UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Propuesta didáctica usando el modelo IMPROVE integrado con GeoGebra para mejorar el desempeño en la resolución de problemas con funciones en los estudiantes del grado noveno de la I.E. Liceo Antioqueño

Juan David López Jaramillo

Universidad Nacional de Colombia
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Facultad de Ciencias
Medellín, Colombia
2023

Propuesta didáctica usando el modelo IMPROVE integrado con GeoGebra para mejorar el desempeño en la resolución de problemas con funciones en los estudiantes del grado noveno de la I.E. Liceo Antioqueño

Juan David López Jaramillo

Trabajo final de maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las ciencias Exactas y Naturales

Director:

PhD. Matemáticas Juan Diego Vélez Caicedo

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2023

Dedicatoria

A mi madre, Soledad Jaramillo, por siempre animarme a ser mejor persona, mejor profesional, y por ser mi ejemplo de entrega incondicional y de sacrificio por amor a su familia.

A la familia Ibáñez, quienes desde muy pequeño me acogieron y creyeron en mí. Especialmente a mis madrinas: Rosario Rodríguez, cuya dedicación y amor han sido incondicionales, y Rocío Ibáñez, quien con su apoyo, consejo y exigencia me hizo superarme en cada etapa de vida. Y a mi padrino, Belisario Ibáñez, quien desde el cielo aún me inspira para ser un mejor hombre.

A mi novia Carol Realpe, cuyo amor, comprensión, confianza y apoyo me permitieron continuar en los momentos más difíciles y de mayor duda.

Agradecimientos

A la I.E. Liceo Antioqueño, Sede Central*, por permitirme el espacio y tiempo para desarrollar y culminar las actividades de enseñanza propuestas en esta experiencia pedagógica.*

A los Estudiantes del grado 9° de la Sede Central *por su compromiso y participación en las actividades propuestas en esta experiencia pedagógica.*

A los docentes de la Universidad Nacional *por compartir su valioso conocimiento, especialmente al Doctor en Matemáticas Juan Diego Vélez Caicedo por sus valiosas orientaciones y profesionalismo.*

Resumen

El presente trabajo es un estudio sobre la enseñanza – aprendizaje del concepto de función, sus elementos y formas de representación, impartido a los estudiantes del grado 9° de la I.E. Liceo Antioqueño, Sede Central. El trabajo tiene en cuenta como referente teórico la metodología IMPROVE, de Mevarech y Kramarski, la cual se fundamenta en la metacognición.

Inicialmente, se realizó una fase de diagnóstico para determinar los estados de aprendizajes de los estudiantes. De acuerdo con estos resultados se escogió un grupo adecuado para implementar la propuesta. Con base en el diagnóstico, se propuso una intervención en el aula bajo los criterios que señala IMPROVE. Dicha propuesta pretende propiciar el aprendizaje y la reflexión sobre las funciones matemáticas en los estudiantes. Esta se compone de una actividad de conceptualización y práctica, y de una evaluación formativa para determinar los estudiantes que alcanzaron un buen dominio del tema, y aquellos que no. Luego se realizaron actividades correctivas para intentar llevar a la mayor cantidad de estudiantes a una comprensión satisfactoria de la noción de función.

Se analizó la información recolectada desde un enfoque cualitativo e interpretativo, y desde una reflexión sobre los resultados y las observaciones durante el desarrollo de la propuesta. Se evaluó el impacto de la implementación de la propuesta, y se formularon las conclusiones de acuerdo con los objetivos del trabajo. Igualmente, se aportaron algunas recomendaciones para el futuro trabajo con este tipo de metodología.

Se destaca el impacto positivo de la implementación de la propuesta en el proceso de enseñanza (aprendizaje de la función, sus elementos y sus formas de representación), no solamente en estudiantes con desempeño alto o superior, sino también en aquellos con desempeño bajo o básico. Haber propiciado la comprensión de estas nociones en este último grupo es un logro importante pues consolida los conocimientos y la confianza de los estudiantes para un posterior estudio de otras nociones matemáticas.

Palabras claves: IMPROVE, metacognición, función, elementos de la función, formas de representación, situaciones problema, aprendizaje colaborativo.

Abstract

Didactic proposal using de IMPROVE model integrated with GeoGebra to improve performance in solving problems with functions in ninth grade students of the I.E. Liceo Antioqueño

This paper is a study on the teaching and learning of the concept of function, its elements and its different forms of representation. The study was directed towards students of the 9th grade of the I.E. Liceo Antioqueño, Headquarters, having as a theoretical reference the IMPROVE methodology of Mevarech and Kramarski, which is based on metacognition. Initially, a diagnostic phase was conducted to determine the learning states of the students. According to these results the group was chosen to implement the proposal. Based on the diagnosis, a classroom intervention was proposed under the criteria indicated by IMPROVE, to promote learning and reflection on the concept of function. This proposal was composed of a conceptualization, a class room activity, and a formative evaluation, in order to determine those students who reached a good comprehension of the concept, and those who did not. From there, corrective actions were carried out to try to enhance the number of students who could finally grasp the concept of function in a satisfactory manner.

The information collected was analyzed from a qualitative, interpretative approach, and from a further reflection on the results and observations obtained during the implementation of the proposal. The impact of the implementation of the proposal was evaluated, and the conclusions were formulated accordingly to the objectives. Likewise, some recommendations were provided for future work with this type of methodology.

The positive impact of the implementation of the proposal in the teaching-learning process of the concept of function, its different elements and its many forms of representation was highlighted, not only in students with high or superior performance, but also in those students with low or basic performance. We should remark that all of these contributed to raising the level of understanding of the latter group. This is rewarding because our work did help to consolidate the mathematical understanding of the concept of a function, and enhanced the confidence of students who will pursue further studies in mathematics.

Keywords: IMPROVE, metacognition, function, elements of a function, forms of representation, problem situations, collaborative learning.

Contenido

Lista de ilustraciones

Lista de tablas

Introducción

Spivak (1988) señala que el concepto de función es, sin duda, el más importante de todas las matemáticas, por ser ampliamente usado en casi todas sus ramas. Por esto, es menester prestar atención a la dificultad que viene ligada a su comprensión por parte de los estudiantes de diferentes niveles del sistema educativo colombiano. En este sentido, Cuevas y Díaz (2014) apuntan a que dichas dificultades parecen relacionarse con su complejidad y generalidad, y sus diversas facetas y representaciones. Por esa razón, la pregunta planteada en este trabajo es la siguiente: ¿puede una propuesta didáctica, que utilice el modelo IMPROVE integrado con GeoGebra, mejorar el desempeño en la resolución de problemas que involucren la noción de función, en los estudiantes del grado noveno de la I.E. Liceo Antioqueño?

El modelo IMPROVE (Mevarech y Kramarski, 1997) está basado en la metacognición, que es una cognición de alto nivel, y la cual implica un control activo sobre los procesos cognitivos. IMPROVE tiene como componentes centrales el conocimiento de la cognición y la regulación de la cognición, mientras concibe al estudiante como actor activo, y al maestro como propiciador de la participación de sus educandos.

Para la aplicación de esta propuesta partimos de un diagnóstico de saberes previos, para continuar con las siguientes etapas propuestas por IMPROVE: 1) Introducir los nuevos conceptos, 2) Hacer un cuestionamiento metacognitivo, 3) Actividades de práctica, 4) Revisión y reducción de dificultades, 5) Tratar de que los estudiantes adquieran un dominio satisfactorio de la noción de función, 6) Verificación, 7) Enriquecimiento.

En el primer capítulo de este trabajo, “Diseño teórico”, comienza con la descripción de un problema relacionado con el proceso de enseñanza – aprendizaje de las funciones en matemáticas, delimitado para los estudiantes de la sede central de la I.E. Liceo Antioqueño, de la ciudad de Bello. La pregunta de investigación guía todo el desarrollo del trabajo y, justificamos la pertinencia de su realización desde el punto de vista de los aportes teóricos, metodológicos y prácticos. Con base en esto se plantea el objetivo general y los objetivos específicos que permitan la implementación y validación de la propuesta. Dentro del marco referencial presentamos los antecedentes a nivel nacional e internacional, pues estos sirven como referencia para orientar la investigación. Se describen los aspectos teóricos que fundamentan al modelo IMPROVE de Mevarech y Kramarski, que es el eje central de la propuesta de este trabajo: este marco disciplinar habla de la importancia del estudio de las funciones en matemáticas y en otras ciencias. De manera similar, en el referente legal presentamos en forma breve el marco normativo para la enseñanza de la matemática en Colombia. Mientras que el referente espacial detalla la ubicación geográfica y las características de la población que serán objeto del estudio.

El capítulo 2, “Diseño Metodológico”, presenta las características del enfoque de investigación cualitativa bajo el cual se realiza la investigación, y del método que se seguirá para llevar a cabo la implementación de la propuesta, es decir, sus fases. Del mismo modo, explicamos brevemente los instrumentos usados para la recolección de la información y las técnicas e instrumentos para analizarla en interpretarla, a fin de determinar su impacto. Se caracteriza la población con la cual se realizará la propuesta y se refiere el impacto esperado con la implementación de la propuesta, junto con la planificación y cronograma de actividades.

En el capítulo 3, “Trabajo de campo y propuesta”, se realiza inicialmente el diagnóstico y su respectivo análisis, se describe de manera breve el porqué es necesaria la realización del diagnóstico para la implementación de IMPROVE. Para el Análisis de resultados, se explica de forma muy detallada cómo se usan los lineamientos curriculares, estándares básicos de competencias y los DBA[1] del área de matemáticas como referentes para determinar los niveles de desempeño de los estudiantes durante todas las etapas de la intervención, igualmente, se muestra cómo estos se integran con la valoración propuesta por el modelo IMPROVE, teniendo como producto la primera rúbrica de evaluación, que se usa para la valoración del diagnóstico.

Se presenta allí un informe muy detallado con los resultados obtenidos de este, tanto desde la óptica sumativa como cualitativa, analizando respuestas pregunta por pregunta, al igual que desde la óptica de los procesos generales de la actividad matemática que se explican en los Estándares Básicos de Competencias en matemática, identificando para cada uno fortalezas y oportunidades de mejora que podrán ser usadas también como insumo para el diseño de la propuesta de intervención en el aula. De la misma manera que se realizó con el diagnóstico, se describe la forma en que se diseña la propuesta de intervención en el aula, desde la óptica del modelo IMPROVE, y los referentes ya mencionados. Posteriormente se explica cómo encaja cada una de las actividades en las fases del modelo. Para el análisis de las actividades que conforman la propuesta de intervención en el aula, se diseña una nueva rúbrica de valoración

[1] Derechos básicos de aprendizaje.

siguiendo los mismos lineamientos usados para la primera rúbrica, pero orientada en competencias y aprendizajes relacionados con las funciones, sus elementos y sus formas de representación. Con ello se procede al análisis, pregunta por pregunta, de las respuestas dadas por los estudiantes. Los análisis no solamente se centran en las respuestas, sino también en la evolución que van presentando los estudiantes en sus desempeños y niveles de aprendizaje a través de las diferentes actividades realizadas en la propuesta.

El último capítulo entrega las conclusiones obtenidas de la implementación de la propuesta, su posterior análisis y reflexión, que se plantean a partir de los objetivos planteados y los resultados obtenidos. Asimismo, se incluyen las recomendaciones pertinentes para la realización de futuros trabajos e investigaciones que pretendan usar esta modelo o similares.

Finalmente, se presenta la bibliografía bajo la cual se sustentó este trabajo.

CAPÍTULO 1

DISEÑO TEÓRICO

1.1 Selección del tema

Enseñanza de las funciones en el grado noveno aplicando el modelo metacognitivo IMPROVE integrado con GeoGebra y enfocado en la resolución de problemas que involucran funciones matemáticas.

1.2 Planteamiento del problema

1.2.1 Descripción del problema

No es un hecho desconocido, en el ámbito académico, que el aprendizaje de las matemáticas venga acompañado de una considerable cantidad de dificultades por parte de los educandos, situación que es recurrente en todos los niveles del sistema de educativo colombiano: básica primaria, básica secundaria y educación media, y que, también continúan evidenciándose en la educación superior. La problemática mencionada se manifiesta propiamente en el educando, generando en éste una predisposición negativa hacia el estudio de las matemáticas. Esta puede tener raíces muy diversas, por lo que el docente debe conscientemente asumir su responsabilidad frente a las dificultades en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática que se ponen de manifiesto en sus aprendices. Entre otras cosas, esto debe conducirlo a un análisis riguroso y objetivo de su práctica pedagógica, con el fin de transformarla conscientemente, respondiendo a los retos propios de su labor. Es decir, el maestro debe permanecer en reflexión constante acerca de su quehacer.

Es menester, que el docente propicie las condiciones para el aprendizaje significativo de sus estudiantes, y estos últimos, estar en la disposición adecuada para relacionar de manera sustantiva el nuevo conocimiento con su propia estructura cognitiva. Dentro del estudio de las matemáticas, se considera a la resolución de problemas como un elemento de gran importancia, de acuerdo con los lineamientos curriculares del MEN[2], éstos deben ser el eje central del currículo de matemáticas y, deben permearlo en su totalidad. Polya, describe cuatro fases para la resolución de problemas: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y verlo en retrospección. En concordancia, Alan Schoenfeld defiende la idea de que el maestro propicie a los estudiantes condiciones similares a las que experimentan los investigadores de las matemáticas y, entienda cómo los estudiantes intentan resolver problemas en diferentes contextos. Sobre lo anterior, sería acertado afirmar que tanto maestros como aprendices fracasan constantemente en la consecución de este objetivo. El docente de matemáticas suele planear y orientar sus clases para que se den las condiciones para el aprendizaje mecánico orientado a contenidos curriculares. Estos nuevos conceptos no interactúan con los conceptos ya existentes en la estructura cognitiva de los alumnos, pues se almacenan de manera arbitraria y literal, sin relacionarse con los aprendizajes que ya son relevantes para ellos. En consecuencia, carecen de sentido e importancia como objeto de estudio.

Dentro de las matemáticas, subyace un concepto de vital importancia, el concepto de función. Según M. Spivak (1988): “El concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por tanto, que el concepto de función sea de gran generalidad.”

No solo por ser un concepto clave para el estudio y comprensión de las matemáticas en sí mismas, sino por estar presente y ser de mucha utilidad para resolver problemas prácticos en ingeniería, en medicina, en la física, la astronomía, química y, en general, en cualquier ciencia o área humana en la que se puedan relacionar magnitudes. La noción de función es un concepto unificador de las matemáticas, pues desde su aparición, se ha convertido en la piedra angular de estudios matemáticos avanzados, y como ya se mencionó, en todos los campos de las ciencias.

Llama la atención, acerca de la dificultad ligada a este concepto, según Cuevas y Díaz (2014): “Las razones por las cuales los estudiantes tienen dificultades con el concepto parecen centrarse en su complejidad y generalidad, ya que presenta muchas facetas y contiene una multiplicidad de representaciones”. Basta con realizar un sencillo ejercicio que resulta revelador:

[2] Ministerio de educación nacional de Colombia

si se busca la definición de función, recurriendo a diferentes fuentes, es decir, textos de distintos niveles y autores, pueden identificarse las “facetas” usadas para definirlas y representarlas, no es de extrañar, que, en el ejercicio de comprender y aplicar este concepto, los estudiantes se vean enfrentados a diversas dificultades, lo que conlleva a que muchos de ellos apenas puedan acercarse a su comprensión cabal.

Cada tres años, la OCDE[3] lleva a cabo las pruebas PISA[4], que se realiza en 79 países a estudiantes de 15 años, en lectura, ciencias y matemáticas. De acuerdo con el informe de las citadas pruebas, en matemáticas, los países asiáticos figuran como los de mejor rendimiento (los ocho primeros clasificados son países asiáticos), mientras que el primer país europeo es Estonia, que aparece clasificada en noveno lugar, y por parte del continente americano, Canadá en el puesto 12. El panorama para Hispanoamérica es preocupante: el primer país que aparece en la clasificación es Uruguay, que ocupa el puesto 58 entre los 79 países participantes. Sin excepción, todos los países de Hispanoamérica registraron puntajes menores al promedio de países de la OCDE (489). En su libro “Primera clase”, el director de PISA, Andreas Schleicher recomienda trabajar menos la memoria y más otras facetas como la capacidad crítica, el trabajo en equipo y la creatividad. Ángel Gurría, secretario general de la OCDE, afirma que “sin la educación adecuada, los jóvenes languidecerán al margen de la sociedad, incapaces de enfrentar los desafíos del mundo del trabajo, y la desigualdad continuará aumentando.”

El informe nacional de resultados para Colombia – PISA (2018) muestra una realidad alarmante en Colombia, situación que debe invitar a la reflexión de todo el sistema educativo. Con un puntaje de 391, Colombia ocupa el puesto 69 en el ranking de los 79 países evaluados. De acuerdo con los lineamientos curriculares dados por el MEN, las funciones en la educación secundaria tienen más sentido si se estudian a partir de situaciones de cambio, pues es importante que el estudiante adquiera habilidad de reconocer patrones que se pueden encontrar en diversas situaciones, aprender a describirlos y a elaborar modelos matemáticos, así mismo, señalan la importancia del uso de calculadoras graficadoras como herramienta de apoyo para su estudio.

[3] Organización para la cooperación y el desarrollo económicos.
[4] Programa internacional para la evaluación de estudiantes.

El informe, "Análisis histórico y comparativo", publicado en el año 2018 por el ICFES[5], presenta el porcentaje promedio de respuestas incorrectas en cada competencia y aprendizaje, evaluado en las pruebas saber 3°, 5° y 9° en las áreas de castellano y matemáticas de los años 2014 a 2017, para el año 2017. En la competencia de resolución de problemas del área de matemáticas para el grado noveno, se evaluó el aprendizaje: "Resolver problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos". El porcentaje promedio de respuestas incorrectas de todos los colegios del país fue de 63%, puntaje que refleja las deficiencias que presentan los estudiantes de básica secundaria en este aspecto.

El municipio de Bello, Antioquia (Entidad Territorial Certificada[6]), por su parte, obtuvo en el mismo año un porcentaje promedio de respuestas incorrectas de 62.6%. Dentro de la entidad territorial mencionada, la I.E. Liceo Antioqueño, presenta un desempeño ligeramente mejor, con un porcentaje promedio de respuestas incorrectas del 61.1%.

En lo expuesto hasta ahora, se evidencia un problema a saber: las dificultades que presentan los estudiantes del país en la aplicación del concepto de funciones en la resolución de problemas. Las causas por las cuales se presenta esta problemática son diversas, desde los aspectos actitudinales del estudiante (producto de sus vivencias en el estudio de las matemáticas), hasta la misma complejidad del concepto de función. De igual manera, se suman las deficiencias didácticas y metodológicas de los maestros al momento de presentar el tema.

De manera concreta, se abordará el asunto relacionado con la eficiencia con la que se da a conocer el concepto de función, y se mostrarán las relaciones entre sus diferentes representaciones. Uno de los factores determinantes en dicho aspecto, tiene que ver con el hecho de que los estudiantes no suelen estar familiarizados con el lenguaje formal de las matemáticas, pues su estudio, suele estar centrado en los aspectos procedimentales y prácticos de la misma durante la escuela. Así, es muy probable que, aunque docente y educando hablen

[5] Instituto colombiano para la evaluación de la educación superior.

[6] De acuerdo con el artículo 7 de la ley 715 de 2001, "los municipios y distritos certificados en educación deben dirigir, planificar y prestar el servicio en los niveles de preescolar, básica y media; administrar y distribuir entre los establecimientos educativos de su jurisdicción los recursos del sistema general de participaciones, administrar las instituciones educativas y el personal docente y administrativo, mantener las coberturas y propender a su ampliación, (…)". Duque, Chavarro (2021).

acerca del mismo objeto, sus modelos mentales acerca del mismo no coincidan, generando vacíos conceptuales en este último, que suelen permanecer en su imaginario durante su vida académica, o al menos buena parte de ella.

Como ya se ha dicho, las funciones son la base de muchos temas y ramas de las matemáticas, además de ser usadas en todas las ciencias, por esto, no comprenderlas desde el inicio de su estudio en la educación básica, trae inevitablemente consecuencias negativas en el futuro para el estudiante, pues su rendimiento no sólo en matemáticas, sino en diferentes áreas se verá afectado, lo que junto con la no aprobación, causa en el estudiante una serie de efectos psicológicos que le predisponen negativamente, no solo frente a la asignatura, sino frente a sí mismo y a sus capacidades.

Como estrategia para abordar la problemática mencionada, se sugiere la implementación de una estrategia didáctica fundamentada en el modelo metacognitivo IMPROVE para favorecer así la comprensión del concepto de función y su aplicación para la resolución problemas en diferentes contextos. A su vez, el uso de GeoGebra, software libre que ofrece un entorno dinámico que permite articular e interactuar con diferentes representaciones de las funciones, lo que podría favorecer que los estudiantes identifiquen la relación que existe entre las situaciones planteadas, las funciones y sus diversas representaciones.

1.2.2. Formulación de la pregunta

¿Puede una propuesta didáctica usando el modelo IMPROVE integrado con GeoGebra mejorar el desempeño en la resolución de problemas que involucran funciones en los estudiantes del grado noveno de la I.E. Liceo Antioqueño?

1.3. Justificación

En la presente tesis se propone, teniendo como referente el modelo metacognitivo de aprendizaje IMPROVE, generar estrategias didácticas apoyadas en el uso de GeoGebra como facilitador, y así validar su eficacia para promover la adquisición de habilidades por parte de estudiantes de secundaria para el estudio de las funciones matemáticas y sus aplicaciones. De los resultados obtenidos luego de la implementación se determinará si es pertinente incorporarlo en las prácticas llevadas a cabo por los docentes para la enseñanza de la matemática.

En primer lugar, la investigación propuesta tendrá impactos a nivel experimental. La contribución consiste en los aportes académicos en la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, la investigación que se hará estará centrada en la resolución de problemas y la implementación de modelos metacognitivos de aprendizaje, todo esto mediado por las TICs, es decir, se propone implementar una estrategia metodológica que promueva la resolución de problemas no sólo rutinarios, sino no rutinarios y complejos, con el apoyo de modelos pedagógicos innovadores y con la tecnología como facilitador del proceso de enseñanza – aprendizaje.

De acuerdo los estándares básicos de competencias en matemáticas, la enseñanza de las matemáticas debe tener como eje central a la resolución de problemas, debe ser su objetivo principal y parte integral de la actividad matemática. Por otro lado afirma, resolver los problemas es solamente parte del trabajo, encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles soluciones, tarea se puede lograr mediante el ejercicio de formular, construir modelos y ponerlos a prueba, preferiblemente en ambientes de aprendizaje colaborativo (MEN, 1998; Schmidt, 2006). De acuerdo con Mevarech y Kramarski (2014): "La solución de problemas complejos, desconocidos y no rutinarios (CUN) tiene que ser un pilar fundamental para cualquier ambiente efectivo de aprendizaje de las matemáticas para el siglo XXI (…) resolver problemas CUN requiere capacidades matemáticas que no incluyen solamente la lógica y la deducción, sino también la creatividad matemática y en otros campos de conocimiento." En este sentido, la realización de una investigación que tenga como eje central el desarrollo de las habilidades necesarias para la resolución de problemas dará interesantes aportes a nivel teórico. Investigaciones han demostrado correlaciones positivas entre la metacognición –pensar en pensar– y la solución de problemas matemáticos. Las cinco principales pedagogías metacognitivas usadas para la educación matemática son los siguientes modelos: Polya, Schoenfeld, IMPROVE, Verschaffel y Singapur. A pesar de tener todas ellas una base común, se diferencian entre otras cosas, en el rango de edad para su aplicación, siendo IMPROVE y Verschaffel las más acordes para usarse con estudiantes jóvenes, ya que de acuerdo con Mevarech y Kramarski (2017), los modelos de Polya y Schoenfeld se implementaron principalmente en educación media superior, mientras que el modelo Verschaffel se aplicó en estudiantes de primaria e IMPROVE entre alumnos de todas las edades; en el caso de esta investigación, estudiantes de noveno grado.

La heurística de Polya (1949) se propuso como un modelo dividido en cuatro etapas, llamado: “¿Cómo resolverlo?”. Si bien los términos asociados a la metacognición no fueron introducidos sino hasta 1970, el modelo de Polya se refiere a ésta. A pesar de que dicho modelo fue implementado rápidamente y con gran entusiasmo por matemáticos, educadores en matemáticas, entre otros. Sin embargo, pese a las grandes expectativas, con el paso del tiempo el modelo mostró que no funcionaba, de hecho, no se encontró ninguna evidencia clara de que la heurística ayudara a los estudiantes a aprender matemáticas o que hubiesen desarrollado habilidades para la solución de problemas.

El modelo de enseñanza metacognitivo de Schoenfeld (1985) planteó las siguientes etapas para resolver problemas: 1) Análisis, para lograr la comprensión del problema. 2) Diseño de un plan de solución. 3) Exploración que permita transformar el problema en una tarea rutinaria. 4) Elaborar el plan de solución. 5) Verificar la solución. A su vez, recomienda la aplicación de tres preguntas autodirigidas: ¿Qué haces exactamente? ¿Por qué lo estás haciendo así? ¿Cómo te ayuda? Las preguntas pretenden, primero, propiciar que los estudiantes expresen sus ideas para solucionar un problema, y segundo, inducir la reflexión sobre estas actividades.

Verschaffel (1999) elaboró un modelo para la solución de problemas rutinarios y no rutinarios para estudiantes de los últimos grados de primaria. Su modelo incluye etapas similares a las descritas en el modelo de Schoenfeld, y adicionalmente, las complementa al detallar la heurística concreta para cada paso: construir una representación mental del problema. Hacer un dibujo, lista, esquema o tabla que permita diferenciar la información importante. Decidir cómo resolver el problema. Hacer un diagrama de flujo. Realizar los cálculos necesarios. Interpretar el resultado y dar una respuesta. Evaluar la solución.

Por su parte, Singapur adoptó la metacognición en el currículo de matemáticas para todos los niveles escolares a inicios del siglo XXI (Lianghu y Yan, 2007). Para la solución de problemas matemáticos combina cinco componentes interrelacionados: 1) Conceptos matemáticos. 2) Capacidades relacionadas con el saber matemático. 3) Procesos tales como el razonamiento, comunicación, modelación. 4) Metacognición, referida al monitoreo del propio pensamiento y autorregulación del aprendizaje y 5) Actitudes, interés, confianza, perseverancia.

Los modelos basados en la metacognición continuaron evolucionando y adaptándose a diferentes contextos educativos. Así, en 1997, Mevarech y Kramarski diseñaron el modelo IMPROVE, para estudiantes de primaria y secundaria, llamado así por las siglas en inglés de las siete etapas en las que se lleva a cabo. Dicho método, tiene como elemento clave la implantación de preguntas de cuatro tipos: preguntas de comprensión, preguntas de conexión, preguntas de estrategia y preguntas de reflexión. Este ha resultado ser muy apropiado para desarrollar en el aula, no sólo para determinado tipo de problemas, sino para todo el currículo, ya que se enfoca en todos los momentos de la enseñanza, partiendo de la introducción del nuevo tema, concepto o problema, hasta la evaluación y la etapa de actividades de regularización o de enriquecimiento (Mevarech y Kramarski).

De acuerdo con numerosos estudios que se han realizado, en los que siempre se compara un grupo sometido a pedagogías metacognitivas con otros que reciben enseñanza tradicional, se ha observado que entre los estudiantes de todas las edades los métodos metacognitivos mejoran notablemente los resultados en álgebra, aritmética y geometría. Además, los efectos positivos fueron evidentes tanto en problemas rutinarios como en tareas complejas y no rutinarias (Stillman y Mevarech, 2010). En particular, estudios realizados en escuelas secundarias y preparatorias donde se implementó el método IMPROVE, los estudiantes tuvieron un mejor desempeño, con relación a quienes no estudiaron bajo este modelo, en diversas tareas matemáticas, entre ellas la habilidad para resolver problemas rutinarios y no rutinarios (Mevarech, 1999), modelación matemática de situaciones de la vida real, búsqueda de patrones matemáticos y hacer generalizaciones (Mevarech, Tabuk y Sinai, 2006). Más importante, los alumnos de desempeño bajo o promedio obtuvieron un mayor beneficio de IMPROVE. Hay una gran cantidad de estudios que se realizaron en el desarrollo de clases regulares, que evidencian la validez de las pedagogías metacognitivas. Particularmente

IMPROVE es un método cuya eficacia se ha comprobado, no sólo cuando se aplica por periodos cortos, como en el desarrollo de unidades temáticas específicas (Mevarech, 1999).

Mevarech y Kramarski (2003) realizaron un estudio de los efectos duraderos de IMPROVE en dos grupos de estudiantes. Uno estudió álgebra con el método IMPROVE y el otro sirvió como grupo de control, un año más tarde. Cuando los estudiantes llegaron al grado noveno, los que habían sido expuestos a IMPROVE mostraron un mejor desempeño que los del grupo de control en varias actividades que involucran el estudio de la matemática, especialmente en aquellos que involucraban problemas más complejos. Por las razones expuestas, con esta investigación se pretende fortalecer las habilidades de los estudiantes del grado noveno para la resolución de problemas que involucren funciones. Dado que el modelo IMPROVE ha mostrado ser eficaz al ser implementado para el desarrollo de currículos completos, es posible generalizar su uso para el estudio de los contenidos de funciones correspondientes al grado escolar en mención.

En segundo lugar, nos enfocaremos en los valiosos aportes metodológicos que surgirán a lo largo de la investigación, cuyo producto final será el diseño de la estrategia didáctica usando el modelo metacognitivo IMPROVE integrado con GeoGebra como software facilitador de un proceso de enseñanza – aprendizaje enfocado a la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios del ámbito de las matemáticas. Barrows (1986) define el ABP (aprendizaje basado en problemas) como “un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos”, de acuerdo con Tafur (2006):

“el aprendizaje basado en problemas favorece la organización y la capacidad de decisión ante un problema planteado, y, por ende, el rendimiento y el conocimiento de los propios procesos de aprendizaje en el estudiante y los procesos metacognitivos”.

Según el autor, la resolución de problemas posibilita procesos de reflexión y análisis, lo cual, a su vez, promueve el desarrollo de habilidades metacognitivas. Así, se propone realizar el diseño de la propuesta didáctica sin perder de vista lo planteado desde el método ABP, pues aporta también elementos importantes para el desarrollo de la metacognición.

Por otro lado, si bien existen muchos softwares y/o aplicativos que pueden propiciar el éxito en la educación matemática, consideramos que GeoGebra presenta varias ventajas importantes: es un software de código abierto, lo cual no sólo permite su descarga gratuita sino también acceder a recursos creados por otros docentes. Permite a los estudiantes interactuar con diferentes sistemas de representación de los objetos matemáticos, a su vez que permite el desarrollo múltiple de diferentes pensamientos matemáticos, al unir la geometría, el álgebra y la aritmética, así mismo, es un sistema dinámico y fácil de usar, y cuenta con una importante cantidad de tutoriales para los principiantes.

Se espera que la implementación de la estrategia metodológica beneficie tanto a estudiantes como a docentes, proporcionando a los primeros, condiciones favorables para la adquisición de aprendizajes significativos, mediante la reflexión constante, el trabajo colaborativo y la investigación, y a los segundos, herramientas adicionales y de eficacia comprobada para mejorar sus prácticas en el aula, para el beneficio de sus alumnos.

En el aspecto práctico, la investigación también dará aportes importantes, ello a razón de que pretende dar solución a un problema observable en el campo de la educación matemática, específicamente del nivel de secundaria del sistema educativo colombiano, pero que puede encontrarse en estudiantes de edades muy diferentes, en muchos países. Se pretende así, mediante la implementación de la estrategia metodológica, mejorar las aptitudes de los estudiantes para resolver problemas complejos y no complejos, a la vez que se espera que éstos desarrollen una mejor actitud frente al aprendizaje de la matemática y de su importancia para el desarrollo de competencias que favorezcan el éxito en diversos aspectos de la vida.

1.4. Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Ejecutar e implementar actividades diseñadas de acuerdo con el modelo IMPROVE y el uso GeoGebra para comprobar si facilitan el proceso de enseñanza – aprendizaje de las funciones matemáticas y su uso en situaciones problema que las involucran, en los estudiantes del grado 9° de la I.E. Liceo Antioqueño.

1.4.2 Objetivos específicos

- Diseñar una propuesta de intervención en el aula que propicie el proceso de enseñanza – aprendizaje de las funciones matemáticas y su uso en la resolución de problemas.
- Analizar cualitativamente la experiencia y los resultados de los estudiantes en la implementación de la propuesta de intervención en el aula.
- Evaluar la implementación de la propuesta de intervención en el aula y su impacto en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las funciones matemáticas y su uso en situaciones problema.

1.5 Marco referencial

1.5.1 Antecedentes

En este apartado se detalla la revisión bibliográfica que se realizó, a nivel nacional e internacional. Entre los documentos revisados, se encontraron artículos académicos, tesis, revistas especializadas, libros físicos y en línea. A continuación, se mencionan algunos de los más importantes, en cuanto a que son el punto referencial teórico, metodológico y práctico de esta investigación. Se tomaron en forma textual los resúmenes presentados por los autores en cada artículo académico, para presentarlos de la manera más fiel posible.

1.5.1.1 A nivel internacional

A nivel internacional se han realizado numerosos estudios acerca de los efectos de las pedagogías metacognitivas en los procesos de enseñanza. *Cruzado y Compaña (2020) usaron el modelo flipped classroom para fomentar la autorregulación y la metacognición de la educación estadística. El objetivo de este estudio fue obtener información a partir de una experiencia exploratoria, realizada en el Grado de Educación Primaria de la Universidad de Málaga, dentro del marco de una investigación-acción, mediante la utilización de este modelo, se fomenta la autorregulación en el proceso de enseñanza – aprendizaje, alcanzando la metacognición. De acuerdo con los resultados observados, con este modelo se consiguen desplazar fuera del aula las actividades matemáticas más instrumentales, favoreciendo el desarrollo de tareas mucho más funcionales y formativas en el aula.*

Espejo Zubieta (2020) se refirió al efecto de las estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos en alumnos de primer año de Secundaria de la I.E. Politécnico del Callao, Perú, la investigación de campo fue hecha durante el 2019, cuyo objetivo principal fue determinar un diagnóstico en el manejo de estrategias metacognitivas en resolución de problemas matemáticos en los alumnos, tomando como referencia una muestra de 60 estudiantes en este colegio. El modelo empleado fue el de recolección de datos y el instrumento de este trabajo de investigación fue una encuesta con un cuestionario de 32 preguntas y se desarrollaron en un periodo único de tiempo. Finalmente, se comprobó que los alumnos muestreados en esta institución para el estudio en el uso de estrategias metacognitivas *presentan, de acuerdo con los niveles clasificados en Inicio, Progreso y Logro, resultados de alrededor del 33, 43 y 23 por ciento, respectivamente.*

Alfaro Sánchez (2020), propone en su investigación el desarrollo de estrategias didácticas y metacognitivas en el abordaje de la resolución de problemas matemáticos, según el autor, la metodología de la resolución de problemas debe estar presente en las lecciones de Matemática, como un proceso medular, donde la persona docente comprenda la importancia de hacer una adecuada mediación pedagógica. El propósito es que se incentiven las habilidades a corto, mediano y largo plazo así, el docente pueda enfrentarse a diversas situaciones que se presentan en el diario vivir, además, las estrategias metacognitivas propuestas se pueden aplicar a cualquier problema matemático con elementos complementarios como lo son la contextualización e interdisciplinariedad.

Balderas, Páez y Pérez (2020), en su discusión teórica acerca de las prácticas docentes como mediadoras para potencializar estrategias metacognitivas en la solución de tareas matemáticas, con el fin de lograr un aprendizaje autónomo, que le permita al alumno autorregularse al realizar otras tareas matemáticas sugieren la necesidad de documentar de qué manera y en qué situaciones se promueve y mejora el aprendizaje metacognitivo en los estudiantes de matemáticas, en contextos no intervenidos y en diferentes niveles educativos (Educación Básica, Media Superior y Superior), pues en todos los grados o niveles, el docente tiene la responsabilidad de promover y generar espacios donde el alumno autorregule su aprendizaje (NCTM, 2014)"

Arteaga – Martínez, et al., (2020), analizan los resultados de implementar estrategias metacognitivas para la resolución de problemas matemáticos con estudiantes de secundaria. La investigación cuasi – experimental se ha desarrollado con una muestra no aleatoria de 99 estudiantes del primer y tercer curso de educación secundaria, al resolver problemas de forma guiada, centra los contenidos en el manejo numérico y geométrico. Los resultados evidencian distinciones en las estrategias metacognitivas aplicadas por los alumnos durante la resolución en ambos tipos de problemas, por lo que nos planteamos que la mediación del docente debe diferenciarse, a partir del bloque de contenido matemático con el que se esté trabajando.

El uso de GeoGebra en la educación matemática y la importancia del estudio de las nuevas tecnologías por parte de los docentes también ha sido ampliamente estudiado en el ámbito académico internacional. Alvarado y Soto (2020), proponen una metodología para el *diseño de secuencias didácticas para la educación matemática, consiste en una metodología dirigida a docentes de matemáticas de nivel secundaria, que permite diseñar secuencias didácticas. Esta metodología fue elaborada con base en la articulación de: la estructura didáctica de Díaz- Barriga, el método de enseñanza ACODESA de Hitt y los desarrollos curriculares de Taba. La metodología se ha puesto a prueba con un grupo de 11 docentes en un curso-taller de 40 horas, los resultados obtenidos fueron tres secuencias didácticas elaboradas por tres equipos de docentes en un contexto tecnológico (usando GeoGebra), donde se percibe que es posible realizar diseños aplicando esta metodología, sin embargo, presentan algunas dificultades durante el proceso de articulación con la tecnología.*

Saavedra (2020) propone el uso de GeoGebra como herramienta de transformación educativa en matemática. La investigación les permitió evaluar los efectos al emplear GeoGebra en los estudiantes de Básica Superior para la enseñanza de la matemática en la resolución de problemas, razonamiento y comunicación matemática. El estudio se realizó en dos fases aplicando en la primera el aprendizaje tradicional y en la segunda el uso de software GeoGebra, al término de cada fase se realizó la respectiva evaluación cuyos resultados determinan que el empleo de GeoGebra para la enseñanza de la matemática tuvo consecuencias significativas en el aprendizaje de los educandos pues el efecto de su uso así lo demuestra. La hermenéutica sobre el tema parte de la lectura, comprensión e interpretación de concepciones planteadas desde textos y la experiencia docente para obtener así una visión más amplia sobre la temática.

Finalmente, la triangulación entre la teoría, la experiencia del autor y los resultados de la investigación concluye que cuando el docente innova las clases de matemática el estudiante absorbe con mayor facilidad los contenidos y construye su propio conocimiento que le permite poner en práctica en la resolución de problemas de su vida diaria generando así un aprendizaje significativo en matemática apoyado con GeoGebra.

Salas Rueda (2018) realizó una investigación cuyo propósito era analizar el impacto del servicio en la nube GeoGebra en la unidad didáctica desigualdades lineales. La muestra se compuso por 78 estudiantes que cursaron la asignatura Matemáticas intermedias para los negocios durante los ciclos escolares 2015, 2016 y 2017. El grupo experimental (31 alumnos) realizó cuatro prácticas de laboratorio sobre los temas de desigualdad lineal, Sistema de desigualdades lineales, Función objetivo y Aplicaciones de las desigualdades por medio del servicio en la nube GeoGebra. Los resultados obtenidos permiten afirmar que GeoGebra es una *aplicación útil y fácil para graficar las funciones, identificar las regiones y coordenadas en la gráfica, reconocer la región solución y asimilar el conocimiento sobre los temas del álgebra. Incluso, los estudiantes están satisfechos de utilizar esta herramienta tecnológica en la Unidad didáctica Desigualdades lineales.*

Mejía Ballesteros (2018) llevó a cabo una investigación donde se evalúa la influencia del uso de GeoGebra en el aprendizaje de graficar funciones reales en estudiantes del primer ciclo de la Universidad Nacional de Ingeniería – 2016. Para el estudio se contó con una población censal de 127 estudiantes del primer ciclo de la Universidad Nacional de Ingeniería. Los resultados generales se observan la diferencia de los rangos del post-test menos el pre-test de estos resultados se muestra que después de la aplicación del software GeoGebra en el aprendizaje de graficar funciones reales en 26 estudiantes no mostró diferencia en cuanto a la puntuación de pre y post test, sin embargo, a 95 estudiantes surgió el efecto de la aplicación del software y en 6 estudiantes la puntuación del pre es igual a la del post test.

García e Izquierdo (2017) propusieron el uso de GeoGebra como estrategia para innovar el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática. El tipo de estudio es documental de carácter descriptivo para analizar el comportamiento en las aulas con alumnos nativos digitales, razón por la que el docente no debe quedarse atrás en la utilización de recursos tecnológicos para la enseñanza, siendo un reto el desarrollar estrategias que despierten el interés del alumno por aprender. Como resultado de éste análisis se concluye que GeoGebra es el software que proporciona una excelente opción para mejorar la actividad central de las matemáticas en la resolución de problemas y es una herramienta adecuada para utilizar como estrategia en la enseñanza de las ciencias exactas.

Cuevas y Delgado (2016), se preguntan ¿Por qué el concepto de función genera dificultad en el estudiante? Y, ¿cómo tratar el concepto de función para promover un aprendizaje en los estudiantes? De acuerdo con el estudio, el concepto de función es de los primeros temas a tratar en los libros de texto de Análisis Matemático o Cálculo y uno de los conceptos más analizados en la investigación educativa. La cuestión no es para menos, como veremos enseguida el definir este concepto con cierta precisión ha traído como consecuencia en la historia de la matemática, dos grandes controversias, donde han intervenido los más grandes matemáticos de las épocas respetivas, y ha sido un impedimento para el desarrollo del cálculo y el análisis matemático.

Avecilla, et al., (2015). Investigaron la influencia del uso de la herramienta de software GeoGebra en la enseñanza de la matemática en un curso específico de la carrera de Ingeniería en Industrias Pecuarias. Realizaron un estudio explicativo y de carácter cuantitativo para establecer relaciones causales que supongan una descripción y explicación del fenómeno relacionado con la utilización y la no utilización del software GeoGebra en el rendimiento académico de los estudiantes. Se desarrollaron contenidos académicos formativos sin el apoyo de la herramienta de software GeoGebra, se aplicó un test para el proceso de evaluación acumulativa. Posteriormente se desarrollaron contenidos académicos con el apoyo del software GeoGebra, se aplicó una prueba correspondiente examen principal y del examen de suspensión. Se evaluaron los resultados con el propósito de identificar la influencia del software GeoGebra en el rendimiento de los estudiantes. Los resultados de la investigación evidencian que el apoyo del software GeoGebra mejoran los niveles de aprendizaje de los estudiantes, al integrar posibilidades de desarrollar la colaboración constructivista de los estudiantes, así como la generación espacios adecuados de retroalimentación.

1.5.1.2 A nivel nacional

Osorio Serna (2020) desarrolló una propuesta didáctica para la enseñanza de las propiedades geométricas de las parábolas, para lo cual hizo uso de GeoGebra. Se pretendía mejorar la enseñanza de las matemáticas empleando el análisis fenomenológico. Las intervenciones que se hicieron con los estudiantes buscaban fomentar tanto el trabajo individual como el trabajo colaborativo, los estudiantes construyeron parábolas y sus elementos empleando herramientas manuales y GeoGebra. Los resultados muestran que los estudiantes mejoraron en aspectos como: la apropiación de conceptos, el manejo algebraico de operaciones, la identificación de elementos de la parábola y la modelación matemática.”

Advíncula et al., (2018) diseñaron animaciones dinámicas en GeoGebra para estudiar el dominio y rango de las funciones, según los autores:

> *“La determinación del dominio y el rango de una función resulta una tarea complicada para los estudiantes de los primeros ciclos universitarios, ya sea a partir de su gráfica o regla de correspondencia. Desde nuestra experiencia consideramos que está dificultad se debe, en parte, a que los estudiantes no logran comprender los conceptos de dominio y rango de una función.”*

Se buscaba promover una reflexión acerca de las ventajas y desventajas que ofrece el GeoGebra en la enseñanza de las funciones.

Campo, Cruz y Meléndez (2017), diseñaron una serie de tareas que integraban GeoGebra para la enseñanza de la función exponencial, usando como estrategia metodológica el estudio de caso. Se seleccionó un grupo de estudiantes y una docente para el desarrollo de la propuesta, la cual se configuró a partir de perspectivas teóricas como: didáctica, histórica, matemática y curricular. Con base a lo anterior se definieron unidades de análisis que orientaron la investigación. Uno de los resultados más importantes que arrojó el trabajo fue que las posibilidades de modificación del diseño en la puesta en acto están sujetas a sus intenciones didácticas y al contexto en el que va a ser implementado el diseño, siempre y cuando no se aleje de los objetivos de su configuración.

Volverás Espinosa (2015) desarrolló una propuesta didáctica para la enseñanza de límites de funciones en el grado undécimo integrando GeoGebra, la propuesta se aplicó en el transcurso del tercer periodo del año escolar 2015. Se clasificaron los dos grupos, uno llamado grupo experimental al cual se le aplicó el tratamiento y el otro como patrón de comparación llamado grupo control quien recibió las clases de manera tradicional. Los datos obtenidos en los grupos se analizaron con base en el diseño experimental de comparación de preprueba- tratamiento-pos-prueba propuesto por Campbell. El estudio de los datos muestra un desempeño significativo por parte del grupo experimental dado que la influencia del software educativo proporciona un mejor aprendizaje del tema, esta herramienta permitió dinamizar e incrementar el desarrollo de las habilidades de los estudiantes apoyando la construcción de conocimiento, la interacción y la exploración.

Guerra, Patermina y Jácome (2015) analizaron las dificultades en el aprendizaje y trabajo inicial con funciones en estudiantes de educación media, la investigación tuvo como objetivo analizar las dificultades de los estudiantes a realizar transformaciones en los registros de representación de una función. Se hizo un estudio descriptivo de casos con un grupo de estudiantes de una institución educativa del sector rural colombiano. Se concluye que los estudiantes tienen dificultad con la identificación y uso de los elementos de la función, con la consecución del patrón de regularidad y de crecimiento, la elaboración de un modelo de la situación y en el uso del concepto de ecuación para encontrar una incógnita.

1.5.2 Modelo *IMPROVE*

La metacognición es el proceso de “pensar en pensar” (Flavell, 1979), o entendida también como “la cognición de la cognición” (Wellman, 1985, p. 1), por lo tanto, es la metacognición una forma de cognición, de más alto nivel, que implica un control activo sobre los procesos cognitivos. El primer modelo de metacognición fue el de monitoreo metacognitivo (Flavell, 1979), dicho modelo se fundamentaba en cuatro componentes: 1) conocimiento metacognitivo, 2) experiencias metacognitivas, 3) metas o tareas, 4) acciones o estrategias. Posteriormente, Brown propuso el modelo de conocimiento y regulación metacognitiva (1987), en el que dividía a la metacognición en dos categorías generales: 1) conocimiento de la cognición, 2) regulación de la cognición. Schraw (1990) y Dennison (1994) profundizaron el concepto metacognitivo de Brown, que, aunque utiliza sus dos componentes principales, los desglosa en subcategorías, así el primer componente incluye: 1) conocimiento declarativo, 2) conocimiento de procedimiento, 3) conocimiento condicional. A su vez, el segundo componente incluye los mismos conceptos básicos propuestos por Brown: planeación, monitoreo y evaluación.

Se han propuesto diferentes modelos de enseñanza basados en la metacognición, éstos varían en el rango de edad para quien fueron diseñados y su alcance. IMPROVE (Mevarech, Kramarski, 1997) es uno de los primeros modelos de instrucción metacognitiva para estudiantes de primaria y secundaria, su enfoque puede ir desde problemas puntuales a unidades temáticas e incluso el currículo. El instructor asume las tareas de modelar las estrategias cognitivas y metacognitivas, incentivar la discusión entre toda la clase y retroalimentar, el ambiente de aprendizaje de IMPROVE incluye materiales y problemas exigentes diseñados cuidadosamente, que pueden ser resueltos en contextos cooperativos o individuales.

Los componentes centrales de IMPROVE son **el conocimiento de la cognición**, entendido como la información que las personas poseen acerca de sus procesos cognitivos, se fundamenta en el imaginario de que el estudiante puede reflexionar y pensar acerca de sus procesos cognitivos y, **la regulación de la cognición** que radica en las acciones utilizadas para regular y supervisar el aprendizaje se incluye en estas acciones tareas de planeación, monitoreo y verificación. Se apoya en **el paradigma de la cognición,** que concibe al estudiante como un sujeto activo que procesa información, con competencia cognitiva para resolver problemas, de igual manera, sostiene que la enseñanza debe estar orientada al logro de aprendizajes significativos y en desarrollar habilidades para el aprendizaje y, en cuanto al maestro, debe promover la participación activa de sus estudiantes favoreciendo el aprendizaje sobre la enseñanza y plantea la evaluación desde una perspectiva cualitativa (formativa) y cuantitativa (sumativa), **la cognición social,** entendida como una serie de procesos integrados que permiten la interacción entre sujetos de la misma especie, depende del intercambio de señales sociales que permiten la obtención de información de los otros sujetos involucrados y el aprendizaje del entorno basado en esas señales **y el aprendizaje autorregulado,** es decir, un proceso activo y constructivo en el cual los estudiantes fijan metas para su aprendizaje, intentando controlar y regular su cognición, su motivación y comportamiento, dentro de los límites fijados por sus propias metas y las características del contexto.

Antes de iniciar con el desarrollo del método, todos los estudiantes deben ser evaluados acerca de los temas prerrequisito de cada unidad de aprendizaje, con base a los resultados obtenidos, se asignarán grupos heterogéneos de cuatro estudiantes (uno de rendimiento alto, dos de rendimiento medio y uno de bajo rendimiento). Los miembros pueden ser intercambiados de acuerdo con su avance, para así mantener la heterogeneidad de los grupos. La palabra IMPROVE describe las siete fases en las que se desarrolla el modelo:

1) **Introducir los nuevos conceptos**: en esta fase se exhibe a toda la clase el nuevo material, conceptos, problemas o procedimientos a través de una modelación de la activación de procesos metacognitivos. El maestro da respuesta a preguntas metacognitivas, tales como: "¿Qué hay en el problema? ¿Cuáles son las diferencias/similitudes entre sus elementos? ¿Cuáles estrategias/tácticas/principios son apropiados para resolver el problema?", finalmente, el maestro modela en voz alta las estrategias/tácticas/principios para resolver el problema y qué hacer si el plan no funciona. Como actividad, se realizará una presentación al inicio de la clase, de aproximadamente 10 minutos, en la que, a través de un problema seleccionado cuidadosamente, se lleve a cabo lo descrito en este principio orientado a la enseñanza de las funciones matemáticas.

2) **Cuestionamiento metacognitivo*:*** se realiza un cuestionamiento metacognitivo autodirigido en pequeños grupos heterogéneos. Este componente incluye tres tipos de preguntas metacognitivas: ***(a) preguntas de comprensión:*** se diseñan para incitar la reflexión acerca del problema por parte de los estudiantes antes de resolverlo, se busca que enuncien en sus propias palabras los conceptos y discutan acerca de su significado. ***(b) Preguntas de conexión:*** se centran en similitudes y diferencias entre el problema que se trabaja y problemas que ya han sido abordados, usando estas preguntas los estudiantes aprenden a diferenciar las estructuras y principios matemáticos de los problemas abordados. ***(c) Preguntas de estrategia:*** se diseñan para estimular en los estudiantes el pensar en las estrategias apropiadas para la resolución de un problema propuesto, a su vez que se establecen las razones para elegir la estrategia, al abordar este tipo de preguntas, los estudiantes definen el "qué", el "por qué" y el "cómo". Para llevar a cabo este cuestionamiento metacognitivo a lo largo del estudio de las funciones matemáticas, se diseñarán tarjetas con los tres tipos de preguntas impresas, para que sean utilizadas por los estudiantes durante todo el proceso.

3) **Práctica*:*** fase en la que los estudiantes trabajan en grupos heterogéneos, dicho desde la óptica de su desempeño académico (uno de desempeño alto, dos de desempeño medio y uno de bajo desempeño) que se determinan desde el inicio con una evaluación de los prerrequisitos para el estudio del tema. Los miembros pueden ser intercambiados de acuerdo con su avance, para así mantener la heterogeneidad de los grupos. Cada estudiante de un grupo se encarga de leer en voz alta un problema, que resuelven usando las preguntas metacognitivas ya descritas, los grupos discuten para resolver sus desacuerdos hasta encontrar el consenso. Hablar de los problemas, explicarlos unos a otros, abordarlos desde diferentes puntos de vista, equilibrar esas visiones y actuar de acuerdo con lo que parece más adecuado al grupo, les permite autorregular su aprendizaje. En las soluciones a los problemas, los estudiantes incluyen algunas respuestas metacognitivas, por ejemplo: "Este problema es acerca de…", "La diferencia entre el problema y el anterior es…", "El principio matemático para resolver el problema es…".

4) **Revisar y reducir las dificultades*:*** esta actividad se hace por parte del maestro y los estudiantes. Cuando ninguno de los integrantes de un equipo logra resolver un problema determinado, el equipo pide asistencia al maestro, éste a su vez, se une a cada grupo durante lapsos cortos para trabajar como un miembro más del equipo, el objetivo es que el maestro modele el uso del cuestionamiento metacognitivo para resolver los problemas. Siempre al final de una lección, el maestro repasa los aspectos más importantes del tema, cuando se observan dificultades frecuentes se dan explicaciones adicionales a toda la clase, asimismo, el maestro escucha cómo los estudiantes abordan los problemas y brinda apoyo cuando lo considera pertinente.

5) **Obtener el dominio*:*** alcanzar el dominio de los procesos cognitivos, la provisión constante de retroalimentación – correctivos – enriquecimiento permite adaptar el tiempo de aprendizaje a las necesidades de cada estudiante, lo que les facilita obtener el dominio de sus tareas y ahondar en su pensamiento matemático. Cuando un estudiante no obtiene el dominio adecuado del concepto, se le establecen actividades correctivas, con la finalidad de corregir su aprendizaje, lo que se corrobora con una nueva prueba formativa, antes de continuar con la siguiente unidad. Las sesiones correctivas se desarrollan en grupos homogéneos formados con estudiantes que no han alcanzado el dominio (menos del 80% de aciertos en la prueba de verificación), a diferencia del resto de actividades.

6) **Verificación:** verificar la adquisición de capacidades cognitivas y metacognitivas basadas en el uso de procesos correctivos de retroalimentación. La verificación se realiza mediante una prueba que incluye problemas matemáticos que requieren de procesos cognitivos altos, de acuerdo con la taxonomía de Bloom (1956). Para la aplicación de esta fase, se tendrá diseñado una prueba de acuerdo con los criterios descritos, que se aplicará aproximadamente cada 10 lecciones.

7) **Enriquecimiento:** actividades de enriquecimiento y regularización. Son actividades orientadas al desarrollo del razonamiento matemático, se desarrollan en grupos homogéneos de estudiantes que alcanzaron el dominio (más del 80% de aciertos en la prueba de verificación). Para desarrollar esta fase, se seleccionarán problemas desafiantes, diseñados cuidadosamente, relacionados con las funciones matemáticas para que sean desarrollados por estos estudiantes, aplicando los principios de IMPROVE.

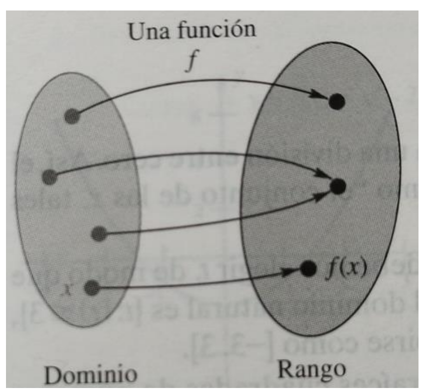
*1.5.*3 Marco disciplinar

El concepto matemático de función se remonta a finales del siglo XVII, una época en la que el cálculo estaba en sus primeras de desarrollo. Este concepto crucial se ha convertido en la columna vertebral de cursos avanzados de matemáticas y es fundamental en todos los campos de las ciencias.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1694) fue el primero en emplear la palabra "función" para representar cualquier cantidad relacionada con una curva, como las coordenadas de uno de sus puntos o su pendiente. Cuarenta años más tarde, Leonard Euler utilizó el término "función" para describir cualquier expresión construida con una variable y varias constantes. Fue Euler quien introdujo la notación $y = f(x)$.

Purcell et. Al. (2007), definen la función como una *regla de correspondencia que asocia a cada objeto* x *en un conjunto -denominado* ***dominio***- *un solo valor* $f(x)$ *de un segundo conjunto. El conjunto de todos los valores así obtenidos se denomina* ***rango*** *de la función*.

Ilustración 1. Representación esquemática de la función[7]



El concepto de función y sus elementos, se amplía en la guía de intervención en el aula que se realizó con los estudiantes, esto, se puede encontrar en la página 115 de este documento.

Diversos autores a nivel nacional destacan la importancia de las funciones dentro de las matemáticas. Quintero y Cadavid, en su "Construcción del concepto de función en estudiantes

[7] Imagen tomada de Cálculo, Purcell et. Al, pág. 29. Ed. 9, 2007.

de grado octavo", argumentan que la función es un tema fundamental en las matemáticas, para las ciencias, y que, además, junto con los conceptos de límite y continuidad, se configuran como piedra angular del análisis matemático. Gómez et al. (2015), destacan la importancia de las funciones por su amplia aplicabilidad en la cotidianidad y en otras áreas del saber e igualmente, las destacan como un pilar importante para el aprendizaje del cálculo. En The National Council of Teachers of Mathematics (NTCM, 1989/1991) de Estados Unidos, se recalcó la importancia del concepto de función. Se pone de manifiesto que se trata de un "concepto unificador de las matemáticas" (NTCM, 1989). En este sentido, Bourbaki (1974) dice que el concepto de funciones caracteriza a la matemática moderna y son una herramienta indispensable para muchas demostraciones dentro de la disciplina.

Las funciones están presentes en toda la matemática, según Spivak (1988), este concepto es sin duda el más importante de todas las matemáticas. En casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de las funciones, asimismo, gran parte de los estudios acerca de la aplicación de la matemática a problemas prácticos emplea el concepto matemático de función.

En relación con la enseñanza de la matemática a nivel de secundaria, el concepto de función tiene una importancia evidente, están presentes desde el inicio del estudio del álgebra hasta el estudio de las primeras nociones del cálculo infinitesimal, como consecuencia, es de vital importancia, que el estudiante comprenda cabalmente el concepto de función, que se familiarice con sus características, elementos principales, aplicaciones básicas, formas de representación y las relaciones entre cada una de ellas.

En Colombia, de acuerdo con Manrique et al. (2017), en la educación básica y media, se ha encontrado que los docentes presentan al estudiante el concepto de función como un proceso meramente algebraico, lo que conlleva preparar al estudiante para resolver cierto tipo de ejercicios sin ninguna clase de análisis, de hecho, los autores enfatizan que en relación al proceso de aprendizaje del concepto, los estudiantes no logran analizar problemas aplicando el concepto de función a cabalidad ya que, según Deulofeu (2000), éste está habituado a recibir una expresión algebraica para obtener de ella su gráfica, método que dificulta la comprensión e interpretación de las funciones.

Por otra parte, la matemática y el método experimental forman el esquema bajo el cual se fundamentan la ciencia y la tecnología modernas, por esta razón, y teniendo en cuenta lo descrito en el primer párrafo de este escrito, las funciones también son parte fundamental del desarrollo de otros campos del saber humano: las funciones logarítmicas tienen su aplicación para la determinación de longitudes de onda, intensidad del sonido, magnitud de sismos. Las funciones exponenciales son ampliamente usadas en situaciones de crecimiento de poblaciones, interés compuesto. Por su parte, las funciones circulares por su parte están relacionadas con la propagación de ondas, el movimiento pendular y son usadas en áreas como la acústica y la electrónica.

Frente al uso de las funciones para representar situaciones de la vida cotidiana, se podría afirmar que éstas permiten describir una buena cantidad de fenómenos observables en la cotidianidad, en los que las magnitudes físicas que varían de acuerdo con una regla fija, es decir, están en correspondencia matemática, dicha noción de correspondencia está presente todo el tiempo, por ejemplo, a cada persona le corresponde una cierta fecha de nacimiento, a cada casa en cierta ciudad le corresponde una única nomenclatura.

Cuestiones sencillas, como cuánto se pagará por cierta cantidad de producto, dado que se conoce el precio unitario de éste, el cálculo de tarifas de servicios públicos o analizar la distancia que recorre un objeto al ser lanzado hacia arriba por una persona (en diferentes deportes en los que se lanzan pelotas -fútbol, baloncesto, tenis, golf, etc.-). Mediante el concepto de función se puede analizar su trayectoria parabólica, se puede también analizar el crecimiento de una cierta especie conocidas ciertas condiciones iniciales.

Con lo que se ha descrito aquí se deja claridad acerca de la amplia aplicación de las funciones matemáticas en situaciones que pueden ser observadas cotidianamente por los estudiantes, característica que las convierte en un objeto de estudio interesante, dada su altísima aplicabilidad.

Los estándares básicos de competencias construidos por el MEN (2006), señalan la importancia del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. De acuerdo con este texto, este pensamiento está en estrecha relación con los otros cuatro tipos de pensamiento matemático (numérico, espacial, de medida o métrico, aleatorio o probabilístico, por ejemplo, el sistema de los números reales es esencial para la cimentación de funciones de variable real) y, además es de gran importancia en el proceso de modelación de situaciones naturales y sociales haciendo uso de modelos funcionales.

Así, se pone de manifiesto la estrecha relación que guardan las funciones matemáticas con otros objetos matemáticos propios de otros tipos de pensamiento, ejemplificando, nociones como área, volumen, aceleración, entre otras, pueden ser concebidas como funciones de otras magnitudes más elementales. Por esto se establecen estándares básicos de competencias matemáticas al finalizar el grado noveno, relacionados con las funciones relacionadas con la modelación de situaciones de variación, identificación en los cambios que se presentan en familias de funciones en sus distintas representaciones.

Los DBA del área de matemáticas (2016) plantean en el numeral diez para el grado octavo, el trabajo relacionado con la proposición de modelos funcionales entre variables, analizando propiedades de covariación entre diversas variables en diferentes contextos, que permitan al estudiante establecer relaciones entre las características algebraicas de las funciones y sus gráficas. Añadiendo, el trabajo con las funciones matemáticas continúa siendo clave en el desarrollo del pensamiento matemático en los grados posteriores, siendo el grado noveno en el que se profundiza en las funciones lineal, cuadrática, racional, exponencial y logarítmica, mientras que en el grado décimo se comienza con el uso de las funciones trigonométricas para describir fenómenos periódicos y, en el grado undécimo se analizan más a fondo las diferentes funciones, con la introducción del cálculo infinitesimal (límites, derivadas, antiderivadas).

1.5.4 Referente legal

A continuación, se presenta el referente legal en el cual se apoya el presente trabajo para el diseño y desarrollo de las actividades de enseñanza y reflexión.

Tabla 1. Normograma

N°	Norma o Ley	Año	Descripción	Relación con el trabajo
1	Constitución Política de Colombia, capítulo 2, artículos 67 y 70.	1991	"La educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social: con ella se busca el acceso al conocimiento, **a la ciencia**, **a la técnica**, y a los demás bienes y valores de la cultura (…)" "El Estado tiene el deber de promover y fomentar el acceso a la cultura de todos los colombianos en igualdad de oportunidades, por medio de **la educación permanente y la enseñanza científica, técnica**, (…)"	Este trabajo pretende la implementación de una metodología de enseñanza enfocada en un tema importante en el desarrollo de las ciencias exactas y naturales.
2	Ley General de Educación 115, ARTÍCULO 22, numeral c.	1994	"El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, métricos, lógicos, analíticos, de conjuntos de operaciones y relaciones (…)"	Este trabajo se enfoca en un objeto matemático que se relaciona con los cinco tipos de pensamiento matemático y que permite solucionar problemas de diversa índole.
3	Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas	1998	"Los lineamientos han de generar procesos de reflexión, análisis crítico y ajustes progresivos por parte de los maestros, las comunidades educativas y los investigadores educativos (…)	Se plantea con este trabajo la implementación de una metodología basada en la metacognición, buscando innovar el quehacer docente.
4	Estándares Básicos de Competencias	2006	"Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y hacer con lo que aprenden."	Se pretende que el estudiante no sólo se familiarice con el tema de estudio, sino que domine sus amplias aplicaciones.
5	Derechos Básicos de Aprendizaje, Matemáticas. V.2	2016	"(DBA), un conjunto de aprendizajes estructurales que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar, (…)	Se toman en cuenta los derechos básicos de aprendizaje para estudiantes de noveno grado como eje del trabajo.

1.5.5 Referente espacial

Este trabajo se llevará a cabo en la institución educativa Liceo Antioqueño, colegio público ubicado al norte de Medellín, en el municipio de Bello, Antioquia, Colombia y que presta servicio desde el 17 de enero de 1994. En la actualidad la IE cuenta con tres sedes, Sede Serramonte: hasta grado noveno, Sede Avenidas: hasta quinto de primaria, y la Sede Principal: contiguo al hospital mental de Antioquia, cuenta con bachillerato y media técnica, en esta sede, se llevará a cabo la implementación del presente trabajo.

El Antioqueño presta servicios a cerca de 3000 estudiantes en todas sus sedes, entre los estratos socioeconómicos 1 al 4, característica que le confiere una diversidad interesante a la comunidad educativa, también es uno de los primeros colegios de educación pública en el municipio de Bello en alcanzar un alto rendimiento en las pruebas de estado ICFES, obteniendo altos puntajes tanto a nivel municipal como en el ámbito nacional.

De acuerdo con la misión, en la IE Liceo Antioqueño se desarrolla un proyecto de transformación social, democrática, pluralista, participativa e incluyente, a través de un servicio de alta calidad para la formación de personas integrales, con altas competencias personales, sociales, científicas, tecnológicas y laborales. Como parte de la visión, se tiene en perspectiva para el año 2025 que el Liceo Antioqueño sea reconocido a nivel local y nacional como una institución de calidad, inclusiva y con altos índices de eficacia y eficiencia en su sistema de gestión, reflejados en la formación y desempeño de sus estudiantes y egresados, como seres integrales y gestores de una transformación de impacto social.

Como parte del proyecto educativo institucional, el Liceo Antioqueño adopta un **modelo pedagógico social – cognitivo**, que tiene como meta el desarrollo máximo de las capacidades e intereses de los alumnos, quienes definen con su docente los retos o problemas que se han de abordar y, que están dados por la realidad económica, política, social y cultural que prevalece en el entorno. La metodología se ajusta al nivel de desarrollo y contenido, siendo el docente el facilitador y animador de la construcción de los saberes del estudiante, quien es sujeto de su propio aprendizaje, se pretende que la relación docente – estudiante sea de doble vía, empática, asertiva, intencionada y eficaz, de manera que las experiencias educativas sean estimuladas por el fortalecimiento científico a través del diálogo, la crítica, la confrontación y la acción compartida en la práctica social. En el Liceo Antioqueño, el **enfoque de evaluación por competencias** favorece construcción y reconstrucción de saberes y sus transferencias, en busca de transformar la realidad.

Se pretende que la implementación de la metodología IMPROVE permita mejorar el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios relacionados con el uso de funciones matemáticas. Esta metodología es pertinente dado el modelo pedagógico adoptado por la IE, se espera que esta propuesta conlleve a la formación de los educandos, de acuerdo con el perfil del estudiante y egresado liceísta: analítico, crítico, con interés por la investigación, creativo, reflexivo, preparado para desempeñarse con éxito en sus estudios posteriores y en su vida laboral.

CAPÍTULO 2

DISEÑO METODOLÓGICO

2.1 Enfoque

Según Hernández Sampieri (2014) el enfoque de ***investigación cualitativo*** es un proceso inductivo, recurrente, que analiza múltiples realidades subjetivas y no tiene una secuencia lineal. A su vez, entre sus características pueden destacarse que los significados se extraen de los datos recolectados y que no se fundamenta en la estadística. Esto conlleva a conseguir una mayor profundidad en los significados, amplitud, riqueza interpretativa y permite contextualizar el objeto de estudio. Este enfoque utiliza la recolección de datos y su análisis para afinar las preguntas de investigación o revelar nuevas interrogantes, es decir, en éstos se pueden desarrollar preguntas ***antes, durante o después de la recolección y el análisis de datos***, con este proceso se discierne cuáles son las preguntas importantes, para perfeccionarlas y responderlas***.***

De lo anterior, se sigue que el proceso de investigación cualitativa no es lineal, sino uno circular, que no sigue siempre una misma secuencia, el autor, resume el proceso en nueve fases "no lineales", es decir de la segunda se puede avanzar a la tercera, o retroceder a la primera, sucede de igual manera para cualquiera de las fases: idea, planteamiento del problema, inmersión inicial en el campo, concepción del diseño del estudio, definición de la muestra inicial del estudio y acceso a ésta, recolección de los datos, análisis de los datos, interpretación de resultados y elaboración de reporte de resultados. Todas las fases mencionadas, se alimentan de la revisión constante de la literatura existente (marco de referencia), por lo que ésta no se hace necesariamente sólo al inicio de la investigación.

