



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

# **Metodología para optimización de sistemas de transmisión de potencia de engranajes rectos para reducción de vibraciones**

**Henry Fernando Torres Molano**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ingeniería, Departamento de ingeniería y mecatrónica  
Bogotá, Colombia

2023



# **Metodología para optimización de sistemas de transmisión de potencia de engranajes rectos para reducción de vibraciones**

**Henry Fernando Torres Molano**

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:

**Magister en Ingeniería Mecánica**

Director:

Ph.D., Ingeniero, Henry Octavio Cortés Ramos

Línea de Investigación:

Ingeniería de Diseño y Biomecánica

Grupo de Investigación:

Grupo de modelado y métodos numéricos en ingeniería

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Bogotá, Colombia

2023



*A mis padres y esposa.*

*“Me gusta la calma que da el tiempo, porque lo que alguna vez sentimos como un huracán, hoy vemos que era Dios llevándonos a crecer, actuando a nuestro favor y abriéndonos camino”.*

CN

## Declaración de obra original

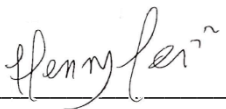
Yo declaro lo siguiente:

He leído el Acuerdo 035 de 2003 del Consejo Académico de la Universidad Nacional. «Reglamento sobre propiedad intelectual» y la Normatividad Nacional relacionada al respeto de los derechos de autor. Esta disertación representa mi trabajo original, excepto donde he reconocido las ideas, las palabras, o materiales de otros autores.

Cuando se han presentado ideas o palabras de otros autores en esta disertación, he realizado su respectivo reconocimiento aplicando correctamente los esquemas de citas y referencias bibliográficas en el estilo requerido.

He obtenido el permiso del autor o editor para incluir cualquier material con derechos de autor (por ejemplo, tablas, figuras, instrumentos de encuesta o grandes porciones de texto).

Por último, he sometido esta disertación a la herramienta de integridad académica, definida por la universidad.



---

Henry Fernando Torres Molano

Fecha 08/08/2023

## Resumen

### **Metodología para optimización de sistemas de transmisión de potencia de engranajes rectos para reducción de vibraciones**

Este trabajo presenta una metodología viable para el desarrollo de análisis de un sistema de transmisión de potencia de engranajes cilíndricos de dientes rectos para la reducción de vibraciones, en base a un caso de estudio científico revisado y estudiado múltiples veces por diferentes investigadores para obtener los parámetros óptimos. Las etapas del proyecto fueron apoyadas por herramientas de MATLAB (solucionador de ecuaciones diferenciales y librerías de optimización).

Inicialmente se realizó un estudio sobre la dinámica de sistemas de transmisión de potencia, revisando tipo de modelos, planteamiento matemático, factores que generan vibraciones y parámetros geométricos del sistema que afectan su masa, rigidez y amortiguamiento. Por otro lado, se realizó una revisión del proceso de optimización para la reducción de vibraciones teniendo en cuenta planteamientos de función objetivo y restricciones.

Se planteó un modelo dinámico por medio de parámetros concentrados, teniendo en cuenta todas sus características geométricas, condiciones iniciales y parámetros con el fin de validar la rigidez y desplazamientos con respecto a un caso de estudio. Posteriormente, sobre este modelo se pasó a realizar el proceso de optimización para obtener una reducción en las vibraciones, que se pueden ver expresadas en términos del error de transmisión.

**Palabras clave: (transmisión de potencia, reducción de vibraciones, optimización, error de transmisión).**

## **Abstract**

### **Methodology for optimization of spur gear power transmission systems for vibration reduction**

This document presents a viable methodology for the development of analysis of a spur gear power transmission system for vibration reduction, based on a scientific case study reviewed and studied multiple times by different researchers to obtain the optimal parameters. The Project stages were supported by MATLAB tools (differential equation solver and optimization libraries).

Initially, a study on the dynamics of power transmission systems was carried out, reviewing the type of models, mathematical approach, factors that generate vibrations and geometric parameters of the system that fail its mass, stiffness, and damping. On the other hand, a review of the optimization process for vibrations reduction was carried out taking into account objective function approaches and restrictions.

A dynamic model was proposed by means of concentrated parameters, considering all its geometric characteristics, initial conditions, and parameters in order to validate the stiffness and displacements with respect to a case study.

Subsequently, these results were the conditions to perform the optimization process to obtain a reduction in vibrations, which can be expressed in terms of transmission error.

**Keywords: (power transmission, vibration reduction, optimization, transmission error).**



# Contenido

Pág.

<b>1. Dinámica de sistemas multicuerpo para transmisión de potencia con engranajes rectos.....</b>	<b>17</b>
1.1 Dinámica para análisis de vibraciones.....	19
1.1.1 Error de transmisión .....	20
1.1.2 Ruta de vibraciones .....	21
1.1.3 Excitación de las vibraciones en los engranajes .....	21
1.1.4 Frecuencias propias .....	23
1.2 Métodos para evaluar vibraciones.....	24
1.2.1 Ecuaciones diferenciales .....	24
1.2.2 Error de transmisión por método cuasi estático .....	25
1.2.3 Fuerza de excitación del diente por enfoque cuasi estático .....	26
1.2.4 Enfoque dinámico.....	27
<b>2. Optimización de sistemas de transmisión de potencia con engranajes .....</b>	<b>30</b>
2.1 Optimización de engranajes rectos teniendo en cuenta la micro geometría .....	32
2.1.1 Geometría de los dientes de engranes cilíndricos de dientes rectos.....	32
2.1.2 Micro modificaciones para reducir el error de transmisión .....	35
2.1.3 Algoritmos para optimización .....	37
2.2 Optimización de engranajes rectos teniendo en cuenta la macro geometría ....	38
<b>3. Caracterización del modelo dinámico .....</b>	<b>41</b>
3.1 Modelo dinámico .....	41
3.2 Parámetros dinámicos.....	46
3.2.1 parámetros geométricos .....	46
3.2.2 Masa.....	49
3.2.3 Rigidez .....	50
3.2.4 Amortiguamiento.....	64
3.3 Solución del modelo dinámico .....	65
<b>4. Metodología de optimización para reducción de vibraciones en sistemas de transmisión de potencia con engranajes cilíndricos de dientes rectos.....</b>	<b>67</b>
4.1 Formulación del problema de optimización.....	67
4.1.1 Condiciones constantes de entrada.....	71
4.1.2 Especificaciones iniciales para optimización.....	71
4.1.3 Función objetivo.....	71
4.1.4 Variables de optimización .....	72
4.1.5 Restricciones .....	73
4.1.6 Condiciones de finalización de optimización .....	74
<b>5. Aplicación de la metodología propuesta de optimización .....</b>	<b>75</b>
5.1.1 Especificaciones iniciales para optimización.....	75
5.1.2 Función objetivo.....	75

5.1.3 Variables de optimización.....	76
5.1.4 Restricciones.....	76
5.1.5 Resultados de rigidez y dinámicos. ....	76
5.1.6 Condiciones de finalización de optimización.....	78
<b>6. Conclusiones y recomendaciones .....</b>	<b>79</b>

## Lista de figuras

	<b>Pág.</b>
<b>Figura 1-1</b> Modelos matemáticos de engranajes .....	19
<b>Figura 1-2</b> Ruta de vibraciones .....	21
<b>Figura 1-3</b> Ruta de contacto .....	22
<b>Figura 1-4</b> Resonancia típica de una caja de engranajes de una sola etapa. ....	23
<b>Figura 1-5</b> Relación de transmisión versus distancia de centros.....	24
<b>Figura 1-6</b> Modelo básico de una caja de engranajes con sus grados de libertad. ....	27
<b>Figura 2-1</b> Nombre de los diámetros del diente .....	33
<b>Figura 2-2</b> Partes del diente del engranaje. ....	34
<b>Figura 2-3</b> Modificaciones posibles en el diente.....	36
<b>Figura 3-1</b> Modelo dinámico de 6 grados de libertad .....	43
<b>Figura 3-2</b> Modelo dinámico de 12 grados de libertad .....	44
<b>Figura 3-3</b> Nomenclatura que maneja los engranajes rectos. ....	47
<b>Figura 3-4</b> Relación de parámetros geométricos de un diente. ....	51
<b>Figura 3-5</b> Relación geométrica del filete del diente .....	56
<b>Figura 3-6</b> Boceto de engrane de un par de engranajes .....	57
<b>Figura 3-7</b> Variación de la rigidez del engrane en el tiempo.....	64
<b>Figura 3-8</b> Amortiguamiento .....	64
<b>Figura 3-9</b> Desplazamientos del piñón en la implementación .....	66
<b>Figura 4-1</b> Metodología para optimización de sistemas de trasmisión de potencia de engranajes rectos para reducción de vibraciones.....	70
<b>Figura 5-1</b> Resultados de rigidez .....	77
<b>Figura 5-2</b> Desplazamientos de piñón .....	77

## Lista de tablas

	<b>Pág.</b>
<b>Tabla 3-1</b> Parámetros del conjunto piñón-engranaje.....	41
<b>Tabla 3-2</b> Parámetros del modelado dinámico.....	42
<b>Tabla 3-3</b> Valores de los coeficientes para polinomio de la deflexión .....	56
<b>Tabla 5-1</b> Error de transmisión .....	75
<b>Tabla 5-2</b> Variables de diseño .....	76

# Introducción

Este documento presenta un trabajo final de Maestría en Ingeniería Mecánica, desarrollado en el grupo de investigación GNUM - GRUPO DE MODELADO Y MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA, que pertenece al Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica de la Universidad Nacional de Colombia de la sede de Bogotá, con el objetivo de desarrollar una metodología para optimizar sistemas de transmisión de potencia con engranajes rectos para reducción de vibraciones, pero antes de profundizar en la metodología propuesta se requiere hacer un resumen sobre cómo surgieron los sistemas de transmisión de potencia con engranajes, la importancia de ellos, normas de diseño, aplicaciones, modelos dinámicos y procesos de optimización implementados.

Los engranajes surgieron con la intención de dar solución a los problemas de transporte de materiales, generación de movimientos e impulsión o elevación para un elemento, por lo cual durante las últimas décadas se han estudiado los diferentes tipos de engranajes (eje paralelos y perpendiculares): cilíndricos-rectos, cilíndricos-helicoidales, cónicos y sinfín. Los engranajes cilíndricos de dientes rectos son utilizados para disminuir y/o aumentar la velocidad. Los engranajes cilíndricos de dientes helicoidales tienen la misma aplicación de los rectos, a diferencia de sus dientes que son inclinados con respecto al eje de rotación, siendo menos ruidosos debido a que su acoplamiento es más gradual. Los engranajes cónicos (de dientes rectos y cilíndricos) son utilizados o aplicados para transmitir energía mecánica y movimiento entre ejes perpendiculares. También existen los engranajes hipoides que guardan gran similitud con los cónicos, con diferencia que sus ejes no se interceptan. Por último, los engranajes sinfín o tornillo que son implementados para grandes reducciones de velocidad o transmitir un par alto.

La aparición de los engranajes y su uso es cada vez más masivo y frecuente, tanto que han llevado a organizaciones como la Asociación Americana de Manufactura de Engranajes (*AGMA, American Gear Manufacturers Association*), *International*

*Organization for Standardization (ISO)*, Instituto Alemán para la Normalización (*DIN, Deutsches Institut für Normung*), *American National Standards Institute (ANSI)* y *Gosudarstvenny Standart (GOST)* a establecer y estandarizar el proceso de diseño y análisis de engranajes para resistir las fallas; ya sean por flexión en los dientes, la cual se da cuando el esfuerzo es igual o excede el límite de resistencia a la fluencia y/o; falla por picadura, generada porque el esfuerzo de contacto es igual o mayor al límite de resistencia a la fatiga de la superficie [41].

AGMA ha estandarizado una metodología de diseño y análisis de engranajes en su publicación de 2019, la cual ofrece lineamientos exclusivos para dimensionar los engranajes mas no los demás elementos de un sistema de transmisión de potencia, el cual está compuesto por diferentes tipos de parámetros, entre ellos: geométricos (tamaño, espesor de aro, entre otros), material (coeficiente elástico, condición superficial, relación de dureza, entre otros) y condiciones de operación (dinámico, sobrecarga, distribución de carga, ciclos de esfuerzos, temperatura, seguridad, entre otros).[1]

La norma AGMA, antes mencionada, no abarca el diseño de los diferentes componentes del sistema de transmisión de potencia; por lo tanto, en este trabajo se identificarán modelos dinámicos y métodos de optimización para reducción de vibraciones para sistemas de trasmisión de potencia con engranajes cilíndricos de dientes rectos y se aborda desde las aplicaciones actuales de los engranajes.

Algunas aplicaciones de los engranajes son vitales en diferentes industrias como la de generación de energía (hidroeléctrica y turbinas eólicas), industria de transporte (locomotoras, automotores, camiones, automóviles, buques y aviones), e industria en general (laminadoras, bandas transportadoras, maquinaria textil, de alimentación, de vestir y calzar, industria química y farmacéutica) y en la industria de generación de energía (turbinas eólicas), en esta última industria, países y grandes compañías han hecho inversiones considerables implementando turbinas eólicas para reducir el calentamiento global. Para cada una de las máquinas de estas áreas se ha implementado un estudio dinámico, para conocer desplazamientos, velocidades y aceleraciones, como también vibraciones que son generadas por medio del error de

transmisión, que es la diferencia de desplazamientos, para conocer su comportamiento dinámico mientras está operando [2]–[6] .

En diferentes investigaciones enfatizadas en el análisis de vibraciones que se ha implementado a este tipo de máquinas han hecho énfasis en el contacto de los engranajes, pero se han hecho suposiciones, tales como: velocidad y rigidez constante del sistema de engranajes [7]. Pero en los últimos años los autores han implementado diferentes modelos. Por ejemplo, modelos simples de parámetros concentrados (con contactos modelados por resortes y amortiguadores), modelos simplificados con cuerpos flexibles utilizando elementos finitos para así poder observar el comportamiento dinámico. Respecto a estas investigaciones se ha encontrado que el error de transmisión depende de la rigidez siendo esta una medida de las vibraciones en un sistema de transmisión de potencia[2], [3], [7]. ¿Cuál es el motivo de las vibraciones en los engranajes? Las vibraciones pueden aparecer por problemas de desalineación, lubricante seco incrustado en la raíz de los dientes y/o excesivo desgaste en los dientes del engranaje debido a un mal ensamblaje, mala manipulación, desviaciones en el proceso de fabricación y/o no implementar un diseño fiable y bajo norma en los engranajes. (fatiga por contacto y flexión en el diente) [8], [9].

Adicionalmente, estas vibraciones también pueden ser consecuencia de la flexibilidad que tienen los diferentes cuerpos del sistema de transmisión tales como engranes, ejes y rodamientos, ya que el comportamiento dinámico de los cuerpos tiene variación en las velocidades, aceleraciones y fuerzas generadas durante el movimiento del sistema. También se puede obtener las deflexiones en los ejes, esfuerzos de flexión en los dientes, esfuerzos de contacto en los engranajes, estimación de la vida a fatiga, entre otros [5], [6].

De acuerdo con los problemas mencionados anteriormente, se identifica que estos se relacionan directamente con el error de transmisión por la diferencia que se obtiene en los desplazamientos del engranaje. Según la bibliografía, este problema se ha solucionado implementando una optimización, realizando modificaciones geométricas (micro y macro) al engranaje por medio de un método de optimización, donde tienen en cuenta los diferentes parámetros geométricos: radio de la punta de inicio del piñón,

amplitud de la punta, radio exterior, perfil, ancho, modulo, ángulo de presión, entre otros [3], [10], [11].

Se concluye que la amplitud de la vibración indica la gravedad del problema que tiene el sistema de transmisión de potencia de engranajes, esta característica da una idea de la condición de la máquina, para lo cual se requiere establecer un modelo dinámico y una metodología de optimización para reducción de vibraciones en sistemas de transmisión de potencia con engranajes rectos, para así aplicar la metodología propuesta en la optimización de casos de estudio de transmisión de potencia.



## **1. Dinámica de sistemas multicuerpo para transmisión de potencia con engranajes rectos**

Existen diferentes tipos de sistemas multicuerpo. Una clasificación se basa en consideraciones de rigidez de los cuerpos rígidos y sus correspondientes uniones. Con base en esta clasificación, los sistemas multicuerpo se pueden clasificar en: sistemas con cuerpos y juntas rígidos, sistemas con cuerpos flexibles y juntas rígidas, y sistemas con cuerpos y juntas flexibles. Los sistemas con cuerpos y juntas rígidos han sido estudiados ampliamente y analizados a través de modelos analíticos y numéricos [12] [13], [14].

En los años sesenta se comenzó a observar las implementaciones en modelos de parámetros concentrados (Masa-resorte) para los sistemas de engranajes [15][16], [17], en este periodo también se encontraron modelos donde consideraban la evaluación del factor dinámico<sup>1</sup> simple, dinámica de sistemas de engranajes para vibraciones torsionales, entre otras.[4], [18][19]. En los años setenta se comenzaron a observar estudios de sistemas dinámicos multicuerpo con elementos finitos, haciendo énfasis en los efectos del amortiguamiento de histéresis y viscoso, incorporándolos en las ecuaciones de movimiento. [20]

En los años ochenta se comenzó a ver diversas contribuciones en la presentación de modelos en los cuales se tenía en cuenta la disipación de energía, el amortiguamiento hertziano, la fricción entre los dientes y por último desarrollaron ecuaciones en las cuales

---

simulaba las vibraciones rotacionales en los engranajes rectos y helicoidales [21], [22][17], [23], [24]. En los siguientes años comenzaron a profundizar e implementaron diferentes casos de estudio enfocados a determinar procedimientos para el análisis de las vibraciones forzadas en los engranajes, y la respuesta dinámica del sistema (desequilibrio de masas, error de transmisión y excentricidades geométricas). Todo esto se llevó a cabo a través de un modelo de elementos finitos donde tuvieron en cuenta: inercias rotacionales de los elementos montados en el eje, cargas axiales en el eje, amortiguamiento del material, la rigidez en el eje, flexibilidad en los rodamientos, y amortiguamiento y flexibilidad en el contacto entre los dientes de los engranajes. Adicionalmente, se han implementado acoplamientos entre vibraciones transversales y torsionales.[5], [6][25]. Aun así, se sigue investigando sobre los sistemas de engranajes, y se han encontrado estudios en sistemas de engranajes de dos etapas explicando su formulación, en base al eje flexible y los engranajes rígidos, para determinar las inestabilidades torsionales por medio de un método de escala múltiple para análisis de estabilidad y verificando los resultados gracias a cálculos de las ecuaciones de dinámica por medio del método de Runge-Kutta. [26][27]. Implementaron un análisis dinámico para conocer el comportamiento de las vibraciones de un sistema planetario, donde uno de los dientes del sol tiene una grieta, los planetas son cuerpos rígidos y la corona un cuerpo flexible. Inicialmente, se hizo énfasis en el cálculo de la rigidez, e identificación de parámetros de diseño del sistema [9], [28][29], [30].

