



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Modos cuasinormales de un agujero negro AdS con carga eléctrica en la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet 4D

Tesis de Maestría

Autor:

Jose Miguel Ladino Mendez

Director:

PhD. Eduard Alexis Larrañaga Rubio

Facultad de Ciencias
Observatorio Astronómico Nacional
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia
Octubre 31 de 2022

Modos cuasinormales de un agujero negro AdS con carga eléctrica en la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet 4D

Tesis presentada como requisito para optar al título de:

Magíster en Ciencias - Astronomía

Autor:

Jose Miguel Ladino Mendez

Director:

PhD. Eduard Alexis Larrañaga Rubio

Línea de Investigación:

Relatividad General y Agujeros Negros

Grupo de investigación:

Astronomía, Astrofísica y Cosmología

Facultad de Ciencias

Observatorio Astronómico Nacional

Universidad Nacional de Colombia

Bogotá, Colombia

Octubre 31 de 2022

Agradecimientos

Agradezco a mi familia, a mi novia y a mis amigos, por ser mi fuente insaciable de motivación, apoyo y esperanza.

Agradezco a mi director, el profesor Eduard Larrañaga, por su constante ayuda, por su entusiasmo al transmitir invaluable enseñanzas, por ofrecerme su confianza y permitirme trabajar a su lado.

Quiero agradecer especialmente a la Universidad Nacional de Colombia, a la Facultad de Ciencias y al Observatorio Astronómico Nacional, por brindarme el apoyo financiero que hizo posible la realización de mis estudios, por acogerme, instruirme y darme las herramientas necesarias para ampliar mis perspectivas y transformar mi vida.

Modos cuasinormales de un agujero negro AdS con carga eléctrica en la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet 4D

Resumen

Las ondas de las perturbaciones de los agujeros negros dependen de los parámetros geométricos del espacio-tiempo que los describe. En este trabajo se investigan las perturbaciones en campos escalares y electromagnéticos sobre la geometría de un agujero negro AdS cargado eléctricamente en la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet 4D, mostrando la deducción de las ecuaciones de campo modificadas, los comportamientos de las principales propiedades de este agujero negro y su relación con sus casos límite particulares y con otras teorías de gravedad. Se derivan a las ecuaciones maestras y a los potenciales que describen a las perturbaciones y se discuten los métodos para encontrar las frecuencias de los modos cuasinormales, explorando principalmente al formalismo del método de la aproximación WKB, discutiendo sus fundamentos y algunas de sus restricciones y mejoras. Se calculan numéricamente, mediante el uso de los métodos semi-analíticos del potencial de Pöschl-Teller y de la aproximación WKB, a las frecuencias de los modos cuasinormales del campo escalar (con y sin masa) y del campo electromagnético alrededor de un agujero negro AdS con carga eléctrica y en la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet 4D y de sus casos límite particulares, encontrando destacados resultados, como el hecho de que este agujero negro es mejor oscilador que los agujeros negros de Schwarzschild, de Reissner–Nordström, de Einstein-Gauss-Bonnet 4D y de Einstein-Gauss-Bonnet 4D con carga eléctrica y por ende posee una sombra más pequeña. También se describen los efectos de los parámetros geométricos sobre las frecuencias calculadas, encontrando destacadas consistencias en los resultados obtenidos comparados entre sí y con los ya publicados por otros autores.

Palabras clave: Relatividad General, Agujeros Negros, Gravedad Modificada, Modos Cuasinormales.

Quasinormal modes of an electrically charged AdS black hole in 4D Einstein-Gauss-Bonnet gravity

Abstract

The waves of black hole perturbations depend on the geometric parameters of space-time that describe them. In this work we investigate the perturbations in scalar and electromagnetic fields on the geometry of an electrically charged AdS black hole in Einstein-Gauss-Bonnet 4D gravity, showing the deduction of the modified field equations, the behavior of the main properties of this black hole and its relationship with its particular limit cases and with other gravity theories. The master equations and potentials describing the perturbations are derived and methods for finding the frequencies of Quasinormal Modes are discussed, mainly exploring the formalism of the WKB approximation method, discussing its fundamentals and some of its restrictions and enhancements. They are calculated numerically, using the semi-analytic methods of the Pöschl-Teller potential and the WKB approximation, the frequencies of the Quasinormal Modes of the scalar field (with and without mass) and the electromagnetic field around an electrically charged AdS black hole in the Einstein-Gauss-Bonnet 4D gravity and its particular limit cases, finding outstanding results, such as the fact that this black hole is a better oscillator than the Schwarzschild, Reissner–Nordström, Einstein-Gauss-Bonnet 4D and Einstein-Gauss-Bonnet 4D black holes with electric charge and therefore it has a smaller shadow. The effects of the geometric parameters on the calculated frequencies are also described, finding outstanding consistency in the results obtained compared with each other and with those already published by other authors.

Keywords: General Relativity, Black Holes, Modified Gravity, Quasinormal Modes

Declaración

Me permito afirmar que he realizado la presente tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en la propia tesis. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo. Ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de tesis.

Bogotá, D.C. Octubre 31 de 2022.

Miguel Ladino

Jose Miguel Ladino Mendez

Contenido

<i>Agradecimientos</i>	5
<i>Resumen</i>	7
<i>Declaración</i>	11
<i>Lista de abreviaturas</i>	15
<i>Lista de figuras</i>	16
<i>Lista de tablas</i>	19
1 Introducción	21
2 Agujero negro AdS cargado eléctricamente en la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet 4D	26
2.1 Ecuación de campo modificada	28
2.1.1 Acción del campo de materia	29
2.1.2 Acción de Einstein-Hilbert	30
2.1.3 Acción de Einstein-Gauss-Bonnet y ecuación de campo	33
2.2 Solución de agujero negro en 4 dimensiones	36
2.2.1 Métrica	38
2.2.2 Horizontes	41
2.3 Relación con otras teorías de gravedad	44
2.3.1 Casos límites particulares	45
2.3.2 Generalizaciones del agujero negro	52
3 Campos perturbados en un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico	59
3.1 Perturbaciones del campo escalar masivo	59
3.1.1 Ecuación maestra del campo escalar	60
3.1.2 Función de Green asociada	62
3.2 Perturbaciones del campo electromagnético	65
3.2.1 Ecuación maestra del campo electromagnético	65
3.3 Campos perturbados en el espacio-tiempo de Schwarzschild	70
4 Modos cuasinormales de un agujero negro estático y esféricamente simétrico	75
4.1 Aproximación WKB	78

4.1.1	Fundamentos a primer orden	79
4.1.2	Método WKB a ordenes superiores	81
4.2	Otros métodos para encontrar los QNMs de un AN	82
5	<i>Cálculo de las frecuencias de los modos cuasinormales</i>	84
5.1	Resultados de las perturbaciones del campo escalar	85
5.1.1	Potencial del campo escalar	86
5.1.2	Modos cuasinormales del campo escalar	90
5.2	Resultados de las perturbaciones del campo electromagnético	100
5.2.1	Potencial del campo electromagnético	101
5.2.2	Modos cuasinormales del campo electromagnético	105
6	<i>Conclusiones</i>	111
A	<i>Apéndice 1: Tablas de las frecuencias de los modos cuasinormales del campo escalar</i>	113
B	<i>Apéndice 2: Tablas de las frecuencias de los modos cuasinormales del campo electromagnético</i>	119
C	<i>Apéndice 3: Introducción a las aplicaciones de los modos cuasinormales de un agujero negro</i>	126
	<i>Referencias</i>	129

Lista de abreviaturas

Abreviatura	Término
(AdS)	Anti-de Sitter
(AN)	Agujero negro
(dS)	de Sitter
(EGB)	Einstein-Gauss-Bonnet
(EH)	Einstein-Hilbert
(EMRI)	Espiral con una relación de masa extrema (<i>Extreme mass ratio inspiral</i>)
(GB)	Gauss-Bonnet
(ISCO)	Órbita circular estable más interna (<i>Innermost Stable Circular Orbit</i>)
(LISA)	Antena espacial de interferómetro láser (<i>Laser Interferometer Space Antenna</i>)
(NED)	Electrodinámica no lineal (<i>Nonlinear Electrodynamics</i>)
(QNM)	Modo cuasinormal (<i>Quasinormal Mode</i>)
(RG)	Relatividad General
(RN)	Reissner-Nordström
(RW)	Regge-Wheeler
(WKB)	Wentzel-Kramers-Brillouin

Lista de figuras

2-1	Función f_- para diferentes valores de Λ , con $\alpha = 0.1$ y $Q = 0.3$	40
2-2	Función f_- para diferentes valores de Q y de α (con $\Lambda = 0$).	40
2-3	Variación de r_{\pm} con respecto a α y para diferentes valores de Q	43
2-4	Función f_- para los casos posibles entre M y M_{ext}	44
2-5	Función $f^{(AdS-RN-EGB)}$ y algunos de los casos límites particulares.	48
2-6	Escalar de Kretschmann \mathcal{K} para $f^{(AdS-RN-EGB)}$ y algunos de los casos límites particulares.	50
2-7	Función \mathcal{G} y algunos de los casos límites particulares.	51
3-8	Potencial de Schwarzschild $V_l^{(Sch)}$ para perturbaciones escalares en función de r y para diferentes valores de μ (con $l = 2$).	71
3-9	Potencial de Schwarzschild $V_l^{(Sch)}$ para perturbaciones escalares en función de r_* y para diferentes valores de μ (con $l = 2$).	71
3-10	Potencial de Schwarzschild $V_{sl}^{(Sch)}$ para perturbaciones escalares ($s = 0$), electromagnéticas ($s = 1$) y gravitacionales ($s = 2$) en función de r_* y para $l = 2, 3$	73
5-11	Potencial $V_l^{(AdS-RN-EGB)}$ de la ecuación (5-213) para perturbaciones escalares ($s = 0$), en función de r y tomando distintos valores de Λ (con $l = 2$, $\alpha = 0.1$, $Q = 0.5$ y $\mu = 0$).	87
5-12	Potencial $V_l^{(RN-EGB)}$ de la ecuación (3-176) para perturbaciones escalares ($s = 0$), en función de r y tomando distintos valores de α y Q (con $l = 2$ y $\mu = 0$).	88
5-13	Potencial $V_l^{(RN-EGB)}$ de la ecuación (3-176) para perturbaciones escalares ($s = 0$), en función de r y tomando distintos valores de μ (con $l = 2$, $\alpha = 0.1$ y $Q = 0.5$).	89
5-14	Potencial V_l de la ecuación (3-176) para perturbaciones escalares ($s = 0$), en función de r y para los casos límite particulares principales (con $l = 2$ y $\mu = 0$).	90
5-15	Frecuencias de los QNMs del campo escalar masivo en el espacio-tiempo de Schwarzschild. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I del modo fundamental ($n = 0$) en función del parámetro μ (con $l = 2$, $Q = 0$, $\alpha \rightarrow 0$ y $\Lambda = 0$).	91
5-16	Frecuencias de los QNMs del campo escalar no masivo en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Se muestra la parte real ω_R y la parte imaginaria ω_I de los 6 primeros números de sobretono n para $l = 6$. Los números sobre cada frecuencia corresponden a n (con $Q = 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\Lambda = 0$ y $\mu = 0$).	92

5-17	Frecuencias de los QNMs del campo escalar sin masa en el espacio-tiempo de RN. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I del modo fundamental ($n = 0$) en función de la carga eléctrica Q (con $l = 2, \alpha \rightarrow 0, \Lambda = 0$ y $\mu = 0$).	94
5-18	Frecuencias de los QNMs del campo escalar sin masa en el espacio-tiempo de EGB 4D. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I del modo fundamental ($n = 0$) en función de α (con $l = 2, \Lambda = 0$ y $\mu = 0$).	94
5-19	Frecuencias de los QNMs del campo escalar no masivo en el espacio-tiempo de RN-EGB 4D. Se muestra la parte real ω_R y la parte imaginaria ω_I de los 6 primeros números de sobretono n para $l = 6$. Los números sobre cada frecuencia corresponden a n (con $Q = 0.5, \alpha = 0.1, \Lambda = 0$ y $\mu = 0$).	95
5-20	Frecuencias de los QNMs del campo escalar masivo en el espacio-tiempo de RN-EGB 4D. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I del modo fundamental ($n = 0$) en función de μ (con $l = 2, Q = 0.5, \alpha = 0.1$ y $\Lambda = 0$).	97
5-21	Frecuencias de los QNMs del campo escalar sin masa en el espacio-tiempo de RN-EGB 4D. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I del modo fundamental ($n = 0$) en función de α (con $l = 2, Q = 0.5, \Lambda = 0.1$ y $\mu = 0$).	97
5-22	Frecuencias de los QNMs del campo escalar sin masa en el espacio-tiempo de RN-EGB 4D. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I del modo fundamental ($n = 0$) en función de la carga eléctrica Q (con $l = 2, \alpha = 0.1, \Lambda = 0.1$ y $\mu = 0$).	98
5-23	Frecuencias de los QNMs del campo escalar no masivo ($\mu = 0$) en el espacio-tiempo de RN-EGB 4D y en sus casos particulares límite, determinadas mediante el método WKB a 6^{to} orden. Se muestra la parte real ω_R y la parte imaginaria ω_I de los 6 primeros números de sobretono n para $l = 6$. Los números sobre cada frecuencia corresponden a n .	99
5-24	Potencial $V_l^{(AdS-RN-EGB)}$ para perturbaciones electromagnéticas ($s = 1$), en función de r y tomando distintos valores de Λ (con $l = 2, \alpha = 0.1$ y $Q = 0.5$).	102
5-25	Potencial $V_l^{(RN-EGB)}$ de la ecuación (3-176) para perturbaciones electromagnéticas ($s = 1$), en función de r y tomando distintos valores de α y Q (con $l = 2$).	103
5-26	Potencial V_l de la ecuación (3-176) para perturbaciones electromagnéticas ($s = 1$), en función de r y para los casos límite particulares principales (con $l = 2$).	104

5-27	Frecuencias de los QNMs del campo electromagnético en la métrica AdS-RN-EGB 4D. Se muestra la parte real ω_R y la parte imaginaria ω_I de los 6 primeros números de sobretono n para $l = 6$. Los números sobre cada frecuencia corresponden a n (con $Q = 0.5$, $\alpha = 0.1$ y $\Lambda = -0.01$).	105
5-28	Frecuencias de los QNMs del campo electromagnético en la métrica AdS-RN-EGB 4D. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I en función de Λ (con $n = 0$, $l = 2$, $\alpha = 0.1$ y $Q = 0.5$).	107
5-29	Frecuencias de los QNMs del campo electromagnético en la métrica AdS-RN-EGB 4D. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I en función de α (con $n = 0$, $l = 2$, $\Lambda = -0.01$ y $Q = 0.5$).	107
5-30	Frecuencias de los QNMs del campo electromagnético en la métrica AdS-RN-EGB 4D. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I en función de la carga eléctrica Q (con $n = 0$, $l = 2$, $\alpha = 0.1$ y $\Lambda = -0.01$).	108
5-31	Frecuencias de los QNMs del campo electromagnético en la métrica AdS-RN-EGB 4D y en sus casos particulares límite, determinadas mediante el método WKB a 6^{to} orden. Se muestra la parte real ω_R y la parte imaginaria ω_I de los 6 primeros números de sobretono n para $l = 6$. Los números sobre cada frecuencia corresponden a n	109

Lista de tablas

2-1	Términos de las diferentes contribuciones en la acción	28
2-2	Horizontes interno y de eventos de f_- para diferentes valores de Λ (con $M = 1, Q = 0.3$ y $\alpha = 0.1$).	42
2-3	Casos límites particulares de los ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 4D, representado por la solución $f^{(AdS-RN-EGB)}$	51
5-4	Resumen de todos los resultados obtenidos para las frecuencias de los QNMs de los espacio-tiempos en estudio.	84
A-5	Frecuencias de los QNM de un campo escalar masivo ($s=0$) alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. (con $Q = 0, \alpha \rightarrow 0$ y $\Lambda = 0$).	113
A-6	Frecuencias de los QNM de un campo escalar no masivo ($s=0$ y $\mu = 0$) alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. (con $Q = 0, \alpha \rightarrow 0$ y $\Lambda = 0$).	114
A-7	Frecuencias de los QNM de un campo escalar no masivo ($s=0$ y $\mu = 0$) alrededor de un agujero negro de RN. (con $Q = 0.5, \alpha \rightarrow 0$ y $\Lambda = 0$).	115
A-8	Frecuencias de los QNM de un campo escalar no masivo ($s=0$ y $\mu = 0$) alrededor de un agujero negro de EGB 4D. (con $Q = 0, \alpha = 0.1$ y $\Lambda = 0$).	116
A-9	Frecuencias de los QNM de un campo escalar no masivo ($s=0$ y $\mu = 0$) alrededor de un agujero negro de RN-EGB 4D. (con $Q = 0.5, \alpha = 0.1$ y $\Lambda = 0$).	117
A-10	Frecuencias de los QNM de un campo escalar no masivo ($s=0$ y $\mu = 0$) en función de Q y alrededor de un agujero negro de RN-EGB 4D. (con $n = 0, l = 2, \alpha = 0.1$ y $\Lambda = 0$).	118
A-11	Frecuencias de los QNM de un campo escalar no masivo ($s=0$ y $\mu = 0$) en función de α y alrededor de un agujero negro de RN-EGB 4D. (con $n = 0, l = 2, Q = 0.5$ y $\Lambda = 0$).	118
A-12	Frecuencias de los QNM de un campo escalar masivo ($s=0$) en función de μ y alrededor de un agujero negro de RN-EGB 4D. (con $n = 0, l = 2, \alpha = 0.1, Q = 0.5$ y $\Lambda = 0$).	119
B-13	Frecuencias de los QNM del campo electromagnético ($s=1$) alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. (con $\alpha \rightarrow 0, Q = 0$ y $\Lambda = 0$).	120
B-14	Frecuencias de los QNM del campo electromagnético ($s=1$) alrededor de un agujero negro de RN. (con $\alpha \rightarrow 0, Q = 0.5$ y $\Lambda = 0$).	121
B-15	Frecuencias de los QNM del campo electromagnético ($s=1$) alrededor de un agujero negro de EGB. (con $\alpha = 0.1, Q = 0$ y $\Lambda = 0$).	122
B-16	Frecuencias de los QNM del campo electromagnético ($s=1$) alrededor de un agujero negro de RN-EGB 4D. (con $\alpha = 0.1, Q = 0.5$ y $\Lambda = 0$).	123

B-17	Frecuencias de los QNM del campo electromagnético ($s=1$) alrededor de un agujero negro de AdS-RN-EGB 4D. (con $\alpha = 0.1$, $Q = 0.5$ y $\Lambda = -0.01$).	124
B-18	Frecuencias de los QNM del campo electromagnético ($s=1$) en función de Q alrededor de un agujero negro de AdS-RN-EGB 4D. (con $n = 0$, $l = 2$, $\alpha = 0.1$ y $\Lambda = -0.01$).	125
B-19	Frecuencias de los QNM del campo electromagnético ($s=1$) en función de Λ alrededor de un agujero negro de AdS-RN-EGB 4D. (con $n = 0$, $l = 2$, $\alpha = 0.1$ y $Q = 0.5$).	125
B-20	Frecuencias de los QNM del campo electromagnético ($s=1$) en función de α alrededor de un agujero negro de AdS-RN-EGB 4D. (con $n = 0$, $l = 2$, $\Lambda = -0.01$ y $Q = 0.5$).	126

1. Introducción

Las soluciones de tipo Agujeros Negros (**ANs**) de las ecuaciones de campo de Einstein han sido de gran interés desde el primer momento en que se formuló la teoría de la Relatividad General (**RG**). Actualmente se sabe que la **RG** y sus aplicaciones están a la delantera de las investigaciones en astrofísica y cosmología, siendo esta la teoría de la gravedad mayormente aceptada por la comunidad científica. La **RG** unifica la geometría y la gravitación en un espacio-tiempo curvo, de manera que para aquellos objetos suficientemente masivos, su propia gravitación dominaría en algún momento sobre todas las demás interacciones físicas debido a su largo alcance de acción. Luego, para entender la mecánica detrás de estos objetos compactos, la **RG** debe ser usada junto con sus ramificaciones y posibles modificaciones para llegar a describir fenómenos que se encuentran más allá de las correcciones dinámicas a la teoría newtoniana. La **RG** también predice la existencia de radiación gravitacional en forma de ondas, producidas por eventos como las colisiones entre **ANs** o la interacción estelar en sistemas binarios, entre otros [1]. Es bien sabido que desde la primera detección directa de ondas gravitacionales de la señal GW150914 proveniente de la fusión de dos **ANs** supermasivos, reportada en 2016 por los observatorios LIGO y VIRGO [2], la investigación de las ondas gravitacionales juegan un papel crucial para probar, experimentar y testear los modelos teóricos de gravedad a partir de los resultados observacionales.

Como sistemas disipativos que pierden energía con el tiempo, los **ANs** perturbados emiten ondas gravitacionales. Estas ondas tienen un conjunto característico de modos normales de oscilación que decaen amortiguadamente, condición por la cual reciben el nombre de modos cuasinormales o *Quasinormal Modes* (**QNMs**) en inglés, cuyas propiedades dependen solamente de los parámetros geométricos del espacio-tiempo. Para un **AN** en la **RG**, estos parámetros serán la masa M , la carga eléctrica Q y el espín a [3].

Los **QNMs** de las perturbaciones gravitacionales no se producen en un medio material, sino que corresponden a las oscilaciones del propio espacio-tiempo en el exterior del horizonte de eventos [3]. Por lo tanto, el cálculo de las frecuencias de los **QNMs** es una herramienta fundamental para comprender analítica y observacionalmente las ondas gravitacionales [3]. Por ende, los **QNMs** son muy útiles para investigar a los **ANs** y a las diversas teorías de gravedad modificada, comparando la teoría con la observación. Un ejemplo de esto es la determinación de las sombras de los **ANs** a partir de las recientes imágenes obtenidas por las detecciones del *Event Horizon Telescope* [4] o también, considerando a los sistemas de los centros galácticos, donde se encuentran objetos como estrellas o **ANs** estelares que orbitan a un **AN** supermasivo. De esta manera, un ejem-

plo de las perturbaciones con **QNMs** podría ser un proceso en el que un objeto mucho más pequeño que el **AN** supermasivo cae en forma espiral sobre éste. El objeto que cae, describiría trayectorias llamadas órbitas en espiral con una relación de masa extrema u órbitas *Extreme mass ratio inspiral* (**EMRIs**) en inglés. En la actualidad se espera que estas **EMRIs**, junto con sus ondas gravitacionales, puedan ser analizadas por el interferómetro del proyecto **LISA** [5].

Las perturbaciones de los **ANs** son descritas por las denominadas *ecuaciones maestras*, que son ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden que contienen la información del comportamiento de las frecuencias de los **QNMs**. Para los **ANs** de Schwarzschild, estas se conocen como las ecuaciones de Regge-Wheeler y de Zerilli, mientras que para los **ANs** de Kerr son las ecuaciones de Teukolsky [3]. Ahora bien, desde la teoría, los **QNMs** se pueden analizar considerando diferentes posibles campos de interacción, entre los cuales se encuentran los campos escalares, los electromagnéticos y los gravitacionales [3].

Existen diversas soluciones de **ANs** estáticos con simetría esférica para los cuales la ecuación maestra es válida y recientemente, una solución de este tipo ha venido generando bastante atención: el espacio-tiempo de Einstein-Gauss-Bonnet (**EGB**) en 4 dimensiones (4D por simplicidad). Esta es la solución de principal interés en este trabajo, el cual investigará su comportamiento al generalizarla para incluir una constante cosmológica del tipo Anti-de Sitter (**AdS**) y la posibilidad de poseer carga eléctrica [6–11].

Debido al gran interés sobre los **QNMs** de campos perturbados alrededor de **ANs**, sus frecuencias ya se han estudiado con diferentes técnicas analíticas, semi-analíticas y numéricas en diversas teorías espacio-temporales de gravitación [3, 10–58]. Una de las primeras investigaciones fue realizada por Leaver en [14], donde se evidenció que la carga eléctrica Q de los **ANs** afecta a las frecuencias de los **QNMs**. Por otro lado, en los últimos años se han venido estudiando los **QNMs** de **ANs** bajo la acción de la gravedad tipo **EGB** 4D [10–13, 59–62]. De hecho, se han realizado investigaciones alrededor de soluciones de tipo **AN** muy similares a la del presente trabajo. Recientemente, Mishra en [63] calculó las frecuencias de los **QNMs** de los mismos **ANs** en la gravedad de **EGB** 4D, pero cargados eléctricamente en un espacio-tiempo de Sitter (**dS**). También, las frecuencias de los **QNMs** de las perturbaciones del campo escalar sin masa en el espacio-tiempo de un **AN** con carga eléctrica y en la gravedad de **EGB** 4D fueron investigadas en [10, 11, 61, 62]. Luego, las frecuencias de los **QNMs** de las perturbaciones del campo electromagnético en el espacio-tiempo de un **AN AdS** y en la gravedad de **EGB** 4D fueron analizadas en [10] y sobre un **AN** con carga eléctrica y en la gravedad de **EGB** 4D en [11]. Estas

dos soluciones del tipo ANs son casos límite particulares del AN que se estudiará en esta tesis. Notablemente, en estos trabajos previos uno de los métodos utilizados es el de la aproximación Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB), la cual, también es comúnmente aplicado en problemas de dispersión no relativistas de la mecánica cuántica porque la ecuación maestra de la evolución de los ANs tiene la misma forma que la ecuación de Schrödinger moviéndose bajo un potencial en una dimensión [24]. Por lo tanto, este acercamiento permite reducir la ecuación maestra a una cuyas soluciones son una superposición de funciones parabólicas y cilíndricas, con las cuales, analizando su comportamiento asintótico, es posible determinar aproximadamente las frecuencias de los QNMs.

Los ANs descritos a partir de diferentes teorías de gravedad modificada son de notable interés en las investigaciones de la astrofísica actual. La gravedad de tipo EGB 4D es controversial y llamativa, pues además de diversas propiedades interesantes que la rigen (como por ejemplo que puede surgir de una teoría de la RG generalizada a dimensiones superiores de manera natural) este modelo, a diferencia de la RG, es considerado “prácticamente libre” del problema de la singularidad debido a que la gravedad es repulsiva a distancias pequeñas, de manera que una partícula que cruce el horizonte de eventos nunca alcanzaría el punto central [6, 64]. A pesar de que esta solución ha sido ampliamente estudiada recientemente debido a que fue propuesta de manera sencilla y novedosa en 2020 en [64], el modelo utilizado allí fue fuertemente criticado y varios estudios posteriores demostraron que el método para encontrar la solución no era consistente ni estaba bien definido [65–68]. Sin embargo, surgieron varios estudios consecuentemente que obtuvieron esta misma solución y aclararon que no era realmente nueva, ya que esta y otras soluciones muy similares se pueden deducir a partir de diferentes formalismos bien definidos y sobre diversas teorías de gravedad modificada [4, 6–11, 68–89].

La métrica de un AN AdS con carga eléctrica y bajo la gravedad de EGB 4D, es una solución que permite estudiar diversos efectos sobre las ondas gravitacionales que otras teorías de gravedad no consideran (incluyendo a la RG). Por otro lado, el estudio de los QNMs de un AN debidos a perturbaciones en un campo escalar posee una valiosa utilidad práctica, ya que sirve como una primera aproximación al entendimiento de las principales características de los QNMs [3], antes de enfrentarse a un campo electromagnético o gravitacional, los cuales son problemas más complicados puesto que se fundamentan a partir de los armónicos esféricos en su versión vectorial y tensorial, respectivamente [3]. De esta forma, esta tesis está enfocada principalmente en la descripción y análisis solamente de las perturbaciones a campos escalares y electromagnéticos.

El presente trabajo se divide en las siguientes secciones: En la sección 2, se introdu-

dirá a los ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 4D, se muestra la deducción de las ecuaciones de campo modificadas, estudiando cada una de sus contribuciones en la acción. Luego se comprueba que la solución en estudio las satisface. Se muestran los comportamientos de las principales propiedades de este AN, como el comportamiento de algunos de sus invariantes y los efectos de los parámetros geométricos sobre la solución y sus distintos horizontes. Después se estudian a las diversas teorías de gravedad involucradas mediante los correspondientes casos particulares límite. Además, se comparten algunas posibles generalizaciones del AN en acople con otras teorías físicas. En la sección 3, se analizan a los ANs perturbados, se estudia la teoría de los campos escalares masivos y los campos electromagnéticos en espacio-tiempos estáticos y esféricamente simétricos y usando el método de la descomposición en armónicos esféricos escalares y vectoriales, se derivan las correspondientes ecuaciones maestras junto con sus potenciales efectivos. También se determina la respectiva función de Green asociada al campo escalar masivo y se discuten algunas de sus características. En la sección 4, se introduce al concepto de los QNMs de un AN estático y esféricamente simétrico. Se explora el método de la aproximación WKB para encontrar las frecuencias de los QNMs, compartiendo sus fundamentos a 1^{er} orden y discutiendo algunas de sus restricciones y mejoras. Adicionalmente, se mencionan otros métodos para calcular frecuencias de QNMs. Más adelante, en la sección 5, se aplica el espacio-tiempo de los ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 4D, sobre la teoría de perturbaciones en los campos escalares masivos y los campos electromagnéticos. Se calculan numéricamente y se analizan, mediante el uso de los métodos semi-analíticos del potencial de Pöschl-Teller propuesto en [42] y de la aproximación WKB a 1^{er}, 3^{er} y 6^{to} orden introducidos en [25, 45, 90] respectivamente, a las frecuencias de los QNMs del campo escalar (con y sin masa) y del campo electromagnético alrededor del espacio-tiempo del AN AdS con carga eléctrica y en la gravedad EGB 4D. Se presentan los casos límite particulares principales, incluyendo los ANs de Schwarzschild y de Reissner–Nordström (RN) (que son las soluciones que representan a la teoría de la RG) y los ANs de EGB 4D y de EGB 4D con carga eléctrica. Se estudia el comportamiento de los potenciales efectivos, se describen los efectos de los parámetros de la masa del campo escalar μ , la carga eléctrica Q , el parámetro α y la constante cosmológica Λ sobre las frecuencias de los QNMs del campo escalar y del campo electromagnético. Se encuentran aspectos importantes, como el hecho de que el método de la aproximación WKB no puede ser aplicado sobre un campo escalar masivo o sin masa alrededor del AN AdS con carga eléctrica y en la gravedad EGB 4D debido a una divergencia provocada por $\Lambda < 0$, o también que los resultados de las frecuencias muestran que los ANs AdS con carga eléctrica y en la gravedad EGB 4D son mejores osciladores que los ANs de Schwarzschild, RN, EGB 4D y de EGB 4D con carga eléctrica, sugiriendo por ejemplo, que un AN AdS con carga eléctrica y en la grave-

dad **EGB** 4D tiene una sombra más pequeña que todos estos otros **ANs**. En adición, los resultados obtenidos son comparados entre si y con los previamente publicados por otros autores, revelando evidentes consistencias. En la sección **6**, algunas de las conclusiones más importantes son resumidas y al final, algunas tablas con los resultados de las frecuencias de los **QNMs** del campo escalar y del campo electromagnético son compartidas en los apéndices **A** y **B** de este trabajo, mientras que en el apéndice **C**, se introduce a las aplicaciones de la obtención de las frecuencias de los **QNMs** de un **AN**.

2. Agujero negro AdS cargado eléctricamente en la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet 4D

Las ecuaciones de campo de Einstein fundamentan la RG y corresponden a un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden, las cuales en unidades geometrizadas, tomando a la constante de gravitación universal $G = 1$ y la velocidad de la luz en el vacío $c = 1$ (en todas las ecuaciones del presente trabajo), tienen la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2-1)$$

con $R_{\mu\nu}$ el tensor de curvatura de Ricci, $T_{\mu\nu}$ el tensor de momento-energía (el cual en unidades geometrizadas tienen dimensiones de [longitud⁻²]), R el escalar de curvatura y $g_{\mu\nu}$ el tensor geométrico que describe la métrica del espacio-tiempo [91]. $g_{\mu\nu}$ es adimensional, por lo que tanto R como $R_{\mu\nu}$ tienen dimensiones de [longitud⁻²]. Estas ecuaciones de campo poseen un comportamiento no lineal, por lo tanto sus soluciones no pueden ser superpuestas y usualmente es necesario hacer diversas simplificaciones y suposiciones [91] para encontrarlas. La primera solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein de la teoría de la RG es la bien conocida métrica de Schwarzschild, la cual describe, en una muy buena aproximación, el campo gravitacional en el entorno de un cuerpo esféricamente simétrico y estático [92], como es el caso para los campos creados por algunos objetos astrofísicos, e.g. planetas, estrellas, ANs, etc. [91]. Poco después, se generalizó el espacio-tiempo de Schwarzschild con la solución de Reissner-Nordström (RN) [93,94]. La métrica de RN es una solución que funciona para cuerpos esféricamente simétricos, estáticos y con carga eléctrica. Sus contribuciones a la teoría de los ANs en algunos aspectos pueden considerarse irrelevantes en las situaciones astrofísicas reales debido a que en el mundo real, los ANs con carga eléctrica considerable serían neutralizados rápidamente por la interacción con la materia de su alrededor. Sin embargo, esta propiedad muestra algunas características y efectos adicionales que son útiles en escenarios más generales e interesantes desde un punto de vista teórico. Además, la métrica de RN, como solución propia de la RG, ayuda a comprender la naturaleza del espacio-tiempo y de la gravedad [91].

Por la misma época en la que se encuentra la solución de RN, Einstein modificó sus ecuaciones de campo incluyendo una nueva constante, conocida como la *constante cosmológica*, Λ , con la intención de describir en sus ecuaciones un universo estático. De esta manera, las ecuaciones se reescribirían como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2-2)$$

donde Λ posee dimensiones de $[\text{longitud}^{-2}]$. Einstein desistió de este modelo luego de que se dieran a conocer las observaciones del corrimiento al rojo de galaxias lejanas y la confirmación de la expansión del universo [95]. Por otro lado, las ecuaciones de campo de Einstein con Λ más tarde fundamentarían a las métricas de de Sitter (dS) y Anti-de Sitter AdS, las cuales, son aquellas soluciones maximalmente simétricas (con el mayor número posible de vectores de Killing) de la RG en el vacío en las cuales se incluye a Λ , de manera que esta describiría una curvatura constante intrínseca del espacio-tiempo [96, 97]. La métrica dS corresponde a $\Lambda > 0$, un espacio-tiempo con una curvatura positiva y una presión negativa, mientras que la métrica AdS toma $\Lambda < 0$, describiendo un espacio-tiempo con una curvatura negativa y una presión positiva [96–98]. En particular, la solución AdS en los últimos años ha sido de gran interés por su importante rol en las teorías de gravedad cuántica, e.g. en el contexto de la relación que tiene con la teoría de campos conformes (correspondencia AdS con la teoría de campos conformes) y sus efectos sobre la teoría holográfica de la gravedad [99–101].

Por otro lado, la teoría de gravedad de Lovelock es la generalización natural en dimensiones superiores de la teoría de la RG de Einstein. Allí, la RG es la contribución lineal en términos de la expansión en serie de potencias sobre R , mientras que la contribución cuadrática en curvatura sería la gravedad de tipo GB, aportando dinámicamente en situaciones en que $D \geq 5$ y reproduciendo la RG en el caso particular de $D = 4$ [15, 76–79, 102]. No obstante, también es de interés en las teorías de gravedad modificada en la actualidad y en relación con las teorías de gravedad cuántica, que la RG de Einstein y la gravedad de GB pueden verse como el límite clásico a bajas energías de una teoría de gravedad cuántica, pues estas contribuciones aparecen de forma natural en la acción efectiva bajo el límite de bajas energías en las teorías de cuerdas [77–79, 103]. De esta forma, α , el término de acople de GB, podría interpretarse como una primera corrección cuántica a la RG. El parámetro α es una constante adimensional de acople que se agrega a la acción gravitacional de la RG para incorporar una corrección cuadrática. Este término representa un acercamiento a la teoría de la gravedad cuántica y su estudio puede contribuir a una comprensión más profunda de la gravedad y su relación con la teoría cuántica de campos.

Por lo tanto, considerando las teorías y motivaciones anteriormente mencionadas, es posible encontrar una ecuación de campo modificada, tal que, admita soluciones que describan a los ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB en dimensiones $D \geq 5$, y después, extender este formalismo al caso en que $D = 4$, como se mostrará a continuación.

2.1. Ecuación de campo modificada

Cada una de las teorías de gravedad sobre los ANs a considerar tiene una contribución lagrangiana en el sistema, lo cual se puede evidenciar en los funcionales tensoriales a tener en cuenta dentro de la acción. Por lo tanto, ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB en D dimensiones se rigen a partir de la acción

$$S = S_{EH} + S_{GB} + S_M, \quad (2-3)$$

donde cada una de las contribuciones a esta teoría de gravedad están descritas en la Tabla (2-1), allí se identifica a g como el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$. En la acción de Einstein-Hilbert (EH) de la ecuación (2-5), $\mathcal{L}_{EH} = R - 2\Lambda$, siendo R el escalar de curvatura de Ricci y Λ la constante cosmológica negativa característica del espacio-tiempo AdS, la cual en D dimensiones viene dada por

$$\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2\ell^2}, \quad (2-4)$$

con ℓ conocido como el radio AdS.

Término	Acción
Einstein-Hilbert	$S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^D x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (2-5)$
Gauss-Bonnet	$S_{GB} = \frac{1}{16\pi} \int d^D x \sqrt{-g} (\alpha \mathcal{G}) \quad (2-6)$
Materia	$S_M = \frac{1}{16\pi} \int d^D x \sqrt{-g} (-F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (2-7)$

Tabla 2-1: Términos de las diferentes contribuciones en la acción

La acción S_M describe los campos de materia. En particular, en la ecuación (2-7) la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_M = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, se da en términos del tensor electromagnético de Maxwell

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2-8)$$

para incluir la interacción con la carga eléctrica, recordando que A_μ es el vector cuadripotencial.

En la acción S_{GB} de la ecuación (2-6), α es la constante de acople de GB, con dimensiones de [longitud²] y usualmente se toma como $\alpha > 0$ [75], debido a que se ha comprobado que para $\alpha < 0$ la solución de tipo AN no es válida para distancias pequeñas [4, 64]. El

factor \mathcal{G} que define la densidad lagrangiana \mathcal{L}_{GB} es conocido como el invariante de GB y tiene la forma

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2-9)$$

donde $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ corresponde al tensor de Riemann.

Para obtener la correspondiente ecuación de campo bajo la influencia de la gravedad descrita por la acción S de la ecuación (2-3), se debe aplicar una variación de tal manera que

$$\delta S / \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (2-10)$$

cumpliendo el principio de mínima acción. Procedimiento que se mostrará en las siguientes subsecciones.

2.1.1. Acción del campo de materia

Para obtener la contribución del campo de materia a las ecuaciones de campo, así como en todas las componentes de la acción, se aplica el operador variacional a la densidad lagrangiana \mathcal{L}_M . Sin embargo, se debe tener presente que en las acciones también se encuentra el factor $\sqrt{-g}$ que cumple la función de dar un carácter tensorial a la acción. Además es necesario recordar que, como el interés de la solución es fuera del AN, se tiene

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2-11)$$

que junto a

$$\partial_\mu F^{\nu\sigma} + \partial_\nu F^{\sigma\mu} + \partial_\sigma F^{\mu\nu} = 0 \quad (2-12)$$

forman a las ecuaciones de Maxwell en el vacío en forma covariante. No obstante, para deducir las ecuaciones de campo, la variación se debe realizar con respecto a la métrica en forma contravariante $g^{\mu\nu}$. Reorganizando términos,

$$\delta \left(\sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = \delta \left(\sqrt{-g} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right), \quad (2-13)$$

por lo que

$$\delta \left(\sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = 8\pi \sqrt{-g} \left(F_{\mu\nu} F^{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\alpha} F_{\sigma\beta} F^{\sigma\beta} \right) \delta g^{\mu\alpha}. \quad (2-14)$$

La definición del tensor de momento-energía $T_{\mu\nu}$ de manera implícita sobre la variación de S_M es [104]

$$\delta S_M \equiv -\frac{1}{2} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^D x, \quad (2-15)$$

por lo tanto, comparando a las ecuaciones (2-7) y (2-15) y usando el resultado de la ecuación (2-14), se obtiene que

$$\delta \left(\sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = 8\pi \sqrt{-g} T_{\mu\alpha} \delta g^{\mu\alpha} \quad (2-16)$$

con

$$4\pi T_{\mu\alpha} = \left(F_{\mu\nu} F^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\alpha} F_{\sigma\beta} F^{\sigma\beta} \right). \quad (2-17)$$

De forma general, el campo eléctrico viene dado por

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi, \quad (2-18)$$

con \mathbf{A} el vector potencial magnético y ϕ el potencial eléctrico. Sin embargo, debido a la simetría esférica del sistema, solo se considera al campo eléctrico en dirección radial y además $\mathbf{A} = 0$, por lo que A^μ vendría dado únicamente por la componente

$$A^0 = \phi(r) dt, \quad \text{con} \quad \frac{d\phi}{dr} = -\frac{Q}{r^{D-2}}. \quad (2-19)$$

Es importante tener presente que tanto Q como M , la masa y carga eléctrica del AN respectivamente, se usan en unidades de [longitud], puesto que se utilizan las unidades geometrizadas ($G = c = 1$ y además $4\pi\epsilon_0 = 1$), de tal manera que para recuperar las unidades de masa y carga eléctrica, estos se deben multiplicar por los factores

$$M \rightarrow \frac{G}{c^2} M, \quad \text{y} \quad Q^2 \rightarrow \frac{G}{4\pi\epsilon_0 c^4} Q^2, \quad (2-20)$$

recordando que ϵ_0 corresponde a la permitividad eléctrica del vacío. Luego, si se toma el límite cuando $D \rightarrow 4$ se tiene

$$A^0 = \frac{Q}{r} dt \quad (2-21)$$

y por lo tanto, las componentes

$$F_{01} = -F_{10} = E_r = \frac{Q}{r^2}, \quad (2-22)$$

son las únicas no-nulas dentro de $F_{\mu\nu}$.

2.1.2. Acción de Einstein-Hilbert

La acción de EH, denotada por S_{EH} en la ecuación (2-5), es la acción de la RG en su versión con Λ . Es bien sabido que al variar a S_{EH} con respecto a la métrica $g^{\mu\nu}$, las ecuaciones de movimiento resultantes son las ecuaciones de campo de Einstein con Λ (2-2). Existen diversas formas de proceder con la variación para obtener estas ecuaciones,

pero uno de los acercamientos más utilizados en la literatura es el método de Palatini, en el cual las variaciones se hacen sobre $g^{\mu\nu}$ y $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ de manera independiente [104]. De esta manera,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (2-23)$$

y además

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\alpha \left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^\alpha - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\beta\mu}^\beta \right), \quad (2-24)$$

teniendo en cuenta que este último resultado es válido asumiendo que $\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0$, propiedad reconocida como la compatibilidad de la métrica. Esta condición asegura que el espacio-tiempo sea libre de torsión y además define a la conexión misma $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ en términos de la métrica y sus primeras derivadas [91]. Por lo tanto, usando las ecuaciones (2-23) y (2-24), la variación de la acción de EH resultaría en

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} \left[G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \nabla_\alpha \left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^\alpha - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\beta\mu}^\beta \right) \right] \delta g^{\mu\nu}, \quad (2-25)$$

con

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (2-26)$$

el tensor de Einstein. Sin embargo, como es usual, usando el teorema de la divergencia de Gauss sobre el término de la derivada covariante de la expresión (2-25), este se hace nulo, debido a que es posible tomar a $\delta g^{\mu\nu} = 0$ sobre la superficie de frontera $\partial\mathcal{V}$ [104]. Así se tiene

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} (G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu}. \quad (2-27)$$

Por lo tanto, haciendo cumplir la ecuación (2-10) y teniendo en cuenta la contribución del resultado obtenido para el campo de materia en (2-16), se obtienen las ecuaciones de campo (2-2).

