Curso juvenil de matemáticas

Myriam Leonor Campos Flórez
Blanca Aurora León Infante

Facultad de Ciencias
Sede Bogotá

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Curso libre juvenil de matemáticas

Curso libre juvenil de matemáticas

Tercera edición

Myriam Leonor Campos Florez
Blanca Aurora León Infante

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA
Bogotá, D. C., Colombia, 2023

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia

Campos Flórez, Myriam Leonor, 1952-
Curso libre juvenil de matemáticas / Myriam Leonor Campos Flórez, Blanca Aurora León Infante. – Tercera edición. – Bogotá : Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias, 2023
1 CD-ROM (xxx, páginas): ilustraciones, diagramas. – (Colección Textos)

Incluye referencias bibliográficas e índice analítico
ISBN 978-958-505-406-6 (impreso) ISBN 978-958-505-407-3 (e-book)

1. Matemáticas – Enseñanza superior – Problemas, ejercicios, etc. 2. Aritmética 3. Funciones (Matemáticas) 4. Álgebra 5. Geometría 6. Trigonometría I. León Infante, Blanca Aurora, 1949- II. Título III. Serie

CDD-23 510.711 / 2023

Primera edición, septiembre de 2007
Segunda edición, marzo de 2017
Tercera edición, agosto de 2023

ISBN 978-958-505-406-6 (papel)
ISBN 978-958-505-407-3 (digital)

Edición
Daniela Guerrero Acosta
Coordinación de publicaciones - Facultad de Ciencias
coorpub_fcbog@unal.edu.co

Corrección de estilo:
Hernán Rojas

Diseño de la colección
Leonardo Fernández Suárez

Maqueta LaTeX

Camilo Cubides

Hecho en Bogotá, D. C., Colombia

Contenido

Presentación

En el texto que presentamos a continuación, proponemos una aproximación intuitiva a algunos elementos teóricos y prácticos de la matemática básica, elementos que consideramos esenciales para iniciar los cursos de matemáticas en la universidad.

El material está orientado a enriquecer los conceptos y las herramientas que han adquirido en las instituciones escolares, los estudiantes de los últimos años de la enseñanza media.

En el primer capítulo discutimos las principales propiedades de los números reales y de algunos de sus subconjuntos más notables. En el segundo, tratamos los fundamentos del álgebra, iniciando con el estudio de las expresiones algebraicas, los polinomios y sus operaciones, dedicando un espacio importante al problema de la factorización y cerrando con el análisis de las desigualdades. En el tercero, abordamos los conceptos básicos de la geometría euclidiana desde sus nociones fundamentales de geometría plana: ángulos, triángulos, cuadriláteros, polígonos, relaciones y propiedades básicas, culminando con aspectos primarios de la geometría del espacio. En el cuarto capítulo trabajamos las funciones, sus gráficas y el álgebra de funciones y estudiamos algunas familias de funciones: lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas. Dedicamos el último capítulo a la trigonometría, iniciando con la trigonometría de triángulos rectángulos, para presentar a continuación las funciones trigonométricas, sus gráficas, relaciones y propiedades; este capítulo termina con la discusión de algunas aplicaciones importantes de la trigonometría.

Es de resaltar que al final de cada uno de los capítulos hemos incluido talleres conformados por ejercicios y problemas seleccionados para que contribuyan a profundizar y ampliar los temas tratados en el texto.

Con respecto a la anterior, esta nueva edición presenta los cambios que señalamos acontinuación:

El capítulo uno, “Los números reales”, contiene una introducción histórica a los sistemas numéricos y un reordenamiento de los ejercicios propuestos en los talleres, de acuerdo con el orden de los temas en el texto.

El capítulo dos, "Fundamentos de álgebra", contiene un somero recuento histórico del desarrollo del álgebra y elementos introductorios a la resolución de problemas.

El capítulo cuatro, "Funciones", contiene una aproximación histórica al concepto de función.

Esta es una publicación susceptible de modificaciones y correcciones, por lo cual invitamos a los lectores a hacernos conocer sus observaciones y sugerencias en cualquiera de los siguientes correos electrónicos

mlcamposf@unal.edu.co
baleoni@unal.edu.co

Agradecimientos

Agradecemos el apoyo y la colaboración prestados para hacer posible esta nueva edición del texo *Curso libre juvenil de matemáticas* a los profesores:

César Gómez, Director del Departamento de Matemáticas período 2014-2018.

Mauricio Bogoya, Director del Departamento de Matemáticas período 2018-2020.

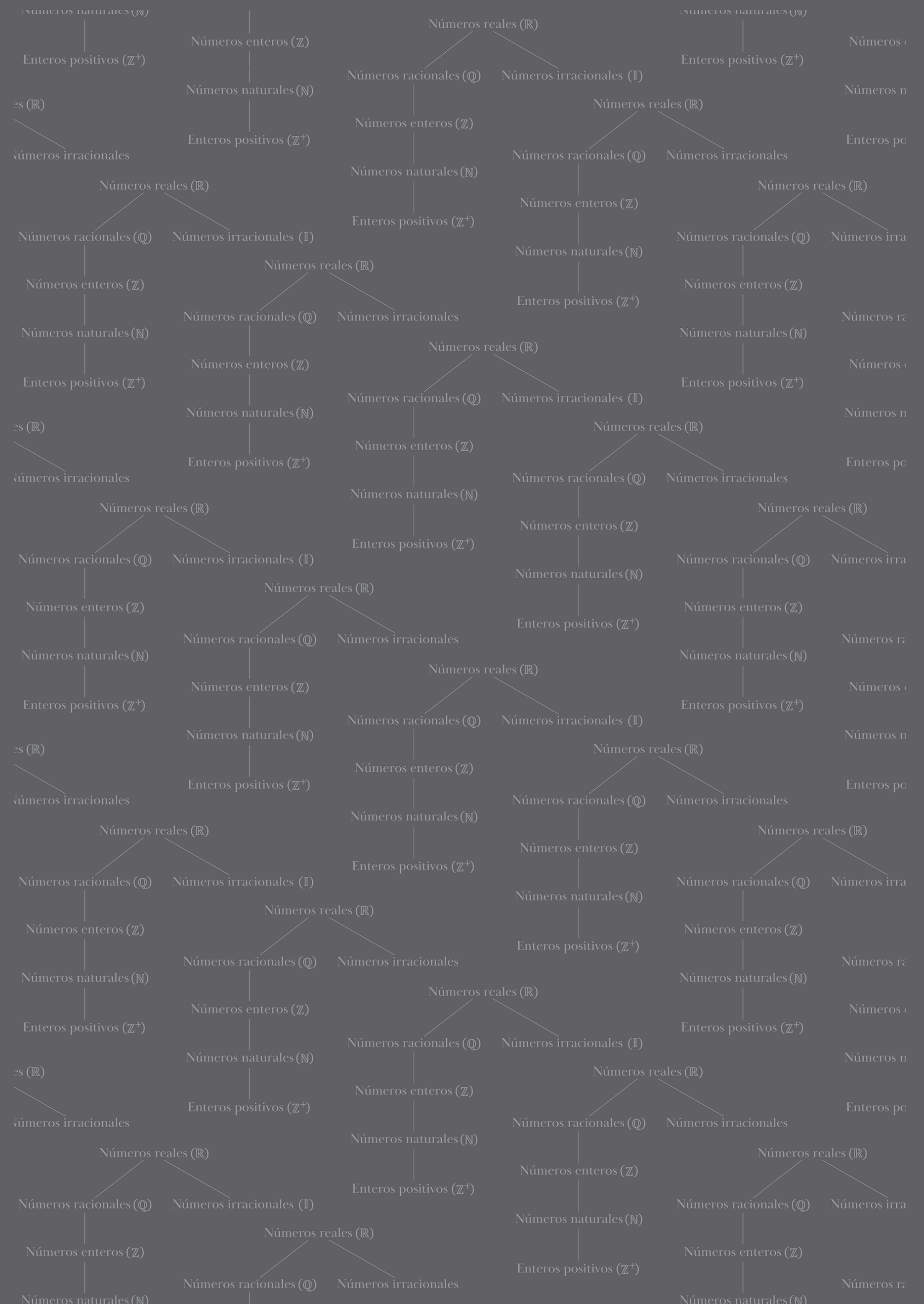
Juan Carlos Hernández, Director del Departamento de Matemáticas período 2020-2022.

Armando Reyes, Coordinador de extensión del Departamento de Matemáticas.

Pedro Zambrano, Coordinador de Publicaciones del Departamento de Matemáticas. Igualmente, agradecemos a la señora Deysy Contreras por el levantamiento del texto.

Capítulo *uno*

Sistemas numéricos


Números reales (ℝ)
Números racionales (ℚ)
Números irracionales (𝕀)
Números enteros (ℤ)
Números naturales (ℕ)
Enteros positivos (ℤ⁺)

1.1. Introducción histórica

Desde el inicio de la civilización, el hombre se ha visto en la necesidad de contar lo que condujo la humanidad a la primera noción de número y al inicio de la matemática. La palabra "aritmética" significa literalmente, arte de contar: deriva del griego *arithmētikē*, que combina dos palabras: *arithmos*, que significa 'número', y *technē*, que se refiere a un arte o habilidad. A lo largo de la historia, las diferentes culturas crearon sus propios sistemas numéricos más o menos efectivos para progresar. Los números naturales han estado presentes en todas las civilizaciones y se han representado de distintas maneras.

Hace unos 10 000 años, en Oriente Próximo, usando tablillas de arcilla, ya se llevaba un registro de los habitantes y los bienes, que eran representados mediante figuras como conos, esferas, huevos, cilindros, discos y pirámides, pero esas figuras se falsificaban con facilidad, por lo cual las tablillas se guardaban en vasijas. Para ver su contenido y continuar con el registro se rompían las vasijas, lo que complicaba esas acciones. Para simplificar, se decidió listar su contenido sobre cada vasija. Aún así, dibujar cada figura en la vasija era tedioso, por lo que los dibujos se redujeron a líneas. Al seguir tratando de sintetizar la representación de los contenidos, se crearon símbolos para representar cantidades, es decir numerales o números, los cuales conformaron diferentes sistemas numéricos.

Muchos utilizaron los dedos de sus propias manos como instrumentos de cálculo, lo que les permitía contar hasta diez, o los de sus manos y sus pies, para llegar hasta veinte. Con ello, la base generalmente utilizada para contar fue el número 10 y, en algunos casos, el 20.

En la antigüedad egipcia, en los tiempos de la primera dinastía (3100 a. C. - 2900 a. C.) se contaba con un sistema jeroglífico aditivo de base 10, al que se denomina sistema hierático. Tenía símbolos diferentes para 1 y para potencias de 10: el 1 era una vara o un bastón y estaba representado por una raya vertical, |; el 10, por una herradura invertida o una U invertida; el 100, por una cuerda enrollada; el 1000, por una flor de loto; el 10 000, por un dedo; el 100 000, por un pájaro, una rana o un pez y el 1 000 000 por un hombre arrodillado con brazos levantados u hombre asustado. Los números se representaban escribiendo el símbolo del 1 tantas veces como unidades tenía el número dado, el símbolo del 10 tantas veces como decenas había en el número, y así sucesivamente. Para sumar números, se sumaban por separado las unidades, las decenas, las centenas, etc., de cada número. La multiplicación estaba basada en duplicaciones sucesivas y la división era el proceso inverso. Los egipcios utilizaban sumas de fracciones de la unidad de la forma $\frac{1}{n}$ junto con la fracción $\frac{2}{3}$ para expresar todas las fracciones. Por ejemplo $\frac{2}{7}$, era la suma de las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{28}$. Los egipcios no conocieron el número cero.

Los babilonios heredaron ideas de los acadios, de quienes provenía la base 60, pero ni el sistema acadio ni el sumerio eran posicionales, mientras que el de los babilonios si lo fue. Este avance de los babilonios fue su mayor logro en el desarrollo de su sistema numérico utilizado aproximadamente en el 2000 a. C. Era un sistema sexagesimal, esto es, de base 60 para números mayores que 59, y aditivo del 1 al 59, es decir, el valor de una representación se obtenía sumando los valores de las cifras. Contenía elementos de un sistema de base 10 pues cada uno de los 59 números que van en cada posición se construye con un símbolo de unidades y otro de decenas: una cuña delgada y vertical para representar al 1 y una cuña gruesa horizontal para el número 10. Las cuñas delgadas se agrupaban para conformar los números de 2 a 9 y las gruesas, para formar los números de 20 a 50, hasta llegar al 59. Para formar un número superior a 59, se disponían los números en columnas, similar a la forma en la que ordenamos las cifras actualmente usando la numeración arábiga. Por ejemplo, un número compuesto por el símbolo del 5, seguido por el del 34 y terminado con el del 21, representaba $5\times60^2+34\times60+21$. Este mismo principio fue ampliado a la representación de fracciones, de manera que el ejemplo anterior podía también representar $5\times60+34+21\times\frac{1}{60}$, o $5+34\times\frac{1}{60}+21\times\left(\frac{1}{60}\right)^2$. Este sistema resultaba tan útil como el sistema decimal (base 10). Inicialmente, el sistema no contenía el número 0, pero fue el sistema babilónico perfeccionado en el siglo IV a. C., el que creó el concepto y el uso del número cero. Se representaba por el símbolo . Podía ponerse al principio, es decir, a la izquierda. También podía ser insertado en medio de una cantidad, en el interior de un número dado, pero no podía figurar al final.

Los griegos tomaron elementos de las matemáticas de los egipcios y los babilonios. Hacia el 600 a. C., utilizaban un sistema decimal aditivo en el que los números eran representados por letras del alfabeto, denominado sistema ático. Funcionaba de forma parecida al romano, que se deriva de este sistema. Para escribir la unidad y los números hasta el cuatro, se utilizaban trazos verticales, |, y para otros, la primera letra de cada número por lo cual el sistema también recibió el nombre de acrofónico: Π, pi, de pénte, para 5; Δ, delta, de déka, para 10; H, eta, de hekatón, para cien; χ, chi, de chílioi, para mil; M, mu, de myrias, para diez mil. Existían expresiones para 50, 500, 5000, 50 000 que se obtenían agregando, en la parte superior del símbolo Γ de 5, versiones diminutas de los símbolos que representaban las potencias de 10, usando un principio multiplicativo. Este sistema incluía el cero.

Pitágoras, el famoso matemático griego que vivió en el siglo v a. C. y la escuela pitagórica creían que los números naturales gobernaban el universo. El número uno era considerado como el símbolo de la vida, de la creación y de la razón. A finales del mencionado siglo, Hípaso de Metaponto, de la escuela pitagórica, descubrió que no existe una unidad de longitud que permita medir simultáneamente la diagonal y el lado de un cuadrado, es decir, las longitudes de la diagonal y el lado del cuadrado son cantidades inconmensurable, o, dicho de otra manera, no existen dos números naturales m y n cuyo cociente sea igual a la razón entre la diagonal y el lado. En otros téminos, Hípaso descubrió que $\sqrt{2}$ es irracional. La teoría griega de los irracionales fue introducida en el siglo iv a. C. por el matemático Eudoxo de Cnido (390 a. C. - 337 a. C.) y consistió en representar cualquier magnitud, racional o irracional, como la razón entre dos longitudes y considerar igualdades entre razones.

El sistema numérico romano estaba conformado por un conjunto de x números representados por letras mayúsculas, que representaban el 1 y potencias de 10, como I, X, C para 1, 10 y 100 respectivamente, como en el sistema griego. Pero los romanos mejoraron el sistema numérico introduciendo nuevos números, como el 5, el 50 y el 500, que corresponden a las letras V, L y D respectivamente. Tenían como símbolos base a 1, 5, 10, 50, 100, etc., es decir las letras I, V, X, L, C, etc., a los cuales se adicionaban o se restaban otros para ir conformando toda la numeración. Para expresar el 2 y el 3 simplemente se escribía dos o tres veces la letra I, II y III. Por esta razón el sistema es aditivo. La colocación de un símbolo delante o detrás de otro de mayor valor, significaba que la cantidad representada por el símbolo se sumaba o restaba a la cantidad mayor. Por ejemplo, XL era 50-10, y LX era 50 + 10. En este sistema se escribía el número uno a la derecha, hasta un máximo de tres veces y, a la izquierda solo se escribía un uno. Así, por ejemplo, los números 6, 7, 8, 9 y 48 eran respectivamente VI, VII, VIII, IX y XLVIII. Este sistema de dar a las letras valor numérico dificultaba efectuar operaciones aritméticas y multiplicar grandes cantidades resultaba imposible, además, carecía del cero. El sistema cayó en desuso y actualmente solo se utiliza con fines decorativos (relojes, estatuas, monumentos) y para mantener cierto protocolo (para numerar: los siglos, los Papas, los reyes, las reinas, etc.).

Cualquiera que fuera el sistema que se utilizara para contar, los comerciantes de las primeras civilizaciones utilizaron pequeñas piedras amontonadas en el suelo para representar los números contados. Este método de contar pudo ser el origen del ábaco que consistía en varias hileras de pequeñas piedras móviles ensartadas, de donde derivó el término “cálculo”, del latín calculus que significa piedrecita.

El sistema numérico que empleamos en la actualidad, nació en la India hacia el siglo v a. C. Los matemáticos de ese país fueron los primeros en introducir símbolos individuales para cada uno de los números del 1 al 9. Existen representaciones de los números 1, 4 y 6 en las inscripciones budistas de Asoka del siglo iii a. C. En otras inscripciones de un siglo más tarde se ven los números 2, 4, 6, 7 y 9 grabados en los monumentos de Nana Ghat. En documentos del siglo ii d. C. aparecen ya todos, menos el 8.

En la India, se inventó la aritmética posicional decimal, se introdujeron la noción de cero y el uso de los números negativos. El signo que usamos para el cero fue utilizado por primera vez en la India, aunque posiblemente se origina en la palabra griega *ouden* que significa “nada”. Incluso es posible que su origen estuviese en Alejandría y que de ahí pasara a la India. Ese signo apareció casi dos siglos después que el resto de los signos numerales. En sus inicios se llamaba *Zunya*, del sánscrito, significaba “nada”, “hueco” o “vacío” y se indicaba con una coma. Gracias a la introducción del cero, se dejó de cometer errores crasos a la hora de interpretar cifras como 45, 450 o 4005 ya que hasta entonces se dejaba espacios vacíos en los sitios del cero. El primer ejemplo del uso de la numeración decimal data del 595 d. C., en el que se incluye el uso funcional del 0. Existe referencia a esa numeración en una nota escrita por el obispo Severus Sebokht hacia el 650 d. C., que habla de “los nuevos signos”. Tal sistema permitió a los matemáticos de la India desarrollar métodos eficientes para sumar y multiplicar números.

