

# REFLEXIONES DE ANDREEV Y PROPIEDADES DE TRANSPORTE EN INTERFASES CON FRONTERA ARMCHAIR

Estudios de nanocintas de grafeno han mostrado que el espectro de energía puede ser metálico o aislante cuando se presenta el tipo de borde *Armchair* y para el caso de frontera *Zigzag* el espectro presenta estados de superficie [39, 61]. Debido a lo anterior, ha aumentado el interés en el estudio de las propiedades de transporte, tales como conductancia diferencial [21, 53], características de corriente - voltaje [54-56], efecto Josephson [57], ruido de emisión diferencial [58] en juntas que involucran grafeno. En este capítulo se determinan y analizan los coeficientes de reflexión para una junta grafeno en estado normal - aislante - grafeno en estado superconductor **GIS** con frontera *Armchair*. También se consideran diferentes valores de dopaje del grafeno en estado normal y de la fortaleza del aislante. A partir de estos coeficientes se determinan la conductancia diferencial por medio del modelo de Blonder, Tinkham, Klapwijk (BTK) [59]. Por último, comparamos el efecto del tipo de frontera *Zigzag* y *Armchair* en los coeficientes de reflexión y en la conductancia diferencial para la junta **GS** y **GIS**.

## 4.1. Interfases con Grafeno

Consideramos una junta de grafeno en estado normal que se extiende de  $-\infty$  a 0 a un grafeno en el estado superconductor de 0 a  $\infty$  los cuales son homogéneas e infinitas en la dirección  $y$  como se ilustra en la Fig. 4.1,

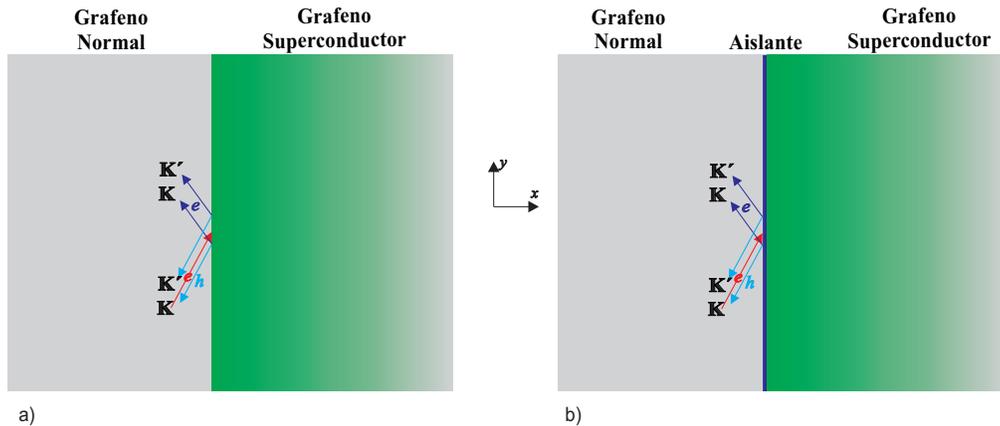


Fig. 4.1. Diagrama de junta grafeno en estado normal - aislante - grafeno en estado superconductor con frontera *Armchair*. La interfase esta en  $x = 0$ . En la grafica se distingue que un electrón incide desde el valle  $K$  (flecha de color rojo) que puede ser reflejado en cada uno de los valles  $K$  ó  $K'$  como hueco (flecha de color azul claro) o como electrón (flecha de color azul oscuro). Los mismos procesos de dispersión se presentan para cada una de las interfases a) **GS**. b) **GIS**.

en donde se ilustra que puede presentarse una dispersión en cada uno de los puntos de Dirac. El potencial de pares como en el caso *Zigzag*, se modela como

$$\Delta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \Delta_0 & x \geq 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Con base en la discusión acerca del tipo de frontera *Armchair* realizada en la sección 1.3.1, se analizan los procesos de dispersión en ambos valles  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}'$  asumiendo que un electrón incide hacia la interfase propagándose en el valle  $\mathbf{K}$ . A continuación se analizan los coeficientes de reflexión y se determina la conductancia diferencial en interfases que involucran grafeno en estado normal y grafeno en estado superconductor cuando se tienen diferentes energías de Fermi  $E_F$  del grafeno en estado normal.

## 4.2. Juntura Grafeno en Estado Normal - Grafeno en Estado Superconductor

Consideremos un electrón incidiendo desde el grafeno normal hacia la interfase propagándose en el valle  $\mathbf{K}$ ; éste puede ser reflejado como un electrón con amplitud de probabilidad  $u_1$  ó  $u'_1$  en el mismo valle de incidencia o en el valle  $\mathbf{K}'$  respectivamente. Debido a las reflexiones de *Andreev*, el electrón también puede ser reflejado como hueco con amplitud de probabilidad  $v_1$  ó  $v'_1$  en los valles  $\mathbf{K}$  o  $\mathbf{K}'$ , respectivamente, de tal manera que la función de onda en la región normal puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \Phi_G(\mathbf{r}) &= e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\Psi_{>\mathbf{K}}^e(\mathbf{r}) + e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\Psi_{<\mathbf{K}}^e(\mathbf{r}) + e^{i\mathbf{K}'\cdot\mathbf{r}}\Psi_{<\mathbf{K}'}^e(\mathbf{r}) + e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\Phi_{<\mathbf{K}}^h(\mathbf{r}) + e^{i\mathbf{K}'\cdot\mathbf{r}}\Psi_{<\mathbf{K}'}^h(\mathbf{r}), \\ &= e^{iqy} \left\{ e^{i(k_e+K_D)x} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha_e} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 e^{-i(k_e-K_D)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-i\alpha_e} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u'_1 e^{-i(k_e+K_D)x} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha_e} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + v_1 e^{i(k_h+K_D)x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ e^{i\alpha_h} \end{pmatrix} + v'_1 e^{i(k_h-K_D)x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -e^{-i\alpha_h} \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde se ha asumido que los términos  $e^{i\alpha_{e(h)}}$  son los dados en (3.3) y la mezcla de los valles en (4.1) es el resultado de los procesos de reflexión de electrón o hueco, en la interfase.

En la región superconductor el electrón puede transmitirse como una cuasipartícula tipo electrón en el valle  $\mathbf{K}$  ó  $\mathbf{K}'$  con amplitudes de probabilidad  $C_{qe}^+$  ó  $C_{qe}^{+'}$ , respectivamente, adicionalmente se puede transmitir como cuasipartículas tipo hueco con una amplitud de probabilidad  $C_{qh}^-$  ó  $C_{qh}^{-'}$  en los valles  $\mathbf{K}$  ó  $\mathbf{K}'$ , respectivamente, por lo tanto la función de onda en la región

superconductor es escrita como,

$$\begin{aligned}
\Phi_S(\mathbf{r}) &= e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\Psi_{>\mathbf{K}}^{qe}(\mathbf{r}) + e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\Psi_{<\mathbf{K}}^{qh}(\mathbf{r}) + e^{i\mathbf{K}'\cdot\mathbf{r}}\Psi_{>\mathbf{K}'}^{qe}(\mathbf{r}) + e^{i\mathbf{K}'\cdot\mathbf{r}}\Psi_{<\mathbf{K}'}^{qh}(\mathbf{r}), \\
&= e^{iqy} \left\{ e^{i(K_D+k_{qe})x} C_{qe}^+ \begin{pmatrix} u_0 \\ e^{i\alpha_{qe}u_0} \\ v_0 \\ e^{i\alpha_{qe}v_0} \end{pmatrix} + e^{i(K_D-k_{qh})x} C_{qh}^- \begin{pmatrix} v_0 \\ -e^{-i\alpha_{qh}v_0} \\ u_0 \\ -e^{-i\alpha_{qh}u_0} \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + e^{-i(K_D-k_{qe})x} C_{qe}^{+'} \begin{pmatrix} u_0 \\ -e^{-i\alpha_{qe}u_0} \\ v_0 \\ -e^{-i\alpha_{qe}v_0} \end{pmatrix} + e^{-i(K_D+k_{qh})x} C_{qh}^{-'} \begin{pmatrix} v_0 \\ e^{i\alpha_{qh}v_0} \\ u_0 \\ e^{i\alpha_{qh}u_0} \end{pmatrix} \right\}. \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Debido a que las funciones de onda (4.1) y (4.2) combinan valles no son soluciones de las mismas ecuaciones de Dirac, ya que al combinar valles combinan ecuaciones de Dirac (1.6) y (1.7), de manera que la dinámica de los portadores de carga ((4.1) y (4.2)) es regida por la ecuación de Schrödinger. Por lo tanto, para determinar las condiciones de frontera no basta con condiciones de frontera para la función de onda (como en el caso *Zigzag* (3.5)) sino que también se necesita las condiciones de frontera para la derivada. Para la juntura **GS**, las condiciones de frontera en  $x = 0$  son

$$\Phi_G(\mathbf{r}) \Big|_{x=0} = \Phi_S(\mathbf{r}) \Big|_{x=0}, \tag{4.3a}$$

$$\frac{\partial \Phi_G(\mathbf{r})}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \Phi_S(\mathbf{r})}{\partial x} \Big|_{x=0}. \tag{4.3b}$$

Como las funciones (4.1) y (4.2) son bi - espinoriales, obtenemos un sistema de 8 ecuaciones para 8 incógnitas. A continuación se determinan los coeficientes de reflexión electrón - electrón y electrón - hueco en cada uno de los valles en términos de las amplitudes de probabilidad de las funciones (4.1) y (4.2).

#### 4.2.1. Coeficientes de Reflexión

Con base en los coeficientes de reflexión determinados en (3.8), y por medio de la densidad de corriente de probabilidad  $J_{\Psi_{\mathbf{K}(\mathbf{K}')}}$  en cada valle se determinan los coeficientes como

$$R_{e-e}^{\mathbf{K}(\mathbf{K}')} (E, q) \equiv \left\| \frac{J_{\Psi_{<\mathbf{K}(\mathbf{K}')}}^e (E, q)}{J_{\Psi_{>\mathbf{K}}} (E, q)} \right\| = \|u_1^{(\prime)} (E, q)^2\|, \tag{4.4a}$$

y

$$R_{e-h}^{\mathbf{K}(\mathbf{K}')} (E, q) \equiv \left\| \frac{J_{\Psi_{<\mathbf{K}(\mathbf{K}')}}^h (E, q)}{J_{\Psi_{>\mathbf{K}}} (E, q)} \right\| = \left\| v_1^{(\prime)} (E, q)^2 \frac{\cos(\alpha_h (E, q))}{\cos(\alpha_e (E, q))} \right\|, \tag{4.4b}$$

donde nuevamente hemos usado la expresión (3.8a) para calcular las densidades de corriente de probabilidad de la función de onda (4.1). Los coeficientes de reflexión en cada uno de los valles se ilustran en las figuras Fig. 4.2 y Fig. 4.3.

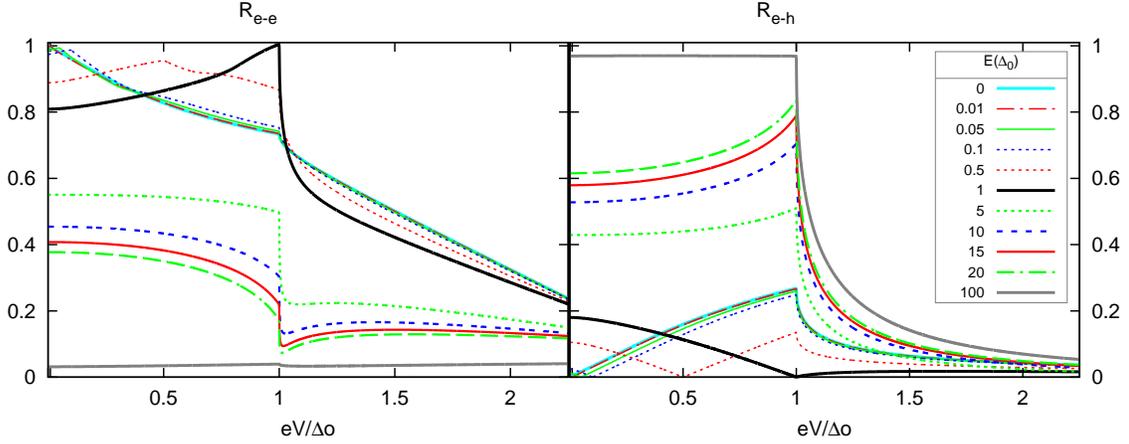


Fig. 4.2. Variación del coeficiente de reflexión electrón - hueco y electrón - electrón en el valle  $\mathbf{K}$  con respecto a la energía de excitación  $E \equiv eV$  de una juntura  $\mathbf{GS}$  para diferentes dopajes (en términos del potencial de pares  $\Delta_0$ ) del grafeno en estado normal.

Observamos que el efecto de dopaje disminuye los coeficientes de reflexión en el valle  $\mathbf{K}$  y aumenta los coeficientes de reflexión en el valle  $\mathbf{K}'$ . Como en el caso *Zigzag* las reflexiones de *Andreev* son cero para  $E = E_F$  si  $E_F \leq \Delta_0$ . El coeficiente de reflexión  $R_{e-h}$  en el mismo valle de incidencia es máximo cuando  $E = \Delta_0$  y en el otro valle tiende a cero. De aquí podemos concluir que las reflexiones de *Andreev* en el mismo valle están en resonancia cuando  $E = \Delta_0$ .

