



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

# **Análisis de los factores que condicionan la producción de arena en pozos de producción de hidrocarburos aplicando la evaluación por confiabilidad**

**Emilio José Tinoco Robledo**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ingeniería  
Área curricular de Ingeniería Civil y Agrícola  
Bogotá, Colombia  
2022



# **Análisis de los factores que condicionan la producción de arena en pozos de producción de hidrocarburos aplicando la evaluación por confiabilidad**

**Emilio José Tinoco Robledo**

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

**Magíster en Ingeniería Geotecnia**

Director (a):

Carlos Eduardo Rodríguez Pineda

Profesor Asociado del Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

Línea de Investigación:

Geotecnia básica

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería

Área curricular de Ingeniería Civil y Agrícola

Bogotá, Colombia

2022







## **Declaración de obra original**

Yo, Emilio José Tinoco Robledo, declaro lo siguiente:

He leído el Acuerdo 035 de 2003 del Consejo Académico de la Universidad Nacional «Reglamento sobre propiedad intelectual» y la Normatividad Nacional relacionada al respeto de los derechos de autor. Esta disertación representa mi trabajo original, excepto donde he reconocido las ideas, las palabras, o materiales de otros autores.

Cuando se han presentado ideas o palabras de otros autores en esta disertación, he realizado su respectivo reconocimiento aplicando correctamente los esquemas de citas y referencias bibliográficas en el estilo requerido.

He obtenido el permiso del autor o editor para incluir cualquier material con derechos de autor (por ejemplo, tablas, figuras, instrumentos de encuesta o grandes porciones de texto).

Por último, he sometido esta disertación a la herramienta de integridad académica, definida por la universidad.

Emilio José Tinoco Robledo

Fecha 29/08/2022

## **Agradecimientos**

A la Universidad Nacional de Colombia. A mi familia. A mis compañeros en Ecopetrol quienes transmitieron el interés en esta temática. Al ingeniero Carlos Eduardo Rodríguez por su orientación inigualable. A Leonardo Mateus, un gran amigo quién hizo valiosos aportes. A María Cristina Dimaté por ser mi guía en el camino de las Geociencias. A María José por su apoyo incondicional. Al personal de la salud y la comunidad científica que durante 2020 y 2021 enfrentaron el desafío de una pandemia.



## Resumen

### **Análisis de los factores que condicionan la producción de arena en pozos de producción de hidrocarburos aplicando la evaluación por confiabilidad**

La producción de arena es un problema geomecánico complejo en la industria de hidrocarburos que involucra las propiedades de la roca, los esfuerzos, el cambio en la presión de poros del yacimiento y cambios operacionales en los pozos. Múltiples modelos analíticos y numéricos determinísticos se han desarrollado para investigar cuáles son las condiciones que desencadenan el inicio de la producción de arena. Basados en la evaluación por confiabilidad, buscamos identificar cuáles son los factores que condicionan el inicio de la producción de arena en pozos de producción de hidrocarburos. Para ello, mediante las técnicas de simulación de Hasofer Lind y Monte Carlo modelamos como variables aleatorias los parámetros y propiedades geomecánicas que representan la resistencia y las cargas de la función del margen de seguridad derivada de modelos analíticos propuestos en la literatura científica. Nuestros resultados muestran que la resistencia a la compresión no confinada de la roca, el esfuerzo horizontal máximo, el agotamiento de la presión de yacimiento y el *drawdown* tienen la mayor influencia en el inicio de la producción de arena. El análisis por confiabilidad en pozos con producción y sin producción de arena sugiere que valores del índice de confiabilidad menores o iguales a 2.6 representan una amenaza alta de iniciar producción de arena, valores mayores a 2.6 y menores a 3.0 una amenaza media y valores mayores o iguales a 3.0 una amenaza baja.

**Palabras clave:** Producción de arena, análisis por confiabilidad, evaluación de la incertidumbre, simulación de Monte Carlo, Hasofer Lind.



## **Abstract**

### **Reliability Assessment of Sand Production Onset in Hydrocarbon Production Wells**

Sand production is a complex geomechanical problem in the hydrocarbon industry involving rock properties, stresses, change in reservoir pore pressure and operational conditions. Multiple deterministic analytical and numerical models have been developed to examine the conditions that trigger the onset of sand production. Based on reliability assessment, we seek to identify the factors that influence the onset of sand production in hydrocarbon production wells. For this purpose, using Hasofer Lind and Monte Carlo simulation techniques, we model as random variables the geomechanical parameters and properties that represent the resistance and loads of the safety margin function derived from analytical models proposed in the scientific literature. Our results show that unconfined rock compressive strength, maximum horizontal stress, reservoir pressure depletion and drawdown have the most significant influence on the onset of sand production. Reliability analysis in sand-producing and sand-free wells suggests that reliability index values less than or equal to 2.6 represent a high hazard of initiating sand production, values greater than 2.6 and less than 3.0 represent a medium hazard, and values greater than or equal to 3.0 are associated with a low hazard.

**Keywords:** Sand production, reliability analysis, uncertainty assessment, Monte Carlo simulation, Hasofer Lind



# Contenido

	Pág.
<b>1. Marco teórico.....</b>	<b>31</b>
1.1 Generalidades de la producción de arena .....	31
1.1.1 Definición de la producción de arena .....	31
1.1.2 Conceptos de geología .....	32
1.1.3 Conceptos de geomecánica.....	34
1.2 Modelos analíticos y numéricos de producción de arena.....	47
1.3 Selección de modelos analíticos como funciones de comportamiento.....	65
<b>2. Conceptos de probabilidad y su aplicación en el análisis por confiabilidad.....</b>	<b>69</b>
2.1 Conceptos de probabilidad.....	69
2.1.1 Incertidumbre.....	69
2.1.2 Variables aleatorias .....	71
2.2 Función de densidad de probabilidad.....	72
2.3 Parámetros estadísticos básicos de una variable aleatoria .....	73
2.3.1 Valor esperado, varianza y desviación estándar .....	74
2.3.2 Sesgo y curtosis .....	75
2.3.3 Covarianza y correlación .....	76
2.4 Distribuciones de probabilidad.....	78
2.4.1 Distribución Normal .....	78
2.4.2 Distribución Lognormal .....	79
2.4.3 Distribución Beta.....	80
2.4.4 Distribución Weibull .....	81
2.5 Análisis por confiabilidad .....	82
2.5.1 El índice de confiabilidad .....	84
2.6 Cuantificación de la incertidumbre.....	85
2.6.1 Método de simulación de Monte Carlo .....	85
2.6.2 Método Hasofer-Lind .....	86
<b>3. Modelo de evaluación por confiabilidad de la producción de arena .....</b>	<b>91</b>
3.1 Generalidades del Campo Provincia .....	91
3.2 Descripción de la información disponible.....	95
3.3 Flujo de trabajo para la evaluación por confiabilidad .....	98
3.3.1 Preprocesamiento.....	100
3.3.2 Procesamiento.....	101
3.3.3 Análisis estadístico .....	103
3.3.4 Selección y ajuste de funciones de densidad de probabilidad.....	116
3.3.5 Formulación matemática de las funciones de comportamiento .....	121
<b>4. Evaluación por confiabilidad del inicio de la producción de arena.....</b>	<b>131</b>

4.1	Cálculo del índice de confiabilidad para la condición de presión de poros inicial de yacimiento .....	132
4.1.1	Método Hasofer-Lind - Modelo Willson et al., (2002) .....	132
4.1.2	Simulación de Monte Carlo - Modelo Willson et al., (2002).....	136
4.1.3	Método Hasofer-Lind - Modelo Papamichos y Furui (2019).....	139
4.1.4	Simulación de Monte Carlo - Modelo Papamichos y Furui (2019) .....	143
4.2	Cálculo del índice de confiabilidad para la condición de presión de poros reciente de yacimiento - Modelo Papamichos y Furui (2019).....	148
4.2.1	Índice de confiabilidad en pozos con mediciones de $pw$ y $\Delta dep > 0$ .....	149
4.2.2	Método Hasofer-Lind con valores hipotéticos de $pw$ .....	151
4.2.3	Simulación de Monte Carlo con valores hipotéticos de $pw$ .....	154
4.3	Análisis de los factores asociados con el inicio de la producción de arena .....	159
4.4	Propuesta de rango de valores de $\beta$ asociados con el inicio de la producción de arena	164
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y recomendaciones .....</b>	<b>166</b>
5.1	Conclusiones .....	166
5.2	Recomendaciones .....	168
<b>Anexo A: Parámetros de ajuste de las funciones de densidad de probabilidad para las variables aleatorias.....</b>		<b>171</b>
<b>Anexo B: Archivos digitales con el código en <i>Python</i> con los algoritmos de los métodos de simulación de Hasofer Lind y Monte Carlo .....</b>		<b>173</b>
<b>6.</b>	<b>Bibliografía.....</b>	<b>175</b>

# Lista de figuras

	Pág.
<b>Figura 1-1:</b> Etapas del proceso de producción de arena.....	32
<b>Figura 1-2:</b> Resultados de un ensayo uniaxial de consolidación en areniscas con diferente tamaño de grano.....	34
<b>Figura 1-3:</b> Arco de arena estable que se desarrolla en cercanías del túnel de perforación .....	35
<b>Figura 1-4:</b> Componentes de esfuerzos normales y cortantes en un cubo infinitesimal de roca.....	36
<b>Figura 1-5:</b> Representación esquemática de los esfuerzos de campo lejano y campo cercano .....	37
<b>Figura 1-6:</b> Ilustración de los regímenes de falla y las relaciones entre los esfuerzos....	38
<b>Figura 1-7:</b> Presión hidrostática y presiones anormales en el subsuelo.....	39
<b>Figura 1-8:</b> Resultado típico de un ensayo de compresión uniaxial.....	41
<b>Figura 1-9:</b> Envolvente MC para una roca construida con diferentes presiones de confinamiento.....	42
<b>Figura 1-10:</b> Círculo y envolvente de falla MC. La línea discontinua en la imagen que acompaña la envolvente representa el plano de falla; $\beta$ es el ángulo entre la normal del plano de falla y $\sigma_1'$ .....	43
<b>Figura 1-11:</b> Reordenamiento y empaquetamiento de los granos. Notar que $\sigma_{i,b} > \sigma_{i,a}$ , $i = 1, 3$ .....	46
<b>Figura 1-12:</b> Datos de pruebas de resistencia en laboratorio para diferentes rocas areniscas (diferentes símbolos). Se observa de izquierda a derecha la pérdida de porosidad.....	47
<b>Figura 1-13:</b> Representación de la superficie de fluencia en el modelo <i>Cam Clay</i> . La falla ocurre en el lado izquierdo de la línea de estado crítico (CSL, por sus siglas en inglés),	47
<b>Figura 1-14:</b> Geometría del modelo propuesto por Risnes, Bratili y Horsrud, (1982) .....	49
<b>Figura 1-15:</b> Esfuerzos elásticos alrededor del hueco sin considerar la presión de fluido.....	50
<b>Figura 1-16:</b> Tipos de regiones geomecánicas y sus geometrías en una zona con producción de arena.....	51
<b>Figura 1-17:</b> Izquierda: <i>drawdown</i> predichos considerando la falla a tensión versus <i>drawdown</i> reales. Derecha: <i>drawdown</i> predichos usando el criterio Mohr-Coulomb versus <i>drawdown</i> reales.....	52
<b>Figura 1-18:</b> Datos de pozos y resultados experimentales del inicio de la producción constante de arena.....	53

<b>Figura 1-19:</b> Comparación entre el CTD predicho por el modelo y las observaciones en campo.....	54
<b>Figura 1-20:</b> <i>Drawdown</i> para producción de arena considerando flujo darciano y no darciano.....	56
<b>Figura 1-21:</b> Porosidad alrededor de las perforaciones P1, P2 y P3.....	57
<b>Figura 1-22:</b> Esquema de esfuerzos <i>in situ</i> y tangenciales cerca del pozo. Notar que $S_1 > S_2$ .....	57
<b>Figura 1-23:</b> Superficie ajustada a la tasa de producción de arena experimental en términos de LF, y Re.....	58
<b>Figura 1-24:</b> Diagrama de presión de yacimiento vs. presión de fondo de pozo para análisis de producción de arena.....	59
<b>Figura 1-25:</b> Variación de la cohesión y ángulo de fricción como función del parámetro de endurecimiento.....	60
<b>Figura 1-26:</b> Resultados de la producción de arena del modelo numérico y los datos experimentales.....	61
<b>Figura 1-27:</b> Efecto de la presión capilar en la producción de arena.....	61
<b>Figura 1-28:</b> Valores predichos y observados en campo del CBHFP.....	62
<b>Figura 1-29:</b> Resistencia crítica de la cavidad normalizada por el esfuerzo efectivo promedio inicial.....	64
<b>Figura 1-30:</b> Ejemplo de una zona en el rango plástico predicha por un modelo poroelastoplástico.....	64
<b>Figura 1-31:</b> Cálculo de la probabilidad acumulada de NYZA para varios ECD.....	65
<b>Figura 2-1:</b> Categorías de incertidumbre en el análisis de riesgo.....	70
<b>Figura 2-2:</b> Representación esquemática de una variable aleatoria.....	71
<b>Figura 2-3:</b> Gráfica de una PDF. El área celeste es la probabilidad de que $X$ tome un valor en $[a, b]$ .....	72
<b>Figura 2-4:</b> Curvas PDF y CDF de una variable aleatoria $X$ .....	73
<b>Figura 2-5:</b> Representación de una PDF de una variable aleatoria $X$ con $CA < 0$ , $CA > 0$ y $CA = 0$ .....	76
<b>Figura 2-6:</b> Ejemplos de exceso de curtosis. La curva azul es una distribución normal. Las otras corresponden a una distribución Weibull (naranja) y Gumbel (verde).....	77
<b>Figura 2-7:</b> Ejemplos de covarianza positiva y negativa.....	77
<b>Figura 2-8:</b> Ejemplos del coeficiente de correlación.....	78
<b>Figura 2-9:</b> Efectos de $\mu X$ (izquierda) y $\sigma X$ (derecha) en la distribución normal.....	79
<b>Figura 2-10:</b> PDF lognormales con diferentes valores de $\mu$ y $\sigma$ .....	80
<b>Figura 2-11:</b> Versiones de la distribución Beta según los valores de $a$ y $b$ .....	81
<b>Figura 2-12:</b> Versiones de la distribución Weibull según los valores de $a$ y $b$ .....	81
<b>Figura 2-13:</b> Representación esquemática del margen de seguridad de un sistema.....	82
<b>Figura 2-14:</b> Comparación del factor de seguridad y la probabilidad de falla.....	83
<b>Figura 2-15:</b> Probabilidad de falla para diferentes valores del factor de seguridad.....	84
<b>Figura 2-16:</b> Comparación del factor de seguridad y la probabilidad de falla.....	85
<b>Figura 2-17:</b> Representación geométrica del método Hasofer-Lind.....	87
<b>Figura 3-1:</b> Localización del Campo Provincia.....	91



**Figura 3-2:** Esquema del modelo estructural del campo Provincia..... 92

**Figura 3-3:** Columna estratigráfica general del VMM desde el Paleógeno hasta el Cuaternario. .... 93

**Figura 3-4:** Histórico del número de pozos perforados en el Campo Provincia. .... 95

**Figura 3-5:** Histórico de presiones medidas a nivel de yacimiento en las Fm Mugrosa y Esmeraldas. .... 97

**Figura 3-6:** Flujo de trabajo para la evaluación por confiabilidad ..... 99

**Figura 3-7:** Ejemplo de registros de pozos y variación de las propiedades geomecánicas en profundidad .....101

**Figura 3-8:** Extrapolación de los valores de densidad.....102

**Figura 3-9:** Izquierda: ejemplo de los cálculos en profundidad de los esfuerzos y la presión de poro. Derecha: azimut de los esfuerzos horizontales en el campo Provincia. .... 104

**Figura 3-10:** A) Vista 3D de un pozo inclinado; B) esfuerzos locales y esfuerzos alrededor del pozo; C) elemento cúbico representativo alrededor del pozo.....122

**Figura 3-11:** Geometría para transformar esfuerzos en coordenadas  $r, \theta, z$  alrededor del pozo a coordenadas  $r, \theta, z$  alrededor de la perforación.....123

**Figura 4-1:** Convergencia del  $\beta_{HL}$  basado en el modelo analítico de Willson et al., (2002)..... 133

**Figura 4-2:** Variación de esfuerzos  $\sigma_{\theta}$  y en  $\sigma'_{\theta}$  en función de  $p_w$  con  $P_{po}$  constante. .133

**Figura 4-3:** Índice de confiabilidad del inicio de la producción de arena para la condición  $\Delta_{dep} = 0$  ..... 134

**Figura 4-4:**  $\beta_{HL}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$ (Fm Mugrosa),  $\Delta_{dep} = 0$  .....135

**Figura 4-5:**  $\beta_{HL}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$ (Fm Esmeraldas),  $\Delta_{dep} = 0$ .....136

**Figura 4-6:** Verificación de la estabilidad de la simulación Monte Carlo .....137

**Figura 4-7:** Índice de confiabilidad del inicio de la producción de arena para la condición  $\Delta_{dep} = 0$  .....137

**Figura 4-8:**  $\beta_{HL}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$ (Fm Mugrosa),  $\Delta_{dep} = 0$ ..... 138

**Figura 4-9:** en profundidad para cada valor de  $p_w$ (Fm Esmeraldas),  $\Delta_{dep} = 0$  .....139

**Figura 4-10:** Convergencia del  $\beta_{HL}$  del MS basado en el modelo analítico de Papamichos y Furui (2019) ..... 140

**Figura 4-11:** Índice de confiabilidad del inicio de la producción de arena para la condición  $\Delta_{dep} = 0$  ..... 141

**Figura 4-12:**  $\beta_{HL}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$ (Fm Mugrosa),  $\Delta_{dep} = 0$  .....142

**Figura 4-13:** Variación del  $\beta_{HL}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$ (Fm Esmeraldas),  $\Delta_{dep} = 0$  ..... ¡Error! Marcador no definido.

**Figura 4-14:** Verificación de la estabilidad de la simulación Monte Carlo ..... 143

**Figura 4-15:** Índice de confiabilidad del inicio de la producción de arena (Fm Mugrosa) con  $\Delta_{dep} = 0$ ..... 144

**Figura 4-16:** Índice de confiabilidad del inicio de la producción de arena (Fm Esmeraldas) con  $\Delta_{dep} = 0$ ..... 145

**Figura 4-17:**  $\beta_{MC}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$  - Papamichos y Furui (2019).  $\Delta_{dep} = 0$  ..... 145

<b>Figura 4-18:</b> $\beta_{HL}$ en profundidad para cada valor de $p_w$ - Papamichos y Furui (2019). $\Delta dep = 0$ .....	146
<b>Figura 4-19:</b> $\beta_{HL}$ en profundidad para cada valor de $p_w$ : a) Fm Mugrosa, b) Fm Esmeraldas. $\Delta dep = 0$ .....	147
<b>Figura 4-20:</b> Convergencia del $\beta_{HL}$ - Modelo analítico de Papamichos y Furui (2019)..	150
<b>Figura 4-21:</b> Resultados de $\beta_{HL}$ y $\beta_{MC}$ - Modelo analítico de Papamichos y Furui (2019) con $\Delta dep > 0$ . .....	150
<b>Figura 4-22:</b> Convergencia del $\beta_{HL}$ - Modelo analítico de Papamichos y Furui (2019)..	151
<b>Figura 4-23:</b> Índice de confiabilidad del inicio de la producción de arena para la condición $\Delta dep > 0$ .....	152
<b>Figura 4-24:</b> $\beta_{HL}$ en profundidad para cada valor de $p_w$ (Fm Mugrosa), para la condición $\Delta dep > 0$ .....	153
<b>Figura 4-25:</b> $\beta_{HL}$ en profundidad para cada valor de $p_w$ (Fm Esmeraldas), para la condición $\Delta dep > 0$ .....	153
<b>Figura 4-26:</b> Verificación de la estabilidad de la simulación Monte Carlo.....	154
<b>Figura 4-27:</b> Índice de confiabilidad del inicio de la producción de arena (Fm Mugrosa) con $\Delta dep > 0$ .....	154
<b>Figura 4-28:</b> Índice de confiabilidad del inicio de la producción de arena (Fm Esmeraldas) con $\Delta dep > 0$ .....	155
<b>Figura 4-29:</b> $\beta_{MC}$ en profundidad para cada valor de $p_w$ (Fm Mugrosa) para la condición $\Delta dep > 0$ : a) criterio MC; b) criterio DP ( $k_1 = 0.342$ ).....	156
<b>Figura 4-30:</b> $\beta_{MC}$ en profundidad para cada valor de $p_w$ (Fm Esmeraldas) para la condición $\Delta dep > 0$ : a) criterio MC; b) criterio DP ( $k_1 = 0.342$ ) .....	157
<b>Figura 4-31:</b> Impacto del coeficiente de variación de las variables aleatorias en el cálculo de $\beta_{MC}$ para condiciones iniciales de presión de poro de yacimiento en la Fm Mugrosa. Superior: resultados con el modelo de Willson et al., (2002). Inferior: resultados con el modelo de Papamichos y Furui (2019).....	161
<b>Figura 4-32:</b> Impacto del coeficiente de variación de las variables aleatorias en el cálculo de $\beta_{MC}$ para condiciones iniciales de presión de poro de yacimiento en la Fm Esmeraldas. Superior: resultados con el modelo de Willson et al., (2002). Inferior: resultados con el modelo de Papamichos y Furui (2019) .....	162
<b>Figura 4-33:</b> Impacto del coeficiente de variación de las variables aleatorias en el cálculo de $\beta_{MC}$ para condiciones recientes de presión de poro de yacimiento usando el modelo Papamichos y Furui (2019) y los criterios de falla MC y DP ( $k_1=0.342$ ). Superior: Fm Mugrosa Inferior: Fm Esmeraldas .....	163



## Lista de tablas

	Pág.
<b>Tabla 1-1:</b> Relación entre los esfuerzos principales y el régimen de falla .....	38
<b>Tabla 1-2:</b> Resumen de los modelos analíticos presentados .....	65
<b>Tabla 2-1:</b> Ejemplo de una variable aleatoria discreta.....	72
<b>Tabla 3-1:</b> Formaciones productoras Campo Provincia .....	92
<b>Tabla 3-2:</b> Volumen de fluidos acumulados del Campo Provincia a corte a 31 de diciembre de 2021 .....	94
<b>Tabla 3-3:</b> Información de entrada del modelo.....	95
<b>Tabla 3-4:</b> Clasificación de los pozos para los escenarios de análisis .....	97
<b>Tabla 3-5:</b> Formato de presentación de los registros históricos de producción de arena	98
<b>Tabla 3-6:</b> Correlaciones y ecuaciones usadas en la etapa de preprocesamiento .....	100
<b>Tabla 3-7:</b> Variación en profundidad e histogramas de la resistencia UCS y la relación de Poisson.....	105
<b>Tabla 3-8:</b> Visualización de datos atípicos con el diagrama de caja.....	107
<b>Tabla 3-9:</b> Visualización de datos atípicos con z-score.....	107
<b>Tabla 3-10:</b> Histogramas de la resistencia UCS y la relación de Poisson sin datos atípicos .....	108
<b>Tabla 3-11:</b> Variación en profundidad e histogramas de $\sigma_{ho}$ , $\sigma_{Ho}$ , $\sigma_V$ y $P_{po}$ .....	110
<b>Tabla 3-12:</b> Variación en profundidad e histogramas de las presiones recientes $P_o$ .....	112
<b>Tabla 3-13:</b> Tendencia lineal en profundidad e histogramas sin datos atípicos de $\sigma_{Ho}$ , $P_{po}$ y $P_p$ .....	113
<b>Tabla 3-14:</b> Medidas de tendencia central y dispersión de los valores de UCS, Poisson, $\sigma_{Ho}$ , $P_{po}$ y $P_p$ .....	116
<b>Tabla 3-15:</b> Parámetros y criterios de bondad de ajuste para la relación de Poisson ...	118
<b>Tabla 3-16:</b> Curvas de distribuciones de probabilidad ajustadas a los datos de cada formación.....	119
<b>Tabla 3-17:</b> Curvas de distribuciones de probabilidad ajustadas a los datos de cada formación.....	120
<b>Tabla 3-18:</b> Derivadas parciales de cada variable aleatoria de la ecuación 3.26 .....	124
<b>Tabla 3-19:</b> Derivadas parciales con respecto a $\sigma_{Ho}$ , $P_{po}$ , $P_p$ y $\nu$ para el modelo sMC.	126
<b>Tabla 3-20:</b> Derivadas parciales de $\sigma_{Ho}$ , $P_{po}$ , $P_p$ y $\nu$ para el modelo MC.....	126
<b>Tabla 3-21:</b> Derivadas parciales de $\sigma_{Ho}$ , $P_{po}$ , $P_p$ y $\nu$ para los modelos VM (superior) y DP (inferior) .....	128

---

<b>Tabla 4-1.</b> Resumen de valores mínimos y máximos de $\beta MC$ calculados con el criterio DP ( $k_1=0.342$ ).....	147
<b>Tabla 4-2.</b> Resumen de valores de $\beta MC$ calculados con los criterios MC y DP ( $k_1=0.342$ ), Fm Mugrosa .....	158
<b>Tabla 4-3.</b> Resumen de valores de $\beta MC$ calculados con los criterios MC y DP ( $k_1=0.342$ ), Fm Mugrosa .....	159
<b>Tabla 4-4.</b> Resumen de valores de $\beta MC$ calculados con los criterios MC y DP ( $k_1=0.342$ ), Fm Esmeraldas .....	159
<b>Tabla 4-5.</b> Resumen de valores de $\beta MC$ calculados con los criterios MC y DP ( $k_1=0.342$ ), Fm Esmeraldas .....	159
<b>Tabla 4-6.</b> Propuesta de valores de $\beta$ para los niveles de amenaza baja, media y alta de iniciar producción de arena .....	165

# Lista de Símbolos y abreviaturas

## Abreviaturas

Abreviatura	Término
1D	Una dimensión
AIC	Criterio de información de Akaike
BIC	Método de información bayesiano
CBHFP	Presión de fondo de pozo fluyente crítica
CDF	Función de distribución acumulada
CSL	Línea de estado crítico en el modelo <i>Cam-Clay</i>
$cov(X, Y)$	Covarianza de dos variables aleatorias
COV	Coefficiente de variación
CTD	<i>Drawdown</i> total crítico
DFIT	Prueba de diagnóstico de fractura
DP	Criterio de falla Drucker-Prager
<i>DTCO</i>	Tiempo de retardo de la onda compresiva
<i>DTCO</i>	Tiempo de retardo de la onda de cizalla
$E_{sta}$	Módulo de Young estático
ECD	Densidades efectiva del fluido en circulación
Fig., fig.	Figura
Fm	Formación o formaciones
FS	Factor de seguridad
$k_1$	Parámetro de fricción en los modelos VM y DP
LOT	Prueba de <i>leak-off</i>
m	metros
mm	milímetros
MC	Criterio de falla Mohr Coulomb
MDT	Probador dinámico de formaciones
MS	Margen de seguridad
NYZA	Área Normalizada de la Zona Plastificada
PDF	Función de densidad de probabilidad
$p_p$	Presión de poro y presión de poro actual en el modelo de Papamichos y Furui (2019)
$p_{po}$	Presión de poro inicial de yacimiento
pptb	Libras por cada mil barriles
psi	Libras por pulgada cuadrada
$p_w$	Presión de fondo de pozo o presión de fondo fluyendo
Q	Carga
R	Resistencia
$S_o$	Cohesión o resistencia al corte

**Abreviatura Término**

sMC	Criterio de falla simplificado de Mohr Coulomb
SMC	Simulación de Monte Carlo
TWC	Máximo esfuerzo o resistencia en un ensayo de cilindro de pared gruesa
TVD	True Vertical Depth (Profundidad vertical verdadera)
U	Resistencia efectiva de la roca en el modelo Willson et al. (2002)
UCS	Resistencia a la compresión no confinada
VM	Criterio de falla von Mises
$V_P$	Velocidad de onda P
$V_S$	Velocidad de onda S

**Símbolos con letras griegas**

<b>Símbolo</b>	<b>Término</b>	<b>Unidad SI</b>
$\beta$	Índice de confiabilidad	adimensional
$\beta_{HL}$	Índice de confiabilidad calculado con el método de simulación de Hasofer Lind	
$\beta_{MC}$	Índice de confiabilidad calculado con el método de simulación de Monte Carlo	
$\varepsilon_{Hmin}, \varepsilon_{Hmin}$	Deformaciones tectónicas	adimensional
$\varepsilon^{-P}$	Deformación plástica	adimensional
$\varepsilon_z$	Deformación vertical	adimensional
$\rho$	Densidad de la roca	
$\rho(X, Y)$	Coefficiente de correlación de dos variables aleatorias	adimensional
$\nu$	Relación de Poisson	adimensional





# Introducción

A nivel mundial la producción de arena es uno de los problemas más frecuentes en los campos de hidrocarburos. Se ha observado que ocurre principalmente en rocas sedimentarias con bajos niveles de consolidación, las cuales son relativamente jóvenes en la escala de tiempo geológica y con escasos o nulos procesos de cementación. Cuando un pozo de hidrocarburos es perforado en este tipo de ambientes geológicos, la roca alrededor del hueco perforado puede alterarse significativamente, debido a su baja resistencia mecánica y a la perturbación de esfuerzos ocasionada por la construcción del pozo. Las fuerzas que la roca debe soportar se intensifican a medida que los fluidos (agua, petróleo y gas) avanzan desde el yacimiento hacia el pozo. Con el tiempo los granos de la roca ya alterada pueden desprenderse y eventualmente viajar con los fluidos hacia la superficie o depositarse en el fondo del pozo, generando problemas como taponamientos de pozos, daño a tuberías y a equipos. El estudio de esta temática a nivel académico y de la industria Oil & Gas despierta gran interés debido a que cerca del 70% de las reservas de petróleo y gas están almacenadas en rocas sedimentarias con un alto potencial de producción de arena (Bianco y Halleck, 2001)

La literatura científica sobre la producción de arena abarca el análisis de correlaciones empíricas entre las variables involucradas en la producción de arena (Moricca *et al.*, 1994), desarrollos experimentales en muestras de roca bajo condiciones de flujo radial para predecir las condiciones en las que se inicia la producción de arena (Selby y Farouq Ali, 1987), la formulación de modelos analíticos en combinación con ensayos de laboratorio (Willson *et al.* 2002), modelos complejos basados en la mecánica del medio continuo que integran balance de masa, ecuaciones constitutivas para fluidos y ecuaciones de erosión (Wan y Wang, 2000) y modelos numéricos que estiman el inicio y los volúmenes de arena que se producirían en un momento específico del ciclo de vida de un pozo de hidrocarburos (Pham, 2017). En unos pocos estudios, como los de McLellan y Hawkes (1998) o Moos *et al.*, (2003), la producción de arena se ha evaluado a partir de la cuantificación de la

amenaza de inestabilidad del pozo aplicando técnicas probabilísticas con las cuales se identifican las variables que más influyen en la falla de la roca alrededor del pozo y en consecuencia en la producción de arena. Sin embargo, persiste la necesidad de abordar directamente el problema de la producción de arena aplicando conceptos como la probabilidad de falla o empleando la evaluación por confiabilidad.

En algunos campos de hidrocarburos del Valle Medio del Magdalena (VMM) la producción de arena es un problema común que ha generado impactos económicos significativos, por ejemplo: i) la suspensión temporal de algunos pozos o la modificación en sus parámetros de operación reduciendo su producción de hidrocarburos y; ii) costos adicionales por mantenimiento, limpieza en pozos o cambios de los equipos en superficie. Para esta zona existen estudios como los de Goyeneche y Hernández, (2009), Grajales y Hoyos, (2018) o Torrado et al., (2020) en los que se aplican metodologías cualitativas y cuantitativas para identificar las causas raíces de la producción de arena y estimar volúmenes de arena, integrando información de producción de hidrocarburos, de la geometría de los pozos y de propiedades petrofísicas y geomecánicas de las formaciones. En el trabajo de Jaimes et al., (2014) se muestra la aplicación del análisis probabilístico del riesgo mediante simulaciones de Monte Carlo para valorar en términos económicos las alternativas de gestión de la arena en un campo del VMM. Si bien en Jaimes et al., (2014) se incluye el uso de herramientas probabilísticas, estas se orientan a la evaluación de los tipos de completamiento y de las estrategias de producción de hidrocarburos de las formaciones que tienen una mayor exposición a la producción de arena.

En cuanto a la modelación numérica de la producción de arena en el contexto colombiano, se resalta el modelo computacional de Araujo (2015), calibrado con resultados de pruebas de laboratorio de la literatura, en el que se acoplan los modelos de flujo de fluidos, geomecánico y de producción de arena para predecir el inicio y cuantificar la producción de arena en yacimientos de crudo pesado. A partir de su investigación, Araujo, (2015) concluye que el volumen de arena producido es proporcional a la deformación plástica de la roca, por lo que el uso de modelos elastoplásticos son fundamentales en los cálculos de volúmenes de arena. Además, Araujo, (2015) resalta que el comportamiento plástico depende principalmente del ángulo de fricción interna, la cohesión y el ángulo de dilatancia. La mayoría de estos estudios se han centrado en examinar las causas de la producción

de arena y comparten la característica de tener un enfoque determinístico. Este enfoque no es apropiado para capturar y valorar la incertidumbre inherente a los materiales geológicos. En contraste con los métodos determinísticos, el uso de métodos probabilísticos brinda un equilibrio entre los elementos técnicos y financieros de los proyectos, por cuanto incluyen la variabilidad, aleatoriedad y las incertidumbres presentes en las propiedades del yacimiento.

El objetivo general de esta investigación es analizar la influencia de los factores que condicionan el inicio de la producción de arena en pozos de producción de hidrocarburos. Los objetivos específicos son:

- Definir una función de comportamiento para evaluar la producción de arena.
- Determinar funciones de probabilidad para los parámetros geomecánicos que se asumirán como variables aleatorias y que caracterizarán la función de probabilidad de la producción de arena.
- Determinar la influencia de las variables en la producción de arena empleando el análisis por confiabilidad.

Para lograr estos objetivos, mediante un análisis estadístico, se asignan funciones de densidad de probabilidad a los parámetros o propiedades geomecánicas que se tratarán como variables aleatorias. Posteriormente se aplicarán los métodos de simulación de Hasofer-Lind y Monte Carlo a las funciones de comportamiento del margen de seguridad basadas en modelos analíticos que determinan el inicio de la producción de arena. El campo Provincia de Ecopetrol, ubicado en el VMM, ha sido seleccionado para aplicar el modelo de evaluación por confiabilidad planteado en el presente trabajo porque cuenta con un volumen de datos adecuado para el análisis estadístico de las propiedades geomecánicas, esfuerzos y presión de poros de las formaciones de interés y además existe un registro histórico de los pozos con producción de arena.

Esta investigación aborda únicamente el inicio de la producción de arena asociado con la falla mecánica de la formación geológica alrededor del pozo o la perforación. Los procesos de erosión y transporte de sólidos en el medio, así como el modelamiento del balance de masa de arena no son considerados dado que no hay información disponible para la

calibración de los parámetros necesarios para ajustar dichos modelos. El análisis por confiabilidad no incluye el efecto de la inyección de agua para recobro secundario, factor que puede favorecer el inicio de la producción de arena al intensificar la reducción de la cohesión de los granos de la roca. Por su parte, los modelos analíticos utilizados como funciones de comportamiento están basados en el comportamiento poroelástico del material, de manera que la roca se caracteriza en función de sus propiedades geomecánicas en el rango elástico. Finalmente, los datos empleados provienen únicamente de registros geofísicos de pozos. Para la zona de estudio no hay información de pruebas de laboratorio de mecánica de rocas que puedan emplearse para calibrar, especialmente, la resistencia de la roca en términos de la resistencia a la compresión no confinada (UCS).

El documento de tesis está organizado así:

- En el primer capítulo se exponen los conceptos fundamentales, las causas y consecuencias de la producción de arena, la revisión bibliográfica sobre los modelos analíticos de predicción de la producción de arena y la selección de los modelos analíticos que se establecerán como funciones de comportamiento del margen de seguridad.
- En el segundo capítulo se abordan los conceptos básicos de probabilidad y las funciones de densidad de probabilidad que se usarán en esta investigación. Asimismo se presentarán los conceptos de margen de seguridad, índice de confiabilidad, probabilidad de falla y los métodos de simulación.
- En el tercer capítulo se presentan las generalidades de la zona de estudio y se describe el procedimiento empleado para llevar a cabo el análisis por confiabilidad del inicio de la producción de arena. Además, se exponen los análisis estadísticos de los datos y finalmente se definen las variables que se considerarán aleatorias junto con sus distribuciones de probabilidad.
- En seguida, en el capítulo cuarto, se muestran los resultados de la evaluación de las funciones de comportamiento al aplicar los métodos de simulación de: (i) Hasofer-Lind; y (ii) Monte Carlo. Posteriormente, con base en los resultados se analizan cuáles son las variables que condicionan el inicio de la producción de

arena y propone un rango de valores del índice de confiabilidad que podrían asociarse con el inicio de la producción de arena.

- Finalmente, en el capítulo quinto, se presentan las conclusiones y recomendaciones.



# 1. Marco teórico

Este capítulo empieza con las generalidades de la producción de arena. Luego, a partir de investigaciones en el contexto académico y de casos reales alrededor del mundo, se exponen los enfoques que se han desarrollado para abordar el problema de la producción de arena, haciendo énfasis en los modelos analíticos. Finalmente se presentan los modelos analíticos que se establecerán como las funciones de comportamiento en el capítulo 5.

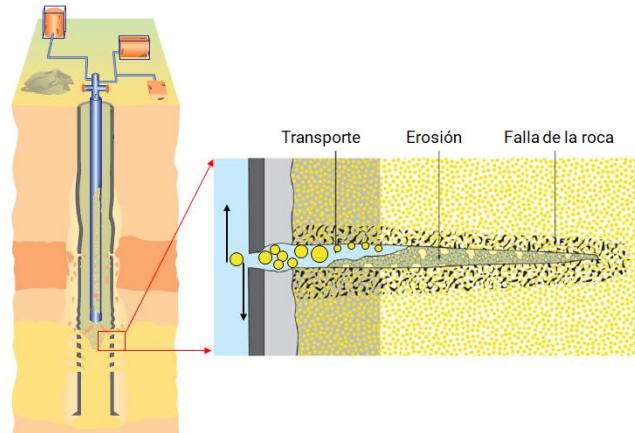
## 1.1 Generalidades de la producción de arena

### 1.1.1 Definición de la producción de arena

La producción de arena es el proceso de generación de granos de arena durante la etapa de explotación de hidrocarburos. La producción de arena implica el estudio de los siguientes procesos físicos: 1) la falla de la roca alrededor del pozo; 2) la erosión de los granos causada por fuerzas de arrastre, y 3) el transporte de los granos hacia la superficie o hacia el fondo del pozo (Figura 1-1). La producción de arena inicia cuando la roca alrededor del pozo ha alcanzado un cierto nivel de daño (Fjaer et al. 1992). A partir de allí, es cuestión de tiempo para que los granos sean desprendidos bajo la acción de las fuerzas de arrastre (generadas por los fluidos) que exceden la cohesión de los granos. Luego, los granos son transportados hacia el pozo junto con los fluidos (agua, petróleo y gas) y viajan hacia la superficie, o por acción de la fuerza de gravedad se depositan en el fondo del pozo (Figura 1-1). La producción de arena puede empezar con volúmenes tolerables que no son una amenaza significativa para la operación de los pozos. Con el tiempo estos volúmenes aumentan por lo que deben tratarse mediante algún sistema de control, lo que puede

implicar costos adicionales en el mantenimiento de un pozo y su posible reducción de producción de hidrocarburos (Nauroy 2011).

**Figura 1-1:** Etapas del proceso de producción de arena.



**Fuente:** Modificado de “Sand Control: Why and How”, de Carlson et al., 1992, Tulsa, Netherlands, Oilfield Review y de “Well completion design”, de Bellarby, 2009, Aberdeen, UK, Elsevier.

En algunos casos, los volúmenes de arena pueden ser catastróficos, llevando incluso a la erosión de equipos, daños y obstrucción del pozo e incluso accidentes graves (Fjaer et al. 1992; Yi 2003) que pueden obligar al operador a abandonar definitivamente el pozo (Climent 2016). Aunque en sus primeras etapas, la producción de arena puede mejorar la productividad de hidrocarburos del pozo debido a que incrementa la permeabilidad de la formación, con el tiempo los sólidos pueden obstruir el movimiento de los fluidos hacia el pozo, especialmente en los casos donde previamente se han instalado sistemas de mallas o filtros con el objetivo de reducir la migración de los granos.

### 1.1.2 Conceptos de geología

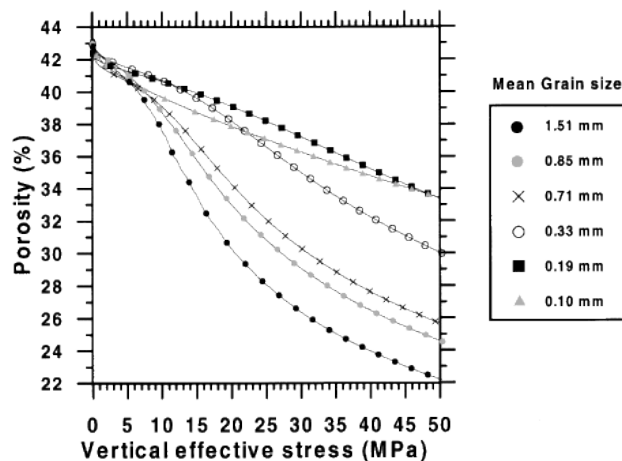
Entre los diferentes procesos geológicos asociados con la formación de rocas sedimentarias, la consolidación es de principal interés en el estudio de la producción de arena. Existen dos componentes involucrados en la consolidación: uno de origen químico y otro de origen mecánico. De acuerdo con Bjørlykke K. (1978), se pueden distinguir dos procesos químicos en la consolidación de rocas sedimentarias. El primero está asociado con la transformación de sólidos como el keroseno en fluido (hidrocarburo) induciendo cambios en la relación de vacíos de la roca. Esta transformación se debe a la interacción



de minerales inestables como el aragonito, yeso (mineral) y esmectita. El segundo se refiere a la precipitación del material cementante en los poros (Bjørlykke K. 1978). En el caso de las areniscas, los esfuerzos en los contactos de los granos son muy altos antes de la precipitación del material cementante ya que el área de contacto es muy pequeña. Esto genera un aumento en la solubilidad de minerales como el cuarzo que luego disuelven los contactos de los granos y precipitan el material cementante en los poros. El material cementante en los poros entre granos puede proporcionar un aumento en la resistencia mecánica de la roca, generando un efecto de sobreconsolidación que no es debido a procesos mecánicos como levantamiento o erosión de capas sedimentarias. Esto puede disminuir la posibilidad de iniciar producción de arena cuando la roca es perturbada por la perforación de un pozo. El segundo componente, de origen mecánico, está asociado a cambios en los esfuerzos producto de la sobrecarga. A una mayor sobrecarga corresponde un mayor esfuerzo transmitido a través de la fase sólida de la roca. En ciertas zonas, el área de contacto entre algunos granos puede ser mínima, lo cual produce una concentración de esfuerzos que puede romper dichos granos, generándose un reordenamiento de los sedimentos, incrementando el área y número de contactos intergranulares. De precipitarse los minerales cementantes, estos cubrirán más superficie, mejorando la adherencia y reduciendo el aplastamiento de los sedimentos al proveer una mayor área de contacto a los granos (Bjørlykke K., 1978). Durante la consolidación mecánica, la fase sólida se mantiene constante mientras que el volumen poroso disminuye (Figura 1-2).

El grado de consolidación es un indicativo de la magnitud del contacto y de unión de los granos, por lo que depende tanto de los procesos mecánicos y químicos. Así, sedimentos más antiguos muestran mayores niveles de consolidación (o mayor resistencia). En general, las rocas sedimentarias pueden clasificarse como no consolidadas, pobremente consolidadas o consolidadas (Al-Awad, El-Sayed y Desouky, 1999). En formaciones de areniscas jóvenes y someras, por ejemplo, de los períodos Paleógeno o Neógeno, los procesos de consolidación son incipientes lo que origina rocas no consolidadas o, en el mejor de los casos, pobremente consolidadas. Es en este tipo de rocas (en especial las no consolidadas) donde la producción de arena se desarrolla con mayor facilidad (Ahad, Jami y Tyson, 2020).

**Figura 1-2:** Resultados de un ensayo uniaxial de consolidación en areniscas con diferente tamaño de grano.



**Fuente:** Recuperado de: "Compaction (consolidation) of sediments. In: Sedimentology. Encyclopedia of Earth Science" de Bjørlykke K., 1978, Springer.

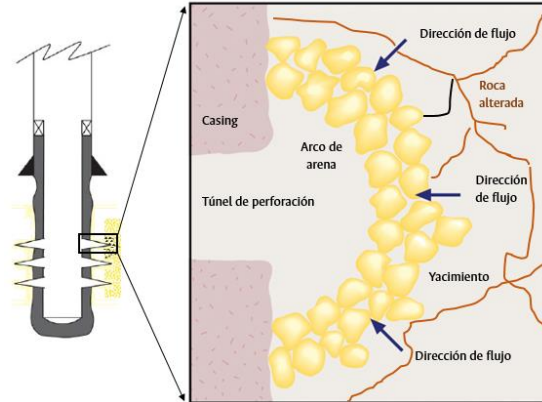
### 1.1.3 Conceptos de geomecánica

Según Fjaer et al., (1992) la producción de arena no ocurre en rocas sanas, pues las fuerzas de arrastre, originadas por el movimiento de los fluidos, no son capaces de desprender los granos en la roca. La producción de arena ocurrirá sólo si la roca es no consolidada o ha sido alterada. La alteración puede ser originada por una excesiva concentración de esfuerzos alrededor del pozo que superan la resistencia de la roca. Este escenario es considerado como el inicio de la producción de arena (*onset* en inglés) y está relacionado con la falla de la roca. De acuerdo con Fjaer et al., (1992), la roca no consolidada o con un cierto nivel de daño es un elemento necesario para la producción de arena pero no suficiente. Por ejemplo, Bratli y Risnes, (1981), mostraron que en areniscas no consolidadas se pueden crear arcos de arena estables cercanos alrededor del túnel de perforación que comunica el pozo con el yacimiento (Figura 1-3). Una vez que las condiciones de flujo o de esfuerzos superan las condiciones de estabilidad del arco es inevitable la producción de arena.

La producción de arena puede ser incluso favorable bajo ciertas condiciones. Vaziri et al., (2002), exponen que la existencia de una capa de roca sello competente limita la propagación vertical de los efectos de la producción de arena, como por ejemplo los canales de flujo, de manera que estos se concentran lateralmente en el yacimiento, lo que

resulta beneficioso en términos de producción de hidrocarburos. En cualquier caso, determinar las condiciones en las que empezará la producción de arena proporcionará información útil para optimizar la producción de hidrocarburos.

**Figura 1-3:** Arco de arena estable que se desarrolla en cercanías del túnel de perforación



**Fuente:** Modificado de “*Sand Control: Why and How*”, de Carlson et al., 1992, Tulsa, Países Bajos, Oilfield Review y de “*Well completion design*”, de Bellarby, 2009, Aberdeen, UK, Elsevier

### Esfuerzos

Sea  $F$  es una fuerza que actúa en una superficie  $A$ , entonces el esfuerzo se define como:

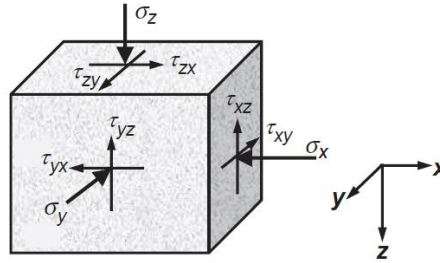
$$\sigma = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{F}{A} \tag{1.1}$$

Si la fuerza actúa perpendicular a la superficie el esfuerzo se denomina esfuerzo normal. En cambio, si la fuerza es aplicada paralela a la superficie, el esfuerzo se denomina esfuerzo de corte o cortante. En mecánica de rocas, a diferencia de otras áreas de la ciencia de materiales, los esfuerzos compresivos son positivos. Para proporcionar una descripción más rigurosa del estado de esfuerzos en cualquier punto del yacimiento, se deben identificar los esfuerzos que actúan en las superficies orientadas en las tres direcciones ortogonales (x, y, z), para lo cual se utiliza el tensor de esfuerzos (Ecuación 1.2):

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Los esfuerzos normales representados con el símbolo  $\sigma_i$  actúan perpendicularmente a cada uno de los planos (x, y, z), mientras que los esfuerzos cortantes, representados con el símbolo  $\tau_{ij}$  actúan en las caras del cubo (Figura 1-4).

**Figura 1-4:** Componentes de esfuerzos normales y cortantes en un cubo infinitesimal de roca.



**Fuente:** Modificado de “*Applied petroleum geomechanics*”, de Zhang, 2019, Houston, TX, USA, Gulf Professional Publishing.

El primer índice que acompaña el esfuerzo cortante indica el plano de referencia mientras que el segundo señala la dirección en la que actúa. Las condiciones de equilibrio deben garantizar que no existe traslación ni rotación en el elemento de estudio, esto implica que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1.3)$$

Calcular el tensor de esfuerzos en un sistema de coordenadas distinto al señalado en la Figura 1-4 es posible con el uso de una matriz de transformación (ecuación 1.4), en la que los coeficientes  $a_i$  representan los cosenos directores que definen la rotación entre el sistema de coordenadas actual y el sistema de coordenadas objetivo.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Con la Ecuación 1.5 se obtiene el tensor de esfuerzos en el sistema de coordenadas objetivo ( $\sigma^R$ ), empleando la transpuesta de la matriz  $\mathbf{A}$ :

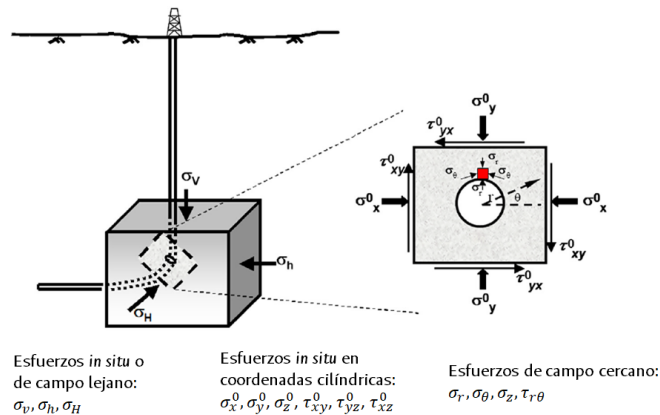
$$\sigma^R = \mathbf{A}^T \sigma \mathbf{A} \quad (1.5)$$

Una vez definidos los esfuerzos es posible encontrar una orientación en la que no actúan esfuerzos cortantes y en donde los esfuerzos normales son máximos. A los ejes que describen este estado de esfuerzos se les conoce como ejes principales y a los esfuerzos que actúan en estos ejes se les denominan esfuerzos principales. En la ecuación 1.6 los valores  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  son los esfuerzos principales y cumplen que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . El tensor de esfuerzos principales puede ser expresado como:

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

De acuerdo con Zoback, (2007), las rocas en profundidad están sometidas a tres esfuerzos compresionales principales: el esfuerzo vertical ( $\sigma_v$ ) producto de la sobrecarga y dos esfuerzos horizontales: el esfuerzo horizontal mínimo ( $\sigma_h$ ) y el esfuerzo horizontal máximo ( $\sigma_H$ ). La investigación de problemas de geomecánica aplicada a yacimientos de hidrocarburos empieza por la descripción de dos escenarios de esfuerzos. El primero de ellos es conocido como esfuerzos *in situ* o de campo lejano ( $\sigma_v, \sigma_h, \sigma_H$ ), el cual representa el estado de esfuerzos antes de perturbar la roca. El segundo se denomina esfuerzos de campo cercano y representa la redistribución de los esfuerzos debido, por ejemplo, a la perforación de un pozo. Estos escenarios se muestran en la figura 1-5.

**Figura 1-5:** Representación esquemática de los esfuerzos de campo lejano y campo cercano



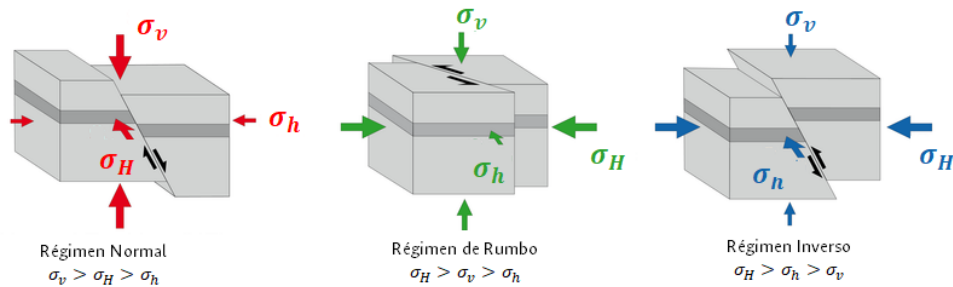
**Fuente:** Modificado de “*Applied petroleum geomechanics*”, de Zhang, 2019, Houston, TX, USA, Gulf Professional Publishing.

Es de gran utilidad expresar los esfuerzos  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  en términos del esfuerzo vertical y los esfuerzos horizontales ( $\sigma_v, \sigma_h, \sigma_H$ ), con lo cual es posible recurrir al esquema de clasificación propuesto por Anderson (1951) para establecer el régimen de falla predominante en el área de interés, el cual puede ser: i) régimen normal, ii) régimen de rumbo y iii) régimen inverso. En la Tabla 1-1 se describen los esfuerzos principales en términos de los esfuerzos *in situ* para los regímenes de falla mencionados. En la figura 1-6 se muestran los tres tipos de régimen de falla y las relaciones entre las magnitudes de los esfuerzos.

**Tabla 1-1:** Relación entre los esfuerzos principales y el régimen de falla

Régimen	Esfuerzos ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ )		
	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
Normal	$\sigma_v$	$\sigma_H$	$\sigma_h$
Rumbo	$\sigma_H$	$\sigma_v$	$\sigma_h$
Inverso	$\sigma_H$	$\sigma_h$	$\sigma_v$

**Figura 1-6:** Ilustración de los regímenes de falla y las relaciones entre los esfuerzos

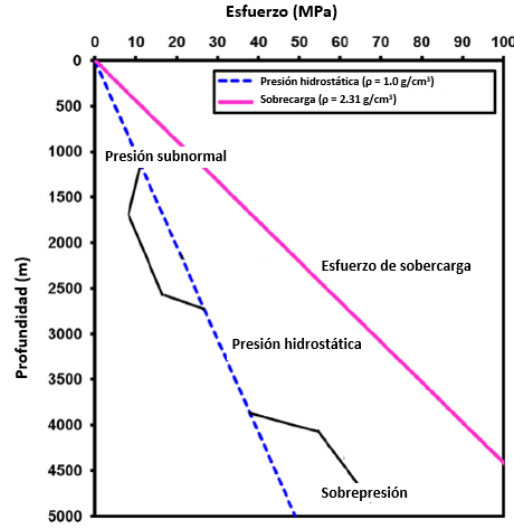


**Fuente:** Modificado de "World Stress Map Database Release" de Heidbach, Oliver; Rajabi, Mojtaba; Reiter, Karsten; Ziegler, Moritz; WSM Team (2016): 2016. V. 1.1. GFZ Data Services.

