

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sobre un principio de Ortega y las propiedades de estabilidad lineal de respuestas periódicas con simetrías en osciladores tipo MEMS

On an Ortega's principle and the linear stability properties of symmetric periodic responses in MEMS oscillators

Larry Murcia Terranova

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemática y Estadística
Manizales, Colombia
2022

Sobre un principio de Ortega y las propiedades de estabilidad lineal de respuestas periódicas con simetrías en osciladores tipo MEMS

Larry Murcia Terranova

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ciencias-Matemática Aplicada

Director:

Ph.D. Daniel Elias Núñez López

Codirector:

Ph.D. Simeón Casanova Trujillo

Línea de Investigación:

Sistemas Dinámicos y Control

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemática y Estadística
Manizales, Colombia

2022

Agradecimientos

Deseo agradecer profundamente al profesor Daniel Núñez por su guía, apoyo, enseñanza y amistad, no sólo a lo largo de la elaboración de este documento sino también en mi formación profesional y personal. También deseo agradecer al profesor Rafael Ortega por las orientaciones brindadas en trabajos previos que motivaron el estudio aquí presentado, en especial, por la sugerencia de aplicar su principio variacional al modelo del MEMS tipo peine en [1]. Finalmente, deseo agradecer al profesor Jorge Galán por su instrucción y guía en el uso del software de continuación numérica *Auto* y al profesor Oswaldo Larreal quien desarrolló el esquema numérico empleado en la sección numérica de este trabajo y que también fue empleado en las simulaciones numéricas presentadas en [2].

Resumen

En este trabajo se obtiene un novedoso resultado de existencia de respuestas periódicas impares con ciertas propiedades nodales en el contexto de una familia general de osciladores no lineales con simetrías, que en particular tienen aplicaciones en el área de los osciladores tipo MEMS o sistemas micro electromecánicos [3]. Más aún, en el contexto de un modelo MEMS electrostático tipo peine con una fuerza restauradora no lineal cúbica, se obtiene un novedoso resultado sobre la existencia de respuestas periódicas impares con ciertas propiedades nodales, y la estabilidad en el sentido lineal de algunas soluciones encontradas cuando la amplitud de la componente AC en el voltaje de entrada es suficientemente pequeña. Algunas simulaciones y resultados de continuación numérica son presentados con el objetivo de validar numéricamente los resultados analíticos para el MEMS tipo peine considerado. Los resultados principales de este trabajo se obtienen mediante la aplicación del principio variacional de R. Ortega [4], la técnica de truncamiento, cotas *a priori* de soluciones periódicas para osciladores no lineales y la estrategia perturbativa introducida en [5] para la estabilidad en el sentido lineal.

Palabras clave: *Soluciones periódicas, Osciladores con simetrías, Propiedades nodales, Estabilidad lineal de soluciones periódicas con simetrías, Sistemas micro electromecánicos, MEMS.*

Abstract

In this work a novel result about the existence of odd periodic responses with prescribed nodal properties is introduced for a general family of nonlinear oscillators with symmetries, which have applications in MEMS oscillators or microelectromechanical systems [3]. Moreover, in the context of an electrostatic Comb-drive MEMS model with a nonlinear restoring cubic force, a novel result about the existence of odd periodic responses with certain nodal properties, and the stability in the linear sense for some of these solutions is obtained whenever the amplitude of the AC load in the input voltage is small enough. Numerical simulations and numerical continuation results are presented to corroborate the analytical results for this Comb-drive MEMS. The main results of this work are obtained through the application of the variational principle of R. Ortega [4], the truncation technique, a priori bounds of periodic solutions for nonlinear oscillators and the perturbative approach introduced in [5] for the stability in the linear sense.

Keywords: *Periodic solutions, Symmetric oscillators, Nodal properties, Linear stability of symmetric periodic solutions, Microelectromechanical systems, MEMS.*

Contenido

Agradecimientos	I
Resumen	III
Lista de Figuras	IX
Lista de Cuadros	XI
Introducción	1
1 El problema de investigación	3
1.1 Descripción del área problemática	3
1.1.1 Formulación del problema	6
1.1.2 Objetivos	6
1.2 Justificación	7
1.3 Antecedentes	8
2 Marco Teórico	14
2.1 Introducción al modelo: MEMS tipo peine con elasticidad cúbica	14
2.2 Algunos resultados importantes	18
2.2.1 Soluciones periódicas impares, propiedades nodales y cotas <i>a priori</i> .	18
2.2.2 Ecuaciones de Hill y estabilidad lineal	26
2.3 El principio de Ortega y su extensión para osciladores con singularidades . .	28
2.4 Estabilidad lineal de soluciones periódicas impares: bifurcación desde el problema autónomo	39
2.4.1 Preliminares del caso autónomo	40
2.4.2 Soluciones periódicas simétricas en el problema autónomo	43
2.4.3 Traza de la ecuación de Hill	45
2.4.4 Linealización de la ecuación autónoma	46
2.4.5 Bifurcación de soluciones periódicas impares desde el problema autónomo	50
2.4.6 Criterio de estabilidad para soluciones periódicas impares	54
3 Resultados	58

3.1	Existencia de respuestas periódicas impares con oscilación prescrita vía una generalización del principio de Ortega	58
3.2	Independencia con respecto del Truncamiento	63
3.3	Respuestas periódicas impares con oscilación prescrita: MEMS tipo peine con elasticidad cúbica	65
3.4	Estabilidad lineal de respuestas periódicas impares con oscilación prescrita: MEMS tipo peine con elasticidad cúbica	68
3.4.1	El problema autónomo	69
3.4.2	Criterio de estabilidad lineal para parámetro pequeño	79
3.5	Estabilidad lineal en el principio de Ortega: El subarmónico impar positivo de orden 2	84
4	Simulaciones numéricas	88
4.1	Valores de referencia	88
4.2	Existencia de respuestas periódicas impares con oscilación prescrita	90
4.3	Estabilidad en el sentido lineal y continuación numérica de soluciones periódicas	100
	Conclusiones y problemas abiertos	108
	A Resultados auxiliares	109
	Bibliografía	114

Lista de Figuras

3-1	Esquema de la función de truncamiento $h_\mu(x)$	60
3-2	Función auxiliar $\varphi_\alpha(x)$ para $\alpha \in]0, 2[$	70
3-3	Energía potencial $U(x)$ asociada a la ecuación Newtoniana (3-24).	72
3-4	Retrato de fase correspondiente al sistema Hamiltoniano asociado a la ecuación (3-24) asumiendo las condiciones (3-25) y (3-26).	74
3-5	Gráficas de la función de periodo $\mathcal{T}(h)$ para distintos valores de los parámetros. La recta vertical en color rojo corresponde a $y = h_*$ para cada caso. . .	79
4-1	Familia de soluciones $2T$ -periódicas obtenidas para el <i>Caso 1</i> (intervalo $[0, 2T]$).	92
4-2	Familia de soluciones T -periódicas obtenidas para el <i>Caso 2</i> (intervalo $[0, T]$).	93
4-3	Familia de soluciones $2T$ -periódicas obtenidas para el <i>Caso 3</i> (intervalo $[0, T]$).	94
4-4	Gráfica de las soluciones $2T$ -periódicas impares obtenidas para el <i>Caso 3</i> por individual (intervalo $[0, T]$).	95
4-5	Familia de soluciones $3T$ -periódicas obtenidas para el <i>Caso 4</i> (intervalo $[0, 3T]$).	96
4-6	Familia de soluciones $2T$ -periódicas obtenidas para el <i>Caso 5</i> (intervalo $[0, 2T]$).	97
4-7	Familia de soluciones $7T$ -periódicas obtenidas para el <i>Caso 6</i> (intervalo $[0, 7T]$).	98
4-8	Familia de soluciones $2T$ -periódicas obtenidas para el <i>Caso 7</i> (intervalo $[0, 2T]$).	99
4-9	Familia de soluciones $5T$ -periódicas obtenidas para el <i>Caso 8</i> (intervalo $[0, 5T]$).	100
4-10	Familia de soluciones $2T$ -periódicas impares para los valores de los parámetros como en el <i>Caso 1</i> y $\delta = 0$	102
4-11	Gráfica de las soluciones $2T$ -periódicas impares continuadas desde el problema autónomo para $\delta \approx 5.403\ 559\ 304\ 2 \times 10^{-5}\text{V}$	102
4-12	Multiplicadores de Floquet asociados a la ecuación variacional a lo largo de la solución $2T$ -periódica impar $x_0(t)$ (parte real $Re(\rho)$ vs. parte compleja $Im(\rho)$) para $\delta \approx 5.403\ 559\ 304\ 2 \times 10^{-5}\text{V}$	103
4-13	Regiones de interés del mapa estroboscópico para las soluciones continuadas desde el problema autónomo y $\delta \approx 5.403\ 559\ 304\ 2 \times 10^{-5}\text{V}$	104
4-14	Diagrama de bifurcación obtenido para $\delta \in [0, \delta_0]$ a partir de la solución $x_0(t)$ dada en el <i>Caso 5</i> (representada por el cuadrado de color rojo en el extremo superior derecho del diagrama).	105
4-15	Familia de soluciones $2T$ -periódicas impares continuadas para el caso $\delta \approx 2.373\ 167\ 660\ 6 \times 10^{-6}\text{V}$	106

4-16 Multiplicadores de Floquet asociados a la ecuación variacional a lo largo de la solución $2T$ -periódica impar $x_0(t)$ (parte real $Re(\rho)$ vs. parte compleja $Im(\rho)$) para $\delta \approx 2.373\,167\,660\,6 \times 10^{-6}\text{V}$	107
4-17 Diagramas de bifurcación obtenidos a partir de las soluciones $2T$ -periódicas impares $x_0(t)$ y $x_1(t)$ para $\delta \approx 2.373\,167\,660\,6 \times 10^{-6}\text{V}$	107

Lista de Cuadros

4-1	Conjunto de valores de los parámetros base para la ecuación (2-3).	89
4-2	Conjunto de valores de los parámetros de control para la ecuación (2-5).	89
4-3	Valores de los parámetros V_{DC} , δ y T para el <i>Caso 1</i>	92
4-4	Velocidades críticas correspondientes al <i>Caso 1</i>	92
4-5	Valores de los parámetros V_{DC} , δ y T para el <i>Caso 2</i>	93
4-6	Velocidades críticas correspondientes al <i>Caso 2</i>	93
4-7	Valores de los parámetros V_{DC} , δ y T para el <i>Caso 3</i>	94
4-8	Velocidades críticas correspondientes al <i>Caso 3</i>	94
4-9	Valores de los parámetros V_{DC} , δ y T para el <i>Caso 4</i>	96
4-10	Velocidades críticas correspondientes al <i>Caso 4</i>	96
4-11	Valores de los parámetros V_{DC} , δ y T para el <i>Caso 5</i>	97
4-12	Velocidades críticas correspondientes al <i>Caso 5</i>	97
4-13	Valores de los parámetros V_{DC} , δ y T para el <i>Caso 6</i>	98
4-14	Velocidades críticas correspondientes al <i>Caso 6</i>	98
4-15	Valores de los parámetros V_{DC} , δ y T para el <i>Caso 7</i>	98
4-16	Velocidades críticas correspondientes al <i>Caso 7</i>	99
4-17	Valores de los parámetros V_{DC} , δ y T para el <i>Caso 8</i>	99
4-18	Velocidades críticas correspondientes al <i>Caso 8</i>	100
4-19	Velocidades críticas correspondientes a las soluciones $2T$ -periódicas impares continuas desde el problema autónomo para $\delta \approx 5.403\ 559\ 304\ 2 \times 10^{-5}V$	103

Introducción

Los sistemas micro electromecánicos (MEMS) son dispositivos a micro escala que integran componentes mecánicas y electrónicas, y que constituyen una tecnología emergente con múltiples aplicaciones en sectores como el automotor, el de la medicina y el de las comunicaciones. Algunos de estos micro dispositivos incluso están presentes en la tecnología que se emplea cotidianamente, por ejemplo, en los giroscopios de los teléfonos inteligentes, en ciertos sensores de masa y presión para vehículos y en algunos micrófonos (ver [3] para más detalles).

En virtud de las ventajas operacionales proporcionadas por los sistemas micro electromecánicos y sus numerosas aplicaciones en diversas áreas, surge la necesidad de estudiar y predecir su comportamiento, así como también de estudiar ciertos fenómenos que tienen lugar en ellos. En particular, puede ser de interés estudiar la dinámica subyacente al correcto funcionamiento del micro dispositivo y la aparición de fenómenos como las oscilaciones periódicas de sus componentes mecánicas. En la literatura reciente en el área de los MEMS se puede apreciar el interés por abordar estas cuestiones, por ejemplo, a través del planteamiento y el posterior estudio de modelos matemáticos que logran describir de forma apropiada la dinámica en el dispositivo. Algunos de los modelos canónicos para MEMS propuestos en la literatura son el modelo de Nathanson y el modelo Comb-drive finger (ver [3]), los cuales son estudiados con el objetivo de brindar herramientas que puedan ser útiles para diseñadores, investigadores y fabricantes de MEMS.

De esta manera, el presente trabajo tiene por objetivo principal abordar el estudio de la existencia y las propiedades de estabilidad en el sentido lineal de respuestas periódicas con simetría impar que además tienen una cantidad predeterminada de ceros, en el contexto de una clase de dispositivos MEMS modelados por una ecuación diferencial de segundo orden con una no linealidad de la forma $xG(t, x)$, donde $G(t, x)$ es una función par respecto a ambas variables, T -periódica y continua en t , y de clase C^1 respecto a la variable de estado x para $x \in]-a, a[$ y $a > 0$. Concretamente, la discusión presentada en este trabajo se desenvuelve entorno al modelo de un MEMS tipo peine modelado con elasticidad cúbica que fue recientemente considerado en trabajos como [6] y [2].

Es valioso mencionar que los resultados obtenidos en este documento (ver capítulo 3) podrían proporcionar, desde el punto de vista mecánico del modelo previamente mencionado, condiciones sobre los parámetros de control del dispositivo que garantizan su correcto funcionamiento mediante respuestas periódicas estables. En este sentido, los resultados brindan in-

formación sobre las frecuencias de salida del sistema o propiedades nodales de las soluciones, que dan origen a una familia de respuestas mT -periódicas impares (subarmónicos impares) clasificadas de acuerdo a su número de ceros en cierto intervalo de tiempo cuando el voltaje de entrada en el dispositivo es variable y T -periódico. Más aún, bajo ciertas condiciones algunos subarmónicos son estables en el sentido lineal y por tanto son respuestas periódicas deseables en la aplicación. De hecho, esta última conclusión parece ser, hasta donde se conoce en la literatura, el primer resultado analítico de estabilidad lineal para este problema.

Los resultados de este trabajo son obtenidos a través del uso de cotas *a priori* de soluciones periódicas y algunas técnicas de truncamiento, la aplicación de un novedoso principio variacional para la existencia de soluciones periódicas simétricas introducido en [4] y la adaptación del criterio de estabilidad lineal/inestabilidad establecido en [5] para ciertas familias de soluciones periódicas simétricas.

A continuación se introduce formalmente y de manera breve cada capítulo que compone este documento. En el capítulo 1 se presenta el problema de investigación, el entorno que motiva el estudio, los objetivos a alcanzar, la novedad de problema y la utilidad en el área de los osciladores MEMS considerados, así como también la articulación del estudio con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) y algunos de los antecedentes importantes que motivaron el desarrollo de esta propuesta de investigación. Posteriormente, en el capítulo 2 se presentan las principales herramientas que conforman el marco teórico y que son empleadas para alcanzar los objetivos propuestos, prestando especial atención a tópicos clave para la discusión como el principio variacional de R. Ortega obtenido en [4], la correspondiente extensión de este principio para el caso de osciladores con singularidades presentada en [1] y la estrategia perturbativa introducida en [5] que constituye un pilar para el estudio de la estabilidad en el sentido lineal de respuestas periódicas simétricas.

En el capítulo 3 se presentan los resultados principales de este trabajo, exhibiendo en primer lugar un novedoso resultado de existencia de respuestas periódicas impares con ciertas propiedades nodales en el contexto de una familia general de osciladores no lineales con simetrías, un segundo resultado que valida la independencia del primero respecto del truncamiento empleado (siempre se consiguen las mismas soluciones periódicas impares independientemente del truncamiento usado) y finalmente los resultados de existencia/estabilidad lineal obtenidos en el contexto del MEMS tipo peine modelado con elasticidad cúbica. De hecho, el teorema de existencia general obtenido en la sección 3.1, el criterio de estabilidad lineal presentado en la sección 3.4.2 y su aplicación conjunta en la sección 3.5 son resultados analíticos novedosos en la literatura de osciladores tipo MEMS. En el capítulo 4 se presentan algunas simulaciones numéricas con el objetivo de validar numéricamente los resultados analíticos obtenidos para el MEMS tipo peine considerado. Las conclusiones de este trabajo y algunos de los problemas abiertos que se podrían abordar en proyectos futuros son presentados al final del documento.

1. El problema de investigación

1.1. Descripción del área problemática

Los diversos campos de aplicación de los sistemas micro electromecánicos (MEMS) hacen de estos dispositivos elementos de estudio atractivos. Sin embargo, más allá de los importantes procesos técnicos de diseño y de fabricación por lotes que caracterizan a los MEMS, los investigadores y diseñadores pueden requerir de herramientas que permitan aproximar el comportamiento del micro dispositivo bajo ciertas condiciones del entorno o de los materiales empleados, por ejemplo, un modelo matemático que describa adecuadamente la dinámica. Como se menciona en [3], en las primeras etapas del campo de los MEMS, los diseñadores e investigadores obtuvieron discrepancias entre los resultados teóricos y experimentales en virtud de que empleaban modelos relativamente sencillos, y herramientas de simulación de alto nivel que no necesariamente se ajustaban a los requerimientos. Esta tendencia causó elevados costos de fabricación y limitó en cierto sentido el potencial de estos mecanismos.

No obstante, modelar y estudiar de forma acertada el comportamiento de un dispositivo MEMS no es una tarea trivial, por ejemplo, al considerar sólo el aspecto mecánico en un MEMS pueden surgir dificultades como las no linealidades, los fenómenos de micro escala y el acoplamiento de varias fuerzas de distinto origen físico (ver [3]). En particular, las no linealidades parecen ser un aspecto intrínseco al problema de modelar un MEMS en virtud de que no considerarlas podría llevar a aproximaciones poco acertadas. Típicamente pueden aparecer no linealidades debido a fuerzas electrostáticas en aplicaciones de actuación y detección (algunos actuadores forman parte de los sistemas micro electromecánicos electrostáticos), a la configuración de la micro estructura que sufre deformaciones (no linealidades geométricas de la micro estructura), entre otros (ver por ejemplo [3], [7] y [8]).

En este orden de ideas, el estudio de un modelo que provea a los investigadores de información acertada sobre algún fenómeno en esta clase de dispositivos puede permitir la exploración de diseños más robustos, el desarrollo de mecanismos novedosos, o simplemente la optimización de aquellos existentes a una forma de mayor calidad funcional (ver [3]). En la literatura de MEMS se pueden encontrar, desde el punto de vista matemático, algunos modelos para sistemas micro electromecánicos electrostáticos como el modelo de Nathanson y el modelo Comb-drive finger. El primer modelo describe la dinámica en un MEMS tipo condensador de placas paralelas simple y el segundo describe la dinámica en un dispositivo tipo peine (ver [3]).

En trabajos relativamente recientes como [9], [10], [6] y [1], se aborda el estudio de los modelos previamente mencionados con la intención de proporcionar información sobre las características no lineales de los micro dispositivos estudiados. Considerando, en particular, el efecto que tiene la variación de los valores de los parámetros de control sobre ciertos fenómenos que aparecen en ellos como las respuestas periódicas (también conocidas como soluciones u oscilaciones periódicas no constantes).

Es importante resaltar que algunos de los modelos matemáticos MEMS, incluidos los mencionados anteriormente, tienen asociadas ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con no linealidades que admiten singularidades. Por tanto, el estudio de eventos tales como las respuestas periódicas en estos dispositivos se convierte en una tarea no trivial. No obstante, ciertos modelos poseen características que pueden ser aprovechadas para estudiar los fenómenos de interés, por ejemplo, los resultados obtenidos para el dispositivo tipo peine en [10] y [1] emplean el hecho de que la no linealidad de la ecuación tiene simetrías. Así, el problema de encontrar soluciones periódicas simétricas en [10] y [1] se reduce a solucionar en medio periodo de tiempo, respectivamente, un problema de contorno tipo Neumann y un problema de contorno tipo Dirichlet.

De forma concreta, en [10] se estudia analíticamente la existencia de soluciones periódicas con simetría par y una cantidad determinada de ceros en medio periodo (oscilación prescrita) para el modelo Comb-drive finger, cuando se suministra un voltaje de entrada positivo, par y periódico en el tiempo. Los resultados presentados en [10] se obtienen vía herramientas topológicas como el Teorema de Continuación Global de Leray-Schauder y cotas *a priori* de soluciones periódicas (ver [11]). Posteriormente, en [1] se estudia la existencia de soluciones periódicas impares con oscilación prescrita en el modelo Comb-drive finger, cuando se suministra un voltaje de entrada como en [10]. En este caso, los resultados para el modelo del actuador tipo peine son obtenidos mediante un proceso de truncamiento y la posterior aplicación de un principio variacional propuesto en [4]. Este novedoso principio será conocido a lo largo de este documento como el principio de Ortega.

El principio de Ortega en [4] surge en el contexto de un problema de mecánica celeste, como una herramienta elemental para obtener la existencia de soluciones periódicas impares con un número prescrito de ceros en un oscilador no lineal con simetrías, periódicamente forzado y que no admite singularidades. Seguidamente, este principio variacional se extiende en [12] para estudiar la existencia de soluciones periódicas con simetría par en el mismo contexto de [4]. Más aún, una generalización del principio de Ortega para el caso donde el oscilador admite singularidades se considera en [1]. No obstante, el procedimiento empleado para obtener los resultados sobre el modelo del actuador tipo peine en [1] también revela que el principio de Ortega puede ser aplicado de forma directa, en ciertos casos, a un problema que admite singularidades a través del truncamiento de la ecuación asociada. Este último enfoque de aplicación del principio de Ortega aún no se ha considerado en la literatura de forma general.

Por otra parte, tal como se menciona en [10] y [1], las propiedades de estabilidad de las soluciones periódicas simétricas con oscilación prescrita encontradas son, en ambos casos, desconocidas hasta el momento. Las simulaciones numéricas reportadas en [1] parecen evidenciar que en ciertas situaciones y desde el punto de vista numérico, algunas soluciones periódicas impares (subarmónicos) con oscilación prescrita obtenidas son linealmente estables.

Recientemente, en [13] y [5] se presentan los primeros resultados analíticos sobre las propiedades de estabilidad de soluciones periódicas no constantes con oscilación prescrita de una clase osciladores no lineales con simetrías y forzados periódicamente en el tiempo. Sin embargo, el criterio de estabilidad lineal/inestabilidad obtenido en [5] surge, al igual que el principio de Ortega, en el marco del problema de Sitnikov clásico (ver [14] para una descripción del problema de Sitnikov). Por tanto, su aplicación directa para determinar la propiedades de estabilidad de las soluciones encontradas en [10] y [1] no es posible.

De esta manera, el presente trabajo aborda el problema de estudiar la existencia y las propiedades de estabilidad de respuestas periódicas simétricas con una oscilación prescrita, en el contexto de una clase de osciladores no lineales con simetrías y que admiten singularidades. En particular, se consideran los osciladores no lineales tipo MEMS que comparten ciertas características con el modelo Comb-drive finger, es decir, osciladores de la forma

$$\ddot{x} + xG(t, x) = 0, \quad (1-1)$$

donde para $a > 0$ y $T > 0$ (el caso $a = \infty$ está incluido) se tiene que la función $G \in C^{0,1}(\mathbb{R} \times]-a, a[)$, es T -periódica en t y satisface las siguientes simetrías

$$G(-t, x) \equiv G(t, x), \quad G(t, -x) \equiv G(t, x). \quad (1-2)$$

En este trabajo se apunta entonces, por una parte, a obtener un resultado de existencia general de respuestas periódicas impares para la ecuación (1-1) cuando esta última admite cotas *a priori* y la aplicación del principio de Ortega es posible vía un truncamiento. No obstante, el estudio de las propiedades de estabilidad en el sentido lineal de este tipo soluciones en osciladores como (1-1) es, desde el punto de vista analítico, un problema delicado en virtud de la dependencia con respecto a la no linealidad $xG(t, x)$. Por tanto, en este trabajo consideramos el caso concreto del oscilador no lineal tipo MEMS cuyo modelo masa-resorte puntual está dado por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} + x + \alpha x^3 = \frac{4\beta V_\delta^2(t)x}{(1-x^2)^2}, \quad |x| < 1.$$

donde α, β son constantes físicas positivas, y para $V_{DC} > 0, \omega > 0$ y $\delta \in]0, V_{DC}[$ se define la función de voltaje con carga

$$V_\delta(t) := V_{DC} + \delta \cos(\omega t).$$

Este modelo fue considerado recientemente en [6] y [2], y corresponde al modelo Comb-drive finger (o tipo peine) con elasticidad cúbica. Es valioso mencionar que en este documento el nombre del modelo anterior hace referencia al tipo de fuerza restauradora incorporada al modelar, sin embargo, desde el punto de vista de la mecánica, el término rigidez cúbica podría ser empleado en virtud de que este último hace referencia a una propiedad estructural. Más aún, este modelo considera las no linealidades más comunes y dominantes en MEMS que corresponden, tal como se menciona en [3], a las no linealidades de tipo cuadrático introducidas por fuerzas electrostáticas y materiales piezoeléctricos, y a las no linealidades de tipo cúbico que se deben a configuraciones geométricas de las micro estructuras. En la sección 2.1 del siguiente capítulo se introduce brevemente el modelo tipo peine con elasticidad cúbica.

1.1.1. Formulación del problema

Considérese la familia de osciladores tipo MEMS de la forma (1-1). En este trabajo se encuentran condiciones sobre la no linealidad en (1-1) que conducen a la existencia de respuestas periódicas impares que tienen un número prescrito de ceros para esta clase de osciladores, empleando del principio de Ortega y siguiendo las ideas en [1]. Además, para el MEMS tipo peine con elasticidad cúbica se determinan, en ciertos casos, las propiedades de estabilidad en el sentido lineal de las respuestas periódicas encontradas siguiendo las ideas y las técnicas del criterio de estabilidad lineal presentado en [5].

1.1.2. Objetivos

Objetivo general

Determinar la existencia de soluciones periódicas simétricas (por ejemplo, con simetría impar) que tienen una oscilación prescrita, mediante la aplicación del principio de Ortega, y sus correspondientes propiedades de estabilidad en el sentido lineal, para osciladores MEMS de la forma (1-1).

Objetivos específicos

1. Construir una ecuación truncada equivalente a (1-1) que tenga exactamente las mismas soluciones periódicas y verifique las condiciones del principio de Ortega.
2. Establecer el resultado general de existencia de soluciones periódicas simétricas (por ejemplo, con simetría impar) con oscilación prescrita para ecuaciones de la forma (1-1).
3. Extender el criterio de estabilidad lineal obtenido en [5] para el caso de un oscilador MEMS tipo peine con elasticidad no lineal de la forma (1-1).
4. Ilustrar numéricamente los resultados analíticos obtenidos sobre las soluciones periódicas simétricas con oscilación prescrita en los osciladores tipo MEMS considerados.

Es valioso notar que los objetivos propuestos fueron cumplidos en su totalidad a lo largo de los resultados obtenidos en las secciones 3.1, 3.3, 3.4 y el capítulo 4. Concretamente, el Teorema 4 y el Teorema 7 dan respuesta a los objetivos de carácter teórico. En el caso del objetivo específico 3, se abordó el estudio de la estabilidad lineal de las soluciones periódicas impares obtenidas extendiendo el criterio de estabilidad propuesto en [5], en el contexto del modelo del MEMS tipo peine con elasticidad cúbica (2-5) que tiene la estructura general de la ecuación (1-1). Más aún, en la sección 3.2 se obtuvo un novedoso resultado que garantiza la validez de la conclusión dada por el Teorema 4 con respecto a la metodología empleada, es decir, su independencia con respecto a la función de truncamiento usada. Este resultado permite complementar la discusión presentada en trabajos previos como [1]. Finalmente, es importante mencionar que este documento estuvo acompañado de la generación de artículos de investigación.

1.2. Justificación

Una metodología usual para el estudio de ciertos fenómenos complejos consiste en reducir el problema original a un modelo matemático, el cual debe ser simple y debe describir de forma adecuada el fenómeno. Luego, la dinámica subyacente y las características de dicho modelo son estudiadas con el fin de responder a las interrogantes planteadas. En algunos casos el estudio de las propiedades de los modelos resulta ser una tarea no trivial en virtud de la misma naturaleza del problema.

Como se mencionó previamente, el estudio de la dinámica y de algunos fenómenos que surgen en ciertos MEMS electrostáticos ha sido abordado en la literatura empleando modelos matemáticos. Por ejemplo, modelos para MEMS con la estructura de un condensador de placas paralelas y la estructura tipo peine se han considerado bajo distintas condiciones e hipótesis en [15], [16], [9], [10], [17], [6] y [1].

Puede ser valioso mencionar, en particular, trabajos como [6] donde se proporcionan, bajo ciertas condiciones de funcionamiento, resultados sobre la existencia y las propiedades de estabilidad en el sentido lineal de soluciones periódicas que no cambian de signo en un modelo de un dispositivo Comb-drive, cuando se incorpora una rigidez mecánica cúbica. Así, los autores en [6] evidencian un nuevo régimen de funcionamiento donde el electrodo móvil del dispositivo puede oscilar lateralmente de forma estable. Por otra parte, en [18], [19], [20] y [21] se estudia, bajo distintas condiciones, la existencia de soluciones periódicas para un novedoso modelo de un MEMS tipo condensador de placas paralelas basado en grafeno. Estos últimos trabajos podrían ser pioneros de una nueva generación de dispositivos MEMS basados en grafeno, en virtud de las sobresalientes propiedades este material (ver [22]).

De esta forma, los estudios mencionados pueden brindar herramientas para predecir lo que

posiblemente sucederá en el micro dispositivo y para ajustar por anticipado los parámetros de diseño, permitiendo entre otras cosas, ahorrar tiempo y costos (ver [3]). Por tanto, pueden ser de interés para diseñadores, investigadores y fabricantes en el campo de los sistemas micro electromecánicos.

En este trabajo se considera el problema relacionado con la existencia y las propiedades de estabilidad de respuestas periódicas que pueden surgir en una clase de MEMS electrostáticos, modelados mediante un cierto oscilador no lineal con simetrías, cuando se considera un voltaje de entrada periódico y variable. Los resultados esperados podrían ser aplicados a distintos tipos de dispositivos con el fin de obtener información sobre los valores de los parámetros de control que permiten lograr un funcionamiento adecuado en el mecanismo y evitar zonas de funcionamiento no seguras. Más aún, se podrán conocer las propiedades de oscilación de las soluciones, también llamadas propiedades nodales, las cuales no se han considerado de forma amplia, hasta donde se sabe, en la literatura de MEMS.

Así, la investigación que se propone en este documento tiene una motivación de carácter práctico y puede ser de utilidad para investigadores y diseñadores en el área de los MEMS electrostáticos con características similares a las ya mencionadas. Es valioso resaltar que el enfoque para aplicar el principio de Ortega empleado en [1] y el estudio de las propiedades de estabilidad de soluciones periódicas en este caso no se han abordado de forma general en la literatura. Luego, el problema considerado en este trabajo, desde el punto de vista matemático, representa un problema interesante, viable y no trivial.

Con respecto a la articulación del presente proyecto con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) es importante decir que esta propuesta apunta a la investigación científica en un tema reciente, innovador y con aplicaciones directas en el sector de la industria, sin embargo, en este caso no se realizará experimentación a nivel de laboratorio para validación, por tanto, los posibles resultados de este trabajo pueden estar relativamente lejos de un desarrollo tecnológico. En conclusión, la propuesta presentada puede ser articulada con la siguiente meta del noveno ODS:

- 9.5 Aumentar la investigación científica y mejorar la capacidad tecnológica de los sectores industriales de todos los países, en particular los países en desarrollo, entre otras cosas fomentando la innovación y aumentando considerablemente, de aquí a 2030, el número de personas que trabajan en investigación y desarrollo por millón de habitantes y los gastos de los sectores público y privado en investigación y desarrollo.

1.3. Antecedentes

Es importante resaltar, antes de revisar los antecedentes, la naturaleza del problema abordado en esta propuesta. Concretamente, el hecho de que se buscan soluciones periódicas

simétricas de una ecuación de la forma (1-1) que además tienen un número prescrito de ceros, es decir, que pueden oscilar de una u otra forma de acuerdo a las hipótesis consideradas sobre la no linealidad $xG(t, x)$. En este sentido, es valioso iniciar la discusión de esta sección considerando algunos trabajos que abordan el estudio de la existencia y las propiedades de oscilación o propiedades nodales, de soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Tal vez, uno de los primeros trabajos en la línea de encontrar soluciones con propiedades nodales es [23], donde se considera una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con una no linealidad general que se asume continua, periódica, con un comportamiento superlineal en el infinito con respecto a la variable de estado y que además conserva el signo con respecto a esta última. Así, en [23] se obtienen resultados sobre la existencia de múltiples soluciones periódicas para esta ecuación de tal forma que existe un entero positivo a partir del cual tienen un número prescrito de ceros. Adicionalmente, algunas ideas intuitivas sobre las propiedades nodales de soluciones periódicas son evidenciadas empleando la Teoría de Comparación de Sturm. El resultado de existencia presentado en [23] es obtenido empleando el Teorema de Poincaré-Birkhoff (ver [23]) y surge como una extensión de resultados previos que emplean otro tipo de herramientas como el cálculo de variaciones.

En trabajos como [24] y [25] los autores estudian la existencia de soluciones radiales con oscilación prescrita para un problema de contorno tipo Dirichlet, asociado a un cierto operador diferencial no lineal como el p -Laplaciano definido en una bola abierta de \mathbb{R}^k con $k > 1$. Concretamente, en [24] se emplea una extensión de un teorema de continuación de la literatura, para probar la existencia de múltiples soluciones radiales simétricas con un número prescrito de ceros cuando el problema admite un término no homogéneo con un cierto crecimiento superlineal. En [25] se considera la existencia y la multiplicidad de soluciones radiales con un número prescrito de ceros cuando el problema tiene una no linealidad con un crecimiento sublineal cerca al origen, empleando un enfoque de grado topológico para probar la existencia y las propiedades de concavidad/convexidad de la no linealidad para probar la multiplicidad.

En [26] los autores estudian la existencia de soluciones de un problema de contorno tipo Dirichlet con condiciones nulas para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, donde la no linealidad involucra el gradiente de una cierta función $F(t, x)$ y un término continuo de la forma $q(t, x, x')$. En particular, asumiendo ciertas hipótesis como un comportamiento superlineal en el infinito de la no linealidad, los autores en [26] obtienen la existencia de múltiples soluciones que tienen propiedades nodales prescritas, es decir, componentes con un número prescrito de ceros. Las estimaciones del número de ceros de cada componente de la solución del problema, se logran imponiendo una propiedad conocida como la “propiedad de elasticidad” sobre la no linealidad y aplicando un lema de oscilación propuesto en [24]. No obstante, los resultados en [26] sólo garantizan la existencia de soluciones cuyas componentes tienen un número de ceros suficientemente grande.

Además, como una consecuencia del resultado principal en [26], se concluye que para el caso donde $F(t, x) := p(t)G(x)$ con $p(-t) \equiv p(t)$ y $G(-x) \equiv G(x)$, $q(-t, -x, x') \equiv q(t, x, x')$ verificando ciertas condiciones y $p(t)$, $q(t)$ funciones π -periódicas, existen múltiples soluciones del sistema cuyas componentes son impares y 2π -periódicas. Los resultados en [26] se obtienen empleando una variante del resultado de continuación propuesto en [24], y una cierta función multi-valuada cuyas componentes representan el número de ceros simples de las componentes de una solución del problema de contorno.

Luego, en trabajos como [27], [28], [29], [30] y [31] los autores abordan el estudio de la existencia y en algunos casos de la multiplicidad, de soluciones para distintos tipos de ecuaciones de segundo orden y problemas de contorno con no linealidades, prestando especial atención a las propiedades nodales. Por ejemplo, en algunos de estos trabajos se considera el caso de una no linealidad de la forma $q(t)g(x)$, donde $q(t)$ puede tener múltiples ceros en su dominio y $g(x)$ tiene un crecimiento superlineal. Así, se obtiene la existencia de soluciones con un cierto número de ceros en función del signo de $q(t)$. También se aborda el caso donde la ecuación estudiada incorpora un amortiguamiento lineal, el caso de problemas con condiciones de contorno singulares o de tipo blow-up y el caso de ecuaciones con términos forzados periódicamente.

Tal como se menciona en varias de las referencias anteriores, el problema de existencia de soluciones con propiedades nodales en ciertas clases de ecuaciones diferenciales de segundo orden, ha sido estudiado mediante el cálculo de variaciones, herramientas topológicas como teoremas de continuación y teoría del grado, y herramientas como el método de shooting o disparo. No obstante, las hipótesis de crecimiento sobre la no linealidad consideradas en tales referencias, evitan en la mayoría de casos la existencia de cotas *a priori*. Por tanto, con el fin de obtener resultados en este tipo de problemas, trabajos como [24], [26] y [25] han considerado extensiones y variantes de algunas herramientas topológicas clásicas.

Con respecto a la existencia y propiedades nodales de soluciones periódicas con simetrías en un oscilador no lineal periódicamente forzado de la forma (1-1), cuando no se admiten singularidades en la ecuación, es decir, cuando $G \in C^{0,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, se pueden considerar los resultados en [32], [4] y [12]. En los tres casos, el estudio de las soluciones periódicas simétricas surge en el contexto de un problema de mecánica celeste conocido como el problema de Sitnikov (ver [14]).

En [32] los autores proporcionan resultados analíticos sobre la existencia de familias de soluciones periódicas simétricas en el problema de Sitnikov clásico, estudiando el diagrama de bifurcación asociado de forma cualitativa y cuantitativa, en función de la excentricidad como parámetro del problema. Los resultados en [32] se obtienen empleando un teorema de continuación de la literatura (ver [32]). Más aún, las soluciones periódicas obtenidas en este caso tienen simetría par y una cantidad prescrita de ceros que puede variar desde uno hasta

algún entero positivo apropiado.

Posteriormente, R. Ortega en [4] propone un principio variacional (principio de Ortega) que emplea herramientas elementales como el método de shooting o disparo y la Teoría de Comparación de Sturm, para obtener la existencia de soluciones periódicas impares que tienen un número prescrito de ceros (oscilación prescrita). El principio de Ortega es válido para una familia de osciladores no lineales periódicamente forzados con ciertas simetrías y es aplicado, en particular, al problema de Sitnikov clásico.

Es importante notar que, los resultados obtenidos en [32] y [4] no restringen el parámetro del sistema estudiado, en el contexto del Sitnikov, la excentricidad. Además, en ambos trabajos se aprovechan las simetrías de la no linealidad considerada, para reducir el problema de encontrar soluciones periódicas con simetrías al de encontrar soluciones de problemas de contorno con condiciones nulas en medio periodo de tiempo. En el caso de soluciones con simetría par en [32] se aborda un problema de Neumann y en el caso de soluciones con simetría impar en [4] se aborda un problema de Dirichlet.

En general, imponiendo condiciones apropiadas sobre un oscilador no lineal con simetrías, el principio obtenido en [4] es un principio variacional de mínima energía en virtud de que, en primer lugar, la ecuación variacional asociada al problema en $x \equiv 0$ (es decir, en el centro de masa para el problema de Sitnikov) permite obtener condiciones suficientes y necesarias para encontrar soluciones periódicas impares con una oscilación prescrita. En segundo lugar, del conjunto de soluciones del problema con ciertas condiciones iniciales que tienen a lo mucho una cantidad de ceros fijada en medio periodo de tiempo, la solución que tiene asociada la mínima energía cinética es periódica e impar. Adicionalmente, R. Ortega demuestra que la solución periódica impar encontrada que no tiene ceros en medio periodo de tiempo es única. De esta forma, los resultados en [4] establecen el primer punto de partida para el presente trabajo.

Seguidamente, en [12] se considera una ecuación de Hill con dependencia biparamétrica que se encuentra asociada a un problema tipo Sitnikov, con el fin de estudiar ciertas regiones biparamétricas de interés y fenómenos como las lenguas de resonancia. El autor en [12] obtiene un resultado que describe las regiones de estabilidad e inestabilidad de la ecuación de Hill y determina las regiones donde la solución trivial del problema de Sitnikov generalizado de $N + 1$ cuerpos, es estable en el sentido de Lyapunov. En [12] también se estudian las regiones para las cuales existen soluciones periódicas simétricas con una oscilación prescrita y se aborda la estabilidad en el sentido de Lyapunov del centro de masa en el problema de Sitnikov curvilíneo.

Como ya se mencionó, la existencia de soluciones periódicas con simetría par e impar y oscilación prescrita en el problema de Sitnikov generalizado es considerada en [12]. Es importante

resaltar que es en este contexto que se establece la primera extensión del resultado de existencia obtenido por R. Ortega en [4]. Concretamente, con las hipótesis apropiadas sobre la no linealidad, se obtiene un principio variacional análogo al propuesto en [4] para la existencia de soluciones periódicas pares con una oscilación prescrita. Más aún, las hipótesis sobre la no linealidad en [12] también garantizan que el número de ceros y el número de puntos críticos de las soluciones periódicas pares coinciden, en cierto intervalo apropiado. Por tanto, el autor en [12] se concentra en contar el número de puntos críticos de las soluciones pares.

Recientemente en [1], los autores presentan una generalización del principio de Ortega establecido en [4], para una clase de osciladores no lineales con simetrías que admiten singularidades. Además, en [1] se considera el problema de encontrar soluciones periódicas impares con oscilación prescrita de un conocido modelo para un actuador electrostático tipo peine, cuando se suministra un voltaje periódico no constante. De esta forma, un ajuste de los parámetros de control permite obtener la existencia de una familia de soluciones periódicas impares con una determinada cantidad de ceros en medio periodo de tiempo. La generalización del principio variacional se obtiene siguiendo las ideas de R. Ortega en [4], y los resultados para el modelo del actuador tipo peine son obtenidos mediante técnicas de truncamiento y la aplicación del principio variacional original. Los resultados de existencia de soluciones periódicas son ilustrados mediante simulaciones numéricas con valores de los parámetros de la literatura.

Es importante resaltar que en [1] la ecuación asociada al modelo del actuador tipo peine tiene singularidades, no obstante, los resultados obtenidos en esta línea emplean un proceso de truncamiento para evitar la singularidad, en virtud de que es posible encontrar cotas *a priori* para cualquier solución periódica del problema. Luego, los autores en [1] proceden definiendo una ecuación equivalente a la original que tiene las mismas soluciones periódicas y que no tiene singularidades.

La anterior forma de proceder, de acuerdo con los autores en [1], produce un tipo de resultado no intrínseco para el problema, puesto que la conclusión podría depender del truncamiento escogido. Así mismo, el estudio de las propiedades de estabilidad de las soluciones encontradas se convierte en un problema no trivial. De hecho, algunas simulaciones numéricas obtenidas en [1] evidencian que para ciertos casos las soluciones pueden ser linealmente estables. Es precisamente en este tipo de enfoque en que el presente proyecto de investigación estuvo interesado. De hecho, uno de los aportes realizados por este trabajo revela que, bajo ciertas condiciones, el enfoque mencionado como aparentemente extrínseco es en realidad intrínseco al problema, en el sentido de que existe independencia con respecto a la función de truncamiento escogida en el proceso de truncar la ecuación.

En [13] y [5] se presentan los primeros resultados analíticos sobre las propiedades de estabilidad en el sentido lineal/inestabilidad de soluciones periódicas simétricas del problema de

Sitnikov clásico que depende de la excentricidad como parámetro. En [13] los autores estudian la estabilidad en el sentido lineal/inestabilidad de soluciones periódicas con simetría par que emanan de soluciones no constantes y periódicas del problema autónomo (excentricidad nula) con la misma simetría. De hecho, en [13] se obtiene un resultado clave para la discusión posterior en [5] a partir de un resultado de [33] sobre la diferenciabilidad de las soluciones fundamentales de una ecuación de Hill en función de su potencial. Los autores en [13] hacen énfasis en que la fórmula de la derivada de la traza, cuando la excentricidad es cero, presentada allí es más conveniente en las aplicaciones puesto que depende en menor medida (en relación a las fórmulas similares obtenidas en [33]) de la información de las soluciones no constantes periódicas del problema autónomo.

Posteriormente, en [5] los autores estudian las propiedades de estabilidad de ciertas familias de soluciones periódicas simétricas no constantes, para una clase de osciladores no lineales con simetrías y forzados periódicamente en el tiempo. Concretamente, en [5] se obtiene un criterio para determinar de forma analítica las propiedades de estabilidad de soluciones pares e impares que mantienen una cierta relación entre su frecuencia y su oscilación en un periodo de tiempo. La estabilidad de las soluciones periódicas se estudia en el sentido lineal empleando la teoría de ecuaciones de Hill y la manipulación de algunas expresiones importantes. Así, para una familia apropiada de soluciones periódicas del problema de Sitnikov y considerando valores pequeños de la excentricidad, las soluciones periódicas impares de la familia resultan ser inestables en el sentido de Lyapunov mientras que las soluciones periódicas pares son estables en el sentido lineal.

El criterio presentado en [5] es obtenido empleando las propiedades de las soluciones con simetrías del problema autónomo, el Teorema de la Función Implícita y la teoría de ecuaciones de Hill. En particular, el criterio depende de la estimación del signo de la derivada de la traza asociada a la ecuación variacional en cada caso, en función de la excentricidad, cuando la excentricidad es cero, es decir, en el problema autónomo desde el cual se continúan las soluciones periódicas a estudiar.

Finalmente, es valioso mencionar que para el problema de Sitnikov, los autores en [5] encuentran para ciertas familias de soluciones impares, una expresión integral que determina el signo de la derivada de la traza asociada cuando la excentricidad es cero. Sin embargo, el análisis del signo de tal expresión integral no es trivial y depende de forma delicada de una relación entre la frecuencia de entrada en el problema y las propiedades nodales de la solución. Así, para ciertos casos, los autores en [5] establecen una conjetura sobre el signo de la expresión integral. La prueba de esta conjetura fue abordada recientemente en [34].

