



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Distribución Bivariada Birnbbaum-Saunders Unitaria

Luisa Paulina Rodríguez Quevedo

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá, Colombia
2022

Distribución Bivariada Birnbaum-Saunders Unitaria

Luisa Paulina Rodríguez Quevedo

Proyecto de tesis presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Estadística

Director(a):

Ph.D. Sandra Vergara Cardozo

Co-Director(a):

Ph.D. Guillermo Martínez Flórez

Línea de Investigación:

Profundización

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística

Bogotá, Colombia

2022

Declaración de obra original

Yo declaro lo siguiente:

He leído el Acuerdo 035 de 2003 del Consejo Académico de la Universidad Nacional.

«Reglamento sobre propiedad intelectual» y la Normatividad Nacional relacionada al respeto de los derechos de autor. Esta disertación representa mi trabajo original, excepto donde he reconocido las ideas, las palabras, o materiales de otros autores.

Cuando se han presentado ideas o palabras de otros autores en esta disertación, he realizado su respectivo reconocimiento aplicando correctamente los esquemas de citas y referencias bibliográficas en el estilo requerido.

He obtenido el permiso del autor o editor para incluir cualquier material con derechos de autor (por ejemplo, tablas, figuras, instrumentos de encuesta o grandes porciones de texto). Por último, he sometido esta disertación a la herramienta de integridad académica, definida por la universidad.



(Luisa Paulina Rodríguez Quevedo)

Bogotá, D.C., 02.12.2022

Resumen

Distribución Bivariada Birnbaum-Saunders Unitaria

La distribución Unitaria Birnbaum Saunders (UBS), [Mazucheli et al., 2018a], tiene soporte en el intervalo $(0,1)$, motivo por el cual se emplea con éxito en el modelamiento de tasas e indicadores. Se presentan dos nuevas distribuciones bivariadas, la distribución Bivariada Birnbaum Saunders Unitaria (BVUBS) y la distribución Bivariada Sinh-Normal Birnbaum Saunders Unitaria (BVUSHN), además como efecto natural el modelo de regresión para el caso de covariables en el modelo, empleando para ello el concepto de distribuciones condicionalmente especificadas, dichas distribuciones son capaces de modelar tasas y proporciones en el plano unidad, y presentan un mejor ajuste a datos comparadas con otras distribuciones. Igualmente, se presentan algunas propiedades generales de los modelos, valores esperados e inferencia por máxima verosimilitud y aplicación a datos reales. Conjuntamente al presente trabajo de maestría se publica el artículo *The Multivariate Skewed Log-Birnbaum-Saunders Distribution and Its Associated Regression Model*, [Martínez-Flórez et al., 2023], el cual se enfocó en la extensión multivariada de la distribución Sinh-Normal Unitaria, estudiando en detalle las propiedades de la distribución e inferencia estadística, se incluye un estudio de simulación asociado al modelo de regresión y dos aplicaciones con datos reales, logrando concluir que son potencialmente útiles para modelar datos de proporciones, tasas o índices.

Palabras clave: (Distribución Bivariada Birnbaum Saunders unitaria; condicionalmente especificada; modelo de regresión multivariado; Distribución Sinh-Normal Unitaria; distribución log-Birnbaum Saunders multivariada; datos acotados).

Abstract

Bivariate unit-Birnbaum-Saunders distribution

The unit-Birnbaum-Saunders distribution (UBS), [Mazucheli et al., 2018a], has support in the interval $(0,1)$, which is why it is used successfully in the modeling of rates and indicators. Two new bivariate distributions are presented, the Bivariate Unit-Birnbaum-Saunders distribution (BVUBS) and the Bivariate Unit-Sinh-Normal Birnbaum Saunders distribution (BVUSHN), as well as the natural effect the regression model for the case of covariates in the model, using the concept of conditionally specified distributions, these distributions are capable of modeling rates and proportions in the unit plane, and present a better fit to data compared to other distributions. Likewise, some general properties of the models, expected values and inference by maximum likelihood and application to real data are presented. The

article *The Multivariate Skewed Log-Birnbaum–Saunders Distribution and Its Associated Regression Model*, [Martínez-Flórez et al., 2023], which focused on the multivariate extension of the Unit-Sinh-Normal Distribution, is published together with this master’s thesis, studying in detail the properties of the distribution and statistical inference, a simulation study associated with the regression model and two applications with real data are included. We conclude that they are potentially useful for modeling ratio, rate or index data.

Keywords: (Bivariate unit-Birnbaum-Saunders distribution; conditionally specified; multivariate regression model; unit-sinh-normal distribution; multivariate log-Birnbaum Saunders distribution; bounded data).

Dedicatoria

A Dios, a mis padres, mis directores y a quienes me apoyaron en este camino.

La preocupación por el hombre y su destino siempre debe ser el interés primordial de todo esfuerzo técnico. Nunca olvides esto entre tus diagramas y ecuaciones.

Albert Einstein

Índice general

Lista de figuras	xI
Lista de tablas	xI
1 Introducción	2
2 Revisión de Literatura	4
3 Marco Teórico	7
3.1 Distribución Birnbaum Saunders	7
3.1.1 Propiedades distribución BS	8
3.1.2 Estimación por Máxima Verosimilitud	10
3.2 Distribución Birnbaum Saunders Unitaria (UBS)	10
3.2.1 Propiedades de la distribución UBS	12
3.2.2 Estimación máxima verosimilitud	13
3.3 Distribución Sinh-Normal y modelo log-Birnbaum Saunders	14
3.4 Modelo de regresión Log-Birnbaum Saunders	15
3.5 Distribución Birnbaum Saunders Bivariada (BVBS)	18
3.5.1 Distribuciones condicionalmente especificadas	19
3.5.2 Distribución Birnbaum Saunders Bivariada	20
3.5.3 Distribución Birnbaum Saunders Multivariada (MVBS)	22
3.5.4 Propiedades del modelo MVBS	23
3.6 Función de densidad de probabilidad asimétrica Sinh-Normal Multivariada .	24
3.7 Modelo de regresión log-Birnbaum Saunders Multivariado y modelo de regre-	
sión asimétrico log-Birnbaum Saunders Multivariado	25
3.7.1 Modelo de regresión log-Birnbaum Saunders Multivariado	26
3.7.2 Modelo de regresión asimétrico Birnbaum Saunders	28
3.7.3 Estimación	28
4 Metodología	31
5 Resultados	32
5.1 Distribución Bivariada Birnbaum Saunders Unitaria	32
5.1.1 Propiedades	33
5.1.2 Media y varianza de la distribución BVUBS	36

5.1.3	Estimación e inferencia	36
5.1.4	Matriz de varianza-covarianza de modelo bivariado	39
5.2	Distribución Bivariada Sinh-normal Birnbaum Saunders Unitaria	43
5.2.1	Propiedades de la distribución BVUSHN	45
5.2.2	Momentos, covarianza y correlación de la distribución	48
5.3	Extensión del modelo de regresión USHN al caso bivariado	49
5.3.1	Estimación por máxima verosimilitud y matriz de información	51
5.3.2	Estudio de simulación del modelo de regresión	55
5.4	Aplicaciones	57
5.4.1	Aplicación a datos reales “ <i>driving</i> ”	57
5.4.2	Aplicación a datos reales (PNUD)	59
6	Discusión	62
7	Conclusiones	63
	Bibliografía	64

Lista de Figuras

3-1	Función de densidad Birnbaum Saunders	8
3-2	Función de densidad Birnbaum Saunders Unitaria	12
3-3	Distribución Sinh-Normal	15
3-4	Distribución USHN	17
3-5	Gráfico de densidad y contorno $BVBS(0,5, 0,5, 1, 1, 0,5)$	22
5-1	Densidades y gráficos de contorno de izquierda a derecha $BVUBS(0,5, 0,5, 1, 1, 0,5)$ y $BVUBS(0,2, 0,4, 1, 1, -1)$	34
5-3	Densidad y gráfico de contorno de $BVUBS(0.85,0.45,1,1,-15)$	35
5-2	Densidad y gráfico de contorno de $BVUBS(0.8,0.2,1,1,-1.2)$	35
5-4	Gráfica y contorno de la distribución $BVUSHN(0.6,1.2,1,1,0,0,1.5)$	45
5-5	Gráfica y contorno de la distribución $BVUSHN(1.25,1.5,1,1,0,0,-0.75)$	45
5-6	Gráfico de dispersión (y_1): “unem” y (y_2): “perc1424”	57
5-7	Graficos de contornos para los modelos ajustados. (a) VBJSB, (b) VBBeta y (c) BVUSHN.	59
5-8	Graficos de envolventes para las marginales y contorno del modelo ajustado. (a) W_1 , (b) W_2 and (c) BVUSHN.	61

Lista de Tablas

5-1	Coeficiente de correlación BVUSHN	49
5-2	Coeficiente de correlación BVUSHN	50
5-3	Tabla resultados simulación para el modelo de regresión MVSUSHN	56
5-4	Máxima verosimilitud de BVBeta, BVSJB y BVUSHN.	58

1 Introducción

Modelar datos cuando la variable objetivo es índice o tasa cobra importancia en distintas áreas de estudio, por ejemplo, cuando se busca predecir el índice de calidad de un producto electrónico, analizar tasas de mortalidad o índices de desempleo, entre otros. La distribución Beta y sus extensiones son usualmente aplicadas en el modelamiento, pues aportan flexibilidad y permiten predecir valores en el intervalo $(0,1)$, como se evidencia en [Cook et al., 2008] o [Gupta and Nadarajah, 2004], sin embargo, múltiples investigaciones se han interesado en alternativas a esta distribución, así como, la distribución Kumaraswamy, [Kumaraswamy, 1980], distribución potencia-Normal Unitaria (PSN) [Martínez-Flórez et al., 2015], distribución Birnbaum-Saunders Unitaria (UBS) en [Mazucheli et al., 2018a] y distribución Weibull Unitaria [Mazucheli et al., 2018b].

Destaca la distribución UBS pues permite modelar conjuntos de datos con asimetría positiva en el intervalo unitario además todas las variables aleatorias que siguen la misma distribución son transformaciones de una variable aleatoria que sigue la distribución normal estándar y presenta propiedades de forma cerrada. No obstante, en la literatura aún no se observa extensiones para el caso bivariado y multivariado de la distribución UBS, por tanto es de interés estudiar fenómenos de incertidumbre con respuestas observadas (dos variables) que están limitadas al plano unitario, extendiendo así la distribución al caso bivariado.

Igualmente se busca extender el modelo de regresión basado en la distribución UBS, los modelos de regresión se han utilizado para evaluar los efectos de las variables ambientales y para comparar parámetros de localización de varias poblaciones, algunas herramientas de diagnóstico implementadas para el modelo de regresión Birnbaum Saunders son presentadas en [Galea et al., 2004], [Xie and Wei, 2007] y [Farias and Lemonte, 2011].

Cabe notar que tomando como dominio \mathbb{R}^n , existen extensiones multivariadas como la distribución Birnbaum Saunders Bivariada (BVBS) de [Kundu et al., 2010], la distribución Birnbaum Saunders Multivariada (MVBS) en [Lemonte et al., 2015b] basado en el artículo de [Arnold et al., 2002], el modelo de regresión Birnbaum Saunders Multivariado en [Lemonte, 2013] y la generalización del modelo de regresión en [Rieck and Nedelman, 1991]. Así mismo, en [Martínez-Flórez et al., 2017] presentan la extensión de dos modelos asimétricos, distribución asimétrica Sinh-Normal Multivariada (SMVSHN), basados en los trabajos de [Díaz-García and Domínguez-Molina, 2006] que definen la distribución Sinh-Normal (SHN) Multivariada. [Lemonte, 2013], [Lemonte et al., 2015b], [Martínez-Flórez et al., 2017] y [Martínez-Flórez and Tovar-Falón, 2021], estudiaron extensiones multivariadas de importancia para el desarrollo del presente trabajo.

En busca de extender la distribución UBS y el modelo de regresión el siguiente trabajo estudiará características de la función de densidad conjunta, función de distribución acumulada conjunta, funciones marginales, condicionales, momentos, matrices de varianza-covarianza y coeficientes de correlación de la distribución bivariada. Con el modelo propuesto se llevará a cabo el proceso de inferencia estadística, partiendo de la estimación de sus parámetros desde un punto de vista clásico usando el método de máxima verosimilitud, se encontrarán las funciones score y las matrices de información (o de Fisher) del modelo. De igual manera, se busca extender el modelo de regresión de la distribución Sin-Normal Unitaria al caso multivariado, posteriormente, se presentará el modelo bivariado con aplicaciones a datos reales.

Cabe destacar que simultáneamente al presente trabajo de maestría y en colaboración con los directores de tesis y el profesor Roger Tovar se elaboró el artículo, *The Multivariate Skewed Log-Birnbaum-Saunders Distribution and Its Associated Regression Model*, [Martínez-Flórez et al., 2023], enfocado en la definición y presentación de la extensión multivariada de la distribución Sin-Normal Unitaria (USHN) y el modelo de regresión asociado, publicado el 22 de febrero de 2023, donde se presenta la distribución multivariada sesgada mostrando que es potencialmente útil para modelar datos de proporciones, tasas o índices, se detalla propiedades de la distribución e inferencia estadística mediante máxima verosimilitud, incluyendo un estudio de simulación asociado al modelo de regresión y aplicaciones a datos reales.

2 Revisión de Literatura

La distribución Birnbaum Saunders (BS) surge como solución al problema de desgaste de materiales ampliamente usada en teoría de confiabilidad, esta área se enfoca en el desarrollo estadístico de las distribuciones de vida en artículos o componentes que pueden sufrir algún tipo de falla mediante el estudio del comportamiento de función de sobrevivencia, tasas de falla o riesgo y la vida media de los artículos.

Las distribuciones de vida son modelos probabilísticos multiparamétricos, que usualmente presentan algún tipo de sesgo, razón por la cual la distribución normal es inadecuada para esta labor, por ello, se realizaron pruebas de bondad de ajuste empleando la distribución exponencial que tiene como característica tasa de falla constante y desarrollo algebraico manejable comparada con otras distribuciones, sin embargo, no es viable en algunos problemas de envejecimiento de componentes respecto del tiempo, [Davis, 1952]. [Bartlett and Kendall, 1946] estudiaron la distribución Log-Gamma, notemos que un camino natural a partir de la distribución exponencial es usar la distribución Gamma, la cual es mucho más flexible, pero difícil de tratar algebraicamente. Actualmente aún hay muchos artículos que relacionan la distribución Gamma o variaciones de ella para ajustar modelos de vida. Como alternativa, en [Barlow and Proschan, 1965] se desarrolla distribuciones normales truncadas para el problema de sesgo.

La distribución Weibull empleada para medir rupturas de material es mucho más robusta que la distribución exponencial y con mayor flexibilidad como se observa en [Lieblein, 1956] y [Kao, 1959]; [Zelen and Dannemiller, 1961] abordan la utilidad de la distribución Weibull cuando la distribución exponencial es inadecuada.

Como solución al problema de desgaste en los materiales de los aviones comerciales causadas por vibración constante, se postula un nuevo modelo para describir la vida útil considerando las muestras de material expuestas a fatiga después de ciclos de tensión y estrés. La distribución resultante de este análisis es la distribución BS, y su creación se puede resumir en los siguientes tres artículos. Primero, [Birnbaum et al., 1966], desarrolla un modelo estocástico como producto del desgaste de material, segundo [Birnbaum and Saunders, 1969] a partir de la regla de Miner y basado en los problemas de fatiga se origina y se construye el modelo BS, a su vez [Freudenthal and Shinozuka, 1961] presenta un modelo bastante similar con distinta parametrización. El tercer artículo [Esary and Marshall, 1973], extiende los resultados a procesos de desgaste continuo.

[Desmond, 1985] presenta una generalización de la distribución BS, [Dupuis and Mills, 1998] y [Owen and Padgett, 1999] buscaron generar un modelo más robusto. Distribuciones alter-

nativas a las enunciadas Gamma, Weibull o BS son la distribución Log-Normal empleada para el análisis de tiempo de vida de sistemas [Nelson and Hahn, 1972] y la inversa Gaussiana [Chhikara and Folks, 1977].

Retomando con la distribución BS en el periodo de 2000 a 2010, una vez establecido el modelo, el interés radicó en proponer variaciones a la distribución, allí aparecen trabajos como [Volodin and Dzhungurova, 2000], [Díaz and Leiva, 2005] que generalizan la distribución y especifican propiedades del modelo. En [Leiva et al., 2008] se propuso un modelo de tres parámetros y en el artículo [Leiva et al., 2006] los autores construyeron una distribución BS considerando la distribución normal asimétrica. Posteriormente, [Guiraud et al., 2009] desarrolló una versión no centrada, y [Ahmed et al., 2010] analizó la distribución truncada BS.

En el tercer periodo comprendido entre el año 2010 al presente, buena parte de la investigación se ha centrado en el desarrollo práctico del modelo implementado en áreas como la biología, economía y neurología, por ejemplo en [Garcia et al., 2017] que describen el modelado espacial para la distribución, [Bebbington et al., 2008] y más recientemente [Athayde, 2017] en análisis de riesgo.

A continuación, se describe la revisión de literatura en varias variables que es un tema de suma importancia para el desarrollo del proyecto. La distribución Birnbaum Saunders Bivariada (BVBS), fue propuesta por [Kundu et al., 2010] allí el autor hace un breve recuento sobre la distribución BS y enfatiza en la BVBS, una nueva familia de cinco parámetros, halla estimadores de máxima verosimilitud, propone estimadores de momentos y construye intervalos de confianza para los parámetros, [Vilca et al., 2014] construye una extensión robusta de la distribución BVBS basado en Mixtura de Escala Normal cuyas sigla en inglés es (SMN), siendo luego generalizado al caso multivariado por [Kundu et al., 2013] quienes usaron distribuciones elípticas simétricas multivariadas y enfatizaron en inferencia estadística. [Lemonte et al., 2015b] propone una interesante extensión sobre la distribución bivariada y sus propiedades, y extienden el resultado anterior generando una nueva distribución Birnbaum Saunders multivariada (MVBS) cuyas marginales son BS, además incorporan la distribución Birnbaum Saunders Generalizada (GBS) y algunas propiedades, en este artículo también se ilustra con dos aplicaciones a datos reales la implementación de las distribuciones y la ventaja de usar la distribución BVBS y MVBS, tomando como base [Arnold et al., 2002].

El origen de la distribución univariada Sinh-Normal (SHN) planteada por [Rieck and Nedelman, 1991], hace referencia a un modelo simétrico, triparamétrico construido a partir de la distribución BS, también conocida como distribución Log-Birnbaum Saunders (LBS). Herramientas de diagnóstico para el modelo de regresión BS pueden ser consultadas en [Rieck and Nedelman, 1991], [Galea et al., 2004], [Xie and Wei, 2007] así como en [Farias and Lemonte, 2011]. Basado en una variable aleatoria que se distribuye Normal Asimétrica (SN) desarrollada en [Azzalini, 1985], se define la distribución log-asimétrica-Birnbaum Saunders (SSN) en [Leiva et al., 2010] como extensión de la distribución SHN, Estudios como [Díaz-García and Domínguez-Molina, 2006]) tratan la versión multivariada de la distribución SHN. Mas

tarde en [Lemonte, 2013] el modelo de regresión Multivariado para la distribución BS, generaliza los estudios de [Rieck and Nedelman, 1991]. La distribución asimétrica Sinh-Normal Multivariada (SMVSHN) y el modelo asimétrico de regresión log-Birnbaum Saunders Multivariado cuyos parámetros son estimados por máxima verosimilitud, desarrolla la matriz de información de Fisher, además realiza una aplicación a datos reales. El modelo tiene varias aplicaciones, por ejemplo para evaluar los efectos de las variables ambientales y para comparar parámetros de localización de varias poblaciones, en [Martínez-Flórez et al., 2017]. Una nueva distribución de dos parámetros con soporte en el intervalo $(0,1)$ es definida como la distribución UBS, la cual es útil para modelar datos asimétricos y funciona para modelar tasas de riesgo tipo bañera, convirtiéndola en un modelo bastante flexible. De igual forma se compara bastante bien con otras distribuciones de tiempo de vida, como lo son las distribuciones Beta y Kumaraswamy. Presentan el modelo, la estimación por máxima verosimilitud, momentos y simulaciones Monte Carlo que permiten evaluar el desempeño de los estimadores de máxima verosimilitud y de momentos para los parámetros de la distribución, [Mazucheli et al., 2018a].

Por último, [Martínez-Flórez and Tovar-Falón, 2021] construye una extensión de la distribución SHN, con soporte en el intervalo $(0,1)$, denominada distribución Sinh-Normal Unitario (USHN) junto con el modelo de regresión Log Sinh-Normal Unitario (LUSHN), presentan la inferencia estadística y la aplicación del modelo en datos reales, evidenciándose que la distribución se ajusta mejor a los datos.

La presente revisión literaria es la recopilación de diferentes artículos, pero particularmente en [Lemonte et al., 2015a], [Lemonte et al., 2015b] y [Martínez-Flórez et al., 2017], [Martínez-Flórez and Tovar-Falón, 2021], quienes hacen un recuento de la historia de la distribución BS, sus generalizaciones y extensiones hasta nuestros días.

3 Marco Teórico

La distribución Binbaum Saunders (BS) es asimétrica y sus diferentes transformaciones han mostrado buenos resultados cuando se trata de modelar tasas y proporciones pues reflejan mayor bondad de ajuste comparada con otras distribuciones. Para el desarrollo del presente trabajo es de suma importancia hacer un recorrido por las distribución Birnbaum Saunders, Birnbaum Saunders Unitaria, el modelo Sinh-Normal y el modelo de regresión junto con sus respectivas propiedades.

3.1. Distribución Birnbaum Saunders

Birnbaum y Saunders consideraron materiales sujetos a tensiones de carga, y desarrollaron el modelo asimétrico BS que está relacionado a la distribución normal. De acuerdo al artículo [Birnbaum and Saunders, 1969], sea *ciclo* el periodo de tiempo en que una muestra de material es expuesta a una sucesión de cargas y en cada *ciclo* se aplica la misma sucesión de cargas, luego para n ciclos el tamaño total de la grieta es $W_n = \sum_{j=1}^n Y_j$. Donde cada Y_j son variables aleatorias no negativas i.i.d con varianza σ^2 y media μ , que representan la extensión total de la grieta, y la función de probabilidad que describe la falla del material hasta llegar al umbral w , se define H_n

$$H_n(w) = Pr[W_n \leq w], \quad n = 1, 2, \dots$$

Luego, si C se define como el número de ciclos hasta la falla, y empleando el Teorema de Límite Central, obtenemos la distribución de C , como sigue

$$Pr[C \leq n] = 1 - H_n(w) = 1 - Pr(W_n \leq w) = 1 - Pr\left[\sum_{j=1}^n \frac{Y_j - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{w - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right],$$
$$Pr[C \leq n] = 1 - \Phi\left[\frac{w - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] = \Phi\left[\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{w}{\sigma\sqrt{n}}\right].$$

Cambiando la variable discreta C a una variable aleatoria no negativa continua T y definiendo α , β y t mayores a cero, se obtiene la función de distribución acumulada descrita en 3-1,

$$F_T(t) = \Phi[\alpha^{-1}\xi(t/\beta)]. \tag{3-1}$$

donde, $\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{\mu w}}$, $\beta = \frac{w}{\mu}$ y $\xi(t) = t^{1/2} - t^{-1/2}$, la ecuación 3-1 corresponde a la distribución acumulada BS de parámetros α y β , en 3-2 se define la función de densidad.

Nota: Para establecer la distribución, existe el supuesto sobre crecimiento de grietas el cual es independiente del crecimiento durante cualquier otro ciclo, este supuesto es consistente con la regla de Miner, desarrollada en [Miner, 1945].

Definición 3.1.1 (Distribución Birnbaum Saunders).

Sea T variable aleatoria como en 3-1, con parámetros $\alpha, \beta > 0$, decimos que $T \sim BS(\alpha, \beta)$ y su función de densidad de probabilidad, para $t > 0$ es

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2\right]\right) \frac{t^{-3/2}[t + \beta]}{2\alpha\sqrt{\beta}}. \quad (3-2)$$

En la figura 3-1 podemos observar el comportamiento de la función de distribución $BS(\alpha, \beta)$, la elevación pronunciada evidencia una distribución unimodal con presencia de sesgo a la derecha, además se observa simetría conforme α disminuye, en general, el parámetro α altera sesgo y curtosis de la distribución y el parámetro β corresponde al parámetro de escala.

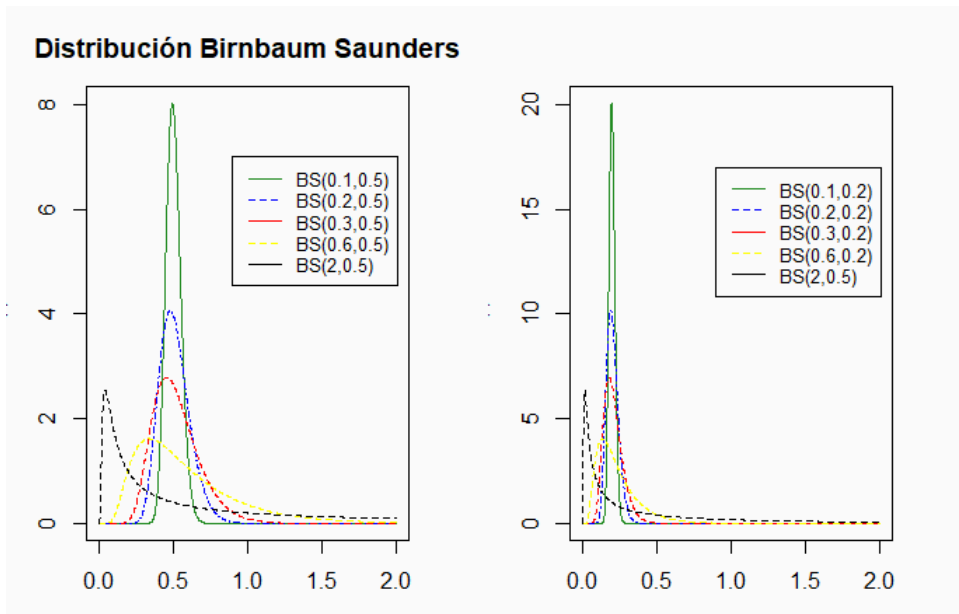


Figura 3-1: Función de densidad Birnbaum Saunders

3.1.1. Propiedades distribución BS

Proposición 1.

La distribución BS cumple las siguientes propiedades:

1. $\frac{1}{\alpha}\xi(T/\beta) \sim N(0, 1)$.

2. Sea $X \sim N(0, \frac{1}{4}\alpha^2)$, entonces $2X$ y $\xi(T/\beta)$ se distribuyen $N(0, \alpha^2)$.

3. Una expresión de Z en términos de α y β es

$$Z = \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{T}{\beta} \right)^{1/2} - \left(\frac{T}{\beta} \right)^{-1/2} \right] \quad y \quad T = \beta \left[\frac{\alpha Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha Z}{2} \right)^2 + 1} \right]^2. \quad (3-3)$$

Note que 3-3 se puede reescribir en términos de la función ψ , donde $T = \beta\psi$, $\psi = [\rho(x)^2]$ y $\rho(x) = x + (x^2 + 1)^{1/2}$, por lo que T también se puede expresar en términos de X

$$T = \beta[1 + 2X^2 + 2X(1 + X^2)^{1/2}].$$

Las funciones de sobrevivencia y tasas de riesgo son frecuentemente utilizadas en el análisis de vida, en base a [Leiva et al., 2011], se formula dichas funciones.

Proposición 2 (Funciones de sobrevivencia).

Las funciones de sobrevivencia S y tasa de riesgo H donde $T \sim BS(\alpha, \beta)$, son respectivamente

$$1. S_T(t) = 1 - F_t(t) = \Phi\left(\frac{-1}{\alpha}\xi\left(\frac{t}{\beta}\right)\right), \quad t > 0,$$

$$2. H_T(t) = \frac{f_T(t)}{R_T(t)} = \frac{\phi\left(\frac{1}{\alpha}\xi\left(\frac{t}{\beta}\right)\frac{1}{\alpha}\xi'\left(\frac{t}{\beta}\right)\right)}{\Phi\left(\frac{-1}{\alpha}\xi\left(\frac{t}{\beta}\right)\right)}, \quad t > 0.$$

En cuanto al cálculo de los momentos de la variable aleatoria T se obtiene empleando la ecuación 3.1.1 y el teorema del binomio, para más detalles ver [Leiva, 2016].

