



El hechizo de Pitágoras

Alonso Takahashi Orozco



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA





El hechizo de Pitágoras

© Universidad Nacional de Colombia

© Facultad de Ciencias

Decano

Giovanny Garavito Cárdenas

Vicedecano Académico

Luis Hernán Ochoa Gutiérrez

Vicedecana de Investigación y Extensión

Martha Raquel Fontanilla Duque

Comité editorial de Ciencia al viento

Germán Amat-García (coordinador)

Instituto de Ciencias Naturales

Diana Farías

Departamento de Química

Gregorio Portilla

Observatorio Astronómico Nacional

Robel Arenas-Salazar

Observatorio Astronómico Nacional

Xavier Marquínez

Departamento de Biología

Edición

Angélica María Olaya Murillo

Corrección de estilo

Juliana Monroy Ortiz

Diseño de portada y diagramación

Leonardo Fernández Suárez

Ciencia al Viento es una publicación trimestral de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia. Comprende títulos de ciencia, pedagogía de la ciencia, historia de la ciencia y del rol de la ciencia en la sociedad. Esta colección está compuesta por textos cuyo propósito principal es invitar a repensar acerca de lo que es la ciencia y lo que es el quehacer de los científicos. El objetivo de la colección es ofrecer al lector la información que le permita llegar a conclusiones argumentadas y críticas con el uso de información objetiva acerca de la importancia de la ciencia en la sociedad.

La colección presenta dos modalidades de documentos: a) textos breves y de gran valor científico, ya publicados por científicos, filósofos, educadores e intelectuales que han impactado el conocimiento científico a nivel mundial; b) ensayos de docentes de la Universidad Nacional, especialmente de la Facultad de Ciencias, relacionados con temáticas de su quehacer investigativo.

Texto de circulación restringida y distribución gratuita, editado con fines exclusivamente académicos, para uso en las aulas de la Universidad Nacional de Colombia. Prohibida su venta.

Ciencia | 22
al viento

El hechizo de Pitágoras

Alonso Takahashi Orozco

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Colombia



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Abril 2021. Bogotá, D.C.

In Memoriam a Germán Domingo Amat García
(16 de mayo 1960 - 21 de abril 2021)

En este *in memoriam* sencillo pero emotivo, quiero honrar, recordar, al profesor Germán Domingo Amat García, biólogo y magíster en Ciencias Biología, grande, imponente y discreto en el quehacer universitario de la docencia, la investigación y la extensión.

Me referiré a él como amigo, como compañero, como colega, como destacado científico estudioso de los insectos, historiador y excelente profesor, brilló por sus realizaciones personales y académicas que lo posicionaron como un reconocido investigador en el contexto nacional e internacional de la entomología. Es digno de mencionar la excelencia de sus contribuciones en los coleópteros de Colombia, en especial la taxonomía, ecología y distribución de la familia *Passalidae*.

Germán nos deja un legado muy grande representado en todos aquellos a quienes formó, les compartió su tiempo con su dedicación y sus experiencias de vida como debe hacer un buen maestro.

Tuve el privilegio de conocer a Germán Amat de larga data, pero en los últimos años, gracias a nuestras conversaciones, coincidimos en un interés común en el estudio y las anotaciones al pensamiento naturalístico de nuestro país, su origen, desarrollo y protagonistas hasta nuestros días. Así, gastamos numerosas horas para pensar y preparar escritos acerca de los “Protagonistas de la Biodiversidad en Colombia”, en una línea de tiempo fácil de entender, con el fin de conocer y acreditar a todos aquellos personajes que a lo largo de la historia jugaron un papel fundamental en

la vida científica de la nación y de la Universidad Nacional de Colombia, particularmente del Instituto de Ciencias Naturales.

Lo anterior se suma a su prolífica producción de 125 contribuciones entre libros y artículos, que beneficiaron a sus estudiantes en el pregrado y la maestría, comentaba: “a los estudiantes hay que ayudarlos, sobre todo cuando quieren conocer la biología de los insectos... para que lo hagan bien hecho y con rigor científico”.

Con su prematura partida, la academia ha sufrido un duro golpe que será difícil de superar en el corto plazo. Germán era un buen hombre, educado, juicioso, riguroso en su quehacer científico, de buen humor y excelentes modales, con una gran energía como deportista. Tenía todos los méritos para vivir una larga vida porque la amaba y la disfrutaba trabajando intensamente, fue y seguirá siendo un ejemplo digno de seguir y de imitar. Un dechado de vida académica.

Jaime Aguirre Ceballos

Profesor titular - Instituto de Ciencias Naturales,
Exdecano de la Facultad de Ciencias

Contenido

10

El discreto encanto de la geometría

16

Los *Elementos* y su autor

19

Platón y su Academia

22

Las formas y el mundo inteligible

25

La Trinidad Platónica

29

Arquitas y la secta del Uno

35

Epílogo

Editorial

El número 22 de *Ciencia al Viento* está dedicado a las matemáticas. El invitado es el profesor Alonso Takahashi, uno de los matemáticos más destacados del país, jubilado de la Universidad Nacional de Colombia. En su ensayo, el profesor Takahashi nos narra la gran fascinación que ejercieron las ciencias exactas en la vida de algunos pensadores y científicos que descollaron en la ciencia. Los grandes académicos de Grecia, Pitágoras de Samos y Euclides de Alejandría, dejaron huellas imborrables en las vidas de Albert Einstein, Werner Heisenberg, Bertrand Russell y Tomas Hobbes. La lectura de sus testimonios, gracias al profesor Takahashi, se convierte en una excepcional revelación.

En algunos pasajes de este ensayo, apreciaremos la mirada de un matemático a la obra de Platón, quien gestó en su *Academia de Atenas* el centro de conocimiento matemático más importante de la época, que propició la búsqueda de las fronteras entre la matemática pura y la aplicación de los números. Nos identificamos con el autor al fascinarse ante el descubrimiento de que Platón concibió, además de los inconmensurables, un conjunto de formas convexas tridimensionales (cinco poliedros regulares), convertidas finalmente en la piedra angular de su teoría sobre la materia, lo que ocupó la atención del gran Euclides en su libro XIII de los *Elementos*.

Ojalá que la lectura de este ensayo despierte, en quienes no somos matemáticos de profesión, el deseo por la búsqueda de la verdad platónica sobre lo cierto, lo bello y lo bueno, o por la grandeza de las matemáticas representada en la utilidad de sus aplicaciones, la certeza de sus afirmaciones y la elegancia de su procedimientos.