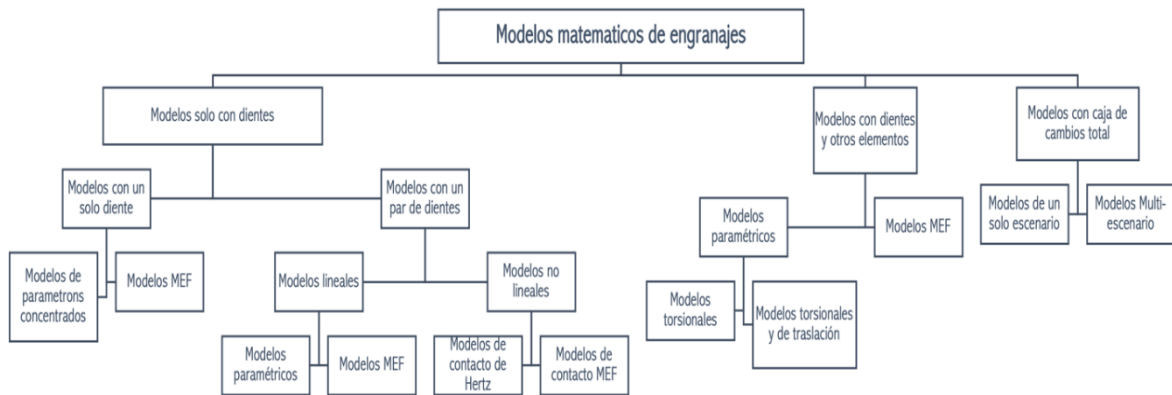
En los últimos años, se han realizado estudios de dinámica multicuerpo en engranajes rectos enfocados al análisis de respuesta de las frecuencias naturales y modos de vibración del sistema, teniendo en cuenta todos los cuerpos flexibles (ejes, engranaje, piñón y rodamientos) y los parámetros dinámicos (condiciones de carga, rigidez, masa y factor de amortiguamiento), lo anterior ha sido implementado en el software Ansys. [31][32]. La implementación por elementos finitos y modelos de parámetros concentrados ha tenido una gran importancia en el análisis dinámico de los sistemas de engranajes. Validando y comparando resultados entre estas dos implementaciones y la experimentación, donde se tiene en cuenta los ejes, rodamientos, engranaje, piñón y carcasa para los análisis [21], [33], [34].

A parte de observar diferentes tipos de sistemas dinámicos multicuerpo, se han encontrado diversos métodos con los cuales se puede solucionar los problemas de

sistemas dinámicos. Un punto de similitud es que todos los modelos solucionados tienen en cuenta los mismos parámetros geométricos, dinámicos, esfuerzos, entre otros [28], [31], [34]

Para terminar, en la **Figura 1-1**, se puede observar un resumen de los diferentes modelos y sus procesos para la solución (Análisis de elementos finitos y modelos de parámetros concentrados) con el cual se soluciona el problema de error de transmisión.

**Figura 1-1** Modelos matemáticos de engranajes



Fuente: traducida de [35]

## 1.1 Dinámica para análisis de vibraciones

Los estudios dinámicos con enfoque en las vibraciones de los engranajes se han implementado durante el tiempo porque se han percibido frecuencias audibles (ruido de los engranajes) que dependen de la velocidad y fuerza que esté transmitiendo el par de engranajes. Esto quiere decir, que si aumenta la velocidad del par aumenta la frecuencia del ruido y que si aumentamos la intensidad de la potencia del sistema de transmisión de potencia también aumentará la frecuencia del ruido. Pero más allá de la velocidad y la

potencia de transmisión, el motivo de las vibraciones y ruidos es el error de transmisión que es la diferencia de desplazamientos que hay en el sistema [4], [35].

Las industrias de automóviles, aviones, barcos, turbinas eólicas y otras han estado trabajando arduamente en la prevención de las vibraciones en los sistemas de transmisión de potencia, con el objetivo de aumentar la vida de trabajo, calidad de los engranajes y evitar accidentes por fallas durante el funcionamiento del par. De acuerdo con Vallejo, “un sistema multicuerpo, puede estar compuesto por cuerpos rígidos y flexibles interconectados por medio de pares cinemáticos y sometidos a la acción de fuerzas externas y/o restricciones de movimiento” [36]. A partir de esta definición del análisis dinámico de sistemas multicuerpo se obtienen el estado de desplazamientos o rotaciones a lo largo del tiempo y el espacio [37]. Estos pueden estar articulados por medio de juntas o elementos de fuerza, amortiguadores, resortes y actuadores, y es así como se logra restringir los cuerpos que componen el sistema [38].

### **1.1.1 Error de transmisión**

La fluctuación del error de transmisión es la principal fuente de vibración en un par de engranajes, para lo cual algunos autores nos dan una definición genérica sobre el error de transmisión, que es un desplazamiento relativo (diferencia entre la posición relativa teórica sin carga y la posición relativa de un par de engranajes en condiciones de funcionamiento reales) que es causado por la variación de la fuerza externa aplicada en el par de engranaje a una velocidad constante, o en otras palabras el error de transmisión es la variación de la deflexión en la trayectoria de contacto entre el piñón y la rueda bajo carga. Este desplazamiento es medido en micras [4], [35], [39].

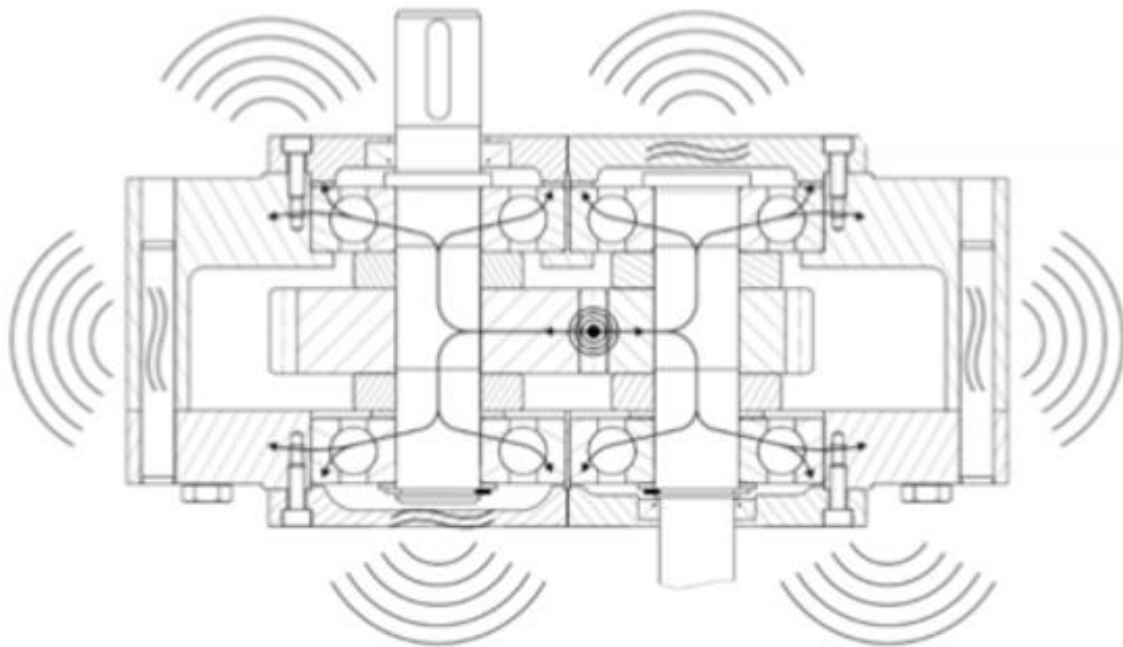
Algunos autores hacen una clasificación del error de transmisión: error de transmisión geométrico, error de transmisión estático y error de transmisión dinámico.

- Geométrico: es la diferencia de desviaciones de los perfiles de los dientes con respecto a la envolvente ideal.
- Estático: depende de las deformaciones elásticas de los dientes dadas por las cargas externas aplicadas.
- Dinámico: depende de la velocidad e incluye factores como son la rigidez, amortiguamiento y masa de los cuerpos.

### 1.1.2 Ruta de vibraciones

Las vibraciones en un sistema de transmisión de potencia están dadas principalmente por la diferencia de desplazamientos o deformaciones que hay durante el engrane entre los dientes debido a errores de manufactura y/o diseño (precisión, distorsiones y/o tolerancias), generando una variación de la rigidez durante su funcionamiento. El error de transmisión genera que la dinámica interna del par de engranajes tenga fuerzas de vibración en el eje y rodamientos. Estas vibraciones llegan hasta la carcasa del sistema de transmisión para posteriormente convertirse en sonidos que son percibidos por los humanos, como se ve en la **Figura 1-2**.

**Figura 1-2** Ruta de vibraciones



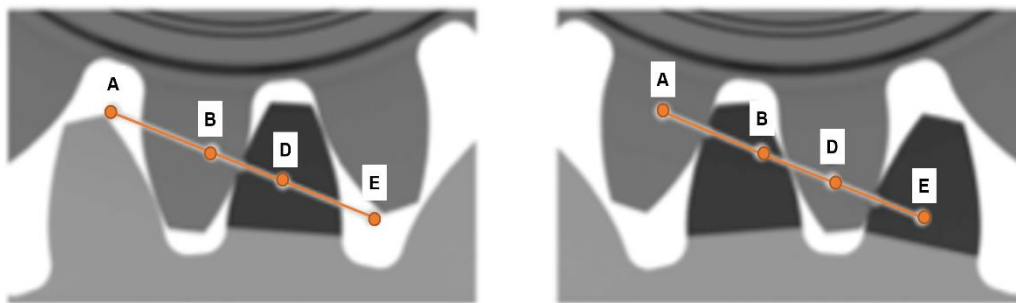
Fuente: adaptada de [35]

### 1.1.3 Excitación de las vibraciones en los engranajes

Algunos factores por los cuales el error de transmisión puede aumentar y tener como consecuencia un aumento de vibraciones son los siguientes:

- Variación de la rigidez de la malla a lo largo de la ruta de contacto. En la **Figura 1-3**, lado izquierdo se muestra que A y D son los puntos donde la punta del diente comienza a intersectar la línea de acción y donde termina el contacto, respectivamente. Al lado izquierdo de la **Figura 1-3** se ve que la línea de contacto se transfiere; esta variación se debe a que se comparte la carga entre diferente número de dientes en posiciones de engrane, el contacto entre el par de engranajes debe tener la misma cantidad de dientes en contacto. Por lo cual se puede entender que los engranajes con relación de contacto altas cercanas a 2 muestran una excitación de bajo ruido [35].

**Figura 1-3** Ruta de contacto



Fuente: adaptada de [35]

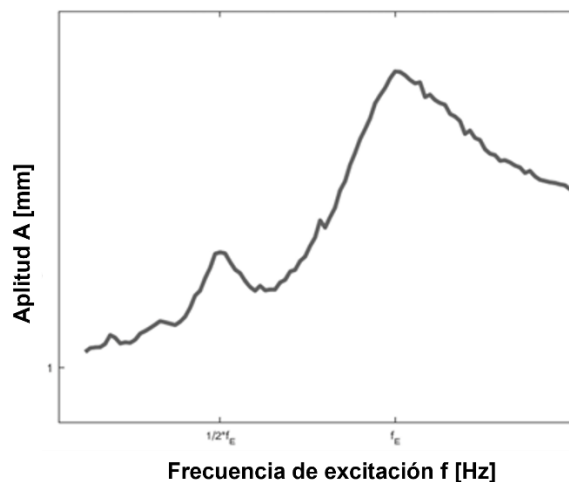
- Desviaciones del flanco del diente, así como errores de paso y descentramiento. Para evitar desviaciones se requiere que se tenga alta precisión en la fabricación de estos engranajes debido a que se le han hecho modificaciones al flanco del diente estándar para evitar deformaciones por la carga aplicada y evitar carga en el borde del diente. Este es un criterio de optimización para reducción del error de transmisión [35].
- Contacto dental extendido bajo carga, este aumenta la relación de contacto del perfil y, por lo tanto, influye en la rigidez del engrane y la excitación del ruido [35].
- Deformación del eje, este afecta sobre el contacto entre piñón y engranaje, como también la flexión y torsión que tiene el eje durante el funcionamiento influye directamente en la distribución de la carga [35].
- Variación de la fuerza de rozamiento y su inversión en el punto de cabeceo, rugosidad y estructura de la superficie del flanco del diente y cambiando periódicamente los momentos de flexión de los engranajes debido a las líneas de

contacto en movimiento en el área de engrane. Usualmente estas características nos son tomadas en cuenta en el momento de diseñar [35].

### 1.1.4 Frecuencias propias

En el proceso de análisis del comportamiento dinámico de un par de engranajes, se debe tener en consideración la excitación del engranaje y el comportamiento dinámico de la estructura del sistema (amplitud). Las estructuras de los sistemas de transmisión presentan su propio comportamiento dinámico específico con sus propias frecuencias. Si las frecuencias propias de la estructura y las del par de engranajes coinciden, las vibraciones tienden a aumentar considerablemente [35].

**Figura 1-4** Resonancia típica de una caja de engranajes de una sola etapa.



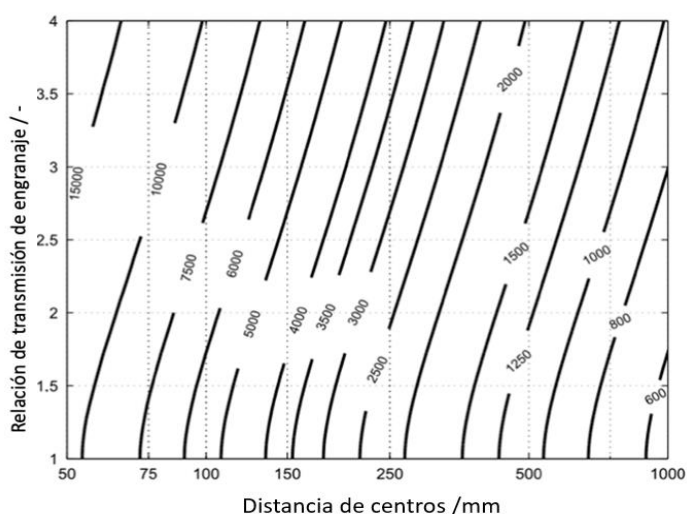
Fuente: traducida de [35].

En la **Figura 1-4**, se puede observar cómo aumenta la ampliación de las vibraciones si la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia propia. Se muestra una curva de resonancia típica de una caja de engranajes de una sola etapa. El punto más alto de amplitudes de las vibraciones se llama punto de resonancia y este representa un punto de operación crítico con respecto al comportamiento de excitación y ruido de la caja de engranajes [35].

Se debe evitar el aumento de las amplitudes de las vibraciones o funcionamiento en operaciones críticas, por lo cual es recomendado conocer las principales frecuencias

propias, principalmente las torsionales para sistemas de transmisión de potencia de engranajes, debido a las vibraciones que se crean entre los engranajes mientras están en funcionamiento [40]. Los principales factores que afectan las frecuencias propias torsionales son la distancia entre centros y la relación de transmisión, por lo tanto, se puede obtener una aproximación de la frecuencia propia con la **Figura 1-5.Figura 1-5** Relación de transmisión versus distancia de centros. En esta figura se tiene en cuenta una rigidez media de 20N según ISO 6336 [35].

**Figura 1-5** Relación de transmisión versus distancia de centros.



Fuente: traducida de [35].

## 1.2 Métodos para evaluar vibraciones

En esta sección se mostrarán los métodos y sus condiciones para poder determinar las vibraciones que hay en un sistema de transmisión de potencia de engranajes.

### 1.2.1 Ecuaciones diferenciales

Por medio de este método existen dos formas para determinar la excitación y vibraciones en una caja de transmisión, el primero es con consideraciones estáticas y el segundo es con consideraciones dinámicas. En ambos casos la solución general es la siguiente ecuación diferencial, que puede variar según las condiciones de frontera que tenga el problema a solucionar [35], [41]–[45].



$$\underline{M}\ddot{\vec{x}} + \underline{C}\dot{\vec{x}} + \underline{K}\vec{x} = \vec{F} \quad (1)$$

Donde:

$\underline{M}$ : es la matriz de masa

$\ddot{\vec{x}}$ : es el vector de aceleración

$\underline{C}$ : es la matriz de amortiguación

$\dot{\vec{x}}$ : es el vector de velocidad

$\underline{K}$ : es la matriz de rigidez

$\vec{x}$ : es el vector de desplazamiento

$\vec{F}$ : es el vector de fuerza

Cuando se tiene en cuenta la influencia de la rigidez (la rigidez del engrane es variable en el tiempo), amortiguamiento y masa, se puede obtener el análisis dinámico completo. Por parte del cálculo cuasi estático, se omite la masa y el amortiguamiento, simplificando la ecuación diferencial [35].

$$\underline{K}\vec{x} = \vec{F} \quad (2)$$

### 1.2.2 Error de transmisión por método cuasi estático

El error de transmisión bajo cargas corresponde a la variación de la deformación del engrane en la dirección de contacto y resulta de una rotación muy lenta de los engranajes. En este caso lo que es la masa y el amortiguamiento son omitidos para los cálculos. La deformación  $x$  en una determinada posición de engrane es una función que depende del tiempo, de la fuerza de engrane y tiene en cuenta la rigidez de engrane y las desviaciones de cada punto en contacto según la ecuación (3) [35].

$$x(t) = \frac{F - \sum_i K_{zi}(t) \cdot x_{fi}(t)}{\sum_i K_{zi}(t)} \quad (3)$$

Donde:

$x$ : es el error de transmisión.

$F$ : es la fuerza en el diente bajo.

$K_{zi}$ : es la rigidez del engrane en un punto específico.

$x_{fi}$ : es la desviación del diente en un punto específico.

El error de transmisión es la base para realizar distinciones entre engranajes con la misma geometría, pero diferentes perfiles del diente. En conclusión, el error de transmisión es utilizado para implementar nuevos diseños en la micro geometría de los engranajes [35], [46].

### 1.2.3 Fuerza de excitación del diente por enfoque cuasi estático

En este modelo de fuerza de excitación se alcanza al suponer que la deformación de los dientes es constante y sin error de transmisión. Este enfoque es totalmente opuesto al del error de transmisión, pero teniendo en cuenta que hay ausencia de inercia de masa y correlación directa de elasticidad y deformación la suposición para la excitación de la fuerza del diente es la ausencia de deformación y la correlación directa de la elasticidad y la fuerza del diente. En estas condiciones, la deformación del engrane en la dirección del contacto es constante. Cualquier cambio en la rigidez de la malla conduce a un cambio en la fuerza del diente, por lo que la fuerza de excitación se calcula de acuerdo con la ecuación (4) [35].

$$F(t) = \sum_i (K_{zi}(t) \cdot (x + x_{fi}(t))) \quad (4)$$

Donde:

$F$ : es la fuerza de excitación

$K_{zi}$ : es la rigidez del engrane en el punto de enganche específico  $i$

$x$ : es el error de transmisión estático

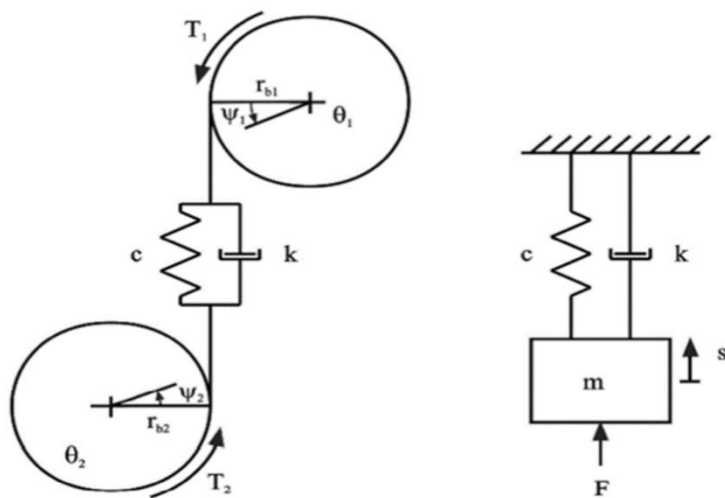
$x_{fi}$ : es la desviación del flanco del diente en el punto de compromiso específico  $i$

La fuerza de excitación es utilizada para hacer comparaciones geométricas entre engranajes [35].