Por otro lado, hay otro método para encontrar las ecuaciones de campo que resulta de gran interés para este trabajo. Se trata de la obtención de las ecuaciones de campo a partir de las propiedades holográficas de las densidades lagrangianas que se encuentran en los términos de las acciones. Las acciones con relaciones holográficas se pueden separar en la suma de un término de volumen y otro de superficie [104–106]. i.e. $S = S_{Vol} + S_{Sup}$. Esta relación resulta de gran utilidad en diversas teorías de gravedad relacionadas con la de este trabajo (como lo son las teorías de gravedad en dimensiones superiores que se mostrarán en la siguiente sección) para determinar las ecuaciones de campo separando los términos de volumen de los de superficie. Para el caso de la acción de EH primero se supone que $S_{EH} = S_R + S_\Lambda$, por lo que, $\mathcal{L}_{EH} = \mathcal{L}^{(R)} + \mathcal{L}^{(\Lambda)}$ con $\mathcal{L}^{(R)} = R$ y $\mathcal{L}^{(\Lambda)} = -2\Lambda$. La variación del segundo término es simplemente

$$\delta S_\Lambda = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} d^4x \delta(\sqrt{-g}2\Lambda) = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} \Lambda g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (2-28)$$

mientras que el escalar de curvatura R , se redefinirá como [104–106]

$$\mathcal{L}^{(R)} = R \equiv Q_\mu^{\nu\rho\sigma} R^\mu_{\nu\rho\sigma}, \quad (2-29)$$

donde se ha introducido a $Q_\mu^{\nu\rho\sigma}$, definido como

$$Q_\mu^{\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left(\delta_\mu^\rho g^{\nu\sigma} - \delta_\mu^\sigma g^{\nu\rho} \right). \quad (2-30)$$

esta cantidad es tal que:

- i) Cumple todas las propiedades de simetría de $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$:

$$Q^{\mu\nu\rho\sigma} = Q^{\mu\sigma\rho\nu} = Q^{\rho\nu\mu\sigma} = -Q^{\nu\mu\rho\sigma} = -Q^{\nu\mu\sigma\rho}. \quad (2-31)$$

- ii) Su divergencia sobre todos los índices cumple:

$$\nabla_\rho Q_\mu^{\nu\rho\sigma} = 0. \quad (2-32)$$

- iii) Es una función de

$$Q_\mu^{\nu\rho\sigma} = Q_\mu^{\nu\rho\sigma}(g^{\mu\nu}, R^\mu_{\nu\alpha\beta}). \quad (2-33)$$

Simplificando $\sqrt{-g}R$, teniendo en cuenta las simetrías de la ecuación (2-31) y la identidad

$$\partial_\mu (\sqrt{-g}) = \sqrt{-g} \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}, \quad (2-34)$$

se obtiene

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}Q_\mu^{\nu\rho\sigma} R^\mu_{\nu\rho\sigma} = 2\sqrt{-g}Q_\mu^{\nu\rho\sigma} \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\rho} + 2\partial_\rho (\sqrt{-g}Q_\mu^{\nu\rho\sigma} \Gamma^\mu_{\nu\sigma}). \quad (2-35)$$

Por consiguiente, la expresión $\sqrt{-g}R$ se puede separar en dos términos: un término de volumen $\mathcal{L}_{Vol}^{(R)}$, que es cuadrático en las primeras derivadas de la métrica, y un término de superficie $\mathcal{L}_{Sup}^{(R)}$, que corresponde a una derivada total. Así, la anterior expresión se puede separar como $\sqrt{-g}R = \mathcal{L}_{Vol}^{(R)} + \mathcal{L}_{Sup}^{(R)}$ con

$$\mathcal{L}_{Vol}^{(R)} \equiv 2\sqrt{-g}Q_\mu^{\nu\rho\sigma} \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\rho}, \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_{Sup}^{(R)} \equiv 2\partial_\rho (\sqrt{-g}Q_\mu^{\nu\rho\sigma} \Gamma^\mu_{\nu\sigma}). \quad (2-36)$$

Despejando a $\mathcal{L}_{Vol}^{(R)}$ y aplicando el variacional se tiene que

$$\delta (\mathcal{L}_{Vol}^{(R)}) = \delta (\sqrt{-g}g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) - \delta \mathcal{L}_{Sup}^{(R)}. \quad (2-37)$$

Operando el primer término de la derecha de la anterior expresión este se expande como

$$\delta (\sqrt{-g}g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta (\sqrt{-g}). \quad (2-38)$$

Haciendo uso de la identidad de Jacobi para determinantes y teniendo en cuenta que $g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, la expresión $\delta(\sqrt{-g})$ se reescribe como

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}). \quad (2-39)$$

Utilizando el resultado anterior, la ecuación (2-37) se puede simplificar en

$$\delta(\mathcal{L}_{Vol}^{(R)}) = \sqrt{-g}G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} - \delta\mathcal{L}_{Sup}^{(R)}. \quad (2-40)$$

Luego, si se reescriben los términos finales en la forma

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} - \delta\mathcal{L}_{Sup}^{(R)} = -\partial_\rho(\sqrt{-g}M_{\mu\nu}^\rho\delta g^{\mu\nu}) \quad (2-41)$$

con

$$M_{\mu\nu}^\rho = 2g_{\beta\lambda}Q_\eta^{\beta\rho\sigma}\Gamma_{\beta\sigma}^\eta\left(\delta_\mu^\beta\delta_\nu^\lambda - \frac{1}{2}g^{\beta\lambda}g_{\mu\nu}\right), \quad (2-42)$$

la expresión (2-40) se convierte en

$$\delta(\mathcal{L}_{Vol}^{(R)}) = \sqrt{-g}G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \partial_\rho(\sqrt{-g}M_{\mu\nu}^\rho\delta g^{\mu\nu}). \quad (2-43)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que la variación de la acción volumétrica es

$$\delta S_{Vol} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} d^4x \delta(\mathcal{L}_{Vol}^{(R)}), \quad (2-44)$$

reemplazando en δS_{Vol} lo obtenido en la ecuación (2-43), y nuevamente, aplicando el teorema de la divergencia de Gauss sobre el segundo término de la derecha y como $\delta g^{\mu\nu} = 0$ en la superficie de frontera $\partial\mathcal{V}$, se deduce que

$$\delta S_{Vol} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g}G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (2-45)$$

De modo que, los resultados de las ecuaciones (2-28) y (2-45) son consistentes con lo obtenido por el método de Palatini de la ecuación (2-27) y retornarían también a las ecuaciones de campo (2-2) de la RG.

2.1.3. Acción de Einstein-Gauss-Bonnet y ecuación de campo

Si la gravedad se entiende como una teoría de baja energía efectiva, i.e. considerando solo escalas de energía muy bajas en comparación con las implicadas en las partículas subatómicas e ignorando las interacciones cuánticas, su acción se puede describir

mediante una expansión en serie de potencias de R . De esta forma, $Q_\mu^{\nu\rho\sigma}$ se expresa como [104, 105]

$$Q_\mu^{\nu\rho\sigma} = Q_\mu^{(0)\nu\rho\sigma} + \alpha Q_\mu^{(1)\nu\rho\sigma} + \beta Q_\mu^{(2)\nu\rho\sigma} + \dots \quad (2-46)$$

siendo α y β constantes de acoplamiento. Los primeros 2 tensores de $Q_\mu^{\nu\rho\sigma}$ que cumplen las propiedades i), ii) y iii) de las ecuaciones (2-31), (2-32) y (2-33) respectivamente, son

$$Q_\mu^{(0)\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\delta_\mu^\rho g^{\nu\sigma} - \delta_\mu^\sigma g^{\nu\rho}), \quad (2-47)$$

i.e. el mismo que se definió para la acción de EH en la ecuación (2-30), y

$$Q_\mu^{(1)\nu\rho\sigma} = R^{\mu\nu\alpha\beta} - G^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + G^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} + R^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - R^{\nu\beta} g^{\mu\alpha}, \quad (2-48)$$

el cual da como resultado \mathcal{L}_{GB} al contraerse con el tensor de Riemann. El escalar resultante corresponde al invariante de GB denotado como \mathcal{G} en la acción S_{GB} de la ecuación (2-6) y que fue introducido en la ecuación (2-9), i.e.

$$Q_\mu^{(1)\nu\rho\sigma} R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \mathcal{L}_{GB} = \mathcal{G}. \quad (2-49)$$

Por otra parte, la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{(m)} = \frac{1}{m} P^\mu_{\nu\alpha\beta} R^\mu_{\nu\alpha\beta}, \quad (2-50)$$

es conocida como la *densidad lagrangiana de Lanczos–Lovelock*. En $\mathcal{L}_{(m)}$ se ha introducido a $P^\mu_{\nu\alpha\beta}$ de manera tal que [104, 105]

$$P^\mu_{\nu\alpha\beta} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial R^\mu_{\nu\alpha\beta}}, \quad (2-51)$$

y además

$$P^{\mu\nu\alpha\beta} = m Q^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2-52)$$

de modo que $P^{\mu\nu\alpha\beta}$ cumple las mismas propiedades de $Q^{\mu\nu\alpha\beta}$. Consecuentemente, a diferencia del método de Palatini, en este acercamiento la variación no se aplicará en función de las conexiones, si no con respecto a la dependencia de S con $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$. Así, para $\mathcal{L}_{(m)} = \mathcal{L}_{(m)}(g^{\mu\nu}, R^\mu_{\nu\alpha\beta})$ se tiene que

$$\delta (\mathcal{L}_{(m)} \sqrt{-g}) = \left(\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}_{(m)}}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} + \left(\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}_{(m)}}{\partial R^\mu_{\nu\alpha\beta}} \right) \delta R^\mu_{\nu\alpha\beta}. \quad (2-53)$$

Remplazando la definición de $P^\mu_{\nu\alpha\beta}$, se obtiene

$$\delta (\mathcal{L}_{(m)} \sqrt{-g}) = \left(\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}_{(m)}}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} P^\mu_{\nu\alpha\beta} \delta R^\mu_{\nu\alpha\beta}. \quad (2-54)$$

Usando las simetrías posibles de $P_\mu^{\nu\alpha\beta}$ y expandiendo a $\delta R^\mu_{\nu\alpha\beta}$ en términos de $g^{\mu\nu}$ y sus derivadas, la siguiente expresión se puede escribir como

$$P_\mu^{\nu\alpha\beta} \delta R^\mu_{\nu\alpha\beta} = 2\nabla_\alpha \left(P^{\rho\nu\alpha\beta} \nabla_\nu \delta g_{\beta\rho} \right) - 2\nabla_\nu \left(\delta g_{\beta\rho} \nabla_\alpha P^{\rho\nu\alpha\beta} \right) + 2\delta g_{\beta\rho} \nabla_\nu \nabla_\alpha P^{\rho\nu\alpha\beta}, \quad (2-55)$$

donde se ha asumido a un espacio-tiempo libre de torsión ($\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0$). Entonces, aplicando la propiedad de la ecuación (2-31), pero sobre $P_\mu^{\nu\alpha\beta}$, el resultado es

$$P_\mu^{\nu\alpha\beta} \delta R^\mu_{\nu\alpha\beta} = 0, \quad (2-56)$$

de manera que

$$\delta \left(\mathcal{L}_{(m)} \sqrt{-g} \right) = \left(\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}_{(m)}}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (2-57)$$

La variación sobre todas las contribuciones a la acción S de la ecuación (2-3), se pueden escribir como

$$\delta S_{Total} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} d^D x \left[\delta \left(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{EH} + \sqrt{-g} \mathcal{L}_{GB} \right) - \delta \left(\sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \right]. \quad (2-58)$$

Remplazando las ecuaciones (2-16) y (2-57) en la anterior y haciendo cumplir el principio de mínima acción de la ecuación (2-10) se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{EH} + \sqrt{-g} \mathcal{L}_{GB} \right)}{\partial g^{\mu\nu}} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2-59)$$

Simplificando al usar la definición de $P_\nu^{\gamma\alpha\beta}$, el resultado anterior se reescribe como

$$\left(P_\nu^{\gamma\alpha\beta} + P_\nu^{\gamma\alpha\beta} \right) R_{\mu\gamma\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{EGB}) g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2-60)$$

donde se ha denotado a la densidad lagrangiana de EGB como $\mathcal{L}_{EGB} = \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{GB}$. Entonces, de manera general

$$P_\nu^{\gamma\alpha\beta} R_{\mu\gamma\alpha\beta} = Q_\nu^{(0)\gamma\alpha\beta} R_{\mu\gamma\alpha\beta} + 2\alpha Q_\nu^{(1)\gamma\alpha\beta} R_{\mu\gamma\alpha\beta} + \dots \quad (2-61)$$

Así, retomando las definiciones de las ecuaciones (2-47) y (2-48) y las simetrías de $R^{\mu\nu\rho\sigma}$ el primer término del lado derecho de la ecuación (2-61) se puede escribir como

$$Q_\nu^{(0)\gamma\alpha\beta} R_{\mu\gamma\alpha\beta} = R_{\mu\nu} \quad (2-62)$$

y el segundo término como

$$2\alpha Q_\nu^{(1)\gamma\alpha\beta} R_{\mu\gamma\alpha\beta} = 2\alpha \left(R R_{\mu\nu} - 2R_\mu^\alpha R_{\nu\alpha} - 2R_{\mu\gamma\nu\alpha} R^{\gamma\alpha} + R_{\mu\gamma\alpha\beta} R_\nu^{\gamma\alpha\beta} \right). \quad (2-63)$$

Remplazando las densidades lagrangianas \mathcal{L}_{EH} y \mathcal{L}_{GB} y usando las ecuaciones (2-62) y (2-63) en la ecuación (2-60), finalmente se obtiene

$$R_{\mu\nu} + 2\alpha \left(RR_{\mu\nu} - 2R_{\mu}^{\alpha} R_{\nu\alpha} - 2R_{\mu\gamma\nu\alpha} R^{\gamma\alpha} + R_{\mu\gamma\alpha\beta} R_{\nu}^{\gamma\alpha\beta} \right) - \frac{1}{2} \left(R - 2\Lambda + R^2 - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \right) g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2-64)$$

Estas son las ecuaciones de campo con Λ en la gravedad de EGB en $D \geq 5$ dimensiones y con fuente electromagnética. Es usual reescribir este último resultado como

$$G_{\mu\nu}^{(\Lambda)} + \alpha G_{\mu\nu}^{(LL)} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2-65)$$

donde $T_{\mu\nu}$ tiene una forma dada por la ecuación (2-17), con

$$G_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2-66)$$

que contiene al tensor de Einstein más el término que tiene como factor a la constante cosmológica Λ , y con

$$G_{\mu\nu}^{(LL)} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(R_{\rho\sigma\beta\gamma} R^{\rho\sigma\beta\gamma} - 4R_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma} + R^2 \right) + 2RR_{\mu\nu} - 4R_{\mu\rho} R_{\nu}^{\rho} - 4R_{\mu\rho\nu\sigma} R^{\rho\sigma} + 2R_{\mu\rho\sigma\beta} R_{\nu}^{\rho\sigma\beta}, \quad (2-67)$$

conocido como el *tensor geométrico de Lanczos-Lovelock* [11, 82].

2.2. Solución de agujero negro en 4 dimensiones

La gravedad de tipo EGB describe correcciones cuadráticas a los tensores de curvatura desde la teoría gravitacional de Lovelock, pero también se obtiene en el límite de bajas energías de la teoría de cuerdas, en la cual α se puede interpretar como la tensión inversa de la cuerda y se define solo con valores positivos [4]. En realidad, la solución de AN para la teoría EGB ya ha sido deducida desde diversas teorías de gravedad modificada y usando diferentes acercamientos. Fue obtenida inicialmente en 1985 por Boulware y Deser en [77] para los casos en que $D \geq 5$, debido a que el término de GB no contribuye a la dinámica gravitacional cuando $D = 4$. Luego, Tomozawa en el 2011 [84], mediante un procedimiento de regularización, encontró que podría existir, desde una perspectiva cuántica, una contribución no trivial del término de GB al espacio-tiempo en el caso en que $D = 4$. Con ello prueba que la gravedad bajo este modelo tiene un comportamiento repulsivo a cortas distancias debido a estas correcciones cuánticas. Más tarde en 2013, Cognola et al. [85], mediante otro proceso de regularización a la gravedad EGB, lograron

realizar una reducción dimensional bajo la formulación lagrangiana, encontrando nuevamente la solución de tipo AN para el caso en que $D = 4$. En el 2020, Glavan y Lin [64], obtuvieron esta misma solución de AN en la gravedad EGB 4D de una manera más simple al proponer un reescalamiento de α , el parámetro de acoplamiento de GB, de manera que se obtuviese una contribución a la dinámica gravitacional en el caso en que $D = 4$. No obstante, sobre estos procesos de regularización, se han planteado propuestas y formulaciones alternativas que han dado con la misma solución de AN y además se han realizado discusiones y críticas enfocadas en la consistencia de estas con la RG y con fuertes fundamentos teóricos y teoremas como los propuestos en la gravedad de Lovelock [4, 65–68, 74, 78–80]. De todas formas, más tarde se llevaron a cabo varios estudios consecutivos que también han obtenido una solución similar, lo que ha aclarado que esta solución no es realmente nueva. De hecho, se puede deducir esta y otras soluciones de tipo AN similares a partir de diferentes formalismos bien definidos y teorías de gravedad modificada. Esto muestra, sin lugar a dudas, que esta solución de AN ha sido de gran interés en los últimos años.

A continuación, se ilustrará como se obtiene la contribución dinámica de la teoría de gravedad de EGB 4D, realizada en [64]. La ecuación de campo (2-65) describe ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB para $D \geq 5$. De acuerdo con el teorema de Lovelock, la gravedad de GB solo se introduce en los casos en que se considera $D > 4$, por que según este, para menores dimensiones, la acción de GB no contribuiría dinámicamente [9]. Por esta razón, recientemente se propuso reescalar el parámetro α [64] de tal manera que este factor en la acción de GB de la ecuación (2-6) cambiaría mediante

$$\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{D-4}. \quad (2-68)$$

Considerando este reescalamiento, la acción de la ecuación (2-3) se puede reescribir de la siguiente manera [6]

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^D x \sqrt{-g} \left(R - 2\Lambda + \frac{\alpha}{D-4} \mathcal{G} - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (2-69)$$

mientras que la ecuación de campo (2-65) se reescribiría como

$$G_{\mu\nu}^{(\Lambda)} + \frac{\alpha}{D-4} G_{\mu\nu}^{(LL)} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2-70)$$

Una manera sencilla de notar la contribución de este reescalamiento, es encontrando la ecuación de campo mixta y su traza,

$$G_{\mu}^{\mu(\Lambda)} + \frac{\alpha}{D-4} G_{\mu}^{\mu(LL)} = 8\pi T_{\mu}^{\mu}. \quad (2-71)$$

Como $F^\mu{}_\mu = 0$, entonces $T^\mu{}_\mu = 0$. Adicionalmente,

$$G^\mu{}_\mu^{(\Lambda)} = \frac{2-D}{2}R + D\Lambda \quad (2-72)$$

y el término de la contribución de GB es

$$\frac{\alpha}{D-4}G^\mu{}_\mu^{(LL)} = -\frac{\alpha}{2}\mathcal{G}. \quad (2-73)$$

De esta forma, la ecuación (2-71) resulta en

$$\frac{2-D}{2}R + D\Lambda - \frac{\alpha}{2}\mathcal{G} = 0 \quad (2-74)$$

Gracias al reescalamiento, esta última expresión no depende del factor $D-4$. Por lo tanto, tomando el límite cuando $D \rightarrow 4$, la ecuación de campo mixta toma la forma

$$R = 4\Lambda - \frac{\alpha}{2}\mathcal{G}, \quad (2-75)$$

mostrando una primera contribución en el escalar de curvatura R . Lo novedoso del reescalamiento es que el resultado de la ecuación (2-73) no es nulo, como si lo sería en el caso del cálculo de la ecuación de campo mixta para la ecuación de campo sin reescalar (2-65).

Es importante destacar que varios estudios han demostrado que la propuesta de reescalar el parámetro de acoplamiento de GB es incorrecta. Esto se debe a que la acción lagrangiana de la ecuación (2-69) diverge y no está bien definida en el límite de 4 dimensiones, ignorando el teorema de Lovelock [65–68]. A pesar de esto, se ha descubierto que la misma solución se puede obtener a partir de diferentes formalismos y teorías de gravedad modificada que sí están bien definidos y que inclusive algunas llevan a la misma expresión de la ecuación (2-75). Para obtener versiones coherentes de la teoría de las soluciones de ANs de EGB 4D, se han aplicado procesos de regularización alternativos, como nuevas teorías escalares-tensoriales a partir de regularizaciones conformes [72, 73], la reducción regularizada de Kaluza-Klein [71] y otros enfoques relacionados con teorías de gravedad como las semi-clásicas o de dimensiones superiores [68–70, 74].

2.2.1. Métrica

La ecuación (2-75) admite soluciones con contribuciones dinámicas por parte de α para los ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB en el caso en que $D = 4$. La métrica que describe a el espacio-tiempo de estas soluciones, se expresa como una

solución de tipo AN generalizado estático y esféricamente simétrico dado por el elemento de línea

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{1}{f} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2, \quad (2-76)$$

donde $f = f(r)$ y el factor $d\Omega_{D-2}^2$ puede entenderse como el elemento de medida diferencial en una hipersuperficie esférica de dimensión $D - 2$. Por ejemplo, en $D=4$ se tiene $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Sobre este elemento de línea, la componente temporal es negativo debido a la signatura $(-, +, +, +)$, la cual se conservará igual para todos los cálculos mostrados en el presente trabajo.

La métrica del espacio-tiempo en el exterior de los ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 4D, que satisface la ecuación de campo (2-70), viene dada por [6]

$$f_{\pm}^{(AdS-RN-EGB)} = f_{\pm} = f_{\pm}(r) = 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left[1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha \left(\frac{2M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} + \frac{\Lambda}{3} \right)} \right], \quad (2-77)$$

en donde puede notarse que existen dos posibles ramas de la solución. Asintóticamente, cuando $r \rightarrow \infty$, estas soluciones tienen un comportamiento de la forma

$$f_{\pm}^{(AdS-RN-EGB)} \approx 1 \pm \frac{2M}{r\sqrt{1 + \frac{4\Lambda\alpha}{3}}} \mp \frac{Q^2}{r^2\sqrt{1 + \frac{4\Lambda\alpha}{3}}} + \frac{r^2}{2\alpha} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\Lambda\alpha}{3}} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (2-78)$$

La solución de signo positivo, f_+ , corresponde a un AN con masa M negativa y una carga Q imaginaria, mientras que la solución con signo negativo f_- es la de un AN con masa M positiva y una carga Q real [6]. Evidentemente, la solución negativa, f_- , es aquella en la cual se reproducen las soluciones de la RG en el caso límite en que $\Lambda \rightarrow 0$. Por esta razón, de aquí en adelante solo se usará esta solución, denotándola como $f_- = f^{(AdS-RN-EGB)}$.

En la Figura (2-1) se muestra el comportamiento de la función $f_- = f^{(AdS-RN-EGB)}$ para distintos valores de Λ , mostrando cómo este parámetro no afecta al potencial gravitacional significativamente a distancias cortas (i.e. cerca de la singularidad). Sin embargo, es importante notar que el horizonte de eventos si se ve corregido. En la Figura (2-1) y en todas las Figuras restantes del presente trabajo se tomará a $M = 1$ [longitud] por simplicidad.

Al incrementar el valor de Λ , el horizonte de eventos, r_+ , también crece. Por otro lado, el horizonte interno (horizonte de Cauchy), r_- , correspondiente a la raíz real más corta de $f_- = 0$, casi no cambia al aumentar el valor de Λ .

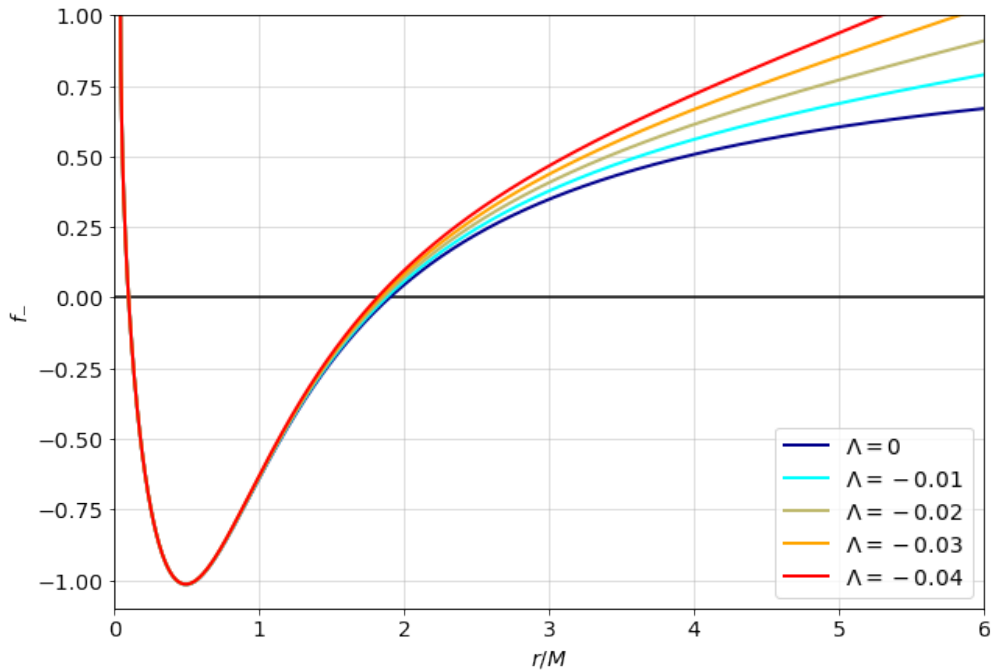


Figura 2-1: Función f_- para diferentes valores de Λ , con $\alpha = 0.1$ y $Q = 0.3$.

En la Figura (2-2) se muestra cuál es el comportamiento de f_- (en el caso en el que $\Lambda = 0$ por simplicidad) para diferentes valores de Q y de α , evidenciándose la forma en que se corrige la ubicación de los horizontes.

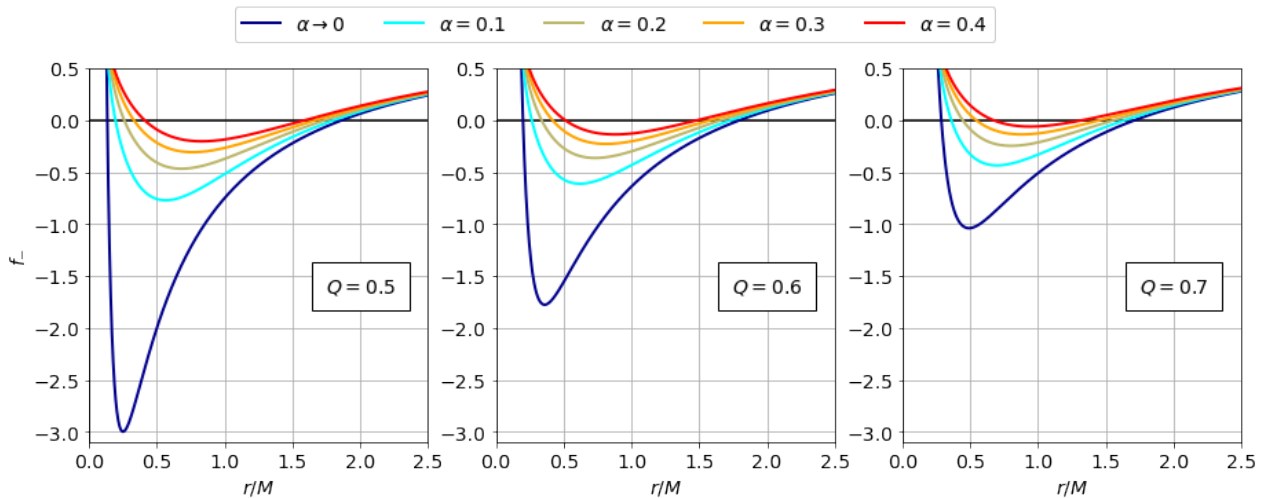


Figura 2-2: Función f_- para diferentes valores de Q y de α (con $\Lambda = 0$).

A partir de la Figura (2-2) se evidencia que tanto Q como α corrigen monótonamente a las

soluciones. A mayores valores posibles de Q , la función f_- y el horizonte de Cauchy crecen, mientras que el horizonte de eventos se hace pequeño. Este mismo comportamiento es evidenciado cuando se consideran mayores valores de α .

Algunos de los invariantes más importantes de la solución pueden escribirse en términos de la función f_- . Por ejemplo, el escalar de curvatura R es

$$R = \frac{2}{r^2} (1 - f_- - 2r f'_-) - f''_- \quad (2-79)$$

De igual manera, el escalar de Kretschmann \mathcal{K} toma la forma

$$\mathcal{K} = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{4}{r^4} \left[(1 - f_-)^2 + r^2 (f'_-)^2 \right] + (f''_-)^2, \quad (2-80)$$

y además, el invariante \mathcal{G} corresponde a

$$\mathcal{G} = \frac{4}{r^2} \left[(f_- - 1) f''_- + (f'_-)^2 \right], \quad (2-81)$$

con

$$f'_- = \frac{2}{r} \left(\frac{3Mr - 2Q^2}{r^2 + 2\alpha - 2\alpha f_-} - 1 + f_- \right) \quad (2-82)$$

y

$$f''_- = \frac{1}{r} \left(\frac{6M}{r^2 + 2\alpha - 2\alpha f_-} + f'_- + \frac{4(2Q^2 - 3Mr)(r - \alpha f'_-)}{(r^2 + 2\alpha - 2\alpha f_-)^2} \right). \quad (2-83)$$

Como es de esperarse, no todos los valores de Q y de α admiten soluciones de ANs válidos. Existen solo ciertos rangos posibles en los cuales estos parámetros pueden dar lugar a soluciones que tengan sentido físico. Para comprender mejor esta afirmación, en la sección (2.2.2) se discutirán estas restricciones para los ANs cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 4D.

2.2.2. Horizontes

La función $f_- = f^{(AdS-RN-EGB)}$ de la ecuación (2-77) contiene la información geométrica de la solución del AN. Las raíces de $f_-(r) = 0$, indican la presencia de una singularidad en el espacio-tiempo, la cual puede ser clasificada como esencial o no esencial. Las singularidades esenciales son aquellas en las que ni la RG ni otras teorías son suficientes para proporcionar una descripción adecuada de la física en esa región. En cambio, las singularidades no esenciales pueden ser entendidas teóricamente y poseen un significado físico claro, como los horizontes de un AN. En este caso, para $f_-(r) = 0$, existen

cuatro posibles raíces, las cuales son debidas a singularidades no esenciales. De estas, dos son raíces complejas, las cuales surgen de considerar que $\Lambda \neq 0$ y proporcionan las dimensiones del universo observable en el espacio-tiempo dS (Si $\Lambda > 0$, $Q \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$ y $M \rightarrow 0$). Además, existen dos raíces reales, hay un horizonte (interno) de Cauchy en $r = r_-$ y un horizonte de eventos en $r = r_+$. Por su complejidad y considerable extensión, las expresiones matemáticas generales para estas cuatro raíces no se mostrarán. No obstante, la ubicación de los horizontes interno y de eventos del AN de la solución f_- , para diferentes valores de Λ , se pueden observar en la Figura (2-1) y en la Tabla (2-2).

Λ	Horizonte interno r_-	Horizonte de eventos r_+
0	0.1000000	0.1900000
-0.01	0.1000002	1.8767265
-0.02	0.1000004	1.8550198
-0.03	0.1000006	1.8346833
-0.04	0.1000007	1.8155554

Tabla 2-2: Horizontes interno y de eventos de f_- para diferentes valores de Λ (con $M = 1$, $Q = 0.3$ y $\alpha = 0.1$).

Los dos horizontes que existen en el caso en que $\Lambda = 0$ están localizados en

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - \alpha}. \quad (2-84)$$

Estos corresponden a los horizontes de los ANs cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 4D. El comportamiento de r_{\pm} se muestran en la Figura (2-3) para diferentes valores de Q y de α . Allí se evidencian las correcciones monótonas sobre r_{\pm} . Las curvas continuas corresponden a r_+ mientras que las curvas punteadas representan a r_- .

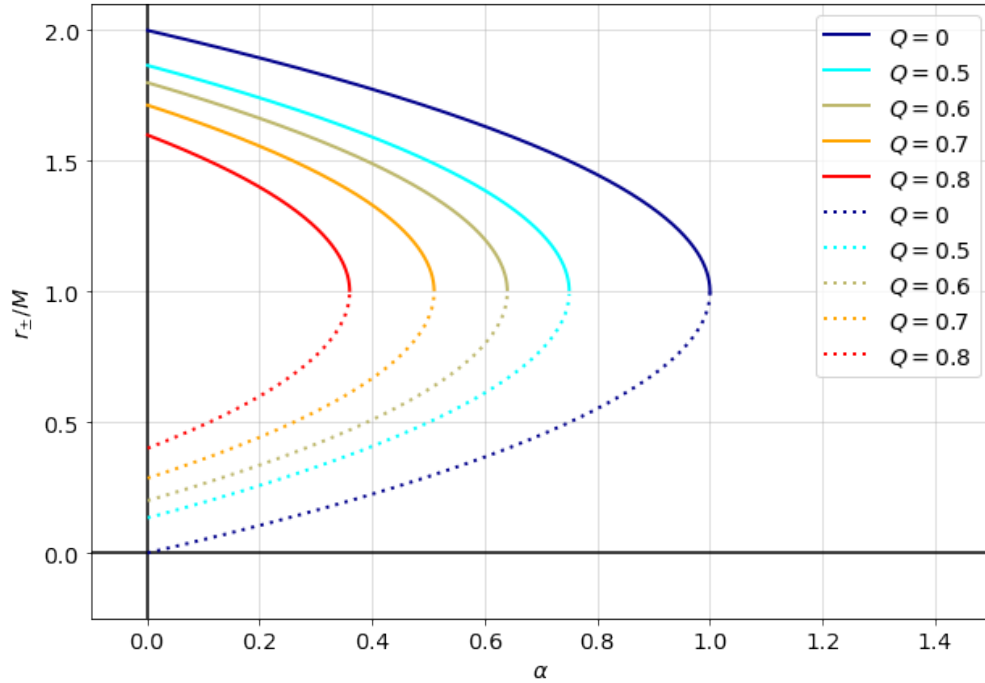


Figura 2-3: Variación de r_{\pm} con respecto a α y para diferentes valores de Q .

De la figura es claro que, a mayores valores de α y de Q , el valor de r_+ disminuye mientras que r_- aumenta. Así, es posible obtener un valor adecuado de los parámetros α y Q para los cuales r_- y r_+ se convierten en un solo horizonte degenerado (con $r_- = r_+ = M$). Al tener un horizonte degenerado, la solución se denomina de tipo AN extremo. En el caso de los ANs cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 4D, la degeneración del horizonte se produce cuando el discriminante de la ecuación (2-84) es igual a cero, i.e. se presenta cuando

$$M = M_{ext} = \sqrt{Q^2 + \alpha}. \quad (2-85)$$

Los ANs extremos son de particular interés teórico debido a que presentan propiedades como una gravedad superficial igual a cero en el horizonte y una entropía nula [107]. Los 3 posibles escenarios de f_- con respecto a los valores M y M_{ext} son expuestos en la Figura (2-4), donde se evidencia que en el caso en que $M = M_{ext}$, la solución f_- tiene una sola raíz real (correspondiente al horizonte degenerado).

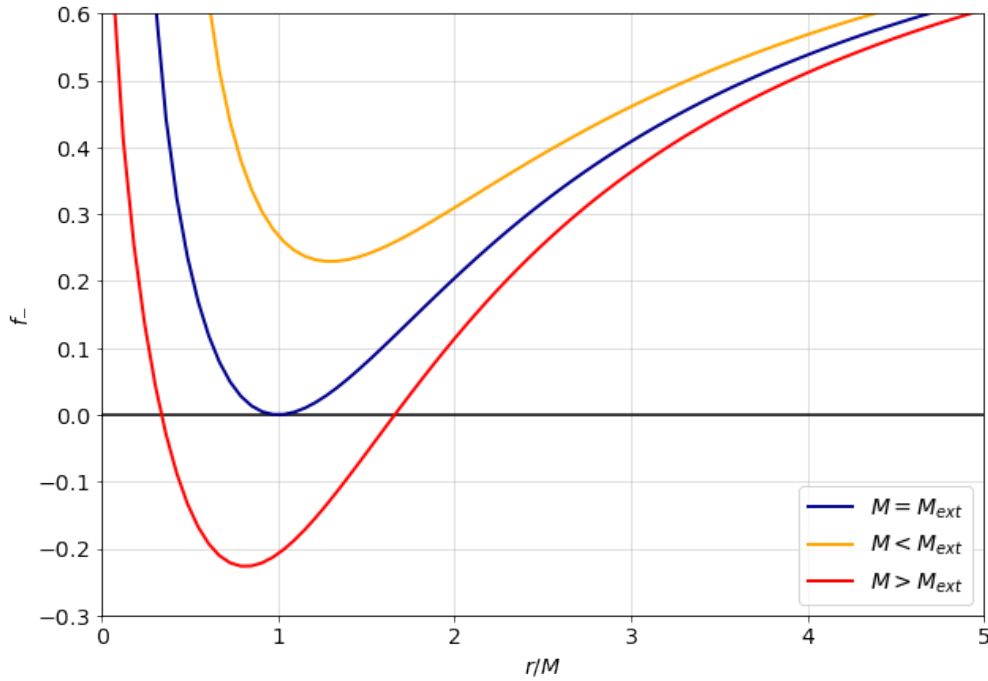


Figura 2-4: Función f_- para los casos posibles entre M y M_{ext} .

Cuando $M > M_{ext}$ se obtienen las soluciones de ANs usuales, con dos raíces reales representando los dos horizontes, descritos por la ecuación (2-84). Tomando $M = 1$ [longitud] y debido a que $M > M_{ext}$, α toma valores en el rango

$$0 < \alpha \leq 1 - Q^2. \quad (2-86)$$

De aquí es claro que cuando $Q \rightarrow 1$, el parámetro $\alpha \rightarrow 0$. Por otra parte, en el caso en que $M < M_{ext}$ se tienen dos raíces complejas, representando lo que se conoce como una singularidad desnuda, i.e. un objeto completamente colapsado sin horizontes. Este caso no representa a una solución de tipo AN válida, ya que las singularidades desnudas no representan a un espacio-tiempo globalmente hiperbólico (Hipótesis del Censor Cósmico).

2.3. Relación con otras teorías de gravedad

La ecuación de campo de Einstein se generalizó en la ecuación de campo modificada de la expresión (2-70). La teoría de gravedad que se estudia en el presente trabajo, EGB 4D con Λ y con fuente electromagnética, es más global que la RG, ya que contiene a las ecuaciones de campo de Einstein como un caso límite particular (cuando $\alpha = 0$). El

espacio-tiempo en el exterior de los ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 4D de la ecuación (2-77), de manera similar, contiene a varias soluciones de ANs como casos límites particulares y también se relaciona con otros ANs más generales. En ese sentido, los resultados arrojados por la teoría de gravedad de este trabajo se pueden comparar con muchas otras teorías de gravedad modificada, entre las cuales algunas de las más relevantes se ilustrarán en la siguientes secciones.

2.3.1. Casos límites particulares

La solución de los ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 4D, presentada en la ecuación (2-77), contiene diversos ANs como casos límites particulares, los cuales se presentan en los siguientes escenarios:

■ i) Agujero negro de Schwarzschild

Con $Q \rightarrow 0$, $\Lambda \rightarrow 0$ y $\alpha \rightarrow 0$, $f^{(AdS-RN-EGB)}$ retorna al AN de Schwarzschild $f^{(Sch)}$ con la forma

$$f^{(Sch)} = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (2-87)$$

Conocida como la primera solución a las ecuaciones de campo de Einstein, (2-1). En esta métrica $R_{\mu\nu} = 0$ y $R = 0$ y además, $\mathcal{K} = \mathcal{G} = 48M^2/r^6$. La métrica de este AN posee dos raíces reales: $r = 0$ que corresponde a una singularidad esencial y $r_s = 2M$, conocido como el radio de Schwarzschild, es la distancia correspondiente al horizonte de eventos. En la Figura (2-5), se muestra el comportamiento de $f^{(Sch)}$, evidenciando el valor de r_s .

Dos de las trayectorias más interesantes para una partícula de prueba en los alrededores de esta clase de AN son: la órbita circular estable más interna o *Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)* para partículas masivas y la órbita circular más interna para los fotones (esfera de fotones). Para el AN de Schwarzschild, la órbita ISCO se encuentra en un radio de $r_{ISCO} = 6M$, mientras que la esfera de fotones se encuentra a una distancia igual a $r_{ef} = 3M$.

■ ii) Agujero negro de Reissner–Nordström

Con $\Lambda \rightarrow 0$ y $\alpha \rightarrow 0$ en la solución f_- , se obtiene al AN de Reissner–Nordström (RN), denotado como $f^{(RN)}$,

$$f^{(RN)} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (2-88)$$

Esta métrica describe a los ANs cargados eléctricamente de la teoría de la RG. Esta satisface $R = 0$ pero, a diferencia de la solución de Schwarzschild, $\mathcal{K} \neq \mathcal{G}$ debido a que $R_{\mu\nu} \neq 0$. Por ello,

$$\mathcal{K} = \frac{8}{r^8} (7Q^4 - 12MQ^2r + 6M^2r^2) \quad (2-89)$$

y

$$\mathcal{G} = \frac{8}{r^8} (5Q^4 - 12MQ^2r + 6M^2r^2) \quad (2-90)$$

Esta solución tiene tres raíces reales: una en $r = 0$, describiendo la singularidad esencial, y dos correspondientes al horizonte interno de Cauchy r_- y al horizonte de eventos r_+ , los cuales vienen dados por

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (2-91)$$

En la Figura (2-5), cuando $f^{(RN)} = 0$, se pueden evidenciar los dos horizontes, r_{\pm} , para el AN de RN.

■ iii) Agujero negro de Einstein-Gauss-Bonnet 4D

Con $Q \rightarrow 0$ y $\Lambda \rightarrow 0$, $f^{(AdS-RN-EGB)}$ se convierte en la solución de AN de EGB 4D, $f^{(EGB)}$, dado por

$$f^{(EGB)} = 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8M\alpha}{r^3}} \right). \quad (2-92)$$

Para esta solución, el escalar de curvatura es

$$R = -\frac{6}{\alpha} + \frac{6(r^3 + 2M\alpha)(r^3 + 10M\alpha)\sqrt{1 + \frac{8M\alpha}{r^3}}}{\alpha(r^3 + 8M\alpha)^2}, \quad (2-93)$$

mientras que el escalar de Kretschmann toma la forma

$$\mathcal{K} = \frac{12}{\alpha^2} - \frac{12(r^3 + 2M\alpha)(r^3 + 10M\alpha)}{r^6\alpha^2\left(1 + \frac{8M\alpha}{r^3}\right)^{3/2}} + \frac{5184M^4\alpha^2}{(r^4 + 8Mr\alpha)^3}. \quad (2-94)$$

Además, el invariante de GB en este caso es

$$\mathcal{G} = \frac{48Mr^3\alpha \left(-3 + 2\sqrt{1 + \frac{8M\alpha}{r^3}}\right) + 12r^6 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8M\alpha}{r^3}}\right) - 240M^2\alpha^2}{r^3\alpha^2 (r^3 + 8M\alpha) \sqrt{1 + \frac{8M\alpha}{r^3}}}. \quad (2-95)$$

Como se evidencia en la Figura (2-5), cuando $r \rightarrow 0$ se tiene que $f^{(EGB)} = 1$, reproduciendo al espacio-tiempo plano de Minkowski. Sin embargo, como se muestra en la Figura (2-6), el escalar de Kretschmann \mathcal{K} presenta una singularidad esencial en $r = 0$. La interpretación de estos resultados muestra que esta solución representa un AN “prácticamente libre” del problema de la singularidad, debido a que la interacción gravitacional es repulsiva a distancias pequeñas (de manera similar a $f^{(RN)}$, $f^{(RN-EGB)}$ y $f^{(AdS-RN-EGB)}$ en la Figura (2-5)) y en consecuencia, las partículas que caen a este AN nunca llegarían a la singularidad esencial [6] [64]. $f^{(EGB)}$ posee dos raíces reales en su solución, correspondientes a un horizonte interno de Cauchy r_- y un horizonte de eventos r_+ , dados por

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - \alpha}. \quad (2-96)$$

La ubiación de estos horizontes se muestran en la Figura (2-5).

■ iv) Agujero negro de Einstein-Gauss-Bonnet 4D con carga eléctrica

Con $\Lambda \rightarrow 0$ retorna a la solución denotada por $f^{(RN-EGB)}$ y representa a un ANs cargado eléctricamente en la gravedad de EGB 4D. Esta función tiene la forma

$$f^{(RN-EGB)} = 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left[1 - \sqrt{1 + 4\alpha \left(\frac{2M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} \right)} \right]. \quad (2-97)$$

No se presentan explícitamente los invariantes de curvatura debido a que son muy extensos. Sin embargo, se tiene que $R \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{G}$ y divergen en $r = 0$. No obstante, esta solución es libre del problema de la singularidad debido al comportamiento repulsivo de la gravedad a distancias cortas. Posee dos raíces reales, las cuales corresponden a los horizontes descritos por la ecuación (2-84).

■ v) Espacio-tiempo Anti-de Sitter

Con $M \rightarrow 0$, $Q \rightarrow 0$ y $\alpha \rightarrow 0$, $f^{(AdS-RN-EGB)}$ retorna a la métrica AdS denotada por $f^{(AdS)}$ y tiene la forma

$$f^{(AdS)} = 1 - \frac{r^2\Lambda}{3}. \quad (2-98)$$

En esta solución se tiene $R = 4\Lambda$ y $\mathcal{K} = \mathcal{G} = 8\Lambda^2/3$. Aunque esta métrica no representa a un AN y tampoco posee una singularidad esencial, se presentan dos raíces en $r_{\pm} = \pm\sqrt{3}/\sqrt{\Lambda}$, que en el caso del espacio-tiempo dS (con $\Lambda > 0$), representarían los correspondientes horizontes cosmológicos que delimitarían al universo observable. No obstante, cuando $\Lambda < 0$, i.e. en el espacio-tiempo AdS, estas raíces son complejas.

