



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Caos Robusto en un mapa estroboscópico discontinuo de dimesión dos.

Robust chaos in a discontinuous stroboscopic planar  
map.

Juan Fernando Paz Paternina

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas y Estadística  
Manizales, Colombia  
2022



# Caos Robusto en un mapa estroboscópico discontinuo de dimesión dos.

Juan Fernando Paz Paternina

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ciencias - Matemática Aplicada**

Director(a):

Ph.D Andrés Felipe Amador Rodríguez

Codirector(a):

Ph.D Simeon Casanova Trujillo

Línea de Investigación:

Sistemas dinámicos y control

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas y Estadística

Manizales, Colombia

2022



# Agradecimientos

Mis agradecimientos a mi familia, a mi codirector el profesor Simeon Casanova y a mi director, el profesor Andrés Felipe Amador, quien ha sido un mentor y un amigo para mí desde antes de iniciar mi maestría.



## Resumen

En este trabajo se muestra la existencia de caos robusto en el mapa estroboscópico asociado a una forma canónica normalizada de sistemas lineales discontinuos definidos a trozos de dimensión dos (PWL por las siglas en ingles). El trabajo consta de 5 capítulos.

En el primer capítulo damos un estudio riguroso de algunos conceptos y resultados esenciales de mapas discretos reportados en la literatura.

En el segundo capítulo presentamos la forma canónica normalizada para sistemas lineales discontinuos definidos a trozos, estudiamos algunas propiedades de este sistema y presentamos algunos mecanismos para generar ciclos límite en este sistema reportados en la literatura.

El tercer capítulo presenta el mapa estroboscópico asociado a la forma canónica normalizada y estudia algunas propiedades de este mapa dadas en la literatura, como la matriz exponencial, la estabilidad de sus órbitas y nuestros propios resultados sobre los exponentes de Lyapunov de este mapa.

En el cuarto capítulo se utilizan los resultados presentados en los capítulos anteriores para estudiar la existencia de caos robusto en el mapa estroboscópico para el caso foco e introducimos a un pequeño estudio de caos robusto en el caso silla.

Finalmente en el quinto capítulo presentamos una aplicación del caos robusto en mapas discretos a la encriptación de imágenes, diseñando un esquema de encriptación e implementándolo con el mapa estroboscópico en una región caótica de parámetros.

**Palabras clave:** Caos robusto; Mapa estroboscópico; Mapa dos dimensional; Sistema discontinuo lineal a trozos; Atractor caótico..

# Abstract

In this work we show the occurrence of robust chaos in the two dimensional stroboscopic map associated at a canonical normal form of discontinuous piece-wise linear systems (PWL for short). The work consists in 5 chapters.

In the first chapter we give a rigorous study of some essential concepts and results of discrete maps reported in the literature.

At the second chapter, we present the canonical normal form to discontinuous PWL systems, study some properties of this system and present some mechanism to generate limit cycles in this system reported in the literature.

The third chapter presents the stroboscopic map associated at the canonical normal form and study some properties of this map given in the literature, like the exponential matrix, the stability of the orbits and our own results about the exponents of Lyapunov of this map.

In the fourth chapter the results presented in the previous chapters are used to study the occurrence of robust chaos in the stroboscopic map to the focus case and introduce little a study of robust chaos at the saddle case.

Finally in the fifth chapter we present an application of robust chaos in discrete maps to image encryption, designing an encryption scheme and implementing this with the stroboscopic map in a chaotic parameter region.

**Keywords:** Robust chaos; Stroboscopic map; Two dimensional map; Discontinuous piece-wise linear systems; Unstable periodic solution; Chaotic attractor.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Sistemas dinámicos . . . . .	3
1.2 Teoría de mapas . . . . .	5
1.3 Caos y atractores extraños . . . . .	14
1.4 Exponente característico de Lyapunov . . . . .	20
<b>2 El sistema</b>	<b>24</b>
2.1 Comportamiento del sistema . . . . .	24
2.2 Las formas canónicas . . . . .	25
2.3 Existencia de órbitas periódicas Crossing . . . . .	29
<b>3 El mapa</b>	<b>38</b>
3.1 La matriz exponencial . . . . .	39
3.2 Descripción del espacio de parámetros $(a_R, a_L)$ . . . . .	41
3.3 Espectro de Lyapunov del mapa $P$ . . . . .	42
<b>4 Existencia de atractores caóticos robustos</b>	<b>45</b>
4.1 Introducción . . . . .	45
4.2 Estudio de atractores caóticos robustos en el mapa $P$ . . . . .	48
4.3 El caso Silla . . . . .	57
4.3.1 $0 < \gamma < 1$ . . . . .	58
<b>5 Una aplicación a la encriptación de imágenes</b>	<b>66</b>
5.1 Esquema de encriptación . . . . .	66
<b>6 Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>72</b>

**Bibliografía**

**73**

# Lista de Figuras

1-1	Bifurcación silla nodo para la familia exponencial . . . . .	12
1-2	Doblamiento de período para la familia exponencial . . . . .	13
1-3	Diagrama de bifurcación del mapa logístico definido en (1-13) variando el parámetro $\mu$ . . . . .	14
1-4	Diagrama de bifurcación del mapa tienda definido en (1-14) variando el parámetro $\mu$ . . . . .	15
1-5	Órbita del punto $z = e^i$ (en azul), bajo el mapa (1-15) con $\lambda = \sqrt{2}$ y <b>(a)</b> 0 iteraciones, <b>(b)</b> 100 iteraciones y <b>(c)</b> 10000 iteraciones. . . . .	17
1-6	Parabola $F_\mu$ con los intervalos $I_0$ , $A_0$ y $A_1$ . . . . .	18
2-1	Órbita del sistema (2-12) en negro que converge al pseudoequilibrio (2-17) (verde), con la configuración de parámetros $\gamma = 0,1$ , $a_L = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $a_R = \frac{1}{2}$ , $m = i$ y $b = -1,5$ . . . . .	28
2-2	Órbita del sistema (2-12) en negro que converge al pseudoequilibrio (2-17) (verde), con la configuración de parámetros $\gamma = 0,1$ , $a_L = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $a_R = \frac{1}{2}$ , $m = 1$ y $b = -1,5$ . . . . .	29
2-3	Órbita periódica crossing estable del sistema (2-12) en azul con la configuración de parámetros $\gamma_L = -\frac{3}{2}$ , $\gamma_R = 1$ , $a_L = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $a_R = -\frac{1}{2}$ y $b = 0$ . $x_L^*$ en azul y $x_R^*$ en rojo. . . . .	31
2-4	Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-12) en rojo con la configuración de parámetros $\gamma_L = \frac{3}{2}$ , $\gamma_R = -1$ , $a_L = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $a_R = -\frac{1}{2}$ y $b = 0$ . $x_L^*$ en azul y $x_R^*$ en rojo. . . . .	32
2-5	Órbita periódica crossing estable del sistema (2-12) en azul con la configuración de parámetros $\gamma_L = \gamma_R = -1$ , $a_L = a_R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $b = 1$ . $x_L^*$ en azul y $x_R^*$ en rojo, conjunto de deslizamiento en rojo. . . . .	32
2-6	Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo con la configuración de parámetros $\gamma = 1$ , $a_L = a_R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $b = -1$ . $x_L^*$ en azul y $x_R^*$ en rojo, conjunto de deslizamiento en rojo. . . . .	33
2-7	Órbita periódica crossing Estable del sistema (2-12) en azul con la configuración de parámetros $\gamma_L = \frac{1}{2}$ , $\gamma_R = -\frac{3}{2}$ , $m_L = i$ , $m_R = 1$ , $a_L = 0$ , $a_R = -1$ y $b = 0$ . $x_L^*$ en azul y $x_R^*$ en rojo. . . . .	35

<b>2-8</b> Órbitas periódicas crossing inestables del sistema (2-3) variando los parámetros $\gamma$ y $b$ , $\gamma = 0,25$ en azul, $\gamma = 0,5$ en rojo, $\gamma = 0,75$ en verde y $\gamma = 1$ en negro. . . . .	37
<b>4-1</b> Atractor caótico del mapa $f$ definido en (4-1), con la configuración de parámetros $\tau_L = 1,7$ , $\tau_R = -1,7$ , $\delta_L = \delta_R = 0,5$ . Puntos de equilibrio $Y$ en azul y $X$ en rojo. . . . .	48
<b>4-2 (a)</b> Atractor caótico del mapa $P$ definido en (3-17), con la configuración de parámetros $\gamma = 0,1$ , $m = i$ , $\theta = \frac{3\pi}{4}$ , $b = -1$ y $t = 0,5$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo. $x_L^*$ en azul y $x_R^*$ en rojo. Conjunto de deslizamiento $\Sigma^s$ en rojo. <b>(b)</b> Zoom del atractor caótico. . . . .	50
<b>4-3 (a)</b> Atractor caótico del mapa $P$ definido en (3-17), con la configuración de parámetros $\gamma = 2$ , $m = i$ , $\theta = \frac{3\pi}{5}$ , $b = -1$ y $t = 0,1$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo. $x_L^*$ en azul y $x_R^*$ en rojo. Conjunto de deslizamiento $\Sigma^s$ en rojo. <b>(b)</b> Zoom del atractor caótico. . . . .	50
<b>4-4 (a)</b> Atractor caótico del mapa $P$ definido en (3-17), con la configuración de parámetros $\gamma = 0,4$ , $m = i$ , $\theta = \frac{4\pi}{5}$ , $b = -1$ y $t = 0,3$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo. $x_L^*$ en azul y $x_R^*$ en rojo. Conjunto de deslizamiento $\Sigma^s$ en rojo. <b>(b)</b> Zoom del atractor caótico. . . . .	51
<b>4-5 (a)</b> Atractor caótico del mapa $P$ definido en (3-17), con la configuración de parámetros $\gamma = 4$ , $m = i$ , $\theta = \frac{3\pi}{4}$ , $b = -1$ y $t = 0,06$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo. $x_L^*$ en azul y $x_R^*$ en rojo. Conjunto de deslizamiento $\Sigma^s$ en rojo. <b>(b)</b> Zoom del atractor caótico. . . . .	51
<b>4-6</b> Tiempos críticos $t_c$ contra el parámetro $0 < \gamma < 5$ , con la configuración de parámetros $m = i$ , $b = -1$ y $\theta = 3\pi/4$ . . . . .	52
<b>4-7</b> Tiempos críticos $t_c$ contra el parámetro $-5 < b < 0$ , con la configuración de parámetros $m = i$ , $\theta = 3\pi/4$ y $\gamma \in \{0,25, 0,5, 0,75, 1\}$ . . . . .	53
<b>4-8</b> Diagrama de bifurcación del mapa $P$ definido en 3-17, con la configuración de parámetros $\gamma = 0,6$ , $m = i$ , $b = -1$ , $t = 0,1$ y variando el parámetro $\theta$ . . . . .	54
<b>4-9</b> Diagrama de bifurcación del mapa $P$ definido en 3-17, con la configuración de parámetros $\gamma = 0,5$ , $\theta = 3\pi/4$ , $m = i$ , $t = 0,1$ y variando el parámetro $b$ . . . . .	54
<b>4-10</b> Diagrama de bifurcación del mapa $P$ definido en 3-17, con la configuración de parámetros $\theta = 3\pi/4$ , $m = i$ , $b = -1$ , $t = 0,1$ y variando el parámetro $\gamma$ . . . . .	55
<b>4-11 (a)</b> Atractor caótico del mapa $P$ definido en (3-17), con la configuración de parámetros $\gamma = 0,1$ , $m = i$ , $\theta = 0$ , $b = -1$ y $t = 0,5$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo, Órbita periódica crossing estable del sistema (2-15) en azul. $x_L^*$ en azul y $x_R^*$ en rojo. Conjunto de deslizamiento $\Sigma^s$ en rojo. <b>(b)</b> Zoom del atractor caótico. . . . .	56

<b>4-12 (a)</b> Atractor caótico del mapa $P$ definido en (3-17), con la configuración de parámetros $\gamma = 0,1$ , $m = i$ , $\theta = 1,07$ , $b = -1$ y $t = 0,5$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo. $x_L^*$ en azul y $x_R^*$ en rojo. Conjunto de deslizamiento $\Sigma^s$ en rojo. <b>(b)</b> Zoom del atractor caótico. . . . .	56
<b>4-13 (a)</b> Atractor caótico del mapa $P$ definido en (3-17), con la configuración de parámetros $\gamma = 0,1$ , $m = i$ , $\theta = 1,47$ , $b = -1$ y $t = 0,5$ . Conjunto de deslizamiento $\Sigma^s$ en rojo. Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo. $x_L^*$ en azul y $x_R^*$ en rojo. <b>(b)</b> Zoom del atractor caótico. . . . .	57
<b>4-14 (a)</b> Atractor caótico del mapa $P$ definido en (3-17), con la configuración de parámetros $\gamma = 0,1$ , $m = i$ , $\theta = \frac{7\pi}{4}$ , $b = -1$ y $t = 0,5$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo. $x_L^*$ en azul y $x_R^*$ en rojo. Conjunto de deslizamiento $\Sigma^s$ en rojo. <b>(b)</b> Zoom del atractor caótico. . . . .	57
<b>4-15</b> Órbita periódica crossing inestable del sistema $F$ con la configuración de parámetros $\gamma = 0,5$ , $m = 1$ , $b = -0,16$ y $\theta = 3\pi/4$ . $A$ en amarillo, $B$ en negro, $C$ en magenta y $D$ en verde. . . . .	60
<b>4-16</b> Diagrama de bifurcación del mapa $P$ definido en 3-17, con la configuración de parámetros $\gamma = 0,35$ , $m = 1$ , $b = -0,5$ , $\theta = 3\pi/4$ y variando el parámetro $t$ . .	61
<b>4-17</b> Diagrama de bifurcación del mapa $P$ definido en 3-17, con la configuración de parámetros $\gamma = 0,35$ , $m = 1$ , $b = -0,5$ , $t = 0,1$ y variando el parámetro $\theta$ . . .	62
<b>4-18 (a)</b> Atractor caótico del mapa $P$ definido en (3-17), con la configuración de parámetros $\gamma = 0,35$ , $m = 1$ , $\theta = \frac{3\pi}{4}$ , $b = -0,5$ y $t = 0,2$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo. Conjunto de deslizamiento $\Sigma^s$ en rojo. <b>(b)</b> Zoom del atractor caótico. . . . .	63
<b>4-19</b> Atractor caótico del mapa $P$ definido en (3-17), con la configuración de parámetros $\gamma = 0,1$ , $m = 1$ , $\theta = 3\pi/4$ , $b = -5$ y $t = 0,2$ . $x_L^*$ en azul y $x_R^*$ en rojo. Pseudoequilibrio en verde. Conjunto de deslizamiento $\Sigma^s$ en rojo. Conjunto de deslizamiento $\Sigma^s$ en rojo. . . . .	64
<b>4-20 (a)</b> Atractor caótico del mapa $P$ definido en (3-17), con la configuración de parámetros $\gamma = 1,2$ , $m = 1$ , $\theta = \frac{3\pi}{4}$ , $b = -5$ y $t = 0,2$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo. $x_L^*$ en azul y $x_R^*$ en rojo. Conjunto de deslizamiento $\Sigma^s$ en rojo. <b>(b)</b> Zoom del atractor caótico. . . . .	64
<b>4-21 (a)</b> Atractor caótico del mapa $P$ definido en (3-17), con la configuración de parámetros $\gamma = 0,1$ , $m = 0$ , $\theta = \frac{3\pi}{4}$ , $b = -2$ y $t = 0,5$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo. Conjunto de deslizamiento $\Sigma^s$ en rojo. <b>(b)</b> Zoom del atractor caótico. . . . .	65
<b>5-1</b> Encriptación y recuperación de una imagen mediante el algoritmo (5-2), usando los parámetros $\gamma = 0,1390$ , $b = -4,1645$ , $\theta = 3,0055$ , $t = 0,1254$ y $\mathbf{x}_0 = [0, -1,4434]$ . . . . .	68

<b>5-2</b>	Encriptación y recuperación de una imagen mediante el algoritmo (5-2), usando los parámetros $\gamma = 0,4259$ , $b = -2,2826$ , $\theta = 3,0748$ , $t = 0,2094$ y $\mathbf{x}_0 = [0, -4,0183]$ . . . . .	68
<b>5-3</b>	Encriptación y recuperación de una imagen mediante el algoritmo (5-2), usando los parámetros $\gamma = 0,1568$ , $b = -3,7347$ , $\theta = 2,8152$ , $t = 0,2831$ y $\mathbf{x}_0 = [0, -3,5834]$ . . . . .	69
<b>5-4</b>	Encriptación y recuperación de una imagen mediante el algoritmo (5-2), usando los parámetros $\gamma = 0,4259$ , $b = -2,2826$ , $\theta = 3,0055$ , $t = 0,1254$ y $\mathbf{x}_0 = [0, -1,4434]$ . . . . .	69
<b>5-5</b>	(a) Imagen Original. (b) Imagen encriptada mediante el algoritmo (5-2), con los parámetros $\theta = 3\pi/4$ , $\gamma = 0,5$ , $b = -4$ , $t = 0,2$ , $x_0 = [0, -2]$ . (c) Imagen recuperada mediante el algoritmo (5-5), con los parámetros $\theta = 3\pi/4$ , $\gamma = 0,5$ , $b = -4$ , $t = 0,2$ , $x_0 = [0, -2] + 10^{-16}\mathbf{e}_2^T$ . (d) Imagen recuperada mediante el algoritmo (5-5), con los parámetros $\theta = 3\pi/4$ , $\gamma = 0,5$ , $b = -4$ , $t = 0,2$ , $x_0 = [0, -2]$ . . . . .	70

# Lista de Tablas

<b>2-1</b>	Naturaleza topológica de los puntos de equilibrio (2-13). . . . .	27
<b>2-2</b>	Estabilidad de los puntos de equilibrio (2-13). . . . .	27
<b>5-1</b>	Medidas de seguridad del algoritmo de encriptación. . . . .	71

# Introducción

En 1963, el matemático y meteorólogo Edward Lorenz interesado por modelar y predecir el tiempo atmosférico planteó un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de dimensión tres conocido como el *sistema de Lorenz*. Él descubrió que para cierta configuración de parámetros el sistema presenta un atractor con propiedades que no habían sido reportadas hasta el momento, conocido como el *atractor de Lorenz*. Esto lo llevó a formular *el efecto mariposa* con el cual explicó que un leve cambio en las condiciones iniciales de un sistema de ecuaciones diferenciales puede producir grandes cambios en su dinámica, lo que formalmente se conoce como la sensibilidad ante las condiciones iniciales y con lo que Edward Lorenz formuló los cimientos de la teoría del caos, para más detalles ver [1, 2, 3].

Más adelante, en 1976 el naturalista Lord Robert May estudiando modelos de dinámica poblacional en [4], encontró que al variar el parámetro de la ecuación logística discreta, esta presenta comportamiento caótico. Esta es la primera vez que se reportó este comportamiento en un mapa discreto.

En 1998 el ingeniero Soumitro Banerjee y sus colaboradores en [5] definen un atractor caótico como robusto si existe una ventana en un espacio de parámetros en la que este atractor es único y no desaparece, además no son admisibles los atractores periódicos. Este concepto es introducido mediante una aplicación al modelo de un convertidor DC-DC Boost, que está dado por un mapa continuo definido a trozos dimensión dos o PWL (por sus siglas en inglés). El estudio de la existencia de estos atractores caóticos robustos y los métodos para obtenerlos o *ruta al caos* en mapas discretos ha sido de gran interés recientemente, por sus múltiples aplicaciones como la encriptación, el modelado de convertidores DC-DC, el aprendizaje en redes neuronales, telecomunicaciones, generación de números pseudoaleatorios, entre otras, ver [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15].

Los mapas estroboscópicos asociados a sistemas PWL son una adecuada forma de modelar sistemas que tengan interruptores como los convertidores de potencia, circuitos con relay como se muestra en [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 4, 24]. En el 2014 en [25] se presenta por primera vez, una forma canónica normalizada para sistemas PWL con dos zonas y se estudia la existencia de ciclos límite en esta forma canónica normalizada.

Motivados por las múltiples aplicaciones del caos robusto y los resultados presentados en [26, 25] en cuanto a la aparición de ciclos límite en la forma canónica normalizada, en este trabajo se estudia el comportamiento del mapa estroboscópico cuando el sistema de la forma canónica presenta una órbita periódica inestable al rededor de la zona de conmutación.

# 1 Preliminares

Este capítulo abarca los preliminares teóricos necesarios para el desarrollo del trabajo y se divide en 4 secciones. En la primera se define el concepto de sistema dinámico y se dan algunos teoremas fundamentales para su estudio. En la segunda se presentan algunos conceptos, definiciones y resultados del estudio de sistemas dinámicos discretos necesarios para el desarrollo del trabajo. En la tercera parte se estudian algunos resultados relacionados con caos y atractores extraños. Finalmente, en la cuarta sección estudia los exponentes característicos de Lyapunov y su relación con la presencia de caos en mapas discretos.

## 1.1. Sistemas dinámicos

La noción de sistema dinámico proviene de la formalización de un proceso determinístico. El estado futuro de sistemas físicos, químicos, biológicos, ecológicos, económicos e incluso sociales puede predecirse conociendo su estado actual y la forma en que este evoluciona en el tiempo. Suponiendo que la forma en la que el sistema evoluciona no cambia, un sistema dinámico es una terna compuesta por un espacio de estados, un tiempo de evolución y un operador que indica la evolución de los estados [27].

En esta sección se define de forma general el concepto de sistema dinámico y algunos elementos esenciales en su estudio, junto con algunos resultados y definiciones necesarias para el desarrollo de este trabajo, como la estabilidad estructural y el teorema de existencia y unicidad para sistemas a tiempo continuo.

**Definición.** [19] *Un sistema dinámico es una terna  $\{T, X, \phi^t\}$  compuesta por un espacio de estados  $X$ , un conjunto de índices  $T$  y un operador de evolución  $\phi^t : X \rightarrow X$  que satisface las siguientes condiciones*

$$1) \phi^0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in X.$$

$$2) \phi^{t+s}(\mathbf{x}) = \phi^s(\phi^t(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in X, s, t \in T.$$

Un concepto fundamental en el estudio de los sistemas dinámicos es el de órbita de un punto  $\mathbf{x}$ , que es el conjunto de todos los puntos  $\phi^t(\mathbf{x})$ , en otras palabras es la evolución de un punto  $\mathbf{x}$  en el espacio de estados  $X$ . La partición del espacio  $X$  en las órbitas de sus elementos se conoce como espacio de fase.

El estudio cualitativo de sistemas dinámicos se concentra en conocer el comportamiento de las órbitas. Existen conjuntos especiales en el espacio de estados  $X$ , que contienen a las órbitas de todos sus elementos, estos conjuntos se conocen como conjuntos invariantes.

**Definición.** [19] *Un conjunto invariante de un sistema dinámico  $\{T, X, \phi^t\}$  es un subconjunto del espacio de estados  $\Lambda \subset X$  tal que para todo  $\mathbf{x}_0 \in \Lambda$  implica que  $\phi^t(\mathbf{x}_0) \in \Lambda$ ,  $\forall t \in T$ .*

Algunos conjuntos invariantes tienen la propiedad de atraer a las órbitas de ciertos elementos, estos conjuntos se conocen como atractores.

**Definición.** [19] *Sea  $\{T, X, \phi^t\}$  un sistema dinámico. Un conjunto invariante  $\Lambda$  que es cerrado y acotado es un atractor si*

1. *Para cualquier vecindad suficientemente pequeña  $U \subset X$  de  $\Lambda$ , existe una vecindad  $V \subset X$  de  $\Lambda$  tal que  $\phi^t(\mathbf{x}) \in U$ , para todo  $\mathbf{x} \in V$  y  $t > 0$ .*
2. *Para todo  $\mathbf{x} \in U$ ,  $\phi^t(\mathbf{x}) \rightarrow \Lambda$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .*

Siguiendo a [19], el conjunto de atractores de un sistema dinámico típicamente describe el comportamiento de sus órbitas a largo plazo, ya que estos *atrapan* la dinámica de ciertas zonas que se conocen como las cuencas de atracción o dominios de atracción. En capítulos posteriores se estudiará a fondo algunas clases de atractores que son los atractores periódicos y los atractores caóticos en un tipo específico de sistemas dinámicos que son los sistemas discretos definidos a trozos.

Existen sistemas dinámicos a tiempo continuo y a tiempo discreto, los sistemas dinámicos a tiempo continuo por lo general están definidos por *ecuaciones diferenciales* y tienen por conjunto  $T$  a un subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Un resultado fundamental del estudio de ecuaciones diferenciales conocido como el **teorema de existencia y unicidad**, permite definir el operador  $\phi^t$  de un sistema dinámico a tiempo continuo descrito por una ecuación diferencial.

**Teorema 1.** [27] *Considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \tag{1-1}$$

*donde  $f$  es una función suave en una región  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Entonces existe una única función  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  que satisface las siguientes condiciones, para todo  $\mathbf{x}_0 \in U$*

- 1)  $\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ .
- 2) *Existe un intervalo  $J = (-\delta_1, \delta_2)$ , con  $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(\mathbf{x}_0) > 0$ , tal que para todo  $t \in J$ ,*

$$y(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \quad \dot{y}(t) = f(y(t)),$$

Por el Teorema 1, se define el operador  $\phi^t : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  como

$$\phi^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \quad (1-2)$$

para sistemas a tiempo continuo, el operador  $\phi^t(\mathbf{x})$  recibe el nombre de flujo y se representa como  $\phi^t(\mathbf{x}) = \Phi(t, \mathbf{x})$ .

Por otra parte, en los sistemas dinámicos a tiempo discreto el operador  $\phi^t$  está definido por una función  $f$  que itera al componerse con sí misma y es conocida como mapa, por notación, la  $n$ -ésima composición de la función  $f$  con sí misma se simboliza como  $f^{(n)}(\mathbf{x})$ . Estos operadores se estudiarán a profundidad en la siguiente sección.

El estudio cualitativo de algunos sistemas dinámicos resulta ser una tarea sumamente compleja en algunos casos, por eso es común realizar transformaciones que dan como resultado sistemas dinámicos más simples.

**Definición.** [28] *Dos sistemas dinámicos  $\{X, T, \phi^t\}$  y  $\{X, T, \psi^t\}$  son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo  $h$  que preserve la dinámica de un sistema en el otro, por medio de la ecuación*

$$h \circ f = g \circ h, \quad (1-3)$$

con  $f$  y  $g$  mapas discretos o flujos a tiempo continuo.

Para terminar esta sección se define la *estabilidad estructural* de un sistema dinámico  $\{X, T, \phi^t\}$  que permite abarcar el concepto de bifurcación en la siguiente sección, el cual es clave para este trabajo.

**Definición.** *Un mapa  $f$  (o flujo) es estable estructuralmente si existe  $\epsilon > 0$  tal que todas las perturbaciones  $\delta < \epsilon$  de clase  $C^1$  de  $f$  produzcan mapas (o flujos) topológicamente equivalentes a  $f$ .*

## 1.2. Teoría de mapas

En esta sección se estudian los conceptos de atractor periódico, sistemas a trozos y bifurcación en mapas discretos como el que se muestra a continuación

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n), \quad (1-4)$$

donde  $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R}^m)$ , y  $n, m \in \mathbb{N}$ .

Para empezar se define el concepto de punto periódico del mapa 1-4

**Definición.** [29] *El punto  $\mathbf{x}$  es un punto periódico de período  $n \in \mathbb{N}$  si  $f^{(n)}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ . El  $n$  menor entero positivo para el cual  $f^{(n)}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  se llama período principal de  $\mathbf{x}$ .*

Un punto fijo de una función  $f$  es un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  que satisface la ecuación  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ , entonces un punto fijo es un punto periódico con período principal  $n = 1$ .

**Ejemplo 1.** Considere el mapa  $x_{n+1} = f(x_n) = -x_n^3$ , note que  $f(0) = 0$ , por lo tanto  $x = 0$  en un punto fijo de  $f$ . Por otra parte  $f(1) = -1$  y  $f(-1) = 1$ , lo que convierte a  $x = -1$  y  $x = 1$  en puntos periódicos de  $f$  con periodo principal 2.

Un mapa puede tener más de un punto fijo, el siguiente ejemplo muestra un mapa con infinitos puntos fijos.