Ciencia al Viento agradece al autor por su plena disposición y autorización expresa para la publicación de este ensayo; a la Vicedecanatura de Investigación y Extensión, y a la Coordinación Editorial de la Facultad de Ciencias por su apoyo permanente; a Angélica María Olaya por las tareas de edición y corrección de estilo; a Leonardo Fernández por la diagramación, y de manera especial a la doctora Clara Helena Sánchez, historiadora de la ciencia, por su generosidad en la revisión del escrito.

Equipo editorial

Ciencia al viento

1

El discreto encanto
de la geometría

En 1629 Thomas Hobbes tuvo una revelación. Ese año el filósofo y pensador político inglés estaba de visita en París y un cronista, amigo suyo, registró el episodio para la posteridad:

Alcanzó los 40 años sin haber prestado atención a la geometría y, cuando por fin lo hizo, fue por casualidad. Estando en la biblioteca de un caballero, vio sobre una mesa *Los Elementos* de Euclides, abierto en la Proposición 47 del libro I. Leyó el enunciado y exclamó “¡Válgame Dios!, esto es imposible”. Así que leyó la demostración, la cual lo remitía a otra proposición, la cual también leyó. *Et sic deinceps* hasta quedar convencido, por vía demostrativa, de esa verdad. Fue así como se enamoró de la geometría [3,4].

Este suceso cambió el rumbo de su vida intelectual, llevándolo a consagrarse a la filosofía y a las ciencias. Como no hay adepto más fanático que el converso, su entusiasmo lo llevó a poner las matemáticas como requisito para todo estudio superior. “No entiende teología quien no entiende filosofía” y “no entiende filosofía quien no sabe matemáticas” [3], decía; afirmaciones que los mismos matemáticos consideraban salidas de tono. En todo caso, y aunque no fue un matemático profesional, Hobbes ayudó a consolidar la contribución de la matemática a la revolución científica que estaba comenzando.

En el ensayo titulado *El hábito de la verdad*, Jacob Bronowski se refiere a la conversión de Hobbes como “uno de los grandes momentos de la ciencia moderna”. El relato supone que todos saben cuál es la Proposición 47, “quien lo ignore” –dice– “perderá la fuerza explosiva que de este relato dimana” [4]. La Proposición 47 es el teorema de Pitágoras, un enunciado que, además de cierto, es útil, elegante y también extraño. No es algo que ha pasado desapercibido, pero que después se torna evidente; tampoco es algo que uno pueda llegar a sospechar examinando triángulos. Es, por el contrario, algo que no podemos creer a menos que nos lo demuestren. Y aunque las demostraciones se cuentan por centenares, y varias deslumbran por su nitidez y contundencia, nadie ha explicado de manera convincente cómo alguien pudo llegar a sospechar que en cualquier triángulo

rectángulo, el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos. Richard J. Trudeau, en su libro *The Noneuclidean Revolution*, lo dice con palabras difíciles de mejorar:

Para mí, el Teorema de Pitágoras es muy sorprendente. Aunque en este mundo moldeado por el hombre abundan los ángulos rectos, yo los percibo más bien como fenómenos naturales afines al trueno o a la Osa Mayor. De pie en un prado, formo un ángulo recto con el suelo. Si estoy mirando al Este, debo girar en ángulo recto para quedar mirando al Sur. Una fruta que cae del árbol sigue una trayectoria en ángulo recto con respecto al horizonte. Pero, por otra parte, “ $c^2 = a^2 + b^2$ ” no evoca ninguna clase de vivencia. Los números no son parte de la naturaleza; y si lo fueran, es improbable que me tope con tres de ellos que estén así relacionados. Debido a que la ecuación es abstracta y precisa, es extraña. No puedo imaginar que una cosa como esa tenga algo que ver con los ángulos rectos cotidianos. Por eso, cuando el velo de familiaridad se levanta, como a veces ocurre, veo el Teorema de Pitágoras en su forma prístina, y quedo mudo de asombro [17].

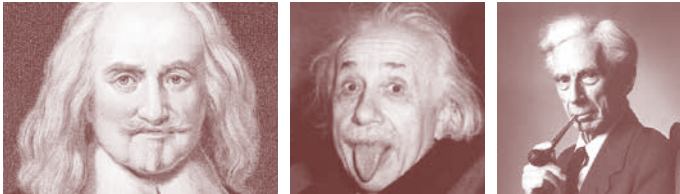


Figura 1. Tres grandes pensadores cuyos celebres testimonios mostraron una fascinación por las matemáticas: a) Tomas Hobbes, filósofo británico, autor del famoso tratado político *Leviatán*; b) Albert Einstein, premio Nobel en 1921; c) Bertrand Russell, filósofo y matemático británico, quien intentó demostrar cómo las matemáticas se fundamentaban en la lógica. Fuentes: a) *European Hobbes Society*, <http://europeanhobbesociety.org>; b) *Fotografía de Arthur Sasse, United Press International, 1951*; c) *Textos Ciudadanos*, <http://textos-ciudadanos.blogspot.com/>

Sin embargo, por asombrosa que sea, la relación pitagórica no parece suficiente para explicar el efecto instantáneo y desmesurado que tuvo sobre Hobbes. Presentimos algo más. Decir que se enamoró de la matemática no es suficiente. Quisiéramos saber ¿cuál es su encanto?, y también ¿cómo empezó todo?

Para captar el sentido y alcance de estas dos preguntas, es bueno saber que no estamos ante un episodio aislado, por pintoresco y célebre que sea. Esa no fue la primera vez, ni sería la última, en que una mente curiosa e inquisitiva fuera seducida por la matemática.

Bertrand Russell, el filósofo más conocido del siglo xx, cuenta en su autobiografía:

A los once años empecé a estudiar a Euclides con mi hermano como tutor. [...] Fue este uno de los acontecimientos más grandes de mi vida, tan deslumbrante como el primer amor. No había imaginado que existiese algo tan placentero en el mundo. [Desde ese momento y hasta los 38 años] Las matemáticas fueron mi interés primordial y mi mayor fuente de felicidad [12].

Más tarde, en su libro *Misticismo y lógica*, exalta las matemáticas como una fortaleza frente al escepticismo: “su edificio de verdades” –dice– “se yergue incommovible e inexpugnable ante todas las armas del cinismo dubitativo” [14].

