15.10.9

$f(X) = |X| - |X-1| + |X+2|$

$$|X| = \begin{cases} X & \text{si } X > 0 \\ 0 & \text{si } X = 0 \\ -X & \text{si } X < 0 \end{cases} \qquad |X-1| = \begin{cases} X-1 & \text{si } X > 1 \\ 0 & \text{si } X = 1 \\ 1-X & \text{si } X < 1 \end{cases}$$

$$|X+2| = \begin{cases} X+2 & \text{si } X > -2 \\ 0 & \text{si } X = -2 \\ -(X+2) & \text{si } X < -2 \end{cases}$$

luego se anulan los valores absolutos en $X=0, X=1$ y $X=-2$ y así analizamos en cada intervalo como se muestra en la figura siguiente:

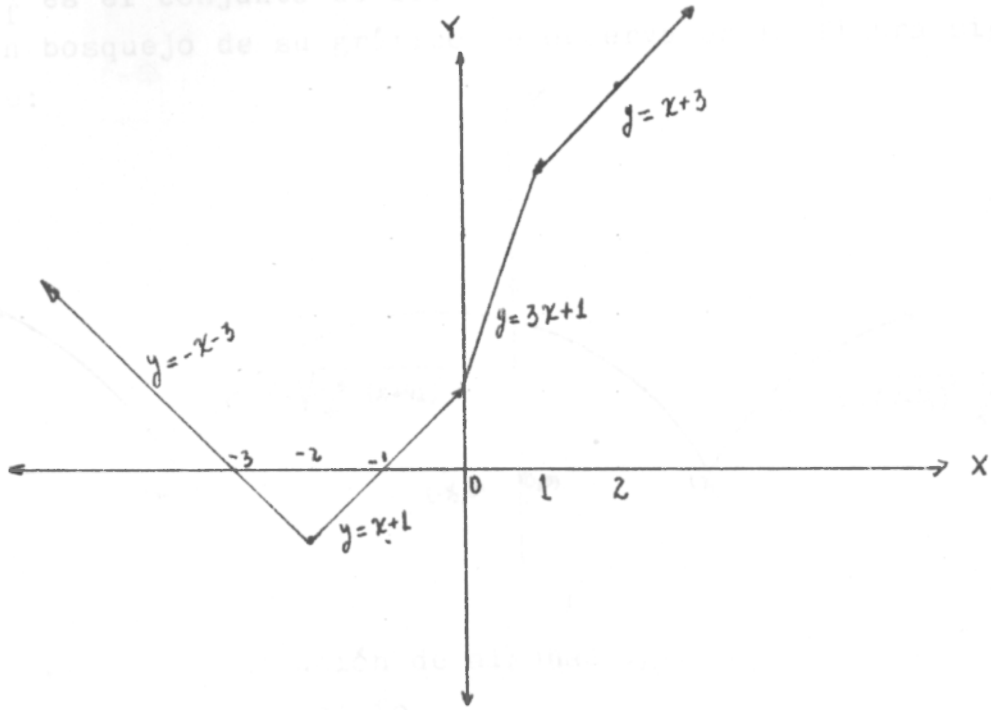
	$x<-2$	$-2\le x<0$	$0\le x<1$	$x\ge 1$
$\lvert x\rvert =$	$- - - - -$	$- - - - - - -$ (0)	$+ + + + +$ (0)	$+ + + + +$
$\lvert x+2\rvert =$	$- - - - - -$	$+ + + + + +$	$+ + + + + +$	$+ + + + +$
$\lvert x-1\rvert =$	$- - - - - -$	-2 $- - - - - -$	0 $- - - - - -$	1 $+ + + +$
	$Y = \lvert x\rvert - \lvert x-1\rvert + \lvert x+2\rvert =$	$Y = \lvert x\rvert - \lvert x-1\rvert + \lvert x+2\rvert =$	$Y = \lvert x\rvert - \lvert x-1\rvert + \lvert x+2\rvert$	$Y = \lvert x\rvert - \lvert x-1\rvert + \lvert x+2$
	$= -x + x-1 - x-2 =$	$= -x + x-1 + x+2 =$	$= x + x-1 + x+2$	$= x - (x-1) + x+$
	$= -x-3$	$= x+1$	$= 3x+1$	$= x+3$

luego tenemos que :

$$f(X) = \begin{cases} -X-3 & \text{si } X < -2 \\ X+1 & \text{si } -2 \le X < 0 \\ 3X+1 & \text{si } 0 \le X < 1 \\ X+3 & \text{si } X \geq 1 \end{cases}$$

D_f es el conjunto de los números reales y $R_f = [-1, +\infty)$

Un bosquejo de su gráfico se observa en la figura siguiente.



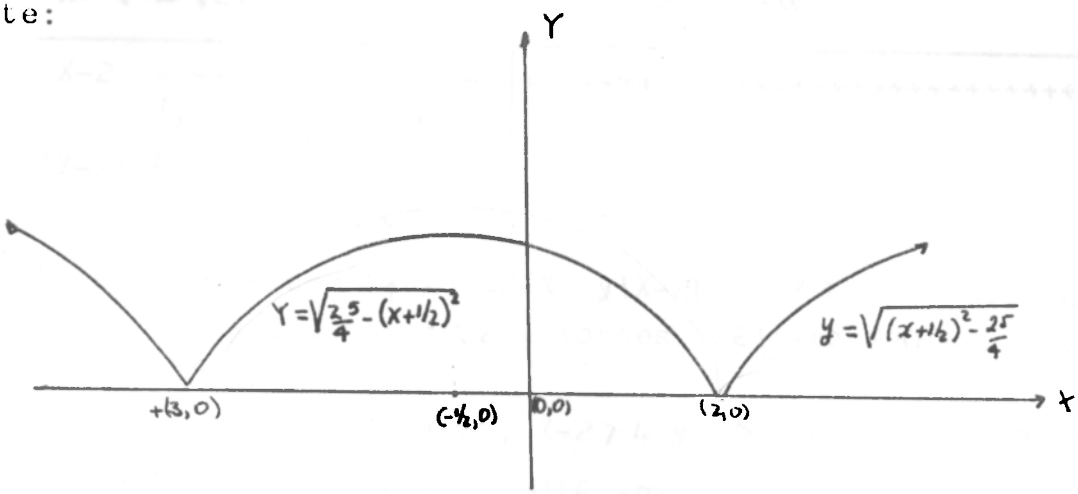
15.10.10 $\quad f(x)=\sqrt{|6-x-x^2|}$.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{6-x-x^2}=\sqrt{25/4-(x+1/2)^2} & \text{si} \quad 6-x-x^2=(x+3)(2-x)\geqslant 0\\ \sqrt{x^2+x-6}=\sqrt{(x+1/2)^2-25/4} & \text{si} \quad 6-x-x^2=(x+3)(2-x)<0\end{cases}$$

El conjnto solución de las desigualdades anteriores se observa en la figura siguiente :

		-3		2	
$x+3$	$- \; - \; - \; -$		$+ \; + \; + \; + \; + \; + \; +$		$+ \; + \; + \; + \; +$
$2-x$	$+ \; + \; + \; +$		$+ \; + \; + \; + \; + \; + \; +$		$- \; - \; - \; - \; -$
	$-$		$+$		$-$

D_f es el conjunto de los números reales y $R_f = [0, +\infty)$ un bosquejo de su gráfico se observa en la figura siguiente:



15.10.11 Resolución de algunas igualdades y desigualdades en valor absoluto.

15.10.11.1 Hallar el conjunto solución de $|X| > 1$

en efecto:

$A = (-\infty, 0)$ 0 $B = [0, +\infty)$

$|X| =$ -------------- | +++++++++++++++++++++++++...

En A tenemos que $|X| = -X > 1 \Leftrightarrow X < -1$, pero en A, $X < 0$

y asi $X \in (-\infty, -1) = X \in [(-\infty, -1) \cap (-\infty, 0)]$

En B tenemos que $|X| = X > 1$ y $X > 0$ entonces $X \in (1, +\infty)$

La solución total es $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

También lo podemos hacer así:

$|X| > 1 \Leftrightarrow \sim(|X| \leq 1) \Leftrightarrow \sim(-1 \leq X \leq 1) \Leftrightarrow X \in [(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)]$

15.10.11.3 Hallar el conjunto solución de $|X-2|>4$

En efecto :

	$A=(-\infty,2)$	2	$B=[2,+\infty)$
$X-2$ =	$- - - - - - - -$		$+ + + + + + + +$

$$|X-2|=\begin{cases} X-2 & \text{si } X\geq 2 \\ 2-X & \text{si } X<2 \end{cases}$$

En A tenemos que $|X-2|=2-X$ y $|X-2|=2-X>4$ por hipotesis, luego $-2>X$,ademas $X<2$ entonces $X\in[(-\infty,2)\cap(-\infty,-2)]=$ $X\in(-\infty,-2)$.

En B tenemos $|X-2|=X-2$, $X-2>4$ y $X>2$ entonces $X>6 = (6,+\infty)$

Solución total es $(-\infty,-2)\cup(6,+\infty)$

Otra forma de hacerlo :

$|X-2|>4 \Longleftrightarrow [X-2\leq 4]^c \Longleftrightarrow [-4\leq X-2\leq 4]^c \Longleftrightarrow [-2\leq X\leq 6]^c \Longleftrightarrow$ $X\in[(-\infty,-2)\cup(6,+\infty)]$.

15.10.11.4 Hallar el conjunto solución de $|X|+|X-1|+|X-2|<4$

En efecto :

	$A=(-\infty,0)$	0	$B=[0,1)$	1	$C=[1,2)$	2	$D=[2,+\infty)$
$\|X\|$	$- - - -$		$+ + + +$		$+ + + +$		$+ + + +$
$\|X-1\|$	$- - - -$		$- - - -$		$+ + + +$		$+ + + +$
$\|X-2\|$	$- - - -$		$- - - -$		$- - - -$		$+ + + +$

$$|X|=\begin{cases} X & \text{si } X\geq 0 \\ -X & \text{si } X<0 \end{cases} \qquad |X-1|=\begin{cases} X-1 & \text{si } X\geq 1 \\ 1-X & \text{si } X<1 \end{cases} \qquad |X-2|=\begin{cases} X-2 & \text{si } X\geq 2 \\ 2-X & \text{si } X<2 \end{cases}$$

En A tenemos que $|X|=-X$, $|X-1|=1-X$, $|X-2|=2-X$,y asi $|X|+|X-1|+|X-2|=-3X+3<4$,pero en este intervalo $X<0$ luego solución en A, $(-1/3,0)$

En B , $|X|=X$, $|X-1|=1-X$, $|X-2|=2-X$,así $|X|+|X-1|+|X-2|=$

$-X+3<4 \Leftrightarrow X>-1$ y así la solución en B es $[0,1)$ pues $X>-1$ y $X\in[0,1)$.

En C, $|X|=X$, $|X-1|=X-1$, $|X-2|=2-X$ y así $|X|+|X-1|+|X-2|=X+1<4 \Leftrightarrow X<3$, pero $1\leq X<2$ luego la solución en este intervalo es $[1,2)$.

En D, $|X|=X$, $|X-1|=X-1$, $|X-2|=X-2$, $|X|+|X-1|+|X-2|=3X-3<4 \Leftrightarrow X<7/3$, pero $X\geq 2$ luego solución en D es $[2,7/3)$

Solucion total $(-1/3,0)\cup[0,1)\cup[1,2)\cup[2,7/3)=[-1/3,7/3)$

15.10.11.5 Hallar el conjunto solución de $\left|\dfrac{2X-5}{X-6}\right|<3$

En efecto :

$$\left|\frac{2X-5}{X-6}\right|<3 \Leftrightarrow |2X-5|<3|X-6| \Leftrightarrow |2X-5|-3|X-6|<0$$

	$A=(-\infty,5/2)$	$5/2$ $B=[5/2,6)$	6 $C=[6,+\infty)$
$\|2X-5\|=$	$-----------$	$++++++++++++++$	$++++++++++++$
$\|X-6\|=$	$-----------$	$--------------$	$++++++++++++$

$$|2X-5|=\begin{cases}2X-5 & \text{si } X\geq 5/2\\ 5-2X & \text{si } X<5/2\end{cases} \qquad |X-6|=\begin{cases}X-6 & \text{si } X\geq 6\\ 6-X & \text{si } X<6\end{cases}$$

En A, $|2X-5|=5-2X$, $|X-6|=6-X$ luego $|2X-5|-3|X-6|=5-2X-3(6-X)=-13+X<0 \Leftrightarrow X<13$, pero $X<5/2$ y así la solución en A es $(-\infty,5/2)$.

En B, $|2X-5|=2X-5$, $|X-6|=6-X$ luego $|2x-5|-3|X-6|=5X-18-5<0 \Leftrightarrow X<23/5$, pero $5/2\leq X<6$ y así la solución en B es $[5/2,23/5)$

En C , $|2X-5|=2X-5$, $|X-6|=X-6$, $|2X-5|-3|X-6|=-X+13<0 \Leftrightarrow 13<X$, pero $X>6$, luego solución en C es $(13,+\infty)$

Solución total $(-\infty,23/5)\cup(13,+\infty)$

15.10.11.6 Hallar el conjunto solución de la igualdad $|2X-6| = |4-5X|$.

En efecto :

Las posibilidades son ,$2X-6 = 4-5X$ y $2X-6 = -(4-5X)$ y resolviendo cada una de ellas obtenemos $X=10/7$,$X=-2/3$

Otra forma de hacerlo :Elevando al cuadrado tenemos $(2X-6)^2 = |2X-6|^2 = |4-5X|^2 = (4-5X)^2$; $4X^2-24X+36 = 16-40X+25X^2 \Longleftrightarrow 21X^2-16X-20 = 0$ y las raices son $X=10/7$,$X=-2/3$.

Otra forma de hacerlo .

$$|2X-6| = \begin{cases} 2X-6 & \text{si } X \geq 3 \\ 6-2X & \text{si } X < 3 \end{cases} \qquad |4-5X| = \begin{cases} 4-5X & \text{si } 4/5 \geq X \\ 5X-4 & \text{si } 4/5 < X \end{cases}$$

	$A=(-\infty, 4/5)$	$4/5$ $B=[4/5, 3)$	3 $C=[3, +\infty)$
$\|2X-6\| =$	-----------	-----------------	+++++++++++++
$\|4-5X\| =$	+++++++++	-----------------	-------------

En A , $|2X-6| = 6-2X$,$|4-5X| = 4-5X$ luego $6-2X=4-5X \Longleftrightarrow -2=3X \Longleftrightarrow X=-2/3$,pero $X < 4/5$ y así solución en A es $X= -2/3$.

En B $|2X-6|=6-2X$, $|4-5X|=5X-4$ luego $6-2X=5X-4 \Longleftrightarrow 10=7X \Longleftrightarrow X=10/7$,pero $4/5 \leq X < 3$ y así solución en B,$X=10/7$

En C,$|2X-6|= 2X-6$,$|4-5X|=5X-4$ luego $2X-6 = 5X-4 \Longleftrightarrow X=-2/3$ pero $X \geq 3$ luego solución vacia en C

Solución total $X=10/7$,$X=-2/3$.

15.10.11.7 Hallar el conjunto solucion de $|X-7|=3$

En efecto :

De acuerdo con la definicón de valor absoluto tenemos que $X-7=3$ o $X-7=-3$ y así el conjunto solución es $X=10, X=4$.

Otra forma de hacerlo :

$|X-7|^2=(X-7)^2=9 \Leftrightarrow X^2-14X+49=9 \Leftrightarrow X^2-14X+40=0$

$(X-10)(X-4)=0$ luego $X=10, X=4$

Otra forma :

	$A=(-\infty,7)$	7 $B=[7,+\infty)$
$X-7$ =	----------------	++++++++++++++++++++++++

En A, $|X-7|=7-X=3 \Leftrightarrow X=4$, luego $\{4\}\cap(-\infty,7)=\{4\}$, así $X=4$, es solución en A.

En B, $|X-7|=X-7=3 \Leftrightarrow X=10$, $\{10\}\cap(7,+\infty)=\{10\}$ así $X=10$ es solución en B .

solución total $X=10, X=4$.

15.10.11.8 Encontrar un número positivo M talque

$|X^3-2X^2+3X-4|<M$ para X en $[-3,3]$

En efecto :

$|X^3-2X^2+3X-4| \leq |X^3|+|-2X^2|+|3X|+|-4| = |X|^3+2|X|^2+3|X|+4 \leq$

$3^3+2x9+3x3+4=58=M$.

15.10.11.9 Hallar los X tales que $X^2-2|X|-3=0$

En efecto : Si $X>0$ $X^2-2|X|-3=X^2-2X-3=(X-3)(X+1)=0 \Leftrightarrow$

$X=3, X=-1$, y la solución es $X=3$ ya que $X>0$

Si $X<0$ $X^2-2|X|-3=X^2+2X-3=0=(X+3)(X-1)$.

y así $X=1$ no sirve .

Solucion total es $X=\pm 3$

15.10.11.10 Hallar el conjunto solución de la desigualdad $|X-2|-|X+6|\leq 3$ En efecto:

$A=(-\infty,-6)$	-6 $B=[-6,2)$	2 $C=[2,+\infty)$
$X-2=$ − − − − − −	− − − − − − − − − −	+ + + + + + + + + +
$X+6=$ − − − − − −	+ + + + + + + + + +	+ + + + + + + + + +

En A tenemos que $|X-2|=2-X$, $|X+6|=-(X+6)$ y asi

$|X-2|-|X+6| = 2-X+X+6 = 8\leq 3$;una contradición, en este caso no hay solución en A.

En B tenemos que $|X-2|=2-X$, $|X+6|=X+6$ y asi $|X-2|-|X+6| = 2-X-X-6 = -2X-4\leq 3 \Leftrightarrow -7/2\leq X$;pero $X\in[-6,2)$ luego la solución en B es $[-7/2,2)$

En C, $|X-2|-|X+6| = X-2-X-6 = -8\leq 3$, en este caso $[2,+\infty)$ es la solución en C. Solución total $[-7/2,+\infty)$

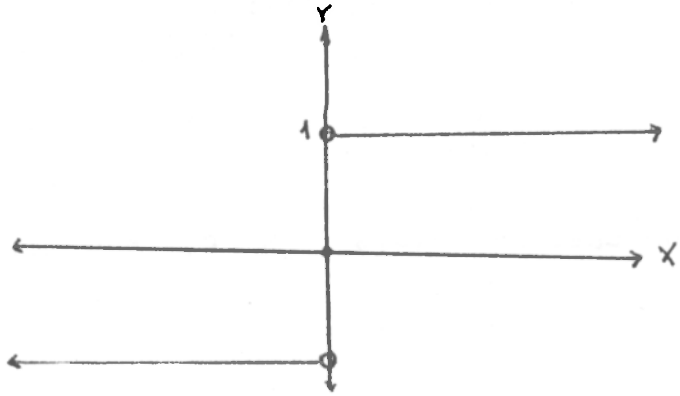
16. Función Signo de X

Está definida de la siguiente forma:

$$f(X)=\begin{cases} 1 & \text{si } X>0 \\ 0 & \text{si } X=0 \\ -1 & \text{si } X<0 \end{cases}$$

D_f los números reales y $R_f=\{0,1,-1\}$

Su gráfico se observa en la figura siguiente:



Cuando escribamos a^x , diremos que a es la base y x es el exponente .
Sea a un número real diferente de cero y n un número natural, definimos $a^1 = a$ y $a^{n+1} = a^n . a$.