**Ejemplo 2.** Considere el mapa  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por

$$\mathbf{x}_{n+1} = Q(\mathbf{x}_n) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_n.$$

El conjunto de los puntos fijos del mapa  $Q$  es el siguiente

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Las órbitas de los puntos periódicos y de los puntos fijos son conjuntos finitos en  $\mathbb{R}^m$ , si un punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$  es un punto periódico de periodo principal  $n$ , entonces su órbita tiene  $n$  elementos y esta formada por los puntos  $\mathbf{p}, f(\mathbf{p}), \dots, f^{(n-1)}(\mathbf{p})$

**Definición.** La órbita  $Or(\mathbf{p})$  de un punto periódico  $\mathbf{p}$  de periodo principal  $n$ , se conoce como una órbita periódica de periodo  $n$ .

Un ejemplo de una órbita periódica es la órbita del punto  $x = -1$  bajo el mapa presentado en el Ejemplo 1, la cual tiene periodo principal dos y esta compuesta por los puntos  $\{-1, 1\}$ . Note que las órbitas periódicas y los puntos fijos son conjuntos invariantes. En algunos casos las órbitas periódicas pueden ser aractores, por lo tanto su análisis es importante para conocer la dinámica del mapa. Para empezar a estudiar el comportamiento de estos puntos se define el concepto de punto asintótico

**Definición.** [30] Sea  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  un mapa y  $\mathbf{p}$  un punto periódico de período principal  $n$  del mapa  $f$ . Un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  es asintótico hacia adelante a  $\mathbf{p}$  si  $\lim_{i \rightarrow \infty} (f^{ni}(\mathbf{x})) = \mathbf{p}$ . El conjunto estable de  $\mathbf{p}$ , denotado por  $W^S(\mathbf{p})$ , consiste en todos los puntos asintóticos hacia adelante de  $\mathbf{p}$ .

**Definición.** [30] Sea  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  un mapa y  $\mathbf{p}$  un punto periódico de período principal  $n$  del mapa  $f$ . Un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  es asintótico hacia atrás a  $\mathbf{p}$  si  $\lim_{i \rightarrow -\infty} (f^{ni}(\mathbf{x})) = \mathbf{p}$ . El conjunto inestable de  $\mathbf{p}$ , denotado por  $W^U(\mathbf{p})$ , consiste en todos los puntos asintóticos hacia atrás de  $\mathbf{p}$ .

**Ejemplo 3.** Tome el mapa del Ejemplo 1. Note que para todo  $x \in (-1, 1)$  se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(x)) = 0,$$

además, para todo  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(x))$  no existe, por lo anterior, el conjunto  $W^S(0) = (-1, 1)$ .

Existen resultados relacionados con una propiedad de los puntos periódicos de los mapas que permite predecir el comportamiento de las órbitas de ciertos puntos bajo algunas iteraciones del mapa. Esta propiedad es la **hiperbolicidad** de los puntos periódicos que será definida a continuación.

**Definición.** [29] Un punto fijo  $\mathbf{p}$  del mapa  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  se llama hiperbólico si el jacobiano de  $F$  en  $\mathbf{p}$ ,  $JF(\mathbf{p})$  no tiene valores propios en el círculo unitario. Si el punto es periódico de periodo  $n$ , entonces  $\mathbf{p}$  es hiperbólico si el jacobiano de  $F^{(n)}$  en  $\mathbf{p}$ ,  $JF^n(\mathbf{p})$  no tiene valores propios en el círculo de unidad.

Los valores propios del jacobiano del mapa  $Q$  en el Ejemplo 2, tienen modulo 1 para cualquier  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , por lo tanto sus puntos fijos son no hiperbólicos.

En total existen tres tipos de puntos hiperbólicos, estos son: *atractores*, *repulsores* y *sillas*.

**Definición.** Sea  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  un mapa y  $\mathbf{p}$  tal que  $F^n(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ , para  $n \in \mathbb{N}$ :

- 1)  $\mathbf{p}$  es un sumidero o punto periódico atractor si todos los valores propios de  $JF^n(\mathbf{p})$  son menores a 1 en modulo.
- 2)  $\mathbf{p}$  es una fuente o punto periódico repulsor si todos los valores propios de  $JF^n(\mathbf{p})$  son mayores a 1 en modulo.
- 3)  $\mathbf{p}$  es un punto silla si existen  $\lambda_s, \lambda_u$ , valores propios de  $JF^n(\mathbf{p})$  tales que  $|\lambda_s| < 1$  y  $|\lambda_u| > 1$ .

Si un punto es atractor, este será estable, si es repulsor será inestable y si es una silla existen conjuntos en los que es estable y otros en los que es inestable, ya que tiene algunos valores propios son menores a 1 en modulo y otros mayores, estos conjuntos se conocen como variedades estables e inestables del punto silla.

**Ejemplo 4.** 1. Considere el mapa de dimensión uno definido por  $x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{2}x_n(1 - x_n)$ . Sus puntos fijos son  $\{-1, 0\}$ .

Examinemos si estos puntos son hiperbólicos, verificando que el valor absoluto de la derivada de  $f$  es diferente de uno en ambos casos.

$$f'(-1) = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2} > 1,$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} < 1,$$

El punto  $x = 0$  es un atractor porque  $|f'(0)| = 1/2 < 1$  y el punto  $x = -1$  es un repulsor ya que  $|f'(-1)| = 3/2 > 1$ .

2. Sea el mapa  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un mapa lineal definido por

$$\mathbf{x}_{n+1} = g(\mathbf{x}_n) = A\mathbf{x}_n - \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_n - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1-5)$$

El mapa  $g$  tiene el punto fijo

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El jacobiano del mapa  $g$  en el punto  $\mathbf{x}^*$  esta dado por la matriz  $A$  y sus valores propios son  $\lambda_s = -1/2$  y  $\lambda_u = 3/2$ , por lo tanto el punto  $\mathbf{x}^*$  es un punto silla. Las variedades estable e inestable de este punto son los conjuntos  $W^s(\mathbf{x}^*)$  y  $W^u(\mathbf{x}^*)$  definidos a continuación

$$W^s(\mathbf{x}^*) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \alpha \mathbf{v}^s, \quad \alpha \in \mathbb{R} \},$$

$$W^u(\mathbf{x}^*) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \alpha \mathbf{v}^u, \quad \alpha \in \mathbb{R} \},$$

donde  $\mathbf{v}^s = [-1, 3/2]^T$  y  $\mathbf{v}^u = [2, 1]^T$  son los vectores propios de  $A$  asociados a  $\lambda_s$  y  $\lambda_u$  respectivamente.

Si  $\mathbf{y} \in W^s(\mathbf{x}^*)$ , entonces  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\| = |\alpha| \|\mathbf{v}^s\|$  y  $g(\mathbf{y}) = \mathbf{x}^* + (\alpha/2)\mathbf{v}^s \in W^s(\mathbf{x}^*)$ , por lo tanto  $W^s(\mathbf{x}^*)$  es invariante y  $\|g(\mathbf{y}) - \mathbf{x}^*\| < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\|$ .

Por otra parte, si  $\mathbf{z} \in W^u(\mathbf{x}^*)$ , entonces  $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}^*\| = |\alpha| \|\mathbf{v}^u\|$  y  $g(\mathbf{z}) = \mathbf{x}^* + (3\alpha/2)\mathbf{v}^u \in W^u(\mathbf{x}^*)$ , por lo tanto  $W^u(\mathbf{x}^*)$  es invariante y  $\|g(\mathbf{z}) - \mathbf{x}^*\| > \|\mathbf{z} - \mathbf{x}^*\|$ .

El siguiente resultado es clave en el estudio de la dinámica clásica de mapas discretos, ya que garantiza que si un punto fijo es hiperbólico entonces el mapa se comporta de manera local cerca de ese punto fijo como un mapa lineal, este resultado es el teorema de Hartman-Grobman.

**Teorema 2.** [29] Sea  $\mathbf{p}$  un punto fijo hiperbólico del mapa  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  y suponga que  $JF(\mathbf{p}) = \mathbf{A}$  con los valores propios de  $\mathbf{A}$  diferentes de 0 y de 1. Entonces existen las vecindades  $U$  de  $\mathbf{p}$  y  $V$  de  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$  y un homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  el cual corresponde al mapa  $F$  en  $U$  con el mapa lineal  $L(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$  en  $V$ .

El Teorema 2 junto con la clasificación de los puntos hiperbólicos, son herramientas muy útiles al momento de estudiar la dinámica de un mapa con puntos fijos hiperbólicos. Gracias al Teorema 2 es posible estudiar localmente el comportamiento de un mapa  $F$  como un mapa lineal de la forma  $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$  con  $A = JF(\mathbf{p})$  para alguna vecindad del punto fijo  $\mathbf{p}$  mientras este sea hiperbólico.

Estudiando los valores propios de  $A$ , el punto fijo  $\mathbf{p}$  se clasifica como uno de los tres tipos de punto fijo hiperbólico. Al clasificar el comportamiento del punto fijo  $\mathbf{p}$  como atractor, repulsor o silla, es posible conocer las variedades en donde las órbitas tienden a acercarse o a alejarse de este punto como se hizo en el Ejemplo 4.

**Ejemplo 5.** *El mapa  $f$  del Ejemplo 4 tiene los puntos fijos  $\{-1, 0\}$ , donde  $0$  es un atractor y  $-1$  es un repulsor. Una vez verificada la condición de hiperbolicidad de ambos puntos fijos, se cumplen las hipótesis necesarias para el teorema de Hartman-Grobman. Aplicando este resultado, se tiene que en una vecindad del punto  $x = 0$  el mapa  $f$  se comporta como el mapa  $x_{n+1} = L(x_n) = \frac{1}{2}x_n$  y también existe una vecindad  $U$  del punto fijo  $x = -1$  y un homeomorfismo  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  que corresponde las órbitas de los puntos de  $f$  en  $U$  con las del mapa  $x_{n+1} = L(x_n) = \frac{3}{2}x_n$ .*

En la siguiente parte de esta sección se estudia el concepto de mapa definido a trozos y sus órbitas periódicas. Si una función  $f$  está definida a trozos, entonces se dice que el mapa  $\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n)$  está definido a trozos, si además la función es discontinua, entonces se dice que el mapa es discontinuo. En otras palabras los mapas definidos a trozos son de la forma

$$\mathbf{x}_{n+1} = F(\mathbf{x}_n) = \begin{cases} F_1(\mathbf{x}_n), & \mathbf{x}_n \in S_1, \\ \vdots & \vdots \\ F_n(\mathbf{x}_n), & \mathbf{x}_n \in S_n, \end{cases} \quad (1-6)$$

donde  $S_i \subset \mathbb{R}^m$ ,  $S_i \cap S_j = \emptyset$ ,  $\cup_{i=1}^n \overline{S_i} = \mathbb{R}^m$  y  $F_i$  es una función suave, para todo  $i, j = 1, \dots, n$ . El conjunto  $\Sigma_{ij} = \overline{S_i} \cap \overline{S_j}$  es una variedad de dimensión  $m - 1$  o es el conjunto vacío. En mapas con dos zonas, este conjunto será denotado por  $\Sigma$  y nos referiremos a él como la zona de conmutación.

Estos mapas presentan una dinámica más compleja que los mapas suaves como los de los ejemplos anteriores. Para empezar a estudiar estos mapas se introduce al concepto de punto fijo real o virtual con el siguiente ejemplo

**Ejemplo 6.** *Definamos las siguientes regiones de la recta real:*

$$\begin{aligned} \Sigma_L &= \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}, \\ \Sigma_R &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}. \end{aligned}$$

Ahora considere el siguiente mapa de dimensión uno con el parámetro  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$x_{n+1} = f(x_n, \alpha) = \begin{cases} f_R(x_n, \alpha) = \frac{1}{2}x_n + \alpha, & \text{si } x_n \in \Sigma_R, \\ f_L(x_n, \alpha) = \frac{1}{2}x_n + \frac{2}{3}, & \text{si } x_n \in \Sigma_L, \end{cases} \quad (1-7)$$

el mapa (1-7) tiene puntos fijos

$$x_R^* = 2\alpha, \quad x_L^* = \frac{4}{3},$$

para  $\alpha \geq 0$ , el punto fijo  $x_R^*$  pertenece a la zona  $\Sigma_R$ , en la que esta definido el mapa  $f_R$ , pero cuando  $\alpha < 0$ , este punto pertenece a la zona  $\Sigma_L$ , en la que esta definido el mapa  $f_L$ , lo que significa que aunque este punto sea un atractor, ninguna órbita del mapa  $f$  converge en él.

Un punto fijo de un mapa  $f$  es real o admisible cuando el punto pertenece a la zona en donde se define este mapa, en el Ejemplo 6, el punto fijo es real cuando  $\alpha \geq 0$ . Si el punto fijo no pertenece a la zona en la que se define su respectivo mapa, entonces se dice que es un punto fijo virtual. En el Ejemplo 6 el punto fijo es virtual cuando  $\alpha < 0$ . Un punto fijo virtual puede influir en la dinámica de su mapa, por ejemplo si un punto fijo es un atractor y es virtual, entonces el punto fijo puede atraer a ciertas órbitas, siempre y cuando estas pertenezcan a su cuenca de atracción y a la zona en la que se define su respectivo mapa.

Al igual que un punto fijo puede ser admisible o no, las órbitas periódicas en los mapas definidos a trozos son o no son admisibles. Las órbitas periódicas pertenecen a ciertas familias, que dependen de la zona a la que pertenezca cada uno de sus elementos, en la literatura existen diversos estudios de las familias de órbitas periódicas de los mapas definidos a trozos mediante una caracterización que se conoce como representación simbólica de ellas, algunos de estos estudios son [16, 31, 32, 33]. Un ejemplo de representación simbólica se muestra a continuación

**Ejemplo 7.** Sean  $\Sigma_L$  y  $\Sigma_R$  las siguientes regiones de  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Sigma_L &= \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}, \\ \Sigma_R &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.\end{aligned}$$

En estas regiones se define el mapa  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} f_R(x_n, a) = x_n - a, & \text{si } x_n \in \Sigma_R, \\ f_L(x_n, b, c) = bx_n + c, & \text{si } x_n \in \Sigma_L, \end{cases} \quad (1-8)$$

con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , parámetros.

Defina la representación simbólica para la órbitas de un punto  $x \in \mathbb{R}$  bajo el mapa  $f$ , como una sucesión de elementos de la forma  $I_f(x) = (I^{(1)}, I^{(2)}, \dots)$ , donde  $I^{(j)} \in \{\mathcal{L}, \mathcal{R}\}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , tal que

$$I_f(x)(k) = \begin{cases} \mathcal{R}, & \text{si } x_k \in \Sigma_R, \\ \mathcal{L}, & \text{si } x_k \in \Sigma_L. \end{cases} \quad (1-9)$$

Una órbita de periodo 3 puede tener distintas representaciones simbólicas, si la condición inicial esta en  $\Sigma_L$  y los otros dos elementos estan en  $\Sigma_R$ , su representación simbólica es  $\mathcal{L}\mathcal{R}^2$ , en cambio si tiene la condición inicial y la primera iteración en  $\Sigma_L$  y el otro elemento esta en  $\Sigma_R$ , su representación simbólica es  $\mathcal{L}^2\mathcal{R}$ .

Si existe un punto periódico de periodo 3 cuya órbita tenga una representación simbólica de  $\mathcal{LR}^2$ , este punto y los parámetros  $a, b$  y  $c$  del mapa  $f$  deben cumplir con

$$\begin{aligned} x &= \frac{2a - c}{b - 1} < 0, \\ f(x) &= b \left( \frac{2a - c}{b - 1} \right) + c > 0, \\ f^{(2)}(x) &= b \left( \frac{2a - c}{b - 1} \right) + c - a > 0, \end{aligned} \tag{1-10}$$

Por otra parte, si el punto periódico de periodo 3 tiene una órbita con una representación simbólica de  $\mathcal{L}^2\mathcal{R}$ , este debe satisfacer

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{1 - b} - \frac{a}{1 - b^2} < 0, \\ f(x) &= \frac{c}{1 - b} - \frac{ab}{1 - b^2} < 0, \\ f^{(2)}(x) &= \frac{c}{1 - b} - \frac{ab^2}{1 - b^2} > 0, \end{aligned} \tag{1-11}$$

Si se toma la configuración de parámetros  $a = 2$ ,  $b = 2$  y  $c = 5$ , entonces se satisfacen las condiciones (1-10) y el punto  $x = -1$  tiene una órbita periódica de tipo  $\mathcal{LR}^2$  compuesta por  $\{-1, 3, 1\}$ , sin embargo, no satisfacen las condiciones (1-11).

Por otra parte si se elige la configuración  $a = -18$ ,  $b = 1/2$  y  $c = 1$ , se satisfacen las condiciones (1-11) y el punto  $x = -4$  tiene la órbita periódica de tipo  $\mathcal{L}^2\mathcal{R}$  compuesta por  $\{-4, -1, 1/2\}$ , pero no se satisfacen las condiciones (1-10).

El anterior ejemplo muestra que en los mapas definidos a trozos las órbitas no solo están caracterizadas por el periodo, sino también por su representación simbólica. En este orden de ideas, dos órbitas periódicas con un mismo periodo no necesariamente pertenecen a una misma familia. Decimos que una familia de órbitas periódicas es admisible, si existe un punto tal que la representación simbólica de su órbita coincide con la representación simbólica de la familia. En el Ejemplo 7, la familia de órbitas periódicas  $\mathcal{LR}^2$  es admisible para la primera configuración de parámetros y la familia  $\mathcal{L}^2\mathcal{R}$  no lo es para esta misma configuración de parámetros.

Para terminar esta sección definimos el concepto de *bifurcación* que implica un cambio en la dinámica del sistema por la alteración de algunos de sus parámetros.

**Definición.** [28] Una **bifurcación** ocurre en un valor del parámetro  $\mu = \mu_0$  del sistema dinámico  $\{X, T, \phi^t\}$  si el sistema no es estructuralmente estable.

La **codimensión** de la bifurcación es la dimensión del espacio de parámetros al que pertenece el parámetro  $\mu$ .

Un diagrama de bifurcación es una gráfica de la dinámica estacionaria del sistema dinámico para un rango de valores del parámetro  $\mu$  y una cierta condición inicial  $\mathbf{x}_0$ .

Una forma intuitiva para entender el significado de bifurcación es pensar en un valor crítico para un parámetro, que si se mueve de este valor modificará la dinámica del sistema. Para ilustrar este concepto, considere los siguientes ejemplos

**Ejemplo 8.** *El mapa generado por la función presentada en (1-12) es conocido como el mapa exponencial*

$$E(x) = \lambda e^x, \quad x, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1-12)$$

este mapa presenta dos bifurcaciones: la **bifurcación silla nodo o bifurcación tangente** y la **bifurcación del doblamiento de período**. La primera se presenta en  $\lambda = \frac{1}{e}$ , aquí el mapa pasa de tener dos puntos fijos, uno estable y uno inestable cuando  $\lambda < \frac{1}{e}$  a uno solo inestable cuando  $\lambda = \frac{1}{e}$  a ninguno después. En la figura **1-1** se muestran los puntos fijos del mapa (negro estable y rojo inestable), los últimos puntos de la órbita generada por una condición inicial  $x_0 = 0$ .

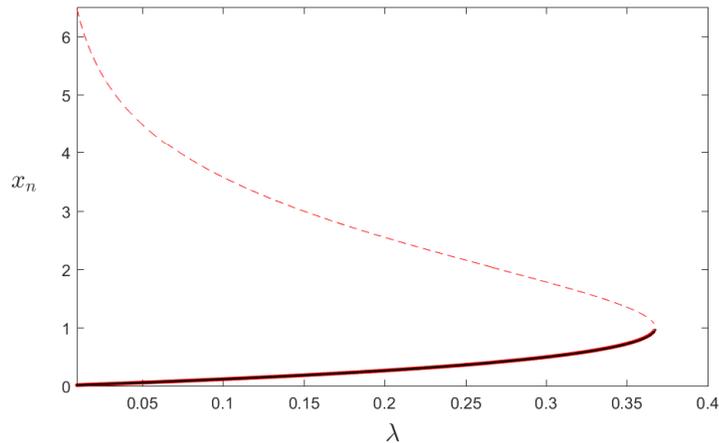


Figura 1-1: Bifurcación silla nodo para la familia exponencial

La otra bifurcación ocurre en  $\lambda = -e$ , aquí el mapa pasa de tener un punto periódico de período 2 cuando  $\lambda < -e$ , a un punto fijo no hiperbólico cuando  $\lambda = -e$ , a un punto fijo atractivo cuando  $-e < \lambda < 0$ , como se muestra en la Figura 1-2:

Note que en la Figura 1-2 hay un punto periódico estable de período 2, que luego se convierte en un punto fijo estable, a diferencia de la Figura 1-1, donde hay dos puntos de fijos que luego colisionan.

**Ejemplo 9.** *Ahora considere el mapa logístico definido por:*

$$F_\mu(x) = \mu x(1 - x), \quad x, \mu \in \mathbb{R}. \quad (1-13)$$

Esta familia presenta una bifurcación en  $\mu = 1$ , cuando  $\mu = 1$  el mapa tiene solo un punto fijo no hiperbólico y en caso contrario tiene dos puntos fijos cuya estabilidad depende del

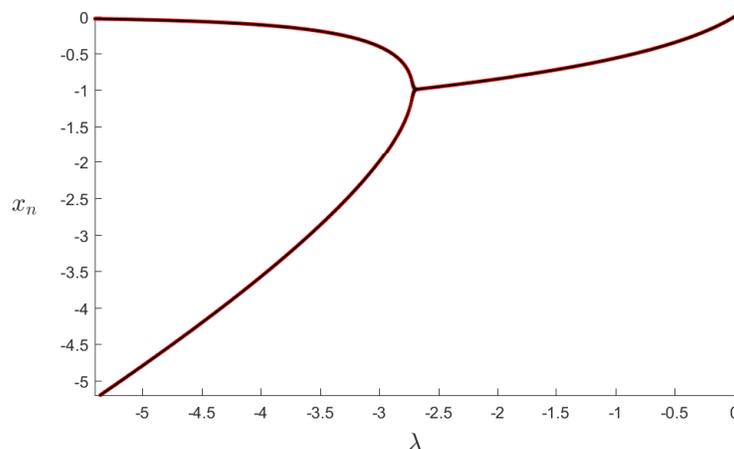


Figura 1-2: Doblamiento de período para la familia exponencial

signo del producto de  $\mu$  con el punto, estos puntos son

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = \frac{\mu - 1}{\mu}$$

Note que esta familia se diferencia de la familia exponencial por que siempre tiene 2 puntos fijos, pero su estabilidad cambia para distintos valores de  $\mu$ , note que a diferencia de la familia exponencial, el mapa logístico permite dar una formula explícita de sus puntos fijos.

En la Figura 1-3 se muestra el diagrama de bifurcación del mapa logístico, para  $1 \leq \mu \leq 4$ . Note que cuando  $\mu = 1$ , los dos puntos fijos (en línea roja discontinua) coinciden, pero después se separan de nuevo y que para cierto valor de  $\mu$ , el equilibrio  $x_2^*$  deja de ser estable y se presenta un doblamiento de período.

**Ejemplo 10.** El mapa tienda es el siguiente mapa de dimensión 1 con 1 parámetro  $\mu \in \mathbb{R}$

$$X_{n+1} = T_\mu(x_n) = \begin{cases} \mu x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \mu(1 - x) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad (1-14)$$

este mapa tiene un único punto fijo para  $\mu \in (0, 1)$  y para  $\mu > 1$  el mapa  $T$  tiene dos y presenta doblamiento de período. Su punto fijo esta dado por:

$$x_1^* = 0, \\ x_2^* = \frac{\mu}{1+\mu} \quad \text{si } \mu > 1. .$$

El diagrama de bifurcación del mapa  $T$  se muestra en la Figura 1-4

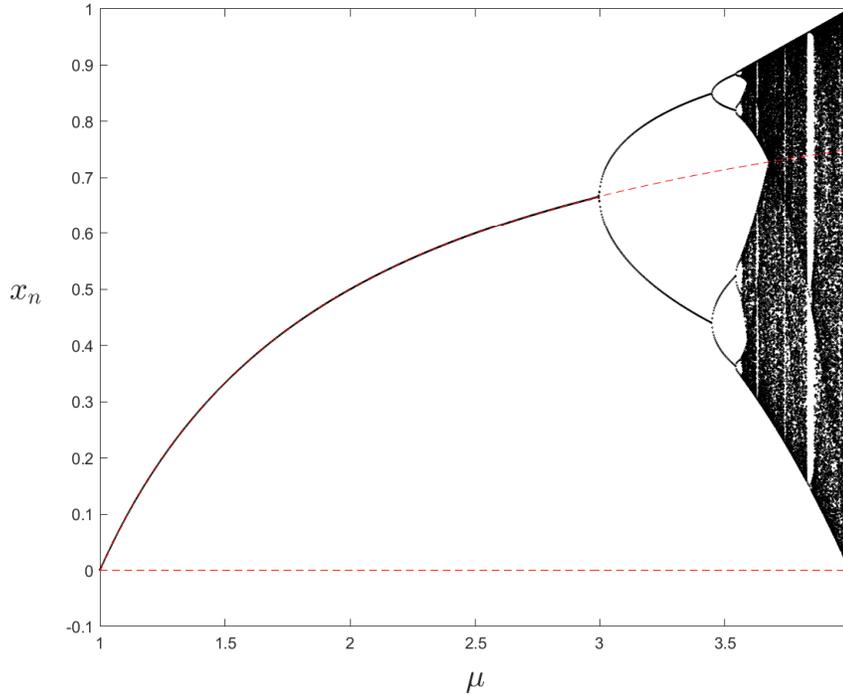


Figura 1-3: Diagrama de bifurcación del mapa logístico definido en (1-13) variando el parámetro  $\mu$ .

### 1.3. Caos y atractores extraños

En los diagramas de bifurcación de los mapas Logístico y Tienda de los ejemplos 9 y 10 de la sección anterior, se exhibe como la dinámica de los mapas está acotada pero no converge a ningún punto cuando el parámetro  $\mu$  toma los valores  $\mu = 4$  y  $\mu = 2$  respectivamente. Este comportamiento se conoce como comportamiento caótico y será estudiado en esta sección, junto con el concepto de atractor extraño.

Existen varias definiciones de caos en sistemas dinámicos discretos, esta el caos en el sentido de Cooin-tossing, en el sentido de Devaney, en el sentido de Li-Yorke, en el sentido de Bernoulli, entre otros, ver [34]. A continuación se presenta un sistema dinámico fundamental para el estudio del caos y en el cual se basan algunas definiciones de Caos.

**Definición.** [29] El conjunto  $\Sigma_2 = \{s = (s_0s_1s_2 \dots) : s_j \in \{0, 1\}\}$  es el espacio de sucesiones con símbolos 0 y 1.

El conjunto  $\Sigma_2$  es un espacio métrico, dadas las sucesiones  $s, t \in \Sigma_2$ , se define la siguiente métrica sobre el espacio

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i},$$

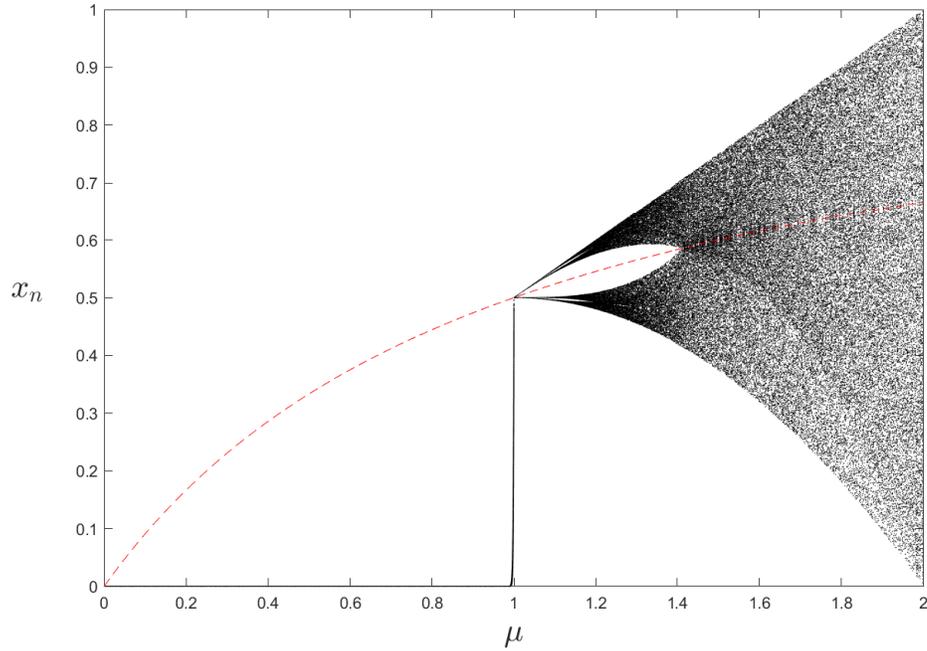


Figura 1-4: Diagrama de bifurcación del mapa tienda definido en (1-14) variando el parámetro  $\mu$ .

esta métrica está acotada, ya que si todos los elementos de las sucesiones  $s$  y  $t$  son diferentes, entonces  $|s_i - t_i| = 1$ ,  $\forall i \geq 0$  y  $d[s, t]$  se convierte en una serie geométrica con razón  $1/2$ , que converge a 2. En cualquier otro caso,  $d[s, t]$  es menor a 2.