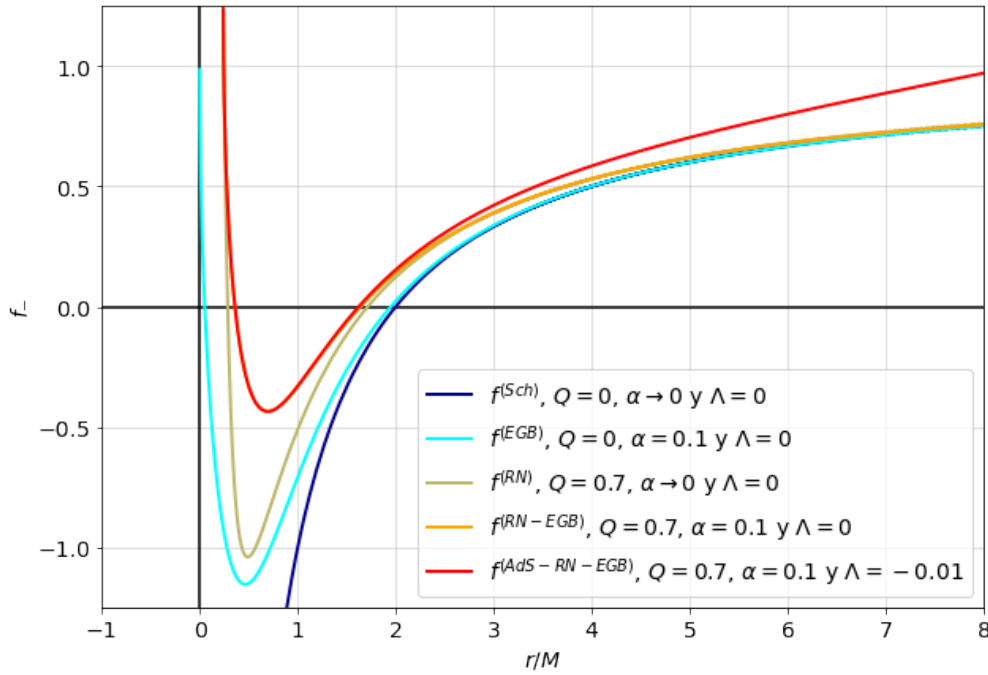


Figura 2-5: Función $f^{(AdS-RN-EGB)}$ y algunos de los casos límites particulares.

En la Figura (2-5) se pueden observar el comportamiento del caso general de $f^{(AdS-RN-EGB)}$ de la ecuación (2-77) y los casos límites particulares de $f^{(Sch)}$, $f^{(EGB)}$, $f^{(RN)}$ y $f^{(RN-EGB)}$. En el caso de $f^{(Sch)}$, el radio del horizonte de eventos r_+ es mayor que en los otros casos. Por otro lado, tanto en $f^{(RN)}$ como en $f^{(EGB)}$ y $f^{(RN-EGB)}$ se evidencian ambos horizontes r_{\pm} . De esta manera, los ANs descritos por $f^{(RN)}$ y $f^{(EGB)}$ también pueden llegar a generar un horizonte degenerado, admitiendo ANs extremos, como se mostró en la Figura (2-3) para los ANs cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 4D, descrito por $f^{(RN-EGB)}$. Un AN de RN es extremo cuando $M = Q$. En cambio, un AN de EGB 4D es extremo cuando $M = \sqrt{\alpha}$.

Por otra parte, también en la Figura (2-5), se destaca el notable comportamiento divergente de la solución $f^{(AdS-RN-EGB)}$ para $r > r_+$ que contrasta con las otras funciones

que tienen un comportamiento asintótico similar. Adicionalmente, se muestra que efectivamente en el límite cuando $r \rightarrow 0$ la solución $f^{(EGB)} = 1$, mientras que en los casos restantes a las cercanías de $r \rightarrow 0$ las soluciones divergen. No obstante, es de resaltar que el comportamiento de la gravedad, para los casos $f^{(RN)}$, $f^{(EGB)}$ y $f^{(RN-EGB)}$ cuando $r \rightarrow 0$, es repulsivo, diferencia sustancial con respecto a $f^{(Sch)}$. Debido a este último argumento, se dice que las partículas, masivas o no-masivas, que caen através del horizonte de eventos de un AN descrito por $f^{(Sch)}$, caerán a la singularidad del AN sin posibilidad de retornar. Sin embargo, las partículas que cruzan el horizonte de eventos de un AN descrito por $f^{(RN)}$, $f^{(EGB)}$, $f^{(RN-EGB)}$ o $f^{(AdS-RN-EGB)}$, eventualmente no caerían en la singularidad a causa del comportamiento repulsivo de la gravedad. De hecho, esta singularidad tendría propiedades de masa negativa y en los casos $f^{(RN)}$, $f^{(RN-EGB)}$ y $f^{(AdS-RN-EGB)}$, se puede considerar que, teóricamente, la gravedad allí es infinitamente repulsiva. Esta fenomenología repulsiva de la gravedad se puede verificar a través del estudio del potencial efectivo que representa el movimiento de una partícula de prueba sobre estas métricas. Si la gravedad es repulsiva, el potencial efectivo presenta un mínimo local positivo en los valores de r cercanos a cero. Esto significa que hay una barrera que repele a la partícula de prueba y evita que caiga hacia el origen. Por otro lado, cerca del origen de la solución $f^{(Sch)}$, la componente gravitacional es atractiva y el potencial efectivo posee un mínimo local negativo, permitiendo así que la partícula de prueba se desplace hacia el origen.

El hecho de que la solución $f^{(EGB)} = 1$ cuando $r \rightarrow 0$ no es un argumento suficiente para afirmar que el AN descrito no posea una singularidad esencial en $r = 0$ porque, como se evidencia en la Figura (2-6), la singularidad esencial se revela en el comportamiento del escalar de Kretschmann.

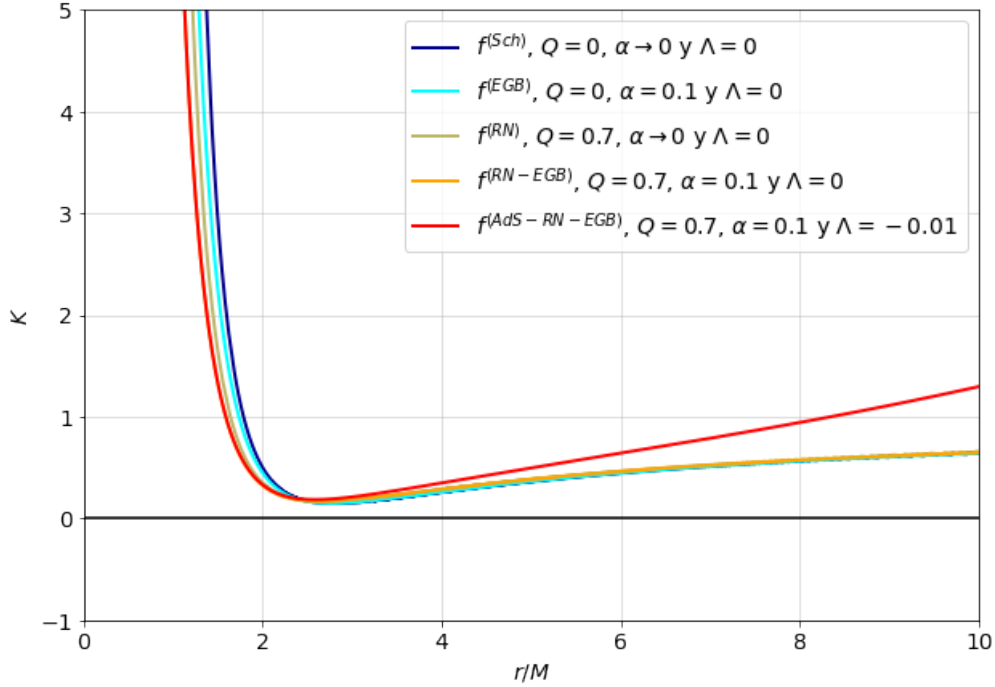


Figura 2-6: Escalar de Kretschmann \mathcal{K} para $f^{(AdS-RN-EGB)}$ y algunos de los casos límites particulares.

Todos los casos presentados muestran una singularidad en $r = 0$. Además, en la Figura (2-6), se observa nuevamente que el escalar \mathcal{K} para la solución $f^{(AdS-RN-EGB)}$ tiene un comportamiento divergente para $r > r_+$ que crece más rápido que los otros casos. Por otro lado, a distancias de $r < r_+$ los escalares \mathcal{K} son muy similares, sobre todo para las métricas $f^{(RN-EGB)}$ y $f^{(AdS-RN-EGB)}$, las cuales también corresponden a los menores valores para \mathcal{K} , mientras que la solución $f^{(Sch)}$ presenta los mayores valores de \mathcal{K} .

Además de los casos **i)**, **ii)**, **iii)**, **iv)** y **v)**, es posible reproducir otros 4 casos límites particulares de $f^{(AdS-RN-EGB)}$ de la ecuación (2-77). Estos son mostrados en la Tabla (2-3) junto con los límites necesarios para obtenerlos y son las soluciones particulares que incluyen constante cosmológica del tipo AdS junto con las métricas ya presentadas, es decir los ANs de AdS-Schwarzschild, AdS-RN, AdS-EGB 4D y AdS-Schwarzschild-EGB 4D.

Caso particular	Agujero Negro	Limites
i) $f^{(Sch)}$	Schwarzschild	$Q \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$ y $\Lambda \rightarrow 0$
ii) $f^{(RN)}$	Reissner-Nordström	$\alpha \rightarrow 0$ y $\Lambda \rightarrow 0$
iii) $f^{(EGB)}$	Einstein-Gauss-Bonnet 4D	$Q \rightarrow 0$ y $\Lambda \rightarrow 0$
iv) $f^{(RN-EGB)}$	RN-EGB 4D	$\Lambda \rightarrow 0$
v) $f^{(AdS)}$	AdS	$Q \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$ y $M \rightarrow 0$
vi) $f^{(AdS-Sch)}$	AdS-Schwarzschild	$Q \rightarrow 0$ y $\alpha \rightarrow 0$
vii) $f^{(AdS-RN)}$	AdS-RN	$\alpha \rightarrow 0$
viii) $f^{(AdS-Sch-EGB)}$	AdS-Schwarzschild-EGB 4D	$Q \rightarrow 0$
ix) $f^{(AdS-EGB)}$	AdS-EGB 4D	$Q \rightarrow 0$ y $M \rightarrow 0$

Tabla 2-3: Casos límites particulares de los ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 4D, representado por la solución $f^{(AdS-RN-EGB)}$.

En los ANs de los casos límites particulares en los que α persiste, se puede ver la contribución dinámica del invariante de GB, representado por el escalar \mathcal{G} . Como se muestra en la Figura (2-7), este escalar contribuye de manera importante a cortas distancias.

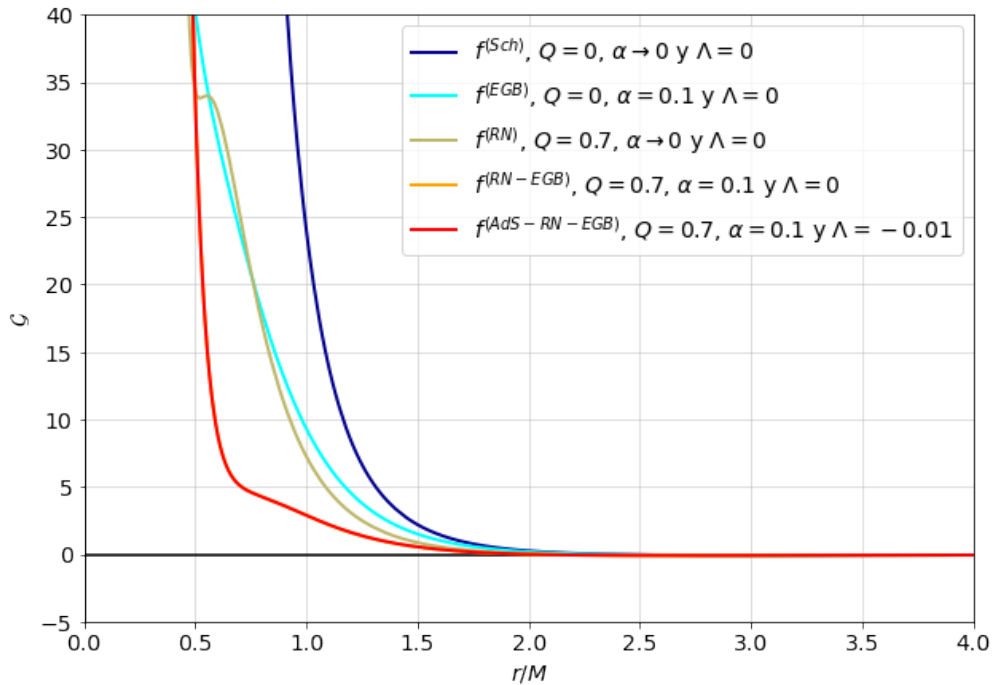


Figura 2-7: Función \mathcal{G} y algunos de los casos límites particulares.

Es importante recordar que en los casos en que $\alpha \rightarrow 0$, \mathcal{G} no contribuye dinámicamente a la teoría, por tanto en la Figura (2-7), la solución que mayor contribución dinámica tiene es

$f^{(EGB)}$. Además, las solución del caso general $f^{(AdS-RN-EGB)}$ y el caso límite particular de $f^{(RN-EGB)}$ contribuyen aproximadamente igual a cortas distancias, algo que también es posible notar en las Figuras (2-5) y (2-6). Debido a esto, sin perder generalidad, algunos de los resultados se mostrarán utilizando solo la métrica de $f^{(RN-EGB)}$. Por otra parte, también es de resaltar los diferentes comportamientos que presenta el invariante \mathcal{G} en la región entre los horizontes internos y externos de los diferentes ANs, teniendo en cuenta que para $f^{(RN-EGB)}$ estos se encuentran en $r_- \approx 0.490M$ y $r_+ \approx 1.509M$ respectivamente.

2.3.2. Generalizaciones del agujero negro

La teoría de gravedad de EGB 4D con Λ y fuente electromagnética puede entenderse también como un caso limite particular de modelos gravitacionales más generalizados. Consecuentemente, la solución de los ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 4D, presentada en la ecuación (2-77), se puede extender hacia diversas soluciones de ANs. A continuación, se compartirán solo seis ejemplos en los cuales se generaliza a los ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 4D:

■ i) Gravedad de Lovelock

La gravedad de Lovelock, que puede ser entendida a partir de la densidad lagrangiana descrita por la ecuación (2-50), es una teoría de gravedad modificada en dimensiones superiores que generaliza la interacción gravitacional desde la formulación lagrangiana. Esta teoría es descrita por una dependencia $\mathcal{L}_{(m)} = \mathcal{L}_{(m)}(g^{\mu\nu}, R^\mu{}_{\nu\alpha\beta})$, en donde la interacción gravitacional se extiende a ordenes superiores en curvatura y en dimensiones. Se dice que la gravedad de Lovelock es la mayor generalización natural posible de la teoría de la RG [106] y además, la interpretación que se le da a las contribuciones debidas a los órdenes superiores de la teoría de Lovelock es de correcciones cuánticas [4, 78, 80, 84, 104]. Cada término de una densidad de Lanczos-Lovelock se puede expresar a partir de

$$\mathcal{L}_{(m)} = \delta_{2468\dots 2k}^{1357\dots 2k-1} R_{13}^{24} R_{57}^{68} \dots R_{2k-3}^{2k-2} R_{2k-1}^{2k}, \quad (2-99)$$

donde $k = 2m$ y m es un entero que representa a un índice diferente. Por ejemplo, para $m = 1$ se obtiene δ_{24}^{13} . Estos son conocidos como *tensores alternantes*, que no son más que una generalización de la función delta de Kronecker en su forma totalmente

antisimétrica [80],

$$\delta_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\nu_1}^{\mu_1} & \delta_{\nu_2}^{\mu_1} & \dots & \delta_{\nu_p}^{\mu_1} \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_2} & \delta_{\nu_2}^{\mu_2} & \dots & \delta_{\nu_p}^{\mu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_p} & \delta_{\nu_2}^{\mu_p} & \dots & \delta_{\nu_p}^{\mu_p} \end{pmatrix}. \quad (2-100)$$

De esta manera, sobre los tensores de Riemann la notación de los índices se reduce a

$$R_{13}^{24} = R_{\mu_1 \mu_2}^{\nu_1 \nu_2} = R_{\mu_1 \mu_2}^{\nu_1 \nu_2}. \quad (2-101)$$

Por lo tanto, en el caso en que $m = 1$, se obtiene que

$$\mathcal{L}_{(1)} = \delta_{24}^{13} R_{13}^{24} = R = \mathcal{L}_{EH}, \quad (2-102)$$

mientras que en el caso en que $m = 2$, se tiene

$$\mathcal{L}_{(2)} = \delta_{2468}^{1357} R_{13}^{24} R_{57}^{68} = \mathcal{G} = \mathcal{L}_{GB}. \quad (2-103)$$

Así, bajo esta formulación lagrangiana es posible adicionar diferentes contribuciones para los posibles valores de m usando coeficientes arbitrarios, de tal forma que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(1)} + \alpha \mathcal{L}_{(2)} + \beta \mathcal{L}_{(3)} + \mathcal{O}(R^4), \quad (2-104)$$

donde la ecuación de campo generalizada para esta densidad lagrangiana vendría dada por

$$P_{\nu}^{\gamma\alpha\beta} \frac{\partial R^{\nu\gamma\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathcal{L} g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2-105)$$

recordando que $P_{\nu}^{\gamma\alpha\beta}$ está definido en la ecuación (2-51). Es importante notar que al ser una teoría en D dimensiones arbitrarias, los índices μ, ν , etc., toman valores en el rango $(0, 1, 2, \dots, D-1)$ [106].

Si se compara la expresión (2-105) con la ecuación (2-60), esta se entendería como la extensión de las ecuaciones de campo modificadas para la teoría de gravedad de Lovelock. Consecuentemente, la teoría gravitacional de la RG corresponde al primer término del límite de baja energía efectiva de la teoría de gravedad de Lovelock. Esto quiere decir que la inclusión de la contribución cuadrática en curvatura (la de GB), correspondería a los efectos producidos por aquellas primeras correcciones cuánticas de una teoría de gravedad cuántica descrita por la densidad lagrangiana de la ecuación (2-104) [104–106]. Así, el invariante de GB, \mathcal{G} , y el parámetro de acople de GB, α , podrían interpretarse como una primera corrección cuántica a la gravedad clásica.

■ ii) Gravedad en dimensiones superiores

La teoría de gravedad de EGB con Λ y con fuente electromagnética descrita por la ecuación de campo (2-65), contribuye dinámicamente (a la teoría de la RG) en los casos en que $D \geq 5$. Esta solución puede ser expresada en términos de la dimensión D del espacio-tiempo, admitiendo soluciones en dimensiones superiores a las descritas en la RG (4 dimensiones), tomando la forma [77, 80, 87, 88]

$$f^{(D)} = \kappa + \frac{r^2 \left[1 - \sqrt{1 + 4(D-4)(D-3)\alpha \left(-\frac{2Q^2 r^{4-2D}}{(D-3)(D-2)} + \frac{16\pi M r^{1-D}}{\Sigma_{D-2}(D-2)} + \frac{2\Lambda}{(D-2)(D-1)} \right)} \right]}{2(D-4)(D-3)\alpha}, \quad (2-106)$$

donde κ es el índice de curvatura, el cual toma valores entre $\{-1, 0, 1\}$ describiendo a un espacio-tiempo con curvatura negativa, nula o positiva respectivamente [80, 87, 88]. Las funciones con $\kappa = 1$ son los que corresponden a soluciones de ANs esféricamente simétricos [80]. También es importante tener presente que aquí la constante de gravitación universal G depende de las dimensiones del espacio-tiempo, por lo que debería tener unidades de $[m^{D-1}/(\text{kg} * s^2)]$ en el Sistema Internacional, de tal manera que la acción mantenga sus unidades de $[\text{kg} * m^2/s]$ [77, 106]. Σ_{D-2} corresponde al área de la hipersuperficie $(D-2)$ -dimensional descrita por $d\Omega_{(D-2)}^2$ en el elemento de línea. Ésta area se puede expresar como [6]

$$\Sigma_{D-2} = \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left[\frac{D-1}{2}\right]}. \quad (2-107)$$

Debido a las propiedades de la función Γ , al tomar $D \rightarrow 4$ (como en las soluciones de principal interés en este trabajo), se obtiene $\Sigma_{D-2} = 4\pi$.

Algunos de los casos límites particulares del espacio-tiempo descrito por $f^{(D)}$ son:

- con $D \rightarrow 5$ y $\kappa = 1$, $f^{(D)}$ se reduce al espacio-tiempo en el exterior de los ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 5D. Sin embargo, esta es solución de la ecuación de campo (2-65).
- con $D \rightarrow 4$ y $\kappa = 1$, $f^{(D)}$ se reduce al caso particular vii) de la solución $f^{(AdS-RN)}$. Esto demuestra que cuando $D \rightarrow 4$, en la teoría de gravedad de EGB sin el reescalamiento de la ecuación (2-68), el término de GB no contribuye dinámicamente.

Por otro lado, la solución de la ecuación de campo reescalada (2-70) en dimensiones superiores se puede expresar como

$$f_{Ree}^{(D)} = k + \frac{r^2 \left[1 - \sqrt{1 + 4(D-3)\alpha \left(-\frac{2Q^2 r^{4-2D}}{(D-3)(D-2)} + \frac{16\pi M r^{1-D}}{\Sigma_{D-2}(D-2)} + \frac{2\Lambda}{(D-2)(D-1)} \right)} \right]}{2(D-3)\alpha}. \quad (2-108)$$

Esta métrica difiere de $f^{(D)}$ solo por el reescalamiento de α de la ecuación (2-68). Para este último AN, los casos limites particulares son :

- tomando a $D \rightarrow 5$, con la métrica $f_{Ree}^{(D)}$ se obtiene la solución de los ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 5D. Ésta viene siendo consistente con la obtenida para la ecuación de campo sin reescalar en el caso límite particular con $D \rightarrow 5$ en $f^{(D)}$.
- con $D \rightarrow 4$, la métrica $f^{(D)}$ se reduce a la geometría de los ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 4D, es decir, a la solución $f^{(AdS-RN-EGB)}$ de la ecuación (2-77). Como era de esperarse en este caso, en la teoría de gravedad de EGB con el reescalamiento de la ecuación (2-68), el término de GB si contribuye dinámicamente con $D = 4$.

■ iii) Gravedad con electrodinámica no lineal

Es posible acoplar a la interacción gravitacional con fuentes de materia descritas por campos electromagnéticos, como se mostró en la sección (2.1.1). Existen variadas extensiones a la teoría de la electrodinámica clásica y una de las más famosas es la teoría de la electrodinámica no-lineal o *Nonlinear Electrodynamics* (NED) en inglés. En esta propuesta, al invariante que describe al lagrangiano de la electrodinámica de Maxwell se le agregan términos no-lineales. Una de estas teorías NED esta descrita por una densidad lagrangiana con forma exponencial y a partir de ella se obtienen ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 4D, descritos con la función [75]

$$f^{(NED)} = 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left(1 \sqrt{1 + 4\alpha \left(\frac{2M}{r^3} e^{-\frac{Q^2}{2Mr}} + \frac{\Lambda}{3} \right)} \right). \quad (2-109)$$

Aquí Q puede interpretarse como la carga eléctrica, sin embargo también funciona como una representación hipotética de una carga magnética [75]. Con $Q \rightarrow 0$, la métrica $f^{(NED)}$ se reduce a $f^{(AdS-Sch-EGB)}$ mientras que considerando $r \gg \frac{Q^2}{2M}$ a segundo orden, la métrica $f^{(NED)}$ se reduce a $f^{(AdS-RN-EGB)}$ de la ecuación (2-77).

Otra reconocida propuesta es el modelo NED de Born-Infeld en el que la función (2-109) solo permite incluir campos eléctricos, pues inicialmente se propuso para eliminar la divergencia de la energía propia del electrón en la teoría clásica y por ello se limita a la intensidad del campo electromagnético introduciendo una fuerza adicional. Además, el modelo de Born-Infeld también es popular por ser consistente con algunos límites a bajas energías de la teoría de cuerdas [76].

Los ANs AdS cargados eléctricamente en la gravedad de EGB 4D acoplados al modelo de Born-Infeld vienen dados por la solución [76]

$$f^{(BI)} = 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left\{ 1 \sqrt{1 + 4\alpha \left[\frac{2M}{r^3} - \frac{1}{l^2} - \frac{2\beta^2}{3} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{Q^2}{\beta^2 r^4}} \right) - \frac{4Q}{3r^3} \Phi(r) \right]} \right\} \quad (2-110)$$

con

$$\Phi(r) = \frac{Q}{r} {}_2F_1 \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{Q^2}{\beta^2 r^4} \right). \quad (2-111)$$

Aquí $\beta > 0$ es al parámetro de Born-Infeld, el cual corresponde al valor máximo de la intensidad del campo electromagnético, y ${}_2F_1$ denota la función hipergeométrica [76]. Con $\beta \rightarrow \infty$, la métrica $f^{(BI)}$ se reduce a $f^{(AdS-RN-EGB)}$ de la ecuación (2-77) y de igual manera, la solución $f^{(BI)}$, retorna a la solución $f^{(AdS-Sch-EGB)}$ si $Q = 0$.

■ iv) Agujeros negros regulares

Los ANs regulares son aquellos que no poseen singularidades esenciales. Una de las primeras métricas de este tipo es el AN de Bardeen, el cual es una solución exacta a las ecuaciones de campo de la RG acoplada con una teoría NED. De esta forma, la solución de Bardeen posee carga magnética y permite la existencia de monopolos magnéticos [86]. Es posible comprobar a partir de los escalares R , \mathcal{K} y \mathcal{G} que estas soluciones presentan un buen comportamiento en $r \rightarrow 0$.

Los ANs regulares de Bardeen AdS en la gravedad de EGB 4D vienen dados por la función [89]

$$f^{(Bar)} = 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left[1 - \sqrt{1 + 4\alpha \left(\frac{2M}{(r^2 + \tilde{g}^2)^{3/2}} + \frac{\Lambda}{3} \right)} \right], \quad (2-112)$$

donde \tilde{g} es la carga de monopolo magnético. En algunas ocasiones las teorías NED admiten a \tilde{g} en relación con una carga eléctrica, sin embargo, la densidad lagrangiana asociada con la carga eléctrica no puede producir ANs regulares globalmente hiperbólicos (i.e. no representa ANs que conservan una estructura sin singularidades esenciales en todo el espacio-tiempo) y además, estos no tienden a la electrodinámica lineal de Maxwell en los límites del campo gravitacional débil [86]. Con $\tilde{g} = 0$, la métrica $f^{(Bar)}$ se reduce a la solución $f^{(AdS-Sch-EGB)}$.

Por otro lado, otro de los ejemplos más simples de ANs regulares, corresponde a la solución de Hayward, el cual también resulta un acople con una teoría NED. Un AN regular

de Hayward AdS en la gravedad de EGB 4D viene en términos de la función [81]

$$f^{(Hay)} = 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left[1 - \sqrt{1 + 4\alpha \left(\frac{2M}{r^3 + \tilde{g}^3} + \frac{\Lambda}{3} \right)} \right], \quad (2-113)$$

donde, nuevamente, \tilde{g} viene asociada a la carga magnética y tomando a $\tilde{g} = 0$ la solución $f^{(Hay)}$ se reduce a la métrica descrita por $f^{(AdS-Sch-EGB)}$.

■ v) Agujeros negros radiantes

Las soluciones de tipo ANs radiativos son aquellas que describen al espacio-tiempo en el exterior de objetos que emiten o absorben radiación. Un ejemplo clásico de estos es la métrica de Vaidya, que describe al espacio-tiempo en los alrededores de una estrella a partir de un fluido nulo. En general, en coordenadas de Eddington-Bondi, un espacio-tiempo no estático y esféricamente simétrico se describe por [79]

$$ds^2 = -f^{(Rad)}(v, r)dv^2 + 2\epsilon dvdr + r^2 d\Omega_2^2, \quad (2-114)$$

con

$$f^{(Rad)} = f^{(Rad)}(v, r) = \begin{cases} 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{4\Lambda\alpha}{3} + \frac{8M(v)\alpha}{r^3} - \frac{32\pi\alpha C(v)}{(1+2\gamma)r^{2(1-\gamma)}}} \right\} & \text{si } \gamma \neq -\frac{1}{2}, \\ 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{4\Lambda\alpha}{3} + \frac{8M(v)\alpha}{r^3} - \frac{32\pi\alpha C(v) \ln r}{r^3}} \right\} & \text{si } \gamma = -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad (2-115)$$

donde γ es un parámetro constante que relaciona la proporcionalidad entre las componentes de $T_{\mu\nu}$, mientras que $M(v)$ y $C(v)$ son dos funciones arbitrarias que dependen del comportamiento en el tiempo de la distribución de masa y energía de la fuente. Esta solución es válida para fluidos nulos, i.e. con $T_{\mu\nu}$ describiendo un campo de radiación sin masa (como el electromagnetismo o el gravitacional). Dentro del elemento de línea se elige el parámetro $\epsilon = 1$ para un fluido nulo entrante o $\epsilon = -1$ para un fluido nulo saliente.

Ahora bien, tomando a $M(v) = M$, $C(v) = 0$ y $\gamma = 0$, la métrica $f^{(Rad)}$ se reduce a $f^{(AdS-Sch-EGB)}$. Por otro lado, con $M(v) = M$, $C(v) = -Q^2/(8\pi)$ y $\gamma = -1$, la métrica $f^{(Rad)}$ se reduce a $f^{(AdS-RN-EGB)}$.

■ vi) Agujeros negros rotantes

Es bien sabido que, en el escenario realista, los ANs no son estáticos sino que deben poseer un momento angular causado por la rotación sobre sí mismos. Los ANs AdS rotantes, cargados eléctricamente y en la gravedad de EGB 4D en coordenadas de Boyer-Lindquist están descritos por [4]

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - 2a \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt d\phi + \Sigma d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[\Sigma + a^2 \sin^2 \theta \left(2 - \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \right] d\phi^2, \quad (2-116)$$

con

$$\Delta = r^2 + a^2 + \frac{r^4}{2\alpha} \left[1 - \sqrt{1 + 4\alpha \left(\frac{2M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} + \frac{\Lambda}{3} \right)} \right], \quad (2-117)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (2-118)$$

En la anterior expresión a representa al parámetro de espín de los ANs en rotación. Así, en el caso en que $a = 0$, esta métrica rotante se reduce a la solución estática y esféricamente simétrica dada por $f^{(AdS-RN-EGB)}$.

Las soluciones rotantes han sido estudiadas recientemente a partir de los resultados obtenidos por las observaciones del *Event Horizon Telescope*. Varias cantidades y parámetros físicos han sido obtenidos para comparar y testear los resultados de diferentes teorías de gravitación con la observación. Un ejemplo de gran interés para este trabajo es en relación a la restricción experimental sobre los valores posibles que puede tomar α . En el análisis realizado en [4], se calcula que para $\Lambda = 0$, $Q = 0$ y $a = 0.1M$, el parámetro de GB estaría acotado por $\alpha \leq 0.00394M^2$, para que las predicciones sean consistentes con los resultados del tamaño de la sombra del AN de M87*.

3. Campos perturbados en un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico

Siguiendo a Berti [24], en esta sección se presenta el formalismo teórico que describe las perturbaciones de campos en un espacio-tiempo curvo.

Como una primera aproximación en el estudio de las perturbaciones de ANs, se va a presentar e investigar el formalismo de las perturbaciones a un campo escalar masivo propagándose en un espacio-tiempo estático, esféricamente simétrico y general. Se mostrará la deducción de la ecuación maestra para estas perturbaciones mediante el uso de los armónicos esféricos escalares y luego se dará una breve introducción a la función de Green asociada a la ecuación de Regge-Wheeler (RW) del caso escalar. Después, se hace una deducción similar de la ecuación maestra pero para el caso de las perturbaciones de un campo electromagnético. Aquí se hace uso de los armónicos esféricos vectoriales y se identifican las similitudes y diferencias entre los campos estudiados. Se hará evidente que para el caso electromagnético es necesario hacer la descripción de las perturbaciones a partir de dos diferentes contribuciones, una polar y otra axial. Se compartirá un análisis de las perturbaciones del campo escalar masivo en el fondo de Schwarzschild, mostrando al final que, al menos sobre este espacio-tiempo, el estudio de las perturbaciones de los campos se puede generalizar de tal forma que las perturbaciones del campo escalar, electromagnético y gravitacional (para la contribución axial) pueden ser descritas por una sola ecuación maestra dependiente del espín s de cada campo.

3.1. Perturbaciones del campo escalar masivo

El estudio de las perturbaciones del campo escalar sirve como una primera aproximación al entendimiento del comportamiento de los QNMs (profundizados en la sección 4) antes de analizar las perturbaciones de los casos más realistas y medibles correspondientes a las perturbaciones del campo electromagnético y gravitacional (recuérdese que este último caso, corresponde precisamente a la propagación de ondas gravitacionales). Los casos electromagnético y gravitacional requieren un trabajo mas detallado debido a que se requiere del uso de expansiones en términos de armónicos esféricos vectoriales y tensoriales, respectivamente [3].

En la actualidad, el único campo físico con espín $s = 0$ que obedece a una ecuación de tipo Klein-Gordon y corroborado observacionalmente es el descrito por el bosón de Higgs [108]. No obstante, otros modelos físicos como el de la inflación del universo primi-

tivo, suelen estar estructurados a partir de campos escalares hipotéticos [108]. Además de su relevancia física, los campos escalares son de gran interés académico y teórico puesto que son los más simples de tratar y esto es crucial a la hora de construir modelos de juguete o iniciar nuevas investigaciones [3]. Por ejemplo, este fue el caso de las primeras descripciones de la radiación Hawking, en donde, por simplicidad, se recurre a una descripción escalar de los campos para mostrar como los ANs eventualmente se pueden evaporar [109, 110]. Así, las perturbaciones de campos escalares en espacio-tiempos curvos han sido frecuentemente estudiadas [10].

Se considerará ahora un campo escalar masivo $\Phi = \Phi(x^\mu)$ que contribuye muy poco a la densidad de energía, es decir que su influencia sobre $T_{\mu\nu}$ es despreciable [24]. Para dar lugar a las perturbaciones, se va a considerar que el campo escalar esta acoplado a una partícula de masa propia m_0 y densidad de carga escalar $\rho = \rho(x^\mu)$. Teniendo en cuenta esto y siguiendo a Berti en [24], se dará una breve descripción de las perturbaciones de Φ sobre un espacio-tiempo general con $D = 4$, estático y esféricamente simétrico, con el propósito de encontrar la ecuación maestra del sistema. Adicionalmente se da una introducción a su solución mediante la búsqueda de la función de Green asociada al problema, relacionando el comportamiento que debe tener la solución para satisfacer las correspondientes condiciones de frontera que describen a las regiones asintóticas de los ANs.

3.1.1. Ecuación maestra del campo escalar

A partir de la variación de la acción completa del sistema que tiene en cuenta a la acción propia del campo escalar masivo, de la partícula y de la interacción entre la partícula y el campo se obtiene

$$\left(\square - \mu^2\right) \Phi = -\rho, \quad (3-119)$$

donde $\mu = m_0/\hbar$ es la masa asociada a Φ y tiene dimensiones de $[\text{longitud}^{-1}]$ en unidades geometrizadas. El operador D'Ambertiano tiene la forma

$$\square = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta. \quad (3-120)$$

Es de resaltar que la expresión (3-119) es una ecuación de tipo Klein-Gordon, en analogía a la descripción de un campo escalar libre en teoría cuántica de campos. Luego, recordando que la divergencia de un campo vectorial A^μ se puede escribir como

$$\nabla_\alpha A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \left(\sqrt{-g} A^\alpha \right), \quad (3-121)$$

la ecuación (3-119) se puede re-escribir en términos de las componentes de la métrica en la forma

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \left[\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Phi \right] - \mu^2 \Phi = -\rho. \quad (3-122)$$

Ahora, usando coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) , se puede descomponer el campo $\Phi = \Phi(t, r, \theta, \phi)$ mediante la superposición

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\Phi_{lm}}{r} Y_{lm}, \quad (3-123)$$

y en la misma forma, las fuentes de la perturbación $\rho = \rho(t, r, \theta, \phi)$ se escribirán

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\rho_{lm}}{r} Y_{lm}, \quad (3-124)$$

donde $\Phi_{lm} = \Phi_{lm}(r)$ y $\rho_{lm} = \rho_{lm}(r)$ son las contribuciones radiales y $Y_{lm} = Y_{lm}(\theta, \phi) = N P_{lm}(\theta) e^{im\phi}$ son los bien conocidos armónicos esféricos escalares, los cuales forman una base de funciones ortonormales de grado l (también usualmente llamado el número multipolar) y orden m sobre la 2-esfera. N es la constante de normalización y $P_{lm} = P_{lm}(\theta)$ las funciones asociadas de Legendre [3], las cuales satisfacen la identidad

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta P_{lm}) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_{lm} = -l(l+1) P_{lm}. \quad (3-125)$$

El elemento de línea que describe de manera general a una métrica estática y esféricamente simétrica en D=4 se puede escribir como

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{dr^2}{h} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3-126)$$

con $f = f(r)$ y $h = h(r)$ y su determinante será $g = -r^4 f \sin^2 \theta / h$. Teniendo en cuenta este fondo generalizado, se reemplazan las expansiones hechas en las expresiones (3-123) y (3-124) en la ecuación (3-122) y luego, mediante el uso de la identidad (3-125), se obtiene

$$fh \frac{d^2 \Phi_l}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{d(fh)}{dr} \frac{d\Phi_l}{dr} + \left[\omega^2 - \left(\mu^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1}{2rf} \frac{d(fh)}{dr} \right) f \right] \Phi_l = -f \rho_l. \quad (3-127)$$

Esta es una ecuación diferencial radial para las componentes del campo escalar masivo $\Phi_l = \Phi_l(r)$, donde se ha escrito $\Phi_{lm} = \Phi_l$ quitando al índice m por la simetría esférica de la métrica.

Introduciendo a la coordenada tortuga generalizada,

$$\frac{dr}{dr_*} = \sqrt{fh}, \quad (3-128)$$

la ecuación diferencial radial se simplifica tomando la forma

$$\frac{d^2\Phi_l}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_l] \Phi_l = -f\rho_l, \quad (3-129)$$

con el potencial efectivo $V_l = V_l(r)$ definido como

$$V_l = V_l(r) = f \left(\mu^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1}{2rf} \frac{d(fh)}{dr} \right). \quad (3-130)$$

Este último resultado de la expresión (3-129) es la ecuación maestra del sistema, también conocida como la *ecuación de Regge-Wheeler (RW)* del campo escalar masivo [3].

3.1.2. Función de Green asociada

La solución de la ecuación maestra del campo escalar masivo (3-129) se puede encontrar usando la técnica de las funciones de Green [3, 23, 24]. Introduciendo la función $G = G(r_*, r'_*)$, la cual satisface

$$\frac{d^2G}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_l] G = -\delta(r_* - r'_*), \quad (3-131)$$

es posible escribir la solución general $\Phi_l = \Phi_l(r)$ de la ecuación maestra en las coordenadas originales como

$$\Phi_l(r) = \int_{r_+}^{\infty} \rho_l(r') G(r, r') dr'. \quad (3-132)$$

Como se evidenciará en las siguientes secciones, es de particular interés el caso en el que la ecuación maestra es homogénea, pues las perturbaciones a estudiar ocurren fuera de la fuente de distribución de masa y energía. Siguiendo la metodología de Breuer et.al. [111] para construir apropiadamente a $G = G(r_*, r'_*)$, esta se puede escribir como

$$G = \frac{1}{W} \begin{cases} u_l^{(1)}(r_*) u_l^{(2)}(r'_*) & \text{si } r_* \leq r'_* \\ u_l^{(1)}(r'_*) u_l^{(2)}(r_*) & \text{si } r'_* \leq r_*, \end{cases} \quad (3-133)$$

donde la solución se compone a partir de la superposición de dos funciones $u_l^{(1)}$ y $u_l^{(2)}$, las cuales son linealmente independientes y corresponden a los modos entrantes y salientes de la perturbación, respectivamente. El factor W es el Wronskiano de las dos soluciones, definido como

$$W = W(u_l^{(1)}, u_l^{(2)}, r_*) = u_l^{(1)} \frac{du_l^{(2)}}{dr_*} - \frac{du_l^{(1)}}{dr_*} u_l^{(2)}. \quad (3-134)$$

Para encontrar a las funciones $u_l^{(1)}$ y $u_l^{(2)}$ se debe analizar el comportamiento asintótico de la ecuación maestra, por lo que se impondrán unas condiciones de frontera adecuadas para el sistema.

Las perturbaciones del campo escalar masivo Φ_l se describen a partir de dos posibles modos de propagación, uno entrante $\Phi_l^{(en)}$ y otro saliente $\Phi_l^{(sa)}$. Los campos escalares entrante y saliente deben satisfacer las condiciones de frontera que modelan al espacio-tiempo al exterior de los ANs, es decir, tanto en las regiones asintóticas cuando $r \rightarrow \infty$ o $r_* \rightarrow \infty$, como en el horizonte de eventos cuando $r \rightarrow r_+$ o $r_* \rightarrow -\infty$.

En cuanto al campo escalar entrante $\Phi_l^{(en)}$, se tiene que cuando $r \rightarrow r_+$, el potencial efectivo de la expresión (3-130) cumple que $V_l(r_* \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$. Esto asegura que en el horizonte de eventos, las perturbaciones del campo escalar entrantes no puedan escapar del AN. Sobre el espacio-tiempo de un AN asintóticamente plano y teniendo presente el contexto de las observaciones astrofísicas, es natural imponer una onda entrante en el horizonte y una onda saliente en el infinito espacial [5]. En ese sentido, en las regiones cercanas a r_+ la solución tiene la forma $u_l^{(1)}(r_*) \sim e^{\pm i\omega r_*}$ (ondas planas viajeras), por lo que $\Phi_l^{(en)} \sim e^{-i\omega(t \pm r_*)}$. Sin embargo, debido a la condición de frontera impuesta en r_+ , cerca solo deberían haber modos entrantes y por lo tanto

$$\Phi_l^{(en)} \sim e^{-i\omega(t+r_*)} \quad \text{cuando } r_* \rightarrow -\infty. \quad (3-135)$$

Por otro lado, en la región asintótica, si la métrica del AN es asintóticamente plana, i.e., se cumple que $f(r) \rightarrow 1$ y $h(r) \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow \infty$, el potencial efectivo de la expresión (3-130) satisface que $V_l(r_* \rightarrow \infty) \rightarrow \mu^2$. Luego, en las regiones asintóticas la solución tiene la forma $u_l^{(2)}(r_*) \sim e^{\pm ikr_*}$, con k el número de onda dado por $k = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$. Debido a este comportamiento, $\Phi_l^{(en)}$ debe ser proporcional a una superposición de modos con la forma

$$\Phi_l^{(en)} \sim e^{-ik(t \pm r_*)} \quad \text{cuando } r_* \rightarrow \infty. \quad (3-136)$$

En consecuencia, debido a la imposición de estas condiciones de frontera mencionadas, el campo escalar entrante tiene un comportamiento asintótico descrito por

$$u_l^{(en)} \sim \begin{cases} \frac{\mathcal{T}^{en}}{\omega} e^{-i\omega r_*} & \text{cuando } r_* \rightarrow -\infty \\ \frac{1}{\sqrt{k}} [e^{-ikr_*} + \mathcal{R}^{en} e^{ikr_*}] & \text{cuando } r_* \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3-137)$$

Donde se han introducido a los factores de proporcionalidad $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\omega)$ y $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\omega)$, conocidos como los coeficientes de transmisión y de reflexión respectivamente. En general, estos dos coeficientes no son iguales en el modo entrante y en el saliente y por esto se hace la distinción con un super-índice: *sa* y *en*, para saliente y entrante, respectivamente.

Si se realiza el mismo análisis de la imposición de las condiciones de frontera de un AN para los modos salientes del campo escalar masivo, la solución tomaría la forma

$$u_l^{(sa)} \sim \begin{cases} \frac{1}{\omega} [e^{i\omega r_*} + \mathcal{R}^{sa} e^{-i\omega r_*}] & \text{cuando } r_* \rightarrow -\infty \\ \frac{\mathcal{T}^{sa}}{\sqrt{k}} e^{ikr_*} & \text{cuando } r_* \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3-138)$$

Ahora bien, para el caso de la ecuación maestra homogénea el Wronskiano es constante, de manera que al evaluarlo en las regiones asintóticas se puede encontrar que $W = -2i\mathcal{T}$, y debido a esto, se cumple que $\mathcal{T}^{sa} = \mathcal{T}^{en} = \mathcal{T}$. Si además $\mathcal{R}^{sa} = \mathcal{R}^{en} = \mathcal{R}$, por conservación de la energía, para una onda incidente al horizonte de eventos con amplitud igual a 1 se tiene que [5, 24]

$$|\mathcal{R}|^2 + |\mathcal{T}|^2 = 1. \quad (3-139)$$

De esta forma, la función de Green asociada bajo las anteriores consideraciones, finalmente estaría dada por [111]

$$G = \frac{i}{2\mathcal{T}} \begin{cases} u_l^{(en)}(r_*) u_l^{(sa)}(r'_*) & \text{si } r_* < r'_* \\ u_l^{(en)}(r'_*) u_l^{(sa)}(r_*) & \text{si } r_* > r'_*. \end{cases} \quad (3-140)$$

En concordancia con las soluciones encontradas en las expresiones (3-137) y (3-138), en las regiones en las que se puede ubicar a un observador en el infinito, $r_* > r'_*$, la función de Green asociada es proporcional solamente a los modos salientes, i.e. $G \sim u_l^{(sa)}$. Por otro lado, en las regiones en las que se podría ubicar un observador a una distancia finita, $r_* < r'_*$, se tiene que $G \sim u_l^{(en)}$. Así, la función de Green asociada en las regiones asintóticas, donde se satisfacen las condiciones de frontera de un AN, será

$$G = \begin{cases} \frac{i}{2\omega} u_l^{(sa)}(r'_*) e^{-i\omega r_*} & \text{si } r_* \rightarrow -\infty \\ \frac{i}{2\sqrt{k}} u_l^{(en)}(r'_*) e^{ikr_*} & \text{si } r_* \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3-141)$$

donde las funciones $u_l^{(en)}$ y $u_l^{(sa)}$ se pueden obtener de manera numérica mediante la ecuación maestra. Como una primera aproximación, el resultado obtenido en esta expresión resuelve el caso de la ecuación maestra del campo escalar masivo homogéneo en las regiones asintóticas. De todas formas, un tratamiento más realista podría tener presente diversas consideraciones en la construcción de G , e.g. obteniéndose la generalización de la relación (3-139) al considerar la amplificación superradiante ($|\mathcal{R}| > 1$) debida a la rotación en los ANs de Kerr [5, 24].

