1. $2X_1 + 3X_2 \leq 1500$

2. $3X_A + 2X_2 \leq 1500$

3. $X_1 + X_2 \leq 600$

$X_1, X_2 \geq 0$

29. Una empresa fabrica dos tipos de rotuladores: de la clase A 200 u.m. la unidad y de la clase B 150 u.m. En la producción diaria se sabe que el número de rotuladores de la clase B no supera en 1000 unidades a los de la A; además, entre las dos clases no superan las 3000 unidades y la de la clase B no bajan de 1000 unidades por día. Hallar el costo mínimo de la producción diaria.

INFORMACIÓN

ROTULADOR	COSTO
A	200 u.m.
B	150 u.m.
Diariamente el número de B no supera en 1000 unidades a los de A	
Entre las dos clases no superan 3000 unidades	
Los de clase B no bajan de 1000 unidades por día	

PLANTEAMIENTO

X_A	Cantidades de rotuladores tipo A a producir diariamente
X_B	Cantidades de rotuladores tipo B a producir diariamente

Modelo (primal):

$$\text{MIN } W = 200X_A + 150X_B$$

Sujeta a:

1. $X_A + X_B \leq 3000$

2. $-X_A + X_B \leq 1000$

3. $X_B \geq 1000$

$X_A, X_B \geq 0$

30. • En un taller de motos estiman que, por término medio, la revisión normal de una moto nueva supone 0,5 horas en la sección de mecánica, y una hora en la sección de electricidad, mientras que la revisión de una moto usada supone tres horas de mecánica y una hora de electricidad. Por la revisión de una moto nueva cobran 2500 u.m. y por la revisión de una moto usada cobran 4500 u.m.

Si la sección mecánica puede trabajar durante nueve horas al día como máximo, y la de electricidad durante ocho horas al día, calcular cómo deben seleccionar el trabajo para obtener los máximos ingresos.

INFORMACIÓN

Tipo de moto	Sección mecánica	Sección electricidad	Precio revisión
Moto nueva	0,5	1	2500 u.m.
Moto usada	3,0	1	4500 u.m.
Horas disponible/día	9	8	

PLANTEAMIENTO

X_1	Número de motos nuevas a revisar por día
X_2	Número de motos usadas a revisar por día

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 2500\,X_1 + 4500\,X_2$$

Sujeta a:

1. $0{,}5\,X_1 + 3X_2 < 9$

2. $X_1 + X_2 < 8$

$$X_1, X_2 > 0$$

31. • Podemos comprar paquetes de abono A o B. Cada paquete contiene las unidades de potasio (K), fósforo (P) y nitrógeno (N) indicadas en la tabla, donde se da el precio del paquete.

Marca	K	P	N	Precio
A	4	6	1	15
B	1	10	6	24

¿En qué proporción hay que mezclar ambos tipos de abono para obtener al mínimo precio un abono que contenga cuatro unidades de K, 23 de P y 6 de N?

PLANTEAMIENTO

X_A	Cantidad de abono tipo A a utilizar en la mezcla
X_B	Cantidad de abono tipo B a utilizar en la mezcla

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 15\ X_A + 24\ X_B$$

Sujeta a:

1. $4\ X_A + X_B = 4$
2. $6\ X_A + 10X_B = 23$
3. $X_A + 6X_B = 6$

$$X_A, X_B \geq 0$$

32. Para fabricar los artículos A y B se dispone de 600 kg de acero. Para producir un artículo A se consumen 4 kg de acero y, para obtener uno de B, 8 kg. Calcular cuántos artículos de cada tipo se deben fabricar para obtener el máximo beneficio, sabiendo que el precio de venta de cada artículo de tipo A es de 1200 u.m. y cada uno del tipo B es de 2000 u.m. y que, por falta de otros materiales, no se pueden fabricar más de 120 unidades del tipo A ni más de 70 unidades del tipo B.

INFORMACIÓN

Artículo	Acero (kg)	Precio venta (u.m.)	Limitación (unidades)
A	4	1200	120
B	8	2000	70
Disponible	600		

PLANTEAMIENTO

X_A	Número de artículos tipo A a fabricar
X_B	Número de artículos tipo B a fabricar

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 1200\ X_A + 2000\ X_B$$

Sujeta a:

1. $4\ X_A + 8\ X_B \leq 600$
2. $X_A \leq 120$
3. $X_B \leq 70$

$$X_A, X_B \geq 0$$

33. • En una granja se preparan dos clases de piensos, P y Q, mezclando dos productos A y B. Un saco de P contiene 8 kg de A y 2 de B, y un saco de Q contiene 10 kg de A y 5 de B. Cada saco de P se vende a 300 u.m. y cada saco de Q a 800 u.m. Si en la granja hay almacenados 80 kg de A y 25 de B, ¿cuántos sacos de cada tipo de pienso deben preparar para obtener los máximos ingresos?

INFORMACIÓN

	Productos/saco		
Clase de pienso	A (kg)	B (kg)	Precio venta/saco
P	8	2	300
Q	10	5	800
Disponible (kg)	80	25	

PLANTEAMIENTO

X_P	Número de sacos de pienso clase "P" a preparar
X_Q	Número de sacos de pienso clase "Q" a preparar

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 300\ X_P + 800\ X_Q$$

Sujeta a:

1. $8X_P + 10X_Q \leq 80$
2. $2X_P + 5X_Q \leq 25$

$$X_P, X_Q \geq 0$$

34. A una persona que quiere adelgazar se le ofrecen dos productos, A y B, para que tome una mezcla de ambos con las siguientes recomendaciones:

No debe tomar más de 150 g de la mezcla ni menos de 50 g. La cantidad de A debe ser igual o superior a la de B. No debe incluir más de 100 g de A

Si 100 g de A contiene 30 mg de vitaminas y 450 calorías y 100 g de B contienen 20 mg de vitaminas y 150 calorías:

a) ¿Cuántos gramos de cada producto debe mezclar para obtener el preparado más rico en vitaminas?

b) ¿Y el más pobre en calorías?

INFORMACIÓN

Productos	Contenido vitaminas	Por 100 g calorías
A	30 mg	450
B	20 mg	150
No ingerir más de 150 g ni menos de 50 g de la mezcla de A y de B		
La cantidad de A debe ser por lo menos igual a la de B		
No más de 100 g de A		

PLANTEAMIENTO

X_A	Cantidad en gramos del producto A a utilizar en la mezcla
X_B	Cantidad en gramos del producto B a utilizar en la mezcla

Modelo (primal):

$$\text{MAX } Z = 0{,}3\,X_A + 0{,}2\,X_B$$

Sujeta a:

1. $X_A + X_B \leq 150$
2. $X_A + X_B \geq 50$
3. $X_A \geq X_B$
4. $X_A \leq 100$

$$X_A, X_B \geq 0$$

Resumiendo:

MAX $Z = 0{,}3\ X_A + 0{,}2\ X_B$

Sujeta a:

1. $X_A + X_B \leq 150$
2. $X_A + X_B \geq 50$
3. $X_A - X_B \geq 0$
4. $X_A \leq 100$

$X_A, X_B \geq 0$

35. Una empresa produce listones de madera en cuatro medidas: chico, mediano, grande y extra grande. Estos listones pueden producirse en tres máquinas: A, B y C. La cantidad de metros que puede producir por hora cada máquina es:

	A	B	C
Chico	300	600	800
Mediano	250	400	700
Grande	200	350	600
Extra grande	100	200	300

Supongamos que cada máquina puede ser usada 50 horas semanales y que el costo operativo por hora de cada una es 30, 50 y 80 u.m. respectivamente. Si se necesitan 10000, 8000, 6000 y 4000 metros de cada tipo de listones por semana, formular un modelo para minimizar costos.

PLANTEAMIENTO

X_{ij}	Número de horas a utilizar la máquina i (i = A, B, C) semanalmente en la producción de listones tipo j (j = 1, 2, 3, 4)

Modelo (primal):

MIN $W = 30\ (X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4}) + 50\ (X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4}) + 80\ (X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} + X_{C4})$

Sujeta a :

$$
\begin{array}{llllllll}
1. & X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4} & & & & & \leq & 50 \\
2. & & X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4} & & & & \leq & 50 \\
3. & & & X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} + X_{C4} & & & < & 50 \\
4. & 300\,X_{A1} & + 600\,X_{B1} & + 800\,X_{C1} & & & \geq & 10000 \\
5. & 250\,X_{A2} & + 400\,X_{B2} & + 700\,X_{C2} & & & \geq & 8000 \\
6. & 200\,X_{A3} & + 350\,X_{B3} & + 600\,X_{C3} & & & \geq & 6000 \\
7. & 100\,X_{A4} & + 200\,X_{B4} & + 300\,X_{C4} & & & \geq & 4000 \\
 & X_{A1}, X_{A2}, X_{A3}, X_{A4}, X_{B1}, X_{B2}, X_{B3}, X_{B4}, X_{C1}, X_{C2}, X_{C3}, X_{C4} & & & & & \geq & 0
\end{array}
$$

36. Un camión puede transportar como máximo 9 T por viaje. En cierto viaje desea transportar al menos 4 T de la mercancía A, y un peso de la mercancía B que no sea inferior a la mitad del peso que transporta de A. Sabiendo que se cobran 3000 u.m. por kg de A y 2000 u.m. por kg de B ¿cómo se debe cargar el camión para obtener la máxima ganancia?

