



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Correcciones a la acreción por agujeros negros en gravedad cuántica de Einstein

**Fabián Humberto Zuluaga Giraldo**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física  
Medellín, Colombia  
2022



# Correcciones a la acreción por agujeros negros en gravedad cuántica de Einstein

**Fabián Humberto Zuluaga Giraldo**

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:  
**Doctor en Ciencias - Física**

Director(a):  
Ph.D.Luis Alberto Sánchez Duque

Línea de Investigación:  
Gravitación Cuántica  
Grupo Física Teórica

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física  
Medellín, Colombia  
2022



A mi familia

*El esfuerzo para comprender el universo es una de las pocas cosas que eleva la vida humana por encima del nivel de la farsa y le imprime algo de la elevación de la tragedia.*

Steven Weinberg



# Agradecimientos

En primer lugar eternamente agradecido con mis padres, hermanos e hija por su incondicional apoyo, compañía y motivación durante esta experiencia académica. Son mi pilar fundamental y todo lo bueno es por y para ellos.

Al profesor PhD Luis Alberto Sánchez quien me acogió en su grupo de investigación, motivó mis estudios en gravitación cuántica, su guía y discusión en esta área.

Al profesor y gran ser humano PhD Herman J. Mosquera Cuesta por compartir sus conocimientos y consejos que fueron útiles en el desarrollo del doctorado.

Al PhD Raúl Esteban Jiménez por su apoyo, observaciones y las partidas de ajedrez que aprovechaba para motivarme a luchar en esta etapa.

Al compañero de grupo y debate MSc. Edgardo Marbello; por sus pláticas reparos e intercambios académicos sociales y culturales en medio de un café.

A mis compañeros de doctorado PhD Esteban Vélez, PhD Mateo Zutta y PhD Yoder Suaza con quienes se construyó no solamente un grupo académico, también una gran amistad.

A mis parceros MSc. Juan Camilo Serna, MSc. Carlos Alvarez y al Ing. Jorge Hernán Hurtado por su motivación, ayuda y estar presentes en todo momento y con la convicción de ayudar a que todo llegue a feliz término.

A mis compañeros de grupo Ing. Santiago Rojas y Ing. Diego Rangel por compartir sus conocimientos y la pasión por la física.

A PhD Rahul Choudhary, PhD Shon Boubilil y PhD Hamid Satari por su amistad y hospitalidad en la pasantía doctoral.

Finalmente, a la Universidad Nacional de Colombia *La Nacho*, mi hogar.



# Resumen

Esta tesis tuvo como objetivo identificar posibles efectos cuántico-gravitacionales al estudiar sistemas astrofísicos, en el contexto de un marco teórico estructurado idealizado para someter al escrutinio de la naturaleza el proceso de acreción (captura de materia por un objeto compacto central) por agujeros negros, de forma que éste ofrezca indicios de como construir caminos para validar la propuesta a teoría cuántica de la gravitación llamada Seguridad Asintótica (AS); también conocida como Gravedad Cuántica de Einstein (EQG). En adelante, en este trabajo, deberá entenderse por Seguridad Asintótica un programa en teoría cuántica de campos que tiene como objetivo explorar implicaciones del denominado grupo de renormalización funcional que gobierna la dependencia con la escala de energía de los parámetros de un modelo de interacciones fundamentales, igualmente referidos como constantes de acoplamiento. Para la gravedad, en el contexto de esta propuesta, es fundamental la existencia de puntos fijos no triviales tanto en el infra-rojo (IR) como en el ultra-violeta (UV), a los cuales deben converger un número finito de parámetros (constantes de Newton, cosmológica, etc) que caracterizan la interacción gravitacional, de forma a garantizar que la teoría sea renormalizable por métodos no perturbativos.

En astrofísica, cuando la materia cae hacia un agujero negro siguiendo una trayectoria en forma de espiral se forma una estructura denominada *disco de acreción*. En la descripción de la dinámica gravitacional de estos discos juegan un papel fundamental los denominados coeficientes métricos del modelo de gravitación; que informan sobre la curvatura del espacio-tiempo en la vecindad, en este caso, del agujero negro. La conjetura AS predice la modificación de esos coeficientes, dando lugar a las llamadas *métricas AS mejoradas*; modificaciones que describen efectos cuántico-gravitacionales que deberían generar cambios, potencialmente medibles, en la dinámica de estos discos. Ejemplo, las observaciones realizadas por el Event Horizon Telescope (EHT). Este instrumento fue diseñado para observar fenómenos que pueden ocurrir en la vecindad del horizonte, un radio del orden del radio de Schwarzschild. La medición de esos efectos permitiría confrontar la teoría con los datos observacionales, de tal manera que esta pueda ser descartada o seguir siendo considerada como una propuesta teórica viable.

En esta tesis se estudia la dinámica de la acreción esféricamente simétrica hacia un agujero negro de Schwarzschild AS *mejorado* resolviendo las ecuaciones obtenidas usando la gravitación a lá Einstein (campo métrico, tensor energía-momento, hidrodinámica, etc.), y recurriendo a la técnica de sistemas dinámicos vía formulación basada en un hamiltoniano propio para la física del sistema astrofísico. Un resultado notable que se obtuvo es que la acreción isotérmica de materia ultra-relativística es posible y que se da tanto en régimen subsónico como supersónico. Este resultado es opuesto al obtenido por otros investigadores

quienes concluyen que la acreción isotérmica ultra-relativística no es posible en su enfoque de seguridad asintótica con derivadas de orden superior. En el mismo marco de esta tesis se estudian los efectos sobre la estabilidad de la acreción. El análisis indica que ésta resulta poco alterada por los efectos cuántico-gravitacionales en comparación con la conocida estabilidad en GR. Un análisis similar se hizo para el estudio de efectos cuántico-gravitacionales sobre la acreción hacia agujero negro de AS mejorado de Schwarzschild-de Sitter, y para la geometría denominada Schwarzschild anti-de-Sitter.

Adicionalmente, y por primera vez en el contexto de la hipótesis AS, se hace el estudio de los efectos cuántico-gravitacionales sobre las propiedades térmicas observables de la materia en acreción en forma de disco delgado hacia un agujero negro de Schwarzschild mejorado. Debido al fenómeno de anti-apantallamiento de la interacción gravitacional a energías plancianas, es de esperarse que el radio de la órbita interna más estable (ISCO) del disco de acreción sea mayor que en el caso relativista. Se encontró, por el contrario, que el efecto cuántico-gravitacional sobre el momento angular de las partículas en el disco juega un papel fundamental haciendo que la ISCO, de hecho, disminuya forzando que las propiedades térmicas del disco sean modificadas en comparación con la predicción de la GR: mayor flujo de energía, mayor temperatura, mayor luminosidad y mayor eficiencia de la acreción. En particular, se mostró que discos de acreción alrededor de agujeros negros que rotan muy lentamente, como la fuente astrofísica conocida como Black Hole Candidate (BHC) Large Magellanic Cloud (LMC) X-3, puedan considerarse como descritos, consistentemente, por la hipótesis AS.

**Palabras clave:** (Gravitación Cuántica, Seguridad Asintótica, Relatividad General, Agujeros Negros, Tipo Schwarzschild, de Sitter, anti de-Sitter, Acreción, Estabilidad, Propiedades Térmicas).

**Corrections to the accretion onto black holes in Einstein quantum gravity**

## Abstract

This thesis aimed to identify possible quantum-gravitational effects by studying astro-physical systems, in the context of an idealized structured theoretical framework to leading the accretion process (capture of matter by the central compact object) by black holes, to the scrutiny of nature, so that it offers indications of how to build paths to validate theoretical proposal to quantum field theory of gravitation called Asymptotic Safety (AS); also known as Einstein Quantum Gravity (EQG). From now on, in this work, Asymptotic Safety should be understood as a program in quantum field theory that aims to explore the implications of the so-called functional renormalization group; that governs the dependency with the

energy scale of a model parameters of fundamental interactions, also known as coupling constants. To gravity, in the context of this proposal, the existence of non- fixed points in both the infrared (IR) and the ultraviolet (UV) is fundamental, in which the constants (Newton, cosmological, etc) that characterize the fundamental interactions assume specific values towards which they trend to, in order to guarantee that the theory is renormalizable by non-perturbative methods.

In astrophysics, as matter falls towards a black hole, it follows a spiral path, forming a structure called an *accretion disk*. In the description of the gravitational dynamics of these disks, the so-called metric coefficients of the model of gravitation play a fundamental role; that tells about the curvature of space-time in the vicinity, in this case, of the black hole. The AS conjecture predicts that these coefficients are modified by way of describing quantum-gravitational effects which will generate potentially measurable changes in the dynamics of these disks. Example, the observations made by the Event Horizon Telescope (EHT). This instrument was designed to observe phenomena that can occur in the vicinity of the horizon, a radius of the order of the horizon radius. The measurement of these effects would allow the theory to be confronted with the observational data, in such a way that the quantum gravity model can be discarded or continued to be considered as a viable theoretical proposal.

In this thesis, the dynamics of spherically symmetric accretion towards a improved Schwarzschild black hole are studied by solving the equations obtained using Einsteinian gravitation (metric field, energy-momentum tensor, hydrodynamics, etc.), and using the Hamiltonian dynamical system via formulation based on a Hamiltonian suitable to describe the physics of the astrophysical system. A remarkable result was obtained in which the isothermal accretion of ultra relativistic matter is shown to be really possible, and that it occurs in both subsonic and supersonic regimes. Such a result is opposed to the one obtained in former researches that included higher order derivatives reaching to the conclusion that ultrarelativistic isothermal accretion of matter is not possible in their AS approach. In the same framework of this thesis, the effects on the stability of the accretion process are studied. Such analysis indicates that it is a little altered by quantum-gravitational effects as compared to the known stability in GR. A similar analysis was performed for the study of quantum-gravitational effects on accretion towards improved Schwarzschild-de Sitter black holes, and to the so-called anti-de-Sitter geometry.

Additionally, and for the first time in the context of the AS hypothesis, the study of the quantum-gravitational effects on the observable thermal properties of matter accreting in the form of a thin disk towards a Schwarzschild black hole is made. Although due to the anti-screening phenomenon of the gravitational interaction, it is expected that the radius of the innermost stable circular orbit (ISCO) of the accretion disk is greater than in the relativistic case. Otherwise, it was found that the quantum-gravitational effect on the an-

gular momentum of the particles in the disk plays a fundamental role driving the ISCO to decrease, forcing the thermal properties of the disk to be modified as compared to the GR prediction: higher energy flux, higher temperature, higher luminosity and higher accretion efficiency. In particular, it was shown that accretion disks around very slowly rotating black holes, such as the astrophysical source known as the Black Hole Candidate (BHC) Large Magellanic Cloud (LMC) X-3, can be considered as consistently described by the AS hypothesis.

**Keywords:** Quantum Gravity, Asymptotic Safety, General Relativity, Black Holes, Schwarzschild, de Sitter, anti de-Sitter, Accretion, Stability, Thermal properties)

# Lista de Figuras

2-1.	Diagrama de Feynman para el propagador del fotón . . . . .	11
2-2.	Diagrama de Feynman para el propagador del electrón . . . . .	11
2-3.	Esquema pedagógico para entender el proceso Block Spin RG . . . . .	14
3-1.	Representación del espacio de la teoría . . . . .	21
4-1.	$f(r)$ vs $r$ para Schwarzschild de Sitter con valores de $\xi = 0,2$ (azul), $\xi = 0,4$ (rojo), $\xi = 0,65$ (verde), $\xi = 0,85$ (magenta), $G = M = 1$ y $\Lambda = 0,001$ . Las líneas punteadas corresponden al $f(r)$ clásico. . . . .	40
4-2.	$f(r)$ vs $r$ para Schwarzschild anti de-Sitter con valores de $\xi = 0,2$ (azul), $\xi = 0,4$ (rojo), $\xi = 0,65$ (verde), $\xi = 0,85$ (magenta), $G = M = 1$ y $\Lambda = -0,001$ . Las líneas punteadas corresponden al $f(r)$ clásico. . . . .	41
4-3.	Dependencia de $q \equiv \frac{r_{hIR}}{r_{hS}}$ en $\tilde{\xi} = \frac{\xi}{M^2}$ , para $\tilde{\xi} = 0$ , se tiene $r_{hIR} = r_{hS}$ mientras que para un $\tilde{\xi}$ mayor que el valor crítico $\tilde{\xi}_c = \frac{16}{27}$ no hay horizonte en absoluto, y surge una singularidad desnuda. . . . .	47
4-4.	Gráficos de la métrica mejorada $f(r)$ para $M < M_c$ (azul) $M = M_c$ (rojo) $M > M_c$ (verde) con masa crítica $M_c = 0,918$ correspondiente a $\xi = 0,5$ y la métrica clásica $f_0(r)$ para $M = M_c$ (línea punteada). . . . .	48
5-1.	Gráficas de contorno de fluido ultra-rígido ( $k = 1$ ), líneas de contorno de $\mathcal{H}^{(SA)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$ (negro) $\mathcal{H}^{(SA)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,06$ (rojo) para la acreción de un fluido ultra-rígido ( $k = 1$ ). La línea curva punteada verde es la línea de contorno $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} + 0,06$ . $\mathcal{H}^{(AS,GR)}$ corresponde $\mathcal{H}^{(SA,GR)} _{r_c}$ para todas las órbitas $M = 1$ , $\xi = 0,5$ . Las líneas verticales localizan los horizontes $r_{hIR}$ (izquierda) y $r_{hS}$ (derecha). Las líneas horizontales punteadas localizan la velocidad del sonido $a = \sqrt{k}$ . . . . .	60

- 5-2.** Gráficas de contorno de fluido ultra-relativista ( $k = 1/2$ ), líneas de contorno  $\mathcal{H}^{(AS)}$  (continuas)  $\mathcal{H}^{(GR)}$  (punteadas) para la acreción de un fluido ultra-relativista ( $k = 1/2$ ). Las líneas de contorno  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$  (negro) y  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,06$  (rojo). La línea curva punteada verde es la línea de contorno para  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} + 0,06$ . Para todas las órbitas  $M = 1$ ,  $\xi = 0,5$ . Las líneas verticales localizan los horizontes  $r_{hIR}$  (izquierda) y  $r_{hS}$  (derecha). Las líneas horizontales punteadas localizan la velocidad del sonido  $a = \sqrt{k}$ . . . . . 61
- 5-3.** Gráficas de contorno de fluido de radiación ( $k = 1/3$ ), líneas de contorno para la acreción de radiación ( $k = 1/3$ ). Las líneas de contorno  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$  (negro) y  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,06$  (rojo). La línea curva punteada verde es la línea de contorno para  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} + 0,06$  para todas las órbitas  $M = 1$ ,  $\xi = 0,5$ . Las líneas verticales localizan los horizontes  $r_{hIR}$  (izquierda) y  $r_{hS}$  (derecha). Las líneas horizontales punteadas localizan la velocidad del sonido  $a = \sqrt{k}$ . . . . . 62
- 5-4.** Gráficas de contorno de fluido sub-relativista ( $k = 1/4$ ), líneas de contorno para la acreción sub-relativista ( $k = 1/4$ ). Las líneas de contorno  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$  (negro) y  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,06$  (rojo). La línea curva punteada verde es la línea de contorno para  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} + 0,06$  para todas las órbitas  $M = 1$ ,  $\xi = 0,5$ . Las líneas verticales localizan los horizontes  $r_{hIR}$  (izquierda) y  $r_{hS}$  (derecha). Las líneas horizontales punteadas localizan la velocidad del sonido  $a = \sqrt{k}$ . . . . . 64
- 5-5.** Dependencia del flujo de acreción en el parámetro  $\xi$ . Perfiles de velocidad  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,06$  para acreción subsónica y ultra-relativista ( $k = 1/2$ ), con  $\xi = \xi_c = 16/27$  (rojo),  $\xi = 0,4$  (azul),  $\xi = 0,2$  (magenta). La línea punteada verde define el contorno para  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} + 0,06$  (i.e.  $\xi = 0$ ). Para todos los perfiles  $M = 1$ . Con el incremento del valor de  $\xi$ , (de derecha a izquierda en la figura), la velocidad máxima de flujo aumenta. Nótese que los valores  $\xi = 0, 2$ ,  $\xi = 0, 4$  se tomaron para indicar que ocurre con la posición del horizonte respecto del caso clásico, límite  $\xi \rightarrow 0$ . También se identifica que el radio del horizonte en el enfoque AS disminuye en comparación con el caso clásico (línea roja vs. línea verde punteada). . . . . 65
- 5-6.** Comportamiento de la amplitud de la perturbación de onda viajera  $|\zeta_\omega(r)|$  vs  $AS$  (rojo) y  $GR$  (verde). La línea punteada vertical representa el radio del horizonte  $r_{hS}$  del agujero negro clásico de Schwarzschild. Los valores de los parámetros son  $\mathcal{H}^{AS} = \mathcal{H}_c^{AS} + 0,01$ ,  $\mathcal{H}^{GR} = \mathcal{H}_c^{GR} + 0,01$ ,  $M = 1$ ,  $\xi = 0,5$ ,  $\chi = 0,1$ . . . . . 72
- 5-7.** Perfiles de velocidad ( $|v|$  vs  $r$ ) para acreción de un fluido ultra-rígido ( $k = 1$ ), las curvas de  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$  (azul punteado)  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,005$  (rojo) para la acreción de un fluido ultra-rígido ( $k = 1$ ).  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)}$  (punteado negro)  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} + 0,005$ . Para todas las órbitas  $M = 1$ ,  $\xi = 0,5$ . . . . . 74

5-8.	Gráficas de contorno de fluido ultra-relativista ( $k = 1/2$ ) para Schwarzschild de Sitter, líneas de contorno $ v $ vs $r$ para Schwarzschild de Sitter $\mathcal{H}^{(AS)}$ (continuas) $\mathcal{H}^{(GR)}$ (punteadas) para la acreción de un fluido ultra-relativista ( $k = 1/2$ ). Las líneas de contorno $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$ (negro) y $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,05$ (azul). $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} + 0,06$ (rojo). La línea curva punteada es la línea de contorno para $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)}$ . Para todas las órbitas $M = 1, \xi = 0,5$ . . . . .	75
5-9.	Gráficas de contorno de fluido ultra-relativista ( $k = 1/2$ ) para Schwarzschild anti de Sitter, líneas de contorno $ v $ vs $r$ para Schwarzschild anti de Sitter $\mathcal{H}^{(AS)}$ (magenta) $\mathcal{H}^{(GR)}$ (negro) para la acreción de un fluido ultra-relativista ( $k = 1/2$ ). . . . .	76
5-10.	Gráficas de contorno de fluido de radiación ( $k = 1/3$ ) Schwarzschild de Sitter, líneas de contorno $ v $ vs $r$ para Schwarzschild de Sitter $\mathcal{H}^{(AS)}$ , $\mathcal{H}^{(GR)}$ para la acreción de un fluido de radiación ( $k = 1/3$ ). Las líneas de contorno $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$ (punteadas negro) y $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,05$ (rojo). $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)}$ (rojo). La línea continua negra es la línea de contorno para $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} - 0,00005$ . Para todas las órbitas $M = 1, \xi = 0,5$ . . . . .	77
5-11.	Gráficas de contorno de fluido de radiación ( $k = 1/3$ ) Schwarzschild anti de Sitter, líneas de contorno $ v $ vs $r$ para Schwarzschild anti de Sitter $\mathcal{H}^{(AS)}$ (magenta) $\mathcal{H}^{(GR)}$ (negro) para la acreción de un fluido de radiación ( $k = 1/3$ ). . . . .	77
5-12.	Gráficas de contorno de fluido Sub-Relativista ( $k = 1/4$ ) Schwarzschild de Sitter, líneas de contorno $ v $ vs $r$ para Schwarzschild de Sitter $\mathcal{H}^{(AS)}$ , $\mathcal{H}^{(GR)}$ para la acreción de un fluido Sub-Relativista ( $k = 1/4$ ). Las líneas de contorno $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$ (punteadas negro) y $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,05$ (rojo). $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} + 0,05$ (continua azul). $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)}$ (punteada negra). Para todas las órbitas $M = 1, \xi = 0,5$ . . . . .	78
5-13.	Gráficas de contorno de fluido Sub-Relativista ( $k = 1/4$ ) Schwarzschild anti de Sitter, líneas de contorno $ v $ vs $r$ para Schwarzschild anti de Sitter $\mathcal{H}^{(AS)}$ (magenta) $\mathcal{H}^{(GR)}$ (negro) para la acreción de un fluido Sub-Relativista ( $k = 1/4$ ). . . . .	79
5-14.	Perfiles de velocidad ( $ v $ vs $r$ ) para acreción de un fluido politrópico en Schwarzschild de Sitter y Schwarzschild anti de Sitter. El perfil $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$ (negro), $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,005$ (rojo) $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} - 0,005$ (azul). Para todas las órbitas $M = 1, \xi = 0,2, n_c = 0,1$ y $ \Lambda  = 0,001$ . . . . .	80
5-15.	Potencial efectivo (c.f.5-103) para los valores de $\bar{h} = h/M, \tilde{h} = h/M$ evaluados en la ISCO tal que $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$ (azul), $\tilde{\xi} = 0,3$ (rojo) y para el caso clásico $\tilde{\xi} = 0$ (línea punteada negra). Las líneas punteadas verdes y naranjas $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$ y $\tilde{\xi} = 0,3$ respectivamente. . . . .	85
5-16.	Potencial efectivo $V_{eff}$ vs. $x$ para varios valores de $\tilde{\xi} = \xi/M^2$ . De izquierda a derecha $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$ (azul), $\tilde{\xi} = 0,3$ (rojo). El caso clásico $\tilde{\xi} = 0$ está dado por la curva negra discontinua. . . . .	85

<b>5-17.</b> Momentum angular $\bar{h} = h/M$ vs. $x$ para para varios valores de $\tilde{\xi} = \xi/M^2$ . De izquierda a derecha $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$ (azul), $\tilde{\xi} = 0,3$ (rojo). La curva discontinua corresponde al caso clásico $\tilde{\xi} = 0$ . . . . .	86
<b>5-18.</b> Masa efectiva como función de $x$ for $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$ (azul) y $\tilde{\xi} = 0,3$ (rojo). La línea discontinua vertical indica el ISCO para los mismos valores de $\tilde{\xi}$ respectivamente. . . . .	87
<b>5-19.</b> Flujo de energía por unidad de la tasa de acreción de un disco de acreción delgado alrededor de un agujero negro Schwarzschild RGI para $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$ (azul) and $\tilde{\xi} = 0,3$ (rojo). La curva negra punteada representa el flujo de energía alreedor de un agujero negro clásico de Schwarzschild ( $\tilde{\xi} = 0$ ). . . . .	89
<b>5-20.</b> Gráficas de la luminosidad diferencial en el infinito por unidad de tasa de acreción de un disco de acreción delgado alrededor de un agujero negro RGI Schwarzschild para $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$ (azul) y $\tilde{\xi} = 0,3$ (rojo). La línea discontinua un disco alrededor de la solución clásica ( $\tilde{\xi} = 0$ ). . . . .	90
<b>5-21.</b> Perfiles radiales de la temperatura por unidad de tasa de acreción de un disco de acreción delgado alrededor de un agujero negro Schwarzschild RGI para $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$ (azul) y $\tilde{\xi} = 0,3$ (rojo). La línea discontinua corresponde a la temperatura del disco alrededor de un agujero negro de Schwarzschild en $GR$ . . . . .	90
<b>5-22.</b> Dependencia del radio de la ISCO $a_*$ para un agujero negro de Kerr (verde) y en el parámetro $\tilde{\xi}$ para un agujero negro Schwarzschild RGI (azul) . . . . .	92

# Lista de Tablas

5-1. ISCO para disco delgado en función de valores seccionados de $\tilde{\xi}$ . . . . .	84
5-2. Energía específica en la ISCO y la eficiencia $\epsilon$ de la conversión de la acreción de masa en radiación para diferentes valores de $\tilde{\xi}$ . . . . .	91

# Lista de Símbolos

Símbolo	Término
$c$	Velocidad de la Luz
$E$	Energía
$\mathcal{F}(r)$	Flujo de Energía Radiante
$G$	Constante de Newton
$h$	Constante de Planck
$\hbar$	Constante reducida de Planck
$\mathcal{H}$	Hamiltoniano
$I(\omega)$	Función de Distribución de Planck
$k$	Escala de Momentum
$L(\omega)$	Luminosidad
$\Lambda, \lambda$	Constantes Cosmológicas
$M$	Masa del Agujero Negro
$r$	Radio
$S$	Acción
$\tau$	Tiempo Propio

## Abreviaturas

Abreviatura	Término
$AN$	Agujero Negro
$ANSch$	Agujero Negro de Schwarzschild
$AS$	Asymptotic Safety
$EHT$	Event Horizon Telescope
$ERGE$	Ecuación Exacta del Grupo de Renormalización
$EQG$	Einstein Quantum Gravity
$GCE$	Gravedad Cuántica de Einstein
$GR$	General Relativity
$IR$	Infrarrojo
$ISCO$	Orbita Interna Más Estable

---

<b>Abreviatura</b>	<b>Término</b>
<i>UV</i>	Ultravioleta
<i>MOND</i>	Dinámica Newtoniana Modificada
<i>NGFP</i>	Non-Gaussian Fixed Point
<i>PF<sub>G</sub></i>	Punto Fijo Gaussiano
<i>PF<sub>NG</sub></i>	Punto Fijo No Gaussiano
<i>PFTUV</i>	Punto Fijo Trivial Ultra Violeta
<i>PFNTUV</i>	Punto Fijo No Trivial Ultra Violeta
<i>RG</i>	Relatividad General
<i>R<sub>k</sub></i>	Regulador en el Infrarrojo
<i>QED</i>	Quantum Electrodynamics
<i>SA</i>	Seguridad Asintótica

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>XIII</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>XVI</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>XVIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Renormalización</b>	<b>8</b>
2.1. Grupo de Renormalización . . . . .	13
2.1.1. Block-Spin, grupo de renormalización y coarse graining . . . . .	14
<b>3. Seguridad Asintótica</b>	<b>16</b>
3.1. La idea de seguridad asintótica . . . . .	16
3.1.1. Evolución de constantes de acople y el espacio de teorías . . . . .	16
3.1.2. Grupo de renormalización wilsoniano . . . . .	22
3.1.3. Grupo de renormalización funcional y la acción efectiva promedio . . . . .	23
3.1.4. Ecuación de Wetterich . . . . .	25
3.2. El truncado de la acción gravitacional <i>a lá</i> Einstein-Hilbert . . . . .	28
<b>4. Agujero negro de Schwarzschild-(A)dS en relatividad general y en seguridad asintótica</b>	<b>32</b>
4.1. Agujero negro de Schwarzschild-(A)dS en relatividad general . . . . .	33
4.2. Agujero negro de Schwarzschild-(A)dS en seguridad asintótica con truncación de Einstein-Hilbert . . . . .	36
4.2.1. Correcciones cuánticas a la métrica en el espacio-tiempo de Schwarzschild de Sitter y anti-de Sitter . . . . .	39

4.3. Agujero negro de Schwarzschild en seguridad asintótica con derivadas de orden superior . . . . .	41
4.3.1. Límite ultravioleta . . . . .	45
4.3.2. Límite infrarrojo . . . . .	46
4.3.3. Correcciones cuánticas a la métrica de Schwarzschild en seguridad asintótica con derivadas de orden superior . . . . .	46
4.4. El escenario de seguridad asintótica en el contexto de la astrofísica y la cosmología . . . . .	48
4.4.1. Implicaciones cosmológicas . . . . .	49
4.4.2. Implicaciones a escalas galácticas . . . . .	49
4.4.3. Características de la imagen de agujeros negros regulares rotantes . . . . .	50
4.4.4. Espectroscopia de línea de hierro de discos de acreción alrededor agujeros negros en gravedad asintóticamente segura . . . . .	51
4.4.5. Rayos-X intensos en gravedad cuántica asintóticamente segura . . . . .	52
<b>5. Acreción hacia Agujeros Negros en seguridad asintótica</b>	<b>54</b>
5.1. Acreción esféricamente simétrica hacia un agujero negro de Schwarzschild . . . . .	54
5.1.1. Acreción esféricamente simétrica como un sistema dinámico . . . . .	55
5.1.2. Acreción de fluidos isotérmicos . . . . .	58
5.1.3. Análisis de la estabilidad de la acreción . . . . .	65
5.1.4. Acreción de fluidos isotérmicos en Schwarzschild de-Sitter y Schwarzschild anti de-Sitter . . . . .	73
5.1.5. Acreción de fluidos politrópicos . . . . .	79
5.2. Disco de acreción alrededor de un agujero negro de Schwarzschild en seguridad asintótica . . . . .	81
5.2.1. Geodésicas en la geometría del grupo de renormalización mejorado . . . . .	82
5.2.2. Disco de acreción delgado relativista . . . . .	87
5.2.3. Radiación de discos delgados de acreción en AS con derivadas de orden superior . . . . .	89
<b>6. Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>96</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	96
6.2. Recomendaciones . . . . .	99
<b>A. Apéndice: Acreción esféricamente simétrica a la Littleton - Bondi hacia un agujero negro de Schwarzschild</b>	<b>100</b>
<b>B. Propiedades de la radiación electromagnética de discos de acreción delgados en espacios-tiempos relativistas</b>	<b>105</b>
<b>C. Análisis de la estabilidad de la acreción</b>	<b>109</b>

**Bibliografía**

**111**

# 1. Introducción

Las diferentes propiedades que presentan los agujeros negros (horizonte de eventos, carga, momentum angular, singularidad, radiación Hawking entre otros) y fenómenos como la acreción que se puede definir como la secuencia de etapas mediante la cual un objeto compacto captura material circundante ya sea directamente sobre él o para formar un disco a su alrededor, hacen de estos objetos laboratorios potencialmente útiles para verificar o someter a prueba la teoría de relatividad general en el régimen de campo fuerte y, posiblemente, ideas de la gravedad cuántica. El proceso de acreción es una característica relevante ya que se cree que proporciona la energía de los cuásares y explosiones de rayos gamma.

Cuando se quiere construir una teoría cuántica de la gravitación surge el problema de que la relatividad general falla en las pruebas usuales para la renormalizabilidad como conteo de potencias debido a la presencia de interacciones no lineales con un acople con dimensión de masa negativa [1–5]. En consecuencia, la gravedad perturbativa es una teoría no renormalizable. [6].

Se puede pensar que este problema surge del hecho de que el formalismo del espacio-tiempo plano de la teoría cuántica de campos no se puede aplicar a la gravitación. Sin embargo, en la aproximación semi-clásica en la que la gravedad se asume descrita por la relatividad general y las demás interacciones se cuantizan en un espacio-tiempo de fondo curvo, surgen dificultades como la imposibilidad de escoger un vacío que sea único. A pesar de esto, la aproximación semi-clásica ha tenido éxitos como la predicción de la radiación de Hawking lo que ha motivado numerosos estudios asociados a la llamada paradoja de la información.

Otra aproximación, conocida como teoría efectiva de la gravedad asume que los dos términos en la acción de Einstein-Hilbert, los cuales incluyen la constante de Newton y la constante cosmológica son sólo los primeros términos de un número infinito de interacciones. De esta manera, pueden encontrarse correcciones cuánticas, a un loop por ejemplo, a la gravedad clásica a bajas energías independientemente de su comportamiento en el ultravioleta.

Es claro entonces que la construcción de una teoría cuántica de la gravedad que sea completa en el UV exige ir más allá de la teoría efectiva.

Diferentes enfoques se han propuesto para estudiar estos objetos en el marco de propuestas a teorías de gravedad cuántica. Entre éstas está la *Gravedad Cuántica de Einstein (EQG) o Escenario de Seguridad Asintótica (ESA)*. Este es un concepto desarrollado por M. Reuter [7] que retoma la idea de punto fijo del grupo de renormalización funcional introducida por Steven Weinberg a finales de la década de 1970 [8].

La EQG o ESA no es el único enfoque que se ha propuesto para construir una teoría cuántica de la gravitación. Entre los más conocidos están los siguientes:

- **Teoría de Cuerdas:** es una serie de hipótesis y modelos en los que las partículas subatómicas *puntuales* son reemplazadas por estados vibracionales unidimensionales llamados *cuerdas* describiendo como se propagan a través del espacio-tiempo e interactúan unas con otras. Para escalas de distancia mayores que la de la cuerda, esta se ve como una partícula ordinaria, con sus propiedades como masa y carga determinadas por el estado vibratorio de la cuerda. Uno de los estados vibratorios de la cuerda corresponde al gravitón, el hipotético campo que media la interacción gravitacional. La teoría de cuerdas ha sido una herramienta importante para estudiar las propiedades de los agujeros negros como su termodinámica [9]. A mediados de los 90s Andrew Strominger y Cumrun Vafa reprodujeron exactamente la ecuación de *Bekenstein–Hawking* utilizando teoría de cuerdas y redefinieron las correcciones cuánticas para describir los agujeros negros microscópicos [10, 11] y a finales de la primera década del siglo XXI demostraron que algunos resultados sobre la entropía de los agujeros negros podrían extenderse a los agujeros negros astrofísicos no extremos [12–14].

De la aplicación de la teoría de cuerdas a la gravitación cuántica surge la correspondencia Anti de-Sitter/Teoría de campos conforme (AdS/CFT) que provee un marco teórico en el cual se puede intentar resolver las paradojas de los agujeros negros [9]. En particular, la correspondencia AdS/CFT intenta resolver la paradoja de la información asociándola a una configuración de partículas en el límite del espacio-tiempo anti-de Sitter que obedece las reglas habituales de la mecánica cuántica y evoluciona de forma unitaria, por lo que el agujero negro también debe evolucionar de forma unitaria [15–17].

Podemos decir que la teoría de cuerdas es una teoría de unificación ya que no solo pretende unificar la gravitación y mecánica cuántica, sino que potencialmente contiene dentro de sí una unificación de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza: la interacción electromagnética, la débil, la fuerte –o Nuclear– y la gravitacional. [15, 18–23].

- **Gravedad Cuántica de Bucles:** la gravedad cuántica de bucles (LQG) intenta mez-

clar la relatividad general y la mecánica cuántica incorporando la materia del modelo estándar [24, 25] en el sentido de que no solo la materia sino también el espacio-tiempo se asumen cuantizados.

Esta teoría defiende que la estructura del espacio-tiempo está compuesta de bucles (loops) tejidos en una tela o red extremadamente fina. Las redes de bucles se denominan redes de espín o espuma de espín y la evolución de estas tiene una escala del orden de una longitud de Planck [26–30]. Es decir, en este enfoque, el espacio y el tiempo son granulares y discretos [31, 32] y se cuantifican de forma análoga a como la energía y el momentum se cuantifican en la mecánica cuántica.

En la gravedad cuántica de bucles se estudia la entropía del agujero negro y en este tema es posible relacionar una interpretación geométrica cuántica a los microestados (estas son las geometrías cuánticas del horizonte que son consistentes con el área del agujero negro y la topología del horizonte) dando una explicación de la finitud de la entropía y de su proporcionalidad al área del horizonte [28, 33].

La radiación Hawking también se ha estudiado en gravedad cuántica de bucles, con base en las fluctuaciones del área del horizonte, un agujero negro exhibe desviaciones del espectro de Hawking que serían observables si se captaran los rayos X de la radiación de Hawking<sup>1</sup> de los agujeros negros primordiales<sup>2</sup> al momento de su evaporación [35].

LQG establece que a medida que las estrellas colapsan en agujeros negros, la densidad de energía alcanza la densidad de energía de Planck, lo que provoca una fuerza repulsiva. Con base a lo anterior, Carlo Rovelli y Francesca Vidotto propusieron en 2014 [36] que dentro de cada agujero negro se encuentra una estrella de Planck<sup>3</sup>.

- **Gravedad Hořava–Lifshitz:** también conocida como gravedad Hořava, es una teoría de gravedad cuántica propuesta 2009 [37] para satisfacer la condición de equilibrio detallada que reduce considerablemente el número de términos en la acción.

En este enfoque, en comparación con los anteriores de la gravedad cuántica, se utiliza conceptos de la física de la materia condensada, como los fenómenos críticos cuánticos [38–44].

<sup>1</sup>Los efectos cuánticos se centran en un conjunto de frecuencias discretas y no combinadas muy pronunciadas en la parte superior del espectro de radiación de Hawking [34].

<sup>2</sup>Son un caso hipotético de agujeros negros que se formaron después del Big Bang en el universo temprano. Esto es debido a las altas densidades y las condiciones heterogéneas que podrían haber llevado a regiones suficientemente densas a sufrir un colapso gravitacional y por lo tanto produciendo agujeros negros.

<sup>3</sup>Es un objeto astronómico hipotético, una estrella compacta y exótica, que existe dentro del horizonte de eventos de un agujero negro, la cual es creada cuando la densidad de energía de una estrella en colapso alcanza la densidad de energía de Planck.

- **Triangulación Dinámica Causal:** este enfoque se basa en considerar triángulos tetradimensionales o símlices<sup>4</sup> (que no son entes físicos, sino una mera herramienta matemática) de espacio-tiempo e introduce una dinámica mediante la cual se dicta cómo se unen unos a los otros [45–48].

Esta teoría propone que partiendo de un estado no físico sub-planckiano se llega a la escala de Planck en la que el espacio-tiempo tiene dimensión fractal, para finalmente llegar a la escala observable en la que el espacio-tiempo tiene 4 dimensiones. Lo interesante de esta teoría es que es universal, pues el espacio-tiempo obtenido no depende de los detalles en la forma de discretizar la formulación sub-planckiana.

En la triangulación dinámica causal, para describir la gravedad en el marco de la teoría cuántica de campos y enfrentar el problema natural de que la relatividad general es perturbativamente no renormalizable; se han realizado varios intentos [49, 50].

Entre las soluciones cosmológicas a las que se llega en este enfoque; está la de un universo tipo de Sitter, que es una de las soluciones cosmológicas clásicas que proporciona la Relatividad general.

- **Conjuntos Causales:** este enfoque a una teoría cuántica de la gravedad se basa en el orden causal de un espacio-tiempo como su estructura más fundamental [51, 52].