A continuación se muestra que el espacio  $\Sigma_2$  es Hausdorff

**Proposición 1.** *El espacio métrico  $\Sigma_2$  es Hausdorff.*

**Demostración.** Sean  $s, t \in \Sigma_2$ , dos sucesiones distintas. Tome  $\epsilon = \frac{d[s, t]}{2}$  y  $n$  el menor entero tal que  $s_n \neq t_n$ . Probemos que las bolas abiertas  $B_\epsilon(s)$  y  $B_\epsilon(t)$  son disjuntas. Primero, note que

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{d[s, t]}{2}, \\ \epsilon &= \frac{1}{2} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}, \\ \epsilon &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i}, \\ \epsilon &\leq \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

Sea  $\bar{s} \in B_\epsilon(s)$ , por el resultado anterior tenemos que  $\bar{s}_n = s_n$ , entonces  $t_n \neq \bar{s}_n$ , luego

$$d[t, \bar{s}] = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{|\bar{s}_i - t_i|}{2^i},$$

$$d[t, \bar{s}] \geq \frac{1}{2^n}$$

$$d[t, \bar{s}] \geq \epsilon.$$

En consecuencia  $B_\epsilon(s)$  y  $B_\epsilon(t)$  son disjuntas, por lo tanto  $\Sigma_2$  es Hausdorff.

Ahora se define el mapa shift  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  de la siguiente forma

**Definición.** [29] El mapa Shift  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  esta dado por  $\sigma(s_0s_1s_2s_3 \dots) = (s_1s_2s_3 \dots)$ .

Con este mapa, se presentan algunas definiciones de caos

**Definición.** [34] Un sistema dinámico discreto  $(X, f)$  es caótico en el sentido de coin-tossing si existen dos compactos disjuntos  $X_0, X_1 \in X$  tales que dada una sucesión  $s \in \Sigma_2$  existe una órbita  $\{x_n\}$  que satisfice

$$x_n \in X_{s_n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**Definición.** [34] Un sistema dinámico discreto  $(X, f)$  es caótico en el sentido de Li-Yorke si satisfice las siguientes condiciones. Existe  $M \subset X$  no numerable tal que

1.  $M$  es invariante ( $f(M) = M$ ).

2. Para todo  $x, y \in M$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf d(f^{(n)}(x), f^{(n)}(y)) = 0.$$

3. Existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x, y \in M$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup d(f^{(n)}(x), f^{(n)}(y)) \geq \delta.$$

**Definición.** [34] Un sistema dinámico discreto  $(X, f)$  es caótico en el sentido de Bernoulli si es topológicamente conjugado con  $(\Sigma_2, \sigma)$ . Es decir, existe un homeomorfismo  $\tau : \Sigma_2 \rightarrow X$  que satisfice

$$f \circ \tau = \tau \circ \sigma.$$

La definición de caos más estudiada en la literatura es el caos en el sentido de Devaney planteada en [29], algunos estudios de caos en el sentido de Devaney en mapas discretos son [35, 36, 28, 37]. Antes de presentar esta definición de caos, definimos la propiedad de transitividad. Siguiendo a [38], dado un espacio dos contable  $X$ , un mapa  $f : X \rightarrow X$  es topológicamente transitivo si existe un punto  $x \in X$  cuya órbita es densa en  $X$ . Si adicionalmente el espacio  $X$  es Hausdorff, tenemos el siguiente resultado sobre la transitividad de un mapa en el espacio  $X$

**Proposición 2.** [38] Sea  $f : X \rightarrow X$  un mapa continuo de un espacio Hausdorff y localmente compacto  $X$ . Suponga que para cualquier par de abiertos  $U, V \subset X$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{(n)}(U) \cap V \neq \emptyset$ . Entonces  $f$  es topológicamente transitivo.

El hecho de que el mapa sea transitivo implica las hipótesis de la proposición anterior, por lo tanto en un espacio Hausdorff como  $\mathbb{R}^m$  la definición es equivalente a las hipótesis de la proposición. Esta es la definición que presenta Devaney en [29]

**Definición.** [29] Un mapa  $f : J \subset \mathbb{R}^m \rightarrow J$  es topológicamente transitivo si para cualquier par de abiertos  $U, V \subset J$  existe  $n > 0$  tal que  $f^{(n)}(U) \cap V \neq \emptyset$ .

A continuación se presenta un ejemplo de un mapa transitivo en el círculo unitario  $S^1 \subset \mathbb{C}$

**Ejemplo 11.** Sea  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  el círculo unitario y  $f_\lambda : S^1 \rightarrow S^1$  el siguiente mapa

$$f_\lambda(z) = e^{2\pi\lambda i} z, \quad (1-15)$$

este mapa se conoce como la rotación rígida en el círculo. Si  $\lambda$  es irracional, el mapa es transitivo, ya que la órbita de cada  $z \in S^1$  es densa en  $S^1$ . Para detalles de la demostración ver [39]. A continuación se muestra la órbita del punto  $z = e^i$  con  $\lambda = \sqrt{2}$

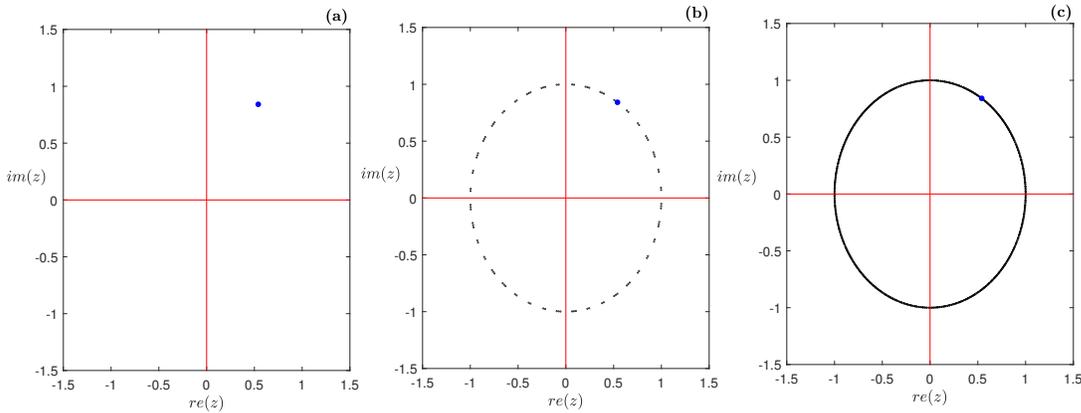


Figura 1-5: Órbita del punto  $z = e^i$  (en azul), bajo el mapa (1-15) con  $\lambda = \sqrt{2}$  y (a) 0 iteraciones, (b) 100 iteraciones y (c) 10000 iteraciones.

Ahora pasamos al siguiente concepto importante para el estudio del caos, la sensibilidad ante las condiciones iniciales. Esta propiedad dice que dado un punto, existen puntos en cualquier vecindad arbitrariamente pequeña del punto original, cuyas órbitas se separan al cabo de ciertas iteraciones.

**Definición.** [29] Un mapa  $f : J \subset \mathbb{R}^m \rightarrow J$  tiene sensibilidad ante las condiciones iniciales si existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $\mathbf{x} \in J$  y cualquier vecindad  $N$  de  $\mathbf{x}$ , existe  $\mathbf{y} \in N$  y  $n \geq 0$  tal que  $|f^{(n)}(\mathbf{x}) - f^{(n)}(\mathbf{y})| > \delta$ .

El siguiente ejemplo muestra la sensibilidad ante las condiciones iniciales del mapa logístico definido en (1-13) del ejemplo 9

**Ejemplo 12.** Considere el mapa logístico  $F_\mu$  definido en (1-13) con  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , sea  $I = [0, 1]$  y los intervalos  $I_0$ ,  $I_1$  y  $A_0$  como se dan a continuación

$$A_0 = \{x \in I : F_\mu(x) > 1\},$$

$$I_0 = \{x \in I : F_\mu(x) \leq 1, \quad x \leq \inf A_0\},$$

$$I_1 = \{x \in I : F_\mu(x) \leq 1, \quad x \geq \sup A_0\},$$

estos intervalos se muestran a continuación

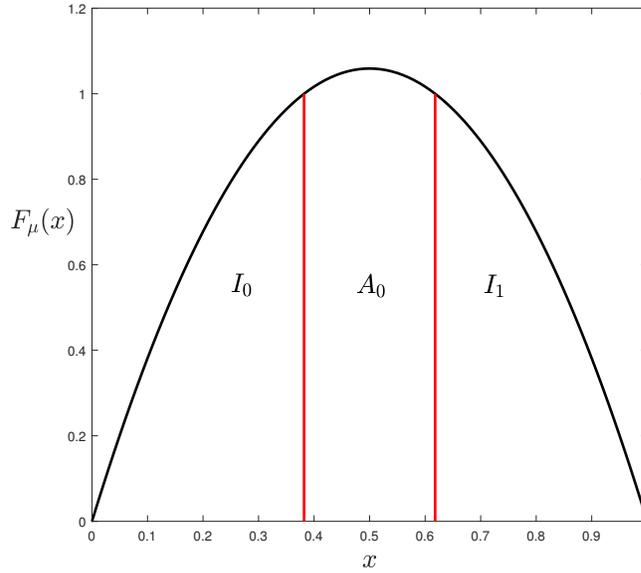


Figura 1-6: Parábola  $F_\mu$  con los intervalos  $I_0$ ,  $A_0$  y  $A_1$

Note que la longitud de  $A_0$  es positiva ( $|A_0| > 0$ ), porque el mapa alcanza su máximo en  $x = \mu/4 > 1$ . Ahora se definen los conjuntos disjuntos  $A_n$  como

$$A_n = \{x \in I : F_\mu^{(i)}(x) \in I \quad \forall i \leq n, \quad F_\mu^{(n+1)}(x) \notin I\},$$

estos intervalos están formados por los puntos de  $I$  cuya órbita escapa de  $I$  en su  $n+1$ ésima iteración. Ahora considere el conjunto  $\Lambda$  definido por

$$\Lambda = I - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Este conjunto es un invariante para  $F_\mu$ . En [29] se demuestra que si  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , el siguiente mapa es un homeomorfismo entre el conjunto  $\Lambda$  y el espacio de sucesiones  $\Sigma_2$ .

$$(S(x))_k = \begin{cases} 1 & \text{si } F_\mu^{(k)}(x) \in I_1, \\ 0 & \text{si } F_\mu^{(k)}(x) \in I_0, \end{cases}$$

por lo tanto si  $x \neq y$  entonces  $S(x) \neq S(y)$ , lo que significa que las suseciones difieren en por lo menos un elemento. Si tomamos como  $n$  el elemento en el que las suseciones difieren, entonces de  $F_\mu^{(n)}(x)$  y  $F_\mu^{(n)}(y)$  uno pertenece a  $I_0$  y el otro a  $I_1$ . Si tomamos  $\delta = |A_0| > 0$ , entonces tenemos que

$$|F_\mu^{(n)}(x) - F_\mu^{(n)}(y)| > \delta.$$

Luego el mapa logístico para  $\mu > 2 + \sqrt{5}$  presenta sensibilidad ante las condiciones iniciales en  $\Lambda$ .

Con estos dos conceptos, se define el caos en el sentido de Devaney en [29] de la siguiente forma

**Definición.** [29] Sea  $V$  un conjunto.  $f : V \rightarrow V$  se dice caótico en  $V$  si

1.  $f$  tiene sensibilidad ante las condiciones iniciales.
2.  $f$  es transitivo.
3. El conjunto de puntos periódicos de  $f$  es denso en  $V$ .

Para terminar con los ejemplos, a continuación se demuestra que el mapa Shift en el espacio de sucesiones  $\Sigma_2$  es caótico en el sentido de Devaney.

**Demostración.** 1. Sean  $s, t \in \Sigma_2$ . Si  $s \neq t$ , entonces difieren en por lo menos un elemento, sea  $s_n \neq t_n$ . Note que  $\sigma^{(n)}(s)_0 = s_n$  y  $\sigma^{(n)}(t)_0 = t_n$ . Tome  $\delta = \frac{1}{2}$

$$d[\sigma^{(n)}(s), \sigma^{(n)}(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_{k+n} - t_{k+n}|}{2^k},$$

$$d[\sigma^{(n)}(s), \sigma^{(n)}(t)] \geq 1,$$

$$d[\sigma^{(n)}(s), \sigma^{(n)}(t)] > \frac{1}{2},$$

2. Para probar la transitividad del mapa Shift, considere dos abiertos  $U, V \in \Sigma_2$ . Sean  $s$  y  $t$  elementos de  $U$  y  $V$  respectivamente. Por definición existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(s) \subset U$ , tome  $k$  como el menor entero que satisface  $1/2^k < \epsilon$  y defina la suseción  $\bar{s}$  de la siguiente forma

$$\bar{s}_n = \begin{cases} s_n, & \text{si } n \leq k, \\ t_{n-k-1}, & \text{si } n > k, \end{cases}$$

Note que  $\bar{s} \in B_\epsilon(s)$  y que además  $\sigma^{(k+1)}(\bar{s}) = t \in V$ , por lo tanto  $\sigma^{(k+1)}(U) \cap V \neq \emptyset$ . Luego  $\sigma$  es transitivo en  $\Sigma_2$ .

3. Sea  $s \in \Sigma_2$ ,  $\epsilon > 0$  y  $k$  el menor entero positivo tal que  $1/2^k < \epsilon$ . Defina la sucesión  $p$  de la siguiente forma

$$p_n = \begin{cases} s_n, & \text{si } n < k, \\ p_{n-k}, & \text{si } n \geq k, \end{cases}$$

Note que  $p$  es periódica y que  $d[s, p] \leq 1/2^k < \epsilon$ . Luego los puntos periódicos de  $\sigma$  son densos en  $\Sigma_2$ .

Finalmente el mapa Shift  $\sigma$  es caótico en  $\Sigma_2$ .

Posterior a la definición de caos en el sentido de Devaney, en [40] se demuestra que la transitividad junto a la densidad de las órbitas periódicas en un mapa implican la sensibilidad ante las condiciones iniciales de este mapa. La definición de caos ha sido profundamente discutida por varios autores, entre ellos [34, 40] y algunos textos de sistemas dinámicos omiten la densidad de puntos periódicos en la definición de caos como [37, 28], dejando la siguiente definición

**Definición.** [28] Un conjunto invariante acotado  $\Lambda$  se dice caótico si satisface las condiciones

1. Tiene sensibilidad ante las condiciones iniciales.
2. Existe una órbita densa.

Esta es la definición de caos que se utiliza en este trabajo. Finalmente presentamos la definición de atractor caótico o atractor extraño en  $\mathbb{R}^m$ .

**Definición.** [37] Suponga que  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^m$  es un atractor. Se dice que  $\mathcal{A}$  es un atractor extraño si es caótico.

## 1.4. Exponente característico de Lyapunov

En esta sección estudiaremos brevemente un concepto fundamental para el desarrollo de este trabajo, el exponente característico de Lyapunov. El exponente característico de Lyapunov  $\lambda$  de un mapa  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  en la dirección del vector  $v \in \mathbb{R}^m$  y con la condición inicial  $\mathbf{x}_0$  se define de la siguiente forma

$$\lambda(\mathbf{v}, \mathbf{x}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{\|Df^{(n)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \right), \quad (1-16)$$

basta con que el mapa sea de clase  $C^1$  para que este límite exista [38]. A continuación damos algunas propiedades de los exponentes de Lyapunov directamente de la definición

**Lemma 1.** [37] Para cualquier par de vectores  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  y  $c \neq 0 \in \mathbb{R}$ , los exponentes característicos de Lyapunov  $\lambda(\mathbf{u}), \lambda(\mathbf{v})$  satisfacen

$$1. \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq \max\{\lambda(\mathbf{u}), \lambda(\mathbf{v})\},$$

$$2. \lambda(c\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{u}).$$

**Demostración.** Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  y  $c \neq 0$ . Primero probaremos que el exponente de Lyapunov de la suma de dos vectores esta acotado por el máximo de los exponentes de los vectores que se suman. Sin pérdida de generalidad asuma que  $\lambda(\mathbf{v}) \leq \lambda(\mathbf{u})$ . Considere las siguientes suseciones

$$a_n = \frac{\|Df^{(n)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}, \quad b_n = \frac{\|Df^{(n)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|},$$

Por la definición de exponente de lyapunov tenemos

$$\lambda(\mathbf{u}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(a_n), \quad \lambda(\mathbf{v}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(b_n),$$

entonces existe  $n_0 > 0$  tal que  $n > n_0$  implica

$$\frac{\|Df^{(n)}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leq \frac{\|Df^{(n)}\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|},$$

$$\|Df^{(n)}\mathbf{v}\| \leq \|Df^{(n)}\mathbf{u}\| \left( \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\|} \right),$$

utilizando esta desigualdad, se acota el exponente de lyapunov en la dirección de  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{\|Df^{(n)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u} + \mathbf{v})\|}{\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|} \right),$$

$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{\|Df^{(n)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}\| + \|Df^{(n)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|} \right),$$

$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{\|Df^{(n)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}\| \left(1 + \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\|}\right)}{\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|} \right),$$

$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{\|Df^{(n)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}\| (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|} \right),$$

$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{\|Df^{(n)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|} \right),$$

$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{\|Df^{(n)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} \right),$$

$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq \lambda(\mathbf{u}).$$

Ahora probaremos que el exponente de Lyapunov se preserva bajo el múltiplo por escalar

$$\lambda(c\mathbf{u}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{\|Df^{(n)}(\mathbf{x}_0)(c\mathbf{u})\|}{\|c\mathbf{u}\|} \right),$$

$$\lambda(c\mathbf{u}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{|c| \|Df^{(n)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}\|}{|c| \|\mathbf{u}\|} \right),$$

$$\lambda(c\mathbf{u}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{\|Df^{(n)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \right),$$

$$\lambda(c\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{u}).$$

Estas propiedades nos lleva directamente a la siguiente proposición que permite ver como los vectores cuyos exponentes de Lyapunov pertenecen a un intervalo forman subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^m$

**Proposición 3.** [37] Dado  $r \in \mathbb{R}$ , el conjunto

$$S_r = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m : \lambda(\mathbf{v}) \leq r\}, \quad (1-17)$$

es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^m$ .

**Demostración.** Sea  $r \in \mathbb{R}$ , para probar que es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^m$  basta con probar que contiene a  $\mathbf{0}$  y que es cerrado bajo suma y producto por escalar, para realizar esta prueba se utilizará el Lemma (1). Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$  y  $c \in \mathbb{R}$ . Por Lemma 1 se tiene que

$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq \max\{\lambda(\mathbf{u}), \lambda(\mathbf{v})\} \leq r,$$

luego  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S_r$ . Ahora tome  $c \in \mathbb{R}$ , si  $c = 0$  entonces  $\lambda(c\mathbf{u}) = -\infty < r$ , entonces  $\lambda(c\mathbf{u}) \in S_r$ , en otro caso

$$\lambda(c\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{u}) \leq r,$$

entonces  $c\mathbf{u} \in S_r$ . Por lo tanto  $S_r$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^m$ .

La proposición anterior nos lleva inmediatamente a pensar que existen a lo más  $m$  exponentes de Lyapunov para el mapa  $f$ , lo cual se muestra en la siguiente proposición

**Proposición 4.** [37] El siguiente conjunto

$$L = \{\lambda(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m\},$$

tiene a lo más  $m$  elementos, los cuales denotaremos por  $\lambda_1, \dots, \lambda_s, 1 \leq s \leq m$ .

**Demostración.** Para realizar esta prueba se tomarán  $m + 1$  elementos de  $L$  y se probará que al menos dos de ellos deben ser iguales. Sean  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{m+1}$  elementos de  $L$ , por la proposición 3 se tiene que los conjuntos  $S_1 = S_{\lambda_1}, \dots, S_{m+1} = S_{\lambda_{m+1}}$  definidos en (1-17) son subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^m$ , además  $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_{m+1}$ .

Por lo anterior si  $d_1 = \dim(S_1), \dots, d_{m+1} = \dim(S_{m+1})$  son las dimensiones de los subespacios de  $\mathbb{R}^m$ ,  $S_1, \dots, S_{m+1}$ , entonces  $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_m \leq d_{m+1} \leq m$ , por lo tanto existe al menos un  $1 \leq k \leq m$  tal que  $d_k = d_{k+1}$  y como  $S_k \subset S_{k+1}$ , entonces  $S_k = S_{k+1}$ . Por definición

$$S_k = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m : \lambda(\mathbf{v}) \leq \lambda_k\},$$

$$S_{k+1} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m : \lambda(\mathbf{v}) \leq \lambda_{k+1}\},$$

luego  $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ . Finalmente  $L$  tiene a lo más  $m$  elementos.

El conjunto  $L$  de los exponentes de Lyapunov se conoce como el espectro de Lyapunov y el valor de estos exponentes se ha convertido en un criterio estandar para la determinación de sensibilidad para las condiciones iniciales [41, 38].

Si la matriz  $Df^{(n)}$  es diagonalizable, el espectro de Lyapunov se compone de los siguientes elementos

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln (|\lambda_{nk}|), \quad (1-18)$$

donde  $k = 1, \dots, m$  y  $\lambda_{nk}$  es el  $k$ -ésimo valor propio de  $Df^{(n)}$ .

Finalmente tenemos el siguiente resultado del exponente dominante de Lyapunov (el mayor exponente).

**Proposición 5.** Si el conjunto  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  es una base de  $\mathbb{R}^m$ , entonces existe algún  $1 \leq j \leq m$  tal que  $\lambda = \lambda(\mathbf{v}_j)$  es el exponente dominante de Lyapunov.

**Demostración.** Sea el conjunto  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  una base de  $\mathbb{R}^m$ , por lo tanto dado  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ , existen los escalares  $c_1, \dots, c_m$  que satisfacen

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{v}_k,$$

por el Lemma 1, se tiene que

$$\lambda(\mathbf{u}) \leq \text{máx} \{\lambda(c_1 \mathbf{v}_1), \dots, \lambda(c_m \mathbf{v}_m)\},$$

$$\lambda(\mathbf{u}) \leq \text{máx} \{\lambda(\mathbf{v}_1), \dots, \lambda(\mathbf{v}_m)\},$$

por lo tanto  $\lambda(\mathbf{u})$  esta acotado por el máximo exponente de los elementos de la base.

## 2 El sistema

En este capítulo se estudian las formas canónicas para sistemas PWL discontinuos de dimensión dos presentadas por primera vez en [26, 25]. El capítulo se divide en tres secciones. En la primera sección se da al lector una breve introducción a los sistemas de Filippov y se presenta la familia de sistemas a estudiar. En la segunda sección se muestran las formas canónicas para sistemas PWL discontinuos de dimensión dos y el homeomorfismo que transforma un sistema PWL en esta forma canónica. En la tercera sección se realiza una revisión del estudio de existencia de órbitas periódicas en la familia de sistemas a estudiar.

### 2.1. Comportamiento del sistema

Los sistemas de Filippov planos son sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de dimensión dos definidos a trozos con dos zonas, divididas por una función escalar continua  $\sigma(\mathbf{x})$ , es decir son sistemas que pueden escribirse de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) = \begin{cases} F_1(\mathbf{x}), & \text{si } \sigma(\mathbf{x}) < 0, \\ F_2(\mathbf{x}), & \text{si } \sigma(\mathbf{x}) > 0, \end{cases} \quad (2-1)$$

En este trabajo, al igual que en [16, 42, 26, 25, 24] consideramos la función  $\sigma(\mathbf{x})$  como  $\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}$ , donde  $\mathbf{e}_1$  es el primer vector canónico de  $\mathbb{R}^2$ . Esta función divide el plano  $\mathbb{R}^2$  en las siguientes zonas

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{e}_1^T \mathbf{x} = 0\}, \\ \Sigma_L &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{e}_1^T \mathbf{x} < 0\}, \\ \Sigma_R &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{e}_1^T \mathbf{x} > 0\}. \end{aligned} \quad (2-2)$$

La familia de sistemas a estudiar es la siguiente

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) = \begin{cases} F_L(\mathbf{x}), & \text{si } \mathbf{x} \in \Sigma_L, \\ F_R(\mathbf{x}), & \text{si } \mathbf{x} \in \Sigma_R, \end{cases} \quad (2-3)$$

donde los campos vectoriales  $F_L$  y  $F_R$  están definidos por:

$$F_L(\mathbf{x}) = A_L \mathbf{x} + \mathbf{b}_L, \quad F_R(\mathbf{x}) = A_R \mathbf{x} + \mathbf{b}_R,$$

con  $A_{\{L,R\}} = (a_{i,j}^{\{L,R\}})$  matrices de orden 2 y  $\mathbf{b}_{\{L,R\}} \in \mathbb{R}^2$ . En este trabajo asumimos que el campo  $F$  es discontinuo, es decir  $F_L(0, y) \neq F_R(0, y)$ .

Note que a pesar de que las funciones  $F_L$  y  $F_R$  están definidas en todo  $\mathbb{R}^2$ , el campo vectorial  $F$  no está definido explícitamente en la zona de conmutación  $\Sigma$ , en la cual es discontinua. Siguiendo a [26] consideramos condiciones iniciales fuera de esta línea, aunque las órbitas pueden *conincidir* con ella en algún momento. Si  $(\mathbf{e}_1^T F_L(0, y))(\mathbf{e}_1^T F_R(0, y)) > 0$ , entonces ambos campos son transversales a la línea de conmutación y sus componentes normales tienen el mismo signo, en este caso se asume que las órbitas cruzan naturalmente la línea. Si la órbita de un punto cruza de esta forma la zona de conmutación, entonces decimos que es un punto *crossing*, el conjunto  $\Sigma^c$  de los puntos *crossing* se define a continuación

$$\Sigma^c = \{ \mathbf{x} \in \Sigma : (\mathbf{e}_1^T F_L(\mathbf{x}))(\mathbf{e}_1^T F_R(\mathbf{x})) > 0 \}. \quad (2-4)$$

En el caso contrario,  $(\mathbf{e}_1^T F_L(0, y))(\mathbf{e}_1^T F_R(0, y)) \leq 0$ , los campos tienen componentes normales con signo contrario y hablamos de *puntos de deslizamiento*, el conjunto de deslizamiento está definido de la siguiente forma

$$\Sigma^s = \{ \mathbf{x} \in \Sigma : (\mathbf{e}_1^T F_L(\mathbf{x}))(\mathbf{e}_1^T F_R(\mathbf{x})) \leq 0 \}. \quad (2-5)$$

Siguiendo a [26, 43], si la órbita de un punto colisiona con el conjunto de deslizamiento asumimos que la órbita se *desliza* por este conjunto de acuerdo al método convexo de Filippov, que consiste en las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mathbf{x}} = \mu F_L(\mathbf{x}) + (1 - \mu) F_R(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Sigma^s, \quad (2-6)$$

donde  $\mu$  garantiza que el campo vectorial (2-6) sea tangente al conjunto de deslizamiento  $\Sigma^s$ . En nuestro caso,  $\mu$  es aquel que soluciona la ecuación

$$\mathbf{e}_1^T (\mu F_L(\mathbf{x}) + (1 - \mu) F_R(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma^s. \quad (2-7)$$

Nuestra notación es distinta a la utilizada en [26, 43] debido a que nosotros utilizamos  $\lambda$  para referirnos a los exponentes de Lyapunov en la sección 1.4 y ellos lo utilizan para el método convexo de Filippov de la ecuación (2-6).