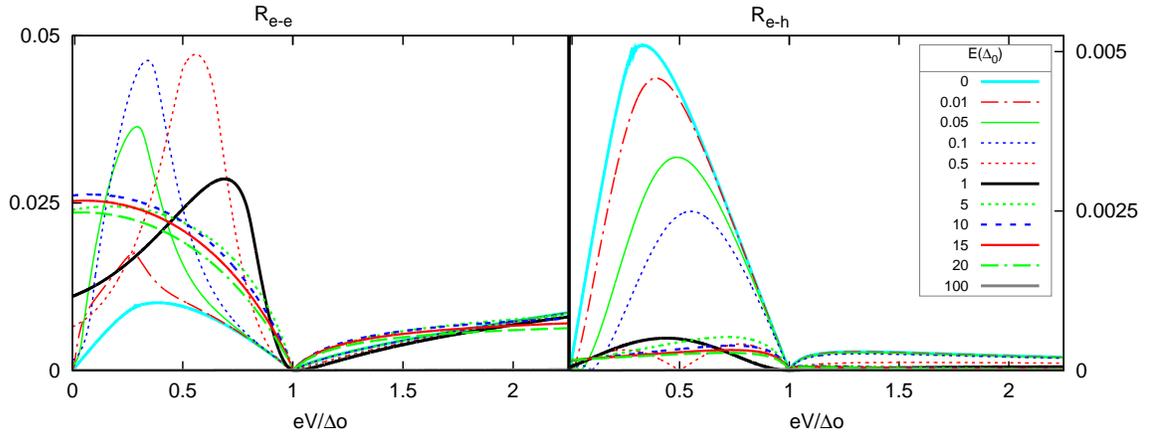


Fig. 4.3. Variación del coeficiente de reflexión electrón - hueco y electrón - electrón en el valle  $\mathbf{K}'$  con respecto a la energía de excitación  $E \equiv eV$  de una juntura  $\mathbf{GS}$  para diferentes dopajes (en términos del potencial de pares  $\Delta_0$ ) del grafeno en estado normal.

De la Fig. 4.3 vemos que las reflexiones electrón - electrón son mayores que las correspondientes electrón - hueco, de tal manera que una frontera tipo *Armchair* afecta más a las dispersiones electrón - electrón lo cual es de esperarse, ya que la barrera de potencial producida por la diferencia entre las energías de Fermi afecta principalmente a este tipo de reflexiones.

Con base en los coeficientes de reflexión analizados en la sección 3.3.1, ahora determinamos la

conductancia diferencial para los mismos valores de dopaje que en el caso de una juntura **GS** con frontera *Zigzag*.

#### 4.2.2. Conductancia Diferencial

La conductancia diferencial de una juntura **GS** con frontera *Armchair* puede ser estudiada como en el caso de la juntura **GS** con frontera *Zigzag*, donde hay canales de dispersión debido al valle  $\mathbf{K}'$ , es decir que la conductancia diferencial por medio del modelo BTK [23] en términos de los coeficientes de reflexión descritos en las relaciones (4.4) es

$$\frac{G(eV)}{G_0} = \int_0^{q_{max}} dq \left( 1 - \left( R_{e-e}^{\mathbf{K}}(E, q) + R_{e-e}^{\mathbf{K}'}(E, q) \right) + \left( R_{e-h}^{\mathbf{K}}(E, q) + R_{e-h}^{\mathbf{K}'}(E, q) \right) \right), \quad (4.5)$$

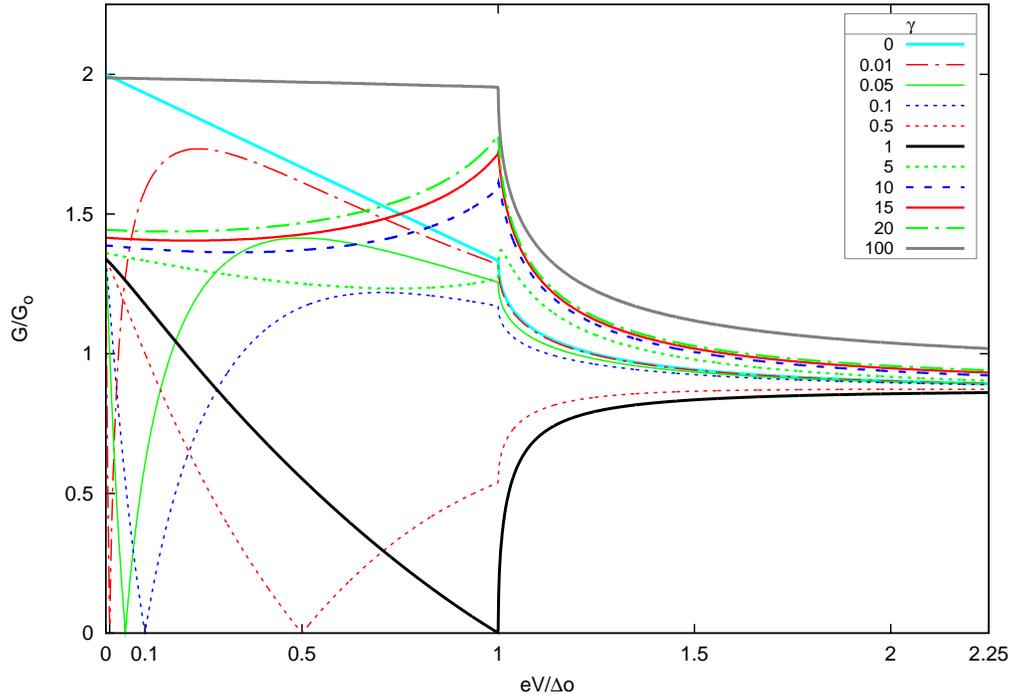


Fig. 4.4. Conductancia diferencial normalizada a  $G_0$  para una juntura **GS** conformada por grafeno con frontera *Armchair*, en función de la energía de excitación  $E \equiv eV$  normalizada al potencial de pares  $\Delta_0$  para diferentes dopajes  $\gamma$  del grafeno en estado normal en términos del potencial de pares (i.e.,  $E_F = \gamma\Delta_0$ ).

En la figura Fig. 4.4 se ilustra la conductancia diferencial obtenida para una frontera *Armchair* y al compararla con la conductancia diferencial obtenida para una frontera *Zigzag* Fig. 3.4 se observa que la conductancia diferencial para los tipos de frontera es similar; esto es debido a que, como vimos, los coeficientes de reflexión electrón - electrón y electrón - hueco en el otro valle son dos o tres ordenes de magnitud menor, que los obtenidos en el mismo valle de incidencia. Sin embargo como veremos en la proxima sección, una barrera aislante puede diferenciar la conductancia diferencial para cada tipo de frontera.

### 4.3. Juntura Grafeno en Estado Normal - Aislante - Grafeno en Estado Superconductor

En esta sección incluimos un aislante que vamos a modelar como una función delta de Dirac [59] en  $x = 0$

$$V(x) = \gamma\delta(x) \quad (4.6)$$

donde el término  $\gamma [\equiv V_0d]$  es definido como en el caso *Zigzag* para posteriormente comparar los resultados con diferentes condiciones de frontera y un mismo valor de fortaleza del aislante.

Dado que las funciones  $\Phi$  solucionan la ecuación de Schrödinger este tipo de barrera afecta la condición de frontera para la derivada en  $x = 0$ , de tal manera que la condición de frontera para la derivada es modificada como,

$$\left. \frac{\partial \Phi_G(\mathbf{r})}{\partial x} \right|_{x=0} + \frac{2m_e\gamma}{\hbar^2} \Phi_G(\mathbf{r}) \Big|_{x=0} = \left. \frac{\partial \Phi_S(\mathbf{r})}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad (4.7)$$

En la condición de frontera (4.7) se incluye el termino masa  $m_e$  de los electrones en reposo debido a que este tipo de condición de frontera no se aplica sobre la soluciones de la ecuación de Dirac (donde la masa en reposo es nula), sino que se aplica sobre las funciones de onda (4.1) y (4.2), construidas a partir de las soluciones de la ecuación de Schrödinger. A continuación se determinan los coeficientes de reflexión electrón - electrón y electrón - hueco en cada uno de los valles de la juntura.

#### 4.3.1. Coeficientes de Reflexión

Los coeficientes son dados por las mismas expresiones que encontramos en (4.4), donde el efecto del aislante para una frontera *Armchair* es representado por el término adimensional  $Z \equiv \frac{m\gamma}{\hbar^2 K_D}$  denominado fortaleza<sup>21</sup> y se presenta en las amplitudes de probabilidad determinadas por las condiciones de frontera (4.4), es decir que los coeficientes de reflexión son determinados como en (4.4) y se ilustran en las figuras Fig. 4.5 y Fig. 4.6.

Los coeficientes de reflexión en cada uno de los valles para los casos limites de poco dopado se ilustran en las figuras<sup>22</sup> Fig. 4.5 y Fig. 4.6, donde hemos asumido los mismos valores de fortaleza del aislante como en el caso *Zigzag*, ya que según el factor de conversión dado en el pie de página 21 ambas fortalezas son similares.

De la Fig. 4.5 se observa que las reflexiones electrón - electrón en el valle  $\mathbf{K}$  disminuyen a medida que aumenta la fortaleza, pero en el caso del valle  $\mathbf{K}'$  al comparar el grafeno poco dopado  $E_F = 0,01\Delta_0$  con el grafeno dopado  $E_F = \Delta_0$  se observa que las reflexiones electrón - electrón aumentan a medida que se varía la fortaleza.

<sup>21</sup> Una manera de relacionar la fortaleza para el tipo de frontera *Armchair* con el tipo de frontera *Zigzag* es como

$$Z \equiv \frac{9t\sqrt{3}a_0^2 m_e}{4\pi\hbar^2} \chi \approx 0,919\chi \approx \chi,$$

donde  $a_0$  es la distancia inter - átomo de carbono,  $m_e$  es la masa en reposo del electrón y  $t$  es el parámetro de acople a primeros vecinos. Se ha supuesto que el término  $\gamma$ , que relaciona el ancho y altura de la barrera de potencial, es el mismo para ambos tipos de frontera.

<sup>22</sup>La dependencia de los coeficientes de reflexión para otros valores de dopaje del grafeno en estado normal se ilustra en el apéndice E.

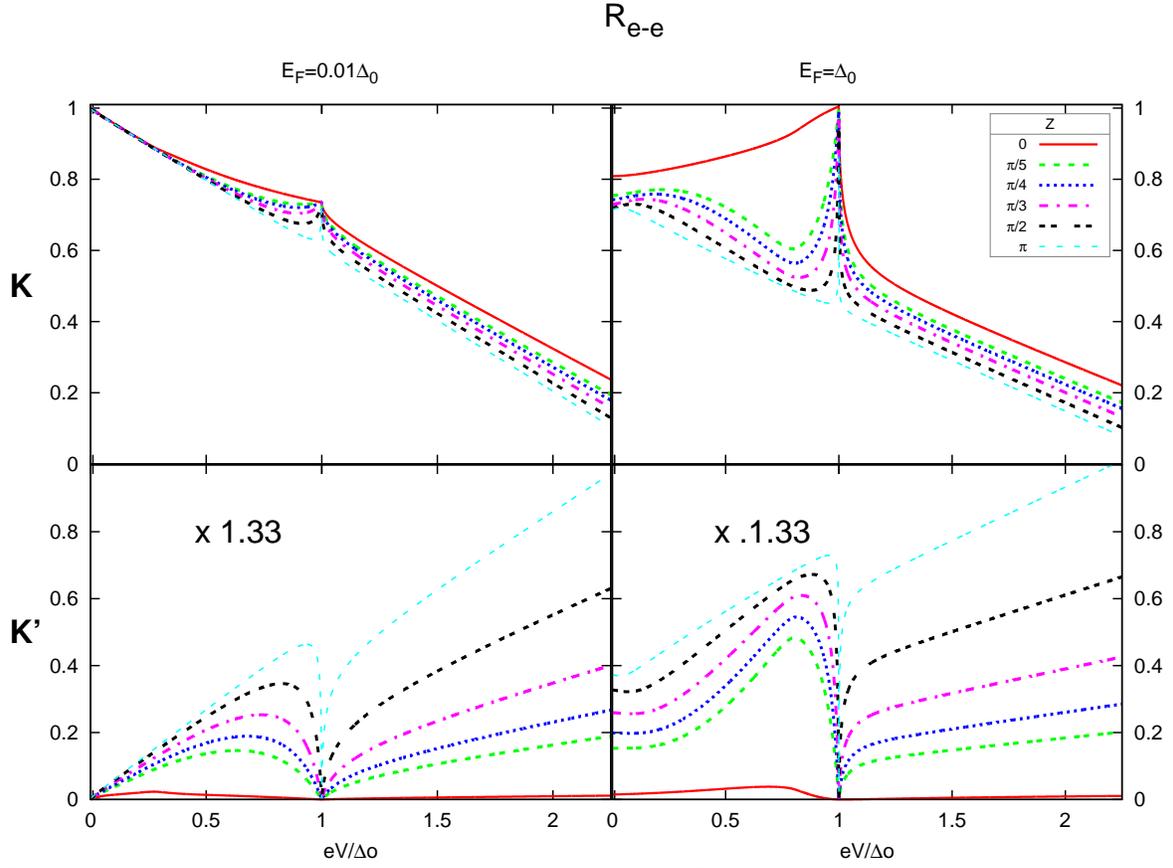


Fig. 4.5. Dependencia con respecto a la energía de excitación  $E \equiv eV$  normalizada al potencial de pares  $\Delta_0$  del coeficiente de reflexión electrón - electrón integrado con respecto a  $q$  en una juntura **GIS**. Se grafica a la izquierda para un grafeno poco dopado ( $E_F = 0,01\Delta_0$ ) y a la derecha para un grafeno dopado ( $E_F = \Delta_0$ ). En el panel superior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle **K**. En el panel inferior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle **K'**.

