REVISIÓN CRÍTICA DE LAS CONCEPCIONES SOBRE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA: UNA METODOLOGÍA PARA RESIGNIFICAR SU COMPRENSIÓN Y CONCEPTUALIZACIÓN DESDE EL FORMALISMO Y EL LOGICISMO

Jorge Andrés Hernández González

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2023

REVISIÓN CRÍTICA DE LAS CONCEPCIONES SOBRE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA: UNA METODOLOGÍA PARA RESIGNIFICAR SU COMPRENSIÓN Y CONCEPTUALIZACIÓN DESDE EL FORMALISMO Y EL LOGICISMO

Jorge Andrés Hernández González

Trabajo final de maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Diego Alejandro Muñoz Durango

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2023

AGRADECIMIENTOS

A Esnedy, por acompañarme en tantos proyectos, incluyendo el de mi formación profesional.

A mi familia y amigos, por su apoyo durante este proceso de formación y producción académica.

A mis estudiantes, quienes motivaron gran parte de las ideas que sirvieron de base para este trabajo.

A mi director, Diego Alejandro Muñoz Durango, quien me ayudó a consolidar y darle sustento a estas reflexiones con su acompañamiento.

A la Universidad Nacional de Colombia y los profesores del programa, por su empeño y dedicación para formar maestros.

REVISIÓN CRÍTICA DE LAS CONCEPCIONES SOBRE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA: UNA METODOLOGÍA PARA RESIGNIFICAR SU COMPRENSIÓN Y CONCEPTUALIZACIÓN DESDE EL LOGICISMO, EL FORMALISMO Y EL INTUICIONISMO

RESUMEN

La historia de las matemáticas muestra cómo se formalizó la manera de comprobar que las ideas propuestas fuesen correctas. Así como en las ciencias naturales se requiere de un experimento que apoye lo enunciado, análogamente, en las matemáticas se necesita de una demostración con coherencia lógica que sirva como fuente validación del conocimiento generado. En ese sentido, la demostración ha tomado un papel protagónico en el avance de esta ciencia formal.

Esta herramienta para justificar las verdades en matemáticas no se concibe de manera uniforme por todos los matemáticos. Han surgido distintas perspectivas filosóficas que se han dado a la tarea de plantear una postura epistemológica frente a la validación del conocimiento matemático. Tradicionalmente, tres de estas visiones han trascendido por la calidad de sus aportes y por el reconocimiento de quienes las postularon: logicismo, formalismo e intuicionismo.

En Colombia, la educación matemática ha implementado la demostración matemática de diversas maneras, algunas han sido implícitas, como es el caso de la argumentación, justificación, enunciación de propiedades, etc., y en otros casos se ha utilizado el término demostración específicamente, usualmente para algunos referentes geometría. El propósito de este trabajo es desarrollar una revisión crítica de las concepciones de las escuelas tradicionales sobre la demostración matemática, mediada por la indagación de producciones académicas afines, contrastando dichas concepciones con algunas guías de educación matemática, como el documento ministerial de los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA).

Palabras clave: Demostración matemática, Logicismo, Formalismo, Educación matemática.

CRITICAL REVIEW OF MATHEMATICAL PROOF CONCEPTIONS: A METHODOLOGY TO RECONCEPTUALIZE ITS UNDERSTANDING AND CONCEPTUALIZATION FROM LOGICISM, FORMALISM, AND INTUITIONISM

ABSTRACT

Mathematics history illustrates how a formalized method was developed in order to verify the correctness of proposed ideas. As natural sciences require experiments to support statements, similarly, in mathematics, a logically coherent proof is needed to serve as a validation of generated knowledge. In this sense, proof has played a leading role in the development of this formal science.

However, mathematicians do not conceive this tool in the same way. Different philosophical perspectives have emerged, each aiming to establish an epistemological stance regarding the validation of mathematical knowledge. Traditionally, three of these viewpoints have transcended because the quality of their contributions and the recognition mathematicians who built it: logicism, formalism, and intuitionism.

In Colombia, math education has implemented mathematical proof in different ways, sometimes implicitly, such as argumentation, justification, statement of properties, etc., and in other cases, the term proof has been specifically used, typically in reference to geometry. The purpose of this work is to develop a critical review of the conceptions held by traditional schools regarding mathematical proof, mediated by the exploration of related academic productions, contrasting these conceptions with certain guidelines in mathematical education, such as the ministerial document Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA).

Keywords: Math proof, Logicism, Formalism, Math education.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE ILUSTRACIONES

1. CAPÍTULO I: ASPECTOS PRELIMINARES

1.1. Selección y delimitación del tema

La demostración matemática presenta un papel crucial en el avance de las matemáticas. Entre los distintos procesos o etapas que componen el descubrimiento y desarrollo de los conocimientos de esta ciencia, son evidentes (y esto es lo que lo hace polémico e interesante) la validez y rigurosidad que aporta la demostración. Esta idea está tan arraigada en la epistemología de las matemáticas, que para Knipping (2012) algunos matemáticos denominan demostración a la actividad análoga al experimento físico, es decir, un argumento contundente que propone un resultado coherente con la teoría existente.

La analogía anterior es llamativa y oportuna, puesto que en pocas líneas muestra lo indispensable que es demostrar en matemáticas. Usualmente, la defensa de algún avance o publicación de conocimiento científico se hace desde la coherencia teórico-práctica de sus planteamientos, y no en vano se ha convertido en parte del paisaje expresiones (a veces vulgarmente empleadas) como "…esto está científicamente comprobado…", "…la ciencia ya lo demostró…". En todo caso, equiparar la demostración con el experimento es una proposición con mucha fuerza, que sustenta el quehacer de los matemáticos, aparenta ser aquello que *valida* su conocimiento, *lo llevan en sus raíces*.

Dentro de las funciones principales de una demostración matemática, se encuentran la justificación y la explicación. La primera se refiere a mostrar que una declaración matemática es verdadera, y la segunda consiste en expresar por qué lo que se afirma es verdadero (Stylianides y Stylianides, 2022).

Para el caso de la enseñanza de las matemáticas en Colombia, es fundamental que el profesor de matemáticas reflexione con respecto a este proceso de validación del conocimiento matemático, cómo abordarlo desde el aula, y cómo fortalecer en sus estudiantes el pensamiento matemático desde este proceso. Sin embargo, se encuentran distintas acepciones para ello, como argumentación, explicación, prueba, demostración, etc. Con este trabajo se pretende analizar el concepto de demostración y reflexionar en torno a las implicaciones que tiene en el maestro, a partir de una revisión crítica desde las corrientes epistemológicas matemáticas que han sido cruciales para el desarrollo de esta disciplina: el logicismo, el intuicionismo y el formalismo.

1.2. Planteamiento del problema

1.2.1. Descripción del problema

A pesar de la aparente firmeza que tiene esta estructura del conocimiento matemático y lo indispensables que son los procesos demostrativos para su avance, asignar una única noción de demostración que pretenda ser compartida por todos los profesionales del campo sería inviable. Históricamente, los matemáticos han conformado grupos académicos o escuelas desde donde han analizado cuál es el propósito de las matemáticas (y, por ende, de la demostración), cómo se construyen o descubren, es decir, han constituido una postura epistemológica frente a su quehacer como matemáticos. Las principales escuelas se consolidaron a finales del siglo XIX e inicios del XX: logicismo, intuicionismo y el formalismo (Ruiz, 2003).

En términos generales, el logicismo se consolidó como una perspectiva de las matemáticas que sustenta su rigor en la reducción de ésta a la lógica. Por su parte, el intuicionismo concibe las matemáticas como una especie de construcción en la que la lógica es algo un poco más instrumental y se complementa necesariamente por el lenguaje. Para los formalistas, se requiere de la descripción de objetos (signos) y su utilización, apoyados en un uso apropiado de la intuición (Ruiz, 2003). El que cada escuela concibiera las matemáticas con ciertos rasgos diferenciadores, hace que el concepto de demostración varíe de acuerdo a éstas, y que, por lo tanto, se tengan distintas concepciones de su papel.

Estas diferencias tienen implicaciones en la enseñanza de las matemáticas, a partir de quien desarrolla esta actividad, que es el maestro. La visión que un maestro tiene de su área disciplinar condiciona su práctica y la manera en que comparte con sus estudiantes el conocimiento matemático. Uno de los propósitos de la enseñanza de las matemáticas es el desarrollo del pensamiento matemático, al cual involucra los siguientes subprocesos, de acuerdo con Vergel, Duarte y Martínez (2015):

- Reflexionar en torno a la naturaleza del conocimiento matemático y el proceso de descubrimiento-desarrollo de los aportes propios de esta ciencia.
- Realizar tareas vinculadas a recordar, comprender, aprender, resolver problemas, inducir reglas, definir conceptos, percibir y reconocer estímulos.

- Emplear mecanismos como: el reconocimiento de un sistema para acceder a la información almacenada, la búsqueda de medios y fines para resolver problemas e inducir reglas, y la construcción de representaciones de dominios de nuevos problemas.

Para relacionar este pensamiento y sus respectivos subprocesos, con el concepto de demostración, es fundamental recordar que esta última se vincula con un "sistema de prácticas argumentativas (o argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, esto es, situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado" (Godino y Recio, 2001, p. 406). Al considerar esta aproximación a dicho concepto, se nota que la demostración es un aporte indispensable para el desarrollo del pensamiento matemático, desde la reflexión, realización de tareas y empleo de mecanismos, como los mencionados previamente.

Con esto, se percibe que la enseñanza de las matemáticas, con la intervención de las demostraciones, debería garantizar una contribución al desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes y brindar cercanía a lo que históricamente han sido las matemáticas desde las distintas tendencias o escuelas. Estas escuelas "mantienen visiones diferentes sobre el papel de la demostración en matemáticas y sobre los criterios de validez de una demostración matemática" (Hanna, 1995, en Godino y Recio, 2001, p. 407).

No obstante, pareciese que esta relación entre la demostración y la enseñanza de las matemáticas perdiera poco a poco ese sustento que se evidencia en los apartados anteriores. En Recio (2002) se mencionan diversas investigaciones empíricas con estudiantes en las que se evidencia que menos de la mitad de ellos podían desarrollar demostraciones matemáticas formalmente construidas y cuestionar la validez de ciertas situaciones empíricas que en ocasiones se presentan como *demostraciones* (Fischbein 1982, Senk 1985, Martín y Harel 1989, Recio y Godino 1996, Recio 2000, como se citó en Recio, 2002).

Estos trabajos ilustran que la formalización de las matemáticas en los procesos de enseñanza en las escuelas se ha venido debilitando, y ha sufrido cambios, sustituyéndose por otros tal vez más cómodos para su enseñanza y aprendizaje, o con un poco menos del trabajo estructurado o sistemático al que conlleva la demostración. El papel de la demostración se encuentra en duda, y es ambigua su participación en la educación de acuerdo con esto. La disertación que el maestro haga de su labor debe nutrirse por los aspectos teóricos, para abordar esta problemática con la rigurosidad que amerita y resignificarlo a la luz de referentes de autoridad, especializados en la historia, filosofía y epistemología de las matemáticas.

El propósito de este trabajo se centra en el análisis de las concepciones del logicismo y el formalismo sobre la demostración, como aporte para el maestro de matemáticas, con el que se genere una resignificación de este concepto ahora que se ha perdido un poco la validación de su contribución en las escuelas. Se realizará una revisión crítica desde algunos ejes como ¿qué es la demostración en matemáticas? ¿Cuál es el aporte de la demostración para el maestro de matemáticas en su práctica? ¿Cuáles de estas corrientes epistemológicas se evidencian en los referentes nacionales para la enseñanza de las matemáticas? ¿Cómo influye la postura más marcada en los referentes nacionales para que el maestro de matemáticas aborde el proceso de demostración en el aula de clase?

1.2.2. Formulación de la pregunta

A partir de los elementos discutidos en los apartados anteriores, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo aportan las concepciones de las escuelas filosófico-matemáticas del logicismo y el formalismo sobre la demostración matemática para resignificar su comprensión y conceptualización?

1.3. Justificación

El propósito de la enseñanza de las matemáticas, de acuerdo con Fiallo, Camargo y Gutiérrez (2013), es apoyar a los estudiantes para que puedan fortalecer sus esquemas de justificación, desde la percepción, el lenguaje simbólico, la lógica, la intuición y la convicción personal. La demostración es un proceso fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático, puesto que para aportar a estos esquemas de justificación estos autores sostienen que "los estudiantes deberían aprender que las demostraciones son, primero que todo, argumentos convincentes, que son un producto de la actividad humana, en la cual ellos pueden y deben participar, y que son parte esencial de la actividad matemática" (p.189).

Sin embargo, el abordaje de la demostración matemática en las escuelas ha presentado ciertas dificultades en los estudiantes para su aprendizaje. Varias investigaciones han ilustrado esta problemática así:

- En un estudio desarrollado por Fishbein (1982) con 400 estudiantes de secundaria de Israel, se concluyó que aproximadamente la séptima parte de los estudiantes pudo aceptar demostraciones mediante razonamientos netamente lógicos para comprender algo, independiente de las explicaciones empíricas o comprobaciones físicas de la situación (Fishbein 1982, como se citó en Recio, 2002).
- Con un grupo de 1520 estudiantes de distintos estados de EEUU que habían cursado clases sobre la demostración en geometría, Senk (1985) encontró que sólo el 30% de los estudiantes dominaban con un 75% de maestría las demostraciones escritas que se abordaron en el estudio (Senk 1985, como se citó en Recio, 2002).
- Martín y Harel (1989) realizaron una investigación con 101 profesores en formación, de los cuales cerca de la mitad aceptó un razonamiento deductivo incorrecto como demostración válida para cierta situación (Martín y Harel 1989, como se citó en Recio, 2002).
- En otro estudio con 429 estudiantes de primer curso de universidad, Recio y Godino (1996) hallaron que sólo un 32,9% de éstos pudieron abordar formalmente demostraciones matemáticas simples. Dichos resultados se replicaron con cierta proximidad en cursos posteriores de la misma universidad (Recio y Godino 1996, como se citó en Recio, 2002).

En consecuencia, el papel de la demostración en la clase de matemáticas se ve cuestionado por estos resultados tan poco favorables. A partir de esto, es pertinente resignificar la demostración, mediante una revisión crítica de las concepciones que sobre ésta se tienen desde dos posturas epistemológicas como las escuelas del logicismo, formalismo y el intuicionismo, con el fin de generar una metodología para su comprensión y conceptualización en los maestros de matemáticas, que son quienes abordarán este proceso tan importante en las escuelas.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Desarrollar una revisión crítica de las concepciones sobre la demostración matemática desde el logicismo, el formalismo y el intuicionismo.

1.4.2. Objetivos específicos

- Indagar bases de datos con producciones académicas que aborden epistemológicamente la demostración matemática.
- Analizar críticamente la información recopilada en la indagación.
- Contrastar el concepto de demostración de las corrientes con los Derechos Básicos de Aprendizaje.

1.5. Antecedentes

A continuación, se mencionan los aportes de algunos autores que han desarrollado trabajos afines a éste, analizando la demostración para la enseñanza de las matemáticas.

- **Las dimensiones sociales de la argumentación y las demostraciones en clase de matemáticas:** En este trabajo, la autora afirma que en investigación se han logrado muchas conclusiones acerca del rol y la relación entre la argumentación y la prueba para el aprendizaje de las matemáticas. Pero la naturaleza de éstas y de su relación se encuentran bastante lejos de ser claras. En ese sentido se debe profundizar desde distintas perspectivas en estos conceptos para abordarlos de una manera pertinente en clase de matemáticas, pasando por las dimensiones sociales y argumentativas, el proceso social que las transforma en la clase de matemáticas, y la interacción entre el trasfondo sociocultural de los estudiantes y las expectativas alrededor de ellos (Knipping, 2012).
- **El argumento y la demostración ejemplificado en un diálogo matemático:** Estos autores abordan inicialmente con sus estudiantes de un curso de cálculo los principios y las evidencias como insumos para la construcción de nuevas conclusiones o evaluar las conclusiones basadas en lo que ya se ha aprendido. Se presentan dos tipos generales de razonamiento en matemáticas: inductivo y deductivo. El primero desde la adición de información, y el segundo desde la inferencia a partir de la información dada, sin embargo, ellos se enfocan en el inductivo, ya que consideran que con los subprocesos de conjeturas y contraejemplos pertenecientes a este razonamiento se pueden generar cambios en una forma tradicional de abordar los conceptos, y, de acuerdo con ellos, esto ayudaría a que los estudiantes fuesen más competitivos, críticos y analíticos (Maure, Nava, Marimón y Gutiérrez, 2022).
- **Creencias sobre demostración matemática de docentes de matemática de educación secundaria:** La autora realiza un estudio con doce profesores de matemáticas de escuela secundaria y que al mismo tiempo cursan sus estudios de posgrado. La información se recolectó mediante entrevistas semiestructuradas, en las que se indagó por la importancia y el papel de la demostración en la enseñanza de las matemáticas. Algunos de los resultados se enfocan en que los maestros consideran, generalmente, que la geometría es el campo ideal para el trabajo de demostraciones en la escuela; conciben el papel de la

demostración como la explicación de que algo es verdadero. La autora agrega como beneficios de la demostración los siguientes: el descubrimiento de nuevos conocimientos, los modos de razonamiento, el poder expresarse siguiendo una secuencia lógica, etc. (Correa, 2015).

