts University, North Dartmouth, 1977.
- [208] M. C. K. Tweedie, “An index which distinguishes between some important exponential families”, *Statistics: Applications and new directions*; J. K. Ghosh y J. Roy (eds.), Nueva York, Calcuta: Indian Statistical Institute, *Proceedings of the Indian Statistical Institute Golden Jubilee International Conference*, 1984, pp. 579-604.
- [209] D. Vose, *Risk analysis: A quantitative guide*, 3.^a ed., Nueva Jersey: John Wiley & sons, 2008.
- [210] J. F. Walkin, *Recursions for actuaries and applications in the field of reinsurance and bonus-malus systems*, tesis Ph. D., Institut de statistique, Louvain-la-Neuve, Université catholique de Louvain, 2000.
- [211] J. C. Wiginton, “A note on the comparison of logit and discriminant models of consumer credit behavior”, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 15, n.º 3, pp. 757-770, 1980. <https://doi.org/10.2307/2330408>.

- [212] J. E. Wilkins, “A note on skewness and kurtosis”, *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 15, n.º 3, pp. 333-335, 1944. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177731243>.
- [213] G. E. Willmot y B. Sundt, “On evaluation of the delaporte distribution and related distributions”, *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1989, n.º 2, pp. 101-113, 1989. <https://doi.org/10.1080/03461238.1989.10413859>.
- [214] T. C. Wilson, “Infinite wisdom”, *Risk*, vol. 6, n.º 6, pp. 37-45, 1993.
- [215] T. C. Wilson, “Portfolio credit risk, I”, *Risk*, vol. 10, n.º 9, pp. 111-117, 1997.
- [216] T. C. Wilson, “Portfolio credit risk, II”, *Risk*, vol. 10, n.º 10, pp. 56-61, 1997.
- [217] J. L. Wirch, “Raising value at risk”, *North American Actuarial Journal*, vol. 3, n.º 2, pp. 106-115, 1999. <https://doi.org/10.1080/10920277.1999.10595804>.
- [218] P. Zangari, *A var methodology for portfolios that include options*, RiskMetricsTM Monitor, Morgan Guaranty Trust Company, Nueva York, 1996, pp. 4-12.

Índice

- Alternativa
 - mixta, 377
 - propiedades, 378
- Axiomas
 - de coherencia, 335
- Axiomas de
 - Kolmogorov, 5
 - preferencia, 377
- Binomio de Newton, 386
- Caminata aleatoria, 215
- Coefficiente
 - de Lundberg, 220
- Coefficiente de
 - ajuste, 220, 241
 - aversión, 169
 - composición de la
 - covarianza, 21
 - varianza, 21
 - igualdad de
 - Chebyshev, 42
 - Márkov, 41
- Convolución de
 - funciones, 22
 - Vandermonde, 386
 - variables, 22
- Costo por
 - pérdida, 197
 - pago, 197
- Covarianza, 11
- Cuantil de
 - Cornish-Fisher, 41
 - orden q , 8
- Desigualdad
 - de Bernstein, 42
- Desigualdad de
 - Jensen, 42
- Distribución
 - beta, 31
 - binomial, 24
 - negativa, 24
 - de cola integrada, 33
 - de Panjer, 27
 - Delaporte, 80
 - exponencial, 31
 - g-h de Tukey, 37
 - gamma, 35
 - trasladada, 79, 120
 - geométrica, 25
 - hipergeométrica, 26
 - inversa gaussiana, 35
 - inversa gaussiana generalizada, 92
 - logarítmica, 26
 - lognormal, 34
 - Neyman tipo A, 88
 - normal, 32
 - Pólya-Aeppli, 87
 - pareto, 36
 - Poisson, 27
 - Poisson-gamma, 73
 - Poisson-Pascal, 85
 - Sichel, 92
 - Skew-normal, 38
 - truncada, 19
 - Tweedie, 107
 - Weibull, 36
 - Westerberg, 27

- Ecuación
 - de renovación, 234
 - fundamental de Lundberg, 232, 241
 - integral diferencial, 234
- Factorial
 - desplazado, 388
- Familia
 - distribuciones exponencial, 31
 - Hofmann, 83
- Forma cuadrática, 411
- Fórmula
 - Descomposición de la covarianza, 21
- Fórmula de Euler, 389
- Función
 - de distribución subexponencial, 34
 - de Riesgo, 169
 - digamma, 396
 - escalón
 - de Heaviside, 98
 - gamma incompleta, 35
 - generadora
 - de momentos, 15
 - de probabilidad, 14
 - Kummer, 390
- Ganancia
 - del asegurador, 215
- Índice de
 - dispersión, 13
 - Herfindahl-Hirshmann, 351
 - Sharpe, 303
- Índices de
 - riesgo, 17
- Intensidad
 - del proceso, 76
- Ley
 - de Laplace, 4
 - esperanza total, 21
 - Grandes Números débil, 44
 - grandes números, 44
- Métodos de estimación, 393–396
- Medidas
 - estadísticas, 13
- Mezcla
 - distribuciones, 10
- Momentos
 - centrales, 12
 - factoriales, 13
 - ordinarios, 12
- Número
 - de Stirling, 386
- Número de Stirling, 13
- Parámetro de
 - escala, 9
 - localización, 9
- Polinomios de
 - Jacobi, 390
 - Legendre, 390
- Prima
 - de riesgo, 303
- Principio de prima
 - de Esscher, 179
 - ajustada, 183
 - de desviación estándar, 178
 - de utilidad cero, 178
 - de valor esperado, 178
 - de valor medio, 183
 - de varianza, 178
 - exponencial, 180
 - percentil, 182
- Probabilidad
 - a posteriori*, 4
 - a priori*, 4
 - de no ruina, 214
 - de ruina, 214
- Proceso
 - autorregresivo de primer orden, 224
 - binomial negativo, 79
 - de excedentes, 210
 - de Hofmann, 83
 - de reclamos (pérdidas), 123

- Panjer, 80
- Poisson
 - homogéneo, 73
 - mixto, 75
 - no homogéneo, 124
- Sichel, 92
- Prueba
 - Anderson-Darling, 48
 - chi-cuadrado, 46
 - Kolmogorov-Smirnov, 47
- Reaseguro, 267
 - con límite, 276
 - de exceso de pérdida, 270
 - no-proporcional, 270
 - proporcional, 270
- Recargo
 - por seguridad, 178
 - relativo, 178
 - relativo
 - por seguridad, 140
- Regla
 - de Bayes, 6
- Riesgo, 97
- Símbolo de
 - Pochhammer, 388
- Seguro
 - con deducible, 193
 - eximido, 197
- Serie
 - de Maclaurin, 385
 - de Taylor, 385–388
 - hipergeométrica, 388, 390
- Teorema
 - central del límite, 44
 - de separación en dos fondos, 313
 - descomposición de Jordan, 9
- Transformada de
 - Esscher, 40
 - Laplace, 399, 408
- Valor esperado, 10
 - condicional, 20
- Varianza, 11
 - condicional, 21

Editado por el Centro Editorial de la Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá.
Fuente principal Baskerville y Fira Sans.