2. Marco Teórico

En este capítulo se abordan las principales herramientas teóricas que serán empleadas en el capítulo de resultados. En primer lugar se considera una breve introducción al modelo del MEMS tipo peine con elasticidad cúbica, luego se abordan algunos resultados sobre soluciones periódicas y propiedades nodales, una herramienta fundamental que proporciona condiciones suficientes para obtener cotas *a priori* de soluciones periódicas de una ecuación de segundo orden, así como el principio de Ortega y su extensión para osciladores simétricos con singularidades. También se discuten algunos tópicos de la teoría clásica y de la literatura reciente para estudiar la propiedades de estabilidad en el sentido lineal de soluciones periódicas.

2.1. Introducción al modelo: MEMS tipo peine con elasticidad cúbica

El acrónimo MEMS hace referencia a los sistemas micro electromecánicos, una clase de dispositivos a escala micrométrica que poseen componentes electrónicas y mecánicas (incluyendo sensores y actuadores), y que son fabricados y funcionan como un sistema integrado (ver [3] para más detalles). De hecho, gran parte de estos micro mecanismos son empleados como sensores y actuadores, y se caracterizan por ser ligeros, de bajo costo operativo y por proporcionar funcionalidades inteligentes en lugares de difícil acceso para otro tipo de tecnología. Algunos ejemplos concretos de MEMS son los micrófonos incorporados en audífonos auxiliares, y los sensores de presión de alta temperatura para motores de vehículos (ver [3]).

Con respecto al estudio de la dinámica y el comportamiento mecánico de esta clase de micro mecanismos, es valioso mencionar que existen importantes desafíos, y entre los más comunes se encuentran las no linealidades. Estas últimas resultan ser fuertes, dominantes e intrínsecas al problema mismo, y pueden ser producidas, entre otras cosas, por aspectos presentes en los micro dispositivos como el forzamiento, el amortiguamiento y la rigidez. Por una parte, el forzamiento puede introducir no linealidades en los modelos a través de los mecanismos de detección y actuación, por ejemplo, a través de la fuerza electrostática presente en una configuración de placas paralelas. Por otra parte, en los MEMS existe una gran variedad de mecanismos no lineales de disipación de energía y amortiguamiento que afectan a las micro estructuras, por ejemplo, en función de su área superficial. Finalmente, aunque las micro estructuras en los MEMS son usualmente diseñadas para permitir ciertas deformaciones,

cuando estas últimas son relativamente extensas se puede producir un tipo de no linealidad que se deriva de la geometría de la misma estructura. Así, el estudio del comportamiento mecánico de los sistemas micro electromecánicos es un problema no trivial e interesante.

Adicionalmente, aunque en la literatura de MEMS se pueden encontrar diversos métodos de transducción bajo los cuales funcionan los sistemas micro electromecánicos, uno de los más comunes, en lo que concierne a la detección y a la actuación, es la transducción electrostática, y los micro dispositivos que emplean este tipo de transducción son llamados MEMS electrostáticos. Concretamente, la transducción electrostática es un mecanismo simple y eficiente que no requiere materiales especiales y que se basa principalmente en condensadores de placas paralelas. De esta forma, los MEMS electrostáticos sólo requieren una fuente de voltaje y su funcionamiento recae bien sea en la fuerza electrostática (que es naturalmente no lineal y atractora) inducida entre las placas del condensador o en el cambio del valor de capacitancia del mismo. Las formas más comunes de detección y actuación electrostática están basadas en una configuración de electrodos tipo placas paralelas simples ó de múltiples electrodos tipo comb-drive donde esta última configuración da origen a una clase de dispositivos conocidos como los Comb-drive, lo cuales han sido empleados en acelerómetros, filtros y resonadores (ver [3]).

Básicamente los condensadores de placas paralelas simple o de una cara son formados por dos electrodos (rectangulares) ubicados de forma paralela, donde uno de ellos permanece fijo y el otro puede moverse sólo en la dirección hacia donde se encuentra el electrodo fijo. En los sistemas micro electromecánicos, los electrodos móviles son usualmente micro estructuras flexibles que cuando son deformadas inducen una fuerza de carácter restaurador que actúa en sentido opuesto a la fuerza electrostática. Por otra parte, los dispositivos Comb-drive o tipo peine (como se conocerán a lo largo de este documento) se componen de dos estructuras más complejas con forma de peine, donde una de ellas está fija y la otra puede moverse sujeta a anclajes flexibles que actúan como resortes. Cada peine se encuentra formado por electrodos o dedos (lo que da el nombre al modelo Comb-drive finger), los cuales pueden ser ubicados de tal forma que se entrelazan ó no con los electrodos del otro peine. Más aún, el movimiento del peine móvil puede tener distintas configuraciones incluyendo aquellas donde este último puede salir del plano con respecto al cual se encuentra el peine fijo. En particular, aquellos dispositivos tipo peine en el plano pueden sufrir desplazamientos longitudinales o transversales de acuerdo con la dirección hacia la cual se desplaza el peine móvil en relación con la orientación del peine fijo.

En este trabajo se tiene interés por aquellos dispositivos MEMS electrostáticos con una configuración tipo peine. Concretamente, por aquellos dispositivos con electrodos interdigitados, en el plano y de movimiento transversal. Debe notarse que esta configuración produce entonces una serie de condensadores de placas paralelas simples que se componen de un electrodo del peine móvil ubicado entre dos electrodos del peine fijo. Así, para cada electrodo en el

peine móvil se obtiene un sistema compuesto por un condensador simple a izquierda y otro a derecha, y en consecuencia cuando el dispositivo es accionado por un voltaje V se obtienen dos fuerzas electrostáticas que actúan sobre el electrodo móvil. De hecho, cada sistema se conoce como un condensador doble o de dos caras y constituye la columna vertebral de los Comb-drive interdigitados (ver [3]).

De esta manera, si para cada condensador doble la variable y denota el desplazamiento del electrodo móvil desde la posición de equilibrio ($y = 0$) medido positivo hacia la izquierda, g denota el agujero o distancia inicial del electrodo móvil a los electrodos fijos, ℓ denota la longitud de la parte del electrodo móvil que se encuentra en la zona de interacción con respecto a los otros dos electrodos, a denota el ancho de los electrodos, y ϵ es la constante dieléctrica del medio en el agujero, entonces las fuerzas electrostáticas a izquierda F_{izq} y a derecha F_{der} en el sistema están dadas por

$$F_{izq} := \frac{\epsilon \ell a V^2}{2(g-y)^2} \quad \text{y} \quad F_{der} := -\frac{\epsilon \ell a V^2}{2(g+y)^2}.$$

Las expresiones anteriores se deducen de la capacitancia de los condensadores a izquierda y a derecha en cada sistema, y su respectiva relación con la fuerza electrostática obtenida en [3] donde en un movimiento unidireccional o axial ambas fuerzas son de carácter atractivo. Así, la fuerza electrostática total F_{elec} que actúa sobre el electrodo móvil está dada por

$$\begin{aligned} F_{elec} &:= F_{izq} + F_{der} \\ &= \frac{4g\epsilon \ell a V^2 y}{2(g^2 - y^2)^2}. \end{aligned} \tag{2-1}$$

Por otra parte, el efecto de la deformación de la micro estructura en el sistema puede ser modelado, bajo ciertas condiciones, como una fuerza restauradora no lineal que actúa sobre el electrodo móvil y que corresponden a la de un resorte mecánico con términos cuadráticos o cúbicos que se adicionan a la componente lineal. Concretamente, en un modelo masa-resorte puntual para el condensador doble se considera el electrodo móvil (que es una micro estructura flexible) como una masa que se encuentra atada puntualmente a ambos electrodos fijos por medio de resortes. Esta simplificación parece modelar la rigidez de la micro estructura en un MEMS con una configuración tipo peine, donde se sabe de la discusión anterior que dependiendo de la geometría, el material empleado y las condiciones iniciales, se pueden presentar no linealidades geométricas que inducen un efecto de rigidez no lineal.

Posiblemente uno de los primeros trabajos en la literatura que considera un coeficiente de rigidez no lineal cúbico en un modelo de MEMS es [35]. En virtud de que ciertas características de los MEMS que evitan su correcto funcionamiento dependen de los coeficientes lineales y no lineales del sistema, los autores en [35] proponen un método de ajuste independiente para tales coeficientes en un dispositivo micro electromecánico, empleando una combinación de actuadores electrostáticos tipo peine y una fuerza restauradora no lineal de tipo cúbico.

Adicionalmente, en [36] se presenta un análisis teórico sobre la dinámica de un oscilador MEMS con un potencial de doble agujero (ver [3]) o biestable que tiene aplicaciones a esquemas de comunicación segura basadas en caos, y donde la parte móvil está atada al sustrato por medio de anclajes tipo vigas que proporcionan una fuerza restauradora no lineal cúbica. En [37] se investiga el diseño de un oscilador de masa de alta percepción empleando un oscilador resonante como en [35] con una configuración de no linealidades electrostáticas y mecánicas que influyen la respuesta dinámica de la estructura, y empleando una ecuación de Mathieu no lineal. Algunos otros ejemplos de trabajos donde se consideran modelos o dispositivos MEMS con una fuerza restauradora no lineal con un término cúbico pueden ser encontrados en [38], [39], [40] y en [3].

Es importante notar que algunos de los trabajos mencionados anteriormente tienen como motivación el estudio de la excitación paramétrica del sistema donde las fuerzas aparecen como coeficientes que cambian en el tiempo, y que gran parte de estos trabajos consideran actuadores comb-drive no interdigitados. Sin embargo, en el presente documento se considera el caso donde los electrodos están interdigitados y donde el coeficiente de rigidez mecánica no lineal produce un efecto de endurecimiento mecánico. En este caso, la fuerza restauradora resultante en el sistema es de la forma

$$F_{res} := -k_1 y - k_3 y^3,$$

donde k_1 y k_3 son, respectivamente, los coeficientes lineal y no lineal de rigidez mecánica en el modelo masa-resorte del condensador doble.

Consideremos ahora $\bar{V}_\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función asociada a una entrada de voltaje variable $AC - DC$ (Alternating current-Direct current) en el sistema tal que en cada instante de tiempo s

$$\bar{V}_\delta(s) := V_{DC} + \delta \cos(\Omega s), \quad (2-2)$$

donde $V_{DC} > 0$, $\Omega > 0$ y $\delta \in]0, V_{DC}[$. De esta manera, si $y = y(s)$ denota el desplazamiento transversal de un electrodo móvil de masa \mathbf{m} medido desde la posición de equilibrio ($y(0) = 0$) en el instante de tiempo s para un dispositivo Comb-drive, entonces el modelo dimensional masa-resorte puntual que describe la dinámica en el dispositivo cuando se considera una elasticidad cúbica y el voltaje de entrada con carga como en (2-2), está dado por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \frac{d^2 y}{ds^2} &= F_{res} + F_{elec} \\ &= -k_1 y - k_3 y^3 + \frac{4g\epsilon l a V_\delta^2(s) y}{2(g^2 - y^2)^2}, \end{aligned} \quad (2-3)$$

donde $|y| < g$. Debe notarse que como (2-3) depende de múltiples parámetros, es conveniente llevar esta ecuación a una forma adimensional mediante los cambios de variable t y $x = x(t)$

tales que

$$t := \omega_0 s \quad \text{y} \quad x := \frac{y}{g}, \quad (2-4)$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{\mathbf{m}}},$$

es la frecuencia natural lineal del sistema. En efecto, de (2-4) se sigue que

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{g\omega_0^2} \frac{d^2 y}{ds^2},$$

y entonces (2-3) se transforma en

$$\ddot{x} + x + \alpha x^3 - \frac{4\beta V_\delta^2(t)x}{(1-x^2)^2} = 0, \quad (2-5)$$

donde $|x| < 1$, α y β son constantes físicas positivas definidas por

$$\alpha = \frac{k_3}{k_1} g^2, \quad \beta = \frac{\epsilon l a}{2k_1 g^3},$$

y $V_\delta(t) := \overline{V}_\delta\left(\frac{t}{\omega_0}\right)$ es una función T -periódica con

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{\Omega}{\omega_0}. \quad (2-6)$$

2.2. Algunos resultados importantes

En esta sección se consideran algunos de los resultados de la literatura más importantes para el desarrollo de la discusión presentada en las secciones posteriores.

2.2.1. Soluciones periódicas impares, propiedades nodales y cotas a priori

El primer resultado de esta sección relaciona la existencia de soluciones periódicas impares de una ecuación diferencial de segundo orden cuya no linealidad tiene ciertas simetrías, con la existencia de soluciones de un problema de Dirichlet asociado a la ecuación en medio periodo de tiempo.

Sea $T > 0$ y consideremos el oscilador general

$$\ddot{x} + F(t, x) = 0, \quad (2-7)$$

donde $F : \mathbb{R} \times]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ (el caso $a = \infty$ no está excluido) es una función T -periódica en la primera variable, con $F \in C^{0,1}(\mathbb{R} \times]-a, a[)$ verificando las siguientes simetrías:

$$F(-t, x) \equiv F(t, x), \quad F(t, -x) \equiv -F(t, x). \quad (2-8)$$

Observación 1. La ecuación diferencial (2-7) es invariante bajo la transformación $(t, x) \rightarrow (-t, -x)$. En efecto, si se supone que $x(t)$ es una solución de (2-7) entonces las simetrías en (2-8) implican que

$$-\ddot{x}(-t) = -[-F(-t, x(-t))] = -F(-t, -x(-t)) = -F(t, y(t)),$$

de donde se sigue que $y(t) := -x(-t)$ también es solución de (2-7).

Lema 1. Sea $L = \frac{T}{2}$, entonces $x(t)$ es una solución T -periódica impar de (2-7) si y sólo si $x(t)$ es una solución del siguiente problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \ddot{x} + F(t, x) = 0, \\ x(0) = x(L) = 0. \end{cases} \quad (2-9)$$

Demostración. \Rightarrow) Si $x(t)$ es una solución T -periódica impar de (2-7) entonces para todo $t \in \mathbb{R}$: $x(t) \in]-a, a[$, $\ddot{x}(t) + F(t, x(t)) = 0$, $x(t+T) = x(t)$ y $x(-t) = -x(t)$. Luego, $x(0) = -x(0)$ y $x(T/2) = x(-T/2) = -x(T/2)$. Por tanto, $x(0) = x(L) = 0$, y entonces $x(t)$ es una solución de (2-9).

\Leftarrow) Supongamos ahora que $x(t)$ denota una solución del problema de Dirichlet (2-9), entonces $x(t) \in C^2([0, L])$ y satisface la ecuación diferencial en (2-9) para todo $t \in [0, L]$. Es conveniente dividir la demostración en dos etapas como sigue.

Etapas 1: Extensión impar de la solución del problema de Dirichlet. La extensión impar de $x(t)$ se define como

$$z(t) := \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in [0, L], \\ -x(-t) & \text{si } t \in [-L, 0[. \end{cases} \quad (2-10)$$

Debe notarse que de la segunda simetría en (2-8) y de la definición en (2-10) se obtiene que $F(t, 0) \equiv 0$, $z(0) = x(0) = 0$ y

$$z(-t) \equiv -z(t). \quad (2-11)$$

Más aún, $z \in C^2([0, L])$ en virtud de que los siguientes límites

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{z(t) - z(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{x(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{x(t)}{t} = \dot{x}(0),$$

y

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\dot{x}(-t) - \dot{x}(0)}{t} = - \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\dot{x}(-t) - \dot{x}(0)}{-t} = - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\dot{x}(t) - \dot{x}(0)}{t} = -\dot{x}(0) = 0,$$

implican que $\dot{z}(0) = \dot{x}(0)$ y $\ddot{z}(0) = \ddot{x}(0) = 0$.

De la Observación 1 sigue que $-x(-t)$ es una solución de la ecuación diferencial en (2-9) para todo $t \in [-L, 0]$, por tanto, $z(t)$ es una solución impar de la ecuación en (2-9) para todo $t \in [-L, L]$. Resta probar entonces que $z(t)$ se puede extender periódicamente a todo

$J \subseteq \mathbb{R}$ y que tal extensión es, en efecto, una solución T -periódica impar de (2-7).

Etapa 2: Extensión periódica de $z(t)$. Consideremos el mapa $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\theta(t) = t - 2 \left\lceil \frac{t-L}{2L} \right\rceil L, \quad (2-12)$$

donde $\lceil \cdot \rceil$ denota la función techo. Básicamente, el mapa $\theta(t)$ envía cada $t \in \mathbb{R}$ módulo $2L$ al intervalo $] -L, L]$ donde $t = (2k-1)L$ se identifica con $t = (2k+1)L$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

El siguiente lema proporciona algunas propiedades importantes del mapa $\theta(t)$ y su demostración puede ser encontrada en el Apéndice A

Lema 2. *La función $\theta(t)$ definida en (2-12) verifica las siguientes propiedades:*

- i) $\theta(t) = t$ para todo $t \in] -L, L]$,
- ii) si $k \in \mathbb{Z}$ entonces $\theta((2k+1)L) = \theta(L)$.
- iii) $\theta(t) \in] -L, L]$ para todo $t \in \mathbb{R}$,
- iv) $\theta(t+2L) \equiv \theta(t)$,
- v) si $k \in \mathbb{Z}$ entonces $\theta(-t) = \theta(t)$ cuando $t = (2k+1)L$ y $\theta(-t) = -\theta(t)$ cuando $t \neq (2k+1)L$,
- vi) $\theta(t)$ es dos veces diferenciable en $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)L\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

De esta forma, la extensión periódica de $z(t)$ sobre todo $J \subseteq \mathbb{R}$ se define vía la función $\theta(t)$ como

$$y(t) := z(\theta(t)), \quad (2-13)$$

de donde se sigue, en virtud de las propiedades ii) y iv) en el Lema 2 que $y((2k+1)L) = z(L) = z(-L) = 0$ y que $y(t)$ es una función T -periódica. Luego, de la simetría en (2-11) y la propiedad v) se concluye que $y(-t) \equiv -y(t)$.

Por otra parte, como $z(t) \in C^2([-L, L])$, de la definición en (2-13) y la propiedad vi) se sigue que dado $k \in \mathbb{Z}$ existe $\delta > 0$ tal que $y(t)$ es dos veces diferenciable para todo t satisfaciendo $0 < |t - (2k+1)L| < \delta$. Luego

$$\lim_{t \rightarrow (2k+1)L^+} \theta(t) = -L, \quad \lim_{t \rightarrow (2k+1)L^-} \theta(t) = L, \quad (2-14)$$

y entonces

$$\lim_{t \rightarrow (2k+1)L} y(t) = \lim_{t \rightarrow (2k+1)L} z(\theta(t)) = z(\theta(L)) = y((2k+1)L).$$

Ahora, como (2-11) implica en particular que $\dot{z}(L) = \dot{z}(-L)$ entonces de (2-14) se obtiene que

$$\lim_{t \rightarrow (2k+1)L^+} \dot{z}(\theta(t)) = \dot{z}(-L) = \dot{z}(L) = \lim_{t \rightarrow (2k+1)L^-} \dot{z}(\theta(t)).$$

y así la regla de L'Hopital permite concluir que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow (2k+1)L} \frac{y(t) - y((2k+1)L)}{t - (2k+1)L} &= \lim_{t \rightarrow (2k+1)L} \frac{y(t)}{t - (2k+1)L} \\ &= \lim_{t \rightarrow (2k+1)L} \dot{y}(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow (2k+1)L} \dot{z}(\theta(t))\dot{\theta}(t) \\ &= \dot{z}(L). \end{aligned}$$

Por tanto, $y(t) \in C^1(\mathbb{R})$ con

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} \dot{z}(\theta(t)) & \text{si } t \neq (2k+1)L \text{ para } k \in \mathbb{Z}, \\ \dot{z}(L) & \text{si } t = (2k+1)L \text{ para } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Como $\lim_{t \rightarrow (2k+1)L} \dot{y}(t) = \dot{y}((2k+1)L)$, entonces de las propiedades *iii)* y *vi)* en el Lema 2, la regla de L'Hopital y la discusión anterior se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow (2k+1)L} \frac{\dot{y}(t) - \dot{y}((2k+1)L)}{t - (2k+1)L} &= \lim_{t \rightarrow (2k+1)L} \frac{\dot{z}(\theta(t)) - \dot{z}(L)}{t - (2k+1)L} \\ &= \lim_{t \rightarrow (2k+1)L} \ddot{z}(\theta(t))\dot{\theta}(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow (2k+1)L} \ddot{z}(\theta(t)). \end{aligned}$$

Finalmente, como $z(t)$ es solución de la ecuación en (2-9) para $t \in [-L, L]$ con $z(L) = z(-L) = 0$ entonces

$$\ddot{z}(L) = -F(L, z(L)) = 0 = -F(L, z(-L)) = \ddot{z}(-L),$$

de donde se sigue en virtud de (2-14) que para $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{t \rightarrow (2k+1)L^+} \ddot{z}(\theta(t)) = \ddot{z}(-L) = 0 = \ddot{z}(L) = \lim_{t \rightarrow (2k+1)L^-} \ddot{z}(\theta(t)).$$

Luego, $y(t) \in C^2(\mathbb{R})$ con

$$\ddot{y}(t) = \begin{cases} \ddot{z}(\theta(t)) & \text{si } t \neq (2k+1)L \text{ para } k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } t = (2k+1)L \text{ para } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

De la propiedad *iii)* y del hecho de que $z(t)$ es solución de la ecuación en (2-9) para todo $t \in [-L, L]$, se concluye que $y(t)$ satisface la ecuación (2-7) para todo $t \in \mathbb{R}$. \square

Consideremos ahora $L > 0$ y $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ una función no idénticamente nula. Definimos $\eta(f)$ como el cardinal del conjunto $\{t \in]0, L[\mid f(t) = 0\}$, es decir, el número de ceros de la función f en el intervalo $]0, L[$. El siguiente lema proporciona un resultado sobre la preservación del número de ceros en el límite cuando se considera una sucesión de funciones de clase $C^1([0, L])$ que convergen uniformemente en la topología C^1 . Este resultado fue introducido por primera vez en [4] sin una demostración formal, y dado que es una piedra angular para la discusión abordada en el presente documento, una demostración detallada es proporcionada luego de su enunciado.

Lema 3 ([4, Lema 3, pág. 408]). *Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones en $C^1([0, L])$ de tal forma que $f_k(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que*

$$f_k \rightarrow f, \quad \text{y} \quad \dot{f}_k \rightarrow \dot{f},$$

uniformemente en $[0, L]$, donde $f \in C^1([0, L])$ satisface la condición

$$f(t)^2 + \dot{f}(t)^2 > 0, \quad \forall t \in [0, L]. \quad (2-15)$$

Entonces para k suficientemente grande se tiene que

$$\eta(f) \leq \eta(f_k) \leq \eta(f) + 1.$$

Más aún, si $f(L) \neq 0$ entonces para k suficientemente grande se obtiene que $\eta(f_k) = \eta(f)$.

Demostración. Debe notarse que como $f_k \rightarrow f$ uniformemente en $[0, L]$ y $f_k(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $f(0) = 0$. Más aún, de la condición (2-15) se tiene que los ceros de f son simples y por tanto aislados. Concretamente, si $f(t_*) = 0$ para algún $t_* \in [0, L]$ entonces $\dot{f}(t_*) \neq 0$. Luego, de la continuidad de la función \dot{f} se sigue que existe $\delta = \delta(t_*) > 0$ tal que $\dot{f}(t) \neq 0$ para todo t en la δ -vecindad de t_* (es decir, en los intervalos $]t_* - \delta, t_* + \delta[\subset]0, L[$ si $t_* \in]0, L[$, $[t_*, t_* + \delta[$ si $t_* = 0$ y $]t_* - \delta, t_*]$ si $t_* = L$). De esta forma, f es una función monótona creciente o decreciente sobre cada δ -vecindad con $f(t_*) = 0$, y entonces $f(t) \neq 0$ para todo t en $]t_* - \delta, t_* + \delta[\setminus \{t_*\}$ si $t_* \in]0, L[$, $]t_*, t_* + \delta[$ si $t_* = 0$ y $]t_* - \delta, t_*[$ si $t_* = L$.

Supongamos en primer lugar que f tiene exactamente m ceros en el intervalo $]0, L[$ para algún $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y que $f(L) \neq 0$, entonces la demostración se puede dividir en las siguientes tres etapas.

Etapas 1: Por hipótesis se tiene que $\eta(f) = m$ y entonces existen t_1, t_2, \dots, t_m tales que $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < L$ con $f(t_i) = 0$ y $\dot{f}(t_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$. Más aún, para cada $i = 1, 2, \dots, m$ existe $\delta_i = \delta(t_i) > 0$ tal que $\dot{f}(t) \neq 0$ para todo $t \in]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[\subset]0, L[$.

Sea $\bar{\delta} = \min_{i \in \{0, 1, \dots, m\}} \{\delta_i\}$ donde $\delta_0 > 0$ es tal que $f(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, \delta_0[$, y consideremos $\delta \in]0, \bar{\delta}[$ apropiado de tal forma que los siguiente conjuntos son disjuntos:

$U_i = [t_i - \delta, t_i + \delta]$ para $i = 1, 2, \dots, m$ y $U_0 = [0, \delta]$. Entonces $\dot{f}(t) \neq 0$ para todo $t \in \Lambda$ donde

$$\Lambda := \bigcup_{i=0}^m U_i.$$

En particular, como para cada $i = 1, 2, \dots, m$ se satisface que $f(t_i) = 0$, se deduce de la discusión anterior que $f(t_i - \delta)f(t_i + \delta) < 0$.

Debe notarse que la convergencia uniforme de la sucesión $\{\dot{f}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ implica que para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq n$ entonces

$$|\dot{f}(t)| - \epsilon < |\dot{f}_k(t)| < |\dot{f}(t)| + \epsilon,$$

para todo $t \in [0, L]$. Así, para $\epsilon = \min_{t \in \Lambda} |\dot{f}(t)| > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_1$ implica que

$$|\dot{f}_k(t)| > |\dot{f}(t)| - \epsilon \geq 0,$$

para todo $t \in \Lambda$. Por tanto, siempre que $k \geq n_1$ se tiene que $\dot{f}_k(t) \neq 0$ para todo $t \in \Lambda$. De hecho, si para algún $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ se tiene que $\dot{f}(t) > 0$ sobre U_i entonces $k \geq n_1$ implica que

$$\dot{f}_k > \dot{f}(t) - \epsilon \geq 0,$$

para todo $t \in U_i$, y si para algún $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ se tiene que $\dot{f}(t) < 0$ sobre U_i entonces $k \geq n_1$ implica que

$$\dot{f}_k(t) < \dot{f}(t) + \epsilon \leq 0,$$

para todo $t \in U_i$. En conclusión, siempre que $k \geq n_1$ se obtiene que para todo $t \in \Lambda$

$$\operatorname{sgn} \dot{f}_k(t) = \operatorname{sgn} \dot{f}(t).$$

Etapa 2: Dado que por definición todos los ceros de la función f están contenidos en el conjunto Λ , se tiene que $f(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, L] \setminus \Lambda$. De hecho, de la *Etapa 1* se sigue que $f(\delta) \neq 0$ y $f(t_i \pm \delta) \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$, por tanto, $f(t) \neq 0$ para todo $t \in \overline{[0, L] \setminus \Lambda}$

De la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ se tiene que para $\epsilon = \min_{t \in \overline{[0, L] \setminus \Lambda}} |f(t)| > 0$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_2$ implica que

$$|f_k(t)| > |f(t)| - \epsilon \geq 0,$$

para todo $t \in \overline{[0, L] \setminus \Lambda}$. Luego, siempre que $k \geq n_2$ se tiene que $f_k(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, L] \setminus \Lambda$.

En particular, si para cada $i = 1, 2, \dots, m$ se considera $\epsilon_i \in]0, |f(t_i - \delta)|]$ entonces de la convergencia uniforme se sigue que existe $n'_i \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n'_i$ implica que

$$|f_k(t_i - \delta) - f(t_i - \delta)| \leq \epsilon_i.$$

Luego, para $k \geq n'_i$ se tiene que si $f(t_i - \delta) > 0$ entonces $f(t_i - \delta) \geq \epsilon_i$ y en consecuencia $f_k(t_i - \delta) > f(t_i - \delta) - \epsilon_i \geq 0$, y si $f(t_i - \delta) < 0$ entonces $f_k(t_i - \delta) \leq -\epsilon_i$ y por tanto $f_k(t_i - \delta) < f(t_i - \delta) + \epsilon_i \leq 0$. De esta manera, si $n_3 = \max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} \{n'_i\}$ entonces para $k \geq n_3$ se tiene que $f_k(t_i - \delta) \neq 0$ con

$$\operatorname{sgn} f_k(t_i - \delta) = \operatorname{sgn} f(t_i - \delta),$$

para todo $i = 1, 2, \dots, m$. Un razonamiento análogo permite concluir que existe $n_4 \in \mathbb{N}$ apropiado tal que si $k \geq n_4$ entonces $f_k(t_i + \delta) \neq 0$ con

$$\operatorname{sgn} f_k(t_i + \delta) = \operatorname{sgn} f(t_i + \delta),$$

para todo $i = 1, 2, \dots, m$.

Etapas 3: Sea $n = \max \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$, entonces de las etapas anteriores se sigue que $k \geq n$ implica que f_k preserva la monotonía de f sobre Λ , $f_k(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, L] \setminus \Lambda$ y que

$$\operatorname{sgn} f_k(t_i \pm \delta) = \operatorname{sgn} f(t_i \pm \delta),$$

para todo $i = 1, 2, \dots, m$.

Dado que por hipótesis $f(t_i - \delta)f(t_i + \delta) < 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, m$, se obtiene que de la relación anterior que $f_k(t_i - \delta)f_k(t_i + \delta) < 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, m$. Luego, de la monotonía y del Teorema del Valor Intermedio se sigue la existencia de un único $t'_i \in]t_i - \delta, t_i + \delta[$ tal que $f_k(t'_i) = 0$. Finalmente, como $f(t) \neq 0$ para todo $t \in]0, \delta]$ se tiene que para $k \geq n$ la función f_k tiene exactamente m ceros en $\Lambda \setminus \{0\}$, y por tanto, $\eta(f_k) = \eta(f)$.

Supongamos ahora que f tiene exactamente m ceros en el intervalo $]0, L[$ para algún $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y que $f(L) = 0$. Entonces $\eta(f) = m$ y existen t_1, t_2, \dots, t_m ordenados y definidos como en el razonamiento anterior. Dado que t_m es el mayor de los ceros de f en $]0, L[$ se tiene que $f(t) \neq 0$ para todo $t \in]t_m, L[$. Más aún, como $f(L) = 0$ se sigue de la condición (2-15) que $\dot{f}(L) \neq 0$ y en consecuencia existe $\delta_L > 0$ tal que $\dot{f}(t) \neq 0$ para todo $t \in]L - \delta_L, L[\subset]0, L[$.

Sea $\delta \in]0, \delta_L[$ apropiado tal que $t_m + \delta < L - \delta$. Entonces $\dot{f}(t) \neq 0$ para todo $t \in [L - \delta, L]$. Luego, para $\epsilon = \min_{t \in [L - \delta, L]} |\dot{f}(t)|$ se tiene que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_1$ implica que $|\dot{f}_k(t)| > 0$ para todo $t \in [L - \delta, L]$, y para $\epsilon = \min_{t \in [t_m + \delta, L - \delta]} |f(t)|$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal si $k \geq n_2$ entonces $|f_k(t)| > 0$ para todo $t \in [t_m + \delta, L - \delta]$. De hecho, un razonamiento análogo al anterior revela que si $k \geq n_1$

$$\operatorname{sgn} \dot{f}_k(t) = \operatorname{sgn} \dot{f}(t),$$

para todo $t \in [L - \delta, L]$, y que si $k \geq n_2$

$$\operatorname{sgn} f_k(t) = \operatorname{sgn} f(t),$$

para todo $t \in [t_m + \delta, L - \delta]$.

Como $f(t_m + \delta) \neq 0$, $f_k \rightarrow f$ y $f'_k \rightarrow f'$ uniformemente en $[0, t_m + \delta]$, y la condición (2-15) se satisface sobre $[0, t_m + \delta]$ entonces una aplicación de la primera parte implica que existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq n_3$ entonces f_k tiene exactamente m ceros en el intervalo $]0, t_m + \delta[$.

Finalmente, sea $k \geq n = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, entonces f_k tiene exactamente m ceros en el intervalo $]0, L - \delta[$. Más aún, de la monotonía de f_k en el intervalo $[L - \delta, L]$ se tiene que f_k tendrá a lo mucho un cero en el intervalo $]L - \delta, L[$. Por tanto, $\eta(f) \leq \eta(f_k) \leq \eta(f) + 1$. \square

El siguiente resultado introducido inicialmente en [1] presenta condiciones suficientes para obtener cotas *a priori* de soluciones periódicas de una ecuación de segundo orden general.

Lema 4 ([1, Lema 1, pág. 6]). *Sea $f : \mathbb{R} \times]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ (donde $a = -\infty$ y $b = \infty$ no están excluidos) una función continua localmente Lipschitz y T -periódica en la primera variable para $T > 0$. Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden*

$$\ddot{x} = f(t, x), \quad (2-16)$$

y supongamos que existen $R_1, R_2 \in]a, b[$ con $R_1 < R_2$ de tal forma que se satisfacen

- $f(t, x) > 0, \forall (t, x) \in [0, T] \times [R_2, b[$,
- $f(t, x) < 0, \forall (t, x) \in [0, T] \times]a, R_1]$.

Entonces cualquier solución T -periódica de (2-16) tiene su rango contenido en el intervalo $[R_1, R_2]$.

Demostración. Sean R_1, R_2 como en la hipótesis y supongamos que $x(t)$ es una solución T -periódica de (2-16). Luego, $x \in C(\mathbb{R})$, $x(t) \in]a, b[$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y existen $t_2, t_1 \in [0, T]$ tales que

$$x(t_2) = \max_{t \in [0, T]} x(t) \quad \text{y} \quad x(t_1) = \min_{t \in [0, T]} x(t).$$

Por contradicción, supongamos que $x(t_2) > R_2$. Entonces de la hipótesis se sigue que

$$0 < f(t_2, x(t_2)) = \ddot{x}(t_2) \leq 0,$$

lo que implica que necesariamente $x(t_2) \leq R_2$. De forma análoga, si suponemos que $x(t_1) < R_1$ entonces obtenemos una contradicción puesto que por hipótesis

$$0 > f(t_1, x(t_1)) = \ddot{x}(t_1) \geq 0,$$

luego $x(t_1) \geq R_1$. En conclusión, $x(t) \in [R_1, R_2]$ para todo $t \in \mathbb{R}$. \square

2.2.2. Ecuaciones de Hill y estabilidad lineal

Una ecuación de Hill es una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$\ddot{x} + q(t)x = 0, \quad (2-17)$$

donde $q(t)$ es una función de valor real y periódica. Las ecuaciones lineales y homogéneas de la forma (2-17) tienen múltiples aplicaciones en física e ingeniería. La idea principal de esta sección es introducir brevemente algunos resultados fundamentales de la Teoría de ecuaciones de Hill necesarios para el desarrollo de la discusión en secciones posteriores (ver [41] y [42]).

Supongamos que $q \in C(\mathbb{R})$ (la hipótesis original en [41] es que $q(t)$ es continua a trozos en cada intervalo finito) y periódica con periodo minimal T . Entonces (2-17) tiene dos soluciones continuamente diferenciables $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ determinadas de forma única por las condiciones iniciales

$$\psi_1(0) = 1, \quad \dot{\psi}_1(0) = 0, \quad \psi_2(0) = 0, \quad \dot{\psi}_2(0) = 1. \quad (2-18)$$

Las soluciones $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ de (2-17) con condiciones iniciales (2-18) se denominan soluciones normalizadas o canónicas de (2-17).

De la teoría de sistemas lineales homogéneos con coeficientes T -periódicos, se tiene que la matriz de Monodromía o matriz T -periódica de Poincaré de la ecuación (2-17) está dada por

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} \psi_1(T) & \psi_2(T) \\ \dot{\psi}_1(T) & \dot{\psi}_2(T) \end{bmatrix}$$

Definición 1. *La traza de la matriz T -periódica de Poincaré asociada a (2-17) se define como*

$$Tr := tr(\Phi(T)) = \psi_1(T) + \dot{\psi}_2(T).$$

Es valioso notar que la traza de la matriz de Poincaré proporciona información importante sobre la estabilidad en el sentido de Lyapunov de la ecuación de Hill (2-17). De hecho, la estabilidad de (2-17) es equivalente a que todas sus soluciones sean acotadas, y esto último es equivalente a que la solución trivial de (2-17), $x \equiv 0$, sea estable (ver [42] para más detalles).

Por otra parte, del Teorema de Liouville se sabe que si $\Phi(t)$ denota la matriz fundamental y principal en $t = 0$ asociada a la ecuación de Hill (2-17), se tiene que $\det \Phi(T) = 1$. De esta forma, la ecuación característica asociada a (2-17) está definida por

$$\rho^2 - Tr\rho + 1 = 0, \quad (2-19)$$

y las soluciones de (2-19), denotadas por ρ_1 y ρ_2 , se llaman multiplicadores de Floquet (multiplicadores característicos) asociados a (2-17). Además, el número α (real o complejo) que satisface

$$e^{i\alpha T} = \rho_1 \quad \text{y} \quad e^{-i\alpha T} = \rho_2,$$

se llama exponente característico asociado a (2-17). Debe notarse que el exponente característico se define salvo múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{T}$ y que en algunos textos se define como el número complejo $\mu = \alpha i$. Más aún, de la definición de α , ρ_1 y ρ_2 se obtiene que

$$2 \cos(\alpha T) = \rho_1 + \rho_2 \quad \text{y} \quad \rho_1 \rho_2 = 1. \quad (2-20)$$

El siguiente resultado es consecuencia directa del Teorema de Floquet para sistemas lineales homogéneos con un coeficiente T -periódico. Este último resultado dice básicamente que una matriz fundamental de un sistema de primer orden lineal homogéneo con coeficiente periódico tiene una representación normal de Floquet, es decir, se puede escribir como el producto de una matriz T -periódica y la matriz exponencial de una cierta matriz de coeficientes constantes (ver por ejemplo [43]).

Teorema 1 (Teorema de Floquet para ecuaciones de Hill [41]). *Consideremos la ecuación de Hill (2-17). Entonces*

1. Si $\rho_1 \neq \rho_2$ la ecuación de Hill (2-17) tiene dos soluciones linealmente independientes

$$y_1(t) = e^{i\alpha t} p_1(t), \quad y_2(t) = e^{-i\alpha t} p_2(t),$$

donde $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son periódicas con periodo T .

2. Si $\rho_1 = \rho_2$ entonces (2-17) tiene una solución no trivial $\bar{y}(t)$ que es: T -periódica cuando $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ó $2T$ -periódica cuando $\rho_1 = \rho_2 = -1$. Si $y(t)$ denota cualquier otra solución linealmente independiente con $\bar{y}(t)$ se tiene que

$$y(t+T) = \rho_1 y(t) + \theta \bar{y}(t),$$

donde θ es una constante. Más aún, $\theta = 0$ es equivalente a que

$$Tr = \pm 2, \quad \dot{\psi}_1(T) = 0 \quad \text{y} \quad \psi_2(T) = 0. \quad (2-21)$$

Luego, tal como se menciona en [41], si $\rho_1 \neq \rho_2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces existe $M = M(\psi(0), \dot{\psi}(0)) > 0$ tal que $|y(t)| \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$ donde $y(t)$ es una solución de (2-17), si $\alpha \notin \mathbb{R}$ entonces (2-17) tiene una solución no acotada y si $\rho_1 = \rho_2$ entonces todas las soluciones de (2-17) son acotadas si y sólo si (2-21) se satisface. El siguiente corolario resume esta discusión.

Corolario 1 ([42, Corolario 2, pág. 14]). *La solución trivial de (2-17) es estable si y sólo si se tiene alguna de las siguientes situaciones:*

- La traza satisface que $|Tr| < 2$ o equivalentemente $\rho_1 \neq \rho_2$ son números complejos conjugados sobre el círculo unitario.
- La condición (2-21) se satisface o equivalentemente $\rho_1 = \rho_2 = \pm 1$ con todas las soluciones de (2-17) periódicas o antiperiódicas.

2.3. El principio de Ortega y su extensión para osciladores con singularidades

Como se mencionó en la sección 1.3, el principio de Ortega es una herramienta variacional propuesta por R. Ortega en [4], que permite obtener la existencia de un espectro de soluciones periódicas impares con oscilaciones prescritas (es decir, con propiedades nodales predeterminadas) para una familia de osciladores no lineales con simetrías. Este principio está basado en el método del disparo y en la Teoría de Comparación de Sturm. La presente sección tiene como objetivo introducir el principio de Ortega y una de sus extensiones recientemente obtenida en [1] para una familia de osciladores no lineales con singularidades. A continuación se enuncian algunas definiciones y resultados preliminares.

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden dada por

$$\ddot{x} + xD(t, x) = 0. \quad (2-22)$$

donde $D : [0, L] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función en $C^{0,1}([0, L] \times \mathbb{R})$ que verifica las siguientes propiedades:

- i) $|xD(t, x)| < C$ para todo $(t, x) \in [0, L] \times \mathbb{R}$ y alguna constante $C > 0$,
- ii) $D(-t, x) \equiv D(t, x)$,
- iii) $D(t, -x) \equiv D(t, x)$,
- iv) $D(t, x) < D(t, 0)$ para todo $t \in [0, L]$ y $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

y el siguiente problema de Dirichlet asociado a (2-22)

$$\begin{cases} \ddot{x} + xD(t, x) = 0, \\ x(0) = x(L) = 0. \end{cases} \quad (2-23)$$

Entonces para $v \in \mathbb{R}$ se define $x(t, v)$ como la única solución de (2-22) con condiciones iniciales $x(0, v) = 0$ y $\dot{x}(0, v) = v$. Debe notarse que como $x(t, 0) \equiv 0$ es la solución trivial de la ecuación (2-22), se sigue como consecuencia del Teorema de Existencia y Unicidad que si $x(t_0, v) = 0$ para algún $t_0 \in]0, L[$ y $v \neq 0$, entonces necesariamente $\dot{x}(t_0, v) \neq 0$. Así, la función $x(\cdot, v)$ tiene ceros simples para cada $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y por tanto los ceros son aislados. De esta forma, el número de ceros de la solución no trivial $x(t, v)$ en el intervalo $]0, L[$ es un entero no negativo dado por la siguiente función.

Definición 2. Sea $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La función número de ceros asociada a la solución $x(t, v)$ de (2-22) se define como $\nu : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de tal forma que

$$\nu(v) = |\{t \in]0, L[\mid x(t, v) = 0\}|.$$

Por otra parte, debe notarse que la ecuación variacional asociada a (2-22) a lo largo de la solución trivial $x \equiv 0$ está dada por

$$\ddot{u} + D(t, 0)u = 0. \quad (2-24)$$

Así, denotamos como $u_0(t)$ a la única solución de (2-24) con condiciones iniciales $u_0(0) = 0$ y $\dot{u}_0(0) = 1$, y definimos el número de ceros en el intervalo $]0, L[$ asociado a la solución $u_0(t)$ como

$$\nu_0 = |\{t \in]0, L[\mid u_0(t) = 0\}|.$$

A continuación probaremos algunas propiedades de la función número de ceros ν (ver Definición 2).

Lema 5. *La función número de ceros ν satisface:*

- a) $\nu(v) \leq \nu_0$ para todo $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- b) Sea $v \neq 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\nu(v) \leq \nu(w) \leq \nu(v) + 1,$$

siempre que $|w - v| \leq \delta$ y $w \neq 0$. Más aún, si $x(L, v) \neq 0$ entonces $\nu(w) = \nu(v)$ siempre que $|w - v| \leq \delta$ y $w \neq 0$.

- c) Existe $v_* > 0$ tal que $\nu(v) = \nu_0$ para todo v verificando $0 < |v| \leq v_*$.
- d) $\lim_{|v| \rightarrow \infty} \nu(v) = 0$.
- e) Sea $v \neq 0$, entonces $\nu(-v) = \nu(v)$.

Demostración. a) Sea $v \neq 0$ arbitrario y fijo, entonces por definición $x(t, v)$ es una solución no trivial de la ecuación lineal

$$\ddot{y} + D(t, x(t, v))y = 0. \quad (2-25)$$

Luego, de la propiedad *iv)* de la función D se sabe que $D(t, x(t, v)) < D(t, 0)$ para todo $t \in [0, L]$ salvo en un subconjunto al menos numerable de valores t_k tales que $x(t_k, v) = 0$. Así, al comparar los osciladores (2-25) y (3-1) se sigue de la Teoría de Comparación de Sturm que entre cada par de ceros consecutivos de $x(t, v)$ en el intervalo $[0, L]$ existe al menos un cero de $u_0(t)$. Como $x(0, v) = 0$ por definición, entonces existen $\nu(v)$ subintervalos en el intervalo abierto $]0, L[$ donde $u_0(t)$ tiene al menos un cero, es decir, $\nu_0 \geq \nu(v)$. Luego, para todo $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\nu(v) \leq \nu_0$.

b) Esta propiedad básicamente dice que la función ν es localmente constante y cambia de valor a través de saltos de una unidad que se producen exactamente en las velocidades v para las cuales $x(t, v)$ es solución del problema de Dirichlet (2-23), es decir, cuando $x(L, v) = 0$.