Albert Einstein y Werner Heisenberg, cuyos nombres están ligados a las dos teorías que, al expulsar los absolutos y admitir la incertidumbre, transformaron la concepción del mundo físico después de Newton, también cayeron bajo el hechizo de la matemática. Einstein recordaba dos experiencias maravillosas de su niñez. En sus notas autobiográficas habla del asombro y la sensación de misterio que tuvo a los cinco años cuando su papá le mostró una brújula [5], y agrega:

A los doce años experimenté una segunda maravilla, de una naturaleza totalmente diferente, en un librito de Geometría euclidiana que cayó en mis manos, al principio del año escolar. Allí había aserciones, como por ejemplo que las tres alturas de un triángulo se encuentran en un punto, las cuales –aunque en modo alguno evidentes– podían sin embargo ser

probadas con tal certidumbre que cualquier duda parecía estar fuera de lugar. Esta claridad y certeza me causaron una impresión indescriptible [5].

Recuerda también que, antes de esta experiencia, un tío le habló del teorema de Pitágoras y que, con mucho esfuerzo, logró demostrarlo, y añade esta reflexión: “[...] es por demás maravilloso que el hombre sea del todo capaz de alcanzar tal grado de certeza y diafanidad en el pensamiento puro como por primera vez los griegos nos mostraron que es posible lograr en geometría” [5]. Años después, quizás rememorando su propia carrera científica, dirá: “Si Euclides no logra encender su entusiasmo juvenil, entonces usted no nació para ser un pensador científico” [5].

En su evolución intelectual, Einstein siguió el orden de sus asombros infantiles: empezó siendo un físico extraordinario que no conocía mucha matemática para llegar a ser más tarde, más que un físico, un devoto de la matemática. Sin duda era el matemático el que hablaba cuando, en una conferencia sobre los métodos de la física teórica, afirmó:

La experiencia justifica hasta ahora nuestra creencia en que la naturaleza es la realización de las más simples ideas matemáticas que puedan concebirse. Estoy convencido de que, por medio de puras construcciones matemáticas, podemos descubrir los conceptos y las leyes que los conectan unos con otros, proporcionando así la clave para entender los fenómenos naturales. La experiencia puede sugerir los conceptos matemáticos apropiados, pero estos ciertamente no pueden deducirse de ella. La experiencia sigue siendo, por supuesto, el único criterio para la utilidad de una construcción matemática, pero el principio creativo reside en las matemáticas. En cierto sentido, por lo tanto, sostengo que el pensamiento puro puede aprehender la realidad, como soñaron los antiguos [6].

Recordando sus tiempos de estudiante en el liceo, Heisenberg decía:

Los programas de la escuela incluían entonces los elementos de Geometría. La materia me pareció al principio bastante árida; triángulos y cuadriláteros conmueven la fantasía menos que las flores o las poesías.

Pero un día unas palabras de Wolff, nuestro excelente profesor de matemáticas, nos dieron a entender que sobre esas figuras era posible enunciar proposiciones de validez general, y que ciertos resultados pueden ser, no solo comprobados e intuïdos sobre un dibujo, sino también demostrados matemáticamente [8].

A Heisenberg le impresionaba sobre todo que “La Matemática se acomoda de algùn modo a los objetos de nuestra experiencia, idea que, según la escuela me enseñó, fue ya concebida por los griegos, por Pitágoras y Euclides [8]”.

Estos ejemplos pueden multiplicarse. A través de los siglos la geometría de Euclides ha despertado la admiración y el asombro en diversas clases de pensadores. Incluso Kant, tan cauteloso en sus apreciaciones, recurrió a la matemática como prueba reina de su sintético *a priori* y, en los *Prolegómenos*, para quejarse del lamentable estado de la filosofía antes de su llegada, escribió: “En metafísica no tenemos un libro como el que sí tenemos en matemáticas. Si usted quiere saber qué es la matemática, basta que lea los *Elementos* de Euclides”. Pero ¿qué son los *Elementos*?

2

Los *Elementos*
y su autor

Los *Elementos* es el libro de texto de más éxito jamás escrito. Después de la *Biblia*, es el libro más difundido y uno de los más influyentes en el mundo occidental. Aunque, por supuesto, la geometría no nació con los *Elementos*. La obra recoge resultados matemáticos desarrollados durante dos o más siglos. Pero no es un mero compendio de recetas o saberes geométricos prácticos para uso de arquitectos y agrimensores. Esto ya lo tenían los egipcios y los babilonios. Con los griegos hay un salto cualitativo que se traduce en un cambio radical. Lo nuevo no está en el contenido, lo nuevo es la forma: la manera de organizar, disponer y presentar los resultados.

Los *Elementos* es una obra cuya redacción requirió más conocimientos y pericia que la construcción del Partenón, y que lo sobrevivirá. Se trata del cuidadoso ensamble de multitud de componentes en el que cada parte está en el sitio que le corresponde de acuerdo con un estricto orden lógico. Cada teorema se deduce de resultados anteriores, cada definición se formula en términos de nociones previas y todo el edificio descansa en unos pocos enunciados y conceptos que se consideran autoevidentes y bien conocidos. Esa es la forma que aún conserva la matemática en nuestros días.

Por mucho tiempo Euclides fue sinónimo de geometría, y geometría significaba matemática. Pero si alguien nos preguntara quién fue Euclides, solo podríamos contestar que Euclides es el autor de los *Elementos*. Con él se cumple el ideal de Flaubert del autor que desaparece detrás de su obra. Del hombre Euclides hay que suponer que vivió en Alejandría alrededor del año 300 a. C. Fuera de eso solo se conocen dos anécdotas, posiblemente apócrifas (interesantes como aforismos, pero no como datos biográficos), y una o dos referencias de autores muy posteriores.

Podría ser que la existencia de Euclides sea una fábula, aun así es significativa, pues nos informa que entre la gente ilustrada de la época la matemática ocupaba un lugar privilegiado. En la Academia hubo una marcada preferencia por las matemáticas. Esta no solo

acogió a los mejores matemáticos, sino que la filosofía que allí se forjó, bajo la dirección de su fundador, es de clara estirpe matemática.

Pero ¿cómo empezó todo? Se sabe que hubo intentos anteriores a Euclides de sistematizar la geometría. Podríamos vernos tentados a buscar el autor de los primeros elementos, pero esto solo cambiaría un nombre por otro, por Teudio, Hipócrates o León, de quienes se sabe aún menos que de Euclides [19]. Puede ser menos estéril preguntar dónde el autor de los *Elementos* pudo adquirir la maestría necesaria para realizar su obra. Parece que hay una sola respuesta posible: en la Academia.



Figura 2. Euclides, gran matemático griego cuya obra, los *Elementos*, le condujo a la inmortalidad. Detalle de la *Academia de Atenas* de Rafael Sanzio.

