



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Estudio numérico de la interdependencia de los números adimensionales Nusselt, Reynolds y Prandtl.

Miguel David Méndez Bohórquez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de ingeniería, Departamento de ingeniería mecánica y mecatrónica
Bogotá, Colombia
2022

Estudio numérico de la interdependencia de los números adimensionales Nusselt, Reynolds y Pradntl.

Miguel David Méndez Bohórquez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ingeniería Mecánica

Director:

Ph.D Carlos Alberto Duque Daza

Codirector:

Ph.D Juan Miguel Mantilla González

Línea de Investigación:

Transferencia de calor

Grupo de Investigación:

Grupo de Modelado y Métodos Numéricos en Ingeniería (GNUM)

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ingeniería, Departamento de ingeniería mecánica y mecatrónica

Bogotá, Colombia

2022

Dedicatoria

A mis padres, por su amor que nunca me ha faltado.

A mi hermano, por su ejemplo y protección.

A Anny, por su compañía y los maravillosos momentos que hemos compartido.

A mi familia y mis amigos, por todo su apoyo.

A mis peludos, por llegar a mi vida.

A mi abuelita, que la tengo presente en todo momento.

Agradecimientos

Quiero agradecer a la Universidad Nacional de Colombia, y en especial a los docentes, y colegas, con los que he trabajado. Gracias por todas las oportunidades, enseñanzas y experiencias que me han brindado.

Resumen

Estudio numérico de la interdependencia de los números adimensionales Nusselt, Reynolds y Prandtl.

Se realizó un estudio numérico sobre la interrelación entre los números adimensionales de Reynolds y Prandtl en situaciones de transferencia de calor por convección forzada en flujo externo. Para cada geometría, se exploraron dos condiciones de flujo diferentes con el objetivo de recrear un conjunto amplio de escenarios de separación. Se hizo un estudio paramétrico, utilizando cinco valores del número de Prandtl, entre $0,1 \leq Pr \leq 500$, y cuatro valores del número de Reynolds, entre $10 \leq Re \leq 10000$. El número de Nusselt local y promedio, en conjunto con perfiles de velocidad, coeficientes de presión y coeficientes de fricción fueron analizados. De los resultados se observó que los valores del número de Nusselt promediados en las caras tienen un valor máximo para $Pr = 50$ entre $10 \leq Re \leq 1000$. Para $Re = 10000$ la difusión térmica adquiere mayor relevancia y los valores máximos se desplazan hacia $Pr = 5$, en la mayoría de los casos, y $Pr = 0.72$ y $Pr = 0.1$ en casos puntuales. Con relación al comportamiento local, se observa que la aparición de valores máximos o mínimos del número de Nusselt, se da en la vecindad de los puntos de separación del flujo, donde la aparición de vórtices influye en el posicionamiento de estos. Del estudio se infiere que, contrario a lo establecido por varios autores y en diferentes libros de texto, el exponente $n = 1/3$ para el número de Prandtl, en las correlaciones tipo ley de potencia del número de Nusselt, no describe completamente los fenómenos capturados para el conjunto de situaciones de flujo analizadas en este estudio.

Palabras clave: Convección de Calor forzada, Flujo Externo, Separación de Flujo, Número de Reynolds y Número de Prandtl.

Abstract

Numerical assessment of the interdependency of the non-dimensional numbers Nusselt, Reynolds and Prandtl.

A numerical study was done in order to assess the interrelationship between the nondimensional numbers Reynolds and Prandtl in the heat transfer forced convection around blunt bodies. For each case, two different flow conditions were explored in order to obtain a wide set of separation situations. A parametric study was carried out using five Prandtl numbers, between $0,1 \leq \text{Pr} \leq 500$, and four Reynolds numbers, between $10 \leq \text{Re} \leq 10000$. The local and average Nusselt number was analyzed in conjunction with the velocity profiles, the pressure coefficient and surface shear stress coefficient. The averaged Nusselt over the studied faces showed a maximum value at $\text{Pr} = 50$ between $10 \leq \text{Re} \leq 1000$. For $\text{Re} = 10000$, the thermal diffusivity was more relevant and the maximum values shifted to $\text{Pr} = 5$, in most of the cases, and $\text{Pr} = 0.72$ and $\text{Pr} = 0.1$ in less situations. From the local behavior was observed the apparition of relative extreme values in the neighborhood of the boundary layer detachment points, where the vortex formation influenced the positioning of these values. It can be inferred from the study that, contrary to what has been established by several authors and textbooks, the assumption for the exponent $n = 1/3$, in the Nusselt power law correlations, do not fully describe the phenomena observed in the situations analyzed in this work.

Keywords: Heat Transfer Forced Convection, External Flow, Separation Flow, Reynolds Number and Prandtl Number.

Índice general

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Lista de figuras	XIII
Lista de tablas	1
1. Introducción y antecedentes	2
2. Metodología	8
2.1. Ecuaciones gobernantes	8
2.2. Dominio computacional	9
2.3. Evaluación comparativa y validación	10
2.3.1. Caso 1 - Caso de referencia 2D	11
2.3.2. Caso 2 - Validación	14
2.4. Configuración del estudio	15
2.5. Discretización espacial	16
2.6. Convergencia temporal de las simulaciones.	20
3. Resultados y discusión	21
3.1. Triángulo	22
3.2. Elipse	27
3.3. Cuadrado	34
3.4. Discusión general	45
4. Conclusiones y recomendaciones	54
4.1. Recomendaciones	55
A. Anexo: Estudio previo del modelo computacional.	57
Bibliografía	81

Lista de Figuras

1-1. Esquema de flujo externo con separación. La figura a) se obtuvo a partir de resultados propios y la b) tomada y modificada de Bergman et al. (2011) . . .	4
2-1. Esquema básico del dominio computacional	9
2-2. Comparación entre la predicción actual (subíndice M) del número de Nusselt y el obtenido en Sahu et al. (2009) (subíndice A). Azul $Pr = 1$, naranja $Pr = 10$ y amarillo $Pr = 20$	12
2-3. Iso-contornos obtenidos para la temperatura adimensional. Se presenta la condición tipo Dirichlet y Neumann, en la mitad superior e inferior, respectivamente. La fila superior (caso a), caso b) y caso c) corresponde a los resultados tomados y adaptados de Sahu et al. (2009). En la fila inferior (caso d), caso e) y caso f)) los resultados homólogos obtenidos con el modelo computacional.	13
2-4. Resultados obtenidos para el segundo caso de validación. El caso a) corresponde al número Nusselt local predicho por el modelo computacional y el caso b) a la comparación entre el Nusselt promedio actual (subíndice M) y el obtenido por Kapitz et al. (2018) (subíndice A). Para ambas figuras, en rojo los resultados para $Pr = 0.72$ y en negro para $Pr = 7$	15
2-5. Campo escalar del área de celda normalizada tomado en un plano de corte normal a la dirección z. Ejemplo para los casos de Reynolds 1000. Valores en escala logarítmica.	18
2-6. Indicadores calculados en función del tiempo. Ejemplo para el caso de la elipse I1 $Re = 10000$	20
3-1. Esquema de orientaciones y nomenclatura para los resultados locales del caso del triángulo.	22
3-2. Números de Nusselt calculados para el caso del triángulo. En azul $Re = 10000$, verde $Re = 1000$, rojo $Re = 100$ y naranja $Re = 10$. Para cada figura, en el eje izquierdo se presentan los resultados para $Re = 10$ y $Re = 100$, mientras que en el eje derecho los resultados para $Re = 1000$ y $Re = 10000$. En cada caso, las letras en color rojo indican la cara en la que se tomaron los resultados.	23
3-3. Indicadores de pared locales tomados en el triángulo para la inclinación presentada en la Figura 3-1-a. De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a $Re 10, 100, 1000$ y 10000 . En líneas punteadas las curvas para cada número de Prandtl utilizado.	24

3-4. Perfiles de velocidad tangencial, a lo largo de la altura n , para la inclinación presentada en la Figura 3-1-a . La línea A*B se presenta en a) y la línea BA en b). De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000.	25
3-5. Indicadores de pared locales tomados en el triángulo para la inclinación presentada en la Figura 3-1-b . De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000. En líneas punteadas las curvas para cada número de Prandtl utilizado.	26
3-6. Perfiles de velocidad tangencial, a lo largo de la altura n , para la inclinación presentada en la Figura 3-1-b . La línea AB se presenta en a) y la línea BA* en b). De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000.	27
3-7. Esquema de orientaciones y nomenclatura para los resultados locales del caso del elipse.	27
3-8. Números de Nusselt calculados el caso de la elipse. En azul $Re = 10000$, verde $Re = 1000$, rojo $Re = 100$ y naranja $Re = 10$. Para cada figura, en el eje izquierdo se presentan los resultados para $Re = 10$ y $Re = 100$, mientras que en el eje derecho los resultados para $Re = 1000$ y $Re = 10000$. En cada caso, las letras en color rojo indican la cara en la que se tomaron los resultados.	29
3-9. Indicadores de pared locales tomados en el elipse para la inclinación presentada en la Figura 3-7-a . De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000. En líneas punteadas las curvas para cada número de Prandtl utilizado.	31
3-10. Perfiles de velocidad tangencial, a lo largo de la altura n , para la inclinación presentada en la Figura 3-7-a . De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000.	32
3-11. Indicadores de pared locales tomados en el elipse para la inclinación presentada en la Figura 3-7-b . De arriba hacia abajo se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000. En líneas punteadas las curvas para cada número de Prandtl utilizado.	33
3-12. Perfiles de velocidad tangencial, a lo largo de la altura n , para la inclinación presentada en la Figura 3-7-b . De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000.	34
3-13. Esquema de orientaciones y nomenclatura para los resultados locales del caso del cuadrado.	34
3-14. Números de Nusselt calculados para el caso del cuadrado. En azul $Re = 10000$, verde $Re = 1000$, rojo $Re = 100$ y naranja $Re = 10$. Para cada figura, en el eje izquierdo se presentan los resultados para $Re = 10$ y $Re = 100$, mientras que en el eje derecho los resultados para $Re = 1000$ y $Re = 10000$. En cada caso, las letras en color rojo indican la cara en la que se tomaron los resultados.	36

3-15. Indicadores de pared locales tomados en el triangulo para la inclinación presentada en la Figura 3-13-a . De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000. En líneas punteadas las curvas para cada número de Prandtl utilizado.	38
3-16. Perfiles de velocidad tangencial, a lo largo de la altura n, para la inclinación presentada en la Figura 3-13-a . La línea 1B se presenta en a), la línea BC en b) y la línea C2 en c). De arriba hacia abajo se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000.	39
3-17. Números de Nusselt calculados para el caso del cuadrado girado. En azul Re = 10000, verde Re = 1000, rojo Re = 100 y naranja Re = 10. Para cada figura, en el eje izquierdo se presentan los resultados para Re = 10 y Re = 100, mientras que en el eje derecho los resultados para Re = 1000 y Re = 10000. En cada caso, las letras en color rojo indican la cara en la que se tomaron los resultados.	40
3-18. Indicadores de pared locales tomados en el triangulo para la inclinación presentada en la Figura 3-13-b . De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000. En líneas punteadas las curvas para cada número de Prandtl utilizado.	42
3-19. Indicadores de pared locales tomados en el triangulo para la inclinación presentada en la Figura 3-13-b . De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000. En líneas punteadas las curvas para cada número de Prandtl utilizado.	44
3-20. Perfiles de velocidad tangencial, a lo largo de la altura n, para la inclinación presentada en la Figura 3-13-b . La línea AB se presenta en a), la línea BC en b), la línea AC en c) y la línea DC en d). De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000.	45
3-21. Comparación del número de Nusselt promedio, obtenido para la elipse contra las predicciones hechas utilizando la ecuación 1-1 y los coeficientes de la Tabla 3-1 . HR hace referencia a la predicción de la correlación, mientras que M hace referencia al estudio actual.	51
3-22. Comparación del número de Nusselt promedio, obtenido para el cuadrado contra las predicciones hechas utilizando la ecuación 1-1 y los coeficientes de la Tabla 3-1 . HR hace referencia a la predicción de la correlación, mientras que M hace referencia al estudio actual.	52

Lista de Tablas

1-1. Algunos grupos adimensionales en la mecánica de fluidos. Tomado y adaptado de White (1999) y Bergman et al. (2011)	3
2-1. Lista de las constantes A para las dimensiones de cada dominio.	10
2-2. Dimensiones del dominio del caso de validación 1.	11
2-3. Dimensiones del dominio del caso de validación 2.	14
2-4. Datos malla Triángulo I1 y I2	16
2-5. Datos malla Elipse - I1.	17
2-6. Datos malla Elipse - I2.	17
2-7. Datos malla Cuadrado - I1.	17
2-8. Datos malla Cuadrado - I2.	17
2-9. Regiones de la capa limite definidas en función del y^+ . Tomado de Pope (2000).	19
2-10. Valores promedio de y^+ calculados en el primer centro de celda adyacente a la pared de cada cilindro.	19
3-1. Coeficientes utilizados para la aplicación de la ecuación 1-1. Valores tomados de Sparrow et al. (2004).	49
3-2. Coeficientes obtenidos para la Ecuación 1-1 a partir de los resultados del estudio, junto con su respectivo coeficiente de determinación R^2 . Valores validos para $0,1 \leq Pr \leq 50$	53

1. Introducción y antecedentes

Dos terceras partes de los problemas de la mecánica de fluidos comprenden situaciones con un nivel de complejidad, desde el punto de vista físico y/o geométrico, que salen del alcance de las soluciones analíticas [White \(1999\)](#). Dado esto, la investigación experimental permite hacer un acercamiento, y buscar respuesta a cuáles parámetros y estímulos gobiernan al comportamiento de sus respectivos fenómenos. Sin embargo, la construcción de montajes experimentales es una actividad de alto costo a todas las necesidades observables. Por un lado, se debe asegurar que los fenómenos identificados en los marcos conceptuales estén involucrados en las variables seleccionadas como parámetros del experimento. Por otro lado, los indicadores de análisis planteados, deben facilitar la construcción de tendencias y permitir la replicación de los resultados en diferentes experimentos.

Para esto, diferentes disciplinas hacen uso del análisis dimensional. Esta, es una metodología que permite reducir el número, y la complejidad, de las variables experimentales que afectan un fenómeno físico. Su propósito, es identificar cuáles son las dimensiones fundamentales del problema, que se relacionan entre sí, y agruparlas en expresiones adimensionales. Los beneficios que se desprenden de su aplicación, consisten en una selección asertiva de variables que estimulan lo suficiente al fenómeno. De tal forma que, la inversión de capital sea la necesaria, y se facilite la planeación y diseño al sugerir variables que pueden ser descartadas.

En cuanto a sus referentes históricos, los primeros en profundizar en este tema fueron Leonhard Euler, Joseph Fourier y el Lord Rayleigh, quienes dejaron reportes escritos en 1765, 1822 y 1877, respectivamente. Estos investigadores plantearon relaciones, que son utilizadas frecuentemente en las ramas involucradas con la mecánica de fluidos, y algunas se enlistan en la [tabla 1-1](#). En 1914 aparece E. Buckingham quien desarrolló el teorema pi de Buckingham, el cual es el método más usado en la actualidad y se emplea para la descripción y construcción de parámetros adimensionales.

Número adimensional	Definición	Relación de efectos	Importancia
Reynolds	$Re = \frac{\rho UL}{\mu}$	$\frac{\text{Inercia}}{\text{Viscosidad}}$	General
Mach	$Ma = \frac{U}{a}$	$\frac{\text{Velocidad del flujo}}{\text{Velocidad de sonido}}$	Flujo compresible
Euler	$Eu = \frac{P-P_v}{\rho U^2}$	$\frac{\text{Presión}}{\text{Inercia}}$	Cavitación
Prandtl	$Pr = \frac{\rho C_p}{k}$	$\frac{\text{Disipación}}{\text{Conducción}}$ 1	Transferencia de calor
Grashof	$Gr = \frac{\beta \Delta T g L^3 \rho^2}{\mu^2}$	$\frac{\text{Flotabilidad}}{\text{Viscosidad}}$	Convección natural
Nusselt	$Nu = \frac{hL}{k}$	$\frac{\text{Convección}}{\text{Conducción}}$	Transferencia de calor
C. de presión	$C_p = \frac{p-p_\infty}{0,5\rho U^2}$	$\frac{\text{Presión estática}}{\text{Presión dinámica}}$	Aerodinámica, hidrodinámica.
C. de fricción	$C_f = \frac{\tau_s}{0,5\rho U^2}$	Esfuerzo cortante	Aerodinámica, hidrodinámica.

Tabla 1-1.: Algunos grupos adimensionales en la mecánica de fluidos. Tomado y adaptado de [White \(1999\)](#) y [Bergman et al. \(2011\)](#)

No menos importante, el análisis dimensional plantea leyes de escalamiento, las cuales sirven como puente entre un modelo sencillo, económico y un prototipo único de gran escala. Un ejemplo de esto es la aplicación del número de Nusselt en situaciones de transferencia de calor. El cual, por medio de correlaciones matemáticas sencillas, permite reconstruir los comportamientos capturados en estudios experimentales. Este, en el caso de la convección de tipo forzado, se propone como una función del número de Reynolds y del número de Prandtl, a través de una relación de ley de potencia, como se enuncia en la ecuación 1-1.

$$Nu = CRe^m Pr^n \quad (1-1)$$

En los libros de texto de transferencia de calor se reportan los valores particulares de las constantes C y m para diferentes secciones transversales, como el triángulo o el cuadrado, en casos de flujo externo. En cuanto al exponente n del número de Prandtl, [Bergman et al. \(2011\)](#) afirman que el valor para cualquier situación es igual a $n = 1/3$. No obstante, [Sparrow et al. \(2004\)](#) señalan que no existe evidencia experimental suficiente, porque los trabajos sobre los cuales se basan las constantes, únicamente utilizaron aire como fluido de trabajo y adicionalmente, se incurrió en errores de interpretación de los resultados.

Los primeros investigadores en reportar valores para las constantes fueron [Reiher \(1925\)](#); [Hilpert \(1933\)](#) en Alemania, cuyos trabajos fueron luego traducidos al inglés por [Jakob \(1949\)](#); [Eckert \(1950\)](#) y [Knudsen and Katz \(1959\)](#). Para sus experimentos, y la respectiva presentación de resultados, [Reiher \(1925\)](#) y [Hilpert \(1933\)](#) utilizaron un diámetro equivalente, definido como el diámetro de un cilindro de sección circular, cuyo perímetro es igual al perímetro del cilindro de sección no circular. Aunque Jakob y Eckert mantuvieron esta convención, Knudsen y Katz utilizaron la longitud proyectada, enfrentada a la dirección principal del flujo; esto tuvo como consecuencia que los resultados de las correlaciones Nusselt - Reynolds y el rango de cobertura de este número, se vieran modificados. [Gerbhardt \(1961\)](#), entre otros, utilizaron lo presentado por Knudsen y Katz.

Aunque otros investigadores han verificado y mejorado los reportes obtenidos ([Igarashi \(1985\)](#); [Goldstein et al. \(1990\)](#); [Ahmed and Yovanovich \(1997\)](#)), ellos se concentraron en replicar lo hecho en los experimentos originales, y la influencia del número de Prandtl no fue abordada hasta hace unos años con [Kapitz et al. \(2018\)](#). En este trabajo, se señala y demuestra que el supuesto del exponente $n = 1/3$, no captura el comportamiento de un flujo real, que es de carácter tridimensional y complejo, hecho señalado también por [Lienhard and Lienhard \(2011\)](#).

Dichos escenarios reales son situaciones de separación del flujo, un tópico muy importante pero a su vez complicado. A causa de la separación se pierde energía. Cuando esto ocurre, en los flujos de tipo externo, las líneas de corriente se desvían, el arrastre incrementa, el empuje disminuye y el flujo se reversa, ocurriendo el estancamiento ([Chang, 1970](#)), como se observa en la [Figura 1-1](#).

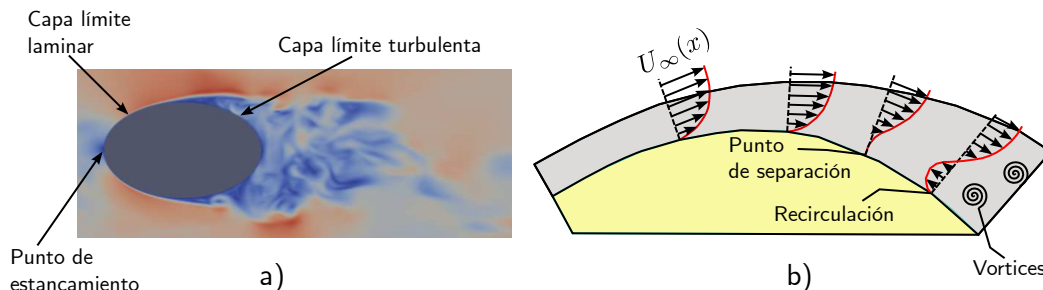


Figura 1-1.: Esquema de flujo externo con separación. La figura a) se obtuvo a partir de resultados propios y la b) tomada y modificada de [Bergman et al. \(2011\)](#)

Como tal, la separación del flujo es un proceso gradual, que puede encontrar su origen tanto en un aumento del gradiente de presión adverso, así como cambios bruscos de la tangente

de la superficie. En frente del punto de estancamiento, un aumento de presión ocurre en la dirección del flujo, pero este no se separa por ausencia de fricción en la pared. Para una partícula que recorre el cuerpo, el efecto de la viscosidad es tal, que la velocidad paralela a las paredes cambia en dirección perpendicular a la superficie, lo que se conoce como el gradiente del campo de velocidad en dirección normal a la pared. La velocidad en esta es cero y a medida que se aleja, se aproxima a la velocidad de corriente libre.

Aguas abajo, la partícula percibe que la energía a lo largo de la superficie del cuerpo, es utilizada para superar el aumento de presión y fricción hasta llegar a un punto, en el cual el fluido llega al reposo. Este punto, se conoce como el punto de separación de capa límite, y de acuerdo a la teoría clásica, es el lugar donde el gradiente de velocidad en la superficie se hace cero, y consecuentemente, el esfuerzo cortante en la pared se desvanece.

$$\tau_s = \mu \frac{\partial U}{\partial n} \quad (1-2)$$

En este mismo lugar, a determinada distancia normal a la pared, la magnitud del gradiente de velocidad $\frac{\partial U}{\partial n}$ disminuye y el valor de $\frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$ se hace cero. A causa de lo anterior, el perfil de velocidad tiene un punto de inflexión. Cuando esto ocurre, el flujo es inestable y tiende a convertirse en turbulento. Desde este punto, la formación de vórtices facilitará el mezclado de las capas de fluido lento, cercanas a la pared, con las de mayor velocidad que están alejadas de la misma. El efecto del mezclado, se expresa como esfuerzos cortantes turbulentos, donde el valor de la viscosidad turbulenta ϵ puede llegar a ser 100 veces más que el de la viscosidad dinámica en el mismo medio.

$$\tau = \epsilon \frac{\partial U}{\partial n} \quad (1-3)$$

Como se observa, los mecanismos de separación no son fenómenos sencillos, ni pierden complejidad, cuando son analizados en conjunto con la transferencia de calor. La forma en la que la energía se transfiere en la capa límite térmica, depende del comportamiento local de los mecanismos de separación y las propiedades del fluido.

En principio, el calor es recibido en la capa adyacente del fluido que no se desliza y el mecanismo que prevalece es la conducción térmica. A partir de ahí, para la partícula que viaja con el fluido y se empieza a alejar de la pared, la transferencia de momento en conjunto con la difusión térmica, se encargan de transportar la energía. Es aquí, donde el número de Prandtl cobra significado, al enunciar si la difusión de momento (ν) tendrá mayor relevancia que la difusión térmica (α) (Ecuación 1-4).

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (1-4)$$

Este número adimensional es el único, dentro del grupo de las variables adimensionales tradicionales², que además de ser una relación de fenómenos físicos, es una propiedad intrínseca

²Como las que se presentan en la Tabla 1-1 y las que quedaron por fuera.

de los fluidos. Sobre los rangos identificados, los números de Prandtl cercanos a cero ($Pr \ll 1$) están relacionados con metales líquidos. Los que son cercanos a la unidad, se asocian a gases. Mientras que, los que son elevados ($Pr \gg 1$) a aceites. En el caso de los primeros, la capa límite térmica tendrá mayor espesor, mientras que en los últimos será más delgada, en comparación con el espesor de capa límite de velocidad (Çengel, 1998).

Como se mencionó previamente, la influencia del número de Prandtl en la transferencia de calor en flujo externo, no ha sido explorada. Mediante simulación numérica, se ha experimentado con cilindros de sección transversal cuadrada a bajos números de Reynolds ($60 \leq Re \leq 160$), y diferentes números de Prandtl ($0,01 \leq Pr \leq 1000$), como se muestra en Sahu et al. (2009); Shyam and Chhabra (2013); Dey and Das (2016). Ahora bien, Murmu et al. (2020) para otro tipo de geometrías, como el triángulo, elipse o secciones compuestas, evaluaron el efecto de la intensidad turbulenta a la entrada. Por su parte, Yousif (2019); Kumar and Jayavel (2018), analizaron el efecto de la inclinación del cuerpo, con respecto a la dirección del flujo principal. No obstante, en estas investigaciones únicamente se utilizó aire como fluido de trabajo.

La importancia de este tema si ha sido atendida en otras aplicaciones. Por ejemplo, Hu and Herold (1995) estudiaron experimentalmente el comportamiento del factor de Colburn ³ (ecuación 1-5) en intercambiadores de calor, utilizando un conjunto de refrigerantes definidos en el siguiente rango del número de Prandtl $40 \leq Pr \leq 150$. A partir de la investigación, se encontró que; al compararse los valores medidos con la predicción de las correlaciones de Wieting (1975); Joshi and Webb (1987), este indicador se sobre predijo en un 100 %. De acuerdo con el análisis del autor, esto se asoció al hecho de que dichas correlaciones fueron obtenidas a partir de experimentos con aire.

$$j = \frac{Nu}{RePr^{1/3}} \quad (1-5)$$

Por lo anterior, se observa que existe una brecha en el conocimiento de la transferencia de calor en flujo externo, y es necesario atenderla, ya que como lo subrayan Hu and Herold (1995), es un hecho inaceptable el nivel de desviación de las predicciones utilizadas en el marco de un uso eficiente de la energía, dimensionamiento de equipos, circuitos de refrigeración, entre otras aplicaciones. Siendo así, en el presente trabajo se analiza, mediante experimentación numérica, el efecto conjunto del número de Reynolds y número de Prandtl, en el fenómeno de transferencia de calor por convección forzada, alrededor de cilindros de sección no circular. Para este fin, en el capítulo 2 se presenta el modelo computacional y la configuración de experimentos numéricos. Seguido a ello, en el capítulo 3 se exponen y

³Coficiente adimensional de transferencia de calor por convección Bergman et al. (2011)

analizan los resultados. Para finalmente, en el capítulo 4 desarrollar las conclusiones de esta investigación y proponer las recomendaciones que se desprenden del estudio.

2. Metodología

Se desarrolló un modelo computacional en tres dimensiones, el cual resuelve situaciones de transferencia de calor por convección forzada en flujo externo incompresible. El interés de este trabajo está centrado en estudiar el comportamiento del número de Nusselt, obtenido bajo la influencia de diferentes estímulos de transferencia de momento y energía térmica, alrededor de geometrías sencillas. Para esto, se desarrollaron un conjunto de experimentos numéricos, usando diferentes números de Reynolds y Prandtl, los cuales se describen posteriormente.

2.1. Ecuaciones gobernantes

El modelo computacional resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo del tipo incompresible. Se seleccionó el software de código abierto *OpenFoam* y su librería *PimpleFoam*, la cual acopla el método PISO y el método SIMPLE, con la finalidad de solucionar los campos de velocidad y presión. En cuanto a la estimación de la variable temperatura, se ha modificado este solucionador con el fin de agregar ecuaciones de escalares pasivos, las cuales se resuelven una vez convergen las predicciones de la presión y velocidad, en cada paso de tiempo. Considerando lo anterior, se listan a continuación el conjunto de ecuaciones resueltas para la ejecución de las simulaciones.

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2-1)$$

Ecuaciones de momento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2-3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2-4)$$

Ecuación de escalar pasivo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2-5)$$

El modelo LES de turbulencia *Wall Adapting Local Eddy - viscosity* (WALE), desarrollado por [Ducros et al. \(2007\)](#), se incluyó en los casos donde se esperaba desprendimiento de capa límite y fenómenos turbulentos, tales como circulación del flujo y generación de vórtices.

