Curso Libre Juvenil de Matemáticas

Curso Libre Juvenil de Matemáticas

Myriam Margarita Acevedo Caicedo
Myriam Leonor Campos Flórez
Luis Rafael Jiménez Becerra
Blanca Aurora León Infante

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá

Curso Libre Juvenil de Matemáticas

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia

Ignacio Mantilla, Decano
Eugenio Andrade, Vicedecano Académico

Jorge Ortiz Pinilla, Director de Publicaciones

Reimpresión, 2007
Bogotá, Colombia

ISBN 978-958-701-861-5

Impresión:
Proceditor ltda.

Diagramación: Margoth Hernández sobre original en LaTeX de los autores
Diseño de carátula: Andrea Kratzer

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia

Curso libre juvenil de matemáticas / Myriam Margarita Acevedo Caicedo ... [et al.]. — Bogotá : Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias, 2007
vi, 282 p.

ISBN 978-958-701-861-5

1. Matemáticas - Enseñanza 2. Matemáticas - Problemas, ejercicios, etc.
I. Acevedo Caicedo, Myriam Margarita, 1950-

CDD-21 510.0711 / 2007

Índice General

Presentación

En el texto que presentamos a continuación, intentamos proponer una aproximación intuitiva a algunos elementos teóricos y prácticos de la matemática básica, elementos que consideramos primordiales para iniciar los cursos de matemáticas en la universidad.

El material está orientado a enriquecer los conceptos y las herramientas que los estudiantes de los últimos años de la enseñanza media han adquirido en las instituciones escolares.

En el primer capítulo discutimos las principales propiedades de los números reales y de algunos de sus subconjuntos más notables. En el segundo, tratamos los fundamentos del álgebra, iniciando con el estudio de las expresiones algebraicas, los polinomios y sus operaciones, dedicando un espacio importante al problema de la factorización, y cerrando con el análisis de las desigualdades. En el tercero, abordamos los elementos básicos de la geometría euclidiana desde sus nociones fundamentales de geometría plana: ángulos, polígonos, triángulos, cuadriláteros, relaciones y propiedades básicas, culminando con aspectos primarios de la geometría del espacio. En el cuarto capítulo trabajamos las funciones, sus gráficas y el álgebra de funciones; además estudiamos algunas familias de funciones: lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas. Dedicamos el último capítulo a la trigonometría, iniciando con la trigonometría de triángulos rectángulos, para presentar a continuación las funciones trigonométricas, sus gráficas, relaciones y propiedades; este capítulo termina con la discusión de algunas aplicaciones importantes de la trigonometría.

Es de resaltar que al final de cada uno de los capítulos hemos incluido talleres conformados por ejercicios y problemas seleccionados para que permitan a los estudiantes, profundizar y ampliar los temas tratados en el texto.

Esta es una segunda publicación, susceptible de modificaciones y correcciones, por lo cual, invitamos a los lectores a hacernos conocer sus observaciones y sus sugerencias en cualquiera de los siguientes correos electrónicos:

mmacevedoc@unal.edu.co
mlcamposf@unal.edu.co
baleoni@unal.edu.co
lrjimenez98@yahoo.com

Capítulo 1

Los números reales

El estudio de cualquier rama de las matemáticas requiere un buen conocimiento de las principales propiedades de los números reales, así como de propiedades especiales de algunos de sus subconjuntos más notables. El propósito de este capítulo es presentar el mínimo de nociones que consideramos indispensables para cubrir estas necesidades.

1.1 Una visión preliminar

La noción de número es una de las más fundamentales en matemáticas. Su origen se remonta a la antigüedad y a través de los siglos ha pasado por un largo proceso de extensión y de generalización.

Los números más simples, los que utilizamos para contar, son los ***enteros positivos***:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Representamos el conjunto de los enteros positivos por $\mathbb{Z}^+$.

Si al conjunto de los enteros positivos le añadimos el número 0, obtenemos el conjunto de los ***números naturales*** que representamos por $\mathbb{N}$. Es decir,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Si a $\mathbb{N}$ le agregamos los inversos aditivos $-1, -2, -3, -4, -5, \ldots$ de los enteros positivos, obtenemos el conjunto de los ***números enteros*** que representamos por $\mathbb{Z}$. Luego,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

El conjunto de números más simple después de los enteros es el conjunto de los ***números racionales***. Los números racionales surgieron ante la necesidad de medir con bastante precisión distintas magnitudes tales como longitud, peso, tiempo y muchas otras. Un número es ***racional*** si puede expresarse en la forma $\dfrac{p}{q}$ donde p y q son enteros con $q \neq 0$. Como ejemplo de números racionales podemos citar:

$$\frac{1}{2}, \frac{236}{43}, \frac{2}{3}, \frac{-5}{6}, \frac{4}{1}, \frac{-121}{15} \text{ y } \frac{12}{-6}$$

Observamos que los números racionales $\dfrac{4}{1}$ y $\dfrac{12}{-6}$ son simplemente los enteros 4 y -2. En general, todo número entero es un número racional.

El conjunto de los números racionales lo representamos con el símbolo $\mathbb{Q}$.

Los griegos fueron conscientes de que los números racionales no son suficientes para medir todas las longitudes. Aunque ellos demostraron que $\sqrt{2}$ mide la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1, también probaron que $\sqrt{2}$ no puede escribirse como el cociente de dos enteros.

Los números que no son racionales, se llaman ***números irracionales***. En un contexto más avanzado, se puede demostrar que existen mucho más números irracionales que números racionales. Por el momento, podemos mencionar que si r es un número racional y $r \neq 0$ entonces $r\sqrt{2}$ es un número irracional. La reunión de todos los números racionales y todos los números irracionales constituye el conjunto de los ***números reales*** que representamos por $\mathbb{R}$.

Entre los conjuntos numéricos hasta ahora mencionados existen las siguientes relaciones:

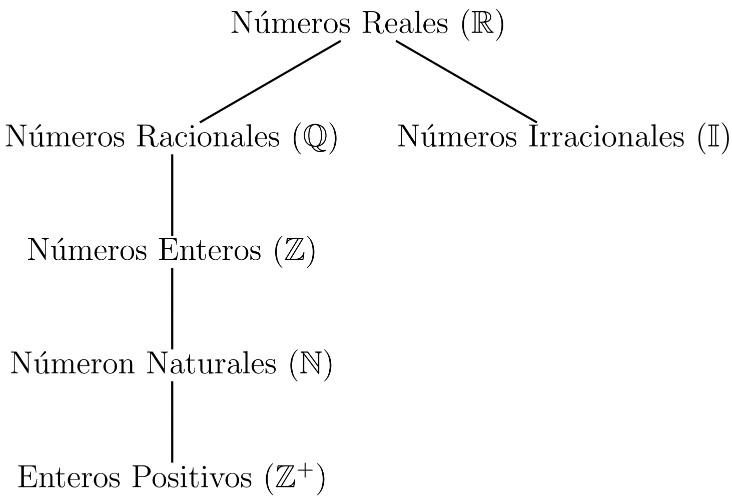
$$\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

donde $\subset$ representa la inclusión entre conjuntos. En todos los casos la inclusión es estricta.

También es conveniente mencionar que el conjunto de los números irracionales es el complemento del conjunto de los números racionales con respecto a $\mathbb{R}$. Por lo tanto, si representamos por $\mathbb{I}$ el conjunto de todos los números irracionales, tenemos la relación

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

El diagrama siguiente nos presenta las relaciones que hemos mencionado entre los principales subconjuntos de $\mathbb{R}$.



1.2 Adición y multiplicación de números reales

Sobre el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales tenemos definidas dos operaciones, la ***adición*** y la ***multiplicación*** que asignan a cada par x, y de números reales su ***suma*** $x + y$ y su ***producto*** $x \cdot y$ (que escribiremos abreviadamente como xy) de tal manera que se cumplen las siguientes propiedades básicas:

P.1 $\mathbb{R}$ es ***cerrado*** para la adición y la multiplicación. Es decir, si x y y son números reales, entonces $x + y$ y xy son también números reales.

P.2 La adición y la multiplicación en $\mathbb{R}$ son ***conmutativas***. Es decir, si x y y son números reales, entonces

$$x + y = y + x \qquad \text{y} \qquad xy = yx$$

P.3 La adición y la multiplicación en $\mathbb{R}$ son ***asociativas***. Es decir, si x, y y z son números reales, entonces

$$x + (y + z) = (x + y) + z \qquad \text{y} \qquad x(yz) = (xy)z$$

P.4 La multiplicación es ***distributiva***, a izquierda y a derecha, con respecto a la adición en $\mathbb{R}$. Es decir, si x, y y z son números reales, entonces

$$x(y + z) = xy + xz \qquad \text{y} \qquad (x + y)z = xz + yz$$

P.5 Existen ***identidades*** para la adición y la multiplicación en $\mathbb{R}$. Es decir, existen dos números reales diferentes que representamos por 0 y 1, tales que para todo número real x se tiene

$$x + 0 = 0 + x = x \qquad \text{y} \qquad x1 = 1x = x.$$

P.6 Existen ***inversos*** para la adición de números reales y para la multiplicación de números reales diferentes de cero.

Para todo número real x, existe un número real que representamos por $-x$, tal que

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

Para todo número real $x \neq 0$, existe un número real que representamos por $\frac{1}{x}$ o por x^{-1}, tal que

$$x\frac{1}{x} = \frac{1}{x}x = 1$$

El número $-x$ se llama el ***inverso aditivo*** de x o el ***opuesto*** de x. El número $\frac{1}{x}$ se llama el ***inverso multiplicativo*** de x o el ***recíproco*** de x.

Dados los números reales x, y y z, la propiedad asociativa de la adición nos dice que $x + (y + z) = (x + y) + z$. Esto nos lleva a definir sin ambigüedades el símbolo $x + y + z$ como el resultado común de estas expresiones. Similarmente, si x, y, z y w son números reales, por repetidas aplicaciones de la propiedad asociativa de la adición podemos comprobar que los números

$$\begin{aligned} &x + (y + (z + w)), \\ &x + ((y + z) + w), \\ &(x + (y + z)) + w, \\ &((x + y) + z) + w \qquad \text{y} \\ &(x + y) + (z + w), \end{aligned}$$

son todos iguales y definir $x+y+z+w$ como el resultado común de estas expresiones. En general, si tenemos una colección finita $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números reales, todas las formas posibles en que los asociemos para sumarlos producen el mismo resultado y podemos definir $x_1+x_2+\cdots+x_n$ como este resultado común.

También, dada una suma $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ de n números reales, la propiedad conmutativa de la adición nos permite cambiar arbitrariamente el orden de los sumandos.

Obviamente, podemos hacer consideraciones similares para la multiplicación de números reales.

Ejemplo 1.1. En la siguiente lista se ilustran algunas de las propiedades de la adición y multiplicación de números reales. Todas las letras representan números reales.

- $5 + 0 = 5$ Existencia de identidad para la adición.
- $2r + 7s = 7s + 2r$ Conmutatividad de la adición.
- $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$ Existencia de inversos multiplicativos.
- $(a+b)(c+d) = (a+b)c+(a+b)d = ac+bc+ad+bd$ Propiedad distributiva.
- $\pi + (-\pi) = 0$ Existencia de inversos aditivos.
- $x+y = x\cdot 1+y\cdot 1$ Existencia de identidad para la multiplicación.

- $(p+2q)+3r = p+(2q+3r)$ Asociatividad de la adición.
- $(x+y)(x-y) = (x-y)(x+y)$ Conmutatividad de la multiplicación.
- $\dfrac{1}{3x+5}(3x+5) = 1$ si $3x+5 \neq 0$ Existencia de inversos multiplicativos.
- $((4r)s)(3t) = (4r)(s(3t))$ Asociatividad de la multiplicación.

1.3 Diferencia y cociente de números reales

La diferencia y el cociente de dos números reales se pueden expresar en términos de la adición y la multiplicación de acuerdo con las siguientes definiciones:

Definición 1.3.1. *Si x y y son números reales, la diferencia de x y y es*

$$x - y = x + (-y)$$

Definición 1.3.2. *Si x y y son números reales con $y \neq 0$, el cociente de x por y es*

$$\frac{x}{y} = x\frac{1}{y}$$

Hacemos notar que como el número cero carece de inverso multiplicativo, la división por cero no está definida.

La importancia de las propiedades básicas P.1 a P.6 es que a partir de ellas se pueden deducir todas las demás propiedades relativas a la adición y multiplicación de números reales. A manera de ejemplo podemos citar algunas de ellas de uso muy frecuente:

- ***Propiedades cancelativas***:
  - Si x, y y z son números reales tales que $x+y = x+z$, entonces $y = z$.
  - Si x, y y z son números reales tales que $xy = xz$, y $x \neq 0$ entonces $y = z$.

- ***Unicidad de los inversos***:
  - Si x y y son números reales tales que $x + y = 0$, entonces $y = -x$.
  - Si x y y son números reales con $x \neq 0$ tales que $xy = 1$, entonces $y = \frac{1}{x}$.
- ***Reglas de los signos***:

  Si x y y son números reales arbitrarios, entonces

  $(-x)y = -(xy)$,

  $x(-y) = -(xy)$

  $(-x)(-y) = xy$
- ***Regla de los signos para las fracciones***:

  Si x y y son números reales con $y \neq 0$, entonces

  $$-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y}$$
- ***Simplificación de fracciones***:

  Si x, y y z son números reales con $y \neq 0$ y $z \neq 0$, entonces

  $$\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$$
- ***Operaciones con fracciones***:

  Si x, y, z y w son números reales con $z \neq 0$ y $w \neq 0$, entonces

  $\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}$

  $\frac{x}{z} - \frac{y}{w} = \frac{xw - yz}{zw}$

  $\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}$

  Si además, $y \neq 0$, entonces

  $\frac{x}{z} \div \frac{y}{w} = \frac{\frac{x}{z}}{\frac{y}{w}} = \frac{x}{z} \cdot \frac{w}{y} = \frac{xw}{yz}$

Aplicando las operaciones anteriores y la fórmula de simplificación de fracciones, obtenemos los siguientes casos especiales:

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{x+y}{z},$$

$$\frac{x}{z} - \frac{y}{z} = \frac{x-y}{z}$$

Ejemplo 1.2. En la siguiente lista utilizamos algunas de las propiedades mencionadas. Siempre suponemos que los denominadores de las fracciones son diferentes de cero.

- Si $4x = 12$ entonces $x = 3$ Propiedad cancelativa.
- $(-8x)(-7y) = 56xy$ Regla de los signos.
- $-\dfrac{1-x}{x+2} = \dfrac{x-1}{x+2}$ Regla de los signos para fracciones.
- $\dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = \dfrac{5y+4x}{xy}$ Suma de fracciones.
- $\dfrac{-2xy}{-5z} = \dfrac{2xy}{5z}$ Regla de los signos.
- $\dfrac{(x+y)(x-5y)}{(x+y)(3x+y)} = \dfrac{x-5y}{3x+y}$ Simplificación de fracciones.
- $\dfrac{a-1}{a+1} \cdot \dfrac{a+2}{a-3} = \dfrac{(a-1)(a+2)}{(a+1)(a-3)}$ Multiplicación de fracciones.
- $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{-4}{5}} = \dfrac{2 \cdot 5}{3 \cdot (-4)} = \dfrac{10}{-12} = -\dfrac{10}{12}$ División de fracciones y regla de los signos.

En el próximo capítulo usaremos intensivamente las propiedades básicas de la adición y multiplicación de números reales, y las propiedades que de ellas se deducen.

1.4 Orden en los números reales

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales contiene un subconjunto especial llamado el conjunto de los ***números positivos***, que representamos por $\mathbb{P}$, cuyas propiedades básicas son:

P.7 Si x y y pertenecen a $\mathbb{P}$, entonces $x + y$ pertenece a $\mathbb{P}$.

P.8 Si x y y pertenecen a $\mathbb{P}$, entonces xy pertenece a $\mathbb{P}$.

P.9 Si x es un número real, se cumple exactamente una de las siguientes relaciones.

$$x \in \mathbb{P}, \quad x = 0, \quad -x \in \mathbb{P}$$

Estas propiedades las completamos con la siguiente definición:

Definición 1.4.1. *Si x y y son números reales, entonces*

- $x < y$ *significa que* $y - x \in \mathbb{P}$.
- $x > y$ *significa que* $y < x$.
- $x \leq y$ *significa que* $x < y$ *o* $x = y$.
- $x \geq y$ *significa que* $x > y$ *o* $x = y$.

De acuerdo a la definición anterior tenemos que

$x > 0$ si y sólo si x es positivo, es decir, $x > 0$ si y sólo si $x \in \mathbb{P}$.

Utilizando la notación anterior, podemos expresar las propiedades básicas de los números positivos de la siguiente forma:

P.7 Si $x > 0$ y $y > 0$ entonces $x + y > 0$.

P.8 Si $x > 0$ y $y > 0$ entonces $xy > 0$.

P.9 Si x es un número real, se cumple exactamente una de las siguientes relaciones

$$x > 0, \quad x = 0, \quad -x > 0$$

Las siguientes terminologías se usan con frecuencia:

- Si $x < 0$ decimos que x es ***negativo***.
- Si $x \geq 0$ decimos que x es ***no negativo***.
- $x < y < z$ significa que $x < y$ y $y < z$.
- $x \leq y < z$ significa que $x \leq y$ y $y < z$.
- $x < y \leq z$ significa que $x < y$ y $y \leq z$.
- $x \leq y \leq z$ significa que $x \leq y$ y $y \leq z$.

De estas propiedades se deducen las reglas usuales que rigen las operaciones con desigualdades. Como ejemplo podemos citar algunas de ellas de uso muy frecuente:

- Si x y y son números reales tales que $x < y$, entonces $x+z < y+z$ para todo número real z.
- Si x, y y z son números reales tales que $x < y$ y $z > 0$, entonces $xz < yz$ y $\dfrac{x}{z} < \dfrac{y}{z}$.
- Si x, y y z son números reales tales que $x < y$ y $z < 0$, entonces $xz > yz$ y $\dfrac{x}{z} > \dfrac{y}{z}$.
- Si $x > 0$ entonces $-x < 0$ y si $x < 0$ entonces $-x > 0$.
- Si $x > 0$ entonces $\dfrac{1}{x} > 0$ y si $x < 0$ entonces $\dfrac{1}{x} < 0$.
- Si x y y son números reales tales que $xy > 0$, entonces $x > 0$ y $y > 0$, o, $x < 0$ y $y < 0$.
- Si x y y son números reales tales que $xy < 0$, entonces $x > 0$ y $y < 0$, o, $x < 0$ y $y > 0$.

Ejemplo 1.3.

- $4 < 7$ pues $7 - 4 = 3 > 0$

- $-10 < -5$ pues $(-5) - (-10) = -5 + 10 = 5 > 0$
- $-6 < 0$ pues $0 - (-6) = 6 > 0$
- $3 < \frac{10}{3} < 4$ pues $3 < \frac{10}{3}$ y $\frac{10}{3} < 4$
- Si $-2x < -8$ entonces $x > 4$
- Si $-3 \leq 2x-5 \leq 7$ entonces $2 \leq 2x \leq 12$ y por lo tanto $1 \leq x \leq 6$
- Para todo número real a se tiene que $a^2 \geq 0$
- Si a y b son números reales tales que $a < b$ entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$

1.5 Representación geométrica de los números reales

Geométricamente podemos representar el conjunto de los números reales mediante los puntos de una recta horizontal que llamaremos la ***recta real*** o el ***eje real***. Para ello, escogemos un punto de la recta para representar el número 0 y otro punto a la derecha de este para representar al número 1. La longitud del segmento determinado por los puntos marcados 0 y 1 se selecciona como unidad de distancia. Utilizando esta unidad de distancia representamos los números positivos a la derecha del 0 y los números negativos a la izquierda del 0. El entero positivo n se representa por el punto situado a una distancia de n unidades a la derecha del 0 y el entero negativo $-n$ se representa por el punto situado a una distancia de n unidades a la izquierda del 0, como se indica en la siguiente figura donde se representan los enteros entre -5 y 5.

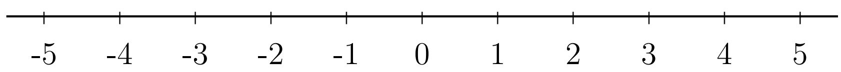


Figura 1.1.

Para representar un número racional positivo $\frac{p}{q}$ dividimos la unidad de distancia, es decir , el segmento determinado por 0 y 1 en q partes iguales y le asignamos, a la derecha de 0, el punto determinado por p de estas partes de longitud $\dfrac{1}{q}$. Para representar el número racional negativo $-\dfrac{p}{q}$, procedemos de forma similar, pero tomando p partes de longitud $\dfrac{1}{q}$ a la izquierda de 0. La gráfica siguiente nos muestra algunos de los puntos que representan números racionales

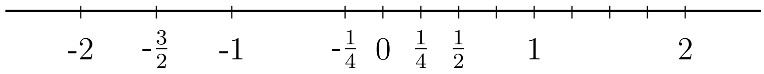


Figura 1.2.

La siguiente construcción nos muestra como representar el número irracional $\sqrt{2}$ sobre la recta:

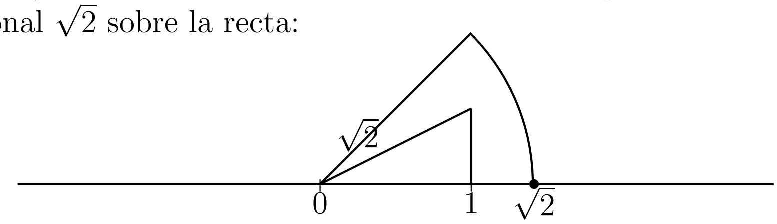


Figura 1.3.

Concretamente, el punto que representa a $\sqrt{2}$ se obtiene trazando desde el punto marcado 1 un segmento de recta de longitud igual a la unidad y perpendicular a la recta real. Se forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene longitud $\sqrt{2}$. Luego se traza un arco de círculo con centro en 0 y radio $\sqrt{2}$, el punto de intersección de este arco con el eje real represente el número $\sqrt{2}$.

En general es imposible indicar de que forma se puede representar cualquier número irracional sobre la recta, pero aceptamos como un axioma que a cada número real le corresponde exactamente un punto sobre la recta y que recíprocamente, cada punto de la recta corresponde a exactamente un número real. Una correspondencia como esta se llama un ***sistema de coordenadas***. El número correspondiente a un punto dado se llama la ***coordenada*** del punto. El punto que corresponde al número cero se llama el ***origen*** del sistema de coordenadas y usualmente lo representamos por O. Por ejemplo en la figura 1.4 la coordenada de R es -2, la coordenada de P es 1, la coordenada de T es π, etc.

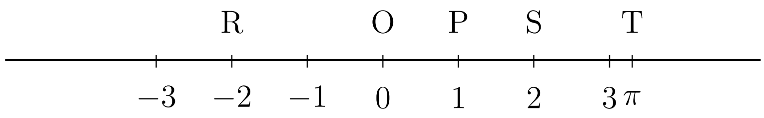


Figura 1.4.

En la práctica, se acostumbra a identificar un número real con el punto sobre la recta que lo representa y, a utilizar como sinónimas las expresiones "el punto x"y "el número x".

Para representar la distancia entre dos puntos de la recta, necesitamos calcular la diferencia entre la coordenada del punto que está a la derecha y la coordenada del punto que está a la izquierda. Si los puntos tienen coordenadas x_1 y x_2, entonces cuando $x_1 < x_2$ la distancia es $x_2 - x_1$ y cuando $x_2 < x_1$ la distancia es $x_1 - x_2$, ya que la distancia es siempre positiva. Con el fin de tener una única fórmula para calcular la distancia en todos los casos, introducimos la noción de valor absoluto.

Definición 1.5.1. *Si x es un número real, su* ***valor absoluto*** *que notamos $|x|$, lo definimos*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.4.

- $|5| = 5$, pues $5 > 0$
- $|-3| = -(-3) = 3$, pues $-3 < 0$
- $|\pi - 3| = \pi - 3$, pues $\pi - 3 > 0$
- $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$, pues $3 - \pi < 0$
- $|0| = 0$

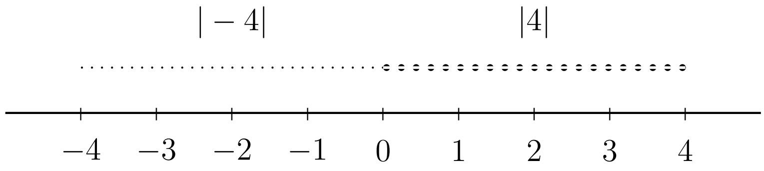


Figura 1.5.

De acuerdo con nuestra observación anterior, si x_1 y x_2 son las coordenadas de dos puntos sobre una recta, la distancia entre ellos se define como $|x_1 - x_2|$. En particular, $|x| = |x - 0|$ representa la distancia del origen al punto x (ver figura 1.5).

La relación de orden entre números reales tiene una interpretación geométrica muy simple:

$x < y$ si y sólo si el punto que representa x está localizado a la izquierda del punto que representa y.

La representación geométrica es de gran utilidad en la resolución de problemas y en la visualización de muchas propiedades importantes de los números reales.

Es útil introducir la noción de ***intervalo***. Si a y b son números reales, definimos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

Los conjuntos así definidos se llaman en su orden, intervalo ***abierto*** de extremos a y b, intervalo ***cerrado*** de extremos a y b, intervalo ***abierto-cerrado*** de extremos a y b e intervalo ***cerrado-abierto*** de extremos a y b.

Geométricamente podemos representar estos intervalos sobre la recta real como se indica en la figura 1.6.

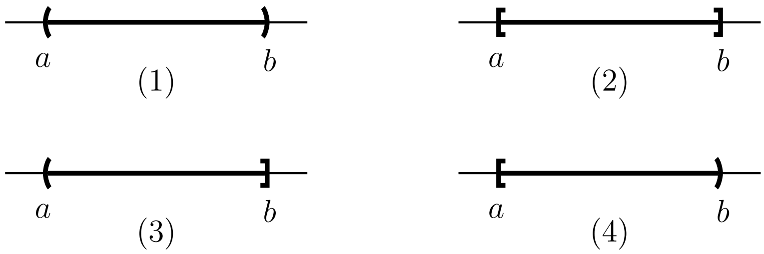


Figura 1.6. Un paréntesis cuadrado en la figura indica que el extremo correspondiente pertenece al intervalo.

Se acostumbra a ampliar el concepto de intervalo para incluir los siguientes conjuntos, conocidos con el nombre de ***intervalos infinitos***:

$$\begin{aligned}(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}\\ [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}\\ (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}\\ (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}\end{aligned}$$

Dejamos al lector la representación geométrica de estos intervalos. El símbolo ∞ llamado ***infinito*** que aparece en la definición anterior, no es un número real, es tan solo un artificio de notación.

1.6 Los enteros

En esta sección vamos a mencionar algunas de las propiedades más importantes del conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Recordamos que $\mathbb{Z}$ esta formado por la unión del conjunto de los enteros positivos $1, 2, 3, 4, \cdots$, el conjunto de los enteros negativos $-1, -2, -3, -4, \cdots$ y el 0.

Muchos de los resultados sobre números enteros son consecuencia del siguiente resultado:

Principio de buena ordenación. *Todo subconjunto no vacío S de números naturales posee un mínimo. Es decir, existe $m \in S$ tal que $m \leq s$ para todo $s \in S$.*

Una primera consecuencia de este principio es el resultado conocido como algoritmo de la división.

Algoritmo de la división. *Si a y b son enteros con $b > 0$, entonces existen enteros únicos q y r tales que*

$$a = bq + r \quad \text{con } 0 \leq r < b.$$

Los números q y r se llaman respectivamente, el ***cociente*** *y el* ***residuo*** *obtenidos al dividir a por b.*

El siguiente diagrama ilustra la demostración del resultado anterior

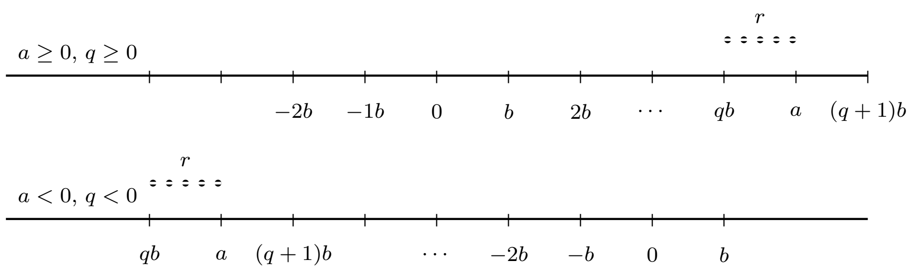


Figura 1.7.

Si a es un múltiplo de b, es decir si $a = qb$ para algún entero q, tomamos $r = 0$. Si a no es múltiplo de b, tomamos $r = a - qb$ donde qb es el menor múltiplo de b que se encuentra a la izquierda del número a. Observamos que de esta forma $0 \leq r < b$.

Ejemplo 1.5.

a) Si $b = 5$, podemos escribir:

$$34 = 5 \cdot 6 + 4 \quad 127 = 5 \cdot 25 + 2 \quad -34 = 5 \cdot (-7) + 1 \quad 30 = 5 \cdot 6 + 0$$

b) Si $b = 32$, tenemos

$$276 = 32 \cdot 8 + 20 \qquad\qquad -276 = 32 \cdot (-9) + 12$$

En virtud de este algoritmo, con $b = 2$, podemos representar todo entero n en alguna de las formas

$$n = 2q \qquad \text{o} \qquad n = 2q + 1$$

donde q es un entero. Si n se puede representar en la primera forma, decimos que n es un entero ***par*** y cuando se puede representar en la segunda forma, decimos que es un entero ***impar***. Los enteros pares son por lo tanto $\cdots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \cdots,$ y los enteros impares son $\cdots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots$.

Definición 1.6.1. *Sean a y b números enteros con $a \neq 0$. Decimos que a* ***divide*** *a b si existe un entero c tal que $b = ac$. En tal caso escribimos $a \mid b$. Cuando a divide a b decimos también a es un* ***divisor*** *de b, o que a es un* ***factor*** *de b, ó que b es un* ***múltiplo*** *de a.*

Para indicar que a no divide a b escribimos $a \nmid b$.

Definición 1.6.2. *Un entero positivo $p > 1$ se llama un número* ***primo*** *si tiene exactamente dos divisores positivos a saber, 1 y p. Un entero positivo mayor que 1 que no es primo se llama* ***compuesto***.

Los primeros números primos son $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$ y 19.

Sin duda alguna el siguiente resultado es la propiedad más importante que tiene el conjunto de los enteros positivos.

Teorema 1.6.1 (*Teorema fundamental de la Aritmética*). *Todo entero $n > 1$ ó es primo, ó se puede factorizar como producto de primos. Esta factorización es única salvo por el orden de los factores.*

De acuerdo al teorema anterior, si n es un entero mayor que 1, lo podemos escribir en la forma

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r$$

donde $p_1, p_2, \cdots, p_r$ son primos no necesariamente diferentes. Agrupando los primos iguales en la factorización de n, lo podemos escribir en la forma

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_t^{n_t}$$

donde los primos son ahora diferente y los exponentes son enteros positivos. Esta última representación de n se llama la representación ***natural*** o ***canónica*** de n.

Ejemplo 1.6.

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \quad \text{o} \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2$$
$$3900 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13 \quad \text{o} \quad 3900 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13$$

Cuando trabajamos con varios enteros es deseable utilizar los mismos números primos para representarlos y en tal caso aceptamos en la representación canónica de un entero, exponentes cero. Así por ejemplo escribimos

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \qquad 45 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5, \qquad 25 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^2,$$

donde en todos los casos hemos utilizados los mismos primos $2, 3, 5$.

Si la representación canónica de un entero es $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_t^{n_t}$, entonces los divisores positivos de n tienen la forma

$$d = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_t^{d_t}$$

donde $0 \leq d_i \leq n_i$ para cada $i = 1, 2, \cdots, t$.

Ejemplo 1.7. Los divisores positivos de $72 = 2^3 \cdot 3^2$ son

$$\begin{array}{cccc} 2^0 \cdot 3^0 & 2^1 \cdot 3^0 & 2^2 \cdot 3^0 & 2^3 \cdot 3^0 \\ 2^0 \cdot 3^1 & 2^1 \cdot 3^1 & 2^2 \cdot 3^1 & 2^3 \cdot 3^1 \\ 2^0 \cdot 3^2 & 2^1 \cdot 3^2 & 2^2 \cdot 3^2 & 2^3 \cdot 3^2 \end{array}$$

Si $d \mid a$ y $d \mid b$, decimos que d es un ***divisor común*** de a y b. Cuando a y b son enteros no ambos iguales a cero, el mayor de los divisores comunes positivos de a y b se llama el ***máximo común divisor*** de a y b y lo representamos por la notación (a, b).

Puesto que, si $d \mid a$ entonces $d \mid (-a)$, se observa que

$$(a, b) = (a, -b) = (-a, b) = (-a, -b)$$

Como ejemplo tenemos

$$(36, 48) = 12, \qquad (-60, 75) = 15, \qquad (-10, -98) = 2$$

Si $a \mid m$ y $b \mid m$, decimos que m es un ***múltiplo común*** de a y b. Cuando a y b son enteros no nulos, el menor de los múltiplos comunes positivos de a y b, que existe por el principio de buena ordenación, se llama el ***mínimo común múltiplo*** de a y b y lo representamos por la notación $[a, b]$. En este caso también tenemos

$$[a, b] = [a, -b] = [-a, b] = [-a, -b]$$

Por ejemplo,

$$[36, 48] = 144, \qquad [60, -75] = 300, \qquad [-10, -98] = 490$$

Es conveniente observar que en matemáticas utilizamos a veces la misma notación para representar conceptos diferentes, pero el contexto nos indica con claridad el significado deseado. Por ejemplo, si trabajamos con el orden en los números reales, (a, b) representa un intervalo abierto, pero si trabajamos con números enteros, (a, b) representa el máximo común divisor de dos enteros.

Una de las consecuencias del Teorema Fundamental de la Aritmética es que nos proporciona un método rápido para hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos enteros. Concretamente tenemos el siguiente resultado:

Si $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t}$ y $b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_t^{b_t}$ con los p_i primos y $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$ para todo i. Entonces,

$$(a, b) = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_t^{r_t} \quad \text{y} \quad [a, b] = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_t^{s_t}$$

donde $r_i = \min\{a_i, b_i\}$ y $s_i = \max\{a_i, b_i\}$.

Ejemplo 1.8. Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $196 = 2^2 \cdot 7^2$.

Entonces,

$$(360, 196) = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 4 \quad \text{y} \quad [360, 196] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^2 = 17662$$

Los resultados anteriores se extienden de manera similar a cualquier número finito de enteros.

Ejemplo 1.9.

$$\begin{aligned} 1800 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \\ 1890 &= 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 980 &= 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} (1800, 1890, 980) &= 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 10 \\ [1800, 1890, 980] &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 264600 \end{aligned}$$

1.7 Números racionales e irracionales

Como indicamos en la sección 1.1 los números racionales son los que se pueden expresar en la forma $\frac{p}{q}$ donde p y q son enteros y $q \neq 0$. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales contiene como subconjunto al conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros, pues cualquier entero n lo podemos expresar en la forma $\frac{n}{1}$, es decir como un racional con denominador igual a 1.

Observamos que existen varias expresiones de la forma $\frac{p}{q}$ que representan el mismo número racional, por ejemplo $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Caracterizamos estas expresiones de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 1.7.1. *Los números racionales* $\frac{p}{q}$ *y* $\frac{r}{s}$ *con* $q \neq 0$ *y* $s \neq 0$ *son iguales cuando* $ps = rq$.

Es decir tenemos:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \quad \textit{si y sólo si} \quad ps = qr.$$

Si tenemos en cuenta las operaciones con fracciones que mencionamos en la sección 1.3, vemos que los números racionales resultan cerrados para la adición, la resta, la multiplicación y la división, ya que en todos los casos se obtienen fracciones cuyos numeradores y denominadores son números enteros.

Los números reales que no son racionales, los llamamos números irracionales. Como ejemplo podemos citar $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \pi$ y e.

En general es muy difícil probar que un número real es irracional. Sin embargo, hay una demostración fácil de que el número $\sqrt{2}$ es irracional. Hela aquí:

Por el algoritmo de la división sabemos que todo entero a es par o impar, es decir puede expresarse en una de las dos formas

$$a = \begin{cases} 2k \\ 2k+1 \end{cases} \quad \text{con } k \text{ entero}$$

y por lo tanto

$$a^2 = \begin{cases} 4k^2 \\ 4k^2+4k+1 \end{cases} \quad \text{con } k \text{ entero}$$

De las igualdades anteriores concluimos que si a^2 es par entonces a es par.

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. Luego $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ con p y q enteros. Podemos asumir que p y q no tienen ningún factor común. Luego $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$ o sea $p^2 = 2q^2$, es decir p^2 es par y por la observación preliminar, p también es par. Podemos escribir $p = 2r$ con r entero. Sustituyendo este valor en la ecuación $p^2 = 2q^2$, tenemos $4r^2 = 2q^2$, o $q^2 = 2r^2$, por consiguiente q es un entero par y q se puede expresar en la forma $q = 2s$ con s entero. De esta forma hemos llegado a contradecir que los enteros p y q no tienen ningún factor común. Por lo tanto nuestra hipótesis de que $\sqrt{2}$ es racional es imposible y en consecuencia $\sqrt{2}$ es irracional.

A partir de un número irracional dado, podemos construir una infinidad de números irracionales, pues fácilmente se demuestra el siguiente resultado:

"Si α es un número irracional y r es cualquier número racional diferente de cero, entonces los números $\alpha + r$, $\alpha - r$, $r - \alpha$, αr, $\dfrac{\alpha}{r}$, $-\alpha$ y $\dfrac{1}{\alpha}$ son todos números irracionales."

La irracionalidad de cualquiera de estos números se demuestra inmediatamente por contradicción. Por ejemplo, si $\alpha + r$ fuera un número racional, tendríamos $\alpha + r = r_1$ con r_1 racional. Despejando α tendríamos $\alpha = r_1 - r$ que es un número racional, pues la diferencia de dos números racionales es un número racional. Esto contradice que α es irracional. Por lo tanto $\alpha + r$ no puede ser un número racional.

Ejemplo 1.10. Todos los siguientes números son irracionales

$$-\sqrt{2}, \quad 3+\sqrt{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{5}{7}\sqrt{2}, \quad \frac{1}{3+\sqrt{2}}, \quad -\sqrt{2}-17, \quad \frac{8-5\sqrt{2}}{7}$$

El ejemplo siguiente nos muestra que los números irracionales no son cerrados para la adición, la resta, la multiplicación y la división, es decir hay casos en que estas operaciones aplicadas a números irracionales producen como resultado un número racional.

Ejemplo 1.11.

- $(\sqrt{2}+5)+(2-\sqrt{2}) = 7$
- $\sqrt{2}-\sqrt{2} = 0$
- $(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2}) = 23$
- $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

1.8 Expresiones decimales

Dado que todo número racional es el cociente de dos enteros, efectuando una división ordinaria lo podemos representar mediante una ***expresión decimal***. Estas representaciones o bien son finitas, como en el caso de

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \text{y} \quad \frac{35}{8} = 4,375$$

o bien se repiten en ciclos regulares indefinidamente como en el caso de

$$\frac{27}{11} = 2,454545\ldots \quad \text{y} \quad \frac{10}{7} = 1,428571428571\ldots$$

Cuando en una expresión decimal hay un ciclo de cifras que se repiten indefinidamente, decimos que el decimal es *periódico*. Llamamos ***período*** al conjunto de cifras que forman el ciclo que se repite y para representar el número sin ambigüedades trazamos una barra sobre este ciclo. Todo decimal finito puede considerarse como un decimal periódico donde la cifra que se repite es el cero. Usando estas notaciones tenemos;

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= 0,5\overline{0}\\ \frac{35}{8} &= 4,375\overline{0}\\ \frac{27}{11} &= 2,\overline{45}\\ \frac{10}{7} &= 1,\overline{428571}\end{aligned}$$

Hemos visto que todo número racional se puede representar como una expresión decimal periódica. También es cierto que toda expresión decimal periódica representa un número racional. Los siguientes ejemplos nos muestran como encontrar el racional representado por una expresión decimal.

Ejemplo 1.12. Hallemos el número racional representado por $x = 5,\overline{2}$. Tenemos

$$\begin{aligned}x &= 5,\overline{2}\\ 10x &= 52,\overline{2}, \quad \text{luego}\\ 9x &= 47 \quad \text{y}\\ x &= \frac{47}{9}.\end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo, el período contiene más de un dígito

Ejemplo 1.13. Hallemos el número racional representado por

$x = 4,\overline{35}$. Tenemos

$$\begin{aligned}x &= 4,\overline{35}\\ 100x &= 435,\overline{35} \quad \text{luego}\\ 99x &= 431 \quad \text{y}\\ x &= \frac{431}{99}\end{aligned}$$

El caso más general se presenta en el siguiente ejemplo

Ejemplo 1.14. Hallemos el número racional representado por

$x = 2,18\overline{512}$.

Tenemos

$$y = 100x = 218,\overline{512}$$

y luego procedemos con y, como en el ejemplo anterior. Es decir

$$\begin{aligned} 1000y &= 218512,\overline{512} \\ 999y &= 218294 \\ y &= \frac{218294}{999} \end{aligned}$$

y como $y = 100x$ entonces $x = \dfrac{y}{100} = \dfrac{218294}{99900}$.

En el desarrollo de los ejemplos anteriores, se multiplicó el número x por ciertas potencias de 10. Estas potencias no se eligieron al azar, sino que se escogieron cuidadosamente, de tal forma que los números $10^r x$ tuvieran la misma parte decimal que x. De esta forma, al efectuar las restas $10^r x - x$ se obtuvieron números enteros a partir de los cuales se despejo el número racional x.

La discusión anterior nos muestra que el conjunto de los números racionales es idéntico con el conjunto de los decimales periódicos. En consecuencia, el conjunto de los números irracionales esta constituido por todos los decimales no periódicos. Como ejemplos de un decimales no periódicos, podemos citar las expresiones

$$0,202002000200002\cdots \qquad \text{y} \qquad 3,124701001000100001\cdots$$

donde el número de ceros que preceden a 2 o a 1 va aumentando cada vez.

Sea $x = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n$ una expresión decimal finita. Multiplicando por 10^n tenemos

$$10^n x = a_0 a_1 a_2 \cdots a_n$$

o sea

$$10^n x = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \cdots + a_n$$

Despejando x obtenemos el número racional

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

Por lo tanto, x satisface las siguientes relaciones

$$\begin{gathered}
a_0 < x < a_0 + 1 \\
a_0 + \frac{a_1}{10} < x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10} \\
a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2} \\
\vdots \\
a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{n-1} + 1}{10^{n-1}} \\
a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = x
\end{gathered}$$

Similarmente, si $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots$ es un número real positivo que tiene una expansión decimal infinita, entonces el número x esta localizado sobre la recta numérica de tal forma que satisface las siguientes desigualdades

$$\begin{gathered}
a_0 < x < a_0 + 1 \\
a_0 + \frac{a_1}{10} < x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10} \\
a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2} \\
a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3 + 1}{10^3} \\
\vdots
\end{gathered}$$

Observamos que la representación decimal esta asociada con la división de un intervalo unidad en 10 partes iguales, la división de cada una de estas subdivisiones en 10 partes iguales y así sucesivamente. Si por ejemplo consideramos el número decimal $x = 0, \overline{3} = 0, 3333 \cdots$ tenemos las gráficas siguientes:

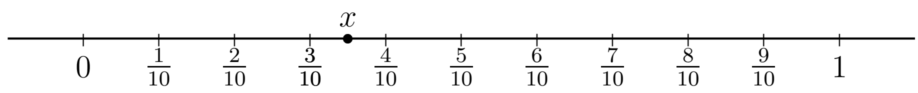


Figura 1.8.

y ampliando

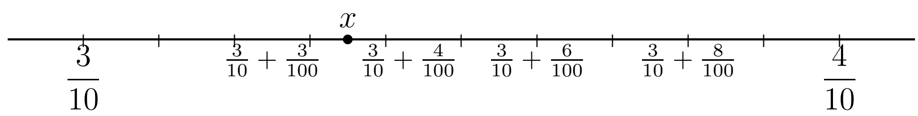


Figura 1.9.

Nota. Al comienzo de esta sección vimos que todo decimal finito se puede expresar como un decimal periódico, donde la cifra que se repite indefinidamente es el cero, por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 0,5\overline{0}$$
$$\frac{35}{8} = 4,375 = 4,375\overline{0}.$$

Sorprendentemente, hay otra manera menos trivial de representar un decimal finito como un decimal periódico. Esta forma consiste en disminuir en una unidad el último dígito no nulo de la representación decimal que termina con ceros y agregar una sucesión infinita de 9. Aplicando esta instrucción tenemos:

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 0,4\overline{9}$$
$$\frac{35}{8} = 4,375 = 4,374\overline{9}.$$

Las siguientes consideraciones nos muestran por qué este método es válido:

Supongamos que $x = 0,9999\ldots = 0,\overline{9}$. Procediendo como en el ejemplo 1.12 obtenemos que $x = 1$, es decir, tenemos que

$$1 = 0,9999\ldots = 0,\overline{9}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0,1 &= 0,09999\ldots = 0,0\overline{9} \\ 0,01 &= 0,009999\ldots = 0,00\overline{9} \\ 0,001 &= 0,0009999\ldots = 0,000\overline{9} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 0,5 = 0,4 + 0,1 = 0,4 + 0,0\overline{9} = 0,4\overline{9} \\ \frac{35}{8} &= 4,375 = 4,374 + 0,001 = 4,374 + 0,000\overline{9} = 4,374\overline{9}. \end{aligned}$$

1.9 Densidad de los números racionales e irracionales en $\mathbb{R}$

Dados dos números reales diferentes x y y, su promedio $\frac{x+y}{2}$ está comprendido entre x y y. Por lo tanto, entre dos números reales sin importar lo cercano que se encuentren, hay una infinidad de números reales. Esto implica que dado un número real cualquiera x no tienen sentido expresiones tales como "el número real siguiente a x"o "el número real anterior a x".

Usando nuestra caracterización de los números reales como expresiones decimales, podemos refinar el resultado anterior y establecer los siguientes resultados:

Resultado 1. Entre dos números reales diferentes hay un número racional, y por lo tanto hay infinitos números racionales entre ellos.

Resultado 2. Entre dos números reales diferentes hay un número irracional, y por lo tanto hay infinitos números irracionales entre ellos.

Los resultados 1 y 2 se describen en lenguaje matemático diciendo, respectivamente, que el conjunto de los números racionales es ***denso*** en el conjunto de los números reales y que el conjunto de los números irracionales es denso en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 1.15. Construyamos dos números racionales y dos números irracionales entre $x = 1,24$ y $y = 1,2401$.

Usando expresiones decimales periódicas tenemos que

$$a = 1,24005 \qquad \text{y} \qquad b = 1,240\overline{03}$$

son dos números racionales entre x y y.

Usando expresiones decimales no periódicas tenemos que

$$t = 1,24002000200002\cdots \qquad \text{y} \qquad s = 1,2400201001000100001\cdots$$

son dos números irracionales entre x y y.

1.10 Números complejos

Ningún número real es solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. La solución de esta ecuación se halla en el conjunto $\mathbb{C}$ de los ***números complejos***, el cual contiene tanto $\mathbb{R}$ como los números cuyo cuadrado es negativo. La ***unidad imaginaria*** es $i = \sqrt{-1}$.

Puesto que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ e $i \in \mathbb{C}$ y se espera operar elementos de $\mathbb{C}$ con una suma y un producto como sucede en $\mathbb{R}$, el conjunto $\mathbb{C}$ debe contener los productos de la forma bi para $b \in \mathbb{R}$, y las sumas $a + bi$, donde a y b son números reales. En efecto tenemos que:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \ : \ a, b \in \mathbb{R}, \ i^2 = -1\}$$

Definición 1.10.1. *Los reales a y b son, respectivamente, la* ***parte real*** *y la* ***parte imaginaria*** *del número complejo $a + bi$. Si $b \neq 0$, un número $a + bi$ es un* ***complejo no real*** *y si, además, $a = 0$, el número (es decir bi) es un* ***imaginario puro****.*

Note que un número real a tiene la forma $a + bi$ con $b = 0$.

Ejemplo 1.16.

1. La parte real de $2 + \frac{3}{4}i$ es 2 y su parte imaginaria es $\dfrac{3}{4}$.
2. La parte imaginaria de $4 - 5i$ es -5.
3. La parte real de $\pi + i$ es π.

4. $2+3i$, $4-5i$, $\pi+i$ son complejos, no reales.

5. $6i$, $\sqrt{2}i$, $-i$, πi son imaginarios puros.

La ***igualdad de números complejos*** se define así:

$$a+bi=c+di \quad \text{si y sólo si} \quad a=c \text{ y } b=d$$

(Esto es, dos complejos son iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales)

Las operaciones de suma y producto se definen haciendo uso de las operaciones de números reales y teniendo en cuenta que $i^2=-1$. Así tenemos:

$$\begin{array}{rl} \textbf{Suma:} & (a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \\ \textbf{Producto:} & (a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i \end{array}$$

Ejemplo 1.17.

1. (a) $a+3i=4+3i$ si y sólo si $a=4$.

   (b) $a+bi=-6$ si y sólo si $a=-6$ y $b=0$.

   (c) No existe un real a para el cual $3+6i=a+i$ y no existe un real b para el cual $-\dfrac{1}{2}+7i=bi$.

2. (a) $(4-6i)+(5+7i)=(4+5)+(-6+7)i=9+1i=9+i$

   (b) $(9-3i)+3\pi=(9+3\pi)-3i=3(3+\pi)-3i$. La parte real de este complejo es el número real $3(3+\pi)$.

3. (a) $\left(1+\dfrac{4}{7}i\right)\left(-\dfrac{2}{3}+9i\right)=\left(-\dfrac{2}{3}-\dfrac{36}{7}\right)+\left(9-\dfrac{8}{21}i\right)$

   (b) $a+bi+0=a+bi$

   (c) $3i(8-3i)=9+24i$

   (d) $-\dfrac{7}{5}(10+2i)=-14-\dfrac{14}{5}i$

(e)

$$
\begin{aligned}
& \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
= & \left[\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)i\right]\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
= & \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
= & \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)i = 1
\end{aligned}
$$

(f) $(a+bi)1 = a+bi$

(g) $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. En general, si n es un número entero, n puede ser divido por 4 y en ese caso se obtienen un cociente b y un residuo r tales que $0 \leq r < 4$ y $n = 4b + r$. Entonces $i^n = i^{4b+r} = (i^4)^b i^r = i^r$

La suma y el producto de números complejos cumplen las condiciones de cuerpo o de campo que cumplen la suma y el producto de números reales (es decir, las propiedades P.1 a P.6 de la sección 1.2, se cumplen si se supone que los elementos son números complejos). Hablamos entonces del ***cuerpo*** o ***campo de los números complejos***. La verificación de casi todas las propiedades es rutinaria. Nos detendremos en la que no lo es: la existencia de inversos.

Un número complejo y posee inverso para la suma pues si $y = a+bi$ y $z = -a-bi$ entonces z es el inverso de y. En efecto,

$$y + z = (a+bi) + (-a-bi) = (a-a) + (b-b)i = 0$$

Comprobaremos la existencia de inversos para el producto después de introducir otros conceptos.

Note que $-a-bi = (-1)(a+bi)$. Este complejo se denota por $-(a+bi)$.

La ***resta*** se define así: si u y v son números complejos,

$$u - v = u + (-v)$$

Más explícitamente,

$$(c+di)-(a+bi)=(c+di)+(-a-bi)=(c-a)+(d-b)i$$

Ejemplo 1.18.

1. $(7+6i)-(6-3i)=(7-6)+(6-(-3))i=1+9i$
2. Si z es un número complejo tal que $\left(\frac{3}{2}-4i\right)+z=2+3i$, entonces $z=(2+3i)-(\frac{3}{2}-4i)$, es decir, $z=\frac{1}{2}+7i$
3. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}i$

El ***conjugado*** de un número complejo $z=a+bi$, denotado por $\overline{z}$ se define así: $\overline{z}=a-bi$ (o $\overline{a+bi}=a-bi$)

Ejemplo 1.19.

1. (a) $\overline{6+5i}=6-5i$
   (b) $\overline{9-2i}=9+2i$
   (c) $\overline{-3+\sqrt{2}i}=-3-\sqrt{2}i$
   (d) $\overline{i}=-i$
   (e) $\overline{2}=2$
   (f) $-\overline{10}=-10$
   (g) Si $a\in\mathbb{R}$ entonces $\overline{a}=a$
2. Si $z\in\mathbb{C}$ y $z=\overline{z}$ entonces z es un número real. Para probarlo, supongamos que $z=a+bi$. Como $z=\overline{z}$, es decir, $a+bi=a-bi$, entonces $b=-b$, lo cual implica que $b=0$ y, en consecuencia, $z=a+0i=a\in\mathbb{R}$.
3. (a) $(a+bi)+\overline{(a+bi)}=(a+bi)+(a-bi)=2a$
   (b) $(a+bi)-\overline{(a+bi)}=2bi$
   (c) $(a+bi)\overline{(a+bi)}=(a+bi)(a-bi)=(a^2-b(-b))+(a(-b)+ab)i=a^2+b^2$
   (d) $\overline{\overline{a+bi}}=\overline{a-bi}=a+bi$

En el tercer ejemplo tenemos la comprobación de las siguientes ***propiedades*** referentes al conjugado $\overline{z}$ de z, un número complejo.

1. $z + \overline{z} = 2R(z)$, donde $R(z)$ denota la parte real de z. Así $z + \overline{z}$ es un número real.

2. $z - \overline{z} = 2I(z)i$, donde $I(z)$ es la parte imaginaria de z. Así, $z - \overline{z}$ es 0 o un número imaginario puro.

3. $z\overline{z} = R(z)^2 + I(z)^2$. Este es un número real positivo o cero. Es cero si y sólo si $z = 0$.

4. $z = \overline{z}$, si y sólo si z es un número real.

1. El ***módulo*** del número complejo z se denota $|z|$ y se define así: $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ (la raíz cuadrada positiva del número real $z\overline{z}$).

   Con estos elementos verificamos las existencia de inversos para el producto de números complejos (propiedad 6 en la sección 1.2 en el caso complejo). Esa propiedad dice que dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $zw = 1$. Tomando $w = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ tenemos:

$$zw = z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z\overline{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

   Así el inverso multiplicativo de z para el producto es $\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$. Se denota por z^{-1} o $\dfrac{1}{z}$. Explícitamente, si $z = a + bi$, entonces

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

2. La **división** de números complejos se define así: si w y z, son números complejos y $z \neq 0$

$$\frac{w}{z} = w\frac{1}{z} = wz^{-1} = w\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{w\overline{z}}{|z|^2}$$

   Más explícitamente,

$$\frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{ca + db}{a^2 + b^2} + \frac{da - cb}{a^2 + b^2}i$$

Ejemplo 1.20.

1. (a) $|-4+i| = \sqrt{(-4)^2+1^2} = \sqrt{17}$

   (b) $|i| = 1$

   (c) $|1| = 1$, $|-3| = 3$, más generalmente, si z es un número real entonces $z = a \in \mathbb{R}$ y el módulo de z es $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$, es decir, el módulo de un número real es igual a su valor absoluto (sección 1.5).

2. (a) $(2+3i)^{-1} = \dfrac{1}{2+3i} = \dfrac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{2-3i}{4+9} = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i$

   (b) $i^{-1} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{-i}{i(-i)} = -i$

   (c) Si $z = a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a}$, es decir es el inverso de a para el producto de números reales.

3. $\dfrac{4+6i}{1-2i} = \dfrac{(4+6i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{-8+14i}{1+4} = -\dfrac{8}{5} + \dfrac{14}{5}i$

4. $\dfrac{\sqrt{7}-5i}{3i} = \dfrac{(\sqrt{7}-5i)(-3i)}{(3i)(-3i)} = \dfrac{-15-3\sqrt{7}i}{9} = -\dfrac{15}{9} - \dfrac{3\sqrt{7}}{9}i = -\dfrac{5}{3} - \dfrac{\sqrt{7}}{3}i$

Otras propiedades del conjugado se refieren a su comportamiento en relación con las operaciones entre números complejos. A continuación enunciamos esas propiedades:

Si $y, z, z_1, z_2, \ldots, z_n$ son números complejos arbitrarios entonces

1. $\overline{y+z} = \overline{y} + \overline{z}$ o, más generalmente, $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots + \overline{z_n}$

2. $\overline{y-z} = \overline{y} - \overline{z}$

3. $\overline{yz} = \overline{y}\ \overline{z}$ o, más generalmente, $\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \overline{z_1}\ \overline{z_2} \cdots \overline{z_n}$

4. $\overline{\left(\dfrac{y}{z}\right)} = \dfrac{\overline{y}}{\overline{z}}$ si $z \neq 0$

Ejemplo 1.21.

1. $\overline{(2+3i)+(4-i)} = \overline{6+2i} = 6-2i$

   $\overline{2+3i} + \overline{4-i} = (2-3i)+(4+i) = 6-2i$

2. $\overline{(-1+i)(-1-i)} = \overline{2} = 2$

   $\overline{(-1+i)}\ \overline{(-1-i)} = (-1-i)(-1+i) = 2$

3. $\overline{\left(\dfrac{4-7i}{-2i}\right)} = \overline{\left(\dfrac{(4-7i)(2i)}{(-2i)(2i)}\right)} = \overline{\left(\dfrac{14-8i}{4}\right)} = \overline{\left(\dfrac{7}{2}+2i\right)} = \dfrac{7}{2}-2i$

   $\dfrac{\overline{4-7i}}{\overline{-2i}} = \dfrac{4+7i}{2i} = \dfrac{(4+7i)(-2i)}{(2i)(-2i)} = \dfrac{14-8i}{4} = \dfrac{7}{2}-2i$

Taller 1

1. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. En cada caso justificar su respuesta.

   (a) Todo número entero es un número racional.

   (b) 0 es a la vez un número racional y un número irracional.

   (c) Para todo número real x las expresiones: “El triple de x, más 5”y “El triple de x más 5”son iguales.

   (d) El recíproco de $\dfrac{1}{a}$ es a.