Según Restrepo (2004), el saber pedagógico es la adaptación de la teoría pedagógica al quehacer propio de cada maestro, en acuerdo con sus propias circunstancias y el contexto en el que actúa, dicho saber se forma a partir del trabajo pedagógico diario, llevado a cabo por los docentes para transformar su práctica, buscando que responda a las necesidades de sus estudiantes y a su agenda sociocultural, para construirlo se requiere de la reflexión diaria acerca de la propia práctica y en su transformación constante, no basta únicamente con saber de pedagogía, es necesaria una adaptación de la teoría, entendida como un diálogo permanente entre teoría y práctica, diálogo en el que el docente sea capaz de introducir adaptaciones, transformaciones de su práctica, que le permitan obtener un saber pedagógico conveniente, este saber, implica una red de conocimientos acerca de la educación y la enseñanza, establecidos por la práctica pedagógica. La investigación – acción pedagógica se ofrece como un método potenciador de este proceso reflexivo y de transformación de la práctica. Inicialmente, consta de una crítica a la propia práctica por parte del maestro, llevada a cabo a través de una reflexión profunda de su tarea pedagógica y la situación de los estudiantes, es un momento de deconstrucción que debe llevar a un saber pedagógico que explique su práctica y es el punto indispensable para una transformación. En segundo lugar, la reconstrucción de la práctica, se propone encontrar una opción más efectiva y vigente, esta reconstrucción demanda búsqueda de concepciones pedagógicas que puedan adaptarse a la realidad del maestro y sus estudiantes. Luego de la implementación de la nueva práctica, se finaliza con una evaluación de su efectividad, se constata su capacidad práctica para lograr los propósitos de la educación.

2.2 Método

Se inició esta propuesta de investigación con una **fase de diagnóstico**. Se partió de una reflexión acerca de un problema de enseñanza en un tema específico del saber disciplinar matemático, esto con el propósito de elegir un tema de investigación relacionado con éste: “Bajo rendimiento de los estudiantes del grado noveno de la IE Liceo Antioqueño en la resolución de problemas que involucran funciones matemáticas”. Con respecto a esto, Cuevas y Díaz (2014) aseveran que las razones por las cuales los estudiantes tienen dificultades con el concepto de función pueden encontrarse en su complejidad y generalidad. A su vez, Gómez et al. (2015) concluyeron en su trabajo que los estudiantes del grado once tienen dificultades con la identificación y el uso de los elementos de la función. Con relación al problema enunciado, se planteó la pregunta de investigación, que pretende responderse con el objetivo general y los objetivos específicos de este trabajo. Para la escritura de los preliminares de este trabajo se realizó una revisión bibliográfica de investigaciones relacionadas, a nivel nacional e internacional, asimismo se indagó sobre diversas teorías y metodologías de enseñanza – aprendizaje que pudiesen adaptarse para generar una propuesta de investigación con la que se pretende dar solución al problema y dar respuesta a la pregunta de investigación.

En la fase de elaboración se realizó la escritura del marco teórico, en el cual se tomó como referente el modelo metacognitivo IMPROVE (Mevarech, Kramarski, 1997), por ser una metodología basada en el cuestionamiento metacognitivo, el aprendizaje cooperativo y la retroalimentación enriquecedora, además, porque puede ser un modelo que puede usarse tanto en unidades temáticas concretas como extenderse al uso durante un año lectivo completo, con la escritura de este marco se definen algunos materiales didácticos, tipos de actividades y de evaluaciones que se van a llevar a cabo . También se elaboró un marco conceptual, donde se expone la importancia de la enseñanza de las funciones matemáticas desde la perspectiva de la disciplina misma, el desarrollo de saberes posteriores, su aplicación en otros campos del saber, la relación con la cotidianidad del estudiante y el currículo. Asimismo, se redactó un marco normativo, un normograma que lista la normativa vigente en el ámbito de la enseñanza de la matemática y su relación con el trabajo y, un marco espacial que describe el contexto en el que se llevará a cabo la intervención de aula.

Durante una tercera fase de acción y observación se realizará la intervención en el aula con base al referente que se ha tomado, el modelo metacognitivo IMPROVE, aquí se van a llevar a cabo las siete fases del modelo: introducir los nuevos conceptos, cuestionamiento metacognitivo, práctica, revisión y reducción de dificultades, obtención del dominio, verificación, enriquecimiento. Adicional a la implementación, se hará la recolección de la información para su posterior análisis.

La última fase, será la de evaluación y reflexión. Aquí se hará la evaluación global de la propuesta, se analizará el resultado de la intervención en el aula basada en el modelo metacognitivo IMPROVE, en relación con la información recolectada en los diferentes instrumentos, esto es, el material que produce el estudiante mediante la aplicación de la propuesta, se formularán las conclusiones y recomendaciones finales.

2.3 Técnicas e instrumentos de recolección de la información

Para la evaluación global de la intervención de aula basada en el modelo metacognitivo IMPROVE es necesario recolectar información confiable, que permita evaluar objetivamente los resultados obtenidos. Para esto, durante el proceso de implementación se utilizarán diferentes instrumentos de recolección de información, que se detallan a continuación:

El ***diario de campo*** se trata de una herramienta poderosa para hacer seguimiento a la intervención en el aula, también es útil para tener una vista interpretativa de lo que sucede diariamente en el aula, permitiendo que el docente profundice en su propia experiencia y, más importante aún, produce conocimiento acerca de las fortalezas y efectividad de la intervención de aula (Restrepo, 2004). Así pues, en el diario de campo se registrarán los detalles relevantes surgidos durante la intervención del aula, relacionados con el logro del aprendizaje por parte de los estudiantes, por lo que se deberán tomar en cuenta situaciones tales como las intervenciones verbales, las discusiones entre integrantes de subgrupos de trabajo referentes a los problemas objeto de estudio, etc. Es primordial que aquí se registren detalladamente la interacción de los diferentes grupos heterogéneos de trabajo cuando usan las preguntas metacognitivas, así el docente podrá identificar si los estudiantes desarrollan habilidades cognitivas y metacognitivas.

Los ***talleres grupales*** son otra fuente de información valiosa, al ser planteados para resolver en grupos de trabajo heterogéneos, permiten observar, entre otras cosas, cómo influye en el aprendizaje de cada miembro del grupo, la heterogeneidad de saberes previos, las diferentes habilidades de los integrantes, entre otras. De estos talleres realizados por los estudiantes se guardará registro escrito de lo que ellos mismos desarrollen.

Otro instrumento importante son las ***evaluaciones***, deben ser diseñadas cuidadosamente y teniendo en cuenta el momento en el que van a aplicarse, es decir, una primera evaluación deberá tener como fin, clasificar a los estudiantes por niveles de desempeño antes de iniciar la implementación de IMPROVE. Las evaluaciones para verificar el aprendizaje deben ser diferentes, teniendo cuidado acerca de los problemas que se incluirán en ellas, de modo que permitan en verdad verificar el avance de los estudiantes. En este apartado también queda registro escrito de lo que entregan los educandos.

Finalmente, con ***entrevistas*** antes de la implementación, durante y después de la misma, se recolectará información acerca de las expectativas, dificultades presentadas en los estudiantes durante el trabajo con IMPROVE, lo destacable como positivo de la experiencia, entre otras opiniones que permitan tomar decisiones para mejorar la propuesta de cara a futuras investigaciones. Las apreciaciones dadas por los estudiantes en las entrevistas serán registradas en el diario de campo.

2.4 Técnicas e instrumentos de análisis e interpretación

Hernández Sampieri (2018) habla de la importancia de tener varias fuentes de información y métodos para recolectar datos. En la investigación cualitativa, la recolección y análisis de datos ocurren simultáneamente. En esencia, el análisis consiste en recibir datos no estructurados y dotarlos de estructura. El autor citado, propone que en el análisis deben incluirse tres acciones progresivas íntimamente ligadas, que se llevan a cabo paralelamente. La siguiente ilustración sintetiza la propuesta que adoptamos para el análisis de los datos recolectados, producto de este estudio.

Ilustración 2. Propuesta para el análisis cualitativo.

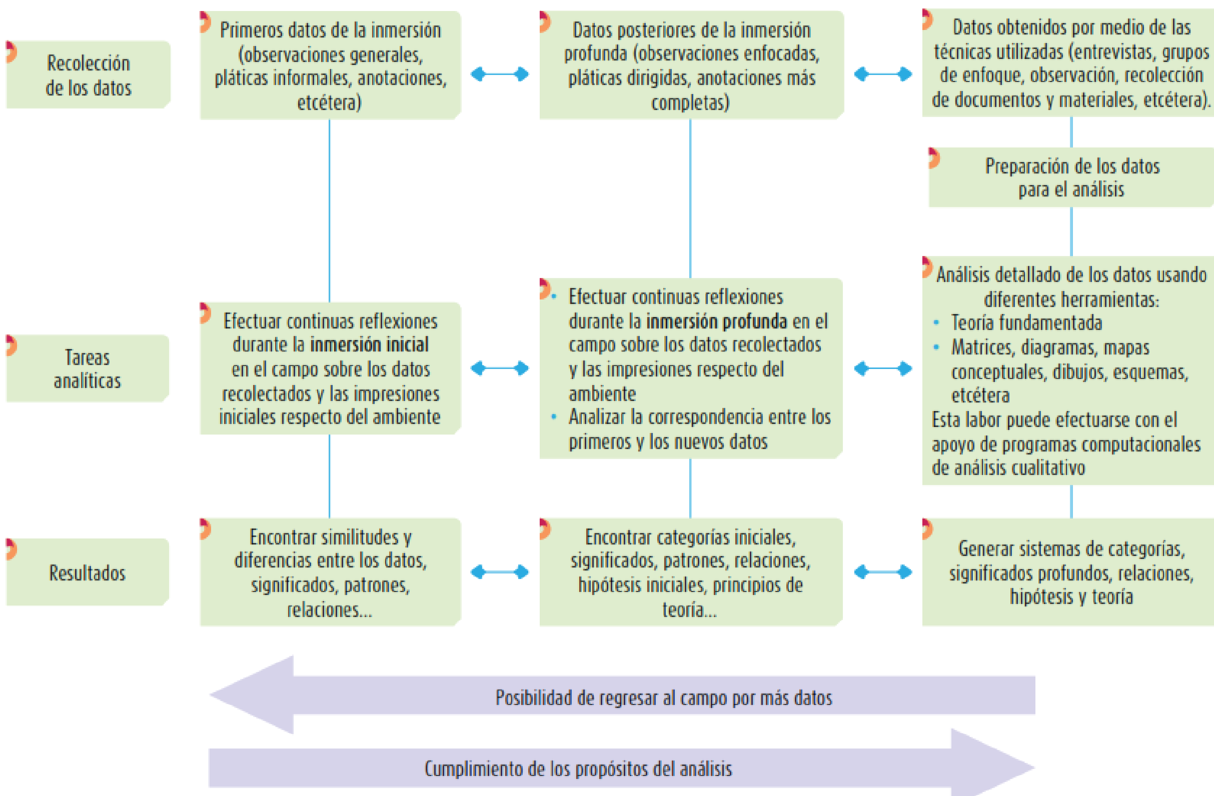


Imagen tomada de: Metodología de la Investigación. Hernández Sampieri. 2018.

2.5 Población y muestra

La intervención en el aula se llevará a cabo con estudiantes del grado noveno de la sede central en la IE Liceo Antioqueño. De dicha población se tomará una muestra de aproximadamente cuarenta estudiantes entre los 14 y 17 años, de los cuales veinte serán sometidos al modelo IMPROVE, mientras que los restantes servirán como grupo de control, para comparar los resultados.

Ilustración 3. Liceo Antioqueño sede central, tomada de la página de Facebook institucional

Imagen tomada de: página oficial de la secretaría de educación de Bello.

A continuación, se presenta los datos de los estudiantes que participan en la experiencia con sus respectivos códigos. Cada código tiene la estructura: E-Grupo-N°_de_lista. De esta manera, el estudiante identificado con el código E091_1 es el estudiante #1 de la lista del grupo 9°1.

Tabla 2. Lista de datos de estudiantes que participan en la experiencia

GRUPO 9°1			GRUPO 9°2			GRUPO 9°3			GRUPO 9°4		
Código	**Género**		**Código**			**Código**			**Código**		
	M	**F**		**M**	**F**		**M**	**F**		**M**	**F**
E091_1	X		E092_1		X	E093_1		X	E094_1		X
E091_2		X	E092_2		X	E093_2	X		E094_2	X	
E091_3	X		E092_3	X		E093_3		X	E094_3		X
E091_4	X		E092_4	X		E093_4	X		E094_4	X	
E091_5	X		E092_5	X		E093_5		X	E094_5		X
E091_6		X	E092_6		X	E093_6	X		E094_6	X	
E091_7	X		E092_7	X		E093_7	X		E094_7	X	
E091_8	X		E092_8		X	E093_8		X	E094_8		X
E091_9		X	E092_9		X	E093_9		X	E094_9		X
E091_10		X	E092_10	X		E093_10		X	E094_10	X	
E091_11		X	E092_11		X	E093_11	X		E094_11		X
E091_12	X		E092_12		X	E093_12	X		E094_12		X
E091_13	X		E092_13	X		E093_13		X	E094_13		X
E091_14		X	E092_14	X		E093_14		X	E094_14	X	
E091_15		X	E092_15	X		E093_15	X		E094_15		X
E091_16		X	E092_16	X		E093_16	X		E094_16		X
E091_17		X	E092_17		X	E093_17		X	E094_17		X
E091_18	X		E092_18		X	E093_18	X		E094_18	X	
E091_19	X		E092_19		X	E093_19	X		E094_19	X	
E091_20	X		E092_20	X		E093_20		X	E094_20	X	
E091_21		X	E092_21		X	E093_21		X	E094_21	X	
E091_22	X		E092_22	X		E093_22	X		E094_22		X
E091_23		X	E092_23	X		E093_23		X	E094_23		X
E091_24	X		E092_24	X		E093_24	X		E094_24	X	
E091_25		X	E092_25	X		E093_25	X		E094_25	X	
E091_26		X	E092_26		X	E093_26		X	E094_26	X	
E091_27		X	E092_27		X	E093_27		X	E094_27		X
E091_28		X	E092_28		X	E093_28		X	E094_28		X
E091_29		X	E092_29		X	E093_29	X		E094_29		X
E091_30	X		E092_30		X	E093_30	X		E094_30		X
E091_31	X		E092_31		X	E093_31		X	E094_31	X	
E091_32	X		E092_32	X		E093_32	X		E094_32	X	
E091_33		X	E092_33	X		E093_33	X		E094_33	X	
E091_34		X	E092_34	X		E093_34		X	E094_34		X
E091_35	X		E092_35	X		E093_35		X	E094_35		X
E091_36	X		E092_36		X	E093_36		X	E094_36	X	
E091_37	X		E092_37		X				E094_37	X	
E091_38		X							E094_38	X	

2.6 Impacto esperado

Con base en la bibliografía consultada y a los resultados aportados por las autoras de IMPROVE (Mevarech, Kramarski) se espera que el grupo de estudiantes sometido al estudio bajo el modelo alcance un mejor desempeño que el grupo de control, tanto en solución de problemas rutinarios como desafiantes y no rutinarios que involucran a las funciones matemáticas en su solución. De ser así, se abrirá la posibilidad para la aplicación del modelo IMPROVE a una mayor escala dentro de la Institución e incluso, en áreas diferentes a la matemática. A razón de lo anterior, se espera que los estudiantes sometidos a IMPROVE muestren un mejor desempeño en pruebas ICFES Saber 9, especialmente en aprendizajes relacionados con el pensamiento **numérico variacional**, en los que no se ha tenido un buen desempeño en los últimos años. Igualmente, se tiene la expectativa de que este grupo de estudiantes logre mejores desempeños en los grados posteriores, y que se vea reflejado en la obtención de mejores resultados en las pruebas ICFES Saber 11°[8].

2.7 Tabla de planificación de actividades

Basado en el método de investigación – acción educativa que se aplica para orientar la propuesta, se plantea el siguiente plan de acción para el desarrollo el mismo:

[8] De acuerdo con el ICFES, el examen de estado de la educación media, saber 11°, es un instrumento de evaluación estandarizada que mide oficialmente la calidad de la educación formal impartida a quienes terminan el nivel de educación media. Está compuesto por cinco pruebas: lectura crítica, matemáticas, sociales y ciudadanas, ciencias naturales e inglés. Tomado de la página oficial del ICFES: https://www.icfes.gov.co/

Tabla 3. Planificación de actividades

Fase	Objetivos	Actividad
Fase 1: Diagnóstico	Identificar el problema y seleccionar el tema. Formular la pregunta, los objetivos general y específicos de la investigación. Identificar teorías/metodologías de enseñanza – aprendizaje para adoptarlas en la propuesta. Escribir los preliminares de la investigación.	**1.1** Búsqueda y revisión de antecedentes con relación a investigaciones acerca de resolución de problemas con funciones matemáticas y/o afines. **1.2** Revisión bibliográfica de teorías/metodologías de enseñanza – aprendizaje aplicables en la investigación. **1.3** Revisión bibliográfica de herramientas TIC que puedan ayudar a la enseñanza de las funciones. **1.4** Escritura de preliminares.
Fase 2: Elaboración	Escritura de los Marcos Referenciales. Diseño de actividades de acuerdo con el modelo metacognitivo IMPROVE enfocadas a la resolución de problemas con funciones matemáticas.	2.1 Escritura de marcos referenciales: marco teórico, marco conceptual, marco normativo, marco espacial y diseño metodológico. 2.2 Diseño de las actividades de enseñanza usando GeoGebra y con base a lo planteado por el modelo metacognitivo IMPROVE orientado a la resolución de problemas con funciones matemáticas. (pruebas de saberes previos, preguntas metacognitivas, selección de problemas rutinarios y no rutinarios – desafiantes).
Fase 3: Acción y observación	Implementar el modelo metacognitivo IMPROVE con los estudiantes del grado noveno de la IE Liceo Antioqueño.	3.1 Intervención en el aula con la metodología IMPROVE. 3.2 Recolección de información acerca de la intervención en el aula.
Fase 4: Evaluación y reflexión	Determinar el alcance y eficacia de la implementación de IMPROVE teniendo como referente los objetivos general y específicos de la investigación Formular conclusiones y recomendaciones	4.1 Análisis e interpretación de la información recolectada durante la intervención en el aula. 4.2 Elaboración de conclusiones acerca de la implementación de la propuesta. 4.3 Elaboración de recomendaciones para futuras investigaciones relacionadas con la implementación de IMPROVE

2.8 Cronograma de actividades

El siguiente cronograma presenta el tiempo establecido para llevar a cabo las actividades planificadas para el desarrollo de la experiencia según sus etapas:

Tabla 4. Cronograma de actividades

Actividad	Semanas																					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1.1																						
1.2																						
1.3																						
1.4																						
2.1																						
2.2																						
3.1																						
3.2																						
4.1																						
4.2																						
4.3																						

CAPÍTULO 3

TRABAJO DE CAMPO Y PROPUESTA

En este apartado se presentan el diseño de la prueba diagnóstica de saberes previos y la propuesta de intervención en el aula, ambas toman como referentes teóricos los DBA y estándares básicos de competencias del área de matemáticas, y para su valoración, la taxonomía revisada de Bloom.

3.1 Diagnóstico y análisis de resultados

3.1.1 Diseño del diagnóstico

Si bien el modelo IMPROVE plantea la introducción de los nuevos conceptos como primera fase de su aplicación, es importante establecer el punto de partida de los estudiantes que van a participar del estudio, esto es debido, a que una característica importante en la metodología es el aprendizaje colaborativo en grupos heterogéneos, refiriéndose esto último a niveles de desempeño. Por esta razón, se diseña la prueba diagnóstica, que pretende medir el desempeño de los estudiantes con relación a saberes previos importantes para el estudio de la función matemática. De acuerdo con los resultados obtenidos se elige el grupo donde se desarrolla la metodología IMPROVE, igualmente, en dicho grupo se conforman los grupos de trabajo heterogéneos. La propuesta de intervención en el aula, a su vez que pretende que los estudiantes lleguen a una buena comprensión del concepto de función, pretende ocuparse de mejorar aquellos aspectos donde la prueba diagnóstica señale bajas competencias en los estudiantes.

Es importante hacer una aclaración: en el material que se entregó a los estudiantes, tanto en la prueba diagnóstica como en la intervención en el aula, muchas de las gráficas fueron realizadas en GeoGebra, razón por la cual los ejes del plano cartesiano no están debidamente rotulados, sin embargo, esto se explicó previamente a los estudiantes y se enfatizó nuevamente en la etapa de introducción de nuevos conceptos, de la metodología IMPROVE.

3.1.1.1 Cuestionario

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA LICEO ANTIOQUEÑO **Res.:16193 de noviembre de 2002 y resolución Nº 3314 de septiembre 28 de 2005** Código DANE: 305088002950 NIT: 811.017.837-0	CÓDIGO: FPR. Versión:1.0
	Sistema Institucional de Evaluación de Estudiantes – SIEE	Fecha: 08/12

Área: MATEMÁTICAS	**Grado**	Noveno	**Evaluación diagnóstica – Saberes previos funciones**	**Año**	2023
Apellidos y nombres:					

La siguiente prueba tiene como propósito indagar acerca de tus conocimientos actuales, de temas que pueden ser útiles y necesarios para el estudio de las funciones matemáticas. Encontrarás en total 20 preguntas, quince de ellas de selección múltiple con **RESPUESTA ÚNICA**, las cinco restantes son de respuesta abierta, es decir, no tienen opciones de respuesta prediseñadas. En todos los casos, te pido sustentar tus respuestas, tratando de hacerlo en forma clara, organizada y lógica, te recuerdo que la única meta de este cuestionario es determinar el estado de tus **saberes previos** para abordar la unidad temática de ***La Función***.

Nota: no olvides marcar tu prueba.

Responde las preguntas 1 a 3 de acuerdo con la siguiente información:

Un avión despega del aeropuerto y vuela en línea recta al este (E) a una velocidad constante de $500\ km/h$. Después de 6 horas de vuelo, el avión hace un giro de $90°$ hacia el sur (S) y continúa volando en línea recta a la misma velocidad constante durante 8 horas más.

Puedes usar la siguiente imagen como referencia:

Tenga en cuenta: por convenio, el aeropuerto (punto de partida), debe coincidir con el origen del plano cartesiano.

1. La posición del avión en coordenadas cartesianas es:

a. (4000, 3000)
b. (3000, 4000)
c. (-4000, 3000)
d. (3000,-4000)

2. La distancia entre el punto de partida y el punto en el que se encuentra luego de las 5 horas de vuelo es:

a. 4000 km
b. 4500 km
c. 5000 km
d. 5200 km

3. Realice en un plano cartesiano, un dibujo donde se puedan observar:

- La posición inicial del avión.
- La posición después de 6 horas de vuelo.
- La posición después de 14 horas de vuelo.

Responde las preguntas 4 a 6 de acuerdo con la siguiente información:

Un ciclista está pedaleando en línea recta a una rapidez constante de $15km/h$. La distancia recorrida por el ciclista puede ser representada por la ecuación: $d = vt$, donde d es la distancia recorrida en km, v es la velocidad del ciclista en km/h y t es el tiempo en horas.

4. La distancia que ha recorrido el ciclista después de 3,7 horas, es:
a. 55,5 km
b. 45 km
c. 46,7 km
d. 52 km

5. De la ecuación $d = vt$, podemos obtener la ecuación $v = d/t$. Suponga que el ciclista va a pedalear durante un tiempo determinado. En el primer intento recorre 50km, y en un segundo intento recorre 35km (en ambos intentos pedaleó el mismo tiempo). De acuerdo con lo anterior, podríamos afirmar acerca de las velocidades en cada intento que:
a. La velocidad del primer intento es igual a la del segundo intento.
b. La velocidad del primer intento fue mayor a la del segundo intento.
c. La velocidad del segundo intento fue mayor a la del primer intento.
d. No es posible realizar una afirmación con la información proporcionada.

6. Analiza y explica, cuál es la relación existente entre la distancia recorrida, la velocidad y el tiempo.

Responde las preguntas 7 a 8 de acuerdo con la siguiente situación:

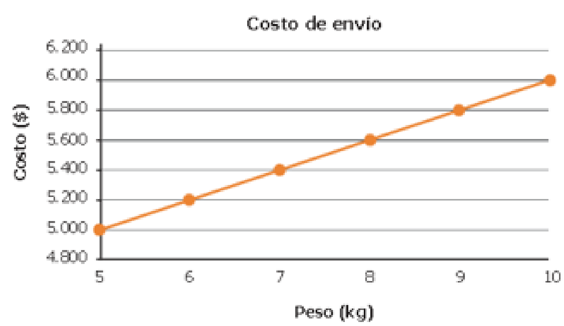
Natalia debe a su madre un total de \$1'250.000. De los cuales le ha pagado \$312.500, el restante lo pagará en 5 cuotas fijas quincenales.

7. El porcentaje de la deuda que saldó Natalia con el pago de \$312.500 fue:
a. 20%
b. 25%
c. 30%
d. 35%

8. Las cuotas mensuales que deberá pagarle a su madre son de:
a. \$187.500
b. \$187.000
c. \$186.500
d. \$186.000

Responda las preguntas 9 a 11 de acuerdo con la siguiente información:

Un servicio de mensajería tiene un costo básico para los envíos que tengan un peso menor a 5kg. Si el peso del paquete es mayor que 5kg, el costo del envío aumenta, como se muestra en la gráfica[1]:



9. De acuerdo con la gráfica, el costo básico de un envío es de:
a. \$5.200
b. \$5.400
c. \$5.000
d. \$5.600

[1] Tomada y adaptada de GUÍA DE ORIENTACIÓN GRADO 8°, Ministerio de Educación de Colombia, realizada para efectos didácticos por Juan D. López, estudiante MAESCEN 2023.

10. A partir de los 5kg, el aumento en pesos ($) por cada kg que pesa el paquete es de:

a. $200
b. $400
c. $300
d. $500

11. Si una persona pagó $6.400 por el envío de un paquete, el peso de éste debe ser de:

a. 10 kg
b. 11 kg
c. 12 kg
d. 13 kg

Responde las preguntas 12 a 13 de acuerdo con la siguiente información:

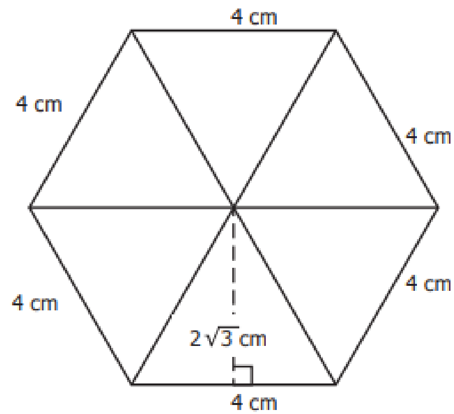
Un pediatra afirma que la cantidad de onzas de leche que debe consumir diariamente un bebé durante los primeros cuatro meses de vida se puede calcular con la ecuación $\boldsymbol{y = -x^2 + 6x}$, donde la variable $\boldsymbol{x}$ representa el número del mes, y la variable $\boldsymbol{y}$ representa la cantidad de onzas a consumir.

12. Construya una tabla de valores con las variables $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

13. De acuerdo con la información proporcionada, es correcto afirmar que:

a. El bebé debe tomar más leche cada mes.
b. La cantidad de leche aumenta hasta el segundo mes y luego, disminuye hasta el cuarto.
c. El bebé debe consumir menos leche cada mes.
d. La cantidad de leche disminuye hasta el segundo mes y luego, aumenta hasta el cuarto.

La figura muestra un hexágono regular dividido en 6 triángulos equiláteros



Para calcular el área del hexágono regular se multiplica el área de uno de los triángulos equiláteros por 6[2].

14. ¿Cuál es el área del hexágono regular?

a. $5\sqrt{3}\ cm^2$
b. $10\sqrt{3}\ cm^2$
c. $24\sqrt{3}\ cm^2$
d. $48\sqrt{3}\ cm^2$

Responda las preguntas 15 a 16 con la siguiente información:

De un conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, se forma un conjunto B, tal que, sus elementos son el cuadrado de los elementos del conjunto A.

15. De los siguientes, el conjunto B que cumple con las condiciones enunciadas es:

a. $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
b. $B = \{21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29\ 210\}$
c. $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$
d. $B = \{12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92, 102\}$

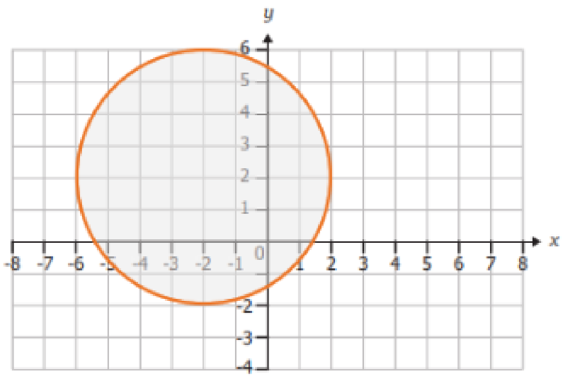
16. Dibuje y escriba por extensión los siguientes conjuntos:

- $A \cup B =$
- $A \cap B =$

[2] Tomada y adaptada de GUÍA DE ORIENTACIÓN GRADO 9°, Ministerio de Educación de Colombia, realizada para efectos didácticos por Juan D. López, estudiante MAESCEN 2023.

Responda las preguntas 17 a 18 teniendo en cuenta la siguiente información:

Un estudiante dibujó un círculo como se muestra a continuación.[3]



El radio es el segmento que une a su centro con un punto cualquiera de la circunferencia. Por su parte, el diámetro es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por su centro.

17. El radio y diámetro de la circunferencia son respectivamente:

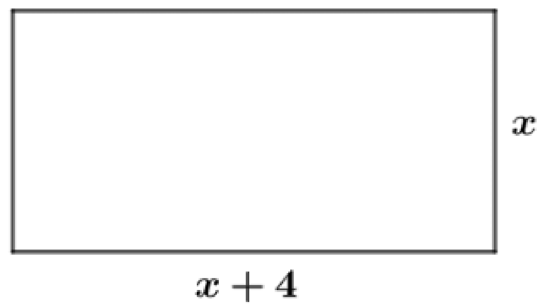
a. 2 y 4unidades
b. 3 y 6 unidades
c. 4 y 8 unidades
d. 5 y 10 unidades

18. El área de una circunferencia de radio r es πr^2. El área de la circunferencia de la gráfica es:

a. 16π
b. 4π
c. 64π
d. 8π

Responda las preguntas 19 a 20 con base a la siguiente información:

Considere el rectángulo que se muestra en la siguiente figura:



19. El perímetro de un polígono es la suma de la longitud de los lados que lo componen. La expresión algebraica que representa el perímetro de la figura es:

a. $P = 4x + 8$
b. $P = 2x + 4$
c. $P = 12$
d. $P = 4x$

20. El área del rectángulo se encuentra con la multiplicación de su altura por su base ¿Cuál es la expresión algebraica que representa al área de la figura?

[3] Tomada y adaptada de GUÍA DE ORIENTACIÓN GRADO 8°, Ministerio de Educación de Colombia, realizada para efectos didácticos por Juan D. López, estudiante MAESCEN 2023.

3.1.2 Análisis de resultados

Antes de desarrollar el análisis de los resultados de la prueba diagnóstica, señalamos que por inconsistencias con las opciones de respuesta de las preguntas 2 y 13, estas no serán tomadas en cuenta para analizar. En la página 62 se aportan más detalles respecto a este particular.

La prueba diagnóstica se aplicó a 149 estudiantes de la IE Liceo Antioqueño, Sede Central, jornada mañana, el 23 de marzo del 2023 a los grupos 9°1 y 9°2 y, el 27 de marzo de 2023 a los grupos 9°3 y 9°4. La prueba contó con 20 preguntas: 15 de selección múltiple con única respuesta y 5 preguntas abiertas.

Se diseñó una prueba enfocada en saberes previos, necesarios para abordar el estudio de las funciones matemáticas, a saber: las operaciones básicas con reales, pares ordenados, representaciones en el plano cartesiano, proporciones, porcentajes, nociones básicas de conjuntos y álgebra básica. Se buscó entonces, establecer el nivel de desempeño de los estudiantes en dichos temas, con el fin de realizar la conformación de los grupos de trabajo heterogéneos para implementar la metodología IMPROVE (Mevarech, Kramarski).

Se tomaron como referentes para el diseño de la prueba y el posterior análisis de los resultados, los lineamientos curriculares para el área de matemáticas (MEN, 1998), los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006) y los DBA en matemáticas (MEN, 2016). En este sentido, se clasificaron las preguntas de acuerdo con los cinco procesos generales de la actividad matemática, y el análisis se realizó teniendo como referencia los DBA relacionados con las temáticas mencionadas y los cinco pensamientos matemáticos: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Para la clasificación del desempeño de los estudiantes, se utilizó la escala de valoración de la IE Liceo Antioqueño, tomada del sistema institucional de evaluación de los estudiantes (SIIE), además, se muestra la correspondencia con los criterios de valoración de IMPROVE:

Tabla 5. Escala de valoración institucional, IE Liceo Antioqueño.

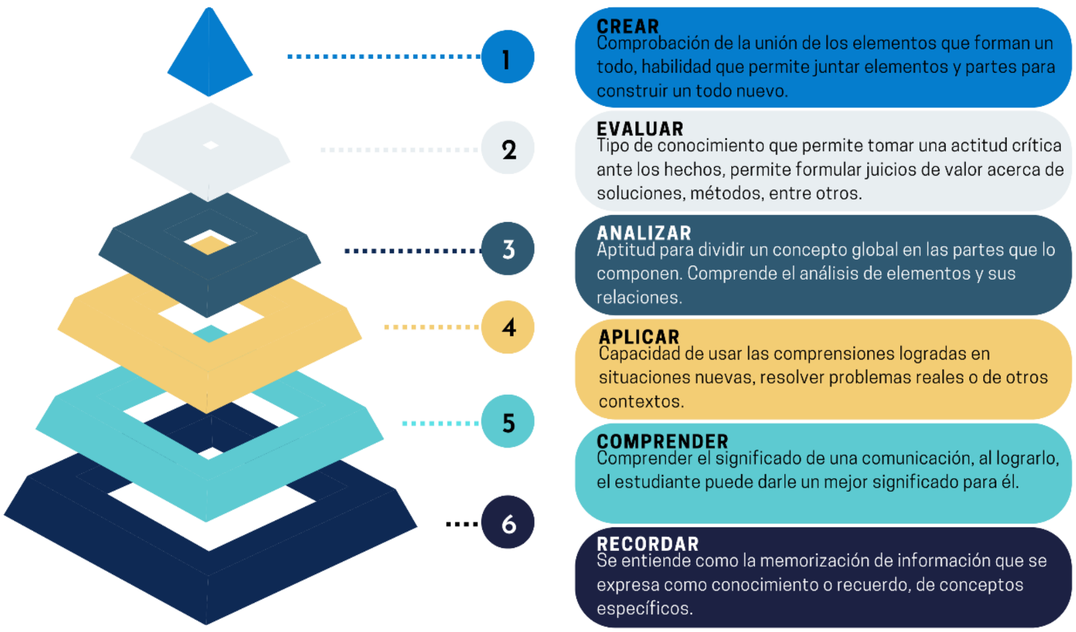
Nivel de desempeño	Abreviatura	Escala de valoración	Valoración IMPROVE
BAJO	BJ	1.0 - 2.9	Estudiantes no alcanzan el dominio
BÁSICO	BS	3.0 - 3.9	
ALTO	AL	4.0 - 4.5	Estudiantes alcanzan el dominio
SUPERIOR	SUP	4.6 - 5.0	

Igualmente, se establecieron desempeños de los estudiantes en cada una de las preguntas, al tiempo que se observó la incidencia del azar, puesto que algunas preguntas encadenadas (la respuesta de una pregunta determinada depende de obtener la respuesta correcta en la anterior) permitió observar este tipo de patrón.

IMPROVE señala la importancia del uso de la taxonomía de Bloom (1956) en el diseño de los problemas y criterios de evaluación. Bloom clasifica y ordena el aprendizaje, considerando tres categorías del saber: 1) campo cognoscitivo, 2) campo psicomotriz, 3) campo afectivo. Por la naturaleza de este trabajo, se usa lo referente al campo cognoscitivo que, a su vez abarca seis subáreas, las cuales determinan los procesos cognitivos de orden inferior y los de orden superior (Olivera, 2011).

Los planteamientos originales de Bloom (1956) han sido revisados y actualizados (Anderson y Krathwohl, 2001), la siguiente ilustración sintetiza los aspectos fundamentales de dicha categorización de los aprendizajes:

Ilustración 4. Taxonomía de Bloom revisada por Anderson y Krathwohl, campo cognoscitivo



Según Méndez (2015), la taxonomía de Bloom ofrece a los docentes una forma de categorizar los aprendizajes de los estudiantes, así es, que las seis subáreas brevemente descritas en la ilustración 4 se agrupan en procesos cognitivos de orden inferior y procesos cognitivos de orden superior, además tienen asociadas una serie de verbos que justamente permiten discriminar los aprendizajes de los alumnos. En la siguiente tabla se pueden observar las subáreas agrupadas y algunos de los verbos que pueden usarse en cada una de ellas:

Tabla 6. Procesos cognitivos según la taxonomía de Bloom

Procesos cognitivos de orden inferior			**Procesos cognitivos de orden superior**		
Recordar	**Comprender**	**Aplicar**	**Analizar**	**Evaluar**	**Crear**
Agrupar	Abreviar	Aplicar	Categorizar	Afirmar	Combinar
Asociar	Agrupar	Calcular	Clasificar	Argumentar	Construir
Clasificar	Concluir	Clasificar	Comparar	Concluir	Crear
Citar	Decidir	Comprobar	Contrastar	Contrastar	Deducir
Definir	Deducir	Elaborar	Decidir	Concluir	Derivar
Describir	Diferenciar	Emplear	Deducir	Decidir	Ensamblar
Diferenciar	Diseñar	Especificar	Descubrir	Demostrar	Estructurar
Identificar	Explicar	Estructurar	Diagramar	Discutir	Formular
Listar	Interpretar	Generalizar	Discriminar	Evaluar	Generalizar
Nombrar	Justificar	Manipular	Examinar	Explicar	Generar
Reconocer	Pronosticar	Organizar	Identificar	Justificar	Idear
Usar	Relacionar	Plantear	Ilustrar	Juzgar	Modificar
	Representar	Reformular	Inferir	Probar	Planificar
	Tabular	Resolver	Seleccionar	Proponer	Producir
		Sustituir		Sugerir	Proponer
		Verificar		Validar	Reconstruir
					Reorganizar
					Revisar
					Simplificar
					Unir

Para la valoración del desempeño de los estudiantes, se construye una rúbrica teniendo como base a los estándares básicos de competencias y los DBA del área de matemáticas de acuerdo con el MEN al igual que la taxonomía de Bloom revisada. A continuación, se presenta la rúbrica propuesta:

Tabla 7. Rúbrica para la valoración de saberes previos basada en los Estándares Básicos de Competencias y DBA de matemáticas.

RÚBRICA DE EVALUACIÓN PARA LA PRUEBA DE SABERES PREVIOS						
Pensamiento	**Estándar**	**DBA**	**D. Bajo**	**D. Básico**	**D. Alto**	**D. Superior**
Pensamiento espacial y sistemas geométricos.	Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.	Reconoce el plano cartesiano como un sistema bidimensional que permite ubicar puntos como sistema de referencia gráfico o geográfico.	Se le dificulta reconocer el plano cartesiano como sistema de referencia gráfico y/o geográfico.	Reconoce el plano cartesiano como sistema de referencia gráfico y/o geográfico.	Identifica y usa el plano cartesiano como sistema de referencia gráfico y/o geográfico para representar situaciones problema.	Formula estrategias para resolver situaciones problema con la ayuda del uso del plano cartesiano como sistema de referencia gráfico y/o geográfico.
Pensamiento numérico y sistemas numéricos.	Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.	Identifica y analiza propiedades de covariación directa e inversa entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).	Se le dificulta identificar la correlación entre magnitudes involucradas en situaciones problema.	Explica la correlación entre magnitudes involucradas en situaciones problema.	Examina el comportamiento de magnitudes involucradas en situaciones problema para establecer el tipo de correlación.	Formula procedimientos para dar solución a situaciones problema que involucran magnitudes correlacionadas directa o inversamente.
Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.	Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas.	Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.	Se le dificulta relacionar el cambio en la variable independiente con el cambio correspondiente en la variable dependiente.	Relaciona el cambio en la variable independiente con el cambio correspondiente en la variable dependiente.	Contrasta el comportamiento de las variables independiente y dependiente en situaciones de correlación directa e inversa.	Infiere a partir del comportamiento de las variables independiente y dependiente el tipo de correlación que se presenta en una situación problema.

Es importante aclarar, que las preguntas 2 y 13 no hacen parte del análisis que verá el lector en las siguientes páginas. La situación con la pregunta 2 se planteó correctamente, sin embargo, se pretendía que el estudiante realizara el bosquejo de la trayectoria del avión y determinara la distancia entre el punto inicial y el punto final, usando el teorema de Pitágoras, sin embargo, en la redacción de la pregunta se cometió un error al preguntar por el recorrido del avión a las 5 horas de vuelo y no a las 14 horas de vuelo, que es cuando el avión ya habría realizado el giro hacia el Sur. Por otro lado, la situación con la pregunta 13 se había pensado para la ecuación $y = -x^2 + 4x$, razón por la cual, la respuesta correcta (b) hace referencia a 2 meses, que coincide con el vértice de la ecuación cuadrática mencionada, sin embargo, al digitar la prueba se cometió un error, quedando la ecuación $y = -x^2 + 6x$, que ya no era consistente con la opción correcta.

Vale la pena mencionar que, en ambas preguntas, algunos estudiantes -pocos- se percataron de lo que se pretendía que calcularan, sin embargo, al evidenciar la incongruencia entre éstas y las opciones de respuesta, se optó por eliminarlas de la prueba. Por esta razón, la relación de respuestas correctas – incorrectas para estas dos preguntas tampoco aparecen en las gráficas.

Igualmente, se presentan los gráficos de los resultados generales para cada grupo, posteriormente se analizan más a fondo los resultados en cada pregunta.

Ilustración 5. Aciertos y desaciertos grupo 9°1

	P. 1	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6	P. 7	P. 8	P. 9	P. 10	P. 11	P. 12	P. 14	P. 15	P. 16	P. 17	P. 18	P. 19	P. 20
Aciertos	14	9	15	26	2	16	19	34	33	29	1	15	21	1	6	11	8	3
Desaciertos	24	29	23	12	36	22	19	4	5	9	37	23	17	37	32	27	30	35

Ilustración 6. Porcentaje de aciertos y desaciertos por pregunta del grupo 9°1

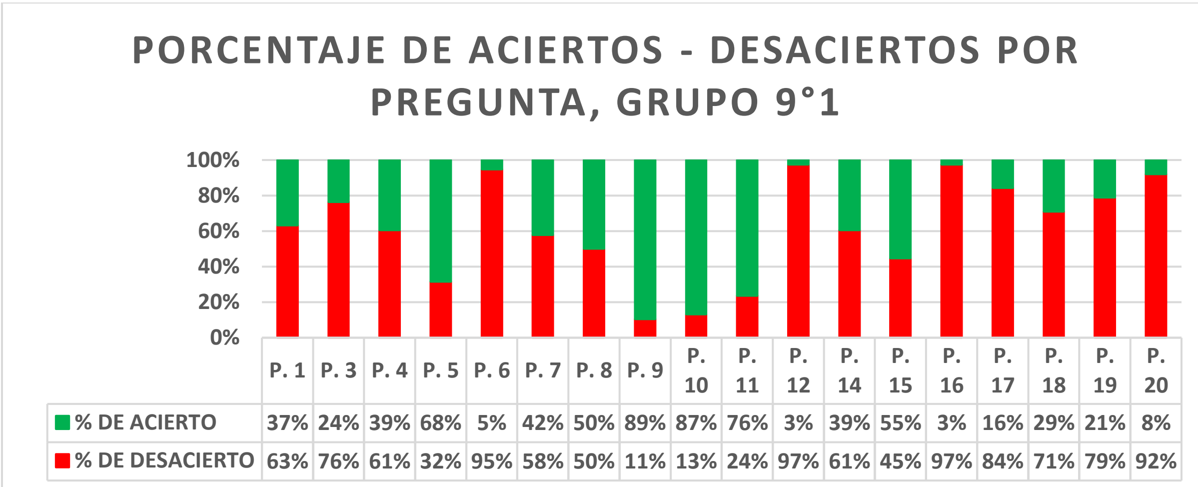


Tabla 8. Valoración en la escala institucional, grupo 9°1

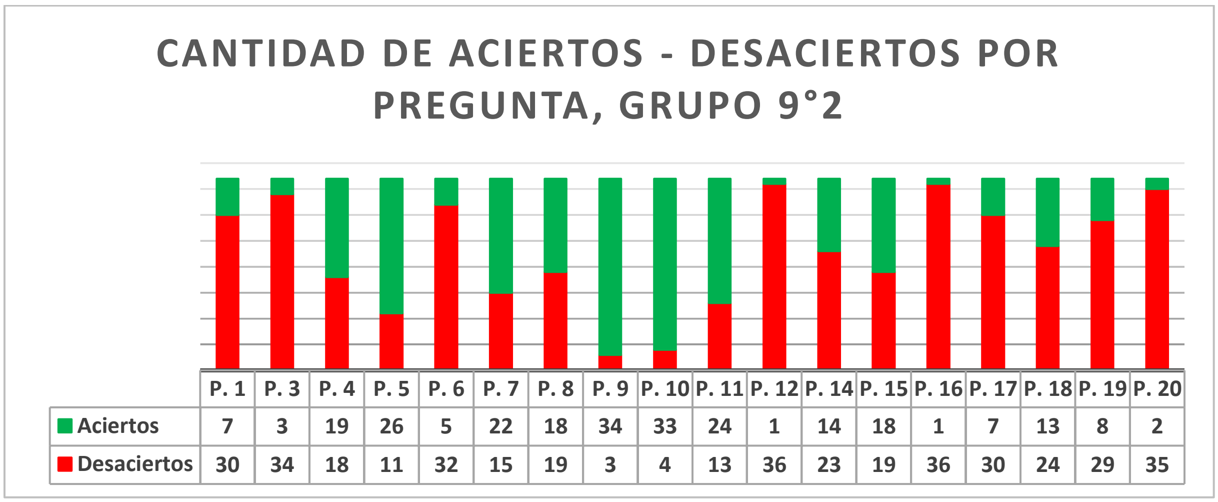
Código	Valoración	Código	Valoración	Código	Valoración
E091_1	1,7	E091_14	2,1	E091_27	2,6
E091_2	3,7	E091_15	2,6	E091_28	2,8
E091_3	1,9	E091_16	2,6	E091_29	2,6
E091_4	2,1	E091_17	2,8	E091_30	2,1
E091_5	3,2	E091_18	3,7	E091_31	1,7
E091_6	1,7	E091_19	2,8	E091_32	1,9
E091_7	2,1	E091_20	3,2	E091_33	2,6
E091_8	1,9	E091_21	2,1	E091_34	2,6
E091_9	2,8	E091_22	3,2	E091_35	3,0
E091_10	2,3	E091_23	2,6	E091_36	3,0
E091_11	3,0	E091_24	3,4	E091_37	3,4
E091_12	2,1	E091_25	2,3	E091_38	2,3
E091_13	1,4	E091_26	2,8		

Tabla 9. Desempeño estudiantes 9°1

DESEMPEÑO 9°1			
Desempeño	**Estudiantes**		**%**
BJ	28		73,7%
BS	10		26,3%
AL	0		0,0%
SUP	0		0,0%
	Total	38	100%

El grupo 9°1 presenta un significativo bajo rendimiento en la prueba diagnóstica, teniendo en cuenta que los grupos heterogéneos para la aplicación de IMPROVE deben ser conformados por estudiantes de diferentes desempeños, este grupo no es un buen candidato para realizar la intervención, puesto que no permitiría una configuración adecuada de grupos de trabajo.

Ilustración 7. Aciertos y desaciertos grupo 9°2



	P. 1	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6	P. 7	P. 8	P. 9	P. 10	P. 11	P. 12	P. 14	P. 15	P. 16	P. 17	P. 18	P. 19	P. 20
Aciertos	7	3	19	26	5	22	18	34	33	24	1	14	18	1	7	13	8	2
Desaciertos	30	34	18	11	32	15	19	3	4	13	36	23	19	36	30	24	29	35

Ilustración 8. Porcentaje de aciertos y desaciertos grupo 9°2

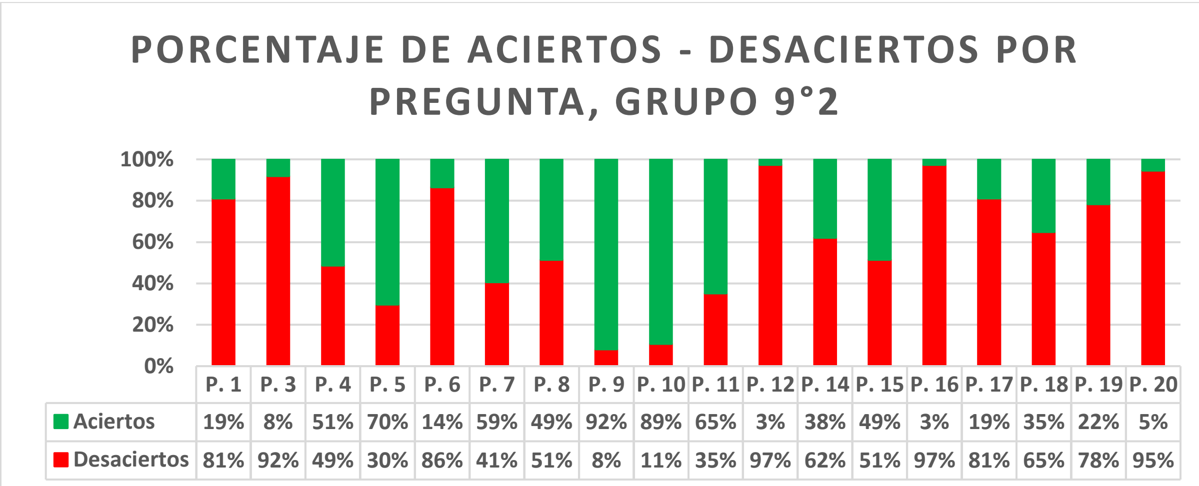


Tabla 10. Valoración en escala institucional, grupo 9°2

Código	Valoración	Código	Valoración	Código	Valoración
E092_1	3,9	E092_14	2,8	E092_27	1,0
E092_2	2,6	E092_15	2,6	E092_28	2,8
E092_3	3,7	E092_16	1,7	E092_29	2,3
E092_4	3,2	E092_17	2,1	E092_30	2,6
E093_2	3,2	E092_18	2,1	E092_31	2,3
E092_6	2,8	E092_19	2,1	E092_32	4,6
E092_7	3,2	E092_20	2,8	E092_33	2,6
E092_8	1,9	E092_21	1,7	E092_34	2,6
E092_9	2,3	E092_22	2,3	E092_35	2,6
E092_10	3,2	E092_23	3,2	E092_36	1,7
E092_11	3,0	E092_24	2,1	E092_37	1,0
E092_12	1,2	E092_25	3,2		
E092_13	2,6	E092_26	2,3		

Tabla 11. Desempeño estudiantes de 9°2

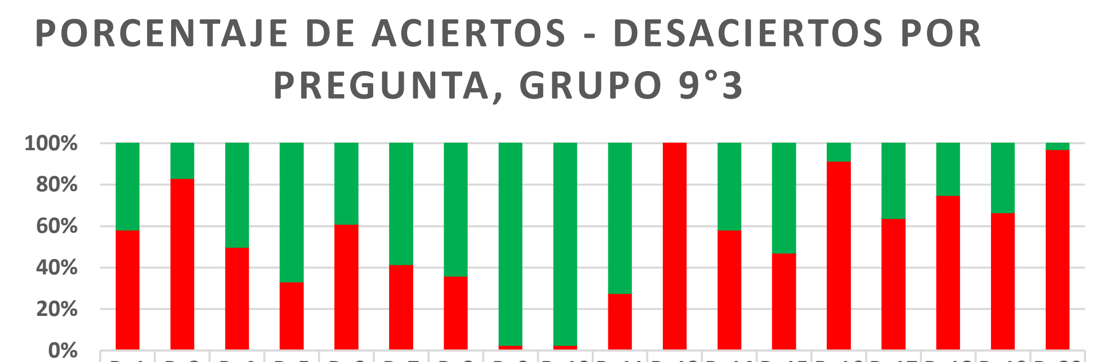
DESEMPEÑO 9°2			
Desempeño	**Estudiantes**		**%**
BJ	27		73,0%
BS	9		24,3%
AL	0		0,0%
SUP	1		2,7%
	Total	37	100%

El desempeño obtenido por el grupo 9°2 es similar al del grupo anterior, con la única salvedad de que aparece un estudiante con desempeño superior, tampoco es un grupo ideal para llevar a cabo la intervención de aula, por las razones que se mencionaron al analizar el grupo anterior.

Ilustración 9. Aciertos y desaciertos grupo 9°3

	P. 1	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6	P. 7	P. 8	P. 9	P. 10	P. 11	P. 12	P. 14	P. 15	P. 16	P. 17	P. 18	P. 19	P. 20
Aciertos	15	6	18	24	14	21	23	35	35	26	0	15	19	3	13	9	12	1
Desaciertos	21	30	18	12	22	15	13	1	1	10	36	21	17	33	23	27	24	35

Ilustración 10. Porcentaje de aciertos y desaciertos grupo 9°3



	P. 1	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6	P. 7	P. 8	P. 9	P. 10	P. 11	P. 12	P. 14	P. 15	P. 16	P. 17	P. 18	P. 19	P. 20
Aciertos	42%	17%	50%	67%	39%	58%	64%	97%	97%	72%	0%	42%	53%	8%	36%	25%	33%	3%
Desaciertos	58%	83%	50%	33%	61%	42%	36%	3%	3%	28%	100%	58%	47%	92%	64%	75%	67%	97%

Tabla 12. Valoración en escala institucional, grupo 9°3

Código	Valoración	Código	Valoración	Código	Valoración
E093_1	1,8	E093_13	2,5	E093_25	2,5
E093_2	2,1	E093_14	3,3	E093_26	2,5
E093_3	3,1	E093_15	3,3	E093_27	3,3
E093_4	2,5	E093_16	2,1	E093_28	2,7
E093_5	2,5	E093_17	3,1	E093_29	3,3
E093_6	2,5	E093_18	2,5	E093_30	3,5
E093_7	2,3	E093_19	2,5	E093_31	3,1
E093_8	2,7	E093_20	3,3	E093_32	3,5
E093_9	1,6	E093_21	3,1	E093_33	2,3
E093_10	3,1	E093_22	2,1	E093_34	2,5
E093_11	2,9	E093_23	2,9	E093_35	4,2
E093_12	2,7	E093_24	3,7	E093_36	1,4

Tabla 13. Desempeño estudiantes de 9°3

DESEMPEÑO 9°3			
Desempeño	**Estudiantes**		**%**
BJ	22		61,1%
BS	13		36,1%
AL	1		2,8%
SUP	0		0,0%
	Total	36	100%

En este grupo, si bien es cierto que tampoco hay un gran desempeño por parte de los estudiantes, presenta una mejora con relación a los grupos anteriores, ya que hay una mayor proporción de estudiantes en nivel básico y alto, esto puede favorecer la conformación de los grupos heterogéneos para implementar la metodología IMPROVE, aun cuando solamente hay un estudiante en desempeño alto.

Ilustración 11. Aciertos y desaciertos grupo 9°4

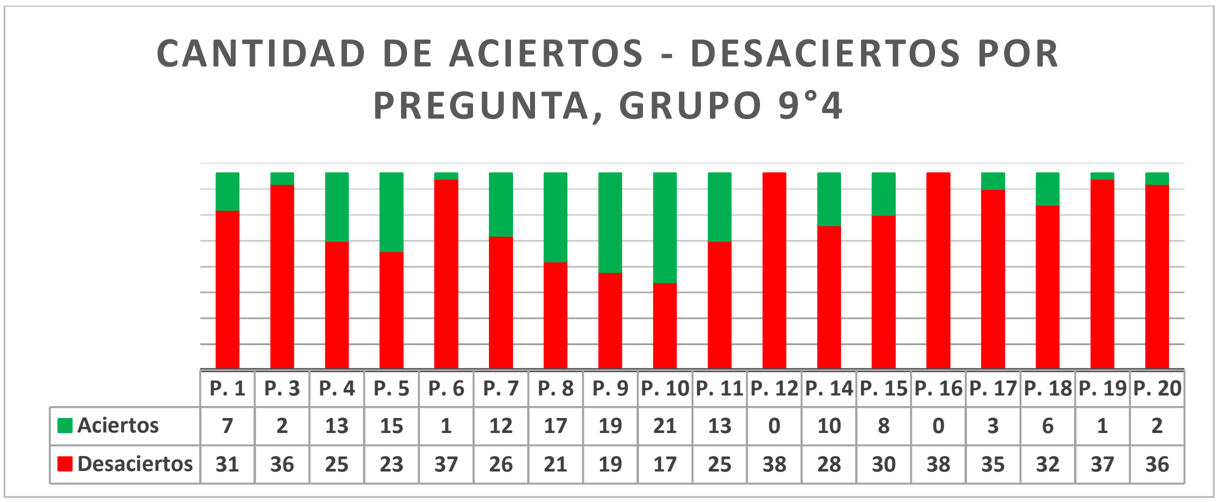


Ilustración 12. Porcentaje aciertos y desaciertos grupo 9°4

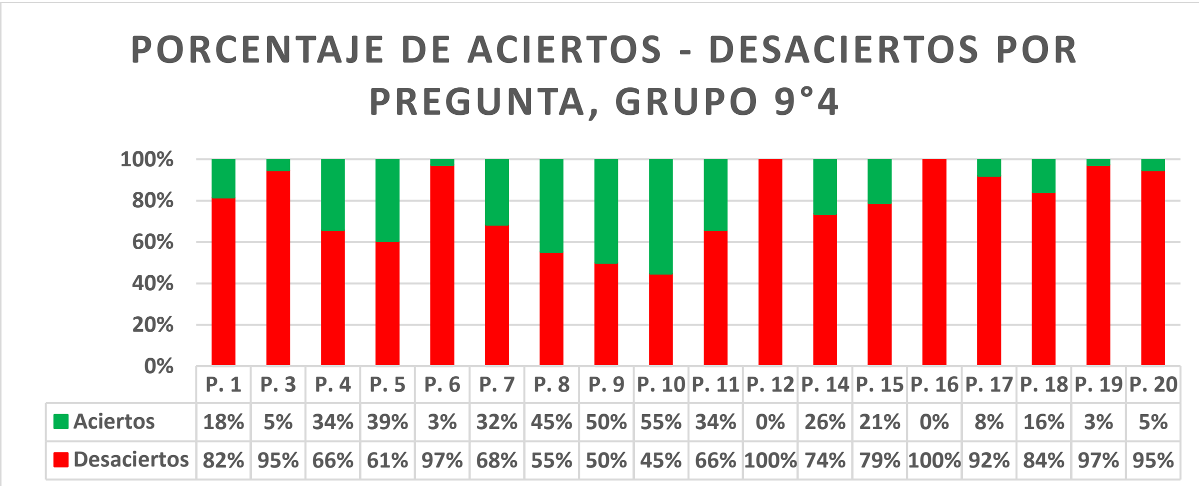


Tabla 14. Valoración en la escala institucional, grupo 9°4

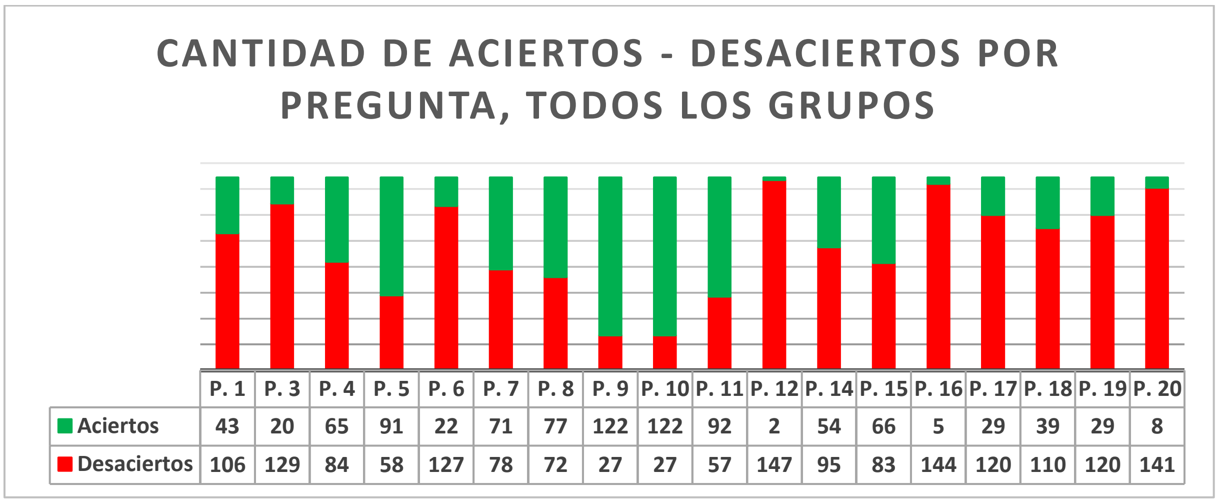
Código	Valoración	Código	Valoración	Código	Valoración
E094_1	1,0	E094_14	2,3	E094_27	2,5
E094_2	2,1	E094_15	2,1	E094_28	1,0
E094_3	2,1	E094_16	1,0	E094_29	2,3
E094_4	3,1	E094_17	1,0	E094_30	1,4
E094_5	2,5	E094_18	2,7	E094_31	1,6
E094_6	2,9	E094_19	1,0	E094_32	3,1
E094_7	2,5	E094_20	1,0	E094_33	1,6
E094_8	2,5	E094_21	1,2	E094_34	1,6
E094_9	2,3	E094_22	2,5	E094_35	1,0
E094_10	2,9	E094_23	1,0	E094_36	1,0
E094_11	3,1	E094_24	1,0	E094_37	1,0
E094_12	2,3	E094_25	2,1	E094_38	2,3
E094_13	1,8	E094_26	1,0		

Tabla 15. Desempeño estudiantes de 9°4

DESEMPEÑO 9°4		
Desempeño	**Estudiantes**	**%**
BJ	35	92,1%
BS	3	7,9%
AL	0	0,0%
SUP	0	0,0%
	Total 38	100%

El grupo 9°4 claramente es el grupo con menor desempeño en la prueba diagnóstica, con apenas un 7,9% con valoración aprobatoria básica, es un grupo en el cual tampoco sería ideal la implementación de IMPROVE, dada la alta proporción de estudiantes con desempeño bajo, lo que no permitiría conformar grupos heterogéneos

Ilustración 13. Aciertos y desaciertos, todos los grupos



	P. 1	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6	P. 7	P. 8	P. 9	P. 10	P. 11	P. 12	P. 14	P. 15	P. 16	P. 17	P. 18	P. 19	P. 20
Aciertos	43	20	65	91	22	71	77	122	122	92	2	54	66	5	29	39	29	8
Desaciertos	106	129	84	58	127	78	72	27	27	57	147	95	83	144	120	110	120	141

Ilustración 14. Porcentaje aciertos y desaciertos, todos los grupos

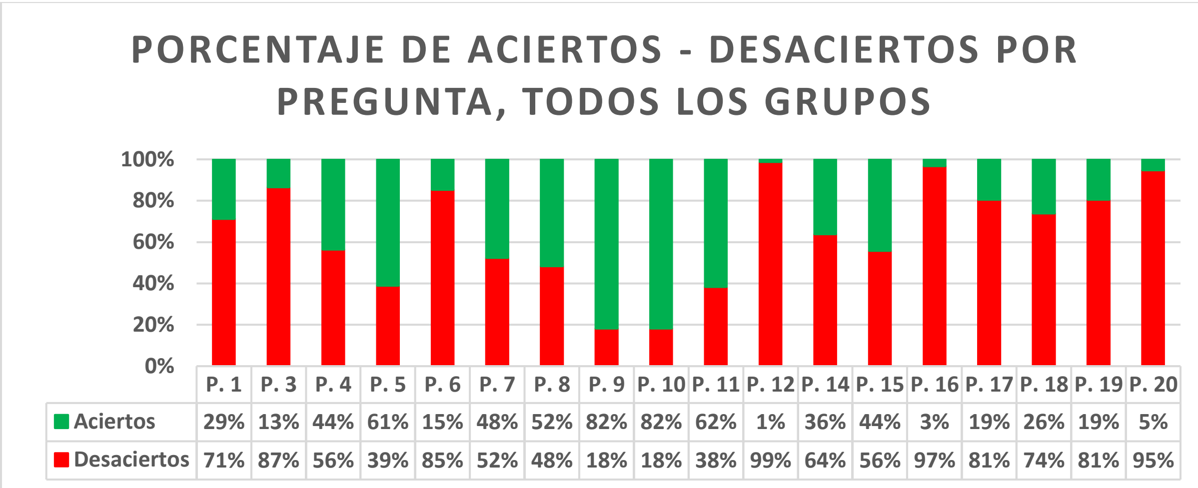


Tabla 16. Nivel de desempeño, todos los grupos

DESEMPEÑO GLOBAL			
Desempeño	**Estudiantes**		**%**
BJ	112		75,2%
BS	35		23,4%
AL	1		0,7%
SUP	1		0,7%
	Total	149	100%

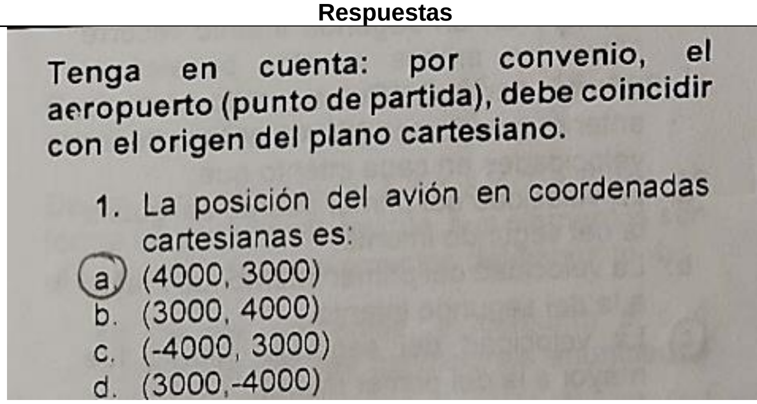
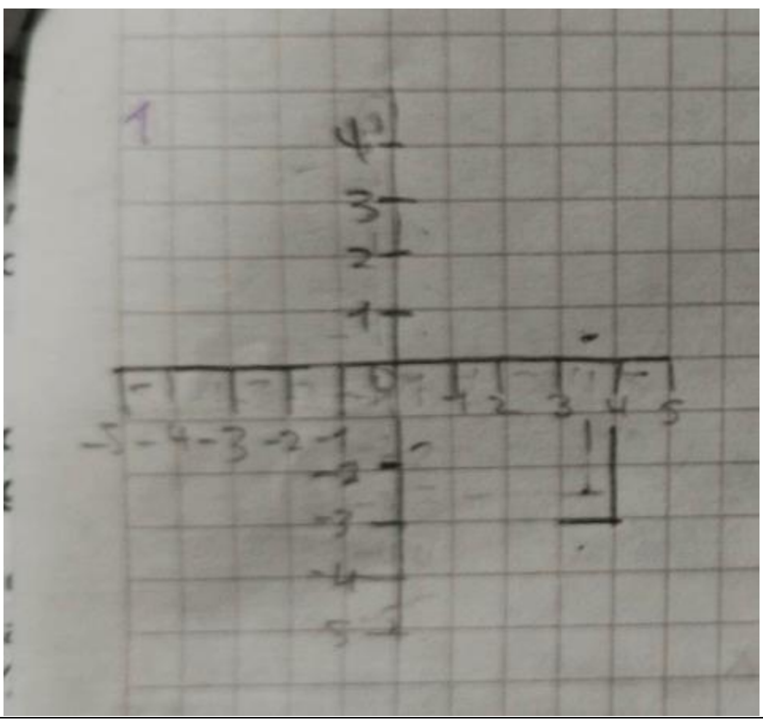
Conforme con los resultados que se han mostrado hasta aquí, se presenta el análisis en la siguiente sección de este trabajo. Primero, se analizan las respuestas de los estudiantes para cada pregunta comentando algunas de las respuestas dadas por los estudiantes, aquí se podrán evidenciar oportunidades de mejora y fortalezas de estos, se usará la codificación de la tabla 2 cuando sea necesario referirse a un estudiante en particular. En segundo lugar, se analizan los resultados con base en los cinco procesos básicos de la actividad matemática: 1) La formulación, tratamiento y resolución de problemas, 2) La modelación, 3) La comunicación, 4) El razonamiento, 5) La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos (MEN, 2006).