Se sabe que dado $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ arbitrario la función $f(t) := x(t, v)$ es continua y diferenciable con derivada continua en el intervalo $[0, L]$ ($x(t, v)$ es solución de (2-22)), luego $f \in C^1([0, L])$. Consideremos $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ que convergen a v y la sucesión de funciones $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en $C^1([0, L])$ donde $f_k(t) := x(t, v_k)$ para todo $t \in [0, L]$ y $k \in \mathbb{N}$. Como $xD(t, x)$ es continua en $[0, L] \times \mathbb{R}$, por el Teorema de Dependencia Continua respecto de Condiciones Iniciales y Parámetros se sabe que $x(t, v)$ y $\dot{x}(t, v)$ dependen continuamente de v para todo $t \in [0, L]$, luego $f_k \rightarrow f$ y $\dot{f}_k \rightarrow \dot{f}$ uniformemente en $[0, L]$ (donde $\dot{f}_k(t) \equiv \dot{x}(t, v_k)$ y $\dot{f}(t) \equiv \dot{x}(t, v)$). Finalmente, como los ceros de $x(t, v)$ son simples (ver discusión anterior) se sigue que si $t_* \in [0, L]$ es tal que $f(t_*) = 0$ entonces $\dot{f}(t_*) \neq 0$. Así, una aplicación del Lema 3 implica que para $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y k suficientemente grande

$$\nu(v) \leq \nu(v_k) \leq \nu(v) + 1,$$

en virtud de que $\eta(f_k) = \eta(x(\cdot, v_k)) = \nu(v_k)$, $\eta(f) = \eta(x(\cdot, v)) = \nu(v)$. Adicionalmente, si $f(L) = x(L, v) \neq 0$ entonces el Lema 3 implica que para k suficientemente grande $\nu(v_k) = \nu(v)$.

c) Consideremos el cambio de variable $X = X(t)$ donde $x = x(t)$, $\dot{x} = \dot{x}(t)$ y

$$X := \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix},$$

entonces el sistema de primer orden asociado a (2-22) está dado por

$$\dot{X} = W(t, X), \tag{2-26}$$

con $W : [0, L] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$W(t, X) := \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -xD(t, x) \end{bmatrix}.$$

De hecho, $W \in C^{0,1}([0, L] \times \mathbb{R}^2)$ en virtud de que $D(t, x) \in C^{0,1}([0, L] \times \mathbb{R})$ por hipótesis. Sea $X(t, \zeta)$ la única solución de (2-26) sobre $[0, L]$ con condición inicial

$$X(0, \zeta) = \zeta := \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix},$$

y para $v \in \mathbb{R}$ sea $Z(t, v) \equiv X(t, \zeta)$ con $\zeta_1 = 0$ y $\zeta_2 = v$. Luego, de la definición de $x(t, v)$ se sigue que

$$Z(t, v) \equiv \begin{bmatrix} x(t, v) \\ \dot{x}(t, v) \end{bmatrix}.$$

Dado que $Z(t, 0) \equiv 0_{\mathbb{R}^2}$ es la solución trivial de (2-26), se tiene del Teorema de Dependencia Continua respecto de Condiciones Iniciales y Parámetros (ver [44]-[46]) que existe $\delta > 0$

tal que $Z(t, v)$ es continuamente diferenciable con respecto a la condición inicial ζ para $0 \leq \|\zeta\|_2 < \delta$. En particular, si

$$\Phi(t) := \frac{\partial Z(t, v)}{\partial \zeta} \Big|_{(t,0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(t, v)}{\partial \zeta_1} \Big|_{(t,0)} & \frac{\partial x(t, v)}{\partial \zeta_2} \Big|_{(t,0)} \\ \frac{\partial \dot{x}(t, v)}{\partial \zeta_1} \Big|_{(t,0)} & \frac{\partial \dot{x}(t, v)}{\partial \zeta_2} \Big|_{(t,0)} \end{bmatrix},$$

entonces $\Phi(t)$ es la matriz fundamental y principal en $t = 0$ del sistema lineal homogéneo

$$\dot{Y} = J_X W(t, Z(t, 0))Y,$$

donde $J_X W(t, X)$ denota la matriz Jacobiana de $W(t, X)$ con respecto a X en $X = Z(t, 0)$ dada por

$$J_X W(t, Z(t, 0)) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -D(t, 0) & 0 \end{bmatrix}.$$

Más aún, como $x(t, 0) \equiv \dot{x}(t, 0) \equiv 0$ y $\zeta_2 = v$ en este caso, se tiene que para todo $t \in [0, L]$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{x(t, v)}{v} = \frac{\partial x(t, v)}{\partial \zeta_2} \Big|_{(t,0)},$$

y

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\dot{x}(t, v)}{v} = \frac{\partial \dot{x}(t, v)}{\partial \zeta_2} \Big|_{(t,0)}.$$

Luego, de la definición de la solución $u_0(t)$ de (2-24) se sigue que

$$\frac{x(t, v)}{v} \rightarrow u_0(t) \quad \text{y} \quad \frac{\dot{x}(t, v)}{v} \rightarrow \dot{u}_0(t)$$

uniformemente en $[0, L]$ cuando $v \rightarrow 0$.

De esta manera, dada cualquier sucesión $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $v_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ y $v_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se puede definir $f_k(t) := \frac{x(t, v_k)}{v_k}$ y $f(t) := u_0(t)$, y entonces la sucesión de funciones $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y f satisfacen las condiciones del Lema 3. En general, se puede considerar la familia de funciones $\{f_v\}_{v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ con $f_v(t) := \frac{x(t, v)}{v}$ para obtener que

$$f_v \rightarrow f \quad \text{y} \quad \dot{f}_v \rightarrow \dot{f},$$

uniformemente en $[0, L]$ cuando $v \rightarrow 0$. Así, una aplicación del Lema 3 revela que existe algún $v_* > 0$ tal que para todo v que satisface $0 < |v| < v_*$ se tiene que

$$\eta(u_0) = \nu_0 \leq \eta(f_v) = \nu(v) \leq \eta(u_0) + 1.$$

No obstante, de la propiedad *i*) se sabe que $\nu(v) \leq \nu_0$ para todo $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, por tanto, para $0 < |v| < v_*$ se tiene que $\nu(v) = \nu_0$.

d) Esta propiedad es equivalente a que existe $v^* > 0$ tal que $\nu(v) = 0$ para todo v satisfaciendo $|v| \geq v^*$. Debe notarse en primer lugar que dado $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se tiene que $x(t, v)$ y $\dot{x}(t, v)$ satisfacen

$$\begin{aligned} x(t, v) &= vt - \int_0^t (t-s)x(s, v)D(s, x(s, v))ds, \\ \dot{x}(t, v) &= v - \int_0^t x(s, v)D(s, x(s, v))ds. \end{aligned}$$

En efecto, si $p(t) := x(t, v)D(t, x(t, v))$ entonces $x(t, v)$ es la única solución de la ecuación

$$\ddot{y} + p(t) = 0, \quad (2-27)$$

con condiciones iniciales $x(0, v) = 0$ y $\dot{x}(0, v) = v$. Como $p(t)$ es una función continua sobre $[0, L]$ y el sistema de primer orden no homogéneo asociado a (2-27) está dado por

$$\dot{Y} = AY + B(t), \quad (2-28)$$

donde

$$Y = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -p(t) \end{bmatrix},$$

se tiene de la fórmula de variación de parámetros que si $Y(t)$ denota la única solución de (2-28) con condición inicial $Y(0)$ entonces $Y(t)$ satisface la ecuación

$$\begin{aligned} Y(t) &\equiv e^{At}Y(0) + e^{At} \int_0^t e^{-As}B(s)ds, \\ &\equiv \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Y(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & (t-s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -p(s) \end{bmatrix} ds, \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\begin{bmatrix} x(t, v) \\ \dot{x}(t, v) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} vt \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \int_0^t (t-s)x(s, v)D(s, x(s, v))ds \\ \int_0^t x(s, v)D(s, x(s, v))ds \end{bmatrix}.$$

Dado que por hipótesis existe $C > 0$ tal que $\max_{t \in [0, L]} p(t) < C$, se tiene que para todo $t \in [0, L]$ se satisface

$$\begin{aligned} |x(t, v) - vt| &\equiv \left| \int_0^t (t-s)p(s)ds \right|, \\ &\leq C \int_0^t (t-s)ds, \\ &= \frac{C}{2}t^2 \leq \frac{CL^2}{2}, \end{aligned}$$

y

$$|\dot{x}(t, v) - v| \leq CL.$$

Ahora consideramos la familia de funciones $\{f_v\}_{v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ tal que $f_v(t) := \frac{x(t,v)}{v}$ para todo $t \in [0, L]$. Entonces $f_v \in C^1([0, L])$ para cada $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y de las estimaciones anteriores se sigue que

$$0 \leq |f_v(t) - t| \leq \frac{CL^2}{2|v|} \quad \text{y} \quad 0 \leq |\dot{f}_v(t) - 1| \leq \frac{CL}{|v|},$$

para todo $t \in [0, L]$. Así, tomando el límite cuando $|v| \rightarrow \infty$ se obtiene que $f_v \rightarrow t$ uniformemente en $[0, L]$ y $\dot{f}_v \rightarrow 1$ uniformemente en $[0, L]$. Un aplicación del Lema 3 con $f(t) = t$ revela que cuando $|v| \rightarrow \infty$ (equivalente a tomar k suficientemente grande en una sucesión arbitraria en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ que diverge) $\eta(f_v) = \eta\left(\frac{x(t,v)}{v}\right) = \nu(v) = 0 = \eta(f)$ en virtud de que $f(t)$ sólo se anula en $t = 0$. Luego, existe algún $v^* > 0$ tal que para todo v que satisface $|v| \geq v^*$ se tiene que $\nu(v) = 0$.

e) Esta propiedad es una consecuencia directa de la siguiente observación sobre la dependencia de $x(t, v)$ con respecto a v .

Observación 2. Si $x(t, v)$ es solución de (2-22) entonces $-x(t, v)$ también es solución y además $-x(t, v) = x(t, -v)$ para todo $t \in [0, L]$. En efecto, si $y(t, v) = -x(t, v)$ se obtiene como consecuencia de la condición iii) que $y(t, v)$ satisface

$$\ddot{y}(t, v) = -\ddot{x}(t, v) = x(t, v)D(t, x(t, v)) = -y(t, v)D(t, y(t, v)),$$

con $y(0, v) = 0$ y $\dot{y}(0, v) = -v$. Por otra parte, si $z(t, v) = x(t, -v)$ entonces $z(t, v)$ es solución de (2-22) con $z(0, v) = 0$ y $\dot{z}(0, v) = -v$. Del Teorema de Existencia y Unicidad se sigue que $y(t, v) \equiv z(t, v)$.

□

A continuación se enuncia el principio variacional de R. Ortega [4].

Proposición 1 ([4, Proposición 4, pág. 410]). Sea $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Supongamos que la función D satisface las condiciones i) – iv), entonces el problema de Dirichlet (2-23) tiene al menos una solución con n ceros en el intervalo $]0, L[$ si y sólo si $n < \nu_0$.

Demostración. \Rightarrow) Sea $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ arbitrario y fijo, $D(t, x)$ como en la hipótesis, y asumamos que existe $v_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que el problema de Dirichlet (2-23) tiene al menos una solución con exactamente n ceros en $]0, L[$ denotada por $x_n(t, v_n)$. Entonces $x_n(t, v_n)$ es una solución no trivial de la ecuación lineal

$$\ddot{y} + D(t, x_n(t, v_n))y = 0,$$

que satisface $x_n(0, v_n) = x_n(L, v_n) = 0$. De la Teoría de Comparación de Sturm y la propiedad iv) se tiene que entre cada par de ceros consecutivos de $x_n(t, v_n)$ existe al menos un cero de $u_0(t)$. Por tanto, existen $\nu(v) + 1$ subintervalos donde $u_0(t)$ tiene al menos un cero, es decir, $\nu_0 \geq \nu(v_n) + 1 > \nu(v_n)$.

\Leftrightarrow) Sea $D(t, x)$ como en la hipótesis y tomemos $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ arbitrario tal que $n < \nu_0$ (lo que implica necesariamente que $\nu_0 \geq 1$). Debe notarse que la demostración en este sentido se basa en las propiedades de la función ν dadas por el Lema 5 y en un procedimiento de minimización. En síntesis, lo que dice este último es que del conjunto de soluciones $x(t, v)$ de la ecuación (2-22) que tengan a lo mucho n ceros en el intervalo $]0, L[$, aquella que tenga menor energía cinética asociada será solución del problema de Dirichlet (2-23). A continuación abordaremos el procedimiento de minimización.

Consideremos en virtud de la propiedad e) de la función ν , el siguiente conjunto

$$S_n := \{v \in]0, \infty[\mid \nu(v) \leq n\}.$$

La propiedad d) de la función ν implica que $S_n \neq \emptyset$ puesto que $n \geq 0$ ($v^* \in S_n$). Luego, S_n es un conjunto no vacío e inferiormente acotado, por tanto, se puede definir $\omega_n = \inf S_n$. De hecho, tenemos que $\omega_n > 0$. En efecto, si consideramos $v_* > 0$ como en la demostración de la propiedad c) y suponemos que $\omega_n = 0$ entonces por propiedades del ínfimo se obtiene que dado $\delta > 0$ suficientemente pequeño existe $v \in S_n$ tal que $0 < v < \omega_n + \delta = \delta \leq v_*$. Luego, de la propiedad c) se tiene que $\nu(v) = \nu_0$ y entonces $\nu(v) > n$. Esto es una contradicción puesto que $v \in S_n$ y por tanto $\nu(v) \leq n$. En otras palabras, 0 no es un punto de acumulación de S_n .

Ahora, por ser ω_n el ínfimo de S_n se tiene que existe una sucesión $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en S_n tal que $v_k \rightarrow \omega_n$ cuando $k \rightarrow \infty$ y como $\omega_n > 0$ entonces se puede tomar el $\delta > 0$ dado por la propiedad b) de la función ν . De esta forma, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq p$ implica que $|v_k - \omega_n| \leq \delta$. De la propiedad b) dada por el Lema 5 se sigue que para $k \geq p$, $\nu(\omega_n) \leq \nu(v_k) \leq \nu(\omega_n) + 1$. Como $v_{k'} \in S_n$ para todo $k' \in \mathbb{N}$, necesariamente $\nu(v_k) \leq n$ y entonces $\nu(\omega_n) \leq n$. Luego, $\omega_n \in S_n$ y como consecuencia de la definición de ínfimo se concluye que $\omega_n = \min S_n$.

Notemos que para $v > 0$ tal que $v \notin S_n$, necesariamente $\nu(v) > n$, en particular, si $v < \omega_n$ entonces $\nu(v) \geq n + 1$. De esta forma, consideremos $\delta > 0$ dado por la propiedad b) de la función ν para $\omega_n > 0$ y $v > 0$ tal que $\omega_n - \delta \leq v < \omega_n$, luego $-\delta \leq v - \omega_n < 0$ y $\nu(v) \geq n + 1$. Como $|v - \omega_n| \leq \delta$, de la propiedad b) de la función ν y la definición de ω_n sigue que $\nu(\omega_n) \leq \nu(v) \leq \nu(\omega_n) + 1 \leq n + 1$. De las desigualdades anteriores se concluye que $\nu(v) = n + 1$. Esto implica que $n + 1 = \nu(v) \leq \nu(\omega_n) + 1$, entonces $\nu(\omega_n) \geq n$ y por tanto obtenemos que $\nu(\omega_n) = n$. De forma similar, tomando $v \in S_n$ (lo que implica que $\nu(v) \leq n$) tal que $0 < v - \omega_n \leq \delta$ se sigue de la propiedad b) de la función ν y la discusión anterior que $\nu(v) = n$. En resumen, para ω_n existe $\delta > 0$ tal que $\nu(v) = n + 1$ para todo $v > 0$ satisfaciendo $-\delta \leq v - \omega_n < 0$ y $\nu(v) = n$ para v satisfaciendo $0 \leq v - \omega_n \leq \delta$, es decir, ν es una función localmente constante cerca de ω_n y cambia su valor en una unidad por medio de saltos unitarios que ocurren precisamente en ω_n .

Finalmente, de la propiedad b) sabemos que si para $v > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\nu(w) \neq \nu(v)$

para algún $w \neq 0$ que verifica $|w - v| \leq \delta$, entonces $x(L, v) = 0$. Así, en virtud de la discusión anterior, se tiene que la propiedad *b*) implica que $x(L, \omega_n) = 0$. Por tanto, la función $x(t, \omega_n)$ es una solución del problema de Dirichlet (2-23) que satisface que $\nu(\omega_n) = n$, es decir, $x(t, \omega_n)$ tiene exactamente n ceros en el intervalo $]0, L[$. \square

Observación 3. *Debe notarse que la condición sobre la no linealidad en la Proposición 1 es equivalente a la condición (7) en [4] dada por*

$$|D(t, x)| < \frac{C}{1 + |x|} \quad \text{para todo } (t, x) \in [0, L] \times \mathbb{R} \text{ y } C > 0,$$

en virtud de que $D(t, x)$ es una función continua en $[0, L] \times \mathbb{R}$. Más aún, el principio de R. Ortega requiere como condición necesaria que $\nu_0 \geq 1$, es decir, que la solución $u_0(t)$ debe tener al menos un cero en el intervalo $]0, L[$ para que la conclusión sea válida. Esto último es consecuencia de la implicación \Leftrightarrow) tal como se evidencia en la demostración anterior.

Con el principio de Ortega ya introducido, es conveniente presentar ahora su extensión para el caso donde la no linealidad $xD(t, x)$ en (2-22) tiene un dominio acotado con respecto a la variable de estado x . Esta extensión se presentó recientemente en [1] en el contexto de la existencia de respuestas periódicas impares en un sistema micro electromecánico electrostático (MEMS) donde la ecuación asociada al dispositivo tiene la estructura de (2-22) y la función $D(t, x)$ tiene dominio $[0, L] \times]-a, a[$ para un cierto a . Es valioso resaltar que $\pm a$ pueden representar singularidades en la ecuación de tal forma que para todo $t \in [0, L]$ se obtiene que $D(t, x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow a^-$ o $x \rightarrow -a^+$, no obstante, en esta discusión no se descarta el caso donde $a = \infty$.

Sea $D : [0, L] \times]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ una función en $C^{0,1}([0, L] \times]-a, a[)$ para $a > 0$ satisfaciendo las simetrías

$$D(-t, x) \equiv D(t, x), \quad D(t, -x) \equiv D(t, x). \quad (2-29)$$

y consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} + xD(t, x) = 0. \quad (2-30)$$

De forma análoga a la discusión anterior, para $v \in \mathbb{R}$ denotamos como $x(t, v)$ a la solución de (2-30) con condiciones iniciales $x(0, v) = 0$ y $\dot{x}(0, v) = v$. No obstante, en este caso las soluciones $x(t, v)$ no necesariamente están definidas para todo $t \in [0, L]$, por tanto, es conveniente ajustar el conjunto de condiciones iniciales y considerar el siguiente conjunto

$$V := \{v \in \mathbb{R} \mid x(t, v) \text{ está definido para todo } t \in [0, L]\}.$$

Debe notarse que $V \neq \emptyset$ en virtud de que $x(t, 0) \equiv 0$ es la solución trivial de la ecuación (2-30), entonces $0 \in V$. Adicionalmente, como consecuencia de la dependencia respecto de condiciones iniciales se tiene que V es un conjunto abierto, luego $V \setminus \{0\} \neq \emptyset$, y se puede definir V_0 como la componente conexa de V tal que $0 \in V_0$ y $v^+ := \sup V_0$ (donde el supremo

se toma sobre los reales extendidos). De las simetrías en (2-29) y de un argumento similar al de la observación 2 se sabe que si $v \in]0, v^+[$ entonces $x(t, v)$ y $x(t, -v)$ son soluciones de (2-30) que están definidas para todo $t \in [0, L]$. Luego, si $v \in V_0 \setminus \{0\}$ se tiene que $-v \in V_0 \setminus \{0\}$ y en consecuencia $v^- := \inf V_0 = -v^+$. En este orden de ideas se puede definir la función número de ceros asociada a la solución $x(t, v)$ de (2-30) como sigue.

Definición 3. Sea $v \in]v^-, v^+[\setminus \{0\}$. La función número de ceros asociada a la solución $x(t, v)$ de (2-30) se define como $\bar{\nu} :]v^-, v^+[\setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de tal forma que

$$\bar{\nu}(v) = |\{t \in]0, L[\mid x(t, v) = 0\}|.$$

De manera similar al caso anterior, la ecuación variacional a lo largo de la solución trivial $x(t, 0) \equiv 0$ de (2-30) está dada por

$$\ddot{u} + D(t, 0)\bar{u} = 0. \quad (2-31)$$

Luego, denotamos por $\bar{u}_0(t)$ a la única solución de (2-31) tal que $\bar{u}_0(0) = 0$ y $\dot{\bar{u}}_0(0) = 1$, y definimos el número de ceros asociado a $\bar{u}_0(t)$ en el intervalo $]0, L[$ como

$$\bar{\nu}_0 := |\{t \in]0, L[\mid \bar{u}_0(t) = 0\}|.$$

En la discusión subsecuente consideraremos que se satisfacen las siguientes condiciones

I) $D(t, x) < D(t, 0)$ para todo $t \in [0, L]$ y $x \in]-a, a[\setminus \{0\}$,

II) Existe $\bar{w} \in]0, v^+[$ tal que $\bar{\nu}(\bar{w}) < \bar{\nu}_0$.

con el fin de obtener un resultado análogo a la Proposición 1 para el problema de Dirichlet asociada a (2-30) dado por

$$\begin{cases} \ddot{x} + xD(t, x) = 0, \\ x(0) = x(L) = 0. \end{cases} \quad (2-32)$$

El siguiente resultado muestra que la función número de ceros $\bar{\nu}$ satisface propiedades similares a las de la función ν dadas en el Lema 5.

Lema 6. La función número de ceros $\bar{\nu}$ satisface:

A) $\bar{\nu}(v) \leq \bar{\nu}_0$ para todo $v \in]v^-, v^+[\setminus \{0\}$.

B) Sea $v \in]v^-, v^+[\setminus \{0\}$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\bar{\nu}(v) \leq \bar{\nu}(w) \leq \bar{\nu}(v) + 1,$$

siempre que $|w - v| \leq \delta$ y $w \in]v^-, v^+[\setminus \{0\}$. Adicionalmente, si $x(L, v) \neq 0$ entonces $\bar{\nu}(w) = \bar{\nu}(v)$ siempre que $|w - v| \leq \delta$ y $w \in]v^-, v^+[\setminus \{0\}$.

C) Existe $w_* \in]0, v^+[$ tal que $\bar{\nu}(v) = \bar{\nu}_0$ para todo v verificando $0 < |v| \leq w_*$.

D) Sea $v \in]v^-, v^+[\setminus \{0\}$, entonces $\bar{v}(-v) = \bar{v}(v)$.

Demostración. A) Sea $v \in]v^-, v^+[$ arbitrario y fijo, entonces la solución $x(t, v)$ de (2-30) está bien definida y satisface que $|x(t, v)| < a$ para todo $t \in [0, L]$, por tanto, es una solución no trivial de la ecuación lineal

$$\ddot{y} + D(t, x(t, v))y = 0.$$

Como consecuencia de la condición I) sobre D , se tiene que un razonamiento similar al empleado en la demostración de la propiedad a) en el Lema 5 implica que $\bar{v}(v) \leq \bar{v}_0$ para todo $v \in]v^-, v^+[$.

B) Consideremos $v \in]v^-, v^+[\setminus \{0\}$ arbitrario y una sucesión $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en $]v^-, v^+[\setminus \{0\}$ tal que $v_k \rightarrow v$. Entonces definiendo $f(t) = x(t, v)$ para todo $t \in [0, L]$ y tomando la sucesión de funciones $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $f_k(t) = x(t, v_k)$ para todo $t \in [0, L]$ y $k \in \mathbb{N}$, se obtiene que un razonamiento similar al empleado en la demostración de la propiedad b) en el Lema 5 (aplicación del Lema 3) implica la conclusión.

C) Sea $v \in]v^-, v^+[$ y $x(t, v)$ la solución de (2-30) con condiciones iniciales $x(0, v) = 0$ y $\dot{x}(0, v) = v$. Si $X = X(t)$, $W : [0, L] \times]-a, a[\times]v^-, v^+[\rightarrow \mathbb{R}^2$ y $Z(t, v)$ se definen como en la demostración de la propiedad c) dada por el Lema 5, entonces el sistema de primer orden asociado a (2-30) está dado por

$$\dot{X} = W(t, X), \tag{2-33}$$

donde en particular $W \in C^1([0, L] \times]-a, a[\times]v^-, v^+[)$. Más aún, si como $Z(t, 0) \equiv 0_{\mathbb{R}^2}$ es la solución trivial de (2-33) entonces del Teorema de Dependencia Continua respecto de Condiciones Iniciales y Parámetros (ver [47], [46]) se sigue que existe $\delta > 0$ tal que $Z(t, v)$ es continuamente diferenciable con respecto a v para $0 \leq |v| < \delta < v^+$ puesto que $v^- = -v^+$ por definición. Luego, un razonamiento análogo a de la discusión en la demostración de la propiedad c) del Lema 5 implica la conclusión.

D) Esta propiedad es consecuencia directa de la discusión previa a la Definición 3. \square

Observación 4. *Debe notarse que por construcción, el comportamiento en los extremos de la función \bar{v} no es exactamente equivalente al comportamiento de la función v . Concretamente, la función \bar{v} no necesariamente debe estacionarse en cero tal como le ocurre a la función v como consecuencia de la propiedad d) dada por el Lema 6. De hecho, el razonamiento empleado en la demostración de la propiedad d) no se puede continuar al caso de la función \bar{v} salvo en el caso donde el conjunto V_0 sea no acotado ($v^+ = \infty$). Sin embargo, como en general $\bar{v}(v) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ para todo $v \in]v^-, v^+[\setminus \{0\}$, se puede afirmar que existe $\bar{v}_{\min} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que*

$$\min_{v \in]0, v^+[} \bar{v}(v) = \bar{v}_{\min}.$$

Ahora, si la condición II) se satisface entonces $0 \leq \bar{v}_{\min} < \bar{v}_0$. Luego, si $\bar{v}_0 \geq 1$ (esto depende directamente del problema considerado) entonces la condición II) puede ser reemplazada por la condición:

III) Existe $w^* \in]0, v^+[$ tal que $\bar{v}(w^*) = 0$.

En efecto, III) implica II) y en este caso $\bar{v}_{\min} = 0$.

Teniendo en cuenta lo anterior, presentamos ahora la extensión del principio de Ortega para ecuaciones que admiten singularidades.

Proposición 2 ([1, Proposición 1, pág. 4]). *Sea $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y consideremos el problema de Dirichlet (2-32) con D verificando la simetrías en (2-29). Supongamos que $\bar{v}_0 \geq 1$ y que se satisfacen las condiciones I) – II). Entonces (2-32) tiene al menos una solución con n ceros en el intervalo $]0, L[$ si y sólo si $\bar{v}_{\min} \leq n < \bar{v}_0$.*

Demostración. \Rightarrow) Sea $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ arbitrario y fijo, y supongamos que existe $v_n \in]v^-, v^+[\setminus \{0\}$ tal que $x_n(t, v_n)$ es una solución de (2-32) que tiene n ceros en el intervalo $]0, L[$. Luego, $\bar{v}(v_n) = n$ y como $|x(t, v_n)| < a$ se obtiene que $x_n(t, v_n)$ es una solución no trivial de la ecuación lineal

$$\ddot{y} + D(t, x_n(t, v_n))y = 0,$$

con $x(0, v_n) = x(L, v_n) = 0$. De la condición I) sobre D se sigue que $D(t, x_n(t, v_n)) < D(t, 0)$ para todo $t \in [0, L]$ salvo en los ceros de $x_n(t, v_n)$. Por tanto, la Teoría de Comparación de Sturm implica que existen $\bar{v}(v) + 1$ subintervalos donde $\bar{u}_0(t)$ tiene al menos un cero, es decir, $\bar{v}_0 \geq \bar{v}(v) + 1 > n$. Finalmente, en virtud de la Observación 4 se tiene que $\bar{v}_{\min} \leq \bar{v}(v) = n < \bar{v}_0$.

\Leftarrow) Consideremos ahora $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\bar{v}_{\min} \leq n < \bar{v}_0$. La demostración en este sentido se basa en las propiedades de la función \bar{v} dadas por el Lema 6 y en un procedimiento de minimización análogo al de la demostración de la Proposición 1.

En virtud de la propiedad D) de la función \bar{v} , definimos el conjunto

$$\bar{S}_n = \{v \in]0, v^+[\mid \bar{v}(v) \leq n\},$$

y como $\bar{v}_{\min} \leq n < \bar{v}_0$ por hipótesis, \bar{S}_n está bien definido y la condición II) implica que $\bar{w} \in \bar{S}_n$. Luego, $\bar{S}_n \neq \emptyset$. Como \bar{S}_n está acotado inferiormente se puede definir $\bar{\omega}_n = \inf \bar{S}_n$. Veremos que de hecho $\bar{\omega}_n = \min \bar{S}_n$.

Sea $w_* \in]0, v^+]$ como en la propiedad C) de la función \bar{v} y $\delta \in]0, w_*[$. Si suponemos que $\bar{\omega}_n = 0$, entonces por propiedades del ínfimo existe $v \in \bar{S}_n$ tal que $v < \delta$, y de la propiedad C) de la función \bar{v} se tiene que $\bar{v}(v) = \bar{v}_0$. Esto es una contradicción puesto que $\bar{v}(v) \leq n < \bar{v}_0$ y por tanto $\bar{\omega}_n > 0$. Más aún, de la propiedad B) y las propiedades de ínfimo se obtiene,

respectivamente, que existe $\delta > 0$ tal que $\bar{\nu}(\bar{\omega}_n) \leq \bar{\nu}(v) \leq \bar{\nu}(\bar{\omega}_n) + 1$ siempre que $|v - \bar{\omega}_n| \leq \delta$, y que existe una sucesión $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en \bar{S}_n tal que $v_k \rightarrow \bar{\omega}_n$ cuando $k \rightarrow \infty$. Lo anterior implica que existe $p_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq p_\delta$ implica que $\bar{\nu}(\bar{\omega}_n) \leq \bar{\nu}(v_k) \leq n$. Luego, $\bar{\nu}(\bar{\omega}_n) \leq n$ y por tanto $\bar{\omega}_n \in \bar{S}_n$.

Por otra parte, de la definición de \bar{S}_n se sabe que si v es tal que $0 < v < \bar{\omega}_n$, entonces necesariamente $\bar{\nu}(v) \geq n + 1$. La propiedad B) de la función $\bar{\nu}$ revela que para $\bar{\omega}_n > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $v > 0$ y $\bar{\omega}_n - \delta \leq v < \bar{\omega}_n$ se obtiene de $\bar{\nu}(v) \leq \bar{\nu}(\bar{\omega}_n) + 1$. Como $\bar{\omega}_n$ es el mínimo de \bar{S}_n se sigue que $\bar{\nu}(v) \leq n + 1$, por tanto, $\bar{\nu}(v) = n + 1$. En consecuencia $\bar{\nu}(\bar{\omega}_n) + 1 \geq n + 1$ y entonces tenemos que de hecho $\bar{\omega}_n = n$. Tomando ahora $v \in \bar{S}_n$ tal que $\bar{\omega}_n < v \leq \bar{\omega}_n + \delta$ se tiene como consecuencia de la propiedad B) que $\bar{\nu}(\bar{\omega}_n) \leq \bar{\nu}(v)$. De la elección de v se tiene que $\bar{\nu}(v) \leq n$ y de la última desigualdad se sigue que $\bar{\nu}(v) \geq n$. Luego, $\bar{\nu}(v) = n$. En síntesis, $\bar{\nu}$ es una función localmente constante cerca de $\bar{\omega}_n$ y cambia su valor en una unidad mediante saltos unitarios que ocurren en $\bar{\omega}_n$.

Finalmente, como para $\bar{\omega}_n$ existe $\delta > 0$ tal que $\bar{\nu}(v) \neq \bar{\nu}(\bar{\omega}_n)$ para algún $v \in]0, v^+[$ que satisface $|v - \bar{\omega}_n| \leq \delta$, se concluye de la propiedad B) que necesariamente $x(L, \bar{\omega}_n) = 0$. Por tanto, $x(t, \bar{\omega}_n)$ es una solución del problema de Dirichlet (2-32) con $\bar{\nu}(\bar{\omega}_n) = n$, es decir, existe una solución del problema de Dirichlet (2-32) con exactamente n ceros en el intervalo $]0, L[$. \square

2.4. Estabilidad lineal de soluciones periódicas impares: bifurcación desde el problema autónomo

El objetivo principal de esta sección es revisar algunos resultados necesarios para estudiar la estabilidad en el sentido lineal de ciertas soluciones periódicas impares de un oscilador no lineal con simetrías. La estrategia para tal estudio es la misma que siguieron los autores en [5] para obtener un criterio sobre la estabilidad lineal/inestabilidad de soluciones periódicas con simetrías y ciertas propiedades nodales, en el contexto del problema de Sitnikov elíptico. Es valioso mencionar que el oscilador no lineal con simetrías considerado en esta sección se modela a través de una ecuación diferencial de segundo orden cuya no linealidad depende de un parámetro δ . Más aún, cuando $\delta = 0$ la ecuación asociada es autónoma, de forma similar al problema de Sitnikov elíptico con el parámetro de excentricidad e (ver [5]).

Concretamente, en [5] se obtiene bajo ciertas condiciones de no degeneración, que algunas soluciones periódicas con simetría par e impar, y con cierta cantidad de ceros, del problema de Sitnikov elíptico que emanan del problema autónomo correspondiente (excentricidad nula, $e = 0$), son respectivamente, estables en el sentido lineal y Lyapunov inestables. La idea fundamental en [5] consiste en garantizar que bajo ciertas condiciones de existencia y no degeneración, la estabilidad lineal/inestabilidad de las soluciones con simetrías puede ser

determinada en ciertos casos por el signo de la derivada de la traza asociada a la ecuación variacional cuando $e = 0$, en virtud de que las correspondientes soluciones periódicas simétricas del problema autónomo son parabólicas inestables.

A continuación se presenta de forma breve una discusión sobre los principales resultados de [5] adaptados al contexto de un oscilador no lineal general con simetrías.

Sea $T > 0$ y consideremos la siguiente ecuación Newtoniana no lineal

$$\ddot{x} + F(t, x, \delta) = 0, \quad (2-34)$$

donde $F(t, x, \delta)$ es una función suave sobre $\mathbb{R} \times]-a, a[\times \mathbb{R}$ con $a > 0$ ($a = \infty$ no está excluido) que satisface las siguientes propiedades:

- i) $F(-t, x, \delta) \equiv F(t, x, \delta)$,
- ii) $F(t, -x, \delta) \equiv -F(t, x, \delta)$,
- iii) $F(t + T, x, \delta) \equiv F(t, x, \delta)$,
- iv) $F(t, x, 0) \equiv f(x)$,
- v) Existe $x_* \in]0, a[$ tal que $f(x_*) = 0$, $f(x) > 0$ para todo $x \in]0, x_*[$ y $f(x) < 0$ para todo $x \in]x_*, a[$.

2.4.1. Preliminares del caso autónomo

Debe notarse que de la definición de $F(t, x, \delta)$ se sigue que $f :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$, y de las propiedades ii) – iv) se obtiene que $f(-x) \equiv -f(x)$. Más aún, la propiedad iv) implica que cuando $\delta = 0$ la ecuación (2-34) se transforma en la ecuación autónoma

$$\ddot{x} + f(x) = 0. \quad (2-35)$$

Ahora, en virtud de que f es impar (lo que implica que $f(0) = 0$) se tiene que la propiedad v) garantiza la existencia de exactamente tres equilibrios de la ecuación (2-35): $x = 0$ y $x = \pm x_*$. Adicionalmente, la propiedad v) garantiza que la energía potencial asociada a (2-35) alcanza un valor mínimo en $x = 0$ y un valor máximo en $x = \pm x_*$. El siguiente lema presenta de manera concreta las observaciones anteriores. Sea $U :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ definida de tal forma que para todo $x \in]-a, a[$

$$U'(x) = f(x).$$

Lema 7. *La función U tiene las siguientes propiedades:*

- I) $U(-x) \equiv U(x)$,

II) $U'(x) > 0$ para todo $x \in]-a, -x_*[\cup]0, x_*[$, $U'(x) < 0$ para todo $x \in]-x_*, 0[\cup]x_*, a[$,
 $U'(0) = 0$ y $U'(\pm x_*) = 0$.

Demostración. Dado que F es una función suave en su dominio, se puede asumir que al menos $f \in C^1(]-a, a[)$, por tanto, $U \in C^2(]-a, a[)$. Luego, como consecuencia de la definición de U y el hecho de que f es una función impar se obtiene la propiedad I). Adicionalmente, de la propiedad v) y el hecho de que f es impar se obtiene que $f(0) = 0$, $-f(x_*) = f(-x_*) = 0$, $f(x) > 0$ para todo $x \in]-a, -x_*[\cup]0, x_*[$ y $f(x) < 0$ para todo $x \in]-x_*, 0[\cup]x_*, a[$. De esta forma, $U'(0) = U'(\pm x_*) = 0$, $U'(x) > 0$ para todo $x \in]-a, -x_*[\cup]0, x_*[$ y $U'(x) < 0$ para todo $x \in]-x_*, 0[\cup]x_*, a[$. \square

Consideremos ahora el cambio de variable $y = \dot{x}$, entonces el sistema de primer orden asociado a (2-35) es un sistema Hamiltoniano de un grado de libertad de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y = H_y(x, y) \\ \dot{y} = \ddot{x} = -f(x) = -H_x(x, y) \end{cases} \quad (2-36)$$

donde

$$H(x, y) := \frac{y^2}{2} + U(x), \quad (2-37)$$

La función H es conocida como función Hamiltoniana o energía total asociada al sistema (2-36) y U es conocida como energía potencial del sistema. De la teoría clásica para este tipo de sistemas se sigue que cualquier solución $(x(t), y(t))$ de (2-36) vive en una curva de nivel de H (en otras palabras, dada $(x(t), y(t))$ una trayectoria de (2-36), existe h constante tal que $H(x(t), y(t)) = h$ para todo t). Más aún, el Hamiltoniano H satisface las siguientes simetrías en virtud del Lema 7

$$H(-x, y) \equiv H(x, y) \equiv H(x, -y), \quad (2-38)$$

por tanto, las órbitas en el retrato de fase asociado a (2-36) son curvas simétricas con respecto a ambos ejes x, y .

El siguiente resultado caracteriza los puntos de equilibrio del sistema Hamiltoniano (2-36).

Lema 8. *El sistema Hamiltoniano (2-36) tiene exactamente tres puntos de equilibrio: $(0, 0)$, $(\pm x_*, 0)$. Más aún, $(0, 0)$ es un centro y $(\pm x_*, 0)$ son sillas.*

Demostración. Este resultado es consecuencia directa del Lema 7 y el Teorema 3 de la Sección 2.14 en [48]. De forma concreta, este último resultado establece que los puntos de equilibrio del sistema (2-36) son de la forma $(\bar{x}, 0)$ donde $f(\bar{x}) = 0$ y dado que $f \in C^1(]-a, a[)$, se tiene que el punto de equilibrio $(\bar{x}, 0)$ es: un centro si \bar{x} es un valor de mínimo local de U y una silla si \bar{x} es un valor de máximo local de U . \square

Es valioso mencionar que de la definición de un centro en el origen para un sistema no lineal (ver [48]), se sigue que existe $\delta > 0$ tal que si B_δ denota el entorno del origen de radio δ , entonces cada trayectoria de (2-36) en $B_\delta \setminus \{(0, 0)\}$ es una órbita cerrada que tiene al origen en su interior. De hecho, se sabe que existe un continuo de órbitas cerradas en la vecindad B_δ que dan origen a un conjunto de especial interés llamado anillo de periodo.

Definición 4. *El anillo de periodo generado por el centro del sistema Hamiltoniano (2-36) se define como la mayor vecindad de $(0, 0)$ que se encuentra totalmente cubierta por órbitas cerradas (ver [49]).*

Por otra parte, como $(0, 0)$ y $(\pm x_*, 0)$ son los únicos equilibrios de (2-36) y además $H(x_*, 0) = H(-x_*, 0)$ como consecuencia de las simetrías en (2-38), se concluye que existen dos órbitas heteroclinas conectando los equilibrios silla en $(\pm x_*, 0)$ (ver [48]). Una rápida inspección gráfica del retrato de fase asociado permite verificar esta afirmación en virtud de que el sistema es conservativo.

Observación 5. *Como consecuencia directa de la discusión anterior, se tiene que el anillo de periodo del centro del sistema (2-36) está acotado y se encuentra contenido en el interior de la región cuya frontera es la unión de las órbitas heteroclinas que conectan los equilibrios $(\pm x_*, 0)$.*

Debe notarse ahora que en esta sección es de interés estudiar las órbitas en el anillo de periodo del origen que corresponden a soluciones periódicas no constantes de la ecuación (2-35), por tanto, es conveniente introducir a continuación algunas constantes que permiten delimitar el anillo de periodo. Dado que el nivel de energía del origen es $H(0, 0) = 0$ y que el nivel de energía de los equilibrios silla $(\pm x_*, 0)$ es $H(x_*, 0) = U(x_*) > 0$ (ver Lema 7), se define el nivel crítico de energía h_* de tal forma que

$$h_* := U(x_*) = \max_{x \in]-a, a[} U(x), \quad (2-39)$$

de donde se obtiene que la unión de las órbitas cerradas en el anillo de periodo del centro $(0, 0)$ forma el siguiente conjunto

$$\mathcal{P} := \{(x(t), \dot{x}(t)) \mid t \in \mathbb{R}, (x(t), \dot{x}(t)) \text{ es solución de (2-36) con } H(x(t), \dot{x}(t)) \equiv h \text{ para } 0 < h < h_*\}. \quad (2-40)$$

Además, de las simetrías en (2-38) se sabe que, si una órbita en \mathcal{P} interseca al eje x en el plano de fase en el punto $(\zeta, 0)$, también lo interseca en el punto $(-\zeta, 0)$. De forma análoga, si una órbita en \mathcal{P} interseca al eje y en el plano de fase en el punto $(0, \eta)$, también lo interseca en $(0, -\eta)$. Luego, si $(x(t), \dot{x}(t)) \in \mathcal{P}$ tiene nivel de energía $h \in]0, h_*[$, su proyección sobre el semieje positivo x se define como $\zeta = \zeta(h)$ de tal forma que

$$H(\zeta, 0) = U(\zeta) = h,$$

y su proyección sobre el semieje positivo y se define como $\eta = \eta(h)$ de tal forma que

$$H(0, \eta) = \frac{\eta^2}{2} = h.$$

Sea

$$\eta_* := \sqrt{2U(x_*)}, \quad (2-41)$$

entonces de la definición de $\zeta = \zeta(h)$ y $\eta = \eta(h)$ se sigue que el conjunto \mathcal{P} se puede expresar de la siguiente manera

$$\mathcal{P} := \{(x(t), \dot{x}(t)) \mid t \in \mathbb{R}, (x(t), \dot{x}(t)) \text{ es solución de (2-36) con } 0 < \zeta < x_*\},$$

o equivalentemente

$$\mathcal{P} := \{(x(t), \dot{x}(t)) \mid t \in \mathbb{R}, (x(t), \dot{x}(t)) \text{ es solución de (2-36) con } 0 < \eta < \eta_*\},$$

Finalmente, en virtud de que las órbitas en \mathcal{P} son cerradas y a cada órbita le corresponde un nivel de energía distinto, se puede asociar a cada una de ellas un tiempo mínimo de retorno como función del nivel de energía h . Este tiempo mínimo de retorno se conoce como el periodo minimal de la órbita cerrada.

Definición 5. Sea $(x(t), \dot{x}(t)) \in \mathcal{P}$ con nivel de energía $h \in]0, h_*[$. El periodo minimal de esta órbita cerrada se define como el menor número real positivo $\mathcal{T}(h)$ tal que

$$(x(t + \mathcal{T}(h)), \dot{x}(t + \mathcal{T}(h))) = (x(t), \dot{x}(t)),$$

se satisface para todo t .

Observación 6. Es posible obtener una expresión explícita para la función \mathcal{T} empleando la ecuación en (2-37) y una órbita cerrada de (2-36) con condiciones iniciales $(\zeta(h), 0)$. En la sección 3.4.1 se proporciona una expresión para la función de periodo \mathcal{T} en el contexto del oscilador tipo MEMS (2-5).

2.4.2. Soluciones periódicas simétricas en el problema autónomo

Para $\eta \in]0, \eta_*[$, donde η_* está dado por (2-41), se denota por $S(t, \eta)$ a la solución de (2-35) que satisface las siguiente condiciones iniciales

$$(S(0, \eta), \dot{S}(0, \eta)) = (0, \eta). \quad (2-42)$$

Entonces $S(t, \eta)$ es una solución periódica de (2-35) con periodo minimal

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(h) \quad \text{para} \quad h = \frac{\eta^2}{2}. \quad (2-43)$$

Más aún, la solución $S(t, \eta)$ verifica las siguientes simetrías

$$S(-t, \eta) \equiv -S(t, \eta), \quad S(t + \mathcal{T}/2, \eta) \equiv -S(t, \eta), \quad (2-44)$$

y para todo $t \in]0, \frac{\mathcal{T}}{4}[$ satisface que

$$S(t, \eta) > 0 \quad \text{y} \quad \dot{S}(t, \eta) > 0. \quad (2-45)$$

En efecto, de la elección de η se sabe que $(S(t, \eta), \dot{S}(t, \eta)) \in \mathcal{P}$ es la única solución de (2-36) con condiciones iniciales (2-42), y de la discusión en la sección anterior se sigue que esta solución tiene periodo minimal \mathcal{T} dado por (2-43). Luego

$$S(t + \mathcal{T}, \eta) \equiv S(t, \eta). \quad (2-46)$$

Consideremos ahora $y(t, \eta) = -S(t, \eta)$ y $z(t, \eta) = S(-t, \eta)$. Entonces $y(0, \eta) = z(0, \eta) = 0$, $\dot{y}(0, \eta) = \dot{z}(0, \eta) = -\eta$ y de la simetría de la función f se tiene que $y(t, \eta)$, $z(t, \eta)$ son soluciones de la ecuación (2-35). Por unicidad de soluciones se concluye que necesariamente $y(t, \eta) \equiv z(t, \eta)$, por tanto, la primera simetría en (2-44) se satisface.

Por otra parte, de (2-46) se obtiene

$$S(t + \mathcal{T}/2, \eta) \equiv S(t - \mathcal{T}/2, \eta) \equiv -S(\mathcal{T}/2 - t, \eta), \quad (2-47)$$

y entonces $S(\mathcal{T}/2, \eta) = 0$. Dado que $(S(t, \eta), \dot{S}(t, \eta))$ satisface para todo $t \in \mathbb{R}$ la siguiente ecuación

$$H(S(t, \eta), \dot{S}(t, \eta)) = h = \frac{\eta^2}{2}, \quad (2-48)$$

se concluye que $\dot{S}^2(\mathcal{T}/2, \eta) = \eta^2$. Si se supone que $\dot{S}(\mathcal{T}/2, \eta) = \eta$ entonces se llega a una contradicción en virtud de que $S(t, \eta)$ tendría periodo minimal $\frac{\mathcal{T}}{2}$. Por tanto, $\dot{S}(\mathcal{T}/2, \eta) = -\eta$ y de la unicidad de soluciones se sigue la segunda simetría en (2-44).

