



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

# **Modelo de optimización estocástica de leyes de corte para una compañía minera aurífera**

**Diego Alejandro Toro Morales**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Minas, Departamento de Materiales y Minerales  
Medellín, Colombia  
2023



# **Modelo de optimización estocástica de leyes de corte para una compañía minera aurífera**

**Diego Alejandro Toro Morales**

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**Magíster en Ingeniería – Recursos Minerales**

Director:

Ph.D. Giovanni Franco Sepúlveda

Codirector:

MSc. Juan Camilo del Rio Cuervo

Línea de Investigación:

Planeamiento minero estocástico y optimización minera

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Minas, Departamento de Materiales y Minerales  
Medellín, Colombia

2023



*A Dios.*

*“Porque de Él, por Él y para Él son todas las cosas. A Él sea la honra para siempre”.*

*Romanos 11:36*



## **Agradecimientos**

A Violeta, Claudia, Sara y Juan, por su amor incondicional y esperarme día a día: este trabajo es fruto de su entrega.

A Giovanni y Juan Camilo por su paciencia, conocimientos transmitidos y por ser guías: somos lo que damos más que lo que recibimos.

A Emilio, Ismael, Santiago, Fabián, Manuel, Maria Alejandra y Carolina: sus enseñanzas y apoyo me han permitido avanzar en el camino.

A familiares, amigos y compañeros de la vida que han participado de los diversos procesos de formación que hoy se resumen en este trabajo.

## Resumen

### **Modelo de optimización estocástica de leyes de corte para una compañía minera aurífera**

Una de las variables de decisión más estudiada en la bibliografía técnica minera en relación con su estimación y optimización es la ley de corte, en la que la función objetivo más aceptada ha sido la maximización del Valor Presente Neto (VPN). Sin embargo, un número considerable de proyectos mineros determinan sus leyes de corte a través del uso de modelos determinísticos que no permiten realizar un análisis basado en la incertidumbre. En el presente trabajo se formula un modelo de optimización estocástica de leyes de corte para un depósito aurífero, considerando los riesgos e incertidumbres propias de la actividad minera, con el propósito de maximizar el VPN del proyecto de una compañía con operaciones mineras subterráneas. La metodología seleccionada para el modelo corresponde a la optimización estocástica implícita, que utiliza un enfoque híbrido el cual combina un algoritmo metaheurístico (Algoritmo Genético) y la simulación de Montecarlo. La validación del modelo se realizó utilizando datos reales para verificar su aplicabilidad industrial y proporcionar una alternativa a los modelos tradicionales comúnmente utilizados hasta la fecha. El modelo formulado presentó una vida más corta del proyecto y una ley de corte dinámica en el tiempo, lo que se traduce en ingresos anuales variables. En cuanto a rentabilidad, se presentó un incremento de 21,142,372 USD al comparar la media del VPN del modelo estocástico con el VPN del modelo determinístico. Los resultados obtenidos demuestran los beneficios de aplicar este tipo de modelos a escala industrial para aumentar el valor de los proyectos.

**Palabras clave:** optimización estocástica, ley de corte, Valor Presente Neto, Algoritmos Genéticos, minería subterránea, oro.

## Abstract

### **Stochastic optimization model of cut-off grades for a gold mining company**

One of the most studied decision variables in the technical mining literature regarding its estimation and optimization is the cut-off grade, where the most accepted objective function has been the maximization of NPV (Net Present Value). However, a considerable number of mining projects determine their cut-off grades using deterministic models that do not facilitate analysis based on uncertainty. In this study, a stochastic optimization model for cut-off grades is formulated for a gold deposit, taking into account the risks and uncertainties inherent in mining activities, with the purpose of maximizing the project's NPV for a company with underground mining operations. The selected methodology for the model is implicit stochastic optimization, employing a hybrid approach that combines a metaheuristic algorithm (Genetic Algorithm) and Monte Carlo simulation. The model's validation is conducted using real data to verify its industrial applicability and to offer an alternative to the commonly employed traditional models. The formulated model exhibits a shorter project life and a dynamic cut-off grade over time, resulting in variable annual revenues. Regarding profitability, a 21,142,372 USD increase is observed when comparing the mean NPV of the stochastic model with that of the deterministic model. These findings demonstrate the advantages of applying such models on an industrial scale to enhance project value.

**Keywords:** stochastic optimization, cut-off grade, Net Present Value, Genetic Algorithms, underground mining, gold.

# Contenido

	Pág.
<b>Resumen .....</b>	<b>IX</b>
<b>Lista de figuras.....</b>	<b>XIII</b>
<b>Lista de tablas .....</b>	<b>XIV</b>
<b>Introducción .....</b>	<b>2</b>
<b>1. Formulación y fundamentos de la investigación .....</b>	<b>6</b>
1.1 Planteamiento del problema.....	6
1.2 Justificación.....	8
1.3 Objetivos .....	9
1.3.1 Objetivo general.....	9
1.3.2 Objetivos específicos.....	9
1.4 Metodología .....	9
1.5 Alcance .....	10
1.6 Estructura del documento.....	11
<b>2. Marco teórico y estado del arte.....</b>	<b>13</b>
2.1 Planeamiento minero y minería subterránea .....	13
2.2 Concepto y estimación de la ley de corte .....	17
2.3 Concepto y estimación del Valor Presente Neto (VPN) .....	25
2.4 Optimización de la ley de corte.....	28
2.5 Modelos determinísticos para la optimización de la ley de corte.....	33
2.6 Modelos estocásticos para la optimización de la ley de corte.....	35
2.6.1 Metaheurísticas .....	39
2.7 Antecedentes .....	46
<b>3. Modelo de optimización propuesto.....</b>	<b>53</b>
3.1 Descripción general.....	53
3.2 Características y restricciones.....	54
3.3 Nomenclatura.....	56
3.4 Metodología de optimización estocástica implícita .....	58
3.5 Función objetivo .....	60
<b>4. Validación del modelo propuesto .....</b>	<b>64</b>
4.1 Modelo determinístico .....	64
4.2 Modelo estocástico.....	65
4.2.1 Principales resultados de la optimización.....	66
4.2.2 Análisis de resultados.....	68

---

<b>5. Conclusiones y trabajos futuros</b> .....	<b>71</b>
5.1 Conclusiones.....	71
5.2 Trabajos futuros .....	74
<b>A. Anexo: Información complementaria del modelo determinístico</b> .....	<b>77</b>
<b>B. Anexo: Información complementaria del modelo estocástico</b> .....	<b>82</b>
<b>Bibliografía</b> .....	<b>88</b>

## Lista de figuras

	Pág.
<b>Figura 2-1:</b> Esquema de operaciones mineras con producción de un solo mineral.....	14
<b>Figura 2-2:</b> Operaciones mineras subterráneas.....	15
<b>Figura 2-3:</b> Maximización de la utilidad y determinación gráfica de la ley de corte. ....	19
<b>Figura 2-4:</b> Estimación de la ley media y la ley de corte en una mina subterránea. ....	22
<b>Figura 2-5:</b> Curva típica de tonelaje-ley. ....	24
<b>Figura 2-6:</b> VPN y <i>LoM</i> vs Ley de corte. ....	34
<b>Figura 2-7:</b> Un breve panorama de las metaheurísticas. ....	40
<b>Figura 2-8:</b> Ilustración gráfica del Algoritmo Genético.....	43
<b>Figura 2-9:</b> Diagrama de flujo del algoritmo Recocido Simulado.....	44
<b>Figura 2-10:</b> Diagrama de flujo del Algoritmo Competitivo Imperialista. ....	46
<b>Figura 3-1:</b> Descripción del proceso extractivo de la compañía. ....	54
<b>Figura 3-2:</b> Esquema básico de la optimización estocástica implícita con el uso de Algoritmos Genéticos. ....	60
<b>Figura 4-1:</b> Representación gráfica de la optimización de <i>@Risk (RISKOptimizer)</i> . ....	67
<b>Figura 4-2:</b> Densidad de probabilidad del VPN del modelo optimizado vs modelo original. ....	67
<b>Figura 4-3:</b> Política de ley de corte optimizada para la vida de la mina ( <i>LoM</i> ).....	68
<b>Figura 5-1:</b> Curva tonelaje-ley del modelo determinístico. ....	78
<b>Figura 5-2:</b> Curvas tonelaje-ley del modelo estocástico.....	82
<b>Figura 5-3:</b> Configuración de la optimización en el software <i>@Risk</i> .....	85
<b>Figura 5-4:</b> Progreso de la optimización en el software <i>@Risk</i> . ....	85

## Lista de tablas

	Pág.
<b>Tabla 2-1:</b> Características y limitaciones principales de los trabajos previos.....	49
<b>Tabla 3-1:</b> Nomenclatura de valores utilizados en el modelo. ....	56
<b>Tabla 4-1:</b> Datos de entrada del modelo determinístico. ....	65
<b>Tabla 4-2:</b> Resultados del modelo determinístico.....	65
<b>Tabla 4-3:</b> Datos de entrada utilizados en el modelo propuesto.....	65
<b>Tabla 4-4:</b> Resumen de la optimización de <i>@Risk (RISKOptimizer)</i> . ....	66
<b>Tabla 4-5:</b> Valores del VPN mínimo, máximo, media y desviación estándar del modelo estocástico. ....	68
<b>Tabla 5-1:</b> Datos de la curva tonelaje-ley del modelo determinístico.....	79
<b>Tabla 5-2:</b> Flujo de caja del modelo determinístico. ....	80
<b>Tabla 5-3:</b> Datos de las curvas tonelaje-ley del modelo estocástico.....	83
<b>Tabla 5-4:</b> Flujo de caja del modelo estocástico.....	86



# Introducción

Los modelos convencionales han sido, en gran parte, los más utilizados en los proyectos mineros para sus procesos de planificación. La utilización constante de parámetros estáticos ha conducido a la creación de planes rígidos e inflexibles que no logran reflejar el valor real de la operación, lo que se traduce en resultados que en la práctica tienen una probabilidad baja o nula de suceder. Así, el principal obstáculo que se ha enfrentado en la evaluación de proyectos mineros se refiere a la incorporación del riesgo. Para ello, la optimización estocástica de leyes de corte se presenta como una herramienta esencial para las compañías mineras, las cuales establecen dentro de sus objetivos maximizar la rentabilidad de las operaciones, en un entorno operativo cada vez más complejo y competitivo.

En los últimos años, la industria minera se ha enfrentado a retos considerables por el agotamiento de las leyes del mineral (Prior *et al.*, 2012; Topp *et al.*, 2008). Diversos estudios realizados en todo el mundo muestran que la ley de cabeza del cobre, el oro, el platino y otros metales seguirá disminuyendo a finales de 2030 (Batterham & Elvish, 2009; Rule *et al.*, 2015). Otros problemas surgen de la naturaleza finita de los cuerpos mineralizados. Las explotaciones mineras basadas en ellos deben tener una duración limitada, característica que introduce complicaciones en el análisis económico (Lane, 1988). Adicionalmente, al ser la minería una actividad productiva, presenta también desafíos asociados a los ciclos económicos, los cuales suelen caracterizarse por las fases de recesión, depresión, recuperación y expansión (Bragin *et al.*, 2021).

La planificación minera, definida como una acción mediante la cual se crea un plan de trabajo que permite extraer el mineral de interés de un yacimiento de la manera más óptima posible, se ha enfocado en afrontar los retos inherentes a este tipo de actividad, considerando diversas variables para proyectar el desarrollo de las minas durante la vida útil de las mismas (Franco-Sepúlveda *et al.*, 2019). Limitados por la geología, la ingeniería minera y los aspectos medioambientales, el diseño y la planificación de las minas suele

ser un ejercicio que busca un resultado económico (Osanloo *et al.*, 2008). El planeamiento minero es entonces un proceso de revisión y procesamiento de datos, en el cual es posible tomar cualquier conjunto de valores sensibles como punto de partida y luego refinarlos repetidamente hasta que los planes sean aceptables (lo que usualmente significa repetir este proceso hasta que no se tenga una forma aparente para conseguir mejoras futuras). Las leyes de corte son solo un elemento en este proceso que involucra la progresión óptima a través del cuerpo mineralizado (Lane, 1988).

De acuerdo con King (2018), una decisión específica que se toma en cada período se agrupa y se denomina política, mientras que un grupo de políticas se denomina una estrategia. Para optimizar una decisión (o política o estrategia), necesitamos tener un objetivo o función objetivo. Un proceso de optimización es una forma de tomar decisiones para alcanzar el objetivo del proyecto. Así, el proceso de optimización de la ley de corte optimizará la política de la ley de corte de forma que se maximice el Valor Presente Neto (función objetivo).

La ley de corte tiene en cuenta la heterogeneidad natural de la calidad del material (grado o contenido de metal) dentro de un recurso mineral. Clasifica el material valioso (mineral) y el material de desecho (estéril) en la situación económica actual (Khan & Asad, 2021). El material del cuerpo mineralizado debe programarse entonces para su extracción como mineral si, y solo si, la decisión de tratarlo aumenta el valor económico global de la operación, esto es, si proporciona una contribución a la utilidad (Lane, 1988). Desde el punto de vista de la gestión de los recursos minerales agotables, la ley de corte es la ley con la que el material del recurso cubrirá todos los costos asociados a su agotamiento hasta convertirse en un producto comercializable, según un plan general que define las cantidades, los costos y las eficiencias durante un periodo definido (Osanloo *et al.*, 2008).

La información económica, operativa o técnica y geológica constituye el conjunto de entradas de los modelos para definir la política de la ley de corte de explotación minera (Ataei & Osanloo, 2003a; Lane, 1964, 1988). La ley de corte tiene una relación directa con el tonelaje de material extraído, el tonelaje y la ley media del material procesado, el tamaño de la operación minera y, en consecuencia, los costos de capital, los costos de explotación y los impactos medioambientales y socioeconómicos (Rendu, 2014). La incertidumbre en

los proyectos de inversión minera, relacionada con la fluctuación de precios y la variabilidad en los costos, ha generado como resultado que este tipo de inversiones se realice en condiciones de riesgo hacia el futuro. Por este motivo, y con el propósito de maximizar el rendimiento de las inversiones, la ley de corte crítica ha adquirido un papel fundamental como criterio de decisión para evaluar la viabilidad económica de cada proyecto (Franco-Sepúlveda & Velilla-Avilez, 2014).

De esta manera, el presente trabajo tiene como finalidad formular un modelo de optimización estocástica de leyes de corte para un depósito aurífero que considere los riesgos e incertidumbres propias de la actividad minera, con el propósito de maximizar el Valor Presente Neto del proyecto de una compañía con operaciones mineras subterráneas, minimizar los riesgos asociados y facilitar la toma de decisiones, para aumentar de esta manera el valor del proyecto.



# 1. Formulación y fundamentos de la investigación

El Capítulo 1 tiene por objetivo exponer el planteamiento del problema de una manera descriptiva, al igual que la justificación por la cual se realiza el estudio y las motivaciones por las que se desarrolla el presente trabajo. Posteriormente, se presentan los objetivos (general y específicos), los cuales definen el propósito general del proyecto. Seguidamente, se muestra la metodología a utilizar para lograr los objetivos propuestos y el alcance del trabajo. Finalmente, se presenta la estructura general del documento definida desde la estructuración teórica y metodológica de la investigación.

## 1.1 Planteamiento del problema

Los problemas de optimización suelen ser habituales en las aplicaciones ingenieriles e industriales. De manera general, la minimización de costos y tiempo y la maximización de beneficios y eficiencia, por nombrar algunas variables, se han convertido en objetivos principales para la solución de dichos problemas (Yang, 2013). En el caso de los proyectos mineros (e incluso de otras industrias), un proceso de optimización se define como una forma de tomar decisiones para lograr el objetivo del proyecto (King, 2018). Una de las variables de decisión más estudiada en la literatura técnica minera en relación a su estimación y optimización para depósitos metálicos es la ley de corte, en la que la función objetivo más aceptada ha sido la maximización del Valor Presente Neto (VPN) de los flujos de caja futuros (Rendu, 2014).

El término “ley” es usado para describir la fracción de un constituyente valioso (como un metal) que está contenida en una masa de roca. Consecuentemente, la “ley de corte” es la ley mínima requerida en una masa de roca para que este constituyente pueda ser extraído en un rango económicamente aceptable y se genere un posterior beneficio

(Thompson & Barr, 2014). De esta manera, la ley de corte se establece como un parámetro fundamental en el desarrollo de proyectos mineros, siendo relevante en la determinación de la viabilidad económica, su rentabilidad y la vida de la mina (Arteaga, 2015; Rendu, 2014).

En términos generales, la búsqueda y/o creación de algoritmos a partir de diferentes técnicas y modelos ha sido establecida como la base para alcanzar la optimización en los problemas de interés y, a partir de estos, se han definido diversas comparaciones de acuerdo con el rendimiento y resultados entregados (Dullaert *et al.*, 2007; Melián *et al.*, 2003). Teniendo en cuenta la importancia de la optimización de la ley de corte y los múltiples factores que se consideran en este proceso (económicos, técnicos, ambientales, operacionales, entre otros), distintos autores se han aproximado a la solución del problema apoyados tanto en técnicas y modelos tradicionales (Asad, 2002, 2005, 2007; Bascetin & Nieto, 2007; Dagdelen, 1992, 1993; Dagdelen & Kawahata, 2008; King, 2001, 2011; Lane, 1964, 1988; Osanloo *et al.*, 2008), como en nuevas técnicas de optimización implementadas en los últimos años (Azimi & Osanloo, 2011; Cetin & Dowd, 2016; Kumral, 2013; Mohammadi *et al.*, 2015). Por un largo tiempo, los modelos determinísticos basados en programación lineal y técnicas heurísticas han sido abordados para optimizar la ley de corte de los proyectos mineros; sin embargo, estos algoritmos son menos eficientes porque ellos tienden a caer en óptimos locales, un problema que técnicas más avanzadas como las metaheurísticas atienden para su solución (Franco-Sepúlveda *et al.*, 2019).

Teniendo en cuenta lo anterior, la determinación de la ley de corte óptima involucra el análisis de diferentes alternativas en relación con los métodos y variables involucradas en el proceso. A partir de esto, surgen tres etapas que permiten abordar la temática principal, las cuales se presentan a continuación:

- i. Optimizar las leyes de corte a través de un control eficiente de las variables estocásticas, como la volatilidad de los precios del metal (oro) en el mercado, la incertidumbre geológica y la incertidumbre operacional.
- ii. Identificar algoritmo(s) apropiado(s) y un eficiente solucionador numérico que permitan reducir el tiempo y número de simulaciones para alcanzar la optimización de leyes de corte.

- iii. Comparar la aplicación de modelos estocásticos y determinísticos para la optimización buscada.

De esta manera, el problema de investigación propuesto tiene relación con el proceso de optimización descrito anteriormente, el cual busca dar solución a la siguiente pregunta: ¿Es factible, a partir de un modelo estocástico y a escala industrial, optimizar la ley de corte de una operación minera aurífera con el objetivo de maximizar el VPN del negocio minero, teniendo en cuenta las variables estocásticas asociadas a esta?

## 1.2 Justificación

A partir de la revisión bibliográfica, se ha evidenciado que el principal objetivo de optimizar la ley de corte es maximizar el VPN, razón por la cual su correcta selección es fundamental para cualquier operación minera (Ahmadi & Shahabi, 2018; Ataei & Osanloo, 2004; Lane, 1988; Rendu, 2014; Thompson & Barr, 2014). Actualmente, un gran número de proyectos mineros consideran leyes de corte estáticas a través de la vida de la mina y su determinación se realiza a través del uso de métodos tradicionales o determinísticos, lo cual impide un análisis basado en la incertidumbre y la obtención de posibles escenarios bajo diferentes parámetros. Sin embargo, diferentes autores han comprobado que considerar leyes de corte estáticas es un error, dado que pueden surgir diversos factores económicos y operativos durante la ejecución de los proyectos que hacen necesario tener una ley de corte para cada escenario presentado, razón por la cual técnicas como las metaheurísticas pueden ser útiles para manejar eficientemente las variables estocásticas que se presentan, como la volatilidad de los precios, la incertidumbre geológica, tecnológica, entre otras (Franco-Sepúlveda *et al.*, 2019).

Se ha demostrado que las consecuencias de incorporar el conocimiento económico y la incertidumbre en el proceso de optimización de la ley de corte son opuestas a las obtenidas en los modelos tradicionales determinísticos. Estos nuevos modelos producen valoraciones, sensibilidades y estrategias óptimas de leyes de corte que pueden ser usadas para mejorar la evaluación de proyectos, la operación de la mina, la determinación de la estrategia de cobertura, el diseño de la mina y las decisiones de gestión del riesgo (Thompson & Barr, 2014). Sin embargo, a pesar de los múltiples estudios realizados en los

últimos años con la implementación de técnicas como las metaheurísticas, el enfoque de los autores se ha orientado en mayor medida hacia la minería a cielo abierto (Ahmadi & Shahabi, 2018; Arteaga, 2015; Ataei & Osanloo, 2004; Azimi & Osanloo, 2011; Niemann-Delius & Sattarvand, 2008; Thompson & Barr, 2014). Reconociendo los aportes de las investigaciones en este tipo de minería, se propone de manera complementaria realizar un modelo de optimización para la estimación de la ley de corte en una compañía con operaciones mineras subterráneas, con el objetivo de verificar la aplicabilidad de nuevas técnicas en este tipo de explotación y servir como modelo para futuros estudios.

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 Objetivo general**

Formular un modelo de optimización estocástica de leyes de corte para un depósito aurífero que considere los riesgos e incertidumbres propias de la actividad minera, con el propósito de maximizar el Valor Presente Neto del proyecto de una compañía con operaciones mineras subterráneas.

### **1.3.2 Objetivos específicos**

- a. Identificar las principales variables e incertidumbres asociadas a la optimización de leyes de corte para depósitos auríferos.
- b. Seleccionar un algoritmo para la optimización de las leyes de corte de acuerdo con las variables establecidas.
- c. Aplicar el modelo formulado a una compañía aurífera con operaciones mineras subterráneas.
- d. Comparar los resultados obtenidos entre los modelos determinísticos (o línea base) y estocásticos para la optimización de las leyes de corte y la rentabilidad del proyecto minero (como una función del VPN).

## **1.4 Metodología**

- a. Revisión del estado del arte de modelos de optimización de leyes de corte principalmente para depósitos metálicos, aquellos que tienen como objetivo maximizar el Valor Presente Neto y/o han sido desarrollados con un enfoque en

operaciones mineras subterráneas. La búsqueda de información bibliográfica será realizada en bases de datos académicas especializadas.

- b. Análisis de datos de compañía minera aurífera con operaciones subterráneas, en relación con la línea base empleada en la definición de leyes de corte y la rentabilidad del proyecto en función del Valor Presente Neto.
- c. Análisis de modelos estocásticos de referencia que permita identificar y definir las principales variables e incertidumbres asociadas a la optimización de leyes de corte para depósitos auríferos que serán consideradas en el modelo a desarrollar.
- d. Selección del algoritmo de optimización metaheurística de las leyes de corte de acuerdo con las variables establecidas, adaptando el mismo al caso de estudio con el propósito de emplear el método de programación estocástica implícita cuyo objetivo sea maximizar el Valor Presente Neto del proyecto.
- e. Definición de escenarios de simulación a partir de las variables estocásticas seleccionadas y los datos del proyecto minero, con posterior ejecución de las simulaciones de Montecarlo en el software *@Risk*.
- f. Análisis comparativo de los resultados obtenidos con el modelo estocástico desarrollado y la línea base del proyecto, tanto de las leyes de corte optimizadas como de la rentabilidad del proyecto minero en función del Valor Presente Neto, que permita verificar la hipótesis sobre la cual se construye el modelo.

## 1.5 Alcance

El alcance del presente trabajo se fundamenta en el desarrollo de un modelo de optimización estocástica para leyes de corte de una compañía minera aurífera con operaciones subterráneas, estableciendo las variables asociadas a este proceso de acuerdo con la revisión de la bibliografía y el contexto en el cual se desarrolla la operación, que permita la selección y adaptación de un algoritmo metaheurístico con el cual se logren ensayar posibles decisiones y se evalúe su desempeño ante multiplicidad de posibles eventos aleatorios a través los escenarios planteados y las simulaciones de Montecarlo. Los resultados a obtener estarán en función de la maximización del Valor Presente Neto del proyecto, es decir, de aumentar los beneficios esperados y minimizar los riesgos asociados al planeamiento de la actividad minera, a corto y largo plazo.

## **1.6 Estructura del documento**

El presente documento se encuentra organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se define el marco teórico y se presenta el estado del arte. En el Capítulo 3 se formula y describe el modelo de optimización propuesto. En el Capítulo 4, se valida el modelo propuesto en un caso de estudio real de un proyecto minero aurífero con operaciones subterráneas. Finalmente, en el Capítulo 5 se enumeran las conclusiones y se presentan las recomendaciones propuestas para trabajos futuros.



## **2. Marco teórico y estado del arte**

El Capítulo 2 tiene por objetivo definir el marco teórico del presente trabajo y presentar el estado del arte, a través de la revisión bibliográfica de diversas investigaciones que han abordado la temática de optimización de leyes de corte. Inicialmente, se destaca el papel del planeamiento minero en la actividad minera, realizando un enfoque principal en la minería subterránea. Luego, se aborda el concepto de la ley de corte, reconociendo la importancia de este parámetro en las operaciones mineras. Posteriormente, se presenta el concepto y estimación del Valor Presente Neto (VPN), como principal indicador financiero aceptado en los estudios de optimización de las leyes de corte. Seguidamente, se aborda el proceso de optimización de la ley de corte, definiendo los modelos determinísticos y estocásticos utilizados con mayor frecuencia y resaltando las metaheurísticas como los algoritmos asociados a la Inteligencia Artificial con mayor desarrollo en este campo de investigación. Finalmente, se presentan los antecedentes de investigaciones que han planteado objetivos similares al presente trabajo, describiendo las características y limitaciones principales de los estudios con mayor afinidad.