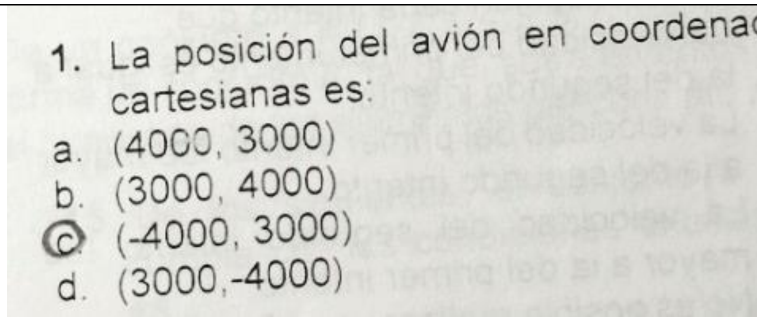
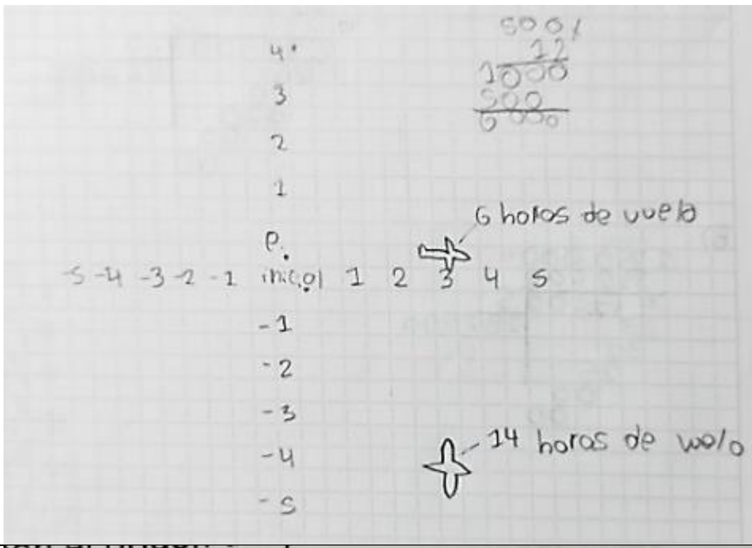
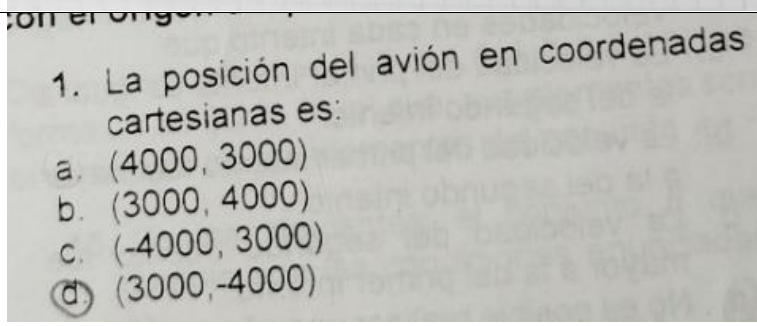
3.1.2.1 Análisis de las respuestas por pregunta de la prueba diagnóstica.

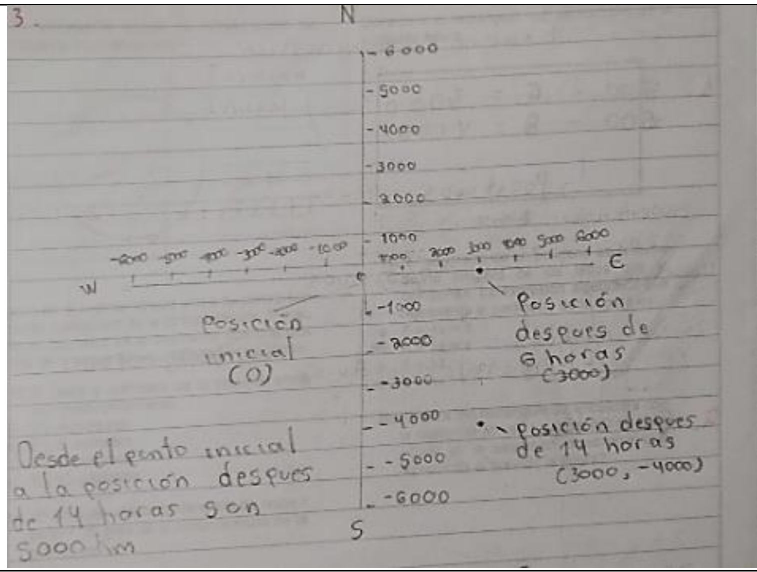
3.1.2.1.1 Análisis de las respuestas a la pregunta 1.

Esta pregunta requería del estudiante una buena lectura de la situación del desplazamiento del avión (condiciones ideales, en dos dimensiones), es decir, usar el plano cartesiano como sistema de referencia bidimensional para representar la posición del avión, algo relativamente sencillo, se esperaba, para estudiantes de noveno grado. Sin embargo, con apenas 29% de aciertos se hizo evidente la dificultad con esta forma de representación, importante para el estudio de las funciones.

Tabla 17. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 1

Estudiante	Respuestas	Observaciones
E094_15	 Tenga en cuenta: por convenio, el aeropuerto (punto de partida), debe coincidir con el origen del plano cartesiano. 1. La posición del avión en coordenadas cartesianas es: a. (4000, 3000) b. (3000, 4000) c. (-4000, 3000) d. (3000,-4000) 	Es importante señalar que la representación realizada en el plano cartesiano, aunque es incorrecta, presenta cierta similitud con la representación correcta, adicionalmente, no hay congruencia entre el punto dibujado y su escritura, pues no toma en cuenta el signo de la coordenada vertical.

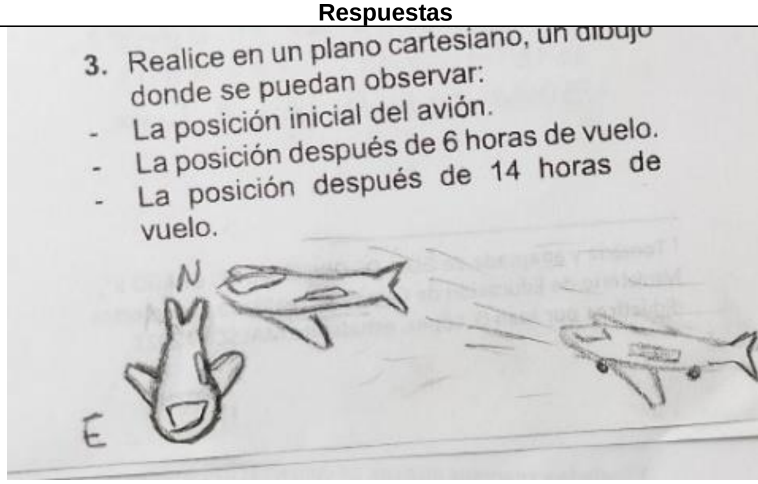
E093_30	 1. La posición del avión en coordenac cartesianas es: a. (4000, 3000) b. (3000, 4000) c. (-4000, 3000) d. (3000,-4000)  	En la respuesta de este estudiante se observa una situación similar a la de la estudiante anterior, aunque su representación gráfica tiene más falencias, es suficiente para responder a la pregunta, sin embargo, aquí el estudiante, al parecer, confunde el orden de las coordenadas al escribirlas.
E094_2	 1. La posición del avión en coordenadas cartesianas es: a. (4000, 3000) b. (3000, 4000) c. (-4000, 3000) d. (3000,-4000)	Se puede analizar en el desarrollo de este estudiante, que realizó con mucha solvencia la representación gráfica de la situación, fue claro para él, que realizar la representación gráfica pedida en el punto 3 le proporcionaría la respuesta correcta de esta pregunta.

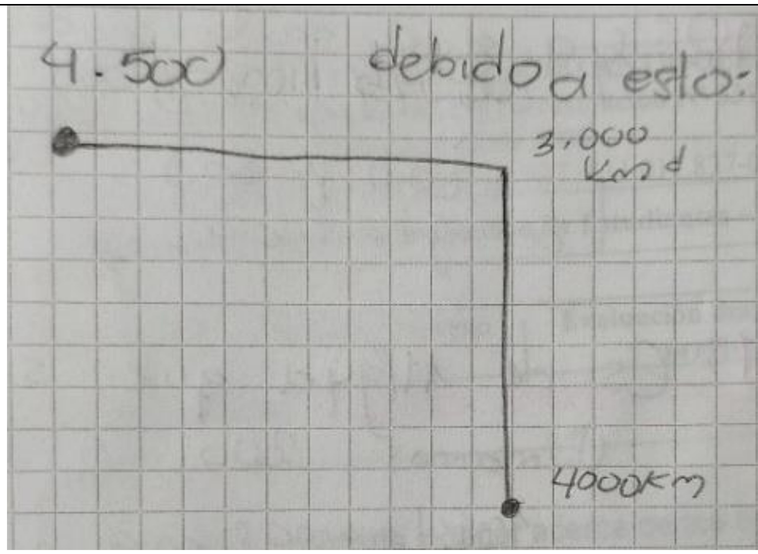
		

3.2.1.1.2 Análisis de las respuestas a la pregunta 3.

Está estrechamente ligada a la pregunta 1, de hecho, realizar primero lo que se pedía en esta pregunta hubiese llevado al estudiante a responder la pregunta 1 muy fácilmente, puesto que la representación de la posición del avión en el plano cartesiano después de 6 horas y después de 14 horas llevaba a las coordenadas pedidas en la primera pregunta. Nuevamente, se evidencia la poca familiaridad que tienen los estudiantes con el plano cartesiano, en esta pregunta los aciertos solamente fueron el 13% de las respuestas totales.

Tabla 18. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 3

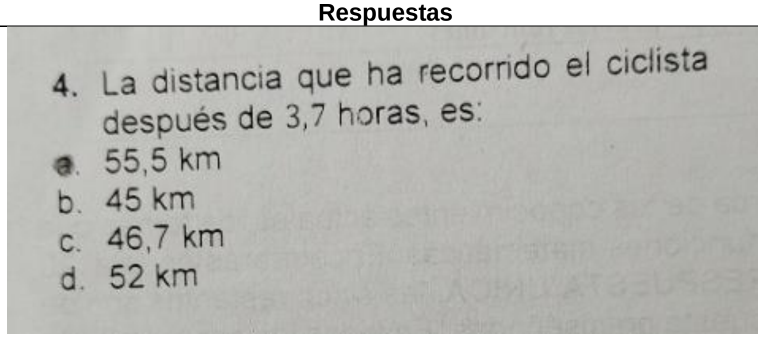
Estudiante	Respuestas	Observaciones
E092_5		Este estudiante demuestra una de las dificultades más comunes en el resto de la población objeto de la prueba, a saber, la dificultad de realizar esquemas simplificados para representar situaciones más complejas y, por el contrario, intentar esquematizar justo como se vería en la realidad.

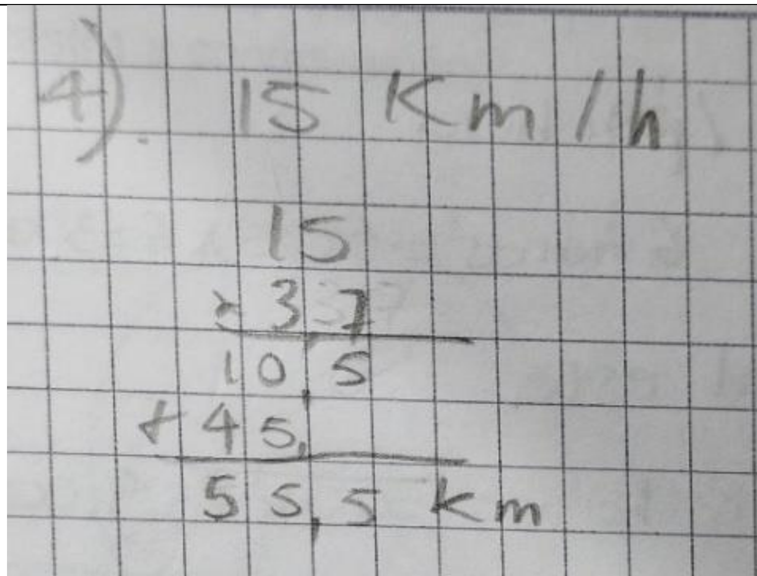
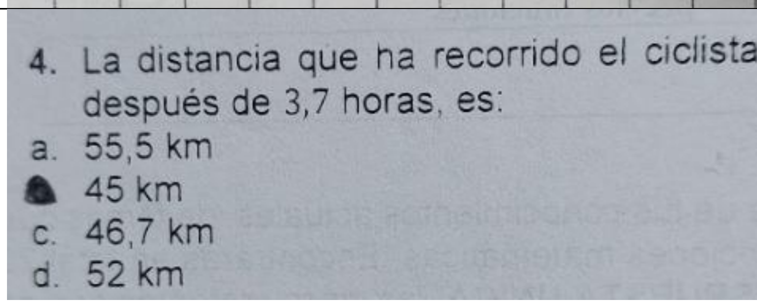
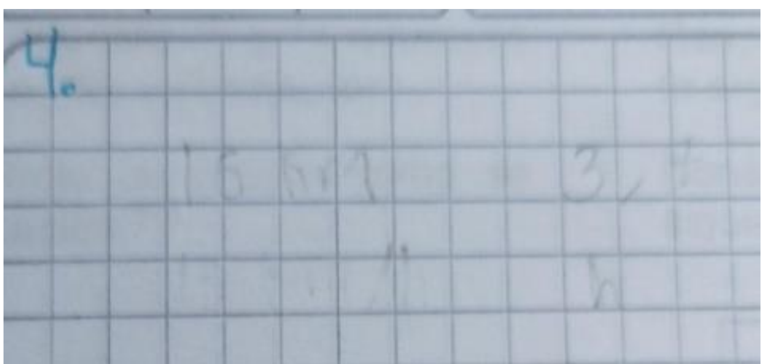
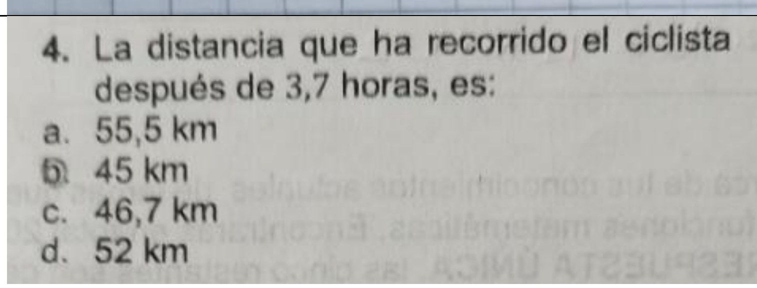
E091_33		Aquí la estudiante logra esquematizar la situación, de forma muy básica, sin embargo, puede inferirse de su respuesta, que no relaciona al plano cartesiano con situaciones de ubicación de objetos y de representación de diversas situaciones.

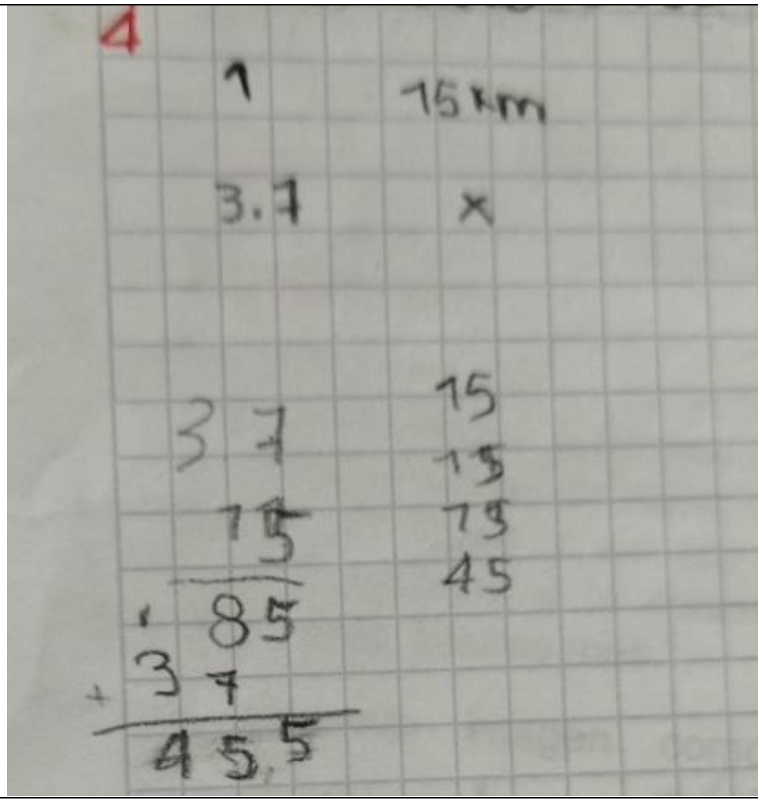
3.2.1.1.3 Análisis de las respuestas a la pregunta 4.

Para esta pregunta se planteó una situación de correlación proporcionalidad directa (desplazamiento a velocidad constante), para dar solución el estudiante podía plantear un esquema de regla de tres directa para las magnitudes de longitud (km) y tiempo (h), teniendo en cuenta que la velocidad constante de $15km/h$ significaba que, el ciclista recorrería $15km$ cada $1h$, igualmente, usar la ecuación $d = vt$ que se proporcionaba en el enunciado para encontrar la longitud recorrida en $3{,}7h$ a una velocidad constante de $15km/h$, incluso, un razonamiento numérico pudo llevar al estudiante a la respuesta de una manera más intuitiva. Es claro, dados los resultados, los estudiantes pudieron llegar a la respuesta correcta, en mayor medida gracias a la intuición y a una aproximación mayormente numérica, que por medio de operaciones matemáticas. Los aciertos en esta pregunta fueron del 44%.

Tabla 19. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 4

Estudiante	Respuestas	Observaciones
E091_2	 4. La distancia que ha recorrido el ciclista después de 3,7 horas, es: a. 55,5 km b. 45 km c. 46,7 km d. 52 km	La estudiante demuestra conocer el procedimiento para realizar multiplicaciones con números decimales, asimismo, interpreta correctamente la información que se le proporcionó en el enunciado y la adicional de la pregunta 4.

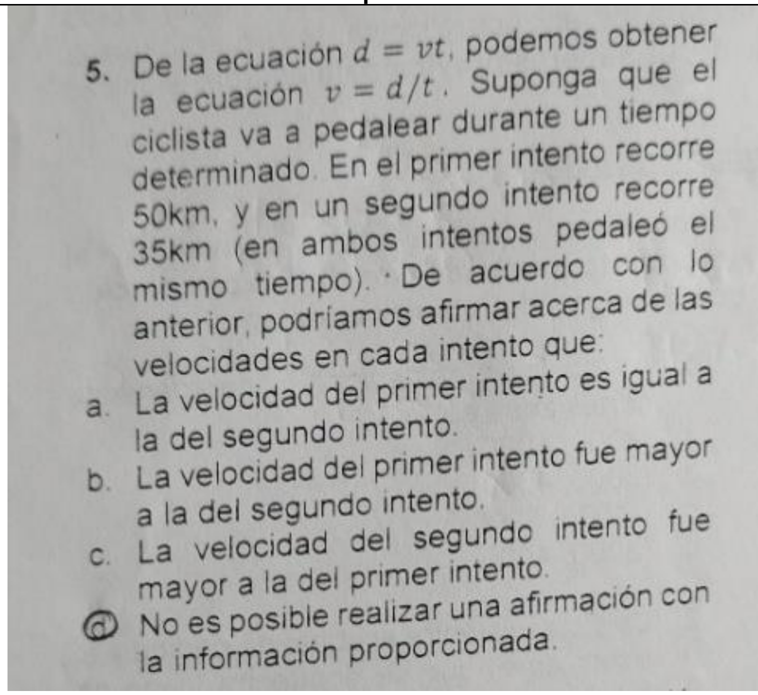
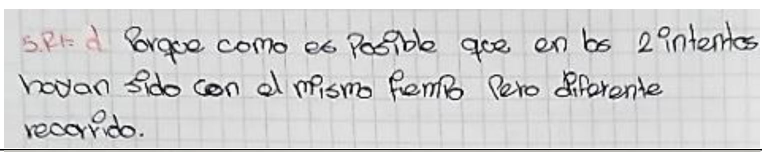
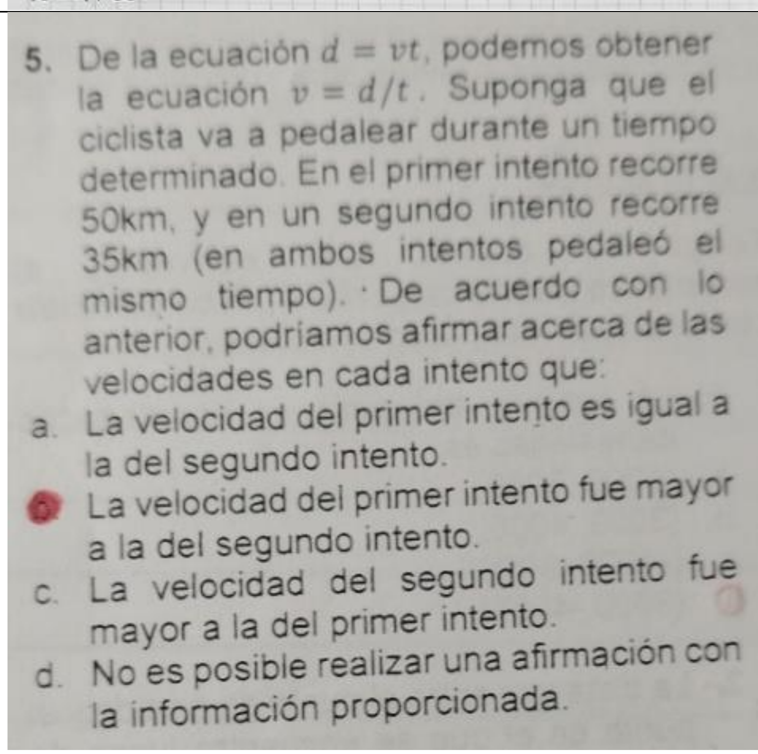
<table>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>E093_2</td><td>
4. La distancia que ha recorrido el ciclista después de 3,7 horas, es:
a. 55,5 km
b. 45 km
c. 46,7 km
d. 52 km

</td><td>En el procedimiento, este estudiante intenta plantear el esquema para realizar una regla de tres, es posible que haya interpretado correctamente la situación como una correlación directamente proporcional, sin embargo, al parecer no recordaba el proceso que debía realizar.</td></tr>
<tr><td>E092_11</td><td>
4. La distancia que ha recorrido el ciclista después de 3,7 horas, es:
a. 55,5 km
b. 45 km
c. 46,7 km
d. 52 km</td><td>Aquí la estudiante, luego de interpretar correctamente la información, plantea una regla de tres simple directa, lo cual es válido para la pregunta, sin embargo, su dificultad se hace presente al momento de realizar la operación de multiplicación, ya que equivoca el procedimiento y no llega a la respuesta que buscaba.</td></tr>
</table>



3.1.2.1.4 Análisis de las respuestas a las preguntas 5 y 6.

En estas preguntas se involucraban tres magnitudes: velocidad, tiempo, longitud. El estudiante debía entonces, determinar cómo se relacionaban cada una de ellas con las demás, dadas las condiciones del problema, aquí los aciertos llegaron al 61% y 15% respectivamente, en síntesis, si bien se evidencia una buena interpretación de la relación entre las magnitudes (pregunta 5), es claro también que a la mayoría de los estudiantes se les dificultó explicar sus razonamientos para llegar a dicha conclusión (pregunta 6).

Tabla 20. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 5

Estudiante	Respuestas	Observaciones
E094_18	 5. De la ecuación $d = vt$, podemos obtener la ecuación $v = d/t$. Suponga que el ciclista va a pedalear durante un tiempo determinado. En el primer intento recorre 50km, y en un segundo intento recorre 35km (en ambos intentos pedaleó el mismo tiempo). · De acuerdo con lo anterior, podríamos afirmar acerca de las velocidades en cada intento que: a. La velocidad del primer intento es igual a la del segundo intento. b. La velocidad del primer intento fue mayor a la del segundo intento. c. La velocidad del segundo intento fue mayor a la del primer intento. d. No es posible realizar una afirmación con la información proporcionada.  5.R= d Porque como es Posible que en los 2 intentos hayan sido con el mismo tiempo Pero diferente recorrido.	Para dar la respuesta, este estudiante no consideró el efecto de pedalear a una mayor velocidad el mismo tiempo durante ambos intentos
E091_20	 5. De la ecuación $d = vt$, podemos obtener la ecuación $v = d/t$. Suponga que el ciclista va a pedalear durante un tiempo determinado. En el primer intento recorre 50km, y en un segundo intento recorre 35km (en ambos intentos pedaleó el mismo tiempo). · De acuerdo con lo anterior, podríamos afirmar acerca de las velocidades en cada intento que: a. La velocidad del primer intento es igual a la del segundo intento. b. La velocidad del primer intento fue mayor a la del segundo intento. c. La velocidad del segundo intento fue mayor a la del primer intento. d. No es posible realizar una afirmación con la información proporcionada.	El estudiante interpreta correctamente la información, al realizar su explicación partiendo de la condición de que ambos recorridos se realizan en el mismo tiempo, esto lo lleva a intuir el comportamiento de la velocidad bajo dichas condiciones y a responder correctamente.

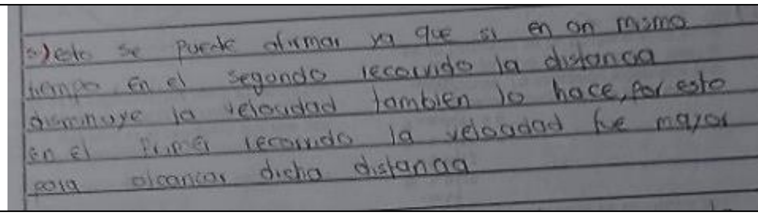
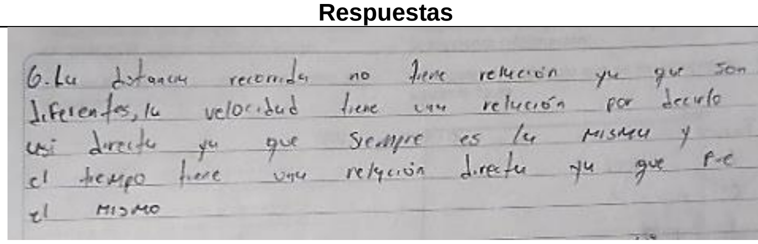
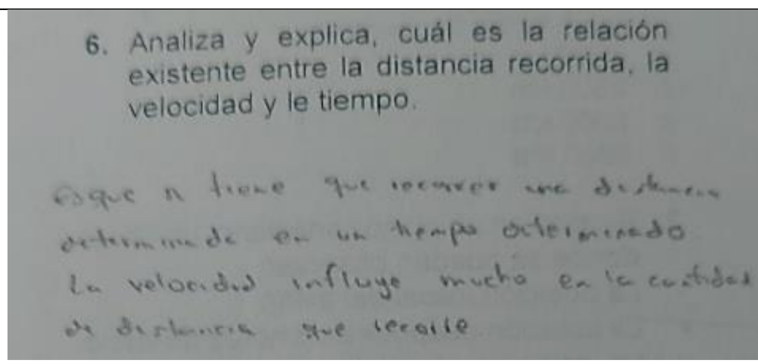
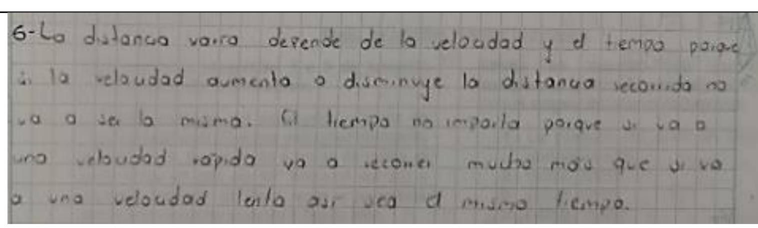
	 5.) esto se puede afirmar ya que si en un mismo tiempo en el segundo recorrido la distancia disminuye la velocidad tambien lo hace, por esto en el primer recorrido la velocidad fue mayor para alcanzar dicha distancia	

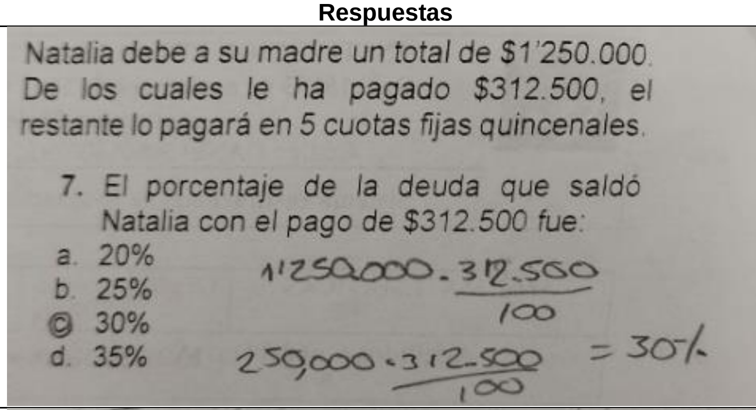
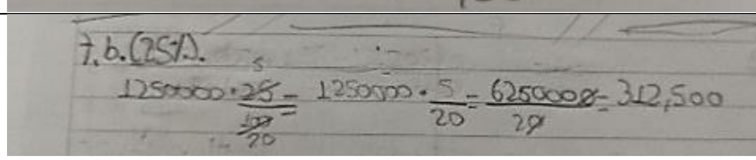
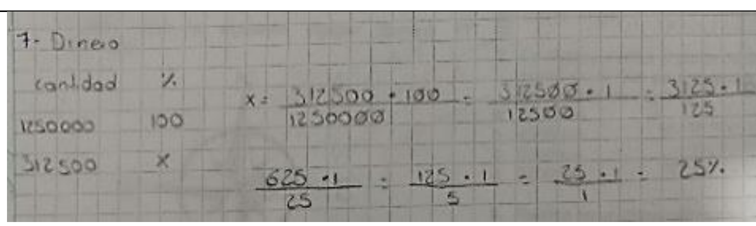
Tabla 21. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 6

Estudiante	Respuestas	Observaciones
E094_14	 6. La distancia recorrida no tiene relación ya que son diferentes, la velocidad tiene una relación por decirlo asi directa ya que siempre es la misma y el tiempo tiene una relación directa ya que fue el mismo	En esta respuesta, este estudiante parece confundir la noción de correlación de magnitudes con constantes numéricas, de hecho, esto probablemente lo lleva a afirmar que la distancia no guarda relación con las otras dos ya que es diferente, aunque no queda claro a qué se refiere puntualmente con esto, asimismo, resalta el hecho de que las condiciones descritas por él no son las que plantea el problema, ya que se habla de tiempo igual en dos recorridos donde se cubren distancias diferentes, y por ende, a velocidades diferentes.
E091_27	 6. Analiza y explica, cuál es la relación existente entre la distancia recorrida, la velocidad y le tiempo. Esque si tiene que recorrer una distancia determinada en un tiempo determinado la velocidad influye mucho en la cantidad de distancia que recorre	La estudiante que proporciona esta respuesta identifica que hay una relación entre las tres magnitudes del problema, sin embargo, le cuesta describir fielmente cuál es esta relación, ya que únicamente menciona el efecto de la velocidad en las otras dos.
E092_1	 6- La distancia varia depende de la velocidad y el tiempo porque si la velocidad aumenta o disminuye la distancia recorrida no va a ser la misma. El tiempo no importa porque si va a una velocidad rapida va a recorrer mucho más que si va a una velocidad lenta asi sea el mismo tiempo.	En la respuesta, la estudiante describe correctamente la correlación entre longitud y velocidad. Con el tiempo, si bien comienza afirmando que no es tan importante, luego en sus palabras también refiere su relación con las otras dos magnitudes.

3.1.2.1.5 Análisis de las respuestas a la pregunta 7.

Al igual que en la pregunta 4, para esta pregunta el estudiante pudo usar la regla de tres simple directa, puesto que se debía determinar el tanto por ciento al que correspondían $312.500 si $1´250.000 era la deuda total, es decir, el 100%. La primera dificultad tiene que ver con que a los estudiantes se les dificultó determinar que la situación era consistente con una correlación directa proporcional, y adicional a esto, muchos de los estudiantes que lo establecieron correctamente presentaron dificultades para realizar las operaciones correspondientes, sin embargo, los aciertos totales fueron del 48%.

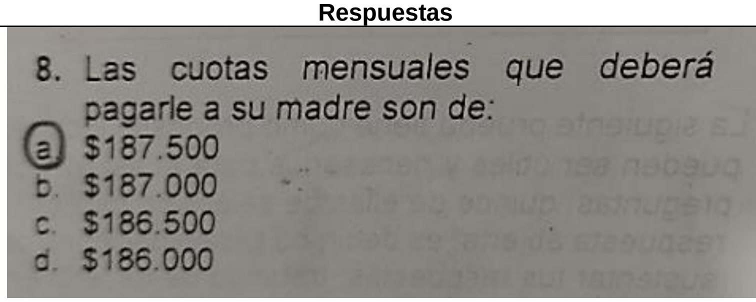
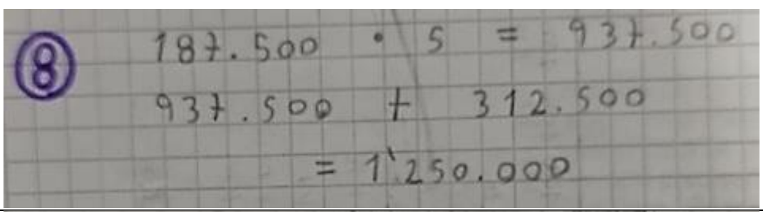
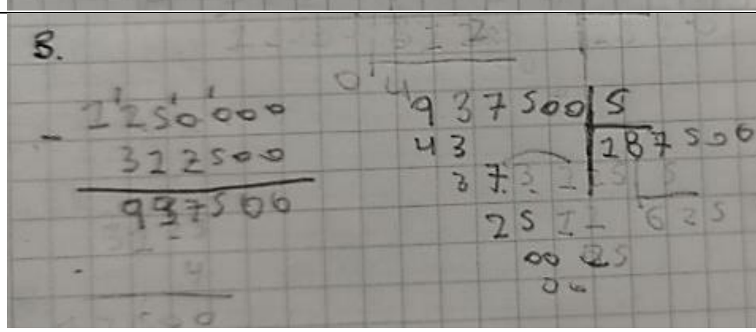
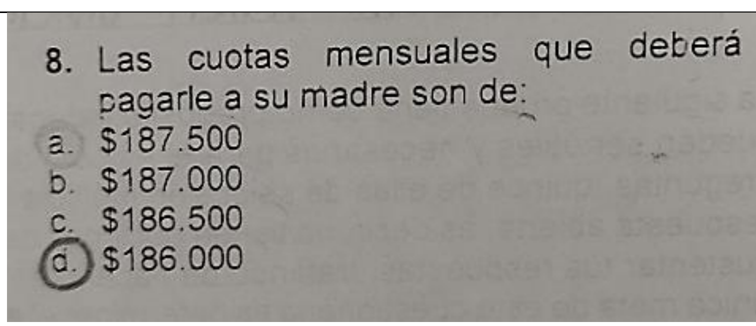
Tabla 22. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 7

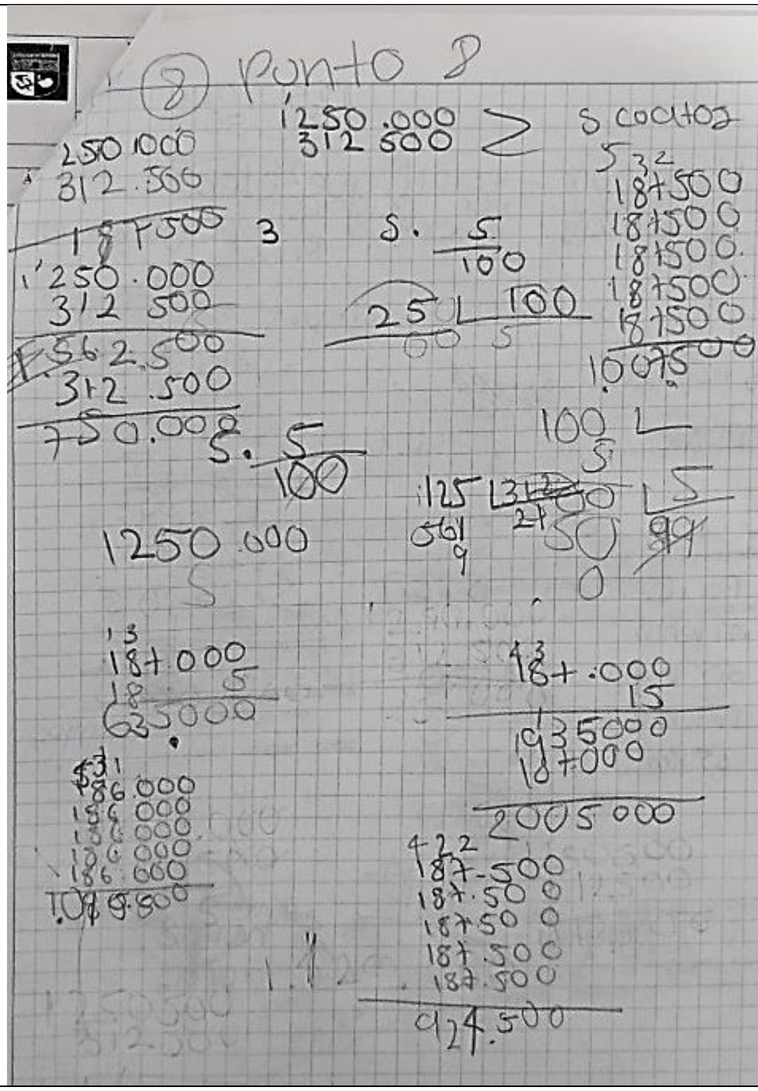
Estudiante	Respuestas	Observaciones
E094_13	 Natalia debe a su madre un total de $1'250.000. De los cuales le ha pagado $312.500, el restante lo pagará en 5 cuotas fijas quincenales. 7. El porcentaje de la deuda que saldó Natalia con el pago de $312.500 fue: a. 20% b. 25% c. 30% d. 35% 1'250.000 . 312.500 / 100 250,000 . 312.500 / 100 = 30%	En la solución aportada por la estudiante se identifican varias situaciones: intenta plantear una proporción directa con porcentajes, sin embargo, no lo hace correctamente, además, no se observa claridad acerca de las operaciones que plantea y finalmente, acomoda el resultado para obtener una de las opciones de respuesta.
E091_36	 7. b. (25%). 1250000 · 25 / 100 = 1250000 · 5 / 20 = 6250000 / 20 = 312,500	El estudiante plantea una solución válida, en la cual, es probable que haya probado también con el 20%, pues lo que intentaba era usar cada porcentaje para intentar conseguir los $312.500 de los cuales se hablaba en el enunciado.
E092_1	 7- Dinero cantidad % 1250000 100 312500 x x = 312500 · 100 / 1250000 = 312500 · 1 / 12500 = 3125 · 1 / 125 = 625 · 1 / 25 = 125 · 1 / 5 = 25 · 1 / 1 = 25%	La estudiante plantea la solución estándar para un problema de porcentajes, es decir, utiliza una regla de tres directa. En el procedimiento se observa un muy buen manejo de operaciones con fracciones mediante la simplificación, para llegar a la respuesta de 25%. La diferencia importante entre esta solución y la del estudiante anterior, es que en esta no hace falta probar con varios números, ya que directamente entrega la respuesta correcta.

3.2.1.2.6 Análisis de respuestas a la pregunta 8.

En esta pregunta el total de aciertos fue similar al de la pregunta anterior, con un 52%, esto era esperable dado que para contestarla se necesitaba de su resultado. Sin embargo, es claro que algunos estudiantes pudieron llegar a la respuesta quizá por mera intuición, ya que no contaban con la respuesta correcta en la pregunta 7, para realizar la división que daría el resultado de la pregunta 8.

Tabla 23. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 8

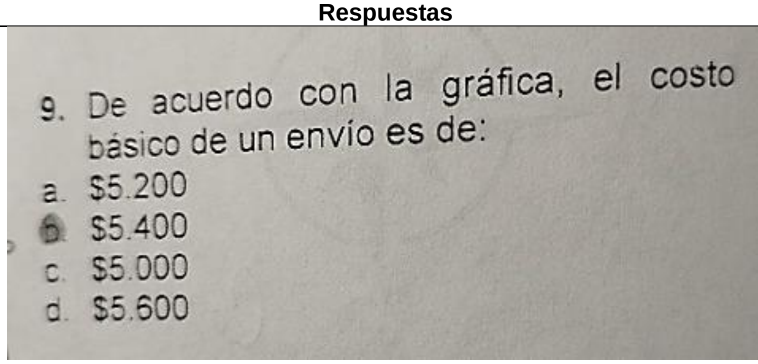
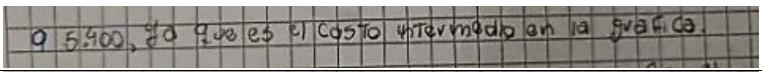
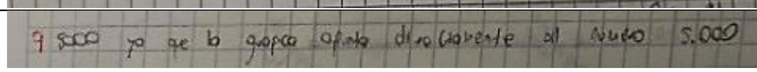
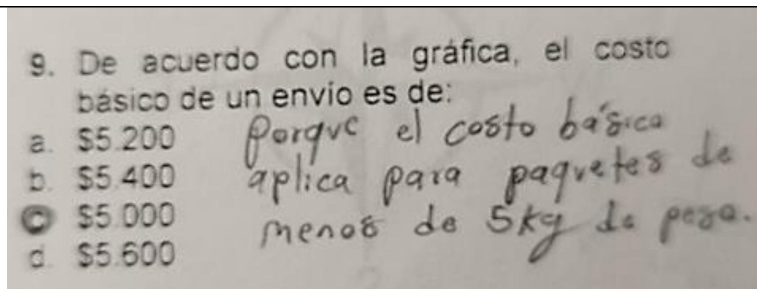
Estudiante	Respuestas	Observaciones
E093_32	 	Esta solución proviene quizá, de un razonamiento que vale la pena desarrollar: al multiplicar $187.500 por 5, el estudiante está encontrando el total que pagaría Natalia a su madre en las cinco cuotas pactadas, luego, al sumar con los $312.500 que le pagó inicialmente, encuentra el monto de la deuda inicial $1'250.000, confirmando que la respuesta correcta es la opción a.
E092_32		Esta solución, planteada por el estudiante en cuestión, es más directa que la anterior, que, de no haber estado la opción correcta ubicada de primera, el estudiante anterior hubiese tenido que probar con varios números. Aquí, al realizar la resta se encuentra el saldo que debe pagar Natalia en cinco cuotas, por ello, dividir esta cantidad entre 5 da directamente el valor de cada cuota.
E093_27		En matemáticas, y especialmente en la resolución de problemas, los estudiantes no solamente deben comprender situaciones y elegir correctamente las operaciones que deben llevar a cabo de acuerdo con lo que pide el problema, también, es importante plantear las soluciones de manera ordenada, para evitar confusiones que lleven a

		obtener respuestas incorrectas. En el desarrollo que se presenta, la estudiante parece estar probando varias opciones para determinar la correcta, sin embargo, resulta confuso, incluso determinar dónde obtuvo la respuesta marcada ($186.000)

3.1.2.1.7 Análisis de las respuestas a la pregunta 9.

Para responder esta pregunta correctamente el estudiante debía leer muy bien el enunciado para determinar correctamente las condiciones iniciales del problema, a saber: “Un servicio de mensajería tiene un costo básico para los envíos que tengan un peso menor a 5kg”, es decir, que para paquetes con un peso mayor a 5kg el precio aumentaría, con esta información y una observación cuidadosa de la gráfica, se llegaba directamente al valor de $5.000 como costo básico del envío. Particularmente en esta pregunta, los estudiantes tuvieron aciertos por encima del 80%, sin embargo, es difícil encontrar razones acerca del porqué eligieron la respuesta correcta, es decir, muy pocos estudiantes sustentaron o explicaron el razonamiento que les permitió responder a la pregunta.

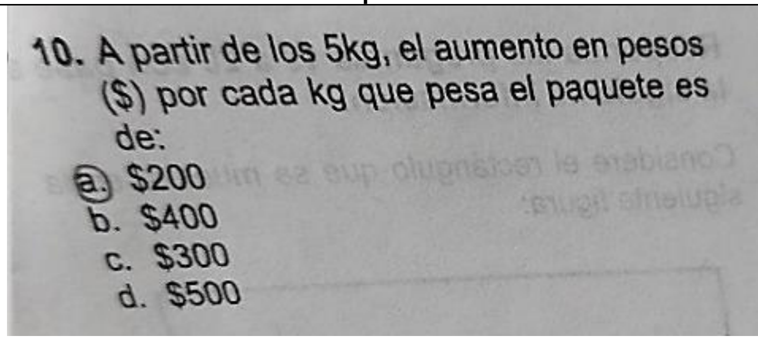
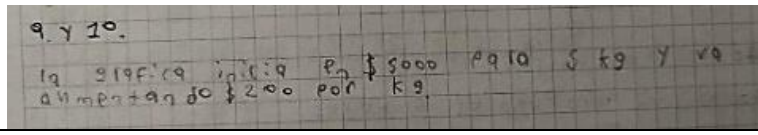
Tabla 24. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 9

Estudiante	Respuestas	Observaciones
E094_9	 9. De acuerdo con la gráfica, el costo básico de un envío es de: a. $5.200 b. $5.400 c. $5.000 d. $5.600  9 5.400, ya que es el costo intermedio en la gráfica.	La estudiante que proporciona esta respuesta posiblemente llega a una conclusión incorrecta producto de una mala interpretación de la gráfica y de la pregunta en cuestión, pues usa un argumento (costo intermedio) que no guarda relación con lo que allí se pregunta.
E094_33	 9 5000 ya que la grafica [illegible] directamente al [illegible] 5.000	Aquí, si bien el estudiante llega a una conclusión correcta y lo hace a partir de la gráfica, no obstante, en su explicación no menciona la relación entre los pesos menores a 5kg y el costo, que podría inferirse de la gráfica.
E093_35	 9. De acuerdo con la gráfica, el costo básico de un envío es de: a. $5.200 b. $5.400 c. $5.000 d. $5.600 Porque el costo básica aplica para paquetes de menos de 5kg de peso.	En esta respuesta, la estudiante habla explícitamente del costo para todo paquete con un peso menor a 5kg, información que se proporcionó en el enunciado, el valor de $5.000 estaba asociado a este peso en la gráfica, de allí posiblemente concluyó su respuesta.

3.1.2.1.8 Análisis de las respuestas a la pregunta 10.

Una pregunta sencilla para estudiantes del grado noveno, pues se trataba únicamente, de interpretar correctamente el gráfico presentado (Costo en pesos en el eje vertical, peso en kg en el eje horizontal), allí claramente podía observar el estudiante que por cada kilogramo que aumentaba el costo se incrementaba en $200. El rendimiento en las preguntas 9 y 10 fueron idénticos, con un 82% de aciertos totales.

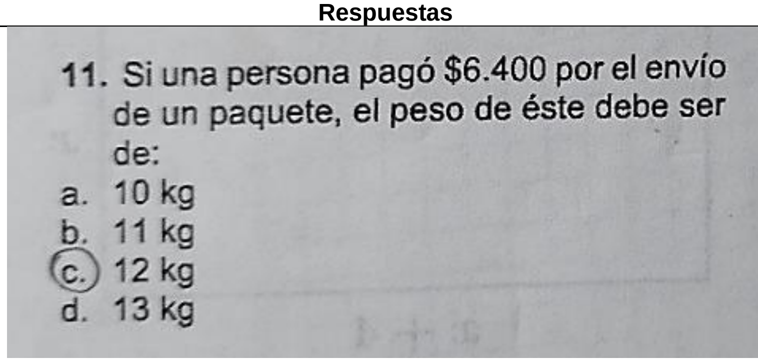
Tabla 25. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 10

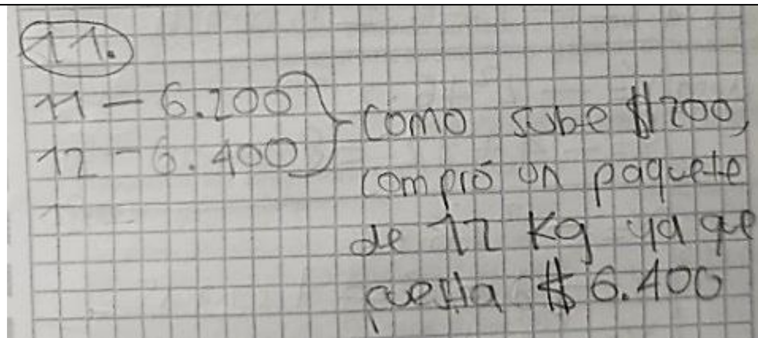
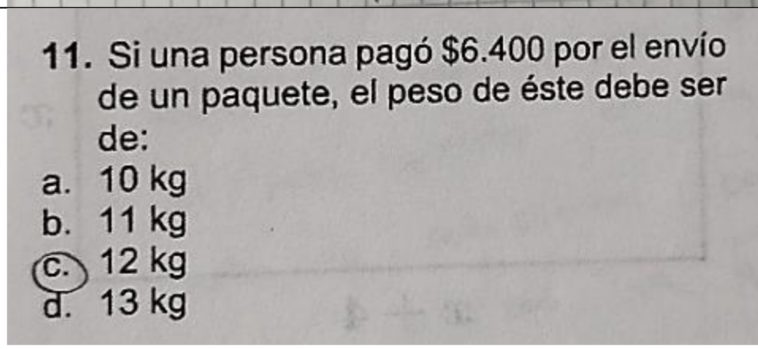
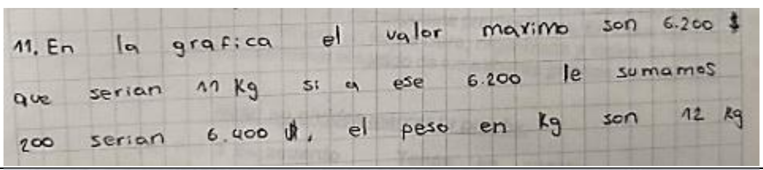
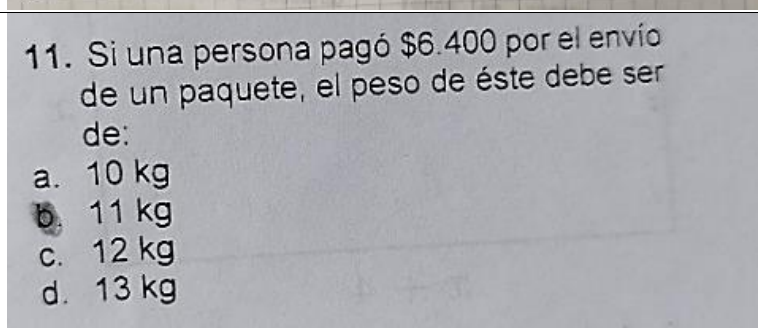
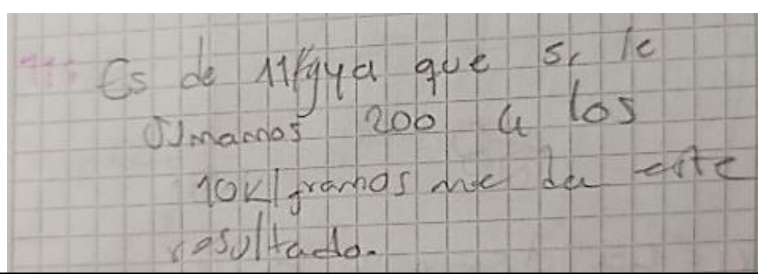
Estudiante	Respuestas	Observaciones
E092_32	 10. A partir de los 5kg, el aumento en pesos ($) por cada kg que pesa el paquete es de: a. $200 b. $400 c. $300 d. $500  9 y 10. la grafica inicia en $5000 para 5 kg y va aumentando $200 por kg	Este estudiante realiza una observación global de la gráfica, que le indica el comportamiento del precio del paquete con relación al aumento del peso en kg, con esto le resulta suficiente para sustentar las respuestas de las preguntas 9 y 10.

3.1.2.1.9 Análisis de respuestas a la pregunta 11.

Al igual que en las preguntas 9 y 10, ésta se basa en la información referente a la compañía de envíos, y si bien, la respuesta no aparecía explícitamente en la gráfica, los estudiantes podían a partir del comportamiento de esta, establecer el comportamiento para pesos (kg) que no se observaban allí. Con respecto a esta pregunta, los estudiantes alcanzaron el 62% de aciertos.

Tabla 26. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 11

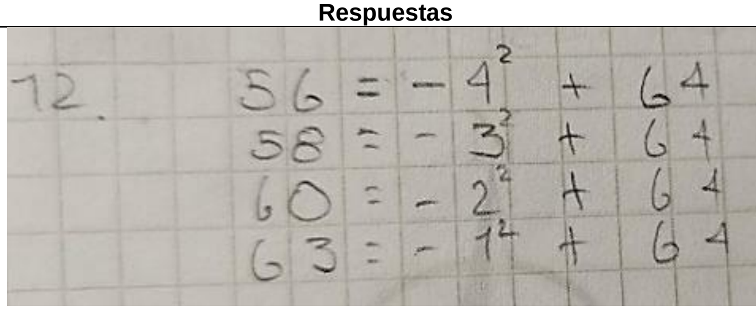
Estudiante	Respuestas	Observaciones
E092_28	 11. Si una persona pagó $6.400 por el envío de un paquete, el peso de éste debe ser de: a. 10 kg b. 11 kg c. 12 kg d. 13 kg	En esta respuesta, la estudiante realiza un correcto análisis de la gráfica, la cual muestra que cada kilogramo de peso en el paquete significa un incremento de $200 en su costo de envío, además, que la gráfica termina con un costo de $6.000 para un paquete de 10kg, así, plantea su solución, incrementando primero a 11kg y luego a 12kg, con sus respectivos aumentos de $200 y $400 a partir del último dato de la tabla.

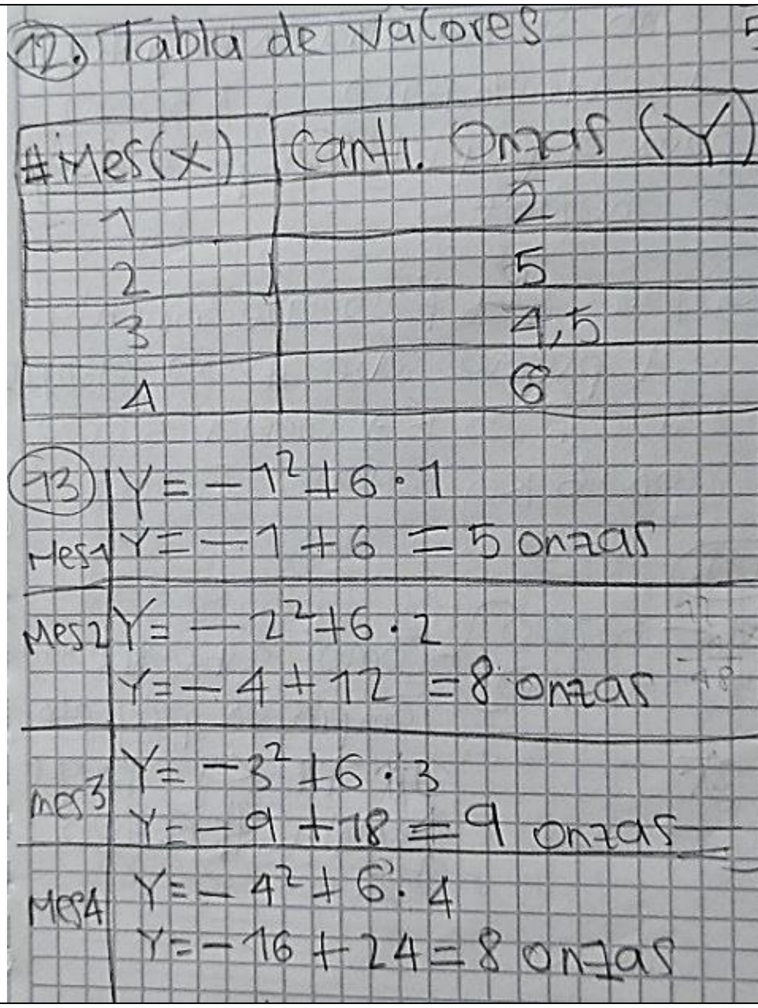
	 11. 11 — 6.200 12 — 6.400 } como sube $200, compró un paquete de 12 Kg ya que cuesta $6.400	
E092_22	 11. Si una persona pagó $6.400 por el envío de un paquete, el peso de éste debe ser de: a. 10 kg b. 11 kg c. 12 kg d. 13 kg  11. En la grafica el valor maximo son 6.200 $ que serian 11 Kg si a ese 6.200 le sumamos 200 serian 6.400 $, el peso en Kg son 12 Kg	En la respuesta proporcionada por el estudiante, menciona de manera explícita de dónde obtuvo la respuesta a la pregunta, señalando la información puntual en la gráfica que le lleva a inferir que el precio equivale a un paquete de 12kg.
E091_33	 11. Si una persona pagó $6.400 por el envío de un paquete, el peso de éste debe ser de: a. 10 kg b. 11 kg c. 12 kg d. 13 kg  11. Es de 11kg ya que si le sumamos 200 a los 10 kilogramos me da este resultado.	Es posible que la estudiante que da esta respuesta haya interpretado mal el último dato de la gráfica, es decir, en vez de asociar el costo de $6.200 con 11kg, que hubiese sido la interpretación correcta, lo asoció a 10kg, por ende, al aumentar $200 para llegar a los $6.400 a los que se refiere la pregunta, obtiene la respuesta de 11kg.

3.1.2.1.10 Análisis de respuestas a la pregunta 12.

Una pregunta abierta donde se pedía construir la tabla de valores de la ecuación $y = -x^2 + 6x$, es decir, usar operaciones básicas para encontrar el valor numérico de la expresión del lado derecho de la equivalencia, dados unos valores de x escogidos por cada estudiante, los cuales, para escogerlos correctamente era necesario una correcta interpretación de la situación, pues al tratarse de la edad en meses de un bebé, no tendría sentido que se escogieran valores negativos. En esta pregunta teniendo apenas un 1% de aciertos totales, se logra evidenciar la notable dificultad para realizar operaciones básicas combinadas (jerarquía de operaciones) y encontrar valores particulares de una expresión.

Tabla 27. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 12

Estudiante	Respuestas	Observaciones
E093_24		Para intentar interpretar lo que el estudiante intentó hacer, partamos de la fórmula entregada en la situación: $y = -x^2 + 6x$, donde $'y'$ representa una cantidad de onzas de leche, y $'x'$ la edad del bebé medida en meses. El estudiante escoge valores positivos para la edad del bebé (4, 3, 2 y 1), la cual es una elección correcta, sin embargo, al intentar encontrar el valor numérico de $'y'$, no toma en cuenta que el término $6x$ significa “6 multiplicado por el valor que toma x”, esto lo induce a cometer un error, que es dejar esta parte de la expresión fija como 64, por lo que no llega a la solución correcta.

<table>
<tr>
<td>E092_28</td>
<td>
</td>
<td>La respuesta dada por esta estudiante merece la pena ser analizada, como se observa, en la pregunta 12 realiza una tabla de valores que no es consistente con la fórmula con la que se representa la situación. Sin embargo, al intentar resolver la pregunta 13 (pregunta que se anuló), realiza justo el proceso con el que hubiese obtenido la tabla de valores correcta, y que, además, de no tener problemas de redacción en la pregunta 13, es posible que le hubiese permito llegar a la respuesta adecuada.</td>
</tr>
</table>

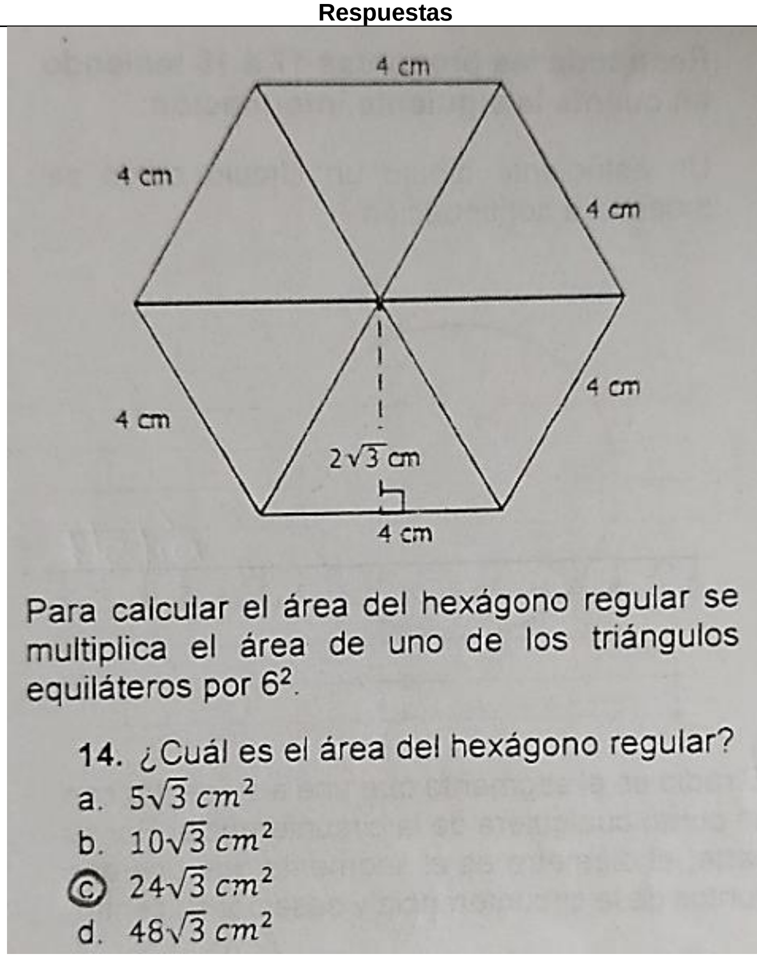
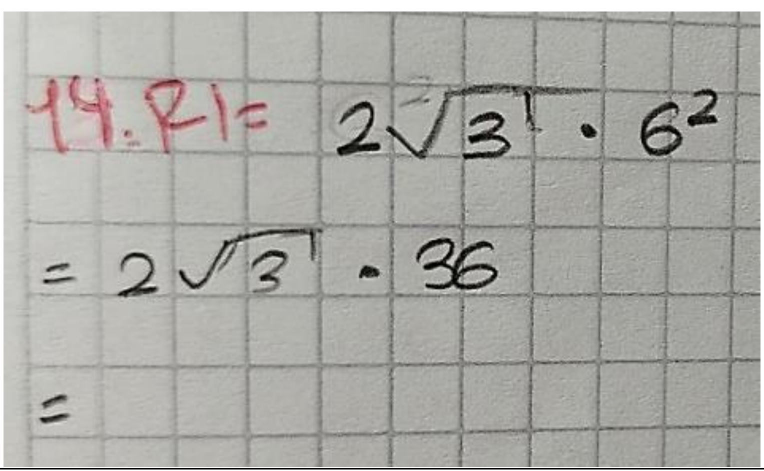
3.1.2.1.11 Análisis de las respuestas a la pregunta 13.

Si bien como ya se aclaró, esta pregunta no entró en la valoración de la prueba diagnóstica. Vale la pena mencionar, que su solución estaba ligada a la pregunta anterior, es decir, probablemente el rendimiento hubiese sido similar.

3.1.2.1.12 Análisis de las respuestas a la pregunta 14.

Esta pregunta requirió varias aptitudes por parte del estudiante. Una de ellas era usar la fórmula para determinar el área de un triángulo y de un polígono regular, que, si bien no se especificó en la prueba diagnóstica, durante la presentación de esta, sí se les recordó. Además, la ejecución de operaciones básicas, con la salvedad de que una de las cantidades involucradas era el irracional $\sqrt{3}$, lo cual en el imaginario de muchos estudiantes supone una dificultad, pues su forma de abordarlo es intentar establecer una equivalencia numérica para dicho número (por ejemplo: $\sqrt{4} = 2$), y al no poder establecerlo realizan aproximaciones incorrectas o no logran resolver.

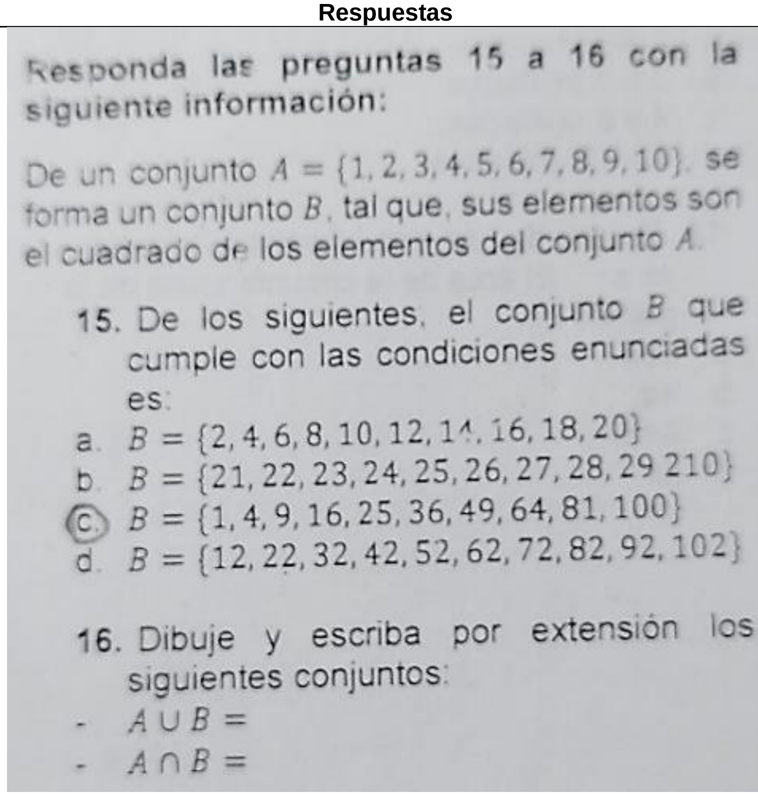
Tabla 28. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 14

Estudiante	Respuestas	Observaciones
E094_18	 	Esta solución retrata un problema que fue recurrente en esta pregunta: el enunciado explicaba cómo encontrar el área del hexágono, al final, cuando decía: “se multiplica el área de uno de los triángulos equiláteros por 6^2”, el 2 se puede confundir con un exponente, sin embargo, corresponde a una nota al pie ubicada en la prueba. Es así, que esto llevó a muchos estudiantes a incurrir en el error de interpretar 6^2 como 36, que es justamente lo que se observa aquí, no obstante, analizando la figura, era posible deducir que el 6 se refería justamente al número de triángulos que conforman al hexágono regular, y a partir de allí descartar al 2 como exponente que afectaba al 6.

3.1.2.1.13 Análisis de las respuestas a las preguntas 15 y 16.

Ambas preguntas buscaban en los estudiantes nociones básicas de conjuntos y conocimientos de las operaciones entre ellos. La primera de ellas pedía al estudiante formar un conjunto a partir de un conjunto inicial, teniendo como regla que, el segundo conjunto se formaba con los cuadrados de los elementos del primer conjunto. Allí, de manera implícita, estaba la noción de la correspondencia, muy importante para el estudio de las funciones. Por su parte, la pregunta 16 pedía la unión e intersección entre ambos conjuntos. El rendimiento en cada una de las preguntas fue del 44% y 3% de aciertos, respectivamente, demostrando que, si bien una buena proporción de estudiantes logró establecer la relación entre ambos conjuntos correctamente, al pedirles realizar operaciones sobre ellos se puso de manifiesto una gran dificultad.