Debe notarse que de la discusión anterior es claro que $S(0, \eta) = S(\mathcal{T}/2, \eta) = 0$ y que $S(t, \eta) > 0$ para todo $t \in]0, \frac{\mathcal{T}}{2}[$, puesto que si se asume que existe $t_* \in]0, \frac{\mathcal{T}}{2}[$ tal que $S(t_*, \eta) = 0$ entonces $S(t, \eta)$ tendría periodo minimal $2t_* < \mathcal{T}$. Más aún, de las simetrías en (2-44) se tiene que

$$\dot{S}(-t, \eta) \equiv \dot{S}(t, \eta) \quad \text{y} \quad \dot{S}(t + \mathcal{T}/2, \eta) \equiv -\dot{S}(t, \eta), \quad (2-49)$$

luego

$$\dot{S}(t + \mathcal{T}/4, \eta) \equiv -\dot{S}(t - \mathcal{T}/4, \eta) \equiv -\dot{S}(\mathcal{T}/4 - t, \eta),$$

de donde se sigue que $\dot{S}(\mathcal{T}/4, \eta) = 0$. Así, la condición v), la definición de $S(t, \eta)$ y el hecho de que $S(t, \eta) > 0$ para todo $t \in]0, \frac{\mathcal{T}}{2}[$ implican que $\ddot{S}(t, \eta) = -f(t, S(t, \eta)) < 0$ para todo $t \in]0, \frac{\mathcal{T}}{4}[$. Luego, $\dot{S}(t, \eta)$ es una función uno a uno estrictamente decreciente sobre $]0, \frac{\mathcal{T}}{4}[$ con $\dot{S}(0, \eta) > 0$ y $\dot{S}(\mathcal{T}/4, \eta) = 0$, por tanto, no se puede anular en el interior del intervalo $]0, \frac{\mathcal{T}}{4}[$.

De forma análoga, para $\zeta \in]0, x_*[$ se denota como $C(t, \zeta)$ a la solución de (2-35) que satisface las siguientes condiciones iniciales

$$(C(0, \zeta), \dot{C}(0, \zeta)) = (\zeta, 0).$$

Entonces $C(t, \zeta)$ es una solución periódica de (2-35) con periodo minimal

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(h) \quad \text{para } h = U(\zeta).$$

Más aún, la solución $C(t, \zeta)$ satisface que

$$C(-t, \zeta) \equiv C(t, \zeta), \quad C(t + \tau/2, \zeta) \equiv -C(t, \zeta), \quad (2-50)$$

y que para todo $t \in]0, \frac{\tau}{4}[$

$$C(t, \zeta) > 0 \quad \text{y} \quad \dot{C}(t, \zeta) < 0. \quad (2-51)$$

Un razonamiento similar al anterior permite demostrar las simetrías en (2-50) y (2-51). De hecho, las soluciones $S(t, \eta)$ y $C(t, \zeta)$ son llamadas $\frac{\tau}{2}$ -antiperiódicas en virtud de las últimas simetrías en (2-44) y (2-50). El siguiente lema presenta de forma explícita la estrecha relación entre $S(t, \eta)$ y $C(t, \zeta)$.

Lema 9. *Sean η, ζ tales que*

$$\frac{\eta^2}{2} = h = U(\zeta),$$

y $\mathcal{T} = \mathcal{T}(h)$ donde $h \in]0, h_[$. Entonces las soluciones $S(t, \eta)$ y $C(t, \zeta)$ de (2-35) satisfacen que*

$$S(t + \tau/4, \eta) \equiv C(t, \zeta) \quad \text{y} \quad C(t + \tau/4) \equiv -S(t, \eta).$$

Demostración. Debe notarse en primer lugar que $-S(t, \eta)$, $S(t + \tau/4, \eta)$, $C(t, \zeta)$ y $C(t + \tau/4, \zeta)$ son soluciones de la ecuación autónoma (2-35). Luego, empleando las simetrías en (2-44) y (2-50) es posible probar que $S(t + \tau/4, \eta)$ y $C(t + \tau/4, \zeta)$ satisfacen, respectivamente, las mismas condiciones iniciales que $C(t, \zeta)$ y $-S(t, \eta)$ en $t = 0$. La conclusión se sigue de la unicidad de estas últimas soluciones. \square

2.4.3. Traza de la ecuación de Hill

En esta sección se introduce un resultado fundamental para la discusión presentada en [5] y que proporciona una expresión de la derivada de la traza asociada a una ecuación de Hill (ver sección 2.2.2). De hecho, este resultado fue obtenido primeramente en [13] como consecuencia de las fórmulas en [33] sobre las derivadas de las soluciones canónicas $\psi_i(t) = \psi_i(t, q)$ (y sus derivadas $\dot{\psi}_i(t) = \dot{\psi}_i(t, q)$) de la ecuación de Hill como funcionales no lineales del potencial q (para $i = 1, 2$).

Consideremos la ecuación de Hill (2-17) con $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función T -periódica localmente Lebesgue integrable. Entonces como funcional no lineal del potencial q , la traza $Tr(q)$ asociada a la ecuación (2-17), es continuamente Fréchet diferenciable en $q \in (L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})})$ (denotado por simplicidad como $L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$). El siguiente lema presenta la derivada de Fréchet de $Tr(q)$.

Lema 10 ([5, Lema 2.2, pág. 1276]). *La derivada de Fréchet de la traza $Tr : L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ en q está dada por*

$$\frac{\partial Tr(q)}{\partial q}(h) = \int_0^T K(t)h(t)dt, \quad \forall h \in L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}),$$

donde

$$K(t) := -\psi_2(T)\psi_1^2(t) + (\psi_1(T) - \dot{\psi}_2(T))\psi_1(t)\psi_2(t) + \dot{\psi}_1(T)\psi_2^2(t). \quad (2-52)$$

2.4.4. Linealización de la ecuación autónoma

La idea principal de esta sección es relacionar las soluciones periódicas impares de (2-35) y su correspondiente función de periodo $\mathcal{T}(h)$ con las soluciones canónicas de la ecuación variacional y la matriz de Poincaré asociada.

Sea $S(t, \eta)$ la solución periódica impar de (2-35) (con condiciones iniciales y periodo minimal $\mathcal{T} = \mathcal{T}(h)$ como en (2-42) y (2-43), respectivamente). Entonces la ecuación variacional asociada a (2-35) a lo largo de la solución $S(t, \eta)$ es la ecuación de Hill

$$\ddot{u} + q(t)u = 0, \quad (2-53)$$

donde el potencial $q(t)$ es una función \mathcal{T} -periódica y continua dada por

$$q(t) := f'(S(t, \eta)).$$

Observación 7. *Dado que la solución $S(t, \eta)$ es $\frac{\mathcal{T}}{2}$ -antiperiódica (ver (2-44)) y que f' es un función par, en virtud de que f es impar, se concluye que el potencial q en (2-53) tiene, de hecho, periodo minimal $\frac{\mathcal{T}}{2}$.*

El siguiente lema relaciona la solución $S(t, \eta)$ con las soluciones canónicas de (2-53).

Lema 11. *Sean $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ las soluciones canónicas de (2-53). Entonces*

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &\equiv \frac{1}{\eta} \frac{\partial S(t, \eta)}{\partial t} \Big|_{(t, \eta)}, & \dot{\psi}_1(t) &\equiv -\frac{f(S(t, \eta))}{\eta}, \\ \psi_2(t) &\equiv \frac{\partial S(t, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{(t, \eta)} & \text{y} & \dot{\psi}_2(t) \equiv \frac{\partial^2 S(t, \eta)}{\partial t \partial \eta} \Big|_{(t, \eta)}. \end{aligned}$$

Demostración. Por definición, la solución $S(t, \eta)$ de (2-35) satisface

$$\ddot{S}(t, \eta) + f(S(t, \eta)) = 0 \quad \text{y} \quad (S(0, \eta), \dot{S}(0, \eta)) = (0, \eta). \quad (2-54)$$

Luego, si para η fijo se define

$$y_1(t) := \frac{1}{\eta} \frac{\partial S(t, \eta)}{\partial t} \Big|_{(t, \eta)},$$

se sigue que al derivar con respecto a t la primera expresión en (2-54)

$$\ddot{y}_1(t) + f'(S(t, \eta))y_1(t) = 0,$$

y además

$$(y_1(0), \dot{y}_1(0)) = (\eta, -f(S(0, \eta))) = (1, 0).$$

De esta forma, $y_1(t)$ es una solución de (2-53) con las mismas condiciones iniciales que $\psi_1(t)$. De la unicidad de soluciones se sigue que necesariamente

$$\psi_1(t) \equiv y_1(t) \quad \text{y} \quad \dot{\psi}_1(t) \equiv \dot{y}_1(t) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 S(t, \eta)}{\partial t^2} \Big|_{(t, \eta)} \equiv -\frac{f(S(t, \eta))}{\eta}.$$

Por otra parte, dado que $f \in C^1([-a, a])$, se tiene del Teorema de Dependencia Continua respecto de Condiciones Iniciales y Parámetros que la solución $S(t, \eta)$ es continuamente diferenciable con respecto a η y dos veces continuamente diferenciable con respecto a t . Por tanto, si se define para cada η fijo

$$y_2(t) := \frac{\partial S(t, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{(t, \eta)},$$

se tiene que

$$\frac{\partial^2 S(t, \eta)}{\partial t \partial \eta} \Big|_{(t, \eta)} \equiv \frac{\partial^2 S(t, \eta)}{\partial \eta \partial t} \Big|_{(t, \eta)},$$

y entonces al derivar con respecto a η la primera expresión en (2-54)

$$\ddot{y}_2(t) + f'(S(t, \eta))y_2(t) = 0,$$

con

$$(y_2(0), \dot{y}_2(0)) = (0, 1).$$

Así, $y_2(t)$ es una solución de (2-53) con las mismas condiciones iniciales que $\psi_2(t)$. Por tanto

$$\psi_2(t) \equiv y_2(t) \quad \text{y} \quad \dot{\psi}_2(t) \equiv \dot{y}_2(t) \equiv \frac{\partial^2 S(t, \eta)}{\partial t \partial \eta} \Big|_{(t, \eta)}.$$

□

En virtud de la Observación 7, consideremos ahora las matrices de Poincaré \hat{P} y \hat{P}_n asociadas a (2-53) para los periodos $\frac{T}{2}$ y $\frac{nT}{2}$ ($n \in \mathbb{N}$), respectivamente. Entonces por definición

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \psi_1(T/2) & \psi_2(T/2) \\ \dot{\psi}_1(T/2) & \dot{\psi}_2(T/2) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{P}_n = \begin{bmatrix} \psi_1(nT/2) & \psi_2(nT/2) \\ \dot{\psi}_1(nT/2) & \dot{\psi}_2(nT/2) \end{bmatrix}.$$

Lema 12. Para $n \in \mathbb{N}$ sean

$$\hat{b} = \psi_2(T/2) \quad \text{y} \quad \hat{b}_n = \psi_2(nT/2). \tag{2-55}$$

Entonces

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} -1 & \hat{b} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{P}_n = \begin{bmatrix} (-1)^n & \hat{b}_n \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}, \quad (2-56)$$

y

$$\hat{b}_n = (-1)^{n+1} n \hat{b}. \quad (2-57)$$

Demostración. Como la solución $S(t, \eta)$ es $\frac{\mathcal{T}}{2}$ -antiperiódica y continuamente diferenciable con respecto a η , se sigue de las segundas simetrías en (2-44) y (2-49), y del Lema 11 que

$$\psi_1(t) \equiv \frac{1}{\eta} \frac{\partial S(t, \eta)}{\partial t} \Big|_{(t, \eta)} \equiv -\frac{\dot{S}(t - \mathcal{T}/2, \eta)}{\eta}, \quad \dot{\psi}_1(t) \equiv \frac{f(-S(t, \eta))}{\eta} \equiv \frac{f(S(t - \mathcal{T}/2, \eta))}{\eta},$$

y

$$\dot{\psi}_2 \equiv \frac{\partial^2 S(t, \eta)}{\partial t \partial \eta} \Big|_{(t, \eta)} \equiv \frac{\partial^2 S(t, \eta)}{\partial \eta \partial t} \Big|_{(t, \eta)} \equiv -\frac{\partial \dot{S}(t - \mathcal{T}/2, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{(t, \eta)}.$$

Luego, $\psi_1(\mathcal{T}/2) = -\frac{1}{\eta} \dot{S}(0, \eta) = -1$, $\dot{\psi}_1(\mathcal{T}/2) = \frac{f(S(0, \eta))}{\eta} = 0$ y $\dot{\psi}_2(\mathcal{T}/2) = -\frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{S}(0, \eta)) = -1$ (la última igualdad también se sigue del hecho de que $\det \hat{P} = 1$ como consecuencia del Teorema de Liouville). De la definición de \hat{b} se obtiene la primer igualdad en (2-56).

Debe notarse que

$$\hat{P} = A + B,$$

donde $A = -I_2$, I_2 es la matriz identidad de orden 2 y

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \hat{b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Más aún, de la definición de \hat{P}_n se tiene que

$$\hat{P}_n = \hat{P}^n = \begin{bmatrix} -1 & \hat{b} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^n,$$

y dado que la matriz A es involutiva, la matriz B es nilpotente de orden 2 y además $AB = BA$, se obtiene del Teorema del Binomio para matrices que

$$\hat{P}^n = A^n + \frac{n!}{(n-1)!} A^n A B = \begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1} n \hat{b} \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}.$$

□

El último lema de esta sección relaciona la componente \hat{b}_n de la matriz \hat{P}_n con la función de periodo $\mathcal{T}(h)$ como sigue.

Lema 13. *Supongamos que $\mathcal{T}(h)$ es diferenciable en h , para $h \in]0, h_*[$. Entonces*

$$\hat{b}_n = (-1)^{n+1}nh\mathcal{T}'(h), \quad (2-58)$$

donde $h = \frac{\eta^2}{2}$.

Demostración. Consideremos la solución impar $S(t, \eta)$ de (3-24) con periodo minimal $\mathcal{T}(h)$, entonces $h = h(\eta) = \frac{\eta^2}{2}$ y dado que $h \in]0, h_*[$ se tiene por definición de η_* (ver (2-41)) que $\eta \in]0, \eta_*[$. Luego, de la segunda simetría en (2-44) se sigue que para todo $\eta \in]0, \eta_*[$

$$S(\mathcal{T}(h(\eta))/2, \eta) = 0. \quad (2-59)$$

En virtud de que $S(t, \eta)$ es continuamente diferenciable con respecto a η y de la hipótesis sobre $\mathcal{T}(h)$, se tiene que al derivar (2-59) con respecto a η

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S(t, \eta)}{\partial t} \Big|_{(\mathcal{T}(h)/2, \eta)} \frac{dT(h)}{dh} \Big|_h \frac{dh(\eta)}{d\eta} \Big|_\eta + \frac{\partial S(t, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{(\mathcal{T}(h)/2, \eta)} \equiv 0$$

Ahora, de la demostración del Lema 12 se tiene que

$$\eta\psi_1(\mathcal{T}(h)/2) = \frac{\partial S(t, \eta)}{\partial t} \Big|_{(\mathcal{T}(h)/2, \eta)} = -\dot{S}(0, \eta) = -\eta,$$

y entonces del Lema 11

$$\psi_2(\mathcal{T}(h)/2) = \frac{\partial S(t, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{(\mathcal{T}(h)/2, \eta)} \equiv \frac{\eta^2}{2} \frac{dT(h)}{dh} \Big|_h \equiv h\mathcal{T}'(h) \quad (2-60)$$

La igualdad en (2-58) se sigue de la definición de \hat{b} en (2-55) al reemplazar la expresión (2-60) en (2-57). \square

Es valioso resaltar que la demostración del Lema 2-58 implica que

$$\hat{b} = h\mathcal{T}'(h),$$

y entonces de la relación (2-57) se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\hat{b}_n \neq 0 \iff \mathcal{T}'(h) \neq 0. \quad (2-61)$$

Observación 8. *Si $\hat{b}_2 \neq 0$ entonces la ecuación de Hill (2-53) es parabólica inestable puesto que la matriz de Poincaré en $\mathcal{T} = \mathcal{T}(h)$ es*

$$\hat{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \hat{b}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y por tanto $S(t, \eta)$ es parabólica inestable con $Tr = 2$.

Observación 9. La condición $\mathcal{T}'(h) \neq 0$ implica que $S(t, \eta)$ es Lyapunov inestable en virtud de que cada órbita cerrada contenida en una vecindad de la solución $X(t) := (S(t, \eta), \dot{S}(t, \eta))$ de (2-36) debe tener periodo minimal distinto a $\mathcal{T}(h)$. Concretamente, si $X(t)$ tiene energía h_0 , entonces para h próximo a h_0 existe una órbita periódica $Y(t)$ con periodo $\mathcal{T}(h)$ que es no conmensurable con $\mathcal{T}(h_0)$. Luego, el Teorema 10 implica que el conjunto $\{Y(n\mathcal{T}(h_0)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ es denso en el rango de la órbita puesto que $\{n\mathcal{T}(h_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ módulo en el intervalo $[0, \mathcal{T}(h)]$ es un conjunto denso en $[0, \mathcal{T}(h)]$. En particular, se tendrá una subsucesión próxima a un punto alejado de $X(0)$, lo que contradice la estabilidad de $X(t)$ como órbita $\mathcal{T}(h_0)$ -periódica.

2.4.5. Bifurcación de soluciones periódicas impares desde el problema autónomo

El resultado principal de esta sección afirma que si la ecuación autónoma (2-35) admite una solución periódica impar $\phi(t)$ (con ciertas propiedades nodales), entonces bajo ciertas condiciones de no degeneración y para $0 < \delta \ll 1$, existe una solución periódica impar $\phi(t, \delta)$ de (2-34) que emana de $\phi(t)$ satisfaciendo que $\phi(t, 0) \equiv \phi(t)$ y preservando las correspondientes propiedades nodales (Teorema 2). A continuación introducimos algunas definiciones necesarias para la discusión de esta sección.

Definición 6. Sean $m, p \in \mathbb{N}$. Una solución periódica $x(t)$ de (2-34) se dice (m, p) -periódica si $x(t)$ es mT -periódica y tiene $2p$ ceros en el intervalo $[t_0, t_0 + mT[$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$.

Observación 10. Si $x(t)$ es una solución (m, p) -periódica impar de (2-34) entonces $x(t)$ tiene exactamente $p - 1$ ceros en el intervalo $]0, \frac{mT}{2}[$. Más aún, si $p = 1$ entonces $x(t)$ tiene periodo minimal mT .

A lo largo de esta sección se considera que el siguiente enunciado se satisface: dados $m, p \in \mathbb{N}$ y T apropiados, existe $h_{m,p} \in]0, h_*[$ tal que la ecuación autónoma (2-35) admite una solución impar $\phi_{m,p}(t)$ que tiene periodo minimal $\mathcal{T}_{m,p}$ con

$$\mathcal{T}_{m,p} := \mathcal{T}(h_{m,p}) = \frac{mT}{p}. \quad (2-62)$$

De esta forma, si se define

$$\eta_{m,p} := \sqrt{2h_{m,p}}, \quad (2-63)$$

entonces

$$\phi_{m,p}(t) \equiv S(t, \eta_{m,p}), \quad (2-64)$$

con $\phi_{m,p}(t)$ verificando las siguientes propiedades:

$$I) (\phi_{m,p}(0), \dot{\phi}_{m,p}(0)) = (0, \eta_{m,p}),$$

$$II) \phi_{m,p}(t + \mathcal{T}_{m,p}/2) \equiv -\phi_{m,p}(t),$$

III) $\phi_{m,p}(t) > 0$ para todo $t \in]0, \frac{\mathcal{T}_{m,p}}{4}[$,

IV) $\dot{\phi}_{m,p}(t) > 0$ para todo $t \in]0, \frac{\mathcal{T}_{m,p}}{4}[$,

V) $\phi_{m,p}(t)$ es una solución (m, p) -periódica impar de (2-35),

VI) $\phi_{m,p}(t)$ tiene exactamente $p - 1$ ceros en el intervalo $]0, \frac{mT}{2}[$.

En efecto, las propiedades I)-IV) se siguen de (2-64) y de la definición de $S(t, \eta)$. La propiedad V) es consecuencia directa de las simetrías en (2-38) puesto que la órbita cerrada $(\phi_{m,p}(t), \dot{\phi}_{m,p}(t))$ de (2-36) (que satisface (2-48)) interseca el eje $x = 0$ exactamente dos veces en el intervalo $[0, \mathcal{T}_{m,p}[$ (es decir, en un periodo de tiempo de la órbita). Por tanto, $\phi_{m,p}(t)$ es una solución mT -periódica impar de (2-35) con exactamente $2p$ -ceros en el intervalo $[0, mT[$. La propiedad VI) se sigue de la propiedad I) y del hecho de que $\phi_{m,p}(t)$ tiene exactamente un cero en el intervalo $[0, \frac{\mathcal{T}_{m,p}}{2}[$.

Consideremos ahora para $\eta > 0$ y $\delta \geq 0$ la función $X(t, \eta, \delta)$ definida como la solución impar de (2-34) con condición inicial

$$\left(X(0, \eta, \delta), \dot{X}(0, \eta, \delta) \right) = (0, \eta).$$

Luego, para $\delta=0$ se sigue de la definición de $S(t, \eta_{m,p})$ y la identidad en (2-64) que

$$X(t, \eta_{m,p}, 0) \equiv \phi_{m,p}(t), \quad (2-65)$$

y entonces la propiedad V) conduce a

$$X(mT/2, \eta_{m,p}, 0) = 0, \quad (2-66)$$

puesto que

$$\phi_{m,p}(mT/2) = -\phi_{m,p}(mT/2).$$

La siguiente observación ilustra la dependencia de la solución $\phi_{m,p}(t)$ con respecto a los parámetros (m, p) y su periodo minimal $\mathcal{T}_{m,p}$.

Observación 11. De la definición de $h_{m,p}$ y $\mathcal{T}_{m,p}$ en (2-62) se tiene que para $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{T}(h_{m,p}) = \frac{mT}{p} = \mathcal{T}(h_{nm,np}).$$

De esta manera, si se asume que la función de periodo $\mathcal{T}(h)$ es uno a uno en su dominio, entonces $h_{m,p} = h_{nm,np}$ y

$$\phi_{m,p}(t) \equiv \phi_{nm,np}(t).$$

En virtud de la discusión anterior, a continuación se presenta el resultado principal de esta sección.

Teorema 2. Sean $m, p \in \mathbb{N}$, $h_{m,p} \in]0, h_*[$ y $\eta_{m,p} = \sqrt{2h_{m,p}}$. Si $\mathcal{T}(h)$ es diferenciable en $h = h_{m,p}$ con

$$\mathcal{T}'(h_{m,p}) \neq 0, \quad (2-67)$$

entonces existe $\delta_{m,p} > 0$ y una única función continuamente diferenciable $\Delta_{m,p}(\delta)$ para $\delta \in [0, \delta_{m,p}[$ de tal forma que $\Delta_{m,p}(0) = \eta_{m,p}$ y

$$X(mT/2, \Delta_{m,p}(\delta), \delta) = 0, \quad \forall \delta \in [0, \delta_{m,p}[. \quad (2-68)$$

Más aún, si para $\delta \in [0, \delta_{m,p}[$ se define

$$\phi_{m,p}(t, \delta) := X(t, \Delta_{m,p}(\delta), \delta), \quad (2-69)$$

entonces $\phi_{m,p}(t, \delta)$ es una solución (m, p) -periódica impar de (2-34).

Demostración. Debe notarse que (2-64) y (2-65) implican

$$X(t, \eta_{m,p}, 0) \equiv S(t, \eta_{m,p}),$$

y que de (2-62) se obtiene

$$\frac{mT}{2} = p \frac{\mathcal{T}_{m,p}}{2}.$$

Por otra parte, dado que por hipótesis la función $F(t, x, \delta)$ en (2-34) es al menos C^1 en su dominio, del Teorema de Dependencia Continua respecto de Condiciones y Parámetros (ver [47], [46]) se deduce que $X(t, \eta, \delta)$ es una función continuamente diferenciable con respecto a η y δ en su dominio.

Luego, del Lema 13 y de (2-60) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial X(t, \eta, \delta)}{\partial \eta} \right|_{(mT/2, \eta_{m,p}, 0)} &= \left. \frac{\partial S(t, \eta)}{\partial \eta} \right|_{(mT/2, \eta_{m,p})} \\ &= \left. \frac{\partial S(t, \eta)}{\partial \eta} \right|_{(p\mathcal{T}_{m,p}/2, \eta_{m,p})} \cdot \\ &= \psi_2(p\mathcal{T}_{m,p}/2) \\ &= \hat{b}_p \\ &= (-1)^{p+1} p h_{m,p} \mathcal{T}'(h_{m,p}) \end{aligned}$$

Como (2-66) se satisface y la condición (2-67) implica que

$$\left. \frac{\partial X(t, \eta, \delta)}{\partial \eta} \right|_{(mT/2, \eta_{m,p}, 0)} \neq 0,$$

se concluye del Teorema de la Función Implícita (ver [46]) que existen $\delta_{m,p}$ y $\Delta_{m,p}(\delta)$ como en enunciado de tal forma que (2-68) se satisface.

Por tanto, si para $\delta \in [0, \delta_{m,p}[$ se define $\phi_{m,p}(t, \delta)$ como en (2-69) entonces se tiene que esta última es solución del problema de Dirichlet asociado a (2-34)

$$\begin{cases} \ddot{x} + F(t, x, \delta) = 0, \\ x(0) = x(mT/2) = 0. \end{cases}$$

y en consecuencia $\phi_{m,p}(t, \delta)$, es una solución mT -periódica impar de (2-34) tal que $\phi_{m,p}(t, 0) \equiv \phi_{m,p}(t)$.

Más aún, la solución $\phi_{m,p}(t, \delta)$ tiene exactamente $2p$ ceros en el intervalo $[t_0, t_0 + mT[$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$. En efecto, sea $D =]-a, a[\times \mathbb{R}$ y consideremos $Y \in D$ tal que

$$Y := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

y la función $W : \mathbb{R} \times D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$W(t, Y, \delta) := \begin{bmatrix} y \\ -F(t, x, \delta) \end{bmatrix}.$$

Entonces para una sucesión $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ arbitraria tal que $\delta_n \in]0, \delta_{m,p}[$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\delta_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, se define la correspondiente familia de funciones $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $W_n(t, Y) := W(t, Y, \delta_n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Luego, $W_n \in C^{0,1}(\mathbb{R} \times D)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además $W_n(t, Y) \rightarrow W(t, Y, 0)$ uniformemente sobre cada subconjunto compacto $E \subset \mathbb{R} \times D$.

Consideremos ahora la familia de funciones $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde

$$U_n(t) := \begin{bmatrix} \phi_{m,p}(t, \delta_n) \\ \dot{\phi}_{m,p}(t, \delta_n) \end{bmatrix},$$

y sea

$$U(t) := \begin{bmatrix} \phi_{m,p}(t) \\ \dot{\phi}_{m,p}(t) \end{bmatrix}.$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $U_n(t)$ es la única solución de

$$\dot{U}_n = W_n(t, U_n),$$

con condición inicial

$$U_n(0) := \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_{m,p}(\delta_n) \end{bmatrix},$$

y $U(t)$ es la única solución de

$$\dot{U} = W(t, U, 0),$$

con condición inicial

$$U(0) := \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_{m,p} \end{bmatrix}.$$

Luego, la aplicación directa del Teorema 23 en el Apéndice A implica que para $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ con $t_0 < t_1$, $\phi_{m,p}(t, \delta_n) \rightarrow \phi_{m,p}(t)$ y $\dot{\phi}_{m,p}(t, \delta_n) \rightarrow \dot{\phi}_{m,p}(t)$ uniformemente sobre $[t_0, t_1]$. Como los ceros de $\phi_{m,p}(t)$ son simples se tiene que $\dot{\phi}_{m,p}(mT) \neq 0$ y entonces existe una constante $0 < \epsilon \ll 1$ tal que $\phi_{m,p}(t) \neq 0$ para todo $t \in]mT, mT + \epsilon]$. De esta manera, el Lema 3 implica que para n suficientemente grande $\phi_{m,p}(t, \delta_n)$ tiene exactamente $2p$ ceros en el intervalo $[0, mT + \epsilon]$, y en consecuencia $\phi_{m,p}(t, \delta_n)$ es una función mT -periódica que tiene exactamente $2p$ ceros en el intervalo $[0, mT[$. Pasar al argumento para δ continuo es sencillo. \square

Observación 12. *Es valioso notar que la condición de no degeneración sobre el periodo (2-67) que permite obtener la existencia de la solución $\phi_{m,p}(t, \delta)$ que emana de la solución $\phi_{m,p}(t)$, también implica que esta última es parabólica inestable y Lyapunov inestable con $Tr = 2$ (ver Observaciones 8 y 9).*

2.4.6. Criterio de estabilidad para soluciones periódicas impares

Para $m, n \in \mathbb{N}$ sean $\delta \in [0, \delta_{m,p}[$ y $\phi_{m,p}(t, \delta)$ como en el Teorema 2. Entonces $\phi_{m,p}(t, \delta)$ es una solución (m, p) -periódica impar de (2-34) y la ecuación variacional asociada a lo largo de esta solución es la ecuación de Hill con dependencia del parámetro δ

$$\ddot{u} + q(t, \delta)u = 0, \quad (2-70)$$

donde el potencial $q(t, \delta)$ es una función mT -periódica en t y continua dada por

$$q(t, \delta) := \left. \frac{\partial F(t, x, \delta)}{\partial x} \right|_{(t, \phi_{m,p}(t, \delta), \delta)}. \quad (2-71)$$

La traza asociada a la ecuación (2-70) se define entonces en función del parámetro $\delta \in [0, \delta_{m,p}[$ como

$$Tr_{m,p}(\delta) := \psi_1(mT, \delta) + \dot{\psi}_2(mT, \delta), \quad (2-72)$$

con $\psi_1(t, \delta)$ y $\psi_2(t, \delta)$ las soluciones canónicas de (2-70). De hecho, para $\delta = 0$ se tiene que (2-70) se corresponde con la ecuación variacional a lo largo de la solución del problema autónomo (2-35) de la cual emana $\phi_{m,p}(t, \delta)$, es decir, con (2-53).

El siguiente resultado proporciona una expresión explícita para la derivada de la traza $Tr_{m,p}(\delta)$ en $\delta = 0$.

Teorema 3 ([5, Teorema 3.4, pág. 1281]). *Sean $m, p \in \mathbb{N}$ y $\phi_{m,p}(t, \delta)$ la solución (m, p) -periódica impar de (2-34) dada por el Teorema 2 (tal que la condición (2-67) se satisface con $h_{m,p}$ como en (2-63)). Luego, si*

$$F_{13}(t) := \left. \frac{\partial^2 F(t, x, \delta)}{\partial t \partial \delta} \right|_{(t, \phi_{m,p}(t), 0)},$$

entonces

$$Tr'_{m,p}(0) := \left. \frac{\partial Tr_{m,p}(\delta)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} = -p \mathcal{T}'(h_{m,p}) \int_0^{mT} F_{13}(t) \dot{\phi}_{m,p}(t) dt. \quad (2-73)$$

Demostración. Sea $\phi_{m,p}(t)$ la solución (m,p) -periódica impar de (2-35) de la cual emana la solución $\phi_{m,p}(t, \delta)$ (ver la sección 2.4.5) y $\mathcal{T}_{m,p}$ definido como en (2-62). De la discusión en la sección 2.4.4 se sigue que la ecuación variacional asociada a (2-35) a lo largo de la solución $\phi_{m,p}(t)$ está dada por (2-53) donde, en virtud de la Observación 7, el potencial $q(t) := f'(\phi_{m,p}(t))$ tiene periodo minimal $\frac{\mathcal{T}_{m,p}}{2}$. En particular, de la definición de $\mathcal{T}_{m,p}$ se obtiene que $mT = 2p\frac{\mathcal{T}_{m,p}}{2}$ y entonces $q(t)$ es una función mT -periódica también.

Luego, del Lema 12 se tiene que la matriz de Poincaré asociada para el periodo mT satisface

$$\begin{aligned} \hat{P}_{2p} &= \begin{bmatrix} \psi_1(mT) & \psi_2(mT) \\ \dot{\psi}_1(mT) & \dot{\psi}_2(mT) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-1)^{2p} & (-1)^{2p+1}2ph_{m,p}\mathcal{T}'(h_{m,p}) \\ 0 & (-1)^{2p} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2ph_{m,p}\mathcal{T}'(h_{m,p}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

y entonces la función $K(t)$ definida en (2-52) verifica que

$$K(t) \equiv 2ph_{m,p}\mathcal{T}'(h_{m,p})\psi_1^2(t).$$

Más aún, como consecuencia de (2-63), (2-64) y del Lema 11 se obtiene que

$$K(t) \equiv p\mathcal{T}'(h_{m,p})\dot{\phi}_{m,p}^2(t). \quad (2-74)$$

Consideremos ahora la ecuación variacional asociada a (2-34) a lo largo de la solución $\phi_{m,p}(t, \delta)$ que está dada por (2-70). Dado que el potencial $q(t, \delta)$ definido como en (2-71) verifica que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial q(t, \delta)}{\partial \delta} \right|_{(t,0)} &\equiv \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\left. \frac{\partial F(t, x, \delta)}{\partial x} \right|_{(t, \phi_{m,p}(t, \delta), \delta)} \right) \right|_{(t,0)} \\ &\equiv \left. \frac{\partial^2 F(t, x, \delta)}{\partial x^2} \right|_{(t, \phi_{m,p}(t, 0), 0)} \left. \frac{\partial \phi_{m,p}(t, \delta)}{\partial \delta} \right|_{(t,0)} + \left. \frac{\partial^2 F(t, x, \delta)}{\partial \delta \partial x} \right|_{(t, \phi_{m,p}(t, 0), 0)}. \end{aligned}$$

se obtiene, en virtud de la propiedad *iv)* de la función $F(t, x, \delta)$ en la sección 2.4, que para h , Φ y F_{23} definidos como sigue

$$h(t) := \left. \frac{\partial q(t, \delta)}{\partial \delta} \right|_{(t,0)}, \quad \Phi(t) := \left. \frac{\partial \phi_{m,p}(t, \delta)}{\partial \delta} \right|_{(t,0)} \quad \text{y} \quad F_{23}(t) := \left. \frac{\partial^2 F(t, x, \delta)}{\partial \delta \partial x} \right|_{(t, \phi_{m,p}(t), 0)},$$

se satisface la identidad

$$h(t) \equiv f''(\phi_{m,p}(t))\Phi(t) + F_{23}(t). \quad (2-75)$$

Luego, de (2-74), (2-75) y del Lema 10 se sigue que

$$\left. \frac{\partial Tr_{m,p}(\delta)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} = p\mathcal{T}'(h_{m,p}) \int_0^{mT} (f''(\phi_{m,p}(t))\Phi(t) + F_{23}(t)) \dot{\phi}_{m,p}^2(t) dt \quad (2-76)$$

Por otra parte, como $\phi_{m,p}(t, \delta)$ es solución de la ecuación (2-34), se sigue de la dependencia continua con respecto de parámetros que si

$$F_3(t) := \left. \frac{\partial F(t, x, \delta)}{\partial \delta} \right|_{(t, \phi_{m,p}(t), 0)},$$

entonces $\Phi(t)$ es solución de la ecuación

$$\ddot{\Phi} + q(t)\Phi + F_3(t) = 0.$$

Por tanto, $\Phi(t)$ satisface que

$$\ddot{\Phi} + \dot{q}(t)\Phi + q(t)\dot{\Phi} + \dot{F}_3(t) = 0, \quad (2-77)$$

donde $\dot{q}(t) \equiv f''(\phi_{m,p}(t))\dot{\phi}_{m,p}(t)$ y

$$\begin{aligned} \dot{F}_3(t) &\equiv \left. \frac{\partial^2 F(t, x, \delta)}{\partial t \partial \delta} \right|_{(t, \phi_{m,p}(t), 0)} + \left. \frac{\partial^2 F(t, x, \delta)}{\partial x \partial \delta} \right|_{(t, \phi_{m,p}(t), 0)} \dot{\phi}_{m,p}(t) \\ &\equiv F_{13}(t) + \left. \frac{\partial^2 F(t, x, \delta)}{\partial \delta \partial x} \right|_{(t, \phi_{m,p}(t), 0)} \dot{\phi}_{m,p}(t) \\ &\equiv F_{13}(t) + F_{23}(t)\dot{\phi}_{m,p}(t). \end{aligned} \quad (2-78)$$

Debe notarse que como $\phi_{m,p}(t)$ y $\phi_{m,p}(t, \delta)$ son funciones mT -periódicas (en la variable t y para todo $\delta \in [0, \delta_{m,p}]$), se sigue de la definición de $\Phi(t)$ que la función $\theta(t)$ definida por

$$\theta(t) := \dot{\Phi}(t)\ddot{\phi}_{m,p}(t) - \ddot{\Phi}(t)\dot{\phi}_{m,p}(t),$$

es mT -periódica. De hecho, la ecuación en (2-77), la identidad en (2-78) y el hecho de que $\dot{\phi}_{m,p}(t)$ es solución de la ecuación variacional asociada a (2-35) implican que

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &\equiv \dot{\Phi}(t)\ddot{\phi}_{m,p}(t) - \ddot{\Phi}(t)\dot{\phi}_{m,p}(t) \\ &\equiv -\dot{\Phi}(t)q(t)\dot{\phi}_{m,p}(t) + \dot{q}(t)\Phi(t)\dot{\phi}_{m,p}(t) + q(t)\dot{\Phi}(t)\dot{\phi}_{m,p}(t) + \dot{F}_3(t)\dot{\phi}_{m,p}(t) \\ &\equiv \dot{q}(t)\Phi(t)\dot{\phi}_{m,p}(t) + \dot{F}_3(t)\dot{\phi}_{m,p}(t) \\ &\equiv f''(\phi_{m,p}(t))\Phi(t)\dot{\phi}_{m,p}^2(t) + \left(F_{13}(t) + F_{23}(t)\dot{\phi}_{m,p}(t) \right) \dot{\phi}_{m,p}(t) \\ &\equiv (f''(\phi_{m,p}(t))\Phi(t) + F_{23}(t))\dot{\phi}_{m,p}^2(t) + F_{13}(t)\dot{\phi}_{m,p}(t). \end{aligned}$$

y por tanto

$$(f''(\phi_{m,p}(t))\Phi(t) + F_{23}(t))\dot{\phi}_{m,p}^2(t) \equiv \dot{\theta}(t) - F_{13}(t)\dot{\phi}_{m,p}(t),$$

Finalmente, de la periodicidad de la función θ , de la identidad anterior y de (2-76) se concluye que (2-73) se satisface puesto que

$$\left. \frac{\partial T r_{m,p}(\delta)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} = p\mathcal{T}'(h_{m,p}) \int_0^{mT} \left(\dot{\theta}(t) - F_{13}(t)\dot{\phi}_{m,p}(t) \right) dt.$$

□

El siguiente corolario establece un criterio para determinar la estabilidad en el sentido lineal de la solución $\phi_{m,p}(t, \delta)$ de (2-34) dada por el Teorema 2. Este resultado es consecuencia directa de la Observación 12.

Corolario 2. Sean $m, p \in \mathbb{N}$ y $\phi_{m,p}(t, \delta)$ la solución (m, p) -periódica de (2-34) dada por el Teorema 2. Luego

- i) Si $Tr'_{m,p}(0) < 0$ entonces $\phi_{m,p}(t, \delta)$ es elíptica y por tanto estable en el sentido lineal cuando $0 < \delta \ll 1$,
- ii) Si $Tr'_{m,p}(0) > 0$ entonces $\phi_{m,p}(t, \delta)$ es hiperbólica y por tanto Lyapunov inestable para $0 < \delta \ll 1$.

De esta manera, el Corolario 2 revela que el estudio de la estabilidad en el sentido lineal se reduce al estudio del signo de la expresión integral en (2-73). En la sección 3.4.2 se presenta una discusión sobre el signo de (2-73) en el contexto del MEMS tipo peine con elasticidad cúbica.

3. Resultados

En la sección 3.1 se introduce el resultado general de existencia de soluciones periódicas impares con propiedades nodales prescritas para osciladores no lineales con simetrías de la forma (1-1). En la sección 3.2 se obtiene un resultado de independencia con respecto a la metodología empleada en la sección anterior. Luego, en las secciones 3.3 y 3.4 se presentan, respectivamente, el resultado de existencia de respuestas periódicas impares con oscilación prescrita vía el resultado de la sección 3.1 y un criterio de estabilidad lineal de respuestas periódicas impares con oscilación prescrita para parámetro pequeño, ambos en el contexto del MEMS tipo peine modelado con elasticidad cúbica (2-5). Finalmente, en la sección 3.5 se proporcionan condiciones prácticas que facilitan la aplicación de estos últimos resultados.

3.1. Existencia de respuestas periódicas impares con oscilación prescrita vía una generalización del principio de Ortega

En esta sección presentamos un nuevo resultado general (Teorema 4) de existencia de respuestas periódicas impares con oscilación prescrita, i.e., propiedades nodales prescritas, para una familia de osciladores de la forma (1-1).

Consideremos la función G verificando las simetrías en (1-2) y la ecuación variacional en $x \equiv 0$ asociada a (1-1) dada por

$$\ddot{y} + G(t, 0)y = 0. \quad (3-1)$$

Definición 7. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos $\nu_0(m)$ como

$$\nu_0(m) := |\{t \in]0, mT/2[\mid y_0(t) = 0\}|,$$

donde $y_0(t)$ denota la única solución de (3-1) con condiciones iniciales $y_0(0) = 0$ y $\dot{y}_0(0) = 1$.

Teorema 4. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Supongamos que $\nu_0(m) > 0$, que G cumple las simetrías en (1-2) y que existe $R_0 \in]0, a[$ tal que

$$0 < G(t, 0), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t, x) < G(t, 0), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times]0, R_0[, \quad (3-2)$$

y

$$G(t, x) < 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [R_0, a[. \quad (3-3)$$

Entonces (1-1) tiene al menos una solución mT -periódica impar con n ceros en el intervalo $]0, \frac{mT}{2}[$, $x_n(t)$, verificando que $\dot{x}_n(0) > 0$, si y sólo si $n < \nu_0(m)$. Más aún, si

$$G_x(t, x) < 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times]0, R_0], \quad (3-4)$$

entonces $x_0(t)$ es la única solución mT -periódica impar de (1-1) con periodo minimal mT .

Demostración. La demostración se realizará por etapas. En la primera etapa se presentará una ecuación truncada equivalente a (1-1) que posee las mismas soluciones mT -periódicas. En la segunda etapa se encontrarán cotas *a priori* de las soluciones periódicas de la ecuación truncada y la ecuación original (1-1). Posteriormente, en la tercera etapa se aplicará el principio de Ortega a la ecuación truncada con el fin de obtener el resultado sobre la existencia y propiedades nodales de soluciones periódicas. Por último, en la cuarta etapa se abordará la unicidad de la solución $x_0(t)$.

Etapa 1: Una ecuación truncada equivalente. Sea R_0 como en el enunciado del Teorema 4 y consideremos una función arbitraria $\mu_0 : [R_0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

- $\mu_0 \in C^1([R_0, \infty[)$,
- $\mu_0(x) \geq R_0$ con $\mu_0(R_0) = R_0$,
- $\mu_0'(R_0) = 1$,
- $\sup \mu_0(x) < a$.

Consideremos ahora $\mu(x)$ como la extensión impar de $\mu_0(x)$ dada por

$$\mu(x) := \begin{cases} \mu_0(x) & \text{si } x \geq R_0, \\ -\mu_0(-x) & \text{si } x \leq -R_0. \end{cases}$$

y sea $\mu_\infty := \sup \mu(x) < a$, entonces el μ -truncamiento $h_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se define como (ver figura 3-1)

$$h_\mu(x) := \begin{cases} x & \text{si } |x| < R_0, \\ \mu(x) & \text{si } |x| \geq R_0. \end{cases}$$

Debe notarse que como consecuencia directa de las propiedades de $\mu_0(x)$ y de la definición de $\mu(x)$ se tiene que $h_\mu \in C^1(\mathbb{R})$ y que $|h_\mu(x)| \leq \mu_\infty < a$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, la ecuación truncada asociada a (1-1) se define como

$$\ddot{z} + h_\mu(z)G(t, h_\mu(z)) = 0. \quad (3-5)$$

Es valioso mencionar que la ecuación truncada (3-5) no tiene singularidades, de hecho, la variable de estado z se puede tomar sobre toda la recta real. Más aún, para $|z| \leq R_0$ se tiene de la definición de h_μ que (3-5) y (1-1) coinciden.

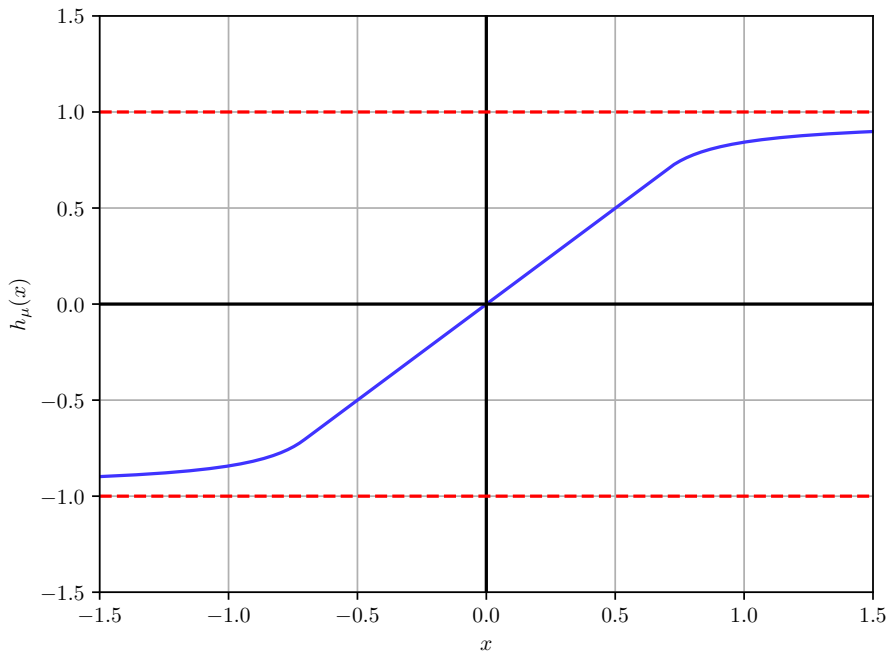


Figura 3-1: Esquema de la función de truncamiento $h_\mu(x)$.