### 1.2.4 Enfoque dinámico

En condiciones ideales para el análisis de vibraciones se utiliza el enfoque del error de transmisión estático y fuerza de excitación. Pero para hacer análisis en condiciones reales se implementa el análisis dinámico, teniendo en cuenta frecuencias naturales, fuerzas y amplitudes de vibración dinámicas. También se ven las condiciones críticas de operación si la frecuencia del engrane entre dientes está cerca de las frecuencias naturales, en otras palabras, las condiciones de resonancia y la magnitud de las amplitudes de vibración dependen de la distancia entre la frecuencia de excitación y la frecuencia natural, la intensidad de la excitación y el amortiguamiento efectivo. La posición de las frecuencias naturales está definida por la distribución y el tamaño de las masas y rigidez de los elementos individuales del sistema. El número de frecuencias naturales consideradas depende de las frecuencias de las excitaciones. El modelo sustituto más básico de una caja de engranajes de una etapa solo considera los grados de libertad de torsión del piñón y la rueda, que puede ser representado como parámetros concentrados, así como lo muestra la **Figura 1-6**. El movimiento de rotación de los cuerpos se describe mediante las dos ecuaciones diferenciales siguientes [35], [41]:

**Figura 1-6** Modelo básico de una caja de engranajes con sus grados de libertad.



Fuente: tomada de [35]

$$\theta_1 \psi_1 + C \cdot \dot{x} \cdot r_{b1} + K_m \cdot x \cdot r_{b1} = T_1 \quad (5)$$

$$\theta_2 \cdot \psi_2 + C \cdot \dot{x} \cdot r_{b2} + K_m \cdot x \cdot r_{b2} = T_2 \quad (6)$$

Con:

$$x = \psi_1 \cdot r_{b1} + \psi_2 \cdot r_{b2} \quad (7)$$

Donde:

$\theta_m$ : es la masa reducida

$c$ : es la amortiguación

$\psi$ : es el ángulo de rotación

$K_m$ : es la rigidez del engrane

$T$ : es el torque

$r_b$ : es el radio base

La coordenada  $x$  describe la desviación del resorte del diente en la dirección de la fuerza normal del diente y, por lo tanto, corresponde al error de transmisión del piñón y el engranaje. Al combinar ambas ecuaciones, los dos grados de libertad de rotación se pueden reducir a un grado de libertad de traslación. La ecuación diferencial resultante es la ecuación (8) [35].

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k_m \cdot x = \frac{2 \cdot T_1}{d_{b1}} \quad (8)$$

Con:

$$m = \left( \frac{\theta_1 \cdot \theta_2}{\theta_2 + \theta_1 \cdot \left(\frac{r_{b2}}{r_{b1}}\right)^2} \right) \div (r_{b1})^2 \quad (9)$$

La frecuencia natural de este modelo se calcula de acuerdo con la ecuación (10) [9].

$$f_E = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k_m}{m}} \quad (10)$$

Donde:

$f_E$ : es la frecuencia propia

$k_m$ : es la masa reducida

$m$ : es la masa reducida

El alcance de los cálculos dinámicos depende en gran medida del número de grados de libertad del modelo.

## 2. Optimización de sistemas de transmisión de potencia con engranajes

En el área de optimización de sistemas de transmisión de potencia con engranajes para reducción de vibraciones existen diferentes formulaciones. Se explicarán los avances e investigaciones más relevantes.

Los modelos de optimización en sistemas de engranajes se comenzaron a ver gracias a la necesidad de la reducción de vibraciones en los puntos de contacto y por la relación entre la corrección del perfil del diente con el error de ángulo de presión.[48] Años después se implementaron algoritmos de optimización para estudio de los pares de torsión para los engranajes rectos internos y externos, obteniendo un resultado de modificación de perfil óptimo. Implementaron un método combinado entre *Complex Method of Box, the optimal steepest descent, and a univariable search*, donde la función objetivo se evalúa en todos los vértices. Por lo tanto, se obtienen un total de  $2N$  vértices y los valores de la función objetivo son[49]:

$$OF_k = f(X_1, \dots, X_i, \dots, X_N); \quad (11)$$

$$i = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, 2, \dots, 2N \quad (12)$$

Otro estudio en la época de los 80 implementó un algoritmo matemático para minimizar las fluctuaciones en los dientes por las cargas aplicadas a los engranajes y coronas helicoidales y cilíndricas, donde se indicaron dos puntos clave para poder realizar la optimización de la modificación del perfil de los dientes, primero los dientes durante su funcionamiento no tienen interferencia, y segundo la minimización en la distribución de

carga. La modificación del perfil del diente se describe mediante una función lineal. Las modificaciones del diente están calculadas por:

$$m_{od(i_v, i_z)} = \Delta y - e_{(it)} - w_{(i_v, i_z)} \quad (13)$$

$\Delta y$  es el valor óptimo de la corona compuesta de piñón y engranajes,  $e_{(it)}$  son los errores dados por fabricación y manipulación, y por último  $w$  son los desplazamientos por parte del par de engranajes, incluyendo las desviaciones de los dientes, las deformaciones locales por contacto de los dientes, la flexión del cuerpo del engranaje y la torsión y un desvío de los ejes de soporte.[50]

Otro avance encontrado fue la creación de un nuevo modelo en 3D de elementos finitos, donde se tuvo en cuenta los efectos de desalineamiento de los engranajes, gracias a el análisis dinámico y estático para cuerpos rígidos y deformables. Este modelo fue propuesto como una metodología versátil para resolver diferentes problemas de dinámica de engranajes rectos y helicoidales.[51]

En el 2000, se estudió una metodología computacional que está enfocada en observar las condiciones de diseño óptimo para la reducción de vibraciones, normalizando las cargas dinámicas máximas, y así obtener la predicción de la velocidad angular, torques de los engranajes, y respuesta dinámica, con los cuales se proponen diferentes análisis con cargas variables y cambios de perfil de dientes en problemas de engranajes rectos.[52]

En los últimos años, se implementó una metodología con la cual se creó un algoritmo combinando los métodos de búsqueda aleatoria y politopo para la optimización de las vibraciones en un sistema estático y dinámico en una transmisión de engranajes rectos. Adicionalmente, se implementó una optimización basada en confiabilidad para obtener resultados viables,[10] teniendo en cuenta dos funciones objetivo, una para el error de transmisión estático  $F_{PSS} = MAX_{torque}(PPS)$  y otra para el dinámico  $F_{DTE} = MAX_{torque}(MAX_{freq}(RMS(DTE)))$ , en donde tuvieron en cuenta todas las variables geométricas del sistema (diámetro primitivo, módulo, ancho de cara, ángulo de presión, entre otras) y diferentes valores de la carga.

Uno de los últimos estudios ha sido un modelo que implementa la modificación del perfil del diente del engranaje teniendo en cuenta características dinámicas como la fricción, modos de vibración y frecuencias naturales, otro punto clave de este modelo es la implementación con seis grados de libertad. Como se ha visto en artículos pasados, para la implementación de la modificación del perfil de diente es necesario tener en cuenta el error de transmisión, en este artículo tienen en cuenta los errores geométricos.[53][54]

Teniendo en cuenta los procesos de optimización implementados durante el tiempo en sistemas de engranajes rectos para reducción de vibraciones, la función objetivo debe estar planteada en base al error de transmisión. Las variables que se utilizan para estos problemas son, geométricas, propiedades de los materiales y dinámicas. El proceso de optimización del sistema de engranajes rectos puede llegar a su objetivo gracias a la modificación geométrica de los engranajes, esta modificación se puede dar por una, dos o tres variables geométricas (ancho de cara, diámetro de eje, amplitud de la punta, radio de la punta de arranque) del perfil del diente.

Finalmente, se puede decir que las variables encontradas en estos modelos son discretas (módulo, número de dientes, etc.), y también continuas (ángulo de hélice, ancho, desplazamiento del dentado, etc.).

## **2.1 Optimización de engranajes rectos teniendo en cuenta la micro geometría**

Las implementaciones sobre optimización de engranajes rectos teniendo en cuenta la micro geometría, se han enfocado en la reducción de vibraciones y ruido en las cajas de transmisión. Sin embargo; para hacer un enfoque en estos estudios se debe entender un poco sobre la micro geometría de los engranajes, que está basada en la geometría de los dientes [10].

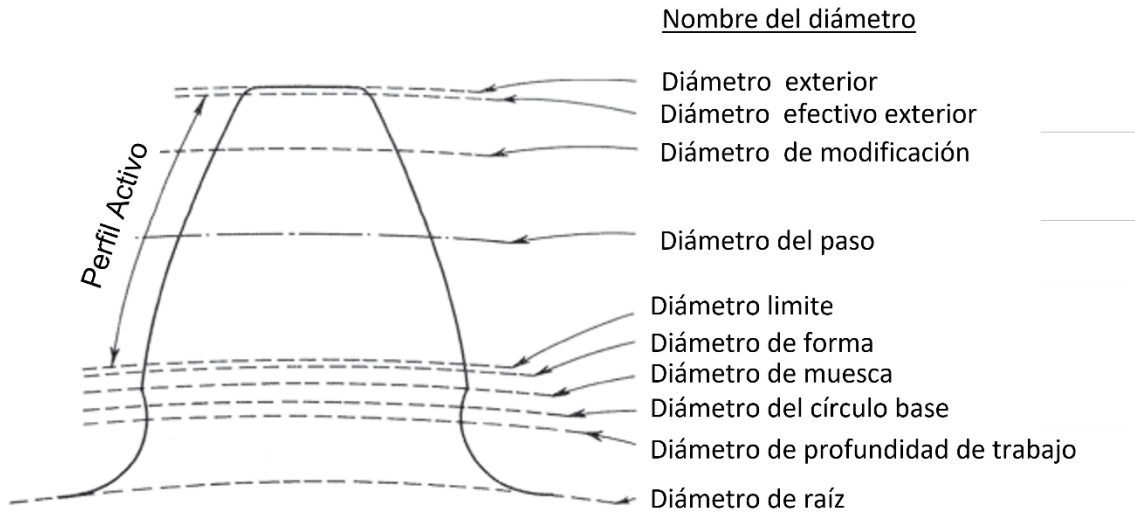
### **2.1.1 Geometría de los dientes de engranes cilíndricos de dientes rectos**

La geometría de los dientes está relacionada dimensionalmente directa o indirectamente con la geometría en general de los engranajes, por tal es clave tener claro la



nomenclatura de los diámetros que se ven en los engranajes como se ve en la **Figura 2-1**.

**Figura 2-1** Nombre de los diámetros del diente



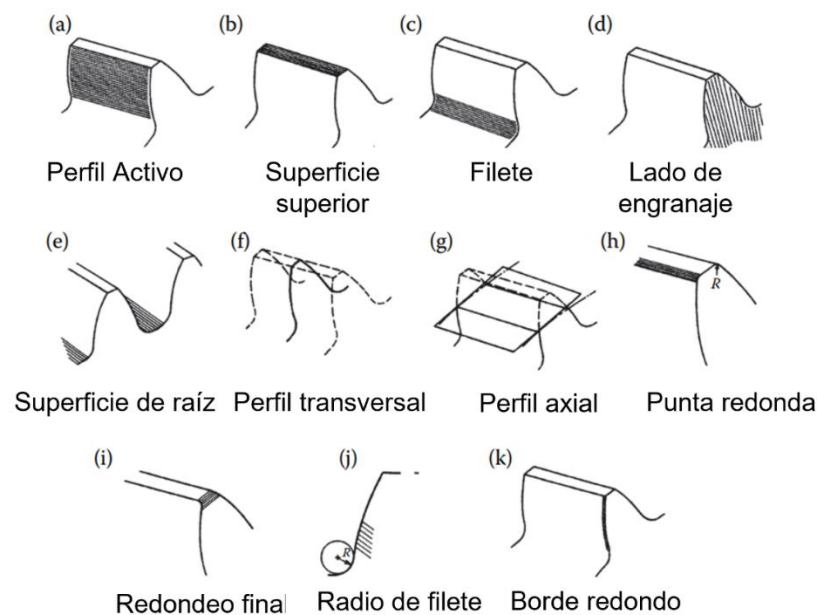
Fuente: traducida de [35].

- Diámetro exterior, es el máximo diámetro y todos los dientes caen dentro del círculo.
- Diámetro de modificación, es el punto de inicio donde la punta del diente comienza a cambiar.
- Diámetro del paso, es el diámetro teórico que es dado por la división de número de dientes del engranaje entre el módulo de la fresa de corte que es usada para hacer el engranaje, este diámetro no tiene tolerancia.
- Diámetro limite, es el punto más bajo de la cara del diente que puede hacer contacto entre engranajes.
- Diámetro de forma, es el que especifica al perfil transversal donde debe estar. Esta dimensión es de inspección y debe estar por debajo de diámetro límite y así darle tolerancia para su fabricación.
- Diámetro de muesca, es donde empieza la muesca donde intercepta el perfil de la involuta del diente.
- Diámetro del círculo base, es el diámetro establecido por la multiplicación del diámetro de paso por el coseno del ángulo de presión de la fresa de corte.

- Diámetro de raíz, es el diámetro de círculo de la superficie de la raíz. Todo diente tiene que caer sobre este círculo.

Teniendo en cuenta cada uno de los diámetros que se encuentran en los engranajes, en la **Figura 2-2** se muestra la relación entre cada una de las partes que tiene el diente.

**Figura 2-2** Partes del diente del engranaje.



Fuente: traducida de [35].

- Perfil activo: es la superficie donde se realiza en contacto entre dientes engranados, este empieza desde el diámetro limite hasta la esquina de la punta del diente [35].
- Superficie superior: es la superficie limitada entre los lados del engranaje y el final de los perfiles activos [35].
- Filete: el filete de un diente es una superficie que está delimitada por el diámetro de la forma y la raíz y por los extremos de los dientes. En los dientes de filete completo, se considera que el filete de un diente se extiende desde la línea central hasta el diámetro de la forma [35].
- Lado del engranaje: son superficies y extremos de los dientes en engranajes rectos y helicoidales [35].

- e) Superficie de raíz: también conocida como superficie de fondo. La superficie de la raíz es una superficie delimitada por filetes de los dientes adyacentes y los lados de la pieza en bruto del engranaje [35].
- f) Perfil transversal: es la forma del diente del engranaje visto en un plano perpendicular al eje de rotación del engranaje [35].
- g) Perfil axial: es la forma del diente del engranaje visto en un plano tangente al cilindro de paso en la superficie del diente. En el caso de engranajes helicoidales, tiene la forma de un diente como se ve en un cilindro de paso y puede desarrollarse para mostrarse en un plano [35].
- h) Punta redonda: es una superficie que separa el perfil activo y la superficie superior. A veces se aplica a los dientes de los engranajes para eliminar las rebabas o para disminuir la posibilidad de astillado, particularmente en el caso de dientes endurecidos. También se puede agregar como una forma muy leve y cruda de modificación del perfil [35].
- i) Redondeo final: es una superficie que separa los lados y la parte superior del diente. A veces se aplica a los dientes de los engranajes para reducir la posibilidad de astillado, particularmente en el caso de dientes endurecidos [35].
- j) Radio de filete: es el radio mínimo que puede tener un diente de engranaje [35].
- k) Borde redondo: es la superficie que separa los perfiles activos de los dientes de los lados del engranaje. Estos bordes son importantes en los casos de engranajes helicoidales, engranajes cónicos helicoidales y tornillos sinfín, ya que se vuelven muy afilados en el borde de ataque [35].

### 2.1.2 Micro modificaciones para reducir el error de transmisión

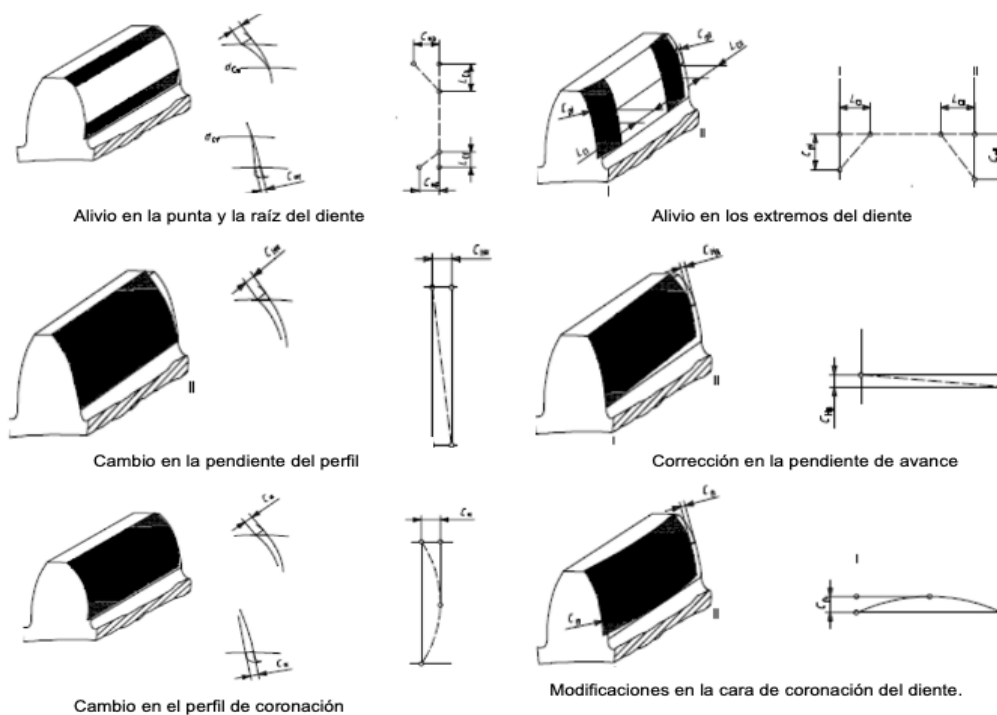
Las micro modificaciones incluyen la eliminación intencional de material de los flancos de los dientes del engranaje, de modo que la forma ya no sea una involuta perfecta. Tales modificaciones compensan las desviaciones de los dientes bajo carga y el error de transmisión, como resultante se minimiza bajo un par específico. Se pueden aplicar modificaciones de micro geometría en el perfil y el paso de los dientes del engranaje [35].

En la **Figura 2-3**, se muestran algunas de las modificaciones como:

- Alivio en la punta del diente.

- Alivio en la raíz del diente.
- Cambio en la pendiente del perfil.
- Cambio en el perfil de coronación.
- Alivio en los extremos del diente.
- Correcciones en la pendiente de avance.
- Modificaciones en la cara de coronación del diente.

Figura 2-3 Modificaciones posibles en el diente.



Fuente: traducida de [35].