Este modelo se evaluó previamente al comparar perfiles de velocidad, curvas de fluctuaciones, coeficientes de presión e indicadores de pared, contra valores medidos experimentalmente por dos técnicas de medición (PIV y LDA) y las predicciones de otro modelo LES. Los resultados mostraron seguimiento de las tendencias principales plasmadas en los trabajos de referencia, y un alineamiento parcial de la ubicación de eventos locales, como puntos de separación y re-enganche de capa límite. Así como, la evolución del perfil del coeficiente presión en la dirección principal del flujo. Este trabajo comparativo se puede consultar en el anexo [A](#).

2.2. Dominio computacional

En la figura [2-1](#) se presenta el esquema principal del dominio computacional, teniendo a la izquierda la vista de planta y a la derecha un corte transversal en un plano a altura media del cilindro. El dominio se compone de un canal que contiene un cilindro, de diferentes secciones transversales, donde sus dimensiones principales están configuradas en función de la longitud de la sección transversal B , asumida como el parámetro geométrico principal.

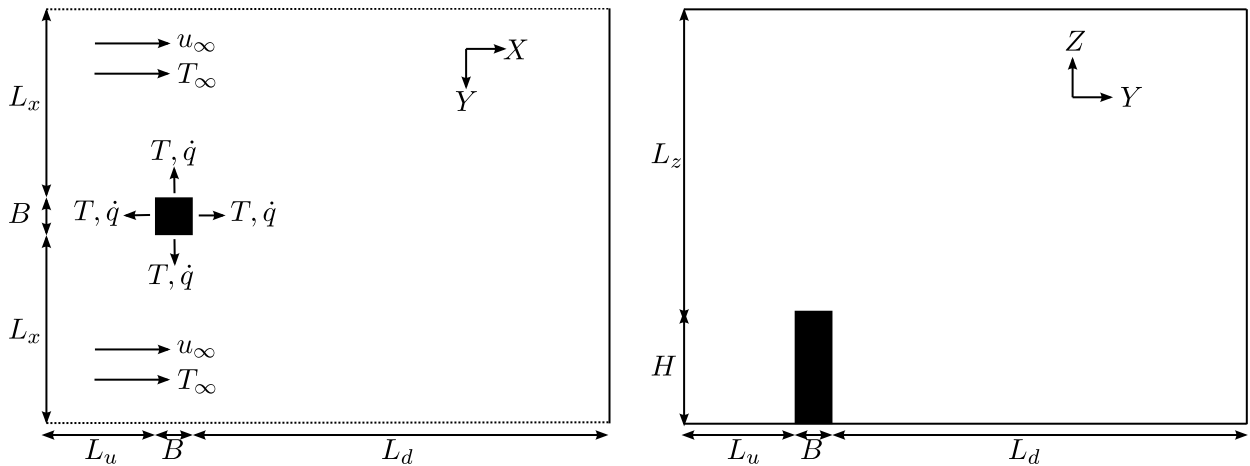


Figura 2-1.: Esquema básico del dominio computacional

Las geometrías utilizadas fueron el triángulo, la elipse y el cuadrado, las cuales se estudiaron bajo dos inclinaciones principales, en cada caso. La motivación de haber hecho esta selección

tiene justificación en dos puntos principales. En primer lugar, se buscó abarcar el comportamiento del número de Nusselt en un margen amplio de casos básicos, de los cuales se puede tomar como un punto de partida para concluir sobre geometrías más complejas. En segundo lugar, se trazó como propósito, involucrar diferentes situaciones de dinámica de flujo, con la intención de capturar un amplio espectro de situaciones de transferencia de momento y difusión térmica.







Sección transversal	I1	I2	Lx	Lu	Ld	H	Lz
Triangulo			5	5	10	4	8
Elipse			4	4	8	3	6
Cuadrado			4	4	8	3	6

Tabla 2-1.: Lista de las constantes A para las dimensiones de cada dominio.

Considerando lo anterior, en la tabla 2-1 se presentan los valores de las longitudes para la configuración del dominio computacional de cada sección transversal, los cuales representan una constante A (Ecuación 2.2), definida como la relación de cada una, respecto a la longitud característica de cada experimento.

$$A = \frac{L_i}{B} \quad (2-6)$$

2.3. Evaluación comparativa y validación

Para la ejecución del estudio se realizó una revisión bibliográfica con el objetivo de identificar técnicas utilizadas para estimar el número de Nusselt, en trabajos de experimentación numérica. A partir de los resultados de esta búsqueda, se seleccionó un trabajo que recoge varias experiencias previas de simulación, y se encuentra alineado con los presentes objetivos. Utilizando este como referencia, se hizo una evaluación comparativa para estudiar el efecto, en la respuesta del modelo ante la variación conjunta de los valores asignados en las condiciones de frontera, y parámetros de construcción de la malla computacional. Este proceso se llevo a cabo, hasta llegar a aproximar las estimaciones con lo reportado por los autores. Una vez culminada esta etapa con éxito, se utilizó esta metodología para contrastar la predicción del modelo contra resultados experimentales, consiguiendo así la validación del modelo.

2.3.1. Caso 1 - Caso de referencia 2D

Sahu et al. (2009) desarrollaron una simulación 2D de dinámica de fluidos computacional, para un cilindro de sección cuadrada. Este trabajo, utiliza como referencia la experimentación numérica realizada por Sharma and Eswaran (2004), para caracterizar los patrones de flujo obtenidos por su modelo numérico. Así mismo, se toma a Dhiman et al. (2006), quienes evaluaron el efecto del número de Prandtl en este escenario. Aunque ambos compararon sus predicciones contra otros experimentos numéricos, Sharma and Eswaran (2004) corroboró que la desviación de sus estimaciones respecto a la predicción obtenida con la correlación reportada por Eckert (1950), estuviera dentro de un rango aceptable.

Considerando el contexto de este primer caso, a continuación se presenta la configuración de parámetros, utilizada para la evaluación del modelo computacional:

- $Re = 160$.
- $Pr = 1, 10$ y 20 .

El dominio utilizado, sigue la configuración descrita en la figura 2-1, donde las constantes se presentan en la tabla 2-2. Uno de los aspectos interesantes de este trabajo, es la evaluación de la condición de frontera de la variable temperatura tipo Dirichlet (temperatura constante) y la de tipo Neumann (gradiente constante). Los resultados mostrados más adelante, fueron obtenidos con una malla de 800.000 y 2'100.000 volúmenes finitos, respectivamente.

L_x	L_u	L_d
9.5	8.5	16.5

Tabla 2-2.: Dimensiones del dominio del caso de validación 1.

En la figura 2-2, se presentan la comparación del número de Nusselt local para el subconjunto de posiciones presentadas en la figura, en el camino A-B-C-D. El subíndice M, corresponde a la predicción del modelo computacional actual, y A lo reportado en la literatura. A la izquierda se presenta el caso de temperatura constante, y a la derecha, el caso de flujo de calor constante. La mayor desviación del modelo se tiene para la condición de temperatura constante, en $Pr = 20$. Para ambos, se observa un colapso de las curvas cerca a las esquinas, a excepción del punto C en el caso de la izquierda.

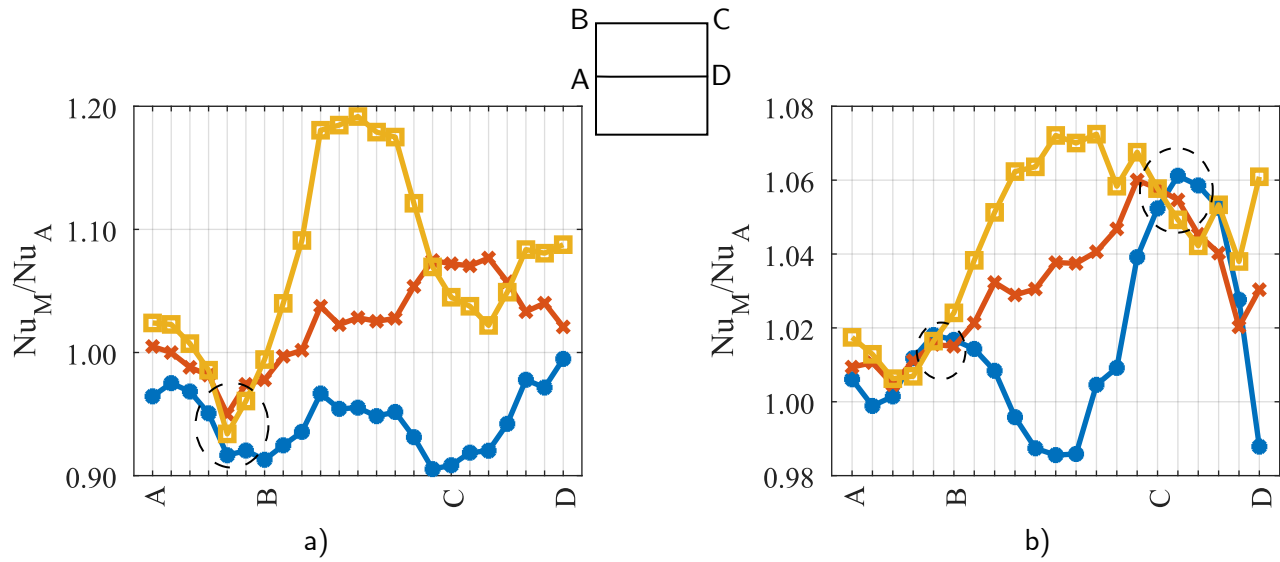


Figura 2-2.: Comparación entre la predicción actual (subíndice M) del número de Nusselt y el obtenido en [Sahu et al. \(2009\)](#) (subíndice A). Azul $Pr = 1$, naranja $Pr = 10$ y amarillo $Pr = 20$.

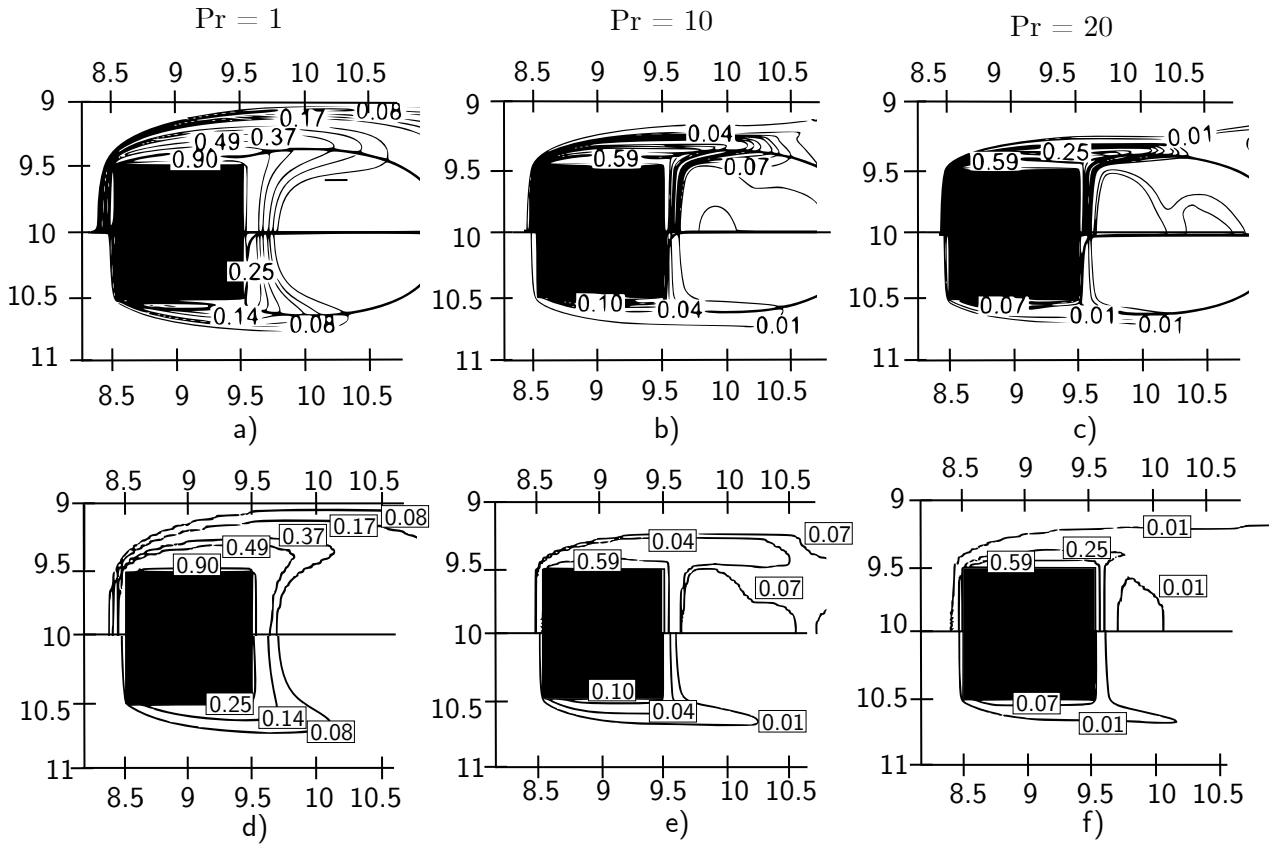


Figura 2-3.: Iso-contornos obtenidos para la temperatura adimensional. Se presenta la condición tipo Dirichlet y Neumann, en la mitad superior e inferior, respectivamente. La fila superior (caso a), caso b) y caso c) corresponde a los resultados tomados y adaptados de [Sahu et al. \(2009\)](#). En la fila inferior (caso d), caso e) y caso f)) los resultados homólogos obtenidos con el modelo computacional.

En la figura 2-3, son exhibidos los isocontornos de una temperatura adimensional, calculadas utilizando las relaciones presentadas a continuación. Para cada caso, una línea horizontal divide los resultados de las condiciones de frontera, teniendo en la mitad superior el escenario de la temperatura constante y en la inferior el gradiente constante.

- Temperatura constante: $\phi = \frac{T-T_W}{T_W-T_\infty}$
- Gradiente temperatura constante: $\phi = \frac{T-T_W}{q_w \frac{B}{k}}$

El comportamiento expuesto por las isothermas promediadas en el tiempo, en los tres casos, concuerdan con lo descrito por [Sahu et al. \(2009\)](#). Un incremento en el número del Prandtl, se manifiesta en la reducción del espesor de la capa límite, sugiriendo un confinamiento de las líneas en una región más pequeña.

2.3.2. Caso 2 - Validación

Kapitz et al. (2018) evaluaron de forma experimental la influencia del número de Reynolds y Prandtl, en el número de Nusselt, utilizando tres números de Reynolds, dos fluidos de trabajo y trece inclinaciones a la dirección del flujo principal. Dentro de este conjunto de resultados, se decidió replicar los siguientes casos:

- $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$
- Re: 9100
- Pr: 0.72, 7.

En esta ocasión, el problema se configuró utilizando un enfoque tridimensional (3D), donde el dominio sigue la configuración presentada en la figura 2-1. Los valores de las constantes se presentan en la tabla 2-3, y la condición de frontera de la variable temperatura, asignada en la pared, fue un gradiente constante.

L_x	L_u	L_d	H	L_z
5	5	10	3.2	6.4

Tabla 2-3.: Dimensiones del dominio del caso de validación 2.

En la figura 2-4-a se presenta el número de Nusselt corregido obtenido para los dos números de Prandtl considerados, y en la figura 2-4-b la comparación del valor promedio para las caras estudiadas. La corrección del número de Nusselt ^{*1} se hace dividiendo este valor por el número de Prandtl elevado a 1/3. La intención de esto es observar si las predicciones para diferentes números de Prandtl colapsan, y se cumple la hipótesis expuesta en los libros de texto.

¹De ahora en adelante número Nusselt.

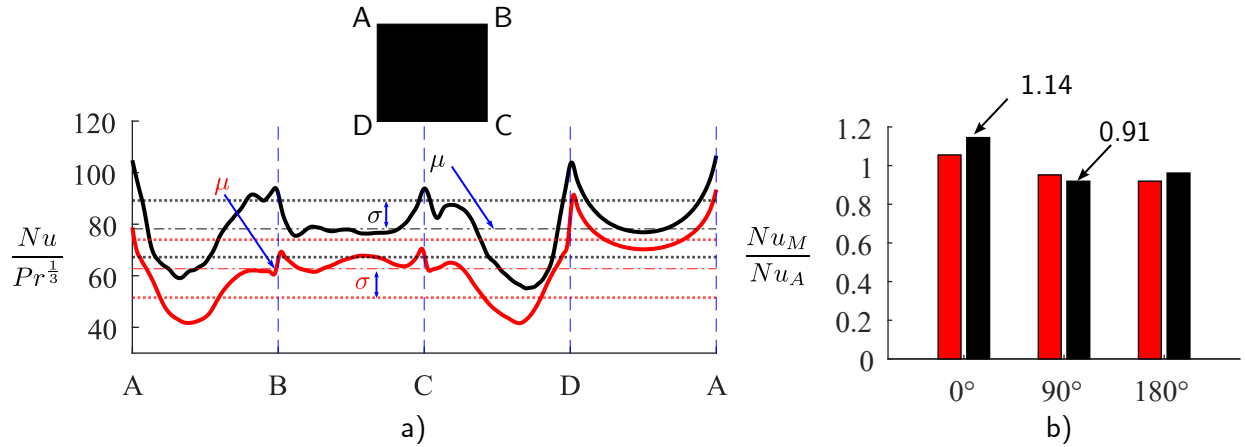


Figura 2-4.: Resultados obtenidos para el segundo caso de validación. El caso a) corresponde al número Nusselt local predicho por el modelo computacional y el caso b) a la comparación entre el Nusselt promedio actual (subíndice M) y lo obtenido por [Kapitz et al. \(2018\)](#) (subíndice A). Para ambas figuras, en rojo los resultados para $Pr = 0.72$ y en negro para y en $Pr = 7$.

De acuerdo con [Kapitz et al. \(2018\)](#), la inclinación de la arista AB ($\theta = 90^\circ$) muestra la mayor dispersión para los resultados del agua ($Pr = 7$). La diferencia entre las estimaciones del número de Nusselt de agua y aire, sigue lo descrito por el autor, donde la arista DA ($\theta = 0^\circ$) muestra más próximos los reportes, seguido de la arista BC ($\theta = 180^\circ$) y la arista AB ($\theta = 90^\circ$), respectivamente. En cuanto a las desviaciones de la predicción del modelo, comparado contra los resultados experimentales, se encuentran en un rango aceptable, y este está en la capacidad de capturar el comportamiento de transferencia en las zonas representativas de un cuerpo inmerso a flujo externo: Zona de separación ($\theta = 0^\circ$) desprendimiento de capa límite ($\theta = 90^\circ$) y región de re-circulación ($\theta = 180^\circ$).

2.4. Configuración del estudio

Con el propósito de desarrollar los objetivos planteados, para el estudio se han seleccionado cuatro números de Reynolds y cinco números de Prandtl, los cuales se listan a continuación:

- Re: 10, 100, 1000 y 10000.
- Pr: 0.1, 0.72, 5, 50 y 500.

A diferencia del caso de validación, la difusividad térmica α se considera de carácter sintético, ya que su valor no corresponde a fluidos estudiados en la naturaleza. El valor de esta variable fue despejado de su definición, y la viscosidad cinemática ν utilizada para realizar

las simulaciones fue la del aire a 298.15 K.

$$\alpha = \frac{\nu}{Pr} \quad (2-7)$$

2.5. Discretización espacial

Las mallas computacionales fueron de tipo estructurado. Estas se construyeron empleando la herramienta *BlockMesh*, nativa del software *OpenFoam*. El número de celdas por bloque y los valores de *grading*, se definieron con base a los siguientes dos criterios.

El primero fue ajustar a un valor mínimo posible las tres dimensiones de las celdas en la vecindad de la pared de los cilindros, manteniendo al mismo tiempo relaciones de aspecto cercanas a la unidad. En cuanto a la relación de expansión, la progresión de tamaños se definió por debajo de 1.05.

El segundo criterio se relaciona con la implementación de los requerimientos descritos en el párrafo anterior. La combinación de parámetros se buscó de tal forma que se cumplieran las condiciones dadas y se ajustara a la capacidad de la memoria RAM del recurso computacional, inicialmente para todos los casos de $Re = 10000$. Para $Re = 1000$, se buscó obtener aproximadamente la mitad del número de celdas del caso anterior, satisfaciendo los criterios descritos. En cuanto a las simulaciones configuradas para los números de Reynolds inferiores, se siguió el mismo procedimiento tomando como referencia en cada caso la malla del Reynolds inmediatamente superior. Entre la tabla 2-4 y la 2-8 se presentan el número de celdas y la relación de la longitud característica con los mínimos tamaños en cada dimensión.

Reynolds	Elementos	$B/\Delta x$	$B/\Delta y$	$B/\Delta z$
10	1274352	33	33	31
100	2713824	39	39	39
1000	4727520	47	47	47
10000	8351250	63	63	67

Tabla 2-4.: Datos malla Triángulo I1 y I2

Reynolds	Elementos	$B/\Delta x$	$B/\Delta y$	$B/\Delta z$
10	1098080	61	44	61
100	2275800	81	54	90
1000	4188960	101	67	103
10000	8770100	140	97	142

Tabla 2-5.: Datos malla Elipse - I1.

Reynolds	Elementos	$B/\Delta x$	$B/\Delta y$	$B/\Delta z$
10	1223340	66	44	91
100	2295540	54	81	135
1000	4587960	67	101	102
10000	8364400	96	144	142

Tabla 2-6.: Datos malla Elipse - I2.

Reynolds	Elementos	$B/\Delta x$	$B/\Delta y$	$B/\Delta z$
10	898165	45	45	45
100	1650835	55	55	55
1000	5150400	78	80	80
10000	8769309	104	104	104

Tabla 2-7.: Datos malla Cuadrado - I1.

Reynolds	Elementos	$B/\Delta x$	$B/\Delta y$	$B/\Delta z$
10	1406196	90	90	91
100	2543980	106	109	111
1000	4761850	133	134	135
10000	12993255	188	189	190

Tabla 2-8.: Datos malla Cuadrado - I2.

La implementación del requerimiento de relación de expansión se puede observar en la Figura 2-5, donde se presenta el área adimensional de las celdas en un corte de sección transversal normal a la dirección Z. La normalización se calculo a partir de la siguiente expresión:

$$A^* = \frac{A - A_{\min}}{A_{\min} - A_{\max}} \quad (2-8)$$

Donde A_{\min} y A_{\max} son el área mínima y máxima en el plano presentado, respectivamente

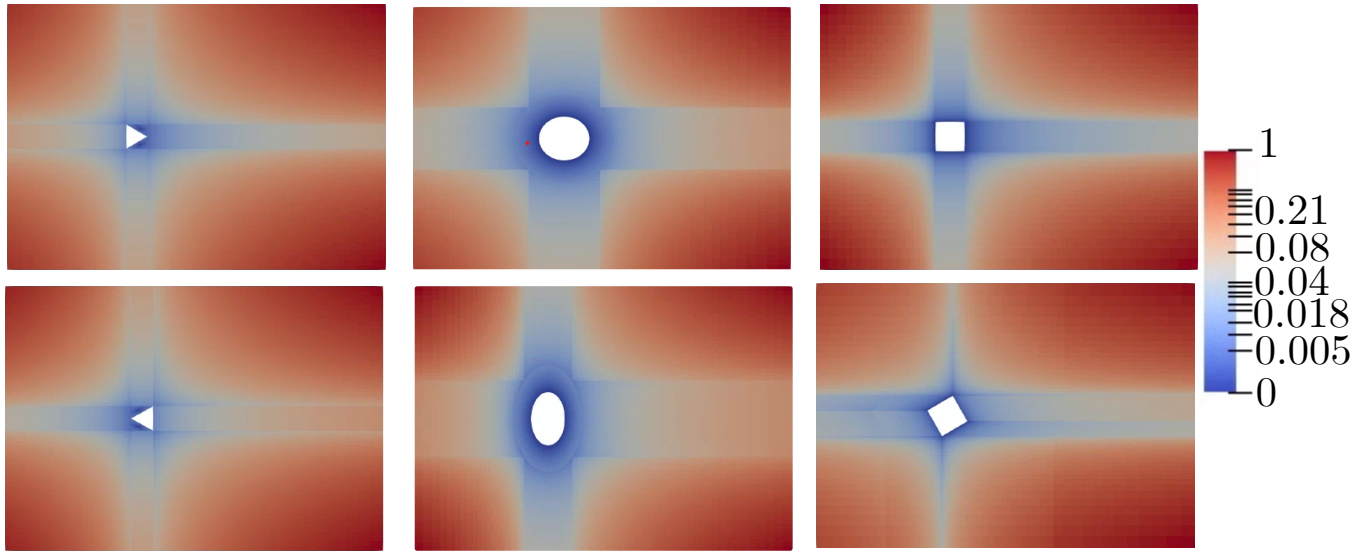


Figura 2-5.: Campo escalar del área de celda normalizada tomado en un plano de corte normal a la dirección z . Ejemplo para los casos de Reynolds 1000. Valores en escala logarítmica.

El desempeño de las mallas computacionales, se evaluó calculando el tamaño en unidades de pared de los centros de celda adyacentes a la pared de los cilindros. Los indicadores de pared categorizan los fenómenos de capa límite y permiten identificar cuáles de estos están siendo capturados por los modelos computacionales. Una breve descripción del procedimiento de cálculo se presenta a continuación.

El esfuerzo cortante total normal a la pared se escribe como:

$$\tau = \rho\nu \frac{dU}{dn} - \rho uv \quad (2-9)$$

Donde el término $\rho\nu \frac{dU}{dn}$, se conoce como el esfuerzo viscoso y el término ρuv el esfuerzo de Reynolds. En función de la distancia a la pared, la importancia relativa de estos términos cambia. En la pared, el esfuerzo cortante total depende únicamente del esfuerzo viscoso, punto en el cual es máximo. A medida que se aleja en dirección normal, el esfuerzo de Reynolds cobra relevancia.

Teniendo en cuenta que estos fenómenos son propios de sus escalas, los estudios de separación de flujo utilizan un indicador adimensional denominado y^+ , el cual se define como:

$$y^+ = \frac{y}{\delta_v} \quad (2-10)$$

Siendo y la distancia en dirección normal a la pared y δ_v la longitud viscosa del fenómeno, la cual se calcula a partir de la ecuación 2.5.

$$\delta_v = \nu \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} \quad (2-11)$$

En la Tabla 2-9 se describen algunos de límites de interés.

Región	Rango	Descripción
Capa exterior	$y^+ > 50$	Los esfuerzos viscosos son despreciables
Región de la pared viscosa	$y^+ < 50$	La contribución del término de esfuerzos viscosos en el esfuerzo cortante total es significativa.
Subcapa viscosa	$y^+ < 5$	El término de esfuerzos de Reynolds es en comparación con el de esfuerzos viscosos.

Tabla 2-9.: Regiones de la capa limite definidas en función del y^+ . Tomado de Pope (2000).

En el contexto de este trabajo, se calculó el valor del y^+ en el primer centro de celda, mediante la expresión:

$$y^+ = \frac{\Delta r_0}{\delta_v} \quad (2-12)$$

Donde la longitud de viscosa de referencia, se calculó utilizando el máximo esfuerzo cortante capturada en la pared de los cilindros. La variable Δr_0 hace referencia a la distancia normal al primer centro de celda, medido desde la pared. El y^+ se estimó en las posiciones, donde se presentan los perfiles de velocidad tangencial de cada cilindro (ver sección 3). Como valor representativo, se escogió el promedio de estos los cuales se presentan en la Tabla 2-10.







Reynolds						
10	0.1109	0.0360	2.0458	1.8044	0.0326	0.0504
100	0.6411	0.6691	1.6550	1.4590	0.1782	0.4232
1000	2.3825	2.3849	1.2607	1.0337	0.7777	1.2570
10000	6.3902	8.8895	4.6361	3.7088	2.5772	3.9576

Tabla 2-10.: Valores promedio de y^+ calculados en el primer centro de celda adyacente a la pared de cada cilindro.

