Jesús Mosterín

LA

ESTRUCTURA DE LOS CONCEPTOS CIENTÍFICOS II

Número 8

CIENCIA AL VIENTO

La estructura de los conceptos científicos. II

Jesús Mosterín

Número 8

Mayo, 2014

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Colombia

Números publicados

1. Gerard Holton, *Las falsas imágenes de la ciencia* (septiembre, 2012).

2. Rodolfo Llinás, *El reto: educación, ciencia y tecnología* (noviembre, 2012).

3. Mario Bunge, *La filosofía de la investigación científica en los países en desarrollo* (febrero, 2013).

4. Eduardo Laso, *La concepción heredada y los métodos de validación científicos. I* (mayo, 2013).

5. Eduardo Laso, *La concepción heredada y los métodos de validación científicos. II* (agosto, 2013).

6. Charles Darwin, Alfred Russel Wallace, *Selección natural: tres fragmentos para la historia* (noviembre, 2013).

7. Jesús Mosterín, *La estructura de los conceptos científicos. I* (febrero, 2014).

Presentación

Presentamos la segunda parte del artículo *Los conceptos científicos* del profesor Jesús Mosterín, el cual fue publicado originalmente en enero de 1978 en Investigación y Ciencia y posteriormente como un capítulo del libro *La Estructura de los Conceptos Científicos* (Alianza Editorial, Madrid, 2000).

La reproducción de este artículo se ha hecho en dos partes: el volumen anterior (febrero, 2014), que contiene la primera parte, y el presente volumen (mayo, 2014), que contiene la segunda parte.

Agradecemos al profesor Jesús Mosterín y a la redacción de Investigación y Ciencia por permitirnos reproducir este artículo. Las ilustraciones son de Antoni Sellés.

Invitamos a los lectores interesados en profundizar en el tema de este artículo, y en temas afines, a consultar el *Diccionario de Lógica y Filo-*

sofía de la Ciencia, de Jesús Mosterín y Roberto Torretti, segunda edición (Alianza Editorial, Madrid, 2010), así como también el libro *Conceptos y Teorías en la Ciencia* del profesor Mosterín (Alianza Editorial, 2008).

Victor Tapia

La estructura de los conceptos científicos. II

Jesús Mosterín

7. Los conceptos métricos

Los conceptos métricos, también llamados conceptos cuantitativos o magnitudes, no tienen correspondencia en el lenguaje ordinario. Son una creación original de los lenguajes científicos. Son característicos de los estadios más avanzados de la ciencia. Piénsese que la revolución científica del siglo XVII consistió en gran parte en la introducción y el uso sistemático de los conceptos métricos en la física, que durante los dos mil años anteriores había estado basada en los conceptos cualitativos.

Los conceptos métricos asignan números reales o vectores a objetos o sucesos. Los conceptos métricos —como *masa* o *tiempo*— que asignan números reales a determinados objetos o sucesos se llaman *magnitudes escalares.* Los conceptos métricos —como *fuerza* o *velocidad*— que asignan vectores se llaman *magnitudes vectoriales.* Para simplificar el tratamiento, aquí se limitará a hablar de las magnitudes escalares, aunque *mutatis mutandis* lo mismo podría ser dicho de las vectoriales. Cuando en lo sucesivo se hable de concepto métrico se quiere decir concepto métrico escalar.

En una primera aproximación se puede decir que un concepto métrico f en un dominio A es simplemente $f : A \to \mathbf{R}$, es decir, una aplicación (o mapeo) del dominio A sobre el conjunto de los números reales o, en otras palabras, una asignación de un número real a cada uno de los objetos de A. Así, el concepto métrico de *masa* asigna un número real a cada cuerpo, el de *longitud* asigna un número real a cada dos señales en una superficie plana de un cuerpo o a cada dos cuerpos, el de *tiempo* asigna un número real a cada dos sucesos, el de *frecuencia* asigna un número real a cada onda, el de *resistencia* asigna un número real a cada conductor eléctrico, el de *índice cefálico* asigna un número real a cada cabeza, el de *producto nacional bruto* asigna un número real a cada economía nacional y año, el de *tasa de natalidad* asigna un número real a cada población y año, y así sucesivamente.

En una segunda aproximación se puede observar que con frecuencia se intenta introducir un concepto métrico en un ámbito en el que ya se dispone de un concepto comparativo. La *metrización* de un ámbito o de una característica consiste precisamente en la introducción de un concepto métrico en ese ámbito o para esa característica. (No hay que confundir metrización y medida. La *medida* supone que ya se dispone de un concepto métrico y consiste en la búsqueda del número real o vector que ese concepto métrico asigna a un objeto o suceso determinado.) Muchas veces, de lo que se trata es de metrizar un ámbito ya previamente ordenado, es decir, se trata de metrizar un sistema comparativo o, dicho todavía en otras palabras, se trata de introducir un concepto métrico para algo para lo que ya se dispone de un concepto comparativo. Si $\langle\sim,\prec\rangle$ es un sistema comparativo que se pretende metrizar mediante la función $f : A \to \mathbf{R}$, lo primero que se debe exigir es que f conserve el orden establecido por $\langle\sim,\prec\rangle$ en A, es decir, que f asigne el mismo número real a los objetos coincidentes y que, si un objeto precede a otro, entonces f asigne un número real menor al primer objeto que al segundo. Más precisamente, la condición formal de adecuacion de un concepto métrico f que pretenda metrizar el sistema $\langle A,\sim,\prec\rangle$ de la que se está hablando exige que para cada dos objetos x y z de A ocurra que:

1. si $x \sim z$, entonces $f(x) = f(z)$, y

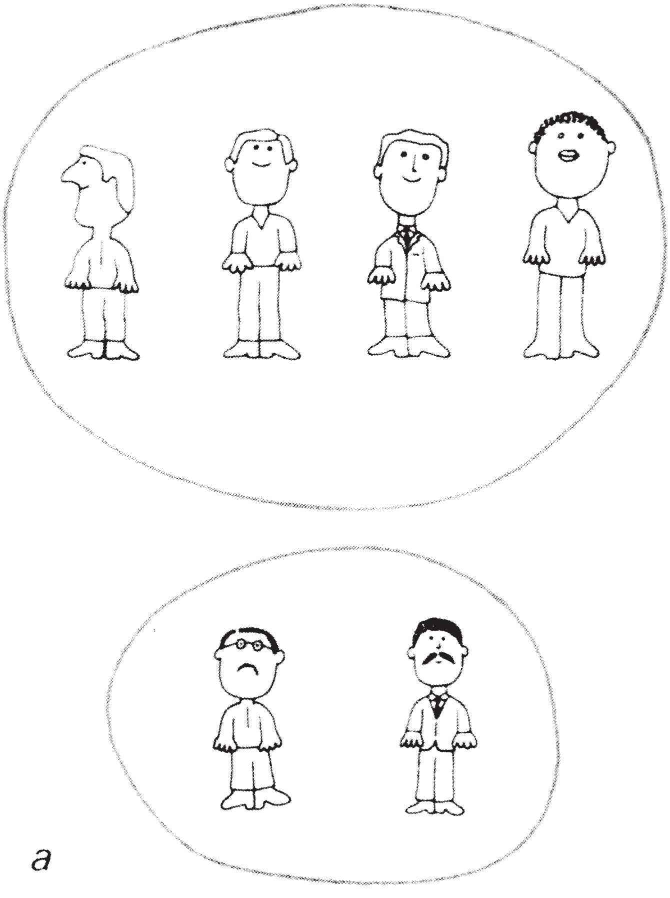
2. si $x \prec z$, entonces $f(x) < f(z)$.

Un concepto métrico de este tipo no sólo asignará números a las cosas, sino que además ofrecerá cierta información sobre el orden en que están esas cosas con respecto a la característica que se haya metrizado. Aquí lo que se habrá hecho habría sido representar determinadas características cualitativas o empíricas de los objetos del dominio A (de personas, minerales, poblaciones o lo que sea) por características cuantitativas o matemáticas de los números reales. Lo que se habrá hecho será, pues establecer un homomorfismo entre el sistema empírico comparativo

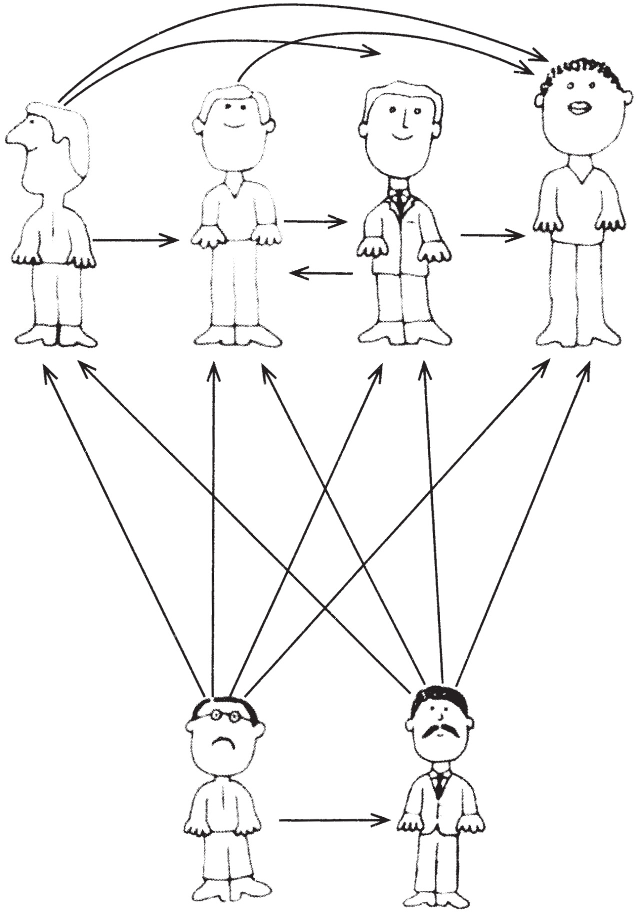
$\langle A, \sim, \prec \rangle$ y el sistema numérico $\langle \mathbf{R}, =, < \rangle$, donde $\mathbf{R}$ es el conjunto de los números reales, $=$ es la igualdad y $<$ es la relación "menor que" entre números reales.