## 2.2. Las formas canónicas

En [26] se define un homeomorfismo que lleva al sistema de Filippov (2-3) a una forma canónica. Este homeomorfismo se presenta en la siguiente proposición

**Proposición 6.** [26] *Suponga que  $a_{12}^L a_{12}^R > 0$ , en el sistema (2-3). Entonces el homeomorfismo  $\tilde{\mathbf{x}} = h(\mathbf{x})$  dado por*

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^L & -a_{12}^L \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ b_1^L \end{bmatrix}, & \mathbf{x} \in \Sigma_L, \\ \frac{a_{12}^L}{a_{12}^R} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^R & -a_{12}^R \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ b_1^L \end{bmatrix}, & \mathbf{x} \in \Sigma_R. \end{cases} \quad (2-8)$$

lleva al sistema (2-3) a la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) = \begin{cases} F_L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} T_L & -1 \\ d_L & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ c_L \end{bmatrix}, & \text{si } \mathbf{x} \in \Sigma_L, \\ F_R(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} T_R & -1 \\ d_R & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} -b \\ c_R \end{bmatrix}, & \text{si } \mathbf{x} \in \Sigma_R, \end{cases} \quad (2-9)$$

donde  $T_{\{L,R\}}$  y  $d_{\{L,R\}}$  son las trazas y determinantes de las matrices  $A_{\{L,R\}}$  respectivamente y los parámetros  $c_L, c_R$  y  $b$  están definidos por

$$c_L = a_{12}^L b_2^L - a_{22}^L b_1^L, \quad c_R = \frac{a_{12}^L}{a_{12}^R} (a_{12}^R b_2^R - a_{22}^R b_1^R), \quad b = \frac{a_{12}^L}{a_{12}^R} b_1^R - b_1^L.$$

Note que esta forma canónica permite caracterizar el conjunto de deslizamiento  $\Sigma^s$  definido en (2-5) en terminos del parametro  $b$  de la siguiente forma

$$\Sigma^s = \{(0, y) \in \Sigma : y = \alpha b, 0 \leq \alpha \leq 1\}, \quad (2-10)$$

para  $b$  positivo el conjunto de deslizamiento será inestable y para  $b$  negativo estable, ya que para  $b$  negativo, los campos *apuntan* a la zona contraria y en el caso de  $b$  positivo *apuntan* a su propia zona.

Más adelante, en [25] se define un cambio de variable que convierte a la forma canónica (2-9) en un nuevo sistema, la forma canónica normalizada, las variables de dicha forma son

$$\Delta_j = (T_j)^2 - 4d_j, \quad \omega_j = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{|\Delta_j|}, & \Delta_j \neq 0, \\ 1, & \Delta_j = 0, \end{cases} \quad (2-11)$$

$$m_j = \begin{cases} i, & \text{si } \Delta_j < 0, \\ 0, & \text{si } \Delta_j = 0, \\ 1, & \text{si } \Delta_j > 0, \end{cases}, \quad a_j = \frac{c_j}{\omega_j}, \quad \gamma_j = \frac{T_j}{2\omega_j}.$$

con  $j \in \{L, R\}$ .

Al transformar las coordenadas  $(x, y, t)$  a  $(\frac{x}{\omega}, y, \frac{t}{\omega})$  se obtiene la siguiente forma canónica normalizada

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) = \begin{cases} F_L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2\gamma_L & -1 \\ \gamma_L^2 - m_L^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ a_L \end{bmatrix}, & \text{si } \mathbf{x} \in \Sigma_L, \\ F_R(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2\gamma_R & -1 \\ \gamma_R^2 - m_R^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} -b \\ a_R \end{bmatrix}, & \text{si } \mathbf{x} \in \Sigma_R. \end{cases} \quad (2-12)$$

Los puntos de equilibrio de los campos vectoriales  $F_L$  y  $F_R$  de (2-12) estan dados por

$$\mathbf{x}_L^* = \frac{a_L}{\gamma_L^2 - m_L^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2\gamma_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_R^* = \frac{a_R}{\gamma_R^2 - m_R^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2\gamma_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}. \quad (2-13)$$

Es importante aclarar que el conjunto (2-10) es el conjunto de deslizamiento de los sistemas (2-9) y (2-12).

Note que la traza y determinante de las matrices en la forma canónica normalizada están dadas por  $2\gamma_j$  y  $D_j = \gamma_j^2 - m_j^2$ ,  $j \in \{L, R\}$  respectivamente, y que sus valores propios son

$$\lambda_j = \gamma_j \pm m_j, \quad (2-14)$$

lo que significa que el parámetro modal  $m_j$  determina la naturaleza topológica del equilibrio del campo vectorial  $F_j(\mathbf{x})$  del sistema (2-12) siempre que este exista, es decir su comportamiento y junto al parámetro  $\gamma_j$  su estabilidad. En la tabla **2-1** se clasifica el comportamiento de los equilibrios del sistema dependiendo de los parámetros  $\gamma_j$  y  $m_j$ ,  $j \in \{L, R\}$  y en la tabla **2-2** se muestra su estabilidad dependiendo de los mismos parámetros.

	$m = 1$	$m = 0$	$m = i$
$ \gamma_j  = 0$	Silla	No hiperbólico	Centro
$0 <  \gamma_j  < 1$	Silla	Nodo degenerado	Foco
$ \gamma_j  = 1$	No hiperbólico	Nodo degenerado	Foco
$ \gamma_j  > 1$	Nodo	Nodo degenerado	Foco

Tabla **2-1**: Naturaleza topológica de los puntos de equilibrio (2-13).

	$m = 1$	$m = 0$	$m = i$
$\gamma_j < -1$	Estable	Estable	Estable
$-1 < \gamma_j < 0$	Semiestable	Estable	Estable
$\gamma_j = 0$	Semiestable	No hiperbólico	Estable
$0 < \gamma_j < 1$	Semiestable	Inestable	Inestable
$\gamma_j > 1$	Inestable	Inestable	Inestable

Tabla **2-2**: Estabilidad de los puntos de equilibrio (2-13).

En este trabajo, al igual que en [16, 42] se estudia la familia de sistemas de la forma (2-3) cuando sus matrices son iguales ( $A_L = A_R = A$ ). Tomando los parámetros  $\gamma_L = \gamma_R = \gamma$ ,  $m_L = m_R = m$  y  $D = \gamma^2 - m^2$  y reemplazando en (2-12) se tiene

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) = \begin{cases} F_L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2\gamma & -1 \\ \gamma^2 - m^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ a_L \end{bmatrix}, & \text{si } \mathbf{x} \in \Sigma_L, \\ F_R(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2\gamma & -1 \\ \gamma^2 - m^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} -b \\ a_R \end{bmatrix}, & \text{si } \mathbf{x} \in \Sigma_R. \end{cases} \quad (2-15)$$

Al aplicar el método convexo de Filippov al conjunto Sliding  $\Sigma^s$  definido en (2-10), queda la

siguiente expresión para el campo vectorial en este conjunto

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = \left(\frac{a_L - a_R}{b}\right) y - a_L. \end{cases} \quad (2-16)$$

Este campo vectorial tiene por equilibrio al siguiente punto, el cual será denominado como pseudoequilibrio del sistema

$$x^* = 0, \quad y^* = b \left( \frac{a_L}{a_L - a_R} \right), \quad (2-17)$$

este pseudoequilibrio es estable si  $(a_L - a_R)/b < 0$ . Para que el pseudoequilibrio pertenezca al conjunto de deslizamiento, los parámetros  $a_L$ ,  $a_R$  y  $b$  deben satisfacer la siguiente desigualdad

$$0 < \frac{a_L}{a_L - a_R} < 1. \quad (2-18)$$

En el caso de que el pseudoequilibrio pertenezca al segmento de Sliding y que sea estable, este puede *atrapar* la dinámica final del sistema, como se muestra en las Figuras **2-1** y **2-2**.

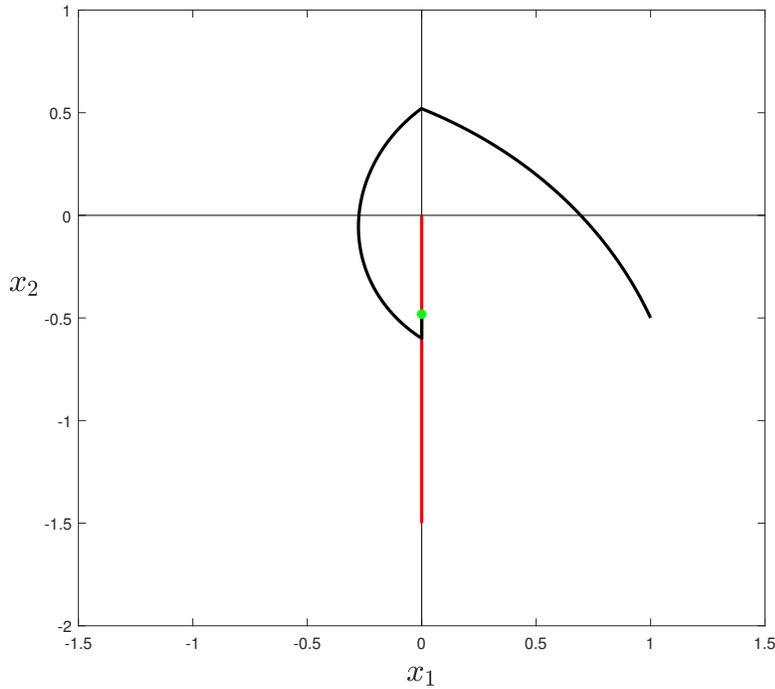


Figura **2-1**: Órbita del sistema (2-12) en negro que converge al pseudoequilibrio (2-17) (verde), con la configuración de parámetros  $\gamma = 0,1$ ,  $a_L = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $a_R = \frac{1}{2}$ ,  $m = i$  y  $b = -1,5$ .

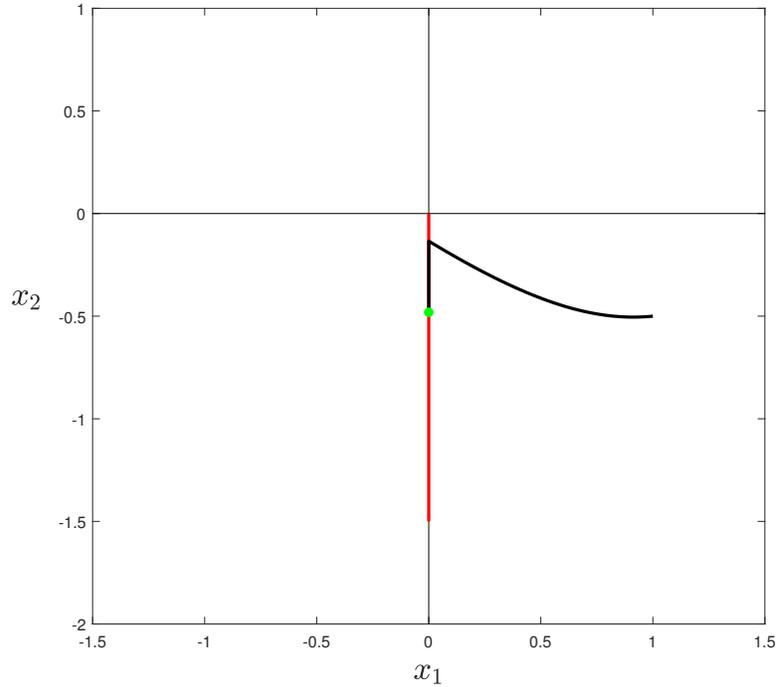


Figura 2-2: Órbita del sistema (2-12) en negro que converge al pseudoequilibrio (2-17) (verde), con la configuración de parámetros  $\gamma = 0,1$ ,  $a_L = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $a_R = \frac{1}{2}$ ,  $m = 1$  y  $b = -1,5$ .

Note que si los parámetros satisfacen  $a_L > 0$ ,  $a_R < 0$  y  $b < 0$ , entonces el pseudoequilibrio (2-17) será real y estable.

### 2.3. Existencia de órbitas periódicas Crossing

En [26, 25, 44] se reportan algunos resultados sobre la existencia de órbitas periódicas crossing en los sistemas (2-9) y (2-12). Las órbitas periódicas tipo crossing son órbitas periódicas que no intersecan el conjunto de deslizamiento, conjunto que en algunos casos puede ser estable. En esta sección se presentan algunos de estos resultados y se precisa cuales pueden ser utilizados para obtener un ciclo límite inestable en el sistema (2-15). Para empezar, en [26] se estudia el caso en el que los equilibrios de ambos campos  $F_L$  y  $F_R$  son focos ( $m = i$ ).

**Teorema 3.** [26] *Considere el sistema (2-12) y las condiciones  $b = 0$  y  $a_R \leq 0 \leq a_L$ , entonces las siguientes afirmaciones se cumplen*

- a. *Si  $\gamma_L + \gamma_R = 0$ , entonces el origen es un centro no lineal para  $a_L \gamma_R = a_R \gamma_L$  y no existen órbitas periódicas crossing para  $a_L \gamma_R \neq a_R \gamma_L$ .*

- b. Si  $\gamma_L + \gamma_R \neq 0$  y  $\gamma_L\gamma_R \geq 0$ , entonces no existen órbitas periódicas crossing.
- c. Si  $\gamma_L + \gamma_R \neq 0$  y  $\gamma_L\gamma_R < 0$ , entonces para  $(\gamma_L + \gamma_R)(a_L\gamma_R - a_R\gamma_L) < 0$  existe una única órbita periódica crossing, la cual es estable si  $\gamma_L + \gamma_R < 0$  e inestable si  $\gamma_L + \gamma_R > 0$ . En el caso de que  $(\gamma_L + \gamma_R)(a_L\gamma_R - a_R\gamma_L) \geq 0$ , no existen órbitas periódicas crossing.

**Teorema 4.** [26] Asuma las siguientes condiciones para el sistema (2-12),  $b > 0$  y  $a_R \leq 0 \leq a_L$ , entonces las siguientes afirmaciones se cumplen

- a. Si  $\gamma_L\gamma_R \geq 0$ , entonces no existen órbitas periódicas crossing para  $\gamma_L + \gamma_R \geq 0$ , mientras que para  $\gamma_L + \gamma_R < 0$  solo existe una órbita periódica crossing, la cual es estable.
- b. Si  $\gamma_L\gamma_R < 0$  se tienen los siguientes subcasos
- b1. Si  $\gamma_L + \gamma_R \geq 0$  y  $a_L\gamma_R \geq a_R\gamma_L$ , entonces no hay órbitas periódicas crossing.
- b2. Si  $\gamma_L + \gamma_R = 0$  y  $a_L\gamma_R < a_R\gamma_L$ , entonces definimos el valor

$$b_\infty = 2(a_L + a_R) \frac{\gamma_L}{1 + \gamma_L^2} = -2(a_L + a_R) \frac{\gamma_R}{1 + \gamma_R^2},$$

si  $b_\infty > 0$ , existe una única órbita periódica crossing, la cual es estable para  $0 < b < b_\infty$  y ninguna para  $b \geq b_\infty$ .

- b3. Si  $\gamma_L + \gamma_R > 0$  y  $a_L\gamma_R < a_R\gamma_L$ , entonces existen dos órbitas periódicas crossing hiperbólicas para  $b$  lo suficientemente pequeño, mientras que estas no existen para  $b$  lo suficientemente grande.

Si adicionalmente  $a_L a_R = 0$  con  $a_L + a_R \neq 0$ , entonces existe un valor  $b_{SN}$  tal que (2-12) tiene exactamente dos órbitas periódicas crossing hiperbólicas para  $b < b_{SN}$ , una para  $b = b_{SN}$ , la cual es semiestable y ninguna para  $b > b_{SN}$ .

- b4. Si  $\gamma_L + \gamma_R < 0$ , entonces siempre existe por lo menos una órbita periódica crossing estable, si adicionalmente  $a_L a_R = 0$ , esta órbita es única.

**Teorema 5.** [26] Asuma las siguientes condiciones para el sistema (2-12),  $b < 0$  y  $a_R \leq 0 \leq a_L$ , entonces las siguientes afirmaciones se cumplen

- a. Si  $\gamma_L\gamma_R \geq 0$ , entonces para  $\gamma_L + \gamma_R \leq 0$  no existen órbitas periódicas crossing, mientras que para  $\gamma_L + \gamma_R > 0$  existe una única órbita periódica crossing inestable.
- b. Si  $\gamma_L\gamma_R < 0$  se tienen los siguientes subcasos
- b1. Si  $\gamma_L + \gamma_R \leq 0$  y  $a_L\gamma_R \leq a_R\gamma_L$ , entonces no hay órbitas periódicas crossing.

b2. Si  $\gamma_L + \gamma_R = 0$  y  $a_L\gamma_R > a_R\gamma_L$ , definimos el valor

$$b_\infty = 2(a_L + a_R) \frac{\gamma_L}{1 + \gamma_L^2} = -2(a_L + a_R) \frac{\gamma_R}{1 + \gamma_R^2},$$

si  $b_\infty < 0$  existe una única órbita periódica crossing, la cual es inestable para  $b_\infty < b < 0$  y ninguna para  $b \leq b_\infty$

b3. Si  $\gamma_L + \gamma_R < 0$  y  $a_L\gamma_R > a_R\gamma_L$ , entonces existen dos órbitas periódicas crossing hiperbólicas para  $|b|$  suficientemente pequeño, mientras que no existen órbitas periódicas crossing para  $|b|$  suficientemente grande.

Si adicionalmente  $a_L a_R = 0$  con  $a_L + a_R \neq 0$ , entonces existe un valor  $b_{SN}$  tal que (2-12) tiene exactamente dos órbitas periódicas crossing hiperbólicas para  $b_{SN} < b < 0$ , una para  $b = b_{SN}$ , la cual es semiestable y ninguna para  $b < b_{SN}$ .

b4. Si  $\gamma_L + \gamma_R > 0$ , entonces siempre existe por lo menos una órbita periódica crossing inestable, si adicionalmente  $a_L a_R = 0$ , esta órbita es única.

A continuación presentamos algunas órbitas periódicas crossing estables en azul e inestables en rojo, obtenidas en el sistema (2-15) bajo las hipótesis que plantean los teoremas anteriores

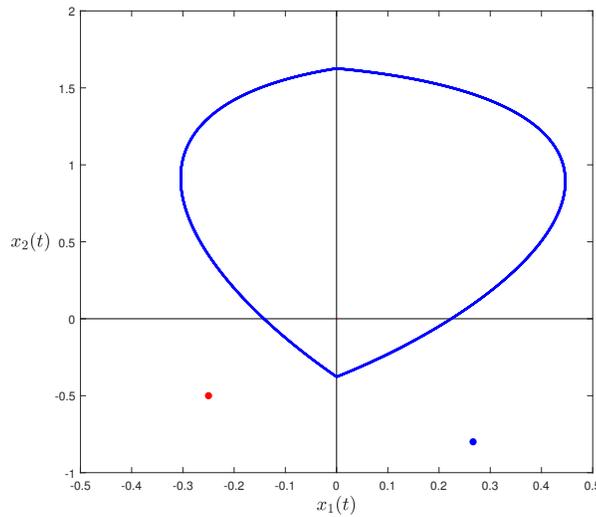


Figura 2-3: Órbita periódica crossing estable del sistema (2-12) en azul con la configuración de parámetros  $\gamma_L = -\frac{3}{2}$ ,  $\gamma_R = 1$ ,  $a_L = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $a_R = -\frac{1}{2}$  y  $b = 0$ .  $x_L^*$  en azul y  $x_R^*$  en rojo.

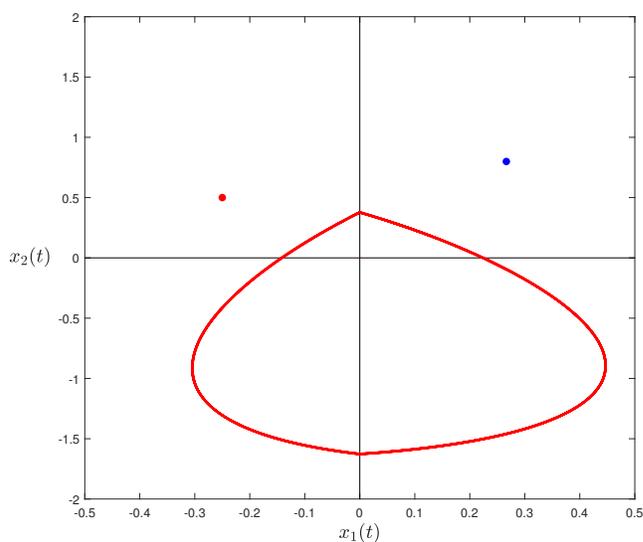


Figura 2-4: Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-12) en rojo con la configuración de parámetros  $\gamma_L = \frac{3}{2}$ ,  $\gamma_R = -1$ ,  $a_L = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $a_R = -\frac{1}{2}$  y  $b = 0$ .  $x_L^*$  en azul y  $x_R^*$  en rojo.

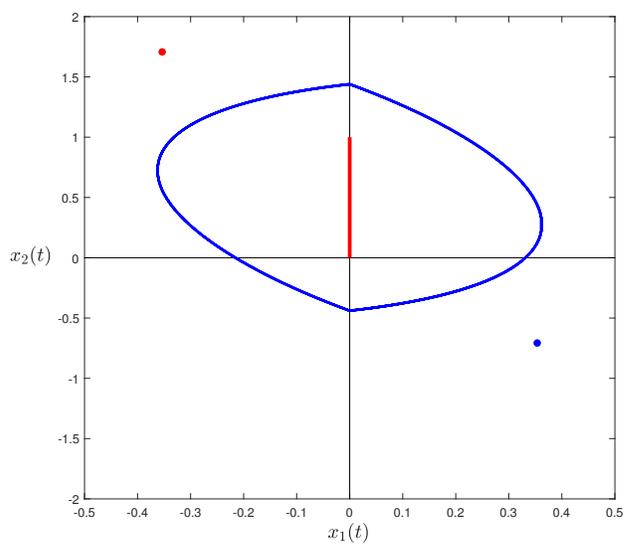


Figura 2-5: Órbita periódica crossing estable del sistema (2-12) en azul con la configuración de parámetros  $\gamma_L = \gamma_R = -1$ ,  $a_L = a_R = \frac{\sqrt{2}}{2}$  y  $b = 1$ .  $x_L^*$  en azul y  $x_R^*$  en rojo, conjunto de deslizamiento en rojo.

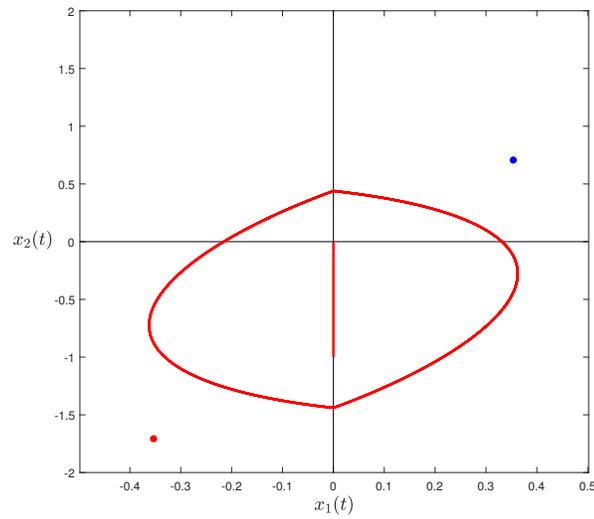


Figura 2-6: Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo con la configuración de parámetros  $\gamma = 1$ ,  $a_L = a_R = \frac{\sqrt{2}}{2}$  y  $b = -1$ .  $x_L^*$  en azul y  $x_R^*$  en rojo, conjunto de deslizamiento en rojo.

De los resultados presentados en [26], los teoremas 4 y 5 garantizan la existencia de una única órbita periódica crossing en el sistema (2-15), el primero para una órbita estable y el segundo para una órbita inestable. En [25] se continua el estudio de órbitas periódicas crossing y se reportan los siguientes resultados

**Proposición 7.** [25] *Suponga que  $a_L = 0$ ,  $b = 0$ ,  $a_R < 0$ ,  $\gamma_R < 0$ ,  $m_L = i$ . Dado  $m_R \in \{i, 0, 1\}$ , existe  $\gamma_L > 0$  tal que el sistema (2-12) tiene una órbita periódica crossing hiperbólica estable al rededor del origen.*

**Proposición 8.** [25] *Suponga que  $\gamma_L > 0$ ,  $a_R < 0$ ,  $\gamma_R < 0$ ,  $m_L = i$  y  $m_R \in \{i, 0, 1\}$  en el sistema (2-12). Entonces existe un  $\xi > 0$  y dos funciones continuas  $\eta_1, \eta_2$  que satisfacen  $\eta_1(0) = \eta_2(0) = 0$  y  $\eta_1(\epsilon) < \eta_2(\epsilon) < 0$ , para todo  $-\xi < \epsilon < 0$ , tal que para todo  $-\xi < a_L < 0$  y  $\eta_1(a_L) < b < \eta_2(a_L)$  el sistema (2-12) tiene al menos dos órbitas periódicas crossing anidadadas.*

*Ambas órbitas rodean el conjunto de deslizamiento (2-10) y tienen estabilidad opuesta, la órbita externa es inestable y la interna es estable. Cuando  $(a_L, b) \rightarrow (0, 0)$  dentro del sector anterior, ambas órbitas periódicas disminuyen de tamaño y eventualmente se reducen al origen.*

**Teorema 6.** [25] *Suponga que  $a_R < 0$ ,  $\gamma_R < 0$ ,  $m_L = i$  y  $m_R \in \{i, 0, 1\}$  en el sistema (2-12). Entonces existe un  $\gamma_L > 0$ ,  $\xi > 0$  y dos funciones continuas  $\eta_1, \eta_2$  que satisfacen  $\eta_1(0) = \eta_2(0) = 0$  y  $\eta_1(\epsilon) < \eta_2(\epsilon) < 0$ , para todo  $-\xi < \epsilon < 0$ , tal que para todo  $-\xi < a_L < 0$  y  $\eta_1(a_L) < b < \eta_2(a_L)$  el sistema (2-12) tiene al menos tres órbitas periódicas crossing anidadadas.*

En la Figura 2-7 se muestra una órbita periódica crossing estable del sistema 2-12 bajo las hipótesis que plantean los resultados reportados en [25].

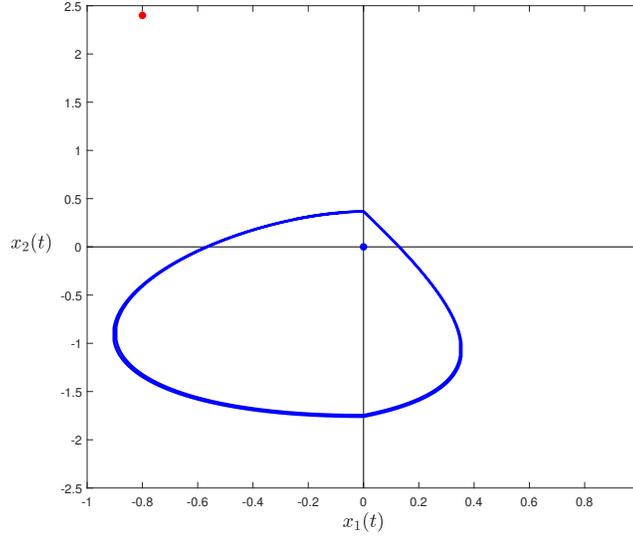


Figura 2-7: Órbita periódica crossing Estable del sistema (2-12) en azul con la configuración de parámetros  $\gamma_L = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma_R = -\frac{3}{2}$ ,  $m_L = i$ ,  $m_R = 1$ ,  $a_L = 0$ ,  $a_R = -1$  y  $b = 0$ .  $x_L^*$  en azul y  $x_R^*$  en rojo.

Los resultados reportados en [25] respecto a la existencias de órbitas periódicas crossing en el sistema (2-3) requieren de la hipótesis  $\gamma_L \gamma_R < 0$ , la cual no se cumple en nuestra familia de sistemas a estudiar, donde  $\gamma_L = \gamma_R = \gamma$ . Mas adelante, en [44] se continua el estudio de órbitas periódicas crossing en el sistema (2-9). El siguiente es un resultado que garantiza la existencia de órbitas periódicas crossing en el sistema (2-9)

**Teorema 7.** [44] *Considere el sistema (2-9), cuyos paramteros satisfacen  $d_L < 0$ ,  $c_L > 0$ ,  $0 < 4d_R < T_R^2$  y  $a_R < 0$ . Suponga que  $T_L T_R \geq 0$ , entonces se satisface*

- Si  $T_R < 0$ , existe un  $b_M = b_M(T_{\{L,R\}}, d_{\{L,R\}}, c_{\{L,R\}}) > 0$  tal que el sistema (2-9) tiene un único ciclo límite el cual es asintóticamente estable sí  $b \in (0, b_M)$ , una órbita homoclina para  $b = b_M$  y ningún ciclo límite en otro caso.*
- Si  $T_R > 0$ , existe un  $b_M = b_M(T_{\{L,R\}}, d_{\{L,R\}}, c_{\{L,R\}}) < 0$  tal que el sistema (2-9) tiene un único ciclo límite el cual es inestable sí  $b \in (b_M, 0)$ , una órbita homoclina para  $b = b_M$  y ningún ciclo límite en otro caso.*

Nosotros adaptamos este resultado para el sistema (2-15), el cual es topológicamente equivalente a (2-9).