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{T}{\beta} \right)^r \right] = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\alpha Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha Z}{2} \right)^2 + 1} \right)^{2r} \right].$$

La ecuación 3.1.1 describe los momentos de la distribución Birnbaum Saunders, permitiendo hallar media y varianza.

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{T}{\beta} \right)^r \right] = \sum_{j=0}^r \binom{2r}{2j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{2(r-j+k)!}{2^{r-j+k}(r-j+k)!} \frac{\alpha^{2(r-j+k)}}{2}.$$

considerando 3.1.1 y haciendo uso de la igualdad $\text{Var}(T) = \mathbb{E}(T^2) - (\mathbb{E}(T))^2$, se obtienen las siguientes igualdades

$$\mathbb{E}(T) = \beta \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \quad (3-4)$$

$$\mathbb{E}(T^2) = \beta^2 \left(\frac{3}{2}\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 \right) \quad (3-5)$$

$$\text{Var}(T) = \beta^2 \alpha^2 \left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2 \right) \quad (3-6)$$

3.1.2. Estimación por Máxima Verosimilitud

La estimación de parámetros se calculará mediante el modelo de máxima verosimilitud el cual permite estimar los parámetros α , y β dependiendo de las observaciones de la muestra. Sea x_1, x_2, \dots, x_n datos observados y sea X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias de tamaño n de tal modo que $T \sim BS(\alpha, \beta)$. La función de log-verosimilitud para los parámetros α y β es

$$l((\alpha, \beta)) \cong \frac{n}{\alpha^2} - n \log(\alpha) - \frac{n}{2} \log(\beta) + \sum_{i=1}^n \left\{ \log(x_i + \beta) - \frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{x_i}{\beta} + \frac{\beta}{x_i} \right] \right\}.$$

Derivando con respecto a α y β , e igualando a cero obtenemos las ecuaciones

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{x_i}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{x_i} - 2 \right\},$$

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{2\hat{\alpha}^2 \hat{\beta}}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{x_i + \hat{\beta}} \right\} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{x_i}{\hat{\beta}} - \frac{\hat{\beta}}{x_i} \right\}.$$

Considerando la función $K(x) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x+x_i)}}$ para $x > 0$, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad y \quad r = \frac{1}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right]}.$$

Luego, los estimadores de los parámetros se resuelven numéricamente utilizando métodos numéricos como Newton-Raphson.

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{s}{\hat{\beta}} - \frac{\hat{\beta}}{r} + \frac{2\hat{\alpha}^2 \hat{\beta}}{K(\hat{\beta})} \quad y \quad \frac{\hat{\beta}}{r} = 1 + \frac{\hat{\alpha}^2 \hat{\beta}}{K(\hat{\beta})}.$$

Por último, la matriz de información de Fisher basada en [Lemonte, 2016] es

$$I(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n/\alpha^2 & 0 \\ 0 & \frac{n[1+\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha)]}{(\alpha\beta)^2} \end{bmatrix},$$

donde $h(\alpha) = \alpha\sqrt{\pi} - \pi \exp(2/\alpha^2) \left[1 - \phi\left(\frac{2}{\alpha}\right) \right]$. Se concluye que

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \sim N_2 \left[\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2n/\alpha^2 & 0 \\ 0 & \frac{n[1+\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha)]}{(\alpha\beta)^2} \end{bmatrix} \right].$$

3.2. Distribución Birnbaum Saunders Unitaria (UBS)

La presente sección aborda una distribución que no aumenta el número de parámetros y cuya variable de respuesta está en el intervalo $(0,1)$, nos referimos a la distribución UBS [Mazucheli et al., 2018a].

Definición 3.2.1 (Distribución Birbaum Saunders Unitaria).

Considere $Y \sim BS(\alpha, \beta)$, luego la distribución Birbaum Saunders Unitaria (UBS) se define como la distribución obtenida por la transformación $X = \exp -Y$ con soporte en $(0,1)$, cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{1}{2x\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{-\beta}{\log x} \right)^{1/2} + \left(\frac{-\beta}{\log x} \right)^{3/2} \right] \exp \left[\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{\log x}{\beta} + \frac{\beta}{\log x} + 2 \right) \right].$$

La función de distribución acumulada es

$$F_X(x) = \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{-\log x}{\beta} \right)^{1/2} - \left(\frac{-\beta}{\log x} \right)^{1/2} \right] \right].$$

Si $Y \sim BS(\alpha, \beta)$ y la función de densidad 3-2, obtenemos una expresión equivalente a la densidad de la distribución BS en 3-7.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{y}{\beta} + \frac{\beta}{y} - 2 \right] \right) \frac{y^{-3/2}[y + \beta]}{2\alpha\sqrt{\beta}}, \\ &= \frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \frac{([y\beta^{1/2} + \beta^{3/2}])}{y^{3/2}} \exp \left(-\frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{y}{\beta} + \frac{\beta}{y} - 2 \right] \right), \\ &= \frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{\beta}{y} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{y} \right)^{3/2} \right] \exp \left(-\frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{y}{\beta} + \frac{\beta}{y} - 2 \right] \right), \end{aligned} \quad (3-7)$$

donde $\beta > 0$, $y > 0$ y $\alpha > 0$, que coincide con la definición de función de densidad en [Mazucheli et al., 2018a]. Empleando el teorema de transformación para $X = \exp -Y$, es posible obtener una expresión para la función de densidad de la distribución BS restringida al intervalo unitario, en efecto, si

$$f_X(x) = \begin{cases} |J(\mathbf{x})|f_Y[h(y)], & \text{en } \mathbb{R} \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con $h(y) = -\log(x)$, $|J(\mathbf{x})| = 1/x$, por tanto

$$f_Y(h(y)) = \frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{\beta}{-\log(x)} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{-\log(x)} \right)^{3/2} \right] \exp \left(-\frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{-\log(x)}{\beta} + \frac{\beta}{-\log(x)} - 2 \right] \right). \quad (3-8)$$

La ecuación 3-2 es equivalente a la distribución UBS, en la figura **3-2**, se observa el grafico de densidad de la distribución $UBS(\alpha, \beta)$, entre sus ventajas está la posibilidad de generar gráficas de tipo bañera, óptima por ejemplo a la hora de modelar tasas de riesgo, que no son posibles modelar a partir de la distribución BS.

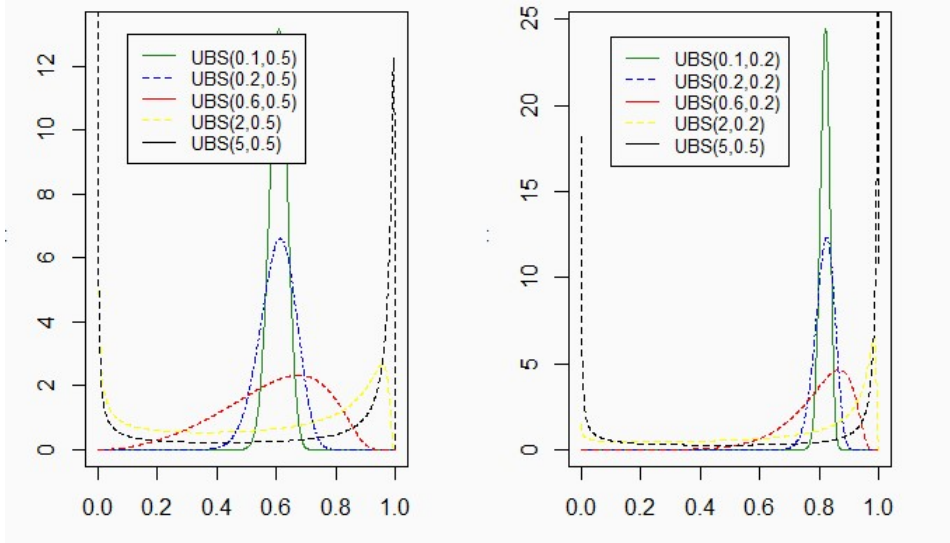


Figura 3-2: Función de densidad Birnbaum Saunders Unitaria

La función de distribución acumulada UBS, donde Φ representa la distribución normal acumulada, corresponde a

$$F_X(x) = \Phi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{-\log(x)}{\beta} \right)^{1/2} - \left(\frac{\beta}{-\log(x)} \right)^{1/2} \right).$$

Cabe resaltar que la función de densidad 3-8 es unitaria, en efecto, para que la función resulte bien definida en \mathbb{R}

$$\left(\frac{\beta}{-\log(x)} \right)^{1/2} > 0,$$

dado que $\beta > 0$, esta desigualdad se cumple si $\log(x) < 0$, es decir $0 < x < 1$.

3.2.1. Propiedades de la distribución UBS

Proposición 3.2.1 (Propiedades de la distribución UBS).

A continuación se listan algunas propiedades

1. La mediana de la distribución UBS corresponde a $\delta = \exp(-\beta)$. Reemplazando en la función de distribución acumulada se obtiene, $F_X(\exp(-\beta)) = \Phi(0) = 1/2$.

2. El r -ésimo momento de la variable aleatoria X es

$$\begin{aligned}
 E(X^r) &= \int_0^1 x^r f_X(x) dx \\
 &= \frac{\exp\left(\frac{1-\beta\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}}\sqrt{\frac{1}{\alpha^2\beta}+2r}}{\alpha^2}\right) \left(\beta\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}}\sqrt{\frac{1}{\alpha^2\beta}+2r}+1\right)}{2\alpha\sqrt{\beta}\sqrt{\frac{1}{\alpha^2\beta}+2r}} \\
 &= \exp\left[\frac{-(2r\alpha^2\beta+1)^{1/2}-1}{\alpha^2}\right] \frac{1}{2(2r\alpha^2\beta+1)} \left[2r\alpha^2\beta+(2r\alpha^2\beta+1)^{1/2}+1\right]
 \end{aligned} \tag{3-9}$$

Siempre que $\mathbb{R}\left(\frac{b}{a^2}\right) \geq 0$ y $\mathbb{R}\left(\frac{1}{2a^2b}+r\right) \geq 0$.

En la siguiente sección se busca estimar los parámetros de la distribución UBS α y β , para ello utilizamos el método de máxima verosimilitud, donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ es una muestra aleatoria de tamaño n y $X_i \sim \text{UBS}(\alpha, \beta)$.

3.2.2. Estimación máxima verosimilitud

La función de log-verosimilitud para α y β es

$$\ell((\alpha, \beta)) \cong -\frac{n}{\log(\alpha\beta)} + \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\beta}{\log x_i}\right)^{1/2} - \left(\frac{\beta}{\log x_i}\right)^{3/2} \right\} - \frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{\log x_i}{\beta} + \frac{\beta}{\log x_i} - 2 \right]$$

Luego derivando respecto a α y β , se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} &= -\frac{n}{\alpha} \left(1 + \frac{2}{\alpha^2}\right) - \frac{1}{\alpha^3\beta} \sum_{i=1}^n \log x_i - \frac{\beta}{\alpha^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\log x_i}, \\
 \frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \beta} &= \frac{-n}{2\beta} + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\beta - \log x_i} \right\} - \frac{1}{2\alpha^2\beta^2} \sum_{i=1}^n \log x_i + \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\log x_i}.
 \end{aligned}$$

Igualando a cero obtenemos las estimación para α , para hallar $\hat{\beta}$ es necesario utilizar un método iterativo como Newton-Raphson

$$\hat{\alpha} = \left[-\frac{s}{\hat{\beta}} - \frac{\hat{\beta}}{r} - 2 \right]^{1/2},$$

donde

$$s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i \text{ y } r = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\log x_i} \right]^{-1}.$$

3.3. Distribución Sinh-Normal y modelo log-Birnbaum Saunders

El origen de la distribución Sinh-Normal (SHN) y el modelo de regresión se desarrolló por primera vez en el trabajo de [Rieck and Nedelman, 1991], que estudió el modelamiento de falla o desgaste de materiales. En primer lugar, el artículo postula el siguiente modelo

$$\log(N) = a + bx,$$

donde x representa el rango de deformación de un material por ciclo y N el número de ciclos. Para estimar a y b se hacen los siguientes supuestos:

1. El número de ciclos se distribuye BS y N es su mediana.
2. α es independiente del trabajo por ciclo.

Dado que la distribución multiplicada por una constante positiva es de nuevo BS, el modelo se convierte en

$$N = e^{a+bx} \delta,$$

$$\log(N) = a + bx + \log(\delta).$$

donde δ es distribuida $BS(\alpha, 1)$. La segunda ecuación hace referencia a un modelo log-lineal y de allí su nombre.

Definición 1 (Distribución acumulada Sinh-normal (SHN)).

La distribución Sinh-normal (SHN) es una distribución triparamétrica cuya función de distribución acumulada es

$$F_Y = \Phi(a(\alpha, \sigma, \gamma)); y \in \mathbb{R},$$

donde $\alpha > 0, \sigma > 0, -\infty < \gamma < \infty$, $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ y $a(\alpha, \sigma, \gamma) = \frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y-\gamma}{\sigma}\right)$. Una variable aleatoria con estas condiciones se notará como: $SHN(\alpha, \sigma, \gamma)$.

Definición 2 (Distribución Sinh-normal).

Suponga que la variable aleatoria $Y \sim SHN(\alpha, \sigma, \gamma)$, entonces la correspondiente función de densidad de probabilidad es

$$\varphi_Y(y) = \phi(a(\alpha, \sigma, \gamma))A(\alpha, \sigma, \gamma); y \in \mathbb{R},$$

para la cual

$$A(\alpha, \sigma, \gamma) = \frac{\partial}{\partial y} a(\alpha, \sigma, \gamma) = \frac{2}{\alpha\sigma} \cosh\left(\frac{y-\gamma}{\sigma}\right) = \frac{e^{(y-\gamma)/\sigma} + e^{-(y-\gamma)/\sigma}}{\alpha\sigma}.$$

Explícitamente se obtiene la expresión

$$\varphi_Y(y) = \phi\left(\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y-\gamma}{\sigma}\right)\right) \frac{2}{\alpha\sigma} \cosh\left(\frac{y-\gamma}{\sigma}\right), \text{ donde } y \in \mathbb{R}. \quad (3-10)$$

Considerando que

$$Z = \frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y - \gamma}{\sigma}\right) \sim N(0, 1)$$

obtenemos la siguiente ecuación que nos facilita generar números aleatorios de la distribución

$$Y = \sigma \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\alpha Z}{2}\right) + \gamma \sim SHN(\alpha, \sigma, \gamma).$$

Proposición 3.3.1 (Propiedades).

Las propiedades más importantes establecidas en [Rieck and Nedelman, 1991] son:

1. La función de densidad de probabilidad es simétrica sobre el parámetro de localización γ .
2. La distribución es bimodal si $\alpha > 2$ y fuertemente unimodal cuando $\alpha \leq 2$.
3. Si $Y \sim SHN(\alpha, e^\gamma, 2)$ entonces Y tiene una distribución log-Birnbaum Saunders.

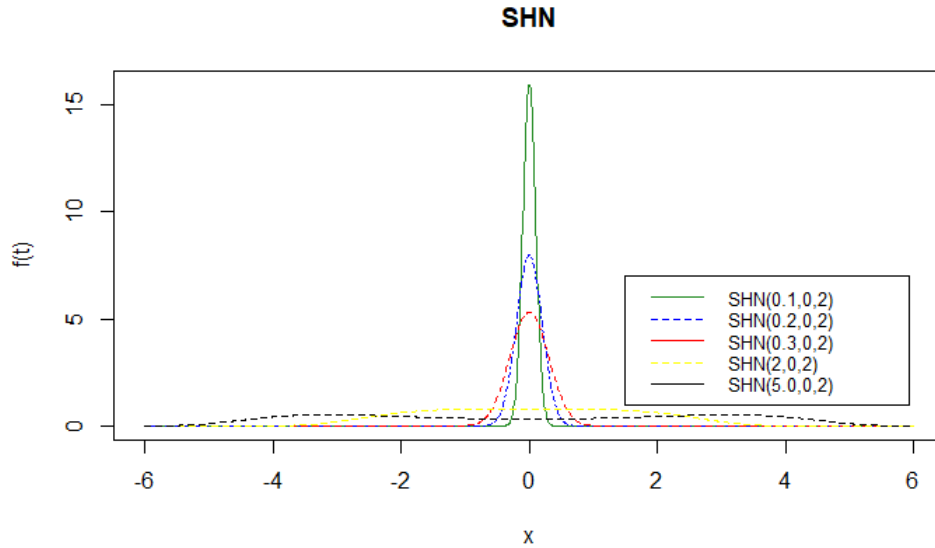


Figura 3-3: Distribución Sinh-Normal

3.4. Modelo de regresión Log-Birnbaum Saunders

De acuerdo al artículo de [Rieck and Nedelman, 1991], sea T_1, T_2, \dots, T_n variables aleatorias independientes con $T_i \sim BS(a_i, \beta_i)$, donde dichas distribuciones dependen de p variables explicativas $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$

1. $\beta_i = \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\theta})$, para $i = 1, 2, \dots, n$, donde $\boldsymbol{\theta}^\top = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ el vector de parámetros a estimar.
2. El parámetro de forma α_i es independiente del vector explicativo \mathbf{x}_i .

Dado que cT_i nuevamente es una distribución Birnbaum Saunders, es posible obtener la variable $T_i = \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\theta})\delta_i$ y si $Y_i = \log(T_i)$, entonces

$$Y_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\theta} + \log(\delta_i) \quad (3-11)$$

Definición 3 (Modelo de regresión lineal log-Birnbaum-Saunders).

Si $\log(\delta_i) = \varepsilon_i$ en 3-11, es decir el error del modelo, se define $Y_i \sim LSHN(\alpha, \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\theta}, 0)$ si

$$Y_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\theta} + \varepsilon_i$$

La estimación por máxima verosimilitud del parámetro α es

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{4}{n} \sum_i \sinh \left[\frac{(y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\theta}})}{2} \right],$$

note que θ no tiene una forma cerrada y se obtiene usando métodos iterativos. Una de las dificultades del proceso de estimación es que la máxima verosimilitud y la estimación por mínimos cuadrados de θ es difícil de obtener, entonces se usa muestreo asintótico o robusto, dado que Sinh-Normal es simétrica y exhibe homocedasticidad se puede utilizar la teoría normal pues esta sigue siendo robusta, así se puede hallar los test t o F para comparar parámetros de localización en dos muestras o multimuestras, más detalles sobre los estimadores se pueden encontrar en [Rieck and Nedelman, 1991].

La distribución no negativa Sinh-Normal o también llamada Log Birnbaum Saunders Unitaria (LUBS) se construye a partir de la transformación $Y = -\log(X)$, cuando $X \sim UBS$, y una generalización de dicha distribución es el modelo bimodal descrito en [Martínez-Flórez and Tovar-Falón, 2021] que se define a continuación.

Definición 4 (Modelo Log Sinh-Normal).

Sea Y variable aleatoria entonces se define el Modelo Log Sinh-Normal como

$$f_{LSHN}(y; \alpha, \gamma, \sigma) = \frac{2}{\alpha \sigma y} \cosh \left(\frac{\log(y) - \gamma}{\sigma} \right) \phi \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{\log(y) - \gamma}{\sigma} \right) \right), \quad (3-12)$$

donde $y > 0$ y se denota como $Y \sim LSHN(\alpha, \gamma, \sigma)$

Basado en el artículo de [Martínez-Flórez and Tovar-Falón, 2021] se define la distribución Sinh-Normal Unitaria (USHN) con dominio en el intervalo unitario.

Definición 5 (Distribución Sinh-Normal Unitaria).

La función de distribución se denota como $Y \sim USHN(\alpha, \gamma, \sigma)$ con $y \in (0, 1)$, parámetro

de forma $\alpha > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ parámetro de localización y σ parámetro de escala

$$\varphi(y; \alpha; \gamma, \sigma) = \frac{1}{(1-y)(-\log(1-y))} \frac{2}{\sigma \alpha} \cosh\left(\frac{\log(-\log(1-y)) - \gamma}{\sigma}\right) \times \phi\left(\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{\log(-\log(1-y)) - \gamma}{\sigma}\right)\right).$$

En el gráfico **3-4** observamos la función de densidad, con dominio en el intervalo (0,1), vemos como un crecimiento en el parámetro de forma α refleja la bimodalidad de la función, de hecho [Martínez-Flórez and Tovar-Falón, 2021] muestra que si $\alpha > 2$ la función es bimodal y unimodal para valores menores a 2, lo que representa un beneficio a la hora de modelar tasas con este tipo de comportamiento.

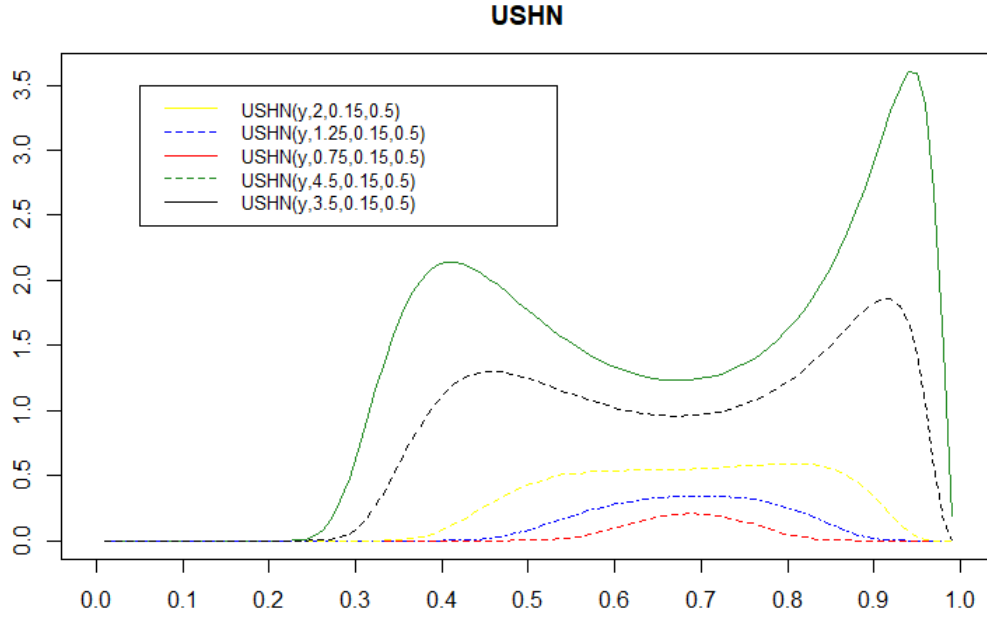


Figura 3-4: Distribución USHN

Definición 6 (Momentos distribución USHN).

El r -ésimo momento de la variable aleatoria $Y \sim USHN(\alpha, \gamma, \sigma)$ es

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^r) &= \mathbb{E}[(1 - \exp(-X))^r] \\ &= \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} \mathbb{E}(\exp(-jX)), \end{aligned}$$

donde X es $LSHN(\alpha, \gamma, \sigma)$.

Definición 7 (Modelo de regresión LUSHN).

Considere un conjunto de p variables explicativas, las cuales se denotan como $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^\top$

y un vector desconocido p -dimensional $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$, de tal modo que para $i = 1, \dots, n$

$$\log(-\log(1 - Y_i)) = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\theta} + \varepsilon_i$$

donde $\varepsilon_i \sim SHN(\alpha, 0, \sigma)$ y $Z_i = \log(-\log(1 - Y_i)) \sim SHN(\alpha, \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\theta}, \sigma)$, luego $\mathbb{E}(Z_i) = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\theta}$ y el estimador del modelo es

$$\begin{aligned} \hat{Y}_i &= 1 - \exp\left(-\exp(\hat{Z}_i)\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\exp(\mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\theta}})\right) \end{aligned}$$

El modelo antes mencionado presenta mayor bondad de ajuste comparado con los modelos BS y log-asimétrico Birnbaum Saunders (LSBS) de [Lemonte, 2012] de acuerdo al criterio AIC y BIC.

3.5. Distribución Birnbaum Saunders Bivariada (BVBS)

La siguiente sección está destinada a hacer una comparación entre dos formas de obtener la distribución bivariada, la primera propuesta por [Kundu et al., 2010] y la segunda por [Lemonte et al., 2015b]. El artículo de [Kundu et al., 2010] está enfocado en la distribución de cinco parámetros Birnbaum Saunders Bivariada y su inferencia, esta distribución es absolutamente continua y sus marginales son BS. Empleando la función de distribución Normal Bivariada, se define la distribución Birnbaum Saunders.

Definición 8 (Distribución Birnbaum Saunders Bivariada).

De acuerdo al artículo de [Kundu et al., 2010], se afirma que el vector aleatorio (x_1, x_2) tiene una distribución Birnbaum Saunders Bivariada (BVBS) con parámetros $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \rho$, si la distribución acumulada de x_1 y x_2 se puede expresar como

$$P(T1 \leq x_1, x_2 \leq x_2) = \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x_1}{\beta_1}} - \sqrt{\frac{\beta_1}{x_1}} \right), \frac{1}{\alpha_2} \left(\sqrt{\frac{x_2}{\beta_2}} - \sqrt{\frac{\beta_2}{x_2}} \right); \rho \right],$$

para $x_1 > 0, x_2 > 0$ y cero en otro caso, donde $\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta_2 > 0, -1 < \rho < 1$ y $\Phi_2(u, v; \rho)$ la función de distribución acumulada de una Normal Estándar Bivariada (Z_1, Z_2) con el correspondiente coeficiente de correlación ρ .

La función de densidad de probabilidad conjunta de x_1 y x_2 es

$$\begin{aligned} f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) &= \phi_2 \left(\frac{1}{\alpha_1} \left(\sqrt{\frac{x_1}{\beta_1}} - \sqrt{\frac{\beta_1}{x_1}} \right), \frac{1}{\alpha_2} \left(\sqrt{\frac{x_2}{\beta_2}} - \sqrt{\frac{\beta_2}{x_2}} \right); \rho \right) \\ &\quad \times \frac{1}{2\alpha_1\beta_1} \left\{ \left(\frac{\beta_1}{x_1} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta_1}{x_1} \right)^{3/2} \right\} \frac{1}{2\alpha_2\beta_2} \left\{ \left(\frac{\beta_2}{x_2} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta_2}{x_2} \right)^{3/2} \right\}, \end{aligned}$$

donde $\phi(u, v; \rho)$ es la probabilidad de densidad conjunta de Z_1 y Z_2 , explícitamente

$$\phi_2(u, v; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{1}{2(1-\rho^2)} (u^2 + v^2 - 2\rho uv) \right\}.$$

El siguiente teorema expone algunas propiedades importantes:

Teorema 1.

Si $(x_1, x_2) \sim BVBS(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \rho)$, entonces:

1. La función de densidad de probabilidad condicional, dado que $X_2 = x_2$, es

$$f_{X_1|X_2=x_2}(x_1) = \frac{1}{2\alpha_1\beta_1\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \left[\left(\frac{\beta_1}{x_1} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta_1}{x_1} \right)^{3/2} \right] \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{1}{\alpha_1} \left(\sqrt{\frac{x_1}{\beta_1}} - \sqrt{\frac{\beta_1}{x_1}} \right) - \frac{\rho}{\alpha_2} \left(\sqrt{\frac{x_2}{\beta_2}} - \sqrt{\frac{\beta_2}{x_2}} \right) \right]^2 \right\}.$$

2. $x_j \sim BS(\alpha_j, \beta_j)$ para $j = 1, 2$.

3. $(k_1x_1, x_2) \sim BVBS(\alpha_1, \alpha_2, k_1\beta_1, \beta_2, \rho)$.

4. $(x_1^{-1}, x_2^{-1}) \sim BVBS(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \rho)$.

5. $(x_1, x_2^{-1}) \sim BVBS(\alpha_1, \beta, \alpha_2, \beta_2^{-1}, -\rho)$.