   (e) Si a y b son números reales tales que $ab=0$ entonces $a=0$ y $b=0$.

   (f) El opuesto del opuesto de $-\sqrt{7}$ es $\sqrt{7}$.

   (g) Si $y \neq 0$ y $w \neq 0$, entonces $\dfrac{x}{y}+\dfrac{z}{w} = \dfrac{x+z}{y+w}$.

   (h) Para todo número real a se tiene que $\dfrac{a+3}{5a+15} = \dfrac{1}{5}$.

   (i) Si $z \neq 0$ entonces $\dfrac{x+y}{z} = \dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}$.

(j) El conjunto $\{1, 0, -1\}$ es cerrado para la adición y para la multiplicación.

(k) Para todo número real $a \neq 0$ se tiene que $a^2 > 0$.

(l) Si a y b son números reales tales que $a^2 = b^2$ entonces $a = b$.

(m) Hay más números enteros positivos que múltiplos positivos de 5.

2. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. En cada caso justificar su respuesta.

(a) El 5% del 10% de un número es el 2% del número.

(b) La suma de dos números positivos y un número negativo es un número positivo.

(c) Para todo número real x se tiene que $-(-x) = (-1)(-x)$.

(d) Para todo número real x, el número $-x$ es negativo.

(e) Si en un producto de números hay más factores negativos que positivos, el resultado es un número negativo.

(f) Si a, b y c son números reales tales que $a < b$ y $-c > 0$ entonces $bc < ac$.

(g) Si x y y son positivos y $x > y$ entonces $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.

(h) Si $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{x}{x+1}$ entonces $x + 1 \leq x^2$.

(i) Si $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$ entonces $-\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{3}{2}$.

(j) Si x y y son números reales tales que $x < y$ entonces $x^2 < y^2$.

(k) Si x, y, z y w son números reales tales que $x < y$ y $z < w$, entonces $x - z < y - w$.

(l) Si x y y son números reales tales que $x \geq 0$ y $y < 0$ entonces $xy^{-1} \geq 0$.

3. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. En cada caso justificar su respuesta.

(a) 1 es un divisor de 0 y 0 es un divisor de 1.

(b) Si ab es un entero par entonces a y b son enteros pares.

(c) Si x es un número irracional, entonces $\sqrt{x}$ es un número irracional.

(d) Si x, y y z son enteros tales que $x|yz$, entonces $x|y$ o $x|z$.

(e) El menor múltiplo de 12 mayor que -300 es -260.

(f) Todo entero impar se puede escribir en la forma $2n + 7$ para algún n entero.

(g) Si x es un entero impar, entonces $x^2 - 1$ es divisible por 8.

(h) El conjunto de los números irracionales es cerrado para la adición y la multiplicación.

(i) El inverso de un número irracional es un número irracional.

(j) Existen enteros x y y con $y \neq 0$, tales que $x - y = 175$, el cociente obtenido al dividir x por y es 15 y el residuo 7.

(k) La forma decimal de un número racional se obtiene dividiendo el numerador por el denominador y se conoce completamente cuando se repite el primer residuo.

4. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. En cada caso justificar su respuesta.

   (a) $\sqrt{5}(\sqrt{2} - 1)$ es un número irracional.

   (b) Existen infinitos números racionales entre $0.\overline{9}$ y 1.

   (c) Si $| \, x - 7 \, | \, = 2$ entonces $x = 9$.

   (d) Para todo número real x se tiene que $| \, 2x + 5 \, | \, = 2 \, | \, x \, | + 5$.

   (e) Si $x < -1$ entonces $| \, x \, | + | \, x + 1 \, | + | \, x - 2 \, | = 3x + 1$.

   (f) Existe un entero que al dividirlo por 3 deja residuo 2 y al dividirlo por 5 deja residuo 3.

   (g) Si q no es divisible por 3, el número racional positivo $\dfrac{p}{q}$ tiene una expansión decimal finita.

   (h) El número racional positivo $\dfrac{p}{q}$ tiene una expansión decimal finita si y solo si los únicos divisores primos de q son 2 y 5.

   (i) $\left|\sqrt{3} - 2\right| + | \, -3 \, | - | \, 4 - \sqrt{3} \, | = 2\sqrt{3} - 9$.

   (j) Existen expresiones decimales infinitas no periódicas que representan números racionales.

   (k) La expresión decimal $5.331333133331333331\ldots$ representa un número irracional.

   (l) Si $-5 \leq x + 1 \leq 3$ entonces $| \, x + 1 \, | \leq 3$.

5. (a) Encuentre 3 números racionales y 3 números irracionales entre 3.14592 y π. (Nota: $\pi = 3.145926\ldots$).

   (b) ¿Cuántos números irracionales hay entre $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{99}$?

   (c) Escribir los números racionales $5.\overline{2}$, $23.\overline{14}$ y $2.5\overline{32}$ en la forma $\frac{p}{q}$.

   (d) ¿Qué significado tiene cada una de las siguientes expresiones $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$ y $\frac{0}{0}$?

   (e) Ordenar de mayor a menor cada uno de los siguientes números y representarlos sobre la recta numérica.

$$\begin{array}{ccccc} -2.71 & \sqrt{3} & -\frac{2}{5} & \pi & 21 \div 10^3 \\ 0.\overline{2} & -3.13 & 0.0002 \times 10^2 & -\pi & 0.2 \times 10^3 \end{array}$$

   (f) Descomponer en producto de primos y hallar todos los divisores de 2340, 26208 y 45747.

   (g) Hallar todos los valores de a y b tales que $3^a 2^b$ divida a 3780 y todos los valores de a tales que $2^a 3^4 5^a 11$ divida a 5940.

6. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. En cada caso justificar su respuesta.

   (a) Todo número real es también un número complejo.

   (b) Si el conjugado de un número complejo es igual al opuesto del número, entonces el número es un imaginario puro.

   (c) Si el producto de dos números complejos es un número real , entonces los dos números son reales.

   (d) $(7 + 9i) - (8 - 4i) = -\ 1 + 5i$.

   (e) $-(-3 + 5i) - (6 - 7i) = -3 + 2i$.

   (f) $(5 + 4i)(3 - 10i) = -25 - 38i$.

   (g) $\dfrac{7 - 4i}{-4 + 3i} = \dfrac{-16}{25} - \dfrac{1}{5}i$.

   (h) $|-5 + 8i| = |5 - 8i|$.

   (i) $(4 + 5i)^3 = 64 - 125i$.

   (j) $i^{343} = i$.

   (k) Si $(x + yi)(2 - 6i) = -2 - 14i$ entonces $x = 2$ y $y = -1$.

(l) Existen números reales x y y tales que $3x + 5 = (2y - 6)i$.

(m) Existe un número real x tal que $\dfrac{3x - 2i}{2x + i} = 1 + 4i$.

(n) Para todo número complejo $|z| = |\overline{z}|$.

(o) Existen números complejos z tales que $z\overline{z} = z^2$.

(p) $2 + 5i > 0$.

(q) Para todo número complejo z se tiene que $z^2 > 0$.

Capítulo 2

Fundamentos de álgebra

2.1 Expresiones algebraicas

Llamamos ***variable*** a una letra o símbolo que representa cualquier elemento de un conjunto determinado. Llamamos ***constante*** a un elemento fijo del conjunto considerado. Si tal conjunto es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, las variables y las constantes representan números reales.

Usualmente representamos las variables por las últimas letras del alfabeto, x, y, z, w. En algunos casos representamos las constantes por las primeras letras del alfabeto, a, b, c, d. En estos casos los símbolos a, b, etc representan elementos fijos pero arbitrarios del conjunto considerado.

Ejemplo 2.1.

a) En la expresión

$$2x^2 + 4x - 7$$

la letra x es una variable y los números $2, 4$ y 7 son constantes.

b) En la expresión

$$ax + b$$

x es una variable y a y b son constantes.

Llamamos ***expresiones algebraicas*** a las constantes, las variables o las combinaciones de constantes y variables obtenidas mediante las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces.

Ejemplo 2.2. Las siguientes son algunas expresiones algebraicas:

$$5, \quad x^3, \quad 3ay^2, \quad (6xy - 2y)5x^2, \quad -3x^2y + 7x + 2y - 8,$$
$$\frac{2x+3}{x^2 - 5x - 6}, \quad (2z^{-5} - 3z^{-1})^{\frac{3}{5}}, \quad \frac{\sqrt{x+2y}}{x - \sqrt[3]{3x}}$$

En una expresión algebraica, cada una de las partes separadas por medio de un signo de suma o de resta, se llama un ***término***.

Ejemplo 2.3. En la expresión

$$5x^2y - \frac{2x+1}{3y-5} + \sqrt{xy - 6} + 7$$

los términos son $5x^2y$, $\dfrac{2x+1}{3y-5}$, $\sqrt{xy-6}$ y 7.

Observamos que expresiones tales como $\dfrac{2x+1}{3y-5}$ y $\sqrt{xy-6}$ se consideran como un solo término.

Si un término consiste de un producto de dos o mas factores, decimos que cada factor es el ***coeficiente*** del producto de los otros factores. Por ejemplo en el término $7x^2y$, 7 es el coeficiente de x^2y, $7x^2$ es el coeficiente de y, y $7y$ es el coeficiente de x^2. Si un coeficiente es un número, lo llamamos el ***coeficiente numérico***. En el término anterior $7x^2y$, 7 es el coeficiente numérico.

Si una expresión algebraica consiste de un solo término, la llamamos un ***monomio***, si consiste de dos términos la llamamos un ***binomio***, si consiste de tres términos la llamamos un ***trinomio*** y así sucesivamente.

Asumiendo que las variables y las expresiones representan números reales, tenemos que poner condiciones sobre los valores que pueden tomar estas. Así por ejemplo:

$4x^6 - 3x^3 + 6x^2 - 3$ representa un número real, cualquiera que sea el valor que toma x. La expresión $3y^5 + 2y^3 + \frac{9}{y}$ representa un número real siempre que y sea diferente de 0.

$\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x+y}}$ representa un número real si $x + y > 0$. La expresión $\frac{6x^2y + \frac{y}{x^2}}{\sqrt[3]{1-xy}}$ representa un número real si $x \neq 0$ y $1 - xy \neq 0$.

Al reemplazar en una expresión las variables, por valores que ellas puedan tomar, se obtiene un número real que es el ***valor*** de la expresión en esos números. Así por ejemplo:

El valor de $4x^6 - 3x^3 + 6x^2 - 3$ en $x = 0$ es $4(0)^6 - 3(0)^3 + 6(0)^2 - 3 = -3$.

El valor de $\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x+y}}$ en $x = 2, y = -1$ es $\frac{2^2 + (-1)^2}{\sqrt{2 + (-1)}} = 5$.

Vamos ahora a enfocar nuestra atención sobre algunas de las operaciones que se utilizan para formar expresiones algebraicas.

2.2 Exponentes enteros positivos

En nuestros ejemplos de expresiones algebraicas, hemos utilizado símbolos tales como x^3 y a^3. Un símbolo como x^2 representa el producto $x \cdot x$, similarmente a^3 representa el producto $a \cdot a \cdot a$. En general establecemos la siguiente definición.

Definición 2.2.1. *Si a es un número real arbitrario y n es un entero positivo, definimos a^n como el producto de n factores iguales al número a. Es decir,*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores de } a}$$

*En el símbolo a^n, a se llama la **base** y n el **exponente** o la **potencia**. También decimos que a^n es a elevado a la potencia n.*

Ejemplo 2.4. Para ilustrar la definición anterior tenemos:

- $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
- $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$
- $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64}$
- $(\sqrt{2})^6 = (\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}) = 8$

A partir de la definición 2.2.1 podemos comprobar las siguientes propiedades básicas que satisfacen los exponentes enteros positivos. Si a y b son números reales arbitrarios y m y n son enteros positivos, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n} \\ (a^m)^n &= a^{mn} \\ (ab)^n &= a^n b^n \end{aligned}$$

El siguiente razonamiento es una justificación de la primera de las propiedades mencionadas.

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ factores de } a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores de } a} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m+n \text{ factores de } a}$$

Se pueden hacer justificaciones similares para comprobar las otras dos propiedades.

Ejemplo 2.5.

- $5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5 = 3125$
- $(2^2)^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8 = 256$
- $(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2 = 9 \cdot 25 = 225$
- $(ab)^3 = a^3 b^3$

2.3 Exponentes enteros

La definición de a^n se puede extender al caso de exponente cero y exponentes negativos de acuerdo con la siguiente definición.

Definición 2.3.1. *Si a es un número real con $a \neq 0$, definimos*

$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

donde n es un entero positivo.

Ejemplo 2.6.

- $7^{-3} = \dfrac{1}{7^3} = \dfrac{1}{343}$
- $(-4)^{-5} = \dfrac{1}{(-4)^5} = -\dfrac{1}{1024}$
- $5^0 = 1$
- $(2 + \sqrt{3})^0 = 1$

Estamos en capacidad de demostrar las principales propiedades de los exponentes, cuando estos son enteros arbitrarios. Estas propiedades se conocen con el nombre de leyes de los exponentes y son las siguientes.

Leyes de los exponentes. Si a, b son números reales diferentes de cero, y m, n son enteros arbitrarios entonces,

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
5. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
6. $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$

Generalmente usamos exponentes no negativos, en consecuencia empleamos la propiedad (5) si $m \geq n$ y la propiedad (6) si $m < n$. Las propiedades anteriores se extienden de manera natural al caso en que intervienen varios enteros o varios factores. Por ejemplo, tenemos $(abc)^n = a^n b^n c^n$, $a^m a^n a^p = a^{m+n+p}$, etc.

Ejemplo 2.7. Si las letras representan números diferentes de cero tenemos:

- $x^{-2}x^5 = x^{-2+5} = x^3$
- $(y^{-3})^4 = y^{(-3)4} = y^{-12} = \dfrac{1}{y^{12}}$
- $b^2b^3b^5 = b^{2+3+5} = b^{10}$
- $(x^2y^{-3}z^4)^2 = (x^2)^2(y^{-3})^2(z^4)^2 = x^4y^{-6}z^8$
- $\dfrac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2 = 9$
- $\left(\dfrac{5a}{6}\right)^3 = \dfrac{(5a)^3}{6^3} = \dfrac{5^3a^3}{6^3} = \dfrac{125a^3}{216}$

Observamos que entre las leyes de los exponentes no figuran las siguientes fórmulas **incorrectas** si el exponente $n \neq 1$.

$$(a+b)^n = a^n + b^n$$
$$(a-b)^n = a^n - b^n.$$

Cuando $n = 2$ las formulas correctas son:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

2.4 Exponentes racionales

Vamos a extender nuestra definición del símbolo a^n al caso en que el exponente es un número racional. Para empezar necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.4.1. *Sea n un entero positivo mayor que* 1*, y a un número real. Si r es un número real que satisface la ecuación $r^n = a$, decimos que r es una* ***raíz n-ésima de*** *a.*

Ejemplo 2.8.

- 3 y -3 son raíces cuadradas de 9, pues $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$.
- 2 es una raíz cúbica de 8, puesto que $2^3 = 8$.
- -3 es una raíz cúbica de -27, puesto que $(-3)^3 = -27$.

Se puede demostrar que todo número real diferente de cero tiene exactamente n raíces n-ésimas, aunque la mayoría de ellas son números complejos. Entre las raíces n-ésimas de un número real a, vamos a elegir una de ellas como la ***raíz n-ésima principal***, esta raíz la representamos por el símbolo $\sqrt[n]{a}$ y la definimos como sigue:

Definición 2.4.2. *Sea n un entero positivo mayor que* 1 *y a un número real. Establecemos que*

1. *Si $a > 0$, $\sqrt[n]{a}$ es la raíz n-ésima positiva de a.*
2. *Si $a < 0$ y n es impar, $\sqrt[n]{a}$ es la raíz n-ésima negativa de a.*
3. *Si $a = 0$, $\sqrt[n]{a} = 0$.*
4. *Si $a < 0$ y n es par, $\sqrt[n]{a}$ no la definimos, pues en este caso no existe ningún número real r tal que $r^n = a$.*

El símbolo $\sqrt[n]{a}$ se llama un ***radical***, el número a es el ***radicando*** y el número n es el ***índice*** del radical. Cuando $n = 2$ en lugar de $\sqrt[2]{a}$ escribimos simplemente $\sqrt{a}$.

Ejemplo 2.9.

- $\sqrt{25} = 5$
- $\sqrt[3]{-64} = -4$
- $\sqrt[5]{\dfrac{-1}{32}} = -\dfrac{1}{2}$
- $\sqrt{-9}$ y $\sqrt[6]{-72}$ no son números reales.

Recalcamos que $\sqrt[n]{a}$ no existe solo en el caso en que a es negativo y n es par.

Nuestro interés es no solo definir a^n cuando n es un número racional, sino hacerlo de tal forma que se sigan cumpliendo las leyes de los exponentes. Si $n = \dfrac{1}{q}$ donde q es un entero positivo, y deseamos que se cumpla la ley (1) debemos tener que

$$\underbrace{a^{\frac{1}{q}} \cdot a^{\frac{1}{q}} \cdot a^{\frac{1}{q}} \cdot \cdots \cdot a^{\frac{1}{q}}}_{q \text{ factores de } a^{\frac{1}{q}}} = a^{\frac{q}{q}} = a$$

lo cual nos indica que debemos definir $a^{\frac{1}{q}}$ como una raíz q-ésima de a. En consecuencia establecemos la siguiente definición.

Definición 2.4.3. *Sea q un entero positivo mayor que 1 y a un número real tal que $\sqrt[q]{a}$ exista. Establecemos que*

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

Ejemplo 2.10.

- $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.
- $(-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32} = -2$.
- $(-16)^{\frac{1}{4}}$ no existe porque $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real.

Si $n = \dfrac{p}{q}$ con p y q enteros positivos, y deseamos que se cumpla la ley (2) de los exponentes, debemos tener que

$$(a^{\frac{1}{q}})^p = a^{\frac{p}{q}}$$

En consecuencia debemos establecer la siguiente definición.

Definición 2.4.4. *Sea $\dfrac{p}{q}$ un número racional donde p y q son enteros positivos diferentes, y sea a un número real tal que $\sqrt[q]{a}$ exista. Establecemos que*

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p$$

De las definiciones anteriores y las leyes de los exponentes podemos deducir fácilmente que si $a^{\frac{p}{q}}$ existe entonces, también $a^{\frac{p}{q}}$ es la raíz q-ésima principal de a^p, es decir, tenemos que

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (a^p)^{\frac{1}{q}}$$

Finalmente extendemos nuestra definición de a^n al caso en que n es un número racional negativo.

Definición 2.4.5. *Sea $\dfrac{p}{q}$ un número racional con p y q enteros positivos diferentes, y sea a un número tal que $\sqrt[q]{a}$ exista. Establecemos que*

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$$

Ejemplo 2.11.

- $27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$
- $81^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{81^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{(\sqrt[4]{81})^3} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$
- $y^{\frac{4}{7}} = (\sqrt[7]{y})^4 = \sqrt[7]{y^4}$

Se puede demostrar que las leyes de los exponentes (1) a (6) son válidas para exponentes racionales ***siempre y cuando que a y b sean números positivos***. Cuando a y b son negativos algunas de las leyes (1) a (6) no se cumplen.

Ejemplo 2.12.

- $$[(-4)^2]^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$$
  $$(-4)^{2\cdot\frac{1}{2}} = (-4)^1 = -4$$

  Observamos que
  $$[(-4)^2]^{\frac{1}{2}} \neq (-4)^{2\cdot\frac{1}{2}}$$

  Luego la propiedad
  $$(a^m)^n = a^{mn}$$

  no se cumple en este caso.

- $$\left(\frac{-2}{-5}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$$

  pero

  $$\frac{(-2)^{\frac{1}{4}}}{(-5)^{\frac{1}{4}}}$$

  no está definido. Luego la propiedad

  $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

  no se cumple en este caso.

  Para evitar este tipo de problemas, en adelante, cuando trabajemos con exponentes solo consideraremos bases positivas.

2.5 Radicales

En algunas ocasiones es mas ventajoso expresar las cantidades en términos de radicales que en términos de exponentes racionales. Las leyes de los radicales se siguen inmediatamente de las leyes de los exponentes. Si m y n son enteros positivos y a y b son números reales positivos, entonces:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Ejemplo 2.13.

- $\sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = \sqrt{36}\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
- $\sqrt[3]{\dfrac{250}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{125 \cdot 2}}{3} = \dfrac{\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{2}}{3} = \dfrac{5\sqrt[3]{2}}{3}$
- $\sqrt[6]{81} = \sqrt[3]{\sqrt{81}} = \sqrt[3]{9}$

- Si x es un número real, entonces $\sqrt{x^2} = |x|$ (¿Por qué?).

Al simplificar un radical, lo hacemos de tal forma que no existan potencias n-ésimas de radicales cuyo índice es n, no se tengan fracciones bajo el signo de radical y los radicales tengan el índice más pequeño posible.

Ejemplo 2.14.

- $\sqrt[4]{48x^6y^9} = \sqrt[4]{(16x^4y^8)(3x^2y)} = \sqrt[4]{16x^4y^8}\sqrt[4]{3x^2y} = 2xy^2\sqrt[4]{3x^2y}$
- $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{y^2}\sqrt[3]{y}} = \dfrac{\sqrt[3]{xy}}{y}$

En la simplificación de radicales generalmente es mas fácil trabajarlos como exponentes racionales.

Ejemplo 2.15.

$$\sqrt[4]{\frac{256a^2b^4}{c^2}} = \left(\frac{2^8a^2b^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{2^2a^{\frac{1}{2}}b}{c^{\frac{1}{2}}} = \frac{4ba^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{c^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}} = \frac{4ba^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}}{c} = \frac{4b}{c}\sqrt{ac}$$

Para terminar, queremos señalar un error muy frecuente en el uso de los radicales. Este error consiste en creer que se tiene la siguiente fórmula ***incorrecta***

$$\sqrt[n]{a \pm b} = \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo 2.16.

- $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$, pues $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ y $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.
- $\sqrt[3]{4^3 - 2^3} \neq \sqrt[3]{4^3} - \sqrt[3]{2^3}$, pues $\sqrt[3]{4^3 - 2^3} = \sqrt[3]{56}$ y $\sqrt[3]{4^3} - \sqrt[3]{2^3} = 4 - 2 = 2$.

2.6 Raíces cuadradas de números reales negativos

Recordamos que en la sección 1.10 definimos el número complejo i como $i = \sqrt{-1}$. ¿Qué podemos decir acerca de las raíces cuadradas de los números reales negativos en general?

Consideremos ahora un número real negativo. Este puede escribirse en la forma $-a$ donde a es un número real positivo. Tenemos:

$$(i\sqrt{a})^2 = (i\sqrt{a})(i\sqrt{a}) = i^2(\sqrt{a})^2 = (-1)a = -a$$

y, similarmente,

$$(-i\sqrt{a})^2 = -a.$$

Por lo tanto, los números complejos $i\sqrt{a}$ e $-i\sqrt{a}$ son raíces cuadradas del número negativo $-a$. Escogemos al número $i\sqrt{a} = \sqrt{a}i$ como la raíz cuadrada principal del número negativo $-a$ y lo representamos por $\sqrt{-a}$, es decir establecemos formalmente la siguiente definición.

Definición 2.6.1. *Si a es un número real positivo, la raíz cuadrada principal del número real negativo $-a$, la representamos por $\sqrt{-a}$ y la definimos como*

$$\sqrt{-a} = i\sqrt{a} = \sqrt{a}i.$$

Ejemplo 2.17.

- $\sqrt{-36} = i\sqrt{36} = \sqrt{36}i = 6i.$
- $5 + \sqrt{-16} = 5 + \sqrt{16}i = 5 + 4i.$
- $\dfrac{4+\sqrt{-8}}{2} = \dfrac{4+\sqrt{8}i}{2} = \dfrac{4+2\sqrt{2}i}{2} = 2 + \sqrt{2}i.$

Ejemplo 2.18. $\sqrt{-5}\sqrt{-5} = (\sqrt{5}i)(\sqrt{5}i) = i^2(\sqrt{5})^2 = (-1)5 = -5.$

Por lo tanto, $-5 = \sqrt{-5}\sqrt{-5} \neq \sqrt{(-5)(-5)} = \sqrt{25} = 5$ y tenemos un nuevo ejemplo que nos muestra que las propiedades de los exponentes y radicales no siempre son válidas si los números considerados no son positivos.

Ejemplo 2.19.

$$\begin{aligned}(\sqrt{18} + \sqrt{-9})(\sqrt{2} - \sqrt{-6}) &= (\sqrt{18} + \sqrt{9}i)(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)\\ &= (\sqrt{18} + 3i)(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)\\ &= (\sqrt{18}\sqrt{2} + 3\sqrt{6}) + (-\sqrt{18}\sqrt{6} + 3\sqrt{2})i\\ &= (6 + 3\sqrt{6}) + (-6\sqrt{3} + 3\sqrt{2})i\end{aligned}$$

2.7 Definición de polinomios

Una expresión algebraica obtenida mediante las operaciones de suma, resta y multiplicación sobre las constantes y variables, se llama un ***polinomio***.

Ejemplo 2.20.

- $5x^3 - 3x^2 + 6x + 8$ y $x^7 + 2x^4 - 3x^2 - \sqrt{3}x$ son polinomios en una variable.

- $3xy^2 - \frac{2}{5}xy + x - \sqrt{2}$ y $\sqrt{5}x^3y^2 - 3x^2y^2 + 4xy - 8y + 1$ son polinomios en dos variables.

Observamos que los únicos exponentes que aparecen en las variables son enteros positivos. Los exponentes negativos y fraccionarios están excluidos. Sin embargo, los coeficientes numéricos son números reales arbitrarios o elementos arbitrarios del dominio en consideración.

Llamamos ***grado*** de una variable en un término de un polinomio al exponente que tiene la variable en el término. Por ejemplo en el término $3x^4y^3$, el grado de x es 4 y el grado de y es 3. El ***grado de un término*** en dos o más variables es la suma de los grados de las variables que aparecen en el término. Por ejemplo, el grado del término en dos variables $3x^4y^3$ es 7. El ***grado de un polinomio*** en ciertas variables es el mayor de los grados de esas variables en los términos del polinomio.

Ejemplo 2.21.

- $7x^5 - 2x^3 + 3x + 1$ es un polinomio de grado 5 en x.

- $4x^3y^2 - 5xy^3 + x^4y^2 + 2y$ es un polinomio de grado 4 en x, grado 3 en y, y de grado 6 en x e y.

Los polinomios que estudiaremos más detalladamente son los polinomios en una sola variable, variable que representaremos por x. Un polinomio en x con coeficientes reales es una suma finita de productos de la forma $a_k x^k$, donde el coeficiente a_k es un número real y k es un entero no negativo. Así un polinomio en una variable tiene la forma

$$a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

donde n es un entero no negativo, a_i es un número real para $0 \leq i \leq n$. Su grado es el mayor exponente n de x tal que $a_n \neq 0$ y a_n es su coeficiente principal.

Si no se hace necesario explicitarlo, el polinomio puede representarse en la forma $q(x)$. El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales es denotado por $\mathbb{R}[x]$.

Ejemplo 2.22.

- Son polinomios los siguientes:

  $3+12x^3+\frac{25}{4}x^7-36x^9$. Su grado es 9 y su coeficiente principal es -36

  $-\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}x+x^2$. Su grado es 2 y su coeficiente principal es 1.

  $-1+1,5x^2+0,75x^5-1,25x^7$. Su grado es 7 y su coeficiente principal es $-1,25$.

  $\pi+3x$, $-4+\sqrt{2}x$ y todas las expresiones de la forma $b+ax$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Los polinomios de grado 1 son los de esta forma para $a \neq 0$.

  $2 = 2x^0$, $-\sqrt{7} = -\sqrt{7}x^0$, $\frac{9}{2} = \frac{9}{2}x^0$ y todas las constantes no cero son los polinomios de grado 0: si $a \neq 0$, $a = ax^0$. El 0 es también un polinomio constante pero no se le atribuye grado.

- No son polinomios los siguientes:

  $3+4x^2+6x^{-3}$ pues el exponente de x en el tercer término es un entero negativo.

  $9-2\sqrt{x}+x = 4x^3$ pues el exponente de x en el segundo término es positivo pero fraccionario, ya que es $\frac{1}{2}$.

$\dfrac{7x+12x^5-6x^8}{6+12x^3}$ no es un polinomio, es un cociente de polinomios llamado ***fracción racional***.

Dos polinomios en x son iguales si tienen el mismo grado y para cada potencia x^k de x el coeficiente en un polinomio es igual al coeficiente en el otro.

Ejemplo 2.23.

$-1+3x^2-4x^5+9x^7=a_0+a_1x+\cdots+a_7x^7$ si y solo si $a_0=-1$, $a_1=0$, $a_2=3$, $a_3=0$, $a_4=0$, $a_5=-4$, $a_6=0$, $a_7=9$.

$4x+6x^2+12x^3=b_0+b_1x+\cdots+b_5x^5$ si y solo si $b_0=0$, $b_1=4$, $b_2=6$, $b_3=12$, $b_4=0$, $b_5=0$.

Los polinomios $-1-3x+2x^3-x^5$ y $1+a_1x+\cdots+a_nx^n$ no pueden ser iguales porque los términos independientes son distintos: para el primero es -1 y para el segundo es 1.

2.8 Suma y resta de polinomios

El procedimiento para sumar y restar polinomios está basado directamente en las propiedades asociativas y conmutativas de la adición y multiplicación de números reales, y en la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Es decir, está basado en las propiedades P.2, P.3 y P.4 de los números reales, estudiadas en el capítulo 1. Básicamente lo que se hace es agrupar y reducir los términos semejantes. Se llaman ***términos semejantes*** los que difieren únicamente en su coeficiente numérico, por ejemplo $5x^2y$ y $-7x^2y$ son términos semejantes.

Ejemplo 2.24. Efectuemos la siguiente suma

$$(4x^2-2xy+2y^2+7x)+(6xy-5y^2+3x^2)$$

Primero utilizamos las propiedades conmutativa y asociativa para agrupar los términos semejantes, obteniendo

$$(4x^2+3x^2)+(-2xy+6xy)+(2y^2-5y^2)+7x,$$

luego, aplicamos la propiedad distributiva para reducir los términos semejantes, obteniendo como resultado final

$$7x^2 + 4xy - 3y^2 + 7x.$$

En la práctica se escriben en fila los polinomios a sumar, de tal forma que las columnas contengan solo términos semejantes. El ejemplo anterior nos queda de la siguiente forma

$$\begin{array}{l} 4x^2 - 2xy + 2y^2 + 7x \\ \underline{3x^2 + 6xy - 5y^2 } \\ 7x^2 + 4xy - 3y^2 + 7x \end{array}$$

donde la tercera línea presenta el resultado después de reducir los términos semejantes.

Si tenemos en cuenta la definición de resta, el problema de restar dos polinomios se transforma en el problema de sumar dos polinomios.

Ejemplo 2.25. Efectuemos la siguiente resta de polinomios

$$(5x^2 + 3xy - y^3) - (2x^2 - 4xy + 1)$$

La resta anterior se convierte en la suma

$$(5x^2 + 3xy - y^3) + (-2x^2 + 4xy - 1)$$

que es igual a

$$3x^2 + 7xy - y^3 - 1.$$

2.9 Multiplicación de polinomios

La multiplicación de polinomios está basada en la aplicación repetida de la propiedad distributiva y la utilización de la ley de los exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

con m y n enteros positivos.

Ejemplo 2.26.

a.
$$(5x^2y^3)(-3x^4y^2) = -15x^6y^5$$

b.
$$\begin{aligned}(3x+2y)(2x^2-xy+y) &= 3x(2x^2-xy+y)+2y(2x^2-xy+y)\\ &= 6x^3-3x^2y+3xy+4x^2y-2xy^2+2y^2\\ &= 6x^3+x^2y+3xy-2xy^2+2y^2\end{aligned}$$

En la práctica se procede como se indica en la siguiente ilustración

$$\begin{array}{lllll} 2x^2 & -xy & +y & & \\ 3x & +2y & & & \\ \hline 6x^3 & -3x^2y & +3xy & & \\ & +4x^2y & & -2xy^2 & +2y^2 \\ \hline 6x^3 & +x^2y & +3xy & -2xy^2 & +2y^2 \end{array}$$

donde la tercera línea se obtiene multiplicando cada término de la primera línea por $3x$ y la cuarta línea se obtiene multiplicando cada término de la primera línea por $2y$. Finalmente sumando las filas tercera y cuarta se obtiene el resultado que es la última fila.

Un caso particular importante es el de la multiplicación de dos polinomios en la misma variable. En este caso es conveniente ordenar los polinomios de tal forma que el exponente de la variable vaya decreciendo.

Ejemplo 2.27. Efectuemos el siguiente producto de polinomios

$$(2x^3-3x^2+x-7)(x^4-6x^2+1)$$

Tenemos:

$$\begin{array}{llllllll} 2x^3 & -3x^2 & +x & -7 & & & & \\ x^4 & -6x^2 & +1 & & & & & \\ \hline 2x^7 & -3x^6 & +x^5 & -7x^4 & & & & \\ & & -12x^5 & +18x^4 & -6x^3 & +42x^2 & & \\ & & & & +2x^3 & -3x^2 & +x & -7 \\ \hline 2x^7 & -3x^6 & -11x^5 & +11x^4 & -4x^3 & +39x^2 & +x & -7 \end{array}$$

2.10 División de polinomios

La división de un polinomio se rige esencialmente por las mismas reglas de la división aritmética ordinaria. Si los polinomios considerados son polinomios en una sola variable, que es el caso mas frecuente, el polinomio que se divide, llamado el ***dividendo***, debe tener grado mayor o igual al polinomio por el que se divide, llamado el ***divisor***. Analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.28. Dividamos

$$5x - 10x^2 + 6x^3 - 8 \text{ por } x - 2.$$

Procediendo de la manera usual tenemos

$$\begin{array}{rrrrl}
6x^3 & -10x^2 & +5x & -8 & \quad \underline{x \; -2} \\
-6x^3 & +12x^2 & & & \quad 6x^2+2x+9 \\
\hline
 & 2x^2 & +5x & & \\
 & -2x^2 & +4x & & \\
\hline
 & & 9x & -8 & \\
 & & -9x & +18 & \\
\hline
 & & & 10 &
\end{array}$$

Obtenemos como ***cociente*** $6x^2 + 2x + 9$ y como ***residuo*** 10.

Expliquemos el proceso utilizado. Para dividir un polinomio por otro, seguimos los siguientes pasos:

1. Ordenamos cada polinomio en potencias descendentes de la variable x
2. Dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor para hallar el primer término del cociente.
3. Multiplicamos todo el divisor por el primer término del cociente y restamos este resultado del dividendo.
4. Consideramos el residuo obtenido en el paso anterior como nuevo dividendo y repetimos los pasos 2 y 3.

5. Continuamos este proceso hasta que obtengamos como residuo cero o un término de grado menor que el del divisor.

Si el residuo obtenido al finalizar este proceso es cero, decimos que la división es ***exacta***.

Los polinomios en una variable x los representamos por expresiones tales como $p(x), q(x), c(x), r(x)$, etc. Con esta notación, si $p(x)$ representa el dividendo, $q(x)$ el divisor, $c(x)$ el cociente y $r(x)$ el residuo en la división de dos polinomios, tenemos que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

o en forma equivalente

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x)$$

La ecuación anterior tiene una forma similar a la expresada en el algoritmo de la división entre enteros. En un estudio mas completo de polinomios podemos demostrar el siguiente resultado.

Algoritmo de la división para polinomios. Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios de grados n y m respectivamente con $m > 0$, entonces existen polinomios únicos $c(x)$ y $r(x)$ tales que

(i) $p(x) = q(x)c(x) + r(x)$.

(ii) $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$.

El polinomio $c(x)$ se llama el ***cociente*** y el polinomio $r(x)$ se llama el ***residuo*** obtenidos al dividir $p(x)$ por $q(x)$.

Ejemplo 2.29. Hallemos el cociente y el residuo obtenidos al dividir el polinomio $p(x) = 4 + 3x - 2x^2 + 3x^3 + 6x^4$ por el polinomio

$q(x) = 1 + x + 4x^2$.

Procediendo como en el ejemplo anterior tenemos:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & +3x^3 & -2x^2 & +3x & +4 & 4x^2 \quad +x \quad +1 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & -\frac{3}{2}x^3 & -\frac{3}{2}x^2 & & & \frac{3}{2}x^2+\frac{3}{8}x-\frac{31}{32} \\ \cline{1-3}
 & \frac{3}{2}x^3 & -\frac{7}{2}x^2 & +3x & & \\
 & -\frac{3}{2}x^3 & -\frac{3}{8}x^2 & -\frac{3}{8}x & & \\ \cline{2-4}
 & & -\frac{31}{8}x^2 & +\frac{21}{8}x & +4 & \\
 & & \frac{31}{8}x^2 & +\frac{31}{32}x & +\frac{31}{32} & \\ \cline{3-5}
 & & & \frac{115}{32}x & +\frac{159}{32} &
\end{array}
$$

de donde el cociente es

$$c(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{31}{32}$$

y el residuo es

$$r(x) = \frac{115}{32}x + \frac{159}{32}.$$

Veamos que se cumple la relación mencionada en la parte (i) del algoritmo de la división.

En efecto, tenemos que

$$
\begin{aligned}
q(x)c(x) + r(x) &= (4x^2 + x + 1)(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{31}{32}) + \frac{115}{32}x + \frac{159}{32} \\
&= (6x^4 + 3x^3 - 2x^2 - \frac{19}{32}x - \frac{31}{32}) + (\frac{115}{32}x + \frac{159}{32}) \\
&= 6x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 4 = p(x).
\end{aligned}
$$

Veamos otro caso:

Ejemplo 2.30. Hallemos el cociente y el residuo obtenidos al dividir el polinomio $p(x) = x^2 + x + 1$ por el polinomio $q(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$.

Como en este caso, el grado de $q(x)$ es mayor que el grado de $p(x)$ obtenemos como cociente el polinomio 0 y como residuo el polinomio $p(x)$. La relación

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x)$$

nos queda en la forma

$$x^2 + x + 1 = (2x^3 - x^2 + x - 1) \cdot 0 + (x^2 + x + 1).$$

Para dividir polinomios en dos o mas variables, se procede de la misma forma, eligiendo una variable común con respecto a la cual se ordenan los polinomios en potencias descendentes.

Ejemplo 2.31. Dividamos $2x^4 - x^3y + 2xy^3 + 3y^4$ por $x^2 - xy + y^2$

Ordenando por potencias descendentes de x tenemos

$$\begin{array}{rrrrrl}
2x^4 & -x^3y & +0x^2y^2 & +2xy^3 & +3y^4 & \quad \underline{x^2-xy+y^2} \\
\underline{-2x^4} & \underline{+2x^3y} & \underline{-2x^2y^2} & & & \quad 2x^2+xy-y^2 \\
 & x^3y & -2x^2y^2 & +2xy^3 & & \\
 & \underline{-x^3y} & \underline{+x^2y^2} & \underline{-xy^3} & & \\
 & & -x^2y^2 & +xy^3 & +3y^4 & \\
 & & \underline{x^2y^2} & \underline{-xy^3} & \underline{+y^4} & \\
 & & & & 4y^4 &
\end{array}$$

Hemos obtenido como cociente $c(x, y) = 2x^2+xy-y^2$ y como residuo $r(x, y) = 4y^4$.

Además, por verificación directa podemos comprobar que

$$p(x, y) = q(x, y)c(x, y) + r(x, y),$$

que es la forma del algoritmo de la división para polinomios en dos variables.

Una manera fácil y rápida de realizar la división de un polinomio $p(x)$ por otro de la forma $x - d$, es mediante el proceso conocido como ***división sintética***, que explicaremos a continuación.

Seguimos los siguientes pasos:

1. Escribimos en una línea los coeficientes del polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ que queremos dividir, ordenado previamente en potencias descendentes, y colocando 0 cuando falte alguna potencia. Luego a la derecha de estos números escribimos separado por el símbolo $\lfloor$ el número d.

2. Escribimos en la tercera fila el coeficiente principal a_n de $p(x)$.

3. Multiplicamos a_n por d y anotamos el producto en la segunda fila debajo del coeficiente a_{n-1}. Luego sumamos a_{n-1} con este producto y anotamos el resultado en la tercera fila.

4. Multiplicamos este número que acabamos de obtener en la tercera fila por d, anotamos el resultado en la segunda fila debajo del coeficiente a_{n-2}, luego lo sumamos con a_{n-2} y anotamos el valor de la suma en la tercera fila.

5. Repetimos el proceso anterior hasta donde sea posible.

6. El último número de la tercera fila es el residuo y los números anteriores son los coeficientes del cociente.

Veamos como funciona el proceso en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.32. Dividamos el polinomio $7x^5 + 4x^3 + 3x^2 - x - 6$ por $x + 1$.

Aplicando los pasos que acabamos de mencionar tenemos

$$\begin{array}{cccccc l}
7 & 0 & 4 & 3 & -1 & -6 & \lfloor -1 \\
 & -7 & 7 & -11 & 8 & -7 & \\
\hline
7 & -7 & 11 & -8 & 7 & -13 &
\end{array}$$

Luego el cociente obtenido en la división es

$$c(x) = 7x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 8x + 7$$

y el residuo obtenido es $r(x) = -13$.

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 2.33. Dividamos el polinomio $x^4 - 3x^3 + 6x + 8$ por $x - 4$.

Aplicando el proceso estudiado tenemos:

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & -3 & 0 & 6 & 8 & \lfloor 4 \\ & 4 & 4 & 16 & 88 & \\ \hline 1 & 1 & 4 & 22 & 96 & \end{array}$$

Por lo tanto, el cociente es $c(x) = x^3 + x^2 + 4x + 22$ y el residuo es $r(x) = 96$.

2.11 Teoremas del residuo y del factor

Cuando el divisor de un polinomio $p(x)$ es de la forma $x - d$, el residuo es una constante k y por el algoritmo de la división tenemos

$$p(x) = (x - d)c(x) + k.$$

Entonces, al calcular $p(x)$ en d (es decir al reemplazar x por d en el polinomio y realizar las operaciones indicadas), obtenemos

$$\begin{aligned} p(d) &= (d - d)c(d) + k \\ &= 0 + k = k. \end{aligned}$$

Así hemos demostrado el **teorema del residuo**:

Teorema 2.11.1 (Teorema del residuo). *El residuo de dividir un polinomio $p(x)$ por el polinomio $x - d$ es $p(d)$.*

Ejemplo 2.34. 1. Al evaluar el polinomio

$$p(x) = -8 + 5x - 10x^2 + 6x^3 \text{ en } x = 2,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} p(2) &= -8 + 5 \cdot 2 - 10 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2^3 \\ &= 10, \end{aligned}$$

y este es el residuo obtenido al dividir $p(x)$ por $x - 2$ como vimos en un ejemplo anterior.

2. Por el teorema del residuo, podemos asegurar que el residuo obtenido al dividir $p(x) = -6 - x + 3x^2 + 4x^3 + 7x^5$ por $x+1$ es $p(-1) = -13$, como comprobamos en el ejemplo 2.32.

Como un caso particular del teorema del residuo aparece el **teorema del factor**:

Teorema 2.11.2 (Teorema del factor). *El polinomio $x-d$ es factor del polinomio $p(x)$ si y solo si $p(d) = 0$.*

Demostración. Como $p(x) = (x-d)c(x) + p(d)$, $x-d$ es factor de $p(x)$ si y solo si $p(d) = 0$. □

Una **raíz** o un **cero** de un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ es un número complejo z (real o no) que verifica $p(z) = 0$ (o, expresado con otras palabras, es una solución de la ecuación $p(x) = 0$).

El Teorema del Factor nos dice que el número complejo d es un cero del polinomio $p(x)$ si y solo si $x-d$ es un factor del polinomio $p(x)$.

Ejemplo 2.35. El polinomio $x-4$ es un factor de $p(x) = x^2 + x - 20$ puesto que $p(4) = 4^2 + 4 - 20 = 0$. En efecto podemos comprobar inmediatamente que $x^2 + x - 20 = (x+5)(x-4)$.

El polinomio $x+3 = x-(-3)$ es un factor del polinomio $p(x) = x^3 + 27$ puesto que $p(-3) = (-3)^3 + 27 = 0$.

En efecto, se comprueba fácilmente que $x^3+27 = (x+3)(x^2-3x+9)$.

Es importante destacar que cuando los coeficientes de un polinomio son todos números reales, y un número complejo $z = a+bi$ es una raíz o cero de este polinomio, entonces su conjugado $\overline{z} = a - bi$ también es raíz o cero de dicho polinomio.

Ejemplo 2.36. Un polinomio de grado 3 con coeficientes reales que tiene como raíces 3 y $1+2i$, necesariamente tiene también como raíz el número $1-2i$. Por el teorema del factor este polinomio tiene la forma

$$\begin{aligned} p(x) &= a(x-3)(x-(1+2i)(x-(1-2i) \\ &= a(x-3)(x-1-2i)(x-1+2i) \\ &= a(x-3)((x-1)^2+4) \end{aligned}$$

donde a es número real distinto de 0.

2.12 Productos notables y factorización de polinomios

Los siguientes productos se utilizan con tanta frecuencia en álgebra que no solo merecen destacarse sino que es aconsejable memorizarlos. Se conocen con el nombre de ***productos notables*** y son:

1. $a(x+y) = ax + ay$.
2. $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.
3. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
4. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.
5. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.
6. $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.
7. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$.
8. $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$.
9. $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$.
10. $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3$.

La validez de los productos anteriores se comprueba fácilmente realizando las multiplicaciones correspondientes. Las letras que intervienen en las fórmulas, pueden reemplazarse por expresiones algebraicas arbitrarias.

Ejemplo 2.37.

1.
$$\begin{aligned}(3\sqrt{x+y} - 2\sqrt{x})(3\sqrt{x+y} + 2\sqrt{x}) &= (3\sqrt{x+y)})^2 - (2\sqrt{x})^2 \\ &= 9(x+y) - 4x \\ &= 5x + 9y.\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}(3t^2 + 4s)^2 &= (3t^2)^2 + 2(3t^2)(4s) + (4s)^2 \\ &= 9t^4 + 24t^2s + 16s^2.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(a+b-c)^3 &= ((a+b)-c)^3\\ &= (a+b)^3 - 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 - c^3\\ &= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\\ &\qquad - 3(a^2+2ab+b^2)c + 3ac^2 + 3bc^2 - c^3.\end{aligned}$$

Observen que hemos considerado a $(a+b)$ como un solo término.

4.

$$\begin{aligned}(2x+5y)(5x-3y) &= 10x^2 + (-6+25)xy - 15y^2\\ &= 10x^2 + 19xy - 15y^2.\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}(2a-5b)(4a^2+10ab+25b^2) &= (2a-5b)((2a)^2+(2a)(5b)+(5b)^2)\\ &= (2a)^3 - (5b)^3\\ &= 8a^3 - 25b^3.\end{aligned}$$

Factorizar una expresión algebraica, es expresarla como producto de expresiones mas simples llamadas ***factores*** de la expresión original. En general, la factorización de expresiones algebraicas puede ser muy complicada y nos limitaremos por ahora a considerar algunos casos sencillos, que se derivan de las fórmulas de los productos notables cuando se leen de derecha a izquierda.

Ejemplo 2.38. (Factor común). Para factorizar las siguientes expresiones utilizamos el producto notable (1), donde la letra a se conoce con el nombre de un ***factor común***.

a) $3x^3 - 6x + 9 = 3(x^3 - 2x + 3)$. El factor común es 3.

b) $(5x-2y)x^2 - (5x-2y)6xy = (5x-2y)(x^2-6xy)$. El factor común es $5x-2y$.

c) $y^6 - y^4 = y^4(y^2-1) = y^4(y-1)(y+1)$.

Ejemplo 2.39. (Diferencia de cuadrados). Para factorizar las siguientes expresiones utilizamos el producto notable (2).

a)

$$\begin{aligned}16t^2 - 81r^2s^4 &= (4t)^2 - (9rs^2)^2\\ &= (4t + 9rs^2)(4t - 9rs^2).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{9}{z^4} - 25x^4 &= \left(\frac{3}{z^2}\right)^2 - \left(5x^2\right)^2\\ &= \left(\frac{3}{z^2} + 5x^2\right)\left(\frac{3}{z^2} - 5x^2\right)\\ &= \left(\frac{3}{z^2} + 5x^2\right)\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{z}\right)^2 - (\sqrt{5}x)^2\right)\\ &= \left(\frac{3}{z^2} + 5x^2\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{z} + \sqrt{5}x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{z} - \sqrt{5}x\right).\end{aligned}$$

Ejemplo 2.40. (Suma y diferencia de cubos). Utilizando los productos notables (9) y (10) tenemos las siguientes factorizaciones

1.

$$\begin{aligned}27a^3 + 8b^3 &= (3a)^3 + (2b)^3\\ &= (3a + 2b)((3a)^2 - (3a)(2b) + (2b)^2)\\ &= (3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2).\end{aligned}$$

2.

$$\left(\frac{t-s}{4r}\right)^3 - 125y^3 = \left(\frac{t-s}{4r} - 5y\right)\left(\left(\frac{t-s}{4r}\right)^2 + \left(\frac{t-s}{4r}\right)(5y) + (5y)^2\right).$$

Ejemplo 2.41. (Factorización de trinomios). Los productos notables (3), (4),(7) y (8) nos permiten factorizar varias clases de trinomios, como en los casos siguientes:

1.

$$\begin{aligned}9x^2 + 12xy + 4y^2 &= (3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2\\ &= (3x + 2y)^2.\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}81z^6 - 90z^3w^2 + 25w^4 &= (9z^3)^2 - 2(9z^3)(5w^2) + (5w^2)^2\\ &= (9z^3 - 5w^2)^2.\end{aligned}$$

3. Factoricemos el trinomio $x^2 + 3x - 4$.

   Debemos tener
$$\begin{aligned}x^2 + 3x - 4 &= (x + a)(x + b)\\ &= x^2 + (a + b)x + ab.\end{aligned}$$
   Luego tenemos que buscar dos números a y b tales que $a + b = 3$ y $ab = -4$. Fácilmente encontramos que $a = 4$ y $b = -1$. En consecuencia
$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1).$$

4. Factoricemos el trinomio $6x^2 + 11x - 10$.

   Debemos tener
$$\begin{aligned}6x^2 + 11x - 10 &= (ax + b)(cx + d)\\ &= acx^2 + (ad + bc)x + bd.\end{aligned}$$
   Luego tenemos que buscar números a, b, c y d tales que $ac = 6, bd = -10$ y $ad + bc = 11$. Observamos que a y c son positivos y que b y d son de signos opuestos. Por ensayo y error llegamos a la combinación correcta
$$6x^2 + 11x - 10 = (2x + 5)(3x - 2).$$
   La factorización de este trinomio, también puede efectuarse reduciéndolo a un caso similar al de la parte c) que es mas sencillo. Veamos como se procede:
$$\begin{aligned}6x^2 + 11x - 10 &= \frac{1}{6}[(6x)^2 + 11(6x) - 60]\\ &= \frac{1}{6}(u^2 + 11u - 60), \text{ donde } u = 6x\\ &= \frac{1}{6}(u + 15)(u - 4)\\ &= \frac{1}{6}(6x + 15)(6x - 4)\\ &= \left(\frac{6x + 15}{3}\right)\left(\frac{6x - 4}{2}\right)\\ &= (2x + 5)(3x - 2).\end{aligned}$$

5. Factoricemos el trinomio $4x^2 - 4xy - 3y^2$.

   Procediendo como en el ejemplo anterior tenemos:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4xy - 3y^2 &= \frac{1}{4}((4x)^2 - 4y(4x) - 12y^2) \\ &= \frac{1}{4}(u^2 - 4yu - 12y^2), \text{ donde } u = 4x \\ &= \frac{1}{4}(u - 6y)(u + 2y) \\ &= \frac{1}{4}(4x - 6y)(4x + 2y) \\ &= \left(\frac{4x - 6y}{2}\right)\left(\frac{4x + 2y}{2}\right) \\ &= (2x - 3y)(2x + y). \end{aligned}$$

Algunas veces hay necesidad de agrupar o manipular convenientemente los términos para poder factorizar las expresiones, como en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2.42. 1.

$$\begin{aligned} 4x^3 + 4x^2 - 9x - 9 &= (4x^3 + 4x^2) - (9x + 9) \\ &= 4x^2(x + 1) - 9(x + 1) \\ &= (4x^2 - 9)(x + 1) \\ &= (2x - 3)(2x + 3)(x + 1). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 &= (a^3 - a^2b) - (ab^2 - b^3) \\ &= a^2(a - b) - b^2(a - b) \\ &= (a^2 - b^2)(a - b) \\ &= (a - b)(a + b)(a - b) \\ &= (a + b)(a - b)^2. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} y^4 + 4 &= y^4 + 4y^2 - 4y^2 + 4 \\ &= (y^4 + 4y^2 + 4) - 4y^2 \\ &= (y^2 + 2)^2 - 4y^2 \\ &= (y^2 + 2 - 2y)(y^2 + 2 + 2y). \end{aligned}$$

2.13 Fracciones algebraicas

Una ***fracción algebraica*** es el cociente de dos expresiones algebraicas. Si la fracción algebraica es el cociente de dos polinomios, la llamamos una ***fracción racional***. Algunos ejemplos son

$$\frac{3x^2-5x+1}{2x+7}, \quad \frac{7x-\sqrt{x^2-5}}{x^{\frac{2}{3}}+1}, \quad \frac{5x^2y-x^3+6y^2}{2xy-y^4}, \quad \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}$$

La primera y tercera fracciones son fracciones racionales.

La mayoría de las fracciones que consideramos, son fracciones racionales en una sola variable. Como la división por cero no es posible, siempre que tratemos con fracciones, supondremos implícitamente que los denominadores son diferentes de cero.

2.13.1 Simplificación de fracciones

En el trabajo con fracciones, se acostumbra a simplificarlas hasta donde sea posible, de tal manera que obtengamos fracciones donde el numerador y el denominador no tengan factores comunes. El principio básico para simplificar fracciones es la relación siguiente, que mencionamos en el capítulo 1,

$$\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y} \quad \text{si} \quad z \neq 0$$

Este principio, nos indica que podemos cancelar los factores comunes distintos de cero que aparecen en el numerador y el denominador de una fracción.

Ejemplo 2.43. Simplifiquemos algunas fracciones

a)

$$\begin{aligned}\frac{2x^2+5x-3}{x^2-2x-15} &= \frac{(2x-1)(x+3)}{(x-5)(x+3)} \\ &= \frac{2x-1}{x-5}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} &= \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}\\ &= \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{x(x+y)(x^3-y^3)}{(x-y)(x^2-y^2)} &= \frac{x(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x-y)(x+y)}\\ &= \frac{x(x^2+xy+y^2)}{x-y}\end{aligned}$$

Algunos errores muy frecuentes en la simplificación de fracciones se presentan por aplicación de las siguientes fórmulas incorrectas:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x+y}{x+z} &= \frac{y}{z}\\ \frac{x+y}{x} &= y\\ \frac{x+y}{x} &= 1+y\end{aligned}\right. \qquad \text{(Fórmulas incorrectas)}$$

Ejemplo 2.44.

a) $\dfrac{5x+3}{5x+8}$ no es igual a $\dfrac{3}{8}$

b) $\dfrac{3x+4y}{3x}$ no es igual ni a $4y$ ni a $1+4y$

2.13.2 Operaciones con fracciones

Las operaciones de suma resta multiplicación y división de fracciones se basan en las propiedades que mencionamos en el capítulo 1 y que para comodidad repetimos ahora. Estas propiedades son:

- $\dfrac{x}{z} \pm \dfrac{y}{w} = \dfrac{xw \pm yz}{zw}$
- $\dfrac{x}{z} \cdot \dfrac{y}{w} = \dfrac{xy}{zw}$

- $\dfrac{x}{z} \div \dfrac{y}{w} = \dfrac{\frac{x}{z}}{\frac{y}{w}} = \dfrac{x}{z} \cdot \dfrac{w}{y} = \dfrac{xw}{yz}$

Cuando realizamos operaciones con fracciones debemos simplificar el resultado hasta donde sea posible. En los casos de multiplicación y división de fracciones, cuando sea factible, se simplifican numeradores y denominadores, antes de realizar las operaciones mas complejas.

Ejemplo 2.45.

a)

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+y} + \frac{3}{x^2-y^2} &= \frac{x(x^2-y^2)+3(x+y)}{(x+y)(x^2-y^2)} \\
&= \frac{x(x-y)(x+y)+3(x+y)}{(x+y)(x^2-y^2)} \\
&= \frac{(x(x-y)+3)(x+y)}{(x^2-y^2)(x+y)} \\
&= \frac{x(x-y)+3}{x^2-y^2} \\
&= \frac{x^2-xy+3}{x^2-y^2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\frac{(4x^2+4xy-3y^2)}{(x^2-2xy-3y^2)} \cdot \frac{(2x^2-xy-3y^2)}{(4x^2-9y^2)} \\
&\qquad = \frac{(4x^2+4xy-3y^2)(2x^2-xy-3y^2)}{(x^2-2xy-3y^2)(4x^2-9y^2)} \\
&\qquad = \frac{(2x+3y)(2x-y)(2x-3y)(x+y)}{(x-3y)(x+y)(2x-3y)(2x+3y)} \\
&\qquad = \frac{2x-y}{x-3y}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-2ab}}{\dfrac{a^2-b^2}{a^2-ab-2b^2}} &= \frac{(a^2-2ab+b^2)(a^2-ab-2b^2)}{(a^2-2ab)(a^2-b^2)} \\
&= \frac{(a-b)^2(a-2b)(a+b)}{a(a-2b)(a-b)(a+b)} \\
&= \frac{a-b}{a}
\end{aligned}$$

Cuando se suman o restan dos o mas fracciones algebraicas, es aconsejable escribir todas las fracciones con el mismo denominador pues en este caso las operaciones resultan inmediatas si aplicamos repetidamente las fórmulas

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{y}=\frac{x+z}{y} \quad \text{y} \quad \frac{x}{y}-\frac{z}{y}=\frac{x-z}{y}$$

Cualquier denominador común funciona, pero el mas utilizado es el ***mínimo común denominador*** (m.c.d.), que podemos encontrar de la siguiente forma: primero factorizamos todos los denominadores y luego formamos un producto que contenga a todos los factores que aparezcan en cualquiera de los denominadores, elevados a la mayor potencia conque se presenten en ellos. Este producto es el m.c.d. buscado.