Tabla 29. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 15

Estudiante	Respuestas	Observaciones
E093_36	 Responda las preguntas 15 a 16 con la siguiente información: De un conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, se forma un conjunto B, tal que, sus elementos son el cuadrado de los elementos del conjunto A. 15. De los siguientes, el conjunto B que cumple con las condiciones enunciadas es: a. $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ b. $B = \{21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29\ 210\}$ c. $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$ d. $B = \{12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92, 102\}$ 16. Dibuje y escriba por extensión los siguientes conjuntos: - $A \cup B =$ - $A \cap B =$	La estudiante plantea la solución con base en la información proporcionada, ya que el enunciado de manera explícita dice que los elementos del conjunto A se elevan al cuadrado para formar el conjunto B, sin embargo, comete un pequeño error en su escritura, ya que el conjunto A que usa, con cada elemento elevado al cuadrado, sería justamente el conjunto B. Aun así, obtiene la respuesta correcta.

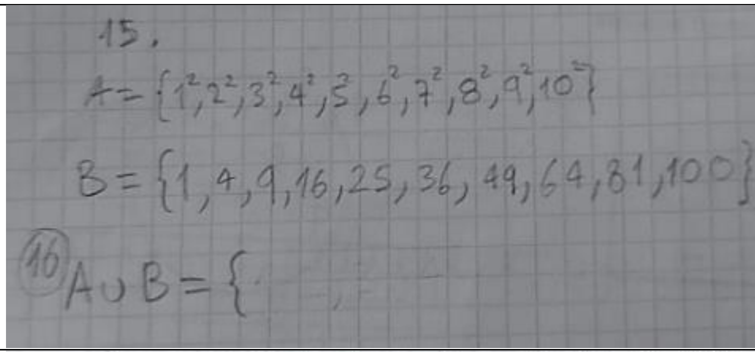
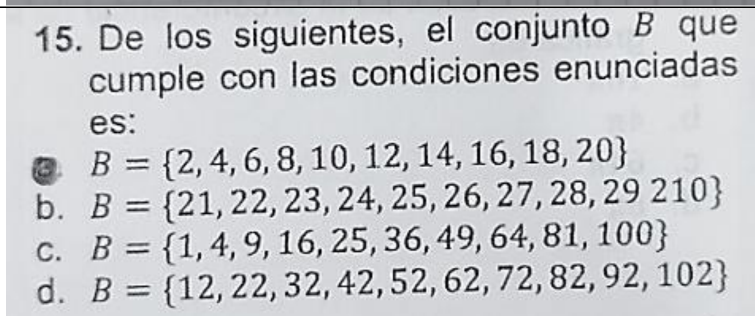
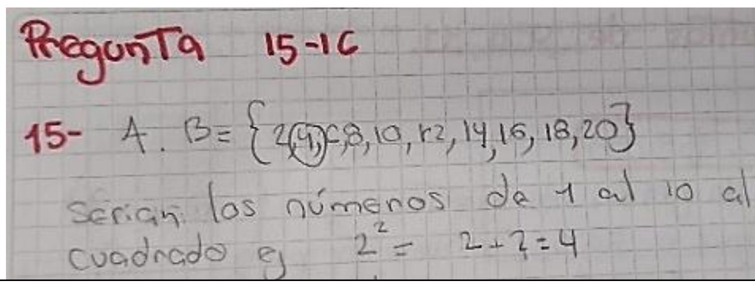
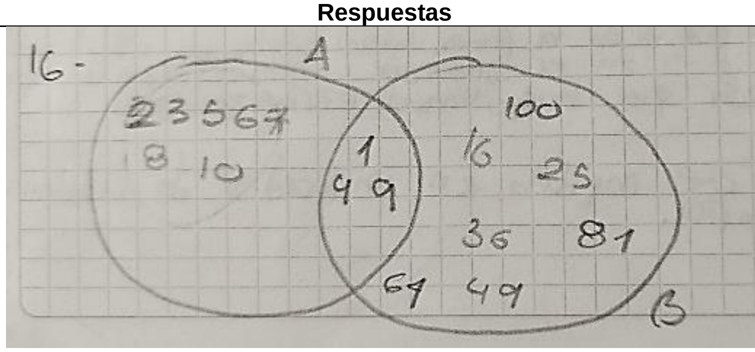
	 15. $A=\{1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,6^2,7^2,8^2,9^2,10^2\}$ $B=\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\}$ 16 $A\cup B=\{$	
E092_21	 15. De los siguientes, el conjunto B que cumple con las condiciones enunciadas es: a. $B=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$ b. $B=\{21,22,23,24,25,26,27,28,29\ 210\}$ c. $B=\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\}$ d. $B=\{12,22,32,42,52,62,72,82,92,102\}$  Pregunta 15-16 15- A. $B=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$ serian los números de 1 al 10 al cuadrado ej $2^2=2+2=4$	En la respuesta presentada por esta estudiante, interpreta correctamente que a los elementos del conjunto A se les aplica una operación para obtener los elementos del conjunto A, sin embargo, se manifiesta un desconocimiento de la operación de potenciación, ya que la confunde con duplicar los números, este es un problema que se observa constantemente en muchos estudiantes, la desconexión entre el lenguaje simbólico matemático y la expresión verbal de las operaciones.

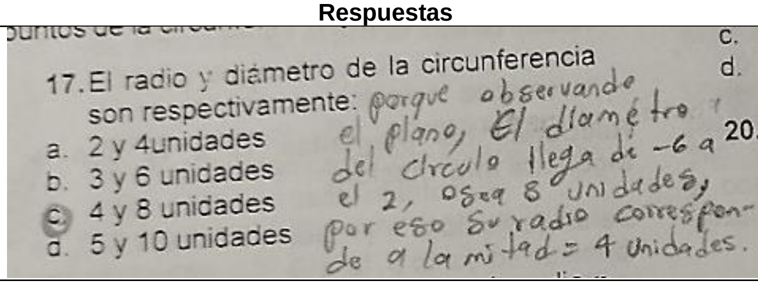
Tabla 30. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 16

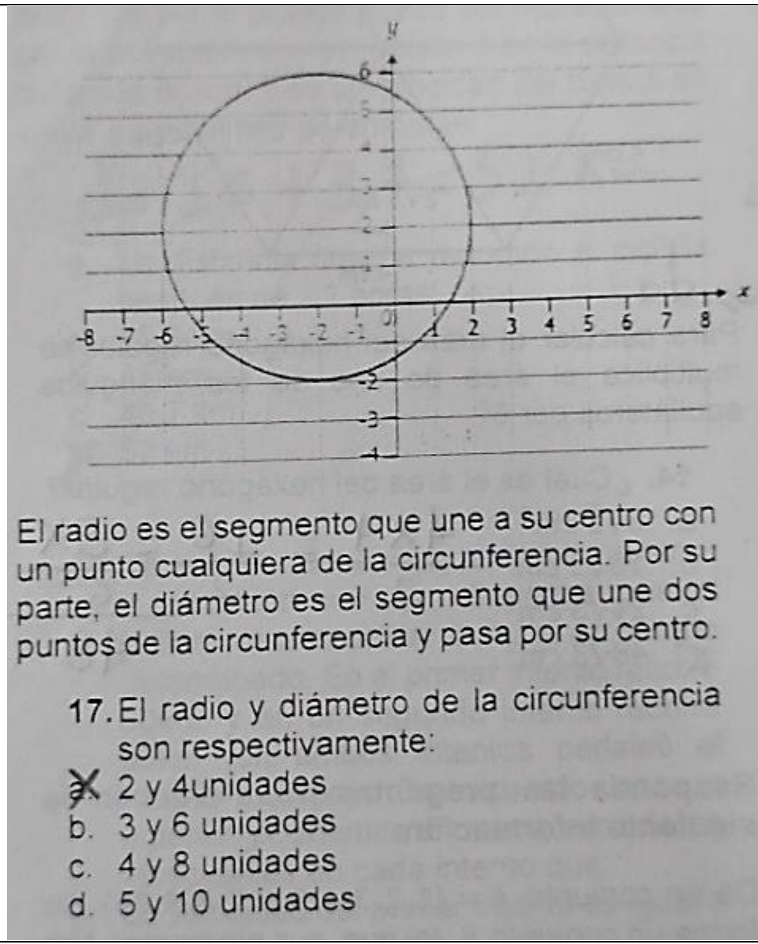
Estudiante	Respuestas	Observaciones
E091_34		Como ya se mencionó, muy pocos estudiantes respondieron correctamente a esta pregunta. La estudiante que responde representa correctamente los conjuntos A y B, al igual que la unión e intersección entre ellos, también es importante mencionar que demuestra una buena comprensión de la situación completa, pues para lograr esta representación correctamente debió responder bien la pregunta anterior.

3.1.2.1.14 Análisis de las respuestas a la pregunta 17.

Para esta pregunta se dio a los estudiantes una circunferencia dibujada en un plano cartesiano, con centro en (-2,2) y radio 4 unidades, datos que no se especificaron, pues justamente es lo que se pretendía lograra deducir el estudiante, al igual que el diámetro. Esta fue una pregunta con solamente 19% de aciertos, aun cuando durante el desarrollo de la prueba se recordó brevemente el significado de radio y diámetro de la circunferencia, es decir, los estudiantes únicamente debían contar las unidades entre el centro y algún punto exterior para encontrar el radio, y duplicar esta cantidad para el diámetro.

Tabla 31. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 17

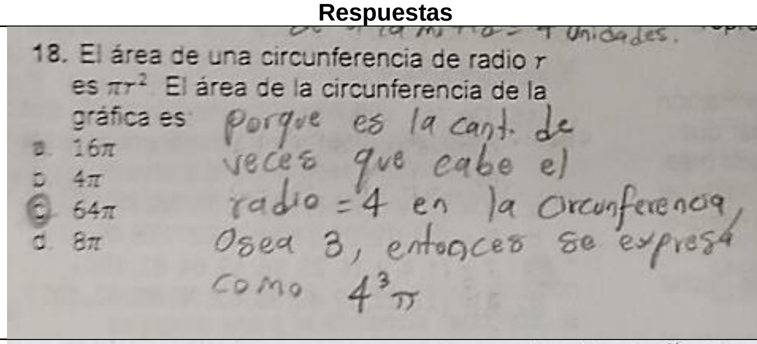
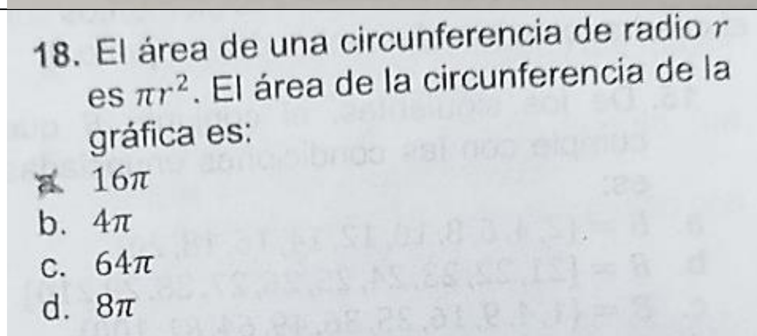
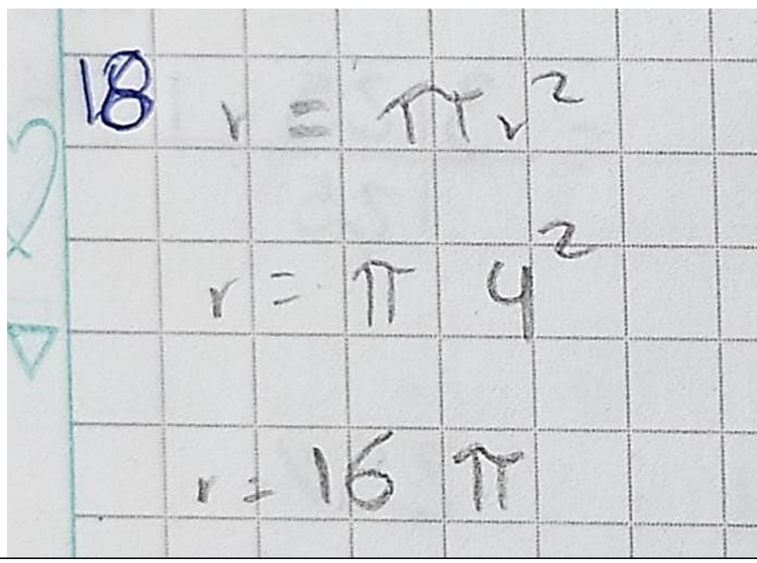
Estudiante	Respuestas	Observaciones
E093_35	 17. El radio y diámetro de la circunferencia son respectivamente: a. 2 y 4unidades b. 3 y 6 unidades c. 4 y 8 unidades d. 5 y 10 unidades porque observando el plano, El diámetro del circulo llega de -6 a el 2, osea 8 unidades, por eso su radio correspon- de a la mitad = 4 unidades.	En esta respuesta la estudiante demuestra una correcta lectura de la información presentada en el plano cartesiano, además, relaciona perfectamente el radio con el diámetro de la circunferencia.

E093_10		La estudiante que proporciona esta respuesta, reconoce la relación entre el radio y el diámetro de la circunferencia, sin embargo, no toma en cuenta la escala de los ejes ordenados para encontrar las medidas correctas.

3.1.2.1.15 Análisis de las respuestas a la pregunta 18.

Curiosamente, esta pregunta tuvo un 26% de aciertos, sin embargo, era de esperar que esta cantidad fuera igual o menor a la de la pregunta anterior, dado que era necesario conocer el radio o diámetro de la circunferencia para determinar su área. Es claro que, se evidenció que muchas respuestas correctas fueron producto del azar, pues no se encontraban debidamente sustentadas en su mayoría.

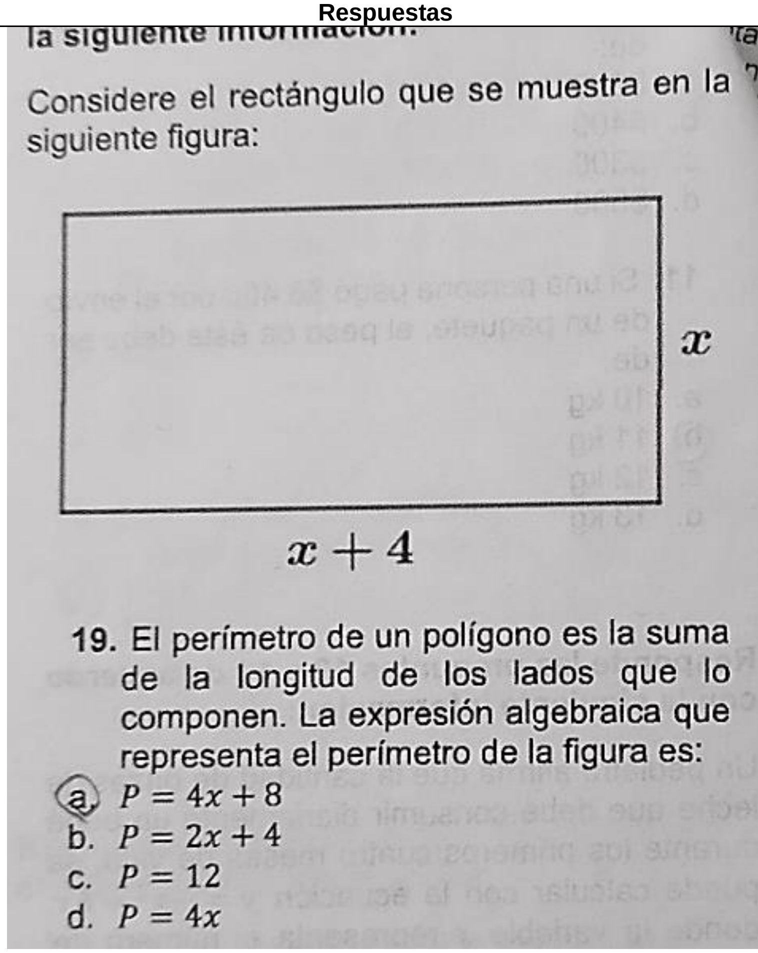
Tabla 32. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 18

Estudiante	Respuestas	Observaciones
E093_35	 18. El área de una circunferencia de radio r es πr^2. El área de la circunferencia de la gráfica es a. 16π b. 4π c. 64π d. 8π Porque es la cant. de veces que cabe el radio = 4 en la circunferencia, osea 3, entonces se expresa como $4^3\pi$	Se trata de la misma estudiante presentada en la primera respuesta de la pregunta 17, pero en este caso interpreta incorrectamente la información para determinar el área de la figura, sin tomar en cuenta la fórmula que le fue dada en el enunciado de la pregunta.
E092_1	 18. El área de una circunferencia de radio r es πr^2. El área de la circunferencia de la gráfica es: a. 16π b. 4π c. 64π d. 8π  18 $r = \pi r^2$ $r = \pi 4^2$ $r = 16\pi$	La estudiante demuestra que logró obtener los elementos de la circunferencia pedidos en el punto anterior, y con ellos, usar la fórmula proporcionada para encontrar su área usando operaciones básicas.

3.1.2.1.16 Análisis de las respuestas a las preguntas 19 y 20.

Estas preguntas presentaron un reto importante para los estudiantes, pues eran necesarias nociones de geometría plana, como lo son el perímetro y el área del rectángulo, pero también, una suficiencia en el manejo de expresiones algebraicas, en este caso, simplificación de expresiones reduciendo términos semejantes, para llegar a las respuestas correctas. Los aciertos fueron del 19% y el 5% respectivamente, lo que da cuenta, como en otras preguntas, de las dificultades en el trabajo con expresiones algebraicas de la mayoría de los estudiantes.

Tabla 33. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 19

Estudiante	Respuestas	Observaciones
E092_32	 la siguiente información: Considere el rectángulo que se muestra en la siguiente figura: x $x+4$ **19.** El perímetro de un polígono es la suma de la longitud de los lados que lo componen. La expresión algebraica que representa el perímetro de la figura es: a. $P = 4x + 8$ b. $P = 2x + 4$ c. $P = 12$ d. $P = 4x$	En esta solución el estudiante usa bien la definición del perímetro de una figura plana, además, se muestra capacitado para realizar operaciones con expresiones algebraicas sencillas, su planteamiento es adecuado y encuentra la respuesta correcta.

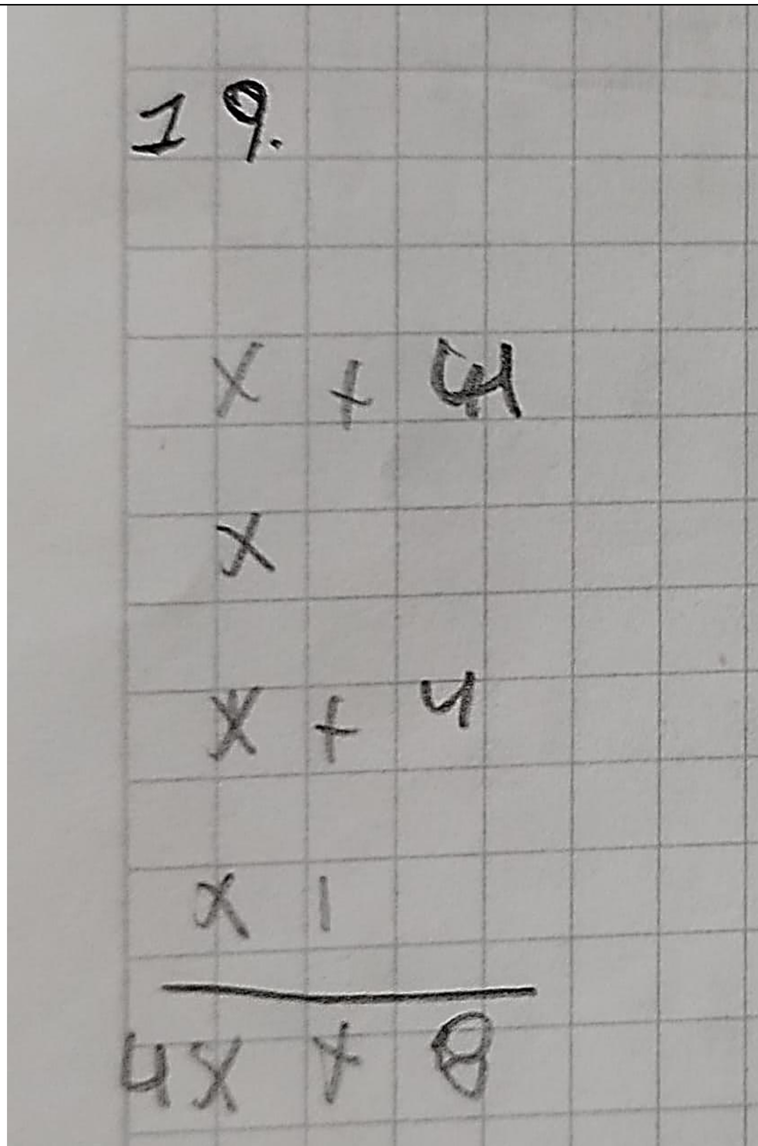
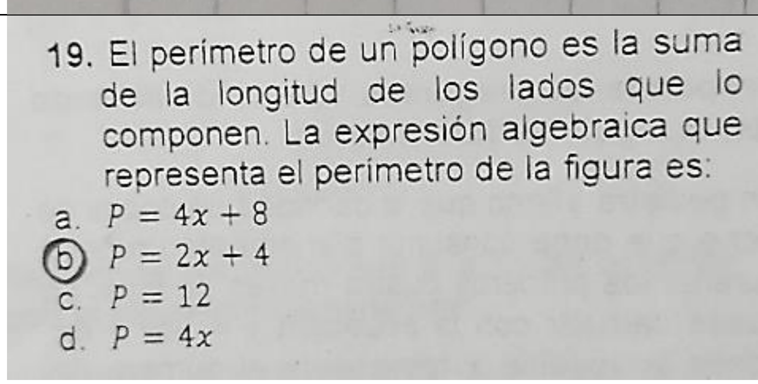
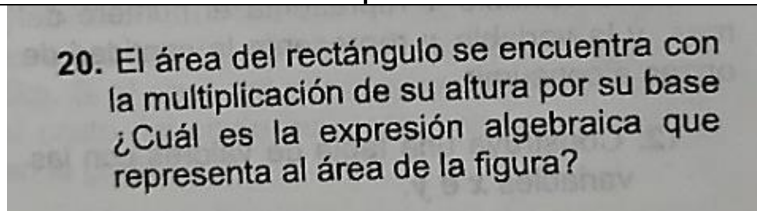
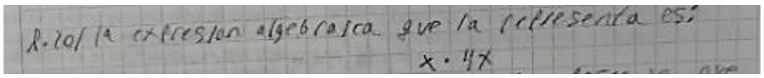
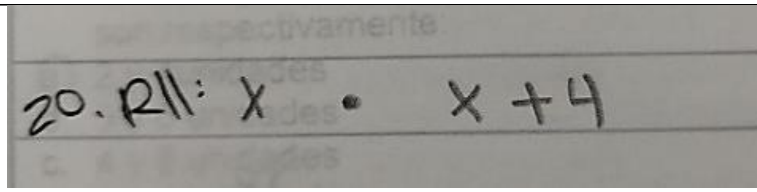
		
E093_30	 19. El perímetro de un polígono es la suma de la longitud de los lados que lo componen. La expresión algebraica que representa el perímetro de la figura es: a. $P = 4x + 8$ b. $P = 2x + 4$ c. $P = 12$ d. $P = 4x$	Si bien este estudiante no presentó desarrollo del procedimiento que usó para llegar a su respuesta, es posible que haya sumado las expresiones que se daban en el rectángulo: $(x) + (x + 4) = 2x + 4$, allí, aunque tiene una correcta ejecución de la operación entre expresiones algebraicas, no toma en cuenta la definición del perímetro, ya que obvia dos lados del polígono.

Tabla 34. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 20

Estudiante	Respuestas	Observaciones
E092_3	 20. El área del rectángulo se encuentra con la multiplicación de su altura por su base ¿Cuál es la expresión algebraica que representa al área de la figura?  R. 20/ la expresion algebraica que la represenla es: x · 4x	Es posible que este estudiante, a pesar de realizar una lectura y correcta interpretación de la pregunta, haya confundido la expresión $x+4$ con $4x$, pues la expresión correcta habría sido: $x(x+4)$, esta respuesta que proporciona pudo ser producto de una desatención al momento de responder.
E094_11	 20. R//: x · x + 4	Para que la estudiante que proporciona esta respuesta lo haya hecho correctamente, previamente tuvo que identificar correctamente la base y altura del rectángulo (expresadas algebraicamente), además, la habilidad para expresar simbólicamente la operación que se describió verbalmente para calcular el área.

Es importante señalar que, particularmente en las preguntas abiertas (3, 6, 12, 16 y 20) el rendimiento de los estudiantes fue muy bajo. Observamos cómo en muchas preguntas de selección múltiple los estudiantes marcaban respuestas correctas sin ser capaz de sustentar sus procedimientos y razonamientos. Es claro que este tipo de preguntas abiertas, al no presentar opciones de respuesta definidas, requiere mayor creatividad por parte del estudiante para generar una respuesta satisfactoria, además, requiere de una mayor habilidad para expresar de forma coherente y clara sus ideas, lo que también requiere un mayor desarrollo de su pensamiento crítico.

3.1.2.2 Análisis de los resultados: Procesos generales.

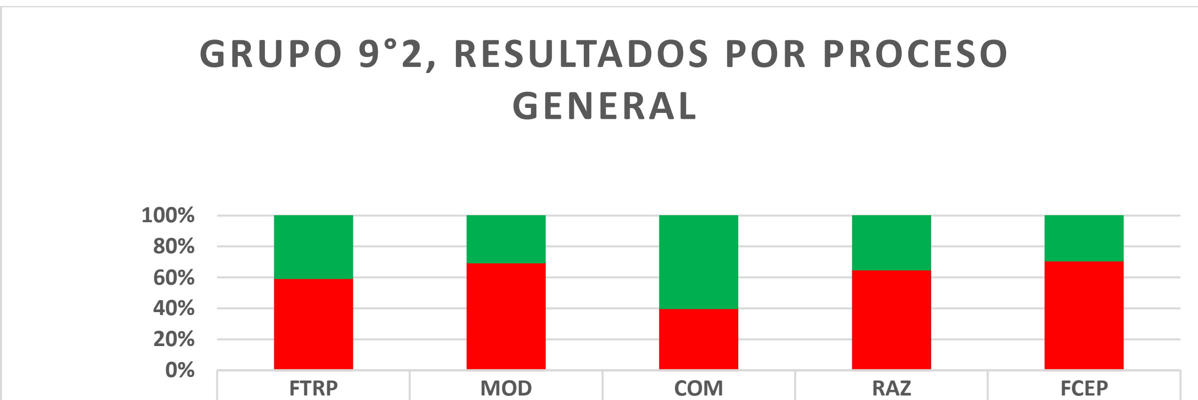
Como ya se dijo anteriormente, los Estándares Básicos de Competencias en matemática (MEN, 2006) desarrollan los cinco procesos generales de la actividad matemática, que ya se habían tratado anteriormente en los Lineamientos Curriculares para matemáticas (MEN, 1998), a su vez, dichos procesos describen las acciones que debe llevar a cabo un individuo *matemáticamente competente*. A continuación, se presenta una clasificación de cada una de las preguntas dentro de los procesos generales, además, se muestra la proporción de aciertos y desaciertos para cada pregunta.

Tabla 35. Clasificación de preguntas según proceso general

PROCESOS GENERALES	CÓDIGO	PREGUNTAS
La formulación, tratamiento y resolución de problemas	FTRP	1, 3, 10, 11, 12, 17
La modelación	MOD	1, 3
La comunicación	COM	5, 6, 9, 11
El razonamiento	RAZ	5, 6, 11, 17, 20
La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos	FCEP	4, 7, 8, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20

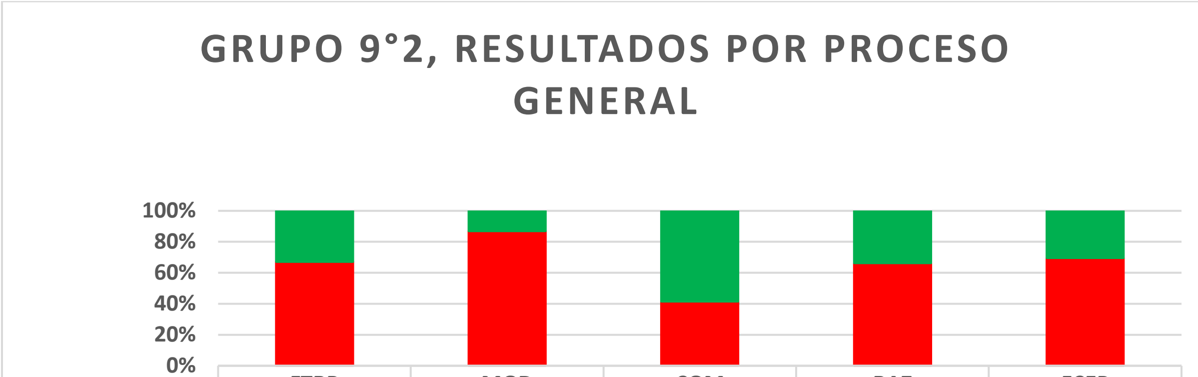
En la tabla 35 se clasificaron las preguntas dependiendo del proceso general que involucraba su solución, como es evidente, hay preguntas que están clasificadas en más de un proceso. La codificación para cada proceso se usa particularmente para facilitar las ilustraciones siguientes.

Ilustración 15. Desempeño según proceso general, grupo 9°1



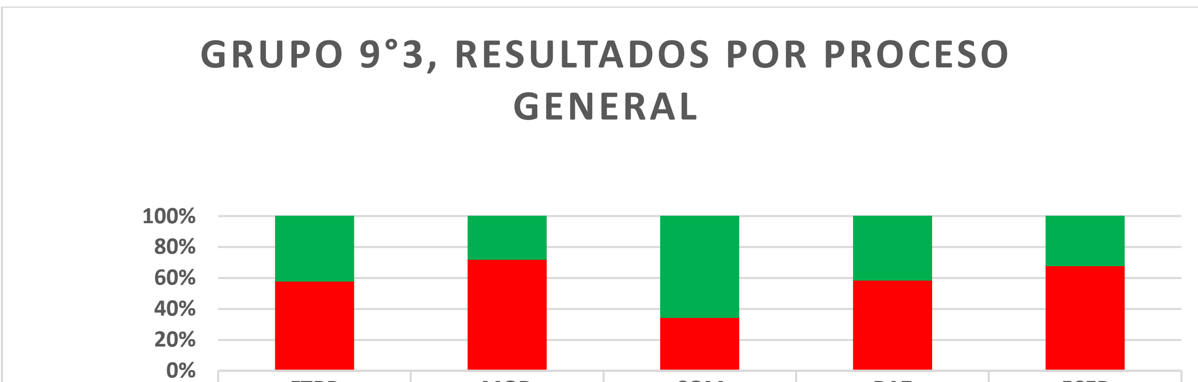
	FTRP	MOD	COM	RAZ	FCEP
ACIERTOS	40%	30%	60%	35%	29%
DESACIERTOS	60%	70%	40%	65%	71%

Ilustración 16. Desempeño según proceso general, grupo 9°2



	FTRP	MOD	COM	RAZ	FCEP
ACIERTOS	33%	13%	59%	34%	31%
DESACIERTOS	67%	87%	41%	66%	69%

Ilustración 17. Desempeño según proceso general, grupo 9°3

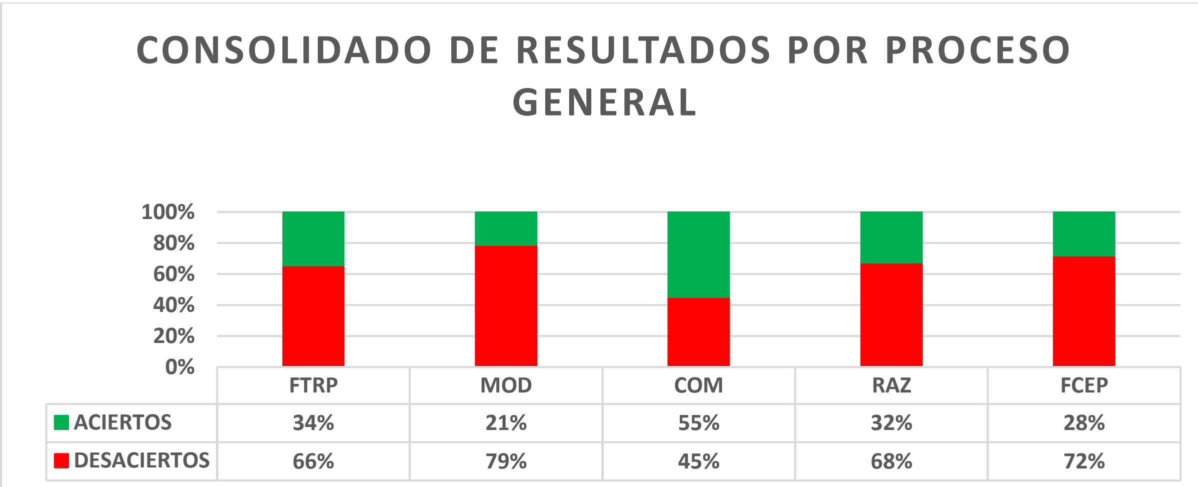


	FTRP	MOD	COM	RAZ	FCEP
ACIERTOS	42%	28%	65%	41%	32%
DESACIERTOS	58%	72%	35%	59%	68%

Ilustración 18. Desempeño según proceso general, grupo 9°4

	FTRP	MOD	COM	RAZ	FCEP
ACIERTOS	20%	12%	32%	18%	18%
DESACIERTOS	80%	88%	68%	82%	82%

Ilustración 19. Desempeño global según proceso general



3.1.2.2.1 Análisis de resultados: La formulación, tratamiento y resolución de problemas

De acuerdo con el MEN (2006), este es un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas. No es ni aislado ni esporádico, más aún, se puede llegar a concebir como el principal eje organizador del currículo.

Este proceso, fue el que mayor cantidad de preguntas involucró: las preguntas 1 y 3 requerían del estudiante una lectura e interpretación debidas de la situación, a su vez, intentar representarla en un esquema de coordenadas para tener una visión más veraz de lo que allí se describía para posteriormente realizar el cálculo mediante el uso del Teorema de Pitágoras: La mayor dificultad que se evidenció en estas preguntas está relacionada con la representación gráfica de situaciones y el uso del plano cartesiano como sistema de ubicación geográfica. Aquí vale recordar que la pregunta 2 se planteó incorrectamente. Las preguntas 10 y 11 se plantean a partir de la información planteada en un gráfico, así, los estudiantes debían interpretar correctamente dicho gráfico para responderlas.

Es evidente que la mayoría de los estudiantes son capaces de extraer información del gráfico para responder la pregunta 10. Sin embargo, para la pregunta 11, en la cual debían inferir el comportamiento de la línea Peso (Kg) vs. Costo de envío ($), en condiciones que no se podían ver directamente en la gráfica, la mayoría de los estudiantes presentaron dificultades. La pregunta 12 parte de una situación problema que involucra una modelación realizada con una función cuadrática, aquí el estudiante debía, primero, tener en cuenta que al ser la variable independiente, la edad de un bebé (en meses), ésta no admitía valores negativos para realizar la tabla de valores, y segundo, con la anterior consideración, determinar el valor numérico de la ecuación para construirla, es importante señalar que fue una de las preguntas donde más fallaron los estudiantes. Finalmente, la pregunta 17, únicamente requería por parte del estudiante una lectura correcta de la información proporcionada de la figura, ya que allí se definían claramente el radio y diámetro de la circunferencia, por lo que bastaría solamente, tener un manejo básico del plano cartesiano para determinar la opción de respuesta correcta, sorprendentemente, fue también una pregunta de alto desacierto por parte de los estudiantes.

Tabla 36. Fortalezas y oportunidades de mejora, FTRP

Fortalezas	Oportunidades de mejora
• Usar algunas operaciones matemáticas simples para plantear soluciones a diferentes situaciones.	• Discernir de los enunciados de las situaciones problema la información relevante para darles solución. • Interpretar apropiadamente los enunciados de las situaciones problema. • Elegir las operaciones matemáticas apropiadas para la resolución de situaciones problema.

3.1.2.2.2 Análisis de resultados: La modelación

Este proceso tiene que ver con sistemas figurativos mentales, gráficos bidimensionales o tridimensionales que el estudiante usa para intentar representar la realidad (MEN 2006), es decir, se usa para operar con objetos sin necesidad de manipularlos físicamente, con el fin de formular conjeturas o razonamientos.

Las preguntas 1 y 3 requerían de la modelación de la trayectoria del avión, bajo las condiciones dadas en el problema. Se ha observado en los resultados, que los estudiantes, en general, tienen dificultad al momento de esquematizar situaciones para obtener una mejor comprensión de estas y dar respuesta a lo planteado, igualmente, para la pregunta 13 habría sido de gran utilidad realizar una gráfica de la situación una vez obtenida la tabla de valores pedida en la pregunta 12, así, fácilmente se hubiese podido observar el comportamiento de las magnitudes involucradas. Sin embargo, como ya se señaló antes, los estudiantes también demostraron grandes dificultades para construir la tabla de valores, que pudo incluso, llevarlos a concluir que la respuesta correcta no estaba incluida en las opciones de respuesta.

Tabla 37. Fortalezas y oportunidades de mejora, MOD

Fortalezas	Oportunidades de mejora
• Comprender la importancia de realizar modelos simplificados de las situaciones presentadas.	• Simplificar las situaciones problema haciendo uso de modelos bidimensionales o tridimensionales. • Elegir las herramientas adecuadas para realizar la esquematización de situaciones problema.

3.1.2.2.3 Análisis de resultados: La comunicación

El MEN señala la importancia de la comunicación en el estudio de la matemática, ya que si bien, en sí mismas no son un lenguaje, pueden construirse, refinarse y comunicarse a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan (MEN, 2006). Esto ayuda a que el estudiante establezca relaciones entre los conceptos y las diferentes simbolizaciones. Además, hace referencia a la forma en que expresan y comunican la información contenida en diversas situaciones matemáticas. Las preguntas 5 y 6 se plantean a partir de una situación de velocidad constante de un ciclista. Aquí el estudiante debía razonar e intentar comunicar sus hallazgos con respecto a la relación existente entre la velocidad, la longitud y el tiempo, en dicho contexto. Si bien la pregunta 5 tuvo un mayor número de respuestas correctas, es interesante notar que en la pregunta 6 (pregunta abierta), los estudiantes tienen dificultad evidente para explicar y comunicar los razonamientos usados para responder la pregunta 5. La pregunta 9 era más sencilla, en lo que se refiere a este proceso, pues le bastaba al estudiante observar con atención el gráfico y notar que entre punto y punto en el eje vertical el aumento era de $200. Esta fue una pregunta con más aciertos que desaciertos y que en general se justificó correctamente. Para la pregunta 11, era necesario que el estudiante comunicara a través de la justificación de su respuesta, cuáles habían sido los razonamientos, procedimientos, hipótesis, etc., que había usado para llegar a la solución.

Tabla 38. Fortalezas y oportunidades de mejora, COM

Fortalezas	Oportunidades de mejora
• Describir verbalmente patrones de comportamiento observados en tablas y gráficos.	• Expresar apropiadamente los razonamientos, hipótesis, inferencias, etc., usados(as) para dar solución a una situación problema. • Justificar soluciones encontradas a través de simbología matemática o verbalmente.

3.1.2.2.4 Análisis de resultados: El razonamiento

Se podría decir que el proceso del razonamiento estuvo presente en toda la prueba diagnóstica, pues entre las condiciones, para aceptar una pregunta como acertada, debía estar debidamente justificada. De acuerdo con lo postulado por el MEN (2006), este es un proceso que requiere del estudiante el poder percibir regularidades y relaciones, hacer predicciones y conjeturas, justificar o refutar esas conjeturas, dar explicaciones coherentes, proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones. Sin embargo, algunas preguntas requerían en mayor grado de este proceso, por lo que serán las que se mencionarán. Las preguntas 5 y 6 requerían del estudiante realizar y validar conjeturas, para determinar la relación correcta entre las magnitudes involucradas. En la pregunta 11, el estudiante debía razonar a partir de la gráfica presentada e intentar predecir el comportamiento del costo ($) con relación al aumento del peso (kg). La pregunta 17 se responde a partir de la información proporcionada en el gráfico y en el texto, como se dijo anteriormente, una lectura correcta de la información bastaría para llevar al estudiante a razonar y determinar la respuesta correcta. Finalmente, la pregunta 20 plantea un desafío que normalmente se dificulta a los estudiantes, a saber: interpretar una fórmula expresada de manera verbal, en la que se decía cómo calcular el área de un triángulo, y expresarlo como una fórmula para dar la respuesta.

Tabla 39. Fortalezas y oportunidades de mejora, RAZ

Fortalezas	Oportunidades de mejora
• Identificar regularidades y relaciones entre magnitudes.	• Explicar de forma coherente los razonamientos usados para solucionar problemas. • Interpretar correctamente la información entregada para la solución de situaciones problema. • Identificar la información solicitada en una situación determinada. • Rechazar soluciones cuando estas no se acomodan a las condiciones dadas en el problema.

3.1.2.2.5 Análisis de resultados: La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos

Este proceso, se refiere a la ejecución de procesos mecánicos o rutinarios (algoritmos), cuya perfección únicamente se logra mediante la repetición y la práctica. Aquí, juegan un papel fundamental una serie de mecanismos cognitivos, como son la atención, control, planeación, ejecución, verificación e interpretación de resultados, incluso, la automatización, que permite ejecutar rápida, segura y efectivamente los procedimientos. Con lo expuesto, es claro que en la prueba diagnóstica un gran número de preguntas requerían de este importante proceso, las preguntas 4, 7, 8, 12, 14, 15, 16, 18, 19 y 20 exigían de los estudiantes conocimientos de las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación, es decir, conocer los algoritmos para ejecutar cada una de ellas con diferentes tipos de números reales, en la mayoría de estas preguntas, incluso se describió verbalmente la forma para encontrar lo solicitado. De acuerdo con los resultados, si bien es cierto que en general los estudiantes realizan operaciones básicas, en muchas ocasiones presentan dificultades para elegir la operación apropiada. Igualmente, les cuesta realizarlas cuando es necesario combinar varias de ellas.

Tabla 40. Fortalezas y oportunidades de mejora, FCEP

Fortalezas	Oportunidades de mejora
• Realizar operaciones básicas sencillas.	• Conocer y aplicar las propiedades de los números reales. • Planear cuidadosamente los procedimientos a llevar a cabo de acuerdo con lo solicitado en los problemas. • Realizar varias operaciones de manera simultánea en el orden correcto.

Como se vio anteriormente, el proceso de *la modelación* es uno de los de más bajo rendimiento, con solamente un 21% de respuestas acertadas por parte de los estudiantes. Estos resultados dan cuenta de la dificultad de los estudiantes para crear modelos que les ayuden a comprender mejor su realidad mediante su representación esquemática. Sin embargo, es importante notar que solamente dos preguntas hacían referencia a este proceso concreto. Por otro lado, el proceso relacionado con hacer predicciones y conjeturas, justificar o refutar dichas conjeturas, proponer interpretaciones -*el razonamiento*-, también presenta un bajo desempeño con apenas un 32% de respuestas acertadas.

En lo referente al desarrollo algorítmico, es decir, procedimientos rutinarios, y a la resolución de problemas -principal eje organizador del currículo de matemáticas-, se obtuvo un 28% de aciertos. Aquí, es importante resaltar que fueron los procesos a los que mayor cantidad de preguntas hacía referencia. Finalmente, *la comunicación* termina siendo el proceso de mejor rendimiento, con 55% de aciertos. Sin embargo, es importante tener en cuenta que el lenguaje usado en la prueba no es en absoluto formal. No obstante, sabiendo que allí se tratan diversidad de conceptos matemáticos, puede notarse que una buena proporción de estudiantes cuentan con las aptitudes para expresarlos y representarlos.

Finalmente, de los cuatro grupos evaluados en el diagnóstico (9°1, 9°2, 9°3 y 9°4), se elige 9°3 para realizar la implementación de la metodología IMPROVE, puesto que es el grupo en el que mejores resultados se observaron de acuerdo con los análisis realizados. Es decir, en general los estudiantes poseen unas bases conceptuales más sólidas que los de los estudiantes de los otros grupos para iniciar el estudio de las funciones matemáticas. Además, al ser el grupo en el que más estudiantes presentaron un buen desempeño en la prueba diagnóstica, facilita la conformación de los grupos heterogéneos que demanda la metodología para ser aplicada en primera instancia. Los grupos 9°1, 9°2 y 9°4, serán los que sirvan como “grupos de control”, es decir, los resultados obtenidos con 9°3 serán comparados con los de estos tres grupos, para determinar la eficacia de la aplicación de la metodología IMPROVE.

3.2 Propuesta de intervención en el aula

3.2.1. Diseño de la propuesta

De acuerdo con los resultados obtenidos en el diagnóstico aplicado a los estudiantes de 9° de la IE Liceo Antioqueño, de Bello y, su posterior análisis, se identificaron oportunidades de mejora que deben ser incluidas en la intervención en el aula. Lo anterior con el propósito, no solamente de propiciar en los estudiantes la comprensión del concepto de función, sino también para afianzar otros conocimientos y aptitudes matemáticas relacionadas con estas, que fueron evaluadas en la prueba diagnóstica, en el marco de los cinco procesos básicos de la actividad matemática.

Siguiendo con lo planteado, se realizó la propuesta de intervención de aula de tal manera que usara los elementos y fases de IMPROVE descritos en la sección 1.5.2. Para este fin, inicialmente se diseñó la tabla 41 con las diferentes preguntas metacognitivas sugeridas por Mevarech y Kramarski para aplicar IMPROVE (1997), además, la tabla 42 proporciona a los estudiantes una serie de estrategias matemáticas cognitivas y metacognitivas (Kujawa y Huske, 1995), como alternativa para utilizar en las diferentes fases de IMPROVE. Es decir, aquí los grupos de trabajo encuentran posibles opciones para abordar las situaciones presentadas, cuya elección dependerá de la discusión al interior del grupo y de las habilidades de sus integrantes. Ambas tablas se muestran a continuación:

Tabla 41. Preguntas metacognitivas, IMPROVE

Preguntas de comprensión	**Preguntas de conexión**	**Preguntas de estrategia**	**Preguntas de reflexión**
Comprender el problema es el primer paso del proceso de solución. En tu equipo de trabajo **cada uno responde**: Cada integrante lee el problema en voz alta y lo explica con sus propias palabras. ¿De qué trata el problema? ¿Cuáles son los conceptos claves del problema? Definirlos en sus propias palabras.	La construcción de puentes (conexiones) entre el conocimiento existente y el nuevo promueve el aprendizaje. ¿El problema en cuestión es parecido o diferente a alguno que hayamos resuelto antes? Listar las similitudes y diferencias con otros problemas. ¿Qué parte de mi conocimiento existente me podrá ayudar con esta tarea? ¿Ya he resuelto problemas así? ¿Cómo?	Aquí definen en grupo cuáles estrategias son apropiadas para resolver el problema dado y por qué razones. **cada uno responde**: ¿Cuál estrategia/táctica se puede usar para resolver el problema? ¿Por qué? ¿Cómo se puede llevar a cabo el plan propuesto? Para complementar, ver tabla 41, "**Estrategias cognitivas para la solución de problemas matemáticos**" y "**Antes de elaborar el plan de acción**"	En grupo, deben reflexionar acerca de los resultados obtenidos para un problema en particular, usando preguntas como: ¿La solución tiene sentido? ¿Corresponde con las condiciones descritas en el problema? ¿Cuántas soluciones debería obtener? ¿Puedo resolver el problema de otra manera? ¿Lo puedo resolver de una manera más corta? ¿Cómo? ¿Estoy atorado? ¿Por qué? ¿Consideré toda la información proporcionada en el problema? ¿Identifiqué correctamente toda la información proporcionada y la deseada? "**Durante el proceso de solución de problemas, mientras se mantiene o se monitorea el plan de acción**" y "**Al final del proceso de solución, mientras se evalúa el plan de acción**", en tabla 41.

Tabla 42. Estrategias matemáticas cognitivas y metacognitivas

Estrategias cognitivas para la solución de problemas matemáticos
• Clasificaciones cuidadosamente determinadas para indicar las características de la tarea. • Comparar artículos, grupos o cantidades. • Manipular objetos para ayudarse en la representación del problema. • Ensayo y error. • Hacer una tabla. • Hacer un dibujo. • Eliminar sistemáticamente las hipótesis/procedimientos/teoremas posibles. • Utilizar una fórmula. • Encontrar un patrón y utilizar modelos para describir patrones. • Simplificar el problema mirando casos específicos (Por ejemplo, y si $x = 0$) • Dividir un problema complejo en problemas más sencillos y resolver cada uno por separado. • Aproximar la respuesta antes de hacer los cálculos y después revisar si la respuesta calculada se acerca a la aproximación inicial. • Utilizar el sentido numérico. • Trabajar con el problema de manera inversa. • Distinguir entre información relevante e irrelevante. • Identificar la información proporcionada y la deseada, y revisar si se utilizó toda la información ofrecida. • Hacer generalizaciones acerca de los números. • Utilizar varias técnicas para mostrar la información. • Utilizar estrategias de lectura para comprender los problemas.
Desarrollar un plan de acción, mantener/monitorear el plan y la evaluación
Antes de elaborar el plan de acción, es necesario preguntarse: • ¿Qué parte de mi conocimiento existente me podrá ayudar con esta tarea? • ¿Ya he resuelto problemas así? ¿Cómo? • ¿Qué estrategias funcionan mejor para mí (visualizar, escribir, memorizar, diagramar, ponerme a prueba, etc.)? • ¿En qué dirección quiero ir? • ¿Qué debo hacer primero? • ¿Cuánto tiempo tengo para completar la tarea? • ¿Cuál es mi objetivo? ¿Qué tan motivado estoy? Recuerde: sin motivación no se tendrá éxito en alcanzar el objetivo.
Durante el proceso de solución de problemas, mientras se mantiene o se monitorea el plan de acción, es necesario preguntarse: • ¿Cómo voy? • ¿Qué estoy haciendo aquí? ¿Por qué lo estoy haciendo? ¿Voy en el camino correcto? • ¿Cómo debería de proceder? • ¿Qué información es relevante o importante para acordar/considerar/utilziar? • ¿Debería moverme en otra dirección? • ¿Debería ajustar mi ritmo según las dificultades? • ¿Estoy atorado? ¿Por qué? ¿Me referí a toda la información relevante? (revisar de manera sistemática toda la información y evaluar si se consideró el total de la misma). • ¿Qué debo hacer si no entiendo?
Al final del proceso de solución, mientras se evalúa el plan de acción, es necesario preguntarse: • ¿Tiene sentido la solución? • ¿Corresponde con la información proporcionada en el problema? • ¿Qué pudiera haber hecho diferente? (sin importar que la respuesta sea correcta). • ¿Cómo podría aplicar esta línea de pensamiento a otros problemas? • ¿Necesito regresar a la tarea para llenar algún “hueco” en mi comprensión?

Las tablas 41 y 42 fueron entregadas a cada estudiante en forma impresa, pues al ser el cuestionamiento metacognitivo uno de los ejes centrales de IMPROVE, se hace necesario que los estudiantes desarrollen sus actividades grupales e individuales usando esta importante herramienta.

La intervención de aula inicia con la introducción de los nuevos conceptos, en este caso, el texto guía comienza con una breve contextualización histórica de la función, luego, desarrolla dicho concepto partiendo de la noción de correspondencia para posteriormente formalizar su definición. Se describen allí los elementos de la función y sus formas de representación, al igual que la relación existente entre unos y otros. Se pasa de ejemplos de funciones arbitrarias para propiciar la apropiación de su definición, a definir a la función de variable real, pues será en este tipo de funciones en las que se enfocará el estudio a partir de ahora, finalmente, se explica la utilidad de la prueba de la recta vertical para identificar si una gráfica determinada corresponde o no con una función.

Es importante aclarar, que todo este desarrollo teórico se realiza por parte del docente, con una puesta en común de aproximadamente 30 minutos, durante esta presentación, se resuelven ejemplos a los estudiantes para ilustrar cómo usar las tablas 41 y 42. Durante la primera parte de la intervención, los estudiantes deben afrontar de manera grupal 4 situaciones relacionadas con las funciones, sus elementos y sus formas de representación. luego, realizan una segunda actividad en parejas heterogéneas, el objetivo es determinar el nivel de apropiación de saberes resultantes de lo hecho hasta el momento e identificar oportunidades de mejora en los estudiantes participantes. Posterior a esto, los estudiantes realizan una evaluación escrita de manera individual, de esta evaluación, se espera que un grupo de estudiantes hayan alcanzado el dominio, según IMPROVE, un rendimiento igual o superior al 80%, estos estudiantes pasarán a realizar actividades de enriquecimiento y regularización, mientras los demás realizarán actividades correctivas que les permitan alcanzar el dominio conceptual, estos estudiantes son evaluados nuevamente para determinar su evolución.

Antes de realizar la intervención en el aula, se clasificaron los estudiantes del grupo 9°3 de acuerdo con el rendimiento obtenido en la prueba diagnóstica, para conformar los grupos heterogéneos necesarios en la aplicación de IMPROVE, sin embargo, las valoraciones obtenidas por los estudiantes no permitían cumplir con los criterios para dicha conformación: grupos formados por cuatro estudiantes, uno de rendimiento alto o superior, uno de rendimiento básico y dos de rendimiento bajo, por esta razón, fue necesario no solamente necesario tomar en cuenta la valoración en la prueba mencionada, sino también, el rendimiento tenido en lo transcurrido del año lectivo, dado que para la fecha en que se aplicó, ya estaba por finalizar el primer período académico en la IE Liceo Antioqueño, por lo tanto, se tenían suficientes elementos de valoración para la conformación de los grupos. Los grupos de trabajo quedaron conformados como se muestra en la siguiente tabla, se proporciona el código del estudiante, la valoración obtenida en el diagnóstico y el grupo al que pertenece:

Tabla 43. Grupos heterogéneos de trabajo

GRUPO 1		GRUPO 4		GRUPO 7	
Código	**Valoración**	**Código**	**Valoración**	**Código**	**Valoración**
E093_10	3,1	E093_24	3,7	E093_29	3,3
E093_12	2,7	E093_17	3,1	E093_27	3,3
E093_5	2,5	E093_23	2,9	E093_3	3,1
E093_6	2,5	E093_33	2,3	E093_4	2,5
GRUPO 2		**GRUPO 5**		**GRUPO 8**	
Código	**Valoración**	**Código**	**Valoración**	**Código**	**Valoración**
E093_14	3,3	E093_20	3,3	E093_32	3,5
E093_8	2,7	E093_13	2,5	E093_31	3,1
E093_19	2,5	E093_7	2,3	E093_2	2,1
E093_25	2,5	E093_22	2,1	E093_36	1,4
GRUPO 3		**GRUPO 6**		**GRUPO 9**	
Código	**Valoración**	**Código**	**Valoración**	**Código**	**Valoración**
E093_15	3,3	E093_30	3,5	E093_35	4,2
E093_28	2,7	E093_21	3,1	E093_11	2,9
E093_34	2,5	E093_9	2,7	E093_26	2,5
E093_18	2,5	E093_16	2,1	E093_1	1,8

La propuesta de intervención en el aula se diseñó teniendo como referente principal a los DBA (MEN, 2016) y los Estándares Básicos de Competencias del área de matemáticas (MEN, 2006), en la siguiente tabla se relacionan ambos referentes con las oportunidades de mejora identificadas en el diagnóstico, que se especifican en las tablas 36 a 40 de este trabajo.

Tabla 44. Referentes teóricos para el diseño de la propuesta de intervención

Pensamiento	Estándar	DBA	APRENDIZAJES ESPERADOS
Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos	Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).	Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación. Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).	Opera con formas simbólicas y las interpreta. Encuentra valores desconocidos en ecuaciones algebraicas. Reconoce y representa relaciones numéricas mediante expresiones algebraicas y encuentra el conjunto de variación de una variable en función del contexto. Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.
Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.	Utiliza expresiones numéricas, algebraicas o gráficas para hacer descripciones de situaciones concretas y tomar decisiones con base en su interpretación. Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones.	Opera con formas simbólicas que representan cantidades. Reconoce que las letras pueden representar números y cantidades, y que se pueden operar con ellas y sobre ellas. Interpreta expresiones numéricas, algebraicas o gráficas y toma decisiones con base en su interpretación. Reconoce el uso del signo igual como relación de equivalencia de expresiones algebraicas en los números reales.

Pensamiento espacial y sistemas geométricos	Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.	Utiliza escalas apropiadas para representar e interpretar planos, mapas y maquetas con diferentes unidades. Reconoce el plano cartesiano como un sistema bidimensional que permite ubicar puntos como sistema de referencia gráfico o geográfico.	Identifica los tipos de escalas y selecciona la adecuada para la elaboración de planos de acuerdo al formato o espacio disponible para dibujar. Localiza, describe y representa la posición y la trayectoria de un objeto en un plano cartesiano.

A propósito de la tabla 44, los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006) establecen de manera clara, que existe una relación entre los cinco tipos de pensamiento matemático, ya que estos tienen elementos conceptuales comunes, que los integran. Podemos resaltar, con relación al tema de investigación de este trabajo, la importancia de presentar conceptos aritméticos no en forma estática, sino en forma dinámica y *variacional.*

Adicionalmente, tratar los conceptos relativos a la medida de magnitudes compuestas a partir de relaciones funcionales, es decir, como funciones de magnitudes más simples, conlleva también a evidenciar una importante relación entre el pensamiento métrico y el numérico, y por ende, del numérico y el variacional, que se configuran como plataforma para el estudio de otras disciplinas científicas. Por esta razón, el estudio de la función no puede enmarcarse únicamente en el pensamiento variacional, contrario a esto, se puede estudiar globalmente desde los cinco pensamientos, en este caso, se aborda desde tres de los cinco, como se ve en la tabla en mención.

La actividad 1 está compuesta de cuatro situaciones o problemas, que se desarrollan luego de la conceptualización, y que hacen parte de la guía didáctica. La ***situación 1*** lleva a los estudiantes no solamente a establecer los elementos de una función, sino también, a explorar diversas formas de representación para el mismo concepto matemático -la función-, además, para realizar una correcta interpretación de la ecuación que se pide encontrar deben interactuar ya sea con el conjunto de puntos del plano cartesiano, o deducirlo a partir de operaciones realizadas sobre la ecuación. La ***situación 2*** parte de una representación diferente de la anterior, sin embargo, también invita a los estudiantes a relacionar con otras representaciones mediante gráficos y operaciones matemáticas, además, al no tratarse de una función la que ha sido representada, al preguntarles acerca de las diferencias entre este diagrama y el anterior, se espera que los estudiantes establezcan diferencias en la representación de relaciones que son funciones y aquellas que no lo son. En la ***situación 3*** se plantea a los estudiantes un desafío mayor, de acuerdo con lo que se ha observado en la prueba diagnóstica, se trata de llevar una función expresada verbalmente a las otras formas de representación, el reto principal es encontrar la equivalencia entre el lenguaje verbal y el simbólico. Por su parte, la ***situación 4*** parte de una representación gráfica de una ecuación de la parábola que no es función, al igual que en las situaciones anteriores, los estudiantes pasan de una representación a otra. Sin embargo, el reto principal de esta situación termina siendo proponer la ecuación correcta a partir de los enunciados proporcionados. Finalmente, en el apartado de ***conclusiones*** se espera que los estudiantes sean capaces de comunicar y explicar los hallazgos realizados durante el desarrollo de las preguntas que componen a cada situación.

La actividad 2, por su parte, tiene un elemento que la diferencia profundamente de la primera. Si bien es cierto que durante su desarrollo los estudiantes también deben expresar las funciones usando las diferentes formas de representación e identificar sus elementos, en esta actividad. En las primeras tres situaciones los estudiantes deben ***proponer*** las funciones con las que van a trabajar. Esto es importante, pues al no darles un punto de partida, es necesario que empleen su conocimiento y creatividad para formular relaciones que cumplan con lo solicitado.

Por último, en el punto de la gráfica de la ecuación $x = |y|$ se espera que estén ya en capacidad de usar todo lo aprendí para justificar porqué la gráfica no corresponde con una función, sea usando la definición o el criterio de la prueba de la recta vertical.

Ambas actividades se aplican bajo la metodología IMPROVE y con el objetivo de que un algo porcentaje de los estudiantes del grupo 9°3 alcanzaran el dominio. De la siguiente manera se desarrollan las fases, donde la primera, *Introducir los nuevos conceptos*, consiste en la conceptualización de la función, su significado matemático, sus elementos y sus diferentes representaciones. También, ello se hace en la fase de *práctica*, mediante la resolución de las situaciones planteadas de forma colaborativa en grupos heterogéneos. Durante todo el proceso, se estará verificando el avance y las dificultades que presenten los estudiantes. Es decir, la fase cuarta, *revisar y reducir las dificultades,* se desarrolla constantemente mediante la observación de la interacción al interior de los grupos de trabajo y la intervención del docente cuando se haga necesaria.

Para verificar la fase de *quinta, obtención del dominio*, se aplica la *evaluación formativa*. De allí se clasifican los estudiantes para nuevamente revisar en sesiones correctivas el trabajo realizado en las actividades 1 y 2. Para la sexta fase, *verificación*, se propone la nivelación, en este caso, por limitantes de tiempo para la implementación de la propuesta. Esta prueba de nivelación de carácter formativo únicamente se aplica a los estudiantes que no alcanzaron el dominio en la etapa anterior. Posteriormente, para el desarrollo de la etapa séptima, *enriquecimiento*, se estudian las funciones lineales, ecuaciones de la recta -pendiente-intercepto, punto-pendiente, general- de la recta y sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Los problemas para el desarrollo del razonamiento matemático se plantean para que sean resueltos usando todo lo anterior, incluso los sistemas de ecuaciones lineales, pues usan justamente, se forman a partir de ecuaciones de funciones lineales (y afines). Se espera que los estudiantes, estén en capacidad de identificar que, en el trabajo con las ecuaciones lineales y los sistemas de ecuaciones lineales, se emplean justamente funciones de variable de tipo real de tipo lineal. Así mismo, estos problemas son desafiantes para los estudiantes, puesto que requieren de habilidades relacionadas con la comprensión lectora, modelación de situaciones matemáticas y no matemáticas, resolución de problemas, entre otras que se citan en la tabla 6.

3.2.1.1 Actividad 1: Funciones y sus elementos en GeoGebra

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA LICEO ANTIOQUEÑO **Res.:16193 de noviembre de 2002 y resolución Nº 3314 de septiembre 28 de 2005** Código DANE: 305088002950 NIT: 811.017.837-0	CÓDIGO: FPR. Versión:1.0
	Sistema Institucional de Evaluación de Estudiantes – SIEE	Fecha: 08/12

Área: MATEMÁTICAS	Grado	Noveno	Intervención de aula – Las funciones	Año	2023

Grupo:

Apellidos y nombres: ______________________________

____

____

____

GUÍA DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN

El término función y su notación

El término matemático de función data desde finales del siglo XVII, cuando el cálculo estaba en sus primeras etapas de desarrollo. Este importante concepto es ahora la espina dorsal de cursos avanzados de matemáticas y es indispensable en todos los campos de las ciencias.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), fue el primero que utilizó la palabra *función*, en 1694, para denotar cualquier cantidad relacionada con una curva, como las coordenadas de uno de sus puntos o su pendiente. Cuarenta años más tarde, Leonhard Euler (1707 – 1783) empleó la palabra "*función*" para describir cualquier expresión construida con una variable y varias constantes. Fue él quien introdujo la notación $y = f(x)$.[9]

Antes de definir qué es una función, debemos abordar una noción importante para comprenderlas: la noción de correspondencia se presenta a menudo en la vida diaria. Por ejemplo:

- A cada libro de una biblioteca le corresponde la cantidad de páginas de ese libro.
- A cada ser humano le corresponde una fecha de nacimiento.
- Si la temperatura del aire se registra durante todo un día, a cada instante le corresponde una temperatura.

En las anteriores correspondencias, intervienen dos conjuntos, ***A*** y ***B***. En la primera correspondencia, ***A*** denota el conjunto de libros de una biblioteca, y ***B*** es el conjunto de

[9] Larson, R., Hostetler, R. P., Edwards, B. H., Roa, M. D. C. H., López, E. F., Bernal, M. R., & Palacios, E. (2010). *Cálculo esencial*. Cengage Learning.

enteros positivos (el número de páginas de cada libro). ***A*** cada libro ***'x'*** en ***A*** corresponde un entero positivo ***'y'*** en **B**.[10]

Responde:

1. ¿Cuáles serían los conjuntos ***A*** y ***B*** en la segunda y tercera correspondencias?
2. Discute con tus compañeros de grupo, y cada integrante propone una correspondencia diferente a las ya mencionadas. Anotarlas, y entre todos los integrantes definir cuáles serían los conjuntos ***A*** y ***B***.

Definición de función:

Una relación es una regla de correspondencia, una relación entre dos conjuntos ***A*** y ***B*** es un conjunto de pares ordenados, cada uno de la forma $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, donde ***'x'*** es un elemento de ***A*** y ***'y'*** un elemento de ***B***.

Una función $\boldsymbol{f}$ es una relación en la que a todo elemento ***'x'*** del conjunto ***A*** (*conjunto de partida*) le corresponde un único elemento ***'y'*** del conjunto ***B*** (*conjunto de llegada*)[11]. La variable ***'x'*** se denomina variable independiente, mientras que la variable ***'y'*** se denomina variable dependiente.

Generalmente, las funciones se simbolizan con letras minúsculas $(f, g, h$, entre otras). De esta manera, para notar la función f definida del conjunto de partida ***A*** en el conjunto de llegada ***B***, se escribe:

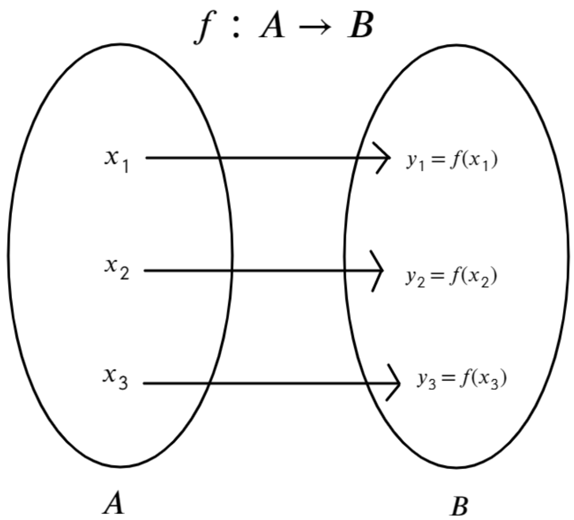
$f: A \rightarrow B$, y se lee: "efe de A en B".

Adicionalmente, si $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$, la expresión $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ se lee como "efe de x igual a y", y se interpreta así:

El elemento $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ está relacionado con el elemento $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$ por medio de la función $\boldsymbol{f}$. La imagen del elemento ***x*** por la función $\boldsymbol{f}$ es el elemento ***y***.

Una función $f: A \rightarrow B$ se puede representar mediante un diagrama sagital:

[10] Swokowski, E. W. (2009). Álgebra y trigonometría con geometría analítica.
[11] Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortíz, L., Celi, R., Armas, R., & Jiménez, J. C. (2013). Los Caminos del Saber. Matemáticas 9, Santillana.



Gráfica 1.

Elementos de una función

En una función $f: A \to B$ se distinguen los siguientes elementos:

- Dominio: es el conjunto de partida de la función, se simboliza como $\boldsymbol{Dom\, f}$.
- Codominio: es el conjunto de llegada de la función, se simboliza como $\boldsymbol{Cod\, f}$.
- Rango: es el conjunto formado por los elementos del codominio, que son la imagen de los elementos del dominio, se simboliza como $\boldsymbol{Ran\, f}$.
- Grafo: es el conjunto formado por todos los pares ordenados $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, tales que $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Dom\, f}$ y $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Ran\, f}$.

Por ejemplo, en la función de la gráfica 1, tenemos que:

- $Dom\, f = A = \{x_1, x_2, x_3\}$
- $Cod\, f = B = \{y_1, y_2, y_3\}$
- $Ran\, f = B = \{y_1, y_2, y_3\}$
- $Grafo\, f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$

Cabe aclarar, que el codominio y el rango no siempre son iguales, como ocurrió en el ejemplo anterior.

Las funciones se pueden representar de diversas formas:

- **Forma verbal:** es la relación entre las variables que se realiza por medio de un enunciado, esto es, una descripción con palabras.
- **Fórmula:** es la expresión algebraica de la función. La expresión $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, donde ***'x'*** es la variable independiente y representa los elementos del $\boldsymbol{Dom\, f}$, y ***'y'*** es la variable dependiente que representa los elementos del $\boldsymbol{Ran\, f}$.
- **Tabla de valores:** es un arreglo con dos filas, en la fila superior se ubican los valores que toma la variable independiente, en la fila inferior se ubican los valores que se obtienen para la variable dependiente.

