



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

# **Estrategia didáctica para el fortalecimiento del pensamiento variacional a través del uso de experimentos de modelación con funciones cuadráticas.**

**Maira Yurany Palacios Perea**

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ciencias

Medellín, Colombia

2023

# **Estrategia didáctica para el fortalecimiento del pensamiento variacional a través del uso de experimentos de modelación con funciones cuadráticas.**

**Maira Yurany Palacios Perea**

Trabajo final de Maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en enseñanza de las ciencias exactas y naturales**

Director:

Sigifredo de Jesús Herrón Osorio

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ciencias

Medellín, Colombia

2023

*A mis padres*

*Que me acompañan de manera incondicional  
en cada proyecto que emprendo.*

*A mi compañero de vida, amigas y hermanas  
Por su aliento y comprensión en cada etapa de  
este camino.*

*A mis profesores, por compartir su  
conocimiento y ser guías en este proceso de  
aprendizaje.*

*“La educación es el arma más poderosa que  
puedes usar para cambiar el mundo”*

*Nelson Mandela.*

## **Agradecimientos**

Deseo expresar gratitud a Dios por brindarme la oportunidad de cruzar caminos, con personas que me acompañan y me llenan de fortaleza en cada proyecto que emprendo.

A mi director, Sigifredo de Jesús Herrón Osorio, por su comprensión, motivación y valiosa asesoría que permitió que avanzara en el desarrollo del presente trabajo.

Al Rector, Rodrigo de Jesús Jiménez Martínez de la Institución Educativa Joaquín Vallejo Arbeláez, por su apoyo en la implementación de la propuesta didáctica que permitió fortalecer significativamente los procesos de enseñanza que llevo a cabo al interior de las aulas de Clase.

A mis estudiantes del grado noveno, cuyo compromiso, motivación y buena actitud han sido fundamentales en cada fase de esta intervención.

## Resumen

En este trabajo se exponen los resultados obtenidos al aplicar una estrategia didáctica destinada a fortalecer las habilidades de pensamiento variacional, la realización de actividades complejas en las que es útil el lenguaje algebraico, el reconocimiento de situaciones de variación y cambio, la modelación de situaciones simples y cotidianas vinculadas con las funciones cuadráticas, desarrollada con estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Joaquín Vallejo Arbeláez. Esta estrategia se llevó a cabo en el transcurso de la investigación realizada durante la realización de mis estudios de Maestría en Enseñanza de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín. Se basó en la metodología de Investigación-Acción educativa con un enfoque cualitativo interpretativo y se fundamentó en los principios de la Teoría de Aprendizaje Significativo propuesto por Ausubel (1983) y el enfoque de sistemas, propuesto por Vasco (1986). Como parte de los resultados de esta investigación, se presenta la sistematización del proceso de enseñanza y aprendizaje, acompañada de las conclusiones y recomendaciones surgidas de la aplicación de esta estrategia en el contexto de los estudiantes.

**Palabras clave: (Pensamiento variacional, lenguaje algebraico, variación y cambio, modelación, funciones cuadráticas, aprendizaje significativo, enfoque de sistemas).**

# **Didactic strategy for strengthening variational thinking through the use of modeling experiments with quadratic functions.**

## **Abstract**

This work presents the results obtained from the application of a didactic strategy aimed at strengthening variational thinking skills, engaging in complex activities where algebraic language is useful, recognizing situations of variation and change, and modeling simple and everyday situations related to quadratic functions. This strategy was developed with ninth-grade students at the Joaquín Vallejo Arbeláez Educational Institution. It was implemented during the research conducted as part of the Master's program in Teaching Exact and Natural Sciences at the National University of Colombia, located in Medellín. The strategy was based on the educational action research methodology with a qualitative interpretative approach and was grounded in the principles of Meaningful Learning Theory proposed by Ausubel (1983) and the systems approach proposed by Vasco (1986). As part of the results of this research, the systematization of the teaching and learning process is presented, accompanied by conclusions and recommendations arising from the application of this strategy in the students' context.

**Keywords: (Variational thinking, algebraic language, variation and change, modeling, quadratic functions, meaningful learning, systems approach).**

# Contenido

	Pág.
<b>Resumen</b> .....	<b>VIII</b>
<b>Lista de figuras</b> .....	<b>XIII</b>
<b>Lista de tablas</b> .....	<b>XV</b>
<b>Introducción</b> .....	<b>17</b>
<b>Capítulo 1. Aspectos preliminares</b> .....	<b>20</b>
1.1 Selección y delimitación del tema.....	20
1.2 Planteamiento del problema.....	20
1.2.1 Descripción del problema .....	20
1.2.2 Formulación de la pregunta .....	24
1.3 Justificación.....	25
1.4 Objetivos .....	26
1.4.1 Objetivo General.....	26
1.4.2 Objetivos Específicos.....	26
<b>2. Marco referencial</b> .....	<b>27</b>
2.1 Referente Antecedentes.....	27
2.2 Referente teórico.....	35
2.2.1 Teoría del aprendizaje significativo.....	36
2.2.2 Enfoque en sistemas .....	38
2.3 Referente conceptual disciplinar.....	40
2.3.1 Funciones cuadráticas.....	40
2.3.2 Desarrollo del pensamiento variacional .....	42
2.3.3 Estándares curriculares de competencias.....	44
2.3.4 Derechos básicos de aprendizaje .....	44
2.4 Referente Legal.....	46
2.5 Referente espacial .....	47
<b>3. Diseño metodológico</b> .....	<b>50</b>
3.1 Enfoque investigativo .....	50
3.2 Método.....	52
3.3 Instrumento de recolección de información. ....	53
3.4 Población y muestra.....	54
3.5 Impacto esperado.....	54
3.6 Tabla de planificación de las actividades.....	55
3.7 Cronograma de actividades.....	56

<b>4. Diseño e implementación de la estrategia didáctica.....</b>	<b>59</b>
4.1 Diagnóstico .....	59
4.2 Diseño e implementación de la estrategia didáctica.....	64
4.2.1 Momento de aprendizaje por descubrimiento y de acercamiento a los sistemas concretos. ....	65
4.2.2 Momento de aprendizaje por descubrimiento, relacionado con los sistemas conceptuales.....	79
4.2.3 Momento de aprendizaje por recepción, relacionado con los sistemas simbólicos.....	85
4.2.4 Validación del impacto de la implementación de la estrategia didáctica. ....	91
<b>5. Conclusiones y recomendaciones .....</b>	<b>95</b>
5.1 Conclusiones .....	95
5.2 Recomendaciones .....	97
<b>A. Anexo: Cuestionario KPSI.....</b>	<b>98</b>
<b>B. Anexo: Evaluación diagnóstica inicial y final. ....</b>	<b>100</b>
<b>C. Anexo: Actividad 1. Activación de conocimientos previos. ....</b>	<b>103</b>
<b>D. Anexo: Actividad 2. Identificación de la función cuadrática a partir del registro tabular y la construcción de fórmulas.....</b>	<b>108</b>
<b>E. Anexo: Actividad 2. Segundo momento.....</b>	<b>110</b>
<b>F. Anexo: Actividad de momento de aprendizaje por recepción.....</b>	<b>115</b>
<b>G. Anexo: Consentimiento informado de participación en la investigación .....</b>	<b>119</b>
<b>Bibliografía .....</b>	<b>120</b>

## Lista de figuras

	Pág.
<b>Figura 1.</b> Resultados de pruebas ICFES de la institución educativa Joaquín Vallejo Arbeláez del 2021 .....	22
<b>Figura 2.</b> Resultados de pruebas ICFES de la institución educativa Joaquín Vallejo Arbeláez del 2021 .....	23
<b>Figura 3.</b> Relación entre el enfoque de sistemas y el aprendizaje significativo. Elaboración propia .....	40
<b>Figura 4.</b> Gráfica de una función cuadrática. (Elaboración propia).....	41
<b>Figura 5.</b> Núcleos conceptuales de la variación tomado y adaptado del MEN (1998) ....	43
<b>Figura 6.</b> Resultado del cuestionario KPSI implementado en el Grupo 1 .....	60
<b>Figura 7.</b> Resultado del cuestionario KPSI implementado en el Grupo 2 .....	61
<b>Figura 8.</b> Resultados de la prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes del grupo1 ...	62
<b>Figura 9.</b> Resultados de la prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes del grupo 2 ..	62
<b>Figura 10.</b> Respuesta de pregunta abierta de evaluación diagnostica. Estudiante grupo 1 .....	63
<b>Figura 11.</b> Respuesta de pregunta abierta de evaluación diagnostica. Estudiante grupo 2 .....	64
<b>Figura 12.</b> Registro tabular de estudiantes del grupo 1 en el ejercicio de saltar una cuerda. ....	67
<b>Figura 13.</b> Preguntas de análisis de estudiantes del grupo 1 en el ejercicio de saltar una cuerda. ....	68
<b>Figura 14.</b> Registros gráficos de los estudiantes del grupo 1 en el ejercicio de saltar una cuerda. ....	68
<b>Figura 15.</b> Registros de tablas de valores de los estudiantes del grupo 2 en el ejercicio de saltar una cuerda.....	68
<b>Figura 16.</b> Registros gráficos de los estudiantes del grupo 1 en el ejercicio de saltar una cuerda. ....	69
<b>Figura 17.</b> Registros gráficos de los estudiantes del grupo 2 en el ejercicio de saltar una cuerda. ....	69
<b>Figura 18.</b> Registros en tablas de valores de estudiantes del grupo 1 en el ejercicio de la secuencia de cuadritos.....	71
<b>Figura 19.</b> Registros pictóricos de estudiantes del grupo 1 en el ejercicio de la secuencia de cuadritos, realizado para saber la cantidad de cuadritos en cada posición. ....	72

<b>Figura 20.</b> Preguntas de análisis de estudiantes del grupo 1 en el ejercicio de la secuencia de cuadritos. ....	72
<b>Figura 21.</b> Registros en tablas de valores de estudiantes del grupo 2 en el ejercicio de la secuencia de cuadritos .....	73
<b>Figura 22.</b> Registros gráficos de tablas de valores de estudiantes del grupo 2 en el ejercicio de la secuencia de cuadritos. ....	73
<b>Figura 23.</b> Preguntas de análisis de estudiantes del grupo 2 en el ejercicio de la secuencia de cuadritos. ....	74
<b>Figura 24.</b> Representación de lanzamiento de objetos por estudiantes del grupo 1 .....	75
<b>Figura 25.</b> Representación de lanzamiento de objetos por estudiantes del grupo 2 .....	75
<b>Figura 26.</b> Algunas respuestas de las preguntas de análisis del grupo 1.....	76
<b>Figura 27.</b> Algunas respuestas de las preguntas de análisis del grupo 2.....	77
<b>Figura 28.</b> Gráficas de las funciones cuadráticas, realizadas en los cuadernos por un estudiante del grupo1.....	80
<b>Figura 29.</b> Respuestas de análisis de las representaciones gráficas de estudiantes de grupo 1 .....	81
<b>Figura 30.</b> Datos tabulados por estudiantes en aplicación GeoGebra .....	82
<b>Figura 31.</b> Modelos de regresión lineal y cuadrático encontrado por los estudiantes con ayuda de la aplicación GeoGebra. ....	83
<b>Figura 32.</b> Fórmulas encontradas por los estudiantes en la aplicación GeoGebra .....	83
<b>Figura 33.</b> Conclusiones a las que llegaron los estudiantes al finalizar el ejercicio en GeoGebra.....	84
<b>Figura 34.</b> Actividad de análisis y consulta final, elaborado por un estudiante.....	85
<b>Figura 35.</b> Registros de contenido simbólico, por parte de los estudiantes.....	86
<b>Figura 36.</b> Registros de contenido simbólico, por parte de los estudiantes.....	87
<b>Figura 37.</b> Registros de solución de actividad de contenido simbólico, por parte de los estudiantes .....	88
<b>Figura 38.</b> Registros de solución de actividad de contenido simbólico, por parte de los estudiantes .....	88
<b>Figura 39.</b> Registros de solución de actividad 4 de contenido simbólico, por parte de los estudiantes .....	89
<b>Figura 40.</b> Resultado de evaluación diagnóstica final e inicial grupo 1 .....	90
<b>Figura 41.</b> Resultados de evaluación diagnóstica final grupo 2. Elaboración propia.....	90
<b>Figura 42.</b> Resultados de KPSI final grupo 1. Elaboración propia .....	90
<b>Figura 43.</b> Resultados de KPSI final grupo 2. Elaboración propia .....	91

## Lista de tablas

	Pág.
<b>Tabla 1.</b> Estándares básicos de los grados octavo y noveno .....	44
<b>Tabla 2.</b> DBA de los grados octavo y noveno.....	45
<b>Tabla 3.</b> Planificación de las actividades .....	55
<b>Tabla 4.</b> Cronograma de actividades.....	57
<b>Tabla 5.</b> Matriz de comparación de resultados de actividad de conocimientos previos ..	66
<b>Tabla 6.</b> Matriz de comparación de resultados de actividad de secuencia de cuadritos.	70
<b>Tabla 7.</b> Matriz de comparación de resultados de actividad de lanzamiento de objetos.	74

# Introducción

En la búsqueda constante de mejorar las dinámicas de enseñanza de las matemáticas y potenciar el desarrollo cognitivo de los estudiantes, el presente trabajo de investigación se enfoca en la aplicación de una estrategia didáctica diseñada para fortalecer las habilidades de pensamiento variacional, particularmente en el contexto del lenguaje algebraico y su relación con el manejo de las funciones cuadráticas, vinculándolas con situaciones de modelación, variación y cambio. Esta investigación se llevó a cabo con estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Joaquín Vallejo Arbeláez y surge como un producto de la Maestría en Enseñanza de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia, con sede en Medellín.

El objetivo principal de este trabajo es diseñar una estrategia didáctica que contribuya al fortalecimiento del pensamiento variacional con ayuda de experimentos que se modelan con funciones cuadráticas. Como resultado de su implementación, se presentan los resultados obtenidos a lo largo de la investigación, destacando la efectividad de la estrategia en el fortalecimiento de las habilidades de pensamiento variacional y los aportes al desarrollo del pensamiento algebraico entre los estudiantes participantes. Además, se sistematiza el proceso de enseñanza y aprendizaje, ofreciendo una visión detallada de cómo se aplicó la estrategia y cómo impactó en el desempeño y comprensión de los estudiantes en relación con las funciones cuadráticas.

El fundamento de la propuesta de enseñanza, se basa en la necesidad de promover un aprendizaje significativo, donde los estudiantes no solo memoricen conceptos algebraicos o repitan procedimientos sin razón, sino que también sean capaces de comprender su aplicabilidad en situaciones cotidianas y, a su vez, desarrollen habilidades para comunicar sus ideas matemáticas, para modelar y resolver problemas relacionados con las funciones cuadráticas o de otro tipo de funciones. El desarrollo del trabajo se sustenta en la metodología de Investigación-Acción educativa con un enfoque cualitativo interpretativo, su base teórica se complementa con los principios de la Teoría de Aprendizaje Significativo propuesta por Ausubel (1983) y la propuesta para la enseñanza de las matemáticas, el enfoque de sistemas planteado por Vasco (1986).

Esta propuesta no está centrada en un análisis teórico de las funciones cuadráticas, sino que tiene un impacto directo en la práctica educativa, porque ofrece conclusiones y recomendaciones fundamentadas en la experiencia real de la implementación de una estrategia de enseñanza en el contexto de los estudiantes. A través de este trabajo, se pretende contribuir al enriquecimiento del proceso de aprendizaje de las matemáticas, promoviendo un enfoque más efectivo y significativo que beneficie a los estudiantes y a la comunidad educativa.

Los diferentes capítulos de este trabajo, están estructurados de la siguiente manera: Inicialmente se hace una descripción del problema y una delimitación del tema de investigación, se detallan los objetivos y la pregunta de investigación. Luego se abordan el marco teórico y disciplinar que incluye el aprendizaje significativo, el enfoque de sistemas, y algunos aspectos de la enseñanza de las funciones cuadráticas desde el área de las matemáticas, que respaldan la importancia de este estudio. Seguidamente, se plantean los alcances y limitaciones de la investigación, la metodología empleada y se resalta el significado que tiene

este estudio en el campo de la enseñanza de las ciencias exactas, así como su aplicación específica en el área de las matemáticas y el álgebra. Finalmente, en el último capítulo, se realiza la sistematización de la estrategia didáctica, con un análisis detallado de sus fases, resultados, validación e impacto de la estrategia, cerrando con las conclusiones y las recomendaciones.

## **Capítulo 1. Aspectos preliminares**

### **1.1 Selección y delimitación del tema**

La presente investigación surge por la necesidad de mejorar los aprendizajes de los estudiantes de la Institución educativa Joaquín Vallejo Arbeláez (IEJVA) en el área de matemáticas, por medio del diseño de una estrategia didáctica, basada en el enfoque en sistemas propuesto por Vasco (1986), que permita fortalecer el desarrollo del pensamiento variacional, la realización de operaciones complejas en las que se pueda usar el lenguaje algebraico, la modelación de situaciones simples y cotidianas, o situaciones de variación que requieran un lenguaje simbólico.

Por los hechos mencionados anteriormente, el tema del presente proyecto de profundización será:

La enseñanza de las funciones cuadráticas para contribuir con el desarrollo del pensamiento variacional, a partir del planteamiento y resolución de problemas de la vida cotidiana y situaciones experimentales de otras ciencias.

### **1.2 Planteamiento del problema**

#### **1.2.1 Descripción del problema**

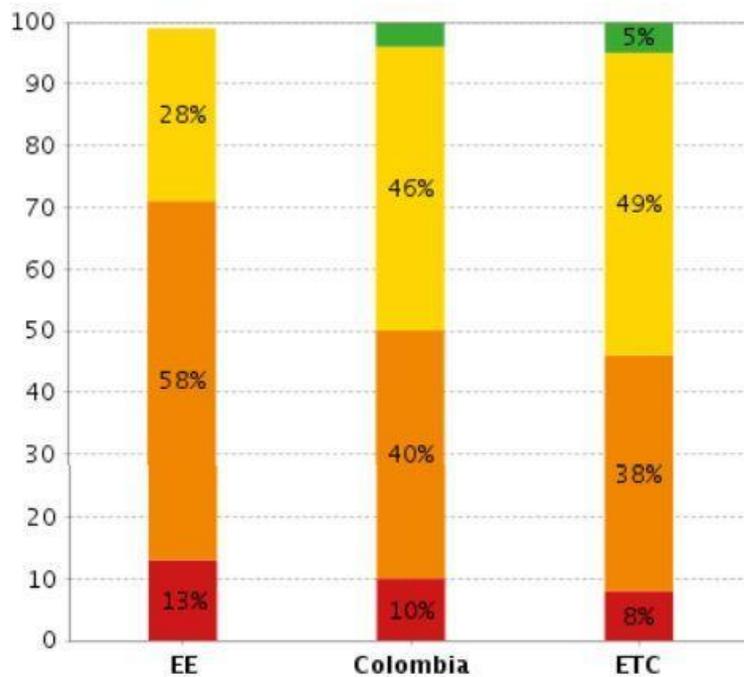
Los resultados obtenidos en las pruebas saber de matemáticas de la IEJVA, del año 2021, evidencian que el 71% de los evaluados se encuentran en niveles de desempeño 1 y 2 (véase Figura 1), es decir que obtuvieron puntajes entre 0 y 50

puntos, siendo bajos comparados con instituciones con niveles académicos similares y por debajo de la media nacional. Esto indica que los evaluados comparan datos de dos variables, sin necesidad de hacer operaciones aritméticas, identifican valores o puntos representativos en diferentes tipos, pero no logran aspectos más profundos del pensamiento matemático como lo son la realización de operaciones complejas, la modelación de situaciones usando el lenguaje algebraico, así como la manipulación de expresiones y la modelación de situaciones de variación por medio del lenguaje simbólico.

Dichos resultados revelan que las acciones de los estudiantes en la articulación de varios procesos y competencias del pensamiento matemático, no los llevan a la comprensión de las situaciones problema planteados, manipularlos, solucionarlos o llevar a cabo estrategias que les permitan justificar o argumentar sus procedimientos.

En la Figura 1, se puede observar un comparativo de los resultados del establecimiento educativo (EE), la entidad territorial (ETC) y Colombia, del que podemos inferir que la mayoría de estudiantes evaluados del EE, se ubican en los niveles 1 y 2 representado con los colores rojo y naranja, y solo un 28% de los evaluados alcanzó un nivel 3 que se logra apreciar representado con el color amarillo.

**Figura 1.** Resultados de pruebas ICFES de la institución educativa Joaquín Vallejo Arbeláez del 2021



Acorde con las competencias evaluadas, la interpretación, la representación, la formulación, ejecución de procedimientos y la argumentación; se reconoce la necesidad de hacer una reestructuración y un trabajo fuerte por los docentes del área de matemáticas en la IEJVA, enfocado en el desarrollo de estas competencias esenciales y que ello permita, que los estudiantes respondan de forma más efectiva a los aspectos evaluados en las pruebas internas y externas categorizadas en estadística, álgebra, cálculo y geometría, así como mejorar los desempeños obtenidos descritos en la Figura 2.

**Figura 2.** Resultados de pruebas ICFES de la institución educativa Joaquín Vallejo Arbeláez del 2021

Aprendizaje	EE	Colombia	ETC
Comprende y transforma la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos.	38%	31%	30%
Frente a un problema que involucre información cuantitativa, plantea e implementa estrategias que lleven a soluciones adecuadas.	60%	52%	50%
Valida procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas.	56%	49%	47%

Por otra parte, en el día de la excelencia educativa (día E) del año 2022, se realizó una revisión de las competencias trabajadas en el año 2021, con el fin de reconocer las necesidades de aprendizaje de los estudiantes, hacer una valoración del nivel de desarrollo de las mismas, priorizar aquellas que es necesario tener en cuenta en la planeación curricular del año 2022 y hacerles seguimiento en pro del mejoramiento continuo. En este ejercicio se identificó que la mayoría de aprendizajes evaluados lograron un desempeño bajo, es decir que se trabajaron los aspectos mínimos de cada uno sin lograr niveles de profundización, esto debido a las diferentes dinámicas del ambiente social de los estudiantes del sector y a las dinámicas de la alternancia educativa por motivo de la postpandemia; es decir, algunos estudiantes asistían al colegio de manera presencial y otros tenían trabajo virtual.

Acorde con la estructura de los aprendizajes evaluados por el ICFES en el 2021, se reconoce la importancia de fortalecer el desarrollo del pensamiento matemático y los procesos matemáticos como lo son el pensamiento variacional, los sistemas algebraicos y analíticos, así como la modelación para que los educandos estén en la capacidad de encontrar relaciones entre los aprendizajes matemáticos evaluados y el conocimiento adquirido.

El pensamiento variacional se ha trabajado al interior de las aulas de clase, tradicionalmente, desde un aprendizaje basado en la memorización y repetición de

procedimientos. Cuando se aborda el tema de funciones cuadráticas, se explica su definición por medio de ejemplos, se reconoce su expresión algebraica, se registran sus valores evaluados en tablas, se dibujan o se trazan gráficas cartesianas con o sin ayuda de recursos tecnológicos, y en muchas ocasiones se dejan de lado, situaciones de variación y cambio, en la que los estudiantes puedan reconocer las relaciones entre las variables, o la forma como estas interactúan en una situación específica.

Por otro lado, se ha identificado que no se logra una conceptualización en competencias básicas necesarias para llegar a un trabajo más significativo con el pensamiento variacional, porque su enseñanza no ha dado respuesta a las necesidades del contexto. Se reconocen dificultades, en la comprensión del lenguaje algebraico, especialmente en pasar información de un lenguaje cotidiano a un lenguaje algebraico, en resolución de operaciones básicas con expresiones algebraicas, como encontrar el valor numérico de una expresión, realizar expresiones equivalentes a una expresión algebraica dada, y solucionar problemas algebraicos por sí solos, siempre hay una dependencia del docente reflejando una falta de autonomía y apropiación por parte de los estudiantes y una necesidad de aprender desde otros enfoques de enseñanza.

Cada uno de los hechos mencionados, reafirma la necesidad de diseñar una estrategia didáctica orientada en el desarrollo del pensamiento variacional, por medio de actividades experimentales que se puedan modelar matemáticamente, que posibiliten la recolección, el análisis de la información, el reconocimiento de patrones, el uso del cálculo, el manejo de expresiones algebraicas, y que a la vez contribuya con el mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes específicamente en la apropiación de las funciones cuadráticas.

### **1.2.2 Formulación de la pregunta**

Tomando como referencia lo expuesto anteriormente en la problemática, se plantea la siguiente pregunta de investigación.

¿Qué estrategias didácticas permiten adquirir un aprendizaje significativo de las funciones cuadráticas y fortalecer el pensamiento variacional?