6. $(x_1^{-1}, x_2) \sim BVBS(\alpha_1, \beta^{-1}, \alpha_2, \beta_2, -\rho)$.

Defina $\theta = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \rho)$ y dada una muestra aleatoria, la función de log-verosimilitud es

$$l(\theta) \cong -n \ln \alpha_1 - n \ln \beta_1 - n \ln \alpha_2 - n \ln \beta_2 - \frac{n}{2} \ln(1 - \rho^2) + \sum_{i=1}^n \ln \left\{ \left(\frac{\beta_1}{x_{1i}} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta_1}{x_{1i}} \right)^{3/2} \right\} \\ + \sum_{i=1}^n \ln \left\{ \left(\frac{\beta_2}{x_{2i}} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta_2}{x_{2i}} \right)^{3/2} \right\} - \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_1^2} \left(\sqrt{\frac{x_{1i}}{\beta_1}} - \sqrt{\frac{\beta_1}{x_{1i}}} \right)^2 \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_2^2} \left(\sqrt{\frac{x_{2i}}{\beta_2}} - \sqrt{\frac{\beta_2}{x_{2i}}} \right)^2 - \frac{2\rho}{\alpha_1\alpha_2} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\frac{x_{1i}}{\beta_1}} - \sqrt{\frac{\beta_1}{x_{1i}}} \right) \left(\sqrt{\frac{x_{2i}}{\beta_2}} - \sqrt{\frac{\beta_2}{x_{2i}}} \right) \right\}.$$

donde los estimadores máximo verosímil para α_1 , α_2 y ρ son hallados algebraicamente y dado que el perfil de verosimilitud no obtiene soluciones explícitas para β_1 y β_2 se utiliza Newton Raphson. Sin embargo, existe otro problema, la de verosimilitud no garantiza la existencia y unicidad de las soluciones. Como una solución a este problema los autores del artículo proponen estimadores de momentos modificados, de igual manera se incluye una aplicación a datos reales, que busca evidenciar si el modelo descrito anteriormente se ajusta a a los datos, con resultados satisfactorios.

3.5.1. Distribuciones condicionalmente especificadas

Usualmente la construcción de la función de densidad de probabilidad conjunta depende de las densidades marginales, pero en el caso bivariado y en general multivariado cobra mayor importancia las densidades condicionales pues hacen referencia a las secciones cruzadas, luego como alternativa a la construcción clásica, en [Arnold et al., 2002] se definen

las **densidades específicamente condicionales**, la alternativa consiste en suponer que la condicional X dado $Y = y$ debería pertenecer a alguna familia de densidades y Y dado $X = x$ debería pertenecer a una segunda familia de densidades. Una importante cualidad de esta estrategia es la facilidad de simular utilizando técnicas de muestreo de Gibbs. [Arnold et al., 2002] formula la distribución bivariada con condicionales asimétricas normales y la densidad lineal asimétrica normal bivariada, más tarde [Lemonte et al., 2015b] generaría la distribución BVBS y MVBS fundamentado en las densidades específicamente condicionales. Las nuevas distribuciones Birnbaum Saunders bivariada y multivariada son diferentes al modelo anteriormente expuesto, las nuevas distribuciones permite mayor flexibilidad y funciona en algunos escenarios bayesianos y clásicos. Además, son modelos manejables que brindan mejor ajuste comparado con otras distribuciones multivariadas. Notemos que la generalización natural o clásica de la distribución BS univariada sucede en [Kundu et al., 2010].

3.5.2. Distribución Birnbaum Saunders Bivariada

[Lemonte et al., 2015b] tiene como objetivo expresar la función de densidad para las variable aleatoria de dimensión dos (X, Y) , es decir, la distribución conjunta implementando las densidades específicamente condicionales. Para ello si $x, y \in \mathbb{R}$

$$X|Y = y \sim SN(\lambda(y)), \quad Y|X = x \sim SN(\lambda(x)),$$

es decir x y y se distribuyen Normal asimétrica (SN), como en [Azzalini, 1985] cuya función de densidad para la variable aleatoria W es

$$f_W(w) = 2\phi(w)\Phi(\lambda w), w \in \mathbb{R}.$$

Si $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ son las funciones de densidad marginales de las variables aleatorias X y Y , la función de densidad conjunta se puede escribir como

$$f_{X,Y}(x, y) = 2\phi(x)\Phi(\lambda_1(y)x)f_Y(y) = 2\phi(y)\Phi(\lambda_2(x)y)f_X(x). \quad (3-13)$$

Hallar el valor de la función conjunta depende de la independencia de las variables aleatorias. Por ejemplo, cuando las variables son independientes las siguientes ecuaciones son proporcionales

$$\begin{aligned} f_X(x) &= 2\phi(x)\Phi(\lambda_2 x) \\ f_Y(y) &= 2\phi(y)\Phi(\lambda_1 y) \end{aligned}$$

Luego

$$f_{X,Y}(x, y) = 4\phi(x)\phi(y)\Phi(\lambda_2(x))\Phi(\lambda_1(y)),$$

cundo son dependientes, $\lambda_1(y)$ y $\lambda_2(x)$ no son constantes, considere $\lambda_1(0) = 0$ y $\lambda_2(0) = 0$. Haciendo $y = 0$ en la ecuación 3-13, entonces

$$f_{X,Y}(x, y) = 2\phi(x)\Phi(0)f_Y(0) = \phi(x)f_Y(0),$$

análogamente con $x = 0$ en 3-13, se concluye

$$f_X(x) = \phi(x), \quad f_Y(y) = \phi(y).$$

Luego, retomando la ecuación 3-13 obtenemos la siguiente igualdad

$$\Phi(\lambda_1(y)x) = \Phi(\lambda_2(y)x)$$

Pero como Φ es monótona esto se mantiene si $\lambda_1(y)x = \lambda_2(y)y$ para todo x, y . Lo que ocurre sólo si $\lambda_1(y) = \lambda y$ y $\lambda_2(x) = \lambda x$ para algún $\lambda \in R$. Por tanto

$$\Phi(\lambda_1(y)x) = \Phi(\lambda yx)$$

Entonces una ecuación para la dependencia conjunta es:

$$f_{X,Y}(x, y) = 2\phi(x)\phi(y)\Phi(\lambda xy). \quad (3-14)$$

Notemos además que

$$\rho(X, Y) = E(X, Y) = E(E(XY|Y)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E\left(\frac{\lambda Y^2}{\sqrt{1 + \lambda^2 Y^2}}\right),$$

dado que $Y \sim N(0, 1)$, haciendo $\lambda^2 x^2 = u$, obtenemos

$$\rho(X, Y) = \text{signo}(\lambda) \times \frac{U(3/2, 2, 1/(2\lambda^2))}{2\lambda^2 \sqrt{\pi}},$$

donde U corresponde a la función hipergeométrica confluyente definida como

$$U(a, b, c) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-cu} u^{a-1} (1+u)^{b-a-1} du, \quad b > a > 0 \text{ y } c > 0.$$

Definición 9 (Función de densidad conjunta BVBS).

Suponga que $Z_j \sim N(0, 1)$, para $j = 1, 2$ y $Z_1|Z_2 = z_2 \sim SN(\lambda z_2)$, $Z_2|Z_1 = z_1 \sim SN(\lambda z_1)$, considere la transformación

$$x_j = \beta_j \left[\frac{\alpha_j Z_j}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_j Z_j}{2}\right)^2 + 1} \right]^2, \quad j = 1, 2,$$

para $\alpha_j > 0$ y $\beta_j > 0$, obtenemos la función de densidad conjunta

$$f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = 2\phi(a_1)\phi(a_2)\Phi(\lambda a_1 a_2) A_1 A_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2,$$

donde a_j y A_j se define como

$$a_j = a_j(\alpha_j, \beta_j) = \frac{1}{\alpha_j} \left[\left(\frac{x_j}{\beta_j}\right)^{1/2} - \left(\frac{\beta_j}{x_j}\right)^{1/2} \right], \quad j = 1, 2,$$

$$A_j = A_j(\alpha_j, \beta_j) = \frac{x_j^{-3/2} (x_j + \beta_j)}{2\alpha_j \sqrt{\beta_j}}, \quad j = 1, 2.$$

Así, $(x_1, x_2) \sim BVBS(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \lambda)$.

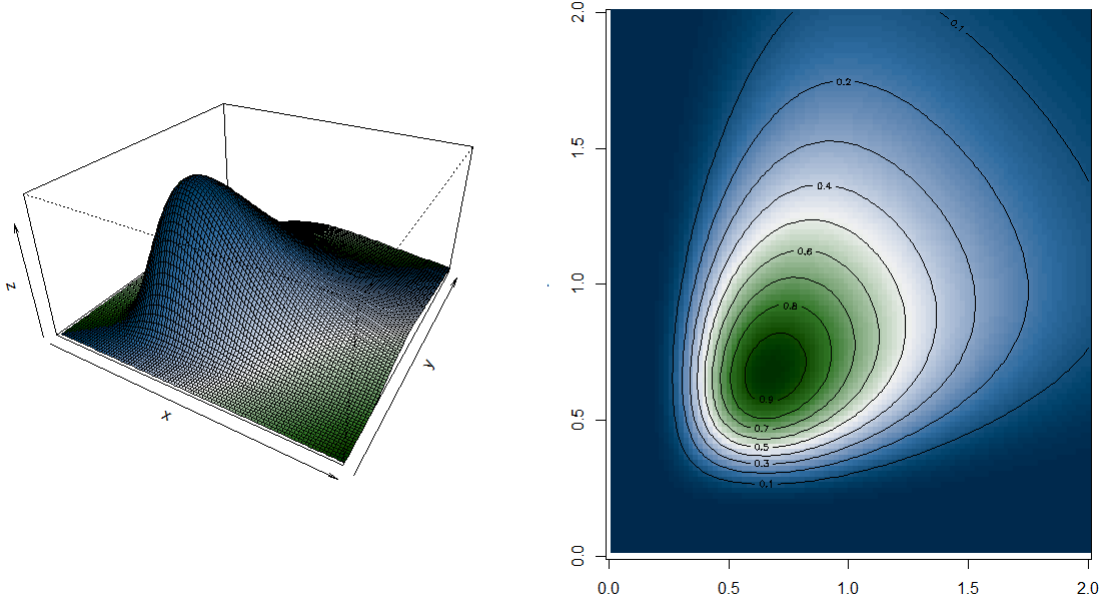


Figura 3-5: Gráfico de densidad y contorno $BVBS(0,5, 0,5, 1, 1, 0,5)$

Teorema 2.

Si $(x_1, x_2) \sim BVBS(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \lambda)$, entonces:

1. $x_j \sim BS(\alpha_j, \beta_j)$ para $j = 1, 2$.
2. $(k_1 x_1, x_2) \sim BVBS(\alpha_1, \alpha_2, k_1 \beta_1, \beta_2, \lambda)$, $k_1 > 0$.
3. $(x_1, k_2 x_2) \sim BVBS(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, k_2 \beta_2, \lambda)$, $k_2 > 0$.
4. $(x_1^{-1}, x_2^{-1}) \sim BVBS(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1^{-1}, \beta_2^{-1}, \lambda)$.
5. $(x_1, x_2^{-1}) \sim BVBS(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2^{-1}, -\lambda)$.
6. $(x_1^{-1}, x_2) \sim BVBS(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1^{-1}, \beta_2, -\lambda)$.

[Lemonte et al., 2015b] extiende la distribución al caso multivariado, este resultado lo presentamos a continuación.

3.5.3. Distribución Birnbaum Saunders Multivariada (MVBS)

Definición 10 (Extensión Birnbaum Saunders Multivariada).

Sea Z un vector aleatorio $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)^\top$ de dimensión p , y definiendo los subvectores $\mathbf{Z}_{(1)}, \dots, \mathbf{Z}_{(p)}$ de dimensión $p - 1$ tal que, para cada $j = 1, \dots, p$, $\mathbf{Z}_{(j)}$ denota el vector con

la j coordenada \mathbf{Z}_j eliminada. Análogamente, para un vector real $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p)^\top$, $\mathbf{z}_{(j)}$ es obtenida de \mathbf{z} con la j coordenada z_j eliminada. Asumiendo

$$Z_j | \mathbf{Z}_{(j)} = \mathbf{z}_{(j)} \sim SN \left(\lambda \prod_{j' \neq j} z_{j'} \right)$$

para cada $j = 1, \dots, p$, la función de densidad de probabilidad conjunta de $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)^\top$ toma la forma

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = 2 \left[\prod_i^p \phi(z_i) \right] \Phi \left(\lambda \prod_j^p z_j \right),$$

para $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$. Entonces bajo la transformación

$$x_j = \beta_j \left[\frac{\alpha_j Z_j}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_j Z_j}{2} \right)^2 + 1} \right]^2, \quad j = 1, \dots, p,$$

donde $\mathbf{Z}_j \sim N(0, 1)$ y para $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_p)^\top$ obtenemos la función de densidad conjunta

$$f_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) = 2 \left(\prod_{j=1}^p \phi(a_j) \right) \Phi \left(\lambda \prod_{j=1}^p a_j \right) \left(\prod_{j=1}^p A_j \right), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^p,$$

con $a_j = \frac{1}{\alpha_j} \left[\left(\frac{x_j}{\beta_j} \right)^{1/2} - \left(\frac{\beta_j}{x_j} \right)^{1/2} \right]$, $j = 1, \dots, p$, y $A_j = A_j(\alpha_j, \beta_j) = \frac{x_j^{-3/2}(x_j + \beta_j)}{2\alpha_j \sqrt{\beta_j}}$, $j = 1, \dots, p$. con $\alpha_j > 0$ y $\beta_j > 0$, para $j = 1, \dots, p$. Sea $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)'$ y $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)'$, si el vector aleatorio $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_p)^\top$ tiene una distribución Birnbaum Saunders multivariada con función de densidad conjunta definida anteriormente, entonces $\mathbf{X} \sim MVBS(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \lambda)$.

3.5.4. Propiedades del modelo MVBS

Sea $\mathbf{X} \sim MVBS(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \lambda)$, algunas de las propiedades que cumple la distribución son:

1. $X_j \sim BS(\alpha_j, \beta_j)$, para $j = 1, \dots, p$.
2. La densidad condicional de x_j dado $\mathbf{X}_{(j)} = \mathbf{x}_j$ es

$$f_{x_j | \mathbf{X}_{(j)}}(x_j | \mathbf{X}_{(j)} = \mathbf{x}_j) = 2\phi(\alpha_j) \Phi \left(\lambda \prod_j^p a_j \right) A_j.$$

3. Si $\mathbf{T} \sim MVBS(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \lambda)$ entonces

$$(k_1 x_1, \dots, k_p x_p) \sim MVBS(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}^*, \lambda), \quad k_1, \dots, k_p > 0, \quad \boldsymbol{\beta}^* = (k_1 \beta_1, \dots, k_p \beta_p)^\top.$$

La función de log-verosimilitud para el vector de parámetros $\Theta = (\boldsymbol{\alpha}^\top, \boldsymbol{\beta}^\top, \lambda^\top)$ es

$$l(\Theta) \cong -n \sum_{j=1}^p \left[\log \alpha_j + \frac{1}{2} \log \beta_j \right] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \log(x_{ji} + \beta_j) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ji}^2 + \sum_{i=1}^n \log \left[\Phi \left(\lambda \prod_{j=1}^p a_{ji} \right) \right],$$

donde

$$a_{ji} = a_{ji}(\alpha_j, \beta_j) = \frac{1}{\alpha_j} \left[\left(\frac{x_{ji}}{\beta_j} \right)^{1/2} - \left(\frac{\beta_j}{x_{ij}^{1/2}} \right) \right].$$

Maximizando la función de log-verosimilitud es posible obtener los parámetros desconocidos, utilizando además el método de Newton Raphson ya que β y λ no pueden ser obtenidos explícitamente. En el artículo de [Lemonte et al., 2015b] muestra como la distribución MVBS y BVBS se ajustan mejor que la versión bivariada trabajada en [Kundu et al., 2010].

3.6. Función de densidad de probabilidad asimétrica Sinh-Normal Multivariada

En la presente sección hablaremos del modelo descrito por [Martínez-Flórez et al., 2017] quien introduce el modelo asimétrico Sinh-Normal Multivariado, para ello tengamos en cuenta el artículo de [Díaz-García and Domínguez-Molina, 2006] que describe la versión multivariada de SHN.

Definición 11 (Distribución Sinh-Normal Multivariada).

Sea \mathbf{Y} un vector aleatorio que se distribuye SHN multivariado entonces la función de densidad de probabilidad toma la forma

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = (2\pi\alpha^2)^{-q/2} \left[\prod_{j=1}^q \cosh \left(\frac{y_j - \mu_j}{2} \right) \right] \exp \left\{ -\frac{2}{\alpha^2} \sum_{j=1}^q \sinh^2 \left(\frac{y_j - \mu_j}{2} \right) \right\}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^q.$$

Luego $\mathbf{Y} \sim SHN_q(\alpha \mathbf{1}_q, \boldsymbol{\mu}, 2\mathbf{I}_q)$ es la notación usada para designar la extensión multivariada.

A continuación se presenta la versión asimétrica de la SHN Multivariada, desarrollada por [Martínez-Flórez et al., 2017].

Definición 12 (Distribución asimétrica Sinh-Normal Multivariada).

Sea \mathbf{Z} un vector aleatorio $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)^\top$ de dimensión p , los subvectores $Z_{(1)}, \dots, Z_{(p)}$ de dimensión $p-1$ tal que, para cada $j = 1, \dots, p$, $\mathbf{Z}_{(j)}$ denota el vector con la j -ésima coordenada Z_j eliminada. Análogamente, para un vector real $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p)^\top$, $\mathbf{z}_{(j)}$ es obtenida de \mathbf{z} con la j -ésima coordenada z_j eliminada. Asumiendo

$$Z_j | \mathbf{Z}_{(j)} = \mathbf{z}_{(j)} \sim SN \left(\lambda \prod_{j' \neq j} z_{j'}^\top \right),$$

para cada $j = 1, \dots, p$, la función de densidad de probabilidad conjunta de $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)^\top$ toma la forma

$$f_{\mathbf{Z}}(z) = 2 \left[\prod_i^p \phi(z_j) \right] \Phi \left(\lambda \prod_j^p z_j \right),$$

para $z \in \mathbb{R}^p$.

Para generar la distribución asimétrica Sinh-Normal Multivariada (SMVSHN) consideramos en un camino similar al univariado la transformación $Y_j = \sigma_j \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\alpha_j z_j}{2} \right) + \gamma_j$, donde $Z_j \sim N(0, 1)$, entonces se tiene la función de densidad de probabilidad conjunta como

$$f_{(Y_1, \dots, Y_p)}(y_1, \dots, y_p) = 2 \left(\prod_{j=1}^p b'_j \right) \left(\prod_{j=1}^p \phi(b_j) \right) \Phi \left(\lambda \prod_{j=1}^p b_j \right), \quad y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R},$$

para

$$b_j = \frac{2}{\alpha_j} \sinh \left(\frac{y_j - \gamma_j}{\sigma_j} \right) \quad \text{y} \quad b'_j = \frac{2}{\alpha_j \sigma_j} \cosh \left(\frac{y_j - \gamma_j}{\sigma_j} \right).$$

La distribución es notada como $SMVSHN(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\sigma}, \lambda)$ con $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^\top$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ y $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)^\top$. Dentro de las ventajas de la distribución SMVSHN tenemos que dado que las variables aleatorias Y_1, Y_2, \dots, Y_p son independientes para $\lambda = 0$ y unificando la notación, el presente modelo es equivalente al modelo considerado en el artículo de [Díaz-García and Domínguez-Molina, 2006], además es absolutamente continua y las marginales son distribuciones SHN, por último, la distribución asimétrica en [Arnold et al., 2002] es un caso particular de SMVSHN. Tengamos en cuenta también que la flexibilidad de la distribución depende del rango de valores de las correlaciones entre las parejas de variables en el vector (Y_1, Y_2, \dots, Y_p) . Es interesante notar que considerando la distribución asimétrica de Arnold como caso particular se concluye que $|\rho(Y_i, Y_j)| \leq 0,63662$ cuando a_i y a_j tienden a 0. Es posible también determinar cuando el modelo SMVSHN es unimodal o bimodal por medio de la siguiente proposición.

Proposición 3.

Sea $|\lambda| \leq \sqrt{\pi/2} \approx 1,25$ y $p = 2$ la función de densidad de probabilidad es unimodal. Si $|\lambda| \leq \sqrt{\pi/2}$ y $p = 2$, la función de densidad de probabilidad es bimodal.

3.7. Modelo de regresión log-Birnbaum Saunders Multivariado y modelo de regresión asimétrico log-Birnbaum Saunders Multivariado

La presente sección mostrará la versión asimétrica del modelo de regresión log-Birnbaum Saunders Multivariado, para ello se debe definir primero el modelo multivariado de regresión.

3.7.1. Modelo de regresión log-Birnbaum Saunders Multivariado

[Lemonte, 2013] considera n variables aleatorias independientes $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ que han sido recolectadas y el número de respuestas medidas en cada observación es q_i . El modelo de regresión log-Lineal BS Multivariado, es definido como

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{iq_i})^\top$ es un vector de dimensión $q_i \times 1$ de variables respuesta observadas, $\mathbf{X}_i = (\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \mathbf{x}_{iq_i})$ es una matriz asociada a la i -ésima respuesta observada y_i , con $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij1}, \dots, x_{ijp})^\top$, para $j = 1, 2, \dots, q$ un vector de variables explicativas de dimensión p . $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^\top$ es el vector de parámetros desconocidos de dimensión $p \times 1$ y $\boldsymbol{\epsilon}_i = (\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}, \dots, \epsilon_{iq_i})$ es un vector $q_i \times 1$ de errores tal que se distribuye $SHN_{q_i}(\alpha \mathbf{1}_{q_i}, \mathbf{0}_{q_i}, 2\mathbf{I}_{q_i})$ donde $\mathbf{0}_{q_i} = (0, 0, 0, \dots, 0)^\top$ es un vector de ceros de dimensión $q_i \times 1$. Los errores se asumen vectores aleatorios independientes.

Representación matricial del modelo de regresión log-Lineal BS Multivariado

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

donde $\text{vec}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$, $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^\top, \mathbf{X}_2^\top, \dots, \mathbf{X}_n^\top)$ y $\boldsymbol{\epsilon} = \text{vec}(\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_n)$. El operador vec transforma una matriz en un vector colocando las columnas una debajo de la otra.

Sea $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \alpha)^\top$ el vector de parámetros, por tanto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_{i1} &= \boldsymbol{\xi}_{i1}(\boldsymbol{\theta}) = \text{vec}(\boldsymbol{\xi}_{i11}, \boldsymbol{\xi}_{i21}, \dots, \boldsymbol{\xi}_{i1q})^\top = \frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{2}\right), \\ \boldsymbol{\xi}_{i2} &= \boldsymbol{\xi}_{i2}(\boldsymbol{\theta}) = \text{vec}(\boldsymbol{\xi}_{i21}, \boldsymbol{\xi}_{i22}, \dots, \boldsymbol{\xi}_{i2q})^\top = \frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{2}\right) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_{i1j} &= \boldsymbol{\xi}_{i1j}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}}{2}\right), \\ \boldsymbol{\xi}_{i2j} &= \boldsymbol{\xi}_{i2j}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}}{2}\right), \end{aligned}$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, q$. La función de log-verosimilitud del vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$ es

$$l(\boldsymbol{\theta}) = l(\boldsymbol{\beta}, \alpha) = -\frac{N}{2} \log(8\pi) + \mathbf{1}_N^\top \log(\boldsymbol{\xi}_1) - \frac{\boldsymbol{\xi}_2^\top \boldsymbol{\xi}_2}{2}.$$

La estimación por máxima verosimilitud, es decir $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\beta}}^\top, \hat{\alpha}^\top)$ puede obtenerse a través de un procedimiento iterativo, para el cual el punto inicial de estimación sea $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ y $\alpha^{(0)}$, obtenido por mínimos cuadrados, más detalles del proceso de estimación se pueden consultar en [Lemonte, 2013]. En el mismo artículo sin embargo, consideran el test de razón de

máxima verosimilitud para verificar la homogeneidad del parámetro de forma α , el cual no necesariamente se cumple dado que el parámetro de forma α de y_i puede estar relacionado a la i -ésima observación. Para este fin suponen que el modelo homogéneo toma la forma

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\boldsymbol{\epsilon} \sim SN_{q_i}(\alpha_i \mathbf{1}_{q_i}, \mathbf{0}_{q_i}, 2\mathbf{I}_{q_i}), \quad \alpha_i = \alpha k_i, \quad k_i = k(\mathbf{X}_i \boldsymbol{\rho}),$$

donde α es el parámetro de forma, k es una función de peso y $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_d)^\top$ es un vector de parámetro d -dimensional que indica la heterogeneidad de α . Luego la función de log- verosimilitud para el vector de parámetros $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\rho}^\top, \boldsymbol{\beta}^\top, \alpha)^\top$, tiene la forma

$$l(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{N}{2} \log(8\pi) + \mathbf{1}_N^\top \log(\boldsymbol{\xi}_1^*) - \frac{\boldsymbol{\xi}_2^* \boldsymbol{\xi}_2^*}{2},$$

$$\boldsymbol{\xi}_1^* = \boldsymbol{\xi}_1^*(\boldsymbol{\theta}) = \text{vec}(\boldsymbol{\xi}_{11}^*, \boldsymbol{\xi}_{21}^*, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n1}^*),$$

$$\boldsymbol{\xi}_2^* = \boldsymbol{\xi}_2^*(\boldsymbol{\theta}) = \text{vec}(\boldsymbol{\xi}_{12}^*, \boldsymbol{\xi}_{22}^*, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n2}^*),$$

$$\boldsymbol{\xi}_{i1}^* = \boldsymbol{\xi}_{i1}^*(\boldsymbol{\theta}) = \text{vec}(\boldsymbol{\xi}_{i11}^*, \boldsymbol{\xi}_{i21}^*, \dots, \boldsymbol{\xi}_{i1q}^*)^{\top*} = \frac{2}{\alpha k_i} \cosh\left(\frac{\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}}{2}\right),$$

$$\boldsymbol{\xi}_{i2}^* = \boldsymbol{\xi}_{i2}^*(\boldsymbol{\theta}) = \text{vec}(\boldsymbol{\xi}_{i21}^*, \boldsymbol{\xi}_{i22}^*, \dots, \boldsymbol{\xi}_{i2q}^*)^{\top*} = \frac{2}{\alpha k_i} \sinh\left(\frac{\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}}{2}\right),$$

con

$$\boldsymbol{\xi}_{i1j}^* = \boldsymbol{\xi}_{i1j}^*(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2}{\alpha k_i} \cosh\left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}'_{ij} \boldsymbol{\beta}}{2}\right),$$

$$\boldsymbol{\xi}_{i2j}^* = \boldsymbol{\xi}_{i2j}^*(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2}{\alpha k_i} \sinh\left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}'_{ij} \boldsymbol{\beta}}{2}\right),$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, q_i$. Se establecen las hipótesis para la prueba de homogeneidad del parámetro α como sigue

$$H_0 : \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0,$$

$$H_1 : \boldsymbol{\rho} \neq \boldsymbol{\rho}_0,$$

donde $\boldsymbol{\rho}$ es un vector de escalares tal que $k(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\rho}_0) = 1$. La representación de los estimadores de máxima verosimilitud para las hipótesis H_0 y H_1 es

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\rho}_0^\top, \tilde{\boldsymbol{\beta}}^\top, \tilde{\alpha})^\top \quad \text{y} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\rho}^\top, \hat{\boldsymbol{\beta}}^\top, \hat{\alpha})^\top,$$

la razón de verosimilitud a fin de probar la hipótesis nula es

$$\omega = 2l(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - l(\tilde{\boldsymbol{\theta}}),$$

bajo condiciones de regularidad y considerando H_0 , ω converge en distribución a χ_d^2 , lo que permite establecer valores críticos. Además

$$\omega = 2 \left\{ \mathbf{1}_N^\top [\log(\hat{\boldsymbol{\xi}}_1^*) - \log(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_1^*) - \frac{1}{2} [\hat{\boldsymbol{\xi}}_2^{*'} \hat{\boldsymbol{\xi}}_2^* - \tilde{\boldsymbol{\xi}}_2^{*'} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_2^*]] \right\},$$

donde, $\hat{\boldsymbol{\xi}}_1^* = \boldsymbol{\xi}_1^*(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, $\hat{\boldsymbol{\xi}}_2^* = \boldsymbol{\xi}_2^*(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_1^* = \boldsymbol{\xi}_1^*(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$ y $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_2^* = \boldsymbol{\xi}_2^*(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$.