Ejemplo 2.46. Hallemos el m.c.d. de las siguientes expresiones:

$$x^2-y^2, \quad x^2+2xy+y^2, \quad x^2-3xy+2y^2 \quad \text{y} \quad x^3+y^3$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
x^2-y^2 &= (x-y)(x+y) \\
x^2+2xy+y^2 &= (x+y)^2 \\
x^2-3xy+2y^2 &= (x-2y)(x-y) \\
x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2)
\end{aligned}$$

Luego el mínimo común denominador es

$$(x-y)(x+y)^2(x-2y)(x^2-xy+y^2)$$

Ejemplo 2.47. Hallemos

$$\frac{2x+1}{x^2-4}+\frac{x}{x+2}-\frac{3x-1}{x^2-4x+4}$$

El m.c.d. de los denominadores es $(x-2)^2(x+2)$. Por lo tanto,

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{2x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{(2x+1)(x-2)}{(x-2)^2(x+2)},\quad \frac{x}{x+2}=\frac{x(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)}$$

y

$$\frac{3x-1}{x^2-4x+4}=\frac{3x-1}{(x-2)^2}=\frac{(3x-1)(x+2)}{(x-2)^2(x+2)},$$

luego,

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{x^2-4}+\frac{x}{x+2}-\frac{3x-1}{x^2-4x+4}&\\ &=\frac{(2x+1)(x-2)+x(x-2)^2-(3x-1)(x+2)}{(x-2)^2(x+2)}\\ &=\frac{x^3-5x^2-4x}{(x-2)^2(x+2)}\end{aligned}$$

2.13.3 Racionalización de fracciones

Algunas veces se hace necesario expresar una fracción de tal manera que su numerador o su denominador no contenga radicales. El proceso a seguir se conoce con el nombre de racionalización del numerador o el denominador, según sea el caso y lo ilustramos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.48.

1. Racionalicemos el denominador en la siguiente expresión

$$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$$

Para eliminar los radicales en el denominador nos basamos en el producto notable

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2 \quad \text{con} \quad a=\sqrt{x+h} \quad \text{y} \quad b=\sqrt{x}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} &= \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2} \\
&= \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(x+h)-x} \\
&= \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h} \\
&= (\sqrt{x+h}+\sqrt{x})
\end{aligned}$$

2. Racionalicemos el numerador en la expresión

$$\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{x-y}$$

En este caso nos basaremos en el producto notable

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

con $a=\sqrt[3]{x}$ y $b=\sqrt[3]{y}$.

Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{x-y} &= \frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+(\sqrt[3]{y})^2)}{(x-y)((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+(\sqrt[3]{y})^2)} \\
&= \frac{(\sqrt[3]{x})^3-(\sqrt[3]{y})^3}{(x-y)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})} \\
&= \frac{(x-y)}{(x-y)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})} \\
&= \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}
\end{aligned}$$

2.14 Ecuaciones e inecuaciones

Una condición en x es una expresión que contiene la variable x y se transforma en una proposición matemática. Es decir, en una afirmación que es verdadera o falsa, cuando se sustituye x por un elemento del dominio en consideración. En nuestro caso por un número real.

El conjunto de elementos del dominio que hacen de la condición una proposición verdadera, se llama el ***conjunto solución*** de la condición.

La mayoría de las condiciones que se presentan en matemáticas tienen la forma de una ecuación o, de una inecuación o desigualdad. En esta sección estudiaremos algunas ecuaciones e inecuaciones que se presentan con frecuencia, y mostraremos como encontrar sus soluciones.

Resolver una ecuación o una inecuación es encontrar su conjunto solución, es decir encontrar todos los números reales que la hacen verdadera. El procedimiento para resolver ecuaciones e inecuaciones consiste en transformarlas en condiciones equivalentes, es decir en ecuaciones o inecuaciones que tengan las mismas soluciones, hasta que el conjunto solución sea obvio.

2.14.1 Ecuación lineal

Las ecuaciones más sencillas que se presentan en la práctica son las ecuaciones lineales en una variable, que son las que se pueden escribir en la forma

$$ax + b = 0 \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0.$$

Aplicando las propiedades básicas de los números reales, vemos que la ecuación lineal anterior es equivalente a cada una de las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} ax &= -b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Por lo tanto, su única solución es $x = -\dfrac{b}{a}$.

Ejemplo 2.49. Resolvamos la ecuación $4x + 8 = 2x - 10$.

Tenemos la siguiente lista de ecuaciones equivalentes

$$\begin{array}{rl} 4x+8=2x-10 & \text{ecuación dada} \\ 4x=2x-18 & \text{sumando } -8 \text{ a cada miembro} \\ 2x=-18 & \text{sumando } -2x \text{ a cada miembro} \\ x=-9 & \text{dividiendo cada miembro por 2.} \end{array}$$

Luego la solución de la ecuación inicial es $x=-9$. Reemplazando este valor en la ecuación podemos comprobar que efectivamente es la solución, pues en este caso tenemos

$$4(-9)+8=2(-9)-10 \text{ o sea } -28=-28$$

El siguiente ejemplo nos muestra que una ecuación aparentemente complicada es realmente una ecuación lineal

Ejemplo 2.50. Resolvamos la ecuación

$$4x(x-4)+5x-6=(x-1)(x+2)+3x^2-10x+3.$$

Tenemos la siguiente lista de ecuaciones equivalentes

$$\begin{array}{rl} 4x(x-4)+5x-6=(x-1)(x+2)+3x^2-10x+3 & \text{ecuación dada} \\ 4x^2-16x+5x-6=x^2+x-2+3x^2-10x+3 & \text{multiplicando} \\ 4x^2-11x-6=4x^2-9x+1 & \text{simplificando} \\ -11x-6=-9x+1 & \text{sumando } -4x^2 \\ -2x=7 & \text{sumando } 6+9x \\ x=-\dfrac{7}{2} & \text{dividiendo por } -2. \end{array}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación inicial es $x=-\frac{7}{2}$ como puede comprobarse fácilmente.

2.14.2 Ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas son las que se pueden escribir en la forma

$$ax^2+bx+c=0 \text{ con } a,b,c\in\mathbb{R} \text{ y } a\neq 0.$$

Para resolver una ecuación cuadrática consideramos la siguiente lista de ecuaciones equivalentes:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=0 && \text{ecuación dada}\\
ax^2+bx&=-c && \text{sumando } -c\\
x^2+\frac{b}{a}x&=-\frac{c}{a} && \text{dividiendo por } a\\
x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2&=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 && \text{sumando } \left(\frac{b}{2a}\right)^2\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2-4ac}{4a^2} && \text{simplificando}\\
x+\frac{b}{2a}&=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \text{extrayendo raíz cuadrada}\\
x&=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \text{despejando } x.
\end{aligned}$$

Como los denominadores en los términos del lado derecho de la ecuación son iguales, tenemos que las soluciones de la ecuación cuadrática son los dos valores dados por la expresión

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.51. Resolvamos la ecuación $3x^2-13x=10$

Escribiendo la ecuación en la forma $ax^2+bx+c=0$ obtenemos

$$3x^2-13x-10=0.$$

Luego $a=3, b=-13$ y $c=-10$. Aplicando la fórmula (2.1), obtenemos las soluciones

$$x=\frac{13\pm\sqrt{(-13)^2-4(3)(-10)}}{2(3)}$$

que simplificando se convierten en

$$x=\frac{13\pm\sqrt{289}}{6}=\frac{13\pm 17}{6}$$

Por lo tanto, escogiendo el signo más y el signo menos, obtenemos como soluciones

$$x=5 \text{ o } x=-\frac{2}{3}.$$

Se puede comprobar inmediatamente que estos valores son efectivamente soluciones de la ecuación dada.

Ejemplo 2.52. Resolvamos la ecuación $7x^2 + 4x + 1 = 0$.

En este caso $a = 7, b = 4$ y $c = 1$. Aplicando la fórmula 2.1, obtenemos las soluciones

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(7)(1)}}{2(7)}$$

que simplificando se convierten en

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{14} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}i}{14} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}i}{14} = \frac{-2 \pm \sqrt{3}i}{7}.$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación original son los números complejos

$$x = \frac{-2 + \sqrt{3}i}{7} \text{ o } x = \frac{-2 - \sqrt{3}i}{7}.$$

Muchas ecuaciones mediante una sustitución apropiada se pueden transformar en ecuaciones cuadráticas como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.53. Resolvamos la ecuación $4x^{\frac{2}{3}} - 8x^{\frac{1}{3}} + 3 = 0$.

Si hacemos $y = x^{\frac{1}{3}}$, la ecuación dada se convierte en $4y^2 - 8y + 3 = 0$, que es una ecuación cuadrática en la variable y.

Aplicando la fórmula 2.1, las soluciones de esta ecuación son

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(3)}}{2(4)} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8},$$

o sea

$$y = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \text{ o } y = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Si $y = \frac{3}{2}$, entonces $x^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, luego $x = (\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8}$.

Si $y = \frac{1}{2}$, entonces $x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$, luego $x = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación original son $x = \frac{27}{8}$ o $x = \frac{1}{8}$, como se puede comprobar rápidamente.

2.14.3 Ecuaciones con fracciones

Cuando una ecuación contiene fracciones racionales, para resolverla se multiplican ambos miembros de la ecuación por el m.c.d. que definimos en la sección 2.13.2 y se resuelve la ecuación resultante. Este procedimiento lleva con frecuencia a multiplicar por expresiones que son iguales a 0 para algunos valores de la variable x. Por esta razón las ecuaciones obtenidas no siempre son equivalentes y hay necesidad de verificar si las "soluciones" obtenidas son verdaderas soluciones.

Ejemplo 2.54. Resolvamos la ecuación $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{6}{x+3}=\dfrac{3x+1}{x^2+2x-3}$.

Como $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$ el m.c.d. es $(x+3)(x-1)$. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por este m.c.d. tenemos

$$(x+3)(x-1)\Big(\frac{x}{x-1}+\frac{6}{x+3}\Big)=(x+3)(x-1)\Big(\frac{3x+1}{x^2+2x-3}\Big),$$

que al efectuar la multiplicación se convierte en

$$x(x+3)+6(x-1)=3x+1.$$

Simplificando la ecuación anterior se reduce a

$$x^2+6x-7=0.$$

Utilizando la fórmula (2.1) o bien escribiendo la ecuación anterior en la forma $(x+7)(x-1)=0$, encontramos que las posibles soluciones de la ecuación inicial son $x=-7$ o $x=1$. Como el valor $x=1$ hace cero el denominador de uno de los términos de la ecuación inicial, este valor no es solución de la misma. Mediante una comprobación directa vemos que el valor $x=-7$ si satisface la ecuación y es por lo tanto su única solución.

Los números que aparecen como posibles soluciones de una ecuación, pero que en realidad no son verdaderas soluciones de esta, se llaman ***soluciones extrañas*** o ***raíces extrañas*** de la ecuación dada.

2.14.4 Ecuaciones que contienen radicales

Para resolver ecuaciones que contienen radicales es necesario eliminar estos radicales elevando los miembros de la ecuación a las potencias adecuadas. Cuando se eleva un miembro a una potencia par generalmente se introducen soluciones extrañas y por esta razón es indispensable comprobar cuales de los números que se obtienen como posibles soluciones, son en realidad soluciones de la ecuación original.

Ejemplo 2.55. Resolvamos la ecuación $\sqrt{7+3x}+\sqrt{1+x}=6$.

Tenemos

$$
\begin{aligned}
\sqrt{7+3x}+\sqrt{1+x} &= 6 && \text{ecuación dada}\\
\sqrt{7+3x} &= 6-\sqrt{1+x} && \text{aislando un radical}\\
7+3x &= 36-12\sqrt{1+x}+1+x && \text{elevando al cuadrado}\\
-30+2x &= -12\sqrt{1+x} && \text{simplificando}\\
(-30+2x)^2 &= (-12\sqrt{1+x})^2 && \text{elevando al cuadrado}\\
900-120x+4x^2 &= 144(1+x) && \text{desarrollando los cuadrados}\\
4x^2-264x+756 &= 0 && \text{simplificando}\\
x^2-66x+189 &= 0 && \text{dividiendo por 4}\\
(x-3)(x-63) &= 0 && \text{factorizando}\\
x = 3 \text{ o } x &= 63 && \text{resolviendo la ecuación.}
\end{aligned}
$$

Si $x=3$ reemplazando en la ecuación original tenemos

$$\sqrt{7+3(3)}+\sqrt{1+3}=6 \text{ o sea } 4+2=6,$$

luego $x=3$ es solución de la ecuación.

Si $x=63$ reemplazando en la ecuación original tenemos

$$\sqrt{7+3(63)}+\sqrt{1+63}=6 \text{ o sea } 14+8=6,$$

luego $x=63$ no es solución de la ecuación.

Por lo tanto, la única solución de la ecuación dada es $x=3$.

2.14.5 Solución de inecuaciones

Como en el caso de las ecuaciones, el procedimiento para resolver inecuaciones consiste en transformarlas en inecuaciones equivalentes, hasta que se pueda determinar fácilmente el conjunto solución.

Las herramientas para este trabajo son las propiedades del orden entre los números reales estudiadas en la 1.4. Por su uso tan frecuente nos permitimos recordar las siguientes:

- Si $x < y$ entonces $x + z < y + z$ para todo número real z.
- Si $x < y$ y $z > 0$ entonces $xz < yz$ y $\dfrac{x}{z} < \dfrac{y}{z}$.
- Si $x < y$ y $z < 0$ entonces $xz > yz$ y $\dfrac{x}{z} > \dfrac{y}{z}$.

Ejemplo 2.56. Resolvamos la inecuación

$$2x + 7 \leq 5x - 6$$

Las siguientes inecuaciones son equivalentes:

$$\begin{array}{rl} 2x + 7 \leq 5x - 6 & \text{Desigualdad dada} \\ -3x + 7 \leq -6 & \text{Sumando } -5x \\ -3x \leq -13 & \text{Sumando } -7 \\ x \geq \dfrac{13}{3} & \text{Multiplicando por } -\dfrac{1}{3} \end{array}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación es el intervalo $\left[\frac{13}{3}, \infty\right)$, que se muestra en la figura 2.1.

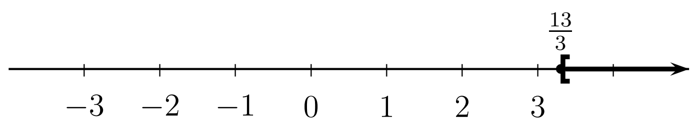


Figura 2.1.

Ejemplo 2.57. Resolvamos la desigualdad

$$-5 < 4x + 1 < 9$$

Aunque la desigualdad dada es equivalente a las dos desigualdades

$$-5 < 4x + 1 \text{ y } 4x + 1 < 9,$$

las podemos resolver simultáneamente de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rl}
-5 < 4x + 1 < 9 & \text{Desigualdad dada} \\
-6 < 4x < 8 & \text{Sumando } -1 \\
-\dfrac{6}{4} < x < \dfrac{8}{4} & \text{Multiplicando por } \dfrac{1}{4} \\
-\dfrac{3}{2} < x < 2 & \text{Realizando las operaciones}
\end{array}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad es el intervalo $\left(-\dfrac{3}{2}, 2\right)$.

Ejemplo 2.58. Resolvamos la inecuación

$$x^2 - 10x + 21 > 0$$

La inecuación es equivalente a

$$(x - 7)(x - 3) > 0$$

El producto $(x - 7)(x - 3)$ puede cambiar de signo solo en 7 o en 3, que son los puntos donde $x - 7 = 0$ o $x - 3 = 0$. Estos puntos los podemos llamar **puntos de separación** y nos dividen la recta en tres intervalos

$$(-\infty, 3), \qquad (3, 7) \qquad \text{y} \qquad (7, \infty).$$

En cada uno de estos intervalos $(x - 7)(x - 3)$ conserva el signo, es decir, siempre es positivo o siempre es negativo. Para determinar el signo en cada intervalo usamos un punto de prueba, elegido dentro del intervalo. Por ejemplo si tomamos $x = 0$ en el intervalo $(-\infty, 3)$ los valores de $(x - 7)$ y $(x - 3)$ son ambos negativos y por lo tanto $(x - 7)(x - 3) > 0$ en este intervalo. Similarmente se procede con los otros intervalos. Los resultados se pueden expresar en una tabla de signos como la siguiente

Intervalo	$(-\infty, 3)$	$(3, 7)$	$(7, \infty)$
Signo de $(x - 7)$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x - 3)$	$-$	$+$	$+$
Signo de $(x - 7)(x - 3)$	$+$	$-$	$+$

donde el signo $(x-7)(x-3)$ se obtiene aplicando las reglas de los signos.

Por lo tanto, vemos que la solución de la desigualdad es $(-\infty, 3) \cup (7, \infty)$.

Una manera mas práctica de resolver esta desigualdad es elaborando un diagrama de signos, como se muestra en la figura 2.2.

Signo de $(x-7)$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x-3)$	$-$	$+$	$+$
Signo de $(x-7)(x-3)$	$+$	$-$	$+$
	3	7	

Figura 2.2.

En el diagrama, las líneas verticales corresponden a los puntos de separación y la recta horizontal es la recta real.

Ejemplo 2.59. Resolvamos la desigualdad

$$(2x+3)(4-x)(x+5) \leq 0$$

Elaboramos un diagrama de signos. Primero obtenemos los puntos de separación resolviendo las ecuaciones $2x+3=0$, $4-x=0$ y $x+5=0$. Estos puntos son $-\dfrac{3}{2}$, 4 y -5. Observemos el diagrama de la figura 2.3.

Analizando el signo resultante, es decir el signo de $(2x+3)(4-x)(x+5)$, vemos que la solución de la desigualdad dada es $\left[-5, -\dfrac{3}{2}\right] \cup [4, \infty)$.

Signo de $(2x+3)$	$-$	$-$	$+$	$+$
Signo de $(4-x)$	$+$	$+$	$+$	$-$
Signo de $(x+5)$	$-$	$+$	$+$	$+$
Signo resultante	$+$	$-$	$+$	$-$

$-5 \qquad -\frac{3}{2} \qquad 4$

Figura 2.3.

Ejemplo 2.60. Resolvamos la desigualdad

$$\frac{3x-1}{x+4} > 2$$

La desigualdad es equivalente a cada una de las siguientes

$$\frac{3x-1}{x+4} - 2 > 0$$
$$\frac{(3x-1) - 2(x+4)}{x+4} > 0$$
$$\frac{x-9}{x+4} > 0$$

Elaborando el diagrama de signos tenemos

Signo de $(x-9)$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x+4)$	$-$	$+$	$+$
Signo resultante	$+$	$-$	$+$

$-4 \qquad 9$

Por lo tanto, la solución de la desigualdad es $(-\infty, -4) \cup (9, \infty)$.

2.14.6 Inecuaciones cuadráticas

Una inecuación se llama cuadrática si tiene alguna de las formas siguientes:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &> 0 \\ ax^2 + bx + c &\geq 0 \\ ax^2 + bx + c &\leq 0 \\ ax^2 + bx + c &< 0 \end{aligned}$$

con $a \neq 0$.

Antes de indicar como se resuelven estas desigualdades, recordamos que las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ donde $a \neq 0$ son

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Además, fácilmente se verifica que r_1 y r_2 satisfacen las siguientes relaciones

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}, \qquad r_1 r_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{y} \qquad ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2).$$

La última fórmula nos proporciona un método para factorizar cualquier trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ en todos los casos posibles.

Veamos ahora como se resuelven las desigualdades cuadráticas. Una primera simplificación que podemos hacer es suponer que $a > 0$, pues en caso contrario, multiplicando la desigualdad por -1, esta se transforma en otra desigualdad cuadrática con $a > 0$.

Se presentan dos casos

Caso 1. Si $b^2 - 4ac \geq 0$.

En este caso, la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene raíces reales r_1 y r_2, podemos factorizar el trinomio $ax^2 + bx + c$ en la forma $a(x - r_1)(x - r_2)$, y la desigualdad se resuelve como en el ejemplo 2.58.

Caso 2. Si $b^2 - 4ac < 0$.

En este caso, las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no son reales sino complejas y la factorización $a(x - r_1)(x - r_2)$ no sirve para resolver la desigualdad.

Para resolver la desigualdad en este caso procedemos de la siguiente forma:

Completando el cuadrado tenemos

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las desigualdades cuadráticas se transforman en su orden en

$$\begin{aligned}
a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 &> \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 &\geq \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 &\leq \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 &< \frac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{aligned}$$

Como estamos suponiendo que $a > 0$ y sabemos que $b^2 - 4ac < 0$, las dos primeras inecuaciones son válidas para todo número real y las dos últimas para ninguno.

Ejemplo 2.61. Resolvamos la desigualdad $3x^2 - 10x + 2 \leq 0$.

En este caso, $b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 76 \geq 0$. Por lo tanto, la ecuación $3x^2 - 10x + 2 = 0$ tiene raíces reales que son

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{10 + \sqrt{76}}{6} = \frac{10 + 2\sqrt{19}}{6} = \frac{5 + \sqrt{19}}{3} \qquad \text{y} \\
r_2 &= \frac{10 - \sqrt{76}}{6} = \frac{10 - 2\sqrt{19}}{6} = \frac{5 - \sqrt{19}}{3}
\end{aligned}
$$

Luego la factorización de $3x^2 - 10x + 2$ es

$$3x^2 - 10x + 2 = 3\left[x - \left(\frac{5 + \sqrt{19}}{3}\right)\right]\left[x - \left(\frac{5 - \sqrt{19}}{3}\right)\right],$$

y la desigualdad original es equivalente a

$$3\left[x - \left(\frac{5 + \sqrt{19}}{3}\right)\right]\left[x - \left(\frac{5 - \sqrt{19}}{3}\right)\right] \leq 0$$

Observando el diagrama de signos de la figura 2.4, vemos que la solución de la desigualdad es el intervalo $\left[\frac{5 - \sqrt{19}}{3}, \frac{5 + \sqrt{19}}{3}\right]$.

		$\frac{5-\sqrt{19}}{3}$		$\frac{5+\sqrt{19}}{3}$	
Signo de $\left[x - \left(\frac{5 + \sqrt{19}}{3}\right)\right]$	$-$		$-$		$+$
Signo de $\left[x - \left(\frac{5 - \sqrt{19}}{3}\right)\right]$	$-$		$+$		$+$
Signo resultante	$+$		$-$		$+$

Figura 2.4.

Ejemplo 2.62. Resolvamos la desigualdad $2x^2 + 4x + 5 \geq 0$.

En este caso tenemos que $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -24 < 0$. Por lo tanto la ecuación $2x^2 + 4x + 5 = 0$ no tiene raíces reales y de acuerdo a la teoría desarrollada, el conjunto solución de la desigualdad $2x^2 + 4x + 5 \geq 0$ es todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.63. Resolvamos la desigualdad $-5x^2 + 7x - 6 > 0$.

La desigualdad es equivalente a $5x^2 - 7x + 6 < 0$.

Para esta última desigualdad tenemos que $b^2-4ac = (-7)^2-4\cdot5\cdot6 = -71 < \dot{0}$. Por lo tanto la ecuación $5x^2 - 7x + 6 = 0$ no tiene raíces reales y de acuerdo a la teoría desarrollada, el conjunto solución de la desigualdad $5x^2 - 7x + 6 < 0$ es $\emptyset$. Es decir, la desigualdad original $-5x^2 + 7x - 6 > 0$ no tiene soluciones reales.

Para terminar esta sección, recalcamos que cuando $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, las desigualdades cuadráticas, o tienen como conjunto solución todo $\mathbb{R}$, o no tienen soluciones reales.

2.14.7 Inecuaciones con valor absoluto

En el capítulo 1 definimos el valor absoluto de un número real x, que representamos por $|x|$, mediante

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

También observamos en dicho capítulo que $|x|$ representa la distancia del origen al punto x, y de forma mas general que $|x_1 - x_2|$ representa la distancia entre x_1 y x_2.

Las propiedades siguientes del valor absoluto nos indican que este se comporta muy bien con respecto a la multiplicación y la división, pero no así con respecto a la adición y la sustracción.

Propiedades del valor absoluto. Si x y y son números reales arbitrarios entonces:

1. $|-x| = |x|$
2. $|xy| = |x|\,|y|$
3. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$

4. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdad triangular)
5. $|x| - |y| \leq |x - y|$ y $|y| - |x| \leq |x - y|$

La interpretación geométrica de $|x|$, figura 2.6, nos proporciona una justificación de las dos propiedades siguientes:

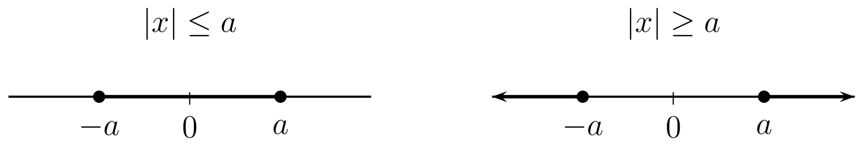


Figura 2.5.

Sea $a \geq 0$. Entonces

6. $|x| \leq a$ es equivalente a $-a \leq x \leq a$
7. $|x| \geq a$ es equivalente a $x \geq a$ o $x \leq -a$

Otra propiedad del valor absoluto, muy utilizada en la solución de desigualdades, es la siguiente

8. $|x| \leq |y|$ es equivalente a $x^2 \leq y^2$

En las propiedades (6) a (8) el símbolo $\leq$ puede reemplazarse por $<$.

Ejemplo 2.64. Resolvamos la desigualdad $|3 - 4x| \leq 7$.

Utilizando la propiedad (6), tenemos la siguiente cadena de desigualdades equivalentes:

$$\begin{gathered}
|3 - 4x| \leq 7 \\
-7 \leq 3 - 4x \leq 7 \\
-10 \leq -4x \leq 4 \\
-\frac{10}{4} \leq -x \leq 1 \\
\frac{10}{4} \geq x \geq -1
\end{gathered}$$

Por lo tanto, la solución de la desigualdad es el intervalo $\left[-1, \frac{10}{4}\right]$.

Ejemplo 2.65. Resolvamos la desigualdad $|5x + 14| > 10$.

La propiedad (7) nos dice que la desigualdad es equivalente a

$$5x + 14 > 10 \qquad \text{o} \qquad 5x + 14 < -10$$

Resolviendo

$$5x > -4 \qquad \text{o} \qquad 5x < -24$$

o sea

$$x > -\frac{4}{5} \qquad \text{o} \qquad x < -\frac{24}{5}$$

Por lo tanto, la solución de la desigualdad dada es

$$\left(-\infty, -\frac{24}{5}\right) \cup \left(-\frac{4}{5}, \infty\right)$$

Ejemplo 2.66. Resolvamos la desigualdad $\left|\dfrac{2x-1}{x+3}\right| \geq 3$.

Utilizando la propiedad (8) del valor absoluto, tenemos la siguiente cadena de desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2x-1}{x+3}\right| &\geq 3 \\
\frac{|2x-1|}{|x+3|} &\geq 3 \\
|2x-1| &\geq 3\,|x+3| \\
(2x-1)^2 &\geq 9(x+3)^2 \\
(2x-1)^2 - 9(x+3)^2 &\geq 0 \\
[(2x-1) - 3(x+3)][(2x-1) + 3(x+3)] &\geq 0 \\
(-x-10)(5x+8) &\geq 0
\end{aligned}$$

Observando el diagrama de signos de la figura 2.6, vemos que la solución de la desigualdad es $\left[-10, -\dfrac{8}{5}\right]$, $x \neq -3$. Es decir, la solución es $[-10, -3) \cup \big(-3, -\frac{8}{5}\big]$.

Signo de $(-x-10)$	$+$	$-$	$-$
Signo de $(5x+8)$	$-$	$-$	$+$
Signo resultante	$-$	$+$	$-$

$-10 \qquad \frac{-8}{5}$

Figura 2.6.

Taller 1

1. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. En cada caso justificar su respuesta.

   (a) Si x es un número real diferente de cero y n es un entero positivo, entonces

   $$\left(\frac{12x^{2n-2}}{6x^{n-2}}\right)^4\left(\frac{1}{2x^{2n}}\right)^2 = 4x$$

   (b) Si p y q son números reales diferentes de cero, entonces

   $$\left(\frac{p^{-1}q^{-1}}{p^{-1}-q^{-1}}\right)^{-2} = \frac{p^2q^2}{p^2-q^2}$$

   (c) Para todo número real a, se tiene que $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$.

   (d) Para todo número real a, y todo r y s números racionales positivos, se tiene que $(a^r)^s = a^{rs}$.

   (e) Si x, y y z son números reales positivos entonces

   $$\frac{64^{2/3}x^{-2/5}y^{-1/3}z^{1/2}}{32^{4/5}x^{3/5}y^{-1}z^{-1/2}} = \frac{y^{2/3}z}{x}.$$

   (f) Si a y b son números reales diferentes de cero, entonces

   $$\left(\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}\right)^{-1} = \frac{ab}{a+b}.$$

(g) Para todo número real $z \neq 0$ se tiene que

$$\left(z^{-5} - z^{-10}\right)^{\frac{3}{5}} = \frac{\left(z^5 - 1\right)^{\frac{3}{5}}}{z^6}.$$

(h) Para todo número real x se tiene que

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1.$$

(i) Para todo x, y y z números reales distintos de cero, se tiene que

$$\sqrt[5]{\frac{-96x^{25}y^{12}}{z^6}} = -\frac{2x^5y^2}{z^2}\sqrt[5]{3y^2z^4}.$$

(j) Si a y b son números reales positivos, entonces

$$\frac{\sqrt{56a^6b^{-1}}\sqrt{108a^{-3}b^3}}{\sqrt{21ab^{-5}}} = 12a^3\sqrt{2b}.$$

(k) Para todo a y b reales, se tiene que

$$\sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} = a + b.$$

(l) Para todo x y y números reales se tiene que

$$\sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = \sqrt[3]{2x}.$$

2. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. En cada caso justificar su respuesta.

(a) Para todo x y y números reales se tiene que $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 9y^2$.

(b) $(\sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}})^2 = 10$.

(c) Para todo número real a se tiene que $a^2 - 2a - 8 = (a - 2)(a + 4)$.

(d) Para todo x y y números reales se tiene que $16x^2 - 9y^2 = (4x - 3y)^2$.

(e) Para todo z y y números reales se tiene que $z^3 - y^3 = (z - y)(z^2 + y^2)$.

(f) Para todo número real x se tiene que $27x^3 - 64 = (3x-4)(9x^2+12x+16)$.

(g) Para todo s y t números reales se tiene que $t^8 - 9t^2s^2 = t^2(t^4 - 9s^2) = t^2(t^2 - 3s)(t^2 + 3s)$.

(h) Para todo número real b se tiene que $b^3 + 64 = (b+4)(b^2 + 16)$.

(i) Para todo x y y números reales se tiene que $4x^2 - 2xy - 6y^2 = (x+y)(4x-6y)$.

(j) Para todo m y n números reales se tiene que $6m^2 - 26m - 20 = (2m-10)(3m+2)$.

(k) Para todo x y y números reales se tiene que $(3x-2y+5)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2 + 25$.

(l) Para todo número real z se tiene que $z^4 + 2z^2 + 9 = (z^2 - 2z + 3)(z^2 + 2z + 3)$.

(m) Para todo x y y números reales se tiene que $x^4y^4 - 8xy = (x^2y^2 - 2)(x^2y^2 + 2xy + 4)$.

(n) Si los denominadores son distintos de cero, se tiene que $\dfrac{y+4}{(2y+9)y+4} = \dfrac{1}{2y+1}$.

(o) Si los cocientes están definidos, se tiene que $\dfrac{x-2}{(3x-5)x-2} = \dfrac{1}{3x-5}$

(p) Al dividir el polinomio $2x^4 - x^3y + 2xy^3 - y^4$ por el polinomio $x^2 - xy + y^2$ el residuo es 0.

(q) Suponiendo que las fracciones están definidas, se tiene que $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x+h} + \sqrt[3]{x}}{h}$.

3. En cada caso efectuar las operaciones y/o simplificar hasta donde sea posible.

(a) $\dfrac{2^{n+3} - 2^n + 7}{2^{n+1} - 2^n + 1}$.

(b) $\dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 6x + 8} \div \dfrac{x^2 + 10x + 24}{x^2 - 2x - 8}$.

(c) $\dfrac{4x^2-15x-4}{8x^2-10x-3}$.

(d) $\left(\dfrac{15s^2+2st-8t^2}{3s^2+st-2t^2}\right)\left(\dfrac{2s^2+st-t^2}{5s^2-st-4t^2}\right)$.

(e) $\dfrac{x}{(x-y)\,(x-z)}+\dfrac{y}{(y-x)\,(y-z)}+\dfrac{z}{(z-x)\,(z-y)}$.

(f) $\dfrac{2x-1}{2x^2-x-6}+\dfrac{x+3}{6x^2+x-12}-\dfrac{2x-3}{3x^2-10x+8}$.

(g) $\dfrac{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}}{x+\dfrac{x^3}{1-x^2}}$.

4. (a) En cada caso racionalizar el numerador

   i. $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

   ii. $\dfrac{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}{16x^2-y^2}$

   iii. $\dfrac{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x-4}}{x}$

   iv. $\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$

   (b) En cada caso racionalizar el denominador

   i. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}$

   ii. $\dfrac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

   iii. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}-3}$

   iv. $\dfrac{y}{y+\sqrt[3]{x}}$

5. Resolver cada una de las siguientes ecuaciones

   (a) $\dfrac{2}{y+5}-\dfrac{y+3}{(y+4)\,(y+5)}=\dfrac{1}{4\,(y-8)}$

   (b) $y^4-10y^2+21=0$

   (c) $4z^{2/3}-8z^{1/3}+3=0$

(d) $6x - 7\sqrt{x} + 2 = 0$

(e) $\sqrt{x-5} + \sqrt{x-2} = 1$

(f) $\sqrt{2x + \sqrt{6+x}} = 3$

(g) $\sqrt{x} - 6\sqrt[4]{x} + 9 = 0$

6. Resolver cada una de las siguientes desigualdades

(a) $5x - 4 \leq 8x + 3$

(b) $\dfrac{3}{1-x} > \dfrac{5}{3x-6}$

(c) $6x^2 + 10x - 4 > 0$

(d) $2x^2 + 3x - 3 \geq 0$

(e) $(3-x)(x+2)(4x-11) > 0$

7. Resolver cada una de las siguientes desigualdades

(a) $\left|\dfrac{3x+4}{2}\right| \leq 1$

(b) $|6-2x| > 8$

(c) $3 \leq |2x-3| \leq 7$

(d) $\left|\dfrac{x+6}{2x+1}\right| > 2$

(e) $|x| > |x-1|$

Taller 2

1. Halle todos los valores enteros b y c tales que cada uno de los siguientes polinomios pueda escribirse como producto de polinomios de grado uno y coeficientes enteros.

(a) $x^2 + 3x + c$

(b) $2x^2 + bx - 3$

2. En cada caso determine si existen enteros x y y que satisfagan la ecuación

(a) $x^2 - y^2 = 17$

(b) $x^2 - y^2 = 12$

3. En cada caso divida $f(x)$ por $p(x)$

(a) $f(x) = 27x^4 - 36x^2 + x + 9, \quad p(x) = 3x^2 + x + 2$

(b) $f(x) = 7x + 6, \quad p(x) = 2x^2 - 3$

(c) $f(x) = x^2 + x + 1, \quad p(x) = x^2 + 1$

4. Use división sintética para determinar el cociente y el residuo de dividir $f(x)$ por $p(x)$ en cada uno de los siguientes casos.

(a) $f(x) = x^5 - 3x^2 + 4x + 5, \quad p(x) = x - \frac{1}{4}$

(b) $f(x) = -4x^6 - 21x^5 + 26x^3 - 27x, \quad p(x) = x + 5$

(c) $f(x) = 12x^3 + 5x^2 - 11x - 6, \quad p(x) = 3x + 2$
(Sugerencia: $3x + 2 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)$).

5. Usando el teorema del residuo. Determine el residuo de dividir $f(x)$ por $p(x)$ en cada uno de los siguientes casos.

(a) $f(x) = 2x^7 - 3x^5 + 4x - 2, \quad p(x) = x + 2$

(b) $f(x) = \dfrac{x^4}{27} - \dfrac{x^3}{9} + x + 1, \quad p(x) = x - 3$

(c) $f(x) = 6x^{100} + 10x^{85} - x^{38} + 4x^{17} - 12, \quad p(x) = x - 1$

6. En cada caso demuestre que $p(x)$ es factor de $f(x)$

(a) $f(x) = 6x^{100} + 10x^{85} - 8x^{38} + 4x^{17} - 12, \quad p(x) = x - 1$

(b) $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1, \quad p(x) = x + 1$

(c) $f(x) = 5x^{12} - 20480, \quad p(x) = x - 2$

(d) $f(x) = x^{49} + 3^{49}, \quad p(x) = x + 3$

(e) $f(x) = 6x^3 - 7x^2 + 1, \quad p(x) = x - \frac{1}{2}$

7. ¿Para qué valores de k, $f(x)$ es divisible por el polinomio lineal?

(a) $f(x) = x^3 - k^2x^2 - 8kx - 16$, $x - 4$

(b) $f(x) = kx^3 - 17x^2 - 4kx + 5$, $x - 5$

8. Halle todos los valores de k para los cuales el residuo de dividir $f(x) = 3x^2 + 4kx^2 + 6$, por $x + 2$ sea -2.

9. Si se divide $f(x) = x^2 - 5x + 5$, por $x - c$ y se obtiene como residuo $r = -1$ a qué es igual c?

10. Halle el polinomio $f(x)$ de coeficientes reales y coeficiente principal 1, que tiene el grado y las raíces que se indican

    (a) grado 4, raíces $-\frac{1}{2}, 1, 3, -3$

    (b) grado 4, raíces $-\frac{1}{4}, -3i, 0, -3$

    (c) grado 5, raíces $-3i, 1 + i, 2$

11. Determine el polinomio $f(x)$ de grado 3 y coeficientes reales que tenga los ceros indicados y satisfaga la condición dada

    (a) $-1, 2, 3,\ f(-2) = 80$

    (b) $-3, -2, 0,\ f(-4) = 16$

    (c) $-2i, 2i, 3,\ f(1) = 20$

12. Halle el polinomio $f(x)$ de grado 7 para el cual -2 y 2 son raíces de multiplicidad 2, 0 es raíz de multiplicidad 3 y $f(-1) = 27$

13. Para cada uno de los siguientes polinomios halle todas sus raíces y escríbalo como producto de factores lineales

    (a) $x^3 - x^2 + x - 1$, si se sabe que 1 es una de las raíces.

    (b) $2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$, si se sabe que 1 y -1 son raíces.

    (c) $8x^6 + 7x^3 - 1$

    (d) $x^6 - 64$

Taller 3

1. Se desea enchapar el corredor de ingreso de un apartamento de 60 cm de ancho por $4,8$ m de largo, utilizando solamente baldosas completas. En el mercado se encuentran tres clases de baldosas de las siguientes características:

(a) Baldosas de 30×30 cm, empacadas en cajas de 11 unidades a precio de \$35800 por caja, y admite devolución hasta de dos baldosas a 3000 cada una.

(b) Baldosas de 20×20 cm, empacadas en cajas de 25 unidades a precio de \$36000 por caja, y admite devolución hasta de cuatro baldosas a 1200 cada una.

(c) Baldosas de 25×20 cm, empacadas en cajas de 20 unidades a precio de \$30000 por caja, y admite devolución hasta de dos baldosas a \$2000 cada una.

¿Cuántas baldosas de cada tamaño se necesitan para hacer el enchape? ¿Cuál es el enchape más económico y cuánto cuesta?

2. En un examen aplicado a 200 estudiantes, $\frac{3}{10}$ obtuvieron como calificación más de 4 (sobre 5), y $\frac{5}{7}$ de los restantes obtuvieron calificación entre 3 y 4. ¿Cuántos estudiantes perdieron la prueba?

3. Un empleado recibe un aumento del 10% en un mes y al siguiente mes le reducen el salario en un 10% ¿Cuál era el salario original mensual si después del aumento y la reducción recibió \$198000?

4. Juan vende su bicicleta y su calculadora en \$120000 cada una. Si en la bicicleta perdió el 20% del costo y en la calculadora ganó el 20% del costo, ¿Cuánto ganó o perdió en total?

5. Individualmente, Jairo puede realizar un trabajo en 3 horas y Pedro puede realizarlo en 4 horas. ¿En cuánto tiempo lo realizarán si trabajan juntos?

6. La administración de un parque natural estimó el número total de individuos de cierta especie usando la técnica de captura-marca-recaptura. Inicialmente marcó y liberó 100 individuos. Tres meses después cuando los individuos estaban suficientemente mezclados, capturó 100 individuos y entre ellos encontró 4 marcados. Si suponemos que la proporción de individuos marcados en la segunda muestra es igual a la proporción de individuos marcados en la población total, ¿Cuál es la población total de dicha especie?

7. Un ganadero vendió parte de un lote de ganado en 35 millones y el resto en 16 millones. Si en el primer grupo había el doble de reses que en el segundo, y vendió cada res del primer grupo

en \$75000 más que cada res del segundo, ¿cuántas reses había en cada grupo?

8. Luis empieza a jugar con cierta cantidad de dinero. Primero gana una cantidad igual a la que tenía al comenzar el juego, después pierde \$80, más tarde pierde los $\frac{2}{3}$ de lo que le queda y finalmente pierde el resto que le queda que es igual a los $\frac{8}{15}$ de la cantidad con que empezó a jugar. ¿Con cuánto dinero empezó Luis el juego?

9. Si el mayor de dos enteros cuya suma es 88 se divide por el más pequeño, el cociente es 5 y el residuo es 10. ¿Cuáles son los números?

10. Las notas de un estudiante son 28, 32, 40 y 20. Si el examen final vale el 30% , ¿qué nota debe obtener el estudiante en el examen para que su nota definitionitiva sea 35?

11. Una lámina metálica de 16 cm de anchura se dobla para hacer una artesa abierta de sección transversal rectangular de 30 cm^2 de área. Hallar la profundidad y anchura de la artesa. ¿Cuántas soluciones hay?

12. Un triángulo rectángulo de 210 m^2 de área tiene un perímetro de 70 metros. Hallar los lados del triángulo.

13. Se puede llenar una piscina mediante dos mangueras en 4 horas. Si se usan las dos mangueras separadamente, la mas pequeña gasta 6 horas mas que la mas grande en llenar la piscina. ¿En cuánto tiempo se llena la piscina si se usa solo la mas pequeña de las mangueras?

14. Una barra metálica contiene un 20% plata y una segunda barra un 12%. ¿Cuántos kilos de cada una deben tomarse para fabricar una barra de 40 kilos que contenga un 14.5% de plata?

15. Dos ciudades A y B están separadas por 360 kms. A la 1 p.m. parte un carro de A hacia B viajando con velocidad uniforme. Una hora mas tarde parte un carro de B hacia A y viaja con una velocidad mayor en 15 km/h que la del primero. Si los dos carros se encuentran en la mitad del camino entre las dos ciudades, hallar la velocidad del primer carro.

16. Un grupo de estudiantes alquila por \$8000 un aparato para realizar un experimento, pagando el costo igualmente entre ellos. Una semana mas tarde el grupo alquila nuevamente el aparato pero faltaron 10 estudiantes y los restantes tuvieron que pagar \$40 adicionales por el alquiler. ¿Cuántos estudiantes formaban el grupo?

17. Dos hombres trabajando juntos hacen un trabajo en $6\frac{2}{3}$ horas. Los hombres empiezan a trabajar juntos, uno de ellos se enferma 3 horas después y el otro termina el trabajo laborando $8\frac{1}{4}$ horas más. ¿En cuánto tiempo hace cada hombre el trabajo si laborara solo?

18. Una persona pone a rentar \$110000, parte a cierta tasa de interés y parte a otra tasa, y cada parte le produce el mismo rendimiento. Si la primera parte se coloca a la tasa de la segunda y la segunda a la tasa de la primera rentan \$2800 y \$2000 respectivamente. Hallar el valor de las dos partes y de las dos tasas.

Problemas que implican desigualdades

19. Una agencia de alquiler de autos cobra \$200000 semanalmente más \$50 por cada kilómetro de recorrido. Describir mediante una desigualdad el costo semanal para una persona que planea recorrer entre 1800 y 2300 km en su semana de vacaciones.

20. Un inversionista tiene \$10000 dólares invertidos al 8%, y tiene la oportunidad de invertir más dinero al 15%. Hallar la cantidad adicional que debe invertir para que su rendimiento total sea mayor del 12%.

21. Si el perímetro de un lote rectangular es menor de 300 cm, y su longitud es de 80 m, ¿Cuál es es ancho del lote?

22. Un platero desea obtener una aleación que contenga al menos 72% de plata y a lo mas 75% del mismo metal. Determinar las cantidades mínima y máxima de una aleación de plata al 80% que deban combinarse con una aleación de plata al 65% con el fin de tener 30 gramos de la aleación requerida.

23. ¿Cuál es la cantidad mínima de alcohol puro que debe agregarse a 24 litros de una solución de alcohol al 20% para obtener una mezcla que tenga al menos 30% de alcohol?

24. El interior de una pista de carreras de longitud 500 mts, consiste de un rectángulo con semicírculos en dos lados opuestos. Hallar las dimensiones que hacen máxima el área del rectángulo.

Capítulo 3

Geometría

3.1 Introducción

Desde sus orígenes, como una herramienta para describir y medir figuras, la geometría ha crecido en sus teorías y métodos con los cuales se pueden construir y estudiar modelos tanto del mundo físico, como de otros fenómenos del mundo real. El estudio de las magnitudes, por ejemplo, constituye parte fundamental de la vida cotidiana y es básico en las ciencias naturales. Continuamente nos encontramos, además, con representaciones planas de objetos espaciales que aparecen en los dibujos y en las imágenes y estas deben ser analizadas y usadas para construir objetos. La geometría es una valiosa herramienta tanto para construir representaciones visuales de conceptos y procedimientos de otros dominios de las matemáticas y de otras ciencias, como para desarrollar pensamiento y comprensión.

La geometría es un punto de encuentro de la matemática como teoría y la matemática como fuente de modelos. Es en la actualidad una herramienta tanto en las aplicaciones tradicionales como en las innovativas: gráficos computarizados, procesamiento de imágenes, patrones de reconocimiento, robótica e investigación de operaciones. Así, la geometría es una herramienta manipulativa, intuitiva, deductiva y analítica.

Pero, ¿cómo fueron realmente los inicios de esta importante rama de la matemática? Reseñaremos a continuación algunos apartes de las primeras fases de su desarrollo. La historia nos enseña que el desarrollo de cualquier rama de la matemática se ha llevado a cabo de una manera gradual. Frecuentemente han sido necesarias varias décadas y aún cientos de años de esfuerzos antes de conseguir un avance importante y, en muchas ocasiones, lo que se consigue es simplemente un punto de partida para desarrollos mas completos y avanzados.

Esto sucedió, desde luego, con el desarrollo de la geometría. En sus inicios, aproximadamente 3000 años antes de Cristo en las culturas egipcia y babilónica se encuentran los primeros rasgos de su desarrollo.

En Babilonia no se constituyó realmente como una rama independiente de la matemática. Se estudió en conexión con problemas prácticos, pero aún algunos de estos problemas como los de reparto de terrenos o construcción (que en nuestros días se relacionan con la geometría y la medición) se transformaban usualmente en problemas aritméticos o algebraicos. Calcularon áreas de figuras planas sencillas y volúmenes de sólidos simples usando algunas reglas o fórmulas, que en la actualidad no se consideran del todo correctas, pero que posiblemente les proporcionaban aproximaciones que les permitieron resolver interesantes problemas de aplicación. Es importante destacar que conocían la relación pitagórica, usaban la semejanza de triángulos y la proporcionalidad; utilizaron una muy buena aproximación del número irracional π para determinar el área del círculo.

Los egipcios no establecieron separación entre aritmética y geometría. En los papiros se encuentran problemas en los que integran los dos dominios. Ellos, como los babilonios, consideraron la geometría como una herramienta práctica. Un historiador muy importante de la antigüedad, Heródoto, nos dice que la geometría egipcia tuvo su origen en un problema práctico que le interesaba resolver al pueblo egipcio: las cosechas se perdían cuando se crecía el río Nilo. La solución estaba entonces en trazar los linderos de los terrenos cultivados para que no se perdiera la cosecha. Tenían, como los babilonios, algunas fórmulas para calcular áreas de rectángulos, de triángulos, de trapecios, de círculos; fórmulas para determinar volúmenes de cubos, cilindros y otros sólidos sencillos. Las reglas planteadas no aparecen expuestas en símbolos: enunciaban los problemas verbalmente pero su procedimiento para resolverlos era esencialmente el mismo que usamos nosotros cuando calculamos siguiendo una fórmula. (A pesar de que algunas de ellas no resulten hoy correctas, les proporcionaron importantes elementos). Las pirámides representan en esta cultura una sorprendente aplicación de la geometría. En la construcción de cada una de ellas se puso especial cuidado en seleccionar forma y dimensión de las bases y en escoger las dimensiones relativas adecuadas. Es importante destacar además que los egipcios combinaron sus conocimientos de astronomía y de geometría para construir sus templos y pirámides.

En la historia de la civilización los griegos alcanzaron una posición destacada y en la historia de la matemática su época fue una de las mas brillantes. La contribución griega a la geometría plana y del espacio, a la trigonometría, a la teoría de números, la ampliación del álgebra y la aritmética de los Babilonios y Egipcios es enorme. A pesar de que la civilización griega se remonta al 2800 A.C. y duró aproximadamente hasta el 600 D.C., en la historia de la matemática griega se distinguen dos periodos: el clásico del 600 al 300 A.C., el helenístico del 300 A.C. al 600 D.C. y, precisamente, entre finales del periodo clásico e inicios del helenístico se ubican dos de las contribuciones mas importantes de los griegos "Los Elementos de Euclides"y las "Secciones Cónicas de Apolonio", allí está la fuente original de gran parte de los conceptos de geometría que hoy estudiamos en las aulas.

Euclides vivió y enseño en Alejandría alrededor del año 300 A.C. Los Elementos son sin duda la obra mas famosa de Euclides, se constituyen en la primera fuente de conocimiento matemático, han influido como ningún otro libro en el derrotero de las matemáticas. Fue estudiándolos como se aprendió el concepto mismo de matemática, la noción de demostración y la ordenación lógica de los teoremas. Su contenido determinó realmente el curso del pensamiento matemático posterior. Los Elementos constan de trece libros. Los libros del I al IV tratan sobre las propiedades básicas de las figuras (triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos regulares), teoremas sobre congruencia, paralelismo, teorema de Pitágoras. En el libro I, Euclides incluye definiciones iniciales (básicas para el trabajo en geometría), entre las que se destacan; recta, círculo, paralelas, paralelogramo y presenta además cinco postulados (considerados como verdades incuestionables), postulados que sirven de base para la construcción de la llamada geometría euclidiana, que es precisamente la que usualmente trabajamos en las aulas. El libro V trabaja la teoría de proporciones entre magnitudes. En el VI las figuras semejantes y presenta lo que hoy podríamos entender como una generalización del Teorema de Pitágoras. En los libros VII, VIII y IX se dedica a trabajar en términos geométricos lo que hoy conocemos como teoría de los números (clasificación de irracionales) y en los libros XI, XII y XIII plantea la geometría de los sólidos y sus volúmenes.

Es importante destacar, además, a dos notables matemáticos griegos, que aportaron también al conocimiento de la geometría: Apolonio y Arquímedes. Apolonio (287-212 A.C) con su obra maestra “El tratado sobre las Cónicas”, donde desarrolla elementos fundamentales que hoy retomamos nosotros en los cursos de Geometría Analítica, basta decir aquí que fue conocido en su época, como: “El gran geómetra”. Del 287 al 212 A.C. vivió en Alejandría el considerado como el mayor matemático de la antigüedad: Arquímedes. Sus trabajos en matemáticas incluyen el cálculo de áreas y volúmenes por el método de aproximaciones sucesivas y el cálculo del número π. Sus trabajos geométricos representan el punto mas alto de la matemática greco-alejandrina; en sus razonamientos usa teoremas de Euclides y sus demostraciones están perfectamente argumentadas.

Finalmente, en este punto es importante advertir que la presentación de este trabajo no será del todo formal, lo cual se evidencia en la forma en que se expone el mismo. Lo que esperamos es que estas notas aproximen y motiven al lector al estudio de la geometría.

A continuación, se presenta las temáticas necesarias, como una guía, para abordar los talleres propuestos al final del capítulo.

- Taller 1. Subsecciones: 3.2.1 y 3.2.2.
- Taller 2. Subsección 3.2.2: conceptos básicos, desigualdades en un triángulo y congruencia de triángulos.
- Taller 3. Subsección 3.2.2: semejanza de triángulos.
- Taller 4. Subsección 3.2.4: conceptos básicos, los ángulos en un polígono y cuadrilateros.
- Taller 5. Subsección 3.2.4: perímetro de un polígono, área de un polígono y teorema de Pitágoras.
- Taller 6. Subsección 3.2.5.
- Taller 7. Sección 3.3.

3.2 Geometría plana

3.2.1 Puntos, rectas, rayos y segmentos

Siguiendo la tradición, de la geometría euclidiana, consideraremos en este escrito el punto, la recta y el plano como términos indefinidos.

Los objetos físicos sugieren las ideas de puntos, rectas y planos. Por ejemplo, la marca que deja la punta de una lápiz en una hoja de papel nos da la idea intuitiva de punto. Una hoja de papel, pensando que se extiende infinitamente, nos da la idea de plano, a su vez, los bordes de una hoja de papel extendidos infinitamente nos sugieren la idea de recta.

Las nociones intuitivas de punto, recta y plano y sus posibles descripciones nos permitirán usarlos en la reconstrucción de algunos elementos de la geometría euclidiana, que muy seguramente ya han sido trabajados en la educación básica.

Así, tomando estos términos como puntos de partida, podemos recordar unas primeras nociones importantes:

- Una figura es un conjunto de puntos.
- El espacio es el conjunto de todos los puntos.
- Tres o más puntos son colineales, sí y solamente sí, están sobre la misma recta.
- Cuatro o más puntos son coplanares, sí y solamente sí, están en un mismo plano.

Las figuras que están en un plano tales como cuadrados, círculos y triángulos son bidimensionales (tienen dos dimensiones, figura 3.1). Las esferas, cajas, cubos y los objetos reales son figuras tridimensionales (figura 3.2).

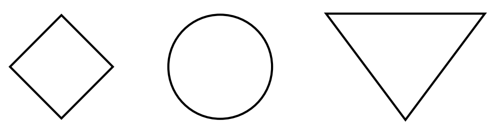


Figura 3.1.

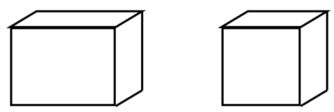


Figura 3.2.

Diferentes maneras de describir los puntos y las rectas han dado origen a distintas geometrías (en la geometría euclidiana, por ejemplo, un punto se describe como una localización y en la geometría analítica un punto es un par ordenado de números). Para hacer mas clara la descripción de los puntos y las rectas se plantean los postulados, que además de servir para explicar los términos indefinidos sirven de punto de partida para deducir y probar otros enunciados. Los postulados en la geometría euclidiana, que como lo comentamos en el aparte anterior planteó Euclides en los ***Elementos*** pueden ser resumidos de la siguiente manera:

Postulados:

- *Dos puntos determinan una recta. (A través de cualesquiera dos puntos, pasa exactamente una recta).*

  Notaremos los puntos con letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$ (Véase figura 3.3).

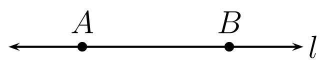


Figura 3.3.

  La recta que contiene a los puntos A y B se nota $\overleftrightarrow{AB}$ y algunas veces con letras minúsculas, como por ejemplo l.

- *Una recta contiene infinitos puntos.*
- *Dada una recta en un plano, existe por lo menos un punto en el plano que no está en la recta.*
- *Dos rectas diferentes se intersectan a lo mas en un punto.*
- *Todo plano contiene al menos tres puntos que no están alineados.*

- *Si dos puntos de una recta están en un plano, entonces la recta está contenida en el mismo plano.*

- *Tres puntos cualesquiera están al menos en un mismo plano y tres puntos cualesquiera no alineados están exactamente en un mismo plano.*

- *Dado un plano en el espacio, existe al menos un punto en el espacio que no está en el plano.*

De los postulados anteriores se derivan definiciones, teoremas y caracterizaciones que permitirán posteriormente solucionar problemas.

Definición 3.2.1. *Dos rectas que están en un mismo plano son* ***paralelas****, si no tienen puntos en común.*

Si $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son rectas paralelas, escribimos $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

Postulado:

En un plano, por un punto exterior a una recta pasa una única recta paralela.

Ya tenemos alguna familiaridad con los números reales y su representación en una recta numérica.

La distancia entre dos puntos podemos medirla por medio de una regla ordinaria, para esto basta establecer una unidad de medida. Si convenimos en elegir una unidad, para cualquier par de puntos A y B, habrá un número que nos diga cuanto dista A de B. Expondremos esto en forma más precisa, enunciando enseguida un postulado.

Postulado:

A cada par de puntos diferentes le corresponde un único número positivo llamado la distancia. Si los puntos son A y B, entonces, indicaremos la distancia por AB.

Admitimos la posibilidad de que $A = B$, es decir que A y B sean el mismo punto; en tal caso, $AB = 0$. Es de anotar que la distancia no depende del orden en que se consideren los puntos. En consecuencia, siempre tenemos que $AB = BA$.

Teniendo en cuenta las discusiones dadas en capítulos anteriores, podemos establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales de tal manera que a cada punto de la recta corresponde exactamente un número real y recíprocamente, a cada número real corresponde exactamente un punto de la recta. La distancia entre dos puntos cualesquiera es el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes.

Una correspondencia como la descrita en el postulado anterior se llama un sistema de coordenadas. El número correspondiente a un punto se llama la coordenada del punto.

Es evidente el significado de la palabra ***entre***, sin embargo, ésta admite una definición precisa, la cual se enuncia a continuación.

