

Relatividad especial: Problemas selectos

Juan Manuel Tejeiro Sarmiento
Profesor Titular
Observatorio Astronómico Nacional
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia

2008

Índice general

I	Problemas propuestos	1
1.	Cinemática relativista	3
1.1.	Introducción	3
1.1.1.	Transformaciones de Lorentz	3
1.1.2.	Estructura causal del espacio-tiempo	4
1.1.3.	Cinemática	5
1.2.	Problemas básicos de cinemática	6
1.3.	Problemas avanzados	14
2.	Efecto Doppler	19
2.0.1.	Cuadrivector de onda.	19
2.1.	Problemas sobre el efecto Doppler	20
3.	Dinámica relativista	23
3.1.	Introducción	23
3.2.	Postulados de la dinámica relativista	23
3.2.1.	Sistema centro de masa	25
3.2.2.	Fotones y partículas de masa en reposo cero	26
3.2.3.	Estructura atómica	27
3.3.	Problemas de dinámica relativista	29
4.	Tensores	33
4.1.	Definiciones fundamentales	33
4.1.1.	Álgebra tensorial	36
4.1.2.	Propiedades de simetría de tensores	37
4.2.	Transformación general de coordenadas	38
4.2.1.	Operadores vectoriales	39
4.3.	Problemas de álgebra tensorial	40
5.	Electrodinámica	45
5.1.	Introducción	45
5.2.	Ecuaciones de Maxwell	45
5.2.1.	Electrostática	47
5.3.	Ecuaciones de Maxwell covariantes	48

5.4. Transformaciones Gauge	49
5.5. Problemas de electrodinámica	51
II Soluciones a problemas	57
6. Cinemática relativista	59
6.1. Problemas básicos de cinemática	59
6.2. Problemas avanzados	98
7. Efecto Doppler	111
8. Dinámica relativista	121
8.1. Problemas de dinámica relativista	121
9. Tensores	151
9.1. Problemas de álgebra tensorial	151
10. Electrodinámica	171
10.1. Problemas de electrodinámica	171

Introducción

La Teoría Especial de la Relatividad es uno de los pilares fundamentales de la física, pues está basada sobre los postulados del principio de relatividad y la constancia de la velocidad de la luz en el vacío y un sobre conjunto de suposiciones generales del espacio, homogeneidad, isotropía y estructura euclidiana, y del tiempo, homogeneidad e isotropía. Esto implica que la teoría especial de la relatividad se constituye en el marco esencial para describir las interacciones fundamentales, electromagnética, fuerte, débil y gravitacional, que rigen todos los fenómenos físicos conocidos hasta el presente.

La interacción electromagnética está descrita por las ecuaciones de Maxwell y si bien cronológicamente, esta teoría se formuló antes que la relatividad especial, fue precisamente que, debido a las aparentes contradicciones que se presentaban entre los principios de la electrodinámica (ecuaciones de Maxwell) y las leyes de Newton, que muchos físicos experimentales y teóricos sentaron las bases para que en 1905 Albert Einstein publicara sus dos famosos artículos “Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento” y “Depende la inercia de un cuerpo de su contenido de energía?”, donde se dan los fundamentos de la teoría especial de la relatividad. Las leyes del electromagnetismo, descritas por las ecuaciones de Maxwell, satisfacen los principios de la teoría especial de la relatividad y por esta razón no requirieron de ninguna modificación con el surgimiento de la relatividad, pero sí, definitivamente, incidió sobre la comprensión y alcance de la teoría electromagnética de Maxwell.

Las interacciones fuerte y débil describen las fuerzas que actúan entre ciertas partículas fundamentales y son las responsables (junto con las fuerzas electromagnéticas) de procesos que suceden a escalas nucleares y su dinámica está descrita por la teoría cuántica de campos, la cual está basada en la mecánica cuántica relativista formulada por Dirac en 1928.

La interacción gravitacional, descrita inicialmente por la ley de gravitación universal de Newton, es una fuerza que actúa entre todos los cuerpos en forma universal, dependiente solamente de sus masas y no de la naturaleza o constitución de los cuerpos. Es importante aclarar que en física el término masa tiene dos significados diferentes: El primero se refiere a la masa inercial de un cuerpo y el segundo a su masa gravitacional. Galileo formuló el principio conocido como “la ley de caída de los cuerpos”, el cual establece que, sobre la tierra y en ausencia de rozamiento, todos los cuerpos independientemente de su naturaleza caen con la misma aceleración. Este hecho, conocido hoy como el principio de

equivalencia, implica que la relación entre la masa gravitacional y la masa inercial de un cuerpo es una constante universal, la cual puede ser elegida como la unidad. Esta elección implica que las masas gravitacional e inercial de un cuerpo se miden en las mismas unidades. En 1916 Einstein formula la teoría general de la relatividad, como una necesidad de modificar la ley de gravitación universal de Newton, pues esta ley implica que la fuerza gravitacional actúa en forma instantánea, violando así el principio de la constancia de la velocidad de la luz en el vacío. Para desarrollar esta nueva formulación de la gravitación se hizo necesario generalizar el principio de relatividad y levantar la hipótesis euclidiana del espacio.

En este contexto la teoría de la relatividad es una teoría fundamental del espacio-tiempo, y por lo tanto la formación en relatividad se constituye hoy día en una necesidad, no solo para los profesionales en física, sino también para otras áreas de las ciencias básicas y aplicadas, como las ingenierías y las ciencias del espacio, en donde, por ejemplo, el sistema geográfico de posicionamiento global (GPS) está fundamentado en la teoría de la relatividad.

En los diferentes currículos de las carreras de física y de algunas ingenierías, la teoría de la relatividad se introduce a través de un curso dedicado a este tema, o haciendo parte de otros cursos, tales como los de introducción a física moderna. La ubicación de estos cursos en los planes de estudio varía también entre los diferentes programas.

Por esta razón, en la literatura especializada sobre la Teoría Especial de la Relatividad, nos encontramos con una gran variedad de textos y libros, con diferentes enfoques y diferentes niveles de profundidad y complejidad. Textos como el de R. Resnick “Introducción a la teoría especial de la relatividad” (Limusa 1981) o el de R. Skinner “Relativity for Scientists and Engineers” desarrollan la teoría en forma sencilla e intuitiva y con un lenguaje matemático elemental, asumiendo que el lector posee conocimientos básicos de mecánica y electromagnetismo. Otros textos más avanzados como el French[3], si bien asumen del lector una formación similar a la de los anteriores, profundizan mucho más en diferentes temas y aplicaciones, con ejemplos y ejercicios un poco más complejos.

En la carrera de Física en la Universidad Nacional de Colombia (sede Bogotá) el curso de relatividad, el cual he venido dictando desde hace varios años y para el que escribí un texto[1], se encuentra ubicado en el quinto semestre del programa, lo que permite promundizar un poco más en el tema, aprovechando herramientas matemáticas más complejas como los cuadvectores y tensores.

Una estrategia fundamental para los cursos básicos de formación es el desarrollo de ejemplos y problemas, que le permitan al estudiante consolidar los conocimientos teóricos y adquirir habilidades para el enfrentamiento de nuevos problemas. El presente libro está dedicado a problemas en relatividad y sus soluciones y puede ser utilizado como texto para un curso de relatividad especial o como complemento al texto del autor[1]. Cada capítulo se inicia con un resumen de los principales resultados de la teoría, los cuales son necesarios para el desarrollo de los problemas, y es por esta razón que el libro es autocontenido. Los problemas están diseñados, no sólo para consolidar la teoría y adquirir habilidades, sino también para avanzar en aplicaciones de la relatividad, en campos

como la astrofísica y partículas elementales.

Si bien un estudiante está en condiciones de abordar las soluciones de los problemas en forma autónoma, con base en el marco teórico que se da en cada capítulo, en las soluciones se ha buscado profundizar en la teoría y sus aplicaciones, ofreciendo en muchos de ellos varias alternativas de solución, discusiones adicionales y su relación con otros campos de la física o la matemática, tales como la astronomía y la teoría de grupos, entre otros, sin que sea necesario que el estudiante esté familiarizado con estos temas.

En este texto utilizaremos la convención $(+, -, -, -)$ para la métrica Minkowskiana y la convención de suma de Einstein, en donde los índices griegos recorren de 0 a 3 y los latinos de 1 a 3, los cuales están reservados para describir las coordenadas espaciales.

La siguiente es una tabla de constantes fundamentales y algunas definiciones con sus correspondientes factores de conversión de unidades, que son de utilidad para el desarrollo de los problemas:

1. Constantes fundamentales:

1.1 Velocidad de la luz en el vacío

$$c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

1.2 Constante de Planck

$$h = 6,6260755 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1,05457266 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

1.3 Constante de gravitación universal

$$G = 6,67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

1.4 Masa propia del electrón, protón y neutrón

$$m_{oe} = 9,1093897 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_{0p} = 1,6726231 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_{0n} = 1,6749286 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

1.5 Carga del electrón

$$e = 1,60217733 \times 10^{-19} \text{ C}$$

1.6 Relación carga/masa del electrón

$$e/m = 1,75881962 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$$

1.7 Constante de Boltzman

$$k = 1,3806568 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

1.8 Constante de Coulomb

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 8,98755 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$$

1.9 Constante de Rydberg

$$R = 1,0973731534 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

2. Unidades astronómicas:

2.1 La unidad astronómica AU está definida como la distancia media de la tierra al sol:

$$1AU = 1,495978 \times 10^{11} \text{ m}$$

2.2 El año luz al se define como la distancia que la luz recorre en un año:

$$1al = 9,46053 \times 10^{15} \text{ m} = 6,324 \times 10^4 AU$$

2.3 El parsec pc , definida como la distancia a la cual una AU subtende un segundo de arco:

$$1pc = 3,085678 \times 10^{16} \text{ m} = 3,261633al = 206265AU$$

3. Otras unidades de uso común en relatividad y física atómica:

3.1 El electronvoltio ev se define como la energía cinética que adquiere una partícula de carga fundamental $e = 1,60217733 \times 10^{-19} \text{ C}$ cuando se acelera en una diferencia de potencial de 1 voltio

$$1 \text{ eV} = 1,60217733 \times 10^{-19} \text{ J}$$

3.2 De la relación de equivalencia entre masa y energía $E = mc^2$ se expresar la masa de las partículas elementales en unidades de energía en electronvoltios (con $c = 1$)

$$m_{oe} = 0,51099906 \times 10^6 \text{ eV} = 0,51099906 \text{ MeV}$$

$$m_{0n} = 939,566 \text{ MeV}$$

$$m_{0p} = 938,27231 \text{ MeV}$$

3.3 Constante de Planck \hbar y constante de Rydberg en unidades de electronvoltios

$$\hbar = 6,5821220 \times 10^{-16} \text{ eV s}$$

$$R = 13,6056981 \text{ eV}$$

La constante de Rydberg corresponde a la energía de ionización del átomo de hidrógeno.

Parte I

Problemas propuestos

Capítulo 1

Cinemática relativista

1.1. Introducción

Este capítulo está dedicado a la cinemática relativista. En la primera parte presentaremos las definiciones y los resultados más importantes para abordar los problemas propuestos.

Para un desarrollo detallado de la cinemática relativista remitimos al lector a los textos [1], [2] y [3].

Hay tres artículos interesantes que recomiendo como lectura complementaria, los cuales ilustran la variedad y complejidad de los problemas que pueden surgir en relatividad. El primero es de Scott y Viner ([4]) el cual trata sobre la forma aparente de los objetos, y los otros dos artículos de Dewan y Beran ([5]) y Dewan ([6]) discuten el problema de dos cohetes conectados por un hilo inextensible.

1.1.1. Transformaciones de Lorentz

Consideremos dos sistemas de referencia Σ y Σ' . Entonces la transformación de Lorentz homogénea más general se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} \Lambda : \Sigma &\rightarrow \Sigma' \\ x &\rightarrow x' = \Lambda x \end{aligned} \quad (1.1)$$

en donde

$$\Lambda = \Lambda(\vec{v}, \vec{\theta}) \quad (1.2)$$

con \vec{v} la velocidad de Σ' respecto a Σ , y $\vec{\theta}$ un conjunto de tres parámetros, por ejemplo los ángulos de Euler, que determinan rotación de los ejes espaciales. Si llamamos x^α y x'^α las componentes de x y x' respectivamente, la ecuación de transformación se puede escribir en la forma:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta \quad (1.3)$$

con $\Lambda^\alpha{}_\beta$ los elementos de la matriz de transformación. Asumiendo que el sistema de referencia Σ' se mueve con velocidad v en la dirección de los ejes positivos $x - x'$, y suponiendo que los dos observadores eligen $t = t' = 0$ cuando

los orígenes de coordenadas coinciden y toman los ejes espaciales paralelos, las ecuaciones de transformación de Lorentz están dadas por

$$\begin{aligned}x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\x'^2 &= x^2 \\x'^3 &= x^3\end{aligned}\tag{1.4}$$

con la siguiente notación:

$$x^0 = ct\tag{1.5}$$

$$\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)\tag{1.6}$$

$$\beta = \frac{v}{c}\tag{1.7}$$

$$\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\tag{1.8}$$

Para este caso los elementos de la matriz de transformación de Lorentz toman la forma

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{1.9}$$

La relación entre un intervalo de tiempo propio $\Delta\tau$ y el intervalo de tiempo Δt , entre dos eventos medido por un observador inercial, está dado por la ecuación:

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}\tag{1.10}$$

La relación entre la longitud física de un objeto ℓ , que se mueve con velocidad v y su longitud propia ℓ_0 es

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \beta^2}\tag{1.11}$$

1.1.2. Estructura causal del espacio-tiempo

La estructura causal del espacio-tiempo está determinada por el intervalo de distancia espacio-temporal entre eventos, el cual está definido por

$$\Delta S_{ij}^2 = (x_j^0 - x_i^0)^2 - (x_j^1 - x_i^1)^2 - (x_j^2 - x_i^2)^2 - (x_j^3 - x_i^3)^2\tag{1.12}$$

en donde

$$\mathcal{P}_i = (x_i^0, x_i^1, x_i^2, x_i^3)\tag{1.13}$$

son las coordenadas del evento \mathcal{P}_i y similarmente para el evento \mathcal{P}_j . El intervalo espacio-temporal es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Este intervalo también se puede escribir utilizando la matriz o tensor métrico de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \mu = \nu = 0 \\ -1 & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}\tag{1.14}$$

en la forma

$$\Delta S_{ij}^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (1.15)$$

en donde

$$\Delta x^\mu = x_j^\mu - x_i^\mu \quad (1.16)$$

Para generalizar este resultado, se define el producto Minkowskiano entre dos cuadvectores x y y como el invariante

$$x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \quad (1.17)$$

y la norma Minkowskiana por

$$x^2 = x \cdot x = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (1.18)$$

Dada la definición de norma Minkowskiana, clasificamos los cuadvectores no nulos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{si } x^2 > 0 &\implies x \text{ es temporal} \\ \text{si } x^2 < 0 &\implies x \text{ es espacial} \\ \text{si } x^2 = 0 &\implies x \text{ es nulo o de luz} \end{aligned}$$

1.1.3. Cinemática

Sea

$$x(\tau) = (x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau)) \quad (1.19)$$

el cuadvector posición de una partícula como función del tiempo propio τ el cual describe la línea de universo de la partícula. El parámetro tiempo propio está definido en términos de la distancia espacio-temporal entre dos posiciones sucesivas de la partícula

$$\begin{aligned} &x(\tau) \\ x(\tau + d\tau) &= x(\tau) + dx(\tau) \end{aligned} \quad (1.20)$$

así

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (1.21)$$

entonces la cuadvelocidad de la partícula se define como

$$U = \frac{dx}{d\tau} = (U^0, U^1, U^2, U^3) \quad (1.22)$$

y su cuadvector aceleración

$$A = \frac{dU}{d\tau} = (A^0, A^1, A^2, A^3) \quad (1.23)$$

Dado que la norma al cuadrado de un cuadvector es un invariante, las cuatro componentes del cuadvector velocidad y cuadvector aceleración no son independientes, pues

$$U^2 = (U^0)^2 - (U^1)^2 - (U^2)^2 - (U^3)^2 = c^2 \quad (1.24)$$

y

$$A^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = -\alpha^2 \quad (1.25)$$

en donde α es la aceleración propia. Además los cuadvectores U y A son ortogonales bajo el producto Minkowskiano, e decir

$$U \cdot A = U^0 A^0 - U^1 A^1 - U^2 A^2 - U^3 A^3 = 0 \quad (1.26)$$

1.2. Problemas básicos de cinemática

1. **Estructura Causal.** Sea Σ un sistema de referencia inercial y sean

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= (3, 2, 0, 2) \\ \mathcal{P}_2 &= (4, -1, 0, 2) \\ \mathcal{P}_3 &= (-2, -1, 0, -2) \end{aligned}$$

las coordenadas de tres eventos, en unidades arbitrarias con $c = 1$.

a Cuáles eventos están conectados causalmente?

b Para cuál par de eventos existe un sistema de referencia Σ' para el cual los dos eventos son simultáneos?. Calcular la velocidad de Σ' respecto a Σ .

c Para cuál par de eventos existe un sistema de referencia Σ' con respecto al cual los dos eventos suceden en el mismo punto del espacio?. Calcular la velocidad de Σ' respecto a Σ .

2. **La paradoja del garaje.** Consideremos un bus de longitud propia $\ell_0 = 10m$ moviéndose con velocidad $v = 0,8c$ directamente hacia un garaje en reposo de longitud $6m$. Debido al efecto de contracción de longitudes el bus mide, respecto al sistema de referencia garaje,

$$\ell = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ell_0 = 6m \quad (1.27)$$

así, cuando la trompa del bus alcance la pared posterior del garaje, la parte trancera del bus pasa por la puerta de éste y por lo tanto, respecto al observador fijo con respecto al garaje el bus queda “atrapado” en él. Supongamos (sin que esto influya en la solución del problema) que la pared del garaje es lo suficientemente rígida de tal manera que el bus quede atrapado en el garaje, deformándose por efecto del impacto contra la pared. Si analizamos la misma situación desde el punto de vista de un sistema de referencia, con respecto al cual el bus se encuentre en reposo, el garaje se mueve hacia el bus con velocidad $0,8c$ y por lo tanto la longitud del garaje, vista desde el bus, es de $3,6m$ y así el bus no puede ser “atrapado” dentro del garaje. Como se resuelve esta aparente paradoja, pues el principio de relatividad establece que la física es la misma desde todos los sistemas de referencia inerciales.

3. **Varilla inclinada.** Consideremos una varilla de longitud propia ℓ_0 situada en el plano $x - y$ que se mueve con velocidad v a lo largo del eje x positivo respecto a un observador inercial, la cual forma un ángulo θ_0 en su sistema de referencia propio con respecto al eje de las x . ¿Qué ángulo forma la varilla respecto al observador inercial Σ ?
4. **Paradoja de la varilla inclinada.** Una varilla de longitud propia ℓ_0^v se mueve con velocidad v hacia una plataforma en reposo que tiene una rendija de longitud propia ℓ_0 . La varilla permanece paralela a la plataforma y se mueve hacia ella en la dirección que forma un ángulo de 45° con respecto a la plataforma, como se muestra en la figura 1.1. Dado que la

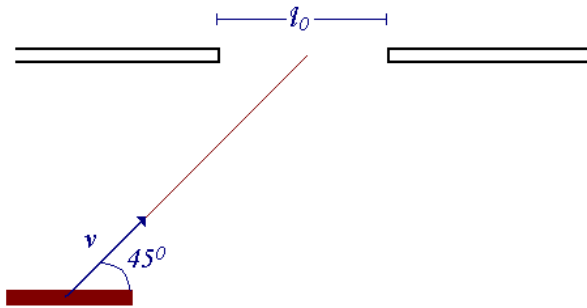


Figura 1.1: **Paradoja de la varilla inclinada.** La varilla se mueve hacia una rendija, de tal forma que su centro se dirige hacia el centro de la rendija.

varilla se contrae con respecto al sistema de referencia de la plataforma, supongamos que la varilla pasa por la rendija exactamente. Asumir que el centro de la varilla pasa por el centro de la rendija. Si analizamos lo que sucede desde el punto de vista de un observador inercial ligado a la varilla, la rendija es la que se contrae y por lo tanto no debería pasar por la rendija. ¿Como resolver esta paradoja?. Tengamos en cuenta que, si desde el punto de vista de un observador la varilla pasa por la rendija, entonces ésto debe suceder para todos los observadores.

5. **Adición de velocidades no paralelas.** Considere tres sistemas de referencia inerciales Σ , Σ' y Σ'' .
- a Supongamos que el sistema Σ' se mueve con velocidad v_x respecto a Σ y que Σ'' se mueve con velocidad v_z respecto a Σ' , calcular los elementos de la matriz de transformación de Lorentz entre Σ y Σ'' .

b Si ahora Σ' se mueve con velocidad v_z respecto a Σ y Σ'' se mueve con velocidad v_x respecto a Σ' calcular los elementos de la matriz de transformación de Lorentz entre Σ y Σ'' . Comparar la respuesta con la parte a: ¿La composición de transformaciones puras de Lorentz es conmutativa en general?

6. Vida media de partículas inestables. La mayoría de las partículas fundamentales son inestables, es decir, ellas se desintegran en otras partículas al cabo de un cierto tiempo τ , llamado tiempo de vida media. El tiempo de vida media de una partícula elemental es una cantidad estadística definida como el tiempo necesario para que la mitad de una población inicial N_0 de partículas se desintegre en su sistema propio de referencia, i.e., si $N(t)$ es el número de partículas que aún no se han desintegrado entonces

$$N(t) = N_0 2^{-t/\tau} \quad (1.28)$$

Un pión π^+ (+ se refiere a la carga eléctrica del pión) se desintegra en otras partículas elementales según la reacción



en donde μ^+ es un muón positivo y ν un neutrino. Los mesones π se pueden producir en el laboratorio por choque entre protones en un acelerador. En un experimento de colisión de protones se producen mesones π con velocidad $v = 0,985c$ y se observa que $2/3$ de ellos sobreviven a una distancia $D = 25m$ del blanco. Calcular el tiempo de vida media de los mesones π .

7. Cuadrivector velocidad. Encontrar la relación entre las componentes del cuadrivector velocidad

$$U = (U^0, U^1, U^2, U^3) \quad (1.30)$$

y las componentes de la velocidad física de una partícula

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \quad (1.31)$$

8. Cuadrivector aceleración. Encontrar la relación entre las componentes del cuadrivector aceleración

$$A = (A^0, A^1, A^2, A^3) \quad (1.32)$$

y las componentes de la aceleración física de una partícula

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (1.33)$$

Mostrar que los cuadrivectores velocidad y aceleración para una partícula son ortogonales, es decir

$$U \cdot A = 0$$

9. **Transformación de la velocidad.** A partir de las componentes del cuadvivector velocidad y las transformaciones de Lorentz usuales, encontrar las ecuaciones de transformación para las componentes de la velocidad entre dos sistemas de referencia inerciales.
10. **Velocidad relativa.** Consideremos dos partículas que se mueven con velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 respecto a un observador inercial Σ . Calcular la magnitud de la velocidad relativa entre las dos partículas en términos de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .
11. **Espacio-tiempo Euclideo.** A partir de la definición

$$\tanh \phi := \beta = v/c$$

encontrar las ecuaciones de transformación de Lorentz usuales y el teorema de adición de velocidades en términos del parámetro ϕ . Interpretar geoméricamente el resultado.

12. **Adición numerable de velocidades.** Supongamos que un bloque se mueve con velocidad $v_1 = v$ en la dirección del eje x positivo respecto a un sistema de referencia Σ y un segundo bloque se desliza con velocidad constante $v_2 = v$ respecto al primer bloque y en la dirección del eje x positivo.
- a A partir del teorema de adición de velocidades relativista calcular la velocidad del segundo bloque v'_2 respecto a Σ y demostrar que si $v \rightarrow c$ entonces $v'_2 \rightarrow c$.
- b Consideremos un tercer bloque que se mueve con respecto al segundo a velocidad $v_3 = v$. Calcular la velocidad v'_3 de este bloque respecto a Σ . Generalizar esta relación para n bloques y demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v'_n = c \quad (1.34)$$

13. **Longitud aparente.** Consideremos una cámara fotográfica situada sobre el eje y positivo de un sistema de referencia inercial y una varilla homogénea de longitud propia ℓ_0 que se mueve con velocidad $\beta = v/c$ a lo largo del eje x positivo.
- a Si la cámara, situada a una distancia D del origen de coordenadas, toma una foto de la varilla de tal manera que el centro de la varilla aparezca en el origen de coordenadas, ¿donde aparentan estar los extremos de la varilla según la foto?. ¿Cuál es la longitud aparente de la varilla según la foto y su relación con la longitud física?. Ilustre los resultados con ejemplos numéricos y muestre que si la distancia de la varilla a la cámara es mucho mayor que la longitud de la varilla, entonces la longitud aparente se aproxima a la longitud física.
- b Consideremos ahora una foto de la varilla en una posición arbitraria, cuando la línea que une el centro de la varilla y la cámara forma un

ángulo α con respecto al eje x y suponga la aproximación de rayos paralelos, válida si $D \gg \ell_0$. ¿Cuál es la longitud aparente de la varilla según la foto?. Compare el resultado con la longitud física de la varilla y con el resultado de la primera parte de este problema.

14. **Comunicación espacial.** Dos naves espaciales A y B viajan en direcciones opuestas a velocidad constante v respecto a la tierra. Las naves se cruzan cuando se encuentran a una distancia L de la tierra, medida en el sistema de referencia de la tierra. En el instante del cruce de las naves se envía una primera señal de luz desde la tierra hacia las naves y un tiempo posterior t_0 se envía una segunda señal. Las señales de luz se reflejan instantáneamente en las naves regresando a la tierra. Asuma que

$$t_0 < L/v \quad (1.35)$$

Asumiendo que el movimiento de las naves y la tierra se encuentran sobre la misma línea, esta condición implica que la segunda señal es emitida antes que la nave que se acerca llegue a la tierra.

- a Hacer un diagrama espacio-tiempo y dibujar las líneas de universo de la tierra, las naves y las señales de luz.
 - b ¿Cuál es la posición de las naves, medidas en el sistema tierra, cuando se reciben las señales en las naves?.
 - c Con qué diferencia de tiempos, medidas en el sistema tierra, llegan las dos señales a cada nave?.
 - d Con qué diferencia de tiempo, medidas en el sistema tierra, llegan las señales reflejadas a la tierra, provenientes de cada una de las naves?.
 - e Resolver las preguntas c y d anteriores respecto al sistema de referencia de cada una de las naves.
15. **Velocidades superlumínicas aparentes.** En observaciones astronómicas de algunos AGNs (Núcleos Activos de Galaxias) que se encuentran a distancias muy grandes, se han observado movimientos propios que implican velocidades transversales aparentes v_T de la fuente mayores que la luz (por ejemplo $v_T \sim 10c$). Una explicación, que no entra en conflicto con otras observaciones astronómicas y con el segundo postulado de la relatividad, está basada sobre el movimiento relativista de materia (fuente) en estos AGNs. Supongamos que en un instante dado recibimos radiación electromagnética de una única fuente distante f y un tiempo posterior (varios años después), recibimos señales de otra fuente f_2 que se aleja de la fuente original f (que ahora denotamos por f_1 como se muestra en la figura 1.2). Si la fuente f_2 se aleja de la fuente original f_1 a una velocidad v formando un ángulo φ con respecto a la línea de visión del observador O , calcular la velocidad transversal aparente

$$v_T = \frac{v \sin \varphi}{1 - v \cos \varphi / c} \quad (1.36)$$

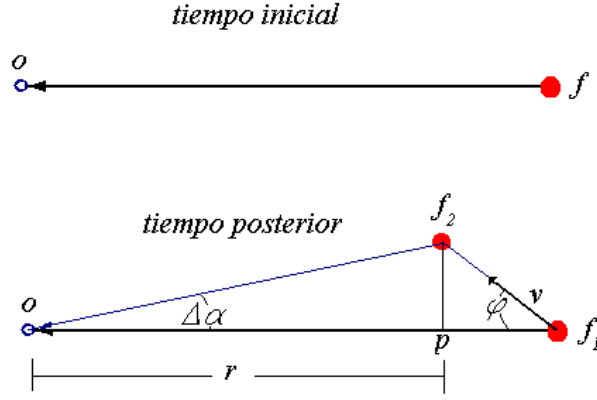


Figura 1.2: **Velocidades superlumínicas aparentes.** En un instante inicial un observador distante ve una sola fuente y un tiempo posterior se observan dos fuentes alejándose.

de la fuente f_2 , vista por el observador en 0 y hacer un gráfico de v_T en función del ángulo φ , para diferentes valores de la velocidad v . Asumir que la separación angular de las fuentes $\Delta\alpha$ es pequeña.

16. **Relatividad sin el segundo postulado.** Las ecuaciones de transformación de Lorentz se dedujeron a partir de los dos postulados básicos: principio de relatividad y constancia de la velocidad de la luz en el vacío. En el proceso de deducción de las ecuaciones de transformación de Lorentz, entre dos sistemas de referencia inerciales Σ y Σ' (con Σ' moviéndose con velocidad v a lo largo de los ejes $x - x'$), por la aplicación del primer postulado se obtienen las siguientes ecuaciones de transformación (ver e.g. [1]):

$$y' = y \quad (1.37)$$

$$z' = z \quad (1.38)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (1.39)$$

$$x = \gamma(x' + vt') \quad (1.40)$$

$$\gamma' = \gamma \quad (1.41)$$

en donde γ es un parámetro por determinar que depende de la velocidad v y el cual caracteriza a la transformación (independiente de las coordenadas). A partir de estas ecuaciones y sin utilizar el segundo postulado

demostrar que la transformación para t' en función de t y x se puede escribir en la forma

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{K^2}x\right) \quad (1.42)$$

con

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{K^2}}} \quad (1.43)$$

y K dado por:

$$K = \frac{v^2\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \quad (1.44)$$

Teniendo en cuenta que la transformación obtenida debe ser válida para todos los sistemas de referencia inerciales, muestre que K es un parámetro independiente de la velocidad relativa entre sistemas de referencia. Ayuda: Aplique la composición de transformaciones para pasar de $\Sigma'' \rightarrow \Sigma$, con Σ' moviéndose con velocidad v respecto a Σ y Σ'' moviéndose con velocidad u respecto a Σ' (ambos a lo largo del eje x positivo).

17. **Viaje al pasado.** El postulado de la constancia de la velocidad de la luz en el vacío trae como consecuencia que las partículas materiales solo puede viajar a velocidades menores que c , lo cual implica que siempre es posible encontrar un sistema de referencia, con respecto al cual la partícula se encuentra en reposo. Estas ecuaciones muestran, también, que no tiene sentido hablar de un observador (sistema de referencia) que viaje a la velocidad de la luz, pues en este caso el factor γ de Lorentz diverge, pues

$$\lim_{v \rightarrow c} \gamma(v) = \lim_{v \rightarrow c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = +\infty \quad (1.45)$$

Sin embargo, cabe la pregunta ¿si pudieran existir partículas que viajen a velocidades mayores a c ?. A estas partículas hipotéticas se les conoce con el nombre de Tachyones. Aún cuando se han elaborado modelos teóricos sobre estas partículas, hasta el presente no se tiene evidencia observacional alguna de ellas. Una consecuencia que podríamos deducir, si tuviéramos a disposición un emisor de tachyones para enviar señales, es que podríamos recibir una señal de respuesta antes de haber enviado la primera señal. Consideremos un observador inercial Σ , que dispone de un emisor de tachyones, situado en el origen del sistema y envía una señal a una velocidad $v_T > c$ hacia un segundo observador inercial Σ' , que se mueve con velocidad v en la dirección del eje x positivo. Supongamos que el observador inercial Σ' recibe el tachyon cuando se encuentra a una distancia D medida con respecto a Σ , y devuelve inmediatamente la señal tachyonica hacia el origen del sistema Σ , con velocidad v_T relativa a su sistema Σ' . Calcular el tiempo de ida y vuelta de la señal medido por Σ y mostrar que es posible recibir la señal antes que la primera salga.

18. **Viaje interestelar 1.** Una nave espacial parte de la tierra con aceleración propia g constante y se dirige hacia el cúmulo abierto de las pléyades, el cual se encuentra a una distancia de nosotros de unos $425al$ (años-luz). Este cúmulo, con una población estimada de unas 400 estrellas, es visible a simple vista y se pueden observar normalmente sus siete estrellas más brillantes: Alcine, Atlas, Electra, Maia, Merope, Taygeta y Pleione; algunas personas han logrado observar dos estrellas adicionales Celaeno y Asterope.

a El año luz al se define como la distancia que la luz recorre en un año (ver capítulo sobre unidades):

$$1al = 9,46053 \times 10^{15} \text{ m} \quad (1.46)$$

en donde se ha tomado para la velocidad de la luz en el vacío el valor

$$c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad (1.47)$$

Si medimos las distancias en al y la velocidad en unidades de c , calcular el valor de la aceleración de la gravedad terrestre $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ en estas unidades.

b Calcular la línea de universo para el cohete en función del tiempo propio de la nave, asumiendo que cuando la nave parte de la tierra $t = 0$, en el sistema de referencia tierra y $\tau = 0$ el tiempo propio de la nave. Tomar el origen de coordenadas en la tierra.

c Supongamos que el cohete, en su viaje hacia las pléyades, parte de la tierra con aceleración propia $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ hasta alcanzar la mitad del camino y luego frena, en el resto del viaje, con la misma aceleración propia. Calcular el tiempo en llegar hasta la mitad del camino y hasta las pléyades, medido en el sistema tierra y en el cohete. Cuando la nave se encuentra a mitad de camino e inicia el frenado, ¿a qué velocidad se está moviendo el cohete respecto a la tierra? Si la nave regresa a la tierra siguiendo un recorrido similar al de ida, ¿cuanto tiempo tarda el viaje total, ida y regreso, para el observador en la nave y para la tierra?

d Una segunda nave, parte de la tierra simultáneamente con con la primera nave, pero con aceleración propia de $10g$ hasta la mitad del camino a las pléyades y luego desacelera a $10g$ hasta llegar al reposo. Repetir los cálculos de la parte *c* del presente problema y comparar los resultados.

19. **Viaje interestelar 2.** Consideremos de nuevo el viaje de un cohete que parte de la tierra hasta las pléyades (ver problema anterior). La nave inicia su viaje con aceleración propia de $10g$ hasta alcanzar una velocidad de $v = 0,999c$, luego continua el viaje a velocidad constante y finalmente desacelera con aceleración propia de $10g$, llegando a las pléyades con velocidad final cero.

- a ¿En cuanto tiempo, medido desde el cohete y desde la tierra, alcanza la nave la velocidad final v ?
- b ¿A qué distancia de la tierra se encuentra la nave en ese instante, medida en el sistema tierra?
- c Si el cohete regresa a la tierra, siguiendo un recorrido similar al de ida, ¿Cuanto tiempo tarda el viaje completo para el cohete y para la tierra? Comparar el resultado con el problema anterior.

20. **El horizonte de eventos.** Una partícula material es acelerada desde el reposo con aceleración propia constante α , con respecto a un sistema de referencia inercial Σ . La partícula inicia su movimiento en el origen de Σ cuando $t = 0$ y se elige el eje x en la dirección de movimiento de la partícula.

- a Encontrar la línea de universo de la partícula en función del tiempo propio, i.e., encontrar

$$x(\tau) = (x^0(\tau), x^1(\tau), 0, 0)$$

- b Calcular la posición de la partícula con respecto al tiempo para el observador Σ , i.e. encontrar

$$x^1 = x^1(x^0)$$

Hacer un gráfico espacio-tiempo del movimiento de una partícula con aceleración propia constante y analizar este gráfico.

- c Mostrar que si se envía una señal de luz desde el origen un tiempo c/α después de salir la partícula, entonces esta señal nunca alcanza a la partícula. Con base en este resultado, analizar el gráfico espacio-tiempo del movimiento de una partícula sometida a una aceleración propia constante.

1.3. Problemas avanzados

1. **Grupo de Lorentz.** Consideremos el producto Minkowskiano en notación matricial

$$x \cdot y = x^T \eta y \tag{1.48}$$

en donde $x, y \in \mathcal{M}$, el espacio-tiempo de Minkowski, y con la notación

$$x = [x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3] \tag{1.49}$$

$$x^T = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \tag{1.50}$$

y la matriz de Minkowski dada por

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

a Encontrar las propiedades generales de una transformación de Lorentz

$$\begin{aligned} \Lambda: \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ x &\longmapsto x' = \Lambda x \end{aligned} \quad (1.52)$$

que deja invariante el producto Minkowskiano. Ayuda: De la invarianza bajo el producto Minkowskiano encontrar la ecuación de restricción para la matriz Λ . A partir de esta ecuación, encontrar el determinante y el número máximo necesario de parámetros independientes, que caracterizan una transformación general de Lorentz y analizar el resultado.

b Sea Λ una matriz de transformación de Lorentz y sea \mathbf{L} otra matriz 4×4 tal que

$$\Lambda = e^{\mathbf{L}} \quad (1.53)$$

La exponencial de una matriz se debe entender en el siguiente sentido: Dado que la expansión en serie de la función exponencial está dada por

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \quad (1.54)$$

entonces

$$e^{\mathbf{L}} = \mathbf{1} + \mathbf{L} + \frac{1}{2}\mathbf{L}^2 + \dots \quad (1.55)$$

A partir de esta representación de una transformación de Lorentz, a través de la exponencial de otra matriz \mathbf{L} , encontrar la forma general de una transformación de Lorentz. Ayuda: Muestre en primer lugar que para una transformación propia de Lorentz tenemos

$$\det |\Lambda| = e^{Tr\mathbf{L}} \quad (1.56)$$

con $Tr\mathbf{L}$ es la traza de la matriz \mathbf{L} . Probar luego que la matriz $\boldsymbol{\eta}\mathbf{L}$ es antisimétrica y de este resultado mostrar que la forma general de la matriz \mathbf{L} se puede escribir como

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

- c** Demostrar que la matriz \mathbf{L} se puede escribir como una combinación lineal de las siguientes matrices:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

es decir, mostrar que

$$\mathbf{L} = -\alpha^1 \mathbf{R}_1 - \alpha^2 \mathbf{R}_2 - \alpha^3 \mathbf{R}_3 - \zeta^1 \mathbf{B}_1 - \zeta^2 \mathbf{B}_2 - \zeta^3 \mathbf{B}_3 \quad (1.61)$$

El signo menos es arbitrario y se introduce solo por conveniencia para su interpretación física (ver parte *d* del presente problema). La ecuación anterior se puede escribir en forma compacta como

$$\mathbf{L} = -\vec{\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{R}} - \vec{\zeta} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \quad (1.62)$$

en donde

$$\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \quad (1.63)$$

$$\vec{\zeta} = (\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) \quad (1.64)$$

y con el producto punto usual en \mathbb{R}^3 .

- d** Mostrar, por cálculo directo, que las matrices \mathbf{R}_i y \mathbf{B}_j , $i, j = 1, 2, 3$, cumplen con las siguientes propiedades: Los cuadrados de las seis matrices \mathbf{R}_i^2 y \mathbf{B}_j^2 son matrices diagonales y además

$$(\vec{\alpha} \cdot \mathbf{R})^3 = -\vec{\alpha} \cdot \mathbf{R} \quad (1.65)$$

$$(\vec{\zeta} \cdot \tilde{\mathbf{B}})^3 = \vec{\zeta} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \quad (1.66)$$

para cualesquiera tri-vectores reales unitarios $\vec{\alpha}$ y $\vec{\zeta}$. Por lo tanto, cualquier potencia de las matrices \mathbf{R}_i y \mathbf{B}_j , $i, j = 1, 2, 3$, puede ser expresada como un múltiplo de la matriz o de su cuadrado.

- e** Con el resultado del numeral anterior y teniendo en cuenta la expansión en serie de Taylor de la función exponencial, ecuación 1.55, válida

para L un número, función, matriz o en general cualquier operador bien definido, considerar los casos particulares

$$\vec{\alpha} = (0, 0, 0) \quad (1.67)$$

$$\vec{\zeta} = (\zeta, 0, 0) \quad (1.68)$$

y

$$\vec{\alpha} = (0, 0, \alpha) \quad (1.69)$$

$$\vec{\zeta} = (0, 0, 0) \quad (1.70)$$

y calcular las correspondientes matrices de transformación de Lorentz \mathbf{A} e interpretar físicamente el resultado.

2. **Transformación general de Lorentz.** Sean Σ y Σ' dos sistemas de referencia inerciales tal que el sistema Σ' se mueve con velocidad \vec{v} respecto a Σ . Si los dos observadores eligen los ejes coordenados paralelos y que los orígenes coinciden en $t = t' = 0$, encontrar las transformaciones generales de Lorentz entre los dos observadores inerciales.

3. **Algebra de Lie del grupo de Lorentz.** Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} dos matrices cuadradas. Se define el conmutador de dos matrices $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ como la matriz

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathbf{AB} - \mathbf{BA} \quad (1.71)$$

con el producto y la suma usual de matrices.

a Demostrar las siguientes propiedades del conmutador:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = -[\mathbf{B}, \mathbf{A}] \quad (1.72)$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B} + \mathbf{C}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}] \quad (1.73)$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}] \quad (1.74)$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^T = [\mathbf{B}^T, \mathbf{A}^T] \quad (1.75)$$

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] = 0 \quad (1.76)$$

La última igualdad se conoce como la identidad de Jacobi.

b Mostrar que las matrices \mathbf{R}_i y \mathbf{B}_j , $i, j = 1, 2, 3$, definidas en 1.58, 1.59 y 1.60 satisfacen las siguientes propiedades:

$$[\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j] = \epsilon_{ijk}\mathbf{R}_k \quad (1.77)$$

$$[\mathbf{R}_i, \mathbf{B}_j] = \epsilon_{ijk}\mathbf{B}_k \quad (1.78)$$

$$[\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j] = -\epsilon_{ijk}\mathbf{R}_k \quad (1.79)$$

en donde el símbolo ϵ_{ijk} se define por:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & ijk \text{ permutación par de } 123 \\ -1 & ijk \text{ permutación impar de } 123 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases} \quad (1.80)$$

Estas propiedades se conocen como el álgebra de Lie del grupo de Lorentz y son de gran importancia en teoría cuántica de campos. El primer conmutador, corresponde a las relaciones de conmutación del momento angular, asociado con rotaciones. El segundo conmutador establece que el vector \mathbf{B} se transforma como un tri-vector bajo rotaciones de los ejes espaciales y el tercer conmutador implica que, en general, dos transformaciones puras de Lorentz no conmutan, salvo si éstas se realizan en la misma dirección, pues en este caso $i = j$ y por lo tanto

$$\epsilon_{iik} = 0 \quad (1.81)$$

y las matrices conmutan.

Capítulo 2

Efecto Doppler

En este capítulo se continúa con el desarrollo de la cinemática relativista, pero está dedicado a la relatividad de las señales de luz. El fenómeno del cambio en la frecuencia de una onda electromagnética, cuando ésta es medida por diferentes observadores inerciales, se conoce como efecto Doppler. Por su gran importancia práctica, en diferentes campos de la física y la astronomía, le dedicaremos un capítulo de problemas independiente.

2.0.1. Cuadrivector de onda.

Por el principio de superposición, cualquier onda electromagnética se puede escribir como una combinación lineal de ondas planas monocromáticas, descritas por una función de la forma

$$\Psi(t, \vec{r}) = Ae^{\pm i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (2.1)$$

en donde $\Psi(t, \vec{r})$ representa la amplitud del campo (eléctrico, magnético, potencial eléctrico o potencial magnético) en un punto del espacio \vec{r} y en un instante de tiempo t , A es la amplitud máxima del campo, ω la frecuencia angular de la onda y $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ el vector de onda, definido como

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{n} \quad (2.2)$$

con λ su longitud de onda y \hat{n} un vector unitario en la dirección de propagación de la onda. La frecuencia angular ω está relacionada con la frecuencia ν (medida en ciclos por segundo) por la ecuación

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (2.3)$$

con $T = 1/\nu$ el período. En la ecuación 2.1 el signo \pm representa ondas incidentes (+) u ondas emergentes (-). La relación de dispersión para las ondas electromagnéticas en el vacío está dada por la ecuación

$$|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\omega}{c} \quad (2.4)$$

o en forma equivalente

$$\lambda\nu = c \quad (2.5)$$

Puesto que la fase $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ de una onda electromagnética plana debe ser un invariante relativista, podemos definirla como el producto interno Minkowskiano

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = x \cdot k \quad (2.6)$$

entre el cuadrivector posición

$$x = (ct, \vec{r}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (2.7)$$

y el cuadrivector de onda k , definido como

$$k = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) = \left(\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z\right) = (k^0, k^1, k^2, k^3) \quad (2.8)$$

La norma al cuadrado del cuadrivector de onda está dada por

$$k^2 = \eta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = \frac{\omega^2}{c^2} - |\vec{k}|^2 \quad (2.9)$$

Debido a la relación de dispersión para las ondas electromagnéticas, ecuación 2.4, el cuadrivector de onda es nulo o como de luz, i.e.,

$$k^2 = 0 \quad (2.10)$$

La definición del cuadrivector de onda implica que sus componentes se transforma como

$$\begin{aligned} k'^0 &= \gamma(k^0 - \beta k^1) \\ k'^1 &= \gamma(k^1 - \beta k^0) \\ k'^2 &= k^2 \\ k'^3 &= k^3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

cuando son medidas en dos sistemas de referencia inerciales, relacionados por una transformación de Lorentz usual 1.4.

Las ecuaciones 2.11 contienen todas las relaciones conocidas sobre la relatividad de las señales de luz, tales como el efecto Doppler longitudinal, transversal y la aberración de la luz estelar.

2.1. Problemas sobre el efecto Doppler

1. **Cuadrivector de onda.** Consideremos dos sistemas de referencia inerciales Σ y Σ' relacionados de la manera usual. Encontrar la relación entre la frecuencia, el número de onda y la longitud de onda, medidas por los dos observadores, de una onda electromagnética plana.
2. **Efecto Doppler longitudinal.** Una fuente monocromática de ondas electromagnéticas se mueve con velocidad v , respecto a un observador inercial Σ y alejándose del observador, situado en el origen del sistema. Si la fuente

emite ondas de frecuencia propia ω_0 , ¿que frecuencia ω_D mide un detector situado en el origen del sistema de referencia Σ ? Repetir el cálculo si la fuente se mueve hacia el origen de Σ . Comparar los resultados anteriores en el límite no relativista, con el efecto Doppler clásico, el cual es válido para todos los fenómenos ondulatorios

$$\omega_D = \omega_0 \frac{v_m - v}{c} \quad (2.12)$$

en donde v_m es la velocidad de propagación de las ondas respecto al medio. En esta ecuación se supone que la fuente de ondas está en reposo respecto al medio de propagación, y c es la velocidad de las ondas electromagnéticas respecto al medio de propagación.

3. **Efecto Doppler transversal y aberración de la luz.** Una fuente monocromática de ondas electromagnéticas se mueve con velocidad v con respecto a un detector en reposo y en la dirección del eje x positivo de un sistema de referencia ligado al detector. Supongamos que en el instante $t = 0$ la fuente se encuentra en un punto situado sobre el eje y y emite un tren de ondas de frecuencia propia ω_0 (medida en el sistema de la fuente). ¿Cual es la frecuencia y el vector de onda medido por el detector?. Comparar el resultado con el caso no relativista.
4. **Comunicación espacial con Doppler.** Dos naves espaciales A y B viajan en direcciones opuestas a velocidad constante v respecto a la tierra. Cuando las naves se cruzan se encuentran a una distancia L de la tierra, medida en el sistema de referencia de la tierra. En el instante del cruce de las naves se envía una primera señal de luz desde la tierra hacia las naves y un tiempo posterior t_0 se envía una segunda señal. Las señales de luz se reflejan instantáneamente en las naves regresando a la tierra. Asuma que $t_0 < L/v$ y utilice el efecto Doppler para el cálculo.
 - a Con qué diferencia de tiempos llegan las dos señales a cada nave, medidas con respecto al sistema de referencia de las naves.
 - b Con qué diferencia de tiempo, medidas en el sistema tierra, llegan las señales reflejadas a la tierra provenientes de cada una de las naves?.
5. **Expansión del universo.** Hubble descubrió en 1929 que el universo se encuentra en expansión. Observando los espectros característicos de varias galaxias, encontró que las frecuencias de emisión presentaban un corrimiento hacia el rojo proporcional a la distancia de las galaxias. Esta relación, conocida como ley de expansión de Hubble se expresa por la ecuación

$$H_0 d_L = cz \quad (2.13)$$

en donde H_0 es la constante de Hubble, d_L la distancia de luminosidad a la galaxia (la cual coincide con la distancia propia para galaxias no muy

lejanas) y z es el factor de corrimiento (al rojo si $z > 0$ y al azul si $z < 0$) definido por

$$1 + z = \frac{\lambda}{\lambda_0} \quad (2.14)$$

en donde λ_0 es la longitud de onda emitida por la galaxia y λ la longitud de onda observada en la tierra. En un espectro de emisión de la galaxia *NGC* – 4649 se observó que la línea H_α del hidrógeno tiene una longitud de onda de $\lambda = 6650\text{Å}$ (Angstrom). Teniendo en cuenta que la longitud de onda propia de la línea H_α es de 6563Å , calcular el factor de corrimiento y la velocidad de la Galaxia.

6. **Ley de reflexión en espejos planos.** De la óptica geométrica usual, se sabe que el ángulo de incidencia de un rayo de luz sobre un espejo en reposo es igual al ángulo de reflexión. Considerar un espejo plano que se mueve con velocidad v normal a su plano y un rayo de luz de frecuencia ω_i que incide sobre el espejo formando un ángulo θ_i respecto a la normal. Calcular la frecuencia y el ángulo de reflexión del rayo. Repetir el cálculo si el espejo se está moviendo en su plano.

Capítulo 3

Dinámica relativista

3.1. Introducción

La dinámica relativista corresponde a la generalización de las leyes de Newton. La primera ley de Newton está contenida en los dos postulados de la relatividad, el principio de relatividad y la constancia de la velocidad de la luz en el vacío. La segunda ley de Newton admite una generalización inmediata en términos de cantidades cuadvectoresiales, mientras que la tercera ley de Newton deja de ser válida en general y es remplazada por el postulado de conservación del cuadvector momentum total de un sistema aislado de partículas.

3.2. Postulados de la dinámica relativista

Definición 1 *El cuadvector momentum p de una partícula de masa propia m_0 , con cuadvector velocidad U , está definido por*

$$p := m_0 U = m_0 \frac{dx}{d\tau} \quad (3.1)$$

Por definición, la masa propia, o en reposo, de una partícula es un invariante relativista que caracteriza a la partícula, la cual está dada por la norma del cuadvector momentum, ecuación (3.1):

$$p^2 = m_0^2 c^2 \quad (3.2)$$

dado que la norma al cuadrado del cuadvector velocidad es c^2 .

Teniendo en cuenta que las componentes del cuadvector velocidad están relacionadas con la velocidad de la partícula a través de la ecuación

$$U^\alpha = \gamma(\vec{u})(c, \vec{u}) \quad (3.3)$$

entonces, las componentes del cuadvector momentum están dadas por la relación

$$p^\alpha = (m_0 \gamma(\vec{u})c, m_0 \gamma(\vec{u})\vec{u}) =: (E/c, \vec{p}) \quad (3.4)$$

en donde se define la energía total E de la partícula por

$$E = m_0\gamma(\vec{u})c^2 = mc^2 \quad (3.5)$$

con

$$m = m_0\gamma(\vec{u}) \quad (3.6)$$

la masa relativista y

$$\vec{p} = m_0\gamma(\vec{u})\vec{u} = m\vec{u} \quad (3.7)$$

el momentum físico de la partícula. La definición de energía total de una partícula implica que, para el caso de una partícula en reposo $\vec{u} = 0$, tenemos que su energía total está dada por

$$E = m_0c^2 \equiv E_0 \quad (3.8)$$

la cual se llama energía propia o en reposo. Estas definiciones conducen a introducir el concepto de energía cinética K de una partícula de masa propia m_0 por la relación

$$K = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 \quad (3.9)$$

Además, dado que la norma al cuadrado de todo cuadrivector es un invariante relativista, tenemos que si p en el cuadrivector momentum de una partícula, entonces

$$p^2 = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m_0^2c^2 \quad (3.10)$$

es decir, la norma del cuadrivector momentum mide la masa propia de la partícula. Otra forma útil y usual de escribir este invariante es

$$E^2 = E_0^2 + |\vec{p}|^2 c^2 \quad (3.11)$$

que relaciona la energía total E , la energía en reposo E_0 y el momentum $|\vec{p}|$ de la partícula.

A partir la definición del cuadrivector momento de una partícula, podemos mantener la misma definición de la segunda ley de Newton, pero formulada para las cantidades cuadrivectoriales. Así

Postulado 2 *La ecuación de movimiento relativista está dada por*

$$f = \frac{dp}{d\tau} = m_0A \quad (3.12)$$

en donde A es el cuadrivector aceleración y f es el cuadrivector fuerza.

La tercera ley de Newton no es de válida en general y por lo tanto, en dinámica relativista, se toma como postulado fundamental las leyes de conservación.

Postulado 3 *Para un sistema aislado de partículas, con cuadrivectores momentum p_i , $i = 1, 2, \dots$, entonces el cuadrivector momento total del sistema p , definido como*

$$p := \sum_{i=1} p_i \quad (3.13)$$

es una constante de movimiento.

Este postulado implica, que si expresamos la ecuación (3.13) en componentes, con

$$p_i = (E_i/c, \vec{p}_i) \quad (3.14)$$

y

$$p = (E/c, \vec{p}) \quad (3.15)$$

obtenemos que la energía total del sistema E , definida como la suma de las energías de las partículas individuales

$$E := \sum_{i=1} E_i \quad (3.16)$$

y el momentum total del sistema, definido como la suma vectorial de los momentos individuales de las partículas

$$\vec{p} := \sum_{i=1} \vec{p}_i \quad (3.17)$$

se conservan.

3.2.1. Sistema centro de masa

Definición 4 Definimos la masa relativista total \bar{m} del sistema y su cuadrivector momentum total \bar{p} como

$$\bar{m} := \sum_{i=1} m_i \quad (3.18)$$

$$\bar{p} := \sum_{i=1} p_i = \sum_{i=1} (m_i c, \vec{p}_i) = (\bar{m}c, \vec{p}) \quad (3.19)$$

en donde hemos definido el momentum total del sistema \vec{p} en la última igualdad de la ecuación (3.19).

Si el sistema de partículas es aislado, los postulados de conservación implican que \bar{p} y por tanto \bar{m} y \vec{p} , son constantes en el tiempo.

Dado que el cuadrivector momentum total \bar{p} es un vector como de tiempo, existe un sistema de referencia, que lo llamaremos Σ_{CM} o sistema de referencia centro de masa, para el cual el cuadrivector momentum total \bar{p} no tenga componentes espaciales, esto es, un sistema para el cual $\vec{p} = \vec{0}$. La velocidad \vec{u}_{CM} del sistema de referencia centro de masa respecto a Σ está dada por

$$\vec{u}_{CM} = \frac{\vec{p}}{\bar{m}} \quad (3.20)$$

A partir la velocidad \vec{u}_{CM} , el cuadrivector velocidad del centro de masa toma la forma

$$U_{CM} = \gamma(\vec{u}_{CM})(c, \vec{u}_{CM}) \quad (3.21)$$

Entonces, de la definición del cuadrivector momentum total, ecuación (3.19), velocidad del centro de masa, ecuación (3.20) y la definición del cuadrivector velocidad del centro de masa (ecuación (3.21)), tenemos que

$$\bar{p} = (\bar{m}c, \vec{p}) = \bar{m}(c, \vec{u}_{CM}) = \bar{m}\gamma^{-1}(\vec{u}_{CM})U_{CM} \quad (3.22)$$

La norma al cuadrado de esta ecuación

$$\bar{p}^2 = \bar{m}^2\gamma^{-2}(\vec{u}_{CM})c^2 \quad (3.23)$$

permite definir la masa total del sistema de partículas, en el sistema de referencia centro de masa Σ_{CM} :

$$m_{CM} := \frac{\bar{m}}{\gamma(\vec{u}_{CM})} \quad (3.24)$$

Por lo tanto, podemos escribir el cuadrivector momentum total del sistema como

$$\bar{p} = m_{CM}U_{CM} \quad (3.25)$$

Es importante aclarar que m_{CM} , la masa en reposo del sistema en Σ_{CM} , excede a la suma de las masas en reposo de las partículas del sistema, pues a ella contribuyen también las energías cinéticas de las partículas individuales, puesto que la energía cinética del sistema en Σ_{CM} está dada por

$$K_{CM} = m_{CM}c^2 - \bar{m}_0c^2 \quad (3.26)$$

en donde hemos definido

$$\bar{m}_0 := \sum_i m_{0i} \quad (3.27)$$

Definición 5 *La energía umbral se define como la energía mínima necesaria, para que en un proceso de colisión, se cree una nueva partícula de masa en reposo dada.*

De cualquier manera, la energía mínima (umbral) se tendrá cuando las partículas resultantes de la colisión estén en reposo en el sistema de referencia del centro de masa del sistema. Esta última afirmación define operacionalmente el concepto de energía umbral.