Cabe agregar que el artículo de [Lemonte, 2013] aborda las técnicas de diagnóstico que son empleadas para identificar observaciones influyentes, igualmente se estudia la influencia local en las estimaciones de los parámetros bajo diferentes esquemas de perturbación.

Más tarde en [Martínez-Flórez et al., 2017], se define la versión asimétrica del modelo de regresión basado en el modelo multivariado antes enunciando, que será tema de la siguiente subsección.

3.7.2. Modelo de regresión asimétrico Birnbaum Saunders

Considere n variables aleatorias independientes y_1, y_2, \dots, y_n que han sido recolectadas y el número de respuestas medidas en cada observación es q . El modelo log-Lineal BS generalizado es

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, y_{iq})^\top$ es un vector $q \times 1$ de variables respuesta observadas, y y_{ij} es el tiempo de log-sobrevivencia correspondiente a la j -ésima unidad experimental. Suponga que hay p variables explicativas X_1, X_2, \dots, X_p donde $\mathbf{X}_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{iq})$ es una matriz asociada a la i -ésima respuesta observada y_i , con $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij1}, \dots, x_{ijp})^\top$, para $j = 1, 2, \dots, q$ un vector de variables explicativas de dimensión p . Las matrices de valores observados son $\mathbf{y} = \text{vec}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$, con dimensión $nq \times 1$, $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^\top, \dots, \mathbf{X}_n^\top)$ de dimensión $nq \times p$ y $\text{vec}(\cdot)$ representa el operador vec que transforma una matriz en un vector columna.

$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)'$ es un vector $p \times 1$ de parámetros desconocidos y $\boldsymbol{\epsilon}_i = (\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}, \dots, \epsilon_{ijp})$ es un vector $q \times 1$ de errores tal que se distribuye $SMVSHN_q(\alpha \mathbf{1}_q, \mathbf{0}_q, 2\mathbf{I}_q, \lambda)$ y $\mathbf{0}_q = (0, 0, 0, \dots, 0)^\top$ es un vector de ceros de $q \times 1$. Por tanto $\mathbf{y}_i \sim SMVSHN_q(\alpha \mathbf{1}_q, \mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta}, 2\mathbf{I}_q, \lambda)$.

3.7.3. Estimación

En cuanto al proceso de estimación para $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, q$ y $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \boldsymbol{\beta}', \lambda)$, entonces la función de log-verosimilitud para el vector $\boldsymbol{\theta}$, es

$$l_i(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{q}{2} \log(8\pi) + \mathbf{1}_q^\top \log(\boldsymbol{\xi}_{i1}^\top) - \frac{\boldsymbol{\xi}_{i2}^\top \boldsymbol{\xi}_{i2}}{2} + \mathbf{1}_q^\top \log(\boldsymbol{\xi}_{i3}^\top)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\xi}_1 &= \boldsymbol{\xi}_1(\boldsymbol{\theta}) = \text{vec}(\boldsymbol{\xi}_{11}, \boldsymbol{\xi}_{21}, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n1}), & \boldsymbol{\xi}_{i1} &= \text{vec}(\xi_{i11}, \xi_{i12}, \dots, \xi_{i1q_i})^\top \\
 \boldsymbol{\xi}_2 &= \boldsymbol{\xi}_2(\boldsymbol{\theta}) = \text{vec}(\boldsymbol{\xi}_{12}, \boldsymbol{\xi}_{22}, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n2}), & \boldsymbol{\xi}_{i2} &= \text{vec}(\xi_{i21}, \xi_{i22}, \dots, \xi_{i2q_i})^\top \\
 \boldsymbol{\xi}_3 &= \boldsymbol{\xi}_3(\boldsymbol{\theta}) = \text{vec}(\boldsymbol{\xi}_{13}, \boldsymbol{\xi}_{23}, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n3}), & \boldsymbol{\xi}_{i3} &= \text{vec}(\xi_{i31}, \xi_{i32}, \dots, \xi_{i3q_i})^\top \\
 \xi_{i1j} &= \xi_{i1j}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2 \cosh \left[(y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}) / 2 \right]}{\alpha}, & \xi_{i2j} &= \xi_{i2j}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2 \sinh \left[(y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}) / 2 \right]}{\alpha} \\
 \xi_{i3j} &= \xi_{i3j}(\boldsymbol{\theta}) = \Phi \left(\lambda \prod_{i=1}^n \xi_{i2j} \right).
 \end{aligned}$$

Los estimadores de máxima verosimilitud son hallados utilizando Newton-Raphson.

Al igual que en el artículo de [Lemonte, 2013], es necesario verificar el supuesto de homogeneidad del parámetro α , verificado a través de la razón de verosimilitud. El modelo homogéneo toma la forma

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad \boldsymbol{\epsilon}_i \sim SHN_q(\alpha_i \mathbf{1}_q, 0_q, 2\mathbf{I}_q), \quad \alpha_i = \alpha k_i, \quad k_i = k(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\rho})$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, como en la anterior sección k es la función de peso y $\boldsymbol{\rho}$ es un vector d -dimensional que indica la homogeneidad. El vector de parámetros a estimar ahora tiene la forma

$$l(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{N}{2} \log(8\pi) + \mathbf{1}_N^\top \log(\boldsymbol{\xi}_1^*) - \frac{\boldsymbol{\xi}_2^{\top*} \boldsymbol{\xi}_2^{\top*}}{2} + \mathbf{1}_N^\top \log(\boldsymbol{\xi}_3^*).$$

con

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\xi}_1^* &= \boldsymbol{\xi}_1^*(\boldsymbol{\theta}) = \text{vec}(\boldsymbol{\xi}_{11}^*, \boldsymbol{\xi}_{21}^*, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n1}^*) \\
 \boldsymbol{\xi}_2^* &= \boldsymbol{\xi}_2^*(\boldsymbol{\theta}) = \text{vec}(\boldsymbol{\xi}_{12}^*, \boldsymbol{\xi}_{22}^*, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n2}^*) \\
 \boldsymbol{\xi}_3^* &= \boldsymbol{\xi}_3^*(\boldsymbol{\theta}) = \text{vec}(\boldsymbol{\xi}_{13}^*, \boldsymbol{\xi}_{23}^*, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n3}^*) \\
 \boldsymbol{\xi}_{i1}^* &= \text{vec}(\boldsymbol{\xi}_{i11}^*, \boldsymbol{\xi}_{i21}^*, \dots, \boldsymbol{\xi}_{i1q}^*)'^* = \frac{2}{\alpha k_i} \cosh \left(\frac{\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_{ij} \boldsymbol{\theta}}{2} \right) \\
 \boldsymbol{\xi}_{i2}^* &= \text{vec}(\boldsymbol{\xi}_{i21}^*, \boldsymbol{\xi}_{i22}^*, \dots, \boldsymbol{\xi}_{i2q}^*)'^* = \frac{2}{\alpha k_i} \sinh \left(\frac{\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_{ij} \boldsymbol{\theta}}{2} \right) \\
 \boldsymbol{\xi}_{i3}^* &= \text{vec}(\boldsymbol{\xi}_{i31}^*, \boldsymbol{\xi}_{i32}^*, \dots, \boldsymbol{\xi}_{i3q}^*)'^* = \Phi \left(\lambda \prod_{i=1}^n \xi_{i2}^* \right).
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\xi}_{i1j}^* &= \boldsymbol{\xi}_{i1j}^*(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2}{\alpha k_i} \cosh \left(\frac{\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{x}'_{ij} \boldsymbol{\theta}}{2} \right) \\
 \boldsymbol{\xi}_{i2j}^* &= \boldsymbol{\xi}_{i2j}^*(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2}{\alpha k_i} \sinh \left(\frac{\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{x}'_{ij} \boldsymbol{\theta}}{2} \right) \\
 \boldsymbol{\xi}_{i3j}^* &= \boldsymbol{\xi}_{i3j}^*(\boldsymbol{\theta}) = \Phi \left(\lambda \prod_{i=1}^n \xi_{i2j}^* \right).
 \end{aligned}$$

A continuación se presentan la hipótesis nula y alternativa de la prueba de homogeneidad

$$H_0 : \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0$$

$$H_1 : \boldsymbol{\rho} \neq \boldsymbol{\rho}_0$$

donde $\boldsymbol{\rho}$ es un vector de escalares tal que $k(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\rho}_0) = 1$, obtenemos el estadístico de prueba

$$w = 2 \left\{ \mathbf{1}_N^\top [\log(\hat{\boldsymbol{\xi}}_1^*) - \log(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_1^*) - \frac{1}{2} [\hat{\boldsymbol{\xi}}_2^{*\top} \hat{\boldsymbol{\xi}}_2^* - \tilde{\boldsymbol{\xi}}_2^{*\top} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_2^*]] + \mathbf{1}_N^\top [\log(\hat{\boldsymbol{\xi}}_3^*) - \log(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_3^*)] \right\},$$

donde $\hat{\boldsymbol{\xi}}_1^* = \boldsymbol{\xi}_1^*(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, $\hat{\boldsymbol{\xi}}_2^* = \boldsymbol{\xi}_2^*(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, $\hat{\boldsymbol{\xi}}_3^* = \boldsymbol{\xi}_3^*(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_1^* = \boldsymbol{\xi}_1^*(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_2^* = \boldsymbol{\xi}_2^*(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_3^* = \boldsymbol{\xi}_3^*(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$.

Bajo condiciones de regularidad ω converge en distribución a χ_d^2 lo cual permite la realización de la prueba.

En el artículo de [Martínez-Flórez et al., 2017], podemos ver por medio de dos ilustraciones a datos reales el buen grado de ajuste del modelo de regresión, comparado con los modelos de [Kundu, 2015], el cual ha utilizado cópulas para generar los modelos multivariado y el modelo de [Lemonte, 2013], este nuevo modelo es muy interesante para nuestra propuesta pues es una alternativa flexible para extender el modelo de regresión al caso bivariado.

4 Metodología

La presente tesis corresponde a un proyecto mayormente teórico el cual definió la distribución Bivariada Birnbaum Saunders Unitaria (BVUBS) y la distribución Bivariada Sinh-Normal Birnbaum Saunders Unitaria (BVUSHN), estudiando las principales características de la función de densidad conjunta como son: funciones marginales y condicionales, momentos, estimación por máxima verosimilitud y matrices de información.

Además, se desarrolló la extensión multivariada del modelo de regresión donde se deriva la matriz de información de Fisher, un estudio de simulación que permite observar el comportamiento de las estimaciones por máxima verosimilitud y dos aplicaciones con conjuntos de datos reales mostrando el buen ajuste de los modelo. Conjuntamente al presente trabajo de maestría, la siguiente tesis formó parte del desarrollo del artículo [Martínez-Flórez et al., 2023], enfocado en la distribución Sinh-Normal Unitaria multivariada, sus principales propiedades, correlación, estudio de inferencia estadística, el modelo de regresión asociado, estudio de simulación y dos aplicaciones a datos reales evidenciando el buen ajuste de los datos.

5 Resultados

5.1. Distribución Bivariada Birnbaum Saunders Unitaria

En el marco teórico se definió la distribución UBS y algunas de sus propiedades tomando como referencia los artículos de [Mazucheli et al., 2018a] y [Mazucheli et al., 2021], basados en dicha distribución y el concepto de distribuciones condicionalmente especificadas se establece la distribución conjunta para el caso bivariado unitario. Considere la función de densidad de 2 variables aleatorias Z_1, Z_2 tal que para todo z_1 y $z_2 \in \mathbb{R}$

$$Z_2|Z_1 = z_1 \sim SN(\lambda Z_1) \quad \text{y} \quad Z_1|Z_2 = z_2 \sim SN(\lambda Z_2).$$

Según la ecuación 3-14 obtenida en [Lemonte et al., 2015b], la expresión para la función de densidad conjunta es

$$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = 2\phi(z_1)\phi(z_2)\Phi(\lambda z_1 z_2), \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (5-1)$$

Tomemos la transformación X_j , con $j = 1, 2$, como sigue

$$X_j = \exp \left(-\beta_j \left[\frac{\alpha_j Z_j}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_j Z_j}{2} \right)^2 + 1} \right]^2 \right). \quad (5-2)$$

Cuya función inversa es $Z_j = \frac{1}{\alpha_j} \left[\left(\frac{-\log X_j}{\beta_j} \right)^{1/2} - \left(\frac{-\log X_j}{\beta_j} \right)^{-1/2} \right]$, luego aplicando la transformación y dada la ecuación 5-1, la función bivariada $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ es

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = 2\phi(a_1^*)\phi(a_2^*)\Phi(\lambda a_1^* a_2^*)A_1^*A_2^*, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2, \quad (5-3)$$

donde

$$a_1^* = a_1(\alpha_1, \beta_1) = \frac{1}{\alpha_1} \left[\left(\frac{-\log x_1}{\beta_1} \right)^{1/2} - \left(\frac{\beta_1}{-\log x_1} \right)^{1/2} \right],$$

$$a_2^* = a_2(\alpha_2, \beta_2) = \frac{1}{\alpha_2} \left[\left(\frac{-\log x_2}{\beta_2} \right)^{1/2} - \left(\frac{\beta_2}{-\log x_2} \right)^{1/2} \right],$$

$$A_1^* = A_1(\alpha_1, \beta_1) = \frac{1}{2\alpha_1 x_1} \left[\left(\frac{\beta_1}{-\log(x_1)} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta_1}{-\log(x_1)} \right)^{3/2} \right] = \frac{(-\log x_1)^{-3/2}(-\log x_1 + \beta_1)}{2\alpha_1 x_1 \sqrt{\beta_1}},$$

$$A_2^* = A_2(\alpha_2, \beta_2) = \frac{1}{2\alpha_2 x_2} \left[\left(\frac{\beta_2}{-\log(x_2)} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta_2}{-\log(x_2)} \right)^{3/2} \right] = \frac{(-\log x_2)^{-3/2}(-\log x_2 + \beta_2)}{2\alpha_2 x_2 \sqrt{\beta_2}}.$$

Por tanto, $(X_1, X_2) \sim BVUBS(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \lambda)$ si cumple la expresión 5-3.

5.1.1. Propiedades

1. Una vez se obtiene la función de densidad bivariada, observe que el modelo es independiente, análogo al proceso en el artículo [Díaz-García and Domínguez-Molina, 2006]. En efecto, para $\lambda = 0$

$$\begin{aligned}
f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= 2\phi(a_1^*)\phi(a_2^*)\Phi(0)A_1^*A_2^* \\
&= \phi(a_1^*)\phi(a_2^*)A_1^*A_2^* \\
&= \frac{(-\log x_1)^{-3/2}(-\log x_1 + \beta_1)}{2\alpha_1 x \sqrt{\beta_1}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{\frac{1}{\alpha_1} \left[\left(\frac{-\log x_1}{\beta_1} \right)^{1/2} - \left(\frac{\beta_1}{-\log x_1} \right)^{1/2} \right]^2}{2} \right] \right) \\
&\quad \times \frac{(-\log x_2)^{-3/2}(-\log x_2 + \beta_2)}{2\alpha_2 x \sqrt{\beta_2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{\frac{1}{\alpha_2} \left[\left(\frac{-\log x_2}{\beta_2} \right)^{1/2} - \left(\frac{\beta_2}{-\log x_2} \right)^{1/2} \right]^2}{2} \right] \right) \\
&= \frac{(-\log x_1)^{-3/2}(-\log x_1 + \beta_1)}{2\alpha_1 x \sqrt{2\beta_1 \pi}} \exp \left(-\frac{1}{2\alpha_1^2} \left[\left(\frac{-\log x_1}{\beta_1} \right) + \left(\frac{\beta_1}{-\log x_1} \right) - 2 \right] \right) \\
&\quad \times \frac{(-\log x_2)^{-3/2}(-\log x_2 + \beta_2)}{2\alpha_2 x \sqrt{2\beta_2 \pi}} \exp \left(-\frac{1}{2\alpha_2^2} \left[\left(\frac{-\log x_2}{\beta_2} \right) + \left(\frac{\beta_2}{-\log x_2} \right) - 2 \right] \right) \\
&= f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2).
\end{aligned}$$

2. Si $(X_1, X_2) \sim BVUBS(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \lambda)$ entonces $X_j \sim UBS(\alpha_j, \beta_j)$ para $j = 1, 2$. En efecto, dado que empleando la transformación $\exp(-X)$ la distribución es Birnbaum Saunders.
3. La densidad condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$ es

$$\begin{aligned}
f_{X_1|X_2}(x_1|x_2 = x_2) &= \frac{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \frac{2\phi(a_1^*)\phi(a_2^*)\Phi(\lambda a_1^* a_2^*)A_1^*A_2^*}{\phi(a_2^*)A_2^*} \\
&= 2\phi(a_1^*)\Phi(\lambda a_1^* a_2^*)A_1^*
\end{aligned}$$

análogamente,

$$f_{X_2|X_1}(x_2|X_1 = x_1) = 2\phi(a_2^*)\Phi(\lambda a_1^* a_2^*)A_2^*.$$

4. Teniendo en cuenta la probabilidad condicional a continuación, se puede calcular la probabilidad acumulada.

$$f_{X_1|X_2}(x_1|X_2 = x_2) = 2\phi(a_1^*)\Phi(\lambda a_1^* a_2^*)A_1^*$$

$$Pr(X_1 \leq x_1|X_2 = x_2) = 2 \int_0^{x_1} \phi(a_t^*)\Phi(\lambda a_t^* a_2^*)A_t^* dt$$

Generando el cambio de variable con $a_t^* = \lambda a_2 a_t$ y $du = \lambda a_2^* (a_t^*)' dt$,

$$\begin{aligned} Pr(X_1 \leq x_1 | X_2 = x_2) &= \frac{2}{\lambda a_2^*} \int_{-\infty}^{a_1^*} \phi(u) \Phi\left(\frac{u}{\lambda a_2^*}\right) du \\ &= \int_{-\infty}^{a_1^*} \frac{\operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right) e^{-\frac{x^2}{2a_2^{*2}t^2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi a^*} - 2\lambda\sigma} dx. \end{aligned}$$

5. Otra propiedad esta asociada a la correlación, esta puede ser negativa o positiva dependiendo del signo que tome λ , de acuerdo a la siguiente ecuación

$$\rho(X_1, X_2) = \operatorname{signo}(\lambda) \times \frac{U(3/2, 2, 1/(2\lambda^2))}{2\lambda^2\sqrt{\pi}}.$$

A continuación se observan las gráficas de cotorno de la distribución BVUBS, en las figuras 5-1 a 5-3 notamos que los gráficos pueden ser unimodales o bimodales dependiendo de los valores de λ .

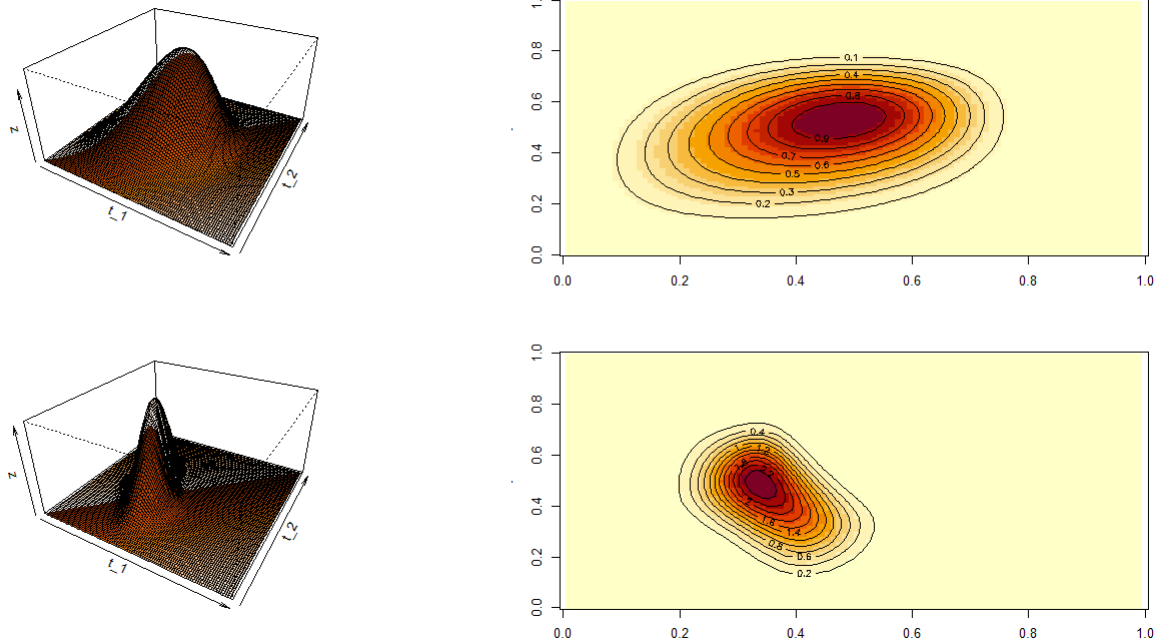


Figura 5-1: Densidades y gráficos de contorno de izquierda a derecha $BVUBS(0,5, 0,5, 1, 1, 0,5)$ y $BVUBS(0,2, 0,4, 1, 1, -1)$

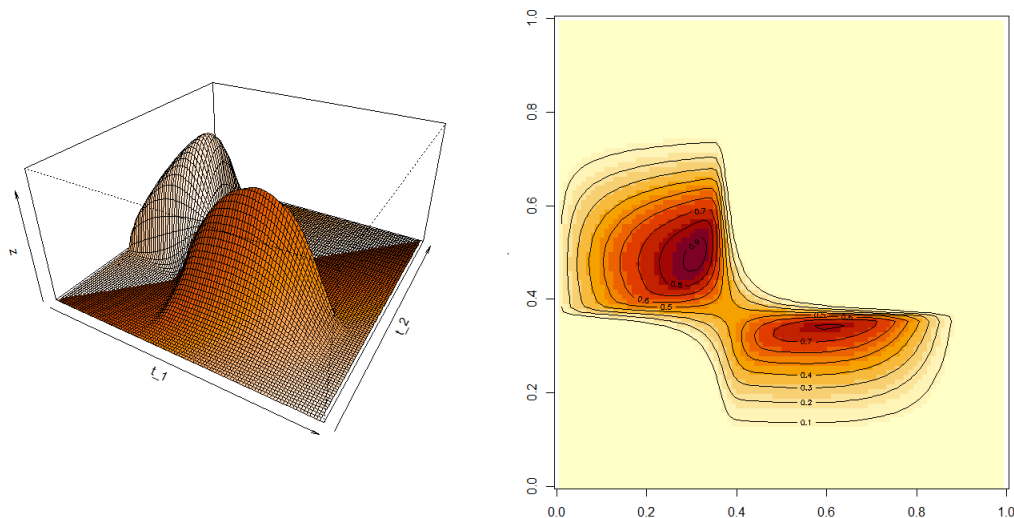


Figura 5-3: Densidad y gráfico de contorno de BVUBS(0.85,0.45,1,1,-15)

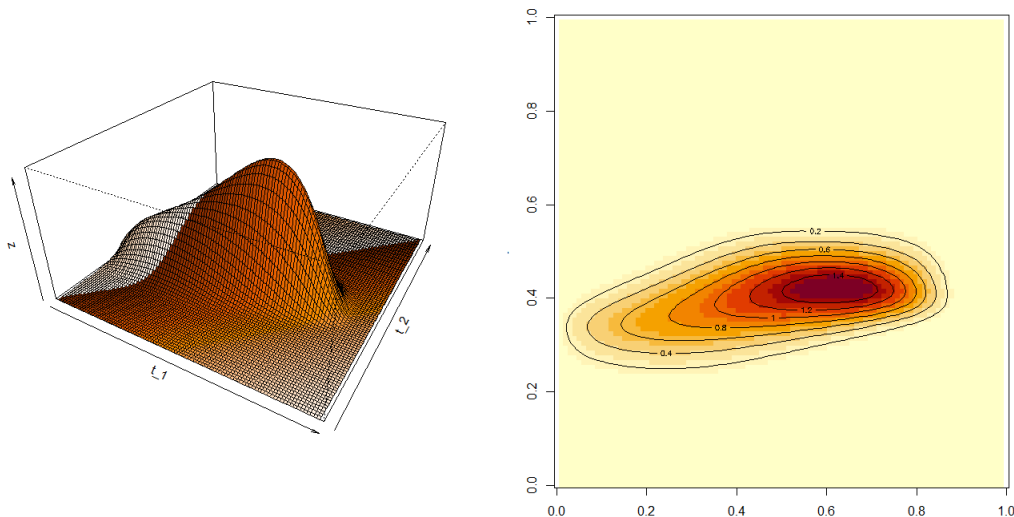


Figura 5-2: Densidad y gráfico de contorno de BVUBS(0.8,0.2,1,1,-1.2)

Observemos como se comporta la distribución si se multiplica por un escalar, para ello consideremos el vector aleatorio $(X_1, X_2) \sim BVUBS(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \lambda)$, luego supongamos $k_1 X_1$, dado que la transformación para la distribución UBS es

$$-\log(X_1) = \beta_1 \left[\frac{\alpha_1 Z_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_1 Z_1}{2}\right)^2 + 1} \right]^2,$$

Despejando para X_1 y aunque podemos describir la función de densidad conjunta notemos

que

$$(k_1 X_1) = k_1 \exp \left[-\beta_1 \left[\frac{\alpha_1 Z_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_1 Z_1}{2} \right)^2 + 1} \right]^2 \right].$$

Luego, no se puede llegar a una forma explícita en términos de los parámetros por el factor exponencial resultado del despeje, es decir no podemos afirmar que los parámetros se expande k_1 veces, notemos además que esta propiedad si está presente en la distribución BVUBS.