Entre sus principales características tenemos:

- El espacio-tiempo es discreto.
- Relación de orden parcial que está definida sobre el conjunto discreto de los puntos del espacio-tiempo.

Una vez satisfechas estas propiedades, se busca recobrar la estructura geométrica del espacio-tiempo continuo.

En esta tesis se considera las modificaciones debidas a gravedad cuántica al proceso de acreción y su estabilidad en un espacio-tiempo descrito por la llamada métrica *mejorada* del agujero negro de Schwarzschild en el marco de la EQG. En este escenario se conjetura que la gravedad constituye una teoría fundamental a nivel no perturbativo [8]. Un ingrediente básico es la existencia de un punto fijo no gaussiano (NGFP) del flujo del grupo de renormalización gravitacional el cual controla el comportamiento de la teoría a energías transplanckianas.

---

<sup>4</sup>Los símlices son una generalización matemática de los triángulos en varias dimensiones. Un simplex-3D es normalmente llamado tetraedro, y un simplex-4D, que constituye el bloque de construcción básico de esta hipótesis, es conocida como pentácoron.

Una explicación detallada de esta propuesta se hará en el capítulo 3 de esta tesis.

Modificaciones cuánticas a la descripción del proceso de acreción, más no a su estabilidad, para un agujero negro de Schwarzschild (ANSch) (el caso más simple) han sido calculadas en [53] pero, el problema que se pretende analizar en esta tesis ha sido poco estudiado en la literatura científica. Una búsqueda exhaustiva de bibliografía muestra que existe sólo el estudio elaborado en [54].

Cabe mencionar que la seguridad asintótica sigue siendo una conjetura en el sentido de que aún falta una prueba rigurosa de la existencia del NGFP. Sin embargo, varios estudios sugieren que hay evidencia sustancial de la existencia de tal punto fijo adecuado para el escenario de seguridad asintótica AS de Weinberg [55–57].

**Plan de la Tesis:** la presente tesis tiene como estructura la siguiente secuencia de capítulos:

- **Renormalización:** se hace un resumen del concepto de renormalización en teoría cuántica de campos (Grupo de Renormalización, Block-Spin entre otros), conceptos que se aplicarán luego en el contexto del grupo de renormalización funcional.
- **Seguridad Asintótica:** se ofrecerá una introducción y la definición de seguridad Asintótica, acción efectiva promedio, grupo de renormalización funcional, ecuación de Wetterich y truncación de Einstein Hilbert.
- **Agujero Negro de Schwarzschild-(A)dS en Relatividad General y en Seguridad Asintótica:** definición de agujeros negros y las diferentes métricas analizadas en esta tesis. Se estudiarán las modificaciones cuánticas a las métricas de Schwarzschild de-Sitter y Schwarzschild anti de-Sitter.
- **Acreción hacia Agujeros Negros en Seguridad Asintótica:** en este capítulo se presentarán los resultados que constituyen la contribución original de esta tesis. Allí se describen las técnicas de “sistemas dinámicos” para acreción esféricamente simétrica hacia un agujero negro de Schwarzschild y “acreción vía disco delgado” hacia el mismo tipo de agujero negro con el fin de afrontar el desafío de buscar someter a prueba la idea sugerida de “Gravitación Cuántica de Einstein”, i.e. Seguridad Asintótica.

## 2. Renormalización

En las diferentes épocas de la evolución de la ciencia, en especial de la Física, se han presentado grandes debates en los que la comunidad científica se ha manifestado a favor o en contra de conceptos y propuestas nuevas sobre como funciona la naturaleza. Una de las grandes discrepancias entre los físicos radica en un tema en particular: los infinitos. Este tema ha girado en torno a la física a través de sus diferentes etapas [58] y en teorías como la teoría cuántica de campos (QFT) ha aparecido recurrentemente. Tales dificultades formales, se han subsanado a través del proceso conocido como renormalización, al punto de llegar a resultados finitos y con una exactitud sorprendente, pero, con todo esto, la discusión sigue abierta.

A pesar de que científicos como Dirac hayan insistido que la teoría de renormalización de la electrodinámica cuántica con el campo electromagnético cuantizado era una mala teoría, otros científicos como Lamb demostraban que los infinitos (en la teoría de perturbación) pueden ser removidos por un proceso de renormalización [59,60]. Actitudes como la de Dirac han ido disminuyendo con el paso de los años al punto de justificarlas por nuestra ignorancia sobre aspectos de las interacciones a muy altas energías (o pequeñas distancias) [59,61]. La cuestión se traslada a saber: ¿Hasta donde la electrodinámica cuántica es por sí misma una teoría matemáticamente consistente?

A diferencia de la electrodinámica clásica donde los procesos radiativos pueden ser calculados desde la auto-energía del electrón en campos externos, en la electrodinámica cuántica se desecha la auto-energía y se introduce en el enfoque de Feynman, el concepto de partículas virtuales y por lo tanto el uso de teoría de perturbaciones [62].

Profundizando en la discusión de los infinitos y en especial en teorías como la electrodinámica cuántica, los cálculos que involucran diagramas de Feynman de un bucle producen integrales divergentes <sup>1</sup> [63]. No obstante, en el espacio de momentos los infinitos se cancelan cuando expresamos todos los parámetros de la teoría en términos de cantidades renormalizadas como las masas y cargas.

---

<sup>1</sup>Integrales donde no se puede obtener un resultado finito para un calculo realizado de forma directa.

Para el año 1949, Freeman Dyson [64] demostró que estas cancelaciones se darían en todos los órdenes en teoría de perturbaciones, y sus argumentos se aplicaron exitosamente a diferentes teorías con interacciones simples finitas (teorías renormalizables), y por mucho tiempo se pensó que cualquier teoría física (razonable) tendría que tomar la forma de una teoría cuántica de campos renormalizable perturbativamente.

Si la teoría describe una aproximación a una física fundamental hasta una escala de energía finita, como en el modelo estándar de las interacciones electro-débiles, se dice que es efectiva, y que esta contiene los grados de libertad apropiados y un número infinito de interacciones no-renormalizables para describir un fenómeno físico que ocurre a una escala de energía determinada, aunque se espera que, para muy bajas energías, las interacciones no-renormalizables en una teoría efectiva se puedan suprimir.

El caracter renormalizable o no de una teoría de interacciones fundamentales se determina calculando el grado superficial de divergencia  $D$  de un diagrama de Feynman [58, 65], el cual puede definirse como el grado de divergencia de la integración sobre el espacio de momentos cuando los momentos asociados a las líneas internas tienden a infinito. Si  $D > 0$ , la parte de la medida en la integral divergirá como

$$\int^{\infty} k^{D-1} dk. \quad (2-1)$$

si  $D = 0$ , la integral es logarítmicamente divergente y para  $D < 0$ , la integral es convergente.

El comportamiento asintótico de un propagador está dado por

$$\Delta_f(k) \sim k^{-2+2s_f}. \quad (2-2)$$

donde  $s_f = 0$  para campos escalares,  $s_f = 1/2$  para campos de Dirac y  $s_f = 1$  para campos vectoriales masivos.

Es posible mostrar [58] que teniendo en cuenta el número de líneas externas  $E_f$  para campo tipo  $f$  en un diagrama, el número de vértices de interacción  $N_i$ , el número campos en cada interacción  $N_{if}$ , y el número de derivadas sobre los campos  $d_i$ , el grado superficial puede escribirse como: Teniendo en cuenta además las derivadas de cada interacción y el número total de variables de momento independientes en la integración, se obtiene:

$$D = -4 \sum_f I_f (s_f + 1) - \sum_i N_i \Delta_i \quad (2-3)$$

donde:

$I_f$  es el número de líneas internas en el diagrama,  $N_i$  es el número de Vértices de interacción,

$d_i$  son las derivadas actuando sobre los campos y  $\Delta_i$  es el parámetro con el que se caracterizan las interacciones tipo.

$$\Delta_i \equiv 4 - d_i - \sum_f n_{if} (s_f + 1) \quad (2-4)$$

Es posible también mostrar que un número limitado de divergencias que surgen en teorías con  $\Delta_i \geq 0$  son removidas por redefinición de un número finito de constantes físicas y por renormalización de campos. Estas son las llamadas teorías renormalizables. En este sentido, pueden caracterizarse las teorías mediante el parámetro  $\Delta_i$ .

$$D \leq 4 - \sum_f E_f (s_f + 1) \quad (2-5)$$

Podemos clasificar las teorías mediante el parámetro  $\Delta_i$  que es la dimensionalidad de masa:  $\Delta_i > 0$ : *teoría superrenormalizable* en la que un número finito de diagramas de Feynman divergen superficialmente.

$\Delta_i = 0$ : *teoría renormalizable* en las que las divergencias suceden en todos los órdenes en teoría de perturbaciones y un número finito de amplitudes divergen superficialmente.

$\Delta_i < 0$ : *Teoría no Renormalizable* en la que todas las amplitudes son divergentes en un orden suficientemente alto en teoría de perturbaciones.

La QED, por ejemplo, que es renormalizable en cuatro dimensiones, super-renormalizable en menos de cuatro dimensiones y no renormalizable en más de cuatro dimensiones.

En cuanto a las divergencias superficiales, existen varias formulaciones para eliminarlas y probar que la renormalización de campos, masas y acoplamientos hace la integración superficialmente divergente. Tenemos la formulación de A. Salam [63, 66, 67] y la de Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, y Zimmerman [68–70], o más conocida como formulación BPHZ.

Para eliminar las divergencias en la formulación BPHZ se consideran todos los caminos posibles (denominados *forest*) que rodean al grafo o los subgrafos más las cajas que deberían estar anidadas unas con las otras pero no superpuestas. Al reemplazar los campos, masas y acoplamientos desnudos por los renormalizados, que se definen utilizando puntos de renormalización convenientes, se logra la cancelación de los infinitos. Con el fin de obtener un resultado finito para una amplitud que involucra diagramas divergentes se pueden seguir entonces los siguientes pasos:

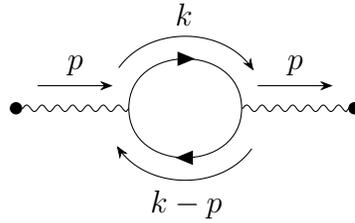
- Calcular los diagramas utilizando un regulador para obtener la expresión que dependa del corte ultravioleta  $\Lambda$
- Deducir la masa y constante de acoplamiento físicos.
- Obtener un elemento de la Matriz  $S$ .

- Calcular la renormalización de la intensidad de campo.
- Combinar los anteriores pasos y eliminar los términos desnudos para así conseguir la expresión resultante para la amplitud que debería ser finita en el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Como ejemplo concreto, en QED se define el propagador renormalizados del fotón como:

$$iM'_F(q) = iM_F(q) + iM_F(q) \frac{i\Pi(q)}{4\pi} iM_F(q), \quad (2-6)$$

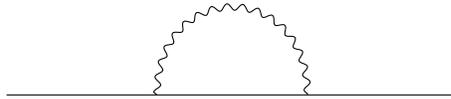
donde  $\frac{i\Pi(q)}{4\pi}$  es el *tensor de polarización*



**Figura 2-1.:** Diagrama de Feynman para el propagador del fotón

Para el electrón, se tiene:

$$iS'_F(q) = iS_F(q) + iS_F(q) (-i\Sigma(q)) S_F(q). \quad (2-7)$$



**Figura 2-2.:** Diagrama de Feynman para el propagador del electrón

Para el caso de una teoría con un campo escalar real, tenemos la siguiente densidad lagrangiana (a partir de la cual se pueden obtener las ecuaciones de movimiento)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{24}g\phi^4. \quad (2-8)$$

La matriz S está dada por las reglas de Feynman

$$S(q_1q_2 \rightarrow q'_1q'_2) = \frac{-i(2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2)}{(2\pi)^6 (16E'_1E'_2E_1E_2)^{1/2}} F(q_1q_2 \rightarrow q'_1q'_2), \quad (2-9)$$

donde  $q_1 q_2$  son los cuadrimomentos entrantes y  $q'_1 q'_2$  los cuadri-momentos salientes.

Para obtener el factor numérico  $F$  rotamos el contorno de integración  $k^0$  teniendo en cuenta las variables de Mandelstan [71]  $s, t, u$ , donde

$$s = -(p_1 + p_2)^2 \quad (2-10)$$

$$t = -(p_1 - p'_1)^2 \quad (2-11)$$

$$u = -(p_1 - p'_2)^2 \quad (2-12)$$

El parámetro de Feynman  $x$  y un corte ultravioleta en  $k = \Lambda$  se obtienen para  $\Lambda \gg m$

$$F = g - \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2 - sx(1-x)} \right) + \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2 - tx(1-x)} \right) + \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2 - ux(1-x)} \right) - 3 \right\} \quad (2-13)$$

Definimos el valor del acoplamiento renormalizado  $g_R$  como el valor de  $F$  en cualquier punto  $s, t, u$ . Por ejemplo:  $s = t = u = \mu^2 = p_1^2 = p_2^2 = p'^2_1 = p'^2_2 = -4\mu^2/3$ . Por lo tanto, el valor para  $F$  sería:

$$F = g_R - \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left( \frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - sx(1-x)} \right) + \ln \left( \frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - tx(1-x)} \right) + \ln \left( \frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - ux(1-x)} \right) \right\} + \dots \quad (2-14)$$

Podemos resumir el proceso de renormalización en términos de parámetros físicamente medibles de la siguiente manera:

- A través del rescalamiento de campos, absorber la renormalización de la intensidad de campo en el lagrangiano.
- Separar el lagrangiano en dos partes absorbiendo los infinitos y corrimientos no observables en contratérminos.
- Mantener la intensidad de campo igual a 1 y establecer las condiciones de renormalización que definen las masas y constantes de acoplamiento físicas.
- Calcular las amplitudes con las reglas de Feynman. Para esto se deben ajustar los contratérminos lo necesario para mantener las condiciones de renormalización.

Con el anterior ejemplo queda ilustrado el proceso de renormalización. Este formalismo es muy importante ya que las predicciones exitosas de la electrodinámica cuántica (QED) se pueden considerar como ratificaciones del principio de renormalizabilidad. Por ejemplo, las aplicaciones al modelo estándar de las interacciones electromagnéticas, débiles y fuertes.

Aunque con la renormalización se logran eliminar divergencias ultravioletas (para altas energías), en una teoría con partículas sin masa como la electrodinámica cuántica el propagador da lugar a divergencias en el infrarrojo (para bajas energías). Esto es debido a que cuando se está en presencia de partículas sin masa, se hace imposible separar estados asintóticos de una y para demasiadas partículas. Sin embargo, cuando se calculan secciones eficaces de dispersión las divergencias en el infrarrojo se cancelan [72].

En general, las constantes de acoplamiento tienen dimensionalidad de masa  $\Delta_i$  dada por  $[g_i] \sim [Masa]^{\Delta_i}$ , y otra forma de caracterizar la renormalizabilidad es a través de la dimensión de masa de las constantes de acoplamientos:

- *Teoría superrenormalizable*: las constantes de acoplamiento tienen dimensión de masa positiva.
- *Teoría Renormalizable*: las constantes de acoplamiento son adimensionales.
- *Teoría no Renormalizable*: las constantes de acoplamiento tienen dimensión de masa negativa.

Cuando hacemos un análisis dimensional vemos que la relatividad general es no renormalizable ya que la constante de acoplamiento ( $8\pi G_N = 2,43 \times 10^{18} GeV^{-2}$ ) tiene una dimensión de masa negativa. Dado que no ha sido posible encontrar una teoría renormalizable de la gravitación, muchos consideran que la renormalizabilidad no es un requerimiento físico fundamental y por ende cualquier teoría cuántica de campos realista debería incluir tanto términos renormalizables como no renormalizables.

## 2.1. Grupo de Renormalización

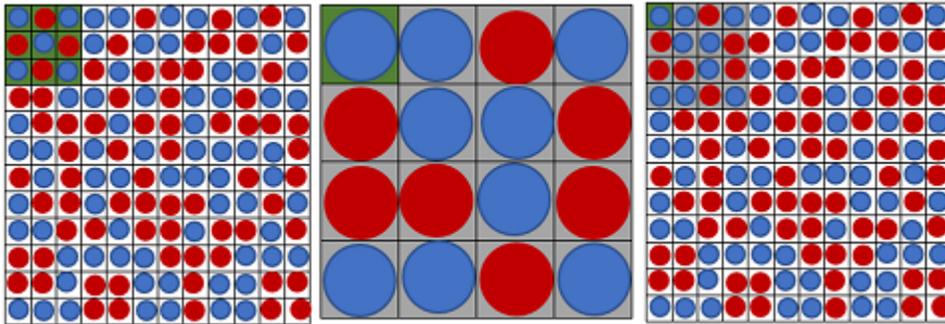
El concepto de Grupo de Renormalización (RG) fue ideado en un principio para física de partículas, y actualmente se extiende a astrofísica, cosmología, mecánica estadística, estado y mecánica de fluidos. Se remonta a principios de la década de los 50s del siglo XX [73, 74], y consiste en una transformación sobre campos o acoples llamada *Transformación de Escala* que permite estudiar de forma sistemática los cambios físicos de un sistema visto a diferentes

escalas de energía.

### 2.1.1. Block-Spin, grupo de renormalización y coarse graining

La idea central del grupo de renormalización (RG) puede entenderse con el modelo de bloques de espin ideado por Leo P. Kadanoff en 1966 [75]. Al implementar el procedimiento de granulado grueso (*coarse grain*) se pretende descartar detalles microscópicos irrelevantes y encontrar cómo un modelo particular se muestra a escala macroscópica. Para lograrlo, se promedia sobre *parques* locales del sistema. Así, el método de Kadanoff consiste en elegir un conjunto de constituyentes cercanos entre si y combinarlos en un único constituyente, sólo que más grande. En un segundo paso, se reduce el sistema y se estudia el comportamiento de este nuevo constituyente granulado grueso y se compara a los constituyentes originales. Si ciertos comportamientos se refuerzan con cada paso, los llamamos relevantes, si se vuelven débiles los llamamos irrelevantes. En este método, el promedio sobre los parques se inicia a escalas de distancias cortas, para obtener una descripción a distancias más grandes a partir de las leyes microscópicas [76].

A manera pedagógica, podemos entender este proceso de la siguiente manera: Tenemos una



**Figura 2-3.:** Esquema pedagógico para entender el proceso Block Spin RG

disposición bidimensional de partículas con *cargas* positivas  $p = +$  y negativas  $p = -$ . En la figura (2-3) vemos una disposición de tres rejías (mallas). Cada esfera representa una partícula; las azules tienen carga positiva y las rojas carga negativa.

El granulado grueso se implementa tomando bloques de partículas 3x3 por ejemplo, como se observa en la rejía izquierda de la figura (2-3), y reemplazándolas por un estado de partículas  $p'$  que toma su valor dependiendo de si la mayoría de los partículas en ese bloque son positivas o negativas, como se puede apreciar en la rejía del centro de la figura. Luego de realizar este procedimiento, se re-escala el sistema para obtener una nueva disposición de bloques de

partículas  $p'$  similar al original como se observa en el recuadro gris oscuro en la esquina superior izquierda de la reja ubicada al lado derecho de la figura.

Como la disposición original estaba descrita mediante unas constantes de acoplamiento  $g_i$  las cuales corresponden a la descripción de las interacciones entre las partículas  $p$ , la descripción de la interacción entre los bloques con partículas  $p'$  estará dada por un conjunto de constantes de acoplamiento  $g'_i$  las cuales son diferentes de las constantes de acoplamiento  $g_i$ .

Dado lo anterior, podemos pensar en el *Espacio de las Teorías* como aquel espacio en el que cada punto está asociado a todos los valores posibles de las constantes de acoplamiento  $g_i$  a una escala fija. Estas últimas se convertirán en las coordenadas en el espacio de las teorías. El procedimiento block-spin RG mapea puntos del espacio de la teoría a otros puntos. Los puntos más interesantes del espacio de las teorías son los puntos fijos  $g_i^*$  donde la teoría se mapea a sí misma [76] y se vuelve invariante bajo transformaciones de escala. En un punto fijo UV no trivial, las constantes de acople serán finitas, no nulas e invariantes de escala. Si, además, el número de estos acoples es finito, la teoría será renormalizable no perturbativamente.

## 3. Seguridad Asintótica

### 3.1. La idea de seguridad asintótica

La idea central en Seguridad Asintótica (SA) puede resumirse diciendo que una teoría cuántica de campos cuyo comportamiento en el UV está gobernado por un punto fijo (trivial o no trivial) del grupo de renormalización funcional (GRF), no sufre de divergencias UV en procesos físicos. Un ejemplo inmediato de este tipo de teorías es la cromodinámica cuántica (QCD) en la que un número finito de acoplos van a cero (punto fijo trivial) en el UV lo que significa que la teoría es asintóticamente libre en el UV.

Weinberg ha sugerido que una teoría cuántica de campos puede ser también completa en el UV en el caso más general en el que los acoplos no van a cero sino que son finitos el punto fijo UV, es decir, en el caso en el que la teoría es fuertemente acoplada en el UV. En este caso el punto fijo es no trivial (no gaussiano) y a esta generalización no trivial de la idea de libertad asintótica se le llama seguridad asintótica. Lo anterior implica que SA como teoría cuántica de la gravedad solo requiere de la métrica para describir la geometría cuántica del espacio-tiempo y no requiere de grados de libertad adicionales a los presentes en una teoría cuántica relativista de campos. Esto implica que la inclusión de los campos materia y grados de libertad del modelo estándar es directa, por lo que SA puede dar lugar a una teoría cuántica de campos que involucre todas las interacciones fundamentales a condición de que la existencia de un punto fijo UV no trivial sea demostrada rigurosamente.

#### 3.1.1. Evolución de constantes de acople y el espacio de teorías

Sean  $\bar{g}_i(\mu)$  el conjunto de todos los parámetros de acoplamiento adimensionalizados de la teoría definidos en el punto de renormalización con momento caracterizado por la escala de energía  $\mu$ :

$$\bar{g}_i(\mu) = \mu^{-d_i} g_i(\mu) . \tag{3-1}$$

donde  $d_i$  es la dimensión de masa del acople  $g_i$ . Para obtener la evolución de  $\bar{g}_i(\mu)$  con respecto al rescalamiento del punto de renormalización  $\mu$  se utiliza la ecuación generalizada de Gell-Mann-Low

$$\mu \frac{d}{d\mu} \bar{g}_i(\mu) = \beta_i(\bar{g}_i(\mu)) . \quad (3-2)$$

donde  $\beta(\bar{g})$ , llamada función beta es una función que se puede calcular en series de potencias de  $\bar{g}_i$ .

Al solucionar la anterior ecuación con las condiciones iniciales se puede determinar la teoría específica que se caracteriza por una trayectoria en el espacio de las constantes de acoplamiento. En este espacio, la *superficie crítica ultravioleta* que se define como aquella superficie formada por las trayectorias  $\bar{g}_i(\mu)$  que convergen en un punto fijo  $g^*$  a medida que  $\mu \rightarrow \infty$ , y para que esto suceda es necesario que  $\beta_i(\bar{g})$  tienda a cero cuando  $\mu \rightarrow \infty$  con  $\beta_i(g^*) = 0$ , es claro que en este punto las constantes de acoplamiento son invariantes de escala.

Hablamos de *Teorías Asintóticamente Seguras*, por ejemplo la gravitación, cuando las constantes de acoplamiento convergen a algún punto fijo en la superficie crítica ultravioleta. Este punto se conoce como Punto Fijo No Trivial Ultravioleta (PFNTU).

La dimensionalidad de la superficie crítica ultravioleta indica el número de parámetros libres en la teoría asintóticamente segura, y debe ser un número finito (positivo)  $C$  indicando el número de parámetros libres de la teoría que sería  $C$ , de los cuales  $C - 1$  son parámetros dimensionales que van a identificar una trayectoria en la superficie crítica  $C$ -dimensional, y 1 es un valor dimensional que va a indicar el valor  $\mu$  en el cual se alcanza un punto dado en esa trayectoria (obtenido).

Se puede determinar la dimensionalidad de la superficie crítica a partir del comportamiento de las funciones  $\beta_i(\bar{g})$  del punto fijo  $g^*$

$$\mu \frac{d}{d\mu} \bar{g}_i(\mu) \rightarrow \sum_j B_{ij} [\bar{g}_i(\mu) - g_j^*] . \quad (3-3)$$

donde

$$B_{ij} \equiv \left( \frac{\partial \beta_i(\bar{g})}{\partial \bar{g}_j} \right)_{\bar{g}=\bar{g}^*} \quad (3-4)$$

La solución general de la ec. 3-4 es:

$$\bar{g}_i(\mu) \rightarrow \sum_K C_K V_i^K \mu^{\lambda_K} + g_i^* . \quad (3-5)$$

donde  $V^K$  autovectores de  $B_{ij}$  con autovalores  $\lambda_K$

$$\sum_j B_{ij} V_i^K = \lambda_K V_i^K \quad (3-6)$$

En el espacio de teorías, los vectores  $V_K$  van a lo largo de direcciones que emergen del punto fijo. Cada índice  $K$  corresponde a un acoplamiento generalizado en la base que diagonaliza la matriz de estabilidad. Si la parte real de  $\lambda_K$  es negativa la dirección es irrelevante, si es positiva la dirección es relevante y finalmente si se anula la dirección es marginal [76].

La acción efectiva wilsoniana en términos de los acoplamientos  $g_i$  tales que  $S_k[\varphi, g_i]$  y al expandirlo se tiene

$$S_k = \sum g_i \mathcal{O}_i[\varphi]. \quad (3-7)$$

El re-escalamiento en el Grupo de Renormalización continuo se logra al medir todas las cantidades en las unidades de la escala del corte

$$g_i \rightarrow k^{d_i} g_i,$$

donde:

$d_i$ : dimensión de Masa

$\mathcal{O}$ : operador

En el caso del block-spin los acoplamientos esenciales son todos los acoplamientos que no pueden eliminarse mediante una redefinición de campo [76]. El flujo del grupo de renormalización es un vector de campo tangente a la dirección de la disminución del tiempo del grupo de renormalización

$$t = \ln(k/\Lambda)$$

$$-\partial_t = - \sum_i \partial_t g_i \frac{\partial}{\partial g_i}$$

,

$$\partial_t = - \sum_i \beta_i \frac{\partial}{\partial g_i}. \quad (3-8)$$

Los componentes del flujo  $\beta_i$  son funciones de los acoplamientos  $\beta_i(g_i)$ .

Al rededor del punto fijo perturbamos levemente en el espacio de la teoría con el objetivo de descubrir cuáles direcciones son atraídas hacia el punto fijo en el IR o UV.

La perturbación a primer orden es  $\delta g_i = g_i - g_i^*$  y obedece la ecuación de flujo linealizada alrededor de  $g_i^*$

$$\partial_t \delta g_i = \partial_t (g_i - g_i^*) = \partial_t g_i - \partial_t g_i^* = \partial_t g_i = \beta_i$$

Las funciones beta están dadas por

$$\beta_i = \sum_j \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{g=g^*} g_j - g_j^*,$$

$$\beta_i = \sum_j \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{g=g^*} \delta g_j,$$

$$\beta_i \equiv \sum_j M_{ij} \delta g_j, \quad (3-9)$$

$$\partial_t \delta g_i \equiv \sum_j M_{ij} \delta g_j. \quad (3-10)$$

donde  $M_{ij} = \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{g=g^*}$  es la matriz de estabilidad y la solución está dada por la Ec.(3-5), que también se puede escribir de la siguiente manera

$$\delta g_i = \sum_A C_A V_A^i e^{-t\theta_A}, \quad (3-11)$$

$$\partial_t \delta g_i = \partial_t \sum_A C_A V_A^i e^{-t\theta_A},$$

$$\partial_t \delta g_i = \sum_A C_A (-\theta_A V_A^i) e^{-t\theta_A},$$

$$\partial_t \delta g_i = \sum_A C_A \left( \sum_j M_{ij} V_A^j \right) e^{-t\theta_A},$$

$$\partial_t \delta g_i = \sum_j M_{ij} \delta g_j.$$

donde  $\theta_A$  son los exponentes críticos y los podemos clasificar en:

- *Relevante:*  $Re\{\theta_A\} > 0$   $\delta g_i$  crece cuando  $k$  disminuye.
- *Irrelevante:*  $Re\{\theta_A\} < 0$   $\delta g_i$  decrece cuando  $k$  disminuye
- *Marginal:*  $Re\{\theta_A\} = 0$

Cuando analizamos teorías como la gravitación nos encontramos con el inconveniente de que no son renormalizables y debemos buscar un punto fijo diferente de cero (no trivial)  $g^* \neq 0$ . [77, 78]. Los autovalores de la matriz  $B_{ij}$  dependen el procedimiento de renormalización, aunque la matriz  $B_{ij}$  y las funciones  $\beta_i$  no dependan de éstas.

En seguridad asintótica podemos abordar los siguientes formalismos:

I) Elegir un conjunto diferente de puntos de renormalización en cuyo caso los parámetros de acoplamiento reescalados Ec.(3-1) se convertirían en funciones  $\tilde{g}_i(\tilde{\mu})$  de la escala de momento  $\tilde{\mu}$  en los nuevos puntos de renormalización.

II) Utilizar la regularización dimensional [79, 80] y tomar las constantes de acoplamiento renormalizadas como constantes en la serie de Laurent de acoplamientos no renormalizados  $g_{i0}$  al rededor de un espacio-tiempo de dimensionalidad  $D = 4$  con  $\mu$  en unidades de masa para tornar  $\tilde{g}_i(\tilde{\mu})$  adimensional.

$$g_{i0} \rightarrow \tilde{\mu}^{d_i(D)} \left[ \tilde{g}_i(\tilde{\mu}) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{\nu i}(\tilde{g}(\tilde{\mu}))}{(D-4)^\nu} \right]. \quad (3-12)$$

III) Fijar un corte ultravioleta en el momentum  $\tilde{\mu}$  y tomar los acoplamientos no renormalizados reescalados como funciones  $\tilde{g}_i(\tilde{\mu})$  tal que las tasas de corrección sean independientes del corte.

Necesitamos definir una nueva función  $\beta_i$  para que los nuevos acoplamientos sean independientes de  $\mu$ , lo que indica que son independientes de como se definieron los antiguos acoplamientos.

Esta nueva función  $\beta_i$  debe estar relacionada a la antigua función  $\beta$  mediante una regla de transformación de vector contravariante.

$$\tilde{\beta}_i(\tilde{g}) = \sum_j \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial \tilde{g}_j} \beta_j(\bar{g}). \quad (3-13)$$

Las funciones  $\beta$  en sí no son invariantes, ni sus derivadas

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_i}{\partial \tilde{g}_j} = \sum_{kl} \frac{\partial^2 \tilde{g}_i}{\partial \tilde{g}_k \partial \tilde{g}_l} \frac{\partial \tilde{g}_l}{\partial \tilde{g}_j} \beta_k(\bar{g}) + \sum_{kl} \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial \tilde{g}_k} \frac{\partial \beta_k(\bar{g})}{\partial \tilde{g}_l} \frac{\partial \tilde{g}_l}{\partial \tilde{g}_j}. \quad (3-14)$$

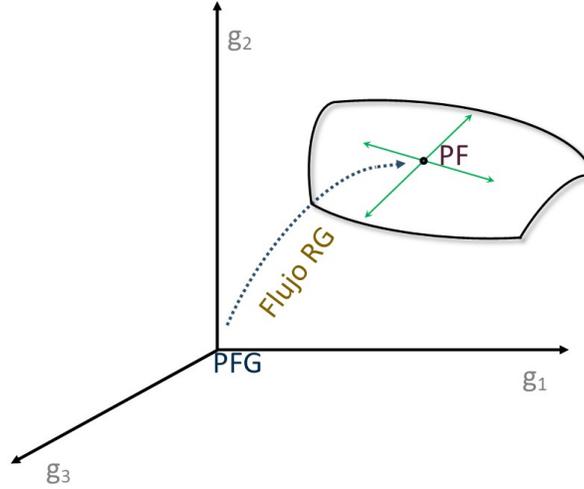
En el punto fijo el primer término de la ecuación se anula. La relación entre la nueva matriz  $B$  y la anterior está dada por la siguiente ecuación

$$\tilde{B}_{ij} = \sum_{kl} A_{ik} B_{kl} A_{lj}^{-1}, \quad (3-15)$$

donde

$$A_{ik} \equiv \left( \frac{\partial \tilde{g}_i(\bar{g})}{\partial \bar{g}_k} \right)_{\bar{g}=g^*} . \quad (3-16)$$

Los autovalores de  $B$  son los mismos que los de  $\tilde{B}$  y son los exponentes críticos que dependen solamente de la naturaleza de los grados de libertad del sistema. La figura 3-1 representa el



**Figura 3-1.:** Representación del espacio de la teoría

espacio de teorías el cual contiene un punto fijo no gaussiano (NGFP) y su superficie crítica (UV) cuya dimensión está determinada por todas las direcciones relevantes que se alejan del punto fijo a medida que tendemos al infrarrojo (IR).

Para el caso de la gravedad, el grupo de renormalización nos muestra que la física a bajas energías está gobernada por el comportamiento de los acoplamientos  $\bar{g}_i(\mu)$  cuando  $\mu \rightarrow 0$ . La seguridad asintótica implica la existencia de una escala fundamental de energía  $M$  que es el valor de  $\mu$  al cual la trayectoria se aproxima al punto fijo UV  $g_i^*$ . Esta energía debería ser del orden de la escala de Planck  $M_P = 1,2 \times 10^{19} GeV$ .

Para  $\bar{g}_i(\mu)$  cerca a cero, se tiene

$$\bar{g}_i(\mu) \approx \left( \frac{M_i}{\mu} \right)^{d_i} . \quad (3-17)$$

Para  $\mu \ll M_i$ , y donde  $M_i$  es un conjunto de constantes de integración desconocidas, y están relacionadas entre sí por la condición de seguridad asintótica en la que  $\bar{g}_i(\mu)$  debe encontrarse en una superficie crítica ultravioleta de un punto fijo  $g^*$ .  $M_i$  debe ser del orden de  $M$ . Antes del rescalamiento, los acoplamientos tienen la siguiente magnitud

$$g_i(\mu) \approx M^{d_i} \quad \text{para } \mu \ll M .$$

### 3.1.2. Grupo de renormalización wilsoniano

El procedimiento de granulado grueso descrito en el capítulo anterior se implementa de manera continua en el enfoque asociado al grupo de renormalización ideado por Wilson a mediados de los 70s del siglo XX [81–83], el cual tiene como ventaja que mantiene la invariancia gauge. Por simplicidad se considerará solo el campo escalar aunque el formalismo puede ser extendido a campos gauge y al campo gravitacional.

En esta formulación el corte es impuesto por la cuantización de una teoría gauge en un enrejado (malla) del espacio-tiempo finito, aunque como gran desventaja; no mantiene la invariancia de Lorentz [84].

La idea consiste en la introducción de un corte ajustable en escala de momentum  $k$  se efectúa en la integral funcional de tal manera que los modos de Fourier  $\varphi(p)$  de los campos fluctuantes  $\varphi(x)$  en la integral de trayectoria con momentum  $\Lambda^2 > p^2 > k^2$  son integrados antes que la integral funcional completa. Aquí,  $\Lambda$  se identifica como el corte ultravioleta  $UV$ . Vamos a dividir el campo fluctuante en dos partes

$$\varphi(x) = \varphi(h) + \varphi(l) . \quad (3-18)$$

donde:  $\varphi(h)$  solamente va a depender de los modos de momentum altos  $k^2 < p^2 < \Lambda^2$ .

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} \varphi(x) & k^2 < p^2 < \Lambda^2 , \\ 0 & p^2 < k^2 , \end{cases}$$

mientras que  $\varphi(l)$  solamente va a depender de los modos de momentum bajos  $p^2 < k^2$

$$\varphi_l(x) = \begin{cases} 0 & k^2 < p^2 < \Lambda^2 , \\ \varphi(x) & p^2 < k^2 , \end{cases}$$

En QFT la función de correlación de  $n$  puntos, la cual contiene la información física, se obtiene a partir de las derivadas funcionales respecto a una fuente externa  $J(x)$  de la funcional generatriz Euclideana la cual, para un campo escalar está dado por:

$$Z = \int_{p^2 < \Lambda^2} \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + J \cdot \phi} . \quad (3-19)$$

Obviando por el momento la fuente  $J$ , la separación del campo en la Ec.(3-18) permite separar la integral (3-19) en el producto

$$\int_{p^2 < k^2} \mathcal{D}\varphi_l \times \int_{k^2 < p^2 < \Lambda^2} \mathcal{D}\varphi_h e^{-S[\varphi_h + \varphi_l]}$$

Al realizar el cambio de variable  $\varphi_l \rightarrow \varphi$  tenemos

$$Z = \int_{p^2 < k^2} \mathcal{D}\varphi e^{-S_k[\varphi]}, \quad (3-20)$$

donde la acción efectiva Wilsoniana  $S_k$  está dada por:

$$e^{-S_k[\varphi]} \equiv \int_{k^2 < p^2 < \Lambda^2} \mathcal{D}\varphi_h e^{-S[\varphi_h + \varphi]}. \quad (3-21)$$

$S_k$  puede expandirse en productos de acoples renormalizados multiplicados por operadores que solo dependen de los campos: Ec.(3-7). El espacio de teorías será expandido por los acoples  $g_i$  según lo visto en el párrafo anterior

### 3.1.3. Grupo de renormalización funcional y la acción efectiva promedio

En teoría cuántica de campos, la funcional generatriz de funciones de correlación conectadas  $W[J]$  se construye a partir de la función generatriz  $Z[J]$  en la Ec.(3-19) en la forma La acción efectiva promedio debe interpolar entre la acción desnuda  $S$  y la acción efectiva de tal manera que:

$$W[J] = \ln Z[J]. \quad (3-22)$$

A partir de  $W$ , la funcional generatriz de funciones de correlación irreducibles de una partícula, llamada la acción efectiva, se obtiene a través de una transformación de Legendre<sup>1</sup> de  $W[J]$ .

$$\Gamma[\phi] = \left( \int d^d x J(x) \phi(x) - W_k[J] \right). \quad (3-28)$$

<sup>1</sup>Postulada por Andre Marie Legendre, esta transformación en física se utiliza para convertir funciones como posición, presión o temperatura en funciones de la conjugada momento, volumen y entropía. En mecánica clásica, esta transformada me permite derivar la formulación hamiltoniana partiendo de la lagrangiana y viceversa. Finalmente, en termodinámica se utiliza para encontrar los potenciales termodinámicos.