3.2.2. Fotones y partículas de masa en reposo cero

Una partícula de masa en reposo cero $m_0 = 0$ implica que el cuadrivector momentum sea nulo o como de luz. Así, si E es la energía total de la partícula y momentum \vec{p} , entonces

$$p = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad (3.28)$$

con

$$p^2 = 0 \quad (3.29)$$

La relación entre el concepto de partícula de masa en reposo nula y el concepto de fotón o quantum de energía se basa en la generalización de la hipótesis de Einstein, para el transporte de la energía en una onda electromagnética. Einstein postuló que si tenemos una onda electromagnética monocromática de frecuencia ν , entonces la energía transportada por la onda está concentrada en cantidades discretas de energía dada por la relación

$$E = h\nu \quad (3.30)$$

donde h es la constante de Planck. Así, dado que la onda transporta energía, entonces también debe transportar momentum de magnitud

$$|\vec{p}| = \frac{E}{c} \quad (3.31)$$

por lo tanto, se postula que una onda electromagnética monocromática descrita por el cuadrivector de onda

$$k = \left(\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z \right) \quad (3.32)$$

posee un cuadrivector momentum dado por la relación

$$p = \hbar k \quad (3.33)$$

en donde $\hbar = h/2\pi$. Esta ecuación implica que la energía asociada a la onda es

$$E = \hbar\omega \quad (3.34)$$

y el su momentum físico

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \quad (3.35)$$

Definición 6 *Se define colisión elástica en relatividad, como aquella para la cual las masas propias de las partículas iniciales (incluyendo las partículas de masa en reposo cero) antes de la colisión son las mismas después de la colisión.*

Una consecuencia de esta definición es que la energía cinética antes y después de la colisión no cambia, como se verá en un problema.

3.2.3. Estructura atómica

El átomo de hidrógeno es un sistema de dos partículas, un electrón y un protón, ligados por la fuerza eléctrica. La estructura interna y sus propiedades físicas son objeto de estudio de la mecánica cuántica. Sin embargo, para efecto de estudiar procesos dinámicos relativistas, como la colisión del átomo con otras partículas, se puede considerar que el átomo es una partícula eléctricamente neutra, caracterizada por su masa propia y por su estado interno de energía, el cual está dado, para el átomo de hidrógeno, por un número entero n relacionado con la energía interna o de ligadura del átomo por la relación

$$E_n = -\frac{13,6056981}{n^2} \text{ eV}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.36)$$

en donde la unidad de energía es el electronvoltio:

$$1eV = 1,602 \times 10^{-19} J \quad (3.37)$$

El estado base del átomo de hidrógeno corresponde al nivel $n = 1$ y el átomo sólo puede absorber y emitir una cantidad de energía Q , si esta cantidad es igual a la diferencia entre dos niveles de energía permitidos, es decir si

$$Q = E_{final} - E_{inicial} = E_n - E_m \quad (3.38)$$

si $n > m$ significa que el átomo absorbe energía y $n < m$ que emite energía. La energía de ionización del átomo, corresponde a la energía mínima necesaria para quitarle un electrón al átomo, cuando él se encuentra en su estado base. Para el átomo de hidrógeno esto significa la energía necesaria para que el átomo pase del estado base $n = 1$ al estado $m = \infty$ el cual representa que el electrón y el protón no interaccionan y tienen energías cinéticas nulas en el infinito. Así, la energía de ionización del hidrógeno está dada por

$$\begin{aligned} Q_{ion} &= E_{final} - E_{inicial} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{13,6057}{n^2} eV \right) - \left(-\frac{13,6057}{1^2} eV \right) \\ &= 13,6057 eV \end{aligned} \quad (3.39)$$

La masa propia del átomo está dada por la suma de las masas propias del electrón y el protón más el equivalente en masa de la energía interna. Así, para el átomo de hidrógeno, su masa propia (en unidades equivalentes de energía en electronvoltios) en el estado de energía E_n es

$$M_{m0}c^2 = m_{0e}c^2 + m_{0p}c^2 + E_n \quad (3.40)$$

en donde m_{0e} es la masa propia del electrón y m_{0p} la del protón. De esta forma para todos los efectos de la dinámica relativista dos átomos químicamente iguales (e.g. de hidrógeno) pero en estados internos distintos, son partículas diferentes.

Por ejemplo, la masa propia del electrón, en unidades de ev , es

$$m_{0e}c^2 = 510999,06 eV = 0,51099906 MeV \quad (3.41)$$

y la del protón

$$m_{0p}c^2 = 938272310 eV = 938,27231 MeV \quad (3.42)$$

y si el átomo de hidrógeno se encuentra en su estado base $n = 1$ entonces su masa propia está dada por

$$\begin{aligned} M_{m0}c^2 &= m_{0e}c^2 + m_{0p}c^2 - 13,6056981 eV \\ &= 510999,06 eV + 938272310 eV - 13,6056981 eV \\ &= 9,3878 \times 10^8 eV \end{aligned} \quad (3.43)$$

Lo que se ha dicho en esta sección es válido para todos los átomos y en general para todos los sistemas compuestos de partículas, como los núcleos atómicos, solamente que la estructura energética interna del átomo o núcleo no está dada por una relación tan sencilla como la encontrada para el átomo de hidrógeno, ecuación 3.36.

3.3. Problemas de dinámica relativista

1. **Cuadrivector momentum.** Sean p_1 y p_2 los cuadrivectores momento de dos partículas de masas propias m_{01} y m_{02} respectivamente. Muestre que el momentum total del sistema

$$p = p_1 + p_2 \quad (3.44)$$

es un cuadrivector como de tiempo.

2. **Sistema centro de masa.** En un sistema de referencia inercial Σ dos partículas de masas propias m_{01} y m_{02} tienen cuadrivectores momento p_1 y p_2 respectivamente. Calcular la velocidad del sistema de referencia centro de masa Σ_{CM} y la masa propia del sistema medida en Σ y en Σ_{CM} .
3. **Transformación del momentum.** Una partícula de masa en reposo m_0 tiene una energía total E y un momentum \vec{p} medido por un observador inercial Σ . Un segundo sistema de referencia Σ' se está moviendo con velocidad v en la dirección del eje x positivo con respecto a Σ . Si los dos observadores eligen los ejes espaciales paralelos y toman $t = t' = 0$ cuando los orígenes coinciden, encontrar la energía total E' , momentum \vec{p}' y energía cinética K' de la partícula medidas en el sistema de referencia Σ' , en términos de las cantidades E , \vec{p} y K medidas por el observador Σ .
4. **Cuadrivector fuerza.** Interpretar físicamente las componentes del cuadrivector fuerza, definido por la ecuación de movimiento

$$f = \frac{dp}{d\tau} = m_0 A \quad (3.45)$$

donde m_0 es la masa propia de una partícula, sobre la cual actúa una fuerza \vec{F} y A es su cuadrivector aceleración.

5. **Transformación de la fuerza entre sistemas de referencia.** Encontrar las ecuaciones de transformación de las componentes de la fuerza física entre sistemas de referencia inerciales, relacionados por una transformación de Lorentz usual.
6. **Energía disponible para crear partículas.** En un experimento de colisión de dos partículas, en donde, después de la colisión, emergen las dos partículas iniciales más una nueva partícula de masa en reposo dada, surge la necesidad de considerar la mínima energía inicial necesaria para crear

esta partícula, la cual es llamada energía umbral. Otra forma de plantear el concepto de energía umbral es considerar la máxima cantidad de energía disponible en un proceso de colisión de dos partículas, las cuales emergen después del choque junto con otra partícula adicional. Los experimentos de colisión de partículas usualmente utilizan protones contra protones y estos experimentos de pueden disponer de dos maneras: En la primera forma, un protón de energía propia E_0 es acelerado hasta alcanzar cierta energía total E_1 , el cual se hacen chocar contra un protón en reposo. En la segunda forma los dos protones se aceleran hasta una energía final de E_2 cada uno y se hacen chocar frontalmente. En ambos casos la energía total del sistema es $E = E_1 = 2E_2$, sin embargo las energías disponibles son diferentes. Calcular la energía disponible E_D en cada experimento. Asumir que $E = 30\text{Gev}$ y $E_0 = 0,94\text{Gev}$ para el protón.

7. **Sistema de dos electrones.** Un electrón de masa propia m_0 se está moviendo con una energía cinética que es el doble de su energía propia, en la dirección de otro electrón que se encuentra en reposo en el sistema de referencia del laboratorio Σ .
 - a ¿Cuál es la velocidad del electrón móvil medida en Σ ?
 - b Calcular los cuadrivectores momento de los dos electrones y el cuadrivector momento total del sistema en Σ .
 - c ¿Cuál es la velocidad del sistema de referencia centro de masa? Calcular las componentes del cuadrivector momento de cada electrón en el sistema de referencia centro de masa Σ_{CM} .
 - d Calcular la masa propia total del sistema de dos partículas, en Σ y en el sistema de referencia centro de masa Σ_{CM} .

8. **Sistema de dos fotones.** Dos fotones de la misma energía E , con respecto a un sistema de referencia inercial Σ , se propagan, el primero en la dirección del eje x positivo y el segundo en la dirección del eje y positivo.
 - a Calcular los cuadrivectores momento de los dos fotones y el cuadrivector momento total del sistema en Σ .
 - b Cuál es la velocidad del sistema de referencia centro de masa?
 - c Calcular la masa propia del sistema de dos fotones.

9. **Partícula compuesta.** En el sistema de laboratorio un electrón de energía cinética $2m_0c^2/3$ choca con un positrón (partícula de la misma masa que electrón y de carga positiva) en reposo y forma un átomo de positronio.
 - a Cuál es la masa propia del positronio?
 - b Que velocidad final adquiere el átomo de positronio?

- c** Si el átomo de positronio, después de un tiempo corto se desintegra de nuevo en un electrón y un positrón, ¿cuál es la velocidad de las partículas finales si ellas son emitidas formando el mismo ángulo con respecto a la dirección de movimiento del positronio?. ¿Cuánto vale este ángulo?
- d** Analizar si el proceso de colisión completo

$$e^- + e^+ \longrightarrow A_p \longrightarrow e^- + e^+ \quad (3.46)$$

¿es elástico o inelástico?, donde e^- representa al electrón, e^+ al positrón y A_p el átomo de positronio.

10. **Aniquilación de partículas.** Considere un electrón que se mueve con energía cinética de $2m_0c^2/3$ y choca con un positrón en reposo aniquilándose el electrón y el positrón en dos fotones:

$$e^- + e^+ \longrightarrow \gamma + \gamma$$

- a** Con respecto a la dirección de incidencia del electrón, ¿en qué direcciones deben salir los fotones, para que uno de ellos tenga energía máxima?. En este caso ¿cuál es la energía de cada fotón?
- b** Si en el proceso de aniquilación, los dos fotones salen formando un ángulo igual (y opuesto) con respecto a la dirección de incidencia, ¿cuánto vale el ángulo? y ¿qué energía tiene cada fotón?
- c** Resolver los dos numerales anteriores, analizando el problema para un observador en reposo con respecto al sistema de referencia centro de masa de las partículas iniciales.
11. **Absorción atómica.** Un átomo de hidrógeno en su estado base, con masa propia M_0 , se encuentra en reposo en el sistema laboratorio Σ . Un fotón de energía Q choca contra el átomo y es absorbido por este, pasando a su primer estado excitado $n = 2$. Sea \tilde{M}_0 la masa propia del átomo excitado y

$$Q_0 = \tilde{M}_0c^2 - M_0c^2 \quad (3.47)$$

la diferencia de las energías propias del hidrógeno después y antes de la colisión.

- a** Encontrar una expresión para la energía Q que debe tener el fotón incidente, en función de la energía de excitación Q_0 y la masa propia del átomo M_0 en su estado base.
- b** Demostrar que la diferencia entre la energía del fotón incidente Q y la energía interna de excitación del átomo corresponde a la energía cinética del átomo excitado.
- c** Calcular numéricamente Q teniendo en cuenta que Q_0 corresponde a la diferencia entre los niveles de energía interna $n = 2$ y $n = 1$, y calcular la velocidad con que retrocede el átomo al absorber el fotón de energía Q .

12. **Cohete fotónico.** El motor de máxima eficiencia que se podría llegar a construir es el cohete fotónico, el cual convierte el 100 % del combustible (materia) en radiación colimada (fotones). Supongamos que en los problemas del capítulo de cinemática **Viaje interestelar 1** y **Viaje interestelar 2** la nave dispone de un cohete fotónico. Calcular qué porcentaje de la masa inicial del cohete M_0 se gasta en el viaje en cada caso.
13. **Dispersión elástica protón-protón.** En el sistema laboratorio una partícula de masa propia m_0 y energía cinética K choca elásticamente contra otra partícula idéntica en reposo. Calcular el ángulo entre las dos partículas después de la colisión en función de K y m_0 , si las dos partículas salen con la misma energía. Aplicar el resultado para protones, con $m_0 c^2 = 938,27231 \text{ MeV}$ y $K = 437 \text{ MeV}$. Sutton et.al. ([8]) obtuvieron el valor experimental de $84,0^\circ \pm 0,2^\circ$.
14. **Procesos prohibidos.** Demostrar que los siguientes procesos de colisión son prohibidos: Un protón en reposo emite un fotón y retrocede

$$p \longrightarrow p + \gamma \quad (3.48)$$

Un fotón se desintegra en un par electrón-positrón

$$\gamma \longrightarrow e^- + e^+ \quad (3.49)$$

Un par electrón-positrón se aniquilian dando lugar a un fotón

$$e^- + e^+ \longrightarrow \gamma \quad (3.50)$$

en donde γ representa un fotón de energía dada, p un protón, e^- un electrón y e^+ un positrón.

15. **Experimentos de coincidencia.** En el experimento original del efecto Compton se midió la energía del fotón dispersado en función del ángulo de dispersión, pero no se midió al electrón dispersado. Calcular la energía y el ángulo de dispersión del electrón en función de la energía del fotón incidente y el ángulo de dispersión del fotón.
16. **Reflexión inelástica de un fotón en un átomo.** Un fotón de energía Q_i choca contra un átomo de hidrógeno en reposo que se encuentra en su primer estado excitado. Después de la colisión el átomo pasa a su estado base y el fotón se dispersa con la misma energía retrocediendo.
- a ¿El choque es elástico o inelástico?
- b Cuál es la velocidad del átomo después de la colisión?
- c ¿Cuál es la energía Q_i del fotón incidente?

Capítulo 4

Tensores

En este capítulo se introducen los conceptos fundamentales del cálculo tensorial. Los tensores serán definidos en términos de sus propiedades de transformación, bajo un cambio de sistemas de coordenadas. Todas las definiciones dadas, así como sus propiedades, son generales, i.e. son válidas para transformaciones generales de coordenadas, pero este capítulo se restringirá exclusivamente a transformaciones de Lorentz, aún cuando se mantiene en lo posible una notación general.

4.1. Definiciones fundamentales

Definición 7 Sean Σ y Σ' dos sistemas de referencia inerciales y sean $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ y $x'^\mu = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ las coordenadas de un evento físico medidas en Σ y Σ' respectivamente. Entonces una transformación de Lorentz de las coordenadas está definida como:

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (4.1)$$

tal que el producto punto Minkowskiano queda invariante bajo esta transformación de coordenadas.

Definición 8 Un escalar de Lorentz es una cantidad (en general una función de las coordenadas) que es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

Ejemplos de escalares de Lorentz son: la masa propia de una partícula, el intervalo de tiempo propio entre dos eventos, la norma de todo cuadrivector, el producto interno de cuadrivectores, etc..

Definición 9 Un cuadrivector \mathbf{V} es una cantidad cuyas componentes, denotadas por V^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, medidas por el observador inercial Σ , se transforman bajo una transformación de Lorentz de las coordenadas (ecuación (4.1)), de la misma manera que las coordenadas, es decir:

$$V'^\mu = \Lambda^\mu_\nu V^\nu \quad (4.2)$$

donde V'^{μ} denota las componentes del cuadvivector \mathbf{V} medidas en el sistema de referencia Σ' .

A las cantidades V^{μ} se le llaman las componentes contravariantes del cuadvivector \mathbf{V} .

Definición 10 Un tensor \mathbf{T} de segundo orden dos veces contravariante, es un conjunto de 4^2 componentes $T^{\mu\nu}$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, medidas en un sistema de referencia Σ , tales que bajo una transformación de Lorentz (ecuación (4.1)) sus componentes se transforman como:

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} T^{\alpha\beta} \quad (4.3)$$

donde $T'^{\mu\nu}$ denota las componentes del tensor \mathbf{T} en el sistema de referencia Σ' .

Definición 11 La definición anterior se generaliza al caso de un tensor \mathbf{T} contravariante de orden r , como un objeto de 4^r componentes, medidas en un sistema de referencia Σ , cuyas componentes se transforman bajo una transformación de Lorentz (4.1) en la forma:

$$T'^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} = \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}_{\nu_2} \dots \Lambda^{\mu_r}_{\nu_r} T^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r} \quad (4.4)$$

Así, se define un tensor de orden cero como un escalar y un tensor contravariante de orden uno como un cuadvivector.

Definición 12 La distancia espacio-tiempo entre dos eventos de coordenadas x^{μ} y $x^{\mu} + dx^{\mu}$, está definida por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (4.5)$$

Esta distancia es un invariante bajo una transformación de coordenadas, es decir:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} \quad (4.6)$$

en donde la matriz de Minkowski η (también se llamada tensor métrico de Minkowski) está definida por:

$$\eta_{\mu\nu} := \begin{cases} 1; & \text{si } \mu = \nu = 0 \\ -1; & \text{si } \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0; & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (4.7)$$

Entonces por la invarianza de ds^2 se tiene que

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \quad (4.8)$$

por lo tanto se debe cumplir la relación:

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \eta_{\mu\nu} \quad (4.9)$$

Dado que

$$\det(\eta_{\alpha\beta}) = -1 \quad (4.10)$$

entonces existe la matriz de transformación inversa $(\eta_{\alpha\beta})^{-1}$, cuyas componentes se denotan por $\eta^{\alpha\beta}$, y satisfacen la siguiente relación:

$$\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^{-1} = \mathbf{1} \iff \eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\sigma} = \delta_{\alpha}^{\sigma} \quad (4.11)$$

donde δ_{α}^{σ} son los elementos de la matriz identidad. Los elementos de la matriz inversa de Minkowski coinciden numéricamente con $\eta_{\alpha\beta}$, y además son matrices simétricas, i.e.

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} &= \eta_{\beta\alpha} \\ \eta^{\alpha\beta} &= \eta^{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (4.12)$$

La inversa de una transformación de Lorentz está dada por:

$$x^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x'^{\nu} \quad (4.13)$$

con

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = (\Lambda^{\mu}_{\nu})^{-1} \iff \Lambda_{\nu}^{\epsilon} \Lambda^{\nu}_{\mu} = \delta_{\mu}^{\epsilon} \quad (4.14)$$

Definición 13 Se definen las “componentes” covariantes de un cuadrivector V como

$$V_{\alpha} := \eta_{\alpha\beta} V^{\beta} \quad (4.15)$$

Así, dadas las componentes covariantes V_{μ} , entonces sus correspondientes componentes contravariantes se obtienen de la transformación inversa:

$$V^{\mu} = \eta^{\mu\nu} V_{\nu} \quad (4.16)$$

Esta definición se generaliza para el caso de tensores de cualquier rango. Por ejemplo, las componentes covariantes de un tensor de segundo orden están relacionadas con sus componentes contravariantes por la ecuación:

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} T^{\alpha\beta} \quad (4.17)$$

y en forma similar se pueden definir las componentes de un tensor de segundo orden una vez contravariante y una vez covariante, con las siguientes posibilidades:

$$T^{\alpha}_{\beta} = \eta_{\beta\mu} T^{\alpha\mu} \quad ; \quad T_{\alpha}^{\beta} = \eta_{\mu\alpha} T^{\mu\beta} \quad (4.18)$$

De esta forma, $T^{\alpha\beta}$, $T_{\mu\nu}$, T^{α}_{β} , y T_{α}^{β} son todas diferentes representaciones de un mismo tensor de segundo rango \mathbf{T} .

Las componentes covariantes de un tensor de rango uno, bajo una transformación de Lorentz, se transforman como:

$$V'_\alpha = \Lambda_\alpha^\mu V_\mu \quad (4.19)$$

La ley general de transformación de las componentes covariantes y contravariantes de un tensor cualquiera \mathbf{T} , r -veces contravariante y s -veces covariante está dada por:

$$T'^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_s} = \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}_{\nu_2} \dots \Lambda^{\mu_r}_{\nu_r} \Lambda_{\gamma_1}^{\delta_1} \Lambda_{\gamma_2}^{\delta_2} \dots \Lambda_{\gamma_r}^{\delta_r} T^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_s} \quad (4.20)$$

4.1.1. Algebra tensorial

Definición 14 Sea

$$\Pi_s^r = \{ \mathbf{T} \mid T^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_s} \}$$

el conjunto de todos los tensores r -veces contravariante y s -veces covariante.

Así, en esta notación, un escalar es un elemento de Π_0^0 , un cuadvivector contravariante es un elemento de Π_0^1 y uno covariante de Π_1^0 , etc.

Definición 15 Dados dos tensores $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in \Pi_s^r$ definimos la suma y la multiplicación por un escalar $\lambda \in R$, por:

$$Q^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_s} := (T + S)^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_s} := T^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_s} + S^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_s} \quad (4.21)$$

$$P^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_s} := (\lambda T)^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_s} := \lambda T^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_s} \quad (4.22)$$

Definición 16 Dados dos tensores $\mathbf{T} \in \Pi_s^r$ y $\mathbf{S} \in \Pi_q^p$, se define el producto tensorial como:

$$W^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r \nu_{r+1} \dots \nu_{r+p}}_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_s \delta_{s+1} \dots \delta_{s+q}} := T^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_s} S^{\nu_{r+1} \nu_{r+2} \dots \nu_{r+p}}_{\delta_{s+1} \delta_{s+2} \dots \delta_{s+q}} \quad (4.23)$$

el cual es un tensor de Π_{s+q}^{r+p} .

Definición 17 Dado un tensor $T \in \Pi_s^r$ se define la contracción del índice contravariante α_i ($1 \leq i \leq r$) con el índice covariante β_j ($1 \leq j \leq s$) por:

$$C_{(\beta_j)}^{(\alpha_i)}(T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \dots \alpha_r}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_j \dots \beta_s}) := T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \sigma \dots \alpha_r}_{\beta_1 \beta_2 \dots \sigma \dots \beta_s} \in \Pi_{s-1}^{r-1} \quad (4.24)$$

La operación de subir y bajar índices es un caso particular de combinar las operaciones de producto tensorial y contracción.

4.1.2. Propiedades de simetría de tensores

Definición 18 Un tensor T de segundo rango del tipo Π_0^2 , con componentes $T^{\alpha\beta}$ en un sistema de referencia Σ , se llama *simétrico* si

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \quad (4.25)$$

y *antisimétrico* si

$$T^{\alpha\beta} = -T^{\beta\alpha} \quad (4.26)$$

Esta definición es válida también, para las componentes covariantes de un tensor de segundo rango y puede ser generalizada a cualquier par de índices de un tensor de rango $n \geq 2$.

Definición 19 Dado un tensor \mathbf{T} de segundo rango del tipo Π_0^2 , con componentes $T^{\alpha\beta}$ en un sistema de referencia Σ , se define un nuevo tensor, denotado como $T^{(\alpha\beta)}$, por la operación

$$T^{(\alpha\beta)} := \frac{1}{2}(T^{\alpha\beta} + T^{\beta\alpha}) \quad (4.27)$$

el cual por definición es *simétrico*, es decir $T^{(\alpha\beta)} = T^{(\beta\alpha)}$.

Definición 20 Se define la operación de *antisimetrización* de un tensor dado $T^{\alpha\beta}$, que se denota como $T^{[\alpha\beta]}$, por:

$$T^{[\alpha\beta]} := \frac{1}{2}(T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}) \quad (4.28)$$

De la misma manera se tiene que si un tensor $T^{\alpha\beta}$ es *simétrico*, entonces el tensor antisimetrizado es cero y si $T^{\alpha\beta}$ es *antisimétrico*, entonces $T^{[\alpha\beta]} = T^{\alpha\beta}$. Claramente estas operaciones son válidas también para tensores del tipo Π_2^2 . Estas operaciones de *simetrización* y *antisimetrización* se pueden generalizar a tensores de orden mayor:

$$T^{(\alpha_1 \cdots \alpha_r)} := \frac{1}{r!} \sum_{P_\sigma} T^{P_\sigma(\alpha_1 \cdots \alpha_r)} \quad (4.29)$$

$$T^{[\alpha_1 \cdots \alpha_r]} := \frac{1}{r!} \sum_{P_\sigma} (-1)^{N_\sigma} T^{P_\sigma(\alpha_1 \cdots \alpha_r)} \quad (4.30)$$

en donde la suma se realiza sobre todas las permutaciones de los índices $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ y $N_\sigma = \pm 1$ es el signo de la permutación.

La generalización del producto cruz del álgebra usual de vectores tridimensionales, corresponde al producto tensorial de vectores antisimetrizado. Así, sean A^α y B^β las componentes de dos cuadvectores en un sistema de referencia Σ , entonces se define un nuevo tensor, como el producto tensorial antisimetrizado de estos dos cuadvectores:

$$C^{\alpha\beta} := A^{[\alpha} B^{\beta]} = \frac{1}{2} \{A^\alpha B^\beta - A^\beta B^\alpha\} \quad (4.31)$$

Un caso especial de un tensor de cuarto rango completamente antisimétrico, es el tensor de Levi-Civita, definido por la ecuación:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} := \begin{cases} +1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ es permutación par de } 0123 \\ -1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ es permutación impar de } 0123 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases} \quad (4.32)$$

Este tensor, al igual que el tensor métrico de Minkowski, tiene la particularidad que en todos los sistemas de referencia inerciales sus componentes tienen el mismo valor numérico.

4.2. Transformación general de coordenadas

Un cambio general de coordenadas entre los sistemas Σ y Σ' se puede expresar como un conjunto de cuatro ecuaciones, en donde las nuevas coordenadas primadas son funciones continuas, con inversa continua, de las coordenadas no primadas. Así la transformación de coordenadas y su inversa, se pueden escribir como:

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\alpha}) \quad (4.33)$$

$$x^{\beta} = x^{\beta}(x'^{\nu}) \quad (4.34)$$

Notemos que si exigimos que las transformaciones de coordenadas sean lineales, entonces estas ecuaciones se reducen a la forma:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} x^{\alpha} \quad (4.35)$$

$$x^{\beta} = \Lambda_{\nu}^{\beta} x'^{\nu} \quad (4.36)$$

con los coeficientes de la transformaciones Λ^{μ}_{α} (y los de la transformación inversa Λ_{ν}^{β}) constantes, independientes de las coordenadas. Con la identificación

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \quad (4.37)$$

$$\Lambda_{\nu}^{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}$$

las ecuaciones que definen la ley de transformación (y su inversa), para las componentes de cualquier vector en los dos sistemas de referencia, se pueden escribir en la forma

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \quad (4.38)$$

$$V^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} V'^{\nu} \quad (4.39)$$

Entonces, la relación

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\alpha} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad (4.40)$$

es equivalente a

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad (4.41)$$

Esta relación se obtiene directamente, si aplicamos la regla de la cadena para las derivadas a la transformación idéntica $x'^{\mu}(x^{\alpha}(x'^{\nu})) \equiv x'^{\mu}$.

4.2.1. Operadores vectoriales

La generalización del vector gradiente del cálculo vectorial usual sobre \mathbb{R}^3

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (4.42)$$

el cual al actuar sobre una función escalar produce un vector en la dirección del máximo cambio de la función, es el operador diferencial

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$$

el cual al actuar sobre una función escalar de las coordenadas genera un cuadrivector covariante

$$\partial_{\mu} \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^0}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} \right)$$

Las componentes del operador gradiente se transforman, bajo un cambio de coordenadas, como las componentes covariantes de un cuadrivector, es decir

$$\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu} \quad (4.43)$$

A partir de esta definición, se pueden construir los operadores de uso más frecuente en física, siguiendo los mismos procedimientos que en el caso del cálculo vectorial tridimensional estandar. Para el caso de un campo vectorial $\Psi^{\mu}(x^{\alpha})$, esto es, una función vectorial de las coordenadas, si se toma el producto interno Minkowskiano entre este campo vectorial y el vector gradiente:

$$\nabla \cdot \Psi = \partial_{\nu} \Psi^{\nu} \quad (4.44)$$

se obtiene la cudri-divergencia que corresponde a la generalización del operador divergencia tridimensional. Además tomando el producto interno del operador gradiente consigo mismo, se obtiene un el operador de D 'Alembert que es un invariante (un escalar) bajo transformaciones de coordenadas, así

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} = \partial^{\mu} \partial_{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \nabla^2 \quad (4.45)$$

Finalmente la generalización del rotacional se define como el un tensor de segundo rango antisimétrico obtenido por la operación:

$$\partial_{[\alpha} \Psi_{\beta]} = \partial_{\alpha} \Psi_{\beta} - \partial_{\beta} \Psi_{\alpha} \quad (4.46)$$

4.3. Problemas de álgebra tensorial

1. **Transformación de componentes covariantes.** A partir de la propiedad

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} \eta_{\mu\nu} \quad (4.47)$$

que debe satisfacer una transformación de Lorentz Λ_{α}^{μ} y de la definición de componentes covariantes de un cuadrivector

$$V_{\alpha} := \eta_{\alpha\beta} V^{\beta} \quad (4.48)$$

y de la ley de transformación para las componentes contravariantes

$$V'^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} V^{\beta} \quad (4.49)$$

encontrar la ley de transformación para las componentes covariantes del cuadrivector \mathbf{V} , i.e., demostrar que

$$V'_{\alpha} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} V_{\mu} \quad (4.50)$$

2. **Componentes covariantes del cuadrivector momentum.** Dadas las componentes contravariantes del cuadrimomento en un sistema de referencia Σ ,

$$\begin{aligned} p &= (p^0, p^1, p^2, p^3) \\ &= \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

encontrar las componentes covariantes.

3. **Transformación de componentes covariantes.** A partir de las ecuaciones de transformación para las componentes covariantes de un cuadrivector, mostrar que las ecuaciones de transformación para la energía y el momentum de una partícula son las mismas sin importar si se trabaja con sus componentes contravariantes o covariantes.
4. **Propiedades de simetría.** Considere un tensor de segundo rango contravariante $T^{\alpha\beta}$.

a Muestre que si el tensor es simétrico en un sistema de referencia también es simétrico en todos los sistemas de referencia. Similarmente si es antisimétrico.

b A partir de $T^{\alpha\beta}$ encontrar sus componentes covariantes $T_{\alpha\beta}$ y mostrar que si $T^{\alpha\beta}$ es simétrico entonces $T_{\alpha\beta}$ también lo es. Similarmente si es antisimétrico. Que sucede con las componentes mixtas T^{α}_{β} y T_{α}^{β} ?

5. **Tensor métrico de Minkowski.** Mostrar, por cálculo directo, que el tensor métrico de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ tiene las mismas componentes en todos los sistema coordenados. Similarmente $\eta^{\alpha\beta}$ y el tensor métrico mixto δ_{β}^{α} .
6. **Algebra de tensores.** Sean $T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ y $R_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ las componentes de dos tensores $r - veces$ contravariantes y $s - veces$ covariantes medidas en un sistema de referencia Σ y λ un número real.

a Demostrar que las cantidades

$$S_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = \lambda T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \quad (4.52)$$

se transforman como las componentes de un tensor $r - veces$ contravariante y $s - veces$ covariante bajo una transformación de Lorentz.

b Demostrar que las cantidades

$$Q_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} + R_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \quad (4.53)$$

se transforman como las componentes de un tensor $r - veces$ contravariante y $s - veces$ covariante bajo una transformación de Lorentz.

7. **Contracción de tensores.** Demuestre que la contracción de tensores es una operación tensorial. Es decir, muestre que el conjunto de cantidades obtenidas por la contracción de cualquier índice covariante con cualquier índice contravariante de un tensor dado \mathbf{T} r -veces contravariante y s -veces covariante, conforman las componentes de un tensor $r - 1$ veces contravariante y $s - 1$ veces covariante.
8. **Tensor de Levi-Civita.** El tensor de Levi-Civita está definido por la ecuación 4.32.

a Mostrar que las componentes del tensor de Levi-Civita tiene las mismas componentes en todos los sistemas de referencia inerciales.

b Calcular la componentes del tensor de Levi-Civita completamente covariante.

c Calcular

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (4.54)$$

9. **El tensor dual.** Dado un tensor se segundo rango covariante antisimétrico, i.e. $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$, entonces

a Calcular las componentes contravariantes del tensor dual, definido como

$$(*F)^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \quad (4.55)$$

- b** Bajando los índices con el tensor métrico de Minkowski, encontrar las componentes covariantes del tensor dual:

$$(*F)_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}(*F)^{\mu\nu} \quad (4.56)$$

y demostrar que

$$(*F)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\gamma\delta} \quad (4.57)$$

- c** Comparar el resultado anterior, si definimos el dual de un tensor de segundo orden contravariante antisimétrico por la relación

$$*F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\gamma\delta} \quad (4.58)$$

teniendo en cuenta que las componentes covariantes y contravariantes del tensor F están relacionadas por

$$F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}F_{\mu\nu} \quad (4.59)$$

- d** Demostrar que

$$*(*F) = -F$$

- 10. Transformación general de coordenadas.** Las ecuaciones de transformación de Lorentz usuales entre sistemas de referencia inerciales

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta}x^{\beta} \quad (4.60)$$

corresponden, matemáticamente, a una transformación de coordenadas

$$x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^0, x^1, x^2, x^3) = x'^{\alpha}(x^{\mu}) \quad (4.61)$$

con $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

- a** Encontrar la relación entre los elementos de la matriz jacobiana de la transformación de coordenadas

$$\mathbf{J}(x, x') = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right] \quad (4.62)$$

- b** Calcular los elementos de la transformación de coordenadas inversa (el jacobiano de la transformación inversa), asumiendo que el determinante de la matriz de Jacobi no es nulo, y relacionarlos con los elementos de la matriz de Lorentz inversa.

11. **Derivada de un tensor.** Sea $T^{\alpha\beta}(x)$ una función tensorial de las coordenadas de segundo orden contravariante. Muestre que las funciones obtenidas, diferenciando con respecto a las coordenadas las componentes del tensor $T^{\alpha\beta}$, es decir

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} T^{\alpha\beta} \equiv \partial_\gamma T^{\alpha\beta} \equiv T^{\alpha\beta}_{,\gamma} \quad (4.63)$$

bajo una transformación de Lorentz se comportan como las componentes de un tensor de tercer orden, dos veces contravariante y una vez covariante, es decir

$$T^{\prime\alpha\beta}_{,\gamma} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Lambda_\gamma^\sigma T^{\mu\nu}_{,\sigma} \quad (4.64)$$

Este resultado se puede generalizar a tensores arbitrarios, es decir si $T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}$ es un tensor r-veces contravariante y s-veces covariante, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} = \partial_\gamma T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} = T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s, \gamma} \quad (4.65)$$

es un tensor r-veces contravariante y s+1-veces covariante. Este resultado es válido solamente si la transformación de coordenadas es lineal (ver el siguiente problema).

12. **Transformación general de coordenadas y derivadas.** Sea $V_\alpha(x)$ un campo tensorial covariante y consideremos una transformación de coordenadas general (no lineal)

$$x'^\alpha = x'^\alpha(x^\mu) \quad (4.66)$$

entonces mostrar que las cantidades

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} V_\alpha = \partial_\gamma V_\alpha = V_{\alpha, \gamma} \quad (4.67)$$

no se transforman como las componentes de un tensor dos veces covariante. Bajo que condición las cantidades $V_{\alpha, \gamma}$ corresponden a las componentes de un tensor de segundo orden?

13. **El tensor energía-momento.** Muchos sistema físicos, como un fluido o el campo electromagnético, se pueden caracterizar por una cantidad física llamada el tensor energía-momento $T^{\alpha\beta}$, con la propiedad que sea simétrico

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \quad (4.68)$$

y que cumpla con la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \quad (4.69)$$

En modelo simple, pero de interés físico, de un fluido relativista es conocido como el fluido perfecto, el cual está determinado por dos funciones escalares $\rho_0(x)$ y $p_0(x)$. La función ρ_0 representa la densidad de energía

propia del fluido en cada punto del espacio-tiempo x , es decir ρ_0 corresponde a la densidad de energía del fluido en cada punto del espacio-tiempo medida por un observador inercial con respecto al cual el fluido se encuentra en reposo, así

$$\rho_0 = c^2 \frac{dm_0}{dV_0} \quad (4.70)$$

donde dm_0 es la masa propia contenida en el elemento de volumen propio dV_0 , y la función $p_0(x)$ representa la presión propia del fluido en el punto x . Las componentes del tensor energía-momento del fluido, en el sistema de referencia propio están dadas por

$$T_0^{\alpha\beta}(x) = \begin{bmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_0 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

donde el subíndice cero se refiere al sistema de referencia propio. Utilizando la matriz de transformación de Lorentz general, ecuación 6.337, encontrar los elementos del tensor energía-momento para un observador arbitrario que se mueve con velocidad \vec{u} y mostrar que los elementos del tensor se pueden escribir como

$$T^{\alpha\beta} = (p_0 + \rho_0)U^\alpha U^\beta - p_0 \eta^{\alpha\beta} \quad (4.72)$$

donde U^α es la cuadrivelocidad del fluido respecto al observador arbitrario, definida por

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} = \gamma(\vec{u})(1, \vec{\beta}) \quad (4.73)$$

Capítulo 5

Electrodinámica

5.1. Introducción

Las leyes de la electrodinámica, constituidas por las ecuaciones de Maxwell, la ecuación de continuidad para la carga y la ley de la fuerza de Lorentz, son válidas en el marco de los postulados de Einstein de la teoría especial de la relatividad. En efecto, las leyes que rigen los fenómenos electromagnéticos no dependen del sistema de referencia inercial y por lo tanto las ecuaciones de la electrodinámica deben permanecer invariantes bajo transformaciones de Lorentz.

Esta invarianza implica que los campos eléctricos y magnéticos deben satisfacer ciertas ecuaciones de transformación entre sistemas de referencia, de tal manera que las leyes de la electrodinámica mantengan su forma para todos los observadores inerciales. Una consecuencia de la covarianza de las ecuaciones de Maxwell es que el campo eléctrico y magnético debe describirse en forma unificada a través del tensor campo electromagnético.

Otra forma de ver el carácter relativista de los fenómenos electromagnéticos es a partir del campo eléctrico estático, asumiendo la validez de la ley de Coulomb para cargas en reposo y las ecuaciones de transformación de Lorentz, y mostrar cómo surge la necesidad del campo magnético, es decir mostrar que la existencia del campo magnético es un efecto relativista.

A través de los problemas del presente capítulo desarrollaremos esta dos formas de entender los fenómenos electromagnéticos en el marco de los postulados de la teoría de la relatividad especial.

5.2. Ecuaciones de Maxwell

Las leyes de la electrodinámica están constituidas por dos conjuntos de ecuaciones. El primer conjunto lo conforman las ecuaciones de Maxwell que están dadas por (en unidades cgs):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (5.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (5.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.4)$$

las cuales nos determinan los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} en términos de sus fuentes (cargas y corrientes), con ρ la densidad volumétrica de carga y \vec{J} la densidad de corriente eléctrica.

La primera de estas ecuaciones (5.1) es la ley de Gauss y establece que las cargas eléctricas son fuente del campo eléctrico. La segunda ecuación (5.2), ley de Gauss para el campo magnético, nos dice que no existen fuentes para el campo magnético. La tercera ecuación de Maxwell (5.3) contiene dos términos: la ley de Ampere, esto es, que las corrientes eléctricas (representadas en el término $4\pi\vec{J}/c$) producen campos magnéticos y por otra parte está el término $1/c\partial\vec{E}/\partial t$, introducido por Maxwell, que nos dice que campos eléctricos variables en el tiempo son también una fuente de campo magnético. La última de las ecuaciones de Maxwell (5.4) es la ley de inducción de Faraday, la cual establece que campos magnéticos variables en el tiempo inducen campos eléctricos.

El segundo conjunto de ecuaciones que conforman las leyes de la electrodinámica, lo constituyen la ecuación de continuidad y la ley de la fuerza de Lorentz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (5.5)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{u} \times \vec{B} \quad (5.6)$$

en donde q es la carga de la partícula y \vec{u} su velocidad medida con respecto a un sistema de referencia inercial.

La primera de estas ecuaciones (5.5), la ecuación de continuidad, establece que la carga eléctrica es conservada en la naturaleza. Es de anotar que esta ley de conservación de la carga está contenida en las ecuaciones de Maxwell y por lo tanto no constituye una ley independiente de la electrodinámica, pues si tomamos la divergencia de la ecuación 5.3 tenemos que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (5.7)$$

intercambiando la derivada espacial y temporal, utilizando la primera ecuación de Maxwell 5.1 y teniendo en cuenta que la divergencia del rotacional se anula, obtenemos la ecuación de continuidad:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \\ &= \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Finalmente, la última ecuación (5.6) corresponde a la ley de la fuerza de Lorentz, la cual nos da la ecuación de movimiento para una carga puntual en presencia de un campo electromagnético.

5.2.1. Electroestática

La ley de Coulomb describe la fuerza entre partículas cargadas estacionarias:

$$\vec{f}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (5.9)$$

en donde q_1 y q_2 miden las cargas eléctricas de las partículas, r es la distancia entre ellas, con \hat{r} un vector unitario en la dirección del radio vector que une la carga 1 con la carga 2, y k es una constante de proporcionalidad que depende del sistema de unidades elegido ($k = 1$ en el sistema cgs). Entonces \vec{f}_{12} nos mide la fuerza que la carga q_2 experimenta debido a la carga q_1 , siendo esta fuerza atractiva o repulsiva dependiendo del signo de las cargas. Además, esta expresión de la fuerza satisface, por su definición, la tercera ley de Newton, esto es

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21} \quad (5.10)$$

A partir de la ecuación (5.9) podemos escribir la ley de Coulomb en la forma:

$$\vec{f}_{12} = q_2 \vec{E}_1(\vec{r}) \quad (5.11)$$

en donde la cantidad $\vec{E}_1(\vec{r})$, definida como

$$\vec{E}_1(\vec{r}) := \frac{q_1}{r^2} \hat{r} \quad (5.12)$$

representa el campo eléctrico producido por la carga q_1 en el punto \vec{r} .

Estas expresiones para la fuerza (ecuación 5.9) y el campo eléctrico (ecuación 5.12) son válidas para un observador inercial Σ , con respecto al cual la carga q_1 está en reposo.

Es un hecho experimental, que la fuerza sobre la carga de prueba q_2 es independiente del estado de movimiento de la carga de prueba, lo cual está implícito en la expresión para la fuerza de Coulomb, pues ella depende solamente de la posición instantánea de la carga q_2 . Además, tanto la fuerza de Coulomb como el campo eléctrico producido por la carga q_1 , son independientes del tiempo siempre y cuando la carga q_1 se encuentre en reposo.

Experimentalmente determinamos la fuerza \vec{f}_{12} sobre la carga de prueba q_2 en el sistema de referencia inercial Σ , midiendo la tasa de cambio del momento \vec{p}_2 de la carga q_2 , es decir midiendo $d\vec{p}_2/dt$, así como también las otras variables cinemáticas y dinámicas que entran en la definición de la fuerza de Coulomb, tales como la distancia entre la carga q_1 y la de prueba, la velocidad (nula en este caso) de la carga q_1 y el momento \vec{p}_2 de q_2 .

5.3. Ecuaciones de Maxwell covariantes

La ecuación de continuidad (5.5) la podemos escribir, en forma explícitamente covariante, como:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (5.13)$$

donde el cuadvivector corriente J^ν se ha definido en la forma:

$$J^\nu := (J^0, J^1, J^2, J^3) = (c\rho, \vec{J}) \quad (5.14)$$

La componente temporal J^0 representa la densidad de carga (siendo la carga un invariante relativista) y las componentes espaciales $J^i, i = 1, 2, 3$ corresponden a las componentes del vector densidad de corriente eléctrica.

En las ecuaciones de Maxwell, escritas en la forma usual (ecuaciones 5.1 a la 5.4), los campos eléctricos \vec{E} y magnéticos \vec{B} son vectores cartesianos usuales y por lo tanto no corresponden a ninguna cantidad relativista, es decir a un escalar de Lorentz, o a un cuadvivector, o a un tensor. Por esta razón se define el tensor campo electromagnético \mathbf{F} medido por un observador inercial Σ , como un tensor de segundo rango antisimétrico cuyas componente contravariantes están dadas por:

$$\begin{aligned} F^{12} = -F^{21} = B_z & & F^{23} = -F^{32} = B_x & & F^{31} = -F^{13} = B_y \\ F^{01} = -F^{10} = E_x & & F^{02} = -F^{20} = E_y & & F^{03} = -F^{30} = E_z \\ F^{\alpha\alpha} = 0 & & & & \forall \alpha = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Con esta definición, podemos escribir las dos primeras ecuaciones de Maxwell (ecuaciones (5.1) y (5.2)) en la forma:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} J^\beta \quad (5.16)$$

la cual es una ecuación covariante relativista. Esto significa que esta ecuación tiene la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales, es decir, en un sistema de referencia Σ' , para el cual $F'^{\alpha\beta}$ y J'^β son las correspondientes componentes del tensor campo electromagnético y densidad de corriente, las dos primeras ecuaciones de Maxwell tienen la forma:

$$\partial'_\alpha F'^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} J'^\beta \quad (5.17)$$

en donde las componentes de la densidad de corriente J'^β y del tensor $F'^{\alpha\beta}$ medidas en Σ' , están relacionadas con las medidas en Σ , por las ecuaciones de transformación:

$$J'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha J^\alpha \quad (5.18)$$

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \quad (5.19)$$

Estas relaciones nos dan las ecuaciones de transformación para las fuentes y los campos eléctricos y magnéticos medidas por dos observadores inerciales.

Las ecuaciones de Maxwell homogéneas (ecuaciones (5.2) y (5.4)), con la ayuda del tensor de Levi-Civita introducido en el capítulo anterior (ecuación (4.32)), las podemos escribir en la forma:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\beta F_{\gamma\delta} = 0 \quad (5.20)$$

en donde en esta última ecuación se ha utilizado el tensor de Minkowski para bajar los índices del tensor electromagnético \mathbf{F} , esto es:

$$F_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}F^{\alpha\beta} \quad (5.21)$$

las cuales nos representa las componentes covariantes del tensor campo electromagnético.

Finalmente consideremos la ecuación de la fuerza de Lorentz (ecuación 5.6), la cual podemos escribir en forma covariante como:

$$f^\alpha = \frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c}\eta_{\beta\gamma}F^{\beta\alpha}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = \frac{q}{c}F_{\gamma}{}^\alpha\frac{dx^\gamma}{d\tau} \quad (5.22)$$

en donde p^α es el cuadrimomento de la partícula de carga q , τ el tiempo propio, x^γ sus coordenadas de posición y $F_{\gamma}{}^\alpha$ las componentes mixtas del tensor campo electromagnético definidas por:

$$F_{\gamma}{}^\alpha = \eta_{\gamma\sigma}F^{\sigma\alpha} \quad (5.23)$$

5.4. Transformaciones Gauge

Hay dos teoremas del cálculo diferencial en varias variables, que nos permiten escribir las ecuaciones de Maxwell en forma más compacta:

Teorema 21 Sea \vec{F} una función vectorial tal que su rotacional es cero, i.e.,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (5.24)$$

entonces la función \vec{F} se puede escribir como el gradiente de una función escalar $\Psi(\vec{r})$, esto es:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\Psi(\vec{r}) \quad (5.25)$$

Teorema 22 Sea \vec{F} una función vectorial tal que su divergencia es cero, i.e.,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \quad (5.26)$$

entonces la función \vec{F} se puede escribir como el rotacional de una función vectorial $\vec{Y}(\vec{r})$, esto es:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{Y}(\vec{r}) \quad (5.27)$$

Si aplicamos estos dos resultados del cálculo vectorial los campos eléctrico y magnético se pueden escribir en términos de del potencial vectorial \vec{A} y del potencial escalar Φ en la forma:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (5.28)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi \quad (5.29)$$

El signo menos en la ecuación anterior permite interpretar directamente al potencial Φ , para el caso de campos independientes del tiempo, como el trabajo por unidad de carga realizado por el campo eléctrico, llamado potencial electrostático, el cual es un campo conservativo.

Estos dos teoremas del cálculo vectorial, corresponden a casos particulares de un teorema más general de tensores:

Teorema 23 Sean $T_{\alpha\beta}$ las componentes covariantes de un tensor de segundo rango antisimétrico, tal que

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta T_{\gamma\delta} = 0 \quad (5.30)$$

entonces el tensor $T_{\alpha\beta}$ se puede escribir como el “rotacional” de una función cuadvectorial W^γ , es decir

$$T_{\alpha\beta} = \partial_{[\alpha} W_{\beta]} = \partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha \quad (5.31)$$

Así, dado que las dos ecuaciones de Maxwell homogéneas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.32)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial \vec{B} / \partial t = 0 \quad (5.33)$$

se pueden escribir en la forma

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\delta} = 0 \quad (5.34)$$

donde $F_{\gamma\delta}$ es el tensor campo electromagnético, entonces, de acuerdo con el teorema anterior el tensor campo electromagnético $F_{\gamma\delta}$ se puede escribir en la forma

$$F_{\gamma\delta} = \partial_\gamma A_\delta - \partial_\delta A_\gamma = \frac{\partial A_\delta}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial A_\gamma}{\partial x^\delta} \quad (5.35)$$

en donde el cuadvector A_μ , definido como:

$$A_\mu := (\Phi, \vec{A}) \quad (5.36)$$

es llamado el cuadripotencial, con \vec{A} el potencial vectorial y Φ el potencial escalar definidos en la ecuaciones (5.28) y (5.29) respectivamente.

Con esta definición del cuadripotencial A_μ , podemos escribir las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas en la forma:

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\gamma - \partial^\mu \partial_\gamma A_\mu = -4\pi J_\gamma \quad (5.37)$$

De esta manera, esta última ecuación es equivalente a las ecuaciones de campo de Maxwell, pues dadas las fuentes de los campos J^α y resolviendo la ecuación (5.37), conocemos el cuadripotencial A_μ y así los campos electromagnéticos.

Por otra parte, si realizamos la transformación

$$A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (5.38)$$

en donde Λ es una función cualquiera de las coordenadas la función $F_{\gamma\delta}$ permanece invariante bajo la transformación (5.38) y así también los campos electromagnéticos \vec{E} y \vec{B} . A la transformación (5.38) se le llama una transformación “gauge”. Este tipo de transformaciones juega un papel fundamental en la teoría cuántica de campos y en las llamadas teorías de unificación de las interacciones fundamentales de la naturaleza.

Finalmente, dado que el cuadripotencial A_μ no está definido de manera única, entonces, podemos imponer sobre él una condición o ecuación de ligadura, llamada la elección de un gauge particular, la cual no cambia la física, es decir no cambian los campos \vec{E} y \vec{B} . Así, por ejemplo si se escoge función arbitraria Λ en la ecuación (5.38), de tal manera que el potencial cuadrivectorial A_μ cumpla con la ecuación:

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \quad (5.39)$$

llamado el gauge de Lorentz, entonces la ecuación 5.37 se simplifica, reduciéndose a la ecuación:

$$\square A_\mu = -J_\mu \quad (5.40)$$

que es la ecuación de ondas inhomogénea, donde el operador \square , definido por la ecuación

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \quad (5.41)$$

es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

5.5. Problemas de electrodinámica

1. **Conservación de la carga.** Muestre que la ecuación de continuidad para la carga

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \quad (5.42)$$

implica la conservación total de la carga eléctrica.

2. **Cuadricorriente de una partícula.** Consideremos una partícula de carga q en reposo respecto a un observador inercial Σ .

a Escribir las componentes del cuadrivector densidad de corriente medidas en el sistema Σ .

b Considere un segundo sistema de referencia inercial Σ' que se mueve con velocidad $-v$ respecto a Σ a lo largo de eje x . Encontrar las componentes del cuadrivector densidad de corriente en Σ' , es decir para una partícula que se mueve a velocidad constante respecto a un observador inercial.

c Que sucede con la carga total del sistema medida por los dos observadores inerciales Σ y Σ' ?

3. **Ecuaciones de Maxwell covariantes.** Mostrar que las ecuaciones de Maxwell covariantes

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} J^\beta \quad (5.43)$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\delta} = 0 \quad (5.44)$$

implican las ecuaciones de Maxwell vectoriales.

4. **Fuerza de Lorentz.** A partir de la ecuación covariante para la fuerza sobre una partícula cargada en un campo electromagnético

$$f^\alpha = \frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c} \eta_{\beta\gamma} F^{\beta\alpha} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = \frac{q}{c} F_\gamma{}^\alpha \frac{dx^\gamma}{d\tau} \quad (5.45)$$

encontrar la fuerza de Lorentz e interpretar las componentes del cuadrivector fuerza.

5. **Campo eléctrico de carga en movimiento.** El campo eléctrico producido por una carga estacionaria Q se define como la relación entre la fuerza sobre una carga de prueba q por unidad de carga, es decir

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_q}{q} \quad (5.46)$$

con

$$\vec{F}_q = k \frac{Qq}{r^2} \hat{r} \quad (5.47)$$

donde hemos asumido que la carga Q está en el origen de coordenadas y la carga de prueba q está situada en un punto de coordenadas \vec{r} . Notemos que la fuerza sobre q es válida independiente del estado de movimiento de la carga de prueba, es decir depende solo de su posición instantánea. Consideremos una partícula de carga Q moviéndose con velocidad constante v respecto a un observador inercial Σ . A partir de la ley de Coulomb encontrar el campo eléctrico medido en Σ debido a la carga Q . Para resolver este problema supongamos que la carga Q se encuentra en el origen de coordenadas de Σ en el instante $t = 0$ y se mueve en la dirección del eje x positivo y la carga de prueba q está en reposo respecto a Σ en un punto de coordenadas $\vec{r} = (x, y, z)$. Considere primero el caso particular $\vec{r} = (x, 0, 0)$ y luego $\vec{r} = (0, y, 0)$ y a partir de estos resultados encuentre el caso general cuando $\vec{r} = (x, y, z)$.

6. **Causalidad y el campo eléctrico de una carga en movimiento uniforme.** El campo eléctrico de una carga en movimiento uniforme obtenido en el problema anterior plantea una aparente contradicción con el postulado de la constancia de la velocidad de la luz y por ende con el principio de

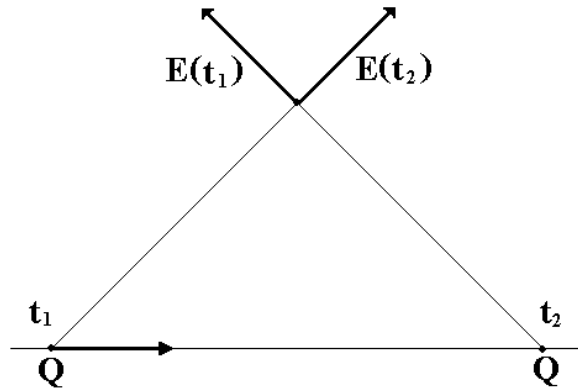


Figura 5.1: **Causalidad y el campo eléctrico de una carga en movimiento uniforme.** Campo eléctrico en dos instantes para una carga en movimiento uniforme

causalidad en la física, pues el resultado obtenido establece que el campo eléctrico de una carga en movimiento uniforme en un punto del espacio es radial y depende solo de la distancia entre la posición instantánea de la carga y el punto de observación, como se muestra en la figura 5.1. Argumentar porqué este resultado para el campo eléctrico no viola el principio de causalidad. Compare la situación anterior con una carga que se mueve a velocidad constante a lo largo del eje x respecto a un observador inercial y en un instante, por ejemplo $t = 0$, la carga es frenada rápidamente hasta alcanzar el reposo. Dibujar las líneas de campo eléctrico para un tiempo $t < 0$ y para $t > 0$, con $t \gg \delta t$ donde δt es el tiempo que tarda la carga en alcanzar el reposo.

7. **Fuerza sobre una carga en movimiento.** Calcular la fuerza sobre una partícula de prueba q debida a una carga fuente Q . La carga q se mueve con velocidad \vec{u} respecto a un sistema de referencia inercial Σ y se encuentra en el instante $t = 0$ en un punto de coordenadas \vec{r} , mientras que la carga fuente Q se mueve a velocidad constante v en la dirección del eje x positivo y la cual pasa por el origen de Σ en $t = 0$ (ver figura 5.2). Para resolver este problema considere primero los dos casos siguientes: primero la carga de prueba q está en la posición $\vec{r} = (x, 0, 0)$ y con velocidad arbitraria. Segundo, la carga q se encuentra en la posición $\vec{r} = (0, y, 0)$ y tiene velocidad $\vec{u} = (u_x, 0, 0)$ y generalice para una velocidad arbitraria. A partir de estos resultados considere la situación general. En todos los casos anteriores compare la fuerza \vec{F} sobre la partícula de prueba con la fuerza

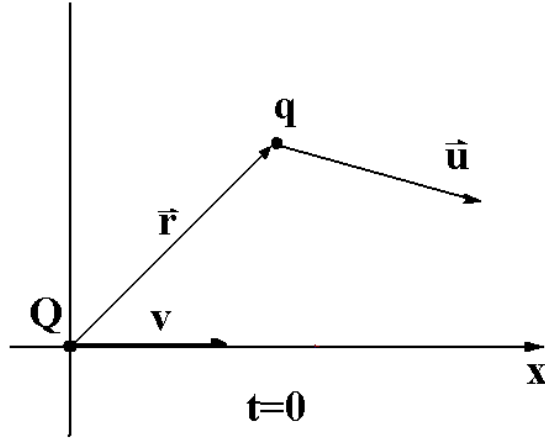


Figura 5.2: **Fuerza sobre una carga en movimiento.** En el instante $t = 0$ la carga q se encuentra en la posición \vec{r}

\vec{F}_E calculada en el problema 5 de esta sección y encuentre la diferencia

$$\vec{F}_M = \vec{F} - \vec{F}_E \quad (5.48)$$

la cual se interpreta como la fuerza magnética y muestre que se puede escribir en la forma

$$\vec{F}_M = q\vec{u} \times \vec{B} \quad (5.49)$$

8. **Transformación general del campo electromagnético.** A partir del tensor campo electromagnético $F^{\alpha\beta}$ y de la ley de transformación para las componentes contravariantes bajo un cambio de sistema de referencia

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu F^{\mu\nu} \quad (5.50)$$

encontrar las ecuaciones de transformación de los campos eléctrico y magnético, medidas por dos observadores inerciales relacionados por una transformación de Lorentz usual.

