

**APLICACIÓN DEL MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS EN UN
PROBLEMA DE AEROELASTICIDAD**

RAFAEL RICARDO CUBILLOS RAMIREZ

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICA APLICADA
BOGOTÁ
2022**

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EN UN PROBLEMA DE AEROELASTICIDAD

RAFAEL RICARDO CUBILLOS RAMIREZ

Tesis de grado presentado como requisito para optar al título de :
Magíster en Ciencias - Matemática Aplicada

Tutor:
JUAN GALVIS

Linea de Investigación:
Aeroelasticidad

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICA APLICADA
BOGOTÁ
2022

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a Dios por la sabiduría y el entendimiento que me ha dado para desarrollar este trabajo, en segundo lugar a mis padres, porque sin lugar a dudas han sido un apoyo incondicional en mi desarrollo profesional con su orientación y su esmero en hacer de mi una mejor persona cada día. También quiero agradecer de forma especial al Profesor Juan Galvis, por su motivación para presentarme al programa y por su apoyo incondicional en el desarrollo este trabajo, ya que fueron esenciales para darle un feliz término. Por último agradezco a todas las personas que de manera directa o indirecta apoyaron el desarrollo de este trabajo.

RESUMEN

Este documento presenta la solución numérica que se obtiene de aplicar el método de elementos finitos al problema de aeroelasticidad, así como una descripción de los mismos y una breve explicación de la importancia de este tipo de análisis en la industria aeronáutica. El problema que se plantea consiste en el acople de un modelo de flujo que se describe a través de las ecuaciones de Navier Stokes, acoplado a un modelo estructural que simula el comportamiento de un perfil alar que puede rotar sobre su eje elástico y desplazarse en la dirección vertical. El código que se utilizó para resolver el problema de interacción de flujo y estructura se escribió en un software que se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales parciales llamado FREEFEM ++. A través del software se pretende realizar una discretización de los dos modelos de manera simultánea, en tiempo y espacio, logrando obtener soluciones aproximadas. En el Capítulo 4 se presentaran los resultados y el análisis de los mismos, los cuales son comparables con los obtenidos en el documento escrito por Svacek, Petr (Application of the finite element method in aeroelasticity); ver [17].

Palabras claves

Aeroelasticidad, elementos finitos.

ABSTRACT

Application of finite element method in an aeroelastic problem.

This document presents the numerical solution obtained by applying the finite element method to the aeroelasticity problem, as well as a description of them and a brief explanation of the importance of this type of analysis in the aeronautical industry. The problem that arises consists of the coupling of a flow model that is described through the Navier Stokes equations, coupled to a structural model that simulates the behavior of an airfoil that can rotate on its elastic axis and it move in the vertical direction. The code that was obtained to solve the flow and structure interaction problem was written in a software used to solve partial differential differences called FREEFEM ++. Through the software, it is intended to perform a discretization of the two models simultaneously, in time and space, obtaining approximate solutions. In Chapter 4 the results and their analysis will be presented, which are comparable with those obtained in the document written by Svacek, Petr (Aplication of the finite element method in aeroelasticity); see [17].

keywords

Aeroelasticity, finite elements.

LISTA DE SÍMBOLOS

C_L	Coeficiente de sustentación
C_M	Coeficiente de momento aerodinámico
K_θ	Rigidez estructural a torsión
K_k	Rigidez estructural a flexión
L	Fuerza de sustentación
M	Momento aerodinámico
Q_i	Fuerza generalizada en la coordenada generalizada i
T	Energía cinética
U	Energía de deformación
δW	Trabajo virtual
a	Pendiente gráfica coeficiente sustentación vs ángulo de incidencia
c	Cuerda media aerodinámica
e	Distancia entre centro aerodinámico y eje elástico
m	Masa
q	Presión dinámica
q_{div}	Presión dinámica de divergencia
v	Velocidad corriente de flujo de aire
θ	Ángulo de deflexión
θ_0	Ángulo de incidencia
ρ	Densidad del aire
δ	Desplazamiento virtual

8

S_α	Momento estático al rededor del eje elástico
I_α	Momento de inercia al rededor del eje elástico
k_{hh}	Rigidez a flexión
$k_{\alpha\alpha}$	Rigidez a torsión
l	Profundidad del perfil de sustentación
c	Cuerda media aerodinámica
ρ	Densidad del aire
ν	Viscosidad cinemática

Índice general

Agradecimientos	4
Resumen	5
Resumen	6
Lista de símbolos	7
1. INTRODUCCIÓN	13
Introducción	13
2. AEROELASTICIDAD	17
2.1. DEFINICIÓN DE LA AEROELASTICIDAD	17
2.2. AEROELASTICIDAD ESTÁTICA	18
2.3. AEROELASTICIDAD DINÁMICA	24
2.4. ECUACIONES DE NAVIER STOKES	29
2.5. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE UN PERFIL DE SUSTENTACIÓN	33
3. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	37

3.1. DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	37
3.2. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EN UNA DIMENSIÓN	38
3.3. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EN DOS DIMENSIONES	45
4. RESULTADOS NUMÉRICOS	51
4.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	51
4.2. METODO NUMÉRICO PARA EL PROBLEMA DE FLUIDOS	53
4.3. METÓDO DE EULER PARA EL PROBLEMA DE EDO	54
4.4. DESCRIPCIÓN DE LOS PASOS REPRESENTATIVOS EN FREEFEM++	58
4.4.1. Dominio computacional y perfil aerodinámico	58
4.4.2. Selección de los espacios y elementos utilizados	59
4.4.3. Paso de tiempo y numero de iteraciones	59
4.4.4. Fuerza de sustentación y momento aerodinámico	59
4.4.5. Solución de la ecuación diferencial ordinaria	60
4.4.6. Rotación del perfil de sustentación	60
4.5. RESULTADOS NUMÉRICOS	61
4.6. CONCLUSIONES	66
A. SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS	69
A.1. MÉTODO DE EULER	70
A.2. ANÁLISIS DE CONVERGENCIA	70

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	11
A.3. MÉTODO DE CRANK-NICOLSON	71
A.4. ESTABILIDAD	72
A.4.1. REGIÓN DE ABSOLUTA ESTABILIDAD	73
A.5. SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES EDO .	73
B. ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN AEROELASTICIDAD	75
B.1. COORDENADAS GENERALIZADAS	75
B.2. DESPLAZAMIENTO VIRTUAL Y TRABAJO VIRTUAL	76
B.3. ECUACIONES DE LAGRANGE	76
C. CÓDIGO	81

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Los procesos de diseño y análisis de modelos aplicados donde existe una interacción entre un flujo de aire y una o más estructuras tiene muchas aplicaciones en diferentes industrias, algunas de ellas son: la aeronáutica, en el diseño y fabricación de alas y superficies de control, en mecánica en el diseño de compresores o en ingeniería civil en el diseño de nuevos edificios o puentes [17]. En todas estas aplicaciones es necesario plantear modelos matemáticos en términos de ecuaciones diferenciales parciales. El análisis de estas ecuaciones no es trivial y en muchos casos no es posible obtener soluciones o aproximaciones de forma analítica. Debido a esta situación se motiva el uso de aproximaciones numéricas de ecuaciones diferenciales parciales como herramienta para determinar la solución de este tipo de problemas. Uno de los métodos de solución numérica más utilizados es el método de los elementos finitos (FEM por su sigla en inglés: Finite Element Method). El FEM consiste en realizar una subdivisión espacial del dominio físico en un número finito de elementos, (comúnmente se utilizan triángulos o cuadriláteros en dos dimensiones y tetraedros o prismas en tres dimensiones) donde la solución es aproximada por un conjunto apropiado de funciones. De esta forma el problema original es transformado en un problema discreto para un número finito de coeficientes desconocidos y puede ser resuelto usando un método iterativo. Un campo en el cual la aplicación de los métodos numéricos se ha incrementado en los últimos años, es la industria aeroespacial y aeronáutica; ver [17]. Esto surge debido a que realizar un experimento a escala demanda grandes inversiones de diversos recursos, que finalmente se resumen en un costo elevado. De manera alternativa, por medio de la implementación de los métodos numéricos se

ha logrado obtener resultados de simulaciones de forma confiable a un menor costo. Un ejemplo de esta situación beneficiosa del uso de los métodos numéricos, se dio a conocer a través de la Nasa (National Aeronautics and Space Administration) cuando se decidió implementar un método llamado CFD (Computational Fluid Dynamics) para estudiar la aerodinámica de una aeronave experimental llamada HIMAN (Highly Maneuverable Aircraft Thecnology) diseñada para probar conceptos de alta maniobrabilidad. Inicialmente para probar el diseño fué necesario construir un túnel de viento adecuado a las necesidades del prototipo, sin embargo, las pruebas preliminares en el túnel de viento mostrarón que a velocidades cercanas a la velocidad del sonido la resistencia al avance de la aeronave era demasiado grande. Estos resultados conllevan a replantear el modelo de la aeronave y junto con ello la modificación del túnel de viento, lo que incrementando el costo del proyecto, el cual se estimó habría sido aproximadamente de 150.000 dolares. Para resolver este inconveniente, las alas de la aeronave fuerón nuevamente diseñadas por computador a un costo de 6.000 dolares a través de CFD; ver [2]. Otro estudio que ha tomado importancia en aplicaciones aeroespaciales es el análisis del **flutter** ([5, 17, 4]), en el cual se estudia la inestabilidad dinámica que puede ocurrir en el ala (o en una superficie de control) de una aeronave. Este fenómeno se presenta como una oscilación y, a grosso modo, ocurre porque el ala extrae energía de la corriente de aire libre que fluye sobre ella, en este caso la energía que absorbe el ala es mayor a la energía que la estructura es capaz de disipar y la energía que no se logra disipar, se acumula y logra hacer oscilar la estructura. En empresas donde se crean nuevos diseños de aviones, surge la necesidad de realizar análisis de aeroelasticidad para los nuevos prototipos, este tipo de empresas utilizan programas que se pueden adquirir comercialmente de elementos finitos como ANSYS, NASTRAN o FLUENT que realizan análisis de aeroelasticidad lineal. Esto les permite determinar la velocidad crítica del fluido por medio del código del programa. Esta velocidad es de especial interés porque delimita la velocidad máxima de un aeronave, sin embargo, el comportamiento del sistema después de alcanzar la velocidad crítica no se puede analizar utilizando este tipo de programas y en algunas aplicaciones se ha convertido en algo de vital importancia el comportamiento del fenómeno después de alcanzar la velocidad crítica. Visto de este modo el análisis del **flutter** es bastante significativo en el proceso de diseño de nuevas aeronaves así como para las que ya estén en servicio de vuelo y se les desea realizar una modificación que cambie su rendimiento (performance) por medio de la aplicación de un STC (Supplemental type certificates). El STC es un documento aprobado por una autoridad aeronáutica que certifica que las modificaciones realizadas cumplen con estándares de seguridad. En ocasiones este tipo de modificaciones hace que se afecte la

velocidad a la cual la aeronave alcanza su inestabilidad dinámica en las diferentes fases de vuelo, haciendo necesario realizar un análisis de aeroelasticidad. En la parte de diseño de una aeronave el análisis aeroelástico no solo determina la velocidad de la aeronave (y por tanto el tipo de motor), también determina el empuje del motor e inclusive, de manera indirecta, llegaría a afectar la resistencia de la aeronave al avance, esto debido a la forma del motor u otros componentes que sea necesario instalar en la estructura de la aeronave para alcanzar la velocidad establecida. La velocidad máxima del avión depende directamente de estas y otras características y debe ser menor a la velocidad a cual el avión alcanza la inestabilidad dinámica de la estructura. A velocidades superiores a esta se alcanzaría un fallo estructural. Debido a esto la aeroelasticidad ha tenido un gran impacto en el campo de la investigación aeronáutica, y como una consecuencia de esto, anualmente se realiza el IFASD (International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics) en diferentes partes del mundo. En este evento se involucran diversas organizaciones y centros de investigación renombrados en el campo, como el AIAA (American Institute of Aeronautics and Astronautics), UAI (Union of Aviation Industrialists) y UAC (United Aircraft Corporation) entre otros.

Este documento en el segundo capítulo realizará una breve explicación de la aeroelasticidad, explicando de manera breve como se divide y su impacto en los sistemas físicos bajo los cuales ocurre. Luego se presenta una explicación de las ecuaciones de Navier Stokes haciendo énfasis en las ecuaciones de continuidad y de momentum, las cuales se emplean para plantear los modelos que describen el fenómeno de flutter. En el tercer capítulo se da un explicación del método de elementos finitos (FEM) en una y dos dimensiones, haciendo énfasis en el método de Galerkin, el cual es utilizado para resolver el problema planteado en este documento. En esta explicación del método de elementos finitos se detalla la formulación fuerte de varios problemas y los pasos subsecuentes en cada uno de ellos hasta llegar a las formulaciones débil y matricial. En el cuarto capítulo se presenta la parte principal de este escrito. Se presente en detalle la formulación del problema de fluido estructura estudiando en esta tesis. Se propone, tomando como base [17], una aproximación numérica para este problema. En esta propuesta se implementa una aproximación de elemento finitos para el problema de fluido y una aproximación de Euler para el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan la dinámica del perfil alar. Para la implementación de elementos finitos se usa FreeFem ++ y en particular el código planteado en el manual de usuario llamado Navier Stokes; ver [10]. Este código fue modificado y adaptado los requerimientos para solucionar el problema particular considerado con condiciones de frontera particulares. La aproxima-

ción numérica de elementos finitos fue combinada con una aproximación de Euler para la dinámica del perfil alar. Se obtuvieron resultados consistentes con la teoría y similares a los obtenidos en [17].

Dentro del documento se han adicionado dos apéndices, en el apéndice A se presenta una breve descripción de los métodos utilizados para solucionar de manera numérica ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), haciendo énfasis en el método de Euler explícito y Euler implícito. En este mismo apéndice se explica de manera breve el significado de estabilidad en la solución de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) y la forma de solucionar sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). En el apéndice B, se da una introducción a las ecuaciones de Lagrange, que se utilizan comúnmente para plantear los modelos matemáticos que describen los fenómenos en aeroelasticidad.

Capítulo 2

AEROELASTICIDAD

En este capítulo se realizará una breve introducción a la aeroelasticidad, proporcionando una formulación matemática de las ecuaciones que modelan los fenómenos más representativos de la aeroelasticidad estática y dinámica, asociando los mismos al problema objeto de estudio y el cual se pretende solucionar numéricamente en este documento. Los modelos matemáticos se plantean en términos de las ecuaciones de Lagrange, utilizando la energía del sistema, esta formulación se explica de manera detallada en el apéndice B. El material que se presenta en esta sección es tomado de [6, 7, 12].

2.1. DEFINICIÓN DE LA AEROELASTICIDAD

La aeroelasticidad es la ciencia que estudia la interacción entre fuerzas aerodinámicas, elásticas e inerciales que actúan sobre una estructura flexible que está sometida a una corriente de aire y los fenómenos que se puedan originar a partir de esto. La Figura 2.1 muestra las disciplinas que surgen de la interacción de las fuerzas descritas anteriormente. Los fenómenos físicos que surgen de la aeroelasticidad se pueden clasificar en dos ramas, la aeroelasticidad estática y aeroelasticidad dinámica; [12].

2.2. AEROELASTICIDAD ESTÁTICA

La aeroelasticidad estática estudió los efectos no oscilatorios que resultan de la interacción de las fuerzas aerodinámica y elástica que actúan sobre la estructura de una aeronave. Esta rama de la aeroelasticidad estudió la deflexión de las estructuras flexibles debido a cargas aerodinámicas considerando los movimientos que se producen independientes del tiempo; ver [12]. Las cargas aerodinámicas generadas en un perfil de sustentación son: la fuerza de sustentación, la fuerza de arrastre y el momento aerodinámico. La fuerza de sustentación y de arrastre son perpendicular y paralela a la componente de velocidad de flujo de aire. Cuando estas cargas actúan en el ala de una aeronave, causan que la estructura sufra deformación a flexión y a torsión. Esta deformación determina una condición para cada fase de vuelo y deben ser estudiadas para modelar el comportamiento aeroelástico estático. Las deformaciones de tipo estático son importantes porque ellas modelan las cargas para varias condiciones, algunas de ellas son: en vuelo estable, en la distribución de lift y fuerzas de arrastre, la efectividad de las superficies de control, el comportamiento de equilibrio de la aeronave (Condición de TRIM) ¹ y las características de estabilidad estática y control de la aeronave; ver [5]. Dentro de la aeroelasticidad estática se pueden encontrar dos fenómenos de gran importancia llamados divergencia y control reversal. La divergencia es el nombre que se le da al fenómeno que ocurre cuando el momento generado por la fuerza aerodinámica supera el momento de restauración generado por rigidez estructural del ala, llevando a la falla estructural. Para ilustrar el fenómeno de divergencia considere la Figura 2.2, donde se muestra una superficie de control simétrica, sujeta a un resorte que simula el movimiento a torsión y esta ubicada a una distancia ec desde el centro aerodinámico donde actúa la fuerza de sustentación. La fuerza de sustentación que actúa en el centro aerodinámico del perfil de sustentación, que se desplaza a una velocidad v con un ángulo de incidencia respecto de la velocidad de corriente libre, genera un momento aerodinámico de cabeceo M dado por

$$M = \left[\frac{1}{2} \rho v^2 c a_1 \theta_0 \right] (ec) = \frac{1}{2} \rho v^2 (ec)^2 a_1 \theta_0 = q(ec)^2 a_1 \theta_0. \quad (2.1)$$

En esta ecuación, a_1 es la pendiente de la gráfica de sustentación, ec es la distancia desde el centro aerodinámico hasta el eje elástico, q es la presión dinámica, c es la cuerda del

¹El movimiento de una aeronave se describe en términos de fuerza, momentum, velocidades lineales, velocidades angulares y su actitud. Una condición sobre la cual la aeronave se encuentra en un vuelo estable no acelerado, y todas las fuerzas y momentos actuando sobre la estructura se encuentran en balance y suman cero, se conoce como la condición de TRIM; ver [5]

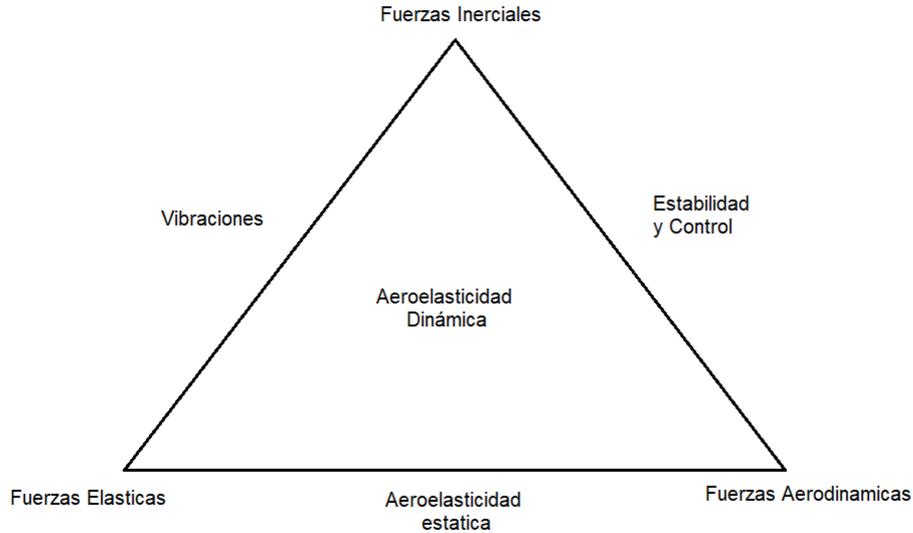


Figura 2.1: Collar de fuerzas que dan origen a la aeroelasticidad estática y dinámica. Al combinar la fuerza elástica y la fuerza aerodinámica se da origen a la aeroelasticidad estática, al sumar las fuerzas inerciales se da origen a la aeroelasticidad dinámica.

perfil aerodinámico, θ_0 y θ son los ángulos de incidencia y deformación debido a la fuerza aerodinámica y ρ es la densidad del aire; ver [9].