- **Epistemic phase transitions in mathematical proofs:** En esta investigación, los autores afirman que las demostraciones en matemáticas son, por un lado, paradigmas de certeza en los que se empieza a generar cierta confianza o creencia en que es la manera oportuna de asumir algo como verdadero, y por el otro lado, la manera de argumentar algo explícitamente. Sin embargo, a medida que se van generando más y más argumentos, la probabilidad de que haya un error aumenta exponencialmente. Estas creencias plausibles, combinan el razonamiento deductivo y abductivo, generando una transición de la incertidumbre a la confianza, como lo menciona el título. Para apoyar su tesis, los autores analizaron cuarenta y ocho sistemas asistidos por máquinas, en los que resolvieron diversos teoremas desde la antigüedad hasta el siglo presente, incluyendo el famoso último teorema de Fermat (Viteri y Dedeo, 2022).
- **Estilos de escrita e demonstrações matemáticas sob uma perspectiva histórica:** Dada la historia de las matemáticas y su filosofía se pueden comprender los procesos de formación del pensamiento matemático, se evidencia que hay una diversidad de estilos para hacer demostraciones, los cuales pueden variar entre las distintas ramas o problemas matemáticos a resolver. Al hacer un rastreo histórico, los autores de este artículo discuten un total de trece estilos de escritura para hacer demostraciones matemáticas, los son: geométrico, poético, cosista, algebraico-cartesiano, indivisible, operacional, épsilon, sintético y analítico, dual, axiomático, formal e intuicionista (Balieiro, da Silva y Bertolucci, 2021).
- **Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática:** El presente trabajo recopila una gran cantidad de investigaciones que se han realizado en el campo de la didáctica, específicamente para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración. El propósito de los autores es aportar a los maestros una fuente de consulta en la que puedan aproximarse a cuestiones histórico-epistemológicas, el asunto de la demostración en el currículo, los principales retos del estudiantado a la hora de desarrollar

demostraciones, la relación entre argumentación y demostración, y algunas propuestas sugeridas para abordarla en el aula de clase (Fiallo, Camargo y Gutiérrez, 2013).

- **Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof:** Para estos autores, uno de los mayores regalos que la humanidad ha brindado desde la antigua Grecia es la noción de demostración matemática. Para ellos es increíble cómo el trabajo de Euclides forjó una tradición milenaria que se sostiene, con varios ajustes, hasta nuestros días. Los autores examinan las pruebas formales y las justificaciones que en ocasiones denominan demostraciones. Adicionalmente mencionan algunos de los principales aportes que puede tener este tipo de trabajos con los estudiantes, de la mano de una perspectiva epistemológica muy clara, en la que consideran que se la enseñanza de las matemáticas debe estar acompañada de su historia (Harel y Sowder, 2007).
- **Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato:** Con el propósito de darle continuidad a un proyecto de investigación sobre la demostración matemática con jóvenes de 16 y 17 años, los autores se proponen dar respuesta a preguntas como ¿qué es la demostración matemática? ¿para qué sirve? ¿dónde está su valor? ¿cómo se aprende? Adicionalmente, explican cuatro dimensiones matemáticas: histórica, en las que se recopilan unos cuantos avances históricos fundamentales para el desarrollo de las matemáticas y, particularmente, de las demostraciones; epistemológica, la cual se refiere a la forma de construcción y validación del conocimiento matemático en la que pasan por los distintos niveles que puede cruzar un aprendiz de las demostraciones; social, en la que se argumenta sobre los aportes de la demostración en términos de verificación, explicación, sistematización, descubrimiento, comunicación, etc.; cognitiva, ligada a las fases que puede experimentar un estudiante mediante las demostraciones, como son la interpretación, análisis, síntesis, profundización, etc. (Ibañes y Ortega, 2005).
- **Collegiate mathematics teaching in proof-based courses: What we now know and what we have yet to learn:** Este artículo sintetiza un total de 104 informes que se publicaron en distintos países sobre la enseñanza de las matemáticas basada en la demostración. En los artículos se encontraron algunos basados en temas de conferencia, en pedagogía y análisis pedagógicos centrados en el estudiante. Las categorías de análisis de la información fueron la descripción que hacían los instructores durante las prácticas, evidencias sobre las creencias de los instructores y el tipo de relación entre el profesor y

los estudiantes. Concluyeron que las clases magistrales tienen ciertas limitaciones que, usualmente, se resuelven con las clases centradas en el estudiante. Sin embargo, hay definiciones abstractas que no abordan efectivamente cuando se intentan equilibrar estos dos lados de la balanza, por lo cual los autores sugieren ahondar aún más en la clase magistral desde el ámbito cognitivo, participativo, afectivo y equitativo (Melhuish, Fukawa-Connelly, Dawkins, Woods y Weber, 2022).

- **Introducing students and prospective teachers to the notion of proof in mathematics:** En este trabajo, los autores defienden el poder y la necesidad de la demostración para la formación de estudiantes y profesores en el área de matemáticas, sin embargo, argumentan que no se ha dado una atención suficiente a lo que podría implicar la presentación de este proceso. Para ellos se deben discutir antes de cualquier propuesta algunos aspectos fundamentales, los cuales resumen en dos partes: la primera está en concebir una necesidad de aprender sobre la demostración, la segunda se enfoca en desarrollar una conceptualización que sea funcional sobre la prueba (Stylianides y Stylianides, 2022)

2. CAPÍTULO 2: MARCO REFERENCIAL

2.1. Marco teórico

2.1.1. Generalidades históricas de las matemáticas y la demostración.

Hablar sobre la historia de las matemáticas, es hablar sobre la historia de la humanidad, lo que dificulta bastante su síntesis por la gran extensión de acontecimientos que nos describen y nos ubican en lo que actualmente somos, sin embargo, nuestros antecedentes en las matemáticas se podrían distribuir en tres periodos, de acuerdo con la obra de Bell (2016):

- Un primer periodo al que se le llama el remoto, el cual se relaciona desde los primeros tiempos de los que se tiene registro hasta el año de 1637. Este intervalo consiste en la información recopilada sobre los antiguos egipcios, y griegos como Arquímedes, Euclides, Pitágoras, Apolonio, etc., hasta la fecha de publicación de *La Geometría* de René Descartes. Este periodo, de acuerdo con el autor, se caracterizó por la síntesis de los objetos y conceptos matemáticos.
- El periodo medio agrupa los principales desarrollos matemáticos que se produjeron con matemáticos como Newton, Leibniz, Lagrange, etc., hasta principios del siglo XIX, con las publicaciones de *Disquisiciones aritméticas* (1801) y *Curso de análisis* (1821) de Gauss y Cauchy, respectivamente. A estas matemáticas, se les conoce tradicionalmente como matemáticas modernas. A diferencia del anterior, de acuerdo con Bell (2016), su principal hallazgo es el análisis de las matemáticas.
- Al tercer periodo, denominado periodo reciente, se le caracteriza por los descubrimientos y construcciones posteriores a 1821. La cantidad avances de este periodo, como podemos ilustrarlo en todas las áreas de la industria y el conocimiento, ha permitido afirmar que, en términos de calidad y cantidad, “el siglo XIX por sí solo contribuyó a las matemáticas cerca de cinco veces más que toda la historia precedente” (Bell, 2016, p. 23).

El periodo remoto tiene sus bases en la geometría, sobre la cual se afirma que tiene sus principales orígenes en el antiguo Egipto. Con los desbordamientos inesperados del río Nilo, las fronteras entre terrenos de distintos propietarios se perdían, y era una labor de los geómetras (quienes practicaban la geometría) restablecer apropiadamente los linderos iniciales. La forma de realizar esta tarea era bastante artesanal: empleaban cuerdas y estacas, por lo cual se les llamaba *tensadores de cuerdas*. Eran muy hábiles en ello, ya que construían ángulos rectos mediante lo que hoy conocemos como terna pitagórica de 3, 4 y 5, tomando medidas proporcionales a esta tríada en sus cuerdas (Sánchez, 2012).

Es complicado identificar en la historia *el* creador o postulador de un método de demostración riguroso y bien fundamentado. La primera demostración de la que se tiene registro fue realizada por Thales (600 a.C.) al demostrar que un círculo se biseca por sus diámetros. Los pitagóricos y Eudoxio realizaron grandes aportes a la formalización de las matemáticas de la época con algunas ideas y afirmaciones indispensables. No obstante, al tratar de hallar el más cercano a este título, nos encontraríamos con Euclides, quien sistematizó y publicó toda una propuesta para ello por primera vez. Tres siglos antes de nuestra era, se popularizaba su obra más reconocida: Los Elementos, con la que organizaba un método basado en postulados para establecer verdades en el ámbito de las matemáticas y la geometría (Bell, 2016).

De esta manera, para la época de Euclides, ya se tenía la idea de una geometría con valores tanto estéticos como prácticos, en la que, sin embargo, empezaban a primar los primeros. La experiencia empírica de la época empezaba a mostrar que, a pesar de los avances, no hay una completa precisión en los métodos meramente físicos y esto empezaba a instaurarse en los matemáticos de la época, quienes empezaron a adoptar el método hipotético deductivo que se afirmaba en Los Elementos, a tal punto de considerarse que "la contribución de influencia más perdurable en las matemáticas, de todos los periodos anteriores al Renacimiento, fue la invención griega del razonamiento deductivo estricto" (Bell, 2016, p. 25).

Este método, que para Bell (2016) es "La parte esencial de su doctrina", constituye todo un sistema o una cultura del desarrollo matemático que "ha llegado hasta nosotros completamente intacta, y esa parte ha sido la insistencia en la demostración deductiva" (p. 18). No obstante, cuando Bell se refiere a la insistencia en demostrar, no abusa del término en el sentido de absolutez en las verdades matemática, de hecho, en su obra comparte un ejemplo bastante interesante:

> Un babilónico de un siglo bastante remoto que encontró 4 como la raíz de $x^2 = x + 12$ había resuelto su ecuación completamente, porque −3, que hoy decimos es la otra raíz, no existía para él; los números negativos no figuraban en su sistema numérico. (p. 19)

Siguiendo la línea por este ejemplo, para el autor hay una gran diferencia entre afirmar "X está demostrado" y "Euclides demostró X". La primera afirmación se refiere a aceptar radicalmente verdadera una afirmación, con cierta independencia de su contexto histórico, mientras que la segunda se refiere a ubicar en un momento y un lugar específico dicha demostración. Las matemáticas no han sido estáticas, han dado pasos atrás; han ajustado formatos y reformulado sus estrategias de argumentación para seguir avanzando y evolucionando en un mundo que mucho menos podría ser invariable. Si, por ejemplo, Newton o Euler presentaron en su momento un trabajo válido, se puede decir que "las demostraciones que esos grandes matemáticos dieron en los siglos XVII y XVIII fueron válidas *entonces*, a pesar de que las demostraciones no serían aceptadas hoy por un profesor competente si las hiciera un estudiante en su primer año de preparatoria" (p. 19).

2.1.2. El modo de proceder en matemáticas

Volviendo al concepto de demostración en matemáticas, el estudio y resignificación del mismo a nivel histórico ha sido crucial para el desarrollo de esta ciencia por parte de los matemáticos. Algunas preguntas claves que han marcado estos avances son el porqué de las matemáticas, qué es una verdad, qué elementos garantizan una verdad, en qué formas se presenta la certeza, cuál es el papel del matemático en este asunto, entre otras afines. Para ello, se harán algunos acercamientos a estas preguntas desde la perspectiva de algunos reconocidos matemáticos de los siglos XIX y XX, con la finalidad de entretejer un marco conceptual genérico sobre los fundamentos de las matemáticas que permitan esbozar una respuesta a estas preguntas.

Para consolidar cualquier rama de las matemáticas, se hace un poco distinto a lo que históricamente ha sido desde lo empírico. Lo esencial está en sus conceptos básicos. En esa línea, Raymond Wilder (1952) denominó axioma a aquello que se muestra como una verdad autoevidente, por ejemplo, afirmar que el todo como algo mayor que una de sus partes. A los postulados los denominó "hecho geométrico tan simple y obvio que puede suponerse su validez" (p. 35), esto se ilustra con enunciados como *por dos puntos sólo puede pasar una recta*. Para este matemático norteamericano, los inicios de estas definiciones se encuentran en Aristóteles, quien los llama principios, los cuales deben ser indemostrables para que los pasos de una demostración sean finitos. Estos principios, según Aristóteles, se pueden presentar de forma común a todas las ciencias o particulares a alguna ciencia en específico.

En concordancia con estas definiciones, consideremos que para Carl Hempel (1945) la rigurosidad en el desarrollo matemático se rige por sus axiomas o postulados. Hay algunos conceptos primitivos o básicos, y otros conceptos derivados que se encuentran en función de los anteriores. Para este estadounidense, el principal ejemplo histórico de esta afirmación es la geometría en la que Euclides basó su sistema en cinco postulados sobre puntos, segmentos de recta, circunferencia, ángulos rectos y el famoso postulado de las paralelas (el más polémico del siglo XIX). Algo que caracteriza un postulado es su imposibilidad de ser demostrado, tal es el caso de todos los intentos fallidos por muchos matemáticos de deducir lógicamente el quinto postulado de Euclides a partir de los otros cuatro (Wilder, 1952).

Volviendo al asunto de las premisas, postulados y axiomas, los matemáticos plantean afirmaciones llamadas teoremas, que para Hempel son sólo deducciones lógicas. Cada teorema, permite la existencia de otro, a través de un camino más corto. En ese sentido, un teorema como el de Pitágoras no tendría teóricamente algo nuevo, puesto que se encuentra enlazado directamente de los cinco postulados. Su novedad se halla más bien en el sentido psicológico. De esta manera, naturalmente podría cuestionarse la veracidad en los elementos físicos, si se quieren llamar así, de estos teoremas cuando se llevan a un problema real. Por lo que Hempel (1945) en cuanto a esto sostiene que:

> Una verdad de este tipo condicional no implica, obviamente, ninguna afirmación acerca de cuestiones empíricas de hecho, ni puede, por tanto, entrar nunca en conflicto con ningún resultado empírico, ni siquiera con el más inesperado; consecuentemente, a diferencia de las hipótesis y teorías de la ciencia empírica, no puede nunca tener el destino de verse desconfirmado por alguna evidencia. (p. 26)

En lo que sigue, más tajante aún reafirma que “Una verdad matemática es irrefutablemente cierta porque carece de contenido empírico o factual” (Hempel, 1945, p. 26). De acuerdo con esta visión de las matemáticas, se independiza de sus orígenes manuales del quehacer de personas como los tensadores de cuerda, que se mencionaron al inicio de este capítulo. De hecho, para este epistemólogo y matemático, la geometría que proviene de esos problemas prácticos debería ser llamada “teoría de la estructura del espacio físico”, más que simplemente geometría.

Complementando estas ideas de Hempel, para el matemático y filósofo australiano Douglas Gasking (1994), las proposiciones matemáticas, basadas en postulados coherentes, son siempre incorregibles, mientras que las proposiciones empíricas son susceptibles de modificación. Uno de los ejemplos con los que este autor apoya su afirmación, es el de una situación cotidiana en la que $7 + 5$ no fuese igual que 12. Si suponemos que en una situación de orden físico la suma de las dos cantidades iniciales de 7 y 5 elementos pertenecientes a la misma clase nos diese un resultado distinto, lo primero que haríamos sería analizar las alteraciones físicas, esto es, revisar si algún elemento por asuntos ambientales se duplicó, eliminó, dilató, contrajo, etc., con lo que este matemático postuló que no dudaríamos de los cimientos aritméticos que lo sostienen, sino de la realidad física que presentó una anomalía, puesto que para él las proposiciones corregibles dan información sobre el mundo, mientras que las incorregibles no. De esa manera, pareciese ubicar las matemáticas en un campo privilegiado, aparentemente independiente del plano real.

2.1.3. Independencia de axiomas, sistemas axiomáticos y consistencia

Una vez que se tienen los términos indefinidos y los axiomas, se debe garantizar la independencia de estos últimos. En (Wilder, 1952) se relaciona este concepto con el hecho de sintetizar la enunciación de cada uno, buscando que cualquiera que se adicione no se vea implícito en uno de los otros, es decir, que no pueda ser deducido directamente desde otro de los axiomas, puesto que esto lo convertiría en un teorema, con lo cual ya no sería el fundamento de dicho sistema. Cuando se ha analizado uno por uno cada axioma y se tienen los insumos para la deducción lógica y rigurosa de teoremas, se puede afirmar que se tiene un sistema axiomático (Wilder, 1952).

Otra característica importante en un sistema es que no implique teoremas que sean contradictorios entre sí; a lo cual se le denomina consistencia de un sistema axiomático: la propiedad de tener teoremas lógicamente coherentes. La pregunta clave para este matemático al respecto es: ¿cómo puede verificarse que un sistema axiomático sea o no consistente?

Para empezar, algo fácil sería suponer que un primer teorema T_1 y un segundo teorema T_2 (ambos deducidos de los axiomas iniciales) mostrasen una contradicción mutua, lo cual descartaría la consistencia. Ahora supongamos, que se han deducido n teoremas válidos y el teorema T_{n+1} fuese contradictorio con alguno de los n teoremas previos. Al generalizar este suceso, se tiene un método para desmoronar la aparente consistencia de un sistema axiomático. En ese sentido, hasta ahora se sabe que la manera de identificar que un sistema no es consistente se basa en la identificación de al menos contraejemplo. Al tener un procedimiento para negar, en consecuencia, nos preguntamos por la manera de afirmar y garantizar.