Cuando los árabes eran nómadas tenían palabras para los números, pero no símbolos, entonces adoptaron el sistema de numeración de la India. Tras conocer las posibilidades del cero lo llamaron *sifr* que significa vacío. A finales del siglo viii se trasladaron a Bagdad unas tablas astronómicas en las que se podía ver los nuevos números. En el año 825 d. C. Muhammad ibn Musa abu Djafar al-Khwarizmi (Mohamed, hijo de Moisés, padre de Jafar, el de Khwarizm) matemático, astrónomo y geógrafo musulmán, nacido en la ciudad persa de Khwarizm (actual Uzbekistan, al sudeste del mar de Aral), publicó en Bagdad su libro *Sobre el cálculo con numerales indios* (posiblemente titulado originalmente “Kitab al-Jam'a wal-Tafreeq bil Hisab al-Hindi”) en el que describe con detalle el sistema de numeración posicional en base 10 de la India y la manera de hacer cálculos con él. Con el libro dio a conocer tal sistema en todo el mundo árabe. El nombre Al-Khwartzmi, pronunciado “algortsmi” dio lugar a las palabras “guarismo” para indicar las cifras de un número y "algoritmo" para referirse a una sucesión finita de pasos para hacer un cálculo. El libro de al-Khwarizmi fue traducido al latín por Adelardo de Bath tres siglos más tarde. Para entonces, los europeos, que aún usaban los números romanos, comenzaron a llamar a los nuevos símbolos números "arábigos".

En el califato de Córdoba se conocía ya la novedad en el 976 d. C. La numeración arábiga llegó al resto de Europa a través de al-Andalús (España musulmana) hacia el siglo x, cuando viajó a Córdoba el monje francés Gerbert de Auvergnat, que en el 999 d. C. fue proclamado Papa con el nombre de Silvestre II. Fue el Papa que más contribuyó a difundir la nueva numeración. En 1202 Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, publicó su obra *Liber Abaci*, en la que mostró la importancia del nuevo sistema de numeración aplicándolo a la contabilidad comercial, conversión de pesos y medidas, cálculo, intereses, cambio de moneda, y otras numerosas aplicaciones. En esa obra describe el cero, la notación posicional, la descomposición en factores primos, los criterios de divisibilidad y la numeración. Aun así, el sistema no tuvo acogida favorable y universal, pues en la Europa de 1300 estaba prohibida la numeración arábiga en las transacciones comerciales porque se podían falsificar los números con mayor facilidad que los de la numeración romana. De hecho, solo hasta 1800 fue acogido por completo y sin reservas. Así que se necesitaron varios siglos para que la notación indo-arábiga desplazara definitivamente el ábaco tradicional basado en la arcaica numeración romana. El vocablo para cero fue "latinizado" por el mismo Leonardo de Pisa con el término *zephirum*, del que derivó el término castellano "cero". Del continente europeo, después, la numeración llegaría a América.

Los números negativos no fueron inmediatamente aceptados por los matemáticos europeos. En el siglo XVI los números irracionales positivos se usaban con mayor libertad, pero se evitaba usar números negativos, los cuales se consideraban "absurdos". A principios del siglo XVII se empezó a usar el signo menos para la resta y para denotar números negativos.

Para la civilización amerindia de los mayas (2000 a. C. - siglo 16 d. C.) la base fue el número 20 con el 5 como base auxiliar. No se conoce representación gráfica de su numeración anterior al siglo III de nuestra era. El maya fue el primer pueblo en emplear el cero, que más que un número era un concepto no operativo. El signo utilizado para el cero puede ser interpretado como un caracol o un ojo semicerrado. La unidad se representaba por un punto. Dos, tres y cuatro puntos servían para 2, 3, y 4. El 5 era una raya horizontal, a la que se añadían los puntos necesarios para representar 6, 7, 8 y 9. Para el 10 usaban dos rayas, y de la misma forma se continuaba hasta el 20 con cuatro rayas. Cada grupo de puntos, de rayas o de puntos y rayas se consideraba como un solo signo y esos signos constituían las cifras del sistema de base 20. Cada cifra se multiplicaba por 1, 20, 20×20, $20 \times 20 \times 20$, etc., según el lugar que ocupara, y se sumaba el resultado. Era pues un sistema posicional. Los números mayas se escribían en columnas y se leían de arriba a abajo, empezando por el orden de magnitud mayor.

En México, entre los siglos XIV y XVI de nuestra era, se desarrolló la civilización azteca que creó un sistema de cifras que se conoce a partir de manuscritos llamados Codex. En ellos los escribas consignaban los resultados de sus inventarios y el recuento de los tributos. Esa numeración se basaba en el principio aditivo, según el cual el valor de una representación se obtiene sumando los valores de las cifras y cada cifra se reproducía tantas veces como fuera necesario junto a los pictogramas asociados. Era una numeración vigesimal, es decir de base 20.

Las cuentas en el Imperio inca del Perú (1438 - 1533) las llevaba el denominado gran tesorero, utilizando un ábaco con granos de maíz, y después trasladaba sus resultados a una larga cuerda. Los nudos hechos en cuerdas hacían posible tener un registro permanente de los impuestos, los gastos y las estadísticas vitales. La serie de nudos hecha en una cuerda que sirve para contar se llama quipu.

Pasó mucho tiempo antes de que los números reales fueran pensados intuitivamente como puntos en una recta dirigida, con los números positivos a la derecha del cero y los negativos a la izquierda. No fue sino hasta la segunda mitad del siglo XIX cuando la noción del número real tuvo análisis crítico. En 1872 Dedekind logró por fin capturar la esencia de la "continuidad" de la recta construyendo los números reales a partir de los números racionales. La construcción rigurosa de los números reales permitió colocar al análisis matemático en una base sólida.

El estudio de cualquier rama de las matemáticas requiere un buen conocimiento de las principales propiedades de los números reales, así como de propiedades especiales de algunos de sus subconjuntos más notables. El propósito de este capítulo es presentar el mínimo de nociones que consideramos indispensables para cubrir esas necesidades.

1.2. Una visión preliminar

Como lo vimos en la sección anterior, la noción de número es una de las nociones fundamentales en matemáticas. Su origen se remonta a la antigüedad y a través de los siglos ha pasado por un largo proceso de extensión y de generalización.

Los números más simples, los que utilizamos para contar, son los **enteros positivos:**

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Representamos el conjunto de los enteros positivos por $\mathbb{Z}^+$.

Si al conjunto de los enteros positivos le añadimos el número 0, obtenemos el conjunto de los **números naturales** que representamos por $\mathbb{N}$. Es decir,

$$\mathbb{N} = =\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Si a $\mathbb{N}$ le agregamos los inversos aditivos de los enteros positivos, -1, -2, -3, -4, -5, . . ., obtenemos el conjunto de los **números enteros** que representamos por $\mathbb{Z}$. Luego,

$$\mathbb{Z} = =\{\ldots - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Los números racionales surgieron ante la necesidad de medir con bastante precisión distintas magnitudes tales como longitud, peso, tiempo y muchas otras. Un número es **racional** si puede expresarse en la forma $\frac{p}{q}$ donde p y q son enteros con $q \neq 0$. Como ejemplo de números racionales podemos citar:

$$\frac{1}{2}, \frac{236}{43}, \frac{2}{3}, \frac{-5}{6}, \frac{4}{1}, \frac{-121}{15} \text{ y } \frac{12}{-6}$$

Observamos que los números racionales $\frac{4}{1}$ y $\frac{12}{-6}$ son simplemente los enteros 4 y -2. En general, todo número entero n se puede expresar de diferentes maneras como un número racional, estas son algunas de ellas: $\frac{n}{1}$, $\frac{2n}{2}$, $\frac{-n}{-1}$. El conjunto de los números racionales lo representamos con el símbolo $\mathbb{Q}$.

Los griegos fueron conscientes de que los números racionales no son suficientes para medir todas las longitudes, y, como dijimos en la sección anterior, ellos demostraron que $\sqrt{2}$ mide la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 y probaron que $\sqrt{2}$ no puede escribirse como el cociente de dos enteros.

Los números que no son racionales, se llaman **números irracionales**. En un contexto más avanzado, se puede demostrar que existen muchos más números irracionales que números racionales. Por el momento, podemos mencionar que si r es un número racional y $r \neq 0$ entonces $r\sqrt{2}$ es un número irracional. La reunión de todos los números racionales y todos los números irracionales constituye el conjunto de los **números reales** que representamos por $\mathbb{R}$. Es decir, el conjunto de los números irracionales es el complemento del conjunto de los números racionales con respecto a $\mathbb{R}$ y si representamos por $\mathbb{I}$ el conjunto de todos los números irracionales, tenemos la relación

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Entre los conjuntos numéricos antes mencionados, exceptuando el conjunto de los números irracionales, se presentan las siguientes relaciones:

$$\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

donde $\subset$ representa la inclusión entre conjuntos. En todos los casos la inclusión es estricta.

El diagrama siguiente nos presenta las relaciones que hemos mencionado entre los diferentes subconjuntos de $\mathbb{R}$, incluyendo el conjunto de los números irracionales:

Números reales ($\mathbb{R}$)

Números racionales ($\mathbb{Q}$)   Números irracionales ($\mathbb{I}$)

Números enteros ($\mathbb{Z}$)

Números naturales ($\mathbb{N}$)

Enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$)

1.3. Adición y multiplicación de números reales

Sobre el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales tenemos definidas dos operaciones, la **adición** y la **multiplicación** que asignan a cada par x, y de números reales su **suma** $x + y$ y su **producto** $x \cdot y$ (que escribiremos abreviadamente como xy) de tal manera que se cumplen las siguientes propiedades básicas:

P.1 $\mathbb{R}$ es **cerrado** para la adición y la multiplicación. Es decir, si x y y son números reales, entonces $x+y$ y xy son también números reales. También decimos que la adición y la multiplicación son **clausurativas**.

P.2 La adición y la multiplicación en $\mathbb{R}$ son **conmutativas**. Es decir, si x y y son números reales, entonces

$$x + y = y + x \qquad \text{y} \qquad xy = yx$$

P.3 La adición y la multiplicación en $\mathbb{R}$ son **asociativas**. Es decir, si x, y y z son números reales, entonces

$$x + (y + z) = (x + y) + z \qquad \text{y} \qquad x(yz) = (xy)z$$

P.4 La multiplicación es **distributiva**, a izquierda y a derecha, con respecto a la adición en $\mathbb{R}$. Es decir, si x, y y z son números reales, entonces

$$x(y + z) = xy + xz \qquad \text{y} \qquad (x + y)z = xz + yz$$

P.5 Existen **identidades** o **módulos** para la adición y la multiplicación en $\mathbb{R}$. Es decir, existen dos números reales diferentes que representamos por 0 y 1, tales que para todo número real x

$$x + 0 = 0 + x = x \qquad \text{y} \qquad x1 = 1x = x.$$

P.6 Existen **inversos** para la adición de números reales y para la multiplicación de números reales diferentes de cero. Es decir:

- para todo número real x, existe un número real que representamos por $-x$, tal que

$$x + (-x) = (-x) + x = 0 \quad \text{y}$$

- para todo número real $x \neq 0$, existe un número real que representamos por $\frac{1}{x}$, tal que

$$x\frac{1}{x} = \frac{1}{x}x = 1$$

El número $-x$ se llama el **inverso aditivo** de x o el **opuesto** de x. El número $\frac{1}{x}$ se llama el **inverso multiplicativo** de x o el **recíproco** de x.

Dados los números reales x, y y z, la propiedad asociativa de la adición nos dice que $x+(y+z) = (x+y)+z$. Esto nos lleva a definir sin ambigüedades el símbolo $x + y + z$ como el resultado común de estas expresiones. Similarmente, si x, y, z y w son números reales, por repetidas aplicaciones de la propiedad asociativa de la adición podemos comprobar que los números

$$\begin{aligned}
&x + (y + (z + w)),\\
&x + ((y + z) + w),\\
&(x + (y + z)) + w,\\
&((x + y) + z) + w \qquad \text{y}\\
&(x + y) + (z + w),
\end{aligned}$$

son todos iguales y definir $x + y + z + w$ como el resultado común de estas expresiones. En general, si tenemos una colección finita $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números reales, todas las formas posibles en las que los asociemos para sumarlos producen el mismo resultado y podemos definir $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ como este resultado común.

También, dada una suma $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ de n números reales, la propiedad conmutativa de la adición nos permite cambiar arbitrariamente el orden de los sumandos.

Obviamente, podemos hacer consideraciones similares para la multiplicación de números reales.

Ejemplo 1.1

Ilustramos algunas de las propiedades de la adición y multiplicación de números reales. En las ecuaciones todas las letras representan números reales.

1. $5 + 0 = 5$. Existencia de identidad o módulo para la adición.

2. $2r + 7s = 7s + 2r$. Clausuratividad de la multiplicación y conmutatividad de la adición.

3. $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$. Existencia de inversos multiplicativos.

4. $(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ab + bd$. Propiedad distributiva.

5. $\pi + (-\pi) = 0$. Existencia de inversos aditivos.

6. $x + y = x \cdot 1 + y \cdot 1$. Existencia de identidad para la multiplicación.

7. $(p + 2q) + 3r = p + (2q + 3r)$. Clausuratividad de la multiplicación y asociatividad de la adición.

8. $(x + y)(x - y) = (x - y)(x + y)$. Conmutatividad de la multiplicación.

9. $\frac{1}{3x+5}(3x+5) = 1$ si $3x + 5 \neq 0$. Clausuratividad de la multiplicación y existencia de inversos multiplicativos.

10. $((4r)s)(3t) = (4r)(s(3t))$. Clausuratividad y asociatividad de la multiplicación

1.4. Diferencia y cociente en los números reales

La diferencia y el cociente de dos números reales se pueden expresar en términos de la adición y la multiplicación de acuerdo con las siguientes definiciones:

Si x y y son números reales, la **diferencia** de x y y (en ese orden) es $x - y = x + (-y)$ (esto es, la adición de x y el inverso aditivo u opuesto de y).

Si x y y son números reales con $y \neq 0$, el **cociente** de x y y (en ese orden) es $\frac{x}{y} = x\frac{1}{y}$ (esto es, la multiplicación de x y el inverso multiplicactivo o recíproco de y).

Hacemos notar que como el número cero carece de inverso multiplicativo, la división por cero no está definida.

Hacemos notar además que, en general, la diferencia de x y y es diferente de la diferencia de y y x, por ejemplo, $7 - 4 = 3$ mientras que $4 - 7 = -3$. También en general, si $x \neq 0$ y $y \neq 0$, el cociente de x y y es diferente del cociente de y y x, por ejemplo $\frac{8}{4} = 2$ mientras que $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

La importancia de las propiedades básicas P.1 a P.6 es que a partir de ellas se pueden deducir todas las demás propiedades relativas a la adición y multiplicación de números reales. A manera de ejemplo podemos citar algunas de ellas de uso muy frecuente:

- **Propiedades cancelativas:**
  - Si x, y y z son números reales tales que $x + y = x + z$, entonces $y = z$.
  - Si x, y y z son números reales tales que $xy = xz$ y $x \neq 0$ entonces $y = z$.

- **Unicidad de los inversos:**
  - Si x y y son números reales tales que $x + y = 0$, entonces $y = -x$.
  - Si x y y son números reales con $x \neq 0$ tales que $xy = 1$, entonces $y = \frac{1}{x}$.

- **Reglas de los signos:**

  Si x y y son números reales arbitrarios, entonces
  - $(-x)y = -(xy)$,
  - $x(-y) = -(xy)$
  - $(-x)(-y) = xy$

- **Regla de los signos para las fracciones:**

  Si x y y son números reales con $y \neq 0$, entonces

$$-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y}$$

- **Simplificación de fracciones:**

  Si x, y y z son números reales con $y \neq 0$ y $z \neq 0$, entonces

$$\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$$

- **Operaciones con fracciones:**

  Si x, y, z y w son números reales con $z \neq 0$ y $w \neq 0,$ entonces
  - $\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + zy}{zw}$
  - $\frac{x}{z} - \frac{y}{w} = \frac{xw - zy}{zw}$
  - $\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}$

  Si además, $y \neq 0$, entonces
  - $\frac{x}{z} \div \frac{y}{w} = \frac{\frac{x}{z}}{\frac{y}{w}} = \frac{x}{z} \cdot \frac{w}{y} = \frac{xw}{zy}$

    Aplicando las operaciones anteriores y la fórmula de simplificación de fracciones, obtenemos los siguientes casos especiales:
    $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{x + y}{z}$
    $\frac{x}{z} - \frac{y}{z} = \frac{x - y}{z}$
    Veamos como podemos obtener la primera de estas igualdades:
    $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{xz + zy}{zz} = \frac{xz + yz}{zz} = \frac{(x + y)z}{zz} = \frac{x+y}{z}$

Ejemplo 1.2. En la siguiente lista utilizamos algunas de las propiedades mencionadas. Siempre suponemos que los denominadores de las fracciones son diferentes de cero.

1. Si $4x = 12$ entonces $x = 3$. Propiedad cancelativa.
2. $(-8x)(-7y) = 56xy$. Regla de los signos.
3. $-\dfrac{1-x}{x+2} = \dfrac{x-1}{x+2}$. Regla de los signos para fracciones.
4. $\dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = \dfrac{5y+4x}{xy}$. Suma de fracciones.
5. $\dfrac{-2xy}{-5z} = \dfrac{2xy}{5z}$. Regla de los signos.
6. $\dfrac{(x+y)(x-5y)}{(x+y)(3x+y)} = \dfrac{x-5y}{3x+y}$. Simplificación de fracciones.
7. $\dfrac{a-1}{a+1} \cdot \dfrac{a+2}{a-3} = \dfrac{(a-1)(a+2)}{(a+1)(a-3)}$. Multiplicación de fracciones.
8. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{-4}{5}} = \dfrac{2\cdot 5}{3\cdot(-4)} = \dfrac{10}{-12} = -\dfrac{10}{12}$. División de fracciones y regla de los signos.