La transformada de Legendre reemplaza una función de varias variables con una nueva función que depende de las derivadas parciales de la función original con respecto algunas de las variables independientes originales, ofreciendo la descripción de la dinámica de un sistema que inicialmente se presenta en términos de una determinada propiedad/variable, recurriendo a hacer tal descripción en términos de la propiedad/variable dinámica conjugada de la primera utilizada.

Analíticamente la podemos definir de la siguiente manera: Dos funciones  $f$  y  $h$  son una *transformada de Legendre* si cada una de sus primeras derivadas son función inversa de la otra:

$$Df = (Dh)^{-1} \quad (3-23)$$

El grupo de renormalización funcional se enfoca en la acción efectiva promedio  $\Gamma_k[\phi]$  en los límites asintóticos:

- $\Gamma_{k \rightarrow \infty}[\phi] = S$  Acción sin renormalizar - Física Macroscópica.
- $\Gamma_{k \rightarrow 0}[\phi] = \Gamma$  Acción efectiva estándar con corte en el Ultravioleta - Física Microscópica.

El generador funcional efectivo es:

$$Z_k[J] \equiv e^{W_k[J]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi - \frac{1}{2} \varphi \cdot \mathcal{R}_k(-\partial^2) \cdot \varphi}. \quad (3-29)$$

donde  $R_k$  es el regulador en el infrarrojo (IR) [85].

Para que esto ocurra, el regulador debe cumplir la restricción

$$R_k(p^2) = \begin{cases} k^2 & p^2 \ll k^2, \\ 0 & p^2 \gg k^2, \end{cases}$$

---

Por lo tanto,  $f$  y  $h$  están relacionadas por una *transformada de Legendre*. Son unívocas hasta una constante aditiva que normalmente se fija mediante el requisito adicional de que

$$f(x) + h(y) = xy. \quad (3-24)$$

La función  $f(x)$  es estrictamente convexa en el intervalo deseado y admite transformada de Legendre, al existir su derivada segunda y no se anula.

En física, existen otras transformadas de uso frecuente como son: **Transformada de Fourier** postulada por Joseph Fourier, se utiliza transformar señales entre el dominio del tiempo (o espacial) y el dominio de la frecuencia. El propio término se refiere tanto a la operación de transformación como a la función que produce. Analíticamente

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \quad (3-25)$$

donde  $x$  y  $\xi$  son variables que generalmente se asocian a tiempo y frecuencia. **Transformada de Laplace** postulada por Pierre Simón Laplace; esta transformación convierte una función de variable real  $t$  a una función de variable compleja  $s$ . Analíticamente; La transformada de Laplace de una función matemática  $f(t)$  definida para todos los números reales  $t \geq 0$  es la función  $F(s)$  definida por

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3-26)$$

siempre y cuando la integral esté definida.

Cuando  $f(t)$  es una Distribución de probabilidad|distribución con una Singularidad matemática en 0 entonces la transformada de Laplace se define como

$$F(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3-27)$$

$$\tilde{\Gamma}_k[\phi] = \sup_j \left( \int d^4x J(x) \phi(x) - W_k[J] \right). \quad (3-30)$$

donde  $W_k[J]$  es el generador funcional de las funciones de correlación.

La acción efectiva promedio  $\Gamma_k[\phi]$  es también una funcional del campo  $\phi$  y se obtiene restando de  $\tilde{\Gamma}_k[\phi]$  el término regulador con el fin de que no diverja cuando  $k \rightarrow \infty$  [76].

$$\Gamma_k[\phi] = \tilde{\Gamma}_k[\phi] - \frac{1}{2} \phi \cdot \mathcal{R}_k(-\partial^2) \cdot \phi. \quad (3-31)$$

### 3.1.4. Ecuación de Wetterich

La acción efectiva promedio satisface la llamada *ecuación exacta del GRF* o ecuación de Wetterich. Para obtenerla, notemos inicialmente que a partir de la Ec.(3-29) se puede calcular:

$$\phi = \langle \phi \rangle = \delta W_k / \delta J, \quad (3-32)$$

mientras que el propagador (o función de correlación de dos puntos conectada) está dada por [76]:

$$G_k(x, y) = \frac{\delta^2 W_k}{\delta J(x) \delta J(y)} = \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle - \langle \varphi(x) \rangle \langle \varphi(y) \rangle, \quad (3-33)$$

A partir de estas dos ecuaciones se sigue:

$$G_k(x, y) = \frac{\delta \phi}{\delta J}, \quad (3-34)$$

Asumiendo que  $G_k$  es invertible se puede escribir:

$$\int d^d y G_k(x, y) \frac{\delta J(y)}{\delta \phi(z)} = \delta(x - z),$$

Ahora, al hacer la derivada funcional de la acción efectiva promedio en la Ec.(3-31) con respecto a  $\phi$ , se obtiene

$$\frac{\delta \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi(x)} = J(x) - (\mathcal{R}_k \cdot \phi)(x), \quad (3-35)$$

de tal manera que si se deriva con respecto a  $\phi$  una vez más llegamos a:

$$G_k(x, y) = \left[ \frac{\delta^2 \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right]^{-1}(x, y). \quad (3-36)$$

Para abordar la ecuación de Wetterich es necesario haber introducido la acción efectiva promedio, y para obtener esta última tenemos dos opciones:

- Resolver la ecuación de Dyson-Schwinger (3-37) y calcular término a término en la expansión, lo cual implicaría integrar a la vez sobre todas las fluctuaciones cuánticas.

$$e^{-\Gamma[\phi]} = \int \mathcal{D}x \exp \left\{ \phi + x \right\} + \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi} \cdot x \quad (3-37)$$

donde  $x = \varphi - \phi$  son las fluctuaciones alrededor de  $\phi$

- Aplicar la idea de Wilson de integrar a la vez las fluctuaciones cuánticas en el shell (casarón) de momentum  $\delta k$ .

Tenemos la siguiente transformación de Legendre para obtener la acción efectiva

$$\Gamma_k[\phi] = \sup_J \left( \int d^4x J(x) \phi(x) - W_k[J] \right), \quad (3-38)$$

donde

$$\phi(x) = \langle \varphi(x) \rangle_J = \frac{1}{e^{W[J]}} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi}, \quad (3-39)$$

$$\phi(x) = \langle \varphi(x) \rangle_J = \frac{1}{e^{W[J]}} \frac{\delta}{\delta J(x)} \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi}, \quad (3-40)$$

$\therefore J(x)$  es la fuente externa.

$$J(x) = \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta J(x)}. \quad (3-41)$$

En lo que sigue se asumirá por simplicidad la teoría de campos escalares en espacio-tiempo plano (Euclideo) para introducir el método funcional [86, 87].

Tenemos la función de correlación de  $n$ -puntos para un campo escalar.

$$\langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) e^{-S[\varphi]}}{\int \mathcal{D}e^{-S[\varphi]}}, \quad (3-42)$$

donde  $S[\varphi]$  es la acción esencial de la teoría y  $\int \mathcal{D}$  es la medida que debe estar regularizada. El generador funcional es

$$Z[J] = e^{W[J]} = \int \mathcal{D}e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi}, \quad (3-43)$$

$$J \cdot \varphi \equiv \int d^4x J(x) \varphi(x),$$

Ahora, haciendo el exponencial de la Ec.(3-38), y realizando el siguiente cambio de variable  $\mathcal{X} = \varphi - \phi$  se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{-\Gamma[\phi]} &= e^{W[J]} e^{-J \cdot \phi}, \\ e^{-\Gamma[\phi]} &= \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + J \cdot \varphi - J \cdot \phi}, \\ e^{-\Gamma[\phi]} &= \int \mathcal{D}\mathcal{X} e^{-S[\mathcal{X} + \phi] + J \cdot \mathcal{X}}. \end{aligned}$$

El papel operacional de la acción efectiva  $\Gamma[\phi]$  es describir la física macroscópica donde las fluctuaciones cuánticas se han incorporado en la integral funcional.

Aplicamos la derivada funcional a la Ec.(3-31), y teniendo en cuenta que  $\mathcal{X} = \varphi - \phi$

$$\frac{\delta \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi(x)} = J(x) - (\mathcal{R}_k \cdot \phi) x, \quad (3-44)$$

$$e^{-\Gamma_k[\phi]} = \int \mathcal{D}\mathcal{X} e^{-S[\mathcal{X} + \phi] + \frac{\delta \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi} \cdot \mathcal{X} - \frac{1}{2} \mathcal{X} \cdot \mathcal{R}_k \cdot \mathcal{X}}. \quad (3-45)$$

A continuación se muestra que la acción efectiva promedio  $\Gamma[k]$  obedece la ecuación del grupo de renormalización funcional exacta [54, 76, 88].

$$k \partial_k \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ k \partial_k \mathcal{R}_k \frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k} \right], \quad (3-46)$$

donde  $\Gamma_k^{(2)}$  es el Hessiano (la segunda derivada funcional con respecto a  $\phi$ ) de  $\Gamma_k$ .

$$\Gamma_k^{(2)} = \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi}. \quad (3-47)$$

La aparición del regulador  $\mathcal{R}_k$  en el numerador y denominador asegura que el argumento de la traza alrededor de  $p^2 = k^2$  y se anula para  $p^2 \gg k^2$ . Como consecuencia la traza es finita tanto en el infrarrojo (IR) como en el ultravioleta (UV).

Para derivar la acción  $\Gamma_k$  Ec.(3-46), se aplica el propagador Ec.(3-33) y se obtiene

$$\frac{\delta^2 W_k}{\delta J(x) \delta J(y)} = \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{W_k}{\delta J(y)}. \quad (3-48)$$

Dado que se asume el campo  $\phi$  como una derivada funcional simple, se puede tomar el propagador como una derivada funcional del campo [76]. Al derivar la expresión anterior, se encuentra una nueva opción para escribir el propagador

$$G_k(x, y) = \frac{\delta \phi(x)}{\delta J(y)}. \quad (3-49)$$

Al admitir la relación entre  $\phi$  y  $J$ , se puede entender la fuente como un funcional del campo.

$$\int d^d y G_k(x, y) \frac{\delta J(y)}{\delta \phi(z)} = \delta(x - z) ,$$

$$\int d^4 y G_k(x, y) \frac{\delta J(y)}{\delta \phi(z)} = \delta(x - z) . \quad (3-50)$$

Tomamos la derivada de la Ec.(3-44) con respecto a  $\phi(x)$  y se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi(y)} &= \frac{\delta}{\delta \phi(x)} J(y) - (\mathcal{R}_k \cdot \phi) y \\ \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi(y)} &= \frac{\delta J(y)}{\delta \phi(x)} - \mathcal{R}_k \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\delta J(y)}{\delta \phi(x)} = \frac{\delta^2 \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} + \mathcal{R}_k . \quad (3-51)$$

Al invertir la anterior ecuación, resulta el propagador (3-49) de la siguiente manera

$$G_k(x, y) = \frac{\delta \phi(x)}{\delta J(y)} \left( \frac{\delta^2 \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} ,$$

Igualmente,

$$G_k(x, y) = \frac{\delta \phi(x)}{\delta J(y)} \left( \frac{\delta^2 \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi \delta \phi} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} (x, y) . \quad (3-52)$$

La ecuación de flujo (3-46) se obtiene al derivar la Ec.(3-31) respecto a la escala  $k$ .

$$k \partial_k \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \langle k \partial_k \mathcal{R}_k G_k \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ k \partial_k \mathcal{R}_k \frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k} \right] .$$

## 3.2. El truncado de la acción gravitacional a lá Einstein-Hilbert

El proceso de renormalización no-perturbativa tiene como elementos principales la Ec.(3-31) y la Ec.(3-46), y a través de éstas se busca por ejemplo encontrar las modificaciones

a la métrica de Schwarzschild -para agujeros negros- de forma que permitan estudiar y contrastar la propuesta teórica denominada *Seguridad Asintótica* (AS). Esta es una idea, respecto de una viable *cuantización de la gravitación*, sugerida por algunos expertos de la teoría de campos cuánticos como potencialmente útil para describir la física de los agujeros negros, conforme idealizados como probables objetos astrofísicos en la teoría Relatividad General (TGR). Para llevar a cabo este desarrollo, se define la *acción efectiva promedio*  $\Gamma_k$ , y posteriormente se transfiere ésta a la Ec.(3-46).

A este propósito, la aproximación más utilizada consiste en truncar la acción gravitacional genérica en la que se adicionan términos en busca de preservar la invarianza *gauge*, o de calibre de la teoría. Es decir, reducir acciones clásicas del tipo

$$S = f(R) = \int (\dots + \frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R} + R + R^2 + R^3 + \dots) \sqrt{-g} d^4x, \quad (3-53)$$

una estructura también denominada la serie de *Laurent*, al punto de llevarlas a la aproximación de Einstein-Hilbert en que la serie toma la forma simple  $S = \int R \sqrt{-g} d^4x$ .

Formalmente, la acción de Einstein-Hilbert se escribe

$$S = \frac{1}{2k} \int R \sqrt{-g} d^4x, \quad (3-54)$$

a fin de adimensionalizarla (i.e. darle el carácter *escalar* propio de todo tipo de acción). Aquí  $R$  es el escalar de Ricci,  $g = \det g_{\mu\nu}$  es el determinante de la matriz que define el tensor métrico, y la constante gravitacional se define  $k = \frac{8\pi G}{c^4}$ .

En el caso que nos ocupa, y equivalentemente, la aproximación Einstein-Hilbert se obtiene al truncar la Ec.(3-53) de forma a obtener la acción efectiva promedio como un funcional de la clase

$$\Gamma_k [\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}, C, \bar{C}] = \frac{1}{16\pi G_k} \int \sqrt{g} d^4x [2\Lambda_k - R] + S_{gf} [\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}] + S_{gh} [C, \bar{C}], \quad (3-55)$$

donde  $\int S_{gf} \sqrt{g} d^4x$  define la acción correspondiente a la fijación de gauge; la cual depende únicamente de la métrica invocada. Conforme se puede inferir, la variable dinámica de la teoría es el campo métrico del espacio-tiempo,  $g_{\mu\nu}$ , el cual es un campo de naturaleza tensorial [89]. A este fin -el de ofrecer una propuesta viable de cuantización de la gravitación-, se descompone el campo métrico en dos partes;  $\bar{g}_{\mu\nu}$  que representa un campo clásico de fondo, y  $h_{\mu\nu}$  que incluye la fluctuación cuántica:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (3-56)$$

La ecuación (3-56) se conoce como *Background Field Method (BFM)* [65, 89, 90], y nos permite que, al renormalizar la teoría, se mantenga la invarianza ante transformaciones gauge.

En esta ecuación  $\bar{g}_{\mu\nu}$  debe mantenerse fijo mientras que  $h_{\mu\nu}$  será la variable de integración en el funcional efectivo <sup>2</sup> Ec.(3-29). El *BFM* también requiere el término de la acción del tipo  $S_{gf}$ ; que corresponde a la fijación del gauge y que es cuadrático de  $h_{\mu\nu}$ , y también la componente de acción  $S_{gh}$  correspondiente a los campos denominados *fantasma* del tipo de Faddeev-Popov [65, 91]. Los campos  $C$  y  $\bar{C}$  no representan cantidades físicas reales en el sentido de que sean medibles u observables, pero se introducen para garantizar la invarianza gauge. El siguiente paso es introducir la Ec.(3-55) en la Ec.(3-46), y la ecuación resultante se resuelve para encontrar las funciones que determinan como varían las constantes acoplamiento fundamentales de  $G_k$  y  $\Lambda_k$  respecto a la escala de energía y como se aproximan al punto fijo en el UV. <sup>3</sup>

Derivando la Ec.(3-55) con respecto a la escala de energía  $k$ , se obtiene

$$\partial_k \Gamma_k [g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{g} d^4x \left[ 2\partial_k \left( \frac{\Lambda_k}{G_k} \right) - R\partial_k \left( \frac{1}{G_k} \right) \right]. \quad (3-57)$$

A este punto, a fin de obtener el lado derecho de la Ec.(3-46) se expande el Hessiano (3-47), hasta segundo orden, en el campo de fluctuación cuántica  $h_{\mu\nu}$

$$\left( \Gamma_k^{(2)} \right)^{ij} = \mathbb{K}_i (\nabla^2) \delta^{ij} \mathbb{1} + \mathbb{M}^{ij} (R, D), \quad (3-58)$$

donde  $\nabla^2 = g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu$  es el operador Laplaciano y  $\mathbb{1}$  la matriz de identidad. El término  $\mathbb{K}_i (\nabla^2)$  contiene derivadas de los campos, y  $\mathbb{M}^{ij} (R, D)$  son factores proporcionales al tensor de curvatura  $R^{\alpha\beta\mu\nu}$ ; el denominador es el tensor de Riemann.

Con base en los conceptos y definiciones matemáticas presentadas en esta sección ahora se pueden definir dos reguladores (IR) cuya función es diferenciar entre los momentos  $k$  bajo y  $k$  alto. Ya que en la ecuación (3-55) se introdujeron dos campos ( $h_{\mu\nu}$  y  $\bar{C}_\mu$ ) se define un regulador para  $h_{\mu\nu}$  y otro para  $\bar{C}_\mu$ . Ambos tienen la forma:

$$R_k \approx k^2 f \left( \frac{p^2}{k^2} \right); \quad (3-59)$$

tal que  $f \left( \frac{p^2}{k^2} \right)$  debe cumplir las condiciones:  $f(0) = 1$  y  $f(\infty) = 0$ <sup>4</sup>. De esta manera se puede calcular la traza de los reguladores así definidos usando la técnica denominada *Heat-Kernel Expansion HKE* [92]. El resultado se expresa en términos de las constantes de acoplamiento:  $g_k = G_k k^{d-2}$  y  $\lambda_k = \Lambda_k k^{d-2}$ .

<sup>2</sup>La ecuación (3-56) no implica un tratamiento perturbativo, ya que no se asume que  $h_{\mu\nu}$  sea un parámetro pequeño

<sup>3</sup>Este procedimiento ya fue llevado a cabo por primera vez en [7]

<sup>4</sup>Por ejemplo  $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

De esta forma, y para  $d = 4$ , se tiene:

$$k\partial_k g_k = (d - 2 + \eta_n(g_k, \lambda_k)) g_k, \quad (3-60)$$

con

$$\eta_n(g_k, \lambda_k) = \frac{g_k \beta_1(\lambda)}{1 - g_k \beta_2(\lambda)}, \quad (3-61)$$

donde  $\eta_n$  es la dimensión anómala de la constante de Newton

$$\eta_n = k \frac{\partial \ln(G_k)}{\partial_k}. \quad (3-62)$$

En las expresiones anteriores las funciones  $\beta_1$  y  $\beta_2$  de la constante adimensional  $\lambda$  están dadas por [7, 89]:

$$\beta_1(\lambda) = \frac{4}{3} (\pi)^{1-d/2} \{d(d+1) \Phi_{d/2-1}^1(-2\lambda) - 6d(d-1) \Phi_{d/2}^2(-2\lambda) - 4d \Phi_{d/2-1}^1(0) - 24 \Phi_{d/2}^0\} \quad (3-63)$$

$$\beta_1(\lambda) = -\frac{2}{3} (\pi)^{1-d/2} \{d(d+1) \Theta_{d/2-1}^1(-2\lambda) - 6d(d-1) \Theta_{d/2}^2(-2\lambda)\}, \quad (3-64)$$

donde

$$\Phi_n^p(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{(1+z)^p}, \quad (3-65)$$

$$\Theta_n^p(z) = \frac{1}{\Gamma(n+2)} \frac{1}{(1+z)^p}. \quad (3-66)$$

La Ec.(3-60) es compleja de solucionar analíticamente. Es por ello que se utilizan aproximaciones para solucionarla y encontrar el comportamiento de los valores de la constante de acoplamiento  $G_k$  y  $Lambda_k$  como se verá en los próximos capítulos.

# 4. Agujero negro de Schwarzschild-(A)dS en relatividad general y en seguridad asintótica

Puede afirmarse, en pocas palabras, que un agujero negro es un objeto compacto que tiene un horizonte de eventos <sup>1</sup>. Sin embargo, para entender a cabalidad esta afirmación deben especificarse varios conceptos [93, 94]. En primer lugar, el espacio-tiempo de la relatividad general es una variedad Lorentziana  $(\mathcal{M}, g)$  de dimensión 4 dotada de un tensor métrico  $g$  que, de forma diferenciable, asigna a cada punto  $p$  del espacio tangente  $T_p\mathcal{M}$  una métrica con signatura  $-+++$  que se denota por  $g(v, w)$  con  $(v, w) \in T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M}$ . En cada punto de la variedad el espacio tangente es isométrico al espacio de Minkowski. En consecuencia, el carácter causal de un vector  $v \in T_p\mathcal{M}$  es temporal si  $g(v, v) < 0$ , es espacial si  $g(v, v) > 0$ , y es tipo luz si  $g(v, v) = 0$ . Se dice que el espacio-tiempo es orientable temporalmente si es posible definir sobre  $(\mathcal{M}, g)$  un campo vectorial temporal diferenciable no nulo, de tal manera que el conjunto de vectores causales en  $T_p\mathcal{M}$  tenga dos componentes conexas: El cono causal futuro denotado por  $\mathcal{J}_p^+$ , y el cono causal pasado denotado por  $\mathcal{J}_p^-$ . Considérese ahora dos regiones  $\mathcal{R}^-$  y  $\mathcal{R}^+$  de  $(\mathcal{M}, g)$ , tales que todas las curvas tipo luz que inician en la primera finalicen en la segunda. Si todo el espacio-tiempo  $(\mathcal{M}, g)$  no está contenido en  $\mathcal{J}^-(\mathcal{R}^+)$ , se dice que este espacio-tiempo contiene un **agujero negro**. Esto significa que existe una región en  $(\mathcal{M}, g)$  desde donde ninguna geodésica nula puede alcanzar el espacio-tiempo futuro asintóticamente plano (asintóticamente Minkowskiano). En el exterior del agujero negro, por el contrario, las curvas nulas y temporales pueden ser extendidas al infinito. El **horizonte de eventos** se define como la frontera entre esa región y la región exterior.

*El Teorema de No Pelo* establece que: *En relatividad general; las soluciones de agujeros negros para las ecuaciones de Einstein-Maxwell de la gravitación y el electromagnetismo se pueden caracterizar completamente por solo tres parámetros Masa, Carga eléctrica y Momentum angular* <sup>2</sup> [95].

---

<sup>1</sup>Los agujeros negros son soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein y se definen como aquella región del espacio-tiempo al interior del cual el campo gravitacional es tan fuerte que nada inclusive la luz puede escapar de él.

<sup>2</sup>El físico estadounidense John Archibald Wheeler acuñó el término *Agujero Negro* en el año 1968 con la

El estado final de un agujero negro es independiente del cuerpo del que se contrajo o de la materia de la que provino, de la forma del cuerpo original.

Este teorema se manifiesta en la existencia de las siguientes soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein

- Schwarzschild
- Reissner-Nordström
- Kerr
- Kerr-Newman

Las dos primeras soluciones describen agujeros negros estáticos y las dos últimas agujeros negros en rotación.

Un gran desafío para la física teórica es comprender la dinámica del espacio tiempo al interior del horizonte de sucesos de los agujeros negros cuando los efectos cuánticos de la geometría se activan, y se tiene la convicción de que un tratamiento cuántico completo de un agujero negro podría resolver la singularidad en la curvatura que surge en su centro [96].

Para los objetivos de esta tesis vamos a estudiar solamente la solución de Schwarzschild y su extensión Schwarzschild - (A)dS la cual incluye la constante cosmológica

## 4.1. Agujero negro de Schwarzschild-(A)dS en relatividad general

El elemento de línea del espacio-tiempo de la geometría de Schwarzschild está dado por:

$$ds^2 = -f(r)c^2 dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4-1)$$

donde

$$f(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right), \quad (4-2)$$

$c$  es la velocidad de la luz.

$t$  es la coordenada temporal medida por un reloj estacionario en el infinito.

---

frase *los agujeros negros no tienen pelo* (o sea, no tienen información).

$r$  es la coordenada radial.

$(\theta, \varphi)$  son los ángulos de las coordenadas esféricas.

El radio de Schwarzschild del cuerpo central  $M$  que genera el campo gravitacional se obtiene de la solución a la ecuación  $f(r) = 0$  y está dado por:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (4-3)$$

El Tensor métrico está definido por los coeficientes del elemento de línea en la ecuación 4-1

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left\{ - \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right), \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1}, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right\}.$$

Los símbolos de Christoffel diferentes de cero que corresponden a la métrica son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \partial_r \alpha, \Gamma_{tt}^r = e^{-2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha, \Gamma_{rr}^r = \partial_r \beta, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= 1/r, \Gamma_{\theta\theta}^r = -re^{-2\beta}, \Gamma_{r\phi}^\phi = 1/r, \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -re^{-2\beta} \sin^2 \theta, \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cos \theta / \sin \theta \end{aligned}$$

El tensor de curvatura tiene las siguientes componentes no nulas

$$\begin{aligned} R_{0101} &= \left( -\frac{2GM}{r^3} \right), & R_{0202} &= - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{GM}{r}, \\ R_{0303} &= - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{GM}{r} \sin^2 \theta, & R_{1212} &= \frac{GM}{c^2 r - 2GM}, \\ R_{1313} &= \frac{GM}{c^2 r - 2GM} \sin^2 \theta, & R_{2323} &= - \left( r - \frac{2GM}{c^2} \right) \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

y las permutaciones correspondientes.

Entre las características de la solución de Schwarzschild encontramos que al tomar el límite cuando  $r \rightarrow \infty$  en el elemento de línea (4-1) se obtiene la métrica del espacio-tiempo plano de la relatividad especial en coordenadas esféricas

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (4-4)$$

lo que significa que el espacio-tiempo de Schwarzschild es asintóticamente plano [97].

La solución de Schwarzschild es estacionaria dado que el elemento de línea Ec.(4-1) es invariante bajo inversión temporal.

Al tener en cuenta el límite Newtoniano podemos dar una interpretación física a la constante obtenida en la solución cuando se considera que una partícula puntual con masa  $M$  ubicada en el origen del sistema de coordenadas genera un potencial de la forma:

$$\phi = -\frac{GM}{r}.$$

Adicionalmente, dado que la forma de la componente temporal de la métrica que en unidades naturales  $G = c = \hbar = 1$  es:

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (4-5)$$

Se puede concluir que la constante de integración  $M$  se puede interpretar como la masa del objeto central que genera el espacio-tiempo de Schwarzschild.

Existen dos tipos de singularidades en la solución de Schwarzschild.

- *Removibles*: Son aquellas que se pueden eliminar al realizar un cambio de coordenadas. También se conocen como *Singularidades de Coordenadas*. Un ejemplo es el horizonte de sucesos en la solución de Schwarzschild.
- *Intrínsecas*: Son aquellas que no pueden removerse con cambios de coordenadas. También se les conocen como *Singularidades físicas, reales o esenciales*. como la que se da en el centro del agujero negro.

En presencia de la constante cosmológica, la función Ec.(4-2) del elemento de línea (4-1) es:

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2, \quad (4-6)$$

donde  $G$  y  $\Lambda$  son las constantes de Newton y cosmológica, respectivamente. Al relacionar el signo de la constante cosmológica con el elemento de línea podemos describir:

$$\Lambda \begin{cases} \Lambda < 0 & \text{Schwarzschild anti de-Sitter AdS} \\ \Lambda = 0 & \text{Schwarzschild} \\ \Lambda > 0 & \text{Schwarzschild de-Sitter dS} \end{cases}$$

Estas soluciones tienen una singularidad tipo-espacio en  $r = 0$ . También, las soluciones dan lugar a horizontes donde la Ec.(4-6) se anula. Dependiendo del signo de  $\Lambda$  y de  $M$  se puede determinar la estructura de los horizontes de los agujeros negros. Para  $\Lambda < 0$  existe una raíz real  $r_{AdS} = r_0$ . Para  $\Lambda = 0$  el horizonte concuerda con el horizonte del Agujero Negro de Schwarzschild  $r_{SS} = 2GM/c$  y, para  $\Lambda > 0$  tenemos dos casos. El primero es cuando  $M = 0$  el elemento de línea (4-1) se reduce a dS con una constante cosmológica en  $r_c\sqrt{3/\Lambda} = r_+|_{M=0}$ , y en el siguiente caso cuando  $M > 0$  el horizonte del agujero negro se manifiesta en  $\tilde{r} \equiv r_-$ .

Al incrementarse la masa del Agujero Negro, el horizonte crece, mientras que la constante cosmológica se reduce  $r_c \equiv r_+$ .

Para la masa crítica

$$M_{\text{máx}} = \frac{1}{3G\sqrt{\Lambda}}$$

los dos horizontes coinciden y se obtiene el Agujero Negro de Nariai como el Agujero Negro máximo en el espacio de de-Sitter. Ahora cuando  $M > M_{\text{máx}}$  los dos horizontes desaparecen y el elemento de línea (4-1) describe una singularidad desnuda [96].

## 4.2. Agujero negro de Schwarzschild-(A)dS en seguridad asintótica con truncación de Einstein-Hilbert

Como ya se ha mencionado, uno de los objetivos de esta tesis es el estudio de la acreción por agujeros negros tipo Schwarzschild de Sitter y Schwarzschild-(Anti-)de Sitter en gravedad cuántica de Einstein.

Cuando los efectos cuánticos gravitacionales entran en juego el elemento de línea que describe al agujero negro clásico sufre modificaciones que se manifiestan en el cambio de la constante de Newton  $G_N$  por una constante de acoplamiento dependiente de la escala  $G(r)$  y en una constante cosmológica  $\Lambda$  también dependiente de la escala  $\Lambda(r)$ . Ver [98]

$$G_N \rightarrow G(r) , \quad \Lambda \rightarrow \Lambda(r) . \quad (4-7)$$

La solución clásica para un agujero negro esféricamente simétrico con constante cosmológica, está dada por el elemento de línea:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2 , \quad (4-8)$$

donde

$$f_{cl}(r) = 1 - \frac{2G_0 M_0}{r} - \frac{1}{3} \Lambda_0 r^2 , \quad (4-9)$$

con unidades naturales  $\hbar = c = 1$  y la constante de estructura fina  $\alpha_0 \equiv \frac{e^2}{4\pi}$  se deja explícita. Esta solución colapsa para valores pequeños de la coordenada radial. Lo que se puede ver al evaluar cantidades invariantes como el escalar de Kretschmann en ese límite.

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G_0^2 M_0^2}{r^6} + \frac{8}{3} \Lambda_0^2 . \quad (4-10)$$

Desde que  $f(r) < 0$  para  $\Lambda M^2 > 1/9$ , entonces debemos tener  $0 < \Lambda M^2 \leq 1/9$  que conducen a dos raíces el horizonte de eventos  $r_h$  y el horizonte cosmológico  $r_c$  para la geometría de Schwarzschild de-Sitter:

$$r_h = \frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right), \quad (4-11)$$

$$r_c = \frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{4}{3}\pi\right), \quad (4-12)$$

donde  $\cos \alpha = -3M\sqrt{\Lambda}$  con  $\pi < \alpha < 3\pi/2$ , y el dominio  $2M < r_h < 3M$  y  $r_c > 3M$ . Los dos horizontes confluyen cuando  $r_h = r_c = 3M$

De la truncación de Einstein-Hilbert la acción efectiva está dada por la ecuación (3-57) y los acoplamientos adimensionales son:  $g_k = G_k k^2$  y  $\lambda_k = \Lambda_k k^{-2}$ . La evolución de estas constantes de acoplamientos está gobernada por las correspondientes ecuaciones del grupo de renormalización [7, 55]:

$$k\partial_k g_k = \beta_g(g_k, \lambda_k), \quad k\partial_k \lambda_k = \beta_\lambda(g_k, \lambda_k), \quad (4-13)$$

donde:

$$\beta_\lambda(g, \lambda) = (\eta_N - 2)\lambda + \frac{1}{2\pi}g [10\Phi_2^1(2\lambda) - 8\Phi_2^1(0) - 5\Phi_2^1(0)]. \quad (4-14)$$

$$\beta_g(g, \lambda) = (2 + \eta_N)g. \quad (4-15)$$

La dimensión anómala de los acoplamientos de gravitación están dados por la Ec.(3-61) donde las dos funciones de la constante adimensional están dados por

$$\beta_1(\lambda) \equiv \frac{1}{3\pi} [5\Phi_1^1(-2\lambda) - 18\Phi_2^2(-2\lambda) - 4\Phi_1^1(0) - \Phi_2^2(0)], \quad (4-16)$$

$$\beta_2(\lambda) \equiv -\frac{1}{6\pi} \frac{1}{3\pi} [5\Phi_1^1(-2\lambda) - 18\Phi_2^2(-2\lambda)]. \quad (4-17)$$

Las funciones  $\Phi_i$  se calcularon en el esquema de corte optimizado [98–100]

$$\Phi_n^p(\omega) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{(1+\omega)^p}, \quad (4-18)$$

$$\tilde{\Phi}_n^p(\omega) = \frac{1}{\Gamma(n+2)} \frac{1}{(1+\omega)^p}. \quad (4-19)$$

Se observa la existencia de un punto fijo no trivial en el que  $\beta_g = 0$ ,  $\beta_\lambda = 0$ . Este punto está localizado para los valores de los acoplamientos

$$g_* = 0,707, \quad \lambda_* = 0,193, \quad (4-20)$$

y se acerca al UV por un conjunto específico de trayectorias. Utilizando la Ec.(4-20) las constantes de acoplamiento dimensional pueden aproximarse a la vecindad del punto fijo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G_k = g_* k^{-2}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k = \lambda_* k^2. \quad (4-21)$$

Algunas veces es conveniente trabajar con aproximaciones analíticas del flujo del grupo de renormalización [98, 101, 102]

$$g(k) = \frac{G_0 k^2}{1 + \frac{G_0}{g_*} (k^2 - k_0^2)}, \quad (4-22)$$

$$\lambda(k) = \frac{\Lambda_0}{k^2} + \lambda_* \left(1 - \frac{k_0^2}{k^2}\right) + \frac{g_* \lambda_*}{G_0 k^2} \log \left( \frac{1 + \frac{G_0}{g_*} k_0^2}{1 + \frac{G_0}{g_*} k^2} \right). \quad (4-23)$$

Además de la forma analítica cerrada, esas funciones tienen la ventaja de que poseen un límite infrarrojo bien definido  $k \rightarrow k_0$ , es decir

$$g_k = G_0 k_0^2, \quad \lambda_k = \Lambda_0 / k_0^2. \quad (4-24)$$

La identificación entre la escala  $k$  y la coordenada radial  $r$  se hace a través de

$$k(r, \alpha_0, G_0, M_0, \Lambda_0) \equiv \frac{\zeta}{d(P(r), \alpha_0, G_0, M_0, \Lambda_0)}, \quad (4-25)$$

donde  $P(r)$  es el punto en el espacio-tiempo que quiere estudiarse, y  $d(P)$  es la longitud de escala característica que separa al punto  $P(r)$  del agujero negro.

Para la métrica del agujero negro Ec.(4-8), la función  $d(r)$  está dada por:

$$d(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{|f(r)|}} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{\left|1 - \frac{2G_0 M_0}{r} - \frac{1}{3} \Lambda_0 r^2\right|}}. \quad (4-26)$$

De una forma u otra la dependencia de escala de los acoplamientos ( $G_k, \Lambda_k$  en la acción efectiva y la dependencia radial del ajuste de escala  $k(r)$  tendrá que resultar en la modificación del elemento de línea del espacio-tiempo del agujero negro. Como primera aproximación que se espera que sea lo más confiable en el IR, se puede aplicar el esquema de la "Solución Clásica Mejorada" que implementa la dependencia de escala basada en la corrección del elemento de línea clásico [98].

En este esquema de mejoramiento, se promueve la escala de acoplamientos independientes que están presentes en la solución clásica a la escala de cantidades dependientes conocidas del flujo del grupo de renormalización Ec.(4-14) y Ec.(4-15).

$$f_k(r) = 1 - \frac{2g(k)M_0}{k^2 r} - \frac{1}{3}\lambda(k)k^2 r^2. \quad (4-27)$$

La escala arbitraria  $k$  se convierte en una cantidad física relevante debido al ajuste de escala Ec.(4-25).

### 4.2.1. Correcciones cuánticas a la métrica en el espacio-tiempo de Schwarzschild de Sitter y anti-de Sitter

En presencia de la constante cosmológica la solución para el agujero negro de Schwarzschild está dada por el elemento de línea (4-1) con el coeficiente métrico  $f(r)$  de la forma:

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2, \quad (4-28)$$

donde  $G$  y  $M$  corresponden a la constante clásica de Newton y la constante de integración respectivamente,  $\Lambda$  es la constante cosmológica.