Definición 3.2.2. *Dados los puntos A, B y C, se dice que B está entre A y C, si A, B y C son puntos distintos de una misma recta y $AB + BC = AC$ (figura 3.4).*

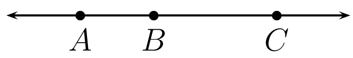


Figura 3.4.

Definición 3.2.3. *El **segmento (o segmento de recta)** con puntos extremos A y B, notado $\overline{AB}$, es el conjunto formado por los puntos A y B y por todos los puntos ubicados entre ellos dos. La longitud del segmento $\overline{AB}$ (notada AB) se define como la distancia entre A y B (figura 3.5).*

Figura 3.5.

Definición 3.2.4. *Un punto B se llama **punto medio** de un segmento $\overline{AC}$, si B está entre A y C y $AB = BC$.*

Naturalmente, todo segmento tiene un punto medio y decimos que éste biseca al segmento.

Dos segmentos con la misma medida se llaman segmentos congruentes. Así, $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son congruentes si $AB = DE$ y, en tal caso, se escribe $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.

Definición 3.2.5. *El rayo con punto extremo A y que contiene un punto B, que notaremos $\overrightarrow{AB}$, consiste en todos los puntos sobre el segmento $\overline{AB}$ y todos los puntos que cumplen que B está entre ellos y A (figura 3.6).*

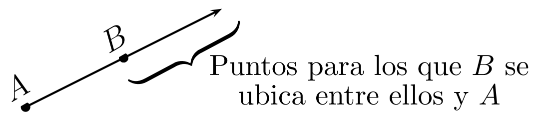


Figura 3.6.

Si A esta entre B y C, entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se llaman rayos opuestos.

3.2.2 Ángulos

Definición 3.2.6. *Un* ***ángulo*** *es la unión de dos rayos que tienen el mismo punto inicial. Los dos rayos se llaman los* ***lados del ángulo*** *y el extremo común se llama* ***vértice****. Si los rayos son $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, entonces el ángulo se denota $\angle BAC$ o $\angle CAB$ (figura 3.7).*

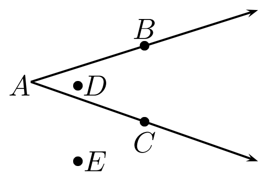


Figura 3.7.

Se dice que un punto D está en el interior de $\angle BAC$, si D y B están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ y D y C están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Se dice que un punto E está en el exterior de $\angle BAC$ si no está en dicho ángulo ni en su interior. En la figura anterior D es un punto del interior de $\angle BAC$ y E es un punto exterior (figura 3.7).

Medida y clasificación

La medida de un ángulo indica la abertura del interior del ángulo. Para medirlo inicialmente la unidad de medida que se toma es el ***grado***, para indicar que se hace referencia a la medida, se acostumbra a escribir $m\angle ABC$.

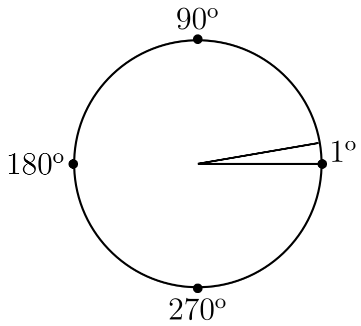


Figura 3.8.

Aunque más adelante se dedicará una sección al estudio de la circunferencia, admitimos que se tiene algún conocimiento de esta. Un ángulo de un grado (1°) está determinado por la división de una circunferencia en 360 partes iguales y se toma el ángulo determinado por el centro del círculo (vértice) y dos puntos de subdivisión consecutivos sobre la circunferencia. La circunferencia completa tiene 360° (figura 3.8).

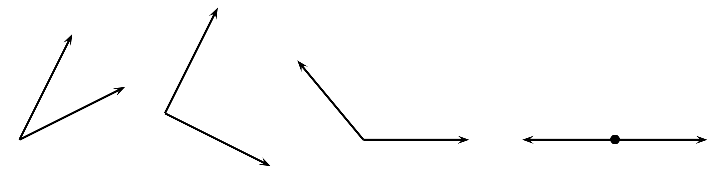
Recordemos que, así como medimos segmentos con una regla, medimos los ángulos con un transportador. El número de grados de un ángulo es su medida. Si hay x grados en el $\angle BAC$, entonces escribimos $m\angle BAC = x°$.

En general, para el estudio de la geometría, sólo se consideran ángulos de cuyas medidas estén entre 0 y 180 grados. Para el estudio de la trigonometría se consideraran ángulos de medidas mayores. En este punto, es necesario advertir que, cuando no haya lugar a confusión, en algunos apartes, se omite el símbolo usado para notar los grados.

Otra medida para los ángulos es el radián. Esta noción es explicada en el taller 5 y al respecto se proponen algunos ejercicios.

Todo ángulo tiene una única medida y esta medida nos permite clasificarlos. Si se considera como unidad el grado, en el rango entre 0° y 180°, la clasificación usual es la siguiente:

Si m es la medida de un ángulo, el ángulo es ***agudo*** si y sólo si $0 < m < 90$; el ángulo es ***recto*** si y sólo si $m = 90$; es ***obtuso*** si y sólo si $90 < m < 180$ y es ***llano*** si y sólo si $m = 180$ (figura 3.9).



Ángulo agudo Ángulo recto Ángulo obtuso Ángulo llano

Figura 3.9.

Si D está en el interior de $\angle BAC$ (figura 3.10), entonces,

$$m\,\angle BAC = m\,\angle BAD + m\,\angle DAC$$

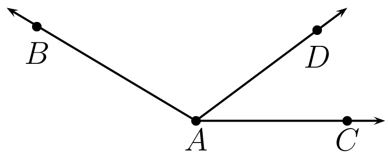


Figura 3.10.

Ejemplo 3.1.

1. En la figura 3.11, determinar: $m\,\angle CPD$

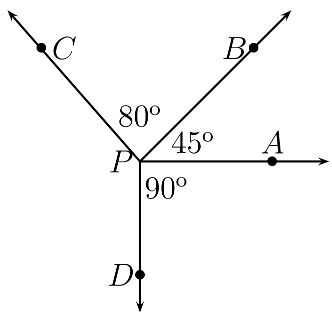


Figura 3.11.

- Pensando en P como centro de un círculo, podemos afirmar que:
  $m\,\angle CPD = 360^o - (90^o + 45^o + 80^o) = 145^o$.

Definición 3.2.7. *Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180°, entonces decimos que los ángulos son **suplementarios** y que cada uno es el suplemento del otro.*

Ejemplo 3.2. Sabiendo que la medida m de cierto ángulo es un cuarto de la medida de su suplemento, determine m. Si m es la medida del ángulo su suplemento tendrá medida $180 - m$. Teniendo en cuenta la relación:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{4}(180 - m) \\ 4m &= 180 - m \\ 5m &= 180 \\ m &= 36. \end{aligned}$$

Definición 3.2.8. *Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90°, entonces decimos que los ángulos son **complementarios** y que cada uno es el complemento del otro.*

Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo recto, entonces se dice que $\overrightarrow{AB}$ es ***perpendicular*** a $\overrightarrow{AC}$ y se denota $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. Además, se dice que dos rectas son perpendiculares si forman un ángulo recto. Empleamos la misma notación anterior para indicar que dos rectas son perpendiculares.

En la figura 3.12, el $\angle ABC$ es recto, $m \perp n$, $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$. Nótese el símbolo usado en la figura para indicar un ángulo recto.

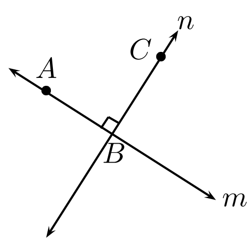


Figura 3.12.

Si dos rectas coplanares m y n son perpendiculares a la misma recta, entonces son paralelas (figura 3.13).

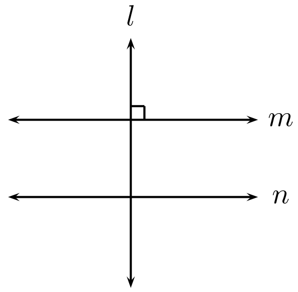


Figura 3.13.

En un plano, si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas, entonces es perpendicular a la otra.

Se dice que dos ángulos son ***congruentes*** si tienen la misma medida. Así, $\angle ABC$ y $\angle DEF$ son congruentes si $m\angle ABC = m\angle DEF$ y en tal caso lo notamos $\angle ABC \cong \angle DEF$.

Dos ángulos rectos cualesquiera son congruentes. Si dos ángulos son a la vez congruentes y suplementarios, entonces cada uno de ellos es un ángulo recto. Nótese que los suplementos de ángulos congruentes son congruentes y que los complementos de ángulos congruentes son congruentes.

Definición 3.2.9. *Dado $\angle ABC$ y un punto interior D de $\angle ABC$. Se dice que $\overrightarrow{AD}$ es la **bisectriz** del $\angle ABC$, si $m\angle ABD = m\angle DBC$.*

Ejemplo 3.3.

1. Si en la figura 3.14, $\overrightarrow{BD}$ biseca el ángulo $\angle ABC$ y si $m\angle DBC = 5x - 11$ y $m\angle ABD = 2x + 25$, encontrar $m\angle ABC$.

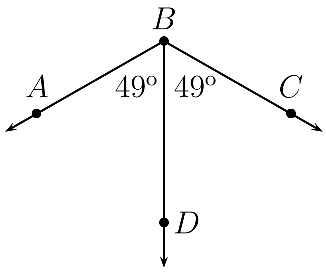


Figura 3.14.

$$\begin{aligned} m\angle DBC &= m\angle ABD \\ 5x - 11 &= 2x + 25 \\ 3x &= 36 \\ x &= 12. \end{aligned}$$

Sustituyendo x, se tiene que:

$$\begin{aligned} m\angle DBC &= 5(12) - 11 = 49. \\ m\angle ABD &= 2(12) + 25 = 49. \end{aligned}$$

De donde $m\angle ABC = 98$.

Dependiendo de sus posiciones, los ángulos también tienen nombres especiales:

Definición 3.2.10. *Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ es otro rayo cualquiera, entonces, se dice que $\angle BAD$ y $\angle DAC$ forman un* ***par lineal*** *(figura 3.15).*

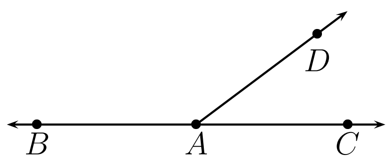


Figura 3.15.

En la figura 3.15, $\angle BAD$ y $\angle DAC$ forman un par lineal.

Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios; nótese que dos ángulos pueden ser suplementarios sin que formen un par lineal.

Definición 3.2.11. *Dos ángulos no nulos y no llanos se dicen ángulos* ***adyacentes****, si tienen un lado común y no tienen puntos interiores comunes.*

Cuando dos rectas se intersectan determinan 4 ángulos. Cada par de ángulos no adyacentes, se dice ***opuesto por el vértice***, lo cual se expresa en la siguiente definición.

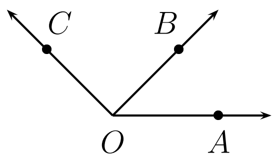


Figura 3.16. Los ángulos $\angle COB$ y $\angle BOA$ son adyacentes.

Definición 3.2.12. *Dos ángulos no llanos se dicen* ***opuestos por el vértice*** *si al unir sus lados se determinan dos rectas. En otras palabras, dos ángulos son opuestos por el vértice si sus lados forman dos pares de rayos opuestos.*

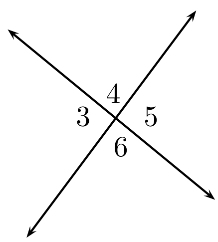


Figura 3.17.

En la figura 3.17, los ángulos 3 y 5 son opuestos por el vértice y cada uno de ellos forma un par lineal con el ángulo 6, pero entonces podemos afirmar que: $m\angle 3 + m\angle 6 = 180^o$ y $m\angle 5 + m\angle 6 = 180^o$, entonces $m\angle 3 + m\angle 6 = m\angle 5 + m\angle 6$, de esto se concluye que $m\angle 3 = m\angle 5$ y esto muestra un resultado importante: ***Si dos ángulos son opuestos por el vértice entonces tienen la misma medida y por tanto son congruentes.***

Ejemplo 3.4. Determinar la medida de los ángulos 1, 2 y 3 en la figura 3.18, sabiendo que la medida de $\angle AEB = 62^o$

Puesto que $\angle DEC$ y $\angle AEB$ son opuestos por el vértice, se tiene que $m\angle 2 = 62^o$. Ahora, dado que $\angle AEB$ y $\angle BEC$ forman un par lineal, ellos son suplementarios, por tanto $m\angle 1 = 180^o - 62^o = 118^o$. Como además los ángulos 1 y 3 son opuestos por el vértice entonces $m\angle 3 = 118^o$.

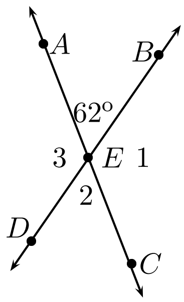


Figura 3.18.

Rectas paralelas, ángulos correspondientes y ángulos alternos internos

Consideremos los ángulos que se forman cuando dos rectas m y n, son cortadas por una tercera recta l llamada una transversal. Se determinan 8 ángulos, cuatro determinados por m y l y cuatro determinados por n y l. Cualquier par de ángulos en posiciones similares con respecto a la transversal y a cada recta se llaman ***ángulos correspondientes***.

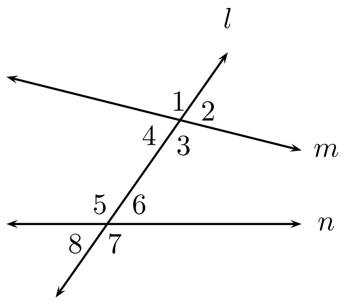


Figura 3.19.

En la figura 3.19, pares de ángulos correspondientes son: 1 y 5, 2 y 6, 3 y 7, 4 y 8.

Los ángulos 3 y 5 reciben el nombre de ***alternos internos***, 4 y 6 son también alternos internos.

Si m y n son rectas paralelas cortadas por una transversal l, entonces las parejas de ángulos correspondientes resultan congruentes y por lo tanto las pareja de ángulos alternos internos resultan congruentes.

Por ejemplo, en la figura 3.20, asumiendo que m y n son paralelas, los ángulos 2 y 6 son congruentes y también lo son los ángulos 3 y 5.

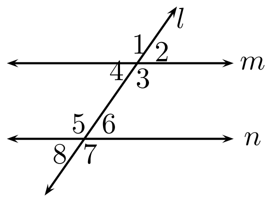


Figura 3.20.

Es de anotar que el recíproco de la afirmación anterior es cierto. Es decir, si dos rectas cortadas por una transversal determinan ángulos correspondientes congruentes o ángulos alternos internos congruentes, entonces dichas rectas resultan paralelas.

En este punto es conveniente aclarar algunos aspectos relacionados con las gráficas y algunas cuestiones de notación, que serán consignados en las siguientes notas.

Nota. Existen límites para la información que usted puede suponer cuando se presenta un dibujo.

Dada la figura 3.21, usted puede asumir:

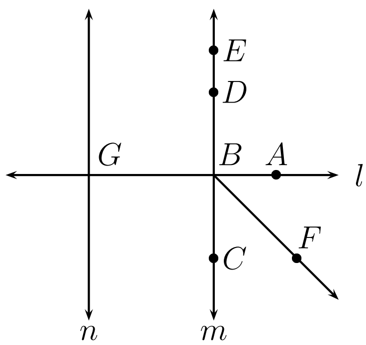


Figura 3.21.

- **Colinealidad** de los puntos que aparecen marcados sobre la recta. E, D, B y C están todos sobre la recta m y D está entre B y E.

- **Intersección** de las rectas en un punto dado. m y l se intersectan en el punto B.

- **Puntos** en el interior de un ángulo, sobre un lado, o en el exterior del ángulo. Por ejemplo, F está en el interior del $\angle ABC$, G está en el exterior y A está sobre el lado.

No se puede asumir:

- **Colinealidad** de tres o mas puntos que no están dibujados sobre la recta. Por ejemplo, no se puede asumir que F está entre A y C.

- **Paralelismo** entre rectas. No se puede asumir, por ejemplo, que $m \parallel n$, si no se dice explícitamente en el enunciado del problema.

- **Medida** de ángulos y longitud de segmentos. Por ejemplo, no se puede asumir que $\overrightarrow{BF}$ biseca a $\angle ABC$ o que $DE = DB$.

Para asumir información como ésta, acerca de una figura, debe ser especificada en el enunciado del problema.

Nota.

1. Al comparar dos figuras, es usual usar algunas marcas para indicar lados o ángulos congruentes. Por ejemplo, en el par de gráficas que se muestra en la figura 3.22, se tiene que:

   - $\overline{BF} \cong \overline{MT}$.
   - $\overline{CD} \cong \overline{NR}$.
   - $\angle FBC \cong \angle TMN$.
   - $\angle BCD \cong \angle MNR$.

2. En algunos casos, si no hay lugar a confusión, se omiten las unidades de medida.

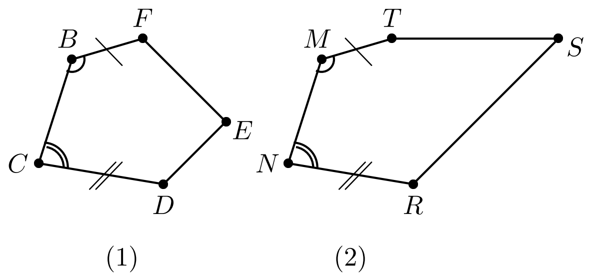


Figura 3.22.

3.2.3 Triángulos: congruencia y semejanza

Conceptos básicos

Definición 3.2.13. *Si A, B y C son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llama un **triángulo** y se simboliza $\triangle ABC$.*

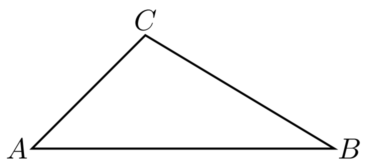


Figura 3.23.

Los puntos A, B y C (figura 3.23) se llaman ***vértices*** y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llaman ***lados***. Los ángulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle ACB$ se llaman los ***ángulos del triángulo***, en ocasiones designaremos a dichos ángulos como $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.

Se dice que un lado de un triángulo está comprendido entre dos ángulos si sus extremos son los vértices de dichos ángulos. Se dice que un ángulo de un triángulo está comprendido entre dos lados si su vértice es el extremo común de dichos lados.

Por ejemplo, en el triángulo $\triangle ABC$ (figura 3.23), el lado $\overline{AC}$ está comprendido entre los ángulos $\angle A$ y $\angle C$, por su parte, el ángulo B está comprendido entre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

Definición 3.2.14. *El **perímetro** de un triángulo corresponde a la suma de las medidas de sus lados.*

Considerando algunas relaciones entre los lados de un triángulo surgen las siguientes definiciones.

Definición 3.2.15. *Un triángulo **isósceles** es aquel que tiene al menos dos de sus lados congruentes.*

*Un triángulo **equilátero** es aquel que tiene sus tres lados congruentes.*

*Un triángulo **escaleno** es aquel que no tiene un par de lados congruentes (figura 3.24).*

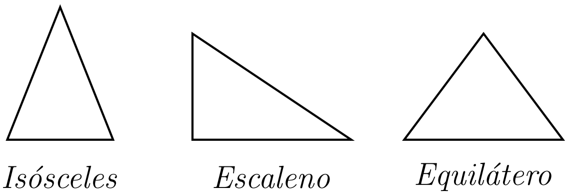


Figura 3.24.

De las definiciones anteriores, se puede deducir que un triángulo es isósceles si y solo si tiene al menos dos ángulos congruentes. Por lo tanto, un triángulo es equilátero si y solo si sus tres ángulos son congruentes.

Teniendo en cuenta las medidas de los ángulos en un triángulo, aparece la siguiente definición.

Definición 3.2.16. *Un triángulo es llamado **rectángulo**, si tiene un ángulo recto. El lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los otros dos lados son llamados catetos.*

*Un triángulo **acutángulo** es aquel que tiene los tres ángulos agudos.*

*Un triángulo **obtusángulo** es aquel que tiene un ángulo obtuso.*

Definición 3.2.17. *Un triángulo **equiángulo** es aquel que tiene sus tres ángulos congruentes.*

Así, un triángulo es equilátero si y solamente si es equiángulo.

Nota. Algunos aspectos de las líneas notables en un triángulo, como las medianas, bisectrices y mediatrices serán estudiadas en los talleres propuestos. En particular, las medianas se consideran en el taller 2, las bisectrices y mediatrices se presentan en el taller 5.

Teorema 3.2.1. *La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es* 180.

Demostración. Dado el triángulo ABC (figura 3.25), debemos probar que $m\,\angle A + m\,\angle B + m\,\angle C = 180$. Dibujamos $\overline{BD}$, con $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{AC}$. Existe solamente una recta que cumple esta condición. Se tiene por adición de ángulos que: $m\,\angle 1 + m\,\angle 2 + m\,\angle 3 = 180$. Dado que las rectas son paralelas, por propiedad de ángulos alternos internos entonces $m\,\angle 1 = m\,\angle A$ y $m\,\angle 3 = m\,\angle C$, pero además $\angle 2 = \angle B$. Sustituyendo se obtiene que $m\angle A + m\,\angle B + m\,\angle C = 180$.

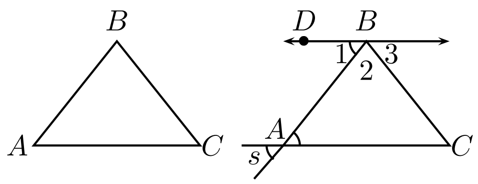


Figura 3.25.

□

Ejemplo 3.5. Si en el triángulo ABC de la figura 3.26, las medidas de los ángulos están en razón 1:2:3. Determinar las medidas de los ángulos.

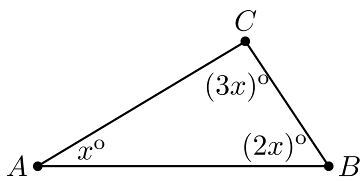


Figura 3.26.

Solución. Que las medidas de los ángulos estén en razón 1:2:3, significa que para algún número real x, si x^o es la medida de uno de los ángulos en grados, las otras medidas son $2x^o$ y $3x^o$. Si aplicamos el teorema anterior tenemos:

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^o$$

entonces,

$$x^o + 2x^o + 3x^o = 180^o$$

De donde

$$6x^o = 180^o, \qquad x^o = 30^o$$

Los ángulos del triángulo tienen en consecuencia medidas 30, 60 y 90 grados.

Desigualdades en un triángulo

En un triángulo, la suma de las medidas de dos de sus lados es mayor que la medida del tercer lado. Esta se conoce como la ***desigualdad triangular***.

En un triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado y recíprocamente a mayor lado se opone mayor ángulo.

En un triángulo, un ángulo exterior es un ángulo formado por uno de sus lados y la prolongación de otro de sus lados. Por ejemplo, en la figura 3.27, el ángulo $\angle CBD$ es exterior al triángulo $\triangle ABC$.

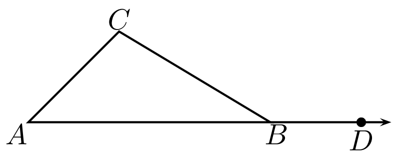


Figura 3.27.

Puesto que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180, se tiene que la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes. Por ejemplo en la figura anterior $m\,\angle CBD = m\,\angle CAB + m\,\angle BCA$.

Congruencia de triángulos

Intuitivamente, dos figuras geométricas son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño. Esta observación referida al caso de los triángulos, estaría diciendo que dos triángulos son congruentes si uno de ellos puede superponerse en el otro, de tal manera que sus lados y ángulos coincidan.

Si $\triangle ABC$ es congruente con $\triangle DEF$, escribimos $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Puesto que un triángulo se puede notar de 6 formas distintas, existen 36 maneras de expresar que dos triángulos son congruentes. Ahora, al adoptar la escritura $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, estaremos significando que se verifican las siguientes relaciones (figura 3.28):

- $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$.
- $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

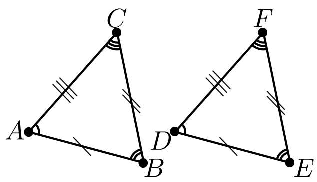


Figura 3.28.

Postulados de congruencias de triángulos

En esta sección se enuncian criterios que permitirán decidir cuando dos triángulos son congruentes.

Observando cada uno de los pares de la figura 3.29, podemos afirmar que, en cada caso, el par de figuras tiene las mismas medidas de sus lados y las mismas medidas de sus ángulos. Nótese que una figura se puede superponer sobre la otra si la trasladamos, la rotamos o la reflejamos o si efectuamos consecutivamente más de una de estas transformaciones. Se dice que estos pares de figuras son congruentes.

En síntesis, se dice que dos figuras F y G son ***congruentes***, lo cual se nota $F \cong G$, si una cualquiera de ellas resulta de trasladar, rotar o reflejar la otra.

En la figura 3.30, se dicen ***correspondientes*** las parejas de lados $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$, $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$; de manera similar los parejas de ángulos A y A', B y B', C y C' son correspondientes.

Recordemos que dos segmentos son congruentes si y solamente si tienen la misma longitud y dos ángulos son congruentes si y sólo si tienen la misma medida. Así que, si dos figuras son congruentes, cualquier par de lados o de ángulos correspondientes son congruentes.

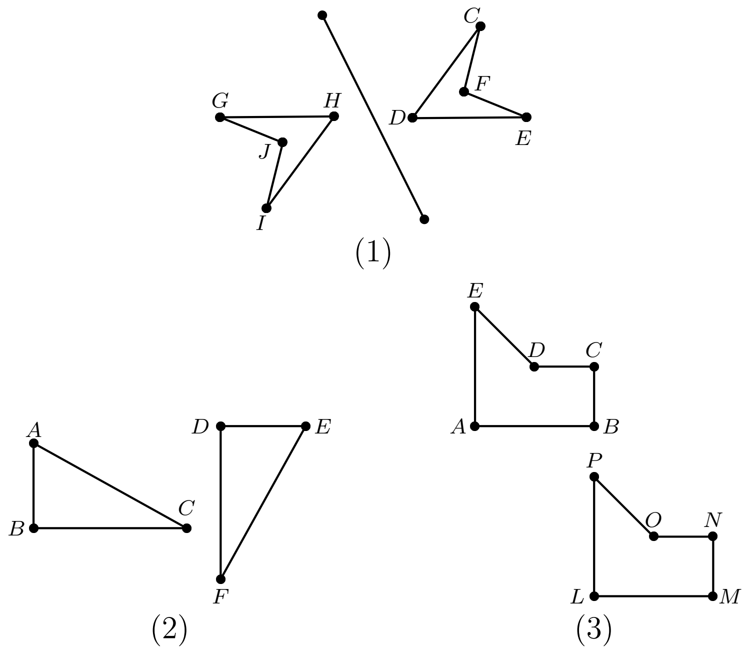


Figura 3.29.

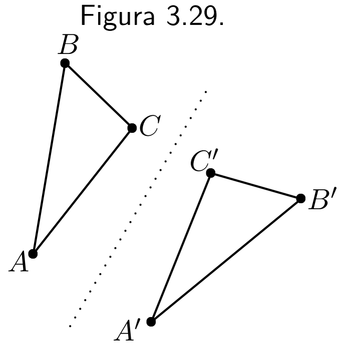


Figura 3.30.

Usando las propiedades anteriores es posible presentar algunos criterios que nos permiten decidir cuando dos triángulos son congruentes.

1) **Postulado LLL:** *Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente congruentes.*

   Si en los triángulos ABC y DEF (figura 3.31), se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

2) **Postulado LAL:** *Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente congruentes y el ángulo comprendido entre ellos también congruente.*

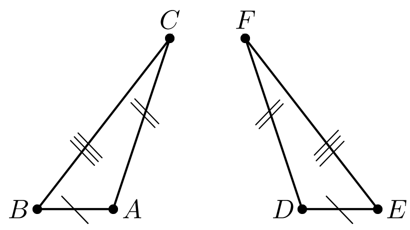


Figura 3.31. Congruencian LLL

Si en los triángulos ABC y DEF (figura 3.32) se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\angle A \cong \angle D$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

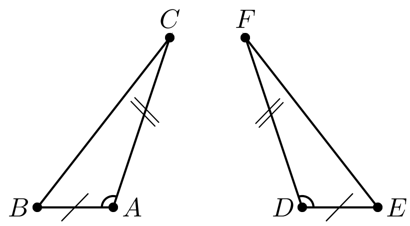


Figura 3.32. Congruencia LAL

3) **Postulado ALA:** *Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes y el lado comprendido entre ellos también congruente.*

Si en los triángulos ABC y DEF se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

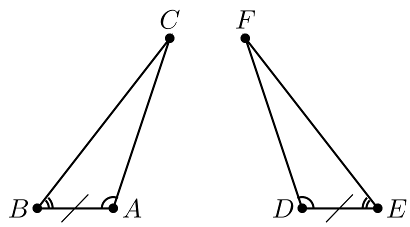


Figura 3.33. Congruencia ALA

Ejemplo 3.6. Usando solamente la información señalada (figura 3.34), seleccionar pares de triángulos que sean congruentes. Justificar cada escogencia con los anteriores criterios

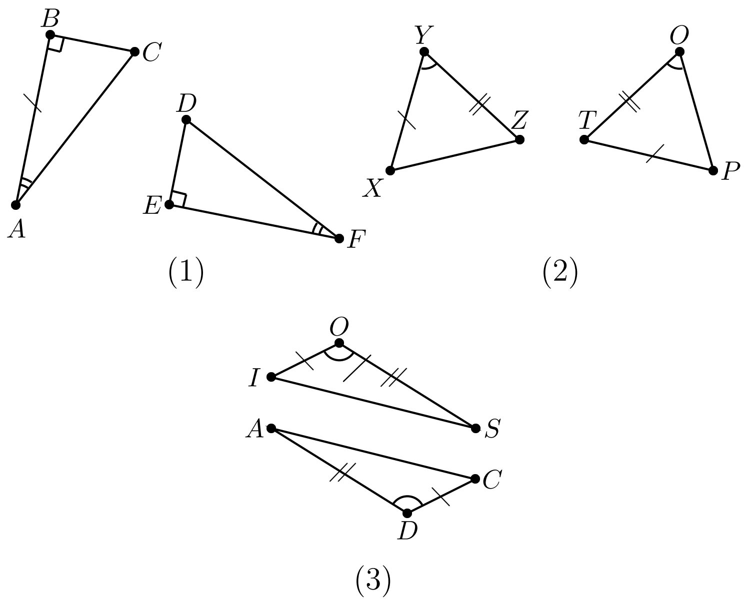


Figura 3.34.

1. $\triangle ABC \cong \triangle FED$ porque tienen un par de lados correspondientes congruentes comprendidos entre dos pares de ángulos correspondientes congruentes. En otras palabras, $\triangle ABC \cong \triangle FED$, por el postulado ALA.

2. No se puede concluir que el triángulo XYZ sea congruente con el triángulo TQP porque el ángulo congruente no está comprendido entre el par de lados congruentes.

3. $\triangle CAD \cong \triangle ISO$ porque dos pares de lados y el ángulo que ellos determinan son congruentes. En otras palabras, $\triangle CAD \cong \triangle ISO$ por el postulado LAL.

Semejanza de triángulos

Se dice informalmente que dos figuras son ***semejantes*** cuando tienen "la misma forma"y diferente tamaño. Una ampliación y una reducción nos da la idea figuras semejantes. De manera mas precisa, se dice que dos figuras son semejantes si los ángulos correspondientes tienen la misma medida y la razón entre lados correspondientes se mantiene constante.

Así, con la idea intuitiva de semejanza, vemos que para su estudio debemos tener presentes las nociones de razón y proporción.

Dados dos números reales positivos a y b, la razón entre a y b es el cociente $\frac{a}{b}$. Por ejemplo, la razón entre 2 y 4 se puede escribir $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$, $0,5$.

Una proporción es una igualdad entre dos razones. Por ejemplo, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Volviendo al tema que nos ocupa, por ahora nos dedicaremos a la semejanza de triángulos, noción que se puede extender a otro tipo de figuras. De las gráficas de la figura 3.35, son semejantes 1 y 2, no son semejantes 3 y 4, son semejantes 5 y 6, son semejantes 7 y 8 y no son semejantes 9 y 10.

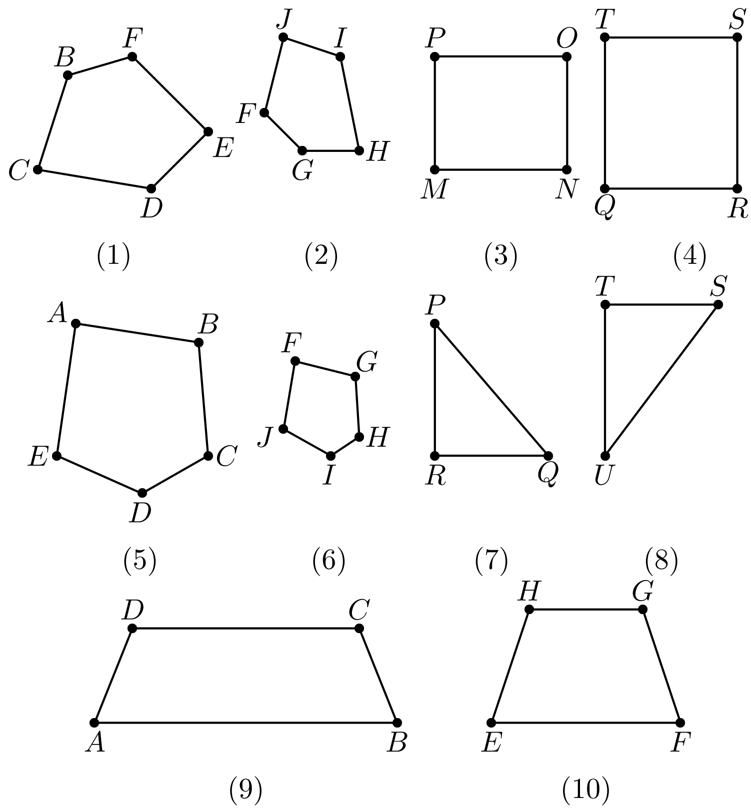


Figura 3.35.

Nuevamente, habría varias formas de notar que dos triángulos son semejantes, sin embargo, adoptaremos una escritura como la considerada en la siguiente definición.

Definición 3.2.18. *Dados los triángulos* $\triangle ABC$ *y* $\triangle DEF$*, se dice que* $\triangle ABC$ *es semejante a* $\triangle DEF$*, lo cual se denota* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$*, si se verifican las siguientes condiciones:*

- $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ *y* $\angle C \cong \angle F$.
- $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{CB}{FE} = \dfrac{CA}{FD}$.

El cociente $\dfrac{AB}{DE}$ *es llamado la* ***razón de semejanza****.*

En la misma forma como se establecieron criterios para determinar cuando dos triángulos son congruentes, se establecen criterios para determinar cuando dos triángulos son semejantes.

1) Los triángulos ABC y QRS de la figura 3.36 son semejantes.

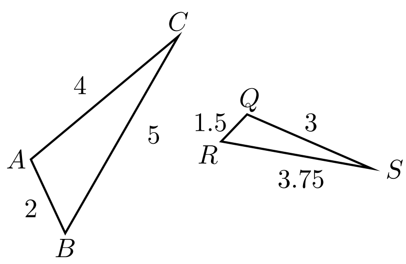


Figura 3.36.

Comparando las dimensiones de sus lados correspondientes, observamos que:

Nótese que $\dfrac{2}{1.5} = \dfrac{4}{3} = \dfrac{5}{3.75}$, es decir, sus tres lados son proporcionales.

El resultado anterior es válido en general y se conoce como *criterio de semejanza* (Lado - Lado - Lado) LLL.

- **Criterio LLL:** *Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de un segundo triángulo, entonces los triángulos son semejantes.*

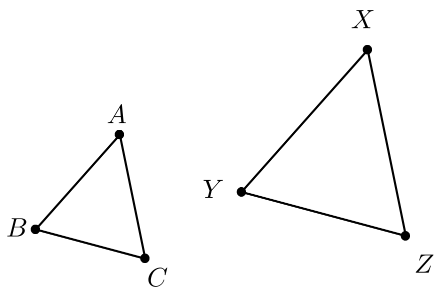


Figura 3.37.

Si los tres lados del $\triangle XYZ$ son proporcionales a los tres lados del $\triangle ABC$, se cumple que:

$$\frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC} = \frac{XZ}{AC} = k$$

Los lados del triángulo XYZ son respectivamente $XY = kAB$, $YZ = kBC$ y $XZ = kAC$. En ese caso, el triángulo XYZ puede considerarse como una ampliación o una reducción del triángulo ABC, dependiendo del valor de k, pero, en cualquiera de los casos, los triángulos resultan ser semejantes.

Ejemplo 3.7. Determine si $\triangle LEA$ es semejante a $\triangle YUO$ (figura 3.38).

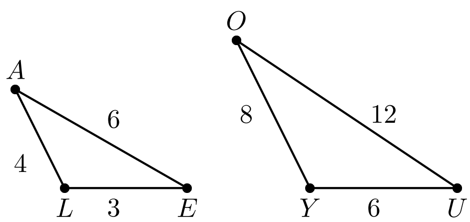


Figura 3.38.

Solución: Para aplicar el criterio anterior y determinar si dos triángulos son semejantes, basta ordenar las longitudes de los lados de cada triángulo y comparar las razones formadas por longitudes correspondientes.

En este caso, las longitudes del triángulo mayor son, en orden de menor a mayor: 6, 8, 12 y las del triángulo menor son en el mismo orden 3, 4, 6.

Las razones correspondientes son entonces:

$$\frac{6}{3}, \quad \frac{8}{4} \quad \text{y} \quad \frac{12}{6}.$$

Dado que estas razones son iguales, los triángulos son semejantes. Podemos decir que el triángulo YUO es una ampliación del triángulo LEA o, de otra forma, que el triángulo LEA es una reducción del triángulo YUO.

Recordemos ahora otro criterio de semejanza.

2) En la figura 3.39, los dos triángulos son semejantes. Nótese que ellos tienen dos ángulos congruentes.

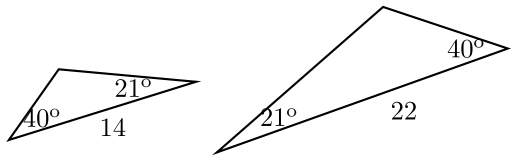


Figura 3.39.

La afirmación anterior corresponde a un segundo criterio de semejanza AA (ángulo-ángulo), que se expresa en general de la siguiente manera:

- **Criterio AA:** *Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro, entonces los triángulos son semejantes.*

Sean ABC y XYZ triángulos (figura 3.40) que satisfacen que $\angle A \cong \angle X$ y $\angle B \cong \angle Y$:

Los ángulos congruentes determinan los vértices correspondientes y a su vez los vértices correspondientes determinan los lados correspondientes. Se tiene entonces que X y A, Y y B son vértices correspondientes.

Por tanto, los lados $\overline{XY}$ y $\overline{AB}$ son correspondientes. Sea $k = \frac{XY}{AB}$.

En la figura 3.41, se puede observar la transformación que se aplica al triángulo ABC que conserva la medida de los ángulos.

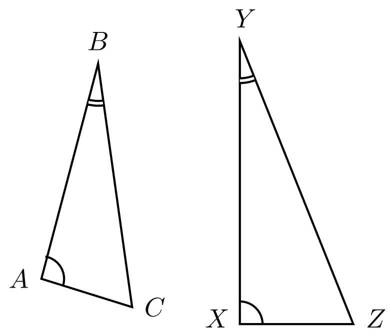


Figura 3.40.

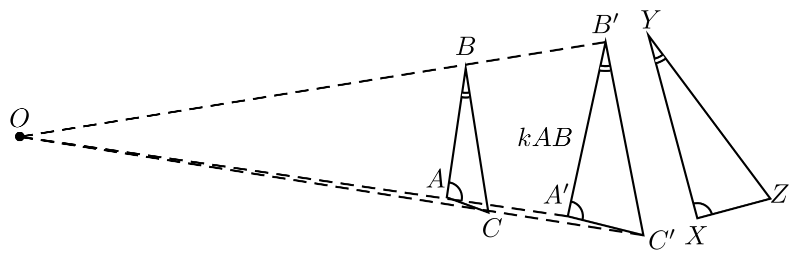


Figura 3.41.

Se tiene entonces que $A'B' = kAB = \frac{XY}{AB}AB = XY$.

Como la transformación conserva medida de los ángulos, $m\angle A' = m\angle X$ y $m\angle B' = m\angle Y$; de donde los triángulos $A'B'C'$ y XYZ son congruentes y entonces el triángulo ABC puede ser transformado en XYZ al aplicar dos transformaciones sucesivas: una ampliación y una reflexión.

Lo anterior permite concluir que $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

Ejemplo 3.8. Si en un determinado instante del día una estaca de un metro produce una sombra de $70cm$ de longitud (figura 3.42). ¿Cuál será la altura de un árbol que en ese mismo instante produce una sombra de $3.4m$ de longitud?

Solución: Asumiendo que los rayos del sol pueden ser considerados como paralelos. Se determinan triángulos rectángulos con ángulos agudos congruentes (figura 3.43).

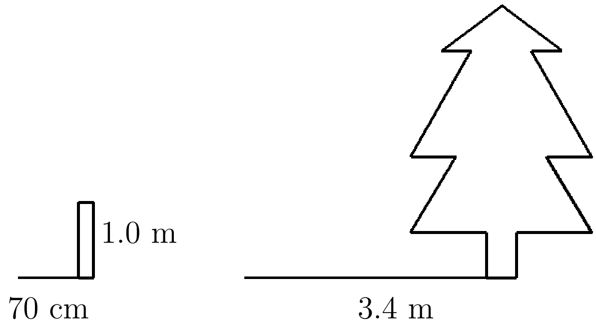


Figura 3.42.

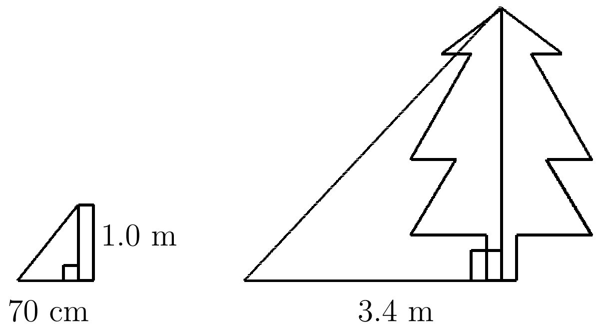


Figura 3.43.

Por el criterio anterior, estos triángulos son semejantes, de donde se concluye que sus lados correspondientes son proporcionales.

$$\frac{1m}{70cm} = \frac{h}{3.4m}$$

Realizando conversión de unidades se tiene:

$$\frac{100cm}{70cm} = \frac{h}{340cm}$$

de donde

$$\begin{aligned} 70h &= 34000 \\ h &= 486cm \end{aligned}$$

El árbol tiene entonces una altura aproximada de $4.9m$.

3) Un tercer criterio para determinar la semejanza de triángulos es el llamado Lado-Ángulo-Lado (LAL).

- **Criterio LAL:** *Si en dos triángulos las razones de dos pares de lados correspondientes son iguales y los ángulos que estos lados determinan son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.*

Específicamente, si en los triángulos ABC y XYZ de la figura 3.44 se tiene que $\angle B \cong \angle Y$ y $\dfrac{AB}{XY} = \dfrac{BC}{YZ}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$. (El argumento de la demostración es similar al ilustrado en el criterio anterior).

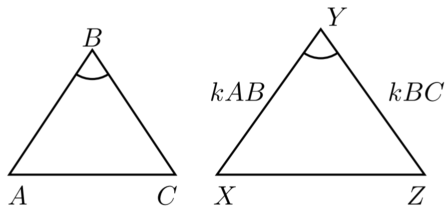


Figura 3.44.

Ejemplo 3.9. En la figura 3.45, T es el punto medio de $\overline{PS}$ y Q es el punto medio de $\overline{PR}$.

Se afirma que $\triangle PTQ \sim \triangle PSR$. ¿Por qué?

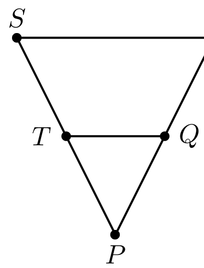


Figura 3.45.

Solución: $\dfrac{PT}{PS} = \dfrac{PQ}{PR} = \dfrac{1}{2}$ y el ángulo $\angle P$, comprendido por estos lados, es común a los dos triángulos.

Por lo tanto, por el criterio LAL se tiene $\triangle PTQ \sim \triangle PSR$.

3.2.4 Polígonos

Conceptos básicos

En ocasiones se usan términos relativos a figuras geométricas que no han sido cuidadosamente definidos. Las figuras geométricas tienen ciertas características que las diferencian. Si nos preguntaran, por ejemplo:

¿Cuáles de las siguientes figuras son rectángulos? ¿Qué responderíamos? ¿Cómo explicamos la escogencia de una de ellas?

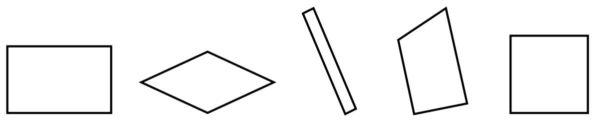


Figura 3.46.

Si nos pidieran definir de manera precisa los términos con que se nombran figuras como las siguientes:

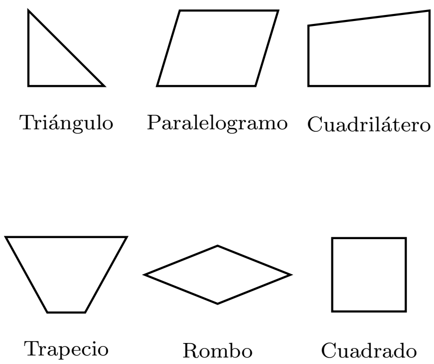


Figura 3.47.

¿Qué responderíamos?

Definir adecuadamente una figura no es simple en geometría. Por ejemplo, si decimos que "Un triángulo es la unión de tres segmentos", podrían aparecer figuras como las siguientes:

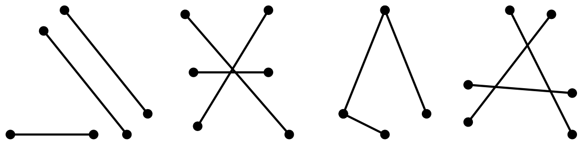


Figura 3.48.

Todas ellas son la unión de tres segmentos, pero no son triángulos. Esto significa que nuestra definición no es buena, pues cada segmento debe intersectar a los otros y las intercepciones deben ser puntos extremos de los segmentos. Este criterio nos puede ayudar a dar una buena definición de triángulo y nos permite además presentar una definición general del término polígono, teniendo en cuenta que aparte de los polígonos muy familiares que se presentaban en las figuras anteriores, también son polígonos como las de la figura 3.49.

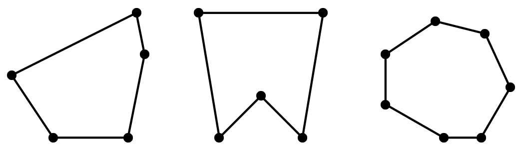


Figura 3.49.

Definición 3.2.19. *Un* ***polígono*** *es la unión de segmentos en un mismo plano tales que cada segmento intersecta exactamente a otros dos, a cada uno de ellos en uno de sus puntos extremos. (Una figura plana limitada por rectas que forman una línea cerrada)*

Nota. Los segmentos con los que se determina un polígono son sus **lados**, los puntos extremos de los lados son los **vértices** del polígono. Un polígono puede ser nombrado dando en orden sus vértices.

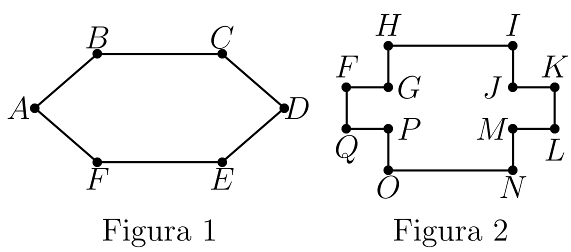


Figura 3.50.

Dos vértices son consecutivos o adyacentes si son puntos extremos de un lado. Por ejemplo, en la figura 3.50.2, G y H son vértices adyacentes del polígono. Una diagonal es un segmento que conecta vértices no adyacentes. Por ejemplo, $\overline{NY}$ y $\overline{PG}$ son diagonales del polígono de la figura 3.51.

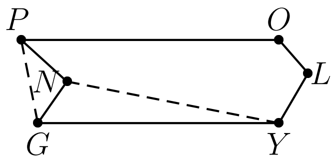


Figura 3.51.

Atendiendo al número de lados, los polígonos se clasifican en triángulos (3 lados), cuadriláteros (4 lados), pentágonos (5 lados), hexágonos (6 lados), heptágonos (7), octógonos (8), nonágonos (9) y decágonos (10). En general, se hace referencia a ellos como n-ágonos.

De la definición de polígono podemos concluir que todo polígono está contenido completamente en un plano. Dado un polígono, se distinguen entonces dos conjuntos en el plano: el interior del polígono y el exterior. La unión de un polígono con su interior es una región poligonal (figura 3.52).

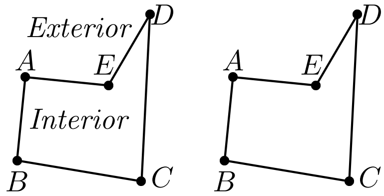


Figura 3.52.

Un polígono se dice ***convexo*** si y sólo si su correspondiente región poligonal es convexa (es decir, si dados dos puntos cualesquiera en la región el segmento de recta que determinan, está completamente contenido en ella). Muchos de los polígonos con los que trabajamos corrientemente son convexos (figura 3.53).

Un polígono se dice ***regular*** si es convexo y si tiene todos sus lados congruentes y todos sus ángulos congruentes.

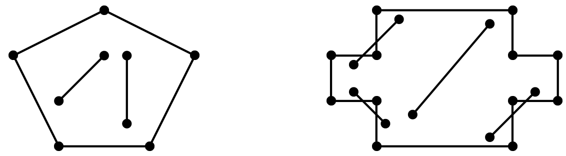


Figura 3.53.

Los Ángulos en un polígono

Conociendo la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, podemos determinar la suma de las medidas de los ángulos de cualquier polígono convexo. Observemos el cuadrilátero de la figura 3.54

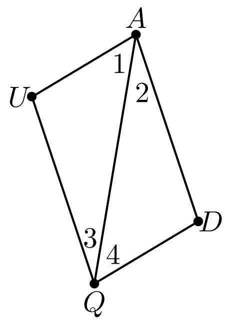


Figura 3.54.

La suma de las medidas de los ángulos del cuadrilátero QUAD es:

$$S = m\,\angle U + m\,\angle A + m\,\angle D + m\,\angle Q.$$

Si dibujamos el segmento $\overline{AQ}$ se determinan dos triángulos y entonces

$$S = m\,\angle U + (m\,\angle 1 + m\,\angle 3) + m\,\angle D + (m\,\angle 2 + m\,\angle 4) = 180^o + 180^o = 360^o$$

En conclusión: la suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero convexo es 360 grados.

Cuadriláteros

Los triángulos, como lo comentamos anteriormente, son usualmente clasificados por la medida de sus lados o por el tipo de ángulos que se determinan en ellos, pero los cuadriláteros tienen una clasificación más diversa y más compleja. Se habla, entre otros, de paralelogramos, rombos, rectángulos, cuadrados, trapecios. Recordemos algunas definiciones al respecto.

Definición 3.2.20. *Un* ***paralelogramo*** *es un cuadrilátero que tiene sus pares de lados opuestos paralelos.*

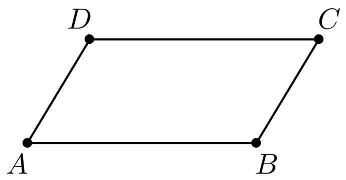


Figura 3.55.

En la figura 3.55, se ilustra el paralelogramo $ABCD$, con $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

Nótese que cada diagonal de un paralelogramo determina dos triángulos congruentes. Ahora, si en un cuadrilátero cada diagonal determina un par de triángulos congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. Así que un paralelogramo se puede definir como un cuadrilátero que tiene cada par de lados opuestos congruentes.

Definición 3.2.21. *Un* ***rombo*** *es un paralelogramo que tiene sus cuatro lados de igual longitud (figura 3.56).*

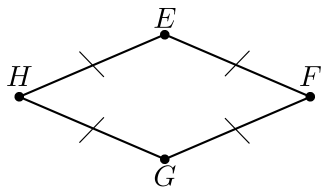


Figura 3.56. $\overline{EF} \cong \overline{FG} \cong \overline{GH} \cong \overline{HE}$.

Definición 3.2.22. *Un* ***rectángulo*** *es un cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos (figura 3.57).*

Definición 3.2.23. *Un* ***cuadrado*** *es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos (figura 3.58).*

Definición 3.2.24. *Un* ***trapecio*** *es un cuadrilátero donde al menos un par de sus lados son paralelos (figura 3.59).*

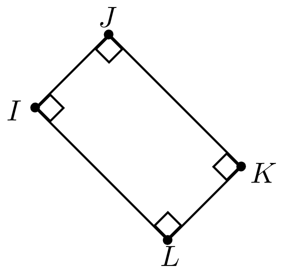


Figura 3.57. $\angle I$, $\angle J$, $\angle K$ y $\angle L$ son rectos.

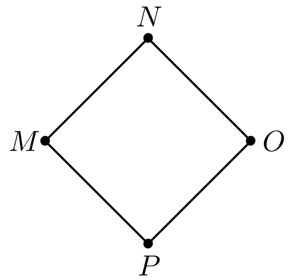
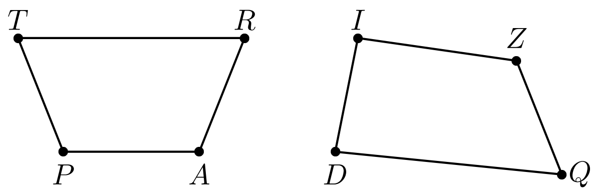


Figura 3.58. $MN = NO = OP = PM$ y $\angle M$, $\angle N$, $\angle O$ y $\angle P$ son rectos.



$\overline{TR} \parallel \overline{PA}$ $\qquad$ $\overline{IZ} \parallel \overline{DQ}$

Figura 3.59.

Perímetro de un polígono

Definición 3.2.25. *El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.*

Si todos los lados de un polígono tienen diferentes longitudes, no existe una fórmula especial para determinar su perímetro, por ejemplo, el perímetro de un triángulo con lados x, y, z es $P = x + y + z$ (figura 3.60).

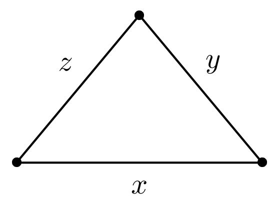


Figura 3.60.

Cuando un polígono tiene lados de igual longitud, como es el caso del rectángulo (figura 3.61), la expresión puede ser simplificada. El perímetro de un rectángulo de lados a, b es

$$P = 2a + 2b = 2(a + b).$$

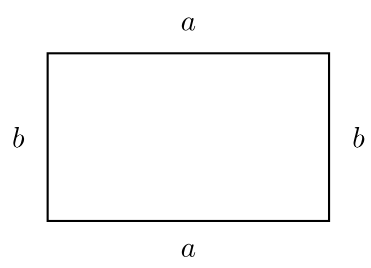


Figura 3.61.

El perímetro de un n–ágono regular de lado s es $P = ns$.

Área de un polígono

El área se puede interpretar como la medida del espacio ocupado por una región bidimensional. Si recubrimos una región con una unidad y contamos el número de copias de la unidad que se necesitan para recubrir la región, decimos que este número es el área de la región en estas unidades. Usualmente la unidad es un cuadrado cuyo lado es una unidad lineal y por eso se afirma que el área está medida en las mismas unidades cuadradas (figura 3.62).

Es posible usar el razonamiento anterior para concluir que: el área A de un rectángulo con dimensiones a y b es $A = a \cdot b$ y utilizando la fórmula anterior es posible deducir que el área de un cuadrado de lado l es l^2.

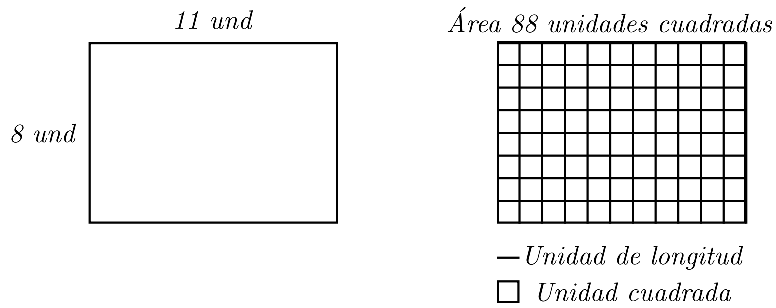


Figura 3.62.

Es fácil encontrar el área de un triángulo rectángulo.

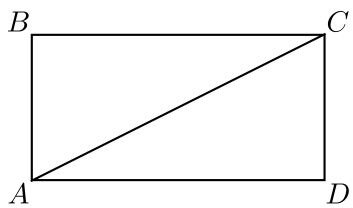


Figura 3.63.

En la figura 3.64, los triángulos ABC y CDA son congruentes, $ABCD$ es un rectángulo y su área es $(AB) \cdot (BC)$, de donde el área del triángulo ABC es:

$$\frac{1}{2}(AB) \cdot (BC).$$

Ejemplo 3.10. El $\triangle PQR$ que muestra la figura 3.64, es rectángulo y $\angle Q$ es recto. Determinar el área del $\triangle PQR$.

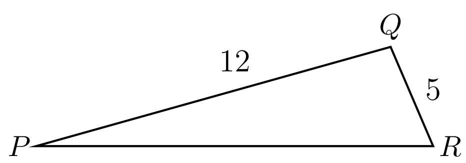


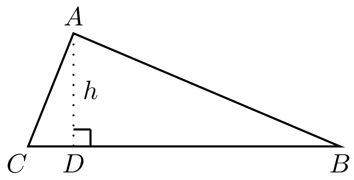
Figura 3.64.

Los catetos del $\triangle PQR$ tienen 5 y 12 centímetros. Puesto que $\triangle PQR = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$, el área del triángulo PQR es $30cm^2$.

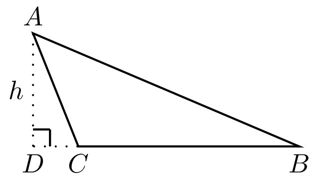
Del área de un triángulo rectángulo se puede derivar una fórmula para el área de cualquier triángulo, se requiere para ello recordar la idea de altura.