Esta representación de un sistema empírico en otro numérico constituye la esencia del concepto métrico. En una tercera aproximación, se puede decir que un concepto métrico f es un homomorfismo de un sistema empírico en un sistema numérico homólogo. Un *sistema* está constituido por un dominio de individuos y una serie de relaciones y funciones en ese dominio. Dos sistemas son *homólogos* si tienen el mismo número de relaciones y de funciones y si los números arios se

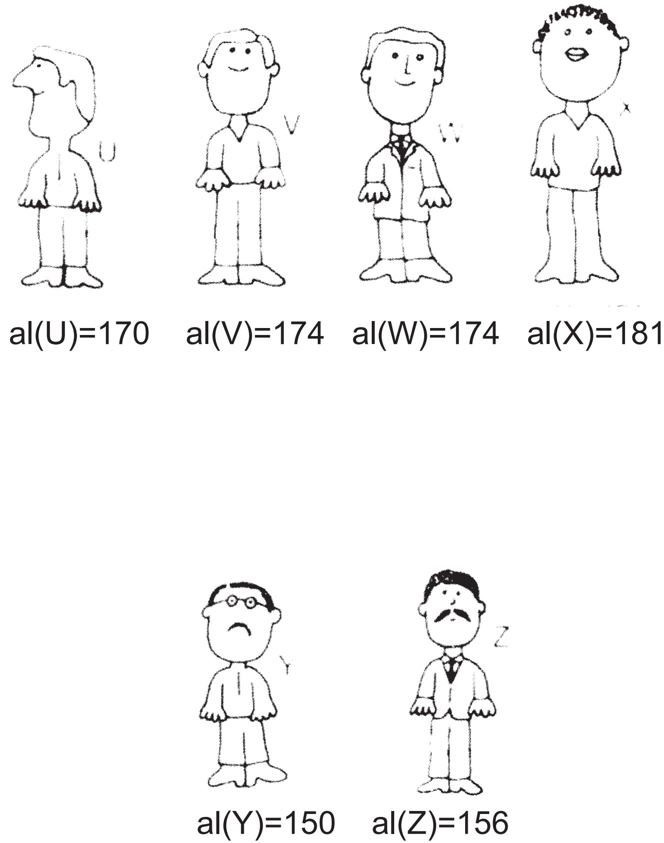
Figura 5. Ser clasificatorio, comparativo o métrico es una propiedad de los conceptos empleados para hablar de las cosas, y no de las cosas mismas. Así, de la misma característica objetiva (la altura de diversos individuos) se puede hablar tanto mediante los conceptos clasificatorios "alto" y "bajo" representados en (a), como mediante el concepto comparativo "$\cdots$ es más bajo que $\cdots$" (*flecha quebrada*) y "$\cdots$ es tan alto como $\cdots$" (*flecha sólida*),



a



b



c

corresponden (es decir, si la primera relación de un sistema es binaria también lo es la del otro, etc.). representado en (b), como mediante un concepto métrico de altura simbolizado por el factor al, indicado en (c).

Sean $\mathcal{A} = \langle A; R_1, \cdots, R_n; g_1, \cdots, g_m\rangle$ y $\mathcal{R} = \langle \mathbf{R}; S_1, \cdots, S_n; h_1, \cdots, h_m\rangle$ dos sistemas homólogos. Se dice que f es un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{R}$ si y sólo si ocurren las siguientes tres cosas:

1. f es una función que a cada objeto de A asigna un número real, es decir, $f : A \to \mathbf{R}$.

2. Siempre que los objetos $a_1, \cdots, a_n$ de A están en la relación R_i, los correspondientes números reales $r_1 = f(a_1), \cdots, r_n = f(a_n)$ están también entre sí en la correspondiente relación S_i.

3. Siempre que la función g_i de $\mathcal{A}$ asigna a cada n objetos $a_1, \cdots, a_n$ de A otro objeto a_{n+1} de A, la correspondiente función h_i de $\mathcal{R}$ asigna a los correspondientes números reales $f(a_1), \cdots, f(a_n)$ el correspondiente número real $f(a_{n+1})$.

Con esto queda precisado lo que se entiende por concepto métrico: un concepto métrico es un homomorfismo entre un sistema empírico y un sistema numérico. El análisis estructural de la metrización de un sistema empírico suele constar de cuatro pasos:

1. definición del sistema empírico;

2. formulación de axiomas o hipótesis que expresan ciertas características cualitativas de ese sistema empírico;

3. prueba de un teorema de representación, que afirma la existencia de un homomorfismo de ese sistema empírico en cierto sistema numérico;

4. prueba de un teorema de unicidad, que indica hasta qué punto el homomorfismo es único, es decir, cuáles son las transformaciones (llamadas permisibles) del homomorfismo dado, que también constituyen homomorfismos del mismo sistema empírico en el mismo sistema numérico.

Aquí no se va a desarrollar este análisis, sino que se limitará a distinguir y ejemplificar algunos de los principales tipos de conceptos métricos.

A veces se identifica el concepto métrico con una escala, pero quizá sea más conveniente identificar una *escala* con un homomorfismo concreto de un sistema empírico en un sistema numérico, y el *concepto métrico* con la clase de todos los homomorfismos del primer sistema en el segundo. Así, para un concepto métrico dado varias transformaciones de escala serían permisibles. Y el hecho de que un mismo concepto métrico pueda expresarse en varias escalas corresponde evidentemente a la práctica científica.