En esa línea, Wilder afirma que, por un lado, pueden pasar años o siglos, antes de que alguien perciba una contradicción entre dos teoremas que siempre fueron válidos entre sí, y se podría estar gozando una consistencia falsa en ese lugar o momento de la historia. Por otro lado, sostiene que "difícilmente podemos esperar alcanzar un punto en el que podamos decir con confianza que ya no pueden afirmarse más teoremas" (Wilder, 1952, p. 50). De acuerdo con esto, no se tiene un límite para el número de teoremas a deducir, lo que impediría un escaneo exhaustivo de cada elemento deducido del sistema, con lo que se imposibilita garantizar la consistencia por el análisis individual de cada elemento; nunca se podría dar por completada dicha tarea. De esa manera, este matemático concluye que simplemente no se pueden establecer pruebas absolutas de consistencia en un sistema axiomático. De hecho, complementa esto afirmando que:

> El sistema axiomático puede ser tal que tengamos mucha confianza en su consistencia, y entonces podemos pensar que conseguimos un alto grado de plausibilidad para la consistencia buscada; pero, en última instancia, tendremos que admitir que no estamos absolutamente seguros de ella. (Wilder, 1952, p. 55)

Desde la formalidad y el análisis de cada teorema del sistema axiomático, se tiene esta perspectiva de Wilder, sin embargo, para matemáticos como Oswald Veblen y John Wesley Young (1918), un conjunto de supuestos (sistema axiomático) "se llama consistente si puede darse una representación concreta de los supuestos" (p. 87). Aquí se nota cómo un nuevo elemento con respecto al asunto de la consistencia surge en favor de otra visión, para estos matemáticos existe la posibilidad de asignar algún significante a dichos axiomas o supuestos iniciales para darle consistencia. Son dos ideas aparentemente contrarias.

2.1.4. El surgimiento de las corrientes filosóficas en matemáticas

Un detalle tan llamativo como el anterior, ilustra aquello que se describe al inicio del capítulo como un mero acercamiento a las respuestas de las preguntas orientadoras; es un acercamiento, puesto que las discusiones epistemológicas alrededor de la naturaleza de las matemáticas no se comportan de manera absoluta, como si tuviesen unas cuantas perspectivas que fuesen las únicas válidas, sino que se tiene todo un abanico de posibilidades desde las cuales se puede argumentar y con la que los matemáticos se pueden sentir identificados a la hora de ejercer su actividad.

A esto se le conoce como escuelas o corrientes filosóficas de las matemáticas. Para los alcances de este trabajo, se hará hincapié en las tres principales: logicismo, intuicionismo y el formalismo, las cuales se establecieron entre finales del siglo XIX e inicios del XX. (Ruiz, 2003). Previo a estas escuelas, se hará un esbozo histórico sobre la lógica, puesto que, como se verá posteriormente, los conceptos, procedimientos y situaciones alrededor de la lógica y los métodos de demostración fueron los que dieron origen a dichas escuelas. Luego, se podrá continuar con los rasgos generales o planteamientos que las consolidaron, y se introducirán las nociones o diferencias en la percepción sobre demostración que se tienen para cada escuela. Se hará una breve revisión a algunos trabajos de los principales representantes de cada una. Para el caso del logicismo, se pondrá especial atención en Gottlob Frege; para el caso del formalismo, el énfasis se hará en David Hilbert; finalmente, para el intuicionismo, se focalizará en el pensamiento de Luitzen Brouwer.

2.1.5. Breve enunciación histórica de la lógica

Si bien los procesos de la lógica y la tarea de obtener conclusiones y aplicar razonamientos se han abordado desde diferentes culturas, es innegable que la persona que más ha destacado como uno de los principales fundadores es Aristóteles. Para Salgado (2012), “Aristóteles fue el primer pensador que elaboró una lógica formal que sería secundada por la lógica de occidente durante más de dos milenios” (p. 45). Esto se debe a que, entre toda la obra de Aristóteles, una gran parte fuese dedicada al análisis de la validez del conocimiento. Para él, de acuerdo con David Ross (2022), las ciencias se dividían en teóricas, prácticas y productivas, por los logros que cada de una de ellas representara en la sociedad: el conocimiento, la conducta y la fabricación de objetos, respectivamente.

Algo que es bastante interesante, es la clasificación que Aristóteles hacía de la lógica en las tres ramas permitidas por él: la lógica no pertenece a ninguna. Es una ciencia propedéutica, la base de toda generación válida de conocimiento, al punto de considerarla como parte de la cultura general, la cual le permitiría a las personas distinguir los enunciados que exigen una demostración, los que no, y el método a emplear (Ross, 2022). Curiosamente, el filósofo antiguo desconocía la palabra *lógica*, la cual aparece por primera vez en los tiempos de Cicerón (Siglo I a.c.). Al estar relacionado el estudio de la lógica con la hermenéutica, la palabra que utilizaba era la *analítica*, que para él se refería al análisis del razonamiento. A pesar de ser considerado como uno de sus fundadores, los aportes más revolucionarios como insumos para la filosofía de las matemáticas se dieron dos milenios después, tal como sostiene Mosterín (2000):

> Solo a finales del siglo XIX y principios del XX se ha logrado una cierta claridad acerca de la lógica, las clases y los algoritmos, temas todos ellos íntimamente imbricados entre sí. Esta clarificación es el fruto de una de las mayores revoluciones intelectuales de todos los tiempos (…). (p. 13)

De acuerdo con el autor, entre todos los lógicos que destacaron por su participación en esta revolución se pueden mencionar Gottlob Frege, George Boole, Bertrand Russell, John Von Neumann, Alfred Tarski, etc. La clarificación y rigurosidad que se le agrega a la lógica con el trabajo de estos matemáticos, apunta a la simbología especializada y compacta, elementos sobre el propósito de la lógica, la diferencia entre ella y las matemáticas, el análisis de los métodos de demostración, entre otros aspectos.

La simbología es la primera clave, puesto que ha caracterizado a la lógica desde su nacimiento o renacimiento, dependiendo de cómo se quiera ver dicha revolución. De acuerdo con los norteamericanos Clarence Irving Lewis y Cooper Harold Langford, un ejemplo del poder de la simbolización es la aritmética, que en sus comienzos no se podía expresar de ninguna manera que no fuese el lenguaje común. Los antiguos griegos no tenían símbolos para el número cero y utilizaban las letras de su alfabeto para los demás y, en consecuencia, para los griegos fue imposible formular una regla general de la división (Lewis y Langford, 1932). Para los autores, el hecho que un niño que supere la educación primaria pueda realizar con facilidad las operaciones básicas matemáticas, representaban un trabajo tenaz en la antigüedad, incluso, afirman que "si no hubiera sido por la adopción de nuevos símbolos ideográficos más flexibles, no habrían podido desarrollarse nunca muchas ramas de la matemática" (p. 249), puesto que la mente humana es incapaz de percibir la esencia de las operaciones básicas cuando utiliza el lenguaje ordinario, con su notación escrita, que es bastante extensa; lo cual representa una clara superioridad del uso de los ideogramas sobre los fonogramas.

Continuando con el trabajo de Lewis y Langford, entre los años 1825 y 1850 se produjeron en Gran Bretaña los fundamentos de la lógica matemática, lo que, tal como se dijo previamente, fue una revolución para el trabajo matemático. Los trabajos de William Hamilton y Augustus De Morgan destacaron, y sirvieron como fuente de inspiración para el inglés George Boole, quien presentó su álgebra lógica por primera vez en 1847 (Lewis y Langford, 1932). Para Boole, la lógica se encuentra íntimamente relacionada con el lenguaje, puesto que expresa proposiciones a través de símbolos cuya combinación intenta ser análoga a los procesos mentales (Boole, 1854); de hecho, el lógico y matemático inglés afirmaba que: "Lo que hace posible la lógica es la existencia de nociones generales en nuestra mente, nuestra capacidad de concebir una clase y de designar mediante un nombre común a sus miembros individuales" (Boole, 1854, p. 245).

Hasta el momento se ha mencionado bastante el uso de afirmaciones, simbologías y operadores para la lógica. Sin embargo, antes de retomar las características del trabajo de Boole, se hará una contextualización de los principales elementos en lógica evidenciados en el trabajo del filósofo norteamericano Ernest Nagel. Para la lógica se requieren enunciados, conectores lógicos y cuantificadores, que se definen de acuerdo con Nagel (1994) así:

- Enunciados: Es lo primero que se requiere. Son porciones de discurso a las que se les asigna un juicio de valor como verdadero o falso, las cuales se simbolizan con letras. Por ejemplo, afirmar "Los estudiantes saben hacer demostraciones", representado como X.
- Conectivas de enunciado: Con cierto número de enunciados se pueden formar nuevos enunciados mediante las partículas lógicas llamadas conectivas. Las principales son:
  Negación: Se agrega al enunciado la partícula "no" para invertir la afirmación. Para el caso anterior sería "Los estudiantes no saben hacer demostraciones", representado como $\sim X$.
  Conjunción: Combinación entre dos enunciados para formar un enunciado conjunto empleando la partícula "y". Una situación ilustrativa sería "Los estudiantes saben hacer demostraciones y los estudiantes aprenden matemáticas", representado como $X \wedge Y$.
  Disyunción: Combinación entre dos enunciados para formar un enunciado conjunto empleando la partícula "o". Análogo al caso anterior, se puede decir que "Los estudiantes saben hacer demostraciones o los estudiantes aprenden matemáticas", representado como $X \vee Y$.
  Condicional: Combinación entre dos enunciados con la partícula "si – entonces" de manera condicional, con un enunciado que implica otro. Un ejemplo sería "Si los

estudiantes saben hacer demostraciones entonces los estudiantes aprenden matemáticas", representado como $X \supset Y$[1], donde usualmente X se denomina antecedente e Y consecuente.

Bicondicional: Combinación entre dos enunciados con la partícula "si y sólo si", evidenciando que ambos se implican mutuamente. Basado en el mismo ejemplo, sería "Los estudiantes saben hacer demostraciones si y sólo si los estudiantes aprenden matemáticas", representado como $X \equiv Y$[2].

- Cuantificadores: Para denotar una generalización o particularización del tipo "todos cumplen x" o "al menos un x cumple".

  Cuantificador universal: Se emplea para asignarle a todo elemento de una misma clase una característica común. Un ejemplo sería "Para todo b, si b es un estudiante, entonces b sabe hacer demostraciones" representado como $(b)(b\ es\ un\ estudiante\ \supset\ b\ sabe\ hacer\ demostraciones)$.

  Cuantificador existencial: Enuncia una característica para la que existe por lo menos un elemento de alguna clase que la puede cumplir. Utilizamos como ejemplo "Algunos estudiantes saben hacer demostraciones", representado como $(\exists b)(b\ es\ un\ estudiante\ \wedge\ b\ sabe\ hacer\ demostraciones)$.

Con estos elementos básicos sobre lógica, es posible retomar el trabajo de Lewis y Langford (1932). Para ellos, el gran hallazgo de Boole fue que en su obra *The Mathematical Analysis of Logic* se pudo conseguir por primera vez un modo completo y sistemático de utilizar la lógica, aplicando operaciones matemáticas para la obtención de conclusiones verídicas. Según los autores, la estructura de su trabajo se basa en tres ideas fundamentales:

> La idea de la operación de "elección" y de "símbolos electivos"; las "leyes del pensamiento" expresables como reglas de operación sobre esos símbolos, y la observación de que esas reglas de operación son las mismas que valdrían en álgebra respecto de los números 0 y 1. (p. 253)

[1] Se empleó este símbolo para mantener la notación original del texto de Ernest Nagel. Actualmente, el símbolo más usado es el de una flecha hacia la derecha ($\rightarrow$).
[2] Análogo al caso anterior. Actualmente, el símbolo más usado es el de una doble flecha ($\leftrightarrow$).

Por ejemplo, para hablar de la clase de los elementos que sean X y a la vez sea Y, se utiliza la expresión XY, con la cual Boole expresa que $XY = XY$. Para hablar de la clase de los elementos que son X o son Y (pero no ambas a la vez) utilizaba la expresión $X + Y$, definiendo además que $X + Y = Y + X$. Este tipo de enunciaciones es lo que ilustra el porqué de la expresión álgebra Booleana, se nota claramente el uso de la multiplicación y la suma para designar la conjunción y la disyunción, respectivamente. Siguiendo esta línea, se podían aplicar ciertas distribuciones del producto con respecto a la suma, pero desde la expresión algebraica $Z(X + Y) = ZX + ZY$, la cual se podría interpretar como: Si de la clase Z se seleccionan los elementos que son X o son Y, se tiene los elementos que son a la vez Z y X o aquellos que son a la vez X e Y (Lewis y Langford, 1932). Este último ejemplo evidencia el apoyo de Boole en los trabajos de De Morgan, puesto que estas relaciones se denominan usualmente como *Las Leyes de De Morgan*.

Si se continúa explorando el trabajo de Boole, se verá cómo aborda de una manera muy interesante la operación de exclusión, negación de clases, la "nada" como la clase sin miembros, etc., apoyado en una estructura algebraica, compatible con un gran número de expresiones del álgebra de cantidades reales, extrayendo conclusiones a partir de las premisas dadas, sugiriendo el cambio de lenguaje ordinario por el simbólico, destacando así nuevamente el potencial de la lógica.

2.1.6. Métodos de demostración en matemáticas

Con las herramientas formales que aporta la lógica, se tienen varios métodos de demostración en matemáticas. Apoyados en el trabajo de Portilla y Caicedo (2022), se hará la diferenciación entre los métodos directos e indirectos. Para el primer caso se verá que sólo hay uno, y para el segundo se presentarán en general cinco, aunque al finalizar el apartado se aclarará la relación entre el último método indirecto con la concepción de método directo.

Método directo. Consiste en la demostración de una proposición Y, a partir de una proposición X que es hipotéticamente verdadera. Para ello, se tiene en cuenta la estructura de secuencia de implicaciones conectadas por conjunciones, de donde se aplica una transitividad entre el antecedente de la primera implicación y el consecuente de la última. Es decir, si $(X_1 \supset X_2) \wedge (X_2 \supset X_3) \wedge (X_3 \supset X_4) \wedge (X_4 \supset X_5) \wedge \ldots (X_n \supset Y)$, se concluye como verdadero que $X_1 \supset Y$. Este método se denomina directo, porque se asume que se "llega" en una forma directa y explícita a la conclusión que se quería demostrar inicialmente.

Como ejemplo, considere que se desea demostrar el siguiente teorema. Si n es un número natural par, se cumple que n^2 es par. Empezamos declarando la expresión de un número natural par; luego, aplicamos las propiedades algebraicas que competen a la elevación al cuadrado; esto lleva como resultado a un número que cumple la definición de número par, lo que nos permite definir que n^2 es un número par. Simbólicamente sería:
(n es par $\supset n=2k$) $\wedge$ ($n=2k \supset n^2 = (2k)^2$) $\wedge$ ($n^2 = (2k)^2 \supset n^2 = 4k^2$) $\wedge$ ($n^2 = 4k^2 \supset n^2 = 2(2k^2)$) $\wedge$ ($n^2 = 2(2k^2) \supset n^2 = 2p$, donde $p = 2k^2, natural$) $\wedge$ ($n^2 = 2p$, donde $p = 2k^2, natural \supset$ n^2 es par), de donde se concluye que (n es par $\supset$ n^2 es par).

Métodos indirectos. Como su nombre lo indica, estos métodos llegan a la conclusión lógica que se desea demostrar como verdadera por un camino indirecto, si se quiere, implícito. Se demuestra que una conclusión Y considerando una verdad hipotética X, sin partir necesariamente de X. De acuerdo con las leyes lógicas, se sustenta la viabilidad de estos en términos generales. Sin embargo, en los próximos apartados de este trabajo, se abrirá la discusión del rechazo o la desconfianza hacia algunos de estos métodos desde ciertas posturas filosóficas de las matemáticas.

- **Contraposición o contrarrecíproco.** Este método propone demostrar una conclusión Y, a partir de una verdad hipotética X, identificando la forma contrarrecíproca de esta implicación, la cual es lógicamente consistente. Es decir, para demostrar que $X \supset Y$, se puede sustituir por la demostración de que $\sim Y \supset \sim X$.
  Como ejemplo, considere que se desea demostrar el siguiente teorema. Si X es múltiplo de 3 y de 5, entonces X es múltiplo de 15. Para ello aplicamos el contrarrecíproco como: Si X no es múltiplo de 15, entonces X no es múltiplo de 3 y no es múltiplo de 5. Inicialmente se define X diferente de un múltiplo de 15. Luego, se factoriza el número 15 como 3 factor 5. De donde se concluye que X diferente de un múltiplo de 5 o X diferente de un múltiplo de 3. Simbólicamente sería:
  $(X \neq 15k \supset X \neq 3 \cdot 5K) \wedge [X \neq 3 \cdot 5K \supset (X \neq 3(5k) \vee X \neq 5(3k))] \wedge [(X \neq 3(5k) \vee X \neq 5(3k)) \supset X\ no\ es\ múltiplo\ de\ 3\ o\ X\ no\ es\ múltiplo\ de\ 5]$, de donde se concluye que $X\ es\ múltiplo\ de\ 3\ y\ de\ 5 \supset X\ es\ múltiplo\ de\ 15$.

- **Contradicción o reducción al absurdo.** Este método de demostración propone evidenciar la negación de cierta afirmación X, buscando que dicha negación implique una contradicción C, es decir, probar que $\sim X \supset C$. Ahora, de acuerdo a las normas lógicas, un antecedente verdadero nunca puede llevar a un consecuente falso o contradictorio, lo que imposibilita la opción de afirmar $\sim X$, lo que nos deja como única alternativa que la afirmación X sea cierta.