Cuando  $k \rightarrow \infty$ , la dependencia de escala de las constantes de acoplamiento se rigen por el punto fijo no gaussiano (NGFP) [103]

$$f(r) = 1 - \frac{2g_*M}{k^2 r} - \frac{1}{3}\lambda_* k^2 r^2, \quad (4-29)$$

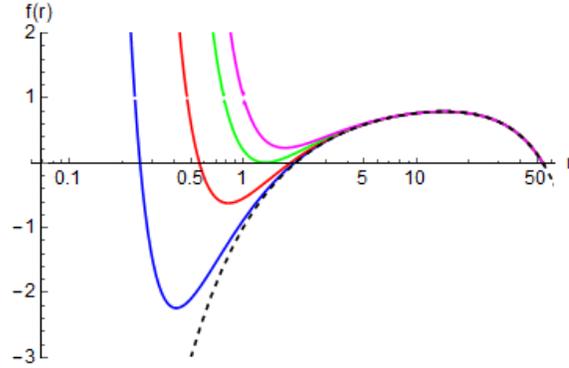
donde  $g_*$  y  $\lambda_*$  indican la posición del NGFP y el  $*$  actúa como un recordatorio de que esta solución describe las asíntotas para  $k \rightarrow \infty$ .

$$k = \frac{\xi}{dr},$$

$$dr = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \arcsin \left[ \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r \right],$$

$$g_* = Gk^2 \left( 1 - \frac{k^2}{0,707} \right),$$

$$\lambda_* = \frac{0,137}{g_*} \left( \left( 5 + \frac{G\Lambda}{0,137} \right) \left( 1 - \frac{g_*}{0,707} \right)^{\frac{3}{2}} - 5 + \frac{3g_*}{2(0,707)} \left( 5 - \frac{g_*}{0,707} \right) \right).$$



**Figura 4-1.:**  $f(r)$  vs  $r$  para Schwarzschild de Sitter con valores de  $\xi = 0,2$  (azul),  $\xi = 0,4$  (rojo),  $\xi = 0,65$  (verde),  $\xi = 0,85$  (magenta),  $G = M = 1$  y  $\Lambda = 0,001$ . Las líneas punteadas corresponden al  $f(r)$  clásico.

Para el caso anti de-Sitter tenemos:

$$f(r) = 1 - \frac{2g_*M}{k^2r} - \frac{1}{3}\lambda_*k^2r^2,$$

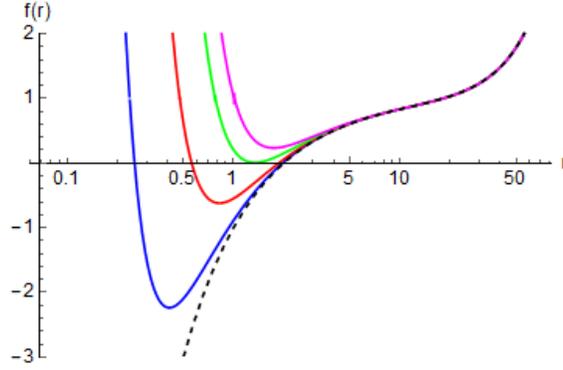
donde:

$$k = \frac{\xi}{dr},$$

$$dr = \sqrt{\frac{3}{-\Lambda}} \operatorname{arcsinh} \left[ \sqrt{\frac{-\Lambda}{3}} r \right],$$

$$g_* = Gk^2 \left( 1 - \frac{k^2}{0,707} \right),$$

$$\lambda_* = \frac{0,137}{g_*} \left( \left( 5 + \frac{G\Lambda}{0,137} \right) \left( 1 - \frac{g_*}{0,707} \right)^{\frac{3}{2}} - 5 + \frac{3g_*}{2(0,707)} \left( 5 - \frac{g_*}{0,707} \right) \right).$$



**Figura 4-2.:**  $f(r)$  vs  $r$  para Schwarzschild anti de-Sitter con valores de  $\xi = 0,2$  (azul),  $\xi = 0,4$  (rojo),  $\xi = 0,65$  (verde),  $\xi = 0,85$  (magenta),  $G = M = 1$  y  $\Lambda = -0,001$ . Las líneas punteadas corresponden al  $f(r)$  clásico.

### 4.3. Agujero negro de Schwarzschild en seguridad asintótica con derivadas de orden superior

La mayoría de las investigaciones en Seguridad Asintótica sobre modificaciones a las métricas clásicas de agujeros negros han sido llevadas a cabo usando la llamada truncación de Einstein-Hilbert en la cual solo se considera el término de Einstein-Hilbert en la acción efectiva y, ocasionalmente, el término de constante cosmológica. La inclusión de términos con derivadas de alto orden, a saber, el cuadrado del escalar de Ricci  $R$ , el cuadrado del tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  y el cuadrado del tensor de Riemann  $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$ , fue iniciada en [104]. El punto de partida en este trabajo es la acción efectiva.

$$\Gamma_k [g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ k^4 g_0(k) + p^2 g_1(k) R + g_{2a}(k) R^2 + g_{2b}(k) R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + g_{2c}(k) R_{\mu\nu\lambda\sigma} R^{\mu\nu\lambda\sigma} + \mathcal{O}(k^{-2} R^3) + \dots \right], \quad (4-30)$$

donde  $g$  es el determinante del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  y  $k$  es el momentum de corte.

Los coeficientes  $g_i = (i = 0, 1, 2a, \dots)$  son parámetros de acoplamiento adimensionales. Para grandes longitudes de onda, se tiene

$$g_0(k) = -\frac{\Lambda(k)}{8\pi G_N(k)} k^{-4}, \quad (4-31)$$

$$g_1(k) = -\frac{1}{8\pi G_N(k)} k^{-2}. \quad (4-32)$$

Las ecuaciones de campo generalizadas para la acción Ec.(4-30) en el vacío son:

$$\tilde{G}^{\mu\nu} \equiv \frac{\delta\Gamma_k[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = T^{\mu\nu}, \quad (4-33)$$

donde  $\tilde{G}^{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein generalizado y  $T^{\mu\nu} = 0$ . Debido a esta última condición la traza del tensor  $\tilde{G}^{\mu\nu}$  se anula

$$\tilde{G} = g_{\mu\nu}\tilde{G}^{\mu\nu} \quad (4-34)$$

$$= 2k^4 g_0 + k^2 g_1 R - 2(3g_{2a} + g_{2b} + g_{2c}) \square R = 0. \quad (4-35)$$

Asumiendo una métrica esféricamente simétrica:

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 d\Omega_2^2, \quad (4-36)$$

tomando  $A = B$  por simplicidad, y despreciando la integración temporal, la acción efectiva toma la forma:

$$\Gamma_k[A] = \int dr 4\pi r^2 (g_0 k^4 + g_1 k^2 R + g_{2a} R^2 + g_{2b} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + g_{2c}(k) R_{\mu\nu\lambda\sigma} R^{\mu\nu\lambda\sigma}). \quad (4-37)$$

Así, para obtener las soluciones en el vacío debe resolverse la ecuación:

$$\frac{\delta\Gamma_k}{\delta A} = 0, \quad (4-38)$$

cuya solución es:

$$A(r) = 1 + c_1 r^{n_1} + c_2 r^{n_2} + \frac{c_3}{r} + c_4 r^2, \quad (4-39)$$

donde los exponentes  $n_j = (j = 1, 2)$  están dados en términos de los acoplamientos  $g_{2k} = (k = a, b, c)$

A partir de la condición  $\tilde{G} = 0$  y con la escogencia natural  $c_1 = c_2 = 0$  resulta:

$$A(r) = 1 - \frac{2G_k M}{r} - \frac{r^2}{L_k^2}, \quad (4-40)$$

donde  $L_P^2$  es el radio del espacio Schwarzschild-(A)-dS asintótico el cual depende de  $p$ .

La ecuación exacta del grupo de renormalización funcional es, como sabemos, la ecuación de Wetterich

$$\frac{\partial}{\partial \ln k} \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} (\delta^{(2)} \Gamma_k + R(p)) \frac{\partial}{\partial \ln k} R(p) \quad (4-41)$$

donde  $R(k)$  es el momentum de corte que está usualmente determinado por el proceso de corte optimizado. En la fórmula anterior se supone que los términos de la fijación del gauge están ya incluidos.

Los términos con derivadas superiores en la acción efectiva Ec.(4-30) se pueden reagrupar de la siguiente manera

$$\Gamma_p^{HD} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{\omega}{3\lambda} R^2 - \frac{1}{2\lambda} C^2 + \frac{\theta}{\lambda} E \right], \quad (4-42)$$

donde el cuadrado del tensor de Weyl es:

$$C^2 \equiv C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 2R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{R^2}{3}, \quad (4-43)$$

$$E = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2, \quad (4-44)$$

Adicionalmente

$$g_{2a} = -\frac{1}{6\lambda} + \frac{\theta}{\lambda} + \frac{\omega}{3\lambda}, \quad (4-45)$$

$$g_{2b} = \frac{1}{\lambda} - \frac{4\theta}{\lambda}, \quad (4-46)$$

$$g_{2c} = -\frac{1}{2\lambda} + \frac{\theta}{\lambda}. \quad (4-47)$$

Las funciones beta para los coeficientes adimensionales de los términos con derivadas de orden superior están dadas por:

$$\beta_\lambda = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{133}{10} \lambda^2, \quad (4-48)$$

$$\beta_\omega = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{5}{12} \lambda + \frac{183}{10} \lambda \omega + \frac{10}{3} \omega^2 \right). \quad (4-49)$$

$$\beta_\theta = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left( -\frac{196}{45}\lambda + \frac{133}{10}\lambda\theta \right). \quad (4-50)$$

Al resolver las funciones beta para los acoplamientos gravitacionales y la constante cosmológica, se observa un punto fijo Gaussiano en el límite infrarrojo (IR) y un punto fijo No Gaussiano en el límite ultravioleta (UV). El resultado es:

$$g_0 \simeq -\frac{(\Lambda_{IR} + \eta k^2 G_N)(1 + \xi k^2 G_N)}{8\pi k^4 G_N}, \quad (4-51)$$

$$g_1 \simeq \frac{1 + \xi k^2 G_N}{16\pi k^2 G_N}, \quad (4-52)$$

donde  $G_N$  y  $\Lambda_{IR}$  son los valores del acoplamiento gravitacional y la constante cosmológica en el límite infrarrojo que se determinan por observaciones astronómicas. En el límite ultravioleta (UV) los coeficientes del término de Einstein-Hilbert de la acción de la gravedad fluye hacia un punto fijo no gaussiano con  $g_0 \rightarrow g_0^*$  y  $g_1 \rightarrow g_1^*$ . Para obtener los valores del punto fijo no gaussiano de la variables restantes, en los términos con derivadas superiores la ecuación de flujo se resuelve numéricamente y se obtiene

$$g_0^* \simeq \frac{\eta \xi G_N}{8\pi} \simeq 6,331 \times 10^{-3}. \quad (4-53)$$

$$g_1^* \simeq \frac{\xi}{16\pi} \simeq 1,432 \times 10^{-2}, \quad (4-54)$$

Se puede relacionar la constante de acoplamiento (variable) gravitacional  $G_k$  con el coeficiente  $g_1$  mediante

$$G_k = \frac{1}{16\pi k^2 g_1} = \frac{G_N}{1 + \xi k^2 G_N}. \quad (4-55)$$

$G_p$  coincide con la constante de Newton  $G_N$  a bajas escalas de energías, pero decrece rápidamente como el momentum de corte  $k$ , lo que implica un debilitamiento de la gravedad a escalas de altas energías.

Recordando que la variable  $\tilde{G}$  de la ecuación (4-34) se anula para el estado vacío  $T^{\mu\nu} = 0$ , insertando la Ec.(4-40) en la ecuación (4-34) y haciendo uso de las ecuaciones (4-45), (4-46), (4-47) se podría en principio resolver para el momentum de corte como una función de la coordenada radial  $r$  haciendo  $\tilde{G} = 0$  lo cual da

$$\tilde{G} = 2k^4 g_0 + k^2 g_1 R - \frac{2\omega}{\lambda} \square R = 0. \quad (4-56)$$

A partir de esta ecuación es posible obtener una identificación entre las escalas  $k$  y la coordenada radial  $r$  en la forma:

$$k(r) \simeq 2,663 \left( \frac{M^2}{|\lambda_0|} \right)^{\frac{1}{8}} r^{-\frac{3}{4}}. \quad (4-57)$$

### 4.3.1. Límite ultravioleta

A medida que la coordenada radial tiende al origen la escala del corte de energía podría ser muy alta y los parámetros de acoplamiento podrían haber llegado a su punto fijo no gaussiano. En consecuencia, el acoplamiento gravitacional se expresaría

$$G_k(r) = \frac{1}{16\pi k^2(r) g_1} \simeq \frac{1}{\xi k^2(r)}. \quad (4-58)$$

En este caso el coeficiente  $\lambda$  se aproxima a cero dando lugar a un  $g_1$  infinitamente grande. Podemos desprejir el último término de la solución (4-40) ya que el radio del espacio asintótico  $dS$  diverge. Introduciendo la Ec.(4-57) y la Ec.(4-58) en la Ec.(4-40) se obtiene la forma aproximada del factor de la métrica en el límite UV

$$A_{UV}(r) \simeq 1 - \frac{625}{512\pi} |\lambda_0|^{\frac{1}{4}} (Mr)^{\frac{1}{2}}. \quad (4-59)$$

El resultado indica que el factor métrico  $A(r)$ , a diferencia de su contraparte en GR, ya no es singular en el interior del horizonte del agujero negro en seguridad Asintótica (AS) con términos con derivadas de orden superior. Ingenuamente pareciera que la geometría corresponde a un espacio-tiempo asintótico de Minkowski cerca al origen. No obstante, para el escalar de Ricci tenemos:

$$R \simeq \frac{9375}{2048\pi} \frac{(Mr)^{\frac{1}{2}} |\lambda_0|^{\frac{1}{4}}}{r^{\frac{3}{2}}}, \quad (4-60)$$

que es singular en el origen del espacio-tiempo. Al aplicar la condición de horizonte  $A_{UV}(r) = 0$ , se obtiene una solución aproximada para altas energías

$$r_{UV} \simeq \frac{0,671\pi^2}{|\lambda_0|^{\frac{1}{2}} M}, \quad (4-61)$$

indicando que la singularidad en la curvatura está escondida detrás del horizonte UV. Se alteran también la otra familia de invariantes y reflejan la suavización del comportamiento singular en la teoría de gravedad asintóticamente segura:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} R^{\mu\nu\lambda\sigma} \simeq \frac{31640625}{4194304} \frac{\sqrt{\lambda_0} M}{\pi^2 r^3}, \quad (4-62)$$

$$C_{\mu\nu\lambda\sigma} C^{\mu\nu\lambda\sigma} \simeq \frac{1171875}{4194304} \frac{\sqrt{\lambda_0} r^3}{\pi^2 M}, \quad (4-63)$$

$$R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \simeq \frac{59765625}{8388608} \frac{\sqrt{\lambda_0} r^3}{\pi^2 M}. \quad (4-64)$$

Esto podría compararse, por ejemplo, con el escalar de Kretschmann; el cual diverge en GR en el origen como  $\sim 1/6$ .

### 4.3.2. Límite infrarrojo

Cuando el momentum de corte fluye hacia el régimen infrarrojo los términos de derivada superior se suprimen automáticamente y se desprecian. En este caso  $p \sim 1/6$ . Se sigue entonces que

$$G_k(r) \simeq G_N \left( 1 - \frac{\tilde{\xi} G_N}{r^2} \right), \quad (4-65)$$

donde  $\tilde{\xi}$  es una constante del orden de la unidad.

### 4.3.3. Correcciones cuánticas a la métrica de Schwarzschild en seguridad asintótica con derivadas de orden superior

La teoría de gravedad con derivadas de orden superior incluye el cuadrado del escalar de Ricci, el cuadrado del tensor de Ricci, el escalar de Kretschmann y los acoplamientos gravitacionales *variables* en la acción efectiva. Las correcciones cuánticas a la métrica se tienen en cuenta promoviendo la constante gravitacional clásica de Newton a través de un acoplamiento continuo (*variables*) que evoluciona bajo las ecuaciones del flujo RG gravitacional.

El límite a bajas energías en flujo RG gravitacional está dado por:

$$f_0(r) \rightarrow f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \left( 1 - \frac{\xi}{r^2} \right), \quad (4-66)$$

donde  $\xi$  es un parámetro con dimensiones de longitud al cuadrado asociado a la identificación de escala entre la escala de momentum  $p$  y la coordenada radial  $r$  la cual en el régimen infrarrojo toma la forma  $p \sim \frac{1}{r}$

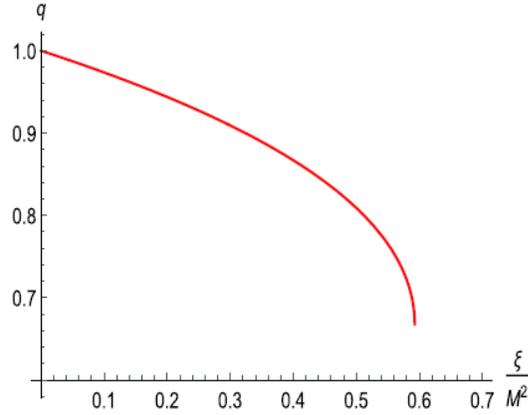
Los efectos cuánticos en la geometría del espacio-tiempo están codificados en  $\xi$  tal que para  $\xi = 0$  el coeficiente clásico  $f_0(r)$  es recuperado. La condición para el radio del nuevo horizonte de eventos  $f_0(r)$  es una ecuación genérica cúbica

$$r^3 - 2Mr^2 + 2M^3\tilde{\xi} = 0, \quad (4-67)$$

donde se introduce por conveniencia el parámetro  $\tilde{\xi} = \frac{\xi}{M^2}$ . La única solución real  $r_{hIR}$  a la

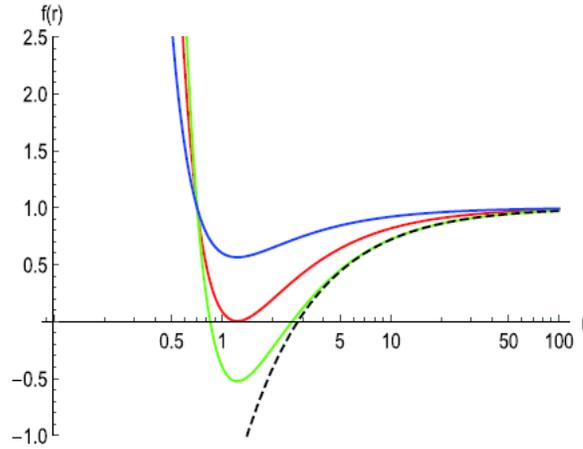
ecuación (4-67) es:

$$\frac{r_{hIR}}{r_{hS}} = \frac{1}{6} \left( 2 + \frac{4}{\sqrt[3]{8 - 27\tilde{\xi} + 3\sqrt{3}\sqrt{\tilde{\xi}(27\tilde{\xi} - 16)}}} + \sqrt[3]{8 - 27\tilde{\xi} + 3\sqrt{3}\sqrt{\tilde{\xi}(27\tilde{\xi} - 16)}} \right). \quad (4-68)$$



**Figura 4-3.:** Dependencia de  $q \equiv \frac{r_{hIR}}{r_{hS}}$  en  $\tilde{\xi} = \frac{\xi}{M^2}$ , para  $\tilde{\xi} = 0$ , se tiene  $r_{hIR} = r_{hS}$  mientras que para un  $\tilde{\xi}$  mayor que el valor crítico  $\tilde{\xi}_c = \frac{16}{27}$  no hay horizonte en absoluto, y surge una singularidad desnuda.

La figura (4-3) muestra el cociente  $q = \frac{r_{hIR}}{r_{hS}}$  como una función de  $\tilde{\xi}$  para  $\tilde{\xi} = 0$ , se tiene  $r_{hIR} = r_{hS}$  mientras que para un  $\tilde{\xi}$  mayor que el valor crítico  $\tilde{\xi}_c = \frac{16}{27}$  no hay horizonte en absoluto, y surge una singularidad desnuda. Lo anterior implica que cada valor de  $\tilde{\xi}$  en el rango  $0 \leq \tilde{\xi} \leq \tilde{\xi}_c$  selecciona una masa crítica  $M_c = \sqrt{\frac{27\tilde{\xi}}{16}}$  tales que para  $M > M_c$  existen dos horizontes. Uno interno (horizonte de Cauchy) y otro exterior al horizonte de eventos, para  $M < M_c$  se desarrolla una singularidad desnuda y finalmente para  $M = M_c$  los dos horizontes se fusionan.



**Figura 4-4.:** Gráficos de la métrica mejorada  $f(r)$  para  $M < M_c$  (azul)  $M = M_c$  (rojo)  $M > M_c$  (verde) con masa crítica  $M_c = 0,918$  correspondiente a  $\xi = 0,5$  y la métrica clásica  $f_0(r)$  para  $M = M_c$  (línea punteada).

La figura (4-4) ilustra la métrica mejorada  $f(r)$  con masa crítica  $M_c = 0,918$  correspondiente a  $\xi = 0,5$  y la métrica clásica  $f_0(r)$  para  $M = M_c$ . Se ignora la singularidad desnuda del espacio-tiempo ya que nuestro objetivo es estudiar los efectos cuánticos gravitacionales en la acreción hacia un agujero negro de Schwarzschild.

Para futura referencia, nótese que para  $M > M_c$  el horizonte exterior de la solución mejorada al expandirse a primer orden en  $\xi$  adquiere la forma:

$$r_{hIR} = r_{hS} - \frac{\xi}{(2M)}. \quad (4-69)$$

El anterior resultado muestra el desplazamiento del horizonte de las soluciones mejoradas del grupo de renormalización (RG) en agujeros negros hacia valores más pequeños con respecto a su contraparte clásica.

#### 4.4. El escenario de seguridad asintótica en el contexto de la astrofísica y la cosmología

Desde inicios del presente siglo se han hecho esfuerzos para determinar las modificaciones a las que da lugar el escenario SA tanto en la descripción de la evolución del universo en sus primeras etapas después del big bang como en la descripción de fenómenos en la vecindad del horizonte de sucesos de agujeros negros, es decir, en el régimen de campo gravitacional

intenso. En este segundo caso, así como en esta tesis, la esperanza es poder identificar fenómenos que permitan predecir observables que, con la ayuda de técnicas observacionales avanzadas, permitan la confrontación de la teoría con las observaciones. En esta sección se describen los desarrollos que se han hecho en esta dirección como preámbulo al próximo capítulo en el cual se describirán los aportes de la presente tesis.

#### 4.4.1. Implicaciones cosmológicas

En la actualidad la cosmología presenta interrogantes que deberían, supuestamente, ser respondidas por una teoría cuántica de la gravitación. Entre estos pueden mencionarse la naturaleza de la singularidad inicial, la isotropía de la expansión del universo, y el problema de la constante cosmológica.

Con base en el escenario SA [7, 55, 105] se ha demostrado que existe una clase de trayectorias de RG (Grupo de Renormalización) obtenidas de la gravedad cuántica de Einstein en la aproximación de Einstein-Hilbert, [55] que posee todas las propiedades cualitativas que uno esperaría de la trayectoria RG que describe los fenómenos gravitacionales en el universo real. En particular, tener un régimen clásico prolongado y una constante cosmológica positiva pequeña en el infrarrojo ( $IR$ ).

Determinando los parámetros de la teoría a partir de las observaciones, se encuentra que de acuerdo a la trayectoria particular en QEG, la constante cosmológica  $\Lambda(k)$  cambia alrededor de 120 órdenes de magnitud entre los valores de  $k$  a escalas del orden de la masa de Planck y su valor a escalas macroscópicas, mientras que la constante de Newton  $G(k)$  no tiene una dependencia fuerte de  $k$  en este régimen. Para  $k > m_{Pl}$ , el punto fijo no gausiano el cual es responsable para la renormazabilidad de QEG controla su escala de dependencia. En el profundo UV  $k \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda(k)$  diverge y  $G(k)$  se aproxima a cero.

Se ha argumentado también que los efectos cuánticos pueden explicar toda la entropía actual de la radiación en el Universo y dar lugar a una fase de expansión inflacionaria [105]. Además, la predicción de que el estado final de la evaporación del agujero negro es un remanente del tamaño de la escala de Planck que se forma en un tiempo infinito.

#### 4.4.2. Implicaciones a escalas galácticas

En [106], estudian el flujo del grupo de renormalización no perturbativo y se argumenta que a grandes distancias ( $IR$ ) podría haber fuertes efectos de renormalización, incluida una

dependencia de escala de la constante de Newton, que imita la presencia de materia oscura a escala galáctica y cosmológica. Estos efectos se deben a la invarianza gauge y una excitación sin masa, el gluón (gravitón), implicando posibles divergencias en el IR que el flujo RG debe curar de forma dinámica [106].

En otras referencias [107], se plantea la hipótesis de que los campos de materia presentes en el mundo real no cambian las características cualitativas del flujo de Einstein-Hilbert, y luego, sobre la base de esta hipótesis, se trata de precisar la trayectoria RG específica de QEG que se realiza en la naturaleza.

En la astrofísica moderna, se tiene el misterio de la materia oscura en la que la aparente discrepancia de masa no se deba a una forma desconocida de materia, sino que indica que estamos usando la teoría de la gravedad incorrecta [106, 108]. Por ejemplo, estudian las curvas de rotación de galaxias, al tratar de explicar las curvas de rotación no keplerianas en términos de una ley de Newton modificada, se debe agregar un término no clásico [109].

Finalmente, en [106] consideran que los efectos IR posiblemente estén *en acción* en la cosmología y por ende, es plausible sospechar que en algún lugar entre el sistema solar y las escalas cosmológicas deberían volverse visibles por primera vez [107, 110]. Emplearon una especie de "mejora RG", analizando un modelo de galaxias estáticas, esféricamente simétricas, y cuando la escala  $k$  se toma como la inversa de la distancia radial propia y se identifica la escala  $k$  con una cantidad geométrica apropiada comparativamente simple (local). Los truncamientos efectivamente imitan términos mucho más complicados (no locales) en la acción efectiva [110].

### 4.4.3. Características de la imagen de agujeros negros regulares rotantes

En [111], partiendo de la idea que también guía a esta tesis de que los desarrollos teóricos fundamentales deben estar vinculados a las características de observación de los agujeros negros en sus entornos astrofísicos naturales para así comprender la verdadera naturaleza de estos. En el paper estudian una familia de agujeros negros regulares rotantes (tipo Kerr) basados en el principio de localidad y se han identificado rasgos característicos de la imagen de la sombra del agujero negro asociados a la regularidad de las soluciones mejoradas RG los cuales persisten en presencia de un modelo de disco analítico simple.

Partiendo del hecho de que el escenario AS elimina (o al menos suaviza) la singularidad en agujeros negros, es decir que estos son regulares lo que da lugar a un debilitamiento de la fuerza gravitacional, en [111] se muestra que se obtienen sombras de agujeros negros

más pequeñas tanto en los casos esféricamente simétrico y axialmente simétrico. En el caso anterior, la sombra tiene las mismas características que las de un agujero negro clásico de masa más pequeña.

También se obtiene que los efectos inspirados en seguridad asintótica hacen mella en la sombra cerca al ecuador en la imagen. Naturalmente si los efectos de la gravedad cuántica se suprimen por la escala de Planck, estas características están presentes pero resultarían indetectables para agujeros negros astrofísicos.

Se concluye que los resultados sugieren que los agujeros negros regulares podrían caracterizarse por un conjunto de propiedades físicas que dan como resultado características de la imagen de su sombra cualitativamente distintas a las que se esperan a partir de la relatividad general clásica [111].

#### 4.4.4. Espectroscopia de línea de hierro de discos de acreción alrededor agujeros negros en gravedad asintóticamente segura

En la referencia [112] se estudia la forma esperada de la línea de hierro en el espectro de reflexión de los discos de acreción alrededor de los agujeros negros en una gravedad asintóticamente segura.

Con el objetivo de saber si la técnica de espectroscopia de líneas de hierro se puede utilizar como herramienta para probar la gravedad asintóticamente segura, se comparan los resultados de las simulaciones con las formas de líneas de hierro esperadas en el espectro de reflexión de los discos de acreción alrededor de los agujeros negros de Kerr.

En las coordenadas Boyer-Lindquist, el elemento de línea de un agujero negro rotante es:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left[ 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \left( 1 - \frac{\tilde{\xi}}{r^2} \right) \right] dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\
 & + \left[ r^2 + a^2 + \frac{2a^2 M \sin^2 \theta}{\Sigma} + \left( 1 - \frac{\tilde{\xi}}{r^2} \right) \right] \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} \left( 1 - \frac{\tilde{\xi}}{r^2} \right) dt d\phi,
 \end{aligned} \tag{4-70}$$

donde  $M$  es la masa del agujero negro,  $a = J/M$  es el parámetro de rotación por unidad de masa del agujero negro,  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  y  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + \frac{2M\tilde{\xi}}{r}$ . El parámetro  $\tilde{\xi}$  aparece en la constante de Newton  $G(r)$  tal que cuando  $\tilde{\xi} \rightarrow 0$  se recupera la métrica de Kerr.

Para la espectroscopía de la línea de hierro<sup>3</sup> se consideró un agujero negro con disco de acreción geoméricamente delgado y ópticamente grueso [95, 116] y se supone que las partículas del gas en el disco de acreción siguen órbitas circulares en el plano ecuatorial.

El objetivo del estudio [112] fue comprender si las observaciones de rayos X actuales pueden probar la gravedad asintóticamente segura al restringir el parámetro  $\tilde{\xi}$  y sus resultados muestran que las observaciones de una misión de rayos X actual como NuSTAR no pueden restringir en absoluto el parámetro  $\tilde{\xi}$ .

También se concluye que en su modelo simplificado no es posible repetir el estudio simulando futuras observaciones de rayos X, y por lo tanto, no pueden plantear la cuestión de probar la gravedad asintóticamente segura utilizando espectroscopía de la línea de hierro con la próxima generación de misiones de rayos X.

#### 4.4.5. Rayos-X intensos en gravedad cuántica asintóticamente segura

La espectroscopia de rayos-X está basada en el fenómeno fundamental de la acreción de materia en los agujeros negros. En la referencia [117] se estudian las capacidades de la espectroscopia de reflexión de rayos-X para restringir el valor inverso del punto fijo adimensional (parámetro de escala)  $\gamma$  a partir del análisis de una observación realizada por el observatorio de Suzaku del sistema binario *GRS1915+105* (también conocido como *V1487Aquilae*) en el 2007 ya que este sistema es inestable pero durante este año presentando un espectro simple con características fuertes de reflexión como la luminosidad del disco a escala Eddington alrededor del 20% y disco delgado de baja temperatura. Estas restricciones se compararon con las obtenidas a partir de imágenes de agujeros negros.

En ese estudio se propone un disco estándar tipo Novikov-Thorne cuyas propiedades son: ópticamente grueso, geoméricamente delgado, ecuatorial y sin campos magnéticos [118] y se desarrolló un modelo numérico para calcular los espectros de reflexión del agujero negro.

Se estudiaron los siguientes observables: **(a)** La ISCO dada su importancia en el proceso de la acreción y **(b)** el espectro de reflexión para obtener una idea del parámetro de desviación no Kerr  $\tilde{\gamma}$  en el contexto de la espectroscopía de rayos X.

Finalmente, se encuentra que el parámetro de rotación  $a$  y la inclinación de *GRS1915+105* son altos, la abundancia de hierro está por debajo de la abundancia solar, y la energía de corte es bastante baja. Todo lo cual es consistente con resultados de otros estudios. Igualmente,

---

<sup>3</sup>Los cálculos de la línea de hierro observada por un observador distante se han discutido extensamente en [113–115]

se obtiene para gamma la cota superior del parámetro  $\tilde{\gamma}$  igual a  $\tilde{\gamma} \lesssim 0,047$  con un 90% de certeza.

# 5. Acreción hacia Agujeros Negros en seguridad asintótica

En este capítulo, se presentan los resultados del estudio de la acreción hacia agujeros negros de Schwarzschild en el escenario de seguridad asintótica y se publicaron en [119, 120].

Un repaso de la acreción esféricamente simétrica a la Littleton-Bondi se presenta en el apéndice [A](#)

## 5.1. Acreción esféricamente simétrica hacia un agujero negro de Schwarzschild

Se utiliza un enfoque de un sistema dinámico hamiltoniano para el análisis de acreción de cuatro tipos de fluidos isotérmicos:

- Ultra-Rígido
- Ultra-Relativista
- Radiación
- Sub-Relativista

Para el estudio de los efectos cuánticos sobre la estabilidad de la acreción se usa un proceso perturbativo basado en la ecuación de continuidad con tasa de acreción siendo la cantidad perturbada.

### 5.1.1. Acreción esféricamente simétrica como un sistema dinámico

La formulación del problema de la acreción hacia objetos compactos como un sistema dinámico hamiltoniano se propuso por primera vez en [121–123]. Un sistema dinámico Hamiltoniano autónomo es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en  $2n$  incógnitas  $p = (p_1 \dots p_n)$  (momentum generalizado)  $q = (q_1 \dots q_n)$  (coordenadas generalizadas) de la forma:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (5-1)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (5-2)$$

donde  $H$  es alguna función de  $(p, q, t)$  conocida como la función hamiltoniana del sistema (5-1), (5-2). Un sistema hamiltoniano también se dice que es un sistema canónico y en el caso autónomo (cuando  $H$  no es una función explícita de  $t$ ) se puede denominar como un sistema conservativo, siempre que en este caso la función  $H$  (que a menudo tiene el significado de energía) sea una primera integral (i.e. la energía se conserva durante el movimiento).

Los puntos fijos (o puntos críticos) del sistema dinámico son aquellos que satisfacen:

$$\frac{dp_i}{dt} = 0,$$

$$\frac{dq_i}{dt} = 0.$$

En estos puntos el campo vectorial, que determina la dirección de las trayectorias en el espacio de fases, es nulo.

Recordemos que el proceso de acreción está basado en dos leyes de conservación:

- La ecuación de continuidad, la cual expresa la conservación del número de partícula

$$\nabla^\mu (nU^\mu) = 0, \quad (5-3)$$

- La conservación de momentum-energía

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (5-4)$$

donde  $T^{\mu\nu}$  es el tensor momentum-energía

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}. \quad (5-5)$$

De la condición de normalización  $U^\mu U_\mu = -1$  se obtiene:

$$u_t = -f u^t = \sqrt{f + (u^r)^2}. \quad (5-6)$$

Se asume que la materia en acreción es a su vez isotérmica e isentrópica, con la ecuación de estado  $h = h(\eta)$  donde  $h$  es la entalpía específica.

$$h = \frac{\epsilon + p}{\eta}. \quad (5-7)$$

El fluido está descrito por las ecuaciones termodinámicas

$$dp = \eta dh, \quad (5-8)$$

$$d\epsilon = h d\eta. \quad (5-9)$$

La velocidad local del fluido es:

$$a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right|_{ds=0} = \frac{dp}{d\epsilon} = \frac{\eta dh}{h d\eta} = \frac{d \ln h}{d \ln \eta}. \quad (5-10)$$

Para la acreción estacionaria esféricamente simétrica, las leyes de conservación en la Ec.(4-67), producen

$$\eta u^r r^2 = C_1, \quad (5-11)$$

$$h u_t = C_2, \quad (5-12)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración arbitrarias.

Para describir el proceso de acreción como un sistema dinámico hamiltoniano bidimensional, se define el vector tri-velocidad  $v$  (fuera del horizonte) de un elemento fluido medido por un observador localmente estático como  $v = \frac{dl}{d\tau}$  donde  $dl = \frac{dr}{\sqrt{f}}$  es la distancia radial propia y  $d\tau = \sqrt{f} dt$  el tiempo propio.

Utilizando  $u^r = \frac{dr}{d\tau}$ ,  $u^t = \frac{dt}{d\tau}$  y la ecuación (5-6); tenemos

$$v^2 = \frac{(u^r)^2}{f + (u^r)^2} = \frac{(u^r)^2}{(u^t)^2}, \quad (5-13)$$

de donde

$$(u^r)^2 = \frac{f v^2}{1 - v^2}, \quad (5-14)$$

$$(u^t)^2 = \frac{f}{1-v^2}. \quad (5-15)$$

Se escoge  $C_2^2$  como el hamiltoniano y se fijan las variables dinámicas del sistema  $r$  y  $v$ . Aplicando las ecuaciones (5-14) y (5-15); se tiene:

$$H(r, v) = \frac{h^2(r, v) f(r)}{1-v^2}, \quad (5-16)$$

y el sistema dinámico queda definido por

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad (5-17)$$

$$\dot{v} = \frac{\partial H}{\partial r}. \quad (5-18)$$

Al aplicar la ecuación (5-10), las anteriores dos ecuaciones se convierten en

$$\dot{r} = \frac{2fh^2}{v(1-v^2)^2} (v^2 - a^2), \quad (5-19)$$

$$\dot{v} = -\frac{h^2}{r(1-v^2)} \left[ (1-a^2) \frac{df}{dr} - 4fa^2 \right]. \quad (5-20)$$

Los puntos críticos del sistema dinámico que coincide con los puntos sónicos del flujo de fluido son los puntos  $(v_c, r_c)$  donde tanto  $\dot{r}$  y  $\dot{v}$  son cero.

Asumiendo que  $h \neq 0$  para todos los valores de  $r > r_{hIR}$  donde también  $f \neq 0$ ; se sigue que los puntos críticos

$$v_c^2 = a_c^2, \quad (5-21)$$

$$r_c = (1-a_c)f_c, r_c = 4f_c a_c, \quad (5-22)$$

donde

$$f_c = f(r)|_{r_c}$$

y

$$f_c, r_c = \left. \frac{df}{dr} \right|_{r_c}$$

### 5.1.2. Acreción de fluidos isotérmicos

Se obtendrá una expresión adecuada para  $h(r, v)$  de acuerdo a ([124, 125]) en la ecuación 5-16 cuando el fluido siendo acretado sea isotérmico. Esto a su vez proporciona una expresión ordenada para el hamiltoniano  $H(r, v)$ .

La ecuación de estado barotrópica para un fluido isentrópico puede expresarse como  $\epsilon = \epsilon(\eta)$ . Para un fluido isotérmico, la ecuación de estado se escribe  $p = k\epsilon$ , donde la constante  $k$  es el estado del parámetro  $0 < k < 1$ .

La definición de velocidad del sonido en (5-10) conduce a  $a^2 = k$ , y así la velocidad del sonido permanece constante a través del proceso de acreción.