- **Gráfica:** es un diagrama sagital o un diagrama cartesiano, en el cual se ubican los elementos del dominio en el eje horizontal y los elementos del rango en el eje vertical (Ramírez, Acosta, et. Al., 2013).

Por ejemplo, tomemos la función expresada en forma verbal: “el valor de ***‘y’*** es igual al doble del valor de ***‘x’*** aumentado en 2 unidades”.

La ecuación de la función es $\boldsymbol{y = 2x + 2}$, es decir, la función recibe un valor de ***‘x’***, lo multiplica por 2, y al resultado le suma 2.

Diagrama sagital

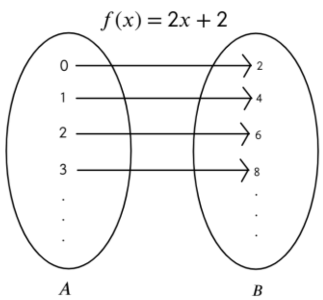
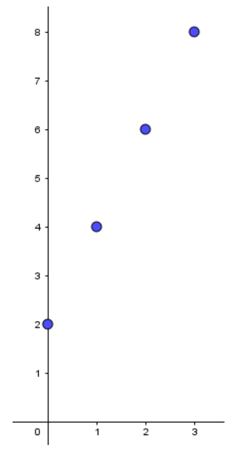


Tabla de valores

x	f(x)
0	2
1	4
2	6
3	8
.	.
.	.
.	.

Gráfica



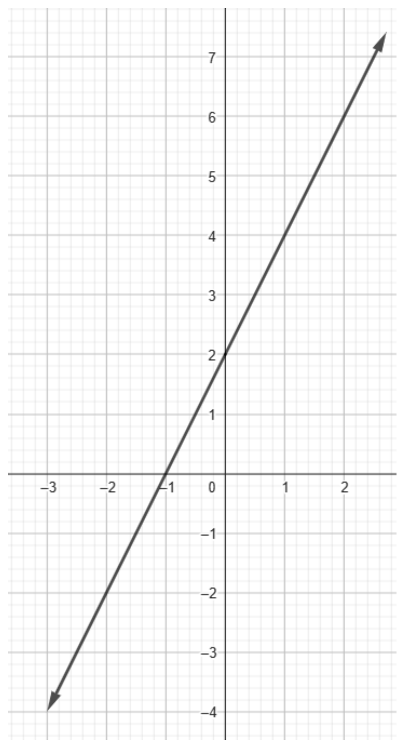
Funciones de variable real

f es una función de variable real si su dominio y rango son el conjunto de los números reales o subconjuntos de éste.

Para este tipo de funciones no es posible indicar todas las parejas ordenadas que la forman, ya que su dominio y rango son conjuntos infinitos, por esta razón, utilizaremos la fórmula $y = f(x)$ para referirnos a ellas.

Su gráfica se realiza en el plano cartesiano, y está formada por todos los puntos (x, y) que satisfacen la fórmula de la ecuación.

La función $y = f(x) = 2x + 2$ es una función de variable real y esta sería su gráfica:



Como puedes ver, los puntos que obtuvimos anteriormente: (0,2), (1,4) y (2,6) hacen parte de la gráfica.

Prueba de la recta vertical

La gráfica de un conjunto de puntos de un plano cartesiano es la gráfica de una función si toda recta vertical corta a la gráfica máximo en un solo punto, caso contrario, diremos que la gráfica no corresponde a una función.

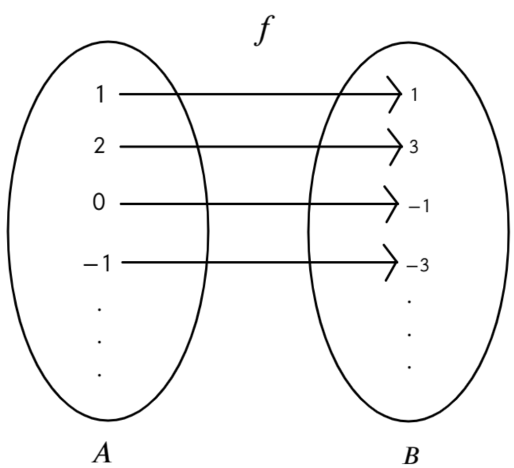
ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 1

En los grupos asignados, realizar el paso a paso propuesto, es importante discutir los resultados y hallazgos producto de la realización de la actividad.

Para iniciar, veamos el tutorial para el uso de la herramienta GeoGebra: ***ver tutorial.***

SITUACIÓN 1

1. A partir del siguiente diagrama sagital, realizar lo propuesto a continuación:



- **1.1.** Construye una tabla de valores para f
- **1.2.** ¿Cuáles son los elementos del conjunto de partida?
- **1.3.** ¿Cuáles son los elementos del conjunto de llegada?
- **1.4.** ¿Cuáles son los pares ordenados que se forman en el diagrama sagital?
- **1.5.** Ubica los puntos (pares ordenados) en GeoGebra.
- **1.6.** Usa la herramienta “Figura a mano alzada” para unir los puntos.
- **1.7.** La relación f recibe un número, lo duplica y esta cantidad la disminuye en una unidad, ¿cuál sería la ecuación que representa el anterior enunciado?
- **1.8.** Ingresar la expresión en GeoGebra, modifica f(x) con la ecuación que obtuviste.
- **1.9.** ¿La gráfica obtenida pasa por los puntos que ubicaron en el numeral 1.4? De no ser así, la ecuación obtenida en 1.6. es incorrecta, plantearla nuevamente hasta que pase por los puntos mencionados.

1.10. Al hacer la prueba de la recta vertical, ¿la gráfica corresponde a la de una función? Explicar.

SITUACIÓN 2

2. Obtener un diagrama sagital a partir de los puntos: (4,3), (3,4), (0,5), (-3,4), (-4,3), (4,-3), (3,-4), (0,-5), (-3,4), (-4,-3)

2.1. ¿Cuál es el conjunto de partida?

2.2. ¿Cuál es el conjunto de llegada?

2.3. Ubicar cada uno de los puntos en GeoGebra.

2.4. Ingresar en Ec(2) la expresión $x^2 + y^2 = 25$, ¿la gráfica pasa por todos los puntos ubicados en el numeral 2.1.? De no ser así, verificar que los puntos estén bien ubicados.

2.5. Realizar la prueba de la recta vertical y determina si la gráfica corresponde o no con una función.

2.6. Comparar los diagramas sagitales del punto 1 y del punto 2, observar la relación entre los elementos del conjunto de partida con los del conjunto de llegada, ¿encuentran alguna diferencia entre ambos diagramas? Explicar cuál o cuáles.

SITUACIÓN 3

3. Esta vez, van a partir del enunciado: “La relación g recibe un número y suma su cuadrado con su triple”.

3.1. Si g recibe los números $-3, -1, 0, 2\ y\ 4$, ¿qué entrega como resultado para cada uno?

3.2. De acuerdo con los resultados del numeral anterior, ¿cuáles serían los pares ordenados? Escribirlos y ubicar los puntos en GeoGebra.

3.3. Dibujar el diagrama sagital de la relación g.

3.4. ¿A cuál de los diagramas sagitales que analizaron en el punto 2.6. se parece el anterior?

3.5. ¿Cuáles son los elementos del conjunto de partida?

3.6. ¿Cuáles son los elementos del conjunto de llegada?

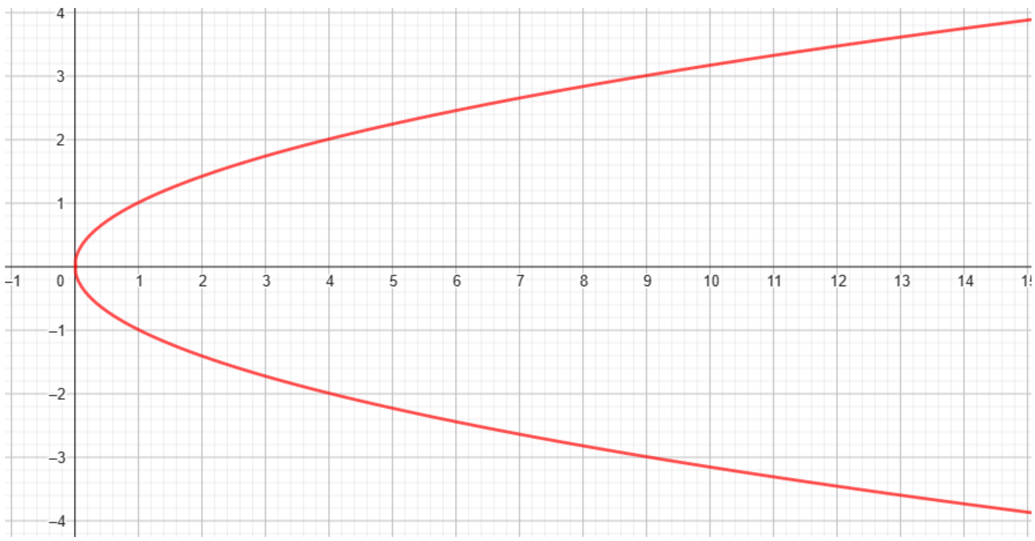
3.7. ¿Cuál es la ecuación correspondiente al enunciado del punto 3?

3.8. Asignar la ecuación encontrada a $f(x)$ en GeoGebra. La gráfica azul debe coincidir con los puntos que se ubicaron anteriormente. De lo contrario, revisar lo realizado en el numeral 3.1., 3.2. y 3.4. Deben coincidir.

3.9. Realizar la prueba de la recta vertical y determine si la gráfica corresponde con la de una función.

SITUACIÓN 4

4. Realizar el paso a paso con base en la siguiente gráfica:



4.1. Determinar cuál de los siguientes puntos pertenecen a la gráfica y cuáles no: (0,0), (1,1), (1,-1), (2,1), (2,-2), (3,3), (3,-2), (4,2), (4,3), (4,-2), (5,2), (6,-3), (7,3), (9,3), (9,-3).

4.2. Dibujar el diagrama sagital de la relación que se representa en la gráfica.

4.3. Identificar el conjunto de partida y el conjunto de llegada.

4.4. Determinar a cuál de los siguientes enunciados corresponde la relación:

- g recibe un número y lo duplica.
- g recibe un número y lo eleva al cuadrado.
- g recibe un número y devuelve sus dos raíces cuadradas.

Explicar su elección y justificar con los resultados obtenidos en los numerales anteriores.

4.5. De acuerdo con su respuesta en el punto anterior, ¿cuál es la ecuación que representa a la relación?

4.6. Realice la prueba de la recta vertical y determine si la gráfica corresponde a una función o no.

CONCLUSIONES

5. Discutir y debatir entre los integrantes del grupo y realizar cuatro conclusiones acerca de las funciones y sus elementos.

Para la realización de la actividad anterior, se dedicó un total de diez horas de clase y se siguieron los lineamientos dados por IMPROVE (Mevarech y Kramarski, 1997). Finalizada la actividad 1, se da paso a la actividad 2, que se realiza en parejas elegidas siguiendo los mismos criterios ya descritos y el desempeño observado en los estudiantes durante la pasada actividad. Se plantea esta actividad como una actividad pre evaluativa, que tiene el propósito de afianzar lo aprendido en la actividad 1 y preparar a los estudiantes para la prueba escrita individual. Las parejas que se conformaron se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 45. Parejas asignadas para la actividad 2

GRUPO 1	GRUPO 6	GRUPO 11	GRUPO 15
E093_11	E093_21	E093_10	E093_14
E093_25	E093_16	E093_12	E093_4
GRUPO 2	**GRUPO 7**	**GRUPO 12**	**GRUPO 16**
E093_23	E093_19	E093_28	E093_29
E093_15	E093_20	E093_24	E093_6
GRUPO 3	**GRUPO 8**	**GRUPO 13**	**GRUPO 17**
E093_1	E093_8	E093_22	E093_3
E093_36	E093_33	E093_17	E093_18
GRUPO 4	**GRUPO 9**	**GRUPO 14**	**GRUPO 18**
E093_5	E093_9	E093_30	E093_13
E093_32	E093_27	E093_7	E093_31
GRUPO 5	**GRUPO 10**		
E093_26	E093_2		
E093_34	E093_35		

3.2.1.2 Actividad 2: Formas de representación de la función

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 2

En los grupos asignados, resolver las situaciones propuestas, llevar a cabo usando las tablas de cuestionamiento cognitivo y, estrategias cognitivas y metacognitivas.

SITUACIÓN 1

Plantear una función expresada en forma verbal, luego, encontrar los siguientes elementos:

a. Diagrama sagital
b. Dominio
c. Codominio
d. Rango
e. Grafo
f. Tabla de valores
g. Ecuación

SITUACIÓN 2

Plantear una función expresada como una fórmula, luego, determinar:

a. Su expresión en forma verbal
b. Tabla de valores
c. Gráfica
d. Diagrama sagital
e. Dominio
f. Codominio
g. Rango
h. Grafo

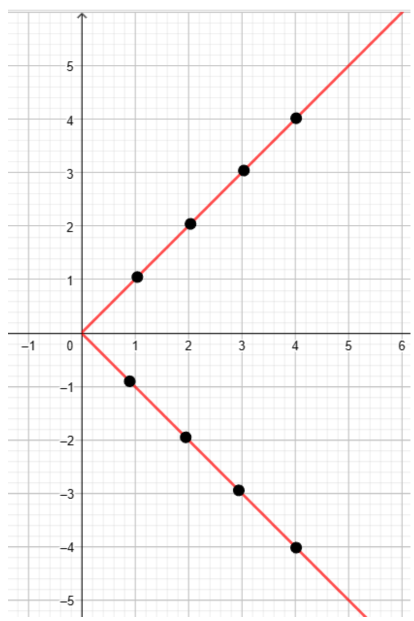
SITUACIÓN 3

Plantear una función expresada como grafo, luego, encontrar los siguientes elementos:

a. Diagrama sagital
b. Dominio
c. Codominio
d. Rango
e. Tabla de valores

SITUACIÓN 4

A partir de la siguiente gráfica, obtenga el diagrama sagital, luego, explique si la gráfica corresponde o no a una función:

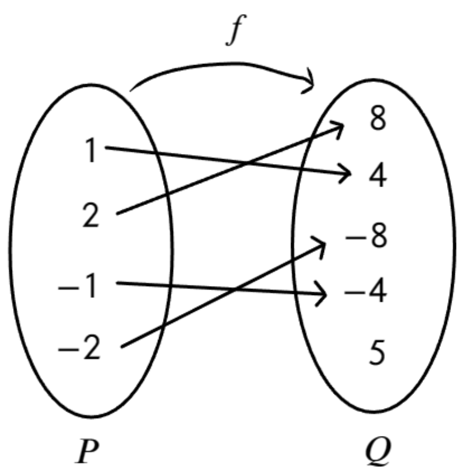


Para desarrollar esta actividad se emplearon dos horas de clase, tiempo que se consideró suficiente para completarla. De aquí, los estudiantes presentaron su primera prueba evaluativa individual, de la cual, se obtuvo una primera clasificación de estudiantes que alcanzan el dominio y estudiantes que no, para continuar con el desarrollo de la propuesta.

3.2.1.3 Evaluación

EVALUACIÓN

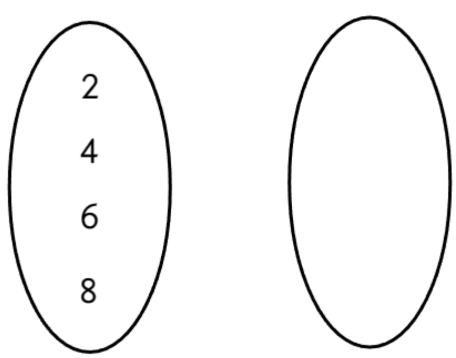
1. Con base en el siguiente diagrama, establecer si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En cada caso, justificar su respuesta.



a. La relación ‘f’ toma a los elementos del conjunto ‘P’ y los eleva al cuadrado. ___
b. Si el elemento ‘5’ del conjunto ‘Q’ fuese imagen del elemento ‘2’ del conjunto ‘P’, la relación sí sería una función. ___
c. El rango y el codominio de ‘f’ tienen la misma cantidad de elementos. ___
d. La relación no es una función ya que hay un elemento en ‘Q’ que no es imagen de ningún elemento de ‘P’. ___

2. Tome el siguiente enunciado para responder realizar lo que se pide a continuación: “la relación ‘h’ toma a los elementos del conjunto ‘C’, los parte a la mitad y al resultado le aumenta una unidad”.

a. Ecuación
b. Completar el diagrama sagital:



c. Dominio, codominio, rango y grafo.

3. A partir del siguiente grafo: $grafo\ h = \{(1,0), (2,3), (3,8), (0,-1)\}$, realzar:

a. Diagrama sagital y tabla de valores

b. Dominio, codominio, rango

c. Gráfica

3.2.1.4 Nivelación

NIVELACIÓN

1. La ecuación $y = \frac{x}{3} - 1$ representa a la función f.

   a. Expresar a f en forma verbal.

   b. Si el $Dom\ f$ tiene como elementos a $-3, -6, -9\ y - 12$. Encontrar el $Ran\ f$.

   c. Graficar la función.

2. El siguiente grafo representa a la relación $g.\ grafo\ g = \{(4,2), (9,3), (16,4), (4, -2)\}$

Responder Verdadero (V) o Falso (F) a cada afirmación. Justificar las respuestas.

   a. g es una función. ____
   b. 4 es imagen de 2 y -2. ____
   c. Hay un elemento que tiene dos imágenes. ____
   d. Hay dos elementos que hacen que g no sea una función. ___

3. Cada uno propone:

   a. Una función donde el codominio y el rango sean iguales.

   b. Una función donde el codominio y el rango sean diferentes.

   c. Una relación que no sea función, que incumpla con las dos condiciones sobre el dominio.

3.2.1.5 Actividades de enriquecimiento

ACTIVIDADES DE ENRIQUECIMIENTO

SITUACIÓN 1: Problemas con ecuaciones de la recta

Para cada problema se solicita realizar:

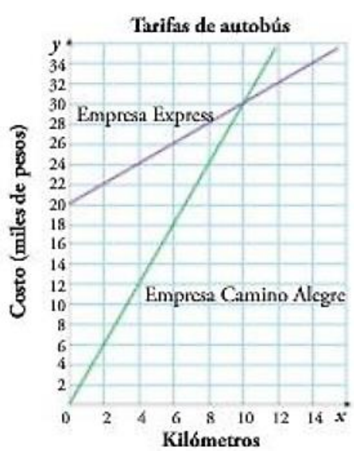
- Determine cuáles son las variables del problema.
- Si es posible, realice una representación gráfica de la situación.
- Determine la solución a la pregunta realizada y responda lo que solicita el problema.

Problema 1

Una compañía de telecomunicaciones paga mensualmente a cada empleado de la sección de ventas $350.000 fijos más $40.000 por paquete de servicios vendido. Escribir la ecuación que representa la situación anterior y determinar el sueldo de una persona que vende 20 paquetes de servicios. ¿Cuántos paquetes vendió una persona que ganó $1'750.000 en un mes?[12]

Problema 2

Dos empresas de autobuses ofrecen diferentes tarifas. La siguiente gráfica muestra el costo de renta de un autobús en la empresa Bello Express y uno de la empresa Camino Alegre Bello.



[12] Los problemas fueron tomados y adaptados de MATEMÁTICAS 9°: LOS CAMINOS DEL SABER, Santillana, realizada para efectos didácticos por Juan D. López, estudiante MAESCEN 2023.

Responde:

a. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el costo de renta de un autobús para cada empresa?
b. Si el recorrido total de una salida ambiental es de 120km, ¿con cuál de las dos empresas conviene rentar un autobús?

Problema 3

El precio de 3lb de naranja es $1.800 y el precio de 5lb es $2.500. Si $'y'$ es el precio de la naranja y $'x'$ es el peso, determine la ecuación que representa el precio de la naranja según su peso.

Problema 4

Una empresa compra cierta maquinaria por 150.000 USD. Se espera que la vida útil de dicha maquinaria sea de 12 años, con un valor de desecho de 0 USD. ¿Cuánto se deprecia la máquina cada año? ¿Cuál es el valor de la máquina al cabo de 6 años?

SITUACIÓN 2: Problemas con sistemas de ecuaciones lineales.

Para cada problema se solicita:

- Identificar las incógnitas del problema.
- Plantear un sistema de ecuaciones lineales.
- Solucionar el sistema y responder.

Problema 1[13]

Un examen de admisión a cierta universidad consta de 30 preguntas. Cada respuesta correcta otorga 5 puntos, mientras que cada respuesta incorrecta o pregunta sin responder, resta 2 puntos en la calificación. Si un aspirante obtuvo un puntaje total de 94 puntos, determine el número de respuestas correctas y el número de respuestas incorrectas o sin responder.

Problema 2

Para entrar a un museo, una persona paga $33.000 por las entradas de 3 adultos y 2 niños: Otra persona paga $57.000 por la entrada de 5 adultos y 4 niños. Determine cuánto cuesta una entrada para adulto y cuánto una entrada para niño.

[13] Los problemas fueron tomados y adaptados de VAMOS A APRENDER MATEMÁTICAS 9°, MEN, realizada para efectos didácticos por Juan D. López, estudiante MAESCENN 2023.

Problema 3

En cierta granja se crían pollos y vacas. Se sabe que en total hay 60 cabezas de animales y que el total de patas es de 190. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?

Problema 4

En un taller hay en total 56 vehículos entre automóviles y motocicletas. Si la diferencia entre el número de ruedas es 140. ¿Cuántos automóviles y motocicletas hay en el taller?

Problema 5

Una persona va al mercado, compra 6 libras de café y una libra de azúcar por $20.000. Vuelve después y compra 1 libra de café y 2 de azúcar por $12.500. Determine cuánto cuesta una libra de café y cuánto cuesta una libra de azúcar

.

3.2.2. Análisis de la información recolectada a partir de la aplicación de la propuesta de intervención.

La propuesta de intervención de aula se aplicó a partir del 19 de abril de 2023 a los estudiantes del grupo 9°3 de la IE Liceo Antioqueño, Sede Central, jornada mañana, los cuales participaron en la fase de diagnóstico de saberes previos con los grupos 9°1, 9°2 y 9°4. Para la presentación de los resultados, se debe tener en cuenta la caracterización de los estudiantes del grupo 9°3, realizada en la tabla 2 de este documento.

Los resultados del grupo 9°3 serán analizados y presentados mediante el registro fotográfico de lo que han realizado los estudiantes. Por su parte, los resultados obtenidos por los demás grupos solamente se mostrarán mediante gráficas en las que se puedan visualizar los niveles de desempeño obtenidos. También es importante recalcar, que la actividad 1 no entró en la escala de valoración institucional, pues su propósito principal era la de propiciar en los estudiantes la apropiación del concepto de función, sus elementos y sus formas de representación, mediante el aprendizaje colaborativo, reflexivo y autorregulado. Por lo tanto, el producto de esta actividad se analiza mediante el registro fotográfico de lo realizado por los estudiantes del grupo 9°3 y de los grupos de control 9°1, 9°2 y 9°4.

De manera similar al análisis realizado para el diagnóstico de saberes previos, inicialmente se analizan las respuestas de los grupos de trabajo a cada pregunta planteada, exponiendo algunas de ellas. Sin embargo, para la valoración de todas las actividades grupales e individuales implementadas en la propuesta, se diseña una rúbrica con base en los estándares y DBA de matemáticas que se presentaron en la tabla 43, y también, tomando en cuenta la taxonomía de Bloom revisada (Anderson y Krathwohl, 2001). Dicha rúbrica se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 46. Rúbrica de evaluación para la propuesta de intervención en el aula

ESTÁNDAR	DBA	NIVELES DE DESEMPEÑO			
		Bajo (1.0 – 2.9)	**Básico (3.0 – 3.9)**	**Alto (4.0 – 4.5)**	**Superior (4.6 – 5.0)**
Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).	Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.	Se le dificulta usar formas simbólicas en diversas situaciones problema que involucran funciones.	Usa formas simbólicas en diversas situaciones problema que involucran funciones.	Propone formas simbólicas y las usa en diversas situaciones problema que involucran funciones.	Valida los resultados obtenidos a partir del uso de formas simbólicas en diversas situaciones problema que involucran funciones.
		Se le dificulta encontrar valores desconocidos en ecuaciones algebraicas de funciones.	Encuentra valores desconocidos en ecuaciones algebraicas de funciones.	Compara valores obtenidos en ecuaciones algebraicas de funciones con la información presentada en el problema para establecer su validez.	Formula cuestionamientos acerca de los valores obtenidos en ecuaciones algebraicas de funciones cuando estos no concuerdan con la solución esperada.
		Se le dificulta reconocer y representar relaciones numéricas mediante expresiones algebraicas y encuentra el conjunto de variación de una variable en función del contexto.	Reconoce y representa relaciones numéricas mediante expresiones algebraicas y encuentra el conjunto de variación de una variable en función del contexto.	Explica relaciones numéricas mediante expresiones algebraicas y encuentra el conjunto de variación de una variable en función de un contexto.	Deduce relaciones numéricas mediante expresiones algebraicas y encuentra el conjunto de variación de una variable en función de un contexto.
	Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).	Se le dificulta relacionar características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.	Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.	Discute las características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.	Infiere las características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.

Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.	Utiliza expresiones numéricas, algebraicas o gráficas para hacer descripciones de situaciones concretas y tomar decisiones con base en su interpretación.	Se le dificulta operar con formas simbólicas que representan cantidades en funciones matemáticas.	Opera con formas simbólicas que representan cantidades en funciones matemáticas.	Propone y explica formas simbólicas que representan cantidades en funciones matemáticas.	Valida formas simbólicas que representan cantidades en funciones matemáticas.
		Se le dificulta reconocer que las letras pueden representar números y cantidades, y que se pueden operar con y sobre ellas.	Reconoce que las letras pueden representar números y cantidades, y que se pueden operar con y sobre ellas.	Calcula el valor de letras que representan números y cantidades, y opera con y sobre ellas.	Idea estrategias de estimación para aproximar el valor de letras que representan números y cantidades.
		Se le dificulta identificar las características de expresiones numéricas, algebraicas o gráficas relacionadas con funciones.	Identifica las características de expresiones numéricas, algebraicas o gráfica gráficas relacionadas con funciones.	Interpreta expresiones numéricas, algebraicas o gráficas relacionadas con funciones y toma decisiones con base en su interpretación.	Generaliza a partir de expresiones numéricas, algebraicas o gráficas relacionadas con funciones.
	Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones.	Se le dificulta reconocer el uso del signo igual como relación de equivalencia de expresiones algebraicas en los números reales.	Reconoce el uso del signo igual como relación de equivalencia de expresiones algebraicas en los números reales.	Argumenta y explica el porqué del uso del signo igual como relación de equivalencia de expresiones algebraicas en los números reales.	Valida resultados obtenidos a partir del uso del signo igual como relación de equivalencia de expresiones algebraicas en los números reales comparando las expresiones equivalentes.
Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.	Utiliza escalas apropiadas para representar e interpretar planos, mapas y maquetas con diferentes unidades.	Se le dificulta seleccionar la adecuada para la elaboración de planos de acuerdo al formato o espacio disponible para dibujar.	Identifica los tipos de escalas y selecciona la adecuada para la elaboración de planos de acuerdo al formato o espacio disponible para dibujar.	Explica la elección de una determinada escala y por qué es adecuada para la elaboración de planos de acuerdo al formato o espacio disponible para dibujar.	Evalúa la elección de una escala para la elaboración de planos de acuerdo al formato o especio disponible para dibujar y la modifica cuando no es adecuada.
	Reconoce el plano cartesiano como un sistema bidimensional que permite ubicar puntos como sistema de referencia gráfico o geográfico.	Se le dificulta localizar, describir y representar la posición de un objeto en un plano cartesiano.	Localiza, describe y representa la posición de un objeto en un plano cartesiano.	Propone conclusiones a partir de la localización y posición de un objeto en un plano cartesiano.	Formula hipótesis con base en la localización y posición de un objeto en un plano cartesiano.

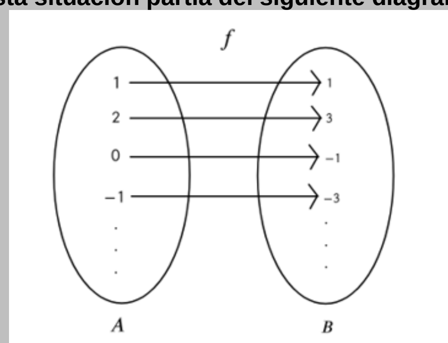
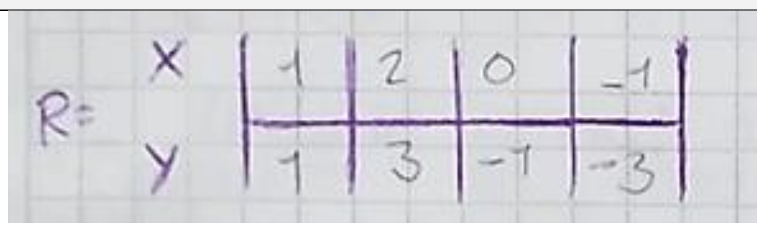
Inicialmente, los estudiantes desarrollaron la actividad 1 en grupos heterogéneos, como ya se explicó suficientemente, y aunque a dicha actividad no se le asignó una valoración de acuerdo con la tabla 5, es importante analizar las respuestas otorgadas por los estudiantes del grupo 9°3 y de los demás grupos, a fin de comparar los niveles de conocimiento a los que llegan unos y otros.

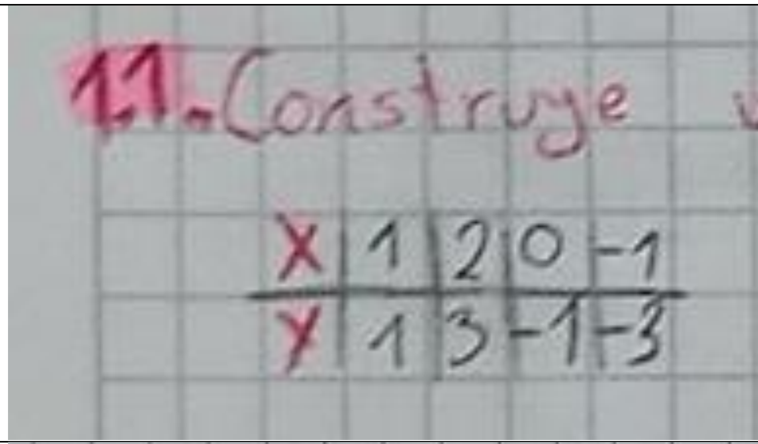
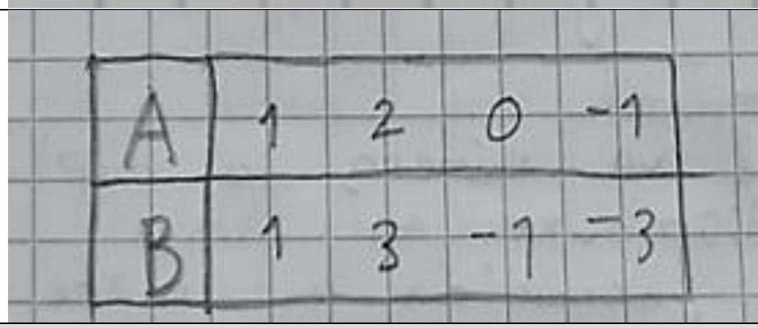
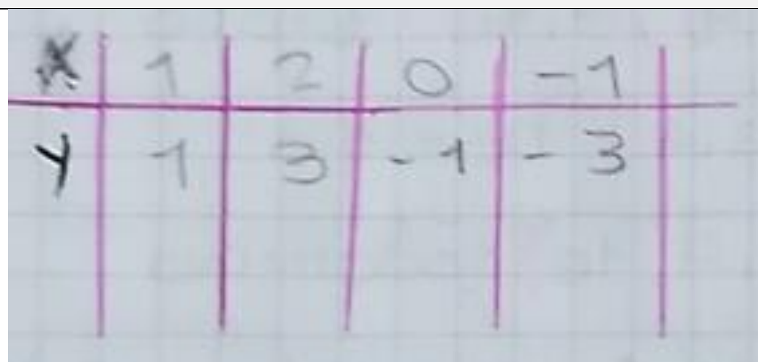
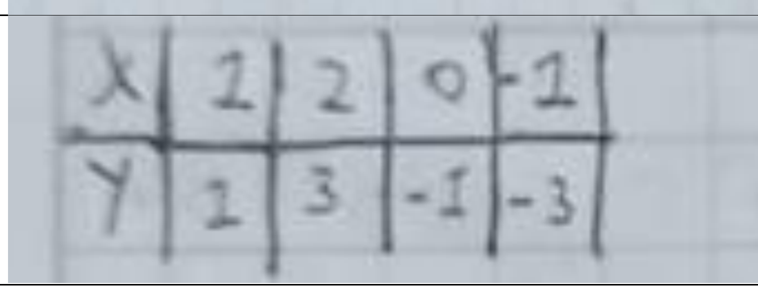
3.2.2.1 Análisis: respuestas a las preguntas de la actividad 1

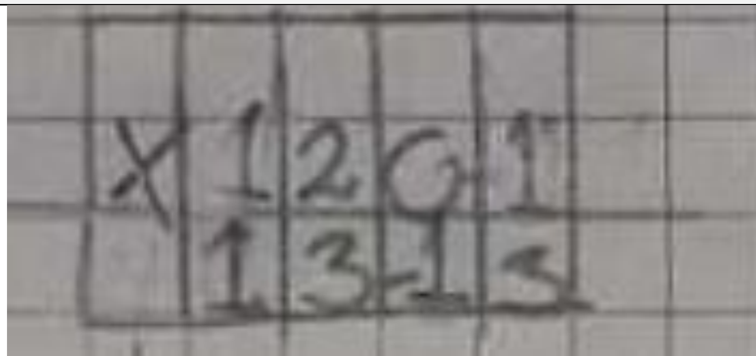
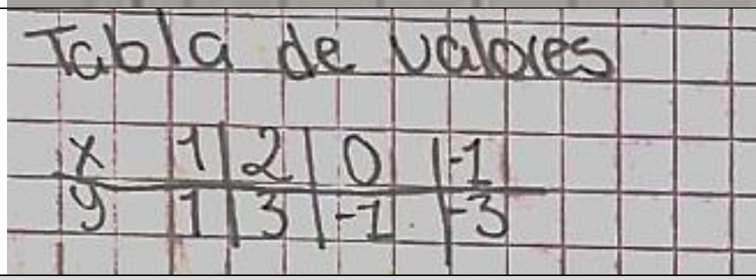
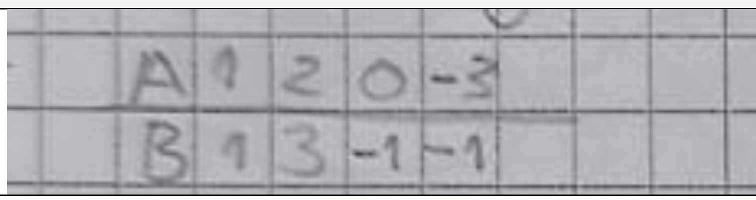
A continuación, se analizan algunas de las respuestas dadas por los estudiantes.

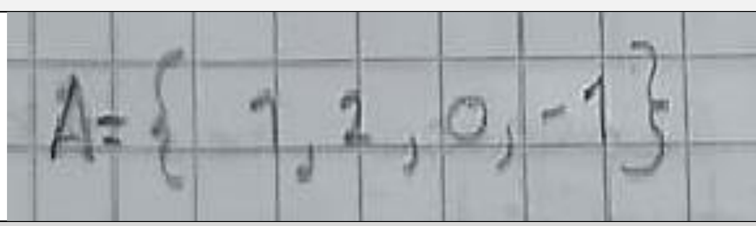
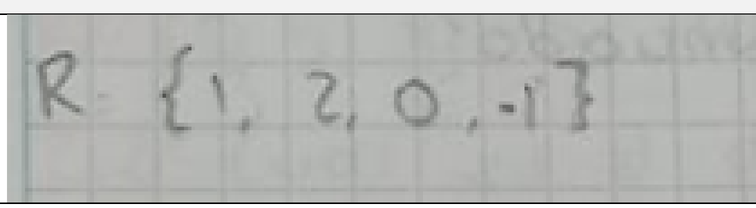
3.2.2.1.2 Análisis: situación 1

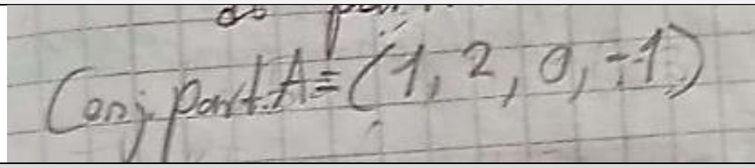
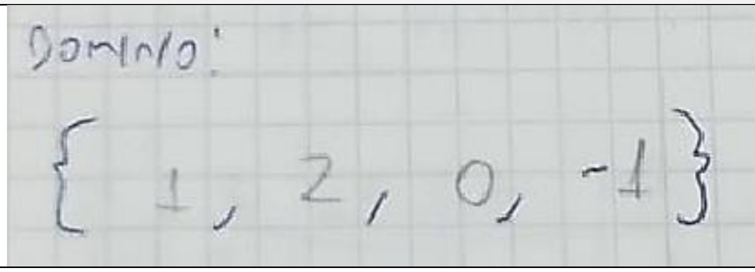
Tabla 47. Respuestas de los estudiantes a la situación 1, actividad 1

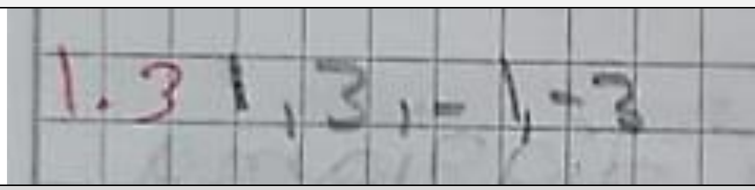
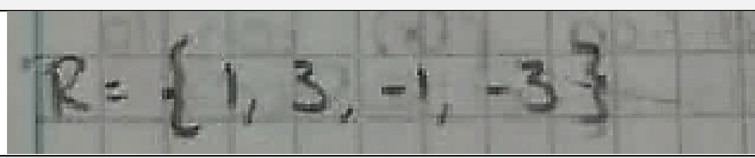
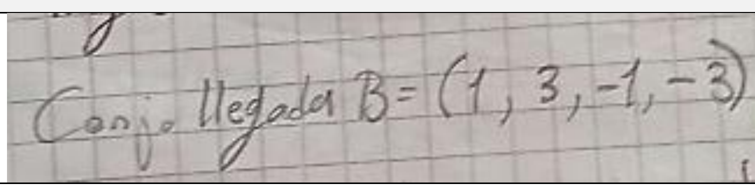
<table>
<tr><td colspan="3">SITUACIÓN 1
Esta situación partía del siguiente diagrama:

</td></tr>
<tr><td colspan="3">1.1 Construye una tabla de valores para f</td></tr>
<tr><td colspan="2">GRUPO 9°1</td><td rowspan="2">Observaciones</td></tr>
<tr><td>Grupo de trabajo</td><td>Respuesta</td></tr>
<tr><td>Grupo 1</td><td>
R= x | 1 | 2 | 0 | -1
y | 1 | 3 | -1 | -3</td><td>En este primer punto, los estudiantes de todos los grupos obtienen de manera correcta la tabla de valores para la función que se representa en el grafo, es importante</td></tr>
</table>

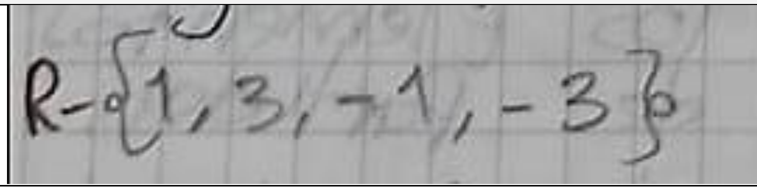
<table>
<tr><td>Grupo 2</td><td>
</td><td rowspan="6">notar que muchos de ellos asocian la variable $'x'$ al dominio y la variable $'y'$ al codominio.</td></tr>
<tr><td>Grupo 3</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">GRUPO 9°2</td></tr>
<tr><td>Grupo de trabajo</td><td>Respuesta</td></tr>
<tr><td>Grupo 1</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>
</td></tr>
</table>

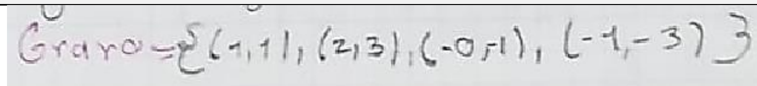
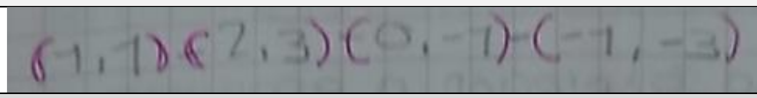
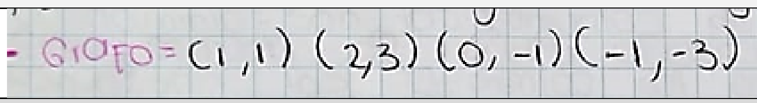
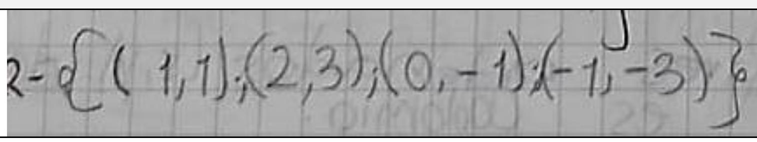
GRUPO 9°3		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 1		
Grupo 3		
GRUPO 9°4		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 4		

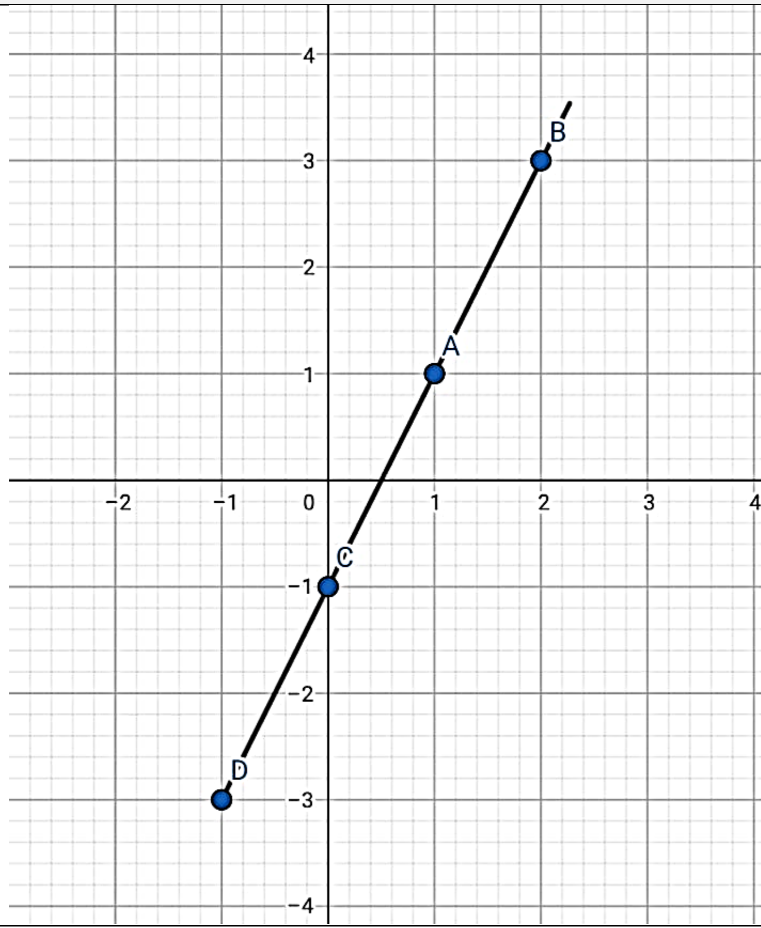
1.2 ¿Cuáles son los elementos del conjunto de partida?		
GRUPO 9°1		**Observaciones**
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 3		En esta pregunta tampoco se evidencian dificultades por parte de los estudiantes, como se puede ver en las evidencias aportadas, las respuestas que entregan son correctas, *incluso*, se puede ver que algunos estudiantes asocian correctamente el conjunto de partida con el dominio.
GRUPO 9°2		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 3		

GRUPO 9°3		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 4		
GRUPO 9°4		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 6		

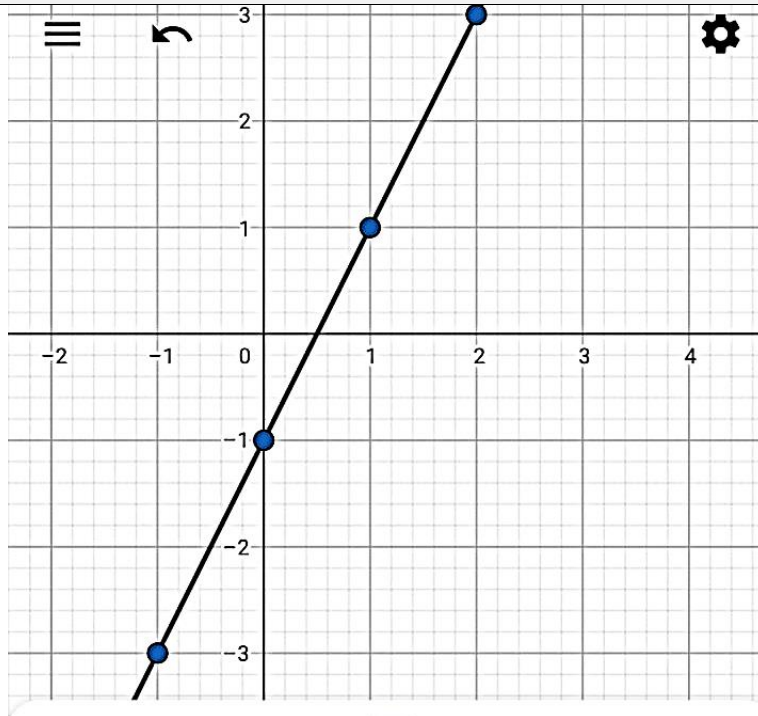
1.3 ¿Cuáles son los elementos del conjunto de llegada?		
GRUPO 9°1		**Observaciones**
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 5		Esta pregunta también ha sido respondida sin dificultades por los grupos de trabajo, es importante mencionar que algunos no usan la escritura correcta para expresar un conjunto, lo que es una dificultad sin embargo, identifican correctamente el conjunto de llegada de la función.
GRUPO 9°2		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 3		
GRUPO 9°3		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 4		

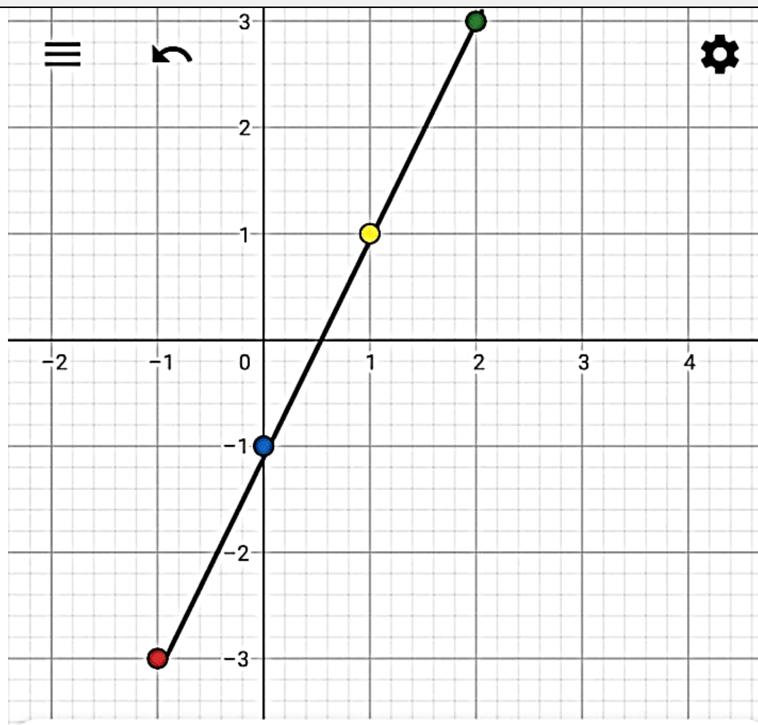
GRUPO 9°4		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 5		

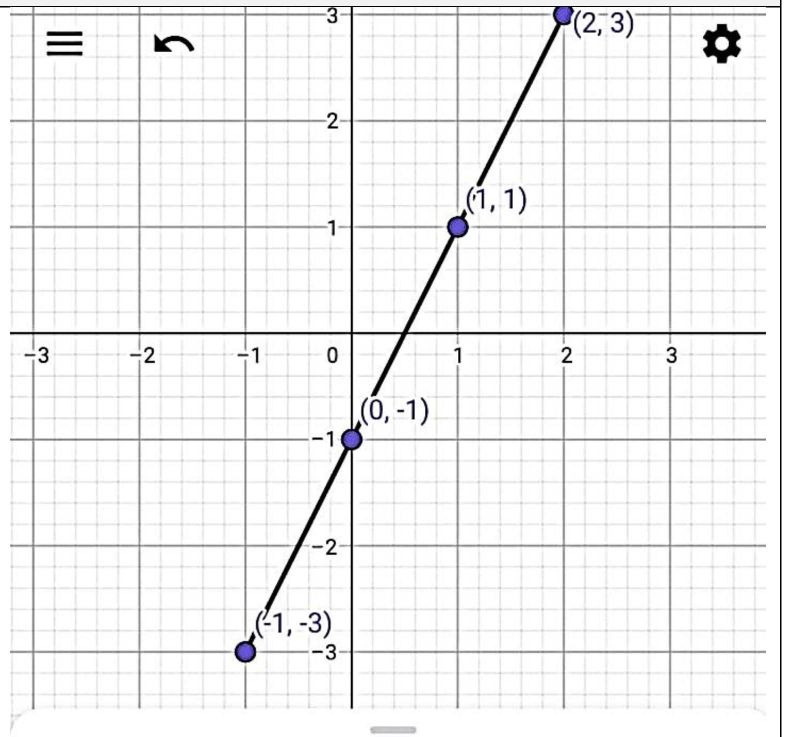
1.4 ¿cuáles son los pares ordenados que se forman en el diagrama sagital?		
GRUPO 9°1		**Observaciones**
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 7		En general ningún grupo tuvo dificultades para obtener la respuesta a este punto, los estudiantes pasan del diagrama sagital al grafo de la función correctamente.
GRUPO 9°2		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 1		
GRUPO 9°3		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 9		
GRUPO 9°4		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 5		

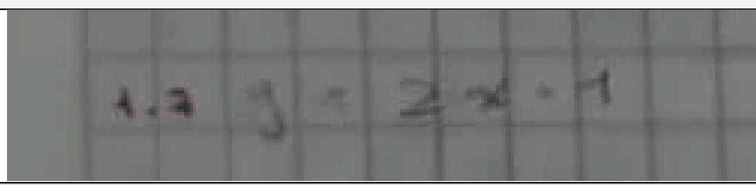
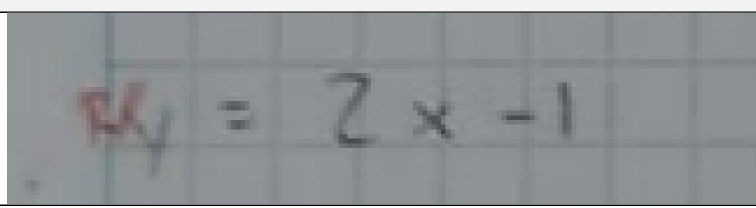
<table>
<tr><th colspan="3">1.5 Ubica los pares ordenados en GeoGebra
1.6 Usa la herramienta “figura a mano alzada” para unir los puntos</th></tr>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°1</th><th rowspan="2">Observaciones</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Grupo 3</td><td>
</td><td>Para ubicar los puntos en GeoGebra la mayoría de los estudiantes presentó dificultades al iniciar. GeoGebra interpreta los puntos en el plano al ser ingresados en forma de coordenadas (x, y), muchos estudiantes no parecen completamente familiarizados con esta notación, de allí provinieron la mayoría de los errores, una vez aclarada la cuestión, algunos grupos incluso se atrevieron a modificar un poco los gráficos.

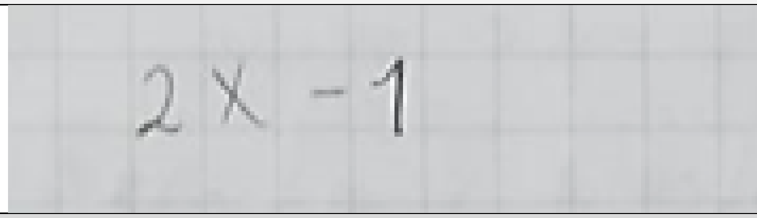
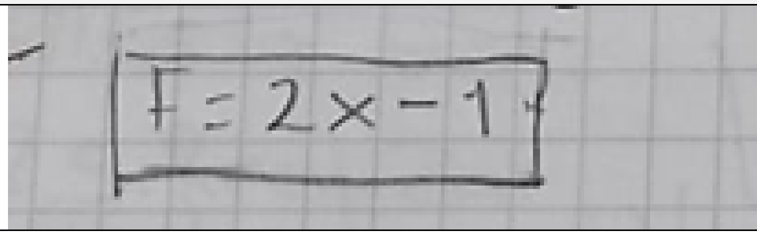
En el punto 1.6, algunos grupos utilizaron herramientas alternativas a figura a mano alzada, algunas de ellas como ajuste lineal, segmento, recta, semirrecta, la razón, es que a muchos se les dificultó unir los puntos usando la herramienta de mano alzada.</td></tr>
</table>

GRUPO 9°2	
Grupo de trabajo	**Respuesta**
Grupo 6	

GRUPO 9°3	
Grupo de trabajo	**Respuesta**
Grupo 1	

GRUPO 9°4		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 5		

1.7 La relación f recibe un número, lo duplica y esta cantidad la disminuye en una unidad, ¿cuál sería la ecuación que representa el anterior enunciado?		
GRUPO 9°1		**Observaciones**
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 6		La mayoría de los grupos plantean correctamente la ecuación relacionada al enunciado de esta pregunta, sin embargo, algunos grupos plantearon la ecuación como $y = 2 \cdot x - 1$, como lo hizo el grupo 2 de 9°1, esto, si bien es correcto, supuso un problema al momento de ingresar la ecuación en GeoGebra, pues la aplicación acepta la escritura de términos algebraicos con la parte numérica al inicio y luego la parte
GRUPO 9°2		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 2		

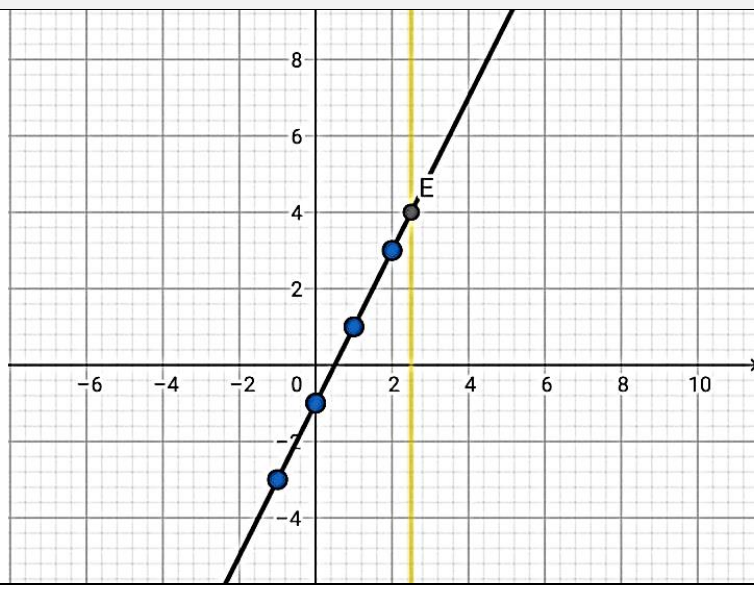
GRUPO 9°3		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	literal, es decir, $2x$ en este caso.
Grupo 7		
GRUPO 9°4		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 5		

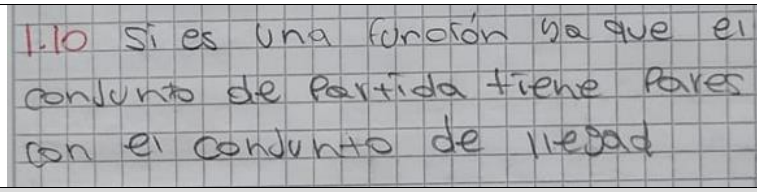
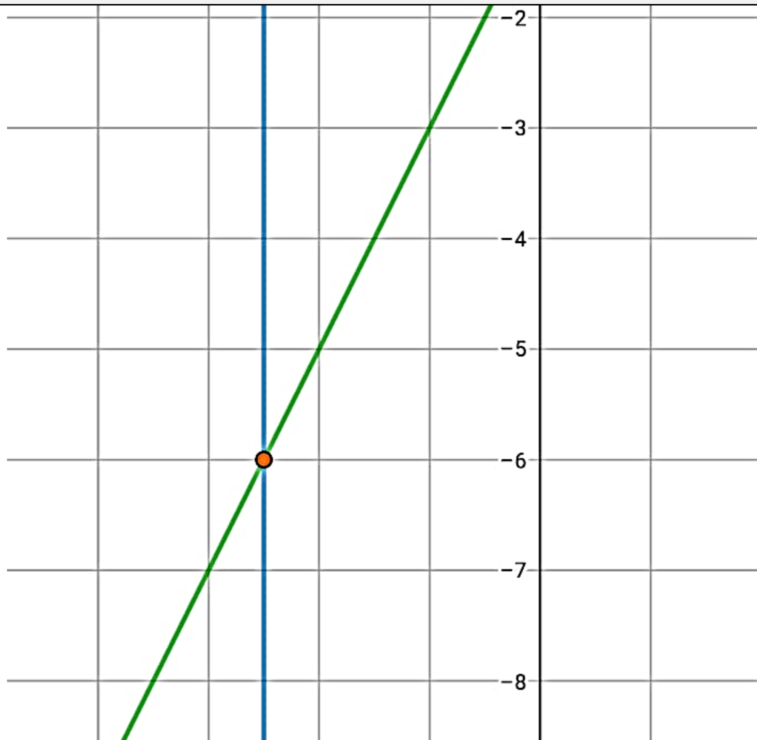
1.8 Ingresar la ecuación en GeoGebra, modifica f(x) con la ecuación que obtuviste

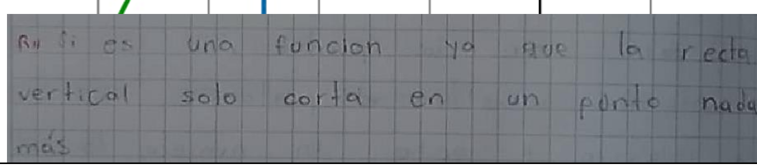
1.9 ¿La gráfica obtenida pasa por los puntos que ubicaron en el numeral 1.5? De no ser así, la ecuación obtenida en 1.7 es incorrecta, plantearla nuevamente hasta que pase por los puntos mencionados.

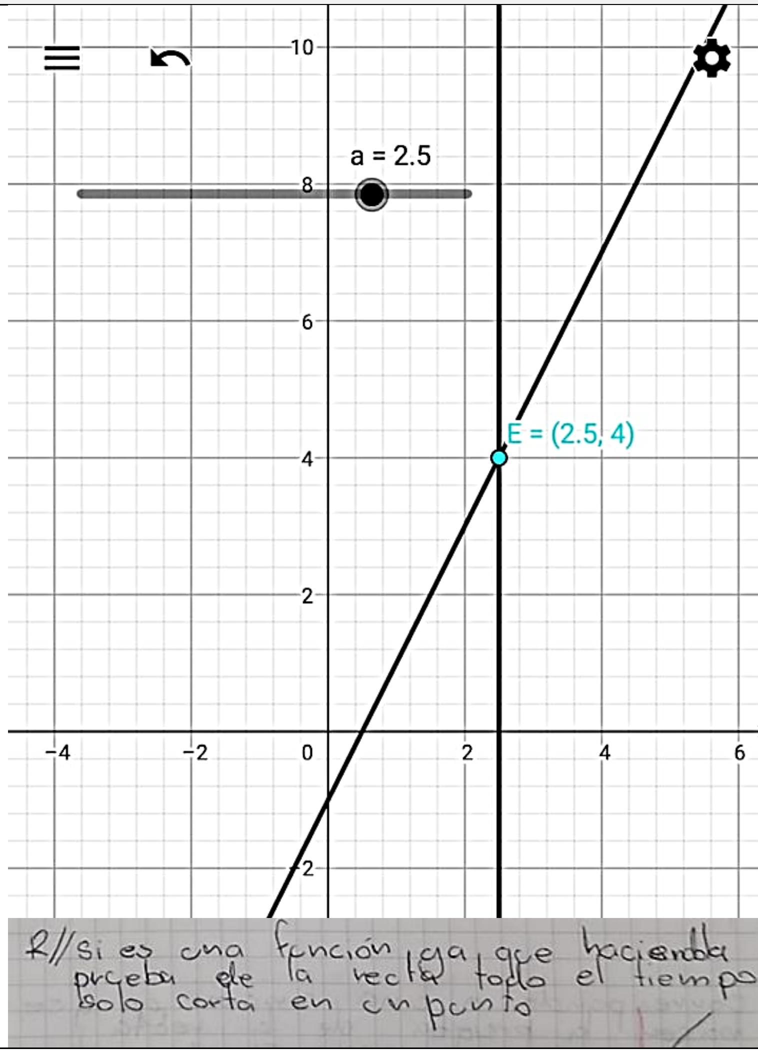
Observaciones: para estas dos preguntas, no se presentan ilustraciones debido a que el resultado no difiere mucho de lo que se obtuvo en el punto 1.6. Algunos grupos no obtuvieron la respuesta correcta al inicio, sin embargo, mediante la retroalimentación y la discusión grupal corrigieron el punto anterior y llegaron a la expresión correcta.

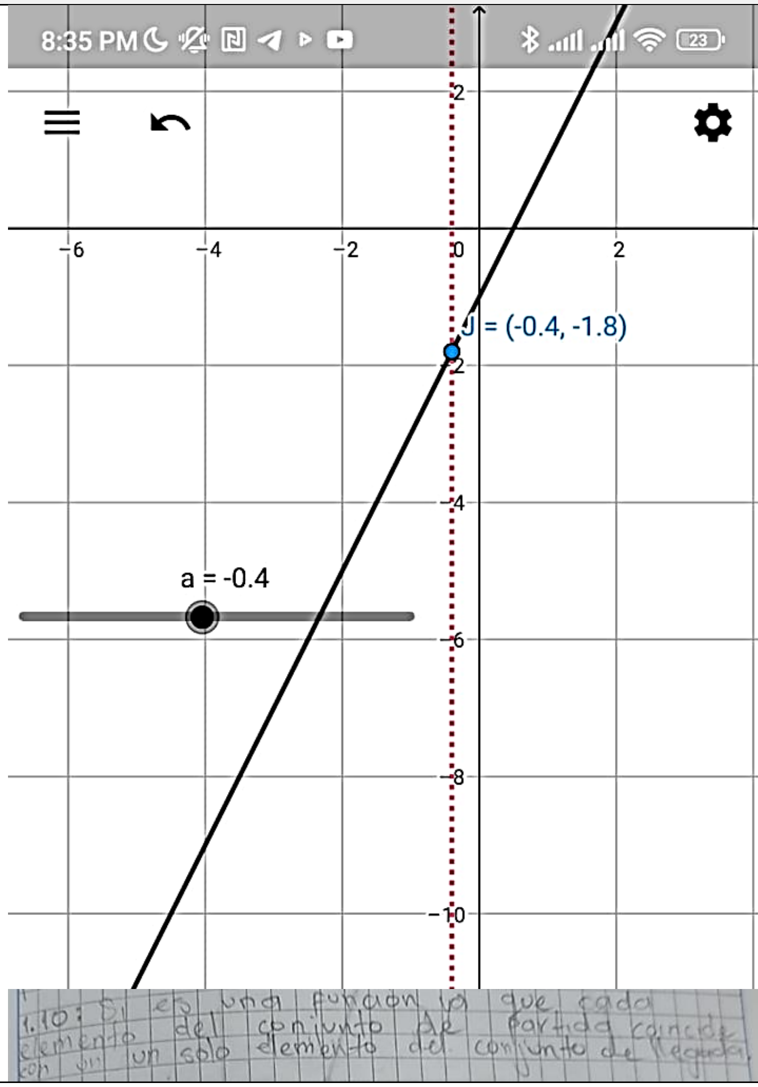
1.10 Al hacer la prueba de la recta vertical, ¿la gráfica corresponde con la de una función? Explique

GRUPO 9°1		**Observaciones**
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 5		Este grupo, si bien llega a la conclusión correcta, en su explicación no hacen uso del criterio de la recta vertical, en contraste, apelan a la definición de función, sin embargo, la sustentación no es precisa pues no se refiere a las restricciones que existen sobre los elementos del dominio en su relación con los elementos del codominio.

<table>
<tr><td></td><td>
1.10 Si es una función ya que el conjunto de partida tiene pares con el conjunto de llegad</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">GRUPO 9°2</td><td></td></tr>
<tr><td>Grupo de trabajo</td><td>Respuesta</td><td></td></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>

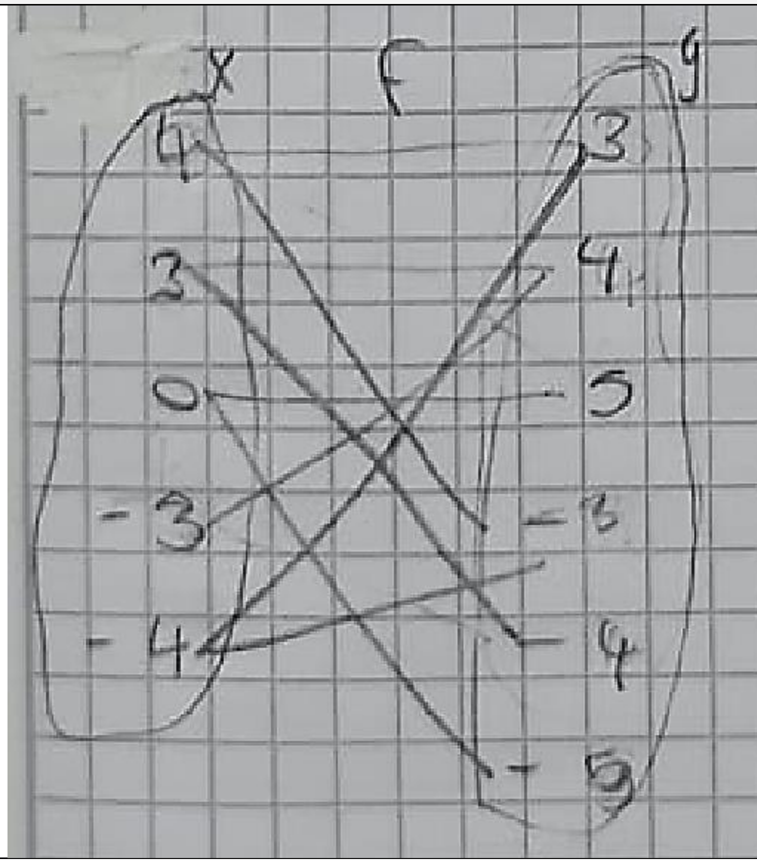

R// Si es una funcion ya que la recta vertical solo corta en un punto nada más</td><td>Los estudiantes de este grupo concluyen de manera correcta a partir del criterio de la recta vertical, haciendo referencia al punto rojo que obtienen en la gráfica.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

GRUPO 9°3		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 5		En la respuesta que entrega este grupo, se puede deducir que hicieron el recorrido de la recta vertical a través de la gráfica de la función para deducir que únicamente tenía un punto de corte, sin importar en qué parte de ella se encuentre.