Con base en lo anterior, y los resultados de la Tabla 2-10, todos los casos capturan los fenómenos de la subcapa viscosa, a excepción de los triángulos para $Re = 10000$, los cuales se ubican en la capa intermedia ($5 < y^+ < 30$). Se puede esperar, que a medida que se aleja de la pared, algunas celdas se ubiquen dentro de esta región considerando el criterio de

relación de expansión, impuesto para la construcción de las mallas. Esta región es llamativa, ya que es allí, donde se da la transición en la capa límite de la región dominada por los esfuerzos viscosos y la región dominada por los efectos turbulentos.

En consecuencia, se afirma que las mallas computacionales del presente estudio capturan la mayoría de los eventos de transferencia de energía, que suceden a lo largo de la capa límite.

2.6. Convergencia temporal de las simulaciones.

Teniendo en cuenta, que el solucionador utilizado es del tipo transitorio, las simulaciones se corrieron hasta obtener convergencia de los promedios de todos los indicadores, utilizados en este estudio, como se presenta en la figura 2-6.

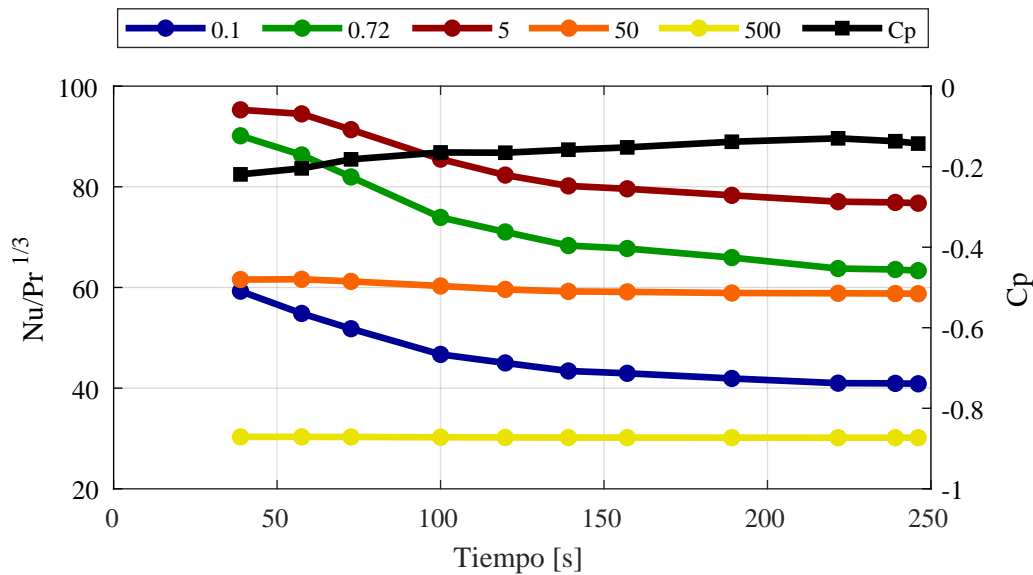


Figura 2-6.: Indicadores calculados en función del tiempo. Ejemplo para el caso de la elipse II $Re = 10000$.

3. Resultados y discusión

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para las tres secciones transversales consideradas en este estudio. El indicador principal fue el número de Nusselt, obtenido para los valores considerados de los números de Reynolds y Prandtl. Sobre este, se presenta el valor promedio y su desviación estándar, tomado sobre regiones representativas a cada tipo de cilindro. Así mismo, se hace un análisis local de este indicador, apoyándose en el análisis de los patrones de flujo, por medio del estudio del coeficiente de presión, coeficiente de fricción y los perfiles de la componente tangencial del campo de velocidad.

Para la presentación de los coeficientes obtenidos en la pared, estos fueron normalizados al máximo del valor absoluto, relativo al camino escogido. Respecto a los perfiles de velocidad, la altura ' n ' se normalizó a la longitud característica ' B ' del cuerpo y se seleccionaron entre tres y cinco ubicaciones. En función de si la distancia entre los puntos extremos era la mitad o la longitud completa de la línea del cuerpo en cuestión, respectivamente. Esto se hizo con el propósito de hacer seguimiento a una partícula hipotética, que se encuentra con el cuerpo, y lo rodea.

Para todos los casos, el dominio se seccionó a la altura media del cilindro, normal a la dirección Z . Los valores de temperatura extraídos, junto con los valores de presión y esfuerzo cortante, se tomaron en las líneas definidas más adelante, tomando un valor por celda contigua a la pared.

3.1. Triángulo

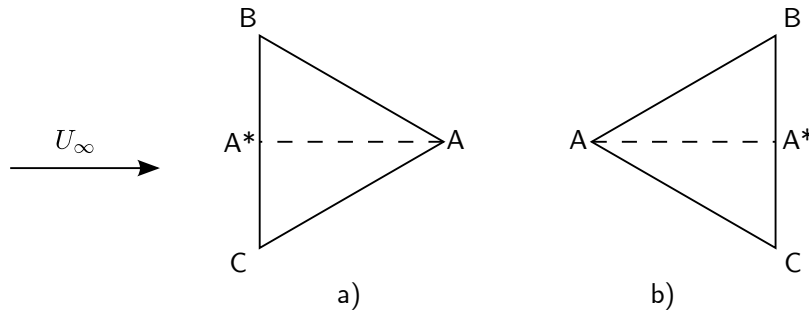


Figura 3-1.: Esquema de orientaciones y nomenclatura para los resultados locales del caso del triángulo.

En la figura 3-2, se presentan los resultados obtenidos para el caso del triángulo. Se puede observar de la figura, que para $Re = 10$ y $Re = 100$, los valores son cercanos y proporcionales al número de Prandtl. Con relación a $Re = 1000$, en la figura 3-2-b se reporta un incremento en la dispersión de los resultados, y en la figura 3-2-c una separación más pronunciada, respecto a las curvas obtenidas para los números de Reynolds inferiores. Para $Re = 10000$, se observan dos situaciones principales en función de la arista analizada. Respecto a la línea AB, la curva tiene su máximo en $Pr = 5$ y los valores de dispersión aumentan para $Pr = 0.1$ y este valor, en particular cuando la punta del triángulo enfrenta el flujo. En cuanto a la línea BC, el valor máximo se traslada a $Pr = 0.72$ y las dispersiones no son representativas, a diferencia de la situación anterior.

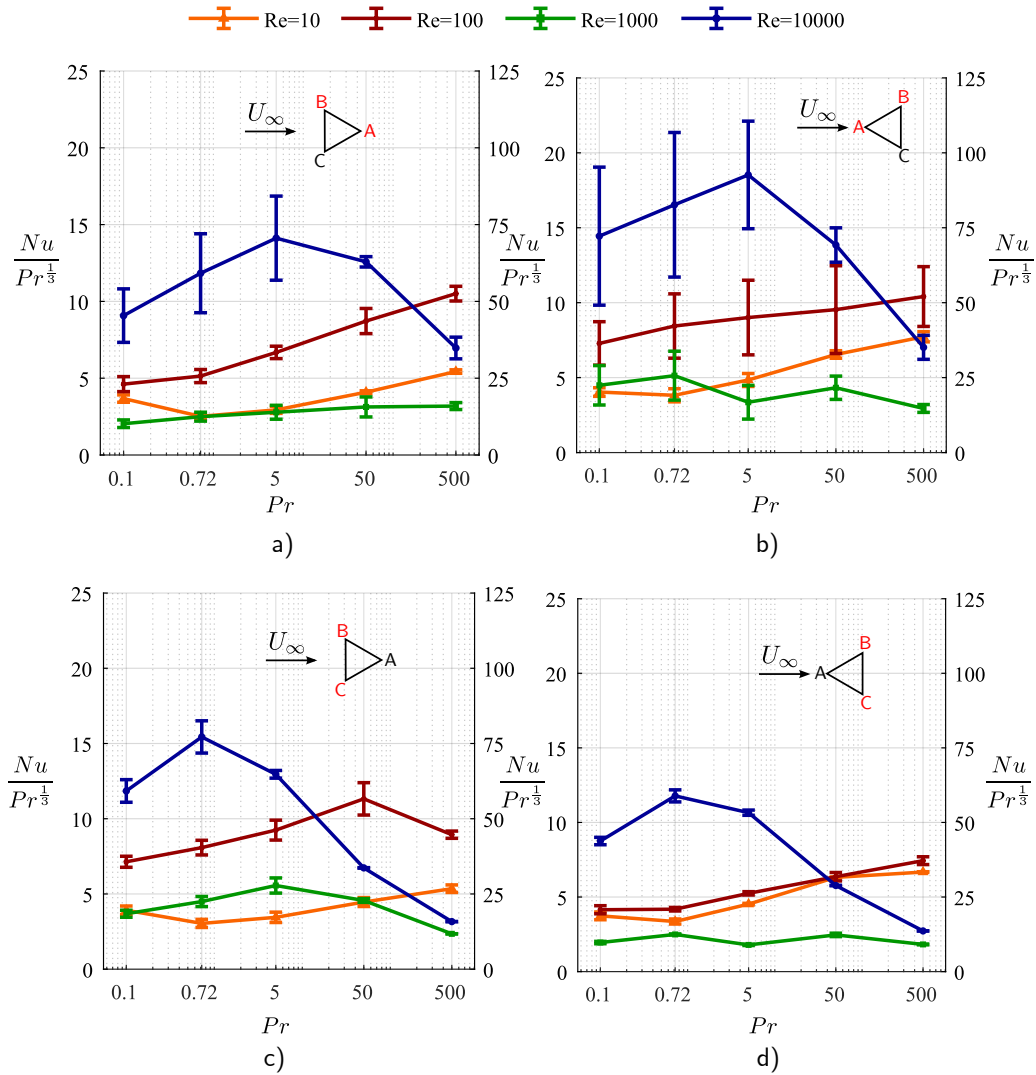


Figura 3-2.: Números de Nusselt calculados para el caso del triángulo. En azul $Re = 10000$, verde $Re = 1000$, rojo $Re = 100$ y naranja $Re = 10$. Para cada figura, en el eje izquierdo se presentan los resultados para $Re = 10$ y $Re = 100$, mientras que en el eje derecho los resultados para $Re = 1000$ y $Re = 10000$. En cada caso, las letras en color rojo indican la cara en la que se tomaron los resultados.

En la figura 3-3, se presenta el comportamiento local en la pared para la mitad superior del triángulo, conforme a la orientación presentada en la figura 3-1-a. A partir de $Re = 100$, en la vecindad del vértice B, se observa la aparición de un pico en las curvas del número de Nusselt, asociadas a $5 \leq Pr \leq 500$, principalmente, que coincide con los cambios drásticos en los coeficientes de presión y fricción.

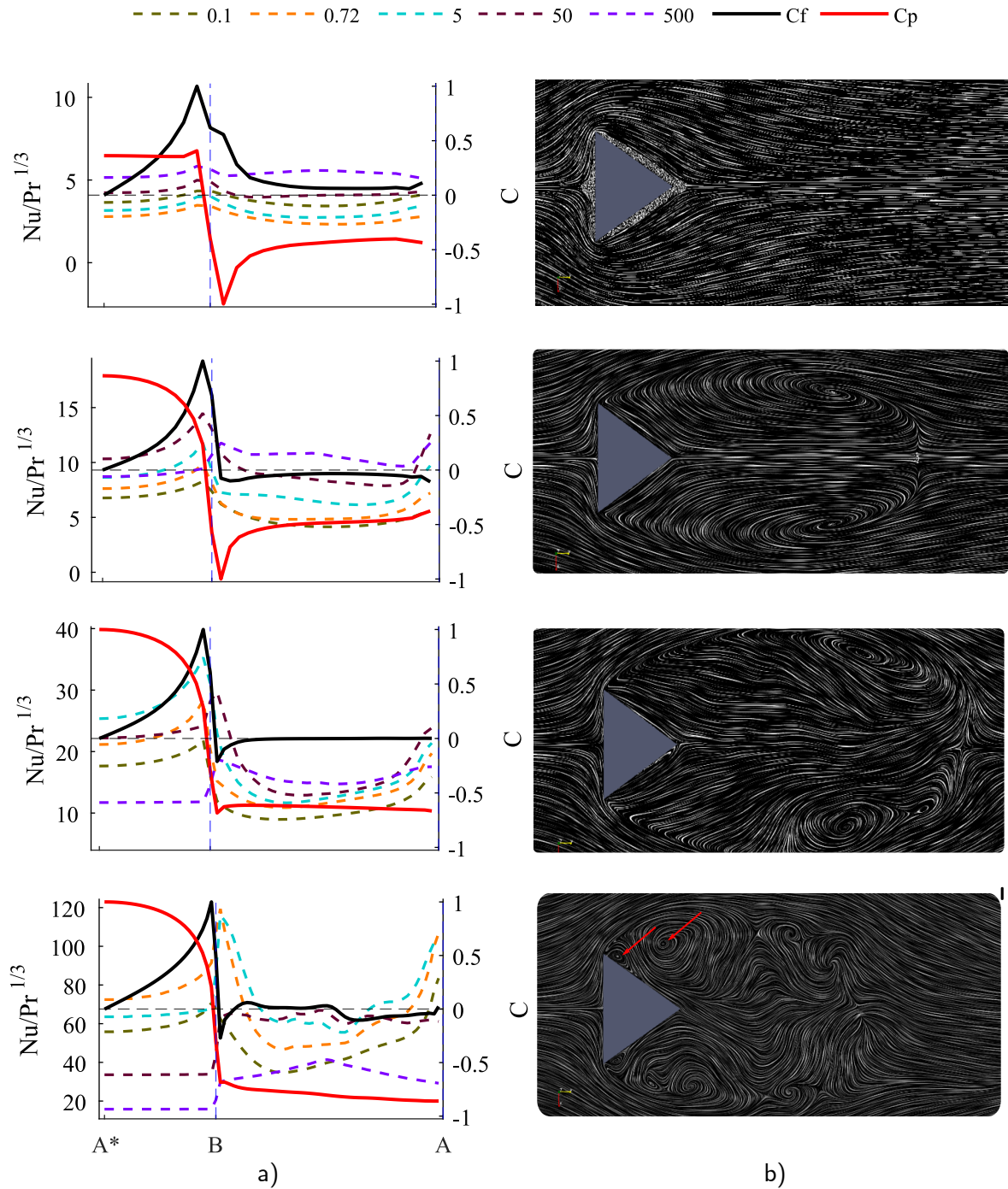


Figura 3-3.: Indicadores de pared locales tomados en el triángulo para la inclinación presentada en la Figura 3-1-a. De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000. En líneas punteadas las curvas para cada número de Prandtl utilizado.

En los perfiles de velocidad de la figura 3-4, se observa en este punto la ubicación de la mayor velocidad tangencial (posición $x^*/L = 1$ de la figura de la figura 3-4-a) y actividad de re-circulación (posición $x^*/L = 0,25$ de la figura 3-4-b). Entre $Re = 1000$ y $Re = 10000$, se da la aparición de un vórtice en la proximidad del vértice B (ver figura 3-3-c), el aumento de aproximadamente 3:1 en los valores pico de los números de Nusselt, y el desplazamiento de estos hacia donde se ubica el vórtice, pasando del cateto base al cateto lateral, cuando el número de Reynolds incrementa. Las curvas para $Pr = 0.72$ y $Pr = 5$ son las que muestran mayor sensibilidad a estos cambios.

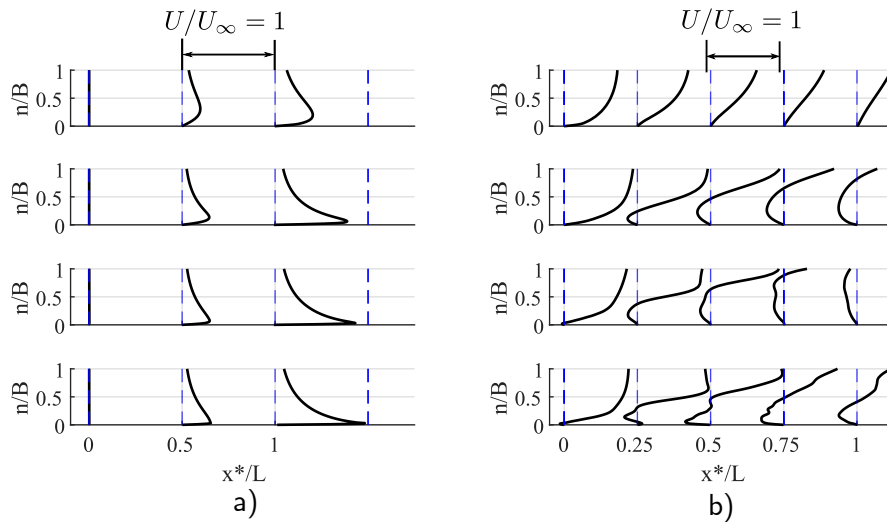


Figura 3-4.: Perfiles de velocidad tangencial, a lo largo de la altura n , para la inclinación presentada en la Figura 3-1-a. La línea A*B se presenta en a) y la línea BA en b). De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000.

Los resultados para el caso cuando la punta se encuentra orientada hacia la dirección principal, se presentan en la Figura 3-5. Para este caso, el pico de los números de Nusselt se ha desplazado hacia el punto donde se ubica el C_p máximo, y los valores máximos aproximadamente doblan los del caso anterior, para todos los Reynolds al realizar comparaciones individuales.

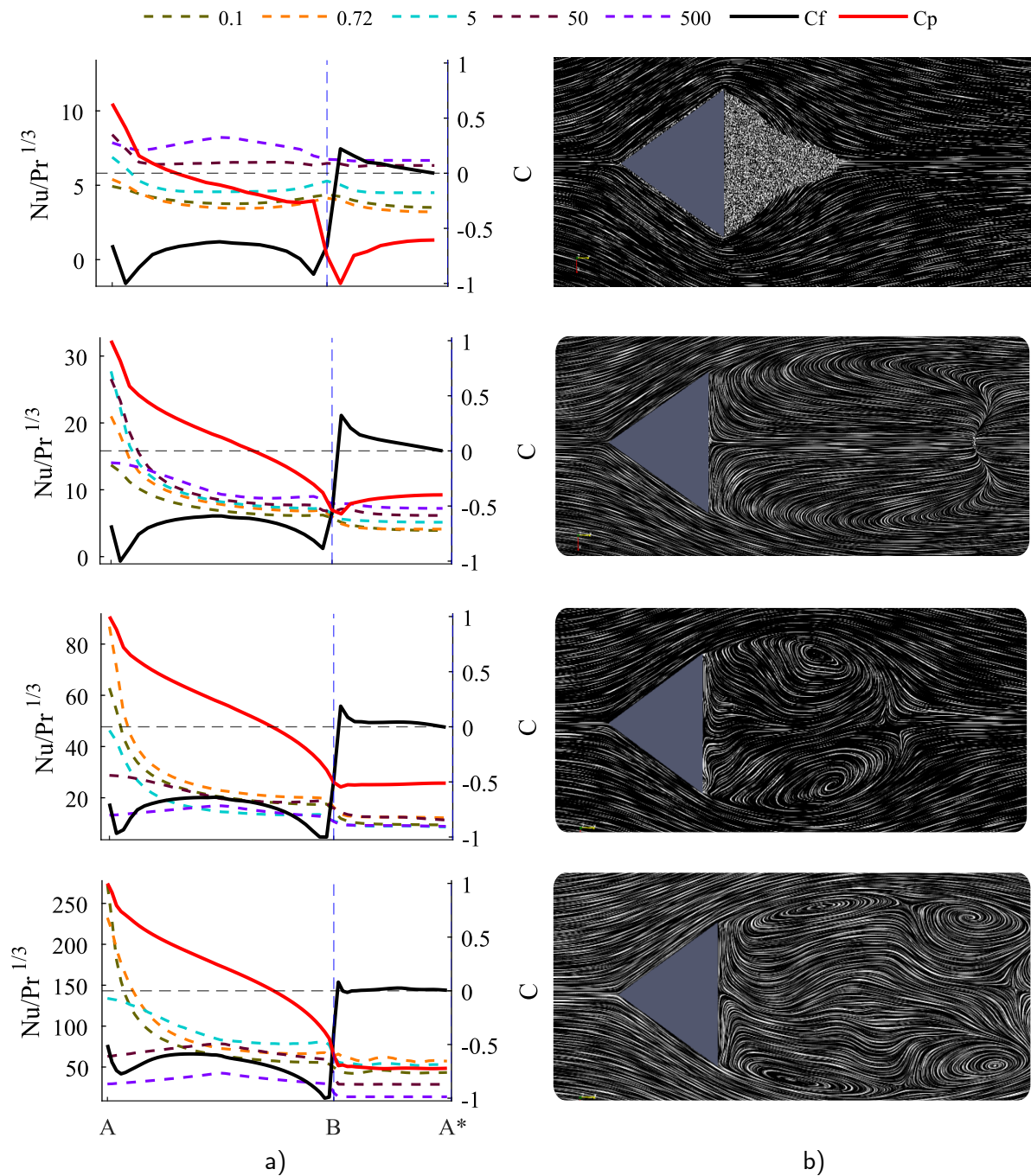


Figura 3-5.: Indicadores de pared locales tomados en el triángulo para la inclinación presentada en la Figura 3-1-b. De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000. En líneas punteadas las curvas para cada número de Prandtl utilizado.

Del comportamiento reflejado en los perfiles de velocidad (Figura 3-6), para el cateto lateral se observa el retraso del flujo, a causa de la presencia de la pared. Así mismo, no hay desprendimiento de la capa límite y se registra estancamiento del flujo en la vecindad del cateto base. El comportamiento en estos dos catetos, se asocia con la evolución uniforme de los perfiles del número de Nusselt en la Figura 3-5. Una situación similar es también reportada por Yousif (2019) y Murmu et al. (2020).

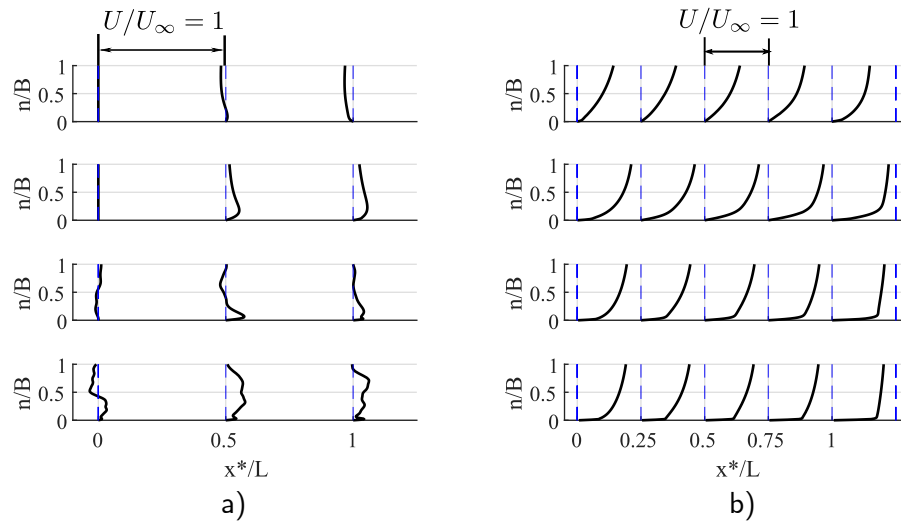


Figura 3-6.: Perfiles de velocidad tangencial, a lo largo de la altura n , para la inclinación presentada en la Figura 3-1-b. La línea AB se presenta en a) y la línea BA* en b). De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000.

3.2. Elipse

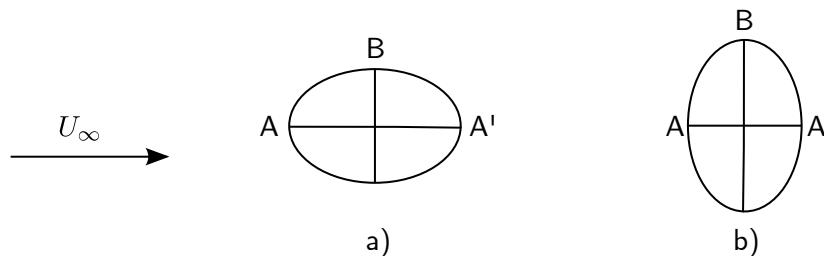


Figura 3-7.: Esquema de orientaciones y nomenclatura para los resultados locales del caso del elipse.

En la figura **3-8**, se presentan los resultados correspondientes para la elipse. Para $Re = 10$ se observa, en los cuatro escenarios planteados, un comportamiento proporcional al número de Prandtl entre $Pr = 0.1$ y $Pr = 50$ hasta $Pr = 500$, valor en el cual el número de Nusselt se estanca. En el caso de $Re = 100$ y $Re = 1000$, la progresión de las curvas es distinta dependiendo de la orientación del semieje mayor. Cuando este se encuentra orientado paralelo al flujo principal, se reporta algo similar a lo descrito anteriormente, con la diferencia de que para $Pr = 500$, el número de Nusselt disminuye. En cuanto a la otra orientación, las curvas de $Re = 100$ tiene su punto máximo en $Pr = 50$, mientras que para $Re = 1000$, este se desplaza hacia $Pr = 5$. Los valores del número de Nusselt disminuyen nuevamente cuando incrementa el número de Prandtl, para estos dos números de Reynolds.

Respecto a las barras de dispersión, los comportamientos registrados también pueden ser agrupados. En el rango $10 \leq Re \leq 1000$, en los tres primeros números de Prandtl se reportan los mayores valores, para la orientación de la Figura **3-7-a**, mientras que en la orientación de la Figura **3-7-b**, estos se ubicaron en los dos números de Prandtl mayores.

En cuanto a $Re = 10000$, cuando el semieje mayor es paralelo al flujo, se reportan los puntos máximos ubicados en $Pr = 0.72$ y $Pr = 5$, sobre las líneas AB y BA' (Figuras **3-8-a** y **3-8-c**), respectivamente. Cuando el semieje mayor se orienta perpendicular, la progresión es descendente entre $Pr = 5$ y $Pr = 500$ para ambas líneas. Entre $Pr = 0.1$ y $Pr = 5$ se intercala el punto máximo de las curvas para las líneas AB y BA' (Figuras **3-8-b** y **3-8-d**), en $Pr = 5$ y $Pr = 0.1$, con un escalón en $Pr = 0.72$ entre estos puntos en ambos casos. La línea AB de la Figura **3-8-a** es la que reporta las mayores desviaciones en $Pr = 0.72$, seguido de $Pr = 0.1$ y $Pr = 5$ en esta misma línea.

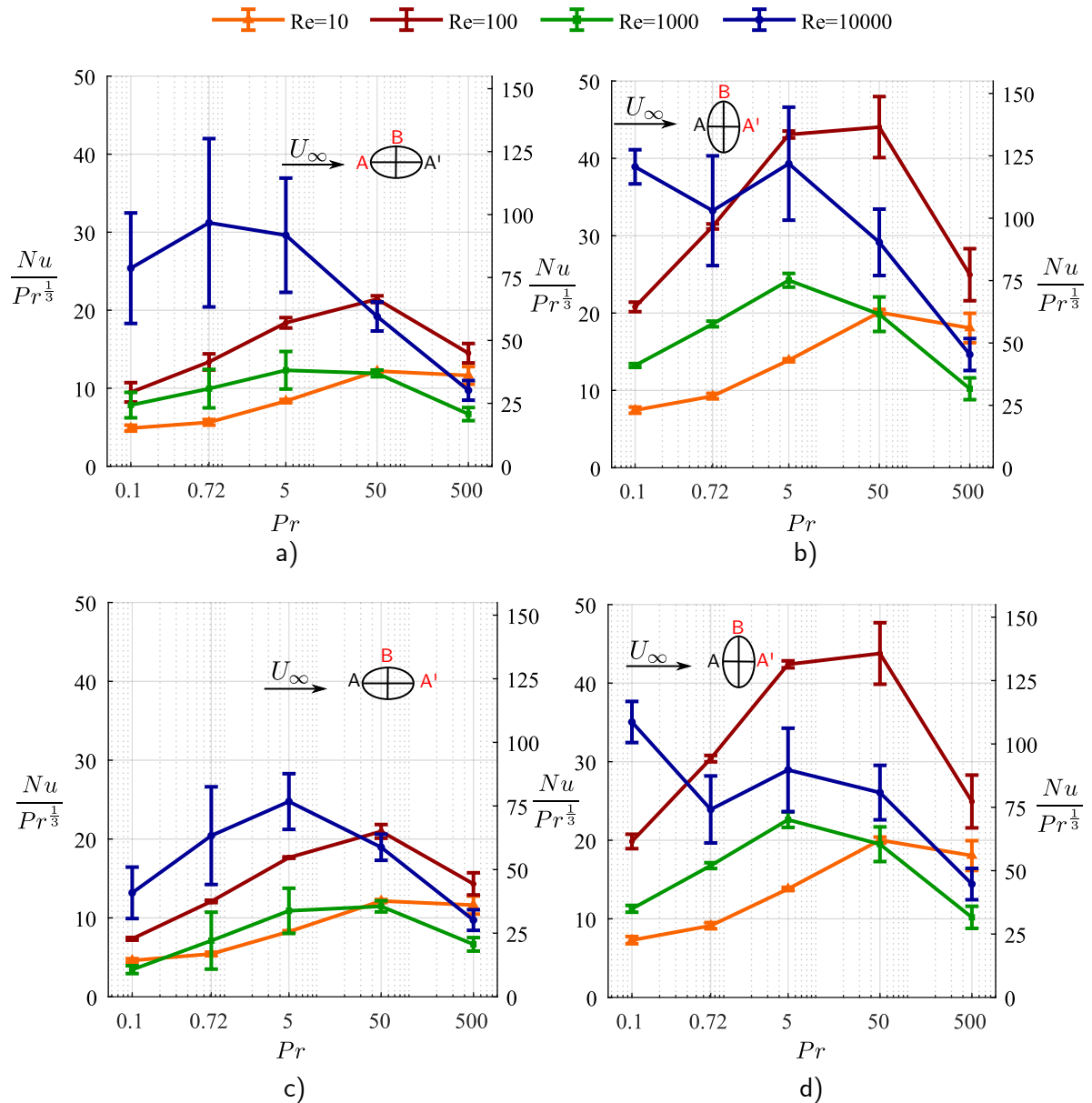


Figura 3-8.: Números de Nusselt calculados el caso de la elipse. En azul $Re = 10000$, verde $Re = 1000$, rojo $Re = 100$ y naranja $Re = 10$. Para cada figura, en el eje izquierdo se presentan los resultados para $Re = 10$ y $Re = 100$, mientras que en el eje derecho los resultados para $Re = 1000$ y $Re = 10000$. En cada caso, las letras en color rojo indican la cara en la que se tomaron los resultados.