Las reflexiones electrón - hueco en el valle **K** tienen un valor máximo que corresponde a un valor cero de fortaleza, y disminuye a medida que aumenta la fortaleza del aislante. Para el caso del valle **K'** se observa que el efecto de la fortaleza es producir reflexiones electrón - hueco en el otro valle pero dos ordenes de magnitud menor que las reflexiones electrón - electrón.

En las figuras Fig. 4.7 y Fig. 4.8 se ilustra el efecto de la fortaleza del aislante en los coeficientes de reflexión electrón - electrón y electrón - hueco, respectivamente para los dopajes  $E_F = 10\Delta_0$  y  $E_F = 100\Delta_0 \equiv E_{FS}$ . Se observa que para  $E_F = 10\Delta_0$  los coeficientes de reflexión electrón - hueco en el valle **K'** aumentan un orden de magnitud y el coeficiente de reflexión electrón - electrón en el valle **K'** es del mismo orden de magnitud que en el valle **K**.

Para el caso fuertemente dopado (i.e.,  $E_F = 100\Delta_0 = E_{FS}$ ) el canal de dispersión electrón - electrón en el mismo valle de incidencia (i.e., **K**) es casi nulo como ocurre cuando  $Z = 0$ , sin embargo al aumentar la fortaleza del aislante  $Z$  el coeficiente de reflexión electrón - electrón en el valle **K'** aumenta y llega a ser mucho mayor que el coeficiente de reflexión electrón - electrón en el valle **K**.

El efecto sobre las reflexiones de *Andreev* es opuesto, es decir para estos valores de dopaje, el coeficiente de reflexión electrón - hueco en el mismo valle de incidencia es alto para un

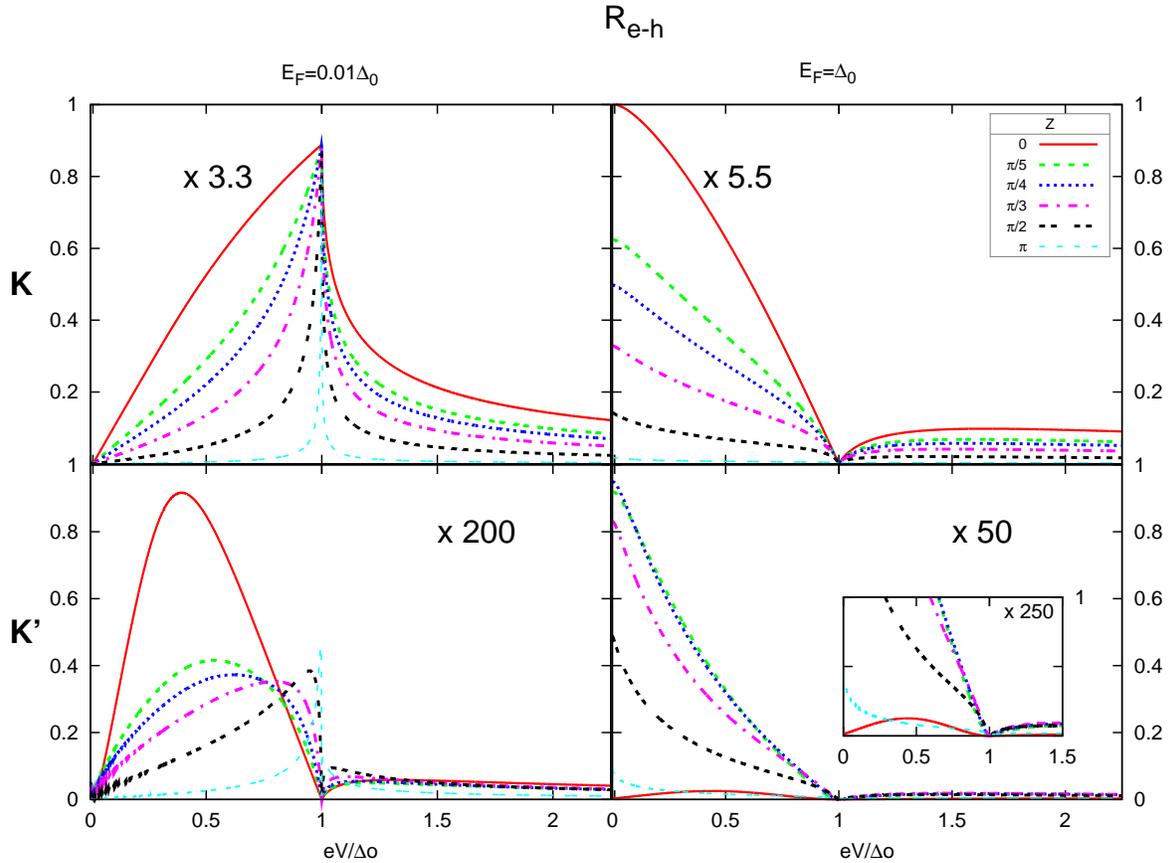


Fig. 4.6. Dependencia con respecto a la energía de excitación  $E \equiv eV$  normalizada al potencial de pares  $\Delta_0$  del coeficiente de reflexión electrón - hueco integrado con respecto a  $q$  en una junta **GIS**. Se grafica a la izquierda para un grafeno poco dopado ( $E_F = 0,01\Delta_0$ ) y a la derecha para un grafeno dopado ( $E_F = 1\Delta_0$ ). En el panel superior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle  $\mathbf{K}$ . En el panel inferior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle  $\mathbf{K}'$ .

valor de fortaleza nulo y disminuye con el aumento de la fortaleza del aislante  $Z$ . Este mismo comportamiento se observa en las reflexiones electrón - hueco en el valle  $\mathbf{K}'$ , pero son 3 ordenes de magnitud más pequeñas con respecto al valle de incidencia.

Con base en lo ilustrado en los coeficientes de reflexión a continuación se determina la conductancia diferencial.

### 4.3.2. Conductancia Diferencial

La conductancia diferencial de una junta **GIS** puede ser estudiada como en el caso de la junta **GS**, para lo cual reemplazamos los coeficientes de reflexión en la ecuación (4.5).

En las figuras<sup>23</sup> Fig. 4.9 y Fig. 4.10 se ilustran la conductancia diferencial obtenida para una frontera *Armchair* a bajos dopajes ( $E_F \leq \Delta_0$ ) y altos dopajes ( $E_F \gg \Delta_0$ ) respectivamente.

Cuando la fortaleza del aislante es nula ( $Z = 0$ ) para una junta **GIS** (ver Fig. 4.9 y Fig. 4.10) la conductancia diferencial coincide con la de una junta **GS** (Ver Fig. 4.4).

<sup>23</sup>El comportamiento de la conductancia diferencial para otros valores de dopaje del grafeno en estado normal se ilustran en el apéndice E.

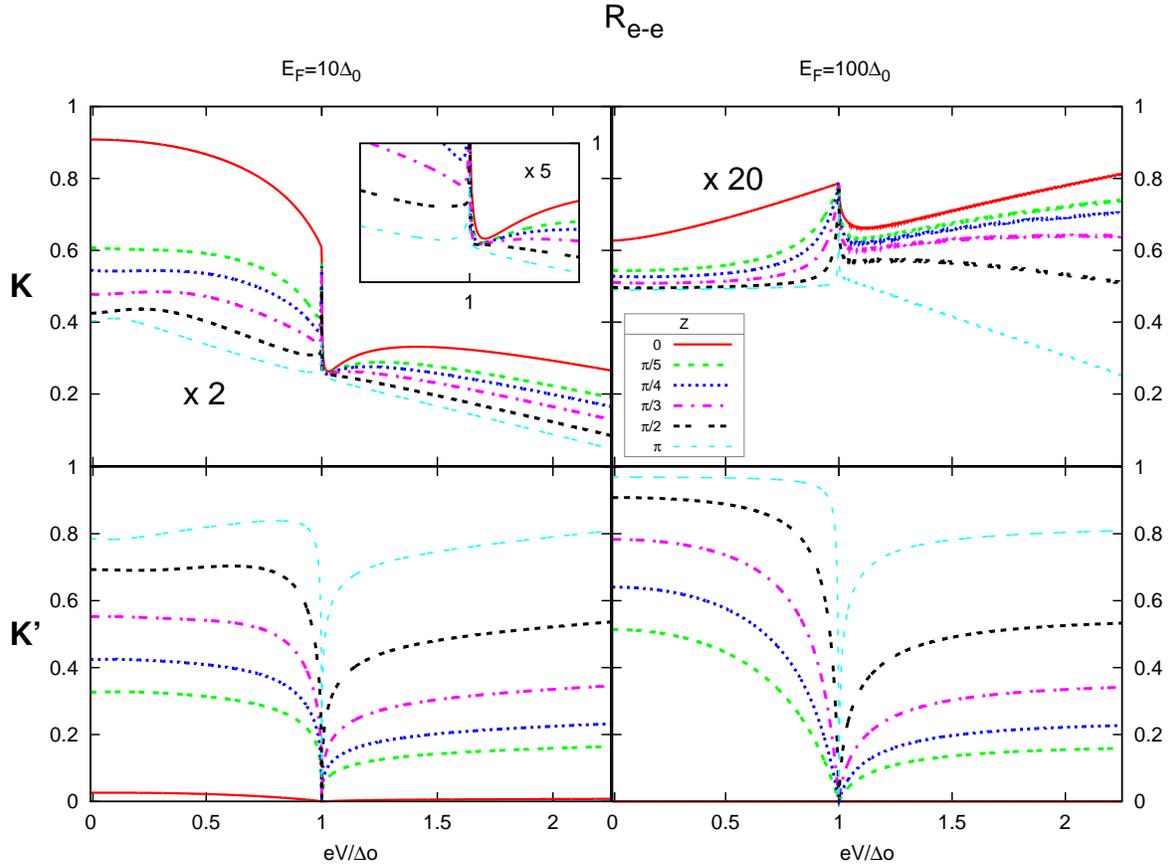


Fig. 4.7. Coeficiente de reflexión electrón - electrón respecto a la energía de excitación  $E \equiv eV$  normalizada al potencial de pares  $\Delta_0$  en una juntura **GIS**. Se grafica a la izquierda para un grafeno dopado ( $E_F = 10\Delta_0$ ) y a la derecha para un grafeno fuertemente dopado ( $E_F = 100\Delta_0 = E_{FS}$ ). En el panel superior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle **K**. En el panel inferior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle **K'**.

De la Fig. 4.9 se determina que para dopajes menores que  $\Delta$  y sin importar el valor del aislante, la conductancia diferencial es nula cuando la energía de excitación  $E = E_F$ , debido a que las reflexiones de *Andreev* en cada valle (i.e., **K** y **K'**) en este valor de energía, se comportan de forma similar al caso de frontera *Zigzag*.

El efecto de la fortaleza del aislante es disminuir la conductancia diferencial lo que es debido a dispersiones electrón - electrón entre diferentes valles. Comparando la conductancia diferencial de una juntura **GIS** con frontera *Armchair* a la obtenida para el tipo de frontera *Zigzag* se observa que no hay un comportamiento periódico al variar la fortaleza del aislante  $Z$  y tampoco se evidencia del *tunelamiento de Klein* para algún valor de dopaje o fortaleza, es decir, a medida que se aumenta el dopaje o energía de Fermi del grafeno en estado normal la conductancia disminuye más al variar la fortaleza del aislante, como se observa en la figura Fig. 4.10 y presenta un comportamiento de una juntura **NIS** (**I**: Aislante) convencional cuando  $E_F = E_{FS}$ .