Para realizar la formulación del modelo matemático que simula el fenómeno de divergencia sobre un ala se utiliza la formulación de Lagrange, la cual es explicada en el apéndice B de manera detallada. De la formulación Lagrangiana se tiene que la energía de deformación U en una ala modelada como se observa en la Figura 2.2 esta dada por

$$U = \frac{1}{2} K_{\theta} \theta^2. \quad (2.2)$$

Donde la constante K_{θ} del resorte simula las propiedades de rigidez estructural y θ es el ángulo de deformación del ala debido a la fuerza aerodinámica. La formulación del momento generalizado Q_{θ} en función del desplazamiento virtual $\delta\theta$ y el trabajo virtual δW para el modelo que se puede ver en la Figura 2.2 y viene dado por

$$Q_{\theta} = \frac{\partial(\delta W)}{\partial(\delta\theta)} = \frac{\partial[q(ec)^2 a_1(\theta_0 + \theta)\delta\theta]}{\partial(\delta\theta)} = q(ec)^2 a_1(\theta_0 + \theta). \quad (2.3)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange, tal como se explica en el Apéndice B, se obtiene la condición de equilibrio entre el momento aerodinámico y el momento de restauración, el momento esta dado por la rigidez de la estructura K_{θ} , y se expresa en terminos de la presión

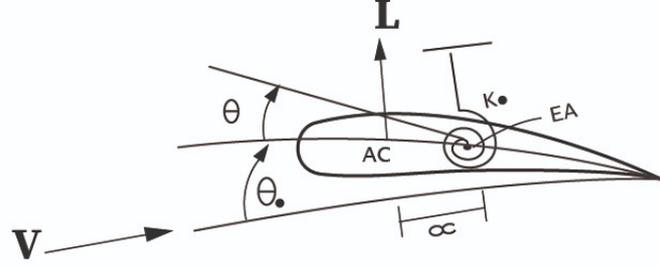


Figura 2.2: Perfil de sustentación de un ala sometido a una corriente de aire libre que fluye a una velocidad V , fuerza de sustentación L que actúa a una distancia ec desde el eje elástico al centro aerodinámico y simulando una rigidez a torsión k_θ .

dinámica y el ángulo de incidencia y deformación para obtener,

$$K_\theta \theta = q(ec)^2 a_1 (\theta_0 + \theta).$$

De la condición de equilibrio, es posible conocer el ángulo de deformación del ala debido a la carga aerodinámica en torsión, resolviendo se puede expresar θ como

$$\theta = \frac{q(ec)^2 a_1}{K_\theta - qec^2 a_1} \theta_0. \quad (2.4)$$

Realizando una formulación por conveniencia donde se define $R = (ec)^2 a_1 / K_\theta$ en la Ecuación (2.4) y expresando en términos de R se tiene una nueva formulación de el ángulo de incidencia θ denotado por

$$\theta = \frac{qR}{1 - qR} \theta_0.$$

De esta última expresión se puede deducir que la presión de divergencia, viene dada por

$$q_{div} = \frac{1}{R} = \frac{K_\theta}{ec^2 a_1}.$$

Utilizando la relación $\frac{1}{R}$ se puede expresar la deformación del ala en términos del ángulo de torsión como una función de la relación de la presión dinámica y la presión de divergencia

$$\theta = \frac{q/q_{div}}{1 - q/q_{div}} \theta_0. \quad (2.5)$$

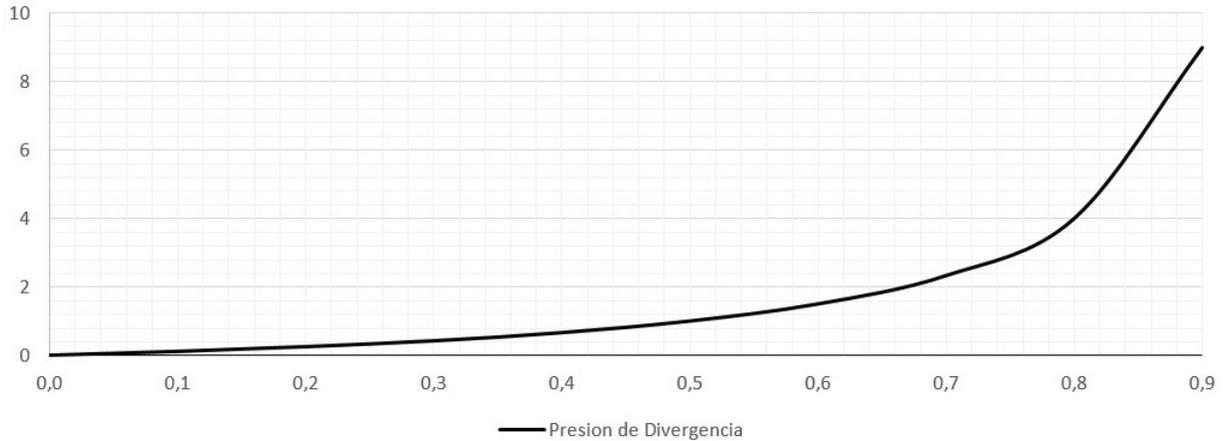


Figura 2.3: Relación entre la Presión Dinámica y Presión de Divergencia en un perfil de sustentación.

A través de la Ecuación (2.5) se puede deducir que en el instante que la presión de divergencia se iguala a la presión dinámica, la deformación en el ala supera el momento de restauración estructural y el ángulo θ se vuelve muy grande, llevando a un fallo estructural. Matemáticamente se dice que la deformación θ tiende al infinito. La Figura 2.3 muestra el comportamiento de la deformación a medida que varía la relación entre la presión dinámica de vuelo de la aeronave y la presión dinámica de divergencia; ver [12]. El segundo fenómeno que hace parte de la aerelasticidad estática se conoce como inversión del mando. Para explicar este fenómeno se considera un ala flexible que posee una envergadura $2s$, cuerda aerodinámica c , un perfil simétrico y rígido que puede rotar un ángulo β y tiene un ángulo de incidencia medido desde la raíz del fuselaje definido como θ_0 . Se asume que el ala está realizando un movimiento de rotación respecto al eje longitudinal de la aeronave a una velocidad angular constante $\dot{\phi}$ como se muestra en la Figura 2.4. Para este modelo asume que la deflexión del ala está dada por

$$\theta = \left(\frac{y}{s}\right) \theta_T. \quad (2.6)$$

Donde θ_T es la deflexión máxima en la punta del ala y s es el semispan. La torsión del ala, definida por θ , es medida positiva rotando en dirección de las manecillas del reloj en relación al eje elástico. Para este modelo el eje elástico está ubicado a una distancia (ec) desde el centro aerodinámico y este último está ubicado a un cuarto de la cuerda media medida aerodinámica desde el borde de ataque.

De la teoría de estabilidad y dinámica de vuelo [10, pag 41-43], se puede expresar el coeficiente de la fuerza de sustentación C_L de un ala como una combinación lineal de unas constantes a_i

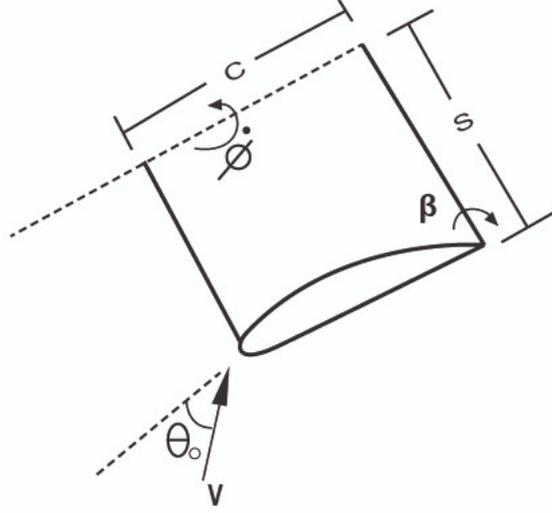


Figura 2.4: Ala fija sometida a un flujo de aire V con un ángulo de incidencia θ_0 , cuerda aerodinámica c y velocidad angular $\dot{\phi}$ alrededor del eje longitudinal.

que dependen de la aerodinámica del ala, el ángulo de incidencia θ_0 , el ángulo de deformación θ y el ángulo de rotación de la superficie de control β , esto es,

$$C_L = a_0 + a_w(\theta_0 + \theta) + a_c\beta.$$

De la misma forma que C_L , el coeficiente de momento aerodinámico C_M también puede ser expresado como una combinación lineal utilizando los mismos ángulos y coeficientes b_i ,

$$C_M = b_0 + b_w(\theta_0 + \theta) + b_c\beta.$$

Utilizando estos coeficientes C_L y C_M se puede expresar la fuerza de sustentación y de momento aerodinámico que actúa sobre un elemento diferencial dy en el ala. Esta es la fuerza necesaria para hacer bajar el alerón en el ala, se tiene,

$$dL = qc dy \left[a_w \left(\theta_0 + \frac{y}{s} \theta_T - \frac{\dot{\phi} y}{V} \right) + a_c \beta \right], \quad (2.7)$$

$$dM = qc^2 dy \left[b_w \left(\theta_0 + \frac{y}{s} \theta_T - \frac{\dot{\phi} y}{V} \right) + b_c \beta \right]. \quad (2.8)$$

En (1.7) y (1.8), q es la presión dinámica, $\dot{\phi}y/V$ es una reducción en la incidencia asociada a la velocidad de rotación $\dot{\phi}$ en un movimiento de alabeo de la aeronave². Para realizar el planteamiento del modelo matemático se utilizarán nuevamente las ecuaciones de Lagrange explicadas en el Apéndice B. Para este fin, se calcula el trabajo virtual δW y los desplazamientos virtuales en los ángulos de torisión $\delta\theta$ y rotación $\delta\phi$, de esta forma se tiene el trabajo virtual δW dado por

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_{wing} (dLy\delta\phi + dM\delta\theta) \\ &= 2qc \int_0^s \left[a_w \left(\frac{y}{s}\theta_T - \frac{\dot{\phi}y}{V} \right) + a_c\beta \right] y\delta\phi dy + 2qc^2 \int_0^s \left[b_w \left(\frac{y}{s}\theta_T - \frac{\dot{\phi}y}{V} \right) + b_c\beta \right] \delta\theta dy.\end{aligned}\tag{2.9}$$

De la teoría del Apéndice B se deducen las ecuaciones de fuerza generalizada Q_{θ_T} y Q_ϕ en las coordenadas θ y ϕ respectivamente

$$\begin{aligned}Q_\phi &= \frac{\partial(\delta W)}{\partial(\delta\phi)} = 2qc \int_0^s \left[a_w \left(\frac{y^2}{s}\theta_T - \frac{\dot{\phi}y^2}{V} \right) + a_c\beta y \right] dy \\ &= 2qc \left[a_w \left(\frac{s^2}{3}\theta_T - \frac{\dot{\phi}s^3}{3V} \right) + \frac{a_c\beta s^2}{2} \right].\end{aligned}\tag{2.10}$$

Para la coordenada Q_{θ_T}

$$\begin{aligned}Q_{\theta_T} &= \frac{\partial(\delta W)}{\partial(\delta\theta_T)} = 2qc^2 \int_0^s \left[b_w \left(\frac{y^2}{s^2}\theta_T - \frac{\dot{\phi}y^2}{sV} \right) + b_c\beta y \right] dy \\ &= 2qc^2 \left[b_w \left(\frac{s}{3}\theta_T - \frac{\dot{\phi}s^2}{3V} \right) + \frac{b_c\beta s}{2} \right].\end{aligned}\tag{2.11}$$

En este planteamiento se asume que la velocidad de la aeronave se realiza de manera constante, esto quiere decir que no varía con respecto al tiempo. Debido a esto los términos de la energía cinética asociados a la rotación de la velocidad angular ϕ y la deformación θ no aportan en las derivadas de las ecuaciones de Lagrange. La energía de deformación en el ala U se expresa en términos de la rigidez del ala,

$$U = \frac{GJ}{3s}\theta_T^2.\tag{2.12}$$

²Una aeronave posee tres movimientos de rotación asociados a los ejes longitudinal, lateral y vertical llamados alabeo, cabeceo y guiñada respectivamente; ver [5].

Aplicando las ecuaciones de Lagrange, y teniendo en cuenta la energía de deformación U para las dos alas, se obtiene la formulación matricial, donde las incógnitas están dadas por el vector $[\dot{\phi}, \dot{\theta}]^T$,

$$\begin{bmatrix} \frac{2qcs^3a_w}{3V} & -\frac{2qcs^2a_w}{3} \\ \frac{2qc^2s^2b_w}{3V} & \left(\frac{2GJ}{s} - \frac{2qc^2sb_w}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qc^2a_c \\ qc^2sb_c \end{bmatrix} \beta, \quad (2.13)$$

esto implica que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e & (\mu - e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s\dot{\phi}}{V} \\ \dot{\theta}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3a_c}{2a_w} \\ \frac{3b_c}{2a_w} \end{bmatrix} \beta,$$

donde μ esta dado por

$$\mu = \frac{3GJ}{qc^2s^2a_w}.$$

De la Ecuación (2.13) se puede deducir que la velocidad de inversión del mando esta dada en terminos de la rigidez a torsión y que es directamente proporcional a la misma

$$q_{rev} = \frac{3GJa_c}{c^2s^2a_w(ea_c - b_c)}. \quad (2.14)$$

Para mas detalles ver [12].

2.3. AEROELASTICIDAD DINÁMICA

En la aeroelasticidad dinámica el fenómeno mas importante y más difícil de predecir es el flutter; ver [12]. Este fenómeno es considerado como una vibración autoexcitada en la cual la estructura de la aeronave es capaz de absorber mas energía que la que es capaz de disipar a través del amortiguamiento estructural, llevando la estructura a la falla. Esta vibración se presenta a una velocidad especifica para cada estructura, y se origina por una perturbación inicial del medio en el cual se desplaza el cuerpo. A esta velocidad se le conoce como velocidad crítica de flutter; a velocidades inferiores a la velocidad de flutter, las oscilaciones se consideran como amortiguadas y la estructura disipa la energía absorbida por la estructura. Sin embargo, a velocidades mayores a la velocidad crítica las oscilaciones se incrementan en amplitud aumentando la transferencia de energía en el sistema llevando al daño catastrófico. El fenómeno de flutter puede tomar varios modos de vibración en diferentes partes de una aeronave, como ejemplos puede existir flutter de ala en una combinación de flexion y torsión o flutter de superficie de control en el ala a torsión; ver [12, 6]. Para ilustrar el fenómeno del

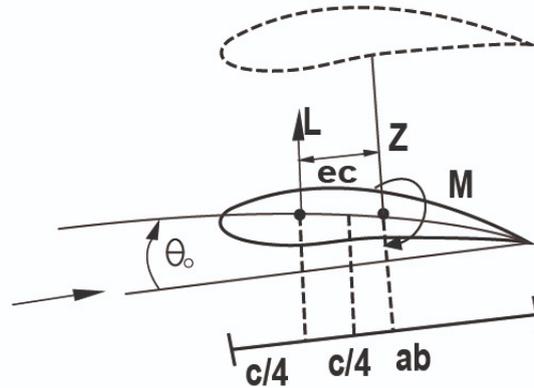


Figura 2.5: Superficie de Control que describe el movimiento de flutter, en esta figura se puede observar la fuerza de sustentación L , el momento aerodinámico M y el ángulo de incidencia θ_0 .

flutter considere la Figura 2.5, donde el eje a flexión esta ubicado a una distancia ec desde el centro aerodinámico. Del diagrama se puede establecer la siguiente relación

$$ec = \frac{c}{4} + ab = \frac{c}{4} + \frac{ac}{2},$$

donde ab es una distancia definida en la dirección del borde de ataque del ala hasta el borde de salida, ver [12]. La fuerza de sustentación L y el momento aerodinámico M se expresan utilizando el mismo planteamiento de la referencia [[12], pag 168], donde existe una relación entre la velocidad horizontal y vertical del perfil aerodinámico

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\rho V^2 c a_1 \left(\theta + \frac{\dot{Z}}{V} \right), \\ M &= \frac{1}{2}\rho V^2 c^2 a_1 \left(\theta + \frac{\dot{Z}}{V} + M_\theta \frac{\dot{\theta} c}{4V} \right). \end{aligned} \tag{2.15}$$

En la Ecuaciones (1.14) y (1.15) ρ es la densidad del aire, V es la velocidad de la aeronave, asumida como TAS (True Air Speed), c es la cuerda media aerodinámica, a_1 es la pendiente de la curva de sustentación, θ es el ángulo de incidencia y \dot{Z} es la velocidad del perfil en la dirección vertical. Para ilustrar el fenómeno de flutter, considere un ala rectangular de envergadura s y cuerda aerodinámica c . El ala tiene dos resortes con constantes k_θ y k_k como se puede observar en la Figura 2.6 para simular la torsión y el momento de cabeceo

del ala en una aeronave. Los resortes se ubican en la raiz del ala a una distancia ec desde el centro aerodinámico sobre la cuerda media aerodinámica simulando el comportamiento del eje elástico. Se asume que la distribución de masa en el ala es uniforme, lo que permite definir el eje de masa sobre la mitad de la cuerda aerodinámica. El desplazamiento de un punto cualquiera sobre el ala, y asumiendo positivo el movimiento en la dirección vertical, se define con una función $z(x, y, t)$ en dos dimensiones espaciales y una de tiempo

$$z(x, y, t) = yk(t) + (x - x_f)\theta(t) = \phi_k K + \phi_\theta \theta, \quad (2.16)$$

donde k define el aleteo y θ define el momento de cabeceo de la aeronave expresadas como coordenadas generalizadas, ϕ_k, ϕ_θ son los *mode shapes* asumidos³. La energía cinética T que se genera debido al movimiento del ala

$$\begin{aligned} T &= \int_{wing} \frac{1}{2} dm \dot{z}^2 \\ &= \frac{m}{2} \int_0^s \int_0^c (y\dot{k} + (x - x_f)\dot{\theta})^2 dx dy, \end{aligned} \quad (2.17)$$

y la energía generada por la deformación U de la estructura

$$U = \frac{1}{2} K_k k^2 + \frac{1}{2} K_\theta \theta^2, \quad (2.18)$$

se utilizaran para aplicar las ecuaciones de Lagrange. En la Ecuación (1.18) K_k y K_θ son las constantes de los resortes, k y θ corresponden a los ángulos de deformación. Del Apéndice B las ecuaciones de movimiento para este problema se plantean utilizando las ecuaciones Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i = \frac{\partial (\delta W)}{\partial (\delta q_i)}. \quad (2.19)$$