En la figura 3-9 se presenta el coeficiente de presión, el coeficiente de fricción y el número de Nusselt local, para la orientación presentada en la figura 3-7-a. En las cuatro filas, adjunto al punto de estancamiento del flujo ($\theta = 0^\circ$), se reporta el mayor coeficiente de presión,

donde coinciden los mayores Nusselt locales, especialmente para $Re = 10000$. Del coeficiente de fricción es importante resaltar el comportamiento que se da en el punto donde el signo cambia de positivo a negativo¹, el cual se observa en la vecindad de $\theta = 90^\circ$ y se retrasa a medida que aumenta el número de Reynolds (ver los perfiles de velocidad en la figura **3-10**).

En esta ubicación, el modelo predice los menores números de Nusselt locales, en las curvas de $Re = 1000$ y $Re = 10000$. Para estos dos casos, también se observa que hacia el final de la línea BA' ($\theta > 135^\circ$) la proximidad de los vórtices principales (ver la columna c) de la Figura **3-9**), junto con la actividad de re-circulación del campo de velocidad (ver los valores negativos en los perfiles de la componente tangencial en la figura **3-10**), hace que nuevamente el número de Nusselt incremente, a excepción de $Pr = 500$.

¹Punto de separación de capa límite

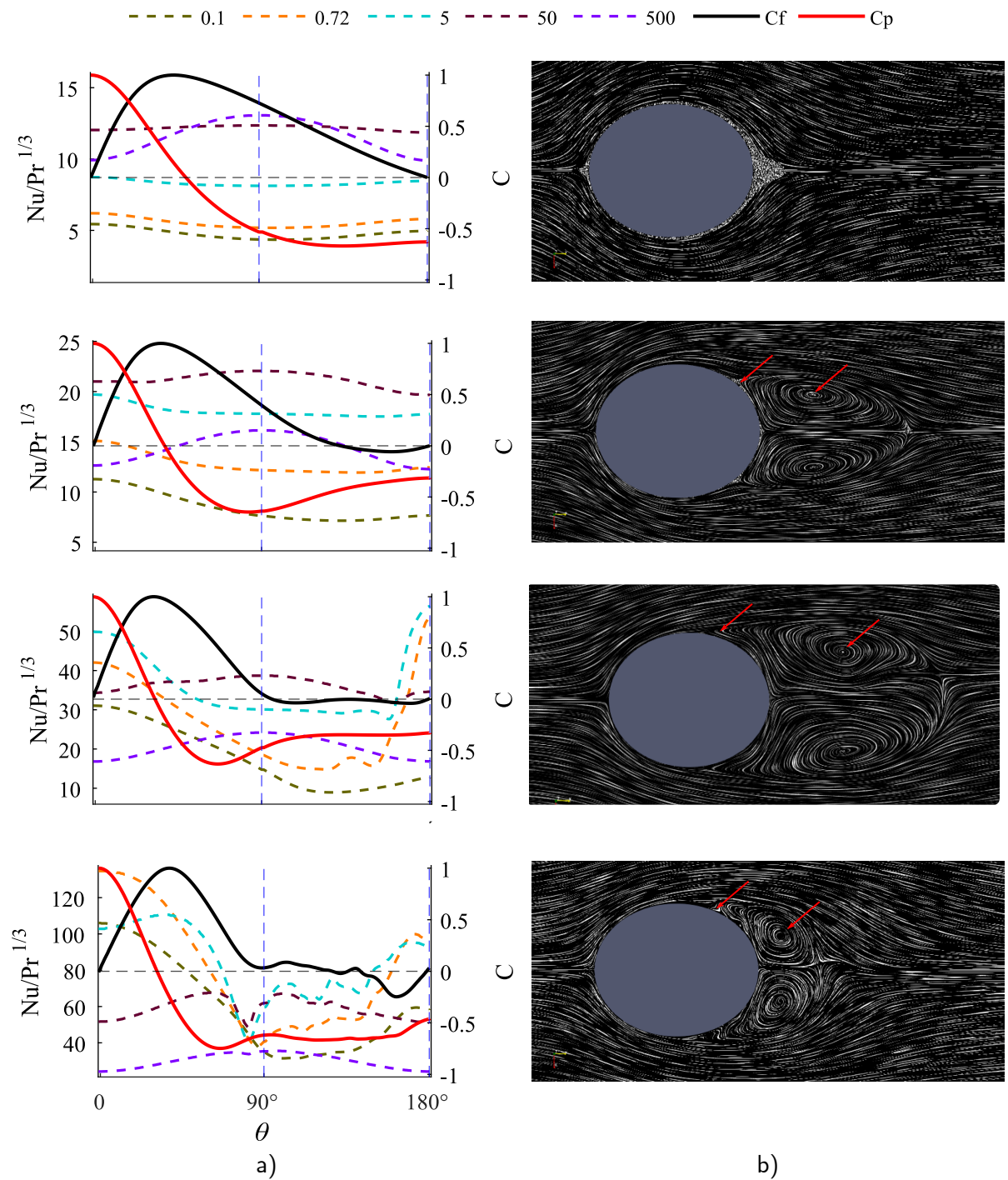


Figura 3-9.: Indicadores de pared locales tomados en el elipse para la inclinación presentada en la Figura 3-7-a. De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000. En líneas punteadas las curvas para cada número de Prandtl utilizado.

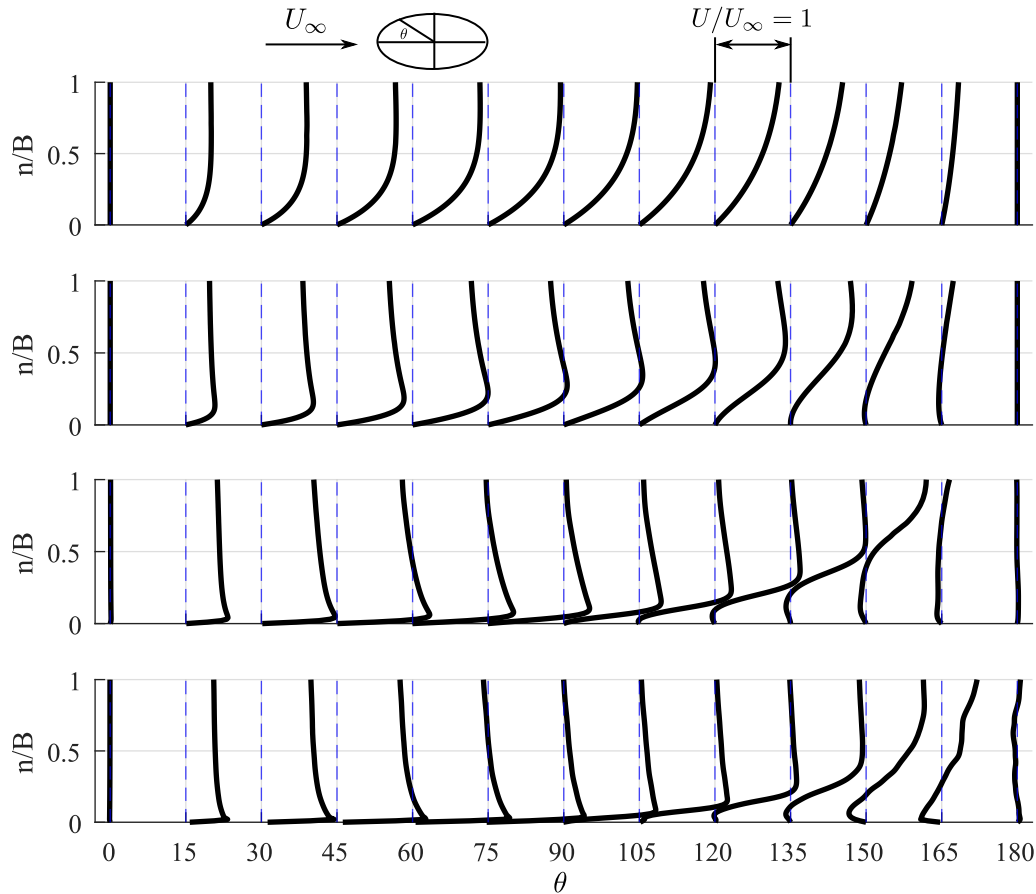


Figura 3-10.: Perfiles de velocidad tangencial, a lo largo de la altura n , para la inclinación presentada en la Figura 3-7-a. De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000.

Para la orientación de la figura 3-7-b, los indicadores en cuestión se presentan en la figura 3-11. Se observa la misma tendencia descrita en el caso anterior, donde los mayores valores del coeficiente de presión coinciden con los del número de Nusselt, el cual se mantiene estable hasta llegar al punto de separación del flujo, donde cae de forma pronunciada, especialmente para el mayor Reynolds. Para esta fila, se observa una relación directa entre la tasa de cambio de estos dos últimos indicadores, el cual es más drástico en comparación con la otra orientación.

Así mismo, la presencia de los vórtices (ver columna c en la figura 3-11), y los puntos de re-circulación (ver cuarta fila de la figura 3-12) se manifiesta en un ángulo prematuro, en comparación al caso anterior (aproximadamente en $\theta = 105^\circ$), lo que repercute en una perturbación en la evolución espacial del Nusselt local, que se da de diferentes formas dependiendo del número de Prandtl.

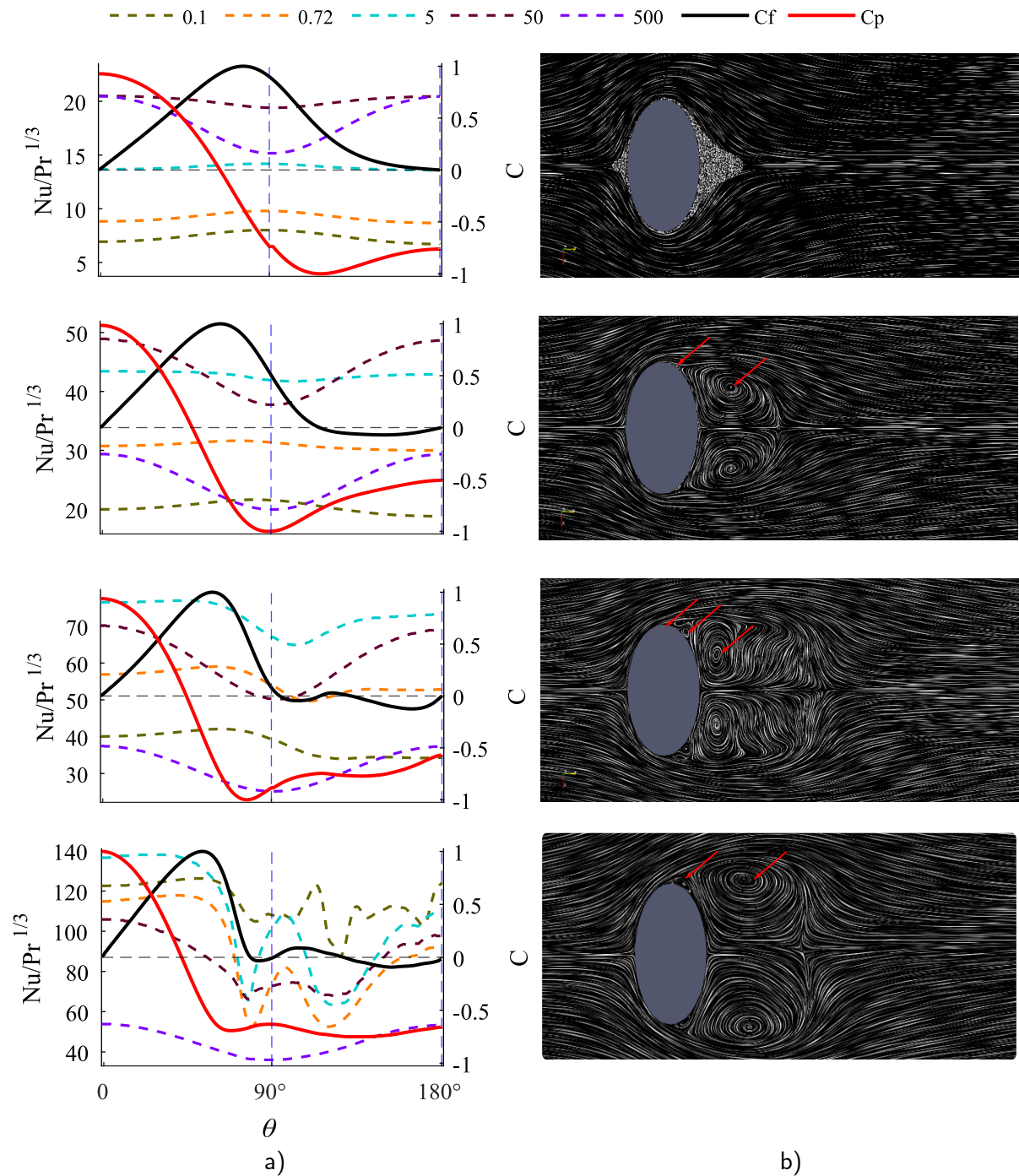


Figura 3-11.: Indicadores de pared locales tomados en el elipse para la inclinación presentada en la Figura 3-7-b. De arriba hacia abajo se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000. En líneas punteadas las curvas para cada número de Prandtl utilizado.

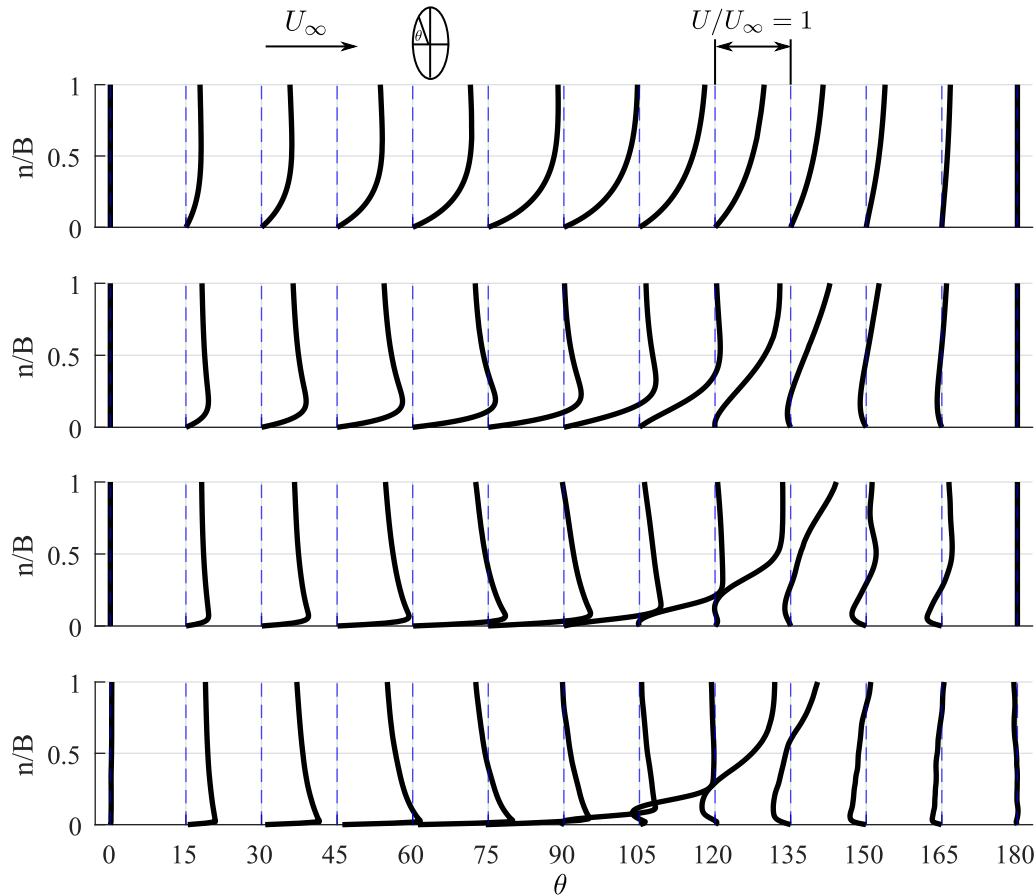


Figura 3-12.: Perfiles de velocidad tangencial, a lo largo de la altura n , para la inclinación presentada en la Figura 3-7-b. De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000.

3.3. Cuadrado

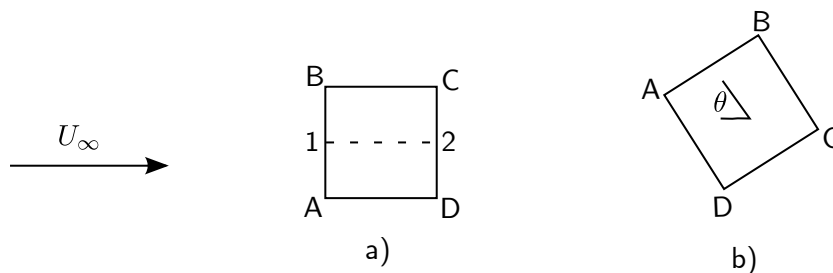


Figura 3-13.: Esquema de orientaciones y nomenclatura para los resultados locales del caso del cuadrado.

En la figura **3-14**, se plasman los resultados del cuadrado con la orientación mostrada en la figura **3-13-a**. Para $10 \leq Re \leq 1000$ las tres ubicaciones manifiestan un comportamiento similar, en donde se reporta una progresión lineal hasta $Pr = 50$, siendo este el punto máximo para luego disminuir en $Pr = 500$. Para el caso de $Re = 10000$, en las tres situaciones, se observa la misma tendencia de llegar a un punto máximo y luego a disminuir. Sin embargo, en este caso, se da un corrimiento del número de Nusselt mayor hacia $Pr = 5$. Respecto a los valores de dispersión, el caso de la línea BC, es donde se obtienen las mayores desviaciones en $Pr = 0.72$.

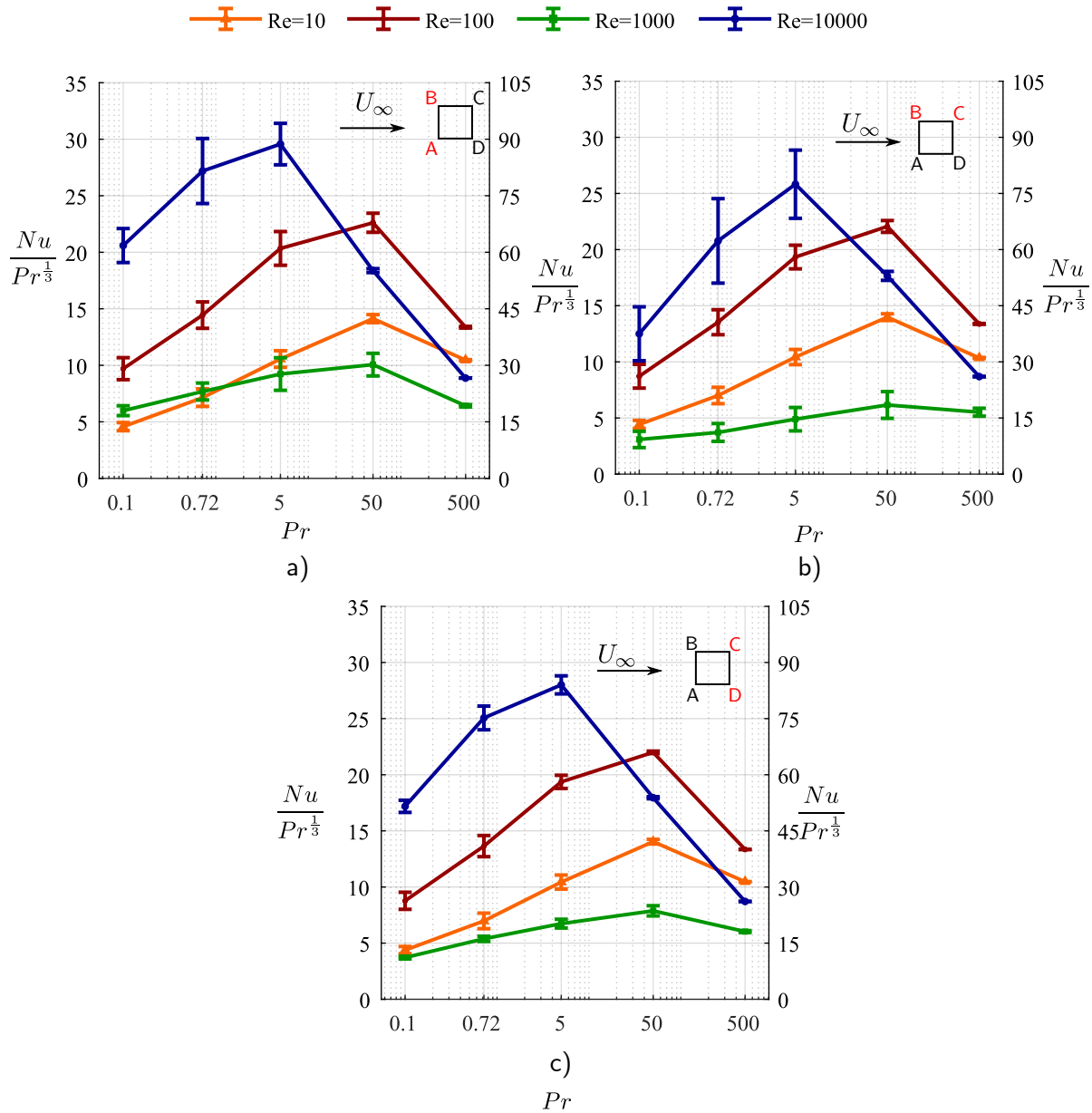


Figura 3-14.: Números de Nusselt calculados para el caso del cuadrado. En azul $\text{Re} = 10000$, verde $\text{Re} = 1000$, rojo $\text{Re} = 100$ y naranja $\text{Re} = 10$. Para cada figura, en el eje izquierdo se presentan los resultados para $\text{Re} = 10$ y $\text{Re} = 100$, mientras que en el eje derecho los resultados para $\text{Re} = 1000$ y $\text{Re} = 10000$. En cada caso, las letras en color rojo indican la cara en la que se tomaron los resultados.

En la figura 3-15, se presentan los indicadores calculados en la pared. Al igual que en el caso del triángulo, en el punto de estancamiento se obtiene el mayor valor del coeficiente

de presión, y un valor nulo de la componente tangencial del campo de velocidad. El cual, incrementa a medida que se acerca al vértice, tendiendo hacia el valor de velocidad característica (ver figura 3-16). Para los cuatro números de Reynolds, se observa que los perfiles del número de Nusselt local ubican su pico máximo en este punto, antes de ingresar a la línea BC.

Sin embargo, a medida que aumenta el número de Reynolds, la evolución de los perfiles es diferente, lo cual se encuentra asociado a lo que se capturó con las simulaciones, referente a la aparición de vórtices en la proximidad de la pared y consecuentemente con los puntos de re-circulación, manifestados en los perfiles de velocidad. Para Reynolds menores a 1000, el Nusselt local no varía luego del vértice B, mientras que para $Re = 1000$ y $Re = 10000$ este indicador disminuye, vuelve a recuperarse a continuación de la mitad de la arista BC hasta llegar a otro pico local en el vértice C, en la vecindad del vórtice señalado con las flechas rojas.

Resulta interesante el cambio en la distribución de los números de Nusselt obtenidos, que están asociados a sus respectivos números de Prandtl. Para $Re = 1000$, en la curva de $Pr = 50$ se presentan los valores máximos, y las otras curvas muestran un comportamiento similar, a excepción de $Pr = 500$ y al pasar a $Re = 10000$ no se manifiesta esta misma tendencia. Mientras que para $Pr = 0.72$, en $Re = 1000$, los valores del número de Nusselt están entre los más bajos, en $Re = 10000$ su valor promedio es el segundo más alto, y es para este Prandtl donde se reporta la mayor dispersión (ver figura 3-14).

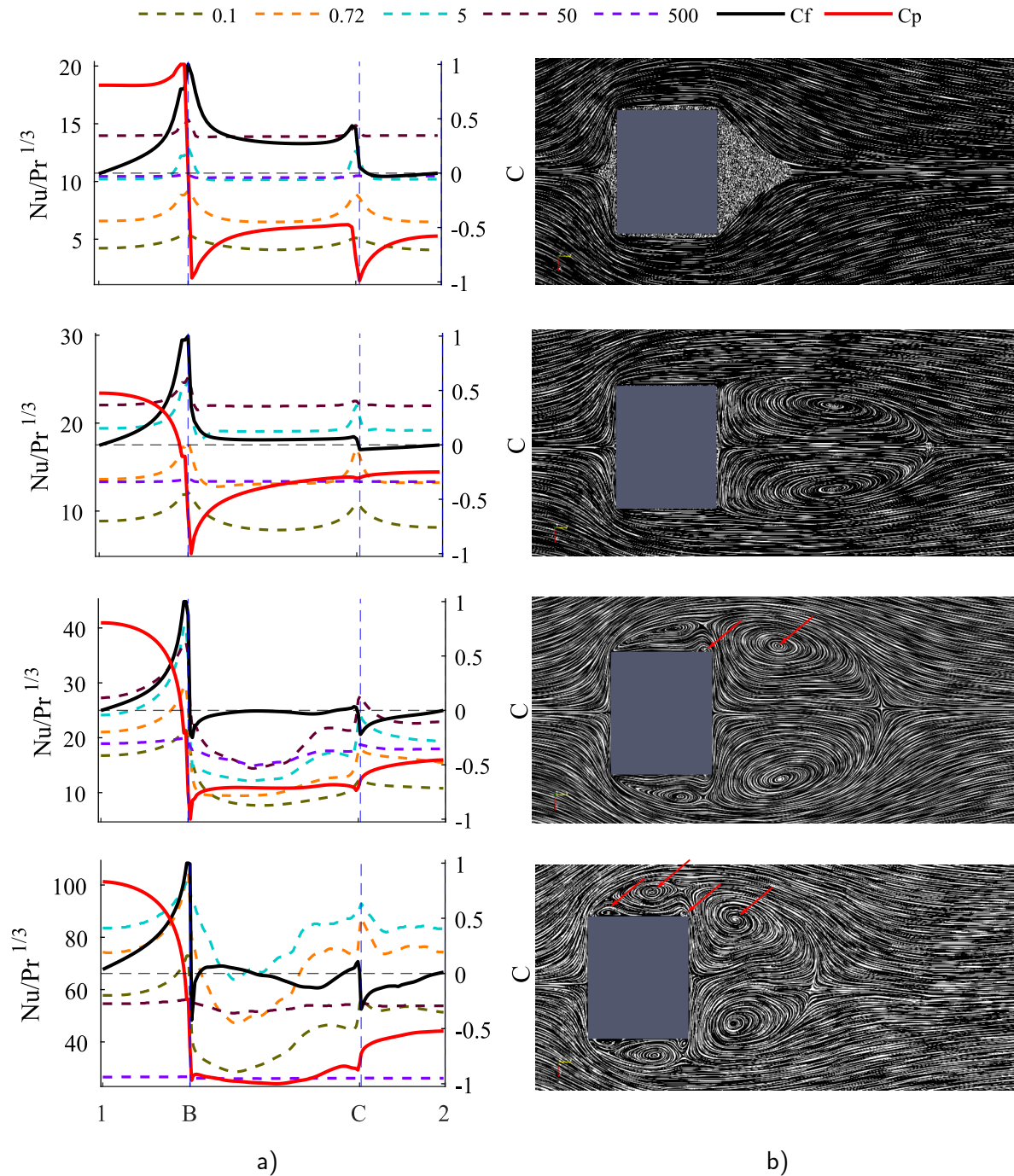


Figura 3-15.: Indicadores de pared locales tomados en el triángulo para la inclinación presentada en la Figura 3-13-a. De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000. En líneas punteadas las curvas para cada número de Prandtl utilizado.