  Como ejemplo, considere que se desea demostrar el siguiente teorema. El conjunto N de los números naturales es infinito. Aplicamos el método de reducción al absurdo negando el teorema, es decir, afirmando que N es finito. Al ser N finito, existe un número k, tal que k es el mayor número natural o el supremo de dicho conjunto. Sin embargo, siempre existe $k + 1$ perteneciente a N. Ahora, como $k + 1$ es mayor que k, esto hace que N tenga un número mayor al supremo, es decir, k no es el supremo. Como conclusión, k es el mayor natural y k no es el mayor natural, lo que representa una contradicción. De esa manera, la suposición de que N es un conjunto finito pierde validez, obligándonos a afirmar que N, en efecto, sí es un conjunto infinito.
- **Contraejemplo o refutación.** Debido a que un solo caso afirmativo no es suficiente para confirmar algo, y un solo caso negativo refuta cualquier afirmación, este método se emplea para negar una proposición mediante un ejemplo que la contradiga, de ahí se denomina contraejemplo.

  Como ejemplo, considere que se desea demostrar el siguiente teorema. Si x es un número real, entonces su cuadrado es mayor que 0. Para ello, suponemos que $x = 0$, donde el cuadrado de 0 sería 0. Pero 0 no es mayor que 0. Con este caso particular, se niega la afirmación y se concluye que no es verdadera. Simbólicamente sería:

  Supóngase que $x = 0$, luego $x^2 = 0$. Pero se sabe que $0 = 0$, y no es posible que $0 > 0$. Lo que contradice la afirmación de $x^2 > 0$, para todo x real, haciéndola inválida.
- **Demostración por casos separados.** En ocasiones, para probar una generalidad, es necesario considerar las posibilidades finitas que se tienen para llegar a la misma. El método de casos permite demostrar bicondicionales al probar las dos direcciones del condicional, o afirmaciones que requieran el análisis individual de cada caso.

  Como ejemplo, considere que se desea demostrar el siguiente teorema. Si m es un número entero, entonces $m(m + 1)$ es un número par. Para ello suponemos dos casos, el primero es que m sea un entero par, y el segundo, que m sea un entero impar.

Para el caso 1, si m es par, entonces $m = 2k$, con k entero. Así, se tiene que $m(m+1) = 2k(2k+1)$. Luego, $2(k(2k+1)) = 2h$, donde $h = k(2k+1)$, lo cual significa que para el caso 1 se cumple que $m(m+1)$ es un número par.

Para el caso 2, si m es impar, entonces $m = 2k+1$, con k entero. Así, se tiene que $m(m+1) = (2k+1)(2k+1+1)$, de donde se obtiene que $m(m+1) = (2k+1)(2k+2)$. Al factorizar el segundo binomio se tiene $m(m+1) = 2(2k+1)(k+1)$, esto es, $m(m+1) = 2h$, donde $h = (2k+1)(k+1)$, lo cual significa que para el caso 2 se cumple que $m(m+1)$ es un número par.

Como conclusión, si se cumple el caso 1 y el caso 2, y no se tienen más opciones para los números enteros, se tiene que el teorema es verdadero para todo número entero m.

- **Principio de inducción matemática.** Este principio se utiliza usualmente para probar afirmaciones en el conjunto de los números naturales. Para ello, se debe probar que la proposición se cumple para el número 1. Luego, se asume como verdad hipotética que si la proposición se cumple para k (una hipótesis), entonces será cierta para $k+1$. Como ejemplo consideremos nuevamente el teorema que se demostró con el método anterior, pero para el conjunto de los números naturales.

  Si n es un número natural, se cumple que $n(n+1)$ es par.

  Como primer paso, probamos con $n = 1$. Esto es $1(1+1) = 1(2)$, lo que da como resultado 2, el cual es un número par.

  El segundo paso es asumir que $k(k+1)$ es un número par, es decir $k(k+1) = 2h$, con h natural será nuestra verdad hipotética. Ahora debemos llegar a que $(k+1)(k+2)$ es par. Para ello tomamos la igualdad de nuestra hipótesis y por ley uniforme sumamos $2(k+1)$ a ambos lados así: $k(k+1) + 2(k+1) = 2h + 2(k+1)$. De donde se tiene por factorización que $(k+1)(k+2) = 2(h+k+1)$, es decir $(k+1)(k+1) = 2t$, con t natural, lo cual se quería comprobar.

  Finalmente, al tener demostrado que la afirmación se cumple para 1, y suponiendo que se cumple para k, se demuestra como verdadera para $k+1$, con lo cual se cumple que nuestro teorema del ejemplo es válido para todo el conjunto de los números naturales.

2.1.7. Las corrientes filosóficas y su concepción de la demostración

El logicismo matemático: sinonimia entre la lógica y las matemáticas. Al igual que en todo desarrollo humano, la categoría de fundador o creador de algo, es bastante complicada de afirmar y sostener, puesto que detrás de cada gran hallazgo y publicación, hay todo un entramado histórico de distintos aportes que consolidaron dicho trabajo. Aun así, si se quiere enunciar un fundador de la lógica moderna, tendría que ser el matemático alemán Gottlob Frege, con la publicación de su obra *Ideografía. Un lenguaje de fórmulas, similar al aritmético, para el pensamiento puro* (Mosterín, 2000).

Desde el *Génesis* se consideran las múltiples lenguas del mundo como un castigo que no permite la cooperación social; para Voltaire esta multiplicidad de lenguas era una "plaga de la humanidad", que se comporta como una barrera para la interacción; el esperanto fue un buen intento de universalidad, puesto que permitió la formulación de un lenguaje auxiliar adicional, aunque no cumplió su propósito inicial de ser global. El triunfo de la lógica, en ese sentido, es el formalizar una lengua que se propone ser universal y descriptora del pensamiento humano. De acuerdo con Mosterín (2000):

> En el mundo imperfecto en que vivimos, a los que miramos con simpatía el proyecto de una lengua universal no nos queda más remedio que apuntarnos al carro del inglés como lengua auxiliar. Sin embargo, y curiosamente, este sueño de la lengua perfecta dio su fruto parcial pero brillante con el nacimiento de la nueva lógica. (p. 37)

Frege elige los conectores negación y condicional como los elementos primitivos de un sistema axiomático, el cual se compone por nueve axiomas y tres reglas de inferencia. Definir la disyunción "A o B" como "si no A, entonces B" hace parte de los análisis hechos por él, de ahí que se estudien las relaciones lógicas entre enunciados, dando pie a lo que se denomina lógica proposicional. Adicionalmente, este matemático alemán introdujo por primera vez la noción de cuantificadores lógicos y las variables ligadas, que es fuertemente empleado en las matemáticas actuales. Su propósito no era sustituir el lenguaje común por la lógica, sino evidenciar que para ciertas tareas o estudios científicos es una herramienta indispensable. De hecho, al hacer una analogía con el ojo humano y el microscopio, Frege sostiene que el lenguaje ordinario nos permite conocer en términos generales lo que nos rodea, sin embargo, no se puede ingresar a lo específico o particular si no se tiene un apoyo como la lógica. Por esa razón, la lógica es una herramienta que da alta precisión:

> Por la rigidez de la herramienta, por la inmutabilidad de sus partes, es decir, por las propiedades cuya ausencia en la mano explican su versatilidad. Tampoco nos basta el lenguaje de palabras. Necesitamos un sistema de signos, del que cualquier ambigüedad esté ausente, y a cuya estricta forma lógica no se le pueda escapar el contenido. (Frege, 1879, como se cita en Mosterín, 2000, p. 41)

Una de las obras más importantes de Frege, *Los fundamentos de la aritmética: Una investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*, recopila una teoría de lo que son los números naturales. A diferencia de matemáticos como Kronecker, Frege no pensaba que los números fuesen autoevidentes creaciones de Dios, él no se preguntaba por las palabras aisladas, sino por los contextos en los que éstas aparecían. En ese caso, los números no se refieren a objetos, sino a conceptos. Por ejemplo, cuando decimos “tengo un libro con nueve demostraciones”, el número nueve se refiere a que bajo el concepto de demostración caen nueve objetos. Así las cosas, define al número cero como el concepto P en el que ningún objeto cae bajo P. El número uno sería el concepto P en el que un solo objeto cae bajo P. El número $n+1$ corresponde al concepto P si hay un objeto a que cae bajo P, y el número n corresponde a caer bajo P pero siendo distinto de a (Mosterín, 2000).

En otras palabras, Frege se refiere a los números como clases relacionadas con la cardinalidad de los conjuntos. Por ejemplo, el número 0 es la clase de los conceptos vacíos, el número 1 es la clase de los conceptos unitarios, y así sucesivamente, por lo cual su definición de número natural n se sintetiza en “la serie numérica que empieza por el 0, es decir, que n es el 0 o n cae bajo cada concepto bajo el que cae el 1 y bajo el que cae el siguiente de cada objeto que cae bajo él” (Frege, 1879, como se cita en Mosterín, 2000, p. 50).

La definición de número natural evidencia claramente la consistencia con el principio de inducción matemática, puesto que se relaciona con lo que se mencionó en apartados anteriores con respecto a 1, k y el siguiente de k. Con este tipo de análisis lógicos y la definición de número natural, Frege estableció un sistema axiomático para la aritmética y el análisis matemático. En consecuencia, logró aclarar la diferencia entre conceptos como conjunto y montón, o la pertenencia y la inclusión. Aquí se nota que su objetivo principal era la reducción de estas áreas de las matemáticas a la lógica, a partir de nociones y principios netamente lógicos. Por labores como ésta, en las que se reflexiona sobre la epistemología y el devenir de las matemáticas, filósofos como Michael Dummett han considerado la obra de Frege como el inicio de la filosofía de las matemáticas en el sentido que hoy la entendemos, dado que este tipo de reduccionismo que Frege aplica con la lógica como base de todo saber matemático es lo que se conoce como el logicismo matemático (Mosterín, 2000).

Esta primera corriente filosófica introducida por Frege tiene sus bases en el pensamiento kantiano. Para Kant los enunciados analíticos son aquellos que contienen el predicado en el sujeto, por ejemplo, en una afirmación como A es B, todas las características de B se encuentran en A. En cambio, los analíticos los denominó como los que no tienen el predicado contenido en el sujeto, por ejemplo, en una afirmación como A es B, algunas características de B no se encuentran en A. Estos dos tipos de enunciados en Frege son analíticos si son susceptibles de ser demostrados a partir de leyes lógicas, y en caso contrario, los clasificó como sintéticos. De aquí proviene la pregunta que marcó el resto de su obra: ¿son los enunciados de la aritmética analíticos o sintéticos?

Durante cerca de veinte años trabajó para fortalecer sus aportes desde la definición de número natural y organizar el sistema axiomático de la aritmética, hasta la publicación de su obra *Leyes fundamentales de la aritmética, deducidas ideográficamente*:

> En el volumen I (1893) presentaba Frege una versión revisada de su lógica e ideografía, y deducía en su cálculo lógico los principales teoremas aritméticos y los fundamentos de la teoría de los números naturales. En el tomo II (1903) ampliaba el programa a la teoría de los números reales y, por tanto, al análisis matemático. (Mosterín, 2000, p. 59)

Aparentemente, Frege había logrado su cometido: probar la tesis logicista en la que se sostiene que los teoremas aritméticos son enunciados analíticos y, por tanto, calcular es deducir, esto es, la aritmética es reducible a la lógica. A pesar del éxito que evidenciaba esta publicación, fruto de su ardua labor, se tuvo que esperar hasta junio de 1902 para que el joven Bertrand Russel enviara una carta al autor de las *Leyes fundamentales de la aritmética*, para indicarle que había una imprecisión en su obra, hoy denominada *La paradoja de Russell*.

Frege no identificaba la gran complejidad que había en el concepto de clase, pensaba que a cada enunciado le correspondía un concepto, y a su vez, a cada concepto le correspondía una clase. Esto significaba que las clases también eran objetos, pero no iguales a los que contenían, por ejemplo “la clase de las demostraciones no es una demostración”, por lo cual la clase de las demostraciones no pertenece a la clase de las demostraciones. Sin embargo, a Russell se le ocurrió analizar la clase P de todas las clases que no se pertenecen a sí mismas (al igual que la del ejemplo anterior). Si tomamos a P, por un lado, estaría bajo dicha clase por su definición de no contenerse a sí misma, no obstante, P no estaría bajo dicha clase puesto que al pertenecer a sí misma, esto sería más que suficiente para excluirla. Como conclusión, P se pertenece a sí misma si y sólo si P no se pertenece a sí misma.

De acuerdo con Jesús Mosterín (2000), Frege manifestó su tristeza al notar que los fundamentos de su gran obra tambaleaban con la definición de clase. De hecho, posteriormente en un manuscrito suyo dejó expresado que “me he visto obligado a abandonar la opinión de que la aritmética sea una rama de la lógica y por tanto que todo en la aritmética pueda ser probado lógicamente” (p. 62).

Bertrand Russell trabajó fuertemente para resolver dicha paradoja y continuar con el programa logicista iniciado por Frege. En 1910 se publicó el primer volumen del libro *Principia mathematica*, en el que Bertrand Russell y Alfred Whitehead resolvieron dicha paradoja mediante la teoría de los tipos lógicos. La esencia de dicho enfoque está en considerar un orden jerárquico para las distintas clases, el *nivel 0* consiste en los objetos, el *nivel 1* en los atributos de los objetos, el *nivel 2* en los atributos de los atributos de los objetos, y así, hasta el número de atributos relacionados que se requieran. Con esto, los autores de los *Principia* establecieron que sólo se pueden hacer relaciones así: Una función del *nivel 1* sólo puede predicarse a los elementos del *nivel 0*. Una función del *nivel 2* sólo puede predicarse a los elementos del *nivel 1* (Mora, 2016).

Como ejemplo, consideremos un carro de marca X (nivel 0), se tiene la clase de los carros (nivel 1), por tanto, la función ser “carro sólo” se puede predicar sobre el carro de marca X, y es imposible que la clase de los carros se predique a sí misma, pues no es un carro. Se tiene una clase de los vehículos automotores (nivel 2), por tanto, la función “ser un vehículo automotor” sólo se puede predicar sobre la clase de los carros, puesto que la clase de los vehículos automotores no es un vehículo automotor (Mora, 2016). Con dicha restricción, obligando a cada función estando uno y sólo un nivel por encima del atributo u objeto anterior, resuelve la posibilidad de enunciar la clase de todas las clases que no se pertenecen a sí mismas, tal como Russel la enunció casi una década antes de la publicación de los *Principia.* Aún con dicha modificación, de acuerdo con Mosterín (2000) la tesis reduccionista del logicismo era insostenible o trivial.

El formalismo matemático: la reducción al absurdo como nueva generatriz de conocimiento matemático. En apartados anteriores, se hizo énfasis en los aportes de la geometría de Euclides al método axiomático mediante el que se desarrolló toda una rama de las matemáticas, partiendo de cinco postulados. El alemán, David Hilbert, se interesó por la deducción de la totalidad de teoremas que se generan en la geometría y propuso una estructura compuesta por cerca de veinte axiomas mediante los cuales se podía hacer la demostración. Hasta este punto, parece un trabajo deductivo común en geometría, sin embargo, el aspecto a destacar de su trabajo, es que se le ocurre cambiar conceptos como “punto”, “línea”, “estar entre”, “yacer”, etc., por otros como “objeto de la clase 1”, “objeto de la clase 2”, “relación número 1”, “relación número 2”, etc. (Hempel, 1945).

El hecho de cambiar los objetos comunes, de los cuales se tienen diversas nociones por los distintos medios de apropiación del conocimiento en cada sociedad, y emplear conceptos tan genéricos como “objeto de la clase” para formular y demostrar teoremas, es lo que le permite afirmar que las matemáticas requieren de la operación formal de distintos conceptos representados por una simbología ordenada con reglas específicas. Para Hilbert, las demostraciones seguirán siendo rigurosas, en el sentido matemático de la palabra, puesto que se han deducido únicamente empleando las herramientas lógicas, y, en consecuencia, no se requiere de una significación particular de los términos primitivos para hacer matemáticas (Hempel, 1945).

Apoyado en su estudio axiomático de la geometría mediante elementos no convencionales y sin significado previo para quien ejerce la actividad matemática, Hilbert postula una nueva concepción de las matemáticas:

> Todo aquello que hasta ahora se ha constituido a las matemáticas reales se convierte en objeto de una formalización estricta; *las matemáticas reales*, esto es, las matemáticas en un sentido estricto, se convierten de esa manera en un conjunto de fórmulas demostrables. (Hilbert, 1993, p. 59)

Para Hilbert, esta actividad matemática consiste en tomar las fórmulas usuales de las matemáticas y agregarles las implicaciones, negaciones, los cuantificadores y algunos signos oportunos para enunciarlos, por lo tanto, la construcción matemática se hace en paralelo desde la aritmética y la lógica formal, una visión un poco más instrumental (pero sin restarle relevancia) de la lógica se identifica en esta perspectiva. A esta concepción de la actividad matemática desde la mera formalización de objetos y relaciones se le denomina el formalismo matemático, atribuyéndole a David Hilbert su fundación.

Algunos ejemplos que ilustran el formalismo desde la geometría son las distintas aproximaciones que hace Wilder (1952) en su artículo *El método axiomático*. Para comenzar, supone una ciudad C, en la que hay libros y bibliotecas, sustituyendo respectivamente los conceptos de punto y línea. La pertenencia de un libro a una biblioteca se asocia a la pertenencia de un punto a una recta. Se puede ilustrar el axioma 1 de la geometría euclidiana como “Toda biblioteca es un conjunto de puntos”. El axioma 2 se asume como “Existen por los menos dos libros”. El siguiente como “Si p y q son dos libros, entonces existe una y sólo una biblioteca que los contiene”. Aquí nos encontraríamos con una limitación con el axioma 3, puesto que no se puede garantizar que exista una biblioteca que los contenga si inicialmente estos pertenecen a bibliotecas diferentes.