5.1.2. Media y varianza de la distribución BVUBS

De otro lado, como las distribuciones marginales son UBS, entonces la media y la varianza de X_1 y X_2 y en base a 3-9, con $j=1,2$

$$\mathbb{E}(X_j) = \exp \left[\frac{-(2\alpha_j^2 \beta_j + 1)^{1/2} - 1}{\alpha_j^2} \right] \frac{1}{2(2\alpha_j^2 \beta_j + 1)} \left[2\alpha_j^2 \beta_j + (2\alpha_j^2 \beta_j + 1)^{1/2} + 1 \right]. \quad (5-4)$$

Una vez calculado el valor esperado es posible obtener una expresión para la varianza, donde

$$\mathbb{E}(X_j^2) = \exp \left[\frac{-(4\alpha_j^2 \beta_j + 1)^{1/2} - 1}{\alpha_j^2} \right] \frac{1}{2(4\alpha_j^2 \beta_j + 1)} \left[4\alpha_j^2 \beta_j + (4\alpha_j^2 \beta_j + 1)^{1/2} + 1 \right], \text{ por tanto}$$

$$\begin{aligned} V(X_j) &= \mathbb{E}(X_j^2) - [\mathbb{E}(X_j)]^2 \\ &= \exp \left[\frac{-(4\alpha_j^2 \beta_j + 1)^{1/2} - 1}{\alpha_j^2} \right] \frac{1}{2(4\alpha_j^2 \beta_j + 1)} \left[4\alpha_j^2 \beta_j + (4\alpha_j^2 \beta_j + 1)^{1/2} + 1 \right] \\ &\quad - \left[\exp \left[\frac{-(2\alpha_j^2 \beta_j + 1)^{1/2} - 1}{\alpha_j^2} \right] \frac{1}{2(2\alpha_j^2 \beta_j + 1)} \left[2\alpha_j^2 \beta_j + (2\alpha_j^2 \beta_j + 1)^{1/2} + 1 \right] \right]^2. \quad (5-5) \end{aligned}$$

5.1.3. Estimación e inferencia

Sea $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ muestra aleatoria de la distribución BVUBS($\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \lambda$), donde

$$\mathbf{x}_i = [x_{1i} \ x_{2i}]^T; \quad \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2]^T; \quad \boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2]^T; \quad \boldsymbol{\theta} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \lambda]^T. \quad (5-6)$$

Por tanto, la función de log-verosimilitud para el parámetro $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{\beta}^T, \lambda)$, es

$$\begin{aligned}
l(\boldsymbol{\theta}) &= \log \prod_{i=1}^n f_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{x}_i|\boldsymbol{\theta}) \\
&= \log \prod_{i=1}^n 2\phi(a_{1i}^*)\phi(a_{2i}^*)\Phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*) A_{1i}^* A_{2i}^* \\
&= \sum_{i=1}^n \log(2) + \sum_{i=1}^n (\log(\phi(a_{1i}^*)) + \log(\phi(a_{2i}^*))) + \sum_{i=1}^n \log(\Phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)) + \sum_{i=1}^n \log(A_{1i}^* A_{2i}^*) \\
&\cong -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_{1i}^{*2} + a_{2i}^{*2}) + \sum_{i=1}^n \log(\Phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)) + \sum_{i=1}^n \log(A_{1i}^*) + \sum_{i=1}^n \log(A_{2i}^*) \\
&\cong -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_{1i}^{*2} + a_{2i}^{*2}) + \sum_{i=1}^n \log(\Phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)) + \sum_{i=1}^n \log((-\log(x_{1i}))^{-3/2}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \log(-\log(x_{1i}) + \beta_1) - \sum_{i=1}^n \log(2\alpha_1) - \sum_{i=1}^n \log(x_{1i}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(\beta_1) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \log((-\log(x_{2i}))^{-3/2}) + \sum_{i=1}^n \log(-\log(x_{2i}) + \beta_2) - \sum_{i=1}^n \log(2\alpha_2) - \sum_{i=1}^n \log(x_{2i}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(\beta_2) \\
&\cong -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_{1i}^{*2} + a_{2i}^{*2}) + \sum_{i=1}^n \log(\Phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)) + \sum_{i=1}^n \log(-\log(x_{1i}) + \beta_1) - \sum_{i=1}^n \log(\alpha_1) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(\beta_1) + \sum_{i=1}^n \log(-\log(x_{2i}) + \beta_2) - \sum_{i=1}^n \log(\alpha_2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(\beta_2) \\
&= -n \left[\log(\alpha_1) + \frac{1}{2} \log(\beta_1) \right] - n \left[\log(\alpha_2) + \frac{1}{2} \log(\beta_2) \right] + \sum_{i=1}^n \log(-\log(x_{1i}) + \beta_1) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \log(-\log(x_{2i}) + \beta_2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_{1i}^{*2} + a_{2i}^{*2}) + \sum_{i=1}^n \log(\Phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)).
\end{aligned}$$

Donde a_{ji}^* y A_{ji}^* se definen para $j = 1, 2$., como

$$\begin{aligned}
a_{ji}^* &= a_{ji}(\alpha_j, \beta_j) = \frac{1}{\alpha_j} \left[\left(\frac{-\log(x_{ji})}{\beta_j} \right)^{1/2} - \left(\frac{\beta_j}{-\log(x_{ji})} \right)^{1/2} \right], \\
A_{ji}^* &= A_{ji}(\alpha_j, \beta_j) = \frac{(-\log(x_{ji}))^{-3/2} (-\log(x_{ji}) + \beta_j)}{2\alpha_j x_{ji} \sqrt{\beta_j}}.
\end{aligned}$$

Luego, tomamos las derivadas parciales de la función de log-verosimilitud de la ecuación anterior respecto de los parámetros, junto con las definiciones en la ecuación 5-3

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (2a_{1i}^*) \left(-\frac{1}{\alpha_1^2} \right) \left[\left(\frac{-\log(x_{1i})}{\beta_1} \right)^{1/2} - \left(\frac{\beta_1}{-\log(x_{1i})} \right)^{1/2} \right] + \sum_{i=1}^n \frac{\phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)}{\Phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)} \lambda a_{2i}^* \\ &\quad \times \left(-\frac{1}{\alpha_1^2} \right) \left[\left(\frac{-\log(x_{1i})}{\beta_1} \right)^{1/2} - \left(\frac{\beta_1}{-\log(x_{1i})} \right)^{1/2} \right] - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_1} \\ &= \frac{1}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n a_{1i}^{2*} - \frac{\lambda}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n \frac{a_{1i}^* a_{2i}^* \phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)}{\Phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)} - \frac{n}{\alpha_1}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{\alpha_2} \sum_{i=1}^n a_{2i}^{2*} - \frac{\lambda}{\alpha_2} \sum_{i=1}^n \frac{a_{1i}^* a_{2i}^* \phi(a_{1i}^* a_{2i}^*)}{\Phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)} - \frac{n}{\alpha_2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1} &= -\frac{n}{2\beta_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{-\log(x_{1i}) + \beta_1} - \sum_{i=1}^n a_{1i}^* \left[\frac{1}{2\alpha_1} \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} + \frac{\beta_1^{-1/2}}{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda a_{2i}^* \phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)}{\Phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)} \times \left[\frac{1}{2\alpha_1} \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} + \frac{\beta_1^{-1/2}}{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_2} &= -\frac{n}{2\beta_2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{-\log(x_{2i}) + \beta_2} - \sum_{i=1}^n a_{2i}^* \left[\frac{1}{2\alpha_2} \left(\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} + \frac{\beta_2^{-1/2}}{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right) \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda a_{1i}^* \phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)}{\Phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)} \times \left[\frac{1}{2\alpha_2} \left(\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} + \frac{\beta_2^{-1/2}}{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)}{\Phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)} a_{1i}^* a_{2i}^*.$$

Para obtener el estimador de máxima verosimilitud

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \lambda)^\top,$$

considere el sistema de ecuaciones descrito en 5.1.3, para resolver este sistema se recurre a métodos iterativos, por ejemplo Newton-Raphson, el cual requiere de valores iniciales para realizar el calculo, dichos valores pueden ser los valores esperados de los parámetros.

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1} = \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_2} = \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda} = 0.$$

5.1.4. Matriz de varianza-covarianza de modelo bivariado

La presente sección tiene como finalidad calcular la matriz de varianzas-covarianzas, para ello se calcula la matriz de información de Fisher $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ y se calcula la inversa, es decir, $\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{\theta}$. En primer lugar se calcula la matriz Hessiana $\ddot{\mathbf{L}}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}$,

$$\ddot{\mathbf{L}}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}} = -\frac{\partial^2 l^2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{L}}_{\alpha\alpha} & \ddot{\mathbf{L}}_{\alpha\beta} & \ddot{\mathbf{L}}_{\alpha\lambda} \\ \ddot{\mathbf{L}}_{\alpha\beta}^\top & \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\beta} & \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\lambda} \\ \ddot{\mathbf{L}}_{\alpha\lambda}^\top & \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\lambda}^\top & \ddot{\mathbf{L}}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{L}}_{\lambda\lambda} &= \frac{\partial^2 l^2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda \partial \lambda^\top} = \sum_{i=1}^n \frac{(-\lambda(a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2}) \phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*) \Phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*) - [\phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)]^2) (a_{1i}^* a_{2i}^*)}{[\Phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)]^2} a_{1i}^* a_{2i}^* \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{\phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)}{\Phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)} \left(\lambda a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} + \frac{\phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)}{\Phi(\lambda a_{1i}^* a_{2i}^*)} a_{1i}^* a_{2i}^* \right) a_{1i}^* a_{2i}^* \\ &= -\sum_{i=1}^n w_1^* \left(\lambda a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} + w_1^* a_{1i}^* a_{2i}^* \right) a_{1i}^* a_{2i}^*. \end{aligned}$$

$$\ddot{\mathbf{L}}_{\alpha_1\lambda} = \frac{\partial^2 l^2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1 \partial \lambda^\top} = \frac{1}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n \left[a_{2i}^* a_{1i}^* \left[w_1^* \left(\lambda^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} - 1 \right) + w_1^2 \lambda a_{1i}^* a_{2i}^* \right] \right].$$

$$\ddot{\mathbf{L}}_{\alpha_2\lambda} = \frac{\partial^2 l^2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_2 \partial \lambda^\top} = \frac{1}{\alpha_2} \sum_{i=1}^n \left[a_{1i}^* a_{2i}^* \left[w_2^* \left(\lambda^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} - 1 \right) + w_2^2 \lambda a_{1i}^* a_{2i}^* \right] \right].$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{L}}_{\beta_1\lambda} &= \frac{\partial^2 l^2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1 \partial \lambda^\top} = \frac{1}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n a_{2i}^* a_{1i}^* \left[w_1^* \left[\lambda^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} + \frac{1}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} + \frac{\beta_1^{-1/2}}{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{w_1^{*2} \lambda a_{1i}^{*2} a_{2i}^*}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} + \frac{\beta_1^{-1/2}}{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{L}}_{\beta_2\lambda} &= \frac{\partial^2 l^2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_2 \partial \lambda^\top} = \frac{1}{\alpha_2} \sum_{i=1}^n a_{2i}^* a_{1i}^* \left[w_2^* \left[\lambda^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} + \frac{1}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} + \frac{\beta_2^{-1/2}}{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{w_2^{*2} \lambda a_{1i}^{*2} a_{2i}^*}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} + \frac{\beta_2^{-1/2}}{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\ddot{\mathbf{L}}_{\alpha_1\alpha_1} = \frac{\partial^2 l^2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1^\top} = \frac{n}{\alpha_1^{*2}} - \frac{3}{\alpha_1^{*2}} \sum_{i=1}^n a_{1i}^{*2} + \frac{2\lambda}{\alpha_1^{*2}} \sum_{i=1}^n w_1 a_{1i}^* a_{2i}^* - \frac{\lambda^3}{\alpha_1^{*2}} \sum_{i=1}^n w_1^* a_{1i}^{*3} a_{2i}^{*3} - \frac{\lambda^2}{\alpha_1^{*2}} \sum_{i=1}^n w_1^{*2} a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2}.$$

$$\ddot{\mathbf{L}}_{\alpha_2\alpha_2} = \frac{\partial^2 l^2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_2^\top} = \frac{n}{\alpha_2^{*2}} - \frac{3}{\alpha_2^{*2}} \sum_{i=1}^n a_{2i}^{*2} + \frac{2\lambda}{\alpha_2^{*2}} \sum_{i=1}^n w_2 a_{1i}^* a_{2i}^* - \frac{\lambda^3}{\alpha_2^{*2}} \sum_{i=1}^n w_2^* a_{1i}^{*3} a_{2i}^{*3} - \frac{\lambda^2}{\alpha_2^{*2}} \sum_{i=1}^n w_2^{*2} a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2}.$$

$$\ddot{\mathbf{L}}_{\alpha_2\alpha_1} = \frac{\partial^2 l^2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1^\top} = \frac{\lambda}{\alpha_1 \alpha_2} \sum_{i=1}^n w_2^* a_{1i}^* a_{2i}^* - \frac{\lambda^2}{\alpha_1 \alpha_2} \sum_{i=1}^n w_2^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} - \frac{\lambda^3}{\alpha_1 \alpha_2} \sum_{i=1}^n w_2^* a_{1i}^{*3} a_{2i}^{*3}.$$

$$\ddot{\mathbf{L}}_{\alpha_1\alpha_2} = \frac{\partial^2 l^2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2^\top} = \frac{\lambda}{\alpha_1 \alpha_2} \sum_{i=1}^n w_1^* a_{1i}^* a_{2i}^* - \frac{\lambda^2}{\alpha_1 \alpha_2} \sum_{i=1}^n w_1^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} - \frac{\lambda^3}{\alpha_1 \alpha_2} \sum_{i=1}^n w_1^* a_{1i}^{*3} a_{2i}^{*3}.$$

$$\begin{aligned}
\ddot{L}_{\beta_1\beta_1} &= \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1 \partial \beta_1^\top} = \frac{n}{2\beta_1^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{4\alpha_1^{*2}} + \lambda^3 a_{2i}^{*3} w_1 a_{1i}^* + w_1^{*2} \lambda^2 a_{2i}^{*2} \right) \left[\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} - \frac{\beta_1^{-1/2}}{(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right]^2 \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \frac{1}{[-\log(x_{1i} + \beta_1)]^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{1i}^*}{4\alpha_1} + \frac{\lambda a_{2i}^* w_1}{4\alpha_1} \right) \left(\frac{3(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{5/2}} - \frac{\beta_1^{-3/2}}{(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right). \\
\ddot{L}_{\beta_2\beta_1} &= \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_2 \partial \beta_1^\top} = \frac{\lambda}{\alpha_2} \sum_{i=1}^n a_{2i}^* a_{1i}^* \left[w_2^* \left[\lambda^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} + \frac{1}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} + \frac{\beta_2^{-1/2}}{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{w_2^{*2} \lambda^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^*}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} + \frac{\beta_2^{-1/2}}{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right) \right]. \\
\ddot{L}_{\beta_1\beta_2} &= \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1 \partial \beta_2^\top} = \frac{\lambda}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n a_{2i}^* a_{1i}^* \left[w_1^* \left[\lambda^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} + \frac{1}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} + \frac{\beta_1^{-1/2}}{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{w_1^{*2} \lambda^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^*}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} + \frac{\beta_1^{-1/2}}{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right]. \\
\ddot{L}_{\beta_2\beta_2} &= \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_2 \partial \beta_2^\top} = \frac{n}{2\beta_2^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{4\alpha_2^{*2}} + \lambda^3 a_{2i}^{*3} w_2 a_{1i}^* + w_2^{*2} \lambda^2 a_{2i}^{*2} \right) \left[\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} - \frac{\beta_2^{-1/2}}{(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right]^2 \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \frac{1}{[-\log(x_{2i} + \beta_2)]^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{2i}^*}{4\alpha_2} + \frac{\lambda a_{1i}^* w_2}{4\alpha_2} \right) \left(\frac{3(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{5/2}} - \frac{\beta_2^{-3/2}}{(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right). \\
\ddot{L}_{\alpha_1\beta_1} &= \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1 \partial \beta_1^\top} = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{a_{1i}^*}{2\alpha_1^2} + \frac{a_{1i}^*}{\alpha_1^2} + \lambda \frac{a_{2i}^*}{2\alpha_1^2} w_1 \lambda^2 (a_{1i}^* a_{2i}^{*2}) + w_1 \lambda \frac{a_{2i}^{*2}}{2\alpha_1^2} a_{1i}^* \right) \left(\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} + \frac{\beta_2^{-1/2}}{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right) \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \lambda a_{2i}^* w_1 \left(\frac{1}{\alpha_1^2} \left(\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} + \frac{\beta_2^{-1/2}}{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right) \right) \\
\ddot{L}_{\alpha_2\beta_1} &= \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_2 \partial \beta_1^\top} = \frac{1}{\alpha_2} \sum_{i=1}^n [a_{2i}^* [w_1^* (\lambda^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} - 1) + w_1^2 \lambda a_{1i}^* a_{2i}^*]] \left[\frac{1}{2\alpha_1} \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} \right) - \left[\frac{\beta_1^{-1/2}}{(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right] \right]. \\
\ddot{L}_{\alpha_1\beta_2} &= \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1 \partial \beta_2^\top} = \frac{1}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n [a_{1i}^* [w_2^* (\lambda^2 a_{2i}^{*2} a_{1i}^{*2} - 1) + w_2^2 \lambda a_{1i}^* a_{2i}^*]] \left[\frac{1}{2\alpha_2} \left(\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} \right) - \left[\frac{\beta_2^{-1/2}}{(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right] \right]. \\
\ddot{L}_{\alpha_2\beta_2} &= \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_2 \partial \beta_2^\top} = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{a_{2i}^*}{2\alpha_2^2} + \frac{a_{2i}^*}{\alpha_2^2} + \lambda \frac{a_{1i}^*}{2\alpha_2^2} w_2 \lambda^2 (a_{1i}^* a_{2i}^{*2}) + w_2 \lambda \frac{a_{1i}^{*2}}{2\alpha_2^2} a_{2i}^* \right) \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} + \frac{\beta_1^{-1/2}}{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \lambda a_{1i}^* w_2 \left(\frac{1}{\alpha_2^2} \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} + \frac{\beta_1^{-1/2}}{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right)
\end{aligned}$$

Una vez hallada la matriz \ddot{L} se procede a hallar el valor esperado para obtener la matriz de información de Fisher, según la matriz 5-7, y los valores esperados se obtienen numéricamente.

$$\boldsymbol{\Sigma}_\theta = -E(\ddot{L}_{\theta\theta}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\alpha} & \boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\beta} & \boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\lambda} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\beta}^\top & \boldsymbol{\Sigma}_{\beta\beta} & \boldsymbol{\Sigma}_{\beta\lambda} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\lambda}^\top & \boldsymbol{\Sigma}_{\beta\lambda}^\top & \boldsymbol{\Sigma}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\lambda\lambda} &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n w_1^* \left(\lambda a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} + w_1^* a_{1i}^* a_{2i}^* \right) a_{1i}^* a_{2i}^* \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[w_1^* \left(\lambda a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} + w_1^* a_{1i}^* a_{2i}^* \right) a_{1i}^* a_{2i}^* \right] \\
\Sigma_{\alpha_1\lambda} &= \frac{1}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[a_{2i}^* a_{1i}^* \left[w_1^* \left(\lambda^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} - 1 \right) + w_1^2 \lambda a_{1i}^* a_{2i}^* \right] \right] \\
&= \frac{1}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[w_1^* \left[1 - \lambda \left(\lambda a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} + w_1^* \right) a_{1i}^* a_{2i}^* \right] a_{1i}^* a_{2i}^* \right] \\
&= \frac{-\lambda}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\left[\left(\lambda a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} + w_1^* \right) a_{1i}^* a_{2i}^* \right] a_{1i}^* a_{2i}^* \right] \\
\Sigma_{\alpha_2\lambda} &= \frac{-\lambda}{\alpha_2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\left[\left(\lambda a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} + w_2^* \right) a_{1i}^* a_{2i}^* \right] a_{1i}^* a_{2i}^* \right] \\
\Sigma_{\beta_1\lambda} &= \frac{1}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[a_{2i}^* a_{1i}^* \left[w_1^* \left[\lambda^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} + \frac{1}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} + \frac{\beta_1^{-1/2}}{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right] \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{w_1^{*2} \lambda a_{1i}^{*2} a_{2i}^*}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} + \frac{\beta_1^{-1/2}}{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right] \right] \\
&= \frac{\lambda}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[a_{2i}^* a_{1i}^* \left[w_1^* \left[a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} + \frac{1}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} + \frac{\beta_1^{-1/2}}{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right] \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{w_1^{*2} \lambda a_{1i}^{*2} a_{2i}^*}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} + \frac{\beta_1^{-1/2}}{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right] \right] \\
\Sigma_{\beta_2\lambda} &= \frac{\lambda}{\alpha_2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[a_{2i}^* a_{1i}^* \left[w_1^* \left[a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} + \frac{1}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} + \frac{\beta_2^{-1/2}}{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right) \right] \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{w_1^{*2} \lambda a_{1i}^{*2} a_{2i}^*}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} + \frac{\beta_2^{-1/2}}{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right) \right] \right] \\
\Sigma_{\alpha_1\alpha_1} &= \mathbb{E} \left[\frac{n}{\alpha_1^{*2}} - \frac{3}{\alpha_1^{*2}} \sum_{i=1}^n a_{1i}^{*2} + \frac{2\lambda}{\alpha_1^{*2}} \sum_{i=1}^n w_1 a_{1i}^* a_{2i}^* - \frac{\lambda^3}{\alpha_1^{*2}} \sum_{i=1}^n w_1^* a_{1i}^{*3} a_{2i}^{*3} - \frac{\lambda^2}{\alpha_{2i}^{*2}} \sum_{i=1}^n w_1^{*2} a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} \right] \\
&= \frac{2n}{\alpha_1^2} + \frac{\lambda^3}{\alpha_1^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[w_1^* a_{1i}^{*3} a_{2i}^{*3} \right] - \frac{\lambda^2}{\alpha_{1i}^{*2}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[w_1^{*2} a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} \right] \\
\Sigma_{\alpha_2\alpha_2} &= \frac{2n}{\alpha_2^2} + \frac{\lambda^3}{\alpha_2^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[w_2^* a_{1i}^{*3} a_{2i}^{*3} \right] - \frac{\lambda^2}{\alpha_{2i}^{*2}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[w_2^{*2} a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\alpha_2 \alpha_1} &= \frac{\lambda^2}{\alpha_1 \alpha_2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [w_2^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2}] - \frac{\lambda^3}{\alpha_1 \alpha_2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [w_2^* a_{1i}^{*3} a_{2i}^{*3}]. \\
\Sigma_{\alpha_1 \alpha_2} &= \frac{\lambda^2}{\alpha_1 \alpha_2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [w_1^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2}] - \frac{\lambda^3}{\alpha_1 \alpha_2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [w_1^* a_{1i}^{*3} a_{2i}^{*3}]. \\
\Sigma_{\beta_1 \beta_1} &= \mathbb{E} \left[\frac{n}{2\beta_1^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{4\alpha_1^{*2}} + \lambda^3 a_{2i}^{*3} w_1 a_{1i}^* + w_1^{*2} \lambda^2 a_{2i}^{*2} \right) \left[\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} - \frac{\beta_1^{-1/2}}{(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right]^2 \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^n \frac{1}{[-\log(x_{1i} + \beta_1)]^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{1i}^*}{4\alpha_1} + \frac{\lambda a_{2i}^* w_1}{4\alpha_1} \right) \left(\frac{3(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{5/2}} - \frac{\beta_1^{-3/2}}{(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right]. \\
\Sigma_{\beta_2 \beta_1} &= \mathbb{E} \left[\frac{\lambda}{\alpha_2} \sum_{i=1}^n a_{2i}^* a_{1i}^* \left[w_2^* \left[\lambda^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} + \frac{1}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} + \frac{\beta_2^{-1/2}}{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{w_2^{*2} \lambda^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^*}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} + \frac{\beta_2^{-1/2}}{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right) \right] \right]. \\
\Sigma_{\beta_1 \beta_2} &= \mathbb{E} \left[\frac{\lambda}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n a_{2i}^* a_{1i}^* \left[w_1^* \left[\lambda^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} + \frac{1}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} + \frac{\beta_1^{-1/2}}{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{w_1^{*2} \lambda^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^*}{2} \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} + \frac{\beta_1^{-1/2}}{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right] \right]. \\
\Sigma_{\beta_2 \beta_2} &= \mathbb{E} \left[\frac{n}{2\beta_2^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{4\alpha_2^{*2}} + \lambda^3 a_{2i}^{*3} w_2 a_{1i}^* + w_2^{*2} \lambda^2 a_{2i}^{*2} \right) \left[\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} - \frac{\beta_2^{-1/2}}{(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right]^2 \right]. \\
\Sigma_{\alpha_1 \beta_1} &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{a_{1i}^*}{2\alpha_2^2} + \frac{a_{1i}^*}{\alpha_1^2} + \lambda \frac{a_{2i}^*}{2\alpha_1^2} w_1 \lambda^2 (a_{1i}^{*3} a_{2i}^{*2}) + w_1^2 \lambda \frac{a_{2i}^{*2}}{2\alpha_1^2} a_{1i}^* \right) \left(\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} + \frac{\beta_2^{-1/2}}{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{i=1}^n \lambda a_{2i}^* w_1 \left(\frac{1}{\alpha_1^2} \left(\frac{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}}{\beta_2^{3/2}} + \frac{\beta_2^{-1/2}}{-(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right) \right) \right] \right]. \\
\Sigma_{\alpha_2 \beta_1} &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{\alpha_2} \sum_{i=1}^n [a_{2i}^* [w_1^* (\lambda^2 a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2} - 1) + w_1^2 \lambda a_{1i}^* a_{2i}^*]] \left[\frac{1}{2\alpha_1} \left(\frac{-(-\log x_{1i}^{1/2})}{\beta_1^{3/2}} \right) - \left[\frac{\beta_1^{-1/2}}{(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right] \right] \right]. \\
\Sigma_{\alpha_1 \beta_2} &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n [a_{1i}^* [w_2^* (\lambda^2 a_{2i}^{*2} a_{1i}^{*2} - 1) + w_2^2 \lambda a_{1i}^* a_{2i}^*]] \left[\frac{1}{2\alpha_2} \left(\frac{-(-\log x_{2i}^{1/2})}{\beta_2^{3/2}} \right) - \left[\frac{\beta_2^{-1/2}}{(-\log(x_{2i}))^{1/2}} \right] \right] \right]. \\
\Sigma_{\alpha_2 \beta_2} &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{a_{2i}^*}{2\alpha_2^2} + \frac{a_{2i}^*}{\alpha_2^2} + \lambda \frac{a_{1i}^*}{2\alpha_2^2} w_2 \lambda^2 (a_{1i}^{*3} a_{2i}^{*2}) + w_2^2 \lambda \frac{a_{1i}^{*2}}{2\alpha_2^2} a_{2i}^* \right) \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} + \frac{\beta_1^{-1/2}}{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{i=1}^n \lambda a_{1i}^* w_2 \left(\frac{1}{\alpha_2^2} \left(\frac{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}}{\beta_1^{3/2}} + \frac{\beta_1^{-1/2}}{-(-\log(x_{1i}))^{1/2}} \right) \right) \right] \right].
\end{aligned}$$

Cuando $\lambda = 0$, la matriz de Fisher es no singular dado que el determinante de dicha matriz

es distinta de cero, en efecto,

$$\Sigma_{\alpha\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{\alpha_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{\alpha_2^2} \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

$$\Sigma_{\alpha\lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

$$\Sigma_{\beta\lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{\alpha_1^2} & \mathbb{E}[k_{12}] \\ \mathbb{E}[k_{21}] & \frac{2n}{\alpha_1^2} \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

$$\Sigma_{\beta\beta} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

$$\Sigma_{\lambda\lambda} = \left[\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[w_1^{*2} a_{1i}^{*2} a_{2i}^{*2}] \right] \quad (5-13)$$

Donde para $j = 1, 2$ tenemos

Entonces el determinante de la matriz es diferente de cero dado que al calcular el determinante, obtenemos la expresión en 5.1.4 y esta es linealmente independiente por tanto la inversa de la matriz existe.

$$\det(\Sigma_\theta) = \Sigma_{\alpha\alpha} \Sigma_{\beta\beta} \Sigma_{\lambda\lambda} - \Sigma_{\beta\lambda} \Sigma_{\beta\lambda}^\top \Sigma_{\alpha\alpha} - \Sigma_{\lambda\lambda} \Sigma_{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta}^\top$$

5.2. Distribución Bivariada Sinh-normal Birnbaum Saunders Unitaria

En un proceso análogo al usado para construir la distribución bivariada unitaria, construimos la distribución Sinh Normal Unitaria Bivariada (BVUSHN), el artículo [Martínez-Flórez et al., 2023], realizado conjuntamente con la presente tesis se enfocó en el desarrollo multivariado de esta distribución. Para ello sea $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)$, luego definamos Z_j como el vector Z

pero eliminando la j -ésima entrada con $j=1, 2$, nuevamente y de acuerdo al artículo de [Arnold et al., 2002] considere

$$Z_j | \mathbf{Z}_{(j)} = \mathbf{z}_{(j)} \sim SN(\lambda Z_1).$$

Por tanto la función de densidad conjunta es

$$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = 2\phi(z_1)\phi(z_2)\Phi(\lambda z_1 z_2), \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$$

De acuerdo al artículo de [Martínez-Flórez and Tovar-Falón, 2021], si $Y \sim USHN(\alpha, \gamma, \sigma)$ entonces la variable $Z \sim N(0, 1)$, explícitamente para $j=1, 2$,

$$Z_j = \frac{2}{\alpha_j} \sinh\left(\frac{\log(-\log(1 - Y_j)) - \gamma_j}{\sigma_j}\right) \text{ y } Y_j = 1 - \exp\left(-\exp\left(\sigma_j \sinh^{-1}\left(\frac{\alpha_j Z_j}{2}\right) + \gamma_j\right)\right)$$

para generar la función de densidad bivariada aplicamos teorema de la transformación, obteniendo como resultado

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = 2\phi(b_1)\phi(b_2)\Phi(\lambda b_1 b_2) b'_1 b'_2, \text{ y } (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2$$

donde,

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\alpha_1} \sinh\left(\frac{\log(-\log(1 - y_1)) - \gamma_1}{\sigma_1}\right) \\ b_2 &= \frac{2}{\alpha_2} \sinh\left(\frac{\log(-\log(1 - y_2)) - \gamma_2}{\sigma_2}\right) \\ b'_1 &= \frac{2 \cosh\left(\frac{(\gamma - \log(-\log(1 - y_1)))}{\sigma_1}\right)}{\alpha_1 \sigma_1 (1 - y_1) (-\log(1 - y_1))} \\ b'_2 &= \frac{2 \cosh\left(\frac{(\gamma - \log(-\log(1 - y_2)))}{\sigma_1}\right)}{\alpha_2 \sigma_2 (1 - y_2) (-\log(1 - y_2))}. \end{aligned}$$

Definición 13 (Sinh-Normal Bivariada Birnbaum Saunders Unitaria).