8. Escalas ordinales

Las escalas ordinales son las más pobres desde el punto de vista de la información que suministran. De hecho, su rendimiento teórico no es mayor que el de los conceptos comparativos. Se limitan a asignar números, conservando el orden de un sistema comparativo dado.

La escala de Richter para la intensidad de los terremotos, la de Beaufort para la de los vientos y la de Mohs para la dureza de los minerales son típicos ejemplos de escalas ordinales. Considérese la última de las citadas.

Como ya se vio anteriormente, en mineralogía se dispone de un concepto comparativo de dureza basado en la prueba del rayado. Siempre que se asigne números a los minerales de tal manera que a dos minerales se les asigne el mismo número o a uno de ellos un número menor que al otro según que coincidan en cuanto a dureza o el uno sea menos duro que el otro conforme a la prueba del rayado, se tendrá una escala ordinal de dureza. Así, el minerólogo alemán Friedrich Mohs, en 1822, decidió asignar números a algunos minerales, estableciendo así la “escala de Mohs”. En concreto asignó el 1 al talco, el 2 al yeso, el 3 a la calcita, el 4 a la fluorita, el 5 al apatito, el 6 a la ortosa, el 7 al cuarzo, el 8 al topacio, el 9 al corindón y el 10 al diamante. Si un mineral por la prueba del rayado resulta ser, por ejemplo, más duro que el cuarzo y más blando que el topacio, se le asigna un número intermedio entre el 7 y el 8, como el 7,5.

Sea M el conjunto de los minerales. Sean $\sim$ y $\prec$ las relaciones de coincidencia respecto a dureza y de menor dureza según la prueba del rayado. La escala de Mohs es un homomorfismo f del sistema empírico $\langle M, \sim, \prec \rangle$ en el sistema numérico $\langle \mathbf{R}, =, < \rangle$, tal que $f(\text{talco}) = 1$, $f(\text{yeso}) = 2$, $f(\text{calcita}) = 3$, $f(\text{fluorita}) = 4$, y así sucesivamente.

La escala de Mohs se limita a expresar numéricamente el hecho de que un mineral es más, o menos, duro que otro, pero no dice *cuánto* más, o menos, duro es que el otro. No mide diferencias de dureza. Esta limitación es común a todas las escalas ordinales. Precisamente por ello, son muchas las transformaciones permisibles, es decir, las transformaciones del homomorfismo que dan lugar a homomorfismos del mismo tipo.

Sean f y h dos funciones que asignan números reales a los elementos de un dominio A. Se dice que h es una *transformación monótona* de f si para cada dos elementos x y z de A ocurre que si $f(x) < f(z)$, entonces $h(x) < h(z)$. Pues bien, si f es un homomorfismo de un sistema empírico en un sistema numérico y constituye una escala ordinal, cualquier transformación monótona de f será también un homomorfismo del mismo sistema empírico en el mismo sistema numérico y, por tanto, será igualmente una escala ordinal. Si en vez de asignar 1 al talco, 2 al yeso, 3 a la calcita, 4 a la fluorita, etc., como hacía Mohs, se asigna 0 al talco, 500 al yeso, 500,5 a la calcita, 507 a la fluorita, etc., esa asignación sigue siendo un homomorfismo de $\langle M, \sim, \prec \rangle$ en $\langle \mathbf{R}, =, < \rangle$, es decir, sigue siendo una escala ordinal de dureza. Precisamente esta indeterminación es la que impide que pueda haber una fórmula general para pasar de una escala ordinal a otra (correspondiente al mismo concepto).

9. Escalas proporcionales

Las escalas proporcionales son las más ricas desde el punto de vista de la información que suministran. No sólo dicen que un objeto es más, o menos, que otro respecto a alguna característica, sino que señalan en qué proporción exacta el uno es más, o menos, eso que el otro.

Las escalas correspondientes a los conceptos básicos de la física, como *masa*, *longitud* o *tiempo*, son escalas proporcionales que, además, constituyen magnitudes aditivas o extensivas, por disponer en sus respectivos sistemas empíricos de una operación correspondiente a la adición.

Ya se había aludido al concepto comparativo de masa, basado en la prueba de la balanza y aplicable al dominio de los objetos físicos manejables. Considérese ahora la operación empírica consistente en colocar dos objetos juntos (que por convención dan lugar a un nuevo objeto) en el mismo platillo de la balanza, y desígnese esta operación mediante el signo $\perp$. Sea $\langle A, \sim, \prec, \perp \rangle$ el sistema empírico formado por el conjunto de los objetos físicos manejables, las relaciones de coincidencia y precedencia respecto a la prueba de la balanza y la operación de colocar juntos dos objetos en el mismo platillo, de la que se acaba de hablar. Una escala de masas es un homomorfismo de $\langle A, \sim, \prec, \perp \rangle$ en $\langle \mathbf{R}, =, <, + \rangle$, es decir, una función $f : A \to \mathbf{R}$, tal que para cualesquiera x y z de A:

1. si $x \sim z$, entonces $f(x) = f(z)$;

2. si $x \prec z$, entonces $f(x) < f(z)$, y

3. $f(x \perp z) = f(x) + f(z)$.