3.2. Perturbaciones del campo electromagnético

El caso de las perturbaciones del campo electromagnético podría considerarse más realista que las del caso escalar, pues se trata del comportamiento de las propias ondas de luz, las cuales se han estudiado y observado por mucho tiempo. Como se trata de fotones, en este caso el campo a considerar es no masivo. Aunque esta descripción podría extenderse a partículas con espín $s = 1$ y con masa (bosones que describen las interacciones nucleares débil y fuerte en el modelo estándar [108]). En este trabajo no se analizará esta última posibilidad.

Las perturbaciones de campos electromagnéticos en métricas curvas también han sido estudiadas [10]. A continuación, se dará una introducción a las perturbaciones del campo electromagnético descrito por el tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$ sobre un espacio-tiempo general, en $D = 4$, estático y esféricamente simétrico, con el propósito de encontrar una ecuación maestra para el sistema. En esta subsección se mostrará que las perturbaciones del campo electromagnético se pueden describir usando los armónicos esféricos vectoriales. Consecuentemente, es posible obtener dos diferentes contribuciones de las perturbaciones electromagnéticas, una denominada polar y otra llamada axial, que se obtienen dependiendo la condición de paridad que cumplan las componentes del vector cuadripotencial que las describen. De igual modo, al final se hará notar que tanto las contribuciones polares como las axiales de las perturbaciones electromagnéticas pueden ser estudiadas a partir de una sola ecuación maestra que resulta ser similar a la previamente obtenida para las perturbaciones del campo escalar masivo.

3.2.1. Ecuación maestra del campo electromagnético

Las perturbaciones del campo electromagnético se construyen a partir de $F_{\mu\nu}$, definido en la expresión (2-8) en términos del vector cuadripotencial, A_μ . Las ecuaciones de Maxwell en el vacío también fueron presentadas en las ecuaciones (2-11) y (2-12). Sin embargo, en analogía a la expresión (3-122) del caso escalar, las ecuaciones de Maxwell en el vacío se pueden expresar en un fondo curvo como [24]

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0. \quad (3-142)$$

Con el fin de introducir los armónicos esféricos vectoriales, consideraremos un espacio-tiempo esféricamente simétrico general con el elemento de línea de la ecuación (2-76). Aprovechando la simetría de la variedad en la que se disponen las coordenadas esféricas,

se pueden separar las coordenadas del espacio-tiempo de modo que

$$x^\mu = (t, r, \theta, \phi) = (y^a, z^A) \quad (3-143)$$

donde los índices a y A toman los valores $a = \{t, r\}$ y $A = \{\theta, \phi\}$. Esta separación se introduce con el objetivo de descomponer el vector cuadripotencial A_μ de manera consistente con el comportamiento de sus componentes sobre la 2-esfera. En ese sentido, las componentes de $A_\mu = A_\mu(t, r, \theta, \phi)$ se pueden descomponer como

$$A_\mu = [A_a(t, r, \theta, \phi), A_A(t, r, \theta, \phi)], \quad (3-144)$$

donde

$$A_a = \begin{bmatrix} A_t(t, r, \theta, \phi) \\ A_r(t, r, \theta, \phi) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_A = \begin{bmatrix} A_\theta(t, r, \theta, \phi) \\ A_\phi(t, r, \theta, \phi) \end{bmatrix}, \quad (3-145)$$

Las componentes de A_A transforman como un vector sobre la 2-esfera, a diferencia de las de A_a que transforman como dos escalares sobre la 2-esfera. Debido a esto, las componentes A_a se pueden expandir utilizando los armónicos esféricos escalares $Y^{lm} = Y^{lm}(\theta, \phi)$ como

$$A_t = \sum_{l,m} \mathbb{f}^{lm} Y^{lm} \quad (3-146)$$

$$A_r = \sum_{l,m} \mathbb{h}^{lm} Y^{lm}, \quad (3-147)$$

con $\mathbb{f}^{lm} = \mathbb{f}^{lm}(t, r)$ y $\mathbb{h}^{lm} = \mathbb{h}^{lm}(t, r)$, los coeficientes de la expansión. Teniendo en cuenta las anteriores expansiones, A_a se puede reescribir como

$$A_a = \begin{bmatrix} A_t \\ A_r \end{bmatrix} = \sum_{l,m} \begin{bmatrix} \mathbb{f}^{lm} Y^{lm} \\ \mathbb{h}^{lm} Y^{lm} \end{bmatrix}. \quad (3-148)$$

Por otro lado, las componentes A_A se expanden en términos de los armónico esféricos vectoriales $Y_A^{lm} = Y_A^{lm}(\theta, \phi)$ y $S_A^{lm} = S_A^{lm}(\theta, \phi)$. Estos son dos vectores linealmente independientes construidos a partir de los armónicos esféricos escalares Y^{lm} y tienen la forma

$$Y_A^{lm} = (\partial_\theta Y^{lm}, \partial_\phi Y^{lm}) \quad (3-149)$$

$$S_A^{lm} = \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi Y^{lm}, -\sin \theta \partial_\theta Y^{lm} \right). \quad (3-150)$$

De esta manera, A_A se puede expresar como

$$A_A = \sum_{l,m} [\mathbb{k}^{lm} Y_A^{lm} + \mathbb{a}^{lm} S_A^{lm}], \quad (3-151)$$

con $\mathbb{k}^{lm} = \mathbb{k}^{lm}(t, r)$ y $\mathbb{a}^{lm} = \mathbb{a}^{lm}(t, r)$. Por lo tanto, A_A se puede reescribir como

$$A_A = \begin{bmatrix} A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \sum_{l,m} \left\{ \mathbb{k}^{lm} \begin{bmatrix} \partial_\theta Y^{lm} \\ \partial_\phi Y^{lm} \end{bmatrix} + \mathbb{a}^{lm} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi Y^{lm} \\ -\sin \theta \partial_\theta Y^{lm} \end{bmatrix} \right\}. \quad (3-152)$$

Siguiendo las condiciones de ortonormalidad y de normalización de los armónicos esféricos bajo la definición del producto escalar entre vectores de la 2-esfera, los armónicos esféricos vectoriales cumplen que

$$\langle Y_A^{lm}, Y_A^{lm} \rangle = \langle S_A^{lm}, S_A^{lm} \rangle = l(l+1) \quad (3-153)$$

y

$$\langle Y_A^{lm}, S_A^{lm} \rangle = 0. \quad (3-154)$$

Además, aplicando a los armónicos esféricos escalares Y^{lm} una transformación de paridad, es posible demostrar que

$$Y^{lm}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y^{lm}(\theta, \phi), \quad (3-155)$$

i.e. Y^{lm} tiene una paridad polar. De manera similar, los armónicos esféricos vectoriales también satisfacen estas propiedades de paridad,

$$Y_A^{lm}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_A^{lm}(\theta, \phi) \quad (3-156)$$

y

$$S_A^{lm}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^{l+1} S_A^{lm}(\theta, \phi). \quad (3-157)$$

Por lo tanto, Y_A^{lm} posee paridad polar o par, mientras que S_A^{lm} posee paridad axial o impar. Las ecuaciones (3-148) y (3-152) para A_a y A_A se pueden reescribir en una sola expresión,

$$A_\mu = \sum_{l,m} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbb{f}^{lm} Y^{lm} \\ \mathbb{h}^{lm} Y^{lm} \\ \mathbb{k}^{lm} \partial_\theta Y^{lm} \\ \mathbb{k}^{lm} \partial_\phi Y^{lm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mathbb{a}^{lm}}{\sin \theta} \partial_\phi Y^{lm} \\ -\mathbb{a}^{lm} \sin \theta \partial_\theta Y^{lm} \end{bmatrix} \right\}, \quad (3-158)$$

donde se han separado las contribuciones de paridad polar y axial,

$$A_\mu = \sum_{l,m} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} A_\mu^{par}(\mathbb{f}^{lm}, \mathbb{h}^{lm}, \mathbb{k}^{lm}) \end{bmatrix}}_{\text{Componentes polares}} + \underbrace{\begin{bmatrix} A_\mu^{impar}(\mathbb{a}^{lm}) \end{bmatrix}}_{\text{Componentes axiales}} \right\}. \quad (3-159)$$

Ahora bien, tomando el caso en el que $f = h$ en el elemento de línea de una métrica esféricamente simétrica y estática de la ecuación (3-126) y reemplazando al vector cuadri-potencial A_μ con la forma obtenida de la expresión (3-158) en las ecuaciones de Maxwell

en el vacío (3-142), se obtienen cuatro ecuaciones diferenciales acopladas para los coeficientes f^{lm} , h^{lm} , k^{lm} y a^{lm} de las expansiones,

$$l(l+1)[f^{lm} - \partial_t k^{lm}] - rf[2\partial_r f^{lm} + r\partial_r^2 f^{lm} - 2\partial_t h^{lm} - r\partial_t \partial_r h^{lm}] = 0 \quad (3-160a)$$

$$l(l+1)[h^{lm} - \partial_r k^{lm}] + \frac{r^2}{f}[-\partial_t \partial_r f^{lm} + \partial_t^2 h^{lm}] = 0 \quad (3-160b)$$

$$f \frac{df}{dr} [h^{lm} - \partial_r k^{lm}] + f^2 [\partial_r h^{lm} - \partial_r^2 k^{lm}] - \partial_t f^{lm} + \partial_t^2 k^{lm} = 0 \quad (3-160c)$$

$$l(l+1) \frac{f}{r^2} a^{lm} - f \frac{df}{dr} \partial_r a^{lm} - f^2 \partial_r^2 a^{lm} + \partial_t^2 a^{lm} = 0. \quad (3-160d)$$

Las ecuaciones obtenidas en las expresiones (3-160a) y (3-160b) corresponden a las componentes t y r de las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Mientras que las ecuaciones (3-160c) y (3-160d) son deducidas a partir de realizar combinaciones lineales entre las componentes θ y ϕ de las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Es importante notar que la ecuación (3-160d) esta solamente en términos de los coeficientes a^{lm} , los cuales corresponden a la componente axial de la perturbación. Luego, usando la definición de la coordenada tortuga de la expresión (3-128) para el caso en el que $f = h$, la expresión (3-160d) toma la forma

$$\frac{\partial^2 a^{lm}}{\partial r_*^2} - \frac{\partial^2 a^{lm}}{\partial t^2} - V a^{lm} = 0. \quad (3-161)$$

Ésta es la ecuación maestra para la componente axial de la perturbación del campo electromagnético, donde se ha definido al potencial efectivo $V = V(r)$ como

$$V = f \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (3-162)$$

Por otra parte, los coeficientes f^{lm} , h^{lm} y k^{lm} corresponden a la contribución polar de la perturbación y se encuentran mezclados en las ecuaciones (3-160a), (3-160b) y (3-160c). Si se deriva con respecto a r la ecuación (3-160a) y con respecto a t la ecuación (3-160b), para luego restar estos dos resultados, se obtiene una expresión independiente de la componente k^{lm} . Introduciendo la función $z^{lm} = z^{lm}(t, r)$,

$$z^{lm} = \frac{r^2}{l(l+1)} [\partial_t h^{lm} - \partial_r f^{lm}] \quad (3-163)$$

y utilizando la coordenada tortuga, se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial^2 z^{lm}}{\partial r_*^2} - \frac{\partial^2 z^{lm}}{\partial t^2} - V z^{lm} = 0, \quad (3-164)$$

donde el potencial $V = V(r)$ vuelve a tomar la misma forma que en el caso de la contribución axial (3-162). Esta ultima expresión es la ecuación maestra para la componente

polar de la perturbación del campo electromagnético.

Como se acaba de mostrar, las expresiones (3-161) y (3-164), correspondientes a las ecuaciones maestras para la componentes axial y polar de la perturbación del campo electromagnético, tienen la misma forma funcional. Estas ecuaciones diferenciales, se pueden entender como casos particulares de la expresión general

$$\frac{\partial^2 \psi^{lm}}{\partial r_*^2} - \frac{\partial^2 \psi^{lm}}{\partial t^2} - V \psi^{lm} = S, \quad (3-165)$$

donde $\psi^{lm} = \psi^{lm}(t, r_*)$ representa a las perturbaciones, la función $S = S(t, r_*)$ corresponde a la fuente y V es el potencial efectivo ya definido. A partir de esta relación es posible obtener la correspondiente ecuación de RW utilizando la transformada de Laplace sobre ψ^{lm} ,

$$L[\psi^{lm}] = \int_{t_0}^{\infty} \psi^{lm} e^{i\omega t} dt. \quad (3-166)$$

Con esto, las perturbaciones se describirán en el espectro de las frecuencias ω . Si $L[\psi^{lm}] = \Psi^{lm} = \Psi^{lm}(\omega, r_*)$, la transformada inversa de Laplace viene representada por

$$\psi^{lm} = \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \Psi^{lm} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3-167)$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación (3-165) y utilizando las propiedades

$$L\left[\frac{\partial \psi^{lm}}{\partial t}\right] = -[\psi^{lm} e^{i\omega t}]_{t=t_0} - i\omega \Psi^{lm} \quad (3-168)$$

y

$$L\left[\frac{\partial^2 \psi^{lm}}{\partial t^2}\right] = e^{i\omega t_0} \left[i\omega \psi^{lm} - \frac{\partial \psi^{lm}}{\partial t} \right]_{t=t_0} - \omega^2 \Psi^{lm}, \quad (3-169)$$

se obtiene como resultado

$$\frac{\partial^2 \Psi^{lm}}{\partial r_*^2} + [\omega^2 - V] \Psi^{lm} = I, \quad (3-170)$$

donde $I = I(\omega, r_*)$ es la fuente de la perturbación y viene dada por

$$I = L[S] + e^{i\omega t_0} \left[i\omega \psi^{lm} - \frac{\partial \psi^{lm}}{\partial t} \right]_{t=t_0}. \quad (3-171)$$

La expresión (3-170) es la ecuación de RW para las perturbaciones del campo electromagnético. En este resultado, se toma a $\Psi^{lm} = \alpha^{lm}$ para describir a las perturbaciones axiales y $\Psi^{lm} = \psi^{lm}$ para describir a las perturbaciones polares.

3.3. Campos perturbados en el espacio-tiempo de Schwarzschild

El AN de Schwarzschild representado por $f^{(Sch)} = f^{(Sch)}(r)$ en la ecuación (2-87), es un caso límite de particular interés en este trabajo pues además de ser la primera solución a las ecuaciones de campo de la RG, es la más estudiada en la literatura. En esta subsección se comprobará el comportamiento de las perturbaciones al campo escalar masivo sobre el espacio-tiempo de Schwarzschild para después mostrar que las perturbaciones de campos sobre esta solución de AN se pueden estudiar de manera generalizada dependiendo el espín s del campo.

En la métrica de Schwarzschild se tiene $f^{(Sch)} = h^{(Sch)}$; por lo tanto, la coordenada tortuga de la expresión (3-128) se puede integrar para obtener

$$r_* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right), \quad (3-172)$$

en la cual, la constante de integración ha sido escogida adecuadamente [24] para que r_* se encuentre entre $-\infty < r_* < \infty$ mientras que la coordenada original toma valores en $2M \leq r < \infty$. Teniendo en cuenta estos rangos, la ecuación de RW para el campo escalar (3-129) toma la forma

$$\frac{d^2 \Phi_l}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_l^{(Sch)}] \Phi_l = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \rho_l, \quad (3-173)$$

con $V_l^{(Sch)} = V_l^{(Sch)}(r)$ el potencial efectivo de Schwarzschild

$$V_l^{(Sch)} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\mu^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right). \quad (3-174)$$

En la Figura (3-8), se muestra el comportamiento del potencial efectivo de Schwarzschild de la expresión (3-174) en función de r y para distintos valores de μ . Allí se evidencia que para valores grandes de μ , el máximo del potencial $V_l^{(Sch)}$ se incrementa, al igual que el punto $r = r_{max}$ en el que se ubica. También se observa que en el límite en que $r \rightarrow 2M$, el potencial $V_l^{(Sch)} \rightarrow 0$ mientras que en el límite en que $r \rightarrow \infty$, el potencial $V_l^{(Sch)} \rightarrow \mu^2$. Por esta razón, siempre que $\mu \neq 0$ existe una “barrera de potencial reflexiva” en el infinito [24].

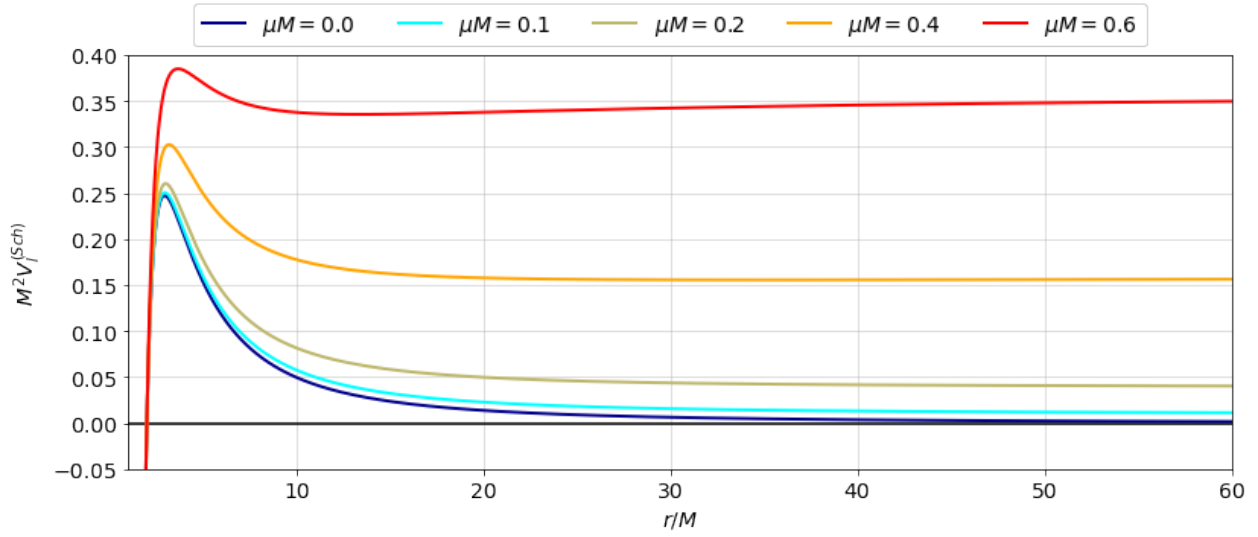


Figura 3-8: Potencial de Schwarzschild $V_l^{(Sch)}$ para perturbaciones escalares en función de r y para diferentes valores de μ (con $l = 2$).

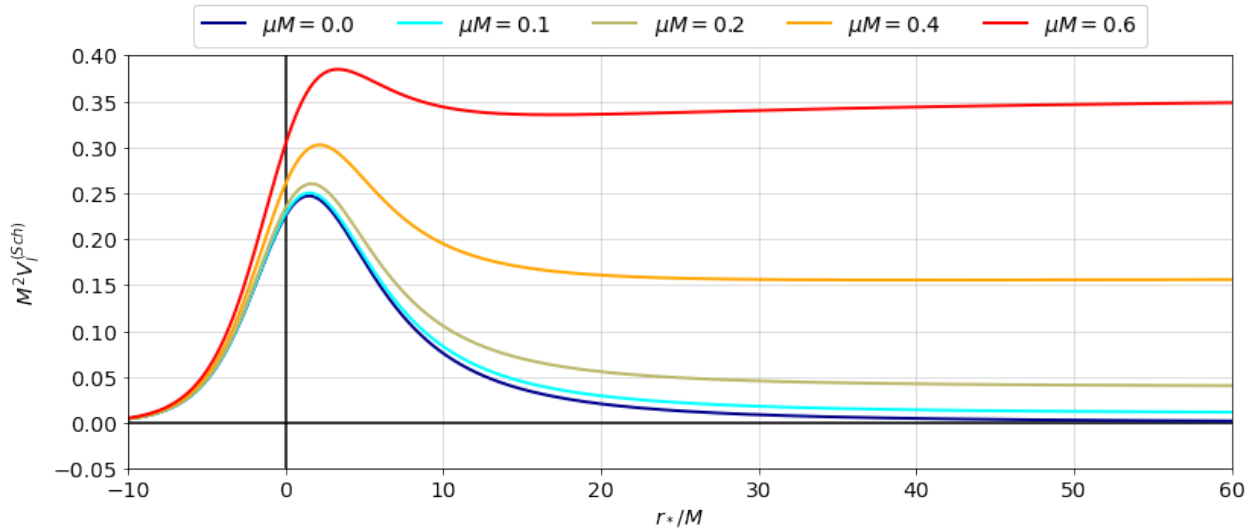


Figura 3-9: Potencial de Schwarzschild $V_l^{(Sch)}$ para perturbaciones escalares en función de r_* y para diferentes valores de μ (con $l = 2$).

Por otro lado, en la Figura (3-9), se ilustra el comportamiento típico del potencial efectivo de Schwarzschild (3-174) para distintos valores de la masa del campo, μ , de las perturbaciones escalares masivas en función de la coordenada tortuga r_* . En esta ocasión, se obtienen las mismas curvas que en [24], corroborándose una vez más, que este potencial es bien comportado en las regiones asintóticas, ya que es posible evidenciar

claramente que en las cercanías del horizonte de eventos, cuando $r_* \rightarrow -\infty$, el potencial $V_l^{(Sch)} \rightarrow 0$, mientras que sobre el infinito espacial, cuando $r_* \rightarrow \infty$, nuevamente el potencial $V_l^{(Sch)} \rightarrow \mu^2$.

Cabe resaltar, que el caso de las perturbaciones a los campos sin masa ($\mu = 0$ para el campo escalar), puede ser visto como un caso particular de un formalismo más extenso, pues su descripción teórica se puede generalizar en función de la propiedad de espín s asociada a los campos. Para campos bosónicos (con s entero) sin masa, las perturbaciones del campo escalar ($s = 0$), el campo electromagnético ($s = 1$) y el campo gravitacional ($s = 2$) satisfacen ecuaciones que tienen la misma forma. Así, de manera general, la ecuación de RW para un campo bosónico sin masa en el fondo de Schwarzschild es

$$\frac{d^2 \Psi_{sl}}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_{sl}^{(Sch)}] \Psi_{sl} = 0, \quad (3-175)$$

donde el potencial de Schwarzschild $V_{sl}^{(Sch)} = V_{sl}^{(Sch)}(r)$ se reescribe en la forma

$$V_{sl}^{(Sch)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M(1-s^2)}{r^3}\right). \quad (3-176)$$

Esto quiere decir que las ecuaciones maestras encontradas en las expresiones (3-129) y (3-170) para las perturbaciones escalares y electromagnéticas respectivamente, en el caso homogéneo y en la métrica de Schwarzschild, pueden entenderse como casos particulares de la ecuación maestra generalizada (3-175).

Es importante tener en cuenta que existen otras formas de generalizar los potenciales efectivos que describen a las perturbaciones de distintos campos de prueba, no es algo que se puede hacer solamente en campos bosónicos. Hay algunos formalismos que permiten describir campos con s semi-entero, e.g., campos de Dirac que podrían estar asociados a electrones o neutrinos [10, 108], sin embargo estos y otros casos no se discutirán en el presente trabajo. De cualquier forma, es de resaltar que actualmente las investigaciones de las perturbaciones del campo gravitacional son consideradas, desde un punto de vista observacional, como las más importantes debido a los proyectos recientes de detección de ondas gravitacionales como el interferómetro láser del proyecto LISA [5].

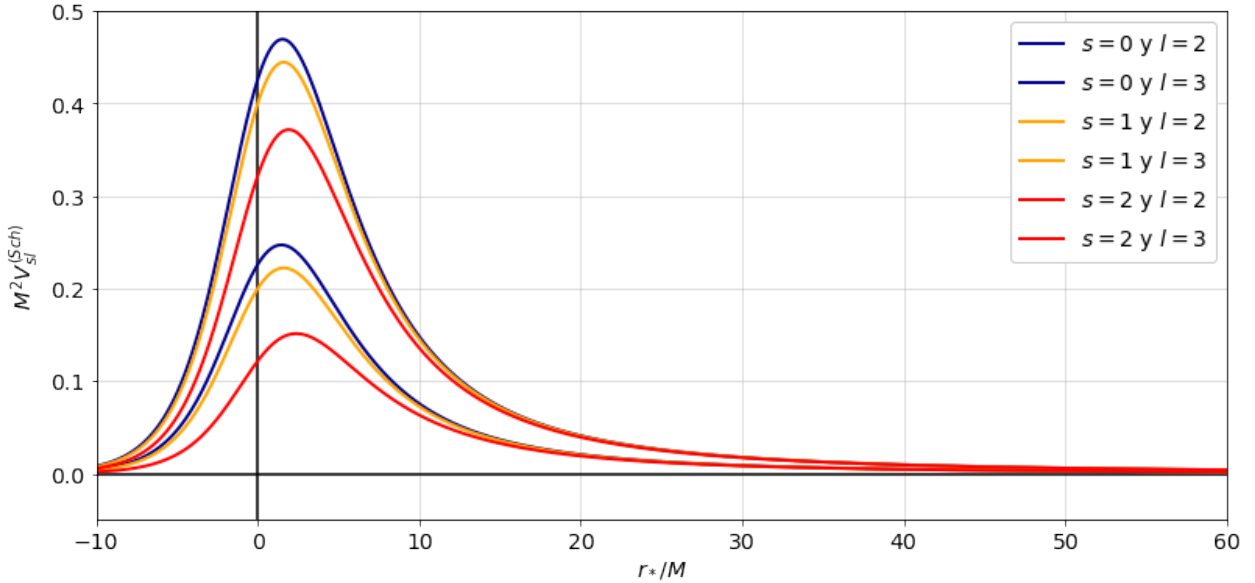


Figura 3-10: Potencial de Schwarzschild $V_{sl}^{(Sch)}$ para perturbaciones escalares ($s = 0$), electromagnéticas ($s = 1$) y gravitacionales ($s = 2$) en función de r_* y para $l = 2, 3$.

En la Figura (3-10), se muestra el comportamiento del potencial efectivo de Schwarzschild (3-176) para perturbaciones escalares ($s = 0$), electromagnéticas ($s = 1$) y gravitacionales ($s = 2$) y en función de r_* (se obtienen las mismas curvas que en [3] para el caso gravitacional). En todos los casos, se evidencia que el potencial $V_{sl}^{(Sch)} \rightarrow 0$ en las regiones asintóticas, $r_* \rightarrow \pm\infty$. También se ilustra cómo en el caso de las perturbaciones gravitacionales, el potencial siempre es notablemente menor, seguido del caso electromagnético y luego del caso escalar.

Se puede observar también que estos potenciales efectivos poseen un máximo dado por la condición

$$\left. \frac{d}{dr} V_{sl}^{(Sch)} \right|_{r=r_{max}} = 0. \quad (3-177)$$

Ésta da como resultado una ecuación cuadrática con la forma

$$\beta_l r_{max}^2 - 3M(\beta_l - \beta_s)r_{max} - 8M^2\beta_s = 0, \quad (3-178)$$

donde $\beta_l = l(l+1)$ y $\beta_s = (1-s^2)$.

Despejando de esta relación la coordenada radial del máximo $r = r_{max}$, se obtiene

$$r_{max} = \frac{3M}{2\beta_l} \left[\beta_l - \beta_s \pm \sqrt{\beta_l^2 + \beta_s^2 + \frac{14}{9}\beta_l\beta_s} \right], \quad (3-179)$$

en la cual solo la rama positiva tiene sentido físico. Cabe destacar, que esta expresión para la coordenada radial r_{max} , es solamente para las perturbaciones del campo escalar sin masa y sobre el espacio-tiempo de Schwarzschild. Como se discutirá más adelante, en la mayoría de soluciones de tipo AN, sobre todo en las provenientes de teorías de gravedad modificada, no es posible obtener una expresión analítica para la coordenada radial r_{max} del punto máximo del potencial. Debido a esto, usualmente se debe recurrir a los métodos numéricos para encontrar el resultado, necesario para calcular las frecuencias de los QNMs.

Es importante notar que en el límite en que el número multipolar $l \rightarrow \infty$ (llamado el límite eikonal [24]) el valor del máximo $r_{max} \rightarrow 3M$, por lo que coincide con la llamada esfera de fotones del espacio-tiempo de Schwarzschild, i.e. en el límite eikonal $r_{max} \rightarrow r_{ef}$. De todas formas, para valores pequeños de l la coordenada radial donde se ubica el máximo aún sigue siendo cercana a r_{ef} . Para $s = \{0, 1, 2\}$ y $l = 2$ el máximo esta en $r_{max}/M = \{2.95, 3, 3.28\}$ en cambio para $s = \{0, 1, 2\}$ y $l = 3$ el máximo se encuentra en $r_{max}/M = \{2.97, 3, 3.00\}$ (Nótese que en el caso de las perturbaciones del campo electromagnético ($s = 1$) sobre el fondo de Schwarzschild, siempre se cumple que $r_{max} = r_{ef}$).

4. Modos cuasinormales de un agujero negro estático y esféricamente simétrico

Antes de definir a los QNMs, un ejemplo interesante para entender a las perturbaciones de los ANs es el de una cuerda vibrante con extremos fijos [24]. Cualquier perturbación sobre la cuerda viene descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4-180)$$

con $0 \leq x \leq \pi$ y donde se ha tomado la velocidad de las ondas en la cuerda como $c = 1$ y una longitud de $L = \pi$. Las condiciones de frontera de extremo fijo son $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$, de modo que la solución general $u = u(t, x)$ se puede expresar como una expansión de Fourier con la forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx, \quad (4-181)$$

donde A_n y B_n son constantes determinadas a partir de las condiciones iniciales del sistema. Por ejemplo, si $u(0, x) = u_0 = u_0(x)$ y $\partial_t u(0, x) = v_0 = v_0(x)$, estas constantes vendrían dadas por

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0 \sin nx dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} v_0 \sin nx dx. \quad (4-182)$$

Al imponer la condición $u(t, \pi) = 0$ sobre la solución, se determina que la frecuencia ω de la cuerda vibrante viene dada por la expresión

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{c}{2L} n = n, \quad (4-183)$$

con $n = \{1, 2, 3, \dots\}$ y ν la frecuencia de oscilación de cada onda estacionaria. La combinación lineal de la solución (4-181) representa una suma infinita de ondas estacionarias y cada una de estas, con una forma dada por un valor de n fijo, se denomina un modo normal de oscilación. Así, la cuerda entra en resonancia solamente en ciertas frecuencias, iniciando el modo normal con la frecuencia más baja (primer armónico o modo fundamental, $n = 1$), seguida de modos normales que poseen frecuencias de múltiplos enteros del modo fundamental, e.g. el segundo armónico ($n = 2$), etc.

Si se generaliza el mismo problema de la cuerda vibrante con extremos fijos pero bajo un potencial y una fuente que actúan como las fuerzas externas del sistema, es posible evidenciar mediante la construcción de la función de Green del sistema, que estos modos normales de oscilación son las raíces del Wronskiano de las soluciones y por lo tanto,

también corresponden a los distintos polos de la función de Green de la solución [24].

Ahora bien, para entender el concepto de QNMs, se puede recurrir a una explicación usual y simple de estos, mediante un golpe a una copa de vino [112]. Si se perturba una copa de vino golpeándola suavemente, esta resonará bajo ciertas frecuencias específicas que dependen tanto de la composición del vaso como del vino. Si este sistema fuera cerrado, el vidrio resonaría para siempre generando un modo normal de oscilación. Sin embargo, realmente éste es un sistema abierto y el vidrio dejará de resonar con el tiempo hasta llegar a una configuración de equilibrio, por lo que no generaría modos normales, sino más bien los llamados QNMs que describen a las oscilaciones amortiguadas. Las copas de vino con diferentes cantidades de contenido resuenan a diferentes frecuencias de los QNMs, de modo que es posible determinar la cantidad del contenido mediante el sonido que hace cuando golpeamos la copa. De manera similar, si se perturba a los objetos compactos en el universo, estos oscilarán hasta llegar a un estado de equilibrio, irradiando energía hacia el infinito mediante ondas amortiguadas, las cuales pueden ser interpretadas como perturbaciones del espacio-tiempo denominadas ondas gravitacionales [112].

Los objetos astrofísicos que son suficientemente compactos como para generar QNMs en el espacio-tiempo no son únicamente los ANs. Estudios actuales muestran que estas perturbaciones también se esperarían para estrellas de neutrones o inclusive sobre otros posibles sistemas de gravedad fuerte como lo son las estrellas de bosones, los agujeros de gusano, etc [5]. Por otro lado, el término de “modos cuasinormales” o “*Quasinormal Modes*” (QNMs) en inglés, fue propuesto inicialmente en 1971 en [113] para distinguir estos modos de oscilaciones amortiguadas de los modos normales. Desde ese momento, se podría decir que se inició un gran número de investigaciones alrededor de los QNMs de los ANs, desarrollándose aplicaciones de bastante interés astrofísico a partir de la obtención de las frecuencias de estas perturbaciones (brevemente discutidas en el apéndice C).

Las frecuencias ω de los QNMs de un AN son números complejos con la forma

$$\omega = \omega_R - i\omega_I, \quad (4-184)$$

donde la parte real,

$$\omega_R = 2\pi\nu, \quad (4-185)$$

representa la frecuencia de oscilación de cada modo y la parte compleja,

$$\omega_I = 1/\tau, \quad (4-186)$$

esta relacionada con el tiempo de decaimiento τ de cada modo [5]. Consecuentemente, la métrica del espacio-tiempo que sirve de fondo es linealmente estable bajo perturbaciones si todos los QNMs tienen una frecuencia con parte imaginaria positiva ($\omega_I > 0$) mientras que el fondo sería inestable si al menos uno de los QNM tiene una parte imaginaria negativa ($\omega_I < 0$) [5].

Los ANs perturbados son un sistema abierto que pierde energía al emitir radiación y debido a esto, las ondas de los QNMs de la perturbación decaen con el tiempo sobre una región infinita. La frecuencia y el tiempo de amortiguamiento τ de los QNMs dependen de cada sistema en específico y de sus propiedades fundamentales. Por ejemplo, los QNMs de los ANs de Schwarzschild, solo vienen determinados por su masa, M , mientras que para los ANs de Kerr, dependen tanto de la masa, M , como del espín, a [3]. El espectro de los QNMs de un AN son un conjunto infinito de frecuencias angulares complejas, ω , que corresponden a los autovalores de la ecuación maestra que describe las perturbaciones del sistema [5].

Estas perturbaciones pueden aparecer en el espacio-tiempo cuando un AN se traga a un objeto más pequeño que se mueve en trayectorias en espiral con una relación de masa extrema (órbitas EMRIs en inglés). Estas trayectorias pueden ser encontradas cerca de los centros galácticos, donde estrellas, ANs estelares y estrellas de neutrones se pueden encontrar orbitando a un AN supermasivo. Se espera que estas órbitas EMRIs y el estudio de sus ondas gravitacionales puedan ser analizadas observacionalmente por futuros detectores más sensibles que LIGO, como el interferómetro del proyecto LISA [5]. Consecuentemente, en los últimos años ha habido un gran número de investigaciones en las cuales se han desarrollado variados métodos numéricos y semi-analíticos para calcular el espectro de los QNMs alrededor de ANs provenientes de distintas teorías de gravedad [3, 10–58]. De manera simultánea, una serie de novedosas soluciones de tipo AN se han venido publicando, entre estas se encuentran las relacionadas con el espacio-tiempo de los ANs de la gravedad de EGB 4D. En [10–13, 59–63] fueron estudiados los QNMs de estos ANs y cabe resaltar que una de las metodologías que más fue utilizada corresponde al denominado método de la aproximación WKB, el cual será brevemente descrito en la siguiente subsección. En esta tesis se estudian los QNMs en el espacio-tiempo de un AN AdS con carga eléctrica y bajo la gravedad de EGB 4D, aprovechando el hecho de que esta solución permite analizar distintos efectos sobre las perturbaciones que otras teorías, como la RG, no tienen en cuenta.

De manera adicional, debido a las unidades usadas, es importante tener presente el factor de conversión de las frecuencias [5],

$$3.231 \left(\frac{10M_{\odot}}{M} \right) \text{ kHz.} \quad (4-187)$$

Por ejemplo, para una perturbación sobre el AN de Schwarzschild, el modo fundamental $n = 0$ con $l = 2$ tiene una frecuencia de $\omega = 0.37367 - 0.08896i$ [5], de modo que multiplicando el factor de la expresión anterior por ω_R y por $2\pi\omega_I$, este QNM tendría una frecuencia de

$$v = 1.207 \left(\frac{10M_{\odot}}{M} \right) \text{ kHz} \quad (4-188)$$

y un tiempo de decaimiento dado por

$$\tau = 0.554 \left(\frac{M}{10M_{\odot}} \right) \text{ ms.} \quad (4-189)$$

Adicionalmente, también es posible mostrar mediante la construcción de la función de Green, que las frecuencias de los QNMs corresponden a las raíces del Wronskiano de las soluciones y por lo tanto, también se identifican con los distintos polos de la función de Green de la solución [24]. Las frecuencias de los QNMs vienen etiquetadas con un número entero n , que es el mismo número armónico del caso de los modos normales. En esta ocasión, el modo $n = 0$ es conocido como el modo fundamental y corresponde al menos amortiguado y al más duradero, por lo que suele dominar la forma de la perturbación en el caso realista [24].

4.1. Aproximación WKB

El formalismo que se emplea para encontrar a los QNMs de un AN depende de la geometría que los describe. Este trabajo está concentrado en las perturbaciones escalares y electromagnéticas de ANs estáticos y esféricamente simétricos. Por fortuna, el formalismo detrás del cálculo de los QNMs de estas perturbaciones se puede generalizar para cada tipo de AN. Entre los primeros acercamientos teóricos desarrollados para calcular las frecuencias de los QNMs de un AN de manera semi-analítica, se encuentra el método de la aproximación de Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB), introducido inicialmente por B. Schutz y C. Will [90]. A continuación se ilustrará cómo está fundamentado el método WKB.

Inicialmente, es posible reconocer que las ecuaciones (3-129), (3-170) y (3-175) se resumen en la ecuación de RW, que en el caso homogéneo se puede expresar [24]

$$\frac{d^2\Psi}{dr_*^2} + \Omega\Psi = 0, \quad (4-190)$$

donde $\Omega = \Omega(r_*)$ dado por

$$\Omega = \omega^2 - V. \quad (4-191)$$

En analogía a la mecánica cuántica, la expresión (4-190) describe la misma ecuación de Schrödinger para una partícula de masa m y energía E moviéndose sobre una barrera de potencial con

$$\Omega = -\frac{2m}{\hbar^2}[V - E]. \quad (4-192)$$

Aquí los autovalores de la energía E son reales debido a que el sistema es conservativo. Analizando las diferentes regiones del potencial, antes y después de los puntos de retorno en que $\Omega = 0$, se pueden estudiar las distintas condiciones y propiedades útiles del método a distintos ordenes de la perturbación, investigaciones que están relacionadas con las soluciones de las llamadas aproximaciones de la “óptica geométrica” y de la “óptica física” [24].

4.1.1. Fundamentos a primer orden

Si se introduce el valor de la coordenada tortuga en la cual se alcanza el punto máximo del potencial \tilde{r}_* , el potencial evaluado en este punto sería $V(\tilde{r}_*) = V_0$. Luego, Expandiendo en series de Taylor alrededor de \tilde{r}_* , a primer orden se tiene

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{1}{2}\Omega_0''(r_* - \tilde{r}_*)^2 + \mathcal{O}(r_* - \tilde{r}_*)^3 + \dots \quad (4-193)$$

con $\Omega_0 = \omega^2 - V_0$ y $\Omega_0'' = -V_0''$. Nótese que el segundo término de la expansión no aparece, ya que corresponde a la condición del punto máximo del potencial. Después, al remplazar esta expansión en la ecuación diferencial (4-190) y realizar un cambio de variable de la forma

$$z = (2\Omega_0'')^{1/4} e^{i\pi/4} (r_* - \tilde{r}_*) \quad (4-194)$$

se obtiene de forma aproximada

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} + \left[-\frac{i\Omega_0}{\sqrt{2\Omega_0''}} - \frac{1}{4}z^2 \right] \Psi = 0. \quad (4-195)$$

Definiendo al parámetro ξ como

$$\xi = -\frac{1}{2} - \frac{i\Omega_0}{\sqrt{2\Omega_0''}}, \quad (4-196)$$

la ecuación diferencial se puede reescribir como

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} + \left[\xi + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2 \right] \Psi = 0. \quad (4-197)$$

La anterior expresión es conocida como la ecuación de Weber-Hermite o del cilindro parabólico [114] y tiene como solución

$$\Psi = AD_\xi(z) + BD_{-\xi-1}(iz). \quad (4-198)$$

Esto corresponde a una superposición de funciones parabólicas cilíndricas $D_\xi(z)$ linealmente independientes. En [114] se desarrollan estas funciones en detalle, identificando propiedades tales como

$$D_\xi(z) = e^{i\pi\xi} D_\xi(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\xi)} e^{i(\xi+1)\pi/2} D_{-\xi-1}(-iz). \quad (4-199)$$

Por otro lado, es de particular interés en este caso el comportamiento asintótico de $D_\xi(z)$. Para $r_* > 0$, se tiene que $\arg(z) = -\pi/4$, por lo que $z \rightarrow \infty$ implica que [111]

$$D_\xi(z) \sim z^\xi e^{-z^2/4} \quad (4-200)$$

Por otro lado, si $r_* < 0$, se tiene $\arg(z) = 3\pi/4$ y el correspondiente comportamiento asintótico de $D_\xi(z)$ es [111]

$$D_\xi(z) \sim z^\xi e^{-z^2/4} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\xi)} e^{i\pi\xi} z^{-\xi-1} e^{z^2/4}. \quad (4-201)$$

En esta expresión, el factor que acompaña a $e^{z^2/4}$ en el segundo término de la derecha representa un modo saliente de las perturbaciones. Al imponer las condiciones de frontera discutidas en la anterior sección, éste término debe anularse debido a que las soluciones cerca del horizonte de eventos no deben tener modos salientes. Por lo tanto, la única forma en que se cumplan las condiciones de frontera de un AN, es exigiendo que [24]

$$\frac{1}{\Gamma(-\xi)} = 0, \quad (4-202)$$

lo cual es válido si ξ se convierte en un entero positivo, i.e. $\xi = n$ con $n = \{0, 1, 2, \dots\}$. Consecuentemente, utilizando este valor de ξ en la expresión (4-196) se obtiene

$$\frac{\Omega_0}{\sqrt{2\Omega_0''}} = i \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (4-203)$$

y reemplazando los valores de Ω_0 y Ω_0'' se tiene

$$\omega^2 = V_0 - i\sqrt{-2V_0''} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (4-204)$$

Esta última ecuación proporciona las frecuencias de los QNMs a primer orden en la aproximación WKB [23, 24]. En esta ocasión, las frecuencias de los QNMs nuevamente se

encuentran etiquetados con el número armónico o de “sobretono” n , análogas a las frecuencias de los modos normales de oscilación de la ecuación (4-183). Aunque en esta ocasión se ha conseguido esta fórmula de manera analítica, no siempre es posible encontrar analíticamente el valor de la coordenada tortuga en la cual se alcanza el punto máximo del potencial \tilde{r}_* y por ello, la aproximación WKB es, en general, una metodología semi-analítica.

4.1.2. Método WKB a ordenes superiores

Anteriormente se mostró la deducción de la ecuación encontrada por B. Schutz y C. Will en 1985 [90] para las frecuencias de los QNMs de un AN a 1^{er} orden mediante el método WKB. Es importante notar que en ésta fórmula a 1^{er} orden (4-204), tanto la parte real ω_R como la parte imaginaria ω_I de las frecuencias al igual que el número de sobretono n , dependen únicamente del potencial máximo, V_0 , y de la segunda derivada del potencial evaluada en el punto máximo, V_0'' . Cuando se introdujo éste método, se estimaron los QNMs de las perturbaciones gravitacionales del AN de Schwarzschild con un error de aproximadamente un 6% [90, 115].