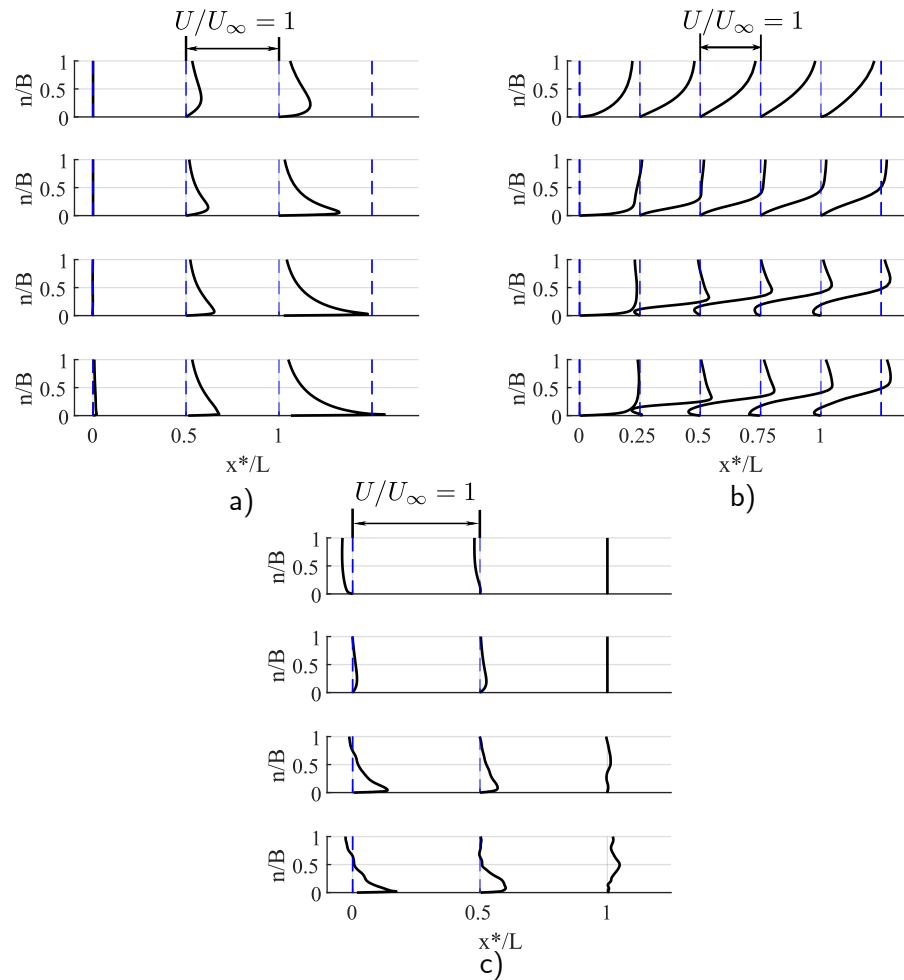


Figura 3-16.: Perfiles de velocidad tangencial, a lo largo de la altura n , para la inclinación presentada en la Figura 3-13-a. La línea 1B se presenta en a), la línea BC en b) y la línea C2 en c). De arriba hacia abajo se obtienen los resultados correspondientes a $Re = 10, 100, 1000$ y 10000 .

En la Figura 3-17, se presenta lo correspondiente a la orientación de la Figura 3-13-b. Para las curvas entre $Re = 10$ y $Re = 1000$, en todos los casos se observa nuevamente un comportamiento similar a una parábola invertida con un punto máximo en $Pr = 50$. Lo mismo se tiene para $Re = 10000$ en las Figuras 3-17-b y 3-17-c, con la diferencia que se da un corrimiento del punto máximo hacia $Pr = 5$. En la Figura 3-17-a, el comportamiento es similar a lo anterior; sin embargo, la estimación del número de Nusselt tiene dos puntos máximos, en $Pr = 5$ y $Pr = 50$, y luego descende en $Pr = 500$. El caso d), es una mezcla de los dos escenarios anteriores, donde se da un punto máximo en $Pr = 5$ y una predicción similar en $Pr = 50$.

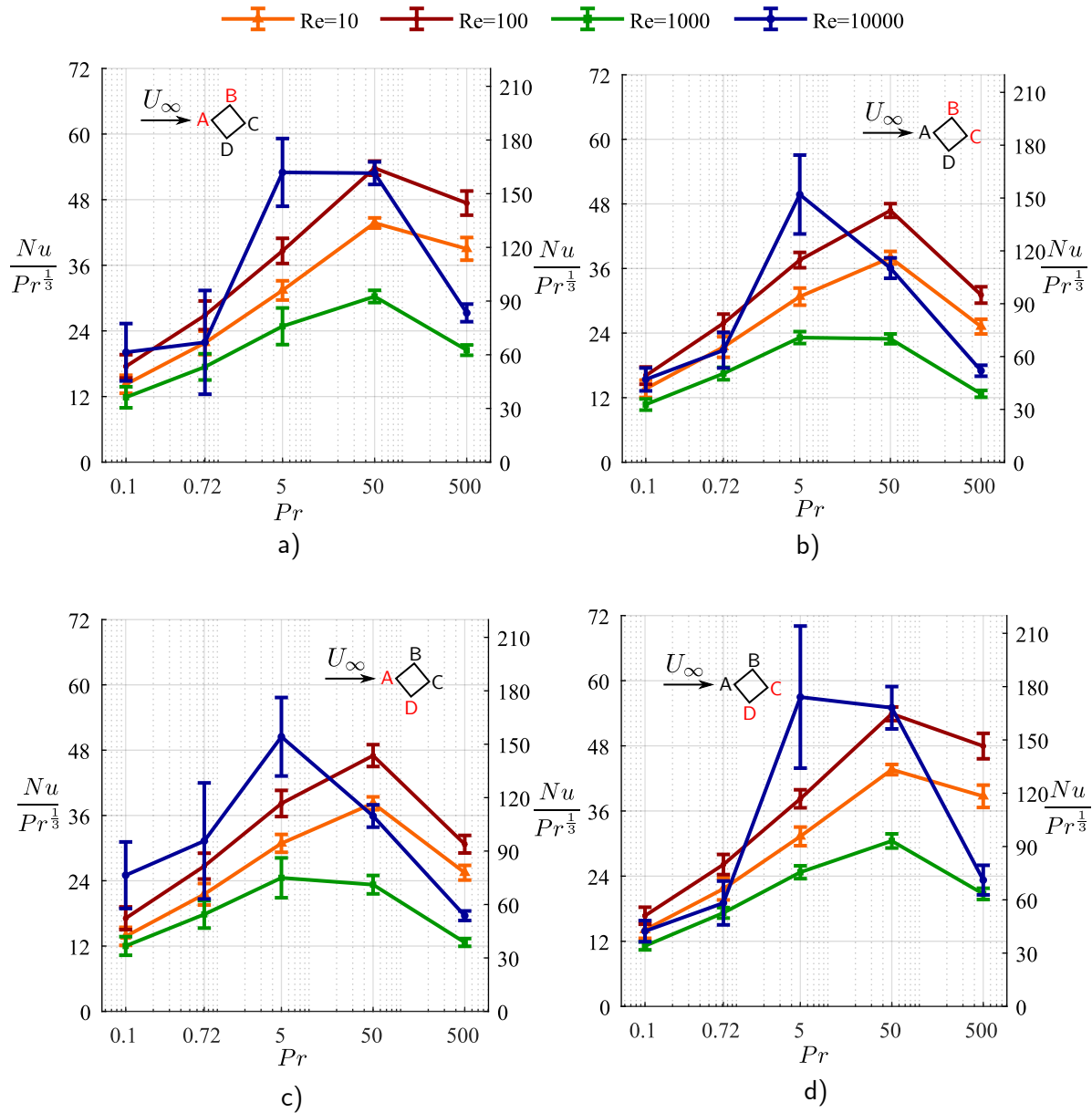


Figura 3-17.: Números de Nusselt calculados para el caso del cuadrado girado. En azul $Re = 10000$, verde $Re = 1000$, rojo $Re = 100$ y naranja $Re = 10$. Para cada figura, en el eje izquierdo se presentan los resultados para $Re = 10$ y $Re = 100$, mientras que en el eje derecho los resultados para $Re = 1000$ y $Re = 10000$. En cada caso, las letras en color rojo indican la cara en la que se tomaron los resultados.

Para el análisis de los indicadores, se ha seccionado el comportamiento en dos caminos que pueden describir una partícula dependiendo de si impacta el cuadrado en la arista AB ó

AC. Siendo así, en la figura **3-18**, se presenta la mitad superior (camino ABC), en donde el coeficiente de presión parte de un valor negativo en el vértice A y disminuye luego de pasar por B. Respecto al coeficiente de fricción, este parte de un valor negativo, asociado a la aceleración del fluido en la cara AB, y llega a valores cercanos a cero, lo que coincide con el estancamiento del campo de velocidad en la cara BC (ver figura **3-20**). En cuanto al número de Nusselt, se observa una disminución de las curvas luego del vértice B, a excepción de $Pr = 5$ en $Re = 10000$, donde se reporta un pico a continuación de este punto y un incremento del perfil en la proximidad de C, ambos coincidentes con la aparición de los vórtices señalados en la columna c) de la figura **3-18**.

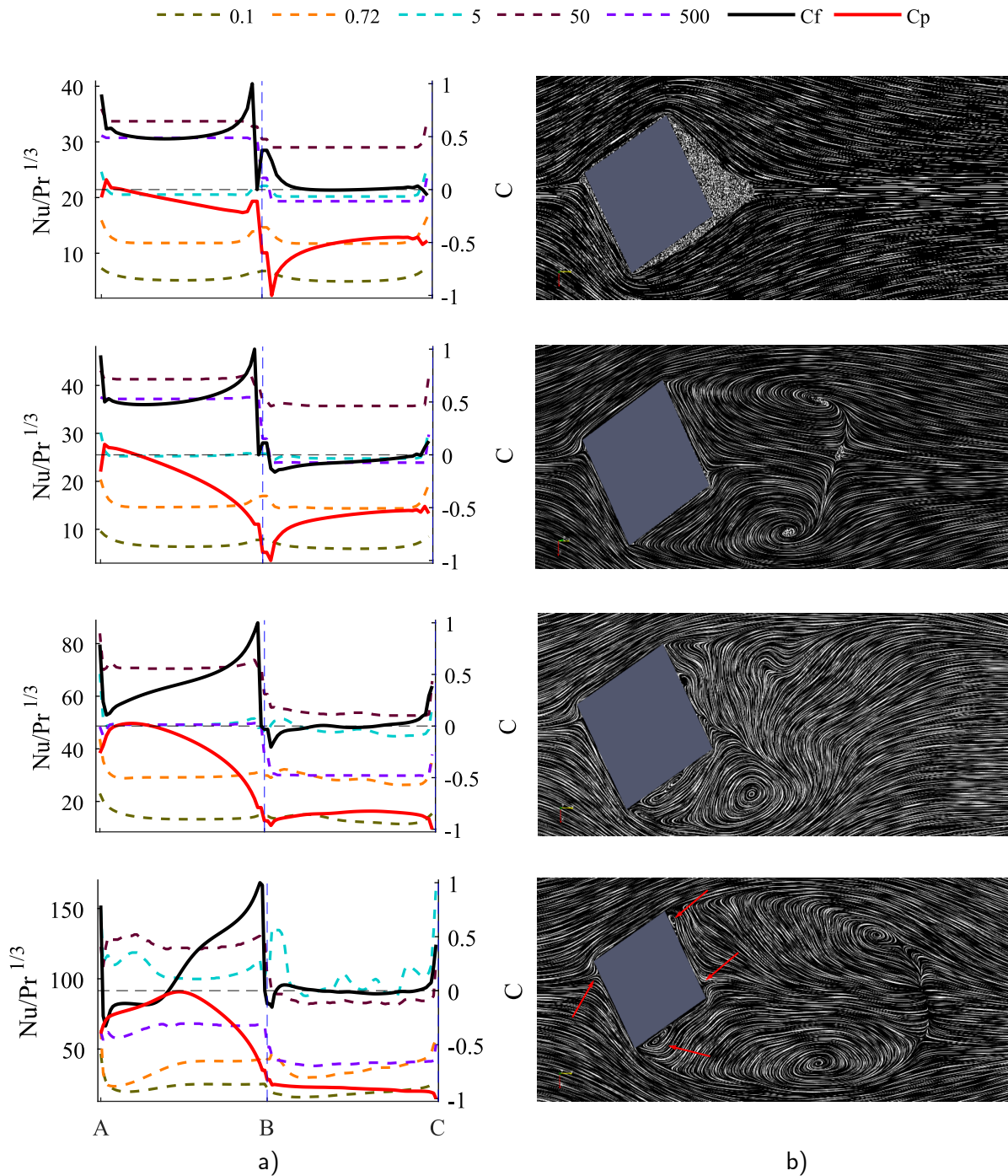


Figura 3-18.: Indicadores de pared locales tomados en el triángulo para la inclinación presentada en la Figura 3-13-b. De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000. En líneas punteadas las curvas para cada número de Prandtl utilizado.

Respecto a la mitad inferior (camino ADC) se observa la influencia del punto de separación aguas abajo del punto A (ver punto señalado en la columna c) de la figura **3-19**), y la consecuente bifurcación del flujo en este punto (ver valores negativos en $x^*/L = 0$ en la figura **3-20-c**). En los indicadores de pared, esto se manifiesta en un aumento súbito del coeficiente de presión, y una disminución marcada en el coeficiente de fricción y las estimaciones del número de Nusselt. A lo largo de la arista AD, el comportamiento es uniforme y vuelve a cambiar luego del vértice D, el cual se manifiesta con una caída del coeficiente de presión, un leve pico del coeficiente de fricción, y aumentos que se dan en diferente magnitud del número de Nusselt, a excepción de las curvas $Pr = 0.1$. Para $Re = 10000$, se observa un vórtice definido luego del vértice D, que coincide con el incremento pronunciado del número de Nusselt para las curvas de $Pr = 5$ y $Pr = 50$.

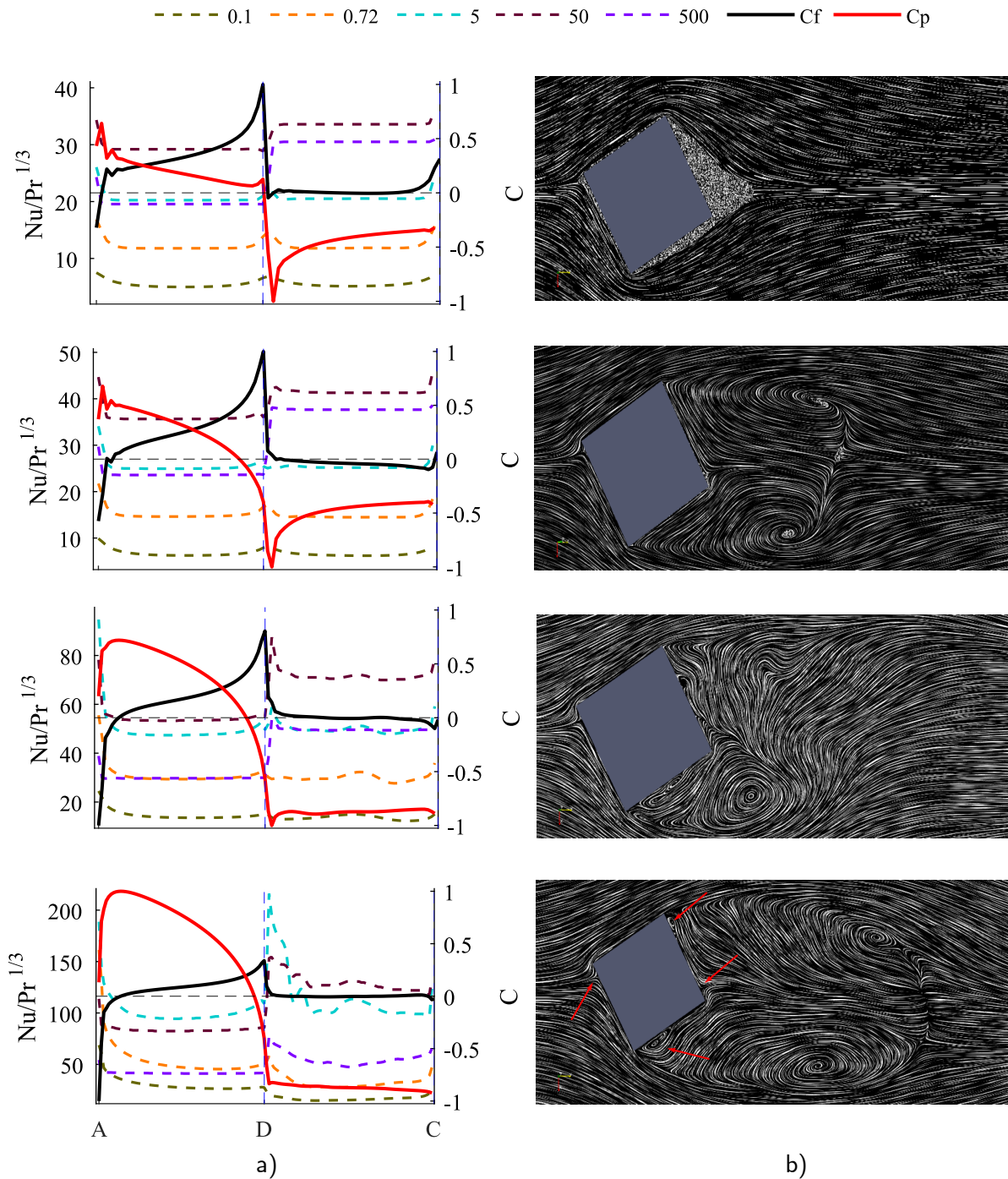


Figura 3-19.: Indicadores de pared locales tomados en el triángulo para la inclinación presentada en la Figura 3-13-b. De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000. En líneas punteadas las curvas para cada número de Prandtl utilizado.

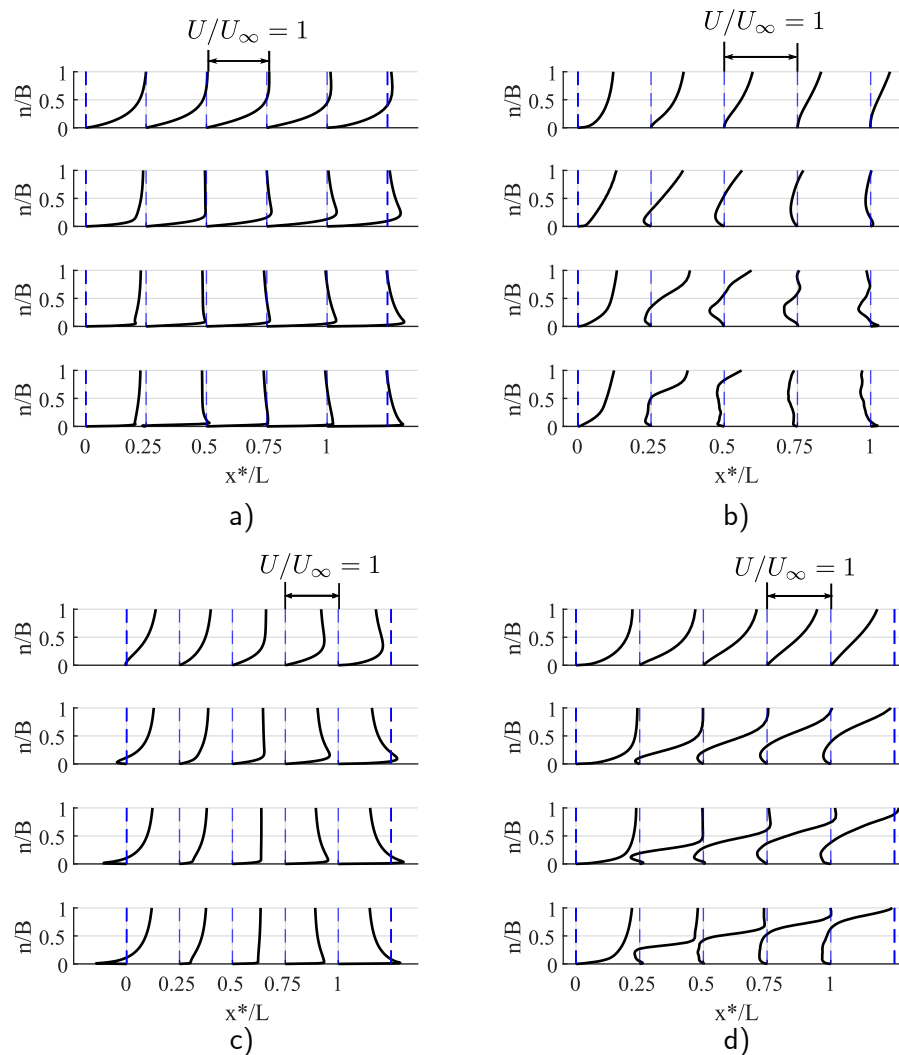


Figura 3-20.: Perfiles de velocidad tangencial, a lo largo de la altura n , para la inclinación presentada en la Figura 3-13-b. La línea AB se presenta en a), la línea BC en b), la línea AC en c) y la línea DC en d). De arriba hacia abajo, se obtienen los resultados correspondientes a Re 10, 100, 1000 y 10000.

3.4. Discusión general

A partir de los resultados, se observa que el comportamiento local del número de Nusselt tiene una evolución particular en cuanto a la manera en la que se desarrollan los mecanismos de separación del campo de flujo alrededor de los cuerpos. Aunque en todos los casos, la descripción del problema se resume a lo presentado en la Figura 1-1, en donde el flujo se encuentra con el cuerpo, se desacelera y más adelante se separa. La aparición de eventos individuales, como diferentes ubicaciones del punto de separación de capa límite

o de formación vórtices en la vecindad de la pared, en conjunto con el efecto del número de Prandtl, hace que el comportamiento de este indicador térmico sea diferente en cada caso.

Una primera situación se da para el triángulo, cuando su cateto base enfrenta el campo de flujo (figura **3-1-a**) o el cuadrado sin inclinarse (**3-13-a**). Para estos casos, una partícula en el fluido se encuentra con el cuerpo y se estanca debido a que la dirección de su curva tangente es normal a la dirección principal del flujo. Esta partícula busca seguir la inercia del flujo y recorrer el perímetro del cuerpo. La fuerza de fricción en esta cara disminuye hasta llegar al primer vértice, lugar en el que se diferencia el comportamiento.

Para el triángulo, el flujo tiende a estancarse, se observa recirculación y a medida que aumenta el número de Reynolds, el perfil de velocidad intenta confinarse hacia la pared. En $Re = 10000$ se observa la formación del vórtice cerca al primer vértice. En cuanto al cuadrado, en la cara contigua, a $Re = 10$ y $Re = 100$ es evidente el efecto de la pared en el retraso de las capas de fluido, mientras que para los Reynolds superiores se da el desprendimiento de la capa límite en la proximidad del vértice B, y la velocidad del flujo es mayor respecto al valor de corriente libre, en la frontera de la capa límite. Por último, el cuadrado en su cara posterior muestra estancamiento para los dos Reynolds inferiores y la aparición de vórtices próximos al vértice C (en la cara BC), para los dos Reynolds superiores.

Asociado a este comportamiento, en ambos casos, para la primera cara se observa que el número de Nusselt incrementa a medida que el valor de la componente tangencial de la velocidad aumenta y se aproxima hacia el vértice. En la otra cara, a bajos números de Reynolds, la evolución de las curvas no sufre modificaciones drásticas, mientras que para las dos figuras la situación cambia. En el caso del triángulo, a $Re = 1000$, los tres números de Prandtl con valores inferiores presentan sus picos antes del vértice B y luego de este se dan para los Prandtl superiores. No obstante, cuando $Re = 10000$, se da un corrimiento de los cinco valores máximos posterior al vértice, con una mayor relevancia para $Pr = 0.72$ y $Pr = 5$. Este comportamiento es llamativo, puesto que en esta región donde se ha separado el flujo, se observaba, que a bajos números de Reynolds, los fluidos para los cuales prima la transferencia de momento, mostraron mejor desempeño en la convección de calor, mientras que para el Reynolds superior, la formación del vórtice benefició el mecanismo de difusión térmica (ver Figura **3-3**).

Por el contrario, en el caso del cuadrado, los picos máximos, para todos los números de Reynolds, se alojaron antes del vértice B y en el caso de $Re = 10000$, el valor de la velocidad en este punto es mayor a la velocidad de corriente libre, hecho que predomina sobre la formación del vórtice en la siguiente cara. Aunque este fenómeno ocurra, cuando se comparan los tamaños relativos de los vórtices, se observa que en el caso del triángulo esta característica es mayor. Finalmente, en esta cara del cuadrado se visualiza que la zona de influencia del

primer vórtice hace que el valor disminuya, y por fuera de esta este indicador se recupera, e incrementa, para $Re = 1000$ y $Re = 10000$, cuando se encuentra con el vórtice próximo al vértice C, especialmente para $Pr = 0.72$ y $Pr = 5$. En la cara posterior (CD), los valores del Nusselt se mantienen constantes, y no se observan intercambio entre las posiciones relativas de las curvas entre una cara y otra (ver Figura 3-15).

Un escenario diferente, se observó cuando para la orientación del triángulo en la Figura 3-1-b. Para este caso, el efecto de la pared se manifiesta en frenar el flujo hasta llegar al vértice B, punto en el cual se separa y se estanca atrás del cateto base. La curvas del número de Nusselt muestran que el valor máximo se ubica en el vértice A, y disminuye rápidamente hasta un valor cuasi-constante para el resto del cuerpo. De lo cual, se acusa la ausencia de fenómenos turbulentos cerca a la pared, que modifiquen a este comportamiento.

Situaciones similares suceden para la elipse, aunque dada la trayectoria de su curva tangente, el comportamiento observado se desvía paulatinamente de lo descrito para el triángulo, cuando su punta enfrenta el flujo. Para la orientación expuesta en la Figura 3-7-a, el valor máximo del número de Nusselt, se sigue ubicando en el punto de estancamiento y desciende progresivamente hasta el punto donde se desprende la capa límite. A partir de este lugar, se generan diferentes situaciones en función del número de Reynolds. Para $Re = 1000$, las tres curvas de los números de Prandtl inferiores, reflejan un comportamiento similar al coeficiente de fricción C_f , luego de su punto máximo, mientras que las otras dos tienen una progresión diferente.

Aproximadamente hacia $\theta = 150^\circ$ nuevamente, las curvas de $Pr = 0.72$ y $Pr = 5$ presentaron un comportamiento llamativo al recuperarse, seguido de un leve incremento en $Pr = 0.1$. Respecto a $Re = 10000$, la separación del flujo se adelanta en el cuerpo, un poco antes de $\theta = 90^\circ$, los mínimos relativos de las cuatro curvas de los Prandtl inferiores se ubican en esta zona y las curvas del Nusselt de los tres Prandtl inferiores vuelven a incrementar. Comparando este último fenómeno, las curvas de $Re = 1000$ muestran una mayor intensidad relativa en su recuperación, aunque no se encuentra relación directa con los perfiles de la componente tangencial de la velocidad o la proximidad, y geometría de los vórtices cercanos.