En el próximo capítulo usaremos intensivamente las propiedades básicas de la adición y multiplicación de números reales, y las propiedades que de ellas se deducen.

1.5. Orden en los números reales

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales contiene un subconjunto especial llamado el conjunto de los **números positivos**, que representamos por $\mathbb{P}$, cuyas propiedades básicas son:

P.7 Si x y y pertenecen a $\mathbb{P}$, entonces $x + y$ pertenece a $\mathbb{P}$.

P.8 Si x y y pertenecen a $\mathbb{P}$, entonces xy pertenece a $\mathbb{P}$.

P.9 Si x es un número real, se cumple exactamente una de las siguientes relaciones.

$$x \in \mathbb{P}, \quad x = 0, \quad -x \in \mathbb{P}$$

Estas propiedades las completamos con la siguiente definición:

Definición 1.5.1. Si x y y son números reales, entonces

- $x < y$ significa que $y - x \in \mathbb{P}$.
- $x > y$ significa que $y < x$.
- $x \leq y$ significa que $x < y$ o $x = y$.
- $x \geq y$ significa que $x > y$ o $x = y$.

De acuerdo a la definición anterior tenemos que $x > 0$ si, y solo si, x es positivo, es decir, $x > 0$ si, y solo si, $x \in \mathbb{P}$.

Utilizando la notación anterior, podemos expresar las propiedades básicas de los números positivos mencionadas antes, de la siguiente forma:

P.7 Si $x > 0$ y $y > 0$ entonces $x + y > 0$.

P.8 Si $x > 0$ y $y > 0$ entonces $xy > 0$.

P.9 Si x es un número real, se cumple exactamente una de las siguientes relaciones

$$x > 0, \quad x = 0, \quad -x > 0$$

Las siguientes terminologías y notaciones se usan con frecuencia:

- Si $x < 0$ decimos que x es **negativo**.
- Si $x \geq 0$ decimos que x es **no negativo**.
- $x < y < z$ significa que $x < y$ y $y < z$.
- $x \leq y < z$ significa que $x \leq y$ y $y < z$.
- $x < y \leq z$ significa que $x < y$ y $y \leq z$.
- $x \leq y \leq z$ significa que $x \leq y$ y $y \leq z$.

De estas propiedades se deducen las reglas usuales que rigen las operaciones con desigualdades. Como ejemplo podemos citar algunas de ellas de uso muy frecuente:

- Si x y y son números reales tales que $x < y$, entonces $x + z < y + z$ para todo número real z.

- Si x, y y z son números reales tales que $x < y$ y $z > 0$, entonces $xz < yz$.
- Si x, y y z son números reales tales que $x < y$ y $z < 0$, entonces $xz > yz$.
- Si $x > 0$ entonces $-x < 0$ y si $x < 0$ entonces $-x > 0$.
- Si $x > 0$ entonces $\frac{1}{x} > 0$ y si $x < 0$ entonces $\frac{1}{x} < 0$.
- Si x y y son números reales tales que $xy > 0$, entonces $x > 0$ y $y > 0$, o, $x < 0$ y $y < 0$.
- Si x y y son números reales tales que $xy < 0$, entonces $x > 0$ y $y < 0$, o, $x < 0$ y $y > 0$.

Ejemplo 1.3.

1. $4 < 7$ pues $7 - 4 = 3 > 0$
2. $-10 < -5$ pues $(-5) - (-10) = -5 + 10 = 5 > 0$
3. $-6 < 0$ pues $0 - (-6) = 6 > 0$
4. $3 < \frac{10}{3} < 4$ pues $3 < \frac{10}{3}$ y $\frac{10}{3} < 4$
5. Si $-2x < -8$ entonces $x > 4$
6. Si $-3 \leq 2x - 5 \leq 7$ entonces $2 \leq 2x \leq 12$ y por lo tanto $1 \leq x \leq 6$
7. Para todo número real a se tiene que $a^2 \geq 0$
8. Si a y b son números reales tales que $a < b$ entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$

1.6. Representación geométrica de los números reales

Geométricamente podemos representar el conjunto de los números reales mediante los puntos de una recta horizontal que llamaremos la **recta real** o el **eje real**. Para ello, escogemos un punto de la recta para representar el número 0 y otro punto a la derecha de este para representar al número 1. La longitud del segmento determinado por los puntos marcados 0 y 1 se selecciona como unidad de distancia. Utilizando esta unidad de distancia representamos los números positivos a la derecha del 0 y los números negativos a la izquierda del 0. El entero positivo n se representa por el punto situado a una distancia de n unidades a la derecha del 0 y el entero negativo $-n$ se representa por el punto situado a una distancia de n unidades a la izquierda del 0, como se indica en la siguiente figura donde se representan los enteros entre -5 y 5.

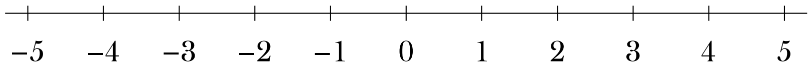


Figura 1.1.

Para representar un número racional positivo $\frac{p}{q}$ dividimos la unidad de distancia, es decir , el segmento determinado por 0 y 1 en q partes iguales y le asignamos, a la derecha de 0, el punto determinado por p de estas partes de longitud $\frac{1}{q}$. Para representar el número racional negativo $-\frac{p}{q}$, procedemos de forma similar, pero tomando p partes de longitud $\frac{1}{q}$ a la izquierda de 0. La gráfica siguiente nos muestra algunos de los puntos que representan números racionales

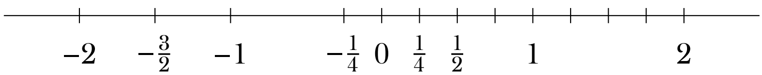


Figura 1.2.

La siguiente construcción nos muestra como representar el número irracional $\sqrt{2}$ sobre la recta:

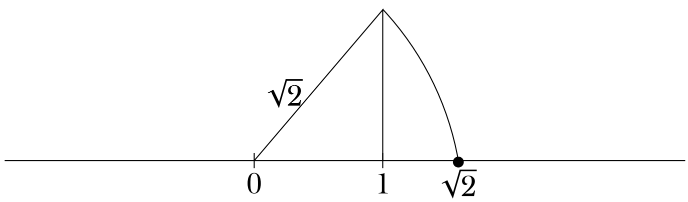


Figura 1.3.

Concretamente, el punto que representa a $\sqrt{2}$ se obtiene trazando desde el punto marcado 1 un segmento de recta de longitud igual a la unidad y perpendicular a la recta real. Se forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene longitud $\sqrt{2}$. Luego se traza un arco de circunferencia con centro en 0 y radio $\sqrt{2}$. El punto de intersección de este arco con la recta real represente el número $\sqrt{2}$.

En general es imposible indicar de qué forma se puede representar cualquier número irracional sobre la recta, pero aceptamos como un axioma que a cada número real le corresponde exactamente un punto sobre la recta y que recíprocamente, cada punto de la recta corresponde a exactamente un número real. Una correspondencia como esta se llama un **sistema de coordenadas**. El número correspondiente a un punto dado se llama la **coordenada** del punto. El punto que corresponde al número cero se llama el **origen** del sistema de coordenadas y usualmente lo representamos por O. Por ejemplo en la figura siguiente la coordenada de R es -2, la coordenada de P es 1, la coordenada de T es π etc.

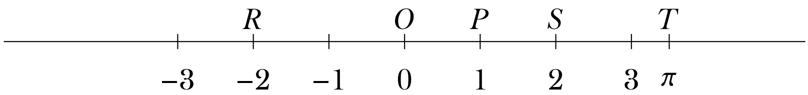


Figura 1.4.

En la práctica, se acostumbra a identificar un número real con el punto sobre la recta que lo representa y a utilizar como sinónimas las expresiones "el punto x" y "el número x".

Para representar la distancia entre dos puntos de la recta, necesitamos calcular la diferencia entre la coordenada del punto que está a la derecha y la coordenada del punto que está a la izquierda. Si los puntos tienen coordenadas x_1 y x_2, entonces cuando $x_1 < x_2$ la distancia es $x_2 - x_1$ y cuando $x_2 < x_1$ la distancia es $x_1 - x_2$, ya que la distancia es siempre positiva. La distancia de un punto x al punto de coordenada 0 es $x - 0 = x$ si $x > 0$ y es $0 - x = -x$ si $x < 0$. Con el fin de tener una única fórmula para calcular la distancia en todos los casos, introducimos la noción de valor absoluto.

Definición 1.6.1. Si x es un número real, **el valor absoluto** de x, que notamos $|x|$, lo definimos

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.4.

1. $|5| = 5$, pues $5 > 0$
2. $|-3| = -(-3) = 3$, pues $-3 < 0$
3. $|\pi - 3| = \pi - 3$, pues $\pi - 3 > 0$
4. $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$, pues $3 - \pi < 0$
5. $|0| = 0$

De acuerdo con nuestra observación anterior, si x_1 y x_2 son las coordenadas de dos puntos sobre una recta, la **distancia** entre ellos se define como $|x_1 - x_2|$. En particular, $|x| = |x - 0|$ representa la distancia del origen al punto x.

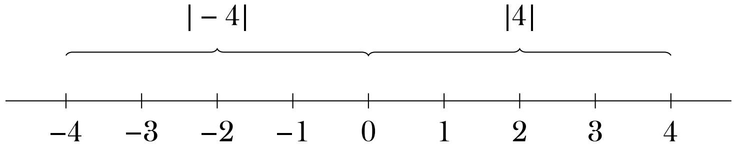


Figura 1.5.

La relación de orden entre números reales tiene una interpretación geométrica muy simple: *$x < y$ si, y solo si, el punto que representa x está localizado a la izquierda del punto que representa y.*

Con esto podemos ver los segmentos de recta y las semirrectas como la representación geométrica de subconjuntos del conjunto de los números reales llamados intervalos. Esa representación geométrica es de gran utilidad en la resolución de problemas y en la visualización de importantes propiedades de los números reales.

Definición 1.6.2. Si a y b son números reales, definimos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$

Los conjuntos así definidos se llaman en su orden, **intervalo abierto** de extremos a y b, **intervalo cerrado** de extremos a y b, **intervalo abierto-cerrado** de extremos a y b e **intervalo cerrado-abierto** de extremos a y b.

El concepto de intervalo se amplía para incluir los siguientes conjuntos, conocidos con el nombre de **intervalos infinitos**:

- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$

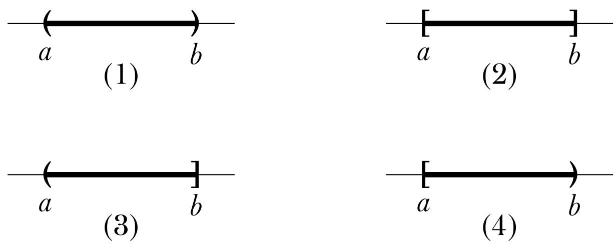


Figura 1.6. Representación en la recta real de intervalos abierto, cerrado, abierto-cerrado y cerrado-abierto. Un paréntesis cuadrado en la figura indica que el extremo correspondiente pertenece al intervalo.

Geométricamente podemos representar los intervalos de extremos a y b sobre la recta real como se indica en la figura 1.6.

Dejamos al lector la representación geométrica de estos intervalos infinitos. El símbolo ∞, llamado **infinito**, que aparece en la definición anterior, no es un número real, es una notación usada para significar que cada uno de los intervalos (a, ∞) y $[a, \infty)$ contiene todo número real mayor que a, por grande que ese número sea. A cada uno de los intervalos $(-\infty, a)$ y $(-\infty, a]$ pertenece todo número real menor que a.

1.7. Los enteros

En esta sección vamos a mencionar algunas de las propiedades más importantes del conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Recordamos que $\mathbb{Z}$ está formado por la unión del conjunto de los enteros positivos, $1, 2, 3, 4, \ldots$; el conjunto de los enteros negativos, $-1, -2, -3, -4, \ldots$, y el 0.

Muchos de los resultados sobre números enteros son consecuencia del siguiente principio:

Principio de buena ordenación. Todo subconjunto no vacío S de números naturales posee un mínimo. Es decir, existe $m \in S$ tal que $m \leq s$ para todo $s \in S$.

Una primera consecuencia de este principio es el resultado conocido como algoritmo de la división.

Algoritmo de la división. Si a y b son enteros con $b > 0$, entonces existen enteros únicos q y r tales que

$$a = bq + r \text{ con } 0 \leq r < b.$$

Los números q y r se llaman, respectivamente, el **cociente** y el **residuo** obtenidos al dividir a por b.

El siguiente diagrama ilustra la demostración del resultado anterior:

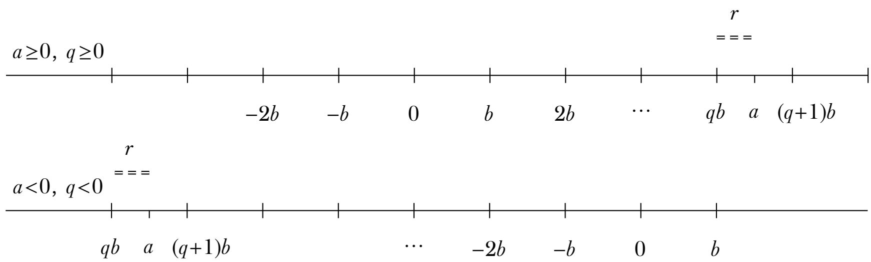


Figura 1.7.

Si a es un múltiplo de b, es decir, si $a = qb$ para algún entero q, tomamos $r = 0$. Si a no es múltiplo de b, tomamos $r = a - qb$ donde qb es el mayor múltiplo de b que se encuentra a la izquierda de a sobre la recta (esto es, el mayor múltiplo de b que es menor que a). De esta forma $0 \leq r < b$.

Ejemplo 1.5.

1. Si $b = 5$, podemos escribir:

$$34 = 5 \cdot 6 + 4 \qquad 127 = 5 \cdot 25 + 2 \qquad -34 = 5 \cdot (-7) + 1 \qquad 30 = 5 \cdot 6 + 0$$

2. Si $b = 32$, tenemos

$$276 = 32 \cdot 8 + 20 \qquad -276 = 32 \cdot (-9) + 12$$

En virtud de este algoritmo, con $b = 2$, podemos representar todo entero n en alguna de las formas

$$n = 2q \qquad \text{o} \qquad n = 2q + 1$$

donde q es un entero. Si n se puede representar en la primera forma, decimos que n es un entero **par** y, cuando se puede representar en la segunda forma, decimos que es un entero **impar**. Los enteros pares son, por lo tanto, $\cdots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \cdots$ y los enteros impares son $\cdots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots$.

Definición 1.7.1. Sean a y b números enteros con $a \neq 0$. Decimos que a **divide** a b si existe un entero c tal que $b = ac$. En tal caso escribimos $a|b$. Cuando a divide a b decimos también que a es un **divisor** de b, o que a es un **factor** de b, o que b es un **múltiplo** de a (como lo usamos anteriormente).

Para indicar que a no divide a b escribimos $a \nmid b$.

Definición 1.7.2. Un entero positivo $p > 1$ se llama un número **primo** si tiene exactamente dos divisores positivos a saber, 1 y p. Un entero positivo mayor que 1 que no es primo se llama **compuesto**.

Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19.
Sin duda alguna el siguiente resultado, que se deduce de la definición 1.6.2, es la propiedad más importante que tiene el conjunto de los enteros positivos.

Teorema 1.7.1. (Teorema Fundamental de la Aritmética). Todo entero $n > 1$ o es primo, o se puede factorizar como producto de primos. Esta factorización es única salvo por el orden de los factores.

De acuerdo al teorema anterior, si n es un entero mayor que 1, lo podemos escribir en la forma

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r$$

donde $p_1, p_2, \cdots, p_r$ son primos no necesariamente diferentes. Agrupando los primos iguales en la factorización de n, lo podemos escribir en la forma

$$n = p_1^{n_1} \ldots p_t^{n_t}$$

donde los primos son ahora diferentes y los exponentes son enteros positivos.

Esta última representación de n se llama la **representación natural** o **canónica** de n.

Ejemplo 1.6.

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \qquad \text{o} \qquad 72 = 2^3 \cdot 3^2$$
$$3900 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13 \qquad \text{o} \qquad 3900 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13$$

Cuando trabajamos con varios enteros es deseable utilizar los mismos números primos para representarlos y en tal caso aceptamos en la representación canónica de un entero, exponentes cero. Así por ejemplo escribimos

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \qquad 45 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5, \qquad 25 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^2,$$

donde en todos los casos hemos utilizado los mismos primos 2, 3 y 5.

Si la representación canónica de un entero es $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_t^{n_t}$, entonces los divisores positivos de n tienen la forma

$$d = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_t^{d_t}$$

donde $0 \leq d_i \leq n_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, t$.

Ejemplo 1.7. Los divisores positivos de $72 = 2^3 \cdot 3^2$ son **Definición**

$$\begin{array}{cccc} 2^0 \cdot 3^0 & 2^1 \cdot 3^0 & 2^2 \cdot 3^0 & 2^3 \cdot 3^0 \\ 2^0 \cdot 3^1 & 2^1 \cdot 3^1 & 2^2 \cdot 3^1 & 2^3 \cdot 3^1 \\ 2^0 \cdot 3^2 & 2^1 \cdot 3^2 & 2^2 \cdot 3^2 & 2^3 \cdot 3^2 \end{array}$$

1.7.3. Si $d|a$ y $d|b$, decimos que d es un **divisor común** de a y b. Cuando a y b son enteros no ambos iguales a cero, el mayor de los divisores comunes positivos de a y b se llama el **máximo común divisor** de a y b y lo representamos con la notación (a, b).

Puesto que, si $d|a$ entonces $d|(-a)$, se observa que

$$(a, b) = (a, -b) = (-a, b) = (-a, -b)$$

Como ejemplo tenemos

$$(36, 48) = 12, \qquad (-60, 75) = 15, \qquad (-10, -98) = 2$$

Definición 1.7.4. Sean a y b enteros no nulos. Si $a|m$ y $b|m$, decimos que m es un **múltiplo común** de a y b. El menor de los múltiplos comunes positivos de a y b, que existe por el principio de buena ordenación, se llama el **mínimo común múltiplo** de a y b y lo representamos con la notación $[a, b]$. En este caso también tenemos

$$[a, b] = [a, -b] = [-a, b] = [-a, -b]$$

Por ejemplo,

$$[36, 48] = 144, \qquad [60, -75] = 300, \qquad [-10, -98] = 490$$

Nota: es conveniente observar que en matemáticas utilizamos a veces la misma notación para representar conceptos diferentes, pero el contexto nos indica con claridad el significado deseado. Por ejemplo, si trabajamos con el orden en los números reales, (a, b) representa un intervalo abierto, pero si trabajamos con números enteros, (a, b) representa el máximo común divisor de dos enteros.