Los efectos no convencionales observados en la juntura **GIS** para el tipo de frontera *Zigzag* (sección 3.3) son debidos a que la función de onda *Zigzag* (3.2) es solución de la ecuación de Dirac, en cambio en el caso *Armchair* la función de onda (4.1) es solución de la ecuación de Schrödinger y por lo tanto al mezclar valles por un potencial externo, los efectos debido a la paradoja de Klein (i.e., *Tunelamiento de Klein*) pueden ser disminuidos por las dispersiones

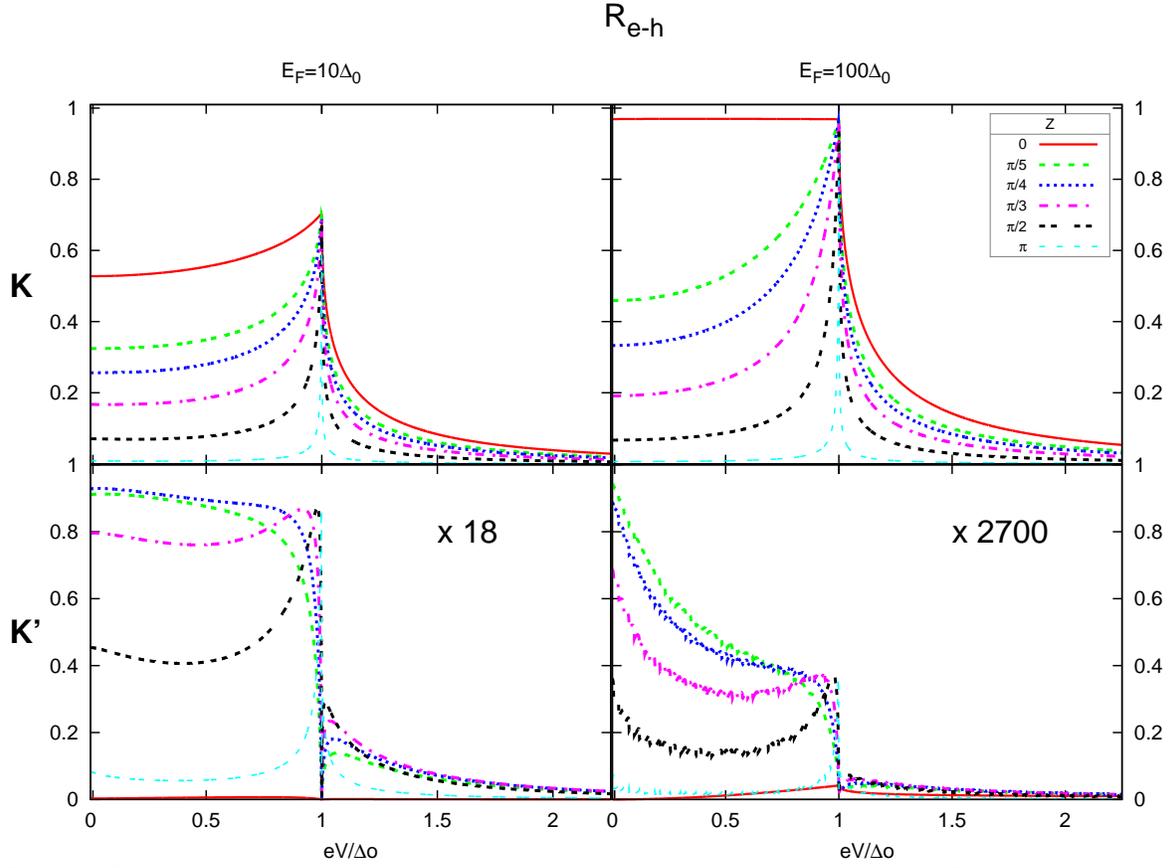


Fig. 4.8. Coeficiente de reflexión electrón - hueco respecto a la energía de excitación  $E \equiv eV$  normalizada al potencial de pares  $\Delta_0$  en una junta **GIS**. Se grafica a la izquierda para un grafeno dopado ( $E_F = 10\Delta_0$ ) y a la derecha para un grafeno fuertemente dopado ( $E_F = 100\Delta_0 = E_{FS}$ ). En el panel superior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle **K**. En el panel inferior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle **K'**.

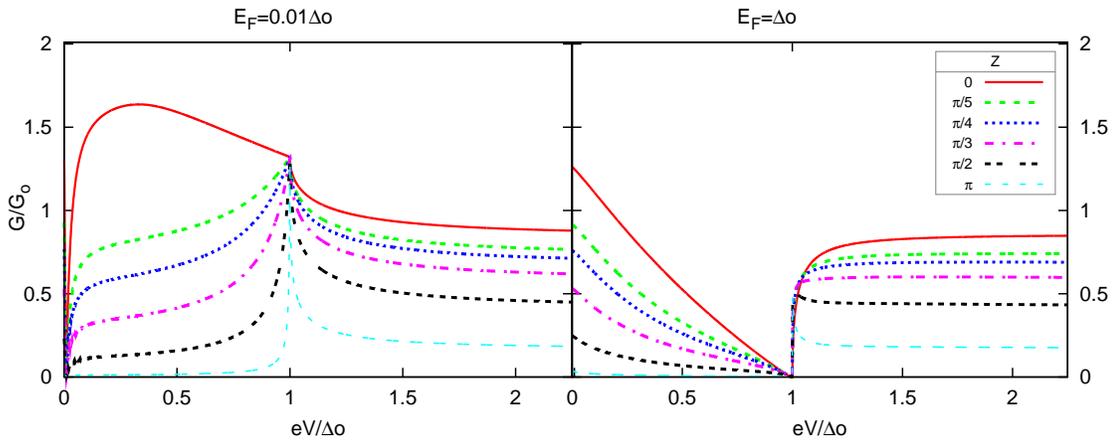


Fig. 4.9. Conductancia diferencial normalizada a  $G_0$  para una junta **GIS** conformada por grafeno con frontera *Armchair*, y en función de la energía de excitación  $E \equiv eV$  normalizada al potencial de pares  $\Delta_0$ .

electrón - electrón y electrón - hueco en diferentes valles.

El tipo de frontera *Armchair* brinda la posibilidad de nuevos canales de dispersión al combinar

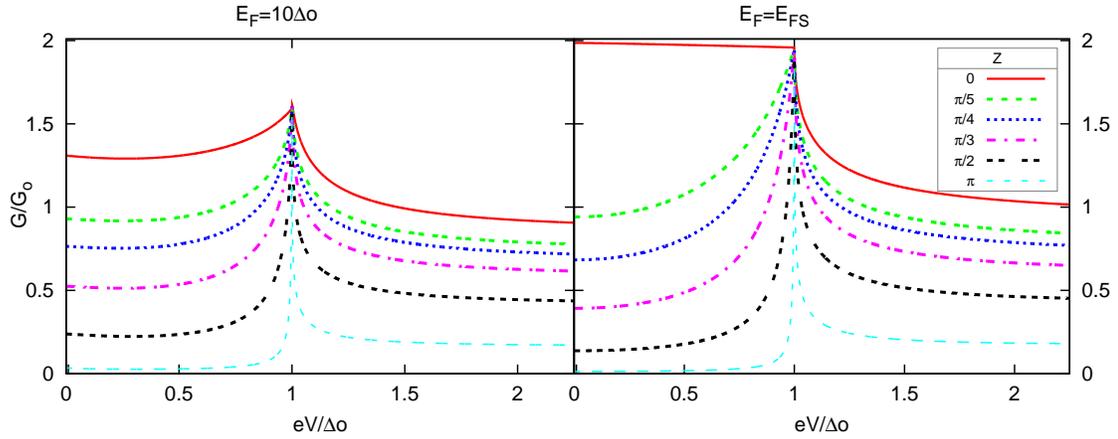


Fig. 4.10. Conductancia diferencial normalizada a  $G_0$  para una juntura **GIS** conformada por grafeno con frontera *Armchair*, y en función de la energía de excitación  $E \equiv eV$  normalizada al potencial de pares  $\Delta_0$ .

los valles  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}'$  (como se puede observar en la forma en que es escrita la función de onda (4.1) y como se ilustra los coeficientes de reflexión en las figuras Fig. 4.5 y Fig. 4.6), ya que las reflexiones en el valle  $\mathbf{K}'$  son diferente de cero y por tener una chiralidad diferente a la del valle de incidencia afectan el *tunelamiento de Klein*, de manera que para ningún dopaje se observa una transparencia perfecta como la observada a bajos dopajes en la condición de frontera *Zigzag*, ni la periodicidad observada en la conductancia diferencial de una juntura **GIS** a altos dopajes con frontera *Zigzag*.

#### 4.4. Discusión

Las propiedades de transporte en un juntura **GS** o **GIS** donde se presenta borde *Armchair*, son analizadas por medio de los coeficientes de reflexión electrón - electrón y electrón - hueco en cada uno de los valles, distinguiendo el efecto de la variación de dopaje en los coeficientes de reflexión en cada valle. Se determino que para un dopaje menor o igual al potencial de pares el coeficiente de reflexión electrón - hueco es nulo para cada uno de los valles cuando la energía de excitación es igual al dopaje, ya que es una manifestación de la transición de retroreflexiones de *Andreev* a reflexiones de *Andreev* especulares. En el rango de dopaje donde se puede presentar los dos tipos de reflexiones de *Andreev*, se caracteriza porque la conductancia diferencial para cualquier valor de aislante es igual a cero cuando la energía de excitación es igual al dopaje y no presentar *tunelamiento de Klein*, ya que los electrones son reflejados en el otro valle y no se transmiten.

En una juntura **GIS** donde se presenta borde *Armchair*, el efecto del aislante (**I**) es aumentar las reflexiones electrón - electrón en el valle diferente al valle de incidencia, de manera que disminuye la conductancia diferencial y no se presenta ningún comportamiento periódico. El comportamiento de una juntura **GIS** cuando se presenta borde *Armchair*, es similar a una juntura normal - aislante - superconductor convencional; en el sentido que el efecto del aislante es disminuir las reflexiones electrón - hueco en cada uno de los valles, y por lo tanto disminuir la conductancia diferencial. Adicionalmente, se distingue que cuando la energía de excitación es igual al potencial de pares se presenta un estado resonante donde las reflexiones de *Andreev* son máximas en cada uno de los valles, ya que los electrones incidentes tiene la energía necesaria

para inducir una cuasipartícula.

## RESUMEN Y CONCLUSIONES

En este trabajo se determina el efecto de fronteras *Armchair* y *Zigzag* en una interfase grafeno - superconductor sobre los coeficientes de reflexión electrón-electrón, electrón hueco y sobre la conductancia diferencial. Adicionalmente se analizó el efecto de incluir un aislante en la interfase sobre las propiedades de transporte eléctrico. Para esto se utilizaron las ecuaciones de BDGD en junturas **GS**, y **GIS** (Grafeno en estado normal, I : aislante, S: Grafeno en el estado superconductor). Para el lado de una frontera *Armchair* la función de onda combina las soluciones de los dos valles **K** y **K'** (puntos de Dirac) , y para el caso de la frontera *Zigzag* la función de onda se puede escribir como la solución independiente de cada valle.

A diferencia de una juntura **NS** convencional los coeficientes de reflexión son afectados por el dopaje o energía de Fermi en el grafeno. Para el caso de energía de excitación o dopaje aplicado menor que el potencial de pares o gap superconductor, se presentan reflexiones de Andreev y reflexiones electrón-hueco. Para el caso de fronteras *Zigzag*, solo se presentan reflexiones en el mismo valle de incidencia, mientras que en fronteras *Armchair* es posible reflexiones de Andreev y electrón-electrón entre diferentes valles. En ambas condiciones de frontera y para dopajes menores que el gap, las reflexiones de Andreev son nulas cuando la energía de excitación es igual al dopaje. Para un voltaje aplicado mayor que el gap superconductor, las reflexiones de Andreev son máximas para un ángulo de incidencia perpendicular a la interfase. En el caso de una juntura **NS** convencional, si la diferencia entre las energías de Fermi del metal normal y el superconductor es mucho mayor que el gap, la probabilidad de reflexiones de Andreev es mucho menor que uno, mientras que en junturas **GS** encontramos que a incidencia normal, la probabilidad de reflexiones de Andreev tienden a uno, y para ángulos mayores disminuyen, lo cual es una consecuencia de la paradoja de Klein.

En el caso de junturas **GS** encontramos que la conductancia diferencial respecto al voltaje aplicado es similar para fronteras *Armchair* y *Zigzag*. Se analizó el efecto de distintos dopajes del grafeno en estado normal y se encontró que para dopaje menor que el potencial de pares la conductancia diferencial es nula cuando el voltaje aplicado es igual al dopaje, mientras que para dopajes mucho mayores al potencial de pares la conductancia diferencial tiene un comportamiento similar al que se encuentra para una juntura **NS** convencional.

Para junturas **GIS** donde el aislante es caracterizado por un término adimensional denominado fortaleza, se encuentra que la conductancia diferencial es diferente para cada tipo de frontera. En el caso *Zigzag*, la conductancia diferencial presenta un comportamiento periódico con la variación de la fortaleza cuyo periodo es  $\pi$ , e independiente del dopaje del grafeno en estado normal; mientras que para la frontera *Armchair*, la conductancia diferencial no es periódica al variar la fortaleza, y disminuye a medida que aumenta la fortaleza para todo valor de dopaje del grafeno en estado normal.

Variando los valores de la fortaleza se encuentra que:

- Para interfase *Zigzag* cuando se consideran bajos dopajes con respecto al potencial de pares la variación con la energía de la conductancia diferencial no depende de la fortaleza del aislante, debido a que se presenta tunelamiento de Klein. Para muy altos dopajes el comportamiento de la conductancia diferencial es similar al caso de una juntura **GIS** convencional.
- En el caso de frontera *Armchair* la conductancia diferencial disminuye al aumentar el valor de la fortaleza y no aparece un comportamiento periódico como en el caso *Zigzag*, lo cual es debido a una disminución del tunelamiento de Klein. Para dopajes menores o iguales al potencial de pares para todas las fortalezas se presenta que la conductancia diferencial es nula a voltaje igual al dopaje del grafeno, lo cual es una manifestación de que las reflexiones de Andreev son nulas. Por otro lado, debido a la mezcla de valles, hay contribución a la conductancia diferencial de las reflexiones de Andreev y electrón-electrón entre valles diferentes.