Fuente: <https://www2.uned.es/geo-1-historia-antigua-universal/EUCLIDES.htm>



Platón
y su Academia

La Academia de Atenas era el centro de estudios de mejor nivel en su época. Considerada por muchos como la primera universidad, era más bien lo que hoy llamaríamos un instituto de estudios avanzados. El ingreso a la Academia tenía un requisito, consignado en esta advertencia escrita sobre su entrada:

αγεωμετρητος μηδεις εισιτω
(Que no entre quien no sepa geometría)

A diferencia del casi desconocido autor de los *Elementos*, el fundador de la Academia no habría podido ser más famoso; y al contrario de su maestro Sócrates, quien nada escribió, Platón fue un escritor magistral y prolífico, cuyas obras son clásicos de la literatura



Figura 3. La *Escuela de Atenas*, magna obra pintada por Rafael Sanzio (1510-1512), ubicada en El Vaticano, en la antigua biblioteca del Papa Julio II, Roma. Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/La_escuela_de_Atenas#/media/Archivo:La_scuola_di_Atene.jpg

y la filosofía. El entusiasmo de Platón por las matemáticas dejó su impronta en todo su pensamiento y en toda la filosofía occidental, aun si aceptamos que esta sea solo una colección de notas a la filosofía de Platón, como dijera Alfred North Whitehead, para escándalo de los filósofos.

La presencia de la matemática en los diálogos de Platón es notoria. En el *Timeo* la estructura del universo se basa en los poliedros regulares (que por eso se llamaron *sólidos platónicos*), los cuales, a su vez, se analizan en términos de dos triángulos rectángulos fundamentales con lados inconmensurables, inseparables como los quarks. En el *Menón*, el diálogo sobre la excelencia (*areté*), asistimos a la clase de matemáticas más célebre de todos los tiempos. En ella, Sócrates, es decir, Platón, aprovecha el problema de la duplicación del cuadrado, un caso especial del teorema de Pitágoras, para sostener que el conocimiento es reminiscencia (*anamnesis*) y, de paso, ilustrar la pedagogía interactiva mediante preguntas y respuestas (*mayéutica*), todo ello basado en la transmigración de las almas (*metempsychosis*). En el *Teeteto*, así como en las *Leyes*, se discute el tema de las magnitudes inconmensurables. En la *República* se propone el currículo ideal para los ciudadanos ideales de la polis ideal, el cual, por supuesto, está basado en las cuatro mathemata: aritmética, geometría, astronomía y música (armonía o teoría musical).

Sin embargo, donde la influencia de las matemáticas, aunque menos explícita, es más profunda y significativa, es en la teoría más identificada con el nombre de Platón: la teoría de las *formas* (también llamadas *ideas*), discutida en varios de sus diálogos, en especial en la *República* y en el *Parménides* [11].



4

Las formas
y el mundo
inteligible

Digamos de una vez que se trata de una teoría desatinada e insostenible y que el mismo Platón, ya viejo, la puso en entredicho, en lo que Russell considera como “uno de los casos más notables de autocritica de un filósofo” [13]. La teoría supone un dualismo que contrapone realidad y apariencia. Para la caricatura que estoy a punto de perpetrar, podemos partir de la geometría. Todos han oído decir que la geometría es el arte de razonar bien con figuras mal hechas. Creo que este aforismo puede ayudar a entender la teoría de las formas; aún más, es probable que este haya sido el origen de esta teoría.

En una clase de geometría dibujamos triángulos y círculos. Pero sabemos que nuestras definiciones y teoremas no se refieren a esas figuras chuecas e imperfectas. Como tampoco se refieren a objetos físicos triangulares o circulares, aunque después los resultados obtenidos puedan aplicarse a ellos. Nuestras figuras son solo ilustraciones auxiliares, útiles como medio para hablar y razonar acerca de las formas mismas, es decir, la triangularidad y la circularidad. Hablamos de estas formas como figuras en las cuales los puntos carecen de dimensiones, las líneas solo tienen longitud y las superficies no tienen espesor, y decimos que estas figuras perfectas son nuestros verdaderos objetos de conocimiento y constituyen la realidad que estudia el matemático. El círculo platónico, o Círculo (con mayúscula), es la figura que tiene todas las propiedades del círculo y ninguna otra; y así con las otras figuras.

El paso siguiente es la generalización: al lado del círculo ideal tenemos la mesa ideal o la Mesa, es decir, la forma o idea de mesa; lo que tienen en común todas las mesas, lo que les confiere un aire de familia. Y así mismo tenemos el Tigre y el Triángulo, la Blancura y el Coraje, la Rosa y la Justicia, y todo lo demás. Anotemos de pasada que cuando hablamos del ciudadano ideal o de la mujer ideal estamos aludiendo, quizás sin saberlo, a la teoría de Platón.

Todo es bastante raro. Pero falta la jugada final, la que pone todo patas arriba: en lugar de considerar que estas ideas son meras

abstracciones obtenidas a partir de los correspondientes objetos reales, Platón dijo que, por el contrario, esas ideas, perfectas e indestructibles tienen existencia plena y autónoma fuera de nuestras mentes y son lo único real, mientras que los objetos materiales ordinarios son meros reflejos deficientes que se deterioran y perecen. Y así, el mundo que nosotros tomamos por real es una ilusión, copia imperfecta y deleznable del mundo eterno de las formas, solo un poco más persistente que las sombras y los sueños. Esto es descabellado. Y sin embargo, como dijo Einstein: “Parece que la mente humana tiene que primero construir formas, independientemente, antes de que podamos hallarlas en las cosas” [5].



La Trinidad Platónica

Para ilustrar su concepción jerárquica del universo, Platón usó la alegoría conocida como *la línea dividida*. En ella los niveles de realidad y de conocimiento se representan por medio de una línea vertical dividida, primero, en dos partes. La parte inferior corresponde al mundo sensible (objeto de la mera opinión, *doxa*) y la superior al mundo inteligible de las formas (objeto de auténtico conocimiento, *episteme*). Cada una de estas partes se divide a su vez en dos, de modo que la línea original queda dividida en cuatro segmentos o niveles. El nivel inferior, es decir, el primer segmento de abajo hacia arriba, representa los reflejos y las sombras; encima de él está el segundo segmento, que corresponde a las cosas materiales ordinarias. Estos dos segmentos constituyen la mitad inferior de la línea original que, como ya dijimos, corresponde al mundo sensible. El tercer nivel (primero del mundo inteligible), corresponde a los objetos matemáticos (accesibles a través del método axiomático-deductivo). En el cuarto nivel, están las formas superiores a cuyo conocimiento solo se llega a través de la dialéctica platónica.