16.1 TEOREMAS

16.1.1 $a^m . a^n = a^{m+n}$ $a \in R$ $m,n \in N$

16.1.2 $a^n . b^n = (a.b)^n$ $a,b \in R$ $n \in N$

16.1.3 $(a^m)^n = a^{m.n}$ $a \in R$ $m,n \in N$

16.1.4 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $a,b \in R$ $b \neq o$ $n \in N$

16.1.5 $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n}$

Demostraré 16.1.1 y 16.1.2 .Los demas se demuestran en forma análoga .La demostración de 16.1.1 la haremos por induccion sobre n y mantendremos m fija .
En efecto : Para n=1 , evidentemente $a^m . a = a^{m+1}$ .Supongamos que es cierta para n=k ,es decir , $a^m . a^k = a^{m+k}$ y demostremos que es cierta para n=k+1 ,es decir , $a^m . a^{k+1} = a^{m+k+1}$ .En efecto $a^m . a^{k+1} = a^m . a^k . a \overset{*}{=} a^{m+k} . a = a^{m+k+1}$. *por hipotesis de inducción

La demostración de 16.1.2 la haremos por inducción sobre n .
En efecto :Para n =1 $a^1 . b^1 = (a.b)^1$ .Supongamos que es cierta para n=k ,es decir, $a^k . b^k = (a.b)^k$ y demostremos que es cierta para n=k+1 .En efecto $(a.b)^{k+1} = (a.b)^k (a.b) \overset{*}{=} a^k . b^k . a.b = a^{k+1} . b^{k+1}$.* Por hipotesis de induccion .
la base a debe ser diferente de cero pues ,o^o no tiene sentido y por otro lado $o^n = o$ $n \in N$ $n > o$

Siendo a un número real difernte de cero y $n \in N$ definimos $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^o = 1$.

16.2 TEOREMAS Sea $a,b \in R$ ($a,b \neq o$,en caso de que $m,n \leq o$) $m,n \in Z$

16.2.1 $a^m.a^n = a^{m+n}$

16.2.2 $(a^m)^n = a^{mn}$

16.2.3 $a^n.b^n = (a.b)^n$

Demostremos la propiedada 16.2.1 .La demostración esta hecha si $n \in N$, entonces veamos que es cierta para $n \leqslant o$.
Si $n=o$,inmediata , pues $a^o b^o = 1 = (a.b)^o$. Para $n<o$ entonces sea $m=-n>o$ luego :

$$a^m.b^m = \frac{1}{a^{n}b^{n}} = \frac{1}{(ab)^{n}} = (ab)^{-n} = (ab)^m$$

Queremos ahora definir a^r siendo a real positivo y r un racional cualquiera .
Siendo a un número real positivo y $n \in N$, cada uno de los números reales X tales que $X^n = a$,se llama una raíz enésima de a . Notaremos $a^{1/n}$ y tambien por $\sqrt[n]{a}$ a aquella única raíz enésima de a que es positiva . Convendremos ademas en que cuando digamos la raíz enésima de a nos referimos a aquella que es positiva o sea $a^{1/n}$.

Siendo a real positivo ,$m,n \in N$ definimos

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Siendo a real positivo ,$m,n \in N$ definimos

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}$$

16.3 TEOREMAS .Sea a,b reales positivos ,r,s racionales

16.3.1 $a^r.a^s = a^{r+s}$

16.3.2 $(a^r)^s = a^{rs}$

16.3.3 $a^r.b^r = (a.b)^r$

Demostraremos la propiedad 16.3.1 Sea $r=m/n$, $s=p/q$, $m,n,p\ q\in Z$
$n,q \neq 0$. $a^r.a^s = a^{m/n}.a^{p/q} = \left(a^{1/nq}\right)^{mq} \cdot \left(a^{1/qn}\right)^{pn} = \left(a^{1/qn}\right)^{mq+pn} =$
$a^{(mq+pn)/qn} = a^{m/n\ +\ p/q} = a^{r+s}$

Ahora queremos ilustrar que es a^{α} $\alpha\in \mathbb{R}$ y para ello recordemos algunos conceptos previos.

Sea S un conjunto no vacío de números reales y supongamos que existe un número B talque $X \leq B$ para todo $X \in S$. Entonces se dice que S esta acotado superiormente por B . El número B se denomina una cota superior para S . Decimos una cota superior , debido a que todo número mayor que B, tambien es una cota superior .

Sea S un conjunto no vacío de números reales y supongamos que existe un número B talque $X \geq B$ para todo $X \in S$. Entonces se dice que S esta acotado inferiormente por B . El número B se denomina una cota inferior para S
Sea $S = \{X \in R/\ 0 < X < 1\}$ 1 es cota superior de S y 0 cota inferior .
$A = \{1/n\}_{n\in N}$. 1 es cota superior y 0 cota inferior .

Un número B se denomina extremo superior de un conjunto no vacío S si B tiene las dos propiedades siguientes :
B es cota superior de S y ningun número menor que B es cota superior para S .
El extremo superior de S lo notaremos por SupS

Un número B se denomina extremo inferior (InfS) de un conjunto no vacío S si B tiene las 2 propiedades siguientes :
B es una cota inferior para S y ningun número mayor que B es cota inferior para S

Axioma de Completez .Todo conjunto no vacío S de números reales acotado superiormente tiene SupS ,es decir existe $b \in R$ talque $b = SupS$.

Todo conjunto no vacío S de números reales acotado inferiormente tiene InfS .

Para entender que es a^{α} $\alpha \in R$, tomemos $\sqrt{2}$ y formemos

$A = \{a^q / q \in Q,\ q < \sqrt{2},\ a > 1\}$. Una de las cosas que podemos apreciar es que los elementos de A son de la forma $a^{1+m/n}$ para algunos $m, n \in N$ con $m < n$.

$A \neq \phi$, pues $a^1 \in A$ .Ademas A esta acotado superiormente , pues $a^{m/n} < a$ para todo $m < n$;multiplicando por a tenemos $a \cdot a^{m/n} = a^{1+m/n} = a^q < a^2$ y así a^2 es una cota superior de los elementos de la forma $a^{1+m/n}$ y como los elementos de A son de esta forma,concluimos que a^2 es una cota superior de A y por el axioma de completez existe $C \in R$ talque

$C = SupA = a^{\sqrt{2}}$

En caso de que $0 < a < 1$ trabajaremos con el InfB , donde

$B = \{a^q / q \in Q\ ,\ q > \sqrt{2}\ , 0 < a < 1\}$.

Para el caso general se puede hacer una demostración similar

17. Función Exponencial de base a, $a>0$, $a\neq 1$.

Es la relación definida por la expresión $f(X)=a^{X}$.

Ejemplo 17.1

$f(X)= 2^{X}$. D_f es el conjunto de los números reales y $R_f=(0,+\infty)$

Ejemplo 17.2

$f(X)= 5^{x}$ D_f,los números reales y $R_f=(0,+\infty)$

Ejemplo 17.3

$f(X)= (1/2)^{X}$ D_f,los números reales y $R_f=(0,+\infty)$

Ejemplo 17.4

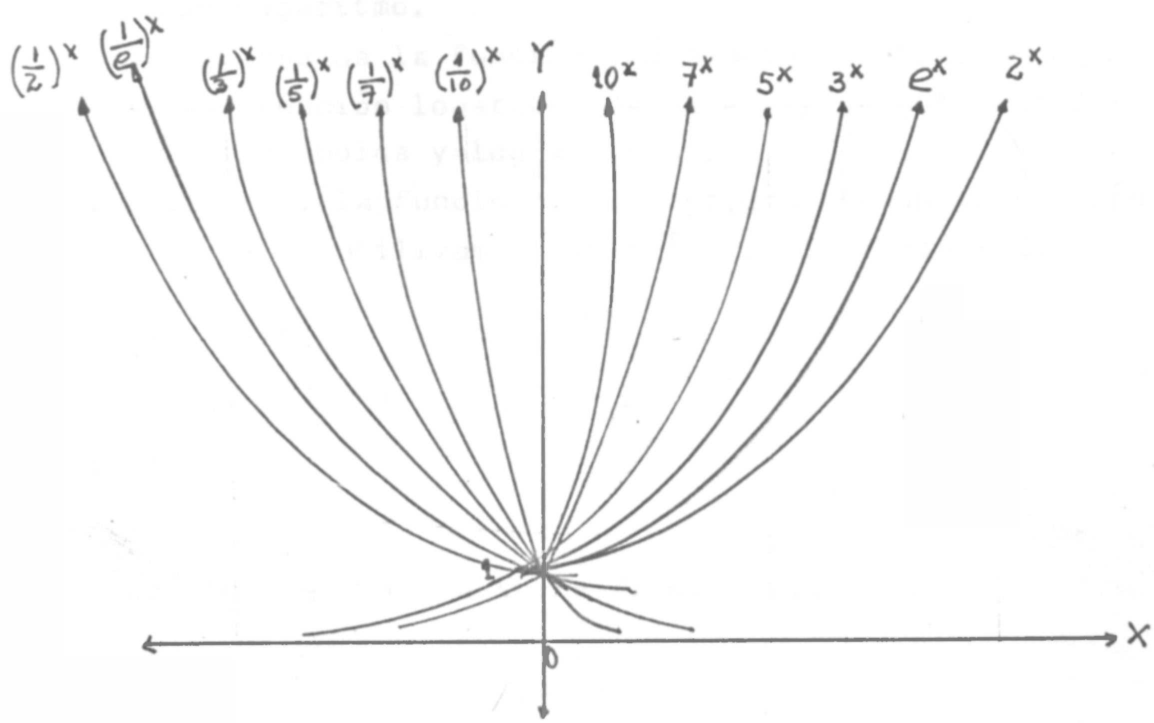
$f(X)= (1/5)^{X}$ .D_f,los números reales y $R_f=(0,+\infty)$

Ejemplo 17.5 S

Si a=e $f(X)= e^{x}$,se llama función exponencial de base e.

e=2.7...

Sus gráficos se observan en la figuras siguientes :



17.6 Recordemos algunas leyes de los exponentes .

17.6.1 $a^x . a^y = a^{x+y}$, $a > o$, x, y números reales cualquiera

17.6.2 $a^x > o$

17.6.3 $(a.b)^x = a^x . b^x$, $a, b > o$, x, y números reales

17.6.4 $(a^x)^y = a^{xy}$

17.6.5 $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$, $a, b > o$, x, y números reales

17.6.6 $\frac{a^x}{b^y} = a^{x-y}$.

17.6.7 $a > 1$; $a^x > 1 = a^o$ para cada $x > o$ y $a^x < 1$ para $x < o$

17.6.8 $o < a < 1$, $a^x > 1 = a^o$, para cada $x < o$ y $a^x < 1$ para cada $x > o$

17.6.9 $f(x) = a^x$ es creciente si $a > 1$ y decreciente si $o < a < 1$

18. Función Logaritmo.

A la inversa de la función exponencial de base a , $a > o$ $a \neq 1$ se llama función logaritmo de base a y se nota por $f(X) = Log_a x$, en simbolos $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$.

Para graficar la función logaritmo, graficamos la función exponencial y utilizamos simetría con la recta $Y = X$

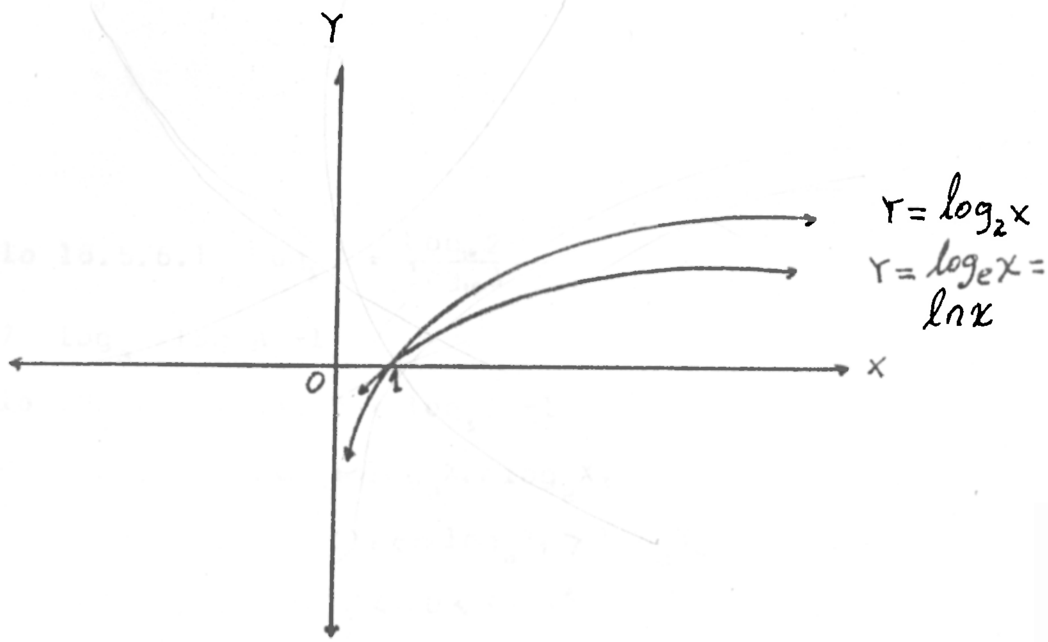
Ejemplo 18.1

$y = \log_2 x \Leftrightarrow X = 2^y$

Ejemplo 18.2

$y = \log_e x \Leftrightarrow X = e^y$

Su gráfico se observa en la figura siguiente.



Ejemplo 18.3 $\quad \log_2 4 = 2 \Leftrightarrow 2^2 = 4$

Ejemplo 18.4 $\quad \log_2 1/2 = -1 \Leftrightarrow 2^{-1} = 1/2$

18.5 Algunas Propiedades de la Función Logaritmo.

18.5.1 $\quad \log_a a^x = x$ y $a^{\log_a x} = x$

Ejemplo 18.5.1.1 $\quad \log_3 3^4 = 4 \;,\; 4^{\log_4 3} = 3$

18.5.2 $\quad \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N \;,\; M, N > 0$

Ejemplo 18.5.2.1 $\quad \log_3 6 = \log_3 2.3 = \log_3 2 + \log_3 3 = \log_3 2 + 1$

18.5.3 $\quad \log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \mathrm{Log}_a M - \log_a N$

Ejemplo 18.5.3.1 $\quad \mathrm{Log}_4 \left(\frac{7}{5}\right) = \log_4 7 - \log_4 5$

18.5.4 $\quad \log_a N^{\alpha} = \alpha \log_a N$

Ejemplo 18.5.4.1 $\quad \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3$

18.5.5 $\quad \log_{a^b} N^c = \frac{c}{b} \log_a N$

Ejemplo 18.5.5.1 $\quad \log_{3^2} 27 = \log_{3^2} 3^3 = 3 \log_{3^2} 3 = 3 \log_{3^2} 3 = \frac{3}{2}.1$

18.5.6 $\quad \log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$

Ejemplo 18.5.6.1 $\mathrm{Log}_3 2 = \frac{\mathrm{Log}_{10} 2}{\log_{10} 3}$

18.5.7 $\log_a b \times \log_b a = 1$

Ejemplo 18.5.7.1 $\log_2 3 \times \log_3 2 = 1$

18.5.8 $a > 1$, $0 < X_1 < X_2 \Leftrightarrow \log_a X_1 < \log_a X_2$

18.5.9 $0 < a < 1$, $0 < X_1 < X_2 \Leftrightarrow \log_a X_1 > \log_a X_2$

18.5.10 $a > 1$, $\log_a X < c \Leftrightarrow 0 < X < a^c$

Ejemplo 18.5.10.1 $\log_2 X < 4 \Leftrightarrow X < 2^4$

18.5.11 $a > 1$, $\log_a X > c \Leftrightarrow X > a^c$

Ejemplo 18.5.11.1 $\log_3 X > 2 \Leftrightarrow X > 3^2$

18.5.12 $0 < a < 1$, $\log_a X < c \Leftrightarrow X > a^c$

Ejemplo 18.5.12.1 $\log_{1/2} X < 4 \Leftrightarrow X > (1/2)^4$

18.5.13 $0 < a < 1$, $\log_a X > c \Leftrightarrow 0 < X < a^c$

Ejeplo 18.5.13.1 $\log_{1/3} X > 4 \Leftrightarrow X < (1/3)^4$

18.5.14 Otros Ejercicios

Hallar X tal que $\log_3 X > 4$. En efecto $\log_3 X > 4 \Rightarrow X > 3^4$

Demostrar que $\log_{3\sqrt{3}} 27 = 2$ En efecto $\log_{3\sqrt{3}} 27 = \log_{3^{3/2}} 3^3 =$

$\frac{3}{3/2} \log_3 3 = 2 \log_3 3 = 2$

Demuestre que $\log_4 5 = \log_{\frac{1}{16}} 1/25$. En efecto $\log_{\frac{1}{16}} 1/25 =$

$\log_{4^{-2}} 5^{-2} = \log_4 5$

18.5.15 Demostración de algunas propidades de la función logaritmo.

18.5.15.1 Demostrar que $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$. En efecto: Supongamos que $\log_a M=v$ entonces $M=a^v$ y que $\log_a N=u$ entonces $N=a^u$ y asi $\log_a(MN)=\log_a(a^v a^u)= \log_a a^{v+u} =v+u =\log_a M+ \log_a N$.

18.5.15.2 Demostrar que $\log_a N^\alpha=\alpha\log_a N$. En efecto: $a^{\alpha\log_a N}= a^{\log_a N^\alpha} =N^\alpha$; ahora tomemos logaritmo en base a, a la igualdad $a^{\alpha\log_a N}=N^\alpha$, es decir $\log_a a^{\alpha\log_a N} =\log_a N^\alpha$ y asi obtenemos $\alpha\log_a N =\log_a N^\alpha$.

18.5.15.3 Demostrar que $\log_{a^c} N^\alpha=\frac{\alpha}{c}\log_a N$. En efecto: Escribamos $(a^c)^{\frac{\alpha}{c}\log_a N} =a^{\alpha\log_a N} =a^{\log_a N^\alpha} =N^\alpha$; tomemos logaritmo en base a^c a la igualdad $(a^c)^{\frac{\alpha}{c}\log_a N} =N^\alpha$ y asi obtenemos $\log_{a^c} N^\alpha =\frac{\alpha}{c}\log_a N$.

18.5.15.4 Demostrar que $\log_a N =\log_b N.\log_a b$. En efecto: $a^{\log_a b.\log_b N} =\left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b N} =b^{\log_b N} =N$ y tomando logaritmo en base a, a la igualdad $a^{\log_a b.\log_b N} =N$ se tiene lo deseado.