En un triángulo una ***altura*** es el segmento perpendicular de un vértice a la recta que contiene el lado opuesto.

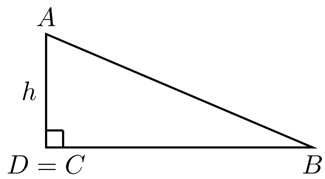
En la figura 3.65, aparece a continuación $\overline{AD}$ como la altura del lado $\overline{BC}$ del triángulo ABC.



Altura $\overline{AD}$ *interior al* $\triangle ABC$



Altura $\overline{AD}$ *exterior al* $\triangle ABC$



Altura $\overline{AD}$ *del* $\triangle ABC$ *con* $\overline{AD} = \overline{AC}$

Figura 3.65.

La longitud de una altura es llamada la ***altura*** del triángulo relativa a una base. (Como base de un triángulo puede ser tomada cualquiera de sus lados, pero a cada base corresponde una altura distinta que es la perpendicular a dicha base o a su prolongación).

Teorema 3.2.2. *El área de un triángulo es la mitad del producto de un lado (la base) por la altura a ese lado.*

$$A = \frac{1}{2}bh$$

Demostrasción. Cuando la altura está sobre el triángulo, se tiene el caso de un triángulo rectángulo. Analicemos los otros casos.

Caso 1: Altura interior al triángulo (figura 3.66).

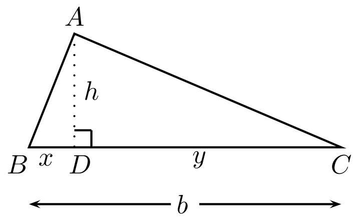


Figura 3.66.

La altura divide el triángulo en dos triángulos. Sea $BD = x$ y $DC = y$.

Entonces $b = x + y$.

$$\begin{aligned}\text{Área}(\triangle ABC) &= \text{Área}(\triangle ABD) + \text{Área}(\triangle ADC)\\ &= \frac{1}{2}hx + \frac{1}{2}hy\\ &= \frac{1}{2}h(x+y)\\ &= \frac{1}{2}hb\end{aligned}$$

Caso 2: Altura exterior al triángulo (figura 3.67).

El área del triángulo puede ser determinada restando las áreas de dos triángulos rectángulos.

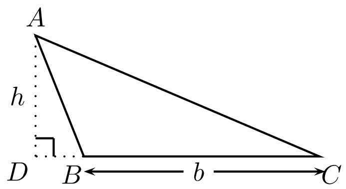


Figura 3.67.

Sea $DB = x$. Entonces:

$$\begin{aligned}\text{Área}(\triangle ABC) &= \text{Área}(\triangle ADC) - \text{Área}(\triangle ADB)\\ &= \frac{1}{2}h(x+b) - \frac{1}{2}hx\\ &= \frac{1}{2}hx + \frac{1}{2}hb - \frac{1}{2}hx\\ &= \frac{1}{2}hb\end{aligned}$$

□

El teorema de Pitágoras

Como una aplicación de estos resultados acerca del área, se puede desarrollar una demostración del importante ***teorema de Pitágoras*** el cual relaciona las longitudes de los tres lados de cualquier triángulo rectángulo.

Este teorema recibe su nombre porque el matemático griego ***Pitágoras*** o uno de sus estudiantes, lo demostró 600 años antes de Cristo. Todavía hoy siguen apareciendo variadas demostraciones de este teorema, provenientes de culturas diversas a través del mundo. No es claro realmente donde se enunció por primera vez y donde se presentó la primera demostración. Como lo comentamos en la reseña inicial, este teorema era conocido por los Babilonios por el año 1650 antes de Cristo y posiblemente se conoció también en la India hacia el año 800 antes de Cristo. Una colección de 370 diferentes demostraciones de este teorema fueron compiladas en 1940 por Elisa Loomis. Incluye allí demostraciones del matemático indú Bhaskara (Siglo XII), de Leonardo Da Vinci (Siglo XV) y hasta del presidente de los Estados Unidos, James A Garfield (Siglo XIX). No en vano este teorema es llamado por algunos historiadores "El primer gran teorema en matemáticas"

El teorema se puede enunciar también en la siguiente forma:

Teorema 3.2.3 (Teorema de Pitágoras). *En cualquier triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.*

Una demostración del teorema de Pitágoras. Dado un triángulo rectángulo con catetos a, b e hipotenusa c, debemos demostrar que: $a^2 + b^2 = c^2$.

El triángulo rectángulo y sus "copias" congruentes se muestran en la figura 3.68:

El cuadrilátero exterior es un cuadrado porque cada uno de sus lados tiene longitud $(a + b)$ y tiene cuatro ángulos rectos. El cuadrilátero sombreado también es un cuadrado porque cada lado tiene longitud c y cada uno de sus ángulos es recto, ¿por qué? Nótese que los cuatro triángulos son congruentes y por lo tanto tienen igual área.

Determinemos ahora el área del cuadrado sombreado.

$$\text{Área}(\square EFGH) = \text{Área}(\square ABCD) - 4\,\text{Área}(\triangle EBF).$$

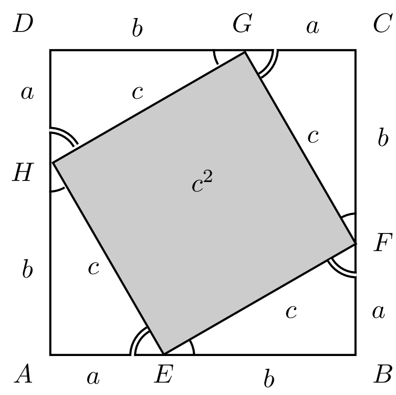


Figura 3.68.

Dado que el lado del cuadrado mayor es $(a+b)$, su área es $(a+b)^2$.

Cada uno de los cuatro triángulos tiene área $\frac{1}{2}ab$.

De donde el área del cuadrado sombreado es:

$$(a+b)^2 - 4\left(\frac{1}{2}ab\right) = (a^2 + 2ab + b^2) - 2ab = a^2 + b^2.$$

Pero, de otra parte, el cuadrado sombreado tiene lado c y por tanto su área es c^2.

Concluimos entonces que: $c^2 = a^2 + b^2$. □

Nota. Si un triángulo con lados de longitudes a, b, c satisface que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un ***triángulo rectángulo***.

Ejemplo 3.11. Aplicaciones del teorema de Pitágoras.

1. Hallar la hipotenusa de cada triángulo que aparece en la figura 3.69.

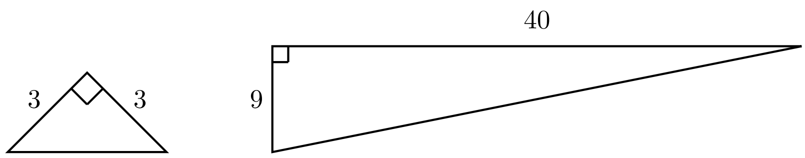


Figura 3.69.

Solución: Para el primer triángulo se tiene que $a = b = 3$, de donde

$$a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = 2(3)^2 = 18.$$

Como

$$c^2 = a^2 + b^2 = 18,\ c^2 = 18,\ c = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Para el segundo se tiene que $a = 40$, $b = 9$, de donde

$$c^2 = a^2 + b^2 = (40)^2 + (9)^2 = 1681$$

y de aquí $c = \sqrt{1681}$.

2. Hallar el cateto a del triángulo de la figura 3.70.

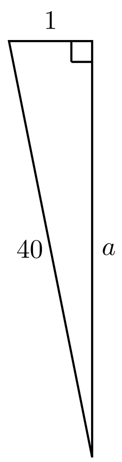


Figura 3.70.

Solución: Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned} (40)^2 - 1 &= a^2 \\ 1599 &= a^2 \\ \sqrt{1599} &= a. \end{aligned}$$

3.2.5 La circunferencia y el círculo

Definición 3.2.26. *Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos de un plano que se encuentran a una distancia fija, su radio, desde un cierto punto, su centro.*

La circunferencia con centro en O y radio r es el conjunto de todos los puntos en el plano con $PO = r$ (figura 3.71).

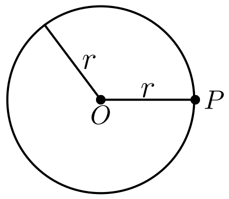


Figura 3.71.

El ***radio*** es pues la distancia del centro a un punto sobre la circunferencia y el diámetro es la longitud del segmento que une dos puntos sobre la circunferencia y contiene al centro, la longitud de este segmento es entonces el doble del radio $(2r)$.

Se hace también referencia al ***círculo***, superficie plana limitada por la circunferencia. Incluye los puntos que están sobre la circunferencia y los puntos que están en el interior, es decir todos los puntos cuya distancia al centro es menor o igual que el radio r. En la figura 3.72 aparece sombreado el interior de la circunferencia.

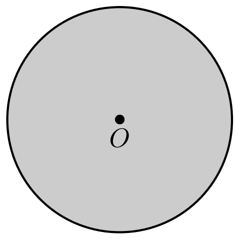


Figura 3.72.

Un segmento que conecta dos puntos sobre la circunferencia es llamado una ***cuerda***. En la figura 3.73, $\overline{AB}$ es una cuerda. Desde luego el diámetro es una cuerda, pero no toda cuerda pasa por el centro.

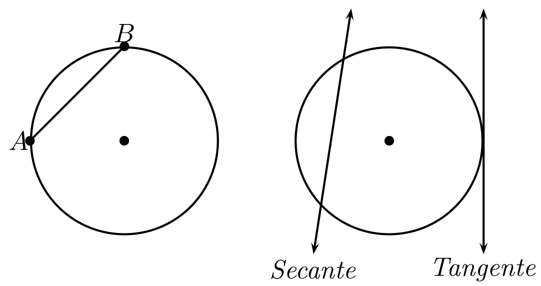


Figura 3.73.

Una ***tangente*** es una recta que tiene un solo punto en común con la circunferencia, el punto común es el punto de tangencia y la tangente es perpendicular al radio en su punto de tangencia. Una secante es una recta que corta la circunferencia en dos puntos (figura 3.73).

Un ***sector circular*** es la parte del círculo comprendida entre dos radios y el arco interceptado por ellos. En la figura se ha sombreado el sector circular ORS (figura 3.74).

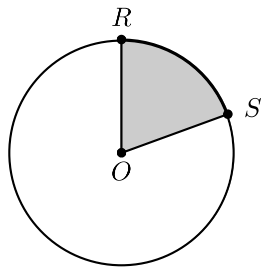


Figura 3.74.

Una porción de la circunferencia, como la determinada por los puntos R y S, se llama un ***arco***. Claramente, dos puntos determinan dos arcos, sin embargo, en una discusión será fácil entender a cual arco nos referimos.

Un ***ángulo central*** es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y cuyos lados son radios. En la circunferencia de centro O que muestra la figura 3.75 se ha dibujado el ángulo central $\angle BOR$.

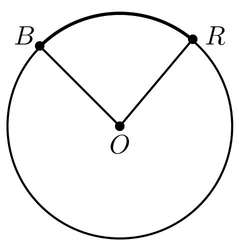


Figura 3.75.

El perímetro de la circunferencia

Seguramente usted ya ha realizado en el colegio una actividad como la siguiente:

- Construir circunferencias de diferentes radios $3, 4, 5, 6, \ldots, 10$ por ejemplo.

- Medir con una cuerda la longitud de cada una de estas circunferencias que llamaremos C.

- Calcular la razón

$$\frac{\text{Longitud de la circunferencia}}{\text{diámetro}} = \frac{C}{d}.$$

En esta actividad podemos observar que esta razón, en todos los casos, es muy próxima a 3.14. Esta observación se puso ya de manifiesto en culturas muy antiguas como la egipcia y la babilónica a las que nos referimos en la introducción.

Realmente dicha razón es constante, es el número irracional π, cuya expresión decimal es infinita y no periódica.

Como curiosidad, las primeras 50 cifras decimales de este número son:

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510\ldots$$

Una buena aproximación la tenían ya los Babilonios, quienes usaban simplemente la fracción $\frac{22}{7}$. En muchas de las aplicaciones que nosotros trabajamos, basta con tomar 3.14.

De la mencionada razón es posible obtener una expresión para el perímetro o longitud C de una circunferencia de radio r o diámetro $d = 2r$, la cual corresponde a:

$$C = \pi d \quad \text{o} \quad C = 2\pi r$$

La longitud de un arco

La ***longitud de un arco*** determinado en una circunferencia de radio r por un ángulo central de n^{o} es

$$\begin{aligned} l &= \frac{n}{360} 2\pi r \\ &= \frac{n}{180} \pi r \end{aligned}$$

Nótese que la expresión $\dfrac{n}{360}$ indica intuitivamente la parte de la longitud de la circunferencia que se está considerando.

Ejemplo 3.12. En la circunferencia de la figura 3.76, $OB = 1.3$ cm y $m\angle AOB = 80°$. Encontrar la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$

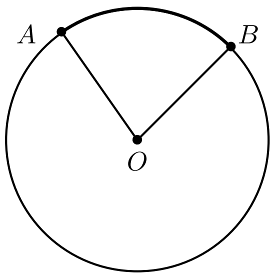


Figura 3.76.

Solución:

$$l = \frac{80^{\text{o}}}{360^{\text{o}}}(2\pi)(1.3)$$

Por lo tanto, la longitud del arco AB es aproximadamente 1.8 cm.

Área del círculo

La circunferencia no es un polígono pero puede ser aproximada por polígonos tanto como uno lo desee. Para determinar el área de la región interior podemos intentar recubrirla como lo hacíamos con los polígonos, pero resulta mas fácil usar sectores circulares para recubrirla.

En la figura 3.77 nótese que, uniendo los sectores circulares como se indica en la parte derecha, se determina una figura similar a un rectángulo de lados πr y r. Al calcular el área del rectángulo se obtiene el área del círculo. Desde esta idea se puede concluir que el área A del círculo de radio r es: $A = \pi r^2$.

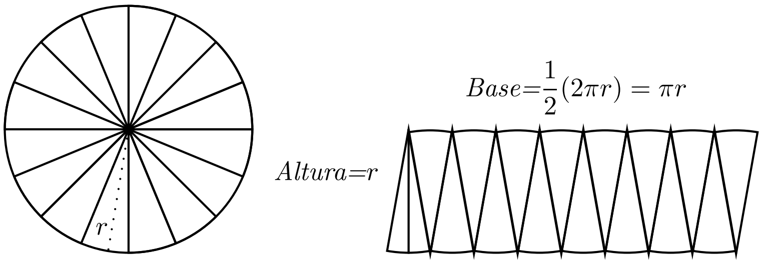


Figura 3.77.

Área de un sector circular

El área de un sector circular determinado por un ángulo central de $n°$ en una circunferencia de radio r está dada por:

$$A = \frac{n}{360}\pi r^2.$$

Nótese que la expresión $\frac{n}{360}$ indica la parte del círculo que se está considerando.

Ejemplo 3.13. Encontrar el área del sector circular sombreado en la figura 3.78.

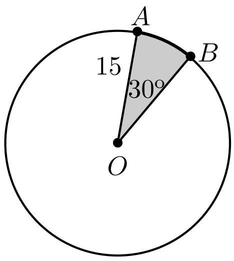


Figura 3.78.

Solución: $m\angle AOB = 30°$, por tanto, el sector sombreado es $\frac{30}{360}$ del área del círculo. Por tanto:

$$A = \frac{30}{360}(\pi)(15)^2$$

Por lo tanto, el área del sector circular sombreado es 58.9

Teóricamente, para construir un polígono regular de n lados, se parte de una circunferencia y se construyen en ella ángulos centrales de $\dfrac{360°}{n}$. Así que un polígono regular puede considerarse inscrito en una circunferencia, es decir sus vértices son puntos de una circunferencia.

Por ejemplo, para construir un hexágono regular, se parte de una circunferencia y se construyen ángulos centrales de $60°$ como lo ilustra la figura 3.79. Puesto que los triángulos involucrados en la figura resultan equiláteros, el lado del hexágono resulta igual al radio de la circunferencia.

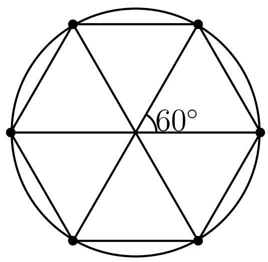


Figura 3.79.

En la figura 3.80, A, B y C son puntos de la circunferencia de centro O y radio r y $\overline{AB}$ es un diámetro de dicha circunferencia. El ángulo $\angle C$ es recto y por lo tanto el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo.

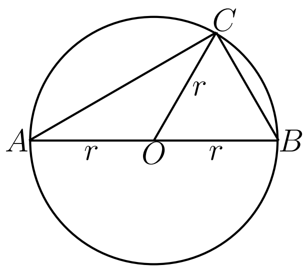


Figura 3.80.

En efecto, puesto que $AO = OC = r$, $\triangle AOC$ es isósceles, de donde $m\angle CAO = m\angle ACO$. Análogamente, $OC = OB = r$, luego $\triangle OBC$ es isósceles, por lo tanto $m\angle OCB = m\angle OBC$.

Entonces, puesto que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$, notando con $x = m\angle CAO$ y $y = m\angle OCB$, en $\triangle ABC$ se tiene que $2x + 2y = 180°$; de donde $x + y = 90°$. Por lo tanto el $\angle C$ es recto, de lo cual se sigue que $\triangle ABC$ es rectángulo.

3.3 Algunos sólidos y sus volúmenes

El estudio de las figuras tridimensionales es llamado geometría de los sólidos. Cuando hablamos de los polígonos, insistimos en diferenciar entre el polígono y la región poligonal (Un polígono es la frontera de una región poligonal y la región es la unión de la frontera con su interior).

Una distinción similar se hace con las figuras tridimensionales, una superficie es la frontera de una región tridimensional. Un sólido es la unión de la frontera y la región del espacio encerrada por la superficie. Por ejemplo una caja de cartón es una superficie y un bloque de ladrillo es un sólido.

Definición 3.3.1. *Llámase* ***poliedro*** *a un cuerpo o sólido geométrico limitado por planos. Las intersecciones de estos planos forman polígonos llamados caras del poliedro; los lados de las caras se llaman aristas y las intersecciones de las aristas se llaman vértices (figura 3.81).*

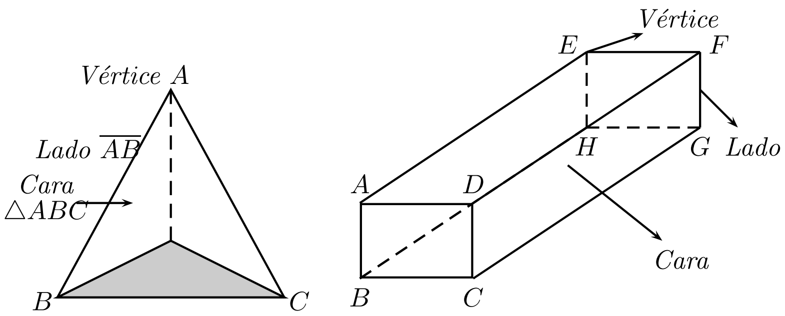


Figura 3.81.

Una ***diagonal*** de un poliedro es una recta que une dos vértices no situados en una misma cara.

Definición 3.3.2. *Un poliedro* ***regular*** *es aquel cuyas caras son polígonos regulares iguales (figura 3.82).*

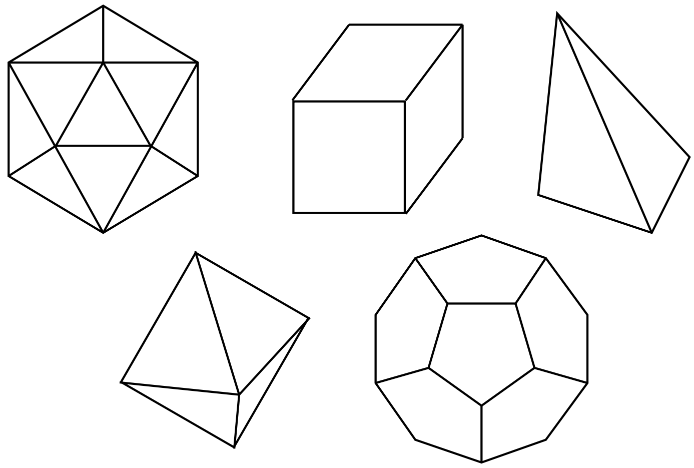


Figura 3.82.

De acuerdo al número de caras los poliedros se clasifican en tetraedros, pentaedros, hexaedros, etc., según tengan cuatro, cinco, seis caras.

El poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas, y cuyas otras caras son paralelogramos, recibe el nombre de ***prisma*** (figura 3.83).

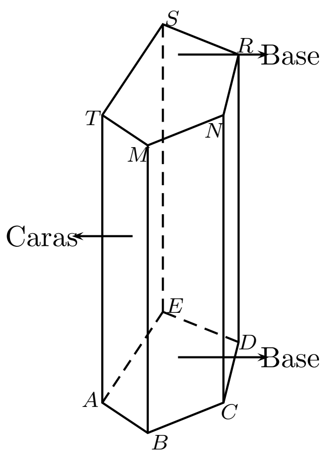


Figura 3.83.

Las caras iguales y paralelas se denominan ***bases*** y las demás se llaman ***caras laterales***. Si las bases son triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc, se habla de prismas rectangulares, cuadrangulares o pentagonales y si las caras laterales son perpendiculares a la base se habla de prisma recto.

Un ***paralelepípedo*** es un prisma cuyas bases son paralelogramos, es decir sus seis caras son paralelogramos. Si sus bases son rectángulos se habla de paralelepípedo rectángulo, si sus caras laterales son perpendiculares a las bases se habla de paralelepípedo recto (figura 3.84).

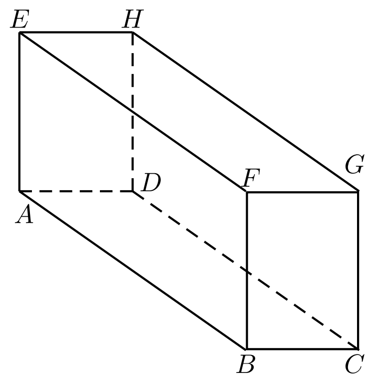


Figura 3.84.

“El cubo es el paralelepípedo rectángulo cuyas seis caras son cuadrados”

Volumen

El volumen de un cuerpo es la medida del espacio que el cuerpo ocupa.

Si cada uno de los lados de las caras de un cubo tiene una unidad de longitud, podemos afirmar que cada cara tiene una unidad cuadrada de área. Como el cubo tiene seis caras podemos decir además que el área de la superficie de este cubo es de 6 unidades cuadradas; pero también podemos afirmar que este cubo tiene una unidad cúbica de volumen ($1u^3$). Por esta razón es llamado cubo unidad. Usualmente el volumen es medido en unidades cúbicas.

Ejemplo 3.14. ¿Cuál será entonces el volumen del sólido que se construye como se ilustra en la figura 3.85 con cubos unidad? Las dimensiones de la base son respectivamente: 12 y 7 unidades lineales y tiene 17 unidades de altura.

En la capa de la base se han colocado 12×7 cubos unidad y hay 17 de estas capas. Es decir el volumen total se puede hallar determinando el producto $12 \times 7 \times 17$, hay pues en total 1428 cubos unidad, el volumen es de 1428 unidades cúbicas.

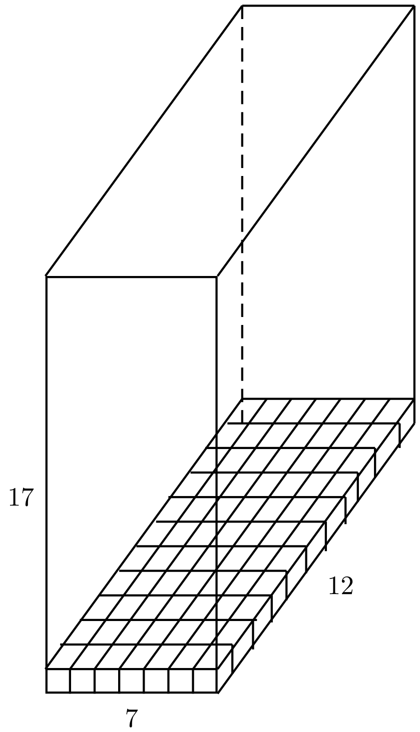


Figura 3.85.

Como en el caso del área de un rectángulo la idea anterior nos permite intuir que el volumen de un paralelepípedo rectángulo (una caja) es igual al producto de sus tres dimensiones (figura 3.86).

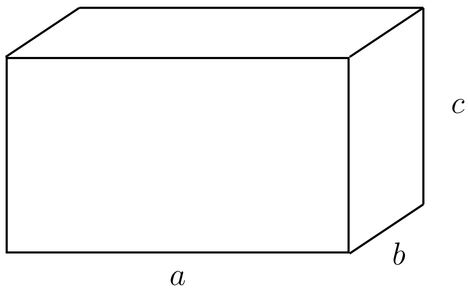


Figura 3.86.

Si las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo son a, b, c su volumen V es,

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Esta expresión es equivalente a afirmar que si el área de la base del paralelepípedo es A y la altura es c, el volumen V es,

$$V = A \cdot c$$

Como caso especial, el volumen de un cubo es el cubo de la arista, pues sus tres dimensiones son iguales. Si la arista es a, el volumen V es,

$$V = a^3$$

La idea anterior se puede generalizar al volumen de un paralelepípedo cualquiera (o de un prisma cualquiera). En otras, palabras, el volumen de un paralelepípedo es $V = Ah$, siendo h la altura y A el área de la base.

Ejemplo 3.15.

1. Si un cubo tiene 64 cm^3 de volumen. ¿Cuál es la longitud de un lado?

   Solución. Sea s la longitud de un lado, como $V = s^3 = 64$. Por lo tanto el lado del cubo es 4 cm.

2. Si un cubo tiene de lado a cm y otro tiene de lado $4a$ cm, ¿cuál es la razón entre los volúmenes de los dos cubos?

   Solución. El volumen V del primer cubo es a^3 y el volumen V_1 del segundo cubo es $(4a)^3$ y la razón entre el volumen V y el volumen V_1 es $\dfrac{a^3}{64a^3} = \dfrac{1}{64}$.

3. Si las dimensiones de una caja se incrementan en 2, 3 y 4 unidades. ¿Qué sucede con el volumen de la caja?

   Solución. Si las dimensiones de la caja original son x, y, z (figura 3.87), su volumen es $x \cdot y \cdot z$. Si llamamos las nuevas dimensiones h, w y l, tenemos que:

   $$h = x + 2, \quad w = y + 3 \quad \text{y} \quad l = z + 4.$$

   De donde el volumen V de la nueva caja es:

   $$V = lwh = (z + 4)(y + 3)(x + 2).$$

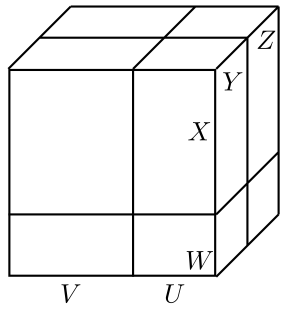


Figura 3.87.

Efectuando la multiplicación obtenemos que:

$$V = xyz + 3xz + 4xy + 12x + 2yz + 6z + 8y + 24.$$

El volumen se incrementa entonces en: $3xz + 4xy + 12x + 2yz + 6z + 8y + 24$.

Por ejemplo si las dimensiones de la caja original son $x = 6$, $y = 8$, $z = 10$, el volumen de la caja sería 480 y el de la nueva caja sería $(6+2)\cdot(8+3)\cdot(10+4) = 1232$. En ese caso se incrementaría en 752 unidades cúbicas.

Nota. Otros sólidos y sus volúmenes, como por ejemplo, el cilindro, el cono y la esfera se presentan en el taller 7.

Taller 1

1. (a) ¿Cuántas rectas pasan por un punto dado?
   (b) ¿Cuántos planos pueden contener una recta dada?
2. (a) Dados tres puntos no colineales ¿Cuántas rectas pueden dibujarse, de tal manera que cada una de las rectas pase por dos de dichos puntos?
   (b) Responda la pregunta anterior para el caso en que se tengan cuatros puntos no coplanarios, tales que tres cualesquiera de ellos no sean colineales.
3. La medida de un ángulo es 30 menos que el doble de la medida de su complemento. Hallar la medida del ángulo.

4. El triple de la medida de un ángulo es la tercera parte de su suplemento. Hallar la medida del ángulo.

5. En la recta numérica que muestra la gráfica (figura 3.89), C es el punto medio de $\overline{AB}$. Si la coordenada de A es 1,7 y la coordenada de C es 3,21, hallar la coordenada de B.

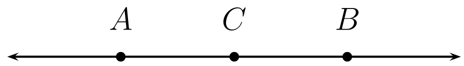


Figura 3.88.

6. (a) Determine las medidas de los ángulos 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 en la figura 3.89, sabiendo que la recta s es paralela a la recta t y l es una recta transversal.

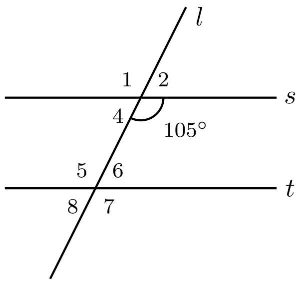


Figura 3.89.

Taller 2

1. (a) Si dos lados de un triángulo miden respectivamente 11 cm y 16 cm ¿cuáles son las posibles medidas del tercer lado?

   (b) Si un lado de un triángulo mide 57 cm y otro lado mide 58 cm, ¿cuáles son las posibles medidas del otro lado?

   (c) ¿Pueden ser las medidas de los lados de un triángulo números enteros consecutivos $(n, n+1, n+2)$?

2. En $\triangle ABC$, $AB = 10$, $BC = 7$ y $AC = 8$. ¿Cuál es el ángulo mayor?, ¿cuál es el ángulo menor?.

3. Recordemos que un triángulo es llamado ***rectángulo***, si tiene un ángulo recto, ***acutángulo*** si tiene los tres ángulos agudos y ***obtusángulo*** si tiene un ángulo obtuso.

   (a) Construir un triángulo rectángulo, uno obtusángulo y uno acutángulo

   (b) ¿Puede usted construir un triángulo rectángulo que sea equilátero?

   (c) ¿Puede usted construir un triángulo rectángulo que sea isósceles?

4. Si el $\triangle ABC$ de la figura 3.90, es isósceles, $(AB \cong AC)$

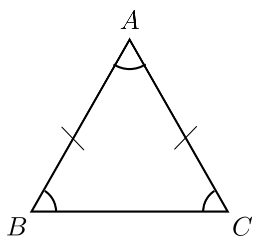


Figura 3.90.

   Explicar porqué es correcto afirmar que $\angle ABC \cong \angle ACB$.

5. Si en la figura 3.91, $m\angle ABC = 105°$, $m\angle A = 6t$ y $m\angle C = 9t$. Encontrar el valor de t.

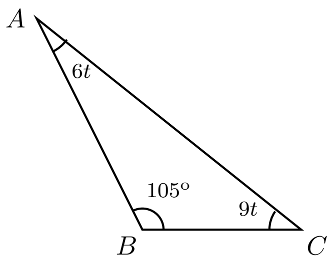


Figura 3.91.

6. Construir dos triángulos ABC y DEF que cumplan que $m\angle A = m\angle D$, $m\angle B = m\angle E$. ¿Qué puede usted afirmar acerca de las medidas de los ángulos C y F?

7. Usando ejemplos, explorar el siguiente criterio que es válido para triángulos rectángulos: si en dos triángulos rectángulos la hipotenusa y un cateto de uno son congruentes a la hipotenusa y un cateto del otro, entonces los dos triángulos son congruentes.

Taller 3

1. En cada caso hallar la razón entre cada par de números reales.
   (a) 12 y 15.
   (b) 21 y 7.
   (c) $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$.
2. En cada proporción hallar el valor de x.
   (a) $\dfrac{3}{x} = \dfrac{x}{27}$.
   (b) $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{x}{3}$.
3. Sean a, b, c y d números reales positivos. Considere la proporción $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$. En cada caso completar la proporción:
   (a) $\dfrac{a}{c} =$
   (b) $\dfrac{d}{b} =$
4. Si los triángulos OMN y QMP de la figura 3.92, son semejantes,
   (a) determinar la razón de semejanza.
   (b) hallar la longitud de $\overline{QP}$
   (c) comparar ángulos correspondientes de los dos triángulos.
5. ¿Son los pares de triángulos que se muestran en la figura 3.93, semejantes? Explique porqué si o por que no.
6. (a) Explicar por qué la parejas de triángulos que aparecen en la figura 3.94, son semejantes.
   (b) Hallar razón de semejanza entre los lados de los triángulos correspondientes.
   (c) Determinar las longitudes de los lados desconocidos.

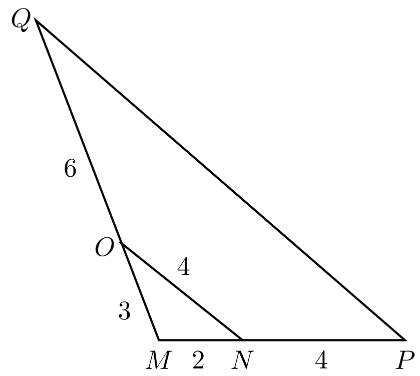


Figura 3.92.

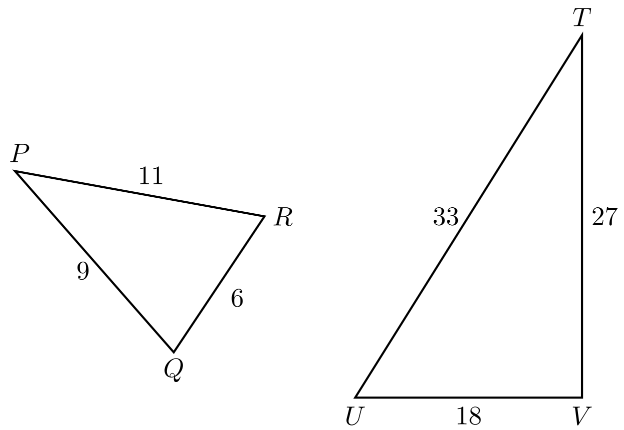


Figura 3.93.

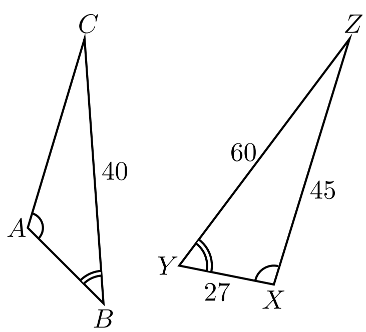


Figura 3.94.

7. En la figura 3.95, $\overline{DE} \| \overline{AB}$, $AB = 10$, $DE = 5$, $CD = 4$ y $CE = 6$.

(a) Hallar CA y CB.

(b) Halle el perímetro de $\triangle ABC$.

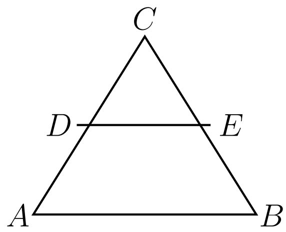


Figura 3.95.

8. La altura $\overline{CD}$ del triángulo ABC divide la hipotenusa en dos segmentos de longitudes 6 y 9 unidades. Hallar CD y los dos catetos del triángulo ABC (figura 3.96).

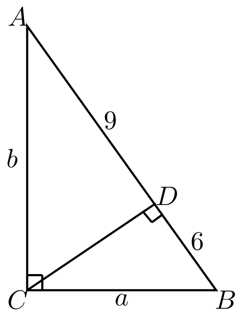


Figura 3.96.

9. Una ***mediana*** de un triángulo es un segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Las medianas de un triángulo son concurrentes, es decir, se intersectan en un mismo punto. En este ejercicio se pide verificar este hecho.

   En el $\triangle ABC$ que muestra la figura 3.97, $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ son medianas. Sea O el punto de intersección de $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$.

   (a) $\triangle ABO \sim \triangle EDO$, por qué?

   (b) $\dfrac{AB}{ED} = \dfrac{AO}{EO} = \dfrac{BO}{DO} = 2$, ¿por qué?

   (c) $AO = 2EO$ y $BO = 2DO$, ¿por qué?

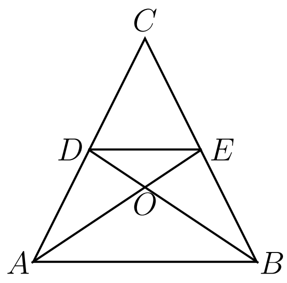


Figura 3.97.

(d) En forma análoga si $\overline{CF}$ es una mediana, al considerar otra mediana, por ejemplo $\overline{AE}$ y suponer que estas se intersectan en un punto P se concluye que $CP = 2PF$ y que $AP = 2PE$; de lo cual se sigue que $O = P$. ¿Por qué?.

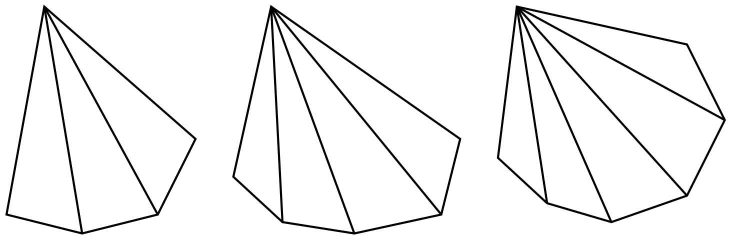
(e) Por lo tanto las medianas de un triángulo son concurrentes. El punto de intersección de las medianas se llama ***baricentro*** y dista de cada vértice $\dfrac{2}{3}$ de la longitud de la mediana respectiva.

Taller 4

1. Sabemos que una diagonal de un polígono es un segmento que une dos vértices no consecutivos. ¿Cuál es el número de diagonales de un cuadrilátero? ¿de un pentágono? ¿de un hexágono?... ¿de un n-ágono?.

2. (a) En los polígonos que aparecen en la figura 3.98, se han determinado algunos triángulos, observar cada una de las construcciones para responder las preguntas.

   ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un pentágono, de un hexágono? ¿de un heptágono?, ¿de un decágono? (en cada caso considere que el polígono es convexo). Encontrar una expresión general que le permita determinar la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo.



Pentágono *Hexágono* *Heptágono*

Figura 3.98.

(b) Recordemos que un ***polígono regular*** es un polígono convexo cuyos ángulos son todos congruentes y cuyos lados son todos congruentes. El triángulo equilátero, el cuadrado, el pentágono regular y el hexágono regular son ejemplos de este tipo de polígonos.

Construir estos polígonos y determinar las medidas de sus ángulos interiores en cada caso.

3. En forma similar a la definición de ángulo externo de un triángulo, se tiene la definición de ángulo externo de un polígono regular. Nuevamente, se puede observar que en cada vértice se determinan dos ángulos externos, los cuales resultan congruentes. Así, para este ejercicio consideraremos solamente un ángulo externo en cada vértice. ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo? ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos exteriores de un cuadrado?, pentágono regular, hexágono regular... n-ágono regular. (En cada cara, considere que el polígono es convexo).

4. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En cada caso, justifique su respuesta.

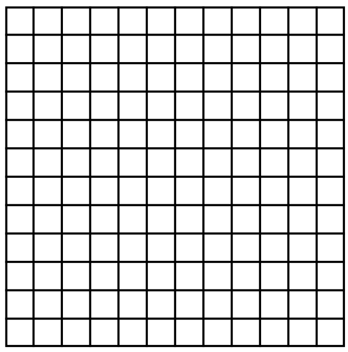
   - Todo cuadrado es un rombo.
   - Todo rombo es un cuadrado.
   - Todo cuadrado es un rectángulo.
   - Todo rectángulo es un cuadrado.
   - Todo rectángulo es un paralelogramo.
   - Algunos rectángulos son rombos.
   - Algunos trapecios son paralelogramos

Taller 5

1. Si el perímetro de un rectángulo es de $48cm$. ¿Cuáles son las posibles dimensiones de los lados?

2. Si el perímetro de un triángulo es de $30cm$ ¿Cuáles son las posibles dimensiones de sus lados?

3. Usando la cuadrícula que se presenta a continuación, dibujar 3 polígonos diferentes que tengan 12 unidades de perímetro. (Los vértices de los polígonos deben estar sobre puntos de la cuadrícula)



¿Es posible construir un triángulo que tenga 12 unidades de perímetro?

¿Cuál de las figuras que usted construyó tienen mayor área?

4. Encontrar el área del paralelogramo que se presenta en la figura 3.99,

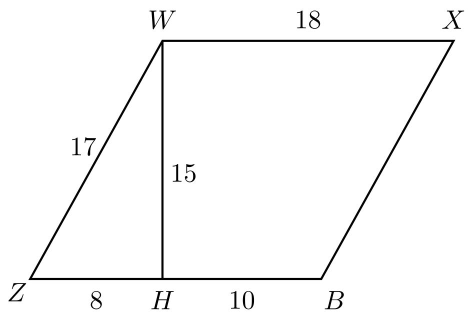


Figura 3.99.

5. Si en la figura 3.100, $ABCD$ y $AMEN$ son cuadrados, m es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{BC} = 16$. Determinar el área del polígono $BCDNEM$.

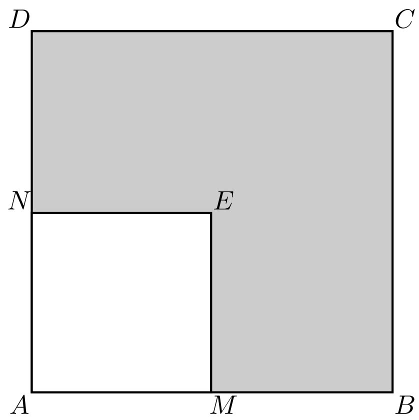


Figura 3.100.

6. Observe la figura 3.101, $DCBA$ es un cuadrado y los cuatro triángulos que aparecen son congruentes.

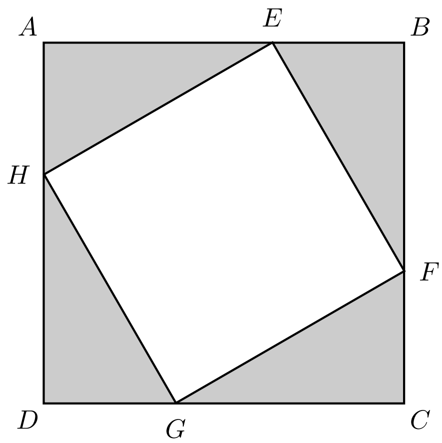


Figura 3.101.

Si $AB = 7$ y $HE = 5$, ¿cuál es el área de la región sombreada?

7. En la figura 3.102, determinar las áreas de los triángulos EFH, FGH y EGH.

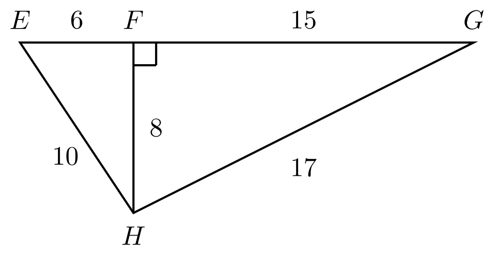


Figura 3.102.

8. Hallar el área del $\triangle XYZ$ en cada uno de los siguientes casos (figura 3.103).

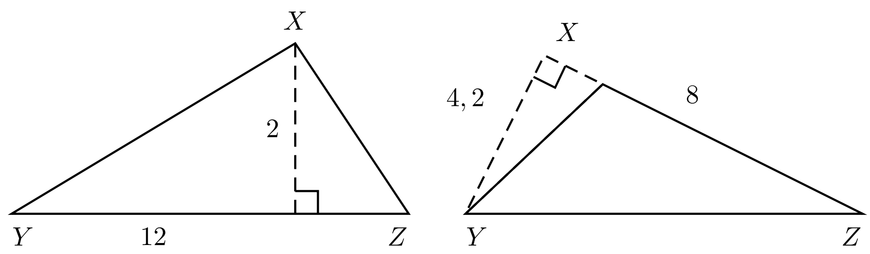


Figura 3.103.

9. Determinar el área, en unidades cuadradas, del cuadrilátero $ABCD$ de la figura 3.104.

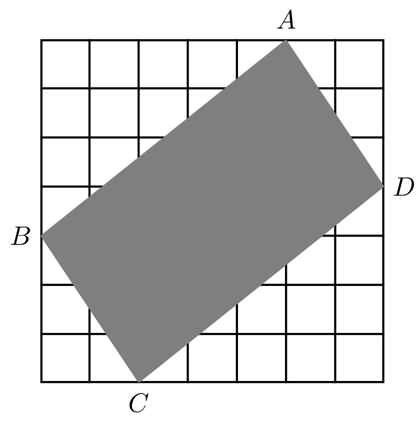


Figura 3.104.

10. Trazar un triángulo ABC cualquiera, dibujar sus tres alturas. Determinar el área del triángulo en cm^2, midiendo la longitud de cada uno de sus lados y la altura correspondiente a ese lado. ¿Qué valor tiene el área, en cada caso?

11. En el triángulo ABC de la figura 3.105, se han trazado las alturas $\overline{AW}$ y $\overline{CF}$. Si $AB = 8$, $CF = 6$ y $AW = 7$. Determinar CB.

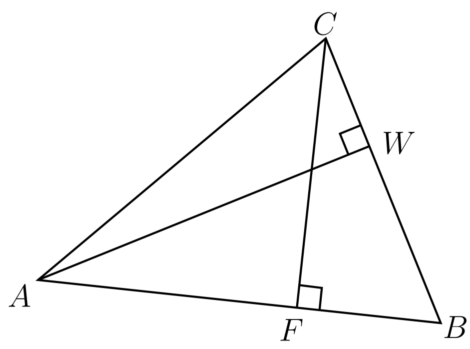


Figura 3.105.

12. Si se sabe que un cateto de un triángulo rectángulo es el doble del otro. Determinar su hipotenusa. ¿Cuál es la razón entre la hipotenusa y el cateto menor?

13. (a) Construya un sistema de coordenadas cartesianas y localice en él los puntos,

$$A : (0, 0), \quad B : (3, 0) \quad \text{y} \quad C : (3, 2).$$

(b) Trace el triángulo con vértices en los puntos A, B, C. Determine las longitudes de sus lados y las medidas de sus ángulos. ¿Qué tipo de triángulo es?

(c) ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras quedan en el interior del triángulo?

¿Cuántos puntos de coordenadas enteras quedan sobre cada uno de los lados.

Taller 6

1. En la figura 3.106, $\overline{PR}$ y $\overline{SQ}$ son diámetros de la circunferencia C y O es el punto de intersección de PR y SQ.

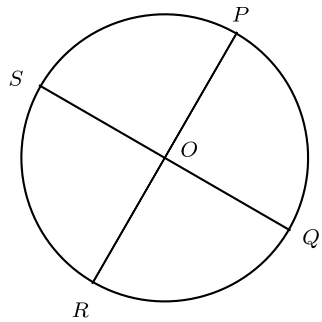


Figura 3.106.

Discutir la validez de las siguientes afirmaciones

a) $\overline{OP} \cong \overline{OQ}$

b) $\overline{OR} \cong \overline{OS}$.

c) $\angle POQ \cong \angle ROS$.

2. (a) Trazar un segmento $\overline{AB}$.
   (b) Construir un circunferencia con radio AB.
   (c) Construir una circunferencia con diámetro AB.
   (d) Hallar la razón entre las longitudes de las circunferencias construidas en (b) y (c).
   (e) Hallar la razón entre las áreas de las circunferencias construidas en (b) y (c).

3. Las dos circunferencias que aparecen en la figura 3.107 son concéntricas (es decir, tienen el mismo centro).

   Si el radio de la circunferencia mayor es cuatro veces el radio de la circunferencia menor, ¿cuál es el área de la región sombreada? ¿cuál es la razón entre las áreas del círculo menor y el mayor? ¿cuál es la razón entre las longitudes de la circunferencia menor y la mayor?

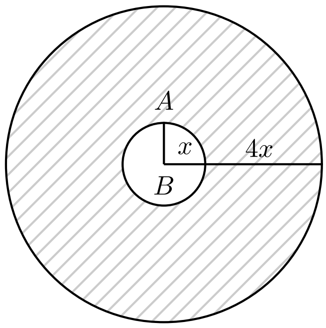


Figura 3.107.

4. En la figura 3.108 se han cortado 8 discos circulares de metal de una lámina rectangular de 12 cm por 24 cm. La lámina restante no se usa.

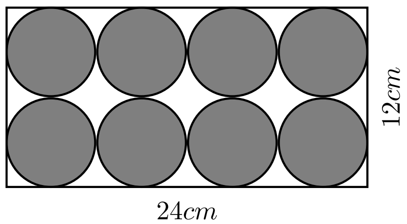


Figura 3.108.

¿Cuál es el área de metal que no se usa?

5. Una circunferencia de diámetro 12 unidades se ha inscrito en el cuadrado $EFGH$, como se muestra en la figura 3.109.

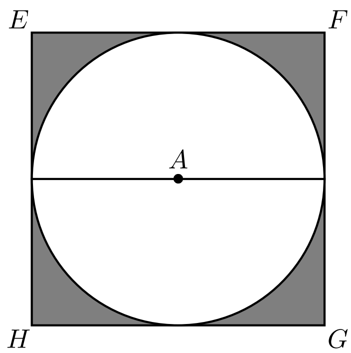


Figura 3.109.

¿Cuál es el área de la región sombreada?

6. En la circunferencia de la figura 3.110, $\overline{BD}$ es un diámetro, $OD = 15$ y $m\angle AOD = 20^{o}$

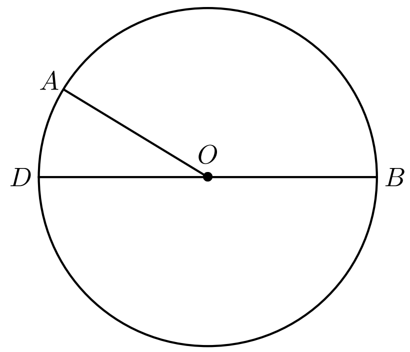


Figura 3.110.

Determinar el área del sector determinado por A, O y D.

7. Hallar el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 5.

8. Hallar el área y el perímetro de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio 6.

9. El radio de la circunferencia de centro O que muestra la figura 3.111, es 4. El triángulo $\triangle ABC$ es isósceles y $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia.

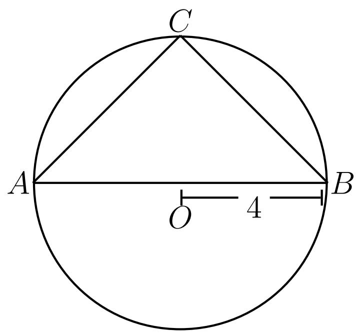


Figura 3.111.

   (a) Halle las medidas de los ángulos del $\triangle ABC$.

(b) Hallar el área del $\triangle ABC$.

(c) Hallar el perímetro del $\triangle ABC$.

10. Una ***bisectriz de un triángulo*** es una bisectriz de uno de sus ángulos.

    (a) Dibuje un triángulo y sus bisectrices.

    (b) Como puede observarse las tres bisectrices se intersectan en un mismo punto. Sea O el punto de intersección de las bisectrices. Verifique que O equidista de los tres lados del triángulo.

    (c) Tome la distancia r de O a uno de los lados del triángulo. Dibuje la circunferencia de centro O y radio r.

    Entonces, como puede observarse el punto de intersección de las bisectrices de un triángulo es el centro de la circunferencia inscrita en dicho triángulo. Es de anotar que el punto de intersección de las bisectrices es llamado el ***incentro*** del triángulo.

11. En una circunferencia de radio r, un ***radian*** (1 rad) es la medida de un ángulo central que subtiende un arco de longitud r. En la circunferencia de centro O y radio r, el ángulo AOB mide un radian. Cuando la medida de un ángulo está dada en radianes se acostumbra omitir el símbolo rad o el término radianes (figura 3.112).

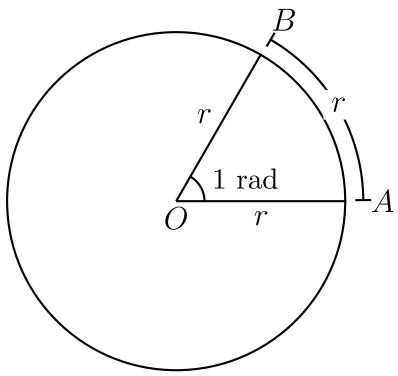


Figura 3.112.

Puesto que la longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$, alrededor de la circunferencia caben $2\pi = \frac{2\pi r}{r}$ radios. Entonces, un ángulo central de un giro completo mide 2π radianes. Por lo tanto $360° = 2\pi$ radianes.

(a) Halle la medida en radianes de cada uno de los siguientes ángulos.

i. $30°$.

ii. $45°$

iii. $60°$.

iv. $90°$.

v. $180°$.

vi. $210°$.

vii. $270°$.

(b) Cada uno de los siguientes ángulos está expresado en radianes. Halle la medida en grados de cada ángulo.

i. $\dfrac{4\pi}{3}$.

ii. $\dfrac{5\pi}{6}$.

iii. $\dfrac{3\pi}{4}$.

(c) Halle una fórmula para calcular la longitud de un arco en una circunferencia de radio r, cuando el ángulo central que lo subtiende está medido en radianes.

(d) Halle una fórmula para calcular el área de un sector circular en una circunferencia de radio r, cuando el ángulo central que lo subtiende está medido en radianes.

(e) Halle la longitud de un arco que subtiende un ángulo de $\dfrac{4\pi}{3}$ en una circunferencia de 6 cm de radio.

(f) Halle el área de un sector circular que subtiende un ángulo de $\dfrac{5\pi}{6}$ en una circunferencia de 8 cm de radio.

12. Una ***mediatriz de un segmento*** es una recta perpendicular al segmento en su punto medio.

(a) Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos. ¿Por qué?

(b) Si un punto equidista de los extremos de un segmento, entonces el punto está en la mediatriz del segmento. ¿Por qué?

Las **mediatrices de un triángulo** *corresponden a las mediatrices de sus lados.*

(c) Dibuje un triángulo y sus mediatrices.

(d) Como puede observarse las tres mediatrices se intersectan en un mismo punto. Sea O el punto de intersección de las mediatrices. Este punto se llama ***circuncentro***. Verifique que O equidista de los tres vértices del triángulo.

(e) Tome la distancia r de O a uno de los vértices del triángulo. Dibuje la circunferencia de centro O y radio r.

Entonces, como puede observarse, el punto de intersección de las mediatrices de un triángulo es el centro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.

Taller 7

1. La longitud de la diagonal de un cubo es $8\sqrt{3}$. Hallar el área de su superficie total y su volumen.

2. Analizar como cambia el volumen de una caja de dimensiones l, w y h cuando se realizan los siguientes cambios sobre ellas:

   (a) Una de las dimensiones se multiplica por cinco y las otras no se cambian.

   (b) Todas las dimensiones se cuadruplican.

   (c) Una de las dimensiones se incrementa en seis unidades y las otras no se cambian.

   (d) Las tres dimensiones se incrementan en una unidad.

3. Recuerde que el volumen V de un cilindro circular recto, de radio r y altura h es $V = \pi r^2 h$. Puesto que el área de la base del cilindro es $B = \pi r^2$, se deduce que el volumen del cilindro es $V = Bh$, (área de la base por la altura), figura 3.113.

   (a) Si un tanque cilíndrico tiene 100 pies de diámetro y 70 pies de alto, ¿cuál es el volumen del tanque?

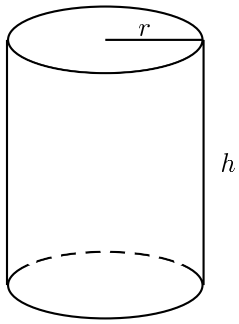


Figura 3.113.

(b) Compare los volúmenes de dos cilindros que tengan la misma altura, pero el radio del segundo sea la tercera parte del radio del primero.

(c) En la figura 3.114 se muestran un cilindro circular recto de radio 10 y un cubo de lado 10. Ambos sólidos tienen la misma altura. ¿Tienen ellos el mismo volumen? Si no lo tienen, ¿cuál de los dos tiene mayor volumen?

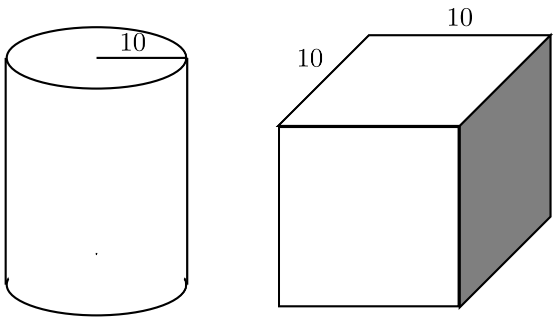


Figura 3.114.

4. Sabemos que el volumen V de un cono circular recto de radio r y altura h es $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, figura 3.115. Puesto que el área de la base del cono es $B = \pi r^2$, se deduce que el volumen del cono es $V = \dfrac{1}{3}Bh$.

   (a) Si un cono tiene un volumen de 40 cm^3 y su altura es 5 cm, ¿cuál es el radio de su base?

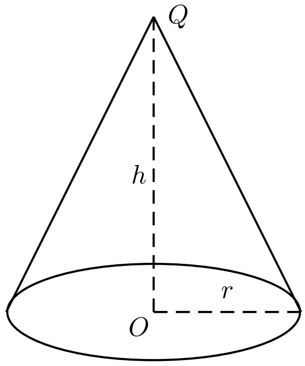


Figura 3.115.

(b) Si un cono y un cilindro tienen bases y alturas iguales y el volumen del cilindro es V, ¿cuál es el volumen del cono?

5. En el prisma que se muestra en la figura 3.116, se tiene que $BC = 4$, $AB = 12$ y $CG = 3$

   (a) Calcular las áreas de los cuadriláteros, $ABCD$, $AEHD$, $AEFB$.

   (b) Determinar la longitud de $\overline{BG}$ y la longitud de $\overline{BH}$.

   (c) Determinar el área del triángulo BGH.

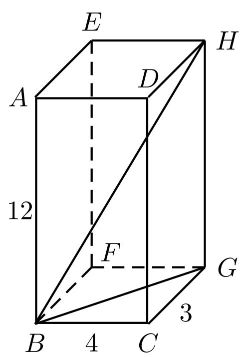


Figura 3.116.