Aplicando la Ecuación (2.19) a la Ecuación (2.17) y a la Ecuación (2.18) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{k}} \right) &= m \int_0^s \int_0^c (y^2 \ddot{k} + y(x - x_f) \ddot{\theta}) dx dy \\ &= m \left[\frac{s^3 c}{3} \ddot{k} + \frac{s^2}{2} \left(\frac{c^2}{2} - x_f c \right) \ddot{\theta} \right], \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) &= m \int_0^s \int_0^c (y(x - x_f) \ddot{k} + y(x - x_f)^2 \ddot{\theta}) dx dy \\ &= m \left[\frac{s^2}{2} \left(\frac{c^2}{2} - x_f c \right) \ddot{k} + s \left(\frac{c^3}{3} - c^2 x_f + x_f^2 c \right) \ddot{\theta} \right]. \end{aligned}$$

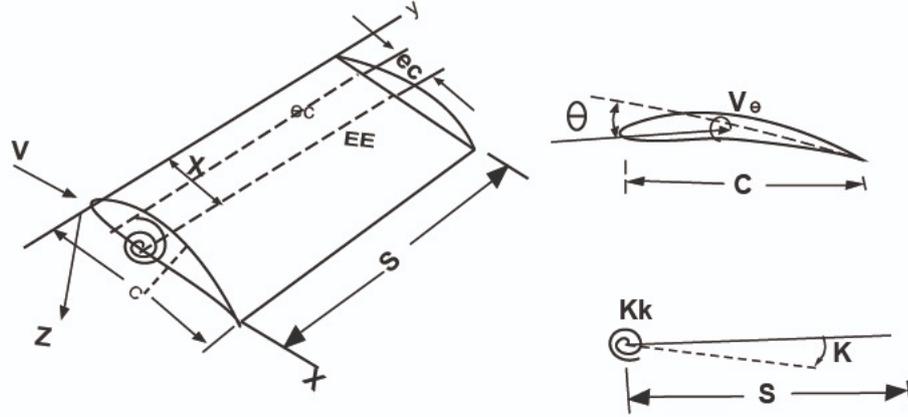


Figura 2.6: Descripción de un ala en dos dimensiones, simulando la rigidez a torsión y flexión a través de dos resortes en un modelo discreto.

Derivando las ecuaciones para la energía de deformación en los dos grados de libertad

$$\frac{\partial U}{\partial k} = K_k k, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = K_\theta \theta,$$

se puede expresar las ecuaciones de Lagrange en forma matricial, donde la incógnita es el vector $[k, \theta]$, teniendo

$$\begin{bmatrix} \frac{ms^3c}{3} & \frac{ms^2}{2} \left(\frac{c^2}{2} - cx_f \right) \\ \frac{ms^2}{2} \left(\frac{c^2}{2} - cx_f \right) & ms \left(\frac{c^3}{3} - c^2x_f + c_f^2 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{k} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_k & 0 \\ 0 & k_\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Asumiendo que no existe un acople en la matriz de masa se puede asumir que $x_f = c/2$; ver [12]. A partir de esto se calculan la frecuencia natural del sistema para los dos modos de vibración ω_k y ω_θ

$$\omega_k = \sqrt{\frac{K_k}{I_k}}, \quad \omega_\theta = \sqrt{\frac{K_\theta}{I_\theta}},$$

donde el momento inercial de cabeceo I_θ se expresa por

$$I_\theta = \int_0^c (x - x_f)^2 dm.$$

³Los mode shapes, son los autovectores, $[K - \omega^2 M]X$, asociados a los desplazamientos de una coordenada física cuando un sistema vibra a una determina frecuencia natural ω ; ver [12].

Por otro lado, si existe un acople en la matriz de masa, los modos de vibración y las frecuencias naturales naturales son diferentes a las expresadas anteriormente; ver [6, 7].

Las fuerzas aerodinámicas Q_k y Q_θ , las cuales actúan de forma inestable debido a la naturaleza del fenómeno, deben ser deducidas de la teoría de aerodinámica inestable y son expresadas en términos de las derivadas aerodinámicas para una frecuencia reducida $K = \omega c/(2V)$ específica; ver [7]. De este modo la fuerza de sustentación dL y el momento aerodinámico dM se expresan como

$$\begin{aligned} dL &= \frac{1}{2}\rho V^2 c dy a_w \left(\frac{y\dot{k}}{V} + \theta \right), \\ dM &= \frac{1}{2}\rho V^2 c^2 dy \left[e a_w \left(\frac{y\dot{k}}{V} + \theta \right) + M_\theta \frac{\dot{\theta}c}{4V} \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

en términos de la velocidad vertical $y\dot{k}$ se utilizarán para determinar el trabajo virtual sobre el ala, dado por el producto del momento generalizado, la fuerza de sustentación, el momento aerodinámico y los desplazamientos virtuales δk y $\delta\theta$, es decir

$$\delta W = \int_{wing} [dL(-y\delta k) + dM\delta\theta] \quad (2.22)$$

donde cada fuerza generalizada Q_k y Q_θ se expresan en términos de la fuerza de sustentación y el momento aerodinámico respectivamente.

$$\begin{aligned} Q_k &= \frac{\partial(\delta W)}{\partial(\delta k)} = - \int_0^s y dL \\ &= -\frac{1}{2}\rho V^2 c s^2 a_w \left(\frac{\dot{k}s}{3V} + \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Para la coordenada θ se tiene:

$$\begin{aligned} Q_\theta &= \frac{\partial(\delta W)}{\partial(\delta\theta)} = - \int_0^s dM \\ &= \frac{1}{2}\rho V^2 c^2 s a_w \left[e a_w \left(\frac{\dot{k}s}{2V} + \theta \right) + M_\theta \frac{\dot{\theta}c}{4V} \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Finalmente utilizando las ecuaciones de Lagrange, y expresándolas en forma matricial se puede expresar el problema, donde el vector a incógnita es $[k, \theta]^T$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_k & I_\theta \\ I_k\theta & I_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{k} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \rho V \begin{bmatrix} \frac{cs^3 a_w}{6} & 0 \\ -\frac{ec^2 s^2 a_w}{4} & -\frac{c^3 s}{8} M_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \\ \left[\rho V^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{cs^2 a_w}{4} \\ 0 & -\frac{ec^2 s a_w}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_k & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} k \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

De manera que la Ecuación (2.25) puede modelar el fenómeno de flutter en dos grados de libertad y se puede expresar de forma general por

$$\mathbf{A}\ddot{q} + (\rho V \mathbf{B} + \mathbf{D})\dot{q} + (\rho V^2 \mathbf{C} + \mathbf{E})q = 0. \quad (2.26)$$

2.4. ECUACIONES DE NAVIER STOKES

Las ecuaciones de Navier-Stokes son una herramienta matemática que permite conocer el comportamiento de un fluido viscoso o no viscoso. Se mostrará a groso modo la deducción de la ecuación de conservación de masa y conservación de momentum las cuales se van a utilizar para acoplar el modelo estructural y plantear el modelo flujo estructura que se pretende resolver en este documento. El material que se presenta en esta sección es tomado de [4, 1, 17]

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Para obtener la ecuación de conservación de masa se debe considerar un dominio Ω y un subdominio $\omega_0 \subseteq \Omega$ que tiene una frontera definida γ_0 . El decremento de la masa en el tiempo dentro de ω_0 esta dado por la integral de la densidad derivada en el tiempo

$$-\frac{d}{dt} \int_{\omega_0} \rho dx. \quad (2.27)$$

En la Ecuación (2.27) dx se asume como un elemento diferencial de volumen. Por otro lado la masa que sale deVI domio ω_0 a través de la frontera γ_0 esta dado como:

$$\int_{\gamma_0} \rho u \cdot n d\gamma_0. \quad (2.28)$$

De la Ecuación (2.27) y Ecuación (2.28) se puede concluir que el balance de masa en el dominio ω_0 esta formado como

$$-\frac{d}{dt} \int_{\omega_0} \rho dv = \int_{\gamma_0} \rho u \cdot n d\gamma_0. \quad (2.29)$$

Utilizando el teorema de divergencia, el cual establece la igualdad entre una integral de área y una de volumen para un volumen de control se tiene una nueva expresión

$$\int_{\omega_0} \left(\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \rho u \right) dv = 0.$$

Si se considera que el subdominio ω es arbitrario, se puede simplificar la Ecuación (2.29) y obtiene una expresión general

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho u) = 0. \quad (2.30)$$

Para un flujo incompresible, la densidad no cambia con respecto al tiempo y se asume como una constante. La Ecuación (2.30) de continuidad se expresa en forma simple como la divergencia de la velocidad de flujo,

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (2.31)$$

ECUACIÓN DE MOMENTUM

Para derivar la ecuación de conservación de momentum, se considera una partícula de fluido que ocupa un dominio ω en un tiempo t . La frontera del dominio ocupado por la partícula está definida como γ . Asumiendo que el elemento del fluido se mueve con el flujo ocupando un dominio ω' en un tiempo $t + \Delta t$ y aplicando la segunda ley de Newton se tendrá una expresión que iguala la derivada en el tiempo del impulso del flujo a las fuerzas que actúan en el mismo

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho u dx = \int_{\omega} \rho f dx + \int_{\gamma} S d\gamma. \quad (2.32)$$

En esta ecuación f representa las fuerzas de cuerpo por unidad de masa, S la fuerza de superficie por unidad de superficie y dx es un diferencial de volumen. Evaluando inicialmente el término del lado derecho de la Ecuación 1.32 en un tiempo $\Delta t = t' - t$

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho u dx = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\omega'} (\rho u)(x', t') dx - \int_{\omega} (\rho u)(x, t) dx \right), \quad (2.33)$$

y asumiendo Δt pequeño, la posición del punto x' se puede expresar de la siguiente forma

$$x' = x + \Delta t u(x, t) + O(\Delta t)^2.$$

Despreciando los términos de alto orden $O(\Delta t)^2$ se obtiene

$$x' = x + \Delta t u(x, t).$$

A partir de esto es posible expresar la primera integral del lado izquierdo de la Ecuación (2.33) reemplazando la aproximación de x' de la siguiente forma:

$$\int_{\omega'} (\rho u)(x', t') dx = \int_{\omega'} (\rho u)(x + \Delta t u, t + \Delta t) \left| \det \frac{\partial x'}{\partial x} \right|$$

donde la expresión $\frac{\partial x'}{\partial x}$ es la matriz jacobiana respecto a x y esta dada por

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \mathbf{I} + \Delta t \nabla u.$$

Tomando el determinante se tiene que

$$|\det \frac{\partial x'}{\partial x}| = 1 + \Delta t \nabla u.$$

A partir de esta simplificación y despreciando los términos de alto orden, se tiene

$$\int_{\omega'} (\rho u)(x', t') dx' = \int_{\omega} (\rho u)(x + \Delta t u, t + \Delta t) (1 + \Delta t \nabla u).$$

Combinando estas expresiones y utilizando la expansión de primer orden de Taylor de $(\rho u)(x + \Delta t u) dx$, vemos que se obtiene la siguiente aproximación

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho u dx = \int_{\omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + (\nabla \cdot u) \rho u + (u \cdot \nabla) \rho u \right]. \quad (2.34)$$

La Ecuación (2.34) puede ser expresarse en términos de producto tensorial

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho u dx = \int_{\omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + (\nabla \cdot (\rho u \otimes u)) \right],$$

y tomando en cuenta la Ecuación (2.31) de continuidad se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho u dx = \int_{\omega} \left[\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho (u \cdot \nabla) u \right]. \quad (2.35)$$

Para este caso la notación $(v \cdot \nabla)w$ se interpreta de la siguiente forma:

$$(v \cdot \nabla)w = \left[\sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right].$$

Las fuerzas de superficie están dadas por $S = \tau n$, donde τ representa un tensor de 3×3 simétrico, conocido como tensor de esfuerzo. S es por lo tanto es una resultante de la acción de τ en la dirección normal a la superficie del vector n . Finalmente combinando los resultados y utilizando el teorema de divergencia se tiene

$$\int_{\omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \nabla \cdot \tau - \rho f \right] dx = 0 \quad (2.36)$$

y

$$\int_{\omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \rho (u \cdot \nabla) u - \nabla \cdot \tau - \rho f \right] dx = 0. \quad (2.37)$$

Nuevamente se asume que el dominio ω es arbitrario, y simplificando bajo esta condición se puede expresar la Ecuación 2.37 de momentum

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \rho(u \cdot \nabla)u - \nabla \cdot \tau - \rho f = 0. \quad (2.38)$$

En el caso de fluidos no viscosos, el tensor de esfuerzo se reduce $\tau = -pI$, donde p es la presión e I es el tensor identidad 3×3 . Con esta simplificación se tiene que $\nabla \cdot \tau = -\nabla p$ y la ecuación de momentum para fluidos no viscosos se expresa en términos del gradiente de presión

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \rho(u \cdot \nabla)u - \nabla p - \rho f = 0. \quad (2.39)$$

Para el caso de fluidos viscosos, el tensor de esfuerzos está definido como $\tau = \tau' - pI$ donde τ' se conoce como el tensor de esfuerzos viscosos y es una función de la tasa de deformación del fluido $D(u)$

$$2D(u) = \nabla u + (\nabla u)^T. \quad (2.40)$$

Para fluidos Newtonianos el tensor de esfuerzos viscosos se expresa como

$$\tau' = 2\mu \left[D(u) - \frac{1}{3} \nabla \cdot u I \right] + \eta \nabla \cdot u I. \quad (2.41)$$

En esta expresión los coeficientes μ y η son positivos, μ es la viscosidad dinámica del fluido y η se conoce como la segunda viscosidad. El valor numérico de η es pequeño comparado con μ y ambos coeficientes son función de la temperatura. Para una temperatura uniforme, es decir un flujo isotérmico, en una región arbitraria Ω , se tiene que la ecuación de momentum está dada por

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) - \mu \Delta u - \left(\eta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot u) + \nabla p = \rho f, \quad (2.42)$$

donde $\Delta = \nabla^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ se conoce como el operador de Laplace. Como existen dos incógnitas que son presión y velocidad las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido Newtoniano se definen como el sistema compuesto por :

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) - \mu \Delta u + \nabla p = \rho f, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases} \quad (2.43)$$

con condiciones de iniciales y de frontera adecuadas; ver [16].

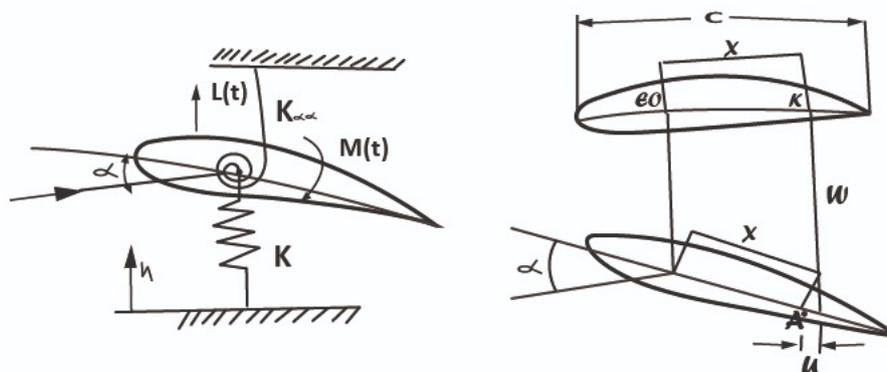


Figura 2.7: Perfil de sustentación en dos grados de libertad. Este perfil se puede mover en la dirección vertical h y rotar al rededor el del eje elástico α .

2.5. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE UN PERFIL DE SUSTENTACIÓN

En esta sección seguimos el documento [6, 12, 17]. Con el fin de realizar el planteamiento de las ecuaciones de movimiento de un perfil aerodinámico en dos dimensiones, se considera una superficie de sustentación flexible que esta soportada por dos resortes que le permiten moverse en la dirección vertical y rotar sobre el eje transversal del perfil como se muestra en la Figura 7. Los resortes están ubicados en el eje elástico del perfil, lo que le permite simular los momentos de restauración de la estructura originados por las propiedades de rigidez a flexión y a torsión respectivamente.