18.5.15.5 $a>1$; $0< X_1< X_2 \Leftrightarrow \log_a X_1 < \log_a X_2$. En efecto: Si se cumple la desigualdad $0<X_1<X_2$ entonces existen los números $\log_a X_1, \log_a X_2$. Utilizando una propiedad logarítmica escribimos $X_1<X_2$ en la forma $a^{\log_a X_1}< a^{\log_a X_2}$ y de esto concluimos que $\log_a X_1 <\log_a X_2$.

Al contrario, si $\log_a X_1< \log_a X_2$ entonces $X_1, X_2>0$. Elevando el número a, a potencias con exponentes $\log_a X_1$, $\log_a X_2$ es decir $a^{\log_a X_1}< a^{\log_a X_2}$ obtenemos que $X_1<X_2$ $(a>1)$

19. Funciones Hiperbólicas

Las Funciones Hiperbólicas se definen así:

19.1 Seno Hiperbólico de x $= \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

19.2 Coseno Hiperbólico de x $= \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

19.3 Tangente Hiperbólica de x $= \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

19.4 Cotangente Hiperbólica de x $= \coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$

19.5 Secante Hiperbólica de x $= \operatorname{sech} x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{\cosh x}$

19.6 Cosecante Hiperbólica de x $= \dfrac{2}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

De las definiciones anteriores se pueden obtener las siguientes propiedades :

19.7 $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

En efecto: $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \dfrac{(e^x - e^{-x})^2}{4} =$

$$\frac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^0 - e^{-2x}}{4} = 1$$

19.8 $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.

En efecto : Dividiendo pOr $\cosh^2 x$ a $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$, obtenemos lo deseado .

19.9 $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$.

En efecto : Dividiendo por $\operatorname{senh}^2 x$ a $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$, obtenemos lo deseado .

19.10 $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$; $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$.

19.11 $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$

En efecto : $\operatorname{senh}(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\operatorname{senh} x$.

19.12 $\cosh(-x) = \cosh x$

19.13 $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x.\cosh y \pm \operatorname{senh} y.\cosh x$.

En efecto :

$$\operatorname{senh} x.\cosh y + \operatorname{senh} y.\cosh x = \frac{(e^x - e^{-x})}{2}\frac{(e^y + e^{-y})}{2} + \frac{(e^y - e^{-y})}{2}\frac{(e^x + e^{-x})}{2}$$

$$\frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{senh}(x+y)$$

19.14 $\cosh(x \pm y) = \cosh x.\cosh y \pm \operatorname{senh} x.\operatorname{senh} y$

19.15 $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x.\tanh y}$

19.16 $\operatorname{senh} 2x = \operatorname{senh}(x+x) = 2\operatorname{senh} x.\cosh x$.

19.17 $\cosh 2x = \cosh(x+x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

19.18 $\operatorname{senh}^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}$

19.19 $\cosh^2 x = \dfrac{\cosh 2x + 1}{2}$

19.20 $\operatorname{senh}x + \operatorname{senh}y = 2\operatorname{senh}\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$

En efecto : $\operatorname{senh}(A+B) + \operatorname{senh}(A-B) = 2\operatorname{senh}A.\cosh B$; haciendo $x = A+B$ y $y = A-B$ y resolviendo este sistema tenemos que $(x+y)/2 = A$ y $(x-y)/2 = B$ y así obtenemos lo pedido.

19.21 $\operatorname{senh}x - \operatorname{senh}y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\operatorname{senh}\frac{x-y}{2}$

19.22 $\cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$

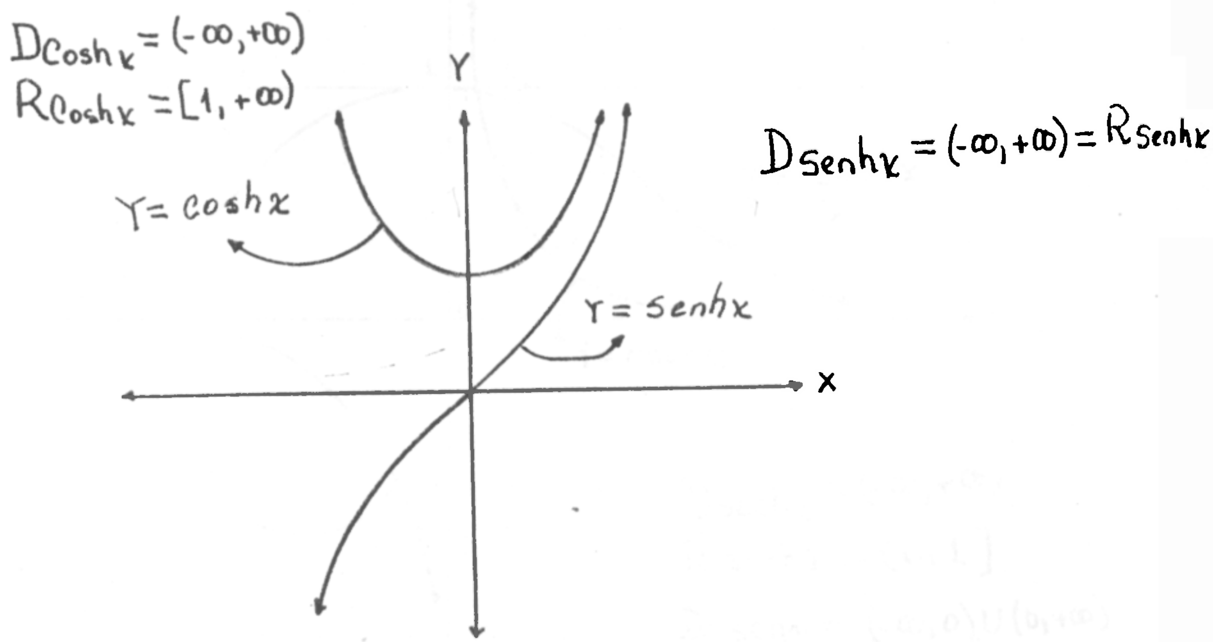
19.23 $\cosh x - \cosh y = 2\operatorname{senh}\frac{x+y}{2}\operatorname{senh}\frac{x-y}{2}$

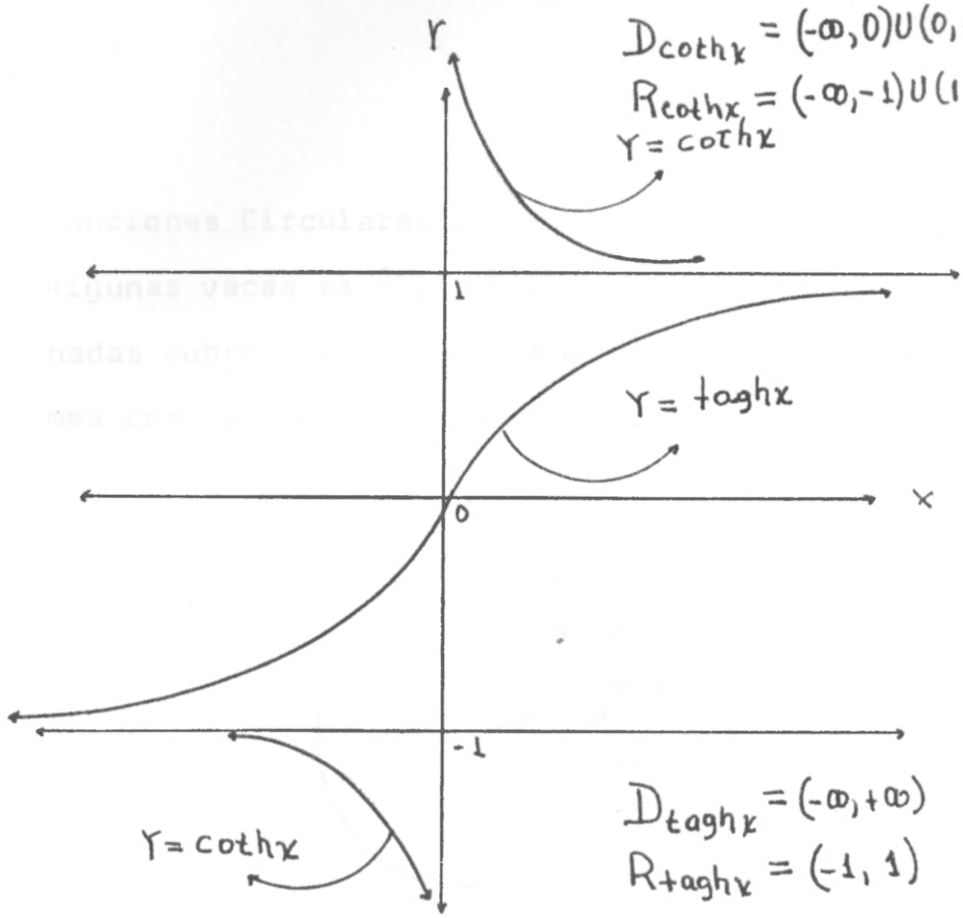
19.24 $\operatorname{senh}x.\operatorname{senh}y = \frac{1}{2}\{\cosh(x+y) - \cosh(x-y)\}$

19.25 $\cosh x.\cosh y = \frac{1}{2}\{\cosh(x+y) + \cosh(x-y)\}$

19.26 $\operatorname{senh}x.\cosh y = \frac{1}{2}\{\operatorname{senh}(x+y) + \operatorname{senh}(x-y)\}$

las representaciones gráficas de las funciones hiperbólicas se observan en las figuras siguientes :



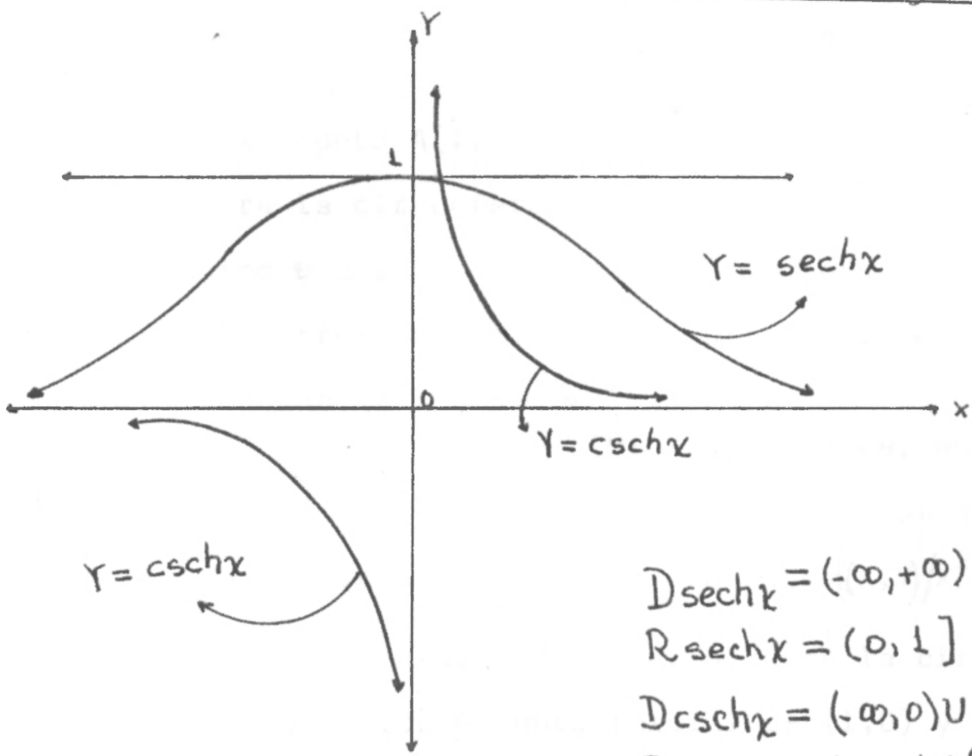


$D_{\coth x} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$R_{\coth x} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$D_{tagh\,x} = (-\infty, +\infty)$

$R_{tagh\,x} = (-1, 1)$



$D_{sech\,x} = (-\infty, +\infty)$

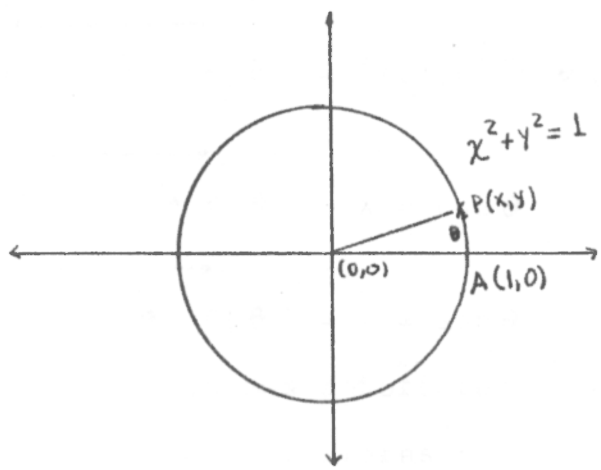
$R_{sech\,x} = (0, 1]$

$D_{csch\,x} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$R_{csch\,x} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

20. Funciones Circulares .

Algunas veces es útil establecer un sistema de cordenadas sobre una circunferencia .En efecto consideremos con centro en (o,o) y radio 1.



Partiendo del punto A(1,0) determinamos arcos de longitud θ sobre la circunferencia unitaria . A cada longitud de arco θ corresponderá un único punto P(X,Y) asociado al extremo del arco ,es decir ,hemos definido una función $f : R \longrightarrow R^2$

$$\theta \longrightarrow f(\theta) = (X,Y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

cuyo dominio es el conjunto de los números reales y recorrido el conjunto de pares ordenados $\{(X,Y)/X^2+Y^2=1\}$

La variable θ es la medida de un arco sobre la circunferencia unitaria ,cuyo punto inicial es (1,0) y cuyo extremo es (X,Y). se considera positivo, si θ se desplaza en sentido contrario a las manecillas del reloj y θ negativo, en sentido de las manecillas del reloj.

$f : R \longrightarrow R^2$ significa

$\theta \longrightarrow f(\theta) = (X,Y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$f_1 : R \longrightarrow R$

$\theta \longrightarrow f(\theta) = X = \cos\theta$

$f_2 : R \longrightarrow R$

$\theta \longrightarrow f(\theta) = Y = \operatorname{sen}\theta$

A partir de las dos anteriores podemos definir las demás funciones circulares :

$\tan : R \longrightarrow R$

$$\theta \longrightarrow \operatorname{tang}\theta = \frac{Y}{X} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

con dominio $\{\theta \in R \mid \cos\theta \neq 0\}$ y recorrido los números reales

$\cot : R \longrightarrow R$

$$\theta \longrightarrow \cot\theta = \frac{X}{Y} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

con dominio $\{\theta \in R \mid \operatorname{sen}\theta \neq 0\}$ y recorrido los números reales

$\sec : R \longrightarrow R$

$$\theta \longrightarrow \sec\theta = \frac{1}{X} = \frac{1}{\cos\theta}$$

con dominio $\{\theta \in R \mid \cos\theta \neq 0\}$ y recorrido $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

$$csc : R \longrightarrow R$$
$$\theta \longrightarrow csc\,\theta = \frac{1}{Y} = \frac{1}{sen\,\theta}$$

cuyo dominio es $\{\theta \in R \mid Sen\,\theta \neq 0\}$ y recorrido $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

No existen métodos algebráicos elementales para determinar las cordenadas de $f(\theta)$; para θ real cualquiera. Sin embargo utilizando algunos conocimientos por ejemplo, geométricos, podemos determinar algunos. En efecto:

20.1 $f(o)=(1,o)=(\cos o, \operatorname{sen} o)$ y así $\cos o=1$, $\operatorname{sen} o=o$

20.2 $f(\frac{\pi}{2})=(o,1)=(\cos\frac{\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{2})$ y así $\cos\frac{\pi}{2}=o$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1$

20.3 $f(\pi)=(-1,o)=(\cos\pi, \operatorname{sen}\pi)$ y así $\cos\pi=-1$, $\operatorname{sen}\pi=o$

20.4 $f(\frac{3\pi}{2})=(o,-1)=(\cos\frac{3\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2})$

20.5 $f(2\pi)=(1,o)=(\cos 2\pi, \operatorname{sen} 2\pi)$

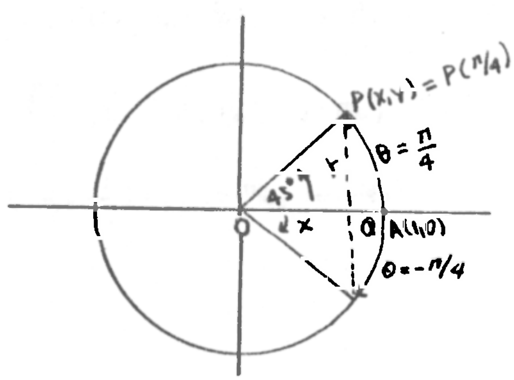
20.6 $f(-\pi)=(-1,o)=(\cos(-\pi), \operatorname{sen}(-\pi))$

20.7 $f(-\frac{\pi}{2})=(o,-1)=(\cos(-\frac{\pi}{2}), \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2}))$

20.8 $f(-\frac{3\pi}{2})=(o,1)=(\cos-\frac{3\pi}{2}, \operatorname{sen}-\frac{3\pi}{2})$

20.9 $f(-2\pi)=(1,o)=(\cos-2\pi, \operatorname{sen}-2\pi)$

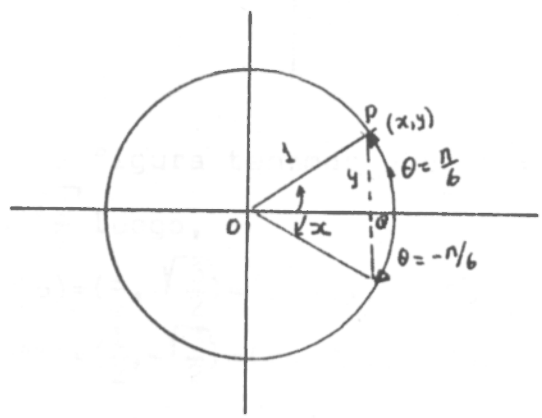
20.10 para calcular $f(\pi/4)$ consideramos la figura siguiente:



El triangulo OPQ es isósceles, $X=Y$, como $f(\theta)$ es un elemento de la circunferencia unitaria tenemos: $X^2+Y^2=X^2+X^2=2X^2=1$, luego $X^2=1/2$ y así $X=\pm\sqrt{\frac{2}{2}}$ y como muestra la figura $X=\frac{\sqrt{2}}{2}$ luego, $f(\pi/4)=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=$ $(\cos \pi/4, \text{sen}\, \pi/4)$.