La importancia de realizar estas modificaciones en la micro geometría de los dientes radica en una reducción de las tensiones en los dientes y, por consiguiente, disminución de las fuerzas intercambiadas, obteniendo un funcionamiento más armónico, fluido y suave, para así aumentar la vida útil de cada uno de los componentes del sistema de transmisión de potencia. Los estudios que se han realizado sobre el proceso de optimización, teniendo en cuenta la micro geometría para la reducción de vibraciones, se

han enfocado en la modificación de la punta y/o raíz del diente para que tenga un alivio durante el funcionamiento [49], [53], [55]–[57].

### **2.1.3 Algoritmos para optimización**

Según la bibliografía científica encontrada sobre la optimización implementada en los engranajes rectos para reducción de vibraciones por medio de modificaciones de la micro geometría, se halló que los algoritmos genéticos son los más utilizados, debido a que estos algoritmos son conocidos por su eficacia en el momento de calcular funciones no lineales o muy complejas, que usualmente se manejan en estos problemas debido a la complejidad de la geometría de los engranajes, análisis de rigidez y amortiguamiento y por último las múltiples grados de libertad que puede tener un análisis dinámico de sistema de transmisión de potencia de engranajes.[58]–[60] Por lo tanto, estas funciones pueden tener diferentes mínimos o máximos locales que hace que requiera más iteraciones para así poder asegurar un máximo o mínimo global de la función objetivo del problema. Este algoritmo siempre va a llegar al valor óptimo, aunque la función objetivo tenga valores óptimos locales muy cercanos. Las ventajas vistas anteriormente de los algoritmos genéticos se deben a que están inspirados en el proceso de selección natural o reproducción de los seres vivos, como la herencia, mutación, cruzamiento, la evolución biológica y/o entre otros como estrategia para resolver problemas de optimización.[57]

El planteamiento de la función objetivo para problemas de reducción de vibraciones en engranajes rectos según la mayoría de la bibliografía científica investigada está enfocado en el error de transmisión,[10] teniendo en cuenta que hay diferentes planteamientos para esta, que son: geométrico, estático y dinámico. Algunos problemas hacen el planteamiento y análisis del error de transmisión analíticamente, mientras que otros han llegado a utilizar programas de análisis de elementos finitos para poder determinarlo. Adicionalmente durante la adquisición de datos para el análisis del error de transmisión para implementar la optimización, se utilizan metodologías como la media cuadrática o RMS (Root Mean Square) que se considera como uno de los indicadores estadísticos básicos que miden el nivel de energía de una señal, también el análisis pico a pico en el cual se toman las diferencias entre el punto más alto y bajo de la señal tomada, otro indicador es el de curtosis que mide el grado de pico de una distribución y describe la forma de la señal en comparación con la distribución normal. El valor de la curtosis

depende de la longitud de la cola de distribución, por lo que el valor de la curtosis de la señal residual es mucho mayor que el de la señal original y por último el factor de cresta que es la relación entre el valor absoluto máximo alcanzado por la señal y el RMS de la señal. Este indicador da una idea de si puede existir algún impacto en la señal [43].

Las variables de optimización que se implementan en este caso de problemas están todas relacionadas con la geometría, debido a que una dimensión puede depender de otra, por ejemplo, el diámetro de paso puede depender o estar relacionada con el módulo o número de dientes. Pero en este caso se tiene en cuenta la micro geometría del diente, considerando que también está relacionado o depende de la geometría del par de engranajes. Para los problemas de optimización planteados se han visto que el alivio de la punta y la raíz es un camino para obtener un óptimo en la reducción de vibraciones [10].

Las restricciones planteadas para este tipo de problema de optimización están enfocadas en las normas ISO, AGMA y DIN, debido a que hay restricciones geométricas de diseño, como también restricciones de carga. Todo con la finalidad de que mientras se hace el proceso de optimización, el engranaje obtenido no vaya a salir de los parámetros estandarizados y sea seguro mientras esté operando.

## **2.2 Optimización de engranajes rectos teniendo en cuenta la macro geometría**

Durante la optimización de engranajes rectos teniendo en cuenta la macro geometría, se ha encontrado que los algoritmos de optimización más comunes para estas implementaciones son los algoritmos genéticos, tal como en micro geometría. Por parte del planteamiento del problema de optimización, la función objetivo, variables de optimización y restricciones, maneja la misma teoría exceptuando que solo se enfocan en la geometría del par de engranajes sin hacer énfasis en la micro geometría [61].

La mayoría de los estudios se han centrado en la micro geometría más que en las macro especificaciones de los engranajes, esto se debe a que la relación de contacto del engranaje se usa como una variable de diseño para reducir la vibración de la rigidez de la malla en el paso de macro diseño [61]. Esta es una forma muy útil de diseñar engranajes

con errores de transmisión bajos. Sin embargo, el error de transmisión se minimiza indirectamente y no se puede aplicar cuando la relación de contacto objetivo no se puede lograr debido a unas pocas condiciones de diseño limitadas.

En estos estudios se ha analizado la variación de las soluciones óptimas según las funciones objetivo al optimizar macro geometrías, considerando el error de transmisión, geométrico, estático y dinámico del par de engranajes. Las macro variables de diseño que han manejado son: el módulo normal, el ángulo de presión, el número de dientes y el ancho de cara [61], [62]. Se establecieron varias restricciones de diseño para que no se usara una forma de diente anormal en el proceso de optimización y se cumpliera con la resistencia del engranaje.





## 3. Caracterización del modelo dinámico

A continuación, se presenta la caracterización del sistema dinámico de un par de engranajes rectos y los parámetros que lo afectan[63]. Teniendo en cuenta que este caso fue hallado en la literatura científica, para llegar a obtener resultados dinámicos que podrán ser implementados en la optimización.

### 3.1 Modelo dinámico

El modelo dinámico de una etapa de un sistema de engranajes rectos con diferentes grados de libertad planteado está basado en una referencia científica donde validan resultados experimentales con analíticos, debido a que implementan en Matlab y comparan con un banco de prueba [44]. En la **Tabla 3-1** y **Tabla 3-2**, se muestran los principales parámetros para el conjunto piñón-engranaje y parámetros dinámicos [47].

**Tabla 3-1** Parámetros del conjunto piñón-engranaje

Parámetro	Piñón	Engranaje
Masa (kg)	0.289	1.789
Número de dientes	369	90
Módulo (mm)	1.5	
Ancho de cara (mm)	15	
Ángulo de presión (°)	20	
Relación de contacto	1.74	
Relación de transmisión	2.5	
Módulo de Young (N/mm <sup>2</sup> )	2x10 <sup>5</sup>	
Relación Poisson	0.3	

Fuente: traducido de [47]

**Tabla 3-2** Parámetros del modelado dinámico

Parámetro	Eje de entrada	Eje de salida
Rigidez radial de los rodamientos en dirección $x$ y $y$ (N/m)	$6 \times 10^8$	$6.0 \times 10^8$
Amortiguación radial de los rodamientos en dirección $x$ y $y$ (Ns/m)	$1.8 \times 10^3$	$1.8 \times 10^3$
Torque aplicado (Nm)	50	125
Rigidez torsional (Nm/rad)	$1 \times 10^4$	$1 \times 10^4$
Amortiguamiento torsional (Nms/rad)	10	10
Velocidad rotacional (Hz)	55.55	22.22
Frecuencia del engrane (Hz)	2000	

Fuente: traducido de [47]

En la referencia científica fueron usadas las siguientes convenciones:

$I_p$  &  $I_g$  : momento masivo de inercia del engranaje y el piñón;

$K_{xp}$  &  $K_{yp}$ : rigidez radial en la dirección  $x$  /  $y$  del piñón;

$K_{xg}$  &  $K_{yg}$  : rigidez radial en la dirección  $x$  /  $y$  del engranaje;

$C_{xp}$  &  $c_{yp}$ : amortiguación radial en la dirección  $x$  /  $y$  del piñón;

$C_{xg}$  &  $c_{yg}$ : amortiguación radial en la dirección  $x$  /  $y$  del engranaje;

$k_m$ : rigidez del engrane equivalente;

$C_m$  : coeficiente de amortiguamiento del engrane;

$r_{bp}$  &  $r_{bg}$ : radio del círculo base del engranaje y del piñón

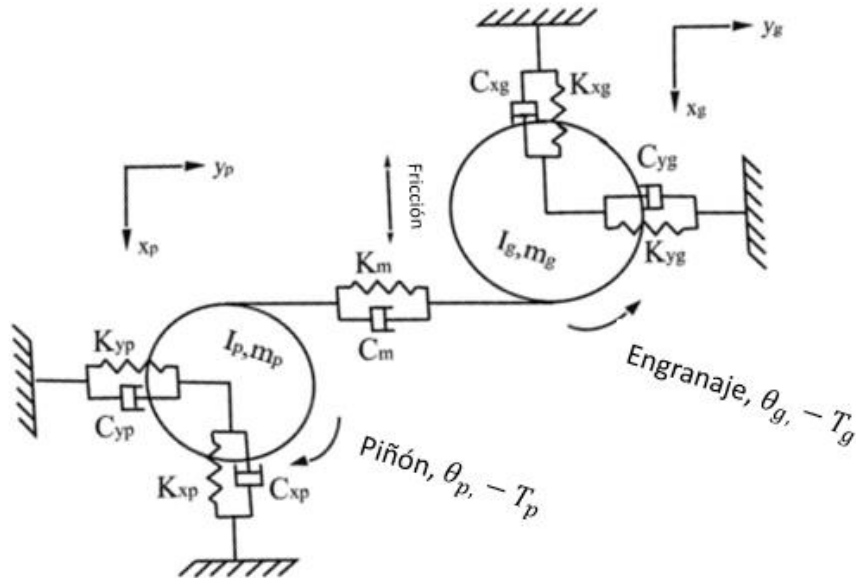
$T_p$  &  $T_g$ : torque aplicado en el engranaje y del piñón;

$W_p$  &  $W_g$ : velocidad constante del engranaje y del piñón

$M_p$  &  $M_g$ : momento del piñón y engranaje.

En la **Figura 3-1**, donde se tienen 6 grados de libertad, correspondientes a: 3 grados de libertad para el engranaje y los otros 3 para el piñón. Uno de ellos es rotacional y dos son traslacionales. Se plantearon las ecuaciones de movimiento [45].

**Figura 3-1** Modelo dinámico de 6 grados de libertad



Fuente: traducida de [47].

Las ecuaciones de movimiento en la dirección “x” por el piñón y engranaje, son:

$$m_p \ddot{x}_p = -K_{xp} x_p - C_{xp} \dot{x}_p + F_p \quad (14)$$

$$m_g \ddot{x}_g = -K_{xg} x_g - C_{xg} \dot{x}_g + F_g \quad (15)$$

Las ecuaciones de movimiento en la dirección “y” por el piñón y el engranaje son:

$$m_p \ddot{y}_p = -N - K_{yp} y_p - C_{yp} \dot{y}_p \quad (16)$$

$$m_g \ddot{y}_g = N - K_{yg} y_g - C_{yg} \dot{y}_g \quad (17)$$

Las ecuaciones de movimiento en la dirección “θ” para el piñón y el engranaje son:

$$I_p \ddot{\theta}_p = r_p N + T_p + M_p \quad (18)$$

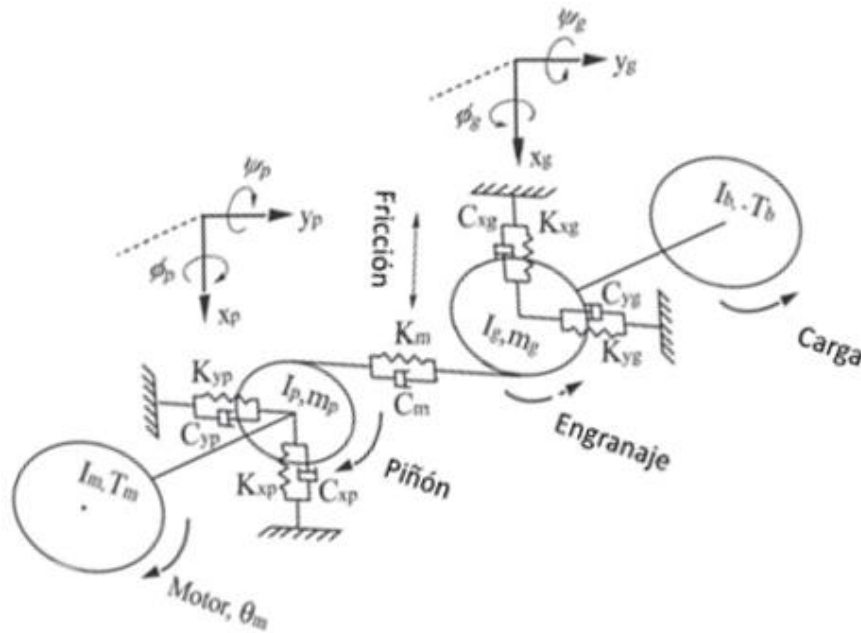
$$I_g \ddot{\theta}_g = -r_g N - T_g + M_g \quad (19)$$

En las ecuaciones (18) y (19),

$$N = K_m [(y_p - y_g) - (r_p \theta_p - r_g \theta_g)] + C_m [(\dot{y}_p - \dot{y}_g) - (r_p \dot{\theta}_p - r_g \dot{\theta}_g)] \quad (20)$$

En la **Figura 3-2**, se ilustra un modelo dinámico de 12 grados de libertad con 5 grados de libertad, tres rotacionales y dos traslacionales para cada disco de engranaje, así como 1 grado de libertad para cada disco de motor y carga. Este estudio se desarrolló incluyendo el efecto giroscópico [45].

**Figura 3-2** Modelo dinámico de 12 grados de libertad



Fuente: traducida de [42].

Las ecuaciones de movimiento en la dirección "x" para el piñón y el engranaje son:

$$m_p \ddot{x}_p = -K_{xpT} x_p - C_{xpT} \dot{x}_p + F_p - K_{xpc} \psi_p \quad (21)$$

$$m_p \ddot{x}_p = -K_{xgT} x_g - C_{xgT} \dot{x}_g + F_g - K_{xgC} \dot{\psi}_g \quad (22)$$

Las ecuaciones de movimiento en la dirección "y" para el piñón y el engranaje son:

$$m_p \ddot{y}_p = -K_{ypT} y_p - C_{ypT} \dot{y}_p - N + K_{ypC} \varphi_p + C_{ypC} \dot{\varphi}_p \quad (23)$$

$$m_g \ddot{y}_g = -K_{ygT} y_g - C_{ygT} \dot{y}_g + N + K_{ygC} \varphi_g + C_{ygC} \dot{\varphi}_g \quad (24)$$

Las ecuaciones de movimiento en la dirección "θ" para el piñón y el engranaje son:

$$I_p \ddot{\theta}_p = r_p N + M_p - k_t(\theta_p - \theta_m) - c_t(\dot{\theta}_p - \dot{\theta}_m) \quad (25)$$

$$I_g \ddot{\theta}_g = -r_g N + M_g - k_t(\theta_g - \theta_b) - c_t(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}_b) \quad (26)$$

Las ecuaciones de movimiento en la dirección "φ" para el piñón y el engranaje son:

$$I_{dp} \ddot{\varphi}_p = I_p w_p \dot{\psi}_p + K_{ypC} y_p - K_{ypR} \varphi_p + C_{ypC} \dot{y}_p - C_{ypR} \dot{\varphi}_p \quad (27)$$

$$I_{dg} \ddot{\varphi}_g = -I_g w_g \dot{\psi}_g + K_{ygC} y_g - K_{ygR} \varphi_g + C_{ygC} \dot{y}_g - C_{ygR} \dot{\varphi}_g \quad (28)$$

Las ecuaciones de movimiento en la dirección "ψ" para el piñón y el engranaje son:

$$I_{dp} \ddot{\psi}_p = -I_p w_p \dot{\varphi}_p - K_{xpC} x_p - K_{xpR} \psi_p + C_{xpC} \dot{x}_p - C_{xpR} \dot{\psi}_p \quad (29)$$

$$I_{dg} \ddot{\psi}_g = I_g w_g \dot{\varphi}_g - K_{xgC} x_g - K_{xgR} \psi_g + C_{xgC} \dot{x}_g - C_{xgR} \dot{\psi}_g \quad (30)$$

Las ecuaciones de movimiento en la dirección "θ" para el motor y carga son:

$$I_m \ddot{\theta}_m = -k_t(\theta_m - \theta_p) - c_t(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_p) T_m \quad (31)$$

$$I_b \ddot{\theta}_b = -k_t(\theta_b - \theta_g) - c_t(\dot{\theta}_b - \dot{\theta}_g)T_b \quad (32)$$

## 3.2 Parámetros dinámicos

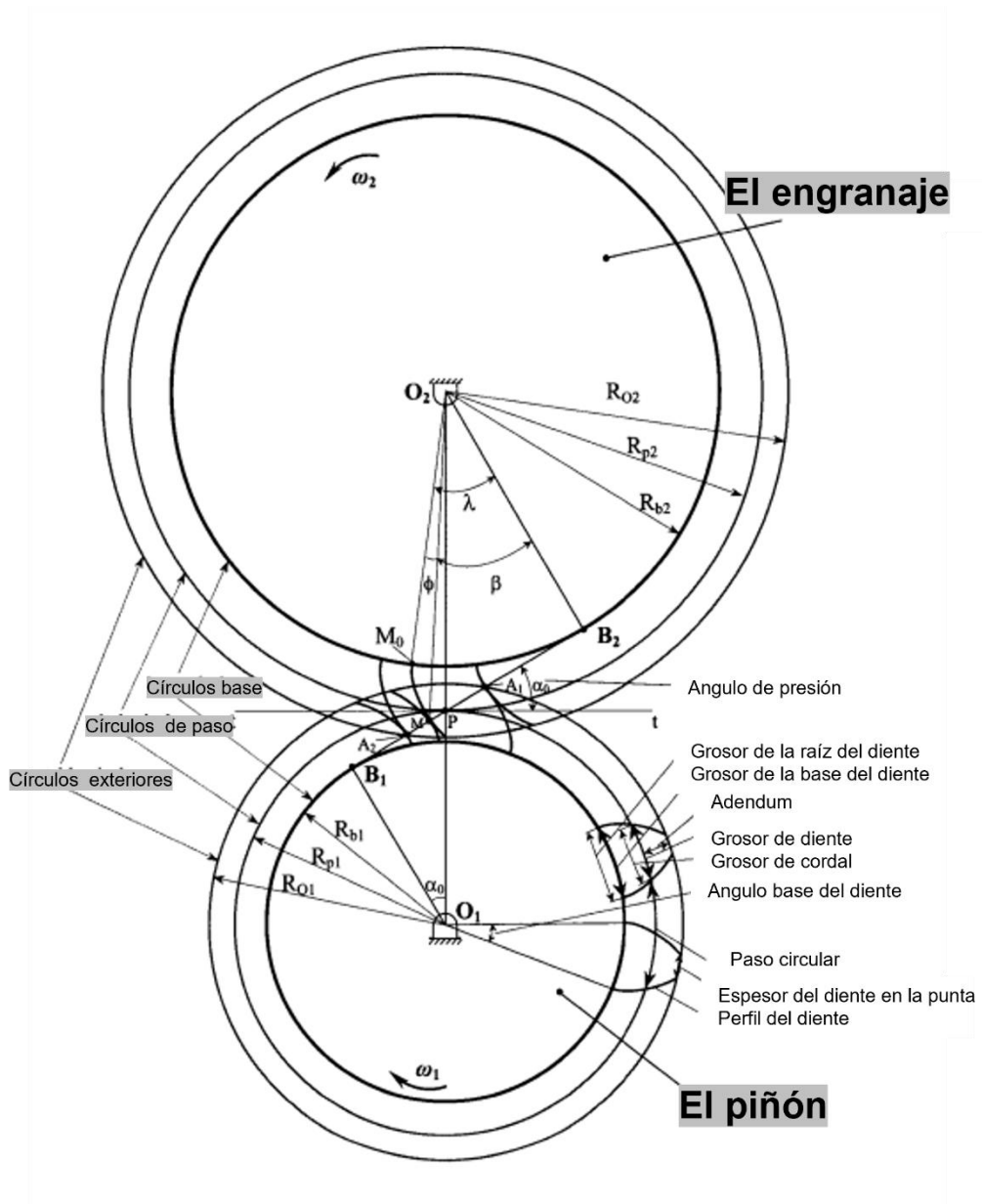
Los sistemas dinámicos manejan parámetros según la formulación matemática, entre los cuales se tienen: las matrices de amortiguamiento, masa y rigidez y la geometría en caso de los engranajes. A continuación, se presentan estos parámetros para que con su entendimiento se pueda desarrollar la metodología de optimización que se va a plantear [35].