Una de las consecuencias del teorema fundamental de la aritmética es que nos proporciona un método rápido para hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos enteros. Concretamente tenemos el siguiente resultado:

Si $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t}$ y $b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_t^{b_t}$ con los p_i primos y $a_i \geq 0, b_i \geq 0$ para todo i, entonces,

$$(a, b) = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_t^{r_t} \quad \text{y} \quad [a, b] = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_t^{s_t}$$

donde r_i es el mínimo entre a_i, b_i y s_i es el máximo entre a_i, b_i.

Ejemplo 1.8. Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0$ y $196 = 2^2 \cdot 7^2 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^2$, entonces,

$$(360,196) = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 4 \quad \text{y} \quad [360,196] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^2 = 17.640$$

Los resultados anteriores se extienden de manera similar a cualquier número finito de enteros. Así, por ejemplo, (a, b, c) representa el máximo común divisor de a, b y c, esto es el máximo entre los divisores comunes de a, b y c.

Ejemplo 1.9.

$$\begin{aligned} 1800 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \\ 1890 &= 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 980 &= 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} (1800, 1890, 980) &= 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 10 \\ [1800, 1890, 980] &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 264\,600 \end{aligned}$$

1.8. Números racionales e irracionales

Como indicamos en la sección 1.1 los **números racionales** son los que se pueden expresar en la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros y $q \neq 0$. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales contiene como subconjunto al conjunto $\mathbb{Z}$, de todos los enteros, pues cualquier entero n lo podemos expresar en la forma $\frac{n}{1}$, es decir, como un racional con denominador igual a 1.

Observamos que existen varias expresiones de la forma $\frac{p}{q}$ que representan el mismo número racional, por ejemplo $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Caracterizamos estas expresiones de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 1.8.1. Los números racionales $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ con $q \neq 0$ y $s \neq 0$ son iguales si, y solo si, $ps = rq$. Es decir tenemos:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \quad \text{si, y solo si,} \quad ps = qr.$$

Si tenemos en cuenta las operaciones con fracciones que mencionamos en la sección 1.3, vemos que el conjunto de los números racionales resulta cerrado para la adición, la multiplicación y para diferencias y cocientes (o resta y división), ya que en todos los casos se obtienen fracciones cuyos numeradores y denominadores son números enteros y los denominadores son diferentes de cero.

Los números reales que no son racionales, los llamamos **números irracionales**. Como ejemplo podemos citar $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π y e.

En general es muy difícil probar que un número real es irracional. Sin embargo, hay una demostración fácil de que el número $\sqrt{2}$ es irracional. Hela aquí:

Por el algoritmo de la división sabemos que todo entero a es par o impar, es decir, puede expresarse en una de las dos formas:

$$a = \begin{cases} 2\text{k} \\ 2\text{k+1} \end{cases} \quad k \text{ entero}$$

y por lo tanto

$$a^2 = \begin{cases} 4k^2 \\ 4k^2 + 4k + 1 \end{cases} \qquad k \text{ entero}$$

De las igualdades anteriores concluimos que si a^2 es par entonces a es par.

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. Luego $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con p y q enteros. Podemos asumir que p y q no tienen ningún factor común. Luego $2 = \frac{p^2}{q^2}$ o sea $p^2 = 2q^2$, es decir, p^2 es par y, por la observación preliminar, p también es par. Luego $p = 2r$ con r entero. Sustituyendo este valor en la ecuación $p^2 = 2q^2$, tenemos $(2r)^2 = 4r^2 = 2q^2$, y simplificando, $q^2 = 2r^2$. Por consiguiente, q es un entero par y q se puede expresar en la forma $q = 2s$ con s entero. De esta forma hemos llegado a contradecir que los enteros p y q no tienen factor común. Por lo tanto, nuestra hipótesis de que $\sqrt{2}$ es racional es imposible y en consecuencia $\sqrt{2}$ es irracional.

A partir de un número irracional dado,podemos construir una infinidad de números irracionales,pues fácilmente se demuestra elsiguiente resultado: "Si α es un número irracional y r es cualquier número racional diferente de cero, entonces los números $\alpha + r$, $\alpha - r$, $r - \alpha$, αr, $\frac{\alpha}{r}$, $-\alpha$ y $\frac{1}{\alpha}$ son todos números irracionales."

La irracionalidad de cualquiera de estos números se demuestra inmediatamente por contradicción. Por ejemplo, si $\alpha + r$ fuera un número racional, tendríamos $\alpha + r = r_1$ con r_1 racional. Despejando, tendríamos $\alpha = r_1 - r$ que es un número racional, pues la diferencia de dos números racionales es un número racional. Esto contradice que α es irracional. Por lo tanto $\alpha + r$ no puede ser un número racional.

Ejemplo 1.10. Todos los siguientes números son irracionales

$$-\sqrt{2}, \quad 3 + \sqrt{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{5}{7}\sqrt{2}, \quad \frac{1}{3 + \sqrt{2}}, \quad -\sqrt{2} - 17, \quad \frac{8 - 5\sqrt{2}}{7}$$

El ejemplo siguiente nos muestra que el conjunto de los números irracionales no es cerrado para la adición, la resta, la multiplicación y la división, es decir hay casos en los que estas operaciones aplicadas a números irracionales producen como resultado un número racional.

Ejemplo 1.11.

1. $(\sqrt{2} + 5) + (2 - \sqrt{2}) = 7$
2. $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$
3. $(5 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{2}) = 23$
4. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

1.9. Expresiones decimales

Dado que todo número racional es el cociente de dos enteros, efectuando una división ordinaria lo podemos representar mediante una expresión decimal. Estas representaciones o bien son finitas, como en el caso de

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \text{y} \quad \frac{35}{8} = 4{,}375$$

o bien se repiten en ciclos regulares indefinidamente como en el caso de

$$\frac{27}{11} = 2{,}454545\ldots \quad \text{y} \quad \frac{10}{7} = 1{,}428571428571\ldots$$

Cuando en una expresión decimal hay un ciclo de cifras que se repiten indefinidamente, decimos que el decimal es **periódico**. Llamamos **período** al conjunto de cifras que forman el ciclo que se repite y para representar el número sin ambigüedades trazamos una barra sobre este ciclo. Todo decimal finito puede considerarse como un decimal periódico donde la cifra que se repite es el cero. Usando estas notaciones tenemos:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5\overline{0}$$
$$\frac{35}{8} = 4{,}375\overline{0}$$
$$\frac{27}{11} = 2{,}\overline{45}$$
$$\frac{10}{7} = 1{,}\overline{428571}$$

Hemos visto que todo número racional se puede representar como una expresión decimal periódica. También es cierto que toda expresión decimal periódica representa un número racional. Los siguientes ejemplos nos muestran como encontrar el racional representado por una expresión decimal.

Ejemplo 1.12. Hallemos el número racional representado por $x = 5{,}\overline{2}$.
Tenemos

$$\begin{aligned} x &= 5{,}\overline{2} \\ 10x &= 52{,}\overline{2}, \end{aligned}$$

luego, restando la primera igualdad de la segunda,

$$\begin{aligned} 9x &= 47 \ \text{ y} \\ x &= \frac{47}{9}. \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo, el período contiene más de un dígito.

Ejemplo 1.13. Hallemos el número racional representado por $x = 4{,}\overline{35}$.
Tenemos

$$\begin{aligned} x &= 4{,}\overline{35} \\ 100x &= 435{,}\overline{35} \end{aligned}$$

luego al restar tenemos

$$\begin{aligned} 99x &= 431 \ \text{ y} \\ x &= \frac{431}{99} \end{aligned}$$

El caso más general se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.14. Hallemos el número racional representado por $x = 2{,}18\overline{512}$ cuyo período está conformado por tres dígitos y no empieza inmediatamente después de la coma.

Tenemos

$$y = 100x = 218{,}\overline{512}$$

y luego procedemos con y, como en el ejemplo anterior. Es decir

$$1000y = 218\,512{,}\overline{512}$$

entonces al restar tenemos

$$\begin{aligned} 999y &= 218294 \\ y &= \frac{218294}{999} \end{aligned}$$

y como $y = 100x$ entonces $x = \frac{y}{100} = \frac{218294}{99900}$.

En el desarrollo de los ejemplos anteriores, se multiplicó el número x por ciertas potencias de 10. Estas potencias no se eligieron al azar, sino que se escogieron cuidadosamente, de tal forma que los números $10^r x$ tuvieran la misma parte decimal que x. De esta forma, al efectuar las restas $10^r x - x$ o $10^{r_1}x - 10^{r_2}x$ se obtuvieron números enteros a partir de los cuales se despejó el número racional x.

La discusión anterior nos muestra que el conjunto de los números racionales es idéntico con el conjunto de los decimales periódicos. En consecuencia, el conjunto de los números irracionales está constituido por todos los decimales no periódicos. Como ejemplos de decimales no periódicos, podemos citar las expresiones

$$0{,}202002000200002\cdots \quad \text{y} \quad 3{,}1247010010001000001\cdots$$

donde el número de ceros que preceden a 2 o a 1 va aumentando cada vez.

Sea $x = a_0, a_1a_2\cdots a_n$ una expresión decimal finita. Multiplicando por 10^n tenemos

$$10^n x = a_0a_1a_2\cdots a_n$$

o sea

$$10^n x = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \cdots + a_n$$

Despejando x obtenemos el número racional

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

Por lo tanto, x satisface las siguientes relaciones

$$\begin{gathered} a_0 < x < a_0 + 1 \\ a_0 + \frac{a_1}{10} < x < a_0 + \frac{a_1+1}{10} \\ a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{10^2} \\ \vdots \\ a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}+1}{10^{n-1}} \\ a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = x \end{gathered}$$

Similarmente, si $x = a_0, a_1a_2a_3\cdots$ es un número real positivo que tiene una expansión decimal infinita, entonces el número x está localizado sobre la recta numérica de tal forma que satisface las siguientes desigualdades

$$
\begin{gathered}
a_0 < x < a_0 + 1 \\
a_0 + \frac{a_1}{10} < x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10} \\
a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2} \\
a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3 + 1}{10^3} \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Observamos que la representación decimal está asociada con la división de un intervalo unidad en 10 partes iguales, la división de cada una de estas subdivisiones en 10 partes iguales y así sucesivamente. Si por ejemplo consideramos el número decimal $x = 0{,}\overline{3} = 0{,}3333\ldots$ tenemos las gráficas siguientes:

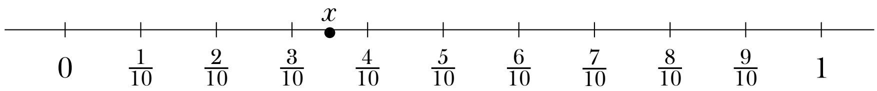


Figura 1.8.

y, ampliando,

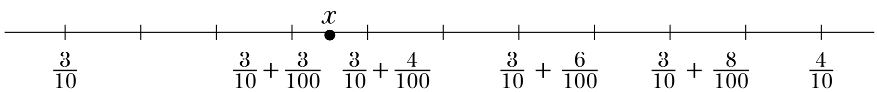


Figura 1.9.

Nota: al comienzo de esta sección vimos que todo decimal finito se puede expresar como un decimal periódico, donde la cifra que se repite indefinidamente es el cero, por ejemplo:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}5\overline{0} \\
\frac{35}{8} = 4{,}375 = 4{,}375\overline{0}.
\end{gathered}
$$

Sorprendentemente, hay otra manera menos trivial de representar un decimal finito como un decimal periódico. Esta forma consiste en disminuir en una unidad el último dígito no nulo de la representación decimal que termina con ceros y agregar una sucesión infinita de 9. Aplicando esta instrucción tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= 0,5 = 0,4\overline{9}\\ \frac{35}{8} &= 4,375 = 4,374\overline{9}.\end{aligned}$$

Las siguientes consideraciones nos muestran por qué este método es válido:

Supongamos que $x = 0{,}9999\cdots = 0{,}\overline{9}$. Procediendo como en el ejemplo 1.12 obtenemos que $x = 1$, es decir, tenemos que

$$1 = 0{,}9999\cdots = 0{,}\overline{9}$$

Entonces

$$\begin{aligned}0,1 &= 0{,}09999\cdots = 0{,}0\overline{9}\\ 0,01 &= 0{,}009999\cdots = 0{,}00\overline{9}\\ 0,001 &= 0{,}0009999\cdots = 0{,}000\overline{9}\\ &\vdots\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= 0,5 = 0,4 + 0,1 = 0,4 + 0{,}0\overline{9} = 0{,}4\overline{9}\\ \frac{35}{8} &= 4,375 = 4,374 + 0,001 = 4,374 + 0{,}000\overline{9} = 4{,}374\overline{9}.\end{aligned}$$

1.10. Densidad de los números racionales e irracionales en $\mathbb{R}$

Dados dos números reales diferentes, x y y, su promedio $\frac{x+y}{2}$ está comprendido entre x y y. Por lo tanto, entre dos números reales sin importar lo cerca que se encuentren, hay una infinidad de números reales. Esto implica que dado un número real cualquiera x no tienen sentido expresiones tales como “el número real siguiente a x”o “el número real anterior a x”.

Usando la caracterización de los números reales como expresiones decimales, podemos refinar el resultado anterior y establecer otros resultados así:

Resultado 1. Entre dos números reales diferentes hay un número racional, y, por lo tanto, hay infinitos números racionales entre ellos.

Resultado 2. Entre dos números reales diferentes hay un número irracional, y, por lo tanto, hay infinitos números irracionales entre ellos.

Los resultados 1 y 2 se describen en lenguaje matemático diciendo, respectivamente, que el conjunto de los números racionales es **denso** en el conjunto de los números reales y que el conjunto de los números irracionales es denso en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 1.15. Construyamos dos números racionales y dos números irracionales entre $x = 1{,}24$ y $y = 1{,}2401$. Usando expresiones decimales periédicas tenemos que

$$a = 1{,}24005 \quad \text{y} \quad b = 1{,}240\overline{03}$$

son dos números racionales entre x y y.

Usando expresiones decimales no periódicas tenemos que

$$t = 1{,}24002000200002\ldots \quad \text{y} \quad s = 1{,}24002010010001000001\ldots$$

son dos números irracionales entre x y y.

1.11. Números complejos

Ningún número real es solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. La solución de esta ecuación se halla en el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, el cual contiene tanto $\mathbb{R}$ como los números cuyo cuadrado es negativo. La unidad imaginaria es $i = \sqrt{-1}$ y

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Definición 1.11.1. Los reales a y b son, respectivamente, la **parte real** y la **parte imaginaria** del número complejo $a+bi$. Si $b \neq 0$, un número $a+bi$ es un **complejo no real** y si, además, $a = 0$, el número (es decir bi) es un **imaginario puro**.

Notemos que un número real a tiene la forma $a + bi$ con $b = 0$.

Ejemplo 1.16.

1. La parte real de $2 + \frac{3}{4}i$ es 2 y su parte imaginaria es $\frac{3}{4}$.
2. La parte imaginaria de $4 - 5i$ es -5.
3. La parte real de $\pi + i$ es π.
4. $2 + 3i$, $4 - 5i$, $\pi + i$ son complejos, no reales.
5. $6i$, $\sqrt{2}i$, $-i$, i son imaginarios puros.

La **igualdad de números complejos** se define así:

$$a + bi = c + di \quad \text{si, y solo si,} \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d$$

(Esto es, dos complejos son iguales si, y solo si, sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales.)

Las operaciones de suma y producto se definen haciendo uso de las operaciones de números reales y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$. Así, tenemos:

$$\textbf{Suma} :(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$\textbf{Producto} :(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplo 1.17.

1. *a*) $a + 3i = 4 + 3i$ si, y solo si, $a = 4$.
   b) $a + bi = -6$ si, y solo si, $a = -6$ y $b = 0$.
   c) No existe un real a para el cual $3 + 6i = a + i$ y no existe un real b para el cual $-\frac{1}{2} + 7i = bi$.

2. *a*) $(4 - 6i) + (5 + 7i) = (4 + 5) + (-6 + 7)i = 9 + 1i = 9 + i$
   b) $(9 - 3i) + 3\pi = (9 + 3\pi) - 3i = 3(3 + \pi) - 3i$. La parte real de este complejo es el número real $3(3 + \pi)$.

3. *a*) $\left(1 + \frac{4}{7}i\right)\left(-\frac{2}{3} + 9i\right) = \left(-\frac{2}{3} - \frac{36}{7}\right) + \left(9 - \frac{8}{21}\right)i = -\frac{122}{21} + \frac{181}{21}i$
   b) $a + bi + 0 = a + bi$
   c) $3i\,(8 - 3i) = 9 + 24i$
   d) $-\frac{7}{5}(10 + 2i) = -14 - \frac{14}{5}i$
   e)
   $$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
   $$= \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)i\right]\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
   $$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
   $$= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)i = 1$$
   f) $(a + bi)1 = a + bi$
   g) $i^2 = -1, i^3 = i^2 i = (-1)\,i = -i, i^4 = i^3 i = (-i)\,i = 1$. En general, si n es un número entero, n puede ser divido por 4 y en ese caso se obtienen un cociente b y un residuo r tales que $0 \leq r < 4$ y

$n = 4b + r$. Entonces $i^n = i^{4b+r} = (i^4)^b i^r = i^r$. Así, cualquier potencia de i es $i^n = i^0 = 1$ (si $r = 0$), es $i^n = i^1 = i$ (si $r = 1$), es $i^n = i^2 = -1$ (si $r = 2$) o es $i^n = i^3 = -i$ (si $r = 3$).

La suma y el producto de números complejos cumplen las condiciones de cuerpo o de campo que cumplen la suma y el producto de números reales (es decir, las propiedades P.1 a P.6 de la sección 1.2, se cumplen si se supone que los elementos son números complejos). Hablamos entonces del **cuerpo** o **campo de los números complejos**. La verificación de casi todas las propiedades es rutinaria. Nos detendremos en la que no lo es, la existencia de inversos.