$f(-\pi/4)=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=(\cos -\pi/4, \text{sen} -\pi/4)$

20.11 Para calcular $f(\pi/6)$ consideramos la figura siguiente:

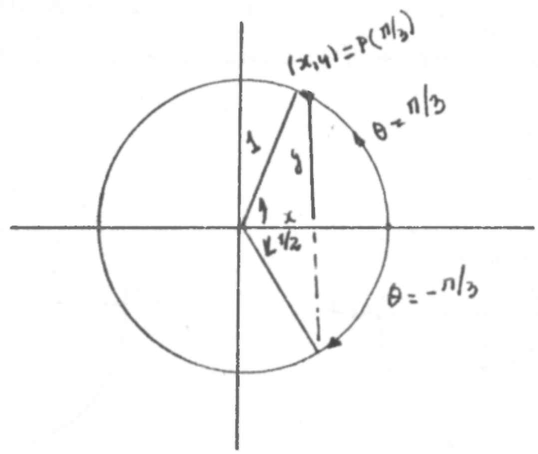


Para el triangulo OPQ sabemos por geometría que el cateto menor es la mitad de la hipotenusa, luego el cateto menor es igual $1/2$ y por el teorema de pitagoras tenemos que: $X^2+Y^2=X^2+(1/2)^2=1$, luego $X^2=\frac{3}{4}$ y así $X=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ y como muestra la figura $X=\frac{\sqrt{3}}{2}$ luego,

$f(\pi/6)=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})=(\cos \pi/6, \text{sen}\, \pi/6)$

$f(-\pi/6)=(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})=(\cos -\pi/6, \text{sen} -\pi/6)$

20.12 Para calcular $f(\pi/3)$ consideramos la figura:



De la figura tenemos que, $Y^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ es decir,
$Y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ luego,

$f(\pi/3)=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})=(\cos\pi/3,\operatorname{sen}\pi/3)$

$f(-\pi/3)=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})=(\cos-\pi/3,\operatorname{sen}-\pi/3)$

20.13 Algunas Propiedades de la Funciones Circulares

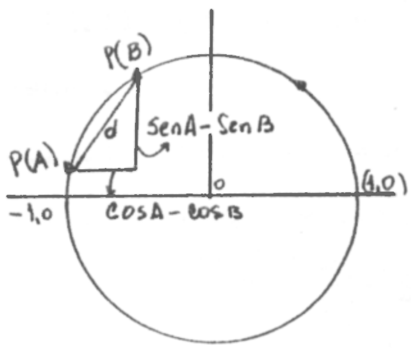
20.13.1 $\operatorname{Sen}^2A+\operatorname{Cos}^2A=1$ en efecto:

Sabemos que para cualquier punto $f(A)$ sobre la circumferencia unitaria tenemos que $X^2+Y^2=1$ y así remplazando $X=\cos A, Y=\operatorname{sen}A$ tenemos que, $\operatorname{Sen}^2A+\operatorname{Cos}^2A=1$.

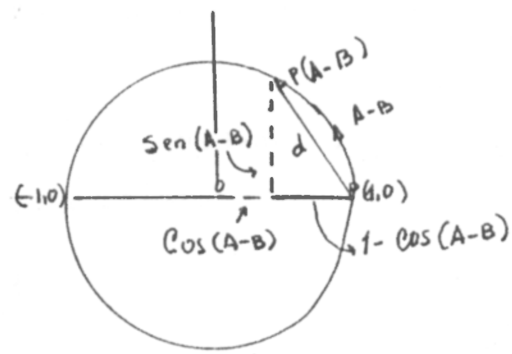
20.13.2 $1+\operatorname{Tag}^2A=\operatorname{Sec}^2A$. Dividiendo por Cos^2A a $\operatorname{Sen}^2A+\operatorname{Cos}^2A=1$ obtenemos lo deseado.

20.13.3 $1 + \mathrm{Cot}^2 A = \mathrm{Csc}^2 A$ .En efecto:Dividimos por $\mathrm{Sen}^2 A$ a $\mathrm{Sen}^2 A + \mathrm{Cos}^2 A = 1$.

20.13.4 $\mathrm{Cos}(A-B) = \mathrm{Cos}A.\mathrm{Cos}B + \mathrm{Sen}A.\mathrm{Sen}B$



a



b

La medida del arco entre P(B) y P(A) es A-B.
Observemos que la distancia del punto P(A) al punto P(B) es igual a la distancia de P(1,0) al punto P(A-B)
Para la figura a , $d^2=(\mathrm{Cos}A-\mathrm{Cos}B)^2+(\mathrm{Sen}A-\mathrm{Sen}B)^2$.
Para la figura b , $d^2=(\mathrm{Cos}(A-B)-1)^2+(\mathrm{Sen}(A-B)-0)^2$
igualando estas expresiones tenemos que:

$\mathrm{Cos}(A-B) = \mathrm{Cos}A.\mathrm{Cos}B + \mathrm{Sen}A.\mathrm{Sen}B$

20.13.5 $\mathrm{Cos}(-B) = \mathrm{Cos}B$ .en efecto: $\mathrm{Cos}(-B) = \mathrm{Cos}(0-B) =$

$\mathrm{Cos}\,0.\mathrm{Cos}B + \mathrm{Sen}0.\mathrm{Sen}B = \mathrm{Cos}B$

20.13.6 $\mathrm{Cos}(\pi/2-A) = \mathrm{Sen}A \quad A\in R$ .En efecto :$\mathrm{Cos}(\pi/2-A) =$

$\mathrm{Cos}\,\pi/2.\mathrm{Cos}A + \mathrm{Sen}\,\pi/2.\mathrm{Sen}A = \mathrm{Sen}A$.

20.13.7 $\mathrm{Sen}(\pi/2-A) = \mathrm{Cos}A \quad A\in R$ .En efecto:$\mathrm{Cos}(\pi/2-\pi/2+A) =$

$\mathrm{Cos}(\pi/2-(\pi/2-A)) = \mathrm{Sen}(\pi/2-A)$.

20.13.8 $\mathrm{Sen}(A+B) = \mathrm{Sen}A.\mathrm{Cos}B + \mathrm{Sen}B.\mathrm{Cos}A$ .En efecto :

$\mathrm{Sen}(A+B) = \mathrm{Cos}(\pi/2-(A+B)) = \mathrm{Cos}((\pi/2-A)-B) = \mathrm{Cos}(\pi/2-A).\mathrm{Cos}B +$

$Sen(\pi/2-A).SenB + SenA.CosB + CosA.SenB$

20.13.9 $Sen2A = Sen(A+A) = 2SenA.CosA$

20.13.10 $SenA = Sen\frac{2A}{2} = 2Sen\frac{A}{2}.Cos\frac{A}{2}$

20.13.11 $Sen(-A) = Sen(0-A) = Sen0.CosA - Cos0.SenA = -SenA$.

20.13.14 $Cos(A+B) = Cos(A-(-B)) = CosA.CosB - SenA.SenB$

20.1315 $Cos2A = Cos(A+A) = Cos^2A - Sen^2A$

20.13.16 $CosA = Cos^2\frac{A}{2} - Sen^2\frac{A}{2}$

20.13.17 $Cos^2A = \frac{1 + Cos2A}{2}$

20.13.18 $Sen^2A = \frac{1 - Cos2A}{2}$

20.13.19 $Cos^2 2A = \frac{1 + Cos4A}{2}$

20.13.20 $Tag(A+B) = \frac{Sen(A+B)}{Cos(A+B)} = \frac{Tag(A) + Tag(B)}{1 - TagA.TagB}$

20.13.21 $Tag(A-B) = \frac{Sen(A-B)}{Cos(A-B)} = \frac{TagA - TagB}{1 + TagA.TagB}$

20.13.22 $2SenA.CosB = Sen(A+B)+Sen(A-B)$ .En efecto $Sen(A+B)+Sen(A-B) = SenA.CosB+SenB.CosA + SenA.CosB - SenB.CosA = 2SenA.CosB$.

20.13.23 $2CosASenB = Sen(A+B)-Sen(A-B)$.

20.13.24 $2CosA.CosB = Cos(A+B)+Cos(A-B)$

20.13.25 $2SenA.SenB = Cos(A-B)-Cos(A+B)$

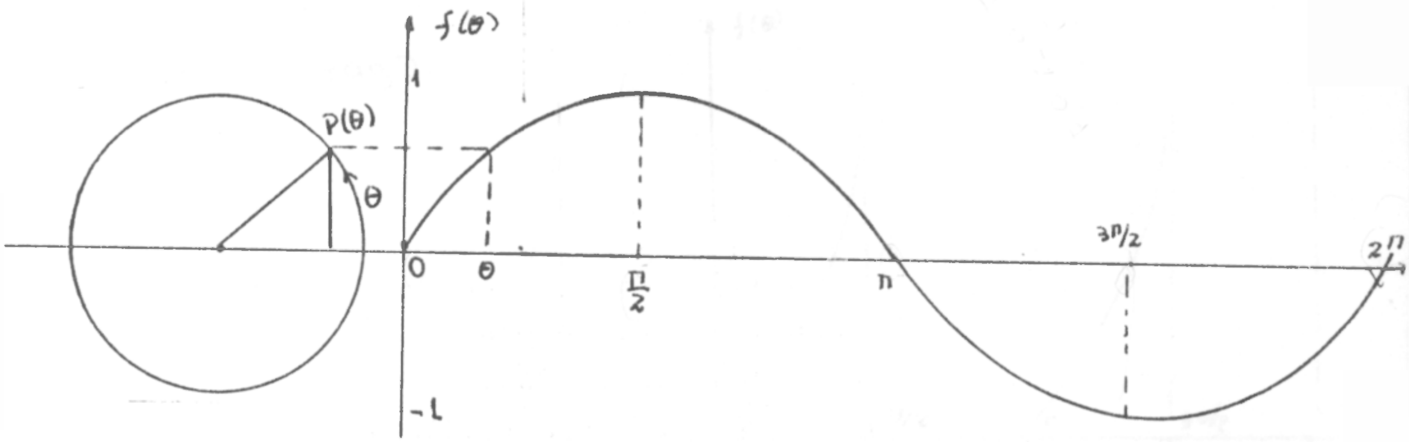
20.13.26 $SenA+SenB = 2Sen\left(\frac{A+B}{2}\right). Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

En efecto : $Sen(X+Y)+Sen(X-Y) = 2SenX.CosY$,haciendo $A=X+Y$, $B=X-Y$ **obtenemos** que $X=(A+B)/2$,$Y=(A-B)/2$ y reemplazando obtenemos lo deseado.

20.14 Gráficas de las Funciones Circulares

El comportamiento de las Funciones Circulares puede estudiarse convenientemente mediante una gráfica adecuada, llevando θ en el eje de abscisas y $f(\theta)$ en el de ordenada. Esta gráfica puede obtenerse directamente de la circunferencia unitaria.

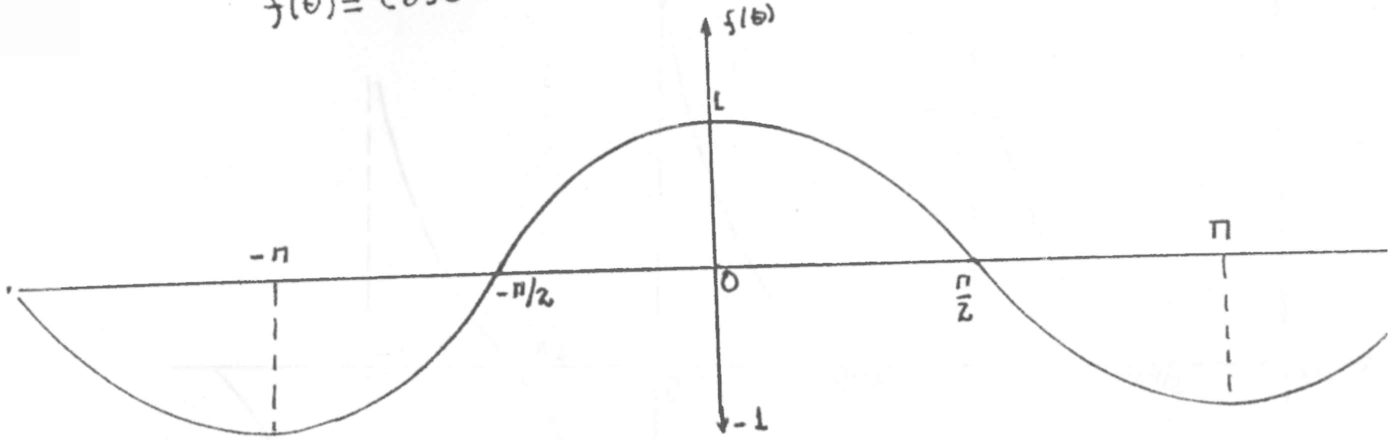
Consideremos la Función $f(\theta)$ = Sen θ. Marquemos trozos de longitud $\frac{\pi}{2}$ a lo largo del eje θ y construyamos una circunferencia unitaria con centro en este eje. Para obtener la gráfica de $f(\theta)$ = Sen θ, trasladamos paralelamente la ordenada de $P(\theta)$ hasta el punto de abscisa θ y unimos estos puntos para obtener una curva continua indefinida a izquierda y derecha, como se muestra en la figura siguiente:



$f(\theta) = \text{sen}\,\theta$; $T = 2\pi$; $-1 \leq \text{sen}\,\theta \leq 1$

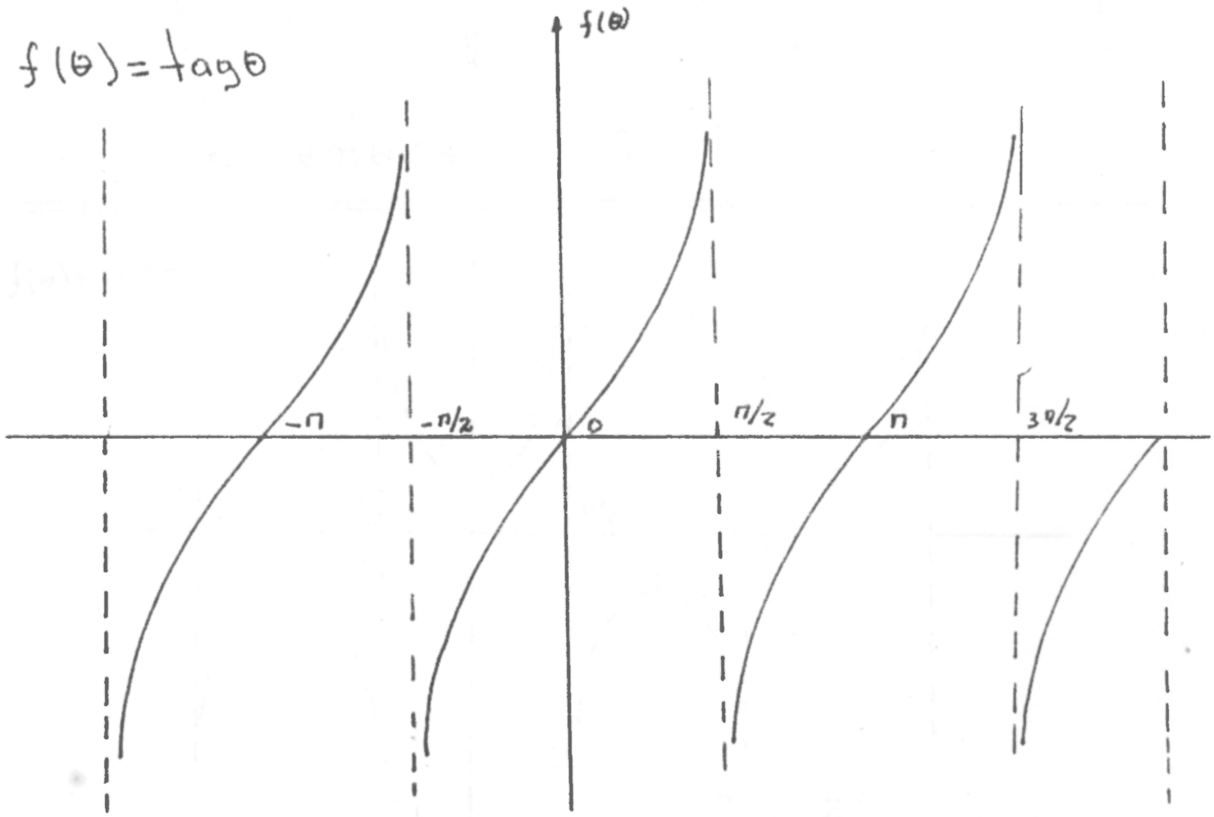
Los gráficos de las demas Funciones se hacen en forma análoga y se observan en las siguientes figuras:

$f(\theta) = \cos\theta$



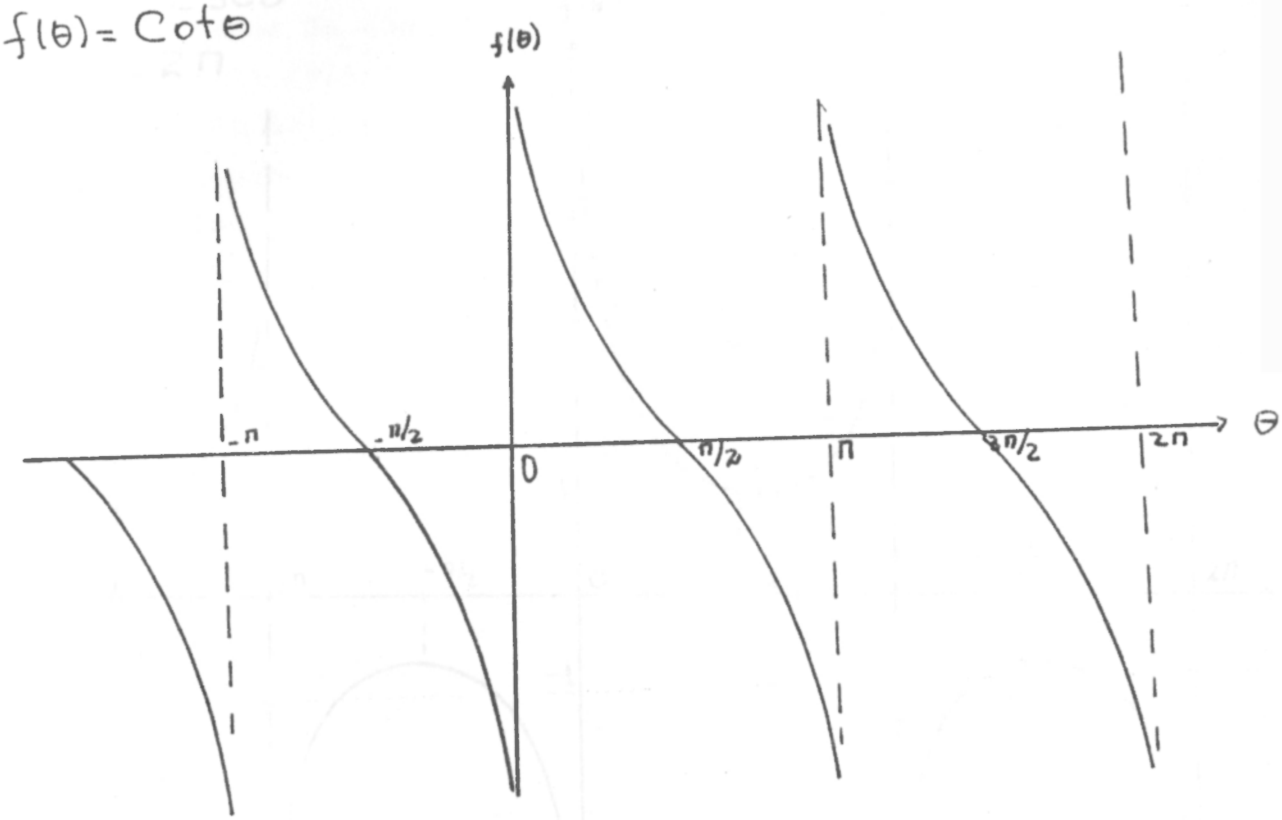
$-1 \leq \cos\theta \leq 1 \quad ; \quad T = 2\pi$