## Presión de poros

La presión de poros ( $P_p$ ) es la presión de fluidos en los poros interconectados de la roca en profundidad. Normalmente, es equivalente a la presión hidrostática medida desde la superficie de la Tierra hasta la profundidad de interés. La presión de poros hidrostática aumenta a una tasa de 10 MPa/km. Dependiendo del tipo de fluido (petróleo o gas) y de la presencia de rocas impermeables, la presión de poros puede ser mayor que la presión hidrostática, en cuyo caso se emplea el término *sobrepresión* (figura 1-7). En caso de que la presión de poros sea menor que la hidrostática se denomina presión subnormal.

**Figura 1-7:** Presión hidrostática y presiones anormales en el subsuelo



**Fuente:** Modificado de “*Applied petroleum geomechanics*”, de Zhang, 2019, Houston, TX, USA, Gulf Professional Publishing.

**Esfuerzo efectivo**

Los esfuerzos efectivos son la porción del esfuerzo total que es soportada por el esqueleto mineral de la roca. De forma general, cuando se trata de medios porosos, el esfuerzo efectivo ( $\sigma'$ ) se expresa mediante la ecuación 1.7 (Biot 1941). El coeficiente  $\alpha$  que multiplica la presión de poros se denomina coeficiente de Biot.

$$\sigma' = \sigma - \alpha P_p \tag{1.7}$$

El coeficiente de Biot varía entre  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Cuando la roca está cerca de la falla  $\alpha = 1$  entonces:

$$\sigma' = \sigma - P_p \tag{1.8}$$

**Propiedades físicas y mecánicas de las rocas**

En la mayoría de las aplicaciones de geomecánica se deben conocer de antemano como mínimo la densidad de la roca, la porosidad, la permeabilidad, la velocidad de las ondas P y S, el módulo de Young, la relación de Poisson y el coeficiente de Biot. Debido a la abundancia de registros, es frecuente deducir estas propiedades mediante correlaciones empíricas derivadas de las medidas geofísicas de los registros (Chang, Zoback y Khaksar,

2006). La densidad ( $\rho_b$ ) es una medida de la masa rocosa contenida en un volumen determinado y es el insumo principal para obtener el esfuerzo de sobrecarga. La porosidad ( $\varphi$ ) es igual a la relación entre el volumen de fluido que ocupa los poros y el volumen total de la roca, tal como lo muestra la Ecuación 1.9, donde  $V_{poros}$  es el volumen de los poros y  $V_{roca}$  el volumen de roca.

$$\varphi = \frac{V_{poros}}{V_{roca}} \quad (1.9)$$

En un medio continuo, homogéneo, isotrópico y linealmente elástico la velocidad de propagación de las ondas P y S en la roca puede determinarse en función de la densidad ( $\rho$ ) y los módulos de compresibilidad ( $K$ ) y de corte ( $G$ ) del medio (ecuaciones 1.10). Los registros de ondas P y S son fundamentales en el análisis geomecánico pues a partir de ellos se obtienen valores de resistencia de la roca y se puede estimar la presión de poros mediante el método de Eaton (Zhang 2019).

$$V_P = \sqrt{\frac{K+4G/3}{\rho}}; V_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (1.10)$$

El comportamiento elástico ideal de una roca implica que sus deformaciones responden linealmente al esfuerzo aplicado. La constante de proporcionalidad entre el esfuerzo (de compresión o tensión) aplicado y la deformación se denomina módulo de Young ( $E$ ). El módulo cortante ( $G$ ) por su parte relaciona los esfuerzos cortantes y su correspondiente deformación (Mark D. Zoback 2007). La relación de Poisson ( $\nu$ ) se expresa como el cociente entre la deformación lateral y la deformación longitudinal cuando la roca está sujeta a esfuerzos a lo largo de uno de sus ejes (Zhang 2019). Finalmente, el coeficiente de Biot indica la relación entre la deformación del espacio poroso respecto del cambio total del volumen de los sólidos.

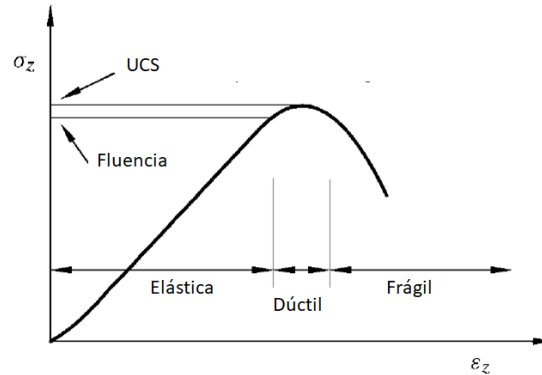
### **Resistencia de la roca y criterios de falla**

La resistencia de la roca representa el nivel máximo de esfuerzos externos que puede soportar la roca antes de fallar. Los mecanismos de falla más comunes son: falla a compresión o falla por cortante, falla a tensión y falla por colapso de poro. Para ilustrar el



concepto de resistencia y falla, en la figura 1-8 se muestran las etapas de un ensayo de compresión uniaxial, en donde el eje vertical representa el esfuerzo aplicado y el eje horizontal la deformación. La resistencia pico, que en este caso corresponde a la resistencia a la compresión no confinada (UCS por sus siglas en inglés) es considerada como el nivel máximo de esfuerzo a compresión axial que la roca puede soportar.

**Figura 1-8:** Resultado típico de un ensayo de compresión uniaxial



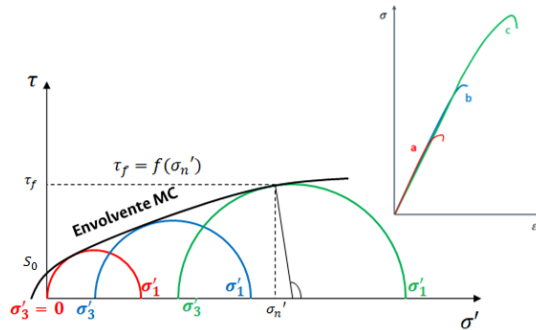
**Fuente:** Modificado de "Petroleum Related Rock Mechanics", de Fjaer *et al.*, 1992, Amsterdam, The Netherlands The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, Oxford OX5 1GB, UK, Elsevier.

El UCS ha sido usado ampliamente como valor de referencia en algunos criterios de falla de la roca, incluidos los que predicen el inicio de la producción de arena. Luego sigue la región dúctil donde la roca sigue deformándose sin perder la capacidad de resistir los esfuerzos. Finalmente, se alcanza la región frágil en donde la roca falla repentinamente y pierde su habilidad de soportar esfuerzos. Como lo anota Zoback (2007), es común observar que la resistencia de la roca aumente en función del esfuerzo efectivo de confinamiento. Para representar esta característica es frecuente usar el concepto de envolvente de falla de Mohr Coulomb (MC).

En la figura 1-9 se muestra una envolvente de MC de resistencia al corte ( $\tau$ ) construida a partir de varios ensayos triaxiales en una muestra de roca con diferentes niveles de presión de confinamiento ( $a < b < c$ ). Los diferentes estados de esfuerzos que la roca puede tolerar, para cada nivel de confinamiento, están representados por los círculos de Mohr (rojo, azul y verde). Aquellos puntos de los círculos que intersecan la envolvente MC indican el estado de esfuerzos en la zona de falla por cortante de la roca ( $\tau_f$ ). Los diferentes estados de esfuerzos que la roca puede tolerar, para cada nivel de confinamiento, están representados

por los círculos de Mohr (rojo, azul y verde). Aquellos puntos de los círculos que intersecan la envolvente MC indican el estado de esfuerzos en la zona de falla por cortante de la roca ( $\tau_f$ ). En la práctica es común linealizar la envolvente MC mediante dos parámetros: 1) el coeficiente de fricción interna de la roca,  $\mu_i = \tan(\Phi_i)$  donde  $\Phi_i$  es el ángulo de fricción de interna de la roca, y 2) la cohesión ( $S_0$ ) que representa el intercepto en la envolvente.

**Figura 1-9:** Envolvente MC para una roca construida con diferentes presiones de confinamiento.



**Fuente:** Elaboración propia.

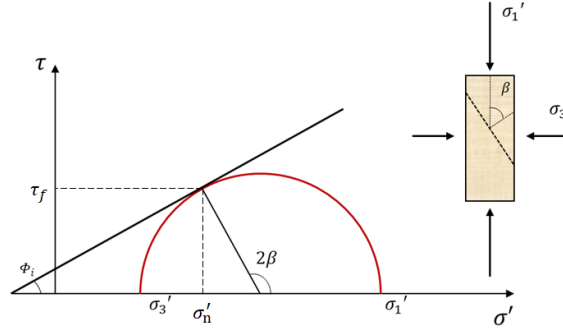
La cohesión y el UCS están relacionados según la ecuación 1.11. La envolvente MC o también conocida como criterio de falla MC, definida en la ecuación 1.12, indica que la resistencia al corte de la roca es una función lineal del esfuerzo normal efectivo.

$$UCS = 2S_0[(\mu_i^2 + 1)^{1/2} + \mu_i] \quad (1.11)$$

$$\tau = S_0 + \sigma' \mu_i \quad (1.12)$$

La falla por cortante en pruebas uniaxiales o triaxiales de compresión ocurre cuando se desarrollan altos esfuerzos cortantes en un plano de falla de la roca; estos esfuerzos cortantes promueven el movimiento a ambos lados de la falla, mientras que las fuerzas de fricción, que dependen de los esfuerzos normales aplicados a la roca, intentarán restringirlo. Como se muestra en la figura 1-10, en la definición del criterio de falla de MC no se incluye el esfuerzo intermedio ( $\sigma_2'$ ), de manera que la falla por cortante puede definirse únicamente con los valores del esfuerzo máximo y mínimo (ver ecuación 1.15).

**Figura 1-10:** Círculo y envolvente de falla MC. La línea discontinua en la imagen que acompaña la envolvente representa el plano de falla;  $\beta$  es el ángulo entre la normal del plano de falla y  $\sigma'_1$ .



**Fuente:** Elaboración propia.

De la figura 1-10 se puede deducir que los esfuerzos de corte y normal en la falla son:

$$\tau_f = \frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3) \sin 2\beta \quad (1.13)$$

$$\sigma'_n = \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_3) + \frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3) \cos 2\beta \quad (1.14)$$

Si se reemplazan las ecuaciones 1.11, 1.13 y 1.14 en la expresión 1.12, se tiene que:

$$\frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3) \sin 2\beta = S_0 + \mu_i \left[ \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_3) + \frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3) \cos 2\beta \right] \quad (1.15)$$

Luego de agrupar algunos factores y de reordenar la ecuación 1.15 se obtiene la expresión 1.16:

$$\sigma'_1 = 2S_0 \frac{\cos \phi_i}{1 - \sin \phi_i} + \sigma'_3 \frac{1 + \sin \phi_i}{1 - \sin \phi_i} \quad (1.16)$$

La ecuación 1.16 puede expresarse en términos del UCS y el ángulo  $\beta$ :

$$\sigma'_1 = UCS + \sigma'_3 \tan^2 \beta \quad (1.17)$$

Además del criterio de falla MC, se han aplicado otros criterios de falla en los modelos analíticos de predicción de producción de arena. Entre ellos se encuentran: el criterio de Hoek-Brown (1980), el criterio Drucker-Prager (1952), o el criterio Mogi-Coulomb (1971). El criterio de Hoek y Brown, (1982) se desarrolló empíricamente a través de un amplio

trabajo experimental sobre el comportamiento de las rocas que condujo a la ecuación 1.18, donde  $m$  y  $s$  son constantes que dependen de las propiedades y del nivel de fracturamiento de la roca, respectivamente.

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 + C_0 \sqrt{m \frac{\sigma'_3}{C_0} + s} \quad (1.18)$$

Para roca intacta el valor de  $s = 1$ . Si la roca presenta algún grado de fracturamiento entonces  $s < 1$ .

Una generalización del criterio de falla MC fue propuesta por Drucker y Prager (1952) cuya forma es:

$$\alpha I'_1 + \kappa = \sqrt{J_2} \quad (1.19)$$

Los coeficientes  $\alpha$  y  $\kappa$  son constantes del material, el término  $I'_1$  se conoce como el primer invariante esfuerzo efectivo y  $J_2$  es la segunda invariante del esfuerzo desviador. El criterio von Mises (VM) es un caso especial del criterio Drucker-Prager (DP) cuando  $\alpha = 0$ . El criterio DP tiene un límite superior y otro inferior que se derivan de su comparación con el criterio Mohr Coulomb, lo que da origen a diferentes versiones de  $\alpha$  y  $\kappa$  según las ecuaciones 1.20 (límite superior) y 1.21 (límite inferior):

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi_i}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi_i)}, \kappa = \frac{6S_0 \cos \phi_i}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi_i)} \quad (1.20)$$

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi_i}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi_i)}, \kappa = \frac{6S_0 \cos \phi_i}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi_i)} \quad (1.21)$$

El criterio de Mogi fue publicado originalmente por Mogi (1971) y describe la relación entre el esfuerzo cortante octaédrico  $\tau_{oct}$  y el esfuerzo efectivo promedio, según la ecuación 1.22.

$$\tau_{oct} = f(\sigma_{m,2}) \quad (1.22)$$

Al-Ajmi and Zimmerman (2005) mostraron, luego de revisar una extensa base de datos, que la ecuación 1.22 podría aproximarse a una relación lineal:

$$\tau_{oct} = a + b\sigma_{m,2} \quad (1.23)$$

La ecuación 1.23 se conoce como el criterio Mogi-Coulumb. Si en la ecuación 1.23  $\sigma_2 = \sigma_3$  entonces:

$$\frac{\sqrt{2}}{3}(\sigma_1 - \sigma_3) = a + \frac{b}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.24)$$

donde a y b se definen como:

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{3}S_0 \cos \phi_i, \quad b = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin \phi_i \quad (1.25)$$

Weingarten y Perkins (1995) plantean que el inicio de la producción de arena se genera por la falla a tensión de la roca. En Weingarten y Perkins (1995) se propuso un criterio de falla por tensión en función de la presión de *drawdown* (diferencia entre la presión de poro del yacimiento y la presión del fondo del pozo), de las características del fluido y las propiedades mecánicas de la roca:

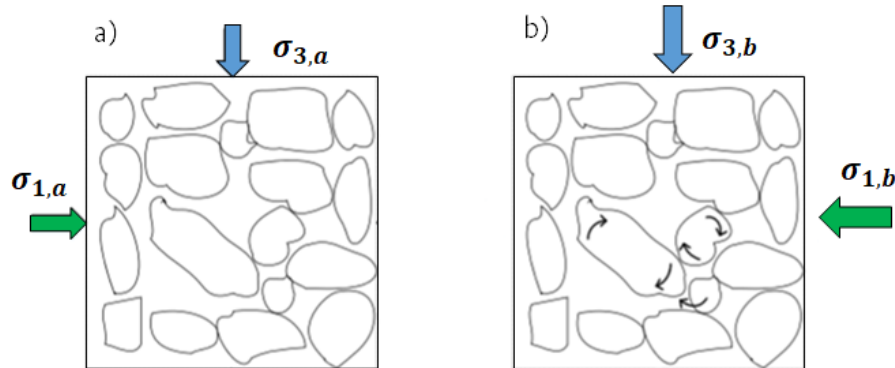
$$\frac{4 \sin \phi_i}{1 - \sin \phi_i} - \frac{(p'_w - p'_{rc})}{m+1} p'_{rc} \frac{m}{m+1} = 0, \quad p'_{rc} = [p_{rc} \tan \phi_i / S_0]^{m+1}, \quad p'_{well} = [p_{well} \tan \phi_i / S_0]^{m+1} \quad (1.26)$$

En la ecuación 1.26  $m$  es el exponente de densidad del gas,  $p'_{rc}$  es la presión en la cavidad del pozo y  $p_{well}$  es la presión en el pozo. La falla por tensión en rocas arenisca es poco frecuente y está asociada principalmente a situaciones en las que los pozos operan a un alto flujo, que a su vez es función del *drawdown* (Subbiah et al. 2020). El tercer modo o criterio de falla empleado en los modelos analíticos de producción de arena se denomina colapso de poro. Este proceso ocurre principalmente en rocas porosas que experimentan deformaciones irreversibles relacionadas con el desprendimiento, rompimiento y posterior reordenamiento de los granos, lo cual induce un mejor empaquetamiento de los sólidos (Fjaer et al. 1992) que se traduce finalmente en una pérdida de porosidad (M.D. Zoback 2009). Un proceso de deformación como el mostrado en la figura 1-11 está asociado con un alto nivel de esfuerzos compresivos, de esfuerzos cortantes (M.D. Zoback 2009) o de esfuerzos hidrostáticos que actúan directamente en los granos.

Según Fjaer *et al* (1992) si los esfuerzos hidrostáticos son lo suficientemente elevados los granos pueden sufrir aplastamiento y rotura en sus contactos lo cual genera daños permanentes en la roca y una reducción importante en su rigidez. En este modo de falla,

la producción de arena será el resultado de la deformación permanente y la concentración excesiva de esfuerzos efectivos alrededor de la roca alterada.

**Figura 1-11:** Reordenamiento y empaquetamiento de los granos. Notar que  $\sigma_{i,b} > \sigma_{i,a}$ ,  $i = 1, 3$



**Fuente:** Modificado de "Petroleum Related Rock Mechanics", de Fjaer *et al.*, 1992, Oxford OX5 1GB, UK, Elsevier.

El agotamiento o declinación de la presión del yacimiento (*depletion* en inglés) puede provocar un aumento significativo de los esfuerzos que soportan los granos de la roca y producir el colapso de poro. En Schutjens *et al* (2004) se analizaron datos experimentales de resistencia en varias muestras de areniscas (ver figura 1-12). Los datos recopilados por Schutjens *et al* (2004) muestran la pérdida de porosidad a medida que el esfuerzo efectivo promedio aumenta, incluso en ausencia de esfuerzos cortantes (M.D. Zoback 2009). Los resultados de Schutjens *et al* (2004) sugieren que el modelo *Cam Clay* puede ser usado para representar este modo de falla y se expresa como:

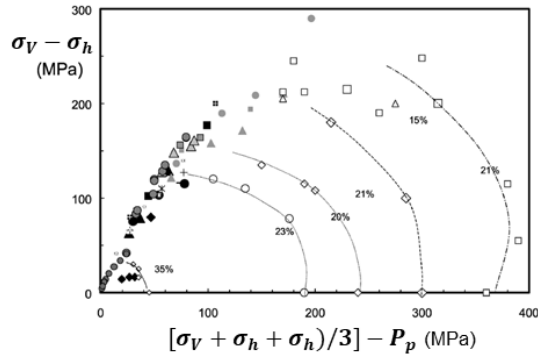
$$\frac{q^2}{p'^2} + M^2 \left(1 - \frac{p'_0}{p'}\right) = 0 \quad (1.27)$$

donde  $p'_0$  se conoce como la presión de preconsolidación, y los parámetros  $M$ ,  $q$  y  $p'$  son:

$$p' = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right) - P_p; \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \quad (1.28)$$

$$M = \frac{q}{p'} \quad (1.29)$$

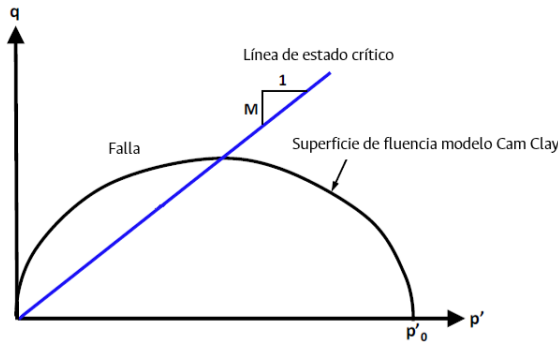
**Figura 1-12:** Datos de pruebas de resistencia en laboratorio para diferentes rocas areniscas (diferentes símbolos). Se observa de izquierda a derecha la pérdida de porosidad.



**Fuente:** Modificado de “*Petroleum Related Rock Mechanics*”, de Fjaer *et al.*, 1992, Amsterdam, The Netherlands The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, Oxford OX5 1GB, UK, Elsevier.

La superficie de fluencia definida por la ecuación 1.29 se muestra en la figura 1-13.

**Figura 1-13:** Representación de la superficie de fluencia en el modelo *Cam Clay*. La falla ocurre en el lado izquierdo de la línea de estado crítico (CSL, por sus siglas en inglés),



**Fuente:** Modificado de “*Applied petroleum geomechanics*”, de Zhang, 2019, Houston, TX, USA, Gulf Professional Publishing.

## 1.2 Modelos analíticos y numéricos de producción de arena

La producción de arena es un proceso físico que involucra variables como la resistencia de la roca, las características geológicas, petrofísicas y los fluidos presentes en el yacimiento, los esfuerzos *in situ*, la presión de poros, la geometría y el tipo de completamiento del pozo. Existen diferentes aproximaciones para predecir el inicio y el volumen de arena, incluyendo modelos que correlacionan variables, propuestas

experimentales en laboratorio, modelos analíticos y modelamientos numéricos. Los modelos que correlacionan variables emplean propiedades de la roca como el UCS junto con datos de producción y presión de los pozos como indicadores para evaluar la producción arena. Los estudios de laboratorio en muestras de rocas se han enfocado principalmente en investigar los elementos que inducen la producción de arena. Los modelos analíticos y numéricos de producción de arena comprenden la integración de varios procesos físicos: un mecanismo o modelo de falla de la roca que marca el inicio de la producción de arena, un mecanismo o modelo de erosión asociado con el desprendimiento de los granos en la zona de falla y un modelo de transporte de sólidos.

Los modelos analíticos y numéricos han encontrado eco en la práctica, pero requieren información sobre múltiples variables que no está disponible inmediatamente, especialmente la que permite la calibración de los modelos de erosión y transporte. Con los modelos analíticos se pueden hacer evaluaciones de producción de arena en un tiempo corto y se basan en geometrías sencillas asumiendo un comportamiento poroelástico lineal de la roca (Rahmati et al. 2013). Los modelamientos numéricos que integran todos los mecanismos (falla de la roca, erosión y transporte), así como los modelos de elementos finitos pueden incluir respuestas elásticas no lineales o plásticas de los materiales, pero requieren un tiempo de cómputo considerable.

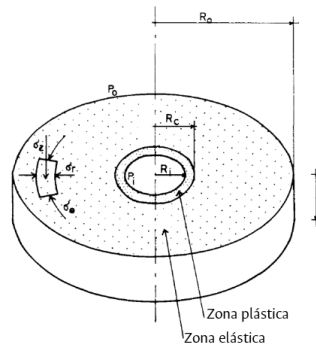
En los modelos analíticos y numéricos complejos la simulación física de la producción de arena se desarrolla en dos módulos. En el primero se tienen en cuenta dos criterios para el inicio de la producción de arena: un “Criterio de falla mecánica” en el que se evalúa la falla mecánica de la roca y un “Criterio de erosión” en el que se verifica si las fuerzas hidrodinámicas que actúan en la zona de falla pueden desprender los granos de la roca. En el segundo módulo, mediante la implementación de modelos de balance de masa se cuantifican los volúmenes en función del tiempo. Como lo advierten Rahmati *et al.*, (2013), los modelos analíticos son utilizados para predecir el inicio de la producción de arena en problemas con geometrías sencillas pero no son capaces de capturar las complejidades a escala de campo y en general sólo consideran un criterio para el inicio de la producción de arena. Los modelos numéricos, en cambio, son empleados en modelamientos a escala de campo cuyo objetivo principal es la estimación de volúmenes de arena. Los modelos



numéricos usan correlaciones analíticas entre propiedades geomecánicas o como en Araujo, (2015) resultados experimentales, para obtener mejores resultados.

A partir de la aplicación de la teoría de la elasticidad y la plasticidad, Risnes, Bratili y Horsrud, (1982) analizaron los esfuerzos alrededor de un pozo. Como se observa en la figura 1-14, su modelo consistió en un hueco cilíndrico vertical que atraviesa una capa horizontal de roca porosa y permeable, asumiendo simetría axial alrededor del eje del pozo. La roca se consideró isotrópica y homogénea que cumple el criterio de MC cuyo modo de falla se asocia a la deformación plástica. En el borde exterior la presión de fluido es  $P_o$  mientras que en el pozo es  $P_i$ . Para Risnes, Bratili y Horsrud, (1982) cerca de la pared del pozo se han alcanzado los valores críticos de esfuerzos que superan la resistencia en el rango elástico de la roca por lo que se tendrá un comportamiento plástico.

**Figura 1-14:** Geometría del modelo propuesto por Risnes, Bratili y Horsrud, (1982)

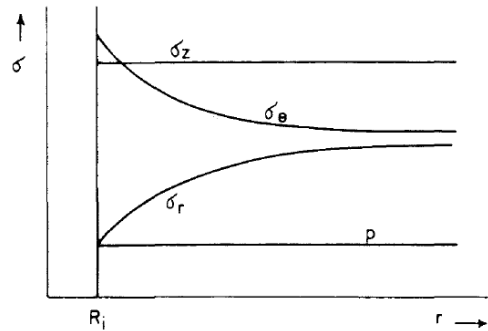


**Fuente:** Modificado de “Sand Stresses Around a Wellbore”, de Risnes, Bratili y Horsrud, (1982), Society of Petroleum Engineers, pág. 883-898. Diciembre 1982.

Aplicando el criterio lineal de falla de MC en la zona plástica los autores dedujeron la siguiente expresión:

$$\sigma_1 - p = 2S_o \tan(\alpha) + (\sigma_3 - p) \tan^2(\alpha), \quad \alpha = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \tag{1.30}$$

donde  $p$  es la presión del fluido ( $P_o$  o  $P_i$ ),  $S_o$  es la resistencia al corte y  $\alpha$  es el ángulo de falla. A partir del análisis de variación de los esfuerzos en función de la distancia (figura 1-15) respecto al pozo se muestra que el esfuerzo radial  $\sigma_r$  siempre será  $\sigma_3$ .

**Figura 1-15:** Esfuerzos elásticos alrededor del hueco sin considerar la presión de fluido.

**Fuente:** Modificado de "Sand Stresses Around a Wellbore", de Risnes, Bratili y Horsrud, (1982), Society of Petroleum Engineers, pág. 883-898. Diciembre 1982.

En cambio,  $\sigma_1$  puede ser tanto  $\sigma_\theta$  como  $\sigma_z$ . Risnes, Bratili y Horsrud, (1982) calcularon los esfuerzos en la zona plástica aplicando la ecuación 1.32 para diferentes escenarios:  $\sigma_r < \sigma_z < \sigma_\theta$ ,  $\sigma_r < \sigma_z = \sigma_\theta$  y  $\sigma_r < \sigma_\theta < \sigma_z$ . Los autores dedujeron el siguiente criterio de estabilidad para la zona plástica:

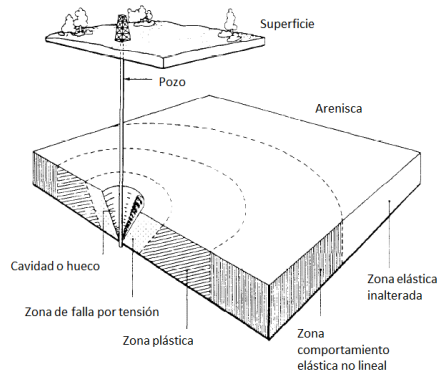
$$\frac{\mu q}{4\pi k_c R_1} < 2S_o \tan(\alpha), \quad k_c \text{ es la permeabilidad de la zona plástica} \quad (1.31)$$

Vaziri y Byrne (1990) plantearon dos zonas de falla alrededor del pozo (fig. 1-16) para explicar el inicio de la producción de arena: la zona de falla a tensión y una zona plástica. De acuerdo con Vaziri y Byrne (1990), la zona de falla plástica es una consecuencia directa de la perforación del pozo en formaciones poco consolidadas. Con el tiempo, a medida que se crean fuerzas por el movimiento de los fluidos hacia el pozo y en combinación con los esfuerzos cortantes en la zona plástica, es posible que se forme la zona de falla a la tensión. Eventualmente, los granos se desprenden en la zona de falla a tensión, mejorando la permeabilidad de la formación, reduciendo el gradiente de presión de fluido que a su vez disminuye la intensidad del desprendimiento de los granos. La producción de arena se reactivará una vez que el gradiente de presión de fluido exceda un nuevo valor crítico.

Weingarten y Perkins (1995) formularon dos mecanismos para la producción de arena en pozos de producción de gas. El primero de ellos considera que los altos valores de *drawdown* pueden inducir fallas a tensión localizadas en las perforaciones. La expresión

1.26, desarrollada por Weingarten y Perkins (1995) es una generalización del criterio de falla por tensión que puede ser aplicada para fluidos compresibles e incompresibles y para condiciones de flujo que cumplen la ley de Darcy (bajas tasas).

**Figura 1-16:** Tipos de regiones geomecánicas y sus geometrías en una zona con producción de arena.



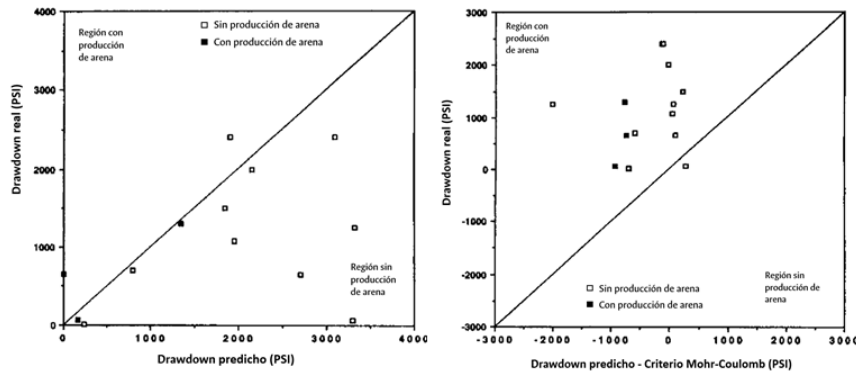
**Fuente:** Modificado de "Analysis of stress, flow and stability around deep wells", de Vaziri y Byrne (1990), Geotechnique, 40 UK, ICE.

Para el reducido conjunto de datos, la gráfica de la figura 1-17 (izquierda) sugiere que los datos de campo concuerdan aceptablemente con el *drawdown* predicho por el modelo. El segundo mecanismo está asociado con el agotamiento de la presión de yacimiento que origina un aumento en los esfuerzos horizontales, intensificando los esfuerzos cortantes de las formaciones productoras. Si este incremento supera la resistencia al corte es posible que la roca experimente desprendimiento de sus granos, lo cual conduce a una disminución en la cohesión y con ello, la producción de arena. Para evaluar la producción de arena debido al agotamiento de la presión, Weingarten y Perkins (1995) compararon los esfuerzos calculados con el criterio de falla MC para establecer si la falla de la roca ocurrirá durante el agotamiento del yacimiento y bajo qué presión de yacimiento. Como se muestra en la figura 1-17 (derecha), el análisis basado en el criterio MC, es considerablemente conservador dado que la mayoría de los pozos sin producción de arena muestran *drawdown* mucho más altos que los predichos.

Sanfilippo *et al.*, (1997) exponen el caso de la cuenca del Adriático Norte en el que varios pozos productores en yacimientos de gas, a profundidades entre los 1000 m y 4500 m, presentaron producción de arena. De acuerdo con Sanfilippo *et al.*, (1997), las rocas

exhibían pérdida de porosidad con el incremento en la profundidad, su resistencia era producto únicamente de la compactación mecánica (sin cementación intergranular) y evidenciaron una transición frágil a dúctil en el comportamiento geomecánico al someter muestras de roca a ensayos triaxiales con diferentes presiones de confinamiento.

**Figura 1-17:** Izquierda: *drawdown* predichos considerando la falla a tensión versus *drawdown* reales. Derecha: *drawdown* predichos usando el criterio Mohr-Coulomb versus *drawdown* reales.

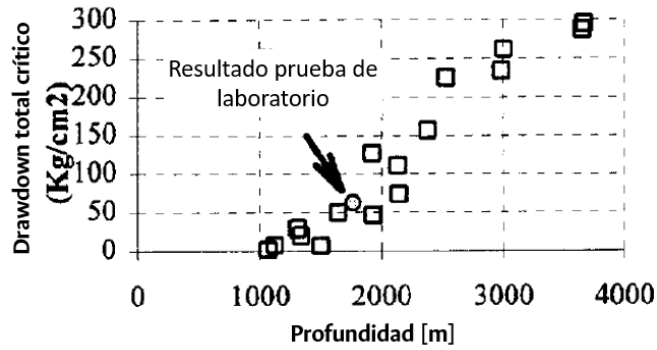


**Fuente:** Modificado de “*Prediction of Sand Production in Gas Wells: Methods and Gulf of Mexico Case Studies*”, de Weingarten y Perkins (1995), SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Washington - EEUU.

Sanfilippo *et al.*, (1997) exploraron algunas aproximaciones empíricas para estudiar la producción de arena. Una de ellas, como se ilustra en la figura 1-18, evidenció un buen ajuste entre el *drawdown* total crítico (CTD) y la profundidad. De acuerdo con Sanfilippo *et al.*, (1997), esta correlación se justifica porque el factor que induce el inicio de la producción de arena no son las variaciones dinámicas de los fluidos, sino la presión de poros en fondo de pozo y el cambio de los estados de esfuerzos efectivos con respecto a las condiciones originales de yacimiento, los cuales varían en profundidad. Dado que las observaciones en campo validaron los modelos y resultados experimentales, Sanfilippo *et al.*, (1997), concluyeron que la producción de arena es un proceso de dos fases. La primera está asociada con la falla de la roca alrededor del pozo en donde se generan altos esfuerzos cortantes capaces de degradar la fábrica de la roca y desprender los granos. Esta fase depende de la resistencia de la roca y el estado de esfuerzos. Cuando los granos empiezan a desprenderse, el movimiento de los fluidos puede erosionar la roca con mayor facilidad,

generando la producción constante de arena. La erosión es el principal motor en la segunda fase.

**Figura 1-18:** Datos de pozos y resultados experimentales del inicio de la producción constante de arena



**Fuente:** Modificado de “Sand production: From Prediction to Management”, de Sanfilippo et al., (1997), SPE European Formation Damage Conference, La Haya – Países Bajos.

Para la primera fase que corresponde al inicio de la producción de arena, Sanfilippo *et al.*, (1997) desarrollaron un modelo analítico, descrito por la ecuación 1.32, en el que la extensión de la zona plástica ( $r_c$ ) normalizada por el radio del pozo ( $r_i$ ) es función de la resistencia de la roca (UCS), el esfuerzo efectivo horizontal menor ( $\sigma_h'$ ), el cambio en el tiempo de la presión en fondo de pozo ( $P$ ), el cambio de la presión de yacimiento en el tiempo [ $p(\infty,t)$ ], la relación de Poisson ( $\nu$ ) y el ángulo de fricción ( $\Phi$ ):

$$\left(\frac{r_c}{r_i}\right)^{q-1} = \frac{q-1}{q+1} \frac{1}{c_o} \left\{ 2\sigma_h'(t) - (2-\gamma)[P_i(t) - p(\infty,t)] + \frac{2UCS}{q-1} \right\}, q = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right), \gamma = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \quad (1.32)$$

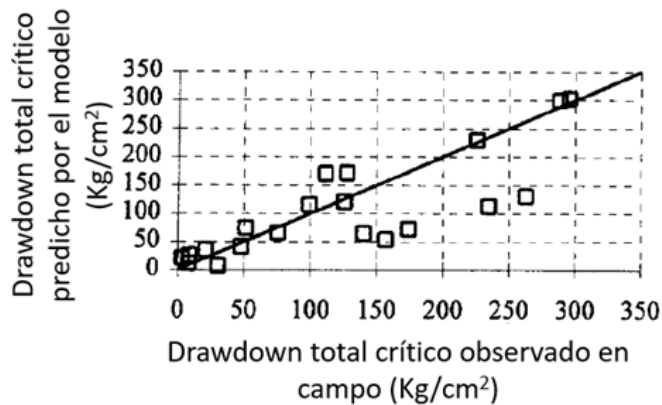
Mediante el Sand Flow Test (ensayo de flujo de arena) se determinó que la extensión de la zona plástica equivalía a 2.15  $r_i$ . Con este valor fijo se calcularon los CTD para los pozos con producción de arena y se compararon con las observaciones en campo, con lo cual obtuvieron la figura 1-19. Aunque se observa un ajuste aceptable entre lo predicho versus lo observado, en algunos casos el modelo es muy conservador. Sanfilippo *et al.*, (1997) sugieren que esto se debe a que los valores de resistencia y de esfuerzos son promedios de tendencias observadas a escala de campo.

Aplicado también a pozos de producción de gas, Ong, Ramos y Zheng (2000) elaboraron un modelo analítico para predecir el *drawdown* crítico asociado con el inicio de la producción de arena en pozos con flujo no darciano. El modelo acopla la presión de poros calculada a partir de la ecuación de flujo no darciano para gas y los esfuerzos en un material que sigue el criterio de falla MC. El criterio de Ong, Ramos y Zheng (2000), es:

$$\frac{C_1+C_2}{m+1} (q_a)^{-\frac{m}{m+1}} = \frac{2 \operatorname{sen}(\Phi)}{1-\operatorname{sen}(\Phi)} \quad (1.33), \text{ para un pozo en hueco abierto}$$

$$\frac{S_1+3S_2}{m+1} (q_a)^{-\frac{m}{m+1}} = \frac{4 \operatorname{sen}(\Phi)}{1-\operatorname{sen}(\Phi)} \quad (1.34), \text{ considerando un pozo perforado}$$

**Figura 1-19:** Comparación entre el CTD predicho por el modelo y las observaciones en campo



**Fuente:** Modificado de “*Sand production: From Prediction to Management*”, de Sanfilippo et al., (1997), SPE European Formation Damage Conference, La Haya – Países Bajos.

Las constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  dependen de las propiedades de resistencia de la roca, la permeabilidad y las propiedades del fluido como la viscosidad y los parámetros que describen el flujo no darciano. El término  $q_a$  se describe por la expresión 1.35:

$$q_a = \left( \frac{P_a \tan(\varphi)}{s_o} \right)^{m+1}, \varphi \text{ es el ángulo de fricción} \quad (1.35)$$

donde  $P_a$  es la presión en la pared del pozo. El máximo *drawdown* se obtiene al encontrar el valor de  $P_a$  que satisface las ecuaciones 1.33 o 1.34. La figura 1-20 sugiere que emplear flujo no darciano en los cálculos reduce el *drawdown* crítico casi hasta la mitad comparado

con los cálculos empleando flujos darcianos. De esta manera, los balances de masa para estas tres fases se definen así: un cambio de la porosidad ( $\varphi$ ) con el tiempo es igual a la generación de arena (ecuación 1.36), el balance de masa de la fase fluida permanece constante (ecuación 1.37) y para la última fase ( $fs$ ) se requiere que los sólidos que viajan con los fluidos ( $c$ ) sean iguales al volumen de arena generado (ecuación 1.38)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\dot{m}}{\rho_s} \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial[(1-c)\varphi]}{\partial t} + \frac{\partial[(1-c)\bar{q}_i]}{\partial x_i} = 0 \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial c\varphi}{\partial t} + \frac{\partial c\bar{q}_i}{\partial x_i} = \frac{\dot{m}}{\rho_s} \quad (1.38)$$

En las expresiones anteriores,  $c$  es la concentración de sólidos que viajan con los fluidos,  $\bar{q}_i$  es el caudal,  $\rho_s$  es la densidad de la fase sólida y  $\dot{m}$  es la tasa de producción de masa. Luego en Wan y Wang (2001), se acopló el modelo de erosión desarrollado por Wan y Wang (2000) con un modelo esfuerzo-deformación poroelastoplástico mediante la cuantificación de las deformaciones volumétricas. En esta versión, se cuantificaron el impacto de los esfuerzos *insitu* en la susceptibilidad del material para producir arena y el debilitamiento de la resistencia de la roca por la erosión. Para incluir el efecto de la erosión en la resistencia del material los autores proponen un módulo de Young ( $E'$ ) en función de la porosidad  $\varphi$ :

$$E' = E(1 - \varphi) \quad (1.39)$$

Para el rango plástico establecieron una función de fluencia del material basado en un comportamiento MC del material con una función potencial de plasticidad  $G$  derivada de la relación entre los esfuerzos y la dilatancia. Los resultados de la simulación numérica de este modelo confirman la importancia de la anisotropía en la permeabilidad ya que la erosión es un proceso guiado por las zonas con mayores flujos asociados con cambios en la permabilidad, presión del fluido y porosidad (ver figura 1-21).

Willson et al. (2002) desarrollaron un modelo de predicción de tasa de producción de arena en el que relacionaron tres elementos: un factor de carga calculado como la razón entre los esfuerzos cercanos al pozo y la resistencia de la roca, el número de Reynolds ( $Re$ ) y la tasa de producción de arena (pptb) obtenida en pruebas de laboratorio. En Willson et al.

(2002) la producción de arena inicia cuando el esfuerzo tangencial efectivo mayor en la cara del pozo supera la resistencia de la formación. Considerando un plano perpendicular al eje del pozo y un estado de esfuerzos *in-situ* descrito por  $S_1 > S_2$ , se puede deducir a partir de la figura 1-22 que el esfuerzo tangencial mayor ( $S_{t2}$ ) es:

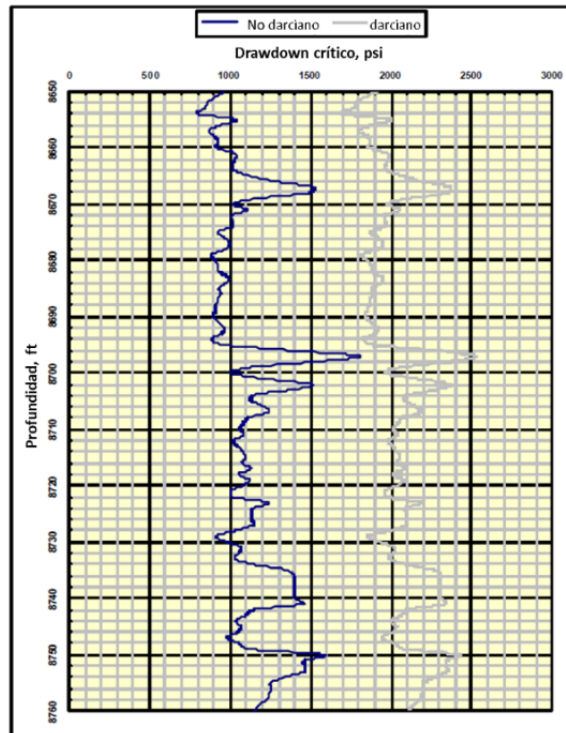
$$S_{t2} = 3S_1 - S_2 - p_w(1 - A) - AP_{po}, A = \frac{(1-2\nu)\alpha}{1-\nu} \quad (1.40)$$

donde  $\alpha = 1 - \frac{C_r}{C_b}$ ,  $C_r$  y  $C_b$  son las compresibilidades de los sólidos y de la roca, respectivamente.

Para que inicie la producción de arena se debe cumplir que  $S_{t2}$  sea mayor que la resistencia de la roca:

$$S_{t2} - p_w > U, U = 3.1 * TWC \quad (1.41)$$

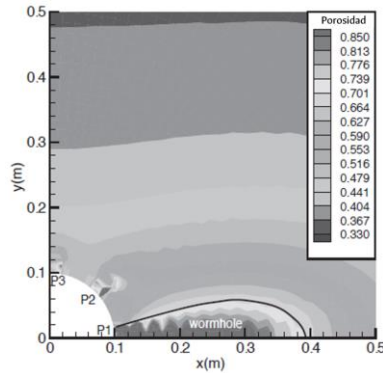
**Figura 1-20:** Drawdown para producción de arena considerando flujo darciano y no darciano.



**Fuente:** Modificado de "Sand Production Prediction in High Rate, Perforated and Open-hole Gas Wells", de Ong, Ramos y Zheng (2000), 2000 SPE International Symposium on Formation Damage Control, Lafayette, Louisiana – Estados Unidos.



**Figura 1-21:** Porosidad alrededor de las perforaciones P1, P2 y P3.



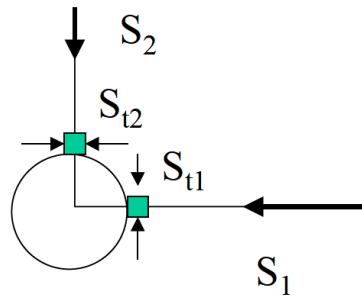
**Fuente:** Modificado de “*Analysis of Sand Production in Unconsolidated Oil Sand Using a Coupled Erosional-Stress-Deformation Model*”, de Wan y Wang (2001), 2nd Canadian International Petroleum Conference, junio 2001, Calgary–Canadá.

El término TWC puede relacionarse con la resistencia UCS (Zhang 2019) así:

$$TWC[MPa] = 11.46 * UCS^{0.53} \quad (1.42)$$

$$U[MPa] = 35.526 * UCS^{0.53} \quad (1.43)$$

**Figura 1-22:** Esquema de esfuerzos *in situ* y tangenciales cerca del pozo. Notar que  $S_1 > S_2$



**Fuente:** Modificado de “*New Model for Predicting the Rate of Sand Production*”, de Willson et al. (2002), SPE/ISRM Rock Mechanics Conference, Octubre 2002, Texas-EEUU.

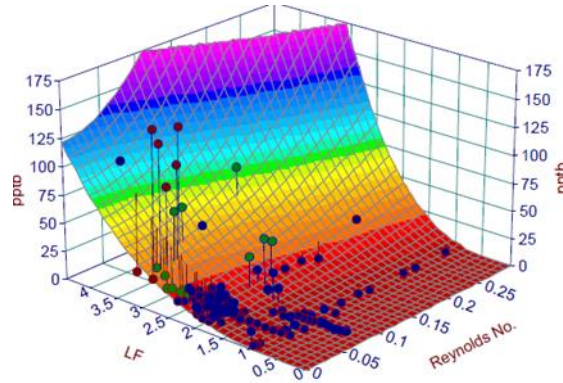
Entonces, el factor de carga ( $LF$ ) se define como:

$$LF = \frac{3S_1 - S_2 - p_w(1-A) - Ap_0}{U} \quad (1.44)$$

Con la ecuación 1.44, el número de Reynolds ( $Re$ ) y datos experimentales de producción de arena, Willson et al. (2002) obtuvieron la superficie de ajuste mostrada en la figura 1-24. De acuerdo con Willson et al. (2002) la presión crítica de fondo de pozo ( $p_w^{cri}$ ) es:

$$p_w^{cri} = \frac{3S_1 - S_2 - U}{2-A} - p_0 \frac{A}{2-A} \quad (1.45)$$

**Figura 1-23:** Superficie ajustada a la tasa de producción de arena experimental en términos de LF, y Re.

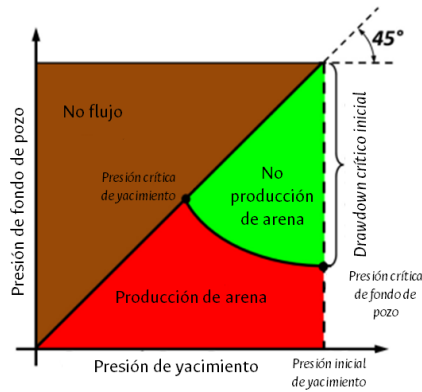


**Fuente:** Modificado de *New Model for Predicting the Rate of Sand Production*, de Willson et al. (2002), SPE/ISRM Rock Mechanics Conference, Octubre 2002, Texas-EEUU.

Para escenarios distintos de la presión de poro inicial se deben recalculan los esfuerzos  $S_1$  y  $S_2$  ya que dependen linealmente de la presión de poros. El criterio de Willson et al. (2002) puede aplicarse fácilmente al diagrama de análisis de producción de arena mostrado en la figura 1-24. En esta gráfica se relacionan la presión de yacimiento en el eje horizontal y la presión de fondo de pozo en el eje vertical. Una línea de  $45^\circ$  separa la región de flujo y la región de no flujo. Se resalta además una línea continua negra que separa la zona de no producción de arena de la zona de producción de arena. Dicha línea es función de la presión de yacimiento, de la presión de fondo de pozo, de los esfuerzos *in situ*, de la resistencia de la roca y de las propiedades poroelastoplásticas de la roca.

En trabajos como el de Nouri et al.,(2004) para validar un modelo numérico se realizaron ensayos de carga axial, de control de flujo y de medición de producción arena en cilindros huecos de arenisca sintética. En sus investigaciones, la roca se modela mediante una relación elastoplástica de esfuerzo-deformación considerando además ablandamiento y endurecimiento por deformación. Para estos autores la producción de arena inicia cuando el comportamiento de ablandamiento por deformación de la roca domina cerca de la cara del pozo, creando zonas de debilidad que disminuyen las fuerzas que mantienen unidos los granos.

**Figura 1-24:** Diagrama de presión de yacimiento vs. presión de fondo de pozo para análisis de producción de arena.



**Fuente:** Modificado de “Sanding Onset Prediction on Ultra-Deepwater Well Using a Probabilistic Approach: From Lab to Field”, de Ferreira, et al. (2015), EEUU. Trabajo presentado en el OTC Brasil, Rio de Janeiro.

Los fluidos que se mueven hacia el pozo inducirán esfuerzos de tensión que intensificarán la degradación del material que resulta en la producción de arena. Cuando la producción de arena empieza, la zona degradada y el comportamiento de ablandamiento por deformación de la roca se extienden. Por ello, la producción de arena, en cualquier instante de tiempo o espacio en la modelación numérica tendrá lugar si la roca cerca del pozo falla en tensión o si la roca que ha fallado por cortante (una zona ya debilitada) es expuesta a falla por tensión. En el procedimiento numérico, todos aquellos elementos cerca de la pared del pozo que han cumplido con el criterio de producción de arena se retiran de la malla y se adicionan al volumen acumulado de producción de arena. La envolvente MC describe la falla por cortante ( $f^s$ , en la ecuación 1.46) mientras que la diferencia entre  $\sigma'_3$  y la resistencia a la tensión define el límite para la falla a tensión ( $f^t$  en la ecuación 1.47):

$$f^s = \sigma'_1 - \sigma'_3 N_\varphi + 2c\sqrt{N_\varphi} \quad (1.46)$$

$$f^t = \sigma^t - \sigma'_3 \quad (1.47)$$

donde  $\varphi$  es el ángulo de fricción,  $c$  es las cohesión,  $\sigma^t$  es la resistencia a la tensión y  $N_\varphi = \frac{1+\text{sen}(\varphi)}{1-\text{sen}(\varphi)}$ . Las funciones potenciales de falla por cortante ( $g^s$ ) y tensión ( $g^t$ ) se expresan en

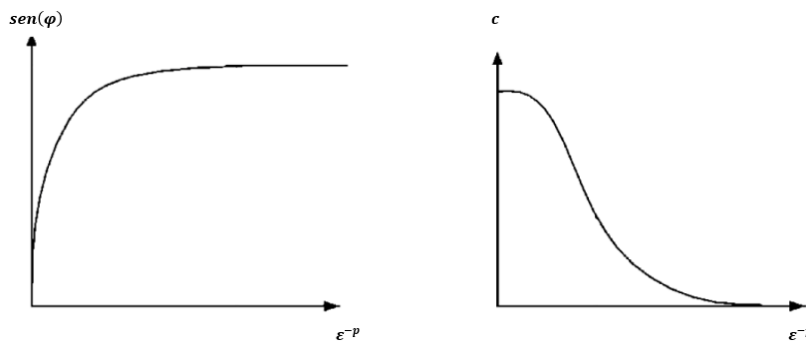
las ecuaciones 1.48 y 1.49, respectivamente. En la ecuación 1.48  $N_\psi = \frac{1+\text{sen}(\psi)}{1-\text{sen}(\psi)}$ , con  $\psi$  siendo el ángulo de dilatancia.

$$g^s = \sigma'_1 - \sigma'_3 N_\psi \quad (1.48)$$

$$g^t = -\sigma'_3 \quad (1.49)$$

Para modelar al endurecimiento o ablandamiento de los parámetros mecánicos de la roca, los autores, con base en estudios de laboratorio expresan la cohesión, el ángulo de fricción como una función de un parámetro de deformación en el rango plástico ( $\varepsilon^{-p}$ ), como se muestra en la figura 1-25.

**Figura 1-25:** Variación de la cohesión y ángulo de fricción como función del parámetro de endurecimiento.

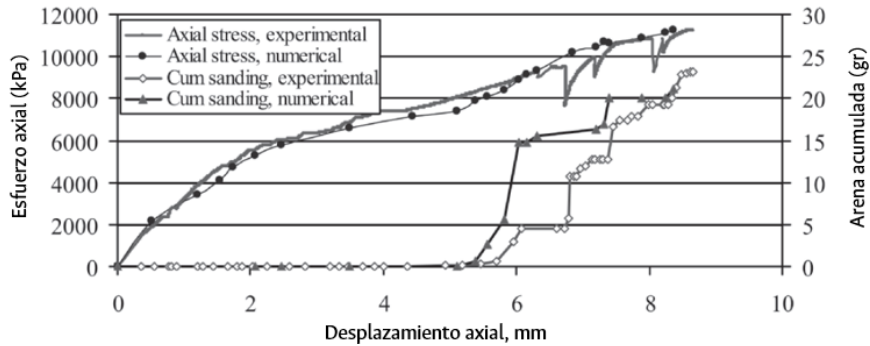


**Fuente:** Modificado de “Sand-Production Prediction: A New Set of Criteria for Modeling Based on Large-Scale Transient Experiments and Numerical Investigation”, de Nouri et al., (2004), SPE Annual Technical Conference and Exhibition, sep. 2004, Houston–EEUU.

Los resultados obtenidos en Nouri et al.,(2004) presentan un ajuste aceptable con respecto a los obtenidos en laboratorio, en particular hacia los desplazamientos axiales cercanos a 5 mm y en la parte final de la gráfica, muy cerca de los 9 mm (figura 1-26). En la parte intermedia se observa una gran diferencia entre los valores calculados y medidos. Nouri et al.,(2004) enfatizan que esto se debe a algunas limitaciones del software empleado para el modelo numérico en donde no se capturan de manera adecuada el espesor de los corredores o bandas de cizalla. En la última década el trabajo de Nouri et al.,(2004) se ha extendido a la modelación 3D. Por ejemplo H. Wang y Sharma (2016) desarrollaron un modelo que incluye dos fases de fluidos inmiscibles (agua y petróleo) de baja compresibilidad con el objetivo de cuantificar el efecto de la presión capilar en la cohesión y la resistencia residual de la roca. Los resultados mostraron que la presión capilar ( $p_c$ ) juega un rol importante en el inicio y la tasa de producción de arena, ya que menores valores de  $p_c$  inducen la producción de arena en etapas más tempranas durante la

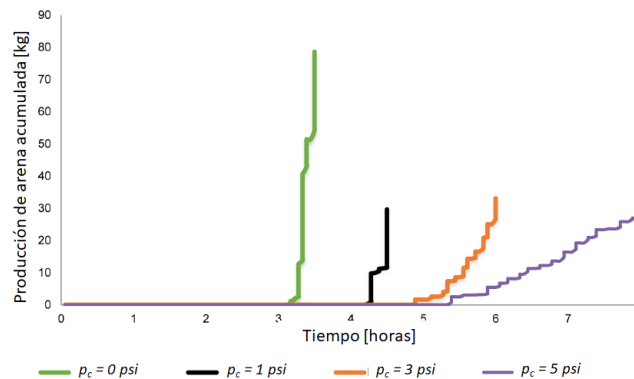
producción de hidrocarburos y fomentan una mayor tasa de producción de arena (figura 1-27).