Por conveniencia la ecuación (3-5) se puede reescribir con la estructura de (1-1) de la siguiente forma

$$\ddot{z} + z\overline{G}(t, z) = 0, \quad (3-6)$$

donde

$$\overline{G}(t, z) := \begin{cases} \frac{h_\mu(z)}{z}G(t, h_\mu(z)) & \text{si } z \neq 0, \\ G(t, 0) & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

es una función de clase $C^{0,1}(\mathbb{R}^2)$ que satisface las simetrías

$$\overline{G}(-t, z) \equiv \overline{G}(t, z), \quad \overline{G}(t, -z) \equiv \overline{G}(t, z).$$

Por otra parte, de las simetrías que verifica la función G se tiene que la condición (3-3) es equivalente a que existe $R_0 \in]0, a[$ tal que

$$G(t, x) < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]-a, R_0] \cup [R_0, a[, \quad (3-7)$$

luego, como consecuencia de la condición (3-3) y el hecho de que $a > h_\mu(z) \geq R_0$ para $z \geq R_0$ y $-a < h_\mu(z) \leq -R_0$ para $z \leq -R_0$, se tiene que

$$G(t, h_\mu(z)) < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z \in]-\infty, -R_0] \cup [R_0, \infty[,$$

y por tanto

$$\overline{G}(t, z) < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z \in]-\infty, -R_0] \cup [R_0, \infty[. \quad (3-8)$$

Etapa 2: Cotas a priori de soluciones periódicas. Debe notarse que la condición (3-3) es suficiente para obtener cotas *a priori* de las soluciones mT -periódicas de (1-1) vía el Lema 4. Concretamente, para cada $x \in]-a, a[$ y $m \in \mathbb{N}$ consideremos la función mT -periódica $f(\cdot, x) = -xG(\cdot, x)$, entonces de (3-7) se tiene que existe $R_0 \in]0, a[$ tal que $f(t, x) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in [R_0, a[$, y $f(t, x) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in]-a, -R_0]$. Luego, una aplicación del Lema 4 con $R_2 = R_0$ y $R_1 = -R_0$ implica que cualquier solución mT -periódica de (1-1), $x(t)$, satisface que $|x(t)| \leq R_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

De forma análoga al caso anterior, para cada $z \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$ definimos la función mT -periódica $\bar{f}(\cdot, z) := -z\bar{G}(\cdot, z) = -h_\mu(z)G(\cdot, h_\mu(z))$. Así, en virtud de (3-8) se tiene que existe $R_0 \in]0, a[$ tal que $\bar{f}(t, z) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $z \in [R_0, \infty[$, y $\bar{f}(t, z) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $z \in]-\infty, -R_0]$. Por tanto, una aplicación del Lema 4 con $R_2 = R_0$ y $R_1 = -R_0$ implica que cualquier solución mT -periódica de (3-6), $z(t)$, satisface que $|z(t)| \leq R_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

De la discusión anterior se sigue que las soluciones periódicas de (1-1) y (3-6) tienen las mismas cotas *a priori* dadas por las constantes $-R_0$ y R_0 . De hecho, como ambas ecuaciones coinciden para la variable de estado en el intervalo $[-R_0, R_0]$, se concluye que (1-1) y (3-6) tienen las mismas soluciones mT -periódicas. De esta forma, toda solución mT -periódica de (3-6) es una solución mT -periódica de (1-1) y tiene su rango contenido en el intervalo $[-R_0, R_0]$.

Etapa 3: Existencia y propiedades nodales de soluciones periódicas. Sea $E = [0, T] \times [-\mu_\infty, \mu_\infty]$ y consideremos la ecuación (3-6). Como G es una función continua en ambas variables para $(t, x) \in \mathbb{R} \times]-a, a[$ y $\mu_\infty < a$ se tiene que

$$|z\bar{G}(t, z)| = |h_\mu(z)G(t, h_\mu(z))| \leq \mu_\infty \sup_{(t,y) \in E} |G(t, y)| < \infty,$$

es decir, la no linealidad $z\bar{G}(t, z)$ en (3-6) es acotada en valor absoluto. Por otra parte, como consecuencia de la definición de \bar{G} se tiene que $\bar{G}(t, z) = G(t, z)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{R}$ con $|z| \leq R_0$, luego en virtud de la simetría de G respecto a la variable de estado se tiene que la condición (3-2) implica que $\bar{G}(t, z) < \bar{G}(t, 0) = G(t, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $0 < |z| < R_0$. Adicionalmente, de (3-2) y (3-8) se sigue que $\bar{G}(t, z) < 0 < G(t, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{R}$ con $|z| \geq R_0$. Así

$$\bar{G}(t, z) < \bar{G}(t, 0), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (3-9)$$

Consideremos ahora el problema de Dirichlet asociado a (3-6) dado por

$$\begin{cases} \ddot{z} + z\bar{G}(t, z) = 0, \\ z(0) = z(mT/2) = 0. \end{cases} \quad (3-10)$$

Es directo verificar en virtud de la estructura de ambas ecuaciones que (1-1) y (3-6) tienen la misma ecuación variacional a lo largo de la solución trivial $x \equiv 0$, entonces una aplicación

de la Proposición 1 al problema de Dirichlet (3-10) implica en virtud del Lema 1 que existe al menos una solución mT -periódica impar de (3-6), $z_n(t)$, con n ceros en el intervalo $]0, \frac{mT}{2}[$ y $\dot{z}_n(0) > 0$, si y sólo si $n < \nu_0(m)$.

Etapas 4: Unicidad de soluciones de periodo minimal mT . De la etapa anterior se sabe que en particular existe al menos una solución mT -periódica impar de (1-1), $x_0(t)$ (o equivalentemente $z_0(t)$), tal que $x_0(0) = x_0(\frac{mT}{2}) = 0$, $x_0(t) > 0$ para todo $t \in]0, \frac{mT}{2}[$ y $\dot{x}_0(0) > 0$. Supongamos que existe otra solución de (1-1), $\hat{x}_0(t)$, con las mismas propiedades de $x_0(t)$ de tal forma que $x_0(t) \not\equiv \hat{x}_0(t)$. Entonces se puede definir la función idénticamente no nula

$$u(t) := x_0(t) - \hat{x}_0(t),$$

que satisface la ecuación

$$\ddot{u}(t) + x_0(t)G(t, x_0(t)) - \hat{x}_0(t)G(t, \hat{x}_0(t)) = 0.$$

Debe notarse que si $u(t) \neq 0$ entonces al sumar y restar el término $\hat{x}_0(t)G(t, x_0(t))$ en la expresión anterior se tiene que

$$\ddot{u}(t) + \left(G(t, x_0(t)) + \hat{x}_0(t) \frac{G(t, x_0(t)) - G(t, \hat{x}_0(t))}{x_0(t) - \hat{x}_0(t)} \right) u(t) = 0,$$

y si $u(t) = 0$ para algún $t \in]0, \frac{mT}{2}[$ se tiene que en particular

$$\ddot{u}(t) + (G(t, x_0(t)) + \hat{x}_0(t)G_x(t, \hat{x}_0(t))) u(t) = 0.$$

Consideremos ahora para $\lambda \in [0, 1]$ la combinación convexa $\theta(\lambda) = \lambda x_0(t) + (1 - \lambda)\hat{x}_0(t)$, entonces de las cotas *a priori* encontradas en la *Etapas 2* se sigue que $0 < \theta(\lambda) \leq R_0$. Más aún, en virtud de que G es una función de clase C^1 con respecto a su segunda variable en el intervalo $] -a, a[$ y $0 < R_0 < a$ se obtiene que

$$\int_0^1 G_x(t, \theta(\lambda))(\theta(1) - \theta(0)) d\lambda = G(t, \theta(1)) - G(t, \theta(0)) = G(t, x_0(t)) - G(t, \hat{x}_0(t)).$$

De esta forma, para $t \in [0, \frac{mT}{2}]$ se tiene que la función $u(t)$ es una solución no trivial de la ecuación lineal de segundo orden

$$\ddot{u} + F(t)u = 0,$$

donde

$$F(t) := G(t, x_0(t)) + \hat{x}_0(t) \int_0^1 G_x(t, \theta(\lambda)) d\lambda.$$

Luego, como consecuencia de (3-4) se sigue que $G_x(t, \theta(\lambda)) < 0$ y entonces $F(t) \leq G(t, x_0(t))$ para todo $t \in [0, \frac{mT}{2}]$ con la desigualdad estricta en el intervalo $]0, \frac{mT}{2}[$. Además, como $x_0(t)$ es una solución no trivial de la ecuación

$$\ddot{y} + G(t, x_0(t))y = 0,$$

y $u(0) = u(\frac{mT}{2}) = 0$ por definición, se sigue de la Teoría de Comparación de Sturm que necesariamente $x_0(t)$ tiene al menos un cero en el intervalo $]0, \frac{mT}{2}[$. Esto último es una contradicción puesto que por hipótesis $x_0(t) > 0$ para todo $t \in]0, \frac{mT}{2}[$, por tanto, $x_0(t)$ es la única solución mT -periódica impar de (1-1) con esta propiedad. \square

3.2. Independencia con respecto del Truncamiento

El proceso de truncamiento empleado en la demostración del Teorema 4 revela algunas propiedades generales de h_μ que dan paso a toda una clase de funciones de truncamiento que son válidas. En efecto, una inspección de las ideas fundamentales en la *Etapa 1* de la demostración del Teorema 4 muestra que el razonamiento es válido para toda familia de funciones generales \mathcal{H} donde

$$\mathcal{H} := \{h_\mu \in C^1(\mathbb{R}) \mid h_\mu(x) \equiv -h_\mu(-x), h_\mu(x) = x \text{ si } |x| \leq R_0 \text{ y } h_\mu(x) \in]R_0, a[\text{ si } x > R_0\}.$$

Adicionalmente, es posible demostrar que bajo ciertas condiciones la conclusión del Teorema 4 es independiente de la función de truncamiento empleada en la *Etapa 1*, es decir, las soluciones periódicas obtenidas son independientes de la función $\mu(x)$ considerada. A continuación se introducen algunos preliminares necesarios para enunciar la Proposición 3 que contiene nuestro resultado de independencia.

Consideremos (1-1) y (3-6). Para cada $v \in \mathbb{R}$ definimos $x(t, v)$ y $z(t, v)$ como las únicas soluciones de (1-1) y (3-6) respectivamente, con condiciones iniciales $x(0, v) = z(0, v) = 0$ y $\dot{x}(0, v) = \dot{z}(0, v) = v$. Luego, procediendo de forma análoga a la discusión presentada en la sección 2.3, definimos para cada $m \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$V_m = \{v \in \mathbb{R} \mid x(t, v) \text{ está definido para todo } t \in [0, mT/2]\}.$$

Debe notarse que en cada caso V_m es un conjunto abierto no vacío como consecuencia de la dependencia continua respecto de condiciones iniciales y el hecho de que $x(t, 0) \equiv 0$ es la solución trivial de (1-1), por tanto, se puede definir $V_{0,m}$ como la componente conexa de V_m que contiene $v = 0$ y tomar $v_m^+ := \sup V_{0,m}$ sobre los reales extendidos. Más aún, se sigue de discusiones previas y de las simetrías en (1-2) que $v_m^- := \inf V_{0,m} = -v_m^+$.

Definición 8. Las funciones número de ceros asociadas a las soluciones $x(t, \cdot)$ y $z(t, \cdot)$ respectivamente se definen como $\nu :]v_m^-, v_m^+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $\bar{\nu} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de tal forma que

$$\nu(v) := |\{t \in]0, mT/2[\mid x(t, v) = 0\}|, \quad \bar{\nu}(v) := |\{t \in]0, mT/2[\mid z(t, v) = 0\}|.$$

Proposición 3. Supongamos que las condiciones del Teorema 4 se satisfacen con $G(t, x) < G(t, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $x \in]-a, a[\setminus \{0\}$ y que existe $v^* \in]0, v_m^+[$ tal que $\nu(v^*) = 0$. Entonces cualquier ecuación truncada asociada a (1-1) con $h_\mu \in \mathcal{H}$ produce las mismas soluciones de (1-1) obtenidas en la *Etapa 3* de la demostración del Teorema 4.

Demostración. Consideremos los siguientes problemas de Dirichlet

$$\begin{cases} \ddot{x} + xG(t, x) = 0, \\ x(0) = x(mT/2) = 0. \end{cases} \quad (3-11)$$

con G definida como en (1-1) y

$$\begin{cases} \ddot{z} + z\overline{G}(t, z) = 0, \\ z(0) = z(mT/2) = 0. \end{cases} \quad (3-12)$$

con \overline{G} definida como en (3-6). La idea fundamental de la prueba consiste en emplear cotas *a priori* de soluciones periódicas, el principio de Ortega (Proposición 1) y su generalización para una ecuación con singularidades (Proposición 2), para demostrar que las soluciones de (3-11) y (3-12) coinciden. De esta forma, para $0 \leq n < \nu_0(m)$ definimos

$$\Omega_n^m := \{v \in]0, v_m^+ [\mid \nu(v) \leq n\}, \quad \overline{\Omega}_n^m := \{v \in]0, \infty [\mid \bar{\nu}(v) \leq n\},$$

con ν y $\bar{\nu}$ las funciones numero de ceros dadas en la Definición 8 y

$$\omega_n^m := \min \Omega_n^m, \quad \bar{\omega}_n^m := \min \overline{\Omega}_n^m. \quad (3-13)$$

Debe notarse que ω_n^m y $\bar{\omega}_n^m$ definidos en (3-13) existen como consecuencia de la discusión desarrollada en la demostración de la Proposición 2 y la Proposición 1, respectivamente (donde la hipótesis $\nu(v^*) = 0$ en el enunciado permite la aplicación de la Proposición 2 con la condición III), ver pág. 38). Más aún, de la definición se sigue que $x(t, \omega_n^m)$ es una solución del problema de Dirichlet (3-11) que tiene exactamente n ceros en el intervalo $]0, \frac{mT}{2}[$ y $z(t, \bar{\omega}_n^m)$ es una solución del problema de Dirichlet (3-12) que tiene exactamente n ceros en el intervalo $]0, \frac{mT}{2}[$. De esta forma, el Lema 1 implica que las extensiones impares y periódicas de $x(t, \omega_n^m)$ y $z(t, \bar{\omega}_n^m)$, producen soluciones mT -periódicas impares de (1-1) y (3-6), respectivamente, con n ceros en $]0, \frac{mT}{2}[$. Estas soluciones mT -periódicas impares serán denotadas como $x_n^m(t)$ y $z_n^m(t)$.

Luego, del Lema 4 se tiene que $|x_n^m(t)| \leq R_0$ y $|z_n^m(t)| \leq R_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y como (1-1) y (3-6) coinciden en el intervalo $[-R_0, R_0]$ (ver *Etapa 2* de la demostración del Teorema 4) se sigue que $x_n^m(t)$ es una solución mT -periódica impar de la ecuación en (3-12) (ecuación truncada) y $z_n^m(t)$ es una solución mT -periódica impar de la ecuación en (3-11) (ecuación original). Así, de la definición de $x_n^m(t)$ y $z_n^m(t)$ se tiene que necesariamente $x(t, \omega_n^m)$ satisface la ecuación

$$\ddot{z} + z\overline{G}(t, z) = 0, \quad \forall t \in [0, mT/2],$$

junto con las condiciones

$$x(0, \omega_n^m) = x(mT/2, \omega_n^m) = 0,$$

y $z(t, \bar{\omega}_n^m)$ satisface la ecuación

$$\ddot{x} + xG(t, x) = 0, \quad \forall t \in [0, mT/2],$$

junto con las condiciones

$$z(0, \bar{\omega}_n^m) = z(mT/2, \bar{\omega}_n^m) = 0.$$

Por tanto, $x(t, \omega_n^m)$ es una solución del problema de Dirichlet (3-12) y $z(t, \omega_n^m)$ es una solución del problema de Dirichlet (3-11). Además, como $\nu(\omega_n^m) = \bar{\nu}(\bar{\omega}_n^m) = n$ se obtiene por definición de Ω_n^m y $\bar{\Omega}_n^m$ que $\omega_n^m \in \bar{\Omega}_n^m$ y $\bar{\omega}_n^m \in \Omega_n^m$, entonces de (3-13) se sigue que $\bar{\omega}_n^m \leq \omega_n^m$ y $\omega_n^m \leq \bar{\omega}_n^m$. Esto concluye la demostración puesto que si $\omega_n^m = \bar{\omega}_n^m$ entonces $x(t, \omega_n^m)$ y $z(t, \bar{\omega}_n^m)$ son soluciones del mismo problema de valor inicial, luego $x(t, \omega_n^m) \equiv z(t, \bar{\omega}_n^m)$. De este modo las soluciones periódicas impares obtenidas vía el truncamiento coinciden con las soluciones periódicas impares dadas por la extensión del principio variacional de Ortega aplicado a la ecuación original. \square

3.3. Respuestas periódicas impares con oscilación prescrita: MEMS tipo peine con elasticidad cúbica

En esta sección se presentan algunos resultados concretos sobre la existencia de soluciones periódicas impares con oscilación prescrita en el contexto del MEMS tipo peine modelado por (2-5). Concretamente, el resultado de esta sección (Teorema 5) establece condiciones sobre los parámetros del sistema que garantizan la existencia de una familia de respuestas periódicas impares con ciertas propiedades nodales.

Debe notarse que la ecuación asociada al MEMS tipo peine modelado con elasticidad cúbica (2-5) tiene la estructura de la ecuación (1-1) donde $G : \mathbb{R} \times]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función T -periódica en la primera variable definida por

$$G(t, x) := 1 + \alpha x^2 - \frac{4\beta V_\delta^2(t)}{(1 - x^2)^2}. \quad (3-14)$$

Luego, de forma análoga a la discusión en la sección 3.1, se tiene que la ecuación variacional asociada a (2-5) a lo largo de $x \equiv 0$ está dada por

$$\ddot{y} + G(t, 0)y = 0, \quad (3-15)$$

donde

$$G(t, 0) \equiv 1 - 4\beta V_\delta^2(t),$$

y que para $m \in \mathbb{N}$, el entero no negativo $\nu_0(m)$ denota el número de ceros en el intervalo $]0, \frac{mT}{2}[$ de la única solución de (3-15) con condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $\dot{y}(0) = 1$ (ver Definición 7).

A lo largo de esta sección se consideran los voltajes de entrada extremos definidos de la siguiente manera

$$V_{min}(\delta) := \min_{[0, T]} V_\delta(t) < V_{max}(\delta) := \max_{[0, T]} V_\delta(t),$$

los cuales satisfacen que

$$0 < V_{DC} - \delta \equiv V_{min}(\delta) \leq V_\delta(t) \leq V_{max}(\delta) \equiv V_{DC} + \delta, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3-16)$$

en virtud de la definición de $V_\delta(t)$ en (2-2).

Teorema 5. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Supongamos que $\nu_0(m) > 0$ y que se satisfacen las condiciones

$$V_{max}(\delta) < \frac{1}{2\sqrt{\beta}}, \quad (3-17)$$

y

$$\alpha \leq 8\beta V_{min}(\delta)^2. \quad (3-18)$$

Entonces la ecuación (2-5) tiene al menos una solución mT -periódica impar, $x_n(t)$, con n ceros en el intervalo $]0, \frac{mT}{2}[$ y $\dot{x}_n(0) > 0$, si y sólo si $n < \nu_0(m)$. Más aún, la solución $x_0(t)$ es única.

Observación 13. La condición (3-17) en el Teorema 5 implica que $4\beta V_{max}(\delta)^2 < 1$. Luego, de (3-16) se sigue que (3-17) implica la condición (3-25) mientras que (3-18) implica la condición (3-26) (ver siguiente sección). Más aún, si se supone que ambas condiciones (3-17) y (3-18) se satisfacen entonces $\alpha < 2$.

Demostración. La herramienta fundamental en la demostración es el Teorema 4. A continuación se prueba que todas las condiciones requeridas para la aplicación de este último resultado se cumplen.

De la definición en (3-14) se tiene que $G \in C^{0,1}(\mathbb{R} \times]-1, 1[)$ y que satisface las siguientes simetrías

$$G(-t, x) \equiv G(t, x), \quad G(t, -x) \equiv G(t, x).$$

Por otra parte, de (3-15) y (3-16) se sigue que

$$1 - 4\beta V_{max}(\delta)^2 \leq G(t, 0) \leq 1 - 4\beta V_{min}(\delta)^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3-19)$$

y entonces la condición (3-17) implica que

$$0 < G(t, 0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Consideremos ahora la función auxiliar $\varphi_\alpha(x)$ definida con detalle en la sección 3.4.1 (ver pág. 69). Entonces $\varphi_\alpha(1) = 0$, $\max_{x \in]-1, 1[} \varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(0) = 1$, $\varphi'_\alpha(x) < 0$ para todo $x \in]0, 1[$ y

$$G(t, x) \equiv \frac{\varphi_\alpha(x) - 4\beta V_\delta^2(t)}{(1 - x^2)^2}. \quad (3-20)$$

Luego, el signo de G depende sólo del signo del numerador en el lado derecho de (3-20) y de (3-16) se obtiene que para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$

$$\varphi_\alpha(x) - 4\beta V_{max}(\delta)^2 \leq \varphi_\alpha(x) - 4\beta V_\delta^2(t) \leq \varphi_\alpha(x) - 4\beta V_{min}(\delta)^2.$$

Como (3-16) y la condición (3-17) implican que $4\beta V_{min}(\delta)^2 \in]0, 1[$ (ver Observación 13), entonces del Teorema del Valor Intermedio y de la monotonía de la función auxiliar en el

intervalo $]0, 1[$ se concluye que existe una única solución en $]0, 1[$, denotada por \bar{x} , de la ecuación

$$\varphi_\alpha(x) = 4\beta V_{min}(\delta)^2.$$

De esta forma, $\varphi_\alpha(x) > 4\beta V_{min}(\delta)^2$ para todo $x \in [0, \bar{x}[$ y $\varphi_\alpha(x) < 4\beta V_{min}(\delta)^2$ para todo $x \in]\bar{x}, 1]$. Si se define ahora $R_0 = \bar{x} + \epsilon_0$ donde $\epsilon_0 \ll 1$ es una constante arbitraria positiva tal que $R_0 < 1$, entonces se obtiene que

$$G(t, x) < 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [R_0, 1[.$$

Adicionalmente, se tiene que

$$G(t, x) < G(t, 0), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times]0, R_0[. \quad (3-21)$$

En efecto, (3-21) es equivalente a que para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times]0, R_0[$

$$G(t, x) - G(t, 0) = \frac{x^2}{(1-x^2)^2} (\alpha(1-x^2)^2 - 4\beta V_\delta^2(t)(2-x^2)) < 0,$$

lo que es equivalente en virtud de (3-16) a que

$$\alpha(1-x^2)^2 - 4\beta V_\delta^2(t)(2-x^2) \leq \alpha(1-x^2)^2 - 4\beta V_{min}(\delta)^2(2-x^2) < 0.$$

Esta última desigualdad se satisface puesto que para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times]0, R_0[$

$$\alpha(1-x^2)^2 < 4\beta V_{min}(\delta)^2(2-x^2), \quad (3-22)$$

como consecuencia de que la condición (3-18) implica que

$$\alpha \leq 4\beta V_{min}(\delta)^2 g(0) < 4\beta V_{min}(\delta)^2 \min_{x \in]0, R_0[} g(x),$$

donde $g : [0, R_0[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) := \frac{2-x^2}{(1-x^2)^2},$$

es una función positiva, continuamente diferenciable y creciente que alcanza su valor mínimo en $x = 0$ con $g(0) = 2$. En efecto,

$$g'(x) = \frac{2x(3-x^2)}{(1-x^2)^3},$$

de donde se sigue que $g'(x) > 0$ para todo $x \in]0, R_0[$ y $g'(0) = 0$.

Finalmente, como $0 < (1-x^2)^3 < 1$ para todo $x \in]0, 1[$ y $-8\beta V_\delta^2(t) \leq -8\beta V_{min}(\delta)^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$ como consecuencia de (3-16), se tiene que la condición (3-18) también implica que

$$\alpha - \frac{8\beta V_\delta^2(t)}{(1-x^2)^3} \leq \alpha - \frac{8\beta V_{min}(\delta)^2}{(1-x^2)^3} < \alpha - 8\beta V_{min}(\delta)^2 \leq 0,$$

y entonces

$$G_x(t, x) = 2x \left(\alpha - \frac{8\beta V_\delta^2(t)}{(1-x^2)^3} \right) < 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times]0, R_0].$$

En virtud de la discusión anterior, es claro que (2-5) satisface todas las condiciones del Teorema 4. Por tanto, una aplicación directa de la primera parte de este resultado revela la existencia de al menos una solución mT -periódica impar de la ecuación (2-5), $x_n(t)$, que tiene n ceros en el intervalo $]0, \frac{mT}{2}[$ y que además verifica que $\dot{x}_n(0) > 0$, si y sólo si $n < \nu_0(m)$. La unicidad de la solución $x_0(t)$ es consecuencia de la segunda parte del Teorema 4. \square

3.4. Estabilidad lineal de respuestas periódicas impares con oscilación prescrita: MEMS tipo peine con elasticidad cúbica

Siguiendo la estrategia y los resultados presentados en la sección 2.4, en esta sección se obtiene un criterio de estabilidad lineal para ciertas respuestas periódicas impares con oscilación prescrita en el contexto del MEMS tipo peine modelado por (2-5). A continuación se abordan algunos preliminares necesarios para la discusión.

La ecuación asociada al MEMS tipo peine modelado con elasticidad cúbica (2-5) es de la forma

$$\ddot{x} + F(t, x, \delta) = 0, \quad (3-23)$$

donde $F : \mathbb{R} \times]-1, 1[\times [0, V_{DC}[\rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$F(t, x, \delta) := x + \alpha x^3 - \frac{4\beta V_\delta^2(t)x}{(1-x^2)^2},$$

y verifica las siguientes propiedades:

- i) $F(-t, x, \delta) \equiv F(t, x, \delta)$,
- ii) $F(t, -x, \delta) \equiv -F(t, x, \delta)$,
- iii) $F(t + T, x, \delta) \equiv F(t, x, \delta)$ donde T y ω están definidos como en (2-6),
- iv) $F(t, x, 0) \equiv f(x)$.

En particular, el caso $\delta = 0$ corresponde a la ecuación autónoma

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (3-24)$$

donde $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable en su dominio y está definida como en iv). Este caso se puede interpretar como una entrada de voltaje constante

DC en el dispositivo MEMS con $V_0(t) \equiv V_{DC}$.

Luego, bajo ciertas condiciones de no degeneración y para ciertos casos, la ecuación (3-23) admite una solución periódica impar con oscilación prescrita de tal forma que las correspondientes propiedades de estabilidad en el sentido lineal/inestabilidad, se pueden determinar empleando la información proporcionada por una solución periódica impar de (3-24) con las mismas propiedades nodales.

3.4.1. El problema autónomo

El objetivo principal de esta sección es estudiar la ecuación Newtoniana (3-24). Por tanto, a lo largo de esta sección se consideran las siguientes condiciones sobre los parámetros del sistema:

$$4\beta V_{DC}^2 < 1, \quad (3-25)$$

y

$$\alpha < 8\beta V_{DC}^2. \quad (3-26)$$

Es valioso mencionar que $4\beta V_{DC}^2 > 0$ por definición, y que al asumir las condiciones (3-25) y (3-26) se obtiene que $\alpha < 2$. De esta manera, para $\alpha \in]0, 2[$ se define la función auxiliar $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue

$$\varphi_\alpha(x) := (1 + \alpha x^2)(1 - x^2)^2.$$

La relevancia de la función auxiliar $\varphi_\alpha(x)$ es de carácter metodológico, y su definición es motivada principalmente por el estudio del caso no autónomo (es decir, cuando $\delta > 0$). No obstante, resulta conveniente introducirla en esta sección con el fin de obtener algunas propiedades de la función f .

De hecho, una simple inspección revela que $\varphi_\alpha(x)$ es una función par, continuamente diferenciable y unimodal en el intervalo $] -1, 1[$, con exactamente dos ceros reales en $x = \pm 1$ (cada uno de multiplicidad 2) y $\max_{x \in] -1, 1[} \varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(0) = 1$. En efecto,

$$\varphi'_\alpha(x) = 2x(1 - x^2)(\alpha - 2 - 3\alpha x^2),$$

$$\varphi''_\alpha(x) = 30\alpha x^4 + 12(1 - 2\alpha)x^2 + 2(\alpha - 2),$$

y como $0 < \alpha < 2$ entonces $\varphi'_\alpha(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ ó $x = \pm 1$. Más aún, $\varphi'_\alpha(x) > 0$ para todo $x \in] -1, 0[$, $\varphi'_\alpha(x) < 0$ para todo $x \in] 0, 1[$, $\varphi''_\alpha(0) = 2(\alpha - 2) < 0$ y $\varphi''_\alpha(\pm 1) = 8(\alpha + 1) > 0$. La figura **3-2** muestra la gráfica de $\varphi_\alpha(x)$.

Lema 14. *Si las condiciones (3-25) y (3-26) se satisfacen, entonces la función f tiene exactamente tres ceros reales dados por $x = 0$ y $x = \pm x_*$, donde x_* es la única solución en el intervalo $] 0, 1[$ de la ecuación*

$$\varphi_\alpha(x) = 4\beta V_{DC}^2.$$

Adicionalmente, $f(x) > 0$ para todo $x \in] -1, -x_[\cup] 0, x_*[$, $f(x) < 0$ para todo $x \in] -x_*, 0[\cup] x_*, 1[$, $f'(0) > 0$ y $f'(\pm x_*) < 0$.*

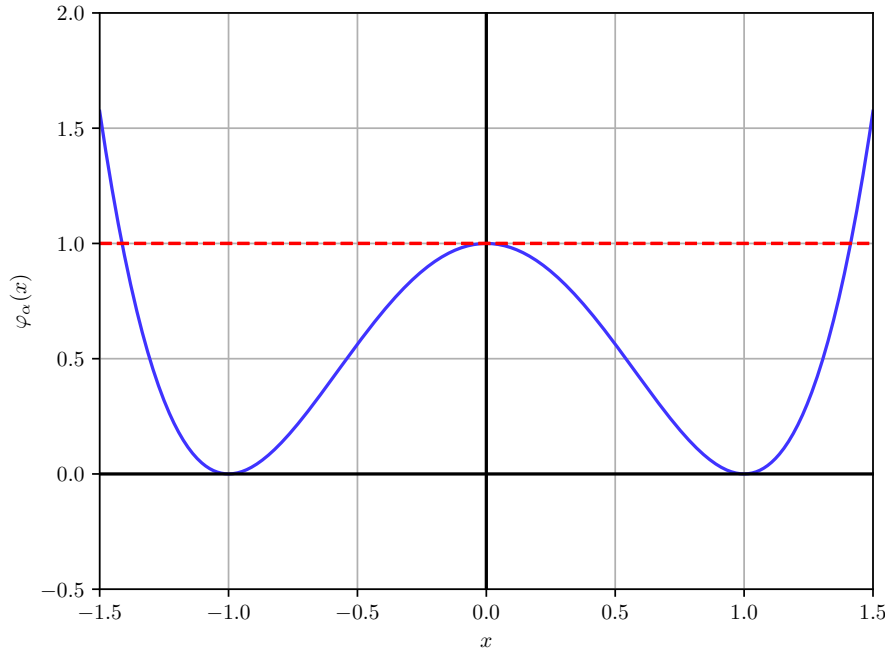


Figura 3-2: Función auxiliar $\varphi_\alpha(x)$ para $\alpha \in]0, 2[$.

Demostración. De la definición de $\varphi_\alpha(x)$ se sigue que

$$f(x) \equiv \frac{x(\varphi_\alpha(x) - 4\beta V_{DC}^2)}{(1-x^2)^2}, \quad (3-27)$$

y el problema de encontrar los ceros de f es equivalente a resolver la ecuación

$$x(\varphi_\alpha(x) - 4\beta V_{DC}^2) = 0. \quad (3-28)$$

De las propiedades mencionadas anteriormente se tiene que $\varphi_\alpha(x)$ es continua en el intervalo $[0, 1]$ con $\varphi_\alpha(0) = 1$ y $\varphi_\alpha(1) = 0$. Como por hipótesis $4\beta V_{DC}^2 \in]0, 1[$ entonces se sigue del Teorema del Valor Intermedio que existe $x_* \in]0, 1[$ tal que $\varphi_\alpha(x_*) = 4\beta V_{DC}^2$. La unicidad de x_* es consecuencia de la monotonía de $\varphi_\alpha(x)$ en el intervalo $]0, 1[$ y $\varphi_\alpha(-x_*) = 4\beta V_{DC}^2$ puesto que la función auxiliar es par.

Luego, la definición de x_* y las propiedades de $\varphi_\alpha(x)$ implican que $\varphi_\alpha(x) > 4\beta V_{DC}^2$ para todo $x \in]-x_*, x_*[$ y que $\varphi_\alpha(x) < 4\beta V_{DC}^2$ para todo $x \in [-1, -x_*[\cup]x_*, 1]$. La conclusión sobre el signo de f es inmediata pues este último coincide con el signo de la expresión del lado izquierdo en (3-28).

Finalmente, debe notarse que $f \in C^1(]-1, 1[)$ con

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 3\alpha x^2 - 4\beta V_{DC}^2 \left(\frac{1}{(1-x^2)^2} + \frac{4x^2}{(1-x^2)^3} \right) \\ &= 1 + 3\alpha x^2 - \frac{4\beta V_{DC}^2 (1+3x^2)}{(1-x^2)^3}. \end{aligned} \quad (3-29)$$

Por tanto, $f'(0) = 1 - 4\beta V_{DC}^2 > 0$ y $f'(x_*) = f'(-x_*)$. Adicionalmente, como por definición de x_* se tiene que $\varphi_\alpha(x_*) = 4\beta V_{DC}^2$ y que $x_*^2 < 1$, entonces

$$\frac{4\beta V_{DC}^2}{(1-x_*^2)^3} = \frac{1+\alpha x_*^2}{1-x_*^2}.$$

De esta forma se obtiene que

$$\begin{aligned} f'(x_*) &= 1 + 3\alpha x_*^2 - \frac{(1+\alpha x_*^2)(1+3x_*^2)}{1-x_*^2} \\ &= \frac{(1+3\alpha x_*^2)(1-x_*^2) - (1+\alpha x_*^2)(1+3x_*^2)}{1-x_*^2} \\ &= \frac{-6\alpha x_*^4 + 2(\alpha-2)x_*^2}{1-x_*^2}, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $f'(x_*) < 0$ en virtud de que $\alpha < 2$. □

Observación 14. Como consecuencia directa del Lema 14 se tiene que f satisface la propiedad general v) enunciada en la sección 2.4. La discusión subsiguiente hace uso de esta conclusión de forma implícita.

Consideremos ahora el cambio de variable $y = \dot{x}$ como en la sección 2.4.1, entonces el sistema de primer orden asociado a (3-24) es un sistema Hamiltoniano de un grado de libertad de la forma (2-36) con

$$H(x, y) := \frac{y^2}{2} + U(x), \quad (3-30)$$

y $U'(x) \equiv f(x)$. En este caso la energía potencial es la función $U :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por (ver figura 3-3)

$$U(x) := \frac{x^2}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{2} x^2 - \frac{4\beta V_{DC}^2}{1-x^2} \right). \quad (3-31)$$

El siguiente lema presenta algunas propiedades importantes de la función U .

Lema 15. Si (3-25) y (3-26) se satisfacen, entonces la función U tiene las siguientes propiedades:

I) $U(-x) \equiv U(x)$,

II) $U'(x) > 0$ para todo $x \in]-1, -x_*[\cup]0, x_*[$, $U'(x) < 0$ para todo $x \in]-x_*, 0[\cup]x_*, 1[$,
 $U'(0) = 0$ y $U'(\pm x_*) = 0$,

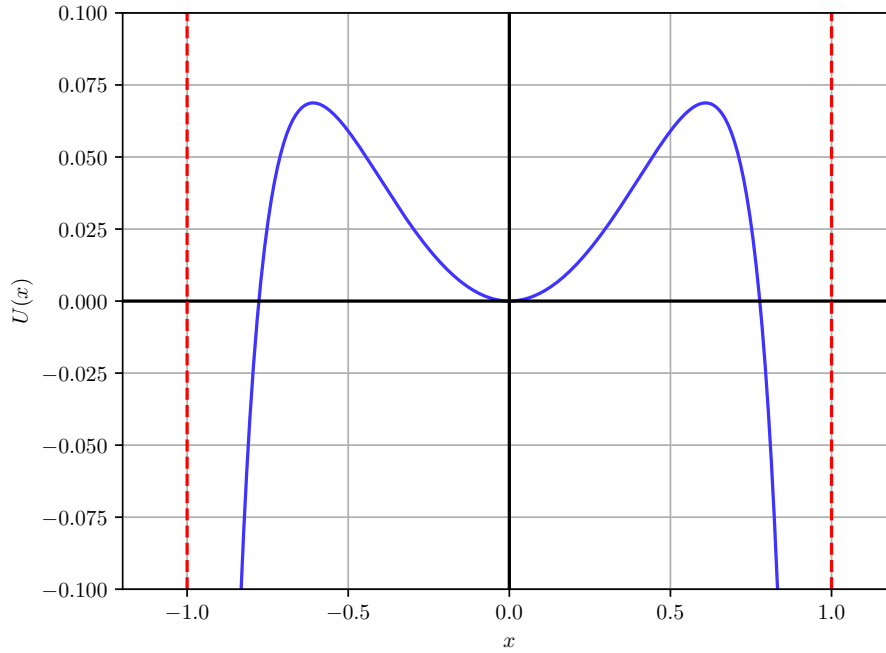


Figura 3-3: Energía potencial $U(x)$ asociada a la ecuación Newtoniana (3-24).

III) $U''(0) > 0$ y $U''(\pm x_*) < 0$,

IV) La función U tiene exactamente tres ceros en $x = 0$ y $x = \pm y_*$, donde y_* es la única solución en $]x_*, 1[$ de la ecuación

$$1 + \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{4\beta V_{DC}^2}{1-x^2} = 0. \quad (3-32)$$

Demostración. Las propiedades I) – III) se siguen de la definición de U y del Lema 14 (ver Lema 7). La propiedad IV) es consecuencia del hecho de que solucionar (3-32) es equivalente a solucionar

$$(2 + \alpha x^2)(1 - x^2) - 8\beta V_{DC}^2 = 0,$$

y por tanto, es equivalente a estudiar los ceros del polinomio $p(x) := 2(1 - 4\beta V_{DC}^2) + (\alpha - 2)x^2 - \alpha x^4$. Un cambio de variable de la forma $w = x^2$ permite obtener que $p(x)$ tiene como ceros a $x = \pm\sqrt{w_{\pm}}$ donde

$$w_+ = \frac{-(2 - \alpha) - \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha(1 - 8\beta V_{DC}^2) + 4}}{2\alpha},$$

y

$$w_- = \frac{-(2 - \alpha) + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha(1 - 8\beta V_{DC}^2) + 4}}{2\alpha}.$$

Es importante notar que $0 < (\alpha - 2)^2 = \alpha^2 - 4\alpha + 4 < \alpha^2 + 4\alpha(1 - 8\beta V_{DC}^2) + 4$ en virtud de que (3-25) implica que $8\beta V_{DC}^2 < 2$, luego, $w_{\pm} \in \mathbb{R}$. Más aún, de (3-26) y lo anterior se sigue que

$$0 < 2 - \alpha = |\alpha - 2| < \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha(1 - 8\beta V_{DC}^2) + 4},$$

y entonces $w_+ < 0 < w_-$. Así, $p(x)$ tiene exactamente dos raíces reales dadas por $x = \pm y_*$ donde $y_* = \sqrt{w_-} < 1$. Un cálculo rutinario demuestra que asumir $w_- > 1$ produce una contradicción. Finalmente, como U es una función continua que se anula en $x = 0$ y la propiedad *II*) implica que $U(x) > 0$ para todo $x \in]0, x_*[$, se tiene que necesariamente $x_* < y_*$.

De hecho, la propiedad *II*) evidencia que la función U tiene un comportamiento asintótico cerca de $x = \pm 1$ y además

$$\lim_{|x| \rightarrow 1} U(x) = -\infty.$$

□

Del lema anterior y siguiendo un razonamiento análogo al de la demostración del Lema 8 se obtiene el siguiente resultado sobre los puntos de equilibrio del sistema de primer orden asociado a (3-24). La figura 3-4 muestra el retrato de fase correspondiente bajo las condiciones (3-25) y (3-26).

Lema 16. *Si (3-25) y (3-26) se satisfacen, entonces el sistema de primer orden asociado a la ecuación Newtoniana (3-24) tiene exactamente tres puntos de equilibrio: $(0, 0)$, $(\pm x_*, 0)$. Más aún, $(0, 0)$ es un centro y $(\pm x_*, 0)$ son sillars.*

Observación 15. *Debe notarse que el Hamiltoniano H definido en (3-30) satisface las simetrías en (2-38). Además, en virtud del Lema 16, la discusión y las definiciones introducidas en la sección 2.4.1 se extienden para el sistema de primer orden asociado a la ecuación Newtoniana (3-24). En particular, la Definición 4, la Observación 5, la Definición 5, el conjunto de órbitas cerradas \mathcal{P} , y las constantes h_* y η_* dados por (2-39) y (2-41), respectivamente, se extienden y definen de forma similar para la ecuación (3-24).*

Asumiendo de ahora en adelante que las condiciones (3-25) y (3-26) se satisfacen, que $h \in]0, h_*[$ y $\zeta(h) \in]0, x_*[$ es tal que $U(\zeta(h)) = h$ (ver sección 2.4.1), se define $C(t, \zeta(h))$ (ver sección 2.4.2) como la solución periódica no constante de (3-24) con condiciones iniciales

$$(C(0, \zeta(h)), \dot{C}(0, \zeta(h))) = (\zeta(h), 0),$$

y periodo minimal $\mathcal{T}(h)$. Del Lema 9 y de la segunda desigualdad en (2-51) se obtiene que

$$C(\mathcal{T}(h)/4, \zeta(h)) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{C}(t, \zeta(h)) < 0, \quad \forall t \in]0, \mathcal{T}(h)/4],$$

mientras que de la monotonía de U (ver Lema 15) se sigue que $h - U(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, \zeta(h)]$, con la desigualdad estricta en el intervalo $[0, \zeta(h)[$. Por simplicidad en la notación, consideremos $C := C(t, \zeta(h))$. Entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ se satisface la ecuación

$$H(C, \dot{C}) = h,$$

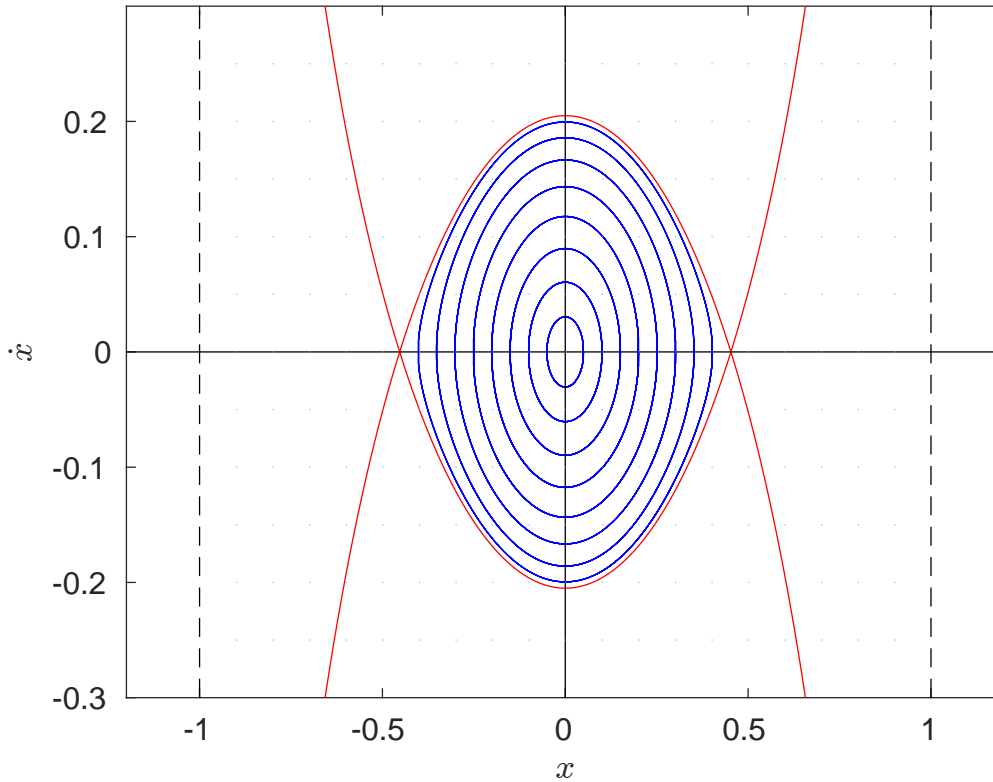


Figura 3-4: Retrato de fase correspondiente al sistema Hamiltoniano asociado a la ecuación (3-24) asumiendo las condiciones (3-25) y (3-26).

de donde se sigue que para $t \in \left[0, \frac{\mathcal{T}(h)}{4}\right]$

$$\dot{C} = -\sqrt{2(h - U(C))}. \quad (3-33)$$

Debe notarse que la ecuación diferencial de primer orden (3-33) es autónoma y que el lado derecho de la misma sólo se anula en $C = \zeta(h)$. De esta forma, (3-33) puede ser empleada para obtener una expresión explícita de la función de periodo $\mathcal{T}(h)$ en términos de una integral impropia en el límite superior.