9. **Campo de una carga en movimiento.** Encontrar los campos eléctrico y magnético de una carga Q que se mueve a velocidad constante v a partir de las ecuaciones de transformación de las componentes del campo electromagnético encontradas en el problema anterior. Suponga que la carga pasa por el origen de un sistema de referencia inercial Σ en $t = 0$ y se mueve en la dirección del eje x positivo.
10. **Invariantes del campo electromagnético.** A partir del tensor campo electromagnético $F^{\alpha\beta}$ construir dos invariantes bajo transformaciones de Lorentz. Ayuda: considerar el tensor dual $*F$.

11. **Campos ortogonales.** Demuestre que si un campo eléctrico \vec{E} y uno magnético \vec{B} forman el mismo ángulo para todos los observadores inerciales, entonces los campos son ortogonales, i.e.

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.51)$$

12. **El tensor energía-momento del campo electromagnético.** El tensor campo electromagnético está definido por

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta} - F^{\alpha\sigma} F_{\sigma}^{\beta} \right] \quad (5.52)$$

calcular sus componentes en términos de los campos \vec{E} y \vec{B} . Mostrar que las componentes

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi} \left[\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right] \quad (5.53)$$

representa la densidad de energía del campo electromagnético, T^{0i} las componentes del vector de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \quad (5.54)$$

y T^{ij} las componentes del tensor de tensiones del campo electromagnético:

$$T^{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[E^i E^j + B^i B^j + \frac{1}{2} \delta^{ij} \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) \right] \quad (5.55)$$

13. **Ecuación de continuidad del tensor $\mathbf{T}^{\mu\nu}$.** Demostrar que el tensor energía-momento del campo electromagnético tiene cuatridivergencia nula si no hay fuentes, es decir probar que

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (5.56)$$

si $J^\alpha = 0$. Que ecuación cumple $T^{\alpha\beta}$ si $J^\alpha \neq 0$?

14. **La traza del tensor $\mathbf{T}^{\mu\nu}$.** Demostrar que la traza del tensor energía-momento del campo electromagnético tiene traza cero, es decir

$$T^\sigma_\sigma = 0 \quad (5.57)$$

15. **Otro invariante relativista.** Demostrar que

$$(T^{00})^2 - |\vec{S}|^2 \quad (5.58)$$

es un invariante relativista.

16. **Trayectoria en campo eléctrico constante.** Un protón de carga $+e$ incide con velocidad \vec{v}_0 en una región de campo eléctrico constante \vec{E} . Si la velocidad inicial del protón \vec{v}_0 es perpendicular al campo eléctrico, encontrar la trayectoria del protón.

17. **Trayectoria en campo magnético constante.** Un protón de carga $+e$ se mueve con velocidad $|\vec{v}|$ constante en una región de campo magnético constante \vec{B} . Si la velocidad es perpendicular al campo magnético, encontrar la trayectoria del protón y calcular la frecuencia de giro en función del radio de la trayectoria, el campo magnético, la velocidad y la masa propia del protón.

Parte II

Soluciones a problemas

Capítulo 6

Cinemática relativista

6.1. Problemas básicos de cinemática

1. **Estructura Causal.** Calculando el intervalo espacio-temporal 1.12 para los eventos $\mathcal{P}_1 = (3, 2, 0, 2)$, $\mathcal{P}_2 = (4, -1, 0, 2)$ y $\mathcal{P}_3 = (-2, -1, 0, -2)$ obtenemos:

$$\Delta S_{12}^2 = (4 - 3)^2 - (-1 - 2)^2 - (0 - 0)^2 - (2 - 2)^2 = -8 \quad (6.1)$$

$$\Delta S_{13}^2 = (-2 - 3)^2 - (-1 - 2)^2 - (0 - 0)^2 - (-2 - 2)^2 = 0 \quad (6.2)$$

$$\Delta S_{23}^2 = (-2 - 4)^2 - (-1 + 1)^2 - (0 - 0)^2 - (-2 - 2)^2 = 20 \quad (6.3)$$

- a Si el intervalo espacio-temporal es mayor o igual a cero los eventos están causalmente conectados. Por lo tanto los eventos \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_3 son nulos o como de luz y están causalmente conectados y los eventos \mathcal{P}_2 y \mathcal{P}_3 son temporales y también están causalmente conectados.
- b La condición para que dos eventos separados en el espacio puedan ser simultáneos para un observador, es que no estén causalmente conectados y por lo tanto su intervalo espacio-temporal debe ser menor que cero. Así, para los eventos \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 existe un sistema de referencia inercial Σ' tal que los dos eventos son simultáneos. Para calcular la velocidad consideremos la transformación de Lorentz usual, ecuación 1.4, para las componentes temporales $x_1'^0$ y $x_2'^0$ de los dos eventos medidas por Σ' ,

$$x_1'^0 = \gamma(x_1^0 - \beta x_1^1) \quad (6.4)$$

$$x_2'^0 = \gamma(x_2^0 - \beta x_2^1) \quad (6.5)$$

e imponiendo la condición que en Σ' los eventos son simultáneos $x_1'^0 = x_2'^0$, podemos encontrar la velocidad Σ' respecto a Σ , así

$$\gamma(x_1^0 - \beta x_1^1) = \gamma(x_2^0 - \beta x_2^1) \quad (6.6)$$

despejando β de esta ecuación y reemplazando los valores para las coordenadas tenemos

$$\beta = \frac{x_2^0 - x_1^0}{x_2^1 - x_1^1} = -\frac{1}{3} \quad (6.7)$$

por lo tanto la velocidad del sistema Σ' respecto a Σ es

$$\vec{v} = \left(-\frac{1}{3}c, 0, 0 \right) \quad (6.8)$$

- c** Para que exista un sistema de referencia Σ' con respecto al cual los dos eventos sucedan en el mismo punto del espacio, se requiere que los dos eventos sean temporales, por lo tanto esta condición se cumple para los eventos \mathcal{P}_2 y \mathcal{P}_3 . Para calcular la velocidad de Σ' respecto a Σ aplicamos las transformaciones de Lorentz para la coordenada espacial. Dadas las coordenadas de los eventos y teniendo en cuenta que en este caso el movimiento relativo de los sistemas debe ser a lo largo de los ejes $z - z'$, tenemos

$$x_2'^3 = \gamma(x_2^3 - \beta x_2^0) \quad (6.9)$$

$$x_3'^3 = \gamma(x_3^3 - \beta x_3^0) \quad (6.10)$$

igualando las coordenadas $x_2'^3 = x_3'^3$, despejando β y reemplazando obtenemos

$$\beta = \frac{x_3^3 - x_2^3}{x_3^0 - x_2^0} = \frac{2}{3} \quad (6.11)$$

por lo tanto la velocidad del sistema Σ' respecto a Σ está dada por

$$\vec{v} = \left(0, 0, \frac{2}{3}c \right) \quad (6.12)$$

- 2. La paradoja del garage.** Con respecto al sistema de referencia del garage los eventos, llegada del frente del bus a la pared posterior del garage y llegada de la parte posterior del bus a la puerta del garage, son simultaneos y suceden en puntos diferentes del espacio, pues la longitud física del bus ℓ es

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 10m \times 0,6 = 6m \quad (6.13)$$

Esto significa que los dos eventos son espaciales y por lo tanto no están conectados causalmente. Esto implica que para otros observadores los dos eventos pueden suceder en cualquier orden temporal. De esta forma, desde el punto de vista de un observador ligado al bus, primero llega la pared del fondo del garage y un tiempo después llega la entrada del garage a la parte posterior del bus, sin que esto implique que los eventos estén causalmente conectados. Para ver mejor este razonamiento consideremos dos sistemas

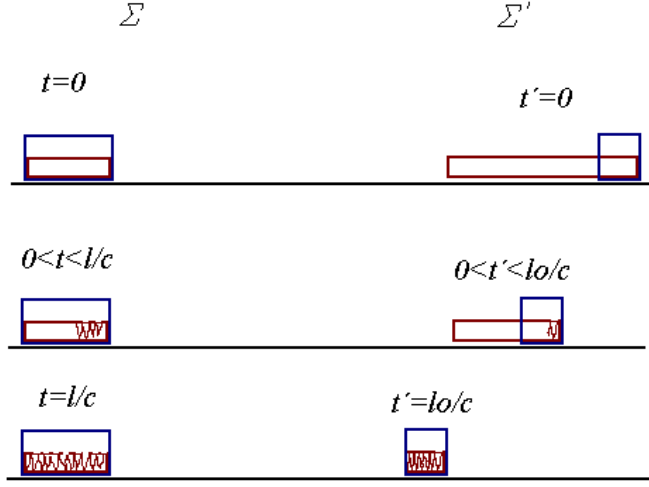


Figura 6.1: **La paradoja del garage.** Llegada del bus al garage visto por los dos observadores inerciales Σ y Σ' .

de coordenadas, ligadas al bus (Σ') y al garage (Σ), y supongamos que elegimos los orígenes de coordenadas en la puerta del garage y en la parte posterior del bus y tomamos $t = t' = 0$ cuando los orígenes coinciden y el eje x positivo en la dirección de movimiento del bus. Los dos eventos, \mathcal{P}_1 : llegada de la parte delantera del bus a la pared y \mathcal{P}_2 : llegada de la parte posterior del bus a la puerta del garage tienen las siguientes coordenadas con respecto al sistema Σ :

$$\mathcal{P}_1 = (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3) = (0, \ell, 0, 0) \quad (6.14)$$

$$\mathcal{P}_2 = (x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3) = (0, 0, 0, 0) \quad (6.15)$$

Aplicando una transformación de Lorentz usual, las coordenadas de los dos eventos respecto a Σ' son:

$$x_1'^0 = \gamma(x_1^0 - \beta x_1^1) = -\gamma\beta\ell = -\beta\ell_0 \quad (6.16)$$

$$x_1'^1 = \gamma(x_1^1 - \beta x_1^0) = \gamma\ell = \ell_0 \quad (6.17)$$

así

$$\mathcal{P}_1 = (x_1'^0, x_1'^1, x_1'^2, x_1'^3) = (-\beta\ell_0, \ell_0, 0, 0) \quad (6.18)$$

$$\mathcal{P}_2 = (x_2'^0, x_2'^1, x_2'^2, x_2'^3) = (0, 0, 0, 0) \quad (6.19)$$

esto significa que para Σ' el evento \mathcal{P}_1 sucede antes que el evento \mathcal{P}_2 , es decir, en el instante en que el bus impacta con la pared del garage la

puerta del garaje aún no ha llegado a la parte posterior del bus. Además, supongamos que en el momento del impacto se propaga una señal hacia la parte posterior del bus (por la onda de deformación) a la máxima velocidad posible c , entonces esta señal alcanza la parte posterior del bus un tiempo ℓ_0/c , después del impacto, es decir en el instante

$$-\beta\ell_0 + \ell_0 = \ell_0(1 - \beta) > 0 \quad (6.20)$$

lo cual significa que la información (viajando a la velocidad c) llega a la parte posterior del bus después que ha llegado la puerta del garaje. En la figura 6.1 se ilustra en una secuencia, lo que se “observa” desde cada sistema de referencia inercial.

3. **Varilla inclinada.** Para encontrar el ángulo que forma la varilla respecto al sistema de referencia inercial Σ , consideremos las coordenadas de los extremos de la varilla medidas por Σ y por un observador Σ' ligado a la varilla. Sean \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 los eventos que representan la medida hecha por el observador Σ de los extremos de la varilla, entonces las coordenadas en Σ de estos eventos son

$$\mathcal{P}_1 = (x_1^0, x_1^1, x_1^2, 0) \quad (6.21)$$

$$\mathcal{P}_2 = (x_2^0, x_2^1, x_2^2, 0) \quad (6.22)$$

asumiendo que la varilla se encuentra en el plano $x - y$, además $x_1^0 = x_2^0$ pues la medida de los extremos de la varilla deber ser realizada por Σ simultáneamente. Por lo tanto el ángulo de inclinación de la varilla con respecto al eje x que mide Σ es

$$\tan \theta = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2^1 - x_1^1} \quad (6.23)$$

Para el observador Σ' el ángulo θ_0 está dado por

$$\tan \theta_0 = \frac{x_2'^2 - x_1'^2}{x_2'^1 - x_1'^1} \quad (6.24)$$

Dado que la varilla se mueve a velocidad constante a lo largo del eje x , las coordenadas de los extremos de la varilla están relacionadas por la transformación de Lorentz usual, así teniendo en cuenta que $x_1^0 = x_2^0$, tenemos

$$\begin{aligned} \tan \theta_0 &= \frac{x_2^2 - x_1^2}{\gamma(v)(x_2^1 - \beta x_2^0) - \gamma(v)(x_1^1 - \beta x_1^0)} \\ &= \frac{x_2^2 - x_1^2}{\gamma(v)(x_2^1 - x_1^1)} \end{aligned} \quad (6.25)$$

por lo tanto

$$\tan \theta = \gamma(v) \tan \theta_0 \quad (6.26)$$

es decir, el ángulo que forma la varilla con respecto a su dirección de movimiento medido el observador Σ es mayor en el factor $\gamma(v)$.

4. **Paradoja de la varilla inclinada.** Para analizar el problema consideremos dos sistemas de referencia inerciales, Σ ligado a la plataforma con origen en el centro de la rendija y Σ' ligado a la varilla con origen en su centro y orientemos los ejes $x - x'$ positivos en la dirección de movimiento de la varilla y tomemos $t = t' = 0$ cuando el centro de la varilla pasa por el centro de la rendija. Ver figura 6.2. El ángulo que forma la varilla y la plataforma con respecto al observador inercial Σ es $\theta = 45^\circ$. Del resultado obtenido en el problema anterior, ecuación 6.26, el ángulo θ_0 que forma la varilla móvil con respecto a la dirección de movimiento, medido en el sistema de referencia propio de la varilla es menor en el factor $\gamma(v)$, es decir

$$\tan \theta_0 = \frac{1}{\gamma(v)} \tan \theta = \frac{1}{\gamma(v)} < 1 \quad (6.27)$$

Además, con respecto al sistema de referencia de la varilla Σ' la plataforma

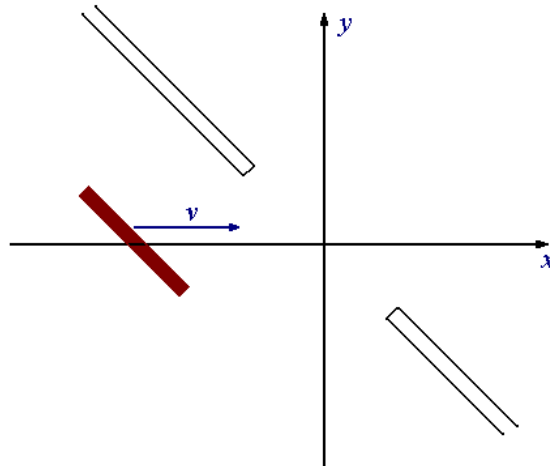


Figura 6.2: **Paradoja de la varilla inclinada.** Sistema de referencia de la plataforma Σ .

se está moviendo con velocidad v y por lo tanto el ángulo θ' que ella forma con respecto al eje x' es mayor en el factor $\gamma(v)$ pues

$$\tan \theta' = \gamma(v) \tan \theta = \gamma(v) > 1 \quad (6.28)$$

Estos resultados implican que, con respecto al sistema de referencia propio de la varilla, la plataforma (y por tanto el orificio) se mueve hacia la varilla con un ángulo de inclinación mayor que el de la varilla y por lo tanto la varilla si pasa por el orificio. En la figura 6.3 se muestra la secuencia del paso de la varilla por el agujero, visto en el sistema de referencia Σ' . La parte inferior del agujero llega primero a la varilla en un instante $t'_1 < 0$,

luego en el instante $t' = 0$ el centro del agujero pasa por el centro de la varilla y finalmente en un instante posterior $t'_2 > 0$ pasa la parte superior. Para probar esta afirmación consideremos los tres eventos siguientes: \mathcal{P}_1 la parte inferior de la varilla y rendija coinciden, \mathcal{P}_2 la parte superior de la varilla y la rendija coinciden y \mathcal{P}_0 el centro de la varilla y el centro del orificio coinciden. La longitud propia de rendija es ℓ_0 y la plataforma forma un ángulo de 45° con respecto al eje de las x , entonces para el sistema de referencia Σ , los tres eventos son simultáneos y las coordenadas están dadas por

$$\mathcal{P}_0 = (0, 0, 0, 0) \quad (6.29)$$

$$\mathcal{P}_1 = (0, \ell_0\sqrt{2}/2, -\ell_0\sqrt{2}/2, 0) \quad (6.30)$$

$$\mathcal{P}_2 = (0, -\ell_0\sqrt{2}/2, \ell_0\sqrt{2}/2, 0) \quad (6.31)$$

Para calcular las coordenadas de estos eventos con respecto al sistema de

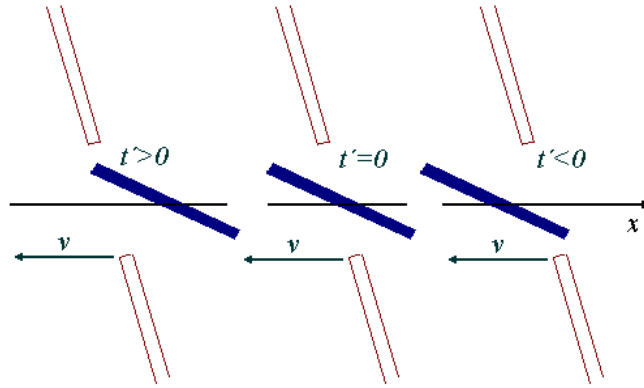


Figura 6.3: **Paradoja de la varilla inclinada.** Sistema de referencia de la varilla Σ' .

referencia Σ' de la varilla aplicamos una transformación de Lorentz usual. Entonces las coordenadas del evento \mathcal{P}_0 son $(0, 0, 0, 0)$, pues elegimos los ejes de los sistemas que coincidieran en $t = t' = 0$, cuando los centros de la varilla y del agujero se crucen. Si llamamos a las coordenadas del evento $\mathcal{P}_1 = (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ entonces

$$x_1^0 = \gamma(x_1^0 - \beta x_1^1) = -\beta\gamma \frac{\ell_0\sqrt{2}}{2} \quad (6.32)$$

$$x_1^1 = \gamma(x_1^1 - \beta x_1^0) = \gamma \frac{\ell_0\sqrt{2}}{2} \quad (6.33)$$

$$x_1'^2 = x_1^2 = -\frac{\ell_0\sqrt{2}}{2} \quad (6.34)$$

Para el evento $\mathcal{P}_2 = (x_2^0, x_2^1, x_2'^2, x_2'^3)$ obtenemos

$$x_2'^0 = \gamma(x_2^0 - \beta x_2^1) = \beta\gamma\frac{\ell_0\sqrt{2}}{2} \quad (6.35)$$

$$x_2'^1 = \gamma(x_2^1 - \beta x_2^0) = -\gamma\frac{\ell_0\sqrt{2}}{2} \quad (6.36)$$

$$x_2'^2 = x_2^2 = \frac{\ell_0\sqrt{2}}{2} \quad (6.37)$$

Estos resultados muestran que el evento \mathcal{P}_1 sucede antes que el evento \mathcal{P}_0 y éste antes que el evento \mathcal{P}_2 , pasando la varilla por la rendija para todos los observadores inerciales.

5. **Adición de velocidades no paralelas.** Consideremos las dos transformaciones de Lorentz siguientes:

$$\Lambda(v_x) : \begin{array}{ccc} \Sigma & \longrightarrow & \Sigma' \\ x & \mapsto & x' = \Lambda(v_x)x \end{array} \quad (6.38)$$

con

$$\Lambda^\alpha_{\beta}(v_x) = \begin{pmatrix} \gamma(v_x) & -\beta_x\gamma(v_x) & 0 & 0 \\ -\beta_x\gamma(v_x) & \gamma(v_x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

y

$$\Lambda(v_z) : \begin{array}{ccc} \Sigma' & \longrightarrow & \Sigma'' \\ x' & \mapsto & x'' = \Lambda(v_z)x' \end{array} \quad (6.40)$$

con

$$\Lambda^\alpha_{\beta}(v_z) = \begin{pmatrix} \gamma(v_z) & 0 & 0 & -\beta_z\gamma(v_z) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_z\gamma(v_z) & 0 & 0 & \gamma(v_z) \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

en donde $\beta_i = v_i/c$ y $\gamma_i = \gamma(v_i)$, con $i = x, z$.

a Entonces la composición de transformaciones de Lorentz

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma & \xrightarrow{\Lambda(v_x)} & \Sigma' & \xrightarrow{\Lambda(v_z)} & \Sigma'' \\ x & \mapsto & x' = \Lambda(v_x)x & \mapsto & x'' = \Lambda(v_z)x' = \Lambda(v_z)\Lambda(v_x)x \end{array}$$

corresponde al producto matricial de los elementos de la transformación, entonces

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \gamma_z & 0 & 0 & -\beta_z \gamma_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_z \gamma_z & 0 & 0 & \gamma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_x & -\beta_x \gamma_x & 0 & 0 \\ -\beta_x \gamma_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 = & \begin{pmatrix} \gamma_x \gamma_z & -\beta_x \gamma_x \gamma_z & 0 & -\beta_z \gamma_z \\ -\beta_x \gamma_x \gamma_z & \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_x \beta_z \gamma_z & \beta_x \gamma_x \beta_z \gamma_z & 0 & \gamma_z \end{pmatrix} \quad (6.42)
 \end{aligned}$$

b La composición de transformaciones de Lorentz

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda(v_z) & & \Lambda(v_x) \\
 \Sigma & \xrightarrow{\quad} & \Sigma' & \xrightarrow{\quad} & \Sigma'' \\
 x & \mapsto & x' = \Lambda(v_z)x & \mapsto & x'' = \Lambda(v_x)x' = \Lambda(v_x)\Lambda(v_z)x
 \end{array}$$

tiene como elementos matriciales

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \gamma_x & -\beta_x \gamma_x & 0 & 0 \\ -\beta_x \gamma_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_z & 0 & 0 & -\beta_z \gamma_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_z \gamma_z & 0 & 0 & \gamma_z \end{pmatrix} \\
 = & \begin{pmatrix} \gamma_x \gamma_z & -\beta_x \gamma_x & 0 & -\gamma_x \beta_z \gamma_z \\ -\beta_x \gamma_x \gamma_z & \gamma_x & 0 & \beta_x \gamma_x \beta_z \gamma_z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_z \gamma_z & 0 & 0 & \gamma_z \end{pmatrix} \quad (6.43)
 \end{aligned}$$

los cuales son claramente diferentes al caso a. Este resultado muestra, que en general, la composición de transformaciones puras de Lorentz no es conmutativa, salvo cuando las dos se realizan a lo largo del mismo eje.

6. Vida media de partículas inestables. Dado que los mesones π se mueven a una velocidad constante v en el sistema laboratorio, el tiempo que requieren para recorrer la distancia D es

$$t = \frac{D}{v} \quad (6.44)$$

En el sistema laboratorio, al cabo de este tiempo, han sobrevivido $2/3$ de las partículas iniciales, así

$$\frac{2}{3} N_0 = N_0 2^{-t/t_M} = N_0 2^{-D/(vt_M)} \quad (6.45)$$

en donde el tiempo de vida media t_M de los mesones π , en el sistema laboratorio, está relacionado con su vida media propia τ por

$$t_M = \gamma(v)\tau \quad (6.46)$$

entonces

$$\ln \frac{2}{3} = -\frac{D}{v\gamma\tau} \ln 2 \quad (6.47)$$

y por lo tanto

$$\tau = -\frac{D \ln 2}{v\gamma(v) \ln(2/3)} \quad (6.48)$$

reemplazando los valores para D y v obtenemos

$$\tau = 2,5 \times 10^{-8} s \quad (6.49)$$

7. **Cuadrivector velocidad.** A partir de la definición de tiempo propio, ecuación 1.21, y tomando la derivada con respecto a la coordenada temporal t , obtenemos la siguiente relación:

$$c^2 \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = c^2 - \left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dx^3}{dt} \right)^2 \quad (6.50)$$

Entonces, teniendo en cuenta que la velocidad física de una partícula medida por un observador inercial Σ está definida como

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right) = (u_x, u_y, u_z) \quad (6.51)$$

la ecuación 6.50 implica

$$\gamma(\vec{u}) = \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{|\vec{u}|^2}{c^2} \right)^{-1/2} \quad (6.52)$$

Aplicando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que $x^0 = ct$, las componentes del cuadrivector velocidad se pueden escribir en términos de la velocidad física de la partícula:

$$U = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx}{dt} = \gamma(\vec{u})(c, u_x, u_y, u_z) \quad (6.53)$$

es decir

$$U^0 = c\gamma(\vec{u}) \quad (6.54)$$

$$U^i = \gamma(\vec{u})u_i; \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.55)$$

Similarmente, dadas las componentes del cuadrivector velocidad, entonces las componentes de la velocidad física están dadas por

$$\frac{u_i}{c} = \frac{U^i}{U^0}; \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.56)$$

Otra relación útil entre las componentes del cuadrivector velocidad la podemos obtener a partir de su norma:

$$U^0 = \sqrt{c^2 + (U^1)^2 + (U^2)^2 + (U^3)^2} \quad (6.57)$$

Finalmente, calculemos la norma de la velocidad física en función de la componente temporal del cuadrivector velocidad. Para este fin es suficiente despejar $|\vec{u}|$ de la ecuación 6.54:

$$\begin{aligned}\gamma(\vec{u}) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{u}|^2}{c^2}}} = \frac{U^0}{c} \implies \\ |\vec{u}| &= c\sqrt{1 - \left(\frac{c}{U^0}\right)^2}\end{aligned}\quad (6.58)$$

8. **Cuadrivector aceleración.** Para encontrar la relación entre las componentes del cuadrivector aceleración y las componentes de la aceleración física de una partícula medida por un observador inercial Σ , definida por la ecuación

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (6.59)$$

donde \vec{u} es la velocidad de la partícula medida en Σ , sean

$$(A^0, A^1, A^2, A^3) = A^\alpha = \frac{dU^\alpha}{d\tau} \quad (6.60)$$

las componentes del cuadrivector aceleración medida por Σ . Entonces, de los resultados obtenidos en el problema anterior para el cuadrivector velocidad y aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$\begin{aligned}A^\alpha &= \frac{d}{d\tau} [\gamma(\vec{u})(c, \vec{u})] \\ &= \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} [\gamma(\vec{u})(c, \vec{u})] \\ &= \gamma(\vec{u}) \left(c \frac{d\gamma(\vec{u})}{dt}, \frac{d}{dt} (\gamma(\vec{u}) \vec{u}) \right) \\ &= \gamma(\vec{u}) \left(c \frac{d\gamma(\vec{u})}{dt}, \frac{d\gamma(\vec{u})}{dt} \vec{u} + \gamma(\vec{u}) \frac{d\vec{u}}{dt} \right)\end{aligned}\quad (6.61)$$

para expresar esta relación en forma explícita, calculemos la derivada del factor gama de Lorentz $\gamma(\vec{u})$, así

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma(\vec{u})}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[1 - \frac{|\vec{u}|^2}{c^2} \right]^{-1/2} \\ &= \left[1 - \frac{|\vec{u}|^2}{c^2} \right]^{-3/2} \frac{1}{c^2} \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \\ &= \gamma^3(\vec{u}) \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2}\end{aligned}\quad (6.62)$$

donde se ha tenido en cuenta la definición en la ecuación 6.59. Entonces las componentes del cuadrivector aceleración toman la forma

$$A^\alpha = \gamma(\vec{u}) \left(\frac{1}{c} \gamma^3(\vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{a}, \gamma^3(\vec{u}) \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{u} + \gamma(\vec{u}) \vec{a} \right) \quad (6.63)$$

Para interpretar físicamente esta ecuación, consideremos el sistema de referencia propio de la partícula, es decir un sistema de referencia inercial con respecto al cual la partícula esté momentáneamente en reposo. Entonces, con respecto a este sistema de referencia inercial, la partícula está en reposo ($\vec{u} = 0$) y por lo tanto las componentes del cuadrivector aceleración están dadas por

$$A^\alpha = \left(0, \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\vec{u}=\vec{0}} \right) \quad (6.64)$$

Donde el vector

$$\vec{\alpha} = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\vec{u}=\vec{0}} \quad (6.65)$$

corresponde a la aceleración propia de la partícula, es decir, a la aceleración de la partícula medida en el sistema de referencia con respecto al cual la partícula está en reposo. Por lo tanto, el cuadrivector aceleración es espacial y su norma al cuadrado mide la magnitud de la aceleración propia de la partícula:

$$A^2 = -|\vec{\alpha}|^2 \quad (6.66)$$

Para demostrar la ortogonalidad de los cuadrivectores aceleración y velocidad podemos seguir tres métodos equivalentes: Un método es calcular el producto punto Minkowskiano

$$A \cdot U = A^0 U^0 - A^1 U^1 - A^2 U^2 - A^3 U^3 \quad (6.67)$$

Remplazando las componentes de los cuadrivectores, ecuaciones 6.53 y 6.63, tenemos

$$\begin{aligned} A \cdot U &= \gamma^5(\vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{a} - \gamma^5(\vec{u}) \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{u} \cdot \vec{u} - \gamma^3(\vec{u}) \vec{a} \cdot \vec{u} \\ &= \gamma^5(\vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{a} \left(1 - \frac{|\vec{u}|^2}{c^2} \right) - \gamma^3(\vec{u}) \vec{a} \cdot \vec{u} \\ &= \gamma^5(\vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{a} \frac{1}{\gamma^2(\vec{u})} - \gamma^3(\vec{u}) \vec{a} \cdot \vec{u} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.68)$$

Otro método, más directo y que utiliza la propiedad de invarianza del producto punto Minkowskiano, es calcular el producto punto en el sistema de referencia propio de la partícula, pues dado que en este sistema, las componentes de los cuadrivectores velocidad y aceleración están dadas por

$$U = (c, 0, 0, 0) \quad (6.69)$$

$$A = (0, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) \quad (6.70)$$

entonces, un cálculo directo muestra que

$$A \cdot U = 0 \quad (6.71)$$

El tercer método parte de la norma del cuadrivector velocidad

$$U^2 = c^2 \quad (6.72)$$

Derivando esta expresión con respecto al tiempo propio, tenemos la relación buscada:

$$0 = \frac{dU^2}{d\tau} = 2U \cdot \frac{dU}{d\tau} = 2U \cdot A \quad (6.73)$$

9. **Transformación de la velocidad.** Dado que las componentes del cuadrivector velocidad $U = (U^0, U^1, U^2, U^3)$ se transforman como las componentes del cuadrivector posición, cuando pasamos de un sistema de referencia inercial a otro, entonces

$$U'^0 = \gamma(U^0 - \beta U^1) \quad (6.74)$$

$$U'^1 = \gamma(U^1 - \beta U^0) \quad (6.75)$$

$$U'^2 = U^2 \quad (6.76)$$

$$U'^3 = U^3 \quad (6.77)$$

con $\beta = v/c$, $\gamma = \gamma(v)$ y v la velocidad de Σ' respecto a Σ . Si llamamos \vec{u} la velocidad de la partícula respecto a Σ y \vec{u}' respecto a Σ' y remplazamos las componentes del cuadrivector velocidad en términos de la velocidad física de la partícula (ver problema anterior), obtenemos

$$c\gamma(\vec{u}') = \gamma(v) (c\gamma(\vec{u}) - \beta\gamma(\vec{u})u_x) \quad (6.78)$$

$$\gamma(\vec{u}')u_{x'} = \gamma(v) (\gamma(\vec{u})u_x - \beta c\gamma(\vec{u})) \quad (6.79)$$

$$\gamma(\vec{u}')u_{y'} = \gamma(\vec{u})u_y \quad (6.80)$$

$$\gamma(\vec{u}')u_{z'} = \gamma(\vec{u})u_z \quad (6.81)$$

De la primera ecuación 6.78 obtenemos la ecuación para la transformación del factor γ de Lorentz para la velocidad:

$$\gamma(\vec{u}') = \gamma(v)\gamma(\vec{u}) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) \quad (6.82)$$

Remplazando este factor de Lorentz en las ecuaciones 6.79, 6.80 y 6.81 y despejando las componentes de la velocidad física en Σ' obtenemos las ecuaciones de transformación buscadas:

$$u_{x'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \quad (6.83)$$

$$u_{y''} = \frac{u_y}{\gamma(v) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \quad (6.84)$$

$$u_{z''} = \frac{u_z}{\gamma(v) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \quad (6.85)$$

10. **Velocidad relativa.** Sea \vec{v} la velocidad de la partícula 2 respecto a la partícula 1. Un método para calcular la velocidad relativa \vec{v} , en función de las velocidades de las partículas \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , es utilizando transformaciones de Lorentz, sin embargo el cálculo es largo y algebraicamente tedioso. El método que seguiremos aquí aprovecha las propiedades de los cuadrivectores y el carácter invariante del producto punto Minkowskiano. Sean

$$U_1 = (c, 0, 0, 0) \quad (6.86)$$

$$U_2 = \gamma(\vec{v})(c, \vec{v}) \quad (6.87)$$

las componentes del cuadrivector velocidad de las partículas 1 y 2 respectivamente, medidas en el sistema de referencia propio de la partícula 1. Tomando el producto punto de estos dos cuadrivectores velocidad, obtenemos el invariante

$$U_1 \cdot U_2 = c^2 \gamma(\vec{v}) \quad (6.88)$$

Para llegar al resultado buscado, basta con calcular este producto punto en el sistema de referencia Σ . Así, dado que las componentes del cuadrivector velocidad de las partículas en Σ están dadas por

$$U_1 = \gamma(\vec{v}_1)(c, \vec{v}_1) \quad (6.89)$$

$$U_2 = \gamma(\vec{v}_2)(c, \vec{v}_2) \quad (6.90)$$

entonces

$$U_1 \cdot U_2 = \gamma(\vec{v}_1)\gamma(\vec{v}_2) (c^2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \quad (6.91)$$

Teniendo en cuenta la ecuación 6.88 y definiendo $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ tenemos

$$\begin{aligned} \vec{\beta}^2 &= 1 - \frac{1}{\gamma^2(\vec{\beta}_1)\gamma^2(\vec{\beta}_2) (1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2} \\ &= 1 - \frac{(1 - \vec{\beta}_1^2)(1 - \vec{\beta}_2^2)}{(1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2} \\ &= \frac{(1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2 - (1 - \vec{\beta}_1^2)(1 - \vec{\beta}_2^2)}{(1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2} \\ &= \frac{(\vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2 - 2\vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2 + \vec{\beta}_1^2 + \vec{\beta}_2^2 - \vec{\beta}_1^2\vec{\beta}_2^2}{(1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2} \\ &= \frac{(\vec{\beta}_2 - \vec{\beta}_1)^2 + (\vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2 - \vec{\beta}_1^2\vec{\beta}_2^2}{(1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2} \end{aligned} \quad (6.92)$$

Esta expresión la podemos escribir de otra forma, si tenemos en cuenta la identidad vectorial

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \left(\vec{C} \times \vec{D}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) \left(\vec{B} \cdot \vec{D}\right) - \left(\vec{B} \cdot \vec{C}\right) \left(\vec{A} \cdot \vec{D}\right) \quad (6.93)$$

por lo tanto, tomando $\vec{A} = \vec{C} = \vec{\beta}_1$ y $\vec{B} = \vec{D} = \vec{\beta}_2$

$$\vec{\beta}^2 = \frac{\left(\vec{\beta}_2 - \vec{\beta}_1\right)^2 - \left(\vec{\beta}_1 \times \vec{\beta}_2\right)^2}{\left(1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2\right)^2} \quad (6.94)$$

11. **Espacio-tiempo Euclideo.** A partir de la definición del parámetro ϕ , en términos de la velocidad v del sistema de referencia Σ' respecto a Σ ,

$$\tanh \phi := \beta = \frac{v}{c} \quad (6.95)$$

y las siguientes definiciones e identidades para las funciones hiperbólicas

$$\begin{aligned} \sinh \phi &= \frac{e^\phi - e^{-\phi}}{2} & \tanh \phi &= \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} \\ \cosh \phi &= \frac{e^\phi + e^{-\phi}}{2} & \operatorname{sech} \phi &= \frac{1}{\cosh \phi} \\ \cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi &= 1 & 1 - \tanh^2 \phi &= \operatorname{sech}^2 \phi \end{aligned} \quad (6.96)$$

$$\begin{aligned} \sinh(\phi_1 + \phi_2) &= \sinh \phi_1 \cosh \phi_2 + \cosh \phi_1 \sinh \phi_2 \\ \cosh(\phi_1 + \phi_2) &= \cosh \phi_1 \cosh \phi_2 + \sinh \phi_1 \sinh \phi_2 \\ \tanh(\phi_1 + \phi_2) &= \frac{\tanh \phi_1 + \tanh \phi_2}{1 + \tanh \phi_1 \tanh \phi_2} \end{aligned} \quad (6.97)$$

podemos obtener las transformaciones de Lorentz en términos del parámetro ϕ . A partir de la última identidad de las ecuaciones 6.96, se obtiene que

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\cosh^2 \phi} \quad (6.98)$$

por lo tanto, el factor γ de Lorentz toma la forma

$$\cosh \phi = \gamma(v) \quad (6.99)$$

y así

$$\sinh \phi = \beta \gamma(v) \quad (6.100)$$

Con estos resultados los elementos de la matriz de la transformación de Lorentz 1.9 se pueden escribir en la forma

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.101)$$

El teorema de adición de velocidades se obtiene como consecuencia de la última ecuación 6.97, pues si llamamos $\tanh \phi_1 = v_1/c$ y $\tanh \phi_2 = v_2/c$ tenemos

$$\begin{aligned}\tanh(\phi_1 + \phi_2) &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} \\ &= \frac{1}{c} \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1v_2}{c^2}} \\ &= \frac{u}{c}\end{aligned}\quad (6.102)$$

con u la velocidad resultante. Esto significa que al utilizar el parámetro $\phi = \tanh^{-1}(v/c)$ para representar una transformación de Lorentz, la adición relativista de velocidades, se reduce a la suma usual de los correspondientes parámetros ϕ . La interpretación geométrica de las transformaciones de Lorentz y del teorema de adición de velocidades se puede obtener, si tenemos en cuenta la relación entre las funciones trigonométricas y las hiperbólicas. Para este fin es suficiente tener en cuenta las siguientes definiciones y propiedades de los números complejos: Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$z = x + iy = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi} \quad (6.103)$$

$$\begin{aligned}x &= \operatorname{Re} z, & y &= \operatorname{Im} z \\ |z| &= \sqrt{x^2 + y^2}; & \varphi &= \arg z \\ i^2 &= -1\end{aligned}\quad (6.104)$$

De la ecuación 6.103 podemos despejar las funciones trigonométricas \sin y \cos ,

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \quad (6.105)$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \quad (6.106)$$

si hacemos el remplazo $\varphi \rightarrow i\varphi$ en las ecuaciones anteriores obtenemos las siguientes relaciones con las funciones hiperbólicas

$$\cos(i\varphi) = \frac{1}{2}(e^{-\varphi} + e^{\varphi}) = \cosh \varphi \quad (6.107)$$

$$\sin(i\varphi) = \frac{1}{2i}(e^{-\varphi} - e^{\varphi}) = i \sinh \varphi \quad (6.108)$$

Consideremos ahora la matriz de transformación de Lorentz usual, la cual se puede escribir como una transformación matricial

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (6.109)$$

y consideremos la transformación compleja de la coordenada temporal $t \rightarrow it$, o equivalentemente

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow (ix^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) \quad (6.110)$$

entonces, las transformaciones de Lorentz, para las nuevas coordenadas, se pueden escribir en la forma

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}'^0 \\ \tilde{x}'^1 \\ \tilde{x}'^2 \\ \tilde{x}'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -i\beta\gamma & 0 & 0 \\ -i\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}^0 \\ \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^3 \end{bmatrix} \quad (6.111)$$

Teniendo en cuenta las relaciones 6.107 y 6.108, la transformación de Lorentz toma la forma final:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}'^0 \\ \tilde{x}'^1 \\ \tilde{x}'^2 \\ \tilde{x}'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(i\varphi) & -\sin(i\varphi) & 0 & 0 \\ -\sin(i\varphi) & \cos(i\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}^0 \\ \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^3 \end{bmatrix} \quad (6.112)$$

Si comparamos esta ecuación de transformación con las ecuaciones de transformación que representan una rotación rígida de ejes (ver por ejemplo la sección 3.2 del libro [1]), la ecuación de transformación 6.112 se puede interpretar como una rotación en un ángulo $i\varphi$ del plano complejo $(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1) = (ict, x)$ en sentido de las manecillas del reloj. Además, teniendo en cuenta que la composición de dos rotaciones rígidas de los ejes en los ángulos φ_1 y φ_2 , corresponde a otra rotación en un ángulo $\varphi_1 + \varphi_2$, el teorema de adición de velocidades con parámetro $\tanh \varphi = v/c$, muestra que la composición de dos transformaciones de Lorentz, a lo largo del mismo eje espacial, corresponde a una rotación en el plano complejo en un ángulo $i\varphi_1 + i\varphi_2$. Para finalizar este problema, el producto punto Minkowskiano en las coordenadas complejas $(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ (salvo un signo negativo global) corresponde al producto punto Euclideo:

$$\tilde{x} \cdot \tilde{y} = -(\tilde{x}^0 \tilde{y}^0 + \tilde{x}^1 \tilde{y}^1 + \tilde{x}^2 \tilde{y}^2 + \tilde{x}^3 \tilde{y}^3) \quad (6.113)$$

Esta transformación $t \rightarrow it$ se conoce como la euclideanización de la teoría y es ampliamente usada en teoría cuántica de campos.

12. **Adición numerable de velocidades.** La forma usual del teorema de adición de velocidades establece que

$$u_{x'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \quad (6.114)$$

en donde u_x es la componente en la dirección x de la velocidad de una partícula respecto a un sistema de referencia inercial Σ , $u_{x'}$ la velocidad de la partícula respecto a un segundo sistema de referencia Σ' el cual se mueve con velocidad v relativo a Σ en la dirección del eje x positivo.

- a** Para aplicar este teorema de adición a los bloques, tomemos en la expresión anterior $v_1 = v$, la velocidad del bloque 1 y $u_{x'} = v_2$ la velocidad del bloque 2 respecto al 1. Entonces despejando u_x de la ecuación 6.114 (transformación inversa) e identificando $u_x = v'_2$ tenemos

$$v'_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad (6.115)$$

Para demostrar que $v'_2 \rightarrow c$ si $v \rightarrow c$ utilicemos las cantidades adimensionales $\beta = v/c$ y $\beta'_2 = v_2/c$, y veamos que $\beta'_2 \rightarrow 1$ si $\beta \rightarrow 1$. Con esta notación la ecuación 6.115 toma la forma

$$\beta'_2 = \frac{2\beta}{1 + \beta^2} \quad (6.116)$$

entonces

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{2\beta}{1 + \beta^2} = 1 \quad (6.117)$$

como se quería probar.

- b** Para calcular la velocidad v'_3 del tercer bloque respecto a Σ podemos aplicar dos veces el resultado de la parte a y luego proceder de la misma forma para calcular la velocidad del n -ésimo bloque respecto a Σ . Sin embargo los cálculos los podemos simplificar significativamente si utilizamos el teorema de adición de velocidades en términos del parámetro ϕ definido por $\tan \phi = v/c$ (ver el problema anterior). Así, si

$$\phi = \tanh^{-1} \beta = \tanh^{-1} (v/c) \quad (6.118)$$

es la velocidad de un bloque respecto a anterior, entonces la velocidad del bloque 2 respecto a Σ (en términos del parámetro ϕ) es

$$\tanh^{-1} (v'_2/c) = \phi_1 + \phi_2 = 2\phi$$

y la velocidad del bloque n -ésimo respecto a Σ es

$$\tanh^{-1} (v'_n/c) = n\phi \quad (6.119)$$

por lo tanto

$$\frac{v'_n}{c} = \tanh (n\phi) = \tanh \left(n \tanh^{-1} \left(\frac{v}{c} \right) \right) \quad (6.120)$$

Retomando la definición de las funciones hiperbólicas (problema ante-

rior) tenemos que

$$\begin{aligned}
 (e^\phi)^{2n} &= (\cosh \phi + \sinh \phi)^{2n} \\
 &= [(1 + \tanh \phi)^2 \cosh^2 \phi]^n \\
 &= \left[\frac{(1 + \tanh \phi)^2}{\operatorname{sech}^2 \phi} \right]^n \\
 &= \left[\frac{(1 + \tanh \phi)^2}{1 - \tanh^2 \phi} \right]^n \\
 &= \left[\frac{1 + \tanh \phi}{1 - \tanh \phi} \right]^n
 \end{aligned} \tag{6.121}$$

entonces

$$n\phi = \ln \left[\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right]^{n/2} \tag{6.122}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \frac{v'_n}{c} &= \tanh \left[\ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{n/2} \right] \\
 &= \frac{e^{\ln((1+\beta)/(1-\beta))^{n/2}} - e^{-\ln((1+\beta)/(1-\beta))^{n/2}}}{e^{\ln((1+\beta)/(1-\beta))^{n/2}} + e^{-\ln((1+\beta)/(1-\beta))^{n/2}}} \\
 &= \frac{((1 + \beta)/(1 - \beta))^{n/2} - ((1 - \beta)/(1 + \beta))^{n/2}}{((1 + \beta)/(1 - \beta))^{n/2} + ((1 - \beta)/(1 + \beta))^{n/2}} \\
 &= \frac{1 - [(1 - \beta)/(1 + \beta)]^n}{1 + [(1 - \beta)/(1 + \beta)]^n}
 \end{aligned} \tag{6.123}$$

Ahora, puesto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right]^n = 0 \tag{6.124}$$

entonces $v'_n \rightarrow c$ para $n \rightarrow \infty$.

13. Longitud aparente. Consideremos los eventos que se muestran en la figura 6.4.

a Sea x la distancia del extremo izquierdo de la varilla en el momento en que se emite el fotón (evento P_1), de tal manera que éste alcance la cámara (evento P_4) simultáneamente con el fotón emitido cuando el centro de la varilla pasa por el origen de coordenadas (evento P_3) y con el fotón emitido desde el extremo derecho de la varilla (evento P_2). El evento P_4 corresponde a la foto tomada por la cámara. La condición de simultaneidad de la llegada de los fotones implica que

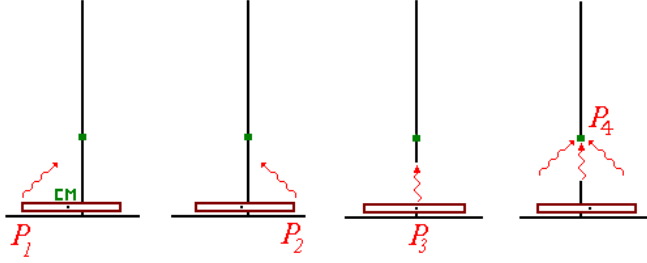


Figura 6.4: **Longitud aparente.** Sucesión de los eventos emisión de fotones que llegan simultáneamente al observador.

ellos debieron ser emitidos en instantes diferentes. El tiempo t_1 que tarda en llegar el fotón del evento P_1 está dado por

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + D^2}}{c} \quad (6.125)$$

Este tiempo debe ser igual al tiempo t_3 que gasta el fotón emitido desde el centro de la varilla hasta la cámara

$$t_3 = \frac{D}{c} \quad (6.126)$$

más el tiempo t_4 que gasta el centro de la varilla CM en llegar al origen de coordenadas

$$t_4 = \frac{x - \frac{\ell}{2}}{v} \quad (6.127)$$

en donde v es la velocidad y ℓ la longitud física de la varilla medida en el sistema de referencia de la cámara, dada por la relación

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\ell_0}{\gamma(v)} \quad (6.128)$$

con ℓ_0 su longitud propia. Así, llamando $\beta = v/c$ tenemos que

$$\sqrt{x^2 + D^2} = D + \frac{1}{\beta} \left(x - \frac{\ell}{2} \right) \quad (6.129)$$

Siguiendo un procedimiento similar para el extremo derecho de la varilla, obtenemos la distancia a la cual debe ser emitido el fotón (evento P_2), para que llegue a la cámara simultáneamente con el fotón emitido por el centro de la varilla. Si llamamos \tilde{x} esta distancia obtenemos

$$\sqrt{\tilde{x}^2 + D^2} = D + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\ell}{2} - \tilde{x} \right) \quad (6.130)$$

Las soluciones generales a estas ecuaciones 6.129 y 6.130 son expresiones complicadas y por esta razón, para ilustrar como se ve la varilla en la foto, consideremos un ejemplo numérico particular. Supongamos que la varilla se mueve con una velocidad $\beta = 4/5$ y tiene longitud propia $\ell_0 = 2m$ y la cámara está situada a una distancia de $D = 10m$, entonces, remplazando estos valores en las ecuaciones 6.129 y 6.130 obtenemos

$$x = 0,615\,12 \quad (6.131)$$

$$\tilde{x} = 0,586\,26 \quad (6.132)$$

La interpretación física de estos resultados es directa: La longitud física de la varilla medida en el sistema de referencia de la cámara es $\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \beta^2} = 1,2m$, es decir en el instante en que el centro de la varilla pasa por el origen de coordenadas las coordenadas de los extremos de la varilla son $x_{\pm} \pm 0,6m$, sin embargo, en la foto, lo que observamos es que cuando el centro de la varilla pasa por el origen de coordenadas, el extremo izquierdo aparenta estar en $x_I = -0,615\,12m$ mientras que el extremo derecho aparenta estar en $x_D = 0,586\,26m$, es decir la longitud aparente ℓ_A de la varilla está dada por

$$\ell_A = x_D - x_I = 1,20138m$$

Para comparar estos resultados con la parte b de este problema (aproximación de rayos paralelos), en la siguiente tabla se muestran los resultados numéricos para diferentes distancias de la cámara (dejando fija la longitud propia y la velocidad) y calculando con cuatro cifras decimales:

D	x_I	x_D	ℓ_A
2	-0,693 44	0,542 24	1.235 7
10	-0,615 12	0,586 26	1.201 4
100	-0,601 45	0,598 57	1.2000

Cuando la distancia a la cámara es muy grande, la longitud aparente tiende a la longitud física, lo que significa que en estas condiciones los fotones que salen de los extremos de la varilla y del centro, prácticamente salen simultáneamente. Este resultado numérico se puede probar formalmente si tomamos el límite cuando $D \rightarrow \infty$ en las ecuaciones 6.129 y 6.130. Por ejemplo consideremos la primera de estas

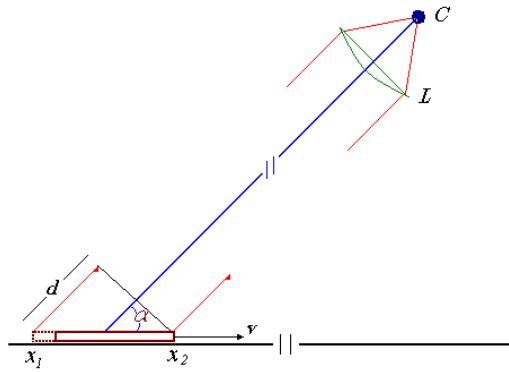


Figura 6.5: **Longitud aparente.** Aproximación de rayos paralelos.

ecuaciones y dividamos por D ambos lados:

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{D^2}} = 1 + \frac{1}{\beta D} \left(x - \frac{\ell}{2} \right) \quad (6.133)$$

Dado que $D \gg x$ expandimos el radical hasta términos de primer orden, entonces

$$\begin{aligned} 1 + \frac{x^2}{2D^2} &= 1 + \frac{1}{\beta D} \left(x - \frac{\ell}{2} \right) \implies \\ \frac{x^2}{2D} &= \frac{1}{\beta} \left(x - \frac{\ell}{2} \right) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (6.134)$$

esto implica que $x \rightarrow \ell_0 \sqrt{1 - \beta^2} / 2$, con un resultado similar para \tilde{x} , como se quería probar.

- b** La aproximación de rayos paralelos es válida, cuando la distancia del objeto a la cámara es mucho mayor que la dimensiones del objeto. También es posible obtener experimentalmente la aproximación de rayos paralelos, cuando la distancia del objeto a la cámara no es mucho mayor que las dimensiones del objeto. En la figura 6.5 se muestra un posible montaje en el cual L es una lente convergente. Sean x_1 y x_2 las coordenadas de los extremos izquierdo y derecho de la varilla respectivamente en el instante en que se emiten los correspondientes fotones (ver figura 6.5). Así la longitud aparente de la varilla ℓ_A (registrada en la foto) está dada

$$\ell_A = x_1 - x_2 \quad (6.135)$$

Si d representa la diferencia de caminos entre los fotones emitidos por los extremos de la varilla, entonces la distancia d está dada por

$$d = (x_1 - x_2) \cos \alpha \quad (6.136)$$

Esto significa que el fotón emitido desde el extremo izquierdo de la varilla debe salir un tiempo t , dado por

$$t = \frac{d}{c} = \frac{(x_1 - x_2)}{c} \cos \alpha = \frac{\ell_A}{c} \cos \alpha \quad (6.137)$$

antes que el fotón emitido por extremo derecho. Si ℓ es la longitud física de la varilla medida en el sistema de referencia de la cámara, entonces

$$\ell_A = \ell + vt = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt \quad (6.138)$$

donde vt corresponde a espacio que avanza la varilla durante el tiempo entre las emisiones de los dos fotones. Por lo tanto, la longitud aparente de la varilla está dada por

$$\ell_A = x_2 - x_1 = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \beta \ell_A \cos \alpha \quad (6.139)$$

así

$$\ell_A = \frac{\ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \beta \cos \alpha} \quad (6.140)$$

Notemos que si la foto es tomada cuando el centro de la varilla aparenta estar en el origen de coordenadas $\alpha = 90^\circ$, entonces la longitud aparente corresponde a la longitud física, en acuerdo con la primera parte de este problema.

14. **Comunicación espacial.** Consideremos el sistema de referencia Σ ligado a la tierra, con el origen en la tierra y el eje x positivo en la dirección de movimiento de la nave A y tomemos $t = 0$ en el instante que se emite la primera señal.

- a Con las coordenadas elegidas, el diagrama espacio-tiempo de las líneas de universo se muestra en la figura 6.6, teniendo en cuenta las siguientes convenciones: T línea de universo de la tierra, A línea de universo de la nave A , B línea de universo de la nave B , t_1 tiempo de llegada de la primera señal a la nave B , t_2 tiempo de llegada de la primera señal a la nave A , t_3 tiempo de llegada de la primera señal reflejada en la nave B a la tierra T , t_4 tiempo de llegada de la primera señal reflejada en la nave A a la tierra T y t_{01} , t_{02} , t_{03} y t_{04} los correspondientes tiempos para la segunda señal enviada en el instante t_0 .

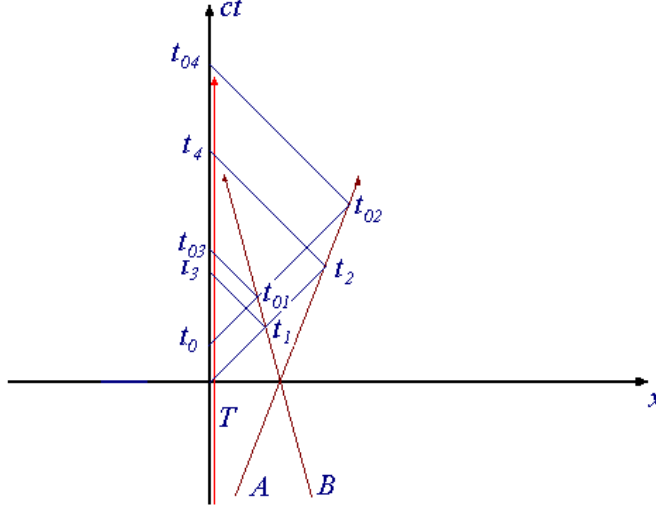


Figura 6.6: **Comunicación espacial.** Líneas de universo de la tierra y las dos naves.