**Figura 1-26:** Resultados de la producción de arena del modelo numérico y los datos experimentales.



**Fuente:** Modificado de “Sand-Production Prediction: A New Set of Criteria for Modeling Based on Large-Scale Transient Experiments and Numerical Investigation”, de Nouri et al., (2004), SPE Annual Technical Conference and Exhibition, sep. 2004, Houston–EEUU.

**Figura 1-27:** Efecto de la presión capilar en la producción de arena.



**Fuente:** Modificado de “A Fully 3-D, Multi-phase, Poro-Elasto-Plastic Model for Sand Production”, de H. Wang y Sharma (2016) SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dubai, EAU. Septiembre 2016.

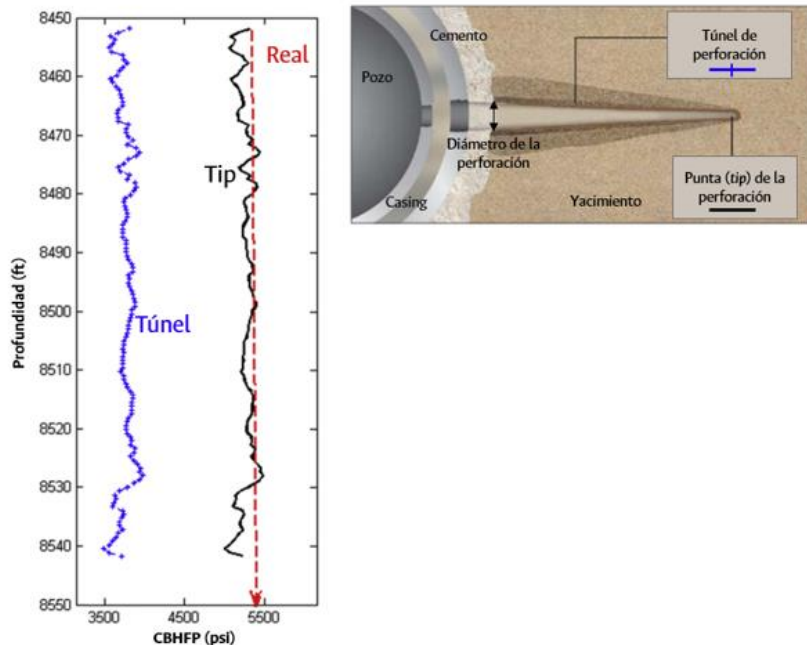
La literatura reciente ha visto un crecimiento importante en la aplicación de la mayoría de los modelos ya expuestos a casos reales en campo. En este sentido, Hayavi y Abdideh (2017) establecieron un modelo analítico para estimar el inicio de la producción de arena, aplicado a pozos de producción de gas, basado en la teoría de la poroelastoplasticidad y asumiendo un modo de falla a tensión de la roca. Sus resultados, considerando flujo no darciano, en términos de la presión fluyente de fondo de pozo crítica (CBHFP por sus siglas

en inglés), se compararon con casos revisados en literatura, obteniendo un buen ajuste entre el CBHFP observado en campo (línea discontinua roja) y el CBHFP predicho por el modelo, especialmente en la punta de la perforación (línea negra) tal como se observa en la figura 1-28.

Papamichos y Furui (2019), proponen un criterio para determinar el inicio de la producción de la arena en el que se comparan los esfuerzos efectivos axial, tangencial y los esfuerzos cortantes alrededor del pozo o de la perforación con la resistencia de la roca. Los criterios usados por los autores son: el criterio Mohr-Coulomb (MC) y su versión simplificada (sMC), el criterio von Mises (VM) y el criterio Drucker-Prager (DP). El criterio de falla de Papamichos y Furui (2019) es:

$$\sigma_c - \eta^p \sigma_s \begin{cases} < 0, & \text{No producción de arena} \\ = 0, & \text{Inicio de producción de arena} \\ > 0, & \text{Producción de arena} \end{cases} \quad (1.50)$$

**Figura 1-28:** Valores predichos y observados en campo del CBHFP



**Fuente:** Modificado de “Establishment of tensile failure induced sanding onset prediction model for cased-perforated gas wells”, Hayavi y Abdideh (2017) Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences. Elsevier B.V y del recurso web [http://drillingcontractor.org/dcp/dcnovdec08/DC\\_Nov08\\_StimulationWEB.pdf](http://drillingcontractor.org/dcp/dcnovdec08/DC_Nov08_StimulationWEB.pdf). Último acceso: 31 mayo 2022.

En la expresión 1.50  $\sigma_s$  es la resistencia de la roca y  $\sigma_c$  son los esfuerzos cerca del pozo o la perforación. El término  $\eta^p$  es un factor de escala que permite reproducir los resultados de resistencia en laboratorio a una escala de campo. En su trabajo, Papamichos y Furui (2019) fijaron  $\eta^p = 1$ . El término  $\sigma_c$  se obtiene de acuerdo con el criterio de falla (sMC, MC, DP, VM):

$$\sigma_c = \frac{\sigma'_\theta}{2}, (\text{sMC}) \quad (1.51)$$

$$\sigma_c = \frac{1}{4} \left[ \sigma'_\theta + \sigma'_z + \sqrt{(\sigma'_\theta - \sigma'_z)^2 + 4\tau_{\theta z}^2} \right], (\text{MC}) \quad (1.52)$$

$$\sigma_c = \frac{-(\sigma'_z + \sigma'_\theta)k_1 + \sqrt{\sigma'^2_\theta + \sigma'_z(\sigma'_z - \sigma'_\theta) + 3\tau_{\theta z}^2}}{-3k_1 + \sqrt{3}}, (\text{VM para } k_1 = 0 \text{ y DP para } 0 < k_1 \leq 0.5) \quad (1.53)$$

El término  $k_1$  es un parámetro de fricción de la roca que puede ser calibrado en laboratorio de acuerdo con Papamichos y Furui (2013). Para la resistencia de la roca, representada por el término  $\sigma_s$ , Papamichos y Furui (2019) proponen una expresión que tiene en cuenta el aumento de la resistencia de la cavidad (pozo o perforación) con la disminución de su diámetro:

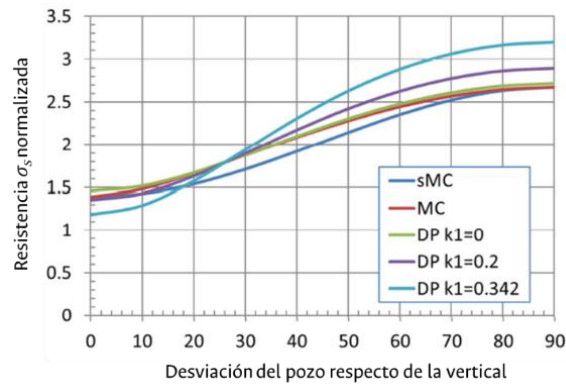
$$\frac{\sigma_s}{\sigma_{sref}} = \frac{1}{3} + \left( \frac{D_{ref}}{D} \right)^{2/5}, D_{ref} = 2 \text{ cm} \quad (1.54)$$

donde  $\sigma_s$  representa la resistencia en la falla de la cavidad con diámetro  $D$  y  $\sigma_{sref}$  es la resistencia para una cavidad de diámetro 2 cm. A su vez,  $\sigma_{sref}$  puede expresarse como una función del UCS de acuerdo con Euripides Papamichos (2002):

$$\sigma_{sref} = 6.0841 UCS^{0.6346} \quad (1.55)$$

Utilizando datos de campo reales en la modelación analítica los autores concluyeron que el modelo sMC es el modelo menos conservador, seguido del modelo MC. Los modelos VM o DP pueden ser igual o menos conservadores que los modelos sMC o MC dependiendo de los valores del parámetro  $k_1$  (que amplifica o atenúa el efecto del esfuerzo axial). En la figura 1-29 se muestra un juego de curvas que representan el valor de  $\sigma_s$  normalizados por el esfuerzo efectivo promedio inicial de un campo de hidrocarburos. Para un pozo vertical (desviación igual a 0) el modelo sMC es el menos conservador excepto por el modelo DP para un  $k_1 = 0.342$ .

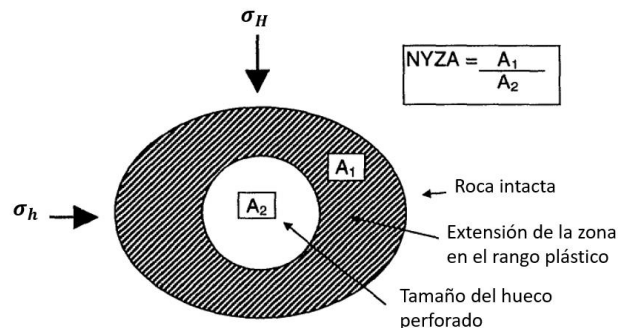
**Figura 1-29:** Resistencia crítica de la cavidad normalizada por el esfuerzo efectivo promedio inicial.



**Fuente:** Modificado de *Analytical models for sand onset under field conditions*, Papamichos y Furui (2019) Journal of Petroleum Science and Engineering.

Investigadores como McLellan y Hawkes (1998) aplicaron herramientas probabilísticas para evaluar la producción de arena a partir de criterios de estabilidad de pozo. El elemento de análisis de riesgo para estudiar la inestabilidad del pozo (y en consecuencia de producir arena) es el Área Normalizada de la Zona Plastificada (NYZA, por sus siglas en inglés). El NYZA, deducido a partir de un modelo poroelastoplástico es el área de la sección transversal en estado plástico dividida por el área de la sección transversal original durante la perforación del pozo, como se muestra en la figura 1-30.

**Figura 1-30:** Ejemplo de una zona en el rango plástico predicha por un modelo poroelastoplástico.

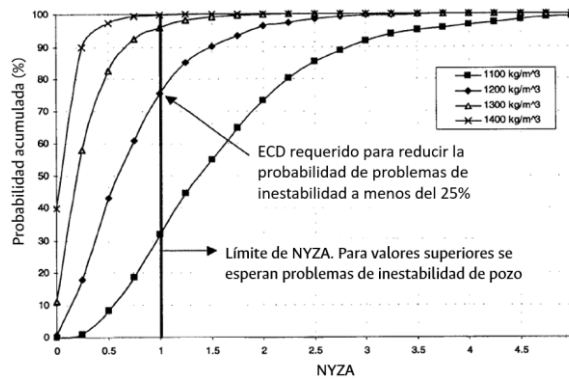


**Fuente:** Modificado de *Application of Probabilistic Techniques for Assessing Sand Production Instability Risks*, McLellan y Hawkes (1998) SPE/ISRM Eurock, Trondheim, Noruega. Julio 1998.



Como resultado del análisis de riesgo probabilístico, la figura 1-31 muestra para distintas densidades efectivas del fluido en circulación (ECD por sus siglas en inglés), la probabilidad acumulada de inducir una NYZA. En este ejemplo se indica que una probabilidad de exceder un NYZA >1.0 es del 25%. Estos límites pueden variar dependiendo de las condiciones específicas de cada proyecto. Para este caso se muestra que ECD menores a 1200 kg/m<sup>3</sup> tienen un alto riesgo de inestabilidad de pozo.

**Figura 1-31:** Cálculo de la probabilidad acumulada de NYZA para varios ECD



**Fuente:** Modificado de “Application of Probabilistic Techniques for Assessing Sand Production Instability Risks”, McLellan y Hawkes (1998) SPE/ISRM Eurock, Trondheim, Noruega. Julio 1998.

### 1.3 Selección de modelos analíticos como funciones de comportamiento

A continuación, se muestra un resumen de los modelos analíticos presentados en la sección anterior.

**Tabla 1-2:** Resumen de los modelos analíticos presentados

Modelo	Alcance del modelo	Criterio de producción de arena	Datos de entrada
Risnes, Bratili y Horsrud, (1982)	Inicio de la producción de arena. Puede aplicarse a pozos de petróleo o gas para flujos darcianos	Compara las fuerzas hidrodinámicas y la resistencia de una roca que sigue el criterio de falla MC	Viscosidad del fluido, caudal, permeabilidad, cohesión y ángulo de fricción
Vaziri y Byrne (1990)	Inicio de la producción de arena. Puede aplicarse a pozos de petróleo o gas. Incluye efectos del flujo transicional	Compara el esfuerzo principal menor y la resistencia a la tensión de la roca.	Cohesión, porosidad, módulo de Young, compresibilidad permeabilidad, viscosidad, saturación y esfuerzos

Weingarten y Perkins (1995)	Inicio de la producción de área en pozos productores de gas.	Compara los esfuerzos de tensión producidos por los fluidos y los esfuerzos cortantes durante el <i>depletion</i> con la resistencia de una roca que sigue el criterio de falla MC	Viscosidad del fluido, caudal, permeabilidad, cohesión y ángulo de fricción
Sanfilippo <i>et al.</i> , (1997)	Inicio de la producción de área en pozos productores de gas.	Criterio de falla Mohr-Coulomb para determinar el CTD basado en el criterio de Risnes, Bratili y Horsrud, (1982)	Sand Flow Test para calibrar la extensión de la zona plástica, ángulo de fricción, UCS
Ong, Ramos y Zheng (2000)	Inicio de la producción de área en pozos productores de gas con altas tasas de flujo	Criterio de falla Mohr-Coulomb para determinar el <i>drawdown</i> basado en el criterio de Weingarten y Perkins (1995)	Viscosidad del fluido, caudal, permeabilidad, cohesión y ángulo de fricción
Wan y Wang (2000), Wan y Wang (2001)	Estimación del volumen de arena	Balace de masa de sólidos, fluidos y de sólidos en suspensión	Porosidad, caudal, densidad de los sólidos, parámetros de plasticidad de la roca
Willson <i>et al.</i> (2002)	Inicio de la producción de arena y estimación de volúmenes	Compara el esfuerzo tangencial efectivo mayor y la resistencia de la roca	Esfuerzos <i>in situ</i> , relación de Poisson, UCS, presión de poro
Nouri <i>et al.</i> , (2004)	Inicio y estimación del volumen de arena	Criterio de falla a tensión. Modelación numérica para estimar volúmenes	Cohesión, ángulo de fricción, parámetros de plasticidad, esfuerzos
H. Wang y Sharma (2016)	Estimación del volumen de arena	Modelo numérico poroelastoplástico multifase de erosión	Porosidad, compresibilidad de los fluidos, y caudales.
Hayavi y Abdideh (2017)	Inicio de la producción de arena en pozos de gas para flujo no darciano	Criterio de falla a tensión. Se calcula el CBHFP asociado con el inicio de la producción de arena	Caudal, densidad del gas, viscosidad, factor de volumen del gas, permeabilidad
Papamichos y Furui (2019)	Inicio de la producción de arena	Criterio de falla por cortante MC, VM y DP	UCS, esfuerzos <i>in situ</i> , presión de poro, <i>drawdown</i> , geometría del pozo

Los modelos analíticos predicen el inicio de la producción de arena basados en un criterio de falla por tensión o falla por cortante. En el primer caso, el objetivo es encontrar la tasa de producción crítica que es capaz de inducir esfuerzos de tensión superiores a la resistencia de la roca. En el segundo caso, el objetivo es analizar el estado de esfuerzos efectivos (Sanfilippo *et al.* 1995) y compararlo con la resistencia de la roca. Con base en las observaciones de las últimas dos décadas en el Campo Provincia, la producción de arena se ha originado en unidades de arenisca que evidencian una pobre resistencia mecánica y una marcada declinación de la presión de poro por la extracción de hidrocarburos. Estas condiciones son propias de los modelos analíticos en los que la falla por cortante es función de la resistencia de la roca, los esfuerzos efectivos y el nivel de

agotamiento de la presión del yacimiento. Por ello, los modelos basados en la falla por tensión se descartan como funciones de comportamiento. De los modelos que incluyen el modo de falla por cortante, los desarrollados por Willson et al. (2002) y Papamichos y Furui (2019) se han escogido como las funciones de comportamiento porque:

- Los datos disponibles son compatibles con los datos requeridos por los modelos y
- Los mecanismos físicos que describen el inicio de la producción de arena son aplicables a las características geológicas y operacionales que se llevan a cabo en el Campo Provincia.

Las principales limitaciones de los modelos de Willson et al. (2002) y Papamichos y Furui (2019) están asociados con su enfoque poroelástico y el uso exclusivo del criterio de falla por cortante como indicador del inicio de la producción de arena. Estas características pueden conducir a resultados conservadores debido a que se ignora el comportamiento plástico de la roca luego de alcanzar su punto de fluencia. Como lo señalan Eshiet y Sheng (2013), es importante acoplar un criterio de falla mecánica de la roca con endurecimiento o ablandamiento con un modelo dominado por fuerzas hidrodinámicas (o de erosión) porque a medida que la roca avanza a un estado plástico las fuerzas de arrastre de los fluidos pueden desprender granos con mayor facilidad. En este punto la relación de vacíos aparece como un factor fundamental en los patrones e intensidad de la producción de arena, lo cual representa otra limitación de los modelos analíticos de Willson et al. (2002) y Papamichos y Furui (2019), los cuales dependen únicamente de la resistencia de la roca, los esfuerzos, la presión de poro y el *drawdown*.



## **2. Conceptos de probabilidad y su aplicación en el análisis por confiabilidad**

Este capítulo inicia con la exposición de la terminología básica empleada en los análisis probabilísticos en la ingeniería geotécnica. Posteriormente se exponen los conceptos de probabilidad de falla, análisis por confiabilidad, índice de confiabilidad y la relación entre ellos. Finalmente se explica la metodología que se utilizó en esta investigación para analizar los factores que condicionan la producción de arena utilizando el análisis por confiabilidad aplicado al Campo Provincia de Ecopetrol.

### **2.1 Conceptos de probabilidad**

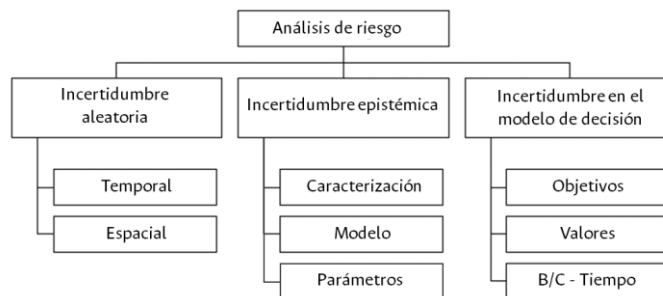
Como en otras áreas de las ciencias de la Tierra, la geomecánica debe tratar con materiales cuyas propiedades han sido moldeadas por la naturaleza (Baecher y Christian 2003). Los materiales de origen geológico se caracterizan porque sus propiedades son variables en el espacio y en el tiempo, dando lugar a comportamientos aleatorios, como por ejemplo la producción de arena en pozos de producción de hidrocarburos. En la actualidad, con el desarrollo matemático de la probabilidad y de la computación, el uso de técnicas probabilísticas se ha extendido en múltiples campos, entre ellos, el análisis cuantitativo de la incertidumbre. A diferencia del análisis determinístico en donde se usan valores únicos, el análisis probabilístico incorpora la incertidumbre de las variables que gobiernan los procesos aleatorios.

#### **2.1.1 Incertidumbre**

De acuerdo con Baecher y Christian (2003) la incertidumbre está asociada con la falta de conocimiento o de verificación. En ingeniería geotécnica, se reconocen tres fuentes de incertidumbre (ver Figura 2-1):

- La incertidumbre natural o aleatoria originada por la variabilidad, en el espacio y en el tiempo, de los procesos naturales. No puede reducirse aunque puede estimarse con modelos matemáticos (Phoon y Ching 2018).
- La incertidumbre epistémica producto de la falta de datos, información o comprensión de las leyes físicas que gobiernan el problema. Hay tres tipos de incertidumbre epistémica en ingeniería geotécnica: incertidumbre en la caracterización del subsuelo (de la roca de yacimiento en este caso), incertidumbre en el modelamiento y la incertidumbre en la medición de parámetros o propiedades. Puede reducirse pero es difícil de cuantificar (Phoon y Ching 2018).
- La incertidumbre en el modelo de decisión asociada con factores humanos como las restricciones sobre la relación beneficio/costo del proyecto o los insumos y la incapacidad de estimar el impacto social de un proyecto u obra de ingeniería. Estas incertidumbres son difíciles de evaluar.

**Figura 2-1:** Categorías de incertidumbre en el análisis de riesgo



**Fuente:** Modificado de “*Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering*”, Baecher y Christian (2003) John Wiley & Sons Ltd, West Sussex PO19 8SQ, Inglaterra.

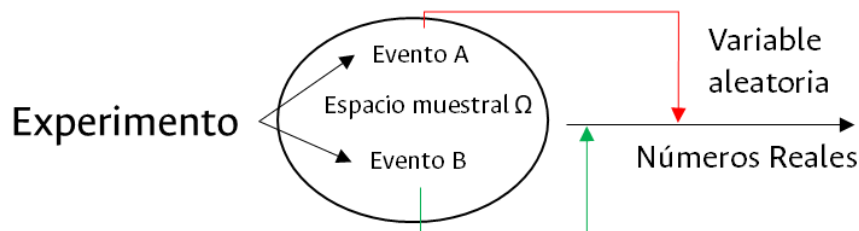
El tratamiento racional de las incertidumbres en la producción de arena puede lograrse mediante el uso de métodos probabilísticos. Para ello, se empieza con la caracterización estadística de las variables o parámetros del proceso físico. Con frecuencia los datos se presentan de manera dispersa por lo que es fundamental la construcción de histogramas, calcular los momentos estadísticos y aplicar herramientas de la estadística inferencial para una adecuada representación de las variables. Luego, a partir de este análisis es posible asociar a cada variable que se tratará como aleatoria una distribución de probabilidad que

permita modelar su comportamiento aleatorio. Posteriormente, las variables aleatorias son incorporadas en la modelación del proceso físico y con el uso de métodos de simulación se obtiene un resultado en términos del *índice de confiabilidad* o de una probabilidad de falla.

### 2.1.2 Variables aleatorias

En el sentido formal, una variable aleatoria es un objeto abstracto del mundo real que asocia un número al resultado de un experimento (Figura 2-2). Las variables aleatorias pueden considerarse funciones numéricas definidas en un espacio muestral del dominio de los reales (Tsitsiklis y Bertsekas 2008), se denotan con letra mayúscula y los valores numéricos de la variable aleatoria se denotan con minúscula.

**Figura 2-2:** Representación esquemática de una variable aleatoria.



**Fuente:** Modificado de "Introduction to Probability", Tsitsiklis y Bertsekas (2008) Athena Scientific, Belmont, Massachusetts. EEUU.

Hay dos tipos de variables aleatorias: discretas y continuas. Las variables discretas se caracterizan porque sus valores numéricos pueden ser finitos o contablemente infinitos (Tsitsiklis and Bertsekas 2008). Por ejemplo: sea  $X$  el número de núcleos de roca que alcanzan la falla en el ensayo triaxial en un día. Si los laboratoristas llevan un registro histórico de estos eventos, pueden estimar cuál es la probabilidad de que un cierto número de núcleos fallen en un día (Tabla 2-1). En esta situación, la variable aleatoria  $X$  sólo puede ser descrita por valores numéricos " $x$ " que se pueden contar. En cambio, las variables continuas pueden tomar valores infinitos dentro de un rango de los números reales. Por ejemplo: sea  $Y$  el máximo esfuerzo alcanzado por 40 núcleos de roca en pruebas de resistencia a la compresión no confinada (UCS). Aquí, el valor numérico " $y$ " de cada esfuerzo máximo puede estar en el rango  $[0, \infty)$ . En esta investigación predomina la caracterización de variables aleatorias continuas en la producción de arena, por lo que el tratamiento de variables aleatorias discretas no será explicado en profundidad.

**Tabla 2-1:** Ejemplo de una variable aleatoria discreta

Número de núcleos que alcanzan la falla	Probabilidad
0	0.17
1	0.22
2	0.35

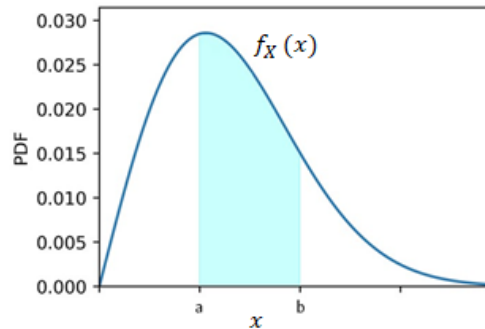
## 2.2 Función de densidad de probabilidad

Si  $X$  es una variable aleatoria continua, entonces existe una función positiva ( $\geq 0$ )  $f_X$  denominada función de densidad de probabilidad (PDF por sus siglas del inglés *probability density function*) que nos permite calcular la probabilidad de que  $X$  se encuentre en un intervalo dado:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (2.1)$$

La ecuación 2.1 indica que la probabilidad de que  $X$  tome un valor en el intervalo  $[a, b]$  es igual al área bajo la curva de la PDF (Figura 2-3).

**Figura 2-3:** Gráfica de una PDF. El área celeste es la probabilidad de que  $X$  tome un valor en  $[a, b]$ .



**Fuente:** Elaboración propia.

Una PDF satisface las siguientes condiciones:

$$f_X(x) \geq 0, \forall x \quad (2.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = P(-\infty < X < \infty) = 1.0 \quad (2.3)$$



Dado que la longitud del intervalo  $[b, b]$  es 0, y que las PDF son probabilidades por unidad de longitud, la probabilidad de que  $X = b$  es cero.

$$\int_b^b f_X(x) dx = P(X = b) = 0 \quad (2.4)$$

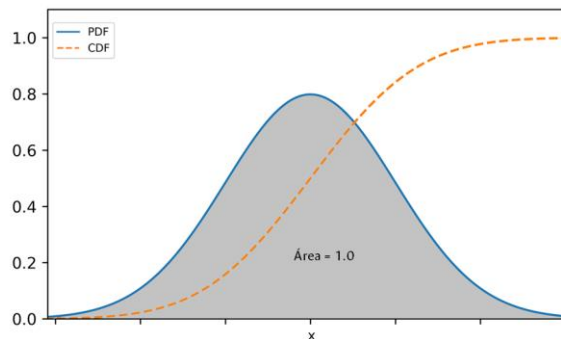
La función de distribución acumulada (CDF por sus siglas del inglés *cummulative distribution function*) es otra forma de describir la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua (Figura 2-4). Una CDF se define como:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad (2.5)$$

La CDF, cuyo argumento es  $x$ , nos permite calcular la probabilidad de que  $X$  tome un valor menor o igual a  $x$ . Se usa la letra  $F$  mayúscula para las CDF cuyo subíndice es la variable aleatoria de referencia (Tsitsiklis and Bertsekas 2008). De la ecuación 2.5 podemos obtener la PDF por diferenciación:

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) \quad (2.6)$$

**Figura 2-4:** Curvas PDF y CDF de una variable aleatoria  $X$



**Fuente:** Elaboración propia.

## 2.3 Parámetros estadísticos básicos de una variable aleatoria

Con frecuencia se busca sintetizar la información contenida en una PDF de una variable aleatoria continua mediante algunos parámetros. A continuación, se describen los

parámetros estadísticos básicos más comunes en los análisis por confiabilidad o de probabilidad de falla en ingeniería geotécnica.

### 2.3.1 Valor esperado, varianza y desviación estándar

El valor esperado o esperanza matemática de una variable aleatoria  $X$  con PDF  $f_X(x)$ , es:

$$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (2.7)$$

Geoméricamente,  $E[X]$  puede ser interpretado como el “centro de gravedad” de la PDF. También es el promedio previsto de la variable  $X$  en un gran número de observaciones o repeticiones independientes de un experimento (Tsitsiklis and Bertsekas 2008). Para un conjunto de  $n$  datos no agrupados, el promedio o media muestral  $\bar{x}$  es:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i^n x_i}{n} \quad (2.8)$$

Es usual que las distribuciones de probabilidad se representen por sus momentos. El  $n$ -ésimo momento de una PDF  $f_X(x)$  alrededor de su origen es:

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad (2.9)$$

Así, cuando  $n = 1$  se obtiene la ecuación 2.7 que representa el valor esperado de  $X$ . El  $n$ -ésimo momento alrededor de la media o el valor esperado, denominado *enésimo momento central* es :

$$E[X - E(X)]^n = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^n f_X(x) dx \quad (2.10)$$

Después del valor esperado, la varianza o segundo momento central, denotado por  $var(X)$ , es el descriptor estadístico más importante de una variable aleatoria  $X$ :

$$var(X) = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x) dx \quad (2.11)$$

La varianza es siempre positiva. La raíz cuadrada positiva de la varianza es la desviación estándar:

$$\sigma_X = \sqrt{var(X)} \quad (2.12)$$

Para un conjunto de  $n$  datos no agrupados, la *varianza muestral*  $s^2$  es:

$$s^2 = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad (2.13)$$

Y su desviación estándar  $s$  se calcula como:

$$s = \sqrt{s^2} \quad (2.14)$$

El coeficiente de variación (COV), cuyo símbolo es  $c_v$  o en algunos textos  $\Omega$ , es la desviación estándar dividida entre el promedio:

$$c_v = \Omega = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (2.15)$$

Los valores máximos y mínimos del  $\Omega$  son usados en geociencias para representar la heterogeneidad de algunas propiedades de la roca en profundidad o lateralmente en el yacimiento, como por ejemplo la porosidad, permeabilidad o la saturación de fluido (Ma 2019)

### 2.3.2 Sesgo y curtosis

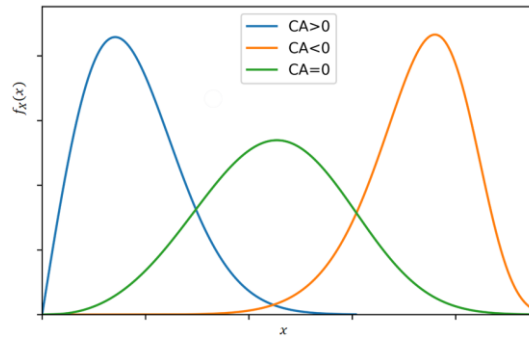
El sesgo y la curtosis son otros dos momentos centrales empleados para describir las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias. El sesgo o tercer momento central mide el grado de asimetría de la PDF de una variable aleatoria  $X$  y se define como:

$$E[X - E(X)]^3 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^3 f_X(x) dx \quad (2.16)$$

En la práctica se utiliza la versión adimensional del sesgo, denominada coeficiente de asimetría ( $CA_X$ ):

$$CA_X = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[x - E(X)]^3}{\sigma_X^3} f_X(x) dx \quad (2.17)$$

Si  $CA_X < 0$ , entonces la PDF tiene una distribución asimétrica negativa, cuyos valores se concentran más a la izquierda del valor esperado o media que a la derecha. Si  $CA_X > 0$  la PDF tiene una distribución asimétrica positiva, cuyos valores se concentran más a la derecha del valor esperado o media que a la izquierda. Si  $CA_X = 0$ , la PDF tiene una distribución simétrica (Figura 2-5).

**Figura 2-5:** Representación de una PDF de una variable aleatoria  $X$  con  $CA < 0$ ,  $CA > 0$  y  $CA = 0$ 

**Fuente:** Elaboración propia.

La curtosis o cuarto momento central es una medida de la cola de la distribución. Entre las medidas para definir la curtosis, una de las más habituales es el coeficiente de curtosis (*kurt*), que se expresa como el cuarto momento central dividido por la cuarta potencia de la desviación estándar:

$$kurt[X] = E \left( \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^4 \quad (2.18)$$

En una distribución normal o gaussiana como las mostradas en la figura 2-8 el coeficiente de curtosis es igual a 3. Con base en esta referencia se ha propuesto evaluar el exceso de curtosis, definido como:

$$ex_{kurt} = kurt[X] - 3 \quad (2.19)$$

En la figura 2-6 se exponen varios ejemplos del cálculo de exceso de curtosis para diferentes PDF.

### 2.3.3 Covarianza y correlación

Existen dos parámetros para cuantificar la intensidad y la dirección de la relación entre dos variables: la covarianza y la correlación. La covarianza de dos variables aleatorias  $X$ ,  $Y$  se define así:

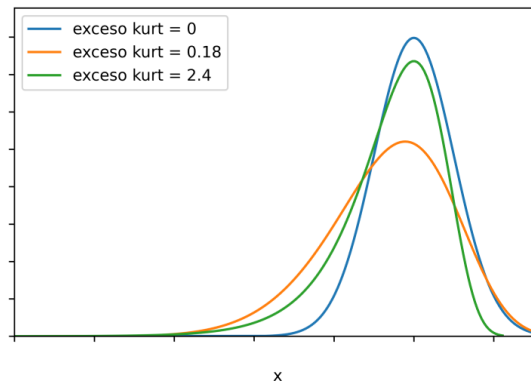
$$cov(X, Y) = E[ (X - E[X])(Y - E[Y]) ] \quad (2.20)$$

$$cov(X, Y) = \iint_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X) * (y - \mu_Y) f(x, y) dx dy \quad (2.21)$$

Alternativamente,

$$cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] \quad (2.22)$$

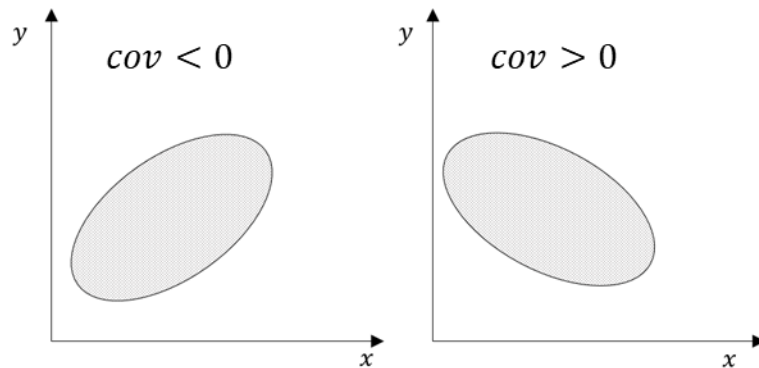
**Figura 2-6:** Ejemplos de exceso de curtosis. La curva azul es una distribución normal. Las otras corresponden a una distribución Weibull (naranja) y Gumbel (verde)



**Fuente:** Elaboración propia.

Con la ecuación 2.19 se determina si la desviación alrededor de  $X$  y  $Y$  de sus respectivos valores esperados presentan el mismo signo (+,-) o si están moviéndose en la misma dirección. Si  $cov(X, Y) = 0$ , entonces  $X$  y  $Y$  no están correlacionadas. Si la covarianza es positiva o negativa, indica que  $(X - E[X])$  y  $(Y - E[Y])$  tienden a signos iguales u opuestos, respectivamente (Tsitsiklis and Bertsekas 2008). En la figura 2-6, las variables  $X, Y$  están distribuidas uniformemente sobre la elipse. En el caso (a) la  $cov(X, Y)$  es positiva mientras que en (b) la  $cov(X, Y)$  es negativa.

**Figura 2-7:** Ejemplos de covarianza positiva y negativa



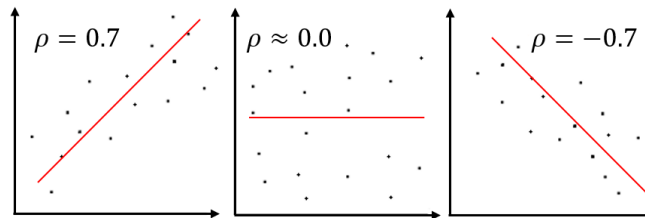
**Fuente:** Modificado de “Introduction to probability”, Tsitsiklis y Bertsekas (2008), Athena Scientific, Nashua, EEUU.

El coeficiente de correlación de dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$  con covarianza diferente de cero es:

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}} = \frac{(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.23)$$

El coeficiente de correlación mide el grado de asociación entre  $X$  y  $Y$  y es considerado la versión adimensional de la covarianza (Tsitsiklis y Bertsekas 2008). De la ecuación 2.22 se puede deducir que  $-1 \leq \rho \leq 1$ . Si  $\rho > 0$  (o  $\rho < 0$ ) entonces  $X - E[X]$  y  $Y - E[Y]$  tienden hacia el mismo signo (o el opuesto). Cuanto más cerca de +1 o -1 está  $\rho$ , más fuerte es la relación y se espera un alto grado de correspondencia lineal entre  $X$  y  $Y$  (Figura 2-8). Si  $\rho = 0$  se concluye que  $X$  y  $Y$  no pueden correlacionarse linealmente.

**Figura 2-8:** Ejemplos del coeficiente de correlación



**Fuente:** Modificado <https://www.statisticshowto.com/probability-and-statistics/correlation-coefficient-formula/#Pearson>. Último acceso: 12 de junio 2022.

## 2.4 Distribuciones de probabilidad

En esta sección se describen las PDF que se usarán en el capítulo 4 para describir el comportamiento de las variables aleatorias en el análisis por confiabilidad. Las PDF que se exponen a continuación son las más comunes en los análisis, no solo en ingeniería civil, sino en otras ramas de las ciencias de la Tierra, como la geología, la geofísica, la geomecánica o la petrofísica.

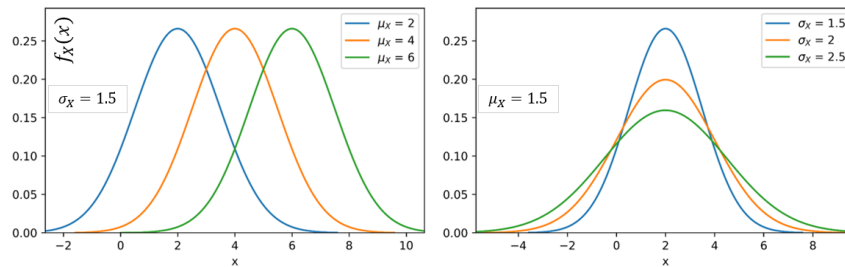
### 2.4.1 Distribución Normal

La distribución normal o Gaussiana es la distribución de probabilidad más popular, usada para describir un gran número de procesos aleatorios en diversas áreas de las ciencias naturales, ingeniería, ciencias sociales, administración y medicina. En ocasiones, aunque las variables involucradas en un proceso no se caractericen por una distribución normal, puede que sus sumas o promedios se aproximen a dicha distribución. Sea  $X$  una variable aleatoria continua con media  $\mu_X$  y desviación estándar  $\sigma_X$ . Si  $X$  sigue una distribución normal, entonces:

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\right) e^{\left[-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right]} \quad -\infty < x < \infty \quad (2.24)$$

donde  $-\infty < \mu_X < \infty$  y  $\sigma_X > 0$ . Para evitar esta larga notación matemática, es común abreviarla así:  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$ . De la figura 2-9 se deduce que el centro de la PDF normal es  $\mu_X$  y que la dispersión o “ancho” de la PDF normal está controlado por  $\sigma_X$ .

**Figura 2-9:** Efectos de  $\mu_X$  (izquierda) y  $\sigma_X$  (derecha) en la distribución normal



**Fuente:** Elaboración propia.

La forma de la PDF normal es acampanada y simétrica alrededor de  $\mu_X$ . Los puntos de inflexión de la distribución normal están a una distancia de  $\mu_X \pm \sigma_X$ . Calcular el área bajo la curva en un intervalo  $[a,b]$  de la PDF normal no es posible con métodos convencionales, por ello es común que se trabaje la PDF normal con  $\mu_X = 0$  y  $\sigma_X = 1$  y tabular algunos valores del intervalo  $[a, b]$ . A la PDF normal con  $\mu_X = 0$  y  $\sigma_X = 1$  se le conoce como *distribución normal estándar* y se define como:

$$f_Z(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty < z < \infty \quad (2.25)$$

Una PDF normal puede convertirse en una PDF normal estándar con el siguiente cambio de variable:

$$Z = \frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \quad (2.26)$$

### 2.4.2 Distribución Lognormal

Sea  $Y$  una variable aleatoria que sigue una distribución normal con parámetros  $\mu_Y$  y  $\sigma_Y$ . La variable  $X = e^Y$  es una variable que sigue una distribución lognormal cuya PDF se define así:

$$f_X(x) = \left( \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \right) e^{-\left[ \frac{(\ln x - \mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \right]}, x > 0 \quad (2.27)$$

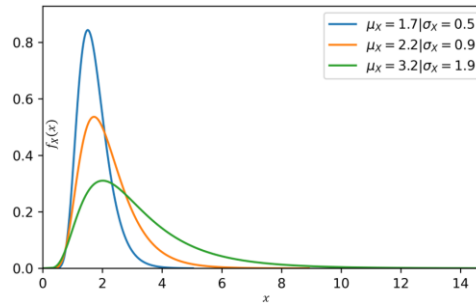
Notar que  $Y = \ln X$ . El valor esperado y varianza de  $X$  pueden calcularse como:

$$E[X] = \mu_X = e^{(\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2)} \quad (2.28)$$

$$var(X) = e^{(2\mu_Y + \sigma_Y^2)} [e^{(\sigma_Y^2)} - 1] \quad (2.29)$$

En la figura 2-10 se presentan algunos ejemplos de PDF lognormales.

**Figura 2-10:** PDF lognormales con diferentes valores de  $\mu$  y  $\sigma$ .



**Fuente:** Elaboración propia

### 2.4.3 Distribución Beta

La distribución beta se usa para modelar variables aleatorias continuas cuyos valores se encuentran en un intervalo finito (Grami 2020). Si una variable aleatoria sigue una distribución Beta, entonces:

$$f_X(x) = \Gamma(\alpha, \beta) x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (2.30)$$

donde  $\beta(a, b)$  es la función beta que se expresa en términos de la función Gamma:

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \quad (2.31)$$

El valor esperado  $\mu_X$  y la varianza  $\sigma_X^2$  de una variable  $X$  se definen así:

$$\mu_X = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \sigma_X^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \quad (2.32)$$

En la figura 2-11 se muestran algunos ejemplos de la distribución Beta para diferentes parámetros  $a$  y  $b$ .



### 2.4.4 Distribución Weibull

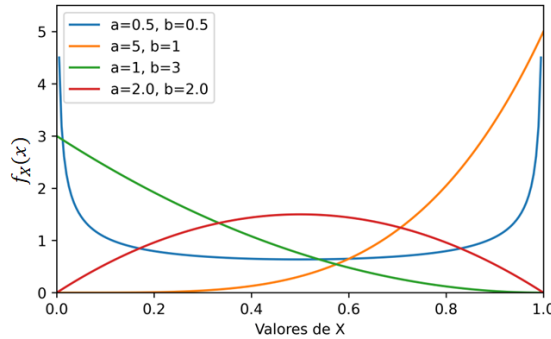
La distribución Weibull es una de las distribuciones más usadas en la aeronáutica, la ingeniería mecánica y la ingeniería civil para el análisis probabilístico. La variable  $X$  sigue una PDF Weibull si:

$$f_X(x) = abx^{b-1}e^{-ax^b}, x > 0, a > 0, b > 0 \quad (2.33)$$

El valor esperado y varianza de una variable  $X$  que sigue una PDF Weibull se calculan como:

$$\mu_X = a^{-\frac{1}{b}} \Gamma(1 + b^{-1}), \sigma_X^2 = a^{-2/b} \left[ \Gamma(1 + 2b^{-1}) - (\Gamma(1 + b^{-1}))^2 \right] \quad (2.34)$$

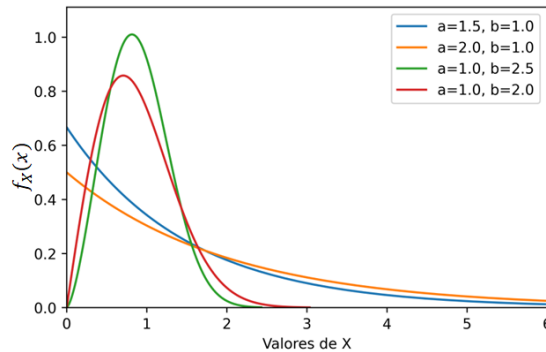
**Figura 2-11:** Versiones de la distribución Beta según los valores de  $a$  y  $b$ .



**Fuente:** Elaboración propia

Con  $b = 1$  se obtiene la forma exponencial de la distribución Weibull. Para valores de  $b > 1$  la distribución Weibull tiene una forma similar a la Gaussiana con valores del exceso de curtosis cercanos a cero (Figura 2-12).

**Figura 2-12:** Versiones de la distribución Weibull según los valores de  $a$  y  $b$ .



**Fuente:** Elaboración propia

## 2.5 Análisis por confiabilidad

Los análisis determinísticos de estabilidad en ingeniería geotécnica se basan en el cálculo del factor de seguridad ( $FS$ ), definido como la relación entre la resistencia ( $R$ ) a la falla y las cargas ( $Q$ ) que actúan en una estructura. Matemáticamente, el  $FS$  se expresa como:

$$FS = \frac{R}{Q} \quad (2.35)$$

En el análisis por confiabilidad se prefiere trabajar con el margen de seguridad ( $MS$ ) o *función de comportamiento* ( $Z$ ) del sistema, definida así:

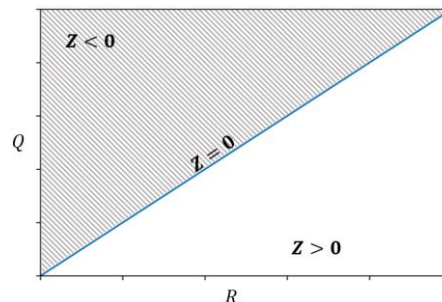
$$MS = Z = R - Q \quad (2.36)$$

En la producción de arena, la resistencia de la roca puede ser función de la porosidad, de la densidad de fracturas o del UCS. La carga  $Q$  en la roca alrededor del pozo es función de los esfuerzos *insitu*, de la presión de poros, de la relación de Poisson y del *drawdown*. Por tanto,  $R$  y  $Q$  pueden considerarse como funciones de un conjunto de variables aleatorias  $X_i$ . Así, el margen de seguridad es:

$$MS(X_i) = Z(X_i) = R(X_i) - Q(X_i) \quad (2.37)$$

Si  $Z = MS < 0$ , entonces la falla del sistema ocurre. Por el contrario si  $Z > 0$  puede considerarse que el sistema es seguro. El estado límite del sistema o punto crítico se representa por  $Z = 0$  (Figura 2-13)

**Figura 2-13:** Representación esquemática del margen de seguridad de un sistema.



**Fuente:** Modificado de "Probabilistic Methods applied to the Bearing Capacity Problem", (Russelli 2008) Universität Stuttgart, Alemania

La ventaja del análisis por confiabilidad respecto del factor de seguridad, radica en que es posible expresar la seguridad o estabilidad de un sistema o estructura en términos de probabilidad ( $P_s$ ):

$$P_s = P[MS(X_i) > 0] = P[R(X_i) > Q(X_i)] \quad (2.38)$$

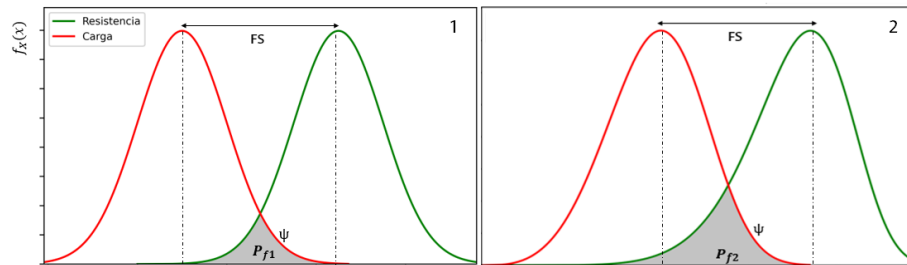
De la ecuación 2.37 se deduce que la probabilidad de tener una condición insegura o inestable ( $P_f$ ) es:

$$P_f = 1 - P_s = P[MS(X_i) < 0] = P[R(X_i) < Q(X_i)] \quad (2.39)$$

La ventaja del análisis por confiabilidad se ejemplifica en la figura 2-14. En ella se muestra que dos combinaciones de resistencia y carga pueden tener un factor de seguridad similar pero la probabilidad de falla, representada por el área sombreada en gris ( $\psi$ ), es mayor en el caso (2) que en el caso (1). La probabilidad de falla es la integral de convolución de la función de densidad de probabilidad conjunta de la resistencia y la carga  $f_{RQ}(r, q)$  en la zona de falla (Russelli 2008):

$$P_f = \iint_{\psi} f_{RQ}(r, q) dr dq \quad (2.40)$$

**Figura 2-14:** Comparación del factor de seguridad y la probabilidad de falla.

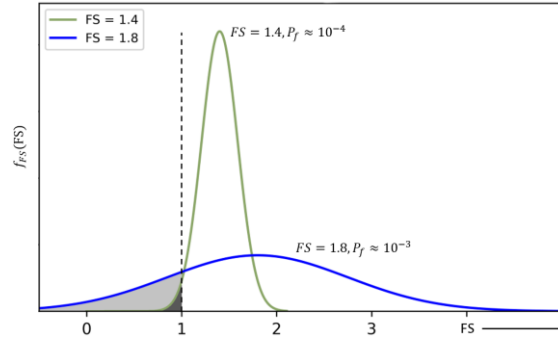


**Fuente:** Modificado de “*Probabilistic Methods applied to the Bearing Capacity Problem*”, (Russelli 2008) Universität Stuttgart, Alemania.

En la figura 2-15 se expone la influencia de la incertidumbre en los análisis geotécnicos. Las curvas corresponden a las PDF del factor de seguridad de dos sistemas representadas por el promedio del factor de seguridad y su desviación estándar que es una medida de la incertidumbre. Desde el enfoque determinístico el sistema con FS =1.8 es más seguro, aunque su incertidumbre es mayor. Ahora, desde el punto de vista probabilístico, se observa que el sistema “más seguro” tiene una probabilidad de falla mayor que el sistema

con  $FS = 1.4$ . Esto sugiere que el enfoque determinístico podría no ser la mejor alternativa para evaluar la estabilidad de un sistema.

**Figura 2-15:** Probabilidad de falla para diferentes valores del factor de seguridad



**Fuente:** Modificado de “*Probabilistic Methods applied to the Bearing Capacity Problem*”, (Russelli 2008) Universität Stuttgart, Alemania

### 2.5.1 El índice de confiabilidad

Si la resistencia  $R$  y la carga  $Q$  de un sistema son variables aleatorias continuas, entonces es posible calcular el valor promedio y la varianza del margen de seguridad así:

$$E[MS] = \mu_{MS} = \mu_R - \mu_Q \quad (2.41)$$

$$\sigma_{MS}^2 = \sigma_R^2 + \sigma_Q^2 - 2\rho_{RQ}\sigma_R\sigma_Q \quad (2.42)$$

El índice de confiabilidad, denotado por  $\beta$ , se define como:

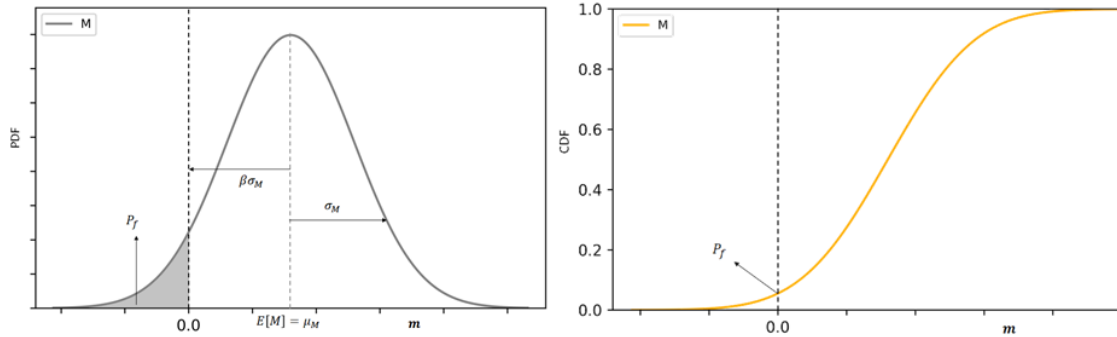
$$\beta = \frac{\mu_{MS}}{\sigma_{MS}} = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2 - 2\rho_{RQ}\sigma_R\sigma_Q}} \quad (2.43)$$

Si  $R$  y  $Q$  no están correlacionadas, entonces:

$$\beta = \frac{\mu_{MS}}{\sigma_{MS}} = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}} \quad (2.44)$$

En la figura 2-16, se muestra la curva de la PDF del margen de seguridad y su respectiva CDF. Desde un enfoque práctico, a medida que  $\beta$  es mayor, el valor esperado del margen de seguridad se aleja del punto donde  $MS = 0$  (zona de falla). El índice de confiabilidad representa el número de desviaciones estándar de  $M$  por el que  $\mu_M$  supera el estado límite o punto crítico (Russelli 2008).

**Figura 2-16:** Comparación del factor de seguridad y la probabilidad de falla.



Fuente: Elaboración propia

Si  $R$  y  $Q$  son variables aleatorias que siguen una distribución normal, entonces  $M$  también será normalmente distribuida. En ese caso:

$$P_f = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta) \quad (2.45)$$

El símbolo  $\Phi$  es la CDF de la distribución normal estándar. De la ecuación 2.44 se puede deducir que a mayores valores del índice de confiabilidad corresponde menores probabilidades de falla.

## 2.6 Cuantificación de la incertidumbre

En ingeniería geotécnica las técnicas probabilísticas más usadas para cuantificar la incertidumbre en los análisis por confiabilidad son: la simulación de Monte Carlo (SMC), el método de primer orden y segundo momento (FOSM del inglés First Order Second Moment), el método de segundo orden y segundo momento (SOSM del inglés Second Order Second Moment), el método de estimativos puntuales (PEM del inglés Point Estimate Method) y menos común pero igualmente útil el método Hasofer-Lind (FORM por sus siglas en inglés de First Order Reliability Method). En esta investigación se han adoptado la simulación de Monte Carlo y el método de Hasofer – Lind.

### 2.6.1 Método de simulación de Monte Carlo

El método de simulación de Monte Carlo (SMC) consiste en reemplazar cada variable aleatoria continua ( $R$  y  $Q$ ) por un gran conjunto de valores discretos que son generados a partir de su respectiva distribución de probabilidad. Cada valor de  $R$  y  $Q$  es usado para

calcular los valores de la función de comportamiento  $M$  y su distribución. La aplicación del método de SMC es sencilla pues consiste en calcular el valor de  $M$  un gran número de veces. En décadas anteriores el número de iteraciones era una limitación significativa de este método. Actualmente el *hardware* de los computadores y el desarrollo de lenguajes de programación como *Python* han permitido superar esta restricción. La pregunta frecuente al aplicar este método es ¿cuántas iteraciones se deben generar para asegurar la convergencia de la simulación? Una respuesta sencilla es inspeccionar el comportamiento del promedio y la desviación estándar o varianza de la función de comportamiento a medida que se incrementan las iteraciones hasta detectar que entre la iteración  $i$  y la iteración  $i+1$  la diferencia es mínima. En esta investigación el método de SMC se estructuró de la siguiente manera, considerando 12,000 cálculos (ver capítulo 4):

1. Se genera un valor de cada variable aleatoria continua de acuerdo con su respectiva PDF
2. Cada valor se reemplaza dentro de la función de comportamiento
3. Se calcula el valor de la función de comportamiento
4. Al final se obtienen 12,000 valores de la función de comportamiento o margen de seguridad. Para este conjunto de valores se calculan el promedio, la desviación estándar.