Cuando el semieje mayor se orienta perpendicular a la dirección del flujo principal, el valor máximo del número de Nusselt se da en el punto de estancamiento, se mantiene estable, disminuye en el de punto separación de capa límite y se recupera posteriormente. Para $Re = 10000$, principalmente, las curvas de los tres Prandtl inferiores siguen el descenso del coeficiente de fricción.

Sin embargo, resulta llamativa la ubicación de los extremos relativos de estas tres curvas, y su posicionamiento, luego del punto de separación. Mientras que las curvas de $Pr = 0.72$

y $Pr = 5$ muestran sincronía en la ubicación de los valores máximos y mínimos locales, la curva de $Pr = 0.1$ mostró una posición independiente de su valor máximo y coincidencia del valor mínimo. Nuevamente, no se encuentra un evento determinante asociado a este comportamiento, salvo la presencia del vórtice señalado en la Figura 3-11-c. No obstante, no se asocia una razón puntual que explique la mayor sensibilidad de este número de Prandtl en esta región del cuerpo.

Finalmente, cuando el cuadrado es girado (figura 3-13-b), se observa una mezcla de los casos expuestos previamente. Analizando la mitad superior del cuadrado (camino ABC), el número de Nusselt parte de un valor máximo y desciende con mayor intensidad conforme aumenta el número de Reynolds, de manera similar a como lo hace el triángulo con la punta enfrentada (ver Figura 3-5). En el vértice B, sobre la cara BC, se observa un descenso de las curvas de los dos mayores números de Prandtl, y un comportamiento individual de los tres primeros, de donde $Pr = 0.1$ y $Pr = 0.72$ no se modificaron a causa del cambio de cara y $Pr = 5$ es sensible a la aparición de los vórtices señalados en la Figura 3-18-c, en $Re = 10000$.

Respecto a la mitad inferior del cuadrado (camino ADC), nuevamente en el vértice A es donde se reporta el mayor número de Nusselt, el cual desciende hasta el vértice D con mayor intensidad conforme aumenta el número de Nusselt. En la otra cara (DC), se registra un incremento del número de Nusselt para las curvas de los números de Prandtl, en las que prevalece la transferencia de momento ($Pr = 50$ y $Pr = 500$), y un poco menos $Pr = 5$.

Nuevamente, este último es particularmente sensible a la presencia de vórtices, mostrando el mayor en el valor pico de las curvas mencionadas (ver Figura 3-19). Comparando los dos caminos, se observa que los valores del número de Nusselt obtenido del recorrido inferior son mayores a los del superior. Lo anterior puede estar asociado a la presencia del punto de estancamiento del flujo (señalado en la Figura 3-19), mayor velocidad de la componente tangencial (respecto al valor de corriente libre) y la formación de vórtices.

De lo expuesto anteriormente, se distinguen algunos patrones en la influencia combinada del número de Reynolds y el número de Prandtl, en el número de Nusselt. Para los números de Reynolds bajos ($Re = 10$ y $Re = 100$), los fluidos cuyo mecanismo de transporte de energía predominante es la transferencia de momento, tienen mayor relevancia en estas situaciones, especialmente en $Pr = 50$. Para los Reynolds superiores, los fluidos con $Pr = 0.72$ y $Pr = 5$ (principalmente) benefician la convección de calor, asociado al aumento relativo de los términos inerciales en el balance de momento y una mayor participación de la difusión térmica. Este hecho es subrayado por Smith et al. (2013), quien afirma que a partir de $Pr > 5$ la transferencia de momento tendrá una importancia relativa más significativa en la transferencia de energía.

A nivel local, se observa entonces que las curvas de $Pr = 0.72$ y $Pr = 5$, son predominantemente sensibles en las zonas de la pared, donde, o bien el campo de velocidad tiene valores cercanos, mayores, a la velocidad de corriente libre, o se da la separación del flujo y aparecen fenómenos turbulentos como la re-circulación o formación de vórtices. Para las regiones donde el flujo experimenta principalmente el retraso en la capa adyacente a la pared, o este se ha estancado, se manifiesta en que las curvas del Nusselt no se modifican y mantienen el valor que ellas traían aguas arriba.

Los resultados del presente estudio, se comparan contra las predicciones que se obtienen empleando la ecuación 1-1 con los coeficientes obtenidos por Reiher y Hilpert, los cuales se listan en la Tabla 3-1. A pesar de que estos coeficientes fueron obtenidos utilizando aire como fluido de trabajo, se seguirá la recomendación de Bergman et al. (2011), quien sugiere que estos resultados se pueden extender para otros fluidos de trabajo utilizando el número de Prandtl elevado a la $n = 1/3$. Para $Pr = 0.72$ se aplicó esta corrección aún teniendo en cuenta que los coeficientes ya tienen incorporado el efecto de este número de Prandtl. El propósito de esto es resaltar la rigidez de la ecuación 1-1 en conjunto con la suposición clásica del exponente n , y la desviación de las predicciones con los resultados del trabajo numérico.





Figura	$Re \times 10^{-3}$	C	m
	1.4 - 8.2	0.177	0.612
	4.1 - 20.5	0.09	0.804
	2.0 - 6.3	0.149	0.699
	3.9 - 79	0.085	0.675
	2.8 - 8.3	0.272	0.624
	5.6 - 111	0.232	0.588

Tabla 3-1.: Coeficientes utilizados para la aplicación de la ecuación 1-1. Valores tomados de Sparrow et al. (2004).

Las secciones transversales que se compararon fueron la elipse y el cuadrado, en sus dos inclinaciones. El triángulo no se estudió ya que no se encontraron los valores de los coeficientes para la aplicación de las ecuaciones. En cuanto a los resultados de los experimentos numéricos, se tomó el promedio en todo el perímetro de la geometría y se compararon únicamente los datos obtenidos para $Re = 1000$ y $Re = 10000$.

Se calculó un error relativo, tomando como valor de referencia el dato predicho por la correlación.

$$\text{Error} = \frac{|\text{Nu}_{\text{HR}} - \text{Nu}_{\text{M}}|}{\text{Nu}_{\text{HR}}} \quad (3-1)$$

En la Figura **3-21** se presenta la comparación para el caso elipse. La progresión de los valores promedio del Nusselt sugiere que a medida que el número de Prandtl avanza, la diferencia entre las curvas de Reynolds 1000 y 10000 disminuye, y tiende a un valor constante. Por el contrario, esto no se reproduce cuando se observa la evolución de los valores predichos por la correlaciones, haciéndose evidente el sesgo, y por consiguiente, la rigidez de la ecuación empleada. Para las dos inclinaciones se observa que el error relativo es mayor para las curvas de $Re = 1000$. En ambos casos los valores máximos de error se ubican en $Pr = 5$ y $Pr = 50$.

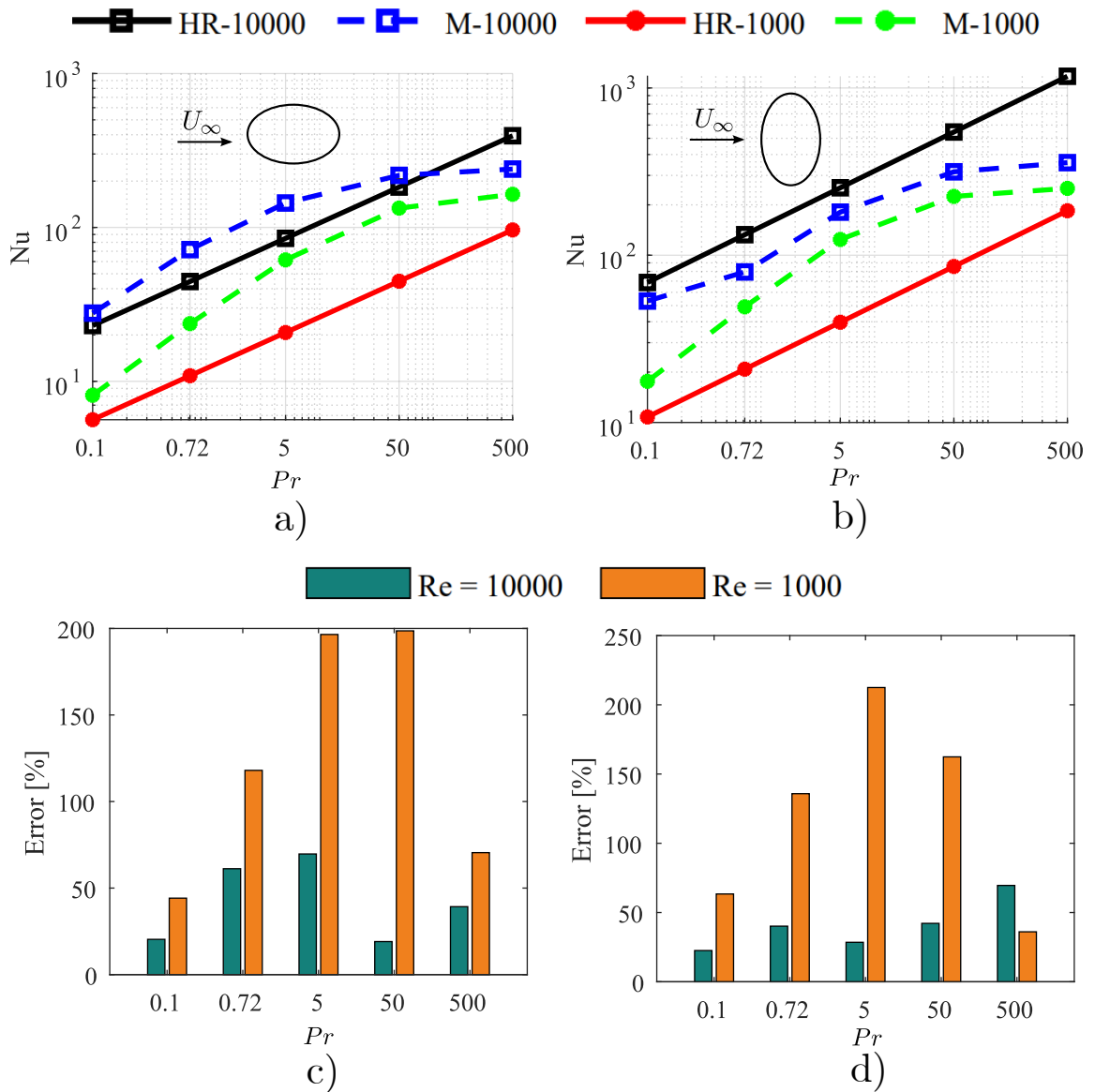


Figura 3-21.: Comparación del número de Nusselt promedio, obtenido para la elipse contra las predicciones hechas utilizando la ecuación 1-1 y los coeficientes de la Tabla 3-1. HR hace referencia a la predicción de la correlación, mientras que M hace referencia al estudio actual.

Para el caso del cuadrado, en el caso de la Figura 3-22-a) se observa que la predicción de la curva de $Re = 1000$, obtenida con la Ecuación 1-1, tiene un comportamiento similar a los resultados obtenidos del estudio numérico. Para $Re = 10000$, la diferencia es más amplia en la mayoría de los casos, de donde se destaca el error para $Pr = 5$.

Para la figura 3-22-b), la diferencia entre la curva de $Re = 1000$ y $Re = 10000$ tiende

a mantenerse constante, con una ligera desviación para $Pr = 5$ y $Pr = 50$. A diferencia del caso anterior, el error es mayor para las curvas de $Re = 1000$, ubicándose el máximo de estos en $Pr = 50$.

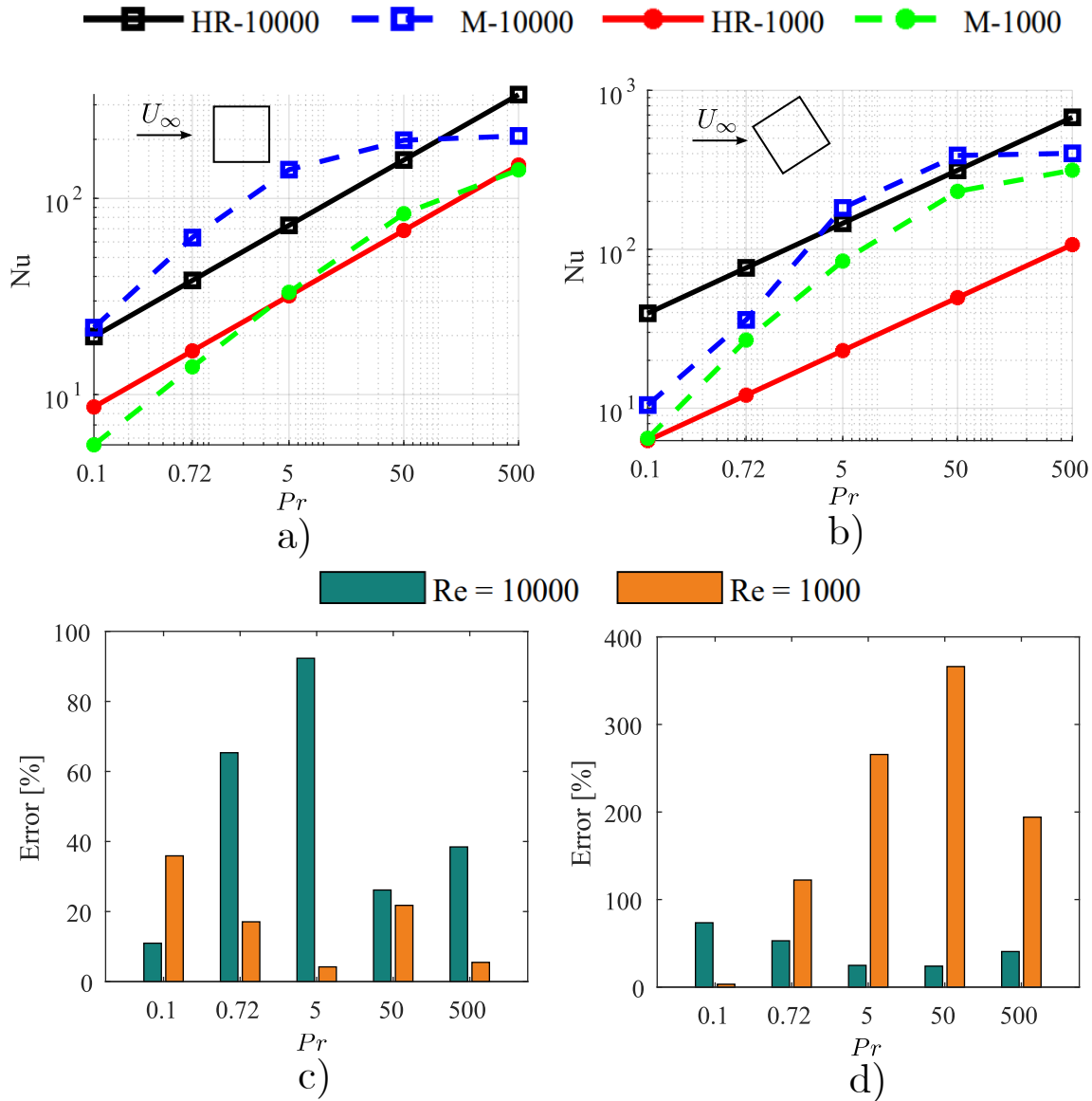


Figura 3-22.: Comparación del número de Nusselt promedio, obtenido para el cuadrado contra las predicciones hechas utilizando la ecuación 1-1 y los coeficientes de la Tabla 3-1. HR hace referencia a la predicción de la correlación, mientras que M hace referencia al estudio actual.

De las cuatro comparaciones se percibe que entre $0,1 \leq Pr \leq 50$ las curvas de las simulaciones presentan una evolución similar a la progresión lineal en la escala logarítmica que se

obtiene con las correlaciones. Esto sugiere que para este rango, se puede obtener una actualización de los coeficientes, incluyendo un valor propio de exponente para el número de Prandtl.

Por fuera del rango mencionado en el párrafo anterior, en principio se observa que los valores no difieren en gran medida con el resultado para $Pr = 50$ y se podría asumir este mismo valor. Sin embargo, no existe evidencia más allá de $Pr = 500$ que permita afirmar esto. Así mismo, es importante recordar que la metodología con la que se calcula el coeficiente de difusión térmica α puede introducir un comportamiento asintótico en las ecuaciones gobernantes y es lo que se estaría reflejando para $Pr = 500$.

En la Tabla 3-2 se presentan los resultados de los coeficientes obtenidos a partir del estudio.







Figura	C	m	n	R ²
	1.1181	0.4434	0.2827	0.984
	1.0423	0.4697	0.2515	0.999
	6.8372	0.2573	0.2939	0.964
	17.2347	0.1879	0.3143	0.997
	5.2707	0.2734	0.2891	0.954
	9.8729	0.2106	0.4458	0.981

Tabla 3-2.: Coeficientes obtenidos para la Ecuación 1-1 a partir de los resultados del estudio, junto con su respectivo coeficiente de determinación R². Valores validos para $0,1 \leq Pr \leq 50$.

4. Conclusiones y recomendaciones

En el presente trabajo se ha estudiado la interdependencia entre los números de Nusselt, Reynolds y Prandtl en transferencia de calor por convección forzada alrededor de geometrías sencillas. Esto se llevo a cabo por medio de experimentación numérica, utilizando un modelo computacional el cual incorporó estrategias reportadas en la literatura, y se contrastó contra un conjunto de resultados experimentales.

A partir de lo anterior, se concluyó que el modelo computacional está en la capacidad de dar una estimación real del número de Nusselt, a diferentes números de Prandtl, en regiones características del flujo cerca a la pared, como lo son los puntos de separación, desprendimiento de capa límite y estancamiento aguas abajo del cuerpo. Esto permitió evaluar el impacto conjunto de los números de Reynolds y Prandtl en el número de Nusselt.

El estudio se enfocó en tres secciones transversales (triángulo, elipse y cuadrado), bajo dos inclinaciones, cuatro números de Reynolds (10, 100, 1000 y 10000) y cinco números de Prandtl (0.1, 0.72, 5, 50 y 500). A partir de los resultados, se concluye lo siguiente:

- Para los Reynolds $Re = 10$ y $Re = 100$, el máximo número de Nusselt promedio se ubicó predominantemente en $Pr = 50$, teniendo un crecimiento progresivo desde $Pr = 0.1$ y un posterior descenso luego de este pico. Al aumentar el número de Reynolds, se observa el corrimiento del punto máximo hacia $Pr = 5$ y en algunos casos de $Re = 10000$ en $Pr = 0.72$. De acuerdo con el estudio, esto permite concluir que para estos números de Reynolds, aquellos fluidos en los cuales la difusión de momento y difusión térmica se da en una proporción similar (números de Prandtl cercanos a la unidad) tendrán un mejor desempeño de la transferencia de calor.
- Respecto a la formación de las curvas del Nusselt local, se identificó que eventos como la formación de vórtices, o recirculación del flujo, benefician la convección de calor en fluidos con números de Prandtl cercanos a la unidad, en este caso $Pr = 0.72$ y $Pr = 5$. Cuando este no es el caso, las curvas del Nusselt local siguen los valores estimados aguas arriba en el cuerpo. Esto se manifestó en diferentes niveles de dispersión, especialmente para el mayor número de Reynolds y los números de Prandtl recién mencionados. Lo anterior muestra que el desarrollo del Nusselt local, responde a una combinación dada de transferencia de momento y difusión térmica, en el contexto de diferentes posibilidades de mecanismos de separación de flujo, los cuales, dada su complejidad,

no son fácilmente identificables desde un enfoque teórico. Conocer la forma en que se dan estos fenómenos, beneficiara una correcta selección de ubicaciones, geometrías y fluidos, en el marco de diferentes aplicaciones de transferencia de calor y uso eficiente de la energía.

- Aunque no se pudo realizar un proceso de validación de la distribución local del número de Nusselt, se observa que el modelo computacional es capaz de acoplar los eventos locales de los campos de presión y velocidad con la predicción de la variable temperatura de los escalares pasivos incorporados. Esto se manifiesta en la sintonía reflejada en los cambios de los coeficientes de presión, fricción, perfiles de velocidad con el desarrollo de las curvas del número de Nusselt, que es reportada también en la literatura.
- La proposición de incorporar el efecto número de Prandtl en el número de Nusselt, como un factor multiplicativo elevado a $1/3$, no es representativa para la totalidad del conjunto de situaciones analizadas. Únicamente el cuadrado en $Re = 10000$ muestra sintonía con las predicciones hechas con la ecuación 1-1, los coeficientes publicados en la literatura y la corrección mencionada para incorporar diferentes fluidos de trabajo. Para el cuadrado girado y las inclinaciones de la elipse se evidenció una desviación independiente en cada caso de los resultados del estudio con las curvas de las correlaciones. Sin embargo, se observó en los resultados que su comportamiento en función del número de Prandtl, para el rango $0,1 \leq Pr \leq 50$, es similar al obtenido por la predicción de la correlación. En ese sentido se calcularon los coeficientes en donde el número de Prandtl tiene un exponente n independiente y los valores de C y m se acoplan a este requerimiento.
- Cabe resaltar que en este estudio, se aprovecharon las ventajas de la experimentación numérica para ir más allá de las limitaciones de los montajes experimentales. Aunque se haya introducido matemáticamente el efecto del número de Prandtl dentro de los mecanismos de transferencia de energía en capa límite, los resultados no son vinculantes con la realidad. Esto se debe a que este número adimensional es una propiedad de cada fluido, la cual comprende la relación entre la capacidad calorífica C_p y la conductividad térmica del mismo k , parámetros determinantes en el proceso de transferencia de calor.

$$Pr = \frac{\mu C_p}{k} \quad (4-1)$$

4.1. Recomendaciones

A partir de la última conclusión, sobresale particularmente la incertidumbre que existe entre el nivel de aproximación de los resultados a sus situaciones homólogas en la vida real.

Aunque las predicciones en $Pr = 5$, hechas para los casos del cuadrado, siguen las tendencias reflejadas por [Kapitz et al. \(2018\)](#), los valores de Pr por fuera de este intervalo (0.72 - 7) no han sido estudiados y no se sabe si la evolución de las curvas promedio para cada Reynolds siguen el comportamiento descrito por los resultados.

A partir de lo anterior, se recomienda realizar una comparación contra un estudio experimental, o DNS, en donde se involucren fluidos con propiedades tabuladas en libros de texto. Esto permitiría, por un lado, corroborar el nivel de desviación de las predicciones hechas en este trabajo, y, por otro, evaluar si el número Prandtl, además de ser una propiedad de los fluidos, también cumple con las leyes de escalabilidad.

Para finalizar, aunque en este estudio se haya analizado el comportamiento local, un análisis en detalle de las capas límite turbulentas brindaría una mirada más detallada de la relación mutua que existe entre la transferencia de momento y la difusividad térmica. Evaluar indicadores en unidades de pared, así como corroborar la validez de la analogía de Reynolds, entre otros, permitiría acortar la brecha que existe en este campo.

A. Anexo: Estudio previo del modelo computacional.



FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y MECATRÓNICA

TRABAJO DE GRADO

Estudio del efecto del escalamiento del número de Nusselt en un flujo incompresible alrededor de una geometría cúbica sencilla

Desarrollado por:
Miguel David Méndez Bohórquez
mdmendezb@unal.edu.co


Dirigido por:
Carlos Alberto Duque Daza
caduqued@unal.edu.co

ÍNDICE

I. Lista de tablas y figuras	2
II. Resumen	3
III. Introducción	4
IV. Metodología	5
I. Modelo computacional	5
I.1. Condiciones de frontera	5
II. Ecuaciones gobernantes	6
II.1. Transporte de la temperatura como un escalar Pasivo	6
III. Consideraciones adicionales	7
V. Resultados y discusión	8
I. Simulación Precursora	8
II. Canal-Cubo	10
II.1. Perfiles de velocidad	10
II.2. Valores rms de las fluctuaciones de velocidad	11
II.3. Coeficiente de presión sobre el cubo	11
III. Escalamiento geométrico del número de Nusselt	14
III.1. Número de Nusselt promedio	17
III.2. CHTC y Calor transferido total	19
VI. Conclusiones	20

I. LISTA DE TABLAS Y FIGURAS

ÍNDICE DE FIGURAS

1.	Esquema del dominio	5
2.	Valores rms de las fluctuaciones de velocidad, en el canal, normalizadas a la velocidad de fricción	9
3.	Esfuerzo de Reynolds en el canal normalizado a la velocidad de fricción	10
4.	Perfil de velocidad en el canal normalizado	10
5.	Perfiles de velocidad sobre la cara superior del cubo. Línea roja LES, PIV 	12
6.	Perfiles de velocidad en $x=0$	13
7.	Perfiles de velocidad en $x=0.1$	13
8.	Perfiles de velocidad en $x=0.2$	13
9.	Valores rms de las fluctuaciones de velocidad en x sobre el cubo	14
10.	Valores rms de las fluctuaciones de velocidad en y sobre el cubo	15
11.	Coefficientes de presión en los dos planos médios del cubo	16
12.	Grilla para la obtención de los números de Nusselt puntuales por cara	17

ÍNDICE DE CUADROS

1.	Propiedades del aire	6
2.	h y U_h para $Re=20000$	7
3.	h y U_h para $Re=10000$	7
4.	Tiempos de simulación en el Canal	9
5.	Nu promedio para $Re=20000$	17
6.	Nu promedio para $Re=10000$	17
7.	Tiempos de simulación para $Re=20000$	18
8.	Tiempos de simulación para $Re=10000$	18
9.	CHTC para $Re=20000$	19
10.	CHTC para $Re=10000$	19
11.	Calor total transferido para $Re=20000$	19
12.	Calor total transferido $Re=10000$	20

II. RESUMEN

Se presenta el estudio del efecto del escalamiento geométrico del número de Nusselt en un flujo incompresible alrededor de un geometría cúbica. La transferencia de calor fue modelada a través del transporte de la temperatura como un escalar pasivo. El modelo de flujo fue validado contra lo reportado por Lim et al. [2]. Para el caso simulación precursora del canal liso se presentan resultados de los valores rms de las fluctuaciones de la velocidad, el esfuerzo de Reynolds y el perfil de felocidad U^+ . Para el caso del cubo inmerso del canal se presenta el desarrollo de los perfiles de velocidad principales a lo largo del cubo, los perfiles de los valores rms de las fluctuaciones, y el coeficiente de presión tomado en un plano axial y uno transversal. En cuanto a la etapa de investigación, se trabajarón 4 casos para dos números de Reynolds diferentes, en donde se aumentó la longitud característica del cubo dos ocasiones en un factor de dos, y se disminuyo de la misma forma. El trabajo arrojó que el número de Nusselt promedio, por cara, es independiente del escalamiento geométrico, confirmando lo que se plantea en la teoría.

III. INTRODUCCIÓN

Los números adimensionales han sido una herramienta fundamental para llevar a cabo la experimentación en escalas manejables. Ellos establecen un puente de comunicación entre científicos facilitando la construcción de conocimiento a partir de lo que ya se ha conseguido. Un claro ejemplo es el número de Reynolds, que responde a la siguiente expresión matemática:

$$Re = \frac{\rho U L_x}{\mu} \quad (1)$$

Siendo ρ la densidad y μ la viscosidad dinámica del fluido, y U y L_x la velocidad y longitud característica, ambos representativos del problema.

La función que tiene este es establecer una relación de proporción entre las fuerzas inerciales a las fuerzas viscosas. Gracias a este se ha podido estudiar el comportamiento de fenómenos complicados, como las fuerzas de arrastre sobre un carro de fórmula 1 ó el flujo inmerso en un entorno urbano, en escalas de laboratorio.

Por otro lado, así como existe una relación para la dinámica de un fluido, lo existe también para la experimentación térmica, llamado el número Nusselt. Mide, para un proceso de transferencia de calor, si en este prima el fenómeno de conducción o el fenómeno de convección. Teniendo en cuenta esto, la formulación de este debe estar fundamentada en una relación que mida el proceso de difusión y otra que mida el proceso de convección. Para la primera, se hace uso del número de Prandtl, el cual establece una proporción entre la difusión por momento a la difusión térmica, como se puede observar en la siguiente expresión:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2)$$

Siendo ν la viscosidad cinemática y α el coeficiente de difusividad térmica del fluido.

Para el caso de relación de convección esta se diferencia si esta se manifiesta de manera natural o forzada. De la primera se tiene el número de Grashof, el cual hace un balance entre las fuerzas inerciales, fruto de las corrientes generadas por los cambios de densidad en un fluido, a las fuerzas viscosas. En el trabajo que se desarrolla a continuación, las propiedades del fluido se mantienen constantes, ya que como lo dice Franke et al [8], para un flujo atmosférico las variaciones en este pueden ser despreciadas.