Debido a las fuerzas de presión y a las fuerzas viscosas generadas por el tensor de esfuerzos, se genera una fuerza $L(t)$, denominada fuerza de sustentación, la cual es perpendicular a la velocidad de corriente de flujo. Junto a esta fuerza, se genera un momento aerodinámico $M(t)$, comúnmente llamado cabeceo como se muestra en la Figura 2.7. Para deducir las ecuaciones de movimiento del perfil aerodinámico, considere la Figura 2.7, en esta figura se muestra el perfil aerodinámico en una posición neutral junto con una proyección del movimiento poste-

rior tomado como referencia la cuerda media aerodinámica. El desplazamiento horizontal y vertical de algún punto de la cuerda media aerodinámica esta dado por las componentes de desplazamiento horizontal u y vertical w de la siguiente forma

$$\begin{aligned} u &= x(1 - \cos(\alpha)), \\ w &= h + x \sin(\alpha). \end{aligned} \quad (2.44)$$

La energía cinética en el perfil de la Figura 2.7, tomando como referencia las dos velocidades se expresa como

$$T = \int_c \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] \rho_s(x) dx. \quad (2.45)$$

Integrado la Ecuación (2.45) respecto al desplazamiento, se tiene que la energía cinética del sistema esta dada de la siguiente forma

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_c \left[(\dot{h} + x\dot{\alpha} \cos(\alpha))^2 + (x\dot{\alpha} \sin(\alpha))^2 \right] \rho_s(x) dx, \\ T &= \frac{1}{2} \left[\int_c (\dot{h}^2 + 2\dot{h}x\dot{\alpha} \cos(\alpha) + x^2\dot{\alpha}^2 \cos^2(\alpha) + \int_c (x^2\dot{\alpha}^2 \sin^2(\alpha))) \rho_s(x) dx, \right. \\ T &= \frac{1}{2} \dot{h} \int_c \rho_s(x) dx + \dot{h}\dot{\alpha} \cos(\alpha) \int_c x\rho_s(x) dx + \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 \cos^2(\alpha) \int_c x^2 \rho_s(x) dx + \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 \sin^2(\alpha) \int_c x^2 \rho_s(x) dx, \\ T &= \frac{1}{2} \dot{h}^2 m + \dot{h}\dot{\alpha} \cos(\alpha) S_\alpha + \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 I_\alpha. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Aquí, m es la masa del perfil de sustentación, S_α es el momento estático alrededor del eje elástico e I_α es momento de inercia al rededor del eje elástico, y se definen como

$$\begin{aligned} m &= \int_c \rho_s(x) dx, \\ S_\alpha &= \int_c x\rho_s(x) dx, \\ I_\alpha &= \int_c x^2 \rho_s(x) dx. \end{aligned}$$

La energía de deformación en la estructura del perfil de sustentación de la Figura 2.7 se da en términos de la rigidez a flexión y torsión

$$U = \frac{1}{2} k_{hh} h^2 + \frac{1}{2} k_{\alpha\alpha} \alpha^2, \quad (2.47)$$

en esta ecuación k_{hh} es la rigidez del ala a flexión y $k_{\alpha\alpha}$ es la rigidez del ala a torsión. Utilizando la Ecuación (2.46) y la Ecuación (2.47) en las ecuaciones de Lagrange y posterior

igualando a la fuerza de sustentación y de momentum se obtiene la ecuación diferencial de movimiento de la superficie de sustentación descrita en la Figura 2.7,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = Q_i.$$

Asumiendo un movimiento no amortiguado y resolviendo para las coordenadas generalizadas h que se define como el movimiento vertical y α que es la rotación del perfil se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\dot{h}m + \dot{\alpha} \cos(\alpha)S_\alpha] + k_h h h &= -L(t), \\ \frac{d}{dt} [\dot{h} \cos(\alpha)S_\alpha + \dot{\alpha}I_\alpha] + \dot{h}\dot{\alpha} \sin(\alpha)S_\alpha + k_{\alpha\alpha}\alpha &= M(t). \end{aligned}$$

Realizando la derivación con respecto del tiempo se obtiene el sistema de ecuaciones no lineales que describen el movimiento del perfil de sustentación de la Figura 2.7,

$$\begin{aligned} \ddot{h}m + S_\alpha \ddot{\alpha} \cos(\alpha) - S_\alpha \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha) + k_h h h &= -L(t), \\ S_\alpha \ddot{h} \cos(\alpha) + I_\alpha \ddot{\alpha} + k_{\alpha\alpha}\alpha &= M(t). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Con el objetivo de realizar el acople con las ecuaciones Stokes, la fuerza de sustentación $L(t)$ y de momento aerodinámico $M(t)$ se van a expresar como una función del tensor de deformación del flujo de aire en la Ecuación (2.49), es decir

$$L = - \int_{\Gamma} \sum_{j=i}^2 \tau_{2j} n_j dS \quad M = \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^2 \tau_{i,j} n_j r_i^{ort} dS, \quad (2.49)$$

donde $r_1^{ort} = x_2 - x_{EO2}$, $r_2^{ort} = x_1 - x_{EO1}$ y Γ hace referencia a la superficie alar y n_i es el vector normal a la superficie ala. Para este caso τ es el tensor de deformación dado es

$$\tau_{i,j} = \rho \left[p \delta_{i,j} + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (2.50)$$

para mas detalle ver [17].

Capítulo 3

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

En este capítulo se presenta una introducción informal al método de elementos finitos en una y dos dimensiones, realizando énfasis en formulación débil de cada uno de los modelos que se utilizarán como ejemplo. Se dará una breve explicación de la discretización del espacio y el tiempo para realizar la solución de ecuaciones diferenciales a través del método de elementos finitos, así como explicación de las condiciones de frontera en ecuaciones diferenciales parciales. El material presentado en este capítulo es tomado de [15, 13, 16, 10]. En particular para una introducción completa y rigurosa consultar [13].

3.1. DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

El Método de Elementos Finitos (FEM) es un método numérico para solucionar problemas en Matemáticas, Física e Ingeniería. Este método permite dar solución a problemas que no poseen solución analítica o están sujetos a geometrías demasiado complejas. Los problemas se presentan en forma de ecuaciones diferenciales parciales (EDP), y pueden ser de tipo elíptico, parabólico o hiperbólico. De manera que se puede implementar el método

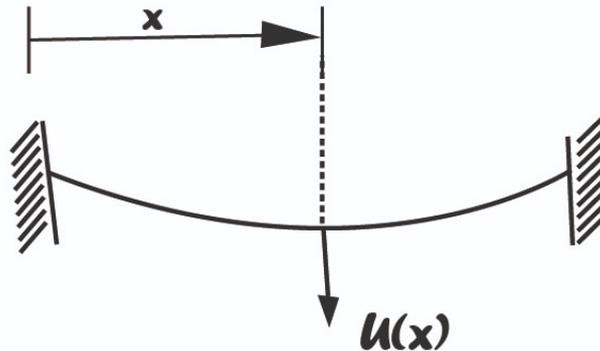


Figura 3.1: Cuerda elástica que se puede flexionar $u(x)$.

(FEM) para dar solución a problemas en una, dos y tres dimensiones. El método (FEM) consiste en realizar una subdivisión espacial del dominio físico en un número finito de elementos, (comúnmente se utilizan triángulos y cuadriláteros en dos dimensiones y tetraedros o prismas en tres dimensiones) donde la solución es aproximada por un conjunto apropiado de funciones. De esta forma el problema original es transformado en un problema discreto para un número finito de coeficientes desconocidos y puede ser resuelto usando un método iterativo. A continuación se presenta un breve resumen del método utilizado en la solución de problemas en una y dos dimensiones; ver [16].

3.2. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EN UNA DIMENSIÓN

El material de este capítulo se utiliza para ilustrar la aplicación del método FEM; ver [15], se van a considerar unos ejemplos con el objetivo de mostrar la forma de implementarlo, de manera que se pueda observar en cada uno de ellos las formulaciones débil, Galerkin y matricial. Inicialmente se considera un problema de una cuerda que esta sujeta a dos puntos fijos a, b . Para este problema se asume que la cuerda es elástica, la elasticidad de la cuerda esta definida por la función $K(x)$ como se muestra en la Figura 3.1 y $u(x)$ es la deflexión de la misma. La ecuación que modela este problema es una ecuación diferencial de segundo

orden. El problema consiste en encontrar $u : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' = f, & \text{para todo } x \in [a, b], \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

La formulación en la Ecuación (3.1) se conoce como la formulación fuerte del problema, asociado a la condición de frontera de Dirichlet. Para encontrar la formulación débil del problema se debe multiplicar por una función de prueba v . Las funciones de prueba deben estar definidas de manera que $v \in C_0^\infty(a, b)$. Luego de multiplicar por las funciones de prueba se utiliza la integración por partes, esto con el fin de reducir las derivadas en la ecuación. De esta forma se obtiene la formulación débil,

$$-\int_a^b ((k(x)u'(x))'v(x) = \int_a^b fv(x). \quad (3.2)$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que la función de prueba evaluada en la frontera es igual a cero, se obtiene la formulación débil preliminar. Una primera versión de la formulación débil esta dada de la siguiente forma, el problema consiste en encontrar $u : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que

$$\begin{cases} \int_a^b k(x)u'(x)v'(x) = \int_a^b fv(x), & \text{para todo } v \in C_0^\infty(a, b), \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

En el caso general para obtener la formulación débil final u y v deber ser tal que todas las integrales estén definidas. La formulación débil final se escribe entonces en espacios funciones de Hilbert adecuados [3, 13, 8]. Aquí notamos que de la formulación débil preliminar se puede deducir la formulación de Galerkin y matricial. Para más detalles sobre formulación débil ver [13, 8]. La formulación de Galerkin, consiste en encontrar un espacio que contenga a u y sea de dimensión finita. Para las funciones de prueba v también se define un espacio de dimensión finita. Para generar el espacio, suponga una base de dimensión finita $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n)$. El espacio V esta generado por la base

$$V = \text{gen}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n). \quad (3.4)$$

Utilizando este espacio se realiza la formulación de Galerkin la cual esta dada multiplicando por la función de prueba en cada uno de los elementos

$$\begin{cases} \int_a^b k(x)u'(x)v'(x) = \int_a^b fv(x), & \text{para todo } v \in V, \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Para esta formulació es suficiente mostrar que

$$\int_a^b k(x)u'(x)\varphi'_i = \int_a^b f\varphi'_i \quad \text{para todo } i \in [1, 2, 3, \dots, n] \quad (3.6)$$

y se asume que la función $u(x)$ es una combinación lineal, de manera que existe $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{R}$ de manera que se puede expresar por

$$u(x) = x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + x_3\varphi_3 + \dots + x_n\varphi_n, \quad (3.7)$$

para toda $x \in [a, b]$. Si se reemplaza la Ecuación (3.7) en la formulación de Galerkin se obtiene la formulación matricial

$$x_1 \int_a^b k(x)\varphi_1\varphi'_i + x_2 \int_a^b k(x)\varphi_2\varphi'_i + \dots + x_n \int_a^b k(x)\varphi_n\varphi'_i = \int_a^b f\varphi'_i \quad (3.8)$$

en forma mas compacta se puede expresar como

$$\sum_{k=1}^n x_k \int_a^b k(x)\varphi_k\varphi'_i = \int_a^b f\varphi'_i, \quad (3.9)$$

a partir de esto se obtiene un sistema lineal. La formulación matricial esta dada como, encontrar x_1, x_2, \dots, x_n tal que

$$\begin{cases} Ax = b, \\ a = \int_a^b k(x)\varphi'_i\varphi'_j, \\ b = \int_a^b f\varphi'_i, \\ u = x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \dots + x_n\varphi_n. \end{cases} \quad (3.10)$$

Ejemplo 1:

Como ejemplo se considera el problema expuesto anteriormente con los valores de $k(x) = 1$ y $f = -1$. La formulación fuerte esta dada de la siguiente forma. Encontrar $u : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que

$$\begin{cases} u'(x) = -1, & \text{en } x \in [0, 1], \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Para obtener la formulación débil preliminar se multiplica por las funciones de prueba $v(x)$ y se integra en el intervalo $[0, 1]$. El problema se puede expresar de la siguiente forma. Encontrar u tal que

$$\begin{cases} \int_0^1 u'(x)v(x)dx = -\int_0^1 v(x)dx, & \text{para todo } v(x) \in C_0^\infty(0, 1), \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Para la formulación de Galerkin, se define el espacio $V = \text{gen} \langle \varphi_1 \rangle = [\alpha \sin(\pi x) / \alpha \in \mathfrak{R}]$ con $\varphi_1(x) = \sin(\pi x)$. Así, la formulación de Galerkin queda: Encontrar $u \in V$ tal que

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 v(x)dx \quad \text{para todo } v(x) \in C_0^\infty(0,1). \quad (3.13)$$

Entonces en la matriz A esta dada como $A = [a_{11}]$ se define como

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_0^1 \varphi_1' \varphi_1' dx = \int_0^1 \pi^2 \cos^2(\pi x) dx, \\ &= \pi^2 \int_0^1 \cos^2(\pi x) dx, \\ &= \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

El vector $[b_1] = b_1$ esta dado como

$$b_1 = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}. \quad (3.15)$$

La formulación de Galerkin queda definida de la siguiente forma. Encontrar $u \in V$ tal que:

$$\begin{cases} \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = - \int_0^1 v(x)dx, & \text{para todo } v(x)dx \in V, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

La solución del problema está planteada a través de la formulación matricial. Encontrar x tal que

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ \frac{\pi^2}{2} x_1 &= \frac{2}{\pi}, \\ x &= \frac{4}{\pi^3}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

de esta forma u esta definida de la siguiente forma

$$u(x) = \frac{4}{\pi^3} \sin(\pi x). \quad (3.18)$$

Ejemplo 2:

Para este segundo ejemplo se considera el mismo problema del ejemplo 1, utilizando una función de prueba adicional $\varphi_2(x) = x(1-x)$. La formulación débil y la formulación de Galerkin quedan definidas al igual que en el ejemplo 1. Para la formulación matricial se calculan las integrales de la matriz A obteniendo los coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{22}

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_1'(x)dx = \frac{\pi^2}{2}, \\ a_{12} &= \int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_2'(x)dx = \int_0^1 \pi \cos(\pi x)[1-2x]dx = \frac{4}{\pi}, \\ a_{22} &= \int_0^1 \varphi_2'(x)\varphi_2'(x)dx = \int_0^1 [1-2x][1-2x]dx = \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para el vector b de la formulación matricial se tiene

$$\begin{aligned} b_1 &= \int_0^1 f\varphi_1(x)dx = \int_0^1 \sin(\pi x)\frac{2}{\pi}, \\ b_2 &= \int_0^1 f\varphi_2(x)dx = \int_0^1 x(1-x)\frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Utilizando la Ecuación (3.10) se establece la formulación matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

reemplazando los valores correspondientes en la Ecuación (3.21) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{4}{\pi} \\ \frac{4}{\pi} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Solucionando este sistema se obtienen valores para $x_1 = 0$ y $x_2 = 1/2$. Lo cual lleva a plantear la solución del problema $u(x) = x_1\varphi_1(x) + x_2\varphi_2(x)$.

$$u(x) = \frac{1}{2}x(1-x). \quad (3.23)$$

DISCRETIZACIÓN DEL ESPACIO

Para el ilustrar el método de FEM, nuevamente se considera un intervalo $[a, b]$. Este intervalo en este caso se divide en n subintervalos. A este proceso se le conoce como triangulación. El objetivo de este proceso es construir unas funciones base que definan la malla del dominio. Entonces para esto se define T^h como una triangulación, del intervalo $[a, b]$ con parámetro h . La triangulación tiene $n + 1$ elementos, de manera que los elementos se definen como $E_{n+1} = (x_n + x_{n+1})$. Note que para dos elementos diferentes del intervalo se cumplen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} E_i \cap E_j &= \emptyset, \\ \cup \bar{E}_i &= [a, b]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

El espacio asociado en $P^1(T^h)$ tal que

- Cada función de prueba $v \in P^1(T^h)$ es globalmente continua en el intervalo $[a, b]$.
- Cada función de prueba $v \in P^1(T^h)$ en los elementos E_i con polinomios de grado 1.

Entonces el espacio de elementos finitos V^h queda definido como

$$V^h = \{v \in P^1(T^h) / v(a) = 0, v(b) = 0\}. \quad (3.25)$$

Podemos ver en $V^h = \text{span}[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ donde cada φ_i esta asociada a cada uno de los vértices x_i y se define por

$$\varphi_i(x) = \varphi_{x_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_i \\ 0 & \text{si } x = x_j \quad i \neq j \\ \text{Lineal en cada elemento.} \end{cases} \quad (3.26)$$

La dimensión de V^h es N , para el caso de T^h con $N + 2$ vértices. De esta forma para cada elemento solo existen dos funciones base, el resto tiene valor de cero para los elementos donde no están soportadas. El soporte de cada función esta definido en dos elementos

$$\varphi_{x_i} = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in \bar{E}_i = [x_{i-1} - x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in \bar{E}_{i+1} = [x_i - x_{i+1}]. \end{cases} \quad (3.27)$$

Para el caso de la formulación de Galerkin en el espacio definido V^h se deben calcular las integrales en cada uno de los elementos, para este caso es útil usar integrales locales,

$$\int_a^b F(x)dx = \sum_{i=1}^{N+1} \int_{E_i} F(x)dx. \quad (3.28)$$

Para el caso general donde la triangulación esta definida como $P^q(T^h)$ se tiene

$$P^q(T^h) = [\varphi_i]_{i=0}^{i=n} \quad (3.29)$$

para las triangulación $P^q(T^h) = v : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$, se debe cumplir que

- Cada función de prueba $v \in P^q(T^h)$ es globalmente continua en el intervalo $[a, b]$.
- Cada función de prueba $v \in P^q(T^h)$ en los elementos E_i son polinomios de grado k .