- b** Consideremos primero la nave B únicamente, pues los cálculos para la nave A son similares cambiando $v \rightarrow -v$. Dado que el problema es bidimensional (movimiento a lo largo del eje x) describimos las coordenadas espacio-tiempo de los eventos solo con dos componentes $(ct, x, 0, 0) \equiv (ct, x)$. Con esta notación, sea (ct_1, x_1) las coordenadas del evento “llegada de la primera señal a la nave B ”. Dado que la nave viaja a velocidad constante y la señal parte del origen en $t = 0$, cuando la nave se encuentra en la posición $x_{0B} = L$, entonces se debe cumplir que

$$L = ct_1 + vt_1 \quad (6.141)$$

así, la nave B se encuentra en la siguiente posición cuando la señal la alcanza

$$x_1 = ct_1 = \frac{L}{1 + \beta} \quad (6.142)$$

Para la segunda señal las coordenadas del evento “llegada de la segunda señal a la nave B ” son (ct_{01}, x_{01}) . Dado que durante el tiempo t_0 la nave se ha movido una distancia vt_0 , entonces su posición, en el instante de emisión de la segunda señal, será $L - vt_0$ y por lo tanto, si llamamos \tilde{t} el tiempo que tarda la segunda señal en llegar a la nave, se debe cumplir la relación

$$L - vt_0 = c\tilde{t} + v\tilde{t} \quad (6.143)$$

y la posición de la nave B está dada por

$$x_{01} = c\tilde{t} = \frac{L - vt_0}{1 + \beta} \quad (6.144)$$

Para la nave A la posición cuando llega la primera señal es

$$x_2 = \frac{L}{1 - \beta} \quad (6.145)$$

y para la segunda señal está dada por

$$x_{02} = \frac{L + vt_0}{1 - \beta}$$

- c** Sea Δt_B el intervalo de tiempo entre la llegada de los dos pulsos a la nave B . De la parte *b* del presente problema, la primera señal la recibe en el instante

$$t_1 = \frac{L/c}{1 + \beta} \quad (6.146)$$

El segundo pulso llega a la nave en el instante

$$t_{01} = t_0 + \tilde{t} = t_0 + \frac{L/c - \beta t_0}{1 + \beta}$$

por lo tanto el intervalo de tiempo está dado por

$$\Delta t_B = t_{01} - t_1 = t_0 - \frac{\beta t_0}{1 + \beta} = \frac{t_0}{1 + \beta} \quad (6.147)$$

El intervalo de tiempo Δt_A de la llegada de los pulsos a la nave A es

$$\Delta t_A = \frac{t_0}{1 - \beta} \quad (6.148)$$

- d** Para calcular los intervalos de tiempo de la llegada de las señales reflejadas a la tierra, consideremos primero el caso de la nave B . Dado que la reflexión es instantánea, la primera señal se refleja en el instante

$$t_1 = \frac{L/c}{1 + \beta} \quad (6.149)$$

en el punto

$$x_1 = \frac{L}{1 + \beta} \quad (6.150)$$

entonces tarda un tiempo

$$t_{RA} = \frac{x_1}{c} = \frac{L/c}{1 + \beta} \quad (6.151)$$

en llegar a la tierra y por lo tanto esta señal alcanza la tierra en el instante

$$t_3 = t_1 + t_{RA} = \frac{2L/c}{1 + \beta} \quad (6.152)$$

La segunda señal reflejada parte de la nave en el instante

$$t_{01} = t_0 + \frac{L/c - \beta t_0}{1 + \beta}$$

cuando la nave se encuentra en el punto

$$x_{01} = \frac{L - vt_0}{1 + \beta} \quad (6.153)$$

por lo tanto, la segunda señal llega a la tierra en el instante

$$t_{03} = t_{01} + \frac{x_{01}}{c} = t_0 + 2\frac{L/c - \beta t_0}{1 + \beta} = \frac{t_0 - \beta t_0 + 2L/c}{1 + \beta} \quad (6.154)$$

entonces el intervalo de tiempo Δt_{TB} es

$$\Delta t_{TB} = t_{03} - t_3 = t_0 \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \quad (6.155)$$

y para los pulsos reflejados en la nave A el intervalo de tiempo Δt_{TA} está dado por

$$\Delta t_{TA} = t_0 \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad (6.156)$$

- e Para calcular la posición de las naves y los intervalos de tiempo de la llegada de los pulsos a las naves y a la tierra, basta con tener en cuenta la ecuación para la dilatación temporal. Consideremos en primer lugar el intervalo de tiempo $\Delta t'_A$ de la llegada de los dos pulsos a la nave A . Puesto que los eventos “llegada de cada uno de los pulsos a la nave” suceden en el mismo punto para el sistema de referencia de la nave, el intervalo de tiempo medido en A es un intervalo de tiempo propio y por lo tanto está relacionado con Δt_A por la ecuación

$$\Delta t_A = \gamma(v)\Delta t'_A \quad (6.157)$$

Remplazando la ecuación 6.148 para Δt_A y despejando, tenemos

$$\Delta t'_A = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{t_0}{1 - \beta} = t_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (6.158)$$

Para el caso de la nave B , el intervalo de tiempo entre la llegada a la nave de los dos pulsos, medidas con respecto al sistema de referencia de la nave B , obtenemos

$$\Delta t'_B = t_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (6.159)$$

Los intervalos de tiempo Δt_{TA} y Δt_{TB} , calculados en la parte *d* del presente problema, son intervalos de tiempo propios, por lo tanto se aplica la misma relación de dilatación temporal. Por ejemplo si llamamos $\Delta t'_{TA}$ el intervalo de tiempo de la llegada a la tierra de los pulsos reflejados en la nave *A*, medidos en su sistema de referencia, entonces este intervalo está relacionado con Δt_{TA} por

$$\Delta t'_{TA} = \gamma(v)t_0 \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad (6.160)$$

15. **Velocidades superlumínicas aparentes.** Supongamos que en algún instante inicial $t = 0$ las dos fuentes f_1 y f_2 están juntas (fuente f en la figura 1.2) y un tiempo posterior δt la fuente f_2 se ha desplazado una distancia $v\delta t = f_1 f_2$. La primera observación, cuando las fuentes se ven juntas, se mide en la tierra en un tiempo

$$t_i = \frac{\overline{0f}}{c} \quad (6.161)$$

mientras que la segunda observación (figura 1.2 inferior) se mide en la tierra en un tiempo

$$t_f = \delta t + \frac{\overline{0f_2}}{c} \quad (6.162)$$

Entonces, la velocidad transversal aparente de la fuente f_2 , vista desde la tierra, es

$$v_T = \overline{0f_2} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \overline{0f_2} \frac{\Delta\alpha}{t_f - t_i} \quad (6.163)$$

En los objetos astronómicos, como el Quasar 3C-273, donde se ha observado este fenómeno, la separación angular de las fuentes, vista por el observador en tierra, es de unos pocos segundos de arco y así podemos hacer la aproximación

$$\overline{0f} \simeq \overline{0f_2} + v\delta t \cos \varphi \quad (6.164)$$

$$\Delta\alpha \simeq \frac{v\delta t \sin \varphi}{\overline{0f_2}} \quad (6.165)$$

entonces

$$\Delta t = \delta t + \frac{\overline{0f_2}}{c} - \frac{\overline{0f}}{c} \simeq \delta t (1 - \beta \cos \varphi) \quad (6.166)$$

con $\beta = v/c$, por lo tanto la velocidad transversal está dada por

$$\beta_T = \frac{v_T}{c} = \frac{\beta \sin \varphi}{1 - \beta \cos \varphi} \quad (6.167)$$

En la figura 6.7 se muestra la gráfica de β_T en función del ángulo φ para diferentes valores de la velocidad $\beta = v/c$ de la fuente f_2 , en donde para valores suficientes de la velocidad de la fuente, la velocidad transversal

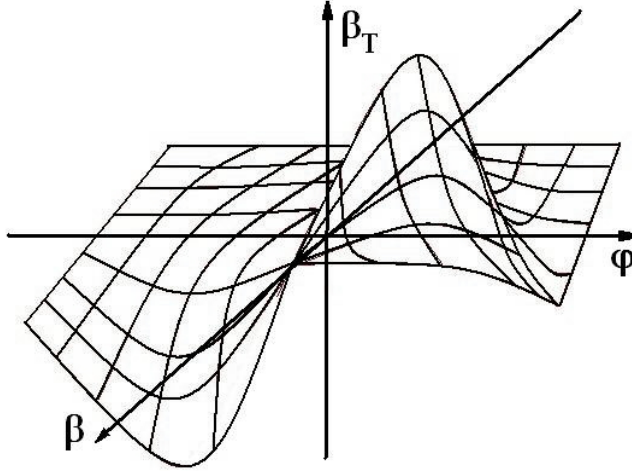


Figura 6.7: **Velocidades superlumínicas aparentes.** Velocidad transversal β_T en función de β y φ , con $-0,99 \leq \beta \leq 0,99$ y $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$

aparente puede ser mayor que la velocidad de la luz. Por ejemplo, las curvas muestran un máximo de β_T el cual está dado por la condición:

$$\frac{d\beta_T}{d\varphi} = \frac{\beta(\cos \varphi - \beta)}{(1 - \beta \cos \varphi)^2} = 0 \quad (6.168)$$

puesto que $\beta < 1$ el denominador nunca se anula y la condición del máximo se obtiene para

$$\cos \varphi = \beta \quad (6.169)$$

entonces

$$\beta_{T_{\text{máx}}} = \beta \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2} = \beta \gamma(v) \quad (6.170)$$

Dado que el factor γ puede tomar valores arbitrariamente grandes entonces es posible medir velocidades transversales aparentes mayores que c . Este fenómeno se ha observado en varios AGNs, por ejemplo el quasar $3C - 273$ muestra este comportamiento (ver [7])

16. **Relatividad sin el segundo postulado.** Sean Σ y Σ' dos sistemas de referencia inerciales relacionados de la manera usual. Entonces, el principio de relatividad nos permite encontrar las siguientes relaciones entre las coordenadas de los dos sistemas de referencia:

$$y' = y; \quad z' = z \quad (6.171)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (6.172)$$

$$x = \gamma(x' + vt') \quad (6.173)$$

$$\gamma' = \gamma \quad (6.174)$$

reemplazando x' de la ecuación 6.172 en la ecuación 6.173 y despejando t' obtenemos

$$\begin{aligned} x &= \gamma(\gamma(x - vt) + vt') \\ &= \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt' \quad \implies \\ t' &= x \frac{1 - \gamma^2}{v\gamma} + \gamma t = \gamma \left(t - \frac{\gamma^2 - 1}{v\gamma^2} x \right) \end{aligned} \quad (6.175)$$

entonces

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{K^2} x \right) \quad (6.176)$$

en donde

$$K^2 = \frac{v^2 \gamma^2}{\gamma^2 - 1} \quad (6.177)$$

despejando el factor γ de la última ecuación tenemos

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{K^2}} \quad (6.178)$$

Esta ecuación implica que el factor γ es una función de la velocidad y el parámetro K , es decir

$$\gamma = \gamma(v, K) \quad (6.179)$$

Aún cuando la ecuación 6.177 implica aparentemente que el parámetro K depende de la velocidad, esto no es así, si queremos que la composición de transformaciones de Lorentz sea de nuevo una transformación de Lorentz. Para este fin consideremos un nuevo sistema de referencia Σ'' que se mueve con velocidad u respecto a Σ' . Si llamamos \tilde{K} el parámetro para la transformación entre Σ' y Σ'' , entonces las ecuaciones de transformación de Lorentz entre Σ y Σ' son

$$x' = \gamma(v; K)(x - vt) \quad (6.180)$$

$$t' = \gamma(v; K) \left(t - \frac{v}{K^2} x \right) \quad (6.181)$$

y entre Σ' y Σ'' toman la forma

$$x'' = \gamma(u; \tilde{K})(x' - ut') \quad (6.182)$$

$$t'' = \gamma(u; \tilde{K}) \left(t' - \frac{u}{\tilde{K}^2} x' \right) \quad (6.183)$$

en donde $\gamma(v; K)$ y $\gamma(u; \tilde{K})$ son los correspondientes factores gamma que dependen de $(v; K)$ y $(u; \tilde{K})$ respectivamente. Reemplazando las coordenadas primadas en las últimas ecuaciones tenemos

$$x'' = \gamma(u; \tilde{K}) \gamma(v; K) \left(1 + \frac{uv}{K^2} \right) \left(x - \frac{u+v}{1 + \frac{uv}{K^2}} t \right) \quad (6.184)$$

$$t'' = \gamma(u; \tilde{K})\gamma(v; K) \left(1 + \frac{uv}{\tilde{K}^2}\right) \left(t - \frac{\frac{u}{\tilde{K}^2} + \frac{v}{K^2}}{1 + \frac{uv}{\tilde{K}^2}}x\right) \quad (6.185)$$

un cálculo directo muestra que si $K = \tilde{K}$ la composición de transformaciones de Lorentz es de nuevo una transformación de Lorentz con velocidad

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{K^2}} \quad (6.186)$$

pues

$$\gamma(u; K)\gamma(v; K) \left(1 + \frac{uv}{K^2}\right) = \gamma(w; K) \quad (6.187)$$

El parámetro K debe ser determinado experimentalmente, por ejemplo con un experimento sobre dilatación temporal o un experimento dinámico, como el comportamiento de la masa inercial de una partícula con la velocidad. Si experimentalmente se determina que $K = \infty$, las ecuaciones de transformación obtenidas se reducen a las transformaciones de Galileo, o si el experimento arroja $K = c$ tenemos las transformaciones de Lorentz. Esto implica que el segundo postulado de la relatividad pudiera ser reemplazado por otro, el cual condujera a determinar en forma explícita el parámetro K .

17. **Viaje al pasado.** Supongamos que la primera señal tachyonica es enviada desde el origen de Σ en el instante t_0 a la velocidad

$$\beta_T = \frac{v_T}{c} = \frac{dx^1}{dx^0} \quad (6.188)$$

y es recibida por un receptor situado en el origen de Σ' , cuando éste se encuentra a una distancia D medida con respecto a Σ . Entonces, el instante en el cual la señal es recibida, está dado por (en unidades de c)

$$ct_1 = ct_0 + \frac{D}{\beta_T} \quad (6.189)$$

La señal es devuelta instantáneamente, desde el origen de Σ' , hacia el origen de Σ a una velocidad igual de v_T , pero medida con respecto al sistema Σ' , es decir

$$\frac{dx'}{dt'} = -v_T \quad (6.190)$$

Para calcular el tiempo de regreso de la señal medida por Σ , debemos calcular primero la velocidad de la señal respecto al sistema de referencia Σ . Para este fin consideremos las transformaciones de Lorentz usuales

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \quad (6.191)$$

$$x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \quad (6.192)$$

con $\beta = v/c$ y $\gamma = \gamma(v)$. Entonces

$$\begin{aligned} -\beta_T &= \frac{dx'^1}{dx'^0} = \frac{\gamma d(x^1 - \beta x^0)}{\gamma d(x^0 - \beta x^1)} = \frac{dx^1 - \beta dx^0}{dx^0 - \beta dx^1} \\ &= \frac{\frac{dx^1}{dx^0} - \beta}{1 - \beta \frac{dx^1}{dx^0}} \end{aligned} \quad (6.193)$$

despejando la velocidad de la señal tachyonica $\frac{dx^1}{dx^0}$ medida con respecto a Σ tenemos

$$-\frac{dx^1}{dx^0} = \frac{\beta_T - \beta}{1 - \beta_T \beta} \quad (6.194)$$

así, el tiempo que tarda la señal en su viaje de ida y vuelta es

$$ct_{total} = \frac{D}{\beta_T} + \frac{D}{\frac{dx^1}{dx^0}} = D \left(\frac{1}{\beta_T} + \frac{1 - \beta_T \beta}{\beta_T - \beta} \right) \quad (6.195)$$

por lo tanto, la señal es recibida en Σ en el instante t dado por

$$\begin{aligned} ct &= ct_0 + ct_{total} \\ &= ct_0 + D \left(\frac{1}{\beta_T} + \frac{1 - \beta_T \beta}{\beta_T - \beta} \right) \end{aligned} \quad (6.196)$$

si el factor que acompaña al término D es menor que cero, entonces esto significa que la señal de regreso puede ser detectada en el origen de Σ antes que la primera señal sea enviada desde allí. Para ver si esto es posible analicemos la función

$$f(\beta_T; \beta) = \frac{1}{\beta_T} + \frac{1 - \beta_T \beta}{\beta_T - \beta} \quad (6.197)$$

En primer lugar, esta función está bien definida pues por definición $0 \leq \beta < 1$ y $\beta_T > 1$, por lo tanto los denominadores en la expresión anterior nunca se anulan. Si los sistema de referencia Σ y Σ' están reposo relativo, entonces $\beta = 0$ y por lo tanto el tiempo total es

$$ct_{total} = \frac{2D}{\beta_T} \quad (6.198)$$

el cual es positivo. Por otra parte, si la señal tachyonica es enviada a una velocidad arbitrariamente grande entonces

$$\lim_{\beta_T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\beta_T} + \frac{1 - \beta_T \beta}{\beta_T - \beta} \right) = -\beta \quad (6.199)$$

y por lo tanto

$$ct = ct_0 - \beta D \quad (6.200)$$

lo cual significa que la señal de regreso llega un tiempo βD antes que la primera señal sea enviada. De hecho, dada la velocidad relativa de los

sistemas de referencia β , entonces sea $\tilde{\beta}_T$ tal que $f(\tilde{\beta}_T; \beta) = 0$, es decir $\tilde{\beta}_T$ dado por

$$\tilde{\beta}_T = \frac{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}$$

corresponde a la velocidad a la que se deben enviar los tachyones, para que la señal reflejada llegue en el instante en que se envía la señal inicial, y por lo tanto siempre es posible encontrar velocidades tachyonicas $\beta_T > \tilde{\beta}_T$ para las cuales, la señal reflejada llega antes que la señal sea enviada. En el cálculo de $\tilde{\beta}_T$ se tomó la raíz positiva, pues

$$0 < \frac{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} < \infty \quad \text{si} \quad 1 > \beta > 0 \quad (6.201)$$

y

$$0 < \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} < 1 \quad \text{si} \quad 0 < \beta < 1 \quad (6.202)$$

Este ejemplo muestra uno de los problemas fundamentales en considerar los tachyones, pues el principio de causalidad de la física se rompe. Sin embargo, los tachyones han sido considerados en física, en el marco de algunos modelos teóricos, no solo para tratar de entender algunos problemas fundamentales y por completez de la teoría, sino también para buscar que influencia observacional pudieran tener los tachyones (si existieran) sobre las partículas usuales. Hasta el presente no se ha predicho ningún efecto observable (lo que no significa que no pudiera existir) y por esta razón los tachyones no se han desechado del todo, pero tampoco se consideran en las teorías usuales.

18. **Viaje interestelar 1.** Aún cuando las unidades que trabajaremos en el presente problema están en años-luz y el valor de la velocidad de la luz es $c = 1$, en las expresiones generales mantendremos c en forma explícita y solo utilizaremos las unidades para los cálculos numéricos.

a Para calcular el valor de la aceleración de la gravedad en unidades de años-luz (al) y en unidades de $c = 1$, tenemos que

$$2,99792458 \times 10^8 \text{ m} = 1 \text{ s} \quad (6.203)$$

y

$$1 \text{ m} = \frac{1}{9,46053 \times 10^{15}} al \quad (6.204)$$

entonces

$$\begin{aligned} g &= 9,8 \text{ m s}^{-2} \\ &= 9,8 \text{ m} \times (2,99792458 \times 10^8 \text{ m})^{-2} \\ &= 1,0904 \times 10^{-16} \text{ m}^{-1} \\ &= 1,0904 \times 10^{-16} \times 9,46053 \times 10^{15} al^{-1} \\ &= 1,0316 al^{-1} \end{aligned} \quad (6.205)$$

Para los cálculos del presente problema, es suficiente aproximar el valor de la aceleración de la gravedad terrestre a

$$g = 9,8 \text{ m s}^{-2} \simeq 1al^{-1} \quad (6.206)$$

- b** Dado que el movimiento del cohete es unidimensional, elijamos el eje x positivo del sistema de referencia tierra en dirección de las pléyades. En estas condiciones, la línea de universo del cohete está descrita por el cuadrivector posición

$$x(\tau) = (x^0(\tau), x^1(\tau), 0, 0) \quad (6.207)$$

entonces los cuadrivectores velocidad y aceleración del cohete están dadas por

$$U = \frac{dx}{d\tau} = (U^0, U^1, 0, 0) \quad (6.208)$$

$$A = \frac{dU}{d\tau} = (A^0, A^1, 0, 0) \quad (6.209)$$

Dado que la aceleración propia es constante, entonces se deben cumplir las siguientes relaciones:

$$U^2 = (U^0)^2 - (U^1)^2 = c^2 \quad (6.210)$$

$$A^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 = -g^2 \quad (6.211)$$

$$U \cdot A = U^0 A^0 - U^1 A^1 = 0 \quad (6.212)$$

Despejando A^0 de la ecuación 6.212 y reemplazando en 6.211 tenemos que

$$\begin{aligned} -g^2 &= \left(A^1 \frac{U^1}{U^0} \right)^2 - (A^1)^2 \\ &= (A^1)^2 \left(\frac{(U^1)^2}{(U^0)^2} - 1 \right) \\ &= (A^1)^2 \left(\frac{(U^1)^2 - (U^0)^2}{(U^0)^2} \right) \\ &= -c^2 \frac{(A^1)^2}{(U^0)^2} \end{aligned} \quad (6.213)$$

en donde se ha utilizado la ecuación 6.210 en el último paso. Tomando la raíz positiva de esta ecuación y despejando A^1 obtenemos

$$A^1 = \frac{g}{c} U^0 \quad (6.214)$$

Se tomó la raíz positiva por las condiciones iniciales del problema, pues la nave parte del reposo y se acelera. Procediendo en forma

similar a la anterior deducción, pero despejando A^1 de la ecuación 6.212 y reemplazando en 6.211, llegamos a

$$A^0 = \frac{g}{c}U^1 \quad (6.215)$$

Derivando la ecuación 6.214 con respecto a τ , teniendo en cuenta las definiciones 6.208 y 6.209 y utilizando la ecuación 6.215, obtenemos la siguiente ecuación diferencial de segundo orden para U^1 :

$$\frac{d^2U^1}{d\tau^2} = \frac{g}{c} \frac{dU^0}{d\tau} = \left(\frac{g}{c}\right)^2 U^1 \quad (6.216)$$

Un procedimiento similar, pero partiendo ahora de la ecuación 6.215, nos conduce a una ecuación diferencial de segundo orden para U^0 . Este procedimiento ha permitido desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales 6.210, 6.211 y 6.212 y convertirlo en el siguiente sistema de dos ecuaciones de segundo orden desacopladas, para las componentes del cuadvectores velocidad:

$$\frac{d^2U^1}{d\tau^2} - \left(\frac{g}{c}\right)^2 U^1 = 0 \quad (6.217)$$

$$\frac{d^2U^0}{d\tau^2} - \left(\frac{g}{c}\right)^2 U^0 = 0 \quad (6.218)$$

Estas ecuaciones son integrables en forma exacta, en términos de las funciones hiperbólicas:

$$U^0(\tau) = K_1 \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right) + K_2 \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) \quad (6.219)$$

$$U^1(\tau) = K_3 \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right) + K_4 \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) \quad (6.220)$$

Las constantes de integración K_1 , K_2 , K_3 , y K_4 se determinan a partir de las condiciones iniciales del problema:

$$U(\tau = 0) = (U^0(0), U^1(0), 0, 0) = (c, 0, 0, 0) \quad (6.221)$$

$$\left. \frac{dU}{d\tau} \right|_{\tau=0} = (A^0(0), A^1(0), 0, 0) = (0, g, 0, 0) \quad (6.222)$$

pues la nave parte del reposo con aceleración propia g . La primera condición inicial para U^1 implica $K_4 = 0$ y la segunda condición inicial para A^0 nos conduce a $K_1 = 0$, entonces

$$U^0(\tau) = K_2 \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) \quad (6.223)$$

$$U^1(\tau) = K_3 \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right) \quad (6.224)$$

La primera condición inicial para U^0 implica que $K_2 = c$, mientras que derivando 6.224, la segunda condición implica $K_3 = c$, así el cuadvectores velocidad del cohete, en función del tiempo propio, está dada por:

$$U(\tau) = \left(c \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right), c \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right), 0, 0 \right) \quad (6.225)$$

Para encontrar la línea de universo de la nave falta integrar la ecuación 6.208, donde las componentes del cuadvectores velocidad están dadas por la ecuación 6.225. Entonces integrando estas ecuaciones obtenemos:

$$x^0(\tau) = \frac{c^2}{g} \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right) + K_5 \quad (6.226)$$

$$x^1(\tau) = \frac{c^2}{g} \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) + K_6 \quad (6.227)$$

con K_5 y K_6 constantes de integración, que se determinan a partir de la condición inicial

$$x(\tau = 0) = (x^0(0), x^1(0), 0, 0) = (0, 0, 0, 0) \quad (6.228)$$

pues, cuando la nave parte de la tierra, $x^1 = 0$ y tomamos la condición $t = 0$. Aplicando estas condiciones iniciales a las ecuaciones 6.226 y 6.227 obtenemos, finalmente la línea de universo de la nave:

$$x(\tau) = \left(\frac{c^2}{g} \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right), \frac{c^2}{g} (\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) - 1), 0, 0 \right) \quad (6.229)$$

c Trabajando en unidades de $c = 1$ y la distancia en al , la aceleración de gravedad es $1al^{-1}$ y el tiempo queda medido en años. Cuando la nave alcanza la mitad del recorrido $x^1 = 212,5al$ y entonces

$$212,5al = \cosh(\tau) - 1 \quad (6.230)$$

por lo tanto

$$\tau = \cosh^{-1}(213,5) = 6.0568 \text{ años} \quad (6.231)$$

el cual es el tiempo que indica un reloj que viaja en el cohete. El tiempo medido en la tierra está dado por

$$x^0 = \sinh(6.0568) = 213.502 \text{ años} \quad (6.232)$$

A partir de este instante, la nave comienza a desacelerar a un g hasta llegar a las pléyades. Por simetría, el tiempo que gasta la nave desde este punto hasta alcanzar el reposo en las pléyades es igual que el tiempo calculado, para la primera parte del viaje. Así, el tiempo total del viaje, desde la tierra hasta las pléyades, medido en el cohete es

$$\tau_{ida} = 2 \times 6.0568 \text{ años} = 12.114 \text{ años} \quad (6.233)$$

y medido desde el sistema tierra, está dado por

$$x_{ida}^0 = 2 \times 213.502 \text{ años} = 427,004 \text{ años} \quad (6.234)$$

Para calcular la velocidad, de la nave en el instante en que ésta alcanza la mitad del viaje, utilizamos la ecuación 6.56, la cual nos da la velocidad en términos de las componentes del cuadrivector aceleración, así de la ecuación 6.225 tenemos

$$\frac{v}{c} = \frac{U^1}{U^0} = \frac{c \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)}{c \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right)} = \tanh\left(\frac{g}{c}\tau\right) \quad (6.235)$$

reemplazando $\tau = 6.0568 \text{ años}$ en la ecuación anterior, tenemos

$$\frac{v}{c} = \tanh(6.0568) = 0,99999 \quad (6.236)$$

El viaje total de ida y regreso, para el observador del cohete es

$$\tau_{total} = 2 \times \tau_{ida} = 24.228 \text{ años} \quad (6.237)$$

y para la tierra

$$x_{total}^0 = 2 \times x_{ida}^0 = 854,08 \text{ años} \quad (6.238)$$

d Cuando la nave alcanza la mitad del recorrido $x^1 = 212,5 \text{ al}$ tenemos

$$x^1(\tau) = \frac{c^2}{g} (\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) - 1) \quad (6.239)$$

entonces, en las unidades que estamos trabajando

$$212,5 \text{ al} = \frac{1}{10} (\cosh(10\tau) - 1) \text{ al} \quad (6.240)$$

por lo tanto

$$\tau = \frac{1}{10} \cosh^{-1}(2125 + 1) = 0,83551 \text{ años} \quad (6.241)$$

y el tiempo medido en el sistema tierra es de

$$\begin{aligned} x^0(0,83551 \text{ años}) &= \frac{1}{10} \sinh(10 \times 0,83551) \\ &= 212.59 \text{ años} \end{aligned} \quad (6.242)$$

por lo tanto el viaje total de ida y vuelta, medido en la nave es de

$$\tau_{total} = 4 \times 0,83551 \text{ años} = 3.342 \text{ años} \quad (6.243)$$

y medido desde la tierra

$$x_{total}^0 = 4 \times 212.59 \text{ años} = 850.36 \text{ años} \quad (6.244)$$

La velocidad de la nave, cuando alcanza la mitad del camino de ida está dada por

$$\begin{aligned}\frac{v}{c} &= \frac{U^1}{U^0} = \tanh(10\tau) = \tanh(8,3551) \\ &= 0,999999889.\end{aligned}\quad (6.245)$$

Notemos que el tiempo propio del cohete se puede disminuir indefinidamente, aumentando la aceleración, pero el tiempo medido en la tierra está acotado por $850al$ que es el tiempo que gastaría un rayo de luz en ir desde la tierra hasta las pléyades y regresar.

19. Viaje interestelar 2. Tomemos el origen del sistema de referencia en la tierra, con $t = 0 = \tau$ cuando la nave parte, y el eje x en la dirección de movimiento. En unidades de $c = 1$ las distancias y los tiempos tienen las mismas unidades de longitud, las cuales tomaremos en al (años luz).

a En el desplazamiento inicial, con aceleración propia constante de $10g$, la velocidad de la partícula está dada por la relación 6.225

$$\frac{v}{c} = \frac{U^1}{U^0} = \frac{c \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)}{c \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right)} = \tanh\left(\frac{g}{c}\tau\right) \quad (6.246)$$

entonces, cuando la nave alcanza a velocidad $\beta = v/c = 0,999$, el tiempo transcurrido en la nave (tiempo propio) es

$$\tau = \frac{1}{10} \tanh^{-1}(0,999) \text{ años} = 0,38002 \text{ años} \quad (6.247)$$

y por lo tanto el tiempo medido desde la tierra está dado por

$$x^0(0,38002 \text{ años}) = \frac{1}{10} \sinh(10 \times 0,38002) = 2.2344 \text{ años} \quad (6.248)$$

a partir de este instante la nave continúa su viaje con velocidad constante de $0,999c$.

b En el instante $\tau = 0,38002 \text{ años}$ la nave alcanza la velocidad v , y por lo tanto la coordenada de posición $x^1(\tau)$, que en este caso nos da también la distancia a la tierra, está dada por la relación 6.239 y por lo tanto

$$x^1(0,38002) = \frac{1}{10} (\cosh(10 \times 0,38002) - 1)al = 2.1366al \quad (6.249)$$

Es decir el cohete se encuentra en ese instante a mitad de camino de la estrella más cercana a nosotros, Próxima del Centauro, la cual está a una distancia de $4,3al$ de la tierra.

c A partir de este momento, la nave continúa su recorrido a velocidad constante, hasta encontrarse a una distancia de $2.1366al$ de las Pléyades, momento en el cual inicia la desaceleración a $10g$ para llegar con velocidad cero a su destino. Esto significa que el cohete recorre una distancia D a velocidad constante dada por

$$D = 425al - 2 \times 2.1366al = 420.73al \quad (6.250)$$

por lo tanto, el intervalo de tiempo que gasta la nave en recorrer esta distancia, medida por el sistema tierra, es de

$$\Delta x^0 = \frac{D}{\beta} = \frac{420.73}{0,999} = 421.15años \quad (6.251)$$

Teniendo en cuenta que Δx^0 corresponde al intervalo de tiempo entre los eventos, “la nave alcanza la velocidad v ” y “la nave inicia la desaceleración”, medido por la tierra, entonces Δx^0 está relacionado con el intervalo de tiempo propio $\Delta\tau$, entre los dos eventos, por la ecuación

$$\Delta x^0 = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6.252)$$

en donde $\Delta\tau$ corresponde al intervalo de tiempo propio medido por los relojes del cohete. Así, en el sistema cohete la parte del viaje a velocidad constante, dura

$$\Delta\tau = 421.15\sqrt{1 - (0,999)^2} = 18.830años \quad (6.253)$$

Por simetría, la última parte del camino, cuando el cohete desacelera, dura un tiempo igual a la primera parte, cuando la nave está acelerando, por lo tanto el tiempo total del viaje de ida y regreso a las Pléyades está dado por

$$\tau_{total} = 2 \times (2 \times 0,38002 + 2 \times 18.830) = 76.84años \quad (6.254)$$

medido por los relojes del cohete y

$$x_{total}^0 = 2 \times (2 \times 2.2344 + 2 \times 421.15) = 1693.5años \quad (6.255)$$

Los resultados obtenidos en éste y el anterior problema los resumimos en la siguiente tabla:

	A	B	C
τ_{total}	24.228años	3.342años	76.84años
x_{total}^0	854,0años	850.36años	1693.5años

Esto muestra, que en condiciones normales, es realizable un viaje interestelar en tiempos propios razonables para los viajeros de la nave, pero su retorno a la tierra significaría regresar, cuando ya han pasado

varias generaciones en la tierra. Este resultado de la relatividad especial, conocido como la paradoja de los mellizos de Langevan, ha sido utilizado en la literatura y el cine de ficción, como por ejemplo en la película El Planeta de los Simios. Es importante aclarar en este punto, que la palabra “ficción” se refiere a que aún no es posible realizar este tipo de viajes interestelares, por limitaciones tecnológicas, pues el efecto del retraso de relojes viajeros, si se ha medido con relojes de alta precisión en aviones, en donde los atrasos registrados son del orden de los 10^{-9} s.

20. **El horizonte de eventos.** Como la partícula con aceleración propia constante α parte del reposo en el origen del sistema de referencia Σ , tomamos $t = \tau = 0$ en este punto.

- a Para el caso de la partícula que estamos considerando, la línea de universo $x(\tau)$ ya fue calculada en un problema anterior, entonces de la ecuación 6.229 tenemos

$$x(\tau) = \left(\frac{c^2}{\alpha} \sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right), \frac{c^2}{\alpha} \left(\cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) - 1\right), 0, 0 \right) \quad (6.256)$$

en donde sólo se ha remplazado el valor de la aceleración de la gravedad g por la aceleración propia α .

- b Para encontrar la trayectoria de la partícula $x^1 = x^1(x^0)$, medida por el observador inercial Σ , debemos despejar el parámetro τ de la ecuación 6.256 en términos de la primera coordenada x^0 . Entonces como

$$x^0 = \frac{c^2}{\alpha} \sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) \quad (6.257)$$

$$x^1 = \frac{c^2}{\alpha} \left(\cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) - 1\right) \quad (6.258)$$

despejamos las funciones sinh y cosh de las ecuaciones anteriores, elevamos al cuadrado, restamos y utilizamos la identidad

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1 \quad (6.259)$$

de las funciones hiperbólicas, obteniendo

$$\begin{aligned} 1 &= \cosh^2\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) - \sinh^2\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right) \\ &= \left(\frac{\alpha x^1}{c^2} + 1\right)^2 - \left(\frac{\alpha x^0}{c^2}\right)^2 \end{aligned} \quad (6.260)$$

Esta ecuación la podemos escribir en la forma

$$\frac{\left(x^1 + \frac{c^2}{\alpha}\right)^2}{\frac{c^4}{\alpha^2}} - \frac{(x^0)^2}{\frac{c^4}{\alpha^2}} = 1 \quad (6.261)$$

Teniendo en cuenta que la ecuación general de una hipérbola en el plano $x - y$ tiene la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (6.262)$$

en donde (h, k) es el centro de la hipérbola, con asíntotas

$$y = \pm \frac{b}{a}x + \left(k \mp \frac{b}{a}h\right) \quad (6.263)$$

la solución 6.261 representa una hipérbola en el plano $x^1 - x^0$ (recordemos que en relatividad el eje temporal x^0 se toma vertical) con centro en el punto

$$(h, k) = \left(-\frac{c^2}{\alpha}, 0\right) \quad (6.264)$$

y asíntotas con pendiente ± 1 . Esto implica que las asíntotas corresponden al cono de luz del evento

$$(x^0, x^1) = \left(-\frac{c^2}{\alpha}, 0\right) \quad (6.265)$$

dadas por

$$x^0 = \pm \left(x^1 - \frac{c^2}{\alpha}\right) \quad (6.266)$$

En la figura 6.8 se muestra un gráfico de la línea de universo de una partícula con aceleración propia constante. La parte de la hipérbola en el cuadrante superior derecho representa la línea de universo de la partícula, que parte del origen con aceleración propia constante y por lo tanto, asintóticamente la velocidad de la partícula tiende a la velocidad de la luz. La parte inferior de esta rama de la hipérbola, correspondería a una partícula que proviene de la región $x^1 \rightarrow \infty$ en el tiempo $x^0 \rightarrow -\infty$ desacelerando, y la cual alcanza el origen con velocidad cero, en el instante $x^0 = 0$. La rama izquierda de la hipérbola corresponde a una partícula que viene de la región $x^1 \rightarrow -\infty$ desacelerando con α , llegando al reposo en un punto situado en la coordenada $x^1 = -2c^2/\alpha$ y que vuelve a acelerar dirigiéndose a $x^1 \rightarrow -\infty$.

- c** En la parte *b* del presente problema vimos, que el movimiento de una partícula con aceleración propia constante, está representado por una hipérbola en el plano $x^0 - x^1$, la cual tiene como asíntotas el cono de luz del punto

$$(x^0, x^1) = \left(-\frac{c^2}{\alpha}, 0\right) \quad (6.267)$$

Esto significa que la recta con ecuación

$$x^0 = x^1 - \frac{c^2}{\alpha} \quad (6.268)$$

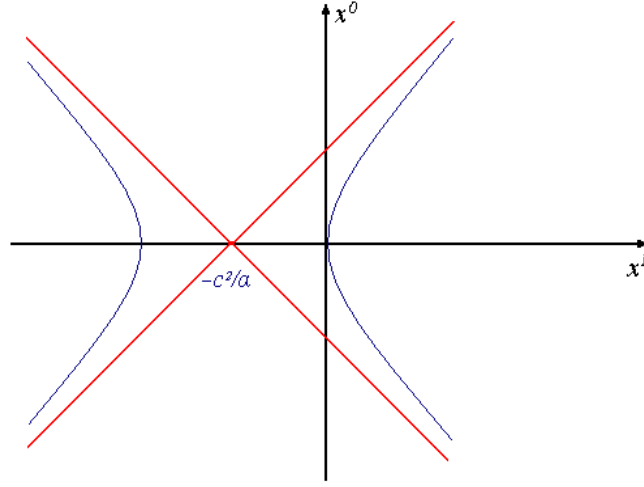


Figura 6.8: **El horizonte de eventos.** Línea de universo con aceleración propia constante.

no intercepta a la hipérbola y representa, en el cuadrante superior derecho, un rayo de luz que parte del origen en el instante

$$x^0 = ct = \frac{c^2}{\alpha} \quad (6.269)$$

en la dirección del eje x^1 positivo. El diagrama espacio-tiempo, figura 6.8, muestra que ninguna señal enviada desde un punto a la izquierda de la asíntota 6.268, puede interceptar la línea de universo de la partícula acelerada del lado derecho del diagrama. Por esta razón se dice que la recta 6.268 representa un horizonte de eventos para la partícula. Notemos, sin embargo, que la partícula si puede enviar una señal hacia la región de la izquierda de esta recta. Una situación similar se presenta para la línea de universo en los cuadrantes de la izquierda.

6.2. Problemas avanzados

1. **Grupo de Lorentz.** Sean $x, y \in \mathcal{M}$ dos cuadvectores y Λ la transformación de Lorentz

$$\Lambda: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \quad (6.270)$$

con $x' = \Lambda x$ y $y' = \Lambda y$.

- a Dado que Λ debe dejar invariante el producto Minkowskiano, tenemos que

$$x' \cdot y' = x'^T \eta y' = x^T \eta y = x \cdot y \quad (6.271)$$

reemplazando los cuadvectores primados en términos de los no primados, se llega a la ecuación

$$x^T \boldsymbol{\eta} y = (\boldsymbol{\Lambda} x)^T \boldsymbol{\eta} (\boldsymbol{\Lambda} y) = x^T \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\Lambda} y \quad (6.272)$$

Puesto que esta ecuación debe cumplirse para todos los cuadvectores, tenemos que las matrices de transformación de Lorentz deben satisfacer la condición

$$\boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\eta} \quad (6.273)$$

La primera propiedad que se deriva de la ecuación anterior, teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes, es que

$$\det |\boldsymbol{\Lambda}| = \pm 1 \quad (6.274)$$

El conjunto de todas las transformaciones de Lorentz, que en la representación matricial, corresponde a todas las matrices 4×4 reales que satisfacen la condición 6.273, forman un grupo no abeliano, llamado el grupo general de Lorentz. Las transformaciones con determinante $+1$ se llaman propias y forman un subgrupo, el grupo de transformaciones propias de Lorentz, pues si $\boldsymbol{\Lambda}_1$ y $\boldsymbol{\Lambda}_2$ son dos transformaciones de Lorentz con determinante $+1$ entonces $\boldsymbol{\Lambda}_1 \boldsymbol{\Lambda}_2$ es de nuevo una transformación con determinante

$$\det |\boldsymbol{\Lambda}_1 \boldsymbol{\Lambda}_2| = \det |\boldsymbol{\Lambda}_1| \det |\boldsymbol{\Lambda}_2| = +1 \quad (6.275)$$

Las transformaciones con determinante -1 se llaman impropias y no forman un subgrupo, pues dos transformaciones impropias sucesivas $\boldsymbol{\Lambda}_1$ y $\boldsymbol{\Lambda}_2$ dan una transformación de Lorentz propia, dado que

$$\det |\boldsymbol{\Lambda}_1 \boldsymbol{\Lambda}_2| = \det |\boldsymbol{\Lambda}_1| \det |\boldsymbol{\Lambda}_2| = (-1)(-1) = +1 \quad (6.276)$$

Ejemplos de transformaciones impropias son, la inversión de ejes espaciales

$$\boldsymbol{\Lambda}_E x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{bmatrix} \quad (6.277)$$

y la inversión temporal

$$\boldsymbol{\Lambda}_T x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (6.278)$$

sin embargo la inversión espacio-temporal es una transformación propia:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{E-T} x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{bmatrix} \quad (6.279)$$

pues $\det |\mathbf{\Lambda}_{E-T}| = +1$. Otra propiedad que se obtiene directamente de la ecuación 6.273 es que el número de parámetros independientes, de una transformación de Lorentz general, es de seis, pues de las 16 ecuaciones de restricción en 6.273 hay solo 10 independientes, dado que la matriz de Minkowski es simétrica

$$\boldsymbol{\eta}^T = \boldsymbol{\eta} \quad (6.280)$$

Así, el sistema de 10 ecuaciones 6.273 independientes implica, que de los 16 elementos matriciales necesarios para representar una transformación de Lorentz Λ , sólomente seis parámetros son independientes. Es decir, una transformación de Lorentz general queda determinada por seis parámetros libres. Estos seis parámetros, escogidos convenientemente, pueden ser interpretados como tres parámetros, que representan rotaciones de los ejes espaciales y tres que representan las componentes de la velocidad relativa entre dos sistemas de referencia inerciales.

b Dada la matriz \mathbf{L} tal que la transformación de Lorentz Λ tiene la forma

$$\mathbf{\Lambda} = e^{\mathbf{L}} \quad (6.281)$$

obtenemos que

$$\det |\mathbf{\Lambda}| = \det |e^{\mathbf{L}}| = e^{Tr\mathbf{L}} \quad (6.282)$$

en donde $Tr\mathbf{L}$ es la traza de la matriz \mathbf{L} . Esta igualdad se puede probar teniendo en cuenta que la matriz $\mathbf{\Lambda}$ tiene determinante diferente de cero y por lo tanto existe una transformación de similitud \mathbf{S} tal que

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S} = \boldsymbol{\lambda} \quad (6.283)$$

y

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S} = \ell \quad (6.284)$$

son matrices diagonales y además esta transformación deja el determinante y la traza de las matrices invariantes. Por lo tanto

$$\det |\mathbf{\Lambda}| = \det |\mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}| = \prod_{\alpha=0}^3 \lambda_{\alpha\alpha} \quad (6.285)$$

donde $\lambda_{\alpha\alpha}$ son elementos de la diagonal de $\boldsymbol{\lambda}$, entonces dado que

$$\lambda_{\alpha\alpha} = e^{\ell_{\alpha\alpha}} \quad (6.286)$$

con $\ell_{\alpha\alpha}$ los elementos de la matriz diagonal ℓ , tenemos que

$$\det |\mathbf{\Lambda}| = \prod_{\alpha=0}^3 e^{\ell_{\alpha\alpha}} = \exp\left(\sum_{\alpha=0}^3 \ell_{\alpha\alpha}\right) = e^{Tr\ell} = e^{Tr\mathbf{L}} \quad (6.287)$$

Si elegimos la matriz \mathbf{L} real, la ecuación 6.281 excluye las transformaciones impropias y además dado que $\det |\Lambda| = 1$ entonces

$$\text{Tr} \mathbf{L} = 0 \quad (6.288)$$

Es decir para transformaciones propias de Lorentz \mathbf{L} es una matriz real sin traza. Teniendo en cuenta que la matriz de Minkowski tiene las siguientes propiedades (por su definición)

$$\boldsymbol{\eta}^T = \boldsymbol{\eta}; \quad \boldsymbol{\eta}^2 = \mathbf{I} \quad (6.289)$$

con \mathbf{I} la matriz identidad, la ecuación 6.273 se puede escribir en la forma

$$\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \quad (6.290)$$

y de la ecuación 6.281 se obtienen las siguientes propiedades

$$\boldsymbol{\Lambda}^T = (e^{\mathbf{L}})^T = e^{\mathbf{L}^T} \quad (6.291)$$

$$\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\eta} = e^{\boldsymbol{\eta} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\eta}} \quad (6.292)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = e^{-\mathbf{L}} \quad (6.293)$$

Estas ecuaciones se pueden probar por cálculo directo, utilizando la definición de la exponencial de una matriz. Por ejemplo veamos la primera ecuación:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}^T &= (e^{\mathbf{L}})^T \\ &= \left(\mathbf{1} + \mathbf{L} + \frac{1}{2!} \mathbf{L}^2 + \dots \right)^T \\ &= \mathbf{1}^T + \mathbf{L}^T + \frac{1}{2!} (\mathbf{L}^2)^T + \dots \\ &= \mathbf{1} + \mathbf{L}^T + \frac{1}{2!} (\mathbf{L}^T)^2 + \dots \\ &= e^{\mathbf{L}^T} \end{aligned} \quad (6.294)$$

como se quería probar. Entonces

$$\boldsymbol{\eta} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\eta} = -\mathbf{L} \quad (6.295)$$

o en forma equivalente

$$[\boldsymbol{\eta} \mathbf{L}]^T = -\boldsymbol{\eta} \mathbf{L} \quad (6.296)$$

es decir la matriz $\boldsymbol{\eta} \mathbf{L}$ es antisimétrica y por lo tanto, la forma más general de la matriz \mathbf{L} , que satisface estas propiedades se puede escribir en la forma

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.297)$$

pues, la matriz \mathbf{L} tiene traza cero y

$$\begin{aligned}
 (\boldsymbol{\eta}\mathbf{L})^T &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{10} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{20} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{30} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \right)^T \\
 &= \begin{bmatrix} L_{00} & -L_{10} & -L_{20} & -L_{30} \\ L_{01} & -L_{11} & -L_{21} & -L_{31} \\ L_{02} & -L_{12} & -L_{22} & -L_{32} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & -L_{33} \end{bmatrix} \quad (6.298)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\boldsymbol{\eta}\mathbf{L} &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{10} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{20} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{30} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -L_{00} & -L_{01} & -L_{02} & -L_{03} \\ L_{10} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{20} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{30} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \quad (6.299)
 \end{aligned}$$

así

$$L_{\alpha\alpha} = -L_{\alpha\alpha}; \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (6.300)$$

y por lo tanto $L_{\alpha\alpha} = 0$,

$$L_{0i} = L_{i0}; \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.301)$$

y

$$L_{ij} = -L_{ji}; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (6.302)$$

Esto muestra que una transformación de Lorentz general, queda determinada por seis parámetros L_{01} , L_{02} , L_{03} , L_{12} , L_{13} y L_{23} independientes.

- c** Dada la forma general de la matriz L , encontrada en el numeral anterior del presente problema ecuación 6.297, es suficiente elegir

$$\vec{\alpha} = (-L_{23}, -L_{13}, -L_{12}); \quad \vec{\zeta} = (-L_{01}, -L_{02}, -L_{03}) \quad (6.303)$$

de tal manera que la matriz L se puede escribir como la combinación lineal:

$$\mathbf{L} = -\vec{\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{R}} - \vec{\zeta} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \quad (6.304)$$

en donde las componentes de los los vectores $\tilde{\mathbf{R}}$ y $\tilde{\mathbf{B}}$ estan dadas por las matrices 1.58, 1.59 y 1.60.

d Consideremos primero la matriz \mathbf{R}_1 y calculemos su cuadrado:

$$\mathbf{R}_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{diag}(00 - 1 - 1) \quad (6.305)$$

la cual es diagonal. Un cálculo similar para las otras matrices conduce a

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2^2 &= \text{diag}(0 - 10 - 1) \\ \mathbf{R}_3^2 &= \text{diag}(0 - 1 - 10) \\ \mathbf{B}_1^2 &= \text{diag}(1100) \\ \mathbf{B}_2^2 &= \text{diag}(1010) \\ \mathbf{B}_3^2 &= \text{diag}(1001) \end{aligned} \quad (6.306)$$

Calculemos ahora $(\vec{\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{R}})^2$ para cualquier vector real unitario $\vec{\alpha}$:

$$\begin{aligned} (\vec{\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{R}})^2 &= (\alpha^1)^2 \mathbf{R}_1^2 + (\alpha^2)^2 \mathbf{R}_2^2 + (\alpha^3)^2 \mathbf{R}_3^2 + \alpha^1 \alpha^2 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \\ &\quad + \alpha^1 \alpha^2 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 + \alpha^1 \alpha^3 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_3 + \alpha^1 \alpha^3 \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_1 \\ &\quad + \alpha^2 \alpha^3 \mathbf{R}_3 + \alpha^2 \alpha^3 \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_2 \end{aligned} \quad (6.307)$$

reemplazando las matrices \mathbf{R}_i tenemos

$$\begin{aligned} &(\vec{\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{R}})^2 \quad (6.308) \\ &= - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha^2)^2 + (\alpha^3)^2 & -\alpha^1 \alpha^2 & -\alpha^1 \alpha^3 \\ 0 & -\alpha^1 \alpha^2 & (\alpha^1)^2 + (\alpha^3)^2 & -\alpha^2 \alpha^3 \\ 0 & -\alpha^1 \alpha^3 & -\alpha^2 \alpha^3 & (\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Multiplicando esta matriz por $\vec{\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{R}}$ y teniendo en cuenta la condición de unitariedad

$$(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 + (\alpha^3)^2 = 1 \quad (6.309)$$

tenemos

$$(\vec{\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{R}})^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^3 & -\alpha^2 \\ 0 & -\alpha^3 & 0 & \alpha^1 \\ 0 & \alpha^2 & -\alpha^1 & 0 \end{bmatrix} = -\vec{\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{R}} \quad (6.310)$$

Un cálculo similar conduce al resultado

$$(\vec{\zeta} \cdot \tilde{\mathbf{B}})^3 = \vec{\zeta} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \quad (6.311)$$

por lo tanto cualquier potencia de las matrices \mathbf{R}_i y \mathbf{B}_j , $i, j = 1, 2, 3$, puede ser expresada como un múltiplo de la matriz o de su cuadrado, pues por ejemplo, si tomamos el vector unitario $\vec{\zeta} = (1, 0, 0)$ tenemos que

$$\left(\vec{\zeta} \cdot \vec{\mathbf{B}}\right)^3 = \mathbf{B}_1^3 = \mathbf{B}_1 \quad (6.312)$$

y

$$\mathbf{B}_1^4 = \mathbf{B}_1^3 \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1^2 \quad (6.313)$$

con un resultado similar para las demás matrices.

e Consideremos en primer lugar el caso particular

$$\vec{\alpha} = (0, 0, 0); \quad \vec{\zeta} = (\zeta, 0, 0) \quad (6.314)$$

Entonces, la matriz de transformación de Lorentz $\mathbf{\Lambda}$ está dada por

$$\mathbf{\Lambda} = e^{\mathbf{L}} = e^{-\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{R}} - \vec{\zeta} \cdot \vec{\mathbf{B}}} = e^{-\zeta \mathbf{B}_1} \quad (6.315)$$

Para calcular la función exponencial hacemos uso de la expansión en serie de Taylor

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I} - \zeta \mathbf{B}_1 + \frac{(\zeta \mathbf{B}_1)^2}{2!} - \frac{(\zeta \mathbf{B}_1)^3}{3!} + \frac{(\zeta \mathbf{B}_1)^4}{4!} - \dots \quad (6.316)$$

Utilizando el resultado de la parte *d* del presente problema para las potencias de la matriz B_1 , la serie anterior se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} &= \mathbf{I} + \left(-\zeta \mathbf{B}_1 - \frac{(\zeta \mathbf{B}_1)^3}{3!} - \frac{(\zeta \mathbf{B}_1)^5}{5!} - \dots \right) \\ &\quad + \left(\frac{(\zeta \mathbf{B}_1)^2}{2!} + \frac{(\zeta \mathbf{B}_1)^4}{4!} + \frac{(\zeta \mathbf{B}_1)^6}{6!} + \dots \right) \\ &= \mathbf{I} - \left(\zeta + \frac{\zeta^3}{3!} + \frac{\zeta^5}{5!} + \dots \right) \mathbf{B}_1 \\ &\quad + \left(\frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} + \frac{\zeta^6}{6!} + \dots \right) \mathbf{B}_1^2 \end{aligned} \quad (6.317)$$

Las expansiones en potencias de ζ en la expresión anterior, corresponden a las series de Taylor del \sinh y \cosh respectivamente, salvo el primer término de la serie de \cosh , el cual lo sumamos y lo restamos, así

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{1} - \mathbf{B}_1^2 - \mathbf{B}_1 \sinh \zeta + \mathbf{B}_1^2 \cosh \zeta \quad (6.318)$$

Remplazando explícitamente las matrices B_1 , su cuadrado y la matriz identidad \mathbf{I} , tenemos

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \cosh \zeta & -\sinh \zeta & 0 & 0 \\ -\sinh \zeta & \cosh \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.319)$$

la cual coincide con la transformación de Lorentz usual (ver ecuación 6.101), en donde el parámetro ζ está relacionado con la velocidad v del sistema de referencia Σ' respecto a Σ por la ecuación

$$\tanh \zeta = \frac{v}{c} \quad (6.320)$$

Consideremos ahora el segundo caso particular

$$\vec{\alpha} = (0, 0, \alpha); \quad \vec{\zeta} = (0, 0, 0) \quad (6.321)$$

y procedamos en forma similar al caso anterior:

$$\mathbf{\Lambda} = e^{\mathbf{L}} = e^{-\vec{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{R}} - \vec{\zeta} \cdot \hat{\mathbf{B}}} = e^{-\alpha \mathbf{R}_1} \quad (6.322)$$

Expandiendo la exponencial en serie de Taylor y utilizando las propiedades de las potencias de la matriz \mathbf{R}_1 , tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} &= \mathbf{I} - \alpha \mathbf{R}_1 + \frac{(\alpha \mathbf{R}_1)^2}{2!} - \frac{(\alpha \mathbf{R}_1)^3}{3!} + \dots \\ &= I - \alpha \mathbf{R}_1 + \frac{(\alpha \mathbf{R}_1)^2}{2!} + \frac{\alpha^3 \mathbf{R}_1}{3!} - \dots \end{aligned} \quad (6.323)$$

reemplazando las matrices \mathbf{I} , \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_1^2 , recordando las expansiones en serie de Taylor para las funciones $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$, tenemos que la transformación de Lorentz está dada por

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.324)$$

la cual representa una rotación rígida de los ejes espaciales en un ángulo α alrededor del eje z . A partir de estos resultados es fácil convencerse que las matrices \mathbf{R}_i corresponden a rotaciones rígidas de los ejes espaciales y las matrices \mathbf{B}_i a transformaciones puras de Lorentz (boost). Así por ejemplo, una transformación de la forma

$$\mathbf{\Lambda} = e^{-\vec{\zeta} \cdot \hat{\mathbf{B}}} \quad (6.325)$$

representa una transformación pura de Lorentz en la dirección del vector $\vec{\zeta}$, el cual está relacionado con la velocidad del sistema de referencia por

$$\vec{\zeta} = \hat{\beta} \tanh^{-1} \beta \quad (6.326)$$

con

$$\vec{\beta} = \vec{v}/c \quad (6.327)$$

2. **Transformación general de Lorentz.** Teniendo en cuenta el resultado del problema anterior, la transformación pura de Lorentz más general está dada por la ecuación 6.325, en donde el parámetro $\vec{\zeta}$ se relaciona con la velocidad \vec{v} por las ecuaciones 6.326 y 6.327. Entonces, expandiendo en serie de Taylor la ecuación

$$\mathbf{\Lambda} = e^{-\hat{\beta} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \tanh^{-1} \beta} \quad (6.328)$$

en donde $\hat{\beta}$ es un vector unitario en la dirección de la velocidad, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} = & \mathbf{I} - \hat{\beta} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \tanh^{-1} \beta + \frac{(\hat{\beta} \cdot \tilde{\mathbf{B}})^2 (\tanh^{-1} \beta)^2}{2!} - \\ & \frac{(\hat{\beta} \cdot \tilde{\mathbf{B}})^3 (\tanh^{-1} \beta)^3}{3!} + \frac{(\hat{\beta} \cdot \tilde{\mathbf{B}})^4 (\tanh^{-1} \beta)^4}{4!} - \dots \end{aligned} \quad (6.329)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la matriz $\tilde{\mathbf{B}}$, deducidas en el problema anterior (ecuación 6.311), y agrupando los términos en $\vec{\zeta} \cdot \tilde{\mathbf{B}}$ y su cuadrado, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} = & \mathbf{I} - \hat{\beta} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \left(\tanh^{-1} \beta + \frac{(\tanh^{-1} \beta)^3}{3!} + \dots \right) \\ & + (\hat{\beta} \cdot \tilde{\mathbf{B}})^2 \left(\frac{(\tanh^{-1} \beta)^2}{2!} + \frac{(\tanh^{-1} \beta)^4}{4!} - \dots \right) \end{aligned} \quad (6.330)$$

Las series entre paréntesis en la ecuación anterior corresponden a las expansiones en serie de Taylor del $\sinh(\tanh^{-1} \beta)$ y del $\cosh(\tanh^{-1} \beta)$ por lo tanto

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I} - \vec{\zeta} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \sinh(\tanh^{-1} \beta) + (\vec{\zeta} \cdot \tilde{\mathbf{B}})^2 \cosh(\tanh^{-1} \beta) \quad (6.331)$$

teniendo en cuenta las ecuaciones 6.99 y 6.100 que relacionan la velocidad con las funciones hiperbólicas

$$\sinh(\tanh^{-1} \beta) = \beta\gamma \quad (6.332)$$

$$\cosh(\tanh^{-1} \beta) = \gamma \quad (6.333)$$

la transformación de Lorentz toma la forma

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I} - \beta\gamma \vec{\zeta} \cdot \tilde{\mathbf{B}} + \gamma (\vec{\zeta} \cdot \tilde{\mathbf{B}})^2 \quad (6.334)$$

Calculando ahora las matrices $\vec{\zeta} \cdot \tilde{\mathbf{B}}$ y $(\vec{\zeta} \cdot \tilde{\mathbf{B}})^2$, utilizando las definiciones

para las matrices \mathbf{B} (ecuaciones 1.58, 1.59 y 1.60), obtenemos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma\hat{\beta}_1 & -\beta\gamma\hat{\beta}_2 & -\beta\gamma\hat{\beta}_3 \\ -\beta\gamma\hat{\beta}_1 & 1 + \hat{\beta}_1(\gamma - 1) & \hat{\beta}_1\hat{\beta}_2(\gamma - 1) & \hat{\beta}_1\hat{\beta}_3(\gamma - 1) \\ -\beta\gamma\hat{\beta}_2 & \hat{\beta}_1\hat{\beta}_2(\gamma - 1) & 1 + \hat{\beta}_2(\gamma - 1) & \hat{\beta}_2\hat{\beta}_3(\gamma - 1) \\ -\beta\gamma\hat{\beta}_3 & \hat{\beta}_1\hat{\beta}_3(\gamma - 1) & \hat{\beta}_2\hat{\beta}_3(\gamma - 1) & 1 + \hat{\beta}_3(\gamma - 1) \end{bmatrix} \quad (6.335)$$

Dado que

$$\hat{\beta} = \frac{\vec{\beta}}{\beta} = \frac{1}{\beta} (\beta_x, \beta_y, \beta_z) = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) \quad (6.336)$$

con $\beta_x = v_x/c$ etc., llegamos finalmente a la matriz de Lorentz general

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta_x\gamma & -\beta_y\gamma & -\beta_z\gamma \\ -\beta_x\gamma & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_y\gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_z\gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\beta^2} \end{bmatrix} \quad (6.337)$$

A partir de esta matriz, podemos obtener las ecuaciones generales para la transformación de las coordenadas entre los sistemas de referencia inerciales Σ y Σ' ,

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta_x\gamma & -\beta_y\gamma & -\beta_z\gamma \\ -\beta_x\gamma & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_y\gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_z\gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\beta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (6.338)$$

las cuales se pueden reescribir en la forma usual

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) \quad (6.339)$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{x}) \vec{\beta} - \gamma x^0 \vec{\beta} \quad (6.340)$$

3. **Algebra de Lie del grupo de Lorentz.** La demostración de las propiedades del conmutador es directa a partir de la definición y de las propiedades del producto y la suma de matrices, recordando que el producto de matrices no es conmutativo.

a

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -(\mathbf{BA} - \mathbf{AB}) = -[\mathbf{B}, \mathbf{A}] \quad (6.341)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}, \mathbf{B} + \mathbf{C}] &= \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) - (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} - \mathbf{BA} - \mathbf{CA} \\ &= \mathbf{AB} - \mathbf{BA} + \mathbf{AC} - \mathbf{CA} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}] \end{aligned} \quad (6.342)$$

en donde se ha hecho uso que la suma de matrices es conmutativa.