El análisis de los coeficientes de reflexión y conductancia diferencial por medio de las ecuaciones de Bogoliubov - De Gennes - Dirac, para juntas en las cuales interviene el grafeno con frontera *Armchair*, es novedoso ya que no se han reportado estudios desde este punto de vista y por no presentar los mismos comportamientos que en el caso *Zigzag* y como en el caso convencional únicamente para un grafeno fuertemente dopado. Los resultados obtenidos permitirán comparar la conductancia diferencial con posibles medidas experimentales en sistemas con fronteras *Armchair* o *Zigzag*.

Debido a que el estudio de las propiedades de transporte en juntas en donde interviene el grafeno presenta comportamientos no convencionales que dependen del valor del dopaje y del tipo de frontera, el presente trabajo se puede extender a:

- Estudiar el efecto del ancho del aislante en una junta **GIS** para frontera *Armchair* y encontrar su límite de delta de Dirac como en el caso *Zigzag*.
- Extender el estudio de la conductancia diferencial a juntas con superconductores de alta temperatura crítica cuyo potencial de pares es anisotrópico.
- Con base en el estudio realizado de los coeficientes de reflexión se puede analizar el ruido de emisión diferencial, el cual es independiente de la temperatura y se pueden corroborar los resultados obtenidos por Di Carlo [58] para el tipo de frontera *Zigzag*, y predecir posibles resultados para el caso *Armchair*.
- Debido a que el grafeno es un semiconductor de gap nulo, se puede estudiar una junta **GG** de grafeno con diferente dopaje, para poder hacer una analogía con una junta **np** o **pn**.

Las perspectivas sobre el aislante permitirán que sea posible comparar mediciones más realizables experimentalmente. Para el caso de las expectativas acerca de los estudios en el caso de frontera *Armchair*, éstas son novedosas ya que no se han reportado estudios de la dependencia del ancho del aislante, y por medio de las ecuaciones de Bogoliubov - De Gennes - Dirac se puede entender cómo es el proceso de dispersión en cada valle con respecto a la fortaleza del aislante.



# DEMOSTRACIÓN DE LA SIMETRÍA DE INVERSIÓN TEMPORAL DEL HAMILTONIANO DEL GRAFENO

El hamiltoniano del grafeno para el tipo de frontera *Zigzag* es,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G &\equiv \begin{pmatrix} \mathbf{H}_K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{K'} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} -i\hbar\nu_F(\partial_x\sigma_x + \partial_y\sigma_y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\hbar\nu_F(\partial_x\sigma_x - \partial_y\sigma_y) \end{pmatrix}, \\ &= -i\hbar\nu_F \begin{pmatrix} (\partial_x\sigma_x + \partial_y\sigma_y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\partial_x\sigma_x - \partial_y\sigma_y) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

con  $\alpha$  el vector de las matrices de Pauli y definiendo el operador de inversion temporal  $\mathfrak{T}$  como,

$$\mathfrak{T} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix} C = \mathfrak{T}^{-1}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $C$  es el operador complejo conjugado, se puede demostrar el efecto de la inversion temporal  $\mathfrak{T}$  sobre el hamiltoniano del grafeno (A.1),

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\mathbf{H}_G\mathfrak{T}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} \mathbf{H}_K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{K'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix} C, \\ &= \begin{pmatrix} C\sigma_z\mathbf{H}_{K'}\sigma_zC & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C\sigma_z\mathbf{H}_K\sigma_zC \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} C\sigma_z\{-i\hbar\nu_F(\partial_x\sigma_x - \partial_y\sigma_y)\}\sigma_zC & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C\sigma_z\{-i\hbar\nu_F(\partial_x\sigma_x + \partial_y\sigma_y)\}\sigma_zC \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} C\{-i\hbar\nu_F(\partial_x\sigma_z\sigma_x\sigma_z - \partial_y\sigma_z\sigma_y\sigma_z)\}C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C\{-i\hbar\nu_F(\partial_x\sigma_z\sigma_x\sigma_z + \partial_y\sigma_z\sigma_y\sigma_z)\}C \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} -C\{-i\hbar\nu_F(\partial_x\sigma_x - \partial_y\sigma_y)\}C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -C\{-i\hbar\nu_F(\partial_x\sigma_x + \partial_y\sigma_y)\}C \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} -\{i\hbar\nu_F(\partial_x\sigma_x + \partial_y\sigma_y)\} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\{i\hbar\nu_F(\partial_x\sigma_x - \partial_y\sigma_y)\} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{H}_G. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Se ha utilizado que el producto entre las matrices de Pauli es,

$$\begin{aligned} \sigma_z\sigma_x\sigma_z &= -\sigma_x, \\ \sigma_z\sigma_y\sigma_z &= -\sigma_y. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$



## APÉNDICE B

# RELACIONES ENTRE LOS FACTORES BCS DE UNA CUASIPARTÍCULA

Teniendo en cuenta que la amplitud de probabilidad de la componente de electron  $u_0$  y la amplitud de probabilidad de la componente de hueco  $v_0$  de una cuasipartícula cumplen con las ecuaciones de Bogoliubov de Gennes (2.1) se puede definir estas amplitudes como [47, Cap. 5]

$$u_0 \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{E^2 - \|\Delta_0\|^2}}{E}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{\Omega}{E}}, \quad (\text{B.1})$$

$$v_0 \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{E^2 - \|\Delta_0\|^2}}{E}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{\Omega}{E}}, \quad (\text{B.2})$$

en donde la definición de  $\Omega$  se puede observar en el pie de página 2.16 de la página 24. Con base en las anteriores definiciones se obtiene que

$$\frac{u_0}{v_0} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{E^2 - \|\Delta_0\|^2}}{E}}}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{E^2 - \|\Delta_0\|^2}}{E}}} = \sqrt{\frac{E + \sqrt{E^2 - \|\Delta_0\|^2}}{E - \sqrt{E^2 - \|\Delta_0\|^2}}} = \frac{E + \sqrt{E^2 - \|\Delta_0\|^2}}{\|\Delta_0\|}, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{v_0}{u_0} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{E^2 - \|\Delta_0\|^2}}{E}}}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{E^2 - \|\Delta_0\|^2}}{E}}} = \sqrt{\frac{E - \sqrt{E^2 - \|\Delta_0\|^2}}{E + \sqrt{E^2 - \|\Delta_0\|^2}}} = \frac{E - \sqrt{E^2 - \|\Delta_0\|^2}}{\|\Delta_0\|},$$

es decir

$$\frac{E - \epsilon\Omega}{\|\Delta_0\|} = \begin{cases} + \Rightarrow \frac{E - \sqrt{E^2 - \|\Delta_0\|^2}}{\|\Delta_0\|} \equiv \frac{v_0}{u_0}, \\ - \Rightarrow \frac{E + \sqrt{E^2 - \|\Delta_0\|^2}}{\|\Delta_0\|} \equiv \frac{u_0}{v_0}, \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

con  $\epsilon \equiv \pm$ .



## APÉNDICE C

# DEMOSTRACIÓN DE LA DENSIDAD DE CORRIENTE DE PROBABILIDAD EN UNA SUPERFICIE DE GRAFENO HOMOGÉNEO

Debido a que la dinámica a bajas energías de los portadores de carga en el grafeno es dada por la ecuación de Dirac para partículas con masa en reposo nula y velocidad  $\nu_F$  como,

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - i\hbar \nu_F \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\text{C.1})$$

con su respectiva ecuación adjunta

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^+(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + i\hbar \nu_F \nabla \psi^+(\mathbf{r}, t) \cdot \boldsymbol{\alpha}^+ = 0, \quad (\text{C.2})$$

donde  $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  es el vector de las matrices de Pauli.

Multiplicando a la izquierda por  $\psi^+(\mathbf{r}, t)$  la ecuación de Dirac (C.1) y por  $\psi(\mathbf{r}, t)$  a la derecha de la adjunta (C.2) se obtiene

$$i\hbar \psi^+(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - i\hbar \nu_F \psi^+ \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\text{C.3a})$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^+(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) + i\hbar \nu_F \nabla \psi^+(\mathbf{r}, t) \cdot \boldsymbol{\alpha}^+ \psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (\text{C.3b})$$

Tomando la diferencia entre las relaciones (C.3),

$$i\hbar \frac{\partial (\psi^+(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t))}{\partial t} - i\hbar \nu_F (\psi^+(\mathbf{r}, t)\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, t) + \nabla \psi^+(\mathbf{r}, t) \cdot \boldsymbol{\alpha}^+ \psi) = 0, \quad (\text{C.4})$$

como  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^+$  debido a que las matrices de Pauli son hermiticas se obtiene,

$$\frac{\partial (\psi^+(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t))}{\partial t} - \nabla \cdot \nu_F (\psi^+(\mathbf{r}, t)\boldsymbol{\alpha}\psi(\mathbf{r}, t)) = 0. \quad (\text{C.5})$$

Por lo tanto se define las cantidades reales como,

$$P(\mathbf{r}, t) = \psi^+(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t), \quad (\text{C.6a})$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\nu_F \psi^+(\mathbf{r}, t)\boldsymbol{\alpha}\psi(\mathbf{r}, t), \quad (\text{C.6b})$$

que son respectivamente la probabilidad y la densidad de corriente de probabilidad.

Aunque en la demostración se tuvo en cuenta que son partículas con masa en reposo nula, la densidad de corriente de probabilidad también es válida para partículas masivas, lo anterior porque las matrices de Pauli son hermiticas.



## APÉNDICE D

# SOLUCIONES DE LAS AMPLITUDES DE PROBABILIDAD DE UNA JUNTURA GRAFENO - AISLANTE - SUPERCONDUCTOR CON FRONTERA ZIG - ZAG

Solucionando el sistema de ecuaciones  $8 \times 8$  de las condiciones de frontera 3.14, con la aproximación de *Andreev*

$$\Delta_0 \ll E_{FS} \Rightarrow k_{qe(qh)} = \sqrt{\left(\frac{E_{FS}}{\hbar v_F}\right)^2 - q^2} \Rightarrow \alpha_{qe} = \alpha_{qh} \equiv \sigma, \quad (\text{D.1})$$

y como la altura de la barrera de potencial  $V_0 \rightarrow \infty$  los portadores de carga en el aislante inciden perpendicularmente sobre las interfaces

$$\begin{aligned} e^{i\alpha_{I_e}} &= 1, \\ e^{i\alpha_{I_h}} &= 1, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

es decir,

$$q \ll k_{I_e(I_h)} \approx \sqrt{\left(\frac{E \pm (E_F - V_0)}{\hbar v_F}\right)^2}. \quad (\text{D.3})$$

De manera que con base en las aproximaciones descritas en (D.1) y (D.2) se puede escribir el determinante del sistema como

$$\begin{aligned} D = e^{-i(\sigma+2\chi+\alpha_e)} &\left\{ - \left[ 1 + e^{i\sigma} + e^{2i\chi}(1 - e^{i\sigma}) - e^{i\alpha_h} \left( 1 + e^{i\sigma} + e^{2i\chi}(-1 + e^{i\sigma}) \right) \right] \right. \\ &\left[ 1 - e^{i\sigma} + e^{2i\chi}(1 + e^{i\sigma}) + e^{i\alpha_e} \left( -1 + e^{i\sigma} + e^{2i\chi}(1 + e^{i\sigma}) \right) \right] u_0^2 \\ &- \left[ 1 + e^{i\sigma} - e^{2i\chi} + e^{i(\sigma+2\chi)} - e^{i\alpha_e} \left( 1 + e^{i\sigma} - e^{2i\chi}(-1 + e^{i\sigma}) \right) \right] \\ &\left. \left[ -1 + e^{i\sigma} + e^{2i\chi} + e^{i(\sigma+2\chi)} + e^{i\alpha_h} \left( 1 - e^{i\sigma} + e^{2i\chi}(1 + e^{i\sigma}) \right) \right] v_0^2 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

para escribir explícitamente las soluciones de las amplitudes de probabilidad  $u_1, v_1, u_2, u_3, v_2, v_3, C_{qe}^+$  y  $C_{qh}^-$  necesarias para determinar los coeficientes de reflexión (3.15) como,

$$\begin{aligned}
u_1 = & \frac{e^{-i\sigma-2i\chi}}{D} \left( \left\{ e^{4i\chi} - 1 + e^{i\sigma} \left[ e^{i\sigma} + e^{2i\chi} (4 - e^{i\sigma+2i\chi}) \right] + (e^{i\alpha_h} + e^{2i\sigma+i\alpha_e}) (1 - e^{2i\chi})^2 - (e^{i\alpha_e} + e^{2i\sigma+i\alpha_h}) (1 + e^{2i\chi})^2 \right. \right. \\
& + e^{i\alpha_e+i\alpha_h} \left[ 1 - e^{2i\chi} (e^{2i\chi} - 4e^{i\sigma}) - e^{2i\sigma} (1 - e^{4i\chi}) \right] \left. \right\} u_0^2 - \left\{ e^{4i\chi} - 1 + e^{i\sigma} \left[ e^{i\sigma} + e^{2i\chi} (4 - e^{i\sigma+2i\chi}) \right] \right. \\
& + (e^{2i\sigma+i\alpha_e} + e^{i\alpha_h}) (e^{2i\chi} + 1)^2 - (e^{i\alpha_e} + e^{2i\sigma+i\alpha_h}) (1 - e^{2i\chi})^2 + e^{i\alpha_e+i\alpha_h} \left[ 1 - e^{2i\chi} (e^{2i\chi} - 4e^{i\sigma}) \right. \\
& \left. \left. - e^{2i\sigma} (1 - e^{4i\chi}) \right] \right\} v_0^2 \right) \tag{D.5a}
\end{aligned}$$