Dominando el último nivel, y por tanto todo el resto, está la tríada de lo Cierto, lo Bello y lo Bueno, formas estas que, en un último esfuerzo de abstracción mística, se funden en el Bien Supremo, también llamado el Uno. En este contexto hay que entender la palabra ‘bueno’ no solo en un sentido moral absoluto, sino como bueno en algo o para algo, como al hablar de un buen vino, un buen atleta o una buena teoría. Se refiere a lo que cumple ciertos requisitos de excelencia y calidad, y también a lo útil, lo que sirve para algún fin, lo aplicable. Como advierte Werner Jaeger en su *Paideia*: “la palabra bueno en griego (*αγαθος*, *agathos*) no tiene solamente el sentido ético estricto que hoy se le da, sino que es el adjetivo correspondiente al sustantivo *areté*, designando, por tanto, toda clase de virtud o excelencia” [9]. Algo parecido ocurre con las palabras griegas que se traducen como verdad y belleza.

Las concepciones platónicas, examinadas con rigor, parecen surrealistas y pueden ser confutadas y hasta ridiculizadas con

facilidad. Pero, despojadas de sus pretensiones metafísicas, pueden ser apreciadas como metáforas de profundas y poderosas intuiciones que forman el tejido de la civilización intelectual que nos legaron los griegos. La trinidad platónica, en particular, está formada por los tres valores fundamentales que deben ser cultivados por igual si se quiere aspirar a la *areté*, (excelencia) humana, y que, quizás, son uno solo. Aquí recordamos una vez más a Einstein: “Los ideales que han iluminado mi camino y que, una y otra vez, me han dado coraje para enfrentar la vida con alegría, han sido el Bien, la Verdad y la Belleza” [6].

Según Platón, para acceder a la dialéctica y al conocimiento de las formas superiores, la preparación más adecuada es la matemática; nótese que hoy sostenemos esto mismo cuando decimos que la matemática es buena para ejercitar la mente. De acuerdo con ello, en el plan de estudios expuesto en la *República*, un lugar prominente lo ocupan las cuatro *mathemata*. Andando en el tiempo, las *mathemata*, con el nombre de *quadrivium* (las cuatro vías), fueron adoptadas por las nacientes universidades medievales, en las que, junto con el *trivium* (lógica, retórica y gramática), constituyeron las llamadas siete artes liberales. De allí pasaron a nuestros planes de estudio actuales de modo que, como observara Russell en su *Historia de la filosofía occidental*, si preguntamos por qué todos los niños se ven hoy forzados a estudiar matemática en la escuela, la respuesta la encontraremos en el Libro VII de la *República* [13]. Desde entonces la matemática ha extendido y profundizado su influjo, de tal manera que hoy, en la entrada de casi todas nuestras escuelas y universidades, podría ponerse alguna versión actualizada de la advertencia de Platón.

Pero aunque Platón llegó a conocer bien las matemáticas de su tiempo, no fue lo que hoy llamamos un matemático profesional. Además, hay razones para pensar que solamente en su madurez se despertó su admiración y su entusiasmo por las matemáticas: en las *Leyes* hay un pasaje donde el ateniense, quien se supone no es otro que Platón, le dice a su interlocutor (Clinias, el cretense), hablando

de matemáticas: “Yo mismo, tarde en la vida y con asombro, supe de nuestro estado de ignorancia en estos temas”[11]. Y, más adelante, con un celo que creemos reconocer, fustiga a sus conciudadanos diciéndoles que ignorar esos hechos rebaja a los hombres al nivel de las bestias. Estas, dice, “son cosas tan necesarias que saberlas no es nada meritorio, pero ignorarlas debería ser motivo de vergüenza” [11].

Parece que su primer contacto con la matemática avanzada tuvo lugar en su primera visita al sur de Italia, hacia el final de sus años perdidos (399-388 a. C.), cuando tenía alrededor de 40 años. Fue entonces que, quizás por intermedio de Eudoxo o de Teodoro, Platón conoció a Arquitas de Tarento, matemático brillante y uno de los personajes más interesantes de la historia.



Arquitas
y la secta
del Uno

Si bien sus posturas intelectuales son disímiles, hay cierto paralelismo entre Platón y Hobbes. Dos mil años antes de Hobbes y varias décadas antes de que naciera Euclides, Platón también tuvo una revelación. Era el año 388 a. C. y estaba de visita en la Magna Grecia, al sur de Italia, pero no hubo un cronista que relatara el episodio para la posteridad. Algunos piensan que el motivo de su asombro fueron los poliedros regulares, pero hay mejores razones para pensar que fueron los inconmensurables. En efecto, la existencia de segmentos inconmensurables pudo interpretarse entonces como una seria deficiencia de la aritmética frente a la geometría, como fundamento de toda la ciencia. Eso debió dejarlo estupefacto. Al año siguiente fundaría la Academia, conminando a todos a estudiar geometría si querían entender el universo.

La conversión de Platón marcó un momento estelar para la civilización. También aquí, para no perder la fuerza explosiva del acontecimiento, hay que saber qué son los inconmensurables. Dos segmentos son inconmensurables cuando no tienen una medida común, esto es, cuando no pueden medirse con una misma unidad de medida. En forma más explícita: cuando no existe un tercer segmento que cabe un número exacto de veces en cada uno de ellos. La existencia de segmentos inconmensurables choca con la intuición desprevenida. En efecto, la experiencia parece decirnos que dados dos segmentos cualesquiera uno siempre puede medirlos con exactitud, basta adoptar una unidad suficientemente fina (el centímetro, el milímetro, la micra...). El asombro al hallar que esto no es siempre así lo expresó Aristóteles cuando escribió: “Porque para todos debe ser motivo de gran pasmo que pueda existir una cosa que no pueda ser medida ni aún con la medida más pequeña posible” [1]. En otra parte de su obra, Aristóteles alude al ejemplo más conocido de segmentos inconmensurables, a saber, el lado y la diagonal de un cuadrado [2].

Como el teorema de Pitágoras, este hecho es extraño y uno se pregunta cómo pudo alguien llegar siquiera a sospechar algo así.