### **1.3 Justificación**

La presente investigación surge por la necesidad de mejorar los aprendizajes de los estudiantes en torno al desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos, específicamente en el trabajo con funciones cuadráticas desde sus diferentes representaciones. Se pretende crear, implementar y evaluar una estrategia de enseñanza, por medio de situaciones de la vida cotidiana, así como experimentos de otras ciencias, que permitan llegar a la modelación matemática, con la intención de motivar a los educandos a la comprensión de conceptos, así como la generación de aprendizajes significativos.

Otro aspecto que motiva la investigación es la necesidad de aportar estrategias y recursos de enseñanza, que puedan ser aplicadas en otros grados de la educación básica y media de la institución educativa Joaquín Vallejo Arbeláez o de otras instituciones; que sirva para orientar el aprendizaje de las funciones cuadráticas, respondiendo a los ritmos de aprendizaje de los estudiantes, a las necesidades del contexto y que se logre favorecer el desarrollo de competencias esenciales a la hora de solucionar problemas, reconocer situaciones de variación, cambio; favoreciendo así su representación, interpretación, generalización y modelación.

Por otro lado, la estrategia a desarrollar, si es replicada en los diferentes niveles educativos, puede influir en el mejoramiento de los desempeños de los estudiantes tanto en pruebas internas como externas y una mayor participación en las actividades propuestas por el docente, así como una mejor disposición y apropiación por su proceso de aprendizaje.

## **1.4 Objetivos**

### **1.4.1 Objetivo General**

Diseñar una estrategia didáctica que contribuya al fortalecimiento del pensamiento variacional con ayuda de experimentos que se modelan con funciones cuadráticas.

### **1.4.2 Objetivos Específicos**

- Diagnosticar conocimientos previos de los estudiantes, relacionados con la función cuadrática, desde el pensamiento variacional.
- Implementar una estrategia didáctica e identificar la apropiación del pensamiento variacional cuando los estudiantes experimentan con situaciones de modelación.
- Valorar los resultados obtenidos en la implementación de la estrategia didáctica.

## **2. Marco referencial**

En este capítulo, se presenta el marco referencial, iniciando con los antecedentes, los sustentos teóricos; seguidamente con los marcos disciplinar, legal y espacial que orientan la investigación.

### **2.1 Referente Antecedentes**

La enseñanza de las funciones cuadráticas que se abordan actualmente en las aulas de clase, está enmarcada dentro del pensamiento variacional y sistemas algebraicos, descrito en los Lineamientos curriculares de matemáticas (1998), los Estándares básicos de competencias (2006) y otros textos como los Derechos Básicos de Aprendizaje (2015); en estos, se dan orientaciones de las competencias que se deben desarrollar en cada ciclo de la educación básica y media en Colombia, y cada docente las acoge dentro de su planeación curricular, para alcanzar las metas de aprendizaje en cada nivel educativo.

Las últimas investigaciones en torno a la enseñanza de las funciones cuadráticas y el desarrollo del pensamiento variacional han apuntado a la incorporación de nuevas tecnologías, uso de hojas de cálculo, aplicaciones como GeoGebra, calculadoras graficadoras entre otras para fortalecer el desarrollo de competencias matemáticas, así como la modelación de situaciones matemáticas y de otras ciencias. También, se ha enfatizado en situaciones en las que el estudiante se acerca al lenguaje algebraico con la ayuda de material didáctico concreto y diferentes representaciones de una función verbal, tabular, o gráfica que los lleva a una mayor apropiación del conocimiento matemático y a la generalización.

**A nivel internacional se reconocen las siguientes investigaciones:**

Rivera (2009) investigó cómo el empleo de computadoras influye en la comprensión de la función cuadrática en un entorno digital. En su estudio, analizó los procesos cognitivos de estudiantes de secundaria al utilizar la herramienta GRAPES. Los resultados revelaron que los estudiantes lograron visualizar aspectos de la parábola que no eran evidentes al realizar cálculos manuales, pero algunos se enfocaron tanto en los resultados automáticos que descuidaron los procedimientos matemáticos.

Según los autores, el uso de la tecnología puede convertirse en un obstáculo para el aprendizaje cuando los estudiantes no aplican fórmulas o procedimientos para validar sus hallazgos. Además, se observó que tenían dificultades para establecer conexiones entre la representación tabular y gráfica, ya que la simple disposición de puntos les dificultaba determinar el tipo de función, lo que causó confusión entre ellos.

Desde el punto de vista de la modelación y el uso de experimentos que involucran las funciones cuadráticas, Huapaya (2012) desarrolla una propuesta de enseñanza en la que por medio de las aplicaciones FUNCIONSWIN32 y la hoja de cálculo EXCEL, los estudiantes realizan prácticas que los acerca al reconocimiento de distintas formas de representación de una función cuadrática. Acorde con los resultados obtenidos, se reconoce que conceptualmente “el estudiante fue capaz de asociar al objeto función cuadrática, dos o más representaciones y transitar entre ellas durante las prácticas de modelación.” (Huapaya 2012, p.125).

Esa propuesta de investigación, basada en experimentos de modelación, permitió que los estudiantes articularan conceptos, encontraran relaciones entre los registros, así como múltiples representaciones, lo que puede influir de acuerdo a los autores, en el aprendizaje y en los procesos de modelación; siempre y cuando las actividades o situaciones propuestas a los estudiantes sean bien elegidas.

Frente al uso de software como GeoGebra, Esquer (2015), la reconoce como una herramienta útil que permite tener diferentes representaciones del objeto matemático, gráfico, tabular, algebraica y posibilita la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes. La investigación de Esquer se fundamentó en los aportes de otro investigador (Raymond Duval) sobre las representaciones semióticas, porque estas juegan un papel muy importante en los procesos de enseñanza, aprendizaje y en la construcción de significados por parte de los estudiantes.

En la propuesta de Esquer (2015), se desarrollaron cuatro actividades, en la que los estudiantes tuvieron la posibilidad de reconocer los parámetros de una función cuadrática y resolver situaciones extra matemáticas, vinculándolas con el uso de la aplicación GeoGebra, permitiendo que los participantes se acercaran a modelar, resolver problemas, reconocer diferentes registros de representación. Todo esto permitió la construcción conceptual y el aprendizaje del objeto de estudio.

Por otro lado, Irigoyen (2012) en su investigación titulada “Resolución de problemas de funciones y gráficas por estudiantes de 3º de E.S.O.” hace un análisis del contenido de las funciones cuadráticas, estructurado en libros de texto y su coherencia entorno a los requerimientos mínimos del currículo oficial, también realiza un análisis didáctico de la resolución de problemas de funciones cuadráticas por parte de los estudiantes.

Dentro del trabajo realizado por Irigoyen (2012) se concluye que las estrategias curriculares propuestas y adaptadas en los libros de texto, no funcionan, dado que forma a los estudiantes para que aprendan herramientas matemáticas útiles para resolver problemas que en muchos casos no saben usar, también se reconoce que el contenido propuesto es muy extenso y que no logra abordarse en su totalidad, dadas las condiciones y limitantes de tiempo presentes en los periodos académicos, y en muchas ocasiones se omiten otros contenidos curriculares como por ejemplo, los de estadística, por darle prioridad a otros que se consideran más

importantes, haciendo que la brecha en estos aprendizajes sea cada vez más grande.

Otra investigación de Quesada y Solís (2006) titulada, “sitio web: funciones cuadráticas una experiencia de desarrollo, implementación y evaluación”, propone una experiencia informática en la ciudad de Costa Rica, para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las funciones cuadráticas ya que presenta serias dificultades de acuerdo con las estadísticas registradas del ministerio de educación que muestran altas cifras de fracaso escolar en aspectos evaluados relacionados con esta temática.

En esta investigación los autores reconocen que estas dificultades cognoscitivas y metodológicas, tanto para docentes como para estudiantes en la educación media superior requieren de atención, para ello desarrollan un sitio Web con múltiples recursos multimedia para aprender de forma dinámica y autónoma. El sitio Web es un recurso que apoyó el proceso de enseñanza y aprendizaje con un enfoque conductista y constructivista, permitió que tanto docentes como estudiantes tuvieran a su disposición un interactivo, donde encontraban información, respondían preguntas, validaban sus respuestas y los acercaba a la construcción del conocimiento.

### **En el ámbito nacional se identifican las siguientes investigaciones:**

Tuirán (2015), en su investigación titulada “Estudiando las funciones polinómicas con el software educativo GeoGebra” reconoce el uso del programa computacional para favorecer la comprensión de las funciones polinómicas desde diferentes representaciones, por medio de la modelación de situaciones de su contexto y desde este punto estimular el desarrollo del pensamiento variacional.

El autor identificó que fue posible potencializar el pensamiento variacional ya que los estudiantes lograron avanzar en otros aspectos como la abstracción, la

generalización, la modelación, sin embargo, tuvieron dificultades al momento de relacionar algunas representaciones de la función cuadrática, llegando a la conclusión de que es necesario dedicar más tiempo a ello.

En esta misma línea, Molina (2019) realiza un proyecto escolar, con una situación del contexto cotidiano, que es el manejo de residuos, con la intención de acercar a los estudiantes al desarrollo conceptual de las funciones cuadráticas. Además, estructura una transversalización con otras áreas del conocimiento, teniendo en cuenta la metodología de aprendizaje basado en proyectos (ABP), con el propósito de desarrollar conocimientos y habilidades que acerquen a los educandos a un aprendizaje más significativo.

El uso del software GeoGebra, permitió que los estudiantes se familiarizaran con una herramienta tecnológica novedosa, práctica para hacer representación y manipulación de objetos matemáticos. Esta herramienta generó un ambiente de aprendizaje que los motivó y llevó a que reconocieran, visualizaran y manipularan la gráfica de la función cuadrática, los diferentes registros de representación (tabular, gráfico y algebraico); también, permitió que resolvieran cada una de las actividades asignadas en la investigación acercándolos a la construcción y comprensión del concepto.

En esta investigación, Molina (2019) reconoce que las actividades didácticas que se propusieron como por ejemplo la construcción de la compostera y los cuestionarios o preguntas orientadoras propuestas, condujo a los estudiantes al análisis e interpretación de los cambios en las variables, los acercó a la realización de registros gráficos, al reconocimiento de los elementos de la parábola, y a la identificación de sus valores máximos y mínimos de cada situación propuesta.

Otra investigación desarrollada en la línea del pensamiento variacional, es la realizada por Henao y Vanegas (2013), quienes diseñaron una metodología basada en un enfoque variacional para enseñar funciones cuadráticas. Su propuesta incluyó tres tareas que involucraron procesos de modelación en el marco

de la Educación Matemática Realista (EMR). Esta metodología se alineó con la recomendación del Ministerio de Educación Nacional (MEN) de fomentar la resolución de problemas y la modelación de situaciones del mundo real para comprender la función cuadrática en su papel en la representación de fenómenos físicos. El objetivo era conectar de manera más efectiva el mundo matemático con el mundo real.

Los autores destacaron la eficacia del marco teórico de la EMR para promover la modelación y evaluar el progreso de los estudiantes en la realización de las tareas. Además, subrayaron la importancia de presentar situaciones contextualizadas que faciliten la comprensión de los conceptos matemáticos utilizados, lo que puede dar lugar a nuevas estrategias de enseñanza en el aula.

Otra investigación en la línea del pensamiento variacional, la desarrolló, Villa (2012), quién investigó el razonamiento covariacional con situaciones que involucran funciones cuadráticas. Basado en el marco conceptual de Carlson y otros (2003), enfatizó la importancia de comprender, percibir e identificar la variación en diferentes contextos para el desarrollo del pensamiento variacional en matemáticas.

Villa diseñó actividades y aplicó una triangulación de fuentes de información para su investigación llevándolo a concluir que el razonamiento covariacional no se desarrolla de manera lineal, sino de una manera recursiva. También se observó, que algunos estudiantes pueden comprender aspectos variacionales sin necesidad de estudios previos de cálculo y que promover diferentes representaciones y actividades experimentales es crucial. Además, el enfoque variacional en el estudio de funciones cuadráticas resulta más significativo que la enseñanza tradicional, en la que se hace énfasis en sus definiciones, propiedades, procedimientos y aplicaciones.

En esta misma línea, Insuasty (2004) examinó aspectos relacionados con el análisis de funciones, poniendo un énfasis particular en la comprensión y manejo del concepto de parámetro y de las familias de funciones cuadráticas. En su trabajo, señala que, en la enseñanza escolar, el enfoque tradicional en el estudio de funciones se ha centrado en la recopilación de datos, la representación gráfica en un plano cartesiano y la expresión analítica, pasando por alto procesos más sofisticados y relaciones abstractas asociadas con este concepto matemático. Como conclusión, destaca la importancia de reconocer e interpretar cada una de las representaciones de las funciones (tabulares, analíticas, gráficas y verbales) y establecer relaciones con diversos niveles de complejidad entre ellas.

### **En la ciudad de Medellín se reconocen las siguientes investigaciones:**

Desde la perspectiva variacional en el estudio de las funciones, Posada y Villa (2006) desarrollaron una investigación basada en la función lineal en la que observaron que varios estudiantes de nivel escolar, enfrentaron dificultades en la comprensión de la representación gráfica de la variación característica de las funciones lineales, por ello enfatizaron en el reconocimiento de la función lineal como modelo matemático, y en otras formas de representación que relaciona el registro natural, con el simbólico, la razón de cambio constante, la descripción de fenómenos y la solución de problemas de una manera estructurada.

En este contexto, la comprensión de la variación y la covariación debe ser posible no solo en el registro gráfico, sino en todas las formas de representación asociadas a una función en una situación dada. Aquí se destaca la importancia de reconocer las funciones en diferentes registros, así como sus relaciones.

En la línea de investigaciones enfocadas en las funciones cuadráticas, Villada (2013), en la investigación titulada “Diseño e implementación de curso virtual como herramienta didáctica para la enseñanza de las funciones cuadráticas para el grado noveno en la institución educativa Gabriel García Márquez utilizando Moodle”,

detalla que los estudiantes tienen dificultades en el trabajo con funciones cuadráticas, específicamente con el manejo de la factorización, la construcción de gráficas, análisis de las mismas y el planteamiento de ecuaciones.

En esta propuesta pedagógica, Villada (2013) implementó la plataforma Moodle con la intención de generar espacios de aprendizaje que permitan complementar las actividades de clase y los procesos evaluativos de los estudiantes, así como fortalecer sus conocimientos en relación con las funciones cuadráticas, por medio de situaciones problema que despertaran interés y autonomía, contribuyendo a mejorar los índices de fracaso escolar y una mayor eficiencia en el aprendizaje científico.

En la ejecución de la propuesta, se identificaron varios aspectos a tener en cuenta cuando se usan plataformas como la seleccionada. Se reconoce que los estudiantes encuentran algunos distractores como el uso de las redes sociales mientras realizan las actividades, pero se observó que se despertó su interés y mostraron una buena disposición en las clases, por ello se recomienda el uso de material audiovisual y nuevas tecnologías, para lograr una formación de estudiantes con altas capacidades.

Frente a la resolución de problemas que involucran el uso de las funciones cuadráticas, se evidenció que no han sido eficientes para los estudiantes, sin embargo, pudieron reconocer sus fortalezas y los acercó a ser más críticos y analíticos al momento de enfrentarse a situaciones matemáticas. En este sentido, se llega a que es necesario ser constante en su utilización al interior de las aulas de clase para poder lograr una transformación en los aprendizajes.

Amaya (2019) en su investigación “Los sistemas de representación semiótica en la enseñanza de funciones polinómicas de segundo grado en la Institución Educativa Javiera Londoño” reconoce la importancia de trabajar situaciones de variación y cambio cercanas a los estudiantes para que su enseñanza cobre sentido, para ello

selecciona funciones de segundo grado por su importancia en las matemáticas, porque a diferencia de la función lineal, no cuenta con muchas investigaciones y aparece en diversos contextos. Se identifica un énfasis en el trabajo de las representaciones semióticas del estudiante, ya que estas permiten que piense en un objeto matemático, lo comprenda, y comunique ideas que construye a partir de situaciones cotidianas, vinculadas con la variación y el cambio.

En esta investigación, pretendía que los estudiantes se enfrentaran a diferentes formas de representación de las funciones cuadráticas, como lo es el registro tabular, algebraico, el lenguaje natural, el icónico y el gráfico, con la intención de propiciar el reconocimiento de varios tipos de registros de representación Semiótica. En esta intervención, se logró observar que los estudiantes presentaron dificultades para hacer conversiones de los diferentes sistemas de representación, hacia lo algebraico y cuando había errores en algún procedimiento no hacían análisis coherentes o revisión de sus procesos, para identificar lo que no les permitía llegar a una respuesta correcta.

Cada una de estas investigaciones, muestran que la enseñanza de las funciones cuadráticas ha estado enmarcada en la incorporación de nuevas tecnologías y enfoques pedagógicos, que buscan mejorar la comprensión y el aprendizaje, para que tanto docentes como estudiantes puedan dominar este tema tan crucial en la enseñanza de las matemáticas.

Siguiendo en esta línea de investigaciones, se reconoce la importancia de llevar al aula estrategias didácticas para que los estudiantes desarrollen o potencien habilidades esenciales del pensamiento variacional, crítico y analítico, para que establezcan conexiones con otros conceptos matemáticos que son esenciales para que estén preparados para acercarse a temas más avanzados.

## **2.2 Referente teórico**

### **2.2.1 Teoría del aprendizaje significativo.**

Desde el punto de vista pedagógico el presente trabajo de profundización se centra en las ideas de Ausubel, relacionadas con el aprendizaje significativo (en adelante AS) y el principio de asimilación, en las que se plantea que todo individuo tiene una estructura cognitiva, a través de la cual logra comprender un conocimiento nuevo que se pretende enseñar. En este proceso pueden surgir modificaciones y evoluciones en lo que el estudiante sabe, logrando en este sentido un AS. “Como estructura cognitiva entendemos al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización”. (Ausubel, 1983, p.1).

El AS no se da de forma inmediata, arbitraria o por simples explicaciones repetitivas del docente, sino que el estudiante, por medio de la interacción que tiene con un conocimiento preexistente, es decir que adquirió en algún momento de su vida, puede encontrar relaciones entre su base cognitiva, y realizar asociaciones que lo acercan a la adquisición de significados con lo enseñado.

De acuerdo con Ausubel (1983), el AS ocurre cuando la nueva información está conectada a conceptos preexistentes ("subsunsor") en la estructura cognitiva del estudiante, esto significa que las nuevas ideas, conceptos y proposiciones, pueden aprenderse sustancialmente a partir, de otras ideas o conceptos relacionados, que deben estar claramente disponibles en la estructura cognitiva del individuo, para que funcionen como un "ancla" para el aprendizaje nuevo.

En la teoría del AS el docente tiene la facultad de reconocer la estructura cognitiva de los educandos, para orientar los procesos de enseñanza y posibilitar que por medio de un trabajo individual o un trabajo con otros, logre que esos conocimientos que en algún momento asimiló, sean una base para una mejor adquisición de otros de orden superior. Acorde con lo planteado se reconoce lo siguiente:

En el proceso de orientación del aprendizaje, es de vital importancia conocer la estructura cognitiva del alumno; no sólo se trata de saber la cantidad de información que posee, sino cuales son los conceptos y proposiciones que maneja, así como de su grado de estabilidad. (Ausubel, 1983, p.1).

Lo mencionado anteriormente, significa que hay que tener en cuenta los conocimientos, la experiencia previa de los estudiantes, y los llamados subsunsores para llevar a cabo un proceso de enseñanza, por ello es fundamental reconocer que el hombre ha adquirido un conjunto de conocimiento que en algún momento asimilo y logró combinarlo con otros que han permitido el anclaje a su estructura cognitiva.

Acorde con lo expuesto, dentro de los tipos de AS se encuentran el aprendizaje por descubrimiento y por recepción. En el primero, se reconoce la importancia de que el estudiante sea quien reconstruya determinado conocimiento, antes de ser parte de su estructura cognitiva, es decir que como educadores no le damos por terminado o de forma inmediata una proposición, ecuación, una definición o un concepto específico, sino que más bien permitimos que el estudiante sea quien se dé cuenta, o que lo descubra, a partir de un proceso de interacción con diferentes actividades o dinámicas.

De modo contrario, en el aprendizaje por recepción “el contenido o motivo de aprendizaje se presenta al alumno en su forma final, sólo se le exige que internalice o incorpore el material (leyes, un poema, un teorema de geometría, etc.), que se le presenta de tal modo que pueda recuperarlo o reproducirlo en un momento posterior” (Ausubel, 1983, p.3). Este tipo de aprendizaje puede llegar a ser significativo, si se relaciona o interactúa con los subsunsores, con la experiencia o aprendizajes previos del estudiante.

### **2.2.2 Enfoque en sistemas**

Las renovaciones curriculares realizadas en Colombia, han traído orientaciones para la elaboración de proyectos educativos de las instituciones oficiales y no oficiales del país, sus enfoques pedagógicos, así como la construcción de planes de área, mallas curriculares, entre otras estrategias que guían a los establecimientos y a los docentes en su quehacer.

Carlos Eduardo Vasco, quién perteneció a la comisión de sabios de Colombia en 1993, fue convocado para la formulación de políticas relacionadas con la innovación, la ciencia y la educación. En el año 1984 propuso el enfoque en sistema (ES), como una estrategia para recuperar la forma en cómo la humanidad ha adquirido las matemáticas. Dicho ES, no fue acogido por el movimiento de docentes de la época, y tuvo poca relevancia e impacto en los programas institucionales. En esta propuesta se describen tres fases, en las que se rescata la importancia de llevar a cabo procesos de enseñanza, donde el individuo tenga la capacidad de poner en juego lo que sabe, es decir sus conocimientos previos, como punto de partida, para construir determinado concepto matemático, que le permita llegar a una representación simbólica, que puede encontrar con las explicaciones del docente, en libros de texto y otras fuentes de consulta.

Acorde con Vasco (1986), el enfoque sistémico permite conocer las diferentes ramas de la matemática como una totalidad estructurada, con sus elementos, operaciones y sus relaciones. Para incluir esta perspectiva en un currículo, propone tres fases o momentos que deben ser tenidos en cuenta a la hora de llevar a cabo un proceso de enseñanza al interior del aula de clase:

- **Sistemas concretos o pre matemáticos:** Son el punto de partida que permite explorar lo que saben los niños.

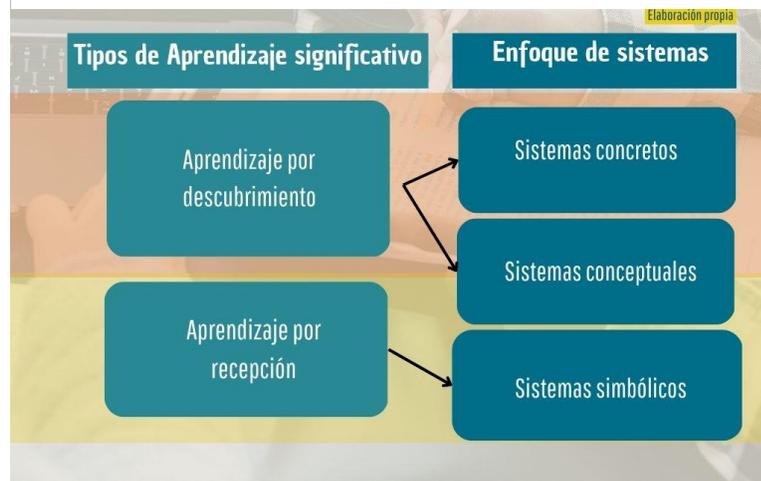
- Sistema conceptual: Es aquel que se piensa, se construye, se elabora mentalmente.
- Sistemas simbólicos: Son los signos, los números pintados, gráficos, palabras, figuras, símbolos, lo ofrecen también los libros, los tableros, los cuadernos, y hasta los profesores.

La tarea del docente en esta propuesta es la de plantear situaciones que tengan aplicaciones concretas, reales y cercanas a los estudiantes, para que tengan la oportunidad de llegar a la comprensión de conceptos sin necesidad de que sea el educador precisamente quien les diga lo que debe hacer, es una estrategia para explorar las múltiples formas o métodos usados por los estudiantes para resolver los problemas planteados y que han aprendido en la casa, en la escuela o en otros espacios en los que socializan. “En el enfoque en sistemas, se resalta la manera como los niños (y la humanidad) han construido las matemáticas en toda su variedad y riqueza”. (Vasco, 1986, p. 51).

El enfoque en mención, posibilita que los estudiantes logren una mayor comprensión de las funciones cuadráticas, ya que se pueden abordar desde sus diferentes representaciones, o relaciones. Acorde con Vasco, en el enfoque de sistemas, se trata de acercarse a las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos, con un enfoque sistémico que los comprenda como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones Vasco, (1986, p.49).