$$v_1 = - \frac{16 \cos(\alpha_e) \cos(\sigma)}{D} u_0 v_0 \tag{D.5b}$$

$$\begin{aligned}
u_2 = & - \frac{2e^{-i\sigma} \cos(\alpha_e)}{D} \left( \left\{ (1 - e^{i\alpha_h}) \left[ 1 + e^{i\sigma} (2 + e^{i\sigma}) \right] + e^{2i\chi} (1 + e^{i\alpha_h}) (1 - e^{2i\sigma}) \right\} u_0^2 - \left\{ e^{i\alpha_h} e^{i\sigma} \left[ e^{i\sigma} (1 - e^{2i\chi}) - 2 \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + (e^{i\alpha_h} - e^{2i\sigma}) (1 + e^{2i\chi}) - 1 + 2e^{i\sigma} + e^{2i\chi} \right\} v_0^2 \right) \tag{D.5c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3 = & - \frac{2e^{-i\sigma-2i\chi} \cos(\alpha_e)}{D} \left( \left\{ 1 - e^{2i\sigma} \left[ 1 - e^{i\alpha_h} (1 + e^{2i\chi}) \right] + e^{2i\chi} \left[ 1 + e^{i\sigma} (e^{i\sigma} - 2) \right] + e^{i\alpha_h} \left[ e^{2i\chi} (1 - 2e^{i\sigma}) - 1 \right] \right\} u_0^2 + \right. \\
& \left. \left\{ (e^{2i\sigma} - 1) (1 - e^{i\alpha_h}) + e^{2i\chi} (1 + e^{i\alpha_h}) \left[ e^{i\sigma} (2 + e^{i\sigma}) + 1 \right] \right\} v_0^2 \right) \tag{D.5d}
\end{aligned}$$

$$v_2 = - \frac{8 \cos(\alpha_e) \cos(\sigma) u_0 v_0}{D} (1 + e^{i\alpha_h}) \tag{D.5e}$$

$$v_3 = - \frac{8 \cos(\alpha_e) \cos(\sigma) u_0 v_0}{D} (1 - e^{i\alpha_h}) \tag{D.5f}$$

$$C_{qe}^+ = \frac{4 \cos(\alpha_e) u_0}{D} \left[ 2ie^{i\chi} \sin(\sigma) - 2e^{-i\chi} \cos(\sigma) + e^{-i\sigma} [e^{-i\chi} (e^{i\sigma} + 1) + e^{i\chi} (e^{i\sigma} - 1)] e^{i\alpha_h} \right] \tag{D.5g}$$

$$C_{qh}^- = - \frac{4 \cos(\alpha_e) v_0}{D} \left[ e^{-i\chi} (e^{i\sigma} - 1) (1 - e^{i\alpha_h}) + e^{i\chi} (1 + e^{i\sigma}) (1 + e^{i\alpha_h}) \right] \tag{D.5h}$$

# APÉNDICE E

## COEFICIENTES DE REFLEXIÓN Y CONDUCTANCIA DIFERENCIAL DE UNA JUNTURA **GIS** CON FRONTERA ARMCHAIR

A continuación por completez con los dopajes analizados en el caso de frontera *Zigzag*, se ilustran los coeficientes de reflexión y la conductancia diferencial para una juntura **GIS** con frontera *Armchair*,

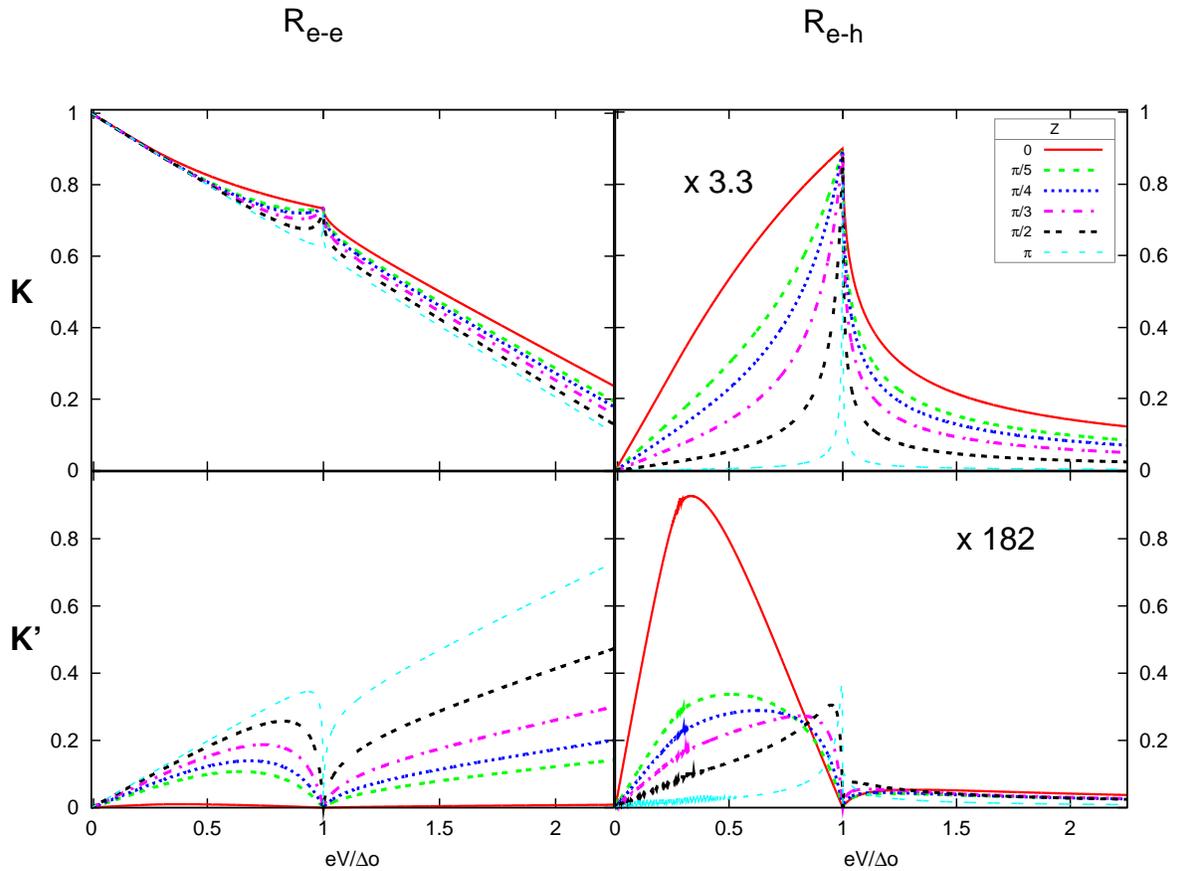


Fig. E.1. Coeficientes de reflexión en una juntura **GIS** para un grafeno con energía de Fermi  $E_F = 0\Delta_0$ . Se grafica a la izquierda el coeficiente de reflexión electrón - electrón y a la derecha coeficiente de reflexión electrón - hueco. En el panel superior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle **K**. En el panel inferior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle **K'**.

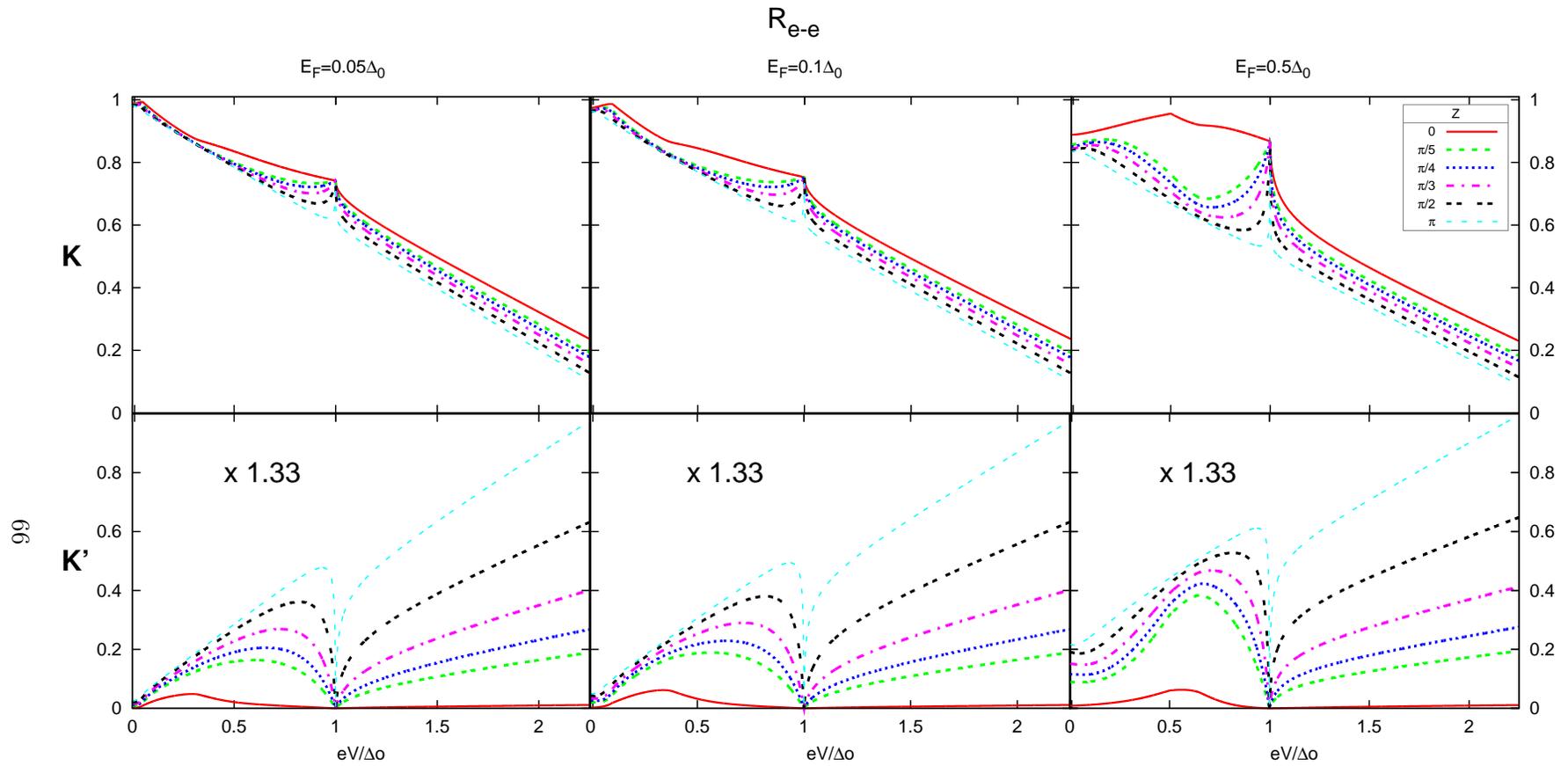


Fig. E.2. Coeficiente de reflexión electrón - electrón respecto a la energía de excitación  $E \equiv eV$  normalizada al potencial de pares  $\Delta_0$  en una junta **GIS**. Se grafica a la izquierda para un grafeno con energía de Fermi  $E_F = 0,05\Delta_0$ , en el centro para un grafeno con energía de Fermi  $E_F = 0,1\Delta_0$  y a la derecha para un grafeno con energía de Fermi  $E_F = 0,5\Delta_0$ . En el panel superior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle **K**. En el panel inferior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle **K'**.