Esto hace que Wilder (1952) pueda reformular el ejemplo para corregir esta imprecisión así: supongamos ahora una comunidad Z, en donde todas las personas pertenecen a algún club. El concepto de punto se cambiaría por el de persona, el de línea por el de club, y la pertenencia a una línea como la pertenencia a un club. De esa manera, el axioma 3 quedaría como “Si p y q son personas de Z, entonces existe uno y sólo un club al que ambos pertenezcan”. Esto cobra sentido, puesto que pueden pertenecer previamente a cada persona a un club diferente. Si tomamos el axioma 4, podemos reformularlo como “para un club, existe alguna persona de Z que no pertenezca a dicho club”. No obstante, a la hora de aplicar nuestro ejemplo al axioma 5 se puede analizar de manera análoga que no lo cumple.

La última reformulación que hace Wilder (1952) de la situación ilustrativa, es la de suponer una comunidad con cuatro ciudadanos *a, b, c* y *d*, suponiendo que cada pareja de personas funda un club sin invitar a algún otro ciudadano. Al desarrollar una combinación, se nota que se pueden formar seis clubes diferentes: *ab, ac, ad, bc, bd, y cd*. Al replantear la formación de los cinco axiomas clásicos de la geometría euclidiana con estos elementos, quedarán satisfechos todos y se puede emprender una construcción axiomática sin hablar incluso de geometría, la cual es abordada con gran detalle por el autor.

Estos ejemplos refuerzan las ideas ya expuestas sobre Hilbert en cuanto al manejo de las fórmulas en matemáticas. Para complementar su postura, adiciona una segunda máxima a su trabajo: "A esta matemática real debe añadirse una nueva matemática, una *metamatemática*, cuya función es asegurar la primera, protegiéndola tanto del terror de las prohibiciones innecesarias como de la preocupación de las paradojas" (Hilbert, 1993, p. 59). Estos dos elementos son los que dan el sustento de las matemáticas de acuerdo con este matemático alemán: por un lado, el matemático hace matemáticas puesto que deduce nuevas fórmulas demostrables que parten del sistema axiomático, y por el otro lado, debe reflexionar su práctica, el poder y las limitaciones de sus métodos, volviendo a los axiomas, a las bases, para identificar la consistencia de los mismos con el uso de argumentos apropiados. La clave, según lo anterior, está en alternar ambos niveles (como él los denomina), las verdades matemáticas no deben suponerse como lógicamente evidentes, la tarea del matemático se basa en indagar por qué los métodos empleados permiten llegar siempre a resultados correctos.

Algo más generalizado, si se quiere ambicioso, de la corriente del formalismo es la extensión de las matemáticas a los distintos campos de la ciencia. Al respecto, el fundador del formalismo menciona "yo mismo he demostrado en otra parte, por ejemplo, la consistencia de los axiomas de la *teoría elemental de la radiación*, construyendo un sistema axiomático a partir de porciones analíticamente independientes (…)" (Hilbert, 1993, p. 31). Para ser más contundente, hace incluso una comparación del sistema axiomático euclidiano con las distintas áreas de la física así: para la estática, el fundamento se encuentra en el teorema del paralelogramo de fuerzas; en la mecánica, sería la ecuación diferencial del movimiento de Lagrange; en la electrodinámica las ecuaciones de Maxwell marcan el fundamento; en cuanto a la termodinámica la función de energía, temperatura y presión como derivadas de la entropía y el volumen, etc.

Cuando Hilbert (1993) identifica el papel de las matemáticas en forma análoga para las ciencias físicas, emplea la expresión "enfoque dominante de las matemáticas" para referirse a la naturaleza de la deducción. De hecho, afirma al respecto que "Todo lo que puede ser objeto del pensamiento científico cae, con tal que haya alcanzado un cierto grado de madurez que le permita conformar una teoría, en el terreno propio del método axiomático" (p. 35). Los desarrollos de la geometría, aritmética, teoría de funciones y el análisis promueven esta dominancia, que hacen de la matemática, y en particular los sistemas axiomáticos, como el campo propedéutico de todas las ciencias físicas.

Otro elemento importante para los formalistas es el método de demostración por reducción al absurdo. El primero en emplearlo fue el antiguo griego Hipócrates de Quios, quien demostró la fuerza de dicho método indirecto (reductio ad absurdum) aplicándolo a la geometría por primera vez cuatro siglos antes de nuestra era (Bell, 2016). Este método mantuvo cierta vigencia, pero no era del todo aceptado por la comunidad matemática. Para los formalistas tenía completa viabilidad, de hecho, Hilbert, resolvió el problema propuesto por Paul Gordan sobre la existencia de una base finita para un sistema de invariantes aplicando dicho método. No obstante, Gordan al leer dicha demostración por reducción al absurdo, afirmó que "Esto no es matemática, esto es teología" (Corry, 2002, p. 28).

Lo anterior ilustra algunas de las controversias del formalismo matemático, puesto que "La validez universal de este método permaneció inalterable hasta el siglo XX, cuando se hicieron objeciones a usarlo sin discernir al razonar sobre clases infinitas" (Bell, 2016, p. 55). Las objeciones (algunas se mencionan en el próximo apartado) dieron pie a la fundación de otra escuela matemática que, desde uno de sus mayores representantes como lo fue el holandés Luitzen Brouwer, mostró rechazo a muchas de las ideas de David Hilbert: el intuicionismo.

El intuicionismo: la desconfianza hacia la reducción al absurdo. En términos generales, de acuerdo con Oostra (2009), el intuicionismo cuestiona la aceptación de que la inexistencia de algo pueda ser un absurdo, y que el avance de las matemáticas se dé mediante la prueba de la consistencia o no contradicción de ciertos sistemas axiomáticos. Esto redunda en rechazar la idea de las matemáticas como una extensión de la lógica. En relación con los subcapítulos anteriores, se puede resumir esta idea en que "El intuicionismo es una doctrina sobre los fundamentos de la matemática que surgió en la primera mitad del siglo XX como una reacción al formalismo y el logicismo" (Oostra, 2009, p. 9).

La cantidad de matemáticos, lógicos y filósofos que contribuyeron a la consolidación del intuicionismo es tan amplia, que en la literatura se empleó el término de *pre-intuicionista* para quienes contribuyeron antes de Luitzen Brouwer, de quien se puede afirmar que fundó dicha corriente. La reacción de aquellos pre-intuicionistas se materializó en el rechazo de las matemáticas como una mera ciencia formal de símbolos. El matemático alemán Leopold Kronecker fue altamente reconocido en la comunidad matemática por su polémica frase “Los números naturales los hizo el buen Dios, todo lo demás es obra humana”, donde destacaba el papel del matemático frente a su quehacer, superando la reduccionista simbología formalista carente de un protagonista (Oostra, 2009). Otro referente pre-intuicionista lo encontramos en el estadounidense Charles Sanders Peirce, cuando asevera conclusiones como la siguiente:

> No me parece que la matemática dependa en algún modo de la lógica. La matemática razona, desde luego. Pero cuando el matemático vacila o yerra en su razonamiento la lógica no puede acudir en su ayuda. Aún más fácilmente cometería el matemático errores análogos y otros más en lógica. Por el contrario, lo que sí creo es que la lógica no puede conseguir la solución de sus problemas sin un amplio uso de la matemática. En realidad, toda la lógica formal es simplemente matemática aplicada a la lógica. (Peirce, 1902, p. 161).

Peirce ajusta la definición de matemática (“la ciencia que obtiene conclusiones necesarias”) de su padre, Benjamin Peirce, llevándola al plano de la inferencia apodíctica, para él, la matemática es la ciencia que estudia lo verdadero de las situaciones hipotéticas. Se nota claramente en el trabajo de Peirce que el papel de la lógica, sin restarle importancia a la misma, está en un ámbito un poco más instrumental, al servicio de quien la emplea para ejercer la actividad matemática, más no es una ciencia que tiene a las matemáticas como un subtema o una dependencia más (Peirce, 1902).

El francés Henri Poincaré también fue reconocido en los inicios de esta corriente, quien “rechazó tanto la teoría de conjuntos de Cantor como el logicismo, argumentando que en la matemática se requiere más que solo lógica. Según él se necesita intuición (…)” (Oostra, 2009, p. 11). Un caso bastante particular es el del alemán Herman Weyl, aun considerando que fue estudiante y seguidor de David Hilbert, durante algún tiempo dirigió su atención a la intuición, al punto de afirmar que “el fundamento último del conocimiento matemático es la intuición más que la prueba”, mostrando con ello cierto rechazo a algunas ideas formalistas.

La lista de personajes que aportaron a los cimientos del intuicionismo es bastante amplia y escapa a los alcances de este capítulo; a todos ellos se les reconoce una gran contribución a lo que

Brouwer planteó. Ahora, para tocar directamente esta corriente, es fundamental partir de la palabra intuición, ¿a qué se refiere específicamente para esta escuela matemática?

Siguiendo la línea de Oostra (2009), la intuición aquí no es una habilidad innata, instinto o el sentido de algo autoevidente, tampoco es oportuno afirmar que la matemática intuicionista es más sencilla o intuitiva que la clásica. El enfoque se encuentra en la intuición como el fundamento para construir verdades matemáticas. Lo que sí se puede decir que tienen en común el término técnico y el cotidiano es que la intuición es previa a la deducción, incluso independiente de esta última.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer postuló inicialmente el llamado *Acto primero* del intuicionismo en tono imperativo, así:

> Separar de manera completa la matemática del lenguaje matemático y por lo tanto de los fenómenos del lenguaje descritos por la lógica teórica, reconociendo que la matemática intuicionista es una actividad de la mente que en esencia carece de lenguaje y que tiene su origen en la percepción de un movimiento de tiempo. (Brouwer, 1981, como se citó en Oostra, 2009, p. 12).

Para el matemático holandés, este *movimiento de tiempo* es la división de un momento de vida en dos cosas, con lo que introduce el concepto de *segundidad* (Twoity), cuya acumulación constituye la intuición matemática. En otras palabras, la matemática se forma de manera interna en la mente del matemático, quien la lleva a construcciones cada vez más complejas partiendo de las intuiciones básicas. El lenguaje y la lógica toman un rol secundario, útil para retener o comunicar algo, pero no tienen la capacidad de crear sistemas matemáticos nuevos (Oostra, 2009). Una manera interesante de distinguir la matemática de la lógica fue propuesta por Peirce. Según el norteamericano, la lógica es la ciencia de la obtención de conclusiones y la matemática es la ciencia que obtiene las conclusiones, esto es, la lógica es categórica, y la matemática es puramente hipotética mediante proposiciones condicionales (Peirce, 1902).

En la línea divisoria establecida por Peirce, el fundador del intuicionismo agrega que la consistencia es una cuestión de la lógica, mientras que la existencia es objeto de la matemática. De hecho, en cuanto a las contradicciones, para Brouwer la contradicción lógica es de tipo lingüístico, mientras que la de tipo matemático se refiere a la imposibilidad de construir. Esto es, un objeto matemático existe si es construible mentalmente, como si las matemáticas tuviesen un aire de constructivismo (Oostra, 2009). Con respecto a esta terminología del objeto, la verdad mental debe retomarse, puesto que impregna la totalidad de los planteamientos de esta corriente. Adicionalmente, Oostra (2009) sostiene que:

> El único determinante de la verdad matemática es la actividad mental, luego una proposición matemática se vuelve verdadera cuando el sujeto experimenta (o "intuye") su verdad después de haber efectuado una construcción mental adecuada; en cambio, una proposición se hace falsa cuando el sujeto se convence de que su construcción mental es imposible. Brouwer expresa que "no hay verdades no experimentadas". (p. 14)

Ligado a lo anterior, entre los conectores y operadores lógicos, el que presenta cambios más notables en su concepción es el de negación, denominada *negación intuicionista.* En esencia, negar un enunciado desde el intuicionismo no es simplemente cambiar su valor de verdad, sino aseverar que su construcción es imposible, lo cual cuestiona el *principio de la doble negación lógica*: si la negación de un enunciado es imposibilitar su construcción, pierde un poco el sentido la identificación de una negación en dicha imposibilidad. Con esto, la consecuencia clara es que se niega el *principio del tercero excluido*. Sin este principio, en el método de demostración por reducción al absurdo se anula su validez deductiva, ¿cómo puedo negar la existencia de algo, y confirmar que si se presenta una contradicción es porque nunca debí negar su existencia? El negar la posibilidad de construir un objeto, obliga a que existan muchas otras posibilidades (y a la vez ninguna) como para garantizar que la implicación directa es la reafirmación de su existencia (Oostra, 2009).

El método de reducción al absurdo permite la fácil demostración de innumerables teoremas matemáticos. Sin él, la construcción y validación del conocimiento matemático se ve fuertemente afectada. Cabe aclarar que este método no se niega completamente para los intuicionistas, la única manera en que sea válido es considerar la *reducción al absurdo débil,* que para esta corriente se relaciona con la suposición de un enunciado válido y, si esto conduce a una contradicción, sí se puede concluir la negación de dicho enunciado, es decir, la imposibilidad de construirlo (Oostra, 2009).

El *Acto segundo* del intuicionismo consistió en la formulación de dos nuevas maneras de crear entes matemáticos. La primera consistió en emplear sucesiones infinitas constituidas por entes matemáticos adquiridos con anterioridad. La segunda empleó las llamadas especies matemáticas, es decir, propiedades que, si se cumplen para ciertos entes, entonces deben cumplirse para todos los demás que tienen en común algunos elementos con aquellos entes preliminares. El intuicionismo optó por una generalización matemática distinta y los trabajos que Brouwer y sus compañeros publicaron utilizando estos medios para desarrollar las matemáticas fue percibido por Hilbert como un ataque personal a su escuela, tanto así, que “a lo largo de la década de 1920 se fue cristalizando una seria disputa sobre la fundamentación de la matemática que pronto minó el aprecio mutuo entre Brouwer y Hilbert convirtiéndolo en franca enemistad” (Oostra, 2009, p. 17).

2.1.8. Una conversación tranquila entre las tres corrientes filosóficas

Si bien en este trabajo se retomaron estas tres corrientes filosóficas, todas ellas son propias del siglo pasado, y no es de extrañar que en las últimas décadas hayan surgido nuevas variantes sobre las mismas, o incluso nuevas perspectivas sobre las matemáticas. Para los alcances de este trabajo, se consideraron estas tres porque se asumen como las principales en toda la historia de las matemáticas.

Es pertinente aclarar en este punto que las tres corrientes filosóficas no se comportan como conjuntos mutuamente excluyentes, no son una tríada a la que cada matemático somete la dirección de su labor a una y sólo una. Estas corrientes son más bien perspectivas frente al quehacer matemático que distintos matemáticos, filósofos y lógicos a lo largo de la historia han planteado, reformulado o refutado, para resignificar su actividad y darle mayor *rigor*. Una visión trivial de las matemáticas las asociaría con procedimientos e ideas absolutas, independientes de quien las efectúa o desarrolla, pero esto es una concepción bastante simplista y asocial del conocimiento matemático.

Si analizamos la propuesta del logicismo, las matemáticas quedan al servicio de la lógica y hasta se puede dudar de si realmente existe una matemática o si simplemente hay un tipo de lógica que se especializa en una entidad que llamamos matemática. Por su parte, el formalismo propone un trabajo matemático instrumental, e independiente de significados, que simplemente plantea reglas iniciales y con estas reglas iniciales se puede construir todo lo que hoy concebimos como matemáticas, sin depender de las ideas de quien las formula. En cierta medida, en ambos puntos de vista hay un saber matemático asumido como algo procedimental y pareciera esto como si las matemáticas no dependieran de los matemáticos ¿Sería posible, análogamente, pensar la música sin el músico o la ciencia sin el científico? ¿podría agregarse que la música es una aplicación de las ondas mecánicas? Una respuesta tajante a preguntas tan profundas, contrario a resolver rápidamente la cuestión, termina generando cierta incertidumbre o descontento.

Para el caso del intuicionismo, uno de los grandes cambios que propone esta corriente es el rechazo absoluto al método demostrativo de la reducción al absurdo, basado en que la negación de una afirmación, no se refiere necesariamente al opuesto de la misma, sino a la negación de la posibilidad de construir dicha afirmación en un contexto matemático. El cuestionamiento a toda una tradición matemática que ha generado grandes aportes para la ciencia y la humanidad es bastante radical. Los absolutismos o discusiones binarias en las que algo debe ser negro o blanco para poder existir en ocasiones pueden generar más tropiezos que avances. Los debates socio-científicos actuales apuntan a la presencia de una escala de grises en los que se puede dialogar para construir conocimiento.

Un punto a analizar bastante interesante al respecto fue propuesto por Richard Von Mises. Este matemático austriaco consideraba que el asunto del rigor absoluto era algo inviable, era más bien algo relativo a un lugar y a un momento. En ese sentido, afirmaba que:

> La historia de la matemática muestra que éste no es el caso, sino que, por el contrario, cada generación se ve superada por la siguiente en cuanto a criterios de rigor. Todos los matemáticos clásicos, incluido Gauss, han cometido alguna vez, como hoy puede ver cualquier estudiante, pecados contra el rigor. (Von Mises, 1951, p. 122)

De acuerdo con esto, formular una meta que apunte a la rigurosidad duradera es una cuestión inútil, puesto que, con el avance y el surgimiento de nuevos grandes matemáticos, se evidenciarán las limitaciones de los métodos que en algún momento se postularon como *Los métodos*. Al día de hoy, es difícil conocer un matemático que se proclame un pleno seguidor de alguna de las escuelas, puesto que con el reconocimiento de aquella disputa entre las corrientes como un evento que ya sucedió, se pueden apreciar ciertos detalles complementarios.