CONDICIONES DE FRONTERA

Condición de Frontera de Neuman: La condición de frontera de Neuman, a diferencia de la condición de Dirichlet, asume el valor de la derivada de la función solución en la frontera del dominio. Para ilustrar la aplicación del método se considera nuevamente el problema de

la cuerda elástica, esta vez asociado a la condición de frontera de Neuman. El problema queda planteado de la siguiente forma. Encontrar $u : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' = f, & \text{en } x \in [a, b], \\ k(a)u'(a) = g(a), \\ k(b)u'(b) = g(b). \end{cases} \quad (3.30)$$

la condición de compatibilidad esta dada a través de la Ecuación (2.32)

$$g(a) - g(b) = k(a)u'(a) - k(b)u'(b) = \int_a^b f dx, \quad (3.31)$$

y la condición de solubilidad esta dada a través de

$$\int_a^b u dx = 0. \quad (3.32)$$

La formulación débil preliminar se obtiene multiplicando por una función de prueba e integrando por partes y queda expresada de la siguiente forma. Encontrar $u : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que

$$\begin{cases} \int_a^b k(x)u'(x)v'(x) dx = \int_a^b f v(x) dx + [g(b)v(b) - g(a)v(a)], & \text{para todo } v \in C^\infty(a, b), \\ g(a) - g(b) = \int_a^b f dx, \\ \int_a^b u dx = 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

La formulación de Galerkin en el espacio $V^h = P^1(T^h)$ queda dada. Encontrar $u \in P^1(T^h)$ tal que:

$$\begin{cases} \int_a^b k(x)u'(x)v'(x) dx = \int_a^b f v(x) dx + [g(b)v(b) - g(a)v(a)], & \text{para todo } v \in P^1(T^h), \\ g(a) - g(b) = \int_a^b f dx, \\ \int_a^b u dx = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Para la formulación matricial se define $u = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \dots + \alpha_{N+2}\varphi_{N+2}$. Note que para la condición de solubilidad se tiene que

$$\int_a^b u dx = \alpha_1 \int_a^b \varphi_1 dx + \alpha_2 \int_a^b \varphi_2 dx + \dots + \alpha_{N+2} \int_a^b \varphi_{N+2} dx = \vec{\alpha}^T \vec{m}, \quad (3.35)$$

donde: $m = [m_1, m_2, \dots, m_N]^T$ and $m_i = \int_a^b \varphi_i dx$. Entonces la formulación matricial queda dada. Encontrar $\vec{\alpha} \in \mathfrak{R}^{N+2}$ tal que

$$\begin{cases} A\vec{\alpha} = \vec{b} \\ \vec{\alpha}m = 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Imponiendo la restricción del sistema se expresa a través de los multiplicadores de Lagrange, con esto se obtiene

$$\begin{bmatrix} A & m \\ m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Condición de Frontera de Robin: La condición de frontera de Robin, asume el valor de la derivada de la función solución en todo el dominio. Para ilustrar la aplicación del método se considera nuevamente el problema de la cuerda elástica. El problema queda planteado de la siguiente forma. Encontrar $u : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' = f, & \text{en } x \in [a, b], \\ \tau k(x)u(x)' + \gamma u(x) = g(x), & x = a, b. \end{cases} \quad (3.38)$$

La formulación débil preliminar del problema se obtiene multiplicando por una función de prueba e integrando en el dominio. Para la formulación de Galerkin se tiene: Encontrar $u \in P^1(T^h)$ tal que

$$\int_a^b K(x)u'(x)v'(x)dx + \frac{\gamma}{\tau}[u(b)v(b) - u(a)v(a)] = \int_a^b f(x)v(x)dx - \frac{a}{b}[g(b)g(b) - g(a)g(a)]. \quad (3.39)$$

Por último la formulación matricial esta dada de la siguiente forma: Definido $u = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \dots + \alpha_{N+2}\varphi_{N+2}$. Encontrar $\vec{\alpha} \in \mathfrak{R}^{N+2}$ tal que

$$\begin{cases} A\vec{\alpha} = \vec{b}, \\ a_{i,j} = \int_a^b K(x)\varphi_i'\varphi_j'dx + \frac{\gamma}{\tau}[\varphi_i(b)\varphi_j(b) - \varphi_i(a)\varphi_j(a)], \\ b_{i,j} = \int_a^b = \frac{1}{\tau}[g(b)\varphi_i(b) - g(a)\varphi_i(a)]. \end{cases} \quad (3.40)$$

3.3. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EN DOS DIMENSIONES

El método de elementos finitos en dos o tres dimensiones es planteado en el mismo sentido que en una dimensión. Para ilustrar la aplicación se considera el ejemplo de la cuerda elástica pero en dos dimensiones. Hallar $u : D \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $D \subseteq \mathfrak{R}^2(\mathfrak{R}^3)$

$$\begin{cases} -\text{div}(k(x))\nabla u = f, & \text{para todo } x \in D, \\ u = g, & \text{para todo } x \in \partial D. \end{cases} \quad (3.41)$$

Si $K(x) \geq K_{min}(x) > 0$ se dice que la ecuación diferencial es de tipo elíptica para todo $x \in D$. La formulación débil preliminar esta dada nuevamente multiplicando por una función de prueba $v \in C_0^\infty$ y utilizando la identidad de Green se obtiene. Hallar $u : D \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que

$$\begin{cases} \int_D k(x) \nabla u(x) \nabla v(x) = \int_D f v(x), & \text{para todo } v \in C_0^\infty(D), \\ u(x) = g(x), & \text{para todo } x \in \partial D. \end{cases} \quad (3.42)$$

de donde se tiene que

$$- \int_D \operatorname{div}(k(x)) \nabla u = \int_D k(x) \nabla u(x) \nabla v(x) - \int_D k(x) \nabla u(x) \cdot \eta. \quad (3.43)$$

Como antes, comentamos que para obtener la formulación débil final u y v deben pertenecer a espacios de funciones de Hilbert adecuados [3, 13, 8]. Aquí notamos que de la formulación débil preliminar se puede deducir la formulación de Galerkin y matricial. Para más detalles sobre formulación débil ver [13, 8]. Para la formulación de Galerkin, se parte de la suposición que D es un dominio poligonal y se realiza una triangulación T^h , donde D es dividido en elementos triangulares. Si se supone que k_1, k_2, \dots, k_n son triángulos el dominio D , el dominio D se puede expresar como

$$D = \cup_{i=1}^n K_i, \quad (3.44)$$

donde se tiene que $K_i \cap K_j = \emptyset$. A partir de esto se denota el espacio $P^1(T^h) = v : D \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que

- v es globalmente continua.
- v restringida en cada elemento k_i es un polinomio de grado 1 en cada variable.

Para el caso de $P^r(T^h) = D \rightarrow \mathfrak{R}$ con $r \geq 1$ se tiene que

- v es globalmente continua.
- v evaluada en cada elemento k_i es un polinomio de grado r en cada variable.

Una base $P_0^1(T^h) = \{v \in P^1(T^h) \text{ tal que } v(x) = 0 \text{ para todo } x \in \partial D\}$. Asumiendo un comportamiento lineal para cada elemento, una base para $P^1(T^h)$ se puede expresar como

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i, \\ 0 & x \neq x_i. \end{cases} \quad (3.45)$$

Sea el conjunto de los elementos de la triangulación I_σ e I_Γ en conjunto de elementos en la frontera dados como

$$I_\sigma = \{i \mid x_i \in D\}, \quad (3.46)$$

$$I_\Gamma = \{i \mid x_i \in \partial D\}. \quad (3.47)$$

Como $u \in P^1(T^h)$ y se quiere que $u(x) = g(x)$ para toda x que $\in \partial D$ se puede expresar la solución de la siguiente forma

$$u(x) = \sum_{i \in I_\sigma} \alpha_i \varphi_{x_i}(x) + \sum_{l \in \Gamma} g(x_l) \varphi_{x_l}(x), \quad (3.48)$$

obteniendo así la formulación matricial

$$A\vec{\alpha} = \vec{b}, \quad (3.49)$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= [\alpha_i]_{i \in I_\sigma}, \\ A &= [a_{i,j}] = \int_D k(x) \nabla \varphi_i(x) \varphi_j(x) \forall i, j \in \mathfrak{S}_\sigma, \\ b_i &= \int_D f \varphi_i - \sum_{l \in \Gamma} \int_D k(x) \nabla \varphi_l(x) \nabla \varphi_i(x). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Para ilustrar la aplicación del método de elementos finitos utilizando otras condiciones de frontera se considera el mismo ejemplo de la cuerda elástica, de manera que se pueda aplicar la condición de compatibilidad y la condición de solubilidad. El problema en la formulación fuerte se tiene

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K(x)\nabla u(x)) = f & \text{en } D, \\ k(x)\nabla u(x) \cdot \eta = g(x) & \text{en } \partial D, \\ \int_{\partial D} g(x) + \int_D f = 0, \\ \int_D u(x) = 0. \end{cases} \quad (3.51)$$

Si se multiplica por las funciones de prueba $v \in C^\infty(D)$ y se integra por partes sobre el dominio D , se obtiene la formulación débil preliminar la cual esta dada a continuación.

Hallar $u : D \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que

$$\begin{cases} \int_D K(x)\nabla u(x)\nabla v(x) = \int_{\partial D} f v(x) + \int_{\partial D} g(x)v(x) \\ \partial_D u(x) = 0. \end{cases}, \quad (3.52)$$

Como antes, comentamos que para obtener la formulación débil final u y v deben pertenecer a espacios de funciones de Hilbert adecuados [3, 13, 8]. Aquí notamos que de la formulación débil preliminar se puede deducir la formulación de Galerkin y matricial.

A continuación y como una aproximación al problema que se pretende solucionar en este documento, se realiza la aplicación del método de elementos finitos FEM a la ecuación de Stokes en estado estacionario. Para este problema se tiene dos incógnitas $u(x)$ que denota la velocidad del fluido y $p(x)$ que es la presión. El problema queda planteado como sigue a continuación.

$$\begin{cases} -\nu\Delta\vec{u}(x) + \nabla p = f & \text{en } D, \\ \operatorname{div}\vec{u}(x) = g(x) & \text{en } D, \\ \vec{u}(x) = \vec{\alpha} & \text{en } \partial D. \end{cases} \quad (3.53)$$

Si $u(x)$ es un vector defino como $\vec{u}(x) = [u_1, u_2]^T$ y p es un escalar se tiene que el problema puede ser expresado como

$$\begin{cases} -\nu\Delta u_1(x) + \partial_1 p = f_1(x), \\ -\nu\Delta u_2(x) + \partial_2 p = f_2(x), \\ \partial_1 u_1(x) + \partial_2 u_2(x) = g(x). \end{cases} \quad (3.54)$$

Si se desea realizar el planteamiento del modelo transitorio, se tiene la siguiente formulación: $\partial_t u_t + \nu\Delta\vec{u}(x) + \nabla p = f$. Para una primera versión de la formulación débil, la formulación débil preliminar, se obtiene multiplicando por funciones de prueba, y si se parte de la suposición que $\nu = 1$, se obtiene

$$\begin{cases} \int_D \nabla\vec{u}(x) \cdot \nabla\vec{v}(x) - \int_D \operatorname{div}(\vec{v}(x))p = \int_D f(x)v(x) & \text{para todo } \vec{v}(x) \in (C^\infty(D))^2, \\ \int_D \operatorname{div}\vec{u}(x)z(x) = \int_D g(x)z(x) & \text{para todo } \vec{v}(x) \in C^\infty(D). \end{cases} \quad (3.55)$$

Recuerde que para obtener la formulación débil las funciones involucradas deben pertenecer a espacios de funciones de Hilbert adecuados [3, 13, 8]. Aquí notamos que de la formulación débil preliminar se puede deducir la formulación de Galerkin y matricial.

Para la formulación de Galerkin se define el vector velocidad $\vec{u} \in U$ y se define la presión como un escalar $p \in P$ como sigue (combinación conocida como espacios de elementos finitos de Taylor-Hood, [3])

$$\begin{aligned} U &= [(u_1, u_2)^T / u_i \in P^2(D)] = \operatorname{Gen} [\vec{\varphi}_i] = \operatorname{Gen} [(\varphi_l, 0), (0, \varphi_m)] \\ P &= P^1(D) = \operatorname{Gen} [\psi_i] \end{aligned} \quad (3.56)$$

A partir de esto se puede expresar el sistema matricial como

$$\begin{aligned} A\vec{u} + Bp &= f \\ B^T\vec{u} &= g, \end{aligned} \quad (3.57)$$

donde

$$A = [a_{i,j}] = a_{i,j} = \int_D \nabla \vec{\varphi}_i \cdot \nabla \vec{\varphi}_j,$$

de igual forma

$$B = [b_{i,j}] = b_{i,j} = - \int_D \operatorname{div} \vec{\varphi}_i \psi_j,$$

y por ultimo

$$f_i = \int_D \vec{f} \cdot \vec{\varphi}_i,$$

$$g_i = - \int_D g \psi_i.$$

Remarcamos que en ocasiones este esquema de aproximación es denominado como formulación de elementos finitos mixtos en lugar de formulación de Galerkin. Algunos autores prefieren la denominación de elementos finitos mixtos cuando las variables (como flujo en algunos casos) no hace parte de la formulación original del problema y fueron introducidas por alguna motivo. En todo caso, es sabido que al seleccionar espacios para las variables involucradas estos espacios deben ser compatibles para poder obtener resultados de estabilidad y aproximación de soluciones, la más importante de estos requerimientos es la condición de Babuzka- Brezzi, [3, 11]. En el caso de las ecuaciones de Stokes y similares, es conocido que los espacios de Taylor-Hood satisfacen los requerimientos de compatibilidad necesarios. Para mas detalles ver [8, 13, 16]. En particular para detalles de la compatibilidad entre los espacios para la velocidad y presión [3].

Capítulo 4

RESULTADOS NUMÉRICOS

En este capítulo se presenta el problema que se desea solucionar, seguido de una explicación de los métodos para solucionar de manera simultanea el problema de flujo y el problema estructural. De la solución combinada se obtendrán los gráficos los cuales se presentaran junto a una explicación de cada uno de ellos, estos resultados se obtienen numéricamente a través de FreeFem ++ y en particular se utilizara el código planteado en el manual de usuario llamado Navier Stokes; ver [10], este código fue modificado y adaptado los requerimientos para solucionar el problema que se plantea a continuación.

4.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para realizar el planteamiento del problema se considerara un perfil aerodinámico que tiene dos grados de libertad, uno a flexión y otro a torsión, esto implica que se puede rotar al rededor del eje elástico y se puede desplazar en la dirección vertical. La simulación numérica consiste en la aplicación del método de elementos finitos FEM en la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes acopladas con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que describen el movimiento del perfil en el flujo a diferentes velocidades. Lo que se pretende con la simulación es determinar en que momento se alcanza la inestabilidad estructural del perfil a medida que aumenta la velocidad del fluido teniendo un flujo laminar y permitiendo grandes oscilaciones en el movimiento del perfil. Para definir el problema se plantean las

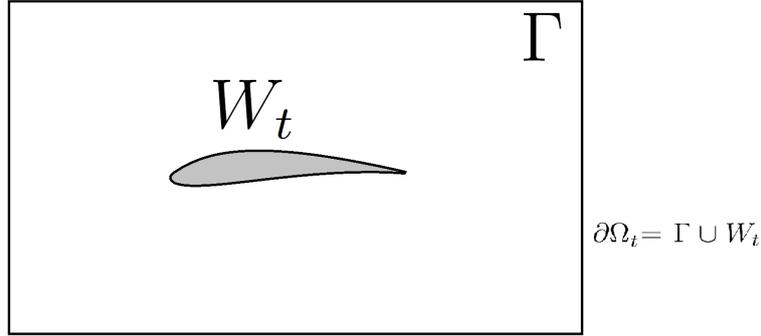


Figura 4.1: Dominio computacional del perfil se sustentación, donde Γ es una frontera fija y W_t es una frontera móvil.

ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que simulan el desplazamiento y la rotación del perfil alar asociadas a las fuerzas de sustentación y momento aerodinámico, estas fuerzas son las que actúan en el ala de una aeronave en vuelo tal como se demuestra en la sección 2.3. Estas ecuaciones se acopladas con las ecuaciones de Navier-Stokes las cuales definen el comportamiento del flujo de aire al rededor del ala. Con el fin de plantear el modelo se define un dominio $\Omega_t \subset R^2$ para algún tiempo $t \in (0, T)$ donde la frontera está dada por $\partial\Omega_t$ y dividida en una frontera fija Γ y una frontera en movimiento W_t . Vea Figura 4.1. En este caso, el flujo que atraviesa el dominio puede ser descrito a través de las ecuaciones de conservación del momento y conservación de la masa dadas como se expresa a continuación

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \operatorname{div} T(\vec{u}, p) = \vec{f} & \text{en } \Omega_t, \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 & \text{en } \Omega_t, \\ \vec{u} = \vec{h} & \text{en } \partial\Omega_t, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde u denota la velocidad, p la presión cinemática, es decir la presión dividida por la densidad y ν la viscosidad cinemática (mas la viscosidad turbulenta) del fluido. Por otro lado

$$T(\vec{v}, p) = -pI + 2\nu \vec{D}\vec{v} \quad \text{donde} \quad \vec{D}\vec{v} = \frac{1}{2}(\nabla \cdot \vec{v} + \nabla^T \cdot \vec{v}),$$

es el tensor de esfuerzo linealizado. Note que $T = [\tau_{ij}]$ con componentes dadas por

$$\tau_{ij} = p\delta_{ij} + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

A estas ecuaciones se acoplan dos ecuaciones que simulan la carga aerodinámica. En este caso se considera solo la fuerza sustentación y momento aerodinámico, no se tiene en cuenta

la fuerza de arrastre. Tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\begin{cases} L(t) = -m\ddot{h} - S_\alpha\ddot{\alpha}\cos(\alpha) + S_\alpha\dot{\alpha}^2\sin(\alpha) - K_{hh}h, \\ M(t) = S_\alpha\ddot{h}\cos(\alpha) + I_\alpha\ddot{\alpha} + K_{\alpha\alpha}\alpha, \end{cases} \quad (4.2)$$

donde m representa la masa, h el desplazamiento vertical, I_α y S_α representan momentos de inercia alrededor del eje elástico, $K_{\alpha\alpha}$ y K_{hh} son la rigidez a torsión y a flexión respectivamente. Las fuerzas de sustentación $L(t)$ y de momento $M(t)$ están dadas por

$$L(t) = - \int_{W_t} \rho \sum_{j=1}^2 \tau_{2j} n_j dS \quad (4.3)$$

$$M(t) = \int_{W_t} \rho \sum_{i,j=1}^2 \tau_{ij} n_j r_i^{ort} dS \quad (4.4)$$

$$r_1^{ort} = -(x_2 - x_{EO2}) \quad r_2^{ort} = -(x_1 - x_{EO1}). \quad (4.5)$$

para mas detalles ver [17].

4.2. METODO NUMÉRICO PARA EL PROBLEMA DE FLUIDOS

Para dar solución al problema expresado en la sección anterior, se iniciara con el flujo de aire, para esto se debe realizar la formulación débil de la Ecuación 4.1, tal como se expreso anteriormente en el Capitulo 3, para profundizar en el método FEM se puede consultar [16]. La formulación débil para el problema planteado en (4.1) se obtiene multiplicando por funciones de prueba v y q que pertenecen a los elementos de Taylor Hood, esto con el fin de determinar los valores incógnita que son presión y velocidad. La velocidad u se aproximara utilizando elementos de grado dos $P^2 \in X_h$ y la presión p se aproximara utilizando elementos de grado uno $P^1 \in M_h$. De la misma forma los espacio X_h y M_h se definen de la siguiente forma. expresa de la siguiente como

$$X_h = \{v \in H^1(0,1)/K \in T_h, \quad v|_K \in P^2\}, \quad (4.6)$$

$$M_h = \{q \in H^1(0,1)/K \in T_h \quad v|_K \in P^1\}. \quad (4.7)$$

Dado esto, la formulación del problema (4.1) en forma débil esta dado por: Encontrar u y p tal que:

$$\begin{cases} (\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}) - \nu \Delta u + (\nabla p) = \vec{f}, & \text{en } \Omega_t, \\ (\nabla \cdot \vec{u}) = 0, & \text{en } \Omega_t, \\ \vec{u} = \vec{h}, & \text{en } \partial\Omega_t, \end{cases} \quad (4.8)$$

para realizarla aproximación numérica se tiene en cuenta como base del codigo la aproximación propuesta por Chorin; ver [10]. En esta aproximación de las ecuaciones de Navier Stokes el término de derivada material $\partial_t u + u \cdot \Delta u$ se aproxima por $u \circ X(x) = u(x - u(x)\delta t)$. Planteando el modelo con la aproximación numérica se tiene

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta t}(\vec{u}^{m+1} - \vec{u}^m \circ X^m) - \nu \Delta \vec{u}^{m+1} + (\nabla p^{m+1}) = \vec{f} & \text{en } \Omega_t, \\ \nabla \cdot \vec{u}^{m+1} = 0 & \text{en } \Omega_t, \\ \vec{u}^{m+1} = \vec{h} & \text{en } \partial\Omega_t. \end{cases} \quad (4.9)$$

o, colocando los términos explícitos al lado derecho de la ecuación

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta t} \vec{u}^{m+1} - \nu \Delta \vec{u}^{m+1} + (\nabla p^{m+1}) = \vec{f} + \frac{1}{\delta t} \vec{u}^m \circ X^m & \text{en } \Omega_t, \\ \nabla \cdot \vec{u}^{m+1} = 0 & \text{en } \Omega_t, \\ \vec{u}^{m+1} = \vec{h} & \text{en } \partial\Omega_t. \end{cases} \quad (4.10)$$

Note que esta última ecuación es similar a la ecuación de Stokes (3.53) pero con un término adicional $\frac{1}{\delta t} \vec{u}^{m+1}$ (conocido como término de Brinkman). Esta ecuación puede ser aproximada por una formulación de elementos finitos de Taylor-Hood como fue mencionado en el Capítulo 3. El término adicional $\frac{1}{\delta t} \vec{u}^{m+1}$ genera una matriz de masa adicional en la formulación matricial.