### 3.2.1 parámetros geométricos

La geometría de los engranajes puede ser compleja debido a que un parámetro geométrico puede estar relacionado con otro directamente, adicionalmente existe micro geometría y macro geometría. Donde la micro geometría es toda la parte del detalle del diente del engranaje y la macro geometría es la geometría en general [1], [35]. La nomenclatura se identifica en la **Figura 3-3**.

En esta figura se observa el engranaje y el piñón, que es el más pequeño. El círculo externo es el círculo que es formado por las puntas de los dientes. El addendum es la distancia radial entre el círculo externo y el círculo de paso o también se puede decir que el addendum es igual a la inversa del módulo P. El punto P es el punto tangente de círculo de paso o también llamado como punto de paso. La línea t-t es la tangente común a los círculos de paso. La línea B1B2 es la línea de acción que es la tangente común a los círculos base y la normal común a los perfiles del diente, el ángulo de presión  $\alpha$  está compuesto por la línea de acción y la línea de referencia, los ángulos más comunes son  $14.5^\circ$ ,  $20^\circ$  y  $25^\circ$  [1], [35].

**Figura 3-3** Nomenclatura que maneja los engranajes rectos.



Fuente: traducida de [1], [35]

Los puntos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $M$  son los puntos de engrane en los perfiles de los dientes en un par de engranajes y están sobre la línea de acción, por tal los puntos de contacto de un par de dientes siempre coinciden a lo largo de la línea de acción. El punto  $A_2$  es el punto de contacto inicial del engranaje, el punto  $M$  es la posición actual del punto de contacto y el punto  $A_1$  es el punto de contacto final del engrane, si el par de engranajes tiene el mismo

perfil. La línea entre A1 y A2 es una línea de trabajo, y es calculada con siguiente ecuación:

$$\overline{A_2A_1} = \sqrt{R_{O_1}^2 - R_{b_1}^2} + \sqrt{R_{O_2}^2 - R_{b_2}^2} - \overline{O_1O_2} \sin \alpha_0 \quad (33)$$

Donde:

$R_{O_1}, R_{O_2}, R_{b_1}$  y  $R_{b_2}$ : son los radios externos, base del piñón y el engranaje respectivamente.

$\overline{O_1O_2}$ : es la distancia entre los centros de rotación  $O_1$  y  $O_2$  del piñón y el engranaje

$R_{b_1}, R_{b_2}, R_{O_1}, R_{O_2}$  y  $\overline{O_1O_2}$  pueden ser expresados así:

$$R_{b_1} = \frac{N_1}{2P} \cos \alpha_0 \quad (34)$$

$$R_{b_2} = \frac{N_2}{2P} \cos \alpha_0 \quad (35)$$

$$R_{O_1} = \frac{N_1 + 2}{2P} \quad (36)$$

$$\overline{O_1O_2} = \frac{N_1 + N_2}{2P} \quad (37)$$

Donde  $N_1$  y  $N_2$  son el número de dientes del piñón y el engranaje respectivamente, y  $P$  es el módulo.

Para un perfil del diente  $\widehat{M_0M}$ , las relaciones de los ángulos  $\phi, \beta$  y  $\lambda$  arco  $\widehat{M_0B_2}$ , línea segmentada  $\overline{B_2M}$ , y la base del radio  $R_{b_2}$  del engranaje se expresa a continuación:

$$\overline{B_2M} = \lambda R_{b_2} = R_{b_2} \tan \beta \quad (38)$$



También puede ser simplificada como:

$$\lambda = \tan \beta \quad (39)$$

El ángulo  $\phi$ , puede ser expresado como:

$$\phi = \lambda - \beta = \tan \beta - \beta \quad (40)$$

Función  $\phi(\beta)$  es designado como *inv* $\beta$  (llamada la función involuta), ejemplo.

$$\mathbf{inv}\beta = \tan \beta - \beta \quad (41)$$

### 3.2.2 Masa

La masa es la cantidad de materia que posee un cuerpo, dada por la densidad y el volumen, como también es un parámetro que relaciona la fuerza con la aceleración ejercida en un sistema, teniendo como finalidad encontrar la materia que tiene cada cuerpo en el sistema, en base a la segunda ley de Newton [64].

La matriz de masa es una representación discreta de las masas del sistema en movimiento, existen dos tipos de matrices de masa; consistentes y concentradas, con una formulación diferente [64].

- La matriz de masa consistente: es constituida por elementos finitos, donde ningún elemento es 0 [65], [66].
- La matriz de masa concentrada: es diagonal y si las variables se encuentran fuera de esta son 0. Esta matriz usualmente es utilizada para análisis modal, por su facilidad en el acoplamiento de la ecuación de movimiento. Es definida gracias a que su masa se encuentra concentrada en un punto del elemento. Existen diversos métodos para obtenerlas como lo son: Zaradnik, Archer, HRZ (método de Hinton, Rock y Zienkiewicz) y otros métodos más [65], [66].

La matriz de masa muestra que las variables que afectan los resultados de un problema de sistemas de dinámicos son las variables: densidad y volumen (área y longitud). Por lo cual, se pretende realizar un enfoque en estas variables [65], [66].

### 3.2.3 Rigidez

La matriz de rigidez es aquella que relaciona los desplazamientos de un conjunto de nodos de un sistema, con las fuerzas exteriores que es necesario aplicar para lograr desplazamientos, en otras palabras, se va a establecer una relación entre el vector de cargas generalizadas  $Q$  y el vector de desplazamientos generalizados  $q$ . Esta relación se puede denotar con la ecuación (42) [67], [68].

$$Q = Kq \quad (42)$$

Para poder establecer una relación entre  $K$  y  $q$  es necesario tener en cuenta, que el material cumpla con la ley de Hooke en sus tres dimensiones, que las deformaciones sean pequeñas, entonces se podrá aplicar la teoría de los desplazamientos infinitesimales, y por último se requiere que no existan interacciones entre los efectos axiales y de flexión en los elementos [65], [67].

Algunas de las características de la matriz de rigidez en estructuras estables, son las siguientes:

- El valor de determinante es diferente a cero y positivo, por consiguiente  $K$  es regular.
- Los términos de la diagonal son positivos.
- La matriz es cuadrada.
- $K$  es simétrica con respecto a la diagonal.

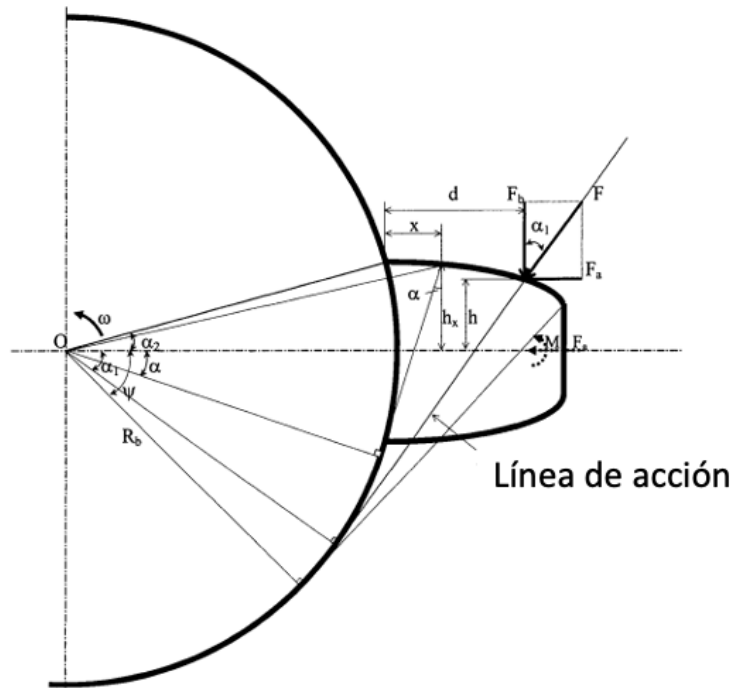
Entendida la teoría de la matriz de rigidez, se puede decir que algunas de las variables que afecta el resultado de la rigidez del sistema por medio de su sub matriz son: magnitudes geométricas (longitud, área y momento de inercia) y el módulo de Young [38].

Para el cálculo de la rigidez en el engrane en un par, se debe tener en cuenta la rigidez del diente a lo largo del grosor del diente, el efecto de la deflexión de la base de filete sobre la rigidez del engrane y el efecto del contacto hertziano en la rigidez del engrane, para así obtener una rigidez total.

▪ **Rigidez a lo largo del grosor del diente**

Para determinar la rigidez del diente se va a hacer en función de la **Figura 3-4**.

**Figura 3-4** Relación de parámetros geométricos de un diente.



Fuente: Tomado de [69]

Esta se empieza a determinar por medio de la energía almacenada de flexión, cortante y axial.

$$U_b = \frac{F^2}{2k_b} \tag{43}$$

$$U_s = \frac{F^2}{2k_s} \tag{44}$$

$$U_a = \frac{F^2}{2k_a} \tag{45}$$

Donde  $k_b$ ,  $k_s$  y  $k_a$  son las rigideces de flexión, cortante y axial en la misma dirección de la fuerza que es aplicada.

Teniendo en cuenta las propiedades de la involuta del engranaje, la línea de acción es la normal común entre los perfiles de los dientes en contacto, por tal, la fuerza en acción que está en contacto debe ser a lo largo de la línea de contacto. Es así como esta fuerza tiene dos componentes, como se ven en seguida.

$$F_b = F \cos \alpha_1 \quad (46)$$

$$F_a = F \sin \alpha_1 \quad (47)$$

Por el lado de la componente  $b$  de la fuerza se observa que afecta la rigidez de flexión y cortante y por el lado de la componente  $a$  de la fuerza afecta la rigidez axial y flexión. Así como también podemos ver que hay un torque que afecta el sistema, causada por el momento flector.

$$M = F_a h \quad (48)$$

Donde  $h$  es la distancia entre el punto de contacto y la línea central de los dientes, y esta puede ser obtenida por

$$h = R_b [(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1] \quad (49)$$

Donde  $\alpha_2$  es la mitad del ángulo del diente base.

Acordemente a la geometría de la involuta, la distancia  $d$  entre el punto de contacto y la raíz del diente puede ser expresada.

Se pueden determinar las deflexiones bajo la acción de la fuerza, y luego se puede calcular la rigidez considerando el diente como una viga en voladizo no uniforme con una longitud efectiva de  $d$ .

$$d = R_b [(\alpha_1 + \alpha_2) \sin \alpha_1 + \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2] \quad (50)$$

En este estudio para el análisis de rigidez se va a hacer como si fuera una viga en voladizo, para lo cual se asume que la base de la viga es la raíz del diente.

Teniendo en cuenta la teoría, se obtiene la energía potencial de flexión.

$$U_b = \int_0^d \frac{[(F_b(d-x) - M]^2}{2EI_x} dx \quad (51)$$

Donde  $I$  es la inercia.

$$I_x = \frac{1}{12} (2h_x)^3 W = \frac{2}{3} h_x^3 W \quad (52)$$

Donde  $h_x$  es la distancia entre un punto en la curva del perfil del diente que viene desde la raíz del diente y el centro del diente,

$$h_x = R_b [(\alpha + \alpha_2) \cos \alpha - \sin \alpha] \quad (53)$$

Para hacer el análisis de rigidez lo más conveniente es realizar un cambio de variables de lineal a angular, para así poder conocer los cambios de las propiedades en cada punto  $x$  del perfil del diente.

$$x = R_b [\cos \alpha - (\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha_2] \quad (54)$$

Si derivamos  $x$ , obtenemos.

$$dx = R_b (\alpha - \alpha_2) \cos \alpha d\alpha \quad (55)$$

Obteniendo como resultado la rigidez de flexión .

$$\frac{1}{k_b} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{3\{1 + \cos \alpha_1 [(\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha}{2EW [\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]^3} d\alpha \quad (56)$$

La energía cortante se puede expresar

$$U_s = \int_0^d \frac{1.2F_b^2}{2GA_x} \quad (57)$$

Donde  $G$  es el módulo cortante.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (58)$$

Donde  $A$  es el área de la sección.

$$A_x = 2h_x W \quad (59)$$

Para así obtener

$$\frac{1}{k_s} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1.2(1+\nu)(\alpha_2-\alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha_1}{EW[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]} da \quad (60)$$

La energía axial se puede expresar

$$U_a = \int_0^d \frac{F_a^2}{2EA_x} dx \quad (61)$$

y la rigidez axial se puede expresar

$$\frac{1}{k_a} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \sin^2 \alpha_1}{2EW[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]} da \quad (62)$$

En conclusión, para la investigación de las propiedades de los parámetros en algún desplazamiento angular del piñón/engranaje (el desplazamiento angular es el ángulo que atraviesa el piñón/engranaje desde el punto de referencia inicial), será más conveniente expresar la relación como variables angulares (reflejando el ángulo) en lugar de lineales

(reflejando la longitud). Las rigideces a flexión, cortante y compresión axial actúan en la dirección de la carga aplicada y se pueden obtener de la siguiente manera: [5]

▪ **Efecto de la deflexión de la base de filete sobre la rigidez del engrane**

La deflexión de la base del filete puede ser calculada así:

$$\delta_f = \frac{F \cos^2(\alpha_m)}{WE} \left\{ L^* \left( \frac{u_f}{s_f} \right) + M^* \left( \frac{u_f}{s_f} \right) + P^* (1 + Q^* \tan^2(\alpha_m)) \right\} \quad (63)$$

$\alpha_m$ : es la presión del ángulo,  $u_f$  y  $s_f$  son ilustrados en la **Figura 3-5**.

$L^*, M^*, P^*$  y  $Q^*$  pueden ser aproximados usando funciones polinomiales, así:

$$X_i^*(h_{fi}, \theta_f) = A_i/\theta_f^2 + B_i h_{fi}^2 + C_i h_{fi}/\theta_f + D_i/\theta_f + E_i h_{fi} + F_i \quad (64)$$

$X_i^*$  representa los coeficientes  $L^*, M^*, P^*$ , y  $Q^*$ . Los coeficientes  $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i$  y  $F_i$  son dados en la **Tabla 3-3**.  $h_{fi} = r_f/r_{int}$ ;  $r_f, r_{int}$  y  $\theta_f$  están ilustradas en la **Figura 3-5**.

Luego, la rigidez por desviación de la base del filete se puede obtener, así:

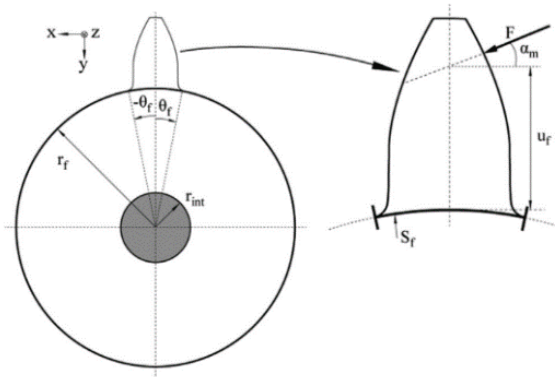
$$\frac{1}{K_f} = \frac{\delta_f}{F} \quad (65)$$

Para un piñón puede ser denotado  $K_{fp}$ .

**Tabla 3-3** Valores de los coeficientes para polinomio de la deflexión

	$A_i(\times 10^{-5})$	$B_i(\times 10^{-3})$	$C_i(\times 10^{-4})$	$D_i(\times 10^{-3})$	$E_i$	$F_i$
$L^*(h_{fi}, \theta_f)$	-5.574	-1.9986	-2.3015	4.7702	0.0271	6.8045
$M^*(h_{fi}, \theta_f)$	60.111	28.100	-83.43	-9.9256	0.1624	0.9086
$P^*(h_{fi}, \theta_f)$	-50.952	185.50	0.0538	53.300	0.2895	0.9236
$Q^*(h_{fi}, \theta_f)$	-6.2042	9.0889	-4.0964	7.8297	-0.1472	0.6904

**Figura 3-5** Relación geométrica del filete del diente



Fuente: tomado de [41]

### ▪ Efecto del contacto hertziano en la rigidez del engrane

En base a la ley de Hertz, la compresión elástica de dos cuerpos elásticos isotrópicos se puede aproximar mediante dos paraboloides en la región del contacto, por lo tanto, para el análisis de rigidez hertziano de contacto de un par de engranajes hechos del mismo material y/o perfil es constante a través de la línea de acción o también se puede decir que es independiente a la posición de contacto. Así mismo, la rigidez puede ser calculada con la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{K_h} = \frac{4(1 - \nu^2)}{\pi EW} \quad (66)$$

Donde:

$E$ : es el módulo de Young, que es la constante de la rigidez del material.

$W$ : es el grosor del diente.



$\nu$ : es el Coeficiente de Poisson, que es la constante de compresibilidad del material.

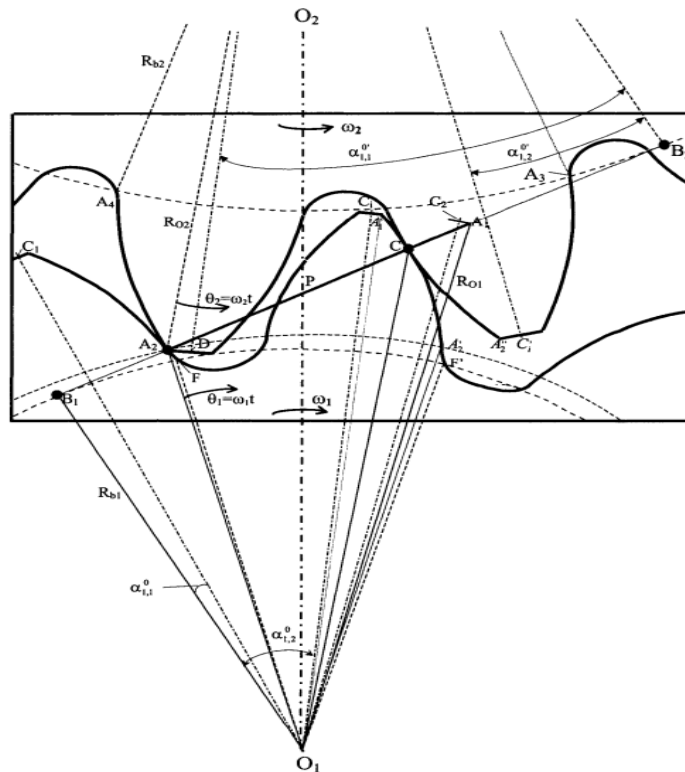
La rigidez hertziana depende directamente del grosor del diente.