Se nota que, para el logicismo y el formalismo, los procedimientos y la organización es crucial, lo cual es necesario para compartir de generación a generación los distintos avances de una ciencia. En cuanto al intuicionismo, hay una intuición previa a cualquier deducción que en muchas ocasiones dirige la atención (y la intención) del matemático, lo cual presenta bastante coherencia con la forma en que se genera de manera incipiente el conocimiento en las distintas comunidades académicas y no académicas. El retomar las bondades de cada corriente, no implica el entrar por ello en la idea de formular una nueva única alternativa para el abordaje de las matemáticas, puesto que considerando de nuevo la perspectiva de Von Mises (1951), se estaría cayendo de nuevo en el error de considerar la permanencia invariante de una idea en la historia de la matemática.

A la luz de lo planteado en el marco teórico, se utilizarán varios de los elementos aquí compilados para analizar una propuesta didáctica publicada por la Sociedad Colombiana de Matemáticas y la Universidad Nacional de Colombia, como fundamento para el fortalecimiento del pensamiento matemático en el departamento de Antioquia. Para complementar este análisis, se revisará también un documento ministerial con el propósito de identificar cual(es) de las corrientes filosóficas están más marcadas en la propuesta educativa nacional.

3. CAPÍTULO 3: REVISIÓN DE PROPUESTA DIDÁCTICA

3.1. Plan de área Sociedad Colombiana de Matemáticas: Geometría euclidiana

Para comenzar esta revisión, se considera la guía didáctica de geometría Euclidiana diseñada por la Sociedad Colombiana de Matemáticas para la Red Matemática Antioquia, un programa de la Gobernación de Antioquia que, en su momento, tenía como objetivo el fortalecimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el departamento. Inicialmente, este texto guía se publicó para la formación de maestros, pero se encuentra abierto al público para estudiantes o demás personas interesadas en emplearlo. En este apartado se retomarán algunas secciones que tienen elementos directamente vinculados con la demostración matemática, y se realizarán algunos comentarios al respecto, basados en algunos referentes del capítulo anterior.

Lección 1:

Con respecto a esta primera lección del libro, es pertinente retomar la idea de los elementos básicos o primitivos en la geometría. Las autoras, Correa, Muñoz y Villegas (2014), mencionan que:

> Los conceptos de punto, línea y plano son elementos básicos de la geometría, a partir de los cuales se construye toda la estructura geométrica y no se definen, se aceptan intuitivamente. A medida que vamos presentando axiomas y probando o enunciando teoremas, estos elementos básicos de la geometría irán adquiriendo sus propiedades, lo cual nos irá ampliando el entendimiento de ellos. (p. 2)

En este planteamiento se evidencia una relación con las definiciones de Hempel (1945) de aquellos términos primitivos o básicos en matemáticas que, en términos formales, no se pueden definir, puesto que, al hacerlo, se estarían involucrando nuevos conceptos o relaciones que tampoco han sido definidos. Aun considerando esto, las autoras consideran la necesidad de acercar al estudiante a una representación gráfica de cada concepto básico y suministrar una noción física de su construcción: el punto se relaciona con la huella que deja el lápiz sobre el papel, la línea estaría asociada con la huella que deja dicho punto en movimiento y el plano como un piso o un espejo con un tamaño infinito.

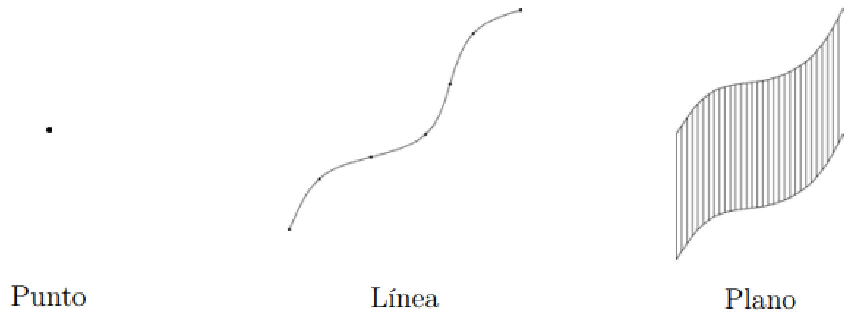


Ilustración 1: Elementos no definidos en geometría (Correa, Muñoz y Villegas, 2014

A partir de estos términos o conceptos básicos, se pueden generar aquellos derivados, junto con los diferentes axiomas, postulados y teoremas. Correa, Muñoz y Villegas (2014) definen los axiomas y postulados como los principios básicos que no se demuestran y se asumen como ciertos, es decir, en el sentido de una verdad autoevidente como la nombraba Wilder (1952). Para el caso de los teoremas, los definen como "resultados que pueden demostrarse en forma lógica a partir de los términos básicos, las definiciones y los axiomas" (Correa, Muñoz y Villegas, 2014, p. 1). Por lo tanto, aclaran que, por la extensión y propósitos del trabajo, sólo se demuestran algunos de los teoremas, otros los mencionan como axiomas o ejercicios propuestos.

Con el fin de aproximar el curso al desarrollo euclidiano como es conocido históricamente, las autoras agregan como material indispensable para las clases la regla, compás y transportador, que son claves para las construcciones geométricas.

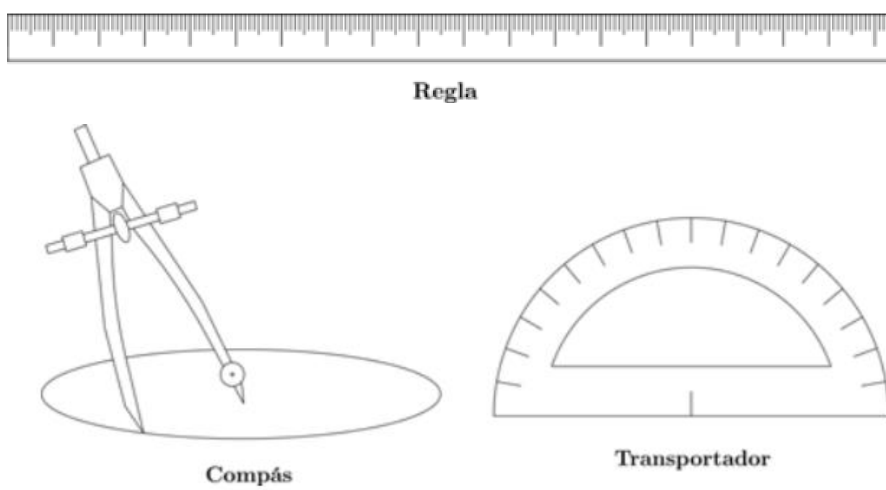


Ilustración 2:Instrumentos necesarios para la geometría (Correa, Muñoz y Villegas, 2014)

En el aspecto formal, en esta primera lección sugieren los siguientes axiomas: "Por dos puntos distintos pasa una única línea recta que los contiene, es decir, dos puntos distintos determinan una única línea recta" (p. 3), "Dos líneas rectas distintas en un plano tienen a lo más un punto en común" (p. 4). Es interesante que para esta guía se consideren como elementos suficientes para el inicio en la construcción y desarrollo de la geometría estos dos únicos axiomas.

Con respecto a los otros tres (que dan la totalidad de cinco propuestos por el mismo Euclides y en trabajos posteriores como los de Hilbert se reafirma la necesidad de cinco) se tienen algunos comentarios. El axioma de la extensión infinita de una recta en ambos sentidos se define implícitamente como la explicación de la doble punta de flecha en la representación de una recta. El axioma de la circunferencia no se retoma en esta lección de ninguna manera, y es bastante entendible, puesto que, desde el punto de vista didáctico, no es pertinente involucrar elementos como el de circunferencia, si no se ejercitarán los conceptos y procedimientos que definen dicho lugar geométrico. En cuanto al axioma de los ángulos rectos iguales entre sí, no se menciona en esta lección, sin embargo, esta relación que se asocia con la propiedad reflexiva es un tanto compleja de abordar en las escuelas, puesto que a pesar de ser bastante intuitiva su afirmación, el reconocimiento de su importancia en un sistema axiomático se convierte en un gran reto para el maestro que aborda la introducción a dicho curso.

Lección 2:

Al pasar a la segunda lección, las autoras mencionan los siguientes axiomas: "A cada segmento de recta le corresponde un único número real positivo, que representa su medida" (p. 8), "La distancia más corta entre dos puntos es la medida del segmento de recto que los une" (p. 12). Adicionalmente, se define la congruencia de segmentos y el uso del símbolo de congruencia. Estos axiomas continúan fortaleciendo el sustento hempeliano de los elementos primitivos como aquellos que continúan forjando las herramientas para la prueba de teoremas posteriores (Hempel, 1945).

Lección 4:

En esta lección, las autoras consideran por primera vez en el texto una demostración matemática. En este caso, no se tiene hasta el momento alguna contextualización previa de lo que es una demostración, o de cuáles elementos básicos de una demostración matemática debería empezar a reconocer el estudiantado. El ejemplo es el siguiente: "Si los puntos A, B, C y D de la figura son colineales y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, probar que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$". La demostración de dicho teorema la desarrollan así:

Solución

$$m(\overline{AB}) + m(\overline{BD}) = m(\overline{AC}) + m(\overline{CD}) \tag{4.1}$$

Como $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ entonces $m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$ y sustituyendo en 4.1 tenemos

$m(\overline{CD}) + m(\overline{BD}) = m(\overline{AC}) + m(\overline{CD})$.

Luego, $m(\overline{BD}) = m(\overline{AC})$.

Por tanto, $\overline{BD} \cong \overline{AC}$.

Ilustración 3: Ejemplo de una demostración formal escrita (Correa, Muñoz y Villegas, 2014)

Como información complementaria de esta demostración, las autoras remiten al lector a las notas 4.1., que se presentan como sigue:

Notas 4.1

1. Observamos que las operaciones para segmentos que hemos definido, se restringen a segmentos que están sobre una misma línea recta, es decir, segmentos colineales. Más adelante, cuando expliquemos el concepto de líneas paralelas, las operaciones hechas aquí para segmentos colineales son válidas también para segmentos paralelos. Si los segmentos no son paralelos no tiene sentido hablar de su suma.

2. Para simplificar la escritura utilizaremos la notación de segmento para representar tanto el segmento como su medida. En cada caso, el texto completo nos va a permitir interpretar correctamente en qué sentido se utilizan los símbolos.

   Por ejemplo, podemos escribir $\overline{AB} = 5\,cm$, para decir que la medida de $\overline{AB}$ es igual a $5\,cm$ en lugar de escribir $m(\overline{AB}) = 5\,cm$. También podremos escribir $\overline{AB} + \overline{CD} = 18\,cm$, para indicar que la suma de de las medidas de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es $18\,cm$.

Ilustración 4: Notas aclaratorias de la demostración anterior (Correa, Muñoz y Villegas, 2014)

Al respecto, se puede precisar que en el libro se presenta la noción de demostración en un sentido autoevidente, que pareciera enunciarse bajo el supuesto de lectores, tanto profesores como estudiantes, con ideas previas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, respectivamente. Considerado un texto de acceso público a la totalidad del departamento, no se puede negar la diversidad de procesos que se tienen en las distintas instituciones, por lo que, si se tuvo un esclarecimiento preliminar de cada uno de los instrumentos de medida, es esperable también un apartado similar que brinde claridad sobre cómo se utiliza el *instrumento* de generación de conocimiento matemático, es decir, la demostración, las distintas formas en que se puede redactar o argumentar un razonamiento en geometría, particularmente hablando. También sería conveniente agregar a esto la importancia de los métodos de demostración en matemáticas, especialmente el método directo que se ilustró antes con Portilla y Caicedo (2022).

Lección 5:

Aquí se retoman algunos detalles importantes sobre planos. Para ello, se refieren al siguiente axioma: “Por tres puntos no colineales pasa uno y sólo un plano”. Adicionalmente, realizan la demostración del siguiente teorema: “Una recta y un punto exterior a ella determinan un plano y sólo uno”. Cuya demostración desarrollan de la siguiente manera:

> Dos puntos de la recta y el punto exterior a ella son tres puntos no colineales que, por el Axioma 5.1, determinan un plano y sólo uno.

Ilustración 5: Ejemplo de una demostración formal escrita (Correa, Muñoz y Villegas, 2014)

Para complementar el anterior, las autoras emplean otro teorema: “Dos rectas distintas que tienen un solo punto en común determinan un plano y sólo uno”.

> Si tomamos el punto en común y un punto diferente en cada una de las rectas, tenemos tres puntos no colineales que, por el Axioma 5.1, determinan un plano y sólo uno.

Ilustración 6: Ejemplo de una demostración formal escrita (Correa, Muñoz y Villegas, 2014)

Es bastante atractivo que empleen preguntas de análisis de objetos físicos para afianzar conceptos geométricos. En esta sección preguntan por la explicación de por qué las mesas de cuatro patas pueden cojear sobre el piso, mientras que las de tres patas jamás lo hacen. Para responderla, se refieren a la definición de tres puntos no colineales, que garantizan la existencia de un plano, mientras que cuatro puntos colineales no necesariamente deben ser coplanares, y de allí establecen la distinción, utilizando como ejemplos los trípodes de la topografía, lo que fortalece la consistencia del sistema axiomático que definían Veblen y Young (1918) en términos de una representación concreta de los supuestos.

Lección 10:

Basadas en una metodología similar, las autoras del texto dan un recorrido por cada una de las siguientes lecciones del texto, y al llegar a esta sección, se presenta el primer ejercicio propuesto para el estudiante que consista en realizar por su cuenta una demostración formal. Es pertinente destacar este hecho, puesto que se han debido recorre 9 lecciones, antes de retar al estudiante con un aspecto que se ha venido formulando desde las primeras lecciones del libro. En las siguientes lecciones del libro se siguen presentando distintas demostraciones bastante claras y se proponen algunas como ejercicios. El ejercicio en cuestión es el siguiente:

En la Figura 10.7, los ángulos $\angle AOB$ y $\angle COA$ son congruentes entre sí. Probar que $\overrightarrow{OD}$, que es la semirrecta opuesta de $\overrightarrow{OA}$, es la bisectriz del ángulo $\angle BOC$.

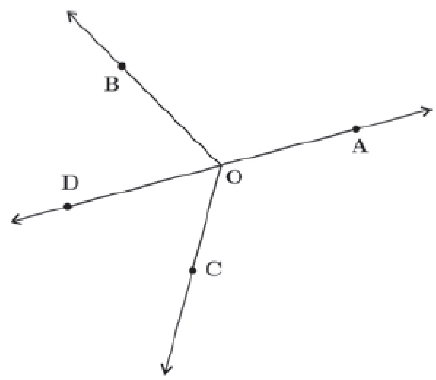


Ilustración 7: Primera demostración formal propuesta (Correa, Muñoz y Villegas, 2014)

Sería interesante analizar la posibilidad de ofrecer dicho espacio en las primeras lecciones, para acompañar los procesos de demostración de los estudiantes desde los inicios en el curso con algunos de los métodos de demostración que se retomaron en otro capítulo apoyados en el trabajo de Portilla y Caicedo (2022). Para complementar, se debe considerar que, en ocasiones, los tiempos disponibles para abordar la geometría en las instituciones son limitados, y permitir que la argumentación de deducciones se quede en dicho número de lección, afectaría la posibilidad de fortalecer estos procesos con rigor desde un inicio.

Lección 11:

Llegados a este punto, las autoras han abordado con bastante profundidad el ámbito conceptual y procedimental de la teoría de ángulos. Se ha retomado un poco del sistema sexagesimal y el uso de las herramientas básicas para el estudio de los ángulos. Adicionalmente definen los tipos de ángulos, y algunas relaciones entre ángulos, como los opuestos por el vértice. Para ello enuncian el siguiente teorema, el cual demuestran posteriormente: “Ángulos opuestos por el vértice son congruentes”.

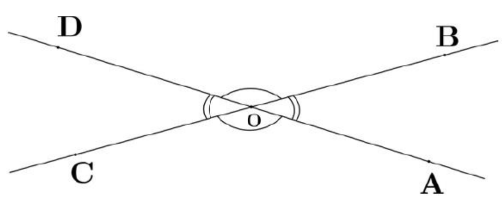


Ilustración 8: Representación de ángulos opuestos por el vértice (Correa, Muñoz y Villegas, 2014)

Vamos a probar que $\angle AOB \cong \angle COD$.

Como

$\angle BOD$ es el suplemento de $\angle AOB$ porque forman un ángulo llano y

$\angle BOD$ es el suplemento de $\angle COD$ por la misma razón, entonces

$\angle AOB \cong \angle COD$ por tener el mismo suplemento.

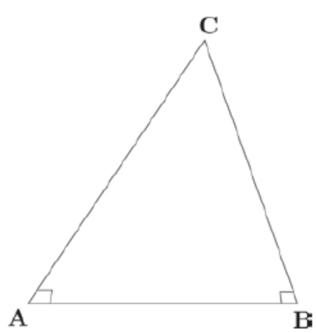
Hemos probado que los ángulos $\angle AOB$ y $\angle COD$, que son opuestos por el vértice, son congruentes.

En forma similar, podemos demostrar que $\angle BOD \cong \angle AOC$.

Ilustración 9: Demostración del teorema anterior (Correa, Muñoz y Villegas, 2014)

Lección 12:

Correa, Muñoz y Villegas (2014) describen en esta lección las características de las rectas perpendiculares, y emplean como axioma uno de los puntos de partida de las geometrías no euclidianas, que al principio del texto se omitió, tal como se mencionó al inicio de este capítulo: “Por un punto, ya sea exterior o no a una recta, pasa una perpendicular y sólo una perpendicular a dicha recta”. El poner en duda esta afirmación, se pueden considerar los avances de la geometría esférica, como la de la tierra, en la que esto no es del todo cierto. Como ejemplo, demuestran que ningún triángulo puede tener dos ángulos rectos, como se muestra a continuación:



En el $\triangle ABC$ si $\angle A$ y $\angle B$ fueran ángulos rectos, entonces tendríamos dos rectas perpendiculares desde el punto C a la recta AB, pero por un punto exterior a una recta pasa una perpendicular y sólo una a dicha recta.