Para el caso de la convección forzada se hace uso del número de Reynolds. Considerando este panorama, a la hora de realizar el escalamiento de un experimento térmico, el único camino posible es modificando los valores que componen la ecuación 1, como se puede observar en la siguiente expresión:

$$Re_1 = \frac{\rho U_1 L_1}{\mu} = \frac{\rho U_2 L_2}{\mu} = Re_2$$

Dado que para mantener el número de Reynolds, al variar la longitud característica, se debe modificar la velocidad de referencia, surge la inquietud si el número de Nusselt promedio a la superficie va a ser igual para ambos casos.

Teniendo en cuenta lo anterior, para el presente trabajo, se va a estudiar el comportamiento del número de Nusselt promedio en las caras de un cubo, expuesto a un flujo atmosférico, mediante simulación numérica. Por esto, primero se va a desarrollar la construcción del modelo computacional. Luego se va a mostrar el proceso de validación del fenómeno de flujo, necesario para garantizar

que los resultados del modelo de transporte de la temperatura sean aceptables. Con este requerimiento cumplido se procederá a mostrar los resultados del proceso de investigación, para finalmente concluir sobre todo el trabajo.

IV. METODOLOGÍA

El problema fue desarrollado bajo dos etapas principales. La primera consistió en la validación del modelo computacional. Teniendo en cuenta que era necesario garantizar que el fenómeno de flujo fuese modelado satisfactoriamente, se realizó una emulación de los resultados del trabajo reportado por Lim et al [2]. La segunda etapa consistió en el escalamiento geométrico del problema, donde se trabajaron 4 casos, para dos números de Reynolds, cada uno a una longitud característica diferente.

I. Modelo computacional

El dominio es un canal liso con las siguientes dimensiones: $10h$ en dirección del flujo, $5h$ en dirección transversal y altura, siendo h la altura del cubo. El cubo se encuentra ubicado a $4h$ de la entrada del canal, centrado en la dirección transversal y a nivel de la superficie inferior, tal como se pueden observar en la siguiente figura.

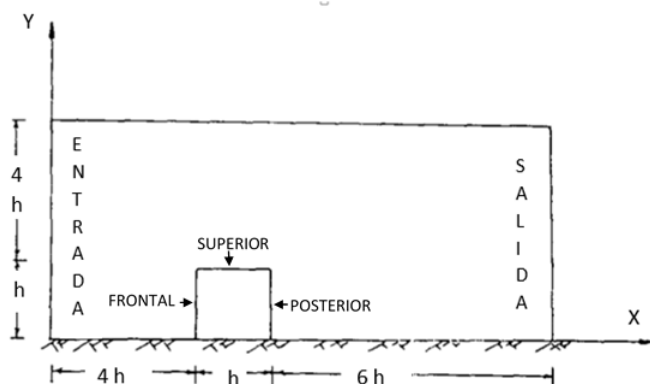


Figura 1: Esquema del dominio

I.1. Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera de velocidad y presión fueron cíclicas entre la entrada y la salida del canal, al igual entre las paredes laterales. Las paredes superior, inferior y del cubo tenían condición de no deslizamiento para la velocidad y gradiente de presión normal igual a cero. Para mover el flujo, dado que no se ajustó un gradiente de presión que forzaría su movimiento, el software calculaba una fuente de momento externa para garantizar un flujo másico correspondiente a las condiciones del caso.

En cuanto a las condiciones de frontera térmicas, el campo interno del dominio se configuró con una temperatura constante de 300 K, al igual que las paredes del canal; Para las paredes del cubo se asumió una fuente de calor interna, ideal, capaz de mantenerlo a una temperatura constante de 349 K.

II. Ecuaciones gobernantes

Asegurando que el caso se podía trabajar como un flujo del tipo incompresible, se procedió a calcular el número de Mach. Para esto, es importante mencionar que el fluido de trabajo fue aire a presión atmosférica, a 300 K; Esta es una consideración importante ya que posibilita trabajar el aire como un gas ideal, permitiendo establecer lo siguiente:

$$M = \frac{U_h}{c} \quad (3)$$

Siendo c la velocidad del sonido, que se puede calcular como:

$$c = \sqrt{kRT} \quad (4)$$

Donde k es la relación de calores específicos, R la constante particular del aire y T la temperatura a la que se encuentra. Bajo estas consideraciones, las propiedades del fluido y el número de Mach son los siguientes:

Propiedad	Valor
T [K]	300
ρ [kg/m^3]	1.22
k [W/m K]	0.024
ν [m^2/s]	0.0000015
c [m/s]	347.18
M	0.000864

Cuadro 1: Propiedades del aire

Observando el número de Mach obtenido, se puede justificar lo que planteó en la introducción acerca de las propiedades del fluido; En vista de lo anterior, simular el problema con las consideraciones de un flujo incompresible es completamente valido. Un resultado adicional de este hecho es la posibilidad de modelar la temperatura como el transporte de un escalar pasivo, al cual se le hará su derivación matemática más adelante.

Con lo anterior, las ecuaciones de conservación que se van a resolver son las siguientes:

- Ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (5)$$

- Ecuación de momento

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla \cdot \tau_{ij} + f \quad (6)$$

Para resolver estas dos ecuaciones, la simulación fue del tipo LES usando el modelo de turbulencia WALE. Dado el alcance de este trabajo, la modificación de este a la ecuación de momento no se va a mostrar. Para el acople de presión y velocidad se utilizó el algoritmo *PIMPLE*, que es un híbrido entre el algoritmo *SIMPLE* y el algoritmo *PISO*.

II.1. Transporte de la temperatura como un escalar Pasivo

Para abordar este problema en primera instancia se va a plantear la conservación de la energía, en términos de la entalpía, en un volumen de control Ω , a través de una superficie S . La ecuación

que plantea esto es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho h d\Omega + \int_S \rho h \vec{V} \cdot n dS = \int_S k \nabla T \cdot n dS + \int_{\Omega} (V \cdot \nabla P + S : \nabla V + \frac{\partial P}{\partial t}) d\Omega \quad (7)$$

El segundo termino del lado derecho de la ecuación, agrupado en la integral de volumen, se puede despreciar ya que los gradientes de presión y los esfuerzos viscosos no son representativos en comparación al aporte por conducción y fenómenos convectivos. Teniendo en cuenta lo anterior, aplicando el teorema de gauss a las integrales de superficie, e igualando a cero se obtiene:

$$\int \rho (\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla h) - k \nabla^2 T d\Omega = 0 \quad (8)$$

Sabiendo que para las consideraciones de este caso, la entalpía es proporcional a los cambios de temperatura, y la variación del calor específico a presión constante es insignificante para el ΔT a las que esta sometido el aire, en este caso, se puede re escribir la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\int \rho C_p (\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T) - k \nabla^2 T d\Omega = 0 \quad (9)$$

Por último, dado que debe garantizarse la conservación del escalar, la única manera de que la integral de la ecuación 9 sea cero es que el integrando lo sea. Siendo así, la ecuación que describe la conservación de la temperatura, a través de un volumen de control, como un escalar pasivo es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T - \frac{k}{\rho C_p} \nabla \cdot \nabla T = 0 \quad (10)$$

III. Consideraciones adicionales

El número de Reynolds se calculó tomando como longitud característica la altura del cubo y la velocidad a esta altura. Para el presente trabajo se realizó la validación para $Re=20000$, y se realizó la investigación para este valor y para $Re=10000$.

$$Re = \frac{h * U_h}{\nu} \quad (11)$$

A continuación se muestra un resumen de los parámetros que varían para cada caso:

Caso	h [m]	U_h [m/s]
1	2	0.15
2	4	0.075
3	0.5	0.6
4	0.25	1.2

Cuadro 2: h y U_h para $Re=20000$

Caso	h [m]	U_h [m/s]
5	2	0.15
6	4	0.075
7	0.5	0.6
8	0.25	1.2

Cuadro 3: h y U_h para $Re=10000$

Para el desarrollo de las simulaciones se utilizó el método de los volúmenes finitos como método de discretización espacial y el esquema de avance temporal fue del tipo implícito.

V. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados están organizados de la siguiente manera. En primer lugar se presentó la validación del modelo computacional de flujo, el cual está dividido en dos etapas; De acuerdo a como lo afirma Lim et al. [2], para simulaciones LES es necesario generar el campo de flujo turbulento apropiado en el cual el objeto estaría inmerso. Se busca capturar los niveles de intensidad turbulenta, los esfuerzos cortantes y la escala integral, por lo menos.

Para generar este campo, esencialmente existen dos caminos. Uno es estadísticamente, donde se crea una secuencia de números aleatorios, que luego se filtran hasta obtener las propiedades estadísticas de dicho campo turbulento. La otra posibilidad es realizar una simulación precursora, la cual consiste en un canal, sin el cubo, que es llevada hasta obtener un estado estacionario. Esta es la opción más atractiva ya que se obtienen las estructuras coherentes naturalmente; Es decir, resolviendo las ecuaciones de conservación de momento y masa.

Una vez obtenido este campo externo inicial, se procede a atacar la segunda etapa del problema: El canal liso con el cubo inmerso; Para esto, se presentan los perfiles de velocidad, los valores rms de las fluctuaciones de velocidad a lo largo de la cara superior del cubo, y el coeficiente de presión sobre un plano medio axial y otro transversal en el cubo.

La segunda etapa del trabajo estuvo enfocada a la simulación térmica del fenómeno. Luego de conseguir un modelo computacional que reprodujera aceptablemente la dinámica del flujo del problema, es posible llevar a cabo el estudio del escalamiento geométrico del número de Nusselt, de acuerdo a lo que se planteó en la metodología. Se presentan resultados del número de Nusselt y el coeficiente convectivo promedio, y el calor total transferido por cara, para cada caso.

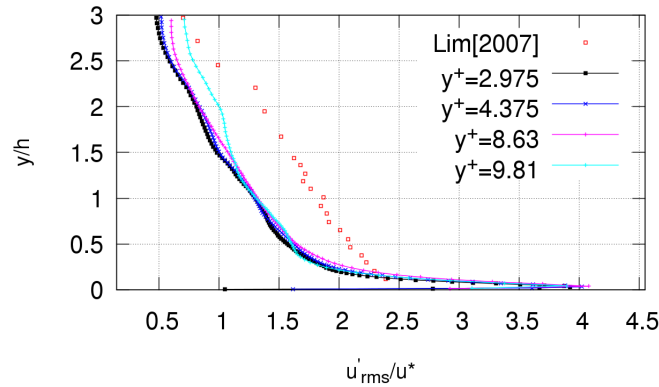
I. Simulación Precursora

Los resultados de esta sección fueron promediados temporal y espacialmente y se compararon contra los valores experimentales reportados por Lim et al. [3]. Adjunto a lo anterior, se realizó un estudio de independencia de malla en función del y^+ calculado en el primer centro de celda, para complementar el proceso de validación de esta etapa.

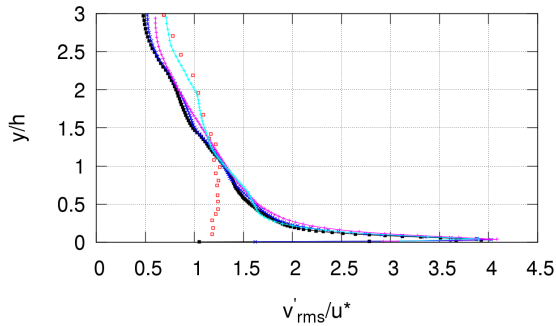
Luego de observar las figuras 2 y 3 se puede concluir que se logró capturar las tendencias del fenómeno reportado experimentalmente. Con lo anterior no se quiere decir que los resultados reproduzcan fielmente el comportamiento. De la figura 2 las sub-predicciones presentadas para las figuras a) y b) alcanzan a tener un error absoluto de aproximadamente el 25%.

En principio se esperaría que este comportamiento este atribuido a falta de refinamiento cerca de la superficie inferior del canal. Sin embargo, tal como lo reportan las gráficas en cuestión, la solución tiende a alejarse del comportamiento experimental a medida que se refina más la malla, esto manifestado en la disminución del y^+ calculado en el primer centro de celda.

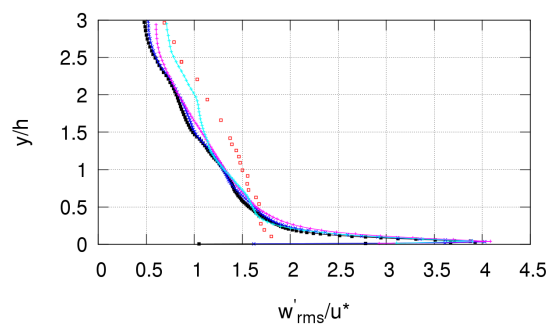
Se realizó una verificación del proceso de refinamiento de la malla, buscando evaluar si los tamaños de celda cercanos al centro del canal aumentaban a medida que se disminuía hacia la superficie inferior. Se encontró que este no era el evento ya que estos se mantenían constantes en dicha ubicación, descartando dicha posible fuente de error. Por esto, quedaba verificar los tiempos de simulación a



(a)



(b)



(c)

Figura 2: Valores rms de las fluctuaciones de velocidad, en el canal, normalizadas a la velocidad de fricción

la cual los resultados habían sido obtenidos, reportados a continuación:

y^+	t_s [s]
9.81	698.5
8.63	513.3
4.375	295.5
2.975	295.5

Cuadro 4: Tiempos de simulación en el Canal

De acuerdo a lo que dice Franke et al. [8], una de las fuentes de error en simulaciones de flujos atmosféricos es una convergencia incompleta de la simulación. Tal como se va a mostrar más adelante, en los resultados de la investigación, para este tipo de casos, a pesar de mostrar que ya se ha alcanzado un estado estacionario en los registros de su evolución temporal, estos exigen un mínimo de tiempos característicos para mostrar convergencia en sus resultados.

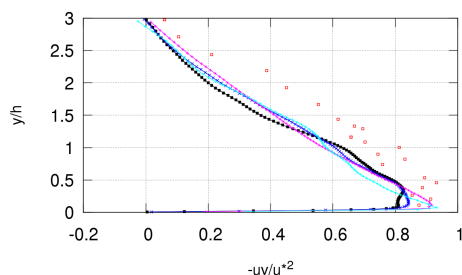


Figura 3: Esfuerzo de Reynolds en el canal normalizado a la velocidad de fricción

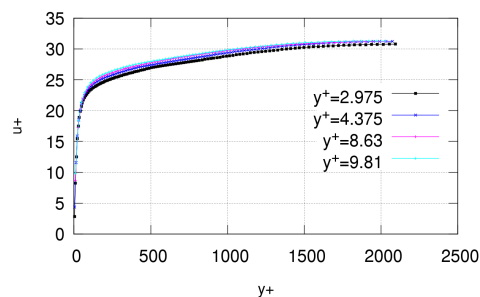


Figura 4: Perfil de velocidad en el canal normalizado

Valdría la pena reanudar estas simulaciones y verificar que tal hipótesis que se acabo de plantear es verdadera. Lo que resulta del anterior análisis, es que no se puede concluir que el caso del canal liso alcanzó independencia de malla. En su momento no se tenía conocimiento de esto y se decidió seguir con el trabajo. Como se dijo en un principio, aunque existe cierto desfase respecto a la curva experimental, se capturan las tendencias, hecho que se concluyó como suficiente para avanzar dado el alcance del trabajo y el peso del precursor dentro de este.

En cuanto a lo que se obtuvo en la figura 4, el perfil corresponde a lo que se ha reportado en la literatura. Valdría la pena llevar una validación de este contra algunos resultados DNS. En cuanto al comportamiento del perfil se observa que el valor de velocidad máximo disminuye a medida que se hace el refinamiento de malla.

II. Canal-Cubo

A continuación se presenta el estudio del fenómeno de flujo alrededor del cubo. Los perfiles de velocidad y valores rms de las fluctuaciones están normalizados a la velocidad con la que fue calculado el número de Reynolds. Adicionalmente, buscando evaluar el desempeño del modelo, los resultados se muestran junto a lo obtenido por el modelo LES utilizado por Lim et al. [2], y dos técnicas experimentales utilizadas en Lim et al. [3]; PIV (Particle Image Velocimetry) y LDA (*Laser Doppler Anemometry*).

II.1. Perfiles de velocidad

La figura 5 muestra los perfiles de velocidad normalizados obtenidos sobre la cara superior del cubo en el plano medio. Se muestran los resultados obtenidos para este trabajo contra lo encon-

trado experimentalmente por la técnica PIV. Se observa una sub-predicción generalizada a falta de refinamiento de la malla en la región próxima al cubo. Adjunto a lo anterior, se logrará observar que la región de recirculación comienza en $x/h = 0,2$ y termina en $x/h = 0,7$, mostrando que entre 0.7 y 0.8 se da el re enganche del fluido. Las figuras 6,7 y 8 son una versión amplificada de los perfiles de velocidad, para las tres primeras posiciones. Esto tiene como motivación detallar el desprendimiento de la capa límite y el comienzo de la región de recirculación producto de la presencia del cubo.

En general, se observa que los resultados obtenidos se aproximan bastante a lo reportado en las pruebas experimentales, tanto en la ubicación de los picos, como en el valor de estos, a pesar de tener unas pequeñas sub-predicciones cuando $x=0.1$ y $x=0.2$, para ambos ejes. En cuanto al seguimiento de los perfiles experimentales, se puede decir que este es aceptable, especialmente para el eje X. Para el eje Y, aunque la ubicación de los picos (aproximadamente $y/h = 0,15$) sea muy cercana, la sub-predicción presente hace que el perfil se desface de lo reportado experimentalmente, acentuándose este comportamiento a medida que se avanza en el cubo, como se puede observar en la figura 8. A pesar de lo anterior, la proyección de las curvas, en sentido vertical, tiende a ser cuasí-paralela, lo que permite aceptar los resultados, ya que por lo mencionado anteriormente, los valores y la tendencia del comportamiento se aproximan bastante a lo esperado.

En cuanto a lo que se puede analizar del fenómeno, se observa que el borde de ataque del cubo, llamando así la arista que tiene el primer contacto con el flujo de aire, hace que los esfuerzos cortantes se presenten principalmente en la dirección vertical, como se puede observar en la figura 6. A medida que se avanza en el cubo, la región de recirculación se puede apreciar en los valores negativos, y la tendencia de estos a aumentar, en los perfiles de velocidad, cerca de la cara superior del cubo. Aunque para la figura 7 se observa esto mismo, esta predicción no corresponde a lo que se espera, ya que no se reporta en los datos experimentales ni los resultados presentados por Lim et al. [2], en su modelo LES.

II.2. Valores rms de las fluctuaciones de velocidad

Al igual que para los perfiles de velocidad, el desempeño del modelo es más eficiente en el eje X. Para el eje Y, la sub predicción de los picos es más drámatica, aunque para este caso, el seguimiento del perfil, a partir de este punto es mejor. Sin embargo, es importante mencionar que la forma de la curva, para v'_r,ms normalizado en $x=0.1$ sale de la calidad de los resultados que se estaban obteniendo, haciendo notar que para esta posición, el comportamiento del fenómeno en el eje Y, impone más dificultar para ser capturado.

Respecto a lo que se puede ver de los perfiles, se logrará captar lo que se esperaba a partir de los perfiles de velocidad. Así como el valor negativo de velocidad aumentaba a medida que se avanzaba en el cubo, la intensidad turbulenta (apreciable en los valores rms de las fluctuaciones) incrementa de igual forma, para las posiciones que se están comparando. Esto confirma que dichos comportamientos van de la mano y son resultado de la recirculación del fluido.

II.3. Coeficiente de presión sobre el cubo

Para el cálculo del coeficiente de presión sobre el cubo, la relación matemática que se usó fue la siguiente:

$$C_p = \frac{P - P_0}{\frac{1}{2}\rho U_h^2} \quad (12)$$

En donde P es la presión que se está midiendo y P_0 una presión de referencia tomada aguas arriba.

Este fue calculado en eje axial y uno transversal. Para el caso del axial se tomo una línea que

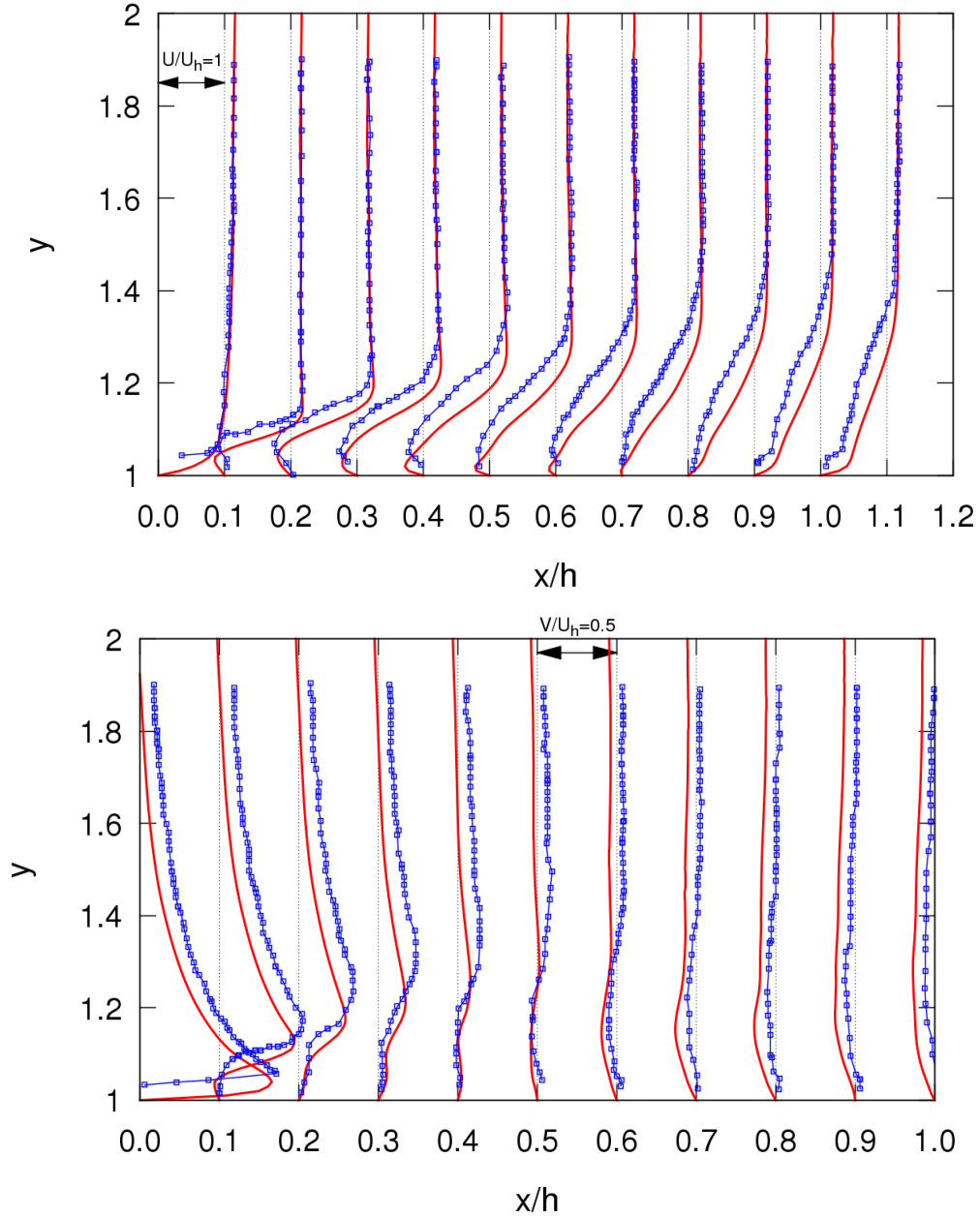


Figura 5: Perfiles de velocidad sobre la cara superior del cubo. Línea roja LES, PIV \boxtimes .

va centrada desde la parte inferior de la cara frontal del cubo, pasando por la cara superior, hasta llegar a la parte inferior de la cara posterior, obteniéndose una longitud de $x'/L_c = 3$. Para el caso del transversal, el procedimiento fue similar, solo que en este caso el punto de partida fue la parte inferior de la cara izquierda, hasta llegar a la parte inferior de la cara derecha, obteniendo nuevamente una longitud de $y'/h = 3$.

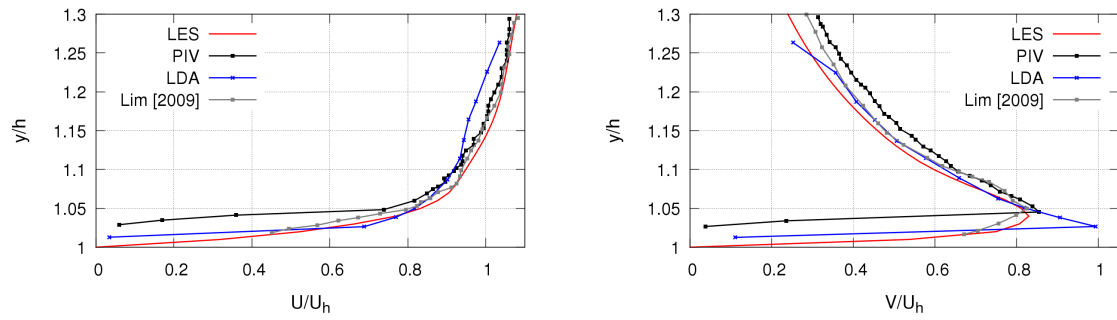


Figura 6: Perfiles de velocidad en $x=0$

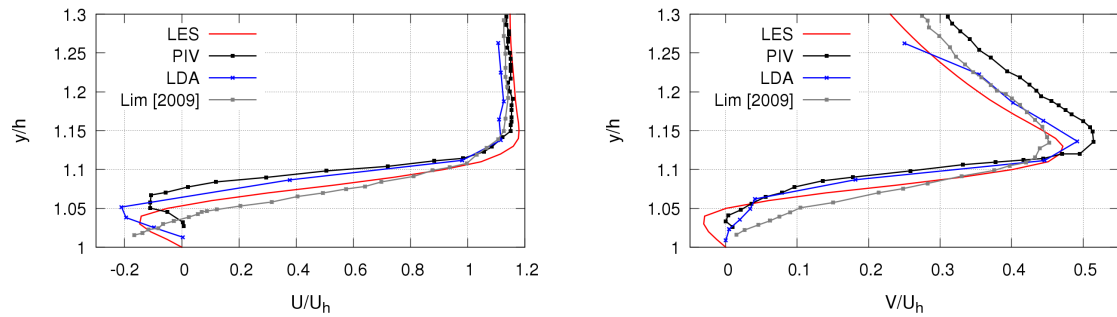


Figura 7: Perfiles de velocidad en $x=0.1$

[H]

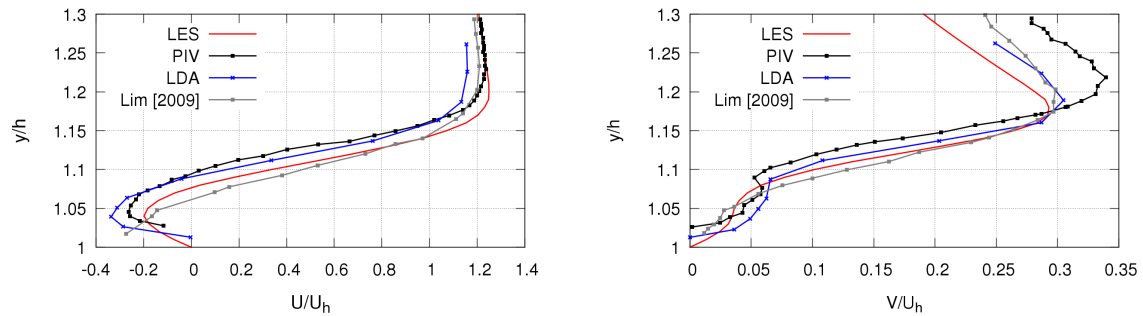


Figura 8: Perfiles de velocidad en $x=0.2$

Los resultados fueron validados contra lo reportado por Lim et al. [3] y Richards et al. [1]. Se observa que para el coeficiente axial hay un seguimiento bastante satisfactorio de lo reportado experimentalmente. Como era de esperarse, el borde de ataque del cubo se manifiesta con una caída súbita de la presión. A medida que se avanza en el cubo se encuentra que hay una recuperación

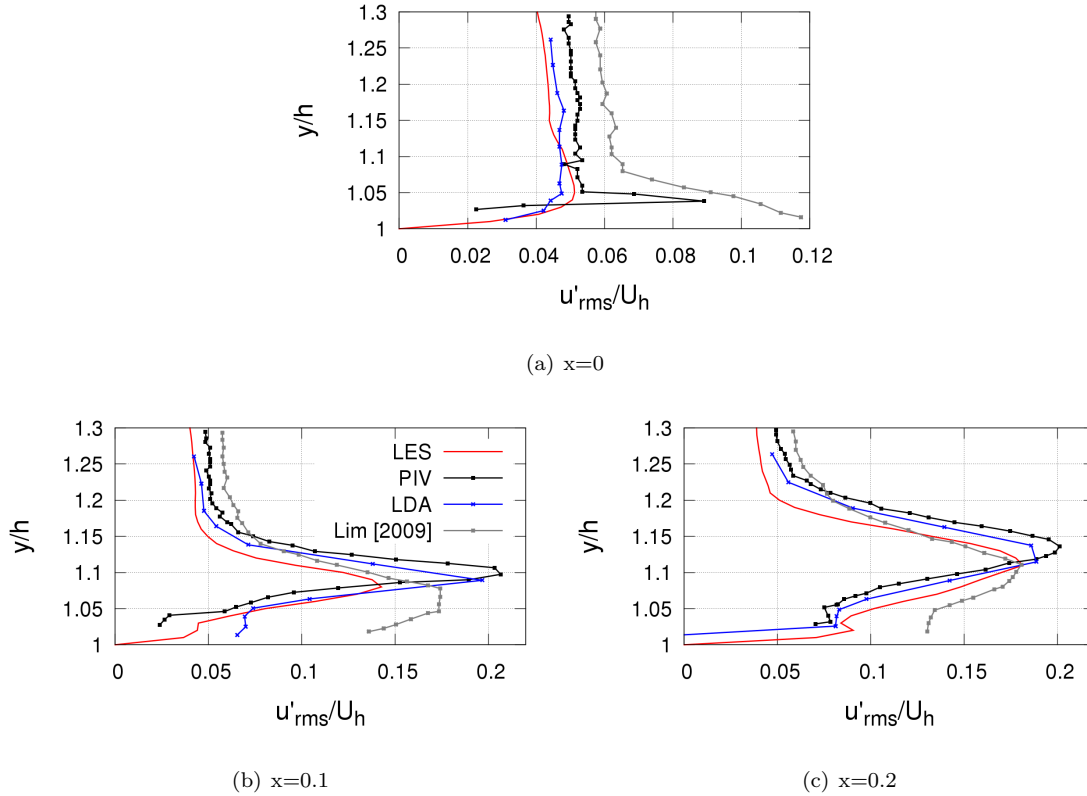


Figura 9: Valores rms de las fluctuaciones de velocidad en x sobre el cubo

de la presión que va de la mano con la tendencia del fluido a re-engancharse hasta llegar a la posición en donde lo ha conseguido, la cual coincide con lo reportado en los perfiles de velocidad ($x/h = 0,75 = x' = 1,75$, aproximadamente).