S. Iyer y C. Will, en 1987 [45], extendieron el método de la aproximación WKB hasta el 3^{er} orden de la expansión del potencial de RW, mejorando la precisión del método para llegar a un error estimado de menos de 1% [115] para $n = 0$. La formula de las frecuencias de los QNMs del 3^{er} orden del método WKB es [24, 45]

$$\omega^2 = \left[V_0 + \sqrt{-2V_0''} \tilde{\Gamma}_1 \right] - i\lambda \sqrt{-2V_0''} [1 + \tilde{\Gamma}_2], \quad (4-205)$$

con

$$\tilde{\Gamma}_1 = \frac{1}{\sqrt{-2V_0''}} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right) \left(\frac{1}{4} + \lambda^2 \right) - \frac{1}{288} \left(\frac{V_0'''}{V_0''} \right)^2 (7 + 60\lambda^2) \right], \quad (4-206a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_2 = & -\frac{1}{2V_0''} \left[\frac{5}{6912} \left(\frac{V_0'''}{V_0''} \right)^4 (77 + 188\lambda^2) - \frac{1}{384} \frac{V_0'''' V_0^{(4)}}{V_0''^3} (51 + 100\lambda^2) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2304} \left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right)^2 (67 + 68\lambda^2) + \frac{1}{288} \frac{V_0'''' V_0^{(5)}}{V_0''^2} (19 + 28\lambda^2) - \frac{1}{288} \frac{V_0^{(6)}}{V_0''} (5 + 4\lambda^2) \right], \end{aligned} \quad (4-206b)$$

donde $\lambda = n + 1/2$ y con V_0''' y $V_0^{(j)}$ la tercera y la j -ésima derivada del potencial respectivamente, ambas evaluadas en la coordenada radial del punto máximo. Tomando $\tilde{\Gamma}_1 = \tilde{\Gamma}_2 = 0$ en la ecuación (4-205), claramente se obtiene la formula del método WKB a

1^{er} orden de la ecuación (4-204). Las formulas del método WKB a 1^{er} y 3^{er} orden dan resultados satisfactorios siempre que $l > n$, condición que por suerte coincide con el hecho de que el modo más pequeño para las perturbaciones electromagnéticas y gravitacionales correspondan a $l = 1$ y $l = 2$, respectivamente. De todas formas, estas formulas dan los mejores resultados cuando $l \gg n$ y cuando $l = n$ estos son aceptables [24, 115].

Luego, en el 2003 Konoplya [25] realizó la extensión de la formula del método WKB a 6^{to} orden, dando resultados más precisos que las formulas previas [115]. Esta extensión resulta en

$$\frac{i(\omega^2 - V_0)}{\sqrt{-2V_0''}} - \sum_{j=2}^6 \Gamma_j = n + \frac{1}{2}, \quad (4-207)$$

donde las ultimas contribuciones del orden 6^{to} del método WKB dadas por Γ_j pueden ser consultadas en [25] ya que por extensión, no se compartidas aquí. Esta formula tiene términos dependientes de hasta $V_0^{(12)}$, es decir la doceava derivada del potencial evaluado en la coordenada radial del punto máximo. En el 2017, J. Matyjasek y M. Opala [21] desarrollaron la extensión de la formula del método WKB a 13^{vo} orden. Sin embargo, se ha mostrado que no se garantiza una convergencia en cada orden y además, el incluir más ordenes de la expansión no asegura que se obtendrán resultados más precisos [115]. Finalmente, hay un acercamiento adicional denominado la aproximación de Padé, utilizado por J. Matyjasek y M. Opala en [21], en el cuál se modifica y mejora al método de WKB para proporcionar, de manera semi-analítica, resultados más precisos en ordenes superiores [115].

4.2. Otros métodos para encontrar los QNMs de un AN

Además del método de la aproximación WKB, otro de los primeros formalismos teóricos desarrollados para calcular las frecuencias de los QNMs de un AN de manera semi-analítica fue introducido en 1984 por V. Ferrari y B. Mashhoon [42] y consiste en aproximar el potencial de RW al reconocido potencial de Pöschl-Teller, de manera que la ecuación de RW homogénea tomaría la forma [23]

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r_*^2} + \left[\omega^2 - \frac{V_0}{\cosh^2 \eta (r_* - \bar{r}_*)} \right] \Psi = 0, \quad (4-208)$$

con

$$\eta^2 = \frac{V_0''}{2V_0}. \quad (4-209)$$

Luego de hacer algunas sustituciones y de manera similar a como se hizo con la aproximación WKB, es posible llevar la ecuación (4-208) a una ecuación diferencial de la cual se

conozcan sus soluciones. En este caso las soluciones corresponden a las funciones hipergeométricas. Analizando el comportamiento asintótico de estas funciones, es posible dar con una formula semi-analítica para las frecuencias de los QNMs, dada por [23]

$$\omega = \pm \sqrt{V_0 - \frac{\eta^2}{4}} - i\eta\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (4-210)$$

En este caso, tanto la parte real como la parte imaginaria de las frecuencias, dependen del potencial y de su segunda derivada evaluados en la coordenada del punto máximo. No obstante, solamente la parte imaginaria, ω_I , depende del número de sobretono, n . De modo que, este formalismo podría proporcionar mejores resultados para ω_I que aquellos obtenidos mediante la formula del método WKB a 1^{er} orden de la ecuación (4-204). Este desarrollo no es muy recomendado para estudiar la parte real ω_R de las frecuencias de las perturbaciones, a menos de que se trate del limite eikonal ($l \rightarrow \infty$) o del modo fundamental ($n=0$) [23].

Por otro lado, éstas formulas semi-analíticas, no proporcionan resultados con una precisión satisfactoria cuando $n \geq l$ y tampoco cuando el potencial contiene alguna divergencia, como sucede en las perturbaciones del campo escalar masivo, particularmente cuando $v_0 < \mu^2$ (ver Figura (3-9)) o en las regiones asintóticas del potencial aparece cuando se consideran los casos dS y AdS. Cuando se tienen estas divergencias, claramente no se satisfacen las condiciones requeridas por los formalismos, pues estos necesitan que al menos sea posible la identificación del punto máximo característico de la barrera de potencial. Recientemente se ha mostrado que los QNMs en la gravedad AdS tienen una interpretación directa con la teoría conocida como de *gauge dual*, relacionada con la teoría de campos conformes, y que ayudan a predecir la entropía de los ANs en la gravedad cuántica de bucles [25]. Por esto motivos, se han propuesto otros enfoques alternativos para calcular las frecuencias de los QNMs entre los que se encuentran acercamientos clásicos y numéricos como el método de Chandrasekhar-Detweiler, la integración directa de la ecuación de onda, el método de las series de Frobenius y sus ramificaciones, el método de las fracciones continuas y la técnica de monodromía para QNMs altamente amortiguados (estos y otros formalismos son discutidos en [22, 23]). Adicionalmente, en los últimos años se han desarrollado otros formalismos novedosos y computacionales alternativos con los cuales se puede obtener a las frecuencias de los QNMs de los ANs como el método de la sumatoria de Borel [17], el paquete de Mathematica de Jansen [116] o a partir del uso de redes neuronales prealimentadas [117].

5. Cálculo de las frecuencias de los modos cuasinormales

A continuación se mostrarán los resultados obtenidos de las frecuencias ω de los QNMs de las perturbaciones a los campos escalares y electromagnéticos sobre los fondos de los ANs compartidos en la Tabla 5-4.

Agujero Negro	Campo perturbado	Figura	Tabla
Schwarzschild $f^{(Sch)}$	Escalar masivo	(5-15)	(A-5)
	Escalar sin masa	(5-16) (5-23)	(A-6)
	Electromagnético	(5-31)	(B-13)
Reissner-Nordström $f^{(RN)}$	Escalar sin masa	(5-17) (5-23)	(A-7)
	Electromagnético	(5-31)	(B-14)
Einstein-Gauss-Bonnet 4D $f^{(EGB)}$	Escalar sin masa	(5-18) (5-23)	(A-8)
	Electromagnético	(5-31)	(B-15)
Reissner-Nordström Einstein-Gauss-Bonnet 4D $f^{(RN-EGB)}$	Escalar sin masa	(5-19)	(A-9)
		(5-21)	(A-10)
		(5-22) (5-23)	(A-11)
	Escalar masivo	(5-20)	(A-12)
	Electromagnético	(5-31)	(B-16)
AdS Reissner-Nordström Einstein-Gauss-Bonnet 4D $f^{(AdS-RN-EGB)}$	Electromagnético	(5-27)	(B-17)
		(5-28)	(B-18)
		(5-29)	(B-19)
		(5-30)	(B-19)
		(5-31)	(B-20)

Tabla 5-4: Resumen de todos los resultados obtenidos para las frecuencias de los QNMs de los espacio-tiempos en estudio.

Para calcular a las frecuencias ω de los QNMs, en este trabajo se han utilizan los métodos de la aproximación WKB a 1^{er}, 3^{er} y 6^{to} orden de la expansión del potencial propuestos en [25, 45, 90], junto con el método semi-analítico del potencial de Pöschl-Teller [42]. Por simplicidad, se denotarán a los ANs AdS cargados eléctricamente y en la gravedad de EGB 4D como ANs de AdS-RN-EGB 4D. En la Tabla 5-4, se da un resumen de todos los ANs a los que se les obtuvieron las frecuencias de sus QNMs, también se ilustran los números de las correspondientes figuras y tablas que contienen los datos precisos de las

frecuencias. Todas las tablas con los resultados son compartidas en los apéndices A y B de este trabajo.

Antes de presentar los resultados, es importante tener presente la siguiente consideración: si se quiere generalizar el problema de autovalores de la ecuación de RW para un campo bosónico sin masa como se realizó para el espacio-tiempo de Schwarzschild (3-175) para el caso de los ANs de AdS-RN-EGB 4D de la ecuación (2-77), el potencial de RW tomaría la forma

$$V_{sl}^{(AdS-RN-EGB)} = f_- \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2(1-s^2)}{r^2} \left(\frac{3Mr - 2Q^2}{r^2 + 2\alpha - 2\alpha f_-} + f_- - 1 \right) \right]. \quad (5-211)$$

Recordando que $f_- = f^{(AdS-RN-EGB)}$, esta expresión es válida para las perturbaciones de los campos escalares ($s = 0$) y de los campos electromagnéticos ($s = 1$). No obstante, este formalismo debe modificarse cuando se quiere encontrar a las frecuencias de los QNMs de las perturbaciones gravitacionales sobre la métrica AdS-RN-EGB 4D debido a las contribuciones adicionales del acoplamiento de GB. Como consecuencia, en este trabajo no se incluye ni se generaliza la ecuación de RW en el caso gravitacional. En [13] se presenta la ecuación maestra del campo gravitacional en la teoría de EGB 4D. Allí se destaca que los potenciales de las perturbaciones gravitacionales dependen de la dimensión D y, por tanto, también están sujetos al reescalamiento $\alpha \rightarrow \alpha/(D-4)$ o a los cambios que surjan sobre D en los procesos de regularización para obtener la solución. Esto sugiere que es importante ser cuidadoso al considerar estos detalles adicionales al estudiar las perturbaciones gravitacionales en la métrica de EGB 4D y en otras soluciones de tipo AN relacionadas.

5.1. Resultados de las perturbaciones del campo escalar

De manera general, la ecuación de RW de la expresión (3-129) describe el comportamiento de las perturbaciones del campo escalar masivo sobre un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico. Al remplazar allí al espacio-tiempo de un AN cargado eléctricamente con Λ y en la gravedad de EGB 4D, dado por la solución $f_- = f^{(AdS-RN-EGB)}$ (2-77), es posible obtener la ecuación maestra sobre este fondo, que en su forma homogénea estará dada por

$$\frac{d^2 \Phi_l}{dr_*^2} + \left[\omega^2 - V_l^{(AdS-RN-EGB)} \right] \Phi_l = 0. \quad (5-212)$$

Recordando que ω representa a las frecuencias de los QNMs de las ondas amortiguadas de la perturbación y que r_* corresponde a la coordenada tortuga que viene definida por

la ecuación (3-128). Además, $V_l^{(AdS-RN-EGB)} = V_l^{(AdS-RN-EGB)}(r)$ es el potencial efectivo de la métrica $f^{(AdS-RN-EGB)}$, el cual se analizará en la siguiente sección.

5.1.1. Potencial del campo escalar

Para definir al potencial efectivo de las perturbaciones al campo escalar masivo, hay que tener presente que sobre el elemento de línea de la ecuación (3-126), se cumple que $f = h$ para el espacio-tiempo general de $f_- = f^{(AdS-RN-EGB)}$. De manera que, reemplazando a esta solución junto con su derivada f'_- dadas en las ecuaciones (2-77) y (2-82), respectivamente, en la ecuación (3-130) del potencial de RW, se obtiene

$$V_l^{(AdS-RN-EGB)} = \frac{f_-}{r^2} \left(\mu^2 r^2 + l(l+1) - 2(1 - f_-) + \frac{2(3Mr - 2Q^2)}{r^2 + 2\alpha(1 - f_-)} \right), \quad (5-213)$$

recordando que l es el número multipolar (que en el caso de las perturbaciones al campo escalar toma los valores de $l = 0, 1, 2, \dots$) proveniente de la expansión en armónicos esféricos del campo escalar Φ_l y que μ representa al parámetro de masa del campo escalar. Esta expresión del potencial del caso de las perturbaciones escalares, corresponde a la ecuación (5-211), en el caso en el que el espín del campo bosónico es $s = 0$.

Ahora bien, se debe encontrar a la coordenada radial del máximo local de este potencial, la cual viene dada por la condición

$$\left. \frac{d}{dr} V_l^{(AdS-RN-EGB)} \right|_{r=r_{max}} = 0, \quad (5-214)$$

que explícitamente se puede reescribir como

$$\left[f_- f'_- \left(\frac{f'_-}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \mu^2 \right) + f_-^2 \left(\frac{f''_-}{r} - \frac{f'_-}{r^2} - \frac{2l(l+1)}{r^3} \right) \right]_{r=r_{max}} = 0. \quad (5-215)$$

Por otro lado, las frecuencias se deben calcular en el dominio de r , de manera que $V_0 = V(r_{max})$. Sin embargo, las ecuaciones de los métodos discutidos anteriormente se encuentran en función de la coordenada tortuga, r_* . Por lo tanto, usando la regla de la cadena, se obtiene que

$$V_0'' = \left[f_- \frac{d}{dr} \left[f_- \frac{d}{dr} V_l^{(AdS-RN-EGB)} \right] \right]_{r=r_{max}}. \quad (5-216)$$

Para utilizar las ecuaciones del método de la aproximación WKB a ordenes superiores, esta regla de la cadena se debe reproducir para calcular cada una de las derivadas de ordenes superiores del potencial evaluadas en el máximo (para el método WKB a 6^{to} orden

se debe calcular hasta la derivada $V_0^{(12)}$). Posteriormente, es evidente que la condición de la ecuación (5-215) no tiene una solución analítica. Por consiguiente, la coordenada r_{max} , necesaria para encontrar a las frecuencias de los QNMs, será encontrada de manera numérica.

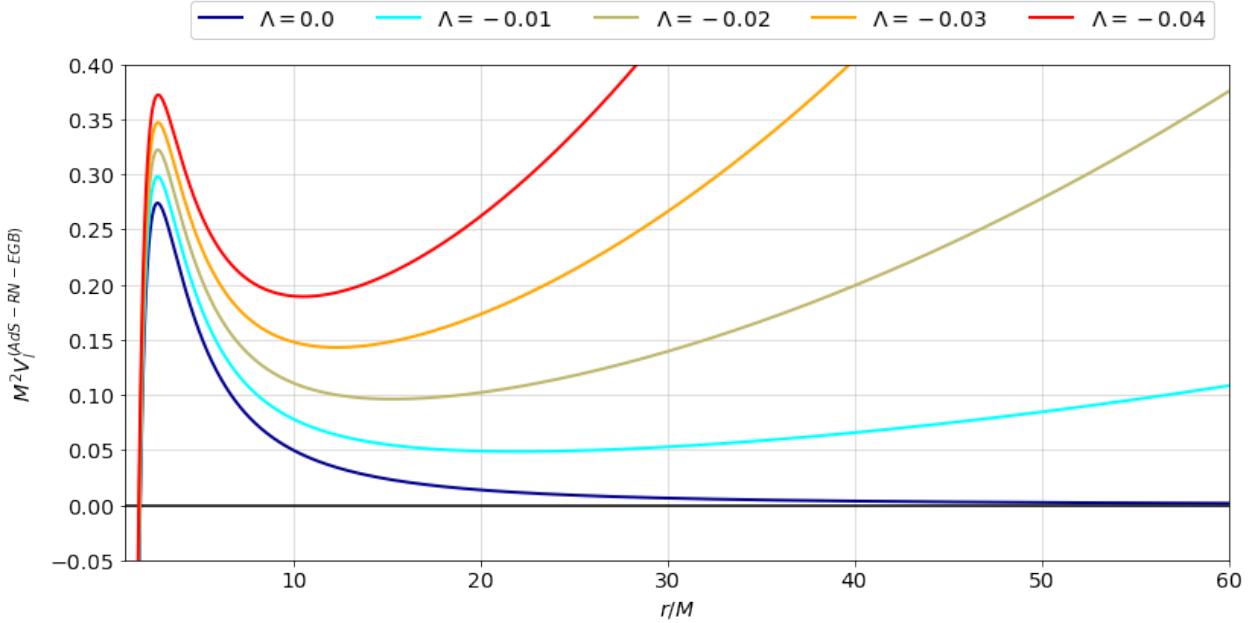


Figura 5-11: Potencial $V_l^{(AdS-RN-EGB)}$ de la ecuación (5-213) para perturbaciones escalares ($s = 0$), en función de r y tomando distintos valores de Λ (con $l = 2$, $\alpha = 0.1$, $Q = 0.5$ y $\mu = 0$).

Antes de proceder con el cálculo de las frecuencias, es importante analizar si efectivamente el potencial $V_l^{(AdS-RN-EGB)}$ cumple con las condiciones impuestas en las regiones asintóticas por los métodos de WKB y del potencial de Pöschl-Teller. De manera que, en la Figura (5-11) se muestra el comportamiento del potencial $V_l^{(AdS-RN-EGB)}$ en función de r , en el caso de las perturbaciones del campo escalar sin masa ($\mu = 0$). Allí se ilustra a $V_l^{(AdS-RN-EGB)}$ para distintos valores de la constante cosmológica Λ , evidenciándose que el potencial satisface la condición en el horizonte de eventos del AN, donde $V_l^{(AdS-RN-EGB)}(r_+) = 0$. No obstante, es claro también que este potencial en la región asintótica hacia el infinito positivo diverge cuando $\Lambda \neq 0$. En ese sentido, el potencial no cumple las condiciones de frontera de tipo AN discutidas en la sección 3.1.2, pues estaría en contra de la proposición de la eliminación de los modos salientes de las perturbaciones en el infinito dada por la ecuación (4-202).

De todas formas, el potencial de la Figura (5-11) es bien comportado cuando $\Lambda = 0$ en la región espacial asintótica, $r \rightarrow \infty$. De esta manera

$$V_l^{(RN-EGB)}(r \rightarrow r_+) = V_l^{(RN-EGB)}(r \rightarrow \infty) = 0. \quad (5-217)$$

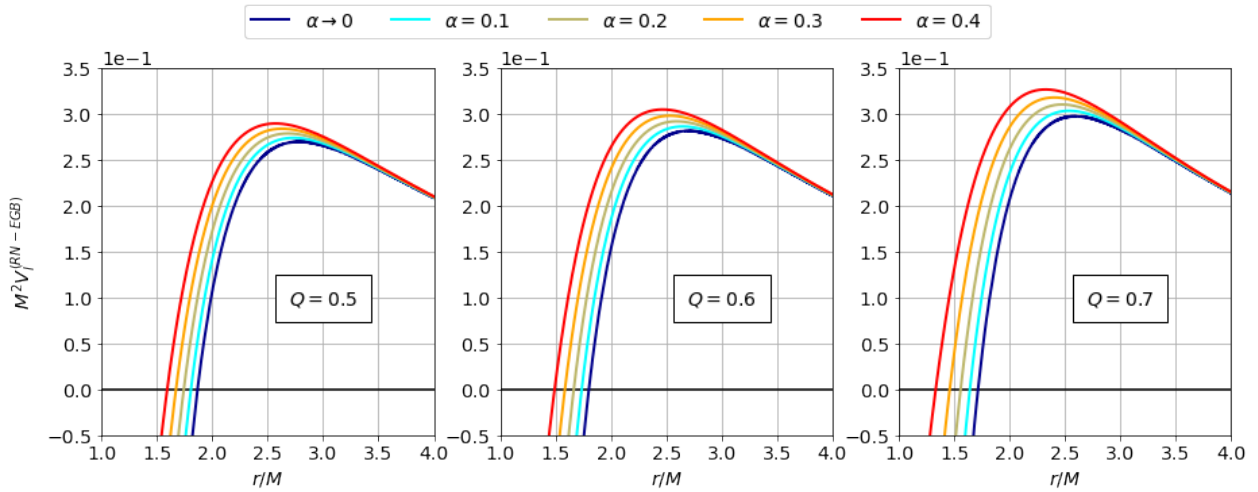


Figura 5-12: Potencial $V_l^{(RN-EGB)}$ de la ecuación (3-176) para perturbaciones escalares ($s = 0$), en función de r y tomando distintos valores de α y Q (con $l = 2$ y $\mu = 0$).

Adicionalmente, en la Figura (5-12) se muestra el comportamiento del potencial $V_l^{(RN-EGB)}$ cerca del horizonte de eventos para diferentes valores de la carga eléctrica Q y del parámetro α de GB. Allí se evidencia el efecto de la variación de estos parámetros geométricos sobre el valor del horizonte de eventos y sobre el máximo del potencial. Para mayores valores de la carga eléctrica Q y del parámetro α , se obtiene que el valor del horizonte de eventos r_+ de la solución disminuye, resultado consistente con lo ilustrado anteriormente en las Figuras (2-2) y (2-3). También en la Figura (5-12) se ve que para mayores valores de la carga eléctrica Q y del parámetro α el máximo del potencial crece y es alcanzado en una coordenada radial r_{max} más pequeña.

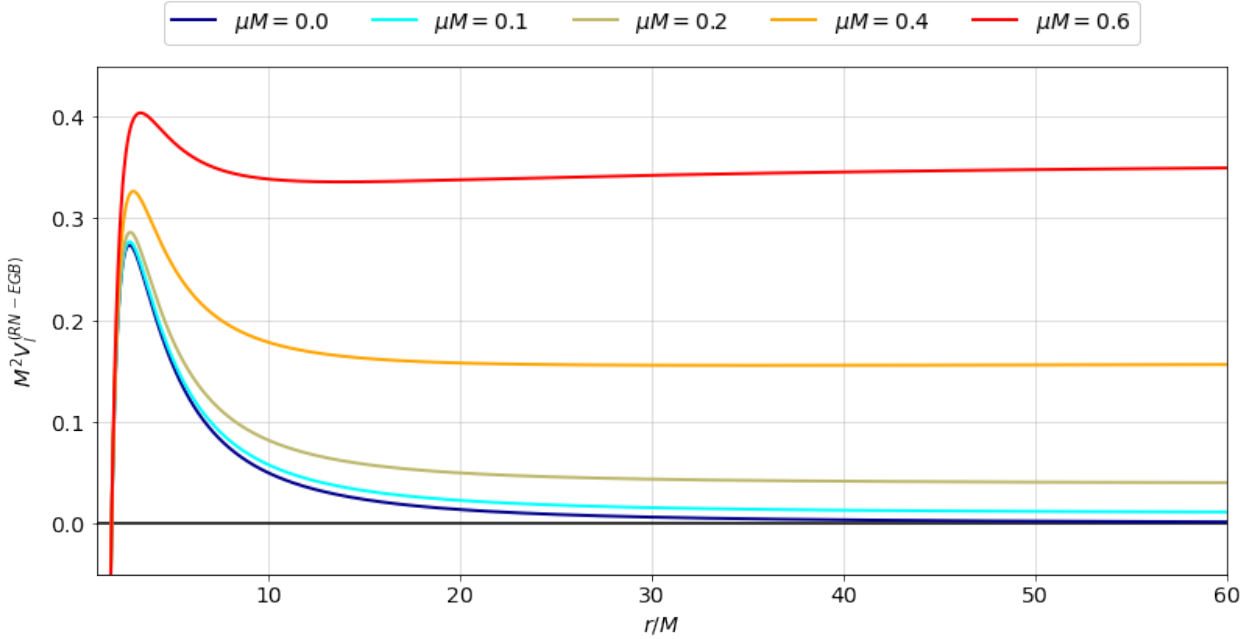


Figura 5-13: Potencial $V_l^{(RN-EGB)}$ de la ecuación (3-176) para perturbaciones escalares ($s = 0$), en función de r y tomando distintos valores de μ (con $l = 2$, $\alpha = 0.1$ y $Q = 0.5$).

Por otro lado, el comportamiento del potencial $V_l^{(RN-EGB)}$ en el caso de las perturbaciones del campo escalar masivo ($\mu \neq 0$) es ilustrado en la Figura (5-13). Es claro que en este caso también se cumple $V_l^{(RN-EGB)}(r \rightarrow r_+) = 0$. Sin embargo, también es evidente que en la región asintótica, $r \rightarrow \infty$, al igual que en lo obtenido en el AN de Schwarzschild registrado en las Figuras (3-8) y (3-9), el potencial toma el valor

$$V_l^{(RN-EGB)}(r \rightarrow \infty) = \mu^2, \quad (5-218)$$

por lo que hay que ser cautelosos con el valor del parámetro de masa del campo escalar, pues para aplicar los métodos de WKB y del potencial de Pöschl-Teller para calcular las frecuencias de los QNMs, se debe asegurar que al menos $V_l^{(RN-EGB)}(r_{max}) > \mu^2$.

En conclusión, para comparar el comportamiento del potencial $V_l^{(AdS-RN-EGB)}$ con los potenciales correspondientes de las métricas de los casos limites particulares, la Figura (5-14) muestra todos los potenciales para el caso de las perturbaciones escalares sin masa ($\mu = 0$). Allí se corrobora el hecho de que únicamente en el caso del AN descrito por la solución $f^{(AdS-RN-EGB)}$, su respectivo potencial efectivo diverge. Adicionalmente, también se asegura que tanto el potencial $V_l^{(RN-EGB)}$, como el de sus casos particulares de Schwarzschild, RN y EGB 4D, se comportan adecuadamente en la región asintótica hacia el infinito positivo, $r \rightarrow \infty$, donde $V_l^{(Sch)} = V_l^{(RN)} = V_l^{(EGB)} = 0$.

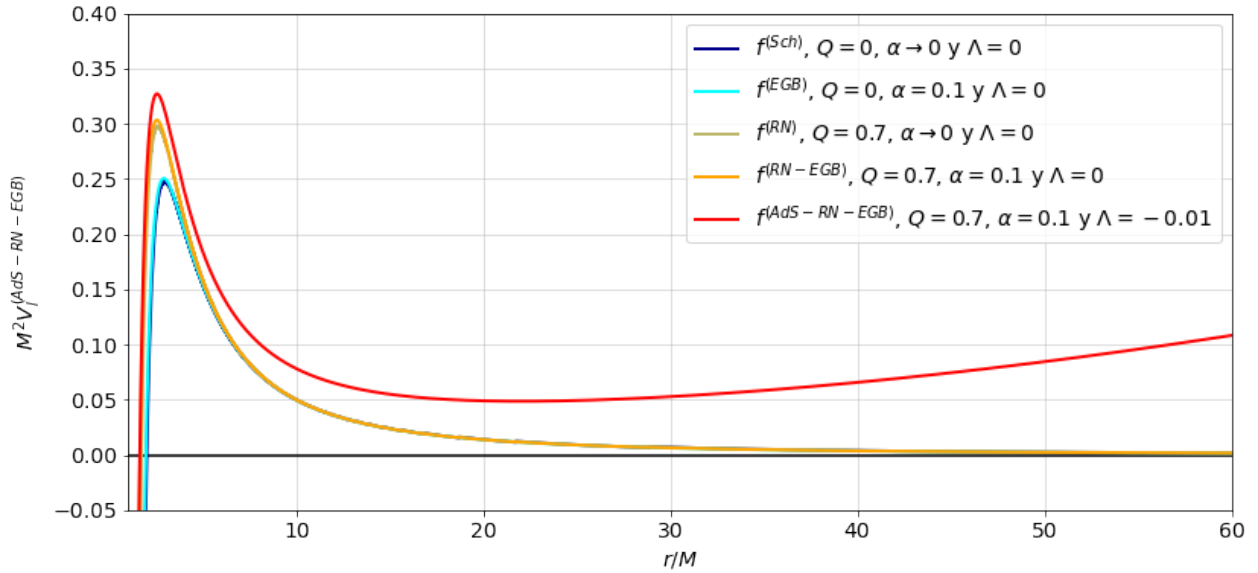


Figura 5-14: Potencial V_l de la ecuación (3-176) para perturbaciones escalares ($s = 0$), en función de r y para los casos límite particulares principales (con $l = 2$ y $\mu = 0$).

Debido a estos resultados previos, en la siguiente sección no se buscarán las frecuencias sobre la solución de $f^{(AdS-RN-EGB)}$, sino que se aplicarán los métodos de **WKB** y del potencial de Pöschl-Teller para calcular las frecuencias de los **QNMs** sobre el espacio-tiempo descrito por $f^{(RN-EGB)}$ y sobre sus casos particulares, tanto en el caso de las perturbaciones del campo escalar masivo ($\mu \neq 0$) como en las del campo escalar sin masa ($\mu = 0$).

5.1.2. Modos cuasinormales del campo escalar

A continuación, se presentarán los principales resultados de este trabajo, los cuales corresponden a las frecuencias ω de los **QNMs** de las perturbaciones del campo escalar del **AN** de **RN-EGB** 4D descrito por la solución $f^{(RN-EGB)}$ de la ecuación (2-77) y sobre sus casos particulares principales denotados en la Tabla 5-4. Se va a mostrar un análisis de las frecuencias ω de los **QNMs**, calculadas a partir del método del potencial de Pöschl-Teller propuesto en [42] y por el método de la aproximación **WKB** a 1^{er} , 3^{er} y 6^{to} orden introducidos en [25, 45, 90]. Algunos de los resultados de los datos precisos de las frecuencias ω de los **QNMs** del campo escalar obtenidos, son compartidos en el apéndice **A** de este trabajo.

Inicialmente, se dan a conocer los resultados obtenidos de las frecuencias ω de los QNMs del campo escalar masivo ($\mu \neq 0$) sobre la solución de Schwarzschild, pues hay que reconocer que probablemente ésta sea la solución más estudiada en la investigación teórica de ANs. En la Figura (5-15), se evidencia el comportamiento de la parte real ω_R y de la parte imaginaria ω_I del modo fundamental ($n = 0$) de las perturbaciones en función del parámetro de la masa μ del campo escalar.

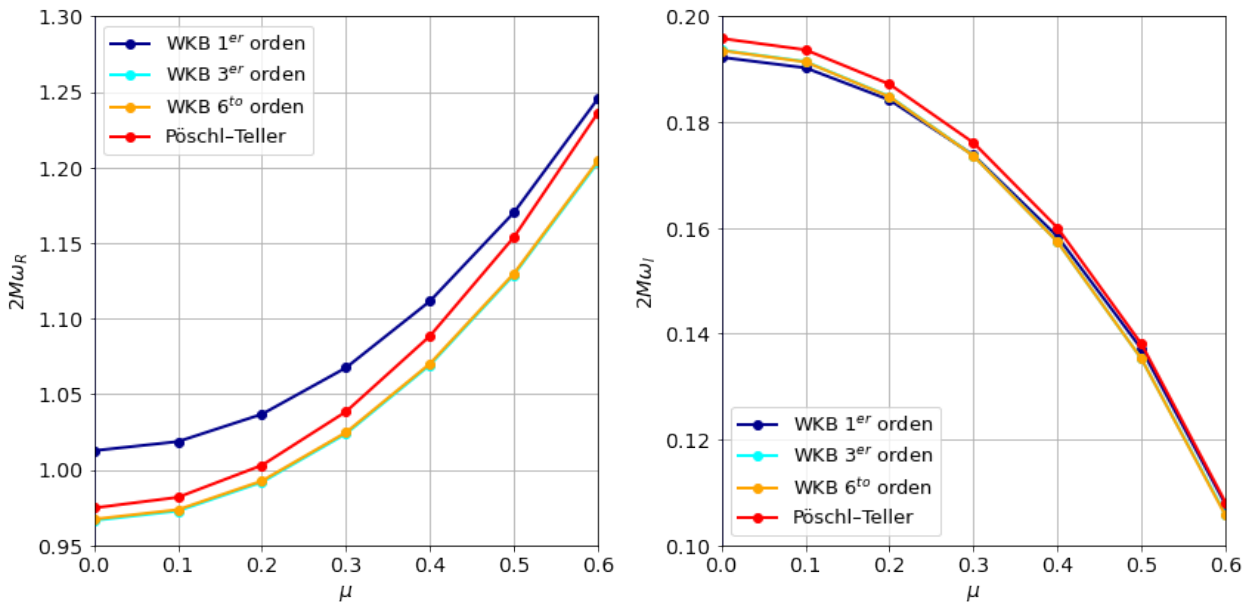


Figura 5-15: Frecuencias de los QNMs del campo escalar masivo en el espacio-tiempo de Schwarzschild. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I del modo fundamental ($n = 0$) en función del parámetro μ (con $l = 2$, $Q = 0$, $\alpha \rightarrow 0$ y $\Lambda = 0$).

De la Figura (5-15) es claro que los resultados obtenidos para las frecuencias de los QNMs del campo escalar masivo ($\mu \neq 0$) se comportan de manera consistente entre los distintos métodos utilizados. Los resultados de los cuatro métodos usados muestran de manera simultánea el efecto del parámetro de masa μ del campo escalar sobre las perturbaciones, revelando que para mayores valores de la masa μ , se obtiene un efecto monótonamente creciente sobre la parte real de las frecuencias ω_R y un efecto monótonamente decreciente sobre la parte imaginaria de las frecuencias ω_I . Efectivamente, el aumento de la masa μ hace que las perturbaciones del campo escalar oscilen con mayor amplitud en un tiempo de decaimiento también más grande.

Estos resultados evidenciados en la Figura (5-15) y en la Tabla (A-5), son consistentes con los previamente reportados en [118–120] para perturbaciones del campo escalar masivo sobre el AN de Schwarzschild, RN y de Bardeen respectivamente. En [118], se afirma que este comportamiento de las frecuencias se debe a que, al aumentar la masa μ del campo escalar, se genera un incremento en el punto máximo del potencial de RW, hecho que se puede apreciar claramente en la Figura (5-12), específicamente en el AN de Schwarzschild.

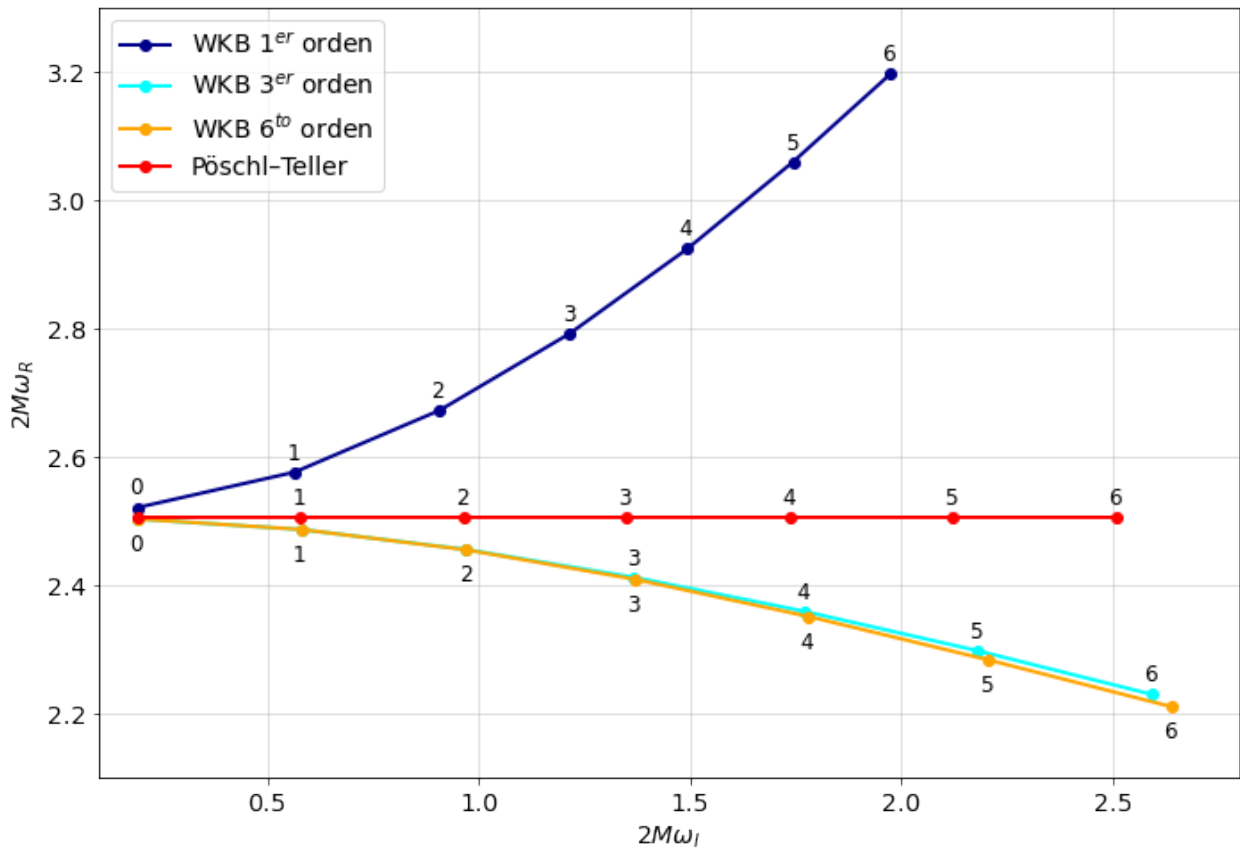


Figura 5-16: Frecuencias de los QNMs del campo escalar no masivo en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Se muestra la parte real ω_R y la parte imaginaria ω_I de los 6 primeros números de sobretono n para $l = 6$. Los números sobre cada frecuencia corresponden a n (con $Q = 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\Lambda = 0$ y $\mu = 0$).

En la Figura (5-16) se muestra el comportamiento de los resultados obtenidos para las frecuencias de los QNMs del campo escalar no masivo ($\mu = 0$) en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Allí se muestran la parte real ω_R y la parte imaginaria ω_I de los 6 primeros números de sobretono n para $l = 6$ utilizando los métodos del potencial de Pöschl-Teller y de la aproximación WKB a 1er, 3er y 6to orden. Los números que etiquetan a cada frecuen-

cia son del número de sobretono n . Atendiendo las sugerencias mencionadas acerca de los alcances del método de la aproximación **WKB**, brevemente discutidas en la sección 4.1, se evidencia que hay una convergencia entre los resultados de la aproximación **WKB** a 3^{er} y 6^{to} orden, lo que se deba probablemente a una mayor precisión en estos resultados. De todas formas, es bien sabido en la literatura [25, 45, 115] que el método de la aproximación **WKB** a 1^{er} orden es el menos preciso, lo cual se apreciará en las figuras de los resultados de este trabajo. Además, la Figura (5-16) demuestra que el método del potencial de Pöschl-Teller brinda resultados precisos solo en cuanto a la parte real, ω_R , de las frecuencias del modo fundamental ($n = 0$) [24, 42]. Sin embargo, es importante destacar que aún así, el método de Pöschl-Teller brinda mejores resultados en cuanto a la parte imaginaria, ω_I , de las frecuencias ($n \neq 0$), en comparación con el método de la aproximación **WKB** a 1^{er} orden.

la Figura (5-16) también muestra que el método del potencial de Pöschl-Teller solo da resultados precisos en la parte real ω_R de las frecuencias del modo fundamental ($n = 0$) [24, 42], pero aún así proporciona resultados más precisos de la parte imaginaria ω_I para ($n \neq 0$) en comparación con el método de aproximación **WKB** de 1^{er} orden.

Estos resultados obtenidos sobre el fondo de Schwarzschild son consistentes con aquellos publicados en [25, 42] y en la base de datos de **QNMs** dada en [121]. Allí se ilustra el típico comportamiento de las frecuencias de los **QNMs** para los primeros valores del número de sobretono n con $n \leq l = 6$, verificando que, a más grandes valores de n se obtienen menores valores de la parte real ω_R y mayores valores para la parte imaginaria ω_I de las frecuencias.

Los siguientes resultados son obtenidos para las frecuencias de los **QNMs** del campo escalar sin masa sobre la solución de **RN**, mostrados en la Tabla (A-7) y en las Figuras (5-17) y (5-23), los cuales son coherentes con los previamente obtenidos en [42, 122]. Allí se evidencia que la parte real ω_R de las frecuencias crece exponencialmente con respecto al aumento de la carga eléctrica Q del **AN**. Además, se obtiene el comportamiento típico de la parte imaginaria ω_I en función de la carga eléctrica, el cuál no es monótono, mostrando que existe un valor máximo de ω_I para un valor de Q particular.

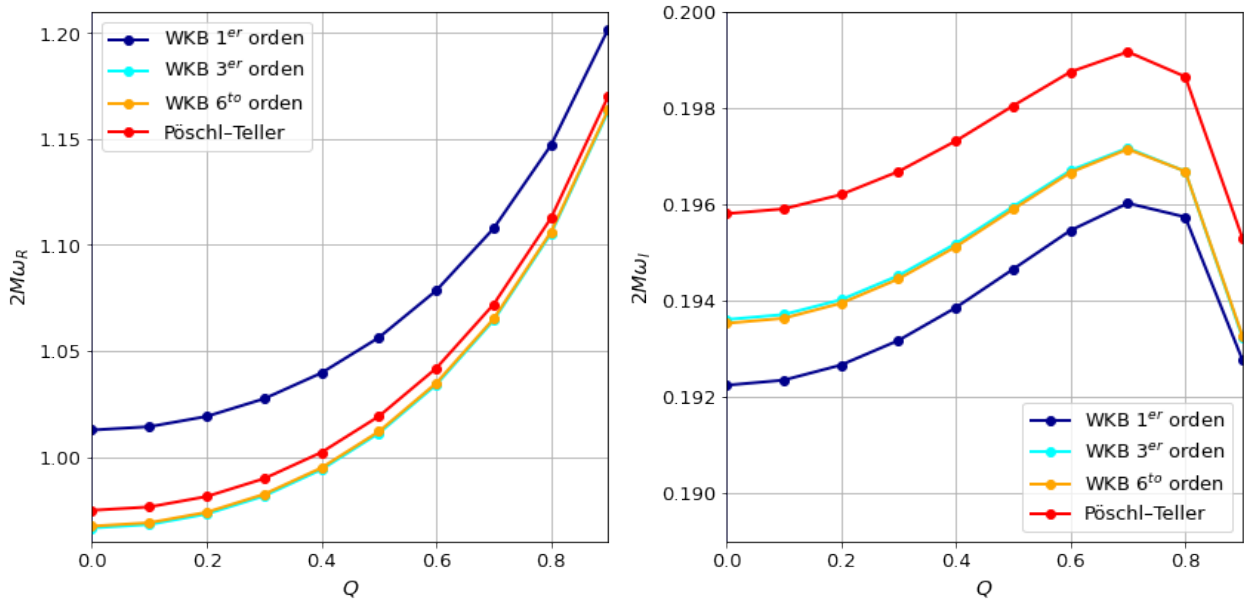


Figura 5-17: Frecuencias de los QNMs del campo escalar sin masa en el espacio-tiempo de RN. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I del modo fundamental ($n = 0$) en función de la carga eléctrica Q (con $l = 2$, $\alpha \rightarrow 0$, $\Lambda = 0$ y $\mu = 0$).

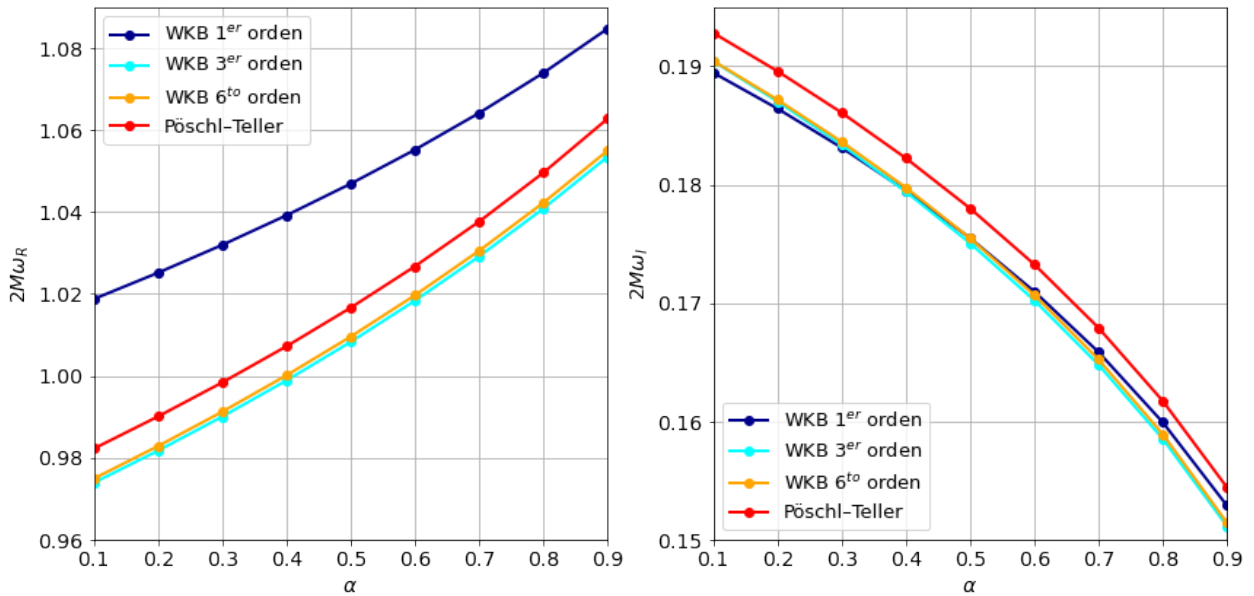


Figura 5-18: Frecuencias de los QNMs del campo escalar sin masa en el espacio-tiempo de EGB 4D. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I del modo fundamental ($n = 0$) en función de α (con $l = 2$, $\Lambda = 0$ y $\mu = 0$).