Luego, podemos decir que un $\triangle ABC$ no puede tener más de un ángulo recto.

Ilustración 10: Demostración escrita formal (Correa, Muñoz y Villegas, 2014)

Es notable la claridad con la que las autoras proponen este ejemplo de demostración en prosa, mediante la cual se hace una aseveración de la geometría euclidiana. El proceder matemático se basa en cambios históricos, por lo que en este punto una alternativa didáctica podría ser generar algunas de las preguntas que movieron a matemáticos del siglo XIX a rechazar este principio y generar nuevas geometrías, que promovieron grandes cambios en la ciencia y en la concepción actual de la geometría.

Consideraciones generales

Las autoras logran sintetizar en el libro una propuesta didáctica para la enseñanza de la geometría de manera clara y ordenada. Para los maestros, el libro se aprecia como una guía en la que se pueden retomar elementos formales y prácticos de la geometría escolar. La rigurosidad en el aspecto formal es otro aspecto a destacar de esta propuesta didáctica, puesto que se presentan claramente enumerados los distintos axiomas y teoremas. En cuanto al material concreto, cabe destacar el uso de instrumentos de medida para construir, medir y analizar las distintas figuras del curso, lo cual fomenta esa consistencia del sistema axiomático que se ilustraba con Wilder (1952) y con Veblen y Young (1918).

De acuerdo con Viteri y Dedeo (2022), el abordaje matemático desde la demostración a la hora de buscar rigurosidad con los estudiantes no depende únicamente a la cantidad de demostraciones que repetitivamente se desarrollen, para ellos se genera siempre un paso de la incertidumbre a la confianza. Cuando los estudiantes se relacionan con un modo de razonar y con una estructura para desarrollar y redactar sus argumentos, se genera un tema de confianza en lo que se hace, generando un mejor desempeño en este tipo de actividades matemáticas. El texto de las profesoras Correa, Muñoz y Villegas (2014) se propone generar estos niveles de confianza, pues aborda con rigurosidad, pero también con lenguaje cercano, las distintas explicaciones y demostraciones.

Sin embargo, cabe aclarar que Viteri y Dedeo (2022) destacan que ante este tipo de confianzas se corre siempre el riesgo de estar ante una idea errónea, argumentándola y apoyándola, por el comportamiento inductivo que se puede experimentar al evidenciar que algo siempre funciona. Para discutir este punto, se sugeriría agregar a la propuesta didáctica una reflexión con los estudiantes afín a las ideas de Von Mises (1951), en cuanto a la rigurosidad y la veracidad como un concepto relativo, que es susceptible de ajustes y nuevos planteamientos con el pasar de los años, incluso décadas o siglos.

En general, se aprecia en el trabajo de las autoras un recurso de gran apoyo tanto para estudiantes como profesores, en el que se podría agregar una introducción al significado e importancia de la demostración y las formas básicas para hacerlo. También se podría anexar un capítulo teórico que introdujera la historia y filosofía de las matemáticas en términos de la geometría y la demostración, destacando su relevancia para el avance de esta ciencia, y entender que la duda y la negación también son formas de avanzar y aprender matemáticas (Harel y Sowder, 2007).

CAPÍTULO 4: REVISIÓN DE LOS DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

De acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) son "un conjunto de aprendizajes estructurantes que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar, desde transición hasta once" (MEN, 2016, p. 5). Los DBA se publicaron inicialmente en el año 2015, y se realizó una revisión con la comunidad educativa mediante foros regionales, foros virtuales, documentos académicos, sistematización de la discusión interna y pública. Con los aportes de este trabajo comunitario, se planteó una segunda versión en 2016.

Se dice que estos derechos son un conjunto de aprendizajes estructurantes, puesto que comprenden conocimientos, habilidades y actitudes que facilitan el logro de nuevos aprendizajes, lo que se ve reflejado en el desarrollo humano de quien aprende. Sin embargo, los DBA no son por sí mismos la respuesta ante los retos educativos nacionales, sino que son una orientación que se debe articular con enfoques, metodologías y demás herramientas de cada institución educativa, guardando coherencia con respecto al Proyecto Educativo Institucional (PEI).

Una ventaja al respecto es que los DBA se presentan como aprendizajes amplios que no se logran en contados encuentros, sino que requieren de una propuesta un año lectivo. Esto flexibiliza la propuesta, ya que permite la integración de diversas perspectivas para lograr el principal propósito de una educación de calidad a nivel nacional. Además, la formulación de cada uno en algún grado de escolaridad es sólo un referente para abordarlos, es el maestro quien tiene la autonomía de trasladarlos de un grado o periodo escolar a otro, según las particularidades de cada grupo de estudiantes.

Cada DBA se muestra en dicho documento nacional mediante tres elementos: la enunciación general de dicho aprendizaje, una serie de evidencias que expresan si se está alcanzando de dicho aprendizaje, y un ejemplo particular de una situación didáctica que lo vincula y complementa las evidencias de aprendizaje. En general, se puede decir que los DBA buscan ser una guía de fácil comprensión y flexibilidad metodológica para la comunidad educativa en general; se numeran, más no presentan en un orden estricto; plantean ejemplos de lo que el niño estaría en capacidad de realizar una vez alcanzado dicho aprendizaje.

A continuación, se retomarán algunos DBA que, de acuerdo con lo enunciado en los rastreos sobre las concepciones de demostración en las distintas corrientes o escuelas matemáticas, son afines a dicho proceso de validación del conocimiento matemático. No es posible distinguir explícitamente un DBA que se vincule con la demostración de uno que no aporte considerablemente. De ser posible, por un lado, se estaría contradiciendo la propuesta de flexibilidad que se plasma en dicho documento, y por el otro, los distintos razonamientos empleados en matemáticas para desarrollar una demostración reciben insumos de cada trabajo que se haga en matemáticas. En consecuencia, en cuanto a afinidad, se aclara que se retoman sólo algunos de los *más* cercanos al proceso demostrativo, de acuerdo con los apartados que consolidaron nuestro marco teórico. Al analizar la demostración matemática como el fundamento de esta ciencia, todos los avances en las distintas áreas, procesos y subprocesos harían aportes significativos a lo que es una demostración.

Grado 3° - DBA 9

Este derecho se enuncia como “Argumenta sobre situaciones numéricas, geométricas y enunciados verbales en los que aparecen datos desconocidos para definir sus posibles valores según el contexto” (MEN, 2016, p. 27). Las evidencias que apoyan este aprendizaje serían: proponer soluciones aun con datos desconocidos, tomar decisiones con cantidades no conocidas y la manipulación de dichas incógnitas. Como ejemplo, el documento propone el estudio de una situación hipotética en la que dos niños tienen dos cajas de dulces cerradas y no se desconoce el número de dulces de cada uno, pero se sabe que ambas cajas tienen la misma cantidad de dulces. A uno de los niños se le agregan tres dulces sobre la caja y al otro se le agrega uno. Con esta información, se podría analizar cuál de los dos tiene una mayor cantidad de dulces, cuánto sumarían ambos dulces, qué tanto es mayor una de las cantidades con respecto a la otra.

Al considerar este derecho básico de aprendizaje, se aprecia la manipulación de objetos matemáticos con el apoyo de algunas propiedades de orden de los números reales. Incluso, se puede relacionar con el uso de desigualdades numéricas. En términos generales, la argumentación cobra un papel esencial en dicho DBA, pues los estudiantes y maestros podrán proponer distintas soluciones a las preguntas planteadas sin manipular directamente los objetos matemáticos, aportando a la dimensión social de la que hablan Ibañes y Ortega (2005). Si bien es posible emplear un material concreto que represente dichas cajas, la incógnita del número de dulces será un objeto que no se puede manipular directamente, lo que motiva a los estudiantes a recurrir a las propiedades básicas. Sería un gran reto llamarles a estos axiomas propiamente un *sistema* *axiomático consistente* (Wilder, 1952), por el grado de escolaridad de la situación, pero el concepto de base para la construcción de conocimiento es bastante oportuno.

Grado 7° - DBA 3

Para este caso, su enunciación es "Utiliza diferentes relaciones, operaciones y representaciones en los números racionales para argumentar y solucionar problemas en los que aparecen cantidades desconocidas" (MEN, 2016, p. 54). Las evidencias que apoyan este aprendizaje serían: realizar operaciones para calcular el decimal correspondiente a una fracción o su caso contrario, emplear las propiedades distributiva, asociativa, modulativa, del inverso y conmutativa para las operaciones suma y multiplicación para dar una solución, determinar el valor desconocido de una cantidad. Como ejemplo, se sugiere desarrollar el juego de la calculadora averiada, en la que se encuentran malas la tecla del número cinco y la tecla del punto decimal. En este juego, los estudiantes deben calcular el resultado de algunas operaciones con al menos dos maneras distintas y discutiendo con sus compañeros la validez de las soluciones.

Este derecho guarda una relación bastante interesante con el anterior, pues exige de la argumentación del estudiante, en cuanto a las propiedades de la suma y la multiplicación, para realizar cálculos aritméticos, contribuyendo a la dimensión social y cognitiva de la demostración matemática (Ibañes y Ortega, 2005). La validez de cada solución al juego de la calculadora depende específicamente del manejo apropiados de las propiedades de campo de los números reales. Esta argumentación se sustenta en la confiabilidad que se tiene de estas bases aritméticas. La actividad matemática que aporta al ejemplo definido en este derecho está fuertemente ligada con el aspecto logicista de emplear una regla lógica que valide lo que estoy afirmando o suponiendo, llegando a la solución del problema con las leyes lógicas como el sustento argumentativo de toda respuesta (Mosterín, 2000).

Grado 8° - DBA 2

Se redacta como "Construye representaciones, argumentos y ejemplos de propiedades de los números racionales y no racionales" (MEN, 2016, p. 59). Este aprendizaje se evidenciado por: utilizar procedimientos geométricos o aritméticos para obtener números irracionales, justificar procedimientos que representen dichos números, construir distintas representaciones de un número racional o irracional. El ejemplo que brindan consiste en establecer una relación de igualdad entre dos expresiones algebraicas, en las que se cambian los valores por formas geométricas. Ahora, con estas relaciones, el estudiante debe utilizar valores para cada figura, reemplazarlos e identificar si la relación de igualdad es verdadera o falsa. En el primer caso, por un razonamiento inductivo, los estudiantes lo podrían generalizar como un teorema válido. Adicionalmente, se le pide al estudiante inventar nuevas relaciones válidas empleando las figuras como representación de un dato sustituible.

Explícitamente no se menciona aquí un proceso de demostrativo, pero al analizar la relación entre el concepto de argumentación, validación, relación de igualdad, sustitución por valores que indiquen el valor de verdad, etc., se puede afirmar que este DBA nos acerca a la demostración de teoremas algebraicos y aritméticos, mediante un razonamiento inductivo, el cual puede generar cambios en la manera tradicional de abordar los conceptos (Maure, Nava, Marimón y Gutiérrez, 2022). Además, el permitirles a los estudiantes proponer y establecer nuevas relaciones de igualdad empleando el mismo método, supone un reto de generalización y validación para ellos, un subproceso que claramente aporta insumos a la demostración matemática.

Grado 8° - DBA 3

Este derecho básico de aprendizaje se presenta como “Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones” (MEN, 2016, p. 60). Las evidencias de este aprendizaje son el reconocimiento del signo igual como relación de igualdad, resolución de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales, usar el conjunto solución para argumentar si un procedimiento es o no válido. El ejemplo que proponen es emplear algunos binomios e identificar si es posible asegurar que uno de ellos es mayor que el otro, así mismo sugieren reflexionar sobre la igualdad de dos de ellos y su significado, ¿esto equivale a decir que ambas expresiones son iguales? ¿por qué se escribe un igual si no necesariamente lo son?

Esta reflexión sobre el uso del signo igual en matemáticas es una gran oportunidad de experimentar el quehacer matemático, puesto que se analizan los mismos elementos de las matemáticas para hacer matemáticas. Esta concepción nos lleva a la mirada formalista de Hilbert (1993), cuando enunciaba la matemática y la metamatemática como una dupla inseparable que garantizaba el avance riguroso de esta ciencia. Como es sabido, algunos elementos de matemáticas se aprenden de manera memorística, y esto puede crear la impresión de ser absolutamente verdaderos, sin embargo, el análisis de los símbolos empleados para hacer aritmética y álgebra se presenta como una aproximación al proceso de demostración y formalismo matemático, fortaleciendo ese regalo que, de acuerdo con Harel y Sowder (2007), se le hizo a la humanidad con la tradición milenaria de la rigurosidad matemática.

Grado 8° - DBA 6

El presente DBA aparece como "Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto" (MEN, 2016, p. 62). Las evidencias de dicho aprendizaje son: utilización de criterios para argumentar congruencia o semejanza de triángulos, resolver problemas que apliquen dichos criterios. Como ejemplo, en el documento se muestran algunas figuras similares a logotipos de algunas marcas a nivel mundial, en las que se pide seleccionar elementos o figuras que sean congruentes, argumentando por qué lo serían.

El estudio geométrico, en términos de la semejanza y la congruencia, implica el uso de criterios claros mediante los cuales se puede concluir una nueva posible relación entre dos figuras que se analizan, junto con la argumentación ordenada y secuencial de distintos pasos que permitan validar una semejanza o congruencia, es decir, aportan a un razonamiento deductivo mediante el método directo (Portilla y Caicedo, 2022). Esta forma específica de asociar criterios a propiedades de los cuerpos se asemeja al intuicionismo, ya que el asunto formal es necesario, pero es un tanto instrumental, puesto que se sugiere analizar elementos cotidianos, e identificar formas en objetos que no necesariamente permiten hacer una medición, como los segmentos, triángulos o círculos de un logotipo que *aparentan* ser congruentes, pero no se cuenta con condiciones cuantitativas certeras para confirmarlo, esto es, se tiene un fundamento para construir verdades matemáticas que es previo a la deducción (Oostra, 2009).

Grado 8° - DBA 7

El enunciado de este de derecho es "Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales" (MEN, 2016, p. 62). Las evidencias que presenta este aprendizaje consisten en la descripción de teoremas, la argumentación de su validez, argumentación de relaciones pitagóricas, reconocimiento de relaciones geométricas como el teorema de Pitágoras y de Thales, resolución de problemas aplicando teoremas. Como ejemplo sugieren la utilización de un software interactivo que permita manipular figuras geométricas hasta encontrar una relación de áreas correspondiente al teorema de Pitágoras.

Para este DBA se evidencia la construcción de algunas relaciones métricas con los estudiantes. Estos se vinculan bastante con la perspectiva intuicionista, puesto que se tiene a la intuición como la brújula que orienta el movimiento de los elementos dinámicos del software hasta hallar una relación de áreas que se denomina el Teorema de Pitágoras, es decir, se evidenciaría aquello que Oostra (2009) enunciaba como un sujeto que experimentaba una verdad después de efectuar una construcción mental adecuada. De acuerdo con este DBA, la argumentación es fundamental y, como ya se ha mencionado en otros, este proceso fortalece los asuntos demostrativos en matemáticas, que deben ser convincentes y específicos para la comunidad matemática en general. Nuevamente se ilustra una generalidad en cierta parte del profesorado, al considerar a la geometría como una disciplina óptima para iniciar en el mundo de la demostración (Correa, 2015).

Grado 8° - DBA 9

El presente derecho básico de aprendizaje se redacta como "Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos" (MEN, 2016, p. 63). Las evidencias que lo sustentarían son la operación con formas simbólicas, reconocimiento de patrones numéricos, representación algebraica, descripción de usos del signo igual, uso de propiedades de conjuntos para resolver ecuaciones. El ejemplo que allí se propone, consiste en un triángulo formado por una sucesión de ecuaciones lineales, que dependen cíclicamente de utilizar la solución de la ecuación anterior.

De acuerdo con el planteamiento del DBA anterior, y el ejemplo suministrado en el documento, la inducción haría parte de la postulación de una generalidad, basado en un número finito de casos que sustentan algo a demostrar o a validar. La inducción como razonamiento (que no debe confundirse con la inducción matemática, aunque se relacionen), permite validar información y generar soluciones a determinados problemas como el del ejemplo, promoviendo en los estudiantes una actividad matemática del planteamiento de generalizaciones (Maure, Nava, Marimón y Gutiérrez, 2022). Un teorema es una generalidad y la única manera de plantearlo no es mediante la deducción lógica, además estas actividades se presentan como oportunidades para aplicar con los estudiantes métodos indirectos de demostración que permitan validar o rechazar las propuestas de sus compañeros, como la demostración por contraejemplo (Portilla y Caicedo, 2022).

Algunas relaciones matemáticas antiguas se evidenciaban en una inducción del comportamiento de los elementos naturales que rodeaban a las diferentes culturas. De hecho, se puede plantear con los estudiantes una reflexión en la que se note que el razonar inductivamente y creer que todos los casos anteriores son la base de un nuevo conocimiento, de alguna manera impidió que las personas creyeran que se podía generar una nueva geometría, sin replicar indefinidamente los elementos de la euclidiana, por poner un ejemplo al respecto (Bell, 2016).