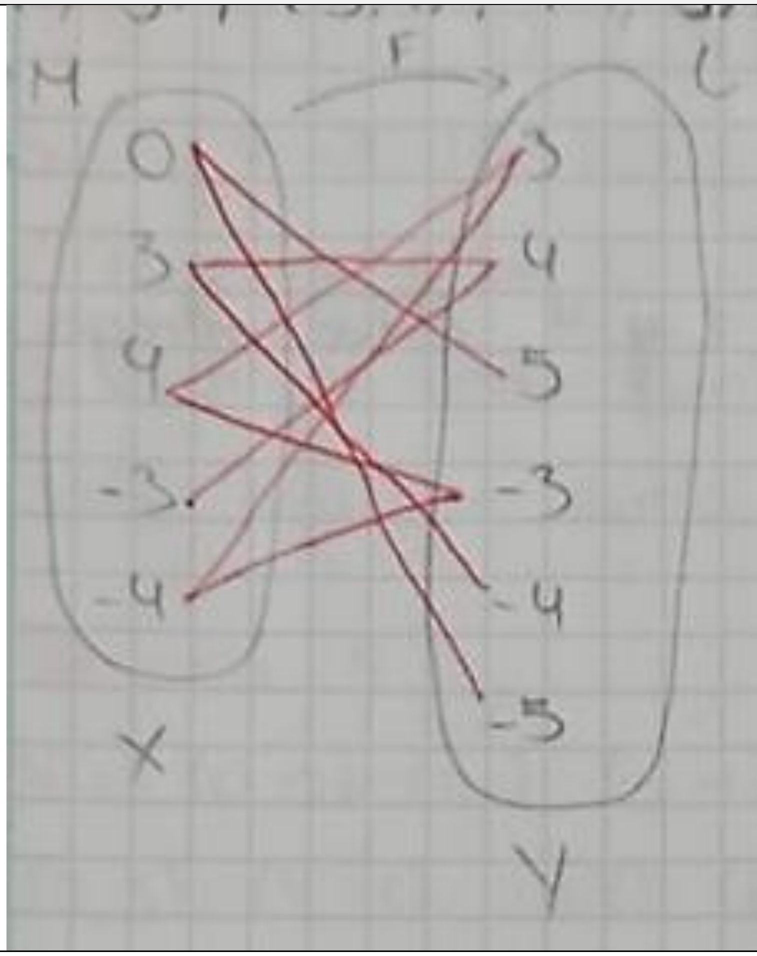
<table>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°4</th><th></th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th><th></th></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>
</td><td>Este grupo, al igual que el grupo 5 de 9°1, usa la definición de función para responder la pregunta y pasa por alto el criterio de la recta vertical. Sin embargo, se resalta el hecho de que lo hacen de manera más precisa, posiblemente haciendo la observación a partir del diagrama sagital que se dio al inicio de la situación.</td></tr>
</table>

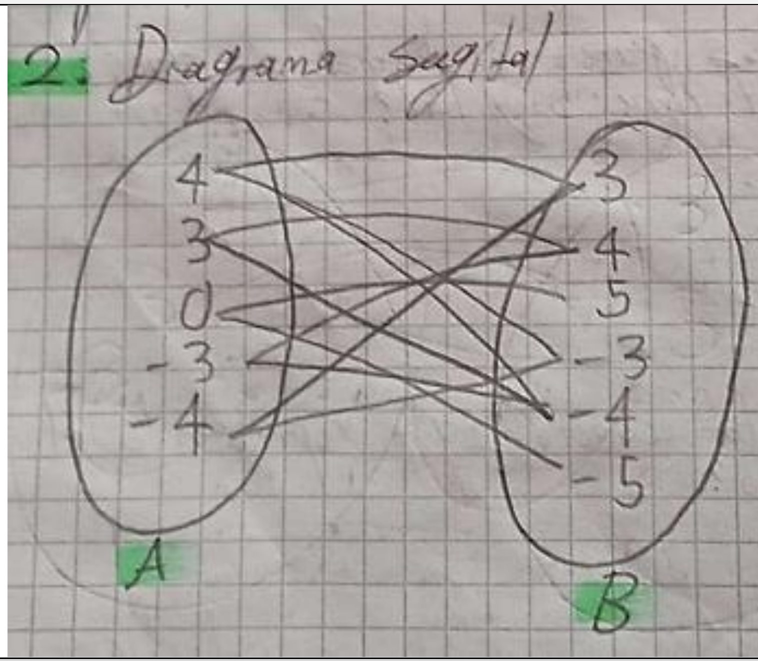
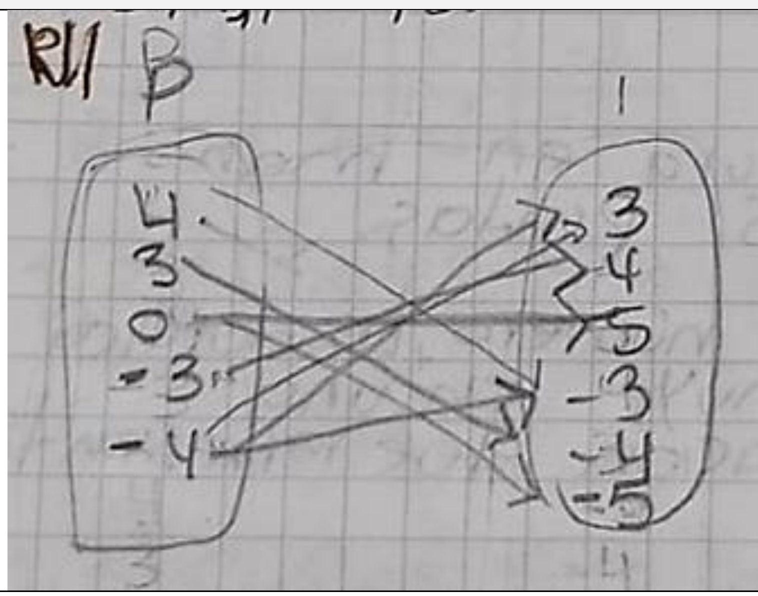
3.2.2.1.2 Análisis: situación 2

Tabla 48. Respuestas de los estudiantes a la situación 2, actividad 1

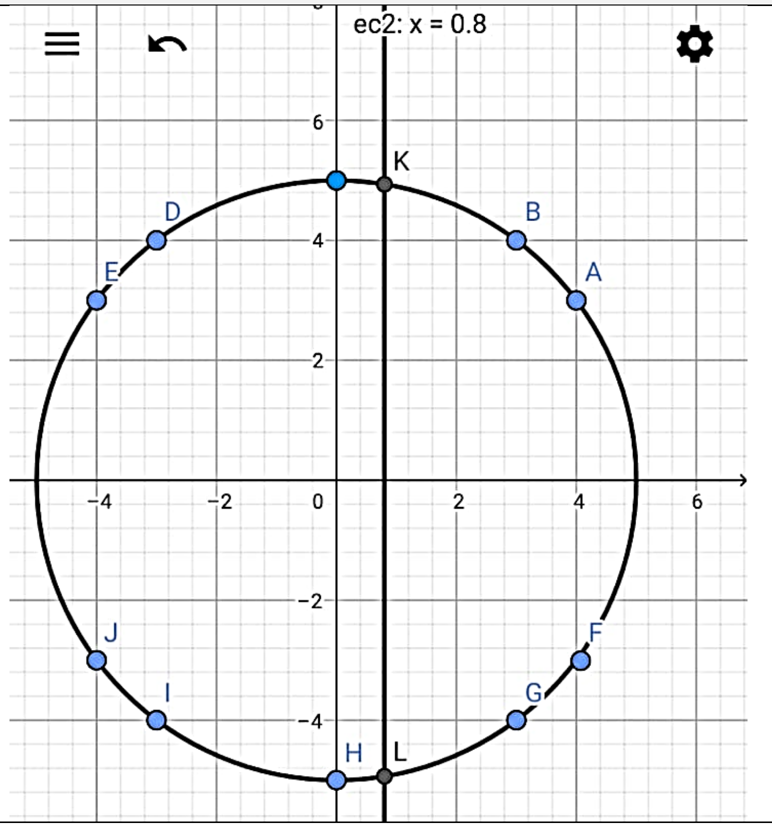
<table>
<tr><th colspan="3">SITUACIÓN 2
Obtener un diagrama sagital a partir de los puntos (4,3), (3,4), (0,5), (-3,4), (-4,3), (4,-3), (3,-4), (0,-5), (-3,-4), (-4,-3).</th></tr>
<tr><th colspan="3">1.1 Construye una tabla de valores para f</th></tr>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°1</th><th rowspan="2">Observaciones</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Grupo 5</td><td>
</td><td>Se observa en las evidencias aportadas que los grupos de trabajo pasan del conjunto de puntos de la relación (grafo) a la representación en diagrama sagital sin mayores dificultades.

En algunos casos, se incurrió en un error al representar los elementos del conjunto de partida: algunos estudiantes para representar, por ejemplo, los pares (4,3) y (4-3), ubicaban el número 4 dos veces, como si fuesen elementos diferentes dentro del conjunto. Mediante la retroalimentación y la discusión fueron capaces de identificar el error en que incurrían y corregirlo.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

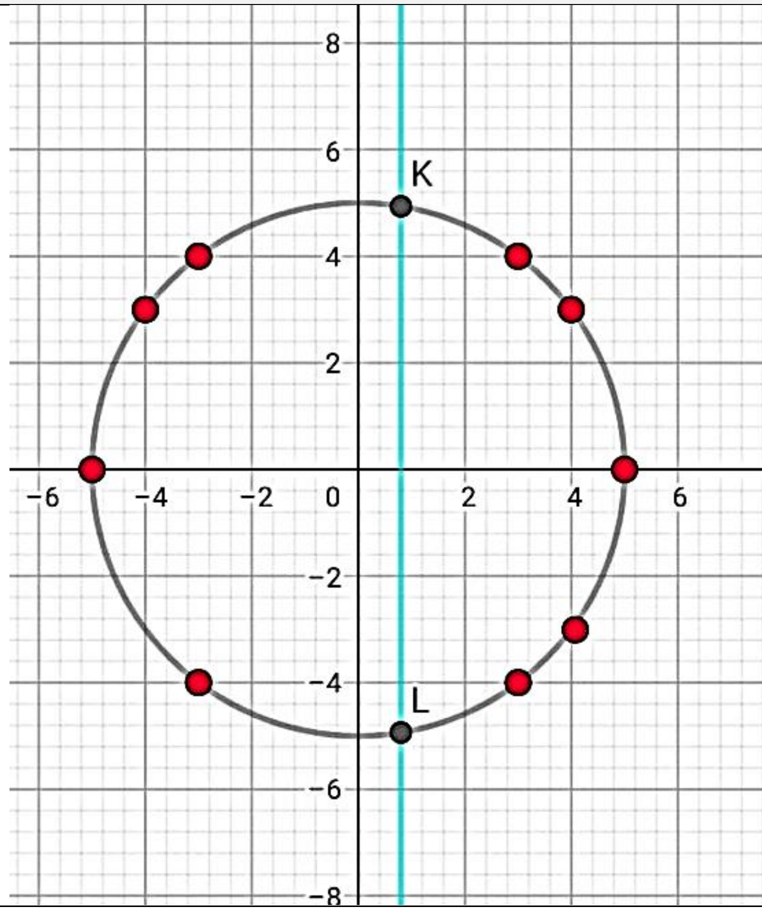
GRUPO 9°2	
Grupo de trabajo	**Respuesta**
Grupo 3	

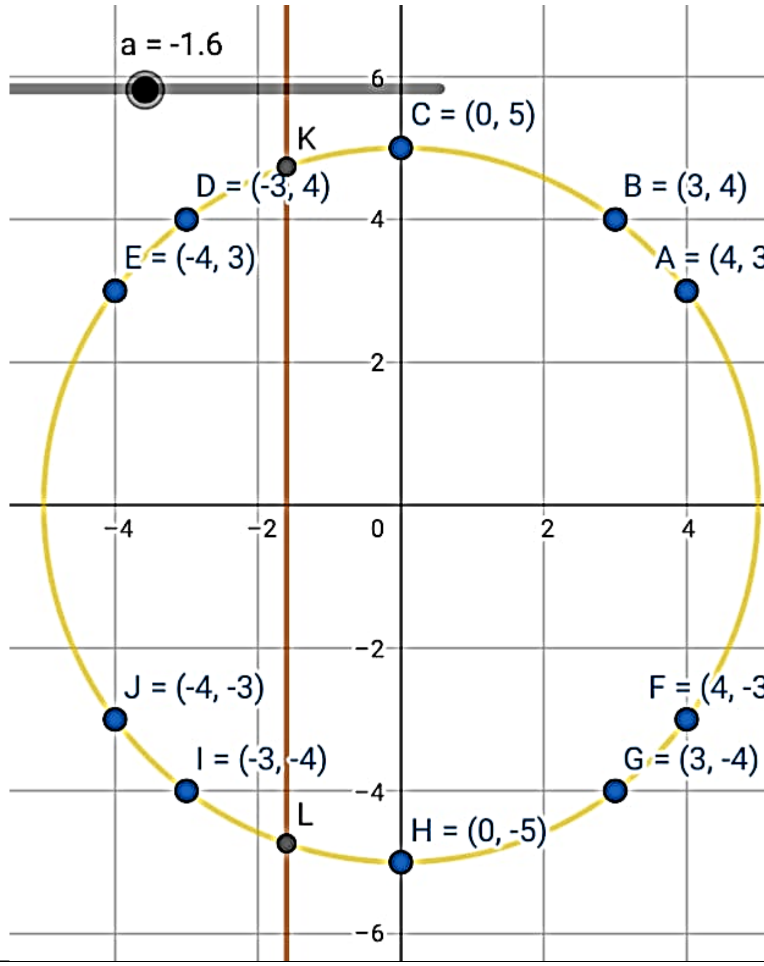
<table>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°3</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>
</td></tr>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°4</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Grupo 5</td><td>
</td></tr>
</table>

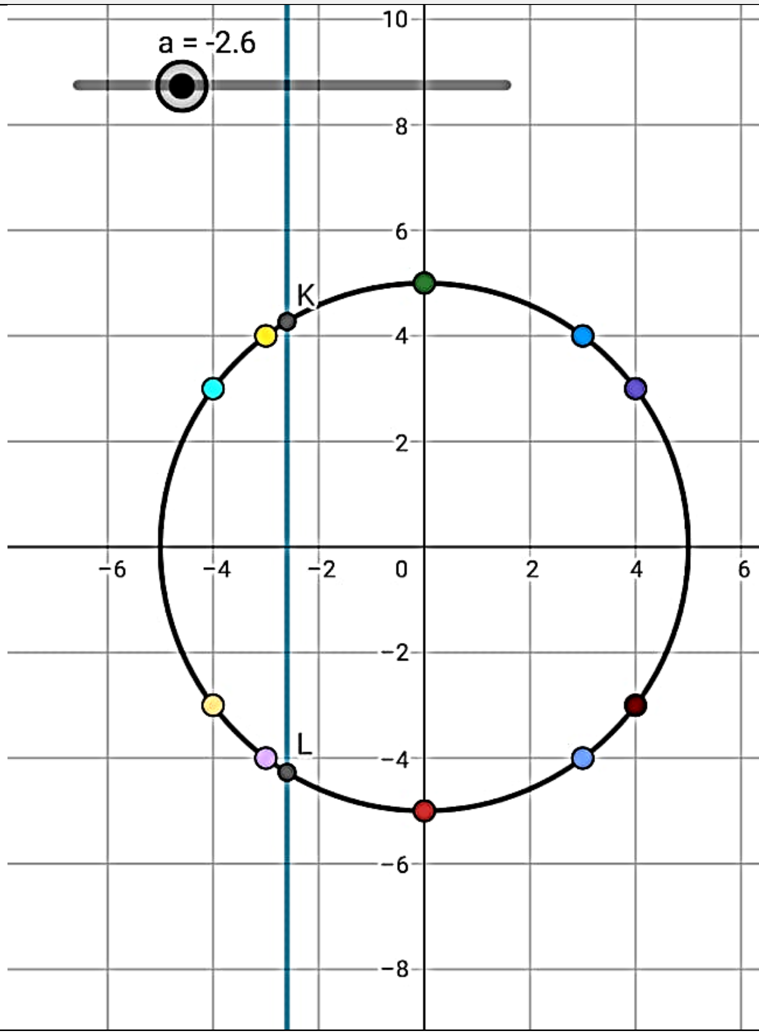
<table>
<tr><td colspan="3">2.1 ¿Cuál es el conjunto de partida?
2.2 ¿Cuál es el conjunto de partida?

Observaciones: para estas dos preguntas no se hace necesario presentar evidencias fotográficas, si se mira detenidamente, son preguntas idénticas a las preguntas 1.2 y 1.3 de la situación 1, las cuales los estudiantes respondieron sin dificultad.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2.3 Ubicar cada uno de los puntos en GeoGebra.
2.4 Ingresar en ec2 la expresión $x^2 + y^2 = 25$, ¿la gráfica pasa por todos los puntos ubicados en el numeral 2.1.? De no ser así, verificar que los puntos estén bien ubicados.
2.5 Realizar la prueba de la recta vertical y determina si la gráfica corresponde o no con una función.</td></tr>
<tr><td colspan="2">GRUPO 9°1</td><td rowspan="2">Observaciones</td></tr>
<tr><td>Grupo de trabajo</td><td>Respuesta</td></tr>
<tr><td>Grupo 1</td><td>
</td><td>En estas dos preguntas, si bien la mayoría de grupos logró realizarlo con cierta facilidad, se presentó una situación particular con dos grupos de trabajo, la cual se puede observar en la evidencia del grupo 6 de 9°2: se puede apreciar que este grupo ubicó los puntos (-5,0) y (5,0), que si bien, hacen parte de la gráfica de la circunferencia, no estaban dentro de los puntos que se dieron para ser ubicados, al cuestionar sobre esto a los estudiantes inicialmente no entendían por qué les ocurrió esta situación. Tras varias discusiones y un poco de orientación pudieron establecer que se debía a que habían invertido el orden de las coordenadas de los puntos originales, sin embargo, fue necesario explicar que debido a las propiedades de la circunferencia los demás puntos</td></tr>
</table>

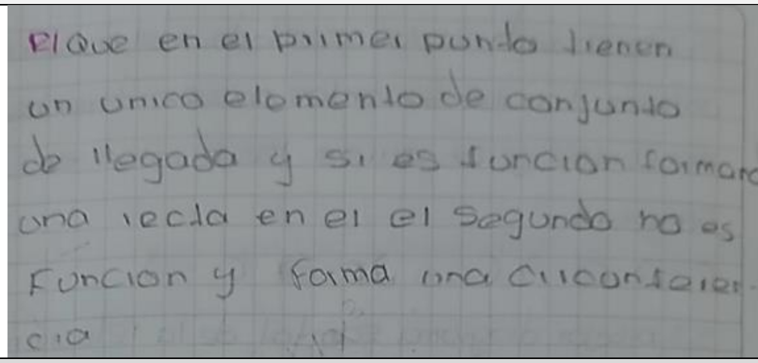
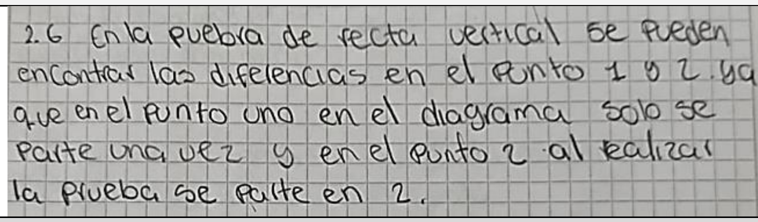
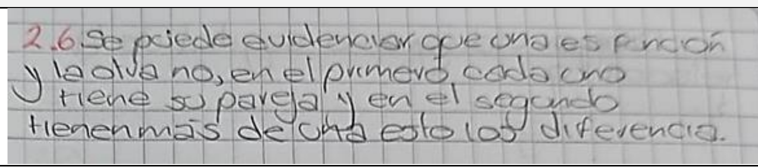
coincidían con los anteriores.
En la fotografía se muestra el producto de realizar las instrucciones dadas en los puntos 2.3, 2.4 y 2.5.

GRUPO 9°2	
Grupo de trabajo	**Respuesta**
Grupo 6	

GRUPO 9°3	
Grupo de trabajo	**Respuesta**
Grupo 7	

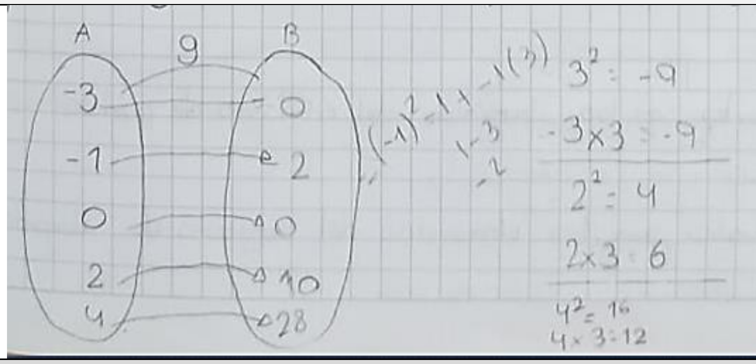
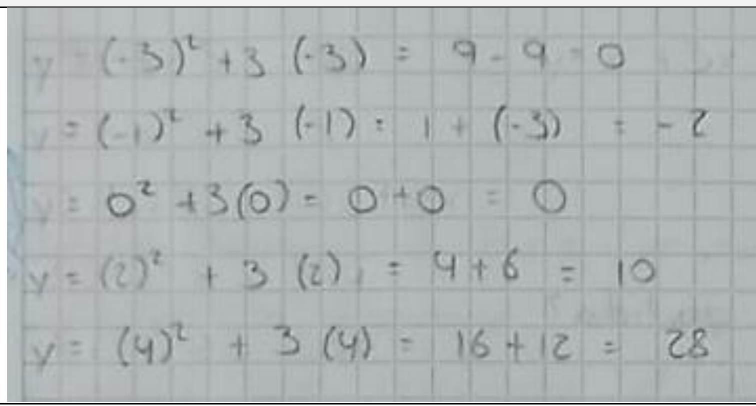
GRUPO 9°4	
Grupo de trabajo	**Respuesta**
Grupo 6	

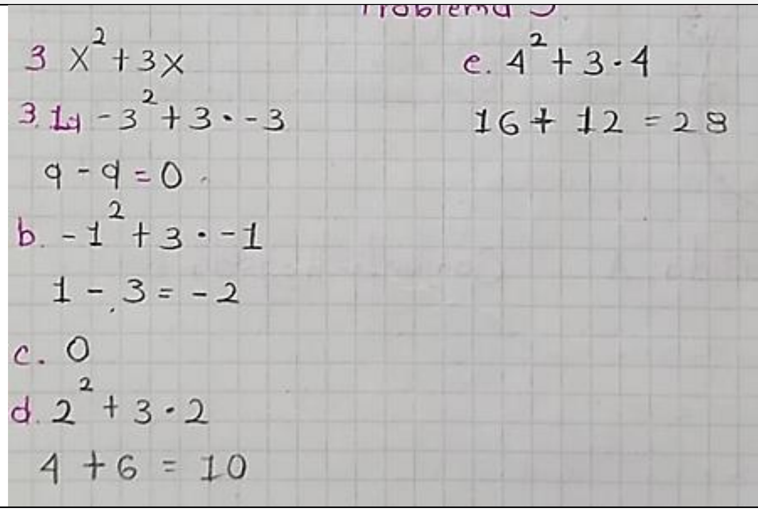
2.6 Comparar los diagramas sagitales de la situación 1 y el obtenido en la situación 2, observar la relación entre los elementos del conjunto de partida con los del conjunto de llegada, ¿encuentran alguna diferencia entre ambos diagramas? Explicar cuáles.		
GRUPO 9°1		**Observaciones**
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 3	R= la diferencia de estos diagras es que el del problema 1 es funcion y el del problema 2 no es funcion. tambien el punto 1 tienen menos elementos que el punto 2.	El grupo 3 de 9°1 concluye de manera correcta cuál diagrama es una función y cuál no, sin embargo, se evidencia que aún no se apropian del lenguaje de las funciones, pues no hacen referencia a los elementos de las funciones. El grupo 1

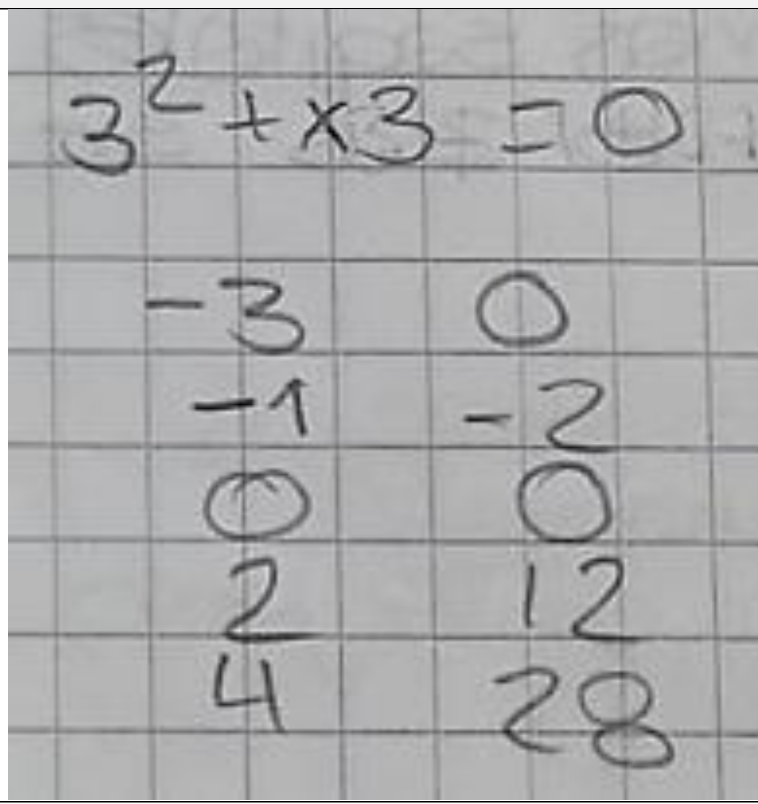
<table>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°2</th><td rowspan="9">de 9°1 habla de conjunto de partida y conjunto de llegada, hacen referencia a las relaciones entre los elementos de uno y otro, esto los lleva a concluir correctamente. El grupo 9 de 9°3 hace referencia a que de los elementos del conjunto de partida de la situación uno “parte” hacia el conjunto de llegada una sola vez, mientras que en la situación 2 “parten” dos veces, esto hace referencia a que los elementos de la primera situación tienen una sola imagen y los de la segunda poseen dos imágenes. La explicación que da el grupo 4 de 9°4 es similar, la diferencia es el lenguaje utilizado para expresarla.</td></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Grupo 1</td><td>
El Que en el primer punto tienen un unico elomento de conjunto de llegada y si es funcion formar una recta en el el segundo no es Funcion y forma una circunferen-cia</td></tr>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°3</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Grupo 9</td><td>
2.6 En la puebra de recta vertical se pueden encontrar las difelencias en el punto 1 y 2. ya que en el punto uno en el diagrama solo se parte una vez y en el punto 2 al realizar la prueba se parte en 2.</td></tr>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°4</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>
2.6 Se puede evidenciar que una es función y la otra no, en el primero cada uno tiene su pareja y en el segundo tienen más de una esto los diferencia.</td></tr>
</table>

3.2.2.1.3 Análisis: situación 3

Tabla 49. Respuestas de los estudiantes a la situación 3, actividad 1

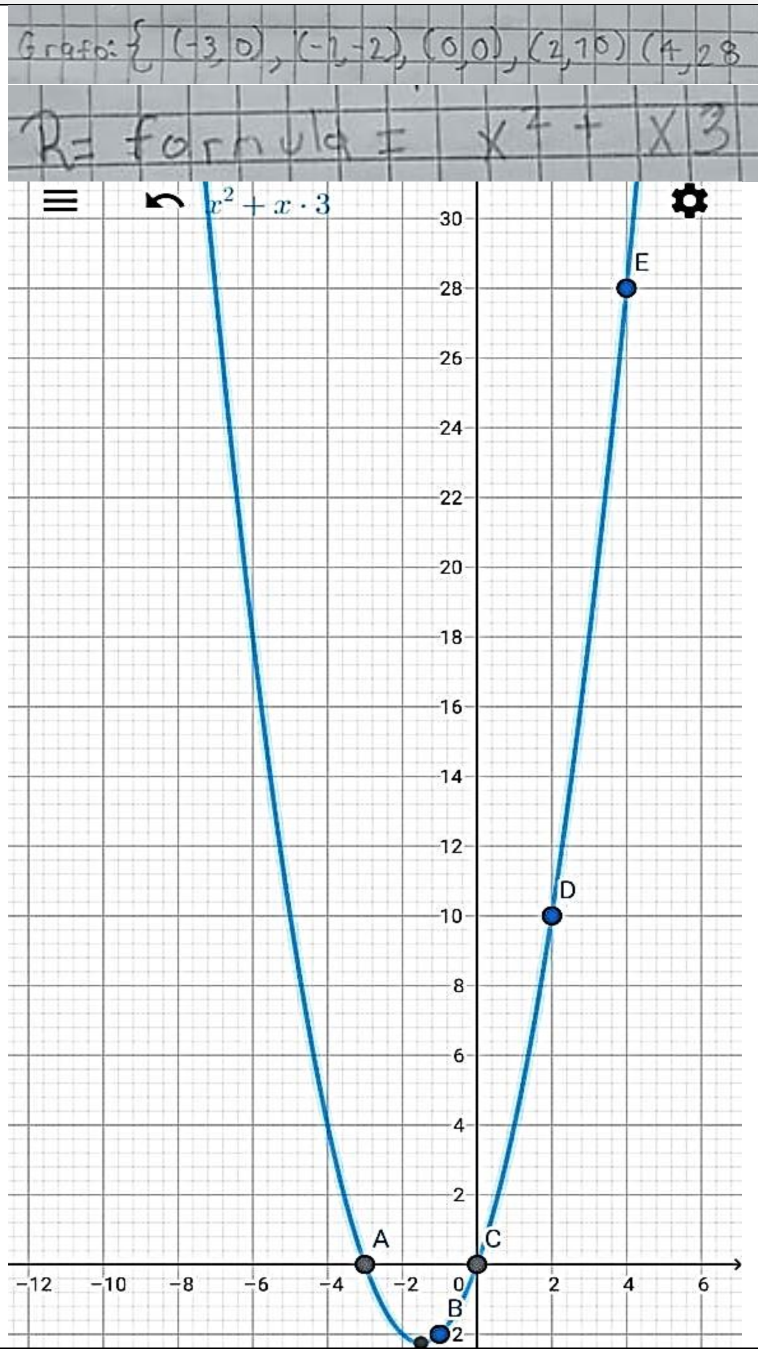
SITUACIÓN 3 Esta vez, van a partir del enunciado: "La relación g recibe un número y suma su cuadrado con su triple".		
3.1 Si g recibe los números -3, -1, 0, 2 y 4, ¿qué entrega como resultado para cada uno?		
GRUPO 9°1		**Observaciones**
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 4		Si bien en esta pregunta surgieron muy pocos inconvenientes para los grupos de estudio, casi todos relacionados con la realización de operaciones básicas, detalles como la ley de signos para la multiplicación, entre otros. Es necesario mencionar un detalle importante y que tiene que ver con el punto 3.7 de esta situación: como puede verse en la evidencia del grupo 6 de 9°3, al intentar expresar la fórmula de la función, se limitan únicamente a la expresión algebraica $x^3 + 3x$, que justamente representa el enunciado, sin embargo, la ***ecuación*** debe expresarse como $y = x^3 + 3x$, pues justamente, es una ecuación. Esta desatención se observó en varios grupos, sin embargo, no fue impedimento para responder correctamente las preguntas. Es importante hacer más énfasis en que una ecuación establece una equivalencia entre dos expresiones y por esto siempre debe escribirse como una igualdad.
GRUPO 9°2		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 3		

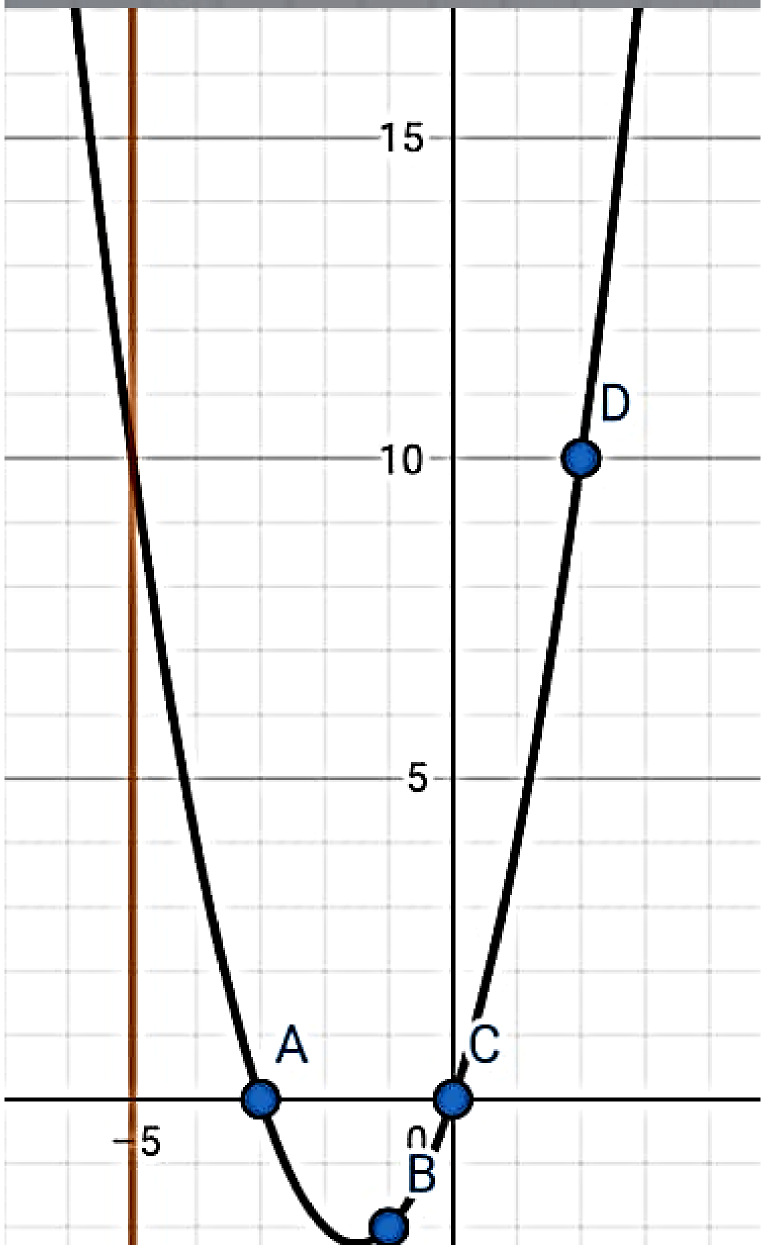
GRUPO 9°3	
Grupo de trabajo	**Respuesta**
Grupo 6	

GRUPO 9°4	
Grupo de trabajo	**Respuesta**
Grupo 4	

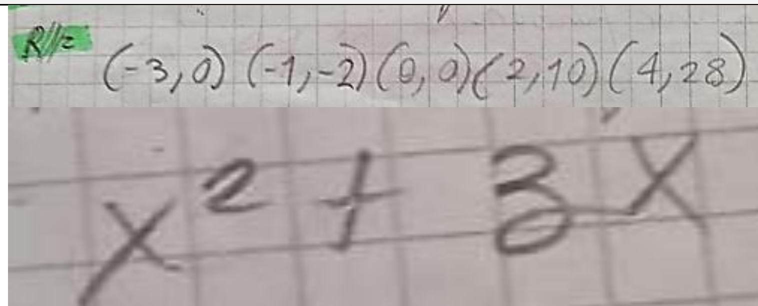
3.2 De acuerdo con los resultados del numeral anterior, ¿cuáles serían los pares ordenados? Escribirlos y ubicar los puntos en GeoGebra.
3.7 ¿Cuál es la ecuación correspondiente al enunciado de la situación 3?
3.8 Asignar la ecuación encontrada a f(x) en GeoGebra. La gráfica azul debe coincidir con los puntos que se ubicaron anteriormente. De lo contrario, revisar lo realizado en el numeral 3.1., 3.2. y 3.4. Deben coincidir.
3.9 Realizar la prueba de la recta vertical y determinar si la gráfica corresponde a la de una función.

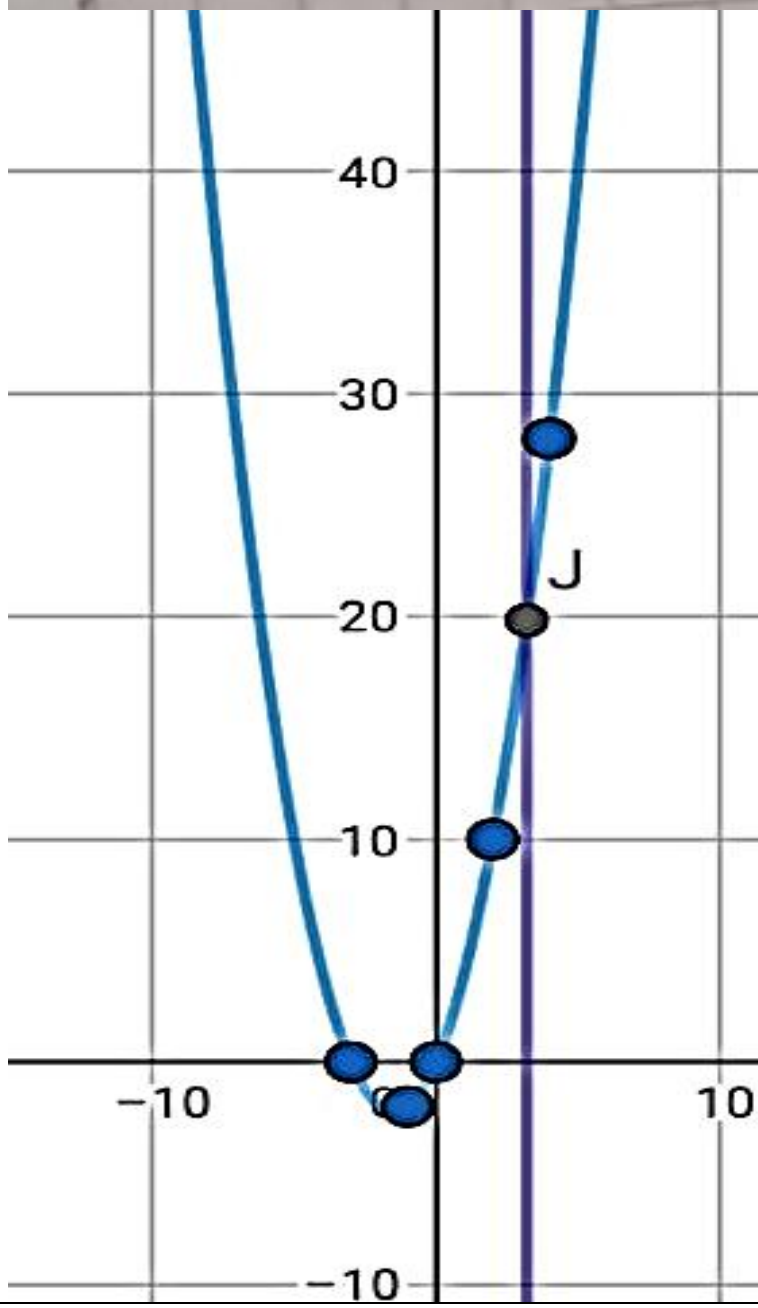
Aclaración: se presenta como evidencia del trabajo el resultado de modificar la gráfica de GeoGebra siguiendo los pasos anteriores, si bien hay una serie de pasos entre 3.2 y 3.7, el resultado final al realizar el punto 3.9 es producto de todos los puntos aquí referenciados

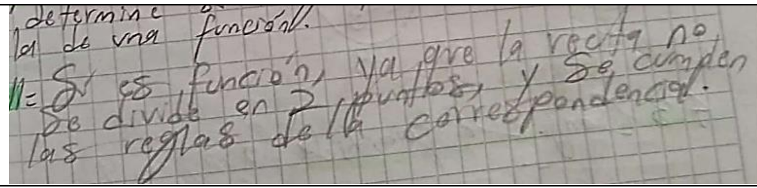
GRUPO 9°1		Observaciones
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 3		Se puede apreciar que los primeros tres grupos no tienen problemas para determinar si se trata o no de una función, no obstante, falta apropiación sobre el lenguaje de la función. El grupo 1 de 9°4 sí tuvo dificultades, particularmente para expresar el enunciado verbal como una fórmula -este ha sido uno de los problemas más comunes durante el desarrollo de esta actividad-, de hecho, es uno de los grupos que no llega a terminar la situación 3, probablemente porque se encontró con este obstáculo.

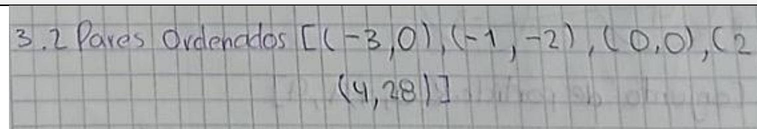
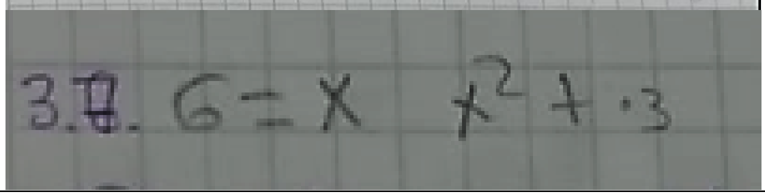
<table>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°2</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Grupo 6</td><td>{ (-3,0), (-1,-2), (0,0), (2,10), (4,[illegible]
R- $y = x^2 + 3x$


R- si es funcion, ya que la recta solo corta en un punto</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°3</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>


</td></tr>
</table>

	 determine ... la de una función. II= Sí es función, ya que la recta no se divide en 2 puntos, y se cumplen las reglas de la correspondencia.	

GRUPO 9°4	
Grupo de trabajo	**Respuesta**
Grupo 1	 3.2 Pares Ordenados [(-3,0),(-1,-2),(0,0),(2 (4,28)]  3. 6 = X x² + ·3

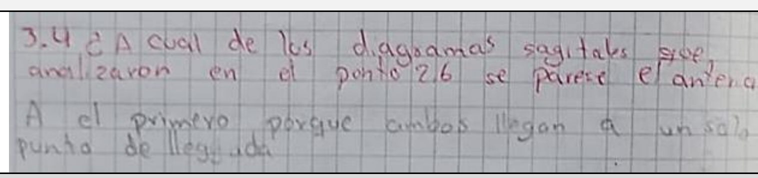
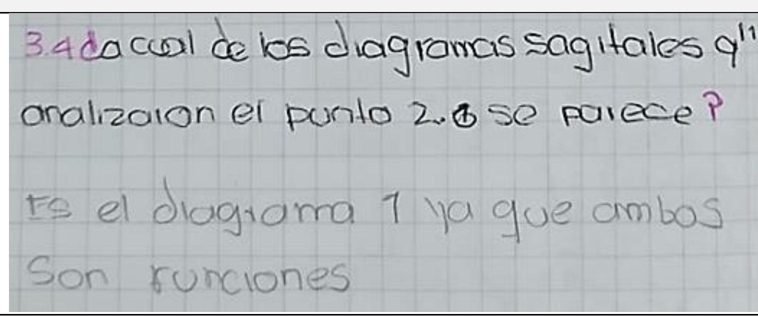
3.3 Dibujar el diagrama sagital de la relación g.

3.4 ¿A cuál de los diagramas sagitales que analizaron en el punto 2.6. se parece el anterior?

3.5 ¿Cuáles son los elementos del conjunto de partida?

3.6 ¿Cuáles son los elementos del conjunto de llegada?

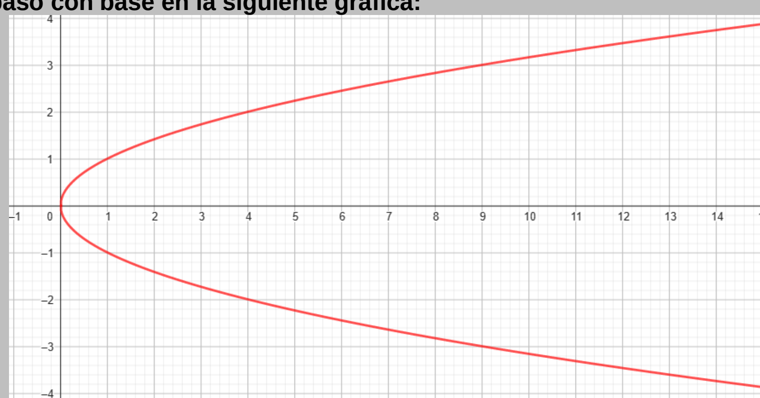
Aclaración: para las preguntas 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6, únicamente se mostrará lo referente a la respuesta de la 3.4, pues en las situaciones anteriores se ha mostrado suficientemente que los estudiantes en general son capaces de representar funciones mediante diagramas sagitales y a partir de allí identificar elementos como el dominio

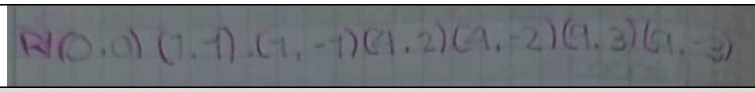
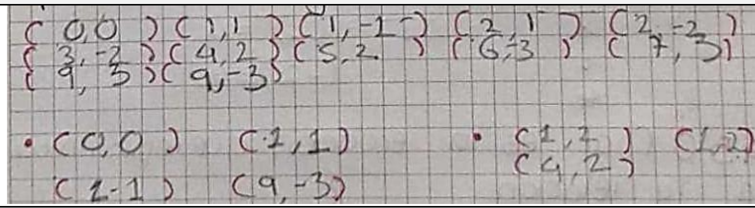
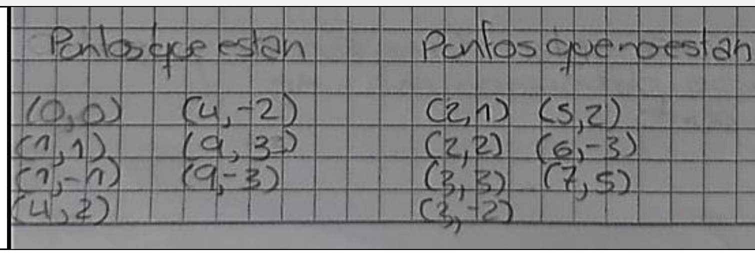
GRUPO 9°1		**Observaciones**
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 2	 3.4 ¿A cual de los diagramas sagitales que analizaron en el punto 2.6 se parece el anteri A el primero porque ambos llegan a un solo punto de llegada	Sin muchos detalles, los estudiantes identifican las similitudes entre dos diagramas sagitales que representan funciones y los diferencian de uno que no lo es. Sin embargo, se sigue evidenciando que les cuesta expresar sus respuestas con el lenguaje propio de las funciones, en cambio, hacen uso de palabras que les son más familiares. Esta inclinación de los estudiantes muestra la importancia de
GRUPO 9°2		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 2	 3.4 ¿a cual de los diagramas sagitales q'' analizaron el punto 2.6 se parece? Es el diagrama 1 ya que ambos son funciones	

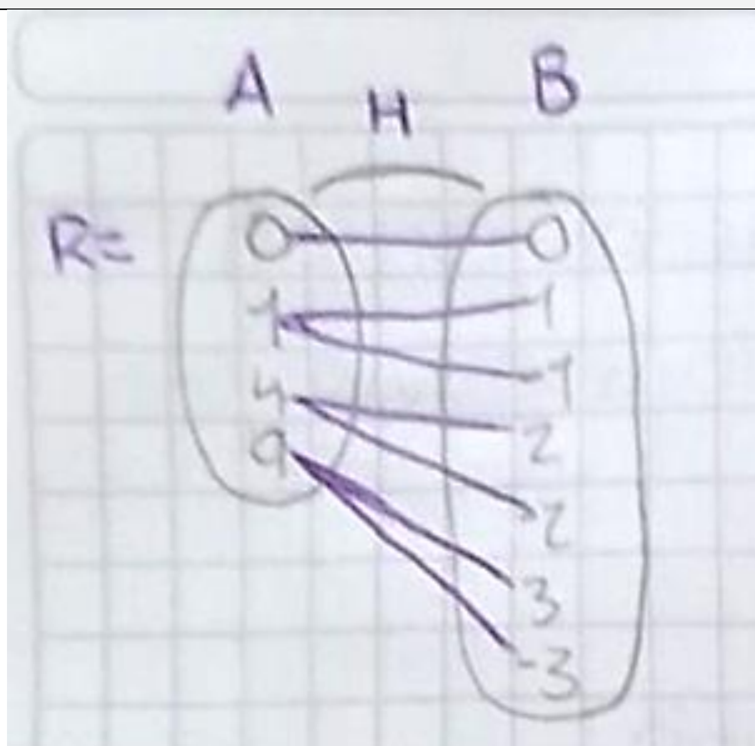
GRUPO 9°3		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	expresar los conceptos matemáticos en un lenguaje que tenga significado para ellos.
Grupo 6	3.1 Se parece al problema 1 porque los dos son funciones	
GRUPO 9°4		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 4	3.4 ¿A cuál de los diagramas sagitales que analizaron en el punto 2.6 se parece el anterior? Al primero, ya que si es función y ninguno de los números que se encuentran en el conjunto de partida tiene dos imágenes.	

3.1.2.1.4 Análisis: situación 4

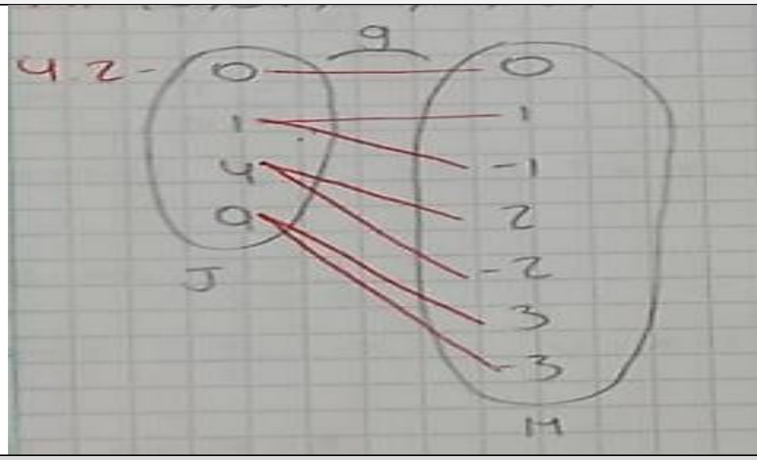
Tabla 50. Respuestas de los estudiantes a la situación 4, actividad 1

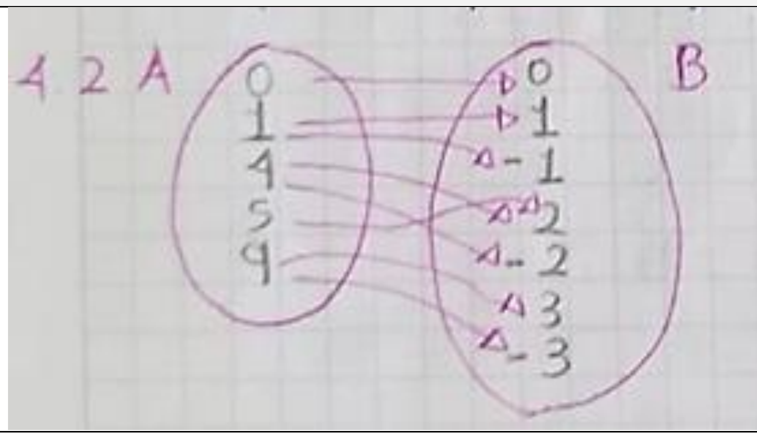
SITUACIÓN 4		
Realizar el paso a paso con base en la siguiente gráfica: 		
4.1 Determinar cuál de los siguientes puntos pertenecen a la gráfica y cuáles no: (0,0), (1,1), (1,-1), (2,1), (2,-2), (3,3), (3,-2), (4,2), (4,3), (4,-2), (5,2), (6,-3), (7,3), (9,3), (9,-3).		
GRUPO 9°1		**Observaciones**
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 2	(0,0) (1,1) (1,-1) (2,1) (2,-2) (3,3), (3,-2) (4,2) (4,3) (4,-2) (5,2) (6,-3) (7,3) (9,3 (9,-3)	La única dificultad que surgió con esta pregunta tuvo que ver nuevamente con el orden de las coordenadas de los
GRUPO 9°2		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	

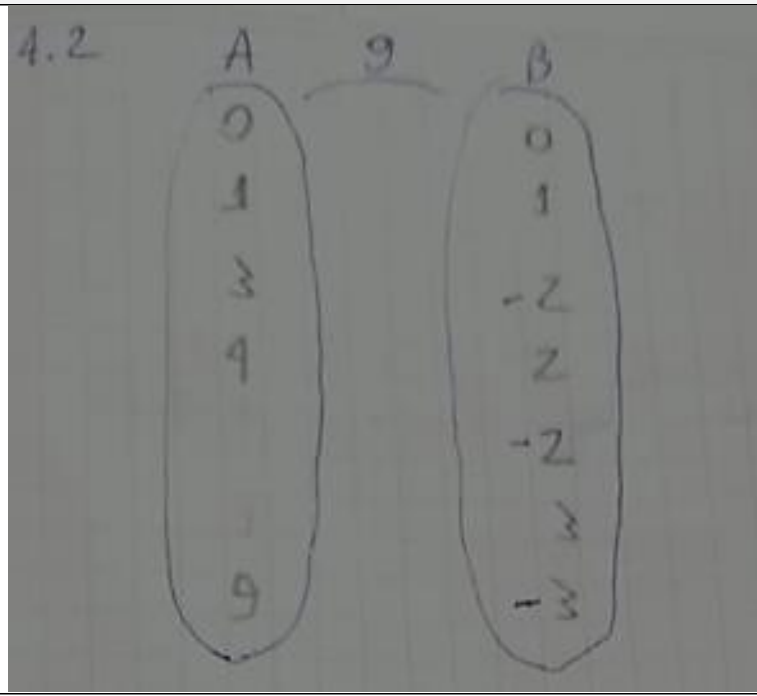
Grupo	 R(0,0) (1,1) (1,-1) (4,2) (4,-2) (9,3) (9,-3)	puntos, resultó común la práctica de invertir las coordenadas (x, y) de los puntos, razón por la cual algunos grupos de trabajo tuvieron un poco de dificultad al inicio, sin embargo, con un poco de orientación y discusión al interior de los grupos llegaron a la respuesta.
GRUPO 9°3		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 1	 (0,0) (1,1) (1,-1) (2,1) (2,-2) (3,-2) (4,2) (5,2) (6,3) (7,3) (9,3) (9,-3) • (0,0) (1,1) (1-1) (9,-3) • (1,2) (4,2) (1,2)	
GRUPO 9°4		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 4	 Puntos que estan: (0,0) (1,1) (1,-1) (4,2) (4,-2) (9,3) (9,-3) Puntos que no estan: (2,1) (2,2) (3,3) (3,-2) (5,2) (6,-3) (7,5)	

4.2 Dibujar el diagrama sagital de la relación que se representa en la gráfica. 4.3 Identificar el conjunto de partida y el conjunto de llegada.		
GRUPO 9°1		**Observaciones**
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 1		En el caso de la pregunta 4.2, se observa en la mayoría de los grupos que cometieron el error de representar elementos duplicados en el dominio de la situación 2, corrigieron dicha representación en esta pregunta, es decir, en los diagramas sagitales se puede apreciar que los elementos del dominio tienen dos imágenes, mediante las flechas que los conectan con los elementos del codominio. Sin embargo, una dificultad de algunos grupos tiene que ver con que no representan dichas

relaciones entre los elementos de ambos conjuntos, como se ve en la evidencia del grupo 6 de 9°4.
Con respecto a la pregunta 4.3, ya se ha visto en preguntas anteriores que los estudiantes no tienen dificultad identificando el dominio y el codominio.

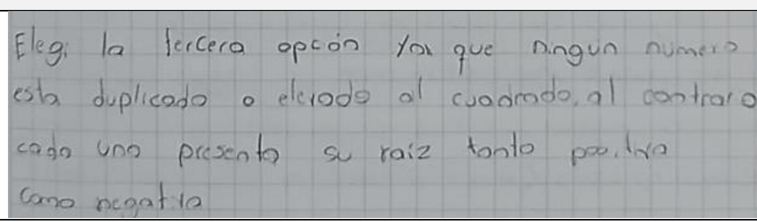
GRUPO 9°2	
Grupo de trabajo	**Respuesta**
Grupo 3	

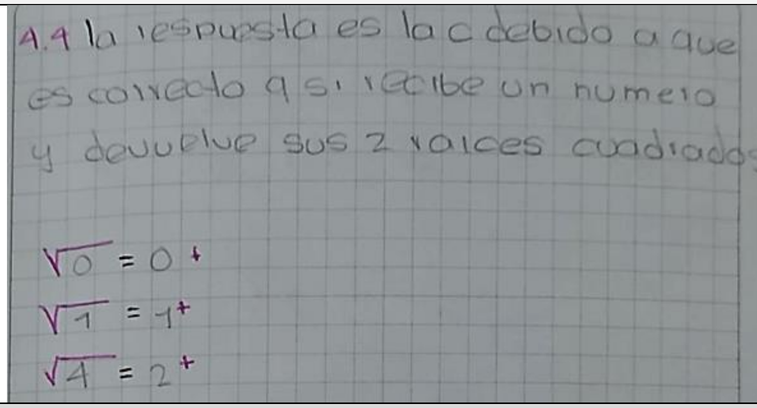
GRUPO 9°3	
Grupo de trabajo	**Respuesta**
Grupo 6	

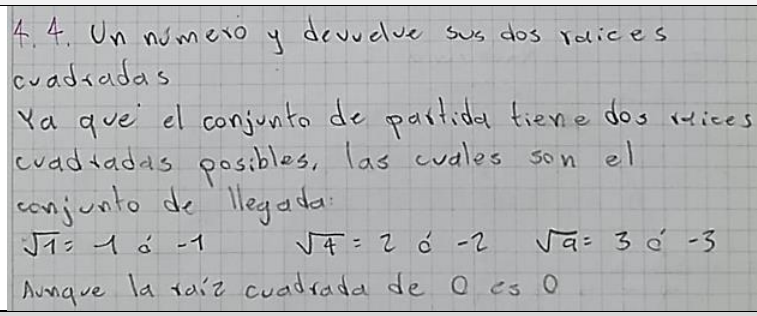
GRUPO 9°4		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 6		

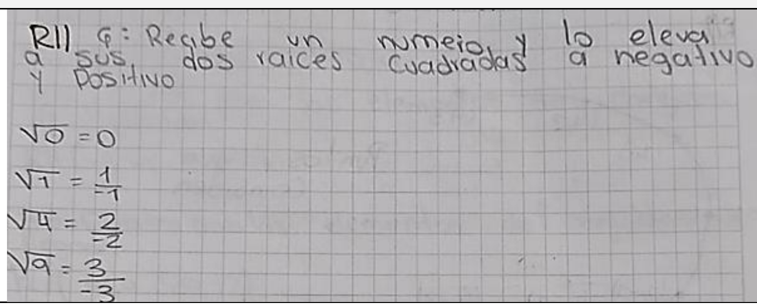
4.3. Determinar a cuál de los siguientes enunciados corresponde la relación:

- g **recibe un número y lo duplica.**
- g **recibe un número y lo eleva al cuadrado.**
- g **recibe un número y devuelve sus dos raíces cuadradas.**

GRUPO 9°1		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	**Observaciones**
Grupo 4		En la evidencia se observa que el grupo 4 de 9°1 describe más o menos bien su elección, pues comprenden que los números del conjunto de llegada no están elevados al cuadrado o duplicados, sin embargo, no desarrollan la razón por la cual los números negativos también pueden ser raíces. El grupo 2 de 9°2 tiene dificultades con la sustentación de su respuesta, que, por cierto, eligen

GRUPO 9°2	
Grupo de trabajo	**Respuesta**
Grupo 2	

GRUPO 9°3	
Grupo de trabajo	**Respuesta**
Grupo 7	

GRUPO 9°4	
Grupo de trabajo	**Respuesta**
Grupo 5	

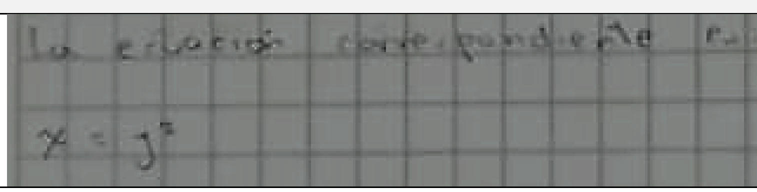
correctamente. No obstante, usan una representación para las raíces cuadradas que no es correcta. El grupo 7 de 9°3 también concluye correctamente e intentan sustentar, pero incurren en un error, la operación $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}\ o\ \sqrt{9}$ representa la raíz principal de los radicandos, es decir, la raíz positiva, la sustentación de esta respuesta debería enfocarse desde el hecho de que:

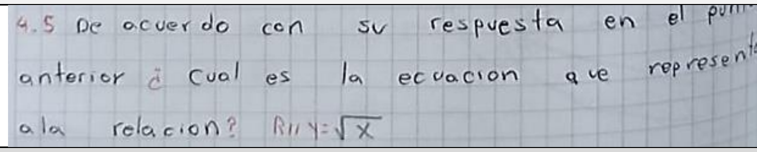
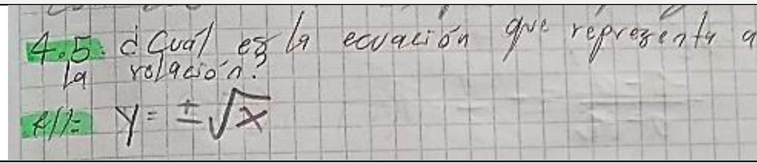
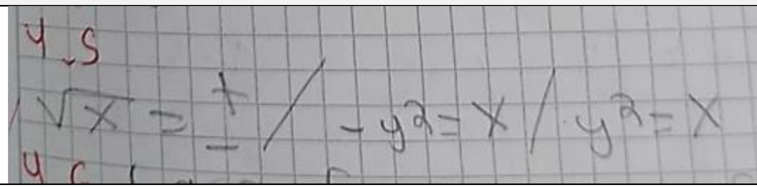
$$(-1)^2 = 1^2 = 1$$
$$(-2)^2 = 2^2 = 4$$
$$(-3)^2 = 3^2 = 9$$

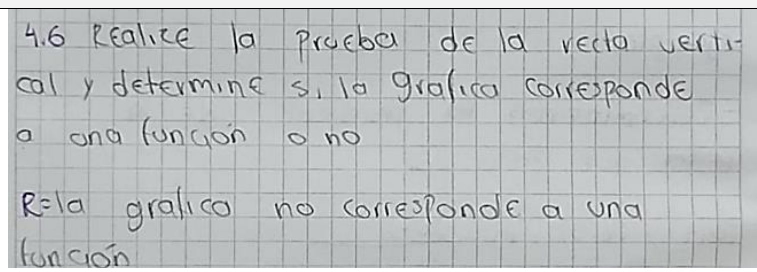
Finalmente, el grupo de 9°4 también usa una representación incorrecta para sustentar su respuesta.

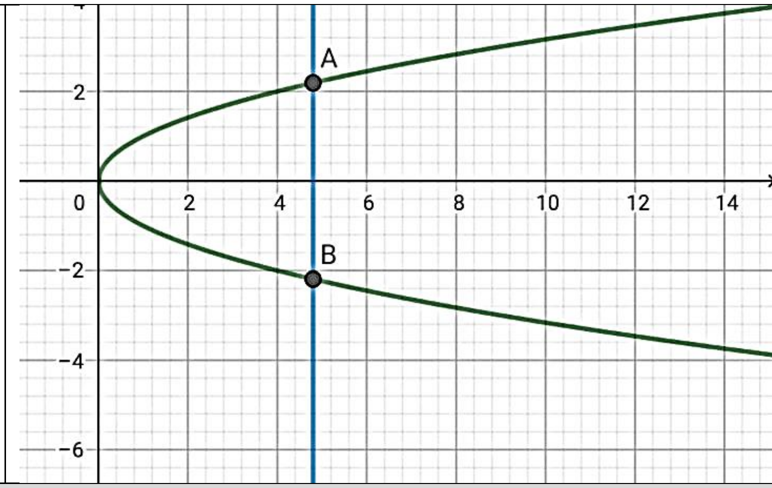
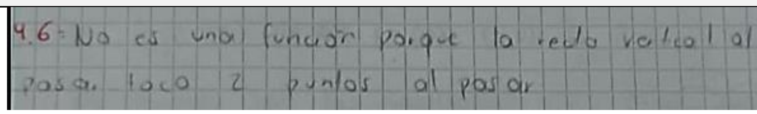
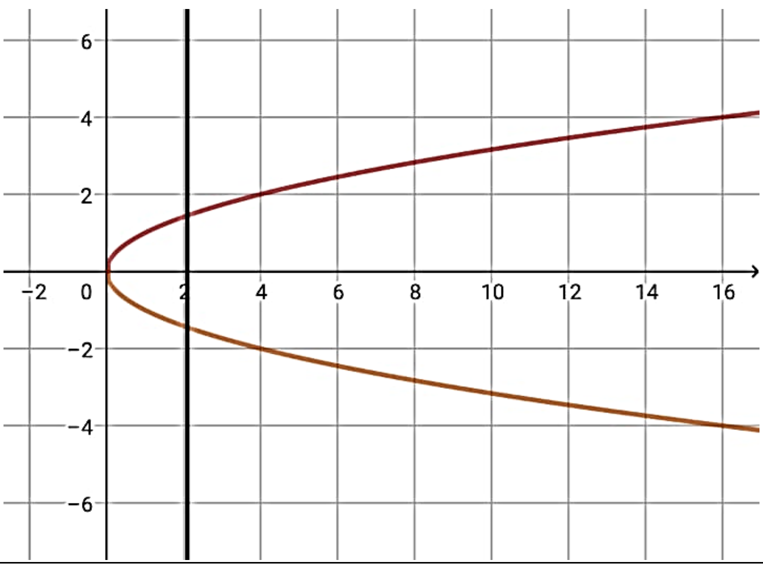
Es aquí, donde nuevamente se pone de manifiesto la dificultad que poseen los estudiantes para sustentar razonamientos por medio de cálculos y otros.

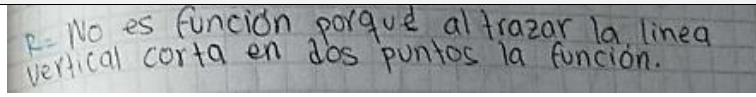
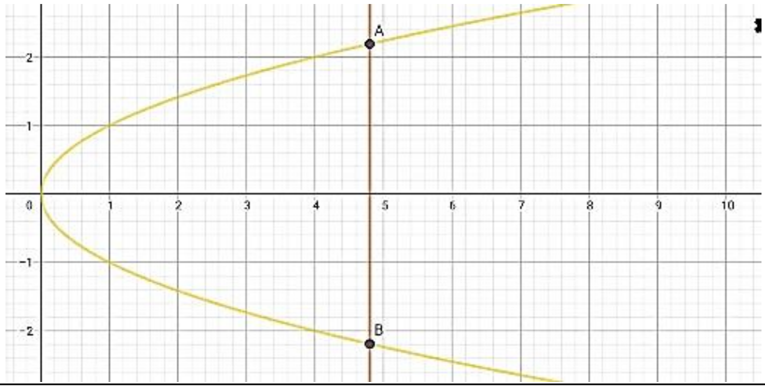
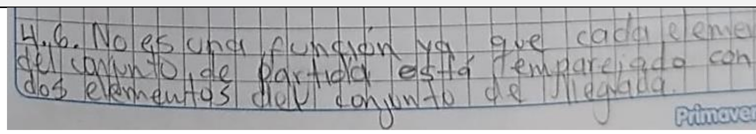
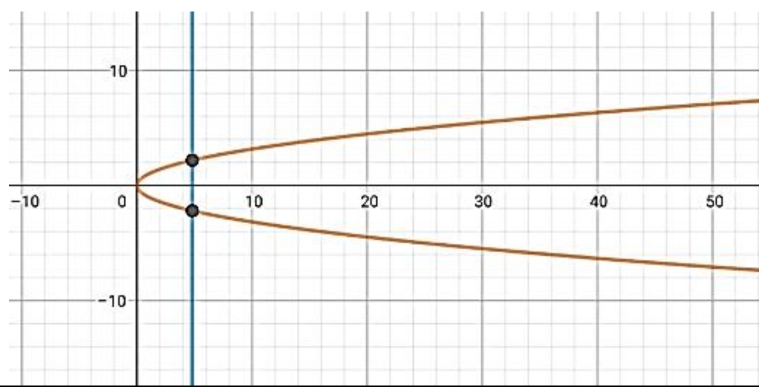
4.5 De acuerdo con su respuesta en el punto anterior, ¿cuál es la ecuación que representa a la relación?