4.3. METÓDO DE EULER PARA EL PROBLEMA DE EDO

Para resolver la parte estructural del problema, se debe resolver el sistema planteado en (4.2). Estas ecuaciones simulan el movimiento de un perfil alar en dos grados de libertad, el desplazamiento vertical h y la rotación α al rededor del eje elástico EO . El primer paso para solucionar este sistema, Ecuación (4.2), es escribirlo en forma matricial como

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = f \quad (4.11)$$

$$\begin{bmatrix} m & S_\alpha \cos \alpha \\ S_\alpha \cos \alpha & I_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{hh} & -\dot{\alpha} S_\alpha \sin(\alpha) \\ 0 & d_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{hh} & 0 \\ 0 & K_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L(t) \\ M(t) \end{bmatrix}.$$

Para resolver la Ecuación (4.10) en función de \ddot{h} y $\ddot{\alpha}$ se multiplica por la matriz inversa A^{-1} . La matriz inversa esta dada como

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{I_\alpha}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} & \frac{-S_\alpha \cos(\alpha)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \\ \frac{-S_\alpha \cos(\alpha)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} & \frac{m}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \end{bmatrix}.$$

Al multiplicar A^{-1} por cada término de la Ecuación (4.10) se obtienen las matrices:

$$A^{-1}B = B',$$

Donde

$$B' = \begin{bmatrix} \frac{I_\alpha d_{hh}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} & \left[\frac{-\dot{\alpha} S_\alpha \sin(\alpha) I_\alpha}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} - \frac{S_\alpha \cos(\alpha) d_{\alpha\alpha}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \right] \\ \frac{-S_\alpha \cos(\alpha) d_{hh}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} & \left[\frac{\dot{\alpha} S_\alpha \sin(\alpha) S_\alpha \cos(\alpha)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} + \frac{md\alpha\alpha}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \right] \end{bmatrix}.$$

También se tiene que

$$A^{-1}C = C',$$

donde

$$C' = \begin{bmatrix} \frac{I_\alpha K_{hh}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} & \frac{-S_\alpha \cos(\alpha) K_{\alpha\alpha}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \\ \frac{-S_\alpha \cos(\alpha) K_{hh}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} & \frac{mK_{\alpha\alpha}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \end{bmatrix},$$

y finalmente se tiene

$$A^{-1}f = f',$$

donde

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{-I_\alpha L(t)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} & \frac{-S_\alpha \cos(\alpha) M(t)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \\ \frac{S_\alpha \cos(\alpha) L(t)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} & \frac{mM(t)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \end{bmatrix}.$$

Después de realizar la multiplicación de la matriz inversa en la Ecuación (4.10), se obtiene un nuevo sistema en forma matricial dado por

$$I\ddot{x} + B'\dot{x} + C'x = f', \quad (4.12)$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{I_\alpha d_{hh}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} & \left[\frac{-\dot{\alpha} S_\alpha \sin(\alpha) I_\alpha}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} - \frac{S_\alpha \cos(\alpha) d_{\alpha\alpha}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \right] \\ \frac{-S_\alpha \cos(\alpha) d_{hh}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} & \left[\frac{\dot{\alpha} S_\alpha \sin(\alpha) S_\alpha \cos(\alpha)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} + \frac{md\alpha\alpha}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{I_\alpha K_{hh}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} & \frac{-S_\alpha \cos(\alpha) K_{\alpha\alpha}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \\ \frac{-S_\alpha \cos(\alpha) K_{hh}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} & \frac{mK_{\alpha\alpha}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-I_\alpha L(t)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} & \frac{-S_\alpha \cos(\alpha) M(t)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \\ \frac{S_\alpha \cos(\alpha) L(t)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} & \frac{mM(t)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \end{bmatrix}.$$

Resolviendo para \ddot{h} y $\ddot{\alpha}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{h} &= - \left[\frac{I_\alpha d_{hh}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \right] \dot{h} - \left[\frac{-\dot{\alpha} S_\alpha \sin(\alpha) I_\alpha}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} - \frac{S_\alpha \cos(\alpha) d_{\alpha\alpha}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \right] \dot{\alpha} - \left[\frac{I_\alpha K_{hh}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \right] h \\ &- \left[\frac{-S_\alpha \cos(\alpha) K_{\alpha\alpha}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \right] \alpha + \left[\frac{-I_\alpha L(t)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} - \frac{S_\alpha \cos(\alpha) M(t)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \right] \\ \ddot{\alpha} &= - \left[\frac{-S_\alpha \cos(\alpha) d_{hh}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \right] \dot{h} - \left[\frac{\dot{\alpha} S_\alpha \sin(\alpha) S_\alpha \cos(\alpha)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} + \frac{m d_{\alpha\alpha}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \right] \dot{\alpha} - \left[\frac{-S_\alpha \cos(\alpha) K_{hh}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \right] h - \left[\frac{mK_{\alpha\alpha}}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \right] \alpha \\ &+ \left[\frac{S_\alpha \cos(\alpha) L(t)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} + \frac{mM(t)}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)} \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Manteniendo las condiciones de (4.8) y tomando unas condiciones iniciales como sigue

$$\ddot{h} = f_2(\dot{h}, \dot{\alpha}, h, \alpha) \quad (4.14)$$

$$\ddot{\alpha} = f_4(\dot{h}, \dot{\alpha}, h, \alpha)$$

$$\begin{aligned} h_0 &= 50mm, & \alpha_0 &= 6, \\ \dot{h}_0 &= 0, & \dot{\alpha}_0 &= 0, \end{aligned}$$

donde \ddot{h} la aceleración del perfil, \dot{h} es la velocidad y h es el desplazamiento en la dirección vertical, por otro lado $\ddot{\alpha}$ es la aceleración angular, $\dot{\alpha}$ la velocidad angular y α la rotación del perfil. Con el fin de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales planteado en (4.11), se realiza una reducción de orden, obteniendo

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ \dot{h} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

derivando el vector x se obtiene \dot{x} ,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \ddot{h} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(\dot{h}, \dot{\alpha}, h, \alpha) \\ x_4 \\ f_4(\dot{h}, \dot{\alpha}, h, \alpha) \end{bmatrix}$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x_2 &= 0,05m, & x_4 &= 6, \\ \dot{x}_2 &= 0, & \dot{x}_4 &= 0, \end{aligned}$$

Aplicando el método de Euler se tiene

$$\begin{bmatrix} h_{n+1} \\ \dot{h}_{n+1} \\ \alpha_{n+1} \\ \dot{\alpha}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_n + f_1(\dot{h}, \dot{\alpha}, h, \alpha) \hat{h} \\ \dot{h}_n + f_2(\dot{h}, \dot{\alpha}, h, \alpha) \hat{h} \\ \alpha_n + f_3(\dot{h}, \dot{\alpha}, h, \alpha) \hat{h} \\ \dot{\alpha}_n + f_4(\dot{h}, \dot{\alpha}, h, \alpha) \hat{h} \end{bmatrix}$$

para esta formulación $f_1(\dot{h}, \dot{\alpha}, h, \alpha) = x_2$ y $f_3(\dot{h}, \dot{\alpha}, h, \alpha) = x_4$. En el Cuadro 4.1 se muestra una lista de los términos constantes que se utilizarán para la solución del problema y son tomados de la referencia [17]. En el Cuadro 4.2 se muestran las abreviaturas utilizadas en el código que se utilizó para resolver el problema. Ver Apéndice C.

Nombre	Abrev	Valor	Unidades	Código
Masa	m	0.086622	kg	m
Momento Inercia	I_α	0.000487291	$kg.m^2$	Ialpha
Momento de Inercia	S_α	-0.000779673	$kg.m$	Salpha
Rigidez Flexión	K_{hh}	105.109	N/m	Khh
Rigidez Torsión	$K_{\alpha\alpha}$	3.695582	Nm/rd	Kalp
Span ala	l	0.05	m	l
Cuerda Aerodinámica	c	0.3	m	c
Densidad del aire	ρ	1.225	kg/m^3	rho
Viscosidad del aire	ν	0.000015	m/s^2	v
Eje elástico	EO	0.12	m	XEO
Centro de Gravedad	Cg	0.111	m	xt
Amortiguamiento Flexión	d_{hh}	$K_{hh} * 10^{-3}$	N/m	dhh
Amortiguamiento Torsión	$d_{\alpha\alpha}$	$K_{\alpha\alpha} * 10^{-3}$	Nm/rd	dalplh
Presión de referencia	P_{ref}	0.5	N/m^2	Pref

Cuadro 4.1: Valores constantes que se utilizarán para realizar las simulaciones

A partir de esto, se puede realizar el acople del modelo de flujo y del modelo estructural en forma numérica. En este caso se utilizó el software FREEFEM.

Formula	Abreviatura	Codigo
$\frac{1}{mI_\alpha - S_\alpha^2 \cos^2(\alpha)}$	M	1.0/(m*Ialpha- Salpha2(cos(alp))2)
$\cos(\alpha)$	A	Cos(alp)
$\sin(\alpha)$	O	Sin(alp)
h	hig	hig
\dot{h}	dhig	dhig
α	alp	alp
$\dot{\alpha}$	dalp	dalp
cl	cl	cl
cm	cm	cm

Cuadro 4.2: En este cuadro se pueden ver las relaciones que se utilizarón en el código con la finalidad de simplificar términos.

4.4. DESCRIPCIÓN DE LOS PASOS REPRESENTATIVOS EN FREEFEM++

A continuación se detallan los pasos que se utilizaron en la creación del código para solucionar de manera simultanea el problema de flujo y el problema estructural. Cabe resaltar que se para desarrollar el código final de este trabajo, se parte de un código planteado en el manual de FreeFem++, el cual esta diseñado para solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes. A este código se le adicionaron los complementos necesarios como se detalla a continuación.

4.4.1. Dominio computacional y perfil aerodinámico

El dominio computacional esta conformado por un rectángulo de dimensiones 9,5 cm de longitud y 6 cm de alto. El perfil aerodinámico es un NACA 0012 el cual se puede expresar como

$$y = 0,17735\sqrt{x} - 0,075597x - 0,21286x^2 + 0,17363x^3 - 0,0625x^4.$$

4.4.2. Selección de los espacios y elementos utilizados

Como comentamos al final del Capítulo 3, los elementos que se seleccionaron para solucionar el problema planteado de interacción flujo estructura son los elementos de Taylor Hood, estos elementos garantizan la estabilidad de la discretización del método en problemas que involucran fluidos. En el estudio realizado en [11] se realiza un análisis de las ecuaciones de Navier Stokes y concluye que el uso de elementos de Taylor-Hood supera la inestabilidad resultante de la interacción de las ecuaciones de momento y continuidad. Teniendo en cuenta este análisis, se decide utilizar este tipo de elementos cumpliendo con la condición de Babuzka- Brezzi.

4.4.3. Paso de tiempo y numero de iteraciones

El paso de tiempo que se utiliza para realizar la simulación es de 0.09 segundos en la ecuación de flujo aplicando el método de elementos finitos a través del FreeFem++. El paso que se utiliza para solucionar la ecuación diferencial ordinaria es de el paso de tiempo de la ecuación de flujo dividido por numero de pasos que se otorga la ecuación diferencial ordinaria, para este caso se utilizaron 300 pasos.

4.4.4. Fuerza de sustentación y momento aerodinámico

El calcula de la fuerza de sustentación y el momento aerodinámico se realizo a través de la Ecuación 4.3 y la Ecuación 4.4 respectivamente, estas ecuaciones están en función del tensor de deformación del flujo de aire, lo que permite realizar el calculo en cada una de las iteraciones. Cabe resaltar que en cada una de las iteraciones se obtiene una variación en el ángulo de incidencia del perfil, lo que conlleva a realizar un movimiento de la malla en cada iteración, este valor se actualiza dentro del código, permitiendo obtener una posición diferente del perfil aerodinámico en cada paso de tiempo.

4.4.5. Solución de la ecuación diferencial ordinaria

Para realizar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se empleó el método de Euler [14]. Teniendo en cuenta que el sistema de ecuaciones diferenciales es de segundo orden, se empleó una sustitución con la finalidad de reducir a primer orden el sistema y aplicar el método como se muestra en la Sección 4.3. El sistema queda planteado de la siguiente forma, donde h_{n+1} es el desplazamiento en la dirección vertical y \dot{h}_{n+1} la velocidad en la dirección vertical. Por otro lado α_{n+1} y $\dot{\alpha}_{n+1}$ son el ángulo de incidencia y su derivada respectivamente. El sistema es,

$$\begin{bmatrix} h_{n+1} \\ \dot{h}_{n+1} \\ \alpha_{n+1} \\ \dot{\alpha}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_n + f_1(\dot{h}, \dot{\alpha}, h, \alpha)\widehat{h} \\ \dot{h}_n + f_2(\dot{h}, \dot{\alpha}, h, \alpha)\widehat{h} \\ \alpha_n + f_3(\dot{h}, \dot{\alpha}, h, \alpha)\widehat{h} \\ \dot{\alpha}_n + f_4(\dot{h}, \dot{\alpha}, h, \alpha)\widehat{h} \end{bmatrix}.$$

4.4.6. Rotación del perfil de sustentación

Con el fin de simular el movimiento oscilatorio del perfil de sustentación, se empleó una matriz de rotación en dos dimensiones $R(\alpha)$ que actualizaba la posición del perfil en el dominio computacional. Cabe señalar que para cada paso de tiempo en la ecuación de flujo, se obtiene una posición diferente del perfil de sustentación.

$$\left[R(\theta) \right] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Mencionamos también que la malla se adapta a la posición del nuevo perfil mediante un desplazamiento armónico de los nodos de la malla. Para esto se requiere la solución de una ecuación de Laplace en cada paso de tiempo aplicado al problema de flujo. Esta idea fue tomada de [9].

4.5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Retomando las cantidades usadas para realizar la simulación en FREEFEM se pueden resumir de la siguiente manera: Perfil NACA 0012, $m=0.086622$ kg, $S_\alpha=-0.000779673$ kgm, $I_\alpha=0.000487291$ kgm², $k_{hh}=105.109$ N/m, $k_{\alpha\alpha}=3.695582$ Nm/rad, $l=0.05$ m, $c=0.3$ m, $S_\rho=1.225$ kg/m³, $\nu=1.5 \times 10^{-5}$ m²/s. La simulación de la interacción flujo estructura para el perfil aerodinámico que se utilizó para plantear el problema arrojó un resultados numéricos para el desplazamiento vertical y la rotación angular en en función del tiempo. Estos resultados se mostraran gráficamente a diferentes velocidades, es de aclarar que cada resultado hace referencia a un experimento diferente ya que la velocidad de flujo se aumentara de manera gradual hasta encontrar la inestabilidad dinámica. A través del método de elementos finitos es posible discretizar el espacio del dominio establecido para realizar la simulación creando una malla que servirá para analizar en comportamiento del flujo y la estructura, esta se puede ver en la Figura 4.2.

Para todos los experimentos se mantienen las condiciones de frontera formuladas en la

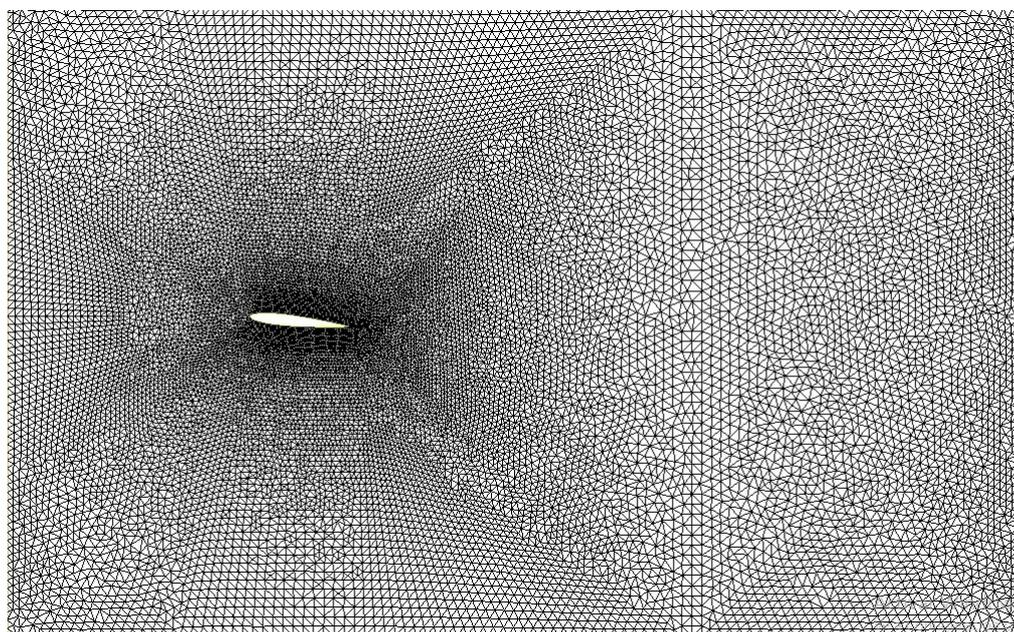


Figura 4.2: Malla del dominio computacional generada por FREEFEM++.

sección 4.1 y sección 4.2. Para llevar a cabo el primer experimento se iniciara con una velocidad de 8m/s , los resultados obtenidos en esta simulación se pueden observar en la Figura 4.3. En la primera simulación, tal como se puede observar en la Figura 4.3, el perfil se encuentra

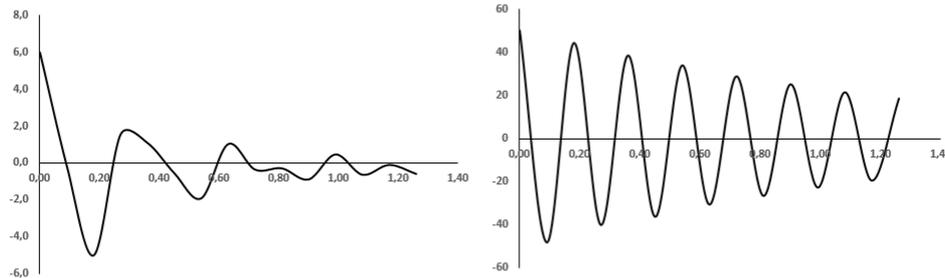


Figura 4.3: Resultado de simulación con perfil ubicado a una altura de 50 mm, con un ángulo inicial de incidencia de 6 grados y con una velocidad inicial de 8 m/s. En la figura desplegamos el ángulo de rotación (izquierda) y desplazamiento vertical (derecha) en el tiempo.

ubicado a una altura de 50 mm y con un ángulo de incidencia de 6 grados en el tiempo $t = 0sg$. A medida que avanza el tiempo, el perfil alcanza el punto de equilibrio, hasta que la oscilación se amortigua totalmente en $t = 1,30sg$. De este experimento se puede concluir que a esta velocidad no se presenta inestabilidad dinámica en la estructura del perfil.