De las ecuaciones (5-8) y (5-9), tenemos:

$$h = \frac{d\epsilon}{d\eta}, \quad (5-23)$$

$$\frac{dp}{d\eta} = \eta \frac{dh}{d\eta} = \frac{d^2\epsilon}{d\eta^2}. \quad (5-24)$$

Al integrar se obtiene

$$\eta \frac{d\epsilon}{d\eta} - \epsilon(\eta) = k\epsilon(\eta), \quad (5-25)$$

donde se utilizó  $p(\eta) = k\epsilon(\eta)$ . La integración de esta última ecuación produce

$$\epsilon(\eta) = C\eta^{k+1} = \frac{\epsilon_c}{\eta_c^{k+1}}\eta^{k+1}. \quad (5-26)$$

La constante  $C$  se ha escogido de tal manera que las ecuaciones (5-7) y (5-23) den lugar a la misma expresión para  $h$

$$h(r, \eta) = \frac{(k+1)\epsilon_c}{\eta_c} \left(\frac{\eta}{\eta_c}\right)^k. \quad (5-27)$$

Una expresión para  $\left(\frac{\eta}{\eta_c}\right)$  puede obtenerse de la constante de integración  $C_1$  a partir de la ecuación (5-11). De hecho, utilizando las ecuaciones (5-14), (5-15), (5-21) y (5-22) se puede escribir

$$C_1^2 = \frac{r^4\eta^2 f v^2}{1-v^2} = \frac{r_c^4\eta_c^2 f_c v_c^2}{1-v_c^2} = \frac{r_c^5\eta_c^2 f_c}{4} r_c, \quad (5-28)$$

tal que

$$\left(\frac{\eta}{\eta_c}\right)^k = \left(\frac{r_c^5 f_c, r_c}{4} \frac{1-v^2}{r^4 f v^2}\right)^{\frac{k}{2}}. \quad (5-29)$$

Substituyendo en la Ec.(5-27), se obtiene

$$h^2 = K \left(\frac{1-v^2}{r^4 f v^2}\right)^k \quad (5-30)$$

con la constante  $K$  dada por

$$K = \left(\frac{r_c^5 f_c, r_c}{4}\right)^k \left[\frac{(k+1)\epsilon_c}{\eta_c}\right]^2.$$

Redefiniendo el Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  como  $\mathcal{H} = H/K$  y utilizando la Ec.(5-29) se obtiene finalmente

$$\mathcal{H}(r, v) = \frac{f(r)^{1-k}}{r^{4k} v^{2k} (1-v^2)^{1-k}}. \quad (5-31)$$

Cabe destacar que debido a la definición de la tri-velocidad  $v$  esta expresión del hamiltoniano es válida para todo observador fuera del horizonte. Lo anterior se aplica tanto a la métrica de Schwarzschild clásica como a la de seguridad asintótica mejorada.

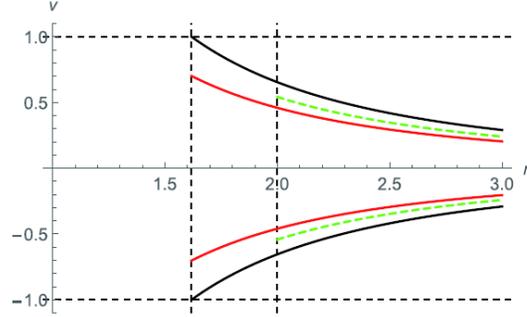
Para analizar los cuatro tipos de acreción isotérmica (mencionados al principio de la sección) y dado el propósito de comparar con el análisis presentado en [126] se tomaron los siguientes valores  $\xi = 0,5$  y  $M = 1 > M_c = 0,98$  en las expresiones del hamiltoniano cuántico  $\mathcal{H}^{(AS)}$  y el hamiltoniano clásico  $\mathcal{H}^{(GR)}$ . Aunque esto equivale a considerar una solución de agujero negro con dos horizontes, los efectos cuánticos sobre la acreción que se describen a continuación están presentes para todos los valores del parámetro  $\xi$  en el rango  $0 \leq \xi \leq \left(\frac{16}{27}\right) M^2$ , con las órbitas (en el gráfico de contorno del hamiltoniano cuántico) yendo continuamente hacia las órbitas de su contraparte clásica en el límite  $\xi \rightarrow 0$ , como se mostrará más adelante.

### Soluciones para fluidos ultra-rígidos $k = 1$

La ecuación de estado para un fluido ultra-rígido es  $p = \epsilon$ . Esta implica que  $a^2 = 1 = v_c^2$ . Las ecuaciones (5-21) y (5-22) dan inmediatamente  $f_c = 0$ , caso en el que los hamiltonianos en AS y GR coinciden

$$\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}^{(GR)} = \frac{1}{r^4 v^2}, \quad (5-32)$$

con la única diferencia siendo la localización de los horizontes; que en ambos casos coinciden con la localización del punto crítico:  $r^{(AS)} = r_{hIR}$  y  $r^{(GR)} = r_{hS}$ .



**Figura 5-1.:** Gráficas de contorno de fluido ultra-rígido ( $k = 1$ ), líneas de contorno de  $\mathcal{H}^{(SA)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$  (negro)  $\mathcal{H}^{(SA)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,06$  (rojo) para la acreción de un fluido ultra-rígido ( $k = 1$ ). La línea curva punteada verde es la línea de contorno  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} + 0,06$ .  $\mathcal{H}^{(AS,GR)}$  corresponde  $\mathcal{H}^{(SA,GR)}|_{r_c}$  para todas las órbitas  $M = 1$ ,  $\xi = 0,5$ . Las líneas verticales localizan los horizontes  $r_{hIR}$  (izquierda) y  $r_{hS}$  (derecha). Las líneas horizontales punteadas localizan la velocidad del sonido  $a = \sqrt{k}$ .

Para la figura (5-1) se tuvieron en cuenta órbitas seleccionadas asociadas al flujo físico ( $|v| < 1$ ). Acá recuperamos los hallazgos en [126] respecto a las líneas de contorno para  $\mathcal{H}^{(AS)}$ . Notablemente, tanto para la materia que cae ( $-1 < v < 0$ ), como para el fluido que sale ( $0 < v < 1$ ), y para valores fijos para la coordenada radial  $r$  con  $r > r_{hS}$ , la velocidad del flujo es consistentemente mayor en  $GR$  que en  $AS$ <sup>1</sup>.

### Soluciones para fluidos ultra-relativistas $k = 1/2$

En el caso de un fluido ultra-relativista tenemos que  $a^2 = \frac{1}{2}\nu_c^2$  y el hamiltoniano es:

$$\mathcal{H}^{(AS)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M\xi}{r^3}}}{r^2\nu\sqrt{1 - \nu^2}}, \quad (5-33)$$

$$\mathcal{H}^{(GR)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}{r^2\nu\sqrt{1 - \nu^2}}. \quad (5-34)$$

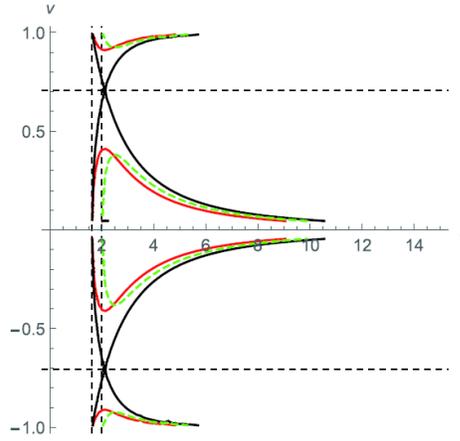
<sup>1</sup>Se restringió la comparación entre la acreción clásica y cuántica a la región  $r > r_{hS}$  porque esta es la región en la cual la comparación tiene sentido

Para los radios críticos obtenemos;

$$r_c^{(AS)} \sim \frac{5}{2}M - \frac{14}{25} \frac{\xi}{M}, \quad (5-35)$$

$$r_c^{(GR)} = \frac{5}{2}M, \quad (5-36)$$

donde  $r_c^{(AS)}$  se da a primer orden en  $\xi$ .



**Figura 5-2.:** Gráficas de contorno de fluido ultra-relativista ( $k = 1/2$ ), líneas de contorno  $\mathcal{H}^{(AS)}$  (continuas)  $\mathcal{H}^{(GR)}$  (punteadas) para la acreción de un fluido ultra-relativista ( $k = 1/2$ ). Las líneas de contorno  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$  (negro) y  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,06$  (rojo). La línea curva punteada verde es la línea de contorno para  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} + 0,06$ . Para todas las órbitas  $M = 1$ ,  $\xi = 0,5$ . Las líneas verticales localizan los horizontes  $r_{hIR}$  (izquierda) y  $r_{hS}$  (derecha). Las líneas horizontales punteadas localizan la velocidad del sonido  $a = \sqrt{k}$ .

La existencia de las órbitas asociadas al flujo físico ( $|v| < 1$ ) en  $AS$  que incluyen el régimen subsónico ( $-v < -v_c$ , y  $v > v_c$ ) y régimen transónico asociado a la solución que pasa por el punto sónico.

Lo anterior es opuesto a los hallazgos en [126] donde no se estableció evidencia física para la acreción de fluidos ultra-relativistas en  $AS$ .

Pueden ser identificados dos efectos cuánticos gravitacionales:

- Corrimiento de las órbitas hacia el agujero negro

- Incremento de la máxima velocidad del fluido, la cual ocurre en  $r = r_c$ , comparado con el caso en  $GR$

### Soluciones para fluido de radiación $k = 1/3$

Para un fluido de radiación, los radios críticos están dados por:

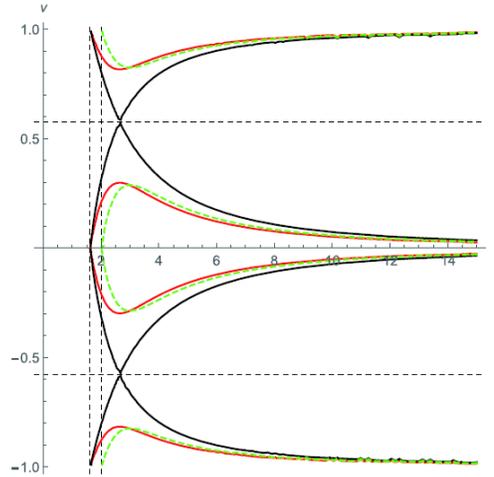
$$r_c^{(AS)} \sim 3M - \frac{5}{9} \frac{\xi}{M}, \quad (5-37)$$

$$r_c^{(GR)} = 3M, \quad (5-38)$$

y los hamiltonianos tienen la forma:

$$\mathcal{H}^{(AS)} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M\xi}{r^3}\right)^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{4}{3}} v^{\frac{2}{3}} (1-v)^{\frac{2}{3}}}, \quad (5-39)$$

$$\mathcal{H}^{(GR)} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{4}{3}} v^{\frac{2}{3}} (1-v)^{\frac{2}{3}}}. \quad (5-40)$$



**Figura 5-3.:** Gráficas de contorno de fluido de radiación ( $k = 1/3$ ), líneas de contorno para la acreción de radiación ( $k = 1/3$ ). Las líneas de contorno  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$  (negro) y  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,06$  (rojo). La línea curva punteada verde es la línea de contorno para  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} + 0,06$  para todas las órbitas  $M = 1$ ,  $\xi = 0,5$ . Las líneas verticales localizan los horizontes  $r_{hIR}$  (izquierda) y  $r_{hS}$  (derecha). Las líneas horizontales punteadas localizan la velocidad del sonido  $a = \sqrt{k}$ .

En esta solución se recuperan los resultados en [126] en relación a las líneas de contorno para  $\mathcal{H}^{(GR)}$ . Notablemente, el comportamiento general de la acreción y el flujo de salida son el mismo como en el caso  $k = 1/2$  lo cual implica los mismos efectos de la gravedad cuántica discutidos anteriormente.

### Soluciones para fluidos sub-relativistas $k = 1/4$

Para el fluido sub-relativista, los radios críticos son:

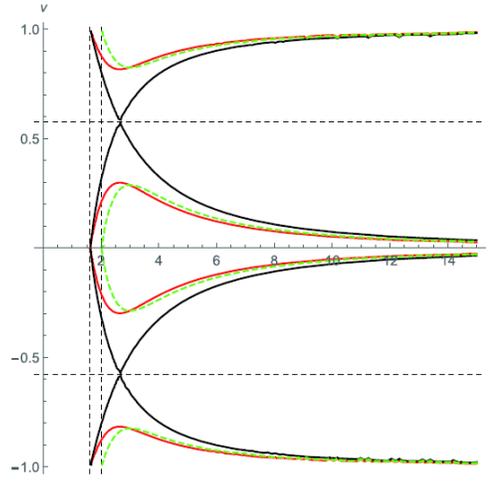
$$r_c^{(AS)} \sim \frac{7}{2}M - \frac{26}{49} \frac{\xi}{M}, \quad (5-41)$$

$$r_c^{(GR)} = \frac{7}{2}M, \quad (5-42)$$

y los hamiltonianos tienen la forma:

$$\mathcal{H}^{(AS)} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M\xi}{r^3}\right)^{\frac{3}{4}}}{rv^{\frac{1}{2}}(1-v)^{\frac{3}{4}}}, \quad (5-43)$$

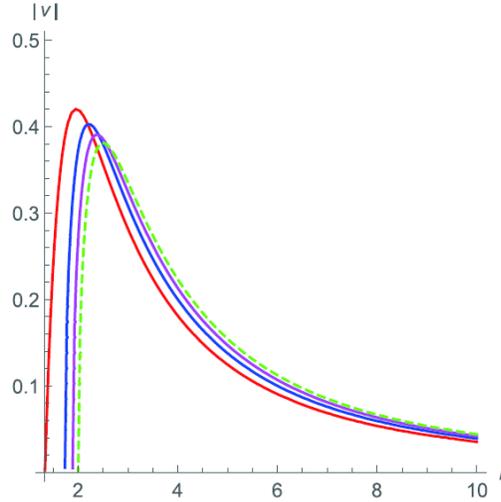
$$\mathcal{H}^{(GR)} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{3}{4}}}{rv^{\frac{1}{2}}(1-v)^{\frac{3}{4}}}. \quad (5-44)$$



**Figura 5-4.:** Gráficas de contorno de fluido sub-relativista ( $k = 1/4$ ), líneas de contorno para la acreción sub-relativista ( $k = 1/4$ ). Las líneas de contorno  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$  (negro) y  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,06$  (rojo). La línea curva punteada verde es la línea de contorno para  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} + 0,06$  para todas las órbitas  $M = 1$ ,  $\xi = 0,5$ . Las líneas verticales localizan los horizontes  $r_{hIR}$  (izquierda) y  $r_{hS}$  (derecha). Las líneas horizontales punteadas localizan la velocidad del sonido  $a = \sqrt{k}$ .

En esta solución se ve, una vez más que el comportamiento general de las líneas de contorno es el mismo que en los dos casos anteriores, con los mismos efectos cuánticos gravitacionales en los procesos de acreción y salida de flujo. No obstante, observamos que para largos valores de  $r$  ( $r > r_c$ ), los efectos cuánticos son más suaves para materia sub-relativista que para fluidos ultra-relativista y de radiación.

Para mostrar de forma más explícita cómo los efectos cuánticos modifican la acreción, esto es, la dependencia del flujo de acreción en el parámetro  $\xi$ , se puede construir la siguiente figura:



**Figura 5-5.:** Dependencia del flujo de acreción en el parámetro  $\xi$ . Perfiles de velocidad  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,06$  para acreción subsónica y ultra-relativista ( $k = 1/2$ ), con  $\xi = \xi_c = 16/27$  (rojo),  $\xi = 0,4$  (azul),  $\xi = 0,2$  (magenta). La línea punteada verde define el contorno para  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} + 0,06$  (i.e.  $\xi = 0$ ). Para todos los perfiles  $M = 1$ . Con el incremento del valor de  $\xi$ , (de derecha a izquierda en la figura), la velocidad máxima de flujo aumenta. Nótese que los valores  $\xi = 0,2$ ,  $\xi = 0,4$  se tomaron para indicar que ocurre con la posición del horizonte respecto del caso clásico, límite  $\xi \rightarrow 0$ . También se identifica que el radio del horizonte en el enfoque AS disminuye en comparación con el caso clásico (línea roja vs. línea verde punteada).

### 5.1.3. Análisis de la estabilidad de la acreción

Las modificaciones cuánticas se implementarán en las soluciones a las ecuaciones que describen la evolución de las perturbaciones en dos casos:

- Modelando la perturbación como una onda estacionaria.
- Modelando la perturbación como una onda viajera de alta frecuencia

Siguiendo a [127–129] se presentan las ecuaciones que describen el proceso de acreción de una manera más apropiada para el análisis de estabilidad.

Primero, la forma explícita de la ecuación de continuidad es:

$$\partial_t (\eta u^t) + r^{-2} \partial_r (\eta u^r r^2) = 0. \quad (5-45)$$

Para resolver para  $\eta$  y para  $u^r$  utilizamos la ecuación para la conservación de momentum energía (5-4) y la ecuación termodinámica para la conservación de masa-energía

$$d(\epsilon/\eta) + Pd(1/\eta) = Tds, \quad (5-46)$$

junto con la condición de entropía constante  $ds = 0$ . En ese caso el cuadrado de la velocidad del sonido es dada por la Ec.(5-10), la condición de conservación de momentum-energía;

$$\begin{aligned} u^t \partial_t u^t + u^r \partial_r u^t + f (\partial_r f) u^r u^t \\ + \frac{a^2}{\eta} [((u^t)^2 - f) \partial_t \eta + u^r u^t \partial_r \eta] = 0. \end{aligned} \quad (5-47)$$

Una vez que se conoce la expresión para la velocidad del sonido  $a$  del fluido de prueba en particular, y después de fijar las derivadas temporales a cero, la solución del sistema de ecuaciones acopladas (5-45) y (5-47) nos proporciona los campos estacionarios  $u^r(r)$ ,  $\eta(r)$  y  $a(r)$  que permiten en principio, estudiar cuantitativamente la acreción esférica hacia agujero negro estático esféricamente simétrico. Asumiendo que el flujo es suave en todos los puntos del espacio tiempo, las soluciones estacionarias de las ecuaciones (5-45) y (5-47) se escriben como;

$$4\pi\bar{\mu}\eta u^r r^2 = \dot{m}, \quad (5-48)$$

y

$$\frac{d}{dr} [\ln(fu^t)] + \frac{a^2}{\eta} \frac{d\eta}{dr} = 0, \quad (5-49)$$

respectivamente. La constante de movimiento  $\dot{m}$  se identifica como la tasa de flujo de materia.

El esquema perturbativo que se usará será el propuesto en [127–129]; el cual se basa en la ecuación de continuidad, y comienza considerando las perturbaciones lineales a la velocidad estacionaria y la densidad de número de partículas:  $u^r(r, t) = u^r(r) + u^{r'}(r, t)$  y  $\eta(r, t) = \eta(r) + \eta'(r, t)$ , donde las cantidades primadas representan pequeñas perturbaciones dependientes del tiempo.

Ahora se define la variable  $\psi = \eta u^r r^2$  la cual coincide, excepto por una constante  $4\pi\bar{\mu}$ , con la tasa de acreción de materia estacionaria dada por la ec. (5-48).

La perturbación de primer orden a  $\psi$ , alrededor de valores estacionarios, es:

$$\psi'(r, t) = [u^r(r)\eta'(r, t) + \eta(r)u^{r'}(r, t)]r^2, \quad (5-50)$$

y la Ec.(5-45) adquiere la forma:

$$u^t \partial_t \eta' + \frac{\eta u^r}{f^2 u^t} \partial_t u^{r'} = -\frac{1}{r^2} \partial_r \psi'. \quad (5-51)$$

En general, la perturbación, a primer orden, del cuadrado de la velocidad del sonido está dada por:

$$a'^2 = a^2 + \frac{da^2}{d\eta} \eta'. \quad (5-52)$$

La evolución temporal de  $\eta'$  y  $u^{r'}$  sigue de las ecuaciones (5-50) y (5-51), y están dadas respectivamente por:

$$\partial_t \eta' = -\frac{1}{r^2} \left( \frac{u^r}{f} \partial_t \psi' + f u^t \partial_r \psi' \right), \quad (5-53)$$

y

$$\partial_t u^{r'} = \frac{f u^t}{\eta r^2} (u^t \partial_t \psi' + u^r \partial_r \psi'). \quad (5-54)$$

La ecuación (5-47) está escrita en términos de cantidades perturbadas de la forma:

$$u^t \left[ u^r \frac{a^2}{\eta} \partial_t u^{r'} + \partial_t \eta' \right] + \partial_r (u^r u^{r'}) + 2u^r u^{r'} \frac{a^2}{\eta} \partial_r \eta + (f u^t)^2 \partial_r \left( \frac{a^2}{\eta} \eta' \right) = 0. \quad (5-55)$$

Tomando la derivada temporal de esta última ecuación, y substituyendo por las derivadas temporales de  $\eta'$  y  $u^{r'}$  de las ecuaciones (5-53) y (5-54), se obtiene la ecuación diferencial que describe a la perturbación de la tasa de acreción de materia  $\psi'$

$$\begin{aligned} & \partial_t (\eta h^{tt} \partial_t \psi' + \eta h^{tr} \partial_r \psi') + \partial_r (\eta h^{rt} \partial_t \psi' + \eta h^{rr} \partial_r \psi') \\ &= (1 - 2a^2) (h^{rt} \partial_t \psi' + h^{rr} \partial_r \psi') \frac{d\eta}{dr}, \end{aligned} \quad (5-56)$$

donde los coeficientes  $h^{\alpha\beta}$  están dados por:

$$\begin{aligned} h^{tt} &= \frac{u^r (f u^t)}{f^2} [(f u^t)^2 + u^r - (u^r)^2 a^2], \\ h^{tr} &= h^{rt} = \frac{(u^r)^2 (f u^t)^2}{f} (1 - a^2), \\ h^{rr} &= u^r (f u^t) [(u^r)^2 - (f u^t)^2 a^2]. \end{aligned} \quad (5-57)$$

### Perturbación - Onda estacionaria

En cuanto al estudio de las perturbaciones en forma de onda estacionaria, se ha señalado en la literatura dado que un horizonte de sucesos, en lugar de una superficie física, ocurre en un agujero negro. Aparecen dificultades para fijar una condición de límite interior apropiada. La regularidad del flujo en el horizonte del agujero negro destaca una solución única, la de Bondi, que resulta ser transónica después del cruce del punto sónico. Sin embargo, la perturbación de la onda estacionaria debe anularse incluso en el régimen supersónico, pero no existe ningún mecanismo físico que permita imponer tal restricción. Debido a que el análisis de ondas estacionarias requiere la cancelación en los límites y la continuidad de la solución, se debe restringir el análisis a flujos completamente subsónicos, aunque estos pueden no ser completamente representativos de la forma precisa del proceso de caída. En consecuencia, se estudia la estabilidad de un flujo subsónico asumiendo la perturbación de onda estacionaria de prueba:

$$\psi'(r, t) = \zeta(r) \exp(-i\omega t) . \quad (5-58)$$

Reemplazando (5-58) en la Ec.(5-56), se obtiene

$$\omega^2 h^{tt} \zeta^2 + i\omega \left\{ \frac{d}{dr} (h^{tr} \zeta^2) - 2h^{rt} \zeta^2 \frac{d}{dr} [\ln(fu^t)] \right\} + \frac{h^{rr}}{(fu^t)^2} \frac{d\zeta}{dr} \frac{d}{dr} [\zeta(fu^t)^2] - \frac{d}{dr} \left( h^{rr} \zeta \frac{d\zeta}{dr} \right) = 0. \quad (5-59)$$

Integrando la Ec.(5-59) sobre la coordenada radial con los términos integrados que se anulan en los límites, se obtiene una relación de dispersión de la forma:

$$A\omega^2 - 2iB\omega + C = 0, \quad (5-60)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \int h^{tt} \zeta^2 dr, \\ B &= \int h^{rt} \zeta^2 \frac{d}{dr} [\ln(fu^t)] dr, \\ C &= \int \frac{h^{rr}}{(fu^t)^2} \frac{d\zeta}{dr} \frac{d}{dr} [\zeta(fu^t)^2] dr. \end{aligned} \quad (5-61)$$

Las raíces de la ecuación (5-60) están dadas por

$$\omega = i \frac{B}{A} \pm i \sqrt{\frac{B^2}{A^2} + \frac{C}{A}}. \quad (5-62)$$

Claramente, el signo del discriminante de la relación dispersión determina la estabilidad de la onda estacionaria.

Ahora, de la ecuación (5-57) se sigue que  $h^{rt} > 0$ . Además, teniendo en cuenta que para la materia que cae  $(d\eta/dr) < 0$ , y refiriéndose a (5-49) podemos concluir que  $B > 0$ . De nuevo, porque  $u^t = \sqrt{f + (u^r)^2}/f$  y para el fluido que cae  $u^r < 0$ , se tiene  $h^{tt} < 0$  lo cual significa  $A < 0$ . Finalmente, es fácilmente verificable que para un fluido subsónico,  $h^{rr} > 0$ . Consecuentemente,  $(B/A) < 0$  y  $(C/A) < 0$ . Esto implica que si se obtiene una perturbación oscilatoria y amortiguada en el tiempo cuando  $|C/A| > (B/A)$ , o una perturbación sobre-amortiguada si  $|C/A| < (B/A)$ . Es decir que en cualquier caso, la solución estacionaria será estable.

Nuestro objetivo, sin embargo, será determinar si los efectos de la gravedad cuántica mejoran o disminuyen el efecto disipativo asociado al acoplamiento del flujo con la geometría del espacio-tiempo. No obstante, dado que los integrandos en los coeficientes en (5-61) dependen de manera complicada de las funciones clásica y cuántica  $f_0(r)$  and  $f(r)$ , la solución para  $\omega$  es bastante impráctica. Para el propósito buscado en el sentido de que requiere un esfuerzo numérico considerable una vez se elige una distribución matemática adecuada para modelar la amplitud de la onda estacionaria.

En la siguiente sección se mostrará que este objetivo se puede lograr más fácilmente analizando una perturbación en forma de onda viajera.

### Perturbación - Onda viajera

En este caso, la perturbación se modelará como una onda viajera de alta frecuencia lo que implica una longitud de onda mucho menor que el radio del horizonte del agujero negro [127]. Por lo tanto, la parte espacial  $\zeta(r)$  de la perturbación  $\psi'(r, t)$  se puede escribir como una serie de potencias en  $\omega$  de la forma [128, 129]

$$\zeta_\omega(r) = \exp \left[ \sum_{l=-1}^{\infty} \omega^{-l} k_l(r) \right]. \quad (5-63)$$

De esta manera, reemplazando en la Ec.(5-59) los coeficientes de  $\omega^2$  y  $\omega$  pueden recopilarse e igualarse respectivamente a cero. Por lo tanto, se obtienen dos ecuaciones diferenciales de primer orden para  $k_{-1}$  y  $k_0$ , respectivamente. Haciendo también cero los coeficientes de  $\omega^0$ , resulta una ecuación diferencial de segundo orden para  $k_1$ , escrita en términos de  $k_{-1}$  y  $k_0$ . Las soluciones para  $k_{-1}$  y  $k_0$  son:

$$k_{-1} = i \int (h^{rr})^{-1} \left[ h^{tr} \pm \sqrt{(h^{tr})^2 - h^{rr}h^{tt}} \right] dr, \quad (5-64)$$

y

$$k_0 = \ln \left\{ (fu^t)^2 \left[ \sqrt{(h^{tr})^2 - h^{rr}h^{tt}} \right]^{-1} \right\}^{1/2}. \quad (5-65)$$

Entre tanto, la ecuación diferencial para  $k_1$ , es:

$$2 \left( h^{rr} \frac{dk_{-1}}{dr} - ih^{tr} \right) \frac{dk_1}{dr} + \frac{d}{dr} \left( h^{rr} \frac{dk_0}{dr} \right) + h^{rr} \frac{dk_0}{dr} \frac{d}{dr} [k_0 - 2 \ln(fu^t)] = 0. \quad (5-66)$$

La serie de potencias se puede truncar después de estos tres primeros términos, lo que se puede verificar analizando su comportamiento asintótico, el cual viene dado por

$$\zeta_\omega(r) \approx \exp [\omega^1 k_{-1}(r) + k_0(r) + \omega^{-1} k_1(r)], \quad (5-67)$$

Resulta claro que  $k_{-1}$  y  $k_1$  solamente contribuyen a la fase de la onda viajera, y que la contribución más importante a la amplitud de la perturbación  $\psi'(r, t)$  viene de la expresión para  $k_0$ . Un cálculo directo resulta en:

$$\begin{aligned} |\zeta_\omega(r)| &= \chi |\exp [k_0(r)]| = \chi \left| \frac{(fu^t)^2}{\sqrt{(h^{tr})^2 - h^{rr}h^{tt}}} \right|^{1/2} \\ &= \chi \left[ \frac{(u_t)^2}{(u^r)^2 a^2} \right]^{1/4} = \chi \left( \frac{1}{v^2 a^2} \right)^{1/4}. \end{aligned} \quad (5-68)$$

donde  $\chi$  es una pequeña constante real arbitraria, que se ha utilizado en la Ec.(5-13). Debe tenerse en cuenta que debido al hecho de que para la acreción esféricamente simétrica,  $\nu$  nunca es igual a cero, a tiempo que  $a$  también es no nulo, consecuentemente  $\zeta_\omega$  nunca diverge, por lo que la solución de fondo es estable .

La dependencia de  $|\zeta_\omega(r)|$  con el coeficiente métrico  $f$  hace evidente el efecto de la geometría del espacio-tiempo sobre la perturbación y especifica el acoplamiento entre el flujo de acreción y la curvatura del espacio-tiempo.

Las diferencias entre estos efectos en  $AS$  y  $GR$  para la acreción de fluidos isotérmicos ya son evidentes a partir de la Ec.(5-68), porque un valor más alto de la tri-velocidad de la acreción  $v$  siempre va acompañado de un valor más bajo de  $|\zeta_\omega(r)|$ , y viceversa. La variación de  $|\zeta_\omega(r)|$  con la distancia radial hacia el agujero negro puede calcularse escribiendo el hamiltoniano para cada tipo de fluido isotérmico como una ecuación polinómica en la tri-velocidad  $v$ . Después de fijar un valor apropiado para el hamiltoniano, esta ecuación se resuelve y el

resultado se puede insertar en la Ec.(5-68). Estas ecuaciones polinómicas para cada valor del parámetro de estado  $k$ , (excepto para  $k = 1$ ), lo cual da la expresión para  $v^2$ , son:

$$w^2 - w + \frac{f(r)}{\mathcal{H}^2(r)r^4} = 0 \quad (k = 1/2), \quad (5-69)$$

donde  $w = v^2$ ;

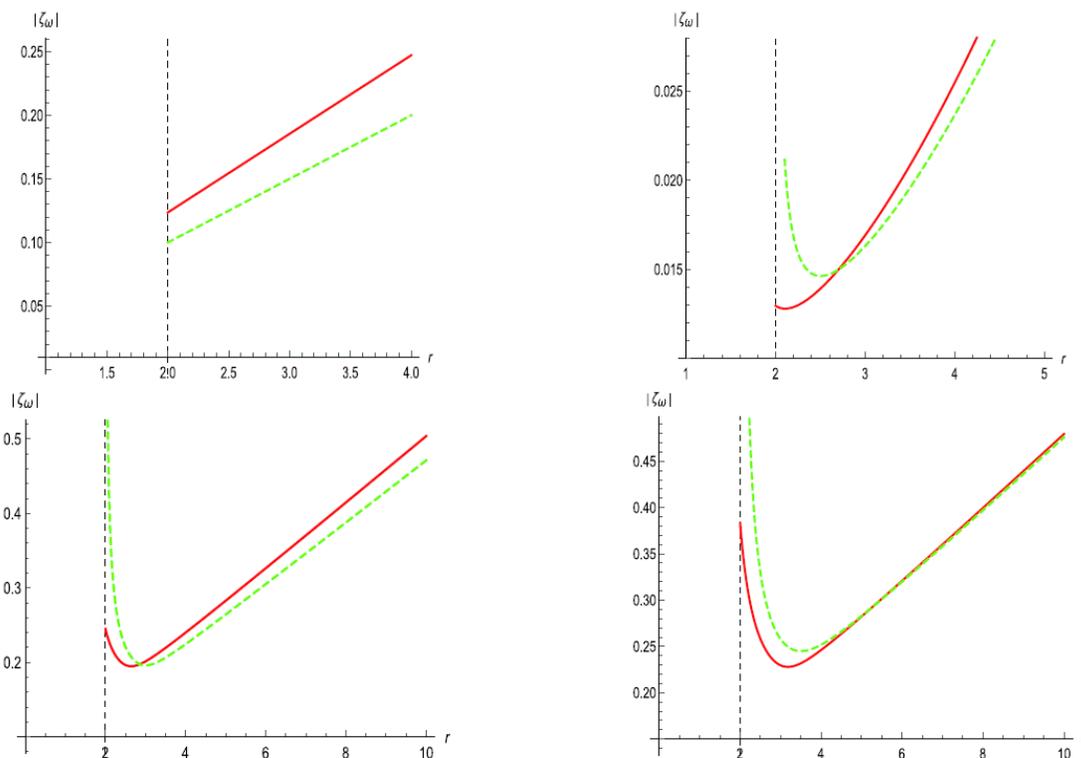
$$v^3 - v + \frac{f(r)}{\mathcal{H}^{3/2}(r)r^2} = 0 \quad (k = 1/3), \quad (5-70)$$

y

$$x^2 - x - \frac{f(r)}{\mathcal{H}^{4/3}(r)r^{4/3}} = 0 \quad (k = 1/4), \quad (5-71)$$

donde  $x = v^{2/3}$ .

De las soluciones a las ecuaciones anteriores (para cada valor de  $k$ ), se selecciona solamente la correspondiente a materia que cae o sale con velocidad ( $v$ ) que se acerca a cero en el infinito espacial  $r \rightarrow \infty$ . Reemplazando la solución escogida en la Ec.(5-68) se puede construir las gráficas mostradas en la figura (5-6) para sonido subsónico.



**Figura 5-6.:** Comportamiento de la amplitud de la perturbación de onda viajera  $|\zeta_\omega(r)|$  vs  $AS$  (rojo) y  $GR$  (verde). La línea punteada vertical representa el radio del horizonte  $r_{hS}$  del agujero negro clásico de Schwarzschild. Los valores de los parámetros son  $\mathcal{H}^{AS} = \mathcal{H}_c^{AS} + 0,01$ ,  $\mathcal{H}^{GR} = \mathcal{H}_c^{GR} + 0,01$ ,  $M = 1$ ,  $\xi = 0,5$ ,  $\chi = 0,1$ .

En esta figura, vemos el comportamiento de la amplitud de la perturbación de onda viajera  $|\zeta_\omega(r)|$  para  $AS$  (rojo) y para  $GR$  (verde), para los siguientes casos:

*Fluido ultra-rígido* (panel superior izquierdo), donde es mayor la amplitud de la perturbación en  $AS$  en comparación con  $GR$  para todos los valores de  $r$  ( $r > r_{hS}$ ). Esto es, para la misma distancia radial, un observador localmente estático mide una mayor amplitud en  $AS$  que en  $GR$ , lo que conduce a una menor estabilidad del proceso de acreción en  $AS$ . Para el fluido ultra-rígido.

El acoplamiento de la materia que cae con la geometría espacio-tiempo es más débil en  $AS$  que en  $GR$ , resultado que sin duda se asocia al carácter anti-apantallamiento de la interacción gravitacional en  $AS$ .

Para los casos de acreción isotérmica faltantes; *Fluido ultra-relativista* (panel superior de-

recho), *fluido de radiación* (panel inferior izquierdo), *Fluido sub-relativista* (panel inferior derecho) en la figura (5-6), se muestra que la amplitud de la perturbación en  $AS$  se extrae de su valor en  $GR$  si  $r_{hS} < r < r_{\text{cross}}$ , y en su lugar es mejorado si  $r > r_{\text{cross}}$ , donde el valor de  $r_{\text{cross}}$  para cada tipo de fluido isotérmico es simplemente obtenido resolviendo la ecuación para  $r$ , la cual de hecho iguala la amplitud cuántica con la clásica. Eso significa que el acoplamiento del fluido con la curvatura espacio-temporal, que actúa sobre la perturbación a modo de efecto disipativo, es más fuerte en  $AS$  que en  $GR$  para  $r < r_{\text{cross}}$ , y es más débil para  $r > r_{\text{cross}}$ . Cabe señalar que para el fluido sub-relativista el efecto principal es la reducción de la amplitud de la perturbación de la onda viajera con el consiguiente aumento del acoplamiento del fluido con la curvatura del espacio-tiempo, resultado que ya ha sido reportado en [54].

#### 5.1.4. Acreción de fluidos isotérmicos en Schwarzschild de-Sitter y Schwarzschild anti de-Sitter

Como se pudo verificar en la sección anterior, para los casos de Sitter y anti de Sitter; se obtendrá una expresión adecuada para  $h(r, v)$  de acuerdo a [124, 125] en la ec. (5-16) cuando el fluido acretado es isotérmico, lo que proporciona una expresión ordenada para el hamiltoniano  $H(r, v)$ . Igualmente, se evaluará la acreción en los casos Ultra-Rígido, Ultra-Relativista, Radiación y Sub-Relativista.

##### Solución para fluido ultra-rígido $k = 1$

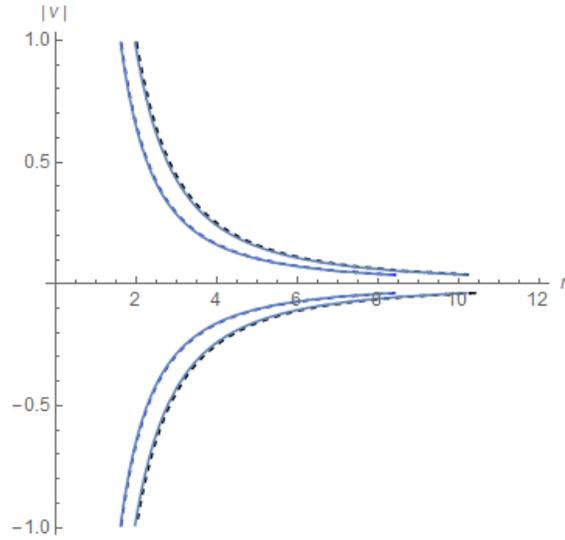
La ecuación de estado para un fluido ultra-rígido  $p = \epsilon$  implica que  $a^2 = 1 = v_c^2$ . Las ecuaciones (5-21) y (5-22) dan inmediatamente  $f_c = 0$ , y los hamiltonianos en  $AS$  y  $GR$  coinciden.

$$\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}^{(GR)} = \frac{1}{r^4 v^2}, \quad (5-72)$$

con la única diferencia siendo la localización de los horizontes, que en ambos casos coinciden con la localización del punto crítico:  $r^{(AS)} = r_{hIR}$  y  $r^{(GR)} = r_{hS}$ .

$$r_c^{(AS)} = 1,61803 \quad (5-73)$$

$$r_c^{(GR)} = 2 \quad (5-74)$$



**Figura 5-7.:** Perfiles de velocidad ( $|v|$  vs  $r$ ) para acreción de un fluido ultra-rígido ( $k = 1$ ), las curvas de  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$  (azul punteado)  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,005$  (rojo) para la acreción de un fluido ultra-rígido ( $k = 1$ ).  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)}$  (punteado negro)  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} + 0,005$ . Para todas las órbitas  $M = 1$ ,  $\xi = 0,5$ .