GRUPO 9°1		**Observaciones**
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 6		El grupo 6 de 9°1 plantea correctamente que $x = y^2$, dicha equivalencia probablemente la deducen al obtener el cuadrado de los números del conjunto

<table>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°2</th><td rowspan="9">de llegada y verificar que el resultado era el número del cual eran imagen, sin embargo, no lograron explicar por qué el enunciado hacía referencia a dos raíces cuadradas (positiva y negativa), cuya ecuación se expresaría como lo hace el grupo 4 de 9°3. En las respuestas que se muestran aquí, son los estudiantes del grupo 3 de 9°4 quienes presentan mayores dificultades, pues usan expresiones que carecen de sentido, como lo es $\sqrt{x} = \pm$, para intentar representar el enunciado como una ecuación.</td></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>
4.5 De acuerdo con su respuesta en el pun[to] anterior ¿ Cual es la ecuacion que representa a la relacion? R// y=√x</td></tr>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°3</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>
4.5. ¿Cual es la ecuación que reprezenta a la relación?
R//: y = ±√x</td></tr>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°4</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Grupo 3</td><td>
4.5
√x = ± / −y² = x / y² = x</td></tr>
</table>

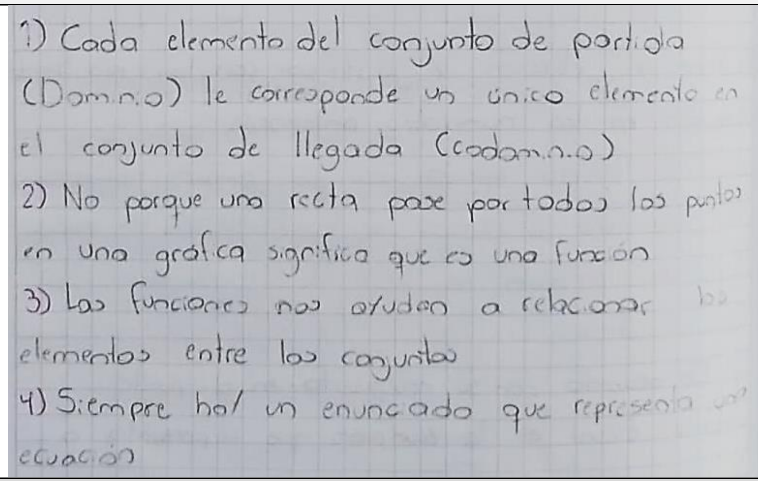
<table>
<tr><th colspan="3">4.6 Realice la prueba de la recta vertical y determine si la gráfica corresponde a una función o no.</th></tr>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°1</th><th rowspan="2">Observaciones</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Grupo 1</td><td>
4.6 Realice la prueba de la recta vertical y determine si la grafica corresponde a una funcion o no
R= la grafica no corresponde a una función</td><td>En el primer paso los estudiantes no usan ningún argumento para defender su postura frente a si la gráfica corresponde o no a una función. El segundo grupo y el tercero sí usan como argumento el criterio</td></tr>
</table>

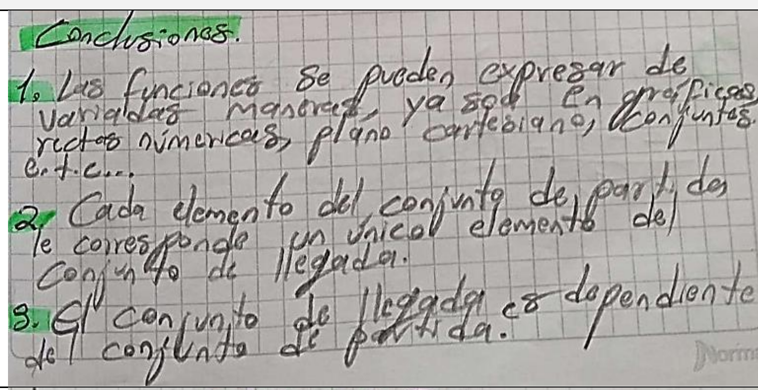
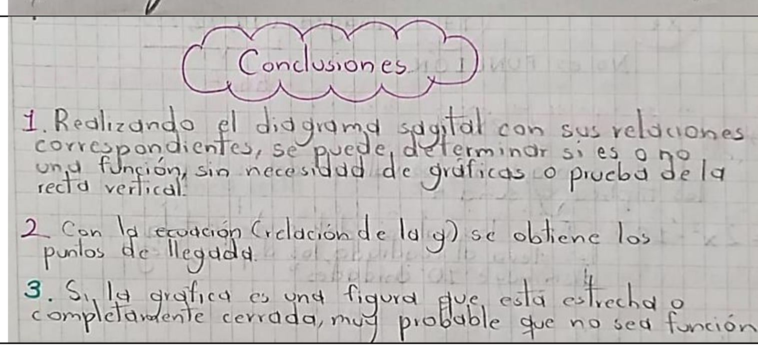
		de la recta vertical, pues se refieren explícitamente al hecho de que dicha recta corta a la gráfica en dos puntos, lo que significa que hay elementos del conjunto del dominio que tendrían dos imágenes, aunque esto no lo llegan a deducir a partir del gráfico. Finalmente, el cuarto grupo realiza su conclusión posiblemente con base en el diagrama sagital, pues no utiliza como argumento lo que ocurre con la recta vertical y la gráfica de la función.
GRUPO 9°2		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	
Grupo 3	4.6: No es una función porque la recta vertical al pasa. toca 2 puntos al pasar 	

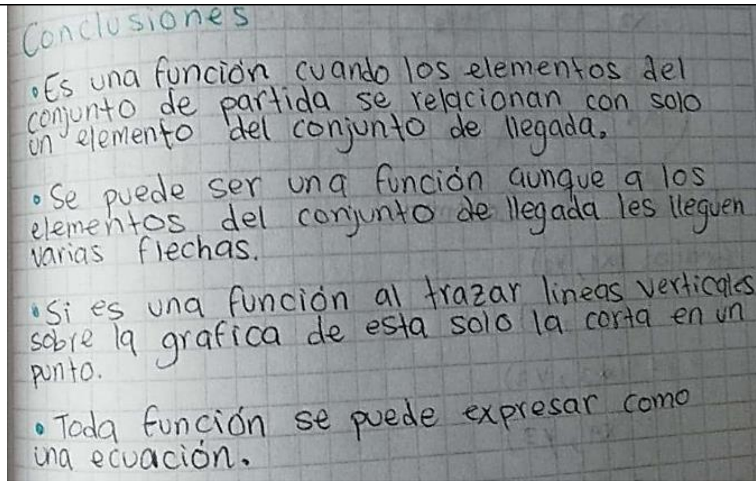
<table>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°3</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td></td><td>
R= No es función porque al trazar la linea vertical corta en dos puntos la función.

</td></tr>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°4</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>
4.6. No es una función ya que cada elemen del conjunto de partida está emparejado con dos elementos del conjunto de llegada.

</td></tr>
</table>

3.2.2.1.5 Análisis: conclusiones

Tabla 51. Conclusiones, actividad 1

<table>
<tr><th colspan="3">CONCLUSIONES
Discutir y debatir entre los integrantes del grupo y realizar cuatro conclusiones acerca de las funciones y sus elementos.
Aclaración: en el apartado de conclusiones es necesario mencionar un hecho que ocurrió durante el desarrollo de la actividad con los estudiantes, a saber. Ningún grupo de trabajo de 9°2 y 9°4 realizaron las conclusiones, asimismo, de 9°1 solamente un grupo realizó conclusiones. Por esta razón, no se presentan respuestas de parte de 9°2 y 9°4, y en cambio, se muestran las conclusiones del grupo de 9°1 y de algunos grupos de 9°3 (grupo IMPROVE), pues todos los grupos llegaron a concluir algo acerca del trabajo.</th></tr>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°1</th><th rowspan="2">Observaciones</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>
1) Cada elemento del conjunto de partida (Dominio) le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada (codominio)
2) No porque una recta pase por todos los puntos en una gráfica significa que es una función
3) Las funciones nos ayudan a relacionar los elementos entre los conjuntos
4) Siempre hay un enunciado que representa una ecuación</td><td rowspan="6">El primer grupo realizan conclusiones primero, a partir de la definición de función. En la conclusión 2, es posible que hagan referencia a lo sucedido en las situaciones 2 y 4, donde las ecuaciones encontradas por ellos justamente pasaban por los puntos ubicados anteriormente. Sin embargo, son imprecisos al hablar de “recta”. En la conclusión 3 hacen referencia a la noción de correspondencia implícita en las relaciones y en la conclusión 4 señalan correctamente la posibilidad de representar funciones en forma verbal o algebraica (ecuación).

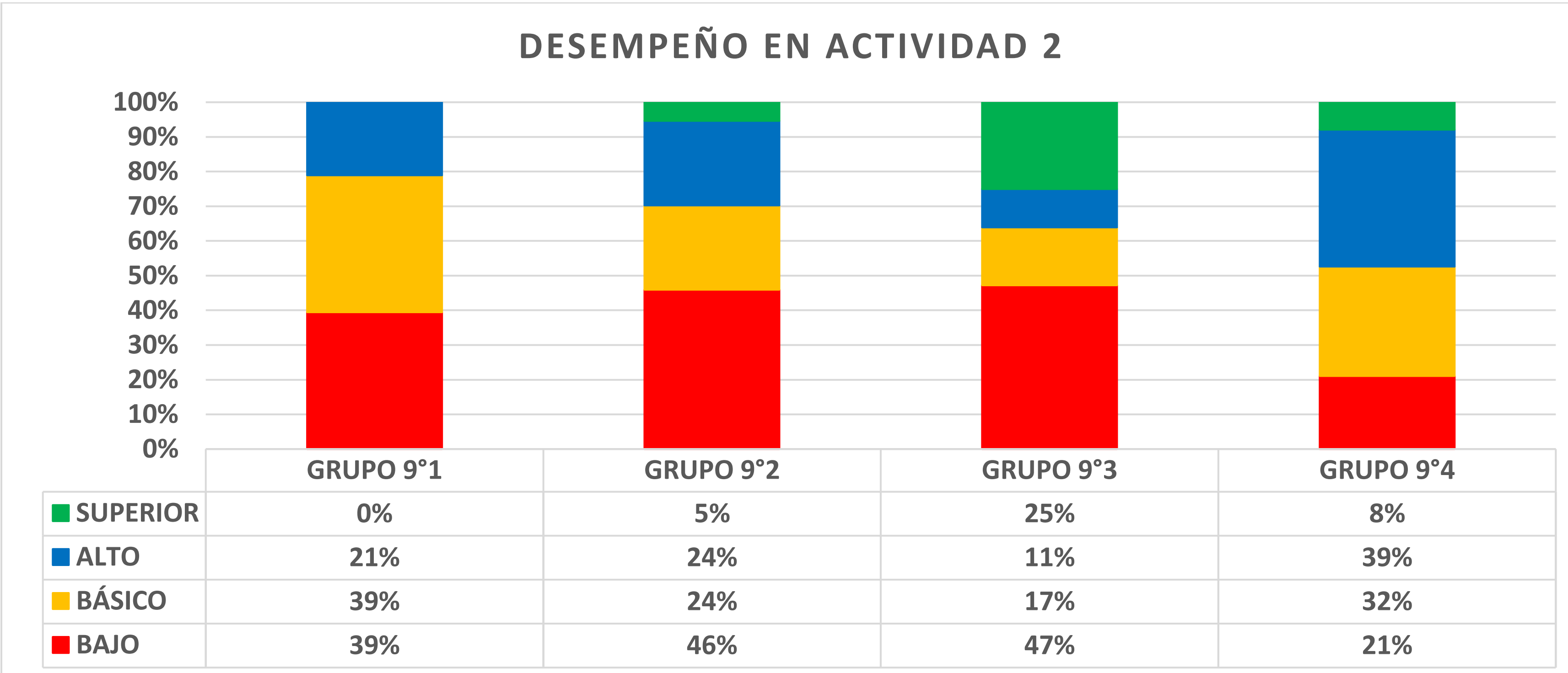
Entre las conclusiones de los grupos de 9°3, se puede destacar que hacen referencia a la importancia de las formas de representación de las funciones, esto es importante pues permite que los estudiantes identifiquen relaciones entre diferentes formas de representación,</td></tr>
<tr><th colspan="2">GRUPO 9°3</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>
Conclusiones.
1. Las funciones se pueden expresar de variadas maneras, ya sea en gráficas, conjuntos, rectas númericas, plano cartesiano, e.t.c...
2. Cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento del conjunto de llegada.
3. El conjunto de llegada es dependiente del conjunto de partida.</td></tr>
<tr><td>Grupo 6</td><td>
Conclusiones
1. Realizando el diagrama sagital con sus relaciones correspondientes, se puede determinar si es o no una función, sin necesidad de gráficas o prueba de la recta vertical.
2. Con la ecuación (relación de la g) se obtiene los puntos de llegada.
3. Si la gráfica es una figura que está estrecha o completamente cerrada, muy probable que no sea función</td></tr>
</table>

Grupo 2	 Conclusiones •Es una función cuando los elementos del conjunto de partida se relacionan con solo un elemento del conjunto de llegada. •Se puede ser una función aunque a los elementos del conjunto de llegada les lleguen varias flechas. •Si es una función al trazar lineas verticales sobre la grafica de esta solo la corta en un punto. •Toda función se puede expresar como una ecuación.	facilitando la comprensión de conceptos y situaciones. También resulta valioso que señalen que: “el conjunto de llegada es dependiente del conjunto de partida”, aquí, se está hablando de la variable independiente y la variable dependiente en una función. Es importante también que identifican la utilidad de la ecuación para encontrar los elementos que son imagen de los elementos del dominio.

3.2.2.2 Análisis: respuestas a las preguntas de la actividad 2

Para este apartado, se intentará sintetizar el informe, dado que los grupos son numerosos. Para ello, se presentan gráficas comparativas del rendimiento de cada grupo, y se analizarán, como se ha venido haciendo hasta el momento las respuestas aportadas por el grupo 9°3 (grupo IMPROVE). La siguiente ilustración es una comparativa del rendimiento de todos los grupos en esta actividad. Es necesario recordar que en el momento de su implementación ya los estudiantes de 9°3 estaban trabajando bajo la metodología IMPROVE, mientras que los otros grupos continuaban trabajando de manera convencional. La presente actividad se desarrolló bajo la misma disposición.

Ilustración 20. Desempeño de los grupos, Actividad 2.



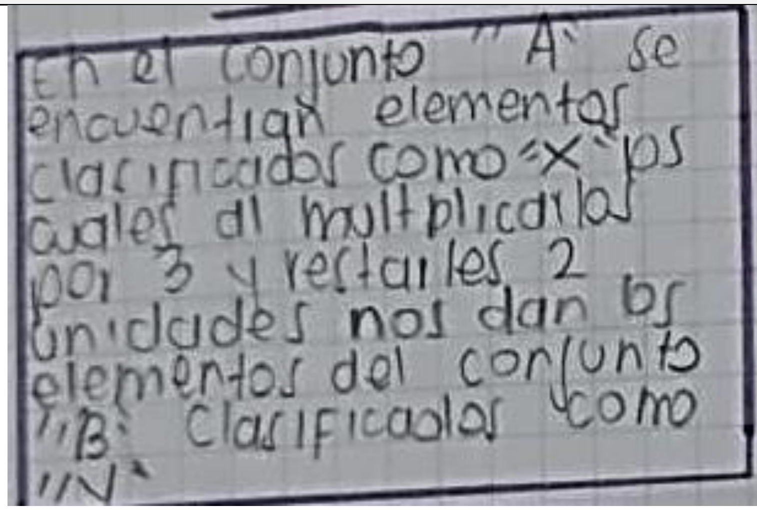
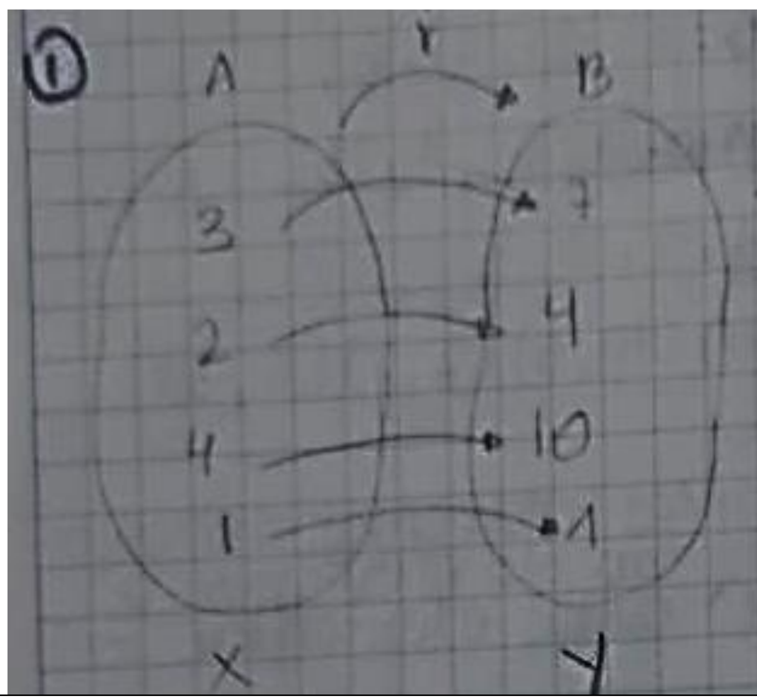
	GRUPO 9°1	GRUPO 9°2	GRUPO 9°3	GRUPO 9°4
SUPERIOR	0%	5%	25%	8%
ALTO	21%	24%	11%	39%
BÁSICO	39%	24%	17%	32%
BAJO	39%	46%	47%	21%

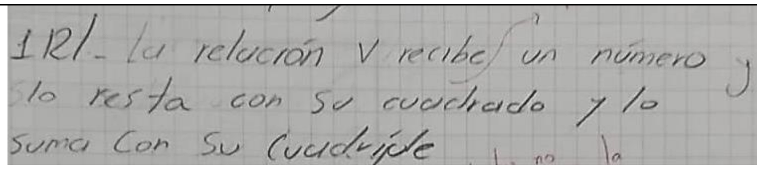
La ilustración 20 muestra varios hechos que son importantes: la mayor proporción de estudiantes en desempeño superior se encuentra en el grupo IMPROVE. Es necesario remitirnos aquí a la tabla 12, donde se puede evidenciar que ningún estudiante de este grupo había obtenido este desempeño en la prueba diagnóstica.

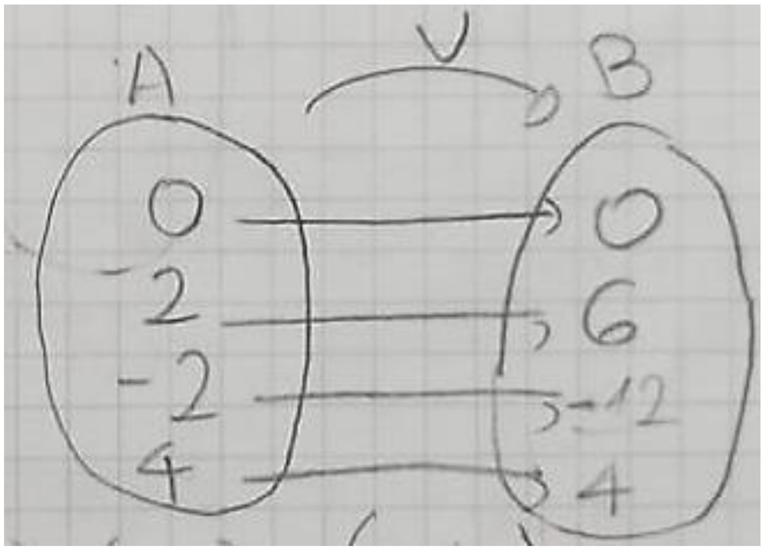
Se esperaba que la proporción de estudiantes con desempeño bajo en este grupo fuera menor que en los demás grupos. Sin embargo, es importante hacer notar el hecho de que en todos los grupos se redujo la proporción de estudiantes en desempeño bajo en comparación con la prueba diagnóstica. De manera general, el grupo 9°4 demostró mejor rendimiento que los demás, toda vez que, bajo los criterios de IMPROVE, un 47% de los estudiantes habrían alcanzado el dominio (valoración de 80% o más). No obstante, debe ser tomado en cuenta que el grupo IMPROVE se subdividió en parejas heterogéneas (según los criterios de la metodología) para realizar este trabajo, mientras que, en los demás grupos, los estudiantes tenían la libertad de escoger a su compañero de trabajo. Esto dio pie, a que en estos grupos se formaran parejas con estudiantes de desempeños similares, y que esto, pudiese favorecer los resultados de algunos estudiantes.

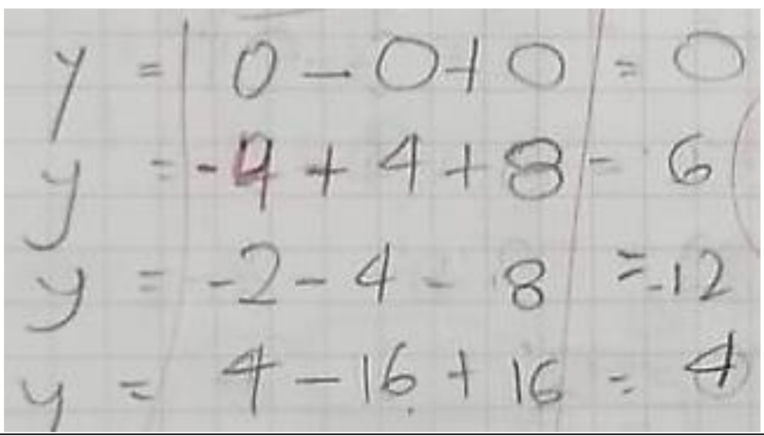
3.2.2.2.1 Análisis: situación 1, actividad 2, grupo 9°3

Tabla 52. Respuestas de los estudiantes a la situación 1, actividad 2

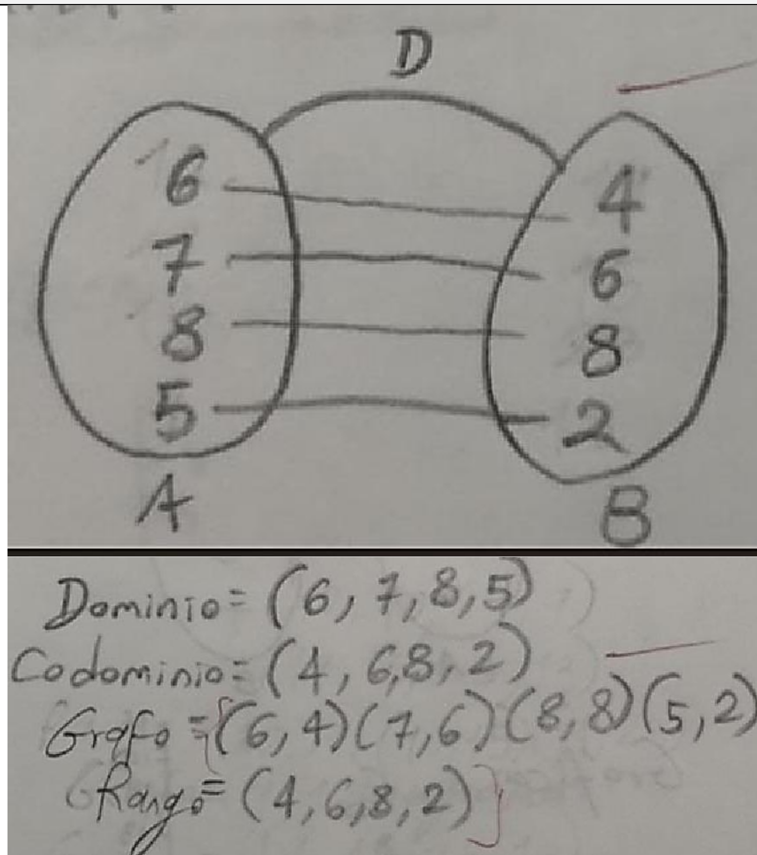
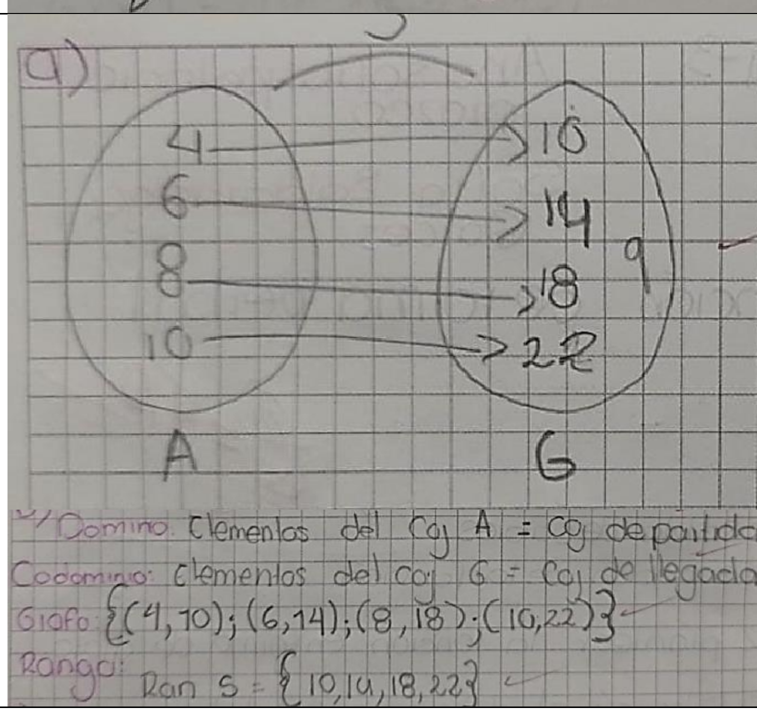
Situación 1 **Plantear una función expresada en forma verbal, luego, encontrar los siguientes elementos:** - **Diagrama sagital** - **Dominio** - **Codominio** - **Rango** - **Grafo** - **Tabla de valores** - **Ecuación**		
Diagrama Sagital		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	**Observaciones**
Grupo 4	 	En esta pregunta, las dificultades que se observaron están relacionadas primero, con plantear mediante un enunciado verbal una relación que pueda expresarse por medio de una ecuación, y segundo, con la dificultad de usar correctamente las operaciones para encontrar las imágenes de los elementos del dominio, esto es lo que puede verse en la respuesta del grupo 3. El grupo 4 representa correctamente la función en el diagrama sagital, fue el mismo caso de otros grupos que también lo hicieron de esta manera.

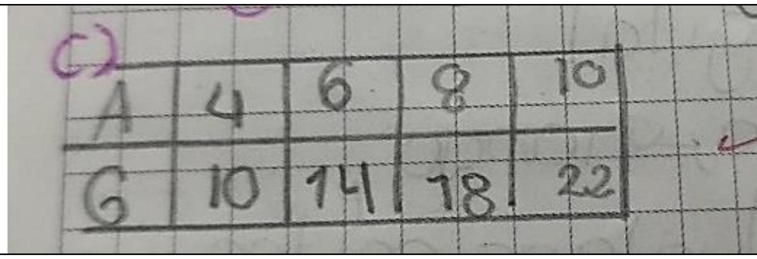
<table>
<tr>
<td>Grupo 3</td>
<td>


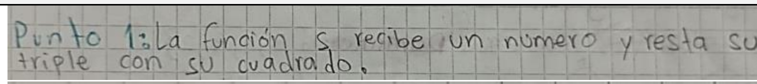
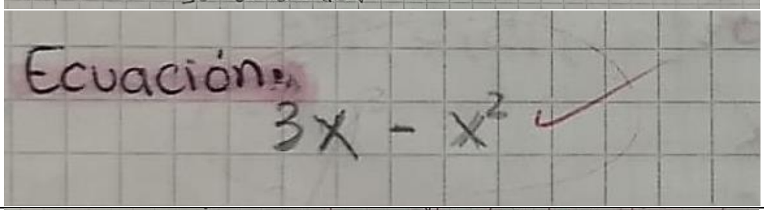
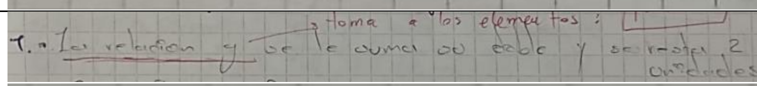
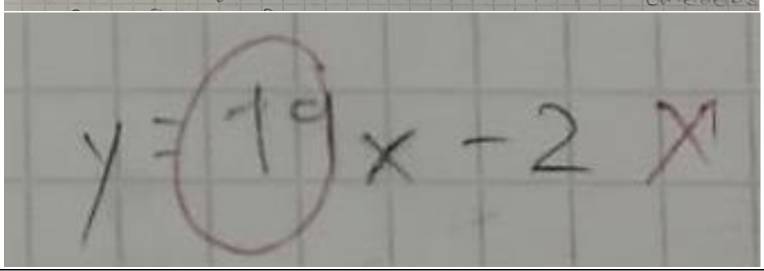




</td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Dominio, codominio, rango, grafo y tabla de valores.</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>Grupo 10</td><td>
</td><td rowspan="2">Con esta pregunta ningún grupo tuvo dificultad, incluso, aquellos que respondieron incorrectamente la anterior identifican bien estos elementos de las funciones. Es destacable la respuesta que da el grupo 5, pues se evidencia allí que comprenden la diferencia entre el codominio y el rango. Dado que la tabla de valores, al igual que el grafo se compone de las parejas ordenadas, los estudiantes también lo obtuvieron correctamente.</td></tr>
<tr><td>Grupo 5</td><td>
</td></tr>
</table>

Ecuación		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	**Observaciones**
Grupo 3	 	Se observan aquí dos casos opuestos: el primer equipo pasa correctamente de la expresión verbal a la ecuación, por ende, lo que desarrollaron en el resto de la situación se hizo de la manera correcta. En contraste, el segundo equipo no logra encontrar una ecuación que sea equivalente al enunciado que plantearon, incluso, las palabras usadas llegan a ser un poco imprecisas.
Grupo 12	 	

3.2.2.2.2 Análisis: situación 2, actividad 2, grupo 9°3

Tabla 53. Respuestas de los estudiantes a la situación 2, actividad 2

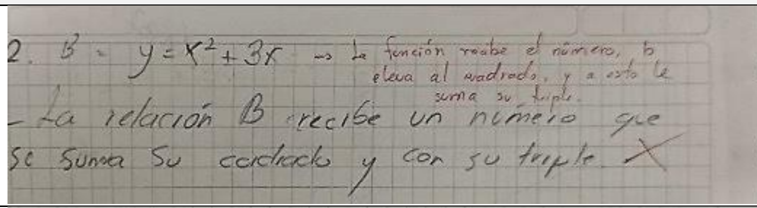
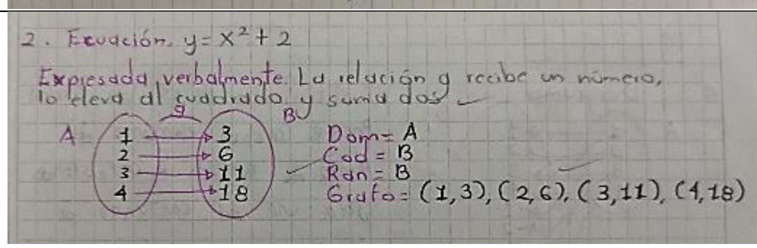
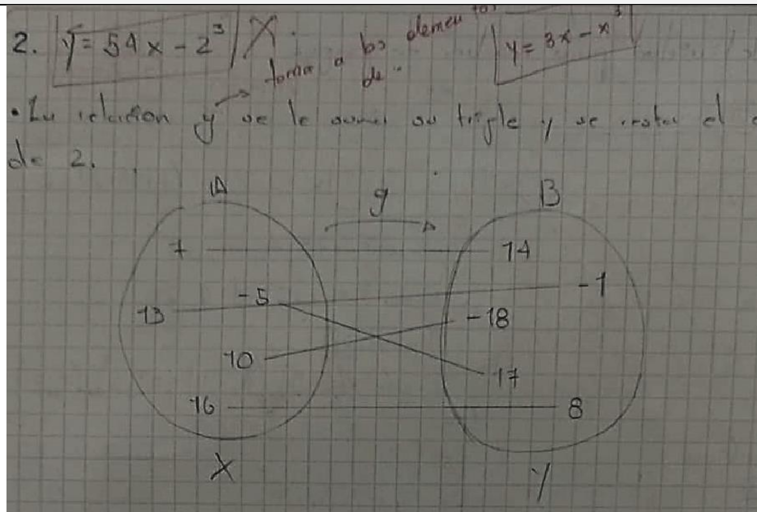
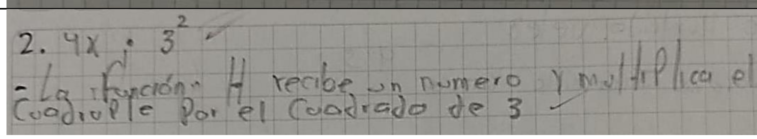
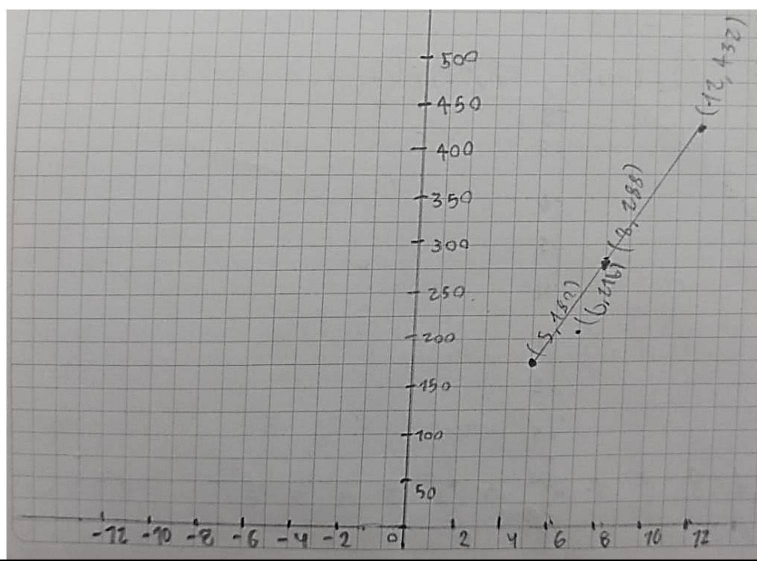
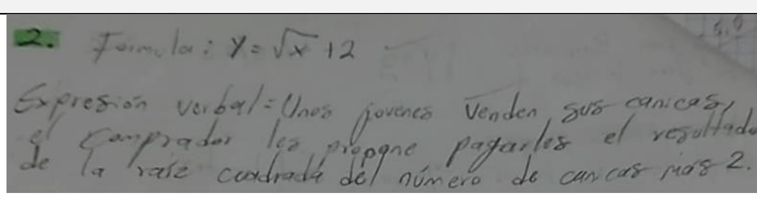
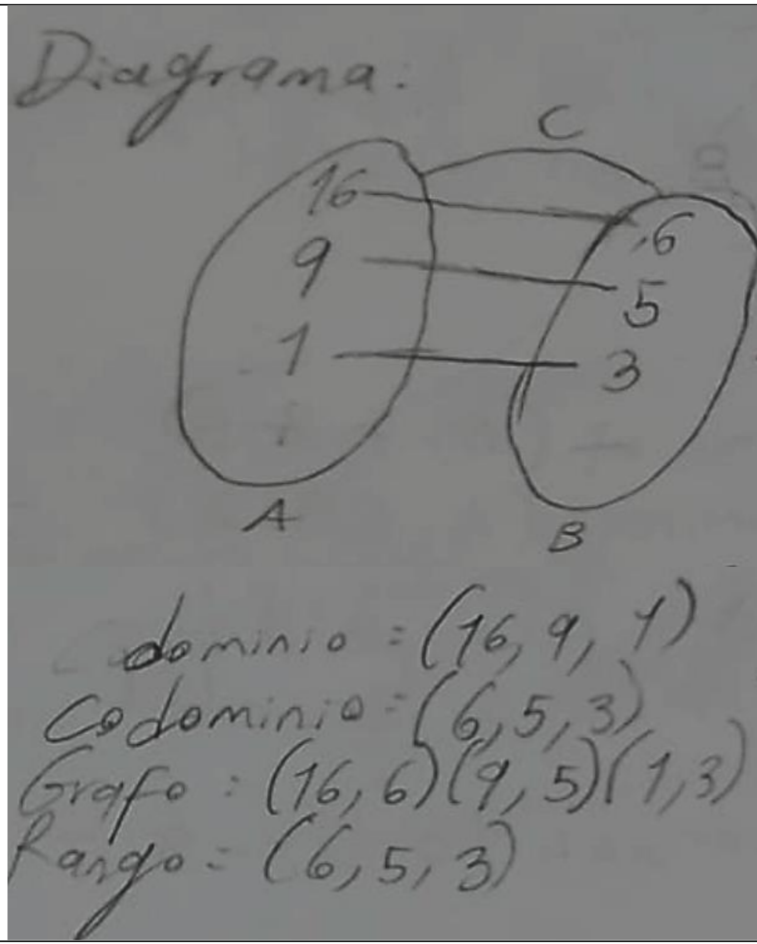
Situación 2 **Plantear una función expresada como una fórmula, luego, determinar:** - **Su expresión en forma verbal** - **Tabla de valores** - **Gráfica** - **Diagrama sagital** - **Dominio** - **Codominio** - **Rango** - **Grafo**		
Expresión verbal		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	**Observaciones**
Grupo 3	 2. B = $y = x^2 + 3x$ → La función recibe el número, lo eleva al cuadrado, y a esto le suma su triple. La relación B recibe un número que se suma su cuadrado y con su triple	Una vista rápida de la respuesta que da el primer grupo podría parecer correcto, sin embargo, es importante analizar con cuidado, pues cuando afirman que “recibe un número que se suma su cuadrado con su triple”, la fórmula que podría representar este enunciado debería ser: $y = x + x^2 + 3x$, nuevamente, se hace visible la dificultad para expresar verbalmente las ecuaciones. El otro grupo hace un planteamiento correcto, resaltando que usan la operación de potenciación, pues la mayoría de los grupos confundió la expresión “lo eleva al cuadrado” con el duplo de un número, lo que les llevó a plantear multiplicaciones equivocadas.
Grupo 11	 2. Ecuación $y = x^2 + 2$ Expresada verbalmente: La relación g recibe un número, lo eleva al cuadrado y suma dos A B g 1 → 3 2 → 6 3 → 11 4 → 18 Dom = A Cod = B Rgn = B Grafo = (1,3), (2,6), (3,11), (4,18)	

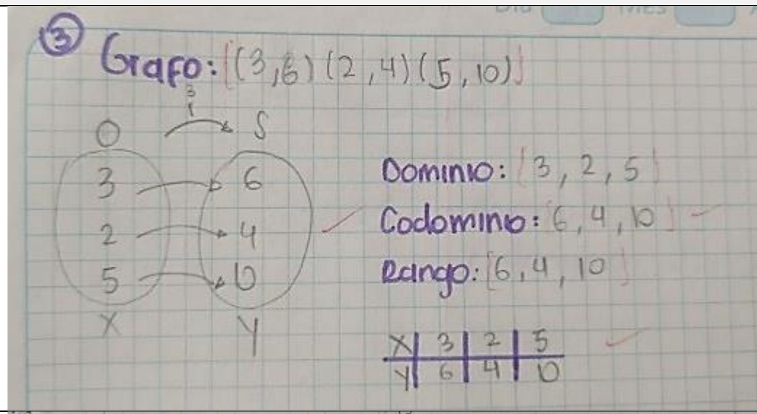
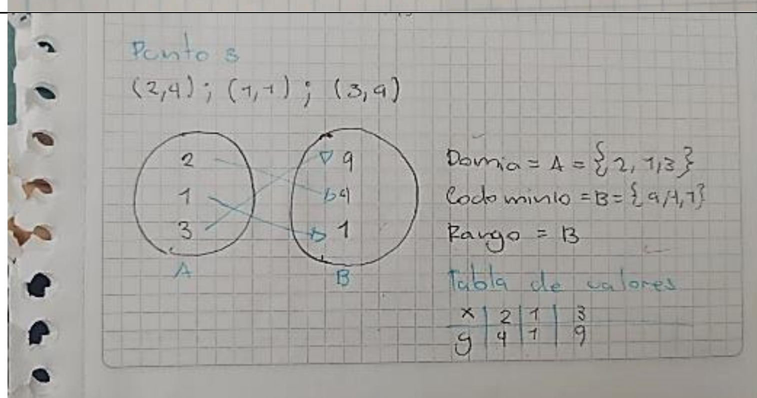
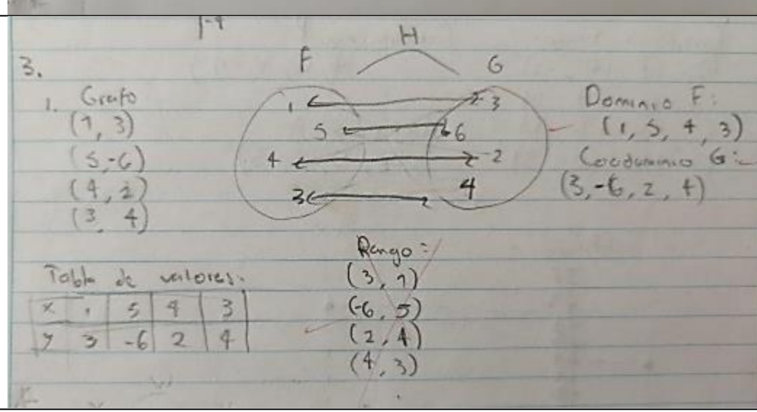
Tabla de valores, gráfica, grafo.		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	**Observaciones**
Grupo 12		En el primer grupo es notable la dificultad para expresar la ecuación en forma verbal, como a otros estudiantes, les cuesta expresar expresiones como “el triple de”, “el doble de”, y otras, además, los elementos del conjunto B no corresponden con ninguna de las dos funciones (ecuación y verbal), por lo tanto, se infiere que los eligieron al azar, sin tomarlas en cuenta para encontrar la tabla de valores. El segundo grupo plantea una ecuación válida y la expresa acertadamente en forma verbal, no obstante, se les indicó que la expresión propuesta podía ser simplificada así: $y = 4x \cdot 3^2$ $y = 9 \cdot 4x$ $y = 36x$ También, la gráfica que realizan corresponde con la función, la escala es adecuada para los valores de la variable dependiente.
Grupo 17		

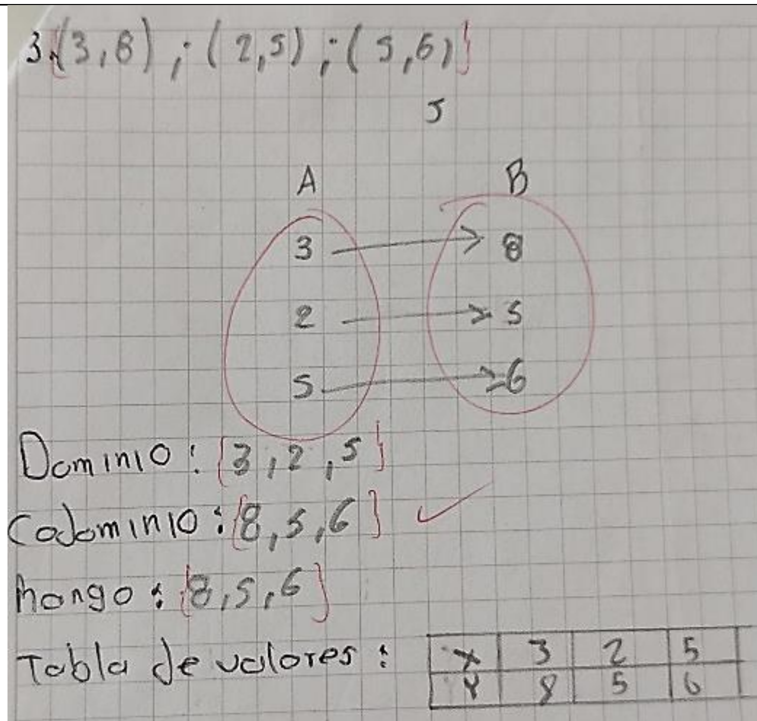
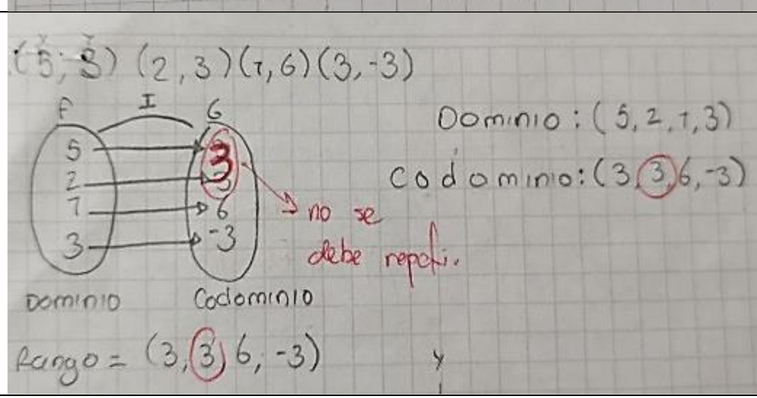
Dominio, codominio, rango		
Grupo de trabajo	**Respuesta**	**Observaciones**
Grupo 10		Obtener el dominio, codominio y rango de la función, ya sea expresada como grafo o diagrama sagital ha sido una habilidad que los estudiantes han desarrollado durante

		la aplicación de las actividades, en general, todos los grupos diferencian bien estos elementos.

3.2.2.2.3 Análisis: situación 3, actividad 2, grupo 9°3

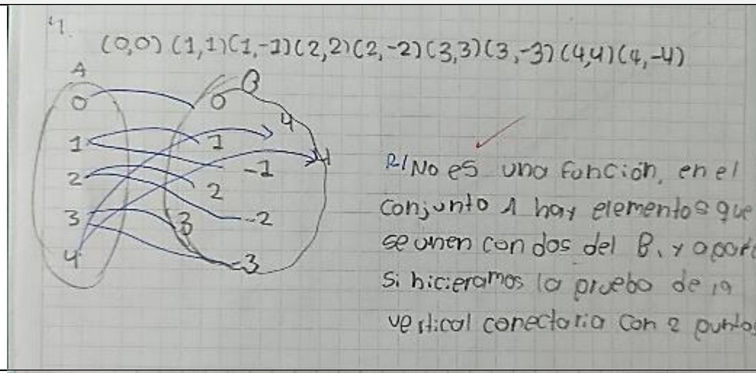
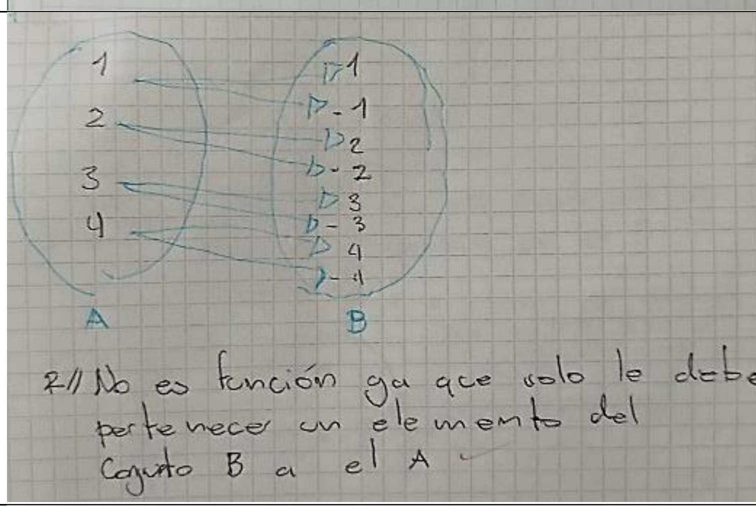
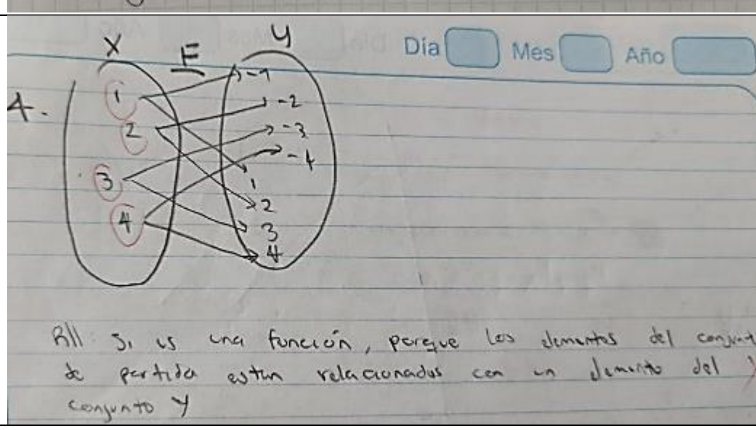
Tabla 54. Respuestas de los estudiantes a la situación 3, actividad 2

<table>
<tr><th colspan="3">Situación 3
Plantear una función expresada como grafo, luego, encontrar los siguientes elementos:
- Diagrama sagital
- Dominio
- Codominio
- Rango
- Tabla de valores</th></tr>
<tr><th colspan="3">Diagrama sagital, dominio, codominio, rango, tabla de valores.</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>
</td><td rowspan="3">Esta es la pregunta en la que mayores fortalezas se observaron en los grupos de trabajo, todos los que lo realizaron lo hicieron debidamente, únicamente hubo un par de grupos que no la realizaron, aduciendo a motivos de tiempo. Solamente en el tercer grupo se observa una confusión del grafo de la función (conjunto de puntos) con el rango (conjunto de imágenes), los demás grupos parecen identificar los elementos pedidos sin mayor dificultad. También se presentó un caso de un grupo, en el cual un elemento del codominio era imagen de dos elementos del dominio, y al representarlo, repitieron el elemento.</td></tr>
<tr><td>Grupo 13</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Grupo 9</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Grupo 17</td>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Grupo 16</td>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

3.2.2.2.4 Análisis: situación 4, actividad 2, grupo 9°3

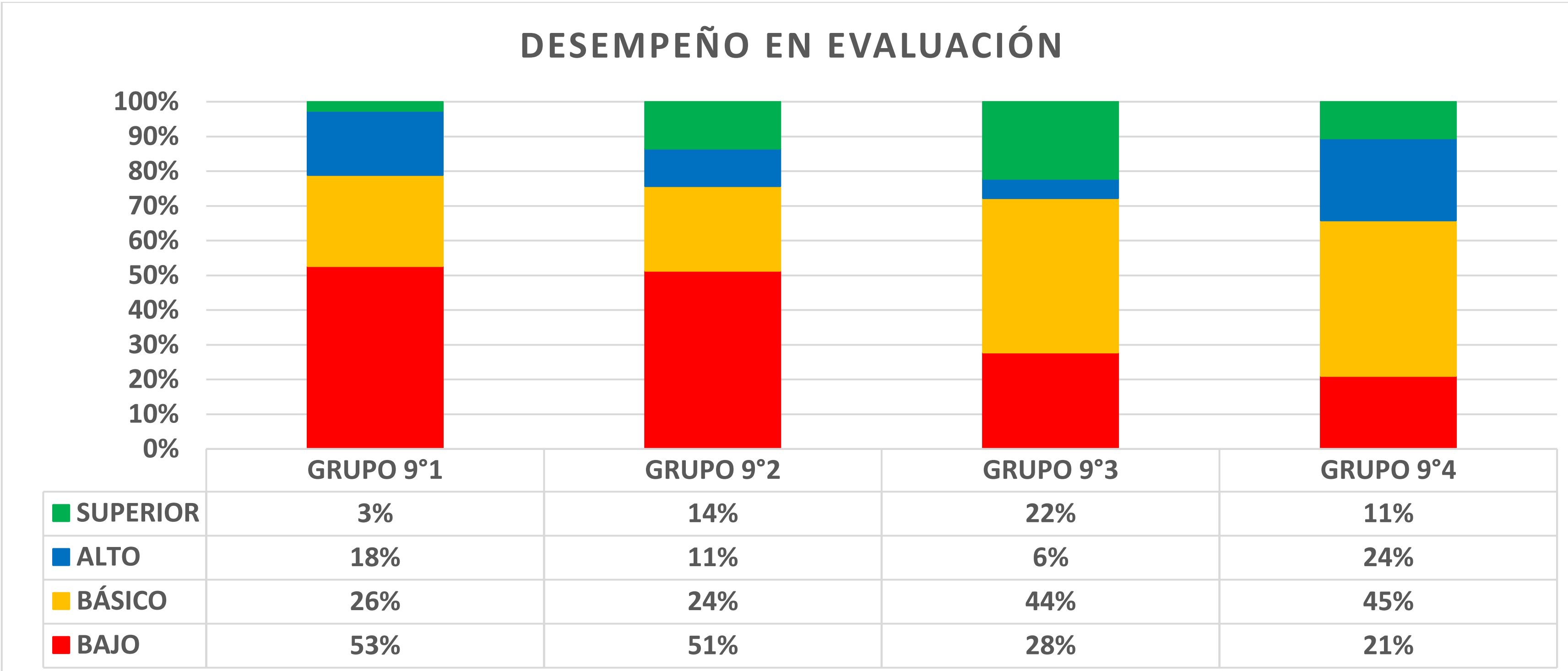
Tabla 55. Respuestas de los estudiantes a la situación 4, actividad 2

<table>
<tr><th colspan="3">Situación 4
A partir de la siguiente gráfica, obtenga un diagrama sagital, luego, explique si la gráfica corresponde o no a una función.</th></tr>
<tr><th>Grupo de trabajo</th><th>Respuesta</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>Grupo 17</td><td>
</td><td rowspan="3">A excepción del grupo 9, que concluye incorrectamente, argumentando que los elementos del dominio tienen única imagen aun cuando representan correctamente el diagrama sagital, donde se observa que los elementos tienen dos imágenes cada uno, los demás grupos de trabajo concluyen correctamente, aunque en algunos se ven imprecisiones en la explicación aportada, como el argumento usado por el grupo 13, aun así, el desempeño de los grupos de trabajo en esta situación fue bueno.</td></tr>
<tr><td>Grupo 13</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Grupo 9</td><td>
</td></tr>
</table>

3.2.2.3 Análisis: respuestas a las preguntas de la evaluación

Para el análisis de esta evaluación se presenta el gráfico que contiene los niveles de desempeño de todos los grupos, para tener un panorama más claro al momento de comparar los resultados. En este caso no se analiza pregunta por pregunta como en las dos actividades anteriores. Con la intención de continuar sintetizando la información, se presentarán evidencias fotográficas de la presentación de las evaluaciones y se hacen los comentarios pertinentes de acuerdo con lo que se pudo observar en la prueba, que fue presentada por todos los grupos.

Ilustración 21. Desempeño de los grupos en la evaluación



La ilustración 21 muestra un comportamiento similar al observado en la ilustración 20, es decir, los grupos con más bajo desempeño continúan siendo 9°1 y 9°2, e igualmente, 9°4 continúa con la mayor proporción de estudiantes en desempeño alto y superior (estudiantes que alcanzaron el dominio) con un 11% en superior y un 24% en alto, mientras que en el grupo IMPROVE sucede un fenómeno diferente: la proporción de estudiantes en desempeño bajo disminuye en relación a la actividad 2, pasando del 47% al 28%.

En cambio, no sucede lo mismo con los desempeños básicos que pasa del 17% al 44%, mientras que el desempeño disminuye del 11% al 6%. De manera similar, los estudiantes en desempeño superior disminuyen del 25% al 22%, que no resulta preocupante desde el análisis del resultado, pues es necesario recordar que esta última actividad evaluativa fue realizada de manera individual. Frente a ello, una hipótesis sería que hayan algunos estudiantes que estando en desempeño superior en la actividad anterior, se hayan visto beneficiados (en su valoración final) por el trabajo en parejas heterogéneas. Es decir, aunque sea catalogado con un rendimiento superior en trabajos grupales, su desempeño a individual podría diferir. A pesar de esto último, es importante resaltar que el grupo IMPROVE es el que más estudiantes pasan de desempeño bajo a uno de los otros desempeños, pues esta proporción decrece en un 19%, contra un crecimiento del 14%, del 5% y 0% en los grupos 9°1, 9°2 y 9°4 respectivamente.

Ilustración 22. Evidencia 1, presentación de la evaluación.

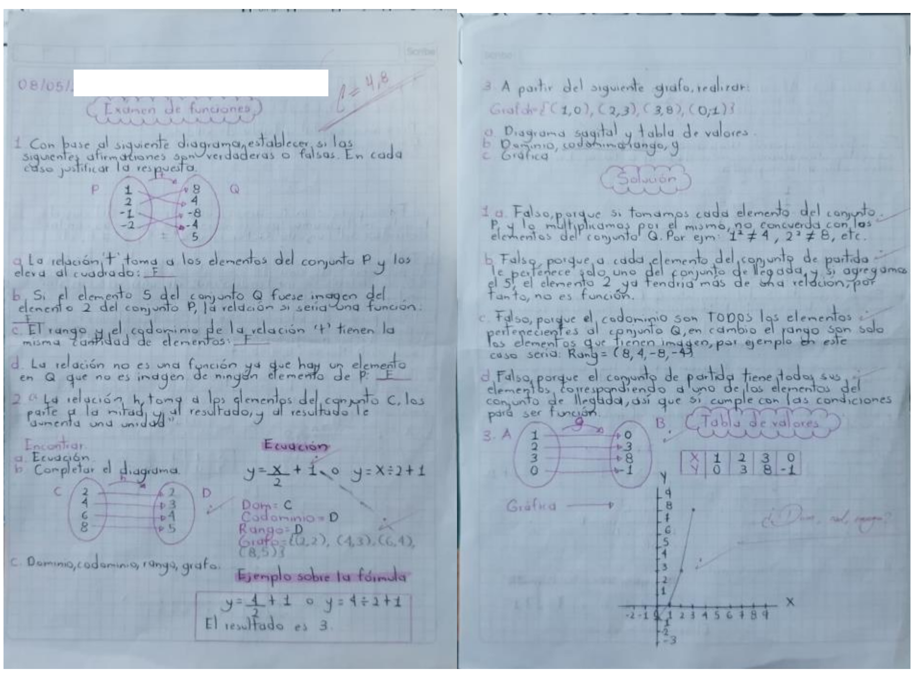
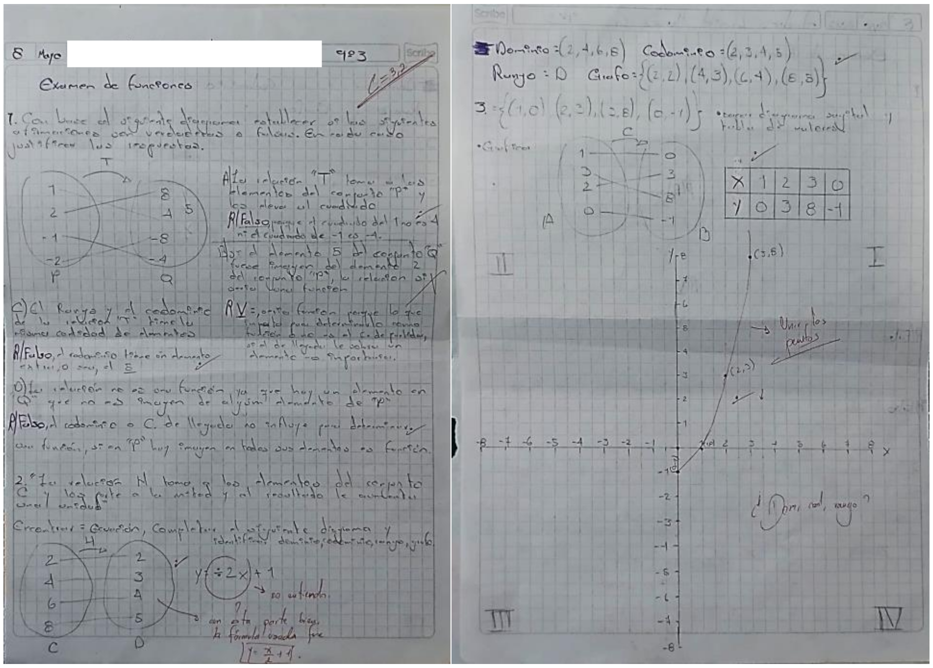


Ilustración 23. Evidencia 2, presentación de la evaluación



De manera general, con la calificación de esta evaluación, varias fortalezas y oportunidades de mejora se observaron en los estudiantes de los cuatro grupos. Entre las fortalezas podemos destacar que la mayoría identifica elementos de la función como el dominio, el codominio y el grafo, el rango, en menor medida, pues algunos todavía muestran confusión entre este y el codominio. También lo es pasar de una forma de representación a otra, especialmente el paso de una tabla de valores a la gráfica, de una gráfica al diagrama sagital encontrar a partir de una fórmula el diagrama sagital.

También se observó con frecuencia que los estudiantes formulan y proponen justificaciones válidas para probar si cierta representación corresponde o no con una función. Es destacable que los estudiantes del grupo IMPROVE usaran argumentos relacionados con la definición de función y, por ende, la restricción sobre los elementos del dominio, al igual que el criterio de la recta vertical cuando se trata de una gráfica. Los demás grupos, por otro lado, apelan, en la mayoría de los casos, a la definición. De igual manera, en estos grupos es donde más a menudo se presentaron casos de estudiantes que no justificaron sus respuestas, mientras los estudiantes del grupo IMPROVE formularon argumentos con una mayor propiedad y creatividad.

Una oportunidad de mejora está relacionada con la representación gráfica de las funciones, tanto para pasar de ésta a cualquier otra representación, como trazar la gráfica a partir de una ecuación, un grafo, un diagrama sagital o una tabla de valores. Constantemente los estudiantes confunden los ejes del plano cartesiano o cambian el orden de las coordenadas (x, y). En otros casos les cuesta llevar a cabo las operaciones con una fórmula para encontrar su valor numérico. Ambas situaciones se vienen observando desde la prueba diagnóstica, aunque se ha mejorado en este aspecto. Otro aspecto para mejorar tiene que ver con los enunciados verbales que deben ser representados mediante ecuaciones, y viceversa, aún se observa una marcada desconexión entre estas dos representaciones en muchos estudiantes.

Es importante señalar, que en la pregunta 1 de la evaluación, algunos estudiantes del grupo IMPROVE no demostraron las dificultades que sí se evidenciaron en la mayoría de los estudiantes de los demás grupos, particularmente, en los numerales a) y b), en el primero, muchos estudiantes no identificaron correctamente la regla de correspondencia entre los elementos del dominio y el codominio, en el segundo numeral se presentaron la mayor cantidad de respuestas equivocadas, pues para muchos estudiantes la relación no era una función, ya que el elemento '5' que hacía parte del codominio no es imagen de ningún elemento del dominio, esto los llevó a concluir que el numeral b) era verdadero, conclusión equivocada, de acuerdo con la definición de función. Esta conclusión también llevó a muchos a responder equivocadamente al numeral d), pues ambos están ligados. El numeral c) fue el de menos dificultad de acuerdo con las respuestas que se dieron en la prueba, teniendo en cuenta que en las actividades anteriores una de las fortalezas fue la identificación de elementos de la función, este era un resultado esperable para este tipo de pregunta.

En la pregunta 2, es en la que más dificultades presentaron los estudiantes, primero, plantear la ecuación del enunciado: "la relación 'h' toma a los elementos del conjunto 'C', los parte a la mitad y al resultado le aumenta una unidad", de manera especial, plantear en la ecuación una operación que representara la frase: "los parte a la mitad" fue un desafío para muchos. Entre los estudiantes del grupo IMPROVE se vieron una buena proporción de las respuestas correctas a este numeral. Otra parte crítica en esta pregunta fue completar el diagrama sagital, pues al no encontrar una ecuación adecuada para el enunciado, se hizo imposible encontrar un diagrama con los datos correctos. Con el numeral c), se demuestra nuevamente la fortaleza para identificar elementos de la función.

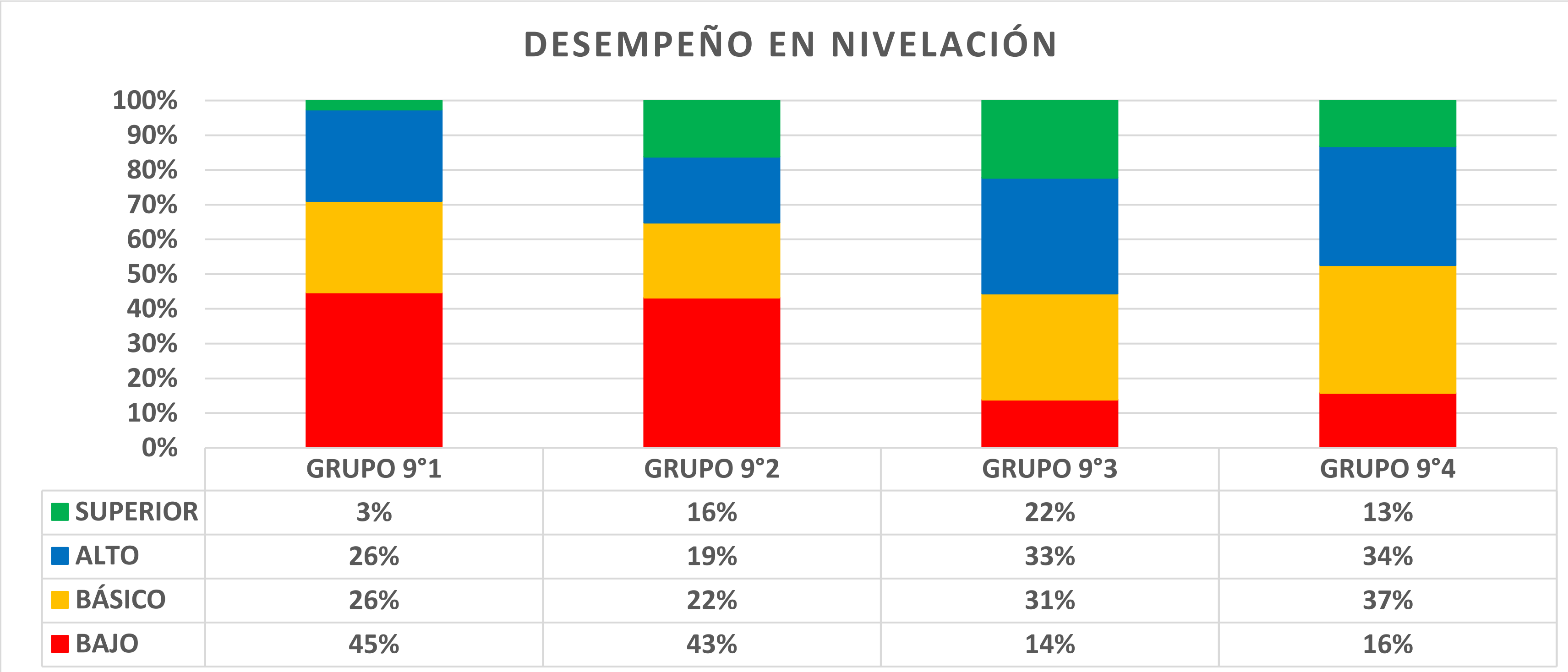
Para la pregunta 3, la fortaleza recién mencionada se hizo una vez más evidente, aunque se partió de una representación diferente (grafo), una buena parte de los estudiantes pasan de esa representación al diagrama sagital y a la tabla de valores, igualmente, una vez más, identifican correctamente los elementos (dominio, codominio y rango). La única dificultad en esta pregunta se observó cuando se les pidió a los estudiantes realizar la gráfica, especialmente porque continúa la práctica de invertir el orden de las coordenadas de los puntos.

Finalmente, es importante mencionar que aun en esta prueba individual, los estudiantes del grupo IMPROVE usaron las herramientas de cuestionamiento metacognitivo, la instrucción dada fue usarlas para solucionarla de manera reflexionada, autorregulada y pausada, para buscar el mejor resultado posible. No obstante, muchos estudiantes no hicieron uso de las herramientas, aduciendo a que, al no tener un interlocutor para interactuar, no hallaron la forma de darles uso.

3.2.2.4 Análisis: nivelación

Este análisis se presenta de la misma forma que el anterior, se verá un panorama general que la gráfica del rendimiento de todos los grupos, para posteriormente analizar con un poco más de énfasis en el grupo IMPROVE, sin dejar completamente de lado a los grupos de control. En el caso de la nivelación, es necesario aclarar que solamente se aplicó a estudiantes que quedaron en rendimiento bajo y básico, de acuerdo con la clasificación que se realizó en la tabla 5. La intención es verificar cuántos estudiantes de este conjunto mejoran su rendimiento y alcanzan el dominio, es decir, se clasifican en desempeños alto y superior. Por esta razón, las valoraciones obtenidas en la evaluación no se modificaron, a no ser que un estudiante mejorara su nivel de desempeño en la presente nivelación.

Ilustración 24. Desempeño de los grupos en la nivelación



	GRUPO 9°1	GRUPO 9°2	GRUPO 9°3	GRUPO 9°4
SUPERIOR	3%	16%	22%	13%
ALTO	26%	19%	33%	34%
BÁSICO	26%	22%	31%	37%
BAJO	45%	43%	14%	16%

La ilustración 24 presenta la comparativa del rendimiento de todos los grupos en la nivelación. Es importante compararla con la ilustración 21, para determinar de una manera más precisa cómo ha sido la evolución del grupo IMPROVE con relación a los demás grupos en el estudio de las funciones matemáticas.