El segundo experimento se realizara bajo las mismas condiciones con un aumento de velocidad de flujo a $12m/s$, los resultados se pueden observar en la Figura 4.4. De este experimento se puede concluir que a pesar de existir un aumento en la velocidad de flujo, el comportamiento del perfil permanece estable en el tiempo, para este segundo experimento se alcanza una estabilidad en $t = 1,3sg$.

Para la tercera simulación se utilizó una velocidad de flujo de $18m/s$, al igual que en los dos experimentos anteriores el sistema continua comportándose de manera estable, esto quiere decir que aun no se presenta la inestabilidad dinámica y el sistema alcanza el estado de equilibrio en $t = 1,30sg$.

En el siguiente experimento, se utilizó una velocidad de $36m/s$, en este caso y como

h

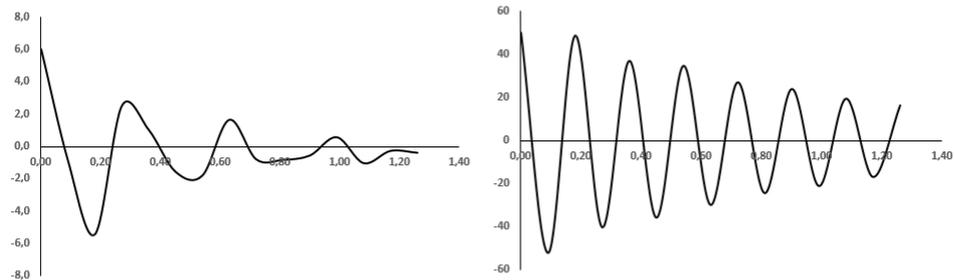


Figura 4.4: Resultado de simulación con perfil ubicado a una altura de 50 mm, con un ángulo inicial de incidencia de 6 grados y con una velocidad inicial de 12 m/s. En la figura desplegamos el ángulo de rotación (izquierda) y desplazamiento vertical (derecha) en el tiempo.

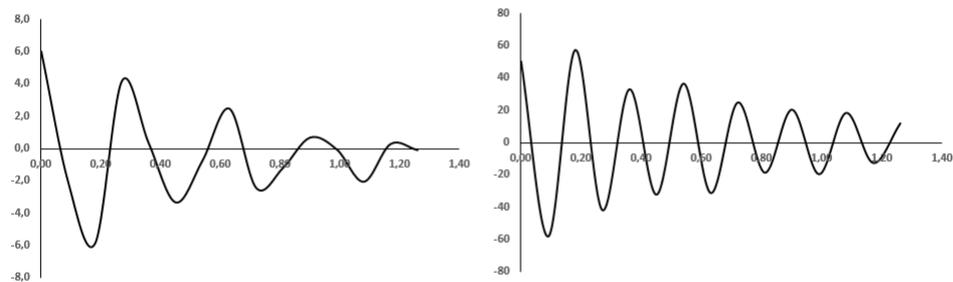


Figura 4.5: Resultado de simulación con perfil ubicado a una altura de 50 mm, con un ángulo inicial de incidencia de 6 grados y una velocidad inicial de 18 m/s. En la figura desplegamos el ángulo de rotación (izquierda) y desplazamiento vertical (derecha) en el tiempo.

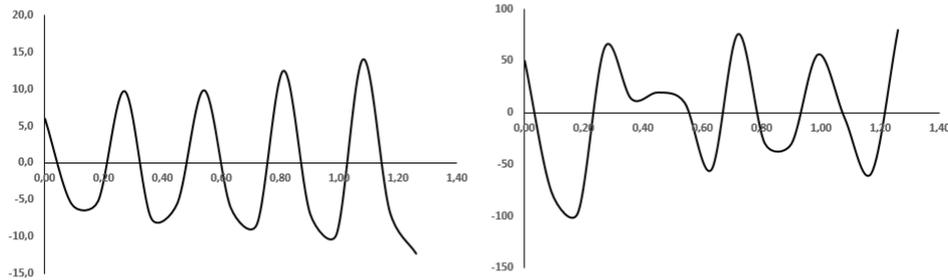


Figura 4.6: Resultado de simulación con perfil ubicado a una altura de 50 mm, con un ángulo inicial de incidencia de 6 grados y una velocidad inicial de 36m/s. En la figura desplegamos el ángulo de rotación (izquierda) y desplazamiento vertical (derecha) en el tiempo.

se puede observar en la Figura 4.6, el comportamiento del sistema ahora es inestable. Tal como se ha realizado en los experimentos anteriores, el sistema inicia la simulación con unas condiciones de altura $h = 50mm$ y ángulo de incidencia $\alpha = 6$, sin embargo a esta velocidad se logra evidenciar un aumento significativo en la amplitud de la oscilación y la rotación del mismo con respecto al eje elástico, esto quiere decir que la estructura adquiere un comportamiento dinámico inestable y se alcanza después de $t = 0,10sg$.

El próximo experimento se realizo con una velocidad de 48m/s. Tal como se observa en la Figura 4.7, permanece la inestabilidad dinámica, sin embargo, la amplitud del desplazamiento vertical aumenta de manera sustancial y la rotación del ángulo de incidencia se comporta de la misma forma. En el ultimo experimento, se utilizo una velocidad de 48m/s, en estos resultados se puede observar que el comportamiento del perfil es totalmente inestable, y que la energía que absorbe el perfil de la corriente de flujo es mayor que la que se logra disipar a través de amortiguamiento estructural, llevando en este caso a que las oscilaciones sean tan grandes que lleven al fallo de la estructura. En la Figura 4.9, se puede observa una distribución de los lóbulos de presion al rededor del perfil aerodinámico.

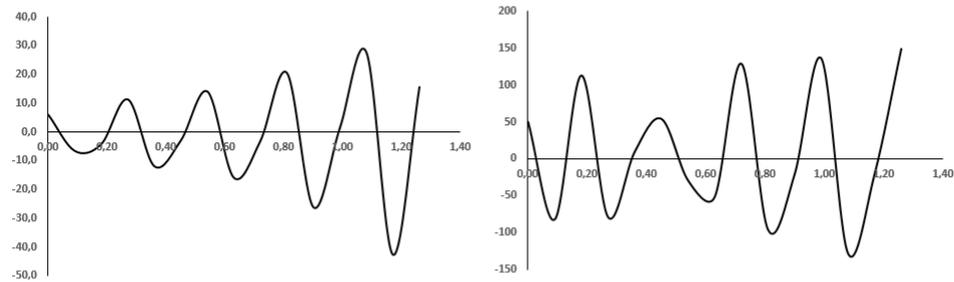


Figura 4.7: Resultado de simulación con perfil ubicado a una altura de 50 mm, con un ángulo inicial de incidencia de 6 grados y una velocidad inicial de 42 m/s. En la figura desplegamos el ángulo de rotación (izquierda) y desplazamiento vertical (derecha) en el tiempo.

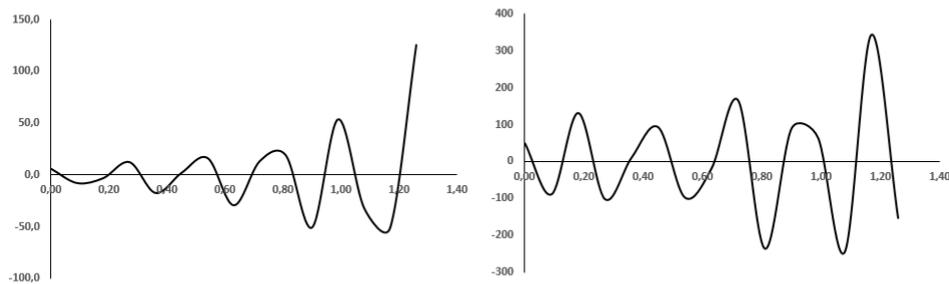


Figura 4.8: Resultado de simulación con perfil ubicado a una altura de 50 mm, con un ángulo inicial de incidencia de 6 grados y una velocidad inicial de 48 m/s. En la figura desplegamos el ángulo de rotación (izquierda) y desplazamiento vertical (derecha) en el tiempo.

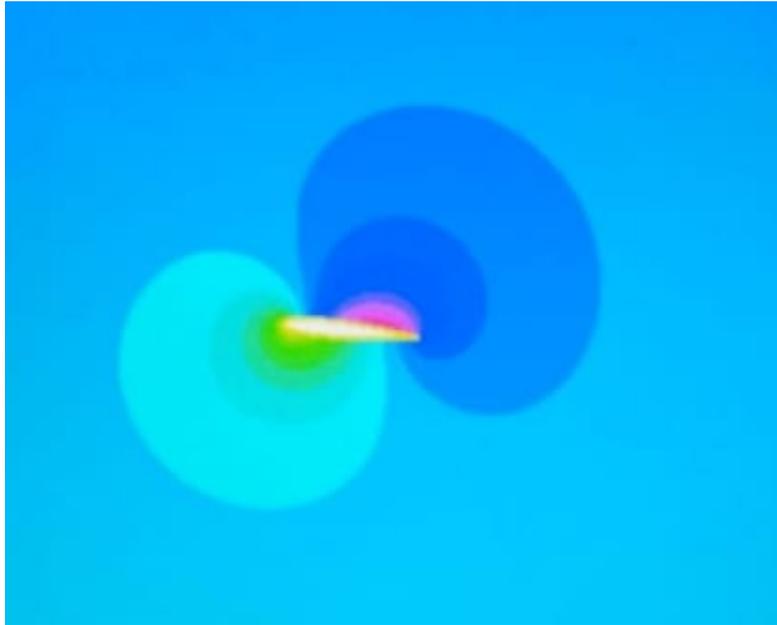


Figura 4.9: Lobulos de presión al rededor del perfil de sustentación

4.6. CONCLUSIONES

En el análisis que se realiza de la aplicación del método de elementos finitos en el problema que se planteo en el Capitulo 4, relación de un flujo incompresible viscoso asociado a un perfil de sustentación que se puede mover en la dirección vertical y que puede rotar, se destaca que los resultados obtenidos en las gráficas del comportamiento dinámico de la estructura están acordes a lo que se puede presentar en una simulación real, donde a velocidades bajas y debido al amortiguamiento estructural, el perfil alcanza un punto de equilibrio en los dos grados de libertad que definen el movimiento a bajas velocidades. A medida que aumenta la velocidad, el comportamiento dinámico de la estructura cambia, haciendo que el perfil absorba mas energía de la corriente libre que la que es capaz de disipar a través del amortiguamiento estructural. Estos resultados se pueden comparar con los resultados obtenidos en artículo de la referencia [17], donde se realiza un aplicación de una técnica de elementos finitos que combina la formulación Euleriana y Lagrangiana de las ecuaciones de Navier-Stokes. En esta técnica se realiza un discretización del espacio y del tiempo acoplado el modelo de flujo al modelo estructural. Los resultados obtenidos en este documento, se aproximan bastante, sin embargo en este trabajo para realizar el movimiento de la malla se utilizo una herramienta predeterminada de FreeFem++, que es software diseñado para

solucionar ecuaciones diferenciales. En las Figuras 4.3 a la Figura 4.8 se puede observar como a medida que aumenta la velocidad el perfil de sustentación inicia una oscilación no controlada lo cual termina por llevarlo al fallo estructural. Este análisis se puede extender para futuros trabajos si se determinada una envergadura al perfil, inicialmente con profundidad de una unidad en relación con la cuerda aerodinámica y posterior a una envergadura mayor. Para estas simulaciones se debería obtener, basados en la teoría del análisis de flutter, un comportamiento similar al que se obtuvo en la sección 4.4. Es importante mencionar que los resultados obtenidos están directamente ligados a las condiciones de elasticidad de rigidez del material tanto a flexión como a torsión. Cabe destacar que en todos los experimentos los valores de rigidez a flexión y a torsión se han mantenido constantes así como las condiciones atmosféricas variando únicamente la velocidad a la que se desplaza el perfil aerodinámico. Por ultimo se resalta que los análisis de flutter ejecutado en este documento tiene varias aplicaciones adicional al campo aeronáutico, teniendo aplicaciones en ingeniería civil, en diseño de líneas de transmisión, diseño de compresores y otras logrando ampliar de manera significativa el alcance de los resultados de este proyecto.

Apéndice A

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

El material que se presenta en esta sección es tomado de [16]. Las ecuaciones diferenciales regularmente describen el comportamiento de fenómenos en varios campos. Este apéndice tiene como finalidad mostrar como se puede dar solución a ecuaciones diferenciales por medio de aproximaciones numéricas cuando no es posible encontrar una solución analítica. El planteamiento para una ecuación diferencial asociada a un problema específico requiere que se especifiquen unas condiciones que hacen que la solución sea única. A este planteamiento se le conoce como Problema de Cauchy y se expresa en términos generales en la Ecuación (4.1). Hallar $y : I \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Donde $I \subseteq \mathfrak{R}$, $f : IX\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ y y' es la derivada de y con respecto al tiempo. Para efectos de especificar la condición inicial del problema t_0 es un punto dentro del espacio I . A continuación se describen algunos de los métodos que se utilizan para realizar la aproximación numérica de ecuaciones diferenciales.

A.1. MÉTODO DE EULER

A través del método de Euler se puede encontrar una solución con la siguiente formulación para u_{n+1}

$$u_{n+1} = u_n + hf_n(t_n, u_n) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N_h - 1. \quad (\text{A.2})$$

A este método se le conoce como Euler explícito. Otra forma de expresar la aproximación, puede ser teniendo en cuenta la derivada de la ecuación de la siguiente forma

$$u_{n+1} = u_n + hf_{n+1}(t_n, u_n) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N_h - 1. \quad (\text{A.3})$$

A este método se le conoce como Euler Explícito, los dos métodos proveen solución numérica u_{n+1} en el nodo t_{n+1} tomando la información del nodo previo t_n . Expresado de otra forma, en el método de Euler explícito la ecuación depende exclusivamente del valor u_n encontrado en el proceso iterativo anterior. Para el método de Euler Implícito depende del valor f_{n+1} . Como ejemplo considere la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = Cy\left(1 - \frac{y}{B}\right).$$

Realizando la aproximación de esta ecuación por medio de Euler explícito, se obtiene la siguiente formulación

$$u_{n+1} = u_n + hCu_n\left(1 - \frac{u_n}{B}\right).$$

Por otro lado, si se desea realiza la aproximación de la solución por medio del Euler implícito, la ecuación se expresa de la siguiente forma

$$u_{n+1} = u_n + hCu_{n+1}\left(1 - \frac{u_{n+1}}{B}\right).$$

El método implícito es mas costoso en términos computacionales que los métodos explícitos, sin embargo el método implícito tiene mejores propiedades de estabilidad, para mas detalle se puede ver [16]

A.2. ANÁLISIS DE CONVERGENCIA

Se puede establecer que un método numérico es convergente si se cumple la siguiente definición

$$|y_n - u_n| \leq C(h) \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots, N_h, \quad (\text{A.4})$$

donde $C(h)$ es infinitesimal mente pequeño cuando h tiende a cero. Si $C(h) = O(h^p)$ para algún $p \geq 0$ entonces se dice que el orden de convergencia es p . El error de convergencia del método de Euler implícito dado por e_n se puede expresar de la siguiente forma

$$e_n = y_n - u_n = (y_n - u_n^*) + (u_n^* - u_n),$$

donde $u_n^* = y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1})$ es la solución numérica en un tiempo discreto t_n . El término $y_n - u_n^*$ representa el error en cada uno de los pasos de la aproximación del método de explícito. El término $u_n^* - u_n$ representa la propagación desde t_{n-1} hasta t_n del error acumulado en el paso anterior t_{n-1} . Si se asume que la segunda derivada de y existe y se toma un punto $\xi_n \in (t_{n-1}, t_n)$

$$y_n - u_n^* = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) . \quad (\text{A.5})$$

De esta última expresión se puede expresar el error local por truncación para el método de Euler implícito dado como

$$\tau_n(h) = \frac{(y_n - u_n^*)}{h}. \quad (\text{A.6})$$

El error global por truncación está dado como:

$$\tau_n(h) = \max_{n=0 \dots N} |\tau_n(h)|. \quad (\text{A.7})$$

De la Ecuación (A.6) se deduce que $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$, cuando esto sucede se dice que el método es consistente con orden p si $\tau(h) = O(h^p)$ para $p \geq 1$.

A.3. MÉTODO DE CRANK-NICOLSON

Este método es una combinación de los métodos Euler implícito y Euler explícito. Este método está dado de la siguiente forma

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f_n + f_{n+1}] \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_h - 1 \quad (\text{A.8})$$

Este método puede ser deducido desde el problema de Cauchy, Ecuación. (A.1), el cual está formulado de la siguiente forma. Encontrar $y : I \rightarrow \mathfrak{R}$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Aplicando el teorema fundamental de integración a la formulación de Cauchy se obtiene

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \quad (\text{A.9})$$

y aproximando la integral en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ se deduce que el error por truncamiento esta dado como

$$\tau_n(h) = \frac{h^2}{12} y''(\xi_n) \quad \text{para adecuado } \xi_n \in (t_{n-1}, t_n) \quad (\text{A.10})$$

De este modo el error por truncamiento para el método de Crack-Nicolson es de orden 2 se puede ver[16]

A.4. ESTABILIDAD

El concepto de estabilidad en la solución de una ecuación diferencial, es el que permite garantizar, que en un intervalo fijo, pequeñas perturbaciones numéricas de la solución están acotadas cuando en el error de truncamiento $h \rightarrow 0$. Si se toma en consideración el planteamiento de Cauchy, y se utiliza un método para determinar una aproximación numérica, donde el intervalo esta dado como $I = [t_0, T]$, el método es estable si $\exists h_0 > 0$, $\exists C > 0$ tal que para $\forall h \in (0, h_0]$, $\forall \epsilon > 0$, que sea lo suficientemente pequeño, si existe un $|\rho_n| \leq \epsilon$, tal que $0 \leq n \leq N_h$. Entonces se tiene

$$|z_n - u_n| \leq C\epsilon \quad 0 \leq n \leq N_h, \quad (\text{A.11})$$

donde C es una constante que puede depender de la longitud de integración I , z_n es la solución obtenida a partir del método numérico, ρ_n denota el radio de la perturbación en el n -ésimo paso y ϵ indica el tamaño máximo de la perturbación. Para garantizar una única solución del problema en el intervalo de integración ϵ debe ser lo suficientemente pequeño. Por ejemplo para el caso de la aproximación de Euler implícito u_n debe satisfacer

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n), \\ u_0 = y_0, \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

mientras que z_n satisface

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + h[f(t_n, u_n) + \rho_{n+1}], \\ z_0 = y_0 + \rho_0, \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

para $0 \leq n \leq N_h - 1$, sobre la suposición que $|\rho_n| \leq \epsilon$ y $0 \leq n \leq N_h$

A.4.1. REGIÓN DE ABSOLUTA ESTABILIDAD

Considere el siguiente problema:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) & t \in (0, \infty), \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Suponga que en este problema λ es un número complejo con parte real negativa. La solución del problema esta dada como $u(t) = e^{\lambda t}$. La región de absoluta estabilidad esta dada como el conjunto de números complejos $z = h\lambda$ para los cuales $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0$. El método de Euler implícito tiene una región de absoluta estabilidad, la cual esta dada como los números $h\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|1 + h\lambda| < 1$, lo que es coincidente con un circulo de radio 1 y centro $(-1, 0)$. Para el método de Crack-Nicolson la región de estabilidad coincide con el lado izquierdo del plano complejo, de los números con parte real negativa. Los métodos que son absolutamente estables para todos los números complejos λ para el planteamiento realizado, cuya parte real es negativa, son llamados A-Stable. Esta propiedad hace que los métodos implícitos como Euler y Crack-Nicolson, sean atractivos a pesar de que ellos son computacionalmente mas costosos que los métodos explícitos ver [16].