### **2.1 Planeamiento minero y minería subterránea**

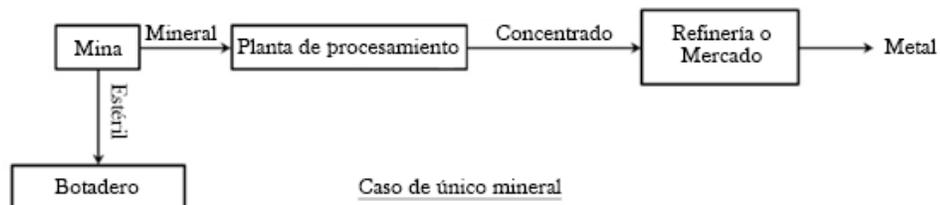
Un yacimiento se define como una concentración de un mineral o un agregado de minerales de los que se puede extraer económicamente un componente valioso, como un metal (Thompson & Barr, 2014). De manera complementaria, una mina es una fuente de suministro de mineral a una serie de procesos que convierten el mineral en bruto en un producto rentable (Asad & Dimitrakopoulos, 2013). La minería es entonces el proceso de extracción de este material natural de la tierra para obtener un beneficio y la industria minera puede considerarse como una industria cuyo principal objetivo es la concentración: la concentración progresiva de los minerales hasta una forma en la que sean comercializables (Lane, 1988; Newman *et al.*, 2010).

La minería es una actividad económica a corto plazo con efectos a largo plazo, teniendo en cuenta, además, que los objetivos de desarrollo sostenible han ampliado la responsabilidad social de los accionistas de las minas (Mutti *et al.*, 2012). De esta manera, ha tenido un papel importante en la configuración del desarrollo humano, no solo desde el punto de vista tecnológico, sino que también ha influido significativamente en los acuerdos de trabajo, la falta de seguridad, el trabajo infantil, la rivalidad y las luchas internas (Hajkowicz *et al.*, 2011; Laurence, 2011).

La minería de superficie, que puede utilizarse cuando el mineral está cerca de la superficie de la tierra, es un método más antiguo y productivo que la minería subterránea. A pesar del costo relativamente menor de la infraestructura fija de una mina a cielo abierto, las minas de superficie requieren una importante extracción de estéril. En los casos en los que la explotación de una mina se considere o se convierte en un costo prohibitivo, se inicia la minería subterránea (Newman *et al.*, 2010).

La minería subterránea se refiere a la extracción económica sistemática de un recurso mineral de forma segura y económica mediante operaciones subterráneas (Fathollahzadeh *et al.*, 2021). Este proceso implica la excavación selectiva de material estéril para acceder a la roca que contiene minerales, conocida como mena. A continuación, el material se envía a la planta para su procesamiento con el fin de recuperar los minerales económicos para su eventual comercialización con el fin de generar ingresos comerciales, tal como se representa en la Figura 2-1. La extracción beneficiosa del mineral se determina por el valor de la mena menos los costos de extracción y procesamiento en un plazo determinado (Chimunhu *et al.*, 2022).

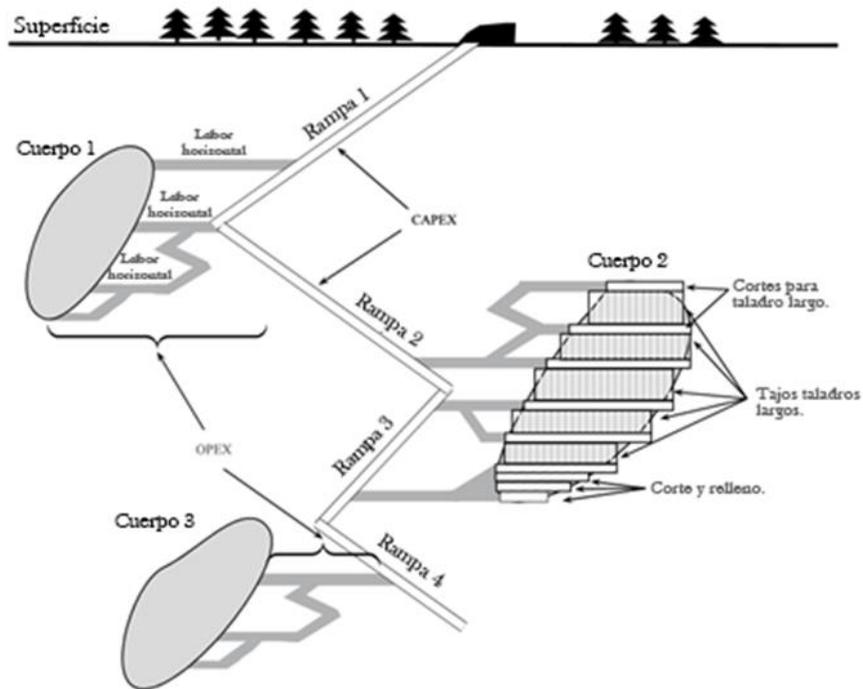
**Figura 2-1:** Esquema de operaciones mineras con producción de un solo mineral.



Fuente: (Khan & Asad, 2021).

La literatura sobre minería subterránea es más reciente, en parte debido a la complicada naturaleza de las operaciones subterráneas (Newman *et al.*, 2010). Estas operaciones pueden dividirse en dos grupos de actividades: actividades de desarrollo y actividades de producción. Para acceder a los bloques mineralizados, se realiza el diseño para la excavación de rampas (también llamadas inclinaciones) y galerías, que son cortes horizontales que permiten acceder a los bloques desde la rampa. Estas actividades de excavación se llevan a cabo en zonas de roca estéril, no producen ingresos y generan gastos considerables. Sin embargo, estas actividades de desarrollo son imprescindibles para la explotación de los bloques mineralizados. Las actividades de desarrollo se dividen en dos categorías: el desarrollo de la infraestructura común (CAPEX, que significa *Capital Expenditure*) y el desarrollo operativo (OPEX, que significa *Operational Expenditure*) (Martinelli *et al.*, 2020). A continuación, la Figura 2-2 presenta un esquema de las operaciones mineras subterráneas de acuerdo con la descripción anterior:

**Figura 2-2:** Operaciones mineras subterráneas.



Fuente: (Martinelli *et al.*, 2020)

Las limitaciones de capacidad son habituales en las minas subterráneas. Entre ellas se encuentran las limitaciones impuestas por la geometría del yacimiento, las condiciones

geotécnicas, la capacidad de los equipos y del transporte, los requisitos de ventilación, el método de extracción, el tamaño y el tipo de equipo de extracción, las normas de seguridad e higiene y otras restricciones que limitan la producción de un bloque, una sección de la mina o la mina en su conjunto (Rendu, 2014).

Las constantes mejoras en el hardware, software y las técnicas de solución, han permitido tener modelos más realistas y con más detalles. Por ejemplo, la planificación estocástica de la mina es relevante teniendo en cuenta los largos horizontes temporales, las grandes inversiones iniciales y el presupuesto operativo necesario, al igual que las fluctuaciones históricas de los precios de los metales. Además, el porcentaje de mineral contenido en cada bloque de un yacimiento es incierto, y la determinación del contenido de mineral con precisión conlleva costos considerables (Newman *et al.*, 2010).

La optimización de la definición del yacimiento mineral tiene importantes consecuencias en la valoración, la financiación, el diseño, la explotación y las decisiones de gestión del riesgo que toman las empresas mineras, al tiempo que tiene implicaciones para las políticas públicas (Thompson & Barr, 2014). Tradicionalmente, un conjunto tridimensional de bloques forma el yacimiento, donde se almacenan los atributos mineros (tonelaje, materiales, leyes, densidad, entre otros) relacionados a este. Sin embargo, a lo largo del yacimiento, la variación de la ley (calidad) y el tonelaje (cantidad) estimados es natural, y esta variación representa la incertidumbre de la oferta. Estas variaciones afectan el valor económico y la viabilidad operativa de la explotación minera (Paithankar *et al.*, 2021). Se ha comprobado que el cierre prematuro de las explotaciones mineras se debe principalmente a una mala descripción (subestimación o sobreestimación) del yacimiento o a la previsión de los precios del metal (Baker & Giacomo, 1998; Vallee, 2000).

Reconociendo la importancia del planeamiento minero para este tipo de actividad, se ha definido que los principales elementos asociados a este son el método de extracción (determina la logística para alcanzar y obtener el mineral del cuerpo mineralizado), los planes de la mina (definen la secuencia de extracción y especifica dónde se iniciará y cómo progresará a través del cuerpo mineralizado durante la vida de la mina), la escala de la operación (está definida por las capacidades de los tres componentes principales: la mina, la planta de tratamiento y el mercado) y la política de la ley de corte (decide qué partes del

cuerpo mineralizado deben clasificarse y tratarse como mineral). La combinación de estos elementos son el mayor determinante de la economía general; la fase conceptual de planeamiento es entonces la fase más crítica de todo nuevo desarrollo minero (Lane, 1988).

Mientras que el diseño de la mina y sus fases son fijados generalmente una vez en la operación, la estrategia de ley de corte para el secuenciamiento de la producción de la mina es flexible y puede ser ajustado en respuesta a las fuerzas del mercado (Thompson & Barr, 2014). A medida que el estudio de factibilidad avanza, las propiedades del yacimiento se comprenden mejor gracias a las perforaciones adicionales y a la mejora de la modelación; se definen mejor los métodos de extracción y procesamiento; se cuantifican las limitaciones de la producción; se refinan los costos de capital y de operación; y se comprenden mejor los costos socioeconómicos, ambientales y de otro tipo. Todos estos cambios deben tenerse en cuenta a la hora de determinar la ley de corte (Rendu, 2014).

En la literatura actual existente, se puede observar que hay un potencial similar para la optimización de la ley de corte entre las minas a cielo abierto y las minas subterráneas, pero la optimización en las minas subterráneas es más complicada en comparación con las minas a cielo abierto. Esto se debe a la diferente naturaleza de la operación entre estos dos tipos de estrategias mineras. Más concretamente, en una mina a cielo abierto, una vez que se determina el tajo, todo lo que hay dentro del mismo se retira y se envía al molino o se desecha como residuo. En una mina subterránea, sin embargo, la forma de explotar el yacimiento depende del enorme número de restricciones que son inherentemente interactivas (Liu *et al.*, 2019). A pesar de que las políticas de ley de corte completas no son un requisito normal en la cotidianidad de las operaciones mineras, son importantes para la planificación minera a largo plazo. Las leyes de corte futuras afectan los requerimientos de desarrollo, la utilización de los equipos y la producción, al igual que el flujo de caja futuro, el recurso en el que se basa toda la planificación, hecho por el cual se resalta la relevancia de esta variable en el proceso minero (Lane, 1988).

## **2.2 Concepto y estimación de la ley de corte**

La ley de corte generalmente es definida como la cantidad mínima de producto valioso o metal que una tonelada métrica de material debe contener antes de que este material sea

enviado a la planta de procesamiento, lo cual permite distinguir entre el material que no debe ser minado o debe ser descartado con aquel que debe ser procesado (Rendu, 2014). Es decir, si la calidad del material en el depósito mineral se encuentra por encima de la ley de corte esta es clasificada como mineral, mientras que si se encuentra por debajo se clasifica como estéril, teniendo en cuenta que en este caso los costos operativos y fijos (administrativos) de la extracción, el procesamiento y el refinado o la comercialización de dicho material superan los posibles ingresos del metal producido (Asad & Topal, 2011; Dagdelen, 1992, 1993; Khan & Asad, 2021). Mientras que, en la mayoría de los casos, el estéril es transportado a los botaderos (incurriendo en el costo de minado que incluye la excavación y el transporte desde la mina), el mineral valioso es enviado a los flujos de procesos para trituración, molienda, concentración y refinación, a partir del cual se obtiene un producto final comercializable y del cual se espera un posterior beneficio (Asad *et al.*, 2016; Lane, 1964; Taylor, 1972).

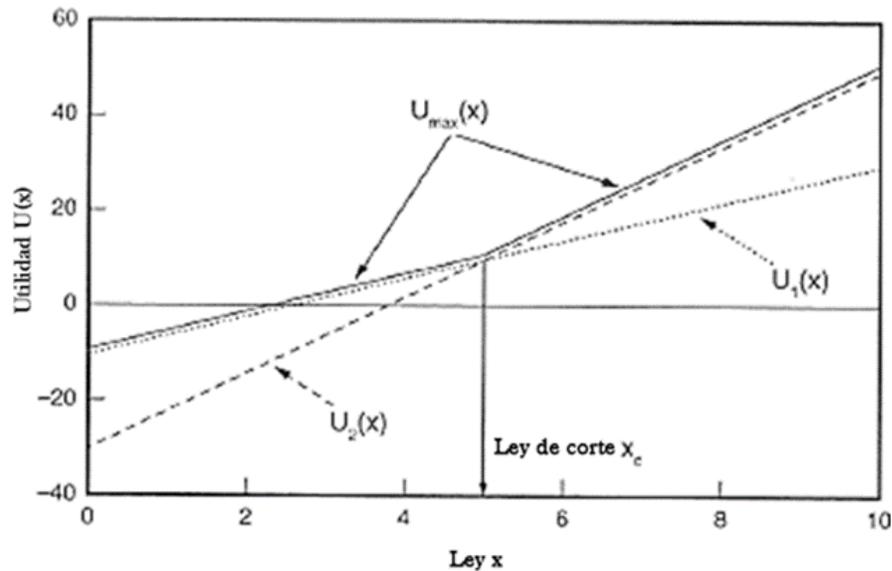
Debido a la dependencia de parámetros técnicos y económicos en la ley de corte, su determinación se considera uno de los principales pasos en el diseño y la planificación estratégica de las operaciones mineras, y ha sido considerado como uno de los problemas más complejos a los que se enfrentan los ingenieros (Azimi *et al.*, 2013; Rahimi & Ghasemzadeh, 2015). Como resultado, el cálculo preciso de este valor utilizando tanto las características económicas como las del mineral, puede aumentar el Valor Presente Neto (VPN) y la utilización de los recursos de un yacimiento (Liu *et al.*, 2019; Sotoudeh *et al.*, 2021). La determinación de la ley de corte es una tarea clave para las empresas mineras. Se utiliza para delimitar el yacimiento, para inscribir las reservas en el registro estatal y para planificar las operaciones (Bragin *et al.*, 2021).

La aplicación de la teoría de ley de corte tiene mayor impacto económico durante la fase de planeamiento minero temprano que en cualquier otra fase de la vida de la mina, teniendo en cuenta que en esta fase se deciden los principales elementos de la estrategia de explotación y culmina en la preparación de un estudio final de factibilidad el cual provee las bases para el diseño ingenieril detallado (Lane, 1988). La elección de una ley de corte se rige principalmente por objetivos financieros. Sin embargo, las consecuencias de la elección de una ley de corte determinada son complejas y no todas de carácter financiero.

Al estimar las leyes de corte, hay que tener en cuenta todas las variables de control (Rendu, 2014).

Como lo explica Rendu (2014) en su texto “*An introduction to cut-off grade estimation*”, la selección de una ley de corte es equivalente a elegir el valor de un parámetro o un conjunto de parámetros definidos geológicamente. Para su determinación, el autor plantea una formulación matemática en términos de la utilidad, en la que compara dos posibles destinos (procesos) para el material y establece que el proceso que debe seleccionarse es aquel en el que se maximiza la utilidad. La Figura 2-3, muestra la relación entre la utilidad máxima ( $U_{max}(x)$ ), las utilidades de los procesos 1 ( $U_1(x)$ ) y 2 ( $U_2(x)$ ), y la ley de corte resultante ( $x_c$ ):

**Figura 2-3:** Maximización de la utilidad y determinación gráfica de la ley de corte.



Fuente: (Rendu, 2014).

De manera complementaria, Rendu (2014) establece un modelo que representa la definición clásica de la ley de corte, tal como se puede apreciar en la Ecuación (2.1):

$$x_c = \frac{M+P+O}{r \cdot (V-R)} \quad (2.1)$$

Donde,  $M$  hace referencia al costo de minado por tonelada métrica,  $P$  al costo de procesamiento,  $O$  a los costos generales,  $r$  es la proporción de producto valioso recuperado del material minado,  $V$  es el valor unitario o precio de venta del producto valioso y  $R$  son los costos de refinación.

En general, los modelos de cálculo de la ley de corte consideran los parámetros económicos, geológicos y operativos como entradas (King, 2001; Taylor, 1972). Adicionalmente, una política de ley de corte describe un programa o una secuencia de leyes de corte a lo largo de la vida de una operación minera, junto con la correspondiente cantidad (mineral y estéril) que debe extraerse, la calidad (ley) del mineral enviado para su procesamiento y la cantidad de metal que debe refinarse (Asad *et al.*, 2016; Hirai *et al.*, 1987; Marques & Costa, 2013). Por lo tanto, vinculándose al objetivo global de una empresa minera, esta política constituye la base de los flujos de caja y del VPN resultante a lo largo de la vida de la explotación (Asad *et al.*, 2016; Githiria & Musingwini, 2019).

Los costos que se incluyen en el cálculo de la ley de corte son objeto de debate y suelen cambiar a lo largo de la vida del proyecto. Mientras una empresa sigue recuperando los costos de capital iniciales, se puede utilizar una ley de corte presupuestaria. Esta incluirá los costos generales, así como un porcentaje adicional para recuperar rápidamente los costos de capital iniciales. En las etapas finales de la mina, los costos de desarrollo son mínimos y se pueden explotar ciertas zonas que antes se consideraban por debajo de la ley de corte (Border, 1991). Esto se denomina ley de corte marginal (Lane, 1988).

Otro concepto frecuentemente utilizado es el de las leyes de corte mínimas o de equilibrio (*breakeven cut-off grades*), las cuales se aplican a situaciones en las que solo se tienen en cuenta los costos directos de explotación, mientras que no se tienen en cuenta las limitaciones de capacidad, los flujos de caja no se descuentan, ni se tienen en cuenta los costos de oportunidad ni otras consecuencias, financieras o de otro tipo, que la modificación de la ley de corte puede tener en los programas de extracción y tratamiento y en los flujos de caja (Rendu, 2014). Es evidente que en la política de la ley de corte derivada del modelo de equilibrio, se presenta como defecto fundamental no solo que se ignora la distribución de ley de corte de la mineralización disponible, sino que también se

ignoran las capacidades operativas y, en consecuencia, conduce a un programa de leyes de corte que permanecen constantes a lo largo de la vida de la operación (Taylor, 1972).

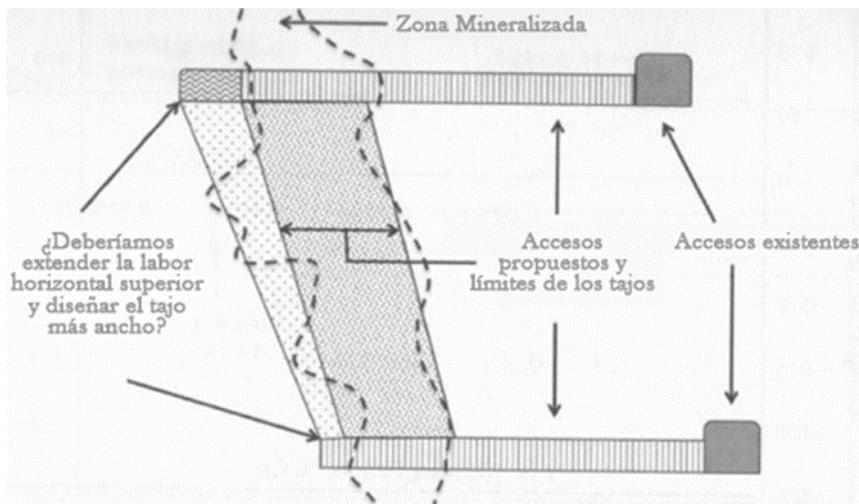
La ley de corte se considera el principal factor técnico y económico de la explotación minera, y desempeña un papel importante en la toma de decisiones relativas al desarrollo sostenible de la minería, el volumen de las operaciones de extracción y la rentabilidad de las operaciones de transformación. Teniendo en cuenta el alcance de las actividades mineras, las variaciones del precio de los minerales y la presencia de metales valiosos, se debe determinar y optimizar la ley de corte (Ahmadi, 2018). La ley de corte es uno de los parámetros más sensibles que pueden tener un impacto significativo en el VPN y el flujo de caja de proyectos (Ahmadi & Bazzazi, 2019). La consideración fundamental en la determinación de esta variable es la solución intermedia entre los niveles de precios presentes y futuros. Además, las actividades de cobertura dependen de contratos a futuro (Thompson & Barr, 2014).

El desarrollo sostenible, en general, es la combinación de un mejor desarrollo socioeconómico y una mayor protección del medio ambiente. Los parámetros ambientales, culturales y sociales se consideran los principales factores del desarrollo sostenible (Rahimi & Ghasemzadeh, 2015). Las empresas mineras aplican cada vez más las bases del desarrollo sostenible y existe un equilibrio entre la determinación de la ley de corte y la práctica de la minería sostenible (Franks *et al.*, 2011; Uqaili & Harijan, 2012). De hecho, para obtener las leyes de corte óptimas y el máximo VPN, los impactos sociales y ambientales deben integrarse en el diseño de la mina y en sus procesos (Asad & Topal, 2011; Mansouri *et al.*, 2014; Osanloo *et al.*, 2008). La determinación de las leyes de corte óptimas se cuenta como uno de los principales retos en los principios de desarrollo sostenible de la minería y en las primeras investigaciones no se tuvieron en cuenta sus requisitos (Khodayari & Jafarnejad, 2012; Li & Yang, 2012; Rashidinejad *et al.*, 2008).

En las minas metálicas subterráneas, la extracción avanza nivel por nivel y tajo por tajo en un nivel determinado. En la mayoría de los casos, la ley del mineral varía en función de la ubicación, y cada zona tiene su distribución local de la ley, cuya media y varianza difieren en cierta medida de las de otras zonas. Cuando la variación de la distribución local de la ley es relativamente alta, utilizar la distribución global de la ley para determinar la mejor ley de corte en diferentes periodos de explotación será poco realista y los resultados no serán

óptimos. En estos casos, la selección de la ley de corte para un periodo de explotación concreto, un año, por ejemplo, debe estar relacionada con la distribución local de la ley de la zona que se va a explotar en ese periodo. Además, la ley de corte para cada periodo/zona de explotación no debe ser optimizado como un caso aislado e independiente de otros periodos/zonas, ya que la ley de corte de un periodo afecta a las decisiones de corte en periodos posteriores. Por lo tanto, el problema debe resolverse de forma dinámica teniendo en cuenta la distribución local de leyes en el proceso de toma de decisiones. Esta naturaleza del problema se ajusta a un esquema de programación dinámica (Gu *et al.*, 2010). La Figura 2-4 representa esquemáticamente la estimación de la ley de corte en una mina subterránea:

**Figura 2-4:** Estimación de la ley media y la ley de corte en una mina subterránea.

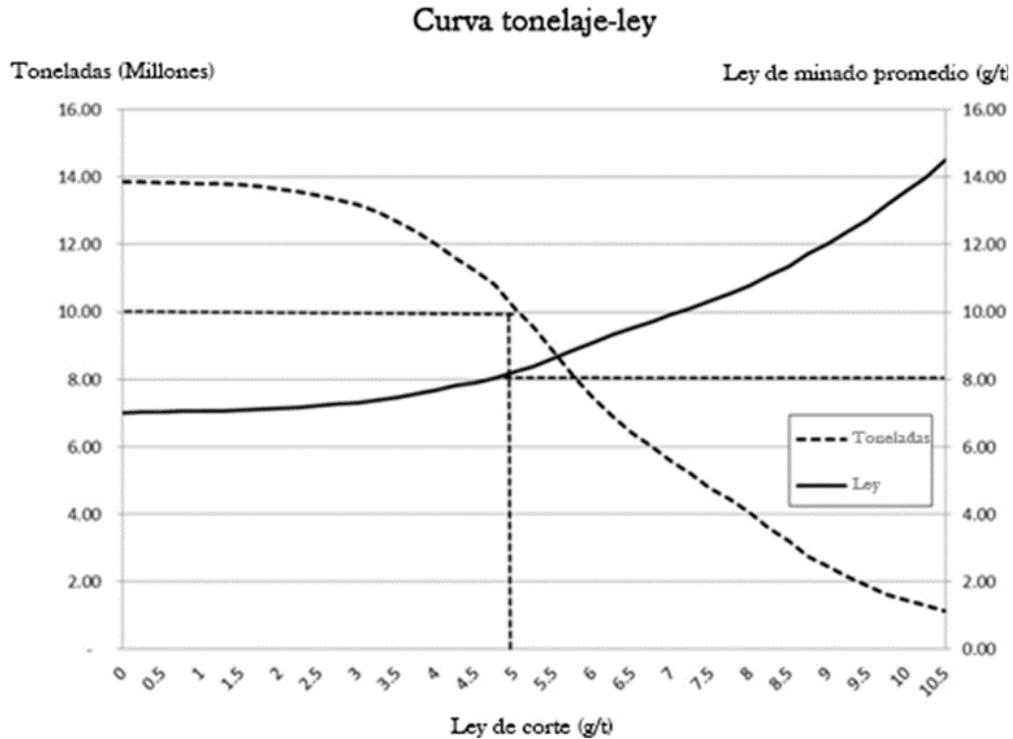


Fuente: (Rendu, 2014).