INFORMACIÓN

Máxima carga a transportar → 9 T por viaje	
Desea al menos	4 T de mercancía A
	B > 0,5 A
Precio de venta → 3000 u.m. por kg de A y 2000 u.m. por kg de B	

PLANTEAMIENTO

X_A	Número de kg a cargar de producto A
X_B	Número de kg a cargar de producto B

Modelo (primal):

$$\text{MAX } Z = 3000000\,X_A + 2000000\,X_B$$

Sujeta a:

$$
\begin{array}{lll}
1. & X_A + X_B & < 9 \\
2. & X_A & > 4 \\
3. & X_B & > 0{,}5\,X_A \\
 & X_A, X_B & > 0
\end{array}
$$

Resumiendo:

$$MAX\ Z = 3000000\ X_A + 2000000\ X_B$$

Sujeta a:

1. $X_A + X_B \leq 9$

2. $X_A \geq 4$

3. $-0{,}5\ X_A + X_B \geq 0$

$X_A, X_B \geq 0$

37 • *Colpetro* procesa petróleo para producir combustible para aviones y aceite de maquina. Cuesta 40 u.m. comprar 1000 barriles de petróleo, que luego destilados producen 500 barriles de combustible para aviones y 500 barriles de aceite. Lo que se obtiene de la destilación puede ser vendido directamente o ser procesado nuevamente con un fraccionador catalítico. Si se vende sin el segundo proceso, el combustible para aviones se vende a 60 u.m. por 1000 barriles y el aceite para calentar se vende a 40 u.m. por 1000 barriles. Lleva una hora procesar 1000 barriles de combustible para aviones en el fraccionador catalítico, y esos 1000 barriles se venden a 130 u.m. El mismo proceso demora 45 minutos para 1000 barriles de aceite para calentar, y esos 1000 barriles se venden a 90 u.m. Cada día, se pueden comprar a lo sumo 20000 barriles de petróleo, y se tienen disponibles ocho horas del fraccionador catalítico. Formular un LP que maximice los beneficios de *Colpetro*.

INFORMACIÓN

Costo de 1000 barriles de petróleo → 40 u.m.		
		Precio de venta
1000 barriles de petróleo	500 barriles de combustible de avión	40 u.m./1000 barriles
	500 barriles de aceite	60 u.m./1000 barriles
Tiempo de procesamiento de 1000 barriles de combustible de avión	1 hora	130 u.m.
Tiempo de procesamiento de 1000 barriles de aceite	¾ hora	90 u.m.
Se puede comprar diariamente 20.000 barriles de petróleo		
Se dispone de ocho horas de proceso en el fraccionador catalítico		

PLANTEAMIENTO

X_1	Cantidad de barriles de petróleo a destilar diariamente
X_2	Miles de barriles de aceite vendidos diariamente
X_3	Miles de barriles de combustible vendidos diariamente
X_4	Miles de barriles de aceite procesado en el fraccionador vendido diariamente
X_5	Miles de barriles de combustible procesado en el fraccionador vendido diariamente

$X_2 + X_3 = X_1$

$X_4 + X_2 = 0{,}5\ X_1$

$X_5 + X_3 = 0{,}5\ X_1$

Modelo (primal):

$$\text{MAX } Z = -40\ X_1 + 40\ X_2 + 60\ X_3 + 130\ X_4 + 90\ X_5$$

Sujeta a :

1. $0{,}5\ X_1 = X_2 + X_4$

2. $0{,}5\ X_1 = X_3 + X_5$

3. $X_1 < 20000$

4. $X_4 + \frac{3}{4}\ X_5 \leq 8$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

Resumiendo:

$$\text{MAX } Z = -40\ X_1 + 40\ X_2 + 60\ X_3 + 130\ X_4 + 90\ X_5$$

Sujeta a :

1. $0{,}5\ X_1 - X_2 - X_4 = 0$

2. $0{,}5\ X_1 - X_3 - X_5 = 0$

3. $X_1 \leq 20000$

4. $X_4 + \frac{3}{4}\ X_5 \leq 8$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

38. *Cartauto* cuenta con un presupuesto de 30000000 u.m. para publicidad. Para aumentar la venta de automóviles, la firma está considerando incorporar publicidad en un periódico y en la televisión. Cuanto más publicita *Cartauto* en un medio, menos efectiva es cada publicidad adicional. La tabla muestra la cantidad de nuevos clientes que proporciona cada nuevo aviso publicitario. Cada publicidad en el periódico cuesta 100000 u.m., y cada publicidad en televisión cuesta 1000000 u.m. A lo sumo se pueden publicar 30 avisos en el periódico y 15 avisos en la televisión. ¿Cómo puede *Cartauto* maximizar el número de clientes por medio de la publicidad?

	Número de avisos	Nuevos clientes
Periódico	1 a 10	900
	11 a 20	600
	21 a 30	300
Televisión	1 a 5	10000
	6 a 10	5000
	11 a 15	2000

INFORMACIÓN

Costo del aviso en periódico → 100000 u.m.
Costo del aviso en televisión → 1000000 u.m.
Presupuesto para publicidad → 30000000 u.m.
Número máximo de avisos en el periódico → 30
Número máximo de avisos en la televisión → 15

PLANTEAMIENTO

X_{1P}	Número de avisos de periódico que capturan 900 clientes por aviso
X_{2P}	Número de avisos de periódico que capturan 600 clientes por aviso
X_{3P}	Número de avisos de periódico que capturan 300 clientes por aviso
X_{1T}	Número de avisos de televisión que capturan 10000 clientes por aviso
X_{2T}	Número de avisos de televisión que capturan 5000 clientes por aviso
X_{3T}	Número de avisos de televisión que capturan 2000 clientes por aviso

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 900\ X_{1P} + 600\ X_{2P} + 300\ X_{3P} + 10000\ X_{1T} + 5000\ X_{2T} + 2000\ X_{3T}$$

Sujeta a :

1. $X_{1P} + X_{2P} + X_{3P} < 30$
2. $X_{1T} + X_{2T} + X_{3T} \leq 15$
3. $100000\ (X_{1P} + X_{2P} + X_{3P}) + 1000000\ (X_{1T} + X_{2T} + X_{3T}) < 30000000$

4.	X_{1P}	$<$	10
5.	X_{2P}	$\leq$	11
6.	X_{2P}	$\geq$	20
7.	X_{3P}	$\geq$	21
8.	X_{3P}	$\leq$	30
9.	X_{1T}	$<$	5
10.	X_{2T}	$\geq$	6
11.	X_{2T}	$<$	10
12.	X_{3T}	$\geq$	11
13.	X_{3T}	$<$	15
	$X_{1P}, X_{2P}, X_{3P}, X_{1T}, X_{2T}, X_{3T}$	$\geq$	0

39. Una persona dispone de 100000000 de unidades monetarias y sabe de la existencia de tres acciones para invertir: la primera le dará una utilidad de un 4% sobre lo invertido, la segunda un 5% y la tercera un 5,5%; sin embargo, en ninguna puede invertir más de un 40% del capital total y al menos 25000000 unidades monetarias en la segunda. ¿Cómo invertir esa cantidad inicial para maximizar la ganancia sobre la inversión?

Plantear el anterior problema como un modelo de programación lineal.

VARIABLES REALES:

X_1: Cantidad de unidades monetarias invertidas en la primera acción
X_2: Unidades monetarias invertidas en la segunda acción
X_3: Cantidad de unidades monetarias invertidas en la tercera acción
Z: Función de utilidad

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 0{,}04\ X_1 + 0{,}05\ X_2 + 0{,}055\ X_3$$

Sujeta a:

1.	$X_1 + X_2 + X_3$	$<$	100000000
2.	X_1	$<$	0,4 (100000000)
3.	X_2	$\geq$	25000000
4.	X_2	$<$	0,4 (100000000)
5.	X_3	$<$	0,4 (100000000)
	X_1, X_2, X_3	$>$	0

40. • Usted es estudiante del curso de Investigación de Operaciones I y se ha planteado la necesidad de maximizar la satisfacción diaria que le produce la realización de una serie de actividades, las cuales se presentan en la siguiente lista: (Adaptado de Stephen Bergren)

	ACTIVIDADES	UNIDADES DE SATISFACCIÓN (US)
1.	Tomar una cerveza	4
2.	Fumar un cigarrillo	2
3.	Jugar un partido de futbol	7
4.	Dar un paseo por la playa	3
5.	Leer un libro importante	2
6.	Dormir (una hora)	4

Aunque usted quisiera realizar todas las actividades, cuenta con algunas limitaciones. Como es lógico, solo dispone de 24 horas al día y las actividades consumen tiempo, así: actividad 1, 15 minutos; actividad 2, 10 minutos; actividad 3, 2 horas; actividad 4, 1 hora; actividad 5, 5 horas.