En la Tabla (A-8) y en las Figuras (5-18) y (5-23) se comparten los resultados de las frecuencias de los QNMs del campo escalar sin masa sobre el espacio-tiempo de EGB 4D. Las frecuencias obtenidas en este caso son consistentes con los previamente publicados en [13, 60]. Aquí se evidencia que el efecto de α sobre las frecuencias es similar al efecto debido por el parámetro μ del campo escalar masivo. Los cuatro métodos utilizados muestran al mismo tiempo que para mayores valores del parámetro α , se obtiene un efecto monótonamente creciente en la parte real de las frecuencias ω_R y un efecto monótonamente decreciente en la parte imaginaria de las frecuencias ω_I . Al igual que con μ , aquí podríamos decir que este efecto del parámetro α , como se puede ver en la Figura (5-13), se debe al crecimiento del valor del máximo del potencial efectivo V_0 cada vez que la constante α también aumenta.

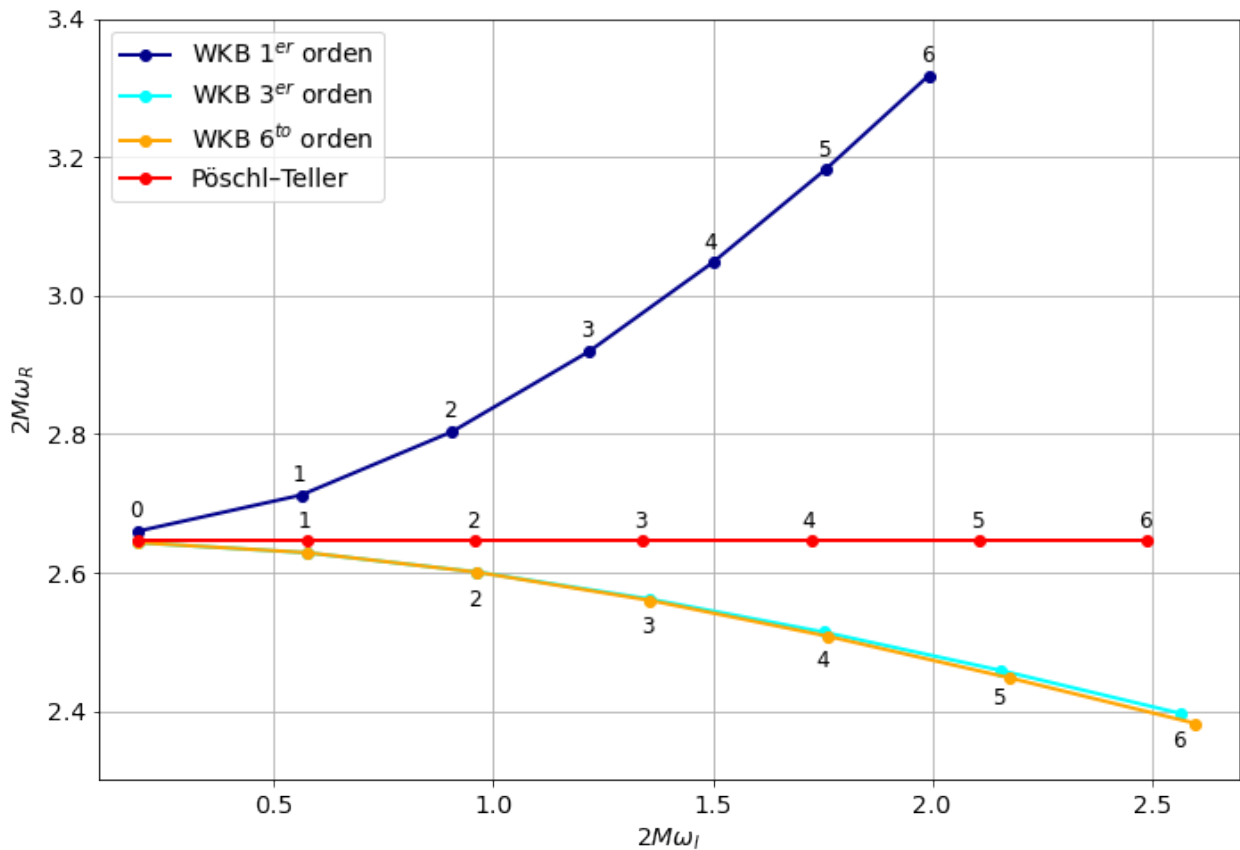


Figura 5-19: Frecuencias de los QNMs del campo escalar no masivo en el espacio-tiempo de RN-EGB 4D. Se muestra la parte real ω_R y la parte imaginaria ω_I de los 6 primeros números de sobretono n para $l = 6$. Los números sobre cada frecuencia corresponden a n (con $Q = 0.5$, $\alpha = 0.1$, $\Lambda = 0$ y $\mu = 0$).

La Tabla (A-9) y la Figura (5-19) muestran los resultados obtenidos para las frecuencias

de los QNMs del campo escalar no masivo ($\mu = 0$) en el espacio-tiempo de RN-EGB 4D. Allí, de forma similar a lo previamente ilustrado para las perturbaciones sobre el AN Schwarzschild, se comparte la parte real ω_R y la parte imaginaria ω_I de los 6 primeros números de sobretono n para $l = 6$, evidenciándose nuevamente la convergencia entre los resultados de la aproximación WKB a 3^{er} y 6^{to} orden, y los comportamientos típicos menos precisos de los métodos de la aproximación WKB a 1^{er} orden y del potencial de Pöschl-Teller.

Se corrobora una vez más el hecho de que para mayores valores de n se obtienen menores valores de la parte real ω_R y mayores valores para la parte imaginaria ω_I en las frecuencias. Adicionalmente, se obtienen mayores valores de ω_R sobre el fondo de RN-EGB 4D que sobre el espacio-tiempo de Schwarzschild mientras que no se obtiene una relación monótona para la parte imaginaria ω_I de las frecuencias entre estos ANs. Los resultados reportan que la mayoría de veces ω_I es mayor sobre la métrica de Schwarzschild que sobre el AN de RN-EGB 4D (se cumple para $n = 0$), no obstante, en varios casos cuando $n \neq 0$ se obtienen ω_I mayores sobre el espacio-tiempo de RN-EGB 4D.

En la Figura (5-20) se ilustra el comportamiento de la parte real ω_R y de la parte imaginaria ω_I del modo fundamental ($n = 0$) de las perturbaciones en función del parámetro de la masa μ del campo escalar sobre el fondo de RN-EGB 4D. Estos resultados, junto con los compartidos en la Tabla (A-12) al igual que en el caso previamente discutido sobre perturbaciones del campo escalar masivo sobre el AN de Schwarzschild, son consistentes con los previamente publicados en [118–120] sobre los ANs de Schwarzschild, RN y de Bardeen respectivamente. Una vez más, incrementando los valores de la masa μ del campo escalar, se obtienen mayores y menores valores de la parte real y de la parte imaginaria de las frecuencias, respectivamente. Además, los resultados ilustran mayores ω_R para las perturbaciones del campo escalar masivo sobre el fondo de RN-EGB 4D que sobre el espacio-tiempo de Schwarzschild. Por otra parte, de nuevo no se obtiene una relación monótona para la parte imaginaria ω_I de las frecuencias entre estos ANs. Los resultados reportan que cuando ω_I es mayor sobre la métrica de Schwarzschild cuando $\mu \leq 0.1$ pero también sobre el AN de RN-EGB 4D cuando $\mu \geq 0.1$.

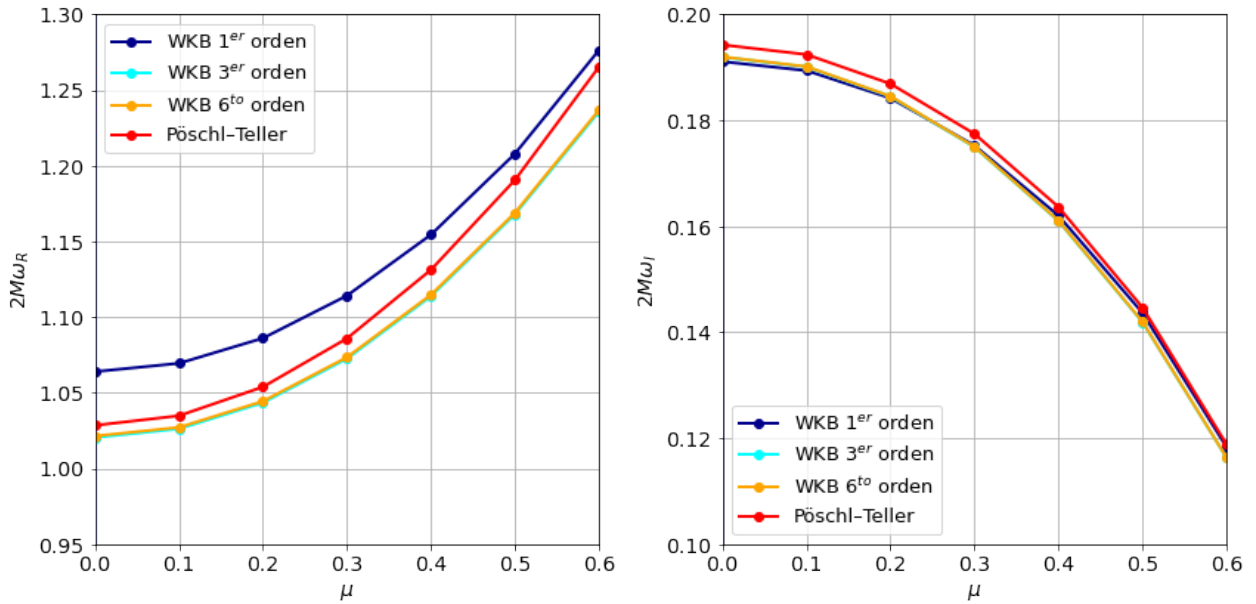


Figura 5-20: Frecuencias de los QNMs del campo escalar masivo en el espacio-tiempo de RN-EGB 4D. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I del modo fundamental ($n = 0$) en función de μ (con $l = 2$, $Q = 0.5$, $\alpha = 0.1$ y $\Lambda = 0$).

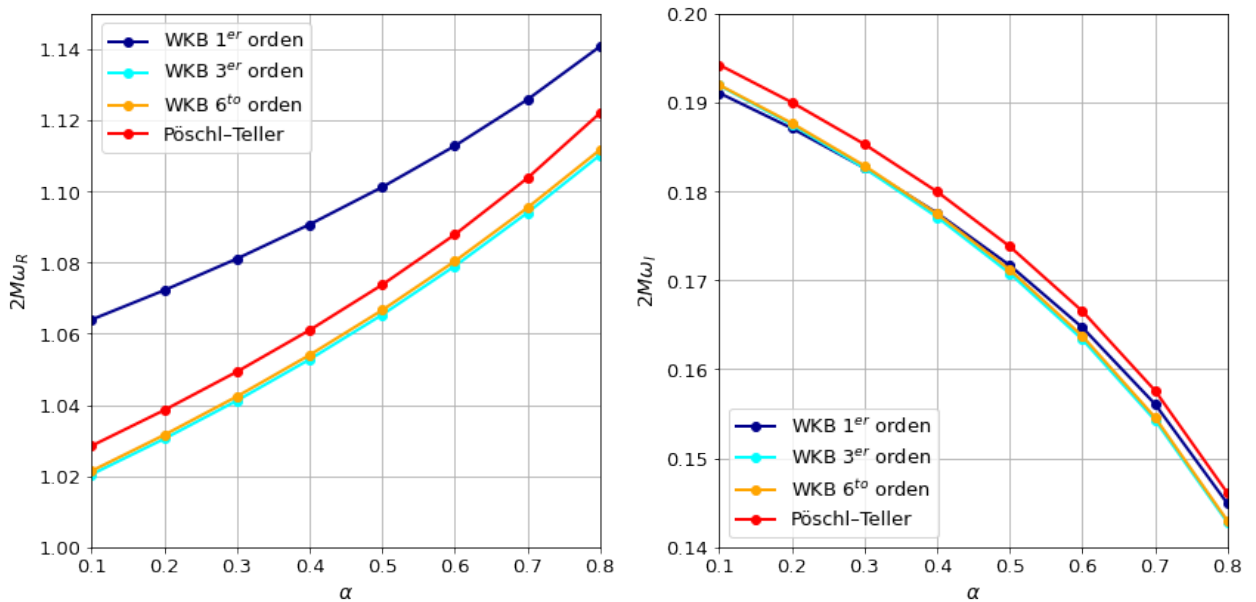


Figura 5-21: Frecuencias de los QNMs del campo escalar sin masa en el espacio-tiempo de RN-EGB 4D. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I del modo fundamental ($n = 0$) en función de α (con $l = 2$, $Q = 0.5$, $\Lambda = 0.1$ y $\mu = 0$).

En las Figuras (5-21) y (5-22) y las Tablas (A-10) y (A-11) se comparten los resultados de las frecuencias de los QNMs en función del parámetro α y de la carga eléctrica Q respectivamente. Allí se ilustran los efectos de estos parámetros geométricos sobre los QNMs del campo escalar sin masa ($\mu = 0$) en el espacio-tiempo de RN-EGB 4D. Estas frecuencias varían de manera muy similar a como se evidenció en los casos particulares de RN y de EGB 4D de las Figuras (5-17) y (5-18) respectivamente. El comportamiento de las frecuencias calculadas en esta ocasión también es consistente con lo previamente publicado en [13, 42, 60, 122]. Nuevamente, se obtiene que la parte real ω_R de las frecuencias tiene un comportamiento monótonamente creciente para altos valores de α y crece exponencialmente con mayores valores de Q , mientras que en la parte imaginaria ω_I no varía monótonamente en función de Q , sino que tiene un valor máximo de ω_I para un Q particular (este valor máximo es alcanzado más rápidamente en el caso del AN de RN-EGB 4D). También, se vuelve a obtener un efecto monótonamente decreciente en la parte imaginaria de las frecuencias ω_I en función de α .

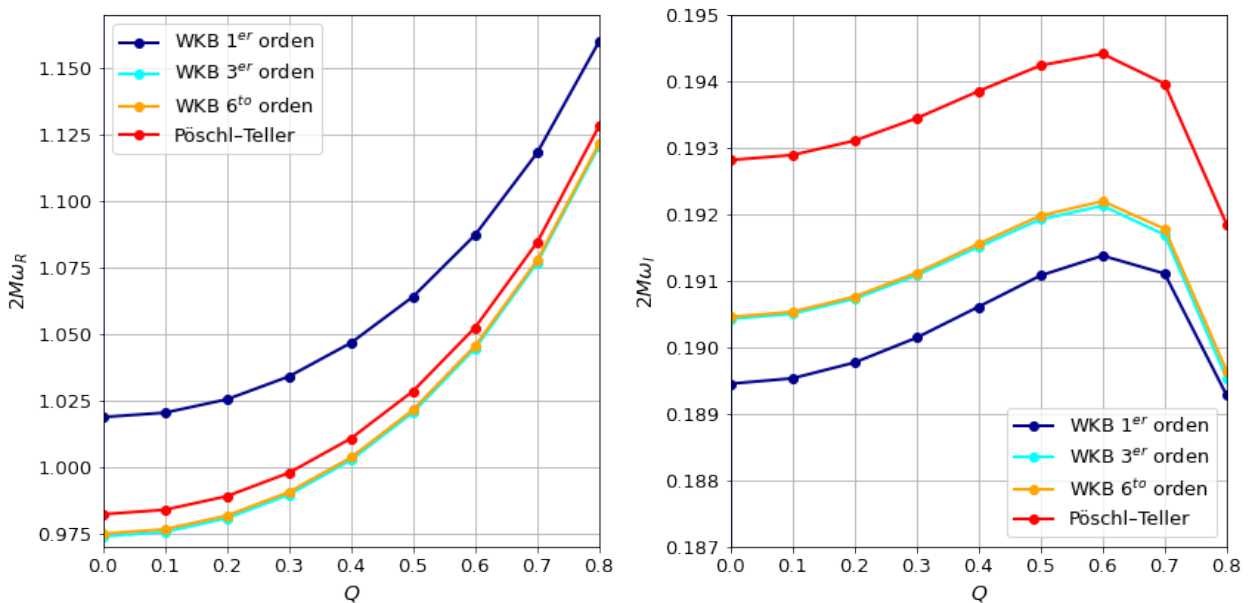


Figura 5-22: Frecuencias de los QNMs del campo escalar sin masa en el espacio-tiempo de RN-EGB 4D. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I del modo fundamental ($n = 0$) en función de la carga eléctrica Q (con $l = 2$, $\alpha = 0.1$, $\Lambda = 0.1$ y $\mu = 0$).

Las frecuencias de los QNMs de las perturbaciones del campo escalar sin masa en el espacio-tiempo de RN-EGB 4D fueron investigadas en [10, 11, 61, 62]. En el presente trabajo, dentro de las Tablas (A-9), (A-10) y (A-11) y en las Figuras (5-19), (5-21), (5-22) y (5-23), se muestran los resultados alcanzados para estas frecuencias, obteniéndose

comportamientos similares a los reportados en [10, 11, 61, 62].

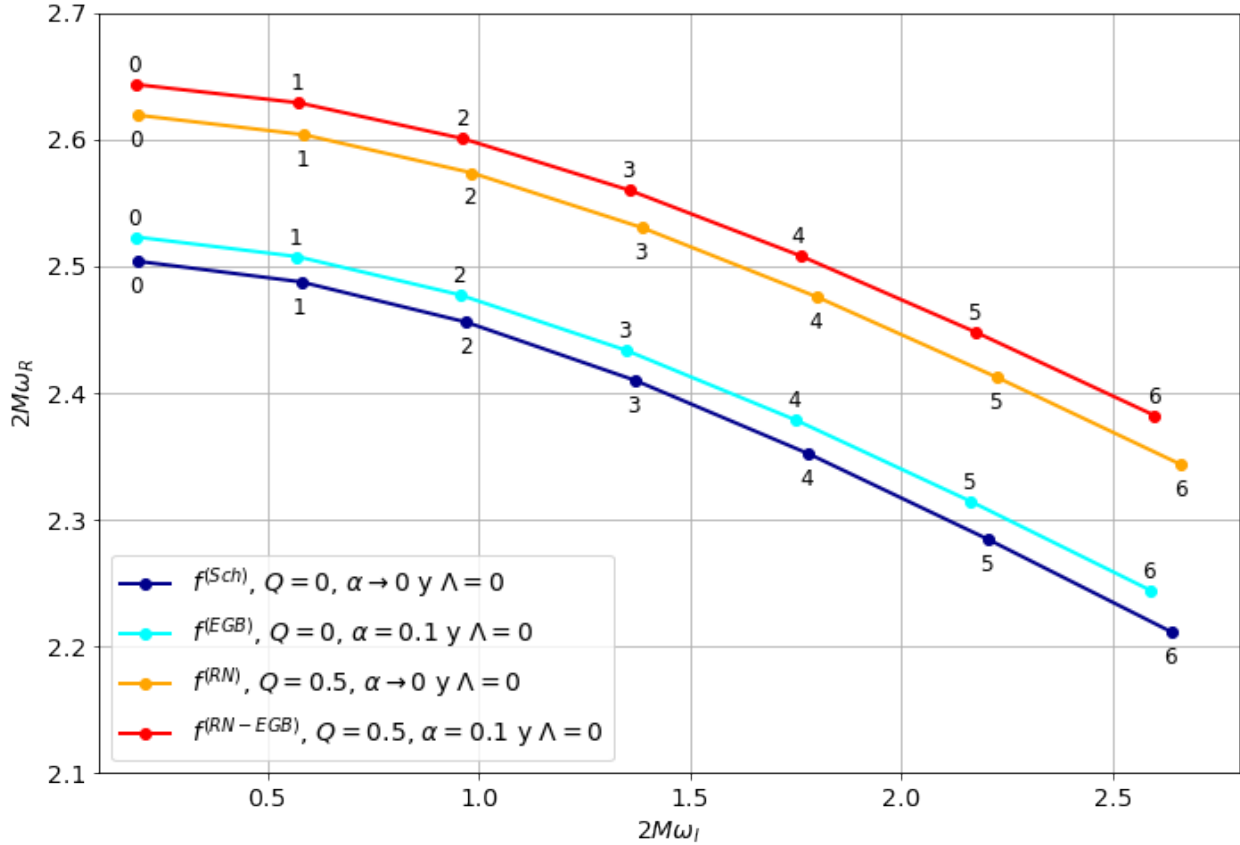


Figura 5-23: Frecuencias de los QNMs del campo escalar no masivo ($\mu = 0$) en el espacio-tiempo de RN-EGB 4D y en sus casos particulares límite, determinadas mediante el método WKB a 6^{to} orden. Se muestra la parte real ω_R y la parte imaginaria ω_I de los 6 primeros números de sobretono n para $l = 6$. Los números sobre cada frecuencia corresponden a n .

En la Figura (5-23) se resumen y se comparan los resultados de las frecuencias de los QNMs del campo escalar sin masa en el espacio-tiempo de RN-EGB 4D y sobre sus casos particulares, los ANs de Schwarzschild, RN y EGB 4D. Considerando que el método WKB a 6^{to} orden muestra resultados más precisos en la mayoría de las ocasiones [25, 115], las frecuencias de la Figura (5-23) son determinadas mediante este método, ilustrando los 6 primeros números de sobretono n para $l = 6$. De manera general, el comportamiento de estos resultados también está de acuerdo con los previamente discutidos en las Figuras (5-16) y (5-19), evidenciándose que para los primeros valores de n , a medida que n aumenta, se obtienen más grandes valores de la parte real ω_R y valores más

pequeños para la parte imaginaria ω_I de las frecuencias. Adicionalmente, en la Figura (5-23) se ve efectivamente, que la parte real ω_R de las frecuencias es mayor en el caso del fondo del AN de RN-EGB 4D que sobre todos sus casos particulares, seguido del AN de RN, luego del AN de EGB 4D y por último el AN de Schwarzschild. Por lo que se podría decir que el AN de RN-EGB 4D es un mejor oscilador bajo perturbaciones escalares que los ANs de sus casos particulares. Esto tiene importantes consecuencias sobre diversas propiedades del AN, por ejemplo, considerando lo discutido sobre las aplicaciones del calculo de los QNMs de un AN en el apéndice C, esto sugeriría que el AN de RN-EGB 4D posee una sombra más pequeña que la descrita por los ANs de Schwarzschild, RN y EGB 4D. También es claro que para los ANs que dependen del parámetro α se obtiene una parte imaginaria ω_I de las frecuencias más pequeña que en los ANs de RN y de Schwarzschild. De todas formas, los valores más pequeños de ω_I se alcanzan sobre el AN de EGB 4D, haciendo de este un oscilador amortiguado con un tiempo de decaimiento mayor que en los otros ANs, seguido por el AN de RN-EGB 4D, después el espacio-tiempo de Schwarzschild y por último, con un menor tiempo de decaimiento está la solución de RN. Estos efectos se intensifican y son más notables sobre las perturbaciones del campo escalar con masa, como lo muestra la Figura (5-20). Allí, con valores mas grandes de la masa μ del campo escalar se logran mayores y menores valores de la parte real ω_R y de la parte imaginaria ω_I de las frecuencias respectivamente.

5.2. Resultados de las perturbaciones del campo electromagnético

El comportamiento de las perturbaciones del campo electromagnético sobre un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico es descrito por la ecuación de RW de la expresión (3-170). De allí, si tomamos al espacio-tiempo de los ANs cargados eléctricamente, con Λ y en la gravedad de EGB 4D, dado por la solución $f_- = f^{(AdS-RN-EGB)}$ de la ecuación (2-77), la ecuación maestra homogénea será

$$\frac{\partial^2 \Psi^{lm}}{\partial r_*^2} + [\omega^2 - V_l^{(AdS-RN-EGB)}] \Psi^{lm} = 0, \quad (5-219)$$

Teniendo presente que las contribuciones del vector cuadripotencial $A_\mu = A_\mu(t, r, \theta, \phi)$ que describen al campo electromagnético puede ser separadas como se expresó en la ecuación (3-158), si $\Psi^{lm} = \mathfrak{a}^{lm}$ la anterior expresión describiría las perturbaciones axiales dadas por la ecuación maestra (3-161), mientras que si $\Psi^{lm} = \psi^{lm}$ se obtendría la expresión que modela las perturbaciones polares de la ecuación maestra (3-164). En esta ocasión, ω representa las frecuencias de los QNMs de las perturbaciones electromagnéticas. Mientras que $V_l^{(AdS-RN-EGB)} = V_l^{(AdS-RN-EGB)}(r)$ es el potencial efectivo del campo

electromagnético sobre el espacio-tiempo de la solución $f_- = f^{(AdS-RN-EGB)}$ (2-77), que será analizado a continuación.

5.2.1. Potencial del campo electromagnético

Al remplazar al espacio-tiempo de la solución $f_- = f^{(AdS-RN-EGB)}$ (2-77) en la ecuación (3-162) del potencial de RW para las perturbaciones electromagnéticas, resulta

$$V_l^{(AdS-RN-EGB)} = \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{l(l+1)}{2\alpha} \left[1 - \sqrt{1 + 4\alpha \left(\frac{2M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} + \frac{\Lambda}{3} \right)} \right]. \quad (5-220)$$

Esta ecuación es la expresión del potencial para las perturbaciones electromagnéticas que corresponde a la ecuación (5-211) cuando el espín del campo bosónico es $s = 1$. En esta ocasión, el potencial depende de la coordenada radial r , del número multipolar l de los armónicos esféricos (que en el caso de las perturbaciones al campo electromagnético toma los valores de $l = 1, 2, 3, \dots$) y de los parámetros geométricos del espacio-tiempo de AdS-RN-EGB 4D. Una vez más, usando la ecuación (5-214) que define a la condición de la coordenada radial $r = r_{max}$ en la que se encuentra el máximo del potencial efectivo, se tiene

$$\left[f'_- \frac{l(l+1)}{r^2} - f_- \frac{2l(l+1)}{r^3} \right]_{r=r_{max}} = 0, \quad (5-221)$$

donde $f_- = f^{(AdS-RN-EGB)}$ y su derivada f'_- son dadas en las ecuaciones (2-77) y (2-82) respectivamente.

Para encontrar las frecuencias del caso electromagnético descritas por el potencial de la ecuación (5-220), se debe usar la regla de la cadena dada por la ecuación (5-216) para encontrar las derivadas de ordenes superiores del potencial efectivo evaluadas en la coordenada donde se alcanza el máximo (recordando que para el método WKB a 6^{to} orden se debe calcular hasta la derivada $V_0^{(12)}$). En esta ocasión, la condición de la ecuación (5-221) tampoco tiene solución analítica, por lo que también aquí la coordenada r_{max} se encontrará numéricamente.

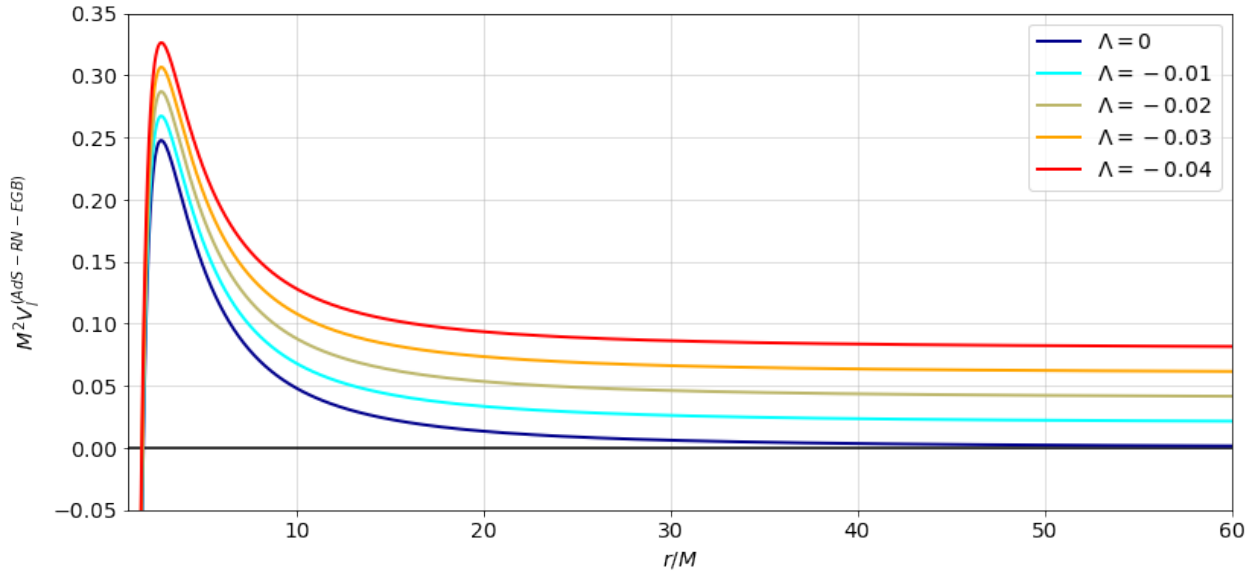


Figura 5-24: Potencial $V_l^{(AdS-RN-EGB)}$ para perturbaciones electromagnéticas ($s = 1$), en función de r y tomando distintos valores de Λ (con $l = 2$, $\alpha = 0.1$ y $Q = 0.5$).

En la Figura (5-24), se enseña al potencial efectivo $V_l^{(AdS-RN-EGB)}$ para perturbaciones electromagnéticas ($s = 1$) definido por la ecuación (5-220), en función de la coordenada radial r y para diferentes valores de la constante cosmológica Λ . La figura muestra que a medida que Λ decrece negativamente, el máximo del potencial V_0 aumenta. También se muestra el comportamiento del potencial en las regiones asintóticas, donde sorprendentemente el potencial en el infinito positivo no diverge. Por un lado, se tiene que $V_l^{(AdS-RN-EGB)}(r_+) = 0$, i.e. el potencial satisface la condición en el horizonte de eventos del AN. Mientras que en la región asintótica del infinito positivo de r , para distintos valores de Λ , el potencial $V_l^{(AdS-RN-EGB)}$ tiende a una constante. Más precisamente, el potencial se comporta en el infinito positivo como

$$V_l^{(AdS-RN-EGB)}(r \rightarrow \infty) = \frac{l(l+1) \left(3 - \sqrt{9 + 12\alpha\Lambda}\right)}{6\alpha}. \quad (5-222)$$

Así, siempre y cuando el máximo del potencial V_0 cumpla que $V_0 > V_l^{(AdS-RN-EGB)}(r \rightarrow \infty)$, entonces se le puede distinguir en las cercanías del horizonte de eventos del AN, satisfaciéndose las condiciones de frontera de tipo AN discutidas en la sección 3.1.2. De manera que se puede proceder sin problemas con la aplicación del método de la aproximación WKB y del potencial de Pöschl-Teller, considerando los posibles valores que puede tomar Λ . Es importante tener presente que debido al este comportamiento del potencial dado por la ecuación (5-222), hay una restricción para Λ en términos del

parámetro α con la forma

$$-\frac{3}{4\alpha} \leq \Lambda \leq 0. \quad (5-223)$$

De manera que los valores dados para α darían una cota inferior para los posibles valores de la constante cosmológica Λ , que en este caso solo tiene valores negativos, característicos de la solución AdS.

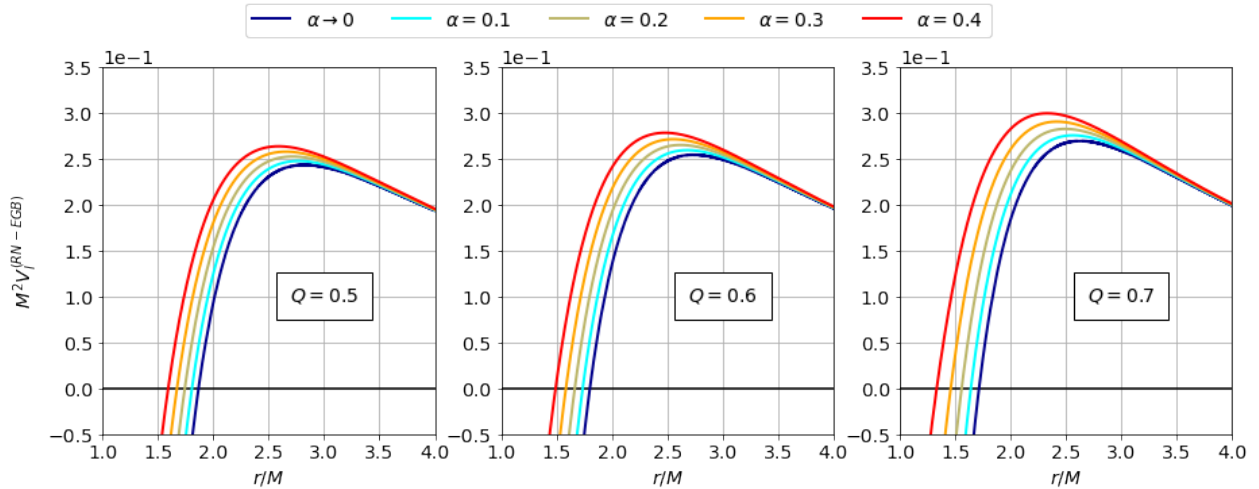


Figura 5-25: Potencial $V_l^{(RN-EGB)}$ de la ecuación (3-176) para perturbaciones electromagnéticas ($s = 1$), en función de r y tomando distintos valores de α y Q (con $l = 2$)

Por otro lado, con el objetivo de apreciar el efecto de los posibles valores de los parámetros geométricos sobre los del horizonte de eventos y sobre el máximo del potencial, en la Figura (5-25) se enseña el caso particular del comportamiento del potencial $V_l^{(RN-EGB)}$ (para perturbaciones electromagnéticas con $\Lambda = 0$), cerca del horizonte de eventos y para diferentes valores de la carga eléctrica Q y del parámetro α . Se observa, al igual que en el caso de las perturbaciones escalares, que para mayores valores de la carga eléctrica Q y del parámetro α , se obtiene un valor del horizonte de eventos r_+ menor, consistente con lo mostrado anteriormente en las Figuras (2-2) y (2-2). También, al igual que en el caso escalar, se evidencia que para mayores valores de Q y de α el máximo del potencial V_0 crece y es alcanzado en una coordenada radial r_{max} más pequeña.

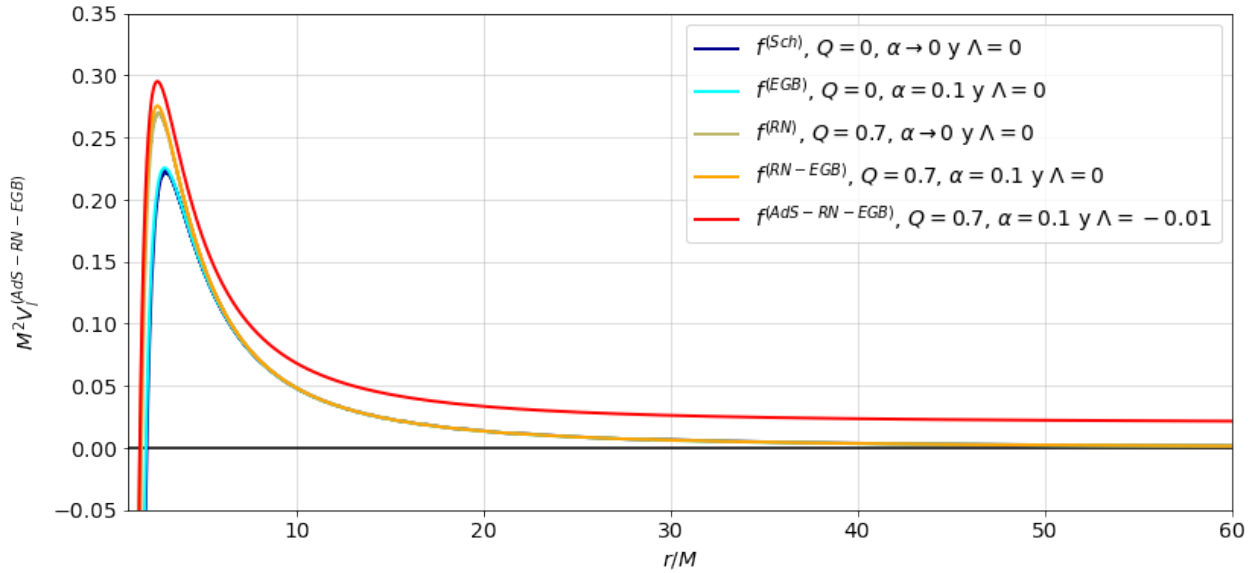


Figura 5-26: Potencial V_l de la ecuación (3-176) para perturbaciones electromagnéticas ($s = 1$), en función de r y para los casos límite particulares principales (con $l = 2$).

De igual modo, sobre las perturbaciones al campo electromagnético en el caso particular del potencial $V_l^{(RN-EGB)}$, también se satisfacen las condiciones de frontera de tipo AN en las regiones asintóticas, de manera que

$$V_l^{(RN-EGB)}(r \rightarrow r_+) = V_l^{(RN-EGB)}(r \rightarrow \infty) = 0. \quad (5-224)$$

Ahora bien, en la Figura (5-26) se ilustran los comportamientos del potencial $V_l^{(AdS-RN-EGB)}$ junto con los de los potenciales de las métricas de los casos límites. Todos los potenciales corresponden al caso de las perturbaciones electromagnéticas ($s = 1$). Aquí se ratifica el hecho de que tanto el espacio-tiempo de AdS-RN-EGB 4D, como en el de RN-EGB 4D y sus casos particulares principales, los de los ANs de Schwarzschild, RN y EGB 4D, se comportan adecuadamente en las regiones asintóticas, tanto en las cercanías del horizonte de eventos $r \rightarrow r_+$ donde $V_l^{(AdS-RN-EGB)} = V_l^{(RN-EGB)} = V_l^{(Sch)} = V_l^{(RN)} = V_l^{(EGB)} = 0$, como en el infinito espacial, $r \rightarrow \infty$, donde $V_l^{(RN-EGB)} = V_l^{(Sch)} = V_l^{(RN)} = V_l^{(EGB)} = 0$ y el caso general de la solución $f^{(AdS-RN-EGB)}$ en donde el potencial tiende a $V_l^{(AdS-RN-EGB)} \approx 0.02$. Consecuentemente y teniendo en cuenta lo discutido anteriormente, se aplicarán los métodos de WKB y del potencial de Pöschl-Teller para calcular las frecuencias de los QNMs sobre el espacio-tiempo descrito por $f^{(AdS-RN-EGB)}$ y sobre las métricas que contiene como casos particulares.

5.2.2. Modos cuasinormales del campo electromagnético

En esta sección final, se comparten los resultados obtenidos para las frecuencias ω de los QNMs de las perturbaciones del campo electromagnético ($s = 1$) sobre el AN de AdS-RN-EGB 4D descrito por la solución $f^{(AdS-RN-EGB)}$ (2-77).

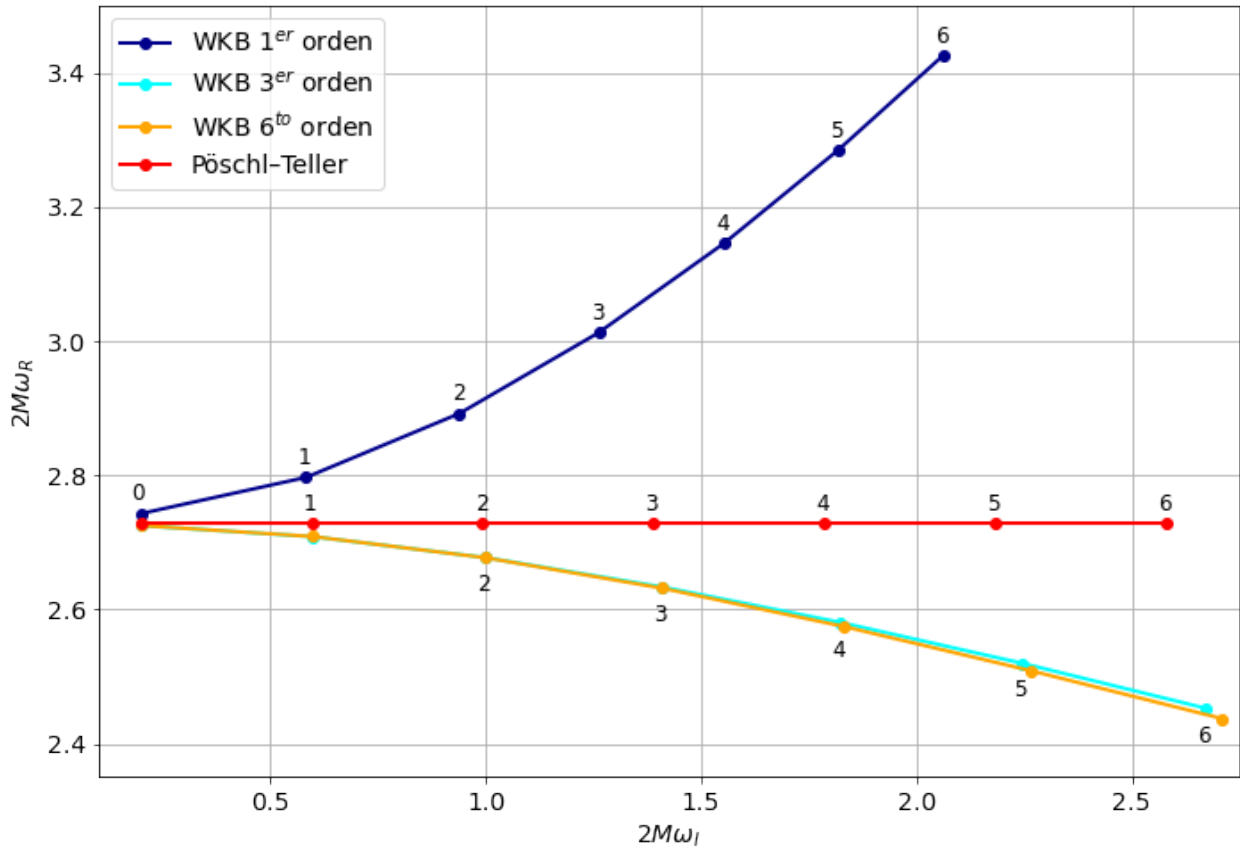


Figura 5-27: Frecuencias de los QNMs del campo electromagnético en la métrica AdS-RN-EGB 4D. Se muestra la parte real ω_R y la parte imaginaria ω_I de los 6 primeros números de sobretono n para $l = 6$. Los números sobre cada frecuencia corresponden a n (con $Q = 0.5$, $\alpha = 0.1$ y $\Lambda = -0.01$).

A continuación, una vez más, se realizará un análisis de las frecuencias ω de los QNMs, calculadas a partir del método del potencial de Pöschl-Teller propuesto en [42] y por el método de la aproximación WKB a 1^{er}, 3^{er} y 6^{to} orden introducidos en [25, 45, 90].

En la Figura (5-27) y las Tablas (B-17) (B-18), (B-19) y (B-20), se enseñan los comportamientos de los resultados obtenidos para las frecuencias de los QNMs para el campo electromagnético ($s = 1$) sobre el AN de AdS-RN-EGB 4D. Se muestra la parte real ω_R y la parte imaginaria ω_I de los 6 primeros números de sobretono n para $l = 6$, utilizando los métodos del potencial de Pöschl-Teller y de la aproximación WKB a 1^{er}, 3^{er} y 6^{to} orden, donde los números que etiquetan a cada cada frecuencia aquí también corresponden a el número de sobretono n . Allí se evidencia una vez más que hay una convergencia entre los resultados de la aproximación WKB a 3^{er} y 6^{to} orden, sugiriendo una mayor precisión en los resultados de estos métodos que en los otros [25, 45, 115]. Además, también se muestra que los resultados menos precisos, nuevamente, corresponden a los calculados mediante los métodos de la aproximación WKB a 1^{er} orden y del potencial de Pöschl-Teller.

Un aspecto que cabe resaltar es que todos los resultados expuestos sobre la Figura (5-27) son bastante similares a los previamente ilustrados para las perturbaciones del campo escalar sin masa de las Figuras (5-16) y (5-19). La diferencia radica principalmente en que las frecuencias de los QNMs del campo electromagnético poseen una considerable parte real ω_R y parte imaginaria ω_I mayores que las obtenidas en el caso de las perturbaciones escalares sin masa.

Para analizar el efecto de la constante cosmológica Λ sobre los QNMs, los resultados de la Tabla (B-19) y en la Figura (5-28), ilustran el comportamiento de los resultados obtenidos para las frecuencias de los QNMs del campo electromagnético en la métrica AdS-RN-EGB 4D y en función de Λ . Por la izquierda se muestra la parte real ω_R y en la derecha la parte imaginaria ω_I de las frecuencias del modo fundamental ($n = 0$) en términos de Λ . Para este caso, se evidencia claramente un comportamiento monótonamente decreciente, tanto para la parte real ω_R como para la parte imaginaria ω_I de las frecuencias, debido a un aumento del valor de Λ . Lo que implicaría que el AN de AdS-RN-EGB 4D se comportaría, para las perturbaciones electromagnéticas, como un mejor oscilador si Λ es muy negativo.