## 2.6.2 Método Hasofer-Lind

El método Hasofer-Lind (Hasofer y Lind 1974) se basa en transformar las variables aleatorias continuas a un sistema coordenado estandarizado (SCE). Si  $R$  y  $Q$  son variables aleatorias normalmente distribuidas, entonces:

$$R' = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R}, Q' = \frac{Q - \mu_Q}{\sigma_Q} \quad (2.46)$$

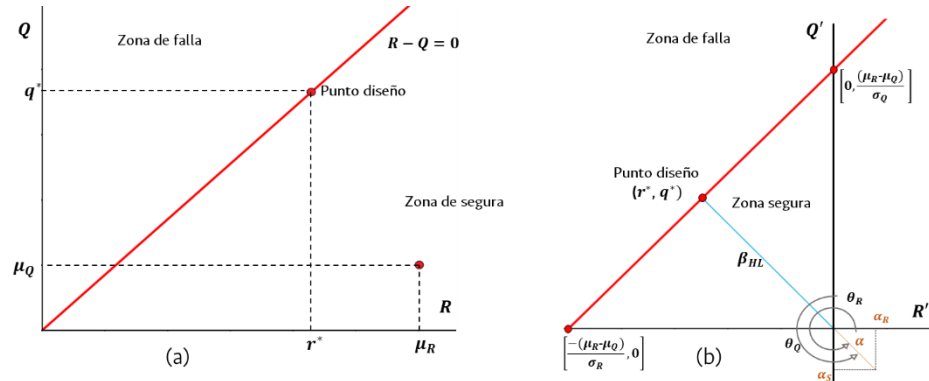
donde  $R'$  y  $Q'$  son variables aleatorias con  $\mu_{R',Q'} = 0$  y  $\sigma_{R',Q'} = 1$ .

Al sustituir  $R'$  y  $Q'$  en la ecuación 2.35 se obtiene la función de comportamiento o el margen de seguridad en el SCE (Bastidas-Arteaga y Soubra 2014):

$$MS(R', Q') = Z(R', Q') = \sigma_R R' - \sigma_S S' + \mu_R + \mu_Q \quad (2.47)$$

En la figura 2-17 la gráfica de la izquierda representa el sistema de coordenadas original mientras a la derecha se muestra el SCE. El punto sobre la superficie de falla ( $Z = 0$ ) se denomina punto de diseño.

**Figura 2-17:** Representación geométrica del método Hasofer-Lind



**Fuente:** Elaboración propia

Geoméricamente el índice de confiabilidad calculado con el método de Hasofer-Lind ( $\beta_{HL}$ ) corresponde a la mínima distancia desde el origen del SCE a la superficie de falla ( $Z = 0$ ). Con trigonometría básica se obtiene que:

$$\beta_{HL} = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}} \quad (2.48)$$

En su forma general, el método de Hasofer-Lind es un problema de optimización en el que se busca la mínima distancia entre el origen del SCE y la superficie de falla sujeta a que  $Z(R', Q') = 0$ . Si la función de comportamiento está compuesta de  $n$  variables aleatorias, esta distancia puede ser estimada como:

$$\beta_{HL} = - \frac{\sum_{i=1}^n x_i' \left( \frac{\partial Z}{\partial x_i'} \right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial Z}{\partial x_i'} \right)^{2*}}} \quad (2.49)$$

donde  $\left( \frac{\partial Z}{\partial x_i'} \right)^*$  es la  $i$ -ésima derivada parcial evaluada en el punto de diseño  $(x_1'^*, \dots, x_n'^*)$ , cuya representación en el SCE es:

$$x_i'^* = -\alpha_i \beta_{HL}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.50)$$

donde  $\alpha_i$  son los cosenos directores de los ejes de  $X_i'$  en el SCE, los cuales se calculan así:

$$\alpha_i = \frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial x'_i}\right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Z}{\partial x'_i}\right)^{2*}}} \quad (2.51)$$

El punto de diseño en el sistema de coordenadas original se calcula con la ecuación 2.45:

$$x'_i{}^* = \mu_{X_i} - \alpha_i \sigma_{X_i} \beta_{HL} \quad (2.52)$$

Con este juego de ecuaciones y con la implementación de un algoritmo se puede determinar de manera iterativa el valor de  $\beta_{HL}$ . Existen varios algoritmos en la literatura diseñados para este fin. Uno de los más usados es el de Rackwitz (1976), el cual se describe brevemente enseguida:

1. Definir la función de comportamiento  $Z(\mathbf{X})$
2. Asumir valores iniciales para el punto de diseño  $x'_i{}^*$ . Para las  $n - 1$  variables aleatorias con frecuencia se usa el promedio. La última variable aleatoria se obtiene igualando la función de comportamiento a cero.
3. Calcular los puntos de diseño  $x'^{*} = [x'_1{}^*, \dots, x'_n{}^*]$  en el SCE:  $x'_i{}^* = \frac{(x_i^* - \mu_{X_i})}{\sigma_{X_i}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$
4. Calcular las derivadas parciales de la función e comportamiento con respecto a las variables en el espacio reducido y evaluarlas en  $x'_i{}^*$ :

$$\frac{\partial Z}{\partial x'_i} = \frac{\partial Z}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial x'_i} = \frac{\partial Z}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \quad (2.53)$$

5. Definir el vector columna  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A}_i = \left(\frac{\partial Z}{\partial x'_i}\right)^* \quad (2.54)$$

6. Calcular  $\beta_{HL}$

$$\beta_{HL} = -\frac{\mathbf{A}^T \mathbf{x}'^*}{\sqrt{\mathbf{A}^T \mathbf{A}}} \quad (2.55)$$

7. Calcular los cosenos directores

$$\alpha_i = \frac{A_i}{\sqrt{\mathbf{A}^T \mathbf{A}}} \quad (2.56)$$

8. Obtener los nuevos puntos de diseño  $x'_i{}^* = -\alpha_i \beta_{HL}$  para las  $n - 1$  variables aleatorias



9. Calcular las coordenadas del nuevo punto de diseño en el sistema de coordenadas original para las  $n - 1$  variables aleatorias:  $x_i^* = \mu_{X_i} + x_i \sigma_{X_i}$
10. Calcular la última variable aleatoria en el espacio original sujeta a que  $Z(\mathbf{X}) = 0$
11. Repetir los pasos 3 a 10 hasta que  $\beta_{HL}$  converja.

Para los casos en donde las variables aleatorias no siguen una distribución normal, Rackwitz y Flessler (1978) propusieron transformar cada variable que no sigue una distribución normal a una variable normal equivalente con valor esperado  $\mu_{X_i}^e$  y desviación estándar  $\sigma_{X_i}^e$ , los cuales se evalúan en el punto de diseño  $x_i^*$  así:

$$\mu_{X_i}^e = x_i^* - \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)] \sigma_{X_i}^e \quad (2.57)$$

$$\sigma_{X_i}^e = \frac{\phi[\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]]}{f_{X_i}(x_i^*)} \quad (2.58)$$

donde  $\Phi^{-1}$  y  $\Phi$  son la CDF y la PDF de la variable estándar, respectivamente y  $F_{X_i}$ ,  $f_{X_i}$  son la CDF y la PDF de la variable original. Con estas consideraciones el algoritmo presentado debe modificarse de la siguiente manera:

1. Pasos 1 y 2 siguen igual
2. Evaluar  $\mu_{X_i}^e$  y  $\sigma_{X_i}^e$  para cada variable que no sigue una distribución estándar. Estos valores serán usados para determinar el punto de diseño en el SCE:

$$x_i'^* = \frac{(x_i^* - \mu_{X_i}^e)}{\sigma_{X_i}^e} \quad (2.59)$$

3. Pasos 4 a 8 siguen igual
4. En el paso 9 la evaluación en el sistema de coordenadas original se modifica por:

$$x_i^* = \mu_{X_i}^e + x_i \sigma_{X_i}^e \quad (2.60)$$

5. Los pasos 10 a 11 siguen igual.



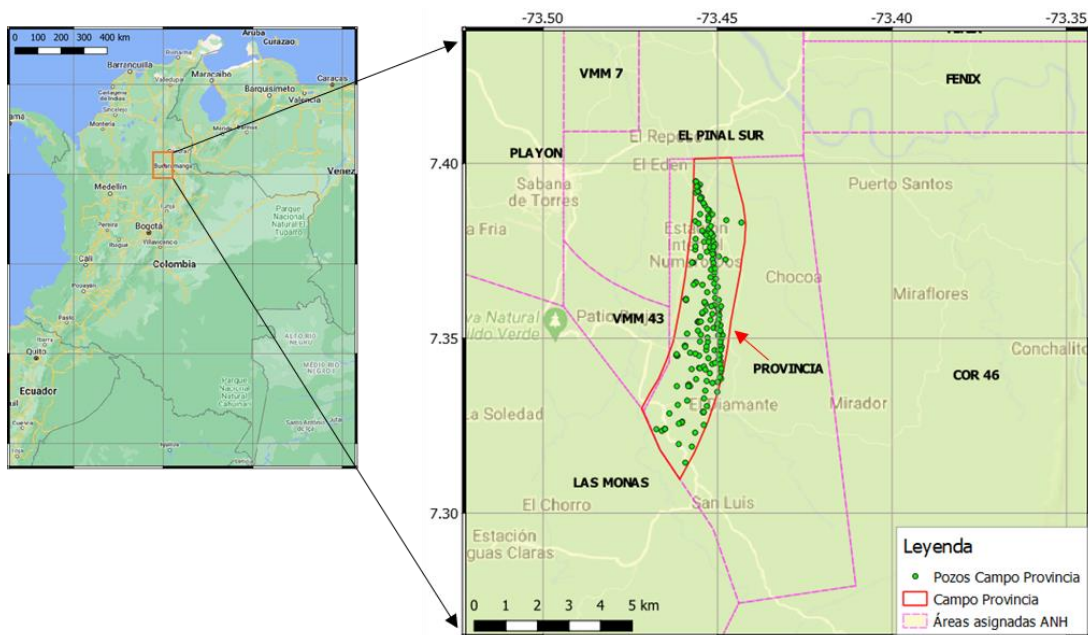
### 3. Modelo de evaluación por confiabilidad de la producción de arena

Este capítulo inicia con la presentación de las generalidades del área de estudio y la descripción de la información que se utilizó para obtener las propiedades geomecánicas, esfuerzos y presiones de poros de las unidades de interés. Luego se muestra el procedimiento para estimar el índice de confiabilidad asociado con el inicio de la producción de arena y se exponen los análisis estadísticos de los datos.

#### 3.1 Generalidades del Campo Provincia

El campo Provincia está localizado en el VMM en cercanías del municipio de Sabana de Torres del departamento de Santander (figura 3-1).

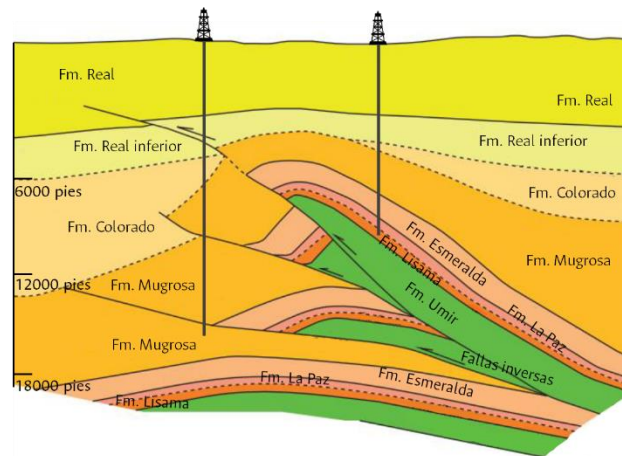
Figura 3-1: Localización del Campo Provincia.



Fuente: Elaboración propia.

En 2010 la Agencia Nacional de Hidrocarburos (ANH) otorgó la explotación unificada de los campos Conde, Santos, Suerte y Sabana en un solo campo llamado Provincia. El modelo estructural del campo corresponde a un anticlinal asimétrico caracterizado por fallas inversas en sentido Norte-Sur y pequeñas fallas normales con saltos locales hacia la cresta de la estructura (figura 3-2). Las unidades o formaciones (Fm) productoras del Campo Provincia Lisama, La Paz, Esmeraldas y Mugrosa corresponden a sedimentos del Terciario. Con el objetivo de examinar la conectividad de las unidades mencionadas, estas se han dividido en subunidades de arena como se muestra en la tabla 3-1.

**Figura 3-2:** Esquema del modelo estructural del campo Provincia.



**Fuente:** Modificado de un reporte interno Ecopetrol (2010).

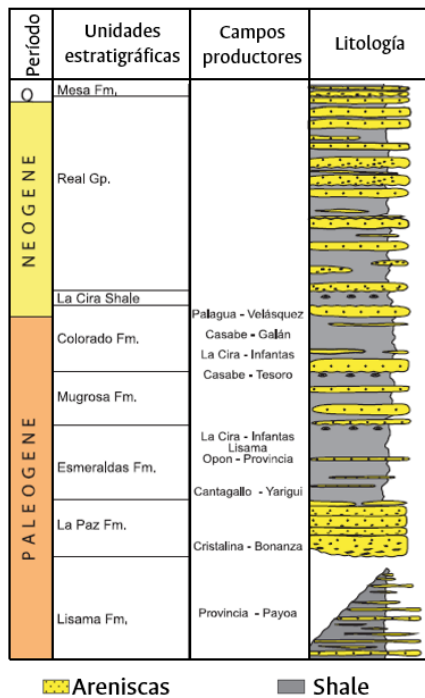
**Tabla 3-1:** Formaciones productoras Campo Provincia

Formación	Arena	Época geológica
Lisama	Lisama	Paleoceno
La Paz	L, K	Eoceno
Esmeraldas	N, M	Eoceno
Mugrosa	P, O	Oligoceno

La Fm Lisama está compuesta de areniscas de grano fino a medio con tendencia a presentar areniscas de grano grueso hacia el tope. La Fm La Paz es una serie de areniscas conglomeráticas masivas intercaladas con limo y arcilla de espesor variable. Las

formaciones Mugrosa y Esmeraldas son de origen fluvial y se componen de areniscas intercaladas con limo y arcilla (ver figura 3-3). La permeabilidad en las formaciones Mugrosa, y Esmeraldas varía entre 5-200 md, cuyo orden de magnitud es similar a la Fm Lisama que oscila entre 10-100 md pero significativamente menor que la Fm La Paz donde la permeabilidad varía entre 10 -1000 md. Debido a la complejidad estructural del campo algunos pozos perforados no han atravesado toda la secuencia de formaciones. Por ejemplo, la Fm Lisama está restringida hacia la zona Sur-Oeste del campo debido a la presencia de la discordancia del Eoceno medio.

**Figura 3-3:** Columna estratigráfica general del VMM desde el Paleógeno hasta el Cuaternario.



**Fuente:** Modificado de “Colombian sedimentary basins”, de Barrero et al., (2007), Bogotá, Colombia, ANH.

El mecanismo de producción de hidrocarburos del Campo Provincia es el empuje de gas en solución. Este mecanismo ocurre en yacimientos saturados cuya presión es igual o menor que la presión de burbuja, en donde el gas disuelto en el petróleo escapa de la solución en forma de burbujas las cuales empujan el petróleo hacia el pozo. A medida que la presión del yacimiento declina se liberan más burbujas que se unen entre sí moviéndose como una sola fase. Con el tiempo, el gas empieza a desplazarse mucho más rápido que el petróleo ya que la viscosidad del gas es mucho menor que la del petróleo, lo que a su

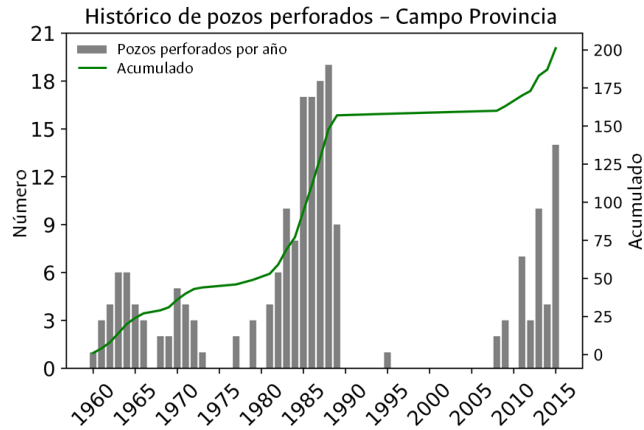
vez induce una declinación acelerada de la presión del yacimiento. El Campo Provincia tiene más de 60 años en producción caracterizados por varios períodos de intensas campañas de perforación los cuales se muestran en la figura 3-4. El primero abarca desde 1960 hasta 1975, tiempo en el que se perforaron alrededor de 40 pozos. En la década de 1980 se alcanzan casi los 160 pozos, período marcado por un acelerado desarrollo del campo. Finalmente, entre 2008 y 2015 se perforan otros 43 pozos. Con corte a 31 de diciembre de 2021 operaban 93 pozos productores cuya producción acumulada de petróleo (BBL), gas (KPC) y agua (BW) se indica en la tabla 3-2. Durante su explotación, los pozos del Campo Provincia han manifestado diversos efectos no deseados como por ejemplo: colapsos, restricciones de herramientas y producción de arena, especialmente en las formaciones Mugrosa y Esmeraldas. La mayoría de colapsos y varios casos de producción de arena ocurrieron entre 1980 y 1990, período con la mayor actividad de perforación en el Campo Provincia. Algunos pozos perforados durante esta época se encuentran hoy cerrados o abandonados debido a los volúmenes altos de arena.

**Tabla 3-2:** Volúmenes acumulados del Campo Provincia a corte a 31 de diciembre de 2021

Fluido	Unidad	Cantidad
Petróleo	BBL (Barriles de petróleo)	54.593.584
Gas	KPC (Miles de pies cúbicos estándar)	298.456.723
Agua	BW (Barriles de agua)	2.500.681

Entre 2010 y hasta 2016, debido a problemas generados por la producción de arena, se suspendieron temporalmente los pozos Santos 159 y Santos 118 generando una producción diferida de 194 BOPD (*barrels of oil per day*) y 608 KPCD. El pozo Suerte 61 ha reducido su potencial de producción de hidrocarburos en 133 BOPD y 1000 KPCD. La mayoría de los problemas asociados con la producción de arena en el Campo Provincia se han presentado en las formaciones Mugrosa y Esmeraldas, principalmente en los pozos Santos y Suerte. Estas formaciones reúnen algunos de los factores condicionantes para la producción de arena. Por ejemplo, son rocas relativamente jóvenes en el contexto geológico con una pobre consolidación y por ende una baja resistencia mecánica. Además, la declinación de la presión de yacimiento podría ser considerada un factor detonante de la producción de arena en algunas subunidades de estas formaciones.

**Figura 3-4:** Histórico del número de pozos perforados en el Campo Provincia.



**Fuente:** Elaboración propia.

A continuación, se describe la información de entrada que se usó en este estudio y sus principales limitaciones.

### 3.2 Descripción de la información disponible

Se utilizó información de 73 pozos de Santos y Suerte, proporcionada por profesionales encargados del desarrollo del Campo Provincia. Las características de la información se resumen en la tabla 3-3. Si bien se consideró la información de 73 pozos para calcular las propiedades geomecánicas, los esfuerzos y la presión de poros, la evaluación por confiabilidad se aplicó a 40 pozos dado que no todos los pozos tenían registros direccionales o los valores de la presión de la presión de fondo de pozo y en el caso de los pozos con producción de arena varios no reportan la formación en la que se presentó la producción de arena.

**Tabla 3-3:** Información de entrada del modelo

No.	Tipo de información	Descripción	Uso en el modelo
1	Listado de pozos con medidas de presión a nivel de yacimiento	Lista de pozos Santos y Suerte con pruebas MDT (Modular Formation Dynamics Tester) de presión	Limitar la evaluación de la producción a pozos con pruebas MDT
2	Datos de presión a nivel de yacimiento	Para cada pozo del listado, valores de la presión en <i>psi</i>	Calibrar la presión de poro en las areniscas
3	Registros direccionales	Archivos en formato Excel, PDF o texto plano con la trayectoria del pozo	Referencia para los cálculos en profundidad de las propiedades geomecánicas, esfuerzos y presiones de poro

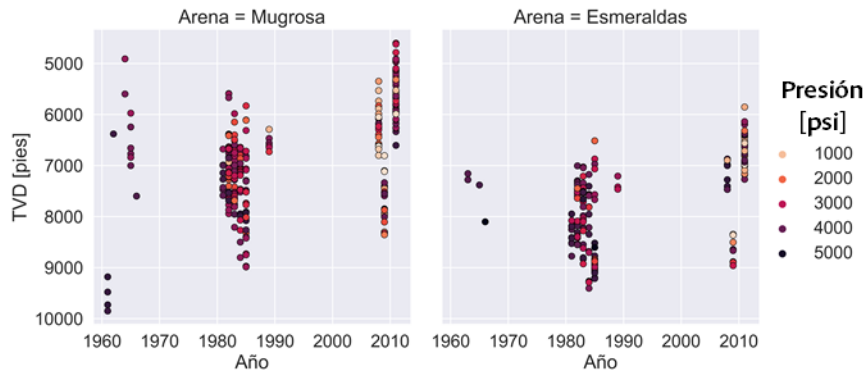
4	Registros de pozos, sónicos, volumen de arcilla y propiedades petrofísicas	Registros geofísicos de propiedades físicas de las rocas en profundidad y estimación de porosidad, permeabilidad, volumen de arcilla. El muestreo de los registros es 0.5 pies.	Cálculo de propiedades geomecánicas mediante correlaciones empíricas, cálculo del $\sigma_v$ y cálculo de la presión de poro
5	Registros de imágenes y estimación de la orientación del $\sigma_H$ , registro caliper	Imágenes resistivas de pozos, azimut promedio del $\sigma_H$ . El caliper mide la forma y tamaño del hueco.	La orientación del esfuerzo horizontal máximo sirve para transformar los esfuerzos a coordenadas cilíndricas
6	Esfuerzo horizontal mínimo, $\sigma_h$	Valor del esfuerzo horizontal mínimo <i>insitu</i> calibrado con pruebas de gradiente de fractura y eventos de perforación.	Construir el tensor de esfuerzos principales
7	Deformaciones tectónicas ( $\epsilon_{Hmin}$ , $\epsilon_{Hmax}$ )	Valor de las deformaciones tectónicas estimadas con pruebas de campo	Cálculo de los valores de esfuerzos horizontales <i>in situ</i>
8	Modelos geomecánicos 1D de pozo	Datos de propiedades mecánicas*, correlaciones calibradas, rango de valores de los esfuerzos horizontal máximo y mínimo y de la presión de poro	Incorporación directa para la evaluación del inicio de la producción de arena
9	Histórico de producción de arena	Listado de pozos con producción de arena. Se solicitó nombre del pozo, valor de la $p_w$ o <i>drawdown</i> con su respectiva fecha y la formación asociada	El valor de la $p_w$ es necesario en el cálculo de los criterios de producción de arena. Los pozos y la fecha en la que se detectó la producción de arena se usan para estimar las condiciones de presión de yacimiento relacionadas con la producción de arena

\*No hay disponibilidad de pruebas de resistencia mecánica en laboratorio.

La figura 3-5, muestra los valores de presión medidos durante las diferentes campañas de perforación. Se observa que hasta finales de los 80, la tendencia de la presión en la Fm Mugrosa era cercana a los 4000 psi mientras que para la Fm Esmeraldas, en promedio los valores eran superiores a los 4500 psi. Hacia 2010 se evidencia una caída de la presión de yacimiento en ambos casos, registrando presiones cercanas a 2000 psi o menores en algunas zonas. Por ello, los 40 pozos analizados se dividieron en dos categorías en función de la presión de yacimiento: pozos en condiciones iniciales de presión (1980 y 1985) y pozos en condiciones recientes de presión (luego de 2007). El objetivo de esta división es separar el análisis en dos escenarios: un escenario donde la producción de arena ocurre en las primeras etapas de producción del campo (condiciones iniciales) y un escenario donde la producción de arena ocurre durante la declinación de la presión de yacimiento (condiciones recientes o actuales).



**Figura 3-5:** Histórico de presiones medidas a nivel de yacimiento en las Fm Mugrosa y Esmeraldas.



**Fuente:** Elaboración propia.

En la tabla 3-4 se muestra el listado de 40 pozos con sus respectivas clasificaciones: con o sin producción de arena y el escenario de presión de yacimiento considerado.

**Tabla 3-4:** Clasificación de los pozos para los escenarios de análisis

Producción de arena	Pozo		Presión de yacimiento
Sin producción de arena	Santos 42	Santos 43	Inicial
	Santos 45	Santos 46	
	Santos 47	Santos 49	
	Santos 53	Suerte 19	
	Suerte 22		
Con producción de arena	Santos 50	Suerte 15	
	Santos 57	Suerte 16	
	Santos 60	Suerte 17	
	Suerte 14	Suerte 20	
Sin producción de arena	Santos 116	Santos 120	Reciente
	Santos 122	Santos 123ST2	
	Santos 125ST	Santos 129	
	Santos 132	Santos 158	
	Santos 160	Santos 161	
	Santos 168	Santos 169	
	Santos 170	Suerte 51	
	Suerte 55	Suerte 56	
Con producción de arena	Santos 127	Santos 128	
	Santos 159	Suerte 49	
	Suerte 52ST	Suerte 54	
	Suerte 60		

La información del registro histórico de producción de arena fue entregada por profesionales del Campo Provincia con corte a 31 de diciembre de 2016 con el siguiente formato:

**Tabla 3-5:** Formato de presentación de los registros históricos de producción de arena

Pozo	Estado del Pozo	Tope (ft)	Base (ft)	Posible Fuente	ft/año	Clasificación
Suerte 60	Cerrado	9287	9375	O1 - N5 - N2 - M5	352	Alto
Santos 112	Abierto	7370	7761	O13 @ O15	142	Leve

En la tabla 3-5 se pueden identificar el nombre del pozo, su estado actual, el intervalo en profundidad (pies) con producción de arena, la posible fuente de arena expresada en subunidades de las Fm Mugrosa (arenas O) y Esmeraldas (N y M). Además, se indican los pies por año de producción de arena y una clasificación cualitativa del nivel de producción de arena propuesta por profesionales de Ecopetrol con base en el nivel de producción de arena y sus impactos en el pozo. Así como se muestra en la tabla 3-5, en la mayoría de los pozos no es posible determinar con exactitud las subunidades productoras de arena. En cambio, se proponen posibles fuentes de arena con base en las observaciones de campo.

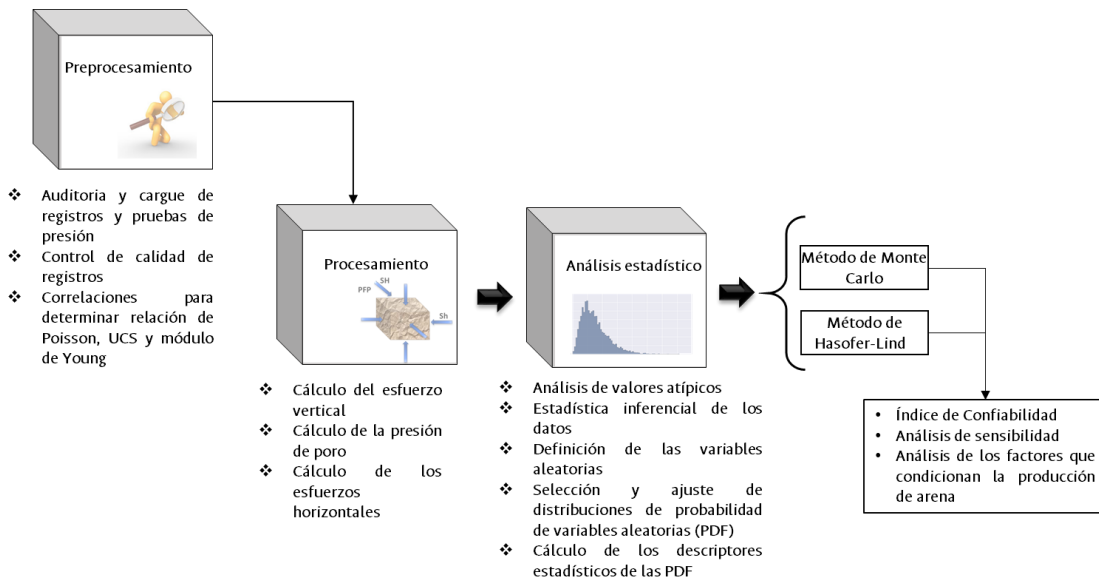
### 3.3 Flujo de trabajo para la evaluación por confiabilidad

El diagrama presentado en la figura 3-6 resume la secuencia de procesos para la evaluación por confiabilidad de la producción de arena en el Campo Provincia. El primer proceso del flujo de trabajo, denominado preprocesamiento, consiste en examinar la información de entrada, hacer control de calidad de los registros y pruebas de presión, y determinar las propiedades geomecánicas a partir de correlaciones empíricas con registros de pozo. Estas correlaciones previamente han sido aplicadas y validadas en otros pozos del Campo Provincia. En seguida, en la etapa de procesamiento se calculan los esfuerzos y la presión de poros para cada formación. Luego el conjunto de valores calculados es analizado estadísticamente para identificar datos atípicos, calcular sus medidas de tendencia central y de dispersión, determinar cuáles variables de la función de

comportamiento son aleatorias y asignar a cada variable su función de densidad de probabilidad. Finalmente se simula la función de comportamiento con los métodos de Monte-Carlo y Hasofer-Lind para determinar el índice de confiabilidad de cada pozo y para cada formación. Con respecto a los modelos analíticos seleccionados como funciones de comportamiento se resaltan las siguientes premisas:

- La resistencia de la roca es función del UCS. La roca es homogénea e isotrópica.
- El inicio de la producción de arena es equivalente a la falla por cortante de la roca alrededor del pozo. No se consideran las fuerzas hidrodinámicas que generan la erosión de los granos.
- Los esfuerzos alrededor del pozo con calculados en coordenadas cilíndricas.
- No se incluyen los efectos de la inyección de agua en el yacimiento (recobro secundario).
- El medio es continuo y poroelástico.
- Durante el agotamiento de la presión del yacimiento se asume desplazamientos laterales nulos del yacimiento y esfuerzo vertical constante. Los cambios en los esfuerzos horizontales, producto del agotamiento de la presión en el yacimiento, se calculan usando la teoría poroelástica lineal.
- Las Fm Mugrosa y Esmeraldas se tratan como unidades independientes.

**Figura 3-6:** Flujo de trabajo para la evaluación por confiabilidad



**Fuente:** Elaboración propia.

### 3.3.1 Preprocesamiento

La inspección inicial de los registros permitió identificar que algunos pozos no tienen información asociada con los registros sínicos y de densidad y otro reducido conjunto de pozos presenta ausencia de información en ciertos intervalos de profundidad. En el Campo Provincia se han validado correlaciones empíricas, con base en la experiencia en el modelamiento geomecánico 1D de pozos, para deducir la  $V_p$  o  $DTCO$  en función del resistivo profundo, la  $V_s$  o  $DTSM$  en función de la  $V_p$  y el volumen de arcilla ( $V_{shale}$ ) y la densidad ( $\rho$ ) en función del  $V_p$ ; dichas correlaciones se usaron para completar la información faltante en los pozos. La relación de Poisson, el módulo de Young y el UCS son calculados a partir de los registros de  $DTCO$ ,  $DTSM$  y  $\rho$ . En la tabla 3-6 se exponen las correlaciones y ecuaciones usadas durante la etapa de preprocesamiento.

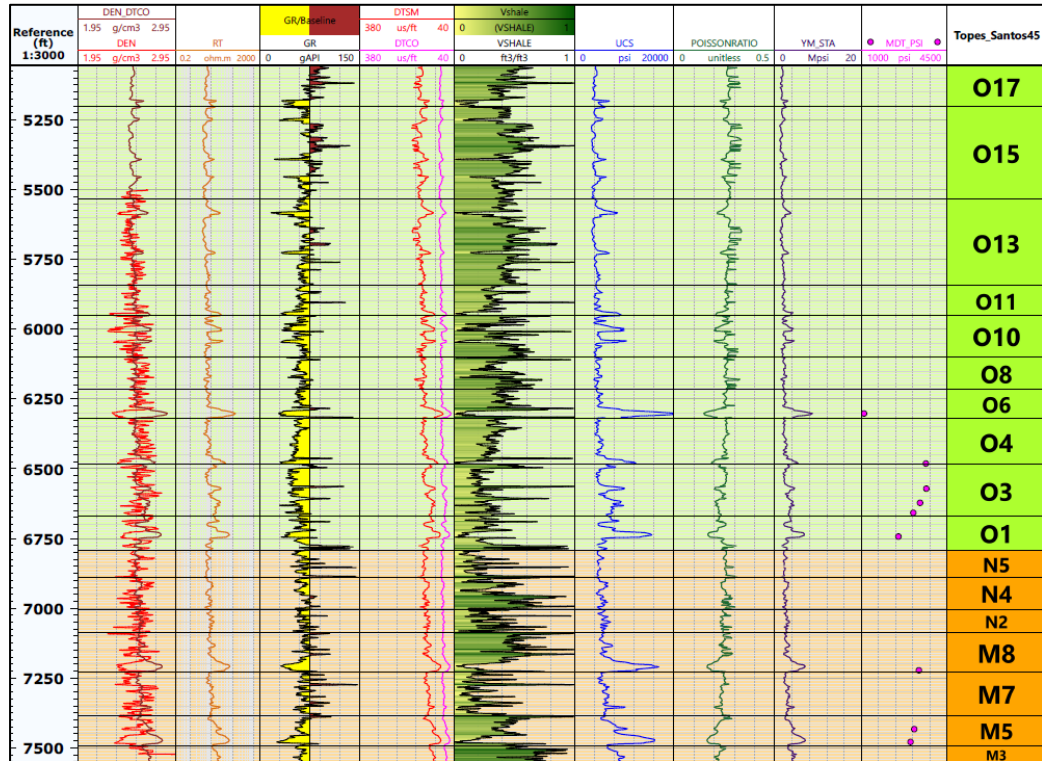
**Tabla 3-6:** Correlaciones y ecuaciones usadas en la etapa de preprocesamiento

No.	Variable	Insumo	Correlación
1	$DTCO, V_p$	Resistivo, $Res$ $MD, Measured Depth$	$DTCO \left[ \frac{us}{ft} \right] = \frac{1000}{2 * (MD * Res)^{\frac{1}{6}}}, V_p = \frac{1}{DTCO} \quad (3.1)$
2	$DTSM, V_s$	$DTCO, V_{shale}$	$V_{shale} > 0.6:$ $DTSM \left[ \frac{us}{ft} \right] = \frac{304.8}{0.8621 * \left( \frac{304.8}{DTCO} \right)^{-1.1724}}, V_s = \frac{1}{DTSM} \quad (3.2)$ $V_{shale} \leq 0.6:$ $DTSM \left[ \frac{us}{ft} \right] = \frac{304.8}{0.754 * \left( \frac{304.8}{DTCO} \right)^{-0.657}}, V_s = \frac{1}{DTSM} \quad (3.3)$
3	Densidad, $\rho$	$DTCO$	$\rho \left[ \frac{g}{cm^3} \right] = 0.23 * \left( \frac{1}{DTCO * 0.000001} \right)^{0.25} \quad (3.4)$
4	Poisson, $\nu$	$DTCO, DTSM$	$\nu = \frac{V_p^2 - 2V_s^2}{2(V_p^2 - V_s^2)} \quad (3.5)$
5	Módulo de Young estático ( $E_{sta}$ )	Densidad, $DTSM$	$E_{dyn} = 2 \left( \frac{\rho}{DTSM^2} \right) * (1 + \nu) * 13400 \quad (3.6)$ $E_{sta} [Mpsi] = (0.4533 * E_{dyn}) + 0.0293 * E_{dyn}^2 \quad (3.7)$
6	UCS (Horsrud, P., 2001)	$DTCO$	$UCS [psi] = 145.038 * 0.77 * \left( \frac{304.8}{DTCO} \right)^{2.93} \quad (3.8)$

En la figura 3-7 se muestran los registros y las propiedades geomecánicas calculadas para el pozo Santos-45. Se observa ausencia del registro densidad en las subunidades O15 y O17, por lo que en este intervalo se utiliza la correlación 3 para completar el registro en dicha sección. Los demás registros presentan continuidad en las Fm Mugrosa (O13-O1) y Esmeraldas (N5-M3). En la figura 3-7 el registro DEN\_DTCO es la densidad derivada del registro sínico DTCO. En su orden de izquierda a derecha se presentan: la densidad (DEN), el resistivo (RT), el registro de gamma ray (GR), los tiempos de retardos de las

ondas P (DTCO) y S (DTSM), el  $V_{shale}$  calculado a partir del registro de GR, el UCS, la relación de Poisson, el módulo de Young estático y las presiones de yacimiento medidas.

**Figura 3-7:** Ejemplo de registros de pozos y variación de las propiedades geomecánicas en profundidad



**Fuente:** Elaboración propia. Imagen tomada del software Techlog (2019) desarrollado por la empresa Schlumberger.

### 3.3.2 Procesamiento

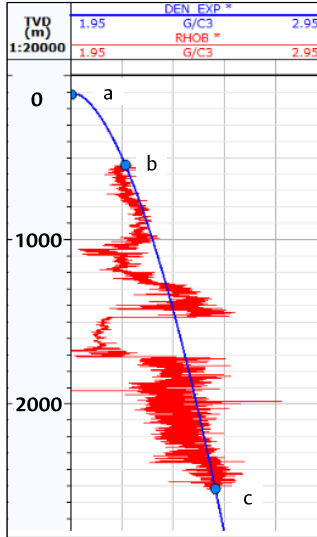
A partir del registro de densidad se puede obtener el esfuerzo vertical aplicando la expresión 3.9:

$$\sigma_V = \int_0^z \rho(z) dz \quad (3.9)$$

donde  $\rho(z)$  es la densidad de la roca en función de la profundidad. Con frecuencia las mediciones de densidad en la zona superior al yacimiento son incompletas por lo que se determina un registro sintético a partir de la extrapolación de la curva original, correlaciones empíricas o de la ecuación de Gardner (1974). En este trabajo se optó por la extrapolación de la curva original, procedimiento que consiste en establecer dos puntos de control sobre

la curva original (b y c en la (figura 3-8) y uno cerca de la superficie (a) para generar una tendencia de los valores de densidad desde la superficie hasta el registro.

**Figura 3-8:** Extrapolación de los valores de densidad.



**Fuente:** Imagen modificada del centro de ayuda del software Techlog (2019) desarrollado por la empresa Schlumberger.

Asumiendo deformación vertical uniaxial poroelástica durante la agregación de rocas sedimentarias (sobrecarga) se pueden calcular los esfuerzos horizontales *in situ*  $\sigma_{H_o}$  y  $\sigma_{h_o}$  en función del  $\sigma_V$ ,  $P_p$ , la relación de Poisson, el coeficiente de Biot ( $\alpha = 1$ ) y las deformaciones tectónicas ( $\varepsilon_{Hmin}$ ,  $\varepsilon_{Hmax}$ ) en ambientes geológicos activos con las siguientes expresiones:

$$\sigma_{h_o} = \frac{\nu}{1-\nu} (\sigma_V - \alpha P_{p_o}) + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \alpha P_{p_o} + \nu \frac{E_{sta}}{1-\nu^2} \varepsilon_{Hmax} + \frac{E_{sta}}{1-\nu^2} \varepsilon_{Hmin} \quad (3.10)$$

$$\sigma_{H_o} = \frac{\nu}{1-\nu} (\sigma_V - \alpha P_{p_o}) + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \alpha P_{p_o} + \frac{E_{sta}}{1-\nu^2} \varepsilon_{Hmax} + \nu \frac{E_{sta}}{1-\nu^2} \varepsilon_{Hmin} \quad (3.11)$$

Los profesionales encargados del desarrollo del campo Provincia han cuantificado las deformaciones tectónicas empleando los resultados de varias pruebas tales como DFIT (*diagnostic fracture-injection test*) o LOT (*leak-off test*) que han servido para calibrar el  $\sigma_{h_o}$ . Según estos análisis se tiene que  $\varepsilon_{Hmin} = 0.0001$  y  $\varepsilon_{Hmax} = 0.0007$ . Para Los yacimientos como los que caracterizan al campo Provincia, en donde se evidencian intercalaciones de

arcillolitas y areniscas, la presión de poros en profundidad se calcula suponiendo que todo el intervalo corresponde a rocas tipo shale y luego se calibran o ajustan los valores de presión de poros en las zonas con presencia de areniscas, las cuales por lo general tienen mediciones tipo MDT. Para el campo Provincia el método usado para la estimación de la presión de poros (inicial o actual) por los profesionales de yacimientos es el de Eaton (1975) cuya formulación es:

$$P_{pg} = \sigma_{vg} - (\sigma_{vg} - P_{ng}) \left( \frac{DTCO_n}{DTCO} \right)^a \quad (3.12)$$

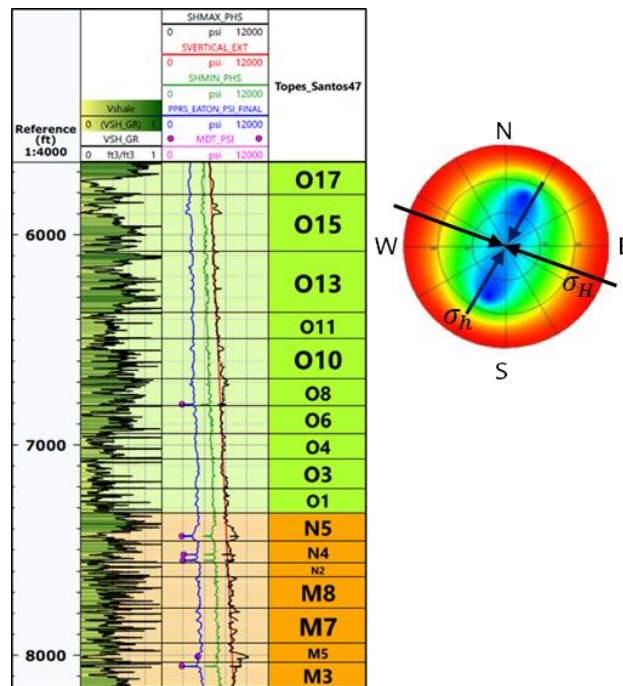
donde  $P_{pg}$  es el gradiente de presión de poro,  $\sigma_{vg}$  es el gradiente del esfuerzo vertical,  $P_{ng}$  es el gradiente de presión normal (por lo general  $P_{ng} = 0.45 \frac{psi}{ft}$ ),  $DTCO_n$  es el tiempo de retardo de la onda P en rocas shale a condiciones normales de presión y  $DTCO$  es el tiempo de retardo de la onda P del registro y  $a$  es un exponente. Con base en la experiencia de las múltiples campañas de perforación y el análisis histórico de eventos de perforación, el exponente  $a$  de la ecuación 3.12 es 0.7. Las condiciones normales de presión de poro se refieren al proceso en el que los sedimentos son cubiertos por otras capas provocando un aumento de la sobrecarga ( $\sigma_v$ ) que compacta los granos, comprime el agua de los poros y reduce la porosidad. Si el agua logra escapar se considera que los sedimentos se han compactado “normalmente”. En términos geomecánicos, la presión normal se refiere a la presión de poro en las formaciones que sigue el gradiente hidrostático ( $P_{ng} = 0.45 \frac{psi}{ft}$ ). Si una formación presenta sobrepresiones su  $P_{pg}$  puede alcanzar valores cercanos al gradiente del esfuerzo vertical. Finalmente, con base en los análisis de *breakouts* y deformaciones con la herramienta caliper realizados por ingenieros del Campo Provincia se ha estimado un azimut del  $\sigma_H$  alrededor de 110°. En la figura 3-9 se muestra a la izquierda un ejemplo de los cálculos de los esfuerzos y de la presión de poros para el pozo Santos-47 mientras que a la derecha se indican las orientaciones de los esfuerzos horizontales. Nótese que el régimen de esfuerzos predominante es de rumbo con algunos intervalos en régimen normal, lo cual es consistente con los mecanismos focales del VMM calculados por Londoño et al., (2019).

### 3.3.3 Análisis estadístico

El análisis estadístico de las propiedades geomecánicas, los esfuerzos y la presión de poros, empieza con la identificación y exclusión de datos atípicos para construir una base

de datos consistente con las características geomecánicas de las Fm Mugrosa y Esmeraldas. Luego se calculan las medidas de tendencia central y de dispersión del conjunto de datos sin valores atípicos y finalmente se ajustan y seleccionan las distribuciones de densidad de probabilidad de las variables aleatorias.

**Figura 3-9:** Izquierda: ejemplo de los cálculos en profundidad de los esfuerzos y la presión de poro. Derecha: azimut de los esfuerzos horizontales en el campo Provincia.



**Fuente:** Imagen modificada del software Techlog (2019) desarrollado por la empresa Schlumberger.

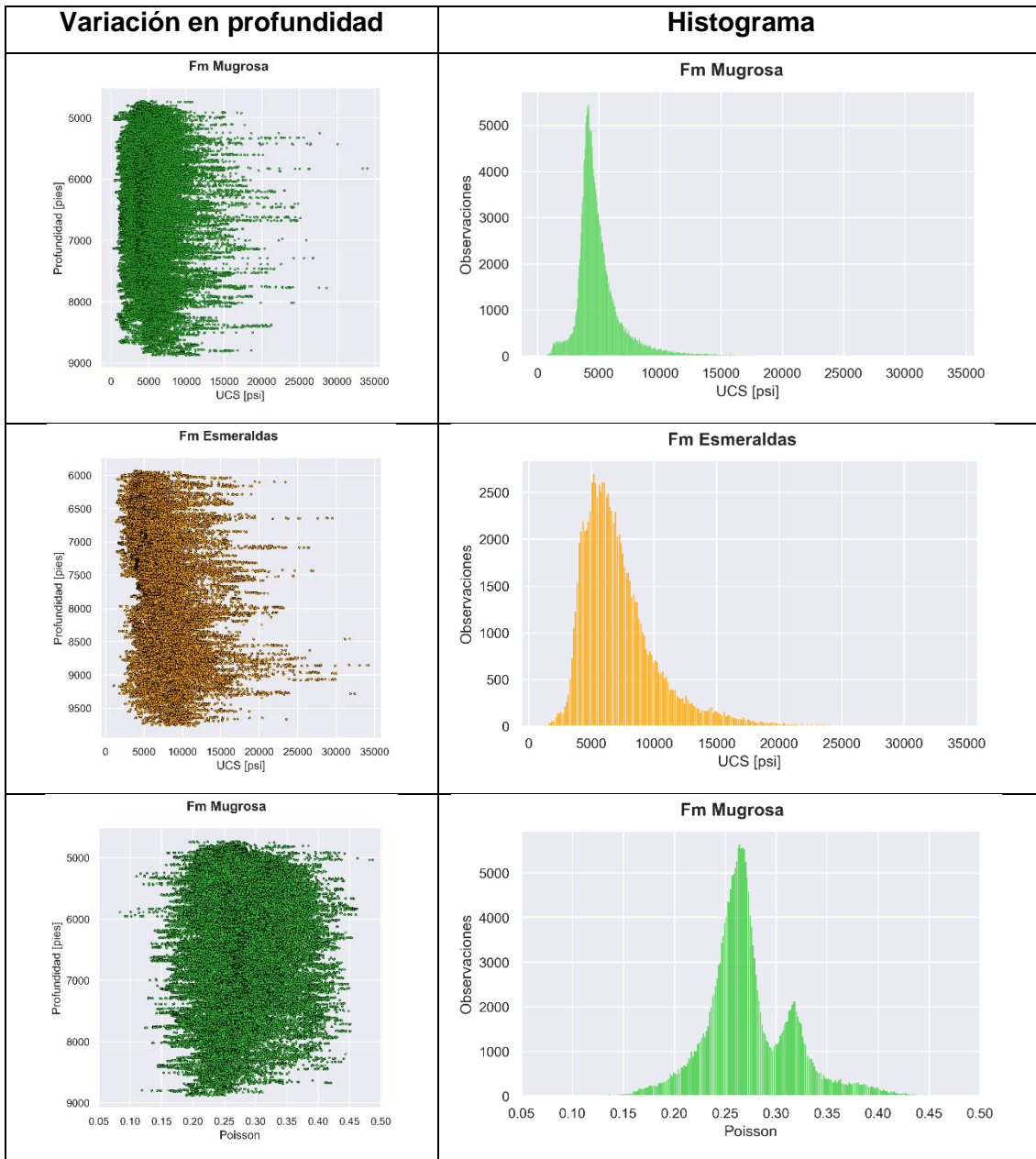
**Datos atípicos de propiedades geomecánicas: UCS y relación de Poisson**

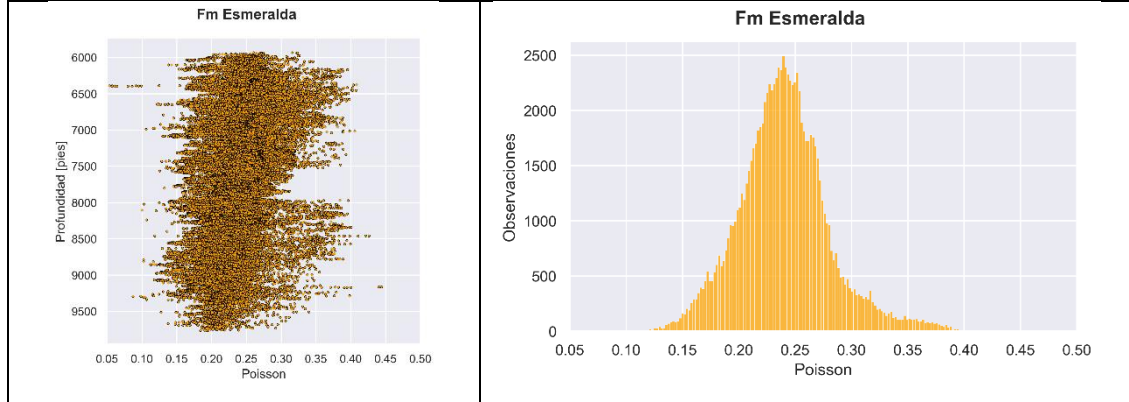
En la tabla 3-7 se muestra la variación en profundidad (pies) y los histogramas de frecuencias del UCS y la relación de Poisson para las Fm Mugrosa y Esmeraldas. Para la Fm Mugrosa los valores de la resistencia UCS se concentran, principalmente entre los 2000 psi y 7000 psi, mientras que para la Fm Esmeraldas varía principalmente entre los 3000 psi y 10000 psi. En ambas formaciones se observan algunos intervalos con resistencias UCS superiores a 20000 psi, las cuales no son características de rocas de la zona del VMM de acuerdo con otros estudios en la misma zona. Por ejemplo, Goyeneche y Hernández (2009) encontraron que la resistencia UCS deducida a partir de registros para



la Fm Mugrosa varía entre los 1600 psi y 5800 psi y para la Fm Esmeralda varía entre 6700 psi y 7200 psi en el Campo Llanito.

**Tabla 3-7:** Variación en profundidad e histogramas de la resistencia UCS y la relación de Poisson

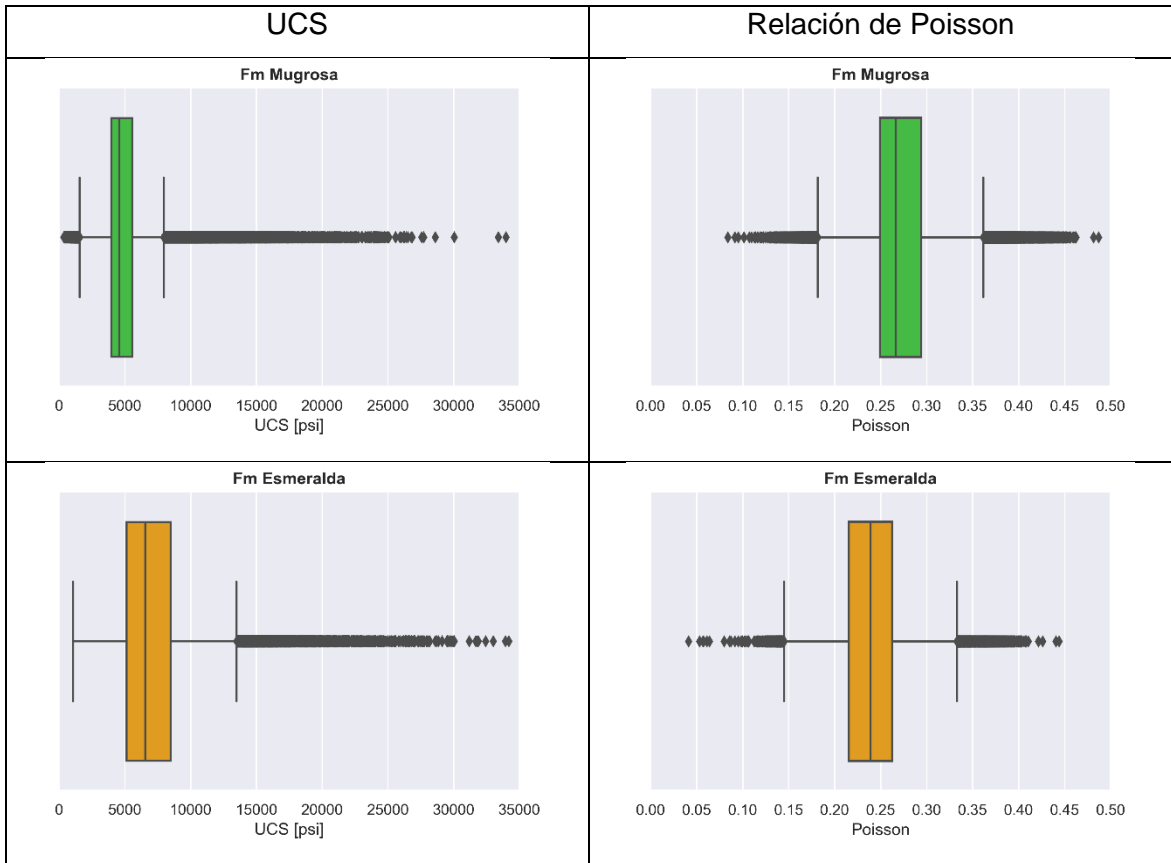




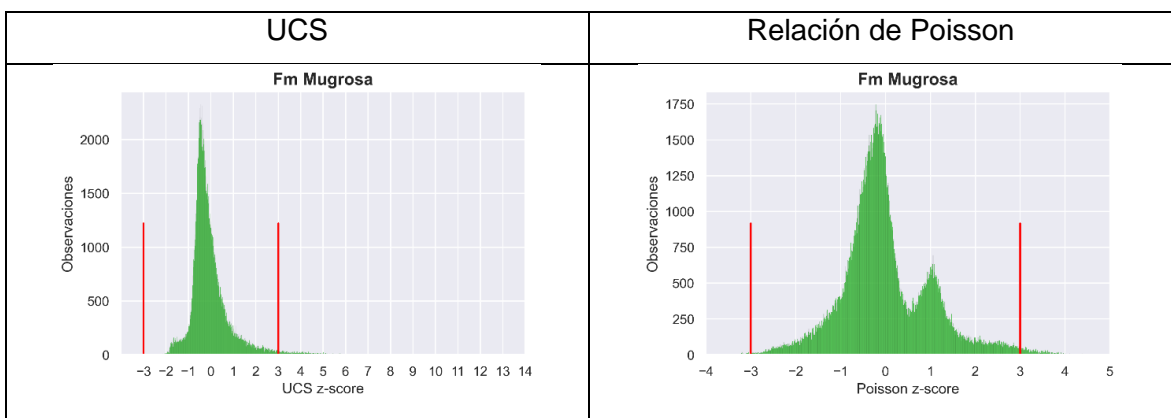
Asimismo, en investigaciones como las de Hoek y Brown (1997), Chang, Zoback, y Khaksar (2006) o Hilgedick (2012), se muestra que en rocas sedimentarias tipo shale o arenisca del Terciario la resistencia UCS varía entre los 1000 psi hasta cerca de los 14000 psi en los casos más extremos. En cuanto a la relación de Poisson se resalta en el histograma de la Fm Mugrosa una segunda concentración de valores alrededor de 0.32 relacionada posiblemente con la presencia de intervalos con alto contenido de limo y arcilla. En ambas formaciones se muestran rangos de la relación de Poisson similares, aunque en la Fm Esmeralda se observan menores frecuencias en los valores mayores a 0.3. En profundidad tanto para la Fm Mugrosas como para la Fm Esmeraldas se evidencian intervalos con valores significativamente menores a 0.2 y mayores a 0.35, los cuales podrían ser datos atípicos teniendo en cuenta las características geológicas de la roca. Este planteamiento se sustenta teniendo en cuenta el trabajo de Goyeneche y Hernández (2009), para el Campo Llanito en el que se estiman valores de la relación de Poisson entre 0.23 y 0.33 para la Fm Mugrosa y valores cercanos a 0.27 para la Fm Esmeralda. Además, en Hilgedick (2012), los ensayos de laboratorio en rocas sedimentarias del Terciario indican valores de la relación de Poisson entre 0.19 y 0.38. Con el uso del diagrama de caja, es posible identificar posibles valores atípicos para la resistencia UCS y la relación de Poisson, tal como se muestra en la tabla 3-8. Los puntos alejados de las líneas verticales se consideran datos atípicos, los cuales se encuentran fuera del rango  $[Q_1 - 1.5 \cdot IQR, Q_3 + 1.5 \cdot IQR]$  donde  $IQR$  es el rango intercuartílico,  $Q_1$  y  $Q_3$  son el primer y tercer cuartil, respectivamente. Otra herramienta que permite analizar y remover los datos atípicos es el z-score cuyo procedimiento consiste en normalizar el conjunto de datos de manera que  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$  y luego identificar aquellos puntos que se alejan  $\pm 3$  unidades del cero. En la tabla 3-9 se presenta la aplicación del z-score a los datos de UCS y la

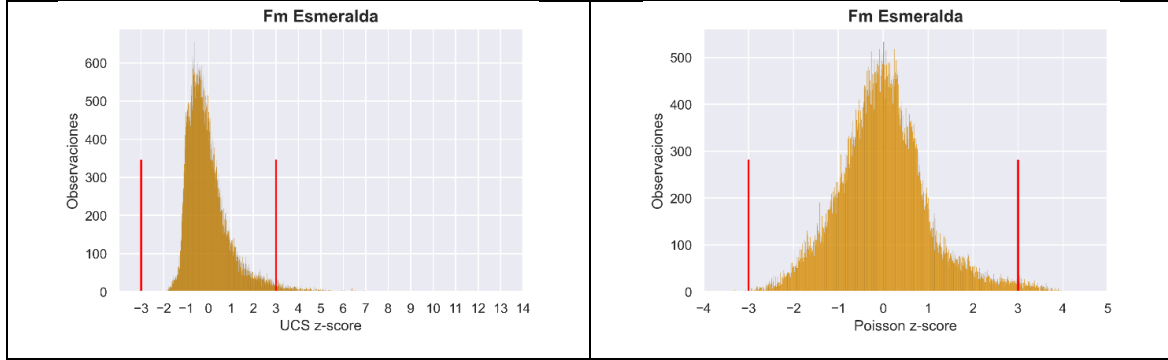
relación de Poisson. Los datos que se alejan de las líneas verticales rojas se consideran datos atípicos.