Además, por la estrechez económica en que se vive no le es posible tomar más de cinco cervezas diarias, no puede fumar más de cinco cigarrillos al día por cuestiones de salud, no puede jugar más de dos partidos de futbol por cansancio, no puede dar más de dos paseos diarios por aburrimiento y no puede leer más de dos libros al día por cansancio visual.

En cuanto al sueño, usted sabe que no puede dormir más de 10 horas al día ni menos de 7. ¿Cuáles son las actividades diarias y a que nivel deben realizarse para lograr su objetivo, maximizar su satisfacción por día, sin violar las limitaciones existentes?

VARIABLES DE DECISIÓN:

X_1 : Número de cervezas tomadas por día
X_2 : Cantidad de cigarrillos fumados diariamente
X_3 : Número de partidos de futbol jugados por día
X_4 : Cantidad de paseos dados diariamente
X_5 : Número de libros leídos en un día
X_6 : Cantidad de horas dormidas diariamente
Z : Función de satisfacción total

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 4\ X_1 + 2\ X_2 + 7\ X_3 + 3\ X_4 + 2\ X_5 + 4\ X_6$$

Sujeta a:

1. $15\,X_1 + 10\,X_2 + 120\,X_3 + 60\,X_4 + 300\,X_5 + 60\,X_6 \quad < \quad 1440$

2. $X_1 \quad \leq \quad 5$

3. $X_2 \quad \leq \quad 5$

4. $X_3 \quad < \quad 2$

5. $X_4 \quad < \quad 2$

6. $X_5 \quad \leq \quad 2$

7. $X_6 \quad \leq \quad 10$

8. $X_6 \quad \geq \quad 7$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \quad > \quad 0$

41. La Asociación de Estudiantes de Administración de Empresas dispone de 100000 u. m. y ha pensado invertirlos en dos negocios. El primero le reporta una utilidad de 25 u. m. mensuales y el segundo 40 u. m. por mes en cada 100 u. m. invertidas. Debido a ciertas condiciones impuestas por la Asamblea de Socios, se debe invertir al menos el 25% del capital en el primer negocio y no más del 50% en el segundo.

Además, la cantidad invertida en este último no debe ser mayor a 1,5 veces la cantidad invertida en el primero. Se pide plantear este problema como un modelo de programación lineal.

VARIABLES REALES:

X_1 : Cantidad de dinero a invertir en el negocio 1
X_2 : Dinero a invertir en el negocio 2
Z : Función de maximización de la inversión

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 0{,}25\,X_1 + 0{,}40\,X_2$$

Sujeta a:

1. $X_1 + X_2 \quad \leq \quad 100000$

2. $X_1 \quad \geq \quad 25000$

3. $X_2 \quad < \quad 50000$

4. $X_2 \quad < \quad 1{,}5\,X_1$

$X_1, X_2 \quad \geq \quad 0$

Resumiendo:

MAX $Z = 0{,}25\ X_1 + 0{,}40\ X_2$

Sujeta a:

$$
\begin{array}{lrcr}
1. & X_1 + X_2 & < & 100000 \\
2. & X_1 & \geq & 25000 \\
3. & X_2 & \leq & 50000 \\
4. & -1{,}5\ X_1 + X_2 & < & 0 \\
 & X_1,\ X_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

42. *Lechera Cartagena* tiene una capacidad de recepción de 50000 litros de leche diarios. La administración exige que al menos 30000 litros sean embotellados al día y el resto sea empleado para producir leche saborizada o mantequilla. La contribución de cada litro de leche a la utilidad, según el uso que se le de, es: embotellada, 100 u. m.; saborizada, 80 u.m.; y mantequilla 50 u. m.

El equipo de fabricación de mantequilla puede manejar hasta 6000 litros diarios de leche; la sección de envase puede manejar hasta 4000 litros al día y el equipo de leche saborizada hasta 20000 litros diarios.

La empresa desea conocer qué cantidad de leche en litros es convertida en mantequilla o en leche saborizada y cuánto se debe embotellar (leche corriente) para maximizar la ganancia.

VARIABLES DE DECISIÓN:

X_1 : Cantidad de leche que se embotella por día
X_2 : Leche destinada a producir mantequilla diariamente
X_3 : Cantidad de leche que se transforma en leche saborizada por día
Z : Función de maximización de las ganancias

Modelo (primal):

MAX $Z = 100\ X_1 + 50\ X_2 + 80\ X_3$

Sujeta a:

$$
\begin{array}{lrcr}
1. & X_1 + X_2 + X_3 & \leq & 50000 \\
2. & X_1 & \geq & 30000 \\
3. & X_2 & < & 6000 \\
4. & X_1 & < & 4000 \\
5. & X_3 & \leq & 20000 \\
 & X_1, X_2, X_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

43. (Transporte) Cervecería *El Halcón* produce una marca de cerveza en tres plantas, en tres ciudades diferentes. De estas tres plantas, se envía la cerveza en camiones a cuatro centros de distribución; los administradores han comenzado a realizar un estudio para determinar si es posible reducir los costos de transporte. Los gerentes de producción de las tres plantas han estimado la producción mensual esperada para sus respectivas plantas.

Se fabricará en total en las tres plantas una cantidad suficiente para cargar 300 camiones. El gerente general de la cervecería ha asignado la producción total a los respectivos centros examinando datos de meses anteriores. En la tabla se presenta la información de producción y demanda junto con los costos de transporte para cada combinación de oferta y demanda. ¿Cuántos camiones de cerveza deben enviarse de cada planta a cada centro de distribución para minimizar los costos de transporte?

	DESTINOS	CENTROS DE DISTIBUCION			
ORIGEN	1 (U.M.)	2 (U.M.)	3 (U.M.)	4 (U.M.)	Producción (Oferta)
Planta 1	4000	5130	6500	8000	75
Planta 2	3520	4600	6900	7900	125
Planta 3	9900	6820	3880	6800	100
Demanda	80	65	70	85	300

VARIABLES REALES:

X_{ij}: Cantidad de camiones enviados desde la planta de producción i (i = 1, 2, 3) hasta el centro de consumo j (j = 1, 2, 3, 4)

W: Minimización de costos.

Modelo (primal):

$$\text{MIN } W = 4000 X_{11} + 5130 X_{12} + 6500 X_{13} + 8000 X_{14} + 3520 X_{21} + 4600 X_{22} + 6900 X_{23} + 7900 X_{24} + 9900 X_{31} + 6820 X_{32} + 3880 X_{33} + 6800 X_{34}$$

Sujeta a:

1. $X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 75$
2. $X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} < 125$
3. $X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} < 100$
4. $X_{11} + X_{21} + X_{31} = 80$
5. $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 65$

6. $X_{13} + X_{23} + X_{33} = 70$

7. $X_{14} + X_{24} + X_{34} = 85$

$X_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i, j \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4$

44.

(Asignación) La Junta Administradora Local (JAL) de la Comuna X tiene tres proyectos de pavimentación de vías. La junta tiene el problema de determinar qué contratistas llevarán a cabo los proyectos. Se abrió licitación para los proyectos, entre contratistas locales; tres presentaron diligenciados sus pliegos. El costo de cada proyecto según la propuesta de cada contratista se presenta en la siguiente tabla (en millones de u.m.).

CONTRATISTAS	P_1	P_2	P_3
C_1	280	320	360
C_2	360	280	300
C_3	380	340	400

¿Cómo deben ser asignados los contratos si se quiere minimizar los costos totales de todos ellos y si para evitar descontentos de tipo político, se desea adjudicar un contrato a cada contratista?

VARIABLES DE DECISION:

X_{ij}: Cantidad de proyectos i (i = 1, 2, 3) que se asignan al contratista j (j = 1, 2, 3)

W: Minimización de costos.

Modelo (primal):

$$\text{MIN } W = 280\, X_{11} + 360\, X_{12} + 380\, X_{13} + 320\, X_{21} + 280\, X_{22} + 340\, X_{23} + 360\, X_{31} + $$
$$+ 300\, X_{32} + 400\, X_{33}$$

Sujeta a:

1. $X_{11} + X_{12} + X_{13} = 1$
2. $X_{21} + X_{22} + X_{23} = 1$
3. $X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1$
4. $X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1$
5. $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1$
6. $X_{13} + X_{23} + X_{33} = 1$

$X_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i, j \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3 \quad X_{ij} \in \mathbb{Z}$

45. • Un producto de la firma XYZ tiene la siguiente demanda pronosticada para los próximos cuatro meses:

MES 1	2800 unidades
MES 2	2200 unidades
MES 3	3200 unidades
MES 4	2500 unidades

La compañía puede producir 2700 unidades del artículo por mes en sus turnos normales. Utilizando tiempo extra es posible fabricar 300 unidades adicionales. La producción en tiempo extra tiene un sobrecosto de 10 u.m. por artículo; la administración ha estimado que se incurre en un costo de almacenamiento de 2 u.m. por producto que se produzca en un mes determinado y no se venda en el mismo.