En la figura (5-7)  $|v|$  se observan las curvas de velocidad ( $|v|$  vs  $r$ ) para acreción de un fluido ultra-rígido ( $k = 1$ ) en la geometría denominada Schwarzschild de Sitter y Schwarzschild anti de Sitter. La dinámica del modelo de Schwarzschild de Sitter corresponde a las curvas en las que la velocidad tiende a valores de  $|v| = \pm 1$ , las líneas punteadas corresponde al elemento de línea clásico. Con el incremento del valor de  $|v|$ , (de derecha a izquierda en la figura), se observa el aumento de la velocidad máxima de flujo.

### Solución para fluido ultra-relativista $k = 1/2$

En el caso de un fluido ultra-relativista tenemos que  $a^2 = \frac{1}{2}v_c^2$  y el hamiltoniano es:

$$\mathcal{H}^{(AS)} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2g_*M}{k^2r} - \frac{1}{3}\lambda_*k^2r^2\right)}}{rv^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1-v)}}, \quad (5-75)$$

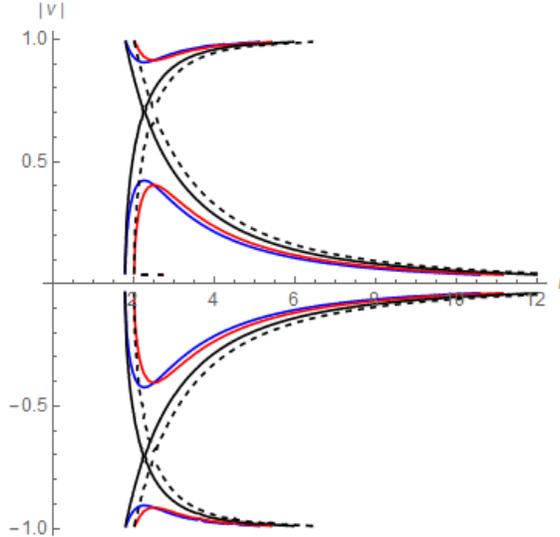
$$\mathcal{H}^{(GR)} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)}}{rv^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1-v)}}. \quad (5-76)$$

Para los radios críticos se obtiene;

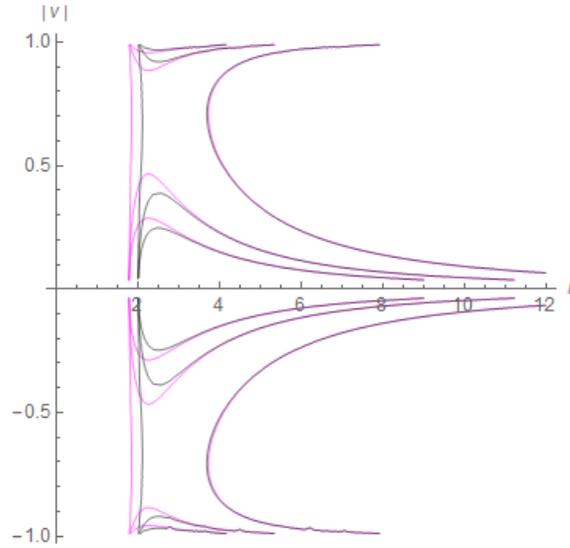
$$r_c^{(AS)} = 2,311, \quad (5-77)$$

$$r_c^{(GR)} = 2,512, \quad (5-78)$$

donde  $r_c^{(AS)}$  se da a primer orden en  $\xi$ .



**Figura 5-8.:** Gráficas de contorno de fluido ultra-relativista ( $k = 1/2$ ) para Schwarzschild de Sitter, líneas de contorno  $|v|$  vs  $r$  para Schwarzschild de Sitter  $\mathcal{H}^{(AS)}$  (continuas)  $\mathcal{H}^{(GR)}$  (punteadas) para la acreción de un fluido ultra-relativista ( $k = 1/2$ ). Las líneas de contorno  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$  (negro) y  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,05$  (azul).  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} + 0,06$  (rojo). La línea curva punteada es la línea de contorno para  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)}$ . Para todas las órbitas  $M = 1$ ,  $\xi = 0,5$ .



**Figura 5-9.:** Gráficas de contorno de fluido ultra-relativista ( $k = 1/2$ ) para Schwarzschild anti de Sitter, líneas de contorno  $|v|$  vs  $r$  para Schwarzschild anti de Sitter  $\mathcal{H}^{(AS)}$  (magenta)  $\mathcal{H}^{(GR)}$  (negro) para la acreción de un fluido ultra-relativista ( $k = 1/2$ ).

### Solución para fluido de radiación $k = 1/3$

Para un fluido de radiación, los radios críticos están dados por:

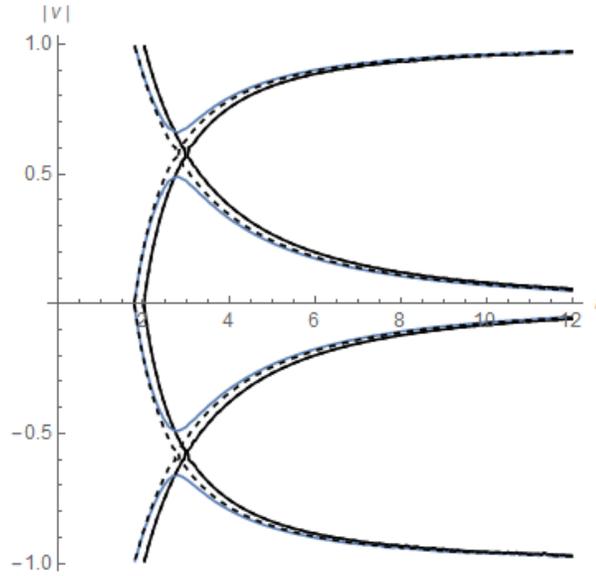
$$r_c^{(AS)} = 2,735, \quad (5-79)$$

$$r_c^{(GR)} = 2,999, \quad (5-80)$$

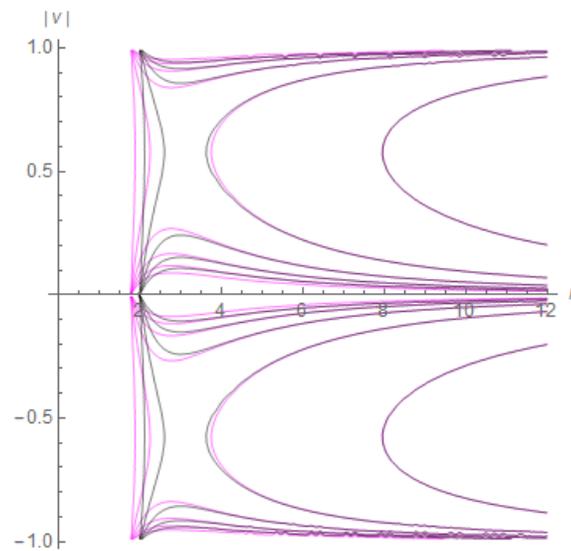
y los hamiltonianos tienen la forma:

$$\mathcal{H}^{(AS)} = \frac{\left(1 - \frac{2g_*M}{k^2r} - \frac{1}{3}\lambda_*k^2r^2\right)^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}}(1-v)^{\frac{2}{3}}}, \quad (5-81)$$

$$\mathcal{H}^{(GR)} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}}(1-v)^{\frac{2}{3}}}, \quad (5-82)$$



**Figura 5-10.:** Gráficas de contorno de fluido de radiación ( $k = 1/3$ ) Schwarzschild de Sitter, líneas de contorno  $|v|$  vs  $r$  para Schwarzschild de Sitter  $\mathcal{H}^{(AS)}$ ,  $\mathcal{H}^{(GR)}$  para la acreción de un fluido de radiación ( $k = 1/3$ ). Las líneas de contorno  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$  (punteadas negro) y  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,05$  (rojo).  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)}$  (rojo). La línea continua negra es la línea de contorno para  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} - 0,00005$ . Para todas las órbitas  $M = 1$ ,  $\xi = 0,5$ .



**Figura 5-11.:** Gráficas de contorno de fluido de radiación ( $k = 1/3$ ) Schwarzschild anti de Sitter, líneas de contorno  $|v|$  vs  $r$  para Schwarzschild anti de Sitter  $\mathcal{H}^{(AS)}$  (magenta)  $\mathcal{H}^{(GR)}$  (negro) para la acreción de un fluido de radiación ( $k = 1/3$ ).

### Solución para fluido sub-relativista $k = 1/4$

Para un fluido de radiación, los radios críticos están dados por:

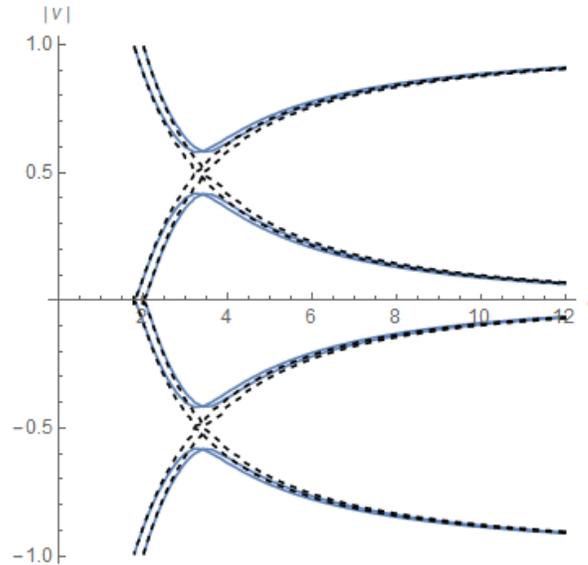
$$r_c^{(AS)} = 3,313, \quad (5-83)$$

$$r_c^{(GR)} = 3,4929, \quad (5-84)$$

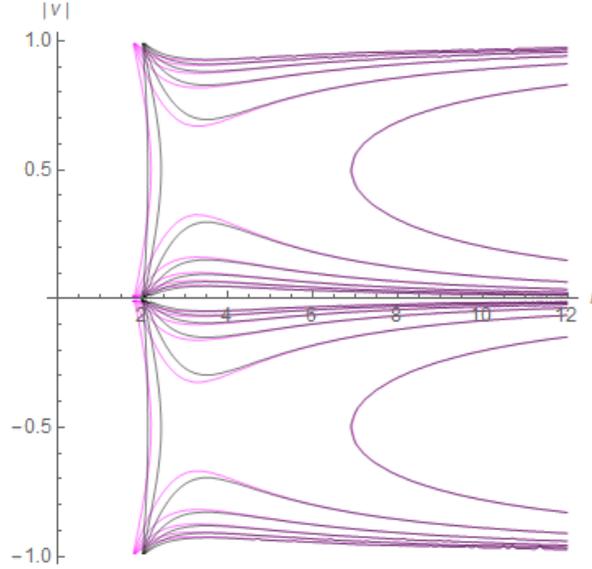
y los hamiltonianos tienen la forma:

$$\mathcal{H}^{(AS)} = \frac{\left(1 - \frac{2g_*M}{k^2r} - \frac{1}{3}\lambda_*k^2r^2\right)^{\frac{3}{4}}}{rv^{\frac{1}{2}}(1-v)^{\frac{3}{4}}}, \quad (5-85)$$

$$\mathcal{H}^{(GR)} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{\frac{3}{4}}}{rv^{\frac{1}{2}}(1-v)^{\frac{3}{4}}}. \quad (5-86)$$



**Figura 5-12.:** Gráficas de contorno de fluido Sub-Relativista ( $k = 1/4$ ) Schwarzschild de Sitter, líneas de contorno  $|v|$  vs  $r$  para Schwarzschild de Sitter  $\mathcal{H}^{(AS)}$ ,  $\mathcal{H}^{(GR)}$  para la acreción de un fluido Sub-Relativista ( $k = 1/4$ ). Las líneas de contorno  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$  (punteadas negro) y  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,05$  (rojo).  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)} + 0,05$  (continua azul).  $\mathcal{H}^{(GR)} = \mathcal{H}_c^{(GR)}$  (punteada negra). Para todas las órbitas  $M = 1$ ,  $\xi = 0,5$ .



**Figura 5-13.:** Gráficas de contorno de fluido Sub-Relativista ( $k = 1/4$ ) Schwarzschild anti de Sitter, líneas de contorno  $|v|$  vs  $r$  para Schwarzschild anti de Sitter  $\mathcal{H}^{(AS)}$  (magenta)  $\mathcal{H}^{(GR)}$  (negro) para la acreción de un fluido Sub-Relativista ( $k = 1/4$ ).

### 5.1.5. Acreción de fluidos politrópicos

La ecuación de estado politrópica es:

$$p = Kn^\gamma, \quad (5-87)$$

donde  $k$  y  $\gamma$  son constantes. Podemos definir la entalpía específica (5-7) como:

$$h = m + \frac{k\gamma n^{\gamma-1}}{\gamma - 1}. \quad (5-88)$$

Obtenemos la velocidad del sonido  $a$  con la ayuda de la entalpía [130]

$$a^2 = \frac{(\gamma - 1)U}{m(\gamma - 1) + U} \quad (5-89)$$

con  $U = \delta\gamma n^{\gamma-1}$  de forma que

$$h = m + \frac{\gamma - 1}{\gamma - 1 - a^2}, \quad (5-90)$$

y por lo tanto

$$h = m \left( 1 + X \left( \frac{1 - v^2}{r^4 f(r) v^2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) \quad (5-91)$$

donde  $X$  es una constante positiva-definida que depende de los parámetros tanto del agujero negro como de los fluidos:

$$X = \frac{k\gamma n_c^{\gamma-1}}{m(\gamma-1)} \left( \frac{r_c^5 f'(r_c)}{4} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}}. \quad (5-92)$$

Al reemplazar la Ec.(5-92) en el hamiltoniano (5-31), se obtiene [130]:

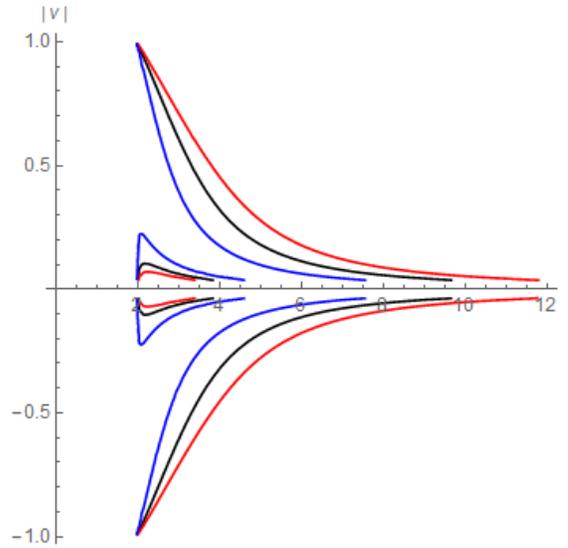
$$\mathcal{H} = \frac{f(r)}{(1-v)^2} \left[ 1 + X \left( \frac{1-v^2}{r^4 f(r) v^2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \right]. \quad (5-93)$$

Insertando la Ec.(4-29) en la anterior ecuación; se tiene

$$\mathcal{H} = \frac{\left(1 - \frac{2g_* M}{k^2 r} - \frac{1}{3} \lambda_* k^2 r^2\right)}{(1-v)^2} \left[ 1 + X \left( \frac{1-v^2}{r^4 v^2 \left(1 - \frac{2g_* M}{k^2 r} - \frac{1}{3} \lambda_* k^2 r^2\right)} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \right]. \quad (5-94)$$

Finalmente, de [124, 125, 130, 131] obtenemos el valor para  $v_c^2$

$$v_c^2 = \frac{r_c f'(r_c)}{r_c f'(r_c) + 4f(r_c)}. \quad (5-95)$$



**Figura 5-14.:** Perfiles de velocidad ( $|v|$  vs  $r$ ) para acreción de un fluido politrópico en Schwarzschild de Sitter y Schwarzschild anti de Sitter. El perfil  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)}$  (negro),  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} + 0,005$  (rojo)  $\mathcal{H}^{(AS)} = \mathcal{H}_c^{(AS)} - 0,005$  (azul). Para todas las órbitas  $M = 1$ ,  $\xi = 0,2$ ,  $n_c = 0,1$  y  $|\Lambda| = 0,001$ .

En la figura (5-14) se observan los perfiles de velocidad ( $|v|$  vs  $r$ ) para acreción de un fluido politrópico en la geometría denominada Schwarzschild de Sitter y Schwarzschild anti de

Sitter. La velocidad está normalizada tal que la velocidad de la luz es  $c = 1$  en unidades geométricas. La dinámica del modelo de Schwarzschild de Sitter corresponde a las curvas en las que la velocidad tiende a valores de  $|v| = \pm 1$ . Con el incremento del valor de  $|v|$ , (de derecha a izquierda en la figura), se observa el aumento de la velocidad máxima de flujo.

Para el caso de fluido que cae en una geometría Schwarzschild-de Sitter la dinámica del fluido es quasi similar a la del caso clásico de Schwarzschild, mostrando una ligera variación debida a la constante cosmológica ser positiva. En cuanto que para el caso Schwarzschild-anti de Sitter la velocidad de acreción del fluido resulta dramáticamente reducida por causa de la constante cosmológica ser negativa, lo que hace que su acción dinámica resulte similar a lo que sucede en cosmología relativística cuando invocamos Dark Energy como causa de la aceleración tardía del universo, en la que ésta actúa como un fluido que ejerce presión negativa, es decir uno que empuja hacia afuera .

Por esa razón la velocidad del fluido muestra tal reducción significativa respecto del caso clásico, causada por una acción dinámica igual que como parece ocurrir en cosmología contemporánea .

## 5.2. Disco de acreción alrededor de un agujero negro de Schwarzschild en seguridad asintótica

En esta sección se estudian los efectos de gravedad cuántica, en la forma propuesta por la AS sobre las propiedades de la radiación de los discos de acreción delgados alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. En el límite infrarrojo (IR) de la teoría asintóticamente segura; con derivadas de orden superior. La constante de acoplamiento de Newton  $G(r)$  depende de un parámetro libre que codifica los efectos cuánticos sobre la geometría del espacio-tiempo. Al variar este parámetro, son obtenidas las modificaciones a las propiedades térmicas del disco como el flujo de energía promedio en el tiempo, la temperatura del disco, el diferencial de luminosidad y la eficiencia de conversión de la acreción de masa en radiación, son obtenidas. Además de un desplazamiento del radio de la órbita circular interna más estable (ISCO) hacia valores pequeños, se encuentra un aumento de los valores máximos de estas propiedades térmicas y una mayor eficiencia con respecto a los obtenidos en el régimen relativista clásico. Se discute también las aplicaciones astrofísicas de estos resultados utilizando datos de observación del candidato de agujero negro de masa estelar LMC X-3.

### 5.2.1. Geodésicas en la geometría del grupo de renormalización mejorado

El elemento de línea de la ecuación (4-1) puede escribirse en forma de la métrica tipo-Schwarzschild introduciendo una masa *efectiva*  $M_{eff}(r)$ , la cual es función de la coordenada radial; y que depende del parámetro libre  $\tilde{\xi}$ , es decir:

$$ds^2 = - \left(1 - 2\frac{M_{eff}(r)}{r}\right) dt^2 + \left(1 - 2\frac{M_{eff}(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

con

$$M_{eff}(r) = M \left(1 - \frac{\tilde{\xi}}{r^2}\right). \quad (5-96)$$

Utilizamos esta definición para escribir el Lagrangiano para el análisis de la métrica mejorada haciendo  $M \rightarrow M_{eff}(r)$  en la expresión clásica. Luego restringiéndonos al plano ecuatorial ( $\theta = \pi/2, \dot{\theta} = 0$ ), de forma que el lagrangiano se escribe como

$$2L = - \left(1 - 2\frac{M_{eff}(r)}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - 2\frac{M_{eff}(r)}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2, \quad (5-97)$$

donde los puntos denotan derivada con respecto a un parámetro afín, que para partículas masivas que siguen geodésicas tipo-tiempo, se puede tomar como el tiempo propio  $\tau$ .

Los momentos generalizados son:

$$p_t = - \left(1 - 2\frac{M_{eff}(r)}{r}\right) \dot{t} = -k, \quad (5-98)$$

$$p_r = \left(1 - 2\frac{M_{eff}(r)}{r}\right)^{-1} \dot{r}, \quad (5-99)$$

$$p_\phi = r^2 \dot{\phi} = h. \quad (5-100)$$

Aquí las constantes  $k$  y  $h$  son, respectivamente, la energía y el momento angular por unidad de masa en reposo de la partícula que describe la trayectoria. El Hamiltoniano  $H = p_t \dot{t} + p_r \dot{r} + p_\phi \dot{\phi} - L$ , que es constante ya que es independiente del tiempo  $t$ , está dado por;

$$2H = -k\dot{t} + \left(1 - 2\frac{M_{eff}(r)}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + h\dot{\phi} = -1, \quad (5-101)$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que la partícula se asume en reposo en el infinito.

Resolviendo el sistema de ecuaciones (5-98) y (5-100) para  $\dot{t}$  y  $\dot{\phi}$ , y sustituyendo en la Ec.(5-101), se obtiene la ecuación de *energía*

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \frac{1}{2}(k^2 - 1), \quad (5-102)$$

donde el potencial efectivo por unidad de masa está dado por:

$$V_{eff}(r) = -\frac{M_{eff}(r)}{r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{M_{eff}(r)h^2}{r^3}. \quad (5-103)$$

Otra ecuación útil para describir las órbitas de partículas masivas, y que exprese  $r$  como función de  $\phi$  (ver [132]), puede obtenerse usando Ec.(5-100) para escribir:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\phi}. \quad (5-104)$$

Sustituyendo en la Ec.(5-102) y haciendo el cambio de variable  $u = 1/r$ , tenemos:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{k^2 - 1}{h^2} + \frac{2uM_{eff}(u)}{h^2} + 2u^3M_{eff}(u). \quad (5-105)$$

Derivando esta expresión con respecto a  $\phi$  tenemos finalmente:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{M}{h^2}(1 - 3\xi u^2) + Mu^2(3 - 5\xi u^2). \quad (5-106)$$

### Orbitas circulares de partículas masivas

Para determinar las ecuaciones básicas que describen la estructura radial promedio del disco, primero calculamos explícitamente el momento angular específico  $h$ , la energía específica  $k$  y la velocidad angular  $\Omega$  de partículas moviéndose en trayectoria circular.

Para órbitas circulares en el plano ecuatorial  $\dot{r} = 0$  tal que  $r$  (y  $u = 1/r$ ) es constante. Así, de la Ec.(5-106) obtenemos una expresión para el momento angular específico  $h$  que escribimos por conveniencia en términos de las cantidades adimensionales  $x = r/M$  y  $\tilde{\xi} = \xi/M^2$ :

$$h = \frac{Mx\sqrt{x^2-3\tilde{\xi}}}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + 5\tilde{\xi}}}. \quad (5-107)$$

Imponiendo la condición  $\dot{r} = 0$  en la ecuación (5-102), y sustituyendo la expresión por  $h$  nos permite identificar la energía específica  $k$

$$k = \frac{x^3 - 2x^2 + 2\tilde{\xi}}{x^{3/2}\sqrt{x^3 - 3x^2 + 5\tilde{\xi}}}. \quad (5-108)$$

Aplicando las ecuaciones (5-107) y (5-108), la velocidad angular puede calcularse de las ecuaciones (5-98) y (5-100) como:

$$\Omega = \frac{\dot{\phi}}{t} = \frac{1}{Mx^{5/2}} \sqrt{x^2 - 3\tilde{\xi}}. \quad (5-109)$$

Al sustituir la Ec.(5-107) en la Ec.(5-103), el potencial efectivo adquiere la forma

$$V_{eff} = -\frac{x^2 - \tilde{\xi}}{x^3} \left( 1 + \frac{x^2 - 3\tilde{\xi}}{x^3 - 3x^2 + 5\tilde{\xi}} \right) + \frac{1}{2} \frac{x^2 - 3\tilde{\xi}}{x^3 - 3x^2 + 5\tilde{\xi}}. \quad (5-110)$$

Debe notarse que  $V_{eff}$ ,  $h$ ,  $k$  y  $\Omega$  se reducen a las expresiones clásicas en el límite  $\tilde{\xi} \rightarrow 0$ .

Las órbitas circulares ocurren en el mínimo local del potencial efectivo. Por lo tanto, el radio adimensional de la órbita geodésica circular interna más estable  $x_{ISCO}$  se calcula a partir de

$$\frac{d^2 V_{eff}}{dx^2} = 0, \quad (5-111)$$

donde, debido al hecho de que  $h$  es constante para órbitas circulares, las derivadas deben calcularse para  $V_{eff}$  dado por la Ec.(5-103) [133–136]. Esto produce:

$$\frac{d^2 V_{eff}}{dx^2} = -\frac{2x^2(x^2 - 6\tilde{\xi}) - 3\bar{h}^2(x^2(x - 4) + 10\tilde{\xi})}{x^7}, \quad (5-112)$$

donde  $\bar{h} = h/M$ . Reemplazando la Ec.(5-107) en la Ec.(5-112), se tiene

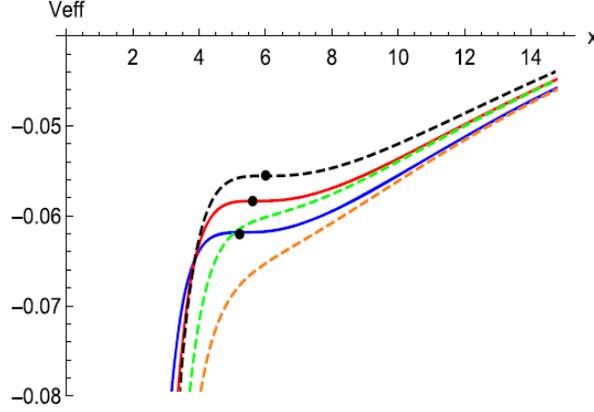
$$\frac{d^2 V_{eff}}{dx^2} = \frac{x^4(x - 6) + x^2(3x + 20)\tilde{\xi} - 30\tilde{\xi}^2}{(x - 3)x^7 + 5x^5\tilde{\xi}}. \quad (5-113)$$

En la tabla (5-1) se reportan los valores de la ISCO adimensional para los valores seleccionados de  $\tilde{\xi}$ . Alternativamente,  $x_{ISCO}$  se puede calcular a partir de [137]

$\tilde{\xi}$	$x_{ISCO}$
16/27	5.2439
0.30	5.6559
0	6

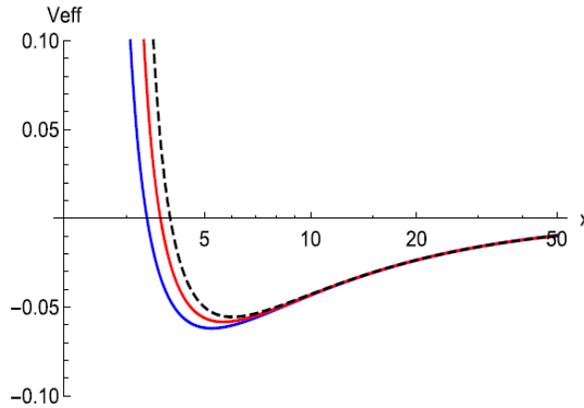
**Tabla 5-1.:** ISCO para disco delgado en función de valores seccionados de  $\tilde{\xi}$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dk}{dx} = 0. \quad (5-114)$$

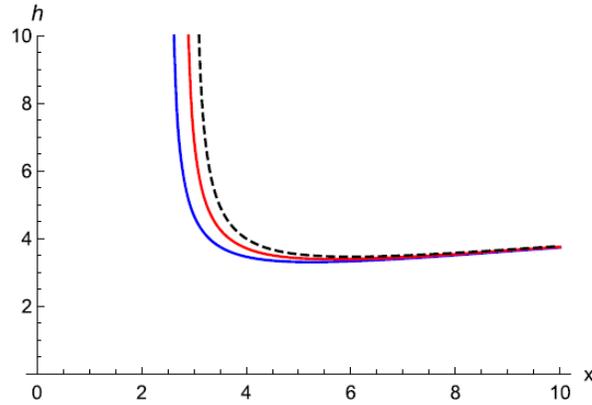


**Figura 5-15.:** Potencial efectivo (c.f.5-103) para los valores de  $\bar{h} = h/M$ ,  $\bar{h} = h/M$  evaluados en la ISCO tal que  $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$  (azul),  $\tilde{\xi} = 0,3$  (rojo) y para el caso clásico  $\tilde{\xi} = 0$  (línea punteada negra). Las líneas punteadas verdes y naranjas  $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$  y  $\tilde{\xi} = 0,3$  respectivamente.

Las líneas discontinuas (punteadas) de colores verdes y naranjas muestran el potencial efectivo clásico relativista para los valores de  $\bar{h}$  correspondientes al agujero negro tipo-Schwarzschild Mejorado *RGI* cuando  $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$  y  $\tilde{\xi} = 0,3$  respectivamente. Los puntos negros indican la localización de las ISCO para cada uno de los tres casos. Es evidente que para  $\tilde{\xi} \neq 0$  solamente el potencial efectivo para el agujero negro de Schwarzschild *RGI* desarrolla un mínimo que se desplaza a valores más pequeños de  $x$ .



**Figura 5-16.:** Potencial efectivo  $V_{eff}$  vs.  $x$  para varios valores de  $\tilde{\xi} = \xi/M^2$ . De izquierda a derecha  $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$  (azul),  $\tilde{\xi} = 0,3$  (rojo). El caso clásico  $\tilde{\xi} = 0$  está dado por la curva negra discontinua.



**Figura 5-17.:** Momentum angular  $\bar{h} = h/M$  vs.  $x$  para para varios valores de  $\tilde{\xi} = \xi/M^2$ . De izquierda a derecha  $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$  (azul),  $\tilde{\xi} = 0,3$  (rojo). La curva discontinua corresponde al caso clásico  $\tilde{\xi} = 0$

En las figuras (5-16) y (5-17) se grafica  $V_{eff}$  (c.f.5-103) y  $\bar{h} = h/M$  respectivamente como funciones de  $x$  para los mismos valores del parámetro libre  $\tilde{\xi}$  en el rango  $0 \leq \tilde{\xi} \leq 16/27$  y se compara con la solución clásica.

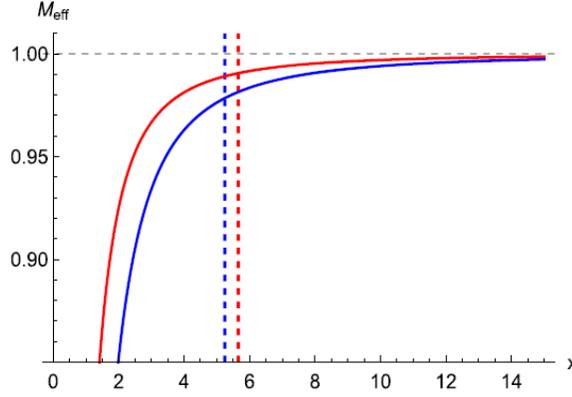
De estas figuras, y de la tabla (5-1) se deduce que los efectos de la gravedad cuántica desplazan el radio de la ISCO a un valor más pequeño y, al mismo tiempo, desplazan los valores mínimos del potencial efectivo y el momento angular  $\bar{h}$  hacia valores ligeramente más pequeños en las proximidades de  $x_{ISCO}$ .

Las ecuaciones (5-103) y (5-107) muestran que dos efectos de la gravedad cuántica se combinan para hacer más profundo el pozo potencial y desplazar  $x_{ISCO}$  hacia valores pequeños de  $x$ :

- La presencia de  $M_{eff} < M$ .
- La disminución de los valores de  $h$  para  $\tilde{\xi} \neq 0$ .

La figura (5-18) grafica la masa efectiva como función de  $x$ , la cual ilustra el hecho que para un valor fijo de  $\tilde{\xi}$  una partícula cayendo hacia un agujero negro *ve* una masa  $M_{eff}$  que disminuye para valores decrecientes de  $x$ .

Por lo tanto aunque el momento angular también disminuye, a medida que la partícula gira en espiral hacia el agujero negro, siente una atracción gravitacional progresivamente más débil que le permite permanecer en una órbita circular estable con un  $x_{ISCO}$  más pequeño.



**Figura 5-18.:** Masa efectiva como función de  $x$  for  $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$  (azul) y  $\tilde{\xi} = 0,3$  (rojo). La línea discontinua vertical indica el ISCO para los mismos valores de  $\tilde{\xi}$  respectivamente.

### 5.2.2. Disco de acreción delgado relativista

El modelo no relativista más simple de un disco de acreción alrededor de un objeto central compacto supone que la materia gira en espiral hacia adentro y pierde momentum angular que, debido a la viscosidad turbulenta, se transfiere hacia afuera a través del disco. A medida que el gas se mueve hacia adentro, pierde energía gravitacional y se calienta emitiendo energía térmica [138].

El tratamiento en relatividad general de un disco de acreción alrededor de un agujero negro se presentó por primera vez en [118, 137]. Este modelo asume un disco en un estado cuasi-estable que se encuentra en el plano ecuatorial de una geometría de espacio-tiempo de fondo estacionaria, axialmente simétrica, con el material del disco moviéndose en órbitas circulares.

El disco es delgado, es decir, su espesor medio máximo  $H$  es tal que  $H/R \ll 1$  siendo  $R$  el radio característico del disco. El calor generado por la tensión y la fricción dinámica se emite de manera eficiente en forma de radiación, principalmente desde la superficie del disco, y las cantidades que describen las propiedades térmicas del disco se promedian sobre el ángulo azimutal  $\phi = 2\pi$ , sobre la altura  $H$  y sobre la escala del tiempo  $\Delta t$  que el gas necesita para fluir hacia adentro una distancia  $2H$ . Con estos supuestos, el promedio temporal de la estructura radial del disco se obtiene a partir de las leyes de conservación de la masa en reposo, la energía y el momentum angular. De la integración de la ecuación de conservación de masa se sigue la constancia de la tasa de acreción de masa:

$$\dot{M} = -2\pi r \Sigma(r) u^r = \text{constante} \quad (5-115)$$

donde  $\Sigma(r)$  es la densidad superficial del disco y  $u^r$  es la velocidad radial. La combinación de las leyes de la conservación de la energía y la conservación del momento angular proporciona el diferencial de luminosidad  $\mathcal{L}_\infty$  medida por un observador en el infinito [137, 139].

$$\frac{d\mathcal{L}_\infty}{d\ln r} = 4\pi r \sqrt{-g} k \mathcal{F}(r), \quad (5-116)$$

donde el flujo de la energía radiante  $\mathcal{F}$  emitido desde la cara superior del disco en el marco local del fluido en acreción se expresa en términos del momentum angular específico  $h$ , la energía específica  $k$  y la velocidad angular  $\Omega$ , por:

$$\mathcal{F}(r) = -\frac{\dot{M}}{4\pi\sqrt{-g}} \frac{1}{(k - \Omega h)^2} \frac{d\Omega}{dr} \times \int_{r_{ISCO}}^r (k - \Omega h) \frac{dh}{dr} dr, \quad (5-117)$$

donde  $\sqrt{-g} = r$  tanto para la métrica RGI como para el espacio-tiempo clásico de Schwarzschild. La integración numérica de la Ec.(5-117) se facilita aplicando la relación  $dk/dr = \Omega(dh/dr)$  [137] e integrando por partes:

$$\int_{r_{ISCO}}^r (k - \Omega h) \frac{dh}{dr} dr = kh - k_{ISCO}h_{ISCO} - 2 \int_{r_{ISCO}}^r h \frac{dk}{dr} dr. \quad (5-118)$$

Dado que el disco se encuentra en equilibrio termodinámico, la radiación emitida se puede considerar como una radiación de cuerpo negro con la temperatura dada por

$$T(r) = \sigma^{-1/4} \mathcal{F}(r)^{1/4} \quad (5-119)$$

donde  $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzmann.

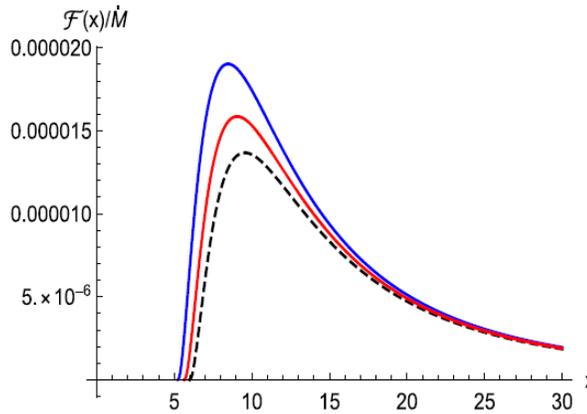
Finalmente, siempre que todos los fotones emitidos puedan escapar al infinito, la eficiencia  $\epsilon$  de conversión de la masa capturada en radiación se obtiene a partir de la pérdida de energía por una partícula de prueba que se mueve desde el infinito hasta el límite interno del disco. Luego, considerando que para  $r \rightarrow \infty$ ,  $k_\infty \approx 1$ , se tiene:

$$\epsilon = \frac{k_\infty - k_{ISCO}}{k_\infty} \approx 1 - k_{ISCO}. \quad (5-120)$$

### 5.2.3. Radiación de discos delgados de acreción en AS con derivadas de orden superior

Se analizan las propiedades de la radiación de los discos de acreción delgados alrededor de un agujero negro Schwarzschild mejorado RGI en la gravedad descrita por seguridad asintótica *AS* con derivadas superiores, y contrastando con las predicciones de la relatividad general. Se asume que la masa del agujero negro  $M$  y la tasa de acreción  $\dot{M}$  como valores constantes proporcionados por las observaciones [56, 104, 112, 140]. Para propósitos de comparación, en lo que sigue haremos  $M = 1$  y calculamos las propiedades térmicas del disco en unidades de la tasa de acreción [132].