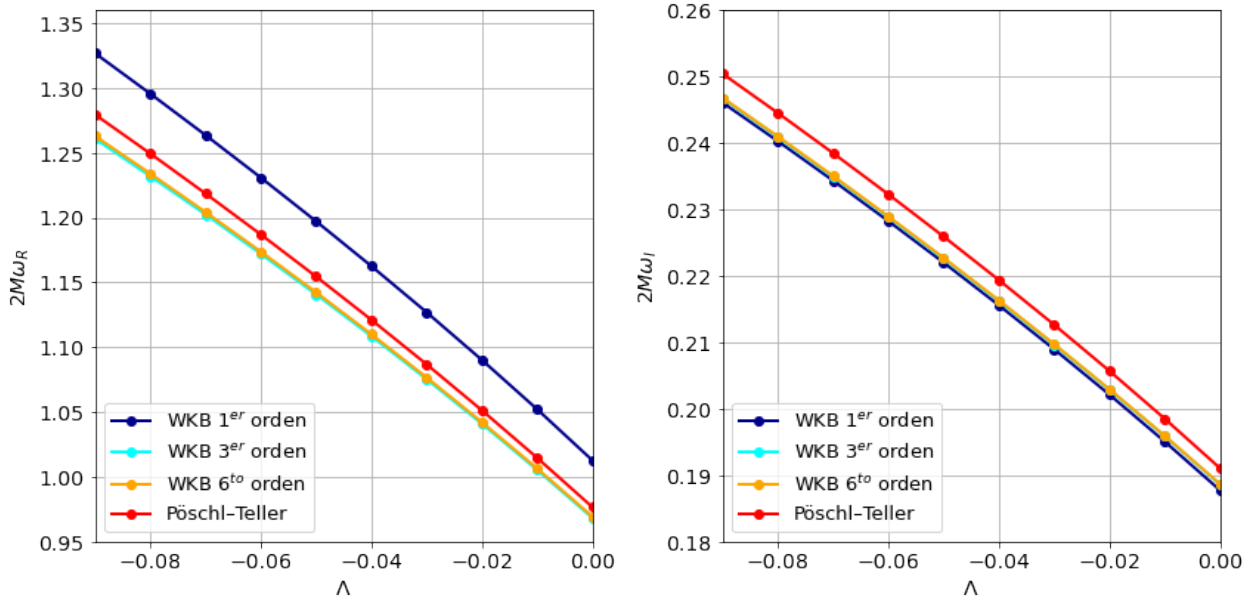


Figura 5-28: Frecuencias de los QNMs del campo electromagnético en la métrica AdS-RN-EGB 4D. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I en función de Λ (con $n = 0$, $l = 2$, $\alpha = 0.1$ y $Q = 0.5$).

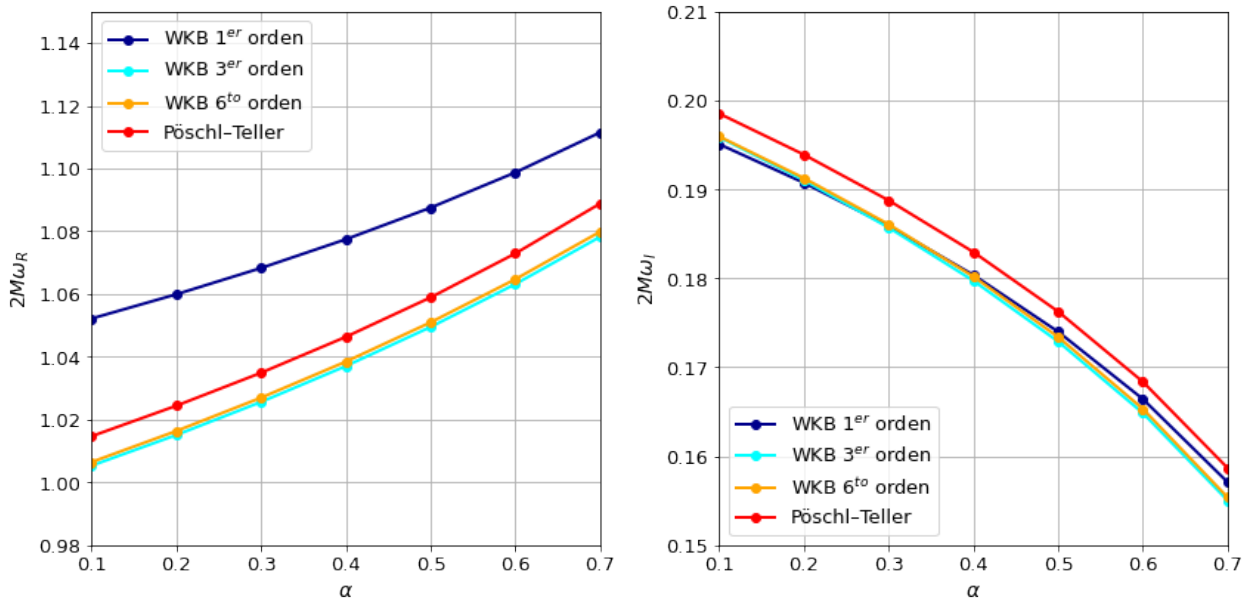


Figura 5-29: Frecuencias de los QNMs del campo electromagnético en la métrica AdS-RN-EGB 4D. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I en función de α (con $n = 0$, $l = 2$, $\Lambda = -0.01$ y $Q = 0.5$).

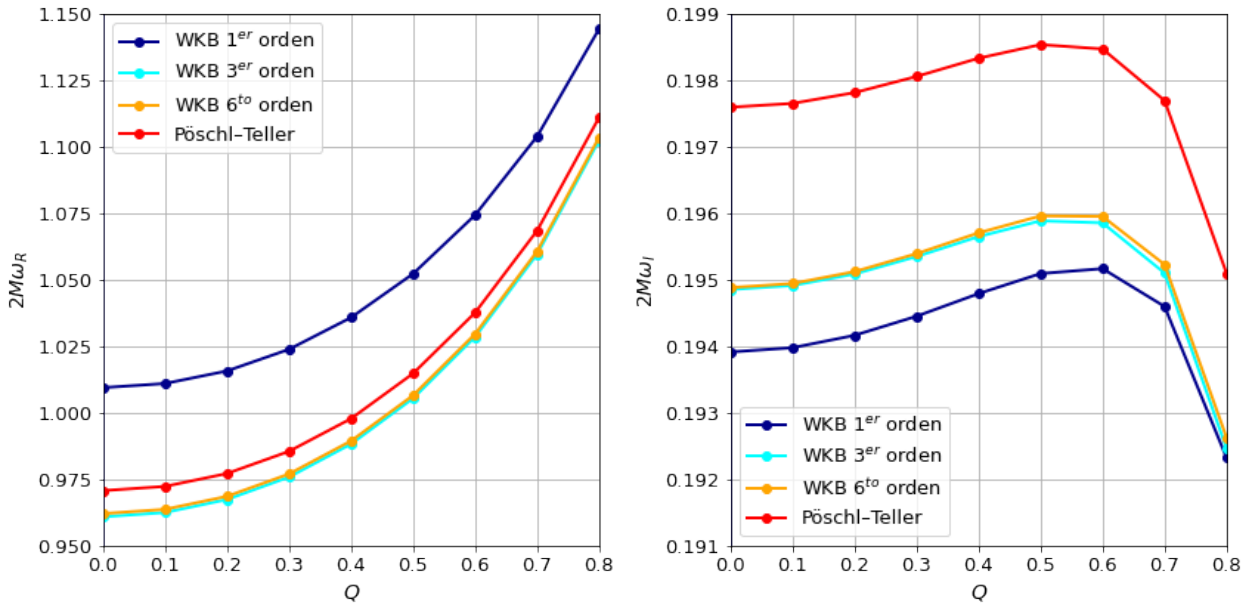


Figura 5-30: Frecuencias de los QNMs del campo electromagnético en la métrica AdS-RN-EGB 4D. A la izquierda se muestra la parte real ω_R y la derecha la parte imaginaria ω_I en función de la carga eléctrica Q (con $n = 0$, $l = 2$, $\alpha = 0.1$ y $\Lambda = -0.01$).

Si se analiza el efecto de los parámetros geométricos como la carga eléctrica Q y el parámetro de GB α sobre las frecuencias de los QNMs de las perturbaciones del campo electromagnético en el fondo de un AN de AdS-RN-EGB 4D, estos tienen un comportamiento muy similar a los ya encontrados y discutidos en el caso de las perturbaciones del campo escalar sin masa. Así como se muestra en los resultados de las Tablas (B-18) y (B-20) y en las Figuras (5-29) y (5-30), los parámetros Q y α sobre las frecuencias, se comportan muy similar a como previamente se había ilustrado en las Figuras (5-17), (5-18), (5-21) y (5-22), para las perturbaciones escalares no masivas (consistente con lo previamente publicado en [13, 42, 60, 122]). En todos estos casos, se obtiene que la parte real ω_R de las frecuencias obedece una conducta monótonamente creciente a mayores valores de α y exponencialmente creciente con altos valores de Q . En cambio, viendo la variación de la parte imaginaria ω_I en función de Q , esta contiene un valor máximo de ω_I para una carga eléctrica en particular. Este valor máximo, tanto en las perturbaciones escalares no masivas como en las electromagnéticas, es alcanzado prácticamente con el mismo valor de carga eléctrica. Además, nuevamente en la parte imaginaria de las frecuencias ω_I en función de α , se vuelve a dar con un efecto monótonamente decreciente conforme aumentan los valores de α .

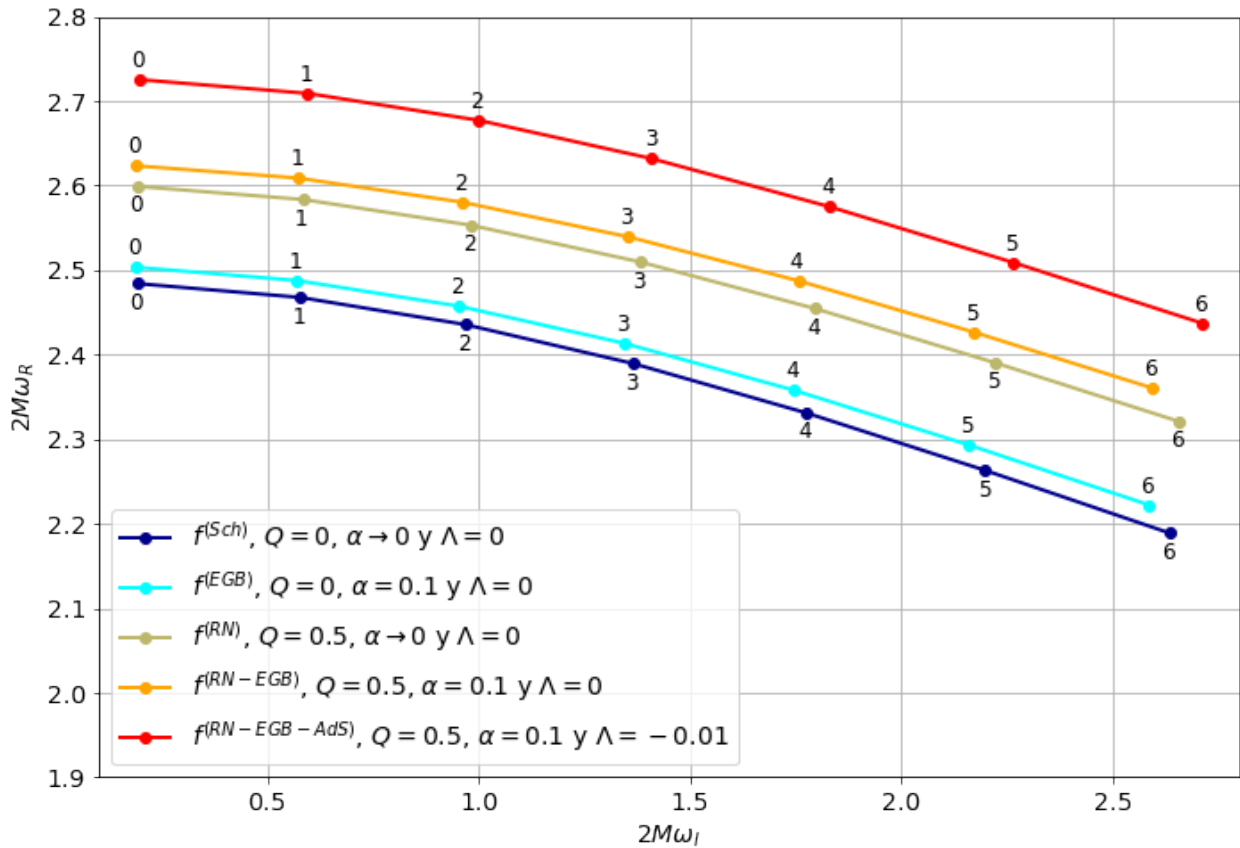


Figura 5-31: Frecuencias de los QNMs del campo electromagnético en la métrica AdS-RN-EGB 4D y en sus casos particulares límite, determinadas mediante el método WKB a 6^{to} orden. Se muestra la parte real ω_R y la parte imaginaria ω_I de los 6 primeros números de sobretono n para $l=6$. Los números sobre cada frecuencia corresponden a n .

En la Figura (5-31) y las Tablas (B-13), (B-14), (B-15), (B-16) y (B-17) se muestran los resultados de las frecuencias de los QNMs del campo electromagnético en la métrica AdS-RN-EGB 4D y en sus casos particulares. La Tabla (B-13) enseña las frecuencias de las perturbaciones electromagnéticas sobre el fondo de Schwarzschild, la Tabla (B-14) sobre el AN de RN, la Tabla (B-15) en el espacio-tiempo de EGB 4D, la Tabla (B-16) en el fondo de RN-EGB 4D y por último la Tabla (B-17) comparte las frecuencias sobre el AN de AdS-RN-EGB 4D. La Figura (5-31) muestra en particular las frecuencias determinadas solamente a partir del método WKB a 6^{to} orden. Allí se evidencia que la parte real ω_R de las frecuencias es más grande en el caso general del espacio-tiempo de AdS-RN-EGB 4D que sobre todos sus casos particulares, seguido del AN de RN-EGB 4D, luego del AN de RN, luego del espacio-tiempo de EGB 4D y por último la métrica de Schwarzschild,

es decir el mismo orden obtenido previamente en los resultados de las frecuencias de las perturbaciones en el campo escalar no masivo de la Figura (5-23). En este caso, es el AN de AdS-RN-EGB 4D el mejor oscilador bajo perturbaciones electromagnéticas que todos los ANs de sus casos particulares limite principales. Debido a esto, si se consideran las aplicaciones de la obtención de las frecuencias de los QNMs de un AN, introducidas en el apéndice C, estos resultados sugieren que el AN de AdS-RN-EGB 4D tiene una sombra más pequeña que las producidas por los ANs de Schwarzschild, RN, EGB 4D y RN-EGB 4D, consistente con lo predicho a partir de las perturbaciones del campo escalar no masivo. También es importante notar que en los resultados se observa que en este caso la parte imaginaria ω_I de las frecuencias es más grande en el caso general del AN de AdS-RN-EGB 4D que sobre todos los demás casos limite particulares en estudio.

Las frecuencias de los QNMs de las perturbaciones del campo electromagnético en el espacio-tiempo de AdS-EGB 4D y de RN-EGB 4D fueron investigadas en [10] y [11], respectivamente. En el presente trabajo se calculó satisfactoriamente, a partir del método del potencial de Pöschl-Teller dado en [42] y por el método de la aproximación WKB a 1^{er}, 3^{er} y 6^{to} orden propuestos inicialmente en [25,45,90], estas frecuencias de los QNMs de las perturbaciones del campo electromagnético, y en las Tablas (B-13), (B-14), (B-15), (B-16), (B-17), (B-18), (B-19) y (B-20) y las Figuras (5-27), (5-28), (5-29), (5-30) y (5-31), se muestran los resultados alcanzados para estas frecuencias, que fueron calculadas para las geometrías descritas por el AN de AdS-RN-EGB 4D y sus ANs que contiene como casos limite, obteniéndose comportamientos que están de acuerdo con resultados reportados en [10, 11].

6. Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se presentó una breve introducción al formalismo que describe a los ANs de AdS-RN-EGB 4D y se mostró la deducción de la correspondiente ecuación de campo modificada de la teoría gravitacional que modela a estos ANs. Se mostraron los comportamientos de las principales propiedades de este AN, como bien lo son, el comportamiento de algunos de sus invariantes y de los efectos de los parámetros geométricos de la carga eléctrica Q , el parámetros α y la constante cosmológica Λ sobre la solución y sus distintos horizontes. Además se han mencionado algunas de las posibles relaciones que puede tener este AN con otras teorías de gravedad modificada y con los ANs que contiene como casos limite particulares.

Después de comprender las principales características del AN de AdS-RN-EGB 4D, se resumió la teoría física que sustenta al estudio de campos perturbados en espacio-tiempos estáticos y esféricamente simétricos, haciendo un énfasis en las perturbaciones de los campos escalares masivos y los campos electromagnéticos, encontrando a las ecuaciones maestras que las describen. Consecuentemente, se introdujo al concepto de QNMs de un AN y se discutieron los métodos para encontrar a las frecuencias de los QNMs de un AN, principalmente el del método de la aproximación de WKB, analizando sus fundamentos, restricciones, alcances y compartiendo algunas de las diferentes contribuciones que le han realizado para mejorarlo.

Finalmente se calcularon y se analizaron, mediante el uso de los métodos del potencial de Pöschl-Teller propuesto en [42] y de la aproximación WKB a 1^{er}, 3^{er} y 6^{to} orden introducidos en [25, 45, 90] respectivamente, las frecuencias de los QNMs de un campo escalar (con y sin masa) y del campo electromagnético alrededor del espacio-tiempo del AN de AdS-RN-EGB 4D y de sus casos limite: los ANs de Schwarzschild y de RN, definidos sobre la teoría de la RG, y los provenientes de la teoría de gravedad modificada dados por los ANs de EGB 4D y de RN-EGB 4D. En el proceso, se obtuvo que el método de la aproximación WKB no puede ser aplicado sobre un campo escalar masivo y sin masa alrededor del AN de AdS-RN-EGB 4D debido a una divergencia provocada por $\Lambda < 0$. De todas formas, luego se mostró que el método de WKB si puede ser aplicado cuando se tiene $\Lambda = 0$ y simultáneamente $V_0 > \mu^2$, con V_0 el máximo del potencial efectivo que describe las perturbaciones.

Específicamente, se describieron los efectos de los parámetros de la masa del campo escalar μ , la carga eléctrica Q y el parámetro α sobre las frecuencias ω de los QNMs del campo escalar, dando con el característico valor máximo de la parte imaginaria ω_I de

las frecuencias para un Q específico, el crecimiento exponencial de la parte real ω_R de las frecuencias a partir de un incremento de Q y mostrando comportamientos monótonos para ω_R y ω_I con diferentes valores de μ y α . También se hallaron estos mismos comportamientos para las perturbaciones del campo electromagnético, obteniendo además un comportamiento monótonamente decreciente para ω_R y ω_I al incrementar el valor de la constante cosmológica Λ , y además, se obtuvo una restricción a los posibles valores que Λ puede tener para que los métodos sean aplicables.

Se comprobó la precisión de los métodos de la aproximación WKB a 1^{er}, 3^{er} y 6^{to} orden y del potencial de Pöschl-Teller y se encontró que las frecuencias de los QNMs de un campo escalar en el espacio-tiempo de un AN de RN-EGB 4D tienen ω_R mayor y una ω_I menor que las obtenidas sobre los ANs de Schwarzschild, Reissner-Nordström y EGB 4D. Por otra parte, se obtuvo que las frecuencias de los QNMs del campo electromagnético, sobre la geometría de la solución de un AN de AdS-RN-EGB 4D, poseen una parte real ω_R y una parte imaginaria ω_I mayores que las alcanzadas por los ANs de Schwarzschild, Reissner-Nordström, EGB 4D y RN-EGB 4D. De esta forma, las investigaciones realizadas en este trabajo sugieren que los ANs de AdS-RN-EGB 4D resultan siendo mejores osciladores que los ANs de Schwarzschild, RN, EGB 4D y de RN-EGB 4D, y además, entre las muchas otras consecuencias que tiene esto sobre las propiedades del AN, estos resultados sugerirían por ejemplo, que un AN de AdS-RN-EGB 4D tiene una sombra más pequeña que todos estos otros ANs.

Todos estos resultados conseguidos para las frecuencias de los QNMs del campo escalar (con y sin masa) sobre el espacio-tiempo del AN de RN-EGB 4D y sus casos límite particulares, se obtuvieron de manera acorde con los previamente reportados en [10, 11, 13, 25, 42, 45, 60–62, 115, 118–122], mientras que las frecuencias de los QNMs del campo electromagnético en las cercanías del AN de AdS-RN-EGB 4D, junto con sus casos límite particulares, se calcularon y están de acuerdo con las previamente reportadas en [10, 11, 13, 25, 42, 45, 60, 115, 122].

A. Apéndice 1: Tablas de las frecuencias de los modos cuasinormales del campo escalar

En el presente apéndice se comparten las Tablas con los resultados obtenidos para las frecuencias ω de los QNMs de las perturbaciones al campo escalar, usando los métodos del potencial de Pöschl-Teller dado en [42] y de la aproximación WKB a 1^{er}, 3^{er} y 6^{to} orden propuestos en [25, 45, 90]. La organización de las Tablas con los resultados es resumida en la Tabla (5-4). Los resultados con las frecuencias de las perturbaciones al campo escalar, bajo la geometría del AN de Schwarzschild, se muestran en las Tablas (A-5) y (A-6), en la Tabla (A-7) sobre el AN de RN, en la Tabla (A-8) en las cercanías del AN de EGB 4D y sobre el AN de RN-EGB 4D se dan en las Tablas (A-9), (A-10), (A-11) y (A-12).

μ	(WKB 1 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 3 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 6 ^{to} orden) $2M\omega$	(Pöschl-Teller) $2M\omega$
0	1.012633-0.192246i	0.966422-0.193610i	0.967284-0.193532i	0.974744-0.195808i
0.1	1.018636-0.190255i	0.972740-0.191438i	0.973603-0.191364i	0.981793-0.193663i
0.2	1.036783-0.184189i	0.991781-0.184857i	0.992649-0.184793i	1.002977-0.187166i
0.3	1.067501-0.173752i	1.023813-0.173652i	1.024689-0.173604i	1.038440-0.176100i
0.4	1.111563-0.158393i	1.069311-0.157391i	1.070195-0.157365i	1.088520-0.160026i
0.5	1.170214-0.137111i	1.128958-0.135270i	1.129869-0.135263i	1.153923-0.138062i
0.6	1.245530-0.107757i	1.203323-0.105924i	1.204472-0.105675i	1.236137-0.108162i

Tabla A-5: Frecuencias de los QNM de un campo escalar masivo ($s=0$) alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. (con $Q = 0$, $\alpha \rightarrow 0$ y $\Lambda = 0$).

l	n	(WKB 1 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 3 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 6 ^{to} orden) $2M\omega$	(Pöschl–Teller) $2M\omega$
0	0	0.379569-0.196480i	0.209294-0.230394i	0.220934-0.201633i	0.229640-0.229640i
1	0	0.658868-0.192512i	0.582228-0.196003i	0.585819-0.195523i	0.597098-0.201297i
	1	0.792286-0.480282i	0.524424-0.614865i	0.528942-0.613036i	0.597098-0.603890i
2	0	1.012633-0.192246i	0.966422-0.193610i	0.967284-0.193532i	0.974744-0.195808i
	1	1.122193-0.520432i	0.926383-0.591620i	0.927693-0.591254i	0.974744-0.587423i
	2	1.259324-0.772935i	0.863321-1.006867i	0.860772-1.017400i	0.974744-0.979038i
3	0	1.383456-0.192296i	1.350412-0.193024i	1.350732-0.193001i	1.356196-0.194181i
	1	1.473243-0.541730i	1.320829-0.584688i	1.321342-0.584575i	1.356196-0.582544i
	2	1.601999-0.830317i	1.269679-0.988236i	1.267182-0.992021i	1.356196-0.970906i
	3	1.738918-1.070916i	1.204363-1.402105i	1.196858-1.422770i	1.356196-1.359268i
4	0	1.760394-0.192343i	1.734680-0.192793i	1.734831-0.192784i	1.739123-0.193501i
	1	1.835301-0.553477i	1.711368-0.581798i	1.711616-0.581753i	1.739123-0.580503i
	2	1.952839-0.866940i	1.668984-0.979045i	1.667368-0.980645i	1.739123-0.967506i
	3	2.086302-1.136074i	1.612785-1.385302i	1.606371-1.394964i	1.739123-1.354508i
	4	2.222916-1.370898i	1.546135-1.798650i	1.534434-1.828456i	1.739123-1.741510i
5	0	2.140186-0.192373i	2.119141-0.192678i	2.119224-0.192674i	2.122753-0.193155i
	1	2.203964-0.560418i	2.099944-0.580329i	2.100082-0.580309i	2.122753-0.579465i
	2	2.310273-0.891051i	2.064023-0.973913i	2.062992-0.974686i	2.122753-0.965774i
	3	2.437492-1.182362i	2.014953-1.374882i	2.010341-1.379836i	2.122753-1.352084i
	4	2.572556-1.440367i	1.955783-1.782681i	1.945551-1.798980i	2.122753-1.738394i
	5	2.708941-1.671817i	1.888257-2.195820i	1.872697-2.234275i	2.122753-2.124703i
6	0	2.521533-0.192393i	2.503723-0.192612i	2.503773-0.192610i	2.506768-0.192955i
	1	2.576840-0.564790i	2.487420-0.579483i	2.487505-0.579473i	2.506768-0.578865i
	2	2.672943-0.907473i	2.456369-0.970788i	2.455689-0.971202i	2.506768-0.964776i
	3	2.792783-1.215945i	2.413030-1.368065i	2.409779-1.370818i	2.506768-1.350686i
	4	2.924134-1.493133i	2.359871-1.771484i	2.351914-1.780938i	2.506768-1.736596i
	5	3.059845-1.744000i	2.298716-2.180276i	2.284770-2.203598i	2.506768-2.122507i
	6	3.196063-1.973246i	2.230573-2.593334i	2.211334-2.640165i	2.506768-2.508417i

Tabla A-6: Frecuencias de los QNM de un campo escalar no masivo ($s=0$ y $\mu = 0$) alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. (con $Q = 0$, $\alpha \rightarrow 0$ y $\Lambda = 0$).

l	n	(WKB 1 ^{er} orden) 2M ω	(WKB 3 ^{er} orden) 2M ω	(WKB 6 ^{to} orden) 2M ω	(Pöschl–Teller) 2M ω
0	0	0.386941-0.197667i	0.220678-0.230098i	0.231579-0.203922i	0.240380-0.229932i
1	0	0.684447-0.194772i	0.609782-0.198167i	0.613101-0.197749i	0.623902-0.203172i
	1	0.818201-0.488796i	0.555271-0.619575i	0.559414-0.617965i	0.623902-0.609515i
2	0	1.056264-0.194656i	1.011122-0.195955i	1.011933-0.195898i	1.019108-0.198048i
	1	1.165323-0.529315i	0.973368-0.597974i	0.974612-0.597682i	1.019108-0.594143i
	2	1.303697-0.788557i	0.913796-1.016536i	0.911513-1.025993i	1.019108-0.990238i
3	0	1.444932-0.194723i	1.412635-0.195412i	1.412938-0.195395i	1.418201-0.196516i
	1	1.533865-0.550300i	1.384737-0.591504i	1.385230-0.591415i	1.418201-0.589548i
	2	1.662993-0.845951i	1.336399-0.998904i	1.334182-1.002281i	1.418201-0.982580i
	3	1.801451-1.093304i	1.274756-1.416351i	1.267905-1.434864i	1.418201-1.375612i
4	0	1.839645-0.194772i	1.814507-0.195196i	1.814651-0.195190i	1.818788-0.195873i
	1	1.913608-0.561730i	1.792522-0.588798i	1.792762-0.588763i	1.818788-0.587618i
	2	2.030897-0.882149i	1.752485-0.990210i	1.751055-0.991632i	1.818788-0.979363i
	3	2.165229-1.158388i	1.699374-1.400297i	1.693568-1.408909i	1.818788-1.371108i
	4	2.303519-1.399944i	1.636521-1.817330i	1.625789-1.844035i	1.818788-1.762853i
5	0	2.237178-0.194802i	2.216603-0.195088i	2.216682-0.195086i	2.220085-0.195544i
	1	2.300029-0.568435i	2.198499-0.587422i	2.198633-0.587405i	2.220085-0.586633i
	2	2.405710-0.905773i	2.164580-0.985362i	2.163670-0.986048i	2.220085-0.977721i
	3	2.533226-1.204251i	2.118202-1.390364i	2.114047-1.394765i	2.220085-1.368810i
	4	2.669439-1.469316i	2.062309-1.801995i	2.052990-1.816539i	2.220085-1.759898i
	5	2.807576-1.707474i	1.998664-2.218871i	1.984362-2.253336i	2.220085-2.150987i
6	0	2.636249-0.194820i	2.618836-0.195027i	2.618884-0.195026i	2.621772-0.195355i
	1	2.690682-0.572638i	2.603462-0.586628i	2.603543-0.586619i	2.621772-0.586064i
	2	2.785946-0.921761i	2.574149-0.982413i	2.573549-0.982780i	2.621772-0.976773i
	3	2.905645-1.237304i	2.533198-1.383884i	2.530277-1.386325i	2.621772-1.367483i
	4	3.037660-1.521684i	2.482956-1.791271i	2.475744-1.799683i	2.621772-1.758192i
	5	3.174693-1.779557i	2.425215-2.203900i	2.412475-2.224730i	2.621772-2.148901i
	6	3.312711-2.015491i	2.361012-2.620724i	2.343307-2.662706i	2.621772-2.539611i

Tabla A-7: Frecuencias de los QNM de un campo escalar no masivo ($s=0$ y $\mu = 0$) alrededor de un agujero negro de RN. (con $Q = 0.5$, $\alpha \rightarrow 0$ y $\Lambda = 0$).

l	n	(WKB 1 ^{er} orden) 2M ω	(WKB 3 ^{er} orden) 2M ω	(WKB 6 ^{to} orden) 2M ω	(Pöschl–Teller) 2M ω
0	0	0.376302-0.193015i	0.209374-0.223709i	0.224276-0.202139i	0.231934-0.224845i
1	0	0.661244-0.189797i	0.586626-0.192317i	0.590562-0.192642i	0.601634-0.198135i
	1	0.791977-0.475402i	0.529461-0.603145i	0.536845-0.602976i	0.601634-0.594404i
2	0	1.018714-0.189450i	0.973853-0.190423i	0.974866-0.190453i	0.982196-0.192813i
	1	1.125415-0.514463i	0.935128-0.581455i	0.937349-0.581251i	0.982196-0.578439i
	2	1.260237-0.765709i	0.873693-0.989178i	0.873665-0.998307i	0.982196-0.964066i
3	0	1.392808-0.189434i	1.360773-0.189958i	1.361156-0.189962i	1.366554-0.191211i
	1	1.479900-0.534857i	1.332410-0.575112i	1.333297-0.575028i	1.366554-0.573632i
	2	1.605889-0.821492i	1.283079-0.971517i	1.281841-0.974707i	1.366554-0.956053i
	3	1.740649-1.061050i	1.219839-1.377945i	1.214696-1.395801i	1.366554-1.338474i
4	0	1.772869-0.189445i	1.747955-0.189770i	1.748138-0.189771i	1.752390-0.190536i
	1	1.845347-0.546013i	1.725693-0.572485i	1.726127-0.572449i	1.752390-0.571608i
	2	1.959928-0.856821i	1.685047-0.962922i	1.684118-0.964255i	1.752390-0.952680i
	3	2.090828-1.124449i	1.630918-1.361946i	1.626046-1.370232i	1.752390-1.333753i
	4	2.225358-1.358322i	1.566571-1.767873i	1.557252-1.793802i	1.752390-1.714825i
5	0	2.155714-0.189456i	2.135331-0.189676i	2.135432-0.189677i	2.138934-0.190192i
	1	2.217329-0.552573i	2.117038-0.571155i	2.117280-0.571137i	2.138934-0.570575i
	2	2.320671-0.879944i	2.082701-0.958160i	2.082078-0.958801i	2.138934-0.950958i
	3	2.445066-1.169247i	2.035617-1.352129i	2.032021-1.356361i	2.138934-1.331341i
	4	2.577707-1.425961i	1.978669-1.752645i	1.970248-1.766763i	2.138934-1.711724i
	5	2.712052-1.656507i	1.913576-2.158370i	1.900516-2.191974i	2.138934-2.092107i
6	0	2.540077-0.189463i	2.522830-0.189623i	2.522891-0.189623i	2.525866-0.189993i
	1	2.593454-0.556692i	2.507314-0.570390i	2.507462-0.570380i	2.525866-0.569978i
	2	2.686678-0.895625i	2.477692-0.955274i	2.477271-0.955616i	2.525866-0.949963i
	3	2.803559-1.201601i	2.436217-1.345753i	2.433654-1.348099i	2.525866-1.329948i
	4	2.932232-1.477121i	2.385190-1.742059i	2.378575-1.750224i	2.525866-1.709933i
	5	3.065616-1.726819i	2.326359-2.143539i	2.314493-2.163852i	2.525866-2.089918i
	6	3.199823-1.955191i	2.260731-2.549183i	2.244165-2.590224i	2.525866-2.469903i

Tabla A-8: Frecuencias de los QNM de un campo escalar no masivo ($s=0$ y $\mu = 0$) alrededor de un agujero negro de EGB 4D. (con $Q = 0$, $\alpha = 0.1$ y $\Lambda = 0$).

l	n	(WKB 1 ^{er} orden) 2M ω	(WKB 3 ^{er} orden) 2M ω	(WKB 6 ^{to} orden) 2M ω	(Pöschl–Teller) 2M ω
0	0	0.383052-0.193597i	0.219548-0.221927i	0.235289-0.204470i	0.242715-0.224361i
1	0	0.687503-0.191339i	0.615239-0.193585i	0.618987-0.193975i	0.629575-0.199209i
	1	0.817853-0.482529i	0.561070-0.604984i	0.568561-0.604786i	0.629575-0.597628i
2	0	1.063979-0.191077i	1.020474-0.191921i	1.021447-0.191977i	1.028501-0.194235i
	1	1.169423-0.521544i	0.984106-0.585130i	0.986367-0.584976i	1.028501-0.582704i
	2	1.304790-0.779060i	0.926043-0.994165i	0.926602-1.001902i	1.028501-0.971170i
3	0	1.456784-0.191057i	1.425711-0.191508i	1.426082-0.191521i	1.431285-0.192722i
	1	1.542338-0.541378i	1.399141-0.579334i	1.400051-0.579268i	1.431285-0.578166i
	2	1.667900-0.834370i	1.352700-0.977674i	1.351904-0.980351i	1.431285-0.963610i
	3	1.803527-1.080275i	1.293059-1.385668i	1.288890-1.400917i	1.431285-1.349053i
4	0	1.855449-0.191061i	1.831283-0.191340i	1.831461-0.191344i	1.835563-0.192082i
	1	1.926389-0.552075i	1.810452-0.576932i	1.810897-0.576904i	1.835563-0.576246i
	2	2.039905-0.868922i	1.772281-0.969689i	1.771627-0.970802i	1.835563-0.960410i
	3	2.170905-1.143084i	1.721302-1.370584i	1.717255-1.377613i	1.835563-1.344574i
	4	2.306453-1.383308i	1.660694-1.778182i	1.652690-1.800412i	1.835563-1.728738i
5	0	2.256847-0.191066i	2.237076-0.191255i	2.237175-0.191257i	2.240554-0.191754i
	1	2.317017-0.558313i	2.219969-0.575715i	2.220218-0.575701i	2.240554-0.575263i
	2	2.418944-0.891312i	2.187773-0.965284i	2.187323-0.965817i	2.240554-0.958772i
	3	2.542820-1.187047i	2.143501-1.361386i	2.140505-1.364959i	2.240554-1.342281i
	4	2.675869-1.450318i	2.089875-1.763753i	2.082641-1.775792i	2.240554-1.725789i
	5	2.811319-1.687205i	2.028611-2.171199i	2.017191-2.200073i	2.240554-2.109298i
6	0	2.659737-0.191070i	2.643008-0.191206i	2.643068-0.191207i	2.645939-0.191565i
	1	2.711784-0.562208i	2.628503-0.575015i	2.628655-0.575007i	2.645939-0.574694i
	2	2.803430-0.906382i	2.600755-0.962620i	2.600447-0.962904i	2.645939-0.957824i
	3	2.919342-1.218551i	2.561810-1.355442i	2.559674-1.357417i	2.645939-1.340954i
	4	3.047884-1.500635i	2.513803-1.753782i	2.508136-1.760717i	2.645939-1.724083i
	5	3.181871-1.756875i	2.458418-2.157105i	2.448086-2.174479i	2.645939-2.107213i
	6	3.317239-1.991578i	2.396682-2.564499i	2.382073-2.599809i	2.645939-2.490342i

Tabla A-9: Frecuencias de los QNM de un campo escalar no masivo ($s=0$ y $\mu = 0$) alrededor de un agujero negro de RN-EGB 4D. (con $Q = 0.5$, $\alpha = 0.1$ y $\Lambda = 0$).

Q	(WKB 1 ^{er} orden) 2M ω	(WKB 3 ^{er} orden) 2M ω	(WKB 6 ^{to} orden) 2M ω	(Pöschl–Teller) 2M ω
0	1.018714-0.189450i	0.973853-0.190423i	0.974866-0.190453i	0.982196-0.192813i
0.1	1.020362-0.189531i	0.975544-0.190500i	0.976554-0.190531i	0.983875-0.192888i
0.2	1.025379-0.189768i	0.980693-0.190726i	0.981698-0.190760i	0.988990-0.193104i
0.3	1.033994-0.190141i	0.989546-0.191078i	0.990543-0.191116i	0.997783-0.193440i
0.4	1.046630-0.190607i	1.002558-0.191508i	1.003544-0.191553i	1.010706-0.193848i
0.5	1.063979-0.191077i	1.020474-0.191921i	1.021447-0.191977i	1.028501-0.194235i
0.6	1.087156-0.191375i	1.044504-0.192125i	1.045463-0.192194i	1.052373-0.194410i
0.7	1.118015-0.191106i	1.076662-0.191690i	1.077615-0.191779i	1.084350-0.193961i
0.8	1.159900-0.189277i	1.120583-0.189532i	1.121558-0.189646i	1.128157-0.191848i

Tabla A-10: Frecuencias de los QNM de un campo escalar no masivo ($s=0$ y $\mu = 0$) en función de Q y alrededor de un agujero negro de RN-EGB 4D. (con $n = 0$, $l = 2$, $\alpha = 0.1$ y $\Lambda = 0$).

α	(WKB 1 ^{er} orden) 2M ω	(WKB 3 ^{er} orden) 2M ω	(WKB 6 ^{to} orden) 2M ω	(Pöschl–Teller) 2M ω
0	1.056264-0.194656i	1.011122-0.195955i	1.011933-0.195898i	1.019108-0.198048i
0.1	1.063979-0.191077i	1.020474-0.191921i	1.021447-0.191977i	1.028501-0.194235i
0.2	1.072230-0.187105i	1.030472-0.187509i	1.031562-0.187679i	1.038538-0.190020i
0.3	1.081103-0.182647i	1.041204-0.182620i	1.042380-0.182894i	1.049326-0.185311i
0.4	1.090715-0.177572i	1.052781-0.177119i	1.054024-0.177471i	1.061007-0.179974i
0.5	1.101217-0.171690i	1.065338-0.170803i	1.066641-0.171195i	1.073773-0.173816i
0.6	1.112821-0.164701i	1.079029-0.163363i	1.080394-0.163744i	1.087893-0.166535i
0.7	1.125840-0.156094i	1.094006-0.154291i	1.095431-0.154605i	1.103770-0.157616i
0.8	1.140771-0.144877i	1.110253-0.142755i	1.111734-0.142948i	1.122068-0.146060i

Tabla A-11: Frecuencias de los QNM de un campo escalar no masivo ($s=0$ y $\mu = 0$) en función de α y alrededor de un agujero negro de RN-EGB 4D. (con $n = 0$, $l = 2$, $Q = 0.5$ y $\Lambda = 0$).

μ	(WKB 1 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 3 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 6 ^{to} orden) $2M\omega$	(Pöschl–Teller) $2M\omega$
0	1.063979-0.191077i	1.020474-0.191921i	1.021447-0.191977i	1.028501-0.194235i
0.1	1.069480-0.189375i	1.026204-0.190081i	1.027177-0.190138i	1.034843-0.192415i
0.2	1.086098-0.184183i	1.043473-0.184492i	1.044447-0.184554i	1.053925-0.186890i
0.3	1.114201-0.175236i	1.072528-0.174939i	1.073503-0.175009i	1.085933-0.177444i
0.4	1.154449-0.162028i	1.113804-0.161002i	1.114780-0.161082i	1.131246-0.163648i
0.5	1.207907-0.143668i	1.167937-0.141926i	1.168922-0.142012i	1.190572-0.144695i
0.6	1.276314-0.118382i	1.235598-0.116403i	1.236714-0.116398i	1.265238-0.118895i

Tabla A-12: Frecuencias de los QNM de un campo escalar masivo ($s=0$) en función de μ y alrededor de un agujero negro de RN-EGB 4D. (con $n = 0$, $l = 2$, $\alpha = 0.1$, $Q = 0.5$ y $\Lambda = 0$).