Se trata de determinar un programa óptimo de producción que minimice los costos totales de producción y almacenamiento. Supóngase que la cantidad en existencias es cero y se desea un inventario al final del período de cero.

VARIABLES REALES:

X_i : Cantidad a producir en el mes i en turno normal

Y_i : Producción en el mes i en turno extra

I_i : Inventario al final del mes i; $I_i = X_i + Y_i - D_i$

D_i : Demanda en el mes i

W : Minimización de costos

Modelo (primal):

$$\text{MIN } W = 10\,Y_1 + 10\,Y_2 + 10\,Y_3 + 10\,Y_4 + 2\,I_1 + 2\,I_2 + 2\,I_3$$

Sujeta a:

$$
\begin{array}{lllll}
1. & X_1 + Y_1 - I_1 & = & 2800 \\
2. & X_2 + Y_2 + I_1 - I_2 & = & 2200 \\
3. & X_3 + Y_3 + I_2 - I_3 & = & 3200 \\
4. & X_4 + Y_4 + I_3 & = & 2500 \\
5. & X_1 & \le & 2700 \\
6. & X_2 & \le & 2700 \\
7. & X_3 & \le & 2700 \\
8. & X_4 & \le & 2700 \\
9. & Y_1 & \le & 300
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
10. & Y_2 & \leq & 300 \\
11. & Y_3 & \leq & 300 \\
12. & Y_4 & \leq & 300 \\
 & X_i, Y_i, I_i & \geq & 0
\end{array}
$$

46. *Inversiones Cartagena* está considerando tres proyectos. El asesor financiero ha calculado que el valor presente neto, al costo actual de capital para la firma de cada uno de los proyectos, es el siguiente:

PROYECTO	VALOR PRESENTE NETO (Miles de u.m.)
1	120000
2	130000
3	170000

El flujo de caja para cada proyecto dentro de los próximos cinco años se da en la siguiente tabla, en miles:

PROYECTO	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
1	(100000)	(20000)	30000	30000	30000
2	(100000)	40000	(20000)	20000	20000
3	0	0	(100000)	100000	100000

La compañía espera tener los siguientes fondos para invertir durante los próximos cinco años:

Año	**CANTIDAD DE FONDOS (MILES DE U.M.)**
1	200000
2	50000
3	40000
4	40000
5	40000

Asuma que *Inversiones Manizales* puede tomar el producido de cada proyecto; asuma también que los fondos no invertidos en el proyecto pueden colocarse captando un interés del 10 %.

Determine un plan óptimo de inversión para la firma.

VARIABLES DE DECISIÓN:

$$
X_1 = \begin{cases} 0 \text{ si el proyecto i no es seleccionado} \\ 1 \text{ si el proyecyo i es seleccionado} \end{cases}
$$

h_j: Capital disponible en cada periodo para colocarlo al 10%.

Z: Maximización de utilidades.

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 120\ X_1 + 130\ X_2 + 170\ X_3$$

Sujeta a:

$$\begin{array}{llllllll}
1. & 100 X_1 & + 100 X_2 & & + & h_1 & = & 200 \\
2. & 20 X_1 & - \ 40\ X_2 & & + & h_2 & \geq & 1{,}1\ h_1 + 50 \\
3. & -30 X_1 & + \ 20 X_2 & + 100 X_3 & + & h_3 & \geq & 1{,}1\ h_2 + 40 \\
4. & -30 X_1 & - \ 20 X_2 & - 100\ X_3 & + & h_4 & \geq & 1{,}1\ h_3 + 40 \\
5. & -30 X_1 & - \ 20 X_2 & - 100\ X_3 & + & h_5 & \geq & 1{,}1\ h_4 + 40
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
X_1, X_2, X_3 & \geq & 0 \\
X_1, X_2, X_3 & \leq & 1 \\
X_1, X_2, X_3 & \in & \mathbb{Z} \\
h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Resumiendo:

$$MAX\ Z = 120\ X_1 + 130\ X_2 + 170\ X_3$$

Sujeta a:

$$\begin{array}{lllllllll}
1. & 100 X_1 & + \ 100\ X_2 & & & & + \ h_1 & = & 200 \\
2. & 20\ X_1 & - \ 40\ X_2 & & - & 1{,}1 h_1 & + \ h_2 & \geq & 50 \\
3. & -30 X_1 & + \ 20\ X_2 & + \ 100\ X_3 & - & 1{,}1\ h_2 & + \ h_3 & \geq & 40 \\
4. & -30 X_1 & - \ 20\ X_2 & - \ 100\ X_3 & - & 1{,}1\ h_3 & + \ h_4 & \geq & 40 \\
5. & -30 X_1 & - \ 20\ X_2 & - \ 100\ X_3 & - & 1{,}1\ h_4 & + \ h_5 & \geq & 40
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
X_1, X_2, X_3 & \geq & 0 \\
X_1, X_2, X_3 & \leq & 1 \\
X_1, X_2, X_3 & \in & \mathbb{Z} \\
h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 & \geq & 0
\end{array}$$

47 • La firma *Productos Lo Mejor S. A.* fabrica tres productos en dos máquinas En una semana típica hay disponibles 40 horas en cada máquina. La contribución a las utilidades y el tiempo de producción en horas por unidad, son los siguientes:

	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Utilidad por unidad (u. m.)	30	50	20
Tiempo por unidad en máquina 1	0,5	2	0,75
Tiempo por unidad en máquina 2	1	1	0,5

Se requieren dos operarios para la máquina 1, por ello se deben programar dos horas de mano de obra para cada hora del tiempo de la máquina 1; En la máquina 2 solo se requiere un operario. Existe un total de 100 horas de mano de obra disponibles para asignarlas a las máquinas en la semana siguiente. El producto 1 no puede constituir más de 50% de las unidades que se fabrican y que el producto 3 debe constituir cuando menos el 20% de las unidades que se producen.

¿Cuántas unidades de cada producto deben fabricarse con el objeto de maximizar la contribución a las utilidades?

VARIABLES REALES:

X_i. Número de unidades del producto i (i = 1, 2, 3) a fabricar en una semana
Z: Maximización de utilidades

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 30\ X_1 + 50\ X_2 + 20\ X_3$$

Sujeta a:

1. $0,5\ X_1 + 2\ X_2 + 0,75\ X_3 \leq 40$
2. $X_1 + X_2 + 0,5\ X_3 \leq 40$
3. $2\ (0,5\ X_1 + 2\ X_2 + 0,75\ X_3) + (X_1 + X_2 + 0,5\ X_3) \leq 100$
4. $X_1 \leq 0,5\ (X_1 + X_2 + X_3)$
5. $-0.2X_1 - 0.2X_3\ \ X_3 \leq 0,2\ (X_1 + X_2 + X_3)$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Resumiendo:

$$MAX\ Z = 30\ X_1 + 50\ X_2 + 20\ X_3$$

Sujeta a:

$$
\begin{array}{llllllll}
1. & 0{,}5X_1 & + & 2X_2 & + & 0{,}75X_3 & \leq & 40 \\
2. & X_1 & + & X_2 & + & 0{,}5X_3 & \leq & 40 \\
3. & 2X_1 & + & 5X_2 & + & 2X_3 & \leq & 100 \\
4. & 0{,}5X_1 & - & 0{,}5X_2 & - & 0{,}5X_3 & \leq & 0 \\
5. & -0{,}2X_1 & - & 0{,}2X_2 & + & 0{,}8X_3 & \geq & 0 \\
 & & & & & X_1, X_2, X_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

48. • La Cámara de Comercio de Cartagena patrocina periódicamente seminarios y programas sobre servicios públicos. En estos momentos se están realizando planes promocionales para el programa de este año. Las alternativas de publicidad incluyen televisión, radio y periódicos. Se muestran a continuación las estimaciones de audiencia, los costos y las limitaciones sobre el uso máximo de los medios:

	Televisión	Radio	Periódicos
Audiencia por anuncio	100000	18000	40000
Costo por anuncio (u.m.)	2000	300	600
Utilización máxima del medio (anuncios)	10	20	10

Para asegurar una utilización equilibrada de los medios publicitarios, los anuncios por radio no deben rebasar el 50% del número total de anuncios que se autoricen. Además, se requiere que la televisión constituya cuando menos el 10% del número total de anuncios autorizados.

Si el presupuesto de publicidad está limitado a 18200 u.m. ¿Cuántos mensajes comerciales deben colocarse en cada medio con el objeto de maximizar el contacto total con la audiencia?