**Teorema 8.** *Considere el sistema (2-15), cuyos paramteros satisfacen  $D_L < 0$ ,  $a_L > 0$ ,  $0 < 4D_R < \gamma_R^2$  y  $a_R < 0$ . Suponga que  $\gamma_L \gamma_R \geq 0$ , entonces se satisface*

- a. Si  $\gamma_R < 0$ , existe un  $b_M = b_M(\gamma_{\{L,R\}}, D_{\{L,R\}}, a_{\{L,R\}}) > 0$  tal que el sistema (2-9) tiene un único ciclo límite el cual es asintóticamente estable sí  $b \in (0, b_M)$ , una órbita homoclina para  $b = b_M$  y ningún ciclo límite en otro caso.
- b. Si  $\gamma_R > 0$ , existe un  $b_M = b_M(\gamma_{\{L,R\}}, D_{\{L,R\}}, a_{\{L,R\}}) < 0$  tal que el sistema (2-9) tiene un único ciclo límite el cual es inestable sí  $b \in (b_M, 0)$ , una órbita homoclina para  $b = b_M$  y ningún ciclo límite en otro caso.

Entre las hipótesis del teorema anterior está que los determinantes de las matrices deben tener signo contrario, lo cual no se cumple en nuestra familia a estudiar. Los únicos teoremas que garantizan existencia de órbitas periódicas crossing en el sistema (2-15) son los teoremas 4 y 5, uno de los objetivos de este trabajo es garantizar la existencia de una órbita periódica crossing inestable, por lo tanto el teorema 5 se utilizará en capítulos posteriores.

Para terminar esta sección se muestra una relación del tamaño de las órbitas crossing y los parámetros  $\gamma$  y  $b$ , que representan la traza y el segmento de deslizamiento del sistema respectivamente.

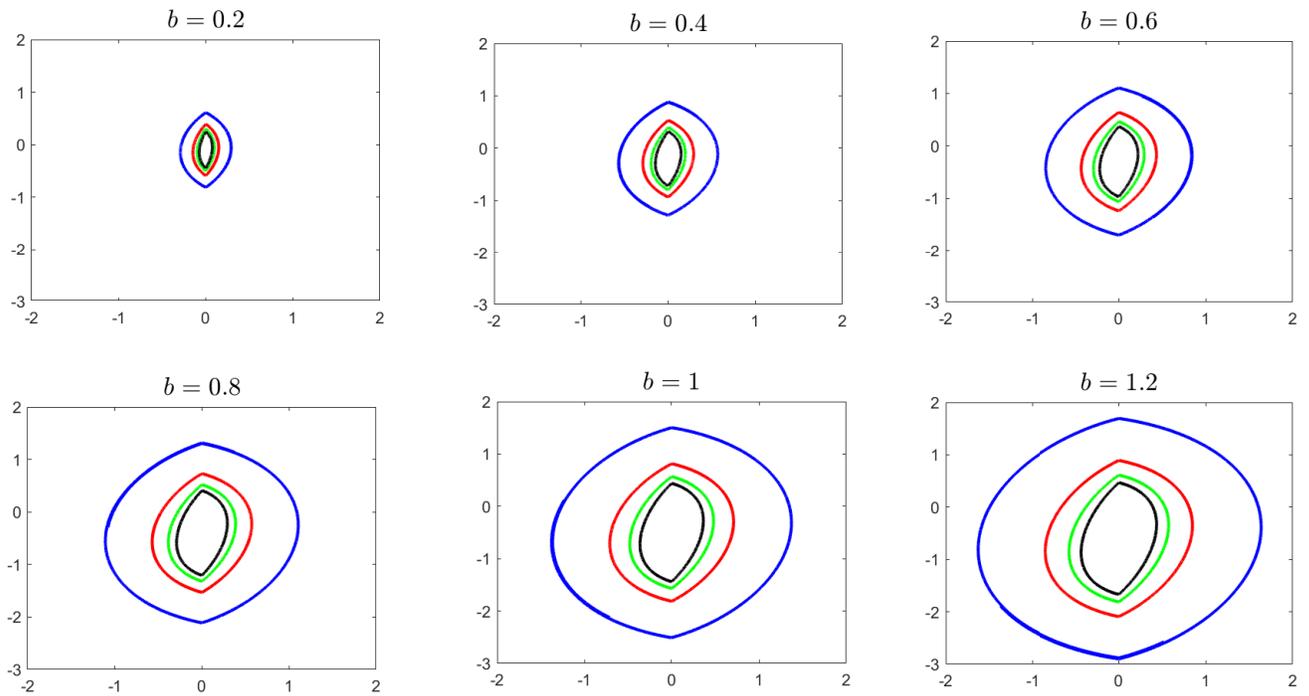


Figura 2-8: Órbitas periódicas crossing inestables del sistema (2-3) variando los parámetros  $\gamma$  y  $b$ ,  $\gamma = 0,25$  en azul,  $\gamma = 0,5$  en rojo,  $\gamma = 0,75$  en verde y  $\gamma = 1$  en negro.

Las órbitas crecen cuando  $\gamma$  tiende a 0 y cuando  $b$  crece, debido a que son órbitas tipo crossing y rodean el segmento de deslizamiento  $\Sigma^s$  del sistema  $F$ .

### 3 El mapa

El concepto de mapa estroboscópico nace del muestreo del estado de un sistema  $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$  cada cierto tiempo  $t > 0$ . Si  $\mathbf{x}(s)$  es la solución del sistema de ecuaciones diferenciales  $F$ , entonces el mapa estroboscópico  $P$  asociado al sistema  $F$  se define como el mapa que satisface  $P(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{x}(t_0 + t)$ , donde  $t$  es el tiempo de discretización. Este tipo de mapas se usan frecuentemente para modelar de forma adecuada distintos fenómenos de electrónica, economía, entre otras disciplinas [17, 21, 45, 46, 47, 48, 49].

En este capítulo se estudia el mapa estroboscópico asociado al sistema (2-15) y se divide en 3 secciones. En la primera sección se presentan algunos resultados reportados en [16, 42], relacionados con la matriz exponencial de la matriz  $A$  de los campos vectoriales  $F_L$  y  $F_R$  del sistema (2-15). En la segunda sección se analiza el comportamiento de las órbitas del mapa estroboscópico en un plano de dos-parámetro y se reduce un parámetro del mapa. En la tercera sección se calcula de forma analítica el espectro de Lyapunov del mapa estroboscópico, para ciertos puntos del espacio  $\mathbb{R}^2$ .

Siguiendo a [16], dada la condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \Sigma_j$  y sistema de ecuaciones diferenciales  $\dot{\mathbf{x}} = F_j(\mathbf{x})$  de (2-15), con  $j \in \{L, R\}$ , la solución de este sistema se presenta a continuación

$$\mathbf{x}(t) = \Phi \mathbf{x}_0 - \Gamma \mathbf{b}_j, \tag{3-1}$$

donde  $\Phi = \Phi(t)$  es la matriz exponencial  $e^{At}$  de la matriz  $A$  de  $F_j$  y  $\Gamma = \Gamma(mt)$  es la siguiente integral

$$\Gamma(mt) = \int_0^t \Phi(t - \tau) d\tau = (\Phi - I_2)A^{-1}. \tag{3-2}$$

Fijando  $t > 0$  se obtiene el mapa estroboscópico asociado al sistema (2-15)

$$\mathbf{x}_{n+1} = P(\mathbf{x}_n, \zeta) = \begin{cases} P_L(\mathbf{x}_n, \zeta) = \Phi \mathbf{x}_n - (\Phi - I)A^{-1} \mathbf{b}_L, & \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}_n < 0, \\ P_R(\mathbf{x}_n, \zeta) = \Phi \mathbf{x}_n - (\Phi - I)A^{-1} \mathbf{b}_R, & \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}_n \geq 0, \end{cases} \tag{3-3}$$

donde  $\zeta = [\gamma, m, b, a_L, a_R, t]$ . Los puntos fijos del mapa (3-3) son los siguientes

$$\mathbf{x}_L^* = \frac{a_L}{D} \begin{bmatrix} 1 \\ 2\gamma \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_R^* = \frac{a_R}{D} \begin{bmatrix} 1 \\ 2\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

### 3.1. La matriz exponencial

En esta sección se presenta la expresión de la matriz exponencial  $\Phi = e^{At}$  del mapa estroboscópico (3-3), en termino de algunas funciones de los parámetros del mapa, junto con algunas propiedades de esta matriz exponencial reportadas en [16, 42].

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , considere las funciones  $C_k(mt)$  y  $S_k(mt)$  definidas por

$$C_k(mt) = \cosh kmt, \quad S_k(mt) = \begin{cases} \frac{\sinh kmt}{m}, & \text{si } m \neq 0, \\ kt, & \text{si } m = 0, \end{cases} \quad (3-4)$$

Estas funciones pueden ser reescritas en términos del parámetro  $m$  de la forma que se muestra en (3-5)

$$C_k(mt) = \begin{cases} \cosh kt, & \text{si } m = 1, \\ 1, & \text{si } m = 0, \\ \cos kt & \text{si } m = i, \end{cases}, \quad S_k(mt) = \begin{cases} \sinh kt, & \text{si } m = 1, \\ kt, & \text{si } m = 0, \\ \sin kt & \text{si } m = i, \end{cases} \quad (3-5)$$

A partir de las funciones  $C_k(mt)$  y  $S_k(mt)$ , se definen las siguientes funciones

$$\mu_k^\pm(mt) = C_k(mt) \pm \gamma S_k(mt). \quad (3-6)$$

Las funciones definidas anteriormente satisfacen las siguientes identidades para todo  $k \in \mathbb{N}$

$$S_1(kmt) = S_k(mt), \quad C_1(kmt) = C_k(mt), \quad \mu_1^\pm(kmt) = \mu_k^\pm(mt). \quad (3-7)$$

Utilizando las funciones  $C_k$ ,  $S_k$  y  $\mu_k^\pm$ , en la siguiente proposición se da una expresión de la matriz exponencial  $\Phi$

**Proposición 9.** *Cosnsidere las funciones  $C_k$ ,  $S_k$  y  $\mu_k^\pm$  definidas en (3-5) y (3-6), la matriz exponencial  $\Phi = e^{At}$  puede escribirse de la forma*

$$\Phi = \Phi(mt) = e^{t\gamma} \begin{bmatrix} \mu_1^+(mt) & -S_1(mt) \\ DS_1(mt) & \mu_1^-(mt) \end{bmatrix}, \quad (3-8)$$

y utilizando las identidades (3-7), la  $k$ -ésima potencia de la matriz  $\Phi$  esta dada por

$$\Phi^k = \Phi(kmt) = e^{kt\gamma} \begin{bmatrix} \mu_k^+ & -S_k \\ DS_k & \mu_k^- \end{bmatrix}, \quad (3-9)$$

donde  $D = \gamma^2 - m^2$  y  $k \in \mathbb{N}$ .

Para aligerar la notación se escribirá a conveniencia de la siguiente forma

$$\Phi = \Phi(mt), \quad C_k = C_k(mt), \quad S_k = S_k(mt), \quad \mu_k^\pm = \mu_k^\pm(mt), \quad (3-10)$$

**Proposición 10.** Dado  $m \in \{0, 1, i\}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  y  $D = \gamma^2 - m^2$ , considere las funciones  $C_k, S_k$  y  $\mu_k^\pm$  definidas en (3-5), (3-6). Para todo  $k \geq 1$  se satisfacen las siguientes identidades

$$\mu_k^+ \mu_k^- + (\gamma^2 - m^2) S_k^2 = 1, \quad (3-11)$$

A continuación se presenta un resultado que permite conocer algunas propiedades de la  $k$ -ésima potencia de la matriz  $\Phi$  (3-9):

**Proposición 11.** [16] Considere la función  $C_k$  definida en (3-5) y la matriz (3-8), para todo  $k \in \mathbb{N}$  se cumple:

a) La traza y el determinante de la matriz (3-9) esta dada por

$$\det(\Phi^k) = e^{2k\gamma t}, \quad \text{tr}(\Phi^k) = 2e^{k\gamma t} C_k. \quad (3-12)$$

b) El polinomio característico de la matriz (3-9) esta dado por

$$\det(\Phi^k - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda 2e^{k\gamma t} C_k + e^{2k\gamma t}. \quad (3-13)$$

Además sus valores propios están dados por  $\lambda_m^\pm = e^{kt(\gamma \pm m)}$  y en el caso que  $\gamma^2 - m^2 > 0$  y  $\gamma > 0$  se tiene que  $|\lambda_m^\pm| > 1$ .

c) La matriz (3-9) es invertible y su matriz inversa puede ser escrita como

$$\Phi^{-k} = \Phi(kmt) = e^{-kt\gamma} \begin{bmatrix} \mu_k^- & S_k \\ -DS_k & \mu_k^+ \end{bmatrix}. \quad (3-14)$$

d) Si los valores propios de la matriz (3-9) son diferentes de 1 entonces la matriz inversa de  $\Phi^k - I$  puede escribirse de la forma

$$(\Phi^k - I)^{-1} = \frac{1}{d(kt, \gamma)} \begin{bmatrix} \mu_k^- e^{k\gamma t} - 1 & S_k e^{k\gamma t} \\ -S_k e^{k\gamma t} D & \mu_k^+ e^{k\gamma t} - 1 \end{bmatrix}, \quad (3-15)$$

donde la función  $d(kt, \gamma)$  esta dada por

$$d(kt, \gamma) = \det(\Phi^k - I) = 1 - e^{2k\gamma t} C_k + e^{2k\gamma t}. \quad (3-16)$$

**Demostración.** a) Tomando la traza de la matriz (3-8)  $\text{tr}(\Phi^k) = e^{kt\gamma}(\mu_k^+ + \mu_k^-)$  y usando la definición de  $\mu_k^\pm$  se obtiene el primer resultado, el segundo resultado se obtiene tomando el determinante de la matriz (3-8)  $\det(\Phi^k) = e^{2kt\gamma}(\mu_k^+ \mu_k^- + (\gamma^2 - m^2) S_k^2)$  y las identidades (3-11)

- b) Tomando  $(\Phi^k) = 2e^{k\gamma t}C_k$  y  $\det(\Phi^k) = e^{2k\gamma t}$ , el polinomio característico de la matriz (3-8) esta dado por  $\det(\Phi^k - \lambda I_2) = \lambda^2 - 2C_k e^{kt\gamma}\lambda + e^{2kt\gamma}$ . Los valores propios que corresponden a las raíces del polinomio característico estan dados por  $\lambda = e^{kt(\gamma \pm m)}$ .
- c) El determinante de la matriz (3-9) es distinto de cero para cualquier valor de  $k$ ,  $\gamma$  y  $t$ , por lo que la matriz es invertible. Para calcular la inversa basta con usar la siguiente formula para matrices invertibles de orden dos

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

- d) Suponga que  $k \geq 1$  y que 1 no es un valor propio de la matriz (3-8), la matriz  $\Phi^k - I_2$  es

$$\Phi^k - I_2 = \begin{bmatrix} e^{kt\gamma}\mu_k^+ - 1 & -S_k \\ (\gamma^2 - m^2)S_k & e^{kt\gamma}\mu_k^- - 1 \end{bmatrix}.$$

Su determinante esta dado por

$$d(kt, \gamma) = e^{2kt\gamma} - 2C_k e^{kt\gamma} + 1.$$

Con lo que su inversa es

$$(\Phi^k - I_2)^{-1} = \frac{1}{d(kt, \gamma)} \begin{bmatrix} e^{kt\gamma}\mu_k^- - 1 & S_k \\ -(\gamma^2 - m^2)S_k & e^{kt\gamma}\mu_k^+ - 1 \end{bmatrix}.$$

## 3.2. Descripción del espacio de parámetros $(a_R, a_L)$

En esta sección se dará una descripción del espacio de parámetros  $(a_R, a_L)$ , fijando los demás parámetros del mapa  $P$  definido en (3-3), para empezar considere el siguiente cambio de coordenadas

$$a_R = r \cos \theta, \quad a_L = r \sin \theta, \quad r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Sustituyendo los parámetros en el mapa  $P$  de (3-3), se llega a la siguiente forma

$$\mathbf{x}_{n+1} = P(\mathbf{x}_n, \eta) = \begin{cases} P_L(\mathbf{x}_n, \eta) = \Phi \mathbf{x}_n - (\Phi - I)A^{-1}\mathbf{b}_L, & \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}_n < 0, \\ P_R(\mathbf{x}_n, \eta) = \Phi \mathbf{x}_n - (\Phi - I)A^{-1}\mathbf{b}_R, & \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}_n \geq 0, \end{cases} \quad (3-17)$$

Con  $\Phi$  dada en (3-8),  $\eta = [\gamma, m, b, r, \theta, t]$  y  $\mathbf{b}_L, \mathbf{b}_R$  dados por

$$\mathbf{b}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ r \sin \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_R = \begin{bmatrix} -b \\ r \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3-18)$$

Al factorizar el parámetro  $r$  del mapa  $P$ , se obtiene la siguiente propiedad de homotecia

**Proposición 12.** [16] Dado  $r > 0$ , el mapa  $P$  definido en (3-17) satisface la ecuación

$$P(r\mathbf{x}, t, rb, r, \theta) = rP(\mathbf{x}, t, b, 1, \theta).$$

Como consecuencia directa de la Proposición 12, se tiene el siguiente resultado para las órbitas del mapa  $P$

**Proposición 13.** [16] Dado  $r > 0$ , la órbita de un punto  $\mathbf{x}$  bajo en mapa  $P$  cumple con

$$Or(\mathbf{x}, t, b, r, \theta) = r(Or(r^{-1}\mathbf{x}, t, r^{-1}b, 1, \theta)).$$

Por la Proposición 13, es suficiente estudiar el caso  $r = 1$  para conocer la dinámica del mapa  $P$ , debido a que las órbitas del mapa solo difieren en un factor de escala  $r > 0$  y esto no afecta la estabilidad de sus conjuntos invariantes.

Ahora los puntos fijos del mapa  $P$  definido en (3-17) son

$$\mathbf{x}_L^* = \frac{\sin \theta}{D} \begin{bmatrix} 1 \\ 2\gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_R^* = \frac{\cos \theta}{D} \begin{bmatrix} 1 \\ 2\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}. \quad (3-19)$$

### 3.3. Espectro de Lyapunov del mapa $P$

En esta sección se calcula de forma analítica el espectro de Lyapunov del mapa (3-17) en función de los parámetros  $\gamma$ ,  $m$  y  $t$ , para ciertos puntos del espacio  $\mathbb{R}^2$ .

Para empezar, es necesario definir el conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^2$  para los cuales el límite (1-16) existe. El mapa  $P$  no es diferenciable en la zona de conmutación  $\Sigma$ , por lo tanto no es posible calcular el límite (1-16) para los puntos cuyas órbitas hacia adelante se intersecan con esta recta.

Siguiendo a [36], definimos el conjunto  $\Sigma_\infty \subset \mathbb{R}^2$  como el conjunto de todos los puntos de  $\mathbb{R}^2$  tales que sus órbitas hacia adelante colisionan con la zona de conmutación  $\Sigma$ . Como los mapas  $P_L$  y  $P_R$  definidos en (3-17) son lineales, la imagen inversa de una recta bajo cada uno de estos mapas es otra recta, por lo tanto la imagen inversa de una recta bajo el mapa  $P$  es la unión de 2 segmentos de recta. Por lo anterior el conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^2$  cuya  $n$ -ésima iteración pertenece a  $\Sigma$  es la unión de 2 segmentos de recta, luego  $\Sigma_\infty$  es la unión numerable de infinitos segmentos de recta. Si  $\mu$  es la medida de Lebesgue dos-dimensional, entonces  $\mu(\Sigma_\infty) = 0$ , ya que  $\Sigma_\infty$  es la unión numerable de infinitos conjuntos de medida 0.

Considerando condiciones iniciales en  $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_\infty$ , la derivada del mapa  $P^{(n)}$ ,  $DP^{(n)}$  esta bien definida en todo punto. Los mapas  $P_L$  y  $P_R$  tienen la misma derivada, la matriz  $\Phi$  definida en (3-8), por lo tanto la derivada de  $P^{(n)}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , esta dada por  $\Phi^n$ , definida en (3-9).

Para el caso  $m = 1$  y  $m = i$ , la matriz  $\Phi^{(n)}$  es diagonalizable y sus valores propios estan dados por  $\lambda_m^\pm = e^{nt(\gamma \pm m)}$ , por lo tanto sus exponentes de Lyapunov coinciden con el modulo de los valores propios de la matriz  $\Phi$ ,  $\lambda_m^\pm = |e^{t(\gamma \pm m)}|$ . Por otra parte el espectro de Lyapunov para el caso  $m = 0$  puede calcularse directamente de la definición. Lo anterior nos lleva al siguiente resultado

**Teorema 9.** *Considere el mapa  $P$  definido en (3-17), el espectro de Lyapunov del mapa  $P$ ,  $L_P$ , en  $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_\infty$  esta dado por*

$$L_P = \begin{cases} \{(\gamma + 1)t, (\gamma - 1)t\}, & m = 1, \\ \{\gamma t\}, & m = i, \\ \{\gamma t\}, & m = 0, \end{cases} \quad (3-20)$$

**Demostración.** *Si  $m = 1$ , entonces los valores propios de la matriz  $\Phi^n$  son  $\lambda^\pm = e^{nt(\gamma \pm 1)}$  y sus exponentes de Lyapunov estan dados por*

$$\begin{aligned} \lambda_{\{1,2\}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln (|e^{nt(\gamma \pm 1)}|), \\ \lambda_{\{1,2\}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nt(\gamma \pm 1)}{n}, \\ \lambda_{\{1,2\}} &= (\gamma \pm 1)t. \end{aligned} \quad (3-21)$$

*De forma analoga al caso anterior, cuando  $m = i$ , la matriz  $\Phi^n$  tiene valores propios  $\lambda^\pm = e^{nt(\gamma \pm i)}$  y sus exponentes de Lyapunov estan dados por*

$$\begin{aligned} \lambda_{\{1,2\}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln (|e^{nt(\gamma \pm i)}|), \\ \lambda_{\{1,2\}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nt\gamma}{n}, \\ \lambda_{\{1,2\}} &= \gamma t. \end{aligned} \quad (3-22)$$

*En cuanto al caso  $m = 0$ , considere  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_\infty$  y una direcci3n  $\mathbf{v}$ , la direcci3n  $\mathbf{v}$  puede escribirse de la forma  $v = [\cos(\varphi), \sin(\varphi)]$ , donde  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . De la definici3n de exponente de Lyapunov (1-16) se tiene que*

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{v}, \mathbf{x}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{\|Df^{(n)}(\mathbf{x})\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \right), \\ \lambda(\mathbf{v}, \mathbf{x}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln (\|\Phi^n \mathbf{v}\|), \end{aligned} \quad (3-23)$$

*De la ecuaci3n (3-9), el vector  $\Phi^n \mathbf{v}$  tiene la siguiente expresi3n*

$$\Phi^n \mathbf{v} = e^{\gamma nt} \begin{bmatrix} nt(\gamma \cos(\varphi) - \sin(\varphi)) + \cos(\varphi) \\ n\gamma t(\gamma \cos(\varphi) - \sin(\varphi)) + \sin(\varphi) \end{bmatrix},$$

*y su norma es*

$$\|\Phi^n \mathbf{v}\| = e^{\gamma nt} \sqrt{n^2 t^2 (\gamma \cos(\varphi) - \sin(\varphi))^2 + 2nt(\gamma \cos(\varphi) - \sin(\varphi))(\cos(\varphi) + \gamma \sin(\varphi)) + 1},$$

*fijando todos los par3metros excepto  $n$  y definiendo el polinomio de orden 2  $p(n)$  como  $p(n) = n^2 t^2 (\gamma \cos(\varphi) - \sin(\varphi))^2 + 2nt(\gamma \cos(\varphi) - \sin(\varphi))(\cos(\varphi) + \gamma \sin(\varphi)) + 1$ ,  $\|\Phi^n \mathbf{v}\|$  se reescribe*

de la forma  $\|\Phi^n \mathbf{v}\| = e^{\gamma n t} \sqrt{p(n)}$ . Reemplazando en la ecuación (3-23)

$$\lambda(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( e^{\gamma n t} \sqrt{p(n)} \right),$$

$$\lambda(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \gamma t + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(p(n))}{2n},$$

Usando regla de L'hospital para calcular el límite, tenemos que  $\frac{\ln(p(n))}{2n} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , por lo tanto el exponente característico de Lyapunov de un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_\infty$  en cualquier dirección  $\mathbf{v}$ , cuando  $m = 0$  es  $\lambda(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \gamma t$ .

De este resultado tenemos el siguiente corolario

**Corolario 1.** Para los parámetros  $\gamma > 0$ ,  $t > 0$  y  $m \in \{0, 1, i\}$ , el exponente dominante de Lyapunov del mapa  $P$  definido en (3-17) es positivo en  $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_\infty$ .

# 4 Existencia de atractores caóticos robustos

Este capítulo se divide en tres secciones, en la primera sección se presenta la forma canónica para mapas PWL de dimensión dos continuos definida en [50] y el Teorema reportado en [36] que garantiza la existencia de atractores caóticos robustos en esta forma canónica en cierta zona de atrapamiento. En la segunda sección se utilizan los Teoremas 5 y 9 para estudiar el comportamiento del mapa  $P$  definido en (3-17), al interior de la zona delimitada por una órbita periódica inestable del sistema  $F$  definido en (2-15), y se conjeturan condiciones suficientes para garantizar la existencia de atractores caóticos robustos en el mapa  $P$  en el caso foco. En la tercera sección se realiza un breve análisis del caso silla  $m = 1$  y  $|\gamma| < 1$ .

## 4.1. Introducción

En 1992 en [50] se define la siguiente forma canónica para mapas PWL de dimensión dos continuos

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \tau_L & 1 \\ -\delta_L & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_n + \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}_n \leq 0, \\ \begin{bmatrix} \tau_R & 1 \\ -\delta_R & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_n + \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}_n > 0, \end{cases} \quad (4-1)$$

Posteriormente, en 1998 Soumitro Banerjee y sus colaboradores, definen un atractor caótico como robusto si existe una ventana en el espacio de parámetros para la cual el atractor no desaparece y no existen atractores periódicos [5]. Además, los autores consideraron una región  $\mathcal{R}$  en el espacio de parámetros del mapa descrita por las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \delta_L > 0, \quad \delta_R > 0, \\ \tau_L > \delta_L + 1, \quad \tau_R < -(\delta_R + 1), \end{aligned} \quad (4-2)$$

note que las condiciones (4-2) son equivalentes a asumir que los puntos de equilibrio son sillas y que sus valores propios satisfacen las desigualdades

$$0 < \lambda_L^s < 1 < \lambda_L^u, \quad \lambda_R^u < -1 < \lambda_R^s < 0. \quad (4-3)$$

Los puntos de equilibrio  $X$  y  $Y$  están dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} Y = (Y_1, Y_2) &= \left( \frac{-1}{\tau_L - \delta_L - 1}, \frac{\delta_L}{\tau_L - \delta_L - 1} \right), \\ X = (X_1, X_2) &= \left( \frac{1}{\delta_R + 1 - \tau_R}, \frac{-\delta_R}{\delta_R + 1 - \tau_R} \right), \end{aligned} \quad (4-4)$$

donde  $Y_1 < 0$  y  $X_1 > 0$ , por lo tanto los puntos de equilibrio son reales.

Mediante simulaciones se evidenció que en esta región de parámetros, el mapa (4-1) presenta un atractor caótico robusto. Posterior a este trabajo, se han hecho diversos estudios del caos robusto en este mapa. Por ejemplo en [18] se reportaron condiciones suficientes para que exista un atractor caótico robusto en el mapa y se dio evidencia experimental de este comportamiento en un convertidor DC-DC Boost, en [51, 19] se reportó la existencia de atractores caóticos en la forma canónica (4-1), cuando una de sus matrices es no invertible, en [52] se reportó un resultado que garantiza la existencia de un atractor caótico robusto en el mapa (4-1) con matrices iguales o con cierta condición sobre los determinantes.