**Tabla 3-8.** Visualización de datos atípicos con el diagrama de caja.



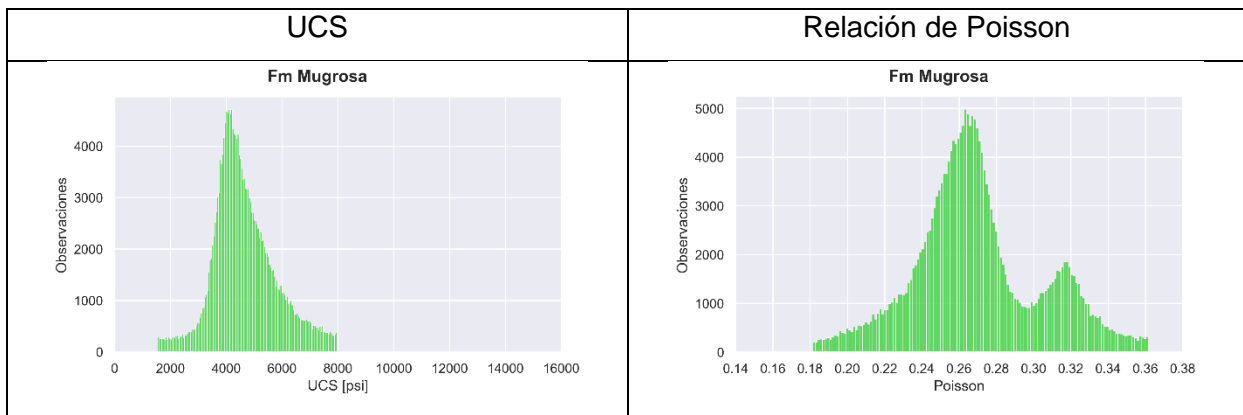
**Tabla 3-9.** Visualización de datos atípicos con z-score.

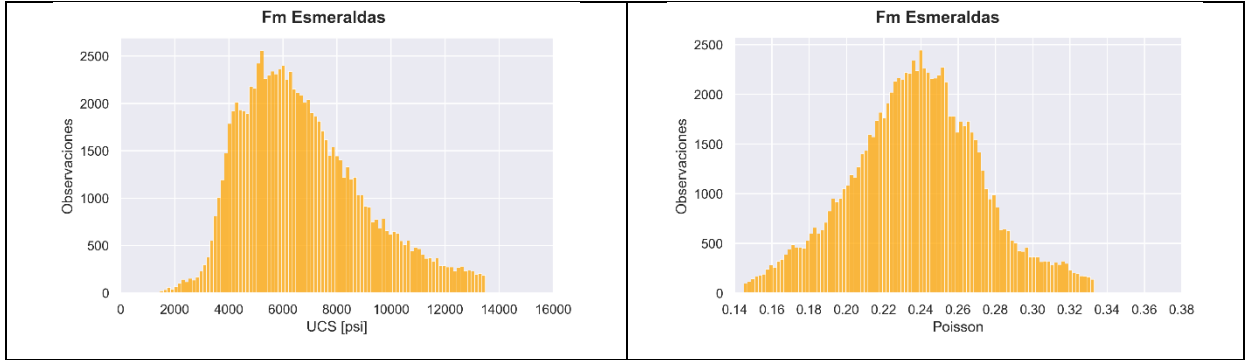




Considerando la resistencia UCS y la relación de Poisson referenciados en otros trabajos para rocas similares a las que caracterizan las Fm Mugrosa y Esmeraldas y con base en los resultados expuestos mediante la aplicación de los dos métodos, es razonable concluir que el rango intercuartílico es el método apropiado para remover los datos atípicos del conjunto de datos ya que excluye los valores que se desvían significativamente del patrón esperado. Por ejemplo, el UCS muestra un rango entre 1000 psi y 13500 psi, y en el caso de la relación de Poisson varía entre 0.15 (mínimo en Fm Esmeralda) y 0.36 (máximo en Fm Mugrosa), los cuales son valores consistente con los trabajos de Goyeneche y Hernández (2009) y Hilgedick (2012). Los histogramas que representan las propiedades geomecánicas sin valores atípicos, luego de aplicar el método del rango intercuartílico se muestran en la tabla 3-10.

**Tabla 3-10.** Histogramas de la resistencia UCS y la relación de Poisson sin datos atípicos





**Datos atípicos de esfuerzos y presión de poro**

En la tabla 3-11 se muestran la variación en profundidad y los histogramas de  $\sigma_{Ho}$ ,  $\sigma_{ho}$ ,  $\sigma_V$  y de la presión de poro inicial ( $P_{po}$ ) de las Fm Mugrosa y Esmeraldas. Es importante anotar que los esfuerzos horizontales y la presión de poro calculados en la etapa de procesamiento y los que se muestran en esta sección están asociados con las condiciones iniciales del yacimiento. En los modelos analíticos que consideran agotamiento de la presión (*depletion*), los esfuerzos horizontales se calculan nuevamente considerando la pérdida de presión de yacimiento ( $\Delta P_{dep}$ ) expresada como:

$$\Delta P_{dep} = P_{po} - P_p \quad (3.13)$$

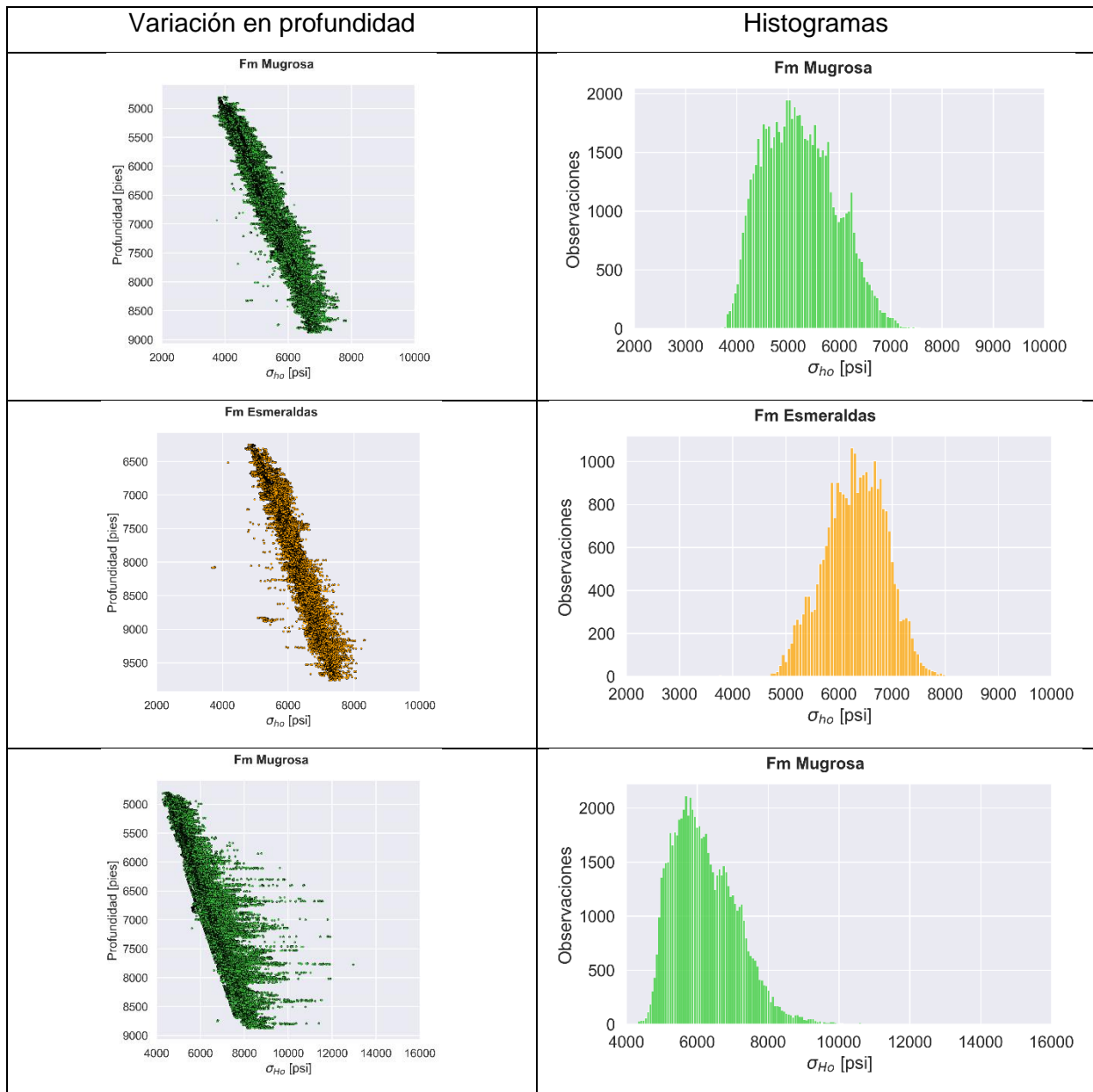
donde  $P_{po}$  es la presión inicial del yacimiento y  $P_p$  es la presión actual. En el capítulo 1 se seleccionaron dos modelos analíticos como funciones de comportamiento: el modelo de Willson et al. (2002) y el modelo de Papamichos y Furui (2019). En Papamichos y Furui (2019) se proponen las siguientes expresiones para estimar los esfuerzos horizontales durante el *depletion*:

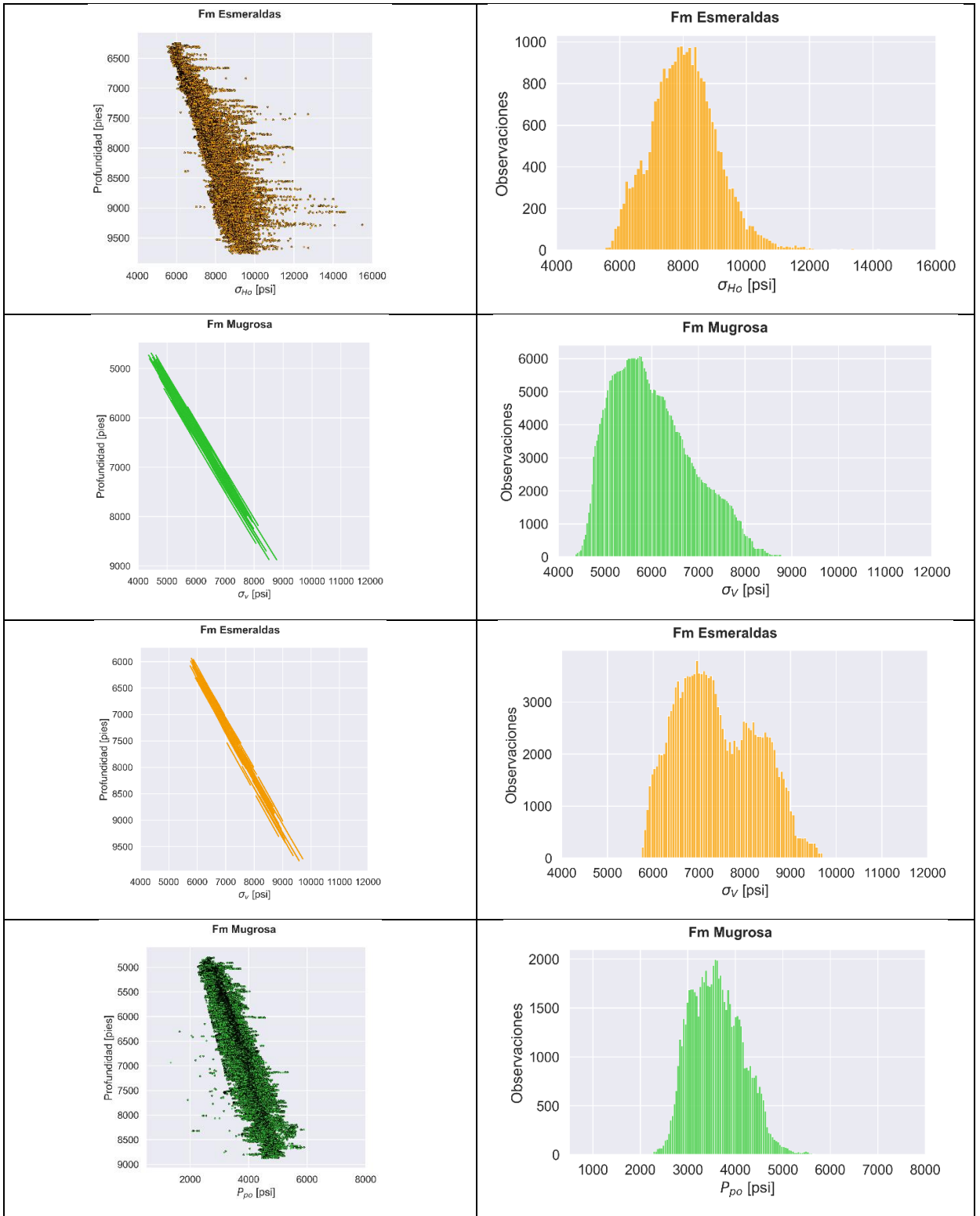
$$\sigma_H = \sigma_{Ho} + \chi_H \Delta P_{dep}; \quad \sigma_h = \sigma_{ho} + \chi_h \Delta P_{dep} \quad (3.15)$$

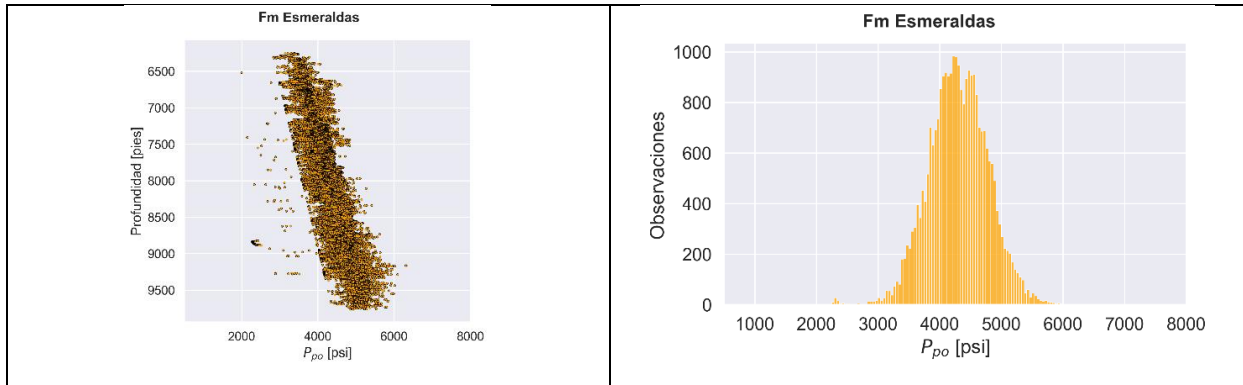
donde  $\chi_H = \chi_h = -\frac{\alpha(1-2\nu)}{1-\nu}$

En la tabla 3-12 se muestra la variación en profundidad y los histogramas de la presión actual (o reciente) de las Fm Mugrosa y Esmeraldas.

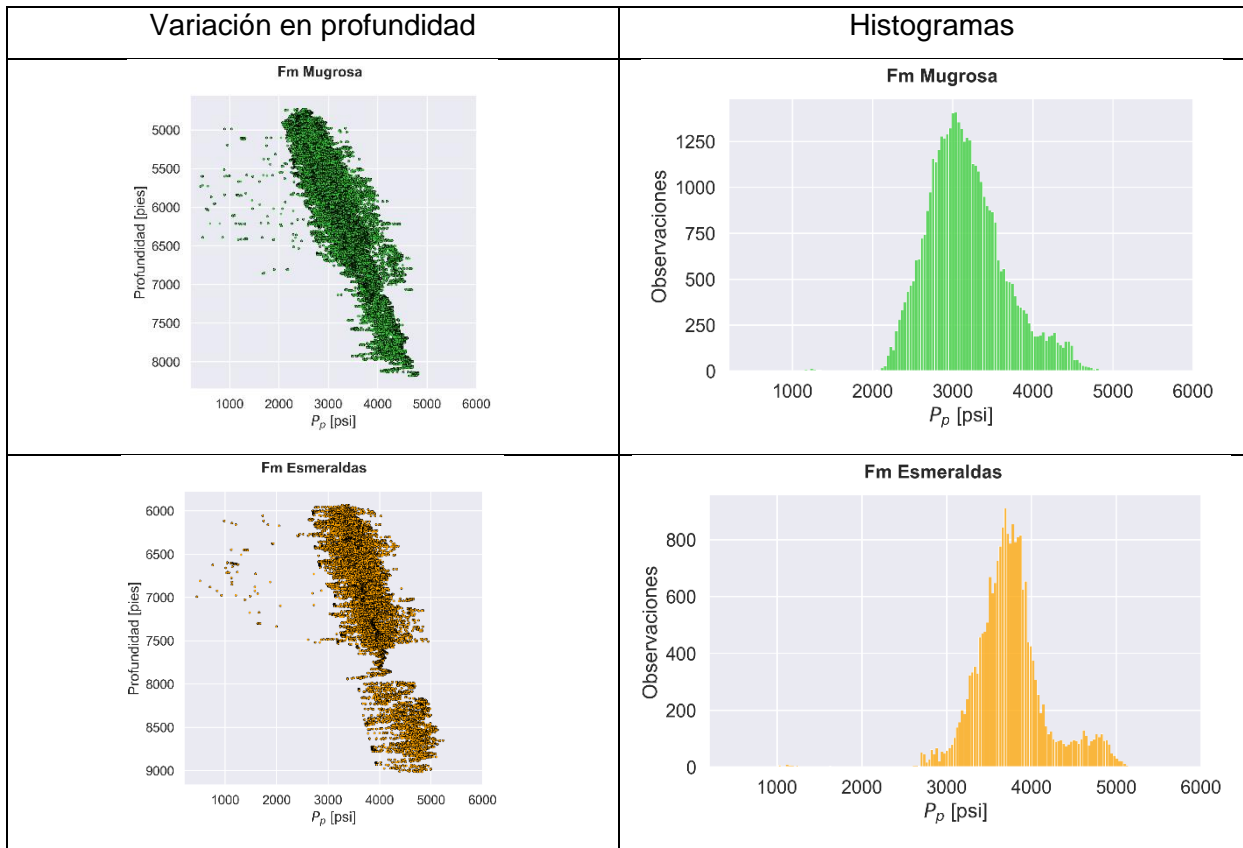
**Tabla 3-11:** Variación en profundidad e histogramas de  $\sigma_{ho}$ ,  $\sigma_{Ho}$ ,  $\sigma_V$  y  $P_{po}$







**Tabla 3-12.** Variación en profundidad e histogramas de las presiones recientes  $P_o$

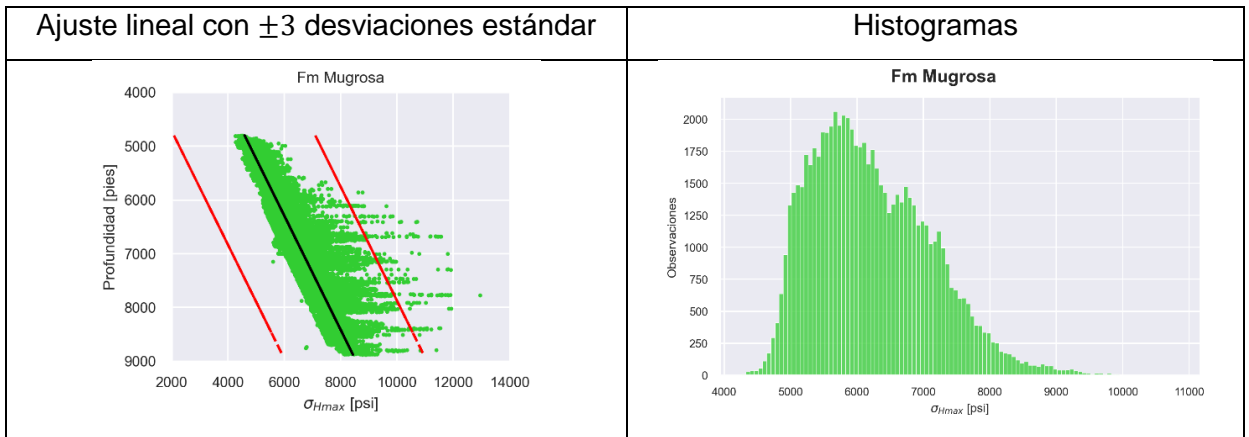


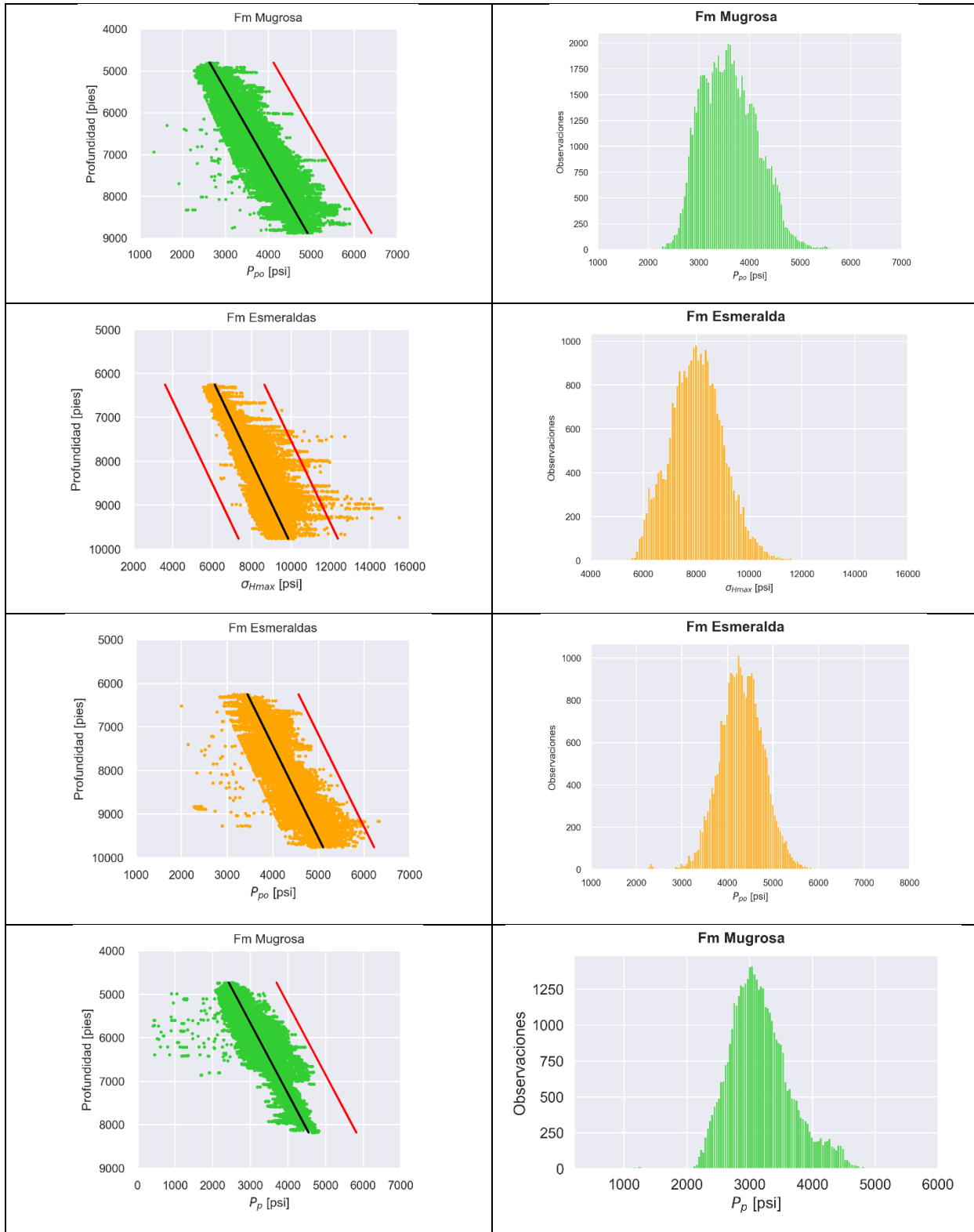
La inspección en profundidad de los esfuerzos y las presiones muestra que el  $\sigma_{Ho}$  y las presiones de poro  $P_{po}$ , y  $P_p$  presentan una mayor variabilidad comparados con  $\sigma_{ho}$  y  $\sigma_V$ . Esto se explica porque  $\sigma_{ho}$  se ha medido y calibrado con pruebas de campo, proporcionando correcciones o ajustes a la ecuación 3.10, lo cual no sucede con  $\sigma_{Ho}$ , cuyos valores se obtienen directamente de la ecuación 3.11. En el caso del  $\sigma_V$  cabe anotar

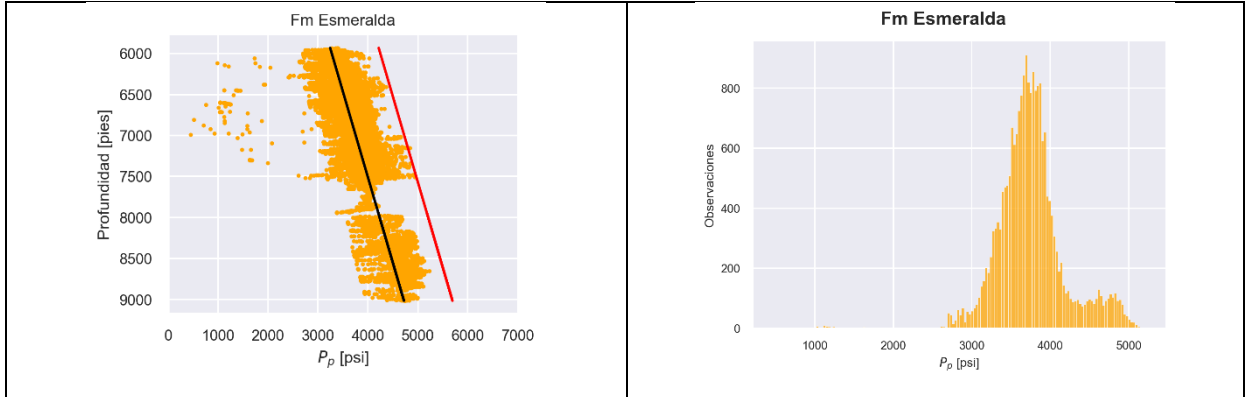


que su cálculo está en función únicamente de la densidad. Los profesionales a cargo del desarrollo del campo antes de usar el registro de densidad para los diversos análisis llevan a cabo controles de calidad con base en la porosidad, el sónico y el gamma ray para ajustar el registro de densidad. Por estas razones es válido considerar que las variables aleatorias, en el caso de los esfuerzos y las presiones, son el esfuerzo horizontal máximo y las presiones de poro inicial y reciente. El análisis de los *outliers* para estos conjuntos de valores es diferente al de las propiedades geomecánicas. En primer lugar, se resalta que en el caso de las presiones de poros se observa un grupo de datos alejados hacia la izquierda de la tendencia en profundidad. Estos puntos son las mediciones de presiones MDT en algunos de los cuerpos de arena de las Fm Mugrosa y Esmeraldas por lo que no podrían considerarse *outliers*. Hacia la derecha de la tendencia se visualizan algunos intervalos en donde existen valores que podrían ser atípicos. En segundo lugar, aplicar el método del rango intercuartílico no es adecuado para este conjunto de datos ya que los esfuerzos y las presiones exponen una dependencia con la profundidad. En su lugar, se propone un método similar al z-score que consiste en calcular la tendencia lineal en profundidad de  $\sigma_{Ho}$  y remover los puntos que están desviados  $\pm 3$  veces la desviación estándar de la tendencia lineal. En el caso de las presiones  $P_{po}$ , y  $P_p$  sólo se consideran *outliers* los puntos que se alejan más de +3 desviaciones estándar. En la tabla 3-13 se visualiza en la columna izquierda el ajuste lineal (línea negra) de  $\sigma_{Ho}$ ,  $P_{po}$ , y  $P_p$  con las desviaciones estándar correspondientes (líneas rojas) y en la columna derecha se han incluido los histogramas sin los datos atípicos.

**Tabla 3-13.** Tendencia lineal en profundidad e histogramas sin datos atípicos de  $\sigma_{Ho}$ ,  $P_{po}$  y  $P_p$







**Variables aleatorias**

En el análisis del inicio de la producción de arena asociado con la falla de la roca existen 4 aspectos fundamentales que están involucrados en los modelos analíticos: la resistencia de la roca alrededor del pozo, la deformación de la roca, los esfuerzos y la presión de poros. Por ello, las variables que se consideran aleatorias en el presente estudio son: la resistencia a la compresión uniaxial  $UCS$ , la relación de Poisson ( $\nu$ ), el esfuerzo horizontal máximo ( $\sigma_{Ho}$ ) y las presiones de poro inicial ( $P_{po}$ ) y reciente ( $P_p$ ). Además, la visualización y el análisis de los datos atípicos muestran que estas propiedades y parámetros son los de mayor variabilidad. Para este conjunto de variables se calcularán sus medidas de tendencia central y de dispersión y luego se asignarán sus respectivas funciones de densidad de probabilidad.

**Medidas de tendencia central y de dispersión**

La tabla 3-14 resume los cálculos de las principales medidas de tendencia central y dispersión del conjunto de datos calculados pertenecientes a la resistencia UCS, la relación de Poisson,  $\sigma_{Ho}$ ,  $P_{po}$  y  $P_p$  sin valores atípicos. Los cálculos indican que la Fm Esmeraldas está caracterizada por una roca más resistente que la Fm Mugrosa, aunque su coeficiente de variación sugiere una mayor dispersión en los valores alrededor de la media. De hecho, en todos los casos, excepto en el UCS de la Fm Mugrosa, se muestran coeficientes de variaciones menores a 0.3, lo cual indica que la media de cada uno de las variables puede ser representativa del conjunto de datos. La mayoría de las variables presentan asimetría positiva, excepto para el conjunto de presiones iniciales y recientes de la Fm Esmeralda donde se evidencia una asimetría negativa muy cercana a cero. En el caso particular de los valores de la relación de Poisson se evidencia un valor de curtosis similar al valor característico de un conjunto de datos que sigue una distribución normal.

**Tabla 3-14.** Medidas de tendencia central y dispersión de los valores de UCS, Poisson,  $\sigma_{Ho}$ ,  $P_{po}$  y  $P_p$

Formación	Variable	Media	Mediana	Varianza	Desviación estándar	Coefficiente de variación	Asimetría	Curtosis	Exceso Curtosis
Mugrosa	UCS [psi]	4646.36	4465.04	1303430.0	1141.68	0.246	0.447	3.45	0.45
	Poisson	0.27	0.27	0.00115	0.034	0.126	0.290	2.98	-0.02
	$\sigma_{Ho}$ [psi]	6217.53	6088.40	802512.3	895.83	0.144	0.649	3.20	0.20
	$P_{po}$ [psi]	3606.09	3572.12	297341.8	545.29	0.151	0.367	2.78	-0.22
	$P_p$ [psi]	3165.62	3111.52	239467.5	489.35	0.155	0.434	3.71	0.71
Esmeraldas	UCS [psi]	6753.07	6384.11	5136328.1	2266.35	0.336	0.682	3.05	0.05
	Poisson	0.24	0.24	0.00122	0.035	0.147	0.024	2.95	-0.05
	$\sigma_{Ho}$ [psi]	8047.61	8015.21	1064847.8	1031.91	0.128	0.356	3.35	0.35
	$P_{po}$ [psi]	4306.15	4302.08	227668.7	477.15	0.111	-0.117	3.48	0.48
	$P_p$ [psi]	3753.38	3723.13	191579.2	437.70	0.117	-0.016	7.06	4.06

### 3.3.4 Selección y ajuste de funciones de densidad de probabilidad

Para el presente estudio se usó el paquete *reliability* desarrollado en *Python* que ofrece múltiples funciones estadísticas, entre ellas la de selección, comparación y ajuste de PDF (Reid, M., 2022). Una de las ventajas de *reliability* es la posibilidad de usar diferentes criterios estadísticos para comparar el ajuste de las diferentes PDF al conjunto de datos. Los criterios incluidos en *reliability* son: el *log-likelihood*, información de Akaike, de información bayesiano, además de los métodos clásicos como por ejemplo el uso de las curvas de probabilidad. El objetivo de ajustar una función de densidad de probabilidad con base en un conjunto de observaciones es determinar el valor de los parámetros con los cuales la distribución podría generar los datos. Así, en el caso de la distribución normal, el problema a resolver sería encontrar la media y la varianza pues estos dos parámetros son

suficientes para definir la distribución. El paquete *reliability* ofrece al usuario el método de máxima verosimilitud o *MLE* (por sus siglas del inglés *Maximum Likelihood Estimation*) para determinar el valor de los parámetros de una distribución dada que mejor se ajustan a las observaciones. Una pregunta que un analista podría plantearse es ¿cuáles son las distribuciones que podrían representar el conjunto de datos? Luego de establecer una lista de posibles candidatas surgen dos planteamientos adicionales ¿cómo cuantificar la bondad de ajuste de cada distribución?, y aún más importante ¿cómo compararlas? En este punto es donde los criterios mencionados cobran relevancia. El método más sencillo es denominado *likelihood* que se obtiene del *MLE*. El *likelihood* es la probabilidad con la que cierta distribución podría generar una observación (un valor de la resistencia UCS por ejemplo). Generalmente se usa el logaritmo del *likelihood*, de allí el nombre del método *log-likelihood*. Si se suman los *log-likelihood* de todas las observaciones se encuentra un único valor que proporciona una medida relativa de compatibilidad entre la distribución y los datos. Si a este valor lo multiplicamos por -2 entonces se obtiene lo que en la literatura especializada se denomina *global deviance* (GDEV):

$$GDEV = -2 \log(\text{likelihood}) \quad (3.16)$$

Cuanto menor es GDEV mejor es el ajuste. Aunque es usado con frecuencia, este criterio no es útil para comparar distribuciones con distintos números de parámetros. Una distribución con más parámetros que otra podría tener un GDEV más bajo, incluso cuando no describe adecuadamente el comportamiento de las observaciones. Para considerar el número de parámetros de las distribuciones se han propuesto dos métodos: el criterio de información de Akaike (AIC) y el método de información bayesiano (BIC) que penalizan cada parámetro de la distribución. Similar al criterio GEDV, cuanto menor sea el valor de AIC o BIC, mejor es el ajuste. Los criterios AIC y BIC se definen por las siguientes expresiones:

$$AIC = -2\log(\text{likelihood}) + 2 \cdot (\text{No. parámetros}) \quad (3.17)$$

$$BIC = -2\log(\text{likelihood}) + \log(\text{No. observaciones}) \cdot (\text{No. parámetros}) \quad (3.18)$$

A modo de ejemplo, en la tabla 3-15 se muestran los resultados luego de aplicar estos criterios para ajustar y seleccionar la función PDF de la relación de Poisson para cada formación. En el Anexo A se han incluido los resultados obtenidos para todas las variables aleatorias. En la tabla 3-16 se presentan las funciones de densidad de probabilidad Normal,

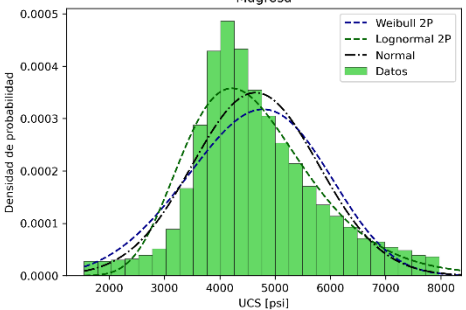
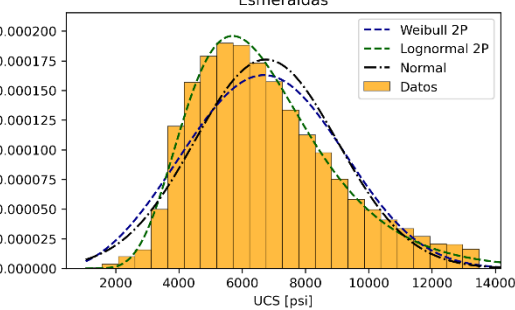
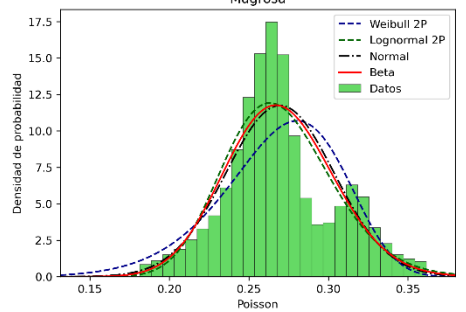
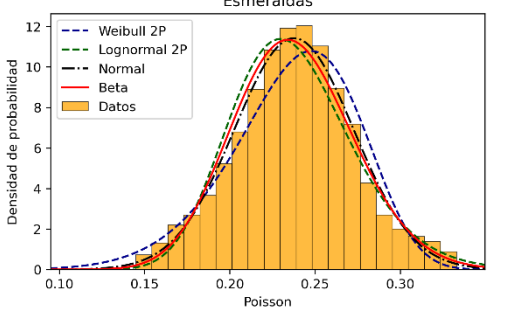
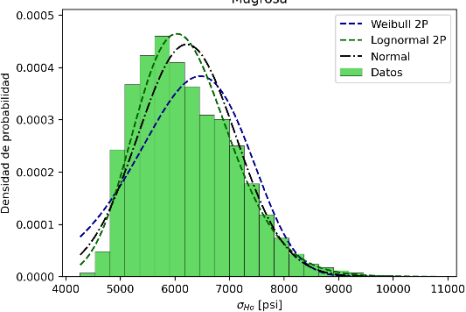
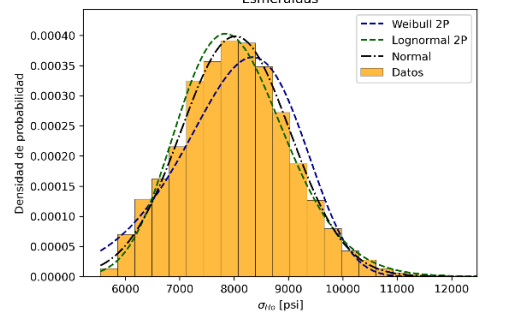
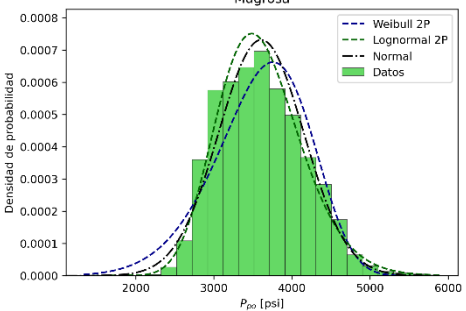
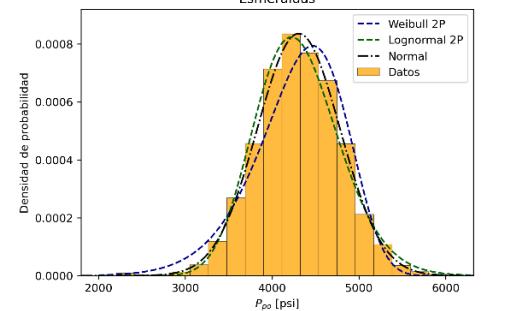
Lognormal, Beta y Weibull ajustadas a cada conjunto de datos de las variables aleatorias y la PDF finalmente seleccionada.

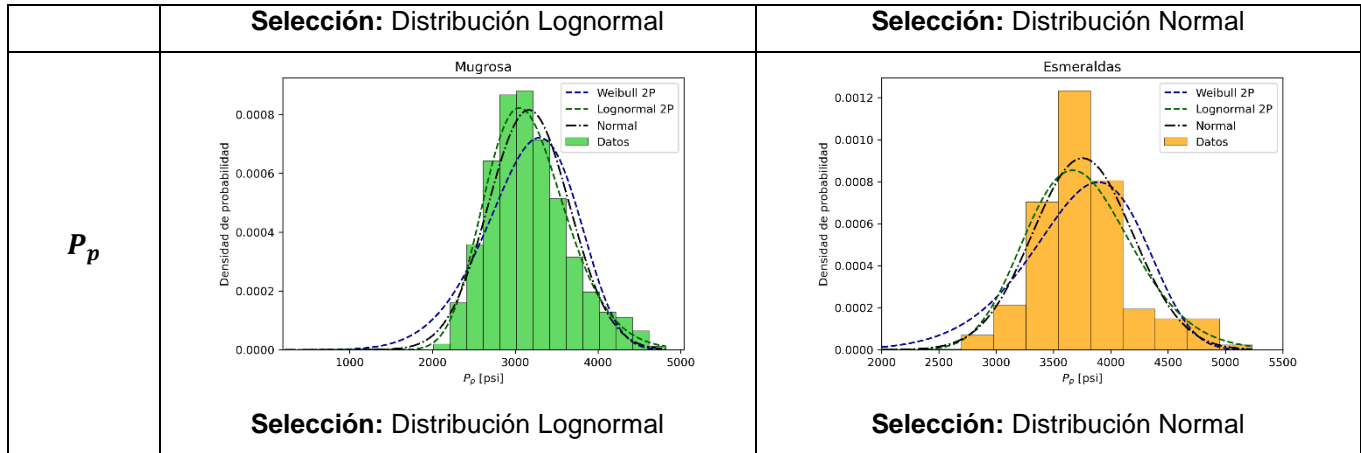
**Tabla 3-15.** Parámetros y criterios de bondad de ajuste para la relación de Poisson

Formación	Distribución	Parámetros				Criterios		
		$\alpha$ o $a$	$\beta$ o $b$	$\mu$	$\sigma$	Loglikelihood	AIC	BIC
Mugrosa	Lognormal_2P			-1.31879	0.12620	425105	-850207	-850186
	Beta_2P	46.0466	124.75			424931	-849858	-849838
	Normal_2P			0.26959	0.03397	423708	-847413	-847392
	Weibull_2P	0.284821	8.20859			411731	-823458	-823438
Esmeraldas	Lognormal_2P			-1.4479	0.15079	183445	-366886	-366867
	Beta_2P	34.6248	111.052			184598	-369192	-369173
	Normal_2P			0.237696	0.03493	184843	-369683	-369664
	Weibull_2P	0.252764	7.34222			182274	-364544	-364525

Para la Fm Mugrosa los resultados de acuerdo con los criterios, sugieren que la PDF que mejor representa los datos es la distribución Weibull, seguida de las distribuciones Normal y Lognormal. Situación similar se observa en la Fm Esmeraldas donde la distribución Weibull se mantiene como la primera opción, seguida de las distribuciones Lognormal, Normal y finalmente la Beta. Antes de seleccionar la distribución se debe verificar si teóricamente puede representar el conjunto de observaciones. Así, las funciones Normal y Weibull no podrían ser totalmente consistentes con la naturaleza de los valores de la relación de Poisson, los cuales no pueden ser mayores a 0.5 ni menores a 0. En cambio, la distribución Beta es usada ampliamente para aquellos valores que varían en todo el rango entre [0,1] o en algún subconjunto de dicho dominio, por lo que su selección para representar la relación de Poisson es coherente con los datos observados en las Fm Mugrosa y Esmeraldas. Para la resistencia UCS, los valores calculados de los criterios sugieren que la distribución Lognormal es la mejor opción para representar los datos observados. De hecho, se observa un ajuste moderado en el caso de la Fm Mugrosa a la distribución de los datos y un ajuste notable a los datos de la Fm Esmeraldas. En el caso del  $\sigma_{Ho}$  para ambas formaciones la distribución que mejor ajusta es la Lognormal, cuyo uso en problemas geotécnicos y geomecánicos es frecuente (Abbas *et al.* 2020, Allahverdizadeh, Griffiths, y Fenton 2015). Con respecto a las presiones de poros inicial y reciente la distribución Lognormal es la que mejor ajusta los datos asociados con la Fm Mugrosa mientras que en el caso de la Fm Esmeraldas, el mejor ajuste se obtiene con la distribución Normal.

**Tabla 3-16.** Curvas de distribuciones de probabilidad ajustadas a los datos de cada formación.

Variable	Mugrosa	Esmeraldas
<p style="text-align: center;"><b>UCS</b></p>	 <p style="text-align: center;"><b>Selección: Distribución lognormal</b></p>	 <p style="text-align: center;"><b>Selección: Distribución lognormal</b></p>
<p style="text-align: center;"><b>Poisson</b></p>	 <p style="text-align: center;"><b>Selección: Distribución Beta</b></p>	 <p style="text-align: center;"><b>Selección: Distribución Beta</b></p>
<p style="text-align: center;"><b><math>\sigma_{Ho}</math></b></p>	 <p style="text-align: center;"><b>Selección: Distribución Lognormal</b></p>	 <p style="text-align: center;"><b>Selección: Distribución Lognormal</b></p>
<p style="text-align: center;"><b><math>P_{po}</math></b></p>		



### Medidas de tendencia central y de dispersión de las distribuciones de probabilidad seleccionadas

En la tabla 3-17 se resumen los descriptores estadísticos de cada distribución de probabilidad seleccionada para cada variable aleatoria y cada formación.

**Tabla 3-17.** Curvas de distribuciones de probabilidad ajustadas a los datos de cada formación.

Formación	Variable	Distribución	Media	Desviación estándar	Coficiente de variación	Asimetría	Curtosis	Exceso de Curtosis
Mugrosa	UCS[psi]	Lognormal	4652.96	1210.38	0.26	0.80	4.15	1.15
	Poisson	Beta	0.27	0.03	0.13	0.16	3.00	0.00
	$\sigma_{Ho}$ [psi]	Lognormal	6217.98	880.22	0.14	0.43	3.33	0.33
	$P_{po}$ [psi]	Lognormal	3609.08	546.33	0.15	0.46	3.38	0.38
	$P_p$ [psi]	Lognormal	3166.52	500.31	0.16	0.48	3.41	0.41
Esmeraldas	UCS[psi]	Lognormal	6760.30	2348.36	0.35	1.08	5.16	2.16
	Poisson	Beta	0.24	0.04	0.15	0.20	3.02	0.02
	$\sigma_{Ho}$ [psi]	Lognormal	8027.09	1010.19	0.13	0.38	3.26	0.26
	$P_{po}$ [psi]	Normal	4306.15	477.14	0.11	0	3.00	0
	$P_p$ [psi]	Normal	3753.38	437.69	0.12	0	3.00	0



### 3.3.5 Formulación matemática de las funciones de comportamiento

En el capítulo 2 los modelos analíticos de Willson et al., (2002) y E. Papamichos y Furui (2019) se han seleccionado como las funciones del margen de seguridad. El modelo de Willson et al., (2002) se aplicará únicamente para evaluar por confiabilidad la producción de arena en condiciones iniciales de la presión de yacimiento ( $P_{po}$ ), mientras que el modelo de E. Papamichos y Furui (2019) se empleará para evaluar por confiabilidad la producción de arena tanto en condiciones iniciales como en condiciones recientes de la presión de yacimiento ( $P_p$ ). A continuación se expone la formulación matemática de cada modelo y su integración a los métodos de simulación.

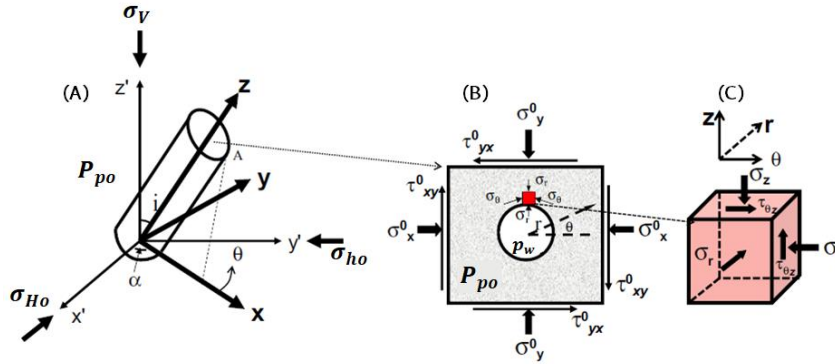
#### Cálculo de los esfuerzos en la pared del pozo

En los dos modelos seleccionados es necesario transformar los esfuerzos *insitu* (en condiciones iniciales de presión de yacimiento) de campo lejano ( $\sigma_{Ho}, \sigma_h, \sigma_v$ ) a coordenadas cilíndricas. El primer paso consiste en convertir los esfuerzos  $\sigma_{Ho}, \sigma_h, \sigma_v$  a coordenadas locales  $x, y, z$  del pozo de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\sigma_x^o &= (\sigma_{Ho} \cos^2 \alpha + \sigma_{ho} \sen^2 \alpha) \cos^2 i + \sigma_v \sen^2 i \\ \sigma_y^o &= \sigma_{Ho} \sen^2 \alpha + \sigma_{ho} \cos^2 \alpha \\ \sigma_z^o &= (\sigma_{Ho} \cos^2 \alpha + \sigma_{ho} \sen^2 \alpha) \sen^2 i + \sigma_v \cos^2 i \\ \tau_{xy}^o &= \frac{(\sigma_{ho} - \sigma_{Ho})}{2} \sen(2\alpha) \cdot \cos(i) \quad (3.19) \\ \tau_{yz}^o &= \frac{(\sigma_{ho} - \sigma_{Ho})}{2} \sen(2\alpha) \cdot \sen(i) \\ \tau_{xz}^o &= \frac{1}{2} (\sigma_{Ho} \cos^2 \alpha + \sigma_{ho} \sen^2 \alpha - \sigma_v) \sen(2i)\end{aligned}$$

El ángulo  $\alpha$  es la dirección de perforación del pozo respecto de  $\sigma_{Ho}$  y el ángulo  $i$  es la inclinación del pozo. Si el ángulo  $i = 0^\circ$  el pozo es vertical mientras que sí  $i = 90^\circ$  el pozo es horizontal. La geometría que representa el conjunto de expresiones 3.19 se muestra en la Figura 3-10.

**Figura 3-10:** A) Vista 3D de un pozo inclinado; B) esfuerzos locales y esfuerzos alrededor del pozo; C) elemento cúbico representativo alrededor del pozo.



**Fuente:** Modificado de "Applied petroleum geomechanics", de Zhang, 2019, Houston, TX, USA, Gulf Professional Publishing.

Para aplicaciones en la predicción del inicio de la producción de arena o en el fracturamiento hidráulico se usa con frecuencia la solución poroelástica para determinar los esfuerzos en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  alrededor de la cara del pozo según las ecuaciones 3.20:

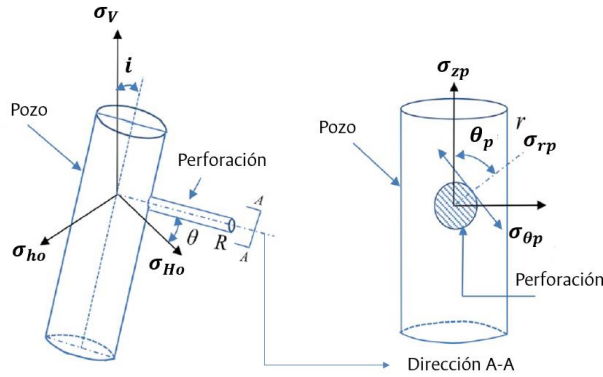
$$\begin{aligned}\sigma_r &= p_w \\ \sigma_\theta &= (\sigma_x^0 + \sigma_y^0) - 2\cos 2\theta(\sigma_x^0 - \sigma_y^0) - 4\tau_{xy}^0 \sin 2\theta - p_w + \frac{\alpha(1-2\nu)}{1-\nu}(p_w - P_{po}) \quad (3.20) \\ \sigma_z &= \sigma_z^0 - 2\nu(\sigma_x^0 - \sigma_y^0)\cos 2\theta - 4\nu\tau_{xy}^0 \sin 2\theta + \frac{\alpha(1-2\nu)}{1-\nu}(p_w - P_{po}) \\ \tau_{\theta z} &= 2(-\tau_{xz}^0 \sin \theta + \tau_{yz}^0 \cos \theta)\end{aligned}$$

El ángulo  $\theta$  indica la orientación de los esfuerzos en la circunferencia del pozo medido desde el eje X (Figura 3-10) y  $\alpha = 1$  es el coeficiente de Biot. En el caso del modelo de Willson et al., (2002), el esfuerzo tangencial  $(\sigma_\theta)$  en la cara del pozo debe transformarse para obtener el esfuerzo tangencial a lo largo del túnel de perforación  $\sigma_{\theta p}$ . De acuerdo con la Figura 3-11,  $\sigma_{\theta p}$  puede obtenerse como:

$$\sigma_{\theta p} = \sigma_z + \sigma_\theta - 2(\sigma_z - \sigma_\theta)\cos 2\theta_p - 4\tau_{\theta z}\sin 2\theta_p - p_w \quad (3.21)$$

En la expresión 3.21,  $\theta_p$  es la orientación alrededor del túnel de perforación con respecto a  $\sigma_{zp}$ .