La ley de corte define la rentabilidad de una operación minera, así como la vida útil de la mina. Una ley de corte alta puede utilizarse para aumentar la rentabilidad a corto plazo y el VPN de un proyecto, con lo que posiblemente mejore el beneficio para los accionistas y otras partes interesadas, incluidos los gobiernos y las comunidades locales. Sin embargo, el aumento de la ley de corte también puede reducir la vida útil de la mina, lo que a su vez conlleva a reducir las oportunidades dependientes del tiempo, como las que ofrecen los ciclos de los precios. Una vida más corta de la mina también puede dar lugar a un mayor impacto socioeconómico con la reducción del empleo a largo plazo y la disminución de los

beneficios para los empleados y las comunidades locales. Puede considerarse la posibilidad de aumentar la ley de corte para reducir el riesgo político asegurando un mayor rendimiento financiero en un periodo de tiempo más corto. La ley de corte puede aumentarse cuando los precios de los metales suben si es necesario para reforzar la posición financiera de la empresa y reducir el riesgo de fracaso cuando los precios de los metales bajan. A la inversa, la ley de corte puede reducirse durante los periodos de precios altos para aumentar la vida de la mina y mantener el material de alta ley disponible para mantener la rentabilidad cuando los precios bajen. Las leyes de corte también pueden verse limitadas por los criterios de rendimiento económico o técnico impuestos por los préstamos bancarios y otras instituciones financieras (Rendu, 2014).

La curva tonelaje-ley de las reservas minerales, así como los parámetros económicos y operativos o técnicos, contribuyen a determinar la ley de corte, es decir, el criterio económico que guía el movimiento de los materiales desde la mina hasta las etapas posteriores dentro del sistema. Por lo tanto, el desarrollo de una política de ley de corte que se extienda a lo largo de la vida de una operación es primordial para el suministro regulado (que garantice la calidad) y consistente (que garantice la cantidad) de mineral a los flujos de procesamiento y a la refinería que convierten el mineral en metal como producto comercializable (Khan & Asad, 2019). Los precios dinámicos de los metales y los costos de explotación influyen en la limitación de las leyes de corte económicas, mientras que la distribución tonelaje-ley del yacimiento es el único factor que afecta al equilibrio de las leyes de corte (Asad, 2007). La Figura 2-5 representa una curva típica de tonelaje-ley, con una ley de corte de 5 g/t, utilizada frecuentemente en los procesos de cálculo de las leyes de corte:

**Figura 2-5:** Curva típica de tonelaje-ley.

Fuente: (Birch, 2016).

Dos aspectos deben ser considerados en la solución del problema asociado a la ley de corte. Uno es la naturaleza dinámica de la ley de corte respecto al tiempo, el otro es la naturaleza dinámica respecto al espacio. En otras palabras, la ley de corte óptima varía tanto en el tiempo como en el espacio de minado en el depósito, y los dos aspectos están interrelacionados (Gu *et al.*, 2010). Algunos académicos han propuestos los conceptos y métodos de cálculo de la ley de corte y de la ley del mineral bruto desde diferentes aspectos, entre ellos Xie (1998), Dong (2002), Osanloo & Ataei (2003), Mishra (2006), Bascetin & Nieto (2007), Asad (2007), entre otros. El estudio del método de cálculo asociado se ha realizado desde el punto de vista de la minería y la molienda y estos cálculos incluyen el análisis multifactorial, la regresión lineal y no lineal, el análisis de optimización dinámica, entre otros (He *et al.*, 2008). La modelación completa de las leyes de corte es un tema de ingeniería complejo y requiere conocimientos específicos y una buena comprensión de numerosas cuestiones. Aborda, además, los requisitos de desarrollo sostenible, las leyes medias y las recuperaciones del proceso, el producto

comercializable, el control de las capacidades y el tiempo del proyecto, los gastos de capital y de explotación en el diseño y la planificación de la mina (Rahimi & Ghasemzadeh, 2015).

El desarrollo de complejos modelos informáticos ha permitido mayor sofisticación en la determinación de las leyes de corte. Azimi *et al.* (2011) enumeran la teoría de control operacional, la programación dinámica estocástica, la programación no lineal, la programación lineal, el algoritmo genético y otros métodos de inteligencia artificial. Sin embargo, es cuestionable que estos enfoques no se hayan aplicado ampliamente en las operaciones mineras mismas (Birch, 2018). Se reconoce que una única ley de corte para toda la mina es muy limitada y los avances en geometalurgia y en el cálculo de costos por zonas han dado lugar a la optimización de la ley de corte de varias zonas de la mina, así como de varios dominios geológicos (Turner-Saad, 2011).

### **2.3 Concepto y estimación del Valor Presente Neto (VPN)**

La ley de corte es el factor más significativo en el planeamiento a largo plazo de una operación minera, al proveer la base para la determinación de la cantidad de mineral y estéril en un periodo dado (Cetin & Dowd, 2002). El objetivo de un modelo económico de una operación es proporcionar un medio para calcular los efectos de los cambios en determinadas variables. Para los fines actuales, es necesario poder calcular los efectos de los cambios en las leyes de corte, los rendimientos, los precios y los costos en los flujos de caja de la operación minera. En la práctica, el desarrollo de un modelo de costos adecuado para cualquier mina requiere un estudio especial para determinar los elementos fijos y variables que son relevantes para los rangos de variación en estudio (Lane, 1988).

El objetivo más comúnmente aceptado en los estudios de optimización de la ley de corte es la maximización del Valor Presente Neto (VPN) de los flujos de caja futuros, es decir, la selección de una ley de corte está gobernada principalmente por objetivos financieros (Rendu, 2014). En este sentido, la optimización de la ley de corte respalda el objetivo final de una operación minera a través de la maximización del VPN (función objetivo) (Dagdelen, 1992). Maximizar el valor para el accionista es normalmente el objetivo de las grandes y pequeñas empresas mineras. Un excelente indicador del valor para el accionista es el VPN. Aunque existen algunas limitaciones asociadas a la incertidumbre que no se recogen

explícitamente en la medida del VPN, normalmente es un instrumento muy superior a los objetivos de cada departamento y a otras medidas financieras (como el periodo de retorno y la tasa interna de rendimiento). Este indicador permite una ponderación justa entre los costos de los distintos departamentos y también reconoce el valor temporal del dinero a lo largo de la vida del proyecto (King, 2011).

El VPN es el criterio estándar y más utilizado que incorpora un medio para tratar las condiciones económicas inestables e inciertas (Minnitt, 2003). Es decir, el VPN de un proyecto es el equivalente actual del flujo de caja que se espera sea generado por el proyecto, asumiendo que el dinero puede ser invertido o prestado a una tasa de descuento específico (por ejemplo,  $i = 10\%$ ) (Rendu, 2014). Matemáticamente, el VPN puede formularse de la siguiente manera, tal como se describe en la Ecuación (2.2):

$$VPN = \sum_{n=0}^N \frac{F_n}{(1+i)^n} \quad (2.2)$$

En la cual,  $N$  es la vida del proyecto (años),  $F_n$  es el flujo de caja en el periodo  $n$  y, finalmente,  $i$  es la tasa de descuento. A partir de esta formulación, el VPN se entiende también como la suma de los valores presentes de todos los flujos de caja futuros descontados por un tipo de interés adecuado, que debe ser como mínimo el costo del capital (Bootsma *et al.*, 2018; Minnitt, 2003). Sin embargo, tanto el VPN como la ley de corte disminuyen cuando el material es minado, procesado y refinado año tras año, es decir, al agotar el depósito, por lo que el plan de producción definido a partir de la ley de corte influencia en gran medida la rentabilidad global de las operaciones mineras (Asad & Topal, 2011; Dagdelen, 1992; Dagdelen & Mohammad, 1997; Lane, 1964, 1988; Mohammad, 1997; Rendu, 2014).

En los últimos años, se han realizado numerosos intentos de desarrollar modelos y relaciones capaces de calcular la optimización de la ley de corte para maximizar el VPN (Ahmadi & Shahabi, 2018). En estas relaciones, además de los factores económicos, también se tienen en cuenta limitaciones como la capacidad de extracción, la capacidad de procesamiento, la capacidad de fundición, el refinamiento y el valor temporal del dinero

(Lane, 1988; Thompson & Barr, 2014). Determinar las mejores opciones para maximizar el valor del proyecto exige que se tengan en cuenta diversas cuestiones (King, 2011).

Deben elaborarse directrices prácticas, incluidas las relativas a la determinación de la ley de corte, para garantizar que los proyectos se diseñan para alcanzar los objetivos de la empresa, a menudo contradictorios. A menudo se cita la maximización del valor para el accionista como objetivo principal de la empresa. Sin embargo, hay que tener en cuenta otros objetivos, como el reconocimiento de las responsabilidades hacia todas las partes interesadas (Rendu, 2014). Es imposible conocer el VPN sin la información sobre la ley de corte del resto del yacimiento, y viceversa, la ley de corte no puede estimarse sin el VPN del proyecto. Una aproximación a este problema es encontrar las leyes de corte sobre la base del modelo desarrollado calculando aproximadamente el VPN inicialmente desconocido (Ataei & Osanloo, 2003b). Por supuesto, es la propia función del VPN la que proporciona los medios para hacer que los efectos de caja, que se producen en diferentes momentos, sean conmensurables. Por lo tanto, un paso previo al análisis de la política de ley de corte es el examen de la maximización del valor presente de una operación basada en un recurso finito (Lane, 1988). Las leyes de corte calculadas a partir de flujos de caja que no han sido optimizados tampoco son óptimas, razón por la cual es necesario utilizar un enfoque iterativo para maximizar el VPN (Rendu, 2014).

El esfuerzo necesario para calcular realmente un VPN significa que a menudo se ignoran componentes importantes y se utiliza en su lugar un valor actual. Algunos algoritmos de optimización no pueden incorporar aspectos clave como los costos del periodo, el capital de expansión, el capital de mantenimiento y los costos de cierre. Si se ignoran estos aspectos o se modelan de forma inadecuada, los resultados son crudos y se pueden tomar decisiones que destruyen el valor (King, 2018). La maximización del VPN puede hacer que la toma de decisiones se centre en las ganancias a corto plazo en detrimento del largo plazo y, por ello, las empresas suelen utilizar el flujo de caja total no descontado (Hall, 2014). Al considerar la optimización de la ley de corte en tres dimensiones (ley de corte, valor y tasa de producción) en lugar de las dos dimensiones tradicionales (ley de corte y valor), Hall identifica la "colina del valor". Esto proporciona a los planificadores mineros un parámetro adicional a tener en cuenta en la determinación de la ley de corte óptima (Alford & Hall, 2009).

## 2.4 Optimización de la ley de corte

La optimización está en todas partes, por lo que es un paradigma importante con una amplia gama de aplicaciones. En casi todas las aplicaciones de la ingeniería y la industria, intentamos optimizar algo, ya sea para minimizar el costo y el consumo de energía o maximizar el beneficio, la producción, el rendimiento y la eficiencia. En realidad, los recursos, el tiempo y el dinero son siempre limitados, por lo que la optimización es mucho más importante en la práctica (Yang, 2013). En un sentido general, una solución óptima es aquella que maximiza la función objetivo que se está resolviendo (King, 2011).

Las minas clasifican sus recursos como mineral o estéril de varias maneras. Un enfoque común es aplicar una ley de corte. La forma de optimizar esta ley de corte se ha investigado ampliamente y hay miles de artículos académicos que cubren este tema en el dominio público (Birch, 2018). El objetivo más comúnmente aceptado en los estudios de optimización de la ley de corte es la maximización del VPN de los flujos de caja futuros. Para alcanzar este objetivo hay que tener en cuenta variables relacionadas con el espacio (como la ubicación geográfica del yacimiento y sus características geológicas), así como variables relacionadas con el tiempo (incluido el orden en que se extraerá y procesará el material y el flujo de caja resultante). La naturaleza espacio-temporal del problema es bastante compleja; en consecuencia, también lo son las soluciones matemáticas propuestas para la optimización de esta variable (Rafiee *et al.*, 2016; Rendu, 2014). Cuanto más precisas sean las entradas, mejor será la capacidad de representación real del modelo de optimización, lo que da lugar a programas más realistas. Los planes de producción realistas favorecen la generación de flujos de caja predecibles para la empresa debido a la mínima desviación de producción a las proyecciones (Chimunhu *et al.*, 2022). Las curvas de tonelaje-ley, junto con los parámetros económicos como el precio del metal, los costos de operación, la recuperación metalúrgica y la tasa de descuento se convierten en la entrada básica para determinar la política de ley de corte óptima (Asad & Dimitrakopoulos, 2013; Shinkuma & Nishiyama, 2000).

En general, la determinación de leyes de corte óptimas efectivas requiere información acerca de la distribución de ley del material mineralizado que está disponible para el minado. Como es el caso de la estimación del valor presente, este es un requerimiento

fácil de conseguir si el propósito del análisis se limita a determinar solo la ley de corte óptima actual, mientras que es más difícil y complejo si el propósito es determinar una estrategia de ley de corte óptima para una mayor cantidad de años (Lane, 1988). En este sentido, es esencial tener en cuenta las variaciones de recuperación causadas por la fluctuación de la ley para calcular las leyes de corte óptimas. Esto conlleva una reducción considerable de los productos finales debido a la disminución de la ley media (Rahimi & Ghasemzadeh, 2015).

El modelo de Lane (1988), presenta la formulación matemática con la cual pretende definir un programa de leyes de corte de forma que el VPN se maximice a lo largo de la vida de la operación ( $N$ ), tal como fue presentado en la Ecuación (2.2). Para esto, define el flujo de caja como se presenta a continuación en la Ecuación (2.3):

$$F_n = (s - r)Qr_n - mQm_n - pQc_n - fn \quad (2.3)$$

Donde  $s$  corresponde al precio de venta del mineral;  $r$  representa los costos de refinamiento, comercialización y venta;  $m$  es el costo de minado;  $p$  es el costo de procesamiento;  $f$  representa los costos fijos;  $n$  es el periodo de tiempo;  $Qr_n$  es la cantidad de metal a ser refinado y comercializado;  $Qm_n$  es la cantidad de material a ser minado;  $Qc_n$  es la cantidad de material a ser procesado durante el periodo de tiempo  $n$ . Como consideración importante, el modelo presenta como restricciones para la optimización de las leyes de corte las capacidades operacionales, es decir, la Ecuación (2.2) está sujeta a las Ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6) que se presentan a continuación:

$$Qm_n \leq M, \forall n \quad (2.4)$$

$$Qc_n \leq C, \forall n \quad (2.5)$$

$$Qr_n \leq R, \forall n \quad (2.6)$$

Donde  $M$ ,  $C$  y  $R$  corresponden a las capacidades de minado, procesamiento y refinamiento, respectivamente. Esta última consideración es relevante, dado que ignorar las limitaciones de capacidad puede hacer que se subestimen las leyes de corte y que se procese material no rentable (Rendu, 2014). Es decir, las leyes de corte óptimas, que son dinámicas debido al efecto decreciente del VPN, no sólo dependen del precio del metal y de los costos de

las etapas de minado, procesamiento y refinado, sino que también tienen en cuenta las capacidades limitantes de estas etapas y la distribución de la ley y el tonelaje del yacimiento. Por lo tanto, la técnica que determina la política de ley de corte óptima tiene en cuenta el costo de oportunidad de no recibir los flujos de caja futuros durante la vida de la mina, debido a las capacidades limitantes de cualquiera de las etapas de minería, procesamiento o refinado (Asad, 2002; Osanloo & Ataei, 2003). Adicionalmente, el precio de los metales y los costos de explotación de la minería, el procesamiento y el refinado cambian durante la vida de la mina, y esto ocurre con bastante frecuencia, debido a la larga vida de la mayoría de las operaciones mineras. Ignorar el efecto de estos cambios en los parámetros económicos sobre la política de ley de corte óptima llevaría a planes de producción poco realistas (Asad, 2007, 2005b).

La ley de corte constante es óptima para un intervalo de tiempo determinado, para condiciones económicas estáticas. Las fluctuaciones de los precios y los costos en las condiciones del mercado hacen que trabajar con una ley de corte fija no garantice el desarrollo de las reservas según los contornos óptimos y no contribuya a la utilización racional de los recursos del subsuelo. Cuando los precios u otros parámetros económicos cambian, es necesario revisar la ley de corte, volver a definirla y calcular de nuevo las reservas (Bragin *et al.*, 2021). Antes de cambiar la ley de corte, deben examinarse cuidadosamente todos los costos y beneficios que puedan derivarse de este cambio. Existen relaciones complejas entre las propiedades geológicas y geotécnicas del yacimiento que dependen del espacio (y a veces del tiempo), las variables económicas que dependen del tiempo (costos de capital y de explotación, precios de los metales, impacto medioambiental y socioeconómico) y las limitaciones técnicas que, hasta cierto punto, pueden controlarse (métodos de extracción y tratamiento, capacidad operativa). Todos estos factores deben tenerse en cuenta para optimizar las leyes de corte, la producción anual y los flujos de caja. No existen soluciones sencillas para este complejo problema de optimización multidimensional (Rendu, 2014).

A la hora de determinar la ley de corte óptima, hay que tener en cuenta cuestiones como el cambio de la ley de corte a lo largo del tiempo por razones tecnológicas y económicas, y también la diferencia en la distribución de la ley en distintas partes del yacimiento (Azimi & Osanloo, 2011). Teniendo en cuenta el alcance de las actividades mineras, los cambios

en el precio de los minerales y la presencia de minerales secundarios valiosos, la necesidad de determinar y optimizar la ley de corte y definir estrategias de mezcla de minerales de baja y alta ley en diferentes escenarios para aumentar los ingresos y reducir el material estéril, especialmente en las altas profundidades, se convierte en un proceso inevitable (Bascetin & Nieto, 2007; He *et al.*, 2009). Una estrategia de ley de corte óptima suele indicar una disminución general de las leyes de corte durante la vida de la operación minera, normalmente como resultado de su valor presente decreciente. Una de las implicaciones de este fenómeno es que las leyes que no son rentables en los primeros años pueden ser tratadas económicamente más tarde (Lane, 1988).

La ley de corte óptima no puede ser nunca inferior a la ley de corte límite de la mina, porque corresponde a la ley de corte mínima (de equilibrio), y una ley de corte inferior a este valor daría lugar al envío de material estéril a un determinado flujo de procesamiento. Del mismo modo, la ley de corte óptima nunca puede ser superior a la ley de corte límite del proceso, ya que programaría parte de los materiales valiosos a los vertederos de residuos (Asad & Dimitrakopoulos, 2013). Un método para optimizar las leyes de corte teniendo en cuenta los costos y beneficios no cuantificables consiste en evaluar el proyecto bajo una serie de restricciones impuestas a la tasa de descuento, la capacidad de la mina, el volumen de ventas, los costos de capital o de operación, entre otros. Los cambios en los costos de oportunidad derivados de la imposición de estas restricciones se comparan con los correspondientes cambios en los demás costos. La ley de corte óptima es aquella en la que el aumento marginal (y cuantificable) del costo de oportunidad es igual a la correspondiente disminución marginal (pero subjetiva) de los demás costos (Rendu, 2014).

Una política de ley de corte óptima para una explotación minera identifica el mejor programa de leyes de corte y el flujo de materiales pertinente, en términos de cantidad de material (mineral y residuos) que debe extraerse, la cantidad de mineral que debe procesarse y la cantidad de metal que debe refinarse o comercializarse, a lo largo de la vida de la explotación (Khan & Asad, 2021). La determinación de las leyes de corte óptimas depende de los costos de operación además de los costos de capital (Rahimi & Ghasemzadeh, 2015). Además, son una función de los costos alternativos, que disminuye cada año. Por lo tanto, las leyes de corte óptimas también se reducen con el tiempo (Wheeler & Rodrigues, 2002).

Una ruta de estrategia óptima debe ser óptima para cada punto de su longitud y todos los valores presentes asociados deben ser máximos. En otras palabras, las rutas estratégicas óptimas deben estar incorporados en la superficie de valores presentes máximos (Lane, 1988). Hay tres cuestiones principales en la optimización y el modelado basados en la simulación, y son la eficiencia de un algoritmo, la eficiencia y la precisión de un simulador numérico, y la asignación de los algoritmos adecuados al problema correcto (Yang, 2013). Durante décadas se ha investigado la idea de optimizar la ley de corte para maximizar el rendimiento financiero. La llegada de los ordenadores permitió establecer modelos mucho más refinados, reduciendo el tiempo y las horas de trabajo asociadas a los cálculos manuales (Birch, 2018).

Generalmente, se emplean tres funciones objetivo para encontrar la ley de corte óptima de un yacimiento. Para este problema de optimización con diferentes funciones objetivo existen varias opciones, como los métodos numéricos, las técnicas matemáticas y los algoritmos basados en la inteligencia artificial. En el caso de las técnicas matemáticas, hay que tomar una derivada de las funciones objetivo y luego resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. El principal inconveniente de estos métodos es el atrapamiento en un óptimo local, el consumo de tiempo y la limitación a un sistema lineal de ecuaciones. En cuanto a los métodos numéricos, existen dos enfoques principales, como las técnicas de eliminación e interpolación. El principal inconveniente de estos métodos es la simplificación del sistema no lineal en uno lineal; sin embargo, en algunos casos, puede funcionar. La simplificación de los sistemas no lineales en lineales puede llevar a una solución errónea. Los enfoques metaheurísticos o inteligentes se inspiran en los diferentes aspectos de la naturaleza y utilizan los conceptos que se dan en ella. Las principales ventajas de estos métodos son la ausencia de derivaciones y la facilidad de uso (Ahmadi & Bazzazi, 2019; Fan *et al.*, 2008). De manera complementaria, los futuros desarrollos en la planificación minera, que también podrían aplicarse a la optimización de la ley de corte, incluyen el análisis de decisión multicriterio, el cual podría integrarse con la inteligencia artificial para simplificar la solución del problema (Mahase *et al.*, 2016).

## 2.5 Modelos determinísticos para la optimización de la ley de corte

Los algoritmos de optimización se pueden clasificar de diferentes maneras, según el enfoque o las características que se pretendan comparar. Si un algoritmo funciona de forma mecánicamente determinista sin ninguna naturaleza aleatoria, se denomina determinista. Para un algoritmo de este tipo, se llegará a la misma solución final si se parte del mismo punto inicial. Por otro lado, si hay algo de aleatoriedad en el algoritmo, éste suele llegar a un punto diferente cada vez que se ejecuta, incluso comenzando con el mismo punto inicial (Yang, 2013). Durante mucho tiempo se han manejado modelos deterministas basados en la programación lineal y en técnicas heurísticas. Estos algoritmos son menos eficientes porque tienden a caer en óptimos locales, un problema que las técnicas metaheurísticas abordan para su solución (Franco-Sepúlveda *et al.*, 2019).

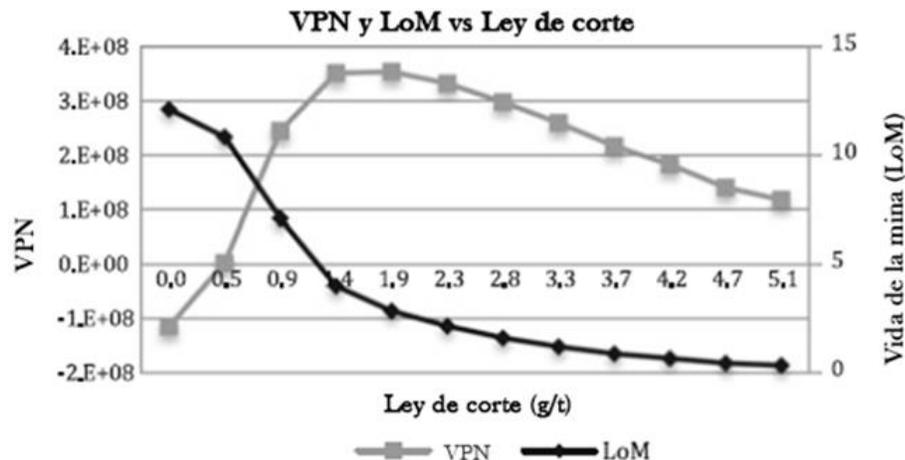
La optimización de la ley de corte ha estado usualmente centrada en modelos determinísticos que no tienen en cuenta el riesgo y la incertidumbre inmersos en la actividad minera (Arteaga, 2015). En algunos casos, otra de las desventajas asociadas a este tipo de procesos de optimización es la relacionada a la obtención de una ley de corte con valor constante que es obtenido para la vida de la mina en su totalidad, por lo que los ingresos anuales de la mina son los mismos a través de la duración del proyecto y, de esta manera, se omite el valor del dinero en el tiempo (Ahmadi & Shahabi, 2018).

Las empresas mineras calculan una ley de corte para determinar qué parte del yacimiento puede explotarse económicamente. Algunas de ellas aplican la ley de corte como valor de equilibrio. La ley de equilibrio tiene en cuenta el precio de la materia prima, el factor de recuperación de la mina previsto, el costo unitario de extracción del mineral y los costos fijos de la mina. Utilizando la tasa de extracción prevista, el factor de recuperación esperado y los costos de producción, la variable para alcanzar el punto de equilibrio se convierte en la ley *in situ* del material que se vende. Siempre que la ley sea superior a la ley de equilibrio en un bloque minero concreto, el bloque se explotará de forma rentable (Birch, 2018). Sin embargo, se observa que diversas minas se centran en la determinación de la ley de corte sólo en la ley básica de equilibrio y el algoritmo de Lane y no optimizan la ley de corte teniendo en cuenta otros factores como el volumen o el VPN (Wheeler &

Rodrigues, 2002). Las técnicas más comunes de optimización de la ley de corte consideran la ley de equilibrio y luego la adaptan al volumen ("colina de valor" (Hall, 2014)), etapa de la vida de la mina (Lane, 1988) o Valor Presente Neto, como el optimizador de Whittle (Birch, 2018).

El modelo más reconocido y estudiado en referencia a la optimización de esta variable es el propuesto por Lane (1964, 1988), en el cual se describe la relación entre la ley de corte, la vida del proyecto (*Life of Mine - LoM*, por sus siglas en inglés) y el Valor Presente Neto (Bootsma *et al.*, 2018). Sin embargo, se ha considerado que el procedimiento del método de Lane para el cálculo de la ley de corte es complicado y prolongado (Ahmadi & Shahabi, 2018). Esta aproximación heurística al problema de optimización de la ley de corte considera una curva de tonelaje-ley constante, al igual que una aplicación limitada a operaciones mineras a cielo abierto con alimentación de mineral a una sola planta de procesos e indica la necesidad de desarrollar e implementar modelos de programación matemática, asegurando la solución óptima del problema (Asad & Dimitrakopoulos, 2013; Dagdelen & Kawahata, 2008, 2007). Lane demostró que existe una combinación de la ley de corte y la vida de la mina (como una función de la tasa de producción) para la cual el VPN del proyecto es maximizado, tal como se observa en la Figura 2-6:

**Figura 2-6:** VPN y *LoM* vs Ley de corte.



Fuente: (Bootsma *et al.*, 2018).