6. Arquímedes (287 - 212 a. de J.C.) demostró que el volumen de una esfera es dos tercios del volumen del cilindro circular recto mas pequeño que puede contenerla. En este ejercicio se pide verificar

este resultado. Recuerde que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

(a) Nótese que el cilindro más pequeño que puede contener una esfera de radio r tiene de base un círculo de radio r y una altura igual a $2r$. Haga un dibujo que ilustre la esfera contenida en el cilindro.

(b) Halle el volumen del cilindro.

(c) Halle la razón entre el volumen de la esfera y el volumen del cilindro.

Capítulo 4

Funciones

4.1 El plano cartesiano

Como vimos en la sección 1.5, a cada número real se asigna un punto de una recta y recíprocamente, a cada punto de la recta se asigna un número real. También a una pareja ordenada (a, b) de números reales se hace corresponder un punto del plano y a cada punto del plano, una pareja ordenada, de la manera que veremos enseguida: se establece un ***sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas*** en un plano, dibujando dos rectas coordenadas perpendiculares, una horizontal y una vertical llamadas ***ejes coordenados***. Su punto de corte, llamado ***origen del sistema***, se nota 0. La recta horizontal es el ***eje X*** o eje de las x o abscisas y la vertical es el ***eje Y***, eje de las y u ordenadas. La mitad positiva del eje X se extiende hacia la derecha y la mitad positiva del eje Y se extiende hacia arriba. Los ejes dividen el plano en cuatro partes llamadas primero, segundo, tercero y cuarto ***cuadrante***, usualmente señalados con I, II, III y IV. Los puntos de los ejes no están en cuadrante alguno.

Dado un punto P del plano, una recta vertical que pase por P, corta el eje el X en un punto de coordenada a y una recta horizontal que pase por P, corta el eje Y en un punto de coordenada b. Al punto P se le asocia la pareja ordenada (a, b). a es llamada la ***coordenada x*** o ***abscisa de P*** y b ***la coordenada y*** u ***ordenada de P***. Se dice que P tiene coordenadas (a, b) y se escribe $P(a, b)$ (figura 4.1). Recíprocamente, para una pareja ordenada (a, b) de números reales cualesquiera, tenemos que la recta vertical que corta el eje X en el

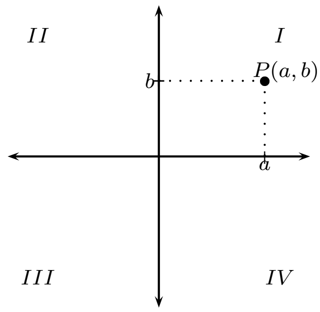


Figura 4.1.

punto de coordenada a y la recta horizontal que corta el eje Y en el punto de coordenada b, se intersectan en un punto P. Éste se asocia a la pareja. Las coordenadas de P son (a, b).

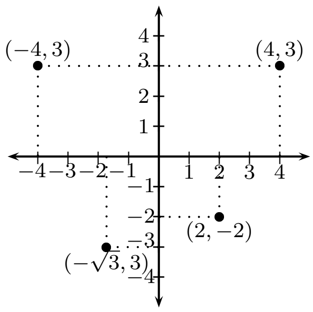


Figura 4.2.

El plano dotado de un sistema de coordenadas cartesianas es el ***plano cartesiano***.

Si disponemos de un sistema de coordenadas, mediante el uso del teorema de Pitágoras, podemos hallar la distancia entre dos puntos del plano: consideremos los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$. La distancia entre ellos es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos vértices están en los puntos $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $R(x_2, y_1)$, de acuerdo con la figura 4.3. El vértice R corresponde al ángulo recto.

La distancia entre P y Q es entonces

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Note que, por tratarse de cuadrados de números reales,

$$(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2 \quad \text{y} \quad (y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$$

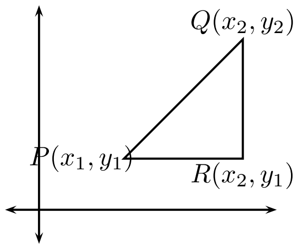


Figura 4.3.

así que $d(P, Q) = d(Q, P)$.

Otras ***propiedades de la distancia*** son las siguientes:

1. $d(P, Q) \geq 0$ y $d(P, Q) = 0$ si y solo si $P = Q$

2. Si R es cualquier otro punto del plano $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$. Esta es la ***desigualdad triangular***. La igualdad se presenta cuando los puntos están alineados (figura 4.4).

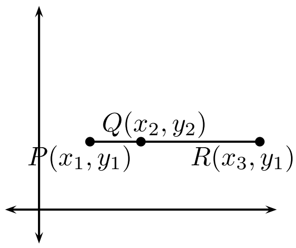


Figura 4.4.

Ejemplo 4.1.

1. (a) Si $P(-1, 3)$ y $Q(2, -1)$ entonces

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-1 - 3)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5. \end{aligned}$$

(b) Si $P\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ y $Q\left(-\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$, entonces

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \sqrt{\left(-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{3+2\sqrt{6}+2+2-2\sqrt{6}+3} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

2. Los puntos $P(6,-3)$, $Q(1,-5)$ y $R(-3,5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. En efecto,

$$\begin{aligned} d(P,Q)^2 &= (1-6)^2+(-5+3)^2 = 25+4 = 29 \\ d(Q,R)^2 &= (-3-1)^2+(5+5)^2 = 16+100 = 116 \\ d(P,R)^2 &= (-3-6)^2+(5+3)^2 = 81+64 = 145 \end{aligned}$$

así $d(P,R)^2 = d(P,Q)^2 + d(Q,R)^2$.

P, Q y R son los vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el segmento que une los puntos P y Q y el segmento que une los puntos Q y R y cuya hipotenusa es el segmento que une los puntos P y R.

3. Sean $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$. Buscamos el punto medio del segmento que une estos puntos. Supongamos que $x_1 < x_2$ (figura 4.5).

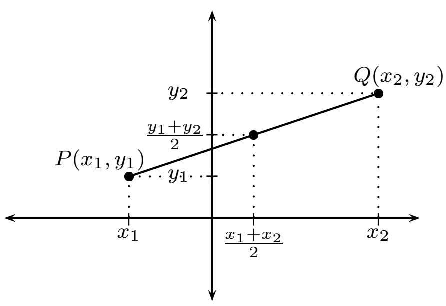


Figura 4.5.

Sobre el eje X, el punto medio entre los puntos de coordenadas x_1 y x_2 tiene coordenada dada así:

$$x_1 + \frac{x_2-x_1}{2} = \frac{x_1+x_2}{2}.$$

De manera de similar, sobre el eje Y, el punto medio entre los puntos de coordenadas y_1 y y_2 tiene coordenada $\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

En consecuencia, el punto medio entre P y Q es el punto de coordenadas $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

4.2 Funciones y sus gráficas

En la vida diaria oímos afirmaciones como las siguientes: el precio del transporte depende del precio de la gasolina; el consumo de energía en una persona que hace ejercicio, depende de la intensidad de éste; la temperatura de un lugar situado en el trópico depende de su altura sobre el nivel del mar; la oferta de un producto determina el precio del mismo; el número de individuos de una población varía con el tiempo.

Esa idea de que un dato depende, está en función o varía con otro aparece frecuentemente en física: por ejemplo, el espacio recorrido por un móvil en una unidad de tiempo depende de la velocidad y, naturalmente, aparece en matemáticas:

El área del círculo en función del radio, el volumen de un cono de base fija depende de la altura. Con respecto a estos dos últimos ejemplos, si A denota el área y r el radio del círculo, para indicar que A depende de r, se escribe $A(r)$. Si V denota el volumen del cono y h su altura, para indicar que V depende de h, se escribe $V(h)$. Específicamente se tiene

$$A(r) = \pi r^2 \quad \text{y} \quad V(h) = \frac{1}{3}Bh$$

donde B es el área de la base del cono. Así $A(3) = 9\pi, \quad V(2) = \dfrac{2}{3}B$.

Definición 4.2.1. *Sea D un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales. Definir una **función** f de D en $\mathbb{R}$ es asociar a cada número real x de D un único número real notado $f(x)$ (leído f de x). El conjunto D es el **dominio** de f. Se dice también que f está definida sobre D . El número real $f(x)$ es la **imagen de x** por f. El **rango de f** es el conjunto de la imágenes $f(x)$ con x en D, x es la **variable independiente** y si $y = f(x)$, y es la **variable dependiente**. Dos funciones f y g son **iguales** si sus dominios son iguales y $f(x) = g(x)$ para todo x del dominio.*

Ejemplo 4.2.

1. (a) Consideremos el siguiente conjunto: $\{(1,2),(2,4),(4,8)\}$. Si a la primera componente de cada una de las parejas asociamos como imagen la segunda componente, obtenemos una función cuyo dominio es $\{1,2,4\}$ y cuyo rango es $\{2,4,8\}$.

   (b) Si procedemos de la misma manera con el conjunto de parejas $\{(1,1),(1,2),(1,3)\}$ no obtenemos una función puesto que al único elemento del dominio estaríamos asociando más de una imagen.

2. Como en la primera parte del ejemplo anterior, el conjunto de parejas $\{(n,n+1) \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ define una función cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. La imagen de un entero n es el siguiente entero $n+1$, es decir, $s(n) = n+1$.

   El rango es también el conjunto $\mathbb{Z}$. $s(n) = n+1$ se llama el ***s*ucesor** de n.

3. Sea $D = \mathbb{R}$. Si a cada elemento $x \in D$ asociamos como imagen $g(x) = x^2$ obtenemos una función cuyo dominio es, según lo hemos escogido, $\mathbb{R}$. Su rango es el conjunto de los números reales no negativos. Una función como esta usualmente se expresa simplemente mediante la ecuación $y = x^2$.

4. Las ***funciones constantes*** son de la forma $f(x) = c$, para todo x, donde c es una constante. Las ***funciones lineales***: son de la forma $f(x) = mx + b$, con $m \neq 0$. Entre estas se halla la función identidad I, tal que $I(x) = x$. Las ***funciones cuadráticas***: son de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. De estas funciones nos ocuparemos más ampliamente en secciones posteriores.

5. Sean $D = \mathbb{R}$ y $f(x) = x^2 + 3x + 1$ para $x \in D$. El rango de f es

   $$R_f = \{f(x) \ : \ x \in D\} = \{y \in R \ : \ y = f(x), \text{ para algún } x \in D\}.$$

   Vamos a precisarlo. Si un número real y pertenece a ese conjunto, existe algún número real x tal que

   $$y = f(x) = x^2 + 3x + 1$$

es decir, tal que

$$x^2 + 3x = y - 1$$

Para hallar el valor de x, completamos el cuadrado en el miembro izquierdo de la igualdad y tenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y - 1 \\ \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4} + y \end{aligned}$$

De esta última igualdad tenemos que como $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$, entonces $\frac{5}{4} + y \geq 0$, es decir, $y \geq -\frac{5}{4}$. Esta es una condición necesaria para que y pertenezca a R_f. Así $R_f \subseteq \left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$.

De la misma última igualdad deducimos que

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{2} &= \pm\sqrt{\frac{5}{4} + y} \\ x &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5 + 4y}{4}} \\ &= -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5 + 4y}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{5 + 4y}}{2} \end{aligned}$$

Quiere decir que para cada número real $y \geq -\frac{5}{4}$, y es imagen de

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5 + 4y}}{2},$$

con lo cual $y \in R_f$.

En consecuencia, el rango de f es $\left[\frac{-5}{4}, \infty\right)$.

6. Estas son algunas funciones de dominio $D = [-1, 1]$

   (a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ para todo $x \in D$. Su rango es $[0, 1]$.

   (b) $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ para todo $x \in D$. Su rango es $[-1, 0]$.

   (c)
   $$h(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{para } x \text{ tal que } -1 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{para } x \text{ tal que } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

   Su rango es $[-1, 1]$.

7. Si una circunferencia tiene longitud L, el área del círculo limitado por ella, expresada como función de L es
   $$A(L) = \pi \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2$$

8. Para elaborar una caja de base cuadrada sin tapa, se emplea un cartón cuadrado que tiene 20 centímetros de lado. En cada una de las cuatro esquinas se corta un cuadrado cuyo lado tiene longitud x de acuerdo con la figura 4.6. Luego se unen los bordes adyacentes de longitud x determinados sobre el cartón. El volumen de la caja, expresado como función de x es $V(x) = x(20 - 2x)^2$.

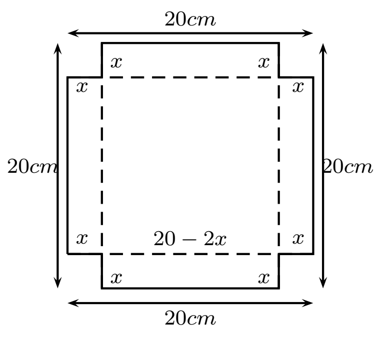


Figura 4.6.

Frecuentemente el dominio de una función f no está indicado. Se toma entonces como dominio el conjunto de los números reales para los cuales $f(x)$ representa un número real. A ese conjunto se le llama ***dominio natural*** de f.

Ejemplo 4.3.

1. El dominio natural de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ es

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} \;:\; f(x) \in \mathbb{R}\} &= \left\{x \in \mathbb{R} \;:\; \sqrt{x^2-1} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \;:\; x^2 - 1 \geq 0\right\}\end{aligned}$$

   Como $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$ o $x \leq -1$, ese conjunto es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

2. Si $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 1}$ el dominio natural de f es

$$\{x \in \mathbb{R} \;:\; f(x) \in \mathbb{R}\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;:\; x^3 - 1 \neq 0\right\}$$

   Puesto que 1 es el único valor real de x para el cual $x^3 - 1 = 0$, este conjunto es

$$\{x \in \mathbb{R} \;:\; x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}\,.$$

En adelante nos referiremos al dominio natural de una función como el dominio de la función, simplemente.

Dada una función f, hacer la ***evaluación*** de f en un valor (número) a de su dominio consiste en calcular $f\,(a)$, la imagen de a por f. Para ello basta reemplazar la variable independiente por a en la expresión de $f\,(x)$ y realizar las operaciones que quedan indicadas.

Ejemplo 4.4.

1. Si $f(x) = x^3 + x + 1$, al evaluar la función en 2, 0 y -1 obtenemos, respectivamente:

$$\begin{aligned}f(2) &= 2^3 + 2 + 1 = 11 \\ f(0) &= 0^3 + 0 + 1 = 1 \\ f(-1) &= (-1)^3 - 1 + 1 = -1\end{aligned}$$

2. Sea $f(x) = 2x^2 + 1$ al evaluar esta función en 2, 3 y 5 obtenemos

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \cdot 2^2 + 1 = 9 \\ f(3) &= 2 \cdot 3^2 + 1 = 19 \\ f(5) &= 2 \cdot 5^2 + 1 = 51 \end{aligned}$$

   Si comparamos estas imágenes vemos que $f(2)+f(3) \neq f(2+3)$. Para a y b números reales cualesquiera,

$$\begin{aligned} f(a) &= 2a^2 + 1 \\ f(b) &= 2b^2 + 1 \\ f(a+b) &= 2(a+b)^2 + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ab + b^2) + 1 \\ &= 2a^2 + 4ab + 2b^2 + 1. \end{aligned}$$

   Así, $f(a+b) = f(a) + f(b)$ solo si $4ab = 1$, caso en el cual $a \neq 0$, $b \neq 0$ y, $b = \frac{1}{4a}$, pero, en general, $f(a+b) \neq f(a) + f(b)$.

3. Sea $g(x) = 2x$. Para a y b números reales cualesquiera,

$$g(a+b) = 2(a+b) = 2a + 2b = g(a) + g(b)$$

4. Sea $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

$$\begin{aligned} f(4) &= 4^2 - 2 \cdot 4 + 2 = 10 \\ f(4+h) &= (4+h)^2 - 2(4+h) + 2 = h^2 + 6h + 10 \end{aligned}$$

   y si h representa un número real distinto de cero, entonces

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{h^2 + 6h}{h} = \frac{h(h+6)}{h} = h + 6$$

5. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y h representa un número real distinto de cero,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-a-h}{(a+h)a}}{h} = -\frac{1}{a^2 + ah}$$

6. Al evaluar en 3 la función $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, el volumen de una esfera como función del radio, obtenemos

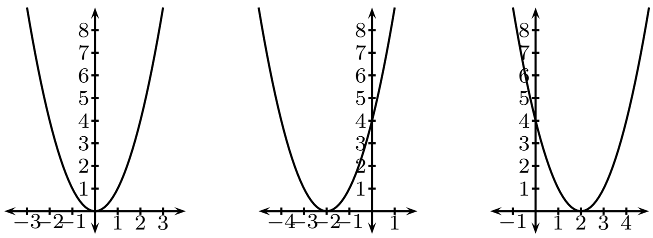
$$V(3) = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$$

Como en los ejemplos anteriores, se puede denotar una función con letras distintas de f y la variable independiente con letras distintas de x.

Definición 4.2.2. *La **representación gráfica**, o simplemente, la **gráfica** de una función f de dominio D, es el conjunto de los puntos (x, y) del plano cartesiano tales que $x \in D$ y $y = f(x)$. Se dice que la gráfica representa f o que la gráfica tiene ecuación cartesiana $y = f(x)$.*

Notemos que no toda curva dibujada en el plano es la gráfica de una función. En efecto, puesto que para cada real x del dominio existe solamente un real y tal que $y = f(x)$. Dos puntos diferentes cuyas abscisas coincidan no pueden pertenecer a la gráfica. Así, ninguna recta vertical puede intersectar ésta en más de un punto. Este es el ***criterio de la recta vertical***.

Un método para estudiar algunas funciones y para trazar sus gráficas es compararlas con otras conocidas o simples. Consideremos por ejemplo, $f(x) = x^2$ y comparemos las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(x-2)$, $y = f(x+2)$ (figura 4.7)

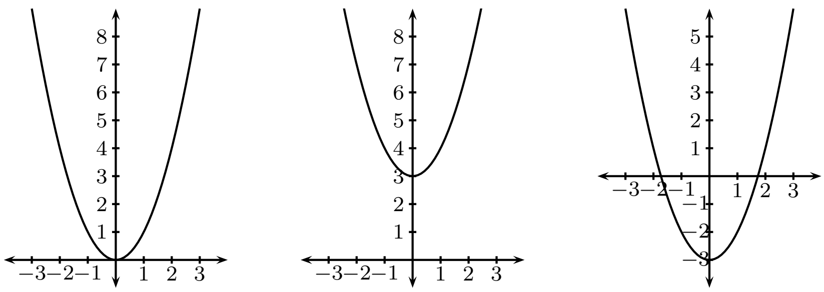


$y = x^2$ (1) $\quad$ $y = (x+2)^2$ (2) $\quad$ $y = (x-2)^2$ (3)

Figura 4.7.

Las curvas tienen la misma forma pero, al reemplazar x por $x-2$ en $f(x)$, la gráfica de la función que se obtiene es la de $y = f(x)$ desplazada dos unidades a la derecha. Al reemplazar x por $x+2$, la gráfica de la nueva función, es también la de $y = f(x)$, desplazada esta vez dos unidades hacia la izquierda. Este es otro hecho general: si $a > 0$, la gráfica de $y = f(x-a)$ se puede hallar por ***traslación horizontal*** de la gráfica de $y = f(x)$ un número a de unidades hacia la derecha y la de $y = f(x+a)$ se puede hallar por traslación horizontal de la gráfica de $y = f(x)$ un número a de unidades hacia la izquierda.

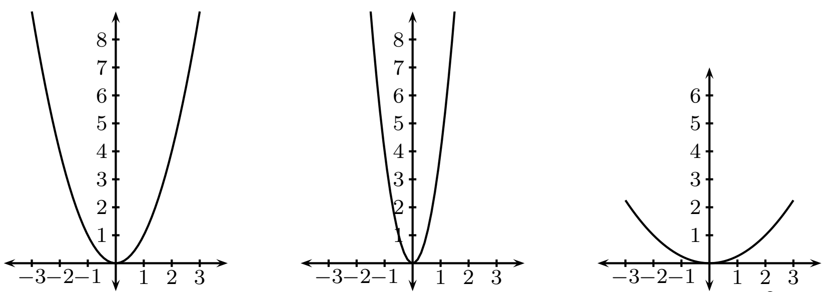
Desplazar la gráfica de una función verticalmente hacia arriba un número de b unidades corresponde a aumentar el valor de la segunda coordenada, y, en b unidades, donde $b > 0$. Un desplazamiento de b unidades hacia abajo, corresponde a disminuir la segunda coordenada en b unidades. Así, en el primer caso se tiene la gráfica de $y = f(x) + b$ y en el segundo caso, la de $y = f(x) - b$ (figura 4.8). A estas últimas igualdades se llega cuando se reemplaza y por $y - b$ o por $y + b$, según sea el caso, en la ecuación $y = f(x)$.



$y = x^2$ (1) $\quad$ $y = x^2 + 3$ $\quad$ $y = x^2 - 3$

Figura 4.8.

Adicionalmente, si en $y = f(x)$, se reemplaza x por ax, con $a > 0$, cada valor de la variable independiente x tendrá como imagen la de ax, con $ax > x$ si $a > 1$. Así la gráfica de $y = f(ax)$ se obtiene mediante una ***compresión horizontal*** de factor a de la gráfica de $f(x)$. Si $0 < a < 1$, al reemplazar x por ax en $f(x)$, la gráfica de la función que resulta, es decir de $y = f(ax)$, se obtiene de la de $f(x)$ mediante una ***expansión horizontal*** de factor a (figura 4.9).



$y = x^2$ (1) $\quad$ $y = (2x)^2$ (2) $\quad$ $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$ (3)

Figura 4.9.

Además, la gráfica de $y = af(x)$ se obtiene de la gráfica de $f(x)$ mediante una ***compresión vertical*** de factor a si $0 < a < 1$ y mediante una ***expansión vertical*** de factor a si $a > 1$.

Finalmente, la gráfica de $y = f(-x)$ se obtiene reflejando la gráfica de $y = f(x)$ en el eje Y y la de $y = -f(x)$, reflejándola en el eje X (figura 4.10).

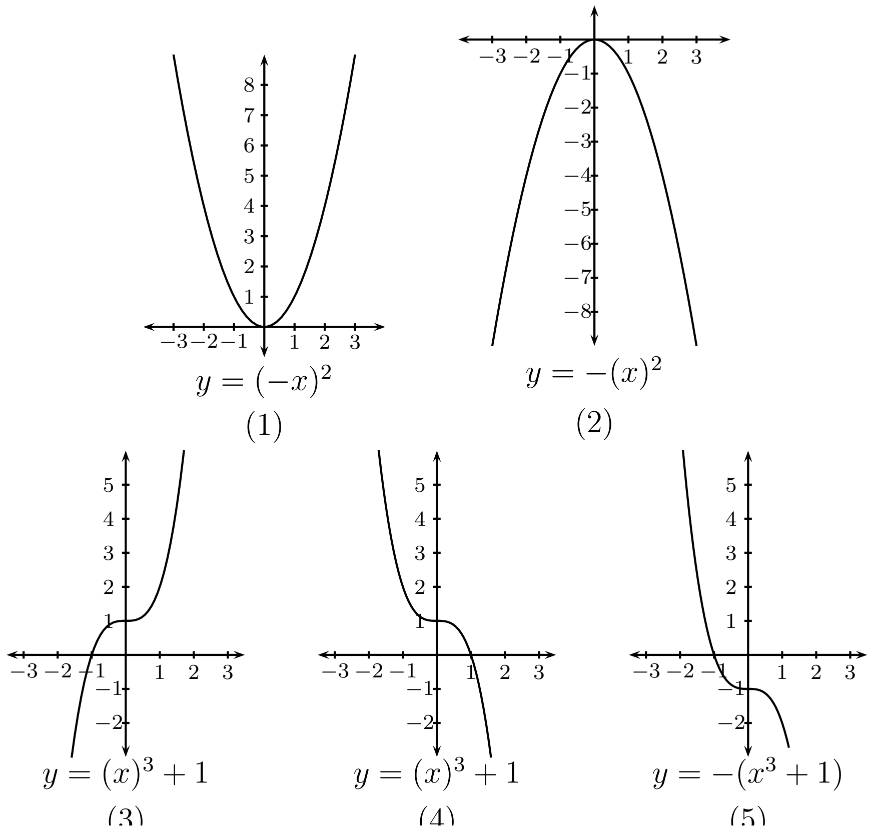


Figura 4.10.

Ejemplo 4.5. Sea

$$h(x) = 4x^2 - 8x + 3 = (2x - 2)^2 - 1 = (2(x - 1))^2 - 1$$

entonces la gráfica de $h(x)$ (figura 4.11), se puede obtener a partir de la gráfica de la función $i(x) = x^2$ por una secuencia de transformaciones cada una de las cuales da lugar a una curva cuya ecuación aparece frente a la transformación en esta lista:

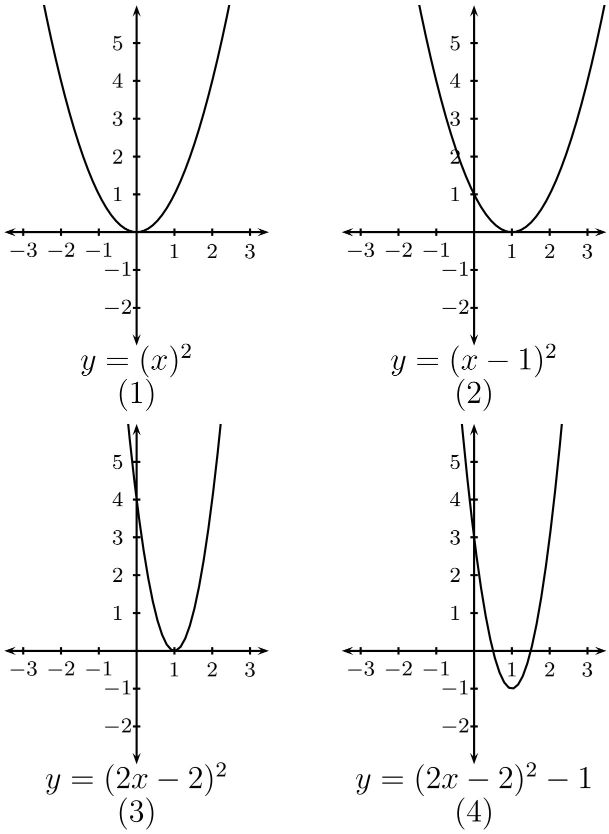


Figura 4.11.

- traslación horizontal hacia la derecha, de una unidad: $y = (x-1)^2$
- compresión horizontal de factor 2: $y = (2(x-1))^2$
- traslación vertical hacia abajo de una unidad: $y = (2x-2)^2 - 1$

4.3 Algunas familias de funciones

Estudiamos ahora tres familias de funciones: las funciones lineales, las funciones cuadráticas y las funciones exponenciales.

4.3.1 Funciones lineales y funciones cuadráticas

Funciones lineales

Consideremos el siguiente problema: una compañía fabrica lápices y sus costos fijos (como arriendo) ascienden a la suma de dos millones de pesos. Si el costo de fabricar un lápiz es de \$400 y el precio de venta es de \$600 y x representa un número de lápices, entonces el costo de producirlos es de $400x + 2000000$ pesos, mientras que los ingresos que produce su venta son de $600x$ pesos. Así, las ganancias de la fábrica están representadas por la función

$$g(x) = 600x - (400x + 2000000) = 200x - 2000000$$

Queremos además determinar cuántos lápices debe vender la fábrica para obtener una ganancia de 6 millones de pesos, esto es, buscamos x tal que

$$g(x) = 200x - 2000000 = 6000000$$

es decir, tal que

$$200x = 8000000$$

Entonces $x = 40000$.

Una función como g es una función lineal. En general:

Definición 4.3.1. *Una función f es una **función lineal** si la imagen de la variable independiente x se expresa en la forma $f(x) = mx + b$ para algunas constantes m y b.*

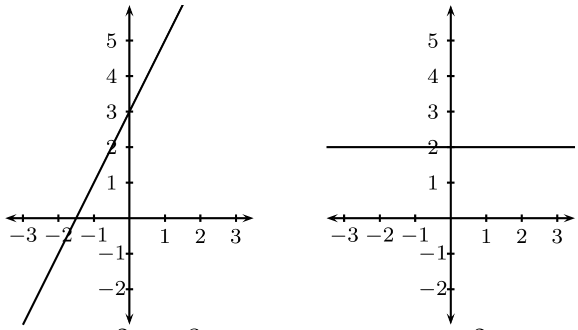
Si $m \neq 0$, la gráfica f es una *recta* que intersecta el eje X en el punto $\left(-\dfrac{b}{m}, 0\right)$ e intersecta el eje Y en el punto $(0, b)$, pues $f(-\dfrac{m}{b}) = 0$ y $f(0) = b$.

Si $m = 0$, es decir, si $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la gráfica está formada por los puntos (x, y) del plano cartesiano tales que $x \in \mathbb{R}$ y $y = f(x) = b$. La gráfica es entonces una recta horizontal.

Ejemplo 4.6.

1. La función $f(x) = 2x + 3$ tiene como gráfica una recta a la cual pertenecen lo puntos $(0, 3)$ y $(1, 5)$ puesto que $f(0) = 3$ y $f(1) = 5$ (figura 4.12-(1)).

2. La gráfica de la función $f(x) = 2$ está formada por los puntos (x, y) del plano cartesiano tales que $x \in \mathbb{R}$ y $y = 2$ (figura 4.12-(2)).



$y = 2x + 3$
(1)

$y = 2$
(2)

Figura 4.12.

La función $f(x) = mx + b$ está determinada por los números reales m y b. Este último se llama ***término independiente***. El coeficiente m de x es la ***pendiente*** de la recta y, si la gráfica de la función es una recta no vertical que pasa por los puntos $Q\,(x_1, y_1)$ y $P\,(x_2, y_2)$, donde $x_1 \neq x_2$, entonces $y_1 = mx_1 + b$ e $y_2 = mx_2 + b$, esto es $b = y_1 - mx_1 = y_2 - mx_2$, de donde

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

es decir, m es la razón entre el cambio de la coordenada y (es decir, $y_2 - y_1$) y el cambio de la coordenada x (es decir, $x_2 - x_1$). Para puntos cualesquiera que satisfagan la ecuación, esta razón tiene el mismo valor, es decir, no depende de los puntos considerados.

Si $m > 0$ la recta asciende (de izquierda a derecha, figura 4.13-(1)) y si $m < 0$ la recta desciende (de izquierda a derecha, figura 4.13-(2)).

A una recta vertical no se le define pendiente.

Dados una constante m y un punto $Q\,(x_1, y_1)$, los puntos $P\,(x, y)$, $x \neq x_1$ situados sobre la recta que contiene el punto Q y tiene pendiente m, están caracterizados por la condición

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

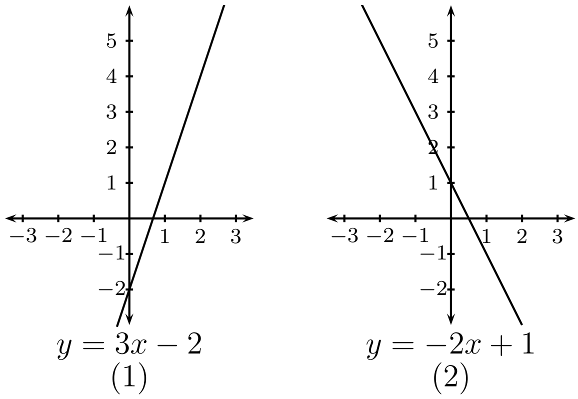


Figura 4.13.

Una ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ es la ***forma punto-pendiente*** de esa recta.

Ejemplo 4.7. La recta que pasa por los puntos $(4, -3)$ y $(6, 8)$ tiene pendiente

$$m = \frac{8 - (-3)}{6 - 4} = \frac{11}{2}$$

y dado que pasa por el punto $(6, 8)$, una ecuación punto-pendiente de esa recta es

$$y - 8 = \frac{11}{2}(x - 6)$$

Como la recta pasa por el punto $(4, -3)$, también

$$y + 3 = \frac{11}{2}(x - 4)$$

es ecuación de esa recta.

Una recta no vertical corta al eje Y. Si $(0, b)$ es el punto de corte y m es la pendiente, una ecuación de la recta es

$$y - b = m(x - 0)$$

esto es

$$y = mx + b$$

Esta es la ***forma pendiente-intersección*** de la ecuación de la recta.

Ejemplo 4.8.

1. La pendiente de la recta que tiene ecuación $y = -4x + 2$ es -4 (figura 4.14-(1)). La recta intersecta al eje Y en el punto $(0, 2)$.

2. La ecuación de una recta vertical es $x = a$ donde a es la abscisa de cada uno de los puntos de la recta (figura 4.14-(2)). Una recta vertical no representa una función.

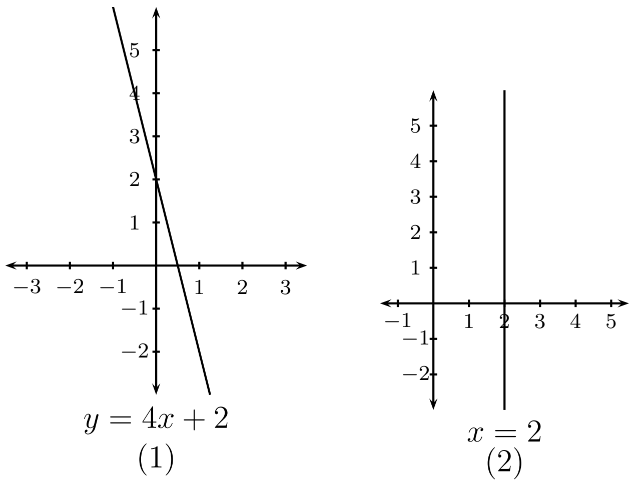


Figura 4.14.

Cualquiera sea la forma de la ecuación de la recta, es equivalente a una ecuación $Ax + By + C = 0$ donde A, B y C son constantes y A y B no son simultáneamente iguales a 0. Recíprocamente, la gráfica de una ecuación de ésta forma es una recta. En efecto, si $B = 0$ y $A \neq 0$, la ecuación es $x = \dfrac{-C}{A}$ cuya gráfica es una recta vertical. Si $B \neq 0$, se puede llevar la ecuación a la forma $y = \dfrac{-A}{B}x - \dfrac{C}{B}$ cuya gráfica es una recta no vertical. Si, además, $A \neq 0$ la recta tampoco es horizontal.

La ecuación lineal $Ax + By + C = 0$, A y B no simultáneamente nulos, es la ***ecuación general de la recta***.

Cuando dos rectas se hallan en el plano, se puede expresar su posición relativa mediante sus pendientes. Así tenemos que dos rectas son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente. En relación con la perpendicularidad, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.3.1. *Dos rectas de pendientes* m_1*y* m_2 *son* ***perpendiculares*** *si y solo si* $m_1m_2 = -1$. *Cualquier recta vertical es perpendicular a cualquier recta horizontal.*

Demostración. Consideremos dos rectas que se cortan en un punto. Como cada una de ellas es paralela a una recta que pasa por el origen O, basta considerar el caso en que el punto de corte coincide con O (figura 4.15).

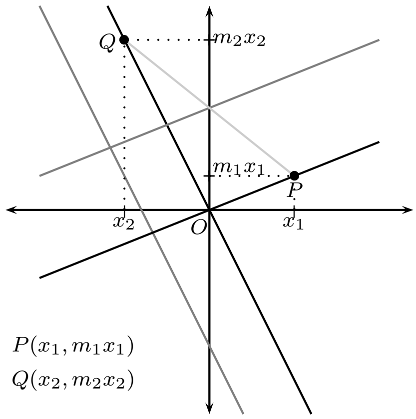


Figura 4.15.

Sean $y = m_1x$ y $y = m_2x$ las ecuaciones de las rectas que se cortan en O. Sean además x_1 y x_2 reales diferentes de 0. El punto $P\,(x_1, m_1x_1)$ pertenece a la primera recta y el punto $Q\,(x_2, m_2x_2)$ pertenece a la segunda. El ángulo QOP (figura 4.15), es recto si y solo si

$$(d\,(O,P))^2 + (d\,(O,Q))^2 = (d\,(P,Q))^2$$

esto es

$$x_1^2 + (m_1x_1)^2 + x_2^2 + (m_2x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (m_2x_2 - m_1x_1)^2$$

lo cual equivale a

$$0 = -2x_1x_2 - 2m_1x_1m_2x_2 = -2x_1x_2\,(1 + m_1m_2)\,.$$

Puesto que $x_1x_2 \neq 0$, esto equivale a $-1 = m_1m_2$. □

Ejemplo 4.9.

1. La recta que pasa por los puntos $(1,5)$ y $(-2,3)$ tiene pendiente
$$m = \frac{5-3}{1-(-2)} = \frac{2}{3}$$
Su ecuación es
$$y - 5 = \frac{2}{3}(x-1)$$
esto es
$$\frac{2}{3}x - y = \frac{-13}{3}.$$

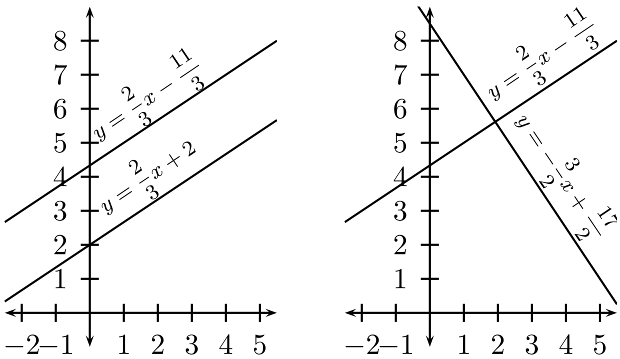


Figura 4.16.

La recta paralela a ella que pasa por el punto $(3,4)$ (figura 4.16-(1)) tiene ecuación
$$y - 4 = \frac{2}{3}(x-3),$$
esto es,
$$\frac{2}{3}x - y = -2$$
y la recta que es perpendicular a las anteriores y pasa por el punto $(3,4)$ (figura 4.16-(2)) tiene pendiente $m = -\frac{3}{2}$ y ecuación
$$y - 4 = -\frac{3}{2}(x-3),$$
es decir,
$$\frac{3}{2}x + y = \frac{17}{2}$$

2. Sean $P\left(x_{1,}y_1\right)$ y $Q\left(x_{2;}y_2\right)$. La ***mediatriz del segmento*** PQ es la recta perpendicular a él, que pasa por su punto medio. Veamos su ecuación.

   Supongamos $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$. La pendiente del segmento es $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y su punto medio es $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$, entonces la ecuación de la mediatriz es

$$y - \frac{y_2 + y_1}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

Funciones cuadráticas

Recordemos que el área de un cuadrado de lado l está dada por

$$A_1\left(l\right) = l^2$$

y el área de un círculo de radio r está dada por

$$A_2\left(r\right) = \pi r^2.$$

En la expresión de cada una de estas áreas, la variable independiente (l o r) aparece elevada al cuadrado. Es también el caso, por ejemplo, de la expresión de la altura h que alcanza una pelota lanzada hacia arriba: si v_0 es la velocidad inicial, t segundos después del lanzamiento la altura es

$$h\left(t\right) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t,$$

donde g es la aceleración debida a la fuerza de gravedad.

Definición 4.3.2. *Una función f es una* ***función cuadrática*** *si la imagen de la* ***variable independiente*** *x se expresa en la forma*

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

para algunas constantes a, b y c con $a \neq 0$.

Ejemplo 4.10.

1. Si $D = \mathbb{R}$ y $g(x) = x^2$ para todo $x \in D$, la gráfica de g es una parábola que pasa por el punto $(0, 0)$ y que abre hacia arriba (figura 4.17-(1)).

2. La gráfica de $f(x) = x^2 + 3x + 1$ es una parábola (figura 4.17-(2)).

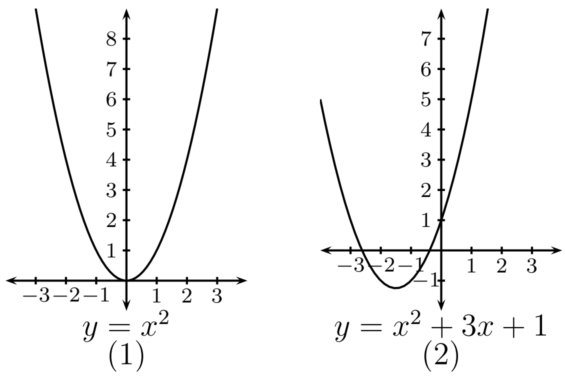


Figura 4.17.

La gráfica de toda función cuadrática $f(x) = ax^2+bx+c$, con $a \neq 0$, es una parábola que se abre hacia arriba si $a > 0$ o se abre hacia abajo si $a < 0$. El vértice tiene abscisa $-\dfrac{b}{2a}$.

3. La gráfica de la ecuación $y = -x^2 + 1$ es una parábola que abre hacia abajo (figura 4.18). El vértice tiene abscisa $\dfrac{b}{2a} = 0$ y ordenada $f(0) = 1$. El punto $(0, 1)$ es el punto de corte de la gráfica y el eje Y. Los puntos de corte con el eje X tienen ordenada 0 y su abscisa verifica entonces la ecuación $0 = -x^2 + 1$. En consecuencia, $x = \pm 1$ y los puntos son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

4. La aceleración debida a la gravedad es de $g = 32.2$,pies/s, una pelota lanzada a una velocidad v_0 alcanza la máxima altura en el vértice, es decir en $t = \dfrac{v_0}{g}$.

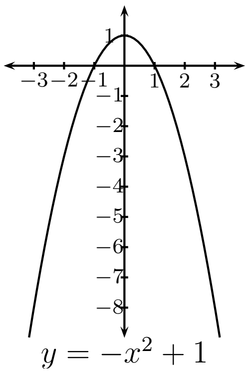


Figura 4.18.

4.3.2 Funciones exponenciales y logarítmicas

Consideremos el siguiente problema:

Una población P_0 de bacterias presente en un instante $t = 0$ se duplica cada hora. Transcurrida la primera, la segunda y la tercera horas, las poblaciones son respectivamente de $2P_0$, $2(2P_0)$, $2(2^2P_0)$, $2(2^3P_0)$. Más general, transcurridas k horas la población es 2^kP_0.

Ahora bien, si P es la población presente en un instante t y la población presente media hora después se expresa en la forma rP, entonces en una hora la población es, de una parte $r \cdot rP = r^2P$ y, de otra parte es $2P$. Así $r^2P = 2P$, de donde $r = 2^{\frac{1}{2}}$.

En general, si p y q son enteros positivos entonces $2^{\frac{p}{q}}$ es el factor por el que queda multiplicada la población, transcurridos p periodos de $\dfrac{1}{q}$ horas.

Como el tiempo es continuo y no se restringe solamente a valores racionales, para un número real $t > 0$, 2^t es el factor por el que se multiplica la población transcurrido un tiempo t.

El significado que tiene 2^t cuando t es un número irracional es el valor al cual se acerca $2^{\frac{p}{q}}$ para sucesivas aproximaciones decimales racionales de t. Así, por ejemplo, $1.4 = \frac{14}{10}$; $1.41 = \frac{141}{100}$; $1.414 = \frac{1414}{1000}$; $1.4142 = \frac{14142}{10000}$; $1.41421 = \frac{141421}{100000}$; $\ldots$, son aproximaciones decimales racionales de $\sqrt{2}$ entonces $2^{\sqrt{2}}$ es el número real al cual tiende la sucesión de las potencias $2^{\frac{14}{10}}$, $2^{\frac{141}{100}}$, $2^{\frac{1414}{1000}}$, $2^{\frac{14142}{10000}}$, $2^{\frac{141421}{100000}}$, $\ldots$

Anotamos en primer lugar que las ***leyes de los exponentes*** son válidas en este caso, es decir, cualesquiera sean a y b números reales positivos, x e y números reales (racionales o irracionales) tenemos:

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $a^{-x} = (a^{-1})^x = (a^x)^{-1} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^0 = 1$
- $a^x > 0$ para todo x.

La ***función exponencial*** de base a se define asociando a cada número real x un número real a^x, $f(x) = a^x$, donde x es una variable que recorre el conjunto $\mathbb{R}$.

Con el objeto de analizar otras propiedades distinguimos dos casos: $a > 1$ y $a < 1$.

Si $a > 1$ y $z = \dfrac{p}{q}$ un racional positivo entonces $a^z = a^{\frac{p}{q}} > 1$. Supongamos que x e y son números racionales tales que $x < y$. Como $0 < y - x$ entonces $1 < a^{y-x}$ y, en consecuencia, $a^x = a^x \cdot 1 < a^x a^{y-x} = a^y$. Esto es, a mayor valor del exponente corresponde un mayor valor de la función, en el caso de los exponentes racionales. Como para los irracionales la función se define a partir de aproximaciones decimales racionales, en general, a mayor valor del exponente corresponde un mayor valor de la función. Decimos que la ***función es creciente***.

Ahora, si $0 < a < 1$, sea $b = \dfrac{1}{a}$. Como $1 < b$, entonces la función $g(x) = b^x$ se comporta como en el caso anterior, es decir, si x e y son números reales tales que $x < y$ entonces $b^x < b^y$ esto es $\left(\frac{1}{a}\right)^x < \left(\frac{1}{a}\right)^y$ o, de otra manera, $\frac{1}{a^x} < \frac{1}{a^y}$ lo cual implica, $a^y < a^x$. Así, en este caso, a mayor valor del exponente corresponde un menor valor de la función. Decimos que la ***función es decreciente***.

En la figura 4.19, aparecen las gráficas de funciones exponenciales de base a para diferentes valores de a.

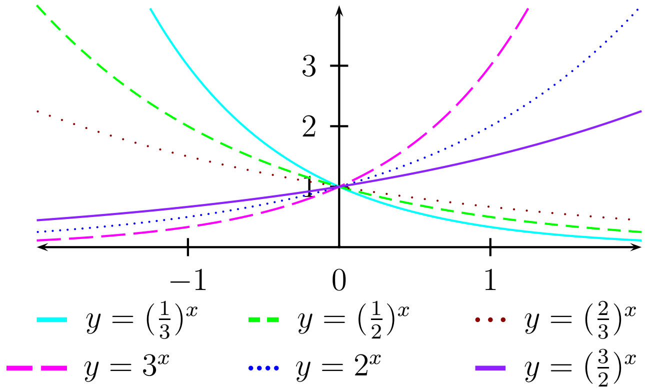


Figura 4.19.

Notemos que si $a > 1$ y x e y son números reales tales que $x \neq y$ entonces $x < y$ o $y < x$. Si $x < y$ entonces $a^x < a^y$, en particular $a^x \neq a^y$. Si $y < x$, $a^y < a^x$ y también $a^x \neq a^y$. El caso $0 < a < 1$ es similar, es decir, si $x \neq y$ entonces $a^x \neq a^y$. Esta propiedad de las funciones exponenciales frecuentemente se usa en su forma equivalente: si $a^x = a^y$ entonces $x = y$.

Si y es un número positivo y $y = a^x$ para algún número real x entonces se dice que x es el ***logaritmo en base a de y***. Se nota $\log_a y$.

Así, tenemos:

- $y = a^x \Longleftrightarrow \log_a y = x$
- $\log_a (a^x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$
- $a^{\log_a y} = y$, para todo $y \in \mathbb{R}^+$

Las siguientes son ***propiedades de los logaritmos***:

Si a, b, x y y son números reales positivos entonces:

1. $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$.
2. $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$.
3. $\log_a x^y = y \log_a x$.
4. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

La relación existente entre los logaritmos y las exponenciales de base a permite demostrar estas propiedades de la siguiente manera:

Sean $r = \log_a x$, $s = \log_a y$, $t = \log_a xy$, $u = \log_a \left(\dfrac{x}{y}\right)$ y $v = \log_a x^y$.

1. $a^{r+s} = a^r a^s = xy$ y $a^t = xy$.

   Así, $a^{r+s} = a^t$ entonces $r+s = t$, es decir $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$.

2. $a^{r-s} = a^r a^{-s} = \dfrac{a^r}{a^s} = \dfrac{x}{y}$ y $a^u = \dfrac{x}{y}$.

   Así, $a^{r-s} = a^u$ de donde $r - s = u$, es decir, $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$.

3. $a^v = x^y$ y $a^{yr} = (a^r)^y = x^y$.

   Así, $a^v = a^{yr}$ entonces $v = yr$, es decir, $\log_a x^y = y \log_a x$.

Notación: cuando $a = 10$, $\log_a x$ se nota simplemente $\log x$.

Ejemplo 4.11.

1. $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$.

2. $\log_{\frac{1}{2}} (4) = \log_{\frac{1}{2}} (2^2) = \log_{\frac{1}{2}} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \right]^2 \right\} = \log_{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \right] = -2$.

3. Supongamos que $4^{2x} = 64$, entonces $\log_4 4^{2x} = \log_4 64$, esto es $2x = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$. En consecuencia, $x = \dfrac{3}{2}$.

4. Si $\log_6 (2x + 2) = 3$ entonces $6^{\log_6 (2x+2)} = 6^3$ es decir, $2x+2 = 216$ de donde $x = 107$.

5. Si $\log (x - 2) = 1 - \log (x + 1)$ entonces

$$10^{\log(x-2)} = 10^{1-\log(x+1)} = \frac{10}{10^{\log(x+1)}}$$

   esto es $x - 2 = \dfrac{10}{x+1}$ de donde $x^2 - x - 12 = 0$.

Esta ecuación tiene dos soluciones: $x = 4$ y $x = -3$. Pero para $x = -3$, $\log(x-2)$ y $\log(x+1)$ no están definidas. Así, la única solución es $x = 4$.

6. Es posible expresar la suma de logaritmos

$$7\log_a(x+1) + \frac{1}{2}\log_a(3x+6) - \log_a\left(x^2+3x+2\right)$$

como un sólo logaritmo. En efecto, la expresión dada es igual a

$$\log_a(x+1)^7 + \log_a\sqrt{3x+6} - \log_a\left(x^2+3x+2\right)$$

y a su vez esta suma es igual a

$$\log_a\frac{(x+1)^7\sqrt{3x+6}}{x^2+3x+2} = \log_a\frac{(x+1)^6\sqrt{3x+6}}{x+2}$$

La ***función logaritmo*** en base a, notada $\log_a$, se define asociando a cada número real positivo x el número real $\log_a x$.

Así como deducimos las propiedades de los logaritmos a partir de las propiedades de las exponenciales, podemos decir que si $a > 1$, a un mayor valor de x corresponde un mayor valor de $\log_a x$ y si $0 < a < 1$, a un mayor valor de x corresponde un menor valor de $\log_a x$, es decir que si $a > 1$, la función $\log_a$ es creciente y si $0 < a < 1$, la función es decreciente.

De otra parte, note que si una pareja (x, y) pertenece a la gráfica de la función exponencial de base a es porque $y = a^x$, es decir, $\log_a y = x$, entonces la pareja (y, x) pertenece a la gráfica de la función $\log_a$. De igual manera, si una pareja (u, v) pertenece a la gráfica de la función $\log_a$, entonces la pareja (v, u) pertenece a la gráfica de la función exponencial de base a. Así, la gráfica de la función $\log_a$ se puede obtener reflejando la gráfica de la función exponencial de base a en la recta de ecuación $y = x$ (figuras 4.20-(1) y 4.20-(2)).

En la figura 4.21 aparecen las gráficas de las funciones $\log_a$ para los valores de a tomados como base de las funciones exponenciales trazadas en la figura 4.19.

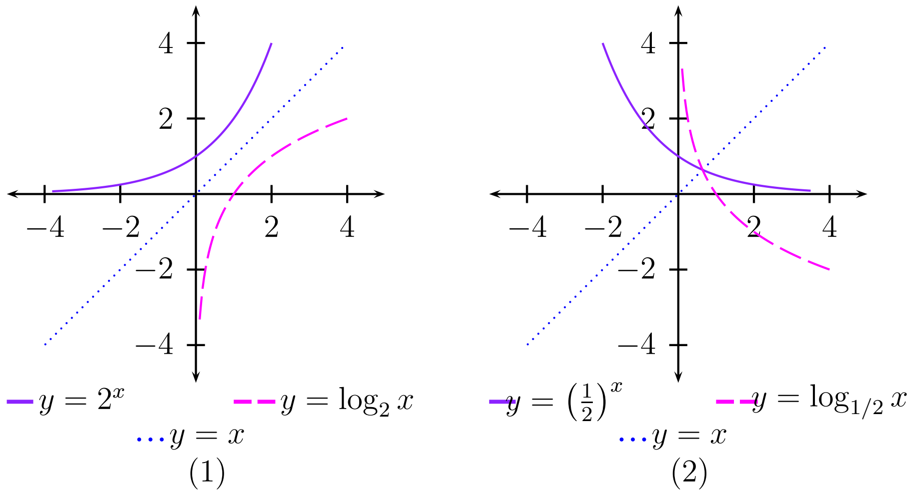


Figura 4.20.

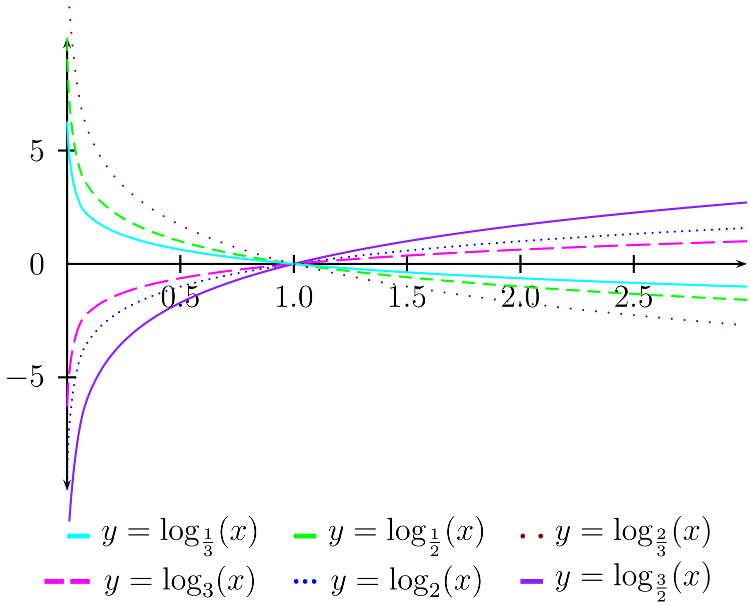


Figura 4.21.

Las funciones exponencial natural y logaritmo natural

Consideremos ahora esta situación:

Mensualmente se invierte un capital. Si el capital inicial es C, la tasa de interés i es anual y se expresa en forma decimal, entonces la cantidad acumulada al mes, capital mas interés, es $C\left(1+\frac{i}{12}\right)$. Si esta cantidad acumulada se invierte a su vez durante un mes en las mismas condiciones, entonces al final de ese periodo, el capital acumulado será $C\left(1+\frac{i}{12}\right)^2$. Si nuevamente se reinvierte el capital acumulado, al cabo de k meses, la cantidad acumulada es $C\left(1+\frac{i}{12}\right)^k$.

En general, si n son los períodos de inversión durante el año y el capital se invierte durante t años, el capital acumulado será $A(t) = C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$. Esta es la fórmula de ***interés compuesto*** y es un ejemplo ilustrativo del crecimiento exponencial.

Supongamos que el número n de periodos se incrementa cada vez más. Para algunos enteros n, aproximando a la octava cifra decimal, el comportamiento de la expresión $\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$ tomando $i = 1$ está dado en la siguiente tabla

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2	1000000	2.71828047
10	2.59374246	10000000	2.71828169
100	2.70481383	100000000	2.71828181
1000	2.71692393	1000000000	2.71828183

El valor de la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiende a un número irracional notado e, que aparece en matemáticas y en física y que, con 14 cifras decimales es $e \approx 2.71828182849045$. En los cálculos (aproximados), la aproximación racional más usada de e es $2,7183$ (así como la de π es 3,1416; la de $\sqrt{2}$ es 1,4142; y la de $\sqrt{3}$ es 1,7320).

La ***función exponencial natural*** es la función exponencial de base e, $f(x) = e^x$.

La función exponencial natural, como toda exponencial, sólo toma valores positivos y, puesto que $e > 1$, es una función creciente (figura 4.22-(1)). La función e^{-x} es decreciente (figura 4.22-(2)).

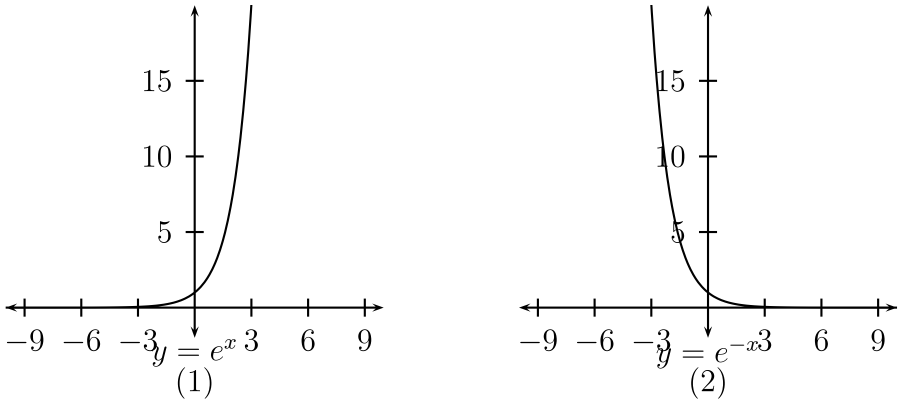


Figura 4.22.

Si y es un número real que se puede escribir de la forma $y = e^x$, entonces el exponente x se llama el *logaritmo natural* de y y se nota $\ln y$.

En este caso, las relaciones entre exponenciales y logaritmos establecidas anteriormente, toman la forma:

- $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$
- $\ln(e^x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$
- $e^{\ln y} = y$, para todo $y \in \mathbb{R}^+$

También de las observaciones generales tenemos que la gráfica de la función $g(x) = \ln x$ se puede obtener reflejando la gráfica de la función $f(x) = e^x$ en la recta de ecuación $y = x$. En la figura 4.23 se muestra las gráficas de las dos funciones y de la recta.