$f(\theta) = \tan\theta$



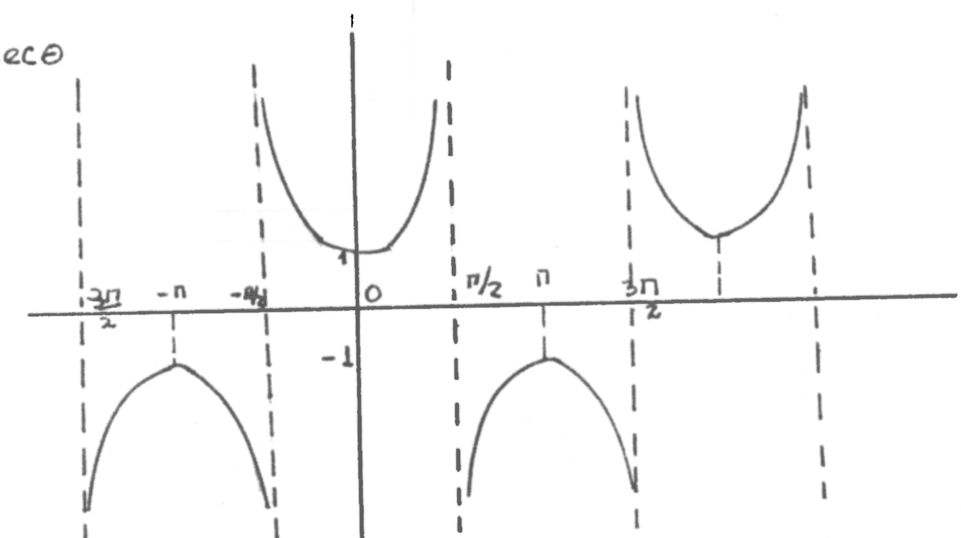
$-\infty < \tan\theta < +\infty, \quad T = \pi$

$f(\theta) = \cot\theta$



$-\infty < \cot\theta < +\infty \qquad T = \pi$

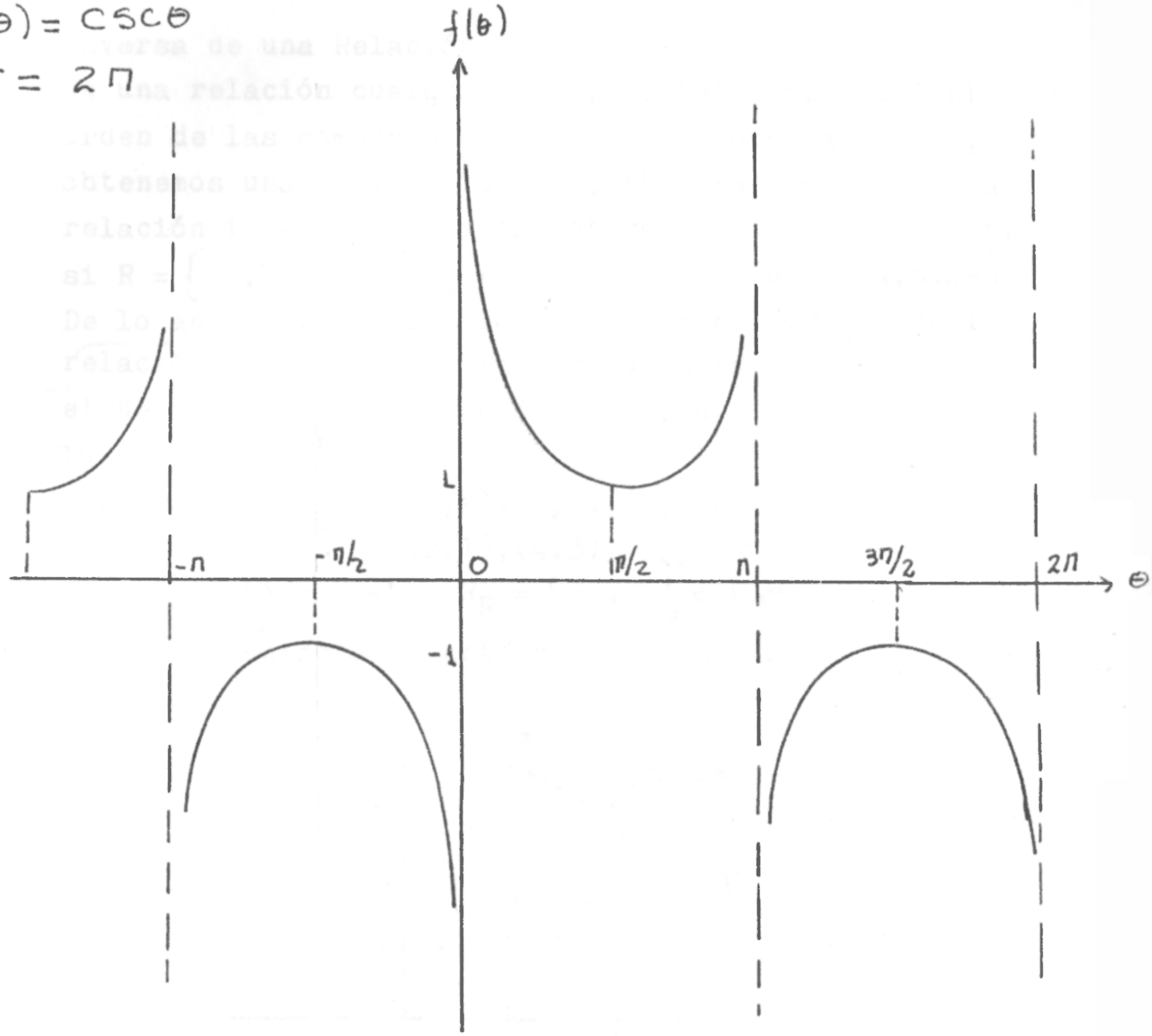
$f(\theta) = \sec\theta$



$T = 2\pi$

$f(\theta) = \csc\theta$

$T = 2\pi$



21. Inversa de una Relación

En una relación cualquiera R , si intercambiamos el orden de las componentes en cada par ordenado de R, obtenemos una nueva relación ; ésta la llamaremos la relación inversa de R y la notaremos por R^{-1}; es decir, si $R = \{(a,b)/(a,b)\in R\}$ entonces $R^{-1} = \{(b,a)/(a,b)\in R\}$

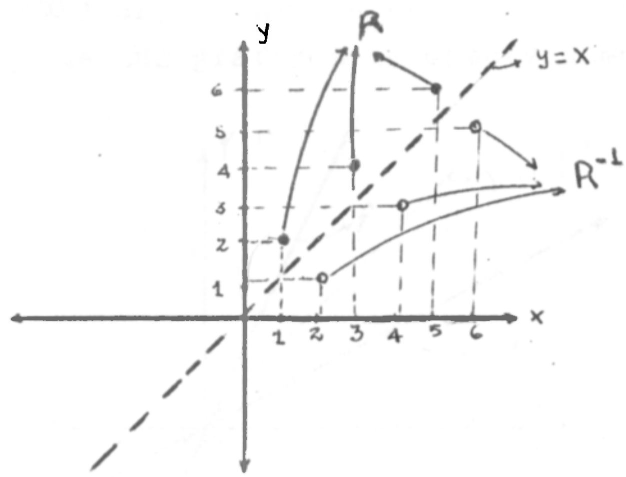
De lo anterior podemos concluir que el Dominio de la relación R es igual al Recorrido de la relación R^{-1} y el Recorrido de la relación R es igual al Dominio de la relación R^{-1}

Ejemplo 21.1 $R = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$

$R^{-1} = (2,1),(4,3),(6,5)$

$D_R = \{1,3,5\} = R_{R^{-1}}$: $R_R = \{2,4,6\} = D_{R^{-1}}$

Sus representaciones gráficas se observan en la figura siguiente :

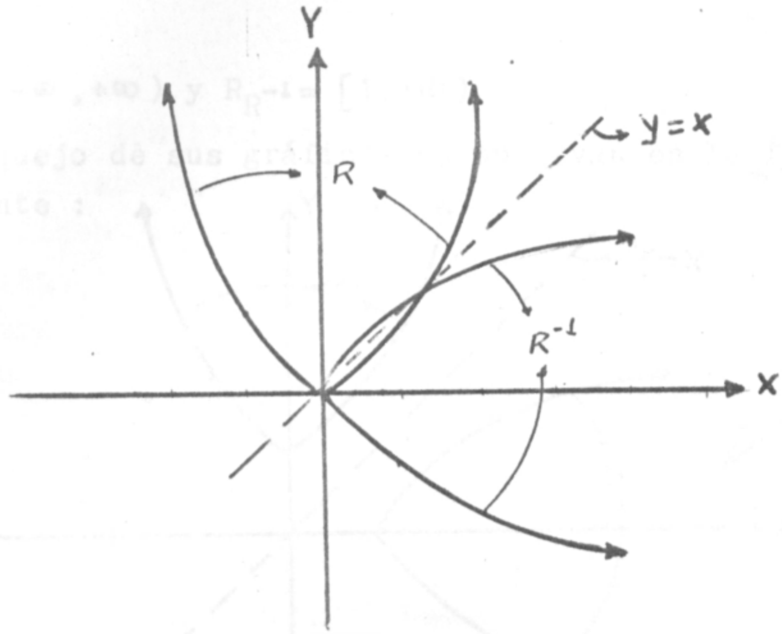


Ejemplo 21.1.2 $R = \{(X,Y)/Y = X^2\} = \{(X,X^2)/X \in \mathbb{R}\}$

$R^{-1} = \{(X,Y)/X = Y^2\} = \{(Y^2,Y)/Y \in \mathbb{R}\}$

$D_R = (-\infty, +\infty) = R_{R^{-1}} . R_R = [0,+\infty) = D_{R^{-1}}$

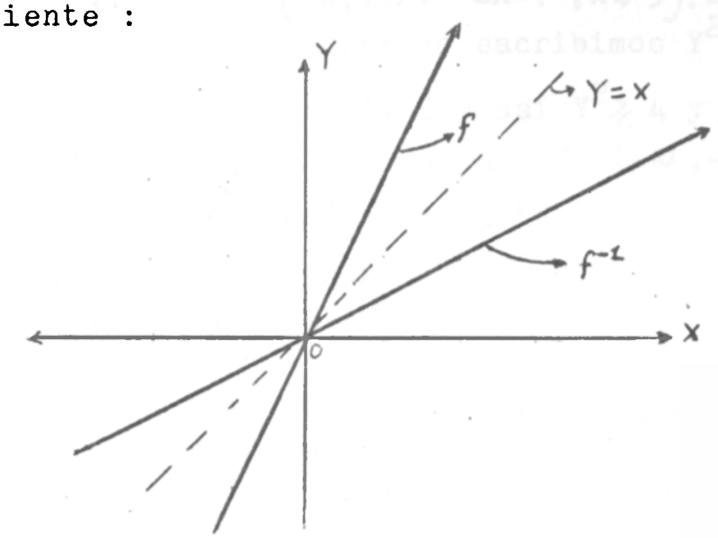
Un bosquejo de sus gráficos se observan en la figura siguiente :



Ejemplo 21.1.3 $f = \{(X,Y)/Y=2X\} = \{(X,2X)/X \in R\}$
$f^{-1} = \{(X,Y)/X=2Y\} = \{(2Y,Y)/Y \in R\}$

$D_f = (-\infty,+\infty) = R_f = D_{f^{-1}} = R_{f^{-1}}$

Un bosquejo de sus gráficos se observan en la figura siguiente :

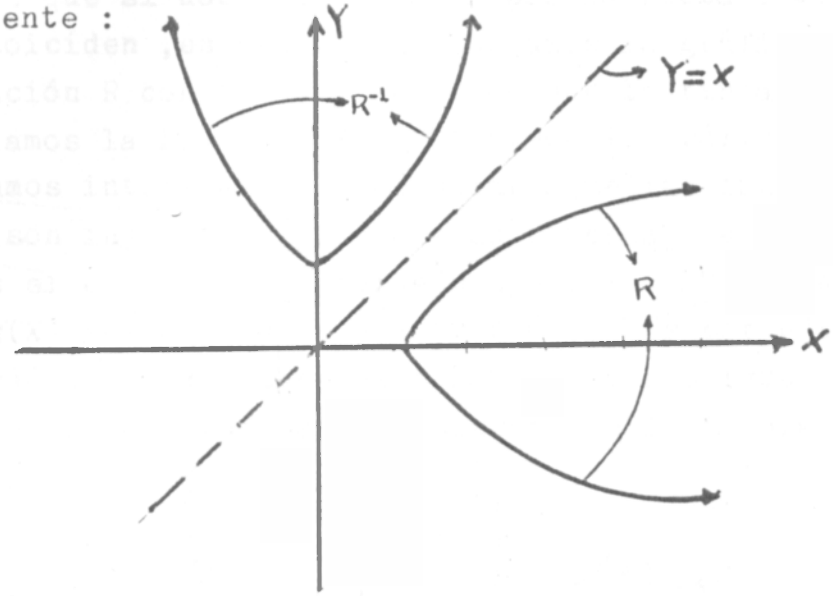


Ejemplo 21.1.4 $R = \{(X,Y)/Y^2=X-1\}$
$R^{-1} = \{(X,Y)/X^2=Y-1\} = \{(X,Y)/Y=X^2+1\}$

$D_R = [1,+\infty)$, $R_R = (-\infty,+\infty)$ pues $Y^2 = X-1$ y asi $Y = \pm\sqrt{X-1}$

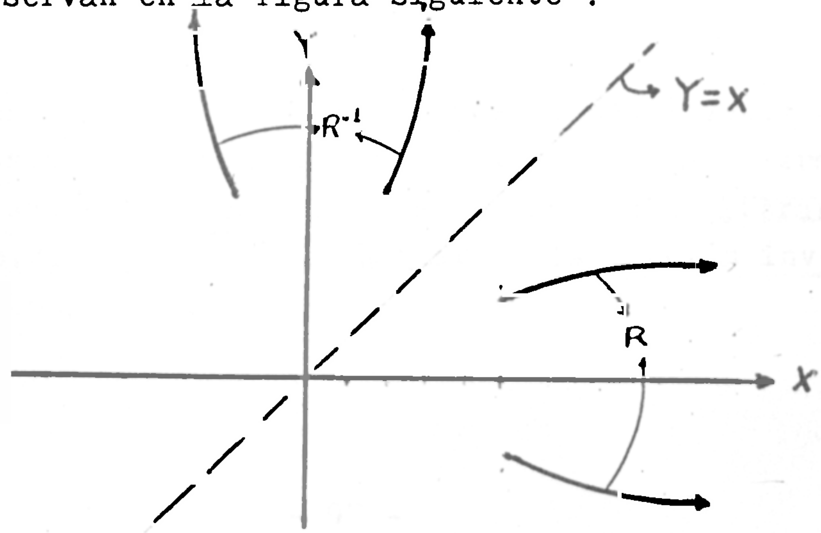
$D_{R^{-1}} = (-\infty, +\infty)$ y $R_{R^{-1}} = [1, +\infty)$

Un bosquejo de sus gráficos se observan en la figura siguiente :

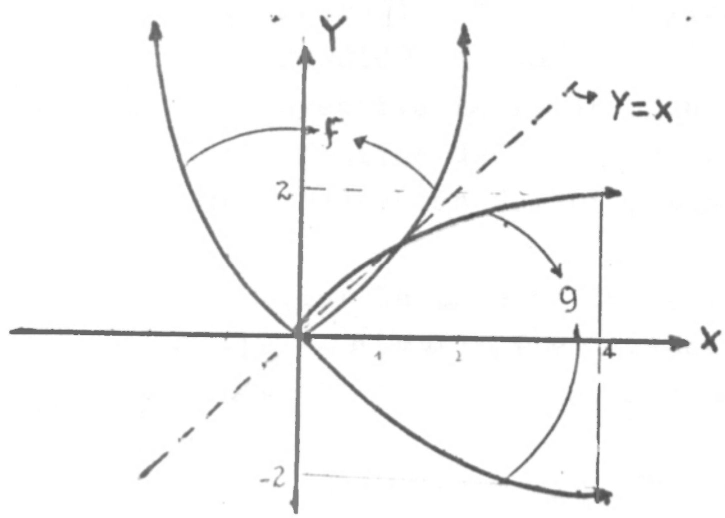


Ejemplo 21.1.5 $R = \{(X,Y)/Y^2 = X-1 , X \geq 5\}$. $D_R = [5,+\infty) = R_{R^{-1}}$. Para hallar el Recorrido escribimos $Y^2 = X-1$;es decir, $Y^2+1 = X \geq 5$ entonces $Y^2+1 \geq 5$ y así $Y^2 \geq 4$ y sacando raíz cuadrada tenemos que $|Y| \geq 2$ y así Y $(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$ luego $R_R = (-\infty,-2] \cup [2,+\infty) = D_{R^{-1}}$

$R^{-1} = \{(X,Y)/X^2 = Y-1 , |X| \geq 2\}$. Un bosquejo de sus gráficos se observan en la figura siguiente :



Observando los gráficos de las relaciones anteriores vemos que si doblamos la hoja por la recta $Y = X$;R y R^{-1} coiciden ,es decir ,si dibujamos la gráfica de la relación R con tinta y antes de que la tinta se seque doblamos la hoja por Y=X,obtenemos la gráfica de R^{-1}
Estamos interesados en estudiar aquellas funciones que son inyectivas,para que su inversa sea una función, pues si consideramos por ejemplo $f(X)= X^2$,su inversa es $g(X)=\pm\sqrt{X}$ que no es una función ,pues por ejemplo $(4,2)\neq(4,-2)$ y tienen el primer elemento igual.Un bosquejo de sus gráficas se observan en la figura siguiente :



En caso de que la función dada no sea inyectiva,podemos restringir el dominio de la función a un determinado conjunto donde ésta sea inyectiva ; sin alterar su recorrido y así poder hablar de la función inversa en tal conjunto .

21.6 TEOREMA

Si f es una función inyectiva, existe una y solo una función g definida sobre el recorrido de f y que satisface la ecuación $f(g(X))=X$ para todo X en el recorrido de f

Demostración .Vamos a construir una función g; sea $X\epsilon R_f$ entonces, tal función ha de tomar el valor de X para algún elemento .Como f es inyectiva puede existir solamente uno de tales elementos .Lo hemos llamado $g(X)$.