La teoría de Lane ha sido modificada múltiples veces a través de modelos tradicionales de optimización, los cuales serán revisados con mayor detalle en el acápite 1.7 Antecedentes.

## **2.6 Modelos estocásticos para la optimización de la ley de corte**

“En un problema de optimización, aparte de las condiciones que deben cumplir las soluciones factibles del problema, se busca la que es óptima según algún criterio de comparación entre ellas” (Melián *et al.*, 2003, p. 2). El algoritmo elegido para una tarea de optimización dependerá en gran medida del tipo de problema, de la naturaleza del algoritmo, de la calidad deseada de las soluciones, de los recursos informáticos disponibles, del límite de tiempo, de la disponibilidad de la implementación del algoritmo y de la experiencia de los responsables de la decisión (Yang, 2013).

En general, el valor de una opción puede estimarse mediante métodos analíticos o numéricos. Los métodos analíticos sólo son adecuados para valorar opciones sencillas como la desarrollada por Black & Scholes (1973). Pero los métodos numéricos empezaron a generar un mayor interés en la valoración de opciones complejas, como las opciones de tipo americano con múltiples variables de estado inciertas. Las técnicas numéricas más conocidas son las diferencias finitas (Schwartz, 1977), la red binomial (Cox *et al.*, 1979) y la simulación de Montecarlo (Boyle, 1997). Entre ellas, la técnica de Montecarlo tiene un rendimiento superior a la hora de abordar las dificultades de dimensionalidad que se encuentran en los problemas que emplean variables de estado inciertas múltiples y complejas, tal como se presenta en minería (Azimi *et al.*, 2013).

A menudo se pueden obtener mejores soluciones a los problemas del mundo real mediante la hibridación de diferentes enfoques (Michalewicz & Fogel, 2004). En este sentido, uno de los campos más importantes en la optimización de procesos en las últimas décadas corresponde a la Inteligencia Artificial (IA). No existe una definición clara de este concepto, ya que es una mezcla de diferentes campos de investigación, cada uno con sus propios objetivos y métodos. Una buena definición puede encontrarse en Russell & Norvig (2020), en el que se hace referencia al diseño de agentes inteligentes que operan dentro de un entorno, realizan acciones que lo afectan y reciben señales de retroalimentación de este para lograr algún objetivo; puede verse como una tecnología de propósito general con

sofisticadas capacidades de aprendizaje que puede tomar grandes cantidades de datos para una amplia gama de aplicaciones como la analítica avanzada, la optimización de procesos y la automatización que prometen importantes mejoras empresariales y nuevas oportunidades (Jöhnk *et al.*, 2020).

El aprendizaje automático (*machine learning* o ML, por sus siglas en inglés) es un área de la IA que ha recibido la mayor atención en los últimos años, con aplicaciones exitosas en el mundo real basadas en este grupo de técnicas. Los métodos de ML pueden definirse como un conjunto de algoritmos que pueden descubrir patrones complejos en los datos y utilizarlos para predecir resultados futuros (Noriega & Pourrahimian, 2022). Los métodos de ML se dividen habitualmente en tres áreas: aprendizaje supervisado (SL), aprendizaje no supervisado (USL) y el aprendizaje por refuerzo (RL) (Murphy, 2012).

Otro de los métodos más comúnmente estudiado y utilizado en el campo de la IA es el de las redes neuronales artificiales, que son en esencia algoritmos de optimización que trabajan en diferentes contextos (Yang, 2013). Las redes neuronales (NN, por sus siglas en inglés) son algoritmos numéricos inspirados en el funcionamiento de las neuronas biológicas. Este concepto fue introducido por McCulloch & Pitts (1943), quienes propusieron un modelo matemático para simular el comportamiento de las neuronas (He *et al.*, 2008). Se definen como una técnica computacional diseñada para realizar predicciones sobre sistemas en los que no existe una fórmula matemática explícita para su modelización, basando su formulación en el comportamiento de las neuronas del cerebro humano. La estructura principal de este algoritmo se denomina "neuronal artificial" o "nodo", que representa la interacción de las variables mediante puentes de conexión que regulan las señales de entrada del modelo y donde las características no lineales que presenta el modelo se caracterizan por una función de transferencia (Franco-Sepúlveda *et al.*, 2019).

Por otra parte, la IA comprende también otros métodos además del ML y las NN, como las metaheurísticas y los algoritmos evolutivos, que han desempeñado un papel fundamental en la optimización de sistemas de ingeniería (Malik *et al.*, 2021). En el campo de la IA, se utiliza el término heurístico de manera amplia para describir todos los aspectos relacionados con la aplicación de conocimiento en la ejecución dinámica de tareas. Se

emplea este concepto para señalar una técnica, método o proceso inteligente para llevar a cabo una tarea, el cual no se deriva de un análisis formal estricto, sino de la experiencia experta en la materia. Específicamente, se utiliza el término heurístico para describir un procedimiento que busca proporcionar soluciones a un problema con un alto nivel de desempeño, tanto en términos de la calidad de las soluciones como en la eficiencia de los recursos utilizados (Melián *et al.*, 2003). Los algoritmos metaheurísticos se ocupan de buscar soluciones óptimas en problemas matemáticos desafiantes inspirándose en la naturaleza y la evolución, y han visto aplicaciones significativas en la ingeniería de minas (Franco-Sepúlveda *et al.*, 2019).

Los algoritmos evolutivos han recorrido un largo camino desde su creación en los años sesenta del siglo XX. Sus raíces se remontan a Holland (1975), quien desarrolló su teoría no solo bajo el aspecto de la resolución de problemas de optimización, sino también para estudiar la autoadaptación en los procesos biológicos. Es esta autoadaptación la que contribuye en gran medida a su capacidad para atacar con éxito los complejos problemas del mundo real (Myburgh *et al.*, 2014). Las técnicas heurísticas modernas son bastante adaptables y se pueden ampliar o hibridar fácilmente con las técnicas clásicas. Los algoritmos evolutivos son algoritmos iterativos estocásticos que no pueden garantizar la convergencia, pero, como se ha demostrado, un algoritmo bien diseñado puede producir rápidamente resultados de muy alta calidad. Podría decirse que una de sus mayores ventajas es que son ágiles y fácilmente adaptables (al fin y al cabo, se basan en la naturaleza) para atacar problemas dinámicos y complejos del mundo real. Su agilidad se pone de manifiesto en que son especialmente adecuados para adoptar las técnicas clásicas de optimización en la búsqueda de la solución de problemas cada vez más complejos (Myburgh *et al.*, 2014).

El marco heurístico permite la selección de la ley de corte óptima para un proceso, de manera que corresponda no sólo al VPN de la operación, sino también a las capacidades operativas, lo que lleva a valores dinámicos que cambian de un periodo a otro con el agotamiento de las reservas (Asad & Dimitrakopoulos, 2013). El precio de venta del metal y la distribución de las toneladas se encuentran entre los elementos más importantes para el desarrollo de la política de ley de corte. Mientras que los estudios convencionales que se han discutido en el modelo de equilibrio y de Lane consideran los valores constantes (deterministas) del precio de venta del metal y la distribución del tonelaje-ley, en realidad,

al ser valores meramente estimados durante la vida de una operación minera, ambos parámetros están sujetos a cambios o variación (Asad *et al.*, 2016; Goodfellow & Dimitrakopoulos, 2016). La variación del precio de venta de los metales depende del mercado, y el impacto de este cambio en las operaciones mineras es enorme, especialmente durante los periodos de recesión económica o de disminución de los precios de los metales (Abdel Sabour & Dimitrakopoulos, 2011).

La programación u optimización estocástica corresponde a un problema de optimización en el que algunos de sus parámetros son variables aleatorias, cuyas funciones de distribución de probabilidad son conocidas. Como estas funciones son no lineales, es muy difícil resolverlo con algoritmos tradicionales y en tiempos razonables. Uno de los métodos empleados en los problemas de optimización hace referencia a la programación estocástica implícita, el cual es un híbrido entre una metaheurística (ensaya posibles decisiones) y la simulación de Montecarlo (evalúa su desempeño ante multiplicidad de posibles eventos aleatorios). La simulación de Montecarlo es un método no determinista de evaluación de posibles escenarios y decisiones, relacionados mediante ecuaciones complejas y costosas computacionalmente de evaluar. La simulación como tal no es un método de optimización, pero puede combinarse con metaheurísticas para lograr resolver problemas complejos de optimización estocástica (Franco, 2017).

Los modelos estocásticos son realistas y más relevantes, pero un número muy limitado de estudios considera la naturaleza estocástica de las entradas a los modelos de ley de corte. Por lo tanto, existe un enorme margen de contribución mediante el desarrollo y la aplicación de modelos estocásticos para definir la programación de las leyes de corte en las explotaciones mineras (Asad *et al.*, 2016). En el modelo estocástico, al considerar los riesgos (técnicos, de mercado y tecnológicos), no solo se es más realista, sino que se tienen resultados más confiables (teniendo en cuenta que son modelos que tratan de incluir variables y parámetros que en modelamiento minero tradicional se dejan de lado); se puede hacer un análisis muy completo de, no solo cuál es el escenario promedio, sino a qué otros escenarios pesimistas puede estar expuesto el proyecto minero que pueden ser de graves consecuencias y quizás, preferiría no exponerse a ellos; o lo contrario, qué oportunidades (escenarios optimistas) está dejando de considerar o tener en cuenta (Franco, 2017).

La industria minera está preparada para cosechar los frutos de la IA y los enfoques basados en datos, ya que se ocupa de una compleja cadena de valor integrada de exploración, extracción y refinado que tiene un historial de integración de sistemas de alta tecnología para aumentar la productividad (Sganzerla *et al.*, 2016). Sin embargo, sigue siendo uno de los sectores industriales con menores niveles de adopción de la IA y las tecnologías digitales (Narendran & Weinelt, 2017; Young & Rogers, 2019), donde algunos de los principales retos a los que se enfrenta la industria minera para la transformación digital son la disponibilidad de datos de alta calidad, la conectividad de las operaciones y los recursos humanos capacitados en estas nuevas áreas (Young & Rogers, 2019).

### 2.6.1 Metaheurísticas

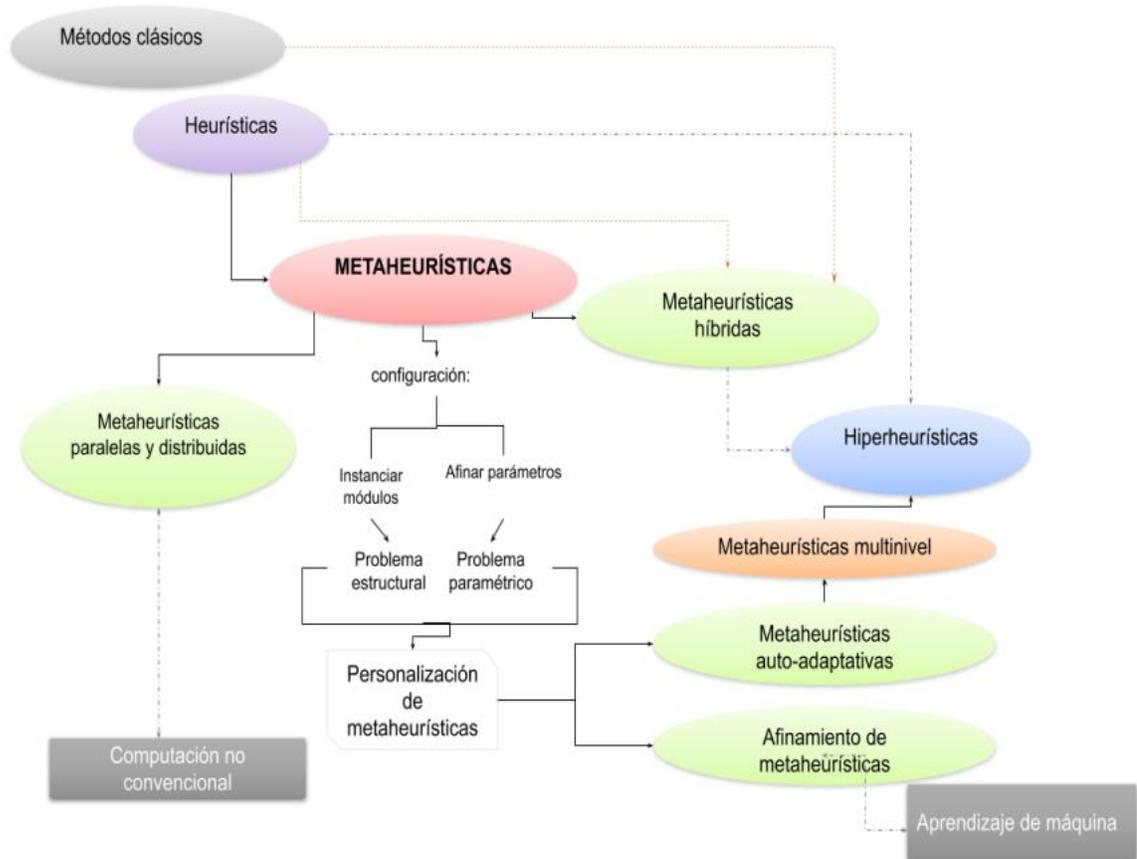
El término metaheurísticas se obtiene de anteponer a heurística el sufijo *meta* que significa “más allá” o “a un nivel superior”. En general, las metaheurísticas son estrategias inteligentes para diseñar o mejorar procedimientos heurísticos muy generales con un alto rendimiento (Melián *et al.*, 2003). Una definición más precisa de este término se presenta a continuación:

En inteligencia artificial, se define a las metaheurísticas como algoritmos que permiten descubrir una solución óptima de problemas de optimización complejos (no linealidades, ecuaciones dinámicas, entre otros) mediante múltiples ensayos de posibles soluciones siguiendo estrategias basadas en los descubrimientos hechos a lo largo de la búsqueda y una mezcla entre explotación (concentrarse alrededor de buenas soluciones encontradas) y exploración (buscar a lo ancho de la zona de soluciones factibles en zonas no exploradas aún en la búsqueda) por lo que, aunque no garantizan encontrar una solución óptima, proveen muy buenas respuestas a un costo computacional razonable (Franco, 2017, p. 19-20).

Habitualmente, las metaheurísticas son usadas para encontrar soluciones a problemas de optimización complejos y de la vida real, teniendo en cuenta su desempeño comparado con las técnicas de optimización tradicionales, las cuales tienden a demandar mayor tiempo (Dullaert *et al.*, 2007). Los algoritmos metaheurísticos modernos, en la mayoría de

los casos, están destinados a la optimización global, aunque el proceso no siempre es exitoso o eficiente (Yang, 2013). La Figura 2-7 ofrece una visión general de estas:

**Figura 2-7:** Un breve panorama de las metaheurísticas.



Fuente: (Maldonado & Gómez, 2011).

Es bien sabido que la metaheurística adaptada para resolver un problema específico suele ser mucho más eficaz que las metaheurísticas generales, en las que no se incorpora información específica del problema (Dullaert *et al.*, 2007). De esta manera, los tipos de metaheurísticas se establecen, en primer lugar, en función del tipo de procedimientos a los que se refiere. Algunos de los tipos fundamentales son las metaheurísticas para los métodos de relajación (ejemplos los métodos de relajación lagrangiana), las metaheurísticas para los procesos constructivos (ejemplo la metaheurística GRASP), las metaheurísticas para las búsquedas por entornos (ejemplo del recocido simulado) y las metaheurísticas para los procedimientos evolutivos (ejemplo el algoritmo genético). Adicionalmente, todas las metaheurísticas se pueden concebir como estrategias aplicadas

a procesos de búsqueda, donde todas las situaciones intermedias en el proceso de resolución del problema se interpretan como elementos de un espacio de búsqueda, que se van modificando a medida que se aplican las distintas operaciones diseñadas para llegar a la resolución definitiva (Melián *et al.*, 2003).

Franco-Sepúlveda *et al.* (2019), en su artículo “*State of the art about metaheuristics and artificial neural networks applied to open pit mining*”, establecen una clasificación de algoritmos de acuerdo con su aplicación en distintos campos de optimización minera, dentro de los cuales se encuentra la ley de corte. Para esta variable y en relación con la bibliografía revisada en dicho estudio, se establecen tres principales algoritmos de optimización metaheurística, los cuales se exponen brevemente a continuación.

#### **a. Algoritmos Genéticos (AG)**

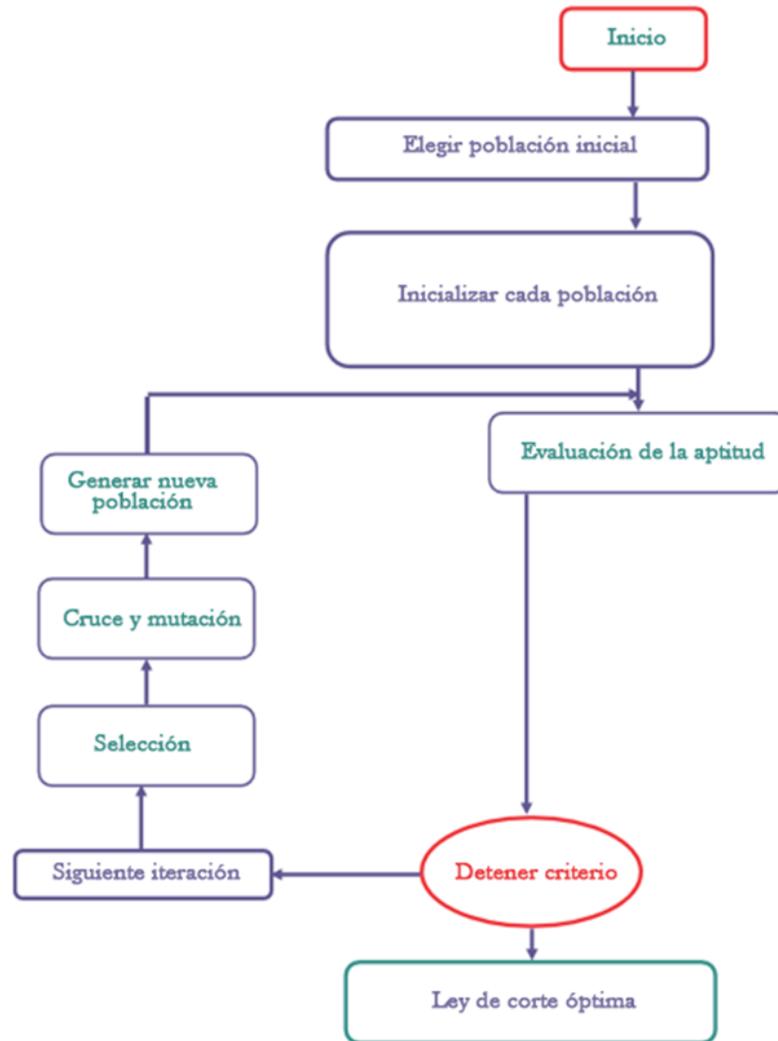
La idea principal del algoritmo genético (AG o GA, por sus siglas en inglés) está tomada de la teoría de la evolución de Darwin (1859), en la que se establece que los rasgos naturales que son más compatibles con las leyes naturales, tienen una mayor probabilidad de sobrevivir (Ahmadi & Shahabi, 2018). Este algoritmo es una tecnología de inteligencia artificial adaptativa desarrollada por Holland (1975), que se incluye en la clase de algoritmos de optimización aleatoria y es particularmente adecuado para optimizar problemas complejos con un espacio de búsqueda desconocido. Los algoritmos genéticos han sido muy exitosos para los métodos clásicos de optimización para resolver problemas lineales, convexos y algunas dificultades similares, pero son mucho más eficientes para resolver problemas discretos y no lineales (He *et al.*, 2009). También pueden utilizarse para resolver una diversidad de problemas de optimización que no se adaptan bien a los algoritmos de optimización estándar, incluidos los problemas en los que la función objetivo es discontinua, no diferenciable, estocástica o altamente no lineal (Goldberg, 1989). Algunos investigadores también sugirieron que las técnicas de búsqueda global, incluido el AG, podrían evitar que las Redes Neuronales Artificiales cayeran en un mínimo local (Gupta & Sexton, 1999; McInerney & Dhawan, 1993; Sexton *et al.*, 1998; Tahmasebi & Hezarkhani, 2009).

Para obtener un motor de búsqueda robusto y un enfoque de optimización, los AG implementan el origen de la evolución natural con la proliferación genética de características que llamó al principio de "supervivencia del más apto". La característica

importante de un algoritmo genético es que especifica simultáneamente numerosas respuestas factibles y explora varias áreas en el espacio deseado elegido por el investigador (Ahmadi & Golshadi, 2012; Hassan *et al.*, 2005; Holland, 1975). Los algoritmos genéticos son especialmente adecuados para la solución de problemas de optimización a gran escala. Pertenecen a la clase de los algoritmos probabilísticos, pero son muy diferentes de los algoritmos aleatorios, ya que combinan búsquedas dirigidas y estocásticas. Otra propiedad importante de los métodos de búsqueda basados en la genética es que mantienen una población de soluciones potenciales. Los algoritmos genéticos también pueden escapar fácilmente de los óptimos locales utilizando operadores genéticos, como la mutación (Cetin & Dowd, 2016).

Un AG estándar consiste en: codificación, formación de especies, función de adecuación, selección y copia, operación cruzada y mutación. La operación genética se repite de forma iterativa. Se aproxima progresivamente pero probablemente nunca llegará a la mejor solución. Por lo tanto, se necesitan condiciones de terminación. La forma más común de terminación es establecer un tiempo iterativo máximo (por ejemplo, 100-1000). Una vez que el tiempo iterativo alcanza el máximo, se puede proceder a la terminación. El segundo método de terminación es controlar la variación de la aptitud de los mejores individuos. Una vez que muestra una variación insignificante en la última etapa de la operación genética en comparación con la etapa anterior, la terminación se puede realizar (He *et al.*, 2008).

La mayor parte de los problemas de optimización de ley de corte tienen un gran número de valores óptimos locales, que están muy separados del punto óptimo global y entre sí. Los métodos de búsqueda estocástica pueden fracasar fácilmente en la búsqueda del punto óptimo global para tales problemas. El verdadero reto en estos problemas es encontrar soluciones cercanas al punto óptimo global durante un tiempo restringido. Los algoritmos genéticos son más robustos en este contexto que otros métodos de búsqueda existentes (Cetin & Dowd, 2016). En la Figura 2-8, se presenta un diagrama de flujo del algoritmo genético hasta obtener una ley de corte óptima:

**Figura 2-8:** Ilustración gráfica del Algoritmo Genético.

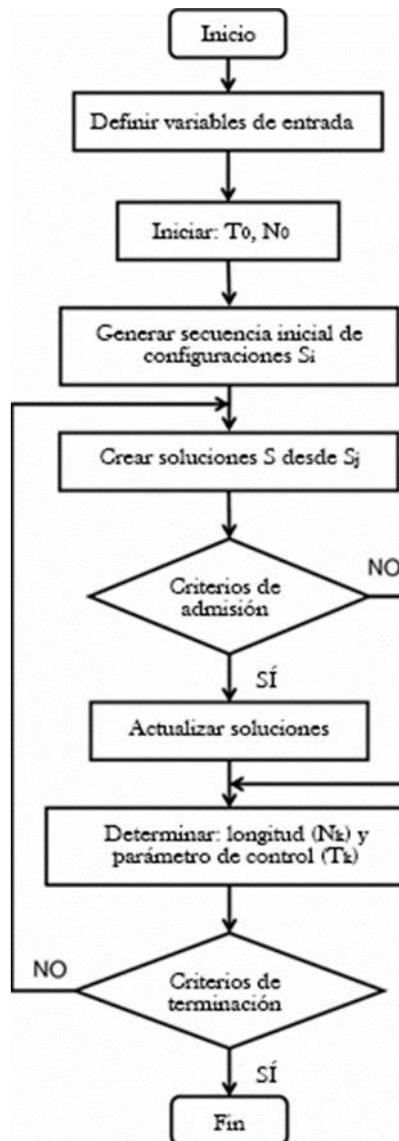
Fuente: (Ahmadi & Shahabi, 2018).