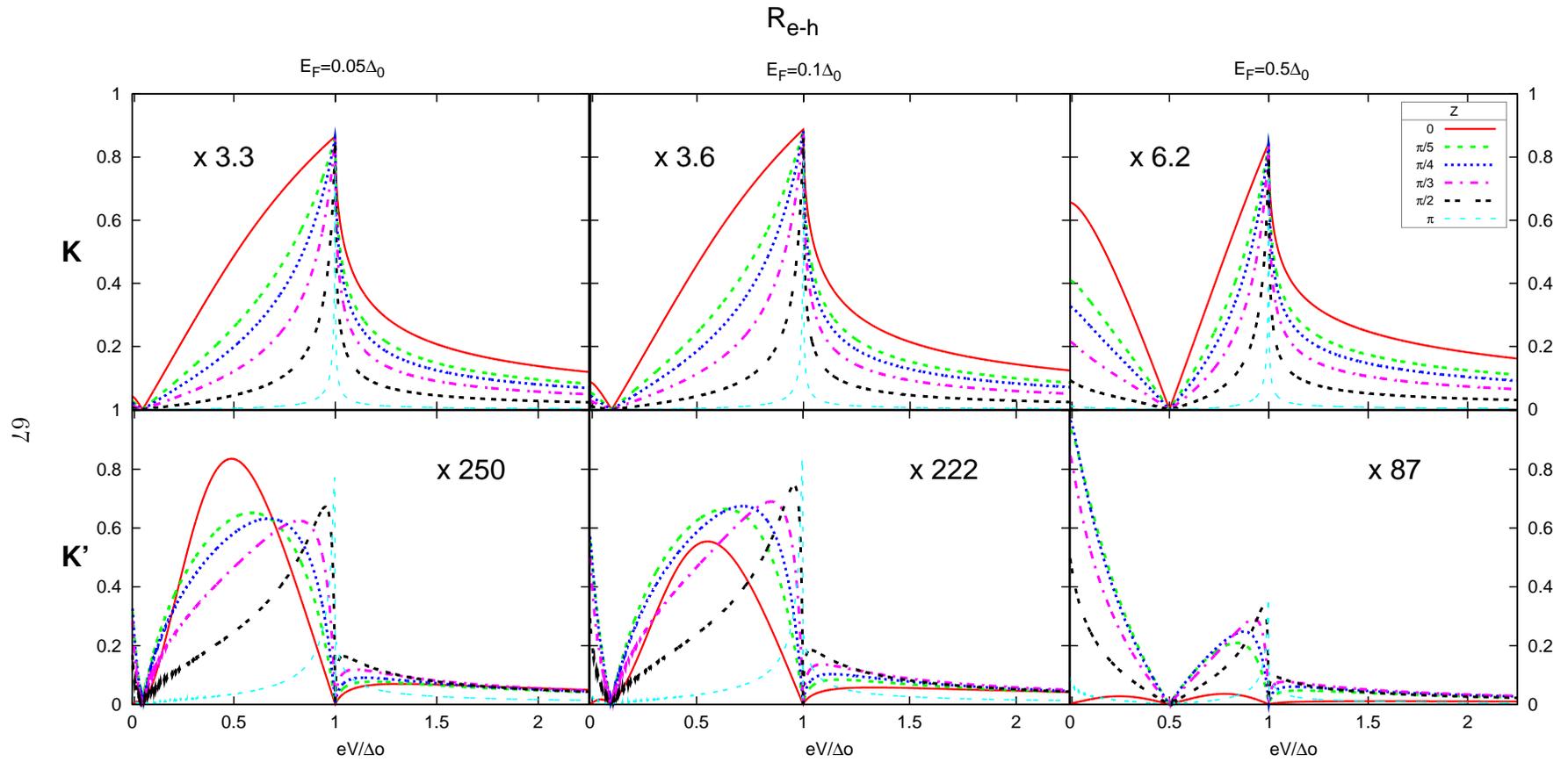


Fig. E.3. Coeficiente de reflexión electrón - hueco respecto a la energía de excitación  $E \equiv eV$  normalizada al potencial de pares  $\Delta_0$  en una junta **GIS**. Se grafica a la izquierda para un grafeno con energía de Fermi  $E_F = 0,05\Delta_0$ , en el centro para un grafeno con energía de Fermi  $E_F = 0,1\Delta_0$  y a la derecha para un grafeno con energía de Fermi  $E_F = 0,5\Delta_0$ . En el panel superior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle **K**. En el panel inferior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle **K'**.

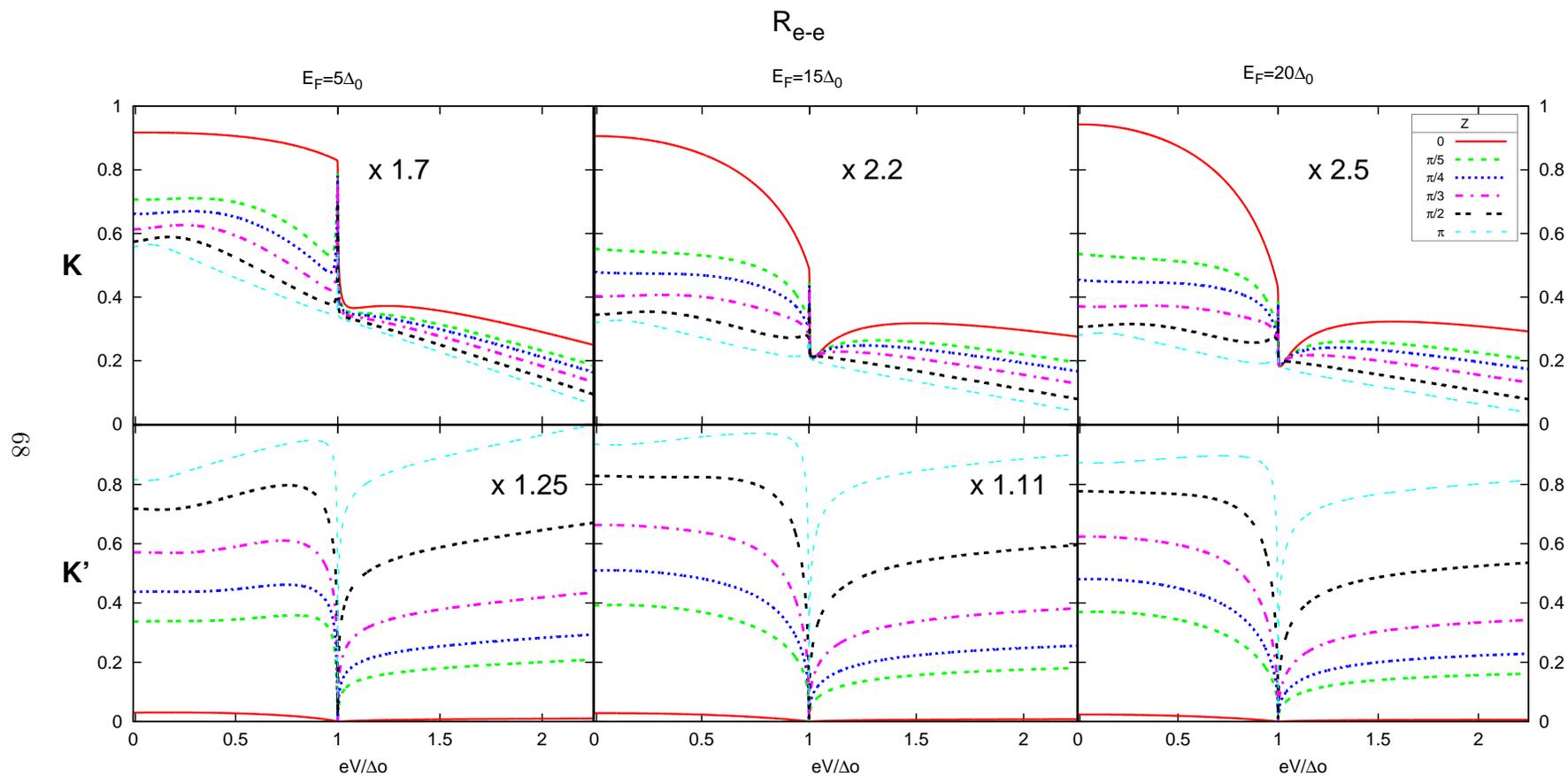


Fig. E.4. Coeficiente de reflexión electrón - electrón respecto a la energía de excitación  $E \equiv eV$  normalizada al potencial de pares  $\Delta_0$  en una junta **GIS**. Se grafica a la izquierda para un grafeno con energía de Fermi  $E_F = 5\Delta_0$ , en el centro para un grafeno con energía de Fermi  $E_F = 15\Delta_0$  y a la derecha para un grafeno con energía de Fermi  $E_F = 20\Delta_0$ . En el panel superior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle **K**. En el panel inferior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle **K'**.

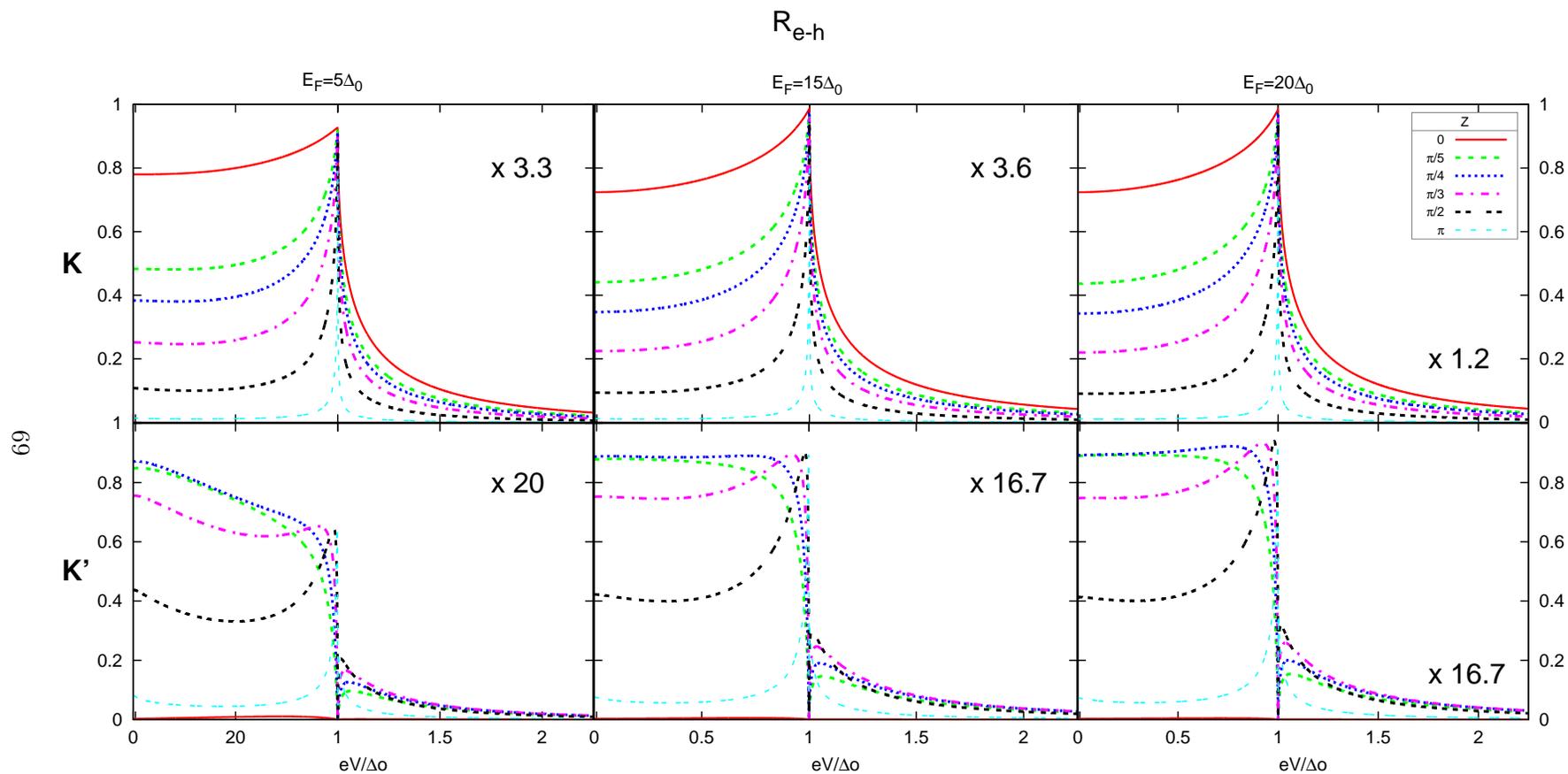


Fig. E.5. Coeficiente de reflexión electrón - hueco respecto a la energía de excitación  $E \equiv eV$  normalizada al potencial de pares  $\Delta_0$  en una junta **GIS**. Se grafica a la izquierda para un grafeno con energía de Fermi  $E_F = 5\Delta_0$ , en el centro para un grafeno con energía de Fermi  $E_F = 15\Delta_0$  y a la derecha para un grafeno con energía de Fermi  $E_F = 20\Delta_0$ . En el panel superior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle **K**. En el panel inferior se encuentran el coeficiente de reflexión asociado al valle **K'**.

Con base en los coeficientes de reflexión se ilustra la conductancia diferencial para cada dopaje como,

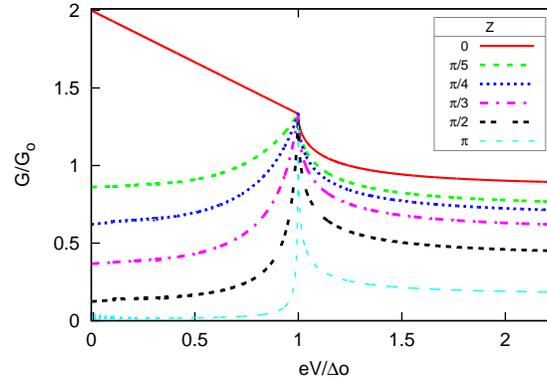


Fig. E.6. Conductancia diferencial normalizada a  $G_0$  para una junta GIS conformada por un grafeno no dopado  $E_F = 0\Delta_0$  en función de la energía de excitación  $E \equiv eV$  normalizada al potencial de pares  $\Delta_0$ .