En la Figura 3, se muestran las relaciones entre el ES y el AS, que van a guiar la estructuración de la estrategia didáctica de la propuesta de investigación.

**Figura 3.** Relación entre el enfoque de sistemas y el aprendizaje significativo. Elaboración propia



## 2.3 Referente conceptual disciplinar.

### 2.3.1 Funciones cuadráticas

Las funciones cuadráticas o polinomios de grado dos, se representan por medio de una expresión de la forma:  $f(x) = ax^2 + bx + c$  con los valores de  $a, b, c$  números reales llamados coeficientes, donde  $a$  es un valor diferente de 0. La ecuación  $f(x) = 0$  se puede resolver empleando la factorización o por medio de la fórmula general  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  que permite solucionar cualquier tipo de ecuación cuadrática. Para implementar esta última, es importante identificar en la ecuación a solucionar, los valores de  $a, b$  y  $c$ , luego sustituirlos en la fórmula.

El valor  $b^2 - 4ac$  recibe el nombre de discriminante de la ecuación cuadrática y permite identificar la naturaleza de las raíces o soluciones que esta tiene, esto se puede reconocer de la siguiente manera: cuando su resultado es un valor mayor que cero, entonces tiene dos raíces o soluciones distintas, si es igual a cero

entonces tiene dos soluciones iguales y por último, si es menor que cero, es porque tiene dos raíces complejas.

También existen otras formas de representar una función cuadrática, reemplazando  $f(x)$  por la  $y$ , presentándose los siguientes casos:

$$y = ax^2 + bx + c$$

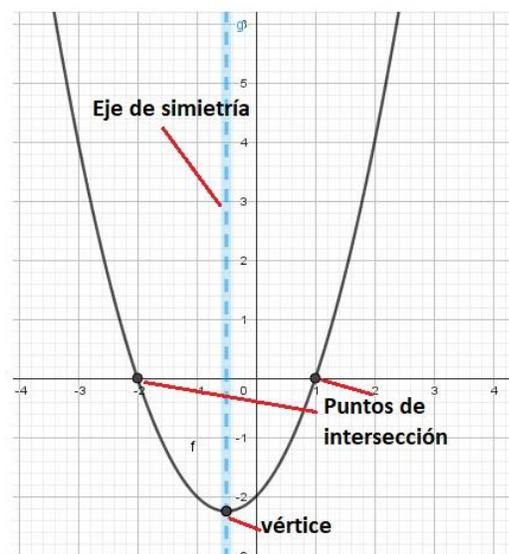
$$y = ax^2 + bx, \text{ donde el valor de } c = 0$$

$$y = ax^2 + c, \text{ donde el valor de } b = 0$$

$$y = ax^2, \text{ donde } b \text{ y } c \text{ son iguales a cero}$$

Una función cuadrática, también se puede representar por medio de su gráfica, conocida con el nombre de parábola.

**Figura 4.** Gráfica de una función cuadrática. (Elaboración propia)



Con la representación gráfica de una función cuadrática, se pueden describir y representar el movimiento, la trayectoria de objetos, como balones, proyectiles,

la caída libre de un objeto, problemas de optimización, inclusive situaciones particulares de algunas áreas como la física, la biología, el deporte, entre otras.

### **2.3.2 Desarrollo del pensamiento variacional**

La formación matemática en Colombia debe enfocarse en el desarrollo de competencias que permitan razonar, argumentar, encontrar modelos, hacer representación, entre otras; así como contribuir a la comprensión de un conocimiento que ha sido socialmente construido, que cuando está circulando en el aula de clase debe llegar de una manera útil, práctica, permitiendo que los individuos vean su relevancia y logren encontrar relaciones con su cotidianidad, que puedan apropiarse de prácticas y saberes que les permiten comprender y solucionar situaciones problema, no solo de las matemáticas mismas si no de otras áreas como las ciencias, la tecnología entre otras, que requieren de un conocimiento matemático para estructurarse.

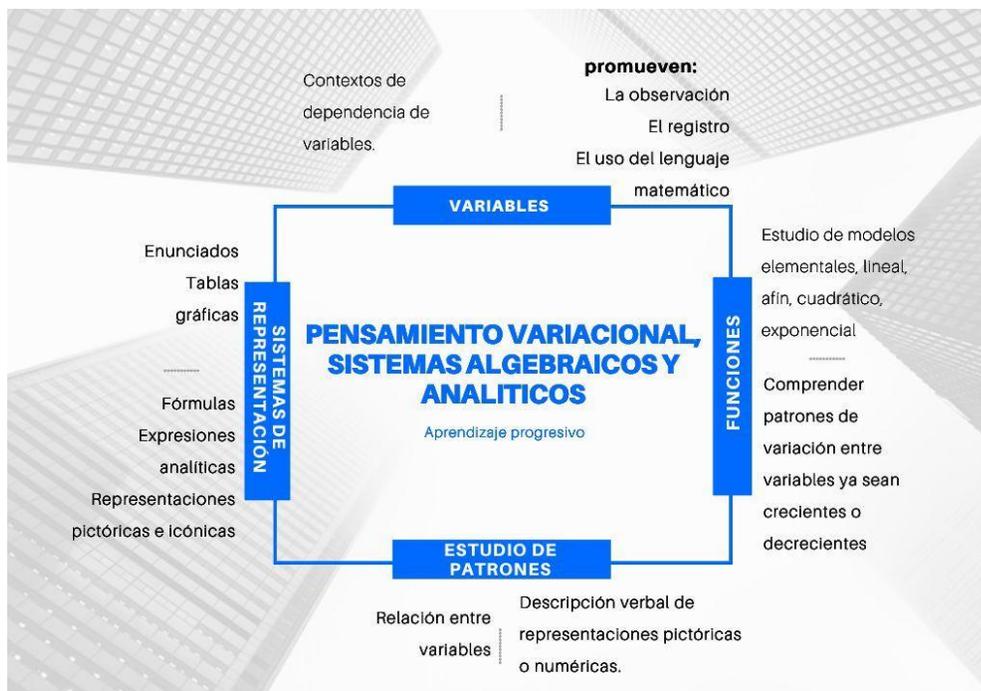
Desde los estándares curriculares, se reconoce la importancia del desarrollo de competencias matemáticas que se aleja de la enseñanza tradicional, que hoy en día se sigue impartiendo con enfoques conductistas, que favorecen la memoria, la repetición, y lleva a los aprendices a retener contenidos por tiempos limitados y a la poca adquisición de herramientas útiles que les permita enfrentarse a situaciones cotidianas, nuevas y desafiantes en las que tengan que poner en juego habilidades o destrezas previamente aprendidas.

La competencia matemática se traduce en un buen desempeño en actividades provocadoras, en las que el estudiante debe responder en su contexto por tareas o situaciones distintas a las previstas o explicadas en clase. Acorde con el MEN (2006) “la competencia es entendida como un conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y

psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores” (p.49).

Para el desarrollo de competencias, el MEN en los lineamientos curriculares, propone los pensamientos y los sistemas, como una forma de organizar las diferentes características del conocimiento matemático, entre estos se reconoce el pensamiento variacional y sistemas de datos, así como su vínculo con otros pensamientos como el numérico, espacial, métrico y aleatorio. Este pensamiento consiste en reconocer la variación y el cambio en diversos contextos, tal como se indica en MEN (2006) el pensamiento variacional se ocupa de reconocer, identificar y caracterizar variaciones y cambios en diferentes contextos, así como describirlos, modelarlos y representarlos en diferentes sistemas y registros simbólicos gráficos o algebraicos.

**Figura 5.** Núcleos conceptuales de la variación. Tomado y adaptado del MEN (1998).  
Elaboración propia.



En la Figura 5, se identifican los ejes temáticos que acercan al desarrollo del pensamiento variacional, el cual debe darse a partir de un aprendizaje progresivo, es decir, desarrollarse en todo el ciclo escolar desde los primeros grados. Dentro de la investigación es necesario tenerlos presentes para estructurar la estrategia didáctica, ya que cada uno de los tópicos mencionados son esenciales para llegar a comprender, como las funciones varían respecto a los cambios en las variables independientes y cómo estos cambios se reflejan en las gráficas.

### 2.3.3 Estándares curriculares de competencias

Los estándares son normas que guardan coherencia con los lineamientos curriculares, que permite organizar el nivel del desarrollo de competencias que han alcanzado los estudiantes durante la escolarización. En el presente trabajo se tendrán en cuenta los siguientes estándares que guardan relación con el objeto de estudio.

**Tabla 1.** Estándares básicos de los grados octavo y noveno

<b>Estándares básicos de los grados octavo y noveno.</b>	Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.  Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.  Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
--	---

### 2.3.4 Derechos básicos de aprendizaje

Los derechos básicos de aprendizaje (DBA) son una guía que articula aspectos de los lineamientos y los estándares curriculares de una asignatura en especial,

estructurando los aprendizajes básicos necesarios en cada grado académico. Son una propuesta valiosa que aporta de forma clara y concisa un enunciado relacionado con el aprendizaje a desarrollar, una evidencia de aprendizaje que sirve de prueba o señal para identificar el avance del estudiante y un ejemplo que sirve de guía clave para elaborar estrategias que ayuden a la consecución del aprendizaje.

En el siguiente cuadro se describen los DBA relacionados con el pensamiento variacional sugeridos para los grados octavo y noveno, que van a guiar el desarrollo de la estrategia didáctica:

**Tabla 2.** DBA de los grados octavo y noveno

GRADO	Enunciado	Evidencias de aprendizaje
OCTAVO	DBA 10. Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).	Toma decisiones informadas en exploraciones numéricas, algebraicas o gráficas de los modelos matemáticos usados.  Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.
NOVENO	DBA 2. Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.	Identifica y utiliza múltiples representaciones de números reales para realizar transformaciones y comparaciones entre expresiones algebraicas.  Establece conjeturas al resolver una situación problema, apoyado en propiedades y relaciones entre números reales.  Determina y describe relaciones al comparar características de gráficas y expresiones algebraicas o funciones.

## 2.4 Referente Legal

Las instituciones o escenarios educativos en Colombia, se rigen por una serie de normas, leyes y pautas que deben guiar su quehacer. A continuación, se describen en orden cronológico, especialmente las relacionadas con la enseñanza de las matemáticas, y aquellas que guardan relación con el desarrollo del pensamiento variacional en el grado 9°.

La Constitución Política de Colombia de 1991 define en el capítulo 67 que “La educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social: con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura” acorde con ello, se distingue que las instituciones educativas del país y quienes guían los procesos al interior de las mismas, deben garantizar el acercamiento de los estudiantes al conocimiento específico de las diversas áreas del saber y lograr que los estudiantes alcancen un mejoramiento cultural, científico, tecnológico y para la protección del ambiente.

La estrategia didáctica a desarrollar, promueve el proceso de aprendizaje de los estudiantes, cumple con directrices institucionales y con la libertad de cátedra referidas en el Artículo 27 del Capítulo 1 de la Constitución Política de 1991, en la que se expone que “el Estado garantiza las libertades de enseñanza, aprendizaje, investigación y cátedra”.

En concordancia con la constitución política, en la Ley General de Educación de 1994, que reglamenta las normas para prestar el servicio

educativo, se detallan los fines de la educación brindando orientaciones para la formación de ciudadanos. En el presente trabajo se busca dar orientación a los estudiantes para acercarlos, a mediano o a largo plazo, al cumplimiento de al menos uno de los siguientes ítems:

- La adquisición y generación de los conocimientos científicos y técnicos más avanzados, humanísticos, históricos, sociales, geográficos y estéticos, mediante la apropiación de hábitos intelectuales adecuados para el desarrollo del saber.
- El desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca “el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de la vida de la población, a la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país. (Ley general de Educación, 1994)

Pasando a otro aspecto, en el presente trabajo se busca alcanzar competencias elementales del área de matemáticas, específicamente las que permiten desarrollar el pensamiento variacional y la modelación de funciones cuadráticas, basándonos en referentes que regulan los procesos de enseñanza, como los lineamientos curriculares (1998), los estándares de competencias básicos (2006) y los derechos básicos de aprendizaje (2015), teniendo presente su estructura y coherencia para guiar los aprendizajes que se deben desarrollar en cada ciclo de la educación básica primaria, secundaria y media.

## **2.5 Referente espacial**

El presente trabajo se desarrolla en la sede principal de la Institución educativa Joaquín Vallejo Arbeláez, que se encuentra ubicada en la Comuna 8 de la ciudad

de Medellín. La institución de carácter oficial, atiende una población aproximada de 2200 estudiantes de los grados de transición, primaria, modelos flexibles (procesos básicos y aceleración), secundaria, y cuenta con dos modalidades de media técnica en convenio con el SENA.

La Institución está ubicada en un bosque en ladera del barrio Llanaditas, tiene espacios amplios que permiten la socialización de estudiantes y docentes en diversos entornos, así como el disfrute de los descansos, el desarrollo de clases al aire libre, cuenta con recursos tales como aulas de clase equipadas con sillas, mesas, tableros y algunas con televisor, tiene cuatro salas de cómputo, auditorio, dos canchas, terrazas, un parque, biblioteca escolar, servicios sanitarios y demás recursos que permiten que sea un lugar acogedor para la comunidad, un entorno que convoca a los estudiantes al aprendizaje, a la socialización y posibilita la prestación del servicio educativo.

La institución recibe estudiantes de los barrios aledaños de los estratos 1, 2 y 3, con una situación económica que implica que los padres de familia deben estar ausentes de sus hogares y del acompañamiento de sus hijos, ya que deben trabajar gran parte del día, desempeñándose en diversas empresas con horarios estrictos, en trabajos informales, en el cuidado de niños, en los servicios del hogar, entre otras labores que requieren de dedicación de tiempo completo. Acorde con lo anterior, en el Proyecto Educativo Institucional (PEI) se describen las condiciones de las familias de la comunidad educativa:

Las familias que pertenecen a la institución se encuentran entre los estratos 1, 2, y 3 (principalmente 1) y sus condiciones de pobreza son altas. El nivel de escolaridad de los padres no va más allá de la primaria, incluso algunos aún no han sido alfabetizados, razón por la cual la mayoría son obreros, trabajan por días en casas de familia o están desempleados.

Gran parte de los estudiantes viven con sus madres, abuelos o tíos; pocos cuentan con una familia nuclear. (IEJVA, 2022, p.14).

Tanto la misión como la visión son fundamentales, para guiar los diferentes procesos que se llevan a cabo al interior de la institución, estas responden a:

...Una comunidad educativa incluyente que forma niños, niñas y jóvenes en competencias académicas y ciudadanas, capaces de participar en la transformación constructiva de su entorno. La visión plantea que en el 2025 seremos una comunidad educativa que llevará a cabo procesos de inclusión, convivencia y mejoramiento académico para aportar al bienestar individual y social de sus miembros. (IEJVA, 2022, p. 20).

Partiendo de los principios misionales de la institución se reconoce la importancia de fortalecer los procesos académicos con los estudiantes ya que se evidencian falencias en la adquisición de competencias básicas de las áreas a pesar de los grandes esfuerzos que hacen directivos y docentes por mejorar las dinámicas de aula, a esto le sumamos el desinterés de los estudiantes, el poco acompañamiento de sus padres, la falta de sentido por lo que hacen, la desmotivación y apatía por aprender, la carencia de autonomía, el consumo de sustancias psicoactivas, enfermedades mentales y demás aspectos que afectan el desarrollo de los niños, niñas y adolescentes.

El enfoque pedagógico de la institución es constructivista, con el que se pretende atender a la diversidad y velar por una educación inclusiva que responda a las necesidades de los estudiantes, sus ritmos e intereses de aprendizaje, a partir de las dinámicas de aula, la interacción, la experiencia, y se permita la construcción de su propio conocimiento, sus propios significados, establecer relaciones y no por una mera repetición de patrones.

### **3. Diseño metodológico**

En este apartado, se describe el tipo de investigación que se adopta, el enfoque y los métodos utilizados para lograr el objetivo general del estudio, el cuál consistió en diseñar una estrategia didáctica que contribuya al fortalecimiento del pensamiento variacional con ayuda de experimentos que se modelan con funciones cuadráticas, se consideró que, a partir de una investigación de corte cualitativo, se puede alcanzar dicho propósito.

#### **3.1 Enfoque investigativo**

Para el desarrollo de la investigación, se adoptó el enfoque cualitativo, porque este permite conocer una realidad educativa específica, describir los fenómenos que en ella se presentan, por ejemplo, los relacionados a dar respuesta a cómo aprenden los estudiantes, y cuáles son las mejores estrategias que conducen a una transformación de la práctica docente. Este enfoque se caracteriza porque conlleva a la comprensión de fenómenos sociales, a partir de la recolección de datos, la observación directa participante o no participante, la entrevista, audios o videos, los diferentes registros y apuntes de los estudiantes involucrados en el estudio, posibilitando al investigador llegar a una interpretación o explicación de la problemática o cuestión que es objeto de estudio.

Acorde con lo anterior se plantea lo siguiente:

Una investigación de tipo cualitativo comporta, en definitiva, no sólo un esfuerzo de comprensión, entendido como la captación, del sentido de lo que el otro o los otros quieren decir a través de sus palabras, sus silencios, sus acciones y sus inmovilidades a través de la interpretación y el diálogo, sino también, la posibilidad de construir generalizaciones, que permitan entender los aspectos comunes a muchas personas y grupos humanos en el proceso de producción y apropiación de la realidad social y cultural en la que desarrollan su existencia. (Sandoval, 1996 p.32).

Este tipo de investigación en el aula, está alineada con el enfoque de investigación acción educativa (IAE), porque se centra en el trabajo propio de cada docente, en lo que sucede al interior de sus clases, los interrogantes y retos específicos de la enseñanza y el aprendizaje de la cotidianidad, que llevan a la reflexión constante y a la búsqueda de la transformación o mejora de dicha práctica.

El prototipo de la IAE sugiere una estructura para desarrollar una práctica pedagógica reflexiva e investigativa. Al respecto, Gómez (2002), plantea las siguientes fases:

1. Deconstrucción de la práctica pedagógica: Este permite reconocer la estructura de la práctica, vicios, elementos de ineffectividad, por medio de la observación del docente y entrevistas focales con los estudiantes.
2. Reconstrucción de la práctica o planteamiento de alternativas: Esta fase acerca a la reafirmación de lo bueno, complementado con nuevos esfuerzos y propuestas de transformación.
3. Evaluación de la efectividad de la práctica reconstruida: Se realiza una evaluación de la práctica, se toman notas de su efectividad, se observan sus resultados y se juzga con éxito la transformación. (p. 7)

Acorde con las fases mencionadas, en este trabajo de profundización se realizó la deconstrucción de la práctica docente, en la que se identificó la estructura de las clases de matemáticas cuando se desarrolla el pensamiento variacional y se reconocieron algunos aspectos de ineffectividad de la enseñanza, seguidamente se pasó a la reconstrucción de la práctica, en la cual se diseñó una estrategia didáctica para transformar los aprendizajes llevados al aula y finalmente se llevó a cabo una evaluación y reflexión de la implementación.

### **3.2 Método**

En este apartado, se especifica de qué manera se desarrollaron los objetivos específicos de la investigación, los cuales se realizaron por fases, que son descritas a continuación:

**Fase diagnóstica:** En esta primera etapa se realizó una identificación y definición del problema de investigación, una revisión de los resultados institucionales obtenidos en las pruebas saber, se llevó a cabo la exploración de los aprendizajes que no se están trabajando de manera efectiva en el aula de matemáticas específicamente desde el desarrollo del pensamiento variacional, reconociendo su viabilidad, así como su relevancia para grados futuros de la educación básica y media, también se rastreó la bibliográfica relacionada con el tema de investigación que llevaron a elaborar la pregunta de investigación, los objetivos y una planificación del trabajo a desarrollar guiado por un enfoque para la enseñanza en educación matemáticas, conocido como el enfoque en sistema de Vasco (1986) y el aprendizaje significativo de Ausubel (1983).

**Fase de implementación e intervención en el fenómeno estudiado y observación:**

En esta fase se llevó a cabo la implementación de la propuesta didáctica, así como la recopilación y análisis de datos a partir de los instrumentos elegidos para interpretar los resultados y que dan respuesta a la pregunta de investigación planteada en la fase diagnóstica. Adicionalmente, se validan los resultados obtenidos a la luz de la teoría y se establecen conclusiones.

#### **Fase de evaluación o valoración de los resultados obtenidos:**

En esta etapa final, se realizó una verificación de la consistencia de los resultados obtenidos, así como un comparativo de los hallazgos con los objetivos trazados al principio de la investigación y su relación con la teoría. También, se evaluó de qué manera la investigación logró dar respuesta a la pregunta de investigación, se valoró su pertinencia, sus limitaciones y algunas recomendaciones para futuras investigaciones.

### **3.3 Instrumento de recolección de información.**

Los instrumentos que se utilizaron para la recolección de la información de manera objetiva del trabajo de los estudiantes, fueron los cuestionarios y exámenes, ya que estos permitieron analizar las respuestas dadas, identificar las reflexiones, opiniones y percepciones de los participantes en la investigación.

También, se implementó la observación participante, es decir que en algunas ocasiones fue necesario que el docente interviniera en las discusiones o en los acuerdos a los que estaban llegando los estudiantes en sus diferentes grupos de trabajo, con la intención de direccionarlos hacia los objetivos esperados o hacia la construcción de los conceptos. Además, se diligenciaron diarios de campo, plasmando datos contextualizados para enriquecer el análisis y la reflexión.

### 3.4 Población y muestra

Para el desarrollo de la propuesta de investigación, la población objeto de estudio seleccionada, fueron estudiantes del grado noveno (grupos 1 y 2) de la IEJVA, con los que se establecieron grupos de comparación diferenciados de la siguiente manera:

**Grupo 1.** Se implementó la estrategia didáctica propuesta en la investigación

**Grupo 2.** Se lleva a cabo la enseñanza de las funciones cuadráticas de forma tradicional, es decir, con explicaciones dadas por el docente, implementando las mismas actividades realizadas con el grupo 1, talleres prácticos y evaluación de los aprendizajes.

### 3.5 Impacto esperado

Con el presente estudio se espera mejorar las prácticas de enseñanza, lograr que los estudiantes sean más autónomos en la gestión de su aprendizaje y que adquieran conocimientos sólidos para tener mejores desempeños académicos en grados superiores y en pruebas tanto internas como externas. Los resultados de la investigación pueden ser un apoyo a los diferentes docentes de la IEJVA u otras instituciones, ya que proporciona ideas, estrategias o dinámicas de aula que pueden dar un valor agregado o un enfoque distinto a sus clases.

Con el diseño de la propuesta de intervención, se espera que los estudiantes fortalezcan los conocimientos que tienen acorde con el pensamiento variacional, cuando interactúan con situaciones en las que hay una relación de dependencia, que puede ser representada en diferentes formatos y permiten llegar a generar modelos matemáticos, así como ver su utilidad.

### 3.6 Tabla de planificación de las actividades

**Tabla 3.** Planificación de las actividades

FASES	OBJETIVOS	ACTIVIDADES
Fase 1: Caracterización	Reconocer y caracterizar estrategias o metodologías de enseñanza de las funciones cuadráticas asociadas con el desarrollo del pensamiento variacional y la modelación matemática.	<p>1.1. Rastreo bibliográfico en torno a la enseñanza de las funciones cuadráticas, el pensamiento variacional y la modelación matemática</p> <p>1.2. Revisión bibliográfica en publicaciones del Ministerio de educación nacional, en relación con el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos.</p>
Fase 2: Diseño	Diseñar actividades fundamentadas en el reconocimiento de patrones, variación, cambio, que puedan ser modeladas matemáticamente y que faciliten la enseñanza de las funciones cuadráticas.	<p>2.1 Elaboración de actividades que permitan la exploración de los conocimientos previos de los estudiantes o de los subsunsores.</p> <p>2.2 Diseño y construcción de guías de trabajo relacionadas con las funciones cuadráticas teniendo en cuenta los sistemas concretos, conceptuales y simbólicos.</p>

		2.3 Diseño de actividades de modelación de funciones cuadráticas.
Fase 3: Intervención de aula	Aplicar las actividades propuestas en la estrategia didáctica en los grupos de comparación seleccionados de la institución educativa Joaquín Vallejo Arbeláez.	3.1 Implementación de la estrategia didáctica  3.2 Recolección de información por medio del investigador y diligenciamiento de diarios de campo.
Fase 4: Evaluación	Evaluar el desempeño de la estrategia didáctica implementada con los estudiantes del grado noveno, de los grupos dos y tres de la Institución educativa Joaquín Vallejo Arbeláez.	4.1 Construir y aplicar actividades evaluativas durante el desarrollo de la estrategia didáctica y al final de la misma.  4.2 Realización de análisis de los resultados obtenidos durante la implementación de la estrategia didáctica, de los estudiantes de los grados noveno, dos y tres de la IEJVA.
Fase 5: conclusiones y recomendaciones	Describir el alcance de la investigación alineada con los objetivos específicos trazados, y los aportes desde la práctica docente.	5.1 Realización de conclusiones, recomendaciones y propuestas que pueden ser útiles en investigaciones futuras.