A.5. SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES EDO

Para ilustrar la solución de un sistema de EDO se considera el siguiente sistema

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(t, y_1, \dots, y_m), \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y'_m = f_m(t, y_1, \dots, y_m), \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

donde $t \in (t_0, T]$, con las condiciones iniciales

$$y_1(t_0) = y_{0,1,2,\dots,m}(t_0) = y_{0,m}.$$

Para solucionar este tipo de sistemas ver [16], es posible aplicar a cada una de las ecuaciones uno de los métodos mencionados anteriormente. Si se aplica por ejemplo el método de Euler explícito se obtiene

$$\begin{cases} u_{n+1,1} = u_{n,1} + hf_1(t_n, u_{n,1}, \dots, u_{n,m}), \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n+1,m} = u_{n,m} + hf_m(t_n, u_{n,1}, \dots, u_{n,m}). \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Este sistema de EDO puede expresarse en forma vectorial como: $y'(t) = F(t, y(t))$ y crear una expresión para los métodos de Euler implícito, explícito y Crank-Nicolson:

$$u_{n+1} = u_n + h(\vartheta F(t_{n+1}, u_{n+1}) + (1 - \vartheta)F(t_n, u_n)), \quad (\text{A.17})$$

si en la Ecuación (A.17) se asume $u_0 = y_0$ para $0 < \vartheta \leq 1$, se obtiene la forma vectorial del método de Euler implícito. Si por otro lado $\vartheta = 1$ se obtiene Euler explícito y con $\vartheta = 1/2$ se obtiene el método de Crank-Nicolson.

Apéndice B

ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN AEROELASTICIDAD

Existen varias formas en las cuales se puede expresar la ecuación de movimiento para un sistema aeroelástico, ya sea estático o dinámico. La forma más usual es a través de las ecuaciones de Lagrange. Estas ecuaciones se caracterizan porque son expresadas en términos de coordenadas generalizadas, energía y trabajo. A continuación se definirán los conceptos necesarios para entender el planteamiento de los modelos estáticos y dinámicos planteados en el Capítulo 2 por medio de las ecuaciones de Lagrange. La siguiente presentación se basa en [12].

B.1. COORDENADAS GENERALIZADAS

Son un conjunto de coordenadas utilizadas para describir la posición y movimiento de un punto en el espacio. También se refiere a los grados de libertad que tiene un sistema, y hacen referencia a la medida instantánea de la deflexión de un punto en un sistema dinámico relativo a un punto de referencia. De esta forma el desplazamiento de una partícula o un punto en un cuerpo que es asumido como un continuo se puede expresar como

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad (\text{B.1})$$

donde q_i es la i -ésima coordenada generalizada. Las coordenadas generalizadas son funciones independientes del tiempo que especifican la posición instantánea de todas las partículas de masa de un sistema sin ambigüedad y sin redundancia. Para sistemas que están sujetos a cargas, la posición de referencia es casi siempre la posición no flexionada del sistema. Para sistemas dinámicos, donde la carga aplicada sobre el sistema cambia de manera significativa con el tiempo, la posición de referencia se considera sobre la condición de equilibrio; ver [9]

B.2. DESPLAZAMIENTO VIRTUAL Y TRABAJO VIRTUAL

El desplazamiento virtual se puede definir como un desplazamiento de una magnitud infinitesimal que no viola las restricciones del sistema bajo el cual esta actuando. Este desplazamiento virtual se expresa como δq_i , donde el símbolo delta hace referencia a un cambio muy pequeño de la magnitud de la coordenada generalizada. El trabajo virtual se define como las fuerzas y momentos que actúan sobre un desplazamiento virtual δq_i y se expresa matemáticamente como

$$\delta W = F \cdot \delta r. \quad (\text{B.2})$$

En el trabajo virtual a las componentes de fuerza que actúan sobre el sistema se les denomina fuerzas generalizadas o momento generalizado y se les denomina como Q_i , para más detalle se puede ver [6]

$$\delta W = \sum Q_i \delta q_i. \quad (\text{B.3})$$

B.3. ECUACIONES DE LAGRANGE

La derivación de las ecuaciones de Lagrange se realizará a través del principio de Hamilton, tomando un grupo de partículas. Se realiza esta suposición al considerar que cualquier sistema continuo se puede considerar de esta forma. Considere un grupo específico de N partículas que conforman un cuerpo de forma arbitraria y que se considera deformable. El vector de posición r_i que define la posición de una partícula de masa m_i y aplicando la segunda ley de Newton a cada una de las partículas y asumiendo la fuerza total que actúa

sobre el sistema como la suma de las fuerzas exteriores y las fuerzas interiores que se origina debido a la interacción de las $(N - 1)$ partículas se se puede expresar como

$$m_i \ddot{r}_i = F_i^{ex} + F_i^{in}. \quad (\text{B.4})$$

Ordenando la Ecuación (B.4) y multiplicando por un desplazamiento virtual arbitrario para la partícula de masas m_i se obtiene

$$(m_i \ddot{r}_i - F_i^{ex} - F_i^{in}) \cdot \delta r_i = 0. \quad (\text{B.5})$$

Si se realiza lo mismo sobre todas las partículas se tiene

$$\sum_{i=1}^{i=N} (m_i \ddot{r}_i - F_i^{ex} - F_i^{in}) \cdot \delta r_i = 0. \quad (\text{B.6})$$

De esta ecuación se deducen dos términos que hacen referencia al trabajo virtual ejercido por las componentes de fuerza que actúan en la parte externa e interna del cuerpo. Resolviendo se puede expresar como

$$\sum_{i=1}^{i=N} m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i = \delta W_{ex} + \delta W_{in}. \quad (\text{B.7})$$

Utilizando la regla de derivación de un producto $uDv = D(uv) - vDu$ se tiene lo siguiente

$$\sum_{i=1}^{i=N} m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^{i=N} \left[m_i \frac{d}{dt} (\dot{r}_i \cdot \delta r_i) - m_i \dot{r}_i \cdot \delta \dot{r}_i \right]. \quad (\text{B.8})$$

Utilizando las propiedades del operador δ , el segundo término de la derecha se puede expresar como

$$\sum_{i=1}^{i=N} m_i \dot{r}_i \cdot \delta \dot{r}_i = \delta \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i \right) \equiv \sum_{i=1}^{i=N} \delta(T_i) \equiv \delta T, \quad (\text{B.9})$$

donde cada T_i se denota como la energía cinética de cada una de las partículas N y T es la energía total del sistema. Sustituyendo este resultado en la Ecuación (B.7) se tiene

$$\delta T + \delta W_{ex} + \delta W_{in} = \sum_{i=1}^{i=N} m_i \frac{d}{dt} (\dot{r}_i \cdot \delta r_i). \quad (\text{B.10})$$

Si se integra a ambos lados de la Ecuación (B.10) en un intervalo de tiempo arbitrario t_1 y t_2 y asumiendo que el desplazamiento virtual es cero en extremo del intervalo de tiempo que se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W_{ex} + \delta W_{in}) dt = 0. \quad (\text{B.11})$$

De las propiedades del operador variacional δ se puede establecer que

$$\delta T = \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q} + \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right) \delta q \right]. \quad (\text{B.12})$$

El trabajo virtual se puede expresar a través de la regla de derivación de cadena

$$\delta W_{ex} = \sum_{i=1}^{i=N} F_i^{ex} \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^{i=N} F_i^{ex} \cdot \sum_{j=1}^{i=N} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (\text{B.13})$$

$$\delta W_{ex} = \sum_{j=1}^{i=N} Q_j^{ex} \delta q_j. \quad (\text{B.14})$$

En donde Q_j^{ex} es el trabajo que se obtiene por las fuerzas externas. Para el trabajo que se obtiene por las fuerzas internas se tiene δW_{in}

$$\delta W_{in} = \sum_{j=1}^{i=N} Q_j^{in} \delta q_j. \quad (\text{B.15})$$

Cuando se conoce que las fuerzas que actúan sobre un cuerpo son de tipo conservativo, como por ejemplo la fuerza generada por el campo gravitacional, es conveniente asociar una función con la energía conservativa del trabajo hecho por tal fuerza. Para el caso de la fuerza externa, la función que se va a asociar es $V = -W_{ex}$. A partir de esta suposición se tiene

$$\delta V(q_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i = -\delta W_{ex} = -\sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i. \quad (\text{B.16})$$

Un cuerpo elástico es un sistema idealizado que es capaz de almacenar toda la energía del trabajo que se realicé sobre el, es decir; que no ocurren pérdidas de energía y que esta energía puede ser recuperada de manera total cuando el cuerpo retorne a su condición inicial, expresado de otra manera ocurren pérdidas por fricción interna. A esta energía se le conoce como energía de deformación elástica. Desafortunadamente es muy difícil utilizar este modelo en problemas reales donde se debe tener en cuenta los esfuerzos y la deformación de los sistemas, donde el esfuerzo es una función de la deformación. En otras palabras existirán fuerzas conservativas y no conservativas en un sistema las cuales pueden ser descritas a través de funciones potenciales y fuerzas generalizadas. Esto se expresa matemáticamente de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \delta W_{ex} + \delta W_{in} &= -\delta V - \delta U + \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) \delta q_i - Q_i \delta q_i \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Agrupando estos términos en la Ecuación. 5.11 se tiene

$$\sum_{i=1}^{i=N} \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q} + \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right) \delta q - \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) \delta q_i - Q_i \delta q_i \right] dt = 0. \quad (\text{B.18})$$

El primer término de la Ecuación (B.12) se puede expresar, de acuerdo a las propiedades del operador δ

$$\delta \dot{q} \equiv \delta \left(\frac{dq_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\delta q_i). \quad (\text{B.19})$$

como sigue

$$\sum_{i=1}^{i=N} \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right) - \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) - Q_i \delta q_i \right] \delta q_i dt = 0. \quad (\text{B.20})$$

Finalmente las ecuaciones de Lagrange se expresa como

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right) - \left(\frac{\partial V + U}{\partial q_i} \right) = Q_i. \quad (\text{B.21})$$

para mas detalle se puede consultar [6,9].

Apéndice C

CÓDIGO

A continuación se deja referenciado el código que se utilizó para resolver el problema planteado en el capítulo 4.

```
Air - Airfoil Structure Interaction with Navier-Stokes equations
```

```
Outer Rectangle [A,B]X[C,D]
```

```
Obstacle Airfoil.
```

```
Variables
```

```
real L    = -2.5;
```

```
real R    = 7;
```

```
real B    = -3.0;
```

```
real T    = 3.0;
```

```
int  Px   = 20 ;
```

```
real Py   = 20;
```

```
real S    = 20;
```

```
real m    = 0.086622;
```

```
real lalpha = 0.000487291;
```

```
real Salpha = -0.000779673;
```

```
real khh   = 105.109;
```

```
real kalp  = 3.695582;
```

```
real l     = 0.05;
```

```
real c     = 0.3;
```

```
real rho =1.225;
real XE0 = 0.12;
real xt = 0.111;
real dhh = khh*0.001;
real daplh = kalp*0.001;
real Lift;
real Moment;
real h;
real Pref = 10000;
real Vel = 30;
real Cl;
real Cm;
real DynP = $0.5*rho*(Vel^2)$;
real $x0= -0.25$;
Initial Conditions
real hig = 0.05;
real dhig = 0;
real alp = 0.10472;
real dalp = 0;
real hig1 = 0.05;
real dhig1 = 0;
real alp1 = 0.10472;
real dalp1 = 0;
Associated parameter in ODE
real M = $1.0/(m*Ialpha - Salpha^2*(cos(alp))^2)$;
real A = cos(alp);
real O = sin(alp);
int numTSteps=20;
bool reuseMatrix=false;
real nu = 0.000015;
real dt=0.5;
real tiempot=0;
real bndryVelocity;
Airfoil Equations as function of Euler Angles.
```

```

border $upp(t=0,1){x= x0 + (t)*cos(-alp) - ((0.17735*sqrt(t) - 0.075597*t - 0.212836*
border low(t=1,0){x= x0 + (t)*cos(-alp) - ((-0.17735*sqrt(t) -0.075597*t - 0.212836*
Iterative Process
for (int i=0 ; i < numTSteps ; i++) {
Outer Rectangle\\
border Bottom(t= 0,1){x= L + (R-L)*t; y=B; label= 1;};
border Top(t= 1,0){x= L + (R-L)*t; y= T; label= 3;};
border Left(t= 1,0){x= L; y= B + (T-B)*t; label= 4;};
border Right(t= 0,1){x= R; y= B + (T-B)*t; label= 2;};
Mesh Domain
plot( Bottom(Px) + Right(Py) + Top(-Px) + Left(-Py)+ upp(-S) + low(S), wait=1, ps="ge
mesh Th= buildmesh( Bottom(Px) + Right(Py) + Top(Px) + Left(Py)+ upp(S) + low(S));
$Th = adaptmesh(Th, 1./20., IsMetric=1, nbvx=100000);$
$plot(Th, wait= true , ps="NACA0012.eps", bw=true);$
Definition of Space
fespace Vh1( Th, P2);
fespace Vh2( Th, P1);
Vh1 u2, v2, u1, v1, uu1, uu2;
Vh2 p, q;
Weak Formulation
problem NS ([u1, u2, p] , [v1, v2, q] , solver=UMFPACK , init=reuseMatrix) =
int2d(Th)( 1./dt*( u1*v1 + u2*v2 )
+ nu * ( dx(u1)*dx(v1) + dy(u1)*dy(v1)
+ dx(u2)*dx(v2) + dy(u2)*dy(v2) )
- p*q*(0.000001)
- v1*dx(p) + v2*dy(p)
- dx(u1)*q + dy(u2)*q )
+ int2d(Th) ( 1./dt*((-convect([uu1, uu2] , -dt , uu1) * v1
-convect( [uu1, uu2] , -dt , uu2) * v2 )))
+ int1d(Th,2)(nu*((dx(u1)*v1+dx(u2)*v2))*N.x + (dy(u1)*v1+dy(u2)*v2)*N.y)
+ int1d(Th,2)((p*N.x*v1) + (p*N.y*v2)) - int1d(Th,2)((Pref*N.x*v1) - (Pref*N.y*v2))
b.c.: uniform velocity top, bottom, inlet (left)
"do nothing" on exit (right)
+ on(1, u1=0, u2=0)

```

```
+ on(3, u1=0, u2=0)
+ on(4, u1=Vel, u2=0)
+ on(2, u1=Vel, u2=0)
  ON boundary 2 do nothing condition
+ on(5, u1=(1./dt)*(x -((cos(alp)*(x-0.25)) + (sin(alp)*(y-hig+0.01)- 0.25))), u2=dhig)
(1./dt)*(x -((cos(alp)*(x-0.25)) + (sin(alp)*(y-hig+0.01)- 0.25)))
Solve the problem;
NS;
reuseMatrix = true;
```

Bibliografía

- [1] *Development of Advanced Computational Aeroelasticity Tools at Nasa Langley Research Center*. Nasa Langley Research Center.
- [2] Jhon D Anderson. *Computational Fluid Dynamics*. McGraw-Hill Education, 1995.
- [3] Dietrich Braess. *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*. Cambridge University Press, 2007.
- [4] PG Ciarlet and JL Lions. *Numerical Methods for Fluids, Part 3*, volume 9. Elsevier, 2003.
- [5] Michel V Cook. *Flight Dynamics Principles*. Elsevier Aerospace Engineering Series, 2007.
- [6] David Cox H.C Curtiss JR John W Edwards Kenneth C Hall David A Peters Robert Scanlan Emil Simiu Fernando Sisto y Tomas W Strganac Earl H. Dowell, Roert Clark. *A Modern Course in Aeroelasticity*. Springer Science, Estados Unidos, 2005.
- [7] Y.C. Fung. *An introduction to the Theory of Aeroelasticity*. Dover Publications, Estados Unidos, 1993.
- [8] Juan Galvis. *Introducao a aproximacao Numerica de Equacoes Diferenciais Parciais Via o Método de Elementos Finitos*. Impa, Colóquio Brasileiro de Matemática, 2011.
- [9] Juan Galvis and HENRIQUE M Versieux. An iterative domain decomposition method for free boundary problems with nonlinear flux jump constraint. *Computational and Applied Mathematics*, 34(3):1199–1217, 2015.
- [10] Frederic Hecht. *FreeFem Documentation*. 2019.

- [11] Andrew J. Wathen Howard C. Elman, David J. Silvester. *Finite Elements and Fast Iterative Solvers : with Applications in Incompressible Fluid Dynamics*. OUP Oxford, 2005, 2005.
- [12] Wright y Jonathan E. Cooper Jan R. *Introduction to Aeroelasticity and Loads*. John Wiley and Sons, 2007.
- [13] Claes Johnson. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, 1987.
- [14] David Stewart Kendall Atkinson, Weimin Han. *Numerical solution of ordinary differential equations*. A John Wiley Son, INC., Publication, 2005, 2009.
- [15] Mark S. *Understanding and Implementing the Finite Element Method*. Society for industrial and applied Mathematics, Estados Unidos, 2006.
- [16] Pavel Šolín. *Partial differential equations and the finite element method*. John Wiley & Sons, 2005.
- [17] Petr Sváček. Application of finite element method in aeroelasticity. *Journal of computational and applied mathematics*, 215(2):586–594, 2008.