Hay muchas funciones que cumplen esas condiciones, muchas escalas. ¿Cómo fijar una? Eligiendo un objeto cualquiera de A y asignándole convencionalmente un número cualquiera. Así, en la escala métrica decimal se elige un determinado cilindro de platino e iridio (el "kilo patrón") que se conserva en el Museo de Pesas y Medidas de Sèvres y se le asigna el número 1000. Con esto queda fijada la escala de masa en gramos.

A diferencia de lo que pasaba con las escalas ordinales, no todas las transformaciones monótonas de escalas proporcionales dan lugar a escalas proporcionales. Supóngase que un frasco destapado tiene 200 gramos de masa, y su tapa, 100 gramos. Por tanto, el frasco tapado tendrá 300 gramos de masa. Una transformación monótona h de la escala métrica decimal en gramos m podría asignar al frasco el número 2, a su tapa, el 1, y al frasco tapado, el 9. Pero esa función no sería un homomorfismo de $\langle A, \sim, \prec, \perp \rangle$ en $\langle \mathbf{R}, =, <, + \rangle$. En efecto, mientras que $m(\text{frasco} + \text{tapa}) = m(\text{frasco}) + m(\text{tapa}) = 200 + 100 = 300$, ocurriría que $h(\text{frasco} + \text{tapa}) = 9 \neq h(\text{frasco}) + h(\text{tapa}) = 2 + 1 = 3$.

En realidad, la mayoría de las transformaciones monótonas de una escala proporcional *no* son escalas proporcionales. Sólo las transformaciones de similaridad dan lugar de nuevo a escalas proporcionales.

Sea f una función que asigna números reales a los elementos de A. Una función $h : A \to \mathbf{R}$ es una *transformación de similaridad* de f si y sólo si hay un número positivo fijo k tal que para cada objeto x de A ocurre que $h(x) = k \cdot f(x)$, es decir, $h(x)$ es siempre el producto de $f(x)$ por un número positivo fijo. Pues bien, un homomorfismo f de un sistema empírico en un sistema numérico constituye una *escala proporcional* si y sólo si cualquier transformación de similaridad de f es también un homomorfismo del mismo sistema empírico en el mismo sistema numérico.

De aquí se sigue que para pasar de una escala proporcional a otra basta siempre con multiplicar por un número fijo. Así, para pasar de una escala en kilos a otra en gramos basta con multiplicar por 1000; para pasar de una escala en libras a otra en kilos basta con multiplicar por 0,453, etc.

Para citar otro ejemplo de escalas proporcionales, considérese el concepto métrico de longitud. Sea B el conjunto de las barras metálicas.

Sea ahora Δ la operación de concatenación de barras a lo largo de una línea recta, es decir, la operación de colocar una barra a continuación de otra. Ahora se puede definir una escala de longitud como un homomorfismo del sistema empírico $\langle B, \Delta \rangle$ en el sistema numérico $\langle \mathbf{R}, + \rangle$. Como hay muchas funciones $f : B \to \mathbf{R}$ que constituyen homomorfismos de $\langle B, \Delta \rangle$ en $\langle \mathbf{R}, + \rangle$, para fijar uno se ha de elegir un objeto de B y asignarle un número determinado. Así, en la escala métrica decimal se eligió (en 1889) una barra de platino–iridio conservada en el Museo de Pesas y Medidas de Sèvres y se le asignó el número 1.

Como en el caso de la masa, y puesto que aquí también se tiene que tratar con escalas proporcionales, con la longitud ocurre que no toda transformación monótona, sino sólo toda transformación de similaridad conduce de una escala de longitud a otra. Por ello, para pasar de una escala de longitud a otra basta con multiplicar por un número fijo. Así, para pasar de una escala en millas a otra en metros, basta con multiplicar por 1609; para pasar de una escala en metros a otra en centímetros, basta con multiplicar por 100, y así sucesivamente.

Téngase en cuenta que aquí se ha introducido la longitud sólo respecto a barras metálicas (o la masa respecto a objetos manejables). Esto no es sino el primer paso para luego ir extendiendo estos conceptos mediante leyes científicas a ámbitos más amplios, o, si se prefiere, éstos no son sino los primeros de una sucesión de conceptos métricos de masa y longitud de alcance creciente. Téngase también en cuenta que se ha limitado a señalar las condiciones formales de adecuación de los conceptos métricos (resumidas en la exigencia de que constituyan homomorfismos de sistemas empíricos en sistemas numéricos), dejando de lado las condiciones materiales de adecuación que, por ejemplo, en la física han llevado a una constante revisión de los objetos patrones o estándar que sirven para fijar las escalas. Así, y puesto que se acaba de hablar del concepto de longitud, se puede recordar cómo la comunidad de los físicos ha ido pasando de una escala de longitud basada en la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por Dunkerke y Barcelona (1799), a otra basada en la barra del museo de Sèvres (1899) y a otra basada en la longitud de onda de la radiación emitida por el isótopo krypton–86, excitado a la temperatura del triple punto del nitrógeno (−210° C).