### 3.7 Cronograma de actividades

En este apartado se observa el cronograma de las actividades propuestas en las fases de la investigación, que permitieron el alcance de los objetivos del estudio.

**Tabla 4.** Cronograma de actividades.

ACTIVIDADES	SEMANAS															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Actividad 1.1	x	X	x	X												
Actividad 1.2			x	X												
Actividad 2.1			x	X	X											
Actividad 2.2				X	X											
Actividad 2.3				X	X											
Actividad 3.1						X	x	x	x							
Actividad 3.2						X	x	x	x	X						
Actividad 4.1										X	X	x				
Actividad 4.2													x	x		
Actividad 5.1														x	x	x

## **4. Diseño e implementación de la estrategia didáctica.**

En este capítulo, se encuentra tanto la descripción, como el análisis individual de cada una de las secciones que conforman la intervención, que se basó en las propuestas de aprendizaje significativo de Ausubel (1983) y el enfoque de sistemas según Vasco (1986). Los datos recolectados a través de los instrumentos utilizados, fueron sometidos a un proceso de análisis con el fin de verificar el logro de los objetivos establecidos en la investigación.

### **4.1 Diagnóstico**

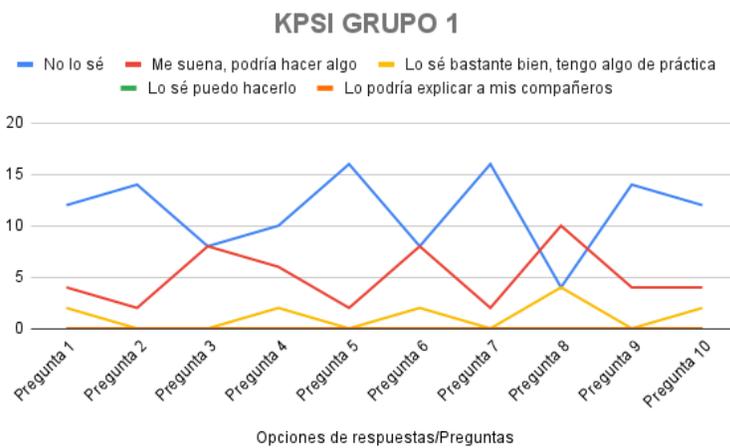
Partiendo del primero objetivo de la investigación, diagnosticar conocimientos previos de los estudiantes, relacionados con la función cuadrática, se diseñó un cuestionario KPSI y una evaluación que permitieron indagar acerca de algunos conceptos básicos del pensamiento variacional, y preconceptos relacionados con el reconocimiento de una función cuadrática, así como sus características.

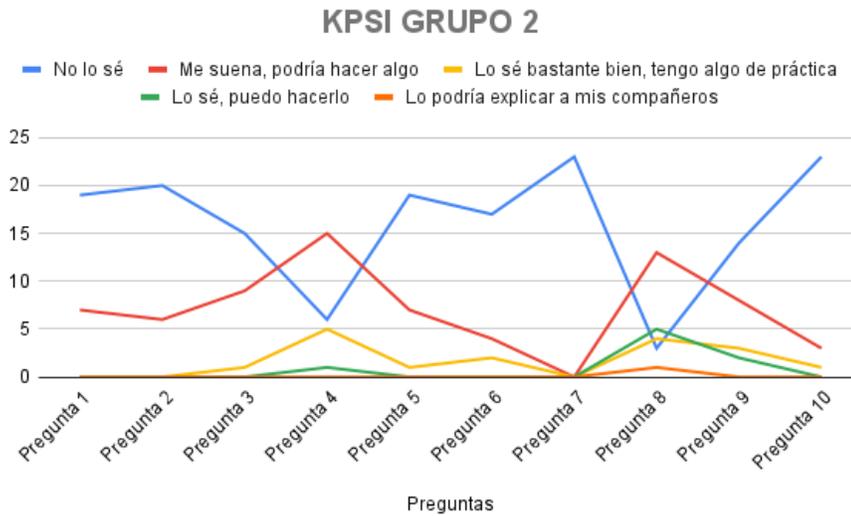
La primera estrategia de evaluación diagnóstica fue el cuestionario KPSI (Knowledge and Prior Study Inventory), que contenía 10 preguntas o afirmaciones (Ver anexo A), con la intención de identificar las ideas preconceptuales de los estudiantes, antes de recibir instrucción por el docente, en este ejercicio inicial, los participantes escogieron la opción de respuesta que se vinculara más con su propio proceso de aprendizaje, experiencias previas e intuiciones personales, “esta prueba permite al alumnado reflexionar acerca de su conocimiento y sus

habilidades sobre una materia en concreto, además de proporcionar información al profesor sobre lo que el estudiante sabe o desconoce.” (Del campo, 2016, p.96).

En la siguiente gráfica, se muestran los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario KPSI, que contenía preguntas que buscaban identificar si conocían, tenían práctica o podían explicar o hacer algo con las características de una función cuadrática, manipular su expresión algebraica, elaboración de su gráfica, reconocer patrones, situaciones cotidianas o aplicaciones que se modelan con dichas funciones.

**Figura 6.** Resultado del cuestionario KPSI implementado en el Grupo 1

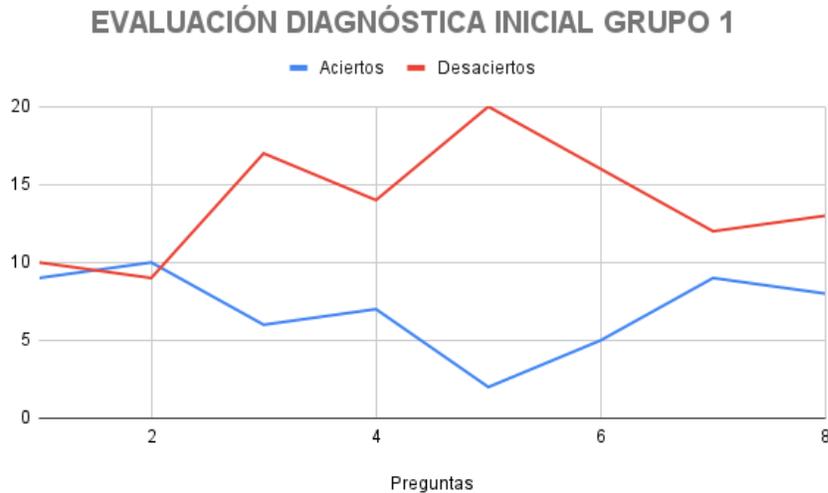


**Figura 7.** Resultado del cuestionario KPSI implementado en el Grupo 2

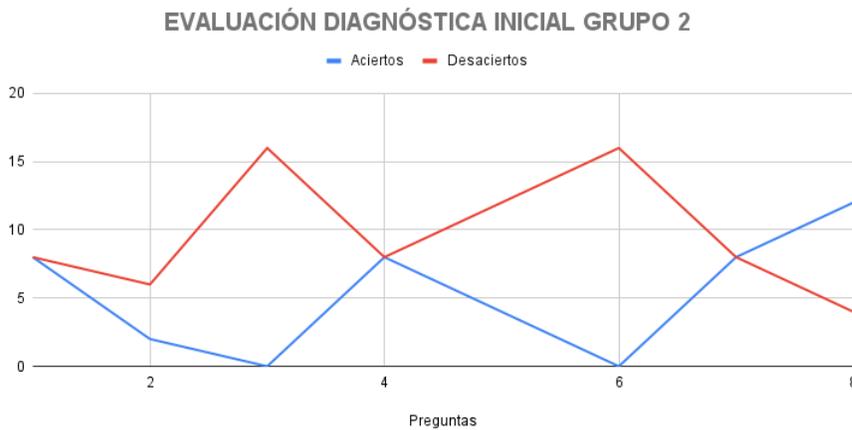
En este primer acercamiento a los conocimientos previos de los estudiantes, se obtuvo resultados que demostraron que conocen poco o no saben nada acerca de las preguntas realizadas, manifestando sinceridad al momento de responder y compromiso con la necesidad de aprender algunas temáticas que no se habían explicado antes. De esta forma puede demostrarse la necesidad de profundizar en el desarrollo de competencias esenciales del pensamiento variacional que lleven al aprendizaje significativo de las funciones cuadráticas.

Otra estrategia que permitió reconocer los conocimientos previos de los estudiantes fue la evaluación diagnóstica que incluía 8 preguntas de selección múltiple con única respuesta, y dos preguntas abiertas. En esta se indagó un poco más a fondo por los conocimientos preexistentes o subsunsores de una función cuadrática, donde se pretendía apreciar si los estudiantes reconocían su representación verbal, la relación con su representación algebraica, la construcción de su gráfica, así como el reconocimiento de patrones o situaciones que se modelan con este tipo de expresiones matemáticas. A continuación, se muestran los resultados de aplicación de la prueba.

**Figura 8.** Resultados de la prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes del grupo 1



**Figura 9.** Resultados de la prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes del grupo 2



En los resultados obtenidos de la evaluación diagnóstica se logra evidenciar que hay más desaciertos que aciertos, además algunos de los estudiantes participantes, decidieron no responder varias preguntas, entregando su evaluación en blanco, porque desconocían lo que les estaba preguntando y no se atrevían a elegir una opción o dar su opinión ante estos interrogantes.

Las dos preguntas abiertas de la evaluación, buscaba que los estudiantes reconocieran una situación del mundo real que pudiera modelarse con una función cuadrática, con la intención de indagar si identificaban su expresión algebraica, lograban realizar un registro en tablas de valores, encontrar su vértice, puntos de corte con los ejes y posteriormente, realizar la respectiva gráfica en el plano de coordenadas. En este ejercicio la mayoría de los estudiantes, dejaron los espacios en blanco, porque no tenían claridad, frente a cómo representar la situación, y algunos se atrevieron a completar la tabla de valores, con resultados que no satisfacían la ecuación, adicionalmente no encontraron una estrategia para representar los datos en el plano cartesiano.

**Figura 10.** Respuesta de pregunta abierta de evaluación diagnóstica. Estudiante grupo 1

c)  $f(2) = 2^2 + 5(2) - 2 = 2$   
 d)  $f(2) = 2^2 + 5(2) - 2 = 16$

Las siguientes preguntas son abiertas.

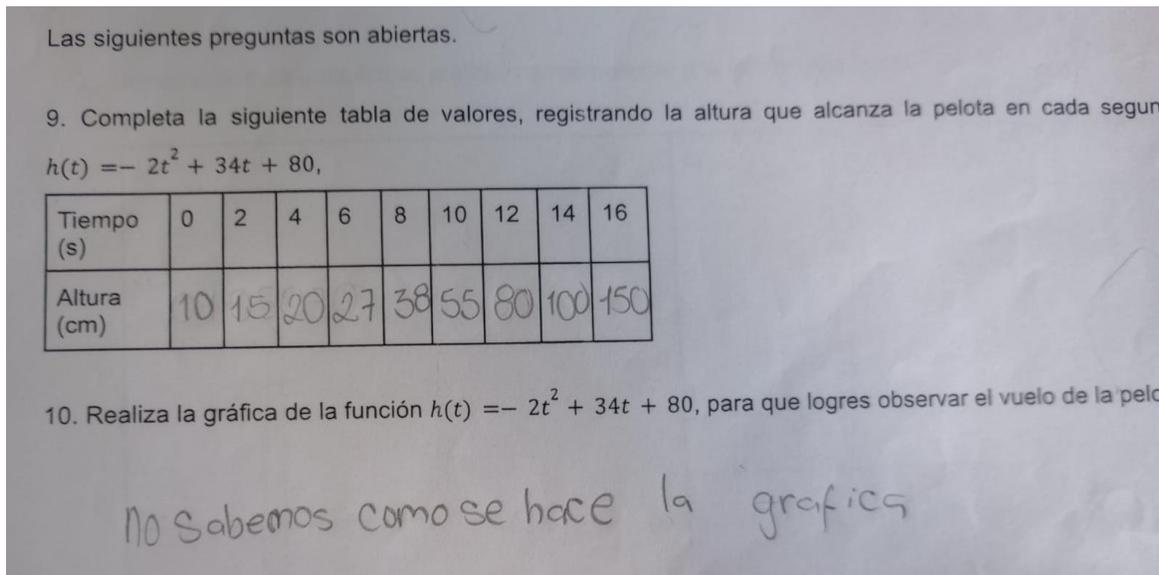
9. Completa la siguiente tabla de valores, registrando la altura que alcanza la pelota en cada segundo.  
 $h(t) = -2t^2 + 34t + 80$ ,

Tiempo (s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	
Altura (cm)		0t	2t	4t	6t	8t	10t	12t	14t	16t

10. Realiza la gráfica de la función  $h(t) = -2t^2 + 34t + 80$ , para que logres observar el vuelo de la pelota.

$$2t^2 + 34t + 80 = 2^{\circ}t^2 + 34^{\circ}t + 80^{\circ}$$

**Figura 11.** Respuesta de pregunta abierta de evaluación diagnóstica. Estudiante grupo 2



De acuerdo con lo diagnosticado, se logró dar un enfoque a las actividades planeadas para abordar las necesidades de los estudiantes, y como en esta etapa mostraron ideas o conocimientos relacionados con aspectos como la representación gráfica en el plano cartesiano, se propusieron actividades en las cuales se lograra evidenciar el nivel de manejo de la misma, vinculando esto con situaciones cotidianas de variación, cambio, situaciones que se pueden modelar con funciones lineales y específicamente las cuadráticas, con la intención de orientar a los estudiantes a un aprendizaje más significativo y sólido de las funciones.

## 4.2 Diseño e implementación de la estrategia didáctica.

Con el fin de ejecutar otro de los objetivos específicos de la investigación, implementar la estrategia didáctica e identificar la apropiación del pensamiento variacional cuando los estudiantes experimentan con situaciones de modelación;

se diseñó y desarrolló una estrategia didáctica, tomando como base las actividades diagnósticas y los análisis pedagógicos previos realizados en la práctica docente.

Se realiza una planeación pedagógica, que incluye momentos o clases con sistemas concretas, conceptuales y simbólicos propuesto por Vasco (1986) para la enseñanza de las matemáticas, con la intención de dar un enfoque diferente a los procesos que se desarrollan al interior de las clases que actualmente se imparten en la IEJVA. A continuación, se describen los resultados obtenidos en cada una de las fases o momentos establecidos en el diseño metodológico.

### **4.2.1 Momento de aprendizaje por descubrimiento y de acercamiento a los sistemas concretos.**

De acuerdo a los aportes de Ausubel (1983) en la teoría del aprendizaje significativo y Vasco (1986) en el enfoque de sistemas, se propusieron las siguientes actividades, que posibilitaron que los estudiantes realizaran una construcción conceptual de las funciones cuadráticas, a partir de la recolección de datos, el análisis de la información, las discusiones generadas con sus compañeros y la guía del docente que lleva a cabo la investigación.

#### **4.2.1.1 Actividad 1. Activación de conocimientos previos**

Las actividades propuestas en esta fase se realizaron en un carrusel (véase anexo C) e involucraron a los estudiantes a un proceso de aprendizaje más interactivo y práctico, con la intención de activar y vincular los conocimientos previos mientras se enfrentaban a la solución de ejercicios relacionados con las funciones cuadráticas o las lineales.

En las bases n°1 y n°2 del carrusel se encontraron con las dinámicas de recorrer una distancia determinada y saltar una cuerda durante 2 minutos. En estos ejercicios debían llevar el control del tiempo y la cantidad de saltos o la cantidad de

metros recorridos en relación con el tiempo, e ir registrando los resultados en tablas de valores. A continuación, se observan los resultados obtenidos por los estudiantes de los grupos de comparación, pero antes, es importante aclarar que ambos grupos recibieron instrucciones básicas para realizar cada uno de los ejercicios propuestos, sin embargo, el grupo 1 tuvo explicaciones un poco someras y poco profundas, para que solos descubrieran que hacer, mientras que el grupo 2, recibió más apoyo de la docente, explicaciones de las preguntas y formas de realizar las gráficas. En la siguiente matriz (tabla 5) se comparan los resultados obtenidos por los estudiantes en los grupos de comparación:

**Tabla 5.** Matriz de comparación de resultados de actividad de conocimientos previos

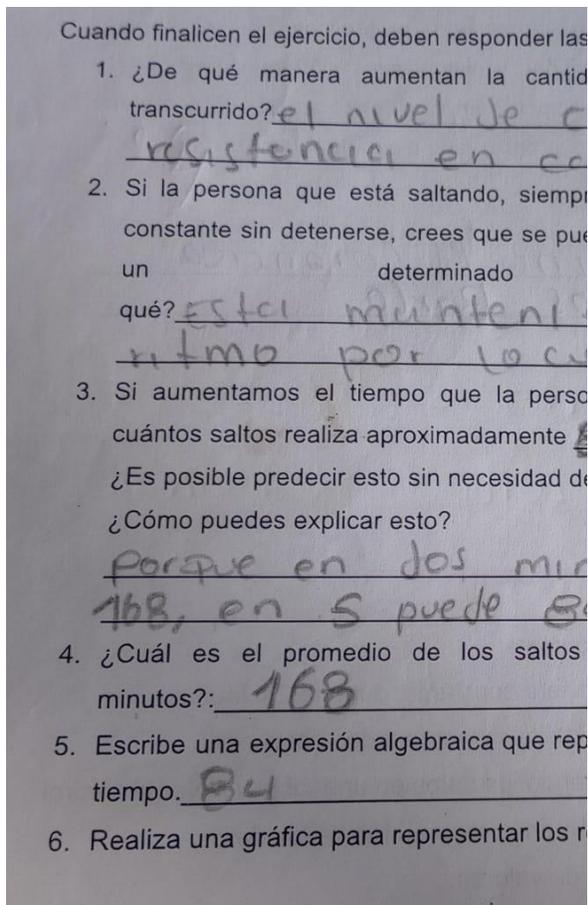
<b>Activación de conocimientos previos</b>			
<b>Base 1 y 2.</b> Saltar una cuerda durante 2 segundos, hacer un recorrido en la terraza y registrar los datos en una tabla de valores			
<b>Análisis</b>	<b>Registro en la tabla de valores</b>	<b>Preguntas de análisis</b>	<b>Registro gráfico</b>
<b>Resultado grupo 1</b>	En los registros de los estudiantes, se identifica que registran los saltos cada 10 segundos sin mostrar el acumulado de los mismos. De igual manera, lo hacen en la base 2, en la que tienen que recorrer 6 metros caminando o corriendo y registrar el tiempo cada que avanzan un metro (Véase figura 11).	Los estudiantes identifican que hay un ritmo constante y logran predecir la cantidad de saltos luego de 5 minutos	Realizan gráficas usadas en estadística descriptiva, específicamente el diagrama de barras y algunos realizan dibujos representando la situación
<b>Resultado grupo 2</b>	En los registros de los estudiantes, se reconoce el registro del tiempo acumulado cada 10 segundos y el número de	En las preguntas de análisis los estudiantes reconocen un patrón	Realizan la gráfica en el plano cartesiano de acuerdo a la

	<p>saltos acumulados de manera consecutiva.</p> <p>De igual forma, en el ejercicio de recorrer una distancia de 6 metros y registrar el tiempo cada que avanzan un metro.</p>	<p>en la cantidad de saltos registrados cada 10 segundos y en algunos casos encuentran una expresión matemática para representar la situación.</p>	<p>tabla de valores y a las orientaciones de la docente.</p>
--	---	--	--

**Figura 12.** Registro tabular de estudiantes del grupo 1 en el ejercicio de saltar una cuerda.

Tiempo (s)	cantidad de saltos
10 s	14

**Figura 13.** Preguntas de análisis de estudiantes del grupo 1 en el ejercicio de saltar una cuerda.



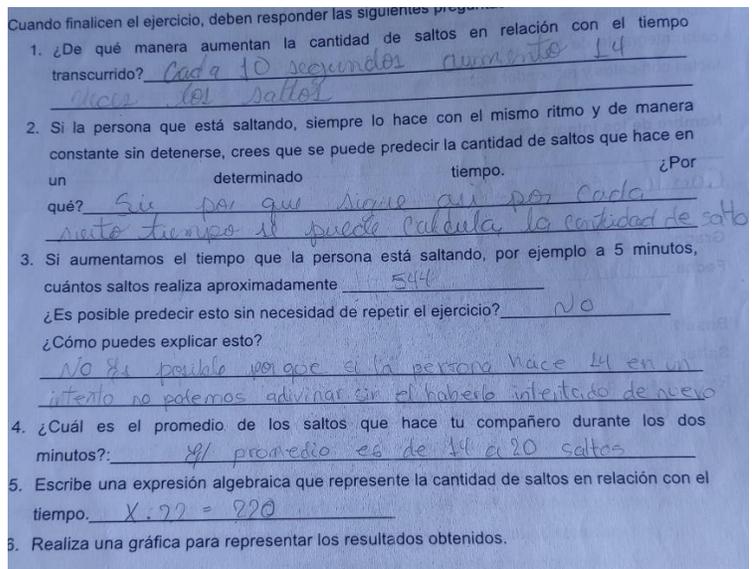
**Figura 14.** Registros gráficos de los estudiantes del grupo 1 en el ejercicio de saltar una cuerda.



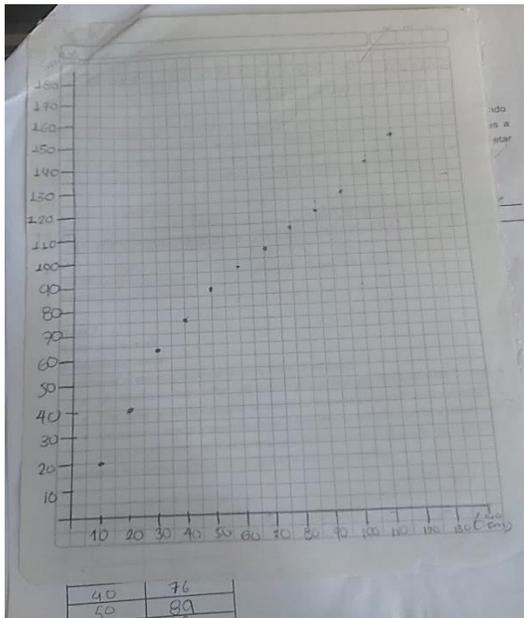
**Figura 15.** Registros de tablas de valores de los estudiantes del grupo 2 en el ejercicio de saltar una cuerda

Tiempo (s)	cantidad de saltos
10	20
20	40
30	61
40	76
50	89
60	98

**Figura 16.** Registros gráficos de los estudiantes del grupo 1 en el ejercicio de saltar una cuerda.



**Figura 17.** Registros gráficos de los estudiantes del grupo 2 en el ejercicio de saltar una cuerda.



En la base n°3 se les presenta una secuencia de cuadritos que buscaba acercar a los estudiantes a una mejor comprensión, de cómo se comporta una función cuadrática. En este ejercicio se logra identificar que inicialmente observaron la secuencia y no encontraban una relación entre una posición u otra, pero en medio de las discusiones

generadas en los grupos y algunos acercamientos que hacía la docente para direccionarlos, se observó que los estudiantes reconocían el patrón que permitía el aumento de la secuencia y algunos lograron completar la tabla de valores con el valor de cuadrillos según la posición que ocupan.

Finalmente se pidió a los estudiantes que representaran los valores específicos de la secuencia de cuadrillo, en el plano de coordenadas, logrando que observaran de manera gráfica, como se comportan los valores registrados, en la siguiente matriz se observan los resultados de los grupos de comparación:

**Tabla 6.** Matriz de comparación de resultados de actividad de secuencia de cuadrillos.

<b>Activación de conocimientos previos</b>			
<b>Base 3. Experimentando con las secuencias de cuadrillos</b>			
<b>Análisis</b>	<b>Registro en la tabla de valores</b>	<b>Preguntas de análisis</b>	<b>Registro gráfico</b>
<b>Resultado grupo 1</b>	Los estudiantes registran la cantidad de cuadrillos presentes en la secuencia dada de las posiciones 1,2,3 y 4 en la tabla de valores, pero algunos casos no logran reconocer el patrón de formación para las siguientes posiciones.	Los estudiantes identifican que la cantidad de cuadros se va incrementando y que hay un valor que se debe multiplicar en cada posición para saber la cantidad de cuadrillos existentes.	Realizan una representación pictórica en la que se observa el aumento de la cantidad de cuadrillos de acuerdo con la posición que ocupan. Que en algunos casos no coincide con los datos registrados en la tabla de valores.
<b>Resultado grupo 2</b>	Los estudiantes registran la cantidad de cuadros de acuerdo a la secuencia, y se dan cuenta de que, para encontrar la cantidad de	De igual manera, los estudiantes reconocen que hay una variación y con la ayuda de la docente logran identificar que la cantidad de	Realizan la gráfica en el plano cartesiano de acuerdo a la tabla de valores y a las orientaciones de la docente.