Recientemente, en el año 2021 en [36], se presentó el siguiente teorema sobre los exponentes de Lyapunov del mapa  $f$

**Teorema 10.** [36] *Suponga que los parámetros del mapa  $f$  satisfacen (4-2) y  $\phi = \phi(\tau_L, \tau_R, \delta_L, \delta_R) = \delta_R - (\tau_R + \delta_L + \delta_R - (1 + \tau_R)\lambda_L^U)\lambda_L^U > 0$ . Entonces  $f$  tiene un atractor topológico  $\Lambda$  con la propiedad que para cada  $z \in \Lambda$ , si el exponente característico de Lyapunov en la dirección  $\mathbf{v} = [1, 0]$  existe, entonces  $\lambda(z, \mathbf{v}) > 0$ .*

En dicho trabajo se consideraron las variedades estable e inestable de  $X$ , y se definen los puntos  $T = (T_1, 0)$  como la intersección de  $W^u(X)$  con el eje  $x$  y  $Z = (Z_1, Z_2)$  como la intersección del segmento de recta  $Tf^2(T)$  con el espacio estable de  $X$ . Se define  $\Delta_0$  como el triángulo  $XTZ$  y  $\Delta$  como la siguiente región invariante hacia adelante

$$\Delta = \cup_{\infty}^{n=0} f^n(\Delta_0). \quad (4-5)$$

Ahora se define  $\tilde{\Delta}$  como la siguiente zona de atrapamiento

$$\tilde{\Delta} = \cap_{\infty}^{n=0} f^n(\Delta), \quad (4-6)$$

se prueba que  $\tilde{\Delta}$  está bien definido y se demuestra rigurosamente el siguiente resultado

**Teorema 11.** [36] *Suponga que el mapa  $f$  definido en (4-1) satisface  $0 < \delta_L < 1$ ,  $0 < \delta_R < 1$ ,  $\phi = \phi(\tau_L, \tau_R, \delta_L, \delta_R) = \delta_R - (\tau_R + \delta_L + \delta_R - (1 + \tau_R)\lambda_L^U)\lambda_L^U > 0$  y*

$$\tau_L > \frac{\delta_L + 2}{\sqrt{2}}, \quad \tau_R < -\frac{\delta_L + 2}{\sqrt{2}},$$

entonces

1.  $Z$  existe,
2.  $\tilde{\Delta} = cl(W^u(X))$ ,
3.  $f$  es caótica en el sentido de Devaney en  $\tilde{\Delta}$ .

Para terminar esta sección, es importante aclarar que la continuidad del mapa es fundamental para probar la transitividad y la densidad de órbitas periódicas del mapa en  $\tilde{\Delta}$ . Finalmente se muestra un atractor caótico del mapa (4-1)

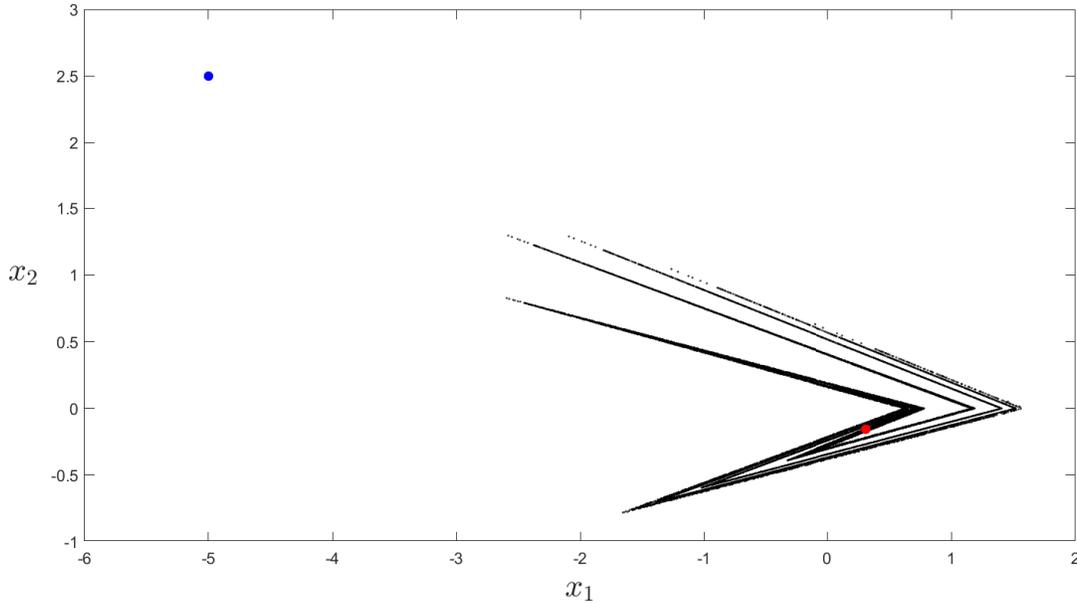


Figura 4-1: Atractor caótico del mapa  $f$  definido en (4-1), con la configuración de parámetros  $\tau_L = 1,7$ ,  $\tau_R = -1,7$ ,  $\delta_L = \delta_R = 0,5$ . Puntos de equilibrio  $Y$  en azul y  $X$  en rojo.

## 4.2. Estudio de atractores caóticos robustos en el mapa $P$

En la sección anterior se muestra que la construcción de una zona de atrapamiento para el mapa  $f$  es una técnica para buscar atractores caóticos en este mapa y siguiendo a [36], para conjuntos invariantes y acotados los exponentes de Lyapunov positivos son parte de muchas definiciones de caos. Una órbita periódica inestable en el sistema  $F$  definido en (2-15) es una zona de atrapamiento para la dinámica de este sistema a tiempo continuo, en esta sección se utiliza la teoría estudiada y desarrollada en los capítulos anteriores para garantizar que el mapa  $P$  definido en (3-17) con  $m = i$  cumpla con las siguientes propiedades

1. Si existe una órbita periódica hiperbólica admisible del mapa  $P$ , entonces esta órbita es inestable.
2. El mapa presenta sensibilidad ante las condiciones iniciales.

Además se estudia de forma numérica la relación entre la existencia de una órbita periódica inestable del sistema  $F$  y el acotamiento de la dinámica del mapa  $P$ , ya que el mapa  $P$  definido en (3-17) es un mapa estroboscópico y por lo tanto tiene un tiempo de discretización  $t > 0$ . Al igual que en [36] se planea utilizar esta zona de atrapamiento para buscar la presencia de atractores caóticos en el mapa  $P$ .

Las hipótesis del Teorema 5 sobre los parámetros del sistema  $F$  definido en (2-15) son  $b < 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\pi/2 < \theta < \pi$ ,  $m = i$ , para que este sistema presente una única órbita periódica

inestable. Note que al cumplir estas hipótesis, por el Teorema 9 se tiene que el exponente característico de Lyapunov del mapa  $P$  con  $t > 0$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_\infty$ , que esta dado por  $\lambda = \gamma t$  es positivo, lo que garantiza la sensibilidad ante las condiciones iniciales del mapa.

Por otra parte, si  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_\infty$  es un punto periódico de periodo  $n$ , el jacobiano de  $P^{(n)}(\mathbf{x})$  es  $\Phi^n$ , por la proposición 11 sus valores propios son  $\lambda_{\{1,2\}} = e^{nt(\gamma \pm i)}$ , cuyo modulo es  $|\lambda_{\{1,2\}}| = e^{nt\gamma}$ , en el caso  $\gamma > 0$  este modulo es mayor que 1 y por definición la órbita de  $\mathbf{x}$  es inestable.

En el caso de que el punto periódico  $\mathbf{x} \in \Sigma_\infty$ , entonces es un punto no hiperbólico y el estudio de su estabilidad debe utilizar un criterio diferente a los valores propios del jacobiano. En [36] se estudia la estabilidad de las órbitas periódicas en  $\Sigma_\infty$  mediante la definición de un cono invariante en el espacio de fase. Esta técnica no sera considerada en esta trabajo, ya que supera los alcances del mismo, y por tal razón, su estudio será dejado como un trabajo futuro.

A continuación se presentan algunas simulaciones del mapa  $P$  bajo las hipótesis del teorema 5 y con ciertos tiempos de discretización  $t > 0$ . Se espera que las órbitas de los puntos bajo el mapa  $P$  al interior de la órbita inestable del sistema  $F$  se *acerquen* al conjunto de deslizamiento  $\Sigma^s$  definido en (2-5), ya que con  $b < 0$  este segmento es estable, a diferencia de los puntos periódicos.

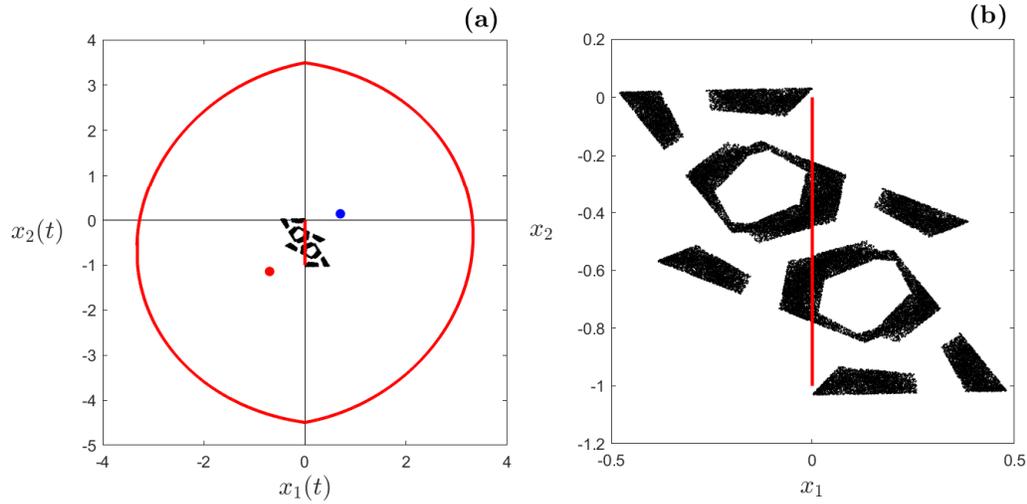


Figura 4-2: **(a)** Atractor caótico del mapa  $P$  definido en (3-17), con la configuración de parámetros  $\gamma = 0,1$ ,  $m = i$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ,  $b = -1$  y  $t = 0,5$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo.  $x_L^*$  en azul y  $x_R^*$  en rojo. Conjunto de deslizamiento  $\Sigma^s$  en rojo. **(b)** Zoom del atractor caótico.

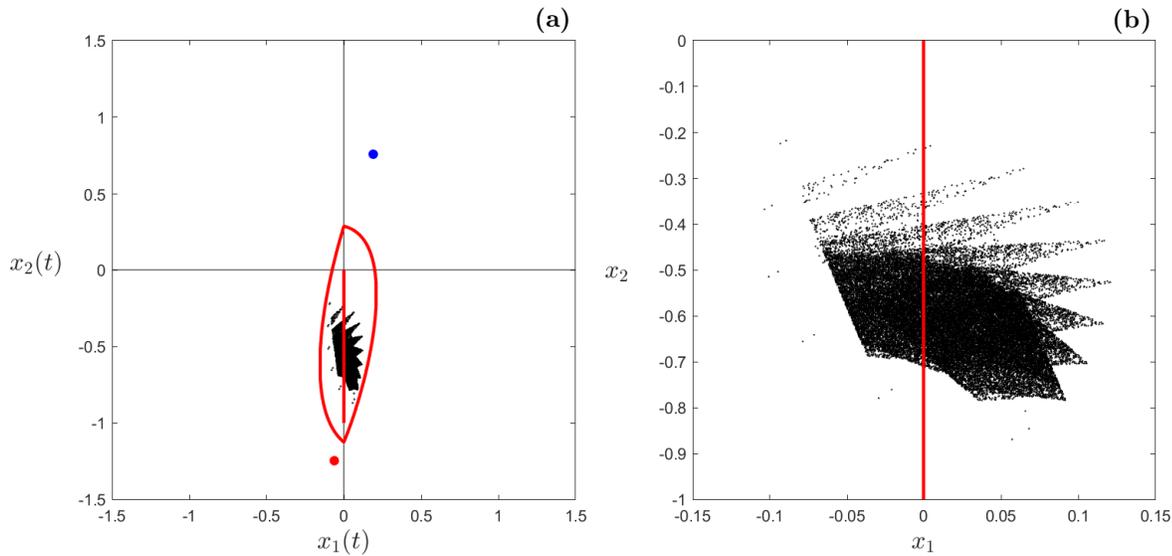


Figura 4-3: **(a)** Atractor caótico del mapa  $P$  definido en (3-17), con la configuración de parámetros  $\gamma = 2$ ,  $m = i$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{5}$ ,  $b = -1$  y  $t = 0,1$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo.  $x_L^*$  en azul y  $x_R^*$  en rojo. Conjunto de deslizamiento  $\Sigma^s$  en rojo. **(b)** Zoom del atractor caótico.

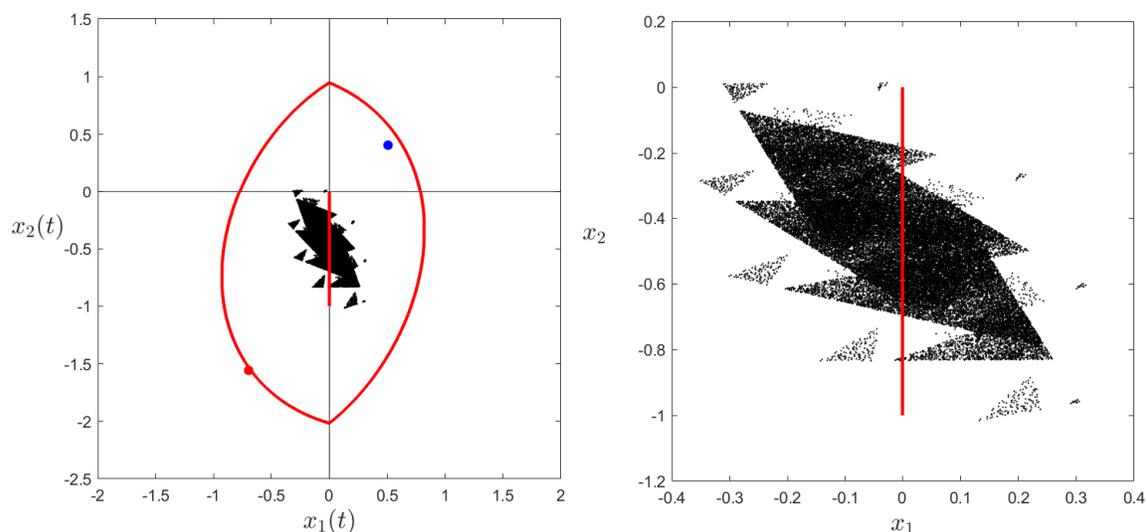


Figura 4-4: **(a)** Atractor caótico del mapa  $P$  definido en (3-17), con la configuración de parámetros  $\gamma = 0,4$ ,  $m = i$ ,  $\theta = \frac{4\pi}{5}$ ,  $b = -1$  y  $t = 0,3$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo.  $x_L^*$  en azul y  $x_R^*$  en rojo. Conjunto de deslizamiento  $\Sigma^s$  en rojo. **(b)** Zoom del atractor caótico.

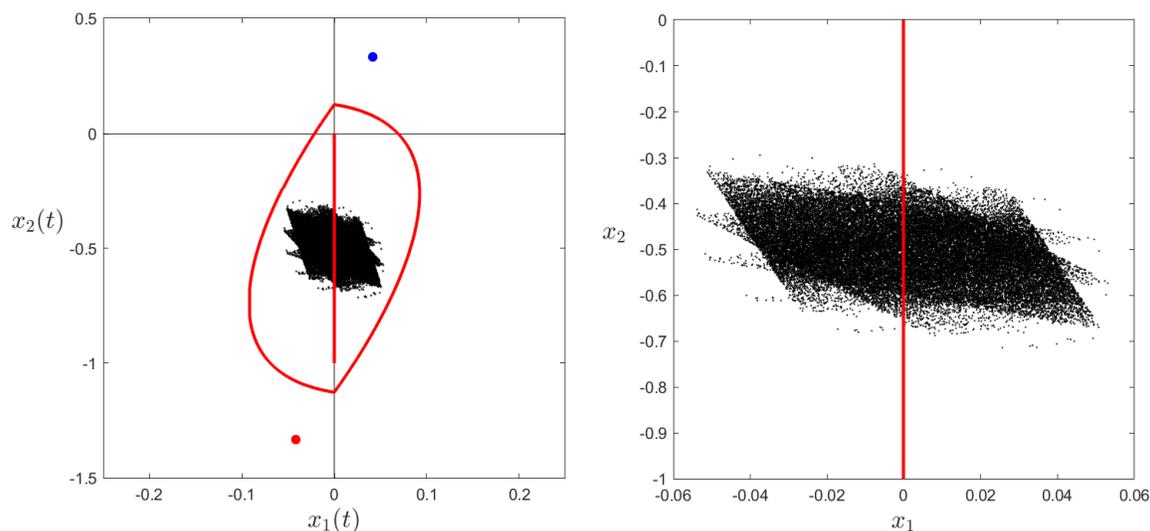


Figura 4-5: **(a)** Atractor caótico del mapa  $P$  definido en (3-17), con la configuración de parámetros  $\gamma = 4$ ,  $m = i$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ,  $b = -1$  y  $t = 0,06$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo.  $x_L^*$  en azul y  $x_R^*$  en rojo. Conjunto de deslizamiento  $\Sigma^s$  en rojo. **(b)** Zoom del atractor caótico.

Las simulaciones anteriores dan evidencia numérica de que existen algunos valores de  $t$  para

los que el mapa  $P$  presenta atractores caóticos. Por otro lado, fijando los parámetros  $\gamma > 0$ ,  $b < 0$  y  $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  y variando el parámetro  $t > 0$ , la dinámica del mapa  $P$  puede ser no acotada en todo el plano. Las siguientes gráficas muestran algunos tiempos críticos  $t_c$  en función de los parámetros  $\gamma$  y  $b$ , tales que  $t \leq t_c$  garantiza la existencia de un atractor caótico en el mapa  $P$  y  $t > t_c$  garantiza dinámica no acotada en todo el plano.

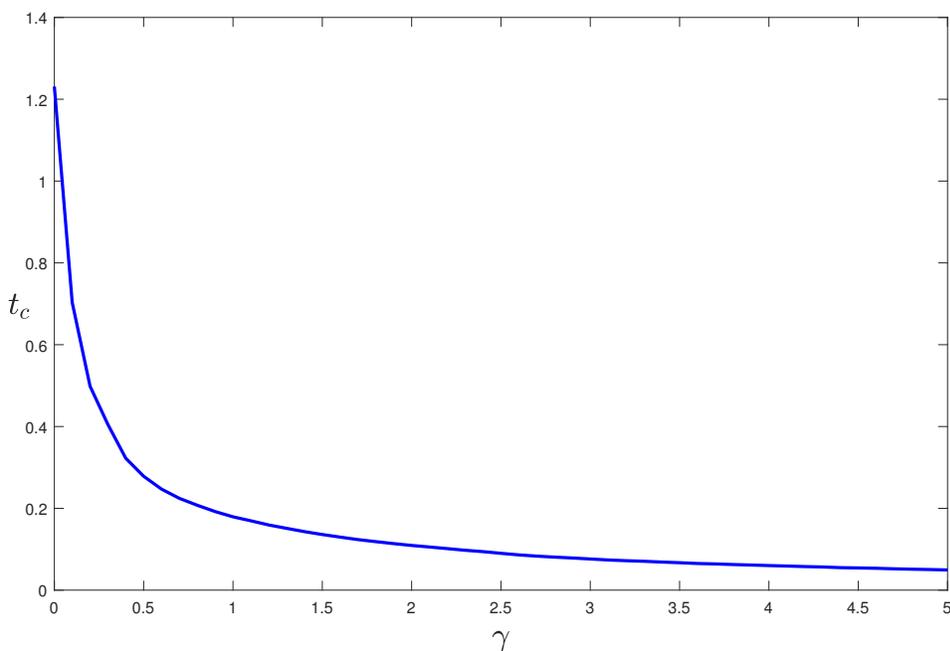


Figura 4-6: Tiempos críticos  $t_c$  contra el parámetro  $0 < \gamma < 5$ , con la configuración de parámetros  $m = i$ ,  $b = -1$  y  $\theta = 3\pi/4$ .

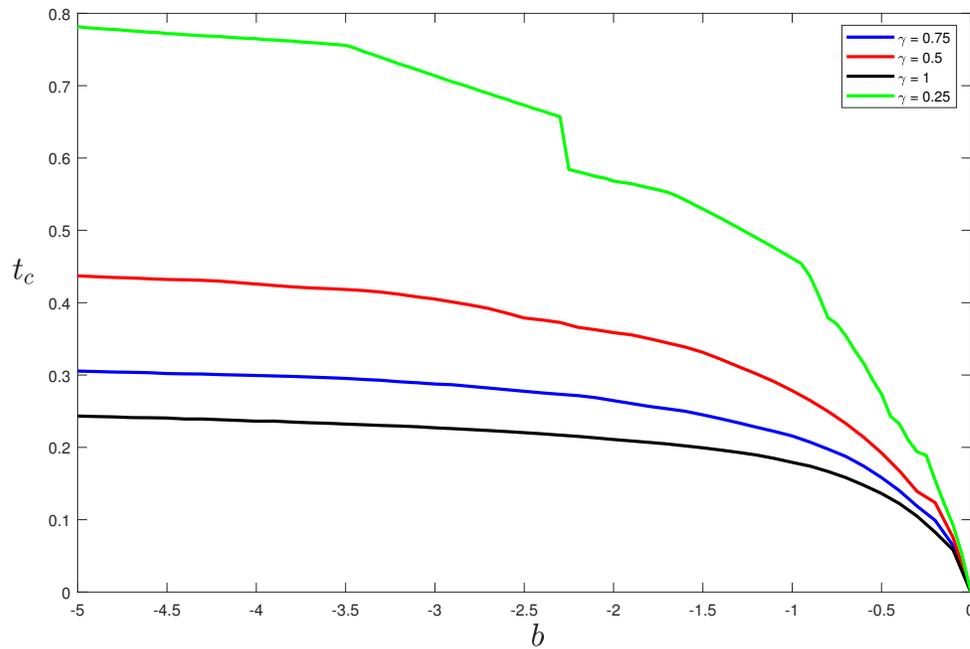


Figura 4-7: Tiempos críticos  $t_c$  contra el parámetro  $-5 < b < 0$ , con la configuración de parámetros  $m = i$ ,  $\theta = 3\pi/4$  y  $\gamma \in \{0,25, 0,5, 0,75, 1\}$ .

Note que los tiempos críticos crecen a medida que se incrementa el tamaño de la órbita inestable (ver sección 2.3). A continuación se presentan algunos diagramas de bifurcación del mapa  $P$  variando los parámetros  $\theta$ ,  $b$  y  $\gamma$

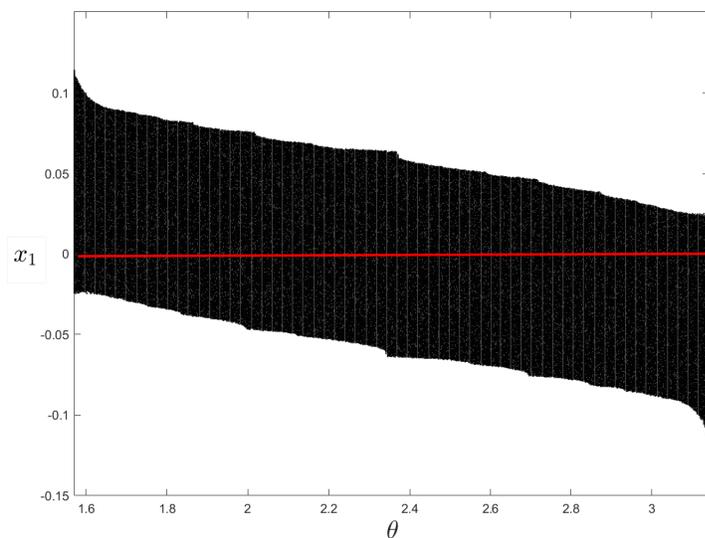


Figura 4-8: Diagrama de bifurcación del mapa  $P$  definido en 3-17, con la configuración de parámetros  $\gamma = 0,6$ ,  $m = i$ ,  $b = -1$ ,  $t = 0,1$  y variando el parámetro  $\theta$ .

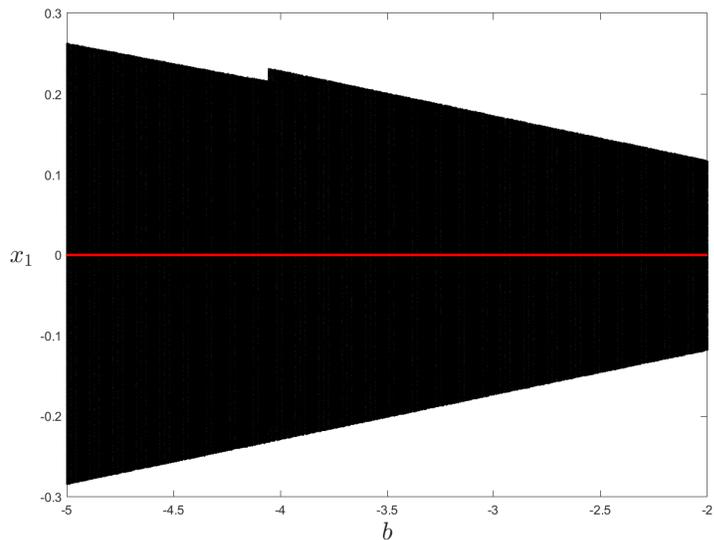


Figura 4-9: Diagrama de bifurcación del mapa  $P$  definido en 3-17, con la configuración de parámetros  $\gamma = 0,5$ ,  $\theta = 3\pi/4$ ,  $m = i$ ,  $t = 0,1$  y variando el parámetro  $b$ .

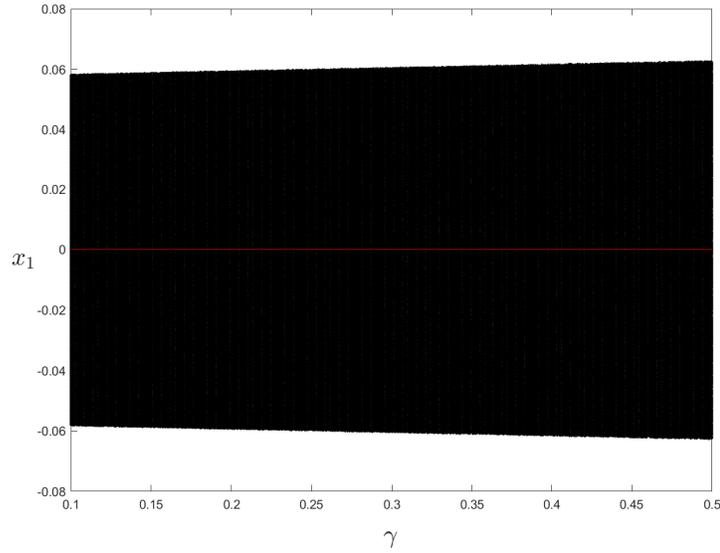


Figura 4-10: Diagrama de bifurcación del mapa  $P$  definido en 3-17, con la configuración de parámetros  $\theta = 3\pi/4$ ,  $m = i$ ,  $b = -1$ ,  $t = 0,1$  y variando el parámetro  $\gamma$ .

Este estudio numérico sugiere que mientras se garantice la existencia de la órbita inestable del sistema  $F$ , existe un tiempo crítico  $t_c$  tal que  $t < t_c$  hace que el mapa  $P$  presente un atractor caótico al interior de la órbita inestable del sistema  $F$ . Lo anterior nos lleva a la siguiente conjetura

**Conjetura 1.** *Asuma las siguientes condiciones para los parámetros del mapa  $P$  definido en (3-17),  $b < 0$ ,  $m = i$ ,  $\gamma > 0$  y  $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , entonces existe  $t_c = t_c(\gamma, b, \theta) > 0$  tal que para  $t$  que satisface  $0 < t < t_c$ , el mapa  $P$  presenta un atractor caótico al rededor del segmento de deslizamiento  $\Sigma^s$  del sistema  $F$  definido en (2-10).*

Para terminar, es importante aclarar que las hipótesis planteadas por la conjetura 1 son suficientes más no necesarias para garantizar la existencia de atractores caóticos robustos en el mapa  $P$ . A continuación se presentan algunas simulaciones del mapa  $P$  caso foco  $m = i$ , cuyos parámetros no satisfacen las condiciones de la conjetura 1.