**Figura 3-11:** Geometría para transformar esfuerzos en coordenadas  $(r, \theta, z)$  alrededor del pozo a coordenadas  $(r, \theta, z)$  alrededor de la perforación.



**Fuente:** Modificado de “Perforation orientation optimization to reduce the fracture initiation pressure of a deviated cased hole”, de Zeng et al. 2019, Journal of Petroleum Science and Engineering.

El esfuerzo máximo tangencial en un pozo (o sección del pozo) vertical ( $i < 10^\circ$ ) se obtiene cuando  $\theta = 90^\circ$ , es decir en la dirección de  $\sigma_{ho}$ :

$$\sigma_{\theta=90^\circ} = (\sigma_x^o + \sigma_y^o) + 2(\sigma_x^o - \sigma_y^o) - p_w + \frac{\alpha(1-2\nu)}{1-\nu}(p_w - P_{po}) \quad (3.22)$$

**Modelo de Wilson et al., (2002)**

Según Willson et al., (2002) la producción de arena inicia cuando el máximo esfuerzo tangencial efectivo alrededor del túnel de perforación es mayor que la resistencia de la roca:

$$\sigma'_{\theta p} = \sigma_{\theta p} - p_w > U \quad (3.23)$$

De acuerdo con la expresión 3.23, el margen de seguridad (**MS**) se define como:

$$MS = U - \sigma'_{\theta p} \quad (3.24)$$

La resistencia  $U$  es función del UCS, de acuerdo con Tronvoll et al. (1997):

$$U[psi] = 3.1 * TWC = [35.53 * (0.0069UCS[psi])^{0.53}] \cdot 145.038 \quad (3.25)$$

El **MS** definido en la expresión 3.24 puede formularse así:

$$MS = 145.038 [35.53 * (0.0069UCS)^{0.53}] - [\sigma_z + \sigma_\theta - 2(\sigma_z - \sigma_\theta)\cos 2\theta_p - 4\tau_{\theta z}\sin 2\theta_p - 2p_w] \quad (3.26)$$

Para aplicar el método de simulación de Hasofer-Lind se deben conocer las derivadas parciales de cada variable aleatoria del margen de seguridad, las cuales se muestran en la tabla 3-18:

**Tabla 3-18.** Derivadas parciales de cada variable aleatoria de la ecuación 3.26 (Fuente: Autor)

$\frac{\partial MS}{\partial UCS} = 195.4 UCS^{-0.47}$	$\frac{\partial MS}{\partial \sigma_{Ho}} = - \left[ \frac{\partial \sigma_z}{\partial \sigma_{Ho}} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \sigma_{Ho}} - 2 * \left( \frac{\partial \sigma_z}{\partial \sigma_{Ho}} - \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \sigma_{Ho}} \right) \cos 2\theta_p - 4 \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \sigma_{Ho}} \sin 2\theta_p \right]$
$\frac{\partial MS}{\partial P_{po}} = - \left( \frac{\partial \sigma_z}{\partial P_{po}} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial P_{po}} \right)$	$\frac{\partial MS}{\partial v} = - \left[ \frac{\partial \sigma_z}{\partial v} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial v} - 2 * \left( \frac{\partial \sigma_z}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial v} \right) \cos 2\theta_p \right]$

Las siguientes expresiones permiten calcular las derivadas parciales de la tabla 3-18 (Fuente: Autor):

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial \sigma_{Ho}} = \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 i - 2v \cdot \cos 2\theta (\cos^2 \alpha \cos^2 i - \sin^2 \alpha) - 4v \cdot \sin 2\theta (-0.5 \sin 2\alpha \cdot \cos i)$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \sigma_{Ho}} = \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 i + \sin^2 \alpha - 2 \cdot \cos 2\theta (\cos^2 \alpha \cos^2 i - \sin^2 \alpha) - 4 \sin 2\theta (-0.5 \sin 2\alpha \cdot \cos i)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \sigma_{Ho}} = 2(-0.5 \sin 2\alpha \cdot \sin i \cdot \cos \theta - 0.5 \cos^2 \alpha \cdot \sin 2i \cdot \sin \theta)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial v} = -2(\sigma_x^o - \sigma_y^o) \cos 2\theta - 4\tau_{xy}^o \sin 2\theta + \frac{-1}{(1-v)^2} (p_w - P_{po}) \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial v} = \frac{-1}{(1-v)^2} (p_w - P_{po})$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial P_{po}} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial P_{po}} = (-1) \cdot \frac{(1-2v)}{1-v}$$

### Modelo de Papamichos y Furui (2019)

El margen de seguridad según el modelo de **Papamichos y Furui (2019)**, puede escribirse como:

$$MS = \eta^p \sigma_s - \sigma_c, \quad \eta^p = 1 \quad (3.28)$$

$$\sigma_s = \sigma_{sref} \cdot \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left( \frac{D_{ref}}{D} \right)^{\frac{2}{5}} \right], \quad D_{ref} = 2 \text{ cm}$$

donde  $D = 1.78 \text{ cm}$ , es el diámetro característico de la perforación (Figura 3-11). El término  $\sigma_{sref}$  puede relacionarse con el UCS siguiendo el trabajo de Euripedes Papamichos (2002), de manera que:

$$\sigma_s = 37.49751 \cdot (UCS^{0.6346}) \cdot \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left( \frac{2 \text{ cm}}{1.78 \text{ cm}} \right)^{\frac{2}{5}} \right] \quad (3.29)$$

El término de carga, representado por  $\sigma_c$  depende del modelo de falla seleccionado de acuerdo con las ecuaciones 1.51 a 1.53. Según Papamichos y Furui (2019), en un pozo desviado con respecto al eje vertical y con una presión de fluido  $p_w$  las ecuaciones para encontrar  $\sigma'_\theta$ ,  $\sigma'_z$  y  $\tau_{\theta z}$ , en la pared del pozo o en el túnel de perforación son:

$$\sigma'_\theta = \sigma_x^o + \sigma_y^o - 2\eta(\sigma_x^o + \sigma_y^o)\cos 2\theta - 4\tau_{xy}^o \sin(2\theta) - 2P_{po} + [2 - \chi_X - \chi_Y + 2\eta(\chi_X - \chi_Y)\cos(2\theta) + 4\chi_{XY}\sin(2\theta)]\Delta p_{dep} + \left(2 - 2\eta_B - \frac{\eta_B}{\ln(r_i/r_e)}\right)\Delta p_{dd} \quad (3.30)$$

$$\sigma'_z = \sigma_z^o - 2v\eta(\sigma_x^o - \sigma_y^o)\cos 2\theta - 4v\tau_{xy}^o \sin(2\theta) - P_{po} + [1 - \chi_Z + 2v\eta(\chi_X - \chi_Y)\cos(2\theta) + 4v\chi_{XY}\sin(2\theta)]\Delta p_{dep} + \left(1 - 2\eta_B - \frac{v\eta_B}{\ln(r_i/r_e)}\right)\Delta p_{dd} \quad (3.31)$$

$$\tau_{\theta z} = 2(-\tau_{xz}^o \sin\theta + \tau_{yz}^o \cos\theta) - 2(\chi_{YZ}\cos\theta - \chi_{ZX}\sin\theta)\Delta p_{dep} \quad (3.32)$$

donde  $\eta = 1$ ,  $\Delta p_{dep} = P_{po} - P_p$ ,  $\Delta p_{dd} = P_{res} - p_w$ ,  $P_{res} = P_{po}$  o  $P_p$  y los términos  $\chi_X, \chi_Y, \chi_Z, \chi_{XY}, \chi_{YZ}, \chi_{ZX}$  se definen como:

$$\begin{aligned} \chi_X &= l_{xH}^2\chi_H + l_{xh}^2\chi_h + l_{xV}^2\chi_V, & \chi_Y &= l_{yH}^2\chi_H + l_{yh}^2\chi_h \\ \chi_Z &= l_{zH}^2\chi_H + l_{zh}^2\chi_h + l_{zV}^2\chi_V, & \chi_{XY} &= l_{xH}l_{yH}\chi_H + l_{xh}l_{yh}\chi_h \\ \chi_{YZ} &= l_{yH}l_{zH}\chi_H + l_{yh}l_{zh}\chi_h, & \chi_{ZX} &= l_{zH}l_{xH}\chi_H + l_{zh}l_{xh}\chi_h + l_{zV}l_{xV}\chi_V \end{aligned} \quad (3.33)$$

Con  $\chi_V = 0$ , y  $\chi_H = \chi_h = -\frac{\alpha(1-2\nu)}{1-\nu} = -2\eta_B$ ,  $\alpha = 1$  es el coeficiente de Biot.

Además:

$$\begin{aligned} l_{xH} &= \cos\alpha \cos i & l_{xh} &= \sin\alpha \cos i & l_{xV} &= -\sin i \\ l_{yH} &= -\sin\alpha & l_{yh} &= \cos\alpha & l_{yV} &= 0 \\ l_{zH} &= \cos\alpha \sin i & l_{zh} &= \sin\alpha \sin i & l_{zV} &= \cos i \end{aligned} \quad (3.34)$$

La derivada parcial del margen de seguridad con respecto al término de la resistencia es el mismo para todos los criterios de falla empleados por Papamichos y Furui (2019):

$$\frac{\partial MS}{\partial UCS} = 0.6346 \cdot (37.49751) UCS^{0.6354} \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left( \frac{2}{1.75} \right)^{2/5} \right] \quad (3.35)$$

A continuación, se muestran las derivadas parciales del  $MS$  con respecto a  $\sigma_{Ho}$ ,  $P_{po}$ ,  $P_p$  y  $\nu$  para cada modelo descrito en las expresiones 1.51 (sMc), 1.52 (Mc) y 1.53 (VM y DP).

**Tabla 3-19.** Derivadas parciales con respecto a  $\sigma_{Ho}$ ,  $P_{po}$ ,  $P_p$  y  $\nu$  para el modelo sMC (Fuente: Autor):

$\frac{\partial MS}{\partial \sigma_{Ho}} = - \left[ \frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial \sigma_{Ho}} \right], \quad \frac{\partial MS}{\partial P_p} = - \left[ \frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial P_p} \right]$	$\frac{\partial MS}{\partial P_{po}} = - \left[ \frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial P_{po}} \right], \quad \frac{\partial MS}{\partial \nu} = - \left[ \frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial \nu} \right]$
--	--

**Tabla 3-20.** Derivadas parciales de  $\sigma_{Ho}$ ,  $P_{po}$ ,  $P_p$  y  $\nu$  para el modelo MC (Fuente: Autor):

$\frac{\partial MS}{\partial \sigma_{Ho}} = - \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial \sigma_{Ho}} + \frac{\partial \sigma'_{z}}{\partial \sigma_{Ho}} + \frac{1}{2\sqrt{(\sigma'_{\theta} - \sigma'_{z})^2 + 4\tau_{\theta z}^2}} \cdot \left( 2 \left( \frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial \sigma_{Ho}} - \frac{\partial \sigma'_{z}}{\partial \sigma_{Ho}} \right) + 8 \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \sigma_{Ho}} \right) \right]$	$\frac{\partial MS}{\partial P_{po}} = - \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial P_{po}} + \frac{\partial \sigma'_{z}}{\partial P_{po}} + \frac{1}{2\sqrt{(\sigma'_{\theta} - \sigma'_{z})^2 + 4\tau_{\theta z}^2}} \cdot \left( 2 \left( \frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial P_{po}} - \frac{\partial \sigma'_{z}}{\partial P_{po}} \right) + 8 \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial P_{po}} \right) \right]$
$\frac{\partial MS}{\partial P_p} = - \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial P_p} + \frac{\partial \sigma'_{z}}{\partial P_p} + \frac{1}{2\sqrt{(\sigma'_{\theta} - \sigma'_{z})^2 + 4\tau_{\theta z}^2}} \cdot \left( 2 \left( \frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial P_p} - \frac{\partial \sigma'_{z}}{\partial P_p} \right) + 8 \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial P_p} \right) \right]$	$\frac{\partial MS}{\partial \nu} = - \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial \nu} + \frac{\partial \sigma'_{z}}{\partial \nu} + \frac{1}{2\sqrt{(\sigma'_{\theta} - \sigma'_{z})^2 + 4\tau_{\theta z}^2}} \cdot \left( 2 \left( \frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial \nu} - \frac{\partial \sigma'_{z}}{\partial \nu} \right) + 8 \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \nu} \right) \right]$

Los términos que permiten calcular las derivadas parciales mostradas en las tablas 3-19 a 3-21 se muestran en seguida (Fuente: Autor):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial \sigma_{Ho}} &= \frac{\partial \sigma_x^o}{\partial \sigma_{Ho}} + \frac{\partial \sigma_y^o}{\partial \sigma_{Ho}} - 2\eta \cos 2\theta \left( \frac{\partial \sigma_x^o}{\partial \sigma_{Ho}} + \frac{\partial \sigma_y^o}{\partial \sigma_{Ho}} \right) - 4 \operatorname{sen} 2\theta \frac{\partial \tau_{xy}^o}{\partial \sigma_{Ho}} \\ \frac{\partial \sigma'_{z}}{\partial \sigma_{Ho}} &= \frac{\partial \sigma_z^o}{\partial \sigma_{Ho}} - 2\nu\eta \cos 2\theta \left( \frac{\partial \sigma_x^o}{\partial \sigma_{Ho}} - \frac{\partial \sigma_y^o}{\partial \sigma_{Ho}} \right) - 4\nu \operatorname{sen} 2\theta \frac{\partial \tau_{xy}^o}{\partial \sigma_{Ho}} \quad (3.36) \\ \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \sigma_{Ho}} &= 2 \left( - \frac{\partial \tau_{xz}^o}{\partial \sigma_{Ho}} \operatorname{sen} \theta + \frac{\partial \tau_{yz}^o}{\partial \sigma_{Ho}} \cos \theta \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial P_{po}} = -2 + [2 - \chi_X - \chi_Y + 2\eta(\chi_X - \chi_Y) \cos(2\theta) + 4\chi_{XY} \operatorname{sen}(2\theta)] + \left( 2 - 2\eta_B - \frac{\eta_B}{\ln(r_i/r_e)} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma'_z}{\partial P_{po}} = -1 + [1 - \chi_Z + 2v\eta(\chi_X - \chi_Y) \cos(2\theta) + 4v\chi_{XY} \text{sen}(2\theta)] + \left(1 - 2\eta_B - \frac{v\eta_B}{\ln(r_i/r_e)}\right) \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial P_{po}} = -2(\chi_{YZ} \cos \theta - \chi_{ZX} \text{sen} \theta)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial P_p} = 2(\chi_{YZ} \cos \theta - \chi_{ZX} \text{sen} \theta)$$

$$\frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial v} = \left[ -\frac{\partial \chi_X}{\partial v} - \frac{\partial \chi_Y}{\partial v} + 2\eta \left( \frac{\partial \chi_X}{\partial v} - \frac{\partial \chi_Y}{\partial v} \right) \cos(2\theta) + 4 \frac{\partial \chi_{XY}}{\partial v} \text{sen}(2\theta) \right] \Delta p_{dep} - \left( 2 - \frac{1}{(1-v)^2} - \frac{1}{\ln(r_i/r_e)} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma'_z}{\partial v} = 2\eta(\sigma_x^o - \sigma_y^o) \cos 2\theta - 4\tau_{xy}^o \text{sen} 2\theta + \left[ -\frac{\partial \chi_Z}{\partial v} + 2\eta \left( v \frac{\partial \chi_X}{\partial v} + \chi_X \right) - \left( v \frac{\partial \chi_Y}{\partial v} + \chi_Y \right) \right] \cos(2\theta) + 4 \left( v \frac{\partial \chi_{XY}}{\partial v} + \chi_{XY} \right) \text{sen}(2\theta) \Delta p_{dep} + \left( -\frac{1}{(1-v)^2} - \frac{2v^2 - 4v + 1}{2(1-v)^2 \ln(r_i/r_e)} \right) \Delta p_{dd} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial v} = -2 \left( \frac{\partial \chi_{YZ}}{\partial v} \cos \theta - \frac{\partial \chi_{ZX}}{\partial v} \text{sen} \theta \right) \Delta p_{dep}$$

$$\frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial P_p} = -[2 - \chi_X - \chi_Y + 2\eta(\chi_X - \chi_Y) \cos(2\theta) + 4\chi_{XY} \text{sen}(2\theta)] - \left( 2 - 2\eta_B - \frac{\eta_B}{\ln(r_i/r_e)} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma'_z}{\partial P_p} = -[1 - \chi_Z + 2v\eta(\chi_X - \chi_Y) \cos(2\theta) + 4v\chi_{XY} \text{sen}(2\theta)] - \left( 1 - 2\eta_B - \frac{v\eta_B}{\ln(r_i/r_e)} \right) \quad (3.38)$$

En las ecuaciones anteriores, tener en cuenta que:

$$\Delta p_{dep} = P_{po} - P_p$$

$$\Delta p_{dd} = P_{po} - p_w \text{ (condición de presión de poro inicial de yacimiento)}$$

$$\Delta p_{dd} = P_p - p_w \text{ (condición de presión de poro reciente de yacimiento)}$$

$$\eta = 1, \alpha = 1 \text{ (coeficiente de Biot), } r_i \text{ (radio del pozo)}$$

$$= 0.2 \text{ m, } r_e \text{ (radio de influencia del pozo) } = 200 \text{ m}$$

Definidas las derivadas parciales del **MS** con respecto a cada variable aleatoria, en el capítulo cuatro se muestran los cálculos del índice de confiabilidad aplicando los métodos de Hasofer-Lind y Monte Carlo.

**Tabla 3-21.** Derivadas parciales de  $\sigma_{Ho}$ ,  $P_{po}$ ,  $P_p$  y  $v$  para los modelos VM (superior) y DP (inferior) (Fuente: Autor):

$\frac{\partial MS}{\partial \sigma_{Ho}} = \frac{1}{-3k_1 + \sqrt{3}} \left[ -k_1 \left( \frac{\partial \sigma'_z}{\partial \sigma_{Ho}} + \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial \sigma_{Ho}} \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{2\sqrt{\sigma'^2_\theta + \sigma'_z(\sigma'_z - \sigma'_\theta)} + 3\tau^2_{\theta z}} \right) \cdot \left( 2 \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial \sigma_{Ho}} + 2 \frac{\partial \sigma'_z}{\partial \sigma_{Ho}} - \sigma'_\theta \frac{\partial \sigma'_z}{\partial \sigma_{Ho}} \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma'_z \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial \sigma_{Ho}} + 6 \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \sigma_{Ho}} \right) \right]$	$\frac{\partial MS}{\partial P_{po}} = \frac{1}{-3k_1 + \sqrt{3}} \left[ -k_1 \left( \frac{\partial \sigma'_z}{\partial P_{po}} + \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial P_{po}} \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{2\sqrt{\sigma'^2_\theta + \sigma'_z(\sigma'_z - \sigma'_\theta)} + 3\tau^2_{\theta z}} \right) \cdot \left( 2 \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial P_{po}} + 2 \frac{\partial \sigma'_z}{\partial P_{po}} - \sigma'_\theta \frac{\partial \sigma'_z}{\partial P_{po}} - \sigma'_z \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial P_{po}} \right. \right. \\ \left. \left. + 6 \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial P_{po}} \right) \right]$
$\frac{\partial MS}{\partial P_p} = \frac{1}{-3k_1 + \sqrt{3}} \left[ -k_1 \left( \frac{\partial \sigma'_z}{\partial P_p} + \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial P_p} \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{2\sqrt{\sigma'^2_\theta + \sigma'_z(\sigma'_z - \sigma'_\theta)} + 3\tau^2_{\theta z}} \right) \cdot \left( 2 \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial P_p} + 2 \frac{\partial \sigma'_z}{\partial P_p} - \sigma'_\theta \frac{\partial \sigma'_z}{\partial P_p} - \sigma'_z \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial P_p} \right. \right. \\ \left. \left. + 6 \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial P_p} \right) \right]$	$\frac{\partial MS}{\partial v} = \frac{1}{-3k_1 + \sqrt{3}} \left[ -k_1 \left( \frac{\partial \sigma'_z}{\partial v} + \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial v} \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{2\sqrt{\sigma'^2_\theta + \sigma'_z(\sigma'_z - \sigma'_\theta)} + 3\tau^2_{\theta z}} \right) \cdot \left( 2 \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial v} + 2 \frac{\partial \sigma'_z}{\partial v} - \sigma'_\theta \frac{\partial \sigma'_z}{\partial v} - \sigma'_z \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial v} \right. \right. \\ \left. \left. + 6 \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial v} \right) \right]$







## 4. Evaluación por confiabilidad del inicio de la producción de arena

En este capítulo se presentan los resultados del índice de confiabilidad para las Fm Mugrosa y Esmeraldas utilizando los métodos de simulación de Hasofer-Lind y Monte Carlo para los dos escenarios establecidos: presión de poro inicial de yacimiento ( $\Delta_{dep} = 0$ ), y presión de poro reciente de yacimiento ( $\Delta_{dep} > 0$ ). Cada pozo de la tabla 3-4 proporciona los siguientes datos para el cálculo de  $\beta$ :

- Profundidad [pies] a la que se hará el cálculo
- Esfuerzo vertical y esfuerzo horizontal mínimo [psi]
- Los ángulos  $i$  y  $\alpha$  (inclinación y azimut del pozo) a la profundidad de cálculo
- Volumen estimado de la producción de arena por año en [pies/año] para los pozos con producción de arena
- Clasificación del nivel de producción de arena propuesta por los ingenieros y geólogos del campo Provincia: Alto, Leve y No arenamiento
- La zona a la que pertenece el pozo: Santos o Suerte
- Formación: Fm Mugrosa o Esmeraldas correspondiente a la profundidad de cálculo
- Presión de fondo fluyente: un estimado de la  $p_w$  de cada pozo

Para el grupo de pozos que se evalúan en la condición de presión inicial de yacimiento no existen datos sobre la presión de fondo fluyente ( $p_w$ ), por lo que en las simulaciones con ambos métodos se han asumido los siguientes valores de  $p_w$  [psi] = 1500, 2000, 2500, 3000. En el caso de los pozos en condiciones de presión actual de yacimiento sólo algunos de ellos tienen valores de  $p_w$ . A estos pozos se les calculó  $\beta$  y además se repitieron los cálculos para todos los pozos asumiendo valores de  $p_w$  [psi] =

500,1000,2000,3000 [psi]. Los valores asumidos de  $p_w$  corresponden al rango de presiones de fondo pozo fluyente que se han observado en los pozos del Campo Provincia.

## 4.1 Cálculo del índice de confiabilidad para la condición de presión de poros inicial de yacimiento

El objetivo de calcular el índice de confiabilidad para la condición en la que  $\Delta_{dep} = 0$  es evaluar la confiabilidad del sistema (pozo-formación) durante los primeros años de producción de hidrocarburos y comparar posteriormente sus resultados con el escenario en el que  $\Delta_{dep} > 0$ . Los algoritmos para determinar el índice de confiabilidad por el método de Hasofer-Lind ( $\beta_{HL}$ ), así como por el método de Monte Carlo se implementaron en el lenguaje de programación *Python*. Los *scripts* de ambos métodos se muestran en el Anexo B.

### 4.1.1 Método Hasofer-Lind - Modelo Willson et al., (2002)

Dado que el cálculo de  $\beta_{HL}$  es un procedimiento iterativo, en el código desarrollado en *Python* se estableció la siguiente condición de convergencia: el error, definido como la diferencia entre el  $\beta_{HL}$  calculado en la iteración  $i$  y el  $\beta_{HL}$  en la iteración  $i - 1$  debe ser menor a 0.00001:

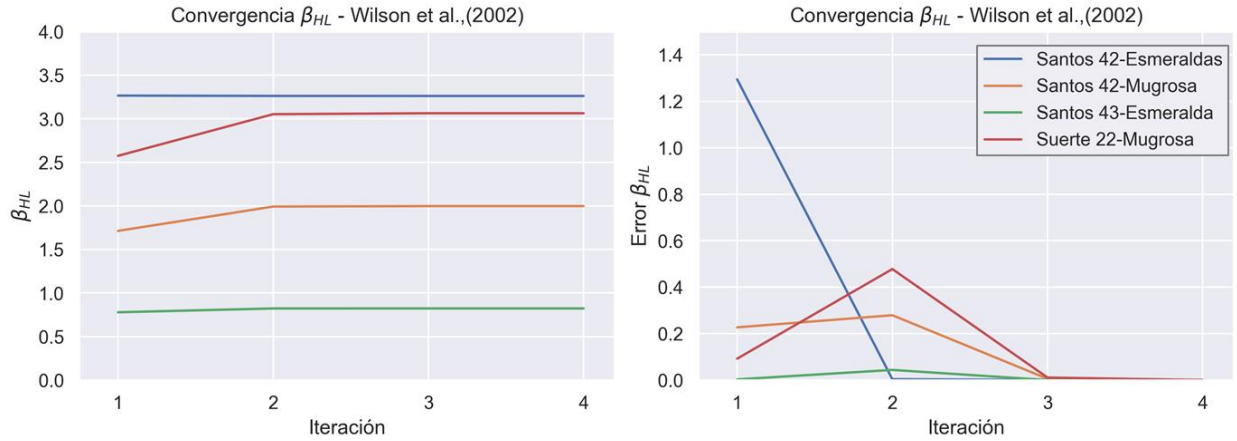
$$error = \beta_{HL,i} - \beta_{HL,i-1} < 0.00001 \quad (4.1)$$

A modo de ejemplo, en la Figura 4-1 la gráfica de la izquierda ilustra la convergencia del  $\beta_{HL}$  con el modelo de Willson et al., (2002). Se observa, en la gráfica de la derecha que en la cuarta iteración el valor de  $\beta_{HL}$  converge (error  $< 0.00001$ ), lo cual demuestra un óptimo desempeño en términos de tiempos de cómputo del método de Hasofer-Lind. Los resultados del  $\beta_{HL}$  en función de  $p_w$  para las Fm Mugrosa y Esmeraldas son mostrados en la Figura 4-3. Cada gráfica muestra el  $\beta_{HL}$  calculado tanto en pozos con producción de arena como en pozos que no han presentado producción de arena. Se observa que los valores del  $\beta_{HL}$  se reducen a medida que  $p_w$  disminuye, lo cual es consistente con los modelos analíticos en los que la producción de arena está relacionada con un aumento del *drawdown*. El *drawdown* ( $\Delta p_{dd}$ ) se define como  $\Delta p_{dd} = P_{res} - p_w$ , donde  $P_{res}$  es la presión

de poro de yacimiento en un instante de tiempo dado. En condiciones  $\Delta p_{dep} = 0, P_{res} = P_{po}$ , por lo que el *drawdown* en condiciones de presión de poro inicial de yacimiento es:

$$\Delta p_{dd} = P_{po} - p_w \quad (4.2)$$

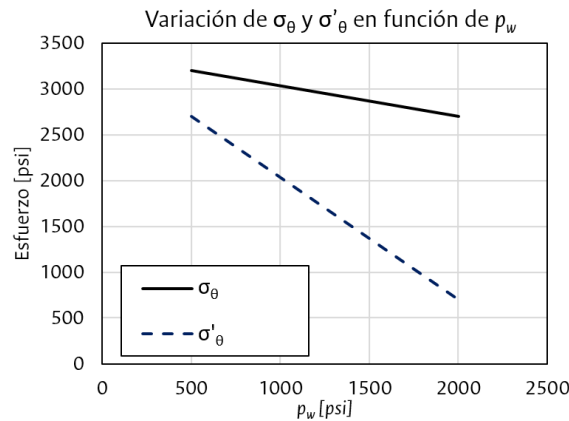
**Figura 4-1:** Convergencia del  $\beta_{HL}$  basado en el modelo analítico de Willson et al., (2002).



**Fuente:** Elaboración propia.

Considerando que en un instante de tiempo  $P_{po} = constante$ , un aumento del  $\Delta p_{dd}$  es posible si  $p_w$  disminuye. Además, de acuerdo con el conjunto de ecuaciones que describen los modelos analíticos en la sección 3.3.5 se puede deducir que una disminución del  $p_w$  implica un aumento en  $\sigma_\theta$  y en  $\sigma'_\theta$ , tal como se muestra en la Figura 4-2. Un aumento en las cargas, manteniendo la resistencia mecánica constante del sistema implica una disminución del margen de seguridad (*MS*).

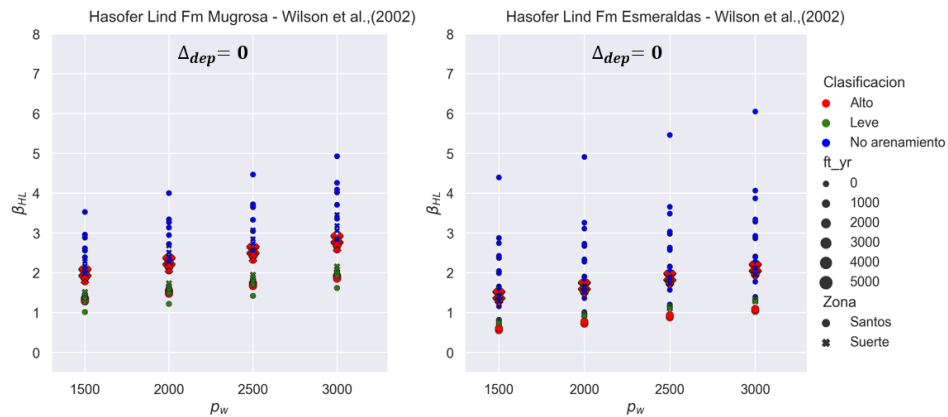
**Figura 4-2:** Variación de esfuerzos  $\sigma_\theta$  y en  $\sigma'_\theta$  en función de  $p_w$  con  $P_{po}$  constante.



**Fuente:** Elaboración propia.

En las gráficas de la Figura 4-3 se observa que los pozos clasificados como “No arenamiento” (o sin producción de arena), en general se caracterizan por un  $\beta_{HL}$  mayor que aquellos clasificados como “Alto” o “Leve” (con producción de arena), aunque se reconoce que algunos pozos que no han presentado producción de arena presentan valores de  $\beta_{HL}$  similares a los pozos con producción de arena, lo cual podría sugerir que el modelo es conservador. Una manera práctica de utilizar los resultados es representar en profundidad el  $\beta_{HL}$  para un solo valor de  $p_w$  con lo cual se define un rango de posibles valores del  $\beta_{HL}$  que podrían indicar el inicio de la producción de arena.

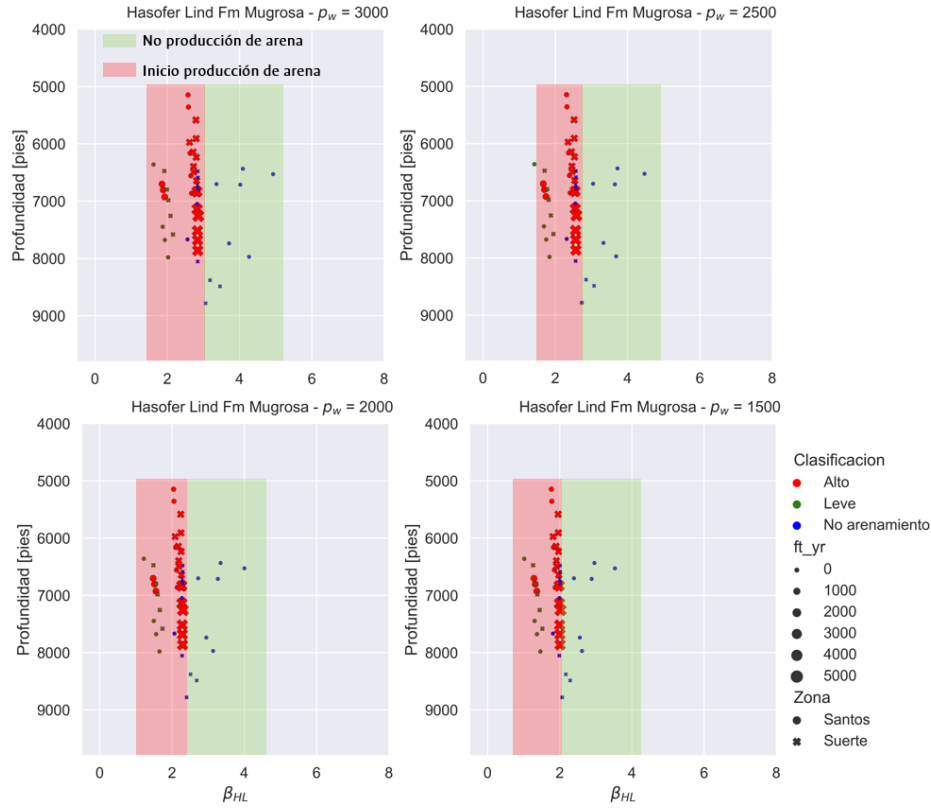
**Figura 4-3:** Índice de confiabilidad del inicio de la producción de arena para la condición  $\Delta_{dep} = 0$



**Fuente:** Elaboración propia.

Así, tal como se muestra en la Figura 4-4, para la Fm Mugrosa valores del  $\beta_{HL}$  entre 3.0 ( $p_w = 3000$  psi) y 2.0 ( $p_w = 1500$  psi) pueden ser asociados, bajo condiciones de presión de poros inicial de yacimiento, con el inicio de la producción de arena.

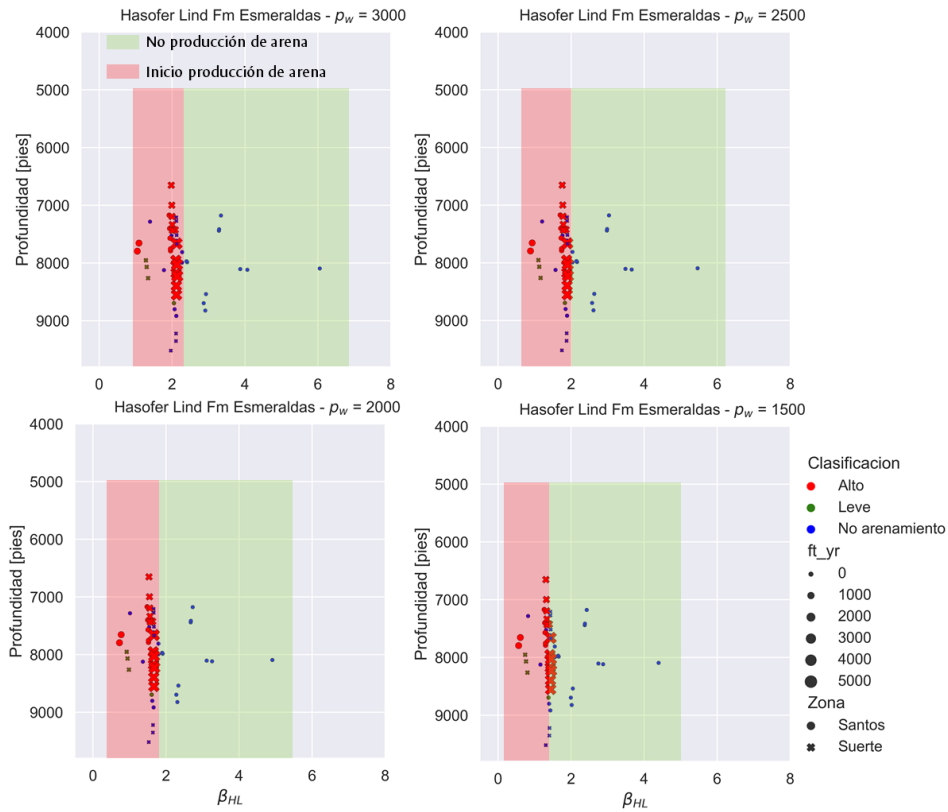
**Figura 4-4:**  $\beta_{HL}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$  (Fm Mugrosa),  $\Delta_{dep} = 0$



**Fuente:** Elaboración propia.

De manera análoga para la Fm Esmeraldas, la figura 4-5 muestra en profundidad la variación del  $\beta_{HL}$  para diferentes  $p_w$ . De acuerdo con los resultados, se podría sugerir que valores de  $\beta_{HL}$  entre 2.3 ( $p_w = 3000 \text{ psi}$ ) y 1.8 ( $p_w = 1500 \text{ psi}$ ) podrían estar asociados con el inicio de la producción de arena.

**Figura 4-5:**  $\beta_{HL}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$ (Fm Esmeraldas),  $\Delta_{dep} = 0$



Fuente: Elaboración propia.

### 4.1.2 Simulación de Monte Carlo - Modelo Willson et al., (2002)

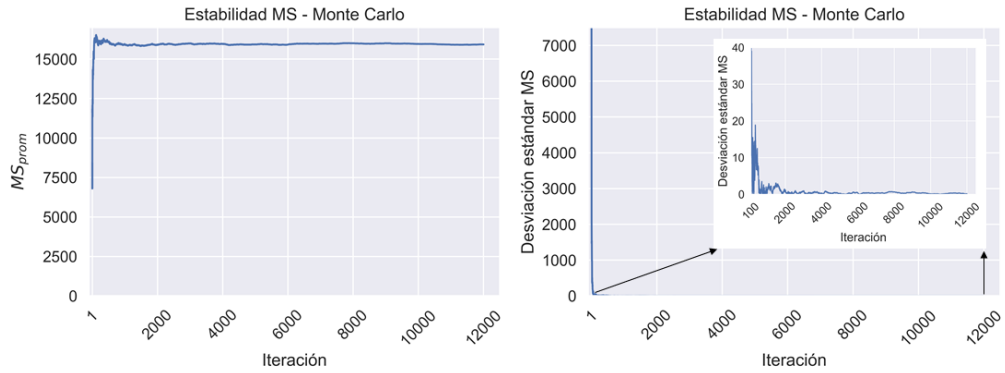
Para la simulación de Monte Carlo (SMC) se debe determinar el número N de valores de la función Margen de Seguridad ( $MS$ ) que garantizan la estabilidad del modelo. Teniendo en cuenta que la resistencia y las cargas no están correlacionadas, el  $\beta_{MC}$  calculado a partir de la SMC se define como:

$$\beta_{MC} = \frac{\mu_{MS}}{\sigma_{MS}} \quad (4.3)$$

Por tanto, el número de veces que se debe calcular la función  $MS$  debe asegurar la estabilidad numérica de  $\mu_{MS}$  y  $\sigma_{MS}$ . De acuerdo con la Figura 4-6, se puede encontrar el valor de N en donde  $\mu_{MS}$  (izquierda) y  $\sigma_{MS}$  (derecha) son estables a partir de  $N \geq 10,000$  iteraciones.



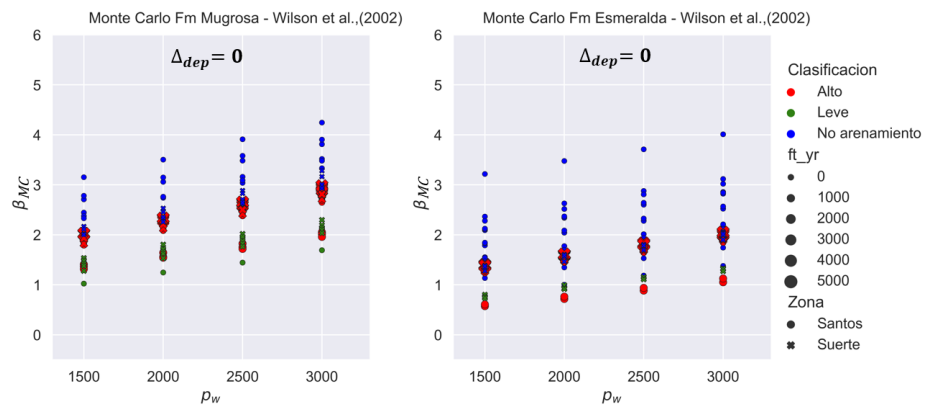
**Figura 4-6:** Verificación de la estabilidad de la simulación Monte Carlo



**Fuente:** Elaboración propia.

En las gráficas de la figura 4-7 se muestran los resultados del cálculo de  $\beta_{MC}$  en función de  $p_w$  para las Fm Mugrosa y Esmeraldas. En general, el comportamiento de los valores de  $\beta_{MC}$  es similar al  $\beta_{HL}$ , en el que  $\beta_{MC}$  es menor a medida que  $p_w$  disminuye. Así como en el método de Hasofer-Lind, se observa que algunos pozos que no han presentado producción de arena tienen valores de  $\beta_{MC}$  similares a los clasificados como “Alto” o “Leve” en términos de producción de arena. Una diferencia importante entre la simulación de Monte Carlo y el método de Hasofer-Lind es su desempeño computacional. En la simulación de Monte Carlo con 12,000 iteraciones el tiempo de cómputo es mayor a 1 hora mientras que en el método Hasofer-Lind es menor a 30 segundos.

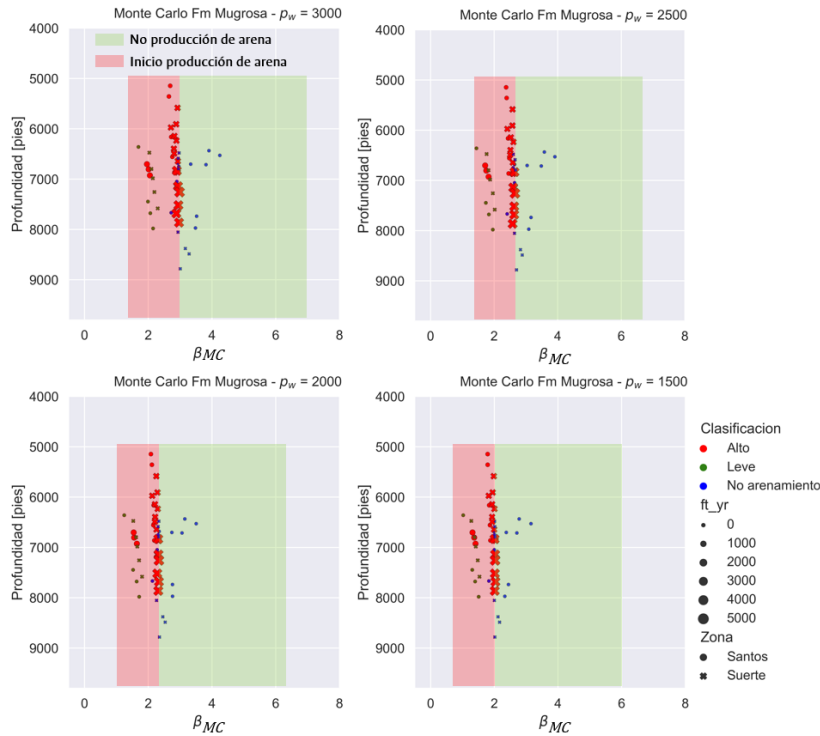
**Figura 4-7:** Índice de confiabilidad del inicio de la producción de arena para la condición  $\Delta_{dep} = 0$



**Fuente:** Elaboración propia.

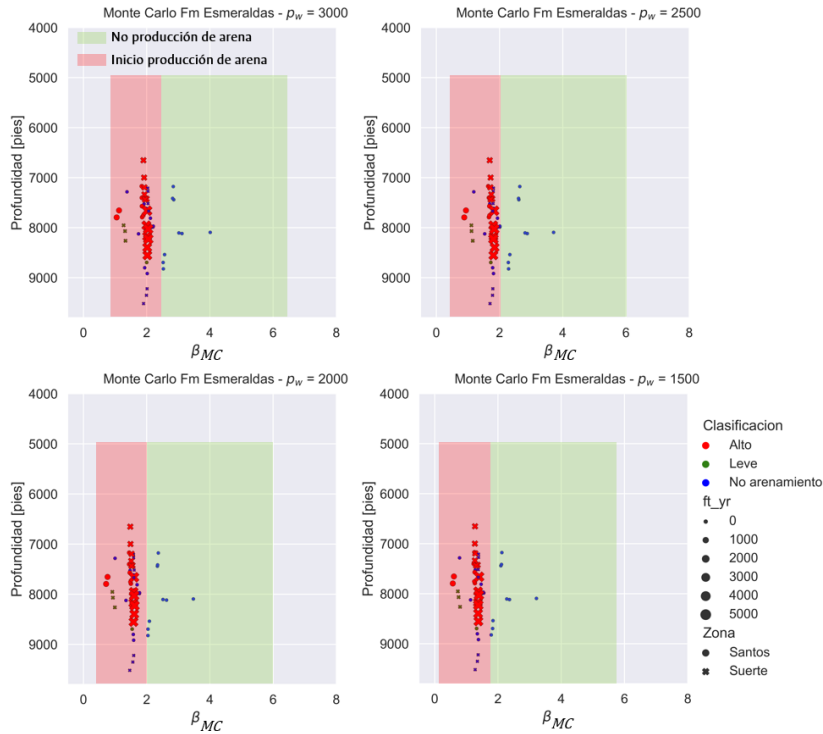
Para la Fm Mugrosa, los valores de  $\beta_{MC}$  asociados con el inicio de la producción de arena varían entre 3.0 ( $p_w = 3000$  psi) y 2.0 ( $p_w = 1500$  psi), mientras que para la Fm Esmeraldas el rango es entre 2.6 ( $p_w = 3000$  psi) y 1.8 ( $p_w = 1500$  psi) tal como se muestra en la Figuras 4-8 y 4-9.

**Figura 4-8:**  $\beta_{HL}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$ (Fm Mugrosa),  $\Delta_{dep} = 0$



Fuente: Elaboración propia.

**Figura 4-9:** en profundidad para cada valor de  $p_w$ (Fm Esmeraldas),  $\Delta_{dep} = 0$



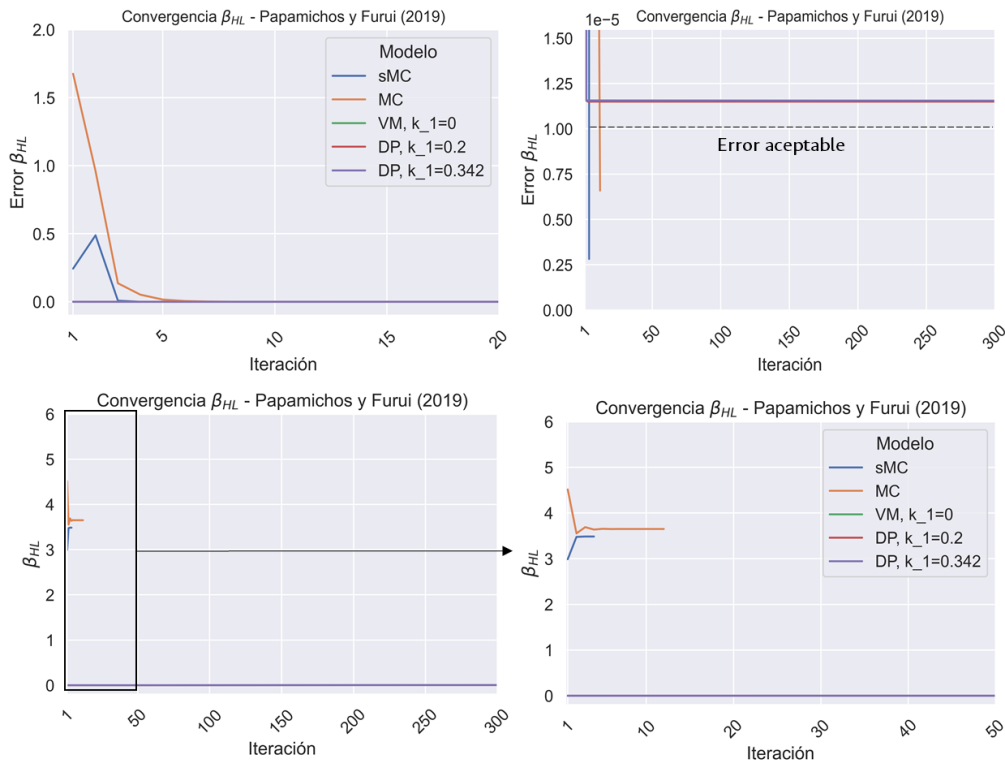
Fuente: Elaboración propia.

### 4.1.3 Método Hasofer-Lind - Modelo Papamichos y Furui (2019)

La formulación matemática de la función de margen de seguridad basada en el modelo analítico de Papamichos y Furui (2019) incluye, además del criterio de falla simplificado de Mohr-Coulomb (sMc), el criterio Mohr-Coulomb (MC) y los criterios de von Mises (VM) y Drucker-Prager (DP). Como se observa en la figura 4-10, los modelos sMC y MC convergen luego de la iteración número 4 y 15 respectivamente. En cambio, los modelos VM y DP presentan un comportamiento atípico, cuyos valores de  $\beta_{HL}$  son cercanos a cero. Se observa en las gráficas superiores que en los modelos sMC y MC se cumple la condición del error  $< 0.00001$  para aceptar la convergencia de  $\beta_{HL}$ , lo cual no ocurre con los modelos VM y DP cuyos errores son mayores a 0.00001, incluso ejecutando 300 iteraciones. Las gráficas inferiores muestran que los valores de  $\beta_{HL}$  en los modelos VM y DP desde la primera iteración son casi cero. A diferencia del modelo analítico de Willson et al., (2002) los criterios de VM y DP de Papamichos y Furui (2019) son funciones no lineales. El algoritmo implementado en esta investigación, propuesto por Rackwitz y Flessler (1978) puede generar problemas de convergencia cuando la función de

comportamiento o margen de seguridad ( $MS$ ) es no lineal (Du 2005) y las variables aleatorias no siguen una distribución normal (Low y Tang 2004).

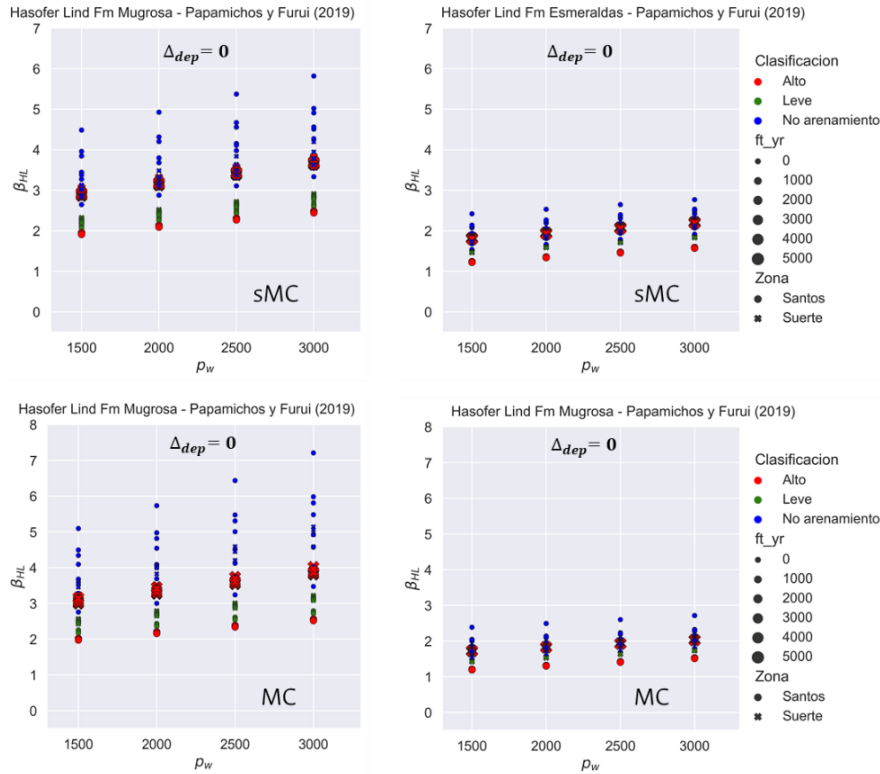
**Figura 4-10:** Convergencia del  $\beta_{HL}$  del  $MS$  basado en el modelo analítico de Papamichos y Furui (2019)



**Fuente:** Elaboración propia.

Los resultados de los modelos sMC (superior) y MC (inferior) del  $\beta_{HL}$  para las Fm Mugrosa y Esmeraldas se muestran en la Figura 4-11. A diferencia de los resultados obtenidos con el modelo de Willson et al., (2002) mostrados en la Figura 4-3, los valores de  $\beta_{HL}$  calculados en ambos modelos (sMC y MC) para la Fm Mugrosa asociados con la producción de arena (puntos rojos y verdes) son, en general mayores, mostrando valores cercanos a  $\beta_{HL} \approx 4.0$  para  $p_w = 3000 \text{ psi}$  y  $\beta_{HL} = 3.0$  para  $p_w = 1500 \text{ psi}$ . En el caso de la Fm Esmeraldas, la diferencia entre los valores de  $\beta_{HL}$  asociados con los pozos con y sin producción de arena se reduce drásticamente con respecto al modelo de Willson et al., (2002). En ambas formaciones y para los modelos sMC y MC se mantiene la tendencia de  $\beta_{HL}$  menores a medida que  $p_w$  disminuye.