VARIABLES DE DECISIÓN:

X_i: Número de anuncios publicitarios a colocar por el medio i (i = T, R, P)

Z: Maximización del contacto con la audiencia

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 100000\ X_T + 18000\ X_R + 40000\ X_P$$

Sujeta a:

$$
\begin{array}{llll}
1. & X_T & \leq & 10 \\
2. & X_R & \leq & 20
\end{array}
$$

3.	X_P	$\leq$	10
4.	X_R	$\leq$	$0{,}5\,(X_T + X_R + X_P)$
5.	X_T	$\geq$	$0{,}1\,(X_T + X_R + X_P)$
	$X_T + X_R + X_P$	$\geq$	0

Resumiendo:

$$MAX\ Z = 100000\,X_T + 18000\,X_R + 40000\,X_P$$

Sujeta a:

1.	X_T			$\leq$	10
2.		X_R		$<$	20
3.			X_P	$<$	0
4.	$-0{,}5\,X_T$	$+0{,}5\,X_R$	$-\ 0{,}5\,X_P$	$\leq$	0
5.	$0{,}9X_T$	$-\ 0{,}1\,X_R$	$-\ 0{,}1\,X_P$	$>$	0
			$X_T + X_R + X_P$	$\geq$	0

49. La compañía *Hipódromo* está experimentando una dieta especial para sus caballos de carreras. Los alimentos disponibles para las dietas son: un producto alimenticio común para caballos, un producto de avena enriquecido con vitaminas y un nuevo aditivo con vitaminas y minerales. Los valores nutritivos, en unidades por libra, y los costos para los tres alimentos son los siguientes:

	Alimento estándar	Avena enriquecida	Aditivo
Ingrediente A	0,8	0,2	0
Ingrediente B	1	1,5	3
Ingrediente C	0,1	0,6	2
Costo por libra (u.m.)	0,25	0,5	3

Supóngase que el entrenador de los caballos fija los requerimientos diarios de dieta en tres unidades del ingrediente A, seis unidades del ingrediente B y cuatro unidades del ingrediente C. Para efectos de control de peso, el entrenador no desea que el alimento total diario de un caballo exceda de 6 libras. ¿Cuál es la mezcla óptima por día de los tres componentes alimenticios?

VARIABLES REALES:

X_I: Cantidad en libras del alimento i (i = 1, 2, 3) a utilizar por día en la dieta
W : Minimización de costos

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 0{,}25\ X_1 + 0{,}5\ X_2 + 3\ X_3$$

Sujeta a:

1. $0{,}8\ X_1 + 0{,}2\ X_2 \leq 3$
2. $X_1 + 1{,}5\ X_2 + 3\ X_3 \leq 6$
3. $0{,}1\ X_1 + 0{,}6\ X_2 + 2X_3 \leq 4$
4. $X_1 + X_2 + X_3 \leq 6$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

50. Supongamos una economía integrada por dos grandes sectores: bienes agrícolas y básicos (BAB), y bienes terminados y servicios (BTS), de los que se conocen los coeficientes de insumo producto:

	BAB	BTS
BAB	0,1	0,1
BTS	0,25	0,25

También se dispone de los coeficientes de insumo de los factores primarios de mano de obra y capital:

	BAB	BTS
Mano de obra	4	3
Capital	1,5	1,8

Se ha determinado para estos mismos factores la disponibilidad par el año siguiente. Los resultados de esta proyección son:

Mano de obra 2000 unidades
Capital 600 unidades

Los precios de mercado para los productos o bienes considerados son, respectivamente, de 1 y 1,5. Se trata de determinar de acuerdo con la información anterior, cuál sería la estructura más favorable de la demanda final, si se tiene presente una maximización del producto nacional sin variar los recursos disponibles.

VARIABLES DE DECISIÓN:

X_1: Producción total de los BAB
X_2: Producción total de los BTS
W : Maximización del producto nacional

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = X_1 + 1{,}5\ X_2$$

Sujeta a:

1. $4\ X_1 + 3X_2 < 2000$
2. $1{,}5\ X_1 + 1{,}8\ X_2 \leq 600$
3. $0{,}1\ X_1 + 0{,}1\ X_2 \leq X_1$
4. $0{,}25\ X_1 + 0{,}25\ X_2 < X_2$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Resumiendo:

$$MAX\ Z = X_1 + 1{,}5\ X_2$$

Sujeta a:

1. $4\ X_1 + 3\ X_2 \leq 2000$
2. $1{,}5X_1 + 1{,}8\ X_2 \leq 600$
3. $-0{,}9X_1 + 0{,}1\ X_2 \leq 0$
4. $0{,}25\ X_1 + 0{,}75\ X_2 \leq 0$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

51. La empresa *El Hogar* produce una línea de artículos metálicos, la cual consta de cuatro productos. El sistema de manufactura se divide en cinco etapas: cortado, troquelado, esmaltado, acabado y empacado. A continuación se presenta la información relevante, tanto del sistema productivo como del artículo.

ÍNDICE DE PRODUCCIÓN (unidades/hora)					
DEPARTAMENTO	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4	Capacidad (Hora/Mes)
Cortado	25	6	20	10	400
Troquelado	14	8	20	10	380
Esmaltado	17	9	33	8	490
Acabado	20	4	–	8	450
Empacado	50	13	50	20	400

DEMANDA MENSUAL (unidades)				
PRODUCTO	Precio de venta (u.m./unidad)	Costo de venta (u.m./unidad)	Mínima	Máxima
1	100	50	500	5000
2	300	200	750	6000
3	160	100	650	8000
4	250	150	0	3500

Además, se sabe que en el siguiente mes solo se dispondrán de 1200 m^2 de la lámina que producen los productos 1 y 2. El producto 1 requiere 0,5 m^2 por unidad y el producto 2 necesita 0,8 m^2 por unidad.

Para el manejo de costos se está considerando la posibilidad de subcontratar las operaciones de cortado y troquelado con una empresa externa. Se estima un incremento del 40% en el costo variable de todos los productos que se manden a maquilar fuera de la empresa. Los directivos piensan que al aumentar la producción de artículos cortados y troquelados, como resultado de la subcontratación, el departamento de esmaltado podría convertirse en un cuello de botella del proceso productivo. Por tanto, se pudieran pactar 120 horas por mes de tiempo extra en dicho departamento con un incremento en el costo de venta unitario de 5 u.m., 12 u.m., 15 u.m. y 10 u.m., respectivamente.

Formular el anterior problema como un modelo de programación lineal.

VARIABLES REALES:

X_{ij}: Número de unidades del producto i (i = 1, 2, 3, 4) a fabricarse bajo la alternativa j (j = 1, 2, 3, 4) en el próximo mes; j = 1 cortado y troquelado interno sin tiempo extra en esmaltado; j = 2 cortado y troquelado interno con tiempo extra en esmaltado; j = 3 cortado y troquelado externo sin tiempo extra en esmaltado; j = 4 cortado y troquelado interno con tiempo extra en esmaltado

Z: Maximizar las utilidades

Modelo (primal):

$$\text{MAX } Z = 50 X_{11} + 100 X_{21} + 60 X_{31} + 100 X_{41} + 45 X_{12} + 88 X_{22} + 45 X_{32} + 90 X_{42} + 30 X_{13} + 20 X_{23} + 20 X_{33} + 40 X_{43} + 25 X_{14} + 8 X_{24} + 5 X_{34} + 30 X_{44}$$

Sujeta a:

1. $\frac{3}{100}(X_{11} + X_{12}) + \frac{1}{6}(X_{21} + X_{22}) + \frac{1}{10}(X_{31} + X_{32}) + \frac{1}{10}(X_{41} + X_{42}) \leq 400$

2. $\frac{1}{14}(X_{11} + X_{12}) + \frac{1}{8}(X_{21} + X_{22}) + \frac{1}{20}(X_{31} + X_{32}) + \frac{1}{10}(X_{41} + X_{42}) \leq 380$

3. $\frac{1}{17}(X_{11}+X_{13})+\frac{1}{9}(X_{21}+X_{23})+\frac{1}{33}(X_{31}+X_{33})+\frac{1}{8}(X_{41}+X_{43}) \quad < \quad 490$

4. $\sum_{j=1}^{j=4}\left(\frac{1}{20}X_{1j}+\frac{1}{4}X_{2j}+\frac{1}{8}X_{4j}\right) \quad < \quad 450$

5. $\sum_{j=1}^{j=4}\left(\frac{1}{50}X_{1j}+\frac{1}{13}X_{2j}+\frac{1}{50}X_{3j}+\frac{1}{20}X_{4j}\right) \quad \leq \quad 400$

6. $\sum_{j=1}^{j=4}X_{1j} \quad < \quad 5000$

7. $\sum_{j=1}^{j=4}X_{1j} \quad \geq \quad 500$

8. $\sum_{j=1}^{j=4}X_{2j} \quad < \quad 6000$

9. $\sum_{j=1}^{j=4}X_{2j} \quad > \quad 750$

10. $\sum_{j=1}^{j=4}X_{3j} \quad \leq \quad 8000$

11. $\sum_{j=1}^{j=4}X_{3j} \quad \geq \quad 650$

12. $\sum_{j=1}^{j=4}X_{4j} \quad < \quad 3500$

13. $\frac{1}{2}(X_{11}+X_{12})+\frac{4}{5}(X_{21}+X_{22}) \quad \leq \quad 1200$

14. $\frac{3}{50}(X_{12}+X_{14})+\frac{11}{100}(X_{22}+X_{24})+\frac{3}{100}(X_{32}+X_{34})+\frac{13}{100}(X_{32}+X_{34}) \quad \leq \quad 120$

$X_{ii} \geq 0 \ \forall \quad i, j \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad j = 1, 2, 3, 4$

52. La fábrica de *Hilados y Tejidos Manizales* requiere fabricar dos tejidos de calidad diferente T y T'; se dispone de 500 kg de hilo a, 300 kg de hilo b y 108 kg de hilo c. Para obtener un metro de T diariamente se necesitan 125 gr de a, 150 gr de b y 72 gr de c; para producir un metro de T' por día se necesitan 200 gr de a, 100 gr de b y 27 gr de c.