	<p>cuadros en cada posición, se debe multiplicar el número de la misma o elevarla al cuadrado, de esta manera llegan a conocer el número de cuadros y completar la tabla de manera acertada.</p>	<p>cuadros se va incrementando y que hay un valor que se debe multiplicar en cada posición para saber la cantidad de cuadritos existentes.</p>	
--	--	--	--

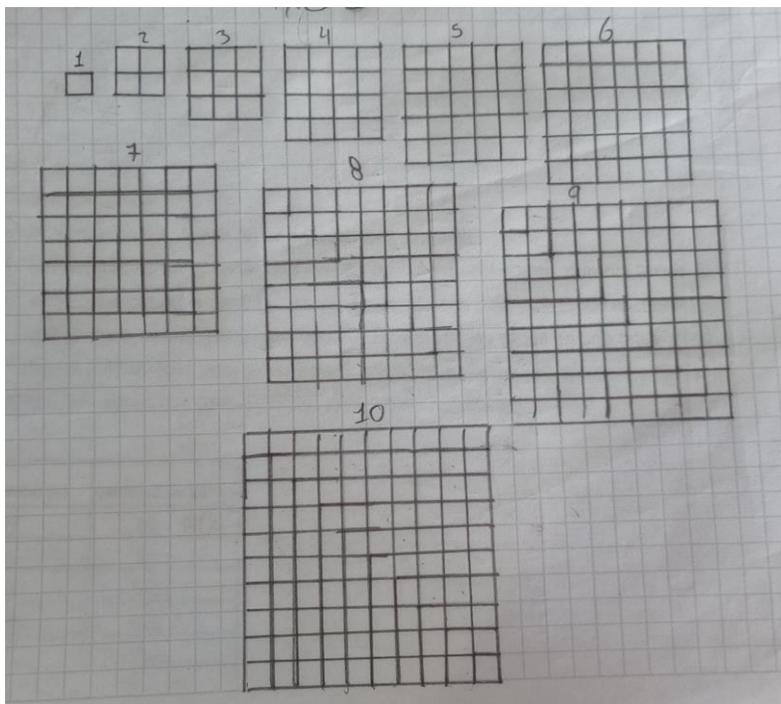
**Figura 18.** Registros en tablas de valores de estudiantes del grupo 1 en el ejercicio de la secuencia de cuadrados.

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad de cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

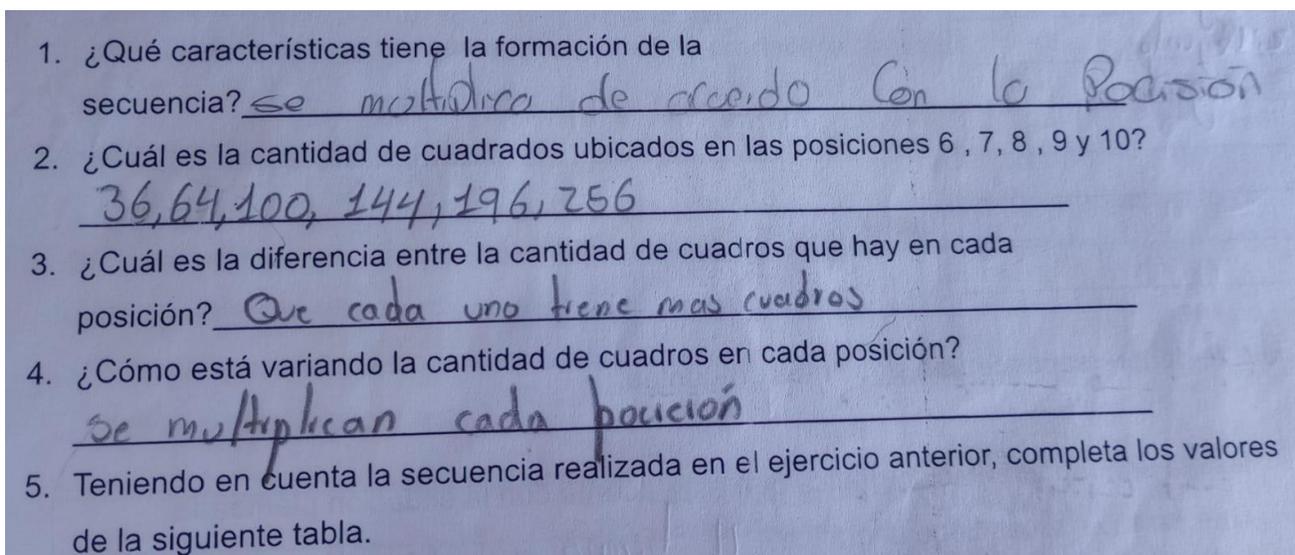
Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad de cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad de cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

**Figura 19.** Registros pictóricos de estudiantes del grupo 1 en el ejercicio de la secuencia de cuadrillos, realizado para saber la cantidad de cuadrillos en cada posición.



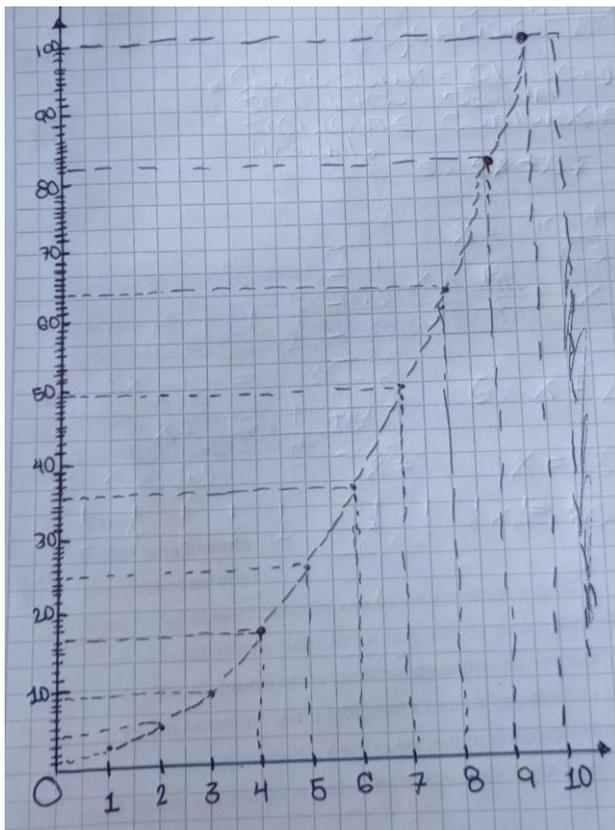
**Figura 20.** Preguntas de análisis de estudiantes del grupo 1 en el ejercicio de la secuencia de cuadrillos.



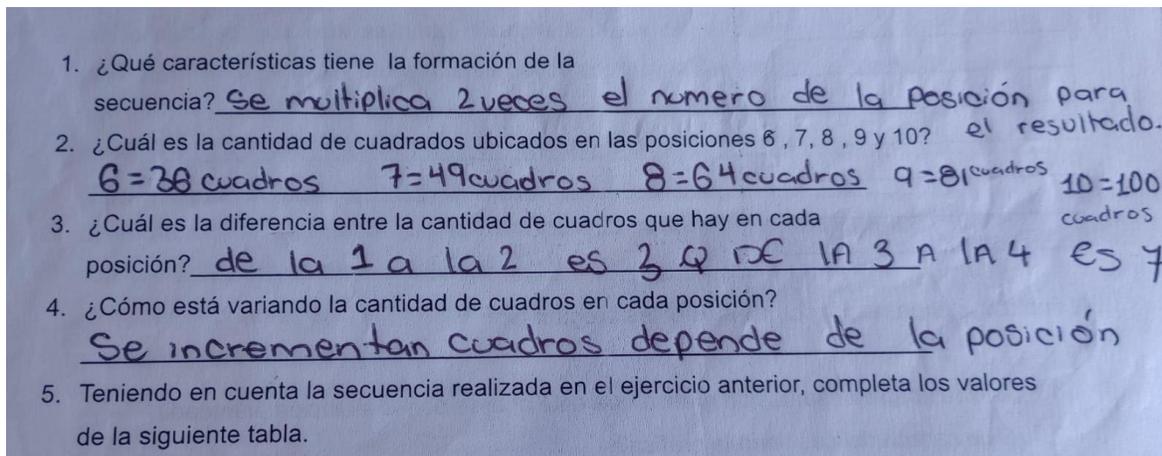
**Figura 21.** Registros en tablas de valores de estudiantes del grupo 2 en el ejercicio de la secuencia de cuadratos

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad de cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

**Figura 22.** Registros gráficos de tablas de valores de estudiantes del grupo 2 en el ejercicio de la secuencia de cuadratos.



**Figura 23.** Preguntas de análisis de estudiantes del grupo 2 en el ejercicio de la secuencia de cuadrillos.



En la base 4, la actividad se desarrolló de acuerdo con las instrucciones dadas, capturando la atención de los estudiantes ya que se les presentaron situaciones con las que ellos ya están familiarizados, lo que generó curiosidad e interés por resolver cada uno de los cuestionamientos que surgían.

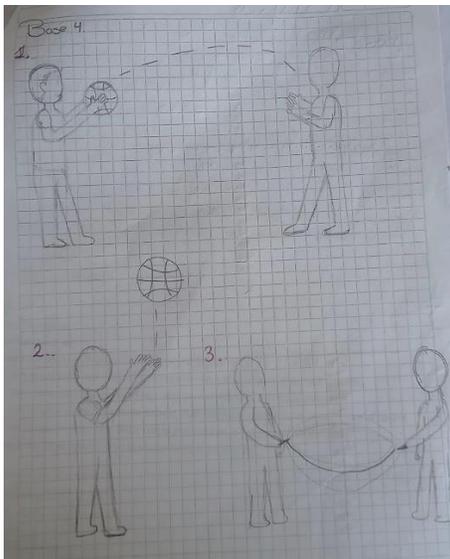
Los estudiantes hicieron observaciones de la trayectoria de los objetos y realizaron sus respectivos registros visuales, por medio de videos o dibujos, fomentando de esta manera la captura o recolección de datos puntuales en cada una de las situaciones propuestas. Además, les permitió relacionar el aspecto visual de la trayectoria de los objetos, con los posibles valores numéricos que representan el tiempo y la distancia.

**Tabla 7.** Matriz de comparación de resultados de actividad de lanzamiento de objetos.

Activación de conocimientos previos		
Base 4. Lanzamiento de objetos		
Análisis	Preguntas de análisis	Registro gráfico
<b>Resultado grupo 1</b>	Algunos estudiantes no asocian la trayectoria de los objetos lanzados con algo cotidiano, y otros las	Realizan dibujos en los que se puede observar la trayectoria parabólica de los objetos que fueron grabados

	relacionan con “El juego del baloncesto”, con la forma de “una cuerda”, “un puente”, véase Figura 25.	previamente en cámara lenta como se observa en la Figura 23.
<b>Resultado grupo 2</b>	Los estudiantes reconocen que los registros gráficos “tiene forma de arcoíris” “forma de un puente” “arco”, “media luna”, “Forma de la letra u o n”, véase Figura 26.	Realizan dibujos en los que se puede observar la trayectoria parabólica de los objetos que fueron grabados previamente en cámara lenta como se observa en la Figura 24.

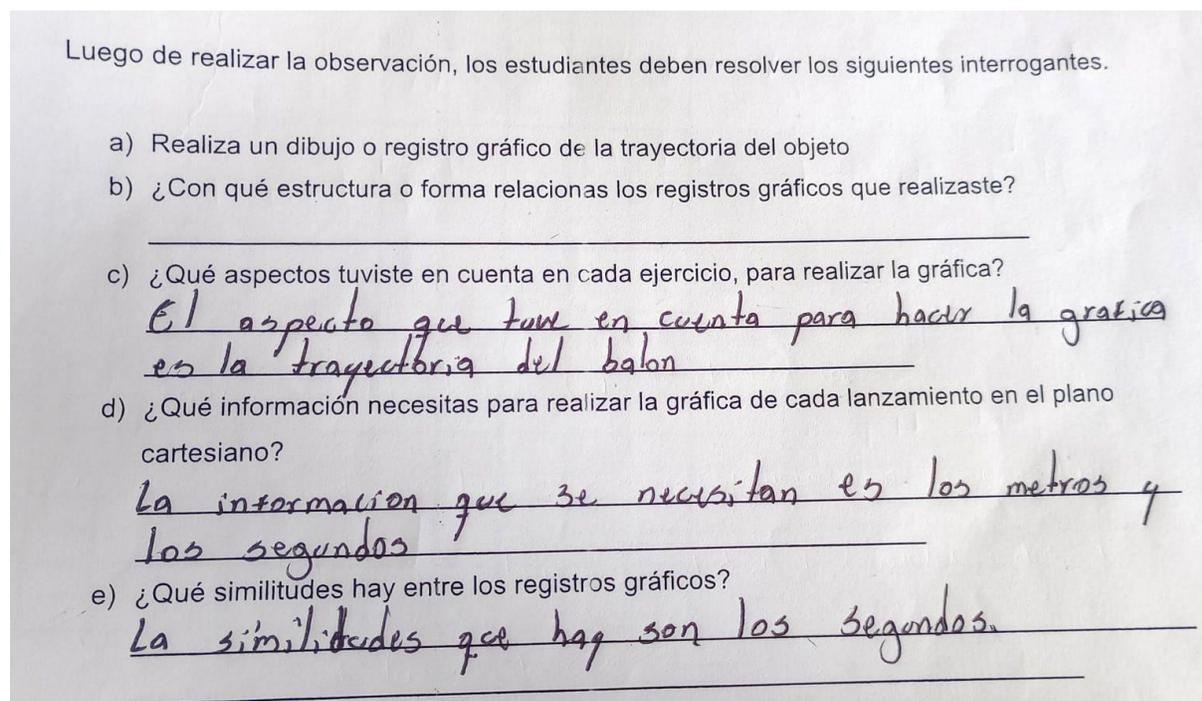
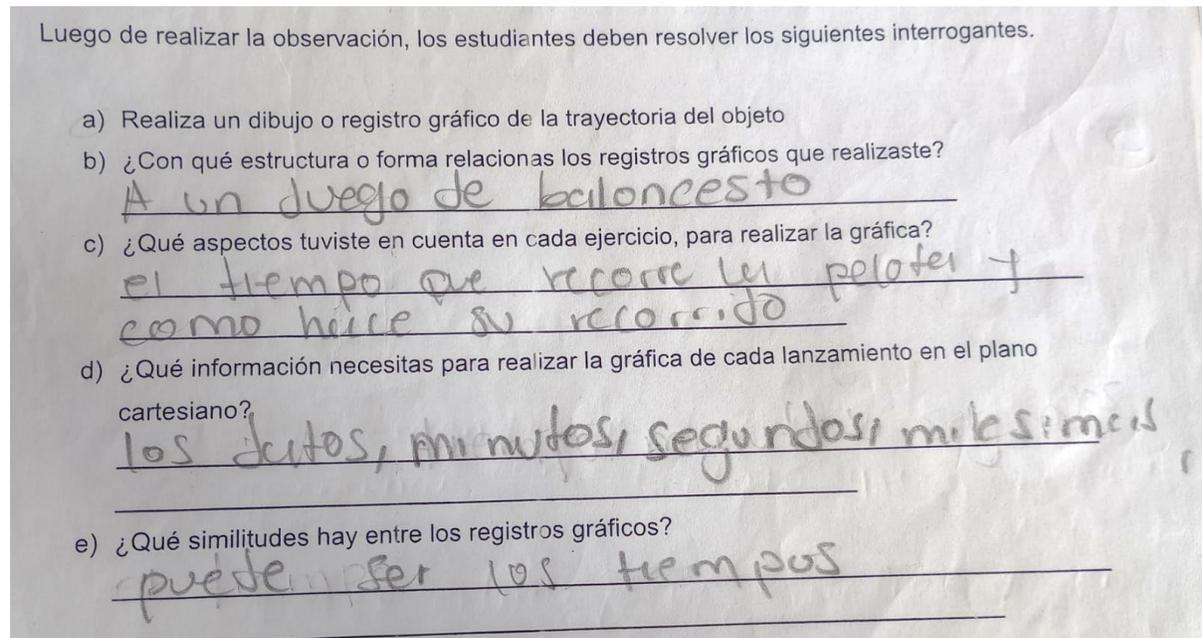
**Figura 24.** Representación de lanzamiento de objetos por estudiantes del grupo 1



**Figura 25.** Representación de lanzamiento de objetos por estudiantes del grupo 2



Figura 26. Algunas respuestas de las preguntas de análisis del grupo 1



**Figura 27.** Algunas respuestas de las preguntas de análisis del grupo 2

Luego de realizar la observación, los estudiantes deben resolver los siguientes interrogantes.

- Realiza un dibujo o registro gráfico de la trayectoria del objeto
- ¿Con qué estructura o forma relacionas los registros gráficos que realizaste?  
Arcoíris, un arco, una media luna,
- ¿Qué aspectos tuviste en cuenta en cada ejercicio, para realizar la gráfica?  
la distancia de las personas la fuerza con la que se tira el balón y la distancia que recorre el balón
- ¿Qué información necesitas para realizar la gráfica de cada lanzamiento en el plano cartesiano?  
la distancia que recorre el balón
- ¿Qué similitudes hay entre los registros gráficos?  
Son con números.

Luego de realizar la observación, los estudiantes deben resolver los siguientes interrogantes.

- Realiza un dibujo o registro gráfico de la trayectoria del objeto 
- ¿Con qué estructura o forma relacionas los registros gráficos que realizaste?  
un arco
- ¿Qué aspectos tuviste en cuenta en cada ejercicio, para realizar la gráfica?  
las medidas y posición en que se lanza el balón
- ¿Qué información necesitas para realizar la gráfica de cada lanzamiento en el plano cartesiano?  
los datos
- ¿Qué similitudes hay entre los registros gráficos?  
los cálculos

Una vez finalizados los retos, se pide a los estudiantes que con los registros visuales identificaran si había algunas relaciones o patrones en las trayectorias. En sus respuestas se pueden notar que asocian las trayectorias de los objetos con curvas parabólicas, o que tienen la forma del arcoíris, un arco, puente, media luna o de la letra u o la letra n. Estos acercamientos a la representación gráfica, refuerza

la comprensión de los estudiantes, al requerir que en algún momento apliquen su conocimiento matemático para representar visualmente lo que han observado y comprendido.

A modo de conclusión de los ejercicios de activación de conocimientos previos, se reconoce, que inicialmente, los estudiantes se enfrentaron con situaciones cotidianas, que son el punto de partida para introducir conceptos matemáticos más complejos y para llegar e ir acercándolos a la contextualización de conceptos matemáticos en situaciones del mundo real.

En algunos de los ejercicios propuestos, se registraron datos en tablas de valores con la intención de reconocer la comprensión de la relación entre las variables independientes y las dependientes. Dichas tablas permitieron observar, como los estudiantes estaban organizando la información e identificando patrones, lo que es esencial para entender las funciones cuadráticas y cómo se comportan.

Pasando a otro aspecto propuesto en el carrusel, los estudiantes debían trazar las gráficas en el sistema de coordenadas, con la intención de visualizar la relación entre las variables y observar, cómo los cambios en una variable, pueden afectar a otra. En los registros, se logró evidenciar que realizaban las representaciones con dibujos donde se ve la trayectoria de los objetos, o también implementaron gráficas usadas en la estadística descriptiva como el diagrama de barras o el de puntos. Estas gráficas propuestas, al igual que el sistema de coordenadas, permiten representar o resumir datos, así como proporcionar información del comportamiento de los mismos. Desde este punto de vista de los estudiantes, se adaptaron las actividades de otras fases de la investigación para permitir que identifiquen tendencias en líneas rectas o curvas que están asociadas a las funciones lineales y cuadráticas respectivamente.

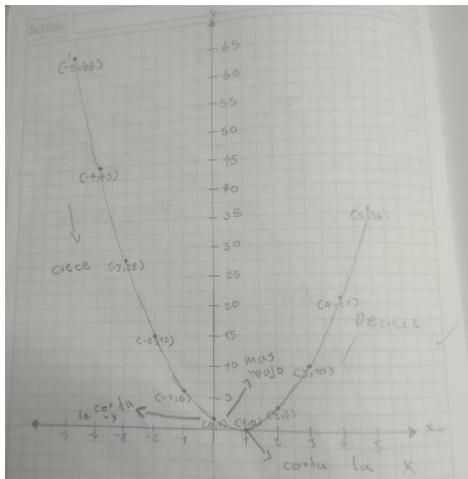
Finalmente, es importante resaltar que la actividad fue altamente participativa, ya que los estudiantes estaban involucrados en diversas tareas, como observar, registrar datos, crear o completar tablas, hacer gráficas, y analizar patrones. Esta participación activa ayudo a mantener el interés y a hacer una activación de conocimientos previos, para que el aprendizaje de los conceptos sea más efectivo o para ir acercando a los educandos a la enseñanza teórica que se va a ir logrando en las fases conceptual y simbólica.

#### **4.2.2 Momento de aprendizaje por descubrimiento, relacionado con los sistemas conceptuales.**

En este punto se esperó que los estudiantes encentraran relaciones en torno a la función que se está estudiando, partiendo del análisis del comportamiento de las variables independientes, las dependientes y su representación gráfica; con la intención de introducir el concepto de función cuadrática de una manera intuitiva y gradual.

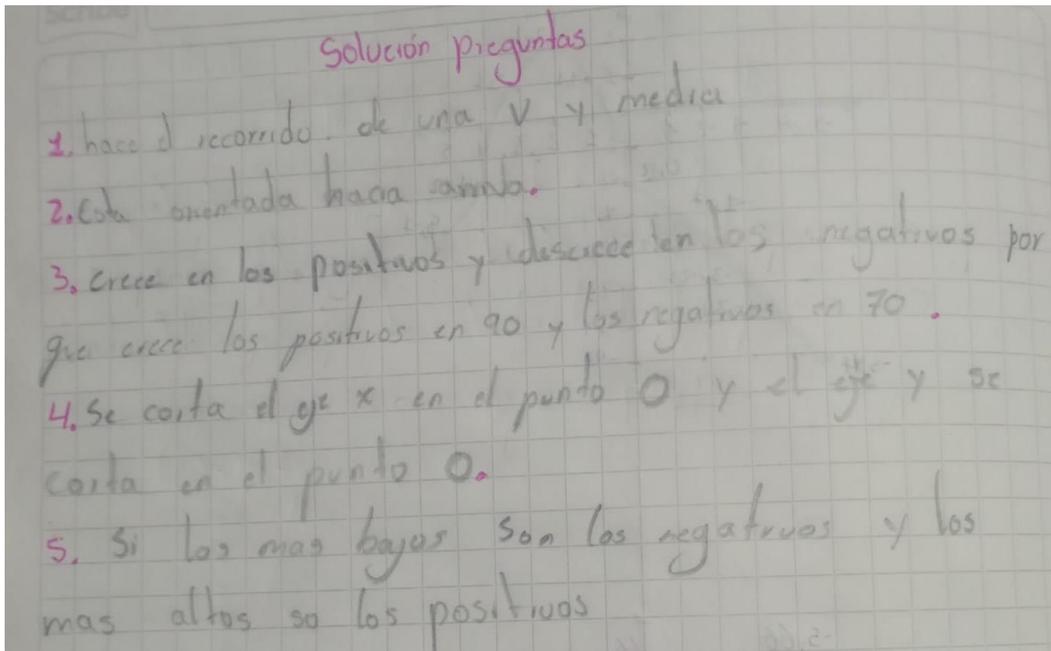
Se propone la actividad 2 (véase Anexo D), la cual está dividida en dos momentos. Inicialmente los estudiantes ubican puntos en el plano cartesiano, dados sus registros tabulares (véase Figura 26), que al unirlos forman gráficas de funciones cuadráticas en sus cuadernos o en hojas cuadrículadas, las analizan y responden una serie de preguntas orientadas a construir el concepto. En un segundo momento, (véase Anexo E) representan los datos que registraron en tablas realizadas en el carrusel y las anteriormente mencionadas, en la aplicación GeoGebra, con el fin de tener una mejor comprensión de cómo cambian las gráficas, a medida que cambian los valores, y que logren comparar las representaciones gráficas que hicieron inicialmente, con las que resultan en la graficadora.