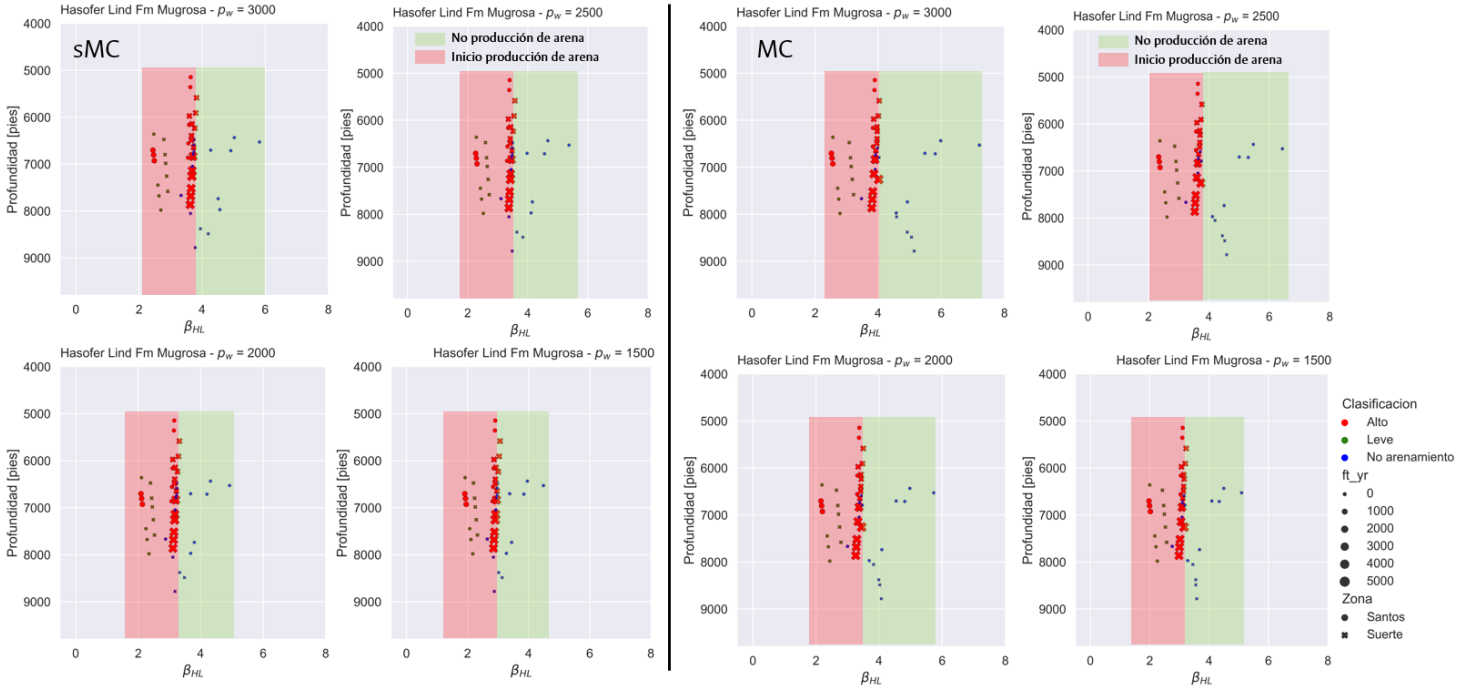
**Figura 4-11:** Índice de confiabilidad del inicio de la producción de arena para la condición  $\Delta_{dep} = 0$



**Fuente:** Elaboración propia.

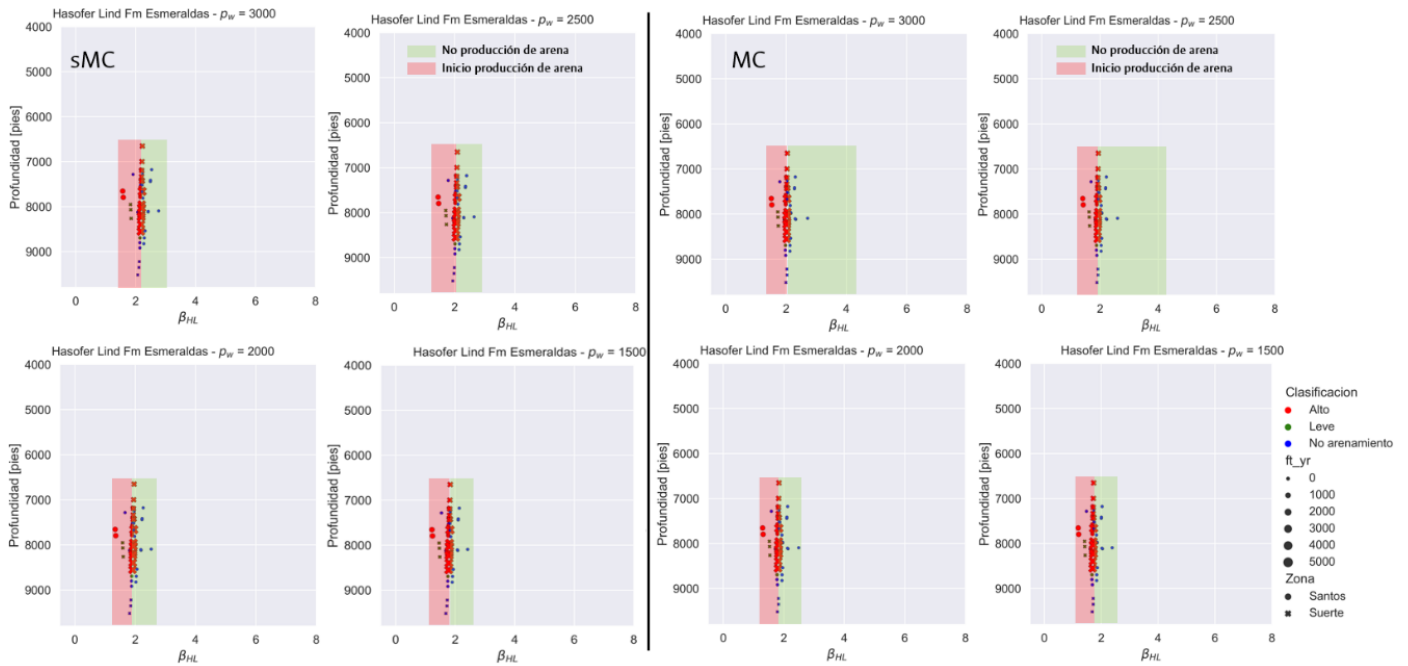
La revisión en profundidad de los valores de  $\beta_{HL}$  para las Fm Mugrosa y Esmeraldas de las Figuras 4-12 y 4-13 muestra que, en general, no existe una diferencia significativa entre los valores de  $\beta_{HL}$  calculados con los criterios SMC y MC. Esto ocurre porque la inclinación de los pozos a las profundidades de cálculo, en la mayoría de los casos son  $<10^\circ$ , lo que implica que  $\tau_{yz}^0$  y  $\tau_{xz}^0$  son casi cero y por tanto  $\tau_{\theta z}$  tiende a cero, de manera que el criterio MC es equivalente a SMC.

**Figura 4-12:**  $\beta_{HL}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$  (Fm Mugrosa),  $\Delta_{dep} = 0$



Fuente: Elaboración propia.

**Figura 4-13:** Variación del  $\beta_{HL}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$  (Fm Esmeraldas)



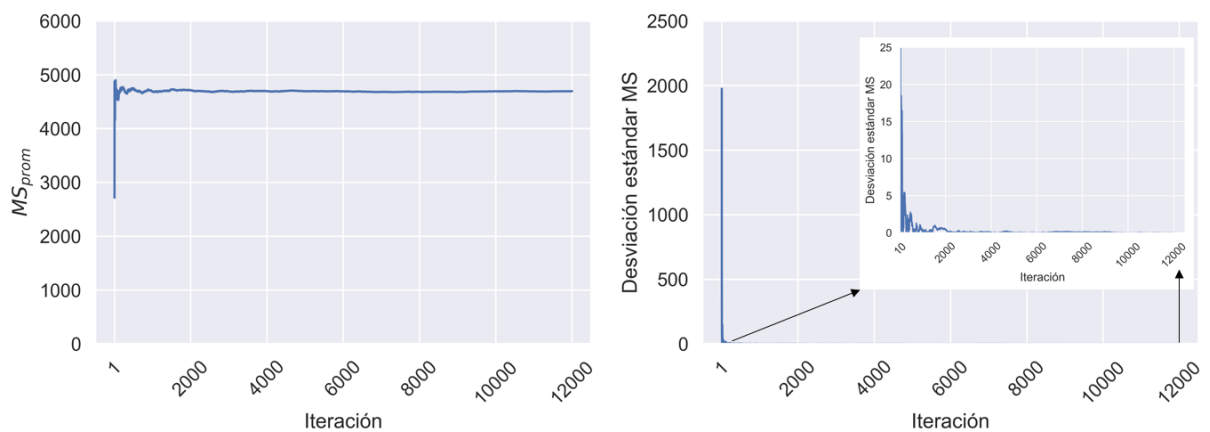
Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con los resultados mostrados en las Figuras 4-12 y 4-13 para la Fm Mugrosa, los valores de  $\beta_{HL}$  asociados con el inicio de la producción de arena varían entre 3.8 ( $p_w = 3000 \text{ psi}$ ) y 3.0 ( $p_w = 1500 \text{ psi}$ ), mientras que para la Fm Esmeraldas el rango es entre 2.2 ( $p_w = 3000 \text{ psi}$ ) y 1.8 ( $p_w = 1500 \text{ psi}$ ) para el criterio sMC. Considerando el criterio MC para la Fm Mugrosa se tiene que  $\beta_{HL}$  varía entre 4.0 ( $p_w = 3000 \text{ psi}$ ) y 3.2 ( $p_w = 1500 \text{ psi}$ ), mientras que para la Fm Esmeraldas el rango es entre 2.1 ( $p_w = 3000 \text{ psi}$ ) y 1.7 ( $p_w = 1500 \text{ psi}$ ).

#### 4.1.4 Simulación de Monte Carlo - Modelo Papamichos y Furai (2019)

La simulación de Monte Carlo se realizó considerando 12,000 cálculos del MS definido en la expresión 3.28. La estabilidad numérica de  $\mu_{MS}$  y  $\sigma_{MS}$  se muestran en la figura 4-14.

**Figura 4-14:** Verificación de la estabilidad de la simulación Monte Carlo

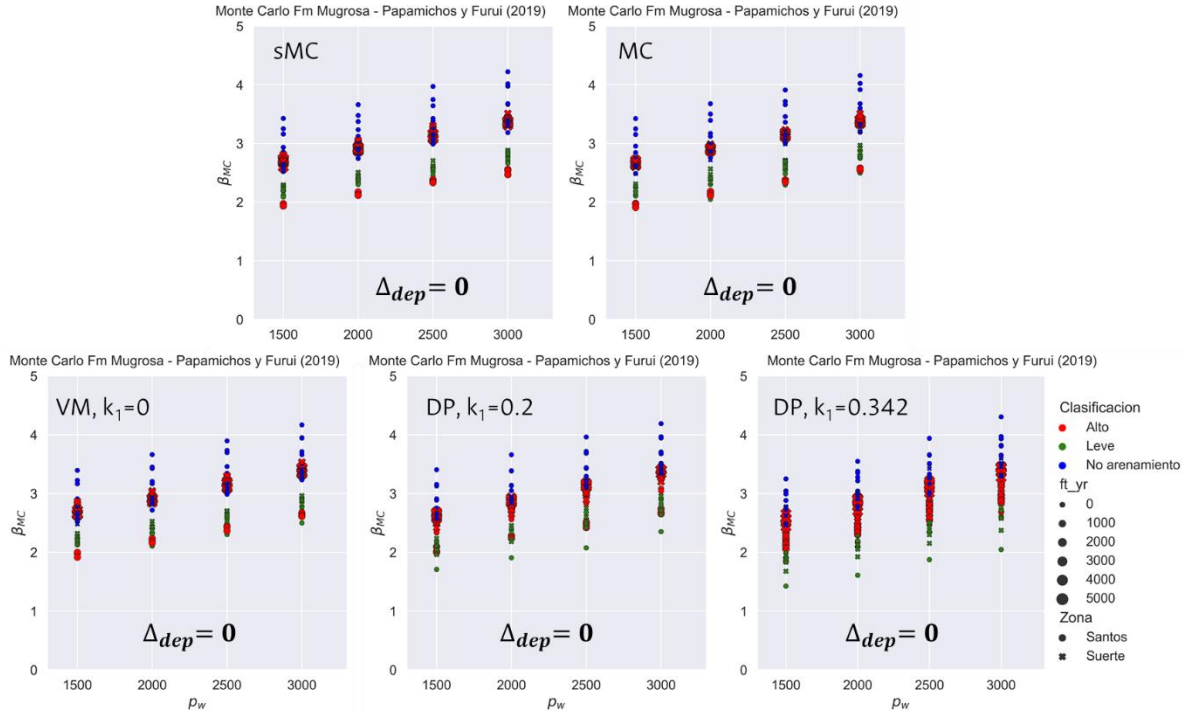


**Fuente:** Elaboración propia.

Una de las ventajas de la simulación de Monte Carlo es su aplicabilidad a funciones de comportamiento del MS no lineales, por lo que es posible calcular el  $\beta_{MC}$  para todos los criterios de falla: sMC, MC, VM y DP. De acuerdo con las Figuras 4-15 y 4-16 se observa similitud entre los valores del  $\beta_{MC}$  calculados con los criterios sMC MC y VM ( $k_1 = 0$ ), los cuales varían, en el caso de la Fm Mugrosa, entre 2.0 y 3.5 en los pozos con producción de arena y entre 2.6 y 4.2 para los pozos sin producción de arena. En la Fm Esmeraldas se observa que  $\beta_{MC}$  varía entre 1.2 y 2.5 para los pozos con producción de arena y entre 1.7 y 3.6 para los pozos clasificados como “No arenamiento”. El criterio DP ( $k_1 = 0.2$  y  $k_1 = 0.342$ ) muestra valores de  $\beta_{MC}$  en los pozos con producción de arena con un rango entre

1.2 y 3.4 para la Fm Mugrosa y entre 1.2 y 2.5 en la Fm Esmeraldas. En los pozos sin producción de arena, los valores de  $\beta_{MC}$ , de acuerdo con el criterio DP se encuentran entre 2.5 y 4.2 para la Fm Mugrosa y entre 1.9 y 3.6 en el caso de la Fm Esmeraldas.

**Figura 4-15:** Índice de confiabilidad del inicio de la producción de arena (Fm Mugrosa) con  $\Delta_{dep} = 0$

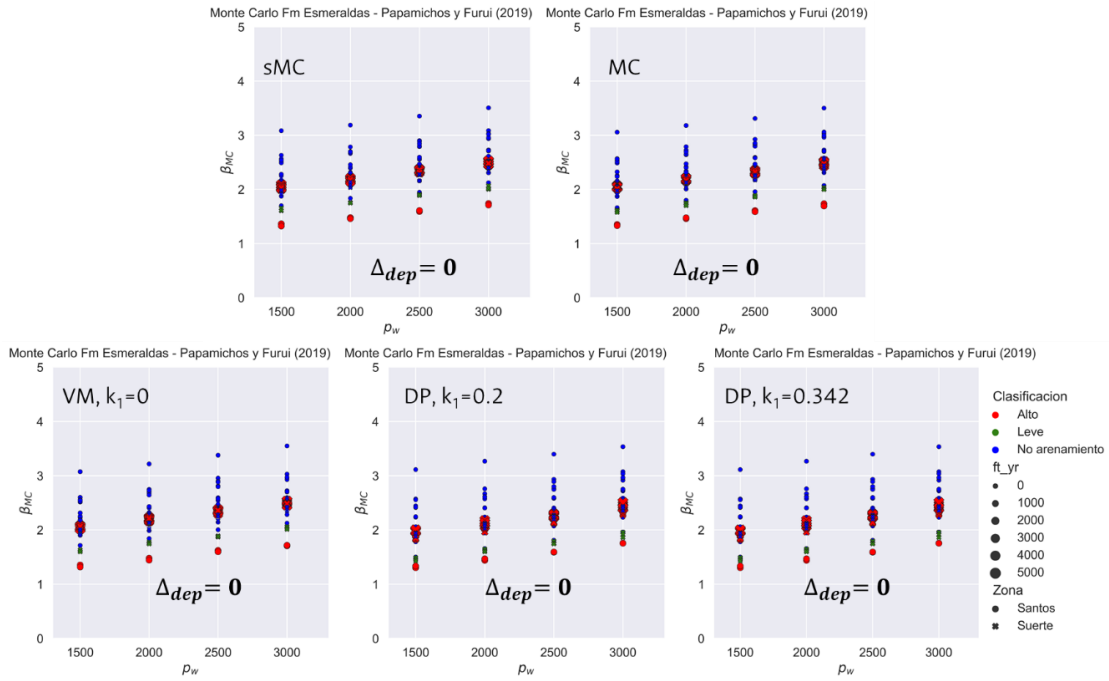


Fuente: Elaboración propia.

Como se muestra en las Figuras 4-15 y 4-16, los valores de  $\beta_{MC}$  calculados con los criterios sMC, MC y VM son similares, así como los obtenidos por las versiones del modelo DP. De esta manera una visualización en profundidad de  $\beta_{MC}$  para todos los criterios resultaría poco informativa. Por lo tanto, se seleccionaron únicamente los modelos MC y DP ( $k_1=0.342$ ) para analizar el comportamiento de  $\beta_{MC}$  para cada  $p_w$ . Con base en los resultados del criterio MC (figura 4-17), los índices de confiabilidad máximo y mínimo que podrían asociarse con el inicio de la producción de arena en la Fm Mugrosa son 3.5 ( $p_w = 3000 \text{ psi}$ ) y 2.7 ( $p_w = 1500 \text{ psi}$ ) respectivamente.

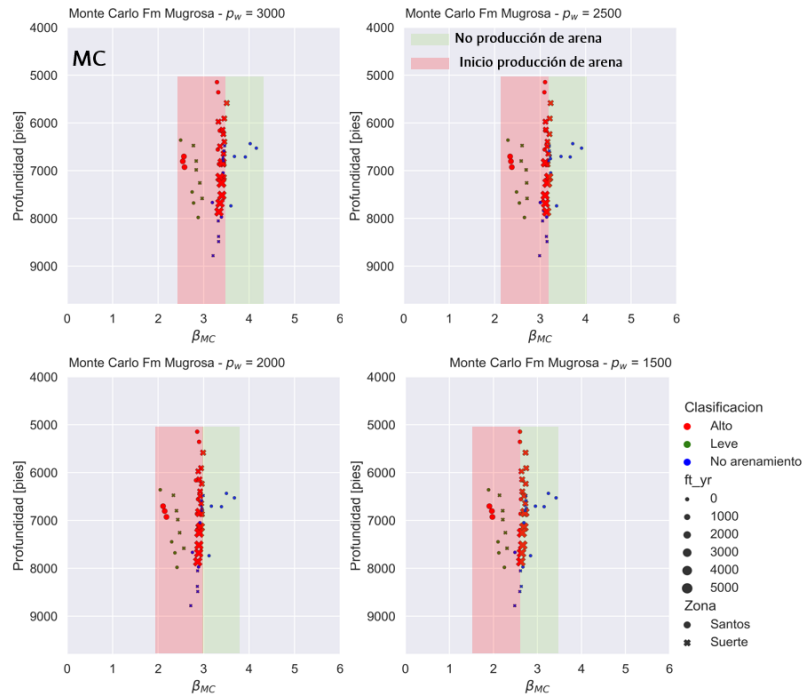


**Figura 4-16:** Índice de confiabilidad del inicio de la producción de arena (Fm Esmeraldas) con  $\Delta_{dep}=0$



Fuente: Elaboración propia.

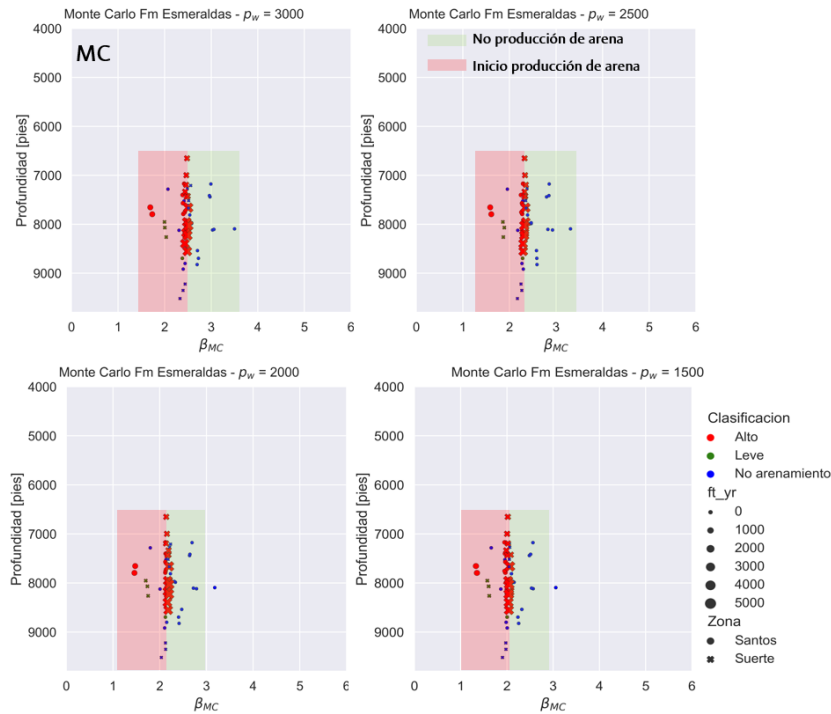
**Figura 4-17:**  $\beta_{MC}$  en profundidad para cada valor de  $\rho_w$  Papamichos y Furui (2019).  $\Delta_{dep}=0$



Fuente: Elaboración propia.

Para la Fm Esmeraldas (Figura 4-18) estos valores de  $\beta_{MC}$  corresponden a 2.5 ( $p_w = 3000 \text{ psi}$ ) y 2.0 ( $p_w = 1500 \text{ psi}$ ). Usando el criterio DP ( $k_1=0.342$ ) se observa en las Figuras 4-19 y 4-20 un aumento de  $\beta_{MC}$  en los pozos con producción de arena a medida que se avanza en profundidad, lo cual sugiere menor confiabilidad en los pozos que producen hidrocarburos en estratos más someros de una misma formación. Este comportamiento está relacionado con el mecanismo físico de producción de arena en el que las rocas más jóvenes y poco profundas tienen un pobre grado de consolidación (menos resistencia mecánica) y por tanto pueden alcanzar la falla con mayor facilidad que rocas más profundas.

**Figura 4-18:**  $\beta_{HL}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$  - Papamichos y Furui (2019).  $\Delta_{dep}=0$



**Fuente:** Elaboración propia.

Además, en el criterio DP el aumento de  $\sigma'_z$  reduce el  $\sigma_c$  de la ecuación 3.28 y por tanto aumenta el  $MS$ . Aunque un aumento de  $\sigma'_z$  es favorable, no solo es el único factor que varía en profundidad. Los esfuerzos  $\sigma_{Ho}$  o  $\sigma_{ho}$  pueden aumentar en profundidad, lo que implica que  $\sigma'_\theta$  sea mayor. De hecho el promedio de  $\sigma_{Ho}$  en la Fm Mugrosa es menor que en la Fm Esmeraldas. Por ello, los valores de  $\beta_{MC}$  calculados en la Fm Mugrosa son superiores que los calculados en la Fm Esmeralda, cuya roca a pesar de tener resistencia

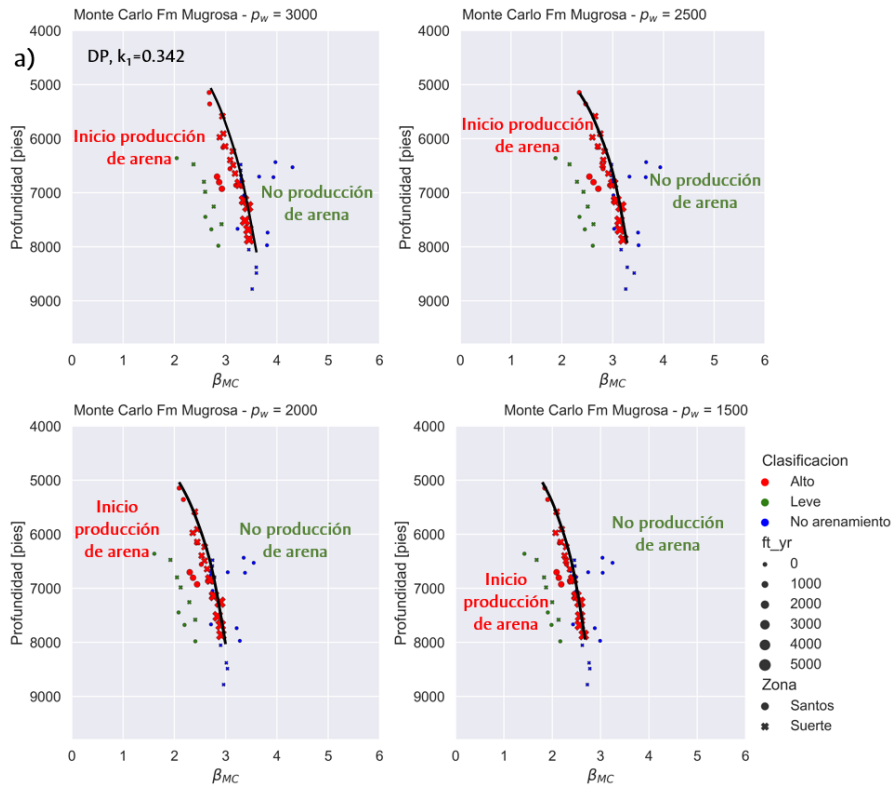
mecánica similar a la Fm Mugrosa, soporta esfuerzos horizontales más altos. En cualquier caso, en las Fm Mugrosa y Esmeraldas es notable la influencia de  $\sigma'_z$  en el cálculo de  $\beta_{MC}$ . La tabla 4-1 resume los valores de  $\beta_{MC}$  asociados con el inicio de la producción de arena para  $p_w = 1500 \text{ psi}$  (mínimo) y  $p_w = 3000 \text{ psi}$  (máximo) con base en los resultados de la figura 4-19.

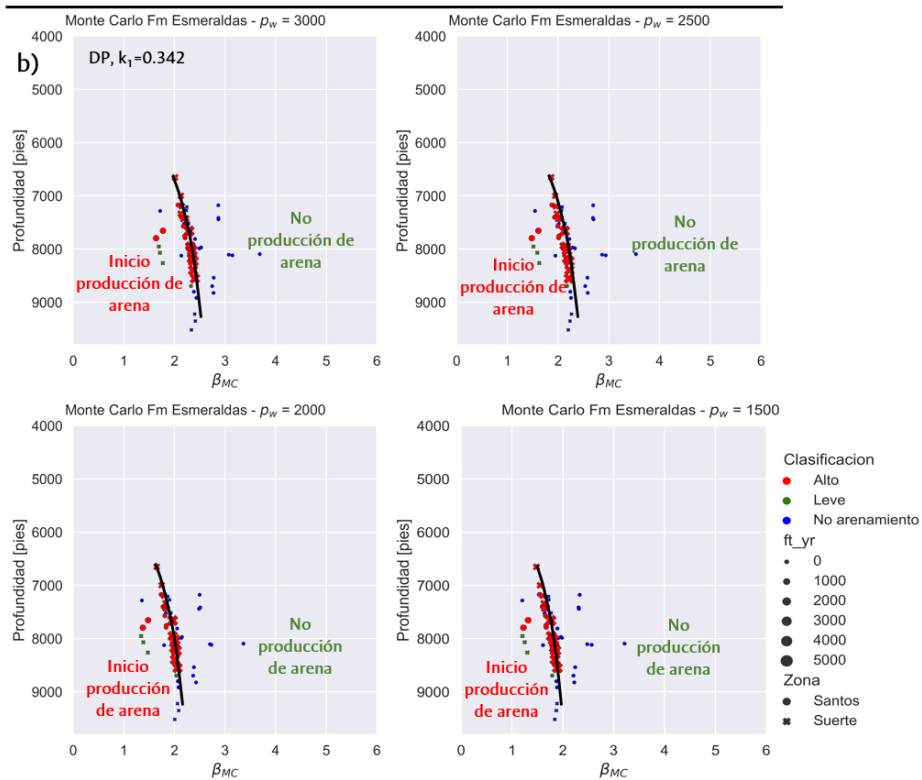
**Tabla 4-1.** Resumen de valores mínimos y máximos de  $\beta_{MC}$  calculados con el criterio DP ( $k_1=0.342$ )

Formación	Profundidad [pies]							
	6000		7000		8000		8500	
Mugrosa $\beta_{MC}$ (min, max)	2.1	2.9	2.2	2.9	2.7	3.5	Sin datos	
Esmeraldas $\beta_{MC}$ (min, max)	Sin datos		1.5	2.1	1.8	2.4	1.9	2.4

**Figura 4-19:**  $\beta_{HL}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$ : a) Fm Mugrosa, b) Fm Esmeraldas.

$\Delta_{dep} = 0$





Fuente: Elaboración propia.

## 4.2 Cálculo del índice de confiabilidad para la condición de presión de poros reciente de yacimiento - Modelo Papamichos y Furui (2019)

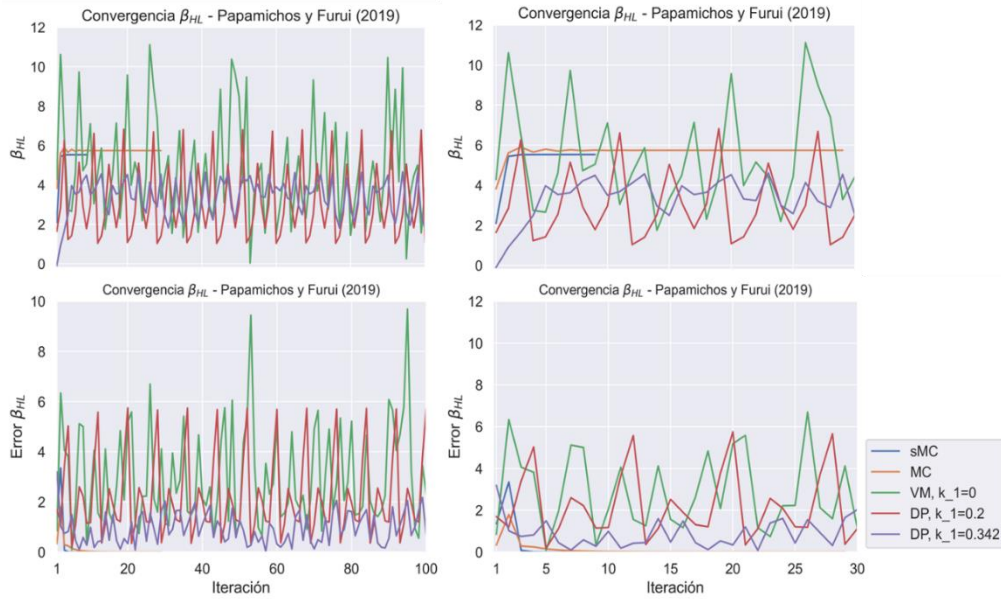
Para el escenario de presión de poros reciente existen datos de la presión de fondo fluyente ( $p_w$ ) entre 2019 y 2021 para 14 pozos. Además de calcular el  $\beta_{HL}$  y el  $\beta_{MC}$  para estos pozos y sus correspondientes  $p_w$ , se han asumido, de acuerdo con las  $p_w$  que se han observado en campo, valores de  $p_w$  [psi] = 500, 1000, 2000, 3000 para analizar la variación de  $\beta_{HL}$  y el  $\beta_{MC}$  en todos los pozos. Los cálculos del índice de confiabilidad se realizan únicamente con el modelo analítico de Papamichos y Furui (2019) ya que, a diferencia del modelo de Willson et al., (2002), incorpora el cálculo del cambio de  $\sigma_{Ho}$  y  $\sigma_{ho}$  debido al agotamiento de la presión de poros directamente en las ecuaciones 3.30 a 3.32.

### 4.2.1 Índice de confiabilidad en pozos con mediciones de $p_w$ y $\Delta_{dep} > 0$

Durante la aplicación del método de Hasofer-Lind debe verificarse la convergencia de  $\beta_{HL}$  para los criterios de falla del modelo de Papamichos y Furui (2019). Como se muestra en la figura 4-20 (superior), en los criterios SMC y MC la convergencia de  $\beta_{HL}$  se logra con 9 y 29 iteraciones respectivamente, cumpliendo la condición de  $error < 0.00001$ . En cuanto a los modelos VM ( $k_1 = 0$ ), DP ( $k_1 = 0.2$ ) y DP ( $k_1 = 0.342$ ) se observa un comportamiento errático tanto del valor de  $\beta_{HL}$  como de los errores calculados en cada iteración. De la Figura 4-20 se puede deducir que los valores de  $\beta_{HL}$  calculados por los criterios de falla SMC y MC son similares. Por estas razones, los resultados que se exponen en esta sección, asociados con el método Hasofer-Lind, corresponden únicamente al criterio de falla MC.

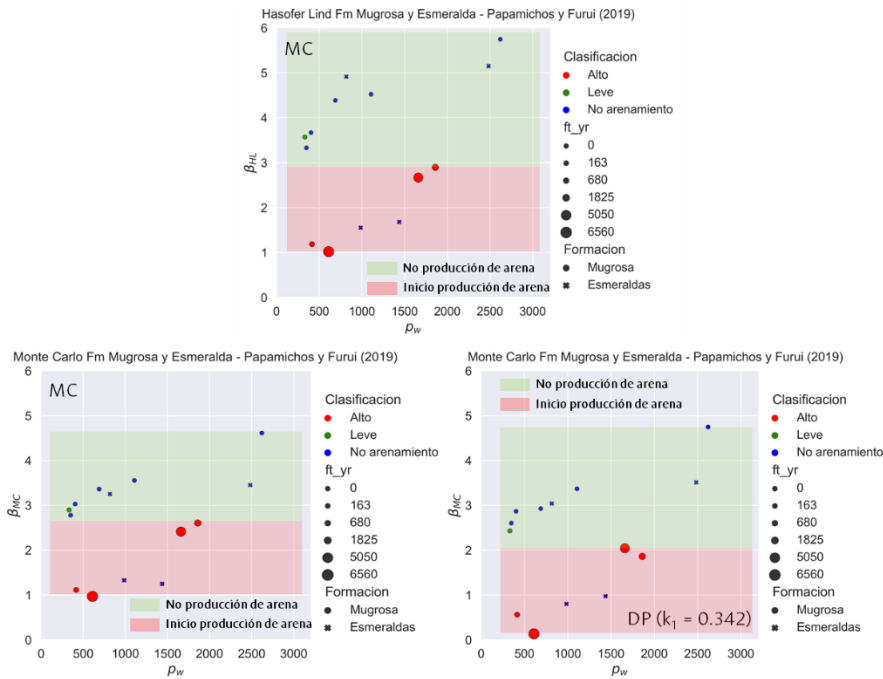
Con el método de simulación de Monte Carlo (SMC), considerando 12000 iteraciones, se presentan los resultados aplicando los criterios de falla MC y DP ( $k_1 = 0.342$ ). Con esta selección de criterios se pueden comparar los resultados obtenidos aplicando el criterio de falla MC para ambos métodos de simulación y adicionalmente se mostrarán las diferencias entre los criterios MC y DP ( $k_1 = 0.342$ ) aplicando la SMC. En la Figura 4.21 se presentan los resultados del  $\beta_{HL}$  y el  $\beta_{MC}$  para las Fm Mugrosa y Esmeraldas. Aunque el conjunto de datos es reducido, es posible identificar que en general los pozos sin producción de arena (puntos azules) tienen valores más altos de  $\beta_{HL}$  y  $\beta_{MC}$  que los pozos con producción de arena. Este comportamiento se evidencia tanto en la aplicación de los dos métodos de simulación como en los criterios de falla usados. Comparando los resultados del criterio MC, se aprecia que los valores calculados usando el método Hasofer-Lind para los pozos sin producción de arena son mayores que los calculados con la SMC. Con el modelo DP ( $k_1=0.342$ ) se obtienen los menores valores de  $\beta_{MC}$  para los pozos con producción de arena, con valores incluso cercanos a cero.

**Figura 4-20:** Convergencia del  $\beta_{HL}$  - Modelo analítico de Papamichos y Furui (2019).



Fuente: Elaboración propia.

**Figura 4-21:** Resultados de  $\beta_{HL}$  y  $\beta_{MC}$  - Modelo analítico de Papamichos y Furui (2019) con  $\Delta_{dep} > 0$ .



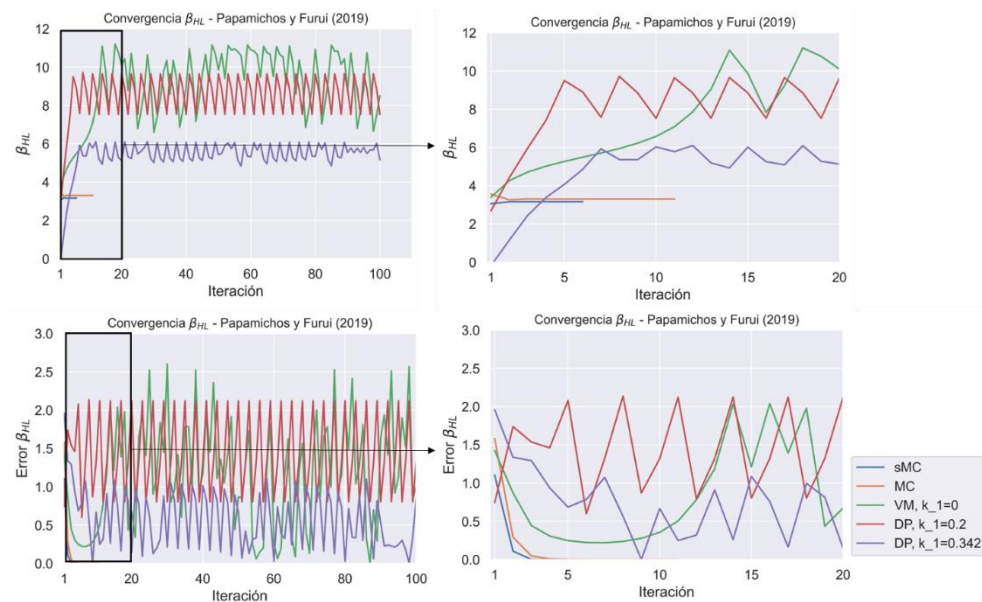
Fuente: Elaboración propia.

Con base en los resultados mostrados en la Figura 4-2, se puede inferir que los valores de  $\beta$  en las Fm Mugrosa y Esmeraldas que podrían asociarse con el inicio de la producción de arena utilizando el criterio de MC son  $\beta_{HL} = 2.9$  y  $\beta_{MC} = 2.6$ , mientras que con el criterio DP ( $k_1 = 0.342$ ) se estima un  $\beta_{MC} = 2.1$ .

### 4.2.2 Método Hasofer-Lind con valores hipotéticos de $p_w$

Como en las secciones 4.1.1, 4.1.3 y 4.2.1, antes de  $\beta_{HL}$  se examinó la convergencia del algoritmo para todos los criterios de falla. Se evidenció nuevamente el comportamiento errático en la convergencia de  $\beta_{HL}$  descrito en la sección 4.2.1 (Figura 4-22). Los criterios de falla que proporcionaron valores estables de  $\beta_{HL}$  fueron sMC y MC, mientras que con los criterios VM ( $k_1 = 0$ ), DP ( $k_1 = 0.2$ ) y DP ( $k_1 = 0.342$ ) no se obtuvo convergencia. Como se observa en la Figura 4-22 (gráfica superior derecha), la diferencia entre los resultados usando sMC (azul) y MC (naranja) es mínima por lo que sólo se mostrarán los valores de  $\beta_{HL}$  obtenidos con MC para su posterior comparación con los resultados de la simulación de Monte Carlo usando el mismo criterio.

**Figura 4-22:** Convergencia del  $\beta_{HL}$  - Modelo analítico de Papamichos y Furui (2019).

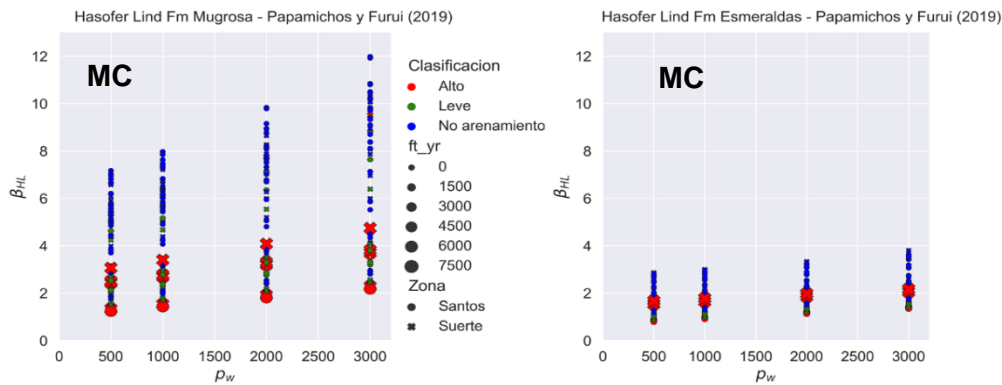


**Fuente:** Elaboración propia.

La Figura 4-23 muestra los resultados del cálculo de  $\beta_{HL}$  en función de  $p_w$  para las Fm Mugrosa (izquierda) y Esmeraldas (derecha). Se observa una diferencia significativa de los

valores de  $\beta_{HL}$  entre las dos formaciones. Por ejemplo, en la Fm Mugrosa el máximo  $\beta_{HL}$  asociado con un pozo sin producción de arena para una  $p_w = 3000$  es  $\beta_{HL} = 12$  mientras que para la Fm Esmeraldas es  $\beta_{HL} = 4.0$ . En general, para todos los valores de  $p_w$ , el  $\beta_{HL}$  de los pozos sin producción de arena (puntos azules) es mayor que los pozos con producción de arena clasificados como “Leve” o “Alto”.

**Figura 4-23:** Índice de confiabilidad del inicio de la producción de arena para la condición  $\Delta_{dep} > 0$



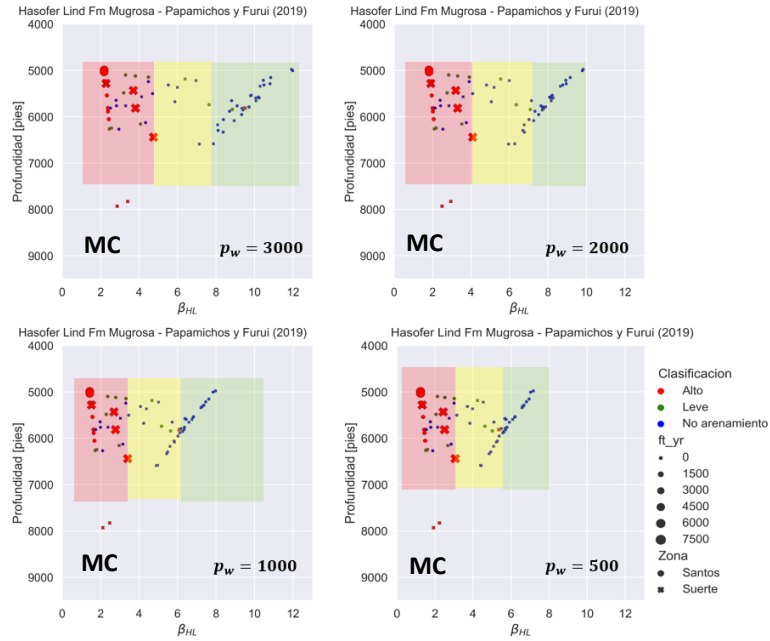
**Fuente:** Elaboración propia.

En las Figuras 4-24 y 4-25 se presentan los valores de  $\beta_{HL}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$ . Para la Fm Mugrosa se pueden distinguir tres zonas para cada valor de  $p_w$ . Una zona verde, que podría asociarse con una amenaza baja de iniciar producción de arena en la que predominan los puntos azules que corresponden a los pozos sin producción de arena, una zona amarilla (amenaza media) en la que hay principalmente presencia de pozos sin producción de arena junto con 4 pozos con clasificación “Leve” (puntos verdes). Finalmente se observa una zona roja que podría representar una amenaza alta de iniciar producción de arena (puntos rojos) que agrupa todos los pozos con alta producción de arena, 7 pozos con leve producción de arena y 7 pozos sin producción de arena. El límite entre la franja verde y la amarilla varía entre  $\beta_{HL} = 7.6$  y  $\beta_{HL} = 5.0$  para los valores de  $p_w = 3000$  y  $p_w = 500$  respectivamente. El límite entre la franja amarilla y roja varía entre  $\beta_{HL} = 4.7$  ( $p_w = 3000$ ) y  $\beta_{HL} = 3.0$  ( $p_w = 500$ ). Para la Fm Esmeraldas se pueden inferir dos franjas: una roja en la que se encuentran los pozos con alta y leve producción de arena junto con pozos que no han presentado producción de arena y una franja verde que podría asociarse únicamente con los pozos clasificados como “No arenamiento”. Los valores de



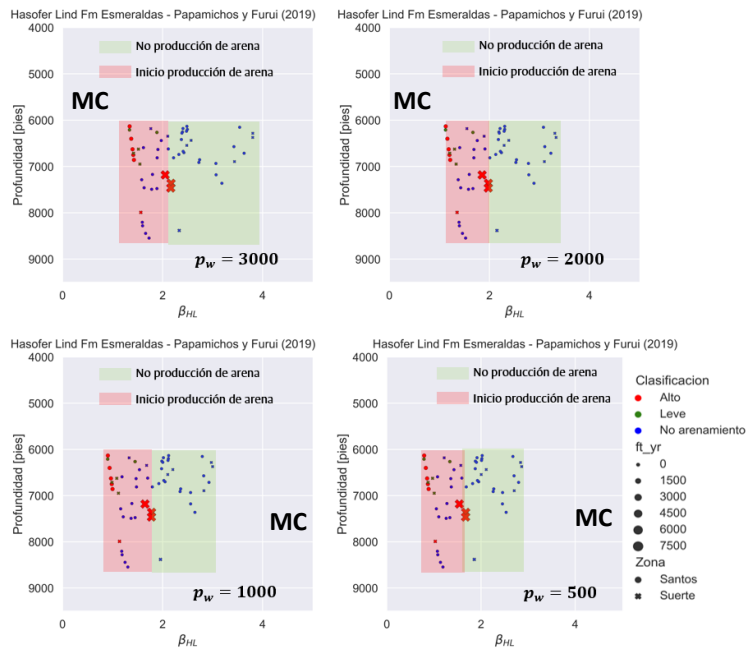
los límites entre ambas franjas varían entre  $\beta_{HL} = 2.2$  para  $p_w = 3000$  y  $\beta_{HL} = 1.7$  para  $p_w = 500$ .

**Figura 4-24:**  $\beta_{HL}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$  (Fm Mugrosa),  $\Delta_{dep} > 0$



Fuente: Elaboración propia.

**Figura 4-25:**  $\beta_{HL}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$  (Fm Esmeraldas),  $\Delta_{dep} > 0$

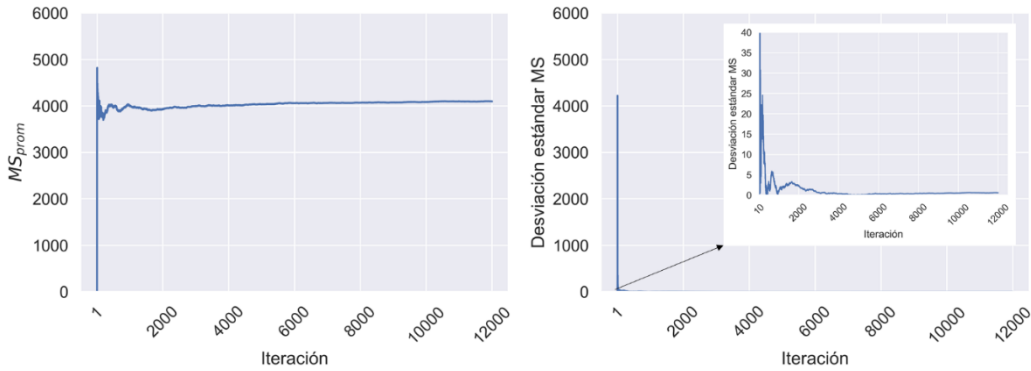


Fuente: Elaboración propia.

### 4.2.3 Simulación de Monte Carlo con valores hipotéticos de $p_w$

La simulación de Monte Carlo se realizó considerando 12,000 cálculos del  $MS$  definido en la expresión 3.28. En la Figura 4-26 se muestra la estabilidad numérica de  $\mu_{MS}$  (izquierda) y  $\sigma_{MS}$  (derecha).

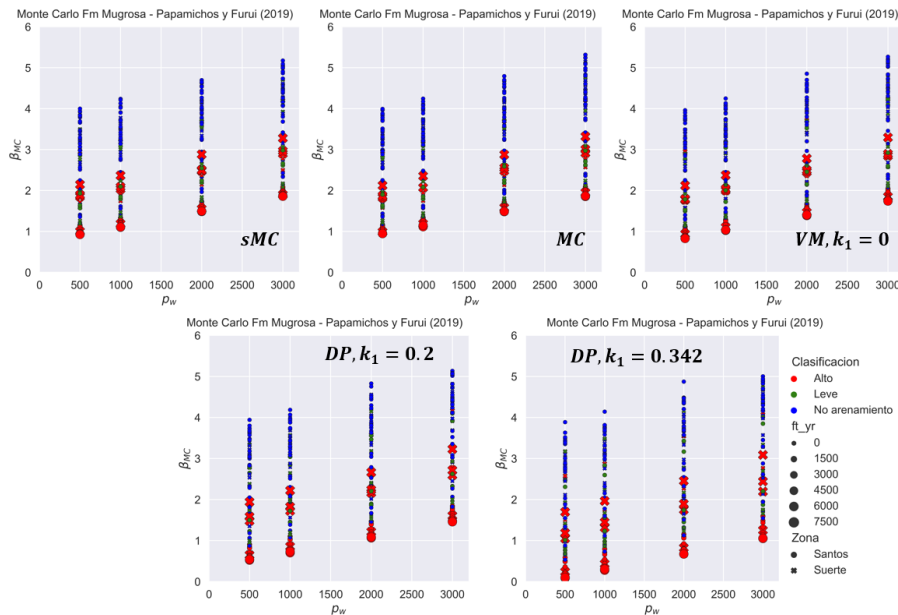
**Figura 4-26:** Verificación de la estabilidad de la simulación Monte Carlo



Fuente: Elaboración propia.

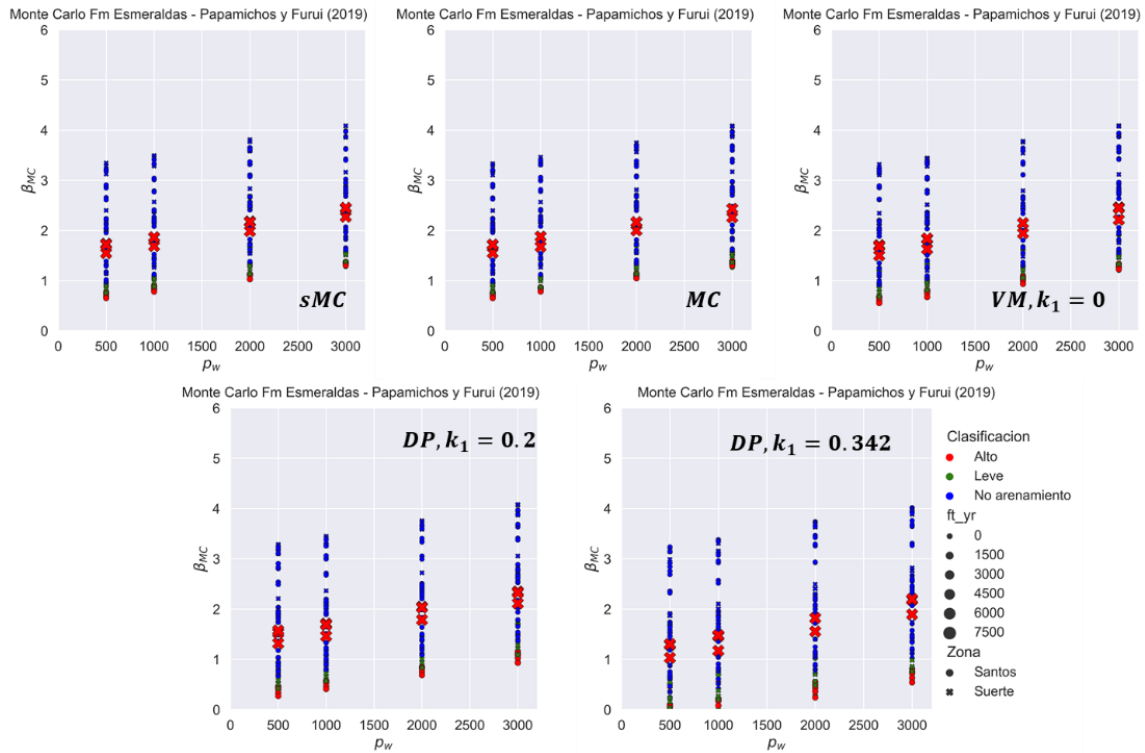
La variación del  $\beta_{MC}$  para todos los criterios de falla en función de  $p_w$  y para cada formación se muestran en las Figuras 4-27 (Fm Mugrosa) y 4-28 (Fm Esmeraldas).

**Figura 4-27:**  $\beta$  del inicio de la producción de arena (Fm Mugrosa)  $\Delta_{dep} > 0$



Fuente: Elaboración propia.

**Figura 4-28:**  $\beta$  del inicio de la producción de arena (Fm Esmeraldas) con  $\Delta_{dep} > 0$



**Fuente:** Elaboración propia.

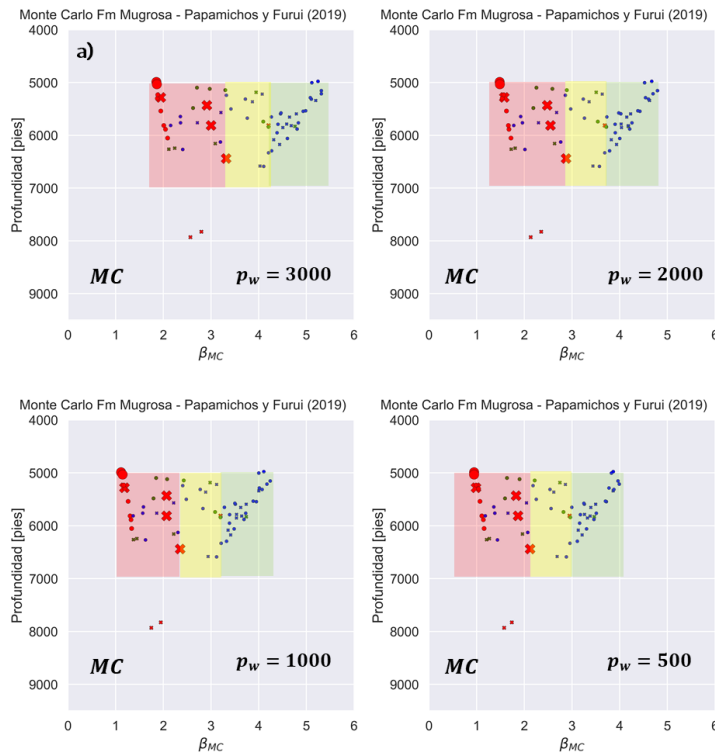
Los resultados utilizando la simulación de Monte Carlo nos indica, en primer lugar, que los valores de  $\beta_{MC}$  entre los criterios sMC, MC y VM ( $k_1 = 0$ ) son similares y en general presentan valores ligeramente mayores que los calculados con los criterios de falla DP ( $k_1 = 0.2$ ) y DP ( $k_1 = 0.342$ ).