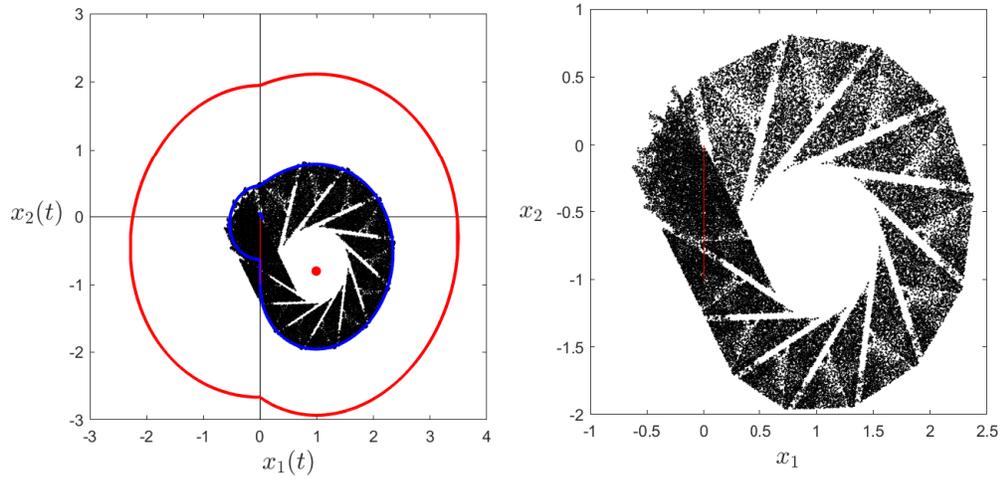


Figura 4-11: **(a)** Atractor caótico del mapa  $P$  definido en (3-17), con la configuración de parámetros  $\gamma = 0,1$ ,  $m = i$ ,  $\theta = 0$ ,  $b = -1$  y  $t = 0,5$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo, Órbita periódica crossing estable del sistema (2-15) en azul.  $x_L^*$  en azul y  $x_R^*$  en rojo. Conjunto de deslizamiento  $\Sigma^s$  en rojo. **(b)** Zoom del atractor caótico.

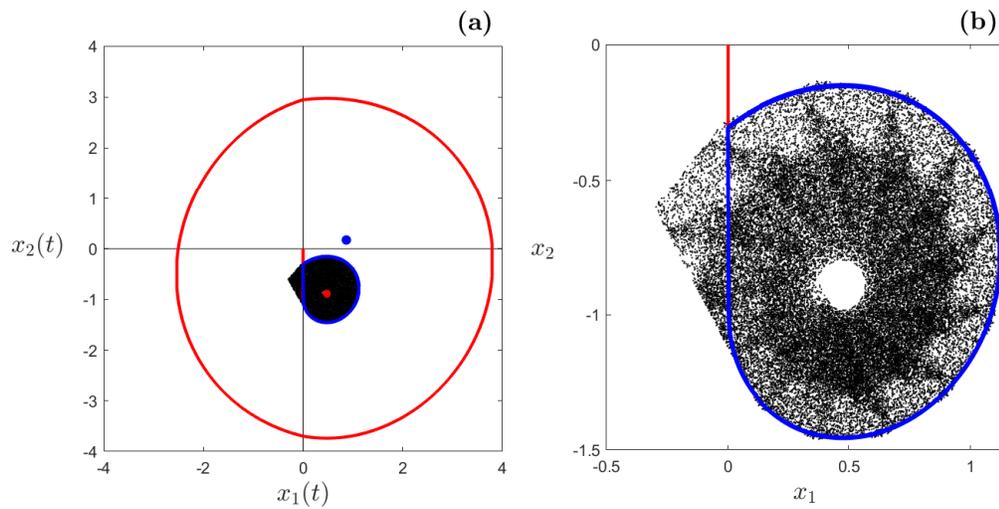


Figura 4-12: **(a)** Atractor caótico del mapa  $P$  definido en (3-17), con la configuración de parámetros  $\gamma = 0,1$ ,  $m = i$ ,  $\theta = 1,07$ ,  $b = -1$  y  $t = 0,5$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo.  $x_L^*$  en azul y  $x_R^*$  en rojo. Conjunto de deslizamiento  $\Sigma^s$  en rojo. **(b)** Zoom del atractor caótico.

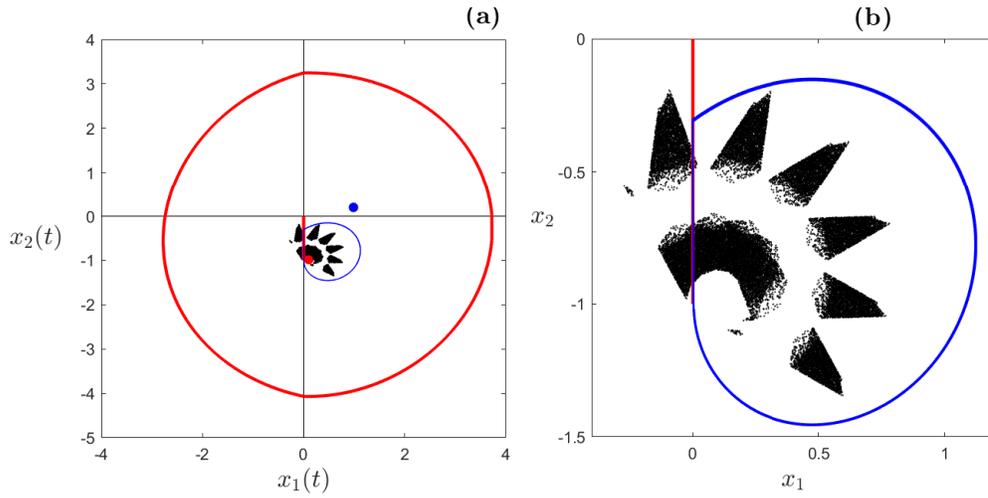


Figura 4-13: **(a)** Atractor caótico del mapa  $P$  definido en (3-17), con la configuración de parámetros  $\gamma = 0,1$ ,  $m = i$ ,  $\theta = 1,47$ ,  $b = -1$  y  $t = 0,5$ . Conjunto de deslizamiento  $\Sigma^s$  en rojo. Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo.  $x_L^*$  en azul y  $x_R^*$  en rojo. **(b)** Zoom del atractor caótico.

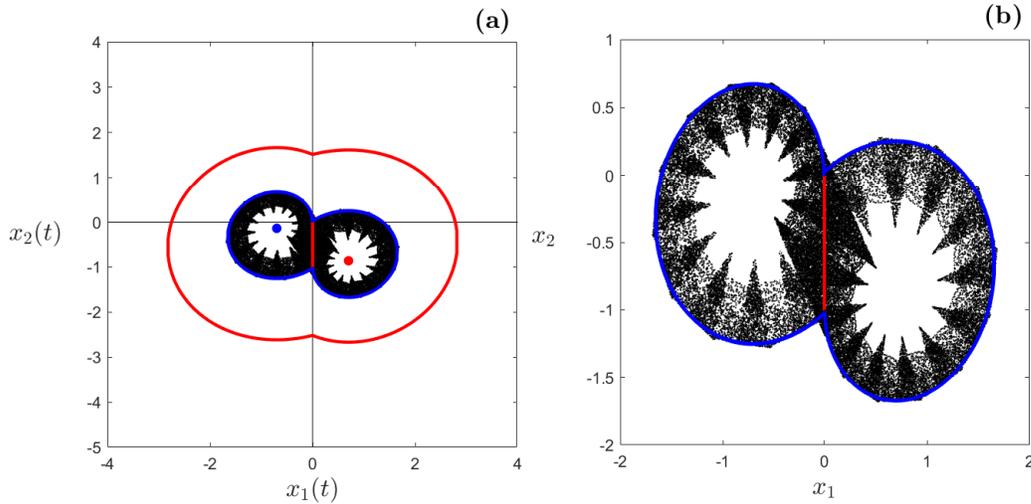


Figura 4-14: **(a)** Atractor caótico del mapa  $P$  definido en (3-17), con la configuración de parámetros  $\gamma = 0,1$ ,  $m = i$ ,  $\theta = \frac{7\pi}{4}$ ,  $b = -1$  y  $t = 0,5$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo.  $x_L^*$  en azul y  $x_R^*$  en rojo. Conjunto de deslizamiento  $\Sigma^s$  en rojo. **(b)** Zoom del atractor caótico.

### 4.3. El caso Silla

En esta sección se realiza un breve análisis del caso silla en el mapa  $P$  ( $|\gamma| < 1$  y  $m = 1$ ). En este caso a diferencia del caso foco no se tiene teoría que garantice la existencia de una

órbita inestable del sistema  $F$  que pueda acotar la dinámica de su mapa estroboscópico  $P$ . Mediante las variedades estables e inestables de los puntos de equilibrio, se intenta crear una zona de atrapamiento para la dinámica del mapa  $P$ , al igual que en [36].

A diferencia del caso foco, al considerar  $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  en este caso se tiene que los puntos de equilibrio son reales, es decir  $x_L^* \in \Sigma_L$  y  $x_R^* \in \Sigma_R$ . A continuación se presentan los valores y vectores propios de la matriz  $A$  del sistema definida en (2-15)

$$A = \begin{bmatrix} 2\gamma & -1 \\ \gamma^2 - 1 & 0 \end{bmatrix},$$

con valores propios

$$\lambda_1 = \gamma + 1, \quad \lambda_2 = \gamma - 1, \quad (4-7)$$

y vectores propios

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma + 1 \end{bmatrix}, \quad (4-8)$$

asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  respectivamente. Note que para  $-1 < \gamma < 0$ , el vector  $\mathbf{v}_1$  corresponde al vector director de la variedad estable de cada punto de equilibrio y el vector  $\mathbf{v}_2$  es el vector director de la variedad inestable de cada equilibrio, en el caso  $0 < \gamma < 1$  estos vectores invierten roles. Por lo anterior se estudiarán los casos  $\gamma > 0$  y  $\gamma < 0$  por separado.

### 4.3.1. $0 < \gamma < 1$

En esta subsección y la siguiente se denotarán las variedades de la siguiente forma  $W^U(x_L^*) = W_L^U$ ,  $W^S(x_L^*) = W_L^S$ ,  $W^U(x_R^*) = W_R^U$ ,  $W^S(x_R^*) = W_R^S$  y los puntos de corte de estas variedades con la zona de conmutación  $\Sigma$  definida en (2-2) (eje  $y$ )

$$\begin{aligned} A &= [0, A_2] = W_L^U \cap \Sigma, & B &= [0, B_2] = W_R^U \cap \Sigma, \\ C &= [0, C_2] = W_L^S \cap \Sigma, & D &= [0, D_2] = W_R^S \cap \Sigma, \end{aligned} \quad (4-9)$$

donde  $\Sigma$  es la zona de conmutación. Las expresiones de  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  y  $D_2$  están dadas por

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\sin(\theta)}{\gamma - 1}, & B_2 &= \frac{\cos(\theta)}{\gamma - 1} + b, \\ C_2 &= \frac{\sin(\theta)}{\gamma + 1}, & D_2 &= \frac{\cos(\theta)}{\gamma + 1} + b, \end{aligned} \quad (4-10)$$

**Proposición 14.** *Asuma las siguientes condiciones sobre los parámetros del sistema  $F$  definido en (2-15),  $0 < \gamma < 1$ ,  $m = 1$ ,  $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ,  $b < 0$ , además*

$$\max \left\{ \frac{\sin(\theta)}{\gamma - 1} - \frac{\cos(\theta)}{\gamma + 1}, \frac{\sin(\theta)}{\gamma + 1} + \frac{\cos(\theta)}{1 - \gamma} \right\} < b, \quad (4-11)$$

entonces  $A_2 < D_2 < 0 < C_2 < B_2$ .

**Demostración.** Suponiendo las condiciones  $0 < \gamma < 1$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  y  $b < 0$  sobre los parámetros, por definición de  $D_2$  y  $C_2$  en (4-10)

$$\frac{\cos(\theta)}{\gamma + 1} + b < 0,$$

$$D_2 < 0,$$

y

$$\frac{\sin(\theta)}{\gamma + 1} > 0,$$

$$C_2 > 0,$$

ya que  $\sin(\theta) > 0$  y  $\cos(\theta)$ ,  $b < 0$ . Por otra parte, si se asume que

$$\max \left\{ \frac{\sin(\theta)}{\gamma - 1} - \frac{\cos(\theta)}{\gamma + 1}, \frac{\sin(\theta)}{\gamma + 1} + \frac{\cos(\theta)}{1 - \gamma} \right\} < b, \quad (4-12)$$

entonces

$$\frac{\sin(\theta)}{\gamma - 1} - \frac{\cos(\theta)}{\gamma + 1} < b,$$

$$\frac{\sin(\theta)}{\gamma - 1} < \frac{\cos(\theta)}{\gamma + 1} + b,$$

$$A_2 < D_2,$$

y

$$\frac{\sin(\theta)}{\gamma + 1} + \frac{\cos(\theta)}{1 - \gamma} < b,$$

$$\frac{\sin(\theta)}{\gamma + 1} < \frac{\cos(\theta)}{\gamma - 1} + b,$$

$$C_2 < B_2.$$

Mediante simulaciones del sistema  $F$  cuyos parámetros satisfacen las condiciones planteadas por la proposición anterior hemos encontrado órbitas periódicas inestables para el sistema, generadas por el acotamiento de las variedades. A continuación se muestra una de estas órbitas

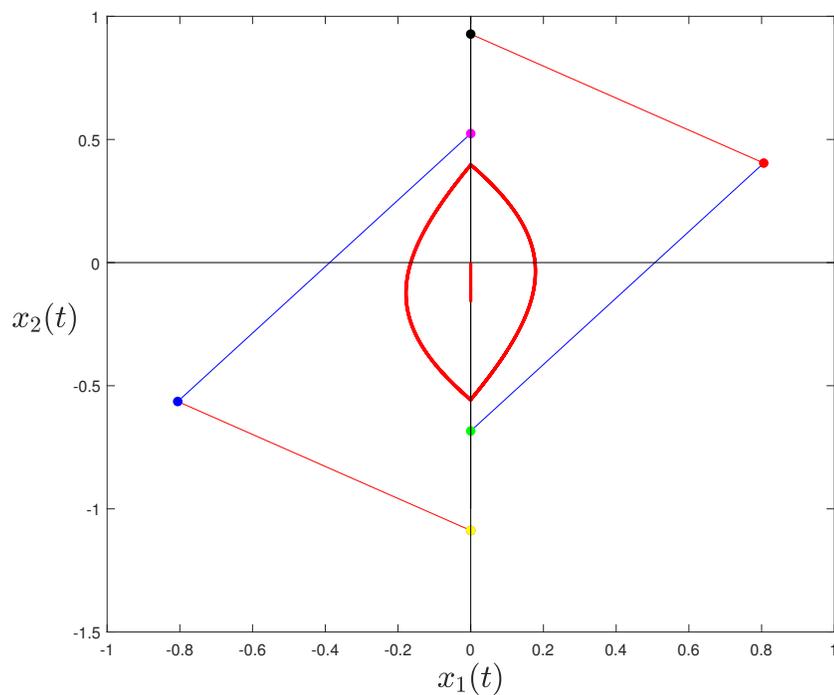


Figura 4-15: Órbita periódica crossing inestable del sistema  $F$  con la configuración de parámetros  $\gamma = 0,5$ ,  $m = 1$ ,  $b = -0,16$  y  $\theta = 3\pi/4$ .  $A$  en amarillo,  $B$  en negro,  $C$  en magenta y  $D$  en verde.

Bajo estas condiciones, se espera encontrar atractores caóticos dentro de la región ecerrada por estas órbitas periódicas crossing inestables para ciertos tiempos de discretización, al igual que en el caso foco. A continuación se presenta un diagrama de bifurcación del mapa  $P$  al interior de esta región, para parámetros que satisfacen las condiciones de la proposición 14

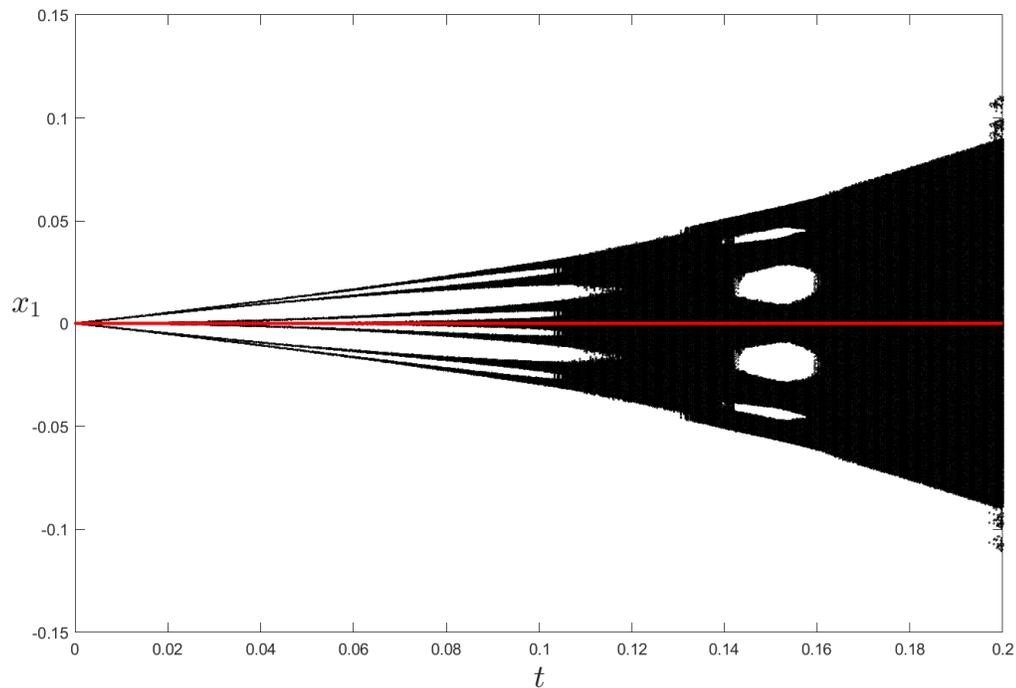


Figura 4-16: Diagrama de bifurcación del mapa  $P$  definido en 3-17, con la configuración de parámetros  $\gamma = 0,35$ ,  $m = 1$ ,  $b = -0,5$ ,  $\theta = 3\pi/4$  y variando el parámetro  $t$ .

La Figura 4-16, muestra que al variar el parámetro  $t$  del mapa  $P$ , existe un atractor caótico al interior de la zona acotada por la órbita periódica inestable del sistema  $F$ . Para tiempos de discretización superiores a  $t = 0,2$ , las órbitas del mapa divergen, comportamiento similar al encontrado en el caso foco.

El siguiente diagrama de bifurcación varía el parámetro  $\theta$ , manteniendo la condición de la proposición (14).

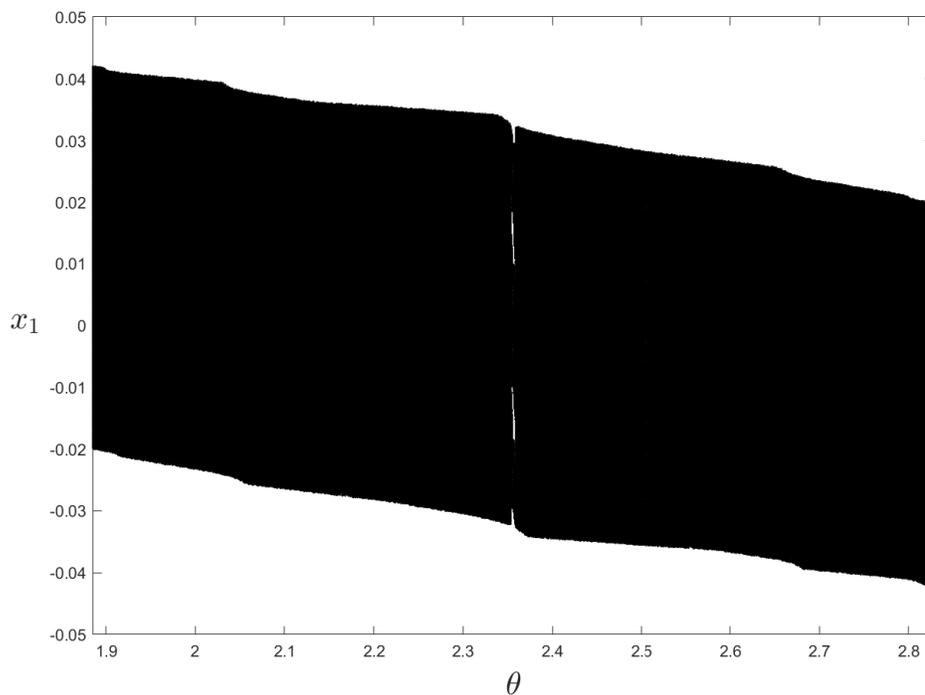


Figura 4-17: Diagrama de bifurcación del mapa  $P$  definido en 3-17, con la configuración de parámetros  $\gamma = 0,35$ ,  $m = 1$ ,  $b = -0,5$ ,  $t = 0,1$  y variando el parámetro  $\theta$ .

Al igual que en el caso foco, en la Figura 4-17, el comportamiento caótico del mapa  $P$  se preserva para una ventana del parámetro  $\theta$ , en la que la órbita periódica inestable del sistema  $F$  existe.

A continuación se presenta un atractor caótico del mapa  $P$  en la configuración silla, bajo la condición de la Proposición 14.

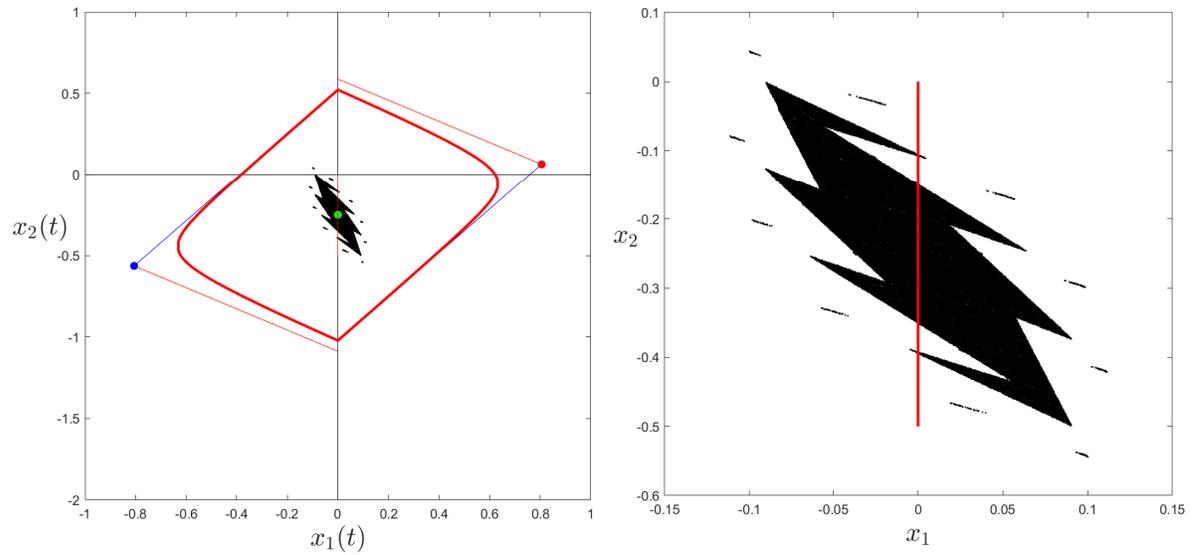


Figura 4-18: **(a)** Atractor caótico del mapa  $P$  definido en (3-17), con la configuración de parámetros  $\gamma = 0,35$ ,  $m = 1$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ,  $b = -0,5$  y  $t = 0,2$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo. Conjunto de deslizamiento  $\Sigma^s$  en rojo. **(b)** Zoom del atractor caótico.

Al estudiar el caso  $-1 < \gamma < 0$  se intentó realizar un acotamiento de la dinámica similar, pero no se encontraron resultados de órbitas periódicas inestables que acoten la dinámica del mapa  $P$ .

Finalmente, al igual que en la sección anterior se muestra un atractor caótico del mapa  $P$  en la configuración silla con parámetros que no satisfacen las condiciones planteadas en esta sección y un atractor para la configuración nodo y uno con la configuración nodo degenerado.

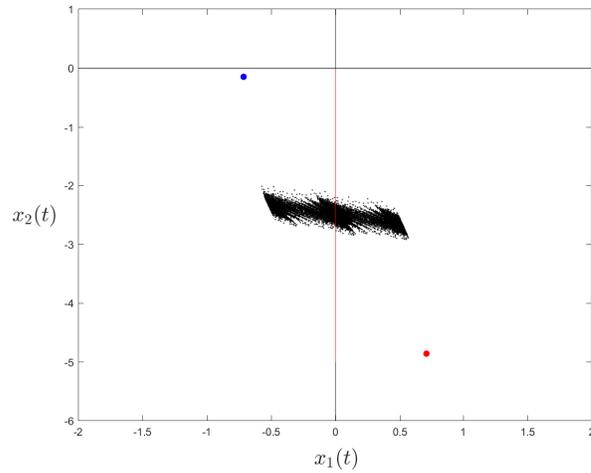


Figura 4-19: Atractor caótico del mapa  $P$  definido en (3-17), con la configuración de parámetros  $\gamma = 0,1$ ,  $m = 1$ ,  $\theta = 3\pi/4$ ,  $b = -5$  y  $t = 0,2$ .  $x_L^*$  en azul y  $x_R^*$  en rojo. Pseudoequilibrio en verde. Conjunto de deslizamiento  $\Sigma^s$  en rojo.

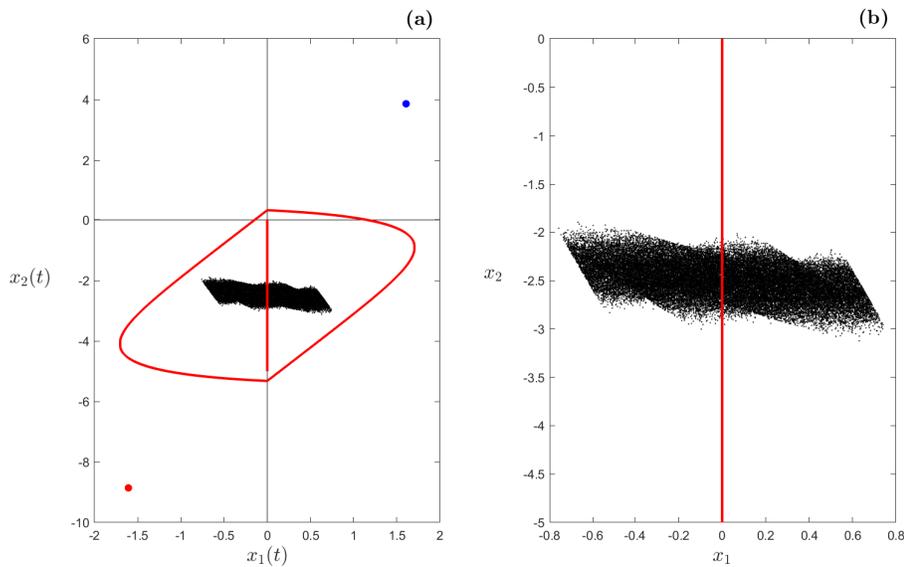


Figura 4-20: (a) Atractor caótico del mapa  $P$  definido en (3-17), con la configuración de parámetros  $\gamma = 1,2$ ,  $m = 1$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ,  $b = -5$  y  $t = 0,2$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo.  $x_L^*$  en azul y  $x_R^*$  en rojo. Conjunto de deslizamiento  $\Sigma^s$  en rojo. (b) Zoom del atractor caótico.