El T se vende a $4000 el metro y el T' se vende a $5000 el metro. Si se debe obtener el máximo beneficio, ¿cuántos metros de T y T' se deben fabricar?

Plantear el anterior problema como un modelo de programación lineal.

VARIABLES DE DECISIÓN:

X_1: Cantidad de metros del tejido T a fabricar diariamente

X_2: Número de metros del tejido T' a producir por día

Z : Función de utilidad por la venta de los tejidos T y T'

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 4000\ X_1 + 5000\ X_2$$

Sujeta a:

$$\begin{array}{lrcl}
1. & 0{,}125\ X_1 + 0{,}2X_2 & \leq & 500 \\
2. & 0{,}150\ X_1 + 0{,}1\ X_2 & \leq & 300 \\
3. & 0{,}072\ X_1 + 0{,}027X_2 & < & 108 \\
 & X_1, X_2 & > & 0
\end{array}$$

53. La empresa *Caldas* tiene un sistema de producción constituido por tres secciones, a través de las cuales elabora dos productos. En la primera sección lo más que se puede procesar son 300 unidades del artículo 1 ó 400 del producto 2 diariamente; la segunda sección fabrica como mínimo 350 unidades del producto 1 ó 450 unidades del producto 2 por día. La sección tercera puede elaborar hasta 400 unidades del artículo 1 ó 500 unidades del artículo 2 por día.

Si los productos 1 y 2 generan una utilidad de $1000 y $700 respectivamente. ¿Cuántos productos de cada uno se deben fabricar para maximizar la utilidad?

Plantear el anterior problema como un modelo de programación lineal.

DEFINICIÓN DE VARIABLES REALES:

X_1: Cantidad del producto 1 a fabricar por día

X_2: Cantidad del artículo 2 a producir diariamente

Z : Función de utilidad de los productos uno y dos

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 1000\ X_1 + 700\ X_2$$

Sujeta a:

Primera sección:

Cuando $X_1 = 0,\ X_2 = 400$; cuando $X_2 = 0,\ X_1 = 300$

$$X_2 \leq 400 - 400/300\ X_1$$

1. $4X_1 + 3X_2 \leq 1200$

Segunda sección:

Cuando $X_1 = 0, X_2 = 450$; cuando $X_2 = 0, X_1 = 350$

$$X_2 \geq 450 - 450/350\ X_1$$

2. $9\ X_1 + 7\ X_2 \geq 3150$

Tercera sección:

Cuando $X_1 = 0, X_2 = 500$; cuando $X_2 = 0, X_1 = 400$

$$X_2 \leq 500 - 500/400\ X_1$$

3. $5\ X_1 + 4\ X_2 \leq 2000$

Resumiendo:

$$MAX\ Z = 1000\ X_1 + 700\ X_2$$

Sujeta a:

1. $4\ X_1 + 3\ X_2 \leq 1200$
2. $9\ X_1 + 7\ X_2 \leq 3150$
3. $5\ X_1 + 4\ X_2 \leq 2000$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

54. En una planta, la demanda estimada para el próximo año es la siguiente:

Primer trimestre:	15000 unidades de A.
Segundo trimestre:	25000 unidades de A.
Tercer trimestre:	40000 unidades de A.
Cuarto trimestre:	20000 unidades de A.

En el almacén se cuenta con 10000 unidades, al iniciar el período v se desea disponer de un inventario de 5000 unidades al finalizar el año. La producción durante el último trimestre del período anterior fue de 5000 unidades.

Si el costo de aumento de la producción $C_1 = 50$ unidades monetarias por unidad, el costo de disminución de la producción $C_2 = 30$ unidades monetarias por unidad y el costo de almacenaje $C_3 = 20$ unidades monetarias por unidad.

¿Qué cantidad deberá producirse en cada trimestre para minimizar costos de manejo de producción? Plantear este problema como un modelo de programación lineal

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

X_j : Producción durante el trimestre j

I_j : Inventario al finalizar el trimestre j

C_1 : Costo de aumento de producción

C_2 : Costo de disminución de producción

C_3 : Costo de almacenamiento de producción

D_j : Demanda estimada en el trimestre j

A_j : Unidades adicionales producidas sobre el nivel del trimestre j-1

R_1 : Unidades en que el nivel de producción disminuyó sobre el trimestre j-1

I_0 : 10000 unidades a diciembre 31 de 2002 inventario

I_4 : 5000 unidades a diciembre 31 de 2003 inventario

X_0: 5000 unidades que se producen en el cuarto trimestre de 2002

W : Función de costos de manejo de producción

Modelo (primal):

$$MIN\ W = (20*5000) + C_1(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + C_2(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + C_3(I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$$

Sujeta a:

1. $I_0 + X_1 \geq D_1$
2. $I_1 + X_2 \geq D_2$
3. $I_2 + X_3 \geq D_3$
4. $I_3 + X_4 \geq D_4$
5. $-X_0 + X_1 = A_1 - R_1$

6 $-X_1 + X_2 = A_2 - R_2$

7. $- X_2 + X_3 = A_2 - R_3$

8. $- X_3 + X_4 = A_4 - R_4$

$$A_i, R_i, X_i \geq 0 \ \forall_i$$

55. Al director financiero de la Corporación Financiera Nacional le han dado 50000000 unidades monetarias para que invierta en un período de tres años. El director ha determinado que existen tres oportunidades de inversión disponibles en el momento: la inversión A rinde el 18% anual, la inversión B rinde el 12% el primer año y el 21% los años siguientes y la inversión C rinde el 55% al final del tercer año y no se puede volver a invertir. También ha encontrado que al comienzo del segundo año existe otra oportunidad de inversión, la D que produce 25% al final del tercer año y por una sola vez. El director financiero desea saber cuánto dinero invertir, dónde y cuándo de tal forma que la cantidad de dinero disponible al inicio del cuarto año sea máximo.

Plantear el anterior problema como un modelo de programación lineal.

VARIABLES DE DECISIÓN:

A_i: Unidades monetarias a invertir al comienzo del año i en la inversión A; i = 1,2,3

B_i: Cantidad invertida en unidades monetarias al inicio del año i en la inversión B

C_1: Unidades monetarias a invertir al comienzo del año 1 en la inversión C

D_2: Cantidad invertida en unidades monetarias al inicio del año 2 en la inversión D

Z : Unidades monetarias a principio del cuarto año

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 50000000 + 0,18(A_1 + A_2 + A_3) + (0,12B_1 + 0,21B_2 + 0,21B_3) + 0,55C_1 + 0,25D_2$$

Sujeta a:

1. $A_1 + B_1 + C_1 \leq 50000000$

2. $- 0,18A_1 + A_2 - 0,12B_1 + B_2 + C_1 + D_2 \leq 50000000$

3. $- 0,18A_1 - 0,18A_2 - 0,12B_1 - 0,21B_2 + A_3 + B_3 + C_1 + D_2 \leq 50000000$

$$A_i, B_i, C_1, D_2 \geq 0 \ \forall_j$$

56. • Suponga que una gallina pone 12 huevos en dos semanas para venderlos; o se toma el mismo tiempo para empollar cuatro huevos. ¿Cuál es el mejor programa de poner huevos y empollar si al final del cuarto período todas las gallinas y pollos se venden a 12000 unidades monetarias cada uno, los huevos a 200 unidades monetarias cada uno? Asuma:

A. Un inventario inicial de cien huevos y cien gallinas.
B. Cien gallinas y cero huevos.
C. Cien gallinas y cero huevos y también un inventario final de cien gallinas y cero huevos.

(Linear Programming and Extensions - George Bernard Dantzig - Princeton University - 1963 - Página 67).

Plantear el anterior problema como un modelo de programación lineal.