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A}, \mathbf{BC}] &= \mathbf{ABC} - \mathbf{BCA} = \mathbf{ABC} - \mathbf{BAC} - \mathbf{BCA} + \mathbf{BAC} \\
 &= (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\mathbf{C} + \mathbf{B}(\mathbf{AC} - \mathbf{CA}) \\
 &= [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]
 \end{aligned} \tag{6.343}$$

en el segundo paso se ha sumado y restado el término \mathbf{BAC} .

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A}, \mathbf{B}]^T &= (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})^T = (\mathbf{AB})^T - (\mathbf{BA})^T \\
 &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T - \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T = [\mathbf{B}^T, \mathbf{A}^T]
 \end{aligned} \tag{6.344}$$

Para probar la identidad de Jacobi basta con desarrollar explícitamente los conmutadores y aplicar las propiedades 1.72, 1.73 y 1.74 demostradas:

$$\begin{aligned}
 &[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] \\
 &= [\mathbf{A}, \mathbf{BC} - \mathbf{CB}] + [\mathbf{C}, \mathbf{AB} - \mathbf{BA}] + [\mathbf{B}, \mathbf{CA} - \mathbf{AC}] \\
 &= [\mathbf{A}, \mathbf{BC}] - [\mathbf{A}, \mathbf{CB}] + [\mathbf{C}, \mathbf{AB}] - [\mathbf{C}, \mathbf{BA}] \\
 &\quad + [\mathbf{B}, \mathbf{CA}] - [\mathbf{B}, \mathbf{AC}] \\
 &= 2[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + 2\mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}] + 2[\mathbf{C}, \mathbf{A}]\mathbf{B} \\
 &\quad + 2\mathbf{C}[\mathbf{B}, \mathbf{A}] + 2\mathbf{A}[\mathbf{C}, \mathbf{B}] + 2[\mathbf{B}, \mathbf{C}]\mathbf{A} \\
 &= 2\mathbf{ABC} - 2\mathbf{BAC} + 2\mathbf{BAC} - 2\mathbf{BCA} + 2\mathbf{CAB} - 2\mathbf{ACB} \\
 &\quad + 2\mathbf{CBA} - 2\mathbf{CAB} + 2\mathbf{ACB} - 2\mathbf{ABC} + 2\mathbf{BCA} - 2\mathbf{CBA} \\
 &\equiv 0
 \end{aligned} \tag{6.345}$$

b La prueba del álgebra de Lie para las matrices \mathbf{R}_i y \mathbf{B}_j se realiza directamente calculando los conmutadores. Ilustraremos un sólo caso de cada una de las ecuaciones. Consideremos en primer lugar el conmutador de \mathbf{R}_1 con \mathbf{R}_2 :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_3 = \epsilon_{123} R_3
 \end{aligned} \tag{6.347}$$

Similarmente calculemos el conmutador de \mathbf{R}_1 y \mathbf{B}_1 :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{R}_1, \mathbf{B}_1] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \epsilon_{11k} \mathbf{B}_k = \mathbf{0} \quad (6.348)
 \end{aligned}$$

El conmutador de \mathbf{R}_1 con \mathbf{B}_2 está dado por:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{R}_1, \mathbf{B}_2] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_3 = \epsilon_{123} \mathbf{B}_3 \quad (6.349)
 \end{aligned}$$

Finalmente calculemos el conmutador $[\mathbf{B}_3, \mathbf{B}_2]$:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{B}_3, \mathbf{B}_2] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_3 = -\epsilon_{321} \mathbf{R}_3 \quad (6.350)
 \end{aligned}$$

pues $\epsilon_{321} = -1$ puesto que 321 es una permutación impar de 123. En general, cualquier conjunto de seis matrices (u operadores de

cualquier naturaleza), que obedezcan el álgebra de Lie del grupo de Lorentz, constituyen una representación de las transformaciones de Lorentz. Teniendo en cuenta que los 6 parámetros necesarios para describir una transformación propia de Lorentz, se pueden elegir de manera arbitraria, se debe utilizar, en general, otro conjunto de seis matrices de representación, las cuales, no necesariamente, tienen un significado geométrico o físico explícito, como fue el caso que consideramos para las matrices R_i y B_j , y los parámetros $\vec{\alpha}$ y $\vec{\zeta}$.

Capítulo 7

Efecto Doppler

1. **Cuadrivector de onda.** Sean λ , ω y \vec{k} la longitud de onda, la frecuencia angular y el vector de onda, medidos por el observador Σ y λ' , ω' y \vec{k}' las cantidades correspondientes para el observador Σ' . A partir de las ecuaciones de transformación 2.11, para las componentes del cuadrivector de onda y su definición en términos de la frecuencia y número de onda, ecuación 2.8, obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \beta k_x\right) \quad (7.1)$$

$$k_{x'} = \gamma\left(k_x - \beta\frac{\omega}{c}\right) \quad (7.2)$$

$$k_{y'} = k_y \quad (7.3)$$

$$k_{z'} = k_z \quad (7.4)$$

La primera de estas ecuaciones la podemos escribir también en la forma

$$\nu' = \gamma(\nu - vk_x) \quad (7.5)$$

Dado que la relación de dispersión para las ondas electromagnéticas en el vacío es la misma, i.e. $\lambda\nu' = c$, entonces de esta relación se obtiene la longitud de onda, dada la frecuencia. También se puede obtener la relación entre las normas del vector de onda, medidas en Σ y Σ' , a partir de la relación entre las longitudes de onda, o calculandola directamente de las ecuaciones de transformación anteriores:

$$\begin{aligned} |k'| &= \sqrt{k_{x'}^2 + k_{y'}^2 + k_{z'}^2} \\ &= \sqrt{\gamma^2\left(k_x^2 + \beta^2\frac{\omega^2}{c^2} - 2k_x\beta\frac{\omega}{c}\right) + k_y^2 + k_z^2} \\ &= \sqrt{|k|^2 + k_x^2\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\beta^2|k|^2 - 2\gamma^2\beta k_x k} \\ &= \sqrt{|k|^2\gamma^2 + k_x^2\beta^2\gamma^2 - 2\gamma^2\beta k_x|k|} \\ &= \gamma||k| - k_x\beta| \end{aligned} \quad (7.6)$$

2. **Efecto Doppler longitudinal.** Consideremos un sistema de referencia Σ' ligado a la fuente y con origen en ella y relacionado con el sistema Σ de la manera usual. Supongamos que en algún instante $t > 0$ la fuente emite ondas monocromáticas en la dirección del eje x negativo, como se muestra en la figura 7.1. Las componentes del cuadrivector de onda, en el sistema

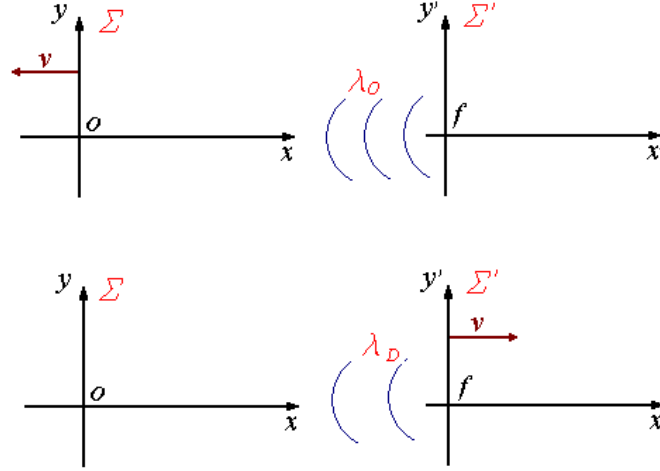


Figura 7.1: **Efecto Doppler longitudinal.** Sistema de referencia inercial para el observador Σ y para la fuente Σ'

de referencia Σ' , para una onda plana monocromática que se mueve hacia el origen del sistema Σ (ver figura 7.1 superior), están dadas por:

$$k = (k'^0, k'^1, k'^2, k'^3) = \left(\frac{\omega_0}{c}, k_{x0}, 0, 0\right) \quad (7.7)$$

en donde

$$k_{x0} = -|\vec{k}| \hat{x} \quad (7.8)$$

Debido a la relación de dispersión, ecuación 2.9, tenemos que

$$\frac{\omega_0^2}{c^2} - |\vec{k}|^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} - k_{x0}^2 = 0 \quad (7.9)$$

y por lo tanto, las componentes del cuadrivector de onda toman la forma

$$k = (k'^0, k'^1, k'^2, k'^3) = \left(\frac{\omega_0}{c}, -\frac{\omega_0}{c}, 0, 0\right) \quad (7.10)$$

Para encontrar la frecuencia medida por el detector, situado en el origen del sistema Σ , aplicamos la transformación de Lorentz inversa (de Σ' a Σ)

para las componentes del cuadvivector de onda. Si llamamos

$$k = (k^0, k^1, k^2, k^3) = \left(\frac{\omega_D}{c}, k_{xD}, k_{yD}, k_{zD}\right) \quad (7.11)$$

a las componentes del cuadvivector de onda medidas en el sistema Σ , tenemos

$$\frac{\omega_D}{c} = \gamma(-v)\left(\frac{\omega_0}{c} + \beta k_{x0}\right) \quad (7.12)$$

$$k_{xD} = \gamma(-v)\left(k_{x0} + \beta\frac{\omega_0}{c}\right) \quad (7.13)$$

$$k_{yD} = k_{zD} = 0 \quad (7.14)$$

Entonces, de la primera ecuación anterior obtenemos

$$\omega_D = \gamma\omega_0(1 - \beta) = \omega_0\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (7.15)$$

La segunda ecuación nos conduce a la misma relación encontrada y por lo tanto no da nueva información. Si la fuente se está moviendo hacia el detector basta con cambiar $v \rightarrow -v$ y obtenemos que la frecuencia detectada en Σ está dada por

$$\omega_D = \omega_0\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (7.16)$$

Notemos que en el primer caso, cuando la fuente se aleja, la frecuencia detectada es menor que la frecuencia emitida y se conoce en la literatura como “corrimiento al rojo”, mientras que en el segundo caso, cuando la fuente se acerca, la frecuencia medida es mayor y se conoce como “corrimiento al azul”. Esta denominación se refiere a que, en el espectro visible, el rojo corresponde a frecuencias menores y el azul a frecuencias mayores. El efecto Doppler longitudinal clásico (no relativista) es un fenómeno típicamente ondulatorio, que se presenta en todos los fenómenos ondulatorios, incluido las ondas electromagnéticas. Clásicamente el corrimiento Doppler longitudinal está dado por

$$\omega_D = \omega_0\frac{c - v}{c} \quad (7.17)$$

Este resultado lo podemos obtener a partir de la ecuación 7.15, si expandimos el factor γ en potencias de v/c :

$$\gamma(v) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \mathcal{O}(v^4/c^4) \quad (7.18)$$

reemplazando en la ecuación 7.15 tenemos

$$\omega_D = \omega_0\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \mathcal{O}(v^4/c^4)\right) = \omega_0\left(1 - \frac{v}{c}\right) + \omega_0\mathcal{O}(v^2/c^2) \quad (7.19)$$

en donde no se han escrito explícitamente términos cuadráticos en β , los cuales corresponden a la corrección relativista del resultado clásico.

3. **Efecto Doppler transversal y aberración de la luz.** Consideremos un sistema de referencia Σ' ligado a la fuente relacionado con el sistema Σ de la manera usual y con la fuente en algún punto sobre el eje y' positivo. Las componentes del cuadrivector de onda, medidas en el sistema de la fuente, están dadas por

$$k = (k'^0, k'^1, k'^2, k'^3) = \left(\frac{\omega_0}{c}, 0, k_{y0}, 0\right) = \left(\frac{\omega_0}{c}, 0, -\frac{\omega_0}{c}, 0\right) \quad (7.20)$$

en donde la última igualdad se obtiene de la relación de dispersión. Las componentes del cuadrivector de onda

$$\left(\frac{\omega_D}{c}, k_{xD}, k_{yD}, k_{zD}\right) \quad (7.21)$$

en el sistema Σ se obtienen por una transformación de Lorentz de $\Sigma' \rightarrow \Sigma$, así

$$\frac{\omega_D}{c} = \gamma(-v)\left(\frac{\omega_0}{c} + \beta\right) \quad (7.22)$$

$$k_{xD} = \gamma(-v)\left(k_{x0} + \beta\frac{\omega_0}{c}\right) \quad (7.23)$$

$$k_{yD} = k_{y0} \quad (7.24)$$

$$k_{zD} = 0 \quad (7.25)$$

Dado que en Σ' la componente k_{x0} se anula, la primera ecuación implica que

$$\omega_D = \gamma(v)\omega_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (7.26)$$

Esta relación es conocida como efecto Doppler transversal y corresponde a un efecto netamente relativista, pues su origen es debido al efecto de dilatación temporal y no tiene correspondencia a nivel clásico, pues en primera aproximación $\gamma(v) \sim 1$. Las ecuaciones de transformación 7.23 y 7.24 implican que

$$k_{xD} = \gamma(v)\frac{v}{c^2}\omega_0 \quad (7.27)$$

$$k_{yD} = -\frac{\omega_0}{c} \quad (7.28)$$

esto significa que para el detector el frente de ondas incide formando un ángulo de

$$\tan \theta = \frac{k_{xD}}{k_{yD}} = -\gamma(v)\frac{v}{c} \quad (7.29)$$

con respecto al eje y . Este efecto es conocido como aberración de la luz y fue observado con las estrellas situadas perpendicular al plano de la órbita terrestre. El cálculo clásico y el valor observado está dado por

$$\tan \theta = -\frac{v}{c} \quad (7.30)$$

el cual corresponde al límite clásico de la ecuación 7.29, en donde se hace la aproximación $\gamma \sim 1$.

4. **Comunicación espacial con Doppler.** De igual manera que en el problema 10 del primer capítulo, supongamos que la nave A se está alejando de la tierra. Para resolver este problema, utilizando el efecto Doppler, consideremos que las dos señales enviadas desde la tierra con una diferencia de tiempos t_0 corresponden a dos frentes de onda consecutivos y por lo tanto t_0 representa el periodo de una onda y así la frecuencia angular de la señal es

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{t_0} \quad (7.31)$$

a Consideremos primero el caso de la nave A la cual se aleja de la fuente (tierra) y por lo tanto podemos aplicar el efecto Doppler longitudinal (problema 2) ecuación 7.15:

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (7.32)$$

así, la diferencia de tiempos $\Delta t'_A$ entre las dos señales medidas por la nave A es

$$\Delta t'_A = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega_0} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = t_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (7.33)$$

Para el caso de la nave B , la cual se está acercando a la fuente, basta con cambiar $v \rightarrow -v$, por lo tanto

$$\Delta t'_B = t_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (7.34)$$

b El cálculo de la diferencia de tiempos de los pulsos que llegan a la tierra procede en forma similar. Para el caso de la nave A podemos considerar que los pulsos reflejados en la nave, corresponden a un frente de ondas emitido por la nave A con una frecuencia ω_D y por lo tanto, aplicando efecto Doppler longitudinal, en la tierra se detecta un frente de ondas de frecuencia

$$\omega_T = \omega_D \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (7.35)$$

reemplazando la ecuación 7.32 para ω_D tenemos

$$\omega_T = \omega_0 \frac{1-\beta}{1+\beta} \quad (7.36)$$

y la diferencia de tiempos de la llegada de los dos pulsos está dada por

$$\Delta t_{TA} = \frac{2\pi}{\omega_T} = t_0 \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad (7.37)$$

Para calcular la diferencia de tiempos de la nave B es suficiente cambiar $v \rightarrow -v$:

$$\Delta t_{TB} = t_0 \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \quad (7.38)$$

5. **Expansión del universo.** El factor de corrimiento está definido como

$$z = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \quad (7.39)$$

Remplazando los valores para la longitud de onda propia y observada de la línea H_α obtenemos

$$z = \frac{6650}{6563} - 1 = 1.3256 \times 10^{-2} \quad (7.40)$$

Teniendo en cuenta que el corrimiento es hacia el rojo, pues $z > 0$, expresemos la velocidad en términos del corrimiento al rojo. De la ecuación 7.15 tenemos que la frecuencia detectada está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \omega_0 \quad (7.41)$$

en donde $\beta = v/c$ la velocidad con que se está alejando la galaxia y ω_0 es la frecuencia propia de emisión. Teniendo en cuenta la relación entre frecuencia angular y longitud de onda

$$\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \quad (7.42)$$

tenemos que

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = z + 1 \quad (7.43)$$

despejando la velocidad en función de z obtenemos

$$\beta = \frac{(z + 1)^2 - 1}{(z + 1)^2 + 1} \quad (7.44)$$

entonces remplazando

$$\beta = \frac{(1.3256 \times 10^{-2} + 1)^2 - 1}{(1.3256 \times 10^{-2} + 1)^2 + 1} = 1.3168 \times 10^{-2} \quad (7.45)$$

6. **Ley de reflexión en espejos planos.** Considérese el sistema de referencia de Laboratorio $L\Sigma$, con respecto al cual el plano del espejo está en el plano $y - z$ y se está moviendo con velocidad $\vec{v} = -v\hat{x}$ y sin pérdida de generalidad el rayo de luz se mueve en el plano $x - y$ hacia el espejo. (ver figura 7.2) Las componentes del cudrivector de onda k_i del rayo incidente,

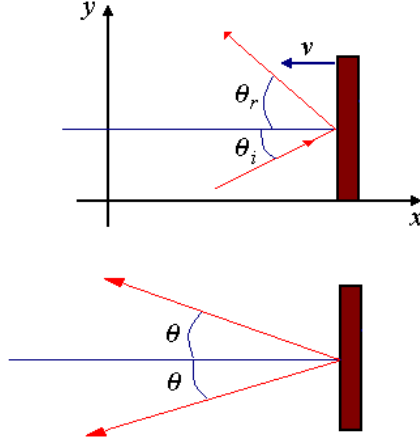


Figura 7.2: **Ley de reflexión en espejos planos.** Reflexión sobre espejo móvil normal al plano del espejo

en el sistema laboratorio, están dadas por:

$$\begin{aligned} k_i &= (k_i^0, k_i^1, k_i^2, k_i^3) \\ &= \left(\frac{\omega_i}{c}, \frac{\omega_i}{c} \cos \theta_i, \frac{\omega_i}{c} \sin \theta_i, 0 \right) \end{aligned} \quad (7.46)$$

Considérese ahora un sistema de referencia $^E\Sigma$ ligado al espejo con sus ejes paralelos a los ejes del sistema $^L\Sigma$. Las componentes del cuadrivector de onda incidente en el sistema de referencia del espejo

$$^E k_i = (^E k_i^0, ^E k_i^1, ^E k_i^2, ^E k_i^3) \quad (7.47)$$

se obtienen a partir de k_i por una transformación de Lorentz usual de $^L\Sigma$ a $^E\Sigma$ con velocidad $-v$. Así, las componentes no nulas son

$$\begin{aligned} ^E k_i^0 &= \gamma (k_i^0 + \beta k_i^1) \\ &= \gamma \left(\frac{\omega_i}{c} + \beta \frac{\omega_i}{c} \cos \theta_i \right) \\ &= \gamma \frac{\omega_i}{c} (1 + \beta \cos \theta_i) \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$\begin{aligned} ^E k_i^1 &= \gamma (k_i^1 + \beta k_i^0) \\ &= \gamma \left(\frac{\omega_i}{c} \cos \theta_i + \beta \frac{\omega_i}{c} \right) \\ &= \gamma \frac{\omega_i}{c} (\cos \theta_i + \beta) \end{aligned} \quad (7.49)$$

$${}^E k_i^2 = k_i^2 = \frac{\omega_i}{c} \sin \theta_i \quad (7.50)$$

En el sistema de referencia del espejo, el rayo de luz se refleja siguiendo la ley de ángulo de incidencia igual al ángulo de reflexión, entonces el cuadrivector de onda reflejado en ${}^E \Sigma$ tiene componentes dadas por

$$\begin{aligned} {}^E k_r &= ({}^E k_r^0, {}^E k_r^1, {}^E k_r^2, {}^E k_r^3) \\ &= \left(\gamma \frac{\omega_i}{c} (1 + \beta \cos \theta_i), -\gamma \frac{\omega_i}{c} (\cos \theta_i + \beta), \frac{\omega_i}{c} \sin \theta_i \right) \end{aligned} \quad (7.51)$$

Realizando la transformación de Lorentz inversa se obtienen las componentes del cuadrivector de onda reflejado k_r en el sistema laboratorio, así

$$\begin{aligned} k_r^0 &= \gamma ({}^E k_r^0 - \beta {}^E k_r^1) \\ &= \gamma \left(\gamma \frac{\omega_i}{c} (1 + \beta \cos \theta_i) + \beta \gamma \frac{\omega_i}{c} (\cos \theta_i + \beta) \right) \\ &= \gamma^2 \frac{\omega_i}{c} (1 + 2\beta \cos \theta_i + \beta^2) \end{aligned} \quad (7.52)$$

$$\begin{aligned} k_r^1 &= \gamma ({}^E k_r^1 - \beta {}^E k_r^0) \\ &= \gamma \left(-\gamma \frac{\omega_i}{c} (\cos \theta_i + \beta) - \beta \gamma \frac{\omega_i}{c} (1 + \beta \cos \theta_i) \right) \\ &= -\gamma^2 \frac{\omega_i}{c} (\cos \theta_i + 2\beta + \beta^2 \cos \theta_i) \end{aligned} \quad (7.53)$$

$$k_r^2 = {}^E k_r^2 = \frac{\omega_i}{c} \sin \theta_i \quad (7.54)$$

por lo tanto la frecuencia del rayo reflejo cambia y está dada por

$$\omega_r = \omega_i \gamma^2 (1 + 2\beta \cos \theta_i + \beta^2) \quad (7.55)$$

y el ángulo de reflexión θ_r está dado por (medido con respecto a la normal)

$$\begin{aligned} \cos \theta_r &= \frac{|k_r^1|}{|\vec{k}_r|} = \frac{|k_r^1|}{k_r^0} \\ &= \frac{\gamma^2 \frac{\omega_i}{c} (\cos \theta_i + 2\beta + \beta^2 \cos \theta_i)}{\gamma^2 \frac{\omega_i}{c} (1 + 2\beta \cos \theta_i + \beta^2)} \\ &= \frac{2\beta + (1 + \beta^2) \cos \theta_i}{1 + 2\beta \cos \theta_i + \beta^2} \end{aligned} \quad (7.56)$$

Considérese ahora el caso del espejo moviéndose con velocidad constante en el plano del espejo. Sin pérdida de generalidad, se asume que el espejo está en el plano $x - z$ y se mueve con velocidad v en la dirección del eje x positivo del sistema laboratorio y el rayo de luz se mueve en el plano $x - y$ e incide en el espejo con un ángulo θ_i , respecto a la normal. Entonces, las

componentes del cuadvivector de onda incidente, en el sistema laboratorio, están dadas por

$$\begin{aligned} k_i &= (k_i^0, k_i^1, k_i^2, k_i^3) \\ &= \left(\frac{\omega_i}{c}, \frac{\omega_i}{c} \sin \theta_i, \frac{\omega_i}{c} \cos \theta_i, 0 \right) \end{aligned} \quad (7.57)$$

Pasando al sistema de referencia del espejo (ahora con velocidad v) las componentes del cuadvivector de onda incidente

$${}^E k_i = ({}^E k_i^0, {}^E k_i^1, {}^E k_i^2, {}^E k_i^3) \quad (7.58)$$

están dadas por

$$\begin{aligned} {}^E k_i^0 &= \gamma (k_i^0 + \beta k_i^1) \\ &= \gamma \left(\frac{\omega_i}{c} - \beta \frac{\omega_i}{c} \sin \theta_i \right) \\ &= \gamma \frac{\omega_i}{c} (1 - \beta \sin \theta_i) \end{aligned} \quad (7.59)$$

$$\begin{aligned} {}^E k_i^1 &= \gamma (k_i^1 + \beta k_i^0) \\ &= \gamma \left(\frac{\omega_i}{c} \sin \theta_i + \beta \frac{\omega_i}{c} \right) \\ &= \gamma \frac{\omega_i}{c} (\sin \theta_i + \beta) \end{aligned} \quad (7.60)$$

$${}^E k_i^2 = k_i^2 = \frac{\omega_i}{c} c \cos \theta_i \quad (7.61)$$

En el sistema de referencia del espejo, el rayo de luz se refleja siguiendo la ley de ángulo de incidencia igual al ángulo de reflexión y por lo tanto, las componentes del cuadvivector de onda reflejado en ${}^E \Sigma$ son

$$\begin{aligned} {}^E k_r &= ({}^E k_r^0, {}^E k_r^1, {}^E k_r^2, {}^E k_r^3) \\ &= \left(\gamma \frac{\omega_i}{c} (1 - \beta \sin \theta_i), \gamma \frac{\omega_i}{c} (\sin \theta_i + \beta), -\frac{\omega_i}{c} \cos \theta_i, 0 \right) \end{aligned} \quad (7.62)$$

Aplicando la transformación de Lorentz inversa se obtienen las componentes del cuadvivector de onda reflejado k_r en el sistema laboratorio, así

$$\begin{aligned} k_r^0 &= \gamma ({}^E k_r^0 + \beta {}^E k_r^1) \\ &= \gamma \left(\gamma \frac{\omega_i}{c} (1 - \beta \sin \theta_i) + \beta \gamma \frac{\omega_i}{c} (\sin \theta_i + \beta) \right) \\ &= \gamma^2 \frac{\omega_i}{c} (1 - \beta^2) \end{aligned} \quad (7.63)$$

$$= \frac{\omega_i}{c} \quad (7.64)$$

es decir la frecuencia no cambia y

$$\begin{aligned}
 k_r^1 &= \gamma \left({}^E k_r^1 - \beta {}^E k_r^0 \right) \\
 &= \gamma \left(\gamma \frac{\omega_i}{c} (\sin \theta_i - \beta) + \beta \gamma \frac{\omega_i}{c} (1 - \beta \sin \theta_i) \right) \\
 &= \gamma^2 \frac{\omega_i}{c} \sin \theta_i (1 - \beta^2) \\
 &= \frac{\omega_i}{c} \sin \theta_i
 \end{aligned} \tag{7.65}$$

$$k_r^2 = {}^E k_r^2 = -\frac{\omega_i}{c} \cos \theta_i \tag{7.67}$$

por lo tanto el ángulo de reflexión es (medido con respecto a la normal)

$$\begin{aligned}
 \cos \theta_r &= \frac{|k_r^2|}{|\vec{k}_r|} = \frac{|k_r^2|}{k_r^0} \\
 &= \frac{\frac{\omega_i}{c} \cos \theta_i}{\frac{\omega_i}{c}} = \cos \theta_i
 \end{aligned} \tag{7.68}$$

es decir, para este caso se sigue cumpliendo que ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

Capítulo 8

Dinámica relativista

8.1. Problemas de dinámica relativista

1. **Cuadrivector momentum.** Debemos probar que $p^2 > 0$, si $p_1^2 > 0$ y $p_2^2 > 0$. Entonces

$$p^2 = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \quad (8.1)$$

El producto interno de Minkowskiano $p_1 \cdot p_2$ de los cuadrivectores momento, por ser una cantidad invariante, lo podemos calcular en el sistema de referencia propio de una de cualquiera de las dos partículas, por ejemplo de la partícula 1. Entonces, en este sistema de referencia, los cuadrivectores momento de las partículas están dados por

$$p_1 = (m_{01}c, 0, 0, 0) \quad (8.2)$$

$$p_2 = (m_{02}\gamma(v_{21})c, m_{02}\gamma(v_{21})\vec{v}_{21}) \quad (8.3)$$

en donde \vec{v}_{21} es la velocidad de la partícula 2 respecto a la partícula 1. Entonces

$$p_1 \cdot p_2 = m_{01}m_{02}\gamma(v_{21})c^2 > 0 \quad (8.4)$$

pues el factor γ siempre es positivo. Por lo tanto

$$p^2 = m_{01}^2c^2 + m_{02}^2c^2 + 2m_{01}m_{02}\gamma(v_{21})c^2 > 0 \quad (8.5)$$

como se quería probar.

2. **Sistema centro de masa.** El cuadrivector momento total del sistema está dado por

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 \\ &= (m_1c, \vec{p}_1) + (m_2c, \vec{p}_2) \\ &= ((m_1 + m_2)c, \vec{p}_1 + \vec{p}_2) \\ &= (\bar{m}c, \vec{p}) \end{aligned} \quad (8.6)$$

en donde $m_i = m_{0i}\gamma(\vec{v}_i)$, $i = 1, 2$ con \vec{v}_i las velocidades de las partículas en el sistema de referencia Σ . La velocidad \vec{u}_{CM} del sistema centro de masa está dada por

$$\vec{u}_{CM} = \frac{\vec{p}}{\bar{m}} = \frac{m_{01}\gamma(\vec{v}_1)\vec{v}_1 + m_{02}\gamma(\vec{v}_2)\vec{v}_2}{m_{01}\gamma(\vec{v}_1) + m_{02}\gamma(\vec{v}_2)} \quad (8.7)$$

La masa propia del sistema de partículas M_0 medida por el observador Σ se puede calcular a partir de la norma al cuadrado del cuadrivector momentum total del sistema, así

$$p^2 = M_0^2 c^2 \quad (8.8)$$

entonces

$$\begin{aligned} p^2 &= (p_1 + p_2)^2 \\ &= p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \\ &= m_{01}^2 c^2 + m_{02}^2 c^2 + 2m_1 m_2 c^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \\ &= m_{01}^2 c^2 + m_{02}^2 c^2 + 2m_{01} m_{02} \gamma(\vec{v}_1) \gamma(\vec{v}_2) c^2 \left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (8.9)$$

Si las dos partículas estuvieran en reposo en el sistema Σ entonces la masa propia total sería la suma de las masas propias de las partículas que conforman el sistema. La masa propia total del sistema medida en el sistema centro de masa Σ_{CM} está dada por

$$M_{0CM} = \frac{\bar{m}}{\gamma(\vec{u}_{CM})} = \frac{m_{01}\gamma(\vec{v}_1) + m_{02}\gamma(\vec{v}_2)}{\gamma(\vec{u}_{CM})} \quad (8.10)$$

en donde la velocidad del sistema centro de masa \vec{u}_{CM} está dada por la ecuación 8.7.

3. **Transformación del momentum.** El cuadrivector momento de una partícula de masa propia m_0 y velocidad \vec{u} , medidas en el sistema de referencia inercial Σ , está dado por

$$p = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) \quad (8.11)$$

en donde

$$E = mc^2 = m_0 \gamma(\vec{u}) c^2 \quad (8.12)$$

es la energía total y

$$\vec{p} = m_0 \gamma(\vec{u}) \vec{u} \quad (8.13)$$

su momentum, están relacionadas con las componentes del cuadrivector momento en Σ' por la transformación de Lorentz usual:

$$p'^0 = \gamma(v) (p^0 - \beta p^1) \quad (8.14)$$

$$p'^1 = \gamma(v) (p^1 - \beta p^0) \quad (8.15)$$

$$p'^2 = p^2 \quad (8.16)$$

$$p'^3 = p^3 \quad (8.17)$$

con $\beta = v/c$ la velocidad de Σ' respecto a Σ . Entonces

$$E' = \gamma(v) (E - vp_x) \quad (8.18)$$

$$p'_x = \gamma(v) \left(p_x - \frac{v}{c^2} E \right) \quad (8.19)$$

$$p'_y = p_y \quad (8.20)$$

$$p'_z = p_z \quad (8.21)$$

La energía cinética K de la partícula se define como

$$K = E - E_0 = m_0 c^2 (\gamma(\vec{u}) - 1) \quad (8.22)$$

entonces, en el sistema Σ' tenemos que

$$\begin{aligned} K' &= E' - E_0 \\ &= m_0 c^2 (\gamma(\vec{u}') - 1) \end{aligned} \quad (8.23)$$

en donde \vec{u}' es la velocidad de la partícula medida por Σ' . Teniendo en cuenta la forma como el factor γ se transforma entre sistemas de referencia, ecuación 6.82, se obtiene

$$K' = m_0 c^2 \left(\gamma(v) \gamma(\vec{u}) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) - 1 \right) \quad (8.24)$$

4. **Cuadrivector fuerza.** Para interpretar físicamente las componentes del cuadrivector fuerza, definido por la ecuación de movimiento

$$f = m_0 A = \frac{dp}{d\tau} \quad (8.25)$$

consideremos sus componentes medidas por un observador inercial Σ . Teniendo en cuenta la definición del cuadrivector momento p , tenemos

$$\begin{aligned} (f^0, f^1, f^2, f^3) &= f^\alpha = \frac{dp^\alpha}{d\tau} \\ &= \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \\ &= \gamma(\vec{u}) \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (8.26)$$

Para interpretar físicamente esta ecuación, consideremos el producto punto minkowskiano entre el cuadrivector fuerza y el cuadrivector velocidad:

$$f \cdot U = m_0 A \cdot U \quad (8.27)$$

Dado que el producto punto es un invariante relativista, calculemos su valor en el sistema de referencia propio de la partícula, es decir en el sistema de referencia con respecto al cual la partícula se encuentra en reposo, así

$$U^\alpha = (c, 0, 0, 0) \quad (8.28)$$

$$A^\alpha = (0, \vec{\alpha}) \quad (8.29)$$

donde $\vec{\alpha}$ es la aceleración propia de la partícula, entonces

$$f \cdot U = 0 \quad (8.30)$$

Para un sistema de referencia inercial Σ , las componentes de los cuadrivectores velocidad y fuerza (ver ecuación 8.26) están dadas por

$$U^\alpha = \gamma(\vec{u}) (c, \vec{u}) \quad (8.31)$$

$$f^\alpha = \gamma(\vec{u}) \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) \quad (8.32)$$

entonces

$$\begin{aligned} 0 &= f \cdot U \\ &= \gamma^2(\vec{u}) \left(\frac{dE}{dt} - \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{u} \right) \end{aligned} \quad (8.33)$$

Por lo tanto, dado que el efecto de la fuerza física \vec{F} que actúa sobre una partícula es cambiar su momento, entonces tenemos que

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (8.34)$$

y si se adopta la definición usual del trabajo, realizado por una fuerza sobre una partícula, como

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (8.35)$$

entonces la ecuación 8.33 implica que el cambio en la energía total de la partícula por unidad de tiempo

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{u} = \vec{F} \cdot \vec{u} \quad (8.36)$$

es el trabajo por unidad de tiempo (potencia) realizado por la fuerza externa \vec{F} sobre la partícula, lo cual está de acuerdo con la interpretación de E como la energía total de la partícula. Así, las componentes del cuadrivector fuerza se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned} f^\alpha &= \gamma(\vec{u}) \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) \\ &= \gamma(\vec{u}) \left(\frac{1}{c} \vec{F} \cdot \vec{u}, \vec{F} \right) \end{aligned} \quad (8.37)$$

es decir, la componente temporal representa el trabajo por unidad de tiempo realizado por la fuerza externa y las componentes espaciales (salvo el factor γ) corresponden a las componentes de la fuerza física que actúa sobre la partícula.

5. **Transformación de la fuerza entre sistemas de referencia.** Consideremos dos sistemas de referencia Σ y Σ' relacionados por una transformación de Lorentz usual. Entonces, las componentes del cuadrivector fuerza se transforma como

$$f'^0 = \gamma (f^0 - \beta f^1) \quad (8.38)$$

$$f'^1 = \gamma (f^1 - \beta f^0) \quad (8.39)$$

$$f'^2 = f^2 \quad (8.40)$$

$$f'^3 = f^3 \quad (8.41)$$

con $\gamma = \gamma(v)$, $\beta = v/c$ y v la velocidad del sistema Σ' respecto a Σ en la dirección del eje x positivo. La interpretación física de las componentes del cuadrivector fuerza encontradas en el problema anterior implican que

$$(f^0, f^1, f^2, f^3) = \gamma(\vec{u}) \left(\frac{1}{c} \vec{F} \cdot \vec{u}, \vec{F} \right) \quad (8.42)$$

donde \vec{u} es la velocidad de la partícula. Estamos interesados en encontrar las ecuaciones de transformación para la fuerza \vec{F} . Si llamamos

$$\vec{F} = (F_{x'}, F_{y'}, F_{z'}) \quad (8.43)$$

las componentes de la fuerza medida en Σ' , de la segunda ecuación de transformación tenemos

$$\gamma(\vec{u}') F_{x'} = \gamma(v) \left(\gamma(\vec{u}) F_x - \frac{v}{c^2} \gamma(\vec{u}) \vec{F} \cdot \vec{u} \right) \quad (8.44)$$

teniendo en cuenta la forma como el factor $\gamma(\vec{u}')$ se transforma, ver ecuación 6.82,

$$\gamma(\vec{u}') = \gamma(v) \gamma(\vec{u}) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) \quad (8.45)$$

entonces obtenemos

$$F_{x'} = \frac{F_x - \frac{v}{c^2} \vec{F} \cdot \vec{u}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \quad (8.46)$$

Para las otras dos componentes tenemos

$$\gamma(\vec{u}') F_{y'} = \gamma(\vec{u}) F_y \quad (8.47)$$

$$\gamma(\vec{u}') F_{z'} = \gamma(\vec{u}) F_z \quad (8.48)$$

por lo tanto

$$F_{y'} = \frac{F_y}{\gamma(v) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)} \quad (8.49)$$

$$F_{z'} = \frac{F_z}{\gamma(v) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)} \quad (8.50)$$

6. **Energía disponible para crear partículas.** Si se elige el eje x en la dirección de movimiento de los protones, en el primer caso el cuadrivector momento de cada protón están dados por

$$p_1 = \left(\frac{E_1}{c}, \vec{p}_1 \right) = \left(\frac{E_1}{c}, p_x, 0, 0 \right) \quad (8.51)$$

$$p_2 = \left(\frac{E_0}{c}, 0, 0, 0 \right) \quad (8.52)$$

Después de la colisión emergen los dos protones más una nueva partícula de masa propia $M_0 = E_D/c^2$, es decir, se está asumiendo que toda la energía disponible en el experimento se transforma en energía propia de la nueva partícula. Entonces la conservación del cuadrivector momento implica

$$p_1 + p_2 = p_{1f} + p_{2f} + p_f \quad (8.53)$$

con p_{1f} y p_{2f} los cuadrivectores momento finales de los protones y p_f el cuadrivector momento final de la nueva partícula. Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación obtenemos el invariante relativista

$$(p_1 + p_2)^2 = (p_{1f} + p_{2f} + p_f)^2 \quad (8.54)$$

El lado izquierdo se calcula en el sistema del laboratorio, entonces

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2)^2 &= p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \\ &= 2\frac{E_0^2}{c^2} + 2\frac{E_0 E_1}{c^2} \end{aligned} \quad (8.55)$$

Para calcular el lado derecho se impone la condición de energía umbral, en donde las partículas después de la colisión quedan en reposo en el sistema de referencia centro de masa, entonces

$$(p_{1f} + p_{2f} + p_f)^2 = \left(\frac{E_0}{c} + \frac{E_0}{c} + \frac{E_D}{c} \right)^2 \quad (8.56)$$

Igualando las dos expresiones y despejando E_D se tiene

$$2\frac{E_0^2}{c^2} + 2\frac{E_0 E_1}{c^2} = 4\frac{E_0^2}{c^2} + \frac{E_D^2}{c^2} + 4\frac{E_0 E_D}{c^2} \quad (8.57)$$

entonces

$$E_D^2 + 4E_0 E_D + 2E_0^2 - 2E_0 E_1 = 0 \quad (8.58)$$

resolviendo la ecuación cuadrática para E_D y tomando la raíz positiva se obtiene

$$E_D = -2E_0 + \sqrt{2E_0^2 + 2E_0 E_1} \quad (8.59)$$

Para el caso donde $E_1 = 30\text{Gev}$ y $E_0 = 0,94\text{Gev}$ la energía disponible es

$$E_D = 5.7467\text{Gev} \quad (8.60)$$

Para el segundo caso, los cuadvectores momento de los protones iniciales son

$$p_1 = \left(\frac{E_2}{c}, |\vec{p}_2|, 0, 0 \right) \quad (8.61)$$

$$p_2 = \left(\frac{E_2}{c}, -|\vec{p}_2|, 0, 0 \right) \quad (8.62)$$

entonces

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2)^2 &= p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \\ &= 2 \frac{E_0^2}{c^2} + 2 \left(\frac{E_2^2}{c^2} + |\vec{p}_2|^2 \right) \end{aligned} \quad (8.63)$$

dado que

$$p_1^2 = \frac{E_0^2}{c^2} = \frac{E_2^2}{c^2} - |\vec{p}_2|^2$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2)^2 &= 2 \frac{E_0^2}{c^2} + 2 \left(\frac{E_2^2}{c^2} + \frac{E_2^2}{c^2} - \frac{E_0^2}{c^2} \right) \\ &= 4 \frac{E_2^2}{c^2} \end{aligned} \quad (8.64)$$

Entonces, de la ecuación de conservación del cuadvector momento al cuadrado, se tiene que

$$4 \frac{E_2^2}{c^2} = 4 \frac{E_0^2}{c^2} + \frac{E_D^2}{c^2} + 4 \frac{E_0 E_D}{c^2} \quad (8.65)$$

despejando la energía disponible se llega a la ecuación cuadrática

$$E_D^2 + 4E_0 E_D + 4E_0^2 - 4E_2^2 = 0 \quad (8.66)$$

cuya solución positiva está dada por

$$E_D = \frac{1}{2} \left[-4E_0 + \sqrt{16E_0^2 - 16E_0^2 + 16E_2^2} \right] \quad (8.67)$$

$$= 2E_2 - 2E_0 \quad (8.68)$$

tomando $E_2 = 15Gev$ se obtiene

$$E_D = 28,12Gev \quad (8.69)$$

lo cual implica que en el segundo experimento se tiene cinco veces más energía disponible. O en forma equivalente, si se quiere tener una energía disponible de $28,12Gev$ se requiere que, en el primer experimento, el protón sea acelerado a una energía de

$$E_1 = \frac{E_D^2 + 4E_0 E_D + 2E_0^2}{2E_0} = 477,78Gev \quad (8.70)$$

7. **Sistema de dos electrones.** Elijamos el eje x del sistema de referencia del laboratorio Σ en la dirección de movimiento del electrón y sean p_1 el cuadrivector momento del electrón móvil y p_2 el cuadrivector momento del electrón en reposo.

a La energía cinética del electrón 1 (móvil) es

$$K_1 = E_1 - E_0 \quad (8.71)$$

en donde E_1 es su energía total y $E_0 = m_0c^2$ su energía en reposo. Entonces

$$2m_0c^2 = \gamma(u)m_0c^2 - m_0c^2 \quad (8.72)$$

con u la velocidad del electrón. Despejando el factor $\gamma(u)$ se tiene

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 3 \quad (8.73)$$

y por lo tanto la velocidad del electrón está dada por

$$\frac{u}{c} = \beta_u = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma(u)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (8.74)$$

b El cuadrivector momento del electrón 2, en reposo respecto al sistema de laboratorio Σ , es

$$p_2 = \left(\frac{E_2}{c}, \vec{p}_2 \right) = (m_0c, 0, 0, 0) \quad (8.75)$$

y del electrón 1 está dado por

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(\frac{E_1}{c}, \vec{p}_1 \right) = (m_0c\gamma(u), m_0\gamma(u)u, 0, 0) \\ &= (3m_0c, 2\sqrt{2}m_0c, 0, 0) \end{aligned} \quad (8.76)$$

Por lo tanto, para el cuadrivector momento total del sistema en Σ se obtiene

$$p = p_1 + p_2 = (4m_0c, 2\sqrt{2}m_0c, 0, 0) \quad (8.77)$$

c La velocidad del centro de masa para un sistema de partículas está dada por

$$\vec{u}_{CM} = \frac{\vec{p}}{\bar{m}} \quad (8.78)$$

en donde \vec{p} es el momentum total del sistema y $\bar{m}c^2$ su energía total. Entonces, para el sistema de los dos electrones tenemos

$$\vec{u}_{CM} = \frac{1}{4m_0} (2\sqrt{2}m_0c, 0, 0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}c, 0, 0 \right) \quad (8.79)$$

Para calcular las componentes de cuadrivector momento de los electrones, en el sistema de referencia Σ_{CM} , es suficiente tener en cuenta la transformación de Lorentz entre los sistemas Σ y Σ_{CM} , en donde Σ_{CM} se mueve con velocidad $u_{CM} = \sqrt{2}/2$ en la dirección del eje x positivo, ver ecuación 8.79. Bajo esta transformación de Lorentz las componentes del cuadrivector momento, en los dos sistemas de referencia, están dadas por

$$p'^0 = \gamma(u_{CM}) (p^0 - \beta_{CM} p^1) \quad (8.80)$$

$$p'^1 = \gamma(u_{CM}) (p^1 - \beta_{CM} p^0) \quad (8.81)$$

$$p'^2 = p^2 \quad (8.82)$$

$$p'^3 = p^3 \quad (8.83)$$

en donde $\beta_{CM} = u_{CM}/c$. Aplicando estas transformaciones a p_1 y p_2 tenemos:

$$\begin{aligned} p_1'^0 &= \gamma(u_{CM}) (p_1^0 - \beta_{CM} p_1^1) \\ &= \sqrt{2} \left(3m_0c - \frac{\sqrt{2}}{2} 2\sqrt{2}m_0c \right) \\ &= \sqrt{2}m_0c \end{aligned} \quad (8.84)$$

$$\begin{aligned} p_1'^1 &= \gamma(u_{CM}) (p_1^1 - \beta_{CM} p_1^0) \\ &= \sqrt{2} \left(2\sqrt{2}m_0c - \frac{\sqrt{2}}{2} 3m_0c \right) \\ &= m_0c^2 \end{aligned} \quad (8.85)$$

y las demás componentes son cero. Para el segundo electrón se tiene

$$\begin{aligned} p_2'^0 &= \gamma(u_{CM}) (p_2^0 - \beta_{CM} p_2^1) \\ &= \sqrt{2} (m_0c - 0) \\ &= \sqrt{2}m_0c \end{aligned} \quad (8.86)$$

$$\begin{aligned} p_2'^1 &= \gamma(u_{CM}) (p_2^1 - \beta_{CM} p_2^0) \\ &= \sqrt{2} \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2} m_0c \right) \\ &= -m_0c \end{aligned} \quad (8.87)$$

Entonces

$$p_1' = (\sqrt{2}m_0c, m_0c, 0, 0) \quad (8.88)$$

$$p_2' = (\sqrt{2}m_0c, -m_0c, 0, 0) \quad (8.89)$$

- d** La masa propia del sistema, por definición, es un invariante relativista y debe ser la misma calculada en cualquier sistema de referencia inercial. Para calcular la masa propia en Σ tomamos la norma del cuadrivector momento total del sistema, entonces

$$\begin{aligned} p^2 &= (p_1 + p_2)^2 = (4m_0c, 2\sqrt{2}m_0c, 0, 0)^2 \\ &= 16m_0^2c^2 - 8m_0^2c^2 \\ &= 8m_0^2c^2 \end{aligned} \quad (8.90)$$

así

$$M_0 = 2\sqrt{2}m_0 \quad (8.91)$$

En el sistema centro de masa tenemos

$$\begin{aligned} p^2 &= (p'_1 + p'_2)^2 = (2\sqrt{2}m_0c, 0, 0, 0)^2 \\ &= 8m_0^2c^2 \end{aligned} \quad (8.92)$$

obteniendo, como se esperaba, el mismo resultado.

- 8. Sistema de dos fotones.** Sean p_1 y p_2 los cuadrivectores momento de los dos fotones en el sistema de referencia Σ .

- a** La relación entre la energía E y la magnitud del momentum $|\vec{p}|$ de un fotón, está dada por la ecuación

$$|\vec{p}| = \frac{E}{c} \quad (8.93)$$

entonces los cuadrivectores momento de los fotones toman la forma

$$p_1 = \left(\frac{E}{c}, \frac{E}{c}, 0, 0 \right) \quad (8.94)$$

para el fotón moviéndose a lo largo del eje x positivo, y

$$p_2 = \left(\frac{E}{c}, 0, \frac{E}{c}, 0 \right) \quad (8.95)$$

para el fotón moviéndose a lo largo del eje y positivo. El cuadrivector momento total del sistema está dado por

$$p = p_1 + p_2 = \left(\frac{2E}{c}, \frac{E}{c}, \frac{E}{c}, 0 \right) \quad (8.96)$$

- b** La velocidad del centro de masa para un sistema de partículas está dada por

$$\vec{u}_{CM} = \frac{\vec{p}}{\tilde{m}} \quad (8.97)$$

en donde \vec{p} es el momentum total del sistema y $\bar{m}c^2$ su energía total. Así, para el sistema de dos fotones tenemos

$$\begin{aligned}\vec{u}_{CM} &= \frac{\vec{p}}{\bar{m}} = \frac{c^2}{2E} \left(\frac{E}{c}, \frac{E}{c}, 0 \right) \\ &= \left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}, 0 \right)\end{aligned}\quad (8.98)$$

la cual corresponde a la velocidad del sistema de referencia Σ_{CM} respecto al sistema laboratorio Σ , de tal manera que en sistema Σ_{CM} el momentum total es cero. La magnitud de la velocidad \vec{u}_{CM} , está dada por

$$|\vec{u}_{CM}| = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}c < c \quad (8.99)$$

c La masa propia M_0 del sistema de dos fotones se puede calcular a partir de la norma del cuadrivector momento total, así

$$\begin{aligned}M_0^2 c^2 &= (p_1 + p_2)^2 \\ &= \left(\frac{2E}{c}\right)^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = \frac{2E^2}{c^2}\end{aligned}\quad (8.100)$$

entonces

$$M_0 = \frac{\sqrt{2}E}{c^2} \quad (8.101)$$

nótese que la masa propia del sistema es $1/\sqrt{2}$ la suma de las masas equivalentes en energía asociadas a cada fotón.