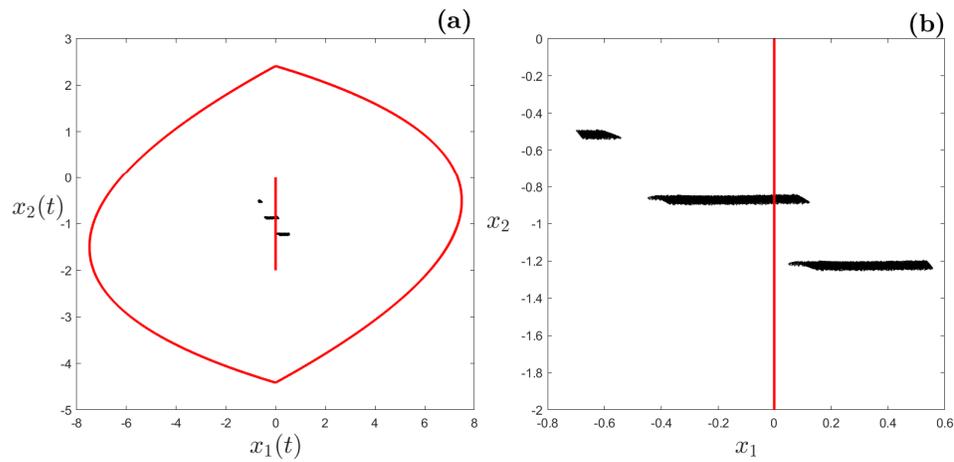


Figura 4-21: **(a)** Atractor caótico del mapa  $P$  definido en (3-17), con la configuración de parámetros  $\gamma = 0,1$ ,  $m = 0$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ,  $b = -2$  y  $t = 0,5$ . Órbita periódica crossing inestable del sistema (2-15) en rojo. Conjunto de deslizamiento  $\Sigma^s$  en rojo. **(b)** Zoom del atractor caótico.

# 5 Una aplicación a la encriptación de imágenes

El desarrollo tecnológico de las comunicaciones e Internet móvil ha generado un vertiginoso incremento en la transmisión de imágenes y audios, usados ampliamente en la interacción entre personas y empresas. Garantizar la transmisión segura de esta información y evitar que sea robada, se ha convertido en uno de los desafíos actuales de la criptografía, la cual se ocupa de las técnicas de cifrado o codificado destinadas a modificar la información transmitida con el fin de hacerla incomprensible a receptores no autorizados [53].

Alrededor de 1990 se inicio a estudiar la relación entre la criptografía y el comportamiento caótico en mapas discretos, lo que ha llevado al desarrollo múltiples algoritmos de encriptación basados en mapas que presentan comportamiento caótico. Dicha técnica ha sido bien acogida entre la comunidad científica ya que el costo de su implementación computacional es relativamente bajo [54]. Algunos de los mapas utilizados para diseñar algoritmos de encriptación son el mapa logístico, el mapa del seno y coseno, ambos de dimensión uno y dos, y algunos mapas definidos a trozos, entre otros [55, 56, 57, 58, 59].

Los mapas de dimensión mayor que uno son más seguros, ya que poseen órbitas más complejas, sin embargo el costo computacional de su implementación es más elevado [60]. En [61] se describen algunos aspectos importantes del diseño de un algoritmo de encriptación seguro basado en mapas caóticos, su implementación, seguridad, y el diseño y uso de dichos mapas para generar secuencias útiles para encriptar. Entre algunas de estas recomendaciones se encuentran ”*Para dos claves con la más mínima diferencia, ningún análisis estadístico conocido puede encontrar ninguna diferencia distinguible entre los textos cifrados correspondientes.*” y ”*el espacio de claves  $K$ , a partir del cual se elegirán las claves válidas, debe especificarse con precisión y evitar regiones no caóticas.*”

En este capítulo se propone un algoritmo de encriptación de datos del tipo de cifrado simétrico con clave secreta [61] y se implementara en la encriptación de imágenes.

## 5.1. Esquema de encriptación

Computacionalmente los colores se representan en escala de grises, la escala RGB es una combinación de los colores rojo, verde y azul que en ciertas combinaciones pueden formar los demás colores. Cada color rojo, azul y verde es representado por una matriz rectangular cuyas entradas son números enteros entre 0 y 255 o reales entre 0 y 1. En [10] se propone convertir

cada una de las matrices R, G y B de tamaño  $m \times n$  en vectores  $R^P, G^P, B^P \in \mathbb{R}^{mn}$ . El siguiente paso es crear tres secuencias caóticas  $R^X, G^X$  y  $B^X \in \mathbb{R}^{mn}$ , para lo cual usamos el mapa  $P$  con una configuración de parámetros adecuada (clave), los ejemplos que se mostrarán mas adelante utilizan parámetros tomados de forma aleatoria con una distribución uniforme en la siguiente ventana

$$\begin{aligned} -5 \leq b \leq -2, \quad 0,1 \leq \gamma \leq 0,5, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi, \\ 0,1 \leq t \leq 0,3 \quad \mathbf{x}_0 \in \Sigma^s, \end{aligned} \quad (5-1)$$

El siguiente paso es crear tres vectores  $R^C, G^C, B^C$  que representan las componentes R, G y B de la imagen cifrada, para esto se propone a continuación el siguiente esquema

$$\begin{aligned} R^C &= M * (R^P - \bar{R} + R^X) \text{ mod}(1), \\ G^C &= M * (G^P - \bar{G} + G^X) \text{ mod}(1), \\ B^C &= M * (B^P - \bar{B} + B^X) \text{ mod}(1), \end{aligned} \quad (5-2)$$

donde  $M = [M_{i,j}]$  es una matriz idempotente de orden dos y de bloques cuyo tamaño varía dependiendo de las dimensiones de la imagen

$$M_{i,j} = \begin{cases} N, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (5-3)$$

$$N = \begin{cases} 1, & i + j = n + 1, \\ 0, & i + j \neq n + 1, \end{cases} \quad (5-4)$$

Para el esquema de recuperación de la imagen original, el receptor debe generar las mismas secuencias caóticas  $R^X, G^X$  y  $B^X \in \mathbb{R}^{mn}$ , que por la naturaleza del mapa exigen que se tengan exactamente los mismos parámetros  $b, \gamma, \theta, t$  y la condición inicial  $\mathbf{x}_0$ . El esquema de recuperación es el siguiente

$$\begin{aligned} R^P &= (M * R^C + \bar{R} - R^X) \text{ mod}(1), \\ G^P &= (M * G^C + \bar{G} - G^X) \text{ mod}(1), \\ B^P &= (M * B^C + \bar{B} - B^X) \text{ mod}(1), \end{aligned} \quad (5-5)$$

A continuación se presentan algunas imágenes encriptadas y recuperadas mediante los esquemas anteriores

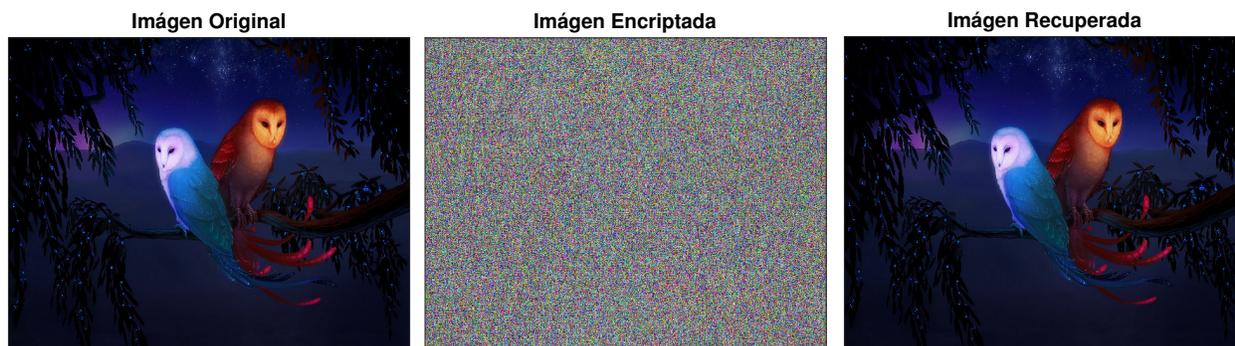


Figura 5-1: Encriptación y recuperación de una imagen mediante el algoritmo (5-2), usando los parámetros  $\gamma = 0,1390$ ,  $b = -4,1645$ ,  $\theta = 3,0055$ ,  $t = 0,1254$  y  $\mathbf{x}_0 = [0, -1,4434]$ .

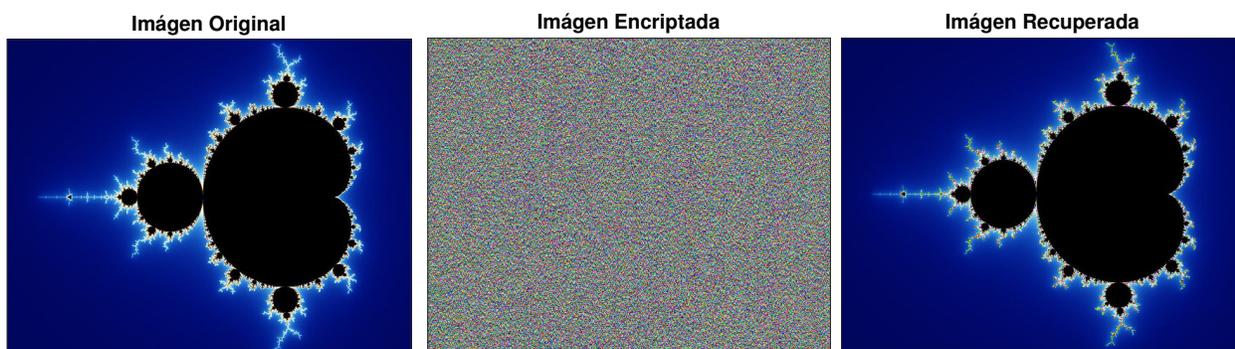


Figura 5-2: Encriptación y recuperación de una imagen mediante el algoritmo (5-2), usando los parámetros  $\gamma = 0,4259$ ,  $b = -2,2826$ ,  $\theta = 3,0748$ ,  $t = 0,2094$  y  $\mathbf{x}_0 = [0, -4,0183]$ .

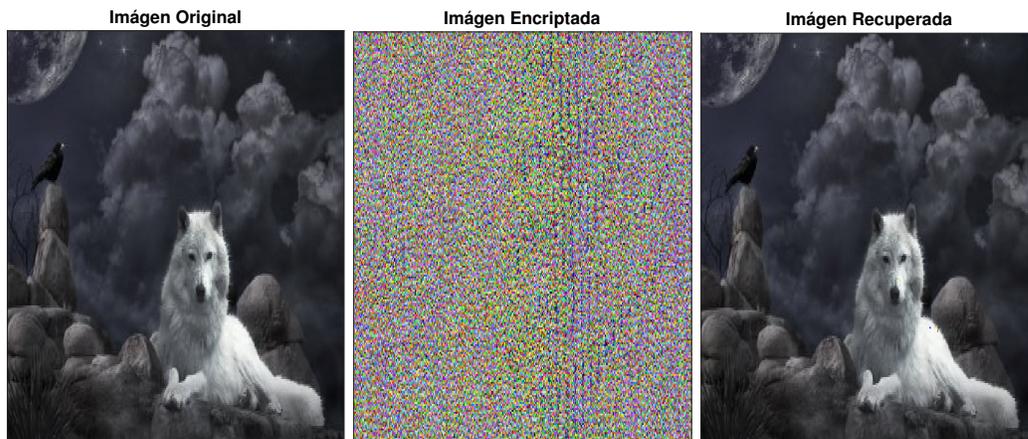


Figura 5-3: Encriptación y recuperación de una imagen mediante el algoritmo (5-2), usando los parámetros  $\gamma = 0,1568$ ,  $b = -3,7347$ ,  $\theta = 2,8152$ ,  $t = 0,2831$  y  $\mathbf{x}_0 = [0, -3,5834]$ .

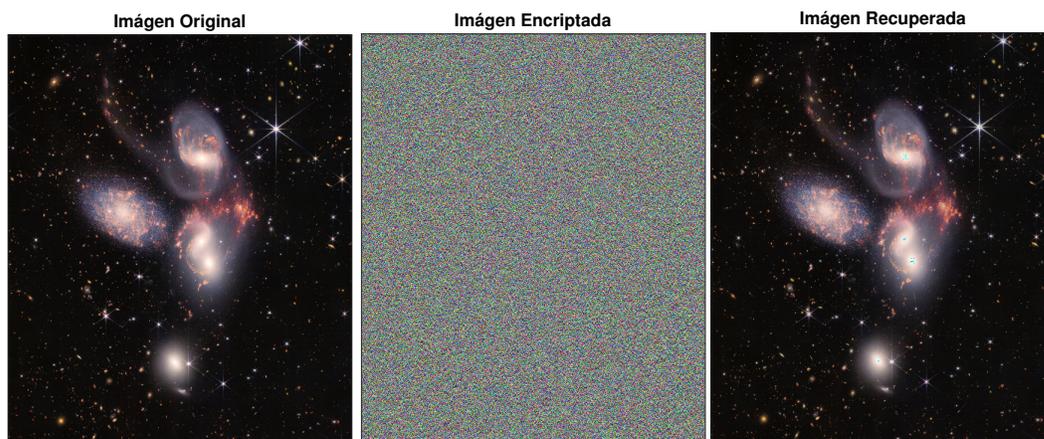


Figura 5-4: Encriptación y recuperación de una imagen mediante el algoritmo (5-2), usando los parámetros  $\gamma = 0,4259$ ,  $b = -2,2826$ ,  $\theta = 3,0055$ ,  $t = 0,1254$  y  $\mathbf{x}_0 = [0, -1,4434]$ .



Figura 5-5: (a) Imágen Original. (b) Imágen encriptada mediante el algoritmo (5-2), con los parámetros  $\theta = 3\pi/4$ ,  $\gamma = 0,5$ ,  $b = -4$ ,  $t = 0,2$ ,  $x_0 = [0, -2]$ . (c) Imágen recuperada mediante el algoritmo (5-5), con los parámetros  $\theta = 3\pi/4$ ,  $\gamma = 0,5$ ,  $b = -4$ ,  $t = 0,2$ ,  $x_0 = [0, -2] + 10^{-16}\mathbf{e}_2^T$ . (d) Imágen recuperada mediante el algoritmo (5-5), con los parámetros  $\theta = 3\pi/4$ ,  $\gamma = 0,5$ ,  $b = -4$ ,  $t = 0,2$ ,  $x_0 = [0, -2]$ .

El hecho de que un ligero cambio realizado en solo uno de los parámetros del mapa  $P$  no permita recuperar la imagen, muestra la seguridad del algoritmo, ya que para replicar la clave se debe conocer el valor exacto de todos los cinco parámetros del mapa.

Finalmente se presentan algunos criterios estadísticos utilizados para medir la seguridad del algoritmo y una comparación con los criterios obtenidos usando los esquemas propuestos con el mapa propuesto en [10]

La imagen 5-3 tiene un tamaño de  $219 \times 1050$ , el algoritmo (5-2) tardó 0,074478s encriptandola y el algoritmo (5-5) 0,005750s recuperandola, usando el mapa  $P$  y , los algoritmos

---

Criterio	Ideal	Medida	Medida [10]
Entropía	8	7.993	7.985
Correlación	0	0.005	0.036
NPCR	100 %	100 %	99.6 %
UACI	100 %	44.919 %	33.7 %

Tabla 5-1: Medidas de seguridad del algoritmo de encriptación.

fueron implementados en MATLAB 2020b.

## 6 Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo se estudia la relación entre la existencia de una órbita periódica inestable en una forma canónica normalizada para sistemas PWL discontinuos de dimensión dos, y la existencia de un atractor caótico robusto en su mapa estroboscópico para el caso en que ambas matrices son iguales. La estrategia del estudio es demostrar que las condiciones planteadas en la literatura para que el sistema presente una órbita periódica inestable, implican que el mapa presenta sensibilidad ante las condiciones iniciales y su acotamiento en ciertos casos.

Durante este estudio se calculó de forma analítica el espectro de Lyapunov para cada topología (foco, silla y nodo) en función de los parámetros  $\gamma \in \mathbb{R}$  y  $t > 0$  del mapa. Las expresiones de los exponentes de Lyapunov calculados en este trabajo, garantizan que la separación de las órbitas de condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas depende únicamente del signo del parámetro  $\gamma$ . El teorema de existencia de órbitas periódicas del sistema en el caso foco, requiere que el parámetro  $\gamma$  sea positivo, lo que implica que los exponentes de Lyapunov del mapa para el caso foco son positivos. Lo anterior significa que cuando el sistema presenta una única órbita periódica inestable, el mapa tiene sensibilidad ante las condiciones iniciales.

La órbita periódica inestable del sistema divide la dinámica del plano en dos zonas, al interior y al exterior de la región que delimita. En este trabajo se presenta evidencia de que existen tiempos de discretización  $t_c = t_c(\gamma, t, \theta)$ , tales que la órbita inestable del sistema acota la dinámica del mapa al interior de la región que esta delimita cuando  $0 < t < t_c$ . El acotamiento del mapa dentro de esta región implica la existencia de un atractor topológico del mapa en esta zona. Se demuestra analíticamente que bajo estas condiciones, todas las órbitas periódicas hiperbólicas del mapa son inestables, por lo tanto el atractor topológico dentro de la zona acotada por la órbita del sistema no es una órbita periódica hiperbólica y además tiene sensibilidad ante las condiciones iniciales, lo que nos llevó a conjeturar condiciones suficientes para garantizar la presencia de un atractor caótico robusto en el mapa estroboscópico para el caso foco. El estudio de la estabilidad de las órbitas periódicas no hiperbólicas del mapa es un trabajo futuro, aunque las simulaciones presentadas muestran que el comportamiento caótico no desaparece para amplias ventanas de parámetros.

Motivados por los resultados del profesor Simpson para el caso silla en un mapa continuo reportados en el 2021 en [36], utilizamos las variedades de los puntos de equilibrio del sistema a tiempo continuo para crear una zona en la que numéricamente comprobamos la existencia de una órbita periódica inestable de este sistema cuando  $0 < \gamma < 1$ . Con esta órbita ines-

table se realizó un estudio similar al del caso foco, obteniendo resultados similares. Como trabajo futuro esta el estudio analítico de la existencia de esta órbita periódica inestable en el caso silla, lo cual permitirá obtener condiciones más solidas sobre los parámetros del mapa estroboscópico para que este presente un atractor caótico robusto.

Finalmente se implementó un algoritmo de encriptación de imágenes, utilizando el mapa estroboscópico con parámetros bajo los cuales este se encuentra en régimen caótico, obteniendo unas medidas de seguridad adecuadas y una encriptación relativamente rápida, demostrando así la utilidad del caos robusto en esta aplicación.

# Bibliografía

- [1] E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow,” *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, pp. 130–141, 3 1963.
- [2] E. N. Lorez, “Predictability: Does the flap of a butterfly’s wings in brazil set off a tornado in texas?,” *American Association for the Advancement of Science*, Dec. 1972.
- [3] R. H. B. Puentes, “El Sistema y EL Atractor Geométrico de Lorenz,” Master’s thesis, Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas, 2010.
- [4] R. M. May and G. F. Oster, “Bifurcations and dynamic complexity in simple ecological models,” *The American Naturalist*, vol. 110, pp. 573–599, July 1976.
- [5] C. G. Soumitro Banerjee, James A. Yorke, “Robust chaos,” *Phys. Rev. Let*, Mar. 1998.
- [6] D. Dutta, R. Basu, S. Banerjee, V. Holmes, and P. Mather, “Parameter estimation for 1d pwl chaotic maps using noisy dynamics,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 94, no. 4, pp. 2979–2993, 2018. cited By 2.
- [7] G. Kaur, R. Agarwal, and V. Patidar, “Chaos based multiple order optical transform for 2d image encryption,” *Engineering Science and Technology, an International Journal*, vol. 23, no. 5, pp. 998–1014, 2020. cited By 9.
- [8] P. Ketthong and W. San-Um, “A robust signum-based piecewise-linear chaotic map and its application to microcontroller-based cost-effective random-bit generator,” in *2014 International Electrical Engineering Congress (iEECON)*, IEEE, mar 2014.
- [9] S. Li, G. Chen, and X. Mou, “On The Dynamical Degradation Of Digital Piecewise Linear Chaotic Maps,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 15, pp. 3119–3151, Oct. 2005.
- [10] H. Liu and X. Wang, “Color image encryption based on one-time keys and robust chaotic maps,” *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 10, pp. 3320–3327, 2010.
- [11] S. Mandal and S. Banerjee, “Analysis and CMOS implementation of a chaos-based communication system,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 51, pp. 1708–1722, sep 2004.

- 
- [12] G. Millerioux and C. Mira, "Finite-time global chaos synchronization for piecewise linear maps," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 48, no. 1, pp. 111–116, 2001.
- [13] A. Potapov and M. Ali, "Robust chaos in neural networks," *Physics Letters A*, vol. 277, pp. 310–322, Dec. 2000.
- [14] T. Saito and K. Mitsuori, "Control of chaos from a piecewise linear hysteresis circuit," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 42, pp. 168–172, Mar. 1995.
- [15] W. San-Um and P. Ketthong, "The generalization of mathematically simple and robust chaotic maps with absolute value nonlinearity," in *TENCON 2014 - 2014 IEEE Region 10 Conference*, IEEE, Oct. 2014.
- [16] A. Amador, *Some contributions to the analysis of piecewise linear systems*. PhD thesis, Universidad de Sevilla. Departamento de Matemática Aplicada II (ETSI), 2018.
- [17] A. Amador, S. Casanova, H. A. Granada, G. Olivar, and J. Hurtado, "Codimension-two big-bang bifurcation in a ZAD-controlled boost DC-DC converter," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 24, p. 1450150, Dec. 2014.
- [18] S. Banerjee, D. Kastha, S. Das, G. Vivek, and C. Grebogi, "Robust chaos—the theoretical formulation and experimental evidence," in *ISCAS'99. Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Circuits and Systems VLSI (Cat. No.99CH36349)*, IEEE, 1999.
- [19] M. Bernardo, C.J.Budd, A.R.Champneys, and P.Kowalczyk, *Piecewise-smooth Dynamical Systems Theory and Applications*. Springer Science, 2008.
- [20] Z. Elhadj and J. C. Sprott, "On the robustness of chaos in dynamical systems: Theories and applications," *Frontiers of Physics in China*, vol. 3, pp. 195–204, May 2008.
- [21] E. Fossas and A. Granados, "Occurrence of big bang bifurcations in discretized sliding-mode control systems," *Differential Equations and Dynamical Systems*, vol. 21, pp. 35–43, May 2012.
- [22] L. Gardini, F. Tramontana, and S. Banerjee, "Bifurcation analysis of an inductorless chaos generator using 1d piecewise smooth map," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 95, pp. 137–145, Jan. 2014.
- [23] Lozi, R., "Un attracteur étrange du type attracteur de henon," *J. Phys. Colloques*, vol. 39, no. C5, pp. C5–9–C5–10, 1978.

- 
- [24] J. F. Paz, “Dinámica de un mapa estroboscópico discontinuo. Una aplicación al convertidor DC-DC Buck-Boost,” 2020.
- [25] E. Freire, E. Ponce, and F. Torres, “A general mechanism to generate three limit cycles in planar filippov systems with two zones,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 78, pp. 251–263, May 2014.
- [26] E. Freire, E. Ponce, and F. Torres, “Canonical discontinuous planar piecewise linear systems,” *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, vol. 11, pp. 181–211, Jan. 2012.
- [27] Yuri.A.Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer Science, 2004.
- [28] A. C. P. K. M. di Bernardo, C.J.Budd, *Piecewise-smooth Dynamical Systems Theory and Applications*. Springer Science, 2008.
- [29] R. L. Devaney, *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Westview Press, 2003.
- [30] R. A. Holmgren, *A First Course in Discrete Dynamical System*. Springer-Verlag, 1994.
- [31] V. Avrutin, A. Granados, and M. Schanz, “Sufficient conditions for a period incrementing big bang bifurcation in one-dimensional maps,” *Nonlinearity*, vol. 24, pp. 2575–2598, Aug. 2011.
- [32] V. Avrutin, M. Schanz, and S. Banerjee, “Multi-parametric bifurcations in a piecewise-linear discontinuous map,” *Nonlinearity*, vol. 19, pp. 1875–1906, July 2006.
- [33] D. Fournier-Prunaret, P. Chargé, and L. Gardini, “Border collision bifurcations and chaotic sets in a two-dimensional piecewise linear map,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, pp. 916–927, Feb. 2011.
- [34] U. Kirchgraber and D. Stoffer, “On the definition of chaos,” *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 69, no. 7, pp. 175–185, 1989.
- [35] P. Glendinning, “Robust chaos revisited,” *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 226, pp. 1721–1738, June 2017.
- [36] P. A. Glendinning and D. J. W. Simpson, “A constructive approach to robust chaos using invariant manifolds and expanding cones,” *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, vol. 41, no. 7, p. 3367, 2021.
- [37] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer Science, 2003.

- 
- [38] G. S. Michael Brin, *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [39] C. Robinson, *Dynamical systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. Taylor and Francis Group, LLC, 1999.
- [40] E. Glasner and B. Weiss, “Sensitive dependence on initial conditions,” *Nonlinearity*, vol. 6, pp. 1067–1075, Nov. 1993.
- [41] Y. A. Kuznetsov and H. E. Meijer, *Numerical Bifurcation Analysis of Maps*. Cambridge University Press, 2019.
- [42] A. Amador, E. Ponce, and F. Torres, “On the BB bifurcation in stroboscopic maps of planar DPWL systems. An application in discretized sliding-mode control systems.,” *Manuscript in preparation.*, 2020.
- [43] Y. A. Kuznetsov, S. Rinaldi, and A. Gagnani, “One-parameter bifurcations in planar filippov systems,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 13, pp. 2157–2188, aug 2003.
- [44] J. Wang, X. Chen, and L. Huang, “The number and stability of limit cycles for planar piecewise linear systems of node–saddle type,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 469, pp. 405–427, Jan. 2019.
- [45] Z. Galias and X. Yu, “Study of periodic solutions in discretized two-dimensional sliding-mode control systems,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 58, pp. 381–385, June 2011.
- [46] D. J. W. Simpson and J. D. Meiss, “Shrinking point bifurcations of resonance tongues for piecewise-smooth, continuous maps,” *Nonlinearity*, vol. 22, pp. 1123–1144, Apr. 2009.
- [47] D. J. W. Simpson and J. D. Meiss, “Resonance near border-collision bifurcations in piecewise-smooth, continuous maps,” *Nonlinearity*, vol. 23, pp. 3091–3118, Nov. 2014.
- [48] D. J. W. Simpson, “Sequences of periodic solutions and infinitely many coexisting attractors in the border-collision normal form,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 24, p. 1430018, June 2014.
- [49] B. Wang, X. Yu, and X. Li, “ZOH discretization effect on higher-order sliding-mode control systems,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, pp. 4055–4064, Nov. 2008.
- [50] H. E. Nusse and J. A. Yorke, “Border-collision bifurcations including “period two to period three” for piecewise smooth systems,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 57, pp. 39–57, jun 1992.

- 
- [51] P. Kowalczyk, “Robust chaos and border-collision bifurcations in non-invertible piecewise-linear maps,” *Nonlinearity*, vol. 18, pp. 485–504, Dec. 2004.
- [52] Z. Elhadj, “Robust chaos in piecewise nonsmooth map of the plane,” *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 177, pp. 366–372, Aug. 2009.
- [53] C. E. Shannon, “Communication theory of secrecy systems,” *Bell System Technical Journal*, vol. 28, pp. 656–715, Oct. 1949.
- [54] Z. Hua, Y. Zhou, C.-M. Pun, and C. P. Chen, “2D sine logistic modulation map for image encryption,” *Information Sciences*, vol. 297, pp. 80–94, Mar. 2015.
- [55] A. Akhshani, S. Behnia, A. Akhavan, H. A. Hassan, and Z. Hassan, “A novel scheme for image encryption based on 2D piecewise chaotic maps,” *Optics Communications*, vol. 283, pp. 3259–3266, Sept. 2010.
- [56] Z. Hua and Y. Zhou, “Image encryption using 2D logistic-adjusted-sine map,” *Information Sciences*, vol. 339, pp. 237–253, Apr. 2016.
- [57] W. Liu, K. Sun, and C. Zhu, “A fast image encryption algorithm based on chaotic map,” *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 84, pp. 26–36, Sept. 2016.
- [58] N. Tsafack, S. Sankar, B. Abd-El-Atty, J. Kengne, J. K. C., A. Belazi, I. Mehmood, A. K. Bashir, O.-Y. Song, and A. A. A. El-Latif, “A new chaotic map with dynamic analysis and encryption application in internet of health things,” *IEEE Access*, vol. 8, pp. 137731–137744, 2020.
- [59] X. Wang and J. Yang, “A privacy image encryption algorithm based on piecewise coupled map lattice with multi dynamic coupling coefficient,” *Information Sciences*, vol. 569, pp. 217–240, Aug. 2021.
- [60] H. Zhu, Y. Zhao, and Y. Song, “2D logistic-modulated-sine-coupling-logistic chaotic map for image encryption,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 14081–14098, 2019.
- [61] G. Alvarez and S. Li, “Some basic cryptographic requirements for chaos-based cryptosystems,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 16, pp. 2129–2151, Aug. 2006.