VARIABLES REALES:

X_{ij} : Cantidad de gallinas en el período i y en la actividad j

i = 1,2,3,4; j = 1,2; j = 1 (poniendo); j = 2 (incubando)

Z : Función de utilidad para poner y empollar huevos

Modelo (primal):

a) $\text{MAX } Z = 12000\ \{100 + 200\ (X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42})\ \} + 200\ \{100 - 4\ X_{12} + 12\ X_{21} -$

$- 4\ X_{32} + 12\ X_{31} - 4\ X_{42} + 12\ X_{41}\}$

Sujeta a:

Primer período:

1. $X_{11} + X_{12} \leq 100$
2. $4\ X_{12} \leq 100$

Segundo período:

3. $X_{21} + X_{22} \leq 100$
4. $- 12\ X_{11} + 4\ X_{12} + 4\ X_{22} \leq 100$

Tercer período:

5. $X_{31} + X_{32} < 100$

6. $-12 X_{11} + 4 X_{12} - 12 X_{21} + 4 X_{22} + 4 X_{32} < 100$

Cuarto período:

7. $X_{41} + X_{42} < 100$

8. $-12 X_{11} + 4 X_{12} - 12 X_{21} + 4 X_{22} - 12 X_{31} + 4 X_{32} + 4 X_{42} < 100$

$X_{ij} \geq 0 \quad \forall \ i, j$

b) $\text{MAX } Z = 12000 \{100 + 200 (X_{22} + X_{32} + X_{42}) \} + 200 \{12 X_{11} - 4 X_{22} + 12 X_{21} -$
$- 4 X_{32} + 12 X_{31} - 4 X_{42} + 12 X_{41}\}$

Sujeta a:

Primer período:

1. $X_{11} + X_{12} < 100$

Segundo período:

2. $X_{21} + X_{22} < 100$

3. $-12 X_{11} + 4 X_{22} < 0$

Tercer período:

4. $X_{31} + X_{32} < 100$

5. $-12 X_{11} - 12 X_{21} + 4 X_{22} + 4 X_{32} \leq 0$

Cuarto período:

6. $X_{41} + X_{42} < 100$

7. $-12 X_{11} - 12 X_{21} + 4 X_{22} - 12 X_{31} + 4 X_{32} + 4 X_{42} < 0$

$X_{ij} > 0 \quad \forall \ i, j$

c) $\text{MAX } Z = 8000 \{100 + 200 (X_{22} + X_{32} + X_{42})\} + 8000 * 100$

Sujeta a:

Primer período:

1. $X_{11} + X_{12} \leq 100$

Segundo período:

2. $X_{21} + X_{22} \leq 100$

3. $- 12 X_{11} + 4X_{22} \leq 0$

Tercer período:

4. $X_{31} + X_{32} \leq 100$

5. $- 12 X_{11} - 12 X_{21} + 4 X_{22} + 4 X_{32} < 0$

Cuarto período:

6. $X_{41} + X_{42} \leq 100$

7. $- 12 X_{11} - 12 X_{21} + 4 X_{22} - 12 X_{31} + 4 X_{32} + 4 X_{42} \leq 0$

8. $12 (X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41}) - 200 (X_{22} + X_{32} + X_{42}) = 100$

$$X_{ij} \geq 0 \quad \forall \quad i, j$$

57. Serendipity (Tomado de Management Science - Febrero de 1965).

Los príncipes de Serendipity.
Se fueron en un pequeño viaje.
Ellos no podían llevar muchas maletas;
Más de trescientas libras los ponían a pensar.
Planearon hasta el centavo. Cuando regresaron a Ceilán
Descubrieron que sus dineros estaban a punto de acabar.
Cuando, para su alegría, el príncipe Guillermo encontró
Una pila de cocos en el suelo.
"Cada uno nos producirá sesenta rupias", dijo el príncipe Ricardo.
Cuando pisó una piel de león.
"Miren", gritó el príncipe Roberto.
Cuando observó más pieles de león debajo del árbol.
"Estas pieles nos pueden producir hasta trescientas rupias cada una.
Si las podemos llevar hasta la orilla del mar".
Cada piel pesaba quince libras y cada coco cinco,
Pero haciendo de tripas corazón pudieron llevar todo a la orilla.

La embarcación de regreso a la isla era pequeña.
Quince pies cúbicos de equipaje - eso era todo.
Cada piel de león tomaba un pie cúbico.
Mientras que ocho cocos ocupaban el mismo espacio.
Con todo el equipaje se hicieron a la mar
Y en el viaje calcularon lo que sería su nueva riqueza.
"Eureka", gritó Roberto. Nuestra fortuna es tan grande,
Que no existe otra forma de retornar así.
Con cualquier otra piel o coco que hubiéramos traído
Ahora seríamos más pobres. Y no sé qué
Le escribiré a mi amigo Horacio en Inglaterra, seguramente
Sólo él sabrá apreciar nuestro Serendipity.

Plantear el anterior problema como un modelo de programación lineal.

VARIABLES DE DECISIÓN:

X_1: Número de cocos cargados en el bote

X_2: Cantidad de pieles de león cargadas en el bote

Z : Función de utilidad correspondiente a los cocos y pieles de león cargados en el bote

Modelo (primal):

MAX $Z = 60\ X_1 + 300\ X_2$

Sujeta a:

1. $5\ X_1 + 15 X_2 \leq 300$
2. $1/8\ X_1 + X_2 \leq 15$

$X_1, X_2 \geq 0$

58. Un barco tiene tres bodegas: proa, popa y centro; los límites de capacidad para esas tres bodegas son:

BODEGAS	PESO (t)	VOLUMEN (FT^3)
Proa	2000	100000
Popa	1500	300000
Centro	3000	135000

Se ofrecen las siguientes cargas y los responsables del barco pueden aceptar todo o parte de cada carga:

CARGA	CANTIDAD (t)	VOLUMEN (T/FT^3)	UTILIDAD (u.m./t)
A	6000	60	6
B	4000	50	8
C	2000	25	5

Buscando conservar el equilibrio en el barco, el peso de cada bodega debe ser proporcional a su capacidad en toneladas. ¿Cómo se debe repartir la carga buscando maximizar las ganancias totales?

Plantear el anterior problema como un modelo de programación lineal.

DEFINICIÓN DE VARIABLES

BODEGA	PROA (1)	POPA (2)	CENTRO (3)	CANTIDAD (t)	VOLUMEN CARGA (t/FT^3)
A	X_{A1}	X_{A2}	X_{A3}	6000	60
B	X_{B1}	X_{B2}	X_{B3}	4000	50
C	X_{C1}	X_{C2}	X_{C3}	2000	25

Peso	2000	1500	3000	t
Volumen	100000	300000	300000	Ft^3

Z: Utilidad total

Modelo (primal):

$$MAX\ Z = 6\,(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3}) + 8\,(X_{B1} + X_{B2} + X_{B3}) + 5\,(X_{C1} + X_{C2} + X_{C3})$$

Sujeta a:

1. $X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} \leq 6000$
2. $X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} < 4000$
3. $X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} < 2000$
4. $60\,X_{A1} + 50\,X_{B1} + 25\,X_{C1} < 100000$
5. $60\,X_{A2} + 50\,X_{B2} + 25\,X_{C2} < 300000$
6. $60X_{A3} + 50\,X_{B3} + 25X_{C3} \leq 135000$

7. $\dfrac{60X_{A1}+50X_{B1}+25X_{C1}}{100000} = \dfrac{60X_{A2}+50X_{B2}+25X_{C2}}{300000}$

8. $\dfrac{60X_{A1}+50X_{B1}+25X_{C1}}{100000} = \dfrac{60X_{A3}+50X_{B3}+25X_{C3}}{135000}$

9. $\dfrac{60X_{A2}+50X_{B2}+25X_{C2}}{300000} = \dfrac{60X_{A3}+50X_{B3}+25X_{C3}}{135000}$

10. $X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} \leq 2000$

11. $X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} \leq 1500$

12. $X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} \leq 3000$

Resumiendo:

$$MAX\ Z = 6\ (X_{A1} + X_{A2} + X_{A3}) + 8\ (X_{B1} + X_{B2} + X_{B3}) + 5\ (X_{C1} + X_{C2} + X_{C3})$$

Sujeta a:

1. $X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} \leq 6000$

2. $X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} < 4000$

3. $X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} \leq 2000$

4. $60\ X_{A1} + 50\ X_{B1} + 25\ X_{C1} \leq 100000$

5. $60\ X_{A2} + 50\ X_{B2} + 25\ X_{C2} \leq 300000$

6. $60\ X_{A3} + 50X_{B3} + 25\ X_{C3} \leq 135000$

7. $36\ X_{A1} + 30\ X_{B1} + 15\ X_{C1} - 12\ X_{A2} - 10\ X_{B2} - 5\ X_{C2} = 0$

8. $324\ X_{A1} + 270\ X_{B1} + 135\ X_{C1} - 240\ X_{A3} - 200\ X_{B3} - 100\ X_{C3} = 0$

9. $108\ X_{A2} + 90\ X_{B2} + 45\ X_{C2} - 240\ X_{A3} - 200\ X_{B3} - 100\ X_{C3} = 0$

10. $X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} < 2000$

11. $X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} < 1500$

12. $X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} < 3000$

$X_{ij} > 0 \quad i = A, B, C \quad j = 1, 2, 3.$

59. • Una empresa se dedica a la producción y distribución de pinturas para interiores y exteriores; se emplean dos materias primas MP_1 y MP_2 para la producción de las pinturas. La disponibilidad máxima de MP_1 es de 20 toneladas diarias y la de MP_2 es de 9 toneladas por día. Los requerimientos diarios de materia prima por tonelada son los siguientes:

Toneladas de materia prima por tonelada de disponibilidad máxima			
Pintura para interiores		**Pintura para exteriores**	
MP_1	3	7	20
MP_2	4	1	9

Utilidad por tonelada 100000 300000

El estudio de mercado ha establecido que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que la pintura para exteriores en más de una tonelada. Además, el estudio señala que la demanda máxima de pintura para interiores está limitada a dos toneladas por día. ¿Cuánta pintura para interiores y exteriores debe producir la empresa todos los días para maximizar el ingreso bruto?