9. Partícula compuesta. Elijamos el eje x positivo del sistema de referencia del laboratorio Σ en la dirección de movimiento del electrón inicial.

a La energía total del electrón inicial está dada por

$$\begin{aligned}E &= E_0 + K \\ &= m_0 c^2 + \frac{2}{3}m_0 c^2 \\ &= \frac{5}{3}m_0 c^2\end{aligned}\quad (8.102)$$

por lo tanto, el factor γ y la velocidad inicial del electrón son

$$E = \gamma(v)m_0 c^2 \implies \gamma(v) = \frac{5}{3} \quad (8.103)$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2(v)}} \implies \beta = \frac{4}{5} \quad (8.104)$$

Para calcular la masa propia M_0 del átomo de positronio, sea p_1 el cuadvectur momentum del electrón móvil, el cual está dado por

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(\frac{E}{c}, m_0 \gamma(v) \vec{v} \right) \\ &= \left(\frac{5}{3} m_0 c, \frac{4}{3} m_0 c, 0, 0 \right) \end{aligned} \quad (8.105)$$

y el cuadvectur momentum del positrón en reposo es

$$p_2 = (m_0 c, 0, 0, 0) \quad (8.106)$$

entonces, por conservación del cuadvectur momentum total del sistema, su norma al cuadrado da la masa propia total del sistema, la cual también es la masa propia del positronio, así

$$\begin{aligned} M_0^2 c^2 &= p_f^2 = (p_1 + p_2)^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} m_0 c, \frac{4}{3} m_0 c, 0, 0 \right)^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} m_0 c \right)^2 - \left(\frac{4}{3} m_0 c \right)^2 \\ &= \frac{48}{9} m_0^2 c^2 \end{aligned} \quad (8.107)$$

entonces

$$M_0 = \frac{4\sqrt{3}}{3} m_0 \quad (8.108)$$

- b** Para calcular la velocidad final v_f del átomo de positronio se pueden seguir varios métodos: El primer método, y el más directo, es notando que la velocidad final del positronio corresponde a la velocidad del centro de masa del sistema electrón-positrón, así

$$\beta_{CM} = \beta_f = \frac{p_f^1}{p_f^0} = \frac{\frac{4}{3} m_0 c}{\frac{8}{3} m_0 c} = \frac{1}{2} \quad (8.109)$$

El segundo método utiliza la energía total del sistema: entonces de la componente temporal del cuadvectur momentum total del sistema tenemos

$$M_0 \gamma(v_f) c = \frac{8}{3} m_0 c \quad (8.110)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \gamma(v_f) &= \frac{\frac{8}{3} m_0}{\frac{4\sqrt{3}}{3} m_0} = \frac{2}{\sqrt{3}} \implies \\ v_f &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2(v_f)}} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (8.111)$$

Un tercer camino sería utilizando la conservación del momentum físico para el sistema, así

$$\vec{p}_f = \frac{4}{3}m_0c\hat{x} = M_0\gamma(v_f)v_f\hat{x} \quad (8.112)$$

entonces

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}m_0\gamma(v_f)v_f = \frac{4}{3}m_0c$$

despejando la velocidad final, se obtiene

$$\begin{aligned} \gamma(\beta_f)\beta_f &= \frac{1}{\sqrt{3}} \implies 3\beta_f^2 = 1 - \beta_f^2 \\ \implies \beta_f &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (8.113)$$

- c Por conservación del momentum, dado que el electrón inicial se está moviendo en la dirección del eje x positivo, entonces el electrón y el positrón deben salir en un mismo plano. Además, debido a que el electrón y el positrón tienen la misma masa propia y salen formando el mismo ángulo con respecto al eje x , su velocidad debe ser igual para que el momentum total transversal a la dirección de movimiento inicial se anule. Entonces, si elegimos el eje y en el plano del movimiento del sistema y se toma positivo en la dirección en la cual el electrón se dispersa, las componentes del cuadrivector momentum final del electrón p_{-f} y del positrón p_{+f} , están dadas por:

$$\begin{aligned} p_{-f} &= (E_{-f}, p_{x-f}, p_{y-f}, 0) \\ &= (m_0\gamma(u)c, m_0\gamma(u)u \cos \theta, m_0\gamma(u)u \sin \theta, 0) \end{aligned} \quad (8.114)$$

y

$$\begin{aligned} p_{+f} &= (E_{+f}, p_{x+f}, p_{y+f}, 0) \\ &= (m_0\gamma(u)c, m_0\gamma(u)u \cos \theta, -m_0\gamma(u)u \sin \theta, 0) \end{aligned} \quad (8.115)$$

en donde u es la magnitud de la velocidad final y θ el ángulo con respecto al eje x . La conservación del cuadrivector momentum implica que

$$p_f = p_{-f} + p_{+f} \quad (8.116)$$

con p_f el cuadrivector momentum del positronio, así esta ecuación nos conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$M_0\gamma(v_f)c = 2m_0\gamma(u)c \quad (8.117)$$

$$M_0\gamma(v_f)v_f = 2m_0\gamma(u)u \cos \theta \quad (8.118)$$

la tercera ecuación para la componente en y es una identidad y no arroja información adicional. Dado que (ver parte b del presente problema)

$$\begin{aligned} M_0\gamma(v_f)c &= \frac{4\sqrt{3}}{3}m_0 \times \frac{2}{\sqrt{3}}c \\ &= \frac{8}{3}m_0c \end{aligned} \quad (8.119)$$

entonces de la ecuación 8.117 se tiene

$$\gamma(u) = \frac{4}{3} \implies \beta_u = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad (8.120)$$

y de la ecuación 8.118 se obtiene el ángulo:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{M_0\gamma(v_f)v_f}{2m_0\gamma(u)u} \\ &= \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}m_0 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2}}{2m_0 \times \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{7}}{4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \end{aligned} \quad (8.121)$$

d Una colisión se define inelástica si las partículas iniciales y finales que intervienen en el proceso cambian. Así en la primera reacción,

$$e^- + e^+ \longrightarrow A_p \quad (8.122)$$

el proceso es inelástico, y en la segunda reacción

$$A_p \longrightarrow e^- + e^+ \quad (8.123)$$

las partículas también cambian y el proceso es por lo tanto inelástico. Sin embargo, considerando la reacción total

$$e^- + e^+ \longrightarrow A_p \longrightarrow e^- + e^+ \quad (8.124)$$

el proceso es elástico. En efecto, se puede tratar la parte c del presente problema independientemente del estado intermedio (formación del positronio), como un proceso de colisión elástico

$$e^- + e^+ \longrightarrow e^- + e^+ \quad (8.125)$$

en donde un electrón choca contra un positrón en reposo, dispersándose elásticamente. Así, por conservación del cuadrivector momentun

$$p_1 + p_2 = p_{-f} + p_{+f} \quad (8.126)$$

Con las mismas consideraciones que se hicieron en la parte c del presente problema, esta ecuación conduce a:

$$\left(\frac{8}{3}m_0c, \frac{4}{3}m_0c, 0, 0\right) = (2m_02\gamma(u)c, m_0\gamma(u)u \cos \theta, 0, 0) \quad (8.127)$$

lo cual lleva al siguiente sistema de ecuaciones acopladas:

$$\frac{8}{3}m_0c = 2m_02\gamma(u)c \quad (8.128)$$

$$\frac{4}{3}m_0c = m_0\gamma(u)u \cos \theta \quad (8.129)$$

las cuales implican que

$$\beta_u = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad (8.130)$$

y

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{7}} \quad (8.131)$$

10. **Aniquilación de partículas.** Para el sistema de referencia del laboratorio elijamos el eje x en la dirección de movimiento del electrón inicial y los otros ejes de tal manera que el plano de la colisión esté en el plano $x - y$. Sea m_0 la masa propia del electrón (igual a la del positrón) y v su velocidad.

a Los cuadvectores momento iniciales del electrón y el positrón están dados por

$$p_1 = \left(\frac{E_1}{c}, \vec{p}_1\right) = \left(\frac{5}{3}m_0c, \frac{4}{3}m_0c, 0, 0\right) \quad (8.132)$$

y

$$p_2 = \left(\frac{E_2}{c}, \vec{p}_2\right) = (m_0c, 0, 0, 0) \quad (8.133)$$

respectivamente. Supóngase que un fotón (llámese 1) sale formando un ángulo θ con respecto al eje x positivo y el otro fotón (2) formando un ángulo φ respecto al mismo eje. Entonces sus cuadvectores momento son

$$p_{\gamma_1} = \left(\frac{E_{\gamma_1}}{c}, \vec{p}_{\gamma_1}\right) \quad (8.134)$$

$$= \left(\frac{E_{\gamma_1}}{c}, \frac{E_{\gamma_1}}{c} \cos \theta, \frac{E_{\gamma_1}}{c} \sin \theta, 0\right) \quad (8.135)$$

y

$$p_{\gamma_2} = \left(\frac{E_{\gamma_2}}{c}, \vec{p}_{\gamma_2}\right) \quad (8.136)$$

$$= \left(\frac{E_{\gamma_2}}{c}, \frac{E_{\gamma_2}}{c} \cos \varphi, \frac{E_{\gamma_2}}{c} \sin \varphi, 0\right) \quad (8.137)$$

La conservación total del cuadvivector momentun del sistema implica

$$p_1 + p_2 = p_{\gamma_1} + p_{\gamma_2} \quad (8.138)$$

lo cual conduce al siguiente sistema de ecuaciones acopladas

$$\frac{8}{3}m_0c = \frac{E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2}}{c} \quad (8.139)$$

$$\frac{4}{3}m_0c = \frac{E_{\gamma_1} \cos \theta + E_{\gamma_2} \cos \varphi}{c} \quad (8.140)$$

$$0 = \frac{E_{\gamma_1}}{c} \sin \theta + \frac{E_{\gamma_2}}{c} \sin \varphi \quad (8.141)$$

Este sistema de tres ecuaciones acopladas contiene cuatro incógnitas, las energías de los dos fotones y los ángulos que ellos forman con el eje de las x , así se pueden despejar tres de las incógnitas en términos de la cuarta, por ejemplo en términos de θ . Con esta elección la energía del primer fotón E_{γ_1} depende del ángulo θ , y a partir de allí se busca el ángulo para que la energía sea máxima, i.e. a partir de la condición

$$\frac{dE_{\gamma_1}}{d\theta} = 0; \quad \text{con} \quad \frac{d^2E_{\gamma_1}}{d\theta^2} < 0 \quad (8.142)$$

Despejando E_{γ_2} de la ecuación 8.139, sin φ de la ecuación 8.141 y reemplazando en la ecuación 8.140 y despejando de esta última ecuación E_{γ_1} obtenemos

$$E_{\gamma_1} = \frac{2m_0c^2}{2 + \cos \theta} \quad (8.143)$$

Aplicando la condición de máximo, ecuación 8.142 se obtiene que

$$\theta = 0 \quad (8.144)$$

Este resultado se hubiera podido anticipar, pues por conservación de energía la suma de las energías de los fotones es la energía total inicial, la cual es fija y por conservación de momentun la componente perpendicular del momentun total de los fotones es cero y por lo tanto la condición de energía máxima de uno de los fotones se tiene cuando éste sale en la misma dirección del electrón incidente y por lo tanto el fotón 2 debe salir en la dirección opuesta, con la mínima energía posible. Así para calcular las energías de los fotones, cuando uno de ellos (fotón 1) sale con la máxima energía tomamos $\theta = 0$ y $\varphi = \pi$ en las ecuaciones 8.139 y 8.140, entonces

$$\frac{8}{3}m_0c = \frac{E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2}}{c} \quad (8.145)$$

$$\frac{4}{3}m_0c = \frac{E_{\gamma_1} - E_{\gamma_2}}{c} \quad (8.146)$$

resolviendo este sistema de ecuaciones (sumando y restando) se tiene que

$$E_{\gamma_1} = 2m_0c^2 \quad (8.147)$$

que es la máxima energía posible y

$$E_{\gamma_2} = \frac{2}{3}m_0c^2 \quad (8.148)$$

- b** En la ecuación 8.141 implica que $E_{\gamma_1} = E_{\gamma_2} = E_\gamma$ con $\theta = -\varphi$, entonces las ecuaciones de conservación 8.139 y 8.140 toman la forma

$$\frac{8}{3}m_0c = \frac{E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2}}{c} = \frac{2E_\gamma}{c} \quad (8.149)$$

y

$$\frac{4}{3}m_0c = \frac{E_{\gamma_1} \cos \theta + E_{\gamma_2} \cos \theta}{c} = \frac{2E_\gamma \cos \theta}{c} \quad (8.150)$$

respectivamente. Dividiendo la segunda ecuación entre la primera tenemos que

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3} \quad (8.151)$$

A partir de la ecuación 8.149 la energía de cada fotón está dada por

$$E_{\gamma_1} = E_{\gamma_2} = \frac{4}{3}m_0c \quad (8.152)$$

- c** El momentun total del sistema es

$$p_1 + p_2 = \left(\frac{8}{3}m_0c, \frac{4}{3}m_0c, 0, 0 \right) \quad (8.153)$$

entonces la velocidad v_{CM} del sistema de referencia centro de masa Σ_{CM} está dada por la relación

$$\vec{\beta}_{CM} = \frac{\vec{p}^1}{p^0} = \frac{\frac{4}{3}m_0c}{\frac{8}{3}m_0c} \hat{x} = \frac{1}{2} \hat{x} \quad (8.154)$$

por lo tanto las componentes del cuadvivector momentun para cada una de las partículas iniciales se obtienen aplicando una transformación de Lorentz usual del sistema laboratorio Σ al sistema centro de masa. Entonces llamando \tilde{p}_1 y \tilde{p}_2 los cuadvivectores del electrón y el positrón respectivamente, tenemos para el electrón

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1^0 &= \gamma(v_{CM}) (p_1^0 - \beta_{CM} p_1^1) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{5}{3}m_0c - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}m_0c \right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}m_0c \end{aligned} \quad (8.155)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_1^1 &= \gamma(v_{CM}) (p_1^1 - \beta_{CM} p_1^0) \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{4}{3} m_0 c - \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} m_0 c \right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} m_0 c
\end{aligned} \tag{8.156}$$

y para el positrón

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_2^0 &= \gamma(v_{CM}) (p_2^0 - \beta_{CM} p_2^1) \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3} m_0 c
\end{aligned} \tag{8.157}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_2^1 &= \gamma(v_{CM}) (p_2^1 - \beta_{CM} p_2^0) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{3} m_0 c
\end{aligned} \tag{8.158}$$

Esto implica que en el sistema centro de masa la energía total del sistema es

$$E_{CM} = \frac{2\sqrt{3}}{3} m_0 c + \frac{2\sqrt{3}}{3} m_0 c = \frac{4\sqrt{3}}{3} m_0 c \tag{8.159}$$

y el momentum total es cero. Entonces, cuando se aniquilan las partículas en dos fotones, ellos deben salir en direcciones opuestas y con el mismo momentum, y por lo tanto cada uno de los fotones tendrá la misma energía \tilde{E}_γ dada por

$$\tilde{E}_\gamma = \frac{2\sqrt{3}}{3} m_0 c \tag{8.160}$$

Por lo tanto los cuatrivectores momento de los fotones $\tilde{p}_{1\gamma}$ y $\tilde{p}_{2\gamma}$ están dados por:

$$\tilde{p}_{1\gamma} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} m_0 c, \frac{2\sqrt{3}}{3} m_0 c \hat{n} \right) \tag{8.161}$$

$$\tilde{p}_{2\gamma} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} m_0 c, -\frac{2\sqrt{3}}{3} m_0 c \hat{n} \right) \tag{8.162}$$

en donde \hat{n} es la dirección de propagación del primer fotón y por lo tanto $-\hat{n}$ la del segundo fotón. A partir de estos cuatrivectores momentum en el sistema Σ_{CM} y aplicando la transformación inversa de Lorentz se obtienen los cuatrivectores momentum de fotones en el sistema Σ . La condición de máxima energía para uno de los fotones se obtiene cuando uno de ellos sale en la dirección de movimiento del

electrón inicial, por lo tanto en este caso se tiene que los cuadri-
vectores momentum del electrón y el positrón en el sistema de referencia
centro de masa son

$$\tilde{p}_{\gamma 1} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}m_0c, \frac{2\sqrt{3}}{3}m_0c, 0, 0 \right) \quad (8.163)$$

$$\tilde{p}_{\gamma 2} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}m_0c, -\frac{2\sqrt{3}}{3}m_0c, 0, 0 \right) \quad (8.164)$$

Entonces, aplicando la transformación de Lorentz inversa para la
componente cero, se tiene que

$$\begin{aligned} p_{\gamma 1}^0 &= \gamma(-v_{CM}) (\tilde{p}_{\gamma 1}^0 + \beta_{CM}\tilde{p}_{\gamma 1}^1) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}m_0c + \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}m_0c \right) \\ &= 2m_0c \end{aligned} \quad (8.165)$$

$$\begin{aligned} p_{\gamma 2}^0 &= \gamma(-v_{CM}) (\tilde{p}_{\gamma 2}^0 + \beta_{CM}\tilde{p}_{\gamma 2}^1) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}m_0c - \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}m_0c \right) \\ &= \frac{2}{3}m_0c \end{aligned} \quad (8.166)$$

por lo tanto las energías de los dos fotones, uno de máxima energía
y el otro de mínima, son

$$E_{\gamma 1} = 2m_0c^2 \quad (8.167)$$

$$E_{\gamma 2} = \frac{2}{3}m_0c^2 \quad (8.168)$$

en acuerdo con el resultado de la parte *a* del presente problema. Para
el segundo caso, cuando los dos fotones salen formando el mismo ángu-
lo en el sistema laboratorio, tenemos que el sistema centro de masa
los fotones deben salir en direcciones perpendiculares a la dirección
de movimiento del sistema centro de masa, respecto al sistema la-
boratorio. Así se puede elegir como eje *y* el del movimiento de los
fotones y por lo tanto el cuadrivector momentum de cada fotón en
 Σ_{CM} será

$$\tilde{p}_{\gamma 1} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}m_0c, 0, \frac{2\sqrt{3}}{3}m_0c, 0 \right) \quad (8.169)$$

$$\tilde{p}_{\gamma 2} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}m_0c, 0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}m_0c, 0 \right) \quad (8.170)$$

Aplicando la transformación inversa de Lorentz se tiene que las componentes no nulas del cuadrivector momentum en el sistema laboratorio, para el primer fotón toman la forma

$$\begin{aligned} p_{\gamma 1}^0 &= \gamma(-v_{CM}) (\tilde{p}_{\gamma 1}^0 + \beta_{CM} \tilde{p}_{\gamma 1}^1) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} m_0 c \\ &= \frac{4}{3} m_0 c \end{aligned} \quad (8.171)$$

$$\begin{aligned} p_{\gamma 1}^1 &= \gamma(-v_{CM}) (\tilde{p}_{\gamma 1}^1 + \beta_{CM} \tilde{p}_{\gamma 1}^0) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} m_0 c \\ &= \frac{2}{3} m_0 c \end{aligned} \quad (8.172)$$

$$p_{\gamma 1}^2 = \tilde{p}_{\gamma 1}^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} m_0 c \quad (8.173)$$

y para el segundo fotón

$$\begin{aligned} p_{\gamma 2}^0 &= \gamma(-v_{CM}) (\tilde{p}_{\gamma 2}^0 + \beta_{CM} \tilde{p}_{\gamma 2}^1) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} m_0 c \\ &= \frac{4}{3} m_0 c \end{aligned} \quad (8.174)$$

$$\begin{aligned} p_{\gamma 2}^1 &= \gamma(-v_{CM}) (\tilde{p}_{\gamma 2}^1 + \beta_{CM} \tilde{p}_{\gamma 2}^0) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} m_0 c \\ &= \frac{2}{3} m_0 c \end{aligned} \quad (8.175)$$

$$p_{\gamma 2}^2 = \tilde{p}_{\gamma 2}^2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} m_0 c \quad (8.176)$$

así el ángulo que forma el primer fotón respecto al eje x es

$$\tan \theta = \frac{p_{\gamma 1}^2}{p_{\gamma 1}^1} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} m_0 c}{\frac{2}{3} m_0 c} = \sqrt{3} \quad (8.177)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \quad (8.178)$$

11. **Absorción atómica.** Sea p_γ , p_0 y p_f los vectores cuadrivector momentum del fotón incidente, átomo inicial y átomo final respectivamente, entonces

si se toma el eje x en la dirección de movimiento del fotón inicial, tenemos que

$$p_\gamma = \left(\frac{Q}{c}, \frac{Q}{c}, 0, 0 \right) \quad (8.179)$$

$$p_0 = (M_0c, 0, 0, 0) \quad (8.180)$$

$$p_f = \left(\tilde{M}_0\gamma(v_f)c, \tilde{M}_0\gamma(v_f)v_f, 0, 0 \right) \quad (8.181)$$

a Entonces, por conservación del cuadrivector momentum se tiene que

$$p_\gamma + p_0 = p_f \quad (8.182)$$

Tomando la norma al cuadrado de esta expresión se obtiene

$$p_\gamma^2 + p_0^2 + 2p_\gamma \cdot p_0 = p_f^2 \quad (8.183)$$

Teniendo en cuenta que la norma al cuadrado del cuadrivector momentum da la masa propia al cuadrado de la partícula y realizando el producto punto Minkowskiano se llega a la relación

$$M_0^2c^2 + 2M_0Q = \tilde{M}_0^2c^2 \quad (8.184)$$

Despejando la energía del fotón Q y teniendo en cuenta que

$$Q_0 = \tilde{M}_0c^2 - M_0c^2 \quad (8.185)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\tilde{M}_0^2c^4 - M_0^2c^4}{2M_0c^2} \\ &= Q_0 \frac{\tilde{M}_0c^2 + M_0c^2}{2M_0c^2} \\ &= Q_0 \frac{Q_0 + 2M_0c^2}{2M_0c^2} \\ &= Q_0 \left(1 + \frac{Q_0}{2M_0c^2} \right) \end{aligned} \quad (8.186)$$

notemos que si la masa del átomo es mucho mayor que la energía interna de excitación, entonces la energía del fotón incidente es prácticamente igual a la de excitación.

b La diferencia entre la energía del fotón incidente y la energía interna de excitación

$$Q - Q_0 = \frac{Q_0}{2M_0c^2} \quad (8.187)$$

corresponde a la energía cinética del átomo que al absorber el fotón debe retroceder por conservación del momentum. De la ecuación de conservación 8.182 se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\frac{Q}{c} + M_0c = \tilde{M}_0\gamma(v_f)c \quad (8.188)$$

$$\frac{Q}{c} = \tilde{M}_0 \gamma(v_f) v_f \quad (8.189)$$

Entonces, de la ecuación de conservación de la energía se tiene

$$Q + M_0 c^2 - \tilde{M}_0 c^2 = \tilde{M}_0 c^2 (\gamma(v_f) - 1) \quad (8.190)$$

así de la ecuación 8.185

$$Q - Q_0 = \tilde{M}_0 c^2 (\gamma(v_f) - 1) = \tilde{K} \quad (8.191)$$

donde \tilde{K} es la energía cinética del átomo excitado.

c La energía interna de excitación entre los niveles $n = 1$ y $n = 2$ está dada por

$$\begin{aligned} Q_0 &= E_2 - E_1 = E_n \\ &= -\frac{13,6056981}{2^2} \text{ eV} - \left(-\frac{13,6056981}{1^2} \text{ eV} \right) \\ &= 10.204 \text{ eV} \end{aligned} \quad (8.192)$$

entonces, teniendo en cuenta que la masa del átomo M_0 en su estado base está dada por (ver ecuación 3.43)

$$\begin{aligned} M_0 c^2 &= m_{0e} c^2 + m_{0p} c^2 - 13,6056981 \text{ eV} \\ &= 9.3878 \times 10^8 \text{ eV} \end{aligned} \quad (8.193)$$

la energía del fotón incidente, necesaria para excitar el átomo del nivel base $n = 1$ a su primer nivel excitado $n = 2$ es

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 \left(1 + \frac{Q_0}{2M_0 c^2} \right) \\ &= 10.204 \text{ eV} \left(1 + \frac{10.204 \text{ eV}}{9.3878 \times 10^8 \text{ eV}} \right) \\ &= 10,20399999 \text{ eV} \end{aligned} \quad (8.194)$$

notemos que aún para el caso del átomo más liviano, el hidrógeno, su masa en unidades de energía es mucho mayor que las energías de excitación y la diferencia de $Q - Q_0$ es del orden de 10^{-8} . Para calcular la velocidad de retroceso del átomo excitado se divide la ecuación 8.189 por la ecuación 8.188, entonces

$$\begin{aligned} \frac{v_f}{c} &= \frac{Q}{Q + M_0 c^2} \\ &= \frac{10,204 \text{ eV}}{10,204 \text{ eV} + 9.3878 \times 10^8 \text{ eV}} \\ &= 1.0869 \times 10^{-8} \end{aligned} \quad (8.195)$$

i.e. $v_f \sim 3m/s$ la cual es una velocidad muy pequeña comparada con las velocidades típicas en los sistema atómicos. Por ejemplo, el principio de equipartición de la energía relaciona la energía cinética promedio de una partícula (e.g. átomo) con la temperatura a la cual se encuentra el gas

$$\bar{K} = \frac{3}{2}k_B T \quad (8.196)$$

donde

$$k_B = 8,617385 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1} \quad (8.197)$$

es la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta. Si aplicamos este principio al caso de un gas de hidrógeno atómico a temperatura ambiente ($T = 300 \text{ K}$) la energía cinética promedio de un átomo de hidrógenos es

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \frac{3}{2} \times 8,617385 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1} \times 300 \text{ K} \\ &= 3.8778 \times 10^{-2} \text{ eV} \end{aligned} \quad (8.198)$$

la cual es seis órdenes de magnitud mayor a la energía cinética $Q - Q_0$ que adquiere el átomo al absorber un fotón.

12. **Cohete fotónico.** Sea $M = M(\tau)$ la masa propia del cohete en un instante dado y $P = MU$ su cuadrimomentun, en donde

$$U = (U^0, \vec{U}) = (U^0, U^1, 0, 0) \quad (8.199)$$

es la cuadrivelocidad del cohete, el cual se mueve a lo largo del eje x y sea

$$p_{rad} = \left(\frac{E_{rad}}{c}, \vec{p}_{rad} \right) = \left(\frac{E_{rad}}{c}, p_{rad}, 0, 0 \right) \quad (8.200)$$

el c-momentun de la radiación. Por conservación de la energía, el cambio en la energía del cohete es igual al cambio en la energía radiada, entonces

$$d(MU^0) = -\frac{dE_{rad}}{c} \quad (8.201)$$

Como la energía radiada es en forma de fotones, se debe tener que:

$$dE_{rad} = cd p_{rad} \quad (8.202)$$

y por conservación del momentun tenemos:

$$d p_{rad} = d(MU^1) \quad (8.203)$$

Entonces, de estas relaciones se obtiene la ecuación:

$$d(MU^0) = -d(MU^1) \quad (8.204)$$

la cual se puede escribir en la forma:

$$\frac{dM}{M} = -\frac{d(U^0 + U^1)}{U^0 + U^1} \quad (8.205)$$

Integrando esta ecuación y teniendo en cuenta las expresiones para U^0 y U^1 (ecuación 6.225) se obtiene la expresión para la masa propia del cohete, en función del tiempo propio τ :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{M} &= -\frac{d\left(c \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) + c \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)\right)}{c \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) + c \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)} \\ &= -\frac{d\left(e^{\frac{g}{c}\tau}\right)}{e^{\frac{g}{c}\tau}} \end{aligned} \quad (8.206)$$

integrando

$$M = M_0 e^{-\tau g/c} \quad (8.207)$$

en donde M_0 es la masa propia inicial de la nave. En el **Viaje interestelar 1** la nave está permanentemente acelerada con g , en el viaje de ida acelera la mitad del camino a las Pléyades en un tiempo propio de 6.056 8años y luego desacelera durante un tiempo igual, retornando a la tierra en forma similar. Entonces para el viaje completo la masa propia del cohete al llegar a la tierra es

$$\begin{aligned} M(\tau = 4 \times 6.0568 \text{ años}) &= M_0 e^{-24.227} \\ &= 3.0085 \times 10^{-11} M_0 \end{aligned} \quad (8.208)$$

Para el **Viaje interestelar 2** la nave acelera a $10g$ durante un tiempo propio de $\tau = 0,38002$ años continuando el viaje a velocidad constante, hasta llegar a una distancia de 2.136 6al de las Pléyades, punto en el cual inicia la desaceleración a $10g$. El viaje de retorno sigue una trayectoria similar. Por lo tanto, dado que el combustible se consume solo durante la aceleración, entonces la masa final de la nave el regreso a la tierra es

$$\begin{aligned} M(\tau = 4 \times 0,38002 \text{ años}) &= M_0 e^{-1.5201} \\ &= 0,21869 M_0 \end{aligned} \quad (8.209)$$

El primer viaje dura, en tiempo del cohete, poco más de tres años mientras que el segundo dura 76.84años. Sin embargo el consumo de combustible en el segundo viaje corresponde a un quinto de la masa inicial del cohete, en tanto que en el primer viaje la masa final del cohete es 10^{-11} veces su masa inicial. Esto quiere decir, por ejemplo, que si la nave retorna a la tierra con 100ton., entonces su masa inicial debió ser de 10^{13} ton.

13. **Dispersión elástica protón-protón.** Para el sistema laboratorio Σ elíjase el eje x en la dirección de movimiento de la partícula inicial. Entonces el cuadrivector momentum de las partículas iniciales está dado por

$$p_1 = (m_0 \gamma c, m_0 \gamma v, 0, 0) \quad (8.210)$$

$$p_2 = (m_0 c, 0, 0, 0) \quad (8.211)$$

en donde $\gamma = \gamma(v)$, con v la velocidad de la partícula inicial. El cuadri-vector momentum de las partículas finales, las cuales emergen con la misma energía, es

$$p_{1f} = (m_0 \gamma(v_f) c, m_0 \gamma(v_f) \vec{v}_{f1}) \quad (8.212)$$

$$p_{2f} = (m_0 \gamma(v_f) c, m_0 \gamma(v_f) \vec{v}_{f2}) \quad (8.213)$$

en donde $|\vec{v}_{f1}| = |\vec{v}_{f2}| = v_f$. Por conservación del cuadri-vector momentum total se tiene que

$$p_1 + p_2 = p_{f1} + p_{f2} \quad (8.214)$$

entonces

$$(m_0 c(\gamma + 1), m_0 v, 0, 0) = (2m_0 \gamma(v_f) c, m_0 \gamma(v_f) (\vec{v}_{f1} + \vec{v}_{f2}))$$

Por el lema de la colisión elástica entre dos partículas se debe cumplir que

$$p_1 \cdot p_2 = p_{f1} \cdot p_{f2} \quad (8.215)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} m_0^2 c^2 \gamma &= m_0^2 c^2 \gamma^2(v_f) - m_0^2 \gamma^2(v_f) \vec{v}_{f1} \cdot \vec{v}_{f2} \\ &= m_0^2 c^2 \gamma^2(v_f) \left(1 - \frac{\vec{v}_{f1} \cdot \vec{v}_{f2}}{c^2} \right) \\ &= m_0^2 c^2 \gamma^2(v_f) \left(1 - \frac{v_f^2}{c^2} \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (8.216)$$

donde θ es el ángulo entre las partículas finales, así

$$\gamma = \gamma^2(v_f) \left(1 - \frac{v_f^2}{c^2} \cos \theta \right) \quad (8.217)$$

Para calcular la velocidad final v_f se puede utilizar la conservación de la energía total:

$$(m_0 c(\gamma + 1)) = 2m_0 \gamma(v_f) c \quad (8.218)$$

entonces

$$\gamma(v_f) = \frac{\gamma + 1}{2} \quad (8.219)$$

y

$$\beta_f^2 = \frac{v_f^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2(v_f)} \quad (8.220)$$

Por lo tanto, despejando $\cos \theta$ de la ecuación 8.217 y reemplazando v_f se obtiene

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{c^2}{v_f^2} \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma^2(v_f)} \right) \\
 &= \frac{\gamma^2(v_f)}{\gamma^2(v_f) - 1} \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma^2(v_f)} \right) \\
 &= \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2 - 1} \left(1 - \frac{\gamma}{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2} \right) \\
 &= \frac{(\gamma - 1)^2}{(\gamma + 1)^2 - 4} \\
 &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 3}
 \end{aligned} \tag{8.221}$$

Dado que

$$K = m_0 c^2 (\gamma - 1) \tag{8.222}$$

entonces

$$\cos \theta = \frac{K}{K + 4m_0 c^2} \tag{8.223}$$

Para el caso en que las partículas sean protones se tiene que

$$\cos \theta = \frac{437 \text{ MeV}}{437 \text{ MeV} + 4 \times 938,27231 \text{ MeV}} = 0,10429 \tag{8.224}$$

Por lo tanto

$$\theta = 84,014^\circ \tag{8.225}$$

14. Procesos prohibidos. Considérese en primer lugar el proceso

$$p \longrightarrow p + \gamma \tag{8.226}$$

Sean p_i , p_f y p_γ los cuadvectores momentum del protón inicial, protón final y fotón final, y se m_0 la masa propia del protón, entonces por conservación del cuadvector momentum total se tiene que

$$p_i = p_f + p_\gamma \tag{8.227}$$

elevando al cuadrado esta ecuación se obtiene

$$p_i^2 = p_f^2 + p_\gamma^2 + 2p_f \cdot p_\gamma \tag{8.228}$$

así

$$p_f \cdot p_\gamma = 0 \tag{8.229}$$

pues $p_i^2 = p_f^2$ y $p_\gamma^2 = 0$, por lo tanto si se calcula el producto punto invariante en el sistema de referencia propio del protón, se obtiene que

$$m_0 Q = 0 \tag{8.230}$$

con Q la energía del fotón. Por lo tanto esta relación implica que $Q = 0$ o $m_0 = 0$ lo cual no es posible. Así el proceso es prohibido. El segundo y el tercer proceso

$$\gamma \longrightarrow e^- + e^+ \quad (8.231)$$

$$e^- + e^+ \longrightarrow \gamma \quad (8.232)$$

corresponden a procesos inversos, y por lo tanto si uno de ellos es prohibido el otro también lo es. Además, para darse cuenta que los procesos anteriores no son posibles es suficiente pararse en el sistema de referencia centro de masa. Allí el momentum total es cero y siempre es posible para un par de partículas como el electrón y el positrón encontrar un sistema donde su momentum total es cero, pero un fotón solo nunca puede tener momentum nulo, así los procesos son prohibidos. Otra forma de ver esto es considerando el cuadrado de la ecuación de conservación, pues

$$(p_{e^-} + p_{e^+})^2 = p_\gamma^2 \quad (8.233)$$

implica que

$$2m_0^2c^2 + 2m_0^2c^2\gamma(v) = 0 \quad (8.234)$$

lo cual no es posible. En el cálculo anterior v es la velocidad de una de las partículas respecto a la otra, pues en el sistema de referencia de una de ellas, e.g. el electrón, el positrón se está moviendo con velocidad v y por lo tanto

$$p_{e^-} \cdot p_{e^+} = m_0^2c^2\gamma(v) \quad (8.235)$$

15. **Experimentos de coincidencia.** Tomando el plano $y - z$ como el plano de la colisión, con el eje z en la dirección del fotón incidente, los cuadrivectores momentum del electrón y fotón iniciales son

$$p_{ie} = (m_0c, 0, 0, 0) \quad (8.236)$$

$$p_{i\gamma} = \left(\frac{E_{i\gamma}}{c}, 0, 0, \frac{E_{i\gamma}}{c} \right) \quad (8.237)$$

y del electrón y fotón finales

$$p_{fe} = (m_0c\gamma(v), 0, -m_0\gamma(v)v \sin \varphi, m_0\gamma(v)v \cos \varphi) \quad (8.238)$$

$$p_{f\gamma} = \left(\frac{E_{f\gamma}}{c}, 0, \frac{E_{f\gamma}}{c} \sin \theta, \frac{E_{f\gamma}}{c} \cos \theta \right) \quad (8.239)$$

donde φ es el ángulo de dispersión del electrón, medido con respecto al eje z , θ el ángulo de dispersión del fotón con respecto al eje z y se ha tomado el eje y positivo en la dirección del fotón dispersado. Por conservación de cuadrivector momentum se tiene que

$$p_{ie} + p_{i\gamma} = p_{fe} + p_{f\gamma} \quad (8.240)$$

entonces

$$(p_{ie} + p_{i\gamma} - p_{f\gamma})^2 = (p_{fe})^2 \quad (8.241)$$

implica que

$$p_{ie} \cdot p_{i\gamma} - p_{ie} \cdot p_{f\gamma} - p_{i\gamma} \cdot p_{f\gamma} = 0 \quad (8.242)$$

por lo tanto

$$m_0 E_{i\gamma} - m_0 E_{f\gamma} - \frac{E_{i\gamma} E_{f\gamma}}{c^2} (1 - \cos \theta) = 0 \quad (8.243)$$

Así

$$E_{f\gamma} = \frac{m_0 c^2 E_{i\gamma}}{m_0 c^2 + E_{i\gamma} (1 - \cos \theta)} \quad (8.244)$$

La ecuación de conservación 8.240 conduce al siguiente sistema de ecuaciones

$$m_0 c + \frac{E_{i\gamma}}{c} = m_0 c \gamma(v) + \frac{E_{f\gamma}}{c} \quad (8.245)$$

$$0 = -m_0 \gamma(v) v \sin \varphi + \frac{E_{f\gamma}}{c} \sin \theta \quad (8.246)$$

$$\frac{E_{i\gamma}}{c} = m_0 \gamma(v) v \cos \varphi + \frac{E_{f\gamma}}{c} \cos \theta \quad (8.247)$$

Despejando $\gamma(v)v$ de la segunda ecuación y reemplazando en la tercera se obtiene

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{E_{f\gamma} \sin \theta}{E_{i\gamma} - E_{f\gamma} \cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{1 + \frac{E_{i\gamma}}{m_0 c^2} - \cos \theta \left(1 + \frac{E_{i\gamma}}{m_0 c^2}\right)} \end{aligned} \quad (8.248)$$

y la energía final del electrón dispersado se obtiene de la primera ecuación

$$\begin{aligned} m_0 c^2 \gamma(v) &= m_0 c^2 + E_{i\gamma} - E_{f\gamma} \\ &= m_0 c^2 + E_{i\gamma} - \frac{m_0 c^2 E_{i\gamma}}{m_0 c^2 + E_{i\gamma} (1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{(m_0 c^2)^2 + E_{i\gamma} (1 - \cos \theta) (m_0 c^2 + E_{i\gamma})}{m_0 c^2 + E_{i\gamma} (1 - \cos \theta)} \end{aligned} \quad (8.249)$$

16. Reflexión inelástica de un fótón en un átomo. En el sistema de referencia del laboratorio se elige el eje x en la dirección de incidencia del fótón inicial.

a El choque es inelástico puesto que la masa propia del átomo final es diferente a la masa propia del átomo inicial, debido a que el átomo hace una transición interna.

- b** Con la elección de ejes dada, los cuadrivectores momentum del fotón y del átomo inicial están dados por

$$p_{\gamma i} = \left(\frac{Q_i}{c}, \frac{Q_i}{c}, 0, 0 \right) \quad (8.250)$$

$$p_i = \left(\tilde{M}_0 c, 0, 0, 0 \right) \quad (8.251)$$

en donde \tilde{M}_0 es la masa propia del átomo de hidrógeno excitado. Los cuadrivectores momentum del fotón y del átomo final, con M_0 la masa propia del hidrógeno en su estado base, son

$$p_{\gamma f} = \left(\frac{Q_i}{c}, -\frac{Q_i}{c}, 0, 0 \right) \quad (8.252)$$

$$p_f = (M_0 \gamma(v) c, M_0 \gamma(v) v, 0, 0) \quad (8.253)$$

con v la velocidad final del átomo. Por las leyes de conservación se tiene que

$$p_{\gamma i} + p_i = p_{\gamma f} + p_f \quad (8.254)$$

entonces

$$\frac{Q_i}{c} + \tilde{M}_0 c = \frac{Q_i}{c} + M_0 \gamma(v) c \quad (8.255)$$

$$\frac{Q_i}{c} = -\frac{Q_i}{c} + M_0 \gamma(v) v \quad (8.256)$$

por lo tanto

$$\gamma(v) = \frac{\tilde{M}_0}{M_0} = \frac{\tilde{M}_0 c^2}{M_0 c^2} = \frac{E_2}{E_1} \quad (8.257)$$

Donde E_1 y E_2 son las energías propias totales del hidrógeno en su estado base ($n = 1$) y en el primer estado excitado ($n = 2$) respectivamente y de la ecuación 8.192 la diferencia de las energías

$$Q_0 = E_2 - E_1 = \tilde{M}_0 c^2 - M_0 c^2 = 10.204 \text{ eV} \quad (8.258)$$

da la energía de excitación. De la ecuación para el factor $\gamma(v)$ se obtiene la velocidad de retroceso del átomo

$$\begin{aligned} \frac{v}{c} &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{M_0 c^2}{\tilde{M}_0 c^2}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{M_0 c^2}{M_0 c^2 + 10.204 \text{ eV}}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{9.3878 \times 10^8 \text{ eV}}{9.3878 \times 10^8 \text{ eV} + 10.204 \text{ eV}}} \\ &= 1.0426 \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (8.259)$$

c De la ecuación de conservación del momentum se obtiene que

$$\frac{2Q_i}{c} = M_0\gamma(v)v \quad (8.260)$$

entonces $\frac{1}{2} (10.204 \text{ eV} + 9.3878 \times 10^8 \text{ eV}) 1.0426 \times 10^{-4} = 48939. \text{ eV}$

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{1}{2} M_0\gamma(v)vc = \frac{1}{2} M_0c^2\beta \frac{\tilde{M}_0c^2}{M_0c^2} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{M}_0c^2\beta = \frac{1}{2} (Q_0 + M_0c^2) \beta \\ &= \frac{1}{2} (10.204 \text{ eV} + 9.3878 \times 10^8 \text{ eV}) 1.0426 \times 10^{-4} \\ &= 48,9 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (8.261)$$

Capítulo 9

Tensores

9.1. Problemas de álgebra tensorial

1. **Transformación de componentes covariantes.** Para encontrar como se transforman las componentes covariantes de un cuadrivector \mathbf{V} , considérese en primer lugar que para un sistema de referencia Σ' las componentes covariantes V'_α están relacionadas con sus componentes contravariantes por la relación

$$V'_\alpha = \eta_{\alpha\mu} V'^\mu \quad (9.1)$$

entonces, aplicando la ley de transformación de las componentes contravariantes se tiene que

$$V'_\alpha = \eta_{\alpha\mu} \Lambda^\mu_\nu V^\nu \quad (9.2)$$

Ahora, de la relación

$$\Lambda_\nu{}^\mu = \eta_{\nu\gamma} \eta^{\mu\delta} \Lambda^\gamma_\delta \quad (9.3)$$

la cual se cumple para la matriz inversa de Lorentz, pues

$$\begin{aligned} \Lambda_\nu{}^\mu \Lambda^\nu_\omega &= \eta_{\nu\gamma} \eta^{\mu\delta} \Lambda^\gamma_\delta \Lambda^\nu_\omega \\ &= \eta^{\mu\delta} \eta_{\nu\gamma} \Lambda^\gamma_\delta \Lambda^\nu_\omega \\ &= \eta^{\mu\delta} \eta_{\delta\omega} \\ &= \delta^\mu_\omega \end{aligned} \quad (9.4)$$

dado que la matriz de Lorentz debe satisfacer que

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta_{\mu\nu} \quad (9.5)$$

Multiplicando la relación 9.3 por $\eta_{\beta\mu}$ a ambos lados y sumando sobre el índice μ , se obtiene

$$\eta_{\beta\mu} \Lambda_\nu{}^\mu = \eta_{\beta\sigma} \eta_{\nu\mu} \eta^{\sigma\delta} \Lambda^\mu_\delta = \eta_{\nu\mu} \delta^\delta_\beta \Lambda^\mu_\delta = \eta_{\nu\mu} \Lambda^\mu_\beta \quad (9.6)$$

Remplazando esta relación en el último término de la ecuación 9.2, se tiene que

$$V'_\alpha = \eta_{\alpha\mu} \Lambda^\mu_\nu V^\nu = \eta_{\nu\mu} \Lambda_\alpha{}^\mu V^\nu = \Lambda_\alpha{}^\mu V_\mu \quad (9.7)$$

Esta ecuación da la ley de transformación de las componentes covariantes para un cuadrivector.

2. **Componentes covariantes del cuadrivector momentum.** Por definición, las componentes covariantes de un cuadrivector están relacionadas con sus componentes contravariantes por la relación

$$V_\alpha = \eta_{\alpha\sigma} V^\sigma \quad (9.8)$$

entonces aplicando esta relación a las componentes del cuadrivector momentum se tiene

$$\begin{aligned} p_0 &= \eta_{0\beta} p^\beta \\ &= \eta_{00} p^0 + \eta_{01} p^1 + \eta_{02} p^2 + \eta_{03} p^3 \\ &= \eta_{00} p^0 \\ &= \frac{E}{c} \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \eta_{1\beta} p^\beta \\ &= \eta_{10} p^0 + \eta_{11} p^1 + \eta_{12} p^2 + \eta_{13} p^3 \\ &= \eta_{11} p^1 \\ &= -p_x \end{aligned} \quad (9.10)$$

y similarmente

$$p_2 = \eta_{22} p^2 = -p_y \quad (9.11)$$

$$p_3 = \eta_{33} p^3 = -p_z \quad (9.12)$$

así obtenemos

$$p_\mu = (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{E}{c}, -p_x, -p_y, -p_z \right) \quad (9.13)$$

De esta forma la interpretación física de las componentes covariantes del cuadrivector momentum es, en esencia, similar a las componentes contravariantes, salvo por el signo negativo de las componentes espaciales.

3. **Transformación de componentes covariantes.** Las ecuaciones de transformación para las componentes covariantes de un cuadrivector están dadas por

$$V'_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\sigma V_\sigma \quad (9.14)$$

en donde $\Lambda_\alpha{}^\sigma$ son los elementos de la transformación de Lorentz inversa. Entonces si se aplica esta ecuación a las componentes covariantes del

cuadrivector momentun, para la transformación de Lorentz usual, se tiene que

$$p'_0 = \gamma(v)(p_0 + \beta p_1) \quad (9.15)$$

$$p'_1 = \gamma(v)(p_1 + \beta p_0) \quad (9.16)$$

$$p'_2 = p_2 \quad (9.17)$$

$$p'_3 = p_3 \quad (9.18)$$

Teniendo en cuenta la ecuación 9.13 que relaciona las componentes covariantes del cuadrivector momentun de una partícula con su energía y momentun, se obtienen las ecuaciones que relacionan la energía y el momentun de una partícula medidas por dos observadores inerciales:

$$E' = \gamma(v)(E - vp_x) \quad (9.19)$$

$$p'_x = \gamma(v)\left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right) \quad (9.20)$$

$$p'_y = p_y \quad (9.21)$$

$$p'_z = p_z \quad (9.22)$$

Estas ecuaciones también se obtienen a partir de las ecuaciones de transformación para las componentes contravariantes

$$p'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\sigma} p^{\sigma} \quad (9.23)$$

(ver ecuaciones 8.18, 8.19, 8.20 y 8.21). Este es un resultado que era de esperar, pues dada la relación biunívoca entre las componentes covariantes y contravariantes de un cuadrivector, la interpretación física de sus componentes debe ser la misma, salvo por un signo menos global en las componentes espaciales, ver ecuación 9.13.

4. **Propiedades de simetría.** La ley de transformación para las componentes del tensor, bajo una transformación de Lorentz, está dada por

$$T'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\sigma} \Lambda^{\beta}_{\omega} T^{\sigma\omega} \quad (9.24)$$

a Si el tensor es simétrico en un sistema de referencia

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \quad (9.25)$$

entonces

$$\begin{aligned} T'^{\alpha\beta} &= \Lambda^{\alpha}_{\sigma} \Lambda^{\beta}_{\omega} T^{\sigma\omega} \\ &= \Lambda^{\beta}_{\omega} \Lambda^{\alpha}_{\sigma} T^{\omega\sigma} \\ &= T'^{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (9.26)$$

pues el producto de los elementos de la transformación de Lorentz es conmutativo. En el caso del tensor antisimétrico se tiene que

$$\begin{aligned} T'^{\alpha\beta} &= \Lambda^\alpha{}_\sigma \Lambda^\beta{}_\omega T^{\sigma\omega} \\ &= -\Lambda^\beta{}_\omega \Lambda^\alpha{}_\sigma T^{\omega\sigma} \\ &= -T'^{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (9.27)$$

entonces las propiedades de simetría de tensores contravariantes no depende del sistema de referencia. Un resultado similar vale para tensores covariantes, y en general para las componentes contravariantes o covariantes de tensores mixtos.

b Las componentes covariantes del tensor \mathbf{T} están relacionadas con sus componentes contravariantes por

$$T_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\sigma} \eta_{\beta\tau} T^{\sigma\tau} \quad (9.28)$$

entonces, si $T^{\alpha\beta}$ es simétrico se tiene que

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\sigma} \eta_{\beta\tau} T^{\sigma\tau} \\ &= \eta_{\alpha\sigma} \eta_{\beta\tau} T^{\tau\sigma} \\ &= \eta_{\beta\tau} \eta_{\alpha\sigma} T^{\tau\sigma} \\ &= T_{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (9.29)$$

un resultado similar se obtiene si el tensor $T^{\alpha\beta}$ es antisimétrico, es decir

$$T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha} \quad (9.30)$$

Sobre las componentes mixtas no hay una relación de simetría o antisimetría general, si el tensor es simétrico o antisimétrico, pues por ejemplo, las componentes mixtas $T^\alpha{}_\beta$ están dadas por

$$T^\alpha{}_\beta = \eta_{\beta\sigma} T^{\alpha\sigma} \quad (9.31)$$

entonces

$$\begin{aligned} T^0{}_1 &= \eta_{1\sigma} T^{0\sigma} = \eta_{10} T^{00} + \eta_{11} T^{01} + \eta_{12} T^{02} + \eta_{13} T^{03} \\ &= \eta_{11} T^{01} = -T^{01} \end{aligned} \quad (9.32)$$

y

$$T^1{}_0 = \eta_{0\sigma} T^{1\sigma} = \eta_{00} T^{10} = T^{10} \quad (9.33)$$

así aún cuando el tensor es simétrico $T^{10} = T^{01}$ se tiene que

$$T^0{}_1 = -T^1{}_0 \quad (9.34)$$

pero para otra componente, por ejemplo $T^1{}_2$ se tiene que

$$T^1{}_2 = \eta_{2\sigma} T^{1\sigma} = \eta_{22} T^{12} = -T^{12} \quad (9.35)$$

pero

$$T^2_{\ 1} = \eta_{1\sigma} T^{2\sigma} = \eta_{11} T^{21} = -T^{21} \quad (9.36)$$

y aquí se cumple que

$$T^1_{\ 2} = T^2_{\ 1} \quad (9.37)$$

5. **Tensor métrico de Minkowski.** Las componentes del tensor métrico de Minkowski se transforman como

$$\eta'_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\ \sigma} \Lambda_{\beta}^{\ \omega} \eta_{\sigma\omega} \quad (9.38)$$

Considérese una transformación de Lorentz usual, donde las componentes de la matriz de transformación inversa $\Lambda_{\alpha}^{\ \sigma}$ están dadas por

$$\Lambda_{\alpha}^{\ \sigma} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.39)$$

entonces

$$\begin{aligned} \eta'_{00} &= \Lambda_0^{\ \sigma} \Lambda_0^{\ \omega} \eta_{\sigma\omega} \\ &= \Lambda_0^{\ 0} \Lambda_0^{\ 0} \eta_{00} + \Lambda_0^{\ 1} \Lambda_0^{\ 1} \eta_{11} \\ &= \gamma^2 \eta_{00} + (\beta\gamma)^2 \eta_{11} \\ &= \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (9.40)$$

donde en la suma sobre los dos índices solo se han escrito los términos no nulos. Para las componentes espaciales de la diagonal η'_{ii} con $i = 1, 2, 3$ se tiene

$$\begin{aligned} \eta'_{ii} &= \Lambda_i^{\ \sigma} \Lambda_i^{\ \omega} \eta_{\sigma\omega} \\ &= \Lambda_i^{\ 0} \Lambda_i^{\ 0} \eta_{00} + \Lambda_i^{\ 1} \Lambda_i^{\ 1} \eta_{11} + \Lambda_i^{\ 2} \Lambda_i^{\ 2} \eta_{22} + \Lambda_i^{\ 3} \Lambda_i^{\ 3} \eta_{33} \\ &= (\beta\gamma)^2 \delta_i^1 \eta_{00} + \gamma^2 \delta_i^1 \eta_{11} + \delta_i^2 \eta_{22} + \delta_i^3 \eta_{33} \\ &= \begin{cases} \beta^2 \gamma^2 - \gamma^2 & = -1 & i = 1 \\ \eta_{22} & = -1 & i = 2 \\ \eta_{33} & = -1 & i = 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (9.41)$$

Para los términos no diagonales se obtiene:

$$\begin{aligned} \eta'_{01} &= \Lambda_0^{\ \sigma} \Lambda_1^{\ \omega} \eta_{\sigma\omega} \\ &= \Lambda_0^{\ 0} \Lambda_1^{\ 0} \eta_{00} + \Lambda_0^{\ 1} \Lambda_1^{\ 1} \eta_{11} \\ &= \beta\gamma^2 \eta_{00} + \beta\gamma^2 \eta_{11} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9.42)$$

y para los términos η'_{0i} con $i = 2, 3$ todos los términos de la suma se anulan

$$\eta'_{0i} = \Lambda_0^{\ \sigma} \Lambda_i^{\ \omega} \eta_{\sigma\omega} = 0 \quad (9.43)$$

Para el tensor métrico contravariante se sigue un cálculo similar, en donde ahora la ley de transformación es

$$\eta^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\sigma \Lambda^\beta{}_\omega \eta^{\sigma\omega} \quad (9.44)$$

con $\Lambda^\alpha{}_\sigma$ los elementos de la transformación de Lorentz directa. Así por ejemplo

$$\begin{aligned} \eta^{00} &= \Lambda^0{}_\sigma \Lambda^0{}_\omega \eta^{\sigma\omega} \\ &= \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_0 \eta^{00} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^0{}_1 \eta^{11} \\ &= \gamma^2 \eta^{00} + (-\beta\gamma)^2 \eta^{11} \\ &= \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1 \end{aligned} \quad (9.45)$$

y de manera similar para las demás componentes. Para el tensor métrico mixto δ^α_β la ley de transformación está dada por

$$\delta'^\alpha_\beta = \Lambda^\alpha{}_\sigma \Lambda_\beta{}^\omega \delta^\sigma_\omega \quad (9.46)$$

De esta transformación se sigue inmediatamente el resultado, pues al sumar sobre ω , por la propiedades del símbolo δ , todos los términos son nulos salvo cuando $\omega = \sigma$ entonces

$$\delta'^\alpha_\beta = \Lambda^\alpha{}_\sigma \Lambda_\beta{}^\omega \delta^\sigma_\omega = \Lambda^\alpha{}_\sigma \Lambda_\beta{}^\sigma = \delta^\alpha_\beta \quad (9.47)$$

donde la última igualdad se obtiene del hecho que $\Lambda^\alpha{}_\sigma$ y $\Lambda_\beta{}^\sigma$ son mutuamente inversas.

6. Algebra de tensores. Sea Σ' un sistema de referencia relacionado con Σ por una transformación de Lorentz.

a Sea

$$S'^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} = \lambda T'^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} \quad (9.48)$$

las cantidades medidas en un sistema de referencia Σ' , entonces, por hipótesis $T'^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}$ son las componentes de un tensor y así ellas están relacionadas con las componentes del tensor en el sistema Σ por la ecuación 4.20

$$T'^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} = \Lambda^{\alpha_1}_{\gamma_1} \dots \Lambda^{\alpha_r}_{\gamma_r} \Lambda_{\beta_1}^{\sigma_1} \dots \Lambda_{\beta_s}^{\sigma_s} T^{\gamma_1 \dots \gamma_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \quad (9.49)$$

por lo tanto reemplazando en la ecuación 9.48 se tiene

$$\begin{aligned} S'^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} &= \lambda \Lambda^{\alpha_1}_{\gamma_1} \dots \Lambda^{\alpha_r}_{\gamma_r} \Lambda_{\beta_1}^{\sigma_1} \dots \Lambda_{\beta_s}^{\sigma_s} T^{\gamma_1 \dots \gamma_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \\ &= \Lambda^{\alpha_1}_{\gamma_1} \dots \Lambda^{\alpha_r}_{\gamma_r} \Lambda_{\beta_1}^{\sigma_1} \dots \Lambda_{\beta_s}^{\sigma_s} (\lambda T^{\gamma_1 \dots \gamma_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s}) \\ &= \Lambda^{\alpha_1}_{\gamma_1} \dots \Lambda^{\alpha_r}_{\gamma_r} \Lambda_{\beta_1}^{\sigma_1} \dots \Lambda_{\beta_s}^{\sigma_s} S^{\gamma_1 \dots \gamma_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} \end{aligned} \quad (9.50)$$

lo cual demuestra que las cantidades $S^{\gamma_1 \dots \gamma_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s}$ se transforman como las componentes de un tensor r - veces contravariante y s - veces covariante.

b Para un sistema de referencia Σ' tenemos que

$$Q'_{\beta_1 \dots \beta_s}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = T'_{\beta_1 \dots \beta_s}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} + R_{\beta_1 \dots \beta_s}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \quad (9.51)$$

entonces como \mathbf{T} y \mathbf{R} son tensores sus componentes en dos sistemas de referencia están relacionadas por la ecuación 4.20, así

$$\begin{aligned} T'_{\beta_1 \dots \beta_s}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} &= \Lambda_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots \Lambda_{\gamma_r}^{\alpha_r} \Lambda_{\beta_1}^{\sigma_1} \dots \Lambda_{\beta_s}^{\sigma_s} T_{\sigma_1 \dots \sigma_s}{}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} \\ R'_{\beta_1 \dots \beta_s}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} &= \Lambda_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots \Lambda_{\gamma_r}^{\alpha_r} \Lambda_{\beta_1}^{\sigma_1} \dots \Lambda_{\beta_s}^{\sigma_s} R_{\sigma_1 \dots \sigma_s}{}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} \end{aligned} \quad (9.52)$$

reemplazando estas expresiones en la ecuación 9.51 tenemos

$$\begin{aligned} Q'_{\beta_1 \dots \beta_s}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} &= \Lambda_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots \Lambda_{\gamma_r}^{\alpha_r} \Lambda_{\beta_1}^{\sigma_1} \dots \Lambda_{\beta_s}^{\sigma_s} T_{\sigma_1 \dots \sigma_s}{}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} \\ &\quad + \Lambda_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots \Lambda_{\gamma_r}^{\alpha_r} \Lambda_{\beta_1}^{\sigma_1} \dots \Lambda_{\beta_s}^{\sigma_s} R_{\sigma_1 \dots \sigma_s}{}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} \end{aligned} \quad (9.53)$$

factorizando los elementos de las transformaciones de Lorentz se obtiene

$$\begin{aligned} Q'_{\beta_1 \dots \beta_s}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} &= \Lambda_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots \Lambda_{\gamma_r}^{\alpha_r} \Lambda_{\beta_1}^{\sigma_1} \dots \Lambda_{\beta_s}^{\sigma_s} (T_{\sigma_1 \dots \sigma_s}{}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} + R_{\sigma_1 \dots \sigma_s}{}^{\gamma_1 \dots \gamma_r}) \\ &= \Lambda_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots \Lambda_{\gamma_r}^{\alpha_r} \Lambda_{\beta_1}^{\sigma_1} \dots \Lambda_{\beta_s}^{\sigma_s} Q_{\sigma_1 \dots \sigma_s}{}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} \end{aligned} \quad (9.54)$$

lo cual demuestra que la suma de tensores del mismo tipo es un tensor.