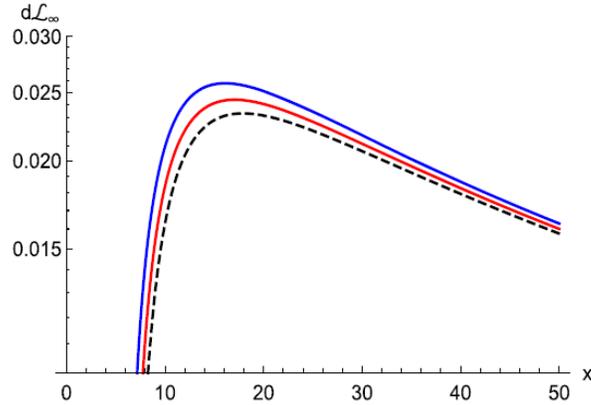
En las figuras (5-19), (5-20), (5-21) se grafican los perfiles radiales del promedio temporal del flujo de energía por unidad de tasa de acreción, la luminosidad diferencial por unidad de tasa de acreción y el perfil radial de la temperatura del disco de acreción (más precisamente, el perfil radial de  $\sigma^{1/4}T/\dot{M}^{1/4}$ ) respectivamente para diferentes valores del parámetro libre adimensional  $\tilde{\xi}$  es decir, por el valor crítico  $\tilde{\xi}_c = 16/27$ , para  $\tilde{\xi} = 0,3$ , y para la solución clásica  $\tilde{\xi} = 0$ .



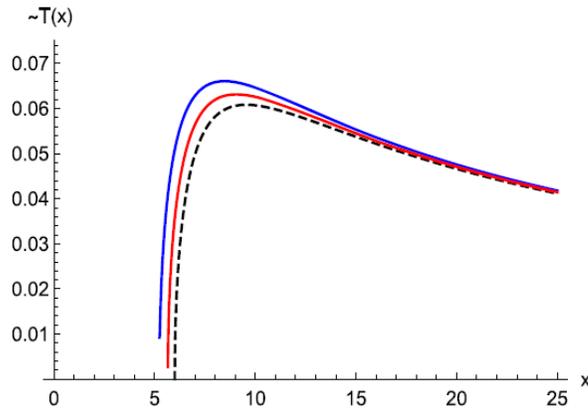
**Figura 5-19.:** Flujo de energía por unidad de la tasa de acreción de un disco de acreción delgado alrededor de un agujero negro Schwarzschild RGI para  $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$  (azul) and  $\tilde{\xi} = 0,3$  (rojo). La curva negra punteada representa el flujo de energía alrededor de un agujero negro clásico de Schwarzschild ( $\tilde{\xi} = 0$ ).

De la figura (5-19) se verifica que con el incremento de  $\tilde{\xi}$  se irradia más energía desde el disco alrededor del agujero negro RGI que del disco clásico, y que asociado al desplazamiento del borde interior del disco hacia valores menores de  $x$ , hay tanto un aumento, como un desplazamiento hacia dentro del valor máximo del perfil radial del flujo.

En particular, para  $\tilde{\xi}_c = 16/27$ , el incremento del máximo del perfil es  $\sim 39\%$ , mientras que para  $\tilde{\xi} = 0,3$  el cambio porcentual es  $\sim 17\%$ .



**Figura 5-20.:** Gráficas de la luminosidad diferencial en el infinito por unidad de tasa de acreción de un disco de acreción delgado alrededor de un agujero negro RGI Schwarzschild para  $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$  (azul) y  $\tilde{\xi} = 0,3$  (rojo). La línea discontinua un disco alrededor de la solución clásica ( $\tilde{\xi} = 0$ ).



**Figura 5-21.:** Perfiles radiales de la temperatura por unidad de tasa de acreción de un disco de acreción delgado alrededor de un agujero negro Schwarzschild RGI para  $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$  (azul) y  $\tilde{\xi} = 0,3$  (rojo). La línea discontinua corresponde a la temperatura del disco alrededor de un agujero negro de Schwarzschild en *GR*

Las figuras (5-20) y (5-21) muestran que estos efectos también están presentes en la luminosidad diferencial y la temperatura del disco de acreción. Para  $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_c = 16/27$ , el pico de la luminosidad diferencial es  $\sim 10\%$  mayor que en el caso relativista y el disco es  $\sim 8\%$  más caliente cuando rodea el agujero negro Scharzschild *RGI*.

En la tabla (5-2) se registran los valores de la energía específica en la ISCO y los correspondientes valores de la eficiencia  $\epsilon$  para la conversión de masa acretada en radiación, cuando se despreja la captura de fotones por el agujero negro, para los mismos valores de  $\tilde{\xi}$  estudiados previamente. Se observa que el valor de  $\epsilon$  siempre aumenta con el incremento de  $\tilde{\xi}$ , lo que significa que el agujero negro Schwarzschild RGI es un motor más eficiente para convertir la acreción de masa en radiación. El aumento del valor máximo de las propiedades térmicas

$\tilde{\xi}$	$k_{ISCO}$	$\epsilon$ (%)
16/27	0.9360	6.40
0.30	0.9398	6.02
0	0.9428	5.72

**Tabla 5-2.:** Energía específica en la ISCO y la eficiencia  $\epsilon$  de la conversión de la acreción de masa en radiación para diferentes valores de  $\tilde{\xi}$

del disco y de la eficiencia para la conversión de la acreción de masa en radiación está directamente relacionado con el pozo de potencial más profundo asociado con el agujero negro RGI y con el cambio de la ISCO a valores más pequeños. De hecho, un radio ISCO más pequeño permite que la energía gravitacional se extraiga desde un pozo de potencial más profundo, de modo que el material del disco pueda convertir más energía gravitacional en energía térmica.

Dado que una ISCO más pequeña puede asociarse a un agujero negro de espín distinto de cero, surge la pregunta sobre las posibles aplicaciones astrofísicas de nuestros resultados. Esto, a su vez, requiere responder a la pregunta de si los valores de  $\tilde{\xi}$  en el rango permitido  $0 \leq \tilde{\xi} \leq 16/27$  puede imitar el espín de un agujero negro tipo Kerr, en el sentido que el parámetro de espín  $a_* = a/M$  y el parámetro adimensional  $\tilde{\xi}$  dan lugar al mismo radio de la ISCO.

Para abordar este problema, recordamos que el radio de la ISCO para órbitas circulares co-rotantes alrededor de un agujero negro de Kerr viene dado por [141].

$$r_{ISCO} = 3 + Z_2 - \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)}, \quad (5-121)$$

donde

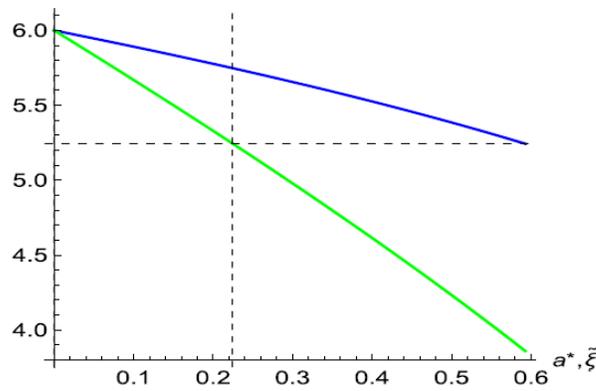
$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 + \sqrt[3]{1 - a^2}(\sqrt[3]{1 - a} + \sqrt[3]{1 + a}), \\ Z_2 &= \sqrt{3a^2 + Z_1^2} \end{aligned}$$

La ISCO del disco de acreción delgado alrededor del agujero negro de Schwarzschild proviene

de resolver la ecuación (5-111) utilizando (5-113), es decir;

$$x^4(x - 6) + x^2(3x + 20)\tilde{\xi} - 30\tilde{\xi}^2 = 0. \quad (5-122)$$

La figura (5-22) ilustra la relación entre los parámetros  $a_*$  y  $\tilde{\xi}$  donde la intersección de la línea vertical discontinua con el eje horizontal, nos permite concluir que el parámetro  $\tilde{\xi}$  puede imitar  $a_*$  hasta un valor máximo  $a_*^{SA} = 0,2241$  el cual se obtiene cuando el parámetro adimensional  $\tilde{\xi}$  toma su valor crítico  $\tilde{\xi}_c = 16/27$ . Esto significa que el agujero negro Schwarzschild RGI que se está estudiando puede imitar agujeros negros que rotan muy lentamente. Un ejemplo interesante es el agujero negro de masa estelar extragaláctica LMC X-3, que es un sistema binario con  $a_* = 0,21_{-0,22}^{+0,18}$  (90 % C.L.) [142] con masa  $M = 6,98 \pm 0,56M_\odot$  [143] y que presenta un radio de disco interno fijo asociado con la ISCO relativista [144]



**Figura 5-22.:** Dependencia del radio de la ISCO  $a_*$  para un agujero negro de Kerr (verde) y en el parámetro  $\tilde{\xi}$  para un agujero negro Schwarzschild RGI (azul)

Estos valores observacionales no difieren mucho de los presentados en [144], donde  $a_*$  está determinado en el rango  $0,22 - 0,41$  (90 % C.L.), y  $M$  está determinada en el rango  $5,35 - 6,22M_\odot$ . Por lo tanto, asumiendo el modelo relativista de disco de acreción delgado como apropiado para describir el disco alrededor de LMC X-3<sup>2</sup> ya que  $a_*^{SA}$  está dentro del rango de incertidumbre del valor obtenido de las observaciones, podemos fijar el parámetro adimensional  $\tilde{\xi}$  al valor  $\tilde{\xi} \simeq 16/27 = 0,5926$ . Restableciendo unidades y escribiendo  $G_0 = M_{Pl}^{-2}$ , el valor de  $\tilde{\xi}$  se traduce en el siguiente valor para  $\xi$

$$\xi = \tilde{\xi} \frac{M^2}{M_{Pl}^4} \simeq 4,41 \times 10^{92}, \quad (5-123)$$

para  $M \approx 6,5M_\odot$ . Como se indica en [147] un número tan grande puede estar asociado al hecho de que *AS* fija la escala de la nueva física del orden de la escala de Planck.

<sup>2</sup>Ver las referencias [145, 146] para la discusión en las limitaciones de esta suposición.

Es importante notar que los resultados obtenidos en esta sección muestran que los efectos de la gravedad cuántica de la teoría *AS* con términos de derivadas superiores no están restringidos al interior del horizonte de un agujero negro o su vecindad inmediata, sino que persisten más allá del horizonte, incluso dando lugar a modificaciones de las propiedades térmicas del disco de acreción que rodea un agujero negro de Schwarzschild.

En este punto dos observaciones son pertinentes:

- Es importante señalar que modificaciones a la métrica de Schwarzschild como la predicha en el límite infrarrojo en *AS* con derivadas de orden superior (4-66), también surgen en extensiones clásicas a la relatividad general como en gravedad  $f(R)$  y en la llamada gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet. En la primera, se extiende la acción de Einstein-Hilbert de tal manera que incluya términos no lineales  $f(R)$  en el escalar de Ricci  $R$

$$S[g] = \frac{c^3}{16\pi G} \int (R + f(R)) \sqrt{-g} d^4x. \quad (5-124)$$

En este caso puede mostrarse [148] que para escalar de Ricci constante  $R_0$  la métrica de Schwarzschild adquiere la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5-125)$$

, donde ( $G = c = 1$ )

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{R_0}{12}r^2, \quad (5-126)$$

y donde  $R_0$  puede tomar valores positivos y negativos en el rango  $R_0 \in (-\infty, 4/9]$ . En [135] se muestra que para valores positivos de  $R_0$ , el radio de la ISCO es mayor que el correspondiente radio en relatividad general tanto para agujero negro de Schwarzschild como para agujero negro de Kerr; sin embargo, para valores negativos de  $R_0$ , el radio de la ISCO es menor que en relatividad general para los dos tipos de agujero negro mencionados. Este último caso corresponde a lo que en esta tesis se ha hallado para espacio-tiempo esféricamente simétrico en el límite infrarrojo de la conjetura *AS*.

De la misma manera, en [149] se ha mostrado que en gravedad  $4D$  de Einstein-Gauss-Bonnet, la cual involucra también una modificación de la acción de Einstein-Hilbert para incluir el llamado término de Gauss-Bonnet el cual es cuadrático en el escalar de Ricci, en el tensor de Ricci y en el tensor de Riemann, surge una modificación a la métrica de un espacio-tiempo esféricamente simétrico tal que el coeficiente métrico  $f(r)$  adquiere la forma

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{8\alpha M}{r^3}} \right), \quad (5-127)$$

donde el parámetro  $\alpha$  puede tomar valores en el rango  $\alpha \in (-8, 1]$ . Resulta que cuando  $-8 \leq \alpha < 0$  el radio de la ISCO es mayor que para agujero negro de Schwarzschild en relatividad general, mientras que para  $0 < \alpha \leq 1$ , ese radio es más pequeño que para el mismo agujero negro en relatividad general clásica. De nuevo, este segundo caso coincide con el correspondiente hallazgo en esta tesis.

Lo anterior implica que, aunque resulta interesante que la predicción de una propuesta a gravedad cuántica en límite de bajas energías produzca resultados análogos a extensiones clásicas de la relatividad general ampliamente discutidas en la literatura científica, resulta también difícil distinguir entre esos marcos teóricos sin un análisis más detallado del proceso de acreción que de lugar a distinciones inequívocas entre ellos.

- Una segunda observación importante tiene que ver con el hecho de que a partir de la forma del coeficiente  $f(R)$  en la Ec.(4-66)

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M\xi}{r^3}, \quad (5-128)$$

La estructura métrica que se deriva al aplicar el formalismo AS exhibe rompimiento de la simetría esférica característica de la métrica de Schwarzschild, conforme inicialmente invocada para el problema objeto de estudio en esta tesis. Para determinar el rompimiento de estas simetrías se utiliza el concepto de vector de Killing a través de la derivada de Lie de la métrica

$$\mathcal{L}_{\mathbf{k}}g_{\mu\nu} = 0 \quad (5-129)$$

Al comparar los vectores de Killing para la métrica de Schwarzschild con los obtenidos al aplicar el formalismo AS se evidencia el rompimiento de la simetría esférica. Por lo tanto, es importante explorar la posibilidad de que el tercer término de la Ec.(4-66) pueda interpretarse como un momento de cuadrupolo de la fuente  $q = 2M\xi$  inducido por efectos cuánticos [150, 151]. A continuación se presentan las diferencias entre los vectores de Killing para la métrica de Schwarzschild mejorada y la métrica de Schwarzschild clásica.

**Vectores Killing Scharzschild AS**

$$(2\xi G + 2r^2) \left( (V_4)_\phi \right) + \left( -4\theta \left( Gmr - \frac{1}{2}\xi G - \frac{1}{2}r^2 \right) rV_2 + V_3 (\xi G + r^2) \right) \sin^2 = 0 \quad (5-130)$$

$$2 \left( (V_1)_t \right) (\xi G + r^2)^3 - 4 \left( \left( mr - \frac{\xi}{2} \right) G - \frac{r^2}{2} \right) m (\xi G - r^2) V_2 G = 0$$

$$4 \left( \left( mr - \frac{\xi}{2} \right) G - \frac{r^2}{2} \right) (\xi G + r^2) \left( (V_2)_r \right) + 2Gm (\xi G - r^2) V_2 = 0$$

$$(V_1)_\phi + (V_4)_t = 0, (V_1)_\theta + (V_3)_t = 0$$

$$\left( (V_3)_r \right) r + \left( (V_2)_\theta \right) r - 2V_3 = 0$$

$$\left( (V_4)_r \right) r + \left( (V_2)_\phi \right) r - 2V_4 = 0$$

$$\left( (V_4)_\theta \right) \theta + \left( (V_3)_\phi \right) \theta - V_4 = 0$$

$$2 \left( \left( mr - \frac{\xi}{2} \right) G - \frac{r^2}{2} \right) (\xi G + r^2) \left( (V_1)_r \right) +$$

$$2 \left( \left( mr - \frac{\xi}{2} \right) G - \frac{r^2}{2} \right) (\xi G + r^2) \left( (V_2)_t \right) - 2Gm (\xi G - r^2) V_1 = 0$$

$$-4GV_2mr^2 + 2GV_2r\xi + 2V_2r^3 + 2G \left( (V_3)_\theta \right) \xi + 2 \left( (V_3)_\theta \right) r^2 = 0$$

**Vectores Killing Scharzschild**

$$\left( (4r^3 - 4r\xi) m - 2r^4 \right) \left( (V_2)_r \right) - 2m (r^2 - 3\xi) V_2 = 0 \quad (5-131)$$

$$2 \left( (V_1)_t \right) r^7 + 4V_2 (r^2 - 3\xi) m \left( (r^2 - \xi) m - \frac{r^3}{2} \right) = 0$$

$$2 \left( (V_4)_\phi \right) r^2 - 4 \left( \theta \left( r^2 m - \frac{1}{2}r^3 - m\xi \right) V_2 - \frac{V_3 r^2}{4} \right) \sin^2 = 0$$

$$(V_1)_\phi + (V_4)_t = 0, (V_1)_\theta + (V_3)_t = 0$$

$$(2m, r^3 - r^4 - 2mr\xi) \left( (V_1)_r \right) + (2mr^3 - r^4 - 2mr\xi) \left( (V_2)_t \right) + 2m (r^2 - 3\xi) V_1 = 0$$

$$\left( (V_3)_r \right) r + \left( (V_2)_\theta \right) r - 2V_3 = 0$$

$$\left( (V_4)_r \right) r + \left( (V_2)_\phi \right) r - 2V_4 = 0$$

$$\left( (V_4)_\theta \right) \theta + \left( (V_3)_\phi \right) \theta - V_4 = 0$$

$$-4V_2mr^2 + 2V_2r^3 + 4V_2m\xi + 2 \left( (V_3)_\theta \right) r^2 = 0$$

# 6. Conclusiones y recomendaciones

## 6.1. Conclusiones

En este trabajo, se revisó el problema previamente analizado en [126] considerando la acreción estática hacia un agujero negro de Schwarzschild (Grupo de Renormalización) mejorado R-G en la teoría de seguridad asintótica  $AS$  con derivadas de orden superior. En este sentido, el proceso de acreción es considerado como una corrección cuántica a la conocida acreción esféricamente simétrica en relatividad general  $GR$ .

Al igual que en [126], se utilizaron fluidos isotérmicos como fluido de prueba y se especializó en los casos: ultra-rígido ( $k = 1$ ), ultra-relativista ( $k = 1/2$ ), de radiación ( $k = 1/3$ ) y sub-relativista ( $k = 1/4$ ). Porque nuestro interés ha sido el describir los aspectos más generales del problema, se despreciaron los efectos viscosos, transporte de calor, auto gravedad del fluido y efectos relacionados a la reacción inversa (Back-reaction) del fluido sobre la geometría.

Siguiendo el procedimiento del sistema hamiltoniano dinámico propuesto en [121–123], se recuperaron los resultados de los autores en [126] para la acreción de fluidos ultra-rígido, ultra-relativista, de radiación y sub-relativista. Sin embargo, en contraste con lo que estaba establecido en ese estudio, se encontró que la acreción en fluidos ultra-relativistas son físicamente posibles en seguridad asintótica  $AS$ . De hecho, para este tipo de fluido, como para los otros que aquí se consideraron, se encontró no solo un desplazamiento de las órbitas del hamiltoniano en el plano  $(v, r)$  hacia el objeto central y una mejora de la velocidad de flujo cerca del agujero negro en comparación con lo que sucede en  $GR$ , pero también regímenes subsónicos, supersónicos y transónicos. Este es un resultado importante porque no parece haber una razón física para la falta de significado físico de la acreción de un fluido ultra-relativista en  $AS$ . Como se esperaba, los efectos cuánticos sobre la acreción están totalmente gobernados por el parámetro  $\xi$  en el coeficiente métrico  $f(r)$  del grupo de renormalización mejorado  $R - G$  en la ecuación (4-66) con el comportamiento clásico recuperado en el límite  $\xi \rightarrow 0$ .

También se analizó el tema de la estabilidad de la acreción y se ha contrastado los resultados

con la estabilidad conocida del flujo de acreción en la relatividad general clásica. Utilizando un procedimiento perturbativo basado en la ecuación de continuidad, la tasa de acreción de masa de la materia que cae, considerada como un fluido isotérmico, ha sido sometida a pequeñas perturbaciones lineales en forma de onda estacionaria y en forma de onda viajera.

Para la perturbación de la onda estacionaria, se concluye que, como en el ámbito relativista general, la perturbación se amortigua en el tiempo para que la acreción sea estable. En cuanto a la perturbación de la onda viajera un criterio simple, basado en el comportamiento del coeficiente  $k_0$  en la expansión en serie de la parte espacial de la perturbación, ha permitido comparar entre los marcos de referencias cuántico y clásico, y llegar a la conclusión de que, donde habrá que tener en cuenta los efectos de la gravedad cuántica, la amplitud de la perturbación de la onda viajera para un fluido ultra rígido aumenta en comparación con la clásica. Esto indica que el acoplamiento de este tipo de fluido con la curvatura espacio-temporal es más débil en *AS* que en *GR*. Para fluidos ultra-relativistas, de radiación y sub-relativistas, la amplitud de la perturbación se reduce o aumenta dependiendo de si el observador local está ubicado en la vecindad inmediata del horizonte del agujero negro o no, respectivamente. El valor de la coordenada radial  $r_{\text{cross}}$  en la que tiene lugar esta transición se puede calcular fácilmente resolviendo para  $r$  la ecuación que iguala la amplitud clásica con la cuántica.

Esto significa que el acoplamiento del fluido en acreción con la geometría del espacio-tiempo, que es responsable del amortiguamiento de la perturbación, es más fuerte en el caso cuántico que en el clásico para  $r < r_{\text{cross}}$  y más débil para  $r > r_{\text{cross}}$ . Dado que la cantidad perturbada ha sido la tasa de acreción de masa, una cantidad física que en principio es medible, sería muy interesante estudiar los posibles efectos observables que podrían utilizarse para probar la seguridad asintótica en el futuro.

En la sección **Disco de acreción alrededor de un agujero negro de Schwarzschild en Seguridad Asintótica** se estudió, por primera vez, según nuestro conocimiento, correcciones de la gravedad cuántica a las propiedades térmicas del disco de acreción delgado relativista alrededor de un agujero negro RGI-Schwarzschild en el límite *IR* del escenario de seguridad asintótica *AS* para la gravedad cuántica con términos de derivadas de orden superior. Se calculó, en particular, correcciones para el flujo de energía promediado en el tiempo, el diferencial de luminosidad en el infinito, la temperatura del disco y la eficiencia de conversión de la masa acretada en radiación. Cuando se comparó con las predicciones de la relatividad general, se encontró que un incremento del parámetro  $\tilde{\xi}$  que codifica los efectos cuánticos en la geometría del espacio-tiempo, no solo conduce a un desplazamiento del radio del borde interno del disco (ISCO), hacia valores menores, pero, como consecuencia, también se encontró:

- Incremento de la energía irradiada desde el disco.
- Incremento de la temperatura del disco.
- Aumento del diferencial de luminosidad que alcanza un observador en el infinito.
- Desplazamiento del pico de los perfiles radiales de estas propiedades térmicas hacia valores más pequeños de la coordenada radial.
- Mayor eficiencia de conversión de la acreción de masa en radiación.

Esta conclusión debe tomarse con cautela, ya que se basa en la suposición de que el modelo de disco delgado relativista es apropiado para describir el disco de acreción en LMC X-3, mientras que los datos de observación muestran que este modelo es preciso a bajas luminosidades pero inapropiado para altas luminosidades, un régimen para el que un disco de acreción delgado proporciona una descripción mejor [145, 146].

Es importante señalar, una vez más, que los resultados muestran que los efectos de la gravedad cuántica sobre la física de los agujeros negros se manifiestan a distancias incluso mayores que el radio de la ISCO y no se limitan al interior del horizonte o sus inmediaciones.

Además del hecho de que AS no es el único marco teórico en el que se predice una reducción del ISCO del disco de acreción, es importante también resaltar que en esta tesis no se ha pretendido determinar valores exactos de observables astrofísicos que permitan una comparación directa con datos observacionales con el fin de validar o no el escenario de Seguridad Asintótica, sino que solo se ha pretendido mostrar que los efectos cuánticos que predice AS se manifiestan a nivel astrofísico en el régimen de campo gravitacional intenso en el proceso de acreción hacia un agujero negro. De hecho, diferentes valores para la última órbita estable de un sistema concreto pueden deberse a diferentes valores del spin del agujero negro dentro de la teoría de la RG. También hay muchas otras teorías de la gravedad modificada que predicen valores variados para ese parámetro. Por tanto, hay una degeneración de modelos con similares predicciones que previene un test efectivo de estas teorías usando sistemas acretantes.

Es claro entonces que deberán imponerse restricciones adicionales provenientes de observaciones de alta precisión sobre otras predicciones específicas del escenario SA con el fin de poder contrastarlo, sea con otras teorías clásicas que extienden la relatividad general o con otras propuestas a teorías cuánticas de la gravedad. En este sentido, es importante recordar que un sistema acretante es un sistema bastante complejo desde el punto de vista de sus componentes por lo que es deseable que esas restricciones sean impuestas sobre sistemas más *limpios* como, por ejemplo, la emisión de ondas gravitacionales de sistemas binarios de agu-

jeros negros o estabilidad de estrellas de neutrones. En este último caso, las masas máximas de estos objetos podrían diferir fuertemente de lo esperable en RG. Hay estudios hechos al respecto en otras teorías, ver por ejemplo [152, 153].

Finalmente, las conclusiones obtenidas en esta tesis deben tomarse con precaución ya que reposan en la suposición de que el modelo relativista de disco de acreción delgado es apropiado para describir el proceso de acreción hacia un agujero negro. En este sentido, no debe olvidarse que, en muchos casos, el llamado disco de acreción *delgado* es un modelo más adecuado sobre todo cuando las luminosidades son altas.

Se piensa que estos resultados son un punto de partida para motivar el estudio de los efectos de la gravitación cuántica en entornos de agujeros negros más realistas, como discos de acreción alrededor de un agujero negro RGI-Kerr, como una ruta alternativa o complementaria para confrontar las predicciones de seguridad asintótica con observaciones astrofísicas.

## 6.2. Recomendaciones

Después de este trabajo de investigación en agujeros negros de Schwarzschild tanto en de Sitter como anti de Sitter, también las propiedades térmicas del disco de acreción delgado relativista alrededor de un agujero negro RGI-Schwarzschild en el límite  $IR$  y obtenerse resultados como que la a perturbación se amortigua en el tiempo para que la acumulación sea estables y encontrar que la acreción en fluidos ultra-relativistas son físicamente posibles en seguridad asintótica  $AS$  y que los efectos gravedad cuántica sobre la física de los agujeros negros se manifiestan a distancias incluso mayores que el radio de la ISCO, se puede extender la investigación de efectos cuánticos gravitacionales a agujeros negros más realistas como el agujero negro rotante de Kerr. También, se puede evaluar si la acreción a algún candidato real a agujero negro puede explicarse en el contexto de la Seguridad Asintótica. Esto es importante como forma de contrastar esta teoría cuántica de la gravitación a partir de los datos observacionales.

# A. Apéndice: Acreción esféricamente simétrica a la Littleton - Bondi hacia un agujero negro de Schwarzschild

El tensor Energía-Momentum para un fluido perfecto es:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (\text{A-1})$$

La ecuación de continuidad está dada por:

$$(nU^\mu)_{;\mu} = 0 \quad (\text{A-2})$$

Desde que la cuadri-velocidad en una acreción esféricamente simétrica sea  $U^\mu = dx^\mu/d\tau = (U^0, u, 0, 0)$ , luego la ecuación de continuidad puede expandirse a

$$\begin{aligned} (nU^\mu)_{;\mu} &= \nabla_\mu (nU^\mu) = \partial_\mu (nU^\mu) + \Gamma_{\mu\sigma}^\mu (nU^\sigma) \\ &= \partial_0 (nU^0) + \partial_r (nU^r) + \Gamma_{rr}^r (nU^r) + \Gamma_{tr}^t (nU^r) + \Gamma_{\theta r}^\theta (nU^r) + \Gamma_{\phi r}^\phi (nU^r) \\ &= \partial_0 (nU^0) + \partial_r (nu) + \partial_r \beta (nu) + \partial_r \alpha (nu) + 2/r (nu) \\ &= \partial_0 (nU^0) + 1/r^2 \partial_r (nur^2) \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

De la condición de normalización del 4-vector velocidad del fluido

$$\begin{aligned} U^\mu U_\mu &= U^0 U_0 + U^r U_r = g_{00} U^0 U^0 + g_{rr} U^r U^r = -f (U^0)^2 + f^{-1} u^2 = -1 \\ (U^0)^2 &= f^{-1} + f^{-2} u^2 = \frac{1}{f^2} (f + u^2) \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

Se sigue

$$U^0 = \frac{\sqrt{f + u^2}}{f} \quad (\text{A-5})$$

Reemplazando en la ecuación de continuidad

$$(nU^\mu)_{;\mu} = \frac{\partial}{\partial t} \left( n \frac{\sqrt{f + u^2}}{f} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (nur^2) = 0. \quad (\text{A-6})$$

La ecuación de la conservación del tensor Momentum-Energía es

$$\begin{aligned}\nabla^\mu T_{\mu\nu} &= T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \\ &= (\rho + p) (U^\mu{}_{;\nu} U^\nu + U^\mu U^\nu{}_{;\nu}) + (\rho + p)_{;\nu} U^\mu U^\nu + p_{;\nu} g^{\mu\nu}\end{aligned}\quad (\text{A-7})$$

La relación termodinámica para el equilibrio es obtenida minimizando la energía libre de Gibbs por barión.

$$\frac{d\rho}{dn} = \frac{\rho + p}{n} + nT \frac{ds}{dn}\quad (\text{A-8})$$

Asumiendo condición isentrópica  $ds = 0$ , la velocidad del sonido está dada por:

$$a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \frac{\partial p}{\partial n} \frac{n}{\rho + p}\quad (\text{A-9})$$

De la primera ley de la termodinámica en equilibrio

$$Tds = d\left(\frac{\rho}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right)\quad (\text{A-10})$$

Tenemos que para el proceso isentrópico  $ds = 0$  y utilizando la ecuación politrópica de estado  $p = Kn^\gamma$

$$\begin{aligned}d\left(\frac{\rho}{n}\right) &= Kn^\gamma \frac{1}{n^2} dn = Kn^{\gamma-2} dn \\ \frac{\rho}{n} &= \bar{\mu}c^2 + K \frac{n^{\gamma-1}}{\gamma-1} \\ \rho &= \bar{\mu}c^2 n + K \frac{n^\gamma}{\gamma-1}\end{aligned}\quad (\text{A-11})$$

Tomando las ecuaciones (A-10) y (A-9) podemos establecer la relación entre  $a$  y  $n$ .

$$\begin{aligned}a^2 &= \frac{\partial p}{\partial n} \frac{n}{\rho + p} = \left[ \frac{\gamma Kn^{\gamma-1}}{\bar{\mu}c^2 + Kn^{\gamma-1} \left(\frac{1}{\gamma-1}\right) + Kn^{\gamma-1}} \right] \\ a^2 &= \frac{\gamma Kn^{\gamma-1}}{\bar{\mu}c^2 + \frac{\gamma}{(\gamma-1)} Kn^{\gamma-1}}.\end{aligned}\quad (\text{A-12})$$

En la ecuación de estado para neutrones extremadamente relativistas con densidades mayores a  $((6 \times 10^{18} \text{kg/m}^3))$  la constante es  $K = 3^{\frac{1}{3}} \pi^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\hbar c}{4}\right)$ , y el índice politrópico  $\gamma = \frac{4}{3}$ .

Manejo de la conservación del tensor de Momentum-Energía  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , y por la invariancia del tensor métrico  $\delta_\mu^\rho \nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0$  una consecuencia de la restricción de conexión de transporte paralelo,

y notar que si  $(v, w) = g_{ab}v^a w^b \implies t^c \nabla_c (g_{ab}v_a w_b) = 0 \implies t^c v_a w_b \nabla_c (g_{ab}) = 0$ , que preserva ángulos y longitudes i.e., debería ser cierto para todo  $v, w, t$  -, luego

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu\nu} &= (\partial_\mu \rho + \partial_\mu p) U^\mu U^\nu + (\rho + p) [(\partial_\mu U^\mu) U^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu U^\lambda U^\nu + U^\mu (\partial_\mu U^\nu) + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu U^\mu U^\lambda] \\ + (\partial_\mu p) g^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, analizando término a término para  $\nu = 1$  esta relación conduce a:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \rho + \partial_\mu p) U^\mu U^1 &= (\partial_0 \rho + \partial_0 p) U^0 U^1 + (\partial_1 \rho + \partial_1 p) U^1 U^1 \\ &= u \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \left( \frac{\partial \rho}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} \right) + u^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial r} \right) \\ &= u \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \left( \frac{\rho+p}{n} + a^2 \frac{\rho+p}{n} \right) \frac{\partial n}{\partial t} + u^2 \left( \frac{\rho+p}{n} + a^2 \frac{\rho+p}{n} \right) \frac{\partial n}{\partial r} \\ &= \frac{\rho+p}{n} (1+a^2) \left( u \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \frac{\partial n}{\partial t} + u^2 \frac{\partial n}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

El último término

$$(\partial_\mu p) g^{\mu 1} = (\partial_1 p) g^{11} = f \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial r} = f a^2 \frac{\rho+p}{n} \frac{\partial n}{\partial r} \quad (\text{A-14})$$

El segundo término

$$\begin{aligned} (\rho+p) [(\partial_\mu U^\mu) U^1 + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu U^\lambda U^1 + U^\mu (\partial_\mu U^1) + \Gamma_{\mu\lambda}^1 U^\mu U^\lambda] & \quad (\text{A-15}) \\ &= (\rho+p) [(\partial_0 U^0) U^1 + (\partial_1 U^1) U^1 + \Gamma_{0\lambda}^0 U^\lambda U^1 + \Gamma_{i\lambda}^i U^\lambda U^1 + U^0 (\partial_0 U^1) + U^1 (\partial_1 U^1) \\ &+ \Gamma_{0\lambda}^1 U^0 U^\lambda + \Gamma_{1\lambda}^1 U^1 U^\lambda] \\ &= (\rho+p) [(\partial_0 U^0) u + (\partial_1 u) u + \Gamma_{01}^0 U^1 U^1 + \Gamma_{11}^1 U^1 U^1 + \Gamma_{21}^2 U^1 U^1 + \Gamma_{31}^3 U^1 U^1 + U^0 (\partial_0 U^1) \\ &+ U^1 (\partial_1 U^1) + \Gamma_{00}^1 U^0 U^0 + \Gamma_{11}^1 U^1 U^1] \\ &= (\rho+p) \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \right) u + \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) u + u^2 \partial_r \alpha + u^2 \partial_r \beta + \frac{1}{r} u^2 + \frac{1}{r} u^2 + \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right. \\ &+ u \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) + e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha \frac{f+u^2}{f^2} + u^2 \partial_r \beta \left. \right] \\ &= (\rho+p) \left[ \frac{1}{f \sqrt{f+u^2}} u^2 \frac{\partial u}{\partial t} + 2u \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{2u^2}{r} + \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

Uniendo los términos

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu\nu} &= \frac{\rho+p}{n} (1+a^2) \left( u \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \frac{\partial n}{\partial t} + u^2 \frac{\partial n}{\partial r} \right) + f a^2 \frac{\rho+p}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + (\rho+p) \times \\ &\left[ \frac{1}{f \sqrt{f+u^2}} u^2 \frac{\partial u}{\partial t} + 2u \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{2u^2}{r} + \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

$$\frac{1}{n} (1 + a^2) \left( u \frac{\sqrt{f + u^2}}{f} \frac{\partial n}{\partial t} + u^2 \frac{\partial n}{\partial r} \right) + f a^2 \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \left[ \frac{1}{f \sqrt{f + u^2}} u^2 \frac{\partial u}{\partial t} + 2u \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{2u^2}{r} + \frac{\sqrt{f + u^2}}{f} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \right] = 0. \quad (\text{A-18})$$

Analizando la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( n \frac{\sqrt{f + u^2}}{f} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (n u r^2) = 0 \quad (\text{A-19})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{f + u^2}}{f} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{2} n \frac{1}{f \sqrt{f + u^2}} 2u \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2}{r} n u + n \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial n}{\partial r} \\ &= \frac{1}{f \sqrt{f + u^2}} u^2 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \\ &= -\frac{u \sqrt{f + u^2}}{n} \frac{\partial n}{\partial t} - \frac{2u^2}{r} - \frac{u^2}{n} \frac{\partial n}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A-20})$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} (1 + a^2) \left( u \frac{\sqrt{f + u^2}}{f} \frac{\partial n}{\partial t} + u^2 \frac{\partial n}{\partial r} \right) + f a^2 \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \left[ -\frac{u \sqrt{f + u^2}}{n} \frac{\partial n}{\partial t} - \frac{2u^2}{r} - \frac{u^2}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + u \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2u^2}{r} + \frac{\sqrt{f + u^2}}{f} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \right] = 0. \\ & \frac{\sqrt{f + u^2}}{f} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + u \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{a^2}{n} \left( u \frac{\sqrt{f + u^2}}{f} \frac{\partial n}{\partial t} + (u^2 + f) \frac{\partial n}{\partial r} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A-21})$$

De las ecuaciones de conservación (A-1) y (A-2) se obtienen las soluciones estacionarias

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (n_0 u_0 r^2) = 0 \quad (\text{A-22})$$

$$4\pi \bar{\mu} n_0 u_0 r^2 = -\dot{m}/c \quad (\text{A-23})$$

Reemplazando los valores

$$u_0 \left( \frac{du_0}{dr} \right) + \frac{1}{2} \frac{df}{dr} + \frac{a^2}{n_0} (f + u_0^2) \frac{dn_0}{dr} = 0 \quad (\text{A-24})$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{du_0^2}{dr} \right) + \frac{1}{2} \frac{df}{dr} = -\frac{a^2}{n_0} (f + u_0^2) \frac{dn_0}{dr} \quad (\text{A-25})$$

$$\frac{1}{(f + u_0^2)} \frac{d}{dr} (f + u_0^2) = -\frac{2a_0^2}{n_0} \frac{dn_0}{dr} \quad (\text{A-26})$$

Analizando el límite no relativista donde  $u^2 \ll 1$ ,  $a^2 \ll 1$  y  $r \gg 2G_0M$ , La ecuación a primer orden es

$$\frac{1}{2} \frac{du_0^2}{dr} + \frac{1}{2} \frac{1}{f} \frac{df}{dr} + \frac{a_0^2}{n_0} \frac{dn_0}{dr} = \frac{1}{2} \frac{du_0^2}{dr} + \phi' + \frac{a_0^2}{n_0} \frac{dn_0}{dr} = 0 \quad (\text{A-27})$$

Un potencial efectivo debido a la curvatura del espacio-tiempo puede estar definido acorde a  $\phi' = f'/2f$ , que representa una derivación del comportamiento newtoniano. En este enfoque pseudo-newtoniano, está propuesto que los efectos de la relatividad general sean simulados por el potencial efectivo que satisface  $d\phi = df/2f$ . Integrando

$$\phi = \frac{1}{2} \ln f = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{2MG_0}{r} \right) \quad (\text{A-28})$$

Utilizando las series de Taylor del logaritmo natural válido para  $-1 < x - 1 \leq 1$ .

$$\begin{aligned} \ln x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n \\ \phi &= \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{2MG_0}{r} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left( -\frac{2MG_0}{r} \right)^n \\ &\approx -\frac{MG_0}{r} - \frac{1}{4} \left( \frac{2MG_0}{r} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A-29})$$

## B. Propiedades de la radiación electromagnética de discos de acreción delgados en espacios-tiempos relativistas

En el proceso de acreción; una fracción del calor se convierte en radiación, que escapa parcialmente y enfría el disco de acreción. Esta radiación es la única información física que obtenemos del disco de acreción. [154]. En un disco de acreción delgado, el tamaño sobre el eje vertical  $z$  es despreciable comparado con su extensión horizontal definida a lo largo de la dirección radial  $r$ .