La función de densidad presentada en 5.2 se denota $Y \sim BVUSHN(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$, por tanto Y se distribuye Sinh-Normal Bivariada Birnbaum Saunders Unitaria. Notemos que $\alpha_j > 0$ es parámetro de forma, $\sigma_j > 0$ es pámetro de escala, γ_j parámetro de localización y λ parámetro de asimetría, con $j=1, 2$.

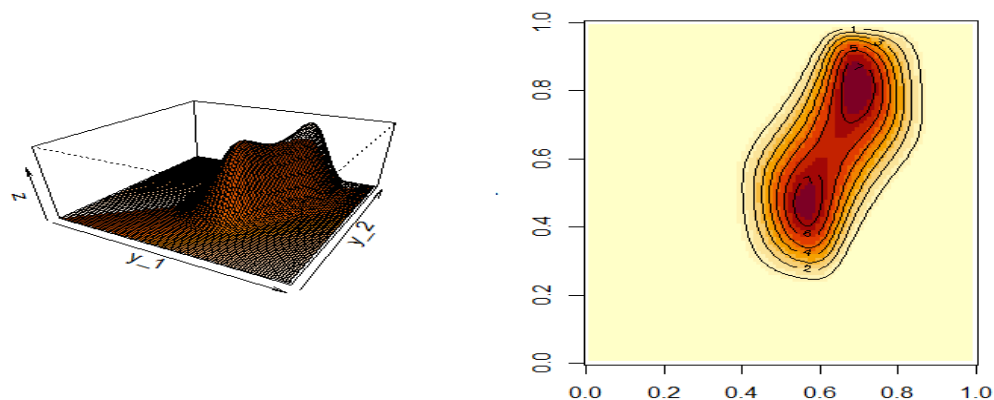


Figura 5-4: Gráfica y contorno de la distribución BVUSHN(0.6,1.2,1,1,0,0,1.5)

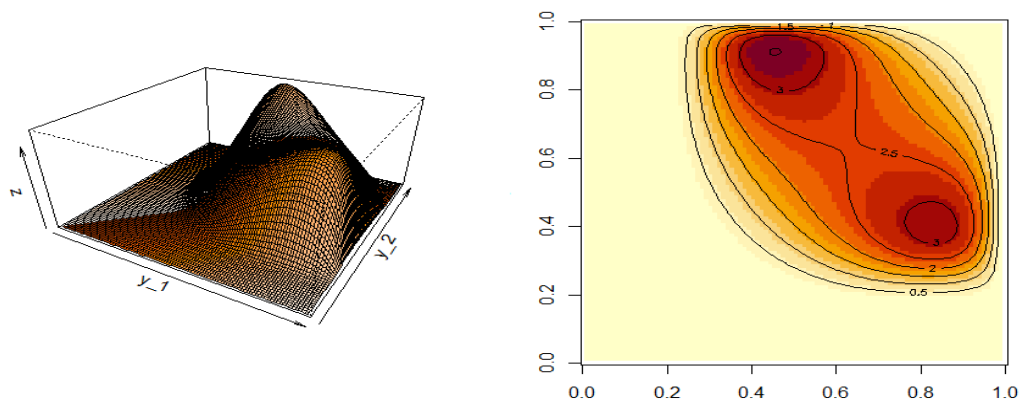


Figura 5-5: Gráfica y contorno de la distribución BVUSHN(1.25,1.5,1,1,0,0,-0.75)

5.2.1. Propiedades de la distribución BVUSHN

Proposición 4. 1. Si $\lambda = 0$, entonces $f_{Y_1, Y_2} = \varphi_{Y_1} \varphi_{Y_2}$, dado que

$$f_{Y_1, Y_2} = \phi(b_1) \phi(b_2) b_1' b_2' = \varphi_{Y_1} \varphi_{Y_2},$$

por tanto la distribución se convierte en el producto de dos distribuciones USHN y además se deduce que λ está relacionado a la correlación.

2. Consideremos $Y \sim BVUSHN$. Entonces $Y_j \sim USHN$, con $j = 1, 2$. Considere la

distribución marginal de Y_1

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \int_{\mathbb{R}} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) dy_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2\Phi(\lambda b_1 b_2) \phi(b_1) \phi(b_2) b'_1 b'_2 dy_2 \\ &= b'_1 \phi(b_1) \int_{\mathbb{R}} 2b'_2 \phi(b_2) \Phi(\lambda b_1 b_2) dy_2 \end{aligned}$$

suponga $Z_j = \frac{2}{\alpha_j} \sinh\left(\frac{\log(-\log(1-Y_j))-\gamma_j}{\sigma_j}\right)$ con $j=1,2$, entonces, de acuerdo al resultado de [Arnold et al., 2002] la integral se reduce a 1, por tanto

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= b'_1 \phi(b_1) \int_{\mathbb{R}} 2b'_2 \phi(z_2) \Phi((\lambda z_1 z_2)) dz_2 \\ &= b'_1 \phi(b_1) (1) \end{aligned}$$

De manera análoga se calcula para la marginal Y_2 .

3. La función condicional es equivalente a

$$f_{Y_j|\mathbf{Y}_{(j)}}(Y_j|\mathbf{Y}_{(j)} = y_{(j)}) = 2b'_1 \phi(b_1) \Phi(\lambda b_1 b_2).$$

Para ello considere sin pérdida de generalidad el caso $j = 1$, dado que

$$f_{Z_1|\mathbf{Z}_{(1)}}(Z_1|\mathbf{Z}_{(1)} = z_{(1)}) = 2\phi(z_1) \Phi(\lambda z_1 z_2),$$

asumiendo la transformación $Y_1 = 1 - \exp(-\exp(\gamma_1 + \sigma_1 \sinh^{-1}\left(\frac{\alpha_1 Z_1}{\sigma_1}\right)))$ entonces $Z_1 = \frac{2}{\alpha_1} \sinh\left(\frac{\log(-\log(1-Y_1))-\gamma_1}{\sigma_1}\right)$, la función condicional toma la forma

$$f_{Y_1|\mathbf{Y}_{(1)}}(Y_1|\mathbf{Y}_{(1)} = y_{(1)}) = 2b'_1 \phi(b_1) \Phi(\lambda b_1 b_2).$$

4. La función de distribución acumulada Y_1 dado que $\mathbf{Y}_{(1)} = \mathbf{y}_{(1)}$ es

$$P(Y_1 \leq y_1 | \mathbf{Y}_{(1)} = \mathbf{y}_{(1)}) = \Phi(b_1) - 2T(b_1, \lambda b_2), \quad (5-14)$$

donde $T(\cdot)$ es la función de Owen. En efecto,

$$P(Y_1 \leq y_1 | \mathbf{Y}_{(1)} = y_{(1)}) = \int_{-\infty}^{y_1} f_{Y_1}(t_1 | \mathbf{Y}_{(1)} = y_{(1)}) dt_1$$

si $Z_j = \frac{2}{\alpha_j} \sinh\left(\frac{\log(-\log(1-T_j))-\gamma_j}{\sigma_j}\right) = b_j$ y sustituyendo se obtiene la integral que estudió [Azzalini, 1985].

$$P(Y_1 \leq y_1 | \mathbf{Y}_{(1)} = y_{(1)}) = \int_{-\infty}^{b_1} 2\phi(z_1) \Phi(\lambda z_1 z_2) dz_1 = \Phi(b_1) - 2T(b_1, \lambda b_2)$$

De acuerdo al artículo [Martínez-Flórez and Tovar-Falón, 2021] cuando $\alpha \rightarrow 0$ entonces la variable aleatoria $\frac{\log(-\log(1-Y))-\gamma}{\alpha\sigma/2}$ converge a una normal estándar. Se sigue de este resultado que si $\alpha_j \rightarrow 0$ para $j = 1, 2$ entonces

$$\mathbf{Y} \sim SMVSN(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\sigma}, \lambda).$$

Si $X_j = \log(-\log(1 - Y_j))$ para $j = 1, 2$ entonces

$$\mathbf{X} \sim SMVSHN(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\sigma}, \lambda).$$

Siguiendo este proceso se tiene que si $\mathbf{Y} \sim BVUSHN(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\sigma}, \lambda)$ y si

$$Z_j = \frac{2}{\alpha_j} \sinh\left(\frac{\log(-\log(1 - Y_j)) - \gamma_j}{\sigma_j}\right) \sim N(0, 1),$$

para todo $j = 1, 2$ tenemos

$$\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)^\top \sim SMSN(0, \mathbf{I}, \lambda) \quad (5-15)$$

De otro lado en el caso bivariado, podemos considerar los casos en los cuales la distribución es unimodal, para ello considere $\alpha_1 = \alpha_2$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ y $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$.

Derivando el logaritmo de las distribuciones condicionales igualando a cero se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log f(y_2|y_1)}{\partial y_2} &= (1 + \log(1 - y_2)) + \frac{b_{y_2}}{b'_{y_2}} - b'_{y_2} b_{y_2} + \lambda b'_{y_2} b_{y_1} \frac{\phi(\lambda b_{y_1} b_{y_2})}{\Phi(\lambda b_{y_1} b_{y_2})} \\ \frac{\partial \log f(y_1|y_2)}{\partial y_1} &= (1 + \log(1 - y_1)) + \frac{b_{y_1}}{b'_{y_1}} - b'_{y_1} b_{y_1} + \lambda b'_{y_1} b_{y_2} \frac{\phi(\lambda b_{y_1} b_{y_2})}{\Phi(\lambda b_{y_1} b_{y_2})} \end{aligned}$$

obtenemos 2 ecuaciones

$$\frac{b_{y_2}}{b'_{y_2}} - b'_{y_2} b_{y_2} + \lambda b'_{y_2} b_{y_1} \frac{\phi(\lambda b_{y_1} b_{y_2})}{\Phi(\lambda b_{y_1} b_{y_2})} = -(1 + \log(1 - y_2)) \quad (5-16)$$

$$\frac{b_{y_1}}{b'_{y_1}} - b'_{y_1} b_{y_1} + \lambda b'_{y_1} b_{y_2} \frac{\phi(\lambda b_{y_1} b_{y_2})}{\Phi(\lambda b_{y_1} b_{y_2})} = -(1 + \log(1 - y_1)) \quad (5-17)$$

Multiplicando 5-16 por $b_{y_2} b_{y_1}'^2$ y 5-17 por $b_{y_1} b_{y_2}'^2$ y simplificando

$$b_{y_2}^2 b_{y_1}'^2 - b_{y_2}^2 b'_{y_2} b_{y_1}'^2 - b_{y_2}'^2 b_{y_1}^2 + b_{y_2}'^2 b_{y_1}'^2 b_{y_1}^2 = (1 + \log(1 - y_1)) b_{y_2}'^2 b_{y_1}' b_{y_1} - (1 + \log(1 - y_2)) b_{y_2} b_{y_2}' b_{y_1}'^2.$$

Dado que $y_1 = y_2$ es una solución de la anterior ecuación, reemplazamos este valor en 5-16, por lo tanto, se obtiene

$$b_{y_2}(1 - b'_{y_2})\Phi(\lambda b_{y_2}) + (1 + \log(1 - y_2))b_{y_2}'\Phi(\lambda b_{y_2}) + \lambda b_{y_2} b_{y_2}'\phi(\lambda b_{y_2}) = 0$$

Notemos que la transformación

$$Y_j = 1 - \exp(-\exp(\sigma_j \operatorname{arcsinh}(\alpha_j Z_j/2) + \gamma_j))$$

que se obtiene del modelo bivariado con condicionales skew normal y el modelo bivariado con condicionales unitaria sinh normal asimétrica es una transformación uno a uno, es decir los valores λ para los cuales la distribución es unimodal coinciden con aquellos donde la distribución bivariada skew normal es unimodal, tales valores cumplen la condición $\lambda \leq \sqrt{\pi}/2$. Cabe destacar que la función 5-18 es similar a la ecuación [Arnold et al., 2002] para la distribución SBVSN.

$$g(y_2; \lambda) = b_{y_2}(1 - b'_{y_2})\Phi(\lambda b_{y_2}) + (1 + \log(1 - y_2))b'_{y_2}\Phi(\lambda b_{y_2}) + \lambda b_{y_2}b'_{y_2}\phi(\lambda b_{y_2}). \quad (5-18)$$

5.2.2. Momentos, covarianza y correlación de la distribución

El cálculo de momentos es definido en la siguiente ecuación

$$\mathbb{E}(Y^r) = \sum_{j=0}^r \sum_{l=0}^{\infty} \binom{r}{j} \frac{(-1)^{j+l} (je^\gamma)^l}{l!} \left[\frac{k_{a_1}(\alpha^{-2}) + k_{b_1}(\alpha^{-2})}{k_{1/2}(\alpha^{-2})} \right], \quad (5-19)$$

donde $a = \frac{r\sigma+1}{2}$, $b = \frac{r\sigma-1}{2}$ y $k_\lambda(\cdot)$ es equivalente a

$$k_\lambda(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{2}\right)^\lambda \int_0^\infty u^{-\lambda-1} e^{-u-\frac{v^2}{4u}} du. \quad (5-20)$$

Para calcular la correlación se debe hallar la covarianza y varianza de las variables aleatorias. En el caso de la covarianza se tiene en cuenta la fórmula

$$\operatorname{cov}(Y_1, Y_2; \lambda) = \mathbb{E}(Y_1, Y_2) - \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(Y_2)$$

El valor esperado cruzado de la ecuación anterior se obtiene mediante la doble integral

$$\mathbb{E}(Y_1 Y_2) = 2 \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} y_1 y_2 b'_{y_1} b'_{y_2} \phi(b_{y_1}) \phi(b_{y_2}) \Phi(\lambda b_{y_1} b_{y_2}) dy_1 dy_2$$

En el caso de la varianza se emplea la fórmula $\operatorname{var}(Y_i; \lambda) = \mathbb{E}(Y_i^2) - \mathbb{E}^2(Y_i)$, de tal modo que es posible establecer la correlación de acuerdo a la ecuación 5.2.2

$$\operatorname{corr}(Y_1, Y_2; \lambda) = \frac{\operatorname{cov}(Y_1, Y_2; \lambda)}{\sqrt{\operatorname{var}(Y_1; \lambda)\operatorname{var}(Y_2; \lambda)}}.$$

Sin embargo, el calculo de la correlación necesita de métodos numéricos. Hay dos hechos a resaltar sobre el calculo de la correlación, es posible demostrar que $\operatorname{cov}(Y_1, Y_2; -\lambda) = -\operatorname{cov}(Y_1, Y_2; \lambda)$, por lo cual $\operatorname{corr}(Y_1, Y_2; -\lambda) = -\operatorname{corr}(Y_1, Y_2; \lambda)$. Este hecho permite delimitar los valores que toma la correlación, en efecto, si $\lambda = 0$ se obtiene la independecia, es decir $\operatorname{corr}(Y_1, Y_2; 0) = 0$, considerando además la simetría de la correlación, el caso cuando lambda

λ	α_1/α_2	0.085	0.5	0.75	1.5	2.25	3.0	5.0	7.5	10.0
0.05	0.095	0.0397	0.0396	0.0392	0.0330	0.0271	0.0239	0.0206	0.0179	0.0176
	0.45	0.0395	0.0394	0.0390	0.0329	0.0270	0.0238	0.0205	0.0178	0.0175
	0.75	0.0391	0.0390	0.0386	0.0326	0.0267	0.0235	0.0203	0.0176	0.0173
	1.0	0.0379	0.0378	0.0374	0.0319	0.0268	0.0242	0.0217	0.0195	0.0193
	2.0	0.0288	0.0286	0.0283	0.0306	0.0374	0.0433	0.0534	0.0574	0.0599
	3.0	0.0240	0.0238	0.0235	0.0321	0.0486	0.0618	0.0825	0.0918	0.0965
	5.0	0.0208	0.0204	0.0203	0.0351	0.0618	0.0825	0.1142	0.1290	0.1360
	7.5	0.0182	0.0178	0.0176	0.0357	0.0674	0.0918	0.1290	0.1465	0.1546
	10.0	0.0179	0.0175	0.0173	0.0367	0.0705	0.0965	0.1360	0.1546	0.1633
	0.25	0.095	0.1836	0.1841	0.1830	0.1568	0.1291	0.1136	0.0974	0.0853
0.45		0.1839	0.1843	0.1832	0.1568	0.1291	0.1136	0.0974	0.0853	0.0824
0.75		0.1827	0.1831	0.1818	0.1555	0.1280	0.1126	0.0966	0.0846	0.0818
1.0		0.1779	0.1782	0.1770	0.1515	0.1253	0.1108	0.0960	0.0846	0.0821
2.0		0.1366	0.1366	0.1356	0.1222	0.1127	0.1096	0.1103	0.1072	0.1081
3.0		0.1136	0.1135	0.1126	0.1081	0.1113	0.1169	0.1298	0.1332	0.1365
5.0		0.0975	0.0973	0.0966	0.1004	0.1155	0.1298	0.1548	0.1645	0.1703
7.5		0.0855	0.0852	0.0846	0.0928	0.1144	0.1332	0.1645	0.1775	0.1847
10.0		0.0826	0.0824	0.0818	0.0920	0.1161	0.1365	0.1703	0.1847	0.1923

Tabla 5-1: Coeficiente de correlación BVUSHN

es negativo es similar al positivo. En las tablas 5-2 y 5-1 se fijan los valores $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ y $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ variando los parámetros α_1 , α_2 , y λ , la siguiente tabla describe los valores de correlación para las variables Y_1 , Y_2 . Cabe destacar que en los valores observados y calculados como se observa en la tabla a continuación $|cor(Y_1, Y_2; \lambda)| \leq 0,9938$ y por tanto es viable afirmar que $|cor(Y_j, Y_{j'}; \lambda)| \leq 1,0$.

5.3. Extensión del modelo de regresión USHN al caso bivariado

Consideremos $q = 2$ variables aleatorias que miden tasas o proporciones en una muestra de tamaño n , para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ el vector de tamaño $q \times 1$

$$\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \dots, y_{iq}).$$

De igual modo p variables explicativas X_1, X_2, \dots, X_p donde para $i = 1, 2, 3, \dots, p$

$$\mathbf{X}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})^\top$$

es una matriz de tamaño $q \times p$ asociada a la i -ésima respuesta observada \mathbf{y}_i con

$$\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij1}, x_{ij2}, \dots, x_{ijp})^\top$$

para $j = 1, 2$ un vector 2-dimensional de valores de las variables explicativas. Dado que $vec(\cdot)$ transforma matrices en un vector columna, a partir de las columna de la matriz. Luego,

$$\mathbf{y} = vec(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n).$$

El modelo bivariado de regresión unitario es definido por

λ	α_1/α_2	0.085	0.5	0.75	1.5	2.25	3.0	5.0	7.5	10.0
0.5	0.095	0.5124	0.3401	0.3410	0.3410	0.3388	0.3347	0.3077	0.2846	0.2759
	0.45	0.3513	0.3160	0.3169	0.3173	0.3155	0.3117	0.2716	0.2239	0.1966
	0.75	0.3524	0.3171	0.3181	0.3183	0.3165	0.3126	0.2722	0.2243	0.1969
	1.0	0.3528	0.3177	0.3186	0.3188	0.3168	0.3128	0.2722	0.2243	0.1969
	2.0	0.3507	0.3163	0.3171	0.3169	0.3148	0.3106	0.2697	0.2220	0.1949
	3.0	0.3456	0.3119	0.3126	0.3122	0.3099	0.3057	0.2650	0.2180	0.1915
	5.0	0.3261	0.2718	0.2722	0.2713	0.2690	0.2650	0.2318	0.1964	0.1775
	7.5	0.3170	0.2240	0.2243	0.2234	0.2213	0.2180	0.1964	0.1774	0.1693
	10.0	0.3188	0.1967	0.1969	0.1962	0.1943	0.1915	0.1775	0.1693	0.1684
	1.5	0.095	0.8258	0.5950	0.6003	0.6123	0.6177	0.6183	0.5809	0.5252
0.45		0.6192	0.5269	0.5321	0.5442	0.5504	0.5517	0.5070	0.4343	0.3845
0.75		0.6260	0.5331	0.5383	0.5504	0.5565	0.5576	0.5120	0.4381	0.3877
1.0		0.6311	0.5379	0.5431	0.5551	0.5611	0.5621	0.5156	0.4408	0.3900
2.0		0.6425	0.5497	0.5548	0.5662	0.5717	0.5722	0.5232	0.4460	0.3941
3.0		0.6446	0.5527	0.5576	0.5685	0.5735	0.5736	0.5232	0.4451	0.3932
5.0		0.6140	0.5079	0.5120	0.5207	0.5241	0.5232	0.4774	0.4096	0.3661
7.5		0.5695	0.4349	0.4381	0.4444	0.4464	0.4451	0.4096	0.3610	0.3315
10.0		0.5434	0.3850	0.3877	0.3930	0.3945	0.3932	0.3661	0.3315	0.3117
3.5		0.095	0.9317	0.6733	0.6812	0.7013	0.7131	0.7184	0.6878	0.6282
	0.45	0.6975	0.5875	0.5945	0.6128	0.6242	0.6294	0.5900	0.5163	0.4623
	0.75	0.7073	0.5958	0.6030	0.6214	0.6327	0.6379	0.5976	0.5224	0.4677
	1.0	0.7154	0.6028	0.6099	0.6284	0.6397	0.6448	0.6036	0.5273	0.4718
	0.095	0.9765	0.7038	0.7128	0.7374	0.7531	0.7616	0.7367	0.6801	0.6363
	0.45	0.7267	0.6135	0.6214	0.6428	0.6570	0.6645	0.6290	0.5567	0.5025
	0.75	0.7379	0.6227	0.6307	0.6523	0.6666	0.6742	0.6379	0.5642	0.5090
	1.0	0.7474	0.6307	0.6387	0.6605	0.6749	0.6824	0.6453	0.5705	0.5144
	2.0	0.7755	0.6542	0.6624	0.6845	0.6988	0.7061	0.6662	0.5874	0.5288
	3.0	0.7895	0.6659	0.6742	0.6962	0.7102	0.7172	0.6755	0.5945	0.5345
5.0	0.7730	0.6303	0.6379	0.6576	0.6698	0.6755	0.6367	0.5633	0.5098	
7.5	0.7297	0.5579	0.5642	0.5805	0.5902	0.5945	0.5633	0.5064	0.4656	
10.0	0.6951	0.5035	0.5090	0.5230	0.5311	0.5345	0.5098	0.4656	0.4348	
5.0	0.095	0.9938	0.7228	0.7324	0.7601	0.7790	0.7903	0.7707	0.7182	0.6763
	0.45	0.7446	0.6323	0.6405	0.6643	0.6808	0.6903	0.6583	0.5881	0.5346
	0.75	0.7563	0.6418	0.6502	0.6743	0.6910	0.7006	0.6681	0.5967	0.5421
	1.0	0.7669	0.6505	0.6590	0.6834	0.7002	0.7099	0.6767	0.6040	0.5486
	2.0	0.7992	0.6772	0.6860	0.7110	0.7281	0.7377	0.7021	0.6254	0.5672
	3.0	0.8170	0.6917	0.7006	0.7258	0.7428	0.7523	0.7149	0.6358	0.5760
	5.0	0.8061	0.6597	0.6681	0.6913	0.7066	0.7149	0.6803	0.6084	0.5544
	7.5	0.7672	0.5894	0.5967	0.6164	0.6291	0.6358	0.6084	0.5521	0.5102
	10.0	0.7350	0.5357	0.5421	0.5594	0.5703	0.5760	0.5544	0.5102	0.4776

Tabla 5-2: Coeficiente de correlación BVUSHN

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

con $z_{ij} = \log(-\log(1 - y_{ij}))$, $\boldsymbol{\beta}$ vector de parámetros desconocidos de dimensión p y los vectores $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ son vectores de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que $\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim SMVSHN(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0}_q, \boldsymbol{\Sigma}, \lambda)$ donde $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q)$, además, $\mathbf{0}_q$ es un vector de ceros de dimensión q .

Definición 14 (Modelo de regresión bivariado Sinh-Normal unitario).

Si se define $\mathbf{X} = \text{diag}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_q)$ donde \mathbf{X}_j para $j = 1, 2, \dots, q$ es una matriz de tamaño $n \times p_j$ y \mathbf{X} de dimensión $nq \times (p_1 + p_2 + \dots, p_q)$ entonces el modelo bivariado de regresión unitario Sinh-Normal es

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

donde $\mathbf{Z}_{ij} = \mathbf{X}_{ij} \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, $j = 1, 2$ tomando valores $z_{ij} = \log(-\log(1 - y_{ij}))$, con $\boldsymbol{\beta} = \text{vec}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_q)$ con $\boldsymbol{\beta}_j$ un vector de dimensión $p_j \times 1$, es decir, $\boldsymbol{\beta}$ es un vector de dimensión $p \times 1$ siendo $p = p_1 + p_2 + \dots, +p_q$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{vec}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_q)$ es un vector de errores con $\boldsymbol{\varepsilon}_j \sim SMVSHN(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0}_{nq}, \boldsymbol{\Sigma}, \lambda)$ donde $\boldsymbol{\varepsilon}_j = (\varepsilon_{1j}, \varepsilon_{2j}, \dots, \varepsilon_{nj})$ con $\varepsilon_{ij} \sim SHN(\alpha_j, 0, \sigma_j)$ de donde se sigue que $z_{ij} \sim SHN(\alpha_j, \mathbf{X}_{ij} \boldsymbol{\beta}_j, \sigma_j)$ para $j = 1, 2, 3, \dots, q$.