**Figura 28.** Gráficas de las funciones cuadráticas, realizadas en los cuadernos por un estudiante del grupo1



Durante el desarrollo del primer momento de la actividad, los estudiantes ubicaron los puntos en el plano cartesiano, interactuaron con este y crearon una representación visual que luego reveló la representación gráfica en forma de “u” o de “n”, como algunos lo nombran en su lenguaje cotidiano. Al finalizar el ejercicio, los estudiantes respondieron una serie de preguntas (véase Figura 28) que se formularon con la intención de seguir con la construcción conceptual, permitiendo que reflexionen sobre la orientación de la gráfica, el vértice, los puntos de corte y otros aspectos. En este ejercicio, comenzaron a identificar patrones y características que son fundamentales para comprender una función cuadrática.

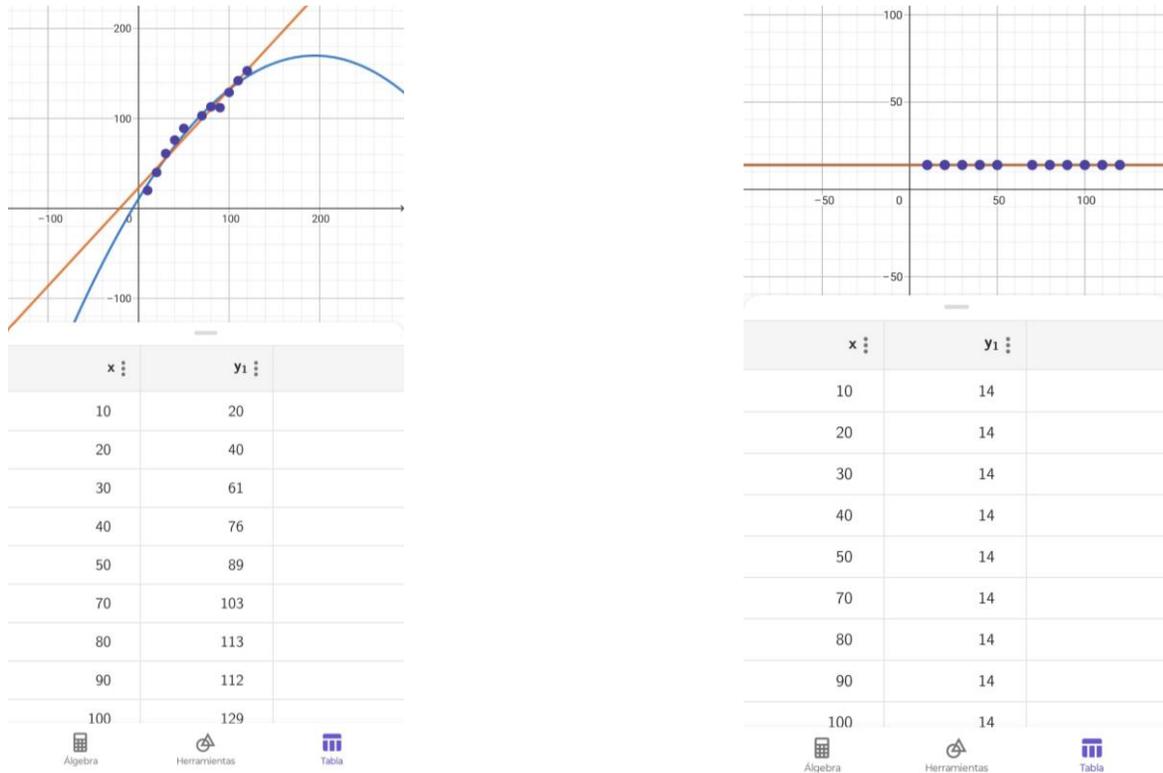
**Figura 29.** Respuestas de análisis de las representaciones gráficas de estudiantes de grupo 1



El enfoque del segundo momento (véase Anexo E), permitió que los estudiantes se enfrentaran al uso de la aplicación GeoGebra, con la intención de visualizar y manipular directamente las gráficas y observar elementos de cada una, como el vértice, la orientación, los puntos de corte con los ejes, entre otros aspectos. Adicionalmente, por medio de la graficadora, se obtuvo las ecuaciones respectivas de cada una de las gráficas, así como los parámetros o valores de los coeficientes de cada ecuación, permitiendo a los estudiantes llegar a un modelo matemático que describe cada una de los registros dados en las tablas de valores y los que ellos recolectaron en los juegos realizados en el carrusel.

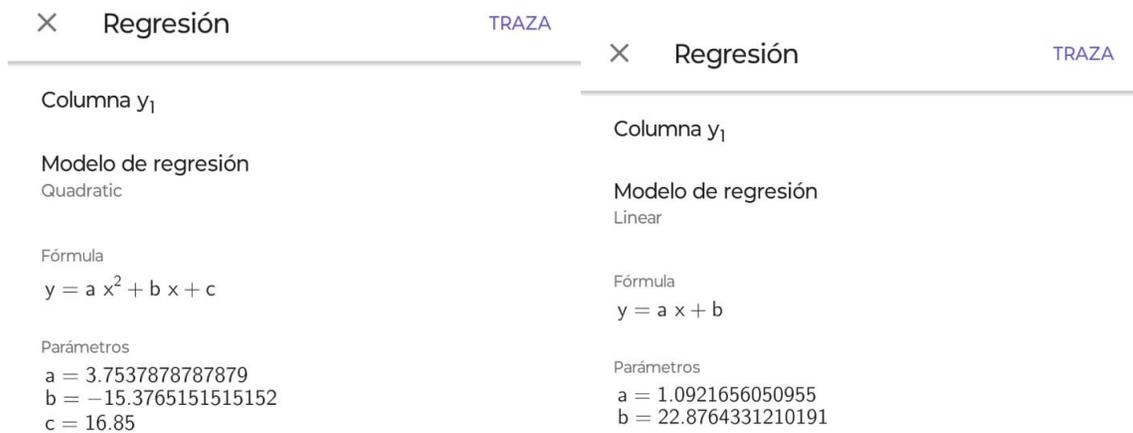
La aplicación GeoGebra permitió que los estudiantes pasaran de hacer representaciones visuales y gráficas que representa las variables tiempo, altura o distancia recorrida, con dibujos o en el plano cartesiano, a representar específicamente las funciones cuadráticas y a reconocer su expresión matemática que en este caso la arrojaba la aplicación (véase Figura 30) siguiendo un paso a paso para realizar la regresión matemática.

**Figura 30.** Datos tabulados por estudiantes en aplicación GeoGebra



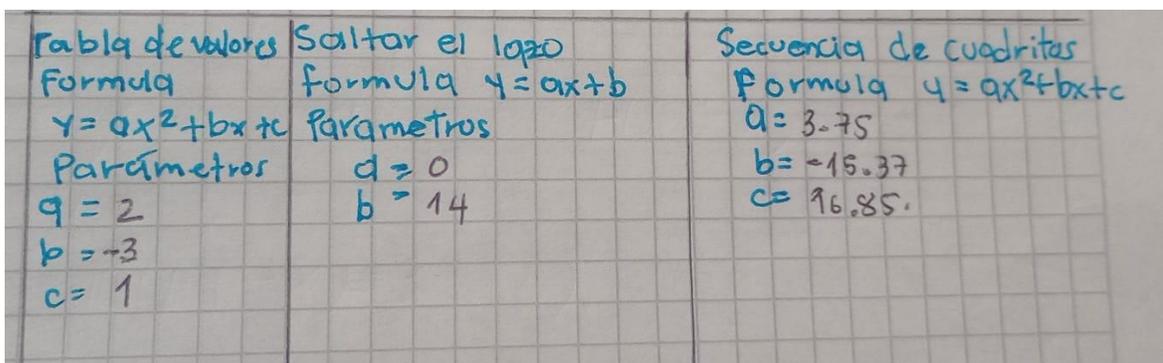
Durante la exploración que realizaron los estudiantes en la aplicación, lograron ver la tendencia de los datos proporcionados en la tabla de valores y en los datos recolectados por ellos mismos, llevándolos a diferenciar cuando el comportamiento de una gráfica es lineal y cuando es cuadrático.

**Figura 31.** Modelos de regresión lineal y cuadrático encontrado por los estudiantes con ayuda de la aplicación GeoGebra.

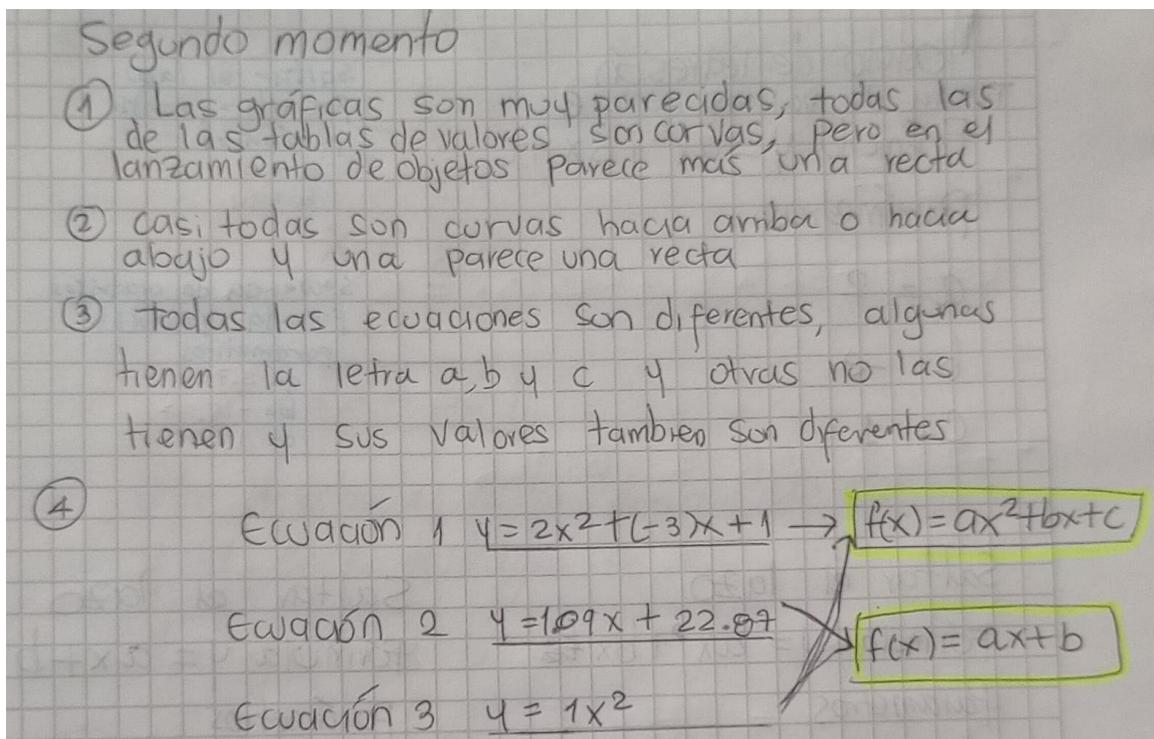


En relación con las ecuaciones de las gráficas realizadas en GeoGebra, los estudiantes pudieron notar la estructura de las mismas, y sin comprender mucho la diferencia entre los términos que observaban, se evidenciaba que todas las ecuaciones tenían valores diferentes en sus coeficientes o parámetros y que aparecían las letras  $a, b, c, x, y$ , que representaban matemáticamente los datos que ellos habían registrado.

**Figura 32.** Fórmulas encontradas por los estudiantes en la aplicación GeoGebra



**Figura 33.** Conclusiones a las que llegaron los estudiantes al finalizar el ejercicio en GeoGebra.

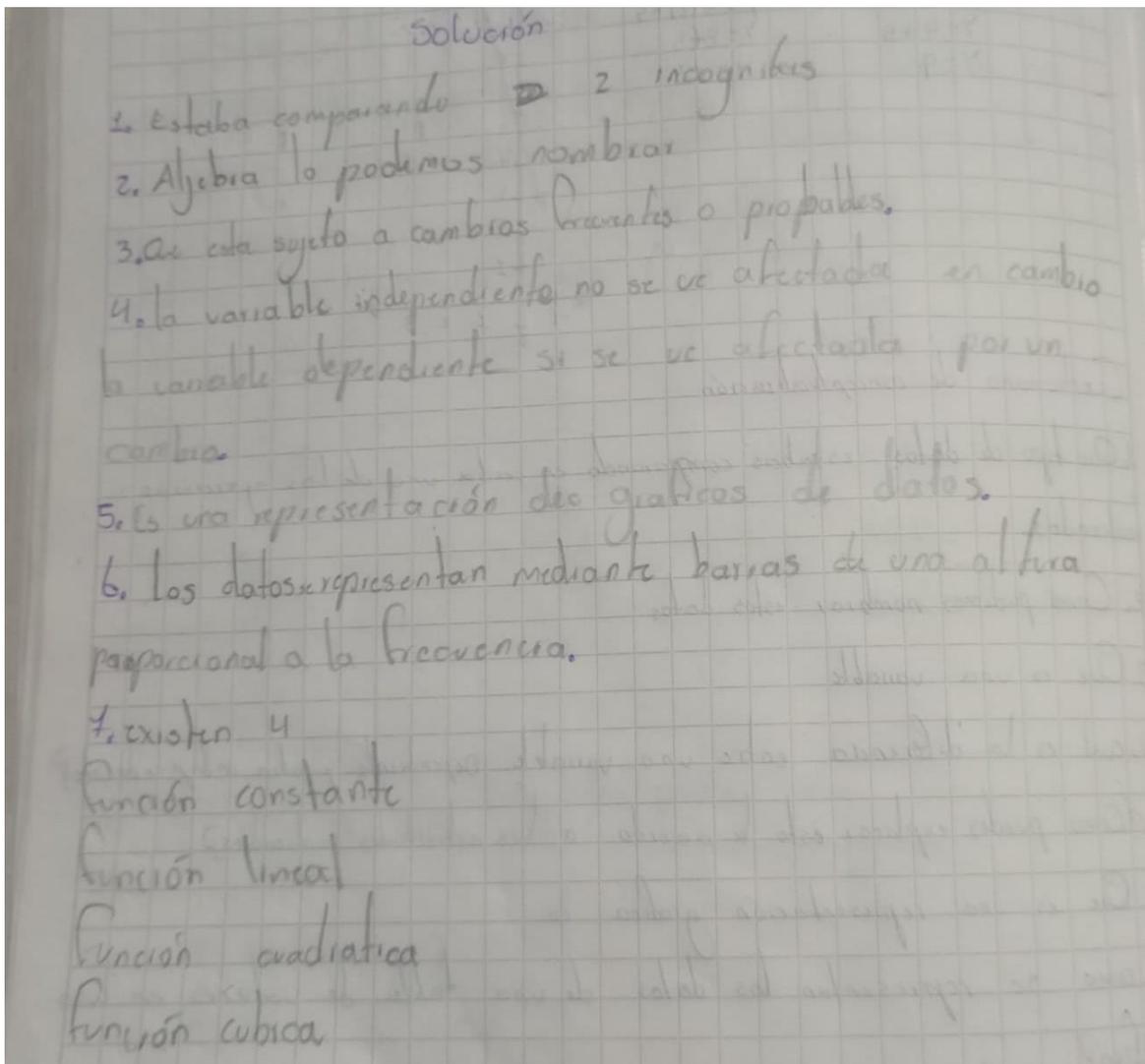


Las actividades propuestas en esta fase de la intervención, ayudó a que los estudiantes relacionaran conceptos matemáticos más abstractos, con las funciones cuadráticas, y a hacer contrastes con la función lineal, esto gracias a cada una de las experiencias prácticas del mundo real que se han realizado. Esta situación los llevó a comprender cómo las representaciones gráficas y las ecuaciones de cada situación, puede variar de acuerdo con el fenómeno estudiado.

Este ejercicio finalizó con una actividad de consulta y trabajo autónomo, que permitió complementar y afianzar lo que los estudiantes vienen trabajando en torno a la relación entre las gráficas, las diferencias entre ellas, y el reconocimiento de las ecuaciones o fórmulas cuadráticas. Se realiza socialización en clase para finalmente llegar a explicaciones más formales por parte de la docente, que pretenden relacionar todo lo trabajado hasta el momento, con la intención de que los estudiantes puedan anclar todo lo que han experimentado, con aspectos un

poco más formales y abstractos de las funciones cuadráticas, como su definición formal, su expresión algebraica, su representación gráfica, y cada uno de los aspectos simbólicos que permiten su representación en un lenguaje matemático.

**Figura 34.** Actividad de análisis y consulta final, elaborado por un estudiante.

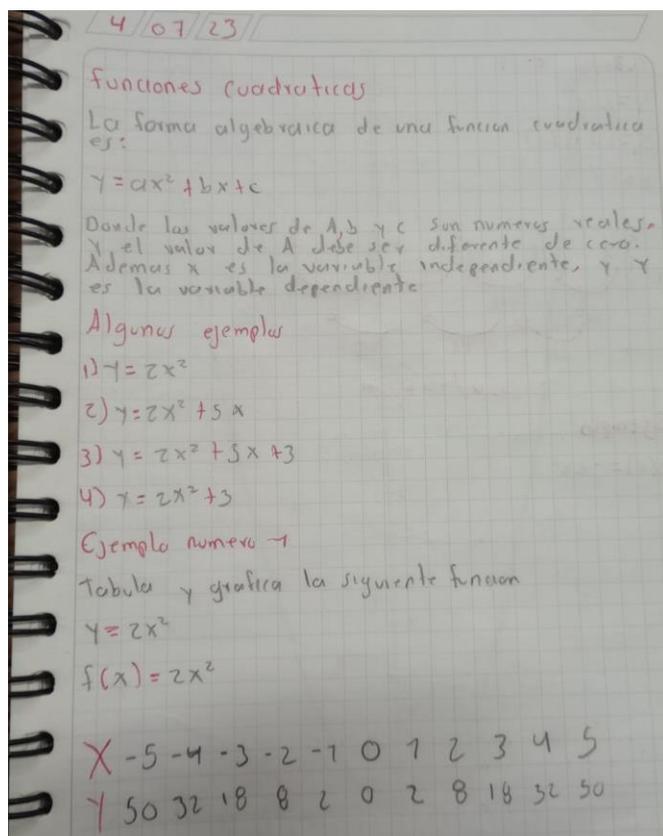


#### 4.2.3 Momento de aprendizaje por recepción, relacionado con los sistemas simbólicos.

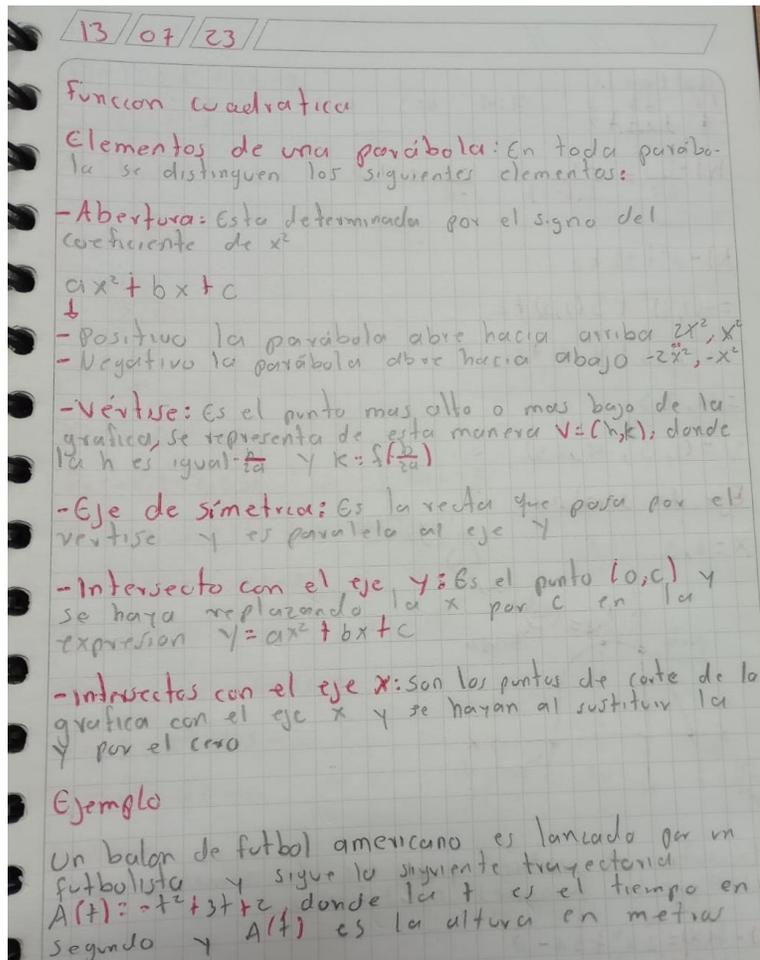
En esta fase se presentó todo el contenido conceptual de las funciones cuadráticas, relacionándolo con las actividades realizadas en los momentos 1 y 2 de la intervención. Se proporcionaron guías de trabajo con el contenido simbólico (véase Anexo F) y se realizaron exposiciones teóricas, con ejercicios prácticos, para que los estudiantes pudieran afianzar los conocimientos adquiridos.

Inicialmente, se formalizó qué es una función cuadrática, se identificó la fórmula general, se señaló los coeficientes de la ecuación y se exploró a través de la aplicación GeoGebra, como estos pueden afectar la orientación y posición de su representación gráfica. Seguidamente, se propuso a los estudiantes diferentes ejemplos y ejercicios prácticos en los que debían graficar funciones cuadráticas en el plano cartesiano, identificar el vértice, el eje de simetría, concavidad, entre otros aspectos.

**Figura 35.** Registros de contenido simbólico, por parte de los estudiantes.



**Figura 36.** Registros de contenido simbólico, por parte de los estudiantes.



Se proporcionan ejemplos y ejercicios a los estudiantes (véase Figuras 35 y 36), con la intención de que practiquen lo aprendido en clase y para que les surjan interrogantes que los lleven a una mejor comprensión de lo que es una función cuadrática.

Al finalizar la explicación simbólica, la solución de ejemplos y ejercicios de clase; se planteó una actividad (véase Anexo F) que los estudiantes desarrollaron de manera grupal e individual. En esta, se buscó profundizar en los aprendizajes, con la intención de afianzar los conocimientos adquiridos de una manera práctica y significativa.

88 Estrategia didáctica para el fortalecimiento del pensamiento variacional a través del uso de experimentos de modelación con funciones cuadráticas.

Figura 37. Registros de solución de actividad de contenido simbólico, por parte de los estudiantes

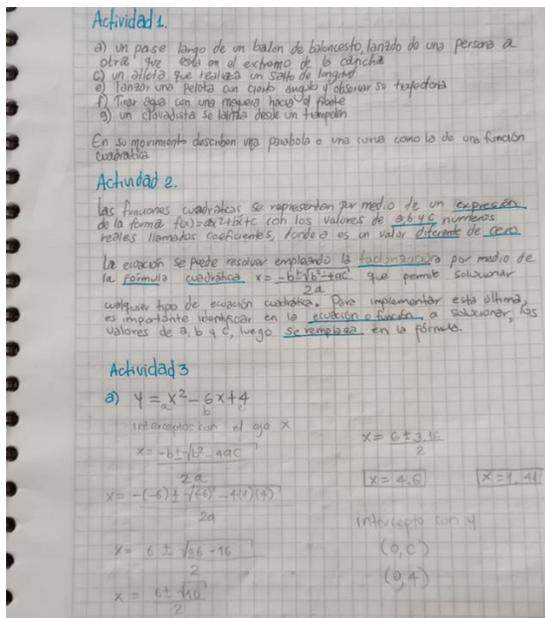
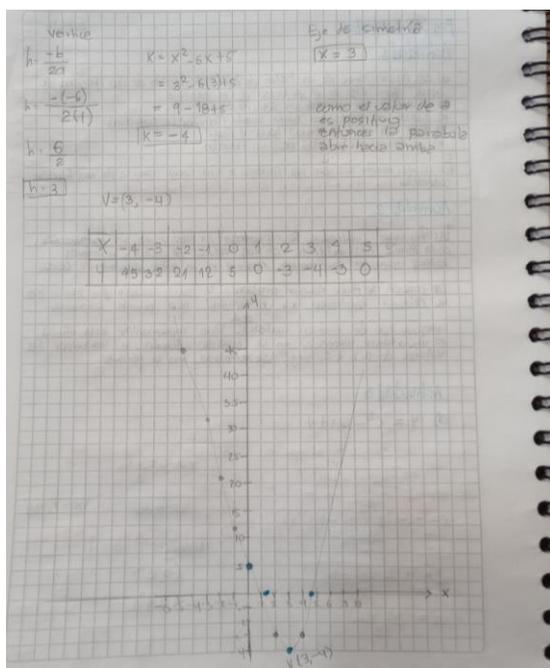


Figura 38. Registros de solución de actividad de contenido simbólico, por parte de los estudiantes



En esta fase es importante aclarar que por cuestiones de tiempo no se logró finalizar con todas las actividades simbólicas, durante el tiempo propuesto. Se desarrollaron las actividades 1, 2 y 3. Las actividades 4 y 5 se realizaron al inicio del siguiente periodo en compañía de la docente orientadora, quien nuevamente realizó socialización de lo trabajado en las clases anteriores y con ayuda de la aplicación GeoGebra, se logró visualizar cada una de las situaciones cuadráticas planteadas en clase.