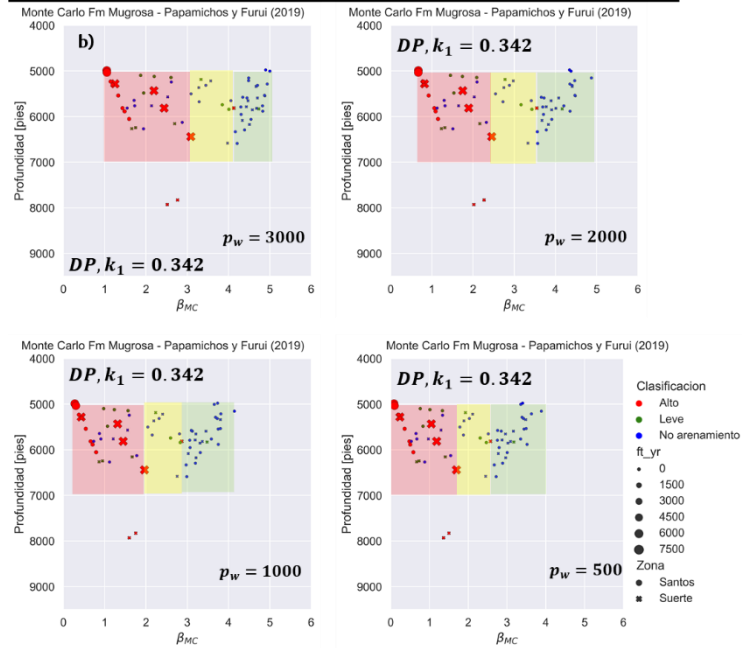
En segundo lugar, al comparar únicamente los resultados del índice de confiabilidad derivados del criterio MC se evidencia que con el método de Hasofer Lind los valores de  $\beta_{HL}$  en la Fm Mugrosa son mayores, especialmente en los pozos sin producción de arena, que los obtenidos con el método de simulación de Monte Carlo. De manera contraria, en la Fm Esmeraldas, los valores del índice de confiabilidad con el método Hasofer Lind son menores que los calculados por el método de simulación de Monte Carlo.

Dada la similitud entre los valores de  $\beta_{MC}$  obtenidos con los criterios sMC, MC y VM ( $k_1 = 0$ ) y entre las dos versiones del criterio DP en las Figuras 4-29 y 4-30 se presentan únicamente los valores de  $\beta_{MC}$  en profundidad para cada  $\rho_w$  de los criterios MC y DP ( $k_1 =$

0.342). Así como se observó en los resultados del método de Hasofer Lind, los valores de  $\beta_{MC}$  calculados con los criterios MC y DP ( $k_1 = 0.342$ ) pueden agruparse en tres zonas: una zona verde o de amenaza baja de inicio de producción de arena que la integran principalmente pozos sin producción de arena; una zona amarilla (amenaza media) que contiene algunos pozos con producción leve y otros pozos sin producción de arena y una zona roja o de amenaza alta de inicio de producción de arena que reúne la mayoría de pozos con alta producción de arena, así como varios pozos con producción leve de arena y algunos pozos sin producción de arena.

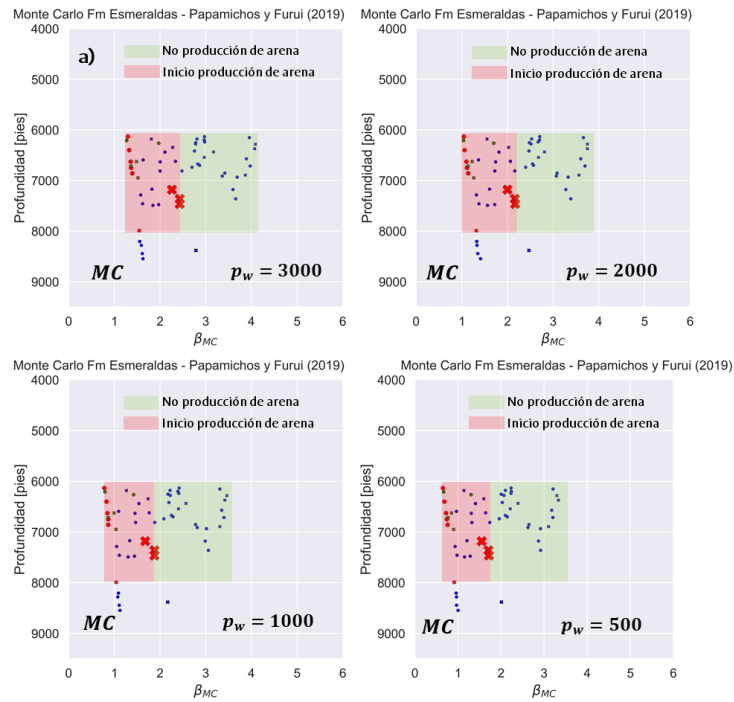
**Figura 4-29:**  $\beta_{MC}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$  (Fm Mugrosa) para la condición  $\Delta_{dep} > 0$ : a) criterio MC; b) criterio DP ( $k_1 = 0.342$ )

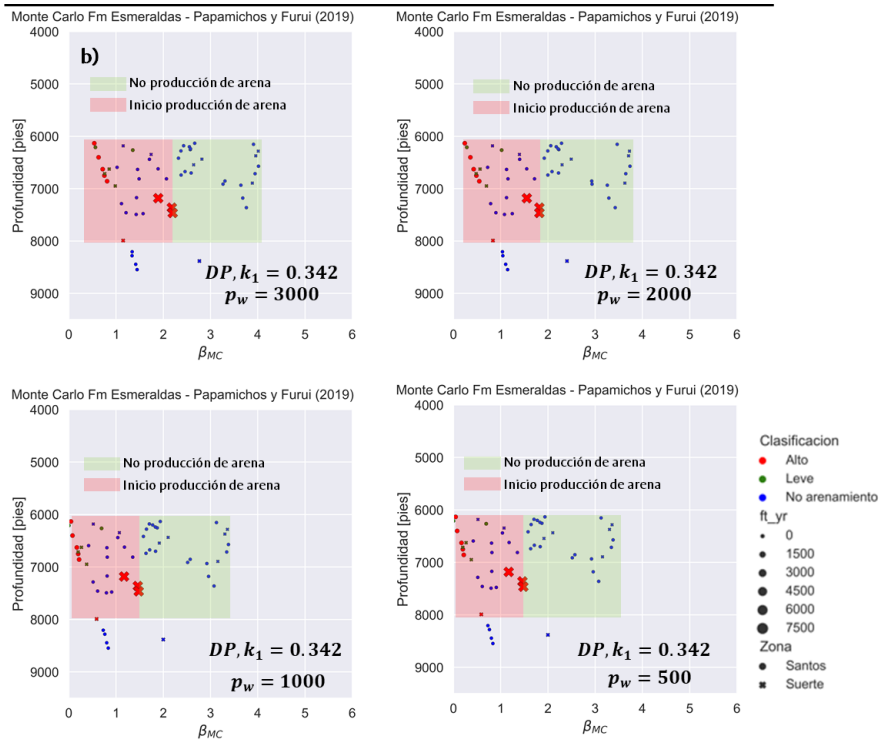




Fuente: Elaboración propia.

**Figura 4-30:**  $\beta_{MC}$  en profundidad para cada valor de  $p_w$  (Fm Esmeraldas) para la condición  $\Delta_{dep} > 0$ : a) criterio MC; b) criterio DP ( $k_1 = 0.342$ )





Fuente: Elaboración propia.

Las tablas 4-2 y 4-3 resumen los valores de  $\beta_{MC}$  calculados para  $p_w[psi] = 3000$  y  $p_w[psi] = 500$  en cada zona de amenaza (alta, media y baja) asociada con el inicio de la producción de arena para la Fm Mugrosa.

**Tabla 4-2.** Resumen de valores de  $\beta_{MC}$  calculados con los criterios MC y DP ( $k_1=0.342$ ), Fm Mugrosa

$p_w[psi] = 3000$			
Criterio de falla	Amenaza alta	Amenaza media	Amenaza Baja
	$\beta_{MC}$	$\beta_{MC}$	$\beta_{MC}$
MC	<3.3	$\geq 3.3$ y $\leq 4.2$	>4.2
DP ( $k_1 = 0.342$ )	<3.1	$\geq 3.1$ y $\leq 4.1$	>4.1

**Tabla 4-3.** Resumen de valores de  $\beta_{MC}$  calculados con los criterios MC y DP ( $k_1=0.342$ ), Fm Mugrosa

$p_w[psi] = 500$			
Criterio de falla	Amenaza alta	Amenaza media	Amenaza Baja
	$\beta_{MC}$	$\beta_{MC}$	$\beta_{MC}$
MC	<2.1	$\geq 2.1$ y $\leq 2.9$	>2.9
DP ( $k_1 = 0.342$ )	<1.7	$\geq 1.7$ y $\leq 2.5$	>2.5

En la Fm Esmeraldas los resultados de  $\beta_{MC}$  se han dividido en dos zonas denominadas “Inicio de producción de arena” y “No producción de arena”. Los valores de  $\beta_{MC}$  en cada zona y para cada modelo considerando valores de  $p_w[psi] = 3000$  y  $p_w[psi] = 500$  se muestran en las Tablas 4-4 y 4-5.

**Tabla 4-4.** Resumen de valores de  $\beta_{MC}$  calculados con los criterios MC y DP ( $k_1=0.342$ ), Fm Esmeraldas

$p_w[psi] = 3000$		
Criterio de falla	Inicio de producción de arena	No producción de arena
	$\beta_{MC}$	$\beta_{MC}$
MC	<2.4	$\geq 2.4$
DP ( $k_1 = 0.342$ )	<2.2	$\geq 2.2$

**Tabla 4-5.** Resumen de valores de  $\beta_{MC}$  calculados con los criterios MC y DP ( $k_1=0.342$ ), Fm Esmeraldas

$p_w[psi] = 500$		
Criterio de falla	Inicio de producción de arena	No producción de arena
	$\beta_{MC}$	$\beta_{MC}$
MC	<1.7	>1.7
DP ( $k_1 = 0.342$ )	<1.3	>1.3

### 4.3 Análisis de los factores asociados con el inicio de la producción de arena

Se ha mostrado mediante la aplicación de los métodos de simulación de Hasofer Lind y Monte Carlo que los valores del índice de confiabilidad en condiciones de presión de poros iniciales y recientes de yacimiento son dependientes de la presión de fondo fluyente y en consecuencia del *drawdown*. Esta dependencia es frecuente en los modelos analíticos, tal

como se muestra en las investigaciones de Weingarten y Perkins (1995) y Sanfilippo *et al.*, (1997) expuestos en el capítulo 1, donde el inicio de la producción de arena está asociado con un valor de *drawdown* crítico o en el caso de o de Hayavi y Abdideh (2017) en función de la presión fluuyente de fondo de pozo crítica. El *drawdown* ( $\Delta_{dd}$ ) matemáticamente se define como:

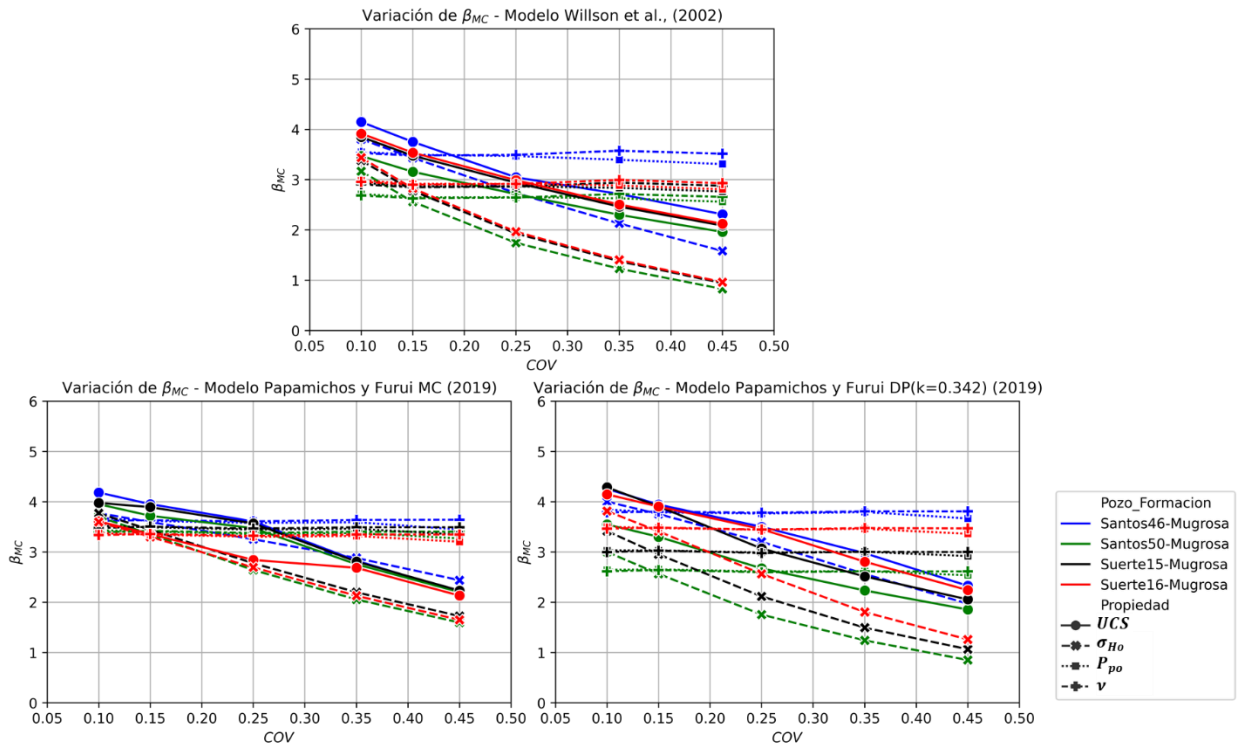
$$\Delta_{dd} = P_{res} - p_w \quad (4.4)$$

donde  $P_{res} = P_{po}, P_p$  (presión de poro iniciales o recientes de yacimiento) y  $p_w$  es la presión de fondo fluuyente. A medida que  $P_{po}$  declina ( $P_{po} \rightarrow P_p$ ) por la extracción de fluidos,  $p_w$  debe reducirse para mantener un diferencial de presión capaz de mover los fluidos del yacimiento hacia el pozo. Esta reducción del  $p_w$  aumenta  $\sigma'_\theta$ , que en el caso del modelo analítico de Willson *et al.*, (2002) es la única carga del sistema. Por tanto un aumento  $\sigma'_\theta$  implica una disminución de la confiabilidad del sistema (pozo-formación).

Aunque los valores de resistencia en términos del UCS son mayores en la Fm Esmeraldas comparados con la Fm Mugrosa se evidencian menores valores del índice de confiabilidad en la Fm Esmeraldas. Esta situación se explica porque en la Fm Esmeraldas los esfuerzos horizontales aumentan con la profundidad, tal como se muestra en las Figuras de la Tabla 3-11. Para analizar en mayor detalle la influencia de las incertidumbres en las variables aleatorias y de los modelos analíticos empleados para el cálculo del índice de confiabilidad, en las Figuras 4-31 a 4-33 se muestra para algunos pozos y para cada formación el cambio del valor de  $\beta_{MC}$  a medida que el coeficiente de variación (*COV*) de cada variable aleatoria aumenta de 0.1 a 0.45. Las curvas de las figuras 4-31 y 4-32 consideran  $\Delta_{dep} = 0$ , mientras que en las curvas de la figura 4-33  $\Delta_{dep} > 0$ . Es claro que la relación de Poisson es la variable que produce el menor cambio tanto en condiciones iniciales de presión de poro ( $\Delta_{dep} = 0$ ) como en condiciones actuales de presión de poro de yacimiento ( $\Delta_{dep} > 0$ ), ya que el valor de  $\beta_{MC}$  permanece constante independiente del valor de *COV*. La presión de poro en condiciones iniciales de yacimiento tiene un impacto leve en  $\beta_{MC}$  a partir de un valor de *COV* mayor a 0.25. Por ejemplo, para el pozo Santos 46 en la Fm Mugrosa, utilizando el modelo de Willson *et al.*, (2002), el valor de  $\beta_{MC}$  para *COV* menores a 0.25 es cercano a 3.5, mientras que para valores de *COV* de 0.45 se acerca a  $\beta_{MC} = 3.2$ .



**Figura 4-31:** Impacto del coeficiente de variación de las variables aleatorias en el cálculo de  $\beta_{MC}$  para condiciones iniciales de presión de poro de yacimiento en la Fm Mugrosa. Superior: resultados con el modelo de Willson et al., (2002). Inferior: resultados con el modelo de Papamichos y Furui (2019)

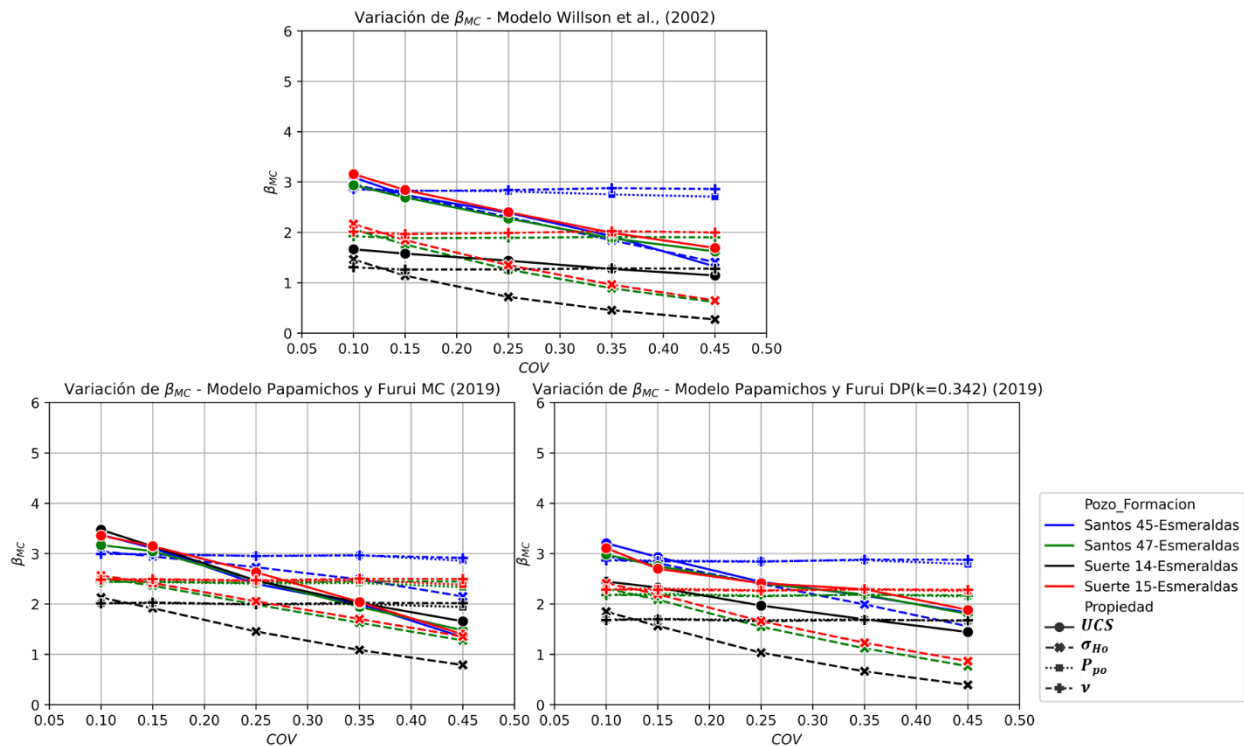


**Fuente:** Elaboración propia.

Como se observa en la Figura 4-31, las incertidumbres en el UCS y  $\sigma_{Ho}$  son las que mayor impacto generan en el cálculo de  $\beta_{MC}$  independiente del modelo analítico que se use para representar el margen de seguridad. En el caso de  $\beta_{MC}$  en la Fm Mugrosa se observa una diferencia de 2 unidades en el valor calculado de  $\beta_{MC}$  tanto en el COV del UCS como en el COV del  $\sigma_{Ho}$ . Por ejemplo, tomando como referencia los resultados con el criterio de falla DP ( $k_1=0.342$ ) del modelo de Papamichos y Furui (2019) y considerando la variación en el UCS se observa una disminución del  $\beta_{MC} \approx 4.0$ , para  $COV = 0.1$  a  $\beta_{MC} \approx 2.0$  para  $COV = 0.45$  para el pozo Suerte 15 (curva negra con puntos). Similarmente, considerando el COV del  $\sigma_{Ho}$  usando el modelo de Willson et al., (2002), los valores del índice de confiabilidad varían entre  $\beta_{MC} \approx 3.5$  para  $COV = 0.1$  hasta valores de  $\beta_{MC} \approx 1.0$  para  $COV = 0.45$  en el caso del pozo Suerte 16 (curva roja con símbolos "x"). La fuerte influencia que ejercen las incertidumbres del UCS y el  $\sigma_{Ho}$  en los cálculos puede originarse por los

siguientes factores: a) el UCS es el único término asociado con la resistencia de la roca, por lo que una incertidumbre alta en sus valores implica una gran variación en el margen de seguridad, b) a diferencia de la presión de poro cuya variación afecta el cálculo de  $\sigma_{Ho}$  y  $\sigma_{ho}$ , una variación directa de  $\sigma_{Ho}$  implica cambios en los esfuerzos  $\sigma_{\theta}, \sigma_z, \tau_{\theta z}$  que representan las cargas en la función del margen de seguridad. En cuanto a los modelos, la menor variación en el cálculo de  $\beta_{MC}$  se observa en el modelo de Papamichos y Furui (2019) utilizando el criterio de falla MC. En la Fm Esmeraldas (Figura 4-32), el impacto en las incertidumbres de las variables aleatorias en el cálculo de  $\beta_{MC}$  es similar a lo observado en la Fm Mugrosa: impacto leve de la incertidumbre de la relación de Poisson, ligeramente mayor en el caso de la presión de  $P_{po}$ , y una fuerte variación del  $\beta_{MC}$  para los distintos valores de COV en las variables aleatorias UCS y  $\sigma_{Ho}$ .

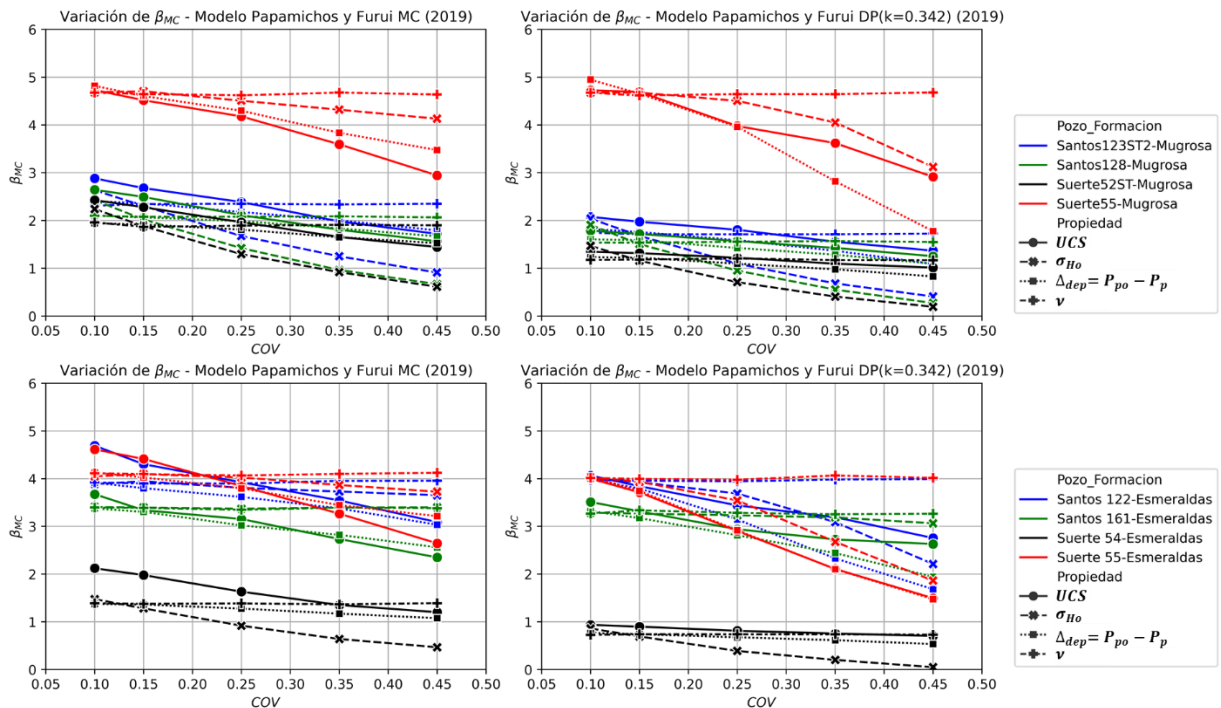
**Figura 4-32:** Impacto del coeficiente de variación de las variables aleatorias en el cálculo de  $\beta_{MC}$  para condiciones iniciales de presión de poro de yacimiento en la Fm Esmeraldas. Superior: resultados con el modelo de Willson et al., (2002). Inferior: resultados con el modelo de Papamichos y Furui (2019)



Fuente: Elaboración propia.

En el escenario de condición de presión de poro actual de yacimiento, además de la fuerte influencia de las incertidumbres de las variables aleatorias UCS y  $\sigma_{Ho}$  se observa para ambas formaciones que la variación en el COV de la pérdida de presión en las Fm Mugrosa y Esmeraldas ( $\Delta_{dep} > 0$ ) afecta significativamente el cálculo de  $\beta_{MC}$  (Figura 4-33). Esto se debe principalmente a que en el modelo de Papamichos y Furui (2019) se incluye un término asociado con la disminución en los esfuerzos horizontales en función de  $\Delta_{dep}$  (ecuación 3.15), lo cual implica un aumento en la diferencia entre los esfuerzos efectivos horizontales y vertical, generando un aumento en las cargas alrededor del pozo. De forma análoga a la condición de presión de poro inicial de yacimiento, se observa que el criterio de falla DP ( $k_1=0.342$ ) del modelo de Papamichos y Furui (2019) es el que presenta las variaciones más altas en el cálculo de  $\beta_{MC}$ , lo cual podría asociarse al planteamiento matemático del criterio de falla en el que  $k_1$  multiplica los esfuerzos  $\sigma'_\theta, \sigma'_z$  los cuales a su vez dependen de las variaciones de  $\sigma_{Ho}$  y de  $P_p$ .

**Figura 4-33:** Impacto del coeficiente de variación de las variables aleatorias en el cálculo de  $\beta_{MC}$  para condiciones recientes de presión de poro de yacimiento usando el modelo Papamichos y Furui (2019) y los criterios de falla MC y DP ( $k_1=0.342$ ). Superior: Fm Mugrosa Inferior: Fm Esmeraldas



Fuente: Elaboración propia.

Los resultados obtenidos principalmente en la condición de presión de poros reciente de yacimiento sugieren que los modelos analíticos de Willson et al. (2002) y Papamichos y Furui (2019) pueden ser, en algunos casos, conservadores. Esto podría explicarse mediante los siguientes planteamientos. En primer lugar, se asume que el inicio de la producción de arena es equivalente a la falla de la roca. No obstante, además de la falla de la roca para el inicio de la producción de arena se requiere que los granos de la roca alterada sean desprendidos de la matriz rocosa. Por ello Wan y Wang (2000), Wan y Wang (2004) proponen criterios de producción de arena enfocados en modelos de erosión y de balance de masa en combinación de leyes constitutivas basadas en el comportamiento plástico de la roca. En segundo lugar, el proceso físico de producción de arena se origina en una escala mucho menor que la descrita por los modelos de Willson et al. (2002) y Papamichos y Furui (2019). En este sentido, Wan y Wang (2004) resaltan que la producción de arena está dominada por la dilatación de la roca, por el desprendimiento, el reordenamiento, y la desestructuración de los granos. Este comportamiento puede describirse con modelos poroelastoplásticos combinados con una regla de flujo para describir el criterio de fluencia y la deformación plástica. En tercer lugar, los modelos de Willson et al. (2002) y Papamichos y Furui (2019) no consideran flujos transitorios presentes en la zona más cercana a la pared del pozo, los cuales pueden intensificar las fuerzas de arrastre y facilitar el inicio de la producción de arena tanto en condiciones iniciales como recientes de presión de poro de yacimiento.

#### **4.4 Propuesta de rango de valores de $\beta$ asociados con el inicio de la producción de arena**

A continuación se propone una clasificación cualitativa de la amenaza de iniciar producción de arena en función de los valores de  $\beta$  analizados en este capítulo. La propuesta que se muestra en la tabla 4-6 se construyó teniendo en consideración los siguientes elementos:

1. Durante la presentación y análisis de resultados del  $\beta$  se evidenció que, en general, la Fm Esmeraldas presenta valores menores del índice de confiabilidad, en comparación con la Fm Mugrosa. Así, los niveles cualitativos de amenaza de iniciar producción de arena propuestos en la tabla 4-6 aplican tanto para la Fm Mugrosa como para la Fm Esmeraldas.

2. Los resultados del índice de confiabilidad obtenidos en la sección 4.21 con presiones de fondo de pozo fluyente ( $p_w$ ) medidas en el Campo Provincia sugieren que el  $\beta$  asociado con el inicio de la producción de arena usando el criterio Mohr Coulomb puede variar entre  $\beta_{HL} = 2.9$  y  $\beta_{MC} = 2.6$ , y usando el criterio DP ( $k_1=0.342$ ) se estima un  $\beta_{MC} = 2.1$ .
3. Para la condición de presión de poros inicial de yacimiento, el valor promedio de  $\beta_{HL}$  y  $\beta_{MC}$  asociado con el inicio de la producción de arena y calculado con los criterios de falla sMC y MC de Papamichos y Furui (2019) es  $\bar{\beta} = 3.4$  mientras que con el modelo de Willson et al., (2002) y el criterio DP ( $k_1=0.342$ ) de Papamichos y Furui (2019), el promedio de  $\beta_{HL}$  y  $\beta_{MC}$  es 2.5. En condiciones de presión de poros actual de yacimiento, el promedio de  $\beta_{HL}$  y  $\beta_{MC}$  considerando los criterios de falla MC y DP ( $k_1=0.342$ ) es 3.1 y 2.3 respectivamente.
4. Los valores de  $\beta$  que definen los niveles de amenaza deben considerar los resultados obtenidos con los datos de  $p_w$  medidos y los que se obtuvieron con  $p_w$  asumidas que representan el rango de presiones observado en campo. Para el nivel de amenaza baja se propone  $\beta \geq 3.0$ , valor que es ligeramente mayor a  $\beta_{HL} = 2.9$  que representa el valor más alto calculado con datos de presiones medidas en pozos con y sin producción de arena. Para el nivel de amenaza alta se propone  $\beta < 2.6$  cuyo valor es el promedio de  $\beta_{HL}$  y  $\beta_{MC}$  en condiciones de presión de poro inicial y actual. Luego, el rango de  $\beta$  para amenaza media, caracterizado por  $2.6 \leq \beta < 3.0$  agrupa los valores de  $\beta_{HL}, \beta_{MC}, < 3$  y  $\beta_{HL}, \beta_{MC}, > 2.6$  asociados con el inicio de la producción de arena en condiciones de presión de poro inicial y actual.

**Tabla 4-6.** Propuesta de valores de  $\beta$  para los niveles de amenaza baja, media y alta de iniciar producción de arena

Amenaza	Descripción en términos del inicio de la producción de arena	Valores de $\beta$
Alta	El inicio de la producción de arena es inminente	$\beta \leq 2.6$
Media	El desempeño del sistema pozo-formación es pobre. Un cambio en las condiciones de operación (por ejemplo aumentar el <i>drawdown</i> ) puede aumentar el nivel de amenaza	$2.6 < \beta < 3.0$
Baja	El desempeño del sistema pozo-formación es óptimo	$\beta \geq 3.0$

## 5. Conclusiones y recomendaciones

### 5.1 Conclusiones

1. La resistencia de la roca, el esfuerzo horizontal máximo y el agotamiento de la presión de poro son las variables aleatorias con mayor influencia en el cálculo del índice de confiabilidad asociado con el inicio de la producción de arena. A medida que la incertidumbre en estas variables aumenta, el índice de confiabilidad disminuye
2. En las funciones del margen de seguridad derivadas de los modelos analíticos (ecuaciones 3.26 y 3.28), la resistencia depende únicamente del UCS. Por tanto, un aumento del UCS incrementa la confiabilidad del sistema. Mientras que una disminución del UCS reduce la confiabilidad del sistema.
3. La influencia del  $\sigma_{Ho}$  depende de dos factores. El primer factor está asociado con los esfuerzos en coordenadas cilíndricas en la pared del pozo. Un aumento de  $\sigma_{Ho}$

genera un aumento de  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  y  $\tau_{\theta z}$ , que a su vez reducen el margen de seguridad y la confiabilidad del sistema. El segundo factor se relaciona con el aumento en la declinación de la presión de poros en el yacimiento que reduce los esfuerzos horizontales  $\sigma_{Ho}$  y  $\sigma_{ho}$  (ecuación 3.15) mientras que  $\sigma_v$  permanece constante. Esta situación, genera un diferencial de esfuerzos efectivos que aumenta en función del agotamiento de la presión de poro. A su vez este diferencial induce una mayor carga en el sistema que reduce el margen de seguridad.

4. Una disminución de  $p_w$  en un instante de tiempo específico induce un aumento del *drawdown*. Un aumento del *drawdown* conduce a un aumento de los esfuerzos efectivos  $\sigma'_\theta$  y  $\sigma'_z$  lo cual implica una disminución del margen de seguridad (*MS*).
5. En todos los casos presentados en el capítulo 4, se observó que el criterio DP ( $k_1=0.342$ ) proporciona los valores más pequeños del  $\beta$  que podrían asociarse con el inicio de la producción de arena.
6. Con base en el análisis de los resultados del  $\beta_{MC}$  y  $\beta_{HL}$  se propone una clasificación cualitativa de la amenaza de iniciar producción de arena. Valores del índice de confiabilidad menores o iguales a 2.6 indican amenaza alta de iniciar producción de arena; valores mayores a 2.6 y menores a 3 se asocian con una amenaza media de iniciar producción de arena y valores superiores a 3 representan una amenaza baja de iniciar producción de arena.
7. Aunque la resistencia mecánica de la formación Esmeraldas es mayor comparada con la Fm Mugrosa, la Fm Esmeraldas presenta menores valores del índice de confiabilidad. Esto ocurre porque la Fm Esmeraldas: i) está expuesta a niveles de esfuerzos más altos que la Fm Mugrosa, y ii) de acuerdo con los cálculos y datos de presión presenta mayores niveles de agotamiento de la presión de poro de yacimiento.
8. La disponibilidad de datos asociados con 73 pozos del campo Provincia permitió definir las funciones de probabilidad que mejor modelan la distribución de las variables aleatorias. Este conjunto de datos resultó particularmente útil en la

definición de los parámetros de la distribución Beta asignada a la relación de Poisson, cuyo uso en aplicaciones de geomecánica y geotecnia es poco frecuente.

9. El método de simulación Hasofer Lind aplicado a los modelos analíticos Willson et al., (2002) y

Papamichos y Furui (2019) considerando el criterio de falla Mohr Coulomb proporciona resultados estables de  $\beta_{HL}$  en pocas iteraciones (en general menos de 15). Sin embargo, su aplicación en funciones del margen de seguridad no lineales es limitada y puede presentar problemas de convergencia. La simulación de Monte Carlo requiere un número elevado de iteraciones para generar estabilidad numérica en  $\mu_{MS}$  y  $\sigma_{MS}$  pero puede aplicarse a problemas no lineales. El costo computacional en la convergencia del método de Hasofer Lind es mínimo mientras que la simulación de Monte Carlo puede tardar horas.

10. Los modelos analíticos de Willson et al., (2002) y Papamichos y Furui (2019) pueden generar resultados conservadores porque consideran que el inicio de la producción de arena es equivalente a la falla de la roca. Sin embargo, un mecanismo mucho más realista podría incluir modelos de erosión de los granos basados en el comportamiento plástico de la roca y la evaluación de fuerzas hidrodinámicas en la zona más cercana a la pared del pozo.

11. No es posible asociar valores del índice de confiabilidad con volúmenes de arena.

## 5.2 Recomendaciones

1. Para reducir la incertidumbre en el análisis por confiabilidad y mejorar los índices de confiabilidad en los pozos se recomienda calibrar la resistencia a la compresión no confinada de la roca mediante pruebas de laboratorio en diferentes subunidades de las Fm Mugrosa y Esmeraldas.
2. Se sugiere calibrar en profundidad el esfuerzo horizontal máximo incorporando eventos de perforación en campo o *breakouts* y evaluar por confiabilidad el inicio de la producción para valores del coeficiente de biot distintos de  $\alpha = 1$ .



3. Actualizar el cálculo del índice de confiabilidad en la medida que se recopilen mediciones de la presión de fondo fluyente en pozos con producción y sin producción de arena del campo Provincia.
4. Con el desarrollo de un modelo geomecánico en tres dimensiones (3D), construido a partir de modelos geomecánicos 1D, el modelo estructural del campo Provincia y un modelo dinámico de yacimientos se pueden plantear investigaciones en la evaluación por confiabilidad de la producción de arena incluyendo los modelos de erosión y transporte.
5. Investigar la influencia de la inyección de agua y de otros fluidos en el inicio de la producción de arena en los campos de hidrocarburos que han implementado técnicas de recobro secundario y terciario.
6. Aplicar la evaluación por confiabilidad en métodos analíticos y numéricos basados en la teoría poroelastoplástica acoplados con modelos de erosión y de balance de masa.
7. Utilizar los modelos desarrollados por Wang y Wan (2000) o Wang y Wan (2004) para evaluar por confiabilidad el inicio de la producción de la arena.
8. Implementar el método de Hasofer – Lind para funciones no lineales.



## Anexo A: Parámetros de ajuste de las funciones de densidad de probabilidad para las variables aleatorias

Variable	Formación Mugrosa							
	Distribución	$\alpha$ o $a$	$\beta$ o $b$	$\mu$	$\sigma$	Loglikelihood	AIC	BIC
UCS	Normal_2P			4646.36	1141.68	-1769000	3538010	3538030
	Weibull_2P	5090.93	4.26639			-1774440	3548890	3548910
	Lognormal_2P			8.41252	0.255884	-1770930	3541870	3541890
Poisson	Lognormal_2P			-1.31879	0.126209	425105	-850207	-850186
	Beta_2P	46.0466	124.75			424931	-849858	-849838
	Normal_2P			0.26959	0.0339749	423708	-847413	-847392
	Weibull_2P	0.284821	8.20859			411731	-823458	-823438
$\sigma_{Ho}$	Lognormal_2P			8.72528	0.140859	-572706	1145420	1145430
	Normal_2P			6218.85	898.076	-575155	1150310	1150330
	Weibull_2P	6617.75	6.81916			-580677	1161360	1161380
$P_{po}$	Lognormal_2P			8.17903	0.150644	-540677	1081360	1081380
	Normal_2P			3606.09	545.287	-541738	1083480	1083500
	Weibull_2P	3844.18	6.84567			-545283	1090570	1090590
$P_p$	Lognormal_2P			8.04806	0.157028	-322982	645967	645985
	Normal_2P			3165.62	489.348	-322825	645655	645672
	Weibull_2P	3378.59	6.54006			-325486	650975	650992

Variable	Formación Esmeraldas							
	Distribución	$\alpha$ o $a$	$\beta$ o $b$	$\mu$	$\sigma$	Loglikelihood	AIC	BIC
UCS	Lognormal_2P			8.76186	0.33753	-852955	1.70591e+06	1.70593e+06
	Normal_2P			6753.07	2266.33	-857600	1.71532e+06	1.71534e+06
	Weibull_2P	7545.34	3.15786			-857090	1.71418e+06	1.7142e+06
Poisson	Lognormal_2P			-1.4479	0.150799	183445	-366886	-366867
	Beta_2P	34.6248	111.052			184598	-369192	-369173
	Normal_2P			0.237696	0.0349321	184843	-369683	-369664
	Weibull_2P	0.252764	7.34222			182274	-364544	-364525
$\sigma_{Ho}$	Lognormal_2P			8.98272	0.125354	-224810	449623	449640
	Normal_2P			8026.72	1001.2	-224886	449777	449793
	Weibull_2P	6617.75	6.81916			-226272	452548	452565
$P_{po}$	Lognormal_2P			8.36146	0.113859	-207322	414649	414665
	Normal_2P			4306.15	477.138	-206754	413512	413528
	Weibull_2P	4518.1	9.69686			-207581	415165	415182
$P_p$	Lognormal_2P			8.22302	0.126445	-161266	322536	322552
	Normal_2P			3753.38	437.687	-159699	319403	319419
	Weibull_2P	3948.2	8.49823			161308	322620	322636

**Anexo B: Archivos digitales con el código en *Python* con los algoritmos de los métodos de simulación de Hasofer Lind y Monte Carlo**



## 6. Bibliografía

- Abbas, Ahmed K., Ralph E. Flori, Mortadha Alsaba, & Mohammed F. Al Dushaishi. 2020. "Application of Quantitative Risk Assessment for Optimum Mud Weight Window Design." *54th U.S. Rock Mechanics/Geomechanics Symposium*.
- Ahad, Nur Aqilah, Morteza Jami, & Stephen Tyson. 2020. "A Review of Experimental Studies on Sand Screen Selection for Unconsolidated Sandstone Reservoirs." *Journal of Petroleum Exploration & Production Technology* 10(4): 1675–88. <https://doi.org/10.1007/s13202-019-00826-y>.
- Al-Ajmi, Adel M., & Robert W. Zimmerman. 2005. "Relation between the Mogi & the Coulomb Failure Criteria." *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences* 42(3): 431–39.
- Al-Awad, Musaed N.J., Abdel Alim H. El-Sayed, & Saad El Din M. Desouky. 1999. "Factors Affecting Sand Production from Unconsolidated Sandstone Saudi Oil & Gas Reservoir." *Journal of King Saud University - Engineering Sciences* 11(1): 151–72. [http://dx.doi.org/10.1016/S1018-3639\(18\)30995-4](http://dx.doi.org/10.1016/S1018-3639(18)30995-4).
- Allahverdizadeh, P., D. V. Griffiths, & G. A. Fenton. 2015. "Influence of Different Input Distributions on Probabilistic Outcomes in Geotechnical Stability Analysis." *Geotechnical Engineering for Infrastructure & Development - Proceedings of the XVI European Conference on Soil Mechanics & Geotechnical Engineering, ECSMGE 2015* 4(41572279): 1549–54.
- Almalikee, Hussein Saeed. 2019. "Predicting Rock Mechanical Properties from Wireline Logs in Rumaila Oilfield , Southern Iraq." 5(2): 69–77.

- Araujo, Edson Felipe. 2015. "Modelo de Predicción y Cuantificación de La Producción de Arena En Yacimientos de Crudo Pesado." [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional-Universidad Nacional de Colombia.
- Baecher, Gregory, & John Christian. 2003. 47 Technometrics *Reliability & Statistics in Geotechnical Engineering*. John Wiley & Sons Ltd.
- Barrero, Darío, &rés Pardo, Carlos Vargas, & Juan Martínez. 2007. *Colombian Sedimentary Basins*. ed. Agencia Nacional de Hidrocarburos. Bogotá: ANH & B&M Exploration Ltda.
- Bastidas-Arteaga, Emilio, & Abdel-hamid Soubra. 2014. "Reliability Analysis Methods." *ALERT Doctoral School 2014 - Stochastic Analysis & In-verse Modelling*: 53–77.
- Bellarby, Jonathan. 2009. Elsevier *Well Completion Design*.
- Bianco, L.C.B., & P.M. Halleck. 2007. "Mechanisms of Arch Instability & Sand Production in Two-Phase Saturated Poorly Consolidated Sandstones." *SPE - European Formation Damage Control Conference, Proceedings*: 185–94.
- Biot, Maurice A. 1941. "General Theory of Three-Dimensional Consolidation." *Journal of Applied Physics* 12(2): 155–64.
- Boutt, D.F., B.K. Cook, & J. R. Williams. 2010. "A Coupled Fluid–Solid Model for Problems in Geomechanics: Application to Sand Production." *International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics* 35(13): 997–1018.
- Bratli, Rolf K., & Rasmus Risnes. 1981. "Stability & Failure of Sand Arches." *Society of Petroleum Engineers Journal*: 236–48.
- Carlson, Jon, Derrel Gurley, Colin Price-Smith, & Frank Waters. 1992. "Sanding Why & How." Disponible en: <https://www.slb.com/-/media/files/oilfield-review/p41-53>



- Chang, Chanong, Mark D. Zoback, & Abbas Khaksar. 2006. "Empirical Relations between Rock Strength & Physical Properties in Sedimentary Rocks." *Journal of Petroleum Science & Engineering* 51(3–4): 223–37.
- Climent, Natalia. 2016. "A Coupled CFD-DEM Model for S& Production in Oil Wells." [Tesis de Doctorado, Universidad Politécnica de Cataluña]: Repositorio Institucional- Universidad Politécnica de Cataluña
- Drucker, D. C., & W. Prager. 1952. "Soil Mechanics & Plastic Analysis or Limit Design." *Quarterly of Applied Mathematics* 10: 157–65.
- Du, Xiaoping. 2005. "First-Order & Second-Order Reliability Methods." *Probabilistic Engineering Design* (September): 34.  
<https://pdesign.sitehost.iu.edu/me360/me360.html>.
- Fjaer, E. et al. 1992. 33 Developments Petroleum Science *Petroleum Related Rock Mechanics*.
- Goyeneche, Jessica, & Ruby Hernández. 2009. Universidad Industrial de Santander "Predicción de la producción de arena en el Campo Maduro del Valle Medio del Magdalena 'Llanito' a partir de las propiedades petrofísicas y geomecánicas de las formaciones productoras." [Trabajo de Grado, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio Institucional- Universidad Industrial de Santander
- Grajales, Santiago, & Laura Juliana Hoyos. 2018. Fundación Universidad de América "Metodología que permita estimar los factores Críticos Que Puedan Inducir La Producción de Arena Por Fuerzas de Arrastre." [Trabajo de Grado, Fundación Universidad de América]. Repositorio Institucional- Fundación Universidad de América
- Grami, Ali. 2020. *Probability, Random Variables, Statistics, & Random Processes*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.

- Hasofer, Abraham M., & Niels C Lind. 1974. "An Exact & Invariant First Order Reliability Format." *Journal Eng. Mech. Division (ASCE)* 100(July): 111–21.
- Hayavi, Mohammad Tabaeh, & Mohammad Abdideh. 2017. "Establishment of Tensile Failure Induced Sanding Onset Prediction Model for Cased-Perforated Gas Wells." *Journal of Rock Mechanics & Geotechnical Engineering* 9(2): 260–66.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jrmge.2016.07.009>.
- Hilgedick, S. A. (2012). "Investigation of wellbore stability in a North Sea field development". Missouri University of Science and Technology.
- Hoek, E, & E.T. Brown. 1982. *Underground Excavations in Rock*. CRC Press.
- Jaimes, M. G., Y. A. Quintero, & D. P. Martin. 2014. "A Review at the Problem of Sanding in Colombia: Evolution & Cases of Evaluation for Sand Exclusion & Management Alternatives." *SPE Latin American & Caribbean Petroleum Engineering Conference Proceedings* 1: 198–211.
- Londoño, John Makario et al. 2019. "Seismicity of Valle Medio Del Magdalena Basin, Colombia." *Journal of South American Earth Sciences* 92(April): 565–85.  
<https://doi.org/10.1016/j.jsames.2019.04.003>.
- Low, Bak K., & Wilson H. Tang. 2004. "Reliability Analysis Using Object-Oriented Constrained Optimization." *Structural Safety* 26(1): 69–89.
- Ma, Y. Z. 2019. "Quantitative Geosciences: Data Analytics, Geostatistics, Reservoir Characterization & Modeling." *Quantitative Geosciences: Data Analytics, Geostatistics, Reservoir Characterization & Modeling*.
- McLellan, PJ, & CD Hawkes. 1998. "Application of Probabilistic Techniques for Assessing Sand Production & Wellbore Instability Risks: Society of Petroleum Engineers." *International Society for Rock Mechanics Eurock*: 143–51.

- Middleton, Gerard V., Rhodes W. Fairbridge, & Michael Rampino. 2011. *Encyclopedia of sediments & sedimentary rocks*.
- Mohamad-Hussein, Assef, & Qinglai Ni. 2018. "Numerical Modeling of Onset & Rate of Sand Production in Perforated Wells." *Journal of Petroleum Exploration & Production Technology* 8(4): 1255–71. <https://doi.org/10.1007/s13202-018-0443-6>.
- Moos, Daniel, Pavel Peska, Thomas Finkbeiner, & Mark Zoback. 2003. "Comprehensive Wellbore Stability Analysis Utilizing Quantitative Risk Assessment." *Journal of Petroleum Science & Engineering* 38(3–4): 97–109.
- Moricca, G., G. Ripa, F. Sanfilippo, & F. J. Santarelli. 1994. "Basin Scale Rock Mechanics: Field Observations of Sand Production." *Society of Petroleum Engineers - Rock Mechanics in Petroleum Engineering 1994*: 317–28.
- Nauroy, Jean-François. 2011. *Geomechanics Applied to the Petroleum Industry*.
- Nouri, Alireza, Hans Vaziri, Hadi Belhaj, & Rafiqul Islam. 2004. "Sand Production Prediction: A New Set of Criteria for Modeling Based on Large-Scale Transient Experiments & Numerical Investigation." *Proceedings - SPE Annual Technical Conference & Exhibition* (June 2016): 2071–83.
- Ong, Seehong, Rico Ramos, & Ziqiong Zheng. 2000. "Sand-Production Prediction in High-Rate Perforated & Openhole Gas Wells." *JPT, Journal of Petroleum Technology* 52(3): 49–50.
- Papamichos, E., & K. Furui. 2019. "Analytical Models for Sand Onset under Field Conditions." *Journal of Petroleum Science & Engineering* 172: 171–89. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.09.009>.
- Papamichos, Euripiedes. 2002. "Sand Mass Prediction in a North Sea Reservoir." *Proceedings of the SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering Conference* (1): 135–43.

- Pham, Son Tung. 2017. "Estimation of Sand Production Rate Using Geomechanical & Hydromechanical Models." *Advances in Materials Science & Engineering* 2017.
- Phoon, Kok-Kwang, & Jianye Ching. 2018. Risk & Reliability in Geotechnical Engineering *Risk & Reliability in Geotechnical Engineering*. 3rd editio. eds. Kok-Kwang Phoon & Jianye Ching. CRC Press Taylor & Francis Group.
- Rackwitz, Rüdiger, & Bernd Flessler. 1978. "Structural Reliability under Combined Random Load Sequences." *Computers & Structures* 9(5): 489–94.
- Rahmati, Hossein et al. 2013. "Review of Sand Production Prediction Models." *Journal of Petroleum Engineering* 2013: 1–16.
- Reid, M. (2022). Reliability – a Python library for reliability engineering (Version 0.8.2) [Computer software]. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/ZENODO.3938000>
- Risnes, Rasmus, Rolf K. Bratili, & Per Horsrud. 1982. "Sand Stresses Around a Wellbore." *Society of Petroleum Engineers journal* 22(6): 883–98.
- Russelli, Consolata. 2008. "Probabilistic Methods Applied to the Bearing Capacity Problem." [Tesis de Doctorado, Universität Stuttgart]. Repositorio Institucional-Universität Stuttgart.
- Sanfilippo, F., M. Brignoli, D. Giacca, & F. J. Santarelli. 1997. "Sand Production: From Prediction to Management." *SPE - European Formation Damage Control Conference, Proceedings*: 389–96.
- Sanfilippo, F., G. Ripa, M. Brignoli, & F. J. Santarelli. 1995. "Economical Management of Sand Production by a Methodology Validated on an Extensive Database of Field Data." *Proceedings - SPE Annual Technical Conference & Exhibition Delta*: 227–40.
- Schutjens, Peter M.T.M. et al. 2004. "Compaction-Induced Porosity/Permeability

- Reduction in Sandstone Reservoirs: Data & Model for Elasticity-Dominated Deformation." *SPE Reservoir Evaluation & Engineering* 7(3): 202–16.
- Selby, Rawya J., & S.M. Farouq Ali. 1987. "Flow of Fines & Sand Production in Unconsolidated Porous Media." [Tesis de Maestría, Universidad de Alberta]. Repositorio Institucional- Universidad de Alberta
- Subbiah, S. K., Samsuri, A., Mohamad-Hussein, A., Jaafar, M. Z., Chen, Y. R., & Kumar, R. R. (2021). Root cause of sand production and methodologies for prediction. *Petroleum*, 7(3), 263-271.
- Torrado, Anggie Paola Charry, Diego Arm&o Vargas Silva, Hernan Darío Mantilla Hern&ez, & Yair &res Quintero Peña. 2020. "A Methodology to Identify the Root-Cause & Conditions of Sand Production, by Integrating Production, Reservoir & Completion Variables. Applied to a Colombian Field." *SPE Latin American & Caribbean Petroleum Engineering Conference Proceedings 2020-July*.
- Tronvoll, J., Papamichos, E., Skjaerstein, A., & Sanfilippo, F. (1997, August). Sand production in ultra-weak sandstones: Is sand control absolutely necessary?. In *Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference*. OnePetro.
- Tsitsiklis, John N, & Dimitri P Bertsekas. 2008. *Introduction to Probability*. 2nd Editio. Athena Scientific.
- Ukaonu, Cyril et al. 2017. "Use of Petro-Elastic Analysis to Evaluate Potential for Sand Production in Petroleum Reservoirs." *Society of Petroleum Engineers - Nigeria Annual International Conference & Exhibition 2017*: 1568–87.
- Vaziri, H. H., & P. M. Byrne. 1990. "Analysis of Stress, Flow & Stability around Deep Wells." *Geotechnique* 40(1): 63–77.
- Vaziri, Hans H., Elise M. Lemoine, & Y. Xiao. 2002. "Quantification of Sand Production Induced Improvement in Productivity Index." *Canadian Geotechnical Journal* 39(5): 1088–1102.

- Wan, R. G., & J. Wang. 2000. "Modelling Sand Production within a Continuum Mechanics Framework." *Canadian International Petroleum Conference 2000, CIPC 2000*.
- Wan, R. G., & J. Wang. 2000. "Analysis of Sand Production in Unconsolidated Oil Sand Using a Coupled Erosional-Stress-Deformation Model." *Canadian International Petroleum Conference 2001, CIPC 2001* 43(2).
- Wang, Haotian, & Mukul M. Sharma. 2016. "A Fully 3-D, Multi-Phase, Poro-Elasto-Plastic Model for Sand Production." *Proceedings - SPE Annual Technical Conference & Exhibition 2016-Janua(September)*: 26–28.
- Wang, J., Wan, R.G., Settari, A., Walters, D., & Liu, Y.N. "Sand Production & Instability Analysis in a Wellbore Using a Fully Coupled Reservoir-Geomechanics Model." *Gulf Rocks 2004 - 6th North America Rock Mechanics Symposium, NARMS 2004*.
- Wang, Jianlin, David Yale, & Ganesh Dasari. 2011. "Numerical Modeling of Massive Sand Production." *Proceedings - SPE Annual Technical Conference & Exhibition* 5(November): 3532–45.
- Weingarten, J. S., & T. K. Perkins. 1995. "Prediction of Sand Production in Gas Wells: Methods & Gulf of Mexico Case Studies." *JPT, Journal of Petroleum Technology* 47(7): 596–600.
- Willson, S. M., Z. A. Moschovidis, J. R. Cameron, & I. D. Palmer. 2002. "New Model for Predicting the Rate of Sand Production." *Proceedings of the SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering Conference*: 152–60.
- Yi, X. (2003). Numerical and analytical modeling of sanding onset prediction. Texas A&M University.
- Zeng, Fanhui et al. 2019. "Predicting the Fracture Initiation Pressure for Perforated Water Injection Wells in Fossil Energy Development." *Journal of Petroleum Science &*

*Engineering* 44(31): 16257–70.

Zhang, Jon Jincal. 2019. *Applied Petroleum Geomechanics*. Gulf Professional Publishing.

Zoback, M.D. 2009. 32 *Cambridge Reservoir Geomechanics*. (1): 1–452.