VARIABLES REALES:

X_1 : Número de toneladas diarias producidas de pintura para interiores

X_2 : Cantidad de toneladas diarias producidas de pintura para exteriores

Z : Función de utilidad correspondiente a la ganancia por la venta de pintura para interiores y exteriores

Modelo (primal):

$MAX\ Z = 100000\ X_1 + 300000\ X_2$

Sujeta a:

1. $3X_1 + 7X_2 \leq 20$
2. $4X_1 + X_2 \leq 9$
3. $-X_1 + X_2 \leq 1$
4. $X_1 \leq 2$

$X_1, X_2 \geq 0$

60. Un hacendado dispone de los siguientes recursos para emplearlos en la próxima cosecha: 70000000 unidades monetarias de capital disponible, 1000 horas tractor y 50 hectáreas de tierra cultivable. Estas tierras son propias para sembrar maíz, caña de azúcar y ajonjolí; se supone que tiene a su disposición hombres suficientes y con disponibilidad de tiempo y sus costos de producción son los siguientes: tractor e implementos 5000 unidades monetarias la hora, mano de obra 4000 unidades monetarias la hora, cada hectárea no sembrada 4500 unidades monetarias. Además se supondrá un costo como penalización, de una unidad monetaria por cada unidad monetaria no invertida. Los siguientes datos son por hectárea:

Cosecha	mano de obra (hora)	tractor (hora)	Otros costos	Valor de la cosecha (has)
Maíz	10	20	3500 U.M.	3000000 U.M.
Caña de azúcar	25	25	4000 U.M.	3800000 U.M.
Ajonjolí	30	15	10000 U.M.	4100000 U.M.

Plantear el anterior problema como un modelo de programación lineal.

VARIABLES DE DECISIÓN:

X_1 : Cantidad de hectáreas de maíz a producir
X_2 : Número de hectáreas de caña de azúcar a cosechar
X_3 : Cantidad de hectáreas de ajonjolí a producir
X_4 : Número de hectáreas no sembradas
X_5 : Unidades monetarias no invertidas
Z : Función de utilidad correspondiente a los cultivos que la hacienda produce

Modelo (primal):

MAX Z = $[3000000 - (5000 * 20 + 4000 * 10 + 3500)]\ X_1 + [3800000 - (5000 * 25 + 4000 * 25 + 4000)]\ X_2 + [4100000 - (5000 * 15 + 4000 * 30 + 10000)]\ X_3 4500\ X_4 - X_5 + 4500\ X_4 - X_5$

Sujeta a:

1. $20 X_1 + 25 X_2 + 15 X_3 \leq 1000$
2. $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 50$ Tierra
3. $(5000 * 20 + 4000 * 10 + 3500)\ X_1 + (5000 * 25 + 4000 * 25 + 4000)\ X_2 + (5000 * 15 + 4000 * 30 + 10000)\ X_3 + X_5 = 70000000$ Capital

Costos de proceso $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

61. Un fabricante de electrodomésticos produce cuatro modelos de lavadoras L_1, L_2, L_3 y L_4. Estos aparatos constan fundamentalmente de un tambor metálico recubierto con una carcasa, el cual gira por efecto de un motor eléctrico controlado por un microprocesador electrónico.

Los modelos L_1 y L_3 son lavadoras con menor capacidad de carga (4 kg), necesitando 5 m^2 de material metálico, mientras que los modelos L_2 y L_4 que cargan 10 kg, requieren 8,5 m^2 de material metálico. La cantidad de material metálico disponible es de 10000 m^2.

Los modelos L_1 y L_2 llevan un motor denominado M_1 y un microprocesador P_1; los modelos L_3 y L_4 tienen un motor M_2 y un microprocesador P_2. El primer motor es menos potente que el segundo y el microprocesador P_1 tiene menos programas que el microprocesador P_2; el material necesario para fabricar los motores puede obtener prácticamente sin limitación.

Los motores se ensamblan en una nave de montaje con una capacidad de trabajo de 3000 horas, y se requiere una hora para montar un motor M_1 y 1,5 horas para ensamblar un motor M_2. En cuanto a los microprocesadores, se pueden fabricar en la propia empresa en una sección de la planta de montaje o se pueden encargar a un fabricante de material electrónico. En el primer caso, compiten con la fabricación de los motores M_1 y M_2 necesitando 0,3 horas la fabricación de P_1 a un costo de 100000 unidades monetarias y 0,75 horas la fabricación de P_2 con un costo de 180000 unidades monetarias. En el segundo caso, el vendedor puede suministrar cualquier cantidad de P_1 y P_2 a un precio de 180000 unidades monetarias y 360000 unidades monetarias respectivamente.

Finalmente, las lavadoras se montan en otra nave de acabado con capacidad de 5000 horas, siendo preciso un tiempo de 1,5 horas para el modelo L_1, 2,3 horas para el modelo L_2, 3 horas para el modelo L_3 y 4,2 horas para el modelo L_4. Para satisfacer a todos los segmentos, el fabricante decide que la producción mínima de cada modelo sea de 300 unidades. Como dato adicional se conoce, según informe del departamento de mercadeo, que la demanda de modelos de mayor capacidad es siempre superior a la demanda de los modelos de menor capacidad, por lo que la producción combinada de los modelos L_2 y L_4 debe ser superior a la producción combinada de los modelos L_1 y L_3.

La utilidad proporcionada es de 160000 unidades monetarias para el modelo L_1, 170000 unidades monetarias para el modelo L_2, 180000 unidades monetarias para el modelo L_3 y 200000 unidades monetarias para el modelo L_4. Plantear un modelo de programación lineal para la planificación de la producción de las lavadoras teniendo como objetivo la maximización de los beneficios.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

X_1 : Número de lavadoras L_1 a fabricar
X_2 : Cantidad de lavadoras L_2 a producir
X_3: Número de lavadoras L_3 a fabricar
X_4: Cantidad de lavadoras L_4 a producir
X_5: Número de microprocesadores P_1 a fabricar en la empresa
X_6: Cantidad de microprocesadores P_1 a comprar
X_7: Número de microprocesadores P_2 a producir en la empresa
X_8: Cantidad de microprocesadores P_2 a comprar
X_9: Número de motores M_1 a fabricar
X_{10}: Cantidad de motores M_2 a producir
Z : Función de utilidad correspondiente a la ganancia por la venta de lavadoras modelos L_1, L_2, L_3 y L_4

Modelo (primal):

$$\text{MAX } Z = 160000\,X_1 + 170000\,X_2 + 180000\,X_3 + 200000\,X_4 - 100000\,X_5 - 180000\,X_6 - 180000\,X_7 - 360000\,X_8$$

Sujeta a:

1. $5\,X_1 + 8{,}5\,X_2 + 5\,X_3 + 8{,}5\,X_4 \leq 10000$
2. $0{,}3X_5 + 0{,}75\,X_7 + X_9 + 1{,}5X_{10} \leq 3000$
3. $1{,}5X_1 + 2{,}3\,X_2 + 3\,X_3 + 4{,}2\,X_4 \leq 5000$
4. $X_9 \geq X_1 + X_2$
5. $X_{10} \geq X_3 + X_4$
6. $X_1 + X_2 \leq X_5 + X_6$
7. $X_3 + X_4 \leq X_7 + X_8$
8. $X_2 + X_4 \leq X_1 + X_3$
9. $X_1 \geq 300$
10. $X_2 \geq 300$
11. $X_3 \geq 300$
12. $X_4 \geq 300$

Resumiendo:

$$\text{MAX } Z = 160000\,X_1 + 170000\,X_2 + 180000\,X_3 + 200000\,X_4 - 100000\,X_5 - 180000\,X_6 - 180000\,X_7 - 360000\,X_8$$

Sujeta a:

1. $5X_1 + 8{,}5\,X_2 + 5\,X_3 + 8{,}5\,X_4 \leq 10000$
2. $0{,}3\,X_5 + 0{,}75\,X_7 + X_9 + 1{,}5\,X_{10} \leq 3000$
3. $1{,}5\,X_1 + 2{,}3\,X_2 + 3\,X_3 + 4{,}2\,X_4 \leq 5000$
4. $-X_1 - X_2 + X_9 \geq 0$
5. $-X_3 - X_4 + X_{10} \geq 0$
6. $X_1 + X_2 - X_5 - X_6 \leq 0$
7. $X_3 + X_4 - X_7 - X_8 \leq 0$
8. $-X_1 + X_2 - X_3 + X_4 \geq 0$