Ahora demostremos que g es única y para ello supongamos que existe otra función h con la propiedad de que $f(h(X))=X$ para $X\epsilon R_f$ y veamos que son iguales .En efecto como $f(g(X))=X$ y $f(h(X))=X$ para $X\epsilon R_f$, tenemos que: $f(g(X))=f(h(X))$ y de ésto concluimos lo deseado por ser f inyectiva .

21.7 DEFINICION DE FUNCION INVERSA.

Sea f una función inyectiva. La inversa de f, simbolizada por f^{-1}, es la única función definida en el recorrido de f y que satisface la ecuación $f(f^{-1}(X))=X$ para todo X en el recorrido de f

Ejemplo 21.7.1 Hallar la inversa de $f(X)=X^3$

$D_f = R_f = D_{f^{-1}} = R_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$ .f es inyectiva pues si $f(X_1)=f(X_2)$ entonces $X_1^3 = X_2^3$ y sacando raíz cúbica obtenemos que $X_1 = X_2$.

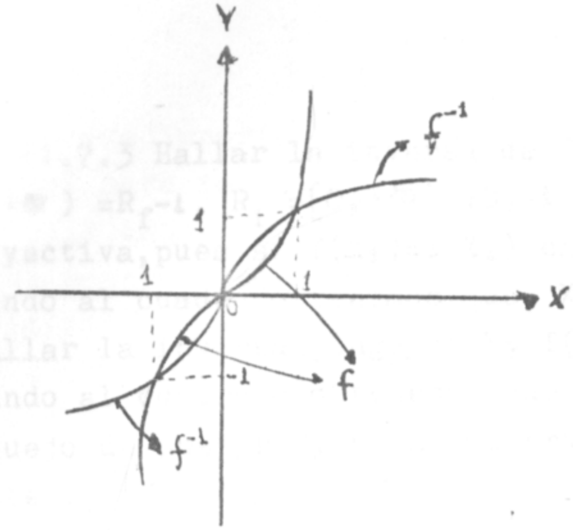
Para hallar la inversa pongamos $X=f(f^{-1}(X)) = (f^{-1}(X))^3$ pues $f(X)=X^3$, luego $[f^{-1}(X)]^3 = X$ y así $f^{-1}(X)=\sqrt[3]{X}$

Tambien podemos hallar la inversa así : $Y=X^3$ entonces $X=Y^3$ y elevando a la 1/3 tenemos que $Y=f^{-1}(X)=\sqrt[3]{X}$

Un bosquejo de sus gráficas se observan en la figura siguiente:

Ejemplo 21.7.2 Hallar la inversa de $h(X)=2X+4$

$D_h=R_h=D_{h^{-1}}=R_{h^{-1}}=(-\infty, +\infty)$

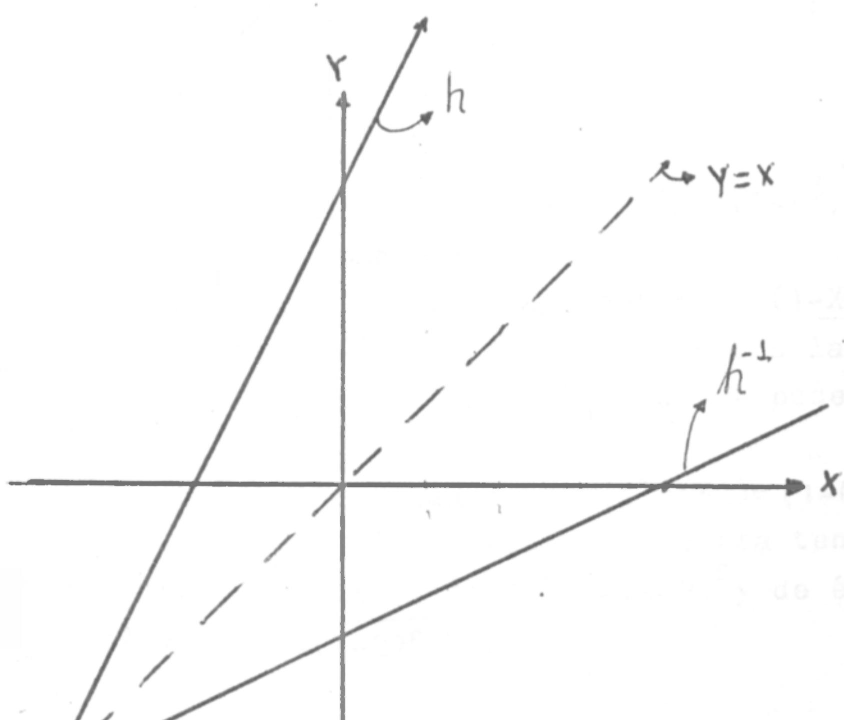


h es inyectiva; pues si $h(X_1)=h(X_2)$ entonces $2X_1+4 = 2X_2+4$ y así $X_1=X_2$.

Para hallar la inversa pongamos $X= h(h^{-1}(X))$, con nuestra elección de h tenemos que $h(h^{-1}(X))=2h^{-1}(X)+4 = X$ y así $h^{-1}(X)=(X-4)/2$.

La inversa la podemos calcular así : $Y=2X+4$ entonces $X=2Y+4$ y $Y=h^{-1}(X)= (X-4)/2$.

Un bosquejo de sus gráficas se observan en la figura siguiente :



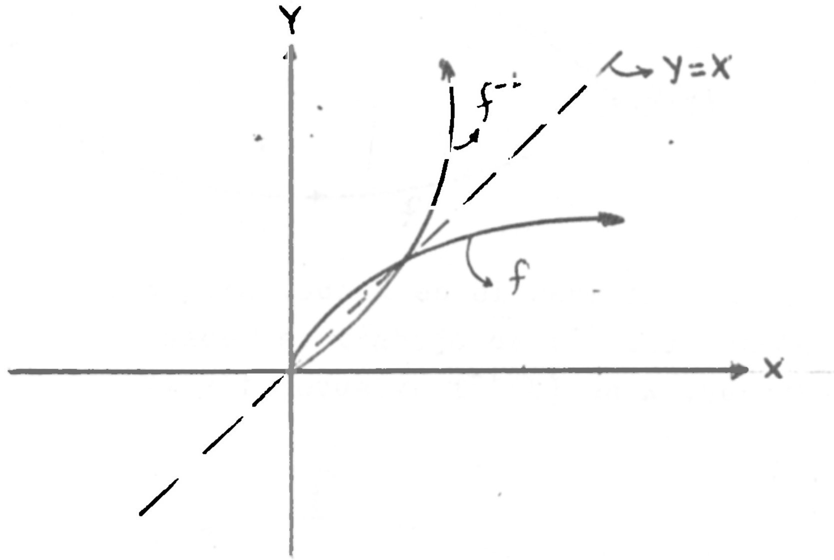
Ejemplo 21.7.3 Hallar la inversa de $f(X)=\sqrt{X}$

$D_f= [0,+\infty) =R_{f^{-1}}$. $R_f =[0,+\infty) =D_{f^{-1}}$

f es inyectiva, pues si $f(X_1)=f(X_2)$ entonces $\sqrt{X_1}=\sqrt{X_2}$ y elevando al cuadrado tenemos que $X_1 = X_2$

Para hallar la inversa pongamos $X= f(f^{-1}(X))=\sqrt{f^{-1}(X)}$ y elevando al cuadrado obtenemos que $f^{-1}(X)=X^2$; $X\in[0,+\infty)$

Un bosquejo de sus gráficas se observan en la figura siguiente :



Ejemplo 21.7.4 Hallar la inversa de $f(X)=(1-X^3)^{1/5}+2$

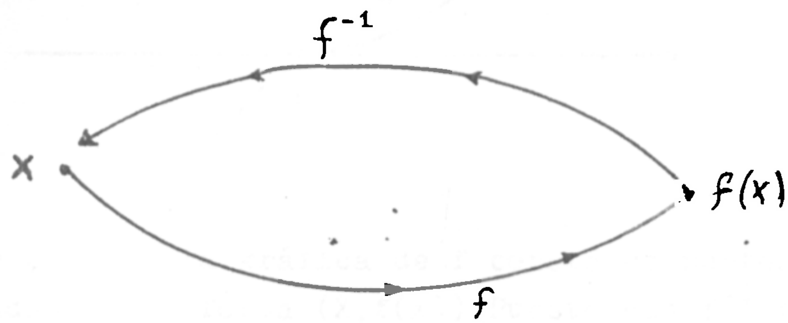
$D_f =R_f =D_{f^{-1}}= R_{f^{-1}} = (-\infty,+\infty)$

f es inyectiva, pues si $f(X_1)=f(X_2)$ entonces $(1-X_1^3)^{1/5}+2 = (1-X_2^3)^{1/5}+2$; luego $(1-X_1^3)^{1/5} = (1-X_2^3)^{1/5}$ y elevando a la quinta obtenemos $1-X_1^3 =1-X_2^3$ y así $X_1^3 = X_2^3$, de donde podemos concluir que $X_1 =X_2$.

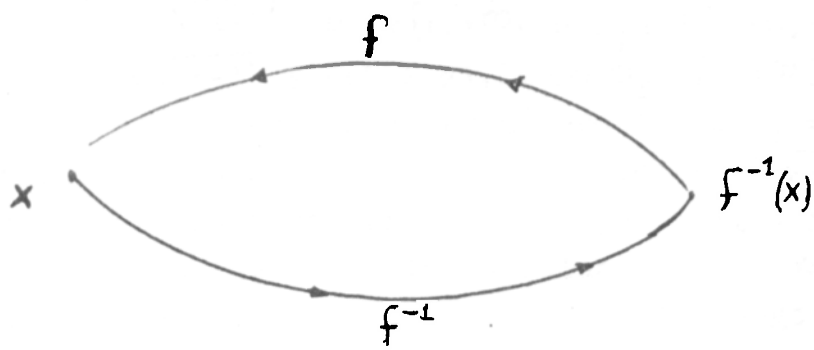
Para hallar la inversa pongamos $X=f(f^{-1}(X))= (1-(f^{-1}(X))^3)^{1/5}+2$ luego $X-2 =(1-(f^{-1}(X))^3)^{1/5}$, elevando a la quinta tenemos que $(X-2)^5 =1-(f^{-1}(X))^3$ y así $(f^{-1}(X))^3 =1-(X-2)^5$ y de ésto tenemos que $f^{-1}(X) =\sqrt[3]{1-(X-2)^5}$

Otra propiedad importante es que si f es inyectiva $f^{-1}(f(X))=X$ para todo X en el dominio de f .En efecto: Si $X\in D_f$,$f(X)\in R_f$ y así $f(f^{-1}(f(X)))=f(X)$ y como f es inyectiva concluimos que $f^{-1}(f(X))=X$

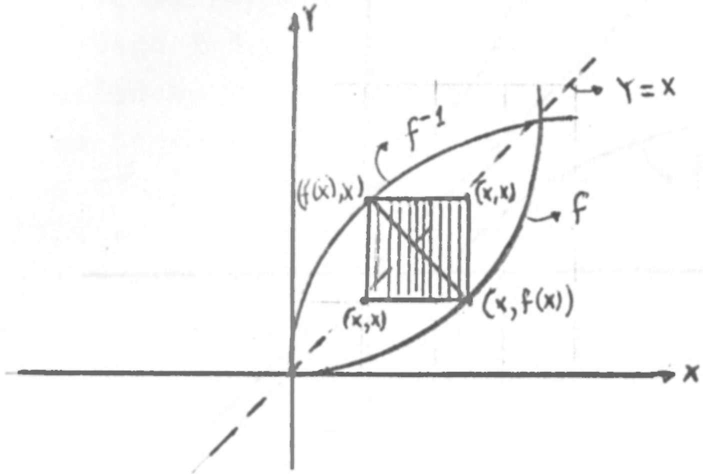
Que $f^{-1}(f(X))=X$ para todo X en el dominio de f,nos dice que f^{-1} "deshace" el trabajo de f .La funcion f lleva X a f(X) y f^{-1} devuelve f(X) a X .Ver gráfico siguiente



Que $f(f^{-1}(X))=X$ para todo X en el recorrido de f,nos dice que f "deshace" el trabajo de f^{-1} .La función f^{-1} lleva X a $f^{-1}(X)$ y f devuelve $f^{-1}(X)$ en X .Ver gráfico siguiente



Existe una relación interesante entre la gráfica de una función inyectiva y la gráfica de su inversa .Cada gráfica es la imagen especular de la otra,desempeñando el papel de espejo la linea Y=X .En lugar de dar una demostración formal, enviamos al lector a la figura siguiente



Como se sabe la gráfica de f consta de puntos con coordenadas de la forma $(X,f(X))$. Puesto que f^{-1} tiene el valor de X en $f(X)$, la gráfica de f^{-1} está constituida por puntos de la forma $(f(X),X)$. Tales puntos $(X,f(X))$ $(f(X),X)$ son vértices opuestos del cuadrado sombreado

21.8 Ejercicios Varios

21.8.1 $f(X)=\sqrt{X-1}$ $D_f = [1,+\infty) = R_{f^{-1}}; R_f = [0,+\infty) = D_{f^{-1}}$

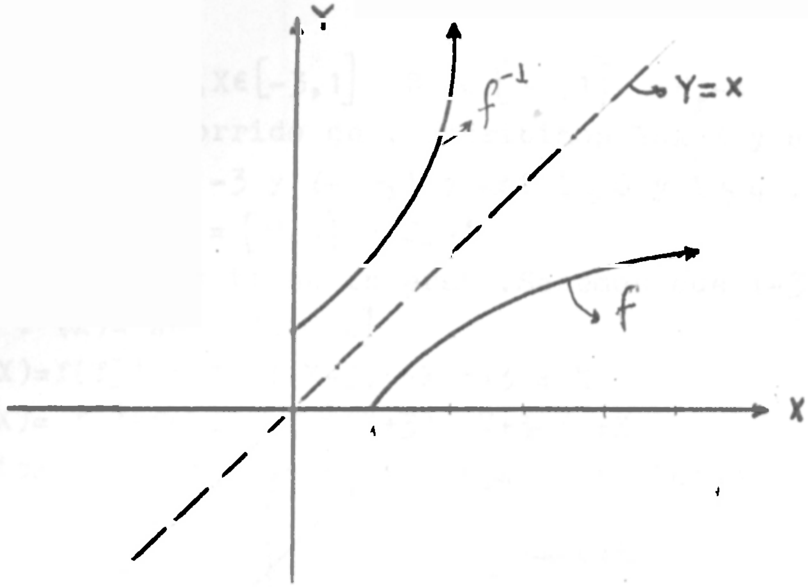
En efecto: $Y=\sqrt{X-1}$ y así $X \geq 1$, luego $D_f = [1,+\infty)$, y Y toma valores mayores o iguales a cero luego $R_f = [0,+\infty)$.

f es inyectiva, pues si $f(X_1)=f(X_2)$ entonces $\sqrt{X_1-1}=\sqrt{X_2-1}$ y elevando al cuadrado tenemos que $X_1-1 = X_2-1$ y así $X_1=X_2$ luego existe su inversa y la calculamos así : $Y=\sqrt{X-1}$; elevando al cuadrado tenemos que $Y^2=X-1$, luego $X=Y^2+1$ y así $f^{-1}(X)=X^2+1$, $X\in[0,+\infty)$.

$(f\circ f^{-1})(X) = f(f^{-1}(X)) = f(X^2+1) = \sqrt{X^2+1-1} = \sqrt{X^2} = |X| = X$

$(f^{-1}\circ f)(X) = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(\sqrt{X-1}) = (\sqrt{X-1})^2+1 =$

$X-1+1 = X$. Un bosquejo de sus gráficas se observan en la figura siguiente :

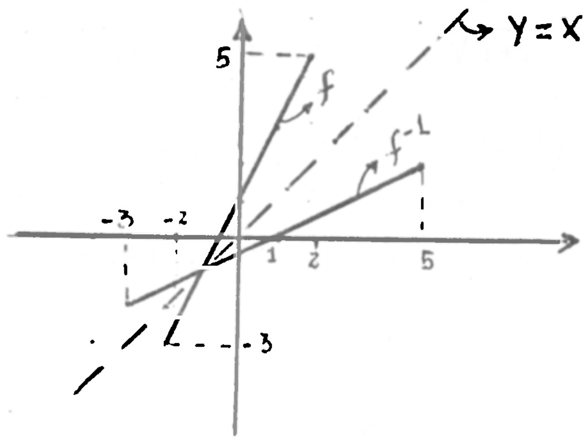


21.8.2 Sea $f(X) = 2X+1$; $|X| \leq 2$. $D_f = [-2,+2] = R_{f^{-1}}$
Para hallar el recorrido escribimos $Y= 2X+1$ y despejando X tenemos que $X= (Y-1)/2$,como $|X| \leq 2$ entonces $\left|\frac{Y-1}{2}\right| \leq 2$, es decir, $|Y-1| \leq 4$ luego $-4 \leq Y-1 \leq 4$ y así concluimos que $-3 \leq Y \leq 5$ entonces $R_f = [-3,5] = D_{f^{-1}}$.
Esta función es inyectiva en $|X| \leq 2$;pues si $f(X_1)=f(X_2)$ entonces $2X_1+1 = 2X_2+1$ y así $X_1= X_2$,luego existe la inversa .Sabemos que $X= \frac{Y-1}{2}$ y así $f^{-1}(X)= \frac{X-1}{2}$ $X \in [-3,5]$

$(f_0 f^{-1})(X)=f(f^{-1}(X))=f((X-1)/2) = \frac{2(X-1)}{2} +1 = X$

$(f^{-1}{}_0\, f)(X)=f^{-1}(f(X))=f^{-1}(2X+1) = \frac{2X+1-1}{2} =X$

Sus gráficas se observan en la figura siguiente :



21.8.3 $f(X)=X+3\ ,X\in[-3,1]$ $D_f=[-3,1]=R_{f^{-1}}$

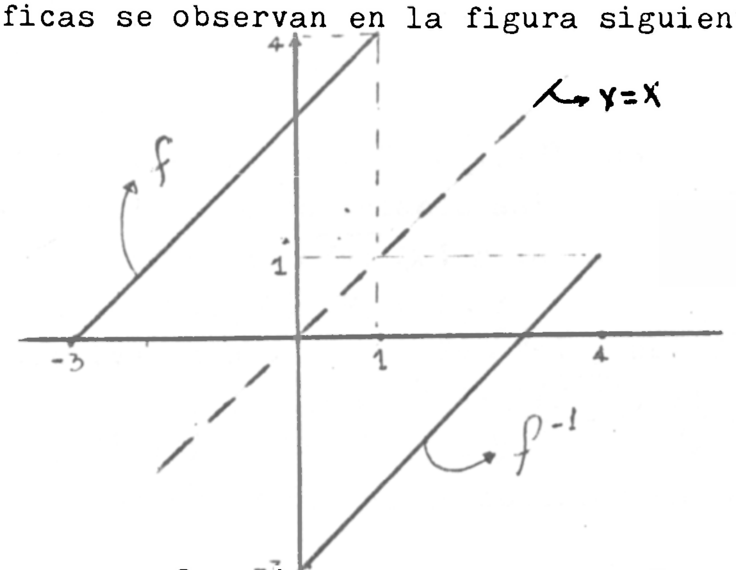
Para hallar el recorrido de f escribimos $Y=X+3$ y así $Y-3=X$,luego $Y-3\geqslant -3$ y $Y-3\leqslant 1$ y así $Y\geqslant 0$ y $Y\leqslant 4$,luego $Y\in[0,4]$ entonces $R_f=[0,4]=D_{f^{-1}}$