Durante el inicio del tercer periodo escolar, posterior a la aplicación de las actividades de la intervención, se realizó la actividad 5 que consistía en recortar en una lámina, unos cuadrados en sus esquinas para construir una plantilla que permitiera formar unas cajas sin tapa. En las cajas, se calcularon algunas medidas del área, perímetro (véase Figura 37) que luego fueron registradas en una tabla de valores, y posteriormente los estudiantes realizaron las gráficas en la aplicación GeoGebra, con la intención de encontrar un modelo matemático que se ajustara a cada uno de sus registros.

**Figura 39.** Registros de solución de actividad 4 de contenido simbólico, por parte de los estudiantes. Tomado y adaptado de Munera et al. (2006).

Medida de los cuadrados recortados	Perímetro de la figura	Perímetro de la pestaña	Área del Cuadrado	Área de la Figura	Volumen de la caja
0,5cm	80cm	2cm	0,25cm <sup>2</sup>	39,75	180cm <sup>3</sup>
1,0cm	80cm	4cm	1cm <sup>2</sup>	39,00	324cm <sup>3</sup>
1,5cm	80cm	6cm	2,25cm <sup>2</sup>	39,75	432cm <sup>3</sup>
2,0cm	80cm	8cm	4cm <sup>2</sup>	39,00	528cm <sup>3</sup>
2,5cm	80cm	10cm	6,25cm <sup>2</sup>	39,75	602,5cm <sup>3</sup>
3,0cm	80cm	12cm	9cm <sup>2</sup>	39,00	688cm <sup>3</sup>
3,5cm	80cm	14cm	12,25cm <sup>2</sup>	39,75	791,5cm <sup>3</sup>
4,0cm	80cm	16cm	16cm <sup>2</sup>	39,00	916cm <sup>3</sup>

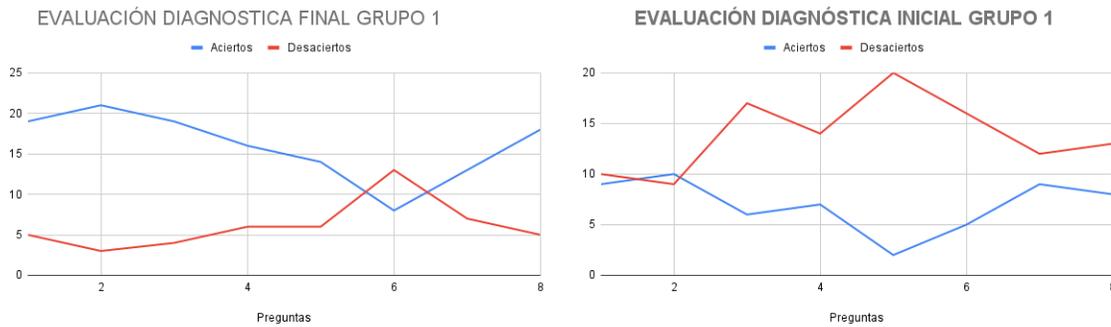
  

Medida de los cuadrados recortados	Perímetro de la figura	Perímetro de la pestaña	Área del Cuadrado	Área de la Figura	Volumen de la caja
0,5cm	78,0	2	0,25	380,25	110,25
1cm	316	4	1	361	361
1,5cm	74	6	2,25	342,25	513,25
2cm	42	8	4	324	648
2,5cm	70	10	6,25	306,25	765,25
3cm	68	12	9	281	867
3,5cm	66	14	12,25	272,25	952,25

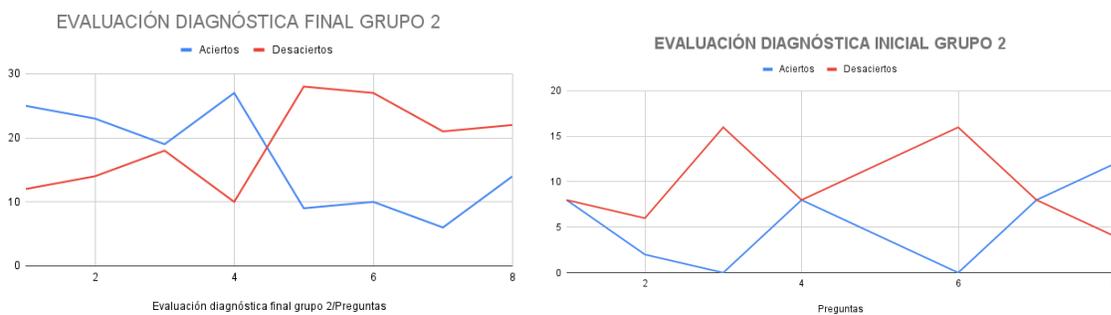
Luego de realizar las diferentes actividades de la intervención, se aplicó la evaluación diagnóstica y el cuestionario KPSI en los grupos 1 y 2, para lograr visualizar si hubo o no un progreso en el proceso de aprendizaje de los estudiantes

y reconocer la efectividad de la estrategia didáctica, en comparación con la clase tradicional de matemáticas que normalmente se imparte.

**Figura 40.** Resultado de evaluación diagnóstica final e inicial grupo 1

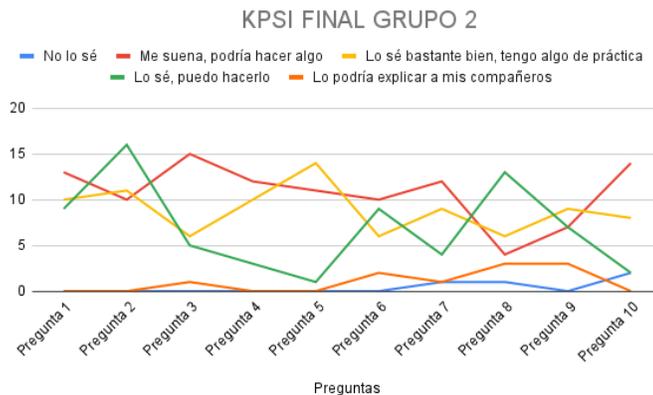


**Figura 41.** Resultados de evaluación diagnóstica final grupo 2. Elaboración propia



**Figura 42.** Resultados de KPSI final grupo 1. Elaboración propia



**Figura 43.** Resultados de KPSI final grupo 2. Elaboración propia

Tanto en la evaluación diagnóstica final, como en el cuestionario KPSI, se evidencia un avance en el proceso de aprendizaje de las funciones cuadráticas, específicamente en aspectos como el reconocimiento de su representación gráfica, su sentido u orientación, sus puntos de corte, y se revelan ciertas limitantes en el reconocimiento de estas en situaciones problema, específicamente cuando hay que identificar en una situación el tiempo que tarda un objeto en hacer un recorrido, el punto máximo o mínimo que alcanza en relación con el tiempo, por lo tanto fueron las preguntas con mayor porcentaje de error, tanto en el grupo 1 como en el grupo 2. Lo anterior, también se logra evidenciar en la evaluación de periodo realizada a los estudiantes al finalizar el segundo periodo académico.

#### **4.2.4 Validación del impacto de la implementación de la estrategia didáctica.**

Respecto al impacto producido por la aplicación de la estrategia educativa en los alumnos de la Institución Educativa Joaquín Vallejo Arbeláez, y en relación a lo previamente mencionado, es importante señalar que:

1. La estrategia fue exitosa porque permitió que los estudiantes realizaran la construcción del concepto de la función cuadrática, y aprendieran a reconocer las características fundamentales de su

ecuación, su orientación o forma de la gráfica, y a realizar procedimientos algebraicos para evaluar las funciones o encontrar puntos de corte. Aunque en los resultados de las pruebas realizadas, no se observó un cambio tan significativo, actualmente se ha logrado trabajar otras funciones como la exponencial, por ejemplo, y se ha avanzado rápidamente en explicaciones y actividades similares a las realizadas en esta estrategia didáctica. Los estudiantes logran reconocer el patrón de crecimiento o decrecimiento de las funciones, identificar en un enunciado o en un problema planteado el lenguaje algebraico y las características o el tipo de función, realizar gráficas y completar tablas de valores realizando procedimientos algebraicos simples.

2. Las actividades concretas llevaron a los estudiantes a realizar otro tipo de actividades diferentes a las que están acostumbrados a hacer dentro del salón de clase, permitiendo que vean otros espacios de la institución como lugares en los que también es posible llevar a cabo un proceso de aprendizaje, siempre y cuando ellos estén comprometidos con la disciplina, el orden, el respeto por el otro y enfocados en realizar los ejercicios propuestos, siempre pensando en llegar a otros niveles del conocimiento, que este sea más sólido, que les permita adquirir otros más complejos en un futuro.
3. En las actividades conceptuales, hubo un proceso más lento, porque algunos estudiantes presentaron dificultades en la ubicación de puntos en el plano de coordenadas, confundían la ubicación de los pares ordenados y las gráficas no quedaban bien, por lo cual algunos se frustraron cuando debían repetirlas. Cuando lograron comprender como debían hacerlo y de qué forma quedaban las gráficas, se realizaron en la aplicación GeoGebra y ellos lograron validar lo aprendido.

4. Se reconoce una mejoría en la capacidad de expresar sus ideas sin temor a equivocarse, es decir que adquirieron la capacidad de comunicar, de resolver problemas matemáticos por si solos y corregir las veces que sea necesario hasta que queden bien. También se evidenció un avance en el análisis de situaciones en la que hay una dependencia o en las que hay presencia de situaciones de variación y cambio, logrando la identificación de patrones, y diferentes formas de reconocer una función.
5. La estrategia didáctica motivó a los estudiantes a ser más participativos en clase, a cuestionar por aquello que no comprenden, a preguntar las veces que sea necesario hasta tener conocimiento pleno de lo que deben hacer, esto también posibilitó que fueran más responsables al momento de entregar sus trabajos y a ser más comprometidos cuando tenían que trabajar en grupo, recoger información, llevar un conteo del tiempo, llenar tablas de datos, hacer gráficas y responder preguntas. En la mayoría de los casos en los diferentes equipos de trabajo, se delegaban funciones, cada estudiante tenía un rol en la realización de los retos propuestos, y en muy pocas ocasiones fue necesario que la docente interviniera para asignar tareas a cada integrante.
6. De acuerdo con la aplicación GeoGebra, se reconocen sus potencialidades al momento de hacer interpretaciones algebraicas, sin embargo fue muy complejo que todos los estudiantes la tuvieran descargada en sus equipos electrónicos, y el acceso a las salas de sistema de la institución era limitado porque siempre coincidía con clases de otros docentes, por lo tanto, se motivó a que por lo menos un integrante de cada equipo la tuviera descargada, para poder realizar las actividades en las que se requería su uso. Los estudiantes se asombraban al comparar las gráficas que ellos realizaban de forma manual, con las que resultaban en la aplicación, lograban ver que las representaciones eran similares y se comprobaban o validaban

algunos de los procedimientos que ellos mismos realizaron de forma escrita en sus cuadernos o en las guías de trabajo.

## **5. Conclusiones y recomendaciones**

A continuación, se incluye una sección que aborda las conclusiones alcanzadas en el estudio, así como algunas sugerencias para futuras investigaciones en el ámbito de esta área de formación.

### **5.1 Conclusiones**

Las actividades propuestas fueron una forma efectiva de activar los conocimientos previos de los estudiantes sobre las funciones, específicamente las cuadráticas y lineales, porque encontraron relaciones entre las nociones matemáticas con las que llegan a la escuela y las situaciones prácticas cotidianas, también, se involucraron en la recopilación y representación de datos, se fomentó el aprendizaje activo, llevando a considerar que esta actividad puede facilitar a futuro una comprensión más profunda y duradera de las funciones matemáticas.

El diseño de esta intervención demostró una progresión gradual en la introducción de conceptos matemáticos. Se comenzó con una actividad concreta y práctica que luego se fue expandiendo hacia preguntas que abordan la estructura y las características de una función cuadrática, haciendo un paso por lo conceptual y lo simbólico. Esta progresión permitió que los estudiantes construyeran su comprensión paso a paso, convirtiéndolos en los protagonistas de su propio proceso de aprendizaje.

La intervención didáctica adoptó un enfoque efectivo al introducir el concepto de función cuadrática, porque combinó actividades prácticas con preguntas reflexivas,

fomentando la construcción activa del conocimiento y brindando a los estudiantes una base sólida para comprender aspectos esenciales de las funciones cuadráticas.

Durante la implementación de la intervención, se identificaron algunas dificultades significativas que retrasaron el desarrollo de algunas de las actividades propuestas, una de ellas es la asistencia irregular a las clases de algunos estudiantes, como consecuencia de esto, se afectó o limitó la participación de ellos en algunas fases, lo que no permitió un progreso efectivo en su proceso aprendizaje, además, hubo interrupción a las clases por actividades sindicales o reuniones y actividades extracurriculares representando desafíos significativos en el proceso de enseñanza, ya que no se avanzaba a un ritmo constante, por lo que era necesario hacer retroalimentaciones constantes, para no perder el hilo de la construcción conceptual y simbólica de las funciones cuadráticas.

Pasando a otro aspecto, es importante resaltar que, en las pruebas finales, se evidenció la apropiación de algunos aspectos conceptuales y simbólicos, relacionados con la función cuadrática, específicamente el reconocimiento de su representación algebraica, el registro tabular, la representación gráfica, el patrón de formación de los valores de la variable dependiente, su vértice y los puntos de intersección con los ejes. Aunque se notó una leve mejoría en la prueba final con respecto a la prueba inicial, se constató la apropiación de algunos conceptos que han permitido comprender otros tipos de funciones como la cúbica y la exponencial siendo esto un efecto colateral positivo.

La propuesta didáctica mostró que es pertinente en la construcción conceptual de las funciones cuadráticas, pero enfrentó dificultades significativas debido a las faltas de clase y las interrupciones. Estos desafíos reflejan la importancia de tener una planificación flexible y que se adapte a las circunstancias cambiantes en el entorno educativo.

## 5.2 Recomendaciones

La enseñanza, a través de los métodos propuestos desde el aprendizaje significativo y el enfoque en sistemas, debe permitir un mejor aprendizaje de los estudiantes, específicamente porque permite hacer una exploración y activación de los subsensores o conocimientos preexistentes, y luego se puede ir avanzando paulatinamente a aspectos más complejos de la temática trabajada.

La propuesta de enseñanza de las matemáticas propuesta por Vasco (1986) muestra su efectividad al interior de las aulas de clase, sin embargo es muy importante aplicarla en entornos educativos en los que haya más continuidad de las clases para poder lograr la profundización de los conceptos, ya que la falta de esta puede afectar el nivel de dominio alcanzado por los estudiantes en relación con las funciones cuadráticas o la temática en específico que se desee desarrollar en el aula de clase. Para futuras implementaciones, es crucial planear estrategias para abordar y mitigar estos obstáculos, asegurando así un proceso de aprendizaje más efectivo y completo.

Las actividades concretas pueden estar inmersas en todo momento del proceso de aprendizaje, por qué permiten la visualización, la manipulación de objetos, y la reflexión para apoyar la construcción conceptual por parte de los estudiantes. También debe permitir que estos encuentren relaciones con situaciones cotidianas, para mejorar su comprensión.

# A. Anexo: Cuestionario KPSI



## Evaluación diagnóstica inicial.

Nombre del estudiante:				Fecha:	
Preguntas	No lo se	Me suena podría hacer algo	Lo sé bastante bien, tengo algo de práctica	Lo sé puedo hacerlo	Lo podría explicar a mis compañeros
¿Qué es una función cuadrática?					
¿Logras identificar las características de una función cuadrática?					
La expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$ representa una función cuadrática					
¿Logras identificar patrones en situaciones matemáticas y no matemáticas?					
¿Reconoces situaciones que se modelan con funciones cuadráticas?					
 <p>¿La representación gráfica es de una función cuadrática?</p>					
¿Realizo registro tabular de una función?					



¿Cómo se realiza una gráfica en el plano cartesiano?					
¿Ubico en el plano cartesiano, los elementos para realizar la gráfica de una función cuadrática?					
¿Identificas aplicaciones de las funciones cuadráticas en la vida cotidiana?					

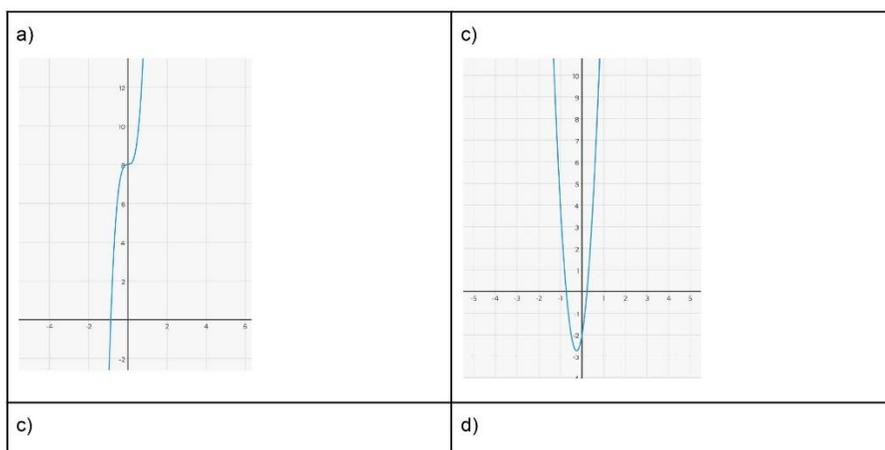
## B. Anexo: Evaluación diagnóstica inicial y final.

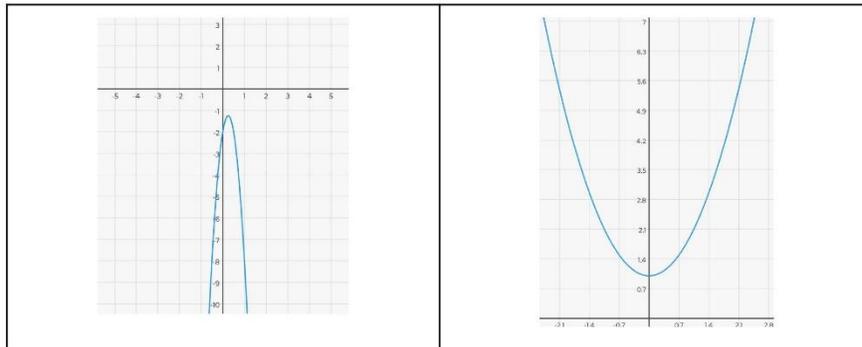


### EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA INICIAL Y FINAL FUNCIONES CUADRÁTICAS GRADO 9

Nombre del estudiante: \_\_\_\_\_ Grado: \_\_\_\_\_

- Una función la podemos escribir por medio del lenguaje verbal, es decir, a través de las palabras. Lee atentamente cada uno de los enunciados, luego selecciona el que represente una función cuadrática:
  - Un automóvil va a una velocidad constante de 110 km/h, entonces la correspondencia entre el espacio recorrido y el tiempo transcurrido es una función que se puede expresar de la siguiente forma:  $e = 110t$ .
  - Mariana va al colegio en una patineta eléctrica a una velocidad constante de 500 metros por minuto.
  - Una empresa que alquila automóviles cobra \$60.000 al día de renta más \$200 por cada kilómetro. Paola alquila un automóvil por dos días y debe pagar por el servicio \$360000. ¿Cuántos kilómetros recorrió?
  - Un estudiante lanza una pelota hacia arriba, la altura de la pelota en cada instante  $t$ , está dada por la función:  $h(t) = -2t^2 + 34t + 80$ , donde  $h(t)$  se mide en  $cm$  y  $t$ , que es el tiempo, lo medimos en segundos.
- Indica cuál de las siguientes gráficas no representan una función cuadrática





3. Observa la siguiente secuencia de números.

112      140      164      184      200...

¿Cuál es el número de la posición 10?

- a) 220  
b) 112  
c) 224  
d) 80
4. De las siguientes expresiones, cuál no cumple con las características de una función cuadrática:
- a)  $f(x) = x^2 + 5x - 2$   
b)  $y = x^2$   
c)  $h(t) = 4t^2 + 30t$   
d)  $y = 2x + 5$

**Responda las preguntas 5, 6 y 7 con la siguiente información.**

Un estudiante lanza una pelota hacia arriba, la altura de la pelota en cada instante  $t$ , está dada por la función:  $h(t) = -2t^2 + 34t + 80$ , donde  $h(t)$  se mide en  $cm$  y  $t$ , que es el tiempo, lo medimos en segundos.

5. ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en alcanzar su punto más alto?
- a) 2.2 segundos  
b) 5 segundos  
c) 8.5 segundos  
d) 6 segundos

6. ¿Cuál es la altura máxima de la pelota?
- 224.5 centímetros
  - 200 centímetros
  - 100 metros
  - 285 metros
7. ¿Cuál es la altura que alcanza la pelota cuando lleva un recorrido de 2 segundos?
- 100 centímetros
  - 140 centímetros
  - 10 metros
  - 5 hectómetros
8. Evaluar una función, significa que debes reemplazar el valor de la variable independiente (por lo general se usa la letra  $x$ ), por uno que pertenezca al dominio de la función. Teniendo en cuenta esta explicación, si el valor de  $x$  es igual a 2. ¿Cuál es el resultado de la siguiente expresión  $f(x) = x^2 + 5x - 2$ ?
- $f(2) = 2^2 + 5(2) - 2 = 12$
  - $f(2) = 2^2 + 5(2) - 2 = 8$
  - $f(2) = 2^2 + 5(2) - 2 = 2$
  - $f(2) = 2^2 + 5(2) - 2 = 16$

Las siguientes preguntas son abiertas.

9. Completa la siguiente tabla de valores, registrando la altura que alcanza la pelota en cada segundo.

$$h(t) = -2t^2 + 34t + 80,$$

Tiempo (s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Altura (cm)									

10. Realiza la gráfica de la función  $h(t) = -2t^2 + 34t + 80$ , para que logres observar el vuelo de la pelota.

# C. Anexo: Actividad 1. Activación de conocimientos previos.



(Antes I.E. Las Golondrinas)  
Aprobado por la Secretaría de Educación del Municipio de Medellín  
Según Resolución 09994 de 2007 DANE: 105091025771 NIT: 811040137-3

"Formamos ciudadanos integrales que dejan huella en el universo"

## Actividad 1.

### Activación de conocimientos previos

En esta actividad, van a encontrar 4 bases con algunos retos propuestos. Les recomiendo hacer cada uno con mucha seriedad, responsabilidad y distribuir las diferentes funciones a cada integrante de tu grupo, para que todos participen. En cada ejercicio, deben completar tablas con datos y responder algunas preguntas de lo observado o experimentado.

Nombre de los integrantes:

---

---

Grado: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

#### Base 1

##### Saltar una cuerda

##### Recomendaciones:

Para hacer el ejercicio debes tener en cuenta lo siguiente:

- Un estudiante debe saltar una cuerda de manera constante, durante 2 minutos.
- Otro debe contar la cantidad de saltos en voz alta para que todos escuchen
- cada 10 segundos deben registrar la cantidad de saltos que logra realizar
- Un tercer o cuarto integrante debe ir registrando los datos en una tabla y llevar el control de un cronómetro, para tener mayor precisión en la recolección de los datos.

Los datos, los deben registrar en la siguiente tabla de valores.

Tiempo (s)	cantidad de saltos


Cuando finalicen el ejercicio, deben responder las siguientes preguntas:

1. ¿De qué manera aumentan la cantidad de saltos en relación con el tiempo transcurrido? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
2. Si la persona que está saltando, siempre lo hace con el mismo ritmo y de manera constante sin detenerse, crees que se puede predecir la cantidad de saltos que hace en un \_\_\_\_\_ determinado \_\_\_\_\_ tiempo. ¿Por qué? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
3. Si aumentamos el tiempo que la persona está saltando, por ejemplo a 5 minutos, cuántos saltos realiza aproximadamente \_\_\_\_\_  
¿Es posible predecir esto sin necesidad de repetir el ejercicio? \_\_\_\_\_  
¿Cómo puedes explicar esto?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
4. ¿Cuál es el promedio de los saltos que hace tu compañero durante los dos minutos?: \_\_\_\_\_
5. Escribe una expresión algebraica que represente la cantidad de saltos en relación con el tiempo. \_\_\_\_\_
6. Realiza una gráfica para representar los resultados obtenidos.