Definición 9. Sea $(C(t, \zeta(h)), \dot{C}(t, \zeta(h))) \in \mathcal{P}$, entonces la función que asigna el periodo minimal a la órbita cerrada dada por $(C(t, \zeta(h)), \dot{C}(t, \zeta(h)))$ en función de la energía h se define como $\mathcal{T} :]0, h_*[\rightarrow]0, \infty[$ con

$$\mathcal{T}(h) := 2\sqrt{2} \int_0^{\zeta(h)} \frac{dx}{\sqrt{h - U(x)}}. \quad (3-34)$$

Observación 16. Para cada $h \in]0, h_*[$ se tiene que el integrando en el lado derecho de (3-34) es una función continua y positiva en $[0, \zeta(h)[$ con una singularidad en $\zeta(h)$. De hecho, la integral en (3-34) es convergente y por tanto \mathcal{T} define una función de h donde

$$\mathcal{T}(h) = 2\sqrt{2} \lim_{r \rightarrow \zeta(h)^-} \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{h - U(x)}}.$$

En efecto, dado $\zeta(h)$ fijo se tiene que la integral impropia en el límite superior

$$\int_0^{\zeta(h)} \frac{1}{\sqrt{\zeta(h) - x}}, \quad (3-35)$$

es convergente en virtud del Lema 22 en el Apéndice A y que el límite

$$\lim_{x \rightarrow \zeta(h)^-} \frac{\zeta(h) - x}{h - U(x)} \equiv \frac{1}{U'(\zeta(h))} > 0,$$

como consecuencia de la regla de L'Hopital y la propiedad II) en el Lema 15. Luego, como en (3-34) y (3-35) los integrandos son estrictamente positivos, una aplicación del Teorema 8 en el Apéndice A revela que la integral en (3-34) es convergente.

El siguiente resultado proporciona un par de propiedades importantes de la función de periodo. El panel de figuras **3-5** ilustra estas propiedades para algunos valores de referencia de los parámetros.

Lema 17. Si las condiciones (3-25) y (3-26) se satisfacen, entonces la función de periodo \mathcal{T} tiene las siguientes propiedades:

i) $\mathcal{T}'(h) > 0$ para todo $h \in]0, h_*[$,

ii) $\lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{T}(h) = \mathcal{T}_0$, donde

$$\mathcal{T}_0 := \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 4\beta V_{DC}^2}} \quad (3-36)$$

Demostración. i) Para $h \in]0, h_*[$ y $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ consideremos el cambio de variable $x := x(h, \theta) = \zeta(h) \cos(\theta)$, entonces

$$\left. \frac{\partial x}{\partial \theta} \right|_{(h, \theta)} \equiv -\zeta(h) \sin(\theta),$$

y la expresión en (3-34) se transforma en

$$\mathcal{T}(h) = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\zeta(h) \sin(\theta)}{\sqrt{U(\zeta(h)) - U(\zeta(h) \cos(\theta))}} d\theta, \quad (3-37)$$

donde los límites de integración en el lado derecho de (3-37) no dependen del parámetro h . De esta forma, sean $w(h, \theta)$, $g(h, \theta)$ y $\psi(h, \theta)$ funciones definidas sobre $]0, h_*[\times]0, \frac{\pi}{2}[$ tales que

$$w(h, \theta) := \frac{\zeta(h)}{\sqrt{U(\zeta(h)) - U(\zeta(h) \cos(\theta))}}, \quad g(h, \theta) := w(h, \theta) \sin(\theta),$$

y

$$\psi(h, \theta) := Q(\zeta(h)) - Q(\zeta(h) \cos(\theta)),$$

donde $Q : [0, x_*] \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$Q(x) := 2U(x) - U'(x)x. \quad (3-38)$$

Como por definición $\zeta(h) \in]0, x_*[$ se sigue de la propiedad *II*) dada por el Lema 15 que $U'(\zeta(h)) > 0$. Luego, el Teorema de la Función Inversa implica que U es un difeomorfismo en una vecindad de $\zeta(h)$ y entonces $\zeta(h) = U^{-1}(h)$ con

$$\zeta'(h) = (U^{-1})'(h) = \frac{1}{U'(\zeta(h))} > 0, \quad (3-39)$$

donde U^{-1} es la rama de la función inversa de U con rango en $]0, x_*[$, lo que implica que $w(h, \theta)$ es una función continuamente diferenciable con respecto a h y

$$\left. \frac{\partial w(h, \theta)}{\partial h} \right|_{(h, \theta)} \equiv \frac{\zeta'(h)}{2[U(\zeta(h)) - U(\zeta(h) \cos(\theta))]^{3/2}} \psi(h, \theta). \quad (3-40)$$

En virtud de la discusión subsecuente es conveniente introducir el siguiente lema sobre algunas propiedades de la función $Q(x)$. La demostración de este resultado puede ser encontrada en el Apéndice A.

Lema 18. *Si las condiciones (3-25) y (3-26) se satisfacen entonces la función $Q(x)$ definida en (3-38) tiene las siguientes propiedades:*

$$I) \quad Q(x) > 0 \text{ para todo } x \in]0, x_*] \text{ y } Q(0) = 0,$$

$$II) \quad Q'(x) > 0 \text{ para todo } x \in]0, x_*] \text{ y } Q'(0) = 0.$$

De esta manera, como $0 < \zeta(h) \cos(\theta) < \zeta(h) < x_*$ para todo $h \in]0, h_*[$ y $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ se tiene de la propiedad *II*) en el Lema 18 que

$$Q(\zeta(h)) - Q(\zeta(h) \cos(\theta)) > 0, \quad \forall \theta \in]0, \pi/2[,$$

de donde se concluye que

$$\psi(h, \theta) > 0, \quad \forall (h, \theta) \in]0, h_*[\times]0, \pi/2[. \quad (3-41)$$

Así, (3-39), (3-40) y (3-41) implican que

$$\left. \frac{\partial w(h, \theta)}{\partial h} \right|_{(h, \theta)} > 0, \quad \forall (h, \theta) \in]0, h_*[\times]0, \pi/2[. \quad (3-42)$$

La siguiente observación proporciona información sobre el comportamiento de la función $g(h, \theta)$ y su derivada parcial con respecto a h cuando la variable $\theta \rightarrow 0^+$, es decir, cerca del punto de no definición de la función $w(h, \theta)$.

Observación 17. *Debe notarse que $g(h, \theta)$ es una función continuamente diferenciable con respecto a la variable h sobre su dominio. Más aún, para cada $h \in]0, h_*[$ se tiene que*

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} g(h, \theta) &= \zeta(h) \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{U(\zeta(h)) - U(\zeta(h) \cos(\theta))}} \frac{|\theta|}{\theta} \\ &= \sqrt{\frac{2\zeta(h)}{U'(\zeta(h))}}, \end{aligned}$$

en virtud de que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{U(\zeta(h)) - U(\zeta(h) \cos(\theta))}{\theta^2} \equiv \frac{U'(\zeta(h))\zeta(h)}{2}, \quad (3-43)$$

como consecuencia de la regla de L'Hopital. De hecho, si se define la función $g_0(h)$ como sigue

$$g_0(h) := \sqrt{\frac{2\zeta(h)}{U'(\zeta(h))}},$$

entonces

$$g'_0(h) = \frac{\zeta'(h)[U'(\zeta(h)) - U''(\zeta(h))\zeta(h)]}{\sqrt{2\zeta(h)U'(\zeta(h))}^3} \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\partial g(h, \theta)}{\partial h} \Big|_{(h, \theta)} \equiv g'_0(h).$$

En efecto, para todo $h \in]0, h_*[$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\partial w(h, \theta)}{\partial h} \Big|_{(h, \theta)} \sin(\theta) &= \frac{\zeta'(h)}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\psi(h, \theta) \sin(\theta)}{[U(\zeta(h)) - U(\zeta(h) \cos(\theta))]^{3/2}} \frac{|\theta|^3}{\theta^3} \\ &= \frac{\zeta'(h)[U'(\zeta(h)) - U''(\zeta(h))\zeta(h)]}{\sqrt{2\zeta(h) (U'(\zeta(h)))^3}}, \end{aligned}$$

en virtud de (3-40), (3-43) y de que por la regla de L'Hopital se tiene

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\psi(h, \theta)}{\theta^2} \equiv \frac{\zeta(h)Q'(\zeta(h))}{2} \equiv \frac{\zeta(h)[U'(\zeta(h)) - U''(\zeta(h))\zeta(h)]}{2}.$$

Consideremos ahora la función $g_0(h)$ como en la Observación 17 y la función $\bar{g}(h, \theta)$ definida sobre $]0, h_*[\times [0, \frac{\pi}{2}]$ de tal forma que

$$\bar{g}(h, \theta) := \begin{cases} g(h, \theta) & \text{si } h \in]0, h_*[\text{ y } \theta \in]0, \frac{\pi}{2}], \\ g_0(h) & \text{si } h \in]0, h_*[\text{ y } \theta = 0. \end{cases}$$

Entonces $\bar{g}(h, \theta)$ es una función continua sobre su dominio y diferenciable con respecto al parámetro h . De hecho, para cada $h \in]0, h_*[$ fijo se tiene que

$$\bar{g}(h, \theta) = g(h, \theta), \quad \forall \theta \in]0, \pi/2],$$

y

$$\frac{\partial \bar{g}(h, \theta)}{\partial h} \Big|_{(h, \theta)} = \frac{\partial g(h, \theta)}{\partial h} \Big|_{(h, \theta)}, \quad \forall \theta \in]0, \pi/2].$$

Más aún, dado que para cada $h \in]0, h_*[$ fijo existe una vecindad B_ϵ de h tal que $\overline{B_\epsilon} \subset]0, h_*[$, entonces una aplicación directa del Teorema 9 en el Apéndice A empleando la función $\bar{g}(h, \theta)$ sobre $B_\epsilon \times [0, \frac{\pi}{2}]$ implica que $\mathcal{T}(h)$ es diferenciable sobre B_ϵ con

$$\begin{aligned} \mathcal{T}'(h) &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \bar{g}(h, \theta)}{\partial h} d\theta \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial w(h, \theta)}{\partial h} \sin(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (3-44)$$

Luego, de (3-42), (3-44) y el hecho de que $\sin(\theta) > 0$ para todo $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$, se sigue que $\mathcal{T}'(h) > 0$ para todo $h \in]0, h_*[$.

ii) Si para $h \in]0, h_*[$ se define $\zeta := \zeta(h) \in]0, x_*[$ entonces la función de periodo $\mathcal{T}(h)$ puede escribirse de forma explícita como función de ζ (ver discusión previa a la Definición 9). Sea $\bar{\mathcal{T}} :]0, x_*[\rightarrow]0, \infty[$ tal que

$$\bar{\mathcal{T}}(\zeta) := 4 \int_0^\zeta \frac{dx}{\sqrt{w_\zeta(x)}},$$

donde para cada $\zeta \in]0, x_*[$ se define $w_\zeta : [0, \zeta] \rightarrow [0, \infty[$ con

$$w_\zeta(x) := 2(U(\zeta) - U(x)).$$

De (3-31) y la propiedad *II*) en el Lema 15 se tiene que $w_\zeta(x)$ está bien definida y que

$$w_\zeta(x) \equiv (\zeta^2 - x^2) \left(1 + \frac{\alpha}{2}(\zeta^2 + x^2) - \frac{4\beta V_{DC}^2}{(1 - \zeta^2)(1 - x^2)} \right).$$

Adicionalmente, si para ζ como antes y para todo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se considera el cambio de variable $x := \zeta \cos(\theta)$ entonces

$$\bar{\mathcal{T}}(\zeta) \equiv 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} W(\zeta, \theta) d\theta, \quad (3-45)$$

donde

$$W(\zeta, \theta) := \left(1 + \frac{\alpha}{2}\zeta^2(1 + \cos^2(\theta)) - \frac{4\beta V_{DC}^2}{(1 - \zeta^2)(1 - \zeta^2 \cos^2(\theta))} \right)^{-1/2},$$

en virtud de que $\text{sgn}(\zeta \sin(\theta)) = 1$ para todo $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Dado que $W(\zeta, \theta) \rightarrow W(0, \theta)$ uniformemente sobre $[0, \frac{\pi}{2}]$ cuando $\zeta \rightarrow 0^+$ y

$$W(0, \theta) \equiv (1 - 4\beta V_{DC}^2)^{-1/2},$$

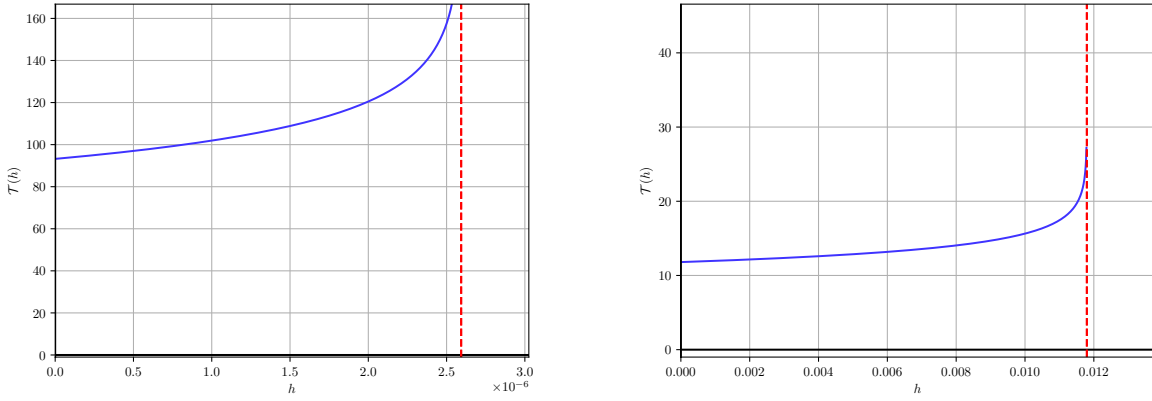
se concluye que (3-45) implica que

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0^+} \bar{\mathcal{T}}(\zeta) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\zeta \rightarrow 0^+} W(\zeta, \theta) d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 4\beta V_{DC}^2}} = \mathcal{T}_0.$$

□

Observación 18. La constante \mathcal{T}_0 definida en (3-36) corresponde al periodo del centro lineal en el origen asociado al equilibrio $x \equiv 0$ de la ecuación (3-24). Esta afirmación es consecuencia de que la ecuación variacional a lo largo del equilibrio trivial $x \equiv 0$ es

$$\ddot{u} + (1 - 4\beta V_{DC}^2)u = 0. \quad (3-46)$$



(a) $\mathcal{T}(h)$ para el conjunto A de valores de los parámetros en el cuadro 4-2 y $V_{DC} \approx 5.105\ 832\ 7\text{ V}$.
 (b) $\mathcal{T}(h)$ para el conjunto B de valores de los parámetros en el cuadro 4-2 y $V_{DC} \approx 6.361\ 353\ 5\text{ V}$.

Figura 3-5: Gráficas de la función de periodo $\mathcal{T}(h)$ para distintos valores de los parámetros. La recta vertical en color rojo corresponde a $y = h_*$ para cada caso.

3.4.2. Criterio de estabilidad lineal para parámetro pequeño

El resultado principal de esta sección corresponde a un criterio de estabilidad en el sentido lineal para ciertas respuestas periódicas impares con oscilación prescrita de la ecuación (3-23).

Consideremos la ecuación (3-23) con los parámetros α , β y V_{DC} satisfaciendo las condiciones (3-25) y (3-26). De forma similar a la sección 2.4.5, se asume de ahora en adelante que para $m, p \in \mathbb{N}$ y T (con este último definido en (2-6)) adecuados, existe un nivel de energía $h_{m,p} \in]0, h_*[$ tal que la ecuación autónoma (3-24) admite una solución (m, p) -periódica impar, $\phi_{m,p}(t)$, que verifica las simetrías y propiedades en la sección 2.4.5, y tiene periodo minimal

$$\mathcal{T}(h_{m,p}) = \frac{mT}{p}.$$

En particular, de la propiedad VI) (ver sección 2.4.5) se sabe que $\phi_{m,p}(t)$ tiene exactamente $p - 1$ ceros en el intervalo $]0, \frac{mT}{2}[$. Más aún, las condiciones (3-25) y (3-26) implican, en virtud de la propiedad i) en el Lema 17, que la función de periodo $\mathcal{T}(h)$ es uno a uno en su dominio y diferenciable en $h = h_{m,p}$ con

$$\mathcal{T}'(h_{m,p}) > 0. \tag{3-47}$$

De (3-47) se sigue que la solución $\phi_{m,p}(t)$ es parabólica inestable y Lyapunov inestable (ver Observación 12), y que la condición de no degeneración (2-67) se satisface. De esta manera, el Teorema 2 implica que existe $\delta_{m,p} > 0$ tal que si $\delta \in [0, \delta_{m,p}[$ entonces existe una solución (m, p) -periódica impar de (3-23), $\phi_{m,p}(t, \delta)$, que emana de la solución $\phi_{m,p}(t)$, es decir,

$$\phi_{m,p}(t, 0) \equiv \phi_{m,p}(t).$$

Dado que la ecuación variacional asociada a (3-23) a lo largo de la solución $\phi_{m,p}(t, \delta)$ es la ecuación de Hill de la forma (2-70), entonces la traza asociada $Tr_{m,p}(\delta)$ se define como en (2-72). El siguiente lema proporciona una expresión explícita para $Tr'_{m,p}(0)$.

Lema 19. Sean $m, p \in \mathbb{N}$ y supongamos que las condiciones (3-25) y (3-26) se satisfacen. Entonces

$$Tr'_{m,p}(0) = 4\beta\omega^2 V_{DC} p \mathcal{T}'(h_{m,p}) \int_0^{mT} K_{m,p}(t) \cos(\omega t) dt, \quad (3-48)$$

donde T está definido como en (2-6) y

$$K_{m,p}(t) := \frac{1}{1 - \phi_{m,p}^2(t)}.$$

Demostración. Debe notarse que

$$\left. \frac{\partial F(t, x, \delta)}{\partial \delta} \right|_{(t,x,\delta)} \equiv -\frac{8\beta V_\delta(t) \cos(\omega t) x}{(1-x^2)^2},$$

y que

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \delta} \right|_{(t,x,\delta)} \equiv \frac{8\beta\omega \sin(\omega t) [\delta \cos(\omega t) + V_\delta(t)] x}{(1-x^2)^2}.$$

Así, de la definición y las propiedades que satisface la solución $\phi_{m,p}(t)$ se sigue que:

- $K_{m,p}(t)$ es una función positiva y continuamente diferenciable con derivada

$$\dot{K}_{m,p}(t) = \frac{2\phi_{m,p}(t)\dot{\phi}_{m,p}(t)}{(1-\phi_{m,p}^2(t))^2}, \quad (3-49)$$

- $K_{m,p}(-t) \equiv K_{m,p}(t)$,
- $K_{m,p}(t)$ es una función periódica con periodo minimal $\frac{mT}{2p}$ (ver propiedad II) en la sección 2.4.5).

Luego, del Teorema 3 se obtiene que

$$\begin{aligned} Tr'_{m,p}(0) &= -p \mathcal{T}'(h_{m,p}) \int_0^{mT} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \delta} \right|_{(t,\phi_{m,p}(t),0)} \dot{\phi}_{m,p}(t) dt \\ &= -p \mathcal{T}'(h_{m,p}) \int_0^{mT} \frac{8\beta\omega V_{DC} \sin(\omega t) \phi_{m,p}(t)}{(1-\phi_{m,p}^2(t))^2} \dot{\phi}_{m,p}(t) dt \\ &= -4\beta\omega V_{DC} p \mathcal{T}'(h_{m,p}) \int_0^{mT} \frac{2\phi_{m,p}(t)\dot{\phi}_{m,p}(t)}{(1-\phi_{m,p}^2(t))^2} \sin(\omega t) dt \\ &= -4\beta\omega V_{DC} p \mathcal{T}'(h_{m,p}) \int_0^{mT} \dot{K}_{m,p}(t) \sin(\omega t) dt. \end{aligned}$$

Como $\sin(\omega t)$ se anula en $t = 0$ y $t = mT$, la integración por partes de la expresión anterior revela que la igualdad en (3-48) se satisface. \square

Aunque el Lema 19 proporciona una expresión concreta para $Tr'_{m,p}(0)$, la siguiente discusión evidencia que la estabilidad en el sentido lineal de la solución $\phi_{m,p}(t, \delta)$ de (3-23) depende delicadamente de m y p . De hecho, es posible encontrar una región de parámetros (m, p) donde $Tr'_{m,p}(0) = 0$, por tanto, la metodología actual no brinda en general conclusión alguna sobre las propiedades de estabilidad en el sentido lineal (ver el Teorema 4.1 en [5] para un resultado análogo en el problema de Sitnikov elíptico). En algunos casos especiales es posible obtener un signo para la derivada de la traza en $\delta = 0$ y esto lo aprovecharemos para estudiar la estabilidad del subarmónico impar positivo de orden 2 asociado.

Observación 19. Consideremos $T > 0$ y el espacio de funciones $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}T)$ dotado del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que para $g, h \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}T)$

$$\langle g, h \rangle = \int_0^T g(t) \overline{h(t)} dt.$$

Entonces la familia

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) \mid n, k = 1, 2, 3, \dots \right\}, \quad (3-50)$$

es un sistema ortonormal sobre $[0, T]$. Esto es consecuencia directa de la definición de las funciones seno y coseno en términos de la función exponencial, y del hecho de que dado $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^T e^{\frac{2n\pi i}{T}t} dt = \begin{cases} \frac{T}{2n\pi i} (e^{2n\pi i} - 1) = 0 & \text{si } n \neq 0, \\ T & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Más aún, la serie de Fourier de una función de valor real $g \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}T)$ con respecto al sistema (3-50) está dada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right],$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

y

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Ahora, en virtud de la Observación 19, de la definición y las propiedades de la función $K_{m,p}(t)$ proporcionadas en la demostración del Lema 19, y de que $mT = \frac{2m\pi}{\omega}$, se obtiene que la serie de Fourier de $K_{m,p}(t)$ con respecto al sistema ortonormal (3-50) sobre $\left[0, \frac{m\pi}{p\omega}\right]$ (puesto que $K_{m,p}(t)$ tiene periodo minimal $\frac{mT}{2p} = \frac{m\pi}{p\omega}$) está dada por

$$K_{m,p}(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(2np \frac{\omega t}{m}\right), \quad (3-51)$$

donde a_0 se redefine como el promedio de $K_{m,p}(t)$ sobre el intervalo $\left[0, \frac{m\pi}{p\omega}\right]$.

Lema 20. *Supongamos que m , p y n son números naturales de tal forma que $m \neq 2np$. Entonces $Tr'_{m,p}(0) = 0$.*

El lema anterior es consecuencia directa de que en (3-51) la convergencia es uniforme sobre $[0, mT]$, de que $\cos(\omega t)$ se puede reescribir como $\cos\left(m\frac{\omega t}{m}\right)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y de que $\{\cos\left(k\frac{\omega t}{m}\right) \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$ es una familia ortogonal de funciones en $L^2\left[0, \frac{2m\pi}{\omega}\right]$. En efecto, la convergencia uniforme permite integrar término a término la serie del integrando, entonces de la ortogonalidad y de (3-51) se sigue que

$$\int_0^{mT} K_{m,p}(t) \cos(\omega t) dt = \int_0^{\frac{2m\pi}{\omega}} K_{m,p}(t) \cos\left(m\frac{\omega t}{m}\right) dt = 0,$$

siempre que $m \neq 2np$. Por tanto, la expresión en (3-48) implica que $Tr'_{m,p}(0) = 0$ para $m \neq 2np$.

Consideremos ahora el caso donde $p, n \in \mathbb{N}$ y $m = 2np$. Dado que las hipótesis en esta sección implican que la función de periodo asociada $\mathcal{T}(h)$ es uno a uno en su dominio, se sigue de la Observación 11 que

$$\phi_{2np,p}(t) \equiv \phi_{2n,1}(t), \quad (3-52)$$

y entonces la estabilidad en el sentido lineal de la solución $\phi_{2np,p}(t)$ está determinada por la información que proporciona $\phi_{2n,1}(t)$. Es valioso mencionar que esta última función es por definición una solución $\mathcal{T}_{2n,1}$ -periódica impar de (3-24) con las siguientes propiedades:

- $\mathcal{T}_{2n,1} = \frac{4n\pi}{\omega}$,
- $\phi_{2n,1}(t + 2n\pi/\omega) \equiv -\phi_{2n,1}(t)$,
- $\phi_{2n,1}(t) > 0$ para todo $t \in]0, \frac{2n\pi}{\omega}[$,
- $\dot{\phi}_{2n,1}(t) > 0$ para todo $t \in [0, \frac{n\pi}{\omega}[$,
- $M := \max_{t \in [0, \frac{4n\pi}{\omega}]} \phi_{2n,1}(t) = \phi_{2n,1}(n\pi/\omega) \in]0, 1[$.

Luego, $K_{2n,1}(t)$ es una función par, positiva y periódica con periodo minimal $\frac{2n\pi}{\omega}$ que satisface (dado que $\phi_{2n,1}(t)$ es $\frac{2n\pi}{\omega}$ -antiperiódica y satisface la identidad en (3-52))

$$K_{2n,1}(t) \equiv K_{2n,1}(2n\pi/\omega - t) \quad \text{y} \quad K_{2n,1}(t) \equiv K_{2np,p}(t), \quad (3-53)$$

donde en virtud de la definición de $K_{2n,1}(t)$ y (3-49) se tiene que

$$K_{2n,1}(0) = 1 < K_{2n,1}(n\pi/\omega) = \frac{1}{1 - M^2}, \quad (3-54)$$

y

$$\dot{K}_{2n,1}(t) > 0 \quad \text{para todo } t \in]0, n\pi/\omega[. \quad (3-55)$$

Observación 20. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\cos(\omega t) \equiv \cos(2n\pi - \omega t) \quad \text{y} \quad \cos(n\pi - t) \equiv (-1)^n \cos(t). \quad (3-56)$$

La discusión anterior conduce al siguiente resultado sobre $Tr'_{2np,p}(0)$.

Lema 21. Sean $p, n \in \mathbb{N}$ y supongamos que las condiciones (3-25) y (3-26) se satisfacen. Entonces

$$Tr'_{2np,p}(0) = 16\beta\omega^2 V_{DC} p^2 \mathcal{T}'(h_{2n,1}) \int_0^{\frac{n\pi}{2\omega}} Q_n(t) \cos(\omega t) dt, \quad (3-57)$$

donde

$$Q_n(t) = K_{2n,1}(t) + (-1)^n K_{2n,1}(n\pi/\omega - t). \quad (3-58)$$

Demostración. Como $K_{2n,1}(t)$ y $\cos(\omega t)$ son funciones $\frac{2n\pi}{\omega}$ -periódicas, se obtiene de la segunda identidad en (3-53) que

$$\begin{aligned} \int_0^{2npT} K_{2np,p}(t) \cos(\omega t) dt &= \int_0^{2p\frac{2n\pi}{\omega}} K_{2n,1}(t) \cos(\omega t) dt \\ &= 2p \int_0^{\frac{2n\pi}{\omega}} K_{2n,1}(t) \cos(\omega t) dt \\ &= 2p \left(\int_0^{\frac{n\pi}{\omega}} K_{2n,1}(t) \cos(\omega t) dt + \int_{\frac{n\pi}{\omega}}^{\frac{2n\pi}{\omega}} K_{2n,1}(t) \cos(\omega t) dt \right). \end{aligned} \quad (3-59)$$

Por otra parte, el cambio de variable $u = \frac{2n\pi}{\omega} - t$, y las primeras simetrías en (3-53) y (3-56) implican

$$\begin{aligned} \int_{\frac{n\pi}{\omega}}^{\frac{2n\pi}{\omega}} K_{2n,1}(t) \cos(\omega t) dt &= \int_{\frac{n\pi}{\omega}}^0 K_{2n,1}(2n\pi/\omega - u) \cos(\omega(2n\pi/\omega - u))(-du) \\ &= \int_0^{\frac{n\pi}{\omega}} K_{2n,1}(u) \cos(\omega u) du. \end{aligned} \quad (3-60)$$

Así, de las expresiones en (3-59) y (3-60) se obtiene que

$$\int_0^{2npT} K_{2np,p}(t) \cos(\omega t) dt = 4p \int_0^{\frac{n\pi}{\omega}} K_{2n,1}(t) \cos(\omega t) dt,$$

y entonces como consecuencia del Lema 19

$$Tr'_{2np,p}(0) = 16\beta\omega^2 V_{DC} p^2 \mathcal{T}'(h_{2np,p}) \int_0^{\frac{n\pi}{\omega}} K_{2n,1}(t) \cos(\omega t) dt. \quad (3-61)$$

Luego, el cambio de variable $u = \frac{n\pi}{\omega} - t$ y la segunda identidad en (3-56) implican que

$$\begin{aligned} \int_{\frac{n\pi}{2\omega}}^{\frac{n\pi}{\omega}} K_{2n,1}(t) \cos(\omega t) dt &= \int_{\frac{n\pi}{2\omega}}^0 K_{2n,1}(n\pi/\omega - u) \cos(\omega(n\pi/\omega - u))(-du) \\ &= \int_0^{\frac{n\pi}{2\omega}} K_{2n,1}(n\pi/\omega - u) (-1)^n \cos(\omega u) du, \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{n\pi}{\omega}} K_{2n,1}(t) \cos(\omega t) dt &= \int_0^{\frac{n\pi}{2\omega}} K_{2n,1}(t) \cos(\omega t) dt + \int_{\frac{n\pi}{2\omega}}^{\frac{n\pi}{\omega}} K_{2n,1}(t) \cos(\omega t) dt \\ &= \int_0^{\frac{n\pi}{2\omega}} [K_{2n,1}(t) + (-1)^n K_{2n,1}(n\pi/\omega - t)] \cos(\omega t) dt. \end{aligned} \quad (3-62)$$

Finalmente, como $h_{2np,p} = h_{2n,1}$ (ver Observación 11), la conclusión en (3-57) se sigue de reemplazar la expresión de (3-62) en el lado derecho de la ecuación (3-61). \square

Observación 21. Sea $n \in \mathbb{N}$. De las propiedades de $K_{2n,1}(t)$ en (3-54) y (3-55) se concluye que para todo $t \in [0, \frac{n\pi}{2\omega}[$

$$K_{2n,1}(t) < K_{2n,1}(n\pi/\omega - t).$$

Así, la definición en (3-58) implica que

- $Q_n(t) > 0$ para todo $t \in [0, \frac{n\pi}{2\omega}[$ cuando n es par,
- $Q_n(t) < 0$ para todo $t \in [0, \frac{n\pi}{2\omega}[$ cuando n es impar.

Teorema 6. Sea $p \in \mathbb{N}$. Supongamos que las condiciones (3-25) y (3-26) se satisfacen, y que $\phi_{2p,p}(t, \delta)$ es la solución $(2p, p)$ -periódica impar de (3-23) que emana de la solución $\phi_{2p,p}(t)$ de (3-24). Entonces $\phi_{2p,p}(t, \delta)$ es elíptica y por tanto estable en el sentido lineal siempre que $0 < \delta \ll 1$.

Demostración. Debe notarse que para todo $t \in [0, \frac{\pi}{2\omega}[$ la función $Q_1(t)$ es estrictamente negativa en virtud de la Observación 21 y que $\cos(\omega t) > 0$. Luego, como $\mathcal{T}'(h_{2,1}) > 0$ se tiene que una aplicación directa del Lema 21 con $n = 1$ implica que $Tr'_{2p,p}(0) < 0$. La conclusión se sigue del Corolario 2. \square

3.5. Estabilidad lineal en el principio de Ortega: El subarmónico impar positivo de orden 2

El resultado de esta sección (Teorema 7) proporciona una herramienta práctica para garantizar la existencia y, en ciertos casos, determinar la estabilidad en el sentido lineal de respuestas periódicas impares con oscilación prescrita de la ecuación (2-5). De hecho, el Teorema 7 revela que bajo ciertas condiciones sobre los parámetros de control, existe una única solución $(2, 1)$ -periódica impar de (2-5) (es decir, un subarmónico impar de orden 2 y positivo en medio periodo de tiempo) que es linealmente estable cuando δ es pequeño. Así, el Teorema 7 parece ser, hasta donde se conoce en la literatura, el primer resultado analítico sobre la estabilidad lineal de respuestas periódicas impares de (2-5).

Es valioso mencionar que el resultado de esta sección es consecuencia de la discusión presentada en las secciones 3.3 y 3.4.2. Concretamente, el Teorema 7 evidencia una conexión

entre aquellas soluciones periódicas impares con oscilación prescrita obtenidas vía la generalización del principio variacional de R. Ortega (ver sección 3.1) y aquellas obtenidas vía una perturbación del problema autónomo asociado (ver sección 2.4.5). La siguiente observación precisa esta relación.

Observación 22. *Bajo las condiciones del Teorema 5 se obtiene que para $m \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ la ecuación (2-5) tiene una única solución mT -periódica impar, $x_0(t)$, que no se anula en medio periodo de tiempo y por tanto tiene periodo minimal mT . Por otra parte, si se asumen las condiciones enunciadas al inicio de la sección 3.4.2 entonces el Teorema 2 implica que para $m \in \mathbb{N}$ y $\delta \in]0, \delta_{m,1}[$ existe una solución $(m, 1)$ -periódica impar de (2-5), $\phi_{m,1}(t, \delta)$, que emana de una solución $(m, 1)$ -periódica impar de la ecuación autónoma asociada (es decir, cuando $\delta = 0$). De esta forma, si las condiciones mencionadas anteriormente se satisfacen, entonces para m , δ y T apropiados se obtiene de la Definición 6 y de la Observación 10 que necesariamente*

$$x_0(t) \equiv \phi_{m,1}(t, \delta).$$

Debe notarse que en el Teorema 7 la conclusión sobre la existencia se sigue del Teorema 5 mientras que la conclusión sobre la estabilidad lineal de la solución $(2, 1)$ -periódica impar se obtiene del Teorema 6. No obstante, las condiciones sobre los parámetros de control en el Teorema 7 proporcionan cierta practicidad para su aplicación en virtud de que permiten controlar, para cada $m \in \mathbb{N}$, la constante $\nu_0(m)$.

Teorema 7. *Sean m y $n_0 \in \mathbb{N}$. Supongamos que la condición (3-18) se satisface, que*

$$\frac{m}{n_0 + 1} > \omega, \tag{3-63}$$

y que

$$V_{min}(\delta), V_{max}(\delta) \in \left[\sqrt{\frac{1 - \eta_{max}^2}{4\beta}}, \sqrt{\frac{1 - \eta_{min}^2}{4\beta}} \right], \tag{3-64}$$

donde

$$\eta_{max} := \frac{(n_0 + 1)\omega}{m} \quad \text{y} \quad \eta_{min} := \frac{n_0\omega}{m}.$$

Entonces $n_0 \leq \nu_0(m) \leq n_0 + 1$, y para cada entero no negativo n verificando que $n < \nu_0(m)$, la ecuación (2-5) tiene al menos una solución mT -periódica impar, $x_n(t)$, con n ceros el intervalo $]0, \frac{mT}{2}[$ y $\dot{x}_n(0) > 0$. Más aún, cuando $m = 2$ y $0 < \delta \ll 1$, la solución $x_0(t)$ es única y estable en el sentido lineal.

Demostración. La demostración de este resultado puede ser dividida en las siguientes dos etapas. En la primera etapa se considera el enunciado de existencia/unicidad. En la segunda etapa se aborda la estabilidad en el sentido lineal de la solución $(2, 1)$ -periódica impar, $x_0(t)$.

Etapa 1: Existencia (unicidad). Debe notarse que la condición (3-63) implica que $\eta_{max} < 1$ y entonces

$$0 < \frac{2\pi n_0}{mT} = \eta_{min} < \eta_{max} = \frac{2\pi(n_0 + 1)}{mT} < 1.$$

Luego, de (3-64) se sigue que

$$V_{max}(\delta)^2 \leq \frac{1 - \eta_{min}^2}{4\beta} < \frac{1}{4\beta},$$

y por tanto la condición (3-17) se satisface de forma trivial. Más aún, (3-64) implica que

$$1 - \eta_{max}^2 \leq 4\beta V_{min}(\delta)^2 \quad \text{y} \quad 4\beta V_{max}(\delta)^2 \leq 1 - \eta_{min}^2,$$

de donde se obtiene en virtud de la desigualdad para $G(t, 0)$ en (3-19) que

$$0 < \eta_{min}^2 \leq G(t, 0) \leq \eta_{max}^2 < 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3-65)$$

En el caso donde $V_{min}(\delta)$ y $V_{max}(\delta)$ se toman como los extremos del intervalo en (3-64), la desigualdad anterior es estricta salvo en $t_k = \frac{2k\pi}{\omega}$ y $t_k = \frac{(2k+1)\pi}{\omega}$ para $k \in \mathbb{Z}$. Estos valores corresponden a los tiempos donde $V_\delta(t)$ alcanza su valor máximo y mínimo, respectivamente.

Consideremos ahora los siguientes osciladores con coeficientes constantes

$$\ddot{x}_1 + \eta_{min}^2 x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \eta_{max}^2 x_2 = 0 \quad (3-66)$$

y la ecuación variacional en (3-15). Entonces

$$x_1(t) = \sin(\eta_{min} t) \quad \text{y} \quad x_2(t) = \sin(\eta_{max} t),$$

son soluciones no triviales de los correspondientes osciladores en (3-66) que tienen condiciones iniciales $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = \eta_{min}$ y $\dot{x}_2(0) = \eta_{max}$. Adicionalmente, $x_1(t)$ tiene $n_0 - 1$ ceros en el intervalo $]0, \frac{mT}{2}[$, $x_2(t)$ tiene n_0 ceros en el intervalo $]0, \frac{mT}{2}[$ y $x_1(\frac{mT}{2}) = x_2(\frac{mT}{2}) = 0$ en virtud de que

$$\eta_{min} \frac{mT}{2} = n_0\pi \quad \text{y} \quad \eta_{max} \frac{mT}{2} = (n_0 + 1)\pi.$$

De esta manera, si se supone que $y_0(\frac{mT}{2}) \neq 0$ entonces $\nu_0(m) = n_0$. En efecto, como $x_1(t)$ tiene exactamente $n_0 + 1$ ceros en $[0, \frac{mT}{2}]$, el Teorema de Comparación de Sturm implica que $\nu_0(m) \geq n_0$ como consecuencia de la segunda desigualdad en (3-65), y dado que $y_0(t)$ tiene $\nu_0(m) + 1$ ceros en $[0, \frac{mT}{2}[$, este último teorema también implica que $n_0 \geq \nu_0(m)$ en virtud de la tercera desigualdad en (3-65). Una aplicación directa del Teorema 5 finaliza esta etapa.

Etapa 2: Estabilidad lineal de la solución (2, 1)-periódica impar. Consideremos inicialmente $m \in \mathbb{N}$. De la *Etapa 1* se tiene que existe una solución $x_0(t)$ de (2-5) que es única, mT -periódica, impar y no tiene ceros en medio periodo de tiempo.

Por otra parte, de (3-16) y la condición (3-64) se sabe que

$$\sqrt{1 - 4\beta V_{DC}^2} > \sqrt{1 - 4\beta V_{max}(\delta)^2} \geq \eta_{min} = \frac{2\pi n_0}{mT},$$

luego

$$mT > \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 4\beta V_{DC}^2}}.$$

De la propiedad *ii*) de la función $\mathcal{T}(h)$ dada en el Lema 17 se sigue que

$$mT > \mathcal{T}_0 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{T}(h),$$

y de la propiedad de monotonía *i*) del mismo lema, se concluye que existe $h_{m,1} \in]0, h_*[$ tal que

$$\mathcal{T}(h_{m,1}) = mT \quad \text{y} \quad \mathcal{T}'(h_{m,1}) > 0.$$

Por tanto, la ecuación autónoma (3-24) admite una solución $(m, 1)$ -periódica impar, $\phi_{m,1}(t)$, con nivel de energía $h_{m,1}$, periodo minimal mT y que no tiene ceros en el intervalo $]0, \frac{mT}{2}[$. Más aún, para $0 < \delta \ll 1$ se sigue de la Observación 22 que la solución $x_0(t)$ de (2-5) emana de la solución no constante del problema autónomo $\phi_{m,1}(t)$. Así, para $m = 2$ se obtiene de la aplicación del Teorema 6 con $p = 1$ que la solución $2T$ -periódica impar $x_0(t)$ de (2-5) es estable en el sentido lineal. \square

4. Simulaciones numéricas

Este capítulo tiene por objetivo principal ilustrar numéricamente los resultados analíticos obtenidos para el modelo del MEMS tipo peine con elasticidad cúbica. Concretamente, se considera el Teorema 7 en virtud de que proporciona condiciones prácticas sobre los parámetros de control del sistema que garantizan la existencia de una familia de subarmónicos con ciertas propiedades nodales y la estabilidad lineal de algunos subarmónicos impares y positivos de orden 2. Las soluciones periódicas dadas por el Teorema 7 son aproximadas mediante un esquema numérico elemental basado en el método de bisección y la información obtenida es complementada con resultados de continuación numérica cuando el parámetro de control δ asociado a la amplitud de la componente AC del voltaje de entrada cambia. El lenguaje de programación empleado a lo largo de este capítulo es Python 3.10 y la continuación de soluciones periódicas es realizada con el software de continuación y bifurcaciones *Auto* (ver [50] para más detalles). Más aún, se emplea la librería de Python *mpmath* para aritmética real y compleja de punto flotante con precisión arbitraria (ver [51] para más detalles), con el fin de obtener simulaciones con una alta precisión numérica.

4.1. Valores de referencia

En esta sección se presentan algunos valores de referencia para los parámetros de la ecuación (2-3) y los respectivos valores de los parámetros de control en el contexto de la ecuación adimensional (2-5). Adicionalmente, como consecuencia de las ventajas numéricas que ofrece trabajar con la ecuación truncada asociada a (2-5), en esta sección también se introduce una función de truncamiento que será empleada a lo largo de todo el capítulo.

De forma análoga a la discusión en la sección 2.1, supongamos que g (m) denota el agujero o “gap” entre los electrodos, ℓ (m) denota la longitud de la parte del electrodo móvil que se encuentra en la zona de interacción con respecto a los otros dos electrodos, a (m) denota el ancho de los electrodos, \mathbf{m} (kg) denota la masa del electrodo móvil, ϵ (F m^{-1}) es la constante dieléctrica del medio en el agujero, k_1 (N m^{-1}) denota el coeficiente lineal de rigidez mecánica, k_3 (N m^{-3}) el coeficiente no lineal de rigidez mecánica, V_{DC} (V) es la carga o amplitud de la componente de voltaje DC , δ (V) la carga o amplitud de la componente de voltaje AC y Ω (s) la frecuencia de entrada en la función de voltaje. Entonces el cuadro **4-1** proporciona tres conjuntos de valores para los parámetros base g , ℓ , a , k_1 y k_3 . Los parámetros que permanecen constantes son $\mathbf{m} = 9.330 \times 10^{-11}$ kg y $\epsilon = 8.854 \times 10^{-12}$ F m^{-1} , mientras que

los parámetros asociados al voltaje de entrada V_{DC} , δ , ω y T son determinados de acuerdo con las condiciones del Teorema 7.

	A	B	C
g	$1.0 \times 10^{-6} \text{ m}$	$1.0 \times 10^{-6} \text{ m}$	$0.20 \times 10^{-6} \text{ m}$
ℓ	$100.0 \times 10^{-6} \text{ m}$	$100.0 \times 10^{-6} \text{ m}$	$50.0 \times 10^{-6} \text{ m}$
a	$100.0 \times 10^{-6} \text{ m}$	$10.0 \times 10^{-6} \text{ m}$	$10.0 \times 10^{-6} \text{ m}$
k_1	0.50 N m^{-1}	1.0 N m^{-1}	5.310 N m^{-1}
k_3	$3.10 \times 10^9 \text{ N m}^{-3}$	$3.10 \times 10^9 \text{ N m}^{-3}$	$0.3 \times 10^{11} \text{ N m}^{-3}$

Cuadro 4-1: Conjunto de valores de los parámetros base para la ecuación (2-3).

El cuadro 4-2 proporciona los valores de los parámetros de control para la ecuación (2-5) que corresponden a cada conjunto de los valores dados en el cuadro 4-1. Estos valores serán empleados en las siguientes secciones para ilustrar numéricamente las conclusiones de existencia y estabilidad en el sentido lineal dadas por el Teorema 7.

	A	B	C
α	6.20×10^{-3}	3.10×10^{-3}	$2.259\,887\,005\,649\,717\,514\,124\,294 \times 10^{-4}$
β	$8.8540 \times 10^{-2} \text{ V}^{-2}$	$4.4270 \times 10^{-3} \text{ V}^{-2}$	$5.210\,687\,382\,297\,551\,789\,077\,213 \times 10^{-2} \text{ V}^{-2}$

Cuadro 4-2: Conjunto de valores de los parámetros de control para la ecuación (2-5).

Con respecto a la función de truncamiento, en este capítulo se considera $h_\mu(x)$ definida como en la demostración del Teorema 4, donde $\mu(x)$ es la extensión impar de una función racional $\mu_0(x)$ que se encuentra definida sobre $[R_0, \infty[$ para $R_0 > 0$ como en el enunciado del Teorema 4. De hecho, las constantes $R_1 = -R_0$ y $R_2 = R_0$ son cotas *a priori* de las soluciones periódicas de (2-5) y de su ecuación truncada equivalente de la forma (3-6) (ver la demostración del Teorema 5 y el Lema 4). De esta forma, sea $\mu_0 : [R_0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mu_0(x) := \frac{(1 + \lambda R_0)(x - R_0) + R_0}{\lambda(x - R_0) + 1},$$

donde $\lambda(1 - R_0) > 1$ y $\mu :]-\infty, -R_0] \cup [R_0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mu(x) := \begin{cases} \mu_0(x) & \text{si } x \geq R_0, \\ -\mu_0(-x) & \text{si } x \leq -R_0. \end{cases}$$

Es valioso notar que la definición de la función $\mu(x)$ y la condición sobre λ implican que $h_\mu \in \mathcal{H}$ donde \mathcal{H} es la familia de funciones de truncamiento definida en la sección 3.2.

4.2. Existencia de respuestas periódicas impares con oscilación prescrita

En esta sección se consideran los valores de referencia del cuadro 4-2 que verifican las condiciones del Teorema 7 para evidenciar numéricamente la existencia de subarmónicos de distinto orden y sus propiedades nodales. A continuación se introduce de forma breve la librería *mpmath* de Python y luego se presenta el esquema numérico implementado en esta sección que es consecuencia directa del principio variacional de Ortega.