5.3.1. Estimación por máxima verosimilitud y matriz de información

El cálculo de estimación por máxima verosimilitud se puede extender a varias variables es decir, si $i = 1, 2, 3, \dots, n$ y $j = 1, 2, 3, \dots, q$, en particular si se desea el cálculo para el caso bivariado entonces considere $q = 2$, luego definamos

$$\boldsymbol{\delta}_1 = (\delta_{11}, \delta_{21}, \delta_{31}, \dots, \delta_{n1})$$

$$\boldsymbol{\delta}_2 = (\delta_{12}, \delta_{22}, \delta_{32}, \dots, \delta_{n2})$$

$$\boldsymbol{\delta}_3 = (\delta_{13}, \delta_{23}, \delta_{33}, \dots, \delta_{n3})$$

$$\delta_{i1} = (\delta_{i11}, \delta_{i12}, \delta_{i13}, \dots, \delta_{i1q})$$

$$\delta_{i2} = (\delta_{i21}, \delta_{i22}, \delta_{i23}, \dots, \delta_{i2q})$$

$$\delta_{i3} = (\delta_{i31}, \delta_{i32}, \delta_{i33}, \dots, \delta_{i3q})$$

$$\delta_{i1j} = \frac{2}{\alpha_j \sigma_j (1 - y_{ij}) (-\log(1 - y_{ij}))} \cosh \left(\frac{z_{ij} - \mathbf{x}'_{ij} \boldsymbol{\beta}}{\sigma_j} \right)$$

$$\delta_{i2j} = \frac{2}{\alpha_j} \sinh \left(\frac{z_{ij} - \mathbf{x}'_{ij} \boldsymbol{\beta}}{\sigma_j} \right)$$

$$\delta_{i3j} = \Phi \left(\lambda \prod_{j=1}^p \delta_{i2j} \right)$$

La función de log-verosimilitud para el vector de parámetros $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}, \lambda)$ es

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\boldsymbol{\theta})$$

donde,

$$\begin{aligned} \ell_i(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{q}{2} \log(2\pi) + \sum_{i=1}^q \sigma_j + \sum_{i=1}^q \log(-(1 - y_{ij})(\log(1 - y_{ij}))) \\ &\quad + \sum_{i=1}^q \log(\delta_{i1j}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \delta_{i2j}^2 + \sum_{i=1}^q \log(\delta_{i3j}). \end{aligned} \quad (5-21)$$

La derivada de $\ell_i(\boldsymbol{\theta})$ con respecto a cada uno de los parámetros se describen a continuación, dichas derivadas se igualan a 0 para establecer el sistema de ecuaciones y así obtener la estimación por máxima verosimilitud.

$$U(\beta_{jk}) = \frac{1}{\sigma_j} \sum_{i=1}^n x_{ijk} \left(\delta_{i1j} \delta_{i2j} - \frac{\delta_{i2j}}{\delta_{i1j}} \right) + \frac{\lambda}{\sigma_j} \sum_{i=1}^n x_{ijk} \delta_{i1j} \omega_i \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right), \quad k = 1, \dots, p_j, \quad (5-22)$$

$$U(\alpha_j) = -\frac{n}{\alpha_j} + \frac{1}{\alpha_j} \sum_{i=1}^n \delta_{i2j}^2 - \frac{\lambda}{\alpha_j} \sum_{i=1}^n \omega_i \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right), \quad (5-23)$$

$$U(\sigma_j) = -\frac{n}{\sigma_j} - \frac{1}{\sigma_j} \sum_{i=1}^n v_{ij} \tanh(v_{ij}) + \frac{1}{\sigma_j} \sum_{i=1}^n v_{ij} \delta_{i1j} \delta_{i2j} - \frac{\lambda}{\sigma_j} \sum_{i=1}^n \delta_{i1j} \omega_i \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right), \quad (5-24)$$

$$U(\lambda) = \sum_{i=1}^n \omega_i \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) \quad (5-25)$$

con $v_{ij} = (\log(-\log(1 - y_{ij})) - x_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}_j) / \sigma_j$, donde $i = 1, \dots, n$, $j = 1, 2, 3, \dots, p$, y

$$w_i = \frac{\phi\left(\lambda \prod_{j=1}^q \delta_{i2j}\right)}{\Phi\left(\lambda \prod_{j=1}^q \delta_{i2j}\right)}.$$

Iniciar el proceso iterativo requiere de valores iniciales a modo de semilla, para ello es preciso considerar las estimaciones por mínimos cuadrados de los parámetros, es decir, $\bar{\boldsymbol{\beta}}_{j0} = (\mathbf{X}_j' \mathbf{X}_j)^{-1} \mathbf{X}_j' \mathbf{z}_j$ de donde $\hat{\sigma}_{j0}^2 = \frac{1}{n-p_j} \sum_{i=1}^n (z_{ij} - \mathbf{x}'_j \bar{\boldsymbol{\beta}}_{j0})^2$, para α_j se puede tomar como valor inicial $\hat{\alpha}_{j0} = \sqrt{\bar{\alpha}_j}$ donde $\bar{\alpha}_j = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \sinh\left(\frac{z_{ij} - \mathbf{x}'_j}{\bar{\sigma}_{j0}}\right)$, estimar λ es posible a través de algun metodo numérico como uniroot de R. Los elementos de la matriz de información observada $I_{\theta_k \theta_{k'}}$ son

$$\begin{aligned} I_{\alpha_j \alpha_j} &= -\frac{n}{\alpha_j^2} + \frac{3}{\alpha_j^2} \sum_{i=1}^n \delta_{i2j}^2 \\ &\quad + \frac{\lambda}{\alpha_j^2} \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) \omega_i \left[-\frac{2}{\alpha_j} + \lambda \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) \left(\lambda \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) + \omega_i \right) \right], \end{aligned}$$

$$I_{\alpha_j \alpha_{j'}} = \frac{\lambda}{\alpha_j \alpha_{j'}} \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) \omega_i \left[-1 + \lambda \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) \left(\lambda \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) + \omega_i \right) \right],$$

$$I_{\alpha_j \beta_{jk}} = \frac{2}{\alpha_j \sigma_j} \sum_{i=1}^n x_{ijk} \delta_{i1j} \delta_{i2j} + \frac{\lambda}{\alpha_j \sigma_j} \sum_{i=1}^n x_{ijk} \delta_{i1j} \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) \omega_i \left[-1 + \lambda \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) \left(\lambda \delta_{i2j} \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) + \omega_i \right) \right],$$

$$I_{\alpha_j \beta_{j'k}} = \frac{\lambda}{\alpha_j \sigma_{j'}} \sum_{i=1}^n x_{ij'k} \delta_{i1j'} \left(\prod_{j \neq j'} \delta_{i2j} \right) \omega_i \left[-1 + \lambda \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) \left(\lambda \delta_{i2j'} \left(\prod_{j \neq j'} \delta_{i2j} \right) + \omega_i \right) \right],$$

$$I_{\alpha_j \sigma_j} = \frac{2}{\alpha_j \sigma_j} \sum_{i=1}^n v_{ij} \delta_{i1j} \delta_{i2j} + \frac{\lambda}{\alpha_j \sigma_j} \sum_{i=1}^n v_{ij} \delta_{i1j} \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) \omega_i \left[-1 + \lambda \left(\lambda \delta_{i2j} \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) + \omega_i \right) \right],$$

$$I_{\alpha_j \sigma_{j'}} = \frac{\lambda}{\alpha_j \sigma_{j'}} \sum_{i=1}^n v_{ij'} \delta_{i1j'} \left(\prod_{j \neq j'} \delta_{i2j} \right) \omega_i \left[-1 + \lambda \left(\lambda \delta_{i2j'} \left(\prod_{j \neq j'} \delta_{i2j} \right) + \omega_i \right) \right],$$

$$I_{\alpha_j \lambda} = \frac{1}{\alpha_j} \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) \omega_i \left[1 - \lambda \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) \left(\lambda \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) + \omega_i \right) \right],$$

$$I_{\beta_{jk} \beta_{j'k'}} = \frac{1}{\sigma_j^2} \sum_{i=1}^n x_{ijk} x_{ij'k'} \left\{ 2\delta_{i2j}^2 + \frac{4}{\alpha_j^2} - 1 + \frac{\delta_{i2j}^2}{\delta_{i2j}^2 + 4/\alpha_j^2} \right\} + \frac{\lambda}{\sigma_j^2} \sum_{i=1}^n x_{ijk} x_{ij'k'} \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) \omega_i \left[-\delta_{i2j'} + \lambda \delta_{i1j}^2 \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) \left(\lambda \delta_{i2j} \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) + \omega_i \right) \right],$$

$$I_{\beta_{jk} \beta_{j'k'}} = \frac{\lambda}{\sigma_j \sigma_{j'}} \sum_{i=1}^n x_{ijk} x_{ij'k'} \delta_{i1j} \delta_{i1j'} \omega_i \left[- \left(\prod_{l \neq j, j'} \delta_{i2l} \right) + \lambda \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) \left(\prod_{j \neq j'} \delta_{i2j} \right) \left(\lambda \delta_{i2j'} \left(\prod_{j \neq j'} \delta_{i2j} \right) + \omega_i \right) \right]$$

$$I_{\beta_j k \sigma_j} = \frac{1}{2\sigma_j} \sum_{i=1}^n x_{ijk} v_{ij} [\delta_{i1j}^2 + \delta_{i2j}^2 - \text{sech}^2 v_{ij}] - \frac{\lambda}{\sigma_j^2} \sum_{i=1}^n x_{ijk} \omega_i (\delta_{i1j} + \delta_{i2j} v_{ij}) \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) \\ + \frac{\lambda^2}{\sigma_j^2} \sum_{i=1}^n x_{ijk} v_{ij} \delta_{i2j}^2 \omega_i \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right)^2 \left(\lambda \delta_{i2j} \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) + \omega_i \right)$$

$$I_{\beta_j k \sigma_{j'}} = \frac{\lambda}{\sigma_j \sigma_{j'}} \sum_{i=1}^n x_{ijk} v_{ij'} \delta_{i1j} \delta_{i1j'} \omega_i \left[- \left(\prod_{l \neq j, j'} \delta_{i2l} \right) + \lambda \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) \left(\prod_{j \neq j'} \delta_{i2j} \right) \right. \\ \left. \times \left(\lambda \delta_{i2j'} \left(\prod_{j \neq j'} \delta_{i2j} \right) + \omega_i \right) \right]$$

$$I_{\beta_j k \lambda} = \frac{1}{\sigma_j} \sum_{i=1}^n x_{ijk} \delta_{i1j} \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) \omega_i \left[1 - \lambda \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) \left(\lambda \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) + \omega_i \right) \right],$$

$$I_{\sigma_j \sigma_j} = \frac{2}{\sigma_j^2} \sum_{i=1}^n v_{ij} \left(\delta_{i1j} \delta_{i2j} - \frac{\delta_{i2j}}{\delta_{i1j}} \right) + \frac{1}{\sigma_j^2} \sum_{i=1}^n v_{ij}^2 \left\{ 2\delta_{i2j}^2 + \frac{4}{\alpha_j^2} - 1 + \frac{\delta_{i2j}^2}{\delta_{i2j}^2 + 4/\alpha_j^2} \right\} \\ + \frac{\lambda}{\sigma_j^2} \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) \omega_i \left[-2v_{ij} \delta_{i1j} - v_{ij}^2 \delta_{i2j} + \lambda v_{ij}^2 \delta_{i1j}^2 \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) \right. \\ \left. \times \left(\lambda \delta_{i2j} \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) + \omega_i \right) \right]$$

$$I_{\sigma_j \sigma_{j'}} = \frac{\lambda}{\sigma_j \sigma_{j'}} \sum_{i=1}^n v_{ij} v_{ij'} \delta_{i1j} \delta_{i1j'} \omega_i \left[- \left(\prod_{l \neq j, j'} \delta_{i2l} \right) + \lambda \left(\prod_{j \neq j'} \delta_{i2j} \right) \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) \left(\lambda \delta_{i2j'} \right. \right. \\ \left. \left. \left(\prod_{j \neq j'} \delta_{i2j} \right) + \omega_i \right) \right]$$

$$I_{\sigma_j \lambda} = \frac{1}{\sigma_j} \sum_{i=1}^n v_{ij} \delta_{i1j} \left(\prod_{j' \neq j} \delta_{i2j'} \right) \omega_i \left[1 - \lambda \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) \left(\lambda \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) + \omega_i \right) \right],$$

$$I_{\lambda \lambda} = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right)^2 \omega_i \left(\lambda \left(\prod_{j=1}^q \delta_{i2j} \right) + \omega_i \right),$$

Para hallar la matriz de Fisher se halla el valor esperado de los elementos de la matriz de información observada, los cuales se calculan numéricamente.

$$\kappa_{\theta\theta} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right] = \begin{pmatrix} \kappa_{\alpha\alpha} & \kappa_{\alpha\beta} & \kappa_{\alpha\Sigma} & \kappa_{\alpha\lambda} \\ \kappa_{\alpha\beta}^\top & \kappa_{\beta\beta} & \kappa_{\beta\Sigma} & \kappa_{\beta\lambda} \\ \kappa_{\alpha\Sigma}^\top & \kappa_{\beta\Sigma}^\top & \kappa_{\Sigma\Sigma} & \kappa_{\Sigma\lambda} \\ \kappa_{\alpha\lambda}^\top & \kappa_{\beta\lambda}^\top & \kappa_{\Sigma\lambda}^\top & \kappa_{\lambda\lambda} \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = 0$ las expresiones toman la forma

$$\kappa_{\alpha\alpha} = \text{diag}(2/\alpha_1^2, 2/\alpha_2^2, \dots, 2/\alpha_q^2),$$

$$\kappa_{\beta\beta} = \text{bloq.diag}(c(\alpha_1)\mathbf{x}'_1\mathbf{x}_1/4, c(\alpha_2)\mathbf{x}'_2\mathbf{x}_2/4, \dots, c(\alpha_q)\mathbf{x}'_q\mathbf{x}_q/4)$$

$$\kappa_{\Sigma\Sigma} = \text{diag}(\kappa_{\sigma_1\sigma_1}, \kappa_{\sigma_2\sigma_2}, \dots, \kappa_{\sigma_q\sigma_q})$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \mathbf{0}$$

$$\kappa_{\alpha\Sigma} = \text{diag}(\kappa_{\alpha_1\sigma_1}, \kappa_{\alpha_2\sigma_2}, \dots, \kappa_{\alpha_q\sigma_q})$$

$$\kappa_{\beta\Sigma} = \text{diag}(\kappa_{\beta_1\sigma_1}, \kappa_{\beta_2\sigma_2}, \dots, \kappa_{\beta_q\sigma_q})$$

$$\kappa_{\alpha\lambda} = \mathbf{0}$$

$$\kappa_{\beta\lambda} = \mathbf{0}$$

$$\kappa_{\Sigma\lambda} = \mathbf{0}$$

$$\kappa_{\lambda\lambda} = \frac{2}{\pi}.$$

donde $c(\alpha_j) = 1 + \frac{4}{\alpha_j^2} - \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_j^2}} \left(1 - \text{erf}[(2/\alpha_j^2)^{1/2}] \exp(2/\alpha_j^2) \right)$ y $\text{erf}(x)$ es función error,

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad a_l(\alpha_j, \sigma_j) = \mathbb{E} \left(v_j^l \left[2\delta_{2j}^2 + \frac{4}{\alpha_j^2} - 1 + \frac{\delta_{2j}^2}{\delta_{2j}^2 + 4/\alpha_j^2} \right] \right), \quad b(\alpha_j, \sigma_j) = \mathbb{E}(v_j \delta_{1j} \delta_{2j})$$

$$\text{and } d(\alpha_j, \sigma_j) = \mathbb{E} \left(v_j \frac{\delta_{1j}}{\delta_{2j}} \right), \quad \kappa_{\alpha_j\sigma_j} = \frac{2}{\alpha_j\sigma_j} b(\alpha_j, \sigma_j), \quad \kappa_{\beta_j\sigma_j} = \frac{a_1(\alpha_j, \sigma_j)}{2\sigma_j} \mathbf{x}_j \text{ y } \kappa_{\sigma_j\sigma_j} = \frac{a_2(\alpha_j, \sigma_j)}{\sigma_j^2} + \frac{2b(\alpha_j, \sigma_j) - d(\alpha_j, \sigma_j)}{\sigma_j^2}.$$

Las filas (o columnas) de la matriz $\kappa_{\theta\theta}$ son linealmente independientes, por lo tanto el determinante es distinto de cero, esto garantiza la existencia de la inversa de $\kappa_{\theta\theta}$.

5.3.2. Estudio de simulación del modelo de regresión

Para observar el comportamiento de las estimaciones por máxima verosimilitud de los vectores de parámetros del modelo de regresión MVUSHN, se realizó una simulación Monte Carlo, con $X_{1i} \sim N(0, 1)$ y $X_{2i} \sim U(0, 1)$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Donde

$$\text{MVUSHN}((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{20}, \beta_{21}), (\sigma_1, \sigma_2), \lambda)$$

Con $\alpha_1 = 1,5$, $\alpha_2 = 0,75$, $\beta_{10} = -0,75$, $\beta_{11} = 0,50$, $\beta_{20} = 0,50$, $\beta_{21} = 1,5$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$, $\lambda = 1,75$, $3,5$, y $5,25$. Los tamaños de muestra son $n = 40, 80$ y 120 y el número de iteraciones: $5,000$. A continuación se presenta el algoritmo para generar las muestras:

n	θ_i	$\lambda = 1,75$				$\lambda = 3,50$				$\lambda = 5,25$			
		RB	RMSE	LCI	CP	RB	RMSE	LCI	CP	RB	RMSE	LCI	CP
40	α_1	0.2279	0.6529	4.3944	0.9992	0.1858	0.5632	4.2347	1.0000	0.1588	0.4897	4.1603	1.0000
	α_2	0.5797	0.3882	3.9557	1.0000	0.4186	0.2454	3.7913	1.0000	0.2729	0.1752	3.7730	1.0000
	β_{10}	0.1648	0.0446	0.6471	0.7258	0.1059	0.0301	0.5543	0.7723	0.0844	0.0226	0.5062	0.8373
	β_{11}	0.0631	0.0295	0.6283	0.9223	0.0414	0.0218	0.5472	0.9272	0.0314	0.0189	0.5046	0.9346
	β_{20}	0.0225	0.0313	0.6037	0.8949	0.0210	0.0228	0.5251	0.9103	0.0162	0.0166	0.4833	0.9279
	β_{21}	0.1725	0.1681	1.1539	0.6816	0.1047	0.0956	0.9631	0.7742	0.0838	0.0685	0.8842	0.7535
	σ_1	0.0546	0.4598	4.5055	0.8934	0.0308	0.4418	4.6131	0.9272	0.0284	0.3935	4.4996	0.9519
	σ_2	0.3359	0.6907	9.3760	0.7098	0.2693	1.0002	6.5228	0.8036	0.3444	1.5870	6.2103	0.9096
	λ	0.1705	0.7552	3.4734	0.8446	0.2084	4.6158	8.5285	0.7551	0.2087	6.2440	10.3860	0.7217
	80	α_1	0.0422	0.1841	2.6664	1.0000	0.0424	0.1732	2.6472	1.0000	0.0396	0.1109	2.7276
α_2		0.1296	0.0798	2.6892	1.0000	0.2238	0.0657	2.8055	1.0000	0.2974	0.0727	2.7864	1.0000
β_{10}		0.1580	0.0270	0.4598	0.8239	0.1048	0.0167	0.3987	0.8683	0.0784	0.0099	0.3591	0.8871
β_{11}		0.0549	0.0141	0.4374	0.9282	0.0403	0.0091	0.3740	0.9424	0.0306	0.0079	0.3440	0.9392
β_{20}		0.0173	0.0118	0.4293	0.9276	0.0152	0.0092	0.3683	0.9380	0.0051	0.0068	0.3269	0.9286
β_{21}		0.1698	0.1033	0.7948	0.7658	0.1040	0.0541	0.6637	0.8320	0.0797	0.0336	0.5786	0.8199
σ_1		0.0301	0.2265	3.0365	0.9973	0.0289	0.1868	2.9427	0.9993	0.0223	0.1192	2.7508	1.0000
σ_2		0.1044	0.4867	7.9724	0.9606	0.2363	0.8463	5.8032	1.0000	0.2265	1.2797	5.8860	1.0000
λ		0.1038	0.1931	1.8814	0.9043	0.1782	0.7432	4.0199	0.9170	0.1674	1.4969	6.6811	0.8465
120		α_1	0.0363	0.0903	2.2934	1.0000	0.0313	0.0793	2.1980	1.0000	0.0208	0.1048	2.0728
	α_2	0.1172	0.0413	2.6855	1.0000	0.1760	0.0594	2.3182	1.0000	0.1853	0.0613	2.4098	1.0000
	β_{10}	0.1522	0.0196	0.3802	0.8248	0.1037	0.0112	0.3217	0.8755	0.0776	0.0090	0.2899	0.9029
	β_{11}	0.0537	0.0078	0.3533	0.9294	0.0375	0.0062	0.3008	0.9431	0.0306	0.0051	0.2762	0.9444
	β_{20}	0.0043	0.0092	0.3635	0.9408	0.0116	0.0056	0.2964	0.9448	0.0020	0.0052	0.2672	0.9410
	β_{21}	0.1675	0.0790	0.6467	0.8606	0.1042	0.0357	0.5260	0.8499	0.0794	0.0304	0.4765	0.8885
	σ_1	0.0103	0.0793	2.2790	1.0000	0.0034	0.0690	2.1409	1.0000	0.0104	0.1054	2.2788	1.0000
	σ_2	0.0599	0.4395	6.8628	1.0000	0.0990	0.5798	3.1258	1.0000	0.2055	0.5280	4.7802	1.0000
	λ	0.0909	0.1370	1.5647	0.9151	0.0893	0.5541	3.2542	0.9274	0.1199	1.3591	4.5893	0.9413

Tabla 5-3: Tabla resultados simulación para el modelo de regresión MVSUSHN

1. Generar $U_1 \sim U(0, 1)$ y un número x_1 con distribución $N(0, 1)$.
2. Generar $\varepsilon_1 = 2 \operatorname{arcsinh}(\alpha_1 \Phi^{-1}(U_1)/2)$ con $\Phi^{-1}(\cdot)$ la función inversa de la normal estándar
3. Sea $y_1 = 1 - \exp(-\exp(\beta_{10} + \beta_{11}x_1 + \varepsilon_1))$.
4. Calcule $b = (2/\alpha_1) \sinh((\log(-\log(1 - y_1)) - (\beta_{10} + \beta_{11}x_1))/2)$.
5. Generar otro número aleatorio uniforme (independiente de U_1) $U_2 \sim U(0, 1)$ y x_2 con distribución $N(0, 1)$
6. [-40] Calcule ε_2 donde $\varepsilon_2 = 2 \operatorname{arcsinh}(\alpha_2 \Phi_{\text{SN}}^{-1}(U_2, 0, 1, \lambda b_1)/2)$, donde $\Phi_{\text{SN}}^{-1}(\cdot, 0, 1, \cdot)$ es la función inversa de la SN $\operatorname{arcsinh}(\cdot)$ es la inversa de la función seno hiperbólico.
7. Sea $y_2 = 1 - \exp(-\exp(\beta_{20} + \beta_{21}x_2 + \varepsilon_2))$. El algoritmo itera n veces, obteniendo así la muestra bivariada USHN.

En la tabla **5-3**, podemos observar el sesgo relativo (RB), la raíz del error cuadrático medio (RMSE), longitud de intervalo de confianza (LCI) y la probabilidad de cobertura (CP), del modelo de regresión MVUSHN, notando que el RB, RSME y LCI disminuyen a medida que n aumenta, pero en el caso de CP este aumenta a medida que n aumenta.

5.4. Aplicaciones

A continuación, se presentan dos aplicaciones a datos reales que ejemplifican la utilidad de las distribución BVUSHN, para ello se estiman los parámetros desconocidos de la distribución por máxima verosimilitud y se compara con dos distribuciones bivariadas como lo son la distribución bivariada Johnson SB y el modelo beta bivariado de Cepeda y Cuervo, el modelo propuesto revela mejor ajuste a los datos mediante pruebas de Kolmogorov-Smirnov. La segunda aplicación hace referencia al modelo de regresión, la cual muestra el buen ajuste del modelo a la base de datos por medio de la prueba bivariada de Kolmogorov-Smirnov.

5.4.1. Aplicación a datos reales “*driving*”

La base de datos “*driving*” cuenta con 1200 observaciones y 56 variables de un estudio realizado por [Freeman, 2007] sobre la legislación de conducir en estado de embriaguez y las muertes por accidentes de tránsito en 48 estados de Estados Unidos durante el periodo 1980 a 2004, la base de datos está disponible en el software R en la librería wooldridge [Shea and Brown, 2022]. En este caso se usará la variable “*unem*” (y_1) que hace referencia a la tasa de desempleo y “*perc14_24*” (y_2) el porcentaje de población de 14 a 24 años. A continuación, en 5-6 observamos un gráfico de dispersión de las variables empleadas.

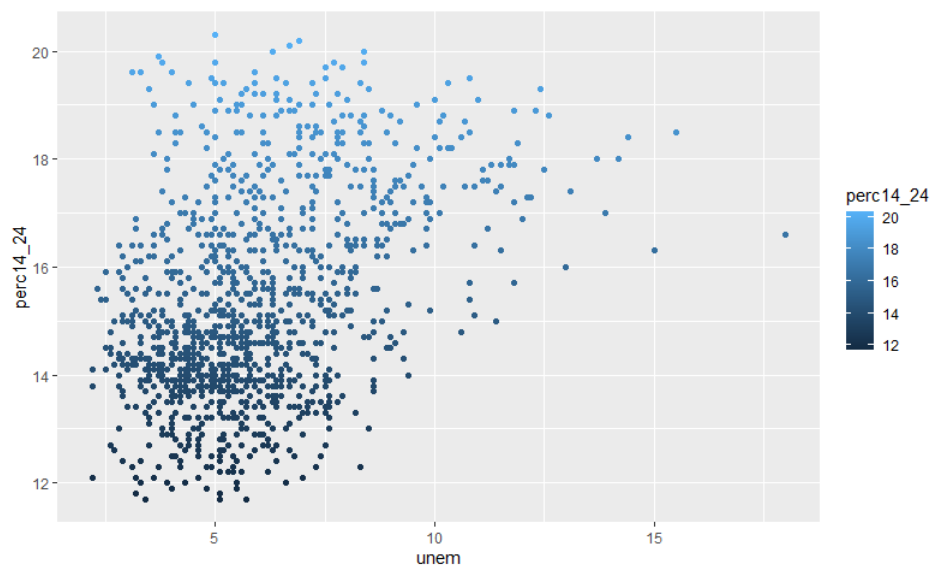


Figura 5-6: Gráfico de dispersión (y_1): “*unem*” y (y_2): “*perc14_24*”

Para ajustar la distribución paramétrica se debe encontrar el valor de los parámetros con los que, con mayor probabilidad, dicha distribución puede generar los datos observados, luego se utilizan criterios para saber que tan bien se ajusta una distribución a los datos observados. Dos de los más criterios más empleados son AIC (Criterio de información de Akaike) y BIC

(Bayesian information criterion), ambas tienen en cuenta la máxima verosimilitud y permiten comparar el ajuste entre distribuciones con diferente número de parámetro. Sea p el número de parámetros y $\hat{\ell}(\cdot)$ la log verosimilitud evaluado en los parámetros estimados, entonces

$$AIC = -2\ell(\hat{\theta}) + 2p \quad \text{y} \quad BIC = -2\ell(\hat{\theta}) + n \log(n)$$

Se comparan los modelos beta bivariado de [Cepeda Cuervo et al., 2014](BVBeta), la distribución bivariada Johnson SB (BVSJB), [Lemonte and Moreno-Arenas, 2019], el modelo bivariado unitario BS y el modelo bivariado USHN. La distribución beta bivariada de [Cepeda Cuervo et al., 2014] está basada en la copula de Farlie-Gumbel-Morgentern, see Nelsen (1999), y su fdp conjunta es

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)(1 + \theta(1 - 2F_{X_1}(x_1))(1 - 2F_{X_2}(x_2)))$$

donde $f_{X_j}(x_j)$ and $F_{X_j}(x_j)$ corresponden respectivamente a la pdf y cdf de la distribución beta de parámetros α_j y β_j para $j = 1, 2$ and $\theta \in (-1, 1)$.

El mejor ajuste al modelo de acuerdo al criteio AIC y BIC lo presenta la distribución BVUSHN, pues es el menor valor obtenido comparado con las otras dos distribuciones, como se observa en la tabla 5-4, también en la tabla se observa las estimaciones por máxima verosimilitud y entre paréntesis se anexa el error estándar asociado a cada distribución.

Tabla 5-4: Máxima verosimilitud de BVBeta, BVSJB y BVUSHN.