10. Magnitudes extensivas e intensivas

Se ha visto que los conceptos de masa o de longitud son (clases de) homomorfismos de un sistema empírico que contiene una operación binaria de combinación de objetos (la colocación de dos objetos juntos en la balanza, la concatenación de barras una a continuación de otra) en un sistema numérico que contiene la adición. Las magnitudes de este tipo se llaman *magnitudes aditivas* o *extensivas.* Lo esencial de una magnitud aditiva f estriba en la correspondencia entre la operación binaria de combinación y la adición. Si a la primera se la designa por $\perp$, siempre ocurre que para cada dos individuos x y z del dominio:

$$f(x \perp z) = f(x) + f(z)\,.$$

Así, la masa de un objeto compuesto de dos partes es igual a la suma de las masas de sus partes. La longitud del objeto resultante de colocar dos objetos en línea recta uno a continuación de otro es igual a la suma de sus longitudes. Esto no sólo ocurre con la masa o la longitud. Lo mismo ocurre con el tiempo (si un proceso se divide en dos partes tales que la segunda se inicia al acabarse la primera, la duración del proceso global es igual a la suma de las duraciones de sus partes). El tiempo es también una magnitud aditiva o extensiva.

Es necesario explicitar exactamente las operaciones del sistema empírico para poder determinar si un concepto métrico que lo represente sobre un sistema numérico es una magnitud aditiva o no. Considérese el caso de la resistencia eléctrica. Como es bien sabido, en un circuito se podrá colocar varias "resistencias", es decir, varios conductores, en serie o en paralelo. Sea C el conjunto de los conductores eléctricos, sea M la relación en que está un conductor con otro cuando el primero ofrece menor o igual resistencia a la corriente eléctrica que el segundo y sea $\perp$ la operación de colocar conductores en serie. El concepto métrico de resistencia es una magnitud aditiva, pues sus escalas son homomorfismos de $\langle C, M, \perp\rangle$ en $\langle \mathbf{R}, \leq, +\rangle$. Si en vez de considerar la operación de colocar conductores en serie, se hubiera elegido la de colocar conductores en paralelo, la resultante magnitud no habría sido aditiva. Las resistencias en serie se adicionan; en paralelo, no.

Las magnitudes que no son extensivas o aditivas son *no extensivas.* La misma operación de combinación de objetos puede dar lugar tanto a conceptos métricos extensivos como no extensivos. Así, respecto a la operación de combinar dos economías nacionales para formar una unión económica, los conceptos de *producto nacional bruto* o de *población* son extensivos o aditivos (pues el producto nacional bruto de la unión es igual a la suma de los productos nacionales y la población total es igual a la suma de las pobla-

Tabla 2. Una escala es un homomorfismo de un sistema empírico $\mathcal{A}$ en un sistema numérico $\mathcal{R}$. El conjunto de las transformaciones del mismo tipo de esa escala constituye un concepto métrico. Y el rendimiento teórico del concepto métrico es tanto mayor cuanto más exigente es el tipo de transformación permitido. Aquí se definen las nociones de homomorfismo, transformación y escala usando los signos matemáticos introducidos al principio de esta sección.

$\mathbf{R}$: conjunto de los números reales.

$\mathbf{R}^+$: conjunto de los números reales positivos.

$f : A \to B$: f es una función que a cada elemento de A asigna un determinado elemento de B.

Homomorfismos

Sean $A \neq \emptyset$, $Q_1 \subset A \times A$, $Q_2 \subset A \times A$ y $g : A \times A \to A$.

Sean $S_1 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $S_2 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ y $h : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Sea $\mathcal{A} = \langle A, Q_1, Q_2, g \rangle$ y $\mathcal{R} = \langle \mathbf{R}, S_1, S_2, h \rangle$.

f es un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{R}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f : A \to \mathbf{R} \\ \forall xy \in A : (xQ_1y \Rightarrow f(x)S_1f(y)) \\ \forall xy \in A : (xQ_2y \Rightarrow f(x)S_2f(y)) \\ \forall xyz \in A : (g(x,y) = z \\ \qquad \Rightarrow h(f(x), f(y)) = h(f(z)) \end{cases}$$

Transformaciones

Sean $f : A \to \mathbf{R}$ y $h : A \to \mathbf{R}$.

h es una transformación monótona de $f \Leftrightarrow \forall xy \in A :$ $(f(x) < f(y) \Rightarrow h(x) < h(y))$.

h es una transformación lineal positiva de $f \Leftrightarrow \exists r \in \mathbf{R}^+ \exists s \in \mathbf{R} \forall x \in A : h(x) = r \cdot f(x) + s$.

h es una transformación de similaridad de $f \Leftrightarrow \exists r \in \mathbf{R}^{+} \forall x \in A : h(x) = r \cdot f(x)$.

Escalas

f es una escala ordinal de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{R}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f \text{ es un homomorfismo de } \mathcal{A} \text{ en } \mathcal{R} \\ \forall h\, (h \text{ es una transformación} \\ \quad \text{monótona de } f \\ \Rightarrow \text{h es un homomorfismo de } \mathcal{A} \text{ en } \mathcal{R}) \end{cases}$$

f es una escala de intervalos de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{R}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f \text{ es un homomorfismo de } \mathcal{A} \text{ en } \mathcal{R} \\ \forall h\, (h \text{ es una transformación} \\ \quad \text{lineal positiva de } f \\ \Rightarrow \text{h es un homomorfismo de } \mathcal{A} \text{ en } \mathcal{R}) \end{cases}$$

f es una escala proporcional de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{R}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f \text{ es un homomorfismo de } \mathcal{A} \text{ en } \mathcal{R} \\ \forall h\, (h \text{ es una transformación} \\ \quad \text{de similaridad de } f \\ \Rightarrow \text{h es un homomorfismo de } \mathcal{A} \text{ en } \mathcal{R}) \end{cases}$$

ciones), mientras que los conceptos de *renta per cápita* o de *tasa de natalidad* son no extensivos. Respecto a la operación de vaciar el contenido de dos recipientes en un tercero el concepto de *volumen* es extensivo o aditivo, pero no los de *temperatura* o de *densidad.*