Tal como se mencionó anteriormente, *mpmath* es una librería de Python para aritmética de punto flotante real y compleja que permite trabajar con precisión arbitraria, y que es empleada en librerías simbólicas como *SymPy* y en algunos sistemas matemáticos de alto nivel como *Sage*. Esta librería ofrece herramientas avanzadas de alta precisión implementando algoritmos eficientes para realizar, por ejemplo, integración numérica, evaluación de límites y series infinitas, aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, entre otras. Con respecto a esta última herramienta es valioso resaltar que *mpmath* permite aproximar las soluciones de problemas de valor inicial en varias dimensiones empleando un método de alto orden basado en la expansión en series de Taylor del campo dado. Este tipo de método basado en series de Taylor fue empleado recientemente en trabajos como [2] para ilustrar numéricamente los resultados de existencia obtenidos, ofreciendo una alta precisión con un bajo costo en tiempo computacional (ver [52]). De hecho, las simulaciones numéricas reportadas en [1] evidencian que para ciertos parámetros m y n_0 , las velocidades críticas asociadas a las respuestas periódicas de (2-5) pueden ser relativamente cercanas entre ellas, por tanto, es conveniente contar con una herramienta numérica que permita aproximar tales velocidades con suficiente precisión. La librería *mpmath* ofrece este tipo de herramienta permitiendo la realización de cálculos con suficientes cifras decimales.

Consideremos ahora la ecuación truncada equivalente a (2-5) de la forma (3-6) vía la función de truncamiento presentada en la sección anterior. Debe notarse que, en el contexto de la ecuación (2-5), las condiciones del Teorema 7 implican las condiciones del Teorema 4, por tanto, el principio de Ortega es válido para la ecuación truncada (ver la demostración del Teorema 4). La siguiente observación evidencia que el principio de Ortega, específicamente el proceso de minimización en la demostración de la Proposición 1, brinda no sólo una herramienta analítica para encontrar soluciones periódicas impares de (2-5) sino que proporciona una estrategia natural para aproximar numéricamente tales soluciones.

Observación 23. Sea $\nu(v)$ la función número de ceros asociada a la ecuación truncada equivalente a (2-5) (ver Definición 2) y sean m, n_0 fijos como en el Teorema 7. Entonces existen al menos n_0 velocidades críticas $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n_0-1}$ (números reales positivos) de tal forma que $z(\frac{mT}{2}, \omega_n) = 0$ y $\nu(\omega_n) = n$ para $n = 0, \dots, n_0 - 1$. Más aún, del proceso de minimización en la demostración de la Proposición 1 se sabe que para cada $n = 0, 1, \dots, n_0 - 1$ existe $\delta_n > 0$

(dado por la propiedad b) en el Lema 5) tal que $\nu(v) = n + 1$ para todo $v \in [\omega_n - \delta_n, \omega_n[$ y $\nu(v) = n$ para todo $v \in]\omega_n, \omega_n + \delta_n]$. De hecho, se tiene que $\nu(v)$ es una función localmente constante en la δ_n -vecindad de cada ω_n que cambia su valor mediante saltos unitarios que ocurren precisamente en $\omega_n = \min S_n$. Por tanto, se satisface que $\omega_0 > \omega_1 > \dots > \omega_{n_0-1} > 0$.

Dado que a priori no se conoce alguna estimación para las velocidades críticas ω_n ó para las constantes δ_n , se pueden considerar el siguiente esquema de dos etapas. En la primera etapa se busca obtener una estimación de ω_n encontrado un valor cercano $v_n \in]\omega_n, \omega_n + \delta_n]$ conocido como velocidad representante. En la segunda etapa se busca afinar la estimación de las velocidades críticas ω_n empleando los intervalos $I_n =]v_{n+1}, v_n[$ obtenidos en la primera etapa.

Etapa 1: Aproximación de velocidades representantes. Del comportamiento en los extremos de la función $\nu(v)$ dado por las propiedades c) y d) en el Lema 5, se tiene que existen v_0 y v_{n_0} tales que $v_0 > \omega_0 > v_{n_0} > 0$, $\nu(v_0) = 0$ y $\nu(v_{n_0}) = n_0$. Así, un elemental proceso de bisección para $n = 1, \dots, n_0 - 1$ permite obtener una sucesión de velocidades representantes $v_1, v_2, \dots, v_{n_0-1}$ verificando que $v_0 > \omega_0 > v_1 > \omega_1 > \dots > v_{n_0-1} > \omega_{n_0-1} > v_{n_0} > 0$ y que $\nu(v_n) = n$. En efecto, en el caso de $n = 1$ se procede definiendo inicialmente $b = v_0$, $a = v_{n_0}$ y la velocidad media $\bar{v}_1 = \frac{(b+a)}{2}$. Luego, si $\nu(\bar{v}_1) > 1$ entonces se redefine $a = \bar{v}_1$, si $\nu(\bar{v}_1) = 0$ entonces se redefine $b = \bar{v}_1$ y si $\nu(\bar{v}_1) = 1$ entonces se define $v_1 = \bar{v}_1$. Dado que para todo $v \in]\omega_1, \omega_1 + \delta_1] \subset]\omega_1, \omega_0[$ se tiene que $\nu(v) = 1$, entonces la ejecución consecutiva del proceso anterior, un número finito de veces, conduce a una velocidad representante v_1 tal que $\omega_0 > v_1 > \omega_1 > v_{n_0}$ y $\nu(v_1) = 1$. Una aplicación del procedimiento anterior para $n = 2, 3, \dots, n_0 - 1$ donde en cada caso se define inicialmente $a = v_{n_0}$, $b = v_{n-1}$ y $\bar{v}_n = \frac{(b+a)}{2}$ conduce a la conclusión.

Etapa 2: Estimación de velocidades críticas. Dado que la Etapa 1 revela la existencia de $n_0 + 1$ velocidades representantes, entonces existen n_0 subintervalos, $I_n =]v_{n+1}, v_n[$ para $n = 0, 1, \dots, n_0 - 1$, tales que $\omega_n \in I_n$. Más aún, por definición de ω_n se tiene que $\nu(v) \geq n + 1$ para todo $v \in]v_{n+1}, \omega_n[$ y que $\nu(v) = n$ para todo $v \in [\omega_n, v_n[\subset]\omega_n, \omega_n + \delta_n]$. Luego, si para $n = 0, 1, \dots, n_0 - 1$ se considera la función $\theta(v) := z^{(mT/2), v}$ se tiene que $\theta(\omega_n) = 0$, $\dot{\theta}(\omega_n) \neq 0$, y entonces el método de bisección tradicional aplicado en el intervalo $I_n =]v_{n+1}, \omega_n[\cup]\omega_n, v_n[$ permite aproximar la velocidad crítica ω_n con una alta precisión.

Las simulaciones numéricas presentadas a continuación son obtenidas a partir del esquema numérico de la Observación 23 para los conjuntos de valores en el cuadro 4-2 y los correspondientes valores de V_{DC} , δ y ω que satisfacen las condiciones del Teorema 7. En particular, se toman $V_{max}(\delta)$ y $V_{min}(\delta)$ como los valores extremos del intervalo dado en la condición (3-64) del Teorema 7, y la siguiente frecuencia en función de m y n_0 de tal forma que

$$\omega = \frac{m}{n_0 + 1} - 0.1.$$

Las rectas verticales con línea discontinua y de color rojo en las figuras subsiguientes corresponden en cada caso a las rectas $t = L$ donde $L = \frac{mT}{2}$.

Caso 1: Consideremos el conjunto de valores de los parámetros A en el cuadro 4-2 con $m = 2$ y $n_0 = 2$. El cuadro 4-3 muestra los valores correspondientes de V_{DC} , δ y T , mientras que el cuadro 4-4 muestra las velocidades críticas para este caso. La figura 4-1 muestra el espectro de soluciones $2T$ -periódicas impares de la ecuación (2-5).

V_{DC}	1.134 850 726 609 821 070 403 69 V
δ	0.249 670 428 121 844 833 339 156 1 V
T	11.087 974 071 493 387 900 456 39

Cuadro 4-3: Valores de los parámetros V_{DC} , δ y T para el *Caso 1*.

ω_0	0.264 724 978 886 409 399 552 426 9
ω_1	0.247 342 825 716 456 196 593 830 5

Cuadro 4-4: Velocidades críticas correspondientes al *Caso 1*.

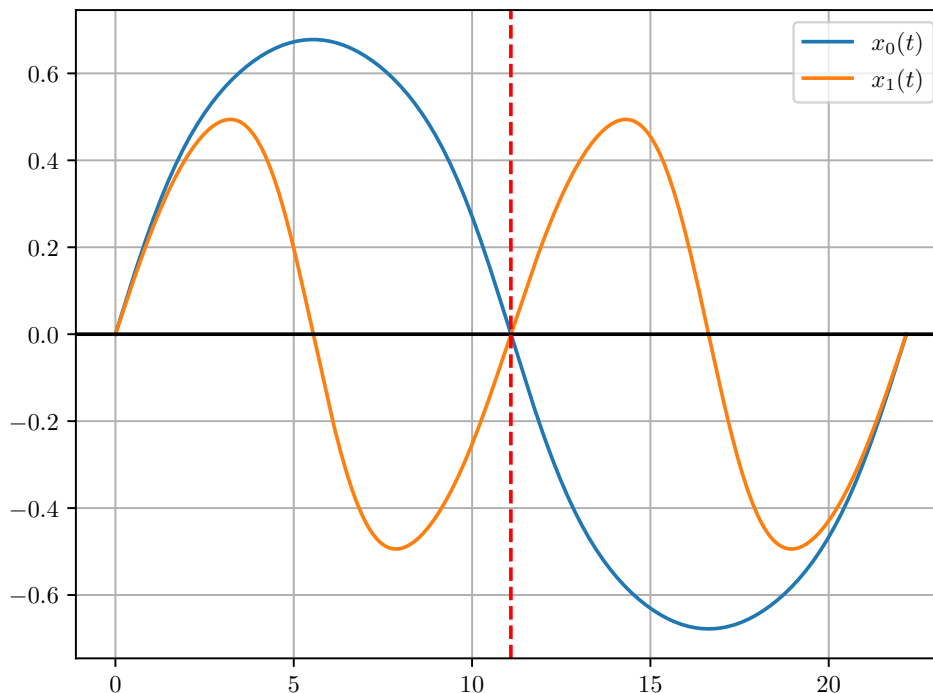


Figura 4-1: Familia de soluciones $2T$ -periódicas obtenidas para el *Caso 1* (intervalo $[0, 2T]$).

Caso 2: Consideremos el conjunto de valores de los parámetros A en el cuadro 4-2 con $m = 1$ y $n_0 = 3$. El cuadro 4-5 muestra los valores correspondientes de V_{DC} , δ y T , mientras que el

cuadro 4-6 muestra las velocidades críticas para este caso. La figura 4-2 muestra el espectro de soluciones T -periódicas impares de la ecuación (2-5).

V_{DC}	1.422 441 888 084 341 231 119 103 V
δ	0.078 160 355 296 427 083 763 996 48 V
T	41.887 902 047 863 909 846 168 58

Cuadro 4-5: Valores de los parámetros V_{DC} , δ y T para el *Caso 2*.

ω_0	0.113 126 208 513 154 137 642 858 1
ω_1	0.113 049 172 430 074 862 959 462 5
ω_2	0.102 648 915 490 126 947 782 969 8

Cuadro 4-6: Velocidades críticas correspondientes al *Caso 2*.

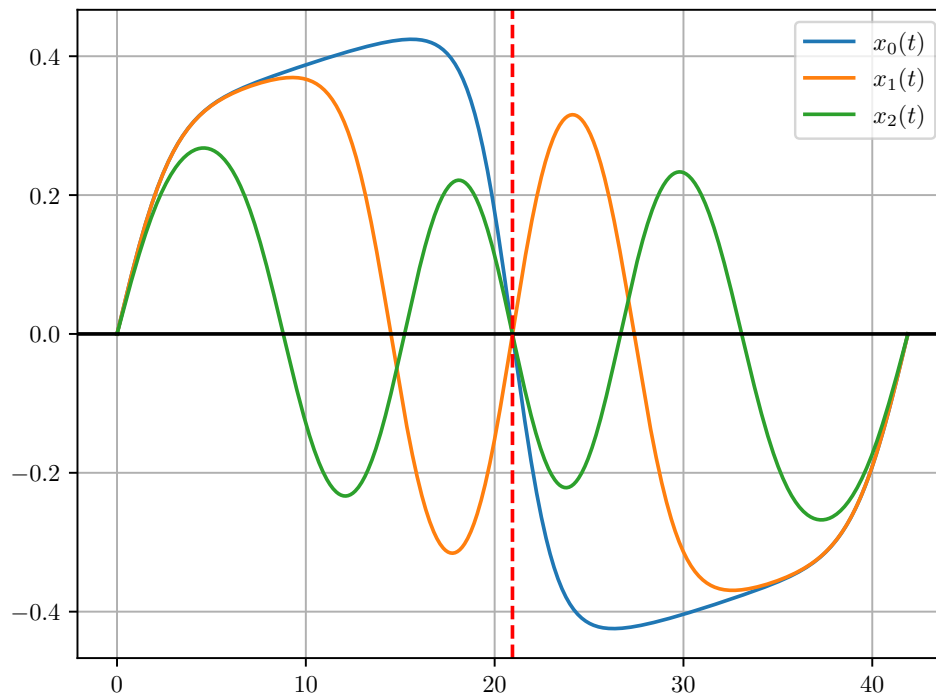


Figura 4-2: Familia de soluciones T -periódicas obtenidas para el *Caso 2* (intervalo $[0, T]$).

Caso 3: Consideremos el conjunto de valores de los parámetros B en el cuadro 4-2 con $m = 2$ y $n_0 = 6$. El cuadro 4-7 muestra los valores correspondientes de V_{DC} , δ y T , mientras que el cuadro 4-8 muestra las velocidades críticas para este caso. La figura 4-3 muestra el espectro

de soluciones $2T$ -periódicas impares de la ecuación (2-5) y el panel de figuras 4-4 muestra la gráfica de cada solución por individual en medio periodo de tiempo.

V_{DC}	5.975 554 325 941 179 902 219 26 V
δ	0.264 829 451 991 301 621 871 877 7 V
T	33.832 536 269 428 542 568 059 24

Cuadro 4-7: Valores de los parámetros V_{DC} , δ y T para el *Caso 3*.

ω_0	0.174 340 785 480 831 262 196 799 4
ω_1	0.174 340 301 835 355 935 216 849 4
ω_2	0.174 323 796 549 392 283 952 438 9
ω_3	0.173 983 019 776 215 357 822 214 7
ω_4	0.168 668 721 605 874 837 071 053 7
ω_5	0.125 521 919 331 844 799 119 177 5

Cuadro 4-8: Velocidades críticas correspondientes al *Caso 3*.

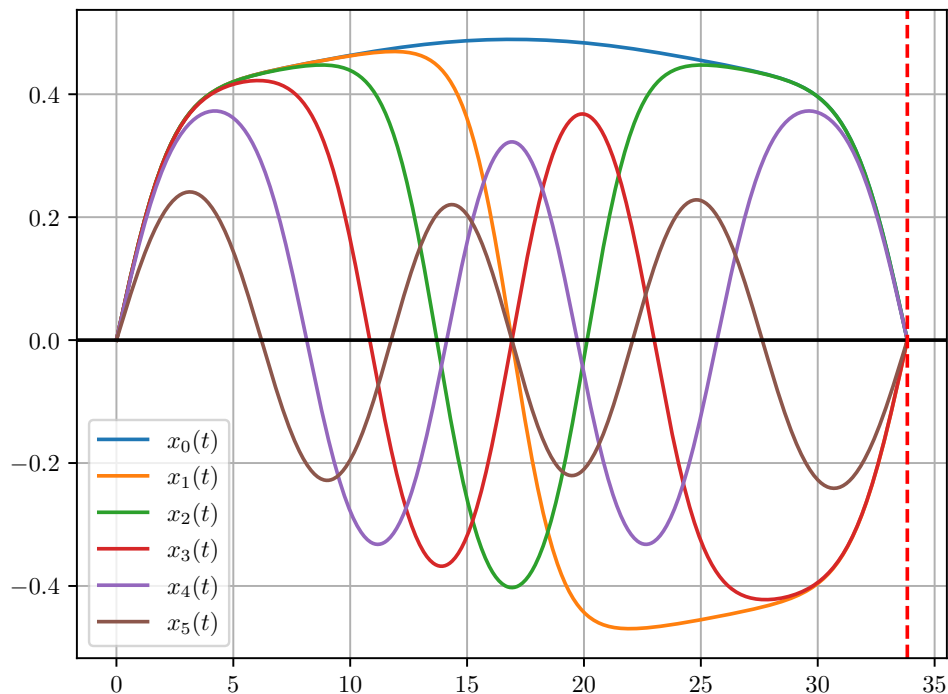


Figura 4-3: Familia de soluciones $2T$ -periódicas obtenidas para el *Caso 3* (intervalo $[0, T]$).

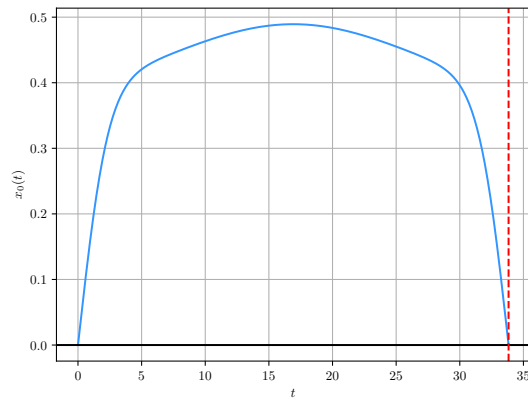
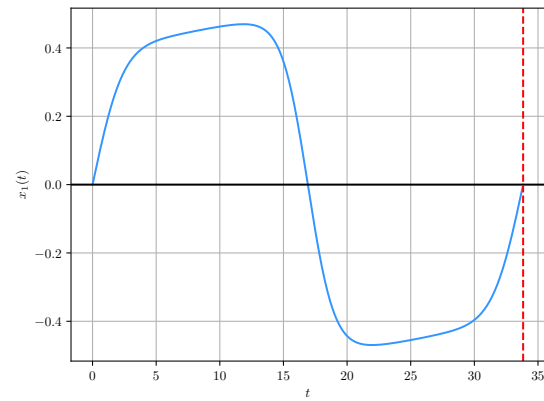
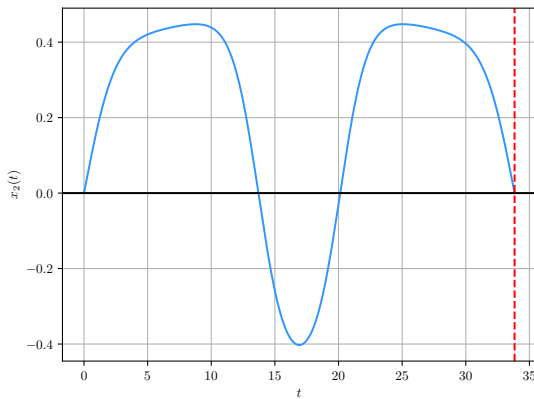
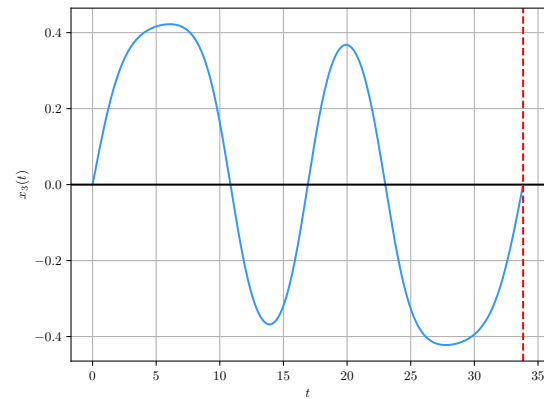
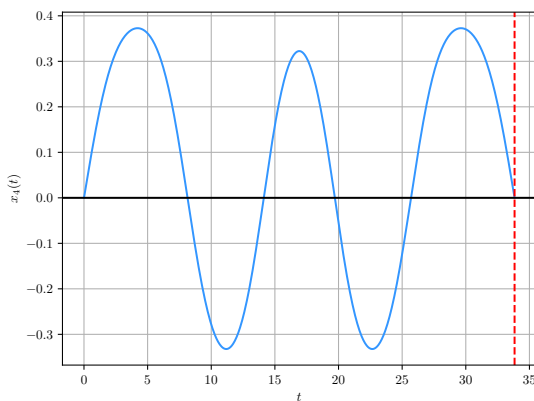
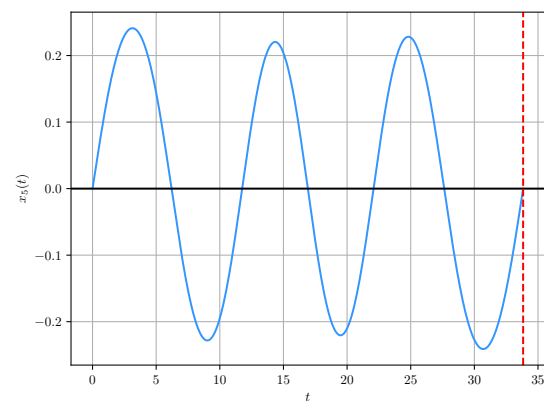
(a) $x_0(t)$.(b) $x_1(t)$.(c) $x_2(t)$.(d) $x_3(t)$.(e) $x_4(t)$.(f) $x_5(t)$.

Figura 4-4: Gráfica de las soluciones $2T$ -periódicas impares obtenidas para el *Caso 3* por individual (intervalo $[0, T]$).

Caso 4: Consideremos el conjunto de valores de los parámetros B en el cuadro 4-2 con $m = 3$ y $n_0 = 3$. El cuadro 4-9 muestra los valores correspondientes de V_{DC} , δ y T , mientras que el cuadro 4-10 muestra las velocidades críticas para este caso. La figura 4-5 muestra el espectro de soluciones $3T$ -periódicas impares de la ecuación (2-5).

V_{DC}	4.729 873 475 127 612 472 294 58 V
δ	0.980 851 398 822 265 808 052 802 4 V
T	9.666 438 934 122 440 733 731 211

Cuadro 4-9: Valores de los parámetros V_{DC} , δ y T para el *Caso 4*.

ω_0	0.324 740 746 321 324 208 955 589 3
ω_1	0.299 228 427 031 554 020 956 173 1
ω_2	0.254 959 836 792 126 378 118 561 2

Cuadro 4-10: Velocidades críticas correspondientes al *Caso 4*.

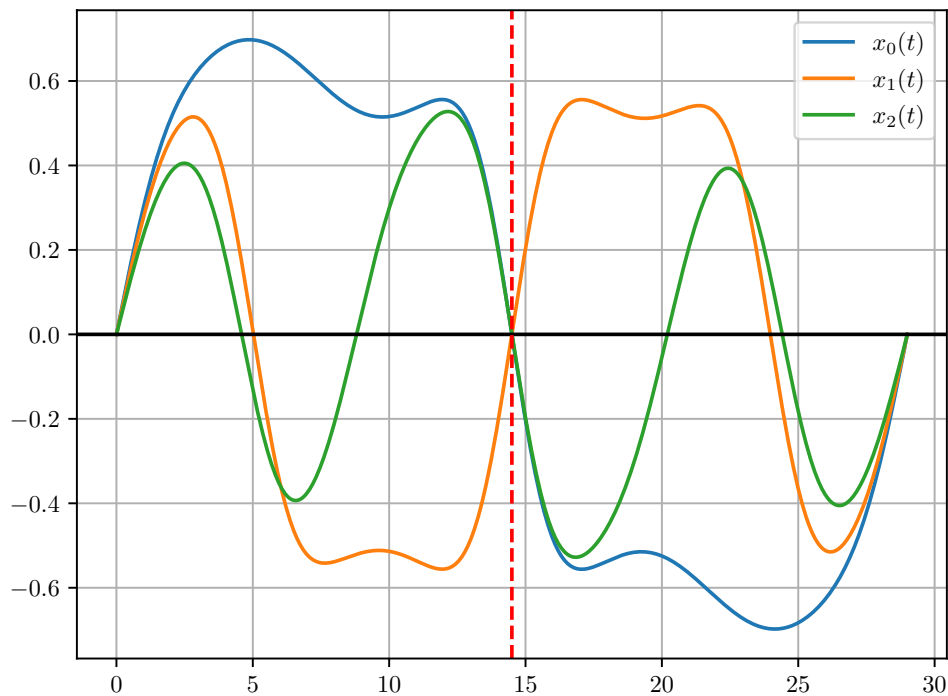


Figura 4-5: Familia de soluciones $3T$ -periódicas obtenidas para el *Caso 4* (intervalo $[0, 3T]$).

Caso 5: Consideremos el conjunto de valores de los parámetros B en el cuadro 4-2 con $m = 2$ y $n_0 = 3$. El cuadro 4-11 muestra los valores correspondientes de V_{DC} , δ y T , mientras que

el cuadro 4-12 muestra las velocidades críticas para este caso. La figura 4-6 muestra el espectro de soluciones $2T$ -periódicas impares de la ecuación (2-5).

V_{DC}	5.260 333 554 369 929 729 201 45 V
δ	0.751 476 222 052 847 104 171 635 7 V
T	15.707 963 267 948 966 192 313 22

Cuadro 4-11: Valores de los parámetros V_{DC} , δ y T para el *Caso 5*.

ω_0	0.238 339 056 980 863 016 963 088 9
ω_1	0.237 357 496 534 327 922 502 875 2
ω_2	0.210 297 843 470 721 400 617 193

Cuadro 4-12: Velocidades críticas correspondientes al *Caso 5*.

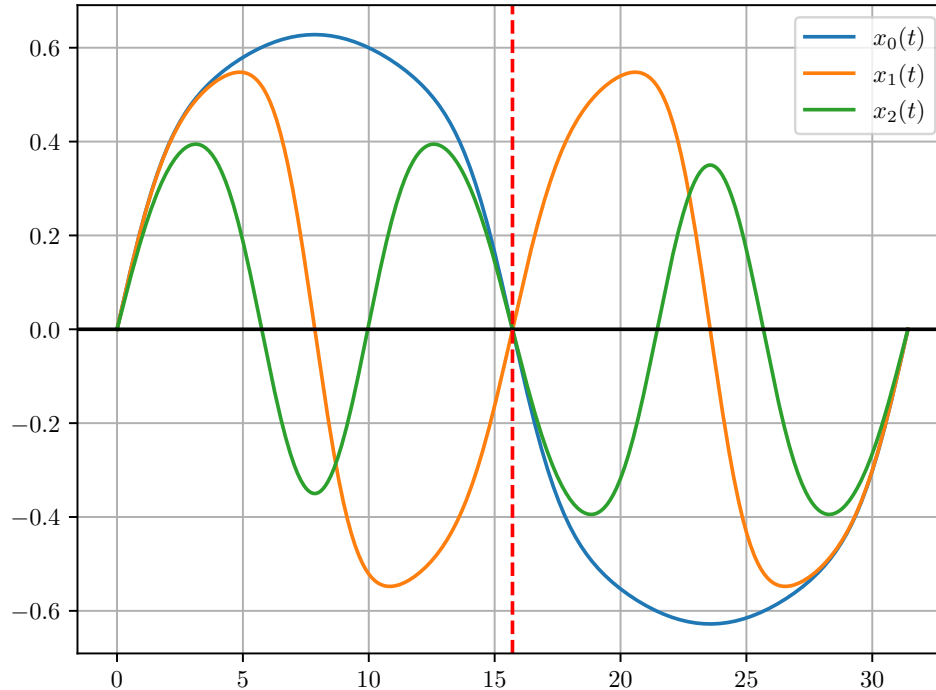


Figura 4-6: Familia de soluciones $2T$ -periódicas obtenidas para el *Caso 5* (intervalo $[0, 2T]$).

Caso 6: Consideremos el conjunto de valores de los parámetros B en el cuadro 4-2 con $m = 7$ y $n_0 = 2$. El cuadro 4-13 muestra los valores correspondientes de V_{DC} , δ y T , mientras que

el cuadro 4-14 muestra las velocidades críticas para este caso. La figura 4-7 muestra el espectro de soluciones $7T$ -periódicas impares de la ecuación (2-5).

V_{DC}	3.981 222 048 744 534 083 241 033 V
δ	1.804 825 070 401 250 393 707 696 V
T	2.813 366 555 453 546 183 697 89

Cuadro 4-13: Valores de los parámetros V_{DC} , δ y T para el *Caso 6*.

ω_0	0.530 354 805 309 249 909 307 351 2
ω_1	0.509 380 005 896 139 335 618 179 2

Cuadro 4-14: Velocidades críticas correspondientes al *Caso 6*.

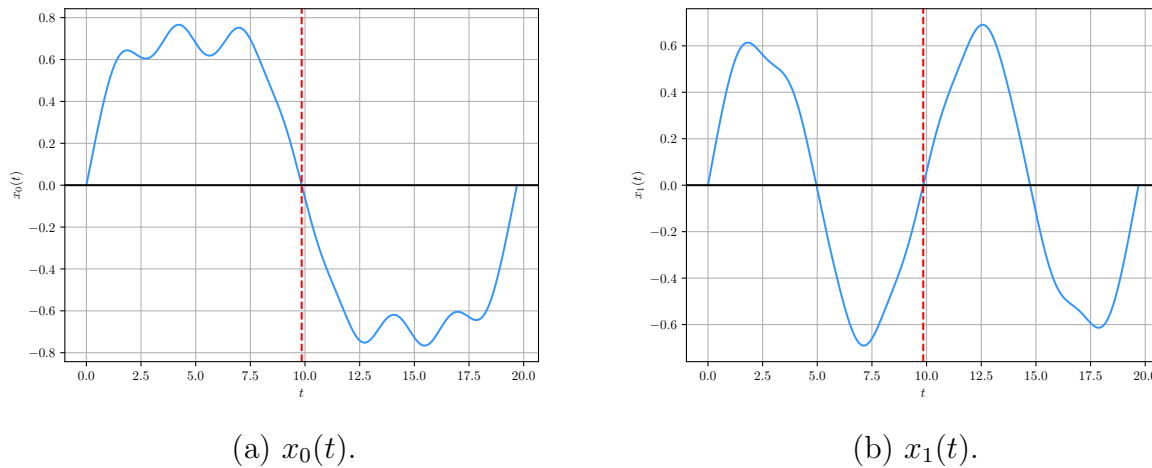


Figura 4-7: Familia de soluciones $7T$ -periódicas obtenidas para el *Caso 6* (intervalo $[0, 7T]$).

Caso 7: Consideremos el conjunto de valores de los parámetros C en el cuadro 4-2 con $m = 2$ y $n_0 = 4$. El cuadro 4-15 muestra los valores correspondientes de V_{DC} , δ y T , mientras que el cuadro 4-16 muestra las velocidades críticas para este caso. La figura 4-8 muestra el espectro de soluciones $2T$ -periódicas impares de la ecuación (2-5).

V_{DC}	1.600 563 260 968 083 048 198 257 V
δ	0.151 752 964 117 830 184 682 508 6 V
T	20.943 951 023 931 954 923 084 29

Cuadro 4-15: Valores de los parámetros V_{DC} , δ y T para el *Caso 7*.

ω_0	0.217 690 543 267 516 785 965 799 2
ω_1	0.217 620 742 363 726 717 530 518 7
ω_2	0.215 645 206 689 400 715 960 173 7
ω_3	0.181 735 794 546 634 569 382 633 4

Cuadro 4-16: Velocidades críticas correspondientes al *Caso 7*.

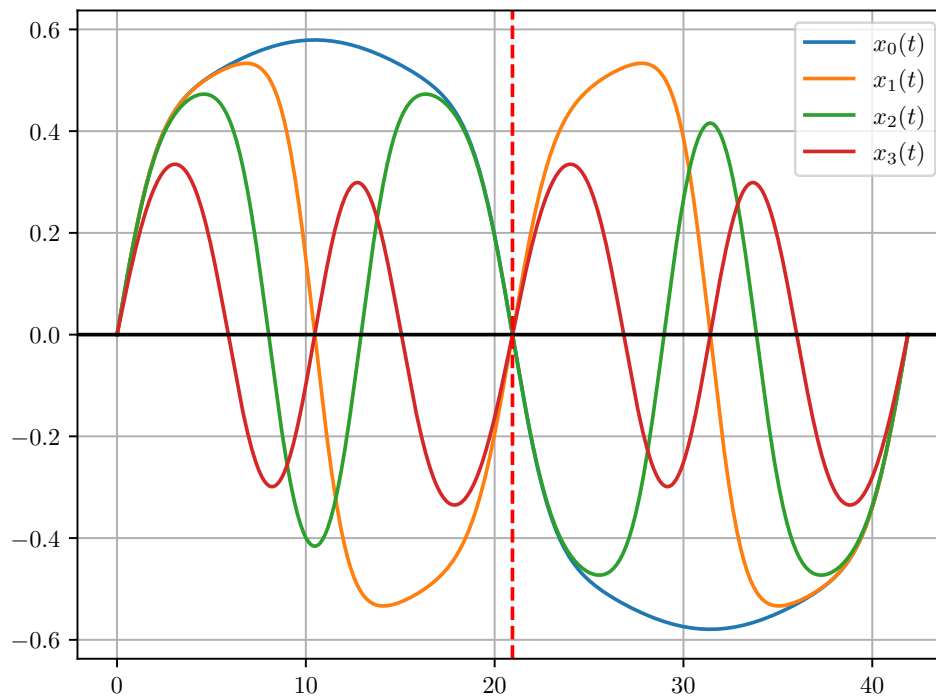


Figura 4-8: Familia de soluciones $2T$ -periódicas obtenidas para el *Caso 7* (intervalo $[0, 2T]$).

Caso 8: Consideremos el conjunto de valores de los parámetros C en el cuadro 4-2 con $m = 5$ y $n_0 = 3$. El cuadro 4-17 muestra los valores correspondientes de V_{DC} , δ y T , mientras que el cuadro 4-18 muestra las velocidades críticas para este caso. La figura 4-9 muestra el espectro de soluciones $5T$ -periódicas impares de la ecuación (2-5).

V_{DC}	1.221 942 373 169 475 363 239 282 V
δ	0.363 486 249 277 378 718 989 978 V
T	5.463 639 397 547 466 501 674 162

Cuadro 4-17: Valores de los parámetros V_{DC} , δ y T para el *Caso 8*.

ω_0	0.455 365 297 765 727 123 668 787 9
ω_1	0.287 683 175 242 358 044 501 445
ω_2	0.236 980 193 638 747 141 485 716 1

Cuadro 4-18: Velocidades críticas correspondientes al *Caso 8*.

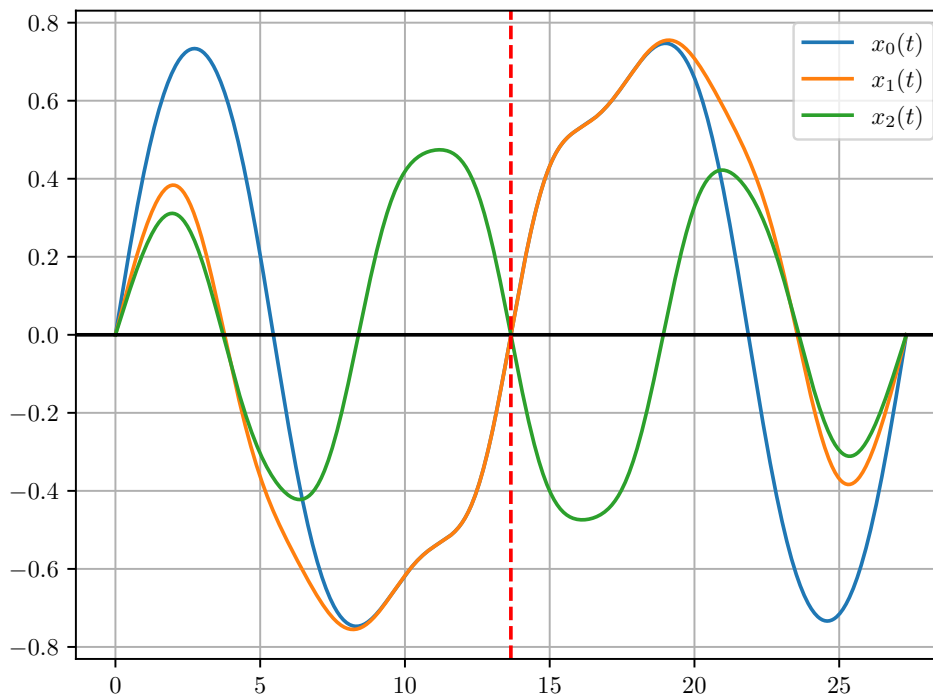


Figura 4-9: Familia de soluciones $5T$ -periódicas obtenidas para el *Caso 8* (intervalo $[0, 5T]$).

Finalmente, es valioso resaltar el carácter no lineal exhibido por las gráficas de las soluciones periódicas e impares obtenidas en esta sección. En particular, las soluciones de las figuras 4-5, 4-7 y 4-9 parecen alcanzar distintos extremos relativos en medio periodo de tiempo.

4.3. Estabilidad en el sentido lineal y continuación numérica de soluciones periódicas

En esta sección se consideran los parámetros de control del cuadro 4-2 y algunos casos de la sección anterior para ilustrar la estabilidad en el sentido lineal de algunos subarmónicos impares de orden 2, mediante el mapa estroboscópico asociado y los correspondientes

multiplicadores de Floquet de la ecuación variacional a lo largo de la solución periódica considerada. También se presentan resultados de continuación numérica obtenidos empleando el software *Auto* cuando el parámetro de continuación es la amplitud de la componente AC en el voltaje entrada.

Es valioso mencionar que el software *Auto* empleado en esta sección permite hacer un análisis de bifurcaciones y continuar numéricamente las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que dependen de uno o varios parámetros, y que se encuentran sujetas a condiciones de contorno y a restricciones integrales. En particular, *Auto* permite calcular familias de soluciones periódicas estables e inestables, y aproximar los correspondientes multiplicadores de Floquet a lo largo de estas familias [50]. Los diagramas de bifurcación obtenidos en función del parámetro δ a lo largo de esta sección son representados a través de la norma L^2 de la solución en el intervalo de tiempo normalizado de *Auto*.

Por otra parte, de la estructura Hamiltoniana del sistema de primer orden asociado a (2-5), se tiene que las soluciones periódicas de esta ecuación se corresponden con puntos fijos (dados por las condiciones iniciales de la solución) en la aplicación de Poincaré del sistema. En este caso la aplicación de Poincaré recibe el nombre de mapa estroboscópico dado que el problema depende de forma explícita del tiempo. Más aún, el mapa estroboscópico preserva el área y entonces la estabilidad de los puntos fijos puede ser estudiada a través de la aparición de curvas invariantes a su alrededor (ver [53] para más detalles). Los mapas estroboscópicos presentados en esta sección son obtenidos mediante la aproximación de las soluciones del sistema de primer orden asociado a (2-5), conservando sólo aquellas componentes de posición y velocidad que corresponden a los múltiplos enteros y positivos del periodo $2T$. La integración numérica para aproximar las soluciones es realizada con el método basado en series de Taylor mencionado previamente para una tolerancia suficientemente ajustada. A continuación se presentan los casos seleccionados que permiten evidenciar la estabilidad lineal de los subarmónicos impares positivos de orden 2 y algunos de los diagramas de bifurcación asociados.

Caso 9: Consideremos los valores de los parámetros de control como en el *Caso 1* presentado en la sección 4.2. La figura 4-10 muestra la familia de soluciones $2T$ -periódicas impares obtenidas para el problema autónomo asociado, es decir, cuando el parámetro $\delta = 0$. Estas soluciones fueron aproximadas mediante el esquema numérico de la sección anterior en virtud de que las condiciones del Teorema 7 se satisfacen.

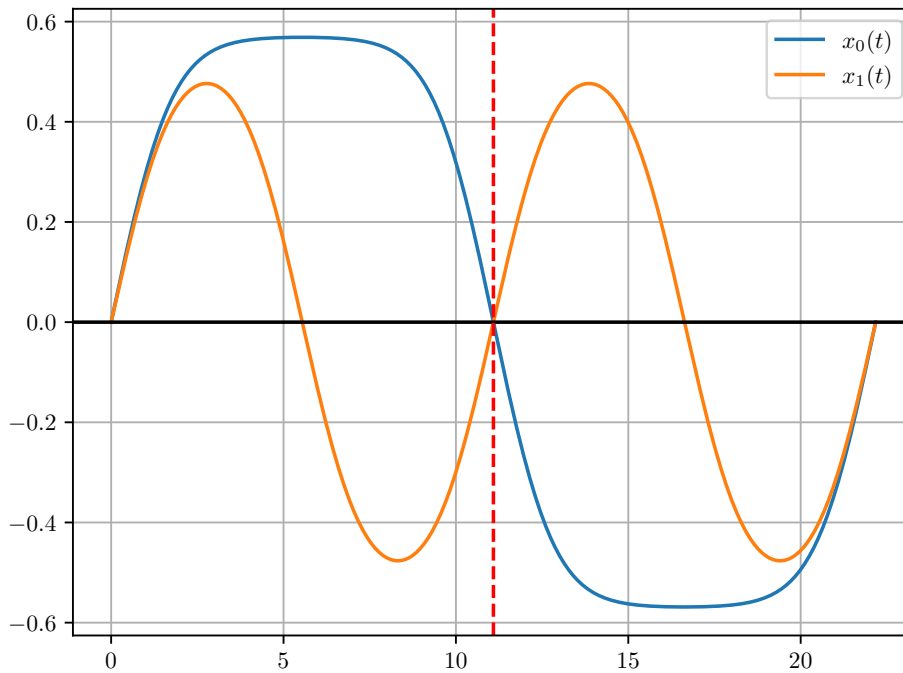
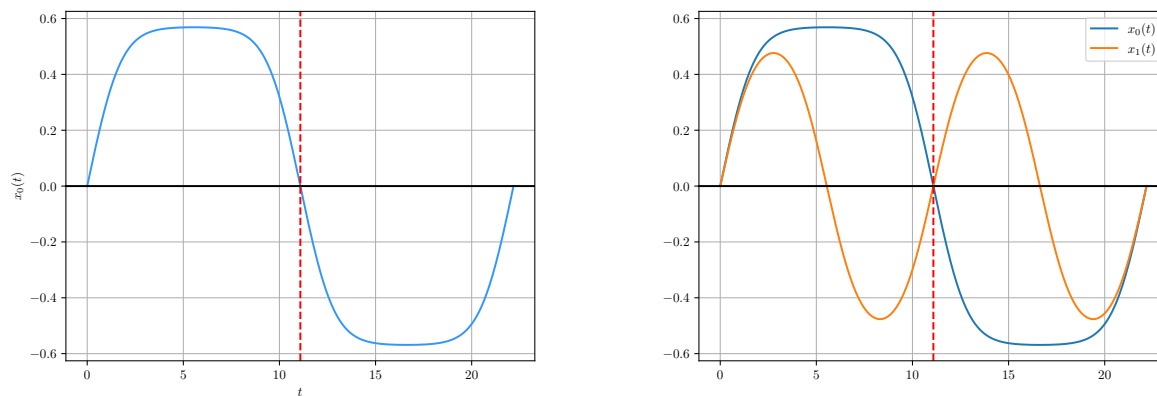


Figura 4-10: Familia de soluciones $2T$ -periódicas impares para los valores de los parámetros como en el *Caso 1* y $\delta = 0$.

El panel de figuras **4-11** muestra la gráfica de las soluciones $2T$ -periódicas impares continuadas a partir del problema autónomo, concretamente, para $\delta \approx 5.403\,559\,304\,2 \times 10^{-5}$ V.



(a) Solución $2T$ -periódica impar $x_0(t)$ que emana del problema autónomo.

(b) Familia de soluciones $2T$ -periódicas impares continuadas.

Figura 4-11: Gráfica de las soluciones $2T$ -periódicas impares continuadas desde el problema autónomo para $\delta \approx 5.403\,559\,304\,2 \times 10^{-5}$ V.

El cuadro 4-19 muestra las velocidades críticas que corresponden a las soluciones continuadas del panel de figuras anterior.

ω_0	0.325 116 967 072 318 049 193 385 5
ω_1	0.305 307 679 280 470 890 543 695 7

Cuadro 4-19: Velocidades críticas correspondientes a las soluciones $2T$ -periódicas impares continuadas desde el problema autónomo para $\delta \approx 5.403\,559\,304\,2 \times 10^{-5}V$.

De hecho, en este caso las condiciones del Teorema 7 también se satisfacen, y el subarmónico impar positivo de orden 2 dado por *Auto* (ver figura 4-11a) es estable en el sentido lineal. En efecto, los multiplicadores de Floquet asociados a la ecuación variacional a lo largo de $x_0(t)$ (proporcionados por *Auto*) son números complejos conjugados de modulo 1. La figura 4-12 muestra la gráfica de estos multiplicadores sobre el círculo unitario, mientras que la figura 4-13b corrobora la afirmación mediante el mapa estroboscópico localizado en una vecindad del punto fijo $(x_0(0), \dot{x}_0(0)) = (0, \omega_0)$. La figura 4-13a muestra la región de interés del mapa estroboscópico donde los puntos fijos de la forma $(0, \omega_0)$ y $(0, \omega_1)$ son representados por puntos de color rojo sobre el eje vertical.