La energía hertziana es la energía potencial almacenada en la región del punto de contacto porque depende de la deformación elástica de el diente, por lo tanto puede ser calculada por:

$$U_h = \frac{F^2}{2k_h} \quad (67)$$

Donde  $F$  es la fuerza en acción mientras los dientes están en contacto, como se muestra en la **Figura 3-6** Boceto de engrane de un par de engranajes.

**Figura 3-6** Boceto de engrane de un par de engranajes



Fuente: tomado de [41]

### ▪ Rigidez total del engrane respecto al tiempo

En esta sección se va a expresar la rigidez total respecto el tiempo o ángulo de giro del engranaje. Para un par de engranajes cuya relación de contacto varía entre 1 y 2, la variación de la rigidez del engrane durante el engranaje de los dientes incluye principalmente dos aspectos: la variación de la rigidez durante el engrane de un solo par de dientes y la variación de la rigidez durante el engrane de dos pares de dientes. Para este propósito, el período de engrane debe investigarse en detalle ya que el número de pares de dientes coincidentes no es constante durante todo el período de engrane. Es necesario conocer la relación del número de pares de dientes que engranan y el ángulo de desplazamiento del piñón/engranaje. Además, la rigidez correspondiente bajo cualquier desplazamiento angular del eje se puede calcular. Por lo tanto, las rigideces pueden expresarse de la siguiente forma.

$$\frac{1}{k_{b1,i}} = \int_{-\alpha_{1,i}}^{\alpha_2} \frac{3\{1 + \cos \alpha_{1,i} [(\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha}{2EL[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]^3} d\alpha \quad (68)$$

$$\frac{1}{k_{s1,i}} = \int_{-\alpha_{1,i}}^{\alpha_2} \frac{1.2(1+v)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha_{1,i}}{EL[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]^3} d\alpha \quad (69)$$

$$\frac{1}{k_{a1,i}} = \int_{-\alpha_{1,i}}^{\alpha_2} \frac{(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \sin^2 \alpha_{1,i}}{2EL[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]} d\alpha \quad (70)$$

$$\frac{1}{k_{b2,i}} = \int_{-\alpha'_{1,i}}^{\alpha'_2} \frac{3\{1 + \cos \alpha'_{1,i} [(\alpha'_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 (\alpha'_2 - \alpha) \cos \alpha}{2EL[\sin \alpha + (\alpha'_2 - \alpha) \cos \alpha]^3} d\alpha \quad (71)$$

$$\frac{1}{k_{s2,i}} = \int_{-\alpha'_{1,i}}^{\alpha'_2} \frac{1.2(1+v)(\alpha'_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha'_{1,i}}{EL[\sin \alpha + (\alpha'_2 - \alpha) \cos \alpha]} d\alpha \quad (72)$$

$$\frac{1}{k_{a2,i}} = \int_{-\alpha'_{1,i}}^{\alpha'_2} \frac{(\alpha'_2 - \alpha) \cos \alpha \sin^2 \alpha'_{1,i}}{2EL[\sin \alpha + (\alpha'_2 - \alpha) \cos \alpha]} d\alpha \quad (73)$$

Donde  $i = 1$ , es para un par de engranajes engranados e  $i = 2$  es para un segundo par de engranajes.  $\alpha_2$  y  $\alpha'_2$  son los ángulos de la mitad del diente sobre el círculo de base del piñón y el engranaje. Estos ángulos son constantes y puede ser cálculos de la siguiente forma.

$$\alpha_2 = \angle C_i O_1 F = \frac{\pi}{2N_1} + inv\alpha_0 \quad (74)$$

$$\alpha'_2 = \angle C'_i O_1 A_3 = \frac{\pi}{2N_2} + inv\alpha_0 \quad (75)$$

Donde  $N_1$  y  $N_2$  son el número de dientes.

Para el primer par de dientes que engranan, dado un punto de contacto  $M$  como se muestra en la **Figura 3-6**, se derivan las ecuaciones de los ángulos  $\alpha_{1,1}$  que es correspondiente al ángulo  $\alpha_1$  del piñón y  $\alpha_{1,1}'$  correspondiente al ángulo  $\alpha_1$  del engranaje.

Si se considera que el punto  $A_2$  es el punto de referencia, que corresponde al punto de engrane inicial del primer par de dientes engranados. En este punto, los desplazamientos angulares de los engranajes engranados,  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , son ambos cero. El ángulo  $\alpha_{1,1}^0$  se puede expresar como.

$$\alpha_{1,1}^0 = \angle B_1 O_1 C_1 = \angle B_1 O_1 A_2 - \angle C_1 O_1 A_2 \quad (76)$$

Donde  $\angle B_1 O_1 A_2$  pueden calcularse, así:

$$\angle B_1 O_1 A_2 = \arccos \frac{R_{b1}}{\overline{O_1 A_2}} \quad (77)$$

$\overline{O_1 A_2}$  se pueden obtener, así:

$$\overline{O_1 A_2} = \sqrt{R_{O_2}^2 + \overline{O_1 O_2}^2 - 2R_{O_2} \overline{O_1 O_2} \cos \angle O_1 O_2 A_2} \quad (78)$$

Donde  $\angle O_1O_2A_2$  se pueden calcular, así:

$$\angle O_1O_2A_2 = \arccos \frac{R_{b2}}{R_{O2}} - \alpha_0 \quad (79)$$

$\angle C_1O_1A_2$  se puede expresar, así:

$$\angle C_1O_1A_2 = \angle C_1O_1F - \angle A_2O_1F \quad (80)$$

$$\angle C_1O_1A_2 = \alpha_2 - \mathit{inv} \angle B_1O_1A_2 \quad (81)$$

Obteniendo

$$\alpha_{1,1}^0 = \angle B_1O_1A_2 - \alpha_2 + \mathit{inv} \angle B_1O_1A_2 = \tan \angle B_1O_1A_2 - \alpha_2 \quad (82)$$

Combinando las ecuaciones con la ecuación después de simplificación, el ángulo  $\alpha_{1,1}^0$  se encuentra en

$$\alpha_{1,1}^0 = -\frac{\pi}{2N_1} - \mathit{inv} \alpha_0 \quad (83)$$

$$+ \tan \left[ \arccos \frac{N_1 \cos \alpha_0}{\sqrt{(N_2 + 2)^2 + (N_1 + N_2)^2 - 2(N_2 + 2)(N_1 + N_2) \cos(\arccos \frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2 + 2} - \alpha_0)}} \right] \quad (84)$$

La ecuación anterior es la fórmula para calcular  $\alpha_{1,1}^0$  cuando el desplazamiento angular del piñón es 0. Cuando el desplazamiento angular del piñón es  $\theta_1$ , el ángulo  $\alpha_{1,1}$  será:

$$\alpha_{1,1} = \theta_1 + \alpha_{1,1}^0 = \theta_1 - \frac{\pi}{2N_1} - \mathit{inv} \alpha_0 + \quad (85)$$

$$\tan \left[ \arccos \frac{N_1 \cos \alpha_0}{\sqrt{(N_2 + 2)^2 + (N_1 + N_2)^2 - 2(N_2 + 2)(N_1 + N_2) \cos(\arccos \frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2 + 2} - \alpha_0)}} \right] \quad (86)$$

Por parte del engranaje será,

$$\alpha_{1,1}^{0'} = \angle B_2 O_2 D = \angle B_2 O_2 A_2 - \angle A_2 O_2 D \quad (87)$$

Donde  $\angle B_2 O_2 A_2$  y  $\angle A_2 O_2 D$  pueden ser calculados, así:

$$\angle B_2 O_2 A_2 = \arccos \frac{R_{b2}}{R_{O2}} \quad (88)$$

$$\angle A_2 O_2 D = \alpha'_2 - \angle A_4 O_2 A_2 = \alpha'_2 - \text{inv} \arccos \frac{R_{b2}}{R_{O2}} \quad (89)$$

Obteniendo:

$$\alpha_{1,1}^{0'} = \tan \left( \arccos \frac{R_{b2}}{R_{O2}} \right) - \alpha'_2 \quad (90)$$

El resultado

$$\alpha_{1,1}^{0'} = \tan \left( \arccos \frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2 + 2} \right) - \frac{\pi}{2N_2} \text{inv} \alpha_0 \quad (91)$$

La ecuación (91) es utilizada cuando el desplazamiento angular del engranaje es igual a 0. Cuando el desplazamiento del engranaje es  $\theta_2$ , el ángulo  $\alpha'_{1,1}$  será:

$$\alpha'_{1,1} = \alpha_{1,1}^{0'} - \theta_2 \quad (92)$$

$$= \tan \left( \arccos \frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2 + 2} \right) - \frac{\pi}{2N_2} \text{inv} \alpha_0 - \theta_2 \quad (93)$$

Conociendo la relación entre el desplazamiento angular del piñón y el engranaje, y el punto de referencia inicial de desplazamiento que es  $A_2$ . Respeto la relación de velocidades angulares con respecto el número de dientes.

$$\omega_2 = \frac{N_1}{N_2} \omega_1 \quad (94)$$

$$\alpha'_{1,1} = \tan \left( \arccos \frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2 + 2} \right) - \frac{\pi}{2N_2} \mathit{inv} \alpha_0 - \frac{N_1}{N_2} \theta_1 \quad (95)$$

Para el segundo par de dientes de malla, esos corresponden a los ángulos  $\alpha_{1,2}$  y  $\alpha'_{1,2}$ . Para el ángulo  $\alpha_{1,2}$  la diferencia desde el ángulo  $\alpha_{1,1}$  es solo el ángulo  $2\pi/N_1$ . Por lo tanto, se puede expresar como:

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{1,1} + \frac{2\pi}{N_1} \quad (96)$$

$$= \theta_1 + \frac{3\pi}{2N_1} - \mathit{inv} \alpha_0 \quad (97)$$

$$+ \tan \left[ \arccos \frac{N_1 \cos \alpha_0}{\sqrt{(N_2 + 2)^2 + (N_1 + N_2)^2 - 2(N_2 + 2)(N_1 + N_2) \cos(\arccos \frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2 + 2} - \alpha_0)}} \right] \quad (98)$$

$$\tan \left[ \arccos \frac{N_1 \cos \alpha_0}{\sqrt{(N_2 + 2)^2 + (N_1 + N_2)^2 - 2(N_2 + 2)(N_1 + N_2) \cos(\arccos \frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2 + 2} - \alpha_0)}} \right] \quad (99)$$

Correspondientemente, la diferencia entre los ángulos  $\alpha'_{1,2}$  y  $\alpha'_{1,1}$  es también solo el ángulo  $2\pi/N_2$ , pero el signo es negativo,  $-2\pi/N_2$ . La expresión es así:

$$\alpha'_{1,2} = \alpha'_{1,1} - \frac{2\pi}{N_2} \quad (100)$$

$$= \tan\left(\arccos\frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2 + 2}\right) - \frac{N_1}{N_2} \theta_1 - \frac{5\pi}{2N_2} - \mathit{inv}\alpha_0 \quad (101)$$

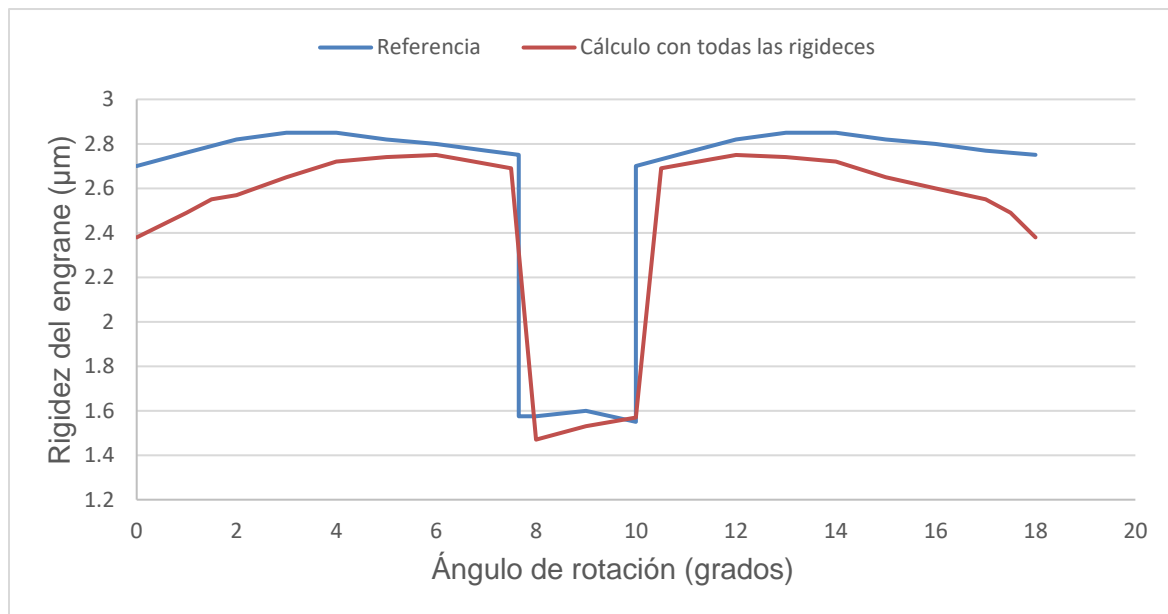
Se asume que el total efectivo de las rigideces  $k_t$  igual a la suma de dos pares de rigidez  $k_{t,1}$  y  $k_{t,2}$ . Entonces,  $k_t$  se puede obtener por:

$$k_t = k_{t,1} + k_{t,2} \quad (102)$$

$$= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\frac{1}{k_{h,i}} + \frac{1}{k_{b1,i}} + \frac{1}{k_{s1,i}} + \frac{1}{k_{a1,i}} + \frac{1}{k_{b2,i}} + \frac{1}{k_{s2,i}} + \frac{1}{k_{a2,i}}} \quad (103)$$

Después de realizar el estudio del comportamiento de un par de engranajes durante su funcionamiento, se implementó el cálculo de todas las rigideces para el piñón y engranaje en base al análisis de energías, contacto hertziano y la deformación del diente en la raíz para el modelo de la referencia bibliográfica [41], [43] como se explicó a lo largo de esta sección. Se obtuvieron resultados validados con un error menor al 10% con respecto a la rigidez. Estas variaciones son resultado del tipo de perfil de la involuta manejado en la referencia con respecto a este proyecto, en este caso se implementó la rigidez para la involuta y no se tuvo en cuenta la base del diente **Figura 3-7**.

**Figura 3-7** Variación de la rigidez del engrane en el tiempo

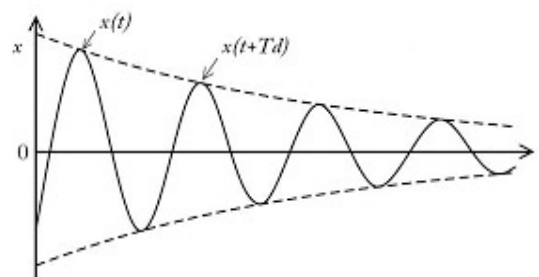


Fuente: elaboración propia

### 3.2.4 Amortiguamiento

El amortiguamiento, es la disipación de energía mecánica de un sistema durante el tiempo[70], como lo muestra la **Figura 3-8**. También se puede llamar como fricción interna en un sistema, debido a que afecta tanto microscópicamente como macroscópicamente, gracias a su sensibilidad.

**Figura 3-8** Amortiguamiento



Fuente: tomada de [14]



El amortiguamiento se divide en viscoso y de histéresis. El amortiguamiento viscoso es proporcional a la velocidad y causada por los efectos generados por un amortiguador, resorte o actuador. En amortiguamiento de histéresis es causado por la fricción entre los componentes del sistema, el desplazamiento es el determinante del amortiguamiento [70].

Para este caso, el amortiguamiento entre los dientes de malla fue una constante dada por la rigidez de malla equivalente  $K_m$ , y puede ser evaluado aproximadamente usando la siguiente ecuación:

$$C_m = 2\xi \sqrt{\frac{K_m}{1/m_p + 1/m_g}} \quad (104)$$

### 3.3 Solución del modelo dinámico

Después de haber identificado el modelo dinámico, masa, rigidez y amortiguamiento se procedió a realizar la implementación de las ecuaciones diferenciales, lo cual se basó en la referencia bibliográfica [41]. El modelo dinámico estaba planteado para diferentes grados de libertad, el más sencillo era un sistema de 6 grados de libertad y el más complejo era uno de 12 grados de libertad, este último fue el que se analizó como un modelo dinámico, para el cual se obtuvieron los desplazamientos del piñón. En este trabajo la implementación de la metodología de optimización se realizó sobre el modelo dinámico de 6 grados de libertad sin tener en cuenta la fricción.

Para esto se realizó el cálculo de la rigidez y amortiguamiento mostrados anteriormente y después se plantearon las ecuaciones diferenciales en base al artículo para solucionarlas por medio de ODE45 en Matlab, para lo cual, se obtuvo la **Figura 3-9**, con una misma frecuencia y una mínima variación en los picos. Cabe aclarar que los desplazamientos se están tomando con respecto el ángulo de rotación del engranaje.

**Figura 3-9** Desplazamientos del piñón en la implementación



Fuente: elaboración propia

## **4. Metodología de optimización para reducción de vibraciones en sistemas de transmisión de potencia con engranajes cilíndricos de dientes rectos**

En este capítulo se muestra la metodología planteada, explicando la formulación del problema de optimización, su función objetivo, sus variables de diseño y restricciones.

### **4.1 Formulación del problema de optimización**

Los engranajes son usados en muchas maquinas hoy en día, desde máquinas para la agricultura como despulpadoras de café hasta máquinas para generar energías limpias como son las turbinas eólicas, donde se encontró el problema de las vibraciones en los engranajes para lo cual se escogió un modelo sencillo obtenido de la literatura, explicado anteriormente en la sección 3.1.

El diseño de engranajes se divide en dos fases, la primera la parte es la macro geometría y la segunda es la micro geometría, en la mayoría de los casos cada una de las variables de la micro geometría, tales como, la punta, raíz, perfil y grosor del diente, están influenciadas por el diseño de la macro geometría. El diseño de micro geometría incluye las pequeñas modificaciones en el diente del engranaje en pequeñas escalas como son alivios y redondeos.

Para lograr un diseño satisfactorio, inicialmente se diseña la macro geometría y después la micro geometría. A pesar de que se hagan implementación del diseño de la micro

geometría para obtener mejores rendimientos, obtener un diseño óptimo respecto la macro geometría también es muy importante.

Por lo anterior, esta metodología se comenzó planteando el tipo de engranaje que se utilizaría y la selección del modelo dinámico, el cual es un modelo de seis grados de libertad, para diseñar la macro geometría del par de engranajes. Después de obtener los resultados esperados, se identificó que era necesario hacer cálculos de rigidez, aunque algunos artículos y libros dan el valor de rigidez como una constante de  $1.4 \times 10^8$  N/m, se hizo el cálculo de la rigidez teniendo en cuenta las rigideces de flexión, cortante y axial, deflexión de la base de filete y el efecto del contacto como es explicado en la sección 3.2.3. Después de obtener la rigidez respecto el ángulo de rotación, se implementó el cálculo de amortiguamiento, ya que depende de la rigidez, como se describió en la sección 3.2.4.