### b. Recocido Simulado (RS)

El recocido simulado (RS o SA, por sus siglas en inglés) es uno de los primeros algoritmos metaheurísticos (Kirkpatrick *et al.*, 1983). Es un método estocástico para resolver problemas de optimización combinatoria, también caracterizado como un algoritmo de búsqueda local que utiliza la aleatorización para escapar del óptimo local (Gonzalez, 2007; Kumral, 2013). La idea básica de este algoritmo es utilizar la búsqueda aleatoria en términos de una cadena de Markov, que no solo acepta cambios que mejoran la función objetivo, sino que también mantiene algunos cambios que no son ideales (Yang, 2013). Desde su introducción en 1983, el recocido simulado se ha aplicado a una gran cantidad

de problemas diferentes en diversas áreas, por lo que se pueden precisar las siguientes observaciones: (i) se pueden obtener soluciones de alta calidad, pero a veces a costa de grandes cantidades de tiempo de cómputo; (ii) en la mayor parte de las situaciones prácticas, donde no se dispone de algoritmos a medida, el recocido simulado es un algoritmo valioso debido a su aplicabilidad general y su facilidad de implementación (Gonzalez, 2007). En la Figura 2-9, se puede observar un diagrama de flujo del algoritmo en mención:

**Figura 2-9:** Diagrama de flujo del algoritmo Recocido Simulado.

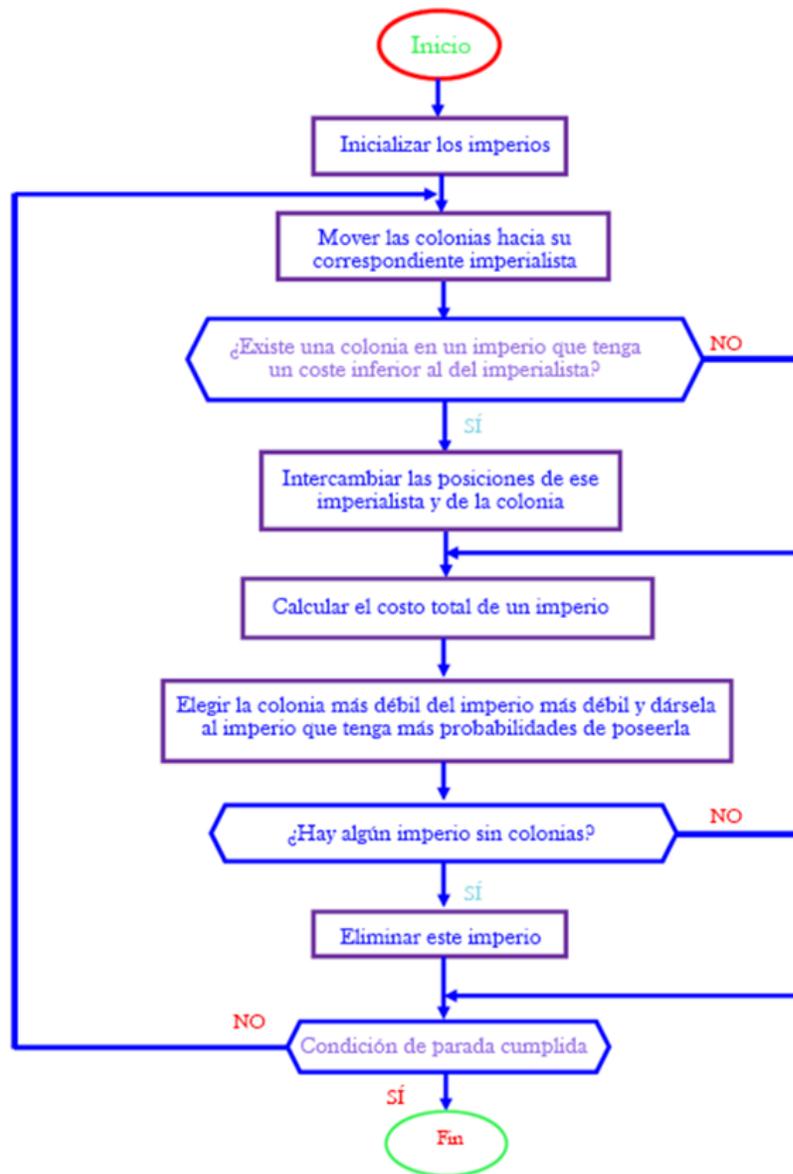


Fuente: (Cepin, 2011).

### c. Algoritmo Competitivo Imperialista (ACI)

El algoritmo competitivo imperialista (ACI o ICA, por sus siglas en inglés) es un método evolutivo de optimización inspirado en la competencia imperialista (Oliva-Romero *et al.*, 2017). Este algoritmo, en primer lugar, con una perspectiva completamente nueva de la optimización, establece un nuevo vínculo entre las humanidades y las ciencias sociales, por un lado, y las ciencias técnicas y matemáticas, por otro. Poco después de la introducción de este algoritmo, se ha utilizado para resolver problemas en el área de la optimización (Ahmadi & Bazzazi, 2019). Contrariamente a los métodos evolutivos convencionales, no se basa en fenómenos de la naturaleza. El ACI utiliza la evolución sociopolítica del ser humano como fuente de inspiración para desarrollar una fuerte estrategia de optimización (Mohammadi *et al.*, 2017). Especialmente, este algoritmo considera el imperialismo como un nivel de evolución social humano y, al modelar matemáticamente este proceso complicado e histórico, llega a una herramienta para la optimización evolutiva (Hosseini-Nasab *et al.*, 2010).

De manera análoga a otros algoritmos, comienza con una población inicial denominada país, que son de tipo colonizado o imperialista (Atashpaz-Gargari & Lucas, 2007). La competencia imperialista es la parte principal de este algoritmo y permite que las colonias converjan al mínimo global de la función de coste. De esta manera, algunos de los mejores países de la población son seleccionados para ser el imperialista y el resto forma las colonias de estos imperialistas. Los imperios más débiles colapsarán en la competencia imperialista y sus colonias se dividirán en otros imperios. Después de un tiempo, todos los imperios, excepto el más poderoso, colapsarán y todas las colonias estarán bajo el control de este imperio, que es la respuesta del problema de optimización (Oliva-Romero *et al.*, 2017). En la Figura 2-10, se presenta un diagrama de flujo del algoritmo competitivo imperialista:

**Figura 2-10:** Diagrama de flujo del Algoritmo Competitivo Imperialista.

Fuente: (Atashpaz-Gargari & Lucas, 2007).

## 2.7 Antecedentes

Como fue mencionado, el modelo más reconocido y estudiado en referencia a la optimización de esta variable es el propuesto por Lane (1964, 1988), en el que las operaciones mineras están divididas en unidades de minería, procesamiento y de refinería. Posterior a la teoría de Lane, no existen métodos o algoritmos independientes realizados

por otros investigadores, puesto que estos se han enfocado en el uso de otros métodos de optimización basados en el método de Lane o investigando el papel de diversos factores basados en este caso en su teoría (Ahmadi & Shahabi, 2018).

Como parte de los modelos tradicionales de optimización de la ley de corte que se han desarrollado y que han sido modificados de la teoría de Lane, se destacan los desarrollados por Dagdelen (1992, 1993) y Asad (2002), los cuales proponen los pasos del algoritmo que implementa el enfoque de Lane. De manera análoga, Cetin & Dowd (2002) realizaron una propuesta a partir de un algoritmo genético para múltiples optimizaciones de la ley de corte. Para la optimización de las leyes de corte en un depósito polimetálico, Ataei & Osanloo (2003) utilizaron el algoritmo de búsqueda de la sección dorada, considerando las condiciones propuestas en el algoritmo de Lane para depósitos de un único mineral. En un estudio del algoritmo de Lane realizado por Asad (2005b), se combinaron los diversos factores de ajuste para el precio del producto, los costos fijos y operativos, y demostraron la eficacia del ajuste de los parámetros económicos en la función objetivo; en este caso, los precios se controlan de forma dinámica.

Bascetin & Nieto (2007) fueron capaces de determinar y optimizar las leyes de corte mediante la aplicación de un factor de optimización basado en el algoritmo de Gradiente Reducido Generalizado (GRG) para una mina metálica. Osanloo *et al.* (2008) construyeron un modelo para optimizar la ley de corte considerando asuntos ambientales basados en minimizar fugas de ácidos. Otro modelo que determina la ley de corte óptima y que se encuentra basado en la teoría de Lane fue desarrollado por Gholamnejad (2008), en el cual se tiene en cuenta los costos de acumulación de estéril e ingresos reducidos. Dagdelen & Kawahata (2008) presentaron un modelo de optimización de la ley de corte basado en programación lineal que considera curvas tonelaje-ley constantes con opciones múltiples de procesamiento.

Con la introducción de la tecnología de inteligencia artificial en el campo de la actividad minera, He *et al.* (2009) desarrollaron un modelo de simulación no lineal para optimizar la ley de corte, usando una red neuronal artificial y un algoritmo genético. Teniendo en cuenta la combinación de mineral de *stock* de baja ley, parámetros económicos y modificaciones para optimizar la ley de corte, Asad & Topal (2011) determinaron un modelo basado en el algoritmo de Lane. Azimi & Osanloo (2011) desarrollaron un modelo para determinar la ley

de corte óptima de una mina hipotética, usando la estrategia de combinar el algoritmo genético y la programación no lineal. Barr (2012) creó un número de secuencias para las tasas de producción y las leyes de corte, y luego utilizó un planeamiento dinámico para optimizar y determinar las leyes de corte que maximizaran el VPN. Por otra parte, Khodayari & Jafarnejad (2012) desarrollaron un modelo de optimización de la ley de corte basados en la teoría de Lane, el cual tiene tres etapas: minería, procesamiento y operaciones de mercadeo. En este modelo, el precio del mineral para la vida completa de la mina no es fijo sino variable, analizando entonces los cambios en la optimización con la modificación de esta variable.

Con el objetivo de optimizar la ley de corte basados en la teoría de Lane, Li & Yang (2012) realizaron una planificación aleatoria en varias etapas en una mina metálica para maximizar el VPN. De manera similar, para modificar el método de Lane y mejorar sus resultados, Abdolahisharif *et al.* (2012) realizaron un modelo para la optimización de la ley de corte en una mina metálica, teniendo en cuenta las capacidades variables de las unidades durante la vida de la mina. Azimi *et al.* (2012) utilizaron el método de decisión multicriterio difuso para optimizar la ley de corte bajo precios inciertos y planificar la producción de la mina.

Adicionalmente, Asad & Dimitrakopoulos (2013) y Ataei & Osanloo (2013), realizaron estudios de optimización de la ley de corte para depósitos metálicos de un solo metal con el objetivo de maximizar el VPN, usando métodos de eliminación y comparando estos resultados con el modelo de Lane. Rendu (2014) cubre los aspectos procedimentales de considerar opciones múltiples de procesamiento en un modelo de optimización de la ley de corte. Thompson & Barr (2014) examinan el impacto de la incertidumbre de los precios a futuro en la política de ley de corte óptima de las minas, empleando un nuevo modelo de opciones reales para determinar la ley de corte óptima del mineral bajo precios estocásticos. Mohammadi *et al.* (2015) propusieron la optimización de la ley de corte utilizando el algoritmo competitivo imperialista y el de búsqueda de la sección dorada. De manera similar, Myburgh *et al.* (2015) describen un enfoque innovador en el que los algoritmos evolutivos se combinan con la búsqueda local y la programación lineal, con el objetivo de maximizar el VPN mediante la optimización de la política de ley de corte y la secuencia de extracción para una mina a cielo abierto, teniendo en cuenta múltiples flujos

de procesamiento y pilas de almacenamiento. Cetin & Dowd (2016) determinaron un modelo para optimizar la ley de corte de oro, plomo y zinc, utilizando un algoritmo genético y comparando los resultados con el método de búsqueda de cuadrícula y programación dinámica.

Posteriormente, Mohammadi *et al.* (2017) describen una función objetivo para una mina de un único metal con múltiples productos, usando el Algoritmo Competitivo Imperialista para encontrar las leyes de corte óptimas en una mina a cielo abierto. Ahmadi & Shahabi (2018) utilizan el algoritmo genético para determinar la ley de corte óptima, comparando la eficiencia de este y la teoría de Lane en la optimización de la ley de corte basada en la maximización del VPN. Khan & Asad (2019) formularon un nuevo modelo matemático basado en la programación lineal estocástica de dos etapas que ofrece una política de ley de corte óptima para operaciones mineras a cielo abierto bajo incertidumbre de ley. Ahmadi & Bazzazi (2019) emplean dos algoritmos metaheurísticos de optimización diferentes para determinar la ley de corte óptima (Algoritmo Competitivo Imperialista y Optimización por Enjambre de Partículas), en una mina de hierro a cielo abierto. Liu *et al.* (2019) desarrollaron un modelo que considera simultáneamente las capacidades de extracción y procesamiento de minerales como restricciones y la ley de corte sujeta a cada restricción se calcula mediante el método de búsqueda de la sección dorada.

Se tiene de esta manera que los trabajos previos citados en esta sección abordan en esencia el problema de optimización de las leyes de corte. Sin embargo, en la bibliografía revisada, se encontraron 4 artículos que se aproximan en mayor medida al objetivo del presente trabajo académico, razón por la cual, se analizan sus limitantes y características con mayor detalle en la Tabla 2-1:

**Tabla 2-1:** Características y limitaciones principales de los trabajos previos.

Referencia	Título	Característica principal	Limitaciones
(Gu <i>et al.</i> , 2010)	<i>Dynamic optimization of cutoff grade in underground metal mining</i>	Desarrolla un modelo basado en programación dinámica para optimizar la ley de corte en una mina metálica subterránea de cobre,	El método tiene un elevado requisito de muestras de exploración. En el caso de las minas con pocas

Referencia	Título	Característica principal	Limitaciones
		considerando simultáneamente la naturaleza dinámica del espacio y el tiempo en el problema de ley de corte.	muestras que no pueden reflejar la distribución real de la ley local, la ventaja del método disminuye.
(Githiria & Musingwini, 2019)	<i>A stochastic cut-off grade optimization model to incorporate uncertainty for improved project value</i>	Presenta un modelo estocástico de optimización de la ley de corte que amplía la teoría determinista de Lane para calcular las leyes de corte óptimas en la vida de la mina (LoM).	Desarrolla un caso de estudio en depósito de minería a cielo abierto y no tiene en cuenta los riesgos operativos.
(Sotoudeh et al., 2021)	<i>A novel cut-off grade method for increasing the sustainability of underground metalliferous mining operations</i>	Revisa los conceptos técnicos de la integración de los sistemas de preconcentración en las minas subterráneas y presenta un método novedoso para el cálculo de la ley de corte subterránea.	Presenta un enfoque principal en la influencia de los sistemas de preconcentración, por encima del uso de la inteligencia artificial para la optimización de la ley de corte.
(Bragin et al., 2021)	<i>A probabilistic approach to the dynamic cut-off grade assessment</i>	Presenta un nuevo enfoque para determinar la ley de corte dinámica de un grupo de yacimientos auríferos, que varía en función del precio de los minerales.	Desarrolla un caso de estudio en depósitos de minería a cielo abierto, considerando el precio del mineral como única variable dinámica.

Si bien los estudios previos relacionados en la Tabla 2-1 tienen como objetivo la optimización de las leyes de corte, lo cual se acerca al propósito de este trabajo académico, presentan limitaciones que difieren del alcance definido en esta investigación. En los

artículos consultados, no se consideran todas las variables relacionadas con la incertidumbre que se analizan en este trabajo, las cuales son altamente variables en el tiempo, como la incertidumbre geológica y la incertidumbre operativa, que también se relaciona con los cambios tecnológicos de las operaciones mineras.

Se logra entonces evidenciar que la optimización estocástica de leyes de corte es una herramienta valiosa para la industria minera, ya que permite maximizar el valor económico del depósito al considerar la incertidumbre asociada a diferentes parámetros (económicos, de mercado, geológicos, operativos, entre otros), a diferencia de los enfoques tradicionales de optimización, los cuales presentan como principales limitaciones la falta de consideración de la incertidumbre, la falta de flexibilidad para adaptarse a cambios en las condiciones de operación y la falta de integración con otros procesos de planificación minera.

El presente trabajo se enfrenta al desafío de optimizar la ley de corte de un depósito aurífero para una compañía con operaciones mineras subterráneas, teniendo en cuenta su variabilidad en el tiempo y las incertidumbres mencionadas, así como las restricciones de capacidad variables en la extracción, procesamiento y comercialización, incluyendo de esta manera el desarrollo tecnológico. Por lo tanto, se propone una solución alternativa al problema de optimización descrito mediante un enfoque basado en el planeamiento minero estocástico, teniendo en cuenta que los estudios previos revisados han demostrado que la aplicación de este tipo de modelos puede mejorar significativamente la precisión de las estimaciones de reservas y la rentabilidad de las operaciones mineras, lo que a su vez contribuye a una mejor toma de decisiones en el proceso de planeación minera.



## **3. Modelo de optimización propuesto**

El Capítulo 3 tiene por objetivo definir la propuesta del modelo de optimización estocástico para una compañía minera aurífera con operaciones mineras subterráneas. Se realiza una descripción general del modelo, se presentan sus características y restricciones, la nomenclatura a utilizar, la función objetivo y las ecuaciones relacionadas a esta. Es importante resaltar que la propuesta del modelo presentado en este capítulo se fundamenta en la incertidumbre geológica y en la incertidumbre operativa, en relación con las capacidades de minado y procesamiento. Adicionalmente, teniendo en cuenta que el modelo se presenta para el caso de extracción y comercialización de oro como único mineral, es necesario caracterizar y analizar otro tipo de yacimientos si se requiere aplicar el modelo propuesto, con el fin de conocer sus particularidades geológicas, técnicas y económicas y así validarlo posteriormente.

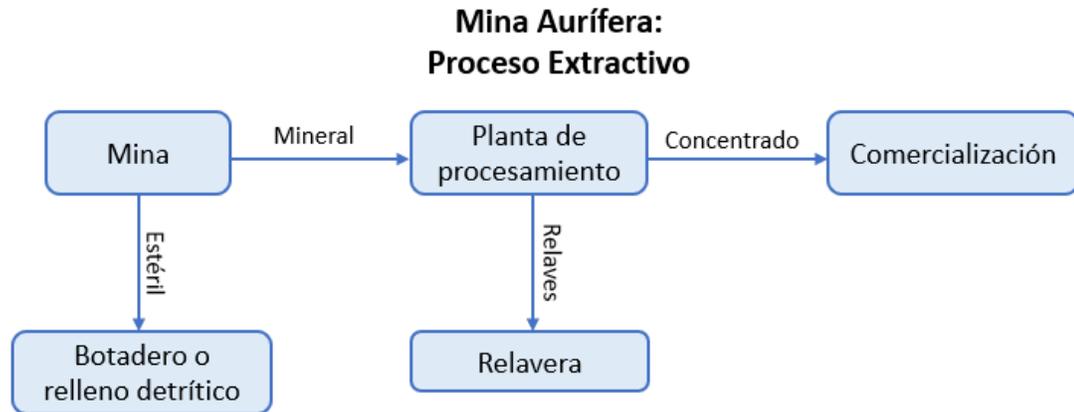
### **3.1 Descripción general**

El modelo de optimización estocástica propuesto en el presente trabajo se construyó a partir de los datos de una compañía minera aurífera con operaciones mineras subterráneas, la cual, por motivos de confidencialidad de la información, no será nombrada. Como fue descrito en los objetivos expuestos en el Capítulo 1, el modelo se encuentra relacionado a la ley de corte y la maximización del Valor Presente Neto, razón por la cual se integran sus procedimientos de cálculo con el fin de optimizar las leyes de corte de la operación buscando el mayor beneficio económico del proyecto.

La Figura 3-1 presenta el flujo de procesos general del proyecto minero, que tiene como enfoque de negocio la exploración, explotación y comercialización de oro. Como aspecto importante, el proceso de clasificación de material como mineral o estéril se encuentra en función de la ley de corte, para lo cual el material que será extraído de la mina debe ser muestreado y analizado en laboratorio químico para conocer la ley promedio y disponerlo

de acuerdo con su resultado (botadero o relleno detrítico en interior mina en el caso de clasificarse como estéril y planta de procesamiento en el caso de clasificarse como mineral); de manera complementaria, la compañía no realiza el proceso de refinación, por lo que el producto a comercializar son concentrados gravimétricos y de flotación:

**Figura 3-1:** Descripción del proceso extractivo de la compañía.



Fuente: Elaboración propia.

### 3.2 Características y restricciones

Las características principales que se definen en el modelo de optimización propuesto se describen a continuación:

- a. Se considera incertidumbre geológica a partir de la estimación de recursos generada con el proceso de simulación condicional para la obtención de curvas tonelaje-ley. Para el modelo se contemplan 5 curvas (las cuales se presentan en la Figura 5-2 del Anexo B), que corresponden, cada una de ellas, al promedio de 25 simulaciones condicionales en las que se modificó como parámetro de estimación el valor de *capping*, estableciendo para cada una de las curvas un valor de *capping* de 30, 40, 50, 60 y 70 g/t respectivamente. El proceso de estimación fue realizado por la compañía minera teniendo en cuenta la confidencialidad de los datos.
- b. Los datos de reservas mineras son producto del análisis de los recursos obtenidos en la estimación, el(los) método(s) de explotación y el planeamiento minero general.

- c. Se considera incertidumbre operativa, estableciendo como capacidad principal el procesamiento de material en la planta de beneficio y se iguala la capacidad de minado a este valor, analizando diferentes valores para la creación de múltiples escenarios de optimización.
- d. A diferencia de la mayoría de los modelos revisados en la bibliografía, no se considera incertidumbre económica en relación con el precio del oro, teniendo en cuenta los constantes cambios macroeconómicos y geopolíticos que se presentan a nivel mundial y que afectan el intervalo de confianza de los pronósticos con series de tiempo frecuentemente utilizados. El valor del precio del oro a utilizar corresponde al utilizado en la compañía minera para sus procesos de planificación.
- e. La metodología por seguir es la optimización estocástica implícita (simulación de Montecarlo + metaheurística). El algoritmo de optimización metaheurística a emplear es el Algoritmo Genético, descrito en el acápite 2.6 del Capítulo anterior. Adicionalmente, para encontrar la mejor solución, se emplea optimización binaria, la cual es una subclase comúnmente utilizada en las áreas de las ciencias de la computación y la ingeniería.
- f. El modelo tiene como función objetivo maximizar el Valor Presente Neto del proyecto y el estadístico a optimizar será la media de este valor.
- g. Las variables de decisión del modelo son la ley de corte de cada periodo, el tiempo del proyecto (*LoM*, el cual suele ser predeterminado o fijado en diferentes modelos consultados en la bibliografía) y las capacidades de minado y de procesamiento.
- h. Se considera una ley de corte dinámica para la vida de la mina, la cual estará en función de los costos de operación, el precio del mineral, la recuperación metalúrgica, un porcentaje de metal pagable, las regalías y los costos de comercialización.
- i. Las leyes de corte de minado y de procesamiento se consideran iguales para la vida del proyecto, al no considerar almacenamiento (*stockpile*) de material.
- j. Los costos de minado y de procesamiento se consideran variables, es decir, cambian de acuerdo con la capacidad de procesamiento establecida.
- k. Los costos generales se consideran fijos en la estructura del flujo de caja libre, es decir, no estarán en función de las toneladas de procesamiento. Esta característica del modelo tiene dos objetivos: el primero, verificar el impacto del costo fijo en los costos totales de operación, cambiando la capacidad de procesamiento de la planta sin modificar los costos generales, esto es, conservando el mismo personal y

costos de áreas de soporte directo, actividad principal, generales y administrativos (G&A) y sostenibilidad; el segundo, analizar el cambio en el valor de la ley de corte al modificar la capacidad de procesamiento y conservar el ítem de costos generales como costo fijo.

- l. Las regalías tendrán un peso del 3.2% sobre el precio del metal fijado.
- m. La tasa de descuento se considera fija en un valor del 15%, tanto para el modelo determinístico como para el modelo estocástico (se presenta como dato real con el cual se realizan los modelos financieros de la compañía minera).
- n. La inversión inicial o CAPEX del proyecto estará en función de la capacidad de procesamiento de cada escenario de optimización.
- o. Se considera depreciación lineal para la vida del proyecto en el flujo de caja.
- p. Se considera un depósito de un único mineral (oro).

### 3.3 Nomenclatura

A continuación, en la Tabla 3-1, se define la nomenclatura que se utiliza en el modelo propuesto en este trabajo y a su vez en el modelo determinístico empleado como línea base:

**Tabla 3-1:** Nomenclatura de valores utilizados en el modelo.

Símbolo	Definición	Unidades
Qm	Capacidad de minado	t/año
Qc	Capacidad de procesamiento	t/año
M	Costo de minado	USD/t y USD
P	Costo de procesamiento	USD/t y USD
O	Costos generales	USD/t y USD
C	Costos totales	USD/t y USD
V	Precio del metal	USD/oz
mp	Porcentaje de metal pagable	%
Re	Regalías	%
r	Porcentaje de recuperación metalúrgica	r
Gc	Gastos de comercialización	USD/oz

Símbolo	Definición	Unidades
s	Valor del metal pagable	USD/g o USD/oz
$\omega$	Indicador de curva tonelaje-ley	Adimensional
E	Número de escenarios definidos	Adimensional
$x_c$	Ley de corte	g/t
$x_{cp}$	Ley de corte óptima	g/t
T	Toneladas (reservas)	t
L	Ley promedio de oro (reservas)	g/t
Au	Finos de oro (reservas)	g
N	Tiempo del proyecto ( <i>LoM</i> )	Años
n	Indicador de periodo (año)	Año
i	Tasa de descuento	%
$l_0$	Inversión inicial (CAPEX del proyecto)	USD
$F(\omega)$	Flujo de caja libre del proyecto calculado con base a la curva tonelaje-ley $\omega$ .	USD
VPN	Valor Presente Neto	USD
$T_0$	Reservas iniciales	t
$T_f$	Reservas finales	t
$Q_m(\omega, n)$	Cantidad de material minado por la curva tonelaje-ley en el periodo n	t
$Q_c(\omega, n)$	Cantidad de material procesado por la curva tonelaje-ley en el periodo n	t
$Au_r(\omega, n)$	Finos procesados recuperados por la curva tonelaje-ley en el periodo n	g
$l_v$	Ingreso por ventas	USD
De	Depreciación	USD
$l_r$	Impuesto a la renta	%
OPEX	Gastos operativos	USD
CC	Gastos en efectivo ( <i>Cash Cost</i> )	USD/oz
Mb	Margen bruto	USD
EBITDA	Beneficio antes de intereses, impuestos, depreciaciones y amortizaciones	USD

### 3.4 Metodología de optimización estocástica implícita

Como fue mencionado en la Sección 3.2, la metodología por seguir es la optimización estocástica implícita (simulación de Montecarlo + metaheurística). En este tipo de optimización, se evalúan posibles conjuntos de valores para las variables de decisión (representadas por el individuo  $I$  en Algoritmos Genéticos), con el objetivo de determinar el impacto en los beneficios del VPN. Esto implica considerar cómo los valores específicos del conjunto  $I$ , como la ley de corte, la vida de la mina y otros factores, afectarían dichos beneficios.