## Base 2.

### Correr en la terraza

En este ejercicio, se pide a los participantes hacer un recorrido por un espacio al aire libre, con la intención de registrar el tiempo que se demoran para avanzar cada metro y en llegar al punto final del recorrido.

### Recomendaciones:

Durante la ejecución de los recorridos, deben tener en cuenta lo siguiente:

- Un estudiante debe realizar el recorrido, ya sea caminando, corriendo o trotando en el espacio delimitado. Se recomienda que mantenga un ritmo constante.
- Otro, con ayuda del cronómetro, debe comunicar el tiempo que se demora su compañero en hacer el recorrido, mientras avanza cada metro.
- Un tercer o cuarto integrante debe ir registrando los datos en la siguiente tabla de valores.

Tiempo (s)	Distancia (m)
	1
	2
	3
	4
	5
	6

Al finalizar, deben responder las siguientes preguntas:

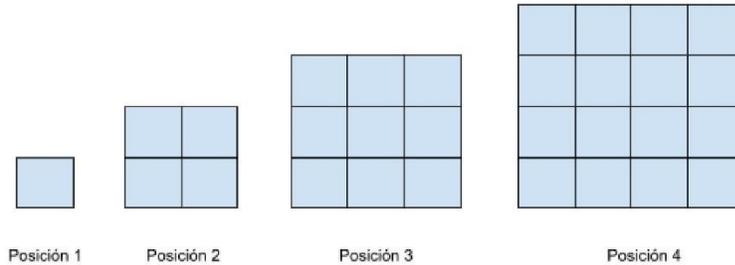
1. Realiza una representación gráfica que esté acorde con la situación planteada.
2. ¿Qué características tiene la gráfica? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
3. ¿Cuánto tiempo se demoraría tu compañero si la distancia que debe recorrer tiene 12 metros? \_\_\_\_\_
4. ¿A qué se refieren cuando nos hablan de mantener un ritmo constante? \_\_\_\_\_
5. ¿De qué depende la distancia que recorra el estudiante? \_\_\_\_\_

### Base 3.

#### Experimentando con secuencias de cuadrados.

En esta base, los estudiantes van a encontrar unos recortes de cuadrados, con los cuales deben organizar una sucesión, teniendo en cuenta la observación y reconocimiento de

patrones o regularidades así como el análisis de cada figura formada, de acuerdo a la posición que ocupan:



1. ¿Qué características tiene la formación de la secuencia? \_\_\_\_\_
2. ¿Cuál es la cantidad de cuadrados ubicados en las posiciones 6 , 7 , 8 , 9 y 10?  
\_\_\_\_\_
3. ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad de cuadros que hay en cada posición? \_\_\_\_\_
4. ¿Cómo está variando la cantidad de cuadros en cada posición?  
\_\_\_\_\_
5. Teniendo en cuenta la secuencia realizada en el ejercicio anterior, completa los valores de la siguiente tabla.

Posición										
Cantidad de cuadrados										

6. ¿Cuál crees que sea la expresión algebraica que permita describir la formación de la secuencia de cuadritos? \_\_\_\_\_
7. Realiza una gráfica con los datos obtenidos en el punto 5.

#### Base 4

Trayectoria de objetos.

Se recomienda a los educandos que tomen algunos objetos de su preferencia y se les sugiere que se ubiquen dos personas, una al frente de la otra, para lanzar el objeto seleccionado. Seguidamente, se le pide a un observador que realice un video, puede ser en cámara lenta si

el celular lo permite o que mire atentamente la trayectoria para luego describir dicho movimiento. Se le sugiere a los estudiantes, turnarse en dicho ejercicio, para que todos puedan tener el rol de observadores.

Los estudiantes, deben hacer los retos propuestos para tener un criterio de comparación de su respectiva trayectoria:

1. Lanzamiento de un balón de baloncesto al aro
2. lanzar el balón de voleibol de un extremo a otro de la malla
3. Lanzamiento de un balón o de una pelota desde el piso hacia arriba y se observa su trayectoria
4. Sostener una cuerda desde sus dos extremos y pedir a un compañero que salte, otro debe observar la forma de la cuerda.

Luego de realizar la observación, los estudiantes deben resolver los siguientes interrogantes.

- a) Realiza un dibujo o registro gráfico de la trayectoria del objeto
- b) ¿Con qué estructura o forma relacionas los registros gráficos que realizaste?

\_\_\_\_\_

c) ¿Qué aspectos tuviste en cuenta en cada ejercicio, para realizar la gráfica?

\_\_\_\_\_

- d) ¿Qué información necesitas para realizar la gráfica de cada lanzamiento en el plano cartesiano?

\_\_\_\_\_

- e) ¿Qué similitudes hay entre los registros gráficos?

\_\_\_\_\_

**Cuando finalices las actividades de las cuatro bases responde la siguiente pregunta:**

Que diferencias o similitudes hay entre las gráficas que realizaste en cada una de las bases:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## D. Anexo: Actividad 2. Identificación de la función cuadrática a partir del registro tabular y la construcción de fórmulas.



(Antes I.E. Las Golondrinas)  
Aprobado por la Secretaría de Educación del Municipio de Medellín  
Según Resolución 09994 de 2007 DANE: 105001025771 NIT: 811040137-3

"Formamos ciudadanos integrales que dejan huella en el universo"

**Actividad 2. Identificación de la función cuadrática a partir del registro tabular y la construcción de fórmulas.**

**Nombre de los integrantes:**

**Grado:** \_\_\_\_\_

### Primer momento

La siguiente actividad, consiste en realizar gráficas dados sus registros tabulares, Para ello se dan las siguientes instrucciones:

1. Ubicar los puntos en el plano cartesiano, utilizando los valores de  $x$  como coordenadas horizontales y los valores de  $y$  como coordenadas verticales.
2. Recuerda que debes nombrar los ejes del plano cartesiano.
3. Una vez todos los puntos esten ubicados en el plano cartesiano, dibuja con tu lápiz una curva que pase por cada uno de ellos.
4. A continuación están los registros tabulares que debes hacer en el plano cartesiano (debes hacer uno por cada tabla de datos).

a) Tabla de datos 1.

x	y
-5	39
-4	28
-3	19
-2	12
-1	7
0	4
1	3
2	4
3	7
4	12
5	19

b) Tabla de datos 2.

x	y
-5	-58
-4	-39
-3	-24
-2	-13
-1	-6
0	-3
1	-4
2	-9
3	-18
4	-31
5	-48

c) Tabla de datos 3

x	y
-5	70
-4	45
-3	26
-2	13
-1	6
0	5
1	10
2	21
3	38
4	61
5	90

d) Tabla de datos 4.

x	y
-5	-47
-4	-34
-3	-23
-2	-14
-1	-7
0	-2
1	1
2	2
3	1
4	-2
5	-7

e) Tabla de datos 5.

x	y
-5	66
-4	45
-3	28
-2	15
-1	6
0	1
1	0
2	3
3	10
4	21
5	36

**Preguntas que permiten complementar el análisis de los registros. Debes responder las siguientes preguntas por cada una de las gráficas.**

1. ¿Cuál es el recorrido que hace la gráfica?
2. ¿Hacia dónde está orientada la gráfica?
3. ¿En qué puntos crece y en qué puntos decrece la gráfica?
4. ¿Cuáles son los puntos en los que la gráfica corta al eje  $x$  y el eje  $y$ ?
5. ¿Es posible identificar, cuál es el punto más bajo o más alto de cada gráfica?  
¿Cuáles son esos puntos?
6. **Nota: Descargar la aplicación geogebra para la próxima clase.**

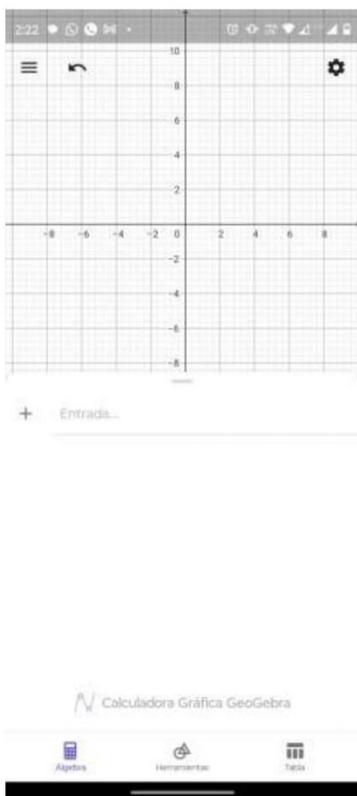
## E. Anexo: Actividad 2. Segundo momento.

### Actividad 2.

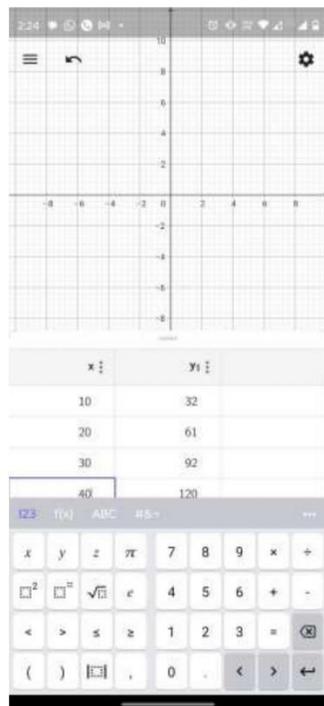
#### Instrucciones para usar GeoGebra

Atiende las siguientes instrucciones, para realizar las gráficas usando la graficadora de GeoGebra. Con anterioridad se pide a los estudiantes que descarguen la aplicación en sus celulares y se dan explicaciones básicas para su uso.

1. Ingresa a la aplicación graficadora de GeoGebra desde tu celular



2. En la parte inferior derecha, busca la opción tabla
3. Luego ingresas los datos recolectados en el ejercicio de saltar una cuerda, de la siguiente manera:



4. Seguidamente, en los puntitos que tiene la letra y, vas a dar enter y vas a buscar la opción de regresión.
5. Te van a salir las siguientes opciones:

Donde dice modelo de regresión puedes seleccionar Linear o Quadratic



6.  Luego damos clic en la opción TRAZA y observamos el tipo de gráfica que resulta

7. Puedes repetir nuevamente el proceso para seleccionar otra opción y donde dice modelo de regresión podemos seleccionar nuevamente entre "Linear" o "Quadratic", para que observemos el tipo de gráfica que resulta y la que más se ajusta a los puntos ubicados o a los datos que registraron en las diferentes tablas de valores.

8. Con cada uno de los valores de las tablas, debes escribir las ecuaciones o las fórmulas que resultaron en cada caso de regresión linear o quadratic, (debes escribir la fórmula y los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ . que aparecen en la graficadora cuando vas en el paso 5.

Modelo de regresión: \_\_\_\_\_  
Formula: \_\_\_\_\_  
Parámetros:  
a= \_\_\_\_\_  
b= \_\_\_\_\_  
c= \_\_\_\_\_

### Segundo momento.

Después de haber realizado las respectivas gráficas en GeoGebra y observado su forma y sus respectivas ecuaciones, responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué relación hay entre las gráficas que acabas de obtener en la aplicación y las primeras que realizaste en las actividades de saltar el lazo, observar la secuencia de cuadritos y el lanzamiento de los objetos?
2. ¿Qué diferencias observas en las gráficas que realizaste?
3. ¿Las ecuaciones o fórmulas de las gráficas que observaste en la graficadora son iguales? ¿En qué se diferencian?
4. Completa el siguiente cuadro con tus ecuaciones y escoge la que tenga más similitudes con las que tu encontraste en la graficadora, luego únelas con una línea.

Formulario para conceptualización de ecuaciones y funciones. El formulario está dividido en tres secciones:

- Ecuación 1: \_\_\_\_\_
- Ecuación 2: \_\_\_\_\_
- Ecuación 3: \_\_\_\_\_

Las ecuaciones de ejemplo mostradas son:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(x) = ax + b$$

### Preguntas para la conceptualización

- ¿Qué tipo de datos estabas comparando en cada uno de los ejercicios realizados?
- ¿Cómo podemos nombrar estos datos?
- ¿Qué es una variable?
- ¿Cuál es la diferencia entre una variable dependiente y otra independiente? ¿Cómo puedes explicarlo de acuerdo a las actividades realizadas?
- ¿Qué es una representación gráfica?
- ¿Cómo se representan los datos de una tabla valores en una gráfica?
- ¿Qué tipo de funciones polinómicas existen, cómo se diferencian y cómo son sus gráficas?
- ¿Qué importancia tienen las representaciones gráficas en tu vida cotidiana?
- En el contexto algebraico, ¿qué es una parábola?
- ¿Qué relación encuentras entre la parábola y las gráficas que realizaste de los diferentes lanzamientos de objetos?

## F. Anexo: Actividad de momento de aprendizaje por recepción.



### Función cuadrática

#### Objetivos de aprendizaje

Identificar escenarios en el entorno que puedan ser descritos mediante trayectorias parabólicas.

Definir atributos de la función cuadrática a partir de diversas formas de representación, como gráficos y tablas, entre otras.

Hallar las soluciones de una función cuadrática a partir de variadas representaciones, ya sea en términos simbólicos, gráficos o mediante procedimientos algebraicos.

#### Actividad 1

Identifica cuál de las siguientes situaciones describen en su movimiento una parábola. Justifica tu respuesta

- Un pase largo de un balón de baloncesto, lanzado de una persona a otra que está al extremo de la cancha
- Un vehículo que se mueve a una velocidad constante
- Un atleta que está haciendo un recorrido, para tomar impulso y finalmente realizar un salto de longitud.
- Una deuda que se paga a cuotas iguales todos los meses durante un año
- Lanzar una pelota con cierto ángulo y observar su trayectoria en el aire
- Tirar agua con una manguera hacia el frente y mirar su recorrido
- Un clavadista se lanza desde un trampolín

#### Actividad 2.

De acuerdo a lo explicado por tu docente y las diferentes actividades que se han realizado de las funciones cuadráticas, completa el siguiente texto:

Las funciones cuadráticas, se representan por medio de un \_\_\_\_\_ de la forma:  
 $f(x) = ax^2 + bx + c$  con los valores de \_\_\_\_\_ números reales llamados coeficientes, donde  $a$  es un valor \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

La ecuación se puede resolver empleando la \_\_\_\_\_ o por medio de la \_\_\_\_\_  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  que permite solucionar cualquier tipo de ecuación cuadrática. Para implementar esta última, es importante identificar en la \_\_\_\_\_ a solucionar, los valores de  $a, b$  y  $c$ , luego \_\_\_\_\_ en la fórmula.



Al finalizar el ejercicio, socializa el ejercicio con otros compañeros, para comparar tus respuestas, luego se realiza socialización general, guiada por la docente.

### Actividad 3

Tabula y grafica las siguientes funciones cuadráticas, e identifica cuáles son sus intercepto con los ejes, vértice, eje de simetría y concavidad.

- a)  $y = x^2 - 6x + 5$
- b)  $f(x) = x^2 - 8x + 4$
- c)  $y = -3x^2$
- d)  $f(x) = x^2 - 6$
- e)  $f(x) = -4x^2 - 2x + 12$
- f)  $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$

### Actividad 4

Resuelve las siguientes situaciones que tiene que ver con las funciones cuadráticas. Puedes ayudarte de la aplicación GeoGebra para validar tus resultados obtenidos.

1. Una bola de beisbol es lanzada por un jugador, desde el piso hacia arriba. La altura de la bola, después de  $x$  segundos se representa por la expresión cuadrática  
 $f(x) = -8x^2 + 12$  en qué momento la pelota vuelve a tocar el piso.
2. Una persona lanza una piedra al aire, la altura de la piedra después de  $t$  segundos, esta dada por la siguiente función  $f(t) = -5t^2 + 25x + 3$  siendo  $t$  el tiempo en segundos, y  $f(t)$  la altura en metros. Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra y en cuanto tiempo se logra esta. Representa la función en GeoGebra y valida tus respuestas.
3. En una empresa, las ganancias de los productos que ofrecen, representada en millones de pesos, está dada por la siguiente función:  $f(x) = -x^2 + 80x - 910$ , donde la  $x$  representa la cantidad de artículos vendidos. De acuerdo con esta información, completa la siguiente, responde las siguientes preguntas:

a) Completa la siguiente tabla:

Artículos vendidos	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Ganancias										

- b) ¿Cuál es la mayor ganancia que puede obtener la empresa?
- c) ¿Cuántos artículos debe vender para lograrlo?
- d) Construye la gráfica en la aplicación GeoGebra

**Actividad 5.**

Esta actividad es tomada y adaptada de Múnera, J. J., et. al (2006). Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

1. Construcción de cajas rectangulares sin tapa para empaclar dulces.
  - A cada pareja de estudiantes, se les entrega una lámina rectangular, con la intención de que recorten en ellas algunos centímetros en las esquinas, tomen sus medidas, y luego completen la tabla de valores.
  - Cuando recorten los centímetros en la lámina, deben dar sus datos para que entre todos los estudiantes, se complete la siguiente tabla:

Equipo	X centímetros recontados en las esquinas	Perímetro de la figura resultante [cm]	Perímetro de la pestaña recortada [cm]	Área del cuadrado cortado [cm <sup>2</sup> ]	Área de la figura para construir la caja [cm <sup>2</sup> ]	Volumen de la caja [cm <sup>3</sup> ]
1	0.5					
2	1					
3	1.5					
4	2					
5	2.5					
6	3					
7	3.5					
8	4					
9	4.5					
10	5					

2. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja con mayor área?
3. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja con menor área?
4. ¿Cuál es la caja con mayor volumen?
5. ¿Cuál es la caja con menor volumen?
6. ¿De las cajas que realizarte, cuál tiene una mayor capacidad para empaclar los dulces? ¿Por qué?
7. Realiza diferentes gráficas en la aplicación GeoGebra, usando los datos de la tabla que acabas de llenar, específicamente con las siguientes variables:
  - a. La variable x que representa los valores o la cantidad de centímetros recortada en la lámina y el área del cuadrado recortado  
 Qué fórmula resultó: \_\_\_\_\_  
 De acuerdo con la fórmula observada en la aplicación, ¿qué tipo de función es? \_\_\_\_\_



¿Cuál es su concavidad?

¿Cuál es su vértice? y qué interpretación le damos a esta medida.

- b. La variable  $x$  representa los valores o la cantidad de centímetros recortada en la lámina y el área de la figura para construir la caja.

Qué fórmula resultó: \_\_\_\_\_

De acuerdo con la fórmula observada en la aplicación, ¿qué tipo de función es? \_\_\_\_\_

¿Cuál es su concavidad?

¿Cuál es su vértice? y qué interpretación le damos a esta medida.

- c. La variable  $x$  que representa los valores o la cantidad de centímetros recortada en la lámina y el área del cuadrado recortado
- d. La variable  $x$  que representa los valores o la cantidad de centímetros recortada en la lámina y el área del cuadrado recortado
- e. La variable  $x$  que representa los valores o la cantidad de centímetros recortada en la lámina y el área del cuadrado recortado
- f. ¿Qué similitudes o diferencias observas en las gráficas que realizaste?

# G. Anexo: Consentimiento informado de participación en la investigación



Medellín, 27 de marzo de 2023

Consentimiento informado Universidad Nacional de Colombia e Institución Educativa Joaquín Vallejo Arbeláez

Estimado padre de familia: Mediante este documento solicito comedidamente su consentimiento para que su hijo (a) participe en el trabajo de investigación, realizado por la Licenciada Maira Yurany Palacios Perea, como requisito para optar el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, durante el tiempo que pueda durar el proyecto. El propósito de la investigación consiste en diseñar una estrategia didáctica que contribuya al fortalecimiento del pensamiento variacional con ayuda de experimentos que se modelan con funciones cuadráticas.

Les comunico que toda la información recolectada, pruebas, actividades realizadas, videos, fotos, entrevistas y demás información resultante del proceso de investigación, se realizan exclusivamente con fines pedagógicos y relacionados con el mencionado estudio.

Agradezco su cooperación.

Doy mi consentimiento.

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: \_\_\_\_\_

NOMBRE DEL PADRE DE FAMILIA: \_\_\_\_\_

FIRMA: \_\_\_\_\_

CC: \_\_\_\_\_

## Bibliografía

Amaya Baena, J. I. (2019). Los sistemas de representación semiótica en la enseñanza de funciones polinómicas de segundo grado en la Institución Educativa Javiera Londoño.

Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*, 1(1-10), 1-10.

Constitución Política de Colombia. (1991). Colombia.

del Campo, L. G. M., & Morales, J. V. (2016). *Más allá de la calificación: instrumentos para evaluar el aprendizaje*. Universidad de Concepción, Dirección de Docencia, Unidad de Investigación y Desarrollo Docente.

Esquer, M., Robles, A. D., Cosmes, S., & Ansaldo, J. (2015). Propuesta didáctica con funciones cuadráticas de problemas en contexto a nivel superior. Recuperado en mayo de 2022 en: <http://funes.uniandes.edu.co/16707/1/Esquer2015Propuesta.pdf>

Gómez, B. R. (2002). Una variante pedagógica de la investigación-acción educativa. *Revista Iberoamericana de educación*, 29(1), 1-10.

Henao, S. y Vanegas, J. (2013). La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos. Actas del VII CIBEM. (pp. 2883-2890) Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/2518/1/Lamodelaci%C3%B3nHenaoAsocolme2012.pdf>

Huapaya Gómez, E. (2012). Modelación usando función cuadrática: experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria.

ICFES. Niveles de desempeño de matemáticas consultado el 26 de mayo en: <https://www2.icfes.gov.co/documents/39286/2349876/Niveles+de+desempeno+prueba+de-matematicas.pdf>

- Institución Educativa Joaquín Vallejo Arbeláez (2022). Proyecto Educativo Institucional (PEI).
- Insuasty, E. (2004). Dificultades de estudiantes de educación media en relación con la familia de funciones cuadráticas. Tesis de pregrado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Irigoyen García, E. (2012). Resolución de problemas de funciones y gráficas por estudiantes de 3º ESO. Recuperado en mayo de 2022 en: [https://academica-e.unavarra.es/bitstream/handle/2454/15123/52599\\_Irigoyen%20Garcia%2c%20Eneko.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://academica-e.unavarra.es/bitstream/handle/2454/15123/52599_Irigoyen%20Garcia%2c%20Eneko.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Ley General de Educación (1994). Ministerio de educación nacional. Bogotá, Colombia.
- MEN (2015). Derechos básicos de aprendizaje: Matemáticas. Recuperado en mayo de 2022. <https://www.mineducacion.gov.co/portal/micrositios-preescolar-basica-y-media/Direccion-de-Calidad/Referentes-de-Calidad/339975:Lineamientos-curriculares>
- MEN. (1998). Matemáticas: Lineamientos Curriculares. Bogotá: MEN.
- MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas M. d. E. Nacional (Ed.). Bogotá: MEN
- Múnera, J. J., Marín, A. D. J., Cárdenas, M., Carvajal, B. A., & Bastidas, M. A. (2006). Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.
- Molina, P. D. J (2019). La función cuadrática: una propuesta para el trabajo en clase usando GeoGebra y el enfoque del aprendizaje basado en proyectos. Recuperado en junio de 2022 en:

<https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/20660/CB%200597913-3469.pdf?sequence=1>

- Posada, F. y Villa, J. (2006). Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional. Tesis de maestría. Universidad del Antioquia, Medellín, Colombia.
- Quesada, E. V., y Solís, G. U. (2006). Sitio web: funciones cuadráticas una experiencia de desarrollo, implementación y evaluación/Website: quadratic functions a experience of development, implementation and evaluation. *Actualidades Investigativas en Educación*, 6(2).
- Rivera, P. (2009). Interpretación de significados de la función cuadrática en un ambiente computacional, desarrollada por estudiantes de II de Bachillerato de la Escuela Normal Mixta "Pedro Nuño". (Tesis de Maestría inédita). Universidad Pedagógica Nacional "Francisco Morazán".
- Sandoval Casilimas, C. A. (1996). Investigación cualitativa.
- Stewart, J., & Redlin, L. (2007). Watson S. precálculo: Matemáticas para el cálculo.
- Tuirán, J. N. (2015). Estudiando las funciones polinómicas con el software educativo GeoGebra. *Opción*, 31(3), 897-906. Recuperado en mayo de 2022 en: <https://www.redalyc.org/pdf/310/31045567047.pdf>
- Vasco, C. E. (1986). El enfoque de sistemas en el nuevo programa de matemáticas
- Villa Ochoa, J. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis*, 31, 9-25.
- Villada Herrera, A. (2013). Diseño e implementación de curso virtual como herramienta didáctica para la enseñanza de las funciones cuadráticas para el grado noveno en la institución educativa Gabriel García Márquez utilizando Moodle.