B. Apéndice 2: Tablas de las frecuencias de los modos cuasinormales del campo electromagnético

En este apéndice se comparten las Tablas con los resultados obtenidos para las frecuencias ω de los QNMs de las perturbaciones al campo electromagnético, también bajo el uso de los métodos del potencial de Pöschl-Teller dado en [42] y de la aproximación WKB a 1^{er}, 3^{er} y 6^{to} orden propuestos en [25, 45, 90]. De nuevo, el orden de las Tablas con estos resultados es resumida en la Tabla (5-4). Los resultados con las frecuencias de las perturbaciones al campo electromagnético, se muestran sobre del AN de Schwarzschild en la Tabla (B-13), en el AN de RN sobre la Tabla (B-14), en los alrededores del AN de EGB 4D en la Tabla (B-15), en la Tabla (B-16) sobre las cercanías del AN de RN-EGB 4D y bajo la geometría del AN de AdS-RN-EGB 4D se dan en las Tablas (B-17), (B-18), (B-19) y (B-20).

l	n	(WKB 1 ^{er} orden) 2M ω	(WKB 3 ^{er} orden) 2M ω	(WKB 6 ^{to} orden) 2M ω	(Pöschl–Teller) 2M ω
1	0	0.574101-0.182471i	0.491740-0.186212i	0.496383-0.185274i	0.509175-0.192450i
	1	0.703979-0.446419i	0.422617-0.591670i	0.428591-0.588236i	0.509175-0.577350i
2	0	0.961509-0.188707i	0.914262-0.190130i	0.915187-0.190022i	0.922958-0.192450i
	1	1.071062-0.508216i	0.871655-0.581943i	0.873068-0.581456i	0.922958-0.577350i
	2	1.206101-0.752191i	0.804636-0.991724i	0.801812-1.003456i	0.922958-0.962250i
3	0	1.346876-0.190515i	1.313467-0.191262i	1.313797-0.191234i	1.319371-0.192450i
	1	1.436934-0.535724i	1.282942-0.579592i	1.283473-0.579461i	1.319371-0.577350i
	2	1.565160-0.819725i	1.230218-0.980115i	1.227575-0.984128i	1.319371-0.962250i
	3	1.700882-1.056041i	1.162826-1.391098i	1.154962-1.412996i	1.319371-1.347151i
4	0	1.731920-0.191273i	1.706036-0.191730i	1.706190-0.191720i	1.710534-0.192450i
	1	1.807048-0.549962i	1.682281-0.578679i	1.682534-0.578630i	1.710534-0.577350i
	2	1.924501-0.860663i	1.639113-0.974010i	1.637438-0.975669i	1.710534-0.962250i
	3	2.057477-1.127053i	1.581876-1.378455i	1.575263-1.388477i	1.710534-1.347151i
	4	2.193330-1.359314i	1.513940-1.790035i	1.501915-1.820908i	1.710534-1.732051i
5	0	2.116879-0.191660i	2.095742-0.191968i	2.095826-0.191963i	2.099383-0.192450i
	1	2.180813-0.558123i	2.076302-0.578230i	2.076442-0.578208i	2.099383-0.577350i
	2	2.287165-0.886950i	2.039936-0.970495i	2.038880-0.971288i	2.099383-0.962250i
	3	2.414196-1.176393i	1.990266-1.370213i	1.985554-1.375293i	2.099383-1.347151i
	4	2.548873-1.432588i	1.930362-1.776802i	1.919927-1.793503i	2.099383-1.732051i
	5	2.684734-1.662334i	1.861960-2.188750i	1.846118-2.228121i	2.099383-2.116951i
6	0	2.501808-0.191883i	2.483941-0.192105i	2.483992-0.192102i	2.487003-0.192450i
	1	2.557223-0.563175i	2.467492-0.577976i	2.467576-0.577965i	2.487003-0.577350i
	2	2.653400-0.904603i	2.436165-0.968319i	2.435472-0.968741i	2.487003-0.962250i
	3	2.773183-1.211743i	2.392447-1.364678i	2.389143-1.367483i	2.487003-1.347151i
	4	2.904338-1.487600i	2.338823-1.767213i	2.330747-1.776838i	2.487003-1.732051i
	5	3.039744-1.737187i	2.277121-2.175140i	2.262982-2.198870i	2.487003-2.116951i
	6	3.175580-1.965220i	2.208343-2.587341i	2.188857-2.634968i	2.487003-2.501851i

Tabla B-13: Frecuencias de los QNM del campo electromagnético ($s=1$) alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. (con $\alpha \rightarrow 0$, $Q = 0$ y $\Lambda = 0$).

l	n	(WKB 1 ^{er} orden) 2M ω	(WKB 3 ^{er} orden) 2M ω	(WKB 6 ^{to} orden) 2M ω	(Pöschl–Teller) 2M ω
1	0	0.598736-0.185306i	0.518284-0.188831i	0.522644-0.188249i	0.534949-0.194874i
	1	0.729578-0.456221i	0.452837-0.597572i	0.458820-0.595182i	0.534949-0.584623i
2	0	1.004509-0.191308i	0.958315-0.192648i	0.959197-0.192575i	0.966677-0.194874i
	1	1.113729-0.517640i	0.918113-0.588787i	0.919500-0.588418i	0.966677-0.584623i
	2	1.250235-0.768536i	0.854804-1.002203i	0.852396-1.012784i	0.966677-0.974371i
3	0	1.407886-0.193034i	1.375219-0.193736i	1.375535-0.193717i	1.380907-0.194874i
	1	1.497145-0.544576i	1.346430-0.586661i	1.346950-0.586559i	1.380907-0.584623i
	2	1.625854-0.835775i	1.296607-0.991197i	1.294280-0.994785i	1.380907-0.974371i
	3	1.763225-1.078925i	1.233027-1.405920i	1.225897-1.425553i	1.380907-1.364120i
4	0	1.810804-0.193756i	1.785494-0.194185i	1.785642-0.194178i	1.789830-0.194874i
	1	1.885010-0.558384i	1.763091-0.585832i	1.763339-0.585795i	1.789830-0.584623i
	2	2.002270-0.876138i	1.722315-0.985425i	1.720838-0.986902i	1.789830-0.974371i
	3	2.136184-1.149701i	1.668234-1.393798i	1.662256-1.402737i	1.789830-1.364120i
	4	2.273777-1.388737i	1.604188-1.809159i	1.593184-1.836832i	1.789830-1.753869i
5	0	2.213569-0.194123i	2.192901-0.194413i	2.192981-0.194410i	2.196412-0.194874i
	1	2.276586-0.566250i	2.174568-0.585424i	2.174705-0.585407i	2.196412-0.584623i
	2	2.382341-0.901856i	2.140230-0.982112i	2.139299-0.982815i	2.196412-0.974371i
	3	2.509712-1.198520i	2.093290-1.385928i	2.089047-1.390443i	2.196412-1.364120i
	4	2.645582-1.461815i	2.036713-1.796414i	2.027216-1.811323i	2.196412-1.753869i
	5	2.783238-1.698296i	1.972258-2.212163i	1.957713-2.247459i	2.196412-2.143617i
6	0	2.616266-0.194336i	2.598797-0.194544i	2.598845-0.194542i	2.601751-0.194874i
	1	2.670813-0.571101i	2.583284-0.585193i	2.583367-0.585184i	2.601751-0.584623i
	2	2.766168-0.919023i	2.553713-0.980064i	2.553102-0.980438i	2.601751-0.974371i
	3	2.885838-1.233279i	2.512405-1.380664i	2.509439-1.383151i	2.601751-1.364120i
	4	3.017688-1.516363i	2.461729-1.787214i	2.454411-1.795779i	2.601751-1.753869i
	5	3.154449-1.772982i	2.403481-2.199023i	2.390569-2.220224i	2.601751-2.143617i
	6	3.292116-2.007721i	2.338693-2.615037i	2.320772-2.657740i	2.601751-2.533366i

Tabla B-14: Frecuencias de los QNM del campo electromagnético ($s=1$) alrededor de un agujero negro de RN. (con $\alpha \rightarrow 0$, $Q = 0.5$ y $\Lambda = 0$).

l	n	(WKB 1 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 3 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 6 ^{to} orden) $2M\omega$	(Pöschl–Teller) $2M\omega$
1	0	0.577265-0.180037i	0.497209-0.182612i	0.502280-0.183042i	0.514699-0.189488i
	1	0.704685-0.442448i	0.429593-0.580177i	0.439501-0.580420i	0.514699-0.568464i
2	0	0.968011-0.185959i	0.922210-0.186973i	0.923300-0.186990i	0.930891-0.189488i
	1	1.074694-0.502497i	0.881237-0.571831i	0.883626-0.571560i	0.930891-0.568464i
	2	1.207501-0.745382i	0.816461-0.974100i	0.816360-0.984370i	0.930891-0.947440i
3	0	1.356520-0.187666i	1.324159-0.188203i	1.324555-0.188206i	1.330046-0.189488i
	1	1.443852-0.528944i	1.294985-0.570032i	1.295901-0.569937i	1.330046-0.568464i
	2	1.569328-0.811088i	1.244332-0.963411i	1.242986-0.966811i	1.330046-0.947440i
	3	1.702927-1.046438i	1.179395-1.366947i	1.173968-1.385923i	1.330046-1.326416i
4	0	1.744620-0.188380i	1.719556-0.188711i	1.719742-0.188711i	1.724038-0.189488i
	1	1.817295-0.542540i	1.696915-0.569372i	1.697356-0.569333i	1.724038-0.568464i
	2	1.931788-0.850642i	1.655609-0.957891i	1.654633-0.959279i	1.724038-0.947440i
	3	2.062214-1.115579i	1.600626-1.355099i	1.595581-1.363712i	1.724038-1.326416i
	4	2.196004-1.346931i	1.535244-1.759250i	1.525641-1.786149i	1.724038-1.705392i
5	0	2.132591-0.188744i	2.112126-0.188968i	2.112228-0.188968i	2.115753-0.189488i
	1	2.194344-0.550298i	2.093626-0.569058i	2.093870-0.569040i	2.115753-0.568464i
	2	2.297720-0.875900i	2.058914-0.954743i	2.058270-0.955402i	2.115753-0.947440i
	3	2.421931-1.163370i	2.011333-1.347458i	2.007648-1.351804i	2.115753-1.326416i
	4	2.554195-1.418306i	1.953789-1.746761i	1.945185-1.761243i	2.115753-1.705392i
	5	2.688031-1.647176i	1.887997-2.151287i	1.874681-2.185725i	2.115753-2.084368i
6	0	2.520506-0.188955i	2.503210-0.189116i	2.503271-0.189116i	2.506260-0.189488i
	1	2.573979-0.555088i	2.487569-0.568883i	2.487718-0.568874i	2.506260-0.568464i
	2	2.667268-0.892789i	2.457714-0.952805i	2.457283-0.953154i	2.506260-0.947440i
	3	2.784089-1.197459i	2.415924-1.342364i	2.413314-1.344756i	2.506260-1.326416i
	4	2.912571-1.471674i	2.364516-1.737783i	2.357793-1.746103i	2.506260-1.705392i
	5	3.045659-1.720113i	2.305244-2.138394i	2.293201-2.159078i	2.506260-2.084368i
	6	3.179495-1.947291i	2.239112-2.543176i	2.222318-2.584942i	2.506260-2.463344i

Tabla B-15: Frecuencias de los QNM del campo electromagnético ($s=1$) alrededor de un agujero negro de EGB. (con $\alpha = 0.1$, $Q = 0$ y $\Lambda = 0$).

l	n	(WKB 1 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 3 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 6 ^{to} orden) $2M\omega$	(Pöschl–Teller) $2M\omega$
1	0	0.602764-0.182150i	0.525139-0.184323i	0.529906-0.185170i	0.541879-0.191083i
	1	0.730412-0.450951i	0.461178-0.583080i	0.471345-0.584407i	0.541879-0.573250i
2	0	1.012765-0.187770i	0.968334-0.188636i	0.969388-0.188695i	0.976690-0.191083i
	1	1.118335-0.510135i	0.929904-0.575959i	0.932366-0.575791i	0.976690-0.573250i
	2	1.251913-0.759507i	0.868831-0.979826i	0.869454-0.988629i	0.976690-0.955417i
3	0	1.420118-0.189377i	1.388726-0.189836i	1.389112-0.189849i	1.394403-0.191083i
	1	1.505954-0.535748i	1.361421-0.574490i	1.362366-0.574419i	1.394403-0.573250i
	2	1.631107-0.824401i	1.313789-0.969947i	1.312922-0.972813i	1.394403-0.955417i
	3	1.765684-1.066194i	1.252650-1.375197i	1.248277-1.391429i	1.394403-1.337584i
4	0	1.826902-0.190047i	1.802590-0.190330i	1.802771-0.190334i	1.806915-0.191083i
	1	1.898052-0.548768i	1.781416-0.573962i	1.781872-0.573932i	1.806915-0.573250i
	2	2.011530-0.863017i	1.742652-0.964889i	1.741964-0.966050i	1.806915-0.955417i
	3	2.142123-1.134565i	1.690915-1.364056i	1.686728-1.371368i	1.806915-1.337584i
	4	2.276997-1.372321i	1.629403-1.769966i	1.621169-1.793042i	1.806915-1.719751i
5	0	2.233479-0.190388i	2.213628-0.190579i	2.213728-0.190581i	2.217130-0.191083i
	1	2.293791-0.556146i	2.196334-0.573714i	2.196587-0.573699i	2.217130-0.573250i
	2	2.395778-0.887452i	2.163802-0.962022i	2.163336-0.962570i	2.217130-0.955417i
	3	2.519509-1.181417i	2.119086-1.356928i	2.116017-1.360600i	2.217130-1.337584i
	4	2.652226-1.442956i	2.064936-1.758141i	2.057547-1.770496i	2.217130-1.719751i
	5	2.787210-1.678202i	2.003065-2.164447i	1.991429-2.194048i	2.217130-2.101917i
6	0	2.639957-0.190585i	2.623181-0.190722i	2.623241-0.190723i	2.626126-0.191083i
	1	2.692102-0.560680i	2.608563-0.573577i	2.608717-0.573569i	2.626126-0.573250i
	2	2.783826-0.903677i	2.580606-0.960262i	2.580291-0.960553i	2.626126-0.955417i
	3	2.899704-1.214590i	2.541379-1.352206i	2.539205-1.354221i	2.626126-1.337584i
	4	3.028085-1.495408i	2.493035-1.749701i	2.487276-1.756770i	2.626126-1.719751i
	5	3.161807-1.750421i	2.437265-2.152197i	2.426780-2.169894i	2.626126-2.101917i
	6	3.296835-1.983953i	2.375092-2.558772i	2.360289-2.594714i	2.626126-2.484084i

Tabla B-16: Frecuencias de los QNM del campo electromagnético ($s=1$) alrededor de un agujero negro de RN-EGB 4D. (con $\alpha = 0.1$, $Q = 0.5$ y $\Lambda = 0$).

l	n	(WKB 1 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 3 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 6 ^{to} orden) $2M\omega$	(Pöschl–Teller) $2M\omega$
1	0	0.626235-0.189251i	0.544246-0.191207i	0.549425-0.192249i	0.562973-0.198533i
	1	0.758861-0.468525i	0.474331-0.608694i	0.485475-0.610326i	0.562973-0.595600i
2	0	1.052199-0.195091i	1.005347-0.195884i	1.006502-0.195958i	1.014716-0.198533i
	1	1.161888-0.530020i	0.962673-0.599625i	0.965433-0.599421i	1.014716-0.595600i
	2	1.300675-0.789108i	0.896304-1.022984i	0.897232-1.032177i	1.014716-0.992666i
3	0	1.475412-0.196760i	1.442323-0.197183i	1.442746-0.197199i	1.448693-0.198533i
	1	1.564598-0.556632i	1.411843-0.597535i	1.412909-0.597449i	1.448693-0.595600i
	2	1.694632-0.856534i	1.359332-1.010868i	1.358560-1.013836i	1.448693-0.992666i
	3	1.834456-1.107747i	1.293092-1.435843i	1.288700-1.452887i	1.448693-1.389733i
4	0	1.898034-0.197456i	1.872411-0.197717i	1.872611-0.197723i	1.877266-0.198533i
	1	1.971960-0.570161i	1.848721-0.596739i	1.849236-0.596702i	1.877266-0.595600i
	2	2.089865-0.896656i	1.805686-1.004567i	1.805039-1.005764i	1.877266-0.992666i
	3	2.225551-1.178785i	1.748952-1.422312i	1.744667-1.429977i	1.877266-1.389733i
	4	2.365684-1.425805i	1.682424-1.848063i	1.673940-1.872358i	1.877266-1.786799i
5	0	2.320441-0.197811i	2.299522-0.197987i	2.299632-0.197990i	2.303454-0.198533i
	1	2.383107-0.577827i	2.280148-0.596351i	2.280435-0.596334i	2.303454-0.595600i
	2	2.489073-0.922046i	2.243896-1.000975i	2.243452-1.001539i	2.303454-0.992666i
	3	2.617631-1.227467i	2.194501-1.413578i	2.191346-1.417421i	2.303454-1.389733i
	4	2.755523-1.499196i	2.135336-1.833760i	2.127671-1.846760i	2.303454-1.786799i
	5	2.895770-1.743607i	2.068496-2.259978i	2.056419-2.291184i	2.303454-2.183866i
6	0	2.742745-0.198015i	2.725067-0.198143i	2.725133-0.198144i	2.728374-0.198533i
	1	2.796925-0.582538i	2.708679-0.596133i	2.708854-0.596124i	2.728374-0.595600i
	2	2.892228-0.938905i	2.677457-0.998765i	2.677155-0.999063i	2.728374-0.992666i
	3	3.012627-1.261934i	2.633927-1.407769i	2.631689-1.409875i	2.728374-1.389733i
	4	3.146015-1.553695i	2.580735-1.823481i	2.574746-1.830913i	2.728374-1.786799i
	5	3.284952-1.818644i	2.519958-2.245192i	2.509031-2.263844i	2.728374-2.183866i
	6	3.425244-2.061275i	2.452844-2.671725i	2.437427-2.709646i	2.728374-2.580933i

Tabla B-17: Frecuencias de los QNM del campo electromagnético ($s=1$) alrededor de un agujero negro de AdS-RN-EGB 4D. (con $\alpha = 0.1$, $Q = 0.5$ y $\Lambda = -0.01$).

Q	(WKB 1 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 3 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 6 ^{to} orden) $2M\omega$	(Pöschl–Teller) $2M\omega$
0	1.009396-0.193912i	0.960851-0.194851i	0.962054-0.194880i	0.970688-0.197592i
0.1	1.010947-0.193976i	0.962457-0.194911i	0.963658-0.194941i	0.972277-0.197649i
0.2	1.015674-0.194162i	0.967353-0.195084i	0.968548-0.195120i	0.977121-0.197811i
0.3	1.023801-0.194449i	0.975782-0.195346i	0.976967-0.195390i	0.985461-0.198054i
0.4	1.035747-0.194789i	0.988197-0.195646i	0.989369-0.195703i	0.997745-0.198328i
0.5	1.052199-0.195091i	1.005347-0.195884i	1.006502-0.195958i	1.014716-0.198533i
0.6	1.074270-0.195165i	1.028447-0.195853i	1.029585-0.195950i	1.037583-0.198468i
0.7	1.103827-0.194596i	1.059545-0.195099i	1.060674-0.195227i	1.068403-0.197692i
0.8	1.144278-0.192319i	1.102382-0.192458i	1.103531-0.192624i	1.111002-0.195094i

Tabla B-18: Frecuencias de los QNM del campo electromagnético ($s=1$) en función de Q alrededor de un agujero negro de AdS-RN-EGB 4D. (con $n = 0$, $l = 2$, $\alpha = 0.1$ y $\Lambda = -0.01$).

Λ	(WKB 1 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 3 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 6 ^{to} orden) $2M\omega$	(Pöschl–Teller) $2M\omega$
0	1.012765-0.187770i	0.968334-0.188636i	0.969388-0.188695i	0.976690-0.191083i
-0.01	1.052199-0.195091i	1.005347-0.195884i	1.006502-0.195958i	1.014716-0.198533i
-0.02	1.090234-0.202152i	1.040972-0.202879i	1.042231-0.202969i	1.051391-0.205720i
-0.03	1.127010-0.208981i	1.075347-0.209650i	1.076714-0.209756i	1.086853-0.212670i
-0.04	1.162648-0.215600i	1.108588-0.216222i	1.110070-0.216343i	1.121217-0.219405i
-0.05	1.197249-0.222027i	1.140795-0.222615i	1.142396-0.222748i	1.154581-0.225946i
-0.06	1.230900-0.228278i	1.172052-0.228849i	1.173780-0.228987i	1.187029-0.232308i
-0.07	1.263678-0.234368i	1.202435-0.234937i	1.204293-0.235075i	1.218634-0.238506i
-0.08	1.295649-0.240309i	1.232007-0.240896i	1.234001-0.241023i	1.249461-0.244552i
-0.09	1.326872-0.246111i	1.260826-0.246736i	1.262957-0.246840i	1.279566-0.250457i

Tabla B-19: Frecuencias de los QNM del campo electromagnético ($s=1$) en función de Λ alrededor de un agujero negro de AdS-RN-EGB 4D. (con $n = 0$, $l = 2$, $\alpha = 0.1$ y $Q = 0.5$).

α	(WKB 1 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 3 ^{er} orden) $2M\omega$	(WKB 6 ^{to} orden) $2M\omega$	(Pöschl–Teller) $2M\omega$
0	1.045012-0.199021i	0.996258-0.200335i	0.997216-0.200258i	1.005654-0.202732i
0.1	1.052199-0.195091i	1.005347-0.195884i	1.006502-0.195958i	1.014716-0.198533i
0.2	1.059934-0.190747i	1.015108-0.191042i	1.016393-0.191274i	1.024438-0.193913i
0.3	1.068310-0.185889i	1.025638-0.185708i	1.027006-0.186081i	1.034939-0.188769i
0.4	1.077450-0.180378i	1.037059-0.179733i	1.038485-0.180207i	1.046369-0.182960i
0.5	1.087519-0.174002i	1.049517-0.172898i	1.051000-0.173411i	1.058938-0.176273i
0.6	1.098751-0.166430i	1.063185-0.164855i	1.064740-0.165330i	1.072942-0.168373i
0.7	1.111493-0.157084i	1.078232-0.155030i	1.079872-0.155381i	1.088836-0.158677i

Tabla B-20: Frecuencias de los QNM del campo electromagnético ($s=1$) en función de α alrededor de un agujero negro de AdS-RN-EGB 4D. (con $n = 0$, $l = 2$, $\Lambda = -0.01$ y $Q = 0.5$).

C. Apéndice 3: Introducción a las aplicaciones de los modos cuasinormales de un agujero negro

Es posible usar los resultados encontrados de las frecuencias ω de los QNMs de un AN junto con la aproximación WKB para determinar algunas propiedades de los AN, como bien lo son, el factor de cuerpo gris de un AN o la sombra de los AN. Por ejemplo, considerando el limite eikonal cuando el número multipolar $l \rightarrow \infty$, las perturbaciones a los campos escalares y electromagnéticos están descritos por el mismo potencial V_{eik} , que para espacio-tiempos estáticos y esféricamente simétricos es [11]

$$V_{eik} = f \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (\text{C-225})$$

En donde, la coordenada radial r_0 del máximo del potencial V_{eik} coincide en este caso con $r_0 = r_{ef}$, el radio de la esfera de fotones [11]. Este límite eikonal ya ha sido bien estudiado, incluso en el espacio-tiempo de EGB 4D [13]. Es posible dar con una formula semi-analítica para las frecuencias de los QNMs en el regimen eikonal. Por ejemplo, para perturbaciones escalares y electromagnéticas en el espacio-tiempo de EGB 4D esta formula viene dada por [13]

$$\omega \approx \frac{1}{3\sqrt{3}M} \left(l + \frac{1}{2} - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{\alpha}{81\sqrt{3}M^3} \left(l + \frac{1}{2} + i(2n + 1) \right). \quad (\text{C-226})$$

Es importante tener en cuenta que en la referencia [13], se explica que las propiedades anteriormente descritas en este espacio-tiempo no son validas para las perturbaciones

gravitacionales (en la teoría de la RG si es permitido) [13], pues en este caso los desarrollos son más complicados debido principalmente al formalismo tensorial y a que la teoría de EGB proviene de un modelo gravitacional de dimensiones superiores. De todas formas, a las perturbaciones escalares y electromagnéticas, se les puede asociar varias aplicaciones interesantes sobre esta métrica. En particular en estos casos, la parte real de las frecuencias ω_R de los QNMs en el límite eikonal está relacionado con la velocidad angular Ω_{ef} de la esfera de fotones. Mientras que la parte imaginaria de las frecuencias ω_I está relacionada con el denominado exponente de Lyapunov λ_{ef} , el cual contiene información de la inestabilidad de la órbita [83]. Estas relaciones son claras en la expresión

$$\omega = l\Omega_{ef} - i \left(n + \frac{1}{2} \right) |\lambda_{ef}|. \quad (\text{C-227})$$

Relacionado a esto, el radio de la sombra del AN R_S puede ser encontrado mediante [83]

$$\omega_R = \lim_{l \gg 1} \frac{l}{R_S}. \quad (\text{C-228})$$

Adicionalmente, otra aplicación llamativa es el análisis del factor de cuerpo gris de los AN. Esta cantidad es una característica cuántica de los ANs, el cual si tiene un valor alto indicaría que hay una alta probabilidad de que la radiación de Hawking del AN pueda alcanzar el infinito [123]. Es bien sabido que los ANs, desde un punto de vista cuántico, emiten radiación térmica llamada la radiación de Hawking. Al mismo tiempo, la curvatura del espacio-tiempo alrededor del AN puede interpretarse como un potencial gravitacional, el cual vendría dispersando a la radiación de Hawking haciendo que una parte de esta se refleje de nuevo en el AN, mientras que la otra parte se transmite hacía el infinito. Consecuentemente, la probabilidad de esta transmisión al infinito es lo que se conoce como el factor de cuerpo gris del AN [123]. Ahora bien, usando la aproximación WKB se puede encontrar este factor de cuerpo gris, y además se puede determinar la cantidad de radiación inicial cerca del horizonte del AN que es reflejado hacia él por la barrera de potencial [83].

Como se mostró anteriormente, analizando el comportamiento de las soluciones de las ondas entrantes al AN en la construcción de la función de Green asociada a la ecuación de RW, se puede expresar la forma de las soluciones introduciendo a los coeficientes de transmisión \mathcal{T} y de reflexión \mathcal{R} . Por lo que de la ecuación (3-137), es posible afirmar que estas soluciones tienen un comportamiento asintótico dado por

$$\Psi \sim \begin{cases} e^{i\omega r_*} + \mathcal{R}e^{-i\omega r_*} & \text{cuando } r_* \rightarrow -\infty \\ \mathcal{T}e^{ikr_*} & \text{cuando } r_* \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (\text{C-229})$$

De igual manera a como se expresó en la ecuación (3-139), aquí la probabilidad total de encontrar esta onda en todo el espacio esta dada por

$$|\mathcal{R}|^2 + |\mathcal{T}|^2 = 1. \quad (\text{C-230})$$

Siguiendo los procedimientos mostrados en [83]. Por un lado, el coeficiente de reflexión \mathcal{R} se puede expresar como

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\pi i K}}} \quad (\text{C-231})$$

Donde el valor del parámetro K , en relación con las frecuencias ω de los QNMs y el método de la aproximación WKB a 6to orden, viene dado por

$$K = \frac{i(\omega^2 - V_0)}{\sqrt{-2V_0''}} - \sum_{i=2}^6 \Lambda_i. \quad (\text{C-232})$$

De manera que, el coeficiente de transmisión \mathcal{T} , se puede encontrar fácilmente recurriendo nuevamente a la relación de la ecuación (C-230). En adición, con estos anteriores resultados también se puede estudiar el comportamiento de la sección transversal de absorción del AN [124]. La sección transversal de absorción parcial viene dada por

$$\sigma_l = \frac{\pi}{\omega^2} (2l + 1) |\mathcal{T}|^2. \quad (\text{C-233})$$

Por lo que la sección transversal de absorción total del AN sería

$$\sigma_{abs} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l \quad (\text{C-234})$$

Existen muchas otras aplicaciones del calculo de las frecuencias ω de los QNMs de los ANs, como por ejemplo, la determinación misma de los parámetros de masa M y espín a de los ANs, el análisis de la estabilidad de las soluciones espacio-temporales, las correcciones no lineales sobre la gravedad, el testeo del teorema del no-pelo, entre otros [23]. Indudablemente, una vez obtenidas las frecuencias ω de los QNMs, se pueden estudiar diversas características observacionales de los AN o viceversa. De manera que el estudio los QNMs es una herramienta muy útil para investigar a los ANs y para poner a prueba diversos modelos gravitacionales, comparando los posibles resultados teóricos con las detecciones observacionales que cada vez más se están dando sobre los ANs, como bien lo son la determinación de las sombras de los ANs a partir de las recientes imágenes obtenidas por el *Event Horizon Telescope* [4], o las próximas investigaciones que se puedan dar sobre las ondas gravitacionales producidas por perturbaciones en ANs supermasivos, las cuales podrían llegar a ser detectadas por el interferómetro del proyecto *LISA* [5].

Referencias

- [1] S. Norbert. *General Relativity, Second Edition*. Springer, 2013.
- [2] B. P. Abbott. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, Feb 2016.
- [3] M. Maggiore. *Gravitational Waves, Volume 2: Astrophysics and Cosmology*. Oxford University Press, 2018.
- [4] R. Kumar y S. G. Ghosh. Rotating black holes in 4d einstein-gauss-bonnet gravity and its shadow. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(07):053–053, jul 2020.
- [5] C. Bambi. *Black Holes: A Laboratory for Testing Strong Gravity*. Springer, 2017.
- [6] P. G. S. Fernandes. Charged black holes in ads spaces in 4d einstein gauss-bonnet gravity. *Physics Letters B*, 805:135468, Jun 2020.
- [7] B. Eslam Panah, Kh. Jafarzade y S. H. Hendi. Charged 4d einstein-gauss-bonnet-ads black holes: Shadow, energy emission, deflection angle and heat engine. *Nuclear Physics B*, 961:115269, 2020.
- [8] M. Bousder y M. Bennai. Charged 4d einstein-gauss-bonnet-ads black hole in isobaric process: Thermal conduction, compressibility and bose einstein distribution. *Nuclear Physics B*, 969:115476, 2021.
- [9] M. Bousder, K. El Bourakadi y M. Bennai. Charged 4d einstein-gauss-bonnet black hole: Vacuum solutions, cauchy horizon, thermodynamics. *Physics of the Dark Universe*, 32:100839, May 2021.
- [10] M. S. Churilova. Quasinormal modes of the test fields in the consistent 4d einstein–gauss-bonnet–(anti)de sitter gravity. *Annals of Physics*, 427:168425, 2021.
- [11] S. Devi, R. Roy y S. Chakrabarti. Quasinormal modes and greybody factors of the novel four dimensional gauss–bonnet black holes in asymptotically de sitter space time: scalar, electromagnetic and dirac perturbations. *The European Physical Journal C*, 80(8):760, Aug 2020.
- [12] M. S. Churilova. Quasinormal modes of the test fields in the novel 4d einstein-gauss-bonnet-de sitter gravity, 2020.

- [13] R. A. Konoplya y A. F. Zinhailo. Quasinormal modes, stability and shadows of a black hole in the 4d einstein–gauss–bonnet gravity. *The European Physical Journal C*, 80(11), Nov 2020.
- [14] E. W. Leaver. Quasinormal modes of reissner-nordström black holes. *Phys. Rev. D*, 41:2986–2997, May 1990.
- [15] D. Yoshida y J. Soda. Quasinormal modes of black holes in lovelock gravity. *Physical Review D*, 93(4), Feb 2016.
- [16] B. Wang, C.-Y. Lin y E. Abdalla. Quasinormal modes of reissner-nordström anti-de sitter black holes. *Physics Letters B*, 481(1):79–88, 2000.
- [17] Y. Hatsuda. Quasinormal modes of black holes and borel summation. *Phys. Rev. D*, 101:024008, Jan 2020.
- [18] H. Onozawa. Detailed study of quasinormal frequencies of the kerr black hole. *Physical Review D*, 55(6):3593–3602, Mar 1997.
- [19] H. Onozawa. et al. Quasinormal modes of maximally charged black holes. *Phys. Rev. D*, 53:7033–7040, Jun 1996.
- [20] R. Aros. et al. Quasinormal modes for massless topological black holes. *Phys. Rev. D*, 67:044014, Feb 2003.
- [21] J. Matyjasek y M. Opala. Quasinormal modes of black holes: The improved semi-analytic approach. *Phys. Rev. D*, 96:024011, Jul 2017.
- [22] R. A. Konoplya y A. Zhidenko. Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory. *Rev. Mod. Phys.*, 83:793–836, Jul 2011.
- [23] E. Berti, V. Cardoso y A. O. Starinets. Quasinormal modes of black holes and black branes. *Classical and Quantum Gravity*, 26(16):163001, jul 2009.
- [24] E. Berti. Black hole perturbation theory, 2016.
- [25] R. A. Konoplya. Quasinormal behavior of the d -dimensional schwarzschild black hole and the higher order wkb approach. *Phys. Rev. D*, 68:024018, Jul 2003.
- [26] E. Berti y K. D. Kokkotas. Asymptotic quasinormal modes of reissner-nordström and kerr black holes. *Phys. Rev. D*, 68:044027, Aug 2003.
- [27] E. Berti y K. D. Kokkotas. Quasinormal modes of reissner–nordström–anti-de sitter black holes: Scalar, electromagnetic, and gravitational perturbations. *Phys. Rev. D*, 67:064020, Mar 2003.

- [28] P. Kanjanaphomchom y S. Musiri. Quasinormal modes of the electric potential in the 4 dimensional anti de sitter reissner-norstöm black hole spacetime with scalar hair. *Journal of Physics: Conference Series*, 1719(1):012039, jan 2021.
- [29] L. A. Oliveira, L. C. B. Crispino y A. Higuchi. Scalar radiation from a radially infalling source into a schwarzschild black hole in the framework of quantum field theory. *The European Physical Journal C*, 78(2):133, Feb 2018.
- [30] J. Matyjasek y M. Telecka. Quasinormal modes of black holes. ii. padé summation of the higher-order wkb terms. *Phys. Rev. D*, 100:124006, Dec 2019.
- [31] V. Cardoso, R. Konoplya y J. P. S. Lemos. Quasinormal frequencies of schwarzschild black holes in anti-de sitter spacetimes: A complete study of the overtone asymptotic behavior. *Phys. Rev. D*, 68:044024, Aug 2003.
- [32] S. Hod. Quasinormal spectrum and quantization of charged black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 23(4):L23–L27, feb 2006.
- [33] E. N. Dorband. et al. Numerical study of the quasinormal mode excitation of kerr black holes. *Phys. Rev. D*, 74:084028, Oct 2006.
- [34] M. Giammatteo y I. G. Moss. Gravitational quasinormal modes for kerr anti-de sitter black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 22(9):1803–1824, apr 2005.
- [35] E. Berti y K. D. Kokkotas. Quasinormal modes of kerr-newman black holes: Coupling of electromagnetic and gravitational perturbations. *Phys. Rev. D*, 71:124008, Jun 2005.
- [36] M. S. Churilova. Analytical quasinormal modes of spherically symmetric black holes in the eikonal regime. *The European Physical Journal C*, 79(7):629, Jul 2019.
- [37] A. S. Miranda, J. Morgan y V. T. Zanchin. Quasinormal modes of plane-symmetric black holes according to the AdS/CFT correspondence. *Journal of High Energy Physics*, 2008(11):030–030, nov 2008.
- [38] M. Ghasemi-Nodehi. et al. Shadow, quasinormal modes, and quasiperiodic oscillations of rotating kaluza-klein black holes. *Phys. Rev. D*, 102:104032, Nov 2020.
- [39] A. Rincón y G. Panotopoulos. Quasinormal modes of an improved schwarzschild black hole. *Physics of the Dark Universe*, 30:100639, 2020.
- [40] C. Molina. Quasinormal modes of d-dimensional spherical black holes with a near extreme cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 68:064007, Sep 2003.

- [41] H.-P. Nollert y B. G. Schmidt. Quasinormal modes of schwarzschild black holes: Defined and calculated via laplace transformation. *Phys. Rev. D*, 45:2617–2627, Apr 1992.
- [42] V. Ferrari y B. Mashhoon. New approach to the quasinormal modes of a black hole. *Phys. Rev. D*, 30:295–304, Jul 1984.
- [43] S. Chakrabarti. Quasinormal modes for tensor and vector type perturbation of gauss bonnet black hole using third order wkb approach. *General Relativity and Gravitation*, 39:567–582, 05 2007.
- [44] S. Iyer. Black-hole normal modes: A wkb approach. ii. schwarzschild black holes. *Phys. Rev. D*, 35:3632–3636, Jun 1987.
- [45] S. Iyer y W. M. Clifford. Black-hole normal modes: A wkb approach. i. foundations and application of a higher-order wkb analysis of potential-barrier scattering. *Phys. Rev. D*, 35:3621–3631, Jun 1987.
- [46] H.-P. Nollert. Quasinormal modes of schwarzschild black holes: The determination of quasinormal frequencies with very large imaginary parts. *Phys. Rev. D*, 47:5253–5258, Jun 1993.
- [47] R. A. Konoplya. Decay of a charged scalar field around a black hole: Quasinormal modes of rn, rnads, and dilaton black holes. *Phys. Rev. D*, 66:084007, Oct 2002.
- [48] Y. S. Myung y D.-C. Zou. Quasinormal modes of scalarized black holes in the einstein–maxwell–scalar theory. *Physics Letters B*, 790:400–407, 2019.
- [49] A. Aragón. et al. Quasinormal modes and their anomalous behavior for black holes in f(r) gravity. *The European Physical Journal C*, 81(5), May 2021.
- [50] K. Glampedakis y H. O. Silva. Eikonal quasinormal modes of black holes beyond general relativity. *Phys. Rev. D*, 100:044040, Aug 2019.
- [51] R. A. Konoplya y R. D. B. Fontana. Quasinormal modes of black holes immersed in a strong magnetic field. *Physics Letters B*, 659(1):375–379, 2008.
- [52] K. Lin, J. Li y S. Yang. Quasinormal modes of hayward regular black hole. *International Journal of Theoretical Physics*, 52(10):3771–3778, Oct 2013.
- [53] B. Toshmatov. et al. Quasinormal modes of test fields around regular black holes. *Physical Review D*, 91(8), Apr 2015.

- [54] R. A. Konoplya, A. F. Zinhailo y Z. Stuchlik. Quasinormal modes and hawking radiation of black holes in cubic gravity. *Phys. Rev. D*, 102:044023, Aug 2020.
- [55] M. Richartz. Quasinormal modes of extremal black holes. *Phys. Rev. D*, 93:064062, Mar 2016.
- [56] R. A. Konoplya y A. V. Zhidenko. Stability and quasinormal modes of the massive scalar field around kerr black holes. *Phys. Rev. D*, 73:124040, Jun 2006.
- [57] J. L. Blázquez-Salcedo, F. S. Khoo y J. Kunz. Quasinormal modes of einstein-gauss-bonnet-dilaton black holes. *Phys. Rev. D*, 96:064008, Sep 2017.
- [58] M. Momennia, S. H. Hendi y F. Soltani-Bidgoli. Stability and quasinormal modes of black holes in conformal weyl gravity. *Physics Letters B*, 813:136028, 2021.
- [59] A. Aragón. et al. Perturbative and nonperturbative quasinormal modes of 4d einstein-gauss-bonnet black holes, 2020.
- [60] T.-T. Liu. et al. Double shadow of a 4d einstein–gauss–bonnet black hole and the connection between them with quasinormal modes. *Modern Physics Letters A*, 37(24):2250154, 2022.
- [61] C.-Y. Zhang. et al. Superradiance and stability of the regularized 4d charged einstein-gauss-bonnet black hole. *Journal of High Energy Physics*, 2020(8):105, Aug 2020.
- [62] D. Chen. et al. The correspondence between shadow and test field in a four-dimensional charged Einstein–Gauss–Bonnet black hole. *Eur. Phys. J. C*, 81(8):700, 2021.
- [63] A. K. Mishra. Quasinormal modes and strong cosmic censorship in the regularised 4d einstein–gauss–bonnet gravity. *General Relativity and Gravitation*, 52(11), Nov 2020.
- [64] C. Glavan, D. y Lin. Einstein-gauss-bonnet gravity in four-dimensional spacetime. *Physical Review Letters*, 124(8), Feb 2020.
- [65] M. Gürses, T. Ç. Şişman y B. Tekin. Is there a novel einstein–gauss–bonnet theory in four dimensions? *The European Physical Journal C*, 80(7), jul 2020.
- [66] Metin Gürses, Tahsin Cagri Sisman, and Bayram Tekin. Comment on “einstein-gauss-bonnet gravity in four-dimensional spacetime”. *Phys. Rev. Lett.*, 125:149001, Sep 2020.

- [67] Julio Arrechea, Adrià Delhom, and Alejandro Jiménez-Cano. Comment on “einstein-gauss-bonnet gravity in four-dimensional spacetime”. *Phys. Rev. Lett.*, 125:149002, Sep 2020.
- [68] Pedro G S Fernandes, Pedro Carrilho, Timothy Clifton, and David J Mulryne. The 4d einstein–gauss–bonnet theory of gravity: a review. *Classical and Quantum Gravity*, 39(6):063001, feb 2022.
- [69] Rong-Gen Cai, Li-Ming Cao, and Nobuyoshi Ohta. Black holes in gravity with conformal anomaly and logarithmic term in black hole entropy. *Journal of High Energy Physics*, 2010(4), apr 2010.
- [70] Rong-Gen Cai. Thermodynamics of conformal anomaly corrected black holes in AdS space. *Physics Letters B*, 733:183–189, jun 2014.
- [71] H. Lü and Yi Pang. Horndeski gravity as $d \rightarrow 4$ limit of gauss-bonnet. *Physics Letters B*, 809:135717, oct 2020.
- [72] Robie A. Hennigar, David Kubizňák, Robert B. Mann, and Christopher Pollack. On taking the $d \rightarrow 4$ limit of gauss-bonnet gravity: theory and solutions. *Journal of High Energy Physics*, 2020(7), jul 2020.
- [73] Pedro G. S. Fernandes, Pedro Carrilho, Timothy Clifton, and David J. Mulryne. Derivation of regularized field equations for the einstein-gauss-bonnet theory in four dimensions. *Physical Review D*, 102(2), jul 2020.
- [74] A. Katsuki, M. A. Gorji y S. Mukohyama. A consistent theory of $d \rightarrow 4$ einstein-gauss-bonnet gravity. *Physics Letters B*, 810:135843, nov 2020.
- [75] S. G. Ghosh. et al. Phase transition of ads black holes in 4d egb gravity coupled to nonlinear electrodynamics. *Annals of Physics*, 424:168347, 2021.
- [76] K. Yang. et al. Born–infeld black holes in 4d einstein–gauss–bonnet gravity. *The European Physical Journal C*, 80(7):662, Jul 2020.
- [77] D. G. Boulware y S. Deser. String-generated gravity models. *Phys. Rev. Lett.*, 55:2656–2660, Dec 1985.
- [78] R. A. Konoplya y A. Zhidenko. (in)stability of black holes in the 4d einstein–gauss–bonnet and einstein–lovelock gravities. *Physics of the Dark Universe*, 30:100697, Dec 2020.
- [79] S. G. Ghosh y R. Kumar. Generating black holes in 4d einstein–gauss–bonnet gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 37(24):245008, nov 2020.

- [80] R. A. Konoplya y A. Zhidenko. Black holes in the four-dimensional einstein-lovelock gravity. *Phys. Rev. D*, 101:084038, Apr 2020.
- [81] A. Kumar, D. Baboolal y S. G. Ghosh. Nonsingular black holes in 4d einstein–gauss–bonnet gravity. *Universe*, 8(4):244, apr 2022.
- [82] R. Kumar, S. U. Islam y S. G. Ghosh. Gravitational lensing by charged black hole in regularized 4d einstein–gauss–bonnet gravity. *The European Physical Journal C*, 80(12), Dec 2020.
- [83] K. Jusufi. Nonlinear magnetically charged black holes in 4d einstein–gauss–bonnet gravity. *Annals of Physics*, 421:168285, 2020.
- [84] Y. Tomozawa. Quantum corrections to gravity, 2011.
- [85] G. Cognola. et al. Einstein gravity with gauss-bonnet entropic corrections. *Physical Review D*, 88(2), jul 2013.
- [86] A. Kumar, R. Kumar y S. G. Ghosh. Bardeen black holes in the regularized 4d einstein–gauss–bonnet gravity. *Universe*, 8(4):232, apr 2022.
- [87] R.-G. Cai. Gauss-bonnet black holes in ads spaces. *Phys. Rev. D*, 65:084014, Mar 2002.
- [88] T. Liko y I. Booth. Isolated horizons in higher dimensional einstein–gauss–bonnet gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 24(14):3769–3782, jul 2007.
- [89] D. V. Singh y S. Siwach. Thermodynamics and p-v criticality of bardeen-ads black hole in 4d einstein-gauss-bonnet gravity. *Physics Letters B*, 808:135658, 2020.
- [90] B. F. Schutz y M. W. Clifford. Black hole normal modes - a semianalytic approach. *The Astrophysical Journal*, 291, 1985.
- [91] S. Carroll. *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity; International ed.* Pearson Education, Essex, Aug 2013.
- [92] K. Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 189–196, January 1916.
- [93] H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen der Physik*, 355(9):106–120, January 1916.

- [94] G. Nordström. On the Energy of the Gravitation field in Einstein's Theory. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, 20:1238–1245, January 1918.
- [95] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley, New York, NY, 1972.
- [96] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973.
- [97] W. de Sitter. Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. Third paper. *mnras*, 78:3–28, November 1917.
- [98] D. Kubizňák y F. Simovic. Thermodynamics of horizons: de sitter black holes and reentrant phase transitions. *Classical and Quantum Gravity*, 33(24):245001, nov 2016.
- [99] J. Maldacena. The large-n limit of superconformal field theories and supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4):1113–1133, Apr 1999.
- [100] J. Sorce. Holographic entanglement entropy is cutoff-covariant. *Journal of High Energy Physics*, 2019(10), oct 2019.
- [101] M. Rangamani y T. Takayanagi. *Holographic Entanglement Entropy*. Springer International Publishing, 2017.
- [102] D. Lovelock. The einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(3):498–501, 1971.
- [103] B. Zwiebach. Curvature squared terms and string theories. *Physics Letters B*, 156(5):315–317, 1985.
- [104] T. Padmanabhan. *Gravitation: Foundations and Frontiers*. Cambridge University Press, 2010.
- [105] A. Mukhopadhyay y T. Padmanabhan. Holography of gravitational action functionals. *Phys. Rev. D*, 74:124023, Dec 2006.
- [106] S. Kolekar y T. Padmanabhan. Holography in action. *Phys. Rev. D*, 82:024036, Jul 2010.
- [107] E. Howard. Geometric aspects of extremal kerr black hole entropy. *Journal of Modern Physics*, 04(03):357–363, 2013.

- [108] J. Percival. Classical and quantum bosonic fields on the spacetimes of black holes and stars. PhD thesis, University of Sheffield, January 2022.
- [109] S. W. Hawking. Black hole explosions? *Nature*, 248(5443):30–31, Mar 1974.
- [110] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, 43(3):199–220, Aug 1975.
- [111] R. A. Breuer. et al. Geodesic synchrotron radiation. *Phys. Rev. D*, 8:4309–4319, Dec 1973.
- [112] G. E. Harmsen. Quasi-normal modes for spin-3/2 fields. *Journal of Physics: Conference Series*, 645(1):012003, sep 2015.
- [113] W. H. Press. Long Wave Trains of Gravitational Waves from a Vibrating Black Hole. *apjl*, 170:L105, December 1971.
- [114] C. Bender y S. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*, volume 1. Springer, 01 1999.
- [115] R. A. Konoplya, A. Zhidenko y A. F. Zinhailo. Higher order WKB formula for quasi-normal modes and grey-body factors: recipes for quick and accurate calculations. *Classical and Quantum Gravity*, 36(15):155002, jul 2019.
- [116] A. Jansen. Overdamped modes in schwarzschild-de sitter and a mathematica package for the numerical computation of quasinormal modes, 2017.
- [117] A. Övgün, I. Sakallı y H. Mutuk. Quasinormal modes of ds and ads black holes: Feedforward neural network method. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 18(10):2150154, 2021.
- [118] L. E. Simone y C. M. Will. Massive scalar quasi-normal modes of schwarzschild and kerr black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 9(4):963, apr 1992.
- [119] A. Ohashi y M.-A. Sakagami. Massive quasi-normal mode. *Classical and Quantum Gravity*, 21(16):3973, aug 2004.
- [120] S. Fernando y J. Correa. Quasinormal modes of the bardeen black hole: Scalar perturbations. *Phys. Rev. D*, 86:064039, Sep 2012.
- [121] E. Berti. Ringdown. <https://pages.jh.edu/eberti2/ringdown/>, 2022.
- [122] G. Panotopoulos y A. Rincón. Quasinormal modes of black holes in einstein-power-maxwell theory. *International Journal of Modern Physics D*, 27(03):1850034, feb 2018.

-
- [123] P. Boonserm, T. Ngampitipan y P. Wongjun. Greybody factor for black holes in drgt massive gravity. *The European Physical Journal C*, 78(6):492, Jun 2018.
- [124] C. D. Haroldo. et al. 4d einstein-gauss-bonnet gravity: Massless particles and absorption of planar spin-0 waves. *Physics Letters B*, 811:135921, 2020.