Un número complejo y posee inverso para la suma pues si $y = a + bi$ y $z = -a - bi$ entonces z es el inverso de y. En efecto,

$$y + z = (a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0$$

Comprobaremos la existencia de inversos para el producto después de introducir otros conceptos.

Notemos que $-a-bi = (-1)(a+bi)$. Este complejo se denota por $-(a+bi)$.

La resta se define así: si u y v son números complejos,

$$u - v = u + (-v)$$

o, más explícitamente,

$$(c + di) - (a + bi) = (c + di) + (-a - bi) = (c - a) + (d - b)i$$

Ejemplo 1.18.

1. $(7 + 6i) - (6 - 3i) = (7 - 6) + (6 - (-3))i = 1 + 9i$
2. Si z es un número complejo tal que $\left(\frac{3}{2} - 4i\right) + z = 2 + 3i$, entonces $z = (2 + 3i) - (\frac{3}{2} - 4i)$, es decir, $z = \frac{1}{2} + 7i$
3. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}i$

Definición 1.11.2. El **conjugado** de un número complejo $z = a + bi$, denotado por $\overline{z}$ se define así: $\overline{z} = a - bi$ (o $\overline{a + bi} = a - bi$).

Ejemplo 1.19.

1. *a*) $\overline{6 + 5i} = 6 - 5i$

   b) $\overline{9 - 2i} = 9 + 2i$

c) $\overline{-3+\sqrt{2}i} = -3-\sqrt{2}i$

d) $\overline{i} = -i$

e) $\overline{2} = 2$

f) $-\overline{10} = -10$

g) Si $a \in \mathbb{R}$ entonces $\overline{a} = a$

2. Si $z \in \mathbb{C}$ y $z = \overline{z}$ entonces z es un número real. Para probarlo, supongamos que $z = a + bi$. Como $z = \overline{z}$, es decir, $a + bi = a - bi$, entonces $b = -b$, lo cual implica que $b = 0$ y, en consecuencia, $z = a + 0i = a \in \mathbb{R}$.

3. a) $(a+bi) + \overline{(a+bi)} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$

   b) $(a+bi) - \overline{(a+bi)} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$

   c) $(a+bi)\overline{(a+bi)} = (a+bi)(a-bi) = (a^2 - b(-b)) + (a(-b) + ab)i = a^2 + b^2$

   d) $\overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a+bi$

En el tercer ejemplo tenemos la comprobación de las siguientes **propiedades** referentes al conjugado $\overline{z}$ de z, un número complejo.

1. $z + \overline{z} = 2R(z)$, donde $R(z)$ denota la parte real de z. Así $z + \overline{z}$ es un número real.

2. $z - \overline{z} = 2I(z)i$, donde $I(z)$ es la parte imaginaria de z. Así, $z - \overline{z}$ es 0 o un número imaginario puro.

3. $z\overline{z} = R(z)^2 + I(z)^2$. Este es un número real positivo o cero. Es cero si, y solo si, $z = 0$.

4. $z = \overline{z}$, si, y solo si, z es un número real.

Definición 1.11.3. El **módulo** del número complejo z se denota $|z|$ y se define así: $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ (la raíz cuadrada positiva del número real $z\overline{z}$).

Con estos elementos verificamos las existencia de inversos para el producto de números complejos (propiedad 6 en la sección 1.2 en el caso complejo). Esa propiedad dice que dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $zw = 1$. Tomando $w = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ tenemos:

$$zw = z\frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{z\overline{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

Así el inverso multiplicativo de z es $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Se denota por z^{-1} o $\frac{1}{z}$. Explícitamente, si $z = a + bi$, entonces

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Definición 1.11.4. La **división** de números complejos se define así: si w y z, son números complejos y $z \neq 0$

$$\frac{w}{z} = w\frac{1}{z} = wz^{-1} = w\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{w\overline{z}}{|z|^2}$$

Más explícitamente,

$$\frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{ca + db}{a^2 + b^2} + \frac{da - cb}{a^2 + b^2}i$$

Ejemplo 1.20.

1. *a*) $|-4 + i| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$
   b) $|i| = 1$
   c) $|1| = 1$, $|-3| = 3$. En general, si z es un número real entonces $z = a \in \mathbb{R}$ y el módulo de z es $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$, es decir, el módulo de un número real es igual a su valor absoluto (sección 1.5).

2. *a*) $(2 + 3i)^{-1} = \frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$
   b) $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{-i}{i(-i)} = -i$
   c) Si $z = a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$, es decir es el inverso de a para el producto de números reales.

3. $\frac{4+6i}{1-2i} = \frac{(4+6i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-8+14i}{1+4} = -\frac{8}{5} + \frac{14}{5}i$

4. $\frac{\sqrt{7}-5i}{3i} = \frac{(\sqrt{7}-5i)(-3i)}{(3i)(-3i)} = \frac{-15-3\sqrt{7}i}{9} = -\frac{15}{9} - \frac{3\sqrt{7}}{9}i = -\frac{5}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}i$

Otras propiedades del conjugado se refieren a su comportamiento en relación con las operaciones entre números complejos. A continuación enunciamos esas propiedades:

Si $y, z, z_1, z_2, \cdots, z_n$ son números complejos arbitrarios entonces

1. $\overline{y + z} = \overline{y} + \overline{z}$ o, más generalmente, $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots + \overline{z_n}$

2. $\overline{y - z} = \overline{y} - \overline{z}$

3. $\overline{yz} = \overline{y}\,\overline{z}$ o, más generalmente, $\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \cdots \overline{z_n}$

4. $\overline{\left(\frac{y}{z}\right)} = \frac{\overline{y}}{\overline{z}}$ si $z \neq 0$

Ejemplo 1.21.

1. $\overline{(2+3i)+(4-i)} = \overline{6+2i} = 6-2i$ y

   $\overline{2+3i} + \overline{4-i} = (2-3i)+(4+i) = 6-2i$

2. $\overline{(-1+i)\,(-1-i)} = \overline{2} = 2$ y

   $\overline{(-1+i)}\;\overline{(-1-i)} = (-1-i)(-1+i) = 2$

3. $\overline{\left(\frac{4-7i}{-2i}\right)} = \overline{\left(\frac{(4-7i)(2i)}{(-2i)(2i)}\right)} = \overline{\left(\frac{14+8i}{4}\right)} = \overline{\left(\frac{7}{2}+2i\right)} = \frac{7}{2}-2i$ y

   $\frac{\overline{4-7i}}{\overline{-2i}} = \frac{4+7i}{2i} = \frac{(4+7i)(-2i)}{(2i)(-2i)} = \frac{14-8i}{4} = \frac{7}{2}-2i$

Taller 1

1. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. En cada caso justificar su respuesta.

   a) Todo número entero es un número racional.

   b) 0 es a la vez un número racional y un número irracional.

   c) Para todo número real x las expresiones: "El triple de x, más 5"y "El triple de x más 5"son iguales.

   d) El recíproco de $\frac{1}{a}$ es a.

   e) El opuesto del opuesto de $-\sqrt{7}$ es $\sqrt{7}$.

   f) Si $y \neq 0$ y $w \neq 0$, entonces $\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{x+z}{y+w}$.

   g) Para todo número real a se tiene que $\frac{a+3}{5a+15} = \frac{1}{5}$.

   h) Si $z \neq 0$ entonces $\frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$.

   i) El conjunto $\{1, 0, -1\}$ es cerrado para la adición y para la multiplicación.

   j) Si a y b son números reales tales que $ab = 0$ entonces $a = 0$ y $b = 0$.

   k) Para todo número real $a \neq 0$ se tiene que $a^2 > 0$.

   l) Si a y b son números reales tales que $a^2 = b^2$ entonces $a = b$.

   m) Hay más números enteros positivos que múltiplos positivos de 5.

2. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. En cada caso justificar su respuesta.

    a) El 5 % del 10 % de un número es el 2 % del número.

    b) La suma de dos números positivos y un número negativo es un número positivo.

    c) Si en un producto de números hay más factores negativos que positivos, el resultado es un número negativo.

    d) Para todo número real x se tiene que $-(-x) = (-1)(-x)$.

    e) Para todo número real x, el número $-x$ es negativo.

    f) Si a, b y c son números reales tales que $a < b$ y $-c > 0$ entonces $bc < ac$.

    g) Si x y y son positivos y $x > y$ entonces $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

    h) Si $\frac{1}{x} \leq \frac{x}{x+1}$ entonces $x + 1 \leq x^2$.

    i) Si $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ entonces $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$.

    j) Si x y y son números reales tales que $x < y$ entonces $x^2 < y^2$.

    k) Si x, y, z y w son números reales tales que $x < y$ y $z < w$, entonces $x - z < y - w$.

    l) Si x y y son números reales tales que $x \geq 0$ y $y < 0$ entonces $xy^{-1} \geq 0$.

3. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. En cada caso justificar su respuesta.

    a) 1 es un divisor de 0 y 0 es un divisor de 1.

    b) Si x, y y z son enteros tales que $x|yz$, entonces $x|y$ o $x|z$.

    c) El menor múltiplo de 12 mayor que -300 es -260.

    d) Si ab es un entero par entonces a y b son enteros pares.

    e) Todo entero impar se puede escribir en la forma $2n + 7$ para algún n entero.

    f) Si x es un entero impar, entonces $x^2 - 1$ es divisible por 8.

    g) Existen enteros x y y con $y \neq 0$, tales que $x - y = 175$, el cociente obtenido al dividir x por y es 15 y el residuo 7.

    h) Existe un entero que al dividirlo por 3 deja residuo 2 y al dividirlo por 5 deja residuo 3.

4. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. En cada caso justificar su respuesta.

   a) El conjunto de los números irracionales es cerrado para la adición y la multiplicación.

   b) El inverso de un número irracional es un número irracional.

   c) Si x es un número irracional, entonces $\sqrt{x}$ es un número irracional.

   d) $\sqrt{5}\left(\sqrt{2}-1\right)$ es un número irracional.

   e) La forma decimal de un número racional se obtiene dividiendo el numerador por el denominador y se conoce completamente cuando se repite el primer residuo.

   f) Existen infinitos números racionales entre $0,\overline{9}$ y 1.

   g) Si q no es divisible por 3, el número racional positivo $\frac{p}{q}$ tiene una expansión decimal finita.

   h) El número racional positivo $\frac{p}{q}$ tiene una expansión decimal finita si, y solo si, los únicos divisores primos de q son 2 y 5.

   i) Existen expresiones decimales infinitas no periódicas que representan números racionales.

   j) La expresión decimal $5{,}331333133331333331\ldots$ representa un número irracional.

5. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. En cada caso justificar su respuesta.

   a) $\left|\sqrt{3}-2\right| + |-3| - |4-\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}-9$.

   b) Si $|x-7| = 2$ entonces $x = 9$.

   c) Para todo número real x se tiene que $|2x+5| = 2|x|+5$.

   d) Si $x < -1$ entonces $|x| + |x+1| + |x-2| = 3x+1$.

   e) Si $-5 \leq x+1 \leq 3$ entonces $|x+1| \leq 3$.

6. *a*) Ordenar de mayor los siguientes números y representarlos sobre la recta numérica.

$-2{,}71$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{5}$	π	$21 \div 10^3$
$0{,}\overline{2}$	$-3{,}13$	$0{,}0002 \times 10^2$	$-\pi$	$0{,}2 \times 10^3$

   b) Descomponer en producto de primos y hallar todos los divisores de 2340, 26 208 y 45 747.

c) Hallar todos los valores de a y b tales que $3^a 2^b$ divida a 3780 y todos los valores de a tales que $2^a 3^4 5^a 11$ divida a 5940.

d) Responder. ¿Qué significado tiene cada una de las siguientes expresiones $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$ y $\frac{0}{0}$?

e) Escribir los números racionales $5,\overline{2}$, $23,\overline{14}$ y $2,5\overline{32}$ en la forma $\frac{p}{q}$.

f) Encontrar tres números racionales y tres números irracionales entre $3,141592$ y π. (Nota: $\pi = 3,1415926\ldots$).

g) Responder. ¿Cuántos números irracionales hay entre $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{99}$?

7. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. En cada caso justificar su respuesta.

a) Todo número real es también un número complejo.

b) Si el conjugado de un número complejo es igual al opuesto del número, entonces el número es un imaginario puro.

c) Si el producto de dos números complejos es un número real, entonces los dos números son reales.

d) $(7 + 9i) - (8 - 4i) = -1 + 5i$.

e) $-(-3 + 5i) - (6 - 7i) = -3 + 2i$.

f) $(5 + 4i)(3 - 10i) = -25 - 38i$.

g) $\frac{7-4i}{-4-3i} = \frac{-16}{25} - \frac{1}{5}i$.

h) $|-5 + 8i| = |5 - 8i|$.

i) $(4 + 5i)^3 = 64 - 125i$.

j) $i^{343} = i$.

k) Si $(x + yi)(2 - 6i) = -2 - 14i$ entonces $x = 2$ y $y = -1$.

l) Existen números reales x y y tales que $3x + 5 = (2y - 6)i$.

m) Existe un número real x tal que $\frac{3x-2i}{2x+i} = 1 + 4i$.

n) Para todo número complejo z se tiene que $|z| = |\overline{z}|$.

ñ) Existen números complejos z tales que $z\overline{z} = z^2$.

o) $2 + 5i > 0$.

p) Para todo número complejo z se tiene que $z^2 > 0$.

Capítulo *dos*

Fundamentos de álgebra

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2.1. Introducción histórica

La historia del álgebra comenzó en el antiguo Egipto y Babilonia, donde se resolvieron ecuaciones lineales y cuadráticas, así como algunas ecuaciones con varias incógnitas. Con el tiempo, los babilonios desarrollaron unas matemáticas más sofisticadas que les permitieron encontrar las raíces de algunas ecuaciones de tercer grado, y resolver problemas más complicados utilizando triplas de enteros que satisfacen el teorema de Pitágoras, demostrado en Grecia tiempo después ($(a, b, c) : a^2 = b^2 + c^2$). Obtuvieron una buena aproximación de $\sqrt{2}$, con cinco decimales de exactitud. Además, compilaron una gran cantidad de tablas, incluyendo tablas de multiplicar y de dividir, tablas de cuadrados, tablas de triplas de enteros mencionadas antes y tablas de interés compuesto. Calcularon la suma de progresiones aritméticas y de algunas geométricas y sumas de sucesiones de cuadrados.

Los antiguos griegos solo utilizaban los números naturales y los racionales. La Escuela pitagórica consideraba que todo se podía comparar o medir utilizando números enteros y consideraba los números como la esencia del universo. A finales del siglo v a. C., hacia el año 480 a. C., como lo mencionamos en la introducción histórica del capítulo anterior, Hípaso de Metaponto descubrió los números inconmensurables. Ello creó una crisis, pues los pitagóricos esperaban descifrar todos los enigmas de la naturaleza usando los números y este descubrimiento acabó con su proyecto. Se abandonó entonces la teoría pitagórica de la proporción, basada en números y se tuvo que crear una nueva teoría no numérica. Esta fue introducida en el siglo iv a. C. por el matemático Eudoxo de Cnido (390 a. C. - 337 a. C.). Como lo inexpresable era la razón entre dos cantidades inconmensurables, Eudoxo eliminó la dificultad considerando no la razón misma, sino la igualdad de razones. Él estableció principios que adoptaría posteriormente Euclides y que incluiría en sus *Elementos*. Eudoxo, además, descubrió el método de exhaución para demostrar rigurosamente supuestos sobre áreas y volúmenes mediante aproximaciones sucesivas, antecedente del cálculo integral.

El descubrimiento de las cantidades inconmensurables, y con él la carencia de una teoría aritmética de las mismas, tuvo como consecuencia el abandono del álgebra en favor de la geometría, lo que hizo que el desarrollo del álgebra como disciplina independiente fuera relativamente tardío. Apareció una especie de "álgebra geométrica" en la que los números se representaban por segmentos de línea y las operaciones aritméticas fueron sustituidas por construcciones geométricas. Las ecuaciones lineales y cuadráticas fueron resueltas con técnicas geométricas, evitándose así el problema de las magnitudes inconmensurables. De esta forma en las matemáticas griegas el razonamiento geométrico llegó a considerarse como el modelo de razonamiento matemático riguroso y así siguió siendo durante más de 2000 años.

Los matemáticos alejandrinos Herón (10 - 70) y Diofanto (200/214 - 284/298) continuaron con la tradición de Egipto y Babilonia. El libro *Aritmética* de Diofanto es de mayor nivel y, aunque no es una obra de carácter teórico sino una colección de problemas, presenta muchas soluciones sorprendentes para ecuaciones en varias variables que tienen un valor racional (ecuaciones diofánticas). Por su originalidad y sus aportes, Diofanto fue llamado por los historiadores el padre de los algebristas modernos (en Occidente). Además, hizo importantes contribuciones a la notación. Parece ser que inició el empleo sistemático de símbolos para indicar incógnitas, potencias, igualdades o números negativos. *Aritmética* tuvo una muy notable influencia sobre el desarrollo del álgebra entre los árabes, que la tradujeron a su lengua en el siglo x.

El antiguo conocimiento sobre resolución de ecuaciones encontró acogida en el mundo islámico, donde se le llamó "ciencia de reducción y equilibrio". La palabra "álgebra" nació en el siglo IX. Tiene origen en la palabra árabe al-jabru que significa "reducción", y hace referencia al título del libro *Hisab al-jabr w'al-muqabalah* del nombre de cuyo autor, el matemático persa Muhammad ibn-Musa al-Khwarizmi (780 - 850), deriva la palabra "algoritmo". El libro es uno de los primeros textos árabes de álgebra. Contiene una presentación sistemática de la teoría fundamental de ecuaciones, con ejemplos y demostraciones. Otros matemáticos árabes lograron importantes avances en la teoría de números y crearon una gran variedad de métodos numéricos para la resolución de ecuaciones.

En las civilizaciones antiguas se escribían las expresiones algebraicas utilizando abreviaturas solo ocasionalmente. En la Edad Media, los matemáticos árabes describieron cualquier potencia de la incógnita x y desarrollaron el álgebra fundamental de los polinomios, aunque sin usar los símbolos modernos. Este álgebra incluía multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas de polinomios, así como el conocimiento del teorema del binomio.