7. Contracción de tensores. Sean

$$Q_{\beta_1 \dots \beta_{j-1} \beta_{j+1} \dots \beta_s}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \dots \alpha_r} = T_{\beta_1 \dots \beta_{j-1} \beta_{j+1} \dots \beta_s}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \sigma \alpha_{i+1} \dots \alpha_r} \quad (9.55)$$

las cantidades obtenidas por la contracción de la i -ésima componente contravariante y la j -ésima componente covariante del tensor \mathbf{T} medidas en un sistema de referencia Σ . Consideremos un segundo sistema de referencia Σ' relacionado con Σ por una transformación de Lorentz. Sean

$$Q'_{\beta_1 \dots \beta_{j-1} \beta_{j+1} \dots \beta_s}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \dots \alpha_r} = T'_{\beta_1 \dots \beta_{j-1} \beta_{j+1} \dots \beta_s}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \sigma \alpha_{i+1} \dots \alpha_r} \quad (9.56)$$

las cantidades medidas en Σ' , entonces aplicando la ecuación 4.20 se tiene que

$$\begin{aligned} Q'_{\beta_1 \dots \beta_{j-1} \beta_{j+1} \dots \beta_s}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \dots \alpha_r} &= \Lambda_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots \Lambda_{\gamma_{i-1}}^{\alpha_{i-1}} \Lambda_{\gamma_i}^{\sigma} \Lambda_{\gamma_{i+1}}^{\alpha_{i+1}} \dots \\ &\quad \Lambda_{\gamma_r}^{\alpha_r} \Lambda_{\beta_1}^{\omega_1} \dots \Lambda_{\beta_{j-1}}^{\omega_{j-1}} \Lambda_{\sigma}^{\omega_j} \Lambda_{\beta_{j+1}}^{\omega_{j+1}} \dots \\ &\quad \dots \Lambda_{\beta_s}^{\sigma_s} T_{\omega_1 \dots \omega_{j-1} \omega_j \omega_{j+1} \dots \omega_s}{}^{\gamma_1 \dots \gamma_{i-1} \gamma_i \gamma_{i+1} \dots \gamma_r} \end{aligned} \quad (9.57)$$

teniendo en cuenta que

$$\Lambda_{\gamma_i}^{\sigma} \Lambda_{\sigma}^{\omega_j} = \delta_{\gamma_i}^{\omega_j} \quad (9.58)$$

puesto que $\Lambda^\sigma_{\gamma_i}$ y Λ^{ω_j} corresponden a las componentes de la transformación de Lorentz y su inversa, obtenemos

$$\begin{aligned}
Q^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_{j-1} \beta_{j+1} \dots \beta_s} &= \Lambda^{\alpha_1}_{\gamma_1} \dots \Lambda^{\alpha_{i-1}}_{\gamma_{i-1}} \Lambda^{\alpha_{i+1}}_{\gamma_{i+1}} \dots \Lambda^{\alpha_r}_{\gamma_r} \Lambda^{\omega_1}_{\beta_1} \dots \\
&\quad \cdot \Lambda^{\omega_{j-1}}_{\beta_{j-1}} \Lambda^{\omega_{j+1}}_{\beta_{j+1}} \dots \Lambda^{\omega_s}_{\beta_s} \delta^{\omega_j}_{\gamma_i} T^{\gamma_1 \dots \gamma_{i-1} \gamma_{i+1} \dots \gamma_r}_{\omega_1 \dots \omega_{j-1} \omega_j \omega_{j+1} \dots \omega_s} \\
&= \Lambda^{\alpha_1}_{\gamma_1} \dots \Lambda^{\alpha_{i-1}}_{\gamma_{i-1}} \Lambda^{\alpha_{i+1}}_{\gamma_{i+1}} \dots \Lambda^{\alpha_r}_{\gamma_r} \Lambda^{\omega_1}_{\beta_1} \dots \\
&\quad \cdot \Lambda^{\omega_{j-1}}_{\beta_{j-1}} \Lambda^{\omega_{j+1}}_{\beta_{j+1}} \dots \Lambda^{\omega_s}_{\beta_s} T^{\gamma_1 \dots \gamma_{i-1} \gamma_{i+1} \dots \gamma_r}_{\omega_1 \dots \omega_{j-1} \omega_j \omega_{j+1} \dots \omega_s} \\
&= \Lambda^{\alpha_1}_{\gamma_1} \dots \Lambda^{\alpha_{i-1}}_{\gamma_{i-1}} \Lambda^{\alpha_{i+1}}_{\gamma_{i+1}} \dots \Lambda^{\alpha_r}_{\gamma_r} \Lambda^{\omega_1}_{\beta_1} \dots \\
&\quad \cdot \Lambda^{\omega_{j-1}}_{\beta_{j-1}} \Lambda^{\omega_{j+1}}_{\beta_{j+1}} \dots \Lambda^{\omega_s}_{\beta_s} Q^{\gamma_1 \dots \gamma_{i-1} \gamma_{i+1} \dots \gamma_r}_{\omega_1 \dots \omega_{j-1} \omega_j \omega_{j+1} \dots \omega_s} \quad (9.59)
\end{aligned}$$

como se quería demostrar.

8. **Tensor de Levi-Civita.** Las componentes del tensor de Levi-Civita están dadas por

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} := \begin{cases} +1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ es permutación par de } 0123 \\ -1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ es permutación impar de } 0123 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

a Bajo una transformación de Lorentz usual las componentes del tensor de Levi-Civita se transforman como

$$\varepsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\gamma_\sigma \Lambda^\delta_\omega \varepsilon^{\mu\nu\sigma\omega} \quad (9.60)$$

Consideremos primero el elemento con $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, 2, 3$ respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}
\varepsilon'^{0123} &= \Lambda^0_\mu \Lambda^1_\nu \Lambda^2_\sigma \Lambda^3_\omega \varepsilon^{\mu\nu\sigma\omega} \\
&= \det |\Lambda| \\
&= 1 \quad (9.61)
\end{aligned}$$

para una transformación de Lorentz usual. Entonces, si consideramos una permutación cualquiera de los índices de ε' , tal como por ejemplo $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 3, 0, 1, 2$, la cual es una permutación impar, tenemos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon'^{3012} &= \Lambda^3_\mu \Lambda^0_\nu \Lambda^1_\sigma \Lambda^2_\omega \varepsilon^{\mu\nu\sigma\omega} \\
&= -\Lambda^3_\omega \Lambda^0_\mu \Lambda^1_\nu \Lambda^2_\sigma \varepsilon^{\omega\mu\nu\sigma} \\
&= -\Lambda^0_\mu \Lambda^1_\nu \Lambda^2_\sigma \Lambda^3_\omega \varepsilon^{\omega\mu\nu\sigma} \\
&= -\det |\Lambda| \\
&= -1 \quad (9.62)
\end{aligned}$$

donde en el segundo paso se ha hecho la misma permutación de los índices del tensor de Levi-Civita, la cual cambia el signo por ser una

permutación impar. Así, procediendo de la misma forma sobre todas las permutaciones posibles encontramos que

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \pm 1 \quad (9.63)$$

dependiendo si $(\alpha\beta\gamma\delta)$ es una permutación par(+) o impar(-) de (0123). Finalmente si dos índices son iguales, por ejemplo el primero y el tercero, desarrollando la suma sobre índices repetidos se tiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta\alpha\delta} &= \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\alpha_\sigma \Lambda^\delta_\omega \varepsilon^{\mu\nu\sigma\omega} \\ &= \Lambda^\alpha_0 \Lambda^\beta_1 \Lambda^\alpha_2 \Lambda^\delta_3 \varepsilon^{0123} + \Lambda^\alpha_0 \Lambda^\beta_1 \Lambda^\alpha_3 \Lambda^\delta_2 \varepsilon^{0132} + \\ &\quad \dots + \Lambda^\alpha_2 \Lambda^\beta_1 \Lambda^\alpha_0 \Lambda^\delta_3 \varepsilon^{2103} + \dots \\ &= \Lambda^\alpha_0 \Lambda^\beta_1 \Lambda^\alpha_2 \Lambda^\delta_3 (\varepsilon^{0123} + \varepsilon^{2103}) + \dots \\ &= \Lambda^\alpha_0 \Lambda^\beta_1 \Lambda^\alpha_2 \Lambda^\delta_3 (+1 - 1) + \dots \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9.64)$$

anulándose todos los términos dos a dos.

b Las componentes covariantes del tensor de Levi-Civita están dadas por

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\delta\omega} \varepsilon^{\mu\nu\delta\omega} \quad (9.65)$$

Consideremos primero el caso donde los índices $(\alpha\beta\gamma\delta)$ son todos diferentes. Entonces a partir de la definición del tensor métrico de Minkowski

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \alpha = \beta = 0 \\ -1 & \alpha = \beta = 1, 2, 3 \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (9.66)$$

tenemos que en la ecuación 9.65 los términos de las sumas sobre los índices repetidos μ, ν, σ y ω se anulan salvo cuando $\alpha = \mu, \beta = \nu, \gamma = \sigma$ y $\delta = \omega$, entonces

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\delta\omega} \varepsilon^{\mu\nu\delta\omega} \\ &= \eta_{\alpha\alpha} \eta_{\beta\beta} \eta_{\gamma\gamma} \eta_{\delta\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= (+1)(-1)^3 \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \end{aligned} \quad (9.67)$$

Para los demás casos, cuando dos o más índices del tensor $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ están repetidos la expresión se anula, pues por ejemplo, si el segundo y el cuarto índice son iguales se tiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\beta} &= \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} \eta_{\gamma\sigma} \eta_{\beta\omega} \varepsilon^{\mu\nu\delta\omega} \\ &= \eta_{\alpha\alpha} \eta_{\beta\beta} \eta_{\gamma\gamma} \eta_{\beta\beta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\beta} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9.68)$$

por la definición de las componentes contravariantes del tensor de Levi-Civita. Así la relación entre las componentes contravariantes y covariantes del tensor está dada por

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (9.69)$$

c Por el resultado anterior (ecuación 9.69) tenemos que

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = - \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0}^3 |\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}|^2 \quad (9.70)$$

pero de los $4^4 = 256$ términos de la suma solamente $4! = 24$ son diferentes de cero, los cuales corresponden a las permutaciones de los índices $\alpha\beta\gamma\delta$, y puesto que $|\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}| = 1$, tenemos

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = - \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0}^3 1 = -24 \quad (9.71)$$

9. El tensor dual. Sean

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & 0 & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (9.72)$$

las componentes del tensor antisimétrico, entonces

a De la definición de tensor dual tenemos (escribiendo solo los términos no nulos)

$$\begin{aligned} (*F)^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta} \\ &= \frac{1}{2}[\varepsilon^{\alpha\beta 01}F_{01} + \varepsilon^{\alpha\beta 02}F_{02} + \varepsilon^{\alpha\beta 03}F_{03} \\ &\quad + \varepsilon^{\alpha\beta 10}F_{10} + \varepsilon^{\alpha\beta 12}F_{12} + \varepsilon^{\alpha\beta 13}F_{13} \\ &\quad + \varepsilon^{\alpha\beta 20}F_{20} + \varepsilon^{\alpha\beta 21}F_{21} + \varepsilon^{\alpha\beta 23}F_{23} \\ &\quad + \varepsilon^{\alpha\beta 30}F_{30} + \varepsilon^{\alpha\beta 31}F_{31} + \varepsilon^{\alpha\beta 32}F_{32}] \end{aligned} \quad (9.73)$$

dado que $\varepsilon^{\alpha\beta 01} = -\varepsilon^{\alpha\beta 10}$ y $F_{01} = -F_{10}$, y similarmente con los demás términos, obtenemos

$$\begin{aligned} (*F)^{\alpha\beta} &= \varepsilon^{\alpha\beta 01}F_{01} + \varepsilon^{\alpha\beta 02}F_{02} + \varepsilon^{\alpha\beta 03}F_{03} \\ &\quad + \varepsilon^{\alpha\beta 12}F_{12} + \varepsilon^{\alpha\beta 31}F_{31} + \varepsilon^{\alpha\beta 23}F_{23} \end{aligned} \quad (9.74)$$

A partir de esta relación podemos obtener directamente las componentes del tensor dual, pues de la definición del tensor de Levi-Civita,

para los diferentes índices α y β solo sobrevive un término de la relación anterior, así

$$\begin{aligned}
 (*F)^{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon^{0123}F_{23} & \varepsilon^{0231}F_{31} & \varepsilon^{0312}F_{12} \\ \varepsilon^{1023}F_{23} & 0 & \varepsilon^{1203}F_{03} & \varepsilon^{1302}F_{02} \\ \varepsilon^{2031}F_{31} & \varepsilon^{2103}F_{03} & 0 & \varepsilon^{2301}F_{01} \\ \varepsilon^{3012}F_{12} & \varepsilon^{3102}F_{02} & \varepsilon^{3201}F_{01} & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & F_{23} & F_{31} & F_{12} \\ -F_{23} & 0 & F_{03} & -F_{02} \\ -F_{31} & -F_{03} & 0 & F_{01} \\ -F_{12} & F_{02} & -F_{01} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.75)
 \end{aligned}$$

notemos que el tensor dual también es antisimétrico:

$$(*F)^{\alpha\beta} = -(*F)^{\beta\alpha} \quad (9.76)$$

b Las componentes covariantes del tensor dual están dadas por

$$(*F)_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}(*F)^{\mu\nu} \quad (9.77)$$

Entonces, de la definición del tensor métrico de Minkowski, los únicos términos no nulos de la doble suma son para $\alpha = \mu$ y $\beta = \nu$, así

$$\begin{aligned}
 (*F)_{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} 0 & -(*F)^{01} & -(*F)^{02} & -(*F)^{03} \\ -(*F)^{10} & 0 & (*F)^{12} & (*F)^{13} \\ -(*F)^{20} & (*F)^{21} & 0 & (*F)^{23} \\ -(*F)^{30} & (*F)^{31} & (*F)^{32} & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -F_{23} & -F_{31} & -F_{12} \\ F_{23} & 0 & F_{03} & -F_{02} \\ F_{31} & -F_{03} & 0 & F_{01} \\ F_{12} & F_{02} & -F_{01} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.78)
 \end{aligned}$$

c De la definición

$$(*F)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\gamma\delta} \quad (9.79)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
 (*F)_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}[\varepsilon_{\alpha\beta 01}F^{01} + \varepsilon_{\alpha\beta 02}F^{02} + \varepsilon_{\alpha\beta 03}F^{03} \\
 &\quad + \varepsilon_{\alpha\beta 10}F^{10} + \varepsilon_{\alpha\beta 12}F^{12} + \varepsilon_{\alpha\beta 13}F^{13} \\
 &\quad + \varepsilon_{\alpha\beta 20}F^{20} + \varepsilon_{\alpha\beta 21}F^{21} + \varepsilon_{\alpha\beta 23}F^{23} \\
 &\quad + \varepsilon_{\alpha\beta 30}F^{30} + \varepsilon_{\alpha\beta 31}F^{31} + \varepsilon_{\alpha\beta 32}F^{32}] \\
 &= \varepsilon_{\alpha\beta 01}F^{01} + \varepsilon_{\alpha\beta 02}F^{02} + \varepsilon_{\alpha\beta 03}F^{03} \\
 &\quad + \varepsilon_{\alpha\beta 12}F^{12} + \varepsilon_{\alpha\beta 31}F^{31} + \varepsilon_{\alpha\beta 23}F^{23} \quad (9.80)
 \end{aligned}$$

Entonces, a partir de esta ecuación las componentes covariantes del tensor dual están dadas por

$$\begin{aligned}
 (*F)_{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{0123}F^{23} & \varepsilon_{0231}F^{31} & \varepsilon_{0312}F^{12} \\ \varepsilon_{1023}F^{23} & 0 & \varepsilon_{1203}F^{03} & \varepsilon_{1302}F^{02} \\ \varepsilon_{2031}F^{31} & \varepsilon_{2103}F^{03} & 0 & \varepsilon_{2301}F^{01} \\ \varepsilon_{3012}F^{12} & \varepsilon_{3102}F^{02} & \varepsilon_{3201}F^{01} & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -F^{23} & -F^{31} & -F^{12} \\ F^{23} & 0 & -F^{03} & F^{02} \\ F^{31} & F^{03} & 0 & -F^{01} \\ F^{12} & -F^{02} & F^{01} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.81)
 \end{aligned}$$

pues

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (9.82)$$

Para comparar estas componentes covariantes del tensor dual, con las obtenidas en la parte b del presente problema, remplacemos las componentes $F^{\alpha\beta}$ en términos de sus componentes covariantes, relacionadas por la ecuación

$$F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}F_{\mu\nu} \quad (9.83)$$

entonces, de las propiedades del tensor métrico de Minkowski, tenemos

$$F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\alpha}\eta^{\beta\beta}F_{\alpha\beta} \quad (9.84)$$

así

$$\begin{aligned}
 &(*F)_{\alpha\beta} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -\eta^{22}\eta^{33}F_{23} & -\eta^{33}\eta^{11}F_{31} & -\eta^{11}\eta^{22}F_{12} \\ \eta^{22}\eta^{33}F_{23} & 0 & -\eta^{00}\eta^{33}F_{03} & \eta^{00}\eta^{22}F_{02} \\ \eta^{33}\eta^{11}F_{31} & \eta^{00}\eta^{33}F_{03} & 0 & -\eta^{00}\eta^{11}F_{01} \\ \eta^{11}\eta^{22}F_{12} & -\eta^{00}\eta^{22}F_{02} & \eta^{00}\eta^{11}F_{01} & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -F^{23} & -F^{31} & -F^{12} \\ F^{23} & 0 & F^{03} & -F^{02} \\ F^{31} & -F^{03} & 0 & F^{01} \\ F^{12} & F^{02} & -F^{01} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.85)
 \end{aligned}$$

el cual coincide con las componentes obtenidas en la parte b. Esta

relación se puede mostrar en forma directa pues

$$\begin{aligned}
(*F)_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\sigma}\eta_{\beta\tau}(*F)^{\sigma\tau} \\
&= \eta_{\alpha\sigma}\eta_{\beta\tau}\frac{1}{2}\varepsilon^{\sigma\tau\gamma\delta}F_{\gamma\delta} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}F_{\gamma\delta} \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\gamma\mu}\eta^{\delta\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F_{\gamma\delta} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\eta^{\gamma\mu}\eta^{\delta\nu}F_{\gamma\delta} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{9.86}$$

como se quería probar.

d Para probar esta relación aplicamos la definición de dual al tensor $*F$, i.e.,

$$\begin{aligned}
(*(*F))^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma}(*F)_{\delta\gamma} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma}\frac{1}{2}\varepsilon_{\delta\gamma\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma}\varepsilon_{\delta\gamma\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{9.87}$$

calculemos ahora el tensor:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma}\varepsilon_{\delta\gamma\mu\nu} \tag{9.88}$$

entonces realizando la doble suma y escribiendo sólo los términos no nulos, y teniendo en cuenta que $\varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ (similarmente para las componentes covariantes) tenemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma}\varepsilon_{\delta\gamma\mu\nu} &= 2\varepsilon^{\alpha\beta 01}\varepsilon_{01\mu\nu} + 2\varepsilon^{\alpha\beta 02}\varepsilon_{02\mu\nu} \\
&\quad + 2\varepsilon^{\alpha\beta 03}\varepsilon_{03\mu\nu} + 2\varepsilon^{\alpha\beta 12}\varepsilon_{12\mu\nu} \\
&\quad + 2\varepsilon^{\alpha\beta 13}\varepsilon_{13\mu\nu} + 2\varepsilon^{\alpha\beta 23}\varepsilon_{23\mu\nu}
\end{aligned} \tag{9.89}$$

recordemos que los índices del tensor de Levi-Civita deben ser todos diferentes para que él no sea nulo. Así de los seis términos de la suma para cada par de valores que tomen los índices libres α y β solamente un término sobrevive y además los índices μ y ν también toman los mismos valores de α y β , es decir se debe cumplir uno de los siguientes casos:

$$\alpha = \mu \quad \text{y} \quad \beta = \nu \tag{9.90}$$

o

$$\alpha = \nu \quad \text{y} \quad \beta = \mu \tag{9.91}$$

por lo tanto, dado que $\alpha \neq \beta$, tenemos que

$$\varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma}\varepsilon_{\delta\gamma\mu\nu} = -2 \text{ si } \alpha = \mu \text{ y } \beta = \nu \quad (9.92)$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma}\varepsilon_{\delta\gamma\mu\nu} = 2 \text{ si } \alpha = \nu \text{ y } \beta = \mu \quad (9.93)$$

esta relación se puede escribir en forma tensorial como

$$\varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma}\varepsilon_{\delta\gamma\mu\nu} = -2\delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = -2\left(\delta_{\mu}^{\alpha}\delta_{\nu}^{\beta} - \delta_{\nu}^{\alpha}\delta_{\mu}^{\beta}\right) \quad (9.94)$$

donde el segundo término define el tensor

$$\delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma}\varepsilon_{\delta\gamma\mu\nu} \quad (9.95)$$

Por lo tanto utilizando este resultado tenemos que

$$\begin{aligned} (*F)^{\alpha\beta} &= \frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma}\varepsilon_{\delta\gamma\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta}F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\delta_{\mu}^{\alpha}\delta_{\nu}^{\beta} - \delta_{\nu}^{\alpha}\delta_{\mu}^{\beta}\right)F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\left(F^{\alpha\beta} - F^{\beta\alpha}\right) \\ &= -F^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (9.96)$$

como se quería probar.

10. Transformación general de coordenadas. sean

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta}x^{\beta} \quad (9.97)$$

las ecuaciones de transformación de Lorentz usuales entre sistemas de referencia inerciales, las cuales se pueden escribir como el conjunto de cuatro transformaciones de coordenadas

$$x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^{\beta}); \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \quad (9.98)$$

a Tomando las diferenciales de las funciones de transformación de coordenadas, ecuación 9.98, y aplicando la regla de la cadena tenemos

$$dx'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}dx^{\beta} \quad (9.99)$$

Ahora diferenciando las ecuaciones de transformación de Lorentz, ecuación 9.97, y teniendo en cuenta que los coeficientes de la transformación Λ^{α}_{β} son constantes independientes de las coordenadas, tenemos que

$$dx'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta}dx^{\beta} \quad (9.100)$$

por lo tanto, comparando las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \quad (9.101)$$

esto significa que los elementos de la matriz de transformación de Lorentz corresponden a los elementos de la matriz jacobiana de la transformación de coordenadas.

- b** Si el determinante la la matriz de Jacobi de la transformación de coordenadas es diferente de cero

$$\det |J(x, x')| \neq 0 \quad (9.102)$$

entonces podemos despejar las coordenadas x en función de las x' , es decir

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(x'^{\beta}) \quad (9.103)$$

y por lo tanto el jacobiano de esta transformación está dado por

$$\begin{aligned} J(x', x) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} & \frac{\partial x^0}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^0}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^0}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x'^0} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^0} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'^0} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} \right] \end{aligned} \quad (9.104)$$

Si reemplazamos en la transformación de coordenadas, ecuación 9.98, la ecuación para la transformación inversa 9.103, obtenemos la transformación identidad, es decir

$$x'^{\alpha}(x^{\beta}(x'^{\gamma})) = x'^{\alpha} \quad (9.105)$$

diferenciando esta identidad, aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$dx'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\gamma}} dx'^{\gamma} \quad (9.106)$$

por lo tanto, dado que las coordenadas son independientes, se debe cumplir que

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\gamma}} = \delta_{\gamma}^{\alpha} \quad (9.107)$$

es decir la matriz de Jacobi de la transformación inversa en la inversa de la matriz de Jacobi de la transformación:

$$J(x', x) = J^{-1}(x, x') \quad (9.108)$$

Así los elementos de la transformación de Lorentz inversa está dados por

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} \quad (9.109)$$

11. **Derivada de un tensor.** Del problema anterior vimos que una transformación de Lorentz se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} x'^{\alpha} &= x'^{\alpha}(x^{\mu}) && \iff \\ x'^{\alpha} &= \Lambda^{\alpha}_{\mu} x^{\mu} && \iff \\ x'^{\alpha} &= \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} x^{\mu} \end{aligned} \quad (9.110)$$

Entonces, para un sistema de referencia Σ' tenemos

$$T'^{\alpha\beta}_{,\gamma} = \frac{\partial T'^{\alpha\beta}}{\partial x'^{\gamma}} \quad (9.111)$$

Para relacionar estas cantidades con las correspondientes en el sistema de referencia Σ tengamos en cuenta que las componentes del tensor están relacionadas por la transformación

$$T'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} T^{\mu\nu} \quad (9.112)$$

y para calcular la derivada debemos aplicar la regla de la cadena, pues

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}(x) = T^{\mu\nu}(x(x')) \quad (9.113)$$

con $x(x')$ la transformación inversa de Lorentz, así

$$\begin{aligned} T'^{\alpha\beta}_{,\gamma} &= \frac{\partial}{\partial x'^{\gamma}} (T'^{\alpha\beta}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^{\gamma}} (\Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} T^{\mu\nu}) \\ &= \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} \frac{\partial}{\partial x'^{\gamma}} (T^{\mu\nu}(x)) \\ &= \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} (T^{\mu\nu}) \\ &= \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\gamma}} T^{\mu\nu}_{,\sigma} \end{aligned} \quad (9.114)$$

teniendo en cuenta la ecuación 9.109 obtenemos el resultado

$$T'^{\alpha\beta}_{,\gamma} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} \Lambda^{\sigma}_{\gamma} T^{\mu\nu}_{,\sigma} \quad (9.115)$$

12. **Transformación general de coordenadas y derivadas .** Consideremos una transformación general de coordenadas

$$x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^{\mu}) \quad (9.116)$$

Entonces, en las coordenadas primadas tenemos

$$V_{\alpha,\gamma} = \frac{\partial}{\partial x'^{\gamma}} V'_{\alpha} \quad (9.117)$$

Teniendo en cuenta la ley de transformación para las componentes de un tensor una vez contravariante

$$V'_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} V_\mu \quad (9.118)$$

reemplazando esta ecuación en 9.117 tenemos

$$V_{\alpha,\gamma} = \frac{\partial}{\partial x'^\gamma} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} V_\mu \right) \quad (9.119)$$

aplicando la regla para la derivada de un producto de funciones y notando que ahora el jacobiano de la transformación es una función de las coordenadas, a diferencia del caso restringido de las transformaciones de Lorentz, tenemos que

$$\begin{aligned} V'_{\alpha,\gamma} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\gamma} (V_\mu) + \left(\frac{\partial}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \right) V_\mu \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (V_\mu) + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\gamma \partial x'^\alpha} V_\mu \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\gamma} V_{\mu,\sigma} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\gamma \partial x'^\alpha} V_\mu \end{aligned} \quad (9.120)$$

así el primer término de esta expresión corresponde a la ley de transformación de tensores 2-veces covariantes, pero el último término, salvo que éste se anule, indica que $V_{\alpha,\gamma}$ no se transforma como las componentes de un tensor 2-veces covariante. La condición para que la ley de transformación se cumpla se obtiene anulando el segundo término, es decir si

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\gamma \partial x'^\alpha} = 0 \quad (9.121)$$

esta condición significa que

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\gamma \partial x'^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x'^\gamma} (J(x', x)) = 0 \quad (9.122)$$

esto es, si los elementos de la matriz jacobiana de la transformación de coordenadas son constantes (independientes de las coordenadas), lo cual implica que las ecuaciones de transformación de coordenadas deben ser lineales.

13. **El tensor energía-momento.** La ecuación de transformación para las componentes de un tensor de segundo rango contravariante están dadas por

$$T'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu T_0^{\mu\nu} \quad (9.123)$$

donde $T_0^{\mu\nu}$ corresponden a las componentes del tensor en el sistema de referencia propio y $T^{\alpha\beta}$ las componentes respecto al observador inercial Σ

que se mueve con velocidad $-\vec{u}$ respecto al sistema propio y los elementos de la matriz de transformación de Lorentz están dados por (ecuación 6.337):

$$[\Lambda^\alpha_\mu] = \begin{bmatrix} \gamma & \beta_x \gamma & \beta_y \gamma & \beta_z \gamma \\ \beta_x \gamma & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x \beta_y}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x \beta_z}{\beta^2} \\ \beta_y \gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x \beta_y}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y \beta_z}{\beta^2} \\ \beta_z \gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x \beta_z}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y \beta_z}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\beta^2} \end{bmatrix} \quad (9.124)$$

con $\gamma = \gamma(\vec{u})$ y $\beta_i = u_i/c$, $i = x, y, z$. Así, teniendo en cuenta que el tensor $T_0^{\alpha\beta}$ es diagonal, tenemos

$$\begin{aligned} T^{00} &= \Lambda^0_\mu \Lambda^0_\nu T_0^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^0_0 \Lambda^0_0 T_0^{00} + \Lambda^0_1 \Lambda^0_1 T_0^{11} + \Lambda^0_2 \Lambda^0_2 T_0^{22} + \Lambda^0_3 \Lambda^0_3 T_0^{33} \\ &= \gamma^2 \rho_0 + (\gamma^2 \beta_x^2 + \gamma^2 \beta_y^2 + \gamma^2 \beta_z^2) p_0 \\ &= \gamma^2 (\rho_0 + p_0 \beta^2) \end{aligned} \quad (9.125)$$

donde

$$\beta^2 = \frac{|\vec{u}|^2}{c^2} \quad (9.126)$$

Para $\alpha = i = 1$ y $\beta = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} T^{10} &= \Lambda^1_\mu \Lambda^0_\nu T_0^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^1_0 \Lambda^0_0 T_0^{00} + \Lambda^1_1 \Lambda^0_1 T_0^{11} + \Lambda^1_2 \Lambda^0_2 T_0^{22} + \Lambda^1_3 \Lambda^0_3 T_0^{33} \\ &= \beta_x \gamma^2 \rho_0 + \left(1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2}\right) \beta_x \gamma p_0 \\ &\quad + \frac{(\gamma-1)\beta_x \beta_y}{\beta^2} \beta_y \gamma p_0 + \frac{(\gamma-1)\beta_x \beta_z}{\beta^2} \beta_z \gamma p_0 \\ &= \beta_x \gamma^2 \rho_0 + \beta_x \gamma p_0 + \frac{(\gamma-1)\beta_x}{\beta^2} \gamma p_0 (\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2) \\ &= (\rho_0 + p_0) \beta_x \gamma^2 \end{aligned} \quad (9.127)$$

este resultado nos permite extrapolar para los casos $\alpha = i = 2, 3$ y $\beta = 0$, así

$$\begin{aligned} T^{i0} &= \Lambda^i_\mu \Lambda^0_\nu T_0^{\mu\nu} \\ &= (\rho_0 + p_0) \beta_i \gamma^2; \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (9.128)$$

Falta por calcular T^{ij} para $i, j = 1, 2, 3$. Consideremos primero los casos

con $i = j$, entonces

$$\begin{aligned}
T^{11} &= \Lambda^1_\mu \Lambda^1_\nu T_0^{\mu\nu} \\
&= \Lambda^1_0 \Lambda^1_0 T_0^{00} + \Lambda^1_1 \Lambda^1_1 T_0^{11} + \Lambda^1_2 \Lambda^1_2 T_0^{22} + \Lambda^1_3 \Lambda^1_3 T_0^{33} \\
&= \beta_x^2 \gamma^2 \rho_0 + \left(1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2}\right)^2 p_0 + \\
&\quad \left(\frac{(\gamma-1)\beta_x \beta_y}{\beta^2}\right)^2 p_0 + \left(\frac{(\gamma-1)\beta_x \beta_z}{\beta^2}\right)^2 p_0
\end{aligned} \tag{9.129}$$

Desarrollando los términos cuadráticos y reagrupando, teniendo en cuenta que

$$\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 \tag{9.130}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
T^{11} &= \beta_x^2 \gamma^2 \rho_0 + p_0 + 2 \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} p_0 + \frac{(\gamma-1)^2 \beta_x^2}{\beta^2} p_0 \\
&= p_0 + \beta_x^2 \gamma^2 \rho_0 - \frac{\beta_x^2}{\beta^2} p_0 + \frac{\gamma^2 \beta_x^2}{\beta^2} p_0 \\
&= p_0 + \beta_x^2 \gamma^2 \rho_0 + (\gamma^2 - 1) \frac{\beta_x^2}{\beta^2} p_0 \\
&= p_0 + (\rho_0 + p_0) \beta_x^2 \gamma^2
\end{aligned} \tag{9.131}$$

Así, los términos diagonales espaciales del tensor energía-momento se pueden escribir en la forma

$$T^{ii} = p_0 + (\rho_0 + p_0) \beta_i^2 \gamma^2, \quad i = 1, 2, 3 \tag{9.132}$$

Consideremos ahora los elementos del tensor T^{ij} , con $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
T^{12} &= \Lambda^1_\mu \Lambda^2_\nu T_0^{\mu\nu} \\
&= \Lambda^1_0 \Lambda^2_0 T_0^{00} + \Lambda^1_1 \Lambda^2_1 T_0^{11} + \Lambda^1_2 \Lambda^2_2 T_0^{22} + \Lambda^1_3 \Lambda^2_3 T_0^{33} \\
&= \beta_x \beta_y \gamma^2 \rho_0 + 2 \frac{(\gamma-1)\beta_x \beta_y}{\beta^2} p_0 + \frac{(\gamma-1)^2 \beta_x \beta_y}{\beta^2} p_0 \\
&= \beta_x \beta_y \gamma^2 \rho_0 + \frac{(\gamma^2 - 1)\beta_x \beta_y}{\beta^2} p_0 \\
&= \beta_x \beta_y \gamma^2 (\rho_0 + p_0)
\end{aligned} \tag{9.133}$$

Finalmente los elementos del tensor energía-momento se pueden escribir en una forma más compacta como

$$\begin{aligned}
T^{00} &= \gamma^2 (\rho_0 + p_0 \beta^2) \\
T^{ij} &= p_0 \delta_{ij} + (\rho_0 + p_0) \beta_i \beta_j \gamma^2 \\
T^{0i} &= (\rho_0 + p_0) \beta_i \gamma^2
\end{aligned} \tag{9.134}$$

Estos elemento del tensor los podemos reescribir en forma covariante, es decir en términos de cantidades tensoriales, si tenemos en cuenta el tensor métrico de Minkowski y la definición de la cuadrivelocidad del fluido, es decir dado que

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} = \gamma(1, \beta_x, \beta_y, \beta_z) \quad (9.135)$$

y

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta = 0 \\ -1 & \alpha = \beta = 1, 2, 3 \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (9.136)$$

entonces, las ecuaciones 9.134 se pueden reescribir en términos de las componentes de la cuadrivelocidad:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \gamma^2 (\rho_0 + p_0 \beta^2) \\ &= \gamma^2 \rho_0 + \gamma^2 \beta^2 p_0 \\ &= U^0 U^0 \rho_0 + p_0 (\gamma^2 - 1) \\ &= U^0 U^0 (\rho_0 + p_0) - p_0 \eta^{00} \end{aligned} \quad (9.137)$$

$$\begin{aligned} T^{ij} &= p_0 \delta_{ij} + (\rho_0 + p_0) \beta_i \beta_j \gamma^2 \\ &= p_0 \delta_{ij} + (\rho_0 + p_0) U^i U^j \\ &= -p_0 \eta^{ij} + (\rho_0 + p_0) U^i U^j \end{aligned} \quad (9.138)$$

$$\begin{aligned} T^{0i} &= (\rho_0 + p_0) \beta_i \gamma^2 \\ &= (\rho_0 + p_0) U^0 U^i - p_0 \eta^{0i} \end{aligned} \quad (9.139)$$

Por lo tanto, las tres ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma covariante como

$$T^{\alpha\beta} = (p_0 + \rho_0) U^\alpha U^\beta - p_0 \eta^{\alpha\beta} \quad (9.140)$$

Capítulo 10

Electrodinámica

10.1. Problemas de electrodinámica

1. **Conservación de la carga.** A partir de la ecuación de continuidad para la carga

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \quad \iff \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (10.1)$$

e integrando en todo el espacio tenemos

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right) dV = 0 \quad (10.2)$$

entonces, sacando la derivada parcial con respecto al tiempo de la integral y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int \rho dV + \int \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV \\ &= \frac{d}{dt} \int \rho dV + \oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\sigma} \end{aligned} \quad (10.3)$$

La primera integral nos da la carga total en todo el espacio, mientras que la segunda integral cerrada de superficie nos da el flujo de la carga a través de la superficie que delimita el volumen de integración. Así, debido a que estamos considerando todo el espacio y asumiendo que la distribución de corrientes es finita en todo el espacio, es decir no se tienen corrientes en el infinito, entonces la integral de superficie se anula y por lo tanto

$$0 = \frac{d}{dt} \int \rho dV = \frac{dQ}{dt} \quad (10.4)$$

implica que la carga total es una constante (se conserva)

$$Q = \text{constante} \quad (10.5)$$

2. **Cuadricorriente de una partícula.** Sea Σ un sistema de referencia inercial y Σ' un segundo sistema de referencia que se mueve con velocidad $-v$ respecto a Σ , entonces las ecuaciones de transformación de coordenadas están dadas por las relaciones

$$\begin{aligned}x'^0 &= \gamma(x^0 + \beta x^1) \\x'^1 &= \gamma(x^1 + \beta x^0) \\x'^2 &= x^2 \\x'^3 &= x^3\end{aligned}\tag{10.6}$$

a Consideremos en primer lugar que la partícula de carga q está situada en el origen de coordenadas del sistema Σ , entonces la densidad de carga se puede escribir en términos de la distribución $\delta(\vec{r})$ de dirac definida por las relaciones

$$\delta(\vec{r}) = 0 \quad \text{si} \quad \vec{r} \neq \vec{0}\tag{10.7}$$

$$\int \delta(\vec{r}) f(\vec{r}) d^3r = f(\vec{0})\tag{10.8}$$

Así

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r})\tag{10.9}$$

la cual representa una densidad de carga, la cual es nula en todo el espacio salvo en el punto $\vec{r} = 0$ y cuya carga total es q , pues

$$\int \rho(\vec{r}) d^3r = \int q\delta(\vec{r}) d^3r = q\tag{10.10}$$

dado que la carga está en reposo respecto al sistema de referencia Σ la densidad de corriente se anula:

$$\vec{J} = \vec{0}\tag{10.11}$$

por lo tanto el cuadrivector densidad de corriente está dado por

$$J^\alpha = (c\rho, J_x, J_y, J_z) = (cq\delta(\vec{r}), 0, 0, 0)\tag{10.12}$$

En el caso más general, cuando la carga en Σ está situada en un punto arbitrario \vec{r}_0 , entonces las componentes del cuadrivector densidad de corriente toman la forma

$$J^\alpha = (cq\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), 0, 0, 0)\tag{10.13}$$

b Para encontrar las componentes del cuadrivector densidad de corriente con respecto al sistema Σ' aplicamos las ecuaciones de transformación 10.6 a las componentes del cuadrivector 10.12, así tenemos

$$\begin{aligned}J'^0 &= \gamma(J^0 + \beta J^1) \\&= \gamma J^0 \\&= c\gamma(v)\delta(\vec{r})\end{aligned}\tag{10.14}$$

pero para referir esta densidad de carga al sistema Σ' debemos cambiar la dependencia de \vec{r} en términos de las coordenadas de Σ' , así aplicando las transformaciones de Lorentz inversas tenemos

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3) \\ &= (\gamma(x'^1 - \beta x'^0), x'^2, x'^3) \\ &= (\gamma(v)(x' - vt'), y', z')\end{aligned}\quad (10.15)$$

entonces

$$J'^0 = cq\gamma(v)\delta(\gamma(v)(x' - vt'), y', z') \quad (10.16)$$

por la definición de la distribución de Dirac esta ecuación admite una interpretación física directa, pues representa una densidad de carga variable en el tiempo, la cual es nula en todo el espacio salvo en el punto $x' = vt'$, $y' = 0$, $z' = 0$, es decir esta densidad de carga corresponde a la de una partícula puntual de carga q que se mueve con velocidad v en la dirección del eje x' positivo. Notemos además que la densidad de carga aumenta en un factor γ , el cual corresponde a la disminución de la unidad de volumen debido a la contracción de la longitud en la dirección de movimiento. Las otras componentes del cuadrivector corriente son

$$\begin{aligned}J_{x'} &= J'^1 = \gamma(J^1 + \beta J^0) \\ &= \gamma\beta J^0 \\ &= \gamma(v)\rho v\end{aligned}\quad (10.17)$$

y

$$J_{y'} = J_{z'} = 0 \quad (10.18)$$

por lo tanto

$$J'^\alpha = (cq\gamma(v)\delta(\gamma(v)(x' - vt'), y', z'), \gamma(v)\rho v, 0, 0) \quad (10.19)$$

- c** En el sistema de referencia inercial Σ la carga total del sistema está dada por la integral de la densidad de carga en todo el espacio, entonces

$$\begin{aligned}Q &= \int \rho(t, \vec{r})d^3r \\ &= \int q\delta(\vec{r})d^3r \\ &= \int q\delta(\vec{r})dxdydz \\ &= q\end{aligned}\quad (10.20)$$

por las propiedades de la distribución de Dirac, así la carga total del sistema es q , la carga de la partícula. Para el sistema de referencia

Σ' tenemos que

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho'(t', \vec{r}') d^3 r' \\ &= \int q\gamma(v)\delta(\gamma(v)(x' - vt'), y', z') dx' dy' dz' \end{aligned} \quad (10.21)$$

para hacer esta integral realizamos el siguiente cambio de variable

$$u = \gamma x' - v\gamma t' \quad \implies \quad (10.22)$$

$$dx' = \frac{du}{\gamma} \quad (10.23)$$

entonces

$$\begin{aligned} Q &= \int q\gamma\delta(u, y', z') \frac{du}{\gamma} dy' dz' \\ &= \int q\delta(u, y', z') du dy' dz' \\ &= q \end{aligned} \quad (10.24)$$

es decir la carga es un invariante relativista.

3. Ecuaciones de Maxwell covariantes. Consideremos en primer lugar la ecuación homogénea

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\beta F_{\gamma\delta} = 0 \quad (10.25)$$

Teniendo en cuenta la definición del tensor de Levi-Civita y la antisimetría del tensor campo electromagnético tenemos, para $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^{0\beta\gamma\delta}\partial_\beta F_{\gamma\delta} \\ &= \varepsilon^{0123}\partial_1 F_{23} + \varepsilon^{0132}\partial_1 F_{32} + \varepsilon^{0213}\partial_2 F_{13} \\ &\quad + \varepsilon^{0231}\partial_2 F_{31} + \varepsilon^{0312}\partial_3 F_{12} + \varepsilon^{0321}\partial_3 F_{21} \\ &= 2\partial_1 F_{23} + 2\partial_2 F_{31} + 2\partial_3 F_{12} \end{aligned} \quad (10.26)$$

Por otra parte las componentes covariantes del tensor campo electromagnético están dadas por

$$F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}F^{\mu\nu} \quad (10.27)$$

Dado que el tensor de Minkowski es simétrico entonces el tensor covariante electromagnético también es antisimétrico, así es suficiente calcular los seis términos independientes F_{0i} , $i = 1, 2, 3$ y F_{12} , F_{31} y F_{23} . Consideremos primero F_{0i} . Entonces para $i = 1, 2, 3$ tenemos que el único término no nulo de la doble suma en la ecuación 10.27 se obtiene para $\mu = 0$ y $\nu = i$ pues $\eta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$, así

$$\begin{aligned} F_{0i} &= \eta_{0\mu}\eta_{i\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \eta_{00}\eta_{ii}F^{0i} \\ &= -F^{0i} \end{aligned} \quad (10.28)$$

De manera similar, para los términos F_{ij} con $ij = 12, 31, 23$ tenemos

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \eta_{i\mu}\eta_{j\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \eta_{ii}\eta_{jj}F^{ij} \\ &= F_{ij} \end{aligned} \quad (10.29)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la definición del tensor contravariante electromagnético, ecuación 5.15, las componentes covariantes del tensor están dadas por

$$F_{\alpha\beta} = \begin{cases} & \alpha, \beta \\ -E_x & 0, 1 \\ -E_y & 0, 2 \\ -E_z & 0, 3 \\ B_x & 2, 3 \\ B_y & 3, 1 \\ B_z & 1, 2 \end{cases} \quad (10.30)$$

Entonces la ecuación 10.26 toma la forma

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} \\ &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (10.31)$$

la cual corresponde a la ley de Gauss para el campo magnético. Para $\alpha = i = 1, 2, 3$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^{i\beta\gamma\delta}\partial_\beta F_{\gamma\delta} \\ &= \varepsilon^{i0jk}\partial_0 F_{jk} + \varepsilon^{i0kj}\partial_0 F_{kj} + \varepsilon^{ij0k}\partial_j F_{0k} \\ &\quad + \varepsilon^{ijk0}\partial_j F_{k0} + \varepsilon^{ik0j}\partial_k F_{0j} + \varepsilon^{ikj0}\partial_k F_{j0} \\ &= 2\varepsilon^{i0jk}\partial_0 F_{jk} + 2\varepsilon^{ij0k}\partial_j F_{0k} + 2\varepsilon^{ik0j}\partial_k F_{0j} \end{aligned} \quad (10.32)$$

en donde $i \neq j \neq k$ y no hay suma sobre los índices latinos repetidos. Entonces reemplazando las componentes covariantes del tensor campo electromagnético y asumiendo el orden de los índices $(ijk) = (123)$ y sus permutaciones cíclicas, es decir (kij) y (jki) , tenemos

$$-\frac{\partial B_i}{c\partial t} + \frac{\partial E_k}{\partial x^j} - \frac{\partial E_j}{\partial x^k} = 0 \quad (10.33)$$

o en forma equivalente

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)_i + \frac{1}{c} \frac{\partial B_i}{\partial t} = 0 \quad (10.34)$$

la cual, para $i = 1, 2, 3$ nos da la ley de Faraday en componentes. Consideremos ahora las ecuaciones de Maxwell inhomogeneas:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} J^\beta \quad (10.35)$$

Desarrollando la suma sobre el índice α , para $\beta = 0$, suprimiendo los términos nulos, tenemos

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = -\frac{4\pi}{c} J^0 \quad (10.36)$$

y reemplazando los términos obtenemos la ley de Gauss

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} &= -4\pi\rho & \iff \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \end{aligned} \quad (10.37)$$

Para $\beta = i = 1, 2, 3$, donde de nuevo no hay suma sobre índices latinos (j y k) y con $i \neq j \neq k$, obtenemos

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} + \partial_k F^{ki} = -\frac{4\pi}{c} J^i \quad (10.38)$$

entonces asumiendo los índices latinos $(ijk) = (123)$ y sus permutaciones cíclicas, tenemos

$$\frac{\partial E_i}{c\partial t} + \frac{\partial B_j}{\partial x^k} - \frac{\partial B_k}{\partial x^j} = -\frac{4\pi}{c} J_i \quad (10.39)$$

donde ahora los subíndices latinos i, j, k significan x, y, z . Así la ecuación anterior, para $i = x, y, z$ corresponde a cada una de las componentes de la ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (10.40)$$

4. **Fuerza de Lorentz.** Consideremos la ecuación de movimiento en la forma

$$f^\alpha = \frac{q}{c} \eta_{\beta\gamma} F^{\beta\alpha} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \quad (10.41)$$

y tomemos primero el caso $\alpha = i = 1, 2, 3$, entonces sumando sobre el índice repetido β tenemos

$$\begin{aligned} f^i &= \frac{q}{c} \eta_{\beta\gamma} F^{\beta i} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \\ &= \frac{q}{c} \eta_{0\gamma} F^{0i} \frac{dx^\gamma}{d\tau} + \frac{q}{c} \eta_{1\gamma} F^{1i} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \\ &\quad + \frac{q}{c} \eta_{2\gamma} F^{2i} \frac{dx^\gamma}{d\tau} + \frac{q}{c} \eta_{3\gamma} F^{3i} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \end{aligned} \quad (10.42)$$

esta ecuación se puede escribir en forma más compacta si tenemos en cuenta que para cada $i = 1, 2, 3$ uno de los tres últimos términos de la suma debe anularse debido a la antisimetría del tensor campo electromagnético, así

$$f^i = \frac{q}{c} \eta_{0\gamma} F^{0i} \frac{dx^\gamma}{d\tau} + \frac{q}{c} \eta_{j\gamma} F^{ji} \frac{dx^\gamma}{d\tau} + \frac{q}{c} \eta_{k\gamma} F^{ki} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \quad (10.43)$$

con $i \neq j \neq k$ y no hay suma sobre los índices latinos repetidos (jk). Teniendo en cuenta la definición del tensor métrico de Minkowski, podemos hacer la suma sobre el índice γ obteniendo

$$f^i = \frac{q}{c} \eta_{00} F^{0i} \frac{dx^0}{d\tau} + \frac{q}{c} \eta_{jj} F^{ji} \frac{dx^j}{d\tau} + \frac{q}{c} \eta_{kk} F^{ki} \frac{dx^k}{d\tau} \quad (10.44)$$

Si recordamos la interpretación física de las componentes del cuadvivector fuerza, ecuación 8.37, entonces la ecuación anterior toma la forma (con $i = x, y, z$)

$$\gamma(\vec{u}) F_i = \frac{q}{c} E_i c \frac{dt}{d\tau} + \frac{q}{c} B_k \frac{dt}{d\tau} u_j - \frac{q}{c} B_j \frac{dt}{d\tau} u_k \quad (10.45)$$

simplificando y teniendo en cuenta que $\gamma(\vec{u}) = dt/d\tau$, obtenemos

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{u} \times \vec{B} \quad (10.46)$$

Consideremos finalmente el caso $\alpha = 0$, entonces desarrollando la doble suma sobre los índices β y γ en la ecuación 10.41 y reteniendo solo los términos no nulos, tenemos

$$\begin{aligned} f^0 &= \frac{q}{c} \eta_{\beta\gamma} F^{\beta 0} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \\ &= \frac{q}{c} \eta_{11} F^{10} \frac{dx^1}{d\tau} + \frac{q}{c} \eta_{22} F^{20} \frac{dx^2}{d\tau} + \frac{q}{c} \eta_{33} F^{30} \frac{dx^3}{d\tau} \end{aligned} \quad (10.47)$$

Ahora teniendo en cuenta que la componente temporal del cuadvivector fuerza representa el trabajo por unidad de tiempo realizado por la fuerza externa sobre la partícula

$$\gamma(\vec{u}) \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} = \frac{q}{c} \gamma(\vec{u}) \vec{E} \cdot \vec{u} \quad (10.48)$$

es decir

$$\frac{dE}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{u} \quad (10.49)$$

entonces esta ecuación implica que solamente el campo eléctrico hace trabajo sobre la carga.

5. **Campo eléctrico de carga en movimiento.** Para resolver este problema aplicando la ley de Coulomb consideremos un segundo sistema de referencia inercial Σ' que se mueve con velocidad v respecto a Σ . Entonces con respecto al sistema de referencia inercial Σ' la carga Q está en reposo en el origen de coordenadas, mientras que la carga de prueba q se está moviendo respecto a Σ' con velocidad $\vec{v} = (-v, 0, 0)$. Por otra parte, en el sistema de referencia Σ consideremos los dos eventos siguientes: la carga Q se encuentra en el origen en el instante $t = 0$ y la carga de prueba q

está en reposo situada en el punto de coordenadas $\vec{r} = (x, 0, 0)$, así las coordenadas de los dos eventos están dadas por

$$P_1 = (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3) = (0, 0, 0, 0) \quad (10.50)$$

y

$$P_2 = (x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3) = (0, x, 0, 0) \quad (10.51)$$

Por lo tanto las coordenadas de estos dos eventos medidas en el sistema de referencia Σ' están dadas por la transformación de Lorentz usual:

$$P_1 = (x_1'^0, x_1'^1, x_1'^2, x_1'^3) = (0, 0, 0, 0)$$

y

$$\begin{aligned} P_2 &= (x_2'^0, x_2'^1, x_2'^2, x_2'^3) = (ct', x', 0, 0) \\ &= \left(-\gamma(v)\frac{v}{c}x, \gamma(v)x, 0, 0\right) \end{aligned} \quad (10.52)$$

Notemos que los dos eventos P_1 y P_2 son simultáneos en Σ , pues estamos interesados en medir la fuerza (y así el campo eléctrico) sobre la carga de prueba q cuando la carga fuente Q se encuentra en el origen en $t = 0$ y por lo tanto x representa la distancia física entre la carga Q y la carga de prueba q . Sin embargo, para el sistema Σ' estos dos eventos no son simultáneos y por lo tanto la coordenada x' no representa la distancia física entre las cargas, pues la carga q se encuentra en el punto x' en un instante $t' < 0$ cuando los orígenes de Σ y Σ' se cruzan. Pero debido a que la carga Q está en reposo en el origen de Σ' , entonces cuando la carga q pasa por x' en el instante t' la carga Q se encuentra en $x' = 0$ en ese instante, y por lo tanto la fuerza sobre la carga de prueba en el instante t' está dada por la ley de Coulomb

$$\vec{F}' = (F_{x'}, F_{y'}, F_{z'}) = \left(k\frac{Qq}{x'^2}, 0, 0\right) \quad (10.53)$$

Apliquemos, ahora, las ecuaciones de transformación de la fuerza entre sistemas de referencia inerciales. A partir de las ecuaciones 8.46, 8.49 y 8.50) podemos obtener las ecuaciones de transformación inversas (pues conocemos las componentes de la fuerza en Σ') cambiando v por $-v$ y $\vec{u}' = (-v, 0, 0)$, entonces aplicando estas ecuaciones tenemos que las componentes de la fuerza sobre la carga q en el sistema Σ están dadas por

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{F_{x'} + \frac{v}{c^2}\vec{F}' \cdot \vec{u}'}{1 + \frac{vu_{x'}}{c^2}}, 0, 0\right) \\ &= \left(\frac{k\frac{Qq}{x'^2} - \frac{v^2}{c^2}k\frac{Qq}{x'^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, 0, 0\right) \\ &= \left(k\frac{Qq}{x'^2}, 0, 0\right) \end{aligned} \quad (10.54)$$

es decir la fuerza sobre la carga q medida en el sistema de referencia Σ en el instante $t = 0$ tiene el mismo valor que la fuerza sobre la carga q medida en el sistema Σ' en el instante t' , pero la distancia x entre las cargas Q y q medida en Σ en el instante $t = 0$ es menor que la distancia entre las cargas en Σ' , pues $x' = \gamma(v)x$ y por lo tanto la fuerza sobre la carga de prueba q en Σ está dada por

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = \left(k \frac{Qq}{\gamma^2(v)x^2}, 0, 0 \right) \quad (10.55)$$

y por lo tanto el campo eléctrico producido por la carga Q , que se mueve con velocidad constante v en la dirección del eje x positivo, a una distancia x de la carga es

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} = \left(\frac{1}{\gamma^2(v)} \frac{kQ}{x^2}, 0, 0 \right) \quad (10.56)$$

notemos que el campo es el mismo si cambiamos v por $-v$. Es decir, el campo eléctrico producido por una carga en movimiento a velocidad constante, a lo largo de la dirección de movimiento, depende de la posición instantánea del punto de observación del campo y es menor, en un factor $\gamma^2(v)$, que el campo si la carga estuviera en reposo. Consideremos ahora el caso cuando la carga de prueba, en el sistema de referencia Σ , se encuentra en reposo en un punto de coordenadas $\vec{r} = (0, y, 0)$ y la carga Q se mueve con velocidad constante v en la dirección del eje x positivo y pasa por el origen de Σ en el instante $t = 0$ y el sistema de referencia Σ' que se mueve con velocidad v en la dirección positiva x relativo a Σ y con respecto al cual la carga Q se encuentra en reposo en su origen. Los dos eventos, simultáneos en Σ , tienen coordenadas dadas por

$$P_1 = (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3) = (0, 0, 0, 0) \quad (10.57)$$

y

$$P_2 = (x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3) = (0, 0, y, 0) \quad (10.58)$$

mientras que con respecto al sistema Σ' sus coordenadas son

$$P_1 = (x_1'^0, x_1'^1, x_1'^2, x_1'^3) = (0, 0, 0, 0)$$

y

$$\begin{aligned} P_2 &= (x_2'^0, x_2'^1, x_2'^2, x_2'^3) = (ct', x', y', z') \\ &= (0, 0, y, 0) \end{aligned} \quad (10.59)$$

es decir los eventos son también simultáneos respecto al observador Σ' . Aplicando la ley de Coulomb en Σ' tenemos

$$\vec{F}' = (F_{x'}, F_{y'}, F_{z'}) = \left(0, k \frac{Qq}{y'^2}, 0 \right) \quad (10.60)$$

y aplicando las ecuaciones de transformación para las componentes de la fuerza, cambiando v por $-v$ y $\vec{u}' = (-v, 0, 0)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (F_x, F_y, F_z) \\ &= \left(\frac{F_{x'} + \frac{v}{c^2} \vec{F}' \cdot \vec{u}'}{1 + \frac{v u_{x'}}{c^2}}, \frac{F_{y'}}{\gamma(v) \left(1 + \frac{v u_{x'}}{c^2}\right)}, 0 \right) \\ &= (0, \gamma(v) F_{y'}, 0) \\ &= \left(0, \gamma(v) k \frac{Qq}{y'^2}, 0 \right)\end{aligned}\quad (10.61)$$

en este caso la fuerza es diferente entre los dos sistemas, pero la distancia entre las cargas es la misma $y = y'$, así

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = \left(0, \gamma(v) k \frac{Qq}{y^2}, 0 \right) \quad (10.62)$$

por lo tanto el campo eléctrico está dado por

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} = \left(0, \gamma(v) \frac{kQ}{y^2}, 0 \right) \quad (10.63)$$

Es decir, el campo eléctrico producido por una carga en movimiento a velocidad constante, en una dirección perpendicular a la dirección de movimiento, depende de la posición instantánea del punto de observación del campo y es mayor en un factor $\gamma(v)$, que el campo de la carga, si ésta estuviera en reposo. Finalmente consideremos el caso general, cuando la carga de prueba q se encuentra en reposo respecto al sistema Σ en un punto arbitrario de coordenadas $\vec{r} = (x, y, z)$ y con la carga fuente Q moviéndose en la dirección x positiva y pasando por el origen de coordenadas de Σ en $t = 0$. Procediendo en forma similar a los dos casos considerados, tenemos que las coordenadas de los dos eventos, medidas por Σ , están dadas por

$$P_1 = (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3) = (0, 0, 0, 0) \quad (10.64)$$

y

$$P_2 = (x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3) = (0, x, y, z) \quad (10.65)$$

y sus coordenadas medidas en Σ' son

$$P_1 = (x_1'^0, x_1'^1, x_1'^2, x_1'^3) = (0, 0, 0, 0)$$

y

$$\begin{aligned}P_2 &= (x_2'^0, x_2'^1, x_2'^2, x_2'^3) = (ct', x', y', z') \\ &= \left(-\gamma(v) \frac{v}{c} x, \gamma(v) x, y, z \right)\end{aligned}\quad (10.66)$$

Aplicando la ley de Coulomb en el sistema de referencia Σ' tenemos

$$\vec{F}' = (F_{x'}, F_{y'}, F_{z'}) = \left(k \frac{Qqx'}{r'^3}, k \frac{Qqy'}{r'^3}, k \frac{Qqz'}{r'^3} \right) \quad (10.67)$$

donde

$$r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} \quad (10.68)$$

Aplicando las ecuaciones de transformación inversas para las componentes de la fuerza, con $\vec{u}' = (-v, 0, 0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (F_x, F_y, F_z) \\ &= \left(\frac{F_{x'} + \frac{v}{c^2} \vec{F}' \cdot \vec{u}'}{1 + \frac{vu_{x'}}{c^2}}, \frac{F_{y'}}{\gamma(v) \left(1 + \frac{vu_{x'}}{c^2}\right)}, \frac{F_{z'}}{\gamma(v) \left(1 + \frac{vu_{x'}}{c^2}\right)} \right) \\ &= (F_{x'}, \gamma(v)F_{y'}, \gamma(v)F_{z'}) \\ &= \left(k \frac{Qqx'}{r'^3}, \gamma(v)k \frac{Qqy'}{r'^3}, \gamma(v)k \frac{Qqz'}{r'^3} \right) \end{aligned} \quad (10.69)$$

Dado que las coordenadas primadas están relacionadas con las coordenadas en Σ por la ecuación 10.66, entonces la fuerza sobre la carga de prueba está dada por

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (F_x, F_y, F_z) \\ &= \left(\gamma(v)k \frac{Qqx}{r^3}, \gamma(v)k \frac{Qqy}{r^3}, \gamma(v)k \frac{Qqz}{r^3} \right) \end{aligned} \quad (10.70)$$

con

$$r' = (\gamma^2(v)x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (10.71)$$

y en notación vectorial

$$\vec{F} = \gamma(v)k \frac{Qq}{(\gamma^2(v)x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{r} \quad (10.72)$$

Por lo tanto el campo eléctrico producido por una carga moviéndose a velocidad constante en la dirección del eje x positivo está dado por

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (E_x, E_y, E_z) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} \\ &= \gamma(v)k \frac{Q}{(\gamma^2(v)x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{r} \end{aligned} \quad (10.73)$$

Notemos que esta ecuación se reduce a los dos casos anteriores y si la velocidad de la carga se anula, obtenemos el campo electrostático usual de una carga puntual en reposo. Este campo es radial y depende solamente de la posición instantánea de carga fuente y de la distancia. Pero a diferencia del caso de una carga puntual en reposo, para la cual el campo es esféricamente simétrico, el campo de la carga en movimiento tiene simetría cilíndrica alrededor de la dirección de movimiento de la carga y la magnitud del campo varía según la dirección de observación: para puntos a lo largo de la línea de movimiento de la carga el campo eléctrico es menor en un factor $\gamma^2(v)$ (que el correspondiente valor si la carga estuviera quieta) y aumenta en un factor $\gamma(v)$ para puntos en el plano perpendicular a la línea de movimiento de la carga.