El disco está en equilibrio hidrodinámico y se pueden despreciar los gradientes de presión y de entropía vertical. El disco estabiliza su tamaño vertical delgado ya que enfriamiento eficiente vía radiación sobre la superficie del disco, previene que el disco acumule calor generado por las tensiones y fricciones dinámicas [154].

En este modelo, la tasa de acreción de la masa  $M_0$  se asume constante y no cambia con el tiempo. Las cantidades físicas que describen el plasma que está orbitando; se promedian en la escala de tiempo característica sobre el ángulo azimutal para un periodo de órbitas totales y una altura  $H$  [118, 137, 138, 154].

Las partículas moviéndose en órbitas Keplerianas al rededor de un objeto compacto con una velocidad rotacional; tienen energía y momentum angular específicos que depende solamente de los radios de las órbitas para el modelo de disco delgado estático.

La estructura del disco puede caracterizarse por la densidad superficial del disco

$$\Sigma(r) = \int_{-H}^H \langle \rho_0 \rangle dz \tag{B-1}$$

donde  $\rho_0$  es la densidad de masa en reposo promedio. El torque está dado por:

$$W_\phi^r = \int_{-H}^H \langle t_\phi^r \rangle dz \quad (\text{B-2})$$

El tiempo y el promedio orbital del vector de flujo de energía, nos da el flujo de radiación  $\mathcal{F}(r)$  sobre la superficie del disco  $\mathcal{F}(r) = \langle q^z \rangle$

Las ecuaciones de la estructura del disco delgado se obtienen integrando las leyes de conservación de la masa en reposo, de la energía y del momentum angular del plasma [118, 137, 154]. De la conservación de la masa, se deduce que el tiempo promedio de la tasa de acreción de la masa en reposo es independiente del radio del disco.

$$\dot{M}_0 \equiv -2\pi r \Sigma u^r = cte \quad (\text{B-3})$$

donde:  $\dot{M}_0$  es la masa de acreción y se asume constante,  $\Sigma$  es la densidad promedio de superficie.

La ley de la conservación de la energía tiene la forma:

$$\left[ \dot{M}_0 \tilde{E} - 2\pi r \Omega W_\phi^r \right]_r = 4\pi \mathcal{F} \tilde{E} \quad (\text{B-4})$$

$\Omega$  es la velocidad rotacional dada por  $\Omega = d\phi/dt$  y  $\tilde{E}$  es la energía específica.

La ecuación (B-4) establece que la energía transportada por el flujo de la masa en reposo  $\dot{M}_0 \tilde{E}$  y la tensión dinámica del disco  $2\pi r \Omega W_\phi^r$  están en balance con la energía irradiada de la superficie del disco  $4\pi \mathcal{F} \tilde{E}$ . La ley de conservación de momentum angular establece también el balance de las tres formas de transporte de momentum angular:

$$\left[ \dot{M}_0 \tilde{L} - 2\pi r \Omega W_\phi^r \right]_r = 4\pi \mathcal{F} \tilde{L} \quad (\text{B-5})$$

Al eliminar  $W_\phi^r$  de las ecuaciones B-4 y B-5, aplicando la relación energía-momentum angular  $dE = \Omega dJ$  para órbitas circulares geodésicas; se obtiene el flujo de la energía radiante sobre el disco:

$$\mathcal{F}(r) = -\frac{\dot{M}_0}{4\pi\sqrt{-g}} \frac{\Omega, r}{(\tilde{E} - \Omega\tilde{L})^2} \int_{r_{ms}}^r (\tilde{E} - \Omega\tilde{L}) \tilde{L}_{,r} dr \quad (\text{B-6})$$

En la anterior ecuación  $r_{ms}$  es la órbita marginalmente estable. El torque se anula en el borde interno del disco y asumimos que la materia que se está acretando a  $r_{ms}$  cae libremente hacia el objeto compacto central y no ejerce torque considerable en el disco.

La eficiencia en la que un objeto compacto central convierte la masa en reposo en radiación saliente está dada en términos de la energía específica medida en la órbita marginalmente estable  $r_{ms}$  y para el caso en que todos los fotones emitidos pudieran escapar al infinito

$$\epsilon = 1 - \tilde{E}_{ms} \quad (\text{B-7})$$

Para un agujero negro de Schwarzschild esta eficiencia es al rededor del 6% y para agujeros negros que rotan rápidamente, la eficiencia es del 42%.

Podemos definir la temperatura del disco  $T(r)$  utilizando la constante de Stefan-Boltzman  $\sigma$  y la definición de flujo.

$$\mathcal{F}(r) = \sigma T^4(r) \quad (\text{B-8})$$

Si consideramos que el disco emite como un cuerpo negro, podemos calcular la luminosidad del disco utilizando la dependencia de  $T(r)$  en  $\mathcal{F}(r)$  [155].

$$L(\omega) = 4\pi d^2 I(\omega) = \frac{4}{\pi} \cos i \omega^3 \int_{r_i}^{r_f} \frac{r dr}{\exp(\omega/T) - 1} \quad (\text{B-9})$$

donde:  $d$  es la distancia de la fuente,  $I(\omega)$  función de distribución de Planck,  $i$  es la inclinación del disco de acreción,  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu$  es la frecuencia de radiación.

Para calcular la integral de flujo, tenemos el siguiente elemento de línea que nos va a dar la dependencia radial de la velocidad angular, la energía específica y el momentum angular específico de partículas moviéndose en órbitas circulares al rededor de esferas relativistas compactas.

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{B-10})$$

Las ecuaciones geodésicas para partículas orbitando en el plano ecuatorial

$$\tilde{L}^2 = r^4 \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \quad (\text{B-11})$$

$$\tilde{E}^2 = e^{4\Phi} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \quad (\text{B-12})$$

$$\tilde{E}^2 = e^{4(\lambda+\Phi)} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + V_{eff}(r) \quad (\text{B-13})$$

donde  $\tau$  es el parámetro afín y el potencial efectivo  $V_{eff}$  está dado por:

$$V_{eff}(r) \equiv e^{2\Phi} \left( 1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2} \right) \tag{B-14}$$

Haciendo  $V_{eff}(r) = 0$  y  $V_{eff,r}(r) = 0$

$$\tilde{E} = \frac{e^{2\Phi}}{\sqrt{e^{2\Phi} - r^2\Omega^2}} \tag{B-15}$$

$$\tilde{L} = \frac{r^2\Omega}{\sqrt{e^{2\Phi} - r^2\Omega^2}} \tag{B-16}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{\Phi_{,r} e^{2\Phi}}{r}} \tag{B-17}$$

La condición  $V_{eff,rr}(r) = 0$  nos da la órbita marginal estable  $r_{ms}$  en la ISCO que puede determinarse para cualquier expresión de la función  $\Phi(r)$

## C. Análisis de la estabilidad de la acreción

El esquema de perturbación que se va a utilizar fue propuesto en [128] el cual es una perturbación linealizada de la solución estacionaria de la ecuación de continuidad.

$$u(r, t) = u_0(r) + u'(r, t) \quad (\text{C-1})$$

$$n(r, t) = n_0(r) + n'(r, t) \quad (\text{C-2})$$

Hacemos un cambio de variable,  $\psi = nur^2$ . con perturbaciones a primer orden [128]

$$\begin{aligned} \psi(r, t) &= n(r, t)u(r, t)r^2 = (n_0 + n')(u_0 + u')r^2 \\ \psi(r, t) &= n_0u_0r^2 + (u_0n' + n_0u')r^2 = \psi_0 + \psi' \end{aligned} \quad (\text{C-3})$$

$$\psi' = (u_0n' + n_0u')r^2. \quad (\text{C-4})$$

De la ecuación de continuidad A-6 la perturbación a primer orden

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( n \frac{\sqrt{f+u^2}}{f} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (nur^2) &= 0 \\ = \frac{n}{f} \frac{u}{\sqrt{f+u^2}} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sqrt{f+u^2} \partial n}{f} \frac{1}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (n_0u_0r^2) + \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \frac{n_0u_0}{f\sqrt{f+u^2}} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\sqrt{f+u_0^2} \partial n'}{f} \frac{1}{\partial t} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \end{aligned} \quad (\text{C-5})$$

Luego,

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} = \frac{\partial (u_0n' + n_0u')}{\partial t} r^2 = u_0r^2 \frac{\partial n'}{\partial t} + n_0r^2 \frac{\partial u'}{\partial t} \quad (\text{C-6})$$

Al comparar las dos últimas relaciones, se obtienen las ecuaciones que relacionan la derivada temporal de las perturbaciones en la densidad de número de partículas y en la velocidad del

fluido con las derivadas espacial y temporal de  $\psi'$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \left( \frac{u_0}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \sqrt{f + u_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \quad (\text{C-7})$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{n_0 r^2} \left( \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \quad (\text{C-8})$$

Comprobando

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r^2} \left( \frac{u_0}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \sqrt{f + u_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \frac{u_0}{f} \left( u_0 r^2 \frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 r^2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \\ &\sqrt{f + u_0^2} \left( \frac{n_0 u_0}{f \sqrt{f + u^2}} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{\partial n'}{\partial t} \right) \\ \implies \frac{\partial n'}{\partial t} &= -\frac{u_0^2}{f} \frac{\partial n'}{\partial t} - \frac{u_0 n_0}{f} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{n_0 u_0}{f} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{f + u_0^2}{f} \frac{\partial n'}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{C-9})$$

Igualmente

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{f + u_0^2}}{n_0 r^2} \left[ \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right] \\ &= \frac{f + u_0^2}{f n_0 r^2} \left[ u_0 r^2 \frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 r^2 \frac{\partial u'}{\partial t} \right] - \frac{u_0 \sqrt{f + u_0^2}}{n_0} \left( \frac{n_0 u_0}{f \sqrt{f + u^2}} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{\partial n'}{\partial t} \right) \\ \implies \frac{\partial u'}{\partial t} &= \frac{f + u_0^2}{f n_0} u_0 \frac{\partial n'}{\partial t} + \frac{f + u_0^2}{f} \frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{u_0^2}{f} \frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{f + u_0^2}{f n_0} u_0 \frac{\partial n'}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{C-10})$$

Debido a que la velocidad del sonido depende de la densidad de número de partículas, la perturbación en  $n$  afecta  $a^2$ , a primer orden

$$a^2 = a_0^2 + \frac{da_0^2}{dn_0} n \quad (\text{C-11})$$

Ahora, de la ecuación conservación del tensor Momentum-Energía, tenemos a primer orden

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\sqrt{f + u^2}}{f} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{a^2}{n} \left( u \frac{\sqrt{f + u^2}}{f} \frac{\partial n}{\partial t} + (f + u^2) \frac{\partial n}{\partial r} \right) \\ &= \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial r} + u' \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} + \left( \frac{a_0^2}{n_0} \right) u_0 \frac{\sqrt{f + u_0^2}}{f} \frac{\partial n'}{\partial t} + \\ &\left( \frac{a_0^2}{n_0} \right) (f + u_0^2 + 2u_0 u') \frac{\partial n_0}{\partial r} + \frac{a_0^2}{n_0} (f + u_0^2) \frac{\partial n'}{\partial r} + \left( \frac{n'}{n_0} \right) (f + u_0^2) \frac{da_0^2}{dn_0} \left( \frac{\partial n_0}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (\text{C-12})$$

# Bibliografía

- [1] G. 't Hooft and M. Veltman, “An algorithm for the poles at dimension four in the dimensional regularization procedure,” *Nuclear Physics B*, vol. 62, p. 444–460, 1973.
- [2] S. Deser and P. Nieuwenhuizen, “One-loop divergences of quantized einstein-maxwell fields,” *Physical Review D*, vol. 10, p. 2, 1974.
- [3] S. Deser, H. Tsao, and P. Nieuwenhuizen, “One-loop divergences of the einstein-yang-mills system,” *Physical Review D*, vol. 10, no. 10, p. 3337–3342, 1974.
- [4] S. Deser, H. S. Tsao, and P. Nieuwenhuizen, “Nonrenormalizability of einstein-yang-mills interactions at the one-loop level,” *Physics Letters B*, vol. 50, no. 4, p. 491–493, 1974.
- [5] S. Weinberg, “Infrared photons and gravitons,” *Physical Review*, vol. 140, p. 2, 1965.
- [6] R. Utiyama and S. Bryce, “Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 3, p. 608, 1962.
- [7] M. Reuter, “Nonperturbative evolution equation for quantum gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 57, 1998.
- [8] S. W. Hawking and W. Israel, *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*. Cambridge University Press, 1979.
- [9] S. de Haro, D. Dennis, G. 't Hooft, and E. Verlinde, “Forty years of string theory reflecting on the foundations,” *Foundations of Physics*, vol. 43, 2013.
- [10] J. Maldacena, A. Strominger, and E. Witten, “Black hole entropy in m-theory,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 12, 1997.
- [11] H. Ooguri, A. Strominger, and C. Vafa, “Black hole attractors and the topological string,” *Phys. Review D*, vol. 70, 2004.

- 
- [12] A. Strominger, “Black hole entropy from near-horizon microstates,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2, 1998.
- [13] M. Guica, T. Hartman, W. Song, and A. Strominger, “The kerr/cft correspondence,” *Phys. Review D*, vol. 80, 2009.
- [14] A. Castro, A. Maloney, and A. Strominger, “Hidden conformal symmetry of the kerr black hole,” *Phys. Review D*, vol. 82, 2010.
- [15] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2004.
- [16] J. Maldacena, “The illusion of gravity,” *Scientific American*, vol. 293, pp. 55–63, 2005.
- [17] S. Hawking, “Information loss in black holes,” *Phys. Review D*, vol. 72, 2005.
- [18] A.M.Polyakov, “Quantum geometry of bosonic strings,” *Physics Letters B*, vol. 103, no. 3, pp. 207–210, 1981.
- [19] M. Green and J. Schwarz, “Anomaly cancellations in supersymmetric  $d = 10$  gauge theory and superstring theory,” *Physics Letters B*, vol. 149, no. 1-3, 1984.
- [20] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger, and E.Witten, “Vacuum configurations for superstrings,” *Nucl. Phys.B*, vol. 258, no. 46, pp. 46–74, 1985.
- [21] N. Seiberg and E. Witten, “String theory and noncommutative geometry,” *JHEP*, vol. 9, no. 32, 1999.
- [22] J. Polchinski, *String Theory. Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Vol 1,2)*. Cambridge University Press, 2005.
- [23] B. Katrin, B. Melanie, and S. John, *String theory and M-theory: A modern introduction*. Cambridge University Press, 2007.
- [24] J. Barrett and L. Crane, “A lorentzian signature model for quantum general relativity,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 17, pp. 3101–3118, 2000.
- [25] C. Rovelli, *Quantum Gravity. Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 2004.
- [26] A. Ashtekar, “New variables for classical and quantum gravity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, 1986.

- 
- [27] A. Ashtekar, “New hamiltonian formulation of general relativity,” *Phys. Rev. D*, vol. 36, 1987.
- [28] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi, and K. Krasnov, “Quantum geometry and black hole entropy,” *Physics Review Letters*, vol. 80, no. 5, pp. 904–907, 1998.
- [29] C. Rovelli, “Loop quantum gravity,” *Living Rev. Relativ.*, vol. 1, no. 1, 1987.
- [30] A. Perez, “Spin foam models for quantum gravity,” *Class. Quantum Gravity*, vol. 20, 2003.
- [31] J. Baez, “An introduction to spin foam models of quantum gravity and bf theory,” *Lecture Notes in Physics*, vol. 543, pp. 25–94, 2000.
- [32] J. Ambjorn, A. Goerlich, J. Jurkiewicz, and R. Loll, “Nonperturbative lorentzian path integral for gravity,” *Phys. Reports*, vol. 519 (4-5), pp. 127–210, 2012.
- [33] C. Rovelli, “Black hole entropy from loop quantum gravity,” *Physics Review Letters*, vol. 77, pp. 3288–3291, 2006.
- [34] M. H. Ansari, “Generic degeneracy and entropy in loop quantum gravity,” *Nucl. Phys. B*, vol. 795, no. 3, pp. 635–644, 2008.
- [35] M. H. Ansari, “Spectroscopy of a canonically quantized horizon,” *Nucl. Phys. B*, vol. 783, no. 3, pp. 179–212, 2007.
- [36] C. Rovelli and F. Vidotto, “Planck stars,” *International Journal of Modern Physics D.*, vol. 23, no. 12, 2014.
- [37] P. Hořava, “Quantum gravity at a lifshitz point,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, no. 8, 2009.
- [38] P. Hořava, “Spectral dimension of the universe in quantum gravity at a lifshitz point,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, 2009.
- [39] C. Charmousis, G. Niz, A. Padilla, and P. Saffin, “Strong coupling in horava gravity,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 08, no. 70, 2009.
- [40] D. Blas, O. Pujolas, and S. Sibiryakov, “On the extra mode and inconsistency of horava gravity,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 10, no. 29, 2009.
- [41] E. Kiritsis and G. Kofinas, “Hořava–lifshitz cosmology,” *Nucl. Phys. B*, vol. 821,

- no. 467, 2009.
- [42] K. Koyama and F. Arroja, “Pathological behaviour of the scalar graviton in hořavaf Lifshitz gravity,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 3, 2010.
- [43] G. Cognola, R. Myrzakulov, L. Sebastiani, S. Vagnozzi, and S. Zerbini, “Covariant horava-like and mimetic horndeski gravity: cosmological solutions and perturbations,” *Class. Quantum Gravity*, vol. 33, no. 467, 2016.
- [44] A. Wang, “Hořava gravity at a Lifshitz point: A progress report,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 26, no. 7, 2017.
- [45] R. Loll, J. Ambjørn, and J. Jurkiewicz, “The universe from scratch,” *Physics reports*, vol. 279-360, pp. 103–117, 2006.
- [46] F. Markopoulou and L. Smolin, “Gauge fixing in causal dynamical triangulation,” *Nucl.Phys. B*, vol. 739, pp. 120–130, 2006.
- [47] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz, and R. Loll, “The self-organizing quantum universe,” *Scientific America*, pp. 42–49, 2008.
- [48] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz, and R. Loll, “The self-organizing quantum universe,” *Int.J.Mod.Phys.D*, vol. 17, pp. 2015–2020, 2009.
- [49] J. Ambjørn and J. Jurkiewicz, “Four-dimensional simplicial quantum gravity,” *Phys. Lett. B*, vol. 278, no. 1-2, pp. 42–50, 1998.
- [50] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz, and R. Loll, “Emergence of a 4d world from causal quantum gravity,” *Phys. Rev. Lett*, 2004.
- [51] L. Bombelli, J. Lee, D. Meyer, and R. D. Sorkin, “Space-time as a causal set,” *Phys. Rev. Lett*, vol. 59, no. 521, 1987.
- [52] J. Myrheim, “Statistical geometry,” *CERN pre print*, vol. TH.2538, 1978.
- [53] R. Yang, “Quantum gravity corrections to accretion onto a Schwarzschild black hole,” *Phys. Rev. D*, vol. 92, 2015.
- [54] L. D. Sosapanta, *Efectos cuánticos gravitacionales sobre la estabilidad de la acreción hacia un agujero negro de Schwarzschild - Tesis de Maestría, Escuela de Física, Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín*. 2018.

- 
- [55] M. Reuter and F. Saueressig, “Renormalization group flow of quantum gravity in the einstein-hilbert truncation,” *Phys. Rev. D*, vol. 65, 2002.
- [56] D. Benedetti, P. Machado, and F. Saueressig, “Asymptotic safety in higher-derivative gravity,” *Mod. Phys. Lett. A*, vol. 24, 2009.
- [57] M. Niedermaier and M. Reuter, “The asymptotic safety scenario in quantum gravity - an introduction,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 24, 2007.
- [58] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields -Volume I: Foundations*. Cambridge University Press, 1995.
- [59] A. O. Barut and J. Krauss, “Nonperturbative quantum electrodynamics: The lamb shift,” *Found of Phys*, vol. 13, no. 189, p. 1344, 1983.
- [60] P. A. M. Dirac, “The relativistic electron wave equation,” *Europhysics*, vol. 8, no. 1, 1977.
- [61] I. Acikgoz, A. O. Barut, J. Krauss, and N. Ünal, “Self quantum electrodynamics without infinities. a new calculation of vacumm polarization,” *Phys. Let A*, vol. 198, no. 126, pp. 1344,, 1995.
- [62] A. O. Barut and J. F. V. Huele, “Quantum electrodynamics based on self-energy: Lamb shift and spontaneous emission without field quantization,” *Phys. Rev. A*, vol. 32, p. 3187, 1985.
- [63] A. Salam, “Divergent integrals in renormalizable field theories,” *Physical Review*, vol. 84, no. 3, p. 426–431, 1951.
- [64] F. J. Dyson, “The radiation theories of tomonaga, schwinger, and feynman,” *Physics Review*, vol. 75, p. 486, 1949.
- [65] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [66] A. Salam, “Overlapping divergences and the s-matrix,” *Physical Review*, vol. 82, no. 2, p. 217–227, 1951.
- [67] P. T. Matthews and A. Salam, “Renormalization,” *Physical Review*, vol. 94, no. 1, p. 185–191, 1954.

- 
- [68] N. N. Bogoliubow and O. Parasiuk, “Über die multiplikation der kausalfunktionen in der quantentheorie der felder,” *Acta Mathematica*, vol. 97, no. 0, p. 227–266, 1957.
- [69] K. Hepp, “Proof of the bogoliubov-parasiuk theorem on renormalization,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 2, no. 1, p. 301–326, 1966.
- [70] W. Zimmermann, “Convergence of bogoliubov’s method of renormalization in momentum space,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 15, no. 3, p. 208, 1969.
- [71] S. Mandelstam, “Determination of the pion-nucleon scattering amplitude from dispersion relations and unitarity,” *General Theory. Physical Review*, vol. 112, no. 4, p. 1344–1360, 1958.
- [72] A. Guijosa, *Notas de Clases de Teoría Cuántica de Campos*. Universidad Autónoma de México.
- [73] M. Gell-Mann and F. E. Low, “Quantum electrodynamics at small distances,” *Physical Review*, vol. 95, no. 5, p. 1300–1312, 1954.
- [74] E. C. Stückelberg and A. Petermann, “La normalization des constantes dans la theorie des quanta,” *Helv Phys*, vol. 26, pp. 499–520, 1953.
- [75] L. P. Kadanoff, “Scaling laws for ising models near  $t_c$ ,” *Physics Physique Fizika*, vol. 2, pp. 263–272, 1963.
- [76] K. Falls, *Asymptotic Safety and Black Holes. Thesis Submitted for the degree of Doctor of Philosophy*. University of Sussex, 2012.
- [77] K. G. Wilson and M. E. Fisher, “Critical exponents in 3.99 dimensions,” *Physical Review Letters*, vol. 28, no. 4, p. 240–243, 1972.
- [78] K. G. Wilson, “Feynman-graph expansion for critical exponents,” *Physical Review Letters*, vol. 28, no. 9, p. 548–551, 1972.
- [79] G. Hooft and M. Veltman, “Regularization and renormalization of gauge fields,” *Nuclear Physics B*, vol. 44, no. 1, p. 189–213, 1972.
- [80] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, “Lowest order “divergent” graphs in v-dimensional space,” *Physics Letters B*, vol. 40, no. 5, p. 566–568, 1972.
- [81] K. G. Wilson, “Renormalization group and critical phenomena. i. renormalization

- group and the kadanoff scaling picture,” *Phys. Rev B*, vol. 4, pp. 3174–3184, 1971.
- [82] K. Wilson and J. Kogut, “The renormalization group and the  $\epsilon$  expansion,” *Phys. Rept*, vol. 12, pp. 75–200, 1974.
- [83] K. G. Wilson, “The renormalization group: Critical phenomena and the kondo problem,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 47, no. 4, p. 773–840, 1975.
- [84] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields -Volume II: Modern Applications*. Cambridge University Press, 1996.
- [85] C. Wetterich, “Average action and the renormalization group equations,” *Nuclear Physics B*, vol. 352, pp. 529–584, 1991.
- [86] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, “Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics,” *Phys. Report*, vol. 363, pp. 223–386, 2002.
- [87] V. Mukhanov and S. Winitzki, *An Introduction to Quantum Effects in Gravity*. Cambridge University Press, 2007.
- [88] C. Wetterich, “Exact evolution equation for the effective potential,” *Phys. Letters B*, vol. 301, pp. 90–94, 1993.
- [89] D. A. R. Torres, *Solución de Schwarzschild corregida por medio de Asymptotic Safety - Tesis de pregrado en Física - Universidad de los Andes*. 2019.
- [90] L. F. Abbot, “Introduction to the background field method,” *Acta Phys. Pol. B*, vol. 13 (CERN-TH-3113), pp. 33–50, 1981.
- [91] V. N. Popov and L. Faddeev, “Feynman diagrams for the yang-mills field,” *Physics Letters B*, vol. 25, pp. 29–30, 1967.
- [92] D. V. Vassilevich, “Heat-kernel expansion: user’s manual,” *JHEP*, vol. 9, no. 32, 2003.
- [93] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of the space-time*. Cambridge University Press, 1974.
- [94] R. M. Wald, *General Relativity*. Chicago Press, 1974.
- [95] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. Princeton University

Press, 1977.

- [96] B. Koch and F. Saueressig, “Black holes within asymptotic safety,” *Int. Journ. Mod. Phys. A.*, vol. 29, 2014.
- [97] E. A. Larrañaga, *Agujeros Negros Clásicos*. AshCat Publishers, 2009.
- [98] C. Gonzalez and B. Koch, “Improved reissner–nordström–(a)ds black hole in asymptotic safety,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 31, 2016.
- [99] D. F. Litim, “Optimized renormalization group flows,” *Phys. Rev. D*, vol. 64, 2001.
- [100] D. F. Litim, “Fixed points of quantum gravity,” *Phys. Rev. Lett*, vol. 92, 2004.
- [101] B. Koch and I. Ramirez, “Exact renormalization group with optimal scale and its application to cosmology,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 28, 2011.
- [102] C. Contreras, B. Koch, and P. Rioseco, “Black hole solution for scale-dependent gravitational couplings and the corresponding coupling flow,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 30, 2013.
- [103] B. Koch and F. Saueressig, “Structural aspects of asymptotically safe black hole,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 31, 2013.
- [104] Y.-F. Cai and D. Easson, “Black holes in an asymptotically safe gravity theory with higher derivatives,” *JCAP*, vol. 9, no. 2, 2010.
- [105] A. Bonano, “Astrophysical implications of the asymptotic safety scenario in quantum gravity,” *Proceedings of Science*, vol. 112, no. 784, 2008.
- [106] M. Reuter and H. Weyer, “On the possibility of quantum gravity effects at astrophysical scales,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 15, no. 12, pp. 2011–2028, 2006.
- [107] M. Reuter and H. Weyer, “Quantum gravity at astrophysical distances?,” *Phys.Rev.D*, vol. 69, 2004.
- [108] T. Padmanabhan, “Theoretical astrophysics-galaxies and cosmology vol iii,” *Cambridge University Press*, 2002.
- [109] F. Combes, P. Boissé, A. Mazure, and A. Blanchard, “Galaxies and cosmology,”

*Springer, New York, 2002.*

- [110] M. Reuter and H. Weyer, “Renormalization group improved gravitational actions: A brans-dicke approach,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics JCAP*, vol. 97, 2004.
- [111] A. Eichhorn and A. Held, “Image features of spinning regular black holes based on a locality principle,” *Eur. Phys. J. C.*, vol. 81, no. 933, 2021.
- [112] Y. Zhang, M. Zhou, and C. Bambi, “Iron line spectroscopy of black holes in asymptotically safe gravity,” *Eur. Phys. C*, vol. 78, no. 316, 2018.
- [113] T. Johannsen and D. Psaltis, “Testing the no-hair theorem with observations in the electromagnetic spectrum. iv. relativistically broadened iron lines,” *Astrophys. J.*, vol. 773, no. 57, 2013.
- [114] C. Bambi, “Testing the space-time geometry around black hole candidates with the analysis of the broad k iron line,” *Phys. Rev. D*, vol. 87, 2013.
- [115] C. Bambi, A. Cardenas-Avendano, T. Dauser, J. Garcia, and S. Nampalliwar, “Testing the kerr black hole hypothesis using x-ray reflection spectroscopy,” *Astrophys. J.*, 2017.
- [116] C. Bambi, “Astrophysical black holes: A compact pedagogical review,” *Annalen der Physik*, vol. 530, 2018.
- [117] B. Zhou, A. B. Abdikamalov, D. Ayzenberg, C. Bambi, S. Nampalliwar, and A. Tripathi, “Shining x-rays on asymptotically safe quantum gravity,” *JCAP*, vol. 2021, 2021.
- [118] I. Novikov and K. Thorne, “Astrophysics of black holes ed. by c. dewitt, b. dewitt,” *Gordon Breach, New York*, 1973.
- [119] F. H. Zuluaga and L. A. Sánchez, “Black holes in asymptotic safety with higher derivatives: accretion and stability analysis,” *Chinese Physics C*, vol. 45, 2021.
- [120] F. H. Zuluaga and L. A. Sánchez, “Accretion disk around a schwarzschild black hole in asymptotic safety,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 81, 2021.
- [121] E.Chaverra and O. Sarbach, “Radial accretion flows on static spherically symmetric black holes,” *Class, Quant. Grav*, vol. 32, 2015.
- [122] E.Chaverra, M. Morales, and O. Sarbach, “Quasi-normal acoustic oscillations in the

- Michel flow,” *Phys. Rev. D*, vol. 91, 2015.
- [123] E. Chaverra, P. Mach, and O. Sarbach, “Michel accretion of a polytropic fluid with adiabatic index  $\gamma=5/3$ : global flows versus homoclinic orbits,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 33, 2016.
- [124] A. Ahmed and M. Faizal, “Cyclic and heteroclinic flows near general static spherically symmetric black holes,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 76, no. 280, 2016.
- [125] A. Ahmed, M. Azreg-Ainou, and S. Bahamonde, “Astrophysical flows near  $f(t)$  gravity black holes,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 76, no. 269, 2016.
- [126] M. Farooq, A. Ahmed, and R.-J. Yang, “Accretion on high derivative asymptotically safe black holes,” *Chinese Physics C*, vol. 44, 2020.
- [127] J. Petterson, J. Silk, and J. Ostriker, “Variations on a spherically symmetrical accretion flow,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 191, p. 571, 1980.
- [128] T. Naskar, N. Chakravarty, J. K. Bhattacharjee, and A. K. Ray., “Acoustic perturbations on steady spherical accretion in schwarzschild geometry,” *Phys. Review D*, vol. 76, 2007.
- [129] D. Ananda, S. Bhattacharya, and T. Das, “Acoustic geometry through perturbation of mass accretion rate: radial flow in static spacetimes,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 47, no. 96, 2015.
- [130] G. Abbas and A. Ditta, “Matter accretion onto a conformal gravity black hole,” *The European Physical Journal C*, vol. 80, no. 12, 2020.
- [131] A. Jawad and M. U. Shanzad, “Effects of thermal fluctuations on non-minimal regular magnetic black hole,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 77, no. 515, 2017.
- [132] M. Hobson, G. Efstathiou, and A. Lasenby, “General relativity. an introduction for physicists,” *Cambridge University Press*, 2006.
- [133] T. Harko, Z. Kovács, and F. Lobo, “Thin accretion disks in stationary axisymmetric wormhole spacetimes,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, 2009.
- [134] Z. Kovács and T. Harko, “Can accretion disk properties observationally distinguish black holes from naked singularities?,” *Phys. Rev. D*, vol. 82, 2010.

- 
- [135] D. Pérez, G. Romero, and S. P. Bergliaffa, “Accretion disks around black holes in modified strong gravity,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 551, no. A4, 2013.
- [136] D. Pérez, F. L. Armengol, and G. Romero, “Accretion disks around black holes in scalar-tensor-vector gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 95, 2013.
- [137] D. Page and K. S. Thorne, “Disk-accretion onto a black hole. time-averaged structure of accretion disk,” *AstroPhys. J*, vol. 191, no. 499, 1974.
- [138] N. Shakura and R. Sunyaev, “Black holes in binary systems. observational appearance,” *AA*, vol. 24, no. 377, 1973.
- [139] P. Joshi, D. Malafarina, and R. Narayan, “Distinguishing black holes from naked singularities through their accretion disc properties,” *Class. Quantum Gravity*, vol. 31, 2014.
- [140] K. Falls, C. King, D. Litim, K. Nikolakopoulos, and C. Rahmede, “Asymptotic safety of quantum gravity beyond ricci scalars,” *Phys. Rev. D*, vol. 97, 2018.
- [141] J. Bardeen, W. Press, and S. Teukolsky, “Rotating black holes: locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation,” *Astrophys. J*, vol. 178, no. 347, 1972.
- [142] J. Steiner, J. McClintock, J. Orosz, R. Remillard, C. Bailyn, M. Kolehmainen, and O. Straub, “The low-spin black hole in lmc x-3,” *Astrophys. J*, vol. 793, no. 2, 2014.
- [143] J. Orosz, J. Steiner, J. McClintock, M. Buxton, C. Bailyn, D. Steeghsa, A. Guberman, and M. Torres, “The mass of the black hole in lmc x-3,” *Astrophys. J*, vol. 794, no. 153, 2014.
- [144] G. Bhuvana, D. Radhika, V. Agrawal, S. Mandal, and A. Nandi, “Broad-band ‘spectro-temporal’ features of extragalactic black hole binaries lmc x-1 and lmc x-3: an astrosat perspective,” *M.N.R.A.S.*, vol. 501, no. 4, 2021.
- [145] J. Steiner, J. McClintock, R. Remillard, L. Gou, S. Yamada, and R. Narayan, “The constant inner-disk radius of lmc x-3: a basis for measuring black hole spin,” *Astrophys. J*, vol. 718, no. 2, 2010.
- [146] O. Straub, M. Bursa, A. Sądowski, J. Steiner, M. Abramowicz, W. Kluźniak, J. McClintock, R. Narayan, and R. Remillard, “Testing slim-disk models on the thermal spectra of lmc x-3,” *Astron. Astrophys*, vol. 533, no. 2, 2011.

- 
- [147] A. Held, R. Gold, and A. Eichhorn, “Asymptotic safety casts its shadow,” *JCAP*, vol. 6, no. 29, 2019.
- [148] J. Cembranos, A. de la Cruz-Dombriz, and P. J. Romero, “Kerr-newman black holes in  $f(r)$  theories,” *I. J of Geometric Methods in Modern Phys*, vol. 11, p. 588, 2011.
- [149] M. Guo and P. C. Li, “Innermost stable circular orbit and shadow of the 4d einstein–gauss–bonnet black hole,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 80, p. 588, 2020.
- [150] A. Dasgupta, “Measuring quantum gravity,” *Can. J. Phys*, vol. 96, pp. 366–378, 2018.
- [151] F. Alfaro, H. Quevedo, and P. Sanchez, “Comparison of vacuum static quadrupolar metrics,” *R. Soc. Op. Sci.*, vol. 5, 2018.
- [152] Orellana and et all, “Structure of neutron stars in r-squared gravity,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 45, pp. 771–783, 2013.
- [153] F. L. López and G. E. Romero, “Neutron stars in scalar-tensor-vector gravity,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 49, pp. 1–15, 2017.
- [154] T. Harko, Z. Kovács, and F. Lobo, “Electromagnetic signatures of thin accretion disks in wormhole geometries,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, 2008.
- [155] D. Torres, “Accretion disc onto a static non-baryonic compact object,” *Nucl. Phys. B*, vol. 626, no. 377, 2002.