Para el caso del perfil transversal el comportamiento se desvía de lo reportado experimentalmente, principalmente porque el refinamiento estuvo enfocado en la dirección axial y vertical. A pesar de esto, los valores sobre los cual oscila el coeficiente de presión están cercanos a lo que reporta Richards et al. [1].

En general, para esta etapa del trabajo, se logró observar que los resultados coinciden aceptablemente en valores, ubicaciones y características a lo que se reporta experimentalmente. Por lo anterior, el proceso de validación de flujo alrededor del cubo se da por terminado y se introduce al trabajo de investigación de los experimentos térmicos.

III. Escalamiento geométrico del número de Nusselt

Antes de mostrar los resultados obtenidos, se desarrollará la metodología para el cálculo del número de Nusselt. La expresión matemática que permite calcularlo, localmente, es la siguiente:

$$Nu = \frac{h_q L_c}{k} \quad (13)$$

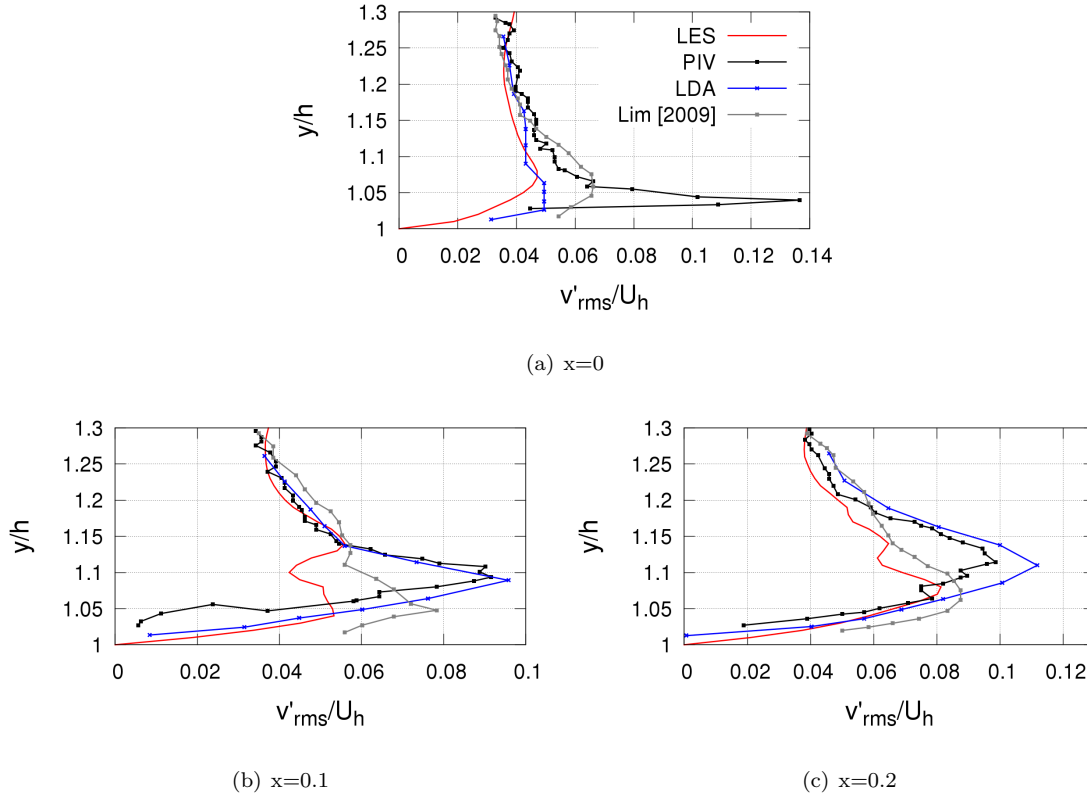


Figura 10: Valores rms de las fluctuaciones de velocidad en y sobre el cubo

Siendo h_q (CHTC) el coeficiente de transferencia de calor por convección local y L_c la longitud característica del problema. Para calcular el CHTC se hace uso de la ley de enfriamiento de Newton, la cual plantea:

$$q_s = h_q (T_s - T_f) \quad (14)$$

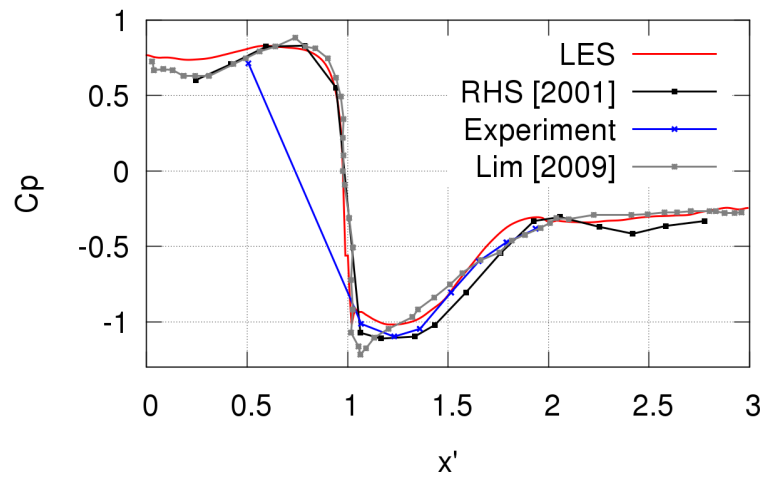
Que el CHTC es un factor de proporción entre el calor transferido, entre fluido y cuerpo solido, y la diferencia de temperaturas que existe entre estos dos. Por otro lado, situandose en la capa de fluido que esta en contacto directo con la superficie, la transferencia de calor se da netamente por conducción. Teniendo en cuenta lo anterior, por medio de la ley de Fourier se llegó a :

$$q_s = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \quad (15)$$

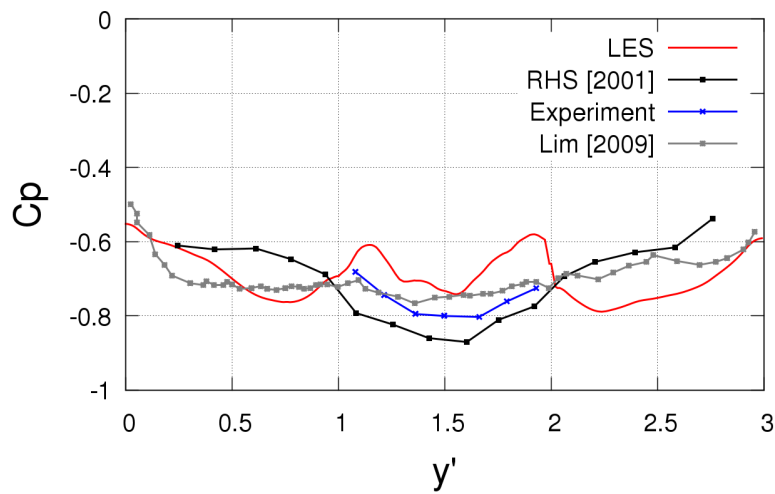
Como se puede observar, de la ecuación 15 se puede despejar q_s , para despejar en la ecuación 14 despejar el CHTC. Teniendo este valor, es posible calcular el número de Nusselt en la ecuación 13, resultando lo siguiente:

$$Nu = \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \frac{L_c}{T_s - T_f} \quad (16)$$

Por otro lado, viendo que para el cálculo local del número de Nusselt se necesita del gradiente de temperatura del punto en cuestión, este se obtuvo a partir de un esquema de diferencias finitas centradas de segundo orden. No se utilizó un esquema de más orden de exactitud ya que el mencionado anteriormente fue el único que no presento oscilaciones numéricas.



(a)



(b)

Figura 11: Coeficientes de presión en los dos planos medios del cubo

Para el cálculo del número de Nusselt promedio, por cara, se tomó el valor promedió los valores locales, para una grilla de puntos generada como se muestra en la figura 12.

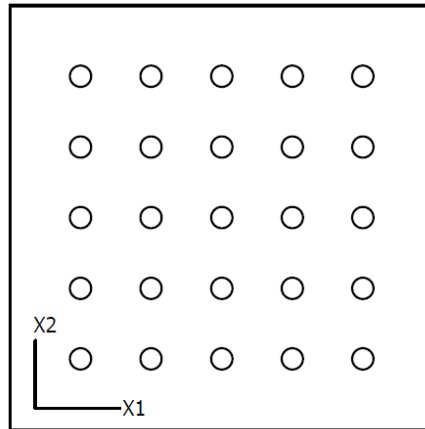


Figura 12: Grilla para la obtención de los números de Nusselt puntuales por cara

Se presentan tablas comparativas para el número de Nusselt promedio, el CHTC promedio y el calor transferido total, por cara. Como se observa en la figura 1, las caras del cubo fuerón etiquetadas tomando como referencia un observador que esta mirando el cubo en el mismo sentido que va el flujo; Por lo tanto, la cara derecha corresponde a aquella que se ve en la respectiva figura. Para la cara izquierda los resultados son similares a lo obtenido en la cara derecha, por la simetría del fenómeno; Por este motivo, no se reportan resultados para esta.

III.1. Número de Nusselt promedio

Caso	Frontal	Derecha	Superior	Posterior
1	50.996	14.288	81.168	51.638
2	50.829	14.197	80.748	47.834
3	50.404	13.967	76.186	49.652
4	50.613	13.996	75.255	49.744

Cuadro 5: Nu promedio para Re=20000

Caso	Frontal	Derecha	Superior	Posterior
5	46.640	13.684	65.291	41.011
6	48.483	14.325	75.193	46.062
7	46.251	13.256	60.111	41.964
8	46.251	13.331	59.257	42.287

Cuadro 6: Nu promedio para Re=10000

Para Re=20000 se observan dos tendencias. La primera, en principio se podría decir que para las caras frontal y derecha se ha obtenido lo que se esperaba de la teoría, el escalamiento geométrico del número de Nusselt; Mientras tanto, para las caras superior y posterior se evidencia que los resultados coinciden para los casos 3 y 4, mientras que para los casos 1 y 2, estos coinciden en la

cara superior y difieren en la cara posterior.

En cuanto a $Re=10000$ el panorama es un poco más dramático. Se puede ver que para la cara frontal los resultados buscan converger al mismo valor, tal como se observa para $Re=20000$. Adicional a esto, como era de esperarse, existe una reducción del número de Nusselt producto de la disminución del flujo convectivo que está pasando alrededor del cubo. Sin embargo, dicho comportamiento no se evidenciaba para la cara derecha.

La explicación que se le otorga a esto es debido que el problema tiene condiciones de frontera cíclicas en la dirección transversal, no existe el suficiente dominio para disipar lo que ocurre en esta dirección. Tal como lo menciona Franke et al. [8], se recomienda que, para una simulación de flujo atmosférico, las fronteras laterales del dominio estén por lo menos $5L_c$ alejadas del objeto inmerso, siendo l_c la longitud característica de este. Por lo tanto, la información de entrada, en esta dirección, para un nuevo paso de tiempo viene fuertemente influenciada por la del paso anterior, llevando a que no exista la transferencia de calor real. Un argumento adicional para este razonamiento, es que se esperaban resultados similares a los reportados en la cara frontal y posterior, dado que el fenómeno convectivo en estas direcciones es similar. Con relación a la cara superior, el valor reportado es mayor a los demás ya que existe un sumidero de energía proveniente de la superficie superior del canal.

Buscando estudiar la discrepancia de los resultados, sentando como hipótesis a partir de este punto que el número de Nusselt permite el escalamiento geométrico, se realizó un estudio de la convergencia de las simulaciones en función de cantidad de tiempos característicos simulados, t_s^* , planteados de la siguiente forma:

$$t^* = \frac{h}{U_h}$$

El comportamiento encontrado se reporta a continuación:

Caso	L_c	U_h	t^*	t_s	t_s^*
1	2	0.15	13.333	451.725	33.879
2	4	0.075	53.333	1869.125	35.046
3	0.5	0.6	0.833	90.526	108.631
4	0.25	1.2	0.208	23.612	113.34

Cuadro 7: Tiempos de simulación para $Re=20000$

Caso	L_c	U_h	t^*	t_s	t_s^*
5	2	0.075	26.666	1999.93	74.997
6	4	0.0375	106.666	1995.24	18.705
7	0.5	0.3	1.666	152.082	91.249
8	0.25	0.6	0.416	36.3895	87.334

Cuadro 8: Tiempos de simulación para $Re=10000$

Se ha agrupado el comportamiento para los casos en que los tiempos característicos coinciden, relativamente. Esto se manifiesta en el número de Nusselt, para las caras que presentaban diferencias en sus resultados. Observando lo reportado para la cara posterior, en $Re=20000$, se puede ver que para el caso 1 y 2 los resultados tienden a ir hacia los resultados del caso 3 y 4, sombreados

de color azul. Igualmente, para $Re=10000$, en la misma cara, los resultados tienden a ir hacia lo sombreado en color verde. Adicional a esto, para este Re se encuentra que el caso 2 esta muy alejado de la tendencia normal, ya que como se puede observar en el cuadro 8, los tiempos característicos simulados para este son muy pocos, en comparación con los demás.

Por lo tanto se puede concluir que la convergencia del fenómeno esta fuertemente ligada a un mínimo de tiempos característicos por simular, aproximadamente de 115. Adjunto a lo anterior, se encuentra que los tiempos de convergencia son diferentes por cara; Para el caso de la cara frontal se requieren menos tiempos característicos, mientras que para la cara posterior se requiere el máximo mencionado anteriormente.

Finalmente, a pesar de que los valores no reportan la independencia del número de Nusselt al escalamiento geométrico, se puede afirmar que este si se da acuerdo a lo que se puede extraer del análisis anterior.

III.2. CHTC y Calor transferido total

Al igual que para el caso anterior, se reportan los resultados obtenidos por cara, para los dos Re de trabajo. Las unidades corresponden a lo que establece el sistema internacional de medición.

Caso	Frontal	Derecha	Superior	Posterior
1	0.6428	0.1801	1.0231	0.6509
2	0.3203	0.0894	0.5089	0.3014
3	2.5413	0.7042	3.8413	2.5034
4	5.1038	1.4114	7.5888	5.0161

Cuadro 9: CHTC para $Re=20000$

Caso	Frontal	Derecha	Superior	Posterior
5	0.5879	0.1724	0.8230	0.5169
6	0.3055	0.0902	0.4739	0.4739
7	2.3319	0.6683	3.0307	3.0307
8	4.6603	1.344	5.9754	5.9754

Cuadro 10: CHTC para $Re=10000$

Caso	Frontal	Derecha	Superior	Posterior
1	125.991	35.301	200.534	127.577
2	251.156	70.152	398.992	236.356
3	31.132	8.627	47.056	30.667
4	15.630	4.322	23.240	15.362

Cuadro 11: Calor total transferido para $Re=20000$

Caso	Frontal	Derecha	Superior	Posterior
5	115.228	33.809	161.308	101.321
6	239.563	70.783	371.544	227.601
7	28.566	8.187	37.127	25.918
8	14.272	4.117	18.299	13.059

Cuadro 12: Calor total transferido $Re=10000$

Ambos son resultado directo del número de Nusselt y por lo tanto su dependencia a este es total. Se puede ver que el $CHTC$ se escala, en función de la variación de la altura del cubo, para balancear el número de Nusselt. Para el caso del calor transferido, tal como lo plantea la teoría, este es proporcional al área expuesta al fluido, por lo que se puede observar que la relación entre uno y otro es n veces la altura del cubo. Adicionalmente se puede observar lo que se comentó el número de Nusselt, acerca de la influencia configuración del dominio en este parámetro. Para cada caso la cara que reporta mayor calor transferido es la superior, mientras que para la frontal y la posterior los valores son muy cercanos. Como ya se indicó, se esperaba lo mismo para la cara derecha, sin embargo por los motivos que ya fueron expuestos, esto no se obtuvo.

Finalmente, a partir de lo que se ha venido hablando, se puede concluir que el número de Nusselt es una herramienta que permite el escalamiento geométrico de los experimentos térmicos ya que a través de él se puede establecer el calor que se requiere adicionar, idealmente, a una superficie para mantener su temperatura superficial constante durante todo el experimento. Es muy importante aclarar que esto que se acaba de mencionar está sujeto a verificación para diferentes condiciones de frontera térmicas.

VI. CONCLUSIONES

Como se dijo al comienzo de la presentación de los resultados, el trabajo se dividió en la etapa de validación y la etapa de investigación. Para la primera, el trabajo de la simulación del canal liso arrojó resultados, que a pesar de no ser muy buenos, capturaban las tendencias del fenómeno, y su desviación respecto al comportamiento experimental, no era tan drástica. Es por esto que se decidió que su comportamiento era suficiente y se podía dar continuidad con el trabajo.

Para el canal liso con el cubo inmerso, la reproducción de lo mostrado experimentalmente fue mucho más satisfactorio que para el caso anterior. Esto se puede decir ya que se concuerda en lo visto para el desprendimiento de la capa límite, la ubicación de la región de recirculación, la longitud de reenganche del fluido y el seguimiento de los perfiles, con una ligera desviación asociada a falta de resolución espacial cerca a la región del cubo. Para ambos casos valdría la pena implementar un modelo de pared para evaluar su influencia en el desempeño de los resultados.

En cuanto a lo que se encontró para la etapa de investigación, resulta alentador haber dado con un comportamiento que se esperaba a partir de lo planteado en la teoría. Sin embargo hubiera sido interesante observar algo diferente ya que habría sido un punto de partida para nuevos temas de investigación. A pesar de esto, sería muy bueno llevar a cabo un proceso de validación experimental para contrastar los resultados que se obtuvieron en el presente trabajo. Adjunto a lo anterior, como ya se mencionó, la independencia del número de Nusselt al escalamiento geométrico, por ahora, está sujeta a las condiciones de frontera que fueron especificadas. Buscando dar una conclusión general, para el caso de transferencia de calor por convección externa en flujo incompresible turbulento, es necesario implementar diferentes condiciones de frontera asociadas a diferentes casos de la vida real.

Por último se recomienda fuertemente concluir el trabajo implementando la extensión del dominio en dirección transversal, para el caso térmico, y llevar más tiempo las simulaciones del Canal y el escalamiento del número de Nusselt. Esto es importante ya que se desea descartar las fuentes de error encontradas en los resultados y en función de esto construir un modelo computacional más sólido para futuros casos.

REFERENCIAS

- [1] RICHARDS, P. J. , HOXEY, R.P. ,SHORT, L.J. (2001) .Wind pressures on a 6m Cube. *J.Wind Eng. Ind. Aerod.* 89(1): 1553-1564
- [2] LIM, H. C., THOMAS, T. G., CASTRO, I. P. (2009) . Flow around a cube in a turbulent boundary layer: LES and experiment. *J.Wind Eng. Ind. Aerod.* 97(1): 96-109.
- [3] LIM, H. C., CASTRO, I. P., HOXEY, R. P. (2007) . Bluff bodies in deep turbulent boundary layers: Reynolds-number issues. *J.Fluid Mech.* 571(1): 97-118.
- [4] LIU. J., SREBRIC, J., YU, N. (2013). Numerical simulation of convective heat transfer coefficients at the external surfaces of building arrays immersed in a turbulent boundary layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 61(1): 209-225.
- [5] GAO, Y., CHOW, W. K. (2005). Numerical studies on air flow around a cube. *J.Wind Eng. Ind. Aerod.* 93(1): 115-135.
- [6] VILLIERS, E. (2006). The Potential of Large Eddy Simulation for the Modeling of Wall Bounded Flows (Tesis doctoral). Imperial College of Science, Technology and Medicine.
- [7] BENISSAN, M., AKWABOA S., MENSAH, P. (2012). Experimental measurement of Nusselt number correlations on a flat plate and NACA 0010 section surfaces. *Proceedings of the ASME 2012 Heat Transfer Conference.* HT2012-58340.
- [8] FRANKE, J., HIRSCH, C. JENSEN, A.G., KRUS, H. W., SCHATZMANN, M., WESTBURY, P.S., WRIGHT, N.G. (2004). Recommendations on the use of CFD in wind engineering. *Cost action C.* 14(1): C1.
- [9] MONTAZERI, H., BLOCKEN, B., HENSEN, J. (2014). Convective heat transfer at the surfaces of a surface-mounted cube in a turbulent boundary layer: LES and RANS simulations.
- [10] FRASER, S.M., CAREY, C. (1990). Numerical and experimental analysis of flow around isolated and shielded cubes. *Applied Mathematical Modelling.* 14(11): 588-597.
- [11] POPE, S. (2000). Turbulent Flows. *Cornell University.* Cambridge University Press.
- [12] FERZIGER, J. H., PERIĆ, M. (2002). Computational Methods for Fluid Dynamics. 3rd Edition. Springer.
- [13] INCROPERA, F., DEWITT, D. P. (2011). Fundamentals of Heat and Mass Transfer. 7th Edition. John Wiley & Sons.

Bibliografía

- Ahmed, G. R. and Yovanovich, M. M. (1997). Experimental Study of Forced Convection From Isothermal Circular and Square Cylinders and Toroids. *Journal of Heat Transfer*, 119(1):70–79.
- Bergman, T., Lavine, A., Incropera, F., and Dewitt, D. (2011). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley and Sons, 7th edition.
- Çengel, Y. (1998). *Heat Transfer: A Practical Approach*. McGraw-Hill series in mechanical engineering. McGraw-Hill.
- Chang, P. (1970). *Separation of Flow*. Commonwealth and International Library. History Division. Elsevier Science & Technology.
- Dey, P. and Das, A. K. (2016). Heat Transfer Enhancement Around a Cylinder-A CFD Study of Effect of Corner Radius and Prandtl Number. *International Journal of Chemical Reactor Engineering*, 14(2):587–597.
- Dhiman, A. K., Chhabra, R. P., Sharma, A., and Eswaran, V. (2006). Effects of reynolds and prandtl numbers on heat transfer across a square cylinder in the steady flow regime. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 49:717–731.
- Ducros, F., Nicoud, F., and Poinso, T. (2007). Wall-adapting local eddy-viscosity models for simulations in complex geometries.
- Eckert, E. R. G. (1950). *Introduction to the Transfer of Heat and Mass*. McGraw-Hill Book Company.
- Gerbhardt, B. (1961). *Heat Transfer*. McGraw-Hill Book Company, New York.
- Goldstein, R., Yoo, S., and Chung, M. (1990). Convective mass transfer from a square cylinder and its base plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 33(1):9–18.
- Hilpert, R. (1933). Wärmeabgabe von geheizten Drähten und Rohren im Luftstrom. *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens.*, 4:215–224.
- Hu, S. and Herold, K. E. (1995). Prandtl number effect on offset fin heat exchanger performance: experimental results. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(6):1053–1061.

- Igarashi, T. (1985). Heat transfer from a square prism to an air stream. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 28(1):175–181.
- Jakob, M. (1949). *Heat Transfer Volume 1*. John Wiley and Sons, New York.
- Joshi, H. M. and Webb, R. L. (1987). Heat transfer and friction in the offset stripfin heat exchanger. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 30(1):69–84.
- Kapitz, M., Teigeler, C., Wagner, R., Helcig, C., and aus der Wiesche, S. (2018). Experimental study of the influence of the Prandtl number on the convective heat transfer from a square cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 120:471–480.
- Knudsen, J. and Katz, D. (1959). *Fluid Dynamics and Heat Transfer*. McGraw-Hill Book Company, New York.
- Kumar, R. S. and Jayavel, S. (2018). Forced Convective Air-Cooling Effect on Electronic Components of Different Geometries and Orientations at Flow Shedding Region. *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*, 8(4):597–605.
- Lienhard, J. I. and Lienhard, J. V. (2011). *A Heat Transfer Textbook*. Dove, New York, 4th edition.
- Murmu, S. C., Bhattacharyya, S., Chattopadhyay, H., and Biswas, R. (2020). Analysis of heat transfer around bluff bodies with variable inlet turbulent intensity: A numerical simulation. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 117(August).
- Pope, S. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
- Reiher, H. (1925). Der Wärmeübergang von stromender luft and rohrbündel in Kreuzstrom. *VDI Forschungsheft*, 269:47.
- Sahu, A. K., Chhabra, R. P., and Eswaran, V. (2009). Effects of Reynolds and Prandtl numbers on heat transfer from a square cylinder in the unsteady flow regime. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(3-4):839–850.
- Sharma, A. and Eswaran, V. (2004). Heat and fluid flow across a square cylinder in the two-dimensional laminar flow regime. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 45:247–269.
- Shyam, R. and Chhabra, R. P. (2013). Effect of Prandtl number on heat transfer from tandem square cylinders immersed in power-law fluids in the low Reynolds number regime. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 57(2):742–755.
- Smith, R., Peters, C., and Inomata, H. (2013). Heat transfer and finite-difference methods.

-
- Sparrow, E. M., Abraham, J. P., and Tong, J. C. (2004). Archival correlations for average heat transfer coefficients for non-circular and circular cylinders and for spheres in cross-flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(24):5285–5296.
- White, F. (1999). *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill International Editions. WCB/McGraw-Hill.
- Wieting, A. R. (1975). Empirical Correlations for Heat Transfer and Flow Friction Characteristics of Rectangular Offset-Fin Plate-Fin Heat Exchangers. *Journal of Heat Transfer*, 97(3):488–490.
- Yousif, A. H. (2019). Effect of triangular splitter on heat transfer and fluid flow over triangular cylinder. *International Journal of Engineering Research and Technology*, 12(12):2874–2879.