6. Causalidad y el campo eléctrico de una carga en movimiento uniforme. Para entender claramente porqué no hay violación del principio de la constancia de la velocidad de la luz, debemos recordar las condiciones bajo las cuales la ley de Coulomb y la definición de campo eléctrico estático es válida: dos cargas q_1 y q_2 situadas en los puntos del espacio de coordenadas \vec{r}_1 y \vec{r}_2 respectivamente respecto a un observador inercial Σ , ejercen mutuamente una fuerza dada por la ley de Coulomb

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{F}_{21} \quad (10.74)$$

donde \vec{F}_{12} es la fuerza sobre la carga q_2 debida a la carga q_1 , la cual es igual en magnitud y de sentido contrario a la fuerza \vec{F}_{21} sobre la carga q_1 debida a la carga q_2 , es decir la ley de Coulomb satisface la tercera ley de Newton. La condición para la validez de esta relación es que las cargas estén en reposo en Σ y hayan permanecido en reposo en sus correspondientes posiciones durante un tiempo suficiente t . Por “un tiempo t suficiente” queremos decir que

$$t > \frac{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}{c} \quad (10.75)$$

Esta condición la explicaremos detalladamente más adelante, cuando analicemos que sucede con la carga que es frenada. El concepto de campo eléctrico surge cuando consideramos la fuerza sobre diferentes cargas (cargas de prueba) situadas en diferentes puntos del espacio, debida a una carga dada (carga fuente). Sin pérdida de generalidad, consideremos la carga fuente Q situada en el origen de coordenadas del sistema Σ y la carga de prueba q en un punto de coordenadas \vec{r} , entonces a partir de la ley de Coulomb la fuerza sobre la carga de prueba es

$$\vec{F} = k \frac{Qq}{r^3} \vec{r} \quad (10.76)$$

Esta relación nos permite definir el concepto de campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ producido por la carga Q en un punto \vec{r} del espacio por la relación

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}) \quad (10.77)$$

donde

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} = k \frac{Q}{r^3} \vec{r} \quad (10.78)$$

Para que esta relación sea válida en todo el espacio, es decir para cualquier punto \vec{r} , la condición 10.75 implica que la carga Q ha permanecido en reposo desde siempre. Sin embargo, dado que la fuerza sobre una carga de prueba q en un instante dado, solo depende del campo eléctrico de la carga fuente Q en el punto \vec{r} donde se ubica la carga q , entonces esta fuerza es independiente del estado de movimiento de la carga de prueba q . Este

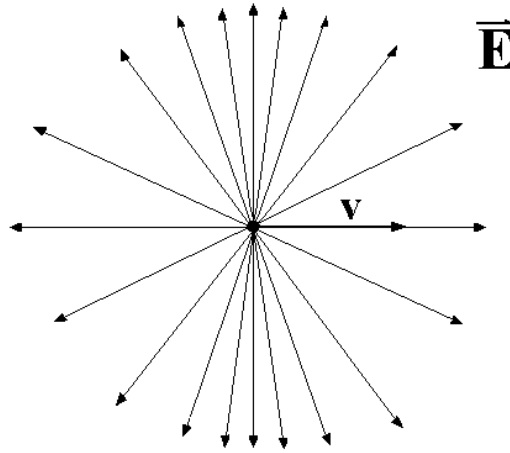


Figura 10.1: **Causalidad y el campo eléctrico de una carga en movimiento uniforme.** Líneas de campo eléctrico de una carga en movimiento uniforme

resultado fue el que se aplicó para resolver el problema anterior. ¿Qué sucede si consideramos esta situación desde otro sistema de referencia inercial Σ' ? Para Σ' la carga fuente se mueve con velocidad constante $-v$ (con v la velocidad de Σ' respecto a Σ) desde siempre, y por lo tanto el campo eléctrico medido en Σ' corresponde a la transformación de Lorentz del campo de una carga estacionaria (campo medido en Σ). Dado que con respecto al observador Σ todos los puntos del espacio tienen la información (a través del campo eléctrico) de la posición de la carga (pues ha estado fija en un punto desde $t \rightarrow -\infty$). Para ilustrar esta situación consideremos una carga fuente Q que se ha estado moviendo con velocidad constante desde $t \rightarrow -\infty$, respecto a un observador inercial Σ y que en el instante $t = 0$ es frenada rápidamente hasta alcanzar el reposo. Para $t < 0$ el campo eléctrico medido en Σ es el obtenido en el problema anterior, el cual se ilustra en la figura 10.1. Siguiendo la convención usual para dibujar las líneas de campo, la densidad de líneas, es decir el número de líneas por unidad de área, indican la intensidad del campo y la flecha su dirección. Así, en la figura se ilustra el resultado obtenido para el campo eléctrico de una carga en movimiento: el campo es radial en la dirección de la posición instantánea de la carga y su intensidad es menor en la dirección de movimiento de la carga y mayor en la dirección perpendicular al movimiento, y con simetría cilíndrica alrededor de la dirección de la velocidad. Consideremos ahora el campo eléctrico para un tiempo $t > 0$, entonces las líneas del campo toman la forma que se ilustra en la figura 10.2: Para distancias menores a ct las líneas de campo corresponden a las de una carga en reposo y si suponemos que el proceso de frenado de la

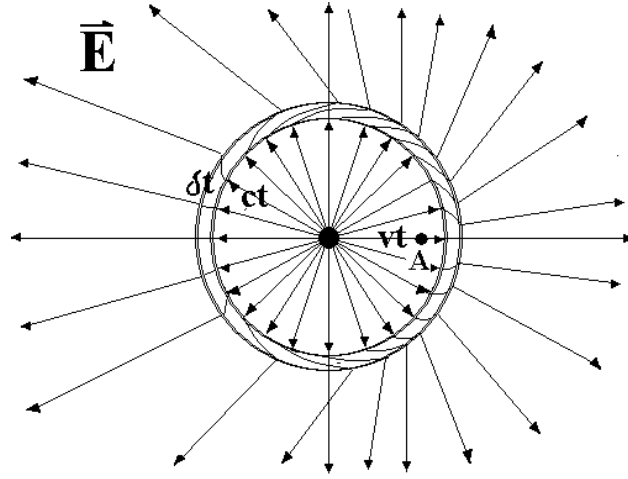


Figura 10.2: **Causalidad y el campo eléctrico de una carga en movimiento uniforme.** Líneas de campo eléctrico de una carga que se frena en un tiempo δt

carga duro un tiempo δt , entonces para distancias mayores a $c(t + \delta t)$ el campo eléctrico corresponde al de una carga moviéndose a velocidad constante y cuya posición instantánea se encuentra en el punto A de la figura 10.2 y representa la posición que la carga tendría si ella hubiera continuado moviéndose a la velocidad constante v . La región intermedia representada por los dos círculos concéntricos separados una distancia $c\delta t$ corresponde a las líneas de campo eléctrico emitidas por una carga acelerada (ondas electromagnéticas o campo de radiación), las cuales se propagan a la velocidad de la luz y llevan la información que la carga ha sido acelerada (frenada en este caso).

7. **Fuerza sobre una carga en movimiento.** Para el primer caso, cuando la carga fuente está, en el instante $t = 0$, en la posición $\vec{r} = (x, 0, 0)$ y se mueve con velocidad \vec{u} , transformemos a un sistema de referencia inercial Σ' con respecto al cual la carga fuente se encuentra en reposo. En este sistema el campo eléctrico de la carga fuente Q en reposo, en un punto de coordenadas $(x', 0, 0)$ está dado por

$$\vec{E} = k \frac{Q}{x'^2} \quad (10.79)$$

y por lo tanto la fuerza sobre una carga de prueba en ese punto, independientemente de su velocidad, está dada por

$$\vec{F} = (F_{x'}, F_{y'}, F_{z'}) = \left(k \frac{Qq}{x'^2}, 0, 0 \right) \quad (10.80)$$

En el sistema de referencia Σ' la velocidad de la carga de prueba es $\vec{u} = (u_{x'}, u_{y'}, u_{z'})$ y por lo tanto las ecuaciones de transformación inversas para la fuerza medida en el sistema Σ implican que

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= (F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{F_{x'} + \frac{v}{c^2} \vec{F}' \cdot \vec{u}'}{1 + \frac{v u_{x'}}{c^2}}, 0, 0 \right) \\
 &= \left(k \frac{Qq}{x'^2} \frac{1 + \frac{v}{c^2} u_{x'}}{1 + \frac{v u_{x'}}{c^2}}, 0, 0 \right) \\
 &= \left(k \frac{Qq}{x'^2}, 0, 0 \right) \\
 &= \left(k \frac{Qq}{\gamma^2(v) x^2}, 0, 0 \right)
 \end{aligned} \tag{10.81}$$

el cual es el mismo resultado obtenido en el problema 5 de esta sección, donde la carga de prueba se encontraba en reposo en el punto $\vec{r} = (x, 0, 0)$. Consideremos ahora la carga q situada en el punto de coordenadas $\vec{r} = (0, y, 0)$ en $t = 0$ y con velocidad $\vec{u} = (u_x, 0, 0)$. Pasando al sistema de referencia Σ' donde la carga fuente se encuentra en reposo en el origen, el campo eléctrico en el punto $\vec{r} = (0, y', 0)$ está dado por

$$\vec{E}' = \left(0, k \frac{Q}{y'^2}, 0 \right) \tag{10.82}$$

y por lo tanto la fuerza sobre la carga de prueba es

$$\vec{F}' = \left(0, k \frac{Qq}{y'^2}, 0 \right) \tag{10.83}$$

Transformando esta expresión al sistema de referencia Σ , teniendo en cuenta que la velocidad de la carga de prueba es $\vec{u}' = (u_{x'}, 0, 0)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \left(\frac{F_{x'} + \frac{v}{c^2} \vec{F}' \cdot \vec{u}'}{1 + \frac{v u_{x'}}{c^2}}, \frac{F_{y'}}{\gamma(v) \left(1 + \frac{v u_{x'}}{c^2}\right)}, \frac{F_{z'}}{\gamma(v) \left(1 + \frac{v u_{x'}}{c^2}\right)} \right) \\
 &= \left(0, \frac{F_{y'}}{\gamma(v) \left(1 + \frac{v u_{x'}}{c^2}\right)}, 0 \right)
 \end{aligned} \tag{10.84}$$

teniendo en cuenta que $y = y'$ y

$$u_{x'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} \tag{10.85}$$

tenemos que la única componente no nula de la fuerza sobre la carga de

prueba está dada por

$$\begin{aligned}
 F_y &= k \frac{Qq}{y^2} \frac{1}{\gamma(v)} \frac{1}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}} \\
 &= k \frac{Qq}{y^2} \frac{1}{\gamma(v)} \frac{1 - \frac{vu_x}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
 &= \gamma(v) k \frac{Qq}{y^2} \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)
 \end{aligned} \tag{10.86}$$

En el problema 5 de esta sección encontramos que la fuerza sobre una carga de prueba en reposo situada en el eje y , debida a la carga Q que se mueve con velocidad constante v a lo largo del eje x positivo, cuando la carga está pasando por el origen en $t = 0$, es

$$\vec{F} = \left(0, \gamma(v) k \frac{Qq}{y^2}, 0\right) \tag{10.87}$$

esto significa que sobre la carga de prueba en movimiento aparece una fuerza adicional, la cual en una función de la velocidad u_x de la carga q , dada por la expresión

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_M &= \left(0, -\gamma(v) k \frac{Qq}{y^2} \frac{vu_x}{c^2}, 0\right) \\
 &= -\frac{vu_x}{c^2} \vec{F}_E
 \end{aligned} \tag{10.88}$$

con \vec{F}_E la fuerza de origen eléctrico dada por la ecuación 10.87 (\vec{F}_M hace referencia a la fuerza magnética como veremos más adelante). Consideremos ahora como se modificaría la fuerza en el caso anterior si la carga de prueba se mueve con velocidad arbitraria $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$. El cambio para este caso surge de la transformación de las componentes de la fuerza del sistema Σ' al sistema Σ , pues de la ecuación 10.83 tenemos

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \left(\frac{F_{x'} + \frac{v}{c^2} \vec{F}' \cdot \vec{u}'}{1 + \frac{vu_{x'}}{c^2}}, \frac{F_{y'}}{\gamma(v) \left(1 + \frac{vu_{x'}}{c^2}\right)}, \frac{F_{z'}}{\gamma(v) \left(1 + \frac{vu_{x'}}{c^2}\right)} \right) \\
 &= \left(\frac{\frac{v}{c^2} F_{y'} u_{y'}}{1 + \frac{vu_{x'}}{c^2}}, \frac{F_{y'}}{\gamma(v) \left(1 + \frac{vu_{x'}}{c^2}\right)}, 0 \right)
 \end{aligned} \tag{10.89}$$

Transformando las cantidades primadas al sistema Σ , con

$$u_{x'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \tag{10.90}$$

$$u_{y'} = \frac{u_y}{\gamma(v) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \tag{10.91}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= k \frac{Qq}{y^2} \left(\frac{v}{c^2} \frac{\gamma(v) \frac{u_y}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}}, \frac{1}{\gamma(v) \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}\right)}, 0 \right) \\
 &= k \frac{Qq}{y^2} \left(\frac{v}{c^2} \frac{\gamma(v) \frac{u_y}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}}{\frac{1}{\gamma^2(v)} \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}, \gamma(v) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right), 0 \right) \\
 &= k \frac{Qq}{y^2} \left(\gamma(v) \frac{vu_y}{c^2}, \gamma(v) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right), 0 \right) \quad (10.92)
 \end{aligned}$$

De acuerdo con el problema 5 de esta sección, en el sistema Σ la carga de prueba experimenta una fuerza debida al campo eléctrico de la carga fuente dada por la ecuación 10.87:

$$\vec{F}_E = \left(0, \gamma(v) k \frac{Qq}{y^2}, 0 \right) \quad (10.93)$$

y por lo tanto, de la ecuación 10.92 tenemos que sobre la partícula de prueba actúa una fuerza adicional

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_M &= \vec{F} - \vec{F}_E \\
 &= k \frac{Qq}{y^2} \left(\gamma(v) \frac{vu_y}{c^2}, \gamma(v) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right), 0 \right) - \left(0, \gamma(v) k \frac{Qq}{y^2}, 0 \right) \\
 &= \left(k \frac{Qq}{y^2} \gamma(v) \frac{v}{c^2} u_y, -k \frac{Qq}{y^2} \gamma(v) \frac{v}{c^2} u_x, 0 \right) \quad (10.94)
 \end{aligned}$$

la cual depende de la velocidad \vec{u} de la carga de prueba. Esta fuerza \vec{F}_M la identificamos con la fuerza magnética, pues si definimos

$$\vec{B} = \gamma(v) \frac{v}{c} \frac{Q}{y^2} (0, 0, 1) \quad (10.95)$$

como el campo magnético debido a la carga Q en el punto de coordenadas $\vec{r} = (0, y, 0)$ entonces la fuerza magnética se puede escribir en la forma

$$\vec{F}_M = \frac{q}{c} \vec{u} \times \vec{B} \quad (10.96)$$

pues

$$\begin{aligned}
 \frac{q}{c} \vec{u} \times \vec{B} &= \gamma(v) \frac{v}{c} \frac{qQ}{y^2} (u_x, u_y, u_z) \times (0, 0, 1) \\
 &= \left(k \frac{Qq}{y^2} \gamma(v) \frac{v}{c} u_y, -k \frac{Qq}{y^2} \gamma(v) \frac{v}{c} u_x, 0 \right) \quad (10.97)
 \end{aligned}$$

Además, podemos encontrar la relación entre el campo eléctrico y el campo

magnético producido por la partícula de prueba, pues

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \gamma(v) \frac{v}{c} \frac{Q}{y^2} (0, 0, 1) \\
 &= \gamma(v) \frac{v}{c} \frac{Q}{y^2} (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) \\
 &= \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E}
 \end{aligned} \tag{10.98}$$

Veamos ahora el caso general, donde la partícula de prueba, en el instante $t = 0$ se encuentra en el punto $\vec{r} = (x, y, z)$ y posee una velocidad $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$. La fuerza en el sistema de referencia Σ' está dada por (ver problema 5 de esta sección ecuación 10.67)

$$\vec{F}' = (F_{x'}, F_{y'}, F_{z'}) = \left(k \frac{Qq x'}{r'^3}, k \frac{Qq y'}{r'^3}, k \frac{Qq z'}{r'^3} \right) \tag{10.99}$$

donde

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \tag{10.100}$$

Transformando las componentes de la fuerza al sistema de referencia Σ tenemos que

$$F_x = \frac{F_{x'} + \frac{v}{c^2} \vec{F}' \cdot \vec{u}'}{1 + \frac{vu_{x'}}{c^2}} \tag{10.101}$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
 x' &= \gamma(v)x \\
 y' &= y \\
 z' &= z
 \end{aligned} \tag{10.102}$$

y aplicando las ecuaciones de transformación las componentes de la velocidad se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 + \frac{vu_{x'}}{c^2}} &= \frac{1}{1 + \frac{v}{c^2} \left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \right)} \\
 &= \gamma^2(v) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)
 \end{aligned} \tag{10.103}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 F_x &= \gamma^2(v) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) \left(F_{x'} + \frac{v}{c^2} \vec{F}' \cdot \vec{u}' \right) \\
 &= k \frac{Qq}{r'^3} \gamma^2 \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) \left(\gamma x \left(1 + \frac{vu_{x'}}{c^2} \right) + \frac{v}{c^2} (yu_{y'} + zu_{z'}) \right) \\
 &= k \frac{Qq}{r'^3} \gamma^2 \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) \left(\frac{\gamma x}{\gamma^2 \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)} + \frac{v}{c^2} \frac{yu_{y'} + zu_{z'}}{\gamma \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)} \right) \\
 &= k \frac{Qq}{r'^3} \gamma \left(x + \frac{vu_y}{c^2} y + \frac{vu_z}{c^2} z \right)
 \end{aligned} \tag{10.104}$$

con

$$r' = \sqrt{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2} \quad (10.105)$$

Para las otras componentes de la fuerza tenemos

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{F_{y'}}{\gamma(v) \left(1 + \frac{vu_{x'}}{c^2}\right)} \\ &= k \frac{Qq}{r'^3} y \gamma \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (10.106)$$

y

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{F_{z'}}{\gamma(v) \left(1 + \frac{vu_{x'}}{c^2}\right)} \\ &= k \frac{Qq}{r'^3} z \gamma \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (10.107)$$

Por lo tanto, la fuerza sobre la carga de prueba q , de origen magnético, está dada por

$$\begin{aligned} \vec{F}_M &= \vec{F} - \vec{F}_E \\ &= k \frac{Qq}{r^3} \gamma \left(\frac{vu_y}{c^2} y + \frac{vu_z}{c^2} z, -\frac{vu_x}{c^2} y, -\frac{vu_x}{c^2} z \right) \end{aligned} \quad (10.108)$$

esta expresión la podemos escribir en la forma

$$\begin{aligned} \vec{F}_M &= \frac{q}{c} \vec{u} \times \left(k \frac{Q}{r^3} \gamma \frac{v}{c} (0, -z, y) \right) \\ &= \frac{q}{c} \vec{u} \times \vec{B} \end{aligned} \quad (10.109)$$

identificando

$$\vec{B} = k \frac{Q}{r^3} \gamma \frac{v}{c} (0, -z, y) \quad (10.110)$$

con el campo magnético producido por la carga fuente Q en el punto \vec{r} , el cual está relacionado con el campo eléctrico por

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E} \quad (10.111)$$

8. Transformación general del campo electromagnético. Las componentes del tensor campo electromagnético están dadas por:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (10.112)$$

y los elementos de la matriz de transformación de Lorentz usual son

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.113)$$

donde $\beta = v/c$ es la velocidad del sistema de referencia Σ' respecto a Σ a lo largo de los ejes $x - x'$. Entonces, de las ecuaciones de transformación para las componentes contravariantes de un tensor de segundo orden

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} F^{\mu\nu} \quad (10.114)$$

tenemos que

$$E_{x'} = F'^{01} = \Lambda_{\mu}^0 \Lambda_{\nu}^1 F^{\mu\nu} \quad (10.115)$$

realizando la doble suma sobre los índices repetidos, y reteniendo solo los términos no nulos, obtenemos

$$\begin{aligned} E_{x'} &= \Lambda_0^0 \Lambda_1^1 F^{01} + \Lambda_1^0 \Lambda_0^1 F^{10} \\ &= \gamma^2 E_x - \gamma^2 \beta^2 E_x \\ &= E_x \end{aligned} \quad (10.116)$$

Procediendo en forma análoga para las otras componentes del campo eléctrico, tenemos

$$\begin{aligned} E_{y'} &= F'^{02} = \Lambda_{\mu}^0 \Lambda_{\nu}^2 F^{\mu\nu} \\ &= \Lambda_0^0 \Lambda_2^2 F^{02} + \Lambda_1^0 \Lambda_2^1 F^{12} \\ &= \gamma E_y - \beta\gamma B_z \end{aligned} \quad (10.117)$$

$$\begin{aligned} E_{z'} &= F'^{03} = \Lambda_{\mu}^0 \Lambda_{\nu}^3 F^{\mu\nu} \\ &= \Lambda_0^0 \Lambda_3^3 F^{03} + \Lambda_1^0 \Lambda_3^2 F^{13} \\ &= \gamma E_z + \beta\gamma B_y \end{aligned} \quad (10.118)$$

y las componentes del campo magnético están dadas por

$$\begin{aligned} B_{x'} &= F'^{23} = \Lambda_{\mu}^2 \Lambda_{\nu}^3 F^{\mu\nu} \\ &= \Lambda_2^2 \Lambda_3^3 F^{23} \\ &= B_x \end{aligned} \quad (10.119)$$

$$\begin{aligned} B_{y'} &= F'^{31} = \Lambda_{\mu}^3 \Lambda_{\nu}^1 F^{\mu\nu} \\ &= \Lambda_3^3 \Lambda_0^1 F^{30} + \Lambda_3^2 \Lambda_1^1 F^{21} \\ &= \beta\gamma E_z + \gamma B_y \end{aligned} \quad (10.120)$$

$$\begin{aligned} B_{z'} &= F'^{12} = \Lambda_{\mu}^1 \Lambda_{\nu}^2 F^{\mu\nu} \\ &= \Lambda_0^1 \Lambda_2^2 F^{02} + \Lambda_1^1 \Lambda_2^1 F^{12} \\ &= -\beta\gamma E_y + \gamma B_z \end{aligned} \quad (10.121)$$

9. **Campo de una carga en movimiento.** Para aplicar los resultados obtenidos en el problema anterior, consideremos un sistema de referencia Σ' relacionado con Σ de la manera usual. Así, con respecto a Σ' la carga Q está en reposo en su origen y por lo tanto el campo de la carga en un punto $\vec{r}' = (x', y', z')$ es solamente eléctrico y está dado por la ley de Coulomb:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= (E_{x'}, E_{y'}, E_{z'}) \\ &= \left(k \frac{Qx'}{r'^3}, k \frac{Qy'}{r'^3}, k \frac{Qz'}{r'^3} \right)\end{aligned}\quad (10.122)$$

Para utilizar las ecuaciones de transformación de los campos obtenidas en el problema anterior, debemos aplicar las ecuaciones de transformación inversas, las cuales se obtienen cambiando v por $-v$. Entonces, de las ecuaciones 10.116, 10.117 y 10.118, las componentes del campo eléctrico en el sistema de referencia Σ están dadas por:

$$E_x = E_{x'} = k \frac{Qx'}{r'^3} \quad (10.123)$$

teniendo en cuenta las ecuaciones de transformación de Lorentz para las coordenadas,

$$x' = \gamma(v)x \quad (10.124)$$

entonces

$$E_x = k \frac{\gamma Qx}{(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (10.125)$$

Para las otras componentes del campo eléctrico obtenemos

$$\begin{aligned}E_y &= \gamma E_{y'} + \beta \gamma B_{z'} \\ &= \gamma k \frac{Qy'}{r'^3} \\ &= k \frac{\gamma Qy}{(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\end{aligned}\quad (10.126)$$

y

$$\begin{aligned}E_z &= \gamma E_{z'} + \beta \gamma B_{y'} \\ &= \gamma k \frac{Qz'}{r'^3} \\ &= k \frac{\gamma Qz}{(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\end{aligned}\quad (10.127)$$

Este resultado coincide con el obtenido en el problema 5 de este capítulo (ver ecuación 10.73). Para obtener las componentes del campo magnético, consideremos ahora las inversas de las ecuaciones 10.119, 10.120 y 10.121 del problema anterior. Entonces

$$B_x = B_{x'} = 0 \quad (10.128)$$

$$\begin{aligned}
B_y &= -\beta\gamma E_{z'} + \gamma B_{y'} \\
&= -\beta\gamma k \frac{Qz'}{r'^3} \\
&= -k \frac{\beta\gamma Qz}{(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{10.129}$$

$$\begin{aligned}
B_z &= \beta\gamma E_{y'} + \gamma B_{z'} \\
&= \beta\gamma k \frac{Qy'}{r'^3} \\
&= k \frac{\beta\gamma Qy}{(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{10.130}$$

escribiendo el resultado en forma vectorial obtenemos

$$\vec{B} = k \frac{Q}{r'^3} \gamma \frac{v}{c^2} (0, -z, y) \tag{10.131}$$

de acuerdo con la ecuación 10.110 del problema 5.

10. Invariantes del campo electromagnético. A partir del tensor campo electromagnético $F^{\alpha\beta}$ podemos construir un primer invariante considerando la traza del tensor, es decir

$$F^\alpha{}_\alpha = \eta_{\alpha\sigma} F^{\alpha\sigma} = 0 \tag{10.132}$$

la cual es idénticamente nula, pues $F^{\alpha\beta}$ es antisimétrico. Consideremos ahora la contracción del tensor $F^{\alpha\beta}$ consigo mismo, esto es (escribiendo solo los términos no nulos)

$$\begin{aligned}
F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} &= F^{01} F_{01} + F^{02} F_{02} + F^{03} F_{03} + \\
&\quad F^{10} F_{10} + F^{12} F_{12} + F^{13} F_{13} + \\
&\quad F^{20} F_{20} + F^{21} F_{21} + F^{23} F_{23} + \\
&\quad F^{30} F_{30} + F^{31} F_{31} + F^{32} F_{32} \\
&= 2[F^{01} F_{01} + F^{02} F_{02} + F^{03} F_{03} + \\
&\quad F^{12} F_{12} + F^{31} F_{31} + F^{23} F_{23}]
\end{aligned} \tag{10.133}$$

donde se ha utilizado la propiedad antisimétrica del tensor $F^{\alpha\beta}$ para la última igualdad. De las ecuaciones 5.15 y 10.30 que nos dan las componentes contravariantes y covariantes del tensor $F^{\alpha\beta}$ en términos de las componentes de los campos eléctrico y magnético, tenemos

$$\begin{aligned}
F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} &= 2[-E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + B_z^2 + B_y^2 + B_x^2] \\
&= 2[\vec{B} \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot \vec{E}]
\end{aligned} \tag{10.134}$$

Otro invariante que podemos construir es la contracción del tensor $F^{\alpha\beta}$ con su dual, así

$$(*F)_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\delta\gamma\alpha\beta} F^{\delta\gamma} F^{\alpha\beta} \tag{10.135}$$

Desarrollando la suma sobre los cuatro índices (sin escribir los términos nulos), tenemos

$$\begin{aligned}
(*F)_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} [\varepsilon_{0123} F^{01} F^{23} + \varepsilon_{0132} F^{01} F^{32} + \varepsilon_{0213} F^{02} F^{13} \\
&\quad + \varepsilon_{0231} F^{02} F^{31} + \varepsilon_{0312} F^{03} F^{12} + \varepsilon_{0321} F^{03} F^{21} \\
&\quad + \varepsilon_{1023} F^{10} F^{23} + \varepsilon_{1032} F^{10} F^{32} + \varepsilon_{1203} F^{12} F^{03} \\
&\quad + \varepsilon_{1230} F^{12} F^{30} + \varepsilon_{1302} F^{13} F^{02} + \varepsilon_{1320} F^{13} F^{20} \\
&\quad + \varepsilon_{2013} F^{20} F^{13} + \varepsilon_{2031} F^{20} F^{31} + \varepsilon_{2103} F^{21} F^{03} \\
&\quad + \varepsilon_{2130} F^{21} F^{30} + \varepsilon_{2301} F^{23} F^{01} + \varepsilon_{2310} F^{23} F^{10} \\
&\quad + \varepsilon_{3012} F^{30} F^{12} + \varepsilon_{3021} F^{30} F^{21} + \varepsilon_{3102} F^{31} F^{02} \\
&\quad + \varepsilon_{3120} F^{31} F^{20} + \varepsilon_{3201} F^{32} F^{01} + \varepsilon_{3210} F^{32} F^{10}] \\
&= 4[\varepsilon_{0123} F^{01} F^{23} + \varepsilon_{0213} F^{02} F^{13} \\
&\quad + \varepsilon_{0312} F^{03} F^{12}] \tag{10.136}
\end{aligned}$$

Remplazando las componentes del tensor $F^{\alpha\beta}$ en términos de los campos, obtenemos

$$\begin{aligned}
(*F)_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} &= 4[-E_x B_x - E_y B_y - E_z B_z] \\
&= -4\vec{E} \cdot \vec{B} \tag{10.137}
\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
\vec{E} \cdot \vec{B} &= -\frac{1}{4} (*F)_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{8} \varepsilon_{\delta\gamma\alpha\beta} F^{\delta\gamma} F^{\alpha\beta} \tag{10.138}
\end{aligned}$$

11. **Campos ortogonales.** En el problema anterior encontramos dos invariantes formados a partir del tensor campo electromagnético $F^{\alpha\beta}$:

$$\vec{B}^2 - \vec{E}^2 = \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \tag{10.139}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = -\frac{1}{8} \varepsilon_{\delta\gamma\alpha\beta} F^{\delta\gamma} F^{\alpha\beta} \tag{10.140}$$

esto muestra además que ni \vec{E}^2 ni \vec{B}^2 son invariantes independientes, de hecho no existen más invariantes construidos a partir de $F^{\alpha\beta}$ que no sean múltiplos o combinación lineal de los dos invariantes anteriores. Supongamos que los campos \vec{E} y \vec{B} forman un ángulo ϕ para un sistema de referencia inercial Σ , entonces

$$\cos \phi = \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{|\vec{E}| |\vec{B}|} \tag{10.141}$$

esto significa que para Σ

$$\left| \vec{E} \right| \neq 0 \quad y \quad \left| \vec{B} \right| \neq 0 \quad (10.142)$$

por lo tanto, si por hipótesis los campos forman el mismo ángulo en todos los sistemas de referencia inerciales, entonces en Σ' tenemos

$$\cos \phi = \frac{\vec{E}' \cdot \vec{B}'}{\left| \vec{E}' \right| \left| \vec{B}' \right|} \quad (10.143)$$

Puesto que el producto punto es un invariante

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E}' \cdot \vec{B}' \quad (10.144)$$

mientras que las normas de los campos eléctrico y magnético no lo son se debe tener que

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad (10.145)$$

para todos los observadores y además en ningún sistema de referencia se puede anular uno de los campos.

12. El tensor energía-momento del campo electromagnético. El tensor campo electromagnético está definido por la expresión

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta} - F^{\alpha\sigma} F_{\sigma}^{\beta} \right] \quad (10.146)$$

entonces consideremos primero la componente temporal:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} \eta^{00} F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta} - F^{0\sigma} F_{\sigma}^0 \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\vec{B}^2 - \vec{E}^2 \right) - F^{01} F_1^0 - F^{02} F_2^0 - F^{03} F_3^0 \right] \end{aligned} \quad (10.147)$$

por otra parte tenemos que

$$F_{\beta}^{\alpha} = \eta_{\beta\sigma} F^{\alpha\sigma} \quad (10.148)$$

entonces, para $i = 1, 2, 3$ obtenemos

$$F_i^0 = \eta_{i\sigma} F^{0\sigma} = \eta_{ii} F^{0i} = -E_i \quad (10.149)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\vec{B}^2 - \vec{E}^2 \right) - \vec{E}^2 \right] \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right] \end{aligned} \quad (10.150)$$

la cual corresponde a la densidad de energía del campo electromagnético. Consideremos ahora los términos T^{0i} , con $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} T^{0i} &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} \eta^{0i} F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta} - F^{0\sigma} F^i_{\sigma} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{0\sigma} F^i_{\sigma} \\ &= -\frac{1}{4\pi} [F^{01} F^i_1 + F^{02} F^i_2 + F^{03} F^i_3] \end{aligned} \quad (10.151)$$

puesto que

$$F^i_j = \eta_{j\sigma} F^{i\sigma} = \eta_{jj} F^{ij} = -F^{ij} \quad (10.152)$$

así

$$\begin{aligned} T^{01} &= -\frac{1}{4\pi} [F^{02} F^1_2 + F^{03} F^1_3] \\ &= -\frac{1}{4\pi} [-E_y B_z + E_z B_y] \\ &= \frac{1}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}]_x \end{aligned} \quad (10.153)$$

y de forma similar para las otras componentes, esto es

$$T^{0i} = \frac{1}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}]_i \quad (10.154)$$

con $i = x, y, z$, la cual corresponden a las componentes del vector de Pointing

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \quad (10.155)$$

Para las componentes $i, j = 1, 2, 3$ se obtiene

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} \eta^{ij} F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta} - F^{i\sigma} F^j_{\sigma} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left[F^{i0} F^j_0 + F^{i1} F^j_1 + F^{i2} F^j_2 + F^{i3} F^j_3 + \frac{1}{4} \delta^{ij} F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta} \right] \end{aligned} \quad (10.156)$$

teniendo en cuenta que

$$F^j_0 = \eta_{0\sigma} F^{j\sigma} = \eta_{00} F^{j0} = F^{j0} \quad (10.157)$$

el primer término de la expresión anterior (ecuación 10.156) da

$$F^{i0} F^j_0 = E_i E_j \quad (10.158)$$

Para los otros tres términos, con $i = j$, tenemos

$$F^{i1} F^i_1 + F^{i2} F^i_2 + F^{i3} F^i_3 = (B^i)^2 - \vec{B}^2 \quad (10.159)$$

con la notación $B^i = B_x, B_y, B_z$ para $i = 1, 2, 3$, pues por ejemplo, para $i = j = 1$ se obtiene

$$F^{11}F_1^1 + F^{12}F_2^1 + F^{13}F_3^1 = -B_z B_z - B_y B_y \quad (10.160)$$

Consideremos ahora los términos con $i \neq j$,

$$F^{i1}F_1^j + F^{i2}F_2^j + F^{i3}F_3^j = B^i B^j \quad (10.161)$$

Por ejemplo si $i = 1$ y $j = 2$ tenemos que

$$F^{11}F_1^2 + F^{12}F_2^2 + F^{13}F_3^2 = B_y B_x \quad (10.162)$$

Por lo tanto

$$T^{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[E^i E^j + B^i B^j + \frac{1}{2} \delta^{ij} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right] \quad (10.163)$$

el cual corresponde al tensor de tensiones tridimensional del campo electromagnético.

13. **Ecuación de continuidad del tensor $\mathbf{T}^{\mu\nu}$.** A partir de la definición del tensor energía-momento del campo electromagnético tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} &= T^{\alpha\beta}_{,\beta} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left[\frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta} - F^{\alpha\sigma} F_\sigma^\beta \right] \\ &= \frac{1}{16\pi} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta}) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (F^{\alpha\sigma} F_\sigma^\beta) \\ &= \frac{1}{16\pi} \eta^{\alpha\beta} (F^{\sigma\delta}_{,\beta} F_{\sigma\delta} + F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta,\beta}) - \\ &\quad \frac{1}{4\pi} (F^{\alpha\sigma}_{,\beta} F_\sigma^\beta + F^{\alpha\sigma} F_{\sigma,\beta}^\beta) \end{aligned} \quad (10.164)$$

El primer término de la última igualdad lo podemos escribir en la forma

$$\frac{1}{16\pi} \eta^{\alpha\beta} (F^{\sigma\delta}_{,\beta} F_{\sigma\delta} + F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta,\beta}) = \frac{1}{8\pi} (F_{\sigma\delta} F^{\sigma\delta,\alpha}) \quad (10.165)$$

donde se ha utilizado el hecho que

$$F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta} = F_{\sigma\delta} F^{\sigma\delta} \quad (10.166)$$

y

$$\eta^{\alpha\beta} F^{\sigma\delta}_{,\beta} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial F^{\sigma\delta}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial F^{\sigma\delta}}{\partial x_\alpha} = F^{\sigma\delta,\alpha} \quad (10.167)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}_{,\beta} &= \frac{1}{8\pi} (F_{\sigma\delta} F^{\sigma\delta,\alpha}) - \frac{1}{4\pi} (F^{\alpha\sigma}_{,\beta} F_\sigma^\beta + F^{\alpha\sigma} F_{\sigma,\beta}^\beta) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left[F^{\alpha\sigma} F_{\sigma,\beta}^\beta + F^{\alpha\sigma}_{,\beta} F_\sigma^\beta - \frac{1}{2} F_{\sigma\delta} F^{\sigma\delta,\alpha} \right] \end{aligned} \quad (10.168)$$

De la ecuación de Maxwell en ausencia de fuentes tenemos

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} J^\beta = 0 \quad (10.169)$$

entonces el primer término de la ecuación 10.168 se anula, pues

$$F^{\alpha\sigma} F^{\beta}_{\sigma,\beta} = \eta_{\sigma\gamma} F^{\alpha\sigma} F^{\beta\gamma}_{,\beta} = 0 \quad (10.170)$$

Así, subiendo y bajando el índice β en el segundo término de la ecuación 10.168 e intercambiando los índices mudos de suma de este término en la forma $\beta \rightarrow \sigma$ y $\sigma \rightarrow \delta$, tenemos

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}_{,\beta} &= -\frac{1}{4\pi} \left[F^{\alpha\sigma}_{,\beta} F^\beta_\sigma - \frac{1}{2} F_{\sigma\delta} F^{\sigma\delta,\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} F_{\sigma\delta} F^{\sigma\delta,\alpha} - F^{\alpha\sigma,\beta} F_{\beta\sigma} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} F_{\sigma\delta} F^{\sigma\delta,\alpha} - F^{\alpha\delta,\sigma} F_{\sigma\delta} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} F_{\sigma\delta} \left[\frac{1}{2} F^{\sigma\delta,\alpha} - F^{\alpha\delta,\sigma} \right] \end{aligned} \quad (10.171)$$

Esta ecuación la podemos transformar teniendo en cuenta la antisimetría del tensor campo electromagnético y redefiniendo índices mudos en el último término $\sigma \rightarrow \delta$ y $\delta \rightarrow \sigma$, obtenemos

$$\begin{aligned} F_{\sigma\delta} \left[\frac{1}{2} F^{\sigma\delta,\alpha} - F^{\alpha\delta,\sigma} \right] &= \frac{1}{2} F_{\sigma\delta} [F^{\sigma\delta,\alpha} + F^{\delta\alpha,\sigma} + F^{\delta\alpha,\sigma}] \\ &= \frac{1}{2} [F_{\sigma\delta} F^{\sigma\delta,\alpha} + F_{\sigma\delta} F^{\delta\alpha,\sigma} + F_{\delta\sigma} F^{\sigma\alpha,\delta}] \\ &= \frac{1}{2} [F_{\sigma\delta} F^{\sigma\delta,\alpha} + F_{\sigma\delta} F^{\delta\alpha,\sigma} + F_{\sigma\delta} F^{\alpha\sigma,\delta}] \\ &= \frac{1}{2} F_{\sigma\delta} [F^{\sigma\delta,\alpha} + F^{\delta\alpha,\sigma} + F^{\alpha\sigma,\delta}] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (10.172)$$

pues el término entre paréntesis corresponde a la ecuación de Maxwell homogénea, i.e

$$F^{\sigma\delta,\alpha} + F^{\delta\alpha,\sigma} + F^{\alpha\sigma,\delta} = 0 \quad (10.173)$$

es decir, en ausencia de fuente externas la cuatridivergencia del tensor energía-momento del campo electromagnético se anula:

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = T^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0 \quad (10.174)$$

Si hay fuentes entonces obtenemos que

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} = F^{\alpha\sigma} J_\sigma \quad (10.175)$$

14. **La traza del tensor $\mathbf{T}^{\mu\nu}$.** Dado el tensor energía-momento

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta} - F^{\alpha\sigma} F_{\sigma}^{\beta} \right] \quad (10.176)$$

su traza la podemos calcular a través de la relación

$$\begin{aligned} T_{\gamma}^{\alpha} &= \eta_{\gamma\beta} T^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{4\pi} \eta_{\gamma\beta} \left[\frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta} - F^{\alpha\sigma} F_{\sigma}^{\beta} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} \eta_{\gamma\beta} \eta^{\alpha\beta} F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta} - \eta_{\gamma\beta} F^{\alpha\sigma} F_{\sigma}^{\beta} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} \delta_{\gamma}^{\alpha} F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta} - F^{\alpha\sigma} F_{\gamma\sigma} \right] \end{aligned} \quad (10.177)$$

entonces

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^{\alpha} &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} \delta_{\alpha}^{\alpha} F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta} - F^{\alpha\sigma} F_{\alpha\sigma} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[F^{\sigma\delta} F_{\sigma\delta} - F^{\alpha\sigma} F_{\alpha\sigma} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (10.178)$$

pues

$$\delta_{\alpha}^{\alpha} = 4 \quad (10.179)$$

15. **Otro invariante relativista.** De la definición de densidad de energía y del vector de Pointing tenemos que

$$\begin{aligned} (T^{00})^2 - |\vec{S}|^2 &= \left(\frac{1}{8\pi} \right)^2 \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right)^2 - \left(\frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \right)^2 \\ &= \frac{1}{64\pi^2} \left[\vec{E}^4 + \vec{B}^4 + 2\vec{E}^2 \vec{B}^2 - 4\vec{E}^2 \vec{B}^2 + 4(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \right] \\ &= \frac{1}{64\pi^2} \left[(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)^2 + 4(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \right] \\ &= \frac{1}{256\pi^2} \left[(F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta})^2 - \frac{1}{4} (\varepsilon_{\delta\gamma\alpha\beta} F^{\delta\gamma} F^{\alpha\beta})^2 \right] \end{aligned} \quad (10.180)$$

el cual es un invariante relativista.

16. **Trayectoria en campo eléctrico constante.** Eligiendo un sistema de coordenadas con su origen en el instante y en el punto donde el protón entra a la región de campo eléctrico, y tomando el eje $x = x^1$ en la dirección de incidencia del protón y el eje $y = x^2$ en la dirección del campo, tenemos que la cuadrivelocidad inicial del protón está dada por

$$U_0 = \gamma(v_0) (c, v_0, 0, 0) \quad (10.181)$$

La ecuación de movimiento viene dada por la fuerza de Lorentz

$$f^\alpha = \frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c} \eta_{\beta\gamma} F^{\beta\alpha} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \quad (10.182)$$

Las componentes del tensor campo electromagnético están dadas por

$$F^{\beta\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.183)$$

por lo tanto, las componentes del cuadrivector fuerza de Lorentz son, la temporal

$$\begin{aligned} \frac{dp^0}{d\tau} &= \frac{e}{c} \eta_{\beta\gamma} F^{\beta 0} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = \frac{e}{c} \eta_{22} F^{20} \frac{dx^2}{d\tau} \\ &= \frac{e}{c} EU^2 \\ &= \frac{e}{c} E \gamma(\vec{v}) v_y \end{aligned} \quad (10.184)$$

la componente en la dirección del eje x

$$\frac{dp^1}{d\tau} = \frac{e}{c} \eta_{\beta\gamma} F^{\beta 1} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (10.185)$$

en la dirección del eje y

$$\begin{aligned} \frac{dp^2}{d\tau} &= \frac{e}{c} \eta_{\beta\gamma} F^{\beta 2} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = \frac{e}{c} \eta_{00} F^{02} \frac{dx^0}{d\tau} \\ &= \frac{e}{c} EU^0 \\ &= eE \gamma(\vec{v}) \end{aligned} \quad (10.186)$$

y en la dirección del eje z

$$\frac{dp^3}{d\tau} = \frac{e}{c} \eta_{\beta\gamma} F^{\beta 3} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (10.187)$$

De la ecuación 10.185 para la componente x tenemos que

$$p^1(\tau) = m_0 U^1(\tau) = C_1 = \text{const.} \quad (10.188)$$

donde m_0 es la masa propia del protón y por la condición inicial (ecuación 10.181) obtenemos

$$p^1(\tau = 0) = m_0 \gamma(v_0) v_0 \quad (10.189)$$

y por lo tanto

$$\frac{dx^1}{d\tau} = U^1(\tau) = \gamma(v_0) v_0 \quad (10.190)$$

Integrando esta ecuación tenemos

$$x^1(\tau) = \gamma(v_0)v_0\tau + C_2 \quad (10.191)$$

y puesto que hemos elegido $x^1 = 0$ en $\tau = 0$ la constante de integración $C_2 = 0$. Así

$$x^1(\tau) = \gamma(v_0)v_0\tau \quad (10.192)$$

Por las condiciones iniciales la componente z ecuación 10.187, y por tanto la coordenada z son nulas. Las ecuaciones 10.184 y 10.186 las podemos reescribir en la forma

$$m_0 \frac{dU^0}{d\tau} = \frac{e}{c}EU^2 \quad (10.193)$$

$$m_0 \frac{dU^2}{d\tau} = \frac{e}{c}EU^0 \quad (10.194)$$

derivando la segunda ecuación y remplazando la primera tenemos

$$m_0 \frac{d^2U^2}{d\tau^2} = \frac{e}{c}E \frac{dU^0}{d\tau} = \frac{e^2}{m_0c^2}E^2U^2 \quad (10.195)$$

Integrando esta ecuación

$$U^2(\tau) = C_3 \sinh\left(\frac{eE}{m_0c}\tau\right) + C_4 \cosh\left(\frac{eE}{m_0c}\tau\right) \quad (10.196)$$

de la condición inicial

$$U^2(\tau = 0) = 0 \quad (10.197)$$

obtenemos $C_4 = 0$ y para obtener la otra constante de integración utilizamos la ecuación 10.194 en $\tau = 0$, así

$$m_0 \frac{dU^2(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{e}{c}EU^0(\tau = 0) = eE\gamma(v_0) \quad (10.198)$$

pero

$$\begin{aligned} m_0 \frac{dU^2(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} &= m_0 C_3 \frac{eE}{m_0c} \cosh\left(\frac{eE}{m_0c}\tau\right) \Big|_{\tau=0} \\ &= C_3 \frac{eE}{c} \end{aligned} \quad (10.199)$$

y por lo tanto

$$C_3 = c\gamma(v_0) \quad (10.200)$$

De esta forma obtenemos

$$\frac{dx^2}{d\tau} = U^2(\tau) = c\gamma(v_0) \sinh\left(\frac{eE}{m_0c}\tau\right) \quad (10.201)$$

Integrando esta ecuación tenemos

$$x^2(\tau) = c\gamma(v_0) \frac{m_0 c}{eE} \cosh\left(\frac{eE}{m_0 c} \tau\right) + C_5 \quad (10.202)$$

La constante de integración se determina con la condición inicial que $x^2 = 0$ para $\tau = 0$, así

$$x^2(\tau) = \gamma(v_0) \frac{m_0 c^2}{eE} \left[\cosh\left(\frac{eE}{m_0 c} \tau\right) - 1 \right] \quad (10.203)$$

De la ecuación 10.194 podemos obtener la componente U^0 de la cuadrivelocidad

$$\begin{aligned} U^0 &= \frac{m_0 c}{eE} \frac{dU^2}{d\tau} \\ &= c\gamma(v_0) \cosh\left(\frac{eE}{m_0 c} \tau\right) \end{aligned} \quad (10.204)$$

Así el cuadrivector velocidad del protón está dado por

$$U = \left(c\gamma(v_0) \cosh\left(\frac{eE}{m_0 c} \tau\right), \gamma(v_0)v_0, c\gamma(v_0) \sinh\left(\frac{eE}{m_0 c} \tau\right), 0 \right) \quad (10.205)$$

cuya norma al cuadrado es

$$\begin{aligned} U^2 &= c^2 \gamma^2(v_0) \cosh^2\left(\frac{eE}{m_0 c} \tau\right) - \gamma^2(v_0)v_0^2 \\ &\quad - c^2 \gamma^2(v_0) \sinh^2\left(\frac{eE}{m_0 c} \tau\right) \\ &= c^2 \gamma^2(v_0) - \gamma^2(v_0)v_0^2 \\ &= c^2 \end{aligned} \quad (10.206)$$

como debe ser. Notemos, que a diferencia del caso no relativista, la velocidad del protón no es constante en la dirección normal al campo, pues lo que se conserva en esta dirección es el momento y debido a que la partícula está acelerada en la dirección del campo, su velocidad va aumentando y por lo tanto su masa inercial relativista, lo que exige que la velocidad en la dirección del eje x , dada por

$$\frac{v_x}{c} = \frac{U^1}{U^0} = \frac{v_0}{c \cosh\left(\frac{eE}{m_0 c} \tau\right)} \quad (10.207)$$

disminuya. La línea de universo de la partícula está dada por

$$\begin{aligned} x(\tau) &= (x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau)) \\ &= \left(x^0, \gamma_0 v_0 \tau, \gamma_0 \frac{m_0 c^2}{eE} \left[\cosh\left(\frac{eE}{m_0 c} \tau\right) - 1 \right], 0 \right) \end{aligned} \quad (10.208)$$

donde $\gamma_0 = \gamma(v_0)$. Para encontrar la coordenada temporal $ct = x^0(\tau)$ integramos la ecuación 10.204 con la condición inicial $t = 0$ en $\tau = 0$:

$$x^0(\tau) = \frac{m_0 c^2 \gamma(v_0)}{eE} \sinh\left(\frac{eE}{m_0 c} \tau\right) \quad (10.209)$$

Para encontrar la trayectoria del protón, es decir

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (x^1(t), x^2(t), x^3(t)) \\ &= (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned} \quad (10.210)$$

despejamos τ en función de t de la ecuación 10.209

$$\tau = \frac{m_0 c}{eE} \sinh^{-1}\left(\frac{eE}{m_0 c \gamma(v_0)} t\right) \quad (10.211)$$

y lo reemplazamos en las coordenadas x^1 y x^2 . Así

$$x^1(t) = \gamma(v_0) v_0 \frac{m_0 c}{eE} \sinh^{-1}\left(\frac{eE}{m_0 c \gamma(v_0)} t\right) \quad (10.212)$$

$$x^2(t) = \gamma(v_0) \frac{m_0 c^2}{eE} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{eE}{m_0 c \gamma(v_0)} t\right)^2} - 1 \right] \quad (10.213)$$

La curva que sigue el protón $y = y(x)$ en el campo eléctrico constante la podemos obtener eliminando el tiempo en las dos ecuaciones anteriores. Sin embargo es más sencillo si utilizamos la ecuación 10.192 para eliminar τ en función de $x^1 = x$ y reemplazamos en la ecuación para $x^2 = y$, obteniendo de esta forma

$$y(x) = \gamma(v_0) \frac{m_0 c^2}{eE} \left[\cosh\left(\frac{eE}{m_0 c \gamma(v_0) v_0} x\right) - 1 \right] \quad (10.214)$$

En el caso no relativista sabemos que la trayectoria que sigue una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme, con velocidad inicial perpendicular al campo esta dada por la relación para el tiro parabólico, así eligiendo las mismas coordenadas anteriores la trayectoria que sigue el protón está dada por

$$x(t) = v_0 t \quad (10.215)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \frac{eE}{m_0} t^2 \quad (10.216)$$

y por lo tanto la curva es una parábola

$$y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m_0 v_0^2} x^2 \quad (10.217)$$

Calculemos el límite para bajas velocidades de la expresión 10.214, teniendo en cuenta que la expansión en serie de Taylor de la función \cosh está dada por

$$\cosh z = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \dots \quad (10.218)$$

entonces reteniendo términos hasta segundo orden tenemos

$$\begin{aligned} y &= \gamma(v_0) \frac{m_0 c^2}{eE} \left[\cosh \left(\frac{eE}{m_0 c \gamma(v_0) v_0} x \right) - 1 \right] \\ &\cong \gamma(v_0) \frac{m_0 c^2}{2eE} \left(\frac{eE}{m_0 c \gamma(v_0) v_0} x \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{eE}{\gamma(v_0) m_0 v_0^2} x^2 \\ &\cong \frac{1}{2} \frac{eE}{m_0 v_0^2} x^2 \end{aligned} \quad (10.219)$$

con $\gamma \cong 1$ para $v_0 \ll c$.

17. **Trayectoria en campo magnético constante.** Dado que el campo magnético no hace trabajo sobre la partícula cargada, la magnitud de la velocidad no cambia y la trayectoria de la partícula es un círculo de radio R . Si tomamos el eje z en la dirección del campo magnético, entonces el cuadrivector del protón está dada por

$$p^\alpha = (\gamma(\vec{v})m_0c, \gamma(\vec{v})m_0v_x, \gamma(\vec{v})m_0v_y, 0) \quad (10.220)$$

donde $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$, pues la velocidad del protón es perpendicular al campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$. La ecuación de movimiento viene dada por la fuerza de Lorentz

$$f^\alpha = \frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c} \eta_{\beta\gamma} F^{\beta\alpha} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \quad (10.221)$$

Las componentes del tensor campo electromagnético están dadas por

$$F^{\beta\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.222)$$

Por lo tanto

$$f^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{q}{c} \eta_{\beta\gamma} F^{\beta 0} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (10.223)$$

pues el campo eléctrico es cero: $\vec{E} = (F^{01}, F^{02}, F^{03}) = 0$. Para las otras componentes de la cuadrifuerza tenemos (escribiendo solo los términos no

mulos de la doble suma):

$$\begin{aligned}
 f^1 &= \frac{dp^1}{d\tau} = \frac{q}{c} \eta_{\beta\gamma} F^{\beta 1} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \\
 &= \frac{q}{c} \eta_{22} F^{21} \frac{dx^2}{d\tau} \\
 &= \frac{q}{c} BU^2 \\
 &= \frac{q}{c} B\gamma(\vec{v})v_y
 \end{aligned} \tag{10.224}$$

$$\begin{aligned}
 f^2 &= \frac{dp^2}{d\tau} = \frac{q}{c} \eta_{\beta\gamma} F^{\beta 2} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \\
 &= \frac{q}{c} \eta_{11} F^{12} \frac{dx^1}{d\tau} \\
 &= -\frac{q}{c} BU^1 \\
 &= -\frac{q}{c} B\gamma(\vec{v})v_x
 \end{aligned} \tag{10.225}$$

y

$$f^3 = \frac{dp^3}{d\tau} = \frac{q}{c} \eta_{\beta\gamma} F^{\beta 3} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \tag{10.226}$$

Bibliografía

- [1] Tejeiro J.M. Sobre la teoría especial de la relatividad. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional. 2005
- [2] Smith J.H. Introduction to Special Relativity. Benjamin, New York, 1965
- [3] French A.P. Relatividad Especial, curso de Física del M.I.T. Editorial Reverté S. A., 1988
- [4] Scott G.D. and Viner M.R. Am. J. Phys., **33**, 534 (1965)
- [5] Dewan E. and Beran M. Am. J. Phys., **27**, 517 (1959)
- [6] Dewan E. Am. J. Phys., **31**, 383 (1963)
- [7] Peterson B.M., An introduction to Active Galactic Nuclei. Cambridge University Press (1997)
- [8] Sutton R.B., Fields T.H., Fox J.G., Kane J.A., Mott W.E. and Stallwood R.A. Proton-proton scattering at 437Mev. Phys. Rev. **97**,783 (1955)