Además, este es un hecho que no es visualizable y que no puede ser comprobado con mediciones aproximadas, como sí sucede con el teorema de Pitágoras. Pero hay algo más desconcertante aún: una vez formulada la conjetura, hay que demostrarla. Pero ¿cómo demuestra uno la *inexistencia* de algo? ¿Cómo se demuestra que *ningún* segmento puede haber un número exacto de veces en el lado y en la diagonal de un cuadrado? Vemos entonces que, por desconcertantes que sean el hecho y su descubrimiento, la manera de establecer su verdad lo es más aún.

Pues bien, los griegos encontraron la manera de hacerlo. Hablamos de esa forma indirecta de razonar llamada *reducción al absurdo*. Tan fino y potente es este método, basado en la consistencia lógica, que algunos historiadores han visto aquí el origen del concepto de demostración y de su uso sistemático para esclarecer la verdad en matemáticas.

Pero ¿cómo empezó todo? La Academia tuvo un antecedente. Más de un siglo antes, existió en la *Magna Grecia* una comunidad mística dedicada al estudio y contemplación de los números engendrados por el Uno, los cuales eran considerados como los componentes fundamentales del Todo, es decir, del universo. Sus maestros más prominentes se llamaron *mathematikoi* y entre ellos se cuenta al descubridor de los inconmensurables. Pues bien, uno de los últimos miembros de esta secta, y uno de los más prominentes, fue Arquitas de Tarento.

Hemos seguido un rastro que nos ha llevado del teorema de Pitágoras y la geometría de Euclides, pasando por la Academia y Platón, hasta llegar a Arquitas y la secta que descubrió los inconmensurables. Aquí podríamos decir que hemos vuelto al principio de nuestra narración, pues el fundador de esta secta no fue otro que Pitágoras de Samos.

Pitágoras es un personaje con un pie en la historia y otro en el mito. De él se cuentan tantas maravillas que unos dicen que todo es mera leyenda, mientras que otros piensan que no todo puede ser

imaginario, que solamente un personaje real y extraordinario pudo suscitar tanta admiración y reverencia [9].

Lo que está más allá de la duda razonable es que, como dice Russell, casi todas las ideas de Platón son de origen pitagórico. Pitagórica es la primacía de la forma sobre la materia, pitagóricas eran las *mathemata* y la idea de que la matemática es el substrato del universo; pitagóricas la *anamnesis* y la *metempsychosis*; pitagóricas son palabras como *teorema* y *matemática*; *armonía*, *cosmos* y *filosofía*. Y pitagórica es también la más antigua definición de la belleza como la unidad en la diversidad, la armonía de las partes entre sí y con el todo.

Sabemos que todo precursor tiene precursores y que todo principio es provisional. Pero retroceder más atrás de Pitágoras sería entrar en el tiempo de los dioses, de Prometeo y de las Musas, cuando el alfabeto era joven y la prosa no existía. Nunca sabremos cómo empezó todo, pero ahora sabemos que el rastro del hechizo conduce hasta Pitágoras.

Pasemos entonces a la segunda cuestión: la naturaleza del hechizo de Pitágoras. ¿Cuál es el secreto de ese discreto encanto que puede cautivar a jóvenes y viejos y extender su influjo a toda una civilización? Veremos que, como a menudo sucede, es una mezcla de amor e interés...

Aunque los protagonistas que hemos convocado son personajes nada ordinarios, es posible que sus experiencias no sean extraordinarias. Que, dadas unas condiciones propicias, pueden ser experiencias más bien corrientes. Imaginemos una persona con mente abierta e inquisitiva, que se hace preguntas y busca respuestas. Pronto se da cuenta de lo parcial y mudable que es la opinión humana y de lo variadas y contrapuestas que pueden ser las explicaciones que sobre las mismas cosas sostienen personas distintas y hasta la misma persona en distintas circunstancias. Sabe que hasta nuestros propios sentidos nos decepcionan. No le son extraños los muchos y enormes absurdos que se han tenido y se tienen por verdades absolutas; y no solo por la gente común sino por personas eminentes, por

científicos, intelectuales y filósofos. Así las cosas, no es imposible que haya llegado a desesperar de hallar algo cierto en este mundo. Pero un día, la curiosidad o el azar lo ponen en contacto con la matemática, y entonces ve algo que no ha visto jamás. Es posible que una afirmación insólita, quizás increíble, llame su atención. Pero lo que en realidad cautiva su interés es que la afirmación viene acompañada por una prueba.



Figura 4. *Pitágoras de Samos*, el gran matemático y filósofo jónico. Para él todo estaba relacionado con las matemáticas y todo podía predecirse y medirse según pautas rítmicas (detalle de la *Escuela de Atenas*). Fuente: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3f/Sanzio_01_Pythagoras.jpg

Una prueba que no apela ni a la experiencia, ni a los sentidos, ni a la autoridad, ni a la tradición, ni a la ley, ni a la fe; ni siquiera al llamado sentido común. Solo apela a algo que, ahora comprende, ha llevado siempre consigo: su razón. Y su razón, sin ayuda ni presión de nadie, le dice que la afirmación es irrefutable. Entonces, siente que, por primera vez en su vida, ha encontrado la certeza sobre la tierra. Y el corazón le da un vuelco.

También es posible que, después de haber avanzado con esfuerzo por los corredores y escaleras de un edificio conceptual como el de la geometría, un día se detenga y eche una ojeada a la estructura en su conjunto y perciba, por vez primera, la armonía entre el todo y sus partes, la sencillez y la extrema economía de su arquitectura, y entonces comprenda que está frente a esa cualidad cuyo ámbito habitual es el mundo del arte y que los matemáticos prefieren llamar elegancia.

Pero aun si la solidez y armonía del edificio matemático no le impresionan, puede sentir curiosidad ante la extraordinaria utilidad de la matemática, ante la eficacia de sus resultados y procedimientos en los campos más diversos. Y cuando sepa de casos en los cuales esa aplicabilidad es inexplicable, la curiosidad se transformará en asombro. Ese asombro al cual alude Eugene Wigner cuando habla de “la irrazonable efectividad de las matemáticas” [20].

En resumen, la matemática tiene tres facetas que pueden cautivar la inteligencia y encantar la imaginación: la elegancia de sus procedimientos, la certeza de sus afirmaciones y la utilidad de sus aplicaciones. Por eso, cuando el velo de familiaridad se levanta, como a veces ocurre, permite vislumbrar, tal vez por un instante, el Bien, la Verdad y la Belleza.