Parametros	BVSJB	BVBeta	BVUSHN
α_1	0.1554(0.0010)	57.0023(2.2745)	1.5520(0.1731)
α_2	0.0624(0.0018)	312.5664(12.5410)	-1.7849(0.0035)
β_1	5.0188(0.9010)	8.2716(0.3220)	0.2001(0.0163)
β_2	2.7763(0.1020)	128.3064(5.1770)	0.1729(0.1590)
σ_1	1.7204(0.6972)		-2.8302(0.0097)
σ_2	8.0839(0.2439)		4.0036(3.6538)
λ	3.2156(0.5746)	0.9995(0.0001)	0.6239(0.0547)
AIC	-10980.07	-12446.15	-12559.71
BIC	-10944.44	-12440.69	-12524.08
KS test (p-value)	D1 = 0.14(6×10^{-10}) D2 = 0.07 (0.00234)	D1 = 0.12(5×10^{-8}) D2 = 0.08 (0.00234)	D1 = 0.5725 (0.8987) D2 = 0.5175 (0.9518)

Así

$$X_j = \log(-\log(1 - Y_j)) \sim USHN(\alpha_j, \gamma_j, \sigma_j)$$

con $j = 1, 2$ y

$$(X_1, X_2) \sim BVUSHN(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, \sigma_1, \sigma_2, \lambda).$$

Entonces

$$W_j = \frac{2}{\alpha_j} \sinh\left(\frac{X_j - \gamma_j}{\sigma_j}\right) \sim N(0, 1), \quad j = 1, 2$$

y

$$(W_1, W_2) \sim BSSN(\mathbf{0}_2, \mathbf{I}_2, \lambda)$$

donde $\mathbf{0}_2$ es vector columna de tamaño 2 y \mathbf{I}_2 es matriz identidad de tamaño 2×2 .

Una vez definido W_j se calcula la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov Smirnov, obteniendo los estadísticos de prueba $D_1 = 0,5725$ con $p - value = 0,8987$ y $D_2 = 0,5175$ con $p - value = 0,9518$, podemos concluir así que las marginales presentan buen ajuste. Por último se anexan los gráficos de contorno para los modelos ajustados en la figura 5-7.

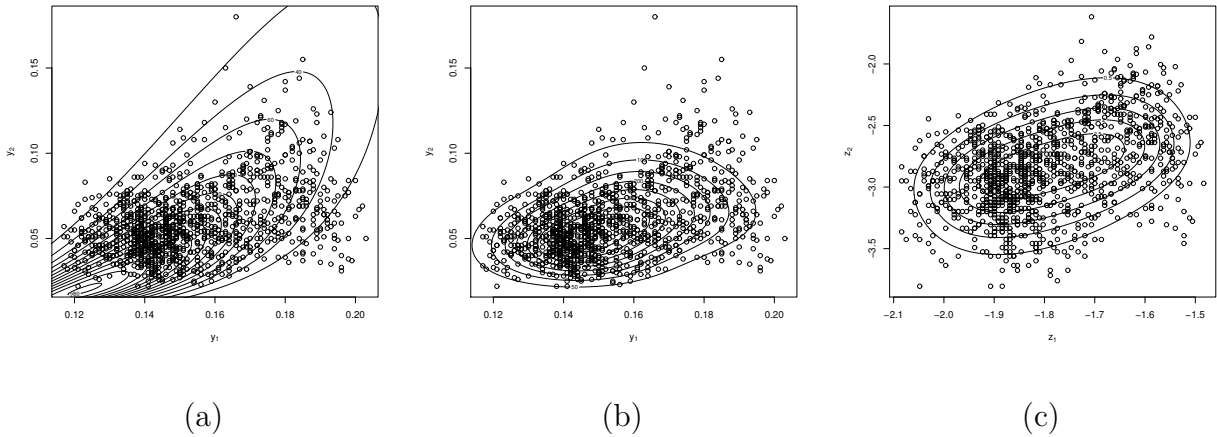


Figura 5-7: Gráficos de contornos para los modelos ajustados. (a) VBJSB, (b) VBBeta y (c) BVUSHN.

5.4.2. Aplicación a datos reales (PNUD)

En este apartado se tratará la aplicación del modelo de regresión, para ello se consideró la base de datos de Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo de Perú (PNUD), tomada de la página web <https://www.undp.org/es/peru>. Esta base cuenta con 195 registros y las variables a modelar son índice de desarrollo humano (Y_1) y tasa de analfabetismo (Y_2) como funciones de la proporción de personas con alto nivel de pobreza (HPL) utilizando el modelo de regresión *BVUSHN*.

Considerando el modelo establecido en 5.3 se establece con $i = 1, \dots, 195$ que:

$$\log(-\log(1 - Y_{1i})) = \beta_{10} + \beta_{11}HPL + \varepsilon_{1i} \text{ y } \log(-\log(1 - Y_{2i})) = \beta_{20} + \beta_{21}HPL + \varepsilon_{2i}$$

en que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \sim BVSHN((\alpha_1, \alpha_2), (0, 0), \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2), \lambda)$. Posteriormente se realiza el cálculo de estimadores por el método de máxima verosimilitud, que da como resultado las siguien-

tes cifras:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1 &= 0,3938(0,1539), & \hat{\alpha}_2 &= 0,1303(0,0654), \\ \hat{\beta}_{10} &= -0,0269(0,0075), & \hat{\beta}_{20} &= -2,8999(0,0500), \\ \hat{\beta}_{11} &= -0,5734(0,0277), & \hat{\beta}_{21} &= 3,5010(0,1832), \\ \hat{\sigma}_1 &= 0,3765(0,1384), & \hat{\sigma}_2 &= 7,8736(3,9272) \\ \hat{\lambda} &= -3,1520(0,6167).\end{aligned}$$

Los valores de AIC y BIC son $AIC = -1580,317$ and $BIC = -1550,860$.

$$W_j = \frac{2}{\alpha_j} \sinh \left(\frac{\log(-\log(1 - Y_{ji})) - \beta_{j0} - \beta_{j1}HPL}{\sigma_j} \right) \sim N(0, 1), \quad j = 1, 2$$

de acuerdo a la ecuación 5-15 y basados en [Martínez-Flórez and Tovar-Falón, 2021], afirmamos que

$$(W_1, W_2) \sim SBSN(\mathbf{0}_2, \mathbf{I}_2, \lambda)$$

donde $\mathbf{0}_2$ es vector columna de tamaño 2 y \mathbf{I}_2 es matriz identidad de 2×2 .

Para evaluar el ajuste del modelo se utiliza la prueba bivariada de Kolmogorov-Smirnov (BKS) propuesta por Justel (1997), el estadístico es

$$d_n = \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} \left| \mathcal{F}_n(x_1, x_2) - \mathcal{F}(x_1, x_2) \right|$$

donde \mathcal{F}_n es la función de distribución empírica de la muestra y \mathcal{F} es la función de distribución especificada. Cuando la distribución \mathcal{F} es desconocida el estadístico de Kolmogorov-Smirnov, con \mathcal{G}_n es la función empírica de la muestra es

$$d_n(\mathcal{F}) = \max\{D^1, D^2\},$$

donde

$$D^1 = \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} \left| \mathcal{G}_n(y_1, y_2) - y_1 \times y_2 \right|$$

usando la transformación $y_1 = \mathcal{F}_{X_1}(x_1)$ y $y_2 = \mathcal{F}_{X_2|X_1}(x_2 | x_1)$,

$$D^2 = \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} \left| \mathcal{G}_n(y_2, y_1) - y_2 \times y_1 \right|$$

bajo la transformación $y_2 = \mathcal{F}_{X_2}(x_2)$ y $y_1 = \mathcal{F}_{X_1|X_2}(x_1 | x_2)$, se obtiene para el caso del modelo BVSHN que

$$d_n(\text{BPSN}) = \max\{0,08622004, 0,0750111\} = 0,08622004,$$

que es menor a 0,1265 (para $n = 200$), este último corresponde al valor crítico establecido por Justel (1997), a un nivel de 5%, lo que nos permite afirmar que el modelo se ajusta

bien a los datos. Se consideraron pruebas de ajuste univariado de Kolmogorov-Smirnov de W_1 y W_2 , obteniendo los estadísticos $D_1 = 0,5282$ con $p - value = 0,949$ y $D_2 = 0,5076$ con $p - value = 0,9898$ y se deduce por tanto el buen ajuste de las distribuciones marginales. En 5-8 se observan los gráficos de envolventes para las distribuciones marginales y de contorno de los residuales del modelo ajustado. En cuanto al gráfico de envolventes se implementa la transformación de los residuales tipo margingale, rMT_i , propuesto por [Barros et al., 2010]. Los residuales están definidos como

$$rMT_i = \text{sgn}(rM_i) \sqrt{-2[rM_i + \alpha_i \log(\delta_i - rM_i)]}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

donde, $rM_i = \delta_i + \log(S(e_i; \hat{\theta}))$ es el *martingala residual* formulado por [Ortega et al., 2003], con $\delta_i = 0, 1$ que indica si la i -ésima observación es censurada, $\text{sgn}(rM_i)$ es el signo de rM_i and $S(e_i; \hat{\theta})$ es la función de supervivencia e_i , donde $\hat{\theta}$ es la estimación por máxima verosimilitud de θ .

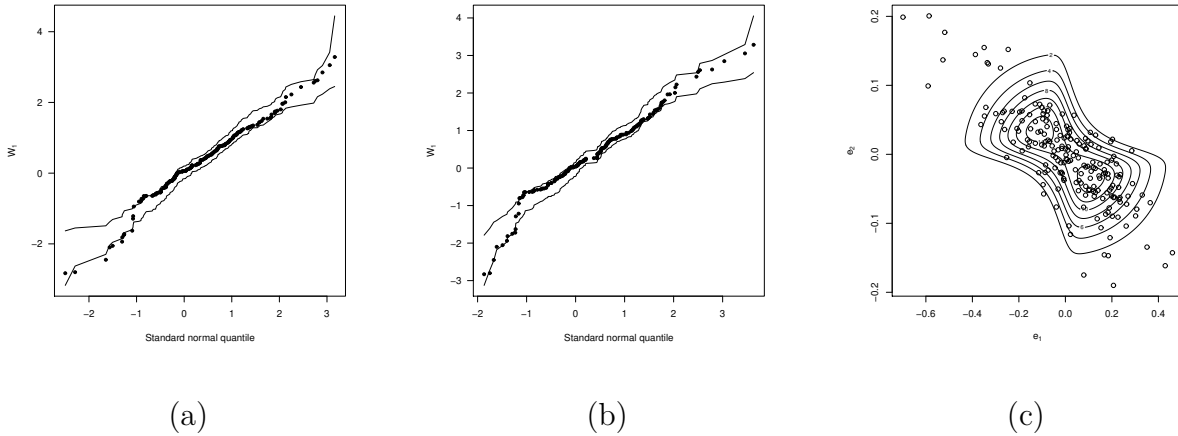


Figura 5-8: Graficos de envolventes para las marginales y contorno del modelo ajustado. (a) W_1 , (b) W_2 and (c) BVUSHN.

El software empleado fue R, [R Core Team, 2022], particularmente los paquetes `optim`, `rootSolve` y `stats`. Las aplicaciones mostraron gran flexibilidad para modelar datos en el plano unitario como alternativas a las metodologías existentes en la literatura estadística en cuanto al análisis de Datos Asimétricos no Normales. La distribuciones propuestas y el modelo de regresión, son útiles cuando se analizan los datos de proporciones, tasas o índices a la hora de modelarlos conjuntamente considerando los diferentes grados de correlación que puedan existir en las variables de interés.

6 Discusión

El anterior proyecto presentó una nueva familia de distribuciones bivariadas para ajustar datos cuya respuesta esta acotada en la región del plano unitario, que implementadas en base de datos reales mostraron un mejor ajuste bajo el criterio AIC y BIC, en comparación con la distribución beta bivariada de Cepeda-Cuervo y la distribución bivariada Johnson, razón por la cual la construcción de la BVUSHN es posiblemente una alternativa a dichas distribuciones a la hora de modelar datos.

De igual modo, se destacan algunas propiedades interesantes de las distribuciones, entre otras la distribución BVUBS es independiente para $\lambda = 0$, sí el vector aleatorio se distribuye BVUBS entonces las variables aleatorias que componen el vector se distribuyen UBS, la distribución presenta bimodalidad bajo cierta elección de parámetros aportando mayor flexibilidad, también se incluyó el cálculo de los estimaciones por el enfoque de máxima verosimilitud.

En cuanto al modelo de regresión asociado a BVUSHN se estableció junto con sus propiedades entre otras la independencia, que las marginales de la función de distribución son USHN, se estableció un rango para la correlación y el calculo de los estimadores por máxima verosimilitud. Se observó por medio de una simulación de Montecarlo el comportamiento de la estimación por máxima verosimilitud del vector de parámetros, tomando $\lambda = 1,75, 3,5, \text{ y } 5,25$, así como tamaños de muestra $n = 40, 80 \text{ y } 120$, donde se evidenció por ejemplo que, a medida que las métricas de error disminuyen el tamaño de muestra aumenta, además se puede concluir que los estimadores de parámetros se comportan asintóticamente bien. En la primera aplicación se comparó el ajuste entre distribuciones mediante los criterios AIC y BIC, evidenciando que la distribución BVUSHN es el mejor ajuste comparado con dos distribuciones BVBeta y BVSJB, además mediante Kolmogorov Smirnov se observó el buen ajuste de las marginales, en la segunda aplicación el empleo de la prueba Kolmogorov Smirnov tanto univariada como bivariada mostró buena bondad de ajuste del modelo.

7 Conclusiones

El objetivo del proyecto fue proponer dos nuevas distribuciones que permitiera modelar datos con dominio en la región del plano unitario empleando el concepto de distribuciones condicionalmente especificadas, la distribución Bivariada Birnbaum Saunders Unitaria (BVUBS) y la distribución Bivariada Sinh-Normal Birnbaum Saunders Unitaria (BVUSHN), así como el modelo de regresión asociado. Dichas distribuciones son útiles para medir tasas o indicadores en el caso bivariado, como se pudo evidenciar en las dos aplicaciones que muestran el buen ajuste a los datos y en comparación con otras distribuciones bivariadas comúnmente empleadas. Cabe destacar la presencia de bimodalidad en las distribuciones lo cual permite mayor flexibilidad en el modelamiento, así mismo, se trabajaron las generalidades más relevantes de las distribuciones y el proceso de inferencia estadística.

Para terminar, los resultados aquí presentados se pueden extender sin pérdida de generalidad al caso multivariado, como observamos en el artículo que publicamos [Martínez-Flórez et al., 2023], para el caso de la extensión (USHN), allí se presentaron las densidades marginales y las distribuciones condicionales, y también se presentó la matriz de información de Fisher del modelo de regresión multivariante, se concluye que los estimadores de parámetros se comportan asintóticamente bien mediante simulación Monte Carlo. La metodología implementada mostró gran flexibilidad para modelar datos en comparación con otras distribuciones, convirtiéndolas en excelentes alternativas a las metodologías existentes en la literatura estadística.

Bibliografía

- [Ahmed et al., 2010] Ahmed, S., Castro-Kuriss, C., Leiva, V., Flores, E., and Sanhueza, A. (2010). Truncated version of the birnbaum–saunders distribution with an application in financial risk. *Pakistan Journal of Statistics*, 26:293–311.
- [Arnold et al., 2002] Arnold, B., Castillo, E., and Sarabia, J. (2002). Conditionally specified multivariate skewed distributions. *The Indian Journal of Statistics*, 64(2):206–226. <http://www.jstor.org/stable/25051391>.
- [Athayde, 2017] Athayde, E. (2017). A characterization of the birnbaum–saunders distribution. *REVSTAT Statistical Journal*, 15:333–354.
- [Azzalini, 1985] Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, 12(2):171–178. <http://www.jstor.org/stable/4615982>.
- [Barlow and Proschan, 1965] Barlow, R. and Proschan, F. (1965). Mathematical theory of reliability. *Wiley*, 1.
- [Barros et al., 2010] Barros, M., Galea, M., Gonzalez, M., and Leiva, V. (2010). Influence diagnostics in the tobit censored response model. *Stat. Methods Appl.*, 19:379–397. <https://doi.org/10.1007/s10260-010-0135-y>.
- [Bartlett and Kendall, 1946] Bartlett, M. and Kendall, D. (1946). The statistical analysis of variance-heterogeneity and the logarithmic transformation. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 8(1):128–138. <https://doi.org/10.2307/2983618>.
- [Bebbington et al., 2008] Bebbington, M., Lai, C., and Zitikis, R. (2008). A proof of the shape of the birnbaum–saunders hazard rate function. *Mathematical Scientist*, 33:49–56.
- [Birnbaum et al., 1966] Birnbaum, Z., Esary, J., and Marshall, A. (1966). Stochastic characterization of wear-out for components and systems. *Annals of Mathematical Statistics*, 37:816–825. <https://www.jstor.org/stable/2238571>.
- [Birnbaum and Saunders, 1969] Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. (1969). A new family of life distributions. *Journal of Applied Probability*, 6(2):319–327. <https://doi.org/10.2307/3212003>.

- [Cepeda Cuervo et al., 2014] Cepeda Cuervo, E., Achcar, J., and Garrido Lopera, B. (2014). Bivariate beta regression models: Joint modeling of the mean, dispersion and association parameters. *Journal of Applied Statistics*, 41. <https://doi.org/10.1080/02664763.2013.847071>.
- [Chhikara and Folks, 1977] Chhikara, R. and Folks, J. (1977). The inverse gaussian distribution as a lifetime model. *Technometrics*, 19(4):461–468. <https://doi.org/10.2307/1267886>.
- [Cook et al., 2008] Cook, D., Kieschnick, R., and McCullough, B. (2008). Regression analysis of proportions in finance with self selection. *Journal of Empirical Finance*, 15:860–867. <https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2008.02.001>.
- [Davis, 1952] Davis, J. (1952). An analysis of some failure data. *Journal of the American Statistical Association*, 47:113–150. <https://doi.org/10.2307/2280740>.
- [Desmond, 1985] Desmond, A. (1985). Stochastic models of failure in random environments. *Statistical Society of Canada*, 13(3):171–183. <https://doi.org/10.2307/3315148>.
- [Dupuis and Mills, 1998] Dupuis, D. and Mills, J. (1998). Robust estimation of the birnbaum-saunders distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, 47:88–95.
- [Díaz and Leiva, 2005] Díaz, J. and Leiva, V. (2005). A new family of life distributions based on the elliptically contoured distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 128:445–457. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378375804000072>.
- [Díaz-García and Domínguez-Molina, 2006] Díaz-García, J. and Domínguez-Molina, J. (2006). Some generalisations of birnbaum-saunders and sinh-normal distributions. *International Mathematical Forum*, 1:1709–1727. <http://dx.doi.org/10.12988/imf.2006.06146>.
- [Esary and Marshall, 1973] Esary, J. and Marshall, A. (1973). Shock models and wear processes. *The Annals of Probability*, 1:627–649. <https://www.jstor.org/stable/2959434>.
- [Farias and Lemonte, 2011] Farias, R. and Lemonte, A. (2011). Bayesian inference for the birnbaum-saunders nonlinear regression model. *Statistical Methods and Applications*, 20:423–438. <https://doi.org/10.1007/s10260-011-0165-0>.
- [Freeman, 2007] Freeman, D. (2007). Drunk driving legislation and traffic fatalities: New evidence on bac 08 laws. *Contemporary Economic Policy* 25, 293–308.
- [Freudenthal and Shinozuka, 1961] Freudenthal, A. and Shinozuka, M. (1961). *Structural Safety Under Conditions of Ultimate Load Failure and Fatigue*. Wright Air Development Division.

- [Galea et al., 2004] Galea, M., Leiva, V., and Paula, G. (2004). Influence diagnostics in log-birnbaum–saunders regression models. *Journal of Applied Statistics*, 31:1049–1064. <https://doi.org/10.1080/0266476042000280409>.
- [Garcia et al., 2017] Garcia, F., Uribe, M., Leiva, V., and Aykroyd, G. (2017). Birnbaum–saunders spatial modelling and diagnostics applied to agricultural engineering data. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 31:105–124. <https://doi.org/10.1007/s00477-015-1204-4>.
- [Guiraud et al., 2009] Guiraud, P., Leiva, V., and Fierro, R. (2009). A non-central version of the birnbaum–saunders distribution for reliability analysis. *IEEE Transactions on Reliability*, 58:152–160. <https://ieeexplore.ieee.org/document/4781589>.
- [Gupta and Nadarajah, 2004] Gupta, A. and Nadarajah, S. (2004). *Handbook of Beta Distribution and Applications*. CRC Press.
- [Kao, 1959] Kao, J. (1959). A graphical estimation of mixed weibull parameters in life-testing of electron tubes. *Technometrics*, 1:389–407. <https://doi.org/10.2307/1266719>.
- [Kumaraswamy, 1980] Kumaraswamy, P. (1980). A generalized probability density function for double-bounded random processes. *Journal of Hydrology*, 46:79–88. [https://doi.org/10.1016/0022-1694\(80\)90036-0](https://doi.org/10.1016/0022-1694(80)90036-0).
- [Kundu, 2015] Kundu, D. (2015). Bivariate log-birnbaum-saunders distribution. *Statistics*, 49:900–917. <https://doi.org/10.1080/02331888.2014.915840>.
- [Kundu et al., 2010] Kundu, D., N. Balakrishnan, B., and Jamalizadeh, A. (2010). Bivariate birnbaum–saunders distribution and associated inference. *Journal of Multivariate Analysis*, 101:113–125. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2009.05.005>.
- [Kundu et al., 2013] Kundu, D., Narayanaswamy, B., and Jamalizadeh, A. (2013). Generalized multivariate birnbaum–saunders distributions and related inferential issues. *Journal of Multivariate Analysis*, 40:230–244. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2012.10.017>.
- [Leiva, 2016] Leiva, V. (2016). *The Birnbaum Saunders distribution*, volume 1. Elsevier.
- [Leiva et al., 2006] Leiva, V., Riquelme, M., Balakrishnan, N., and Sanhueza, A. (2006). A new fatigue life model based on the family of skew-elliptical distributions. *Stat. Theory Methods*, 35:229–244.
- [Leiva et al., 2008] Leiva, V., Riquelme, M., Balakrishnan, N., and Sanhueza, A. (2008). Lifetime analysis based on the generalized birnbaum–saunders distribution. *Computational Statistics Data Analysis*, 52:2079–2097. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2007.07.003>.

- [Leiva et al., 2011] Leiva, V., Soto, G., Cabrera, E., and Cabrera, G. (2011). Nuevas cartas de control basadas en la distribución birnbaum-saunders y su implementación. *Revista Colombiana de Estadística*, 34:147–176.
- [Leiva et al., 2010] Leiva, V., Vilca-Labra, F., Balakrishnan, N., and Sanhueza, A. (2010). A skewed sinh-normal distribution and its properties and application to air pollution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 39:426–443. <https://doi.org/10.1080/03610920903140171>.
- [Lemonte, 2013] Lemonte, A. (2013). Multivariate birnbaum-saunders regression model. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 83(12):2244–2257. <https://doi.org/10.1080/00949655.2012.688054>.
- [Lemonte, 2016] Lemonte, A. (2016). A note on the fisher information matrix of the birnbaum-saunders distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 15:196–205. <https://doi.org/10.2991/jsta.2016.15.2.9>.
- [Lemonte et al., 2015a] Lemonte, A., Martínez, G., and Moreno-Arenas, G. (2015a). Multivariate birnbaum-saunders distribution: properties and associated inference. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 1:374–392. <https://doi.org/10.1080/00949655.2013.823964>.
- [Lemonte et al., 2015b] Lemonte, A., Martínez-Flórez, G., and Moreno-Arenas, G. (2015b). Multivariate birnbaum-saunders distribution: Properties and associated inference. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85:374–392. <https://doi.org/10.1080/00949655.2013.823964>.
- [Lemonte and Moreno-Arenas, 2019] Lemonte, A. and Moreno-Arenas, G. (2019). On a multivariate regression model for rates and proportions. *Journal of Applied Statistics*, 46:1084–1106. <https://doi.org/10.1080/02664763.2018.1534945>.
- [Lemonte, 2012] Lemonte, A. J. (2012). A log- birnbaum saunders regression model with asymmetric errors. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 82:1775–1787. <https://doi.org/10.1080/00949655.2011.595715>.
- [Lieblein, 1956] Lieblein, J. (1956). Statistical investigation of the fatigue life of deep ball bearing. *Journal of National Bureau of Standards*, 57:273–316.
- [Martínez-Flórez et al., 2017] Martínez-Flórez, G., Azevedo, R., and Moreno-Arenas, G. (2017). Multivariate log-birnbaum-saunders regression models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 46:10166–10178. <https://doi.org/10.1080/03610926.2016.1231818>.

- [Martínez-Flórez et al., 2015] Martínez-Flórez, G., Bolfarine, H., and Gómez, H. (2015). Doubly censored power-normal regression models with inflation. *Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 24:265–286. <https://doi.org/10.1007/s11749-014-0406-2>.
- [Martínez-Flórez and Tovar-Falón, 2021] Martínez-Flórez, G. and Tovar-Falón, R. (2021). New regression models based on the unit-sinh-normal distributions: Properties, inference, and applications. *Mathematics*, 9(11), 1231. <https://doi.org/10.3390/math9111231>.
- [Martínez-Flórez et al., 2023] Martínez-Flórez, G., Vergara-Cardozo, S., Tovar-Falón, R., and Rodríguez-Quevedo, L. (2023). The multivariate skewed log-birnbaum saunders distribution and its associated regression model. *Mathematics*, 11(5), 1095. <http://dx.doi.org/10.3390/math11051095>.
- [Mazucheli et al., 2021] Mazucheli, J., Leiva, V., Alves, B., and Menezes, A. (2021). A new quantile regression for modeling bounded data under a unit birnbaum- saunders distribution with applications in medicine and politics. *Symmetry*, 13(4):682. <https://doi.org/10.3390/sym13040682>.
- [Mazucheli et al., 2018a] Mazucheli, J., Menezes, A., and Dey, S. (2018a). The unit birnbaum- saunders distribution with applications. *Chilean Journal of Statistics*, 9:47–57.
- [Mazucheli et al., 2018b] Mazucheli, J., Menezes, F., and Ghitany, M. (2018b). The unit-weibull distribution and associated inference. *Journal of Applied Probability and Statistics*, 13:1–22.
- [Miner, 1945] Miner, M. (1945). Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, 12(3):A159–A164. <https://doi.org/10.1115/1.4009458>.
- [Nelson and Hahn, 1972] Nelson, W. and Hahn, G. (1972). Linear estimation of a regression relationships from censored data, part i-simple methods and their applications. *Technometrics*, 14:247–269. <https://doi.org/10.1080/00401706.1972.10488912>.
- [Ortega et al., 2003] Ortega, E., Bolfarine, H., and Paula, G. (2003). Influence diagnostics in generalized log-gamma regression models. *Computational Statistics Data Analysis*, 42:165–186. [https://doi.org/10.1016/S0167-9473\(02\)00104-4](https://doi.org/10.1016/S0167-9473(02)00104-4).
- [Owen and Padgett, 1999] Owen, W. and Padgett, W. (1999). Accelerated test models for system strength based on birnbaum-saunders distribution. *Lifetime Data Analysis*, 5(2):133–147. <https://doi.org/10.1023/A:1009649428243>.
- [R Core Team, 2022] R Core Team (2022). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>.

- [Rieck and Nedelman, 1991] Rieck, J. and Nedelman, J. (1991). A log-linear model for the birnbaum–saunders distribution. *Technometrics*, 33(1):51–60. <https://doi.org/10.2307/1269007>.
- [Shea and Brown, 2022] Shea, J. and Brown, K. (2022). Wooldridge: 115 data sets. *In Introductory Econometrics: A Modern Approach, 7e*, R package version 1.4-2.
- [Vilca et al., 2014] Vilca, F., Narayanaswamy, B., and C., B. (2014). A robust extension of the bivariate birnbaum–saunders distribution and associated inference. *Journal of Multivariate Analysis*, 35:418–435. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2013.11.005>.
- [Volodin and Dzhungurova, 2000] Volodin, I. and Dzhungurova, O. (2000). On limit distribution emerging in the generalized birnbaum–saunders model. *Journal of Mathematical Science*, 99:1348–66. <https://doi.org/10.1007/BF02674095>.
- [Xie and Wei, 2007] Xie, F. and Wei, B. (2007). Diagnostics analysis for log-birnbaum–saunders regression models. *Computational Statistics y Data Analysis*, 51:4692–4706. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2006.08.030>.
- [Zelen and Dannemiller, 1961] Zelen, M. and Dannemiller, M. (1961). The robustness of life testing procedures derived from the exponential distribution. *Technometrics*, 3(1):29–49. <https://doi.org/10.2307/1266475>.