Por otra parte, la formulación del modelo contempla la optimización binaria, subclase de problemas de optimización combinatoria más generales donde las variables se encuentran restringidas a un conjunto finito de valores, en este caso concreto solo dos (Hanafi *et al.*, 2023). El concepto se define a continuación:

La optimización binaria se refiere a la maximización o minimización de una función objetivo sobre un conjunto finito de soluciones binarias, donde cada solución se compone de variables binarias que pueden tomar valores de 0 ó 1. El objetivo es encontrar la solución óptima que optimice la función objetivo, sujeta a restricciones en las variables binarias (Izmailov & Solodov, 2013, p. 233).

Por lo tanto, un problema de optimización binaria se puede describir como el esfuerzo de maximizar la función objetivo  $F(\vec{x})$  de  $N$  variables con valores  $x_i \in \{0,1\}$  sujetos a algunas restricciones de igualdad o desigualdad. En el caso del modelo propuesto, estas variables corresponden a la capacidad máxima de procesamiento  $Q_c$  y a la ley de corte de cada periodo  $x_c$ , restringidas por las capacidades máximas permitidas por la compañía y las curvas tonelaje-ley a evaluar (Hanafi *et al.*, 2023).

El procedimiento a ejecutar ha sido descrito por Franco (2017) en su “*Modelo de optimización estocástica para explotaciones mineras a cielo abierto*”, el cual se adapta al caso del modelo propuesto y se describe a continuación:

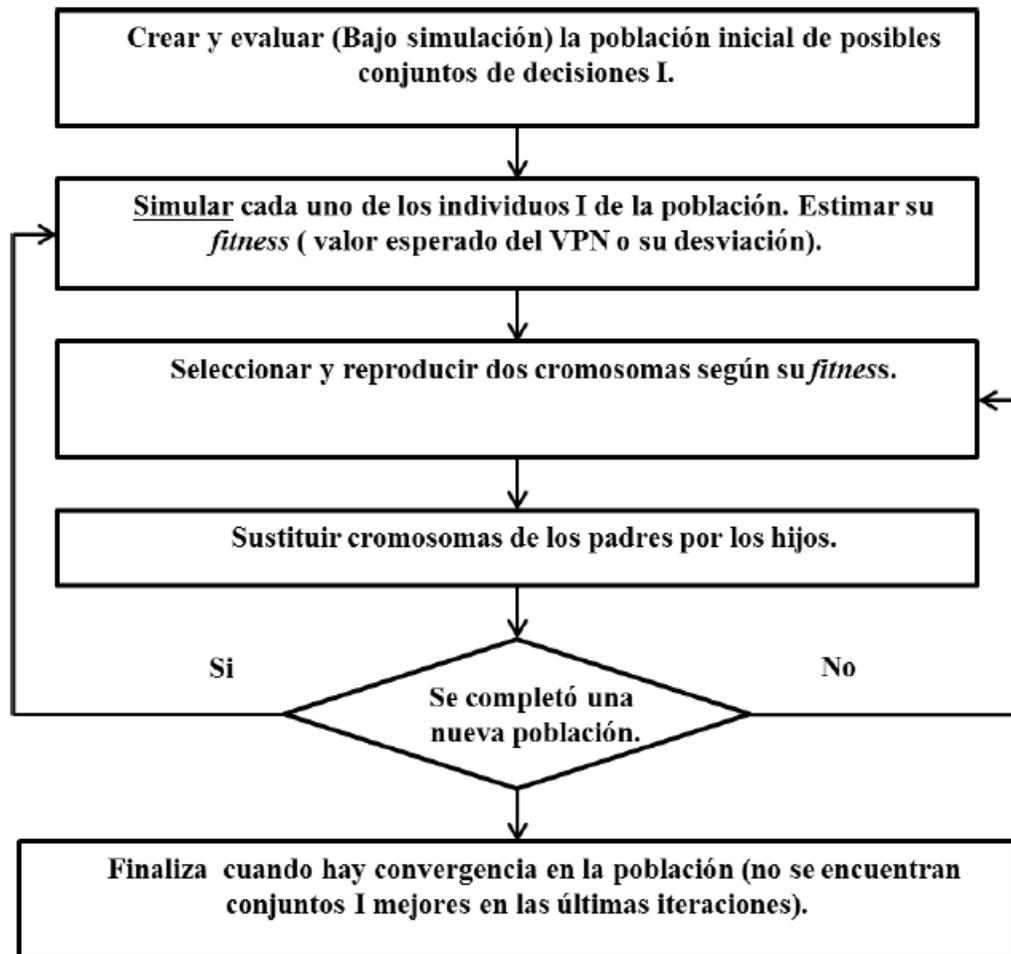
El algoritmo es iterativo, hasta que el proceso converja a una única solución o se llegue a un número máximo de iteraciones definido por el analista. En cada iteración se genera una población de individuos en la que cada uno de ellos representa un vector de valores  $I$ . Para cada individuo  $I$ :

- a) Se simula una cantidad predefinida de posibles escenarios  $\omega$  (por ejemplo,  $E=10,000$  escenarios) que son conjuntos de realizaciones del tonelaje y la ley asociada a cada ley de corte y de las demás variables aleatorias (como la capacidad máxima de procesamiento) a partir de las funciones de distribución correspondientes.
- b) Para cada posible escenario  $\omega$ , se calcula su VPN. La serie sintética de los  $m$  valores de VPN así obtenidos permite el análisis estadístico de las consecuencias de implementar las decisiones  $I$ .
- c) Se obtiene la media de la serie sintética de los VPN de las  $E$  realizaciones.

Con base en el estadístico a optimizar (maximizar el valor esperado del VPN) de todos los individuos  $I$  de la iteración actual, se generan nuevos individuos (nueva generación) a partir de los ya evaluados mediante operadores genéticos: selección, cruzamiento, mutación, que procuran propagar en las próximas poblaciones, las características de los mejores individuos encontrados hasta el momento. El proceso termina cuando después de múltiples iteraciones del GA ya no se mejora el estadístico del VPN (valor medio) (Franco, 2017, p. 48-50).

En la Figura 3-2 se presenta un esquema de la optimización estocástica implícita, considerando el Algoritmo Genético más la simulación de Montecarlo:

**Figura 3-2:** Esquema básico de la optimización estocástica implícita con el uso de Algoritmos Genéticos.



Fuente: (Franco, 2017).

### 3.5 Función objetivo

El objetivo más comúnmente aceptado en los estudios de optimización de la ley de corte es la maximización del VPN de los flujos de caja futuros, el cual fue también definido como el objetivo general del presente trabajo. Lo anterior, se debe principalmente a que el VPN es el método usado con mayor frecuencia para la evaluación de proyectos, puesto que mide la rentabilidad deseada después de recuperar toda la inversión. Además, se adopta como criterio fundamental para la toma de decisiones en el contexto financiero, dado que dicho criterio obedece al objetivo general de maximizar las utilidades del proyecto o empresa (Gómez & Díez, 2015).

En términos generales, el VPN es la ganancia del inversionista por encima de lo esperado en el momento cero de la evaluación del proyecto (Gómez & Díez, 2015). De esta manera, la función objetivo del modelo es maximizar el valor esperado del VPN de la explotación en toda la vida del proyecto, optimizando la ley de corte para todos los periodos  $n$  a partir de cada uno de los posibles escenarios de presencia de leyes con equiprobabilidad de ocurrencia  $(\omega_1, \omega_2, \dots, E)$ . Tomando como referencia el marco teórico presentado en el Capítulo 2, la función objetivo en mención se encuentra representada en la Ecuación (3.1), con sus respectivas restricciones presentadas en las Ecuaciones (3.2) y (3.3):

$$\max VPN = \max \sum_{n=0}^N \frac{F(\omega)}{(1+i)^n} \quad (3.1)$$

$$Qc(\omega, n) \leq Qc, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

$$Qc(\omega, n) = Qm(\omega, n) \quad (3.3)$$

A partir de la Ecuación (3.1), el cálculo del flujo de caja libre del proyecto para un posible escenario  $\omega$  corresponde a la suma del flujo de caja de cada periodo durante la vida del proyecto menos la inversión inicial o CAPEX de este, como se describe en la Ecuación (3.4):

$$F(\omega) = -I_0 + \sum_{n=1}^N f(\omega, n) \quad (3.4)$$

Consecuentemente, el cálculo del flujo de caja libre para cada periodo  $n$ , se encuentra en función de los posibles escenarios de presencia de leyes con equiprobabilidad de ocurrencia  $(\omega_1, \omega_2, \dots, E)$ , tal como se presenta en la Ecuación (3.5):

$$f(\omega, n) = sAu_r(\omega, n) - MQm(\omega, n) - PQc(\omega, n) - O \quad (3.5)$$

En resumen, a partir del sistema de ecuaciones (3.1) a (3.3) se determina la ley de corte óptima  $x_{cp}$  para cada periodo  $n$ , tal que la función presentada en la Ecuación (3.1) y extendida en (3.4) y (3.5) se maximiza teniendo en cuenta que las restricciones (3.2) y (3.3) están limitando a la operación minera, actuando como un par y no de manera individual como se encuentra en otros trabajos académicos.

El sistema de ecuaciones (3.1) a (3.3) presentado se propone resolver mediante un procedimiento heurístico que maximiza el VPN de la operación, manteniendo las cantidades de materiales extraídos y procesados en un periodo determinado  $n$  dentro de las capacidades límites disponibles. El marco heurístico permite la selección de la ley de corte óptima, tal que corresponde no sólo al VPN de la operación, sino también a las capacidades operativas, dando lugar a valores dinámicos cambiantes de un período a otro con el agotamiento de las reservas.

Siguiendo las ecuaciones presentadas y definiendo los valores posibles de las variables consideradas como incertidumbre en el modelo, se lleva a cabo la optimización de las leyes de corte. El objetivo de esta optimización es maximizar el VPN a lo largo de la vida del proyecto, lo cual implica aumentar las utilidades y se convierte en un criterio financiero fundamental para las decisiones de los inversionistas.



## **4. Validación del modelo propuesto**

El Capítulo 4 tiene por objetivo realizar la aplicación del modelo propuesto en este trabajo a una compañía minera aurífera con operaciones mineras subterráneas, tomando como referencia las características, restricciones, nomenclatura, metodología y función objetivo descritas en el capítulo anterior. Los valores presentados en esta sección son una adaptación de los datos reales de la compañía minera (a los cuales se les aplicó un ruido aleatorio), teniendo en cuenta que por razones de confidencialidad de la información no se usan los datos originales, ni se suministra el nombre de la empresa. De esta manera, se presentan y comparan los resultados obtenidos entre los modelos determinístico (el cual se define como línea base) y estocástico para la optimización de las leyes de corte y la rentabilidad del proyecto minero (como una función del VPN).

### **4.1 Modelo determinístico**

El modelo utilizado como línea base es el que emplea la compañía minera aurífera en la actualidad para los cálculos de sus leyes de corte, el cual no tiene en cuenta el riesgo y la incertidumbre asociados a la actividad minera, es decir, en este proceso se obtiene una ley de corte con valor constante para la vida de la mina en su totalidad, por lo que los ingresos anuales del proyecto son los mismos a través de la duración de este. En este modelo se considera una curva tonelaje-ley constante y unas capacidades de minado y procesamiento fijas para todo el tiempo del proyecto. En la Tabla 4-1 se presentan los datos base del modelo determinístico y en la Tabla 4-2 se pueden apreciar los principales resultados de este modelo. Es importante mencionar que las unidades financieras tanto del modelo determinístico como del estocástico están dadas en dólares americanos, el signo punto '.' representa separador decimal y el signo coma ',' representa separador de miles:

**Tabla 4-1:** Datos de entrada del modelo determinístico.

Símbolo	Entradas del modelo	Valor
Qm	Capacidad de minado	328,500 t/año
Qc	Capacidad de procesamiento	328,500 t/año
M	Costo Minado	45.2 USD/t
P	Costo Procesamiento	10.0 USD/t
O	Costos Generales	27.4 USD/t
V	Precio del metal	1,800 USD/oz
Mp	Porcentaje de metal pagable	96.0%
r	Porcentaje de recuperación metalúrgica	97.6%
Gc	Gastos de comercialización	35.0 USD/oz
I <sub>0</sub>	Inversión inicial	88,226,000 USD

**Tabla 4-2:** Resultados del modelo determinístico.

Símbolo	Resultados del modelo	Valor
N	Tiempo del proyecto ( <i>LoM</i> )	7 años
x <sub>c</sub>	Ley de corte	1.6 g/t
F	Flujo de caja libre total	112,335,120 USD
VPN	Valor Presente Neto	36,043,086 USD

En el Anexo A, se encuentra la información relacionada con la descripción y resultados del caso base con el cual se compara el modelo propuesto.

## 4.2 Modelo estocástico

A partir del modelo propuesto en el Capítulo 3, se establecen a continuación las entradas con sus respectivos valores en la Tabla 4-3:

**Tabla 4-3:** Datos de entrada utilizados en el modelo propuesto.

Símbolo	Entradas del modelo	Valor
Qm <sub>0</sub>	Capacidad de minado de población I	255,500 t/año
Qc <sub>0</sub>	Capacidad de procesamiento de población I	255,500 t/año
M	Costo Minado	45.2 USD/t

Símbolo	Entradas del modelo	Valor
P	Costo Procesamiento	10.0 USD/t
O <sub>0</sub>	Costos Generales de población I	35.2 USD/t
V	Precio del metal	1,800 USD/oz
M <sub>p</sub>	Porcentaje de metal pagable	96.0%
r	Porcentaje de recuperación metalúrgica	97.6%
G <sub>c</sub>	Gastos de comercialización	35.0 USD/oz
I <sub>0</sub>	Inversión inicial de población I	83,226,000 USD

A continuación, se presentan los principales resultados de la optimización y su análisis. En el Anexo B, se encuentra el detalle del flujo de caja y balance de reservas del modelo propuesto, junto con las curvas tonelaje-ley utilizadas para la optimización.

#### 4.2.1 Principales resultados de la optimización

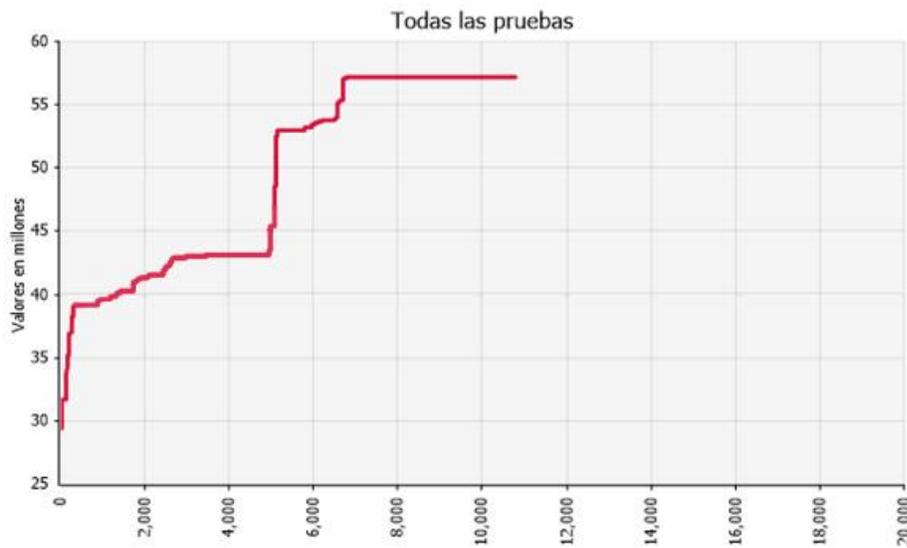
En la Tabla 4-4, se puede apreciar el resumen de la optimización utilizando los parámetros definidos en la Tabla 4-3 y las variables descritas en el Capítulo 3. La validación del modelo se realizó utilizando *@Risk (RISKOptimizer)* de *Palisade*:

**Tabla 4-4:** Resumen de la optimización de *@Risk (RISKOptimizer)*.

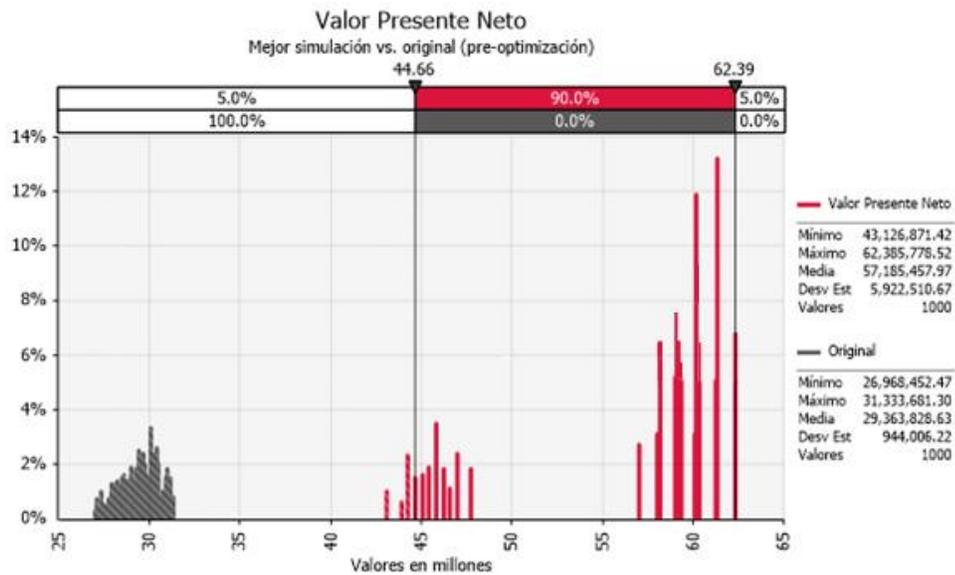
Meta	
Función objetivo	VPN
Estadístico a optimizar	Media
Tipo de meta	Máximo
Resultados	
Total de pruebas	10,786
Pruebas válidas	4,665
Tiempo total de optimización	20:00:59
Valor original	29,363,829 USD
Mejor valor encontrado	57,185,458 USD
Tiempo del proyecto ( <i>LoM</i> )	6 años

En la Figura 4-1 se evidencia la forma en la cual converge el proceso gracias a la metodología de optimización estocástica implícita. De manera complementaria, en la Figura 4-2 se aprecia la posibilidad de que el caso de estudio alcance un VPN mayor a 44.66 M USD y menor a 62.39 M USD, siendo todos estos positivos y mayores al obtenido en el modelo base:

**Figura 4-1:** Representación gráfica de la optimización de @Risk (RISKOptimizer).



**Figura 4-2:** Densidad de probabilidad del VPN del modelo optimizado vs modelo original.



## 4.2.2 Análisis de resultados

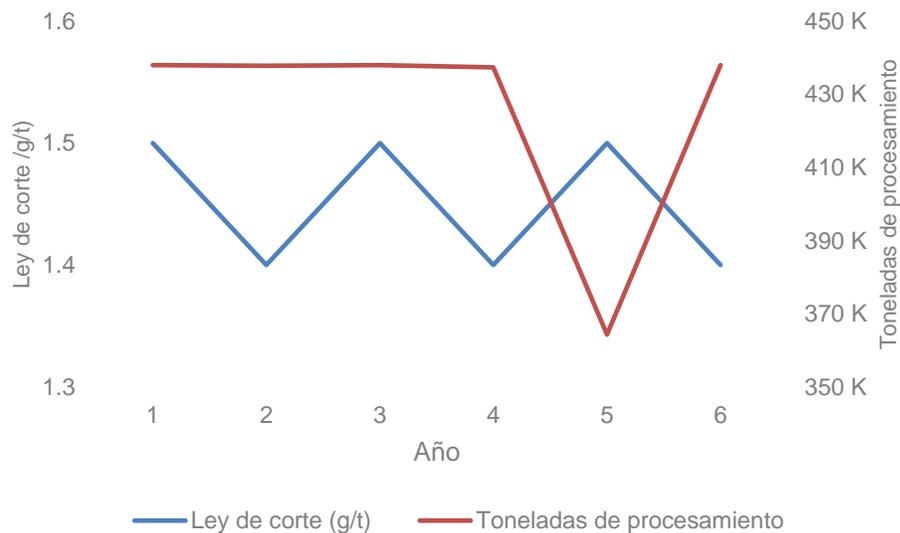
En la Tabla 4-5 se presentan los valores mínimo, máximo, media y desviación estándar productos de la optimización estocástica del modelo:

**Tabla 4-5:** Valores del VPN mínimo, máximo, media y desviación estándar del modelo estocástico.

Resultados del modelo estocástico	
Mínimo	43,126,871 USD
Máximo	62,385,778 USD
Media	57,185,458 USD
Desviación estándar	5,922,511 USD

Los valores expuestos en la Tabla 4-5 permiten evidenciar mejores resultados respecto a los presentados en la Tabla 4-2 del modelo determinístico. Comparando la media del VPN del modelo estocástico con el VPN del modelo base, se genera un incremento de 21,142,372 USD, lo cual resalta los beneficios de los métodos estocásticos para este tipo de procesos. De manera complementaria, En la Figura 4-3 se presenta la política de leyes de corte optimizada para el tiempo del proyecto (*LoM*), señalando la ley de corte de cada periodo y las toneladas a procesar como producto del modelo estocástico:

**Figura 4-3:** Política de ley de corte optimizada para la vida de la mina (*LoM*).



A diferencia de la ley de corte del modelo base, la optimización arroja como resultado una ley de corte dinámica en el tiempo, generando que los ingresos anuales del proyecto no sean los mismos a través de la duración de este. Adicionalmente, los valores de la Figura 4-3 son menores al resultado de la ley de corte del modelo determinístico (1.6 g/t), lo cual permite obtener una mayor cantidad de reservas a extraer (54,463 t), y por lo tanto, un incremento en los ingresos por ventas del metal (91,202,217 USD).

El tiempo del proyecto (*LoM*) presenta también una variación en ambos modelos. Mientras que en el modelo determinístico se establece una vida de la mina de 7 años, la optimización del modelo estocástico entrega como resultado un tiempo de 6 años. En ambos, la capacidad máxima de procesamiento es diferente: para el caso base se establece una capacidad de 328,500 t/año, mientras que la optimización realizada presenta una capacidad de 438,000 t/año.

Finalmente, lo anterior permite analizar los resultados teniendo en cuenta la característica del modelo presentada en el acápite 3.2 respecto a los costos generales, a partir de la cual estos se consideraron como costos fijos en la estructura del flujo de caja libre, teniendo en cuenta que el análisis de personal, rendimientos horas-hombre y costos de las áreas de soporte directo, actividad principal, generales y administrativos (G&A) y sostenibilidad, presentan variaciones insignificantes para el modelo propuesto. De esta manera, se logra verificar el impacto del costo fijo en la operación, dado que al aumentar la capacidad máxima de procesamiento, el costo fijo se diluye considerablemente, es decir, disminuye el costo fijo (USD/t) al aumentar la capacidad de procesamiento de la planta (pasando de 27,4 USD/t en el modelo base a 20,6 USD/t en el modelo estocástico optimizado).



# 5. Conclusiones y trabajos futuros

## 5.1 Conclusiones

A continuación, se presentan las conclusiones del trabajo, explicando la manera en la cual se da cumplimiento a cada uno de los objetivos específicos planteados:

- a. Identificar las principales variables e incertidumbres asociadas a la optimización de leyes de corte para depósitos auríferos.
  - i. La bibliografía consultada considera diferentes variables e incertidumbres asociadas a la optimización de leyes de corte. En el caso de los depósitos auríferos, es común encontrar la incertidumbre geológica y la incertidumbre económica como principales variables de los modelos estocásticos. A diferencia de los modelos consultados, no se consideró incertidumbre económica en relación con el precio del oro, teniendo en cuenta los constantes cambios macroeconómicos y geopolíticos que se presentan a nivel mundial y que afectan el intervalo de confianza de los pronósticos con series de tiempo frecuentemente utilizados. El modelo propuesto en este trabajo presentó como incertidumbres la geológica (sustentada en el uso de cinco curvas tonelaje-lei producto de la estimación de recursos a través de simulación condicional) y la operativa (sustentada en diferentes capacidades de minado y procesamiento que permitieron la definición de los escenarios de simulación evaluados).
  - ii. Al identificar las variables e incertidumbres clave en la optimización de leyes de corte para depósitos auríferos, se logra obtener una visión clara de los factores que influyen en la toma de decisiones en la industria minera. Además, se destaca la importancia de evaluar y comprender estos elementos en el

contexto de la minería aurífera, lo cual mejora la capacidad de los actores involucrados para ajustar estrategias y tomar decisiones informadas, al considerar de cerca los riesgos y oportunidades para maximizar el rendimiento económico de los proyectos mineros.

- b.** Seleccionar un algoritmo para la optimización de las leyes de corte de acuerdo con las variables establecidas.
  - i. Tomando como referencia los aspectos principales en la optimización y el modelado basados en la simulación descritos por Yang (2013), se seleccionó la metodología de optimización estocástica implícita, teniendo en cuenta que es un híbrido entre una metaheurística (la cual ensaya posibles decisiones) y la simulación de Montecarlo (la cual evalúa su desempeño ante multiplicidad de posibles eventos aleatorios). De esta manera, en relación con la metaheurística, fue seleccionado el Algoritmo Genético (AG), reconociendo la eficiencia de este a través de la herramienta *RISKOptimizer* del software *@Risk*, la eficiencia y precisión de la simulación de Montecarlo para evaluar el desempeño de las posibles decisiones del algoritmo y la validez y aplicabilidad del AG en la optimización de la ley de corte.
  - ii. La selección cuidadosa de un algoritmo apropiado para la optimización de las leyes de corte, de acuerdo con las variables establecidas, permite obtener un enfoque eficiente y efectivo para maximizar los resultados económicos en los proyectos mineros. Esto no solo contribuye a mejorar la rentabilidad de los proyectos, sino que también brinda a los profesionales y a los inversionistas una mayor confianza en las estrategias empleadas.
- c.** Aplicar el modelo formulado a una compañía aurífera con operaciones mineras subterráneas.
  - i. Se aplicó el modelo propuesto a una compañía minera que presenta como enfoque de negocio la exploración, explotación y comercialización de oro a

partir de las unidades mineras subterráneas con las que cuenta. Así, tomando como referencia los datos reales de la compañía, se verificó la aplicabilidad del modelo a escala industrial, entregando una alternativa a los modelos tradicionales frecuentemente utilizados para este tipo de problemas. La aplicación del modelo formulado brinda resultados tangibles y valiosos, lo cual demuestra la viabilidad y utilidad práctica del enfoque propuesto.