Epílogo

Terminar la exposición en este punto podría dejar una impresión engañosa. La realidad es siempre compleja, todo lo que brilla tiene su lado opaco y las cualidades conviven con defectos. Como muestra, valgan estos comentarios:

1. “Tan cierto como que dos y dos son cuatro” es una expresión que refleja la confianza en la verdad matemática. Son escasas las cosas sobre las cuales podemos tener menos dudas. Sin embargo, la verdad matemática ha sufrido dos conmociones que, al final, la privaron para siempre de su posición como paradigma de la verdad absoluta.

La primera fue la llamada revolución no-euclidiana que, en el primer tercio del siglo XIX, derrocó a la geometría euclidiana de su largo reinado como la auténtica ciencia del espacio y puso en evidencia que, considerados como aserciones acerca del mundo físico, los teoremas matemáticos pueden no ser ciertos o, como dijo Einstein, mientras más ciertos son, menos dicen acerca de la realidad.

El significado y la verdad pueden transmitirse, mas no establecerse. Por eso Russell dijo que “la matemática puede definirse como la ciencia en la cual nunca sabemos de qué hablamos, ni si lo que decimos es verdad” [14]; una descripción que por paradójica no deja de ser exacta.

Perdido su anclaje en la realidad, la verdad matemática solo podía aspirar a ser entendida como *consistencia*, es decir, no contradicción entre los supuestos en los cuales se basan las demostraciones. En vista de ello, los matemáticos se propusieron demostrar que la matemática es consistente. Pero entonces vino Gödel y, en 1930, demostró que, si lo es, entonces es imposible demostrarlo [10].

Después de haber tenido que conformarse con la consistencia en lugar de la certeza, la matemática tuvo que renunciar también a la consistencia. Hay que registrar en su favor que tan drásticos ajustes salieron de su propio seno, pues fueron matemáticos quienes los llevaron a cabo.

2. Los matemáticos han hablado siempre de la belleza presente en su ciencia. Y no nos referimos a diseños gráficos que exhiben

simetrías más o menos complejas. Dirac decía “Es más importante la belleza en nuestras ecuaciones que su ajuste al experimento”. Para Russell, “las matemáticas poseen no solo la verdad sino suprema belleza – una belleza fría y austera, como la de una escultura”; y para Henri Poincaré, el rasgo distintivo del pensamiento matemático no es la lógica sino la estética. Sin embargo, para un gran número de personas, la matemática es solo un lejano y desapacible recuerdo de sus tiempos de estudiantes. Una materia árida y técnica, ajena a la imaginación y al sentido estético. Para ellos parece imposible que allí pueda haber jamás algo que pueda llamarse bello. En contraste con la verdad, que parece más objetiva, la belleza, que sin duda es más subjetiva, ha resultado ser más persistente. Pero en matemáticas la belleza puede ser difícil de apreciar.

La apreciación de cualquier arte depende en buena parte del aprendizaje. En nuestro caso casi todo debe ser aprendido. El teorema no solo debe ser bello, primero debe ser cierto. Pero percibir la verdad de una proposición matemática supone no solo comprender su significado, sino seguir y entender su demostración, todo lo cual puede exigir una preparación extensa y difícil. Es por esto que, de los atributos de las matemáticas, el más recóndito es, sin duda, la belleza.

3. Que la matemática es buena para muchas cosas no tiene discusión. La utilidad de la matemática ha sido la principal causa de su difusión y aceptación no solo en la ciencia y la tecnología, sino en la sociedad en general. Sus éxitos han sido tan notorios que el público ha llegado a profesar por ella un respeto reverencial que se parece mucho a la superstición. Quizás por ello Norbert Wiener decía que: “uno de los principales deberes del matemático, como asesor de científicos de campos menos precisos, es disuadirlos de esperar demasiado de la matemática” [18].

A la ignorancia se une el engaño cuando el afán matematizador llega al exceso. Hace varios años Jacob Schwartz, en un artículo con el sugerente título *The Pernicious Influence of Mathematics on Science*, señalaba que la matemática se presta para vestir, tanto a la ciencia como

al disparate, con el mismo uniforme hecho de fórmulas y teoremas, y añadía: “Por desgracia, un disparate en uniforme es mucho más persuasivo que un disparate vestido de civil” [15].

Los infundios con pasaporte matemático tampoco son raros en las ciencias sociales y humanas; el *affaire* Alan Sokal puso en evidencia muchos embustes de autores bien conocidos que usan términos y fórmulas matemáticos para decir sandeces con aires de profundidad [16].

Estas glosas no quieren dejar una sensación de frustración o desengaño. Confiamos en que, a pesar de las vicisitudes, el edificio de la matemática prevalecerá y preferimos pensar que Aristóteles no erraba cuando escribió: “aquellos que afirman que las ciencias matemáticas nada dicen sobre el bien y la belleza están en un error” [1]. Y que tal vez Baudelaire no estaba tan equivocado al decir “todo lo que es noble y bello es el resultado de la razón y del cálculo”.

Sabemos que la matemática es una actividad humana, falible como las otras, y que ni la perfección ni la eternidad son bienes de este mundo. Pero los ideales, inaccesibles por naturaleza, pueden iluminar nuestra efímera existencia.

Parece que las tareas que valen la pena son interminables y, entre ellas, ninguna tan ardua y prometedora como la búsqueda permanente del bien, la verdad y la belleza.

Referencias


- [1] Aristóteles, *Metaphysics* (983a, 1078a), Britannica Great Books.
- [2] Aristóteles, *Prior Analytics* (41a), Britannica Great Books.
- [3] J. Aubrey, “A Brief Life of Thomas Hobbes, 1588-1679”, en *Aubrey's Brief Lives*, Oliver L. Dick, ed, Boston: Nonpareil Books, 1957.
- [4] J. Bronowski, *Ciencia y valores humanos*, Barcelona: Lumen, 1968.
- [5] A. Einstein, “Autobiographical Notes”, en *Albert Einstein: Philosopher-Scientist, The Library of Living Philosophers, vol. VII*, Paul A. Schlipp, ed, LaSalle: Open Court, 1988.
- [6] A. Einstein, *Ideas and Opinions*, New York: Wing Books, 1954.
- [7] K. S. Guthrie, *The Pythagorean Sourcebook and Library*, Grand Rapids: Phane Press, 1987.
- [8] W. Heisenberg, *La imagen de la naturaleza en la física actual*, Barcelona: Planeta, 1993.
- [9] W. Jaeger, *Paideia*, Ciudad de México: Fondo de cultura económica, 1992.
- [10] E. Nagel y J. R. Newman, *El teorema de Gödel*, Madrid: Tecnos, 1979.
- [11] Platón, *Diálogos*, Ciudad de México: Porrúa, 1979.
- [12] B. Russell, *The Autobiography of Bertrand Russell*, London: Allen & Unwin, 1975.
- [13] B. Russell, *Historia de la filosofía occidental*, Madrid: Aguilar, 1973.
- [14] B. Russell, *Misticismo y lógica*, Barcelona: Paidós, 1961.
- [15] J. T. Schwartz, “The Pernicious Influence of Mathematics on Science”, en *Discrete Thoughts*, Mark Kac *et al.*, Boston: Birkhäuser, 1986.