Una dificultad adicional que enfrentó el desarrollo del álgebra estuvo en el sistema de numeración, el romano, utilizado en Occidente hasta el siglo XI, que es un sistema de numeración no posicional. El sistema de numeración decimal que actualmente usamos, el cero incluido, tuvo su origen en la India y llegó a Occidente a través de los árabes, por eso los nuevos números se llamaron *números arábigos*. La paulatina adopción en toda Europa a lo largo de los siglos XI, XII y XIII de esos números supuso un extraordinario avance que propició la expresión simbólica de las operaciones aritméticas, iniciándose así el desarrollo del álgebra como disciplina independiente de la geometría. Los países europeos con lenguas latinas adquirieron la mayor parte de estos conocimientos durante el siglo XII, el gran siglo de las traducciones, incluída la traducción al latín del *álgebra* de al-Jwarizmi. Los trabajos de los árabes, junto con las traducciones de los griegos clásicos fueron determinantes para el crecimiento de las matemáticas durante la Edad Media. A principios del siglo XIII, el matemático italiano Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano o Leonardo Bigollo (1170 - 1250) también llamado Fibonacci, encontró una aproximación cercana a la solución de la ecuación cúbica $x^3 + 2x^2 + cx = d$. Él había viajado a países árabes, por lo que con seguridad utilizó el método arábigo de aproximaciones sucesivas.

En el siglo XV se usaron en los cálculos los números negativos y las fracciones, pero los primeros progresos realmente notables no llegaron hasta el siglo XVI. A principios de ese siglo se hizo un descubrimiento matemático de trascendencia en Occidente: los matemáticos italianos Scipione del Ferro (1465 - 1526), Niccolò Fontana, apodado Tartaglia a causa de su tartamudez (1501- 1557) y Gerolamo Cardano (1501 - 1576) resolvieron la ecuación cúbica general en función de las constantes que aparecen en la ecuación. Ludovico Ferrari (1522 - 1565), alumno de Cardano, pronto encontró la solución exacta para la ecuación de cuarto grado. Las fórmulas algebraicas para la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado fueron publicadas en 1545 por Cardano en su libro *Ars Magna*.

Un avance importante en el álgebra fue la introducción, en el siglo XVI, de símbolos para las incógnitas y para las operaciones y potencias algebraicas. El matemático francés François Viète (1540 - 1603), a quien se considera uno de los precursores del álgebra, fue el primero en representar los parámetros de una ecuación mediante letras y propuso un sistema simbólico que le permitió representar de forma general distintos tipos de ecuaciones. Viète, quien fue además un destacado precursor de la utilización del álgebra en criptografía, llevó a cabo importantes estudios sobre la resolución de ecuaciones y sus escritos ejercieron gran influencia en muchos matemáticos del siglo posterior, incluyendo a Pierre de Fermat (1611 - 1665) en Francia, e Isaac Newton (1642 - 1727) en Inglaterra. Debido al avance en la notación, el *Libro III de la Geometría* (1637), escrito por el matemático y filósofo francés René Descartes (1596 - 1650) se parece bastante a un texto moderno de álgebra y contiene los fundamentos de un curso de teoría de ecuaciones, incluyendo lo que el propio Descartes llamó la regla de los signos para contar el número de raíces verdaderas (positivas) y falsas (negativas) de una ecuación. Sin embargo, la contribución más importante de Descartes a las matemáticas fue el descubrimiento de la geometría analítica, que reduce la resolución de problemas geométricos a la resolución de problemas algebraicos.

Durante el siglo XVIII se continuó trabajando en la teoría de ecuaciones y en 1799 el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), en su tesis doctoral, presentó la primera demostración rigurosa del teorema fundamental del álgebra. Gauss es uno de los más importantes matemáticos de la historia. Los diarios de su juventud muestran que ya en sus primeros años había realizado grandes descubrimientos en teoría de números, un área en la que su libro *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) marca el comienzo de la era moderna.

Los hallazgos hechos en el siglo XVI acerca de la resolución de ecuaciones de tercer y cuarto grado llevaron a los matemáticos a interesarse por los números complejos y estimularon la búsqueda de soluciones similares para ecuaciones de quinto grado y superior. Fue esta búsqueda la que a su vez generó los primeros trabajos sobre la teoría de grupos a finales del siglo XVIII y la teoría de ecuaciones del matemático francés Évariste Galois (1811 - 1832) a principios del XIX. Sin embargo, el matemático noruego Niels Abel (1802 - 1829) y el mismo Galois demostraron la inexistencia de tales soluciones.

2.2. Expresiones algebraicas

Llamamos **variable** a una letra o símbolo que representa cualquier elemento de un conjunto determinado. Llamamos **constante** a un elemento fijo del conjunto considerado. Si tal conjunto es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, las variables y constantes representan números reales.

Usualmente representamos las variables por las últimas letras del alfabeto, w, x, y, z. En algunos casos representamos las constantes por las primeras letras del alfabeto, a, b, c, d. En estos casos los símbolos a, b, etc., representan elementos fijos pero arbitrarios del conjunto considerado.

Ejemplo 2.1.

1. En la expresión $2x^2 + 4x - 7$ la letra x es una variable y los números 2, 4 y 7 son constantes.

2. En la expresión $ax + b$, x es una variable y a y b son constantes.

Llamamos **expresiones algebraicas** a las constantes, las variables o las combinaciones de constantes y variables mediante las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces.

Ejemplo 2.2. Las siguientes son algunas expresiones algebraicas:

$5,\ x^3, 3ay^2,\quad (6xy - 2y)5x^2,\quad -3x^2y + 7x + 2y - 8,$

$\frac{2x+3}{x^2-5x-6},\quad (2z^{-5} - 3z^{-1})^{\frac{3}{5}},\quad \frac{\sqrt{x+2y}}{x-\sqrt[3]{3x}}$

En una expresión algebraica, cada una de las partes separadas por medio de un signo de suma o de resta, se llama un **término**.

Ejemplo 2.3. En la expresión

$$5x^2y - \frac{2x+1}{3y-5} + \sqrt{xy-6} + 7$$

los términos son $5x^2y$, $\frac{2x+1}{3y-5}$, $\sqrt{xy-6}$ y 7. Observamos que expresiones tales como $\frac{2x+1}{3y-5}$ y $\sqrt{xy-6}$ se consideran como un solo término.

Si un término consiste de un producto de dos o más factores, decimos que cada factor es el **coeficiente** del producto de los otros factores. Por ejemplo, en el término $7x^2y$, 7 es el coeficiente de x^2y, $7x^2$ es el coeficiente de y, y $7y$ es el coeficiente de x^2. Si un coeficiente es un número, lo llamamos el **coeficiente numérico**. En el término anterior $7x^2y$, 7 es el coeficiente numérico.

Si una expresión algebraica consta de un solo término, la llamamos un **monomio**; si consta de dos términos, la llamamos un **binomio**; si consta de tres términos, la llamamos un **trinomio** y así sucesivamente.

Asumiendo que las variables y las expresiones representan números reales, tenemos que poner condiciones sobre los valores que pueden tomar las primeras. Así por ejemplo: $4x^6-3x^3+6x^2-3$ representa un número real, cualquiera que sea el valor que tome x. La expresión $3y^5 + 2y^3 + \frac{9}{y}$ representa un número real siempre que y sea diferente de 0. La expresión $\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}$ representa un número real si $x + y > 0$. La expresión $\frac{6x^2y+\frac{y}{x^2}}{\sqrt[3]{1-xy}}$ representa un número real si $x \neq 0$ y $1 - xy \neq 0$.

Al remplazar en una expresión las variables por valores que ellas puedan tomar, se obtiene un número real que es el **valor** de la expresión en esos números. Así por ejemplo el valor de $4x^6 - 3x^3 + 6x^2 - 3$ en $x = 0$ es $4(0)^6 - 3(0)^3 + 6(0)^2 - 3 = -3$; el valor de $\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}$ en $x = 2$, $y = -1$ es $\frac{2^2+(-1)^2}{\sqrt{2+(-1)}} = 5$.

El conjunto de los valores que pueden tomar las variables es el **dominio** de la expresión. Así, el dominio de una expresión en x (o en y) es el conjunto de los números reales que puede tomar x (o y) para que el valor de la expresión sea un número real. El dominio de una expresión en x y y es el conjunto de las parejas de números reales que pueden tomar x y y respectivamente, para que el valor de la expresión sea un número real.

Por ejemplo, el dominio de la expresión $4x^6 - 3x^3 + 6x^2 - 3$ es $\mathbb{R}$, el dominio de la expresión $3y^5+2y^3+\frac{9}{y}$ es $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, el dominio de la expresión $\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}$ es el conjunto de las parejas (x, y) tales que $x + y > 0$, es decir, tales que $y > -x$. Por ejemplo, la pareja $(3, 0)$ pertenece a ese dominio mientras que la pareja $(-4, 4)$ no pertenece.

Vamos ahora a enfocar nuestra atención sobre algunas de las operaciones que se utilizan para formar expresiones algebraicas.

2.2.1. Exponentes enteros positivos

En nuestros ejemplos de expresiones algebraicas, hemos utilizado símbolos tales como x^3 y a^3. Un símbolo como x^2 representa el producto $x \cdot x$. Similarmente, a^3 representa el producto $a \cdot a \cdot a$. En general, establecemos la siguiente definición.

Definición 2.2.1. Si a es un número real arbitrario y n es un entero positivo, definimos a^n como el producto de n factores iguales a a. Es decir,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores iguales a } a}$$

En el símbolo a^n, a se llama la **base** y n el **exponente** o la **potencia**. También decimos que a^n es a elevado a la potencia n.

Ejemplo 2.4.

1. $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
2. $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$
3. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64}$
4. $\left(\sqrt{2}\right)^6 = \left(\sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2}\right) = 8$

A partir de la definición anterior (2.2.1) podemos comprobar las siguientes propiedades básicas que satisfacen los exponentes enteros positivos. Si a y b son números reales arbitrarios y m y n son enteros positivos, entonces tenemos:

$$
\begin{aligned}
a^m a^n &= a^{m+n} \\
(a^m)^n &= a^{mn} \\
(ab)^n &= a^n b^n
\end{aligned}
$$

El siguiente razonamiento es una justificación de la primera de las propiedades mencionadas.

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ factores iguales a } a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores iguales a } a} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m+n \text{ factores iguales a } a}$$

Se pueden hacer justificaciones similares para comprobar las otras dos propiedades.

Ejemplo 2.5.

1. $5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5 = 3.125$
2. $(2^2)^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8 = 256$
3. $(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2 = 9 \cdot 25 = 225$
4. $(ab)^3 = a^3 b^3$

2.2.2. Exponentes enteros

La definición de a^n se puede extender al caso de exponente cero y exponentes negativos de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 2.2.2. Si a es un número real con $a \neq 0$, definimos

$$
\begin{aligned}
a^0 &= 1 \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n}
\end{aligned}
$$

donde n es un entero positivo.

Ejemplo 2.6.

1. $7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$
2. $(-4)^{-5} = \frac{1}{(-4)^5} = -\frac{1}{1024}$
3. $5^0 = 1$
4. $(2 + \sqrt{3})^0 = 1$

Estamos en capacidad de demostrar las principales propiedades de los exponentes, cuando estos son enteros arbitrarios. Estas propiedades se conocen con el nombre de leyes de los exponentes y son las siguientes:

Leyes de los exponentes. Si a, b son números reales diferentes de cero y m, n son enteros arbitrarios entonces:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
6. $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$

Generalmente usamos exponentes no negativos; en consecuencia, empleamos la propiedad 5, si $m \geq n$, y la propiedad 6, si $m < n$. Las propiedades anteriores se extienden de manera natural al caso en el que intervienen varios enteros o varios factores. Por ejemplo, tenemos $(abc)^n = a^n b^n c^n$, $a^m a^n a^p = a^{m+n+p}$ etc.

Ejemplo 2.7. Si las letras representan números diferentes de cero tenemos:

1. $x^{-2}x^5 = x^{-2+5} = x^3$
2. $(y^{-3})^4 = y^{(-3)4} = y^{-12} = \frac{1}{y^{12}}$
3. $b^2b^3b^5 = b^{2+3+5} = b^{10}$
4. $(x^2y^{-3}z^4)^2 = (x^2)^2(y^{-3})^2(z^4)^2 = x^4y^{-6}z^8$
5. $\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2 = 9$
6. $\left(\frac{5a}{6}\right)^3 = \frac{(5a)^3}{6^3} = \frac{5^3a^3}{6^3} = \frac{125a^3}{216}$

Observamos que entre las leyes de los exponentes no figuran las siguientes fórmulas **incorrectas** si el exponente $n \neq 1$.

$$(a+b)^n = a^n + b^n$$
$$(a-b)^n = a^n - b^n.$$

Por ejemplo, si $a = 4$, $b = 2$ y $n = 3$, $(a+b)^n = (4+2)^3 = 6^3 = 216$ y $a^n = 4^3 = 64$, $b^n = 2^3 = 8$ y $a^n + b^n = 64 + 8 = 72 \neq 216 = (a+b)^n$.

Cuando $n = 2$ las fórmulas correctas son:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

y, cuando $n = 3$, son:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

2.2.3. Exponentes racionales

Vamos a extender nuestra definición del símbolo a^n al caso en que el exponente es un número racional. Para empezar necesitamos la siguiente definición:

Definición 2.2.3. Sea n un entero positivo mayor que 1, y a un número real. Si r es un número complejo que satisface la ecuación $r^n = a$, decimos que r es una **raíz n-ésima** de a.

Ejemplo 2.8.

1. 3 y -3 son raíces cuadradas de 9, pues $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$.
2. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ es una raíz cúbica de 1, por el ejemplo 1.17, 3, e.
3. -3 es una raíz cúbica de -27, puesto que $(-3)^3 = -27$.
4. i y $-i$ son raíces cuartas de 1, pues $i^4 = (-i)^4 = 1$.

Se puede demostrar que todo número real diferente de cero tiene exactamente n raíces n-ésimas, aunque la mayoría de ellas son números complejos no reales. Entre las raíces n-ésimas de un número real a, vamos a elegir una de ellas como la **raíz n-ésima principal**, esta raíz la representamos por el símbolo $\sqrt[n]{a}$ y la definimos como sigue:

Definición 2.2.4. Sea n un entero positivo mayor que 1 y a un número real. Establecemos que:

1. Si $a > 0$, $\sqrt[n]{a}$ es la raíz n-ésima real positiva de a.
2. Si $a < 0$ y n es impar, $\sqrt[n]{a}$ es la raíz n-ésima real negativa de a.
3. Si $a = 0$, $\sqrt[n]{a} = 0$.

Si $a < 0$ y n es par, $\sqrt[n]{a}$ no la definimos ahora, pues en este caso no existe un número real r tal que $r^n = a$. La definiremos posteriormente para $n = 2$.

El símbolo $\sqrt[n]{\ }$ se llama un **radical**, el número a es el **radicando** y el número n es el **índice** del radical. Cuando $n = 2$ en lugar de $\sqrt[2]{a}$ escribimos simplemente $\sqrt{a}$.

Ejemplo 2.9.

1. $\sqrt{25} = 5$
2. $\sqrt[3]{-64} = -4$
3. $\sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = -\frac{1}{2}$
4. $\sqrt{-9}$ y $\sqrt[6]{-72}$ no son números reales.

Recalcamos que $\sqrt[n]{a}$ no está definido, solo en el caso en el que a es negativo y n es par. En este caso decimos que $\sqrt[n]{a}$ no es un número real o no existe.

Nuestro interés es no solo definir a^n cuando n es un número racional, sino hacerlo de tal forma que se sigan cumpliendo las leyes de los exponentes. Si $n = \frac{1}{q}$ donde q es un entero positivo y deseamos que se cumpla la ley 1 (y la 2.) debemos tener que

$$\underbrace{a^{\frac{1}{q}} \cdot a^{\frac{1}{q}} \cdot a^{\frac{1}{q}} \cdots a^{\frac{1}{q}}}_{q \text{ factores iguales a } a^{\frac{1}{q}}} = a^{q\frac{1}{q}} = a^{\frac{q}{q}} = a$$

lo cual nos indica que debemos definir $a^{\frac{1}{q}}$ como una raíz q-ésima de a. En consecuencia establecemos la siguiente definición.

Definición 2.2.5. Sea q un entero positivo mayor que 1 y a un número real tal que $\sqrt[q]{a}$ exista. Establecemos que

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

Ejemplo 2.10.

1. $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.
2. $(-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32} = -2$.
3. $(-16)^{\frac{1}{4}}$ no está definido porque $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real.

Si $n = \frac{p}{q}$ con p y q enteros positivos, y deseamos que se cumpla la ley 2 de los exponentes, debemos tener que

$$(a^{\frac{1}{q}})^p = a^{\frac{p}{q}}$$

En consecuencia debemos establecer la siguiente definición:

Definición 2.2.6. Sea $\frac{p}{q}$ un número racional donde p y q son enteros positivos diferentes, y sea a un número real tal que $\sqrt[q]{a}$ exista. Establecemos que

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

De las definiciones anteriores y las leyes de los exponentes podemos deducir fácilmente que si $a^{\frac{p}{q}}$ existe, entonces también $a^{\frac{p}{q}}$ es la raíz q-ésima principal de a^p, es decir tenemos

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (a^p)^{\frac{1}{q}}$$

Finalmente, extendemos nuestra definición de a^n al caso en el que n es un número racional negativo.

Definición 2.2.7. Sea $\frac{p}{q}$ un número racional con p y q enteros positivos diferentes, y sea a un número tal que $\sqrt[q]{a}$ exista. Establecemos que

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$$

Ejemplo 2.11.

1. $27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$
2. $81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{81})^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$
3. $y^{\frac{4}{7}} = (\sqrt[7]{y})^4 = \sqrt[7]{y^4}$

Se puede demostrar que las leyes de los exponentes 1 a 6 son válidas para exponentes racionales **siempre y cuando** a y b **sean números positivos**. Cuando a y b son negativos algunas de esas leyes no se cumplen.

Ejemplo 2.12.