- ii. El modelo formulado puede ser utilizado en la etapa de prefactibilidad de proyectos mineros que cuenten con características similares a las descritas para el trabajo actual (dado que presenta análisis de riesgo y optimización) y sirve de base para evaluar otro tipo de yacimientos en una etapa posterior a su caracterización en cuanto a particularidades geológicas, técnicas y económicas. Este tipo de aplicaciones destacan la relevancia del modelo en entornos reales y su potencial para impulsar la toma de decisiones estratégicas en la industria.
- d.** Comparar los resultados obtenidos entre los modelos determinísticos (o línea base) y estocásticos para la optimización de las leyes de corte y la rentabilidad del proyecto minero (como una función del VPN).
- i. Al comparar los resultados de ambos modelos, se evidenció que el modelo formulado presentó un año menos en relación con la vida del proyecto (6 años en el modelo estocástico, en comparación con los 7 años del modelo determinístico). Adicionalmente, el modelo estocástico entregó como resultado una ley de corte dinámica en el tiempo, es decir, cambió en cada periodo, permitiendo que los ingresos anuales del proyecto no fueran los mismos a través de la duración de este, mientras que el modelo determinístico conservó una ley de corte fija para la vida de la mina, con ingresos constantes cada periodo. En cuanto a rentabilidad, se presentó un incremento de 21,142,372 USD al comparar la media del VPN del modelo estocástico con el VPN del modelo base. Incluso, considerando el intervalo de confianza del 90% del modelo estocástico, el valor mínimo o peor caso de la media del VPN presenta

un incremento de 7,083,785 USD en comparación con el VPN obtenido en el modelo determinístico.

- ii. Los resultados obtenidos en el modelo estocástico dan cuenta y razón de los beneficios de aplicar este tipo de modelos a escala industrial. Así, se evidencia la importancia de considerar la incertidumbre en la toma de decisiones en la industria minera. Los modelos estocásticos permiten capturar la variabilidad inherente a los factores clave y proporcionan una evaluación más completa y realista de la rentabilidad del proyecto en términos del VPN.

## 5.2 Trabajos futuros

En esta sección, se presentan una serie de recomendaciones que se podrían realizar en trabajos futuros asociados al área de la optimización estocástica de leyes de corte:

- a. Los principales datos de entrada del planeamiento minero están asociados a la información geológica, particularmente la estimación de recursos del proyecto, lo cual permite posteriormente calcular las reservas mineras. Dado que el objetivo principal de este estudio no se centró en la obtención y análisis exhaustivo de la información geológica, es recomendable realizar un estricto seguimiento a los parámetros de estimación de recursos (por ejemplo, el número de muestras y el valor de *capping*), con el objetivo de evitar subestimar o sobreestimar los yacimientos y garantizar la confiabilidad de los datos de entrada utilizados para el cálculo de la vida de la mina, las leyes de corte y la rentabilidad. En este sentido, se considera relevante ahondar en el uso de simulaciones condicionales como grupo de herramientas geoestadísticas que tienen como objetivo modelar la incertidumbre de una estimación.
- b. Para complementar el análisis financiero y los resultados de la rentabilidad obtenidos por medio del flujo de caja del proyecto, es importante considerar los flujos de caja de la deuda y del inversionista, con el fin de medir la rentabilidad de los recursos propios y la capacidad de pago frente a préstamos que ayuden a su financiación. Así también, se presenta como alternativa examinar la tasa de

descuento como posible incertidumbre del modelo, al igual que evaluar los diferentes métodos de depreciación de los activos fijos en el flujo de caja del proyecto y los posibles efectos de la inflación en relación con la reducción del margen de rentabilidad real por la venta del mineral, los mayores costos y gastos debidos al incremento constante de los bienes y servicios y las necesidades crecientes de efectivo para financiar los mayores requerimientos de capital de trabajo del negocio.

- c. Para ampliar el panorama de los modelos estocásticos, se recomienda realizar análisis de acopio de mineral (*stockpile*) con sus respectivos costos y ley de corte. Adicionalmente, es importante complementar el modelo propuesto para permitir su aplicación a depósitos polimetálicos, al igual que incluir otras incertidumbres, como por ejemplo, el suministro de mineral a múltiples flujos de procesamiento y la comercialización del mineral.
- d. Se hace necesario incorporar una valoración de costos medioambientales, socioeconómicos y de cierre de mina que den cuenta de los impactos asociados y de la normatividad vigente para cada proyecto, teniendo en cuenta que hacen parte de los principales factores del desarrollo sostenible y que sus condiciones pueden cambiar con el tiempo, lo cual puede generar cambios en los flujos de caja y en los costos de oportunidad.
- e. Partiendo de los avances tecnológicos contemporáneos y con el objetivo de alcanzar resultados en un menor tiempo, acorde a las necesidades de la industria, sería indispensable utilizar un lenguaje de programación, algoritmo o software alternativo a *@Risk*, el cual pueda adaptarse a las necesidades específicas del modelo. Es pertinente reconocer que la industria minera continúa mostrando bajos niveles de adopción de la inteligencia artificial y las tecnologías digitales, así como una subutilización de los datos e información recolectados por las compañías mineras, a pesar de la elevada inversión que requiere esta actividad.



## A. Anexo: Información complementaria del modelo determinístico

A partir de los datos de entrada de la Tabla 4-1, se realiza el cálculo de la ley de corte estática del modelo determinístico, para lo cual la compañía minera realiza una adaptación de la Ecuación (2.1). La ecuación adaptada (considerando que la compañía no realiza el proceso de refinación), junto con el procedimiento de cálculo se detallan a continuación:

$$x_c = \frac{M+P+O}{(V \cdot Mp \cdot (1-Re) \cdot r) - Gc} \quad (5.1)$$

Reemplazando las variables por los datos de entrada, se obtiene lo siguiente:

$$x_c = \frac{(45.2+10+27.4) \text{ USD}/t}{(1800 \text{ USD}/\text{oz} \cdot 0.960 \cdot (1-0.032) \cdot 0.976) - 35.0 \text{ USD}/\text{oz}} \quad (5.2)$$

$$x_c = \frac{82.6 \text{ USD}/t}{1597.5 \text{ USD}/\text{oz}} \quad (5.3)$$

Convirtiendo las onzas a gramos:

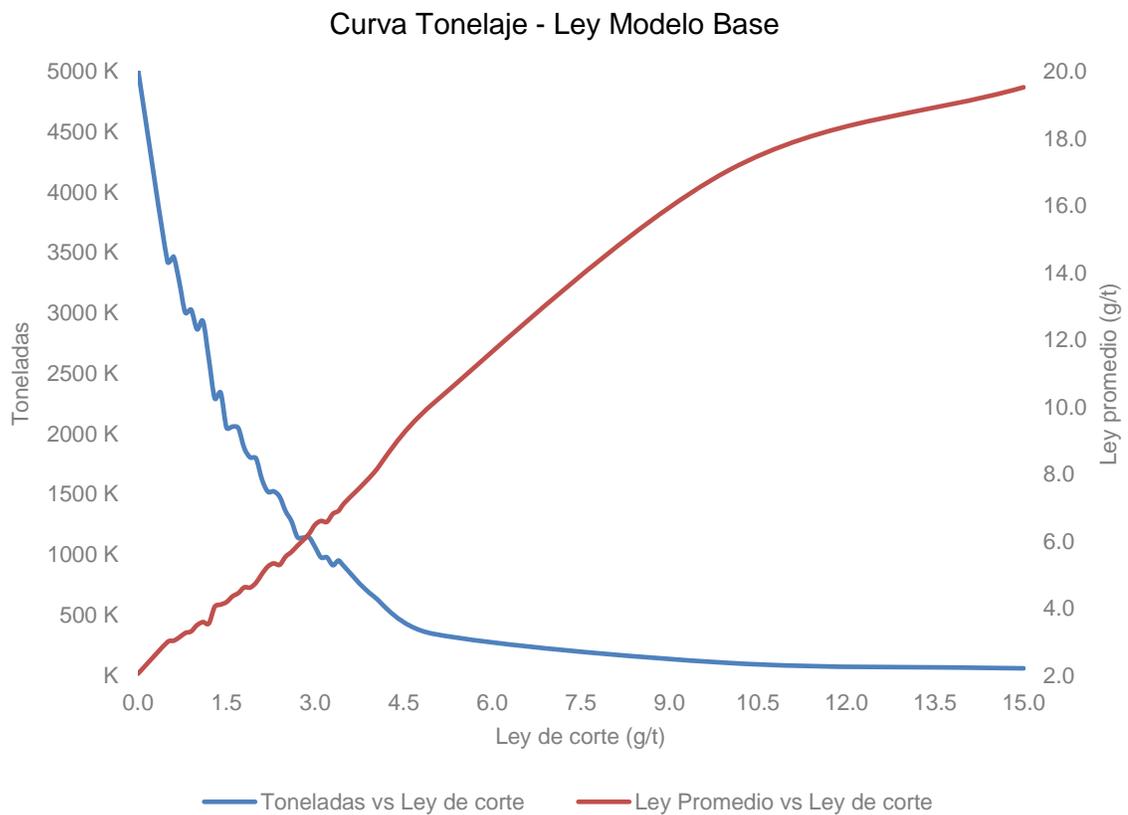
$$x_c = 0.052 \frac{\text{oz}}{t} \cdot \frac{31.103 \text{ g}}{1 \text{ oz}} \quad (5.4)$$

Finalmente, la ley de corte del modelo base se presenta a continuación:

$$x_c = 1.6 \text{ g}/t \quad (5.5)$$

De manera complementaria, en la Figura 5-1 se presenta la curva tonelaje-ley utilizada para el modelo base, mientras que en la Tabla 5-1 se presentan los datos específicos de esta, resaltando la ley de corte, toneladas y ley promedio obtenidas en el proceso de cálculo del modelo en mención. La relación entre las toneladas obtenidas y la capacidad de procesamiento establecida, entrega como resultado el tiempo del proyecto (*LoM*), el cual es de 7 años para el modelo determinístico.

**Figura 5-1:** Curva tonelaje-ley del modelo determinístico.



**Tabla 5-1:** Datos de la curva tonelaje-ley del modelo determinístico.

Ley de corte (g/t)	Toneladas	Ley Promedio (g/t)
15.0	59,868	19.5
10.0	104,603	17.1
5.0	345,557	10.1
4.0	653,253	8.1
3.5	898,921	7.1
3.4	952,520	6.9
3.3	913,701	6.8
3.2	978,631	6.6
3.1	978,147	6.6
3.0	1,063,164	6.5
2.9	1,142,657	6.2
2.8	1,142,046	6.0
2.7	1,145,957	5.9
2.6	1,277,457	5.7
2.5	1,360,517	5.5
2.4	1,479,679	5.3
2.3	1,524,788	5.3
2.2	1,522,040	5.3
2.1	1,623,089	5.0
2.0	1,797,016	4.8
1.9	1,805,834	4.6
1.8	1,882,470	4.6
1.7	2,047,985	4.5
1.6	2,061,110	4.4
1.5	2,051,465	4.2
1.4	2,342,332	4.1
1.3	2,294,897	4.1
1.2	2,620,552	3.6
1.1	2,933,021	3.6
1.0	2,866,070	3.5
0.9	3,028,715	3.3
0.8	3,005,204	3.3
0.7	3,257,440	3.1
0.6	3,469,384	3.0
0.5	3,424,896	3.0
0.0	5,015,803	2.1

Adicionalmente, en la Tabla 5-2 se presenta el flujo de caja del modelo base:

**Tabla 5-2:** Flujo de caja del modelo determinístico.

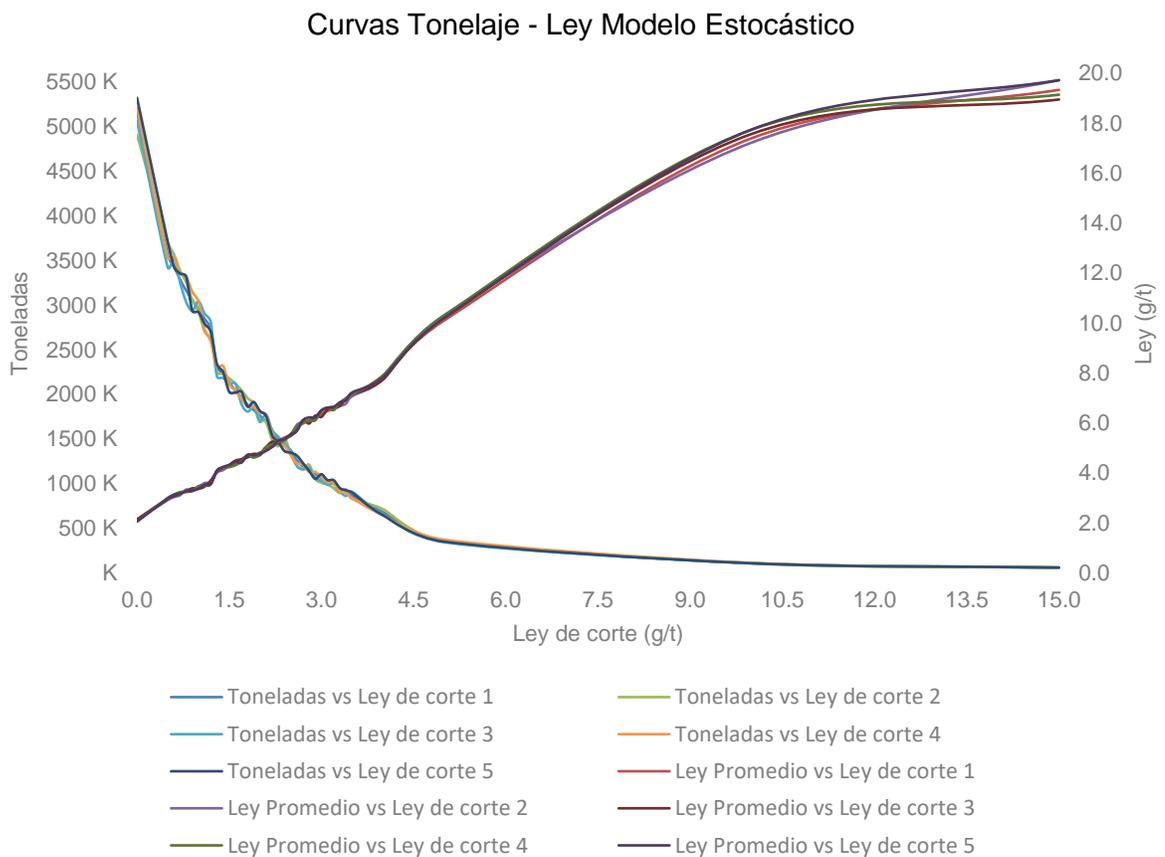
Símbolo	Definición	Unidades	Año Ley de corte (g/t)	1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
				1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	
<b>Balance de Reservas</b>											
	Reservas iniciales	t		2,061,110	1,732,610	1,404,110	1,075,610	747,110	418,610	90,110	
	Reservas finales	t		1,732,610	1,404,110	1,075,610	747,110	418,610	90,110	0	
<b>Procesamiento</b>											
	Toneladas	t		328,500	328,500	328,500	328,500	328,500	328,500	90,110	2,061,110
L	Ley	g/t		4.4	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4
r	Recuperación Metalúrgica	%		97.6%	97.6%	97.6%	97.6%	97.6%	97.6%	97.6%	97.6%
	Finos recuperados	g		1,397,667	1,397,667	1,397,667	1,397,667	1,397,667	1,397,667	383,390	8,769,391
<b>Comercialización</b>											
Aur	Onzas vendidas	oz		44,936	44,936	44,936	44,936	44,936	44,936	12,326	281,942
Iv	Ingreso por ventas	USD		71,787,919	71,787,919	71,787,919	71,787,919	71,787,919	71,787,919	19,691,914	450,419,427
<b>Costos de operación</b>											
M	Minado	USD		14,848,200	14,848,200	14,848,200	14,848,200	14,848,200	14,848,200	4,072,962	93,162,162
P	Procesamiento	USD		3,285,000	3,285,000	3,285,000	3,285,000	3,285,000	3,285,000	901,098	20,611,098
O	Generales	USD		9,000,900	9,000,900	9,000,900	9,000,900	9,000,900	9,000,900	2,469,008	56,474,408
	OPEX	USD		27,134,100	27,134,100	27,134,100	27,134,100	27,134,100	27,134,100	7,443,068	170,247,668
CC	Cash Cost	USD/oz		604	604	604	604	604	604	604	604
<b>Flujo de caja descontado</b>											
Iv	Ingreso por ventas	USD		71,787,919	71,787,919	71,787,919	71,787,919	71,787,919	71,787,919	19,691,914	450,419,427
M	Costo Minado	USD		-14,848,200	-14,848,200	-14,848,200	-14,848,200	-14,848,200	-14,848,200	-4,072,962	-93,162,162
P	Costo Procesamiento	USD		-3,285,000	-3,285,000	-3,285,000	-3,285,000	-3,285,000	-3,285,000	-901,098	-20,611,098
O	Costos Generales	USD		-9,000,900	-9,000,900	-9,000,900	-9,000,900	-9,000,900	-9,000,900	-2,469,008	-56,474,408
Mb	Margen bruto	USD	62%	44,653,819	44,653,819	44,653,819	44,653,819	44,653,819	44,653,819	12,248,846	280,171,759
Gc	Gastos comercialización	USD	35 USD/oz	-1,572,760	-1,572,760	-1,572,760	-1,572,760	-1,572,760	-1,572,760	-431,419	-9,867,979
	EBITDA	USD	60%	43,081,059	43,081,059	43,081,059	43,081,059	43,081,059	43,081,059	11,817,427	270,303,780
Re	Regalías	USD	3.2%	-2,297,213	-2,297,213	-2,297,213	-2,297,213	-2,297,213	-2,297,213	-630,141	-14,413,422
De	Depreciación	USD	14,061,474	-14,061,474	-14,061,474	-14,061,474	-14,061,474	-14,061,474	-14,061,474	-3,857,158	-88,226,000
	EBIT	USD	37%	26,722,372	26,722,372	26,722,372	26,722,372	26,722,372	26,722,372	7,330,128	167,664,358
Ir	Impuesto a la renta	USD	33%	-8,818,383	-8,818,383	-8,818,383	-8,818,383	-8,818,383	-8,818,383	-2,418,942	-55,329,238
De	Depreciación	USD		14,061,474	14,061,474	14,061,474	14,061,474	14,061,474	14,061,474	3,857,158	88,226,000
	<b>FCF</b>	USD	<b>-88,226,000</b>	<b>31,965,463</b>	<b>31,965,463</b>	<b>31,965,463</b>	<b>31,965,463</b>	<b>31,965,463</b>	<b>31,965,463</b>	<b>8,768,344</b>	<b>112,335,120</b>



## B. Anexo: Información complementaria del modelo estocástico

En la Figura 5-2 se presentan las curvas tonelaje-ley utilizadas para el modelo estocástico, mientras que en la Tabla 5-3 se presentan los datos de estas:

**Figura 5-2:** Curvas tonelaje-ley del modelo estocástico.



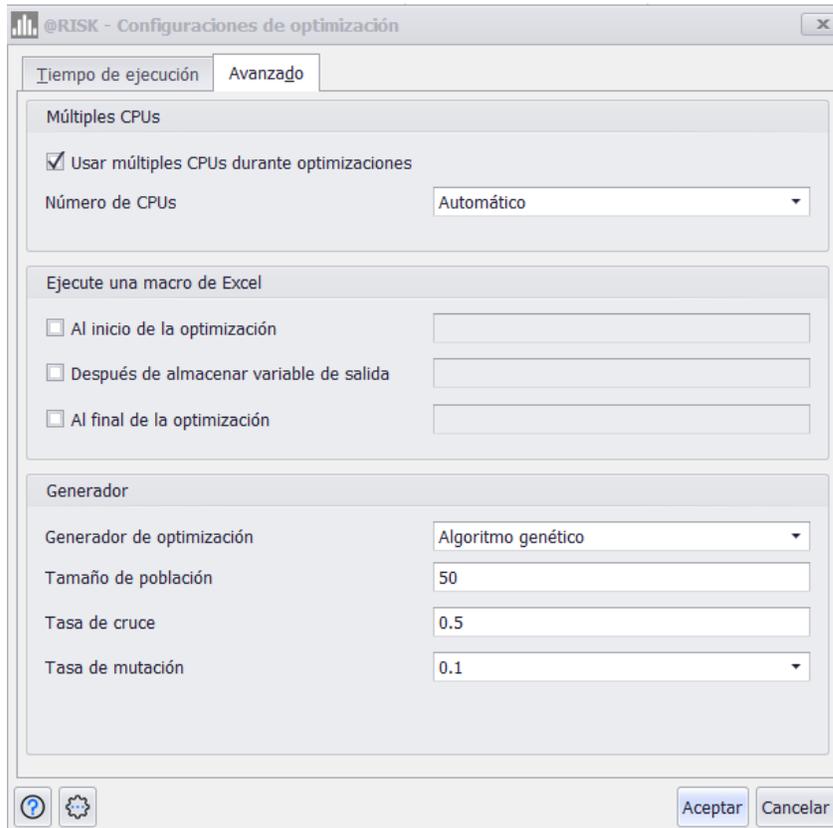
**Tabla 5-3:** Datos de las curvas tonelaje-ley del modelo estocástico.

Ley de corte (g/ton)	Curva 1		Curva 2		Curva 3		Curva 4		Curva 5	
	Toneladas	Ley Promedio (g/ton)								
15.0	57,565	19.3	59,292	19.7	56,990	19.0	58,717	19.1	58,717	19.7
10.0	105,660	17.4	108,829	17.2	108,829	17.6	110,943	17.7	106,716	17.7
5.0	359,955	10.1	359,955	10.3	341,957	10.2	370,754	10.3	349,156	10.2
4.0	680,472	7.9	714,495	7.7	653,253	7.7	646,448	7.9	646,448	7.8
3.5	864,347	7.1	829,773	7.1	907,564	7.1	838,416	7.1	898,921	7.2
3.4	907,162	6.9	934,377	6.8	861,804	7.0	898,090	7.0	925,305	6.9
3.3	932,348	6.8	895,054	6.7	913,701	6.7	913,701	6.8	950,995	6.8
3.2	998,603	6.6	948,673	6.6	998,603	6.6	1,008,589	6.5	1,038,548	6.6
3.1	1,029,628	6.5	988,443	6.6	988,443	6.5	1,019,332	6.6	1,039,925	6.6
3.0	1,063,164	6.4	1,010,006	6.5	1,031,269	6.2	1,073,796	6.5	1,105,690	6.5
2.9	1,109,376	6.2	1,053,907	6.2	1,065,001	6.3	1,131,563	6.1	1,053,907	6.2
2.8	1,153,582	6.1	1,211,261	6.1	1,176,653	6.0	1,130,510	6.1	1,142,046	6.2
2.7	1,193,706	6.0	1,169,831	6.0	1,157,894	6.1	1,217,580	6.0	1,229,517	6.1
2.6	1,264,809	5.8	1,201,568	5.9	1,201,568	5.7	1,226,865	5.9	1,315,401	5.7
2.5	1,374,259	5.5	1,333,031	5.5	1,360,517	5.5	1,319,289	5.5	1,346,774	5.5
2.4	1,436,581	5.4	1,508,410	5.4	1,450,947	5.4	1,422,215	5.3	1,364,752	5.4
2.3	1,494,890	5.3	1,420,145	5.2	1,524,788	5.2	1,450,043	5.2	1,464,992	5.3
2.2	1,569,114	5.1	1,490,658	5.0	1,600,496	5.3	1,569,114	5.1	1,537,731	5.0
2.1	1,690,718	4.9	1,690,718	5.0	1,775,254	5.0	1,775,254	5.0	1,758,347	4.9
2.0	1,761,780	4.8	1,726,545	4.7	1,691,309	4.7	1,797,016	4.8	1,814,634	4.8
1.9	1,824,075	4.7	1,897,038	4.6	1,860,556	4.8	1,860,556	4.6	1,915,279	4.7
1.8	1,882,470	4.6	1,957,769	4.7	1,807,171	4.6	1,863,645	4.7	1,863,645	4.7
1.7	1,969,216	4.5	2,047,985	4.5	1,890,448	4.5	1,949,524	4.5	2,028,293	4.4
1.6	2,040,703	4.4	2,122,331	4.3	2,122,331	4.5	2,040,703	4.3	2,020,296	4.4

Ley de corte (g/ton)	Curva 1		Curva 2		Curva 3		Curva 4		Curva 5	
	Toneladas	Ley Promedio (g/ton)								
1.5	2,136,943	4.3	2,179,682	4.3	2,115,573	4.3	2,115,573	4.2	2,030,096	4.3
1.4	2,230,793	4.2	2,230,793	4.1	2,186,177	4.2	2,320,024	4.2	2,253,101	4.2
1.3	2,318,077	4.1	2,248,535	4.0	2,202,173	4.1	2,318,077	4.1	2,341,258	4.1
1.2	2,729,742	3.6	2,620,552	3.6	2,811,634	3.7	2,593,255	3.6	2,702,445	3.6
1.1	2,847,593	3.5	2,705,214	3.6	2,904,545	3.5	2,733,690	3.5	2,790,642	3.5
1.0	2,954,712	3.4	2,925,164	3.4	3,043,353	3.4	3,043,353	3.5	2,925,164	3.4
0.9	3,059,308	3.3	3,059,308	3.3	2,936,936	3.4	3,151,087	3.3	2,936,936	3.3
0.8	3,163,373	3.3	3,258,274	3.3	3,036,838	3.3	3,321,541	3.2	3,321,541	3.3
0.7	3,290,344	3.2	3,389,054	3.1	3,257,440	3.2	3,356,150	3.2	3,356,150	3.2
0.6	3,435,033	3.1	3,572,435	3.0	3,538,084	3.1	3,538,084	3.1	3,435,033	3.1
0.5	3,567,601	3.0	3,710,305	2.9	3,424,896	3.0	3,531,925	3.0	3,710,305	3.0
0.0	5,170,931	2.1	4,912,385	2.1	5,067,512	2.1	5,222,640	2.1	5,326,059	2.1