- [16] A. Sokal, y J. Bricmont, *Fashionable Nonsense. Postmodern Intellectuals' Abuse of Science*, New York: Picador, 1998.
- [17] R. J. Trudeau, *The Non-Euclidean Revolution*, Boston: Birkhäuser, 1987.
- [18] N. Wiener, *I am a Mathematician*, Cambridge: M.I.T. Press, 1964.
- [19] B. L. Waerden, van der, *Science Awakening*, Leyden: Noordhoff, 1954.
- [20] E. P. Wigner, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences," en *Symmetries and Reflections*, Cambridge: M.I.T. Press, 1970.

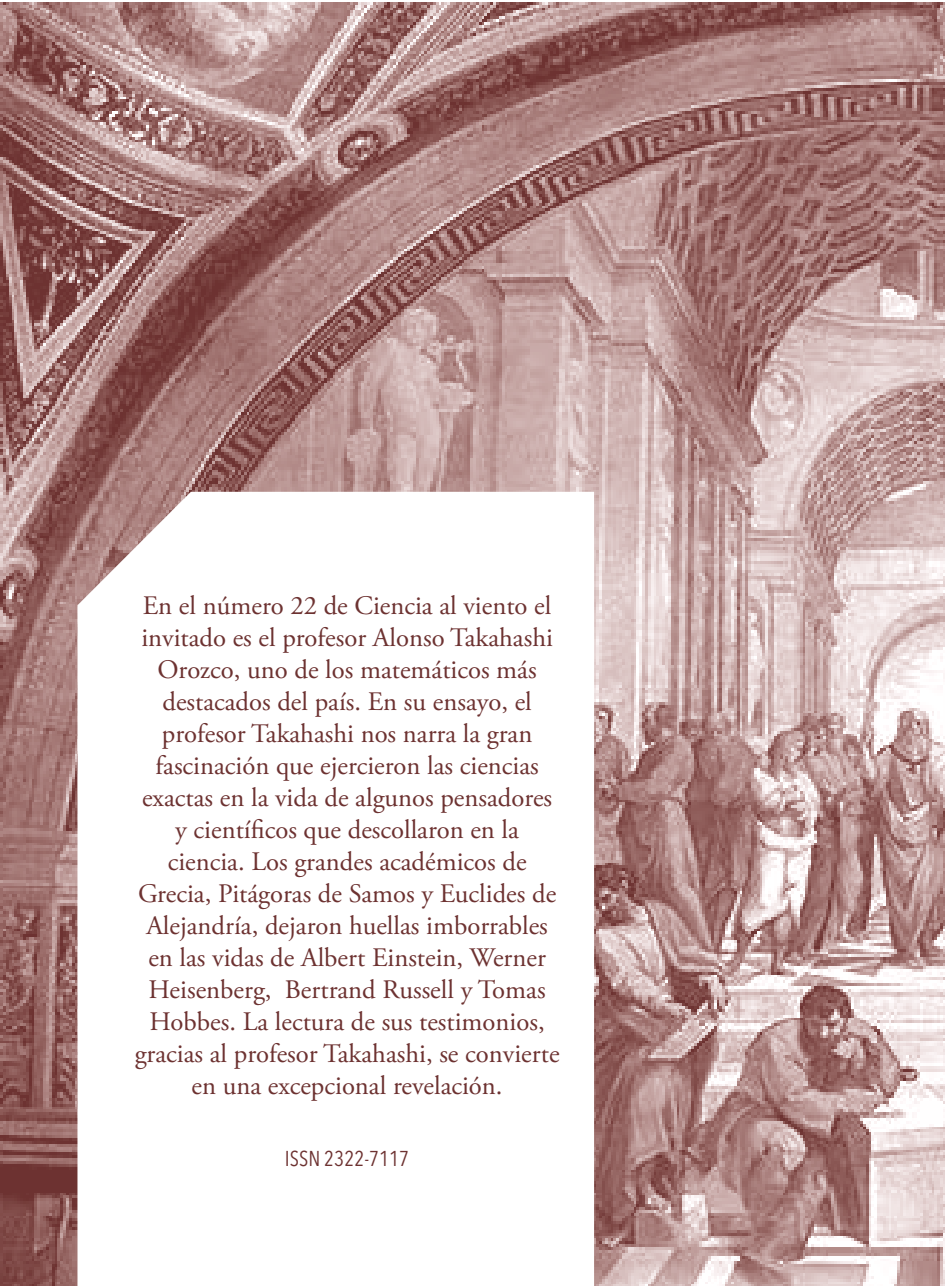


Alonso Takahashi (nacido en Cali) es egresado de la carrera de Matemáticas de la Universidad Nacional en Bogotá y M.S. y Ph.D. en Matemáticas de la Universidad de Tulane en Nueva Orleans. La Universidad Nacional, así como la Sociedad Colombiana de Matemáticas y la Academia Colombiana de Ciencias le han concedido varias distinciones.

El doctor Takahashi es autor de Conceptos fundamentales de matemática, Del análisis a la topología, Representación funcional, Álgebra lineal y de algunos artículos investigativos y expositivos.



Edi-
tado por el
Centro editorial
de la Facultad de Cien-
cias, Universidad Nacional de
Colombia, sede Bogotá. Fuen-
te principal Adobe Garamond
Pro y Avenir Next. Interior im-
preso a una tinta en papel de caña
Earth Pact de 90 g y cubierta
impresa en dos tintas sin
plastificar en papel de
200 gramos.



En el número 22 de Ciencia al viento el invitado es el profesor Alonso Takahashi Orozco, uno de los matemáticos más destacados del país. En su ensayo, el profesor Takahashi nos narra la gran fascinación que ejercieron las ciencias exactas en la vida de algunos pensadores y científicos que descollaron en la ciencia. Los grandes académicos de Grecia, Pitágoras de Samos y Euclides de Alejandría, dejaron huellas imborrables en las vidas de Albert Einstein, Werner Heisenberg, Bertrand Russell y Tomas Hobbes. La lectura de sus testimonios, gracias al profesor Takahashi, se convierte en una excepcional revelación.