1. $[(-4)^2]^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$ mientras que $(-4)^{2\cdot\frac{1}{2}} = (-4)^1 = -4$. Así observamos que $[(-4)^2]^{\frac{1}{2}} \neq (-4)^{2\cdot\frac{1}{2}}$; luego, la propiedad $(a^m)^n = a^{mn}$ no se cumple en este caso.
2. $\left(\frac{-2}{-5}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$ pero $\frac{(-2)^{\frac{1}{4}}}{(-5)^{\frac{1}{4}}}$ no está definido. Luego la propiedad $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ no se cumple en este caso.

Para evitar este tipo de problemas, en adelante, cuando trabajemos con exponentes solo consideraremos bases positivas.

- **Radicales**

En algunas ocasiones es más ventajoso expresar las cantidades en términos de radicales que en términos de exponentes racionales. Las **leyes de los radicales** se siguen inmediatamente de las leyes de los exponentes. Si m y n son enteros positivos y a y b son números reales positivos, entonces:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Ejemplo 2.13.

1. $\sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = \sqrt{36}\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
2. $\sqrt[3]{\frac{250}{27}} = \frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{125 \cdot 2}}{3} = \frac{\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{2}}{3} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{3}$
3. $\sqrt[6]{81} = \sqrt[3]{\sqrt{81}} = \sqrt[3]{9}$
4. Si x es un número real, entonces $\sqrt{x^2} = |x|$ (Proponemos al lector que realice la justificación de la afirmación anterior).

Al simplificar un radical, lo hacemos de tal forma que no existan potencias n-ésimas de radicales cuyo índice es n, no se tengan fracciones bajo el signo de radical y los radicales tengan el índice más pequeño posible.

Ejemplo 2.14.

1. $\sqrt[4]{48x^6y^9} = \sqrt[4]{(16x^4y^8)(3x^2y)} = \sqrt[4]{16x^4y^8}\sqrt[4]{3x^2y} = 2xy^2\sqrt[4]{3x^2y}.$
2. $\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{y^2} \cdot \sqrt[3]{y}} = \frac{\sqrt[3]{xy}}{y}$

En la simplificación de radicales generalmente es más fácil trabajar los radicales como exponentes racionales.

Ejemplo 2.15.

$$\sqrt[4]{\frac{256a^2b^4}{c^2}} = \left(\frac{2^8a^2b^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{2^2a^{\frac{1}{2}}b}{c^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{c^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}} = \frac{4ba^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}}{c} = \frac{4b}{c}\sqrt{ac}.$$

Para terminar, queremos señalar un error muy frecuente en el uso de los radicales. Este error consiste en creer que se tiene la siguiente fórmula **incorrecta**

$$\sqrt[n]{a \pm b} = \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo 2.16.

1. $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9}+\sqrt{16}$, pues $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ y $\sqrt{9}+\sqrt{16} = 3+4 = 7$.

2. $\sqrt[3]{4^3 - 2^3} \neq \sqrt[3]{4^3} - \sqrt[3]{2^3}$, pues $\sqrt[3]{4^3 - 2^3} = \sqrt[3]{56} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 7} = 2\sqrt[3]{7} > 2$ y $\sqrt[3]{4^3} - \sqrt[3]{2^3} = 4 - 2 = 2$.

- **Raíces cuadradas de números reales negativos**

Recordamos que en la sección 1.10 definimos el número complejo i como $i = \sqrt{-1}$. ¿Qué podemos decir acerca de las raíces cuadradas de los números reales negativos en general?

Consideremos ahora un número real negativo. Este puede escribirse en la forma $-a$ donde a es un número real positivo. Tenemos

$$(i\sqrt{a})^2 = (i\sqrt{a})(i\sqrt{a}) = i^2(\sqrt{a})^2 = (-1)a = -a,$$

y similarmente

$$(-i\sqrt{a})^2 = -a.$$

Por lo tanto, los números complejos $i\sqrt{a}$ y $-i\sqrt{a}$ son raíces cuadradas del número negativo $-a$. Escogemos al número $i\sqrt{a} = \sqrt{a}i$ como la raíz cuadrada principal del número negativo $-a$ y lo representamos por $\sqrt{-a}$, es decir, establecemos formalmente la siguiente definición:

Definición 2.2.8. Si a es un número real positivo, la **raíz cuadrada principal** del número real negativo $-a$, la representamos con $\sqrt{-a}$ y la definimos como

$$\sqrt{-a} = i\sqrt{a} = \sqrt{a}i.$$

Ejemplo 2.17.

1. $\sqrt{-36} = i\sqrt{36} = \sqrt{36}i = 6i$.

2. $5 + \sqrt{-16} = 5 + \sqrt{16}i = 5 + 4i$.

3. $\frac{4+\sqrt{-8}}{2} = \frac{4+\sqrt{8}i}{2} = \frac{4+2\sqrt{2}i}{2} = \frac{2\left(2+\sqrt{2}i\right)}{2} = 2 + \sqrt{2}i$.

Ejemplo 2.18. $\sqrt{-5}\sqrt{-5} = (\sqrt{5}i)(\sqrt{5}i) = i^2(\sqrt{5})^2 = (-1)5 = -5$.

Por lo tanto, $-5 = \sqrt{-5}\sqrt{-5} \neq \sqrt{(-5)(-5)} = \sqrt{25} = 5$ y tenemos un nuevo ejemplo que nos muestra que las propiedades de los exponentes y radicales no siempre son válidas si los números considerados no son positivos.

Ejemplo 2.19.

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{18}+\sqrt{-9})(\sqrt{2}-\sqrt{-6}) &= (\sqrt{18}+\sqrt{9}i)(\sqrt{2}-\sqrt{6}i)\\
&= (\sqrt{18}+3i)(\sqrt{2}-\sqrt{6}i)\\
&= (\sqrt{18}\sqrt{2}+3\sqrt{6})+(-\sqrt{18}\sqrt{6}+3\sqrt{2})i\\
&= (\sqrt{36}+3\sqrt{6})+(-\sqrt{36}\sqrt{3}+3\sqrt{2})i\\
&= (6+3\sqrt{6})+(-6\sqrt{3}+3\sqrt{2})i
\end{aligned}
$$

2.3. Polinomios

Una expresión algebraica obtenida mediante las operaciones de suma, resta y multiplicación sobre las constantes y variables, se llama un **polinomio**.

Ejemplo 2.20.

1. $5x^3 - 3x^2 + 6x + 8$ y $x^7 + 2x^4 - 3x^2 - \sqrt{3}x$ son polinomios en una variable, en la variable x.

2. $3y^5 + 2y^3 + 9$ son polinomios en una variable, en la variable y.

3. $3xy^2 - \frac{2}{5}xy + x - \sqrt{2}$ y $\sqrt{5}x^3y^2 - 3x^2y^2 + 4xy - 8y + 1$ son polinomios en dos variables.

Observamos que los únicos exponentes que aparecen en las variables son enteros positivos. Los exponentes negativos y fraccionarios están excluidos. Sin embargo, los coeficientes numéricos son números reales arbitrarios o elementos arbitrarios del dominio en consideración.

Llamamos **grado** de una variable en un término de un polinomio al exponente que tiene la variable en el término. Por ejemplo en el término $3x^4y^3$, el grado de x es 4 y el grado de y es 3. El **grado de un término** en dos o más variables es la suma de los grados de las variables que aparecen en el término. Por ejemplo, el grado del término en dos variables $3x^4y^3$ es 7. El **grado de un polinomio** en ciertas variables es el mayor de los grados de esas variables en los términos del polinomio.

Ejemplo 2.21.

1. $7x^5 - 2x^3 + 3x + 1$ es un polinomio de grado 5 en x.

2. $4x^3y^2 - 5xy^3 + x^4y^2 + 2y$ es un polinomio de grado 4 en x, grado 3 en y, y de grado 6 en x y y.

Los polinomios que estudiaremos más detalladamente son los polinomios en una sola variable, variable que representaremos por x. Un polinomio en x con coeficientes reales es una suma finita de productos de la forma $a_k x^k$, donde el coeficiente a_k es un número real y k es un entero no negativo. Así un polinomio en una variable tiene la forma

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

donde n es un entero no negativo y a_i es un número real para $0 \leq i \leq n$. Su **grado** es el mayor exponente n de x tal que $a_n \neq 0$, a_n es su **coeficiente principal** *y* a_0 es su **término independiente**.

Si no se hace necesario explicitarlo, el polinomio puede representarse en la forma $q(x)$. El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales es denotado por $\mathbb{R}[x]$.

Ejemplo 2.22.

1. Son polinomios los siguientes:

   a) $3 + 12x^3 + \frac{25}{4}x^7 - 36x^9$. Su grado es 9, su coeficiente principal es -36 y su término independiente es 3.

   b) $-\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2}x + x^2$. Su grado es 2 y su coeficiente principal es 1 y su término independiente es $-\frac{1}{5}$.

   c) $-1 + 1{,}5x^2 + 0{,}75x^5 - 1{,}25x^7$. Su grado es 7 y su coeficiente principal es $-1{,}25$ y su término independiente es -1.

   d) $\pi + 3x$, $-4 + \sqrt{2}x$ y todas las expresiones de la forma $b + ax$ con a *y* $b \in \mathbb{R}$. Los polinomios de grado 1 son los de esta forma siempre que $a \neq 0$.

   e) $2 = 2x^0$, $-\sqrt{7} = -\sqrt{7}x^0$, $\frac{9}{2} = \frac{9}{2}x^0$ y todas las constantes no cero son los polinomios de grado 0: si $a \neq 0$, $a = ax^0$. El 0 es también un polinomio constante pero no se le atribuye grado.

2. No son polinomios los siguientes:

   a) $3 + 4x^2 + 6x^{-3}$ pues el exponente de x en el tercer término es un entero negativo.

   b) $9 - 2\sqrt{x} + x - 4x^3$ pues el exponente de x en el segundo término es positivo pero fraccionario, ya que es $\frac{1}{2}$.

   c) $\frac{7x+12x^5-6x^8}{6+12x^3}$ no es un polinomio, es un cociente de polinomios llamado **fracción racional**.

Dos polinomios son iguales si tienen el mismo grado y, para cada potencia x^k de x, el coeficiente en un polinomio es igual al coeficiente en el otro.

Ejemplo 2.23.

1. $-1 + 3x^2 - 4x^5 + 9x^7 = a_0 + a_1x + \cdots + a_7x^7$ si, y solo si, $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = -4$, $a_6 = 0$, $a_7 = 9$.

2. $4x + 6x^2 + 12x^3 = b_0 + b_1x + \cdots + b_5x^5$ si, y solo si, $b_0 = 0$, $b_1 = 4$, $b_2 = 6$, $b_3 = 12$, $b_4 = 0$, $b_5 = 0$.

3. Los polinomios $-1 - 3x + 2x^3 - x^5$ y $1 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ no pueden ser iguales porque los términos independientes son distintos: para el primero es -1 y para el segundo es 1.

2.3.1. Suma y resta de polinomios

El procedimiento para sumar y restar polinomios está basado directamente en las propiedades asociativas y conmutativas de la adición y multiplicación de números reales, y en la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Es decir, está basado en las propiedades P.2, P.3 y P.4 de los números reales, estudiadas en el capítulo 1, sección 1.2. Básicamente, lo que se hace es agrupar y reducir términos semejantes, es decir, términos que difieren únicamente en su coeficiente numérico, por ejemplo $5x^2y$ y $-7x^2y$.

Ejemplo 2.24. Efectuemos la siguiente suma

$$(4x^2 - 2xy + 2y^2 + 7x) + (6xy - 5y^2 + 3x^2)$$

Primero utilizamos las propiedades conmutativa y asociativa para grupar los términos semejantes, obteniendo

$$(4x^2 + 3x^2) + (-2xy + 6xy) + (2y^2 - 5y^2) + 7x$$

Luego, aplicamos la propiedad distributiva para reducir los términos semejantes, obteniendo como resultado final

$$7x^2 + 4xy - 3y^2 + 7x.$$

En la práctica se escriben en fila los polinomios a sumar, de tal forma que las columnas contengan solo términos semejantes. El ejemplo anterior nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{llll}
4x^2 & -2xy & +2y^2 & +7x \\
3x^2 & +6xy & -5y^2 & \\
\hline
7x^2 & +4xy & -3y^2 & +7x
\end{array}$$

donde la tercera línea presenta el resultado después de reducir los términos semejantes.

Si tenemos en cuenta la definición de resta, el problema de restar dos polinomios se transforma en el problema de sumar dos polinomios.

Ejemplo 2.25. Efectuemos la siguiente resta de polinomios

$$(5x^2 + 3xy - y^3) - (2x^2 - 4xy + 1)$$

La resta anterior se convierte en la suma

$$(5x^2 + 3xy - y^3) + (-2x^2 + 4xy - 1)$$

que es igual a

$$3x^2 + 7xy - y^3 - 1.$$

2.3.2. Multiplicación de polinomios

La multiplicación de polinomios está basada en la aplicación repetida de la propiedad distributiva y la utilización de la ley de los exponentes $a^m a^n = a^{m+n}$ con m y n enteros positivos.

Ejemplo 2.26.

1. $$(5x^2y^3)(-3x^4y^2) = -15x^6y^5$$

2. $$\begin{aligned}(2x^2 - xy + y)(3x + 2y) &= (2x^2 - xy + y)3x + (2x^2 - xy + y)2y \\ &= (6x^3 - 3x^2y + 3xy) + (4x^2y - 2xy^2 + 2y^2) \\ &= 6x^3 + x^2y + 3xy - 2xy^2 + 2y^2\end{aligned}$$

En la práctica se procede como se indica en la siguiente ilustración

$$\begin{array}{lllll}
2x^2 & -xy & +y & & \\
3x & +2y & & & \\
\hline
6x^3 & -3x^2y & +3xy & & \\
 & +4x^2y & & -2xy^2 & +2y^2 \\
\hline
6x^3 & +x^2y & +3xy & -2xy^2 & +2y^2
\end{array}$$

donde la tercera línea se obtiene multiplicando cada término de la primera línea por $3x$ y la cuarta línea se obtiene multiplicando cada término de la primera línea por $2y$. Finalmente, sumando las filas tercera y cuarta se obtiene el resultado que es la última fila.

Un caso particular importante es el de la multiplicación de dos polinomios en la misma variable. En este caso es conveniente ordenar los polinomios de tal forma que el exponente de la variable vaya decreciendo.

Ejemplo 2.27. Efectuemos el siguiente producto de polinomios

$$(2x^3 - 3x^2 + x - 7)(x^4 - 6x^2 + 1)$$

Tenemos

$$\begin{array}{llllllll}
2x^3 & -3x^2 & +x & -7 & & & & \\
x^4 & -6x^2 & +1 & & & & & \\
\hline
2x^7 & -3x^6 & +x^5 & -7x^4 & & & & \\
 & & -12x^5 & +18x^4 & -6x^3 & +42x^2 & & \\
 & & & & +2x^3 & -3x^2 & +x & -7 \\
\hline
2x^7 & -3x^6 & -11x^5 & +11x^4 & -4x^3 & +39x^2 & +x & -7
\end{array}$$

2.3.3. División de polinomios

La división de un polinomio se rige esencialmente por las mismas reglas de la división aritmética ordinaria de números enteros. El polinomio que se divide, se llama **dividendo** y el polinomio por el que se divide, se llama **divisor**.

Ejemplo 2.28. Dividamos $5x - 10x^2 + 6x^3 - 8$ por $x - 2$.

Procediendo de la manera usual tenemos

$$\begin{array}{rl}
6x^3 - 10x^2 + 5x - 8 & \quad x - 2 \\
\underline{-6x^3 + 12x^2} \qquad\quad & \quad \overline{6x^2 + 2x + 9} \\
2x^2 + 5x \quad\;\; & \\
\underline{-2x^2 + 4x} \quad\;\; & \\
9x - 8 & \\
\underline{-9x + 18} & \\
10 &
\end{array}$$

Obtenemos como **cociente** $6x^2 + 2x + 9$ y como **residuo** 10.

Expliquemos el proceso utilizado. Para dividir un polinomio por otro, seguimos los siguientes pasos:

1. Ordenamos cada polinomio en potencias descendentes de la variable x.

2. Dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor para hallar el primer término del cociente.

3. Multilpicamos todo el divisor por el primer término del cociente y restamos este resultado del dividendo.

4. Consideramos el residuo obtenido en el paso anterior como nuevo dividendo y repetimos los pasos 2 y 3.

5. Continuamos este proceso hasta que obtengamos como residuo cero o un polinomio de grado menor que el grado del divisor.

Si el residuo obtenido al finalizar el proceso es cero, decimos que la división es **exacta** y que el divisor es **factor** del dividendo.

Representamos los polinomios en una variable x por expresiones tales como $p(x)$, $q(x)$, $c(x)$, $r(x)$, etc. Con esta notación, si $p(x)$ representa el dividendo, $q(x)$ el divisor, $c(x)$ el cociente y $r(x)$ el residuo en la división de dos polinomios, tenemos que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

o en forma equivalente

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x)$$

La ecuación anterior tiene una forma similar a la expresada en el algoritmo de la división entre enteros. En un estudio más completo de polinomios podemos demostrar el siguiente resultado.

Algoritmo de la división para polinomios. Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios de grados n y m, respectivamente, con $m > 0$, entonces existen polinomios únicos $c(x)$ y $r(x)$ tales que

(i) $p(x) = q(x)c(x) + r(x)$.

(ii) $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$.

El polinomio $c(x)$ se llama el **cociente** y el polinomio $r(x)$ se llama el **residuo** obtenidos al dividir $p(x)$ por $q(x)$.

Ejemplo 2.29. Hallemos el cociente y el residuo obtenidos al dividir el polinomio $p(x) = 4+3x-2x^2+3x^3+6x^4$ por el polinomio $q(x) = 1+x+4x^2$.

Procediendo como en el ejemplo anterior tenemos:

$$
\begin{array}{rrrrr|lll}
6x^4 & +3x^3 & -2x^2 & +3x & +4 & 4x^2 & +x & +1 \\ \cline{6-8}
-6x^4 & -\frac{3}{2}x^3 & -\frac{3}{2}x^2 & & & \frac{3}{2}x^2 & +\frac{3}{8}x & -\frac{31}{32} \\ \cline{1-3}
 & \frac{3}{2}x^3 & -\frac{7}{2}x^2 & & & & & \\
 & -\frac{3}{2}x^3 & -\frac{3}{8}x^2 & -\frac{3}{8}x & & & & \\ \cline{2-4}
 & & -\frac{31}{8}x^2 & +\frac{21}{8}x & & & & \\
 & & \frac{31}{8}x^2 & +\frac{31}{32}x & +\frac{31}{32} & & & \\ \cline{3-5}
 & & & \frac{115}{32}x & +\frac{159}{32} & & &
\end{array}
$$

de donde el cociente es

$$c(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{31}{32}$$

y el residuo es

$$r(x) = \frac{115}{32}x + \frac{159}{32}$$

Veamos que se cumple la relación mencionada en la parte (i) del algoritmo de la división.