Después de obtener la rigidez y amortiguamiento, se propusieron las ecuaciones diferenciales que definirían el modelo dinámico, mostradas en la sección 3.1 solucionándolas por medio de ODE 45 de Matlab, y encontrando los desplazamientos que tiene el piñón respecto al ángulo de giro, para así calcular el error de transmisión.

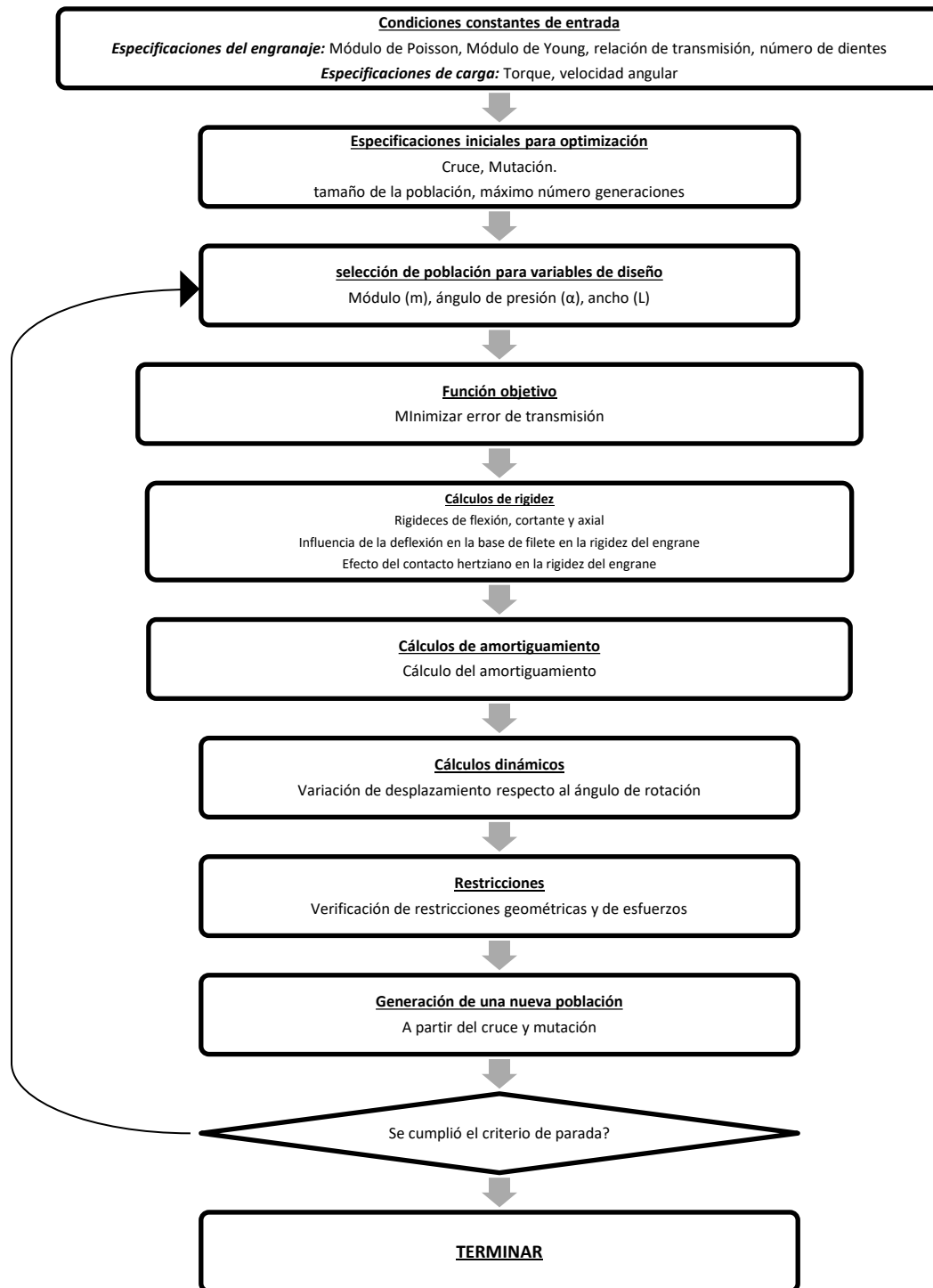
En general las vibraciones son estudiadas con respecto al error de transmisión, sabiendo que es causado por errores de fabricación, desalineamientos, y deflexiones obtenidas mientras el par de engranajes está en contacto; sin embargo, la mayoría de la comunidad científica se ha enfocado en hacer implementaciones en la micro geometría para obtener un óptimo de las macro especificaciones. Esto se debe a que la relación de contacto del engranaje se usa como una variable de diseño para reducir la vibración de la rigidez del engrane en el diseño macro. Este tipo de análisis es un camino muy útil para diseños de engranajes con bajos errores de transmisión. Sin embargo, el error de transmisión se minimiza indirectamente y no se puede aplicar cuando no se puede lograr la relación de contacto objetivo debido a unas condiciones de diseño limitadas.

En este estudio se buscará una solución óptima según la función objetivo, al optimizar macro geometrías, considerando el error de transmisión de un análisis dinámico del par de engranajes rectos. Las macro variables de diseño fueron el módulo normal, ángulo de presión, número de dientes del piñón y ancho de cara. Se establecieron varias

restricciones de diseño para que no se usara un diente anormal en el proceso de optimización y se cumpliera con la resistencia del engranaje. El diseño óptimo se llevó a cabo utilizando un algoritmo genético de *Global Optimization Toolbox* de Matlab. Para esto se planteó la metodología de la .

En resumen, con este problema de optimización se desea encontrar un par de engranajes que dependiendo de la velocidad y/o torque, la relación de transmisión del sistema y condiciones de fronteras geométricas se puede determinar cuál es el par de engranajes que tiene menos vibraciones con solo implementar modificaciones macro geométricas del par de engranajes.

**Figura 4-1** Metodología para optimización de sistemas de transmisión de potencia de engranajes rectos para reducción de vibraciones



Fuente: elaboración propia

### **4.1.1 Condiciones constantes de entrada**

Las condiciones de entrada son los datos dados por el problema a solucionar y esto permite entender cada una de las constantes de entrada, correspondientes a: las especificaciones del engranaje y las especificaciones de carga.

### **4.1.2 Especificaciones iniciales para optimización.**

Principalmente se tiene en cuenta la determinación del número máximo de generaciones que toma el algoritmo genético y el tamaño de población.

El número máximo de generaciones puede ser utilizado de dos formas; como criterio de terminación del proceso de optimización y/o como criterio para identificar si al aumento de generaciones se puede tener un mejor óptimo.

El tamaño de la población especifica cuántos individuos hay en cada generación. Con un tamaño de población grande, el algoritmo genético busca el espacio de solución más a fondo, reduciendo así la posibilidad de que el algoritmo devuelva un mínimo local que no sea un mínimo global. Sin embargo, un tamaño de población grande también hace que el algoritmo se ejecute más lentamente.

### **4.1.3 Función objetivo**

Para cada problema de ingeniería puede existir diferentes diseños, unos pueden ser más eficientes que otros, todo depende de la definición del problema planteado y que se esté buscando con este, adicionalmente se debe determinar cómo está relacionado con el diseño actual. Este criterio debe ser una función escalar cuyo valor numérico se puede obtener una vez que se especifica un diseño. Este criterio se denominaría la función objetivo para el diseño óptimo, algunas veces se debe minimizar o maximizar, dependiendo del problema. Se enfatiza que una función objetivo válida debe estar influenciado directa o indirectamente por las variables del problema de diseño o de lo contrario, no es una función objetivo significativa.

La selección de una función objetivo adecuada es una decisión importante en el proceso de diseño. En el caso de la reducción de vibraciones se han encontrado planteamientos con el error de transmisión desde la parte estática como también de la dinámica, donde

se puede cuantificar las vibraciones. Adicionalmente, todas las variables de diseño estarán relacionadas indirectamente desde un análisis estático o dinámico, ya que este tipo de análisis requieren obligatoriamente la rigidez que contienen las variables de diseño. Debido a que la metodología planteada es para sistemas dinámicos, se puede decir que la función objetivo a minimizar es la que se muestra a continuación:

$$f(x) = \text{Valor pico a pico del error de transmisión dinámico} \quad (105)$$

#### 4.1.4 Variables de optimización

El siguiente paso en el proceso de formulación del problema es la identificación de las variables de diseño o de optimización que describan el sistema de engranajes rectos. Estas variables pueden tomar cualquier valor, pero así también producirán diferentes diseños, estas variables deben ser independientes una de la otra. El número de variables seleccionadas también da el grado de libertad que va a tener el problema de optimización.

En los problemas encontrados en la literatura, se han logrado identificar diferentes conjuntos de variables para resolver el mismo sistema, como son el número de dientes, módulo, ancho de cara y ángulo de presión; sin embargo, se debe aclarar que cada estudio es planteado de manera diferente.

Estas variables son meticulosamente seleccionadas, debido a que se ha hecho la consideración de cada una de ellas, para determinar si corresponde o no a una variable de optimización.

- Las variables de diseño deben ser independientes entre sí.
- Estas variables tienen condiciones de frontera que dependen del diseño.
- Se debe dar un valor numérico a cada variable de diseño identificada para hacer un diseño de prueba del sistema, para así ser validada.

En el momento de selección de variables se debe tener en cuenta que tipo de variable se va a utilizar, por ejemplo: continua, discreta, entera, etc. En el caso de este estudio se implementó una variable discreta.



### 4.1.5 Restricciones

El paso final en la formulación consiste en identificar todas las restricciones y desarrollar las expresiones de estas. Para cualquier diseño de ingeniería, las restricciones son requisitos que se deben cumplir con el fin de obtener resultados realistas que puedan cumplir con su objetivo.

En el caso de reducción de vibraciones, se busca que cumpla con restricciones de esfuerzos para evitar que los valores óptimos obtenidos fallen durante su funcionamiento. Adicionalmente, se deben implementar restricciones geométricas, para la punta del diente, ancho del engranaje, diámetros de los engranajes y relación de contacto.

#### ▪ Restricciones de esfuerzos

La implementación de restricciones de esfuerzos evita que en el nuevo diseño se tengan fallas, por lo cual, usualmente se aplican análisis de flexión y desgaste de engranajes rectos basado en la norma AGMA.

Adicionalmente se asumen factores de diseño de engranajes teniendo en cuenta las características del modelo planteado, en base a la referencia bibliográfica y al material. También se dio un factor de seguridad por flexión y desgaste mínimo.

$$\sigma = W^t K_o K_v K_s \frac{P_d K_m K_B}{F} \frac{1}{J} \quad (106)$$

$$\sigma_{perm} = \frac{S_t Y_N}{S_F K_T K_R} \quad (107)$$

$$S_F = \frac{S_t Y_N (K_T K_R)}{\sigma} \quad (108)$$

$$\sigma_c = C_P \left( W K_o K_v K_s \frac{K_m C_f}{d_p F I} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (109)$$

$$\sigma_{sc,perm} = \frac{S_C Z_N C_H}{S_H K_T K_R} \quad (110)$$

$$S_H = \frac{S_C Z_N C_H / (K_T K_R)}{\sigma_c} \quad (111)$$

### ▪ Restricciones geométricas

Se busca que las restricciones geométricas dentro del diseño inicial se cumplan. En las restricciones que dependan de la geometría base por parte de las relaciones geométricas se va a implementar una restricción para la punta del diente y así evitar un diente puntudo. Por parte del ancho del engranaje se intentará evitar que quede sobre dimensionado. Respecto a los diámetros de los engranajes, se buscará cumplir que el diámetro activo sea mayor que el de la raíz. Observando la relación de contacto se evitará que sea demasiada pequeña.

$$\frac{0.25}{P} \leq t_o \quad (112)$$

$$W \leq \frac{D_o - D_{int}}{2} \quad (113)$$

$$D_{root} \leq D_o \quad (114)$$

$$m_p \geq 1.2 \quad (115)$$

#### 4.1.6 Condiciones de finalización de optimización

La condición de convergencia es cuando la función objetivo se mantiene a lo largo del proceso o generaciones, la magnitud del paso es menor que la precisión de la máquina y la violación de la restricción es menor que la tolerancia de restricciones. La magnitud de la medida de complementariedad es menor que la raíz de la tolerancia de restricciones, y el subproblema se resuelve utilizando una tolerancia menor que tolerancia de la función y la violación de la restricción es menor que tolerancia de las restricciones.

## 5. Aplicación de la metodología propuesta de optimización

Para la aplicación se va a utilizar el modelo de 6 grados de libertad planteado en el capítulo 3 y aplicando la metodología planteada en el capítulo 4, en este capítulo se verán cada una de las etapas de la metodología explicadas con el modelo.

### 5.1.1 Especificaciones iniciales para optimización.

Para el tamaño de población se seleccionó 50, debido a que en el algoritmo planteado se recomienda que si se tienen menos de 5 variables de diseño este es el valor recomendado. Por parte de la máxima cantidad de generaciones se utilizó 300 ya que el programa recomienda que deben ser 100 veces por cada variable de diseño.

### 5.1.2 Función objetivo

Después de haber formulado la función objetivo, esta se evaluó inicialmente con los valores de modelo presentado en la referencia [45], y después se evaluó con la metodología planteada, en la **Tabla 5-1**, se ven los resultados obtenidos.

**Tabla 5-1** Error de transmisión

Error de transmisión según referencia [45] ( $\mu\text{m}$ )	Error de transmisión según metodología ( $\mu\text{m}$ )
3.4047	3.2343

Fuente: elaboración propia

### 5.1.3 Variables de optimización

En la **Tabla 5-2** Variables de diseño, se muestran las variables de diseño seleccionadas con sus condiciones de frontera, pasos posibles de resultados, tipo de variable y el valor de la variable después de haberse optimizado. Primero se aclara que fueron seleccionadas meticulosamente y se tuvieron consideraciones especiales para la selección de este tipo de variables. Las condiciones de frontera fueron seleccionadas en base a la referencia de modelos aplicados para optimización por medio de reducción de vibraciones y normas, la selección de las variables es tomada para obtener valores cercanos a los estandarizados.

**Tabla 5-2** Variables de diseño

Variable	Mínimo	Máximo	Valor inicial	Tipo de variable	Incremento	Valor final
Módulo normal	1	5	1.5	Continua	-	4.8
Ángulo de presión	20	25	20	Discreta	2.5	20
Ancho de cara	5	100	15	Continua	-	90

Fuente: elaboración propia

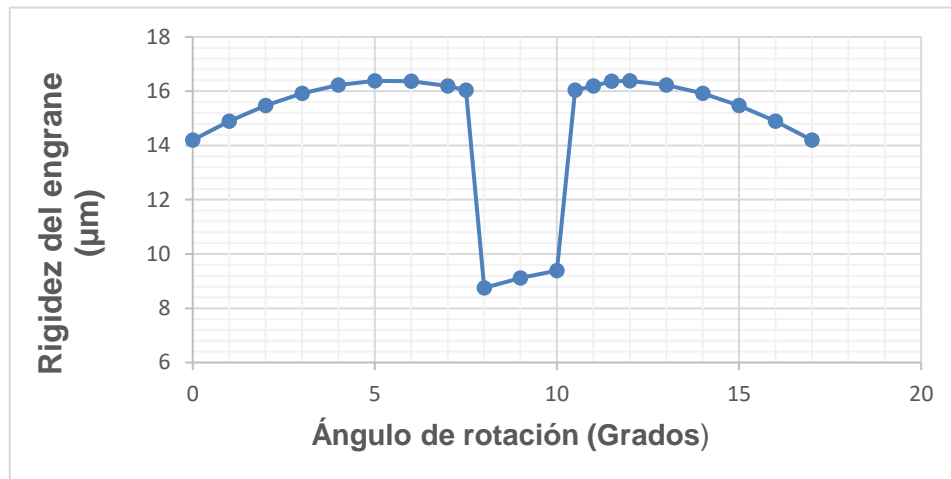
### 5.1.4 Restricciones

Se implementaron las restricciones geométricas planteadas en la sección 4.1.5 de manera satisfactoria desde el diseño planteado hasta el óptimo.

### 5.1.5 Resultados de rigidez

Después haber implementado el proceso de optimización se calculó la rigidez del nuevo sistema, donde se observa que la rigidez aumentó 5.91 veces respecto a la rigidez inicial, esto sucede ya que el engranaje se ha sobre dimensionado; sin embargo, al comparar los resultados su comportamiento es semejante. Lo anterior se evidencia en la **Figura 5-1**.

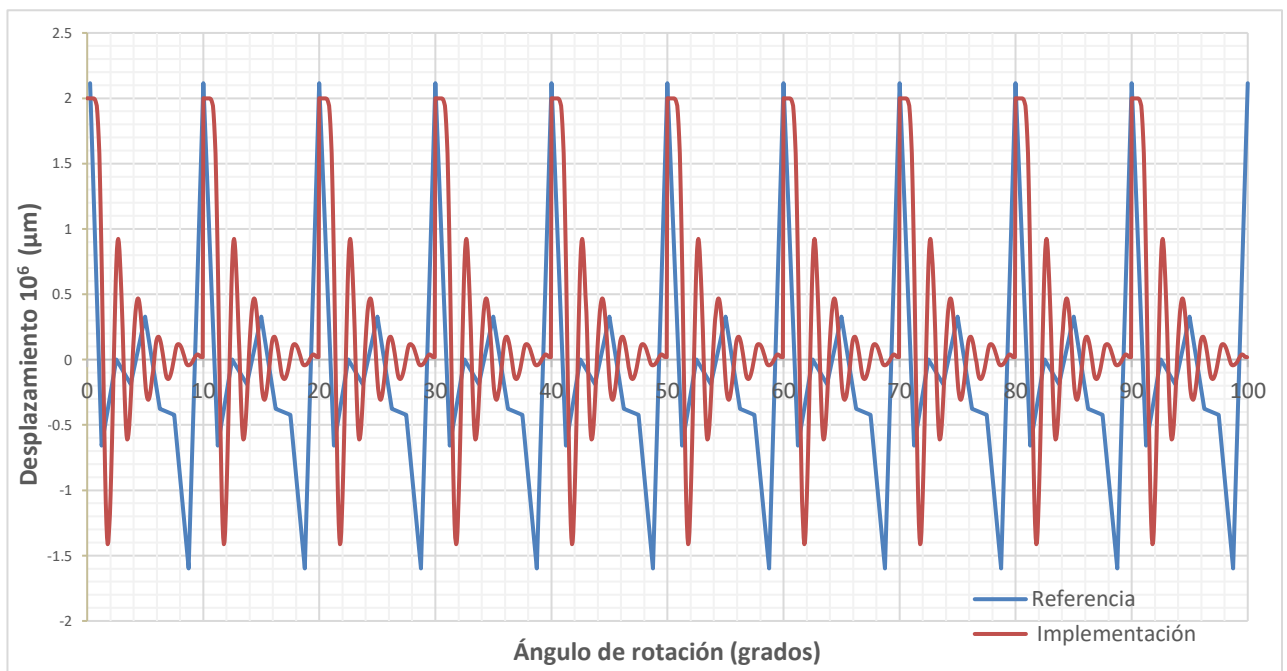
**Figura 5-1** Resultados de rigidez



Fuente: elaboración propia

Por parte de la dinámica, se obtuvo la **Figura 5-2**, se evidencia la pequeña reducción en el valor pico a pico de cada uno de los periodos del ciclo de funcionamiento del engranaje.