Considérese con más detalle el caso de la temperatura como típico concepto métrico intensivo. Supóngase que ya se dispone de un concepto comparativo $\langle \sim, \prec \rangle$ de temperatura en el dominio A (por ejemplo, el de los líquidos), basado en la prueba del tubo de mercurio sin graduar. Toda asignación T de números reales a los elementos de A que sea conforme con ese concepto comparativo (es decir, tal que si $x \sim y$, entonces $T(x) = T(y)$; y si $x \prec y$, entonces $T(x) < T(y)$) será una escala de temperatura. Pero, ¿cómo fijar una tal escala determinada? Aquí ya no basta con elegir un sólo objeto o proceso y asignarle un número (como en el caso de las magnitudes extensivas), sino que las cosas son algo más complicadas. En primer lugar, se elige un cierto tipo de objetos del dominio A y se asigna un número c a estos objetos cuando se encuentran en un estado determinado y fácilmente reproducible. Luego se asigna otro número distinto k a los mismos objetos cuando se encuentran en otro estado determinado y fácilmente reproducible, pero distinto del anterior. Finalmente, se introduce una función de distancia d tal que para cada cuatro objetos x, y, z, w de A ocurre que si $d(x, y) = d(z, w)$, entonces $T(x) - T(y) = T(z) - T(w)$.

En el caso de la escala Celsius, lo que se hace es asignar el número 0 al agua en el punto de fusión, el número 100 al agua en el punto de ebullición y elegir como función de distancia la distancia entre marcas hechas sobre el tubo de mercurio.

11. Escalas de intervalos

Sean f y h aplicaciones de un dominio A en $\mathbf{R}$. Se dice que h es una transformación lineal positiva de f si y sólo si hay un número positivo r y un número cualquiera fijo s tales que para cada objeto x de A:

$$h(x) = r \cdot f(x) + s\,.$$

Es decir, se obtiene el valor de h para x multiplicando el valor de f para x con un número positivo fijo y adicionando al resultado otro número determinado.

Se dice que un homomorfismo de un sistema empírico en otro numérico es una *escala de intervalos* si y sólo si toda transformación lineal positiva de ese homomorfismo es otro homomorfismo entre los mismos sistemas. Así como los conceptos métricos extensivos dan lugar a escalas proporcionales, los conceptos métricos intensivos dan lugar a escalas de intervalos. Las escalas de temperatura, por ejemplo, son escalas de intervalos. Por eso, para transformar una escala de temperatura en otra es necesario multiplicar por un número y adicionar otro. Así, para pasar de la escala centígrada a la escala Fahrenheit se ha de multiplicar el valor centígrado por 9/5 y añadir 32 al resultado. Es decir:

$$T_F(x) = \frac{9}{5}\, T_C(x) + 32\,.$$

Las escalas más informativas son las proporcionales. Todas las escalas proporcionales son automáticamente, además, escalas de intervalos y escalas ordinales. Las escalas de intervalos que no son proporcionales son algo menos ricas en información. Todas las escalas de intervalos son también escalas ordinales. Las escalas ordinales que no lo son de intervalos, las escalas meramente ordinales, son las más pobres en información. De hecho, como ya se vio, su rendimiento teórico no va más allá del de los conceptos comparativos.

12. Metrización primitiva y derivada

La metrización de un rasgo o característica de un ámbito determinado consiste en la introducción de un concepto métrico o magnitud para esa característica en ese ámbito determinado, o, dicho con más precisión, en el establecimiento de un homomorfismo (o clase de homomorfismos) entre el sistema empírico formado por dicho ámbito y dicha característica en un determinado sistema numérico.

En la práctica la metrización suele realizarse simplemente mediante una definición en función de otras magnitudes previamente introducidas. Así, se puede introducir el concepto métrico de *densidad* mediante la definición: densidad de x es igual a la masa de x dividida por el volumen de x, suponiendo que ya se dispone de los conceptos de masa y volumen. Igualmente se puede introducir el concepto métrico de *renta per cápita* mediante la definición: renta per cápita de x es igual al producto nacional de x dividido por la población de x, suponiendo que previamente se haya introducido los conceptos de producto nacional y población.

Cuando se introduce un concepto métrico en función de otros previamente introducidos, se dice que se trata de una metrización derivada. La mayoría de las metrizaciones son derivadas. Por ejemplo, la introducción del concepto métrico de temperatura, anteriormente descrita, constituía una metrización derivada, pues utilizaba una función de distancia entre marcas, que presuponía el concepto métrico de longitud.

De todos modos, y aunque la mayoría de las magnitudes se introduzcan en función de otras, este procedimiento no puede seguirse con todas. Con alguno o con algunos conceptos métricos hay que empezar; alguna o algunas magnitudes han de ser introducidas sin presuponer la previa introducción de otras. En estos pocos, pero importantes casos, se habla de metrización primitiva.