La función logaritmo natural es creciente y satisface las siguientes propiedades:

1. $\ln x + \ln y = \ln xy$
2. $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$
3. $\ln x^y = y \ln x$
4. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

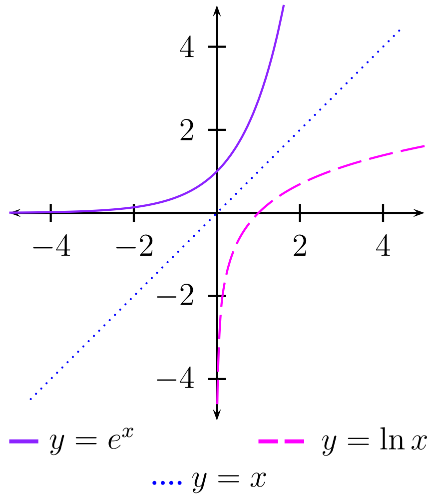


Figura 4.23.

Ejemplo 4.12.

1. Usando logaritmo natural, la igualdad $e^{2t} = 4+x$ se puede expresar en la forma $2t = \ln(4+x)$ y la igualdad $e^4 = a$ en la forma $4 = \ln a$.
2. $\ln \sqrt[3]{1+e} - \ln \sqrt[3]{e+e^2} = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{1+e}{e+e^2}}\right) = \ln e^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\ln e = -\frac{1}{3}$

4.4 Operaciones entre funciones

Así como los números reales se suman, restan, multiplican y dividen, también las funciones se operan entre sí.

Definición 4.4.1. *Una* ***operación entre funciones*** *es una regla que asocia a dos de ellas una tercera función, precisando cual es la imagen de un número real x por esta última.*

4.4.1 Álgebra de funciones

Al operar directamente las imágenes (que representan números reales) es posible obtener nuevas funciones.

Definición 4.4.2. *Dadas las funciones f y g se definen*

$f+g$,	***la adición de*** f ***y*** g:	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
$f-g$,	***la resta de*** f ***y*** g:	$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$
$f\cdot g$,	***la multiplicación de*** f ***y*** g:	$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$
$\frac{f}{g}$,	***el cociente de*** f ***por*** g *si* $g\neq 0$:	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Para determinar sus dominio notemos que, al definir la imagen de x, deben estar definidas tanto $f(x)$ como $g(x)$ y que en el caso del cociente, $g(x)$ debe ser distinto de 0. Así, si D_h denota el dominio de la función h entonces

$$\begin{aligned} D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f\cdot g} &= D_f \cap D_g \\ D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g \setminus \{x \ : \ g(x)=0\} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.13.

1. Sean $f(x) = 4-2x$ y $g(x) = 16-x^2$

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= (4-2x) + \left(16-x^2\right) = 20-2x-x^2 \\ (f-g)(x) &= (4-2x) - \left(16-x^2\right) = -12-2x+x^2 \\ (f\cdot g)(x) &= (4-2x)\left(16-x^2\right) = 64-32x-4x^2+2x^3 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{4-2x}{16-x^2} \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f\cdot g} &= \mathbb{R} \quad \text{y} \\ D_{\frac{f}{g}} &= \mathbb{R} \setminus \left\{x\in\mathbb{R} \ : \ 16-x^2=0\right\} = \mathbb{R}\setminus\{-4,4\} \end{aligned}$$

En la figura 4.24, se muestran las gráficas de f, g y las funciones que acabamos de obtener.

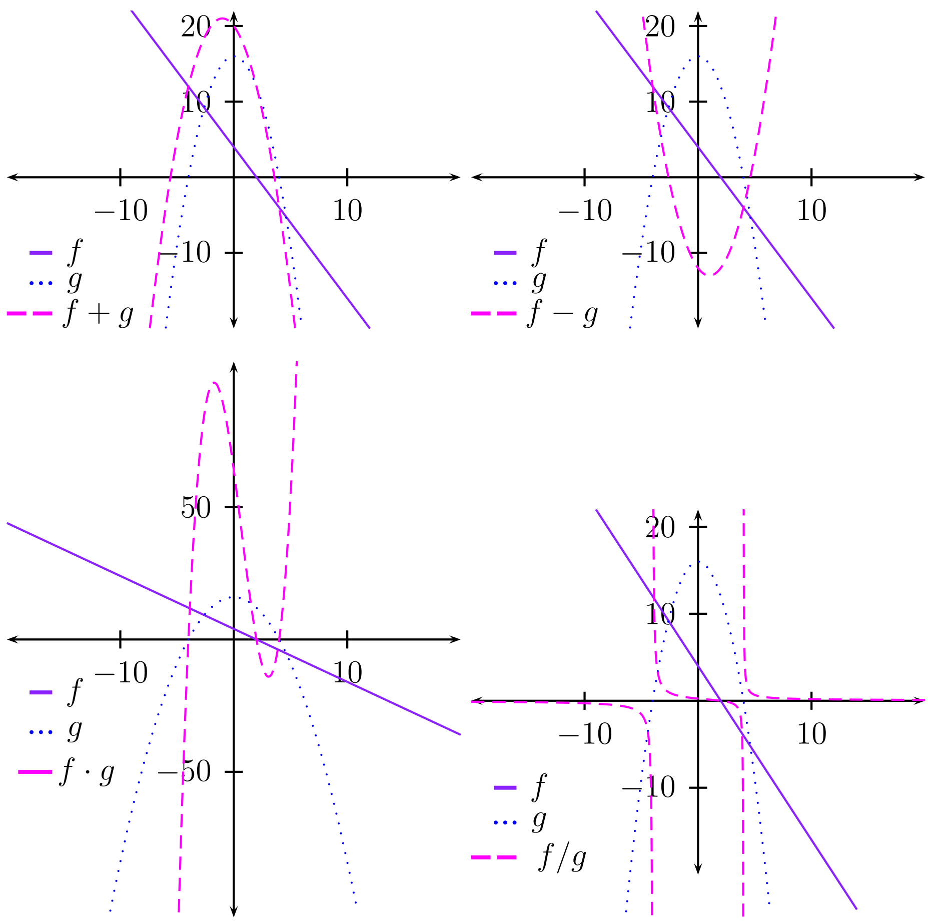


Figura 4.24.

2. Como caso particular del producto tenemos $(f \cdot f)(x) = f^2(x) = (f(x))^2$ y más generalmente $f^n(x) = (f(x))^n$. Así, para $f(x) = 4 - 2x$ tenemos:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (4-2x)^2 = 16 - 16x + 4x^2 \qquad \text{y} \\ f^4(x) &= (4-2x)^4 = \left(16 - 16x + 4x^2\right)\left(16 - 16x + 4x^2\right) \\ &= 256 - 512x + 384x^2 - 128x^3 + 16x^4 \end{aligned}$$

En la figura 4.25, se pueden observar las gráficas de f, f^2 y f^4.

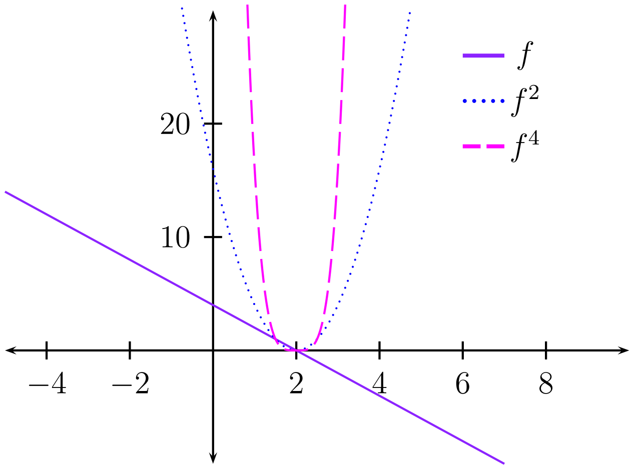


Figura 4.25.

3. Sean $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$

$$(f+g)(x) = e^x + e^{-x} = e^x + \frac{1}{e^x} = \frac{e^{2x}+1}{e^x}$$
$$(f-g)(x) = e^x - e^{-x} = \frac{e^{2x}-1}{e^x}$$
$$(f \cdot g)(x) = e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^x e^x = (e^x)^2 = e^{2x}$$

Ahora bien, $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$ y, en consecuencia $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = \mathbb{R}$ y $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \ : \ e^x = 0\}$. Como $e^x > 0$ para todo x entonces $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}$.

En la figura 4.26 se pueden observar las gráficas de f, g y de las funciones que acabamos de obtener.

Las operaciones definidas entre funciones tienen propiedades heredadas de las propiedades que tienen las operaciones de adición y multiplicación de números reales. Así tenemos:

1. La asociatividad de la suma, pues, dadas funciones f, g y h, tenemos que
$$(f+g)+h = f+(g+h)$$

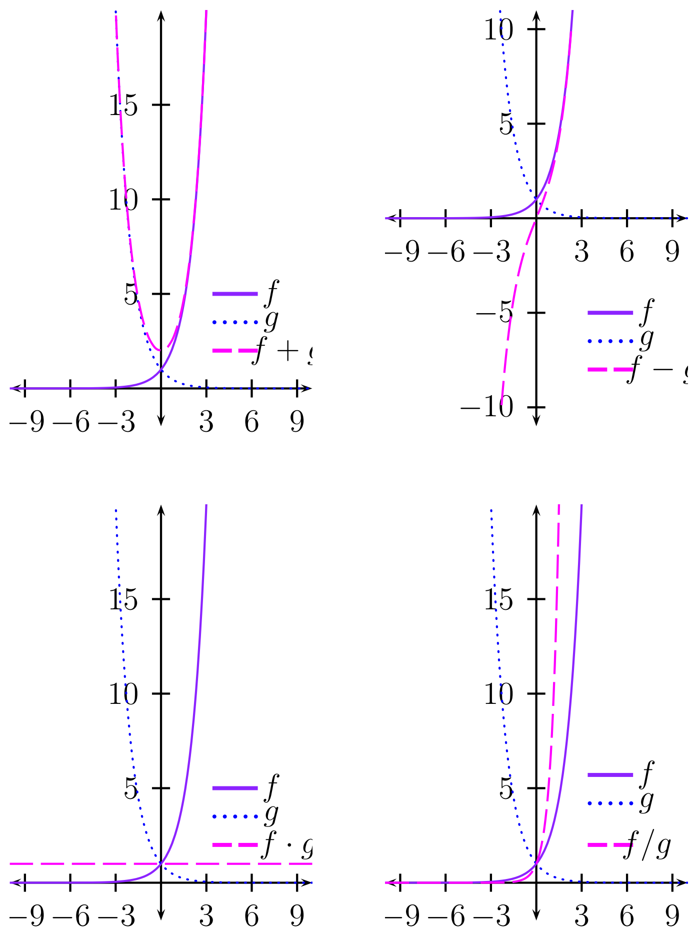


Figura 4.26.

Para verificar esta igualdad de funciones, de acuerdo con la definición 4.2.1, debemos ver que sus dominios son iguales y también son iguales los resultados de calcularlas en un número real x del dominio común.

El dominio de $(f+g)+h$, es

$$D_{(f+g)+h} = D_{f+g} \bigcap D_h = \left(D_f \bigcap D_g\right) \bigcap D_h,$$

mientras que el dominio de $f+(g+h)$ es

$$D_{f+(g+h)} = D_f \bigcap D_{g+h} = D_f \bigcap \left(D_g \bigcap D_h\right).$$

Como tenemos la igualdad de conjuntos

$$\left(D_f \bigcap D_g\right) \bigcap D_h = D_f \bigcap \left(D_g \bigcap D_h\right),$$

entonces $D_{(f+g)+h} = D_{f+(g+h)}$.
Además, para todo $x \in D_f \bigcap D_g \bigcap D_h$,

$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x).$$

Puesto que $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ representan números reales, esta última suma es igual a

$$f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g+h)(x).$$

Así:

$$(f+g)+h = f+(g+h).$$

De manera similar se prueba la asociatividad del producto.

2. La conmutatividad de la multiplicación, pues,

$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x),$$

como $f(x)$ y $g(x)$ representan números entonces este producto es igual a:

$$g(x)\, f(x) = (g \cdot f)(x).$$

Así $f \cdot g = g \cdot f$. De manera similar se prueba la conmutatividad de la adición.

3. Sea $\overline{0}$ la función que a todo número real x asocia el número 0, es decir $\overline{0}(x) = 0$ y sea $\overline{1}$ la función que a cada real x asocia el número 1. Entonces, por una parte,

$$D_{f+\overline{0}} = D_f \bigcap D_{\overline{0}} = D_f \bigcap \mathbb{R} = D_f$$

y, para todo $x \in D_f$,

$$\left(f + \overline{0}\right)(x) = f(x) + \overline{0}(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

es decir,

$$f + \overline{0} = f$$

Por otra parte,

$$D_{f\cdot\overline{1}} = D_f \bigcap D_{\overline{1}} = D_f \bigcap \mathbb{R} = D_f$$

y, para todo $x \in D_f$,

$$\left(f \cdot \overline{1}\right)(x) = f(x)\,\overline{1}(x) = f(x) \cdot 1 = f(x)$$

es decir

$$f \cdot \overline{1} = f$$

Esto muestra que entre las funciones existen módulos para la adición y para la multiplicación.

4. Se define $-f$ así: su dominio es igual al dominio de f, $D_{-f} = D_f$, y

$$(-f)(x) = -f(x).$$

Entonces

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0 = \overline{0}(x),$$

es decir,

$$f + (-f) = \overline{0}$$

Por otra parte, para aquellos x para los cuales $f(x) \neq 0$, se define $\dfrac{1}{f}$ así:

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Entonces

$$\left(f \cdot \frac{1}{f}\right)(x) = f(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = 1 = \overline{1}(x)$$

es decir,

$$f \cdot \frac{1}{f} = \overline{1}.$$

Con esto, $D_{\frac{1}{f}} = D_f \setminus \{x \in D_f \ : \ f(x) = 0\}$.

Así, entre las funciones existen inversos para la suma e inversos parciales para el producto (figura 4.27).

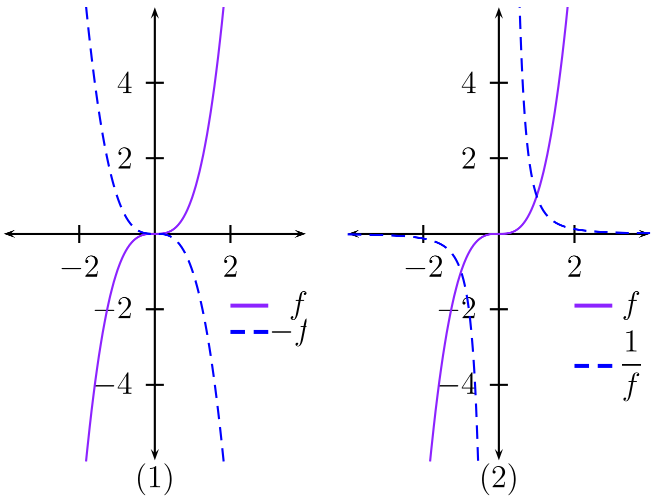


Figura 4.27.

4.4.2 Composición de funciones

Existe otra manera de obtener una función a partir de dos funciones dadas.

Definición 4.4.3. *Dadas las funciones f y g, se define la* ***función compuesta*** *de f y g notada $f \circ g$, así:*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Esta función compuesta se puede evaluar en los números reales x para los cuales están definidas tanto $g(x)$ como $f(g(x))$, así:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \ : \ g(x) \in D_f\}$$

Ejemplo 4.14.

1. Sean $f(x) = 4 - 2x$ y $g(x) = 16 - x^2$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(16 - x^2\right) = 4 - 2\left(16 - x^2\right) = -28 + 2x^2$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \ : \ g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4 - 2x) = 16 - (4 - 2x)^2 = 16x - 4x^2$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \ : \ g(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

En la figura 4.28 aparecen las gráficas de f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$. Note que las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ son distintas pues, aunque $D_{f\circ g} = D_{g\circ f}$, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ en general.

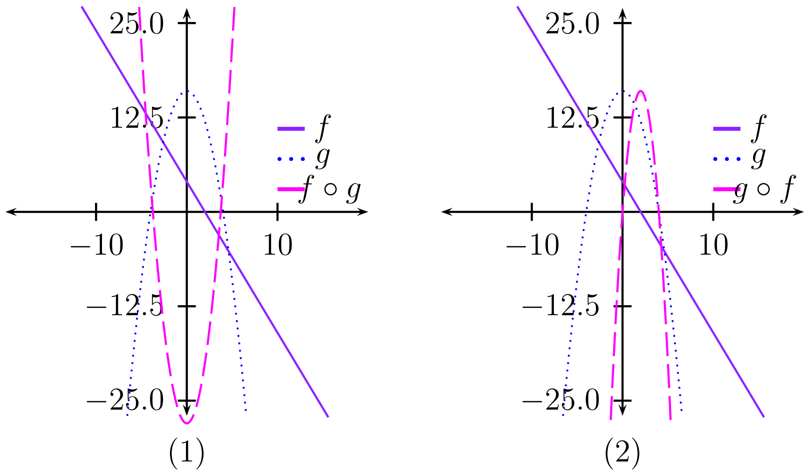


Figura 4.28.

2. Si $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$, entonces

   (a) $f(x^2) = \dfrac{3}{x^2+1}$, en particular, $f(2^2) = \dfrac{3}{5}$

   (b) $f(x)^2 = \left(\dfrac{3}{x+1}\right)^2 = \dfrac{9}{(x+1)^2}$, en particular, $f(2)^2 = 1$

   (c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\dfrac{3}{x+1}\right) = \dfrac{3}{\dfrac{3}{x+1}+1} = \dfrac{3(x+1)}{x+4}$.

   También $f(f(x)) = \dfrac{3}{f(x)+1}$. En particular, $(f \circ f)(2) = \dfrac{3}{2}$

   En general $f(x^2) \neq f(x)^2$, $f(x^2) \neq f(f(x))$ y $f(x)^2 \neq f(f(x))$.

3. La función $h(x) = \sqrt{x^2-1}$ se puede obtener en la forma $(f \circ g)(x)$ para $g(x) = x^2 - 1$ y $f(x) = \sqrt{x}$.

4. Se puede expresar la función $k(x) = \dfrac{2}{x^2+2x+3}$ como una función compuesta, de más de una manera. Así por ejemplo,

Si $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g_1(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{2}$ entonces

$$\begin{aligned}(f_1 \circ g_1)(x) &= f_1(g_1(x)) = \frac{1}{g_1(x)} = \frac{1}{\frac{x^2+2x+3}{2}} \\ &= \frac{2}{x^2+2x+3} = k(x)\end{aligned}$$

Si $f_2(x) = \frac{2}{x^2+2}$ y $g_2(x) = x+1$ entonces

$$\begin{aligned}(f_2 \circ g_2)(x) &= f_2(g_2(x)) = f_2(x+1) = \frac{2}{(x+1)^2+2} \\ &= \frac{2}{x^2+2x+3} = k(x)\end{aligned}$$

Además, si $f_3(x) = \frac{2}{x}$, $g_3(x) = x+3$ y $h(x) = x^2+2x$ entonces

$$\begin{aligned}((f_3 \circ g_3) \circ h)(x) &= (f_3 \circ g_3)\, h(x) = f_3(g_3(h(x))) \\ &= f_3\left(g_3\left(x^2+2x\right)\right) = f_3\left(x^2+2x+3\right) \\ &= \frac{2}{x^2+2x+3}\end{aligned}$$

también

$$(f_3 \circ (g_3 \circ h))(x) = f_3((g_3 \circ h)(x)) = f_3(g_3(h(x))) = k(x)$$

5. Sean $a > 0$ y $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

$$\begin{aligned}D_{f\circ g} &= \{x \in D_g \ : \ g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R},\ x > 0 \ : \ g(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0\} = \mathbb{R}^+\end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(a^x) = \log_a a^x = x$$

$$\begin{aligned}D_{g\circ f} &= \{x \in D_f \ : \ f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) > 0\} = \mathbb{R}\end{aligned}$$

Examinemos ahora las propiedades de la composición de funciones:

1. La asociatividad se verifica en general, pues

$$\begin{aligned} D_{(f\circ g)\circ h} &= \{x\in\mathbb{R} \ : \ x\in D_h \text{ y } h(x)\in D_{f\circ g}\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \ : \ x\in D_h, \ h(x)\in D_g \text{ y } g(h(x))\in D_f\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{f\circ(g\circ h)} &= \{x\in\mathbb{R} \ : \ x\in D_{g\circ h} \text{ y } (g\circ h)(x)\in D_f\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \ : \ x\in D_h, \ h(x)\in D_g \text{ y } (g(h(x))\in D_f\} \end{aligned}$$

   Así $D_{(f\circ g)\circ h} = D_{f\circ(g\circ h)}$.

   Por otro lado

$$\begin{aligned} &((f\circ g)\circ h)(x) = (f\circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) \\ &(f\circ(g\circ h)(x)) = f(g(h(x))) \end{aligned}$$

   así

$$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$$

2. La conmutatividad no se verifica en general, como lo vimos anteriormente.

3. Sea I la función identidad que a cada $x\in\mathbb{R}$ asocia x, es decir, $I(x)=x$. Para toda función f tenemos

$$\begin{aligned} D_{f\circ I} &= \{x\in\mathbb{R} \ : \ x\in D_I \text{ e } I(x)\in D_f\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \ : \ x\in\mathbb{R} \text{ y } x\in D_f\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \ : \ x\in D_f\} \\ &= D_f \end{aligned}$$

   De igual manera se puede mostrar $D_{I\circ f} = D_f$.

   Además

$$\begin{aligned} (f\circ I)(x) &= f(I(x)) = f(x) \\ (I\circ f)(x) &= I(f(x)) = f(x) \end{aligned}$$

   esto es,

$$f\circ I = f \quad \text{e} \quad I\circ f = f$$

Taller 1

1. Sitúe en el plano cartesiano los siguientes puntos: $P\Big(-3,4\Big)$, $Q\Big(4,-\dfrac{3}{4}\Big)$, $R\Big(-\dfrac{7}{5},\dfrac{4}{5}\Big)$, $S\Big(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\pi\Big)$.

2. Halle la distancia que existe entre los puntos P y Q en cada uno de los siguientes casos

   (a) $P\Big(7,3\Big)$, $Q\Big(2,5\Big)$

   (b) $P\Big(-3,4\Big)$, $Q\Big(\dfrac{5}{3},4\Big)$

   (c) $P\Big(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{5}{2}\Big)$, $Q\Big(-\dfrac{2}{3},-1\Big)$

   (d) $P\Big(\sqrt{2},\sqrt{2}\Big)$, $Q\Big(\sqrt{3},\sqrt{3}\Big)$

3. Los vértices de la base de un triángulo isósceles están en los puntos $(1,2)$ y $(8,2)$. Si el triángulo tiene 4 unidades de altura con respecto a la base, halle las coordenadas del tercer vértice.

4. Para cada par de puntos P y Q del punto 2., halle las coordenadas del punto medio.

5. Verifique que las siguientes parejas definen una función f : $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,9)$, $(4,16)$, $(5,25)$.

   (a) Halle $f\,(2)$ y $f\,(5)$.

   (b) Halle x tal que $f\,(x)=9$.

6. Determine si las siguientes parejas definen una función $(-1,-1)$, $(-3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$, $(5,-5)$. Justifique su respuesta.

7. Verifique que las siguientes parejas definen una función f : $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2},2\right)$, $(\pi,-2)$, $(4,2\pi)$, $\left(\dfrac{\pi}{2},2\right)$.

   (a) Halle $f\,(\pi)$ y $f\,\left(-\frac{1}{2}\right)$.

   (b) Halle x tal que $f\,(x)=5$.

   (c) ¿Existe $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$?

(d) ¿Existe x tal que $f(x) = \pi$?

(e) ¿Cuántos elementos distintos posee el dominio de f? ¿Cuántos elementos distintos posee el rango de f?

(f) ¿Cuántos elementos distintos tienen imágenes iguales?

8. Halle el dominio natural de cada una de las siguientes funciones

(a) $f(x) = \dfrac{3x+4}{x+1}$ (c) $h(x) = \dfrac{x+6}{x^2+1}$

(b) $g(x) = \sqrt{5-2x}$ (d) $k(x) = 3x^2 + 3 + \dfrac{3}{x}$

9. Sea $D = \mathbb{R}$ y f la función definida por $f(x) = 3x - 2$ para todo $x \in D$. Halle $f(0)$, $f(2)$, $f(-3)$, $-f(3)$.

10. Sea $D = \mathbb{R}$ y f la función definida por $f(x) = x^2 + 2x$ para todo $x \in D$.

(a) Halle $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$, $f(-3)$, $\dfrac{8}{f(2)}$.

(b) Halle todos los valores de x tales que $f(x) = 0$.

11. Para las funciones de los ejercicios 9 y 10, halle $f(x+h)$. ¿Es $f(x+h) = f(x) + f(h)$? Halle $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

12. Sea $f(x) = x^3 + 2x$. Halle $f(-x)$ y compare el resultado con $f(x)$: ¿cómo se relacionan $f(-x)$ y $f(x)$?

13. Sea $g(x) = x^2 - 5$. Halle $g(-x)$ y compare el resultado con $g(x)$: ¿cómo se relacionan $g(-x)$ y $g(x)$?

14. Exprese

(a) El área de un cuadrado en términos de la longitud de uno de sus lados.

(b) El área de un cuadrado en términos de la longitud de una de sus diagonales.

(c) El volumen de un cubo en términos de la longitud de su arista.

(d) El volumen de un cubo en términos del área de una de sus caras.

(e) El volumen de un cubo en términos de una de sus diagonales.

(f) El área de un triángulo equilátero en términos de la longitud de uno de sus lados.

15. Si el lado de un cuadrado mide a unidades y se incrementa en h unidades, halle el incremento que experimenta el área.

16. Si las aristas de dos cubos miden respectivamente a y 2a unidades, ¿qué relación existe entre sus volúmenes?

17. La relación entre las lecturas de las temperaturas *Fahrenheit* (F) y *Celcius (C)* está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

    (a) Exprese F en términos de C.

    (b) A qué la temperatura las lecturas en las dos escalas son iguales.

    (c) ¿En qué momento la lectura en Fahrenheit es el doble que la lectura en Celsius?

18. En cada caso determine la ecuación de la recta que cumple las condiciones dadas:

    (a) Pasa por el punto $P\left(2, -\dfrac{3}{2}\right)$ y tiene pendiente igual a 4.

    (b) Pasa por el punto $P(1, -1)$ y tiene pendiente igual a -1.

    (c) Pasa por los puntos $P(3, 4)$ y $Q(-2, 5)$

    (d) Pasa por los puntos $P\left(-\dfrac{2}{3}, 0\right)$ y $Q\left(-2, \dfrac{2}{3}\right)$

19. Para cada una de las rectas cuyas ecuaciones aparecen a continuación halle:

    - la pendiente
    - las intersecciones con los ejes X e Y
    - la ecuación de la recta perpendicular a ella, que pasa por el punto $(1, 1)$
    - la ecuación de la recta paralela a ella que pasa por $(1, 1)$.

    (a) $\dfrac{3}{4}x + 2y = 1$

    (b) $4x + 3y = 12$

    (c) $\dfrac{x}{3} + 2y + 3 = 0$

20. Dada la recta L de ecuación $3x-3y+5=0$ y el punto $P(2,-1)$, en cada caso halle la ecuación de la recta que pasa por P y verifica la condición :

    (a) es paralela a L

    (b) es perpendicular a L.

21. Halle los puntos de la recta $3x+y=2$ que están a dos unidades del punto $P(1,2)$.

22. Halle la ecuación de la parábola que satisface estas condiciones: tiene un vértice en $(0,0)$, pasa por el punto $(2,-3)$ y es simétrica con respecto al eje Y. Dibuje la gráfica.

23. El dominio de cada una de las siguientes funciones es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Trace la gráfica de cada una de las funciones.

    (a) $f(x)=3x+4$

    (b) $g(x)=5-2x$

    (c) $h(x)=2x^2+1$

    (d) $k(x)=-3x^2+4$

24. Sea $f(x)=x^2-2$. En cada caso, dibuje en el mismo sistema de coordenadas las gráficas de f y de la función dada:

(a)	$e(x)=f(x+2)$	(f)	$n(x)=f(x)+2$
(b)	$g(x)=f(x-3)$	(g)	$p(x)=f(x)-3$
(c)	$h(x)=f(3x)$	(h)	$q(x)=-f(x)$
(d)	$k(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)$	(i)	$m(x)=f(x^2)$
(e)	$l(x)=f(-x)$	(j)	$r(x)=f(x)^2$

25. En cada caso, elabore una tabla de la función para los valores enteros de x pertenecientes al intervalo $[-5,5]$, y dibuje la gráfica:

    (a) $f(x)=3^x$

    (b) $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

    (c) $h(x)=3^{x+2}-6$

    (d) $k(x)=3(2^x)$

26. Simplifique las siguientes expresiones

    (a) $(2^{3x-2})(2^{4-2x})$

    (b) $(a^{2x})^{3x}$

    (c) $\dfrac{4^{x+9}}{4^{7-x}}$

    (d) $\dfrac{2^{3x}}{3^{2x}}$

27. Sea $a > 0$ y $a \neq 1$. Teniendo en cuenta que si u y $v \in \mathbb{R}$, entonces $a^u = a^v$ si solo si $u = v$, halle x en cada uno de los siguientes casos:

    (a) $3^{4x-1} = 3^{7x-2}$

    (b) $5^{6x-3} = 125^{x^2+1}$

    (c) $16^{x^2} = 4^{5x+3}$

28. Para cada una de las siguientes igualdades escriba una expresión equivalente, usando logaritmos:

    (a) $3^4 = 81$

    (b) $\sqrt[3]{125} = 5$

    (c) $4^{-1} = \dfrac{1}{4}$.

29. En cada caso halle el valor de x que verifica la igualdad

    (a) $3\log_b 2 + \dfrac{1}{2}\log_b 25 - \log_b 20 = \log_b x$

    (b) $x^{\log x} = 100x$.

30. Use la gráfica de la función $y = e^x$ para obtener las gráficas de las siguientes funciones:

(a)	$f(x) = 3e^x$	(d)	$k(x) = e^{2x}$
(b)	$g(x) = e^x - 3$	(e)	$l\,(x) = e^{\frac{x}{2}}$
(c)	$h(x) = 2e^x - 2$	(f)	$m\,(x) = e^{-x}$

31. Use las propiedades del logaritmo natural para probar la siguiente afirmación: Si $\ln(x+8) - \ln(x+) = 3\ln(2)$ entonces $x = \dfrac{8}{7}$.

32. Para la función f dada en el punto 7, determine la función cuyos valores son $2f\,(x)$.

33. Se definen las funciones f y g de la siguiente forma:
f : $(-1,-1)$, $(1,1)$, $\left(2,\sqrt{8}\right)$, $(-2,-4)$, $(3,9)$, $\left(-3,-\sqrt{6}\right)$; g : $(-1,3)$, $(1,-4)$, $(2,5)$, $(-2,-6)$, $(3,-5)$,$(-3,4)$.

    (a) Escriba la función cuyos valores son $f(x)+g(x)$.

    (b) Escriba la función cuyos valores son $f(x)-g(x)$.

34. Se definen las funciones f y g de la siguiente forma:
f : $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(1,\sqrt{2}\right)$, $\left(2,\sqrt{8}\right)$, $(-2,-4)$, $\left(3,-\frac{1}{2}\right)$, $(-3,-6)$; g : $\left(\frac{1}{2},3\right)$, $(1,-4)$, $\left(2,\sqrt{2}\right)$, $(-2,-6)$, $(3,-4)$,$(-3,4)$.

    (a) Escriba la función cuyos valores son $f(x)\cdot g(x)$.

    (b) Escriba la función cuyos valores son $[f(x)]^2$.

    (c) Escriba la función cuyos valores son $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

35. Se definen las funciones f y g de la siguiente forma:
f : $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(1,\sqrt{2}\right)$, $\left(2,\sqrt{8}\right)$, $(-2,-4)$, $\left(3,-\frac{1}{2}\right)$, $(4,-6)$;
g : $\left(-1,-\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},1\right)$, $(1,-4)$, $\left(2,\sqrt{2}\right)$, $(-2,-6)$, $(3,-4)$,$(-3,4)$.

    (a) ¿Para qué valores de x se puede definir la función cuyos valores son $f(x)+g(x)$? Escriba esa función.

    (b) ¿Para qué valores de x se puede definir la función cuyos valores son $f(x)-g(x)$? Escriba esa función.

36. Se definen las funciones f y g de la siguiente forma:
f : $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(1,\sqrt{2}\right)$, $\left(2,\sqrt{8}\right)$, $\left(-2,-4\right)$, $\left(3,-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-3,-6\right)$;
g : $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, $(0,1)$,$\left(\frac{1}{2},3\right)$, $\left(1,0\right)$, $\left(2,\sqrt{2}\right)$, $(-2,-6)$, $\left(\frac{5}{2},-4\right)$,$(-3,4)$.

    (a) ¿Para qué valores de x se puede definir la función cuyos valores son $f(x)\cdot g(x)$? Escriba esa función.

(b) ¿Para qué valores de x se puede definir la función cuyos valores son $\dfrac{f(x)}{g(x)}$? Escriba esa función.

37. Sea $D = \mathbb{R}$ y f y g las funciones definidas por $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = x^2 + 3x + 2$ para todo $x \in D$.

    En cada caso halle la función indicada:

    (a) $f(x) + g(x)$
    (b) $f(x) - g(x)$
    (c) $f(x) \cdot g(x)$
    (d) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

38. Para las funciones del ejercicio anterior halle

    (a) $f(g(0))$
    (b) $g(f(2))$
    (c) $f(g(a))$
    (d) $g(f(a))$.

39. Sea $D = \mathbb{R}$ y f y g las funciones definidas por $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 + 2$ para todo $x \in D$. Halle

    (a) $f\left(\dfrac{1}{a}\right) - \dfrac{1}{f(a)}$
    (b) $g(\sqrt{a}) - \sqrt{g(a)}$
    (c) $f(a) + g(a)$
    (d) $f(a + h)$
    (e) $\dfrac{g(a+h) - g(a)}{h}$
    (f) $f(3) + g(1)$
    (g) $f(g(a))$
    (h) $g(f(a))$

Capítulo 5

Trigonometría

5.1 Medida de ángulos

En Geometría se define un ***ángulo*** como la unión de dos semi-rectas con origen común. En Trigonometría se interpreta como una rotación de rayos. Si se toman dos rayos coincidentes, uno permanece fijo y el otro gira alrededor del punto que se considera el vértice. El rayo que permanece fijo recibe el nombre de ***lado inicial*** y el que rota, ***lado final***. Trabajamos con ángulos generalizados, esto quiere decir que el rayo que gira lo puede hacer cualquier número de veces y en cualquier dirección. Si el rayo pasa más de una vez por su posición original, se dice que es de más de una vuelta. Si gira en sentido contrario de las manecillas del reloj, se dice que está ***orientado positivamente***, si lo hace en el mismo sentido de las manecillas del reloj, que está ***orientado negativamente***.

En muchas ocasiones es necesario utilizar ángulos en posición normal o canónica. Un ángulo en ***posición normal*** es aquel que tiene su vértice en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, el lado inicial coincide con el eje X positivo y el lado final está contenido en uno de los cuatro cuadrantes determinados por el sistema cartesiano, o está sobre uno de los ejes, en cuyo caso es un ***ángulo cuadrantal***.

Como el número de giros del lado final así como su sentido no tienen restricción, los lados inicial y final de dos ángulos diferentes pueden coincidir (figura 5.1).

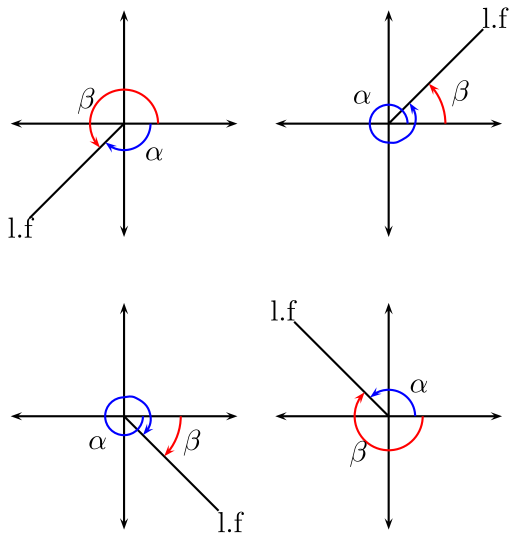


Figura 5.1.

La medida de un ángulo en fracciones sexagesimales fue utilizada por los babilonios para cálculos en astronomía, recordemos que la unidad de medida, es el ***grado***.

En algunas aplicaciones en las que se usa el cálculo diferencial o integral se requiere como unidad de medida el radián, que se define de la siguiente manera:

Definición 5.1.1. *Un **radián** es la medida de un ángulo cuyo vértice está en el centro de una circunferencia y que barre un arco cuya longitud es igual a la del radio.*

Si α es un ángulo con vértice en el centro de un círculo de radio r, su medida en radianes es: $\dfrac{S}{r}$, donde S es la longitud del arco subtendido por α.

Ejemplo 5.1.

1. Si α es un ángulo central que mide 6 radianes y subtiende un arco de 33 pulgadas , la medida del radio de la circunferencia es: $\dfrac{33}{6} = 5.5$ pulgadas

2. La longitud del arco que subtiende un ángulo central que mide 2 radianes en una circunferencia de 3 cm de radio es: $S = (3)(2)$, $S = 6$ cm

Si θ es la medida ***en radianes*** de un ángulo central de un círculo de radio R y A es el área del sector circular determinado por θ entonces $A = \dfrac{1}{2}r^2\theta$.

Observe que esta fórmula es válida cuando θ está medido en radianes.

Por ejemplo, si quiere encontrar el área del sector determinado por el ángulo central de medida 45° en una circunferencia de radio 8 cm, debe expresar la medida del ángulo θ en radianes. Como la medida en radianes de un ángulo de 45° es $\dfrac{\pi}{4}$, $A = \dfrac{1}{2}(64)\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 8\pi$.

5.2 Trigonometría de triángulos rectángulos

En la antigüedad (alrededor del año 100 A.C), para resolver problemas de astronomía, navegación y geografía, fueron utilizadas relaciones entre lados y ángulos de un triángulo rectángulo; estos trabajos dieron origen a la trigonometría.

La palabra trigonometría viene del griego: *Trigonon*: triángulo, *Metría*: medida. Hiparco y Tolomeo crearon esta rama de las matemáticas y su primera presentación se encuentra en ***El Almagesto***. Con el uso de la trigonometría calcularon tamaños y distancias de cuerpos celestes.

Las definiciones y demostraciones que se utilizan actualmente no difieren mucho de las propuestas por ellos.

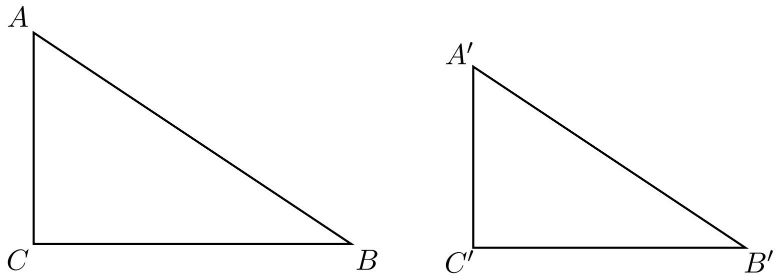


Figura 5.2.

En los triángulos rectángulos de la figura 5.2, $\triangle ACB$ y $\triangle A'C'B'$, $\angle A \cong \angle A'$, entonces $\angle B \cong \angle B'$, por el criterio AAA los triángulos son semejantes y por lo tanto las razones entre las medidas de los lados correspondientes son iguales. Es decir

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}, \; \frac{CB}{AB} = \frac{C'B'}{A'B'} \text{ y } \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}.$$

Cada una de esas razones recibe un nombre especial:

Definición 5.2.1.

- ***Seno de ángulo de*** A***:***

$$\operatorname{sen} \angle A = \frac{BC}{AB} \quad \left(\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}\right)$$

- ***Coseno del ángulo*** A***:***

$$\cos \angle A = \frac{AC}{AB} \quad \left(\frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}\right)$$

- ***Tangente del ángulo*** A***:***

$$\tan \angle A = \frac{BC}{AC} \quad \left(\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}\right)$$

Notemos que estos valores no dependen de la longitud de los lados sino de la medida del ángulo.

Si en los triángulos rectángulos: $\triangle ACB$ y $\triangle A'C'B'$, $\angle A \cong \angle A'$, entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \angle A &= \operatorname{sen} \angle A'; \\ \cos \angle A &= \cos \angle A'; \\ \tan \angle A &= \tan \angle A'. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2. Los matemáticos griegos y el ingeniero Heron mostraron cómo se puede construir un túnel bajo una montaña trabajando en los dos lados simultáneamente. Eligieron un punto A en un lado, un punto B en el otro y finalmente un punto C tal que la medida del ángulo $\angle ACB$ fuera de 90° (figura 5.3). Después midieron AC y BC y encontraron que sus longitudes eran 100 pies y 75 pies respectivamente.

Ahora, dijo Heron, es posible encontrar la medida de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$. Entonces instruyó al trabajador ubicado en A para que

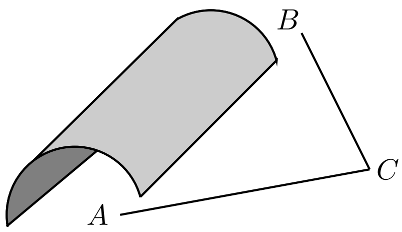


Figura 5.3.

siguiera una línea recta que conservara el ángulo calculado con AC y dio instrucciones análogas al trabajador en B. ¿Cómo calculó estos dos ángulos?

Solución: Encontrando la tangente del ángulo en A: $\tan(A) = \dfrac{75}{100}$ y calculando la tangente del ángulo en B: $\tan(B) = \dfrac{100}{75}$.

Ejemplo 5.3. Sara está volando una cometa y tiene sus manos a 5 pies por encima del piso. Si la cometa está a 200 pies arriba del suelo, y la cuerda de la cometa forma un ángulo de 32.4° con la horizontal, ¿ Cuántos pies de cuerda está utilizando?

Solución: Para encontrar la longitud de la cuerda utilizamos el siguiente esquema:

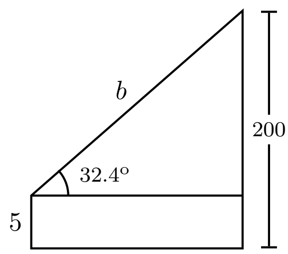


Figura 5.4.

Debemos hallar el valor de b. Podemos hacer uso de la definición de seno de un ángulo en un triángulo rectángulo:

$$\operatorname{sen}(32.4°) = \frac{195}{b}, \text{ entonces: } b = \frac{195}{\operatorname{sen}(32.4°)} \approx 363\,\text{pies}.$$

Ejemplo 5.4. Una trayectoria recta que sube una colina se eleva 26 pies por cada 100 pies horizontales. ¿Qué ángulo forma con la horizontal?

Solución: La figura 5.5, muestra la situación que se presenta durante los primeros 100 pies horizontales:

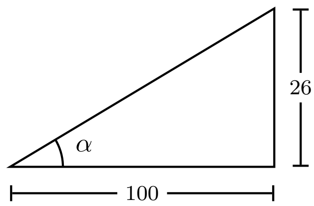


Figura 5.5.

Como el valor de las razones trigonométricas no depende de la longitud de los lados que consideramos, basta con utilizar como medidas, los 100 pies horizontales y los 26 pies verticales iniciales.

$$\tan\alpha = \frac{26}{100}; \quad \tan\alpha = 0.26; \quad \alpha = 14.57^\circ$$

Ejemplo 5.5. Un automovilista que circula por una carretera a una velocidad de $60\,Km/h$ va directamente hacia una montaña. Observa que entre la 1 : 00 p.m. y la 1 : 10 p.m., el ángulo de elevación de la montaña cambia de 10° a 70°. Calcular la altura de la montaña.

Solución:

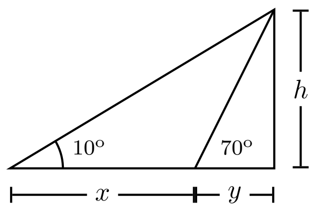


Figura 5.6.

$$\tan 10^\circ = \frac{h}{x+y} \tag{5.1}$$

$$x + y = \frac{h}{\tan 10^\circ} \tag{5.2}$$

x es la distancia que el automovilista ha recorrido en 10 minutos. Como recorre 60 Km en una hora, se habrá desplazado 10 Km en 10 minutos, así $x = 10$.

$y = \dfrac{h}{\tan 10^\circ} - 10$, al despejar de la ecuación 5.2.

Por definición de tangente: $\tan 70^\circ = \dfrac{h}{y}$; así, $y = \dfrac{h}{\tan 70^\circ}$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{h}{\tan 10^\circ} - 10 &= \frac{h}{\tan 70^\circ};\\
\frac{h}{\tan 10^\circ} - \frac{h}{\tan 70^\circ} &= 10\\
\frac{h}{0.176} - \frac{h}{2.74} &= 10\\
2.74h - 0.176h &= 10\,(2.74)\,(0.176)\\
2.564h &= 4.82\\
h &= 1.9\,Km
\end{aligned}$$

La altura de la montaña es 1.9 Km.

5.3 Funciones trigonométricas

5.3.1 De ángulos

Consideremos un ángulo en posición canónica θ. Si no es un ángulo cuadrantal su lado final está contenido en uno de los cuadrantes determinados por los ejes coordenados. Decimos que es un ángulo en el primero, segundo, tercero o cuarto cuadrante. Este lado final, como se ha visto anteriormente (figura 5.1), puede pertenecer a ángulos de medidas diferentes a la de θ, e inclusive de distinta orientación.

Se pueden entender las definiciones de las relaciones trigonométricas a este tipo de ángulos. En efecto: tomemos inicialmente un ángulo θ en el primer cuadrante (figura 5.7).

$P\,(x, y)$ un punto que pertenece al lado final del ángulo θ. El triángulo $\triangle OQP$ es rectángulo. A partir de las definiciones dadas para las razones trigonométricas en triángulos rectángulos se puede afirmar

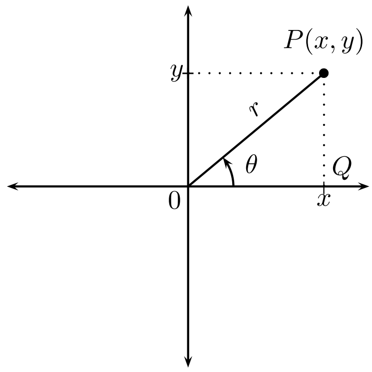


Figura 5.7.

que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Se pueden hallar el seno y el coseno de cualquier ángulo, no así la tangente porque la abscisa del punto no puede ser cero, lo que significa que no se puede definir la tangente de un ángulo cuyo lado final esté sobre el eje Y.

Estas relaciones se extienden para ángulos de cualquier cuadrante.

Definición 5.3.1. *Si θ es un ángulo en posición canónica y $P(x, y)$ es un punto del lado final de θ, con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, se define:*

$$\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{y}{r} \qquad \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{x}{r}; \quad si \quad x \neq 0, \quad \mathbf{tan}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{y}{x}.$$

Se tienen además las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \textbf{cosecante de } \boldsymbol{\theta} &= \frac{r}{y}, \quad si\ y \neq 0 \\ \textbf{secante de } \boldsymbol{\theta} &= \frac{r}{x}, \quad si\ x \neq 0 \\ \textbf{cotangente de } \boldsymbol{\theta} &= \frac{x}{y}, \quad si\ y \neq 0 \end{aligned}$$

Observemos que, salvo las funciones seno y coseno, todas tienen restricciones para su definición. También que los valores de las relaciones trigonométricas sólo dependen de la ubicación del lado final del ángulo. Así para ***ángulos coterminales***, es decir aquellos para los cuales

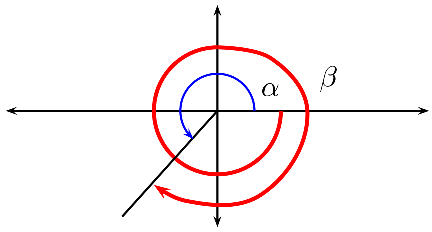
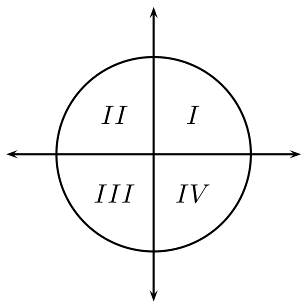


Figura 5.8.

coincide el lado final, los valores de sus relaciones trigonométricas son respectivamente iguales (figura 5.8).

En general: si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son coterminales: $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$; $\cos\alpha = \cos\beta$; $\tan\alpha = \tan\beta$, lo mismo sucede con las otras tres relaciones.

Como consecuencia de estas definiciones, las funciones son positivas o negativas, según el cuadrante que contenga el lado final (figura 5.9).



Cuadrante	**Funciones positivas**	**Funciones negativas**
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, tan, sec, cot
III	tan, cot	sen, cos, csc, sec
IV	cos, sec	sen, tan, csc, cot

Figura 5.9.

Si θ y $-\theta$ son ángulos con la misma medida pero que difieren en la orientación, $P(x, y)$ pertenece al lado final de θ, entonces $Q(x, -y)$ pertenecerá al lado final de $-\theta$. Observe la figura 5.10.

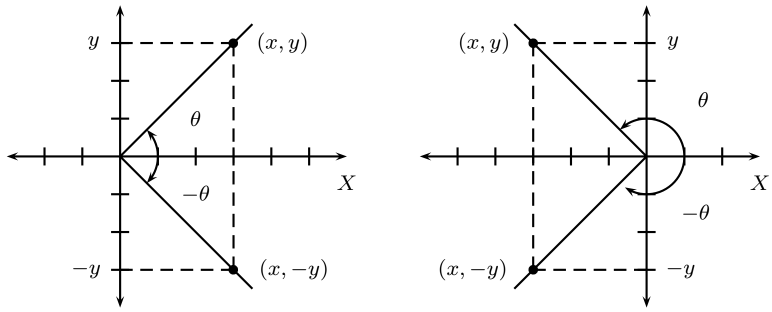


Figura 5.10.

Como $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(-y)^2}$, la distancia del origen al punto P es igual a la distancia del origen al punto Q. Si llamamos r a esta distancia, tenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{y}{r}; \quad \operatorname{sen}(-\theta) = -\frac{y}{r} \\ \cos\theta &= \frac{x}{r}; \quad \cos(-\theta) = \frac{x}{r} \\ \tan\theta &= \frac{y}{x}; \quad \tan(-\theta) = -\frac{y}{x} \end{aligned}$$

Concluimos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \cos\theta &= \cos(-\theta) \\ \tan\theta &= -\tan(-\theta) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.6. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo cuyo lado final contiene al punto $(-1, -3)$.

Solución:

$$r = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= -\frac{3}{\sqrt{10}}; & \cos\theta &= -\frac{1}{\sqrt{10}}; \\ \tan\theta &= -\frac{3}{-1} = 3; & \csc\theta &= -\frac{\sqrt{10}}{3}; \\ \sec\theta &= -\sqrt{10}; & \cot\theta &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.7. Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ, si θ es un ángulo de segundo cuadrante y el lado final de θ está en la recta $y = -4x$.

Solución:

Como θ es un ángulo de segundo cuadrante, cualquier punto del lado final debe tener la abscisa negativa. Para $x = -1$, $y = 4$. El punto $(-1, 4)$ pertenece al lado final del ángulo.

$$r = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{4}{\sqrt{17}}; & \cos\theta &= -\frac{1}{\sqrt{17}};\\ \tan\theta &= -4; & \csc\theta &= \frac{\sqrt{17}}{4};\\ \sec\theta &= -\sqrt{17}; & \cot\theta &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.8. Encuentre las seis funciones trigonométricas del ángulo cuyo lado final biseca el tercer cuadrante.

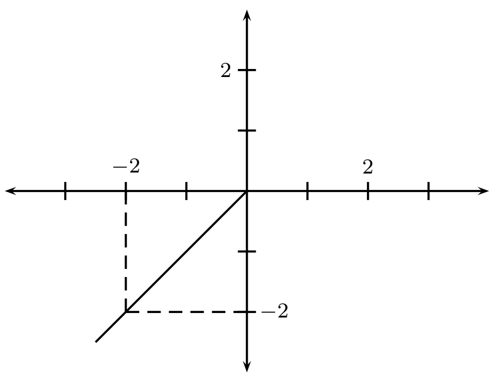


Figura 5.11.

Solución:

Tomamos un punto en el tercer cuadrante, por ejemplo $(-1, -1)$.

$r = \sqrt{2}$

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \tan\theta = 1; \quad \sec\theta = -\sqrt{2};$$
$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cot\theta = 1; \quad \csc\theta = -\sqrt{2}.$$

5.3.2 De números reales

En muchas aplicaciones se toma como dominio de cada función trigonométrica un subconjunto de los números reales.

Definición 5.3.2. *Sea t es un número real.*

Si t es positivo y f es una función trigonométrica que está definida en t, $f(t)$ es la misma imagen por f del ángulo orientado positivamente que mide t radianes.

Si t es un real negativo, $f(t)$ es la misma imagen por f del ángulo que mide $-t$ radianes y está orientado negativamente.

Igualmente: $\operatorname{sen} t$, es el seno del ángulo cuya medida es t radianes, orientado positivamente si t es positivo. Si t es negativo, $\operatorname{sen} t$ es el seno del ángulo cuya medida es $-t$ radianes y está orientado negativamente.

$\cos t$, es el coseno del ángulo cuya medida es t radianes, orientado positivamente si t es positivo. Si t es negativo, $\cos t$ es el coseno del ángulo cuya medida es $-t$ radianes y está orientado negativamente.

Si el lado final al ángulo que mide t radianes, no está en el eje Y, $\tan t$ se define de la misma forma como se definieron seno y coseno teniendo en cuenta si t es positivo ó t es negativo.

Ejemplo 5.9. $\tan 30$ es la tangente del ángulo que mide 30 radianes. Observe que $\tan 30 \neq \tan 30°$.

$\operatorname{sen}(-3)$ es el seno del ángulo orientado negativamente que mide 3 radianes.

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ es el coseno del ángulo que mide $\frac{\pi}{4}$ radianes y que está orientado negativamente.

Dominio

Hemos visto anteriormente que no importa cual sea la medida u orientación del ángulo, es posible encontrar los valores de su seno y de su coseno; así estas funciones pueden ser definidas para cualquier número real, lo que permite afirmar que el dominio de las funciones seno y coseno es el conjunto de números reales.

No sucede lo mismo con la función tangente. Se puede calcular $\tan t$ sólo si el lado final del ángulo que mide t radianes, no está sobre el eje Y, esto implica que en el dominio de la función tangente no están:

$$\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \ldots - \frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}; \ldots$$

Concluímos entonces que el dominio de la función tangente es:

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \ : \quad n \text{ es entero} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \ : \quad n \text{ es entero} \right\}.$$

El dominio de las funciones secante, cosecante y cotangente tampoco es el conjunto de todos los números reales. En efecto, de acuerdo con sus definiciones:

- El dominio de la secante es :
$$\mathbb{R} \setminus \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \ : \quad n \text{ es entero} \right\}.$$
- El dominio de la cosecante es :
$$\mathbb{R} \setminus \{ n\pi \ : \quad n \text{ es entero} \}.$$
- El dominio de la cotangente es:
$$\mathbb{R} \setminus \{ n\pi \ : \quad n \text{ es entero} \}.$$

Algunas propiedades

Consideremos un círculo de radio 1, llamado ***círculo trigonométrico*** (figura 5.12), tomemos ángulos en posición normal orientados positivamente cuya medida en radianes, aumente progresivamente de valor 0 hasta el valor $\frac{\pi}{2}$. Observamos que la ordenada va aumentando de 0 a 1. Si se tiene en cuenta que la ordenada es el valor del seno, éste va aumentando de 0 a 1. Si se toman ángulos de medida mayor que $\frac{\pi}{2}$ pero menor que π, la ordenada disminuye hasta tomar el valor 0. Para los ángulos cuya medida está entre π y $\frac{3\pi}{2}$, la ordenada es negativa y va de 0 hasta -1. Y para ángulos entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π la ordenada sigue siendo negativa y va tomando valores entre -1 y 0. Si se continúa con el giro, notamos que la situación descrita anteriormente se repite.

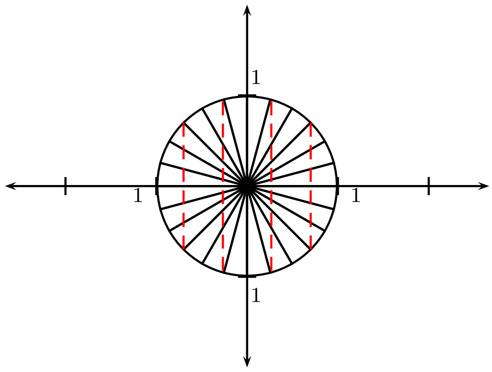


Figura 5.12.

De estas observaciones se derivan las siguientes conclusiones:

1. El mayor valor que toma el seno de un número real es 1.
2. El menor valor que toma el seno de un número real es -1.
3. Los números t, $t+2\pi$, $t+4\pi$,... tienen el mismo valor de seno. Esto es, $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t+2\pi) = \operatorname{sen}(t+4\pi) = \ldots$

Si el movimiento se realiza en sentido contrario a las manecillas del reloj, concluimos:

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t-2\pi) = \operatorname{sen}(t-4\pi) = \operatorname{sen}(t-6\pi) = \ldots$$

Si además, durante el recorrido descrito tenemos en cuenta la variación de la abscisa, que es el valor del coseno, concluimos:

1. El mayor valor de coseno es 1.
2. El menor valor de coseno es -1.
3. $\cos t = \cos(t+2\pi) = \cos(t+4\pi) = \ldots = \cos(t-2\pi) = \cos(t-4\pi)$

Funciones periódicas

Definición 5.3.3. *Una función f es una* ***función periódica*** *si existe un real positivo p, tal que para cualquier t en el dominio de f, $f(t+p) = f(t)$. El menor positivo p que cumple esta condición recibe el nombre de* ***período****. Una característica importante de la gráfica de una función con período p es que la gráfica se repite en intervalos de longitud p.*

Como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} t &= \operatorname{sen}(t+2n\pi), \quad n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \\ \cos t &= \cos(t+2n\pi), \quad n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π. En las figuras 5.13 y 5.14, aparecen sus respectivas gráficas.