Las Figuras 5-3 y 5-4 presentan la configuración de los parámetros del Algoritmo Genético para la optimización realizada y el progreso de esta en el software @Risk. Adicionalmente, la Tabla 5-4 presenta el flujo de caja del modelo estocástico, para el escenario de optimización de la media del VPN:

**Figura 5-3:** Configuración de la optimización en el software @Risk.



**Figura 5-4:** Progreso de la optimización en el software @Risk.







## Bibliografía

- Abdel Sabour, S. A., & Dimitrakopoulos, R. (2011). Incorporating geological and market uncertainties and operational flexibility into open pit mine design. *Journal of Mining Science*, 47(2), 191–201.
- Abdolahisharif, J., Bakhtavar, E., & Anemangely, M. (2012). Optimal cut-off grade determination based on variable capacities in open-pit mining. *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, 112(1065–1069).
- Ahmadi, M. A., & Golshadi, M. (2012). Neural network based swarm concept for prediction asphaltene precipitation due to natural depletion. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 98–99, 40–49.
- Ahmadi, M. R. (2018). Cutoff grade optimization based on maximizing net present value using a computer model. *Journal of Sustainable Mining*, 17(2), 68–75.  
<https://doi.org/10.1016/j.jsm.2018.04.002>
- Ahmadi, M. R., & Bazzazi, A. A. (2019). Cutoff grades optimization in open pit mines using meta-heuristic algorithms. *Resources Policy*, 60, 72–82.  
<https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2018.12.001>
- Ahmadi, M. R., & Shahabi, R. S. (2018). Cutoff grade optimization in open pit mines using genetic algorithm. *Resources Policy*, 55, 184–191.  
<https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2017.11.016>
- Alford, C., & Hall, B. (2009). Stope optimisation tools for selection of optimum cut-off grade in underground mines. *Project Evaluation Conference*.
- Arteaga, J. D. (2015). *Modelo de optimización estocástica de la ley de corte para depósitos polimetálicos*. Universidad Nacional de Colombia.
- Asad, M. W. A. (2002). Development of generalized cutoff grade optimization algorithm for

- open pit mining operations. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 21(2), 119–127.
- Asad, M. W. A. (2005a). Cut-off grade optimization algorithm with stockpiling option for open pit mining operations of two economic minerals. *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment*, 19(3), 176–187.
- Asad, M. W. A. (2007). Optimum cut-off grade policy for open pit mining operations through net present value algorithm considering metal price and cost escalation. *Engineering Computations*, 24(7), 723–736.
- Asad, M. W. A. (2005b). Cut-off grade optimization algorithm for open pit mining operations with consideration of dynamic metal price and cost escalation during mine life. *32nd International Symposium on Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry*, 273–277.
- Asad, M. W. A., & Dimitrakopoulos, R. (2013). A heuristic approach to stochastic cut-off grade optimization for open pit mining complexes with multiple processing streams. *Resources Policy*, 38(4), 591–597. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2013.09.008>
- Asad, M. W. A., Qureshi, M. A., & Jang, H. (2016). A review of cut-off grade policy models for open pit mining operations. *Resources Policy*, 49, 142–152. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2016.05.005>
- Asad, M. W. A., & Topal, E. (2011). Net present value maximization model for optimum cut-off grade policy of open pit mining operations. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 111(11), 741–750.
- Ataei, M., & Osanloo, M. (2003a). Determination of optimum cut-off grades of multiple metal deposits by using the golden section search method. *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, 493–500.
- Ataei, M., & Osanloo, M. (2003b). Methods for calculation of optimal cutoff grades in complex ore deposits. *Journal of Mining Science*, 39(5), 499–507.
- Ataei, M., & Osanloo, M. (2004). Using a combination of genetic algorithm and the grid search method to determine optimum cut-off grades of multiple metal deposits.

- International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment*, 18(1), 60–78.  
<https://doi.org/10.1076/ijism.18.1.60.23543>
- Ataei, M., & Osanloo, M. (2013). Determination of optimum cut-off grades of open pit mines with the purpose of maximizing net present value using elimination methods. *International Journal of Engineering Science*, 14(3), 141–151.
- Atashpaz-Gargari, E., & Lucas, C. (2007). Imperialist competitive algorithm: an algorithm for optimization inspired by imperialistic competition. *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2007*, 4661–4667.
- Azimi, Y., & Osanloo, M. (2011). Determination of open pit mining cut-off grade strategy using combination of nonlinear programming and genetic algorithm. *Archives of Mining Sciences*, 56(2), 189–212.
- Azimi, Y., Osanloo, M., & Esfahanipour, A. (2011). Optimisation of mining policy under different economic conditions using a combination of non-linear programming and genetic algorithm. *Proceedings of the 35th APCOM Symposium*.
- Azimi, Y., Osanloo, M., & Esfahanipour, A. (2012). Selection of the open pit mining cut-off grade strategy under price uncertainty using a risk based multi-criteria ranking system. *Archives of Mining Sciences*, 57(3), 741–768.
- Azimi, Y., Osanloo, M., & Esfahanipour, A. (2013). An uncertainty based multi-criteria ranking system for open pit mining cut-off grade strategy selection. *Resources Policy*, 38(2), 212–223. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2013.01.004>
- Baker, C. K., & Giacomo, S. M. (1998). Resource and reserves: their uses and abuses by the equity markets. *Ore Reserves and Finance: A Joint Seminar between Australasian Institute of Mining and Metallurgy and ASX*.
- Barr, D. (2012). *Stochastic Dynamic Optimization of Cut-off Grade in Open Pit Mines*. Queen's University.
- Bascetin, A., & Nieto, A. (2007). Determination of optimal cut-off grade policy to optimize NPV using a new approach with optimization factor. *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, 107(2), 87–94.

- Batterham, R., & Elvish, R. (2009). Smarter mineral processing, or, what do mill operators think? *10th Mill Operators' Conference Proceedings 2009–1*.  
<https://app.knovel.com/hotlink/pdf/id:kt008V7C34/tenthmill-operators/smart%0Aer-mineral-abstract>
- Birch, C. (2016). Impact of discount rates on cut-off grades for narrow tabular gold deposits. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 116(2), 115–122.  
<https://doi.org/10.17159/2411-9717/2016/v116n2a2>
- Birch, C. (2018). Review of cut-off grade optimisation from Southern African mines. Student assignment based observations. *Resources Policy*, 56, 134–140.  
<https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2017.10.004>
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- Bootsma, M. T., Alford, C., Bennford, J., & Buxton, M. W. N. (2018). Cut-off grade based sublevel stope mine optimisation. In R. Dimitrakopoulos (Ed.), *Advances in Applied Strategic Mine Planning* (1st ed., pp. 537–558). Springer.
- Border, S. (1991). Optimisation of cut-off grades during design of underground mines. *Mining Industry Optimisation Conference*.
- Boyle, P. (1997). Options: a Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, 4, 323–338.
- Bragin, V. I., Kharitonova, M. Y., & Matsko, N. A. (2021). A probabilistic approach to the dynamic cut-off grade assessment. *Journal of Mining Institute*, 251(3), 617–625.  
<https://doi.org/10.31897/PMI.2021.5.1>
- Cepin, M. (2011). *Assessment of power system reliability*. Springer-Verlag London.  
<https://doi.org/10.1007/978-0-85729-688-7>
- Cetin, E., & Dowd, P. A. (2002). The use of genetic algorithms for multiple cut-off grade optimization. In *Proceedings of the 23rd International Symposium on Application of Computers and Operations Research in Minerals Industry* (pp. 769–779).

- Cetin, E., & Dowd, P. A. (2016). Multiple cut-off grade optimization by genetic algorithms and comparison with grid search method and dynamic programming. *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, 116, 681–688. <https://doi.org/https://doi.org/10.17159/2411-9717/2016/v116n7a10>.
- Chimunhu, P., Topal, E., Ajak, A. D., & Asad, W. (2022). A review of machine learning applications for underground mine planning and scheduling. *Resources Policy*, 77, 102693. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2022.102693>
- Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229–263.
- Dagdelen, K. (1992). Cut-off grade optimization. In *Proceedings of the 23rd International Symposium on Application of Computers and Operations Research in Minerals Industry* (pp. 157–165).
- Dagdelen, K. (1993). An NPV optimization algorithm for open pit mine design. In *Proceedings of the 24th International Symposium on Application of Computers and Operations Research in Minerals Industry* (pp. 257–263).
- Dagdelen, K., & Kawahata, K. (2008). Value creation through strategic mine planning and cut-off grade optimization. *Mining Engineering*, 60(1), 39–45.
- Dagdelen, K., & Kawahata, K. (2007). Cut-off grade optimization for large scale multi-mine, multi process mining operations. In C. Associates (Ed.), *Proceedings of the International Symposium on Mine Planning and Equipment Selection* (pp. 226–233).
- Dagdelen, K., & Mohammad, W. A. (1997). Multi-mineral cut-off grade optimization with option to stockpile. *SME Annual Meeting*, Preprint #97186.
- Dimitrakopoulos, R. (2018). *Advances in Applied Strategic Mine Planning* (1st ed.). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-69320-0>
- Dong, C. H. (2002). Application of Ore Grade Optimization Method on Erfengshan Iron Mine. *Metal Mine*, 4, 14–17.
- Dullaert, W., Sevaux, M., Sörensen, K., & Springael, J. (2007). Applications of metaheuristics. *European Journal of Operational Research*, 179, 601–604.

- <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.03.060>
- Fan, J., Xiong, S., Wang, J., & Gong, C. (2008). IMODE: Improving multi-objective differential evolution algorithm. *Proceedings of the Fourth International Conference on Natural Computation, ICNC'08*, 212–216.
- Fathollahzadeh, K., Asad, M. W. A., Mardaneh, E., & Cigla, M. (2021). Review of solution methodologies for open pit mine production scheduling problem. *International Journal of Mining Reclamation and Environment*, 35(8), 564–599.
- Franco-Sepúlveda, G., Del Rio-Cuervo, J. C., & Pachón-Hernández, M. A. (2019). State of the art about metaheuristics and artificial neural networks applied to open pit mining. *Resources Policy*, 60, 125–133. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2018.12.013>
- Franco-Sepúlveda, G., & Velilla-Avilez, D. (2014). Planeamiento minero como función de la variación de la ley de corte crítica. *Boletín Ciencias de La Tierra*, 35, 25–30. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=169531421003>
- Franco, G. (2017). *Modelo de optimización estocástica para explotaciones mineras a cielo abierto*. Universidad Nacional de Colombia.
- Franks, M. D., Boger, D. V., Côte, C. M., & Mulligan, D. . (2011). Sustainable development principles for the disposal of mining and mineral processing wastes. *Resources Policy*, 36(2), 114–122.
- Gholamnejad, J. (2008). Determination of the optimum cut-off grade considering environmental cost. *Journal of International Environmental Application and Science*, 3(3), 186–194.
- Githiria, J., & Musingwini, C. (2019). A stochastic cut-off grade optimization model to incorporate uncertainty for improved project value. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 119(3), 217–228. <https://doi.org/10.17159/2411-9717/2019/v119n3a1>
- Goldberg, D. E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning* (1st ed.). Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.

- Gómez, E. A., & Díez, J. M. (2015). *Evaluación financiera de proyectos* (Segunda Ed).
- Gonzalez, T. (2007). *Handbook of Approximation Algorithms and Metaheuristics*. Chapman & Hall/CRC.
- Goodfellow, R. C., & Dimitrakopoulos, R. (2016). Global optimization of open pit mining complexes with uncertainty. *Applied Soft Computing*, 40, 292–304.
- Gu, X., Wang, Q., Chu, D., & Zhang, B. (2010). *Dynamic optimization of cutoff grade in underground metal mining*. 17, 492–497. <https://doi.org/10.1007/s11771>
- Gupta, J. N. D., & Sexton, R. S. (1999). Comparing backpropagation with a genetic algorithm for neural network training. *Omega*, 27(6), 679–684. [https://doi.org/10.1016/S0305-0483\(99\)00027-4](https://doi.org/10.1016/S0305-0483(99)00027-4)
- Hajkowicz, A. S., Heyenga, S., & Moffat, K. (2011). The relationship between mining and socio-economic well being in Australia's regions. *Resources Policy*, 36(1), 30–38.
- Hall, B. (2014). *Cut-off Grades and Optimising the Strategic Mine Plan*. The Australasian Institute of Mining and Metallurgy.
- Hanafi, S., Wang, Y., Glover, F., Yang, W., & Hennig, R. (2023). Tabu search exploiting local optimality in binary optimization. *European Journal of Operational Research*, 308, 1037–1055. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2023.01.001>
- Hassan, R., Cohanin, B., & Weck, O. (2005). A comparison of particle swarm optimization and genetic algorithm. *Proceedings of the 46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*, 18–21.
- He, Y., Xu, S., Zhu, K., Liu, T., & Li, Y. (2008). A Genetic-Neural Method of Optimizing Cut-Off Grade. In *Advances in Neural Networks - ISNN 2008* (pp. 588–597). Springer, Berlin, Heidelberg.
- He, Y., Zhu, K., Gao, S., Liu, T., & Li, Y. (2009). Theory and method of genetic - neural optimization cut-off grade and grade of crude ore. *Expert Systems with Applications*, 36(4), 7617–7623.
- Hirai, H., Katamura, K., Mamacly, F. P., & Fujimura, T. (1987). Development and Mine Operation at Rio Tuba Nickel Mine. *International Journal of Mineral Processing*, 19,

- 99–114.
- Holland, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. The University of Michigan Press/MIT Press.
- Hosseini-Nasab, E., Khezri, M., Khodamoradi, M. S., & Atashpaz-Gargari, E. (2010). An application of imperialist competitive algorithm to simulation of energy demand based on economic indicators: evidence from Iran. *European Journal of Scientific Research*, 43(4), 495–506.
- Izmailov, A. F., & Solodov, M. V. (2013). A globally convergent algorithm for convex programming problems with binary variables. *Mathematical Programming*, 142(1–2), 233–258.
- Jöhnk, J., Weißert, M., & Wyrski, K. (2020). Ready or not, AI comes - an interview study of organizational AI readiness factors. *Business & Information Systems Engineering*, 63(5), 20. <https://doi.org/10.1007/s12599-020-00676-7>
- Khan, A., & Asad, M. W. A. (2019). A method for optimal cut-off grade policy in open pit mining operations under uncertain supply. *Resources Policy*, 60, 178–184. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2018.12.003>
- Khan, A., & Asad, M. W. A. (2021). A mixed integer programming based cut-off grade model for open-pit mining of complex poly-metallic resources. *Resources Policy*, 72, 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2021.102076>
- Khodayari, A. A., & Jafarnejad, A. (2012). The effect of price changes on optimum cut-off grade of different open-pit mines. *Journal of Mining & Environment*, 3(1), 61–68.
- Khodayari, A., & Jafarnejad, A. (2012). Cut-off grade optimization for maximizing the output rate. *International Journal of Mining and Geo-Engineering*, 46(1), 51–56.
- King, B. (2001). *Optimal Mine Scheduling Policies*. London University, UK.
- King, B. (2011). Optimal mining practice in strategic planning. *Journal of Mining Science*, 47(2), 247–253.
- King, B. (2018). Optimal Mining Principles. In R. Dimitrakopoulos (Ed.), *Advances in*

- Applied Strategic Mine Planning* (1st ed., pp. 19–30).
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., & Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598), 671–680.
- Kumral, M. (2013). Optimizing ore-waste discrimination and block sequencing through simulated annealing. *Applied Soft Computing*, 13(8), 3737–3744.
- Lane, K. F. (1964). Choosing the optimum cut-off grade. *Colorado School of Mines Quarterly*, 59, 811–829.
- Lane, K. F. (1988). *The economic definition of ore: Cut-off grade in theory and practice*. Mining Journal Books.
- Laurence, D. (2011). *A Guide to Leading Practice Sustainable Development in Mining*. Australian Government Department of Resources, Energy and Tourism.
- Li, S., & Yang, C. (2012). An optimal algorithm for cut-off grade calculation using multistage stochastic programming. *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, 45(1), 117–122.
- Liu, D., Li, G., Hu, N., Xiu, G., & Ma, Z. (2019). Optimization of the cut-off grade for underground polymetallic mines. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi / Mineral Resources Management*, 35(1), 25–42. <https://doi.org/10.24425/gsm.2019.128198>
- Mahase, M., Musingwini, C., & Nhleko, A. (2016). A survey of applications of multi-criteria decision analysis methods in mine planning and related case studies. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 11, 1051–1056.
- Maldonado, C. E., & Gómez, N. A. (2011). *El mundo de las ciencias de la complejidad*. Universidad El Rosario.
- Malik, H., Iqbal, A., Joshi, P., Agrawal, S., & Bakhsh, F. (2021). *Metaheuristic and Evolutionary Computation: Algorithms and Applications* (Springer (ed.); 1st ed.).
- Mansouri, M., Osanloo, M., & Gheisari, N. (2014). Establishing a Sustainable Model to Reduce the Risk of Mine Closure. *Mine Planning and Equipment Selection*, 1427–1436. [https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-02678-7\\_137](https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-02678-7_137)

- Marques, D. M., & Costa, J. F. C. L. (2013). An algorithm to simulate ore grade variability in blending and homogenization piles. *International Journal of Mineral Processing*, 120, 48–55.
- Martinelli, R., Collard, J., & Gamache, M. (2020). Strategic planning of an underground mine with variable cut-off grades. *Optimization and Engineering*, 21(3), 803–849. <https://doi.org/10.1007/s11081-019-09479-6>
- McCulloch, W. S., & Pitts, W. (1943). A Logical Calculus of Ideas Immanent in Nervous Activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5, 15–33.
- McInerney, M., & Dhawan, A. P. (1993). Use of genetic algorithms with backpropagation in training of feedforward neural networks. *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, 203–208.
- Melián, B., Moreno, J. A., & Moreno, J. M. (2003). Metaheurísticas: Una visión global. *Inteligencia Artificial. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial*, 7(19), 7–28.
- Michalewicz, Z., & Fogel, D. B. (2004). *How to Solve It: Modern Heuristics* (2nd ed.). Springer Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-662-07807-5>
- Minnitt, R. C. A. (2003). Cut-off grade determination for the maximum value of a small Wits-type gold mining operation. *Proceedings of the 31st International Symposium on Application of Computers and Operations Research in the Minerals Industries (APCOM)*.
- Mishra, B. (2006). Development of a Computer Model for Determination of Cut off Grade for Metalliferous Deposits. *Journal of Mines, Metals and Fuels*, 54, 147–152.
- Mohammad, W. A. (1997). *Multi-mineral cut-off grade optimization with option to stockpile*. Colorado School of Mines.
- Mohammadi, S., Ataei, M., Kakaie, R., & Pourzamani, E. (2015). Comparison of golden section search method and imperialist competitive algorithm for optimization cut-off grade - case study: Mine No. 1 of Golgohar. *Journal of Mining & Environment*, 6, 63–71.

- Mohammadi, S., Kakaie, R., Ataei, M., & Pourzamani, E. (2017). Determination of the optimum cut-off grades and production scheduling in multi-product open pit mines using imperialist competitive algorithm ( ICA ). *Resources Policy*, 51(July 2016), 39–48. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2016.11.005>
- Murphy, K. (2012). *Machine Learning: A Probabilistic Perspective*. The MIT Press.
- Mutti, D., Yakovleva, N., Vazquez-Brust, D., & Di Marco, H. M. (2012). Corporate social responsibility in the mining industry: Perspectives from stakeholder groups in Argentina. *Resources Policy*, 37(2), 212–222.
- Myburgh, C. A., Deb, K., & Craig, S. (2014). Applying Modern Heuristics to Maximizing NPV through Cutoff grade Optimization. *Orebody Modelling and Strategic Planning Conference*, 1–16.
- Narendran, T. V., & Weinelt, B. (2017). *Digital transformation initiative mining and metals industry*.
- Newman, A. M., Rubio, E., Caro, R., Weintraub, A., & Eureka, K. (2010). A review of operations research in mine planning. *Interfaces*, 40(3), 222–245. <https://doi.org/10.1287/inte.1090.0492>
- Niemann-Delius, C., & Sattarvand, J. (2008). Perspective of metaheuristic optimization methods in open pit production planning. *Mineral Resources Management = Gospodarka Surowcami Mineralnymi*, 24(4,2), 143–155.
- Noriega, R., & Pourrahimian, Y. (2022). A systematic review of artificial intelligence and data-driven approaches in strategic open-pit mine planning. *Resources Policy*, 77, 102727. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2022.102727>
- Oliva-Romero, Y., Ochoa-Zezatti, A., Marcela-Herrera, A., & Oliva-Navarro, D. A. (2017). Modelo innovador para un aparador comercial usando un algoritmo competitivo imperialista. *Research in Computing Science*, 134(1), 35–44. <https://doi.org/10.13053/rcs-134-1-3>
- Osanloo, M., Ataei, M. (2003). Using Equivalent Grade Factors to Find the Optimum Cut-off Grades of Multiple Metal Deposits. *Minerals Engineering*, 16, 771–776.

- Osanloo, M., Rashidinejad, F., & Rezai, B. (2008). Incorporating environmental issues into optimum cut-off grades modelling at porphyry copper deposits. *Resources Policy*, 33(4), 222–229.
- Paithankar, A., Chatterjee, S., & Goodfellow, R. (2021). Open-pit mining complex optimization under uncertainty with integrated cut-off grade based destination policies. *Resources Policy*, 70, 101875. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2020.101875>
- Prior, T., Giurco, D., Mudd, G., Mason, L., & Behrisch, J. (2012). Resource depletion, peak minerals and the implications for sustainable resource management. *Global Environmental Change*, 22(3), 577–587. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.gloenvcha.2011.08.009>.
- Rafiee, R., Ataei, M., & Azarfar, A. (2016). Determination of optimal open-pit mines with the goal of maximizing net present value using colonial competition algorithm. *Journal of Analytical and Numerical Methods in Mining Engineering*, 11, 89–99.
- Rahimi, E., & Ghasemzadeh, H. (2015). A new algorithm to determine optimum cut-off grades considering technical, economical, environmental and social aspects. *Resources Policy*, 46(1), 51–63.
- Rashidinejad, F., Osanloo, M., & Rezai, B. (2008). Cutoff grades optimization with environmental management: a case study: Sungun copper project, IUST. *International Journal of Engineering Science*, 19, 1–13.
- Rendu, J.-M. (2014). *An introduction to cut-off grade estimation*. Society for Mining, Metallurgy, and Exploration (SME).
- Rule, C. M., Fouchee, R. J., & Swart, W. C. E. (2015). Run of mine ore upgrading—proof of concept plant for XRF ore sorting. *Proceedings of the 6th International Conference on Semi-Autogenous and High Pressure Grinding Technology*.
- Russell, S., & Norvig, P. (2020). *Artificial Intelligence: A Modern Approach* (Pearson (ed.); 4th ed.).
- Schwartz, E. S. (1977). The valuation of warrants: Implementing a new approach. *Journal of Financial Economics*, 4(1–2), 79–93.

- Sexton, R. S., Dorsey, R. E., & Johnson, J. D. (1998). Toward global optimization of neural networks: a comparison of the genetic algorithm and backpropagation. *Decision Support Systems*, 22(2), 171–185.
- Sganzerla, C., Seixas, C., & Conti, A. (2016). Disruptive innovation in digital mining. *Procedia Engineering*, 138, 64–71.
- Shinkuma, T., & Nishiyama, T. (2000). The grade selection rule of the metal mines; an empirical study on copper mines. *Resources Policy*, 26(1), 31–38.
- Sotoudeh, F., Nehring, M., Kizil, M., Knights, P., & Mousavi, A. (2021). A novel cut-off grade method for increasing the sustainability of underground metalliferous mining operations. *Minerals Engineering*, 172, 107168. <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2021.107168>
- Tahmasebi, P., & Hezarkhani, A. (2009). Application of Optimized Neural Network by Genetic Algorithm. In *IAMG09*. Stanford University.
- Taylor, H. K. (1972). General background theory of cut-off grades. In *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy* (pp. A160–A179).
- Thompson, M., & Barr, D. (2014). Cut-off grade: A real options analysis. *Resources Policy*, 42, 83–92. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2014.10.003>
- Topp, V., Soames, L., Parham, D., & Bloch, H. (2008). *Productivity in the Mining Industry: Measurement and Interpretation*.
- Turner-Saad. (2011). A cut-off of liberated and selected ore minerals optimisation based on the geometallurgy concept. *Proceedings of the First AUSIMM International Geometallurgy Conference*.
- Uqaili, A. M., & Harijan, K. (2012). *Energy, Environment and Sustainable Development* (1st ed.). Springer Vienna. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-7091-0109-4>
- Vallee, M. (2000). Mineral resource + engineering, economic and legal feasibility = ore reserve. *CIM Bulletin*, 93, 53–61.
- Wheeler, A. J., & Rodrigues, R. L. (2002). Cutoff-grade analysis at Fazenda Brasileiro: Mine planning for declining gold prices. *Transactions of the Institution of Mining and*

- Metallurgy, Section A: Mining Technology*, 111(1), 35–46.
- Xie, Y. L. (1998). Optimization of Cut-off Grade in Open-pit Based on Control Theory. *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*, 8, 353–356.
- Yang, X. S. (2013). Optimization and Metaheuristic Algorithms in Engineering. *Metaheuristics in Water, Geotechnical and Transport Engineering*, 1–23. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-398296-4.00001-5>
- Young, A., & Rogers, P. (2019). A review of digital transformation in mining. *Mining, Metallurgy & Exploration*, 36, 683–699.