Como f es inyectiva tiene inversa .Sabemos que $Y-3=X$ entonces $f^{-1}(X)=X-3\quad X\in[0,4]$

$(f\circ f^{-1})(X)=f(f^{-1}(X))=f(X-3)=X-3+3=X$

$(f^{-1}\circ f)(X)=f^{-1}(f(X))=f^{-1}(X+3)=X+3-3=X$

Sus gráficas se observan en la figura siguiente :



21.8.4 $f(X)=X^2-1\ ,\ X\leqslant -1\ .\ D_f=(-\infty,-1]=R_{f^{-1}}$

Para calcular el recorrido de f haremos lo siguiente :

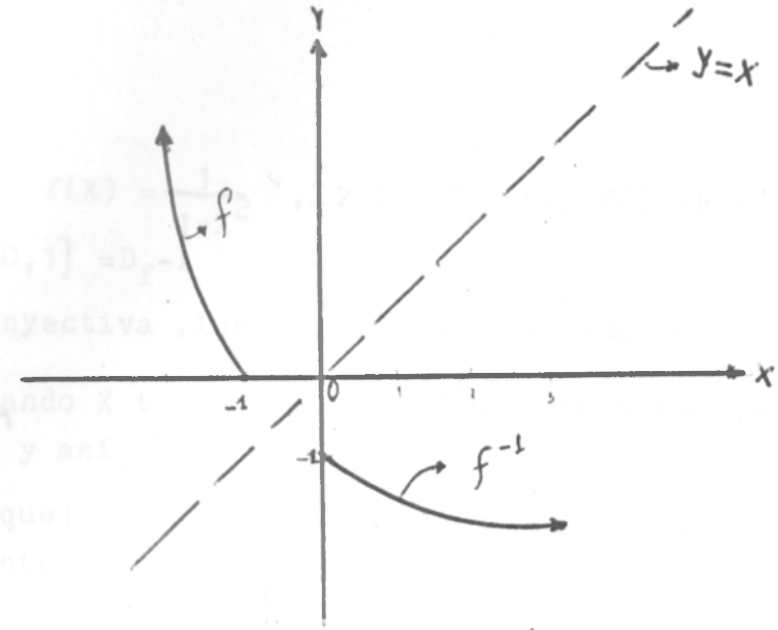
$Y=X^2-1$,despejamos X para obtener $X=\pm\sqrt{Y+1}$,pero X es negativo entonces $X=-\sqrt{Y+1}\leqslant -1$,luego $\sqrt{Y+1}\geqslant 1$ y de ésto concluimos que $Y\geqslant 0$ y así $R_f=[0,+\infty)$.(Si $\sqrt{Y+1}\geqslant 1$ entonces $Y+1\geqslant 0$ y $Y+1\geqslant 1$,luego $Y\geqslant -1$ y $Y\geqslant 0$) .

f es inyectiva ;sabemos que $X=-\sqrt{Y+1}$ y así $f^{-1}(X)=-\sqrt{X+1}$ para $X\in[0,+\infty)$.

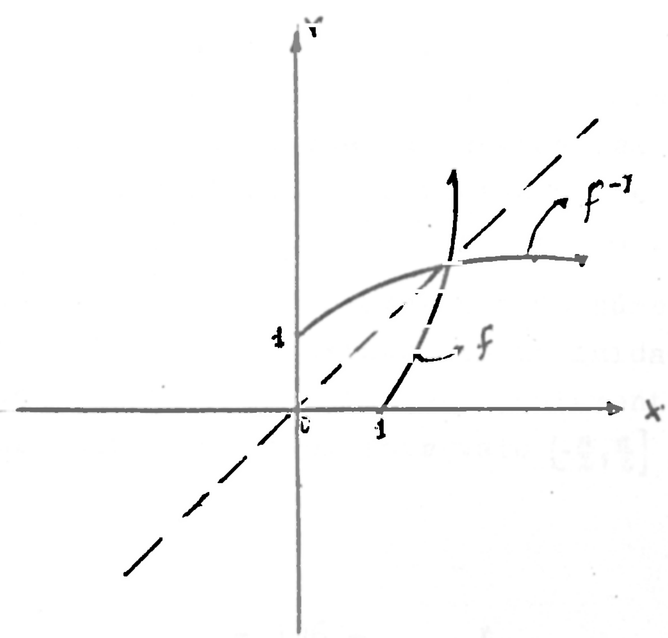
$(f\circ f^{-1})(X)=f(f^{-1}(X))=f(-\sqrt{X+1})=(-\sqrt{X+1})^2-1=X+1-1=X$

$(f^{-1}\circ f)(X)=f^{-1}(f(X))=f^{-1}(X^2-1)=-\sqrt{X^2-1+1}=-(-X)=X$

Un bosquejo de sus gráficas se observan en la figura siguiente :



21.8.5 $f(X)= X^2-1$ $,X \geq 1$. $D_f = [1,+\infty) = R_{f^{-1}}$
El recorrido de f lo calculamos así : $Y= X^2-1$ $,X = \pm\sqrt{Y+1}$
como X es positivo $X=\sqrt{Y+1} \geq 1$ y la solución de esta
desigualdad es $[0,+\infty) = R_f = D_{f^{-1}}$
f es inyectiva ,sabemos que $X= \sqrt{Y+1}$ y así $f^{-1}(X)= \sqrt{X+1}$
$(f\circ f^{-1})(X)=f(f^{-1}(X))= f(\sqrt{X+1}) = (\sqrt{X+1})^2-1 =X+1-1=X$
$(f^{-1}\circ f)(X)=f^{-1}(f(X))=f^{-1}(X^2-1) = \sqrt{X^2-1+1} =\sqrt{X^2} =X$
Un bosquejo de sus gráficas se observan en la figura
siguiente:



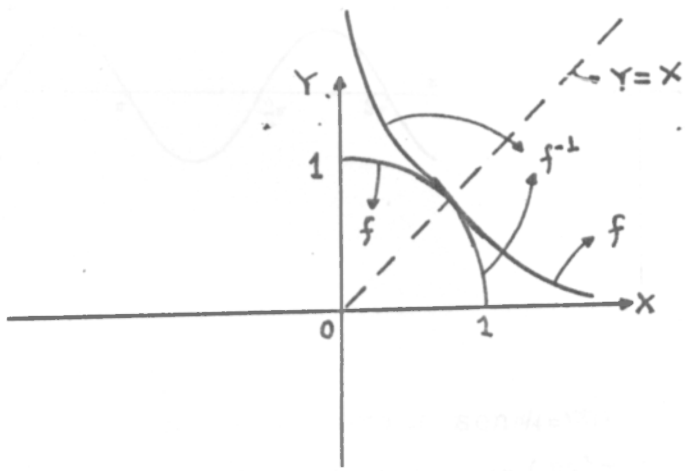
21.8.9 $f(X) = \frac{1}{1+X^2}$, $X > 0$. $D_f = (0,+\infty) = R_{f^{-1}}$

$R_f = (0,1] = D_{f^{-1}}$

f es inyectiva ,luego existe su inversa .Como $Y = \frac{1}{1+X^2}$

despejando X tenemos que $X = \pm\sqrt{\frac{1-Y}{Y}}$ como $X > 0$,entonces $X = \sqrt{\frac{1-Y}{Y}}$ y así $f^{-1}(X) = \sqrt{\frac{1-X}{X}}$

Un bosquejo de sus gráficas se observan en la figura siguiente :



21.9 Funciones Circulares Inversas .

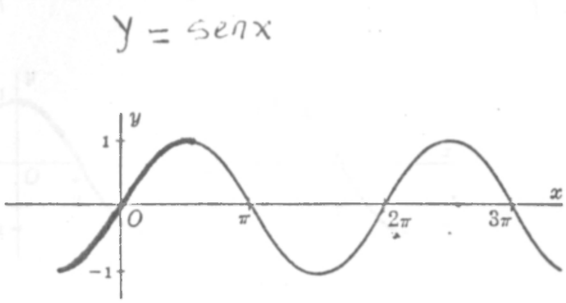
Sabemos que las funciones circulares no son inyectivas , motivo por la cual para que su inversa sea función es necesario practicar alguna restriccion sobre el dominio de la función dada ,conservando su recorrido .

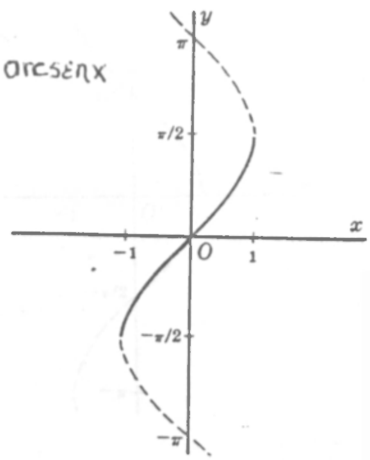
21.9.1 Función Seno .Comenzamos con un número X en el intervalo $[-1,+1]$. Aunque existe una infinidad en los que la función Seno toma el valor de X,solamente uno de estos valores se encuentra en el intervalo $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ y este número único se escribe como arcsenX ,es decir,

Y =arcsenX si y solo si senY = X ; $|X|\leq 1$, $|Y|\leq \frac{\pi}{2}$

La función Y = arcsenX , $|X|\leq 1$ es la función inversa de la función Y=senX . Naturalmente no es la inversa de la función completa,sino mas bien la inversa de Y=senX para $|X|\leq \pi/2$

Sus gráficas se observan en las figuras siguientes.





21.9.2 Ejemplos

21.9.2.1 arcsen$\sqrt{2}/2=\pi/4$ porque sen$\pi/4=\sqrt{2}/2$

21.9.2.2 arcsen$(-1)=-\pi/2$ porque sen$(-\pi/2)=-1$

21.9.2.3 arcsen $1=\frac{\pi}{2}$ porque sen$\pi/2=1$

21.9.2.4 arcsen$1/2=\pi/6$ porque sen$\pi/6=1/2$

De la definición concluimos que sen(arcsenX)=X para cada X en $[-1,1]$ y arcsen(senX)=X para cada X en $[-\pi/2,\pi/2]$

21.9.2.5 arcsen(sen$\pi/4$)= $\pi/4$

21.9.2.6 arcsen(sen$\pi/3$)= $\pi/3$

21.9.2.7 arcsen(sen2π)=arcsen(sen 0)= 0 ,Es decir el arcsen(sen2π) es el numero en el intervalo $[-\pi/2,\pi/2]$ para el que,el seno toma el mismo valor.

21.9.2.8 arcsen(sen$2\pi/3$)=arcsen(sen$\pi/3$)= $\pi/3$

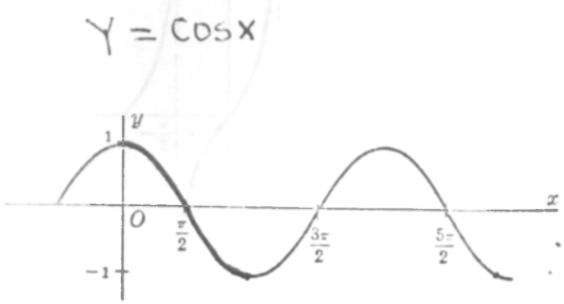
21.9.2.9 arcsen(sen π)=arcsen(sen 0)= 0

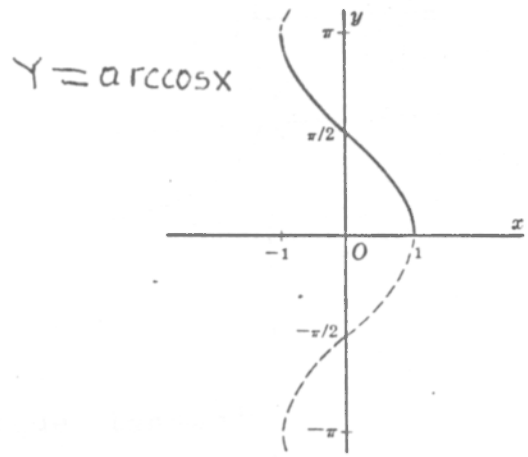
21.9.2.10.arcsen(sen$3\pi/4$)=arcsen(sen$\pi/4$)= $\pi/4$

21.9.3 Función Coseno. Es inyectiva por ejemplo en el intervalo $[0,\pi]$, tomando entonces Y=cosX , $X\epsilon[0,\pi]$ podemos definir su inversa como :

Y=arccosX si y solo si X= cosY , $|X|\leq 1$ y $Y\in[0,\pi]$

Sus gráficas se observan en las figuras siguientes .





21.9.4 Ejemplos

21.9.4.1 arccos $\sqrt{3}/2=\pi/6$ porque cos $\pi/6=\sqrt{3}/2$

21.9.4.2 arccos $1=0$ porque cos $0=1$

21.9.4.3 arccos $(-1)=\pi$ porque cos $\pi=-1$

21.9.4.4 arccos$(1/2)=\pi/3$ porque cos $\pi/3=1/2$

De la definición se sigue que cos(arccosX)=X para $X\epsilon[-1,1]$ y arccos(cosX)=X para $X\in[0,\pi]$

21.9.4.5 arccos(cos $\pi/4$)= $\pi/4$

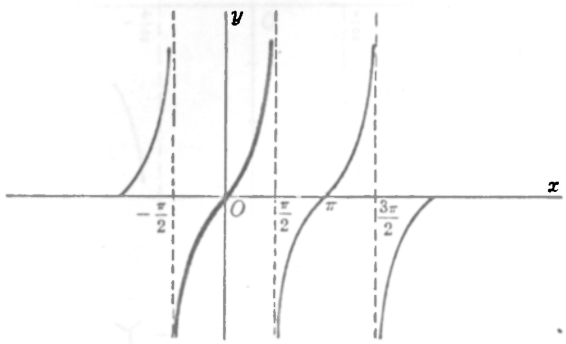
21.9.4.6 cos(arccos $1/3$)= $1/3$

21.9.5 Función Tangente . Es inyectiva por ejemplo en $(-\pi/2,\pi/2)$, tomando entonces Y= tanX para $X\in(-\pi/2,\pi/2)$ podemos definir su inversa como :

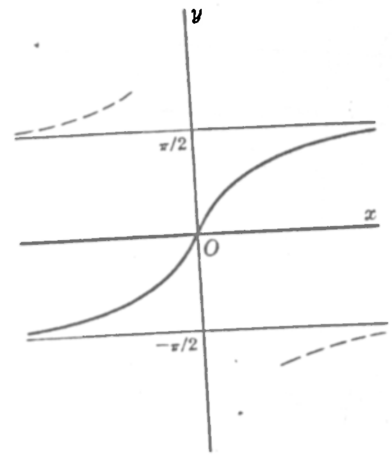
Y=arctanX si y solo si X=tanY $X\in(-\infty,+\infty)$, $Y\in(-\pi/2,\pi/2)$

Sus gráficas se observan en las figuras siguientes .

$Y = \tan x$



$Y = \arctan x$



21.9.6 Ejemplos

21.9.6.1 $\arctan 1 = \pi/4$ porque $\tan \pi/4 = 1$

21.9.6.2 $\arctan(-1) = -\pi/4$ porque $\tan(-\pi/4) = -1$

De la definición se sigue que $\tan(\arctan X) = X$ para $X \in (-\infty, +\infty)$ y $\arctan(\tan X) = X$ para $X \in (-\pi/2, \pi/2)$

21.9.6.3 $\tan(\arctan 2) = 2$

21.9.6.4 $\arctan(\tan 0) = 0$

21.9.6.5 $\arctan(\tan \pi/3) = \pi/3$

21.9.6.6 $\arctan(\tan 3\pi/4) = \arctan(\tan(-\pi/4)) = -\pi/4$

Las demas funciones se definen así:

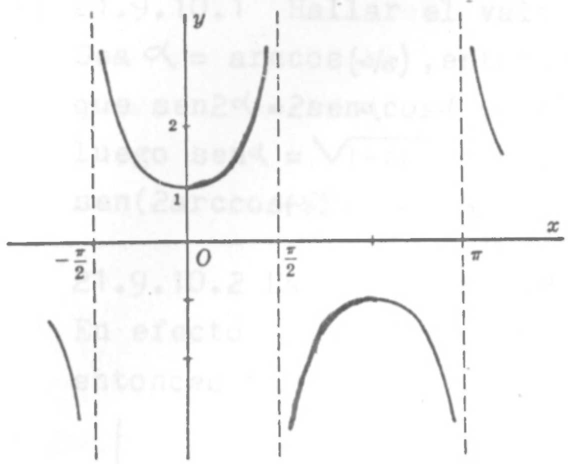
21.9.7 $Y = \text{arcsec} X$ si y solo si $X = \sec Y$ $|X| \geq 1$ $Y \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$

21.9.8 $Y = \text{arccot} X$ si y solo si $X = \cot Y$ $X \in (-\infty, +\infty)$ $Y \in (0, \pi)$

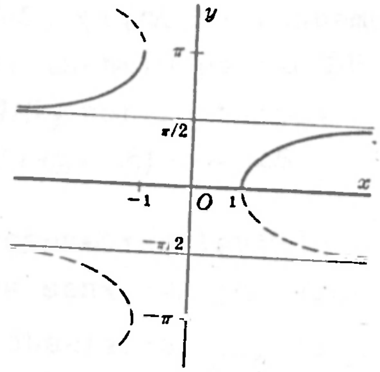
21.9.9 $Y = \text{arccsc} X$ si y solo si $X = \csc Y$ $|X| \geq 1$ $Y \in [(-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)]$

Sus gráficas se observan en las figuras siguientes .