De acuerdo con lo que se observa en las ilustraciones, del grupo donde más estudiantes salieron del desempeño bajo hacia otros desempeños fue en el grupo IMPROVE, con un 14% menos estudiantes en este desempeño con relación a la primera evaluación. Otro hecho interesante que debe ser destacado es que, en todos los casos excepto en el grupo 9°1, la proporción de estudiantes en desempeño básico disminuyó. Lo importante es que también lo hizo la proporción de estudiantes en desempeño bajo en todos los grupos. Es decir, que bajo las condiciones de esta nivelación -únicamente presentada por estudiantes en desempeño bajo y básico-, en todos los grupos el desempeño general mejoró, siendo probable que incluso estudiantes en desempeño bajo hayan alcanzado el dominio -desempeño alto o superior-.

Es también importante destacar el avance de 6% a 33% en desempeño alto para el grupo IMPROVE: Esto es una señal del avance de los estudiantes que no habían alcanzado el dominio, pues el aumento del 27% solamente puede provenir de estudiantes en desempeños bajo o básico. Adicionalmente, los grupos 9°1 y 9°3 (IMPROVE) son los únicos grupos que no aumentaron su proporción de estudiantes en desempeño superior, como sí lo hicieron -aunque no tan notoriamente- los otros dos grupos. No obstante, el desempeño de IMPROVE se antoja superior al del resto de los grupos, teniendo en cuenta que entre estudiantes en desempeños alto y superior acumulan un 55%, en comparación al 29% de 9°1, el 35% de 9°2 y el 47% de 9°4.

Ilustración 26. Evidencia 1, presentación de la nivelación

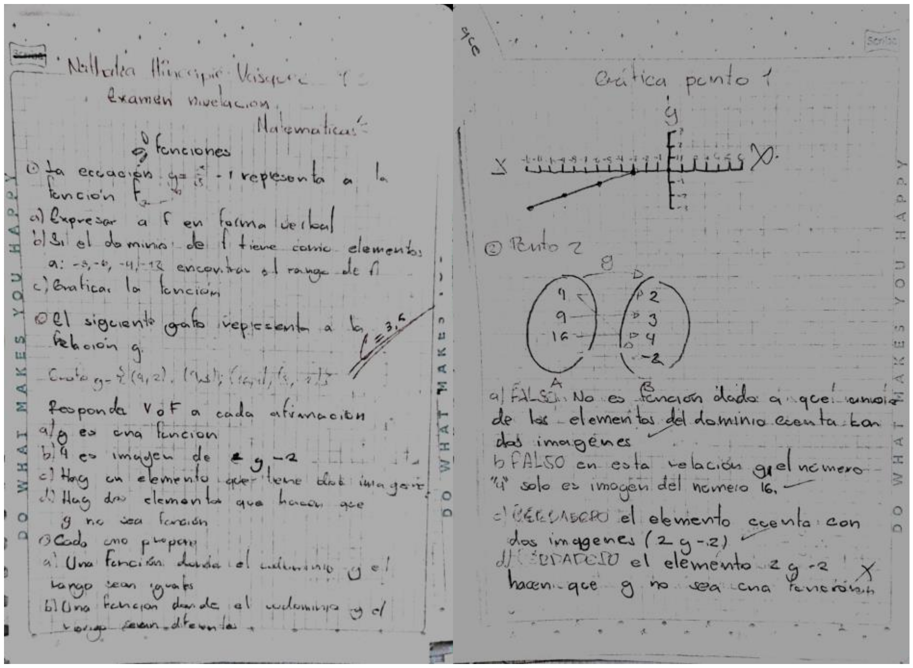
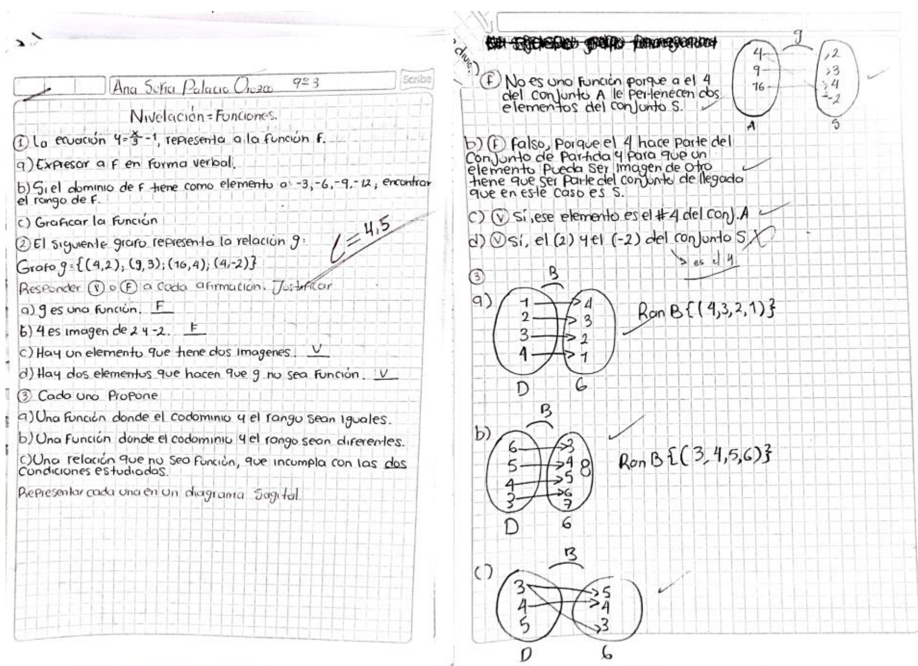

examen nivelación
Matemáticas
funciones
Gráfica punto 1
Punto 2

Ilustración 25. Evidencia 2, presentación de la nivelación


Ana Sofía Palacio Ochoa 9°3
Nivelación = Funciones.
① La ecuación $y=\frac{x}{3}-1$, representa a la función f.
a) Expresar a f en forma verbal.
b) Si el dominio de f tiene como elemento a: -3, -6, -9, -12, encontrar el rango de f.
c) Graficar la función
② El siguiente grafo representa la relación g:
Grafo g = {(4,2); (9,3); (16,4); (4,-2)}
Responder V o F a cada afirmación. Justificar
a) g es una función. F
b) 4 es imagen de 2 y -2. F
c) Hay un elemento que tiene dos imagenes. V
d) Hay dos elementos que hacen que g no sea función. V
③ Cada uno Propone
a) Una función donde el codominio y el rango sean iguales.
b) Una función donde el codominio y el rango sean diferentes.
c) Una relación que no sea función, que incumpla con las dos condiciones estudiadas.
Representar cada una en un diagrama Sagital
F No es una función porque a el 4 del conjunto A le pertenecen dos elementos del conjunto S.
b) F falso, porque el 4 hace parte del conjunto de partida y para que un elemento pueda ser imagen de otro tiene que ser parte del conjunto de llegado que en este caso es S.
c) V sí, ese elemento es el #4 del conj. A
d) V sí, el (2) y el (-2) del conjunto S
Ron B {(4,3,2,1)}
Ron B {(3,4,5,6)}

Aunque no se esperaba, la prueba de nivelación resultó un poco más desafiante para los estudiantes. Es por esta razón que se observa poca evolución para tener rendimiento superior. Sin embargo, es importante aclarar nuevamente que bajo los parámetros de IMPROVE, el objetivo pasa por lograr que la mayor cantidad de estudiantes alcancen el dominio.

Refiriéndonos a las preguntas de la nivelación, se pudo observar, por ejemplo, que la ecuación del primer punto: $y = \frac{x}{3} - 1$, causó problemas a varios estudiantes, a algunos no les fue posible expresarla mediante un enunciado verbal. Y a una buena parte, las operaciones necesarias para completar el rango de la función. Por ejemplo, para un valor $x = -3$, la operación que debía realizarse era: $y = -\frac{3}{3} - 1 = -1 - 1 = -2$. En esta operación muchos estudiantes cometen errores básicos, como no tomar en cuenta la ley de signos para realizar la división o al final sumar y dar un resultado negativo, incluso, realizar una resta y obtener como resultado 0, de aquí se sigue que muchos estudiantes realizaron un gráfico incorrecto.

En la segunda pregunta, se destacó una mayor fortaleza en los numerales a) y b), donde la mayoría respondió y justificó sus respuestas sin dificultades significativas. En contraste, los numerales c) y d) generaron confusión, ya que algunos estudiantes tuvieron dificultades al identificar el conjunto al que pertenecían los valores de la función, o tomaron al ‘4’, que tenía dos imágenes, como si fuesen dos elementos los que no cumplen con las condiciones que da la definición de función, sin embargo, dicho elemento al estar relacionado con dos elementos del codominio era el único que incumplía con la definición.

La tercera pregunta, justamente fue pensada para observar en los estudiantes planteamientos donde fuesen necesarias habilidades cognitivas de alto nivel. Al no otorgar opciones de respuesta, ni problemas planteados para resolver, debían ser ellos quienes propusieran una solución que cumpliera con los criterios solicitados. Aquí una de las mayores fortalezas fue que la mayoría de los estudiantes representaran funciones usando diagramas sagitales. Se ven diferentes tipos de funciones, e incluso, una buena parte de quienes lo hacen asignan elementos del codominio bajo alguna regla matemática (fórmula). Con respecto al numeral b), es claro que aún muchos estudiantes no diferencian debidamente entre codominio y rango, pues plantearon funciones en donde ambos conjuntos eran idénticos, sin cumplir completamente con lo requerido. En cuanto al numeral c), la mayoría de los estudiantes representa correctamente una relación que no es función, debido a que uno de los elementos del dominio posee dos imágenes. Pero pasan por alto la otra condición, de que no haya elementos del dominio sin imagen, es decir, no la representan.

3.3.2.5 Análisis: actividades de enriquecimiento

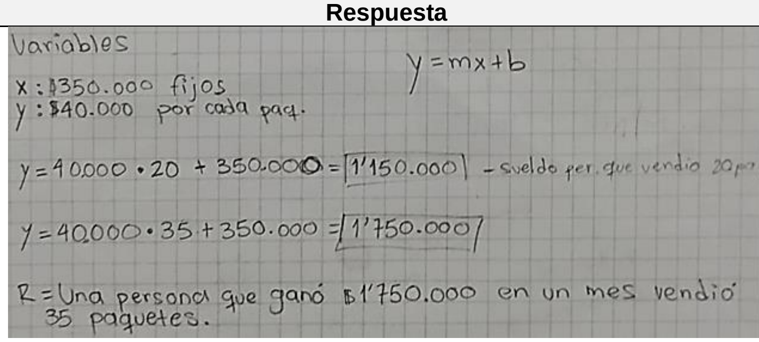
Estas actividades están pensadas para desarrollar las habilidades necesarias para el razonamiento matemático en los estudiantes que alcanzan el dominio, según IMPROVE. No obstante, es importante mencionar que, para el diseño de estas situaciones problemas se usaron las ***funciones lineales, ecuaciones de la recta y los sistemas de ecuaciones lineales 2x2***. Es decir, que los estudiantes continuaron con el estudio de las funciones de variable real, funciones lineal y afín, ecuaciones de la recta, para posteriormente trabajar con los sistemas de ecuaciones lineales.

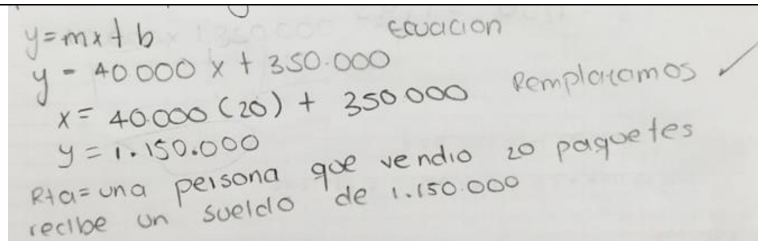
Otro aspecto importante, es que este trabajo fue realizado por todos los estudiantes, no únicamente por quienes quedaron clasificados como estudiantes que alcanzaron el dominio, el objetivo era determinar, si a través del estudio posterior a la teoría de las funciones (función lineal y ecuaciones de la recta) incluso los estudiantes que no habían alcanzado el dominio hasta la nivelación podían proponer soluciones creativas y acordes a lo que se les solicitó.

No sobra señalar, que los estudiantes del grupo IMPROVE continuaron estudiando, haciendo uso de las herramientas de metacognición descritas en la tabla 6, mientras que los demás grupos continuaron con enseñanza convencional. Además, estos problemas no se calificaron de acuerdo con lo consignado en la tabla 5. El aspecto más importante de esta actividad pasaba por establecer cómo los estudiantes se plantean solución a diferentes situaciones usando lo aprendido hasta el momento de su aplicación.

3.2.2.5.1 Análisis, actividades de enriquecimiento, situación 1

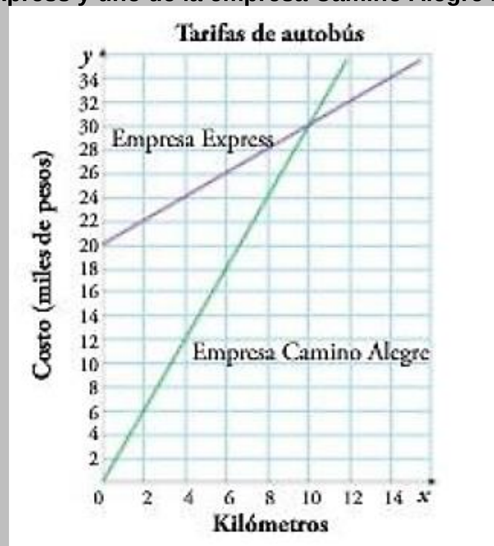
Tabla 56. Respuestas, actividades de enriquecimiento, situación 1

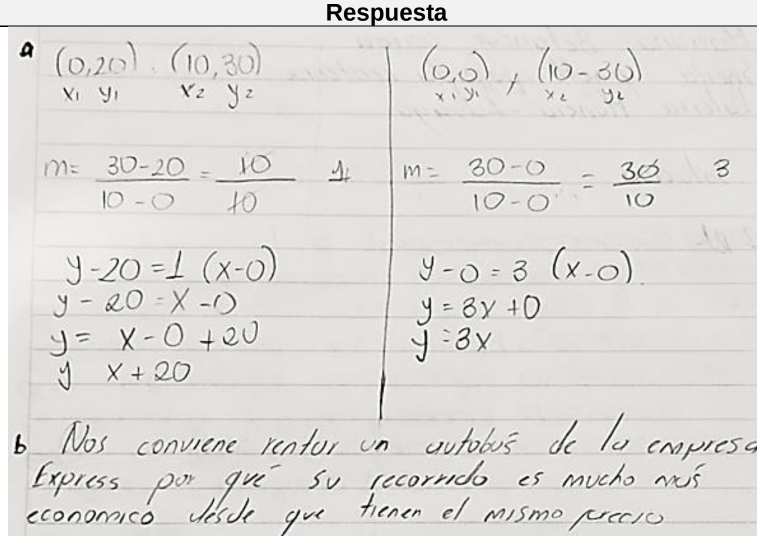
Situación 1		
Problema 1 **Una compañía de telecomunicaciones paga mensualmente a cada empleado de la sección de ventas \$350.000 fijos más \$40.000 por paquete de servicios vendido. Escribir la ecuación que representa la situación anterior y determinar el sueldo de una persona que vende 20 paquetes de servicios. ¿Cuántos paquetes vendió una persona que ganó \$1.750.000 en un mes?**		
Estudiante	**Respuesta**	**Observaciones**
E903_14	 Variables y = mx+b x : \$350.000 fijos y : \$40.000 por cada paq. y = 40.000 • 20 + 350.000 = 1'150.000 - sueldo per. que vendio 20pa y = 40000 • 35 + 350.000 = 1'750.000 R = Una persona que ganó \$1'750.000 en un mes vendió 35 paquetes.	En la primera respuesta que se entrega por el estudiante, se resalta que identifica correctamente las magnitudes involucradas en el problema y su relación de dependencia, las cuales usa para de

E903_25		forma numérica responder a los interrogantes que plantea la situación, sin embargo, hay una dificultar al momento de generalizar por medio de una ecuación, que en este caso sería $y = 40000x + 350.000$. Con respecto a la segunda respuesta, ya aquí el estudiante sí demuestra capacidad de generalización y modelación de la situación particular, obtiene la ecuación correspondiente y luego propone una solución.

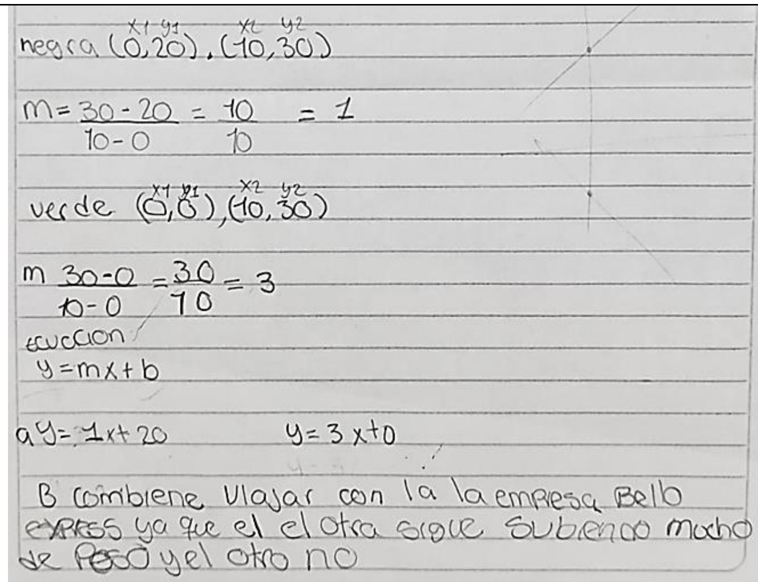
Problema 2

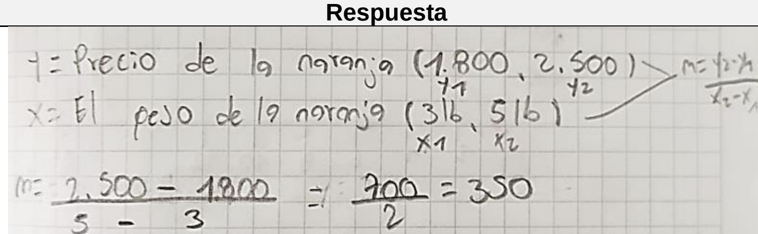
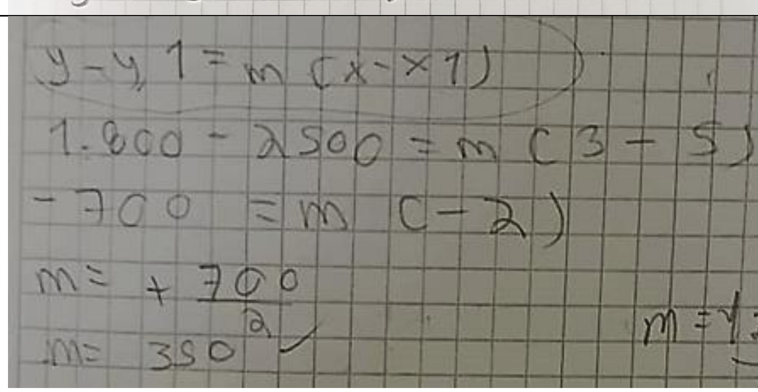
Dos empresas de autobuses ofrecen diferentes tarifas. La siguiente gráfica muestra el costo de renta de un autobús en la empresa Bello Express y uno de la empresa Camino Alegre Bello.[14]



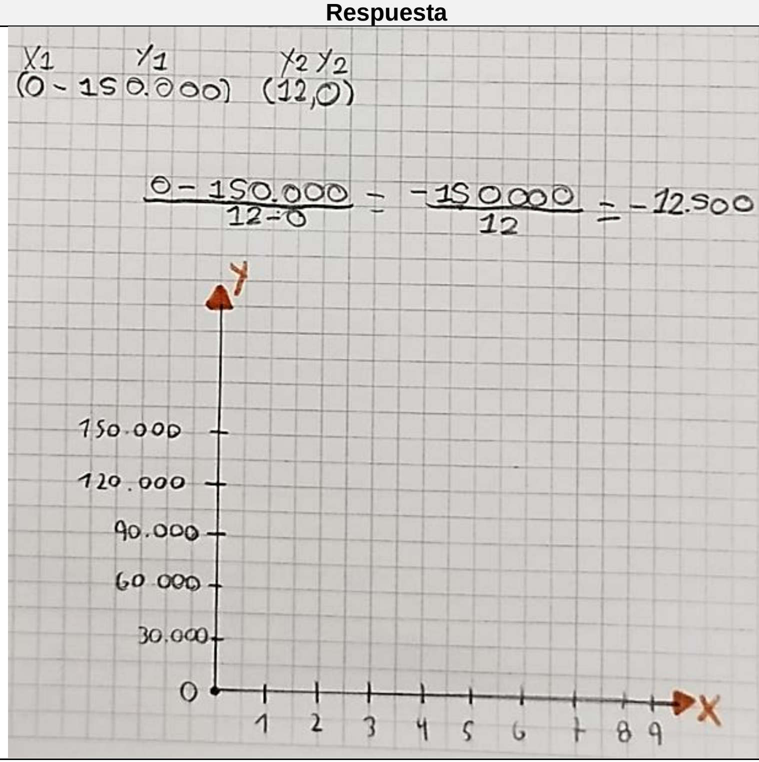
Estudiante	Respuesta	Observaciones
E903_18		En la respuesta del primer estudiante es destacable la solución planteada, relaciona perfectamente las pendientes de cada recta para interpretar la situación, es también necesario señalar que en este punto muestra un poco la tendencia de los educandos a realizar procedimientos automatizados al usar la ecuación punto – pendiente para encontrar la ecuación pendiente – intercepto, para esto

[14] Problema tomado de: Los caminos del saber, Matemáticas 9, editorial Santillana.

E903_30		habría sido suficiente observar los puntos de corte con el eje Y de cada recta. En cuanto al numeral b, identifica a partir de la gráfica la razón por la cual conviene más tomar un viaje largo con una de las empresas, sin embargo, no lo relacionan con el significado de la pendiente. En la segunda respuesta, muy similar a la primera, el estudiante si usa directamente los puntos de corte de cada una de las líneas rectas con el eje Y para proponer las ecuaciones que modelan cada uno de los precios en función de los kilómetros recorridos.

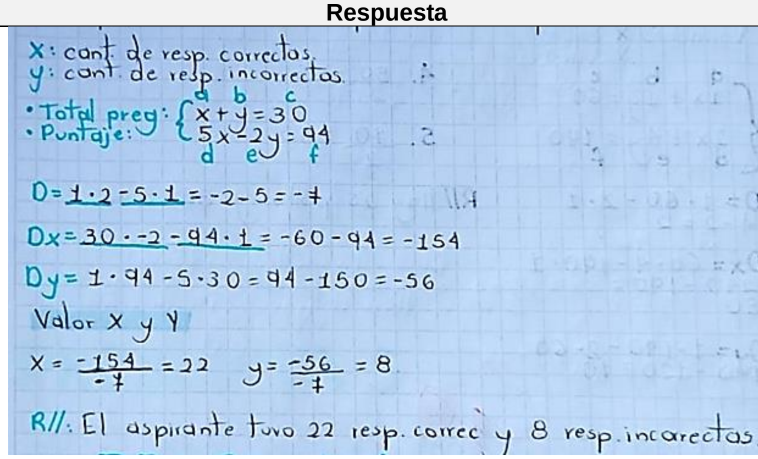
Problema 3 **El precio de 3lb de naranja es $1.800 y el precio de 5lb es $2.500. Si $'y'$ es el precio de la naranja y $'x'$ es el peso, determine la ecuación que representa el precio de la naranja según su peso.**		
Estudiante	**Respuesta**	**Observaciones**
E903_3		En la respuesta de ambos estudiantes suponen correctamente la correspondencia entre libras de naranja y precio en pesos configuran puntos en el plano cartesiano, así determinan la pendiente para saber cuánto se paga por cada libra de naranja. En la segunda solución, el estudiante a partir de la ecuación punto – pendiente concluye la ecuación de la pendiente de la recta, aunque al preguntar por el proceso
E903_33		

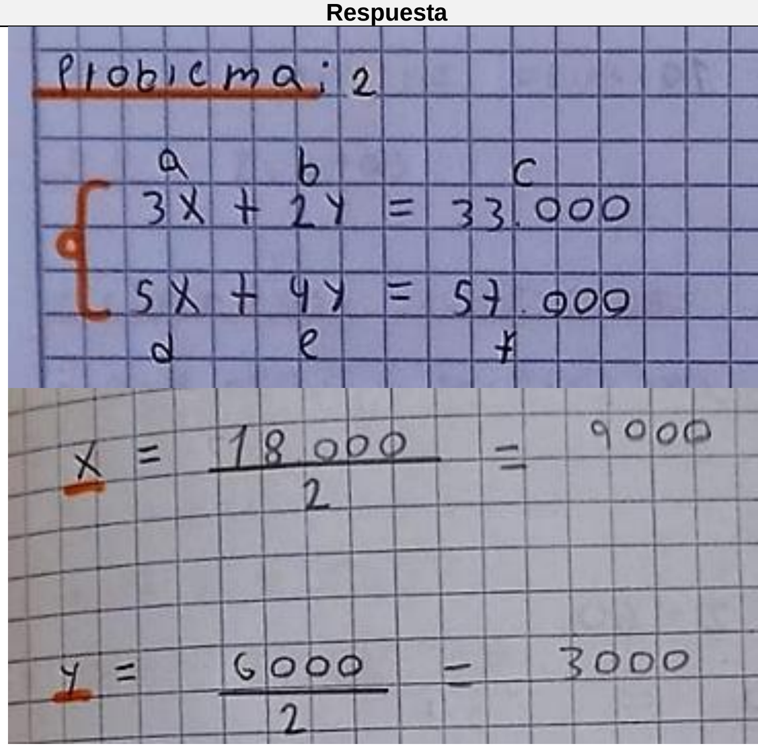
		realizado el estudiante no dio cuenta de por qué había tomado esta decisión, es un procedimiento interesante desde lo algebraico.

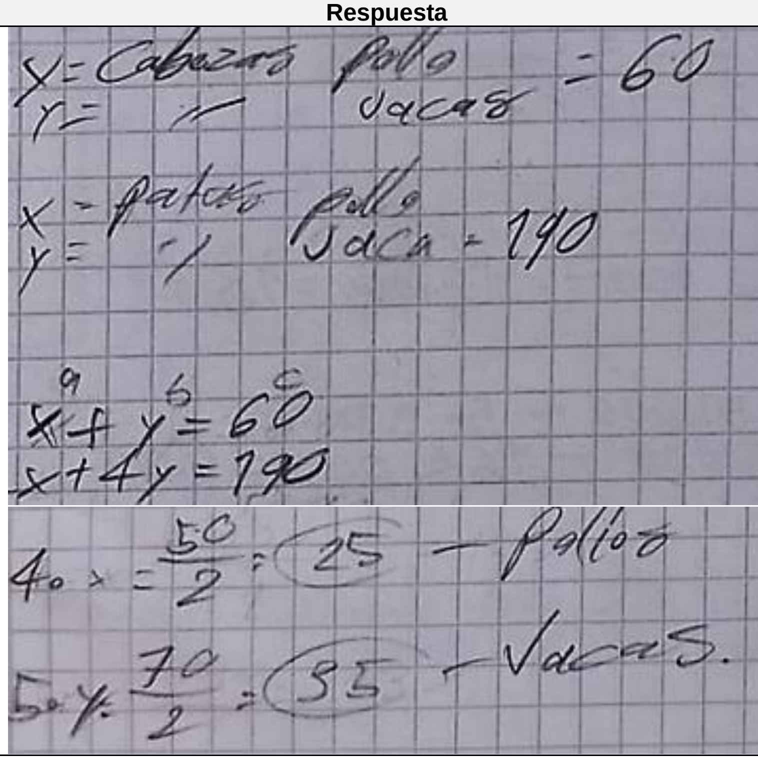
Problema 4 **Una empresa compra cierta maquinaria por 150.000 USD. Se espera que la vida útil de dicha maquinaria sea de 12 años, con un valor de desecho de 0 USD. ¿Cuánto se deprecia la máquina cada año? ¿Cuál es el valor de la máquina al cabo de 6 años?**		
Estudiante	**Respuesta**	**Observaciones**
E903_31		Esta pregunta fue una de las más exigentes para los estudiantes, especialmente, de acuerdo con lo expresado, muchos tuvieron una evidente dificultad para interpretar la frase: “con un valor de desecho de 0 USD”, incluso en la solución que se ve aquí, aunque el estudiante determina correctamente cuánto se deprecia la máquina anualmente (pendiente), no se observa una gráfica ni una interpretación de este valor.

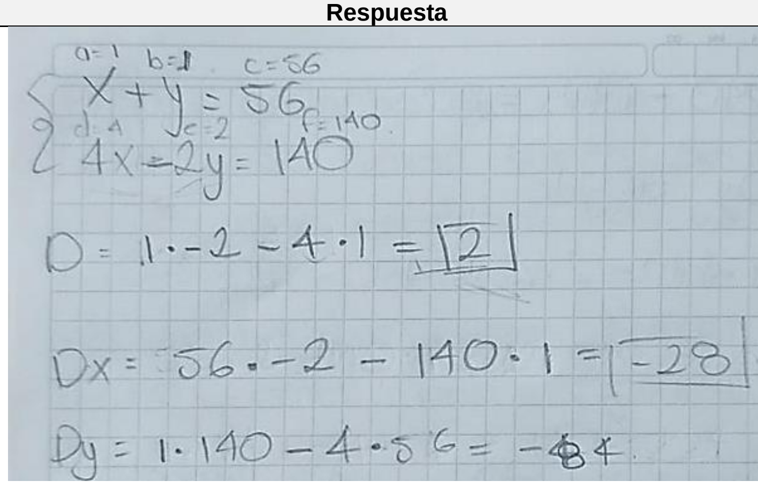
3.2.2.5.1 Análisis: actividades de enriquecimiento, situación 2

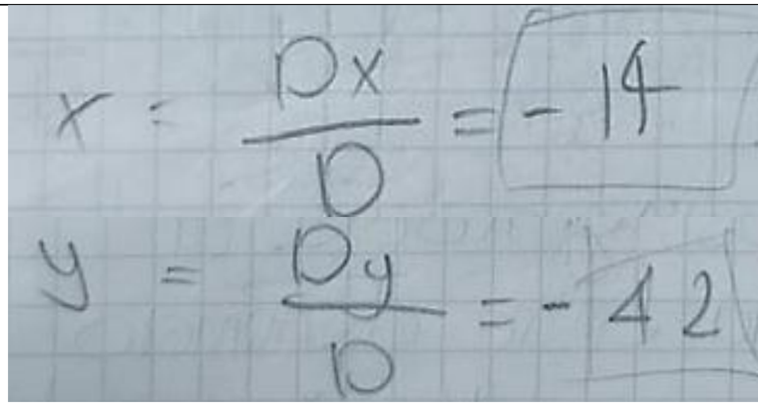
Tabla 57. Respuestas, actividades de enriquecimiento, situación 2

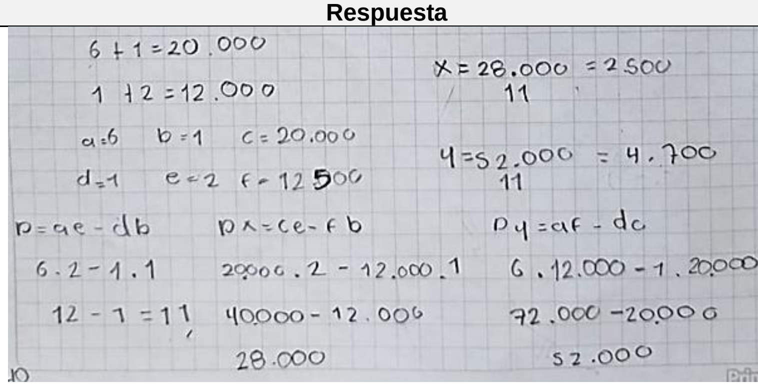
<table>
<tr><td colspan="3">Situación 2
Para cada problema se solicita:
- Identificar las incógnitas del problema.
- Plantear un sistema de ecuaciones lineales.
- Solucionar el sistema y responder.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Problema 1
Un examen de admisión a cierta universidad consta de 30 preguntas. Cada respuesta correcta otorga 5 puntos, mientras que cada respuesta incorrecta o pregunta sin responder, resta 2 puntos en la calificación. Si un aspirante obtuvo un puntaje total de 94 puntos, determine el número de respuestas correctas y el número de respuestas incorrectas o sin responder.</td></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Respuesta</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>E093_10</td><td>
</td><td>En este problema muchos estudiantes, como el que se muestra en la respuesta del estudiante en cuestión, plantean correctamente tanto las variables como el sistema de ecuaciones. Por supuesto, esta parte es la más exigente e importante para solucionar este tipo de problemas. Como se puede ver, como método de solución se está usando la regla de Cramer, por lo que no se requieren tantas habilidades ni conocimientos algebraicos, sino más bien, aritméticos.
Algunos estudiantes, sin embargo, tuvieron una dificultad para plantear la segunda ecuación, pues no tomaron en cuenta el signo ′ − ′ que supone la afirmación del problema donde señala que cada respuesta incorrecta o pregunta sin responder “resta 2 puntos en la calificación”</td></tr>
</table>

Problema 2 **Para entrar a un museo, una persona paga $33.000 por las entradas de 3 adultos y 2 niños. Otra persona paga $57.000 por la entrada de 5 adultos y 4 niños. Determine cuánto cuesta una entrada para adulto y cuánto una entrada para niño.**		
Estudiante	**Respuesta**	**Observaciones**
E093_18		En la solución que plantea este estudiante, si bien es correcta, es necesario señalar que el estudiante plantea el sistema de ecuaciones lineales sin identificar previamente las variables, incluso, al encontrar la solución correcta no señala qué significa cada valor. Dar un significado claro a las variables que intervienen en un sistema de ecuaciones es importante para comprender los resultados encontrados. En este problema la mayoría de los estudiantes trabajaron correctamente sin dificultad, quizá la única cuestión por mejorar tiene que ver con la definición de las variables.

Problema 3 En cierta granja se crían pollos y vacas. Se sabe que en total hay 60 cabezas de animales y que el total de patas es de 190. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?		
Estudiante	**Respuesta**	**Observaciones**
E093_35	 	En este problema se presentó una situación particular, salvo una pequeña parte de los estudiantes, a la mayoría les costó identificar la información para plantear el sistema de ecuaciones, incluso cuando se identificaban bien las variables, muchos estudiantes tendían a mezclar información de las cabezas y las patas de los animales, por esto fue necesario guiar un poco a algunos estudiantes para plantear correctamente la solución de este problema.

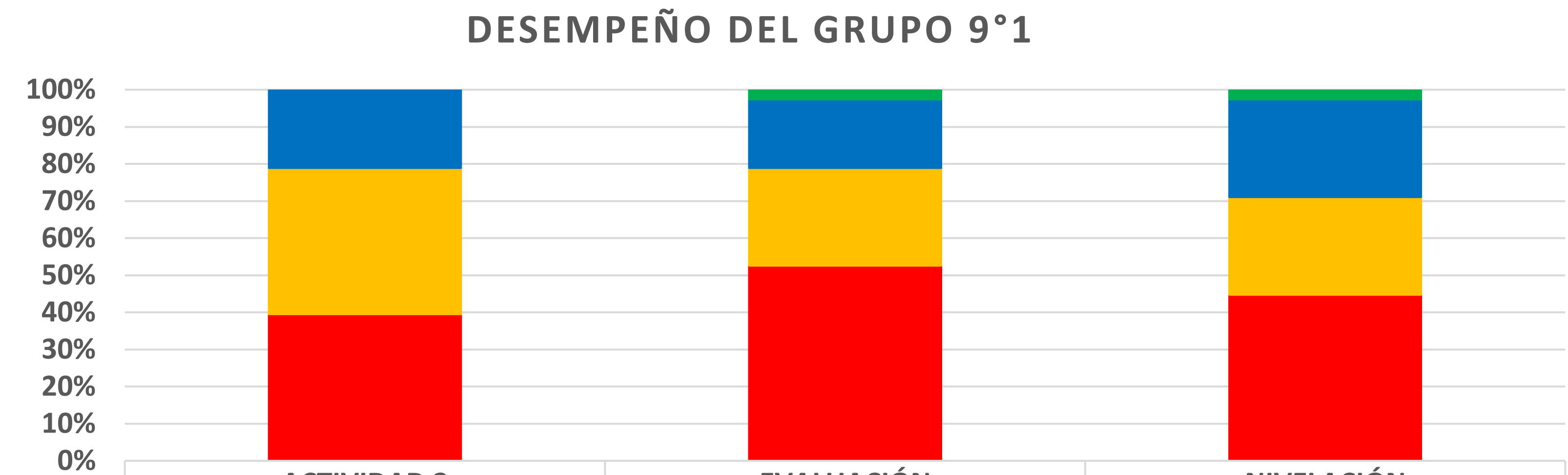
Problema 4 En un taller hay en total 56 vehículos entre automóviles y motocicletas. Si la diferencia entre el número de ruedas es 140. ¿Cuántos automóviles y motocicletas hay en el taller?		
Estudiante	**Respuesta**	**Observaciones**
E093_23	 	Este problema fue el más desafiante para los estudiantes, a la mayoría se les dificultó plantear correctamente una ecuación que representara "la diferencia de ruedas igual a 140", llama la atención incluso el que muchos no consiguieron plantear este sistema, esto demuestra que no asocian la operación de resta al concepto de comparación implícito en ella. Se destaca la respuesta de la estudiante E093_23, pues pertenece a una

		pequeña proporción de estudiantes que plantearon correctamente la solución del problema, siendo una estudiante con desempeño bajo en la evaluación y desempeño básico en la nivelación, es decir, no hace parte de los estudiantes que alcanzaron el dominio en la etapa 6 de IMPROVE, además, es una estudiante con necesidades educativas especiales, dado su diagnóstico de memoria a corto plazo. Es muy destacable la solución que presenta, incluso con la equivocación cometida al calcular $'D'$.

Problema 5 **Una persona va al mercado, compra 6 libras de café y una libra de azúcar por $20.000. Vuelve después y compra 1 libra de café y 2 de azúcar por $12.500. Determine cuánto cuesta una libra de café y cuánto cuesta una libra de azúcar**		
Estudiante	**Respuesta**	**Observaciones**
E093_21		Esta pregunta no presentó muchas dificultades para los estudiantes, en general lo resolvieron correctamente. Es importante analizar la respuesta que se muestra pues, aunque el sistema no está bien planteado ya que no usa las variables y propone desigualdades que son falsas, es probable que haya sido debido a una desatención y no a un error conceptual por parte de la estudiante.

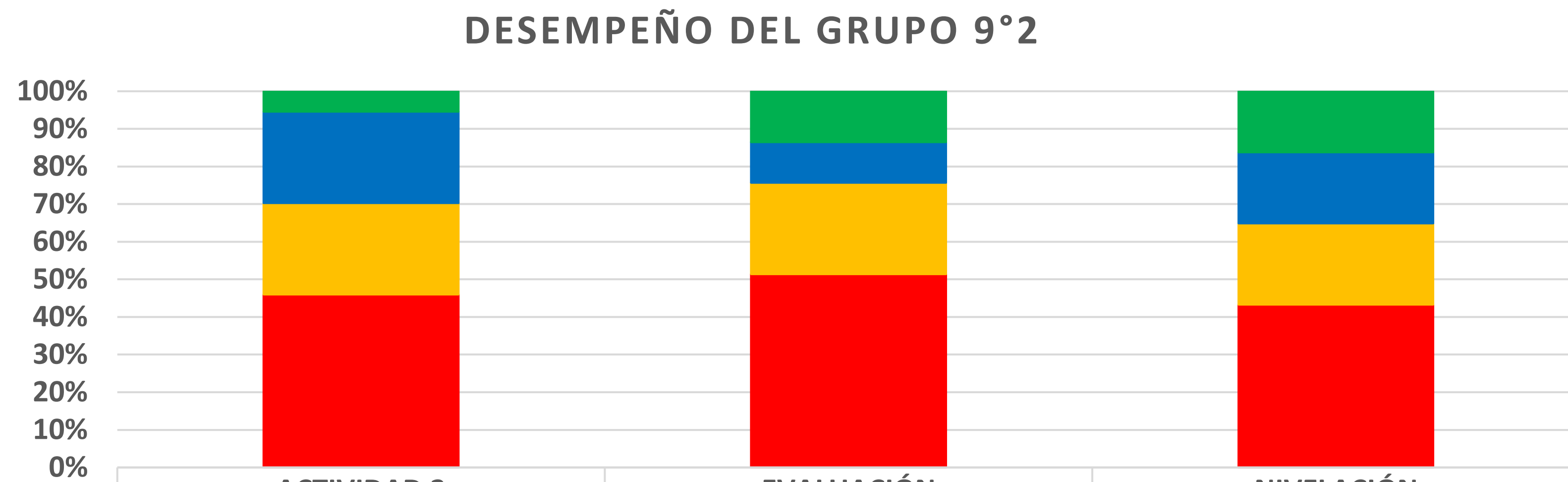
Finalmente, se presentan a continuación las gráficas que muestran cómo han evolucionado cada uno de los grupos en cuanto a sus niveles de desempeño durante el desarrollo de la propuesta de intervención de aula. Nos referimos a estas gráficas más adelante, en las conclusiones del trabajo.

Ilustración 27. Desempeño 9°1 - Propuesta de intervención



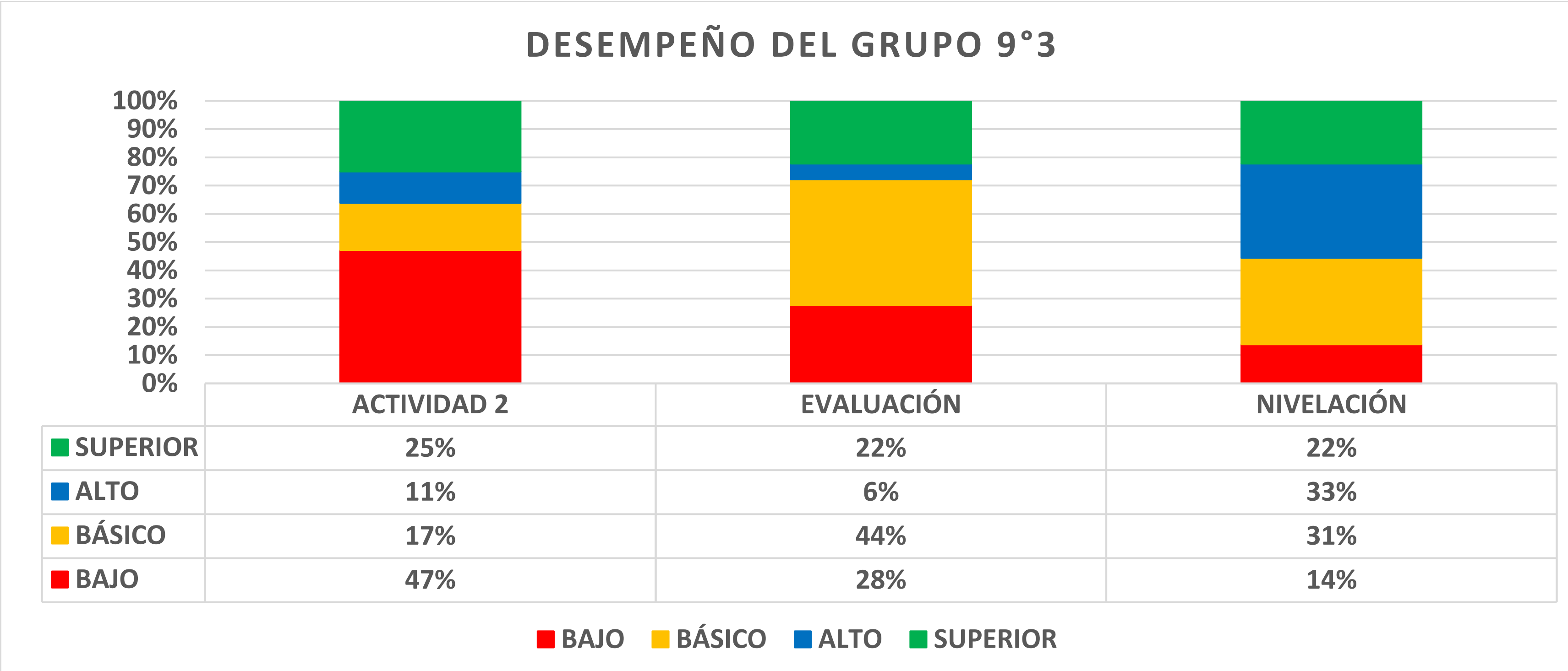
	ACTIVIDAD 2	EVALUACIÓN	NIVELACIÓN
SUPERIOR	0%	3%	3%
ALTO	21%	18%	26%
BÁSICO	39%	26%	26%
BAJO	39%	53%	45%

Ilustración 28. Desempeño 9°2 - Propuesta de intervención



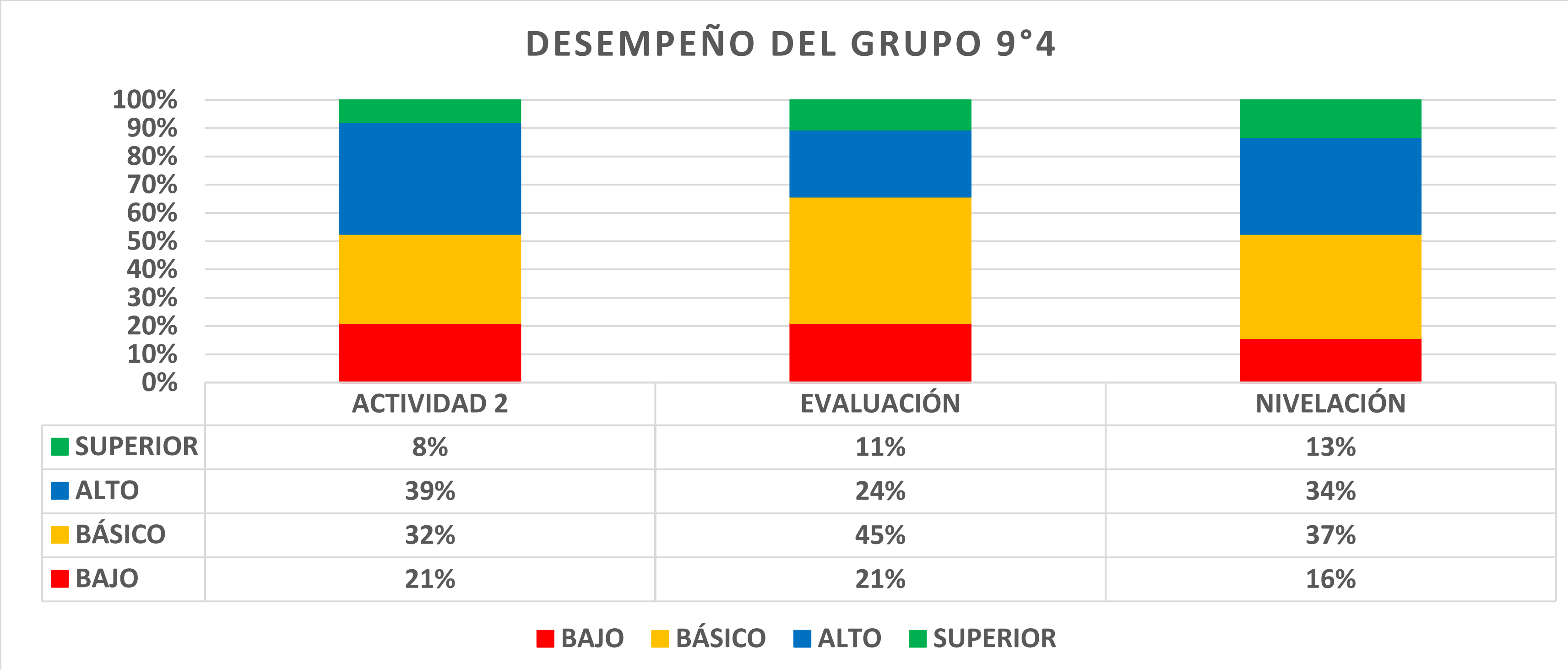
	ACTIVIDAD 2	EVALUACIÓN	NIVELACIÓN
SUPERIOR	5%	14%	16%
ALTO	24%	11%	19%
BÁSICO	24%	24%	22%
BAJO	46%	51%	43%

Ilustración 29. Desempeño 9°3 (Grupo IMPROVE) - Propuesta de intervención



	ACTIVIDAD 2	EVALUACIÓN	NIVELACIÓN
SUPERIOR	25%	22%	22%
ALTO	11%	6%	33%
BÁSICO	17%	44%	31%
BAJO	47%	28%	14%

Ilustración 30. Desempeño 9°4 - Propuesta de intervención



CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

4.1. Conclusiones

La implementación de *IMPROVE* se llevó a cabo una vez realizado el diagnóstico de los saberes previos de los estudiantes con relación a temas y competencias necesarias para el posterior estudio de las funciones matemáticas. En dicho diagnóstico se involucraron competencias relacionadas con los pensamientos variacional, numérico y espacial, lo cual arrojó como resultado niveles de aprendizajes bajos y básicos -con predominancia del desempeño bajo- en la mayoría de los estudiantes que componían la población. Como ya se explicó, IMPROVE requiere la conformación de grupos de estudiantes heterogéneos, en cuanto al rendimiento y niveles de aprendizaje. Fue aquí donde se presentó el primer desafío de este trabajo, pues de acuerdo con los resultados, los estudiantes en desempeños altos y superior no eran suficientes para conformar el número de grupos necesarios bajo estos criterios.

Uno de nuestros mayores retos fue lograr que los estudiantes utilizaran el cuestionamiento metacognitivo planteado por *IMPROVE*. En las primeras sesiones fue común observar que intentaran resolver las situaciones propuestas bajo las mismas estrategias utilizadas de manera regular, lo que hizo necesario la intervención constante del docente para que los estudiantes hicieran uso de las herramientas puestas a disposición para este importante componente en la intervención. Una buena parte de ellos, sin embargo, poco a poco, se fue apropiado de estas herramientas metacognitivas, necesarias para la implementación de la propuesta. En menor proporción, hubo estudiantes a quienes se les dificultó realizar las actividades propuestas al momento de utilizar el cuestionamiento cognitivo. Es posible que esta situación haya reducido el impacto positivo de la experiencia en los estudiantes con respecto a las competencias relacionadas con las funciones matemáticas, sus elementos y representaciones en situaciones problema.

Como señalamos en los capítulos anteriores, Cuevas y Díaz (2014) atribuyen las dificultades para comprender el concepto matemático de función a su complejidad, generalidad y multiplicidad de representaciones. Por esta razón, en la propuesta de intervención en el aula se buscó que los estudiantes trabajaran con diferentes formas de representación de funciones (gráfica, ecuación, verbal, tabla de valores, grafo), en la misma línea. Es evidente que el registro de representación semiótica utilizado por el profesor para enseñar dicho concepto no es familiar necesariamente para el estudiante (sintaxis, signos y semántica). Es por esta razón que el trabajo con varias formas de representación pretende promover que los estudiantes puedan relacionar los nuevos conocimientos adquiridos acerca del concepto de función con sus conocimientos previos (por ejemplo: las ecuaciones, las gráficas cartesianas, lenguaje verbal). De esta manera es posible realizar conexiones y similitudes entre estas nociones, para así poder encontrar elementos comunes, y establecer relaciones entre las diferentes representaciones de una misma función. Con ello se logra además disminuir el sobreesfuerzo cognitivo que significa para muchos educandos la comprensión del concepto, y sus usos en diferentes situaciones.

En este sentido es importante señalar que los estudiantes del grupo *IMPROVE* han tenido un mejor desarrollo de las competencias ya descritas que los demás grupos. Especialmente, es importante destacar que estudiantes con desempeños bajos demostraron una buena capacidad para pasar de una representación a otra, especialmente en las últimas fases de la implementación de la propuesta. De manera particular, el trabajo con *GeoGebra* favoreció significativamente el uso de la representación gráfica, que, junto con la verbal, fue una de las que más dificultades ofreció a los estudiantes.

Se esperaba que como consecuencia de la realización de la primera actividad bajo los parámetros establecidos por el modelo *IMPROVE* los estudiantes del grupo 9°3 mostraran, cuando menos, una tendencia a mejorar sus niveles de valoración y superaran en alguna medida a los demás grupos. No obstante, una simple mirada a las ilustraciones 27, 28, 29 y30 proporciona un estado de aprendizajes y desempeños en la actividad 2 que no solo fueron inferiores a la expectativa, sino al desempeño de los demás grupos, por lo menos en lo referente a la proporción de estudiantes con desempeño bajo. Existe la posibilidad de que el grupo *IMPROVE* se haya enfrentado a una dificultad que los demás estudiantes no tuvieron: asumir su estudio bajo una nueva metodología, desconocida hasta el momento, y que exigía de ellos mayor compromiso, mejor actitud y disposición para realizar un estudio más reflexionado y regulado, en contraste con la forma de trabajo de los otros grupos.

No obstante, es importante recalcar aquí que el grupo *IMPROVE* se mantuvo como el de mayor proporción de estudiantes en desempeño superior, además, que la evolución de los desempeños de sus integrantes a lo largo de las actividades fue evidentemente superior a la de los grupos de control. Este grupo terminó como el único grupo donde los estudiantes con desempeño superior o alto superan el 50%, y en el que menos estudiantes se encuentran clasificados con desempeño bajo. Recuerde el lector que, bajo los criterios de evaluación de

IMPROVE, se considera que los estudiantes alcanzan el dominio apropiado del tema cuando obtienen aciertos iguales o superiores al 80%, esto llevado al sistema de evaluación institucional de la I.E. Liceo Antioqueño, significa aquellos estudiantes con desempeño alto y superior.

Los Estándares Básicos de Competencias para el área de matemáticas (MEN, 2016), con respecto del pensamiento variacional, consagra que uno de los propósitos de cultivarlo es “construir desde la educación básica primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la educación media, el cálculo diferencial e integral”. En este sentido, si bien el tema de estudio de este trabajo era el concepto matemático de función, sus elementos y representaciones, también era fundamental establecer cómo los estudiantes usaban estos conocimientos en la resolución de problemas que involucran funciones, en cualquiera de sus representaciones. Por esta razón, en las actividades de enriquecimiento realizadas en la propuesta se usaron situaciones problema con funciones lineales, ecuaciones de la recta y sistemas de ecuaciones lineales, los cuales requerían de los estudiantes procesos cognitivos de grado superior para ser resueltos, habilidades de interpretación, modelación, análisis, entre otras. Además, como ya se ha dicho ampliamente, también ello requiere que los estudiantes desarrollen la capacidad para pasar de un registro de representación a otro, e incluso, encontrar relaciones entre conceptos matemáticos aparentemente distintos, como los sistemas de ecuaciones lineales y las funciones. En estas actividades se pudieron observar la mayor cantidad de estudiantes del grupo *IMPROVE*, que teniendo desempeños bajo y básico -predominancia de bajo-, presentaron aquí un rendimiento individual adecuado, en algunos casos modelando correctamente las situaciones a través de ecuaciones y gráficos o proponiendo soluciones numéricas.

Finalmente, es importante reconocer que la implementación de este tipo de metodologías propicia mejores ambientes de aprendizaje para los educandos, sin importar el estado inicial de conocimientos, competencias y desempeños. Nuevamente, nos referimos a las ilustraciones 27, 28, 29 y 30, para señalar el hecho de que, aunque el grupo *IMPROVE* comenzó con algunas dificultades, al final demostró un mejor rendimiento que sus pares. Es claro que, mientras en los demás grupos hay un predominio de desempeños bajo y básico, el grupo que participó de la experiencia tiene su predominio en los estudiantes con desempeños alto y superior, a pesar de los deficientes resultados registrados al inicio de la experiencia. No obstante, es necesario continuar trabajando en el desarrollo de habilidades cognitivas superiores relacionadas con el razonamiento matemático, generalización, creatividad, argumentación, prueba de hipótesis, entre otras, en el marco de la resolución de problemas que usan el concepto de función y otros.

4.2. Recomendaciones

A continuación, se presentan algunas recomendaciones para los profesionales de la educación que estén interesados en diseñar e implementar intervenciones en el aula que favorezcan y propicien el aprendizaje del concepto de función, sus elementos, representaciones y su uso en diversas situaciones problemáticas.

- Como se precisó en las conclusiones, una de las dificultades que se identificaron con el grupo *IMPROVE* fue el desafío que significó utilizar una metodología desconocida para el estudio de la unidad didáctica. Se recomienda, para obtener mejores resultados, utilizar esta modelo durante un tiempo más prolongado, incluso, durante un año escolar entero. De esta manera los estudiantes pueden ir naturalmente desarrollando las distintas fases de *IMPROVE*, especialmente aquellas que competen con el cuestionamiento cognitivo, eje central del modelo, y el que más dificultad y resistencia genera en los educandos.

- Otro aspecto para tomar en cuenta es el uso de *GeoGebra*. Durante la implementación de esta propuesta se desarrollaron actividades con *GeoGebra*, aunque infortunadamente no se contó con suficientes computadores para realizar esta parte del trabajo. Debido a ello, los estudiantes se vieron en la necesidad de usar el software en sus smartphones, lo cual fue de gran ayuda. Sin embargo, consideramos que dos factores dificultaron este trabajo:

  i) La mayoría de los estudiantes no estaban familiarizados en el software, y era la primera vez que lo usaban.

  ii) Aunque la interfaz de la aplicación para smartphones es relativamente fácil de usar, la experiencia en el computador es mucho más sencilla e intuitiva por su interfaz. Teniendo en cuenta que *GeoGebra* es un software libre, que puede facilitar al estudiante el trabajo con diferentes conceptos matemáticos, entre ellos las funciones y sus representaciones, es importante buscar alternativas para mitigar las dificultades descritas en las líneas anteriores. En este sentido se recomienda que antes de iniciar con una intervención en el aula que requiera el uso del software se destine un tiempo prudente, y suficiente, para que los estudiantes se familiaricen con su uso, sintaxis, interfaz, etc.

- En virtud de la ampliación de la investigación realizada con estudiantes de noveno grado, se sugiere que esta pueda extenderse a otros niveles de la educación básica, abarcando desde primaria hasta media. Sería beneficioso llevar a cabo procesos a lo largo de varios años escolares, permitiendo que los estudiantes desarrollen la metacognición proporcionada por el modelo IMPROVE a medida que avanzan en sus estudios. Esta extensión facilitaría la observación de impactos más significativos en el aprendizaje, no solo en matemáticas, sino en todas las asignaturas.

Adicionalmente, se plantea la posibilidad de extender el uso de estas metodologías a los niveles de educación superior. Esto se hace con el propósito de fomentar un aprendizaje más activo, significativo y autorregulado entre los estudiantes universitarios. Esta ampliación de enfoque podría arrojar luz sobre la eficacia de la metacognición en entornos educativos superiores y promover una mejora continua en la calidad del aprendizaje.

- Por último, es importante procurar conformar grupos heterogéneos para la implementación del modelo *IMPROVE*, dificultad que se presentó durante el desarrollo de este trabajo. Por ello, se sugiere realizar una observación más amplia, una que no se limite a la determinación de saberes previos para el estudio del tema que se pretende abordar. De esta manera es posible disponer de más elementos de juicio que permitan clasificar a los estudiantes, y así poder conformar distintos grupos heterogéneos de una mejor manera, si tenemos en cuenta que otro aspecto fundamental de *IMPROVE* es el aprendizaje colaborativo. Recordemos que esta interacción busca propiciar la generación de conocimiento a partir de las discusiones que se generen dentro de los distintos grupos de trabajo.

Bibliografía

Advíncula, E., Barrantes, E., Flores, M. I., Saravia, N., & Solórzano, M. (2018). Análisis de dominio y rango de funciones con GeoGebra. Recuperado de: Advincula2018Analisis.pdf (uniandes.edu.co)

Alfaro Sánchez, S. L. El abordaje de la resolución de problemas mediante estrategias metacognitivas: elementos para el currículo matemático. Recuperado de: https://hdl.handle.net/10669/81420

Alvarado, J., & Soto, J. L. (2020). Una metodología para el diseño de secuencias didácticas para la educación matemática. Recuperado de: Alvarado2020Una.pdf (uniandes.edu.co)

Anderson, W. L., David, R., & Krathwohl, D. R. (2001). Una taxonomía para el aprendizaje, enseñanza y evaluación: una revisión de la taxonomía de Bloom de objetivos educativos. *Nueva York: Longman*.

Armas, T. A. D. (2020). Evaluación de la Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de Futuros Profesores de Matemáticas en el Desarrollo de una Clase Utilizando Funciones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *34*(66), 110-131. Recuperado de: DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a06

Arteaga-Martínez, B., Macías, J., & Pizarro, N. (2020). La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria. *Uniciencia*, *34*(1), 263-280. DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.34-1.15

Avecilla, F. B., Cárdenas, O. B., Barahona, B. V., & Ponce, B. H. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica-ESPOL*, *28*(5). Recuperado de: GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil | Revista Tecnológica - ESPOL

Balderas, M. D. J. C., Páez, D. A., & Pérez, M. G. (2020). Discusión teórica sobre las prácticas docentes como mediadoras para potencializar estrategias metacognitivas en la solución de tareas matemáticas. *Educación matemática*, *32*(1), 221-240. DOI: https://doi.org/10.24844/em3201.10

Barón Martínez, G. Modelación matemática mediada por el software GeoGebra en la aplicación de funciones lineales, para la solución de problemas en el contexto del manejo ambiental. Recuperado de: http://hdl.handle.net/11349/22955

Bueno, P. M., & Fitzgerald, V. L. (2004). Aprendizaje basado en problemas. Problem–Based Learning. *Theoria*, *13*(1), 145-157. Recuperado de: http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx/jspui/handle/123456789/574

Campo, K. G., Cruz, G., & Meléndez, J. H. (2017). Una propuesta de diseño de tareas que integra GeoGebra para la enseñanza de la función exponencial. Recuperado de: Campo2017Una.pdf (uniandes.edu.co)

Cruzado, C. S., & Compaña, M. T. S. (2020). El modelo flipped classroom como estrategia metodológica que fomenta la autorregulación y la metacognición en el desarrollo de la educación estadística. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, *34*(2), 121-142.

Cuevas, A. & Díaz J.L. (2014). La historia de la matemática un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica. El caso del concepto de función. El Cálculo y su Enseñanza. Año 5. Vol.5. 2014. Cinvestav-IPN (México). Recuperado de: La historia de la matemática factor importante en la elaboración de una propuesta didáctica en matemáticas (uniandes.edu.co)

Cuevas, C. A., & Delgado, M. (2016). ¿Por qué el concepto de función genera dificultad en el estudiante? *El Cálculo y su Enseñanza*, *7*, 108-119. Recuperado de: Microsoft Word - 8 Cuevas y Delgado02.docx (uniandes.edu.co)

Duque-Cante, N., & Chavarro-Velandia, A. . (2021). ENTIDADES TERRITORIALES EN COLOMBIA Y SUS CARACTERÍSTICAS. *Catálogo Editorial*, *1*(268). https://doi.org/10.15765/poli.v1i268.2309

Espejo Zubieta, E. J. (2020). Estrategias metacognitivas en resolución de problemas matemáticos en alumnos del primer año de la IE Politécnico del Callao. Recuperado de: https://hdl.handle.net/20.500.12692/44884

Fuentes, M. G. L. (2014). El Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas y su efectividad en el Desarrollo de la Metacognición. *Educatio siglo XXI*, *32*(3 Noviembr), 211-230. DOI: https://doi.org/10.6018/j/211051

García, J. G. J., & Izquierdo, S. J. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista electrónica sobre tecnología, educación y sociedad*, *4*(7). Recuperado de: https://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/article/view/654/736

García, M. D. M. (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula* (Doctoral dissertation, Universidad de Almería). Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1768/2/Garcia2011Evolucion.pdf

García, W. (2012). *Modelación matemática en funciones exponencial y logarítmica: una propuesta pedagógica para el aprendizaje de las matemáticas básicas* (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia, Medellín). Recuperado de: https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10972

Gay, M., Tito, J., & San Miguel, S. (2014). GeoGebra como facilitador del estudio de funciones de variable real. In *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Recuperado de:* 637-libre.pdf (d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net)

Guerra, E. M. G., Patermina, H. E. H., & Jácome, A. E. C. (2015). Dificultades en el Aprendizaje y el Trabajo Inicial con Funciones en Estudiantes de Educación Media. *Scientia et technica*, *20*(3), 278-285. DOI: https://doi.org/10.22517/23447214.10141

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2018). *Metodología de la investigación* (Vol. 4, pp. 310-386). México: McGraw-Hill Interamericana.

Hernández, A. O., & Madriz, R. A. (2012). GeoGebra como herramienta para la Enseñanza de la Matemática: Resultados de un curso de capacitación. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/16851/2/Ortiz2012GeoGebra.pdf

Icfes, I. C. (2018). Informe nacional de resultados para Colombia-PISA 2018. *Bogota DC*. Recuperado de:

https://www2.icfes.gov.co/documents/39286/1125661/Informe_nacional_resultados_PISA_2018.pdf/

Krathwohl, D. R. (2002). A revision of Bloom's taxonomy: An overview. *Theory into practice*, *41*(4), 212-218. DOI: https://doi.org/10.1207/s15430421tip4104_2

Mejía Ballesteros, R. A. (2018). *Geogebra Como Metodo De Enseñanza Y Aprendizaje De Las Funciones De Variable Real A Estudiantes Del Grado 10-2 Del Colegio San Carlos Del Municipio De San Gil* (Doctoral dissertation, Universidad Industrial de Santander, Escuela De Educacion).

Méndez, M. (2015). La taxonomía de Bloom, una herramienta imprescindible para enseñar y aprender. *Gobierno de canarias, Formación, Recursos*.

Mevarech, Z & Kramarski. B. (2017). Matemáticas Críticas para las Sociedades Innovadoras, EL PAPEL DE LAS PEDAGOGÍAS METACOGNITIVAS. Instituto Politécnico Nacional, OCDE, París.

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (1997). IMPROVE: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. *American educational research journal*, *34*(2), 365-394. DOI: https://doi.org/10.3102/00028312034002365

Ministerio de Educación Nacional-MEN (2008). Altablero, un periódico de un país que educa y se educa. 44, 1-36. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/propertyvalue-37909.html

Ministerio de Educación Nacional-MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá, D.C. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional-MEN. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje. Matemáticas. Bogotá, D.C.

Ministerio de Educación Nacional-MEN. Ley 115 de 1994. Ley General de Educación y Desarrollos Reglamentarios, Sección III, Básica, art. 20, numeral c. Bogotá, D.C.

Mora Saavedra, J. C. (2020). GeoGebra como herramienta de transformación educativa en Matemática. Recuperado de: https://revistas.unae.edu.ec/index.php/mamakuna/article/view/349/402

Ocampo Pérez, A. (2012). Propuesta metodológica para la enseñanza de funciones en el curso de matemáticas básicas de la Universidad Nacional de Colombia (sede Medellín). *Facultad de Ciencias*. Recuperado de: https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/9051

Olivera, S. W. (2011). Taxonomia de bloom. *Universidad Cesar Vallejo*, *4*. Recuperado de: 4-taxonomia-de-bloom_CESAR_VALLEJO-libre.pdf (d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net)

Osorio Serna, H. A. Propuesta didáctica para la enseñanza de las propiedades geométricas de la parábola en los estudiantes del grado decimo de la institución educativa Carlos Alberto calderón empleando el análisis fenomenológico. Recuperado de: https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/78224

Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortíz, L., Cell, V., De Armas, R., ... & Jiménez, J. (2013). Los caminos del saber matemáticas 9.

Salas Rueda, R. A. (2018). Uso do serviço da nuvem GeoGebra durante o processo de ensino-aprendizagem em matemática. *ride. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, *8*(16), 23-52.Villegas, B. (2001). Funciones matemáticas en otras ciencias. *Universitas Scientiarum*, *6*(2), 35-40. DOI: https://doi.org/10.23913/ride.v8i16.331

Schmidt, Q. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Recuperado de https://edumedia-depot.gei.de/bitstream/handle/11163/1921/788071114_2006_A.pdf?sequence=6

Spivak, M. (1988). *Cálculo infinitesimal*. Reverté. (Libro)

Volverás Espinosa, A. F. (2015). Propuesta didáctica para la enseñanza de límites de funciones en el grado undécimo de la IE El Rosario integrando geogebra. *Departamento de Matemáticas y Estadística*. Recuperado de: https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/55982