La introducción del concepto métrico de masa de que antes se había hablado constituye una metrización primitiva, pues no presuponía ninguna otra magnitud previa.

Los conceptos introducidos por la metrización primitiva suelen referirse a ámbitos relativamente limitados. El concepto métrico de masa introducido primitivamente sólo era aplicable a los objetos físicos manejables. Pero no sólo se quiere hablar de la masa de esos objetos. También se quiere hablar de la masa de los átomos o de las estrellas, que no son manejables ni pueden colocarse en los platillos de una balanza. A este concepto generalizado de masa se llega a través de una serie de hipótesis y teorías, de las que se desprende que el primer concepto de masa está correlacionado universalmente con otros conceptos de más amplio alcance, en función de los cuales se puede definir luego un nuevo concepto métrico de masa de aplicabilidad más universal.

En la génesis de muchos conceptos métricos importantes se observan esos dos momentos: la precisión de la idea intuitiva para un ámbito restringido, y la posterior ampliación de su alcance, redefiniéndolo en función de los nuevos conocimientos logrados.

13. Ventajas de los conceptos métricos

Las ventajas de los conceptos métricos respecto a los clasificatorios o comparativos son evidentes. El vocabulario científico resulta mucho más simple, claro y manejable. Con un sólo concepto métrico se tiene infinitas posibles situaciones ya descritas y ordenadas, sin esfuerzo alguno de memoria. Si se pretendiese sustituir un concepto métrico, como el de temperatura, por una serie de conceptos clasificatorio (gélido, frío, fresco, tibio, etc.), no sólo descendería considerablemente el nivel de precisión del lenguaje, sino que se cargaría la memoria con gran cantidad de términos distintos (y con su orden relativo).

Los conceptos métricos no sólo permiten formular leyes científicas mucho más sencillas y precisas que las formulables con términos cualitativos, sino que incluso tienen la ventaja heurística de facilitar la búsqueda de esas leyes. En efecto, si se sospecha una correlación entre dos magnitudes f y h, se puede medir los valores de f y h para diversos objetos o sucesos y, mediante un eje de coordenadas en el que los valores de f y de h estén marcados en los ejes de ordenadas y abscisas, respectivamente, señalar en el plano los puntos $\langle f(x_1), h(x_1)\rangle$, $\langle f(x_2), h(x_2)\rangle$, $\langle f(x_3), h(x_3)\rangle$, etc. A continuación se puede trazar la curva más sencilla que pase por esos puntos y "considerar" la fórmula analítica que describa esa curva, como hipótesis. Posteriores mediciones confirmarán esa fórmula, o bien obligarán a trazar una curva más complicada, reformulando entonces la hipótesis, y así sucesivamente. De este modo se llega en algunos casos a la formulación de leyes científicas interesantes.

La razón profunda de todas las ventajas que se pueden aducir estriba en que los conceptos métricos constituyen un puente entre el mundo real y el mundo ideal de las matemáticas.

El mundo real de la naturaleza y la sociedad es un mundo en gran parte opaco a la inteligencia, lleno de oscuros recovecos, siempre sorprendente, huidizo y poco manipulable intelectualmente.

El mundo de la matemática, por el contrario, es un mundo transparente, un mundo abierto a la inteligencia, que lo ha creado y que lo abarca y manipula sin sorpresas, es un mundo perfectamente estructurado y ordenado y donde uno se mueve con toda facilidad. Por eso, en cuanto los problemas que se plantean en el mundo real resultan demasiado complicados e inabarcables, la mejor estrategia para su solución suele consistir en representarlos como problemas relativos al mundo de la matemática, como problemas matemáticos, para los que ya se sabe cómo hallar una solución, solución que luego se puede retraducir al mundo real. Los conceptos métricos llevan a cabo esa representación del mundo real en el mundo de los números y permiten esa transposición de las preguntas y de los problemas sobre el mundo natural o social al mundo de la matemática, donde se puede usar todo el arsenal del cálculo diferencial e integral, del cálculo vectorial o tensorial, de la teoría de la probabilidad o la programación lineal, etc., para su solución y respuesta. Esta es la razón de que en general se elijan sistemas con el conjunto $\mathbf{R}$ de los números reales como sistemas numéricos en los que representar los problemas. Aunque para realizar todas las medidas posibles e imaginables bastaría con los números racionales, la elección del conjunto de los números reales permite el uso de una artillería matemática más potente (como derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales, etc.) para la resolución de los problemas.

Es de esperar que una mejor comprensión de la estructura de la conceptualización científica no sólo sirva para subrayar una vez más, y por debajo de la confusa proliferación de las distintas especialidades, la profunda unidad de la empresa científica, sino que, además, contribuya a facilitar la introducción de conceptos nuevos y más precisos y fecundos en las áreas hasta ahora menos desarrolladas de la ciencia.

Bibliografía

1. C. G. Hempel, *Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science* (Chicago University Press, Chicago, 1962).

2. W. Stegmüller, *Theorie und Erfahrung* (Springer–Verlag, Heidelberg, 1970).

3. J. Pfanzagl, *Theory of Measurement* (Physica–Verlag, Würzburg–Wien, 1971).

4. D. H. Krantz, R. D. Luce, P. Suppes and A. Tversky, *Foundations of Measurement* (Academic Press, New York–London, 1971).

colección

CIENCIA
AL VIENTO