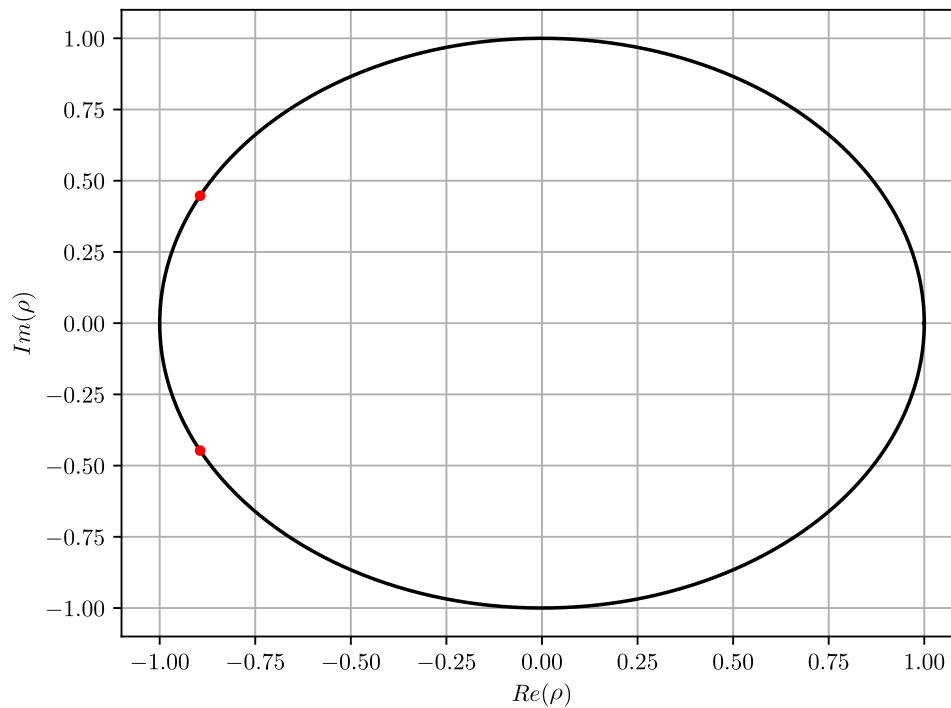
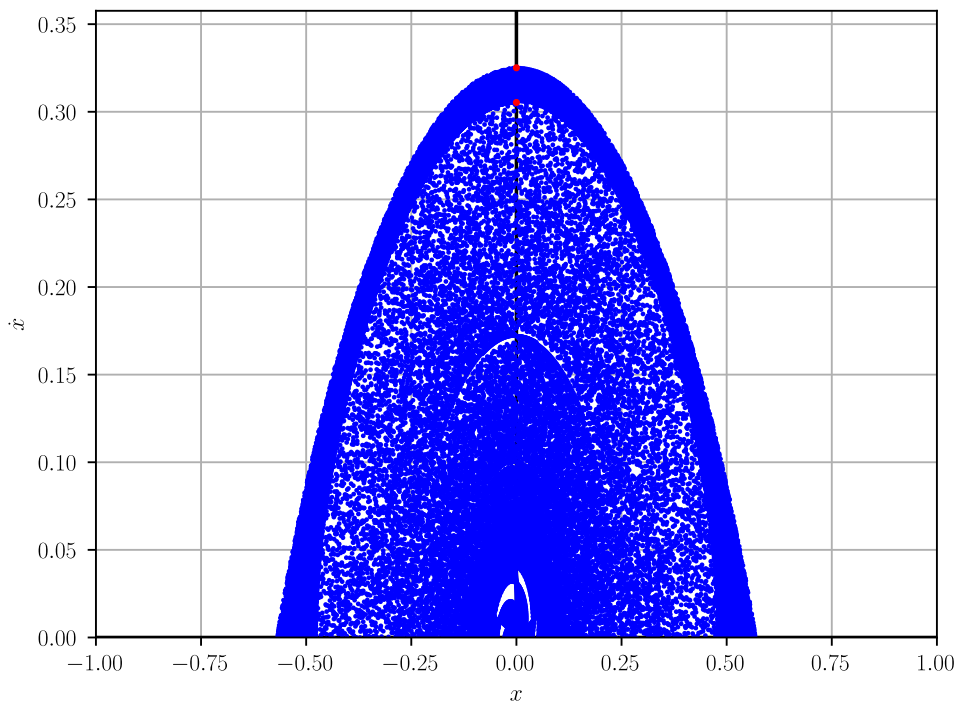
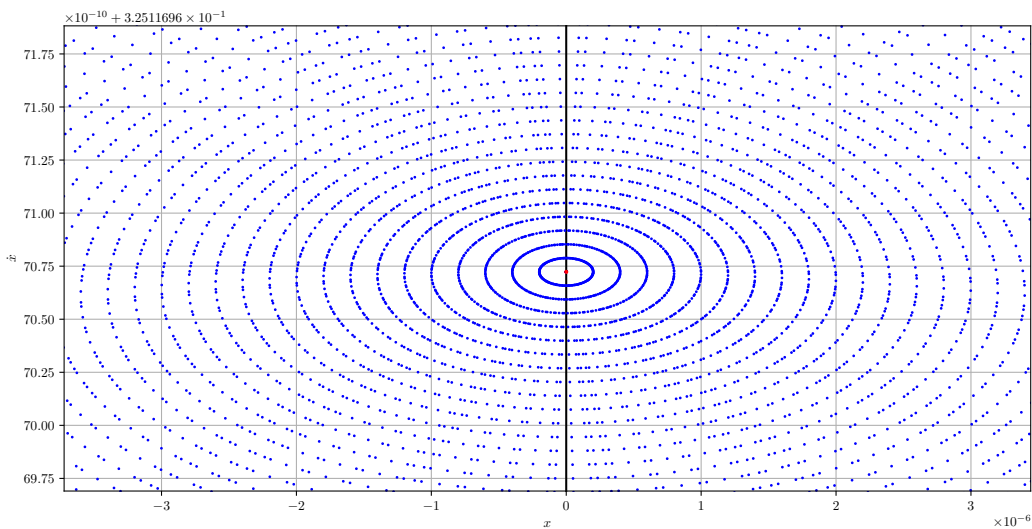


Figura 4-12: Multiplicadores de Floquet asociados a la ecuación variacional a lo largo de la solución $2T$ -periódica impar $x_0(t)$ (parte real $Re(\rho)$ vs. parte compleja $Im(\rho)$) para $\delta \approx 5.403\,559\,304\,2 \times 10^{-5}V$.



(a) Región del mapa estroboscópico asociado a este caso para $\delta \approx 5.403\,559\,304\,2 \times 10^{-5}V$.



(b) Mapa estroboscópico restringido a una vecindad del punto fijo $(x_0(0), \dot{x}_0(0)) = (0, \omega_0)$ (punto de color rojo sobre el eje vertical) con curvas invariantes a su alrededor (formadas por los puntos de color azul).

Figura 4-13: Regiones de interés del mapa estroboscópico para las soluciones continuadas desde el problema autónomo y $\delta \approx 5.403\,559\,304\,2 \times 10^{-5}V$.

Caso 10: Consideremos ahora los valores de los parámetros de control como en el *Caso 5* de la sección 4.2 y sea $\delta_0 = 0.751\,476\,222\,052\,847\,104\,171\,635\,7\text{ V}$ como en el cuadro 4-11. La figura 4-14 muestra el diagrama de bifurcación obtenido empleando *Auto* a partir de la solución $2T$ -periódica impar $x_0(t)$ para δ_0 (representada por el cuadrado de color rojo en el extremo superior derecho del diagrama). La continuación numérica en este caso es realizada hasta $\delta = 0$, evidenciando posiblemente la rama de soluciones $2T$ -periódicas impares que no tienen ceros en medio periodo de tiempo de la cual emana $x_0(t)$.

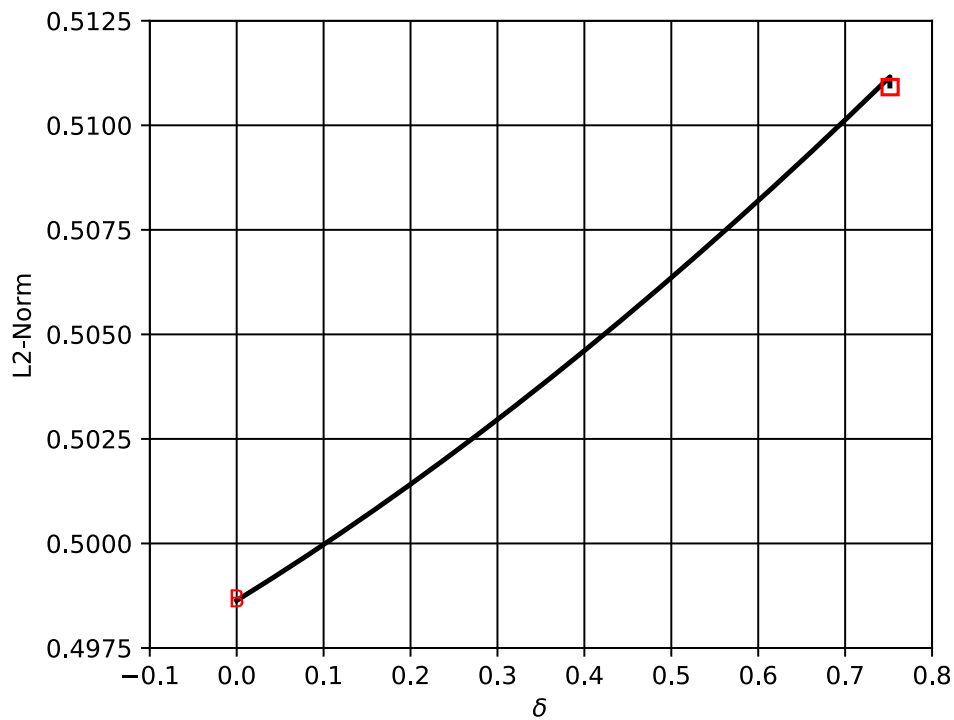


Figura 4-14: Diagrama de bifurcación obtenido para $\delta \in [0, \delta_0]$ a partir de la solución $x_0(t)$ dada en el *Caso 5* (representada por el cuadrado de color rojo en el extremo superior derecho del diagrama).

Adicionalmente, la información proporcionada por *Auto* en el diagrama de bifurcación anterior revela que para $\delta \approx 2.373\,167\,660\,6 \times 10^{-6}\text{ V}$ existe una solución $2T$ -periódica impar que no tiene ceros en medio periodo de tiempo y que es estable en el sentido lineal. De hecho, esta solución es clasificada por *Auto* como un punto de ramificación en el diagrama de bifurcación (representada por la letra *B* de color rojo en el extremo inferior izquierdo del diagrama). La figura 4-15 muestra la familia completa de soluciones $2T$ -periódicas impares obtenidas para este caso y la figura 4-16 muestra la gráfica de los multiplicadores de Floquet asociados a la ecuación variacional a lo largo del subarmónico $x_0(t)$ para $\delta \approx 2.373\,167\,660\,6 \times 10^{-6}\text{ V}$ (los

cuales son números complejos conjugados de modulo 1).

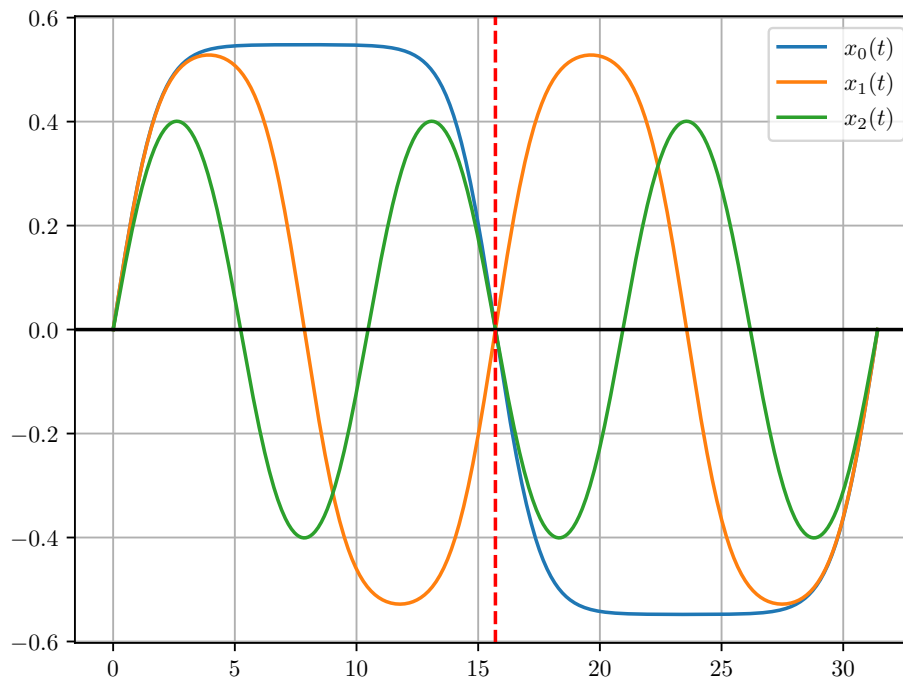


Figura 4-15: Familia de soluciones $2T$ -periódicas impares continuadas para el caso $\delta \approx 2.373\,167\,660\,6 \times 10^{-6} \text{V}$.

El panel de figuras 4-17 muestra un par de diagramas de bifurcación obtenidos a partir de los subarmónicos impares de orden 2, $x_0(t)$ y $x_1(t)$, ilustrados en la figura 4-15. En ambos casos las soluciones iniciales son representadas por el cuadrado de color rojo en el extremo inferior izquierdo del diagrama. La continuación en la figura 4-17a es realizada hasta un determinado valor del parámetro δ previo a la aparición de algunos puntos de ramificación, mientras que la continuación en la figura 4-17b es realizada libremente hasta alcanzar un número máximo de pasos en la rama.

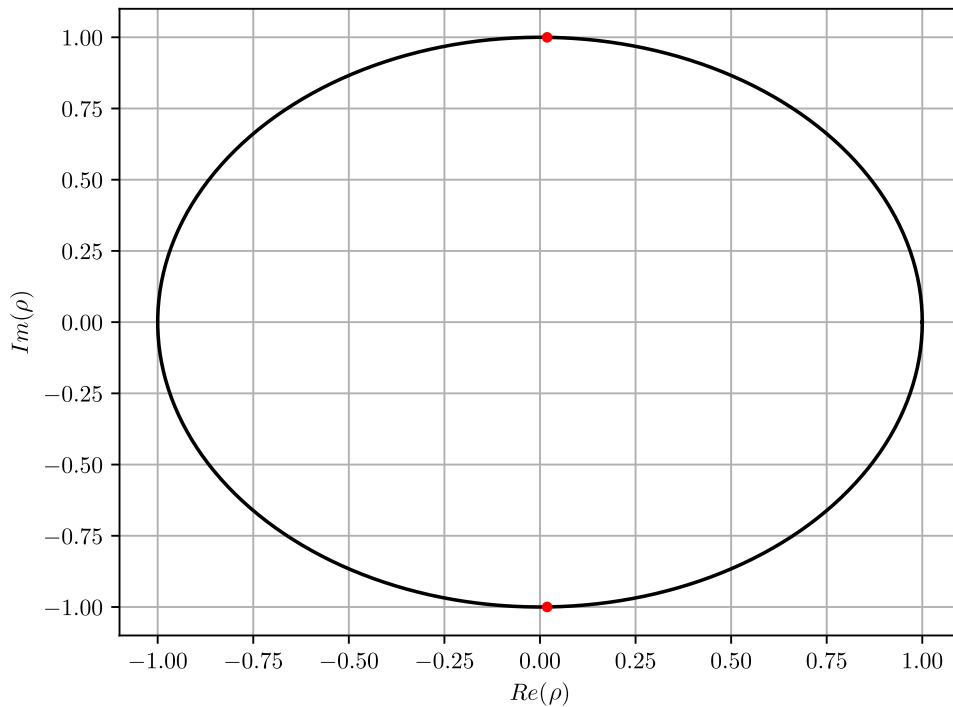
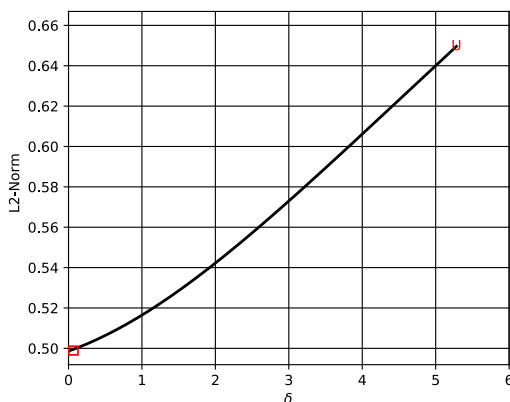


Figura 4-16: Multiplicadores de Floquet asociados a la ecuación variacional a lo largo de la solución $2T$ -periódica impar $x_0(t)$ (parte real $Re(\rho)$ vs. parte compleja $Im(\rho)$) para $\delta \approx 2.373\,167\,660\,6 \times 10^{-6}\text{V}$.



(a) Diagrama de bifurcación obtenido a partir de la continuación de la solución $x_0(t)$ para $\delta \approx 2.373\,167\,660\,6 \times 10^{-6}\text{V}$.



(b) Diagrama de bifurcación obtenido a partir de la continuación de la solución $x_1(t)$ para $\delta \approx 2.373\,167\,660\,6 \times 10^{-6}\text{V}$.

Figura 4-17: Diagramas de bifurcación obtenidos a partir de las soluciones $2T$ -periódicas impares $x_0(t)$ y $x_1(t)$ para $\delta \approx 2.373\,167\,660\,6 \times 10^{-6}\text{V}$.

Conclusiones y problemas abiertos

En este trabajo se obtuvieron condiciones sobre la no linealidad en un oscilador con simetrías y singularidades que permiten determinar la existencia de soluciones periódicas impares con una cierta oscilación prescrita (Teorema 4). Este último resultado es válido para toda una familia de osciladores no lineales que pueden tener diversas aplicaciones, por ejemplo, como modelos matemáticos para algunos sistemas micro electromecánicos (MEMS). Es valioso mencionar que aunque la demostración del Teorema 4 emplea la técnica de truncamiento, en el presente documento también se demostró que, bajo ciertas condiciones, existe una familia extensa de funciones de truncamiento sobre la cual se tiene la validez de la conclusión del Teorema 4 independientemente del truncamiento elegido (Proposición 3). De esta forma, se complementó la discusión iniciada en [1] con respecto a este tipo de enfoque, puesto que bajo condiciones apropiadas, el enfoque considerado es intrínseco al problema.

Adicionalmente, en este documento se determinaron las propiedades de estabilidad lineal de ciertos subarmónicos impares y positivos de orden 2 (Teorema 7) en el contexto de un oscilador MEMS tipo peine modelado con elasticidad cúbica. De hecho, se proporcionaron condiciones prácticas sobre los parámetros de control de (2-5) (ver Teorema 5 y Teorema 7) que permiten obtener propiedades nodales predeterminadas en las soluciones. Los resultados mencionados anteriormente son novedosos en la literatura y podrían ser de utilidad en el área de los MEMS.

Finalmente, la discusión realizada en este trabajo deja algunos problemas abiertos que se espera sean abordados en el futuro. Por ejemplo, aún se desconocen las propiedades de estabilidad en el sentido lineal para los subarmónicos impares de orden $2n$ con $n > 1$ y $0 < \delta \ll 1$, en virtud de las dificultades inherentes que surgen en la búsqueda de un signo para la expresión de la derivada de la traza en (3-48). Recientemente, los autores en [34] prueban una conjetura propuesta inicialmente en [5] sobre el signo de esta expresión integral para $n > 1$ en el contexto del problema de Sitnikov elíptico. Por tanto, es posible que algunas ideas de la demostración de tal conjetura se puedan adaptar al caso del MEMS tipo peine con elasticidad lineal/cúbica. Por otra parte, tal como se mencionó en la Observación 22, la unicidad del subarmónico impar y positivo permite, bajo ciertas condiciones, establecer una conexión entre el principio variacional de R. Ortega y aquellas soluciones periódicas impares que no tienen ceros en medio periodo de tiempo y que emanan del caso autónomo. No obstante, hasta el momento se desconoce si en general existe una conexión similar para los subarmónicos que tienen propiedades nodales distintas.

A. Resultados auxiliares

Los resultados y demostraciones necesarios en el desarrollo de la discusión presentada en este trabajo y que no están incluidos directamente en el texto son proporcionados en este apéndice.

Demostración del Lema 2. La propiedad *i)* es consecuencia directa de que

$$-1 < \frac{t-L}{2L} \leq 0,$$

siempre que $t \in]-L, L]$. Adicionalmente, si $t = (2k+1)L$ para $k \in \mathbb{Z}$ entonces $\frac{t-L}{2L} = k$ y

$$\left\lceil \frac{(2k+1)L-L}{2L} \right\rceil = k,$$

de donde se sigue que $\theta((2k+1)L) = (2k+1)L - 2kL = L = \theta(L)$.

La propiedad *iii)* se sigue de la propiedad *ii)* y del hecho de que si $t \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)L\}_{k \in \mathbb{Z}}$ entonces $n = \left\lceil \frac{t-L}{2L} \right\rceil$ es el menor entero tal que

$$n-1 < \frac{t-L}{2L} \leq n,$$

lo que implica necesariamente que

$$-L < t - 2nL = \theta(t) < L.$$

La propiedad *iv)* es consecuencia de la identidad $\lceil t+1 \rceil \equiv \lceil t \rceil + 1$ en virtud de que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \theta(t+2L) &= t+2L - 2 \left\lceil \frac{t+2L-L}{2L} \right\rceil L \\ &= t+2L - 2 \left\lceil \frac{t-L}{2L} + 1 \right\rceil L \\ &= \theta(t). \end{aligned}$$

Con respecto a la propiedad *v)*, se tiene que para $k \in \mathbb{Z}$ la propiedad *ii)* implica que

$$\begin{aligned} \theta(-(2k+1)L) &= -(2k+1)L - 2 \left\lceil \frac{-(2k+1)L-L}{2L} \right\rceil L \\ &= -(2k+1)L - 2 \left\lceil \frac{-2kL}{2L} - 1 \right\rceil L \\ &= -(2k+1)L - 2(-k-1)L \\ &= L \\ &= \theta((2k+1)L). \end{aligned}$$

Más aún, como $\lceil t \rceil + \lceil -t \rceil = 0$ cuando $t \in \mathbb{Z}$ y $\lceil t \rceil + \lceil -t \rceil = 1$ cuando $t \notin \mathbb{Z}$, se obtiene que la propiedad *iv*) implica que para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)L\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$$\begin{aligned}
 \theta(-t) &= -t - 2 \left\lceil \frac{-t-L}{2L} \right\rceil L \\
 &= -t - 2 \left\lceil -\frac{t+L}{2L} \right\rceil L \\
 &= -t - 2 \left(1 - \left\lceil \frac{t+L}{2L} \right\rceil \right) L \\
 &= -t - 2L + 2 \left\lceil \frac{t+L}{2L} \right\rceil L \\
 &= -\theta(t+2L) \\
 &= -\theta(t).
 \end{aligned}$$

Finalmente, la propiedad *vi*) es consecuencia de la definición de la función techo. En efecto, $h(t) := \lceil t \rceil$ es localmente constante en cada intervalo de la forma $]k-1, k]$ para $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $h(t)$ es dos veces diferenciable sobre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ con $\dot{h}(t) = 0$ y $\ddot{h}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Así, de la definición en (2-12) se sigue que $\theta(t)$ es dos veces diferenciable sobre $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)L\}_{k \in \mathbb{Z}}$ con $\dot{\theta}(t) = 1$ y $\ddot{\theta}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)L\}_{k \in \mathbb{Z}}$. \square

A continuación se introduce un criterio de convergencia basado en un razonamiento de comparación para integrales impropias en los límites de integración. Este resultado es consecuencia de la discusión presentada en la sección 22.11 de [54] para integrales impropias con integrandos no negativos.

Teorema 8. Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones continuas no negativas definidas sobre $[c, d[$ (donde posiblemente f y g tienen una singularidad en $t = d$). Si el límite

$$\lim_{t \rightarrow d^-} \frac{f(t)}{g(t)},$$

existe y es no nulo, entonces ambas integrales impropias en el límite superior

$$\int_c^d f(t) dt \quad \text{y} \quad \int_c^d g(t) dt,$$

convergen o divergen.

El siguiente lema introduce un resultado clásico sobre la convergencia de un tipo particular de integral impropia en el límite de integración superior.

Lema 22. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y consideremos $p \in \mathbb{R}_{>0}$. Entonces la integral impropia

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx, \tag{A-1}$$

diverge si $p \geq 1$ y converge si $p < 1$.

Demostración. Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $a < r < b$ y consideremos el cambio de variable $u = b - x$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_a^r \frac{1}{(b-x)^p} dx &= - \int_{b-a}^{b-r} \frac{1}{u^p} du \\ &= \begin{cases} \ln(b-a) - \ln(b-r) & \text{si } p = 1, \\ \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \frac{(b-r)^{1-p}}{1-p} & \text{si } p \neq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

Luego, si $p = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow b^-} (\ln(b-a) - \ln(b-r)) &= \ln(b-a) - \lim_{r \rightarrow b^-} \ln(b-r) \\ &= \infty, \end{aligned}$$

si $p > 1$ entonces

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow b^-} \left(\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \frac{(b-r)^{1-p}}{1-p} \right) &= \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \lim_{r \rightarrow b^-} \frac{1}{(b-r)^{p-1}} \\ &= \infty, \end{aligned}$$

y si $p < 1$ se obtiene que

$$\lim_{r \rightarrow b^-} \left(\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \frac{(b-r)^{1-p}}{1-p} \right) = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}.$$

Dado que para $p \geq 1$ el límite

$$\lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r \frac{1}{(b-x)^p} dx,$$

no existe, se concluye que la integral impropia en (A-1) diverge cuando $p \geq 1$. Más aún, cuando $p < 1$ se tiene que la integral impropia en (A-1) converge con

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx = \lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r \frac{1}{(b-x)^p} dx.$$

□

El teorema a continuación es un resultado clásico sobre la derivación bajo el signo de integral. Este resultado también se conoce como la regla de Leibniz en el contexto de una integral cuyo integrando depende de un parámetro.

Teorema 9 ([55, Teorema 1, pág. 422]). *Supongamos que $\Phi(x)$ está definido por*

$$\Phi(x) := \int_c^d f(x, t) dt, \quad \forall x \in [a, b],$$

donde c y d son constantes. Si f y su derivada parcial con respecto a la variable x son continuas sobre la región

$$R = \{(x, t) \mid a \leq x \leq b, \quad c \leq t \leq d\},$$

entonces

$$\Phi'(x) = \int_c^d \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \Big|_{(x, t)} dt, \quad \forall x \in]a, b[.$$

Seguidamente se presenta la demostración del Lema 18 sobre las propiedades de $Q(x)$.

Demostración del Lema 18. I) Debe notarse que de la definición del potencial $U(x)$ en (3-31) se tiene que $U'(x) \equiv f(x)$, entonces de (3-27) se sigue que

$$U'(x)x \equiv \frac{x^2(\varphi_\alpha(x) - 4\beta V_{DC}^2)}{(1-x^2)^2}. \quad (\text{A-2})$$

Luego, de la definición de la función $Q(x)$, de (A-2) y de la definición de la función auxiliar $\varphi_\alpha(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} Q(x) &\equiv x^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{4\beta V_{DC}^2}{1-x^2} \right) - \frac{x^2(\varphi_\alpha(x) - 4\beta V_{DC}^2)}{(1-x^2)^2} \\ &\equiv \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \left(\left(1 + \frac{\alpha}{2}x^2 \right) (1-x^2)^2 - 4\beta V_{DC}^2(1-x^2) - \varphi_\alpha(x) + 4\beta V_{DC}^2 \right) \\ &\equiv \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \left((1-x^2)^2 + \frac{\alpha}{2}x^2(1-x^2)^2 + 4\beta V_{DC}^2x^2 - (1+\alpha x^2)(1-x^2)^2 \right) \\ &\equiv \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \left(4\beta V_{DC}^2x^2 - \frac{\alpha}{2}x^2(1-x^2)^2 \right) \\ &\equiv \frac{x^4}{2(1-x^2)^2} (8\beta V_{DC}^2 - \alpha(1-x^2)^2). \end{aligned}$$

Dado que la condición 3-26 y el hecho de que $(1-x^2) < 1$ para todo $x \in]0, x_*]$ implican que $\alpha(1-x^2)^2 < 8\beta V_{DC}^2$ para todo $x \in]0, x_*]$, se obtiene en virtud de la discusión anterior que $Q(x) > 0$ para todo $x \in]0, x_*]$.

II) Dado que $U''(x) \equiv f'(x)$, se sigue de (3-29) que

$$U''(x)x \equiv x \left(1 + 3\alpha x^2 - \frac{4\beta V_{DC}^2(1+3x^2)}{(1-x^2)^3} \right),$$

y por tanto

$$\begin{aligned} Q'(x) &\equiv U'(x) - U''(x)x \\ &\equiv x \left(1 + \alpha x^2 - \frac{4\beta V_{DC}^2}{(1-x^2)^2} - 1 - 3\alpha x^2 + \frac{4\beta V_{DC}^2(1+3x^2)}{(1-x^2)^3} \right) \\ &\equiv x \left(-2\alpha x^2 + \frac{4\beta V_{DC}^2}{(1-x^2)^2} \left(\frac{1+3x^2}{1-x^2} - 1 \right) \right) \\ &\equiv x \left(-2\alpha x^2 + \frac{16\beta V_{DC}^2 x^2}{(1-x^2)^3} \right) \\ &\equiv x^3 \left(\frac{16\beta V_{DC}^2}{(1-x^2)^3} - 2\alpha \right). \end{aligned}$$

La conclusión se sigue de proceder como en la demostración de I) puesto que la condición (3-26) y el hecho de que $(1-x^2) < 1$ para todo $x \in]0, x_*]$ implican que $2\alpha(1-x^2)^3 < 16\beta V_{DC}^2$ para todo $x \in]0, x_*]$. \square

El lema a continuación presenta un resultado clásico sobre la dependencia respecto de parámetros de una familia de soluciones de un problema de valor inicial que depende de parámetros.

Lema 23 ([47, Lema 3.1, pág. 24]). *Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas y continuas sobre un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ con $f_n \rightarrow f_0$ uniformemente sobre los subconjuntos compactos de D (f_0 es una función continua sobre D). Supongamos que $\{(t_n, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos en D que convergen a $(t_0, x_0) \in D$ cuando $n \rightarrow \infty$ y para $n = 0, 1, 2, \dots$ sea $\phi_n(t)$ una solución de la ecuación*

$$\dot{x} = f_n(t, x),$$

que pasa por el punto (t_n, x_n) . Si la solución $\phi_0(t)$ está definida sobre $[a, b]$ y es única, entonces existe un entero n_0 tal que para $n \geq n_0$ la función $\phi_n(t)$ se puede definir sobre $[a, b]$ y converge a $\phi_0(t)$ uniformemente sobre $[a, b]$.

Finalmente, el siguiente resultado de la teoría de números permite concluir que el conjunto de partes fraccionarias de los múltiplos positivos de un número irracional, es denso en el intervalo $[0, 1]$. Una demostración de este resultado puede ser encontrada en [56].

Teorema 10. *Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si la parte fraccionaria de x se denota como $\text{frac}(x)$ entonces el conjunto $\{\text{frac}(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[0, 1]$.*

Bibliografía

- [1] D. Núñez, O. Larreal y L. Murcia, «Odd periodic oscillations in Comb-drive finger actuators,» *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 61, pág. 103347, oct. de 2021. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2021.103347. dirección: <https://doi.org/10.1016%2Fj.nonrwa.2021.103347>.
- [2] O. Larreal, L. Murcia y D. Núñez, «Odd periodic oscillations in Comb-drive finger MEMS with cubic stiffness,» *Journal of Mathematical Control Science and Applications*, vol. 8, págs. 185-197, ene. de 2022. dirección: https://www.mukpublications.com/resources/13_Larreal_Murcia_Nunez.pdf.
- [3] M. I. Younis, *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*. Springer US, 2011, ISBN: 978-1-4614-2912-8. DOI: 10.1007/978-1-4419-6020-7. dirección: <https://doi.org/10.1007%2F978-1-4419-6020-7>.
- [4] R. Ortega, «Symmetric periodic solutions in the Sitnikov problem,» *Archiv der Mathematik*, vol. 107, n.º 4, págs. 405-412, sep. de 2016. DOI: 10.1007/s00013-016-0931-1. dirección: <https://doi.org/10.1007/s00013-016-0931-1>.
- [5] X. Cen, X. Cheng, Z. Huang y M. Zhang, «On the Stability of Symmetric Periodic Orbits of the Elliptic Sitnikov Problem,» *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, vol. 19, n.º 2, págs. 1271-1290, ene. de 2020. DOI: 10.1137/19m1258384. dirección: <https://doi.org/10.1137%2F19m1258384>.
- [6] D. Nuñez, O. Perdomo y A. Rivera, «On the stability of periodic solutions with defined sign in MEMS via lower and upper solutions,» *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 46, págs. 195-218, abr. de 2019. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2018.09.010. dirección: <https://doi.org/10.1016%2Fj.nonrwa.2018.09.010>.
- [7] S. Tiwari y R. N. Candler, «Using flexural MEMS to study and exploit nonlinearities: a review,» *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 29, n.º 8, pág. 083002, jun. de 2019. DOI: 10.1088/1361-6439/ab23e2. dirección: <https://doi.org/10.1088%2F1361-6439%2Fab23e2>.
- [8] A. Hajjaj, N. Jaber, S. Ilyas, F. Alfosail y M. Younis, «Linear and nonlinear dynamics of micro and nano-resonators: Review of recent advances,» *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 119, pág. 103328, mar. de 2020. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103328. dirección: <https://doi.org/10.1016%5C%2Fj.ijnonlinmec.2019.103328>.

- [9] A. Gutiérrez y P. J. Torres, «Nonautonomous Saddle-node bifurcation in a canonical electrostatic MEMS,» *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 23, n.º 05, pág. 1350088, mayo de 2013. DOI: 10.1142/s0218127413500880. dirección: <https://doi.org/10.1142/s0218127413500880>.
- [10] A. Gutiérrez, D. Núñez y A. Rivera, «Effects of voltage change on the dynamics in a comb-drive finger of an electrostatic actuator,» *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 95, págs. 224-232, oct. de 2017. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2017.05.008. dirección: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.05.008>.
- [11] P. Amster, *Topological Methods in the Study of Boundary Value Problems*. Springer US, 2014. DOI: 10.1007/978-1-4614-8893-4. dirección: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8893-4>.
- [12] M. Misquero, «Resonance tongues in the linear Sitnikov equation,» *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 130, n.º 4, mar. de 2018. DOI: 10.1007/s10569-018-9825-9. dirección: <https://doi.org/10.1007/s10569-018-9825-9>.
- [13] M. Zhang, X. Cen y X. Cheng, «Linearized stability and instability of nonconstant periodic solutions of Lagrangian equations,» *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 41, n.º 12, págs. 4853-4866, abr. de 2018. DOI: 10.1002/mma.4935. dirección: <https://doi.org/10.1002/mma.4935>.
- [14] Z. E. Musielak y B. Quarles, «The three-body problem,» *Reports on Progress in Physics*, vol. 77, n.º 6, pág. 065901, jun. de 2014. DOI: 10.1088/0034-4885/77/6/065901. dirección: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/77/6/065901>.
- [15] A. C. J. Luo y F.-Y. Wang, «Nonlinear Dynamics of a Micro-Electro-Mechanical System With Time-Varying Capacitors,» *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 126, n.º 1, págs. 77-83, ene. de 2004. DOI: 10.1115/1.1597211. dirección: <https://doi.org/10.1115/1.1597211>.
- [16] S. Ai y J. A. Pelesko, «Dynamics of a canonical electrostatic MEMS/NEMS system,» *Journal of Dynamics and Differential Equations*, vol. 20, n.º 3, págs. 609-641, oct. de 2008. DOI: 10.1007/s10884-007-9094-x. dirección: <https://doi.org/10.1007/s10884-007-9094-x>.
- [17] J. Llibre, D. E. Núñez y A. Rivera, «Periodic solutions of the Nathanson's and the Comb-drive models,» *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 104, págs. 109-115, sep. de 2018. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2018.05.009. dirección: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.05.009>.
- [18] D. Wei, S. Kadyrov y Z. Kazbek, «Periodic solutions of a graphene based model in micro-electro-mechanical pull-in device,» *Applied and Computational Mechanics*, vol. 11, n.º 1, abr. de 2017. DOI: 10.24132/acm.2017.322. dirección: <https://doi.org/10.24132/acm.2017.322>.

- [19] P. Skrzypacz, S. Kadyrov, D. Nurakhmetov y D. Wei, «Analysis of dynamic pull-in voltage of a graphene MEMS model,» *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 45, págs. 581-589, feb. de 2019. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2018.07.025. dirección: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.07.025>.
- [20] N. Anjum y J.-H. He, «Nonlinear dynamic analysis of vibratory behavior of a graphene nano/microelectromechanical system,» *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, jul. de 2020. DOI: 10.1002/mma.6699. dirección: <https://doi.org/10.1002/2Fmma.6699>.
- [21] S. Kadyrov, A. Kashkynbayev, P. Skrzypacz, K. Kaloudis y A. Bountis, «Periodic solutions and the avoidance of pull-in instability in nonautonomous microelectromechanical systems,» *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 44, n.º 18, págs. 14556-14568, ago. de 2021. DOI: 10.1002/mma.7725. dirección: <https://doi.org/10.1002/2Fmma.7725>.
- [22] Z. H. Khan, A. R. Kermany, A. Öchsner y F. Iacopi, «Mechanical and electromechanical properties of graphene and their potential application in MEMS,» *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 50, n.º 5, págs. 053003, ene. de 2017. DOI: 10.1088/1361-6463/50/5/053003. dirección: <https://doi.org/10.1088/2F1361-6463/2F50/2F5/2F053003>.
- [23] H. Jacobowitz, «Periodic solutions of $x'' + f(x, t) = 0$ via the Poincaré-Birkhoff theorem,» *Journal of Differential Equations*, vol. 20, n.º 1, págs. 37-52, ene. de 1976, ISSN: 0022-0396. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(76\)90094-2](https://doi.org/10.1016/0022-0396(76)90094-2). dirección: [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(76\)90094-2](https://doi.org/10.1016/0022-0396(76)90094-2).
- [24] M. García-Huidobro, R. Manásevich y F. Zanolin, «Infinitely many solutions for a Dirichlet problem with a nonhomogeneous p -Laplacian-like operator in a ball,» *Advances in Differential Equations*, vol. 2, n.º 2, págs. 203-230, 1997. DOI: 10.57262/ade/1366809214. dirección: <https://doi.org/10.57262/ade/1366809214>.
- [25] A. Capietto, W. Dambrosio y F. Zanolin, «Infinitely many radial solutions to a boundary value problem in a ball,» *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, vol. 179, n.º 1, págs. 159-188, dic. de 2001. DOI: 10.1007/bf02505953. dirección: <https://doi.org/10.1007/2Fbf02505953>.
- [26] A. Capietto y W. Dambrosio, «Multiplicity Results for Systems of Superlinear Second Order Equations,» *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 248, n.º 2, págs. 532-548, ago. de 2000. DOI: 10.1006/jmaa.2000.6942. dirección: <https://doi.org/10.1006/2Fjmaa.2000.6942>.
- [27] D. Papini, «Infinitely Many Solutions for a Floquet-Type BVP with Superlinearity Indefinite in Sign,» *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 247, n.º 1, págs. 217-235, jul. de 2000. DOI: 10.1006/jmaa.2000.6849. dirección: <https://doi.org/10.1006/2Fjmaa.2000.6849>.

- [28] A. Capietto, W. Dambrosio y D. Papini, «Superlinear Indefinite Equations on the Real Line and Chaotic Dynamics,» *Journal of Differential Equations*, vol. 181, n.º 2, págs. 419-438, mayo de 2002. DOI: 10.1006/jdeq.2001.4080. dirección: <https://doi.org/10.1006%2Fjdeq.2001.4080>.
- [29] J. Mawhin, D. Papini y F. Zanolin, «Boundary blow-up for differential equations with indefinite weight,» *Journal of Differential Equations*, vol. 188, n.º 1, págs. 33-51, feb. de 2003. DOI: 10.1016/s0022-0396(02)00073-6. dirección: <https://doi.org/10.1016%2Fs0022-0396%2802%2900073-6>.
- [30] F. Dalbono y W. Dambrosio, «Radial solutions of Dirichlet problems with concave-convex nonlinearities,» *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 74, n.º 7, págs. 2720-2738, abr. de 2011. DOI: 10.1016/j.na.2010.12.026. dirección: <https://doi.org/10.1016%2Fj.na.2010.12.026>.
- [31] A. Fonda, R. Toader y F. Zanolin, «Periodic solutions of singular radially symmetric systems with superlinear growth,» *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, vol. 191, n.º 2, págs. 181-204, dic. de 2012. DOI: 10.1007/s10231-010-0178-6. dirección: <https://doi.org/10.1007%2Fs10231-010-0178-6>.
- [32] J. Llibre y R. Ortega, «On the Families of Periodic Orbits of the Sitnikov Problem,» *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, vol. 7, n.º 2, págs. 561-576, ene. de 2008. DOI: 10.1137/070695253. dirección: <https://doi.org/10.1137%2F070695253>.
- [33] J. Pöschel y E. Trubowitz, *Inverse spectral theory*. Pure and Applied Mathematics, Boston etc.: Academic Press, Inc., Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, 1987, vol. 130, ISBN: 978-0-12-563040-5.
- [34] X. Cen, C. Liu y M. Zhang, «A Proof for a Stability Conjecture on Symmetric Periodic Solutions of the Elliptic Sitnikov Problem,» *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, vol. 20, n.º 2, págs. 941-952, ene. de 2021. DOI: 10.1137/20m1349692. dirección: <https://doi.org/10.1137%2F20m1349692>.
- [35] S. Adams, F. Bertsch, K. Shaw y N. MacDonald, «Independent tuning of linear and nonlinear stiffness coefficients [actuators],» *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 7, n.º 2, págs. 172-180, jun. de 1998. DOI: 10.1109/84.679344. dirección: <https://doi.org/10.1109/84.679344>.
- [36] Y. Wang, S. Adams, J. Thorp, N. MacDonald, P. Hartwell y F. Bertsch, «Chaos in MEMS, parameter estimation and its potential application,» *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 45, n.º 10, págs. 1013-1020, oct. de 1998. DOI: 10.1109/81.728856. dirección: <https://doi.org/10.1109/81.728856>.
- [37] W. Zhang, R. Baskaran y K. L. Turner, «Effect of cubic nonlinearity on auto-parametrically amplified resonant MEMS mass sensor,» *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 102, n.º 1-2, págs. 139-150, dic. de 2002. DOI: 10.1016/s0924-4247(02)00299-6. dirección: <https://doi.org/10.1016%2Fs0924-4247%2802%2900299-6>.

- [38] W. Zhang, R. Baskaran y K. Turner, «Tuning the dynamic behavior of parametric resonance in a micromechanical oscillator,» *Applied Physics Letters*, vol. 82, n.º 1, págs. 130-132, ene. de 2003. DOI: 10.1063/1.1534615. dirección: <https://doi.org/10.1063%2F1.1534615>.
- [39] J. F. Rhoads, S. W. Shaw, K. L. Turner y R. Baskaran, «Tunable Microelectromechanical Filters that Exploit Parametric Resonance,» *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 127, n.º 5, págs. 423-430, ene. de 2005. DOI: 10.1115/1.2013301. dirección: <https://doi.org/10.1115%2F1.2013301>.
- [40] B. DeMartini, H. Butterfield, J. Moehlis y K. Turner, «Chaos for a Microelectromechanical Oscillator Governed by the Nonlinear Mathieu Equation,» *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 16, n.º 6, págs. 1314-1323, dic. de 2007. DOI: 10.1109/jmems.2007.906757. dirección: <https://doi.org/10.1109%2Fjmems.2007.906757>.
- [41] W. Magnus y S. Winkler, *Hill's equation*. Interscience Publishers (John Wiley), 1966.
- [42] A. Cabada, J. Á. Cid y L. López-Somoza, *Maximum principles for the Hill's equation*, English. Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2018, ISBN: 978-0-12-804126-0.
- [43] C. Chicone, «Stability Theory of Ordinary Differential Equations,» en *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems*, Springer New York, 2012, ISBN: 978-1-4614-1805-4. DOI: 10.1007/978-1-4614-1806-1_106. dirección: https://doi.org/10.1007%2F978-1-4614-1806-1_106.
- [44] E. A. Coddington y N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, English, New York, Toronto, London: McGill-Hill Book Company, Inc. XII, 429 p. 1955.
- [45] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias* (Projeto Euclides), Portuguese. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1979.
- [46] P. Hartman, *Ordinary differential equations* (Classics Appl. Math.), English, 2nd ed., unabridged, corrected republication of the 1982 original. Philadelphia, PA: SIAM, 2002, vol. 38, ISBN: 978-0-89871-922-2. DOI: 10.1137/1.9780898719222. dirección: <https://doi.org/10.1137/1.9780898719222>.
- [47] J. K. Hale, *Ordinary differential equations. 2nd ed*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 21. Orig. publ. by Wiley-Interscience. Huntington, New York: Robert E. Krieger Publishing Company. XVII, 361 p. 1980.
- [48] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems* (Texts in Applied Mathematics), 3rd ed. New York, NY: Springer, 2001, vol. 7, ISBN: 0-387-95116-4. DOI: 10.1007/978-1-4613-0003-8. dirección: <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0003-8>.
- [49] A. Gasull, A. Guillamon, V. Mañosa y F. Mañosas, «The Period Function for Hamiltonian Systems with Homogeneous Nonlinearities,» *Journal of Differential Equations*, vol. 139, n.º 2, págs. 237-260, sep. de 1997. DOI: 10.1006/jdeq.1997.3296. dirección: <https://doi.org/10.1006%2Fjdeq.1997.3296>.

- [50] B. Krauskopf, H. M. Osinga y J. Galán-Vioque, eds., *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems*. Springer Netherlands, 2007. DOI: 10.1007/978-1-4020-6356-5. dirección: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6356-5>.
- [51] F. Johansson et al., *mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic (version 1.2.1)*, <http://mpmath.org/>, feb. de 2021.
- [52] À. Jorba y M. Zou, «A Software Package for the Numerical Integration of ODEs by Means of High-Order Taylor Methods,» *Experimental Mathematics*, vol. 14, n.º 1, págs. 99-117, ene. de 2005. DOI: 10.1080/10586458.2005.10128904. dirección: <https://doi.org/10.1080/10586458.2005.10128904>.
- [53] C. L. Siegel y J. K. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 1971. DOI: 10.1007/978-3-642-87284-6.
- [54] A. E. Taylor y W. R. Mann, *Advanced calculus. 3rd ed*, English, New York: John Wiley & Sons, Inc. XV, 732 p. (1983), 1983.
- [55] M. H. Protter y C. B. j. Morrey, *Intermediate calculus. 2nd ed.* (Undergraduate Texts Math), English. Springer, Cham, 1985.
- [56] K. Meyer, G. Hall y D. Offin, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. Springer New York, 2009. DOI: 10.1007/978-0-387-09724-4. dirección: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-09724-4>.