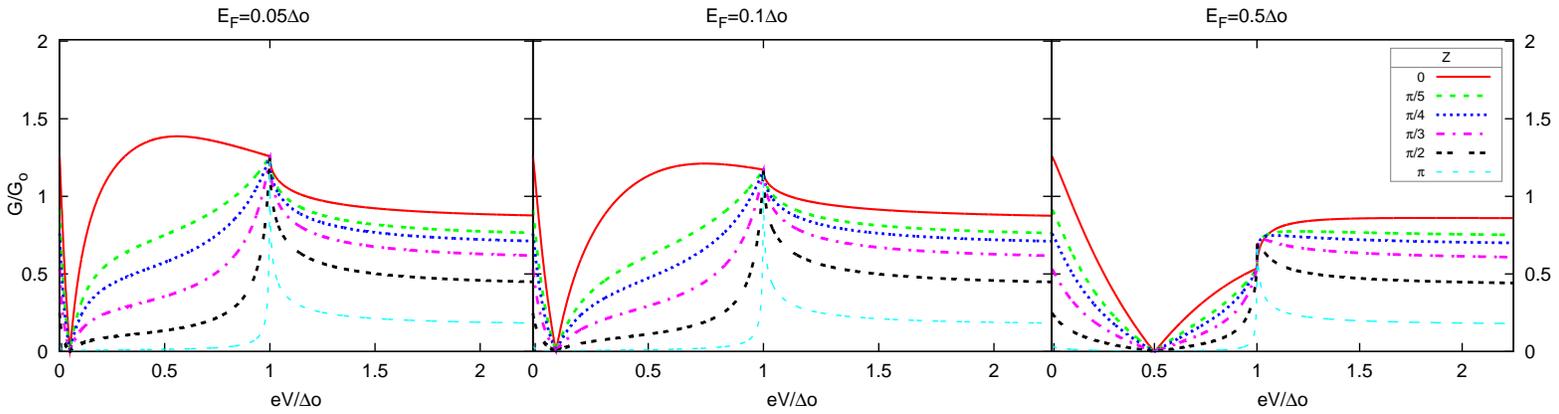


Fig. E.7. Conductancia diferencial normalizada a  $G_0$  para una junta **GIS** conformada por grafeno con frontera *Armchair*. Se grafica a la izquierda  $E_F = 0,05\Delta_0$ , en el centro  $E_F = 0,1\Delta_0$  y a la derecha  $E_F = 0,5\Delta_0$ .

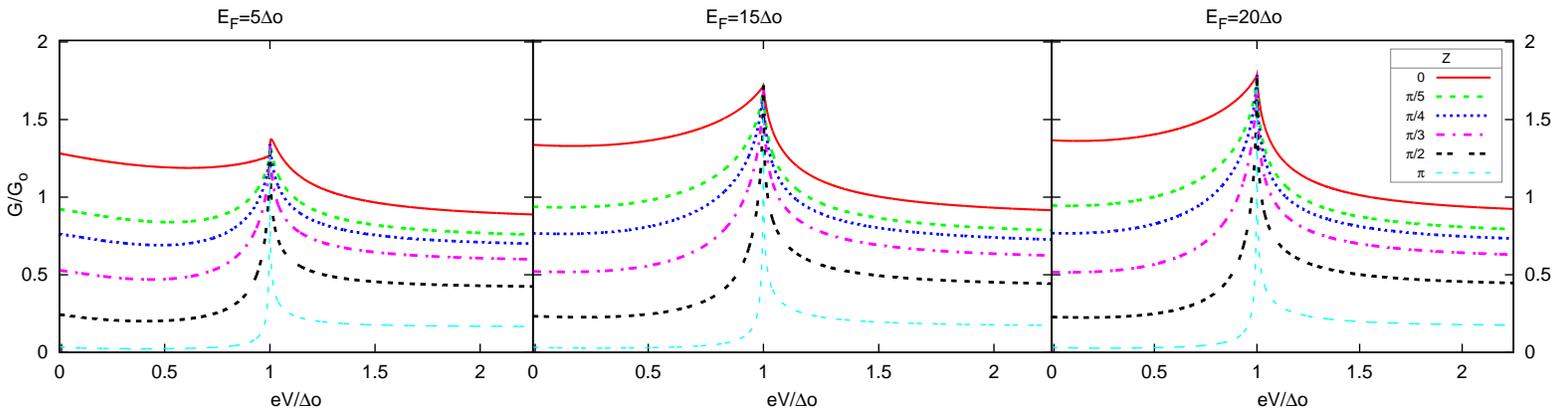


Fig. E.8. Conductancia diferencial normalizada a  $G_0$  para una junta **GIS** conformada por grafeno con frontera *Armchair*. Se grafica a la izquierda  $E_F = 5\Delta_0$ , en el centro  $E_F = 15\Delta_0$  y a la derecha  $E_F = 20\Delta_0$ .

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] K. S. Novoselov *et al.*, *Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films*, *Science* **306** (2004) 666–669.
- [2] P. R. Wallace, *The Band Theory of Graphite*, *Phys. Rev.* **71** (1947) 622–634.
- [3] P. R. Wallace, *Erratum: The Band Theory of Graphite*, *Phys. Rev.* **72** (1947) 258–258.
- [4] A. K. Geim and K. S. Novoselov, *The rise of graphene*, *Nat. Mater.* **6** (2007) 183–191.
- [5] A. K. Geim, *Graphene: Status and Prospects*, *Science* **324** (2009) 1530–1534.
- [6] A. Bostwick *et al.*, *Quasiparticle dynamics in graphene*, *Nat. Phys.* **3** (2007) 36–40.
- [7] M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, *Chiral tunnelling and the Klein paradox in graphene*, *Nat. Phys.* **2** (2006) 620–625.
- [8] C. W. J. Beenakker, *Specular Andreev Reflection in Graphene*, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 067007.
- [9] S. Bhattacharjee and K. Sengupta, *Tunneling Conductance of Graphene NIS Junctions*, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 217001.
- [10] S. Bhattacharjee, M. Maiti, and K. Sengupta, *Theory of tunneling conductance of graphene normal metal-insulator-superconductor junctions*, *Phys. Rev. B* **76** (2007) 184514.
- [11] H. B. Heersche *et al.*, *Bipolar supercurrent in graphene*, *Nature* **446** (2007) 56–59.
- [12] K. S. Novoselov *et al.*, *Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene*, *Nature* **438** (2005) 197–200.
- [13] M. Wilson, *Electrons in Atomically Thin Carbon Sheets Behave Like Massless Particles*, *Phys. Today* **59** (2006) 21–23.
- [14] Y. Zhang *et al.*, *Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry’s phase in graphene*, *Nature* **438** (2005) 201–204.
- [15] S. Y. Zhou *et al.*, *First direct observation of Dirac fermions in graphite*, *Nat. Phys.* **2** (2006) 595–599.
- [16] K. S. Novoselov *et al.*, *Two-dimensional atomic crystals*, *PNAS* **102** (2005) 10451–10453.

- [17] V. P. Gusynin and S. G. Sharapov, *Unconventional Integer Quantum Hall Effect in Graphene*, *Phys. Rev. Lett.* **65** (2005) 146801.
- [18] J. M. Pereira, P. Vasilopoulos, and F. M. Peeters, *Graphene-based resonant-tunneling structures*, *Appl. Phys. Lett.* **90** (2007) 132122.
- [19] M. I. Katsnelson, *Graphene: carbon in two dimensions*, *Mater. Today* **10** (2007) 20 – 27.
- [20] A. Calogeracos, *Relativistic Quantum Mechanics: Paradox in a pencil*, *Nat. Phys.* **2** (2006) 579 – 580.
- [21] C. W. J. Beenakker, *Colloquium: Andreev reflection and Klein tunneling in graphene*, *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008) 1337–1354.
- [22] X. Du, I. Skachko, and E. Y. Andrei, *Josephson current and multiple Andreev reflections in graphene SNS junctions*, *Phys. Rev. B* **77** (2008) 184507.
- [23] J. Linder and A. Sudbø, *Tunneling conductance in s - and d -wave superconductor – graphene junctions: Extended Blonder-Tinkham-Klapwijk formalism*, *Phys. Rev. B* **77** (2008) 064507.
- [24] J. Linder and A. Sudbø, *Dirac Fermions and Conductance Oscillations in s- and d-Wave Superconductor-Graphene Junctions*, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 147001.
- [25] A. R. Akhmerov and C. W. J. Beenakker, *Pseudodiffusive conduction at the Dirac point of a normal-superconductor junction in graphene*, *Phys. Rev. B* **75** (2007) 045426.
- [26] Y. Barash *et al.*, *Superconducting Junctions with Ferromagnetic, Antiferromagnetic or Charge – Density – Wave Interlayers*, *AIP Conference Proceedings* **850** (2006) 889–890.
- [27] A. Bulgac, P. Magierski, and A. Wirzba, *Fermionic Casimir effect in case of Andreev reflection*, *Europhys. Lett.* **72** (2005) 327–333.
- [28] L. Brey and H. A. Fertig, *Electronic states of graphene nanoribbons studied with the Dirac equation*, *Phys. Rev. B* **73** (2006) 235411.
- [29] A. H. Castro Neto, *Graphene: Phonons behaving badly*, *Nat. Mater.* **6** (2007) 176–177.
- [30] S. Pisana *et al.*, *Breakdown of the adiabatic Born-Oppenheimer approximation in graphene*, *Nat. Mater.* **6** (2007) 198–201.
- [31] R. Saito, G. Dresselhaus, and M. S. Dresselhaus, *Physical Properties of Carbon Nanotubes*. World Scientific Publishing, Singapore, 1998.
- [32] J.-C. Charlier, X. Blase, and S. Roche, *Electronic and transport properties of nanotubes* *Rev. Mod. Phys.* **79** (2007) 677–732.
- [33] A. H. Castro Neto *et al.*, *The electronic properties of graphene*, *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009) 109–162.
- [34] T. Ando, *The electronic properties of graphene and carbon nanotubes*, *NPG Asia Materials* **1** (2009) 17–21.

- [35] J. C. Slonczewski and P. R. Weiss, *Band Structure of Graphite*, *Phys. Rev.* **109** (1958) 272–279.
- [36] S. Reich *et al.*, *Tight-binding description of graphene*, *Phys. Rev. B* **66** (2002) 035412.
- [37] M. Polini *et al.*, *Density functional theory of graphene sheets*, *Phys. Rev. B* **78** (2008) 115426.
- [38] T. Ando, *Theory of Electronic States and Transport in Carbon Nanotubes*, *J. Phys. Soc. Jpn* **74** (2005) 777–817.
- [39] W. J. Herrera, P. Burset, and A. Levy Yeyati, *A Green function approach to graphene – superconductor junctions with well – defined edges*, *J. Phys.: Condens. Matter* **22** (2010) 275304.
- [40] E. McCann and V. I. Fal’ko, *Symmetry of boundary conditions of the Dirac equation for electrons in carbon nanotubes*, *J. Phys.: Condens. Matter* **16** (2004) 2371.
- [41] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics – Wave Equations*. Springer, Berlin, 3 ed., 2008.
- [42] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw Hill, Inc., New York, 1964.
- [43] H. B. Heersche *et al.*, *Induced Superconductivity in Graphene*, *Solid State Commun.* **143** (2007) 72–76.
- [44] M. V. Feigel’Man, M. A. Skvortsov, and K. S. Tikhonov, *Proximity-Induced Superconductivity in Graphene*, *Sov. Phys. - JETP* **88** (2008) 747–751.
- [45] M. V. Feigel’man, M. A. Skvortsov, and K. S. Tikhonov, *Theory of Proximity-induced Superconductivity in Graphene*, *Solid State Commun.* **149** (2009) 1101–1105.
- [46] Y. E. Lozovik, S. L. Ogarkov, and A. A. Sokolik, *Theory of Superconductivity for Dirac Electrons in Graphene*, *Sov. Phys. - JETP* **110** (2010) 49–57.
- [47] P. G. De Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*. Benjamin Publications, Inc., New York, 1966.
- [48] J. Bardeen, J. Cooper, and J. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, *Phys. Rev.* **108** (1957) 1175–1204.
- [49] V. Niño and W. Herrera, *Dispersión de Cuasipartículas en Interfases NS*, *Rev. Col. Fís.* **34** (2002) 42–46.
- [50] V. Niño and W. Herrera, *Dispersiones Electrón – Hueco en Superconductividad*, *Momento* **24** (2002) 57–70.
- [51] M. El-Batanouny and F. Wooten, *Symmetry and Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, New York, 2008.
- [52] C. Kittel, *Quantum Theory of Solids*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1987.

- [53] Y. Jiang *et al.*, *Andreev conductance in the  $d + id'$  -wave superconducting states of graphene*, *Phys. Rev. B* **77** (2008) 235420.
- [54] Q. Yan *et al.*, *Intrinsic Current Voltage Characteristics of Graphene Nanoribbon Transistors and Effect of Edge Doping*, *Nano Letters* **7** (2007) 1469–1473.
- [55] V. Ryzhii *et al.*, *Current-voltage characteristics of a graphene-nanoribbon field-effect transistor*, *J. Appl. Phys.* **103** (2008) 094510.
- [56] G. Q. Li *et al.*, *The difference of the transport properties of graphene with corrugation structure and with flat structure*, *Appl. Phys. Lett.* **92** (2008) 163104.
- [57] D. Jeong *et al.*, *Observation of supercurrent in PbIn-graphene-PbIn Josephson junction*, *Phys. Rev. B* **83** (2011) 094503.
- [58] L. DiCarlo *et al.*, *Shot Noise in Graphene*, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 156801.
- [59] G. E. Blonder, M. Tinkham, and T. M. Klapwijk, *Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting microconstrictions: Excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion*, *Phys. Rev. B* **25** (1982) 4515–4532.
- [60] P. Burset, A. Levy Yeyati, and A. Martín-Rodero, *Microscopic theory of the proximity effect in superconductor-graphene nanostructures*, *Phys. Rev. B* **77** (2008) 205425.
- [61] P. Burset, W. Herrera, and A. Levy Yeyati, *Proximity-induced interface bound states in superconductor-graphene junctions*, *Phys. Rev. B* **80** (2009) 041402.

## Declaración

Me permito afirmar que he realizado la presente tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en la propia tesis. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo. Ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de tesis.

Bogotá, D.C., 28.10.2011

---

Mauricio Fabian Duque Daza