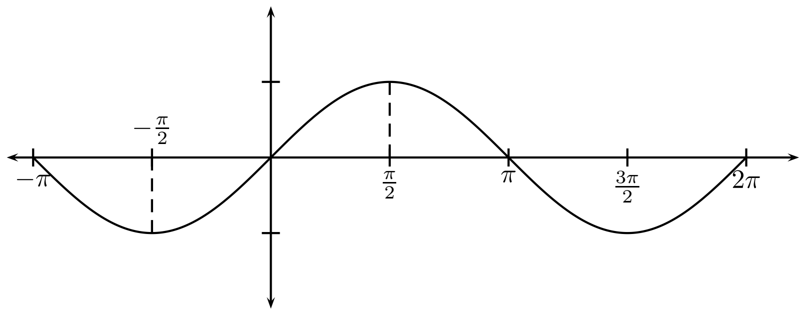


Figura 5.13. Función seno

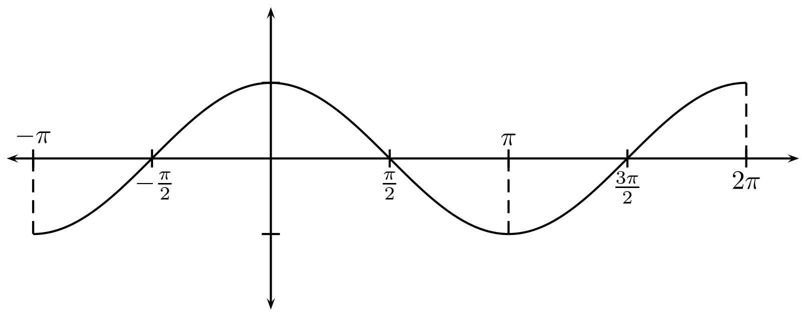


Figura 5.14. Función coseno

Ejemplo 5.10.

$$\operatorname{sen}\left(14\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + 4\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(25\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(6\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(-13\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(13\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos\left(-390^\circ\right) = \cos\left(390^\circ\right) = \cos\left(360^\circ + 30^\circ\right) = \cos\left(30^\circ\right)$$

Función tangente

Para analizar el comportamiento de la función tangente, usaremos nuevamente el círculo trigonométrico donde $\tan t = \dfrac{PQ}{OQ}$.

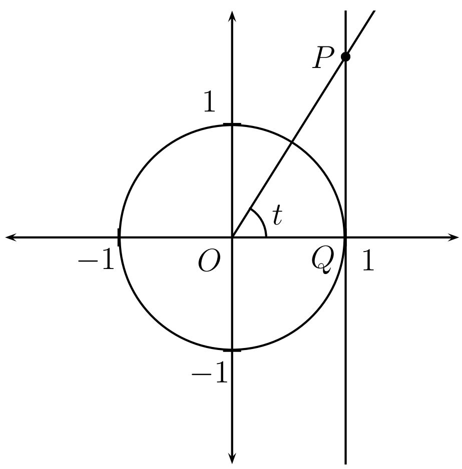


Figura 5.15.

Como la longitud del segmento OQ es igual a 1, entonces $\tan t = PQ$, esto es, la longitud del segmento obtenido de la intersección de la recta tangente a la circunferencia en Q con la prolongación del lado final de t. Al realizar la variación de t de 0 a $\frac{\pi}{2}$, el valor de la tangente va aumentando; cuando $t = \frac{\pi}{2}$, ni el lado final del ángulo ni su prolongación cortan la recta vertical que pasa por el punto $(1, 0)$, no se determina el segmento PQ luego la tangente no está definida. Si t toma progresivamente valores mayores que $\frac{\pi}{2}$, pero menores que π, el valor de la tangente, aumenta continuamente y sus valores son todos negativos. Si t varía de π a $3\frac{\pi}{2}$, el comportamiento es igual al que se presenta entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Para t entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π se repiten los valores que se obtuvieron entre $\frac{\pi}{2}$ y π.

La gráfica es:

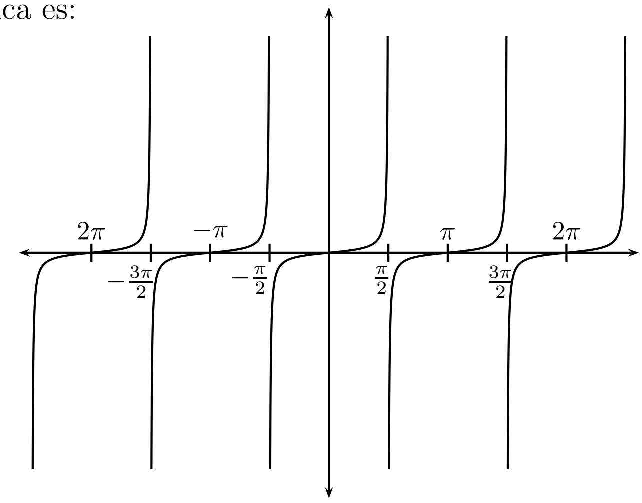


Figura 5.16.

De las observaciones anteriores se derivan las siguientes conclusiones:

1. Al dominio de la función tangente no pertenecen los números reales que sean múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.
2. La tangente de un número puede tomar cualquier valor real.
3. El período de la función tangente es π.

Ejemplo 5.11. $\tan\frac{5\pi}{4} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$, entonces $\tan\frac{5\pi}{4} = \tan\frac{\pi}{4}$.

$\tan\left(\dfrac{7\pi}{2}\right)$ no está definida.

$\tan(-205°) = -\tan(205°)$, entonces:

$\tan(-205°) = -\tan(205° - 180°) = -\tan(25°)$.

$\tan\left(-\dfrac{11\pi}{10}\right) = -\tan\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

5.4 Ángulos de referencia

Para el cálculo de los valores de las funciones trigonométricas de cualquier número (o ángulo), basta con conocer las que corresponden a los números que estén en el intervalo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, (esto es a los que corresponden a los ángulos agudos).

Para realizar este proceso se utiliza un ángulo llamado ***ángulo de referencia***.

Definición 5.4.1. *Un* ***ángulo de referencia*** θ_r *para* θ*, es el ángulo agudo que forman el lado final de* θ *y el eje* X *(figura 5.17).*

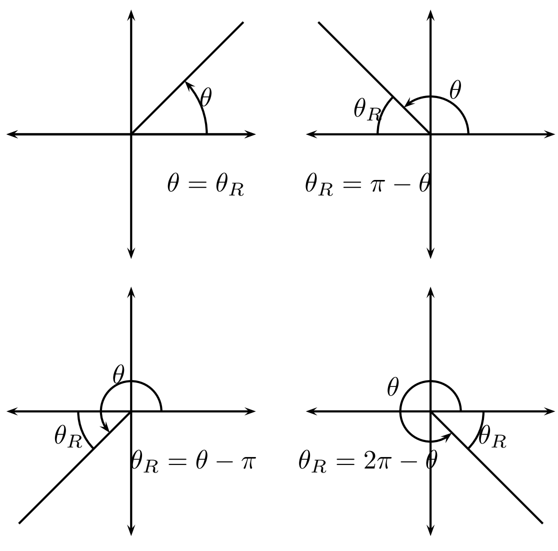


Figura 5.17.

Para calcular los valores de las funciones de un ángulo no cuadrantal θ, usando los ángulos de referencia, se hallan las que corresponden al ángulo de referencia y se hace la relación teniendo en cuenta el cuadrante al cual pertenece el ángulo dado.

Ejemplo 5.12. Si $\theta = 135°$ (figura 5.18).

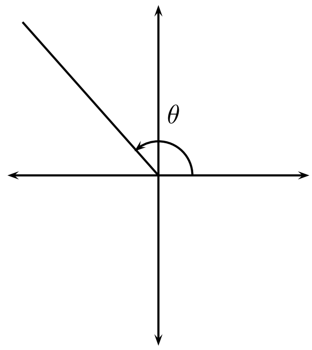


Figura 5.18.

$$\theta_r = 180° - 135° = 45°$$

$$\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen} 45°, \quad \cos 135° = -\cos 45°, \quad \tan 135° = -\tan 45°.$$

Ejemplo 5.13. Si $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$ (figura 5.19).

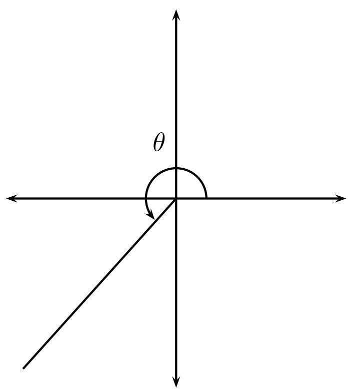


Figura 5.19.

$$\theta_r = \frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}, \quad \cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6}, \quad \tan\frac{7\pi}{6} = \tan\frac{\pi}{6}.$$

Ejemplo 5.14. Si $t = 3.5$ (figura 5.20).

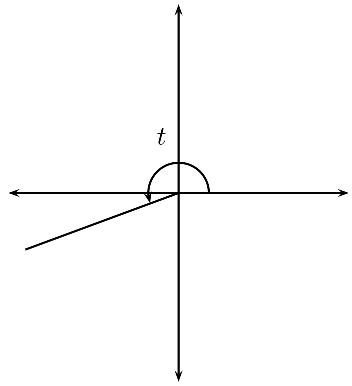


Figura 5.20.

Como $\pi < 3.5 < \dfrac{3\pi}{2}$, $\theta_r = 3.5 - \pi$

$$\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen}(3.5-\pi), \quad \cos t = -\cos(3.5-\pi), \quad \tan t = \tan(3.5-\pi).$$

Ejemplo 5.15. Si $t = \dfrac{5\pi}{3}$ (figura 5.21).

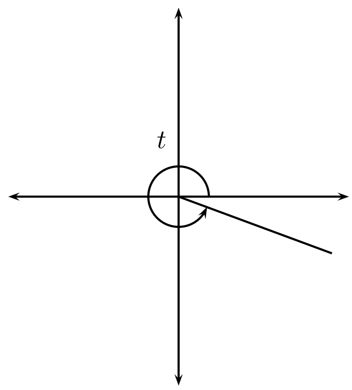


Figura 5.21.

$$\theta_r = 2\pi - 5\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}, \quad \cos t = \cos\frac{\pi}{3}, \quad \tan t = -\tan\frac{\pi}{3}.$$

5.5 Expresiones con seno y coseno

Las funciones trigonométricas permitieron la real incursión del hombre en la naturaleza de los sonidos y lograron que su conocimiento fuera utilizado en el diseño de aparatos como el teléfono, el fonógrafo, la radio, etc. Inicialmente el estudio matemático de los sonidos, no se realizó con la aplicación de las funciones trigonométricas.

Los Pitagóricos descubrieron que la longitud de dos cuerdas igualmente tensionadas y pulsadas levemente cuyos sonidos armonizan, están relacionadas por una simple razón aritmética. La menor nota es originada por las cuerdas de mayor longitud. Diseñaron escalas musicales cuyas notas fueron medidas cuantitativamente por las longitudes de las cuerdas vibrantes porque poseían valores numéricos precisos. Fueron los matemáticos del siglo XVII quienes iniciaron otras investigaciones e hicieron importantes descubrimientos. Merssene, por ejemplo, estudió el efecto de cambiar la tensión y la masa de la cuerda y encontró que un aumento en la masa y una disminución en la tensión producen notas bajas en una cuerda de longitud dada. Este descubrimiento fue muy importante para instrumentos con cuerdas, tales como el violín y el piano. Galileo y Hooke demostraron experimentalmente que cada sonido musical está caracterizado por un número determinado de vibraciones del aire por segundo. Grandes matemáticos del siglo XVII, estudiaron cuerdas vibrantes. Encontraron que las funciones trigonométricas eran adecuadas para representar sus vibraciones. Se continuó el análisis de las características del sonido y se llegó a la conclusión que la matemática era una herramienta poderosa en su estudio. A pesar de que estos sonidos provengan de diferentes instrumentos y de distintos medios son descritos por las mismas leyes.

Todos los sonidos musicales son periódicos. Esto es, un sonido musical es un movimiento de moléculas de aire que es repetido muchas veces en un segundo. Estos movimientos periódicos pueden describirse usando las funciones seno o coseno.

Recordemos que la función seno tiene periodo 2π, esto significa que la función repite su comportamiento en cada intervalo de longitud 2π a lo largo del eje horizontal (tomamos t como variable independiente). Si t representa el tiempo en segundos, la frecuencia con la cual se repite la gráfica es 1 en 2π segundos.

La función $y = \operatorname{sen} 2t$ tiene las siguientes características: repite su comportamiento dos veces en cada intervalo de longitud 2π o una vez en uno de longitud π. La frecuencia es 2 en cada 2π segundos o 1 en π segundos.

Si $y = \operatorname{sen}((256)(2\pi t))$, y tiene un período de $\frac{1}{256}$, y una frecuencia de 256 por segundo.

Esta función representa un sonido puro o simple que se repite 256 veces en un segundo. Tal sonido es dado por un diapasón, que está diseñado para vibrar a esta frecuencia.

Los valores de y representan la variación de los desplazamientos de una molécula de aire desde su reposo hasta su posición no perturbada.

Pero los sonidos musicales no son simples. Cada sonido musical es una combinación de sonidos simples. Joseph Fourier, estableció que todo sonido musical puede ser representado como la suma de funciones trigonométricas simples.

La forma sería:

$$y = a_1 \operatorname{sen} b_1 x + a_2 \operatorname{sen} b_2 x + ... + a_n \operatorname{sen} b_n x$$

5.5.1 Gráficas sinusoidales

En general: funciones que se pueden representar por:

$$y = A \operatorname{sen}(Bx + C), \quad y = A \cos(Bx + C)$$

o una combinación de estas puede ser usada para obtener conocimientos en los mundos físico, económico, político, artísticos y seguramente en muchos otros. Veamos matemáticamente como se interpreta una de estas funciones.

Características de la Función: $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$, $B > 0$, con $A,\ B,\ C \in \mathbb{R}$ y $B > 0$.

1. La ***amplitud*** es el mayor valor que toma la función.
   - Como $-1 \leq \operatorname{sen}(Bx + C) \leq 1$.
   - Si $A \geq 0$, $-A \leq A \operatorname{sen}(Bx + C) \leq A$.
   - Si $A \leq 0$, $-A \geq A \operatorname{sen}(Bx + C) \geq A$.

Por lo tanto la amplitud de la función es $|A|$.

2. La función es periódica y el periodo es $\dfrac{2\pi}{B}$.

3. La gráfica, con respecto a la de la función seno está desplazada $-\dfrac{C}{B}$ unidades a la derecha o a la izquierda, según si C es negativo o positivo respectivamente. $-\dfrac{C}{B}$ es el ***desface*** o ***corrimiento de fase***.

Ejemplo 5.16. $y = 2\,\mathrm{sen}\,3x$

Amplitud:2, Periodo: $\dfrac{2\pi}{3}$

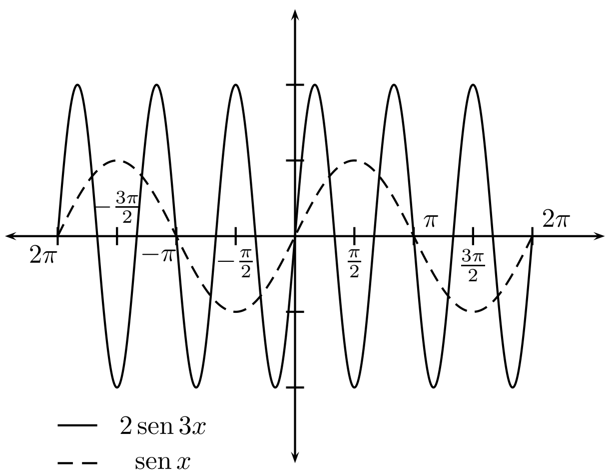


Figura 5.22.

Ejemplo 5.17. $y = -3\,\mathrm{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

Amplitud: $|-3|$, Periodo: $\dfrac{2\pi}{2}$, Desfase: $\dfrac{\pi}{6}$

Ejemplo 5.18. Un Tsunami es una ola de marea ocasionada por un terremoto bajo el mar. Estas olas pueden medir más de 100 pies de altura y pueden viajar a grandes velocidades. A veces los ingenieros representan estas olas por expresiones trigonométricas de la forma: $y = a\cos(bt)$ y utilizan estas representaciones para calcular la efectividad de los muros rompeolas. Supongamos que una ola en el instante $t = 0$ tiene una altura de $y = 25$ pies, viaja a razón de 180 pies por segundo con un periodo de 30 min.

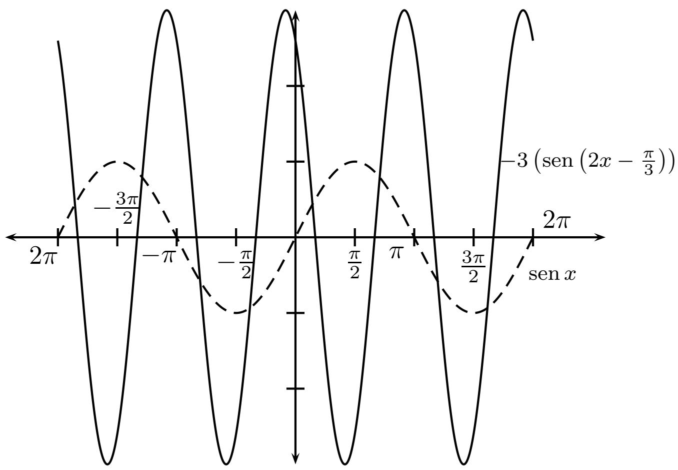


Figura 5.23.

La expresión del movimiento de las olas es:

$$y = a\cos(bt)$$

Como para $t = 0$ $y = 25$ pies, entonces:

$25 = a\cos(b0)$, así $a = 25$ pies.

El período es 30 min. por lo tanto: $\dfrac{2\pi}{b} = 30mín.$

De donde: $b = \dfrac{\pi}{15}$.

La ecuación es: $y = 25\cos\frac{\pi}{15}t$.

Podemos calcular la distancia entre dos crestas consecutivas:

Como recorre 180 pies en un segundo, recorrerá 10.800 pies en un minuto.

La longitud de onda es la distancia entre dos crestas consecutivas, como el período es 30 min., en 30 minutos recorrerá: $(10.800)(30) = 324.000$ pies

5.6 Identidades trigonométricas

Cuando una expresión contiene términos con funciones trigonométricas, se dice que es una ***expresión trigonométrica***. Muchas veces dichas expresiones presentan formas complicadas que se pueden reemplazar por expresiones equivalentes.

Una ***identidad trigonométrica*** es una igualdad entre expresiones trigonométricas, que es verdadera para todos los valores para los que dicha expresión tenga sentido. Esto es: si $f(t)$ y $g(t)$ son expresiones trigonométricas, f(t) $= g(t)$ es una identidad trigonométrica, si la igualdad se cumple para todo t que esté tanto en el dominio de f y como en el de g.

5.6.1 Identidades fundamentales

1. Recíprocas: A partir de las definiciones de las funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica, deducimos

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}.$$

2. Igualmente, teniendo en cuenta las definiciones dadas:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

3. Identidades Pitagóricas:

   (a) $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.
   Recordamos que si (x, y) es un punto que está en el lado final de un ángulo en posición canónica y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\operatorname{sen} t = \frac{y}{r}, \qquad \cos t = \frac{x}{r}.$$

   Entonces:

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

   (b) $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$.
   Se obtiene dividiendo $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, por $\cos^2 t$

(c) $1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$.

Si se divide la igualdad: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, por $\operatorname{sen}^2\theta$.

$$\begin{aligned} 1+\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \\ 1+\cot^2\theta &= \csc^2\theta. \end{aligned}$$

A partir de estas identidades es posible obtener otras más complejas. Realmente no hay un método especial para demostrar que una igualdad es una identidad, pero en general se aconseja iniciar con el lado que parezca más complejo y hacer las transformaciones que se considere adecuadas, para obtener la expresión del otro lado de la igualdad. No conviene transformar los dos miembros simultáneamente por que se estaría suponiendo que la igualdad es verdadera.

Ejemplo 5.19. Haciendo uso de las identidades fundamentales encuentre los valores de las funciones trigonométricas del ángulo θ si: $\tan\theta = -\dfrac{3}{4}$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$.

Solución:

$$\cot\,\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{4}{-3}$$

$$\sec^2\,\theta = 1+\tan^2\,\theta = 1+\frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

$$\sec\,\theta = \pm\sqrt{\frac{25}{16}}.$$

Como la tangente es negativa y el seno positivo, θ está en el segundo cuadrante, por lo tanto la secante es negativa.

$$\sec\theta = -\frac{5}{4}.$$

Esto nos permite concluir que:

$$\cos\theta = -\frac{4}{5}.$$

Haciendo uso de la identidad $1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$.

$$\begin{aligned} \csc^2\theta &= 1+\frac{16}{9} = \frac{25}{9} \\ \csc\theta &= \pm\sqrt{\frac{25}{9}}. \end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}\theta > 0$

$$\csc\theta = \frac{5}{3}.$$

Entonces: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{5}$.

En los siguientes ejemplos vamos a demostrar algunas identidades trigonométricas:

Ejemplo 5.20. $\csc\theta - \operatorname{sen}\theta = \cot\theta\cos\theta$.

Solución:

$$\begin{aligned}\csc\theta - \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{sen}\theta = \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} &= \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta \\ &= \cot\theta\cos\theta.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.21. $\tan t + 2\cos t\csc t = \sec t\csc t + \cot t$.

Solución:

$$\begin{aligned}\tan t + 2\cos t\csc t &= \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} + 2\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 t + 2\cos^2 t}{\cos t\operatorname{sen} t} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + \cos^2 t}{(\cos t)(\operatorname{sen} t)} \\ &= \frac{1}{(\cos t)(\operatorname{sen} t)} + \frac{\cos^2 t}{(\cos t)(\operatorname{sen} t)} \\ &= (\sec t)(\csc t) + \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \\ &= (\sec t)(\csc t) + \cot t.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.22. $(\sec u - \tan u)(\csc u + 1) = \cot u$.

Solución:

$$\begin{aligned}
(\sec u - \tan u)(\csc u + 1) &= \left(\frac{1}{\cos u} - \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{sen} u} + 1\right) \\
&= \left(\frac{1 - \operatorname{sen} u}{\cos u}\right)\left(\frac{1 + \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} u}\right) \\
&= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 u}{(\cos u)(\operatorname{sen} u)} \\
&= \frac{\cos^2 u}{(\cos u)(\operatorname{sen} u)} \\
&= \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u} = \cot u.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.23. $\operatorname{sen}^4 r - \cos^4 r = \operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^4 r - \cos^4 r &= \left(\operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r\right)\left(\operatorname{sen}^2 r + \cos^2 r\right) \\
&= \operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.24. $\dfrac{1}{1 - \cos v} + \dfrac{1}{1 + \cos v} = 2\csc^2 v$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 - \cos v} + \frac{1}{1 + \cos v} &= \frac{(1 + \cos v) + (1 - \cos v)}{(1 - \cos v)(1 + \cos v)} \\
&= \frac{2}{1 - \cos^2 v} \\
&= \frac{2}{\operatorname{sen}^2 v} \\
&= 2\csc^2 v.
\end{aligned}$$

Observe que en cada una de las demostraciones anteriores:

- Se inició en el lado más complejo.
- Se efectuaron las operaciones básicas.
- Se hizo uso de la factorización
- Se emplearon identidades fundamentales.

5.6.2 Fórmulas de suma y resta

En ocasiones se encuentran expresiones de la forma:

$\cos(\alpha+\beta)$, $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, $\ldots$, y es importante poder escribirlas directamente en términos de $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{sen}\beta$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$.

Mediante construcciones geométricas, la definición de distancia y el uso de la identidades fundamentales se puede demostrar que

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

y a partir de esta igualdad, determinar el valor del coseno de la suma. Así: la fórmula para determinar el coseno de la suma se encuentra a partir de la anterior, expresando a $s+t$ como $s-(-t)$:

$$\cos(s+t)=\cos(s-(-t))=\cos s\cos(-t)+\operatorname{sen}s\operatorname{sen}(-t)\,.$$

Teniendo en cuenta que $\cos(-t)=\cos t$ y que $\operatorname{sen}(-t)=-\operatorname{sen}t$:

$$\cos(s+t)=\cos s\cos t-\operatorname{sen}s\operatorname{sen}t.$$

Las igualdades son válidas para cualquier tipo de ángulos y su medida puede estar dada en grados sexagesimales o en radianes.

Usando estas identidades podemos hallar el seno y el coseno del complemento de un ángulo:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\alpha.$$

Como $\cos\frac{\pi}{2}=0$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1$. Entonces, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$.

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)\\&=\cos\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\\&=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\end{aligned}$$

Así, el seno de un ángulo es el coseno de su complemento y el coseno de un ángulo es el seno de su complemento.

Haciendo uso de este resultado podemos encontrar el seno de la suma y de la diferencia de dos ángulos.

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right).$$

Se utiliza la identidad para el coseno de la diferencia:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\beta.$$

Nuevamente a partir de la conclusión encontrada:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Mediante un razonamiento similar al que se hizo para el caso del coseno se puede hallar el seno de la diferencia:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha-\beta)&=\operatorname{sen}(\alpha+(-\beta))\\&=\operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta)\\&=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha.\end{aligned}$$

$\tan(\alpha\pm\beta)$ se obtiene haciendo uso de la identidad $\tan t=\dfrac{\operatorname{sen}t}{\cos t}$.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\qquad\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

Ejemplo 5.25. Como $\dfrac{11\pi}{12}=\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$. A partir de los valores de seno y coseno de $\dfrac{2\pi}{3}$ y $\dfrac{\pi}{4}$, se puede hallar sen $\dfrac{11\pi}{12}$, cos $\dfrac{11\pi}{12}$ y $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{12}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\frac{11\pi}{12} &= \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)\\
&= -\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{4}\\
&= -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{11\pi}{12}\right) &= \frac{\tan\frac{2\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{2\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}\\
&= \frac{-\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.26. Si α es un ángulo en el primer cuadrante con $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ y β es un ángulo en el segundo cuadrante con $\operatorname{sen}\beta=\dfrac{12}{13}$. Evalúe $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ y $\tan(\alpha+\beta)$. Determine el cuadrante de $\alpha+\beta$.

Solución:

$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{16}{25}}$. Como α es un ángulo de primer cuadrante:

$$\operatorname{sen}\,\alpha = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\,\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned}\cos^2\,\beta &= 1-\frac{144}{169} = \frac{25}{169}\\ \cos\,\beta &= \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{5}{13}.\end{aligned}$$

Como β es un ángulo de segundo cuadrante:

$$\begin{aligned}\cos\beta &= -\frac{5}{13}\\ \tan\beta &= \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha\\ &= \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{33}{65}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ &= \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = -\frac{56}{65}\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{3}{4}-\frac{12}{5}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{12}{5}\right)} = -\frac{33}{56}$$

Como $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ es positivo y $\cos(\alpha+\beta)$ es negativo, $\alpha+\beta$ es un ángulo de segundo cuadrante.

Ejemplo 5.27. Si α es un ángulo de segundo cuadrante y β es un ángulo de tercer cuadrante, con $\cos\alpha = \cos\beta = -\frac{3}{7}$, calcule $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ y $\cos(\alpha-\beta)$ y determine el cuadrante para $\alpha-\beta$.

Solución:

$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{9}{49}}$, como α es un ángulo de segundo cuadrante:

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{40}{49}} = \frac{2}{7}\sqrt{10}.$$

Como β es un ángulo de tercer cuadrante:

$$\operatorname{sen}\beta = -\frac{2}{7}\sqrt{10}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\
&= \left(\frac{2}{7}\sqrt{10}\right)\left(-\frac{3}{7}\right) - \left(\frac{-2}{7}\sqrt{10}\right)\left(-\frac{3}{7}\right) \\
&= -\frac{12}{49}\sqrt{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\
&= \left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{3}{7}\right) + \left(\frac{2}{7}\sqrt{10}\right)\left(-\frac{2}{7}\sqrt{10}\right) \\
&= \frac{9}{49} - \frac{4}{49}10 = \frac{1}{49}\left(9-4\left(10\right)\right) \\
&= -\frac{31}{49} < 0
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ y $\cos(\alpha-\beta)$ son negativos, $\alpha-\beta$ es un ángulo de tercer cuadrante.

Ángulos múltiples

A partir de las fórmulas del seno y coseno para la suma de dos ángulos se pueden encontrar fórmulas para calcular los valores de seno y coseno del doble de un ángulo:

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$$

$$\tan 2t = \frac{2 \tan t}{1 - \tan^2 t}$$

Para demostrar estas afirmaciones, se toma $2t = t + t$, y se aplican las fórmulas respectivas:

$$\operatorname{sen} 2t = \operatorname{sen}(t + t) = \operatorname{sen} t \cos t + \cos t \operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$$

$$\cos 2t = \cos(t + t) = \cos t \cos t - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$$

$$\tan 2t = \tan(t + t) = \frac{\tan t + \tan t}{1 - \tan t \tan t} = \frac{2 \tan t}{1 - \tan^2 t}$$

En cada uno de los siguientes ejemplos hallaremos: $\operatorname{sen} 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\tan 2\theta$, haciendo uso de la información dada.

Ejemplo 5.28. $\operatorname{sen} \theta = -\frac{4}{5}$; $270^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

Solución:

Como θ pertenece al cuarto cuadrante $\cos \theta$ es positivo.

Usando la identidad fundamental:

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$
$$\cos \theta = \pm\sqrt{\frac{9}{25}}$$
$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$
$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}.$$

Se puede hallar $\tan 2\theta$ calculando directamente $\dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta}$

$$\tan 2\theta = \frac{24}{7}.$$

Ejemplo 5.29. $\sec\theta = -3$; $180° < \theta < 270°$.

Solución:

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} = -\dfrac{1}{3}.$

Por las identidades pitagóricas podemos afirmar:

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{9}}.$$

Como θ está en el tercer cuadrante:

$$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}\sqrt{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{7}{9}$$

$$\tan\ 2\theta = -\frac{4}{7}\sqrt{2}.$$

5.7 Ecuaciones trigonométricas

Cuando se propone una igualdad de expresiones trigonométricas que no es una identidad, el objetivo es determinar valores que la hacen verdadera; para ello se requiere resolver una ecuación. La ecuación puede no tener solución y si existe, puede no ser única, puede haber infinitas soluciones en un intervalo, por esto es muy importante tener en cuenta el intervalo en donde se va a resolver la ecuación.

En los siguientes ejemplos resolveremos algunas ecuaciones.

Ejemplo 5.30. $2\cos\theta + 1 = 0$.

Solución:

Si $2\cos\theta + 1 = 0$, entonces:

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}.$$

Para encontrar la solución general se busca primero los ángulos $\theta : 0 \leq \theta \leq 2\pi$ que satisfacen la igualdad. Como la función coseno es negativa en los cuadrantes segundo y tercero, buscamos qué ángulos tienen como valor de coseno $-\frac{1}{2}$ en dichos cuadrantes. Los ángulos que satisfacen esta condición son $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$.

Teniendo en cuenta que se debe encontrar la solución general, y que la función coseno tiene como periodo 2π,la solución general es:

$$\frac{2\pi}{3} + 2n\pi; \quad \frac{4\pi}{3} + 2n\pi,$$

donde n es un entero.

Ejemplo 5.31. $(\csc\theta)(\operatorname{sen}\theta) = 1$

Solución:

Si $\operatorname{sen}\theta \neq 0$,

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta},$$

por lo tanto:

$$(\csc\theta)(\operatorname{sen}\theta) = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)(\operatorname{sen}\theta) = 1$$

Lo anterior indica que los únicos valores que no satisfacen la ecuación son aquellos para los cuales el seno es igual a cero, o sea los múltiplos enteros de π. Así la solución es el conjunto de reales θ tales que $\theta \neq n\pi$, n entero. El conjunto de soluciones es:

$$S = \mathbb{R} \setminus \{n\pi \ : \ n \in Z\}.$$

Ejemplo 5.32. $\cot^2\theta - \cot\,\theta = 0$.

Solución:

$$\cot^2\theta - \cot\theta = \cot\theta\,(\cot\theta - 1) \quad \text{(factorizando)}.$$

Entonces:

$$\cot\theta\,(\cot\theta - 1) = 0 \quad \text{(hipótesis)}.$$

Por lo tanto:

$$\cot\theta = 0 \quad \text{o} \quad \cot\theta - 1 = 0.$$

Si $\cot\theta = 0$, entonces $\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, n entero.

Si $\cot\theta = 1$, entonces $\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$ ó $\theta = \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi$, n entero.

Así:

$$S = \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} :\ n \text{ es entero}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + 2n\pi :\ n \text{ es entero}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{4} + 2n\pi :\ n \text{ entero}\right\}$$

En los siguientes ejemplos encontraremos las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Ejemplo 5.33. $2\cos^2\gamma + \cos\gamma = 0$

Solución:

$$2\cos^2\gamma + \cos\gamma = \cos\gamma\,(2\cos\gamma + 1)\,.$$

$\cos\gamma\,(2\cos\gamma + 1) = 0$, por lo tanto:

$$\cos\gamma = 0 \quad \text{o} \quad 2\cos\gamma + 1 = 0.$$

Si $\cos\gamma = 0$, entonces $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ o $\gamma = \dfrac{3\pi}{2}$, no se toman más valores debido a que nos interesan solo los que están en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Si $2\cos\gamma + 1 = 0$, $\cos\gamma = -\dfrac{1}{2}$, los valores en $[0, 2\pi]$ que satisfacen la ecuación son: $\dfrac{2\pi}{3}$ y $\dfrac{4\pi}{3}$.

El conjunto solución es:

$$S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}.$$

Ejemplo 5.34. $2\tan t - \sec^2 t = 0$.

Solución:

Expresamos todo en términos de una sola función. Observamos que es más conveniente hacer uso de la identidad: $\sec^2 t = 1 + \tan^2 t$.

Haciendo el reemplazo tenemos:

$$2\tan t - \sec^2 t = 2\tan t - \big(1 + \tan^2 t\big) = 0.$$

O sea:

$$\begin{aligned} -\tan^2 t + 2\tan t - 1 &= 0 \\ \tan^2 t - 2\tan t + 1 &= 0 \quad \text{(multiplicando por -1)}. \end{aligned}$$

Esta es una ecuación cuadrática. Si hacemos $x = \tan t$, la ecuación se convierte en:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0, \quad \text{(Factorizando)}. \end{aligned}$$

Así $x = 1$. Entonces:

$$\tan t = 1.$$

Los valores en el intervalo $[0, 2\pi]$, que satisfacen la igualdad son: $\dfrac{\pi}{4}$ y $\dfrac{5\pi}{4}$.

Ejemplo 5.35. $\cos\theta - \operatorname{sen}\theta = 1$.

Solución:

Para facilitar los cálculos, despejamos $\cos\theta$ y después expresamos todo en términos de una sola función.

$$\cos\theta = 1 + \operatorname{sen}\theta.$$

Elevamos al cuadrado:

$$\cos^2\theta = 1 + 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta.$$

Debe tenerse cuidado porque al elevar al cuadrado podrían introducirse soluciones extrañas.

$$\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta + 1 - \cos^2\theta = 0.$$

Como $1-\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$,

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta &= 0 \\ \operatorname{sen}\theta\,(\operatorname{sen}\theta + 1) &= 0 \quad \text{(simplificando y factorizando).} \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen}\theta = 0 \text{ o } \operatorname{sen}\theta + 1 = 0.$$

Si $\operatorname{sen}\theta = 0$, entonces $\theta = 0, \pi, 2\pi$.

Si $\operatorname{sen}\theta + 1 = 0$, entonces $\operatorname{sen}\theta = -1$, luego $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$.

Como es posible que haya soluciones extrañas, debemos verificar si todas las encontradas satisfacen la ecuación.

$$\begin{aligned} &\cos 0 - \operatorname{sen} 0 = 1 - 0 = 1, && 0 \text{ si satisface la ecuación} \\ &\cos\pi - \operatorname{sen}\pi = -1 - 0 = -1, && \pi \text{ no satisface la ecuación} \\ &\cos 2\pi - \operatorname{sen} 2\pi = 1 - 0 = 1, && 2\pi \text{ si satisface la ecuación} \\ &\cos\frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = 0 - (-1) = 1, && \frac{3\pi}{2} \text{ si satisface la ecuación.} \end{aligned}$$

De lo anterior:

$$S = \left\{0, 2\pi, \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

5.8 Aplicaciones de la trigonometría

Hemos visto aplicaciones en problemas que se pueden resolver utilizando las funciones trigonométricas en triángulos rectángulos. Hay casos en los que se requiere el uso de triángulos que no son rectángulos y sin embargo es posible encontrar sus elementos (lados, ángulos), mediante los teoremas del seno y del coseno, que establecen relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo no rectángulo. En estos casos los ángulos se miden en grados.

5.8.1 Teorema del seno

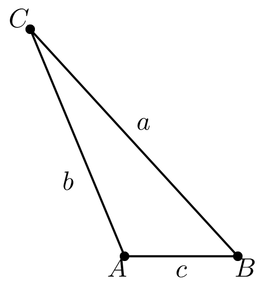


Figura 5.24.

Si en el triángulo $\triangle ABC$ (figura 5.24) a, b y c son las longitudes de los lados opuestos a los ángulos A, B y C, respectivamente:

$$\frac{\operatorname{sen}\angle A}{a}=\frac{\operatorname{sen}\angle B}{b}=\frac{\operatorname{sen}\angle C}{c}.$$

Para encontrar todos los elementos de un triángulo mediante el teorema del seno, debe utilizar cualquiera de las siguientes informaciones:

1. Dos lados y un ángulo opuesto.
2. Dos ángulos y cualquier lado.

Ejemplo 5.36. Encuentre la medida de los ángulos y de los lados desconocidos del triángulo $\triangle ABC$, figura 5.25, si se sabe que $\angle\alpha = 115°$, $a = 46$, $b = 40$.

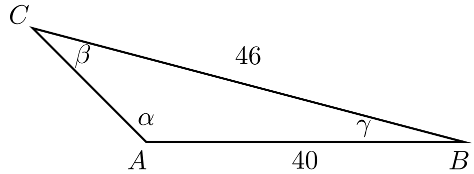


Figura 5.25.

Solución:

Si $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b}$, entonces $\dfrac{\operatorname{sen}115°}{46}=\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{40}$.

Despejando:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{40\operatorname{sen}115^\circ}{46} \approx \frac{40\,(0.906)}{46}.$$

Si $\operatorname{sen}\beta \approx 0.787$, entonces $\beta \approx 51.9^\circ$.

Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° entonces

$$\gamma = 180^\circ - (51.9 + 115) \approx 13.1^\circ.$$

Si $\dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a}$, entonces $\dfrac{\operatorname{sen}13.1^\circ}{c} = \dfrac{\operatorname{sen}115^\circ}{46}$.

Despejando:

Si $c = \dfrac{46\operatorname{sen}13.1^\circ}{\operatorname{sen}115^\circ}$, entonces $c \approx \dfrac{(46\,(0.226))}{0.906} \approx 11.5$.

Ejemplo 5.37. Dos observadores situados a 110 metros de separación, en puntos A y B de la orilla de un río, están mirando una torre en la orilla opuesta en el punto C (figura 5.26). Si los ángulos $\angle CAB$ y $\angle CBA$, miden 43° y 57° respectivamente. ¿ A qué distancia está el primer observador de la torre?

Solución:

A partir del triángulo de la figura 5.26.

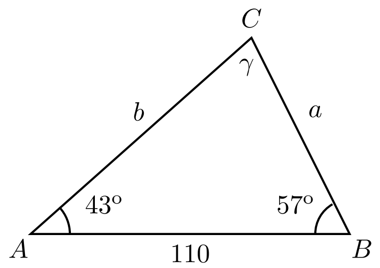


Figura 5.26.

$$\gamma = 180^\circ - (57^\circ + 43^\circ) = 80^\circ$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen}57^\circ} = \frac{110}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Despejando:

$$b = \frac{110 \operatorname{sen} 57^\circ}{\operatorname{sen} 80^\circ}\, m = \frac{92.25}{0.98}\, m \approx 94.13\, m.$$

El primer observador está aproximadamente a $94.13\, m$ de la torre.

Ejemplo 5.38. Un poste vertical de 60 pies de longitud está colocado en la cima de una colina, proyecta una sombra de 138 pies de largo directamente colina abajo a lo largo del camino, cuando el ángulo de elevación del sol es de 58° (figura 5.27). Encuentre el ángulo de inclinación θ del camino.

Solución:

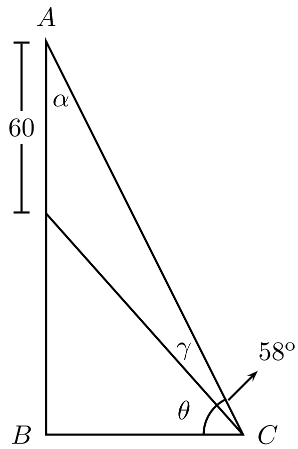


Figura 5.27.

El triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo. Si se conoce γ, se puede calcular θ, teniendo en cuenta que $58^\circ = \theta + \gamma$.

En el triángulo $\triangle ABC$, $\alpha + 58^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Entonces $\alpha = 32^\circ$.

Por el teorema del seno: $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{138} = \dfrac{\operatorname{sen} \gamma}{60}$.

Despejando: $\operatorname{sen} \gamma = \dfrac{(60)\,(0.53)}{138} = 0.23$; $\gamma \approx 13.29^\circ$.

$$\theta = 58^\circ - 13.29^\circ = 44.71^\circ.$$

El ángulo de inclinación es de 44.71°.

5.8.2 Teorema del coseno

En algunos problemas no es posible aplicar solamente el teorema del seno, como es el caso en el que se conocen solamente dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Si se tienen estos elementos y se quiere calcular los que hacen falta, se aplica el teorema del coseno y, ya conocido el tercer lado, se puede utilizar el Teorema del Seno.

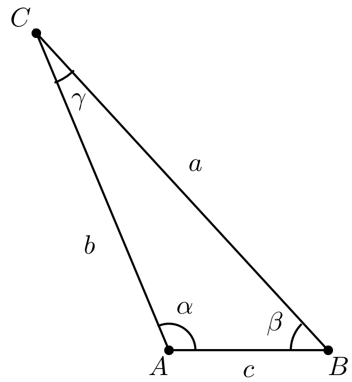


Figura 5.28.

Si en el triángulo $\triangle ABC$,figura 5.28, a, b y c son los lados opuestos a los ángulos α, β y γ, respectivamente, entonces:

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Ejemplo 5.39. En una esquina de un campo triangular, el ángulo mide 52.4°, los lados que se encuentran en esa esquina miden 100 metros y 120 metros de largo (figura 5.29). ¿Cuánto mide el tercer lado?

Solución:

$$l^2 = 100^2 + 120^2 - 2\,(120)\,(100)\cos(52.4°)$$
$$l^2 = 10000 + 14400 - 24000\,(0.61) = 9760\,m^2$$

$l = \sqrt{9760} \approx 98.9$ metros.

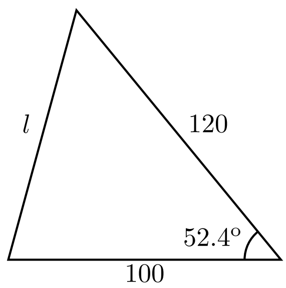


Figura 5.29.

Ejemplo 5.40. Dos corredores A, C parten del mismo punto B a las 12:00 del día. Uno de ellos se dirige hacia el norte a 6 millas por hora y el otro se dirige a 68° al este del norte a 8 millas por hora (figura 5.30). ¿Cuál es la distancia entre ellos a las 3:00 de la tarde?

Solución:

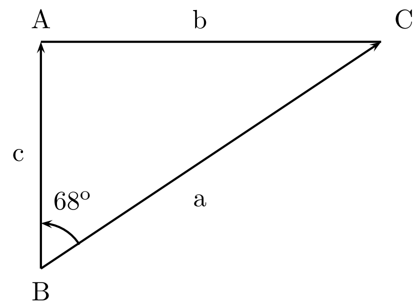


Figura 5.30.

Debemos encontrar la longitud de b, entonces encontramos las longitudes de a y c: como parten a las 12 del día, a las 3:00 de la tarde cada uno ha corrido durante tres horas.

Así:

$$c = (6\,\mathrm{m/h})\,3\,\mathrm{h} = 18 \text{ millas}$$
$$a = (8\,\mathrm{m/h})\,3\,\mathrm{h} = 24 \text{ millas}$$

Por el teorema del coseno: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(68°)$.

$$b^2 = 18^2 + 24^2 - 2\,(18)\,(24)\,(0.37)$$
$$b^2 = 580.32$$
$$b \approx 24\,\mathrm{m}.$$

Taller 1

1. La rueda delantera del triciclo de Pedro tiene un diámetro de 10 pulgadas. ¿Qué tan lejos llegará pedaleando 60 revoluciones?

2. Un reloj tiene el minutero y el horario del mismo tamaño, miden seis pulgadas y llegan hasta la orilla de la carátula del reloj. Encuentre el área de la región angular entre las dos manecillas a las 5:40 a.m.

3. Indique en grados y en radianes el ángulo central θ, en una circunferencia de radio $4\,cm$, subtendido por el arco S que tiene $7\,cm$ de longitud.

4. Halle el área del sector determinado por un ángulo central de medida $50°$ en un círculo de diámetro 16 m.

5. Encuentre el área de la región sombreada, figura 5.31, teniendo en cuenta que el ángulo en B es recto.

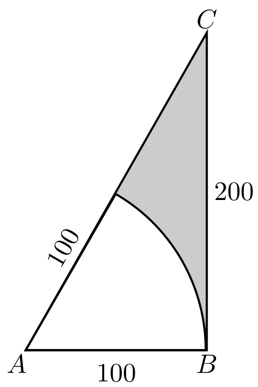


Figura 5.31.

6. Se utiliza una gran polea de 3 pies de diámetro para levantar cargas. Halle la distancia que la carga es levantada si la polea gira un ángulo de $7\dfrac{\pi}{4}$ radianes.

7. Un guardabosques que está a 200 pies de la base de un árbol, observa que el ángulo entre el suelo y la parte superior del árbol es de $60°$. Calcule la altura del árbol.

8. Se desea construir una rampa de 24 pies de largo que se levante a una altura de 5 pies sobre el nivel del suelo. Calcule el ángulo de la rampa con la horizontal.

9. Una escalera que mide 20 pies se apoya en un edificio y el ángulo entre ambos es de $22°$.

   (a) Calcule la distancia del pie de la escalera al piso.

   (b) Si la distancia del pie de la escalera al edificio aumenta 3 pies, ¿aproximadamente cuánto bajará la parte alta de la escalera?

10. En cada caso halle los valores exactos de la seis funciones trigonométricas:

    (a) El punto de coordenadas $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ pertenece al lado final del ángulo.

    (b) $(30, -40)$ es un punto del lado final del ángulo.

    (c) El lado final está en el tercer cuadrante, sobre la recta $3y - 4x = 0$.

11. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ, si $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{5}$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

12. Si $\tan\alpha = 2$, $\pi < \alpha < 3\dfrac{\pi}{2}$, encuentre los valores de $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$.

Taller 2

1. Usando los ángulos de referencia encuentre el valor exacto de:

   (a) $\cos 150°$

   (b) $\cot\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$

   (c) $\tan(-225°)$

   (d) $\csc\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$

2. En cada caso encuentre: amplitud, periodo y corrimiento de fase.

   (a) $y = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,4x$

   (b) $y = \mathrm{sen}\,(-4x)$

   (c) $y = -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x + 4\pi\right)$

   (d) $y = -2\,\mathrm{sen}\,(2x - \pi) + 1$

3. Para cada una de las siguientes gráficas (figuras 5.32 y 5.33) encuentre: amplitud y periodo. Expréselas en la forma $y = a\,\mathrm{sen}\,bx$, o $y = a\cos bx$.

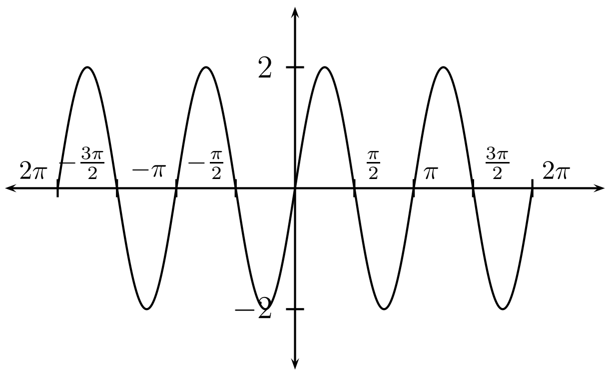


Figura 5.32.

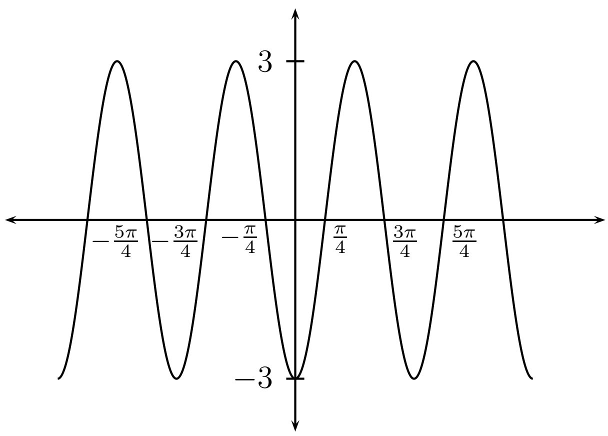


Figura 5.33.

4. El bombeo cardíaco consta de una fase sistólica, en la cual la sangre sale del ventrículo izquierdo hacia la aorta, y de una fase

diastólica durante la que el corazón se relaja. En ocasiones, la función $y = a$ sen bt cuya gráfica se muestra en la figura 5.34, sirve para hacer un modelo del ciclo completo de este proceso. Para un individuo en particular, la fase sistólica dura $\frac{1}{4}$ de segundo y tiene un volumen máximo de 8 litros por minuto. Encuentre a y b.

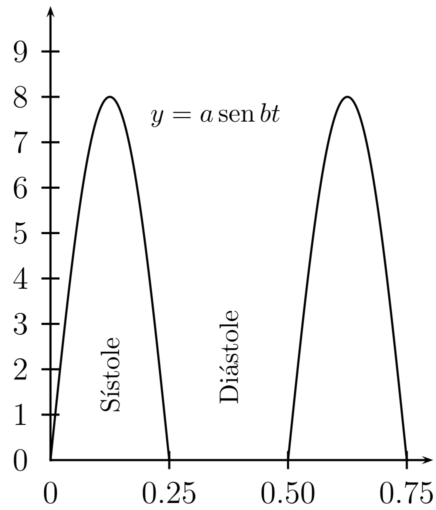


Figura 5.34.

5. La onda de cierta estación de FM tiene la forma: $y = A\,\mathrm{sen}\,(2\pi 10^8 t)$, donde t está medido en segundos. ¿Cuál es la frecuencia de esa onda?

6. En un ecosistema de presa-depredador, el número de depredadores y de presas tiende a variar periódicamente. En cierta región con lobos como depredadores y conejos como presa, la población de conejos varía con la fórmula:

$$R = 15000 + 1500\,\mathrm{sen}\,2t,$$

donde t está medido en años, después del 1º de Enero de 2000.

   (a) ¿Cuál es el mayor número de conejos que puede existir en algún momento?
   (b) ¿Cuándo se alcanzó ese nḿero por primera vez?
   (c) ¿Cuál fue la población el 1º de Enero de 2003?

7. Un peso atado a un resorte suspendido en un techo, se está moviendo hacia arriba y hacia abajo. Su movimiento está descrito por la ecuación:

$$y = 8 + 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right),$$

y está medido en pies y t, en segundos. ¿Cuál es la distancia mínima del peso al techo y cuándo ocurre por primera vez?

8. Encuentre el valor exacto de:
   (a) $\cos\left(-3\frac{\pi}{4}\right)$
   (b) $\operatorname{sen}(-225°)$
   (c) $\tan(-5\pi)$

9. Escriba en términos de las funciones trigonométricas de sus respectivos ángulos de referencia:
   (a) $\cos(510°)$
   (b) $\cot\left(19\frac{\pi}{6}\right)$
   (c) $\csc(5)$
   (d) $\operatorname{sen}(-235°)$
   (e) $\tan(13)$

10. Si $\pi < t < 3\frac{\pi}{2}$, y $\cos t = -\frac{5}{13}$, encuentre $\operatorname{sen} 2t, \cos 2t, \tan 2t$.

11. Si α y β son ángulos de primer y tercer cuadrante respectivamente, con $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{5}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$:
    (a) Encuentre: $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{sen} 2\beta$.
    (b) ¿En qué cuadrantes están $\alpha+\beta$ y $\alpha-\beta$, respectivamente?

12. Simplifique cada una de las siguientes expresiones:
    (a) $\dfrac{\operatorname{sen}^2\varphi\,(1+\csc\varphi)}{1+\csc\varphi\operatorname{sen}^2\varphi}$.
    (b) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.
    (c) $\dfrac{\cot^2\theta - 4}{\cot^2\theta - \cot\theta - 6}$.

Taller 3

1. Encuentre la solución de cada ecuación en el intervalo $[0, \pi]$:

   (a) $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$

   (b) $\sec \beta = 2$

   (c) $\sec^2 \alpha - 4 = 0$

   (d) $2 \operatorname{sen}^2 u = 1 - \operatorname{sen} u$

   (e) $2 \cos^2 t + 3 \cos t + 1 = 0$

2. Encuentre la solución de cada ecuación en el intervalo $[0, 2\pi]$:

   (a) $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$

   (b) $\operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen} \theta - 6 = 0$

   (c) $2 \tan t - \sec^2 t = 0$

3. En un día despejado con D horas de iluminación, la intensidad de la luz solar I (en calorías/cm^2) se puede calcular mediante: $I = I_m \operatorname{sen}^3 \left(\frac{\pi t}{D}\right)$, $0 \leq t \leq D$, donde I_m es la intensidad máxima. Un dermatólogo recomienda protegerse del sol cuando la intensidad I rebase el 75% de la máxima. Si $D = 12$ horas, calcule el número de horas para las que se requiere protección en un día despejado.

4. Un jardín triangular tiene lados que miden 42, 50 y 63 m. Encuentre la medida del ángulo menor.

5. Dos automóviles parten de la intersección de dos carreteras rectas, y viajan a lo largo de ellas a una velocidad de 55 millas por hora y 65 millas por hora, respectivamente. Si el ángulo de intersección de las carreteras mide 72°, ¿qué tan separados están los automóviles después de 36 minutos?

6. Las boyas A, B y C, marcan los vértices de una pista triangular de carreras en un lago. Las boyas A y B, distan 4200 pies, las boyas A y C distan 3800 pies y el ángulo $\angle CAB$ mide 100°. Si la lancha ganadora de la carrera recorrió la pista en 6.4 segundos, ¿cuál fue su promedio en millas por hora?

7. Un trotador corre a una velocidad constante de una milla cada 8 minutos en dirección S40°E durante 20 minutos y luego en dirección N20°E durante los siguientes 16 minutos. Calcule la distancia desde el punto final al punto de partida.

Taller 4

1. De las siguientes afirmaciones:

   1) $\operatorname{sen} 90 = 1$
   2) $\tan(x + \dfrac{\pi}{2}) = \tan x$
   3) $\cos\left(11\dfrac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$
   4) $\tan(x + 5\pi) = \tan x$

   Son verdaderas:

   a. 1) y 4)
   b. 2) y 3)
   c. 1) y 2)
   d. 2) y 4)

2. Si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, entonces una de las siguientes afirmaciones es cierta:

   a. $\operatorname{sen} 3x = 0$ no tiene solución.
   b. $\cos 3x = 0$ tiene una única solución.
   c. $\tan 3x = 0$, tiene infinitas soluciones.
   d. $\operatorname{sen} 3x = \cos 3x$, no tiene solución.

3. Una las siguientes afirmaciones es verdadera:

   a. El periodo de $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x + 3\right)$ es π.
   b. La amplitud de $\operatorname{sen}(\pi x + 1) + 2$ es 3.
   c. $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, está desfasado, con respecto a $\operatorname{sen} x$, $\dfrac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda.

d. La amplitud de $-2\cos(2x+1)$ es -2.

4. Vientos dominantes han ocasionado la inclinación de $11°$ de un viejo árbol hacia el Este desde la vertical. Considere las siguientes afirmaciones:

   (a) El sol en el Oeste está a $32°$ arriba de la horizontal.

   (b) El árbol mide 114 pies de la corona al suelo.

   Si se quiere hallar la longitud de la sombra:

   a. La información a) es suficiente pero b) no lo es.

   b. La información b) es suficiente pero a) no lo es.

   c. Se necesitan las dos informaciones.

   d. Cualquiera de las dos informaciones es suficiente.

5. De las siguientes afirmaciones:

   1) $\cos(t+\pi) = -\cos t$

   2) $\operatorname{sen}\left(t+\dfrac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} t$

   3) $\operatorname{sen}\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos t$

   4) $\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} t$

   Son verdaderas:

   a. 1) y 3)

   b. 2) y 4)

   c. 3) y 4)

   d. 1) y 2)

Bibliografía

[1] Allendoerfer, C.; Oakley, C. *Fundamentos de matemáticas universitarias*. MacGraw-Hill, 1973.

[2] Brumfiel, C. F.; Eicholz, R. E.; Shanks, M. E. *Geometry*. Addison Wesley, Reading, 1962.

[3] Clemens, S. R.; Cooney T. *Geometry*. Addison-Wesley Longman, 1ra edición, México, 1998.

[4] Coxeter, H.; Greitzer, S. *Fundamentos de Geometría*. Limusa-Wiley, México, 1971.

[5] Gutierrez, M. V. *Notas de Geometría*. Univ. Nal. de Col., Bogotá, 1992.

[6] Moise, E. *Geometría Elemental desde un Punto de Vista Avanzado*. CECSA, México, 1968.

[7] Moise, E.; Downs, F. *Modern Geometry*. Addison-Wesley, Mexico, 1986.

[8] Leithold, L. *Matemàticas previas al Cálculo*. Oxford University Press, tercera edición, 1994.

[9] Stewart, J.; Redlin, L.; Watson S. *Precálculo. Matemáticas previas al Cálculo*. Internacional Thomson editores, tercera edición, 2001.

[10] Swokowski, E.; Cole, J. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Internacional Thomson editores, novena edición, 1998.

Índice de Materias