**Figura 5-2** Desplazamientos de piñón



Fuente: Elaboración propia

### **5.1.6 Condiciones de finalización de optimización**

El modelo ha terminado satisfactoriamente debido a que la magnitud de la medida de complementariedad es menor que la raíz de la tolerancia de las restricciones, el subproblema se resuelve usando una tolerancia menor que tolerancia de la función y la violación de la restricción es menor que la tolerancia de las restricciones.

Los criterios que hicieron que se detuviera el proceso de optimización fueron: el número de iteraciones del algoritmo genético y el valor de las restricciones en el óptimo

## 6. Conclusiones y recomendaciones

En el transcurso de esta investigación, se ha logrado la identificación de modelos dinámicos implementados en la comunidad científica para la reducción de vibraciones en engranajes, comprendiendo parámetros de diseño, tipos de engranajes, formulaciones matemáticas e implementación realizada. Se alcanzaron resultados que permiten concluir que el error de transmisión es un elemento de suma importancia para el análisis de vibraciones y ruidos en una transmisión de engranajes.

En primer lugar, se identificaron procesos de optimización implementados para engranajes, tales como: minimizar peso, maximizar eficiencia, minimizar error de transmisión entre otros. Para el proyecto de la metodología para reducción de vibraciones se hizo énfasis en el error de transmisión, lo cual permitió identificar que la realización de procesos de optimización impacta en la geometría, tanto en la parte micro como en la macro.

Se estableció un modelo dinámico donde se pueden observar los desplazamientos de los engranajes y así obtener el error de transmisión, para lo cual se inició desde el análisis de la rigidez de los engranajes, teniendo en cuenta rigidez axial, flexión y cortante, como también el efecto hertziano y el efecto de la deflexión en la raíz del diente.

Se logró validar el cálculo de la rigidez obteniendo un error menor al 10% y con el mismo comportamiento. Lo anterior, debido a que existe una diferencia entre los perfiles del diente del artículo y los perfiles del diente la metodología entregada, una de estas diferencias es que en esta metodología no se tuvo en cuenta el radio de la raíz.

A continuación, se validaron los desplazamientos del piñón realizando una comparación entre los resultados de la bibliografía y la de metodología propuesta, encontrando que

estos tienen una misma frecuencia con variaciones en los picos. Estas variaciones se dieron ya que el modelo implementado en la bibliografía fue más robusto, tenía 12 grados de libertad y adicionalmente apreciaron la fuerza de fricción, en esta metodología se implementaron 6 grados de libertad.

Se desarrolló la metodología para la optimización de sistemas de transmisión de potencia en engranajes rectos para reducción de vibraciones, teniendo en cuenta variables que dependen de la geometría de los engranajes como la rigidez y amortiguamiento, este último varía durante el tiempo.

Se planteó una función objetivo en referencia a la comunidad científica, y se implementaron cambios en la macro geometría ya que es el proceso menos usado. Este planteamiento permitió identificar que la función objetivo en base al error de transmisión fue correctamente seleccionada puesto que se lograron resultados óptimos correspondientes a un mínimo; sin embargo, el realizar cambios de factores altamente parametrizados y/o estandarizados como lo son los macro geométricos no permite una correcta comparación ya que tiende a ser más complejo obtener resultados óptimos sin salir de los estándares de diseño. En investigaciones futuras sería interesante realizar la implementación de la metodología incluyendo cambios en la micro geometría.

Se plantearon restricciones geométricas que satisfacen y mantienen el par de engranajes dentro del rango de diseño geométrico. En estudios futuros se puede complementar la metodología planteada profundizando en esfuerzos.

Como resultado de este trabajo, se puede obtener una reducción de vibraciones en el sistema de transmisión de potencia con la metodología creada ya que se logró la reducción del error de transmisión pico a pico, teniendo en cuenta que el engranaje fue sobredimensionado. La implementación de esta metodología en el diseño y fabricación de sistemas de transmisión de engranajes rectos puede conducir a una reducción de problemas asociados con las vibraciones, como el desgaste prematuro de los engranajes, el ruido y el mal funcionamiento de la maquinaria. Por lo tanto, se hace la recomendación de implementar en proyectos futuros, modelos multiobjetivo donde también se optimice la masa y volumen del engranaje o costo de producción de estos.



En conclusión, la presente tesis de maestría ha logrado desarrollar una metodología que permite optimizar sistemas de transmisión de potencia de engranajes rectos con el objetivo de reducir vibraciones. Los resultados obtenidos y las recomendaciones derivadas de este estudio brindan una base para futuras investigaciones y mejoras en el diseño y fabricación de sistemas de transmisión de potencia. La aplicación práctica de esta metodología puede tener un impacto positivo en diferentes industrias, al mejorar el rendimiento y la eficiencia de las máquinas y equipos mecánicos.



## Bibliografía

- [1] R. G. Richard G. Budynas, J. Keith. Nisbett, and J. Edward. Shigley, Shigley's mechanical engineering design. Mcgraw-hill, 2011.
- [2] S. L. Harris, 'Dynamic loads on the teeth of spur gears', Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 172, no. 1, pp. 87-112, 1958, doi:10.1243.1958.172.017.02.
- [3] R. W. Gregory, S. L. Harris, and r. G. Munro, 'Applied mechanics group dynamic behaviour of spur gears.', Vol. 178, no. 1, pp. 207-218, 1963, doi:10.1177/002034836317800130.
- [4] D. James. D. Smith, Gear noise and vibration. Marcel dekker, 2003.
- [5] A. Kahraman, d. R. Houser professor memasme, and j. J. Zakrajsek memasme, 'Dynamic analysis of geared rotors by finite elements', 1992. [online]. Available: <http://asme.org/terms>
- [6] A. Kahraman and r. Singh, 'Non-linear dynamics of a spur gear pair', Journal of Sound and Vibration, Vol. 142, no. 1, pp. 49-75, 1990, doi: 10.1016/0022-460X(90)90582-K.
- [7] h. Nevzat özgüven and d. R. Houser, 'mathematical models used in gear dynamics—a review', journal of sound and vibration, vol. 121, no. 3. Academic press, pp. 383–411, 1988. Doi: 10.1016/s0022-460x(88)80365-1.
- [8] D. Qin and Y. Shao, 'Power transmissions.', Crc Press Taylor and Francis Group, 2016.
- [9] z. Chen, z. Zhu, and y. Shao, 'fault feature analysis of planetary gear system with tooth root crack and flexible ring gear rim', eng fail anal, vol. 49, pp. 92–103, mar. 2015, doi: 10.1016/j.engfailanal.2014.12.014.
- [10] M. Faggioni, F. Pellicano, a. Andrisano, and G. Bertacchi, 'Dynamic optimization of spur gears'. [online]. Available: <http://www.asme.o>
- [11] W. Schiehlen, 'Computational Dynamics: theory and applications of multibody systems', european journal of mechanics, a/solids, vol. 25, no. 4, pp. 566–594, jul. 2006, doi: 10.1016/j.euromechsol.2006.03.004.

- [12] I. Khemili and I. Romdhane, 'Dynamic analysis of a flexible slider-crank mechanism with clearance', *European journal of mechanics, a/solids*, vol. 27, no. 5, pp. 882–898, sep. 2008, doi: 10.1016/j.euromechsol.2007.12.004.
- [13] I. Khemili and I. Romdhane, 'Dynamic analysis of a flexible slider – crank mechanism with clearance', vol. 27, pp. 882–898, 2008, doi: 10.1016/j.euromechsol.2007.12.004.
- [14] H. Torres, 'Metodología del análisis del comportamiento dinámico estructural de sistemas multicuerpo con elementos flexibles y su aplicación al manipulador de arquitectura paralela tipo delta de la universidad santo tomas.', universidad santo tomas, 2017.
- [15] A. Tuplin, 'gear tooth stresses at high speed'. *Proceedings of the institution of mechanical engineers*, vol. 16, pp. 162–167, 1950.
- [16]. A. Tuplin, 'gear tooth stresses at high speed'. *Proceedings of the institution of mechanical engineers*, vol. 16, pp. 162–167, 1950.
- [17] R. Tharmakulasingam, 'Transmission error in spur gears: static and dynamic finite-element modeling and design optimization', 2009.
- [18] G. Kelly, *Mechanical engineering, advanced vibration analysis*, Crc Press, 2006.
- [19] H. Nevzat Özgüven, D.R. Houser, 'Mathematical models used in gear dynamics-a review', *Journal of Sound and Vibration*, vol. 121, pp. 383–411, 1988, doi: 10.1016/s0022-460x(88)80365-1.
- [20] H. D. Nelson, 'Finite element simulation of rotor bearing systems with internal damping', no. 76, pp. 1–6, 1976.
- [21] Z. G. Wang, C. C. Lo, y. C. Chen, and h. C. Liu, 'Dynamic modelling, optimization and experiment for a high-speed spur gear set', *machines*, vol. 10, no. 8, aug. 2022, doi: 10.3390/machines10080653.
- [22] Z. G. Wang, C. C. Lo, y. C. Chen, and h. C. Liu, 'Dynamic modelling, optimization and experiment for a high-speed spur gear set', *machines*, vol. 10, no. 8, aug. 2022, doi: 10.3390/machines10080653.
- [23] D. C. H. Y. And Z. S. Sun, 'A rotary model for spur gear dynamics.', *Asme journal of mechanisms, transmissions and automation in design*, vol. 107, no. December, pp. 529 – 535, 1985.
- [24] T. S. M. Umezawa, 'Vibration of power transmission helical gears (approximate equation of tooth stiffness)', *bulletin of jsme*, vol. 1, no. 4, pp. 197–402, 1958.

- [25] A. Kahraman, h. Ozguven, and d. R. Houser, 'Dynamic analysis of geared rotors by finite elements', *Journal of Mechanical Design*, vol. 114, no. September 1992, pp. 507–514, 1992, doi: 10.1115/1.2926579.
- [26] Z. Rao, C. Y. Zhou, Z. H. Deng, and M. Y. Fu, 'Nonlinear torsional instabilities in two-stage gear systems with flexible shafts', *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 82, pp. 60–66, 2014, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2014.02.021.
- [27] Z. Rao, C. Y. Zhou, Z. H. Deng, and M. Y. Fu, 'Nonlinear torsional instabilities in two-stage gear systems with flexible shafts', *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 82, pp. 60–66, 2014, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2014.02.021.
- [28] F. Shakeriaski, M. Mirparizi, F. Sheykhsamani, and M. Alihabasi, 'Vibration behavior optimization of planetary gear sets', *propulsion and power research*, vol. 3, no. 4, pp. 196–206, dec. 2014, doi: 10.1016/j.jprr.2014.11.002.
- [29] F. Shakeriaski, M. Mirparizi, F. Sheykhsamani, and M. Alihabasi, 'Vibration behavior optimization of planetary gear sets', *propulsion and power research*, vol. 3, no. 4, pp. 196–206, dec. 2014, doi: 10.1016/j.jprr.2014.11.002.
- [30] Z. Chen, Z. Zhu, and Y. Shao, 'Fault feature analysis of planetary gear system with tooth root crack and flexible ring gear rim', *Engineering Failure Analysis*, vol. 49, pp. 92–103, 2015, doi: 10.1016/j.engfailanal.2014.12.014.
- [31] A. Saxena, A. Parey, and M. Chouksey, 'Study of modal characteristics of a geared rotor system', *Procedia technology*, vol. 23, pp. 225–231, 2016, doi: 10.1016/j.protcy.2016.03.021.
- [32] A. Saxena, A. Parey, and M. Chouksey, 'Study of modal characteristics of a geared rotor system', *Procedia technology*, vol. 23, pp. 225–231, 2016, doi: 10.1016/j.protcy.2016.03.021.
- [33] D. Yang, Z. Sun. 'A Rotary Model for Spur Gear Dynamics.', *ASME*, vol. 107, no. 4, pp. 529–535, 1985, doi:10.1115/1.3260759.
- [34] C. Liu, Z. Fang, and F. Wang, 'An improved model for dynamic analysis of a double-helical gear reduction unit by hybrid user-defined elements: experimental and numerical validation', *Mechanism and Machine Theory*, vol. 127, pp. 96–111, sep. 2018, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2018.04.022.

- [35] S. P. Radzevich, *Dudley's handbook of practical gear design and manufacture*. Crc press, 2021. Doi: 10.1201/9781003126881.
- [36] A. Vallejo, 'Dinámica de sistemas multicuerpo rígido-flexibles en coordenadas absolutas', M.S tesis, Universidad de Sevilla, España, 2006.
- [37] A. Matamoros, 'Simulación del comportamiento dinámico de un vehículo de carga utilizando elementos finitos.', *revista ciencia e ingeniería.*, vol. 28, no. September, p. 2015, 2015.
- [38] P. Madrid, 'Análisis dinámico de sistemas multicuerpo', Universidad Politécnica de Madrid, Pp. 1–54, 2000.
- [39] S. P. Radzevich, 'Advances in gear design and manufacture.' Crc press, 2019. Doi: 10.1201/9781351049832.
- [40] G. Niemann, and h, winter. 'General transmissions, gearboxes fundamentals, spur gears.', band 2: getriebe allgemein, zahnradgetriebe - grundlagen, stirnradgetriebe, springer, 2003.
- [41] O. D. Mohammed, m. Rantatalo, and j. O. Aidanpää, 'Dynamic modelling of a one-stage spur gear system and vibration-based tooth crack detection analysis', *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 54, pp. 293–305, mar. 2015, doi: 10.1016/j.ymssp.2014.09.001.
- [42] O. D. Mohammed, m. Rantatalo, and j. O. Aidanpää, 'Dynamic modelling of a one-stage spur gear system and vibration-based tooth crack detection analysis', *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 54, pp. 293–305, mar. 2015, doi: 10.1016/j.ymssp.2014.09.001.
- [43] O. D. Mohammed, 'dynamic modelling, and vibration analysis for gear tooth crack detection.', D. thesis, Lulea university Technology, Sweden 2015.
- [44] O. D. Mohammed, 'dynamic modelling, and vibration analysis for gear tooth crack detection.', D. thesis, Lulea university Technology, Sweden 2015.
- [45] O. D. Mohammed, m. Rantatalo, and j. O. Aidanpää, 'Dynamic modelling of a one-stage spur gear system and vibration-based tooth crack detection analysis', *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 54, pp. 293–305, mar. 2015, doi: 10.1016/j.ymssp.2014.09.001.
- [46] Y. Yang, J. Wang, Q. Zhou, Y. Huang, J. Zhu, and W. Yang, 'Mesh stiffness modeling considering actual tooth profile geometry for a spur gear pair', *Mechanics and industry*, vol. 19, no. 3, 2018, doi: 10.1051/meca/2018026.

- [47] O. D. Mohammed, M. Rantatalo, and J. O. Aidanpää, 'Dynamic modelling of a one-stage spur gear system and vibration-based tooth crack detection analysis', *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 54, pp. 293–305, mar. 2015, doi: 10.1016/j.ymssp.2014.09.001.
- [48] Sato, Umezawa, and Ishikawa, 'Effects of contact ratio and profile correction', *Bull. JSME* 26, 1983.
- [49] d. R. Houser, 'Optimum profile modifications for the minimization of static transmission errors of spur gears', *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, vol. 108, no. 1, pp. 86-94, 1986. doi: 10.1115/1.3260791.
- [50] V. Simon, 'Optimal tooth modifications for spur and helical gears', *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, vol. 111, no. 1, pp.611-615, 1989, doi: 10.1115/1.3259044.
- [51] P. Velez, M. Maatar, 'A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour', vol.191, no. 5, pag. 629-660, 1996, doi: 10.1006/jsvi.1996.0148.
- [52] R. G. Parker, S. M. Vijayakar, and T. Imajo, 'Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modelling and experimental comparisons', *J sound vib*, vol. 237, no. 3, pp. 435–455, oct. 2000, doi: 10.1006/jsvi.2000.3067.
- [53] S. S. Ghosh and G. Chakraborty, 'On optimal tooth profile modification for reduction of vibration and noise in spur gear pairs', *Mechanism and Machine Theory*, vol. 105, pp. 145–163, nov. 2016, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2016.06.008.
- [54] s. S. Ghosh and g. Chakraborty, 'on optimal tooth profile modification for reduction of vibration and noise in spur gear pairs', vol. 105, pp. 145–163, 2016, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2016.06.008.
- [55] J. R. Colbourne, 'The geometry of involute gears.', Springer new york, 1987. Doi: 10.1007/978-1-4612-4764-7.
- [56] Y. Yang, J. Wang, Q. Zhou, Y. Huang, J. Zhu, and W. Yang, 'Mesh stiffness modeling considering actual tooth profile geometry for a spur gear pair', *Mechanics and industry*, vol. 19, no. 3, 2018, doi: 10.1051/meca/2018026.
- [57] G. Bonori, M. Barbieri, and F. Pellicano, 'Optimum profile modifications of spur gears by means of genetic algorithms', *J sound vib*, vol. 313, no. 3–5, pp. 603–616, jun. 2008, doi: 10.1016/j.jsv.2007.12.013.

- [58] Yang, Lin, 'Hertzian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics', *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, vol.109, no. 2, pp. 189-196, 1987, doi: 10.1115/1.3267437.
- [59] J. Flek, M. Dub, J. Kolář, F. Lopot, and K. Petr, 'Determination of mesh stiffness of gear analytical approach vs. fem analysis.', *applied sciences*, vol. 11, no. 11, pp. 4960,2021, doi: 10.3390/app11114960.
- [60] Y. Wang, Y. Shao, Z. Chen, M. Du, and H. Xiao, 'Mesh stiffness calculation of helical gears with profile modification' *International Conference of Fluid Power and Mechatronic Control Engineering*, 2018.
- [61] S. Chul Kim, S. Gon Moon, J. Hyeon sohn, Y. Jun Park, C. Ho Choi, and G. Ho lee, 'Macro geometry optimization of a helical gear pair for mass, efficiency, and transmission error', *Mechanism and Machine Theory*, vol. 144, feb. 2020, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2019.103634.
- [62] C. Choi, H. Ahn, Y. Jun Park, G. Ho Lee, and S. Chul Kim, 'Influence of gear tooth addendum and dedendum on the helical gear optimization considering mass, efficiency, and transmission error', *Mechanism and Machine Theory*, vol. 166, dec. 2021, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2021.104476.
- [63] J. Fraczek and M. Wojtyra, 'multibody dynamics: Computational Methods and Applications', media, Spring, 2011.
- [64] D. Andrés and A. Marín, *Dinámica elementos finitos (caso lineal)*. Universidad Nacional, Colombia, 2006.
- [65] M. Paz, 'Dinámica estructural, teoría y calculo'. Reverte, 1992.
- [66] R. Zaradnik, S. Raichman, and A. Mirasso, 'Comparación de diversas matrices de masas', vol. Xxviii, pp. 3–6, 2009.
- [67] R. F. Aguilar, *Análisis matricial de estructuras*, Espe, Ecuador, 2014.
- [68] U. Nacional, 'Matrices de rigidez y masa de elementos continuos', facultad ingeniería mecánica.
- [69] X. Tian, 'Dynamic simulation for system response of gearbox including localized gear faults.', *Library and archives Canada, bibliothèque et archives Canada*, 2005.
- [70] G. Bejarano, 'Validación experimental del comportamiento dinámico de sistemas flexibles multicuerpo y su aplicación a un robot industrial de arquitectura paralela.', *CIMM*, no. 1, pp. 5–8, 2015.