Grado 9° - DBA 6

Su enunciación se da así: “Conjetura acerca de las regularidades de las formas bidimensionales y tridimensionales y realiza inferencias a partir de los criterios de semejanza, congruencia y teoremas básicos” (MEN, 2016, p. 69). Las evidencias que se presentan son las siguientes: reconocimiento y conjetura de regularidades en los cuerpos, explicación de criterios de semejanza y congruencia, redacción y argumentación de procesos llevados a cabo para la resolución de problemas de semejanza y congruencia. Como ejemplo, el documento aporta una figura básica de triángulos semejantes con paralelas medias trazadas, que impliquen el uso de un Teorema de Thales para su resolución.

Este DBA aporta al proceso demostrativo, especialmente mediante la redacción y argumentación, como justificación de cada paso desarrollado en un problema de semejanza o congruencia mediante el método directo (Portilla y Caicedo, 2022). La estructura demostrativa a doble columna de afirmación/razón suele verse potenciada por las actividades de justificación individual de cada elemento abordado. Esto apunta, de cierta manera, al formalismo matemático, mediante el reconocimiento de cada paso a justificar, como un entramado de reglas, excepciones, generalidades y demás que constituyen un tipo de juego ordenado para la realización de demostraciones (Hilbert, 1993).

Grado 9° - DBA 9

Este derecho básico se redacta como “Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas” (MEN, 2016, p. 71). Las evidencias que lo sustentan son: exploraciones y organización para la propuesta de patrones; propuesta de conjeturas en términos geométricos, numéricos, verbales y simbólicos; validación de conjeturas; interpretación de expresiones numéricas. Al respecto, se propone como ejemplo el cálculo del número de rectángulos posibles que se pueden generar en un cuadro de ajedrez, identificando un patrón, al iniciar el problema en cuadrados de 1x1, 2x2, etc.

Tal como se retomó en otros DBA, el proceso inductivo lleva al planteamiento de generalidades utilizando la evidencia de un número finitos de casos favorables para la regla a formular (Maure, Nava, Marimón y Gutiérrez, 2022). El establecimiento de una solución a un problema de manera inductiva requiere inicialmente de una conjetura, que se planteada por el mismo estudiante, que la analice con los casos disponibles, y plantee una manera de generalizarla o rechazarla, siempre con la argumentación ordenada y oportuna de cada paso desarrollado. En ese sentido, se muestra un aporte considerablemente a los procesos de demostración matemática que se puede llevar a cabo desde los métodos directos o indirectos (Portilla y Caicedo, 2022).

Grado 11° - DBA 1

Este DBA se publica así: “Utiliza las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y sus relaciones y operaciones para construir y comparar distintos sistemas numéricos” (MEN, 2016, p. 81). Las evidencias que lo verifican son: descripción de propiedades de los números y los distintos sistemas numéricos, utilización del concepto de densidad para subconjuntos de los números reales, construcción y establecimiento de relaciones entre los conjuntos numéricos. El ejemplo que aporta el documento consiste en establecer una discusión con los estudiantes para comparar los números mayores que 5 en el conjunto de los naturales y los reales, discutiendo el concepto de siguiente de un número, cuando se tienen los números reales.

Este DBA sugiere ahondar con los estudiantes en aspectos epistemológicos tan cruciales para la historia de las matemáticas como lo son los conceptos de densidad y de continuidad. Este trabajo tan vinculado con la historia y la epistemología de las matemáticas se relaciona fuertemente con la tradición descrita por Harel y Sowder (2007). Desde el punto de vista intuitivo es un tanto complejo la asunción de una cantidad incontable de números que están “pegados unos a otros”, para los cuales el concepto de *pegado* termina siendo un obstáculo epistemológico, puesto que se tendría una cierta autorización para afirmar que cada número tiene a otro pegado de sí. Ir de la discontinuidad a la continuidad, pasando por la densidad, es un insumo bastante favorable para el desarrollo de demostraciones matemáticas, puesto que requiere de un nivel de abstracción elevado, y de una definición formal de las propiedades de los números reales. La intuición aquí juega un papel crucial, aunque no se trate de una habilidad innata o instinto, es un fundamento previo al análisis que le permite al estudiante mediante analogías geométricas o materiales forjar una idea de densidad que pueda ser generalizada a la rigurosidad que exige el conjunto de los números reales (Oostra, 2009).

Grado 11° - DBA 2

En cuanto a este derecho, su enunciación es la siguiente: "Justifica la validez de las propiedades de orden de los números reales y las utiliza para resolver problemas analíticos que se modelen con inecuaciones" (MEN, 2016, p. 81). Para este DBA, las evidencias serían: utilización de propiedades del producto de números reales para la resolución de inecuaciones, interpretación de operaciones en conjuntos numéricos distintos para validar las propiedades de dichas inecuaciones. El ejemplo ilustrativo propone presentar a los estudiantes un procedimiento hipotético con ciertas imprecisiones para motivar en los estudiantes la reflexión sobre las distintas propiedades y justificaciones oportunas para resolver una inecuación.

No es accidental que este DBA sea el siguiente en la lista, justo después del que se mencionó anteriormente. Ambos apuntan al reconocimiento de las propiedades de los números reales. Resolver una inecuación constituye un análisis que se hace bajo la consideración de un conjunto numérico que la respalda, y ellos sólo es posible con la argumentación apropiada. En cierto modo, la resolución de problemas que involucran inecuaciones guarda relación con la repetición y ejercitación (que son necesarias) para alcanzar ciertas claridades en el aspecto procedimental de las mismas, por lo que se orienta un poco hacia el logicismo, con la secuencia de pasos lógicamente coherentes (suelen usarse conjunciones y disyunciones para este referente) que lleven a una solución coherente y verificable (Mosterín, 2000).

Consideraciones generales

Inicialmente, es destacable el orden y la secuencialidad con la que se ilustran estos DBA. Considerando que no es una obligación mantener un orden específico en el desarrollo de los mismos, hay implícitamente una sugerencia para la organización del plan de estudios o análisis curricular que sirve de fundamento para el maestro. Por supuesto, se destaca en este documento la flexibilidad para trabajar en cada uno sin necesidad de ser lineal, mas un orden propuesto no está de más y logra orientar un primer avance hacia su consecución. Adicionalmente, la creatividad y rigurosidad con que se brindan ejemplos sientan una base para la proyección del trabajo en el aula.

Es pertinente retomar que los DBA seleccionados de ninguna manera podrían clasificarse como *los* determinantes para la demostración matemática; considerando que todo DBA guarda un vínculo matemáticamente coherente con el proceso demostrativo, de acuerdo a los insumos del marco referencial del presente trabajo se destacaron sólo algunos por su notable vinculación con las características de las tres escuelas con mayor presencia a nivel histórico en la fundamentación de las matemáticas.

Al retomar la dimensión epistemológica de la demostración matemática se evidencia en este documento ministerial un fuerte aporte a la validación del conocimiento de las matemáticas mediante la adquisición de los aprendizajes postulados en estos derechos básicos. En cuanto a la dimensión social, se propone en varios de los DBA el fortalecimiento de argumentos sobre verificación, explicación, sistematización, descubrimientos, comunicación, etc. Con respecto a la dimensión cognitiva, es notable también las ideas sobre las fases de interpretación, análisis, síntesis y profundización que alcanzan los estudiantes (Ibañes y Ortega, 2005).

Es innegable la importancia del papel del profesor en este contexto, puesto que los ejemplos que se identifican en cada DBA requieren de la apropiación conceptual y procedimental de quien dirige el espacio de formación, para acompañar el proceso de vinculación del estudiante con las dinámicas argumentativas, explicativas y analíticas que trae consigo el abordaje de la demostración matemática.

Cabe agregar que, con el fin de profundizar en la rigurosidad matemática y en la esencia de esta disciplina, sería interesante emplear de manera específica y concreta en algunos de los DBA una *demostración* como tal. Si bien se presentan en formas distintas muchos de los subprocesos que se retomaron en el marco referencial y es notable la presencia de elementos rigurosos y formales en la propuesta, sería oportuno anexar explícitamente un *desarrollo de demostraciones matemáticas*, que puedan poner en juego todos los DBA adquiridos, especialmente los que se han destacado en este trabajo, buscando así que el estudiantado reconozca con mayor profundidad esta parte esencial de la actividad matemática.

RECOMENDACIONES Y CONCLUSIONES

El breve recorrido histórico por las matemáticas que se abordó en este trabajo evidencia que las demostraciones sentaron un precedente en el desarrollo de las matemáticas y establecieron parte de esa rigurosidad que tanto las caracteriza. Preguntarse por la demostración es análogo a indagar la validación de las verdades matemáticas en función de un lugar y un momento. La respuesta a esta pregunta se consolida en discusiones y cuestionamientos a los fundamentos de las matemáticas, que son indispensables para el avance de esta ciencia.

Con esta revisión se pudo examinar que las corrientes que abordaron estos elementos se presentaron en su momento como distintos puntos de vista para los cimientos epistemológicos de las matemáticas, para los cuales es complejo señalar que alguna de ellas es la indicada o la oportuna. Cada escuela incursionó en la filosofía de las matemáticas, aportando a los avances, resolviendo preguntas y al mismo tiempo generando otras para las que no tenía herramientas que pudieran resolverla. La rigurosidad de cada escuela depende del lugar y el momento en que se aborden, por lo para el maestro de matemáticas sería conveniente la reflexión complementaria de las tres.

En este trabajo se identificó que la demostración matemática es un término estrechamente ligado a la actividad matemática, por lo cual es difícil diferenciar cuáles conceptos, temáticas, procedimientos o reflexiones le competen a ésta. No es posible categorizar aquellos apartados que se refieran explícitamente a la palabra demostrar como los únicos insumos para abordar este proceso desde el aula de clase. Demostrar en matemáticas es pensar, cuestionar, validar, argumentar, identificar, etc., en matemáticas, por lo que la cantidad de elementos que pueden aportar a una demostración son numerosos.

El *Plan de área Sociedad Colombiana de Matemáticas: Geometría* ilustra las distintas estrategias que contribuyen a la construcción de demostraciones sin abordar durante todo el trabajo esta habilidad en particular, lo cual se relacione con el desarrollo histórico de las matemáticas, las cuales han tenido propósitos instrumentales, didácticos, económicos, sociales y filosóficos, más no únicamente procedimentales.

El análisis de los *Derechos Básicos de Aprendizaje* ejemplifica la organización curricular del Ministerio de Educación Nacional para la educación matemática escolar, cuya flexibilidad se presenta como una herramienta para el maestro de matemáticas, mediante la cual se pueden relacionar DBA de distintos grados diferentes si la situación didáctica del momento lo amerita. Esto se visualiza como una gran ventaja, puesto que al ser tan diversa la composición epistemológica de lo que hoy llamamos demostración matemática, se pueden trabajar distintos subprocesos de la misma de manera independiente, en distintas edades, para enlazarlas en el momento más conveniente del proceso educativo.

Al distribuirse tradicionalmente la filosofía de las matemáticas en tres corrientes o escuelas que contribuyeron notablemente a su construcción, se dificultó la clasificación de los Derechos Básicos de Aprendizaje en una sola de las tres corrientes, puesto que es posible identificar hallazgos de cada una de ellas en los diferentes parágrafos que constituyen este documento nacional.

Dados los alcances de este trabajo, se profundizó sólo en estas tres escuelas, por lo que se sugiere para futuros trabajos relacionados con esta línea de investigación, la indagación de la historia y filosofía reciente de las matemáticas, para aprovechar los insumos que aportan la tríada tradicional de logicismo, formalismo e intuicionismo para perspectivas o visiones emergentes. Asimismo, sería interesante, complementar el análisis de guías de educación matemática y de documentos ministeriales con estas indagaciones adicionales.

En general, este trabajo permitió resignificar mi visión de la demostración matemática, rescatando la importancia de la historia de las matemáticas para su enseñanza, lo que plasmó en esta y otras futuras reflexiones la necesidad de examinar las guías de educación matemática y demás documentos ministeriales que sirven de apoyo para el maestro, bajo la óptica de la filosofía de las matemáticas y las distintas escuelas que han fundamentado sus desarrollos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balieiro, I., da Silva, R. & Bertolucci, G. (2021). Estilos de escrita e demonstrações matemáticas sob uma perspectiva histórica. *Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática, 3(2),* 152-172.

Bell, E. (2016). *Historia de las matemáticas.* Fondo de cultura económica.

Boole, G. (1854). Análisis matemático de la lógica. En Newman J. (1994), *Sigma: el mundo de las matemáticas* (1 ed., Vol. 5, pp. 244-247) Grijalbo.

Correa, A. (2015). *Creencias sobre demostración matemática de docentes de matemática de educación secundaria.* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú].

Correa, B., Muñoz, L. & Villegas, C. (2014). *Geometría Euclidiana. Guías de clase para 45 lecciones*. Escuela de matemáticas, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín. Plan de Mejoramiento de la Enseñanza y apropiación de las Matemáticas en los colegios de Antioquia, *Antioquia la más Educada*.

Corry, L. (2002). David Hilbert y su filosofía empiricista de la geometría. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 9,* 27-43.

Fiallo, J., Camargo, L., & Gutiérrez, A. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista integración, 31(2),* 181-205.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the learning of mathematics, 3(2)*, 9-24.

Gasking, D. (1994). La matemática y el mundo. En Newman J. (1994), Sigma: el mundo de las matemáticas (1 ed., Vol. 5, pp. 98-111) Grijalbo.

Godino, J., & Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración: implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las ciencias, 19(3),* 405-414.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2,* 805-842.

Hempel, C. (1945). La geometría y la ciencia empírica. En Newman J. (1994), *Sigma: el mundo de las matemáticas* (1 ed., Vol. 5, pp. 23-34) Grijalbo.

Hilbert, D. (1993). *Fundamentos de las matemáticas*. Universidad Nacional Autónoma de México.

Ibañes, M. & Ortega, T. (2005). Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato. *Números, 61*, 19-40.

Knipping, C. (2012). The social dimension of argumentation and proof in mathematics classrooms. *Online: http://www.icme12.org/upload/submission/1935_F.pdf. Accessed, 30.*

Lewis, C. & Langford, C. (1932). Historia de la lógica simbólica. En Newman J. (1994), *Sigma: el mundo de las matemáticas* (1 ed., Vol. 5, pp. 248-266) Grijalbo.

Maure, L., Nava, M., Marimón, O., & Gutiérrez, J. (2022). The argument and demonstration exemplified in a mathematical dialogue. *Infinity Journal, 11(2),* 211-222.

Martin, W. & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20(1),* 41-51.

Melhuish, K., Fukawa-Connelly, T., Dawkins, P., Woods, C. & Weber, K. (2022). Collegiate mathematics teaching in proof-based courses: What we now know and what we have yet to learn. *The Journal of Mathematical Behavior, 67,* 100986.

MEN (2016). Derechos básicos de aprendizaje Vol. 2. Obtenido de https://www.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/files_public/2022-06/DBA_Matematicas-min.pdf

Mora, R. (2016). *La evolución de la paradoja de las clases propuesta por Bertrand Russell* (Publicación No. 2016-12-29T20:21:47Z) [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos] Cybertesis. Repositorio de Tesis Digitales.

Mosterín, J. (2000). *Los Lógicos*. Espasa Calpe.

Nagel, E. (1994). La notación simbólica, los ojos de Haddock y la ordenanza sobre los perros. En Newman J. (1994), *Sigma: el mundo de las matemáticas* (1 ed., Vol. 5, pp. 267-288) Grijalbo.

Oostra, A. (2009). La matemática intuicionista y sus conexiones con el pensamiento de Pierce. *Cuadernos de sistemática pierciana, 1,* 9-31.

Peirce, C. (1902). La esencia de la matemática. En Newman J. (1994), *Sigma: el mundo de las matemáticas* (1 ed., Vol. 5, pp. 161-171) Grijalbo.

Portilla, H. & Caicedo, S. (2022). Introducción a los métodos de demostración matemática. Notas de clase. Editorial Universidad de Nariño.

Recio, A. & Godino, J. (1996). Assesment of university students' reasoning capacities. En R. Luengo (Ed.): *Proceedings of the 8th International Congres son Mathematical Education* (p. 280), Sevilla.

Recio, A. (2000). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática.* Servicio de publicaciones. Universidad de Córdoba.

Recio, A. (2002). La demostración en matemática: Una aproximación epistemológica y didáctica. En *Investigación en educación matemática: Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Almeria, 18-21 septiembre 2001*, 27-44. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Ross, D. (2022). *Aristóteles*. RBA Libros y Publicaciones.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. EUNED.

Salgado, S. (2012). La filosofía de Aristóteles. *Cuadernos Duererías, Serie Historia de la Filosofía, 12*, 1–68.

Sánchez, C. H. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, (32)*, 71-92.

Senk, S. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher 78*, 448-456.

Stylianides, A. & Stylianides, G. (2022). Introducing students and prospective teachers to the notion of proof in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 66*, 100957.

Veblen, O. & Young, J. (1918). Una ciencia matemática. En Newman J. (1994), Sigma: el mundo de las matemáticas (1 ed., Vol. 5, pp. 85-97) Grijalbo.

Vergel, M., Duarte, H., & Martínez, J. (2015). Desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de cálculo integral su relación con la planificación docente. *Revista científica, 23(3)*, 17-29.

Viteri, S. & DeDeo, S. (2022). Epistemic phase transitions in mathematical proofs. *Cognition, 225*, 105120.

Von Mises, R. (1951). Los postulados matemáticos y el entendimiento humano. En Newman J. (1994), *Sigma: el mundo de las matemáticas* (1 ed., Vol. 5, pp. 112-142) Grijalbo.

Wilder, R. (1952). El método axiomático. En Newman J. (1994), Sigma: el mundo de las matemáticas (1 ed., Vol. 5, pp. 35-56) Grijalbo.