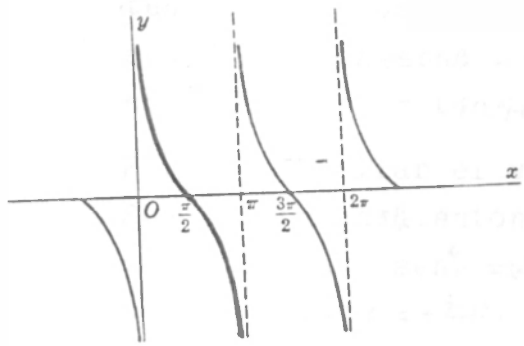
Y = secX



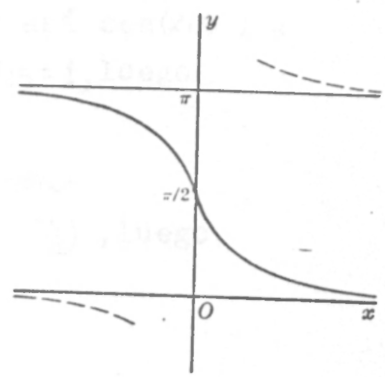
Y = arcsecX



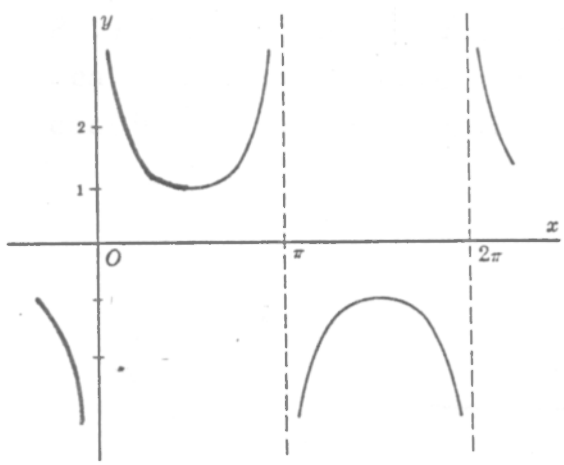
Y = COTX



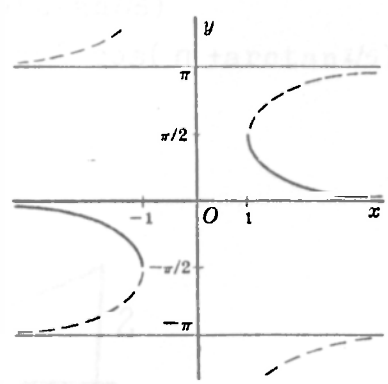
Y = arccotX



Y = cscX



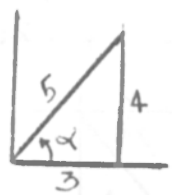
Y = arccscX

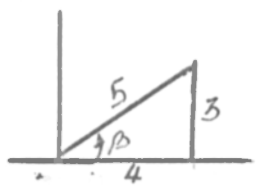


21.9.10 Ejercicios varios

21.9.10.1 Hallar el valor de $\operatorname{sen}(2\arccos(-3/5))$. En efecto: Sea $\alpha = \arccos(-3/5)$, entonces $\cos\alpha = -3/5$, $\alpha \in (\pi/2, \pi)$. Sabemos que $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$; $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$, $\operatorname{sen}\alpha > 0$ para $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ luego $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(-3/5)^2} = 4/5$, por lo tanto,
$\operatorname{sen}(2\arccos(-3/5)) = \operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2 \times 4/5 \times (-3/5) = -24/25$

21.9.10.2 Hallar el valor de $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}4/5 + \arctan 3/4)$
En efecto: Sea $\alpha = \operatorname{arcsen}4/5$ entonces $\operatorname{sen}\alpha = 4/5$; $\beta = \arctan 3/4$ entonces $\tan\beta = 3/4$, $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$. Si observamos los triangulos

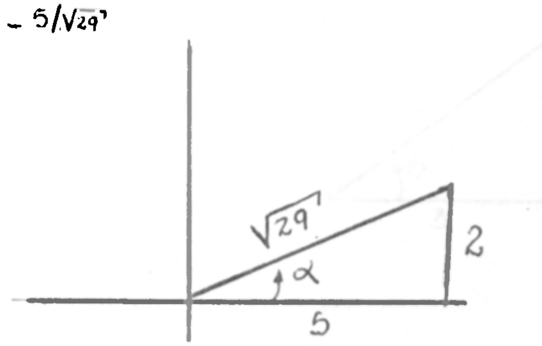




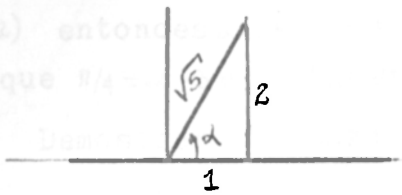
tenemos que $\cos\alpha = 3/5$, $\cos\beta = 4/5$, $\operatorname{sen}\beta = 3/5$ y así $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) =$
$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta = 4/5 \times 4/5 + 3/5 \times 3/5 = (16+9)/25 = 1$, luego
$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}4/5 + \arctan 3/4) = 1$

21.9.10.3 Hallar el valor de $\cos(2\arctan 5/2)$
Sea $\alpha = \arctan 5/2$, entonces $\tan\alpha = 5/2$, $\alpha \in (0, \pi/2)$, luego
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = (4-25)/29 = -21/29$ y así :
$\cos(2\arctan 5/2) = -21/29$

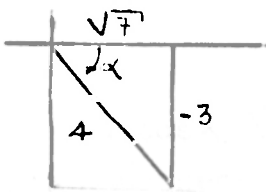
21.9.10.4 Hallar el valor de $\cos(\pi + \arctan 2/5)$
Sea $\alpha = \arctan 2/5$ entonces $\tan\alpha = 2/5$ y así $\cos(\pi + \arctan 2/5) =$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha = -5/\sqrt{29}$



21.9.10.5 Hallar el valor de sen(2arctan2)
Sea α =arctan2 ,entonces $\tan\alpha=2$ $\alpha\in(0,\pi/2)$ luego
sen(2arctan2)=sen2α =2senαcosα = $2\times 2/\sqrt{5}\times 1/\sqrt{5} = 4/5$



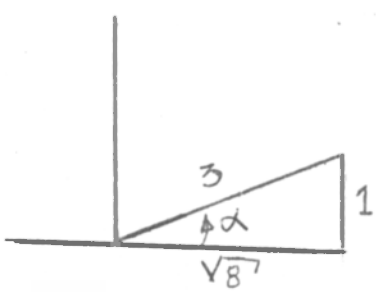
21.9.10.6 Hallar el valor de sec(arcsen(-3/4))
Sea α = arcsen$(-3/4)$ entonces sen$\alpha = -3/4$ y así sec(arcsen$(-3/4)$) =
secα = $4/\sqrt{7}$

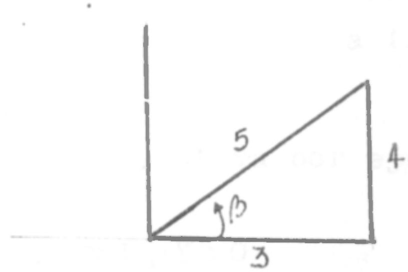


21.9.10.7 Hallar el valor de sen(arccos$(-1/2)$+3arcsen$\sqrt{3}/2$).
Sea α=arccos$(-1/2)$ y β =arcsen$\sqrt{3}/2$ entonces cosα =$-1/2$ y senβ=$\sqrt{3}/2$
luego $\alpha=2\pi/3$, $\beta=\pi/3$ y así sen(arccos$(-1/2)$+3arcsen$\sqrt{3}/2$)= sen$(2\pi/3+3\pi/3)$=
-sen $\pi/3$ = $-\sqrt{3}/2$

21.9.10.8 Hallar el valor de tan(arcsen$1/3$+arctan$4/3$)
Sea α =arcsen$1/3$,β =arctan$4/3$ entonces senα = $1/3$ y tanβ = $4/3$
$\alpha,\beta\in(0,\pi/2)$ y así tan(arcsen$1/3$+arctan$4/3$) =tan($\alpha+\beta$) =

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{1/\sqrt{8}+4/3}{1-1/\sqrt{8}\cdot 4/3}$$





21.9.10.9 Demostrar que $\arctan 1/2 + \arctan 1/3 = \pi/4$

En efecto : Sea $\alpha = \arctan 1/2$, $\beta =$ arctan entonces $\tan\alpha$

$\tan\beta = 1/3$; $\alpha,\beta \in (0,\pi/2)$. $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{1/2 + 1/3}{1 - 1/2 \times 1/3} = 1$

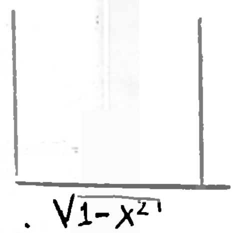
como $\alpha,\beta \in (0,\pi/2)$ entonces $\alpha+\beta \in (0,\ )$ y para que $\tan(\alpha+\beta)=1$

debe darse que $\pi/4 = \alpha + \beta = \arctan 1/2 + \arctan 1/3$

21.9.10.10 Demostrar que para $0 < X < 1$ $\operatorname{arcsen} X = \arccos\sqrt{1-X^2} =$

$\arctan \dfrac{}{\sqrt{1-X^2}}$

En efecto: Sea $\operatorname{sen}\alpha = X$



De la figura $\cos\alpha = \sqrt{1-X^2}$; $\tan\alpha = \dfrac{}{}$ y así como $\operatorname{sen}\alpha = X$

entonces $\alpha = \operatorname{arcsen} X = \arccos\sqrt{1-X^2} = \arctan\dfrac{}{\sqrt{1-X^2}}$

21.9.10.11 Hallar X talque $\arctan X + \arctan 1 = \arctan 1/2$

Sea $\alpha = \arctan X$, $\beta = \arctan 1$ entonces $\tan\alpha = X$, $\tan\beta = 1$;

luego $\tan(\arctan 1/2) = 1/2 = \tan(\arctan X + \arctan 1) = \tan(\alpha + \beta) =$

$\dfrac{X +}{1 - X} = 1/2$ y de ésto $2X+2=1-X$ y así $X=-1/3$

21.10 Funciones Hiperbólicas Inversas .

21.10.1 $Y = \operatorname{senh} X$, es inyectiva en cualquier intervalo ; su inversa se define así:

$Y = \operatorname{arcsenh} X$ si y solo si $X = \operatorname{senh} Y$

De la definición se sigue que $\operatorname{senh}(\operatorname{arcsenh} X) = X$ y $\operatorname{arcsenh}(\operatorname{senh} Y) = Y$. Un bosquejo de sus gráficas se observan en la figuras siguientes

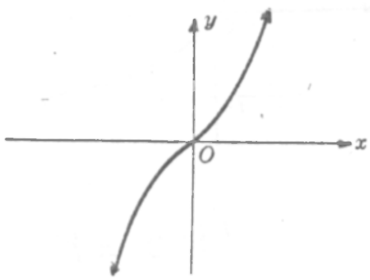
21.10.2 $Y = \cosh X$ .Esta función es inyectiva por ejemplo en $[0,+\infty)$ y su inversa se define por :

$Y = \operatorname{arccosh} X$ si y solo si $\cosh Y = X$, $X \geq 1$, $Y \geq 0$

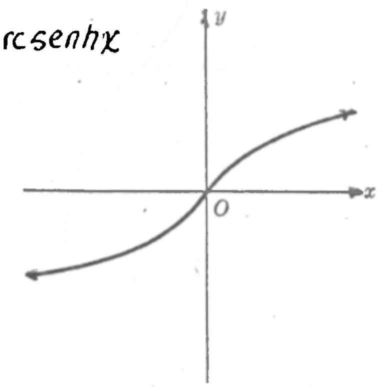
De la definición se sigue que $\cosh(\operatorname{arccosh} X) = X$, $X \geq 1$ y

$\operatorname{arccosh}(\cosh Y) = Y$, $Y \geq 0$

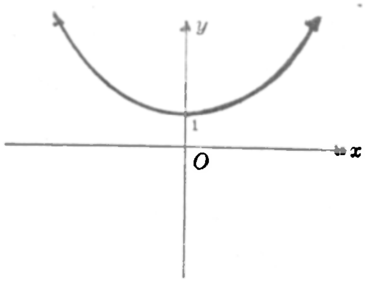
$Y = \operatorname{senh} x$



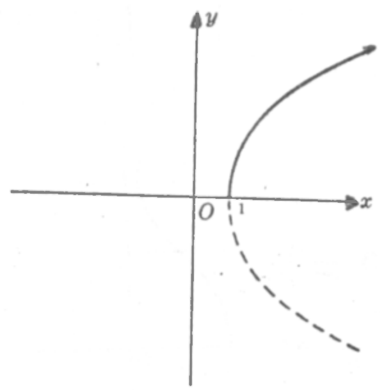
$Y = \operatorname{arcsenh} x$



$Y = \cosh x$



$Y = \operatorname{arccosh} x$



Las funciones tangente , cotangente ,secante y cosecante hiperbólicas inversas denotadas por arctanhX ,arccothX , arcsechX ,arccschX se definen así :

21.10.3 Y=arctanhX si y solo si X=tanhY $|X|<1$ $Y \in (-\infty, +\infty)$

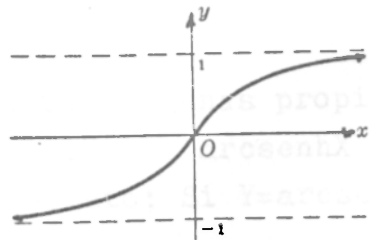
21.10.4 Y=arccothX si y solo si X= cothY $|X|>1$, $|Y|>0$

21.10.5 Y=arcsechX si y solo si X=sechY $Y \geq 0$ $X \in (0,1]$

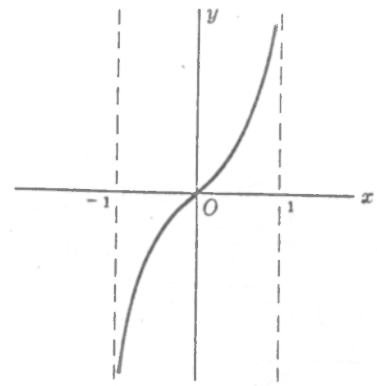
21.10.6 Y= arccschX si y solo si X= cschY $|Y|>0$, $|X|>0$

Sus gráficas se observan en las figuras siguientes

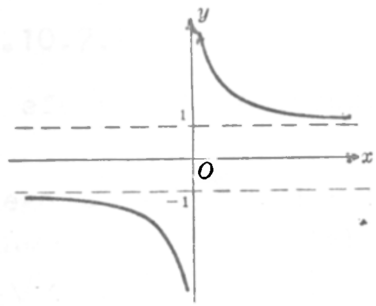
Y= tanhx



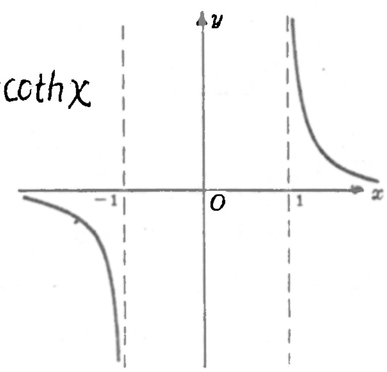
Y= arctanhx



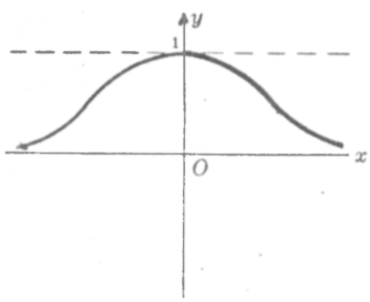
Y= cothx



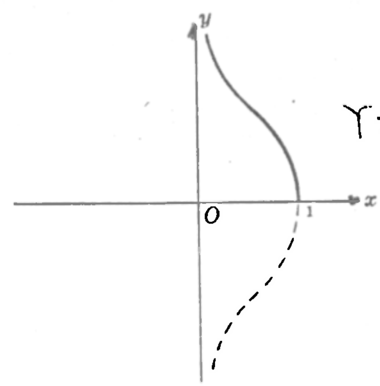
Y= arccothx



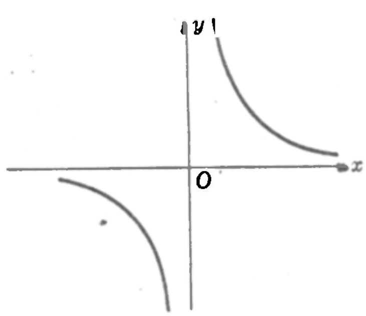
Y= Sechx



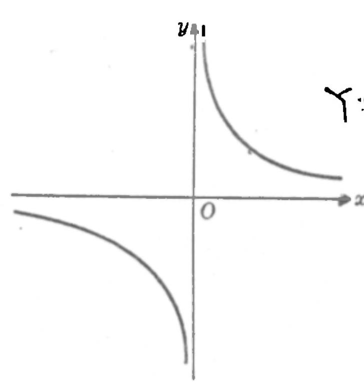
Y= arcsechx



Y= cschx



Y= arccshx



21.10.7 Algunas propiedades importantes .

21.10.7.1 $\operatorname{arcsenh}X = \ln(X + \sqrt{X^2+1})$. $X \in (-\infty, +\infty)$

En efecto; Si $Y=\operatorname{arcsenh}X$ entonces $X=\operatorname{senh}Y = \frac{e^Y - e^{-Y}}{2}$,luego $e^{2Y} - 2Xe^Y - 1 = 0$ y así $e^Y = \frac{2X \pm \sqrt{4X^2+4}}{2} = X \pm \sqrt{X^2+1}$, pero $e^Y > 0$,luego $e^Y = X + \sqrt{X^2+1}$ y así $Y = \ln(X + \sqrt{X^2+1})$

21.10.7.2 $\operatorname{arccosh}X = \ln(X + \sqrt{X^2-1})$, $X \geqslant 1$

En efecto :Si $Y=\operatorname{arccosh}X$ entonces $X= \cosh Y = \frac{e^Y + e^{-Y}}{2}$. $Y \geqslant 0$ luego $e^{2Y} - 2Xe^Y + 1 = 0$ y así $e^Y = \frac{2X \pm \sqrt{4X^2-4}}{2} = X \pm \sqrt{X^2-1}$ puesto que $Y \geqslant 0$ y $X \geqslant 1$ entonces $e^Y \geqslant 1$, es decir, $e^Y = X \pm \sqrt{X^2-1}$ no puede ser menor que **1** ,lo que hace imposible el signo negativo y así $e^Y = X + \sqrt{X^2-1}$,es decir $Y = \ln(X + \sqrt{X^2-1})$

En forma similar se demuestran las siguientes propiedades

21.10.7.3 $\operatorname{arctanh}X = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+X}{1-X}\right)$. $|X| < 1$

21.10.7.4 $\operatorname{arccoth}X = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{X+1}{X-1}\right)$. $|X| > 1$

BIBLIOGRAFIA

APOSTOL, TOM M. Cálculus. Ed, 2, VL, 1 1973.

BUITRAGO ALFONSO, GERMAN. Cálculo Diferencial. Ed,1 1982.

COLECTIVO DE PROFESORES. Matemáticas Fundamentales. Universidad del Valle, 1984.

DOROFEIEV, G. Temas Selectos de Matemáticas Elementales. Ed, 2, 1973.

LEHMANN, CHARLES H. Algebra. Ed, 14, 1980.

LEITHOLD, LOUIS. El Cálculo con Geometría Analítica. Ed, 4, 1982.

LIPSCHUTZ, SEYMOUR. Teoria de Conjuntos y Temas Afines. Ed, 2, 1970.

SPIVAK, MICHAEL. Cálculo. Ed, 1, VL 1, 1970.

TAKEUCHI, YU. Cálculo Diferencial e Introducción al Cálculo.

TAYLOR, HOWARD E. Matemáticas Básicas. Ed, 2, 1969.

VANCE, ELBRIDGE P. Algebra y Trigonometría. Ed, 2, 1976.