En efecto, tenemos que

$$
\begin{aligned}
q(x)c(x) + r(x) &= \left(4x^2 + x + 1\right)\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{31}{32}\right) + \left(\frac{115}{32}x + \frac{159}{32}\right) \\
&= \left(6x^4 + 3x^3 - 2x^2 - \frac{19}{32}x - \frac{31}{32}\right) + \left(\frac{115}{32}x + \frac{159}{32}\right) \\
&= 6x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 4 = p(x)
\end{aligned}
$$

Veamos otro caso:

Ejemplo 2.30. Hallemos el cociente y el residuo obtenidos al dividir el polinomio $p(x) = x^2 + x + 1$ por el polimomio $q(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$.

Como en este caso el grado de $q(x)$ es mayor que el grado de $p(x)$ obtenemos como cociente el polinomio 0 y como residuo el polinomio $p(x)$. La relación

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x)$$

nos queda en la forma

$$x^2 + x + 1 = (2x^3 - x^2 + x - 1) \cdot 0 + (x^2 + x + 1).$$

Para dividir polinomios en dos o más variables, se procede de la misma forma, eligiendo una variable común con respecto a la cual se ordenan los polinomios en potencias descendentes.

Ejemplo 2.31. Dividamos $p(x, y) = 2x^4 - x^3y + 2xy^3 + 3y^4$ por $q(x, y) = x^2 - xy + y^2$.

Ordenando por potencias descendentes de x tenemos

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
2x^4 & -x^3y & +0x^2y^2 & +2xy^3 & +3y^4 & x^2 & -xy & +y^2 \\ \cline{6-8}
-2x^4 & +2x^3y & -2x^2y^2 & & & 2x^2 & +xy & -y^2 \\ \cline{1-5}
 & x^3y & -2x^2y^2 & +2xy^3 & & & & \\
 & -x^3y & +\ x^2y^2 & -xy^3 & & & & \\ \cline{2-5}
 & & -x^2y^2 & +\ xy^3 & +3y^4 & & & \\
 & & x^2y^2 & -xy^3 & +\ y^4 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & 4y^4 & & &
\end{array}$$

Hemos obtenido como cociente $c(x, y) = 2x^2 + xy - y^2$ y como residuo $r(x, y) = 4y^4$.

Además, por verificación directa podemos comprobar que

$$p(x, y) = q(x, y)c(x, y) + r(x, y),$$

que es la forma del algoritmo de la división para polinomios en dos variables.

Una manera fácil y rápida de realizar la división de un polinomio $p(x)$ por otro de la forma $x - d$, es mediante el proceso conocido como **división sintética**, que sigue estos pasos:

1. Escribimos en una línea los coeficientes del polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ que queremos dividir, ordenado previamente en potencias descendentes, y colocando 0 cuando falte alguna potencia. Luego a la derecha de estos números escribimos separado por el símbolo $\lfloor$ el número d.

2. Escribimos en la tercera fila el coeficiente principal a_n de $p(x)$.

3. Multiplicamos a_n por d y anotamos el producto en la segunda fila debajo del coeficiente a_{n-1}. Luego, sumamos a_{n-1} con este producto y anotamos el resultado en la tercera fila.

4. Multiplicamos este número que acabamos de obtener en la tercera fila por d, anotamos el resultado en la segunda fila debajo del coeficiente a_{n-2}, luego lo sumamos con a_{n-2} y anotamos el valor de la suma en la tercera fila.

5. Repetimos el proceso anterior hasta donde sea posible.

6. El último número de la tercera fila es el residuo y los números anteriores son los coeficientes del cociente.

Veamos como funciona el proceso en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.32. Dividamos el polinomio $7x^5 + 4x^3 + 3x^2 - x - 6$ por $x + 1$. Notemos que $x + 1 = x - (-1)$

Aplicando los pasos que acabamos de mencionar tenemos:

$$\begin{array}{cccccccl}
7 & 0 & 4 & 3 & -1 & -6 & & \lfloor -1 \\
 & -7 & 7 & -11 & 8 & -7 & & \\
\cline{1-6}
7 & -7 & 11 & -8 & 7 & -13 & &
\end{array}$$

Luego el cociente obtenido en la división es

$$c(x) = 7x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 8x + 7$$

y el residuo obtenido es $r(x) = -13$.

Podemos verificar directamente que

$$(x + 1)\, c(x) + r(x) = 7x^5 + 4x^3 + 3x^2 - x - 6$$

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 2.33. Dividamos el polinomio $x^4 - 3x^3 + 6x + 8$ por $x - 4$.

Aplicando el proceso descrito tenemos:

$$\begin{array}{cccccl}
1 & -3 & 0 & 6 & 8 & \lfloor 4 \\
 & 4 & 4 & 16 & 88 & \\
\cline{1-5}
1 & 1 & 4 & 22 & 96 &
\end{array}$$

Por lo tanto el cociente es $c(x) = x^3 + x^2 + 4x + 22$ y el residuo es $r(x) = 96$.

- **Teoremas del residuo y del factor**

Cuando el divisor de un polinomio $p(x)$ es de la forma $x - d$, el residuo es una constante k y de acuerdo con el algoritmo de la división de polinomios tenemos que

$$p(x) = (x - d)c(x) + k.$$

Entonces, al evaluar $p(x)$ en d (es decir al remplazar x por d en el polinomio y realizar las operaciones indicadas), obtenemos el valor de $p(x)$ en d, notado $p(d)$, que es

$$p(d) = (d - d)c(d) + k = 0 + k = k.$$

Con esto hemos demostrado el siguiente teorema llamado **teorema del residuo**:

Teorema 2.3.1. El residuo de dividir un polinomio $p(x)$ por el polinomio $x - d$ es $p(d)$, el valor $p(x)$ en d.

Ejemplo 2.34.

1. El valor de $p(x) = x^4 - 3x^3 + 6x + 8$ en 4 es

$$p(4) = 4^4 - 3 \cdot 4^3 + 6 \cdot 4 + 8 = 256 - 192 + 24 + 8 = 96,$$

   y este es el residuo obtenido al dividir $p(x)$ por $x - 4$ como vimos en el ejemplo anterior (2.33).

2. Por el teorema del residuo, podemos asegurar que el residuo obtenido al dividir $p(x) = 7x^5 + 4x^3 + 3x^2 - x - 6$ por $x + 1$ es $p(-1) = -13$, como comprobamos en el Ejemplo 2.32.

Un importante caso particular del teorema del residuo es el siguiente teorema llamado **teorema del factor:**

Teorema 2.3.2. El polinomio $x-d$ es factor del polinomio $p(x)$ si, y solo si, $p(d) = 0$.

Demostración. Recordemos que $x - d$ es factor de $p(x)$, significa que el residuo de dividir $p(x)$ por $x - d$ es cero.

Como $p(x) = (x - d)c(x) + p(d)$, y $p(d)$ es tal residuo, entonces $x - d$ es factor de $p(x)$ si, y solo si, $p(d) = 0$.

Definición 2.3.1. Una **raíz** o un **cero** de un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ es un número complejo z (real o no) que verifica $p(z) = 0$ (o, expresado con otras palabras, es una solución de la ecuación $p(x) = 0$).

Así, de acuerdo con el teorema del factor, el número d es un cero del polinomio $p(x)$, es decir $p(d) = 0$, si, y solo si, $x - d$ es un factor del polinomio $p(x)$.

Ejemplo 2.35.

1. El polinomio $x - 4$ es un factor del polinomio $p(x) = x^2 + x - 20$ puesto que $p(4) = 4^2 + 4 - 20 = 0$. En efecto, podemos comprobar inmediatamente que $x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4)$.

2. El polinomio $x + 3 = x - (-3)$ es un factor del polinomio $p(x) = x^3 + 27$ puesto que $p(-3) = (-3)^3 + 27 = 0$. En efecto, se comprueba facilmente que $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$.

Es importante mencionar los siguientes hechos:

1. El teorema del factor es válido aun si d es un número complejo no real. En este caso, entre los coeficientes de $c(x)$ aparecen números complejos no reales. También la división sintética es un proceso útil en este caso.

2. Un número complejo d es raíz n-ésima de un número real a si $d^n = a$, es decir, si $d^n - a = 0$ o, de otra manera, si d es raíz del polinomio $x^n - a$.

3. Si los coeficientes de un polinomio son todos números reales, y un número complejo no real $z = a + bi$ es una raíz o cero de este polinomio, entonces el conjugado de z, $\overline{z} = a - bi$, también es raíz o cero de dicho polinomio.

4. Un polinomio $p(x)$ de grado $n \geq 1$ posee n raíces o ceros. Puede suceder que algunas raíces sean iguales entre sí. Si $z, \ldots, z_n$ son las n raíces de $p(x)$ entonces $p(x) = a_n(x - z_1)\cdots(x - z_n)$, donde a_n es el coeficiente principal del polinomio.

Ejemplo 2.36.

1. Si $p(x) = x^3 - 1$, el número complejo no real $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ es una raíz de $p(x)$ puesto que al calcular este polinomio en ese número tenemos $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 - 1 = 1 - 1 = 0$ (ejemplo 1.17, 3, e). Así que el polinomio $x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ es factor del polinomio $x^3 - 1$. Al dividir este polinomio por aquel, aplicando división sintética tenemos

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & -1 & \underline{\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \\ & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 & \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 & \end{array}$$

con lo cual

$$x^3 - 1 = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

También

$$x^3 - 1 = (x-1)\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right).$$

2. Si $p(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$ entonces

   $$p(-i) = (-i)^4 + 4(-i)^3 + 5(-i)^2 + 4(-i) + 4 = 1 + 4i - 5 - 4i + 4 = 0$$

   También $p(i) = 0$ y $p(-2) = 0$, es decir, $-i$, i y -2 son raíces de $p\,(x)$. Además

   $$p(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2\,(x+i)\,(x-i)$$

   En este caso, el polinomio tiene dos raíces iguales a -2. Decimos que -2 es una **raíz doble** de $p(x)$.

3. Un polinomio de grado 3 con coeficientes reales que tiene 3 y $1 + 2i$ como dos de sus raíces, necesariamente también tiene como raíz el número $1-2i$. Por el teorema del factor este polinomio tiene la forma

   $$\begin{aligned} p(x) &= a(x-3)\,(x-(1+2i))\,(x-(1-2i)) \\ &= a(x-3)(x-1-2i)(x-1+2i) \\ &= a(x-3)((x-1)^2+4) \\ &= a(x^3 - 5x^2 + 11x - 15) \end{aligned}$$

   donde a es un número real distinto de cero, el coeficiente principal del polinomio.

2.4. Productos notables y factorización de polinomios

Los siguientes productos se utilizan con tanta frecuencia en álgebra que no solo merecen destacarse sino que es aconsejable memorizarlos. Se conocen con el nombre de **productos notables** y son:

1. $a(x+y) = ax + ay$
2. $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
3. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

4. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

5. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

6. $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

7. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

8. $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

9. $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$

10. $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3$

La validez de los productos anteriores se comprueba fácilmente realizando las multiplicaciones correspondientes. Las letras que intervienen en las fórmulas, pueden reemplazarse por expresiones algebraicas arbitrarias.

Ejemplo 2.37.

1. $$\begin{aligned}(3\sqrt{x+y} - 2\sqrt{x})(3\sqrt{x+y} + 2\sqrt{x}) &= (3\sqrt{x+y})^2 - (2\sqrt{x})^2 \\ &= 9(x+y) - 4x \\ &= 5x + 9y.\end{aligned}$$

2. $(3t^2 + 4s)^2 = (3t^2)^2 + 2(3t^2)(4s) + (4s)^2 = 9t^4 + 24t^2s + 16s^2.$

3. $$\begin{aligned}(a+b-c)^3 &= ((a+b)-c)^3 \\ &= (a+b)^3 - 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 - c^3 \\ &= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &\quad -3(a^2 + 2ab + b^2)c + 3ac^2 + 3bc^2 - c^3.\end{aligned}$$

   Notemos que hemos considerado $a+b$ como un solo término.

4. $$\begin{aligned}(2x+5y)(5x-3y) &= 10x^2 + (-6+25)xy - 15y^2 \\ &= 10x^2 + 19xy - 15y^2.\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}(2a-5b)(4a^2+10ab+25b^2) &= (2a-5b)((2a)^2 + (2a)(5b) + (5b)^2) \\ &= (2a)^3 - (5b)^3 \\ &= 8a^3 - 125b^3.\end{aligned}$$

Factorizar una expresión algebraica, es expresarla como producto de expresiones más simples llamadas **factores** de la expresión original. En general, la factorización de expresiones algebraicas puede ser muy complicada y nos limitaremos por ahora a considerar algunos casos sencillos, que se derivan de las fórmulas de los productos notables cuando se leen de derecha a izquierda.

Ejemplo 2.38. (Factor común). Para factorizar las siguientes expresiones utilizamos el producto notable (1), donde la letra a se conoce con el nombre de un **factor común**.

1. $3x^3 - 6x + 9 = 3(x^3 - 2x + 3)$. El factor común es 3.
2. $(5x - 2y)x^2 - (5x - 2y)6xy = (5x - 2y)(x^2 - 6xy)$. El factor común es $5x - 2y$.
3. $y^6 - y^4 = y^4(y^2 - 1) = y^4(y - 1)(y + 1)$.

Ejemplo 2.39. (Diferencia de cuadrados). Para factorizar las siguientes expresiones utilizamos el producto notable (2).

1. $16t^2 - 81r^2s^4 = (4t)^2 - (9rs^2)^2 = (4t + 9rs^2)(4t - 9rs^2)$.
2. $$\begin{aligned} \frac{9}{z^4} - 25x^4 &= \left(\frac{3}{z^2}\right)^2 - \left(5x^2\right)^2 \\ &= \left(\frac{3}{z^2} + 5x^2\right)\left(\frac{3}{z^2} - 5x^2\right) \\ &= \left(\frac{3}{z^2} + 5x^2\right)\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{z}\right)^2 - \left(\sqrt{5}x\right)^2\right) \\ &= \left(\frac{3}{z^2} + 5x^2\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{z} + \sqrt{5}x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{z} - \sqrt{5}x\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.40. (Suma y diferencia de cubos). Utilizando los productos notables (9) y (10) tenemos las siguientes factorizaciones:

1. $$\begin{aligned} 27a^3 + 8b^3 &= (3a)^3 + (2b)^3 \\ &= (3a + 2b)((3a)^2 - (3a)(2b) + (2b)^2) \\ &= (3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2). \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} \left(\frac{t-s}{4r}\right)^3 - 125y^3 &= \left(\frac{t-s}{4r}\right)^3 - (5y)^3 \\ &= \left(\frac{t-s}{4r} - 5y\right)\left(\left(\frac{t-s}{4r}\right)^2 + \left(\frac{t-s}{4r}\right)(5y) + (5y)^2\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.41. (Factorización de trinomios). Los productos notables (3), (4),(7) y (8) nos permiten factorizar varias clases de trinomios, como en los casos siguientes:

1. $9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2 = (3x + 2y)^2$.

2. $81z^6-90z^3w^2+25w^4 = (9z^3)^2-2(9z^3)(5w^2)+(5w^2)^2 = (9z^3-5w^2)^2$.

3. Para factorizar el trinomio $x^2 + 3x - 4$ debemos tener $x^2 + 3x - 4 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.

   Luego, tenemos que buscar dos números a y b tales que $a + b = 3$ y $ab = -4$. Fácilmente encontramos que $a = 4$ y $b = -1$. En consecuencia $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$.

4. Factoricemos el trinomio $6x^2 + 11x - 10$. Debemos tener $6x^2 + 11x - 10 = (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$.

   Luego, tenemos que buscar números a, b, c y d tales que $ac = 6$, $bd = -10$ y $ad + bc = 11$. Observamos que a y c son positivos y que b y d son de signos opuestos. Por ensayo y error llegamos a la combinación correcta: $6x^2 + 11x - 10 = (2x + 5)(3x - 2)$.

   La factorización de este trinomio, también se puede reducir a un caso similar al caso del numeral 3, que es más sencillo. Veamos como se procede.

$$
\begin{aligned}
6x^2 + 11x - 10 &= \frac{1}{6}[(6x)^2 + 11(6x) - 60] \\
&= \frac{1}{6}(u^2 + 11u - 60), \text{ donde } u = 6x \\
&= \frac{1}{6}\,(u + 15)\,(u - 4) \\
&= \frac{1}{6}(6x + 15)(6x - 4) \\
&= \left(\frac{6x + 15}{3}\right)\left(\frac{6x - 4}{2}\right) \\
&= (2x + 5)(3x - 2).
\end{aligned}
$$

5. Factoricemos el trinomio $4x^2 - 4xy - 3y^2$.

Procediendo como en el ejemplo anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
4x^2 - 4xy - 3y^2 &= \frac{1}{4}((4x)^2 - 4y(4x) - 12y^2) \\
&= \frac{1}{4}(u - 6y)(u + 2y) \\
&= \frac{1}{4}(4x - 6y)(4x + 2y) \\
&= \left(\frac{4x - 6y}{2}\right)\left(\frac{4x + 2y}{2}\right) \\
&= (2x - 3y)(2x + y).
\end{aligned}$$

Algunas veces hay necesidad de agrupar o manipular convenientemente los términos para poder factorizar las expresiones, como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.42.

1. $$\begin{aligned}
4x^3 + 4x^2 - 9x - 9 &= (4x^3 + 4x^2) - (9x + 9) \\
&= 4x^2(x + 1) - 9(x + 1) \\
&= (4x^2 - 9)(x + 1) \\
&= (2x - 3)(2x + 3)(x + 1).
\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}
a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 &= (a^3 - a^2b) - (ab^2 - b^3) \\
&= a^2(a - b) - b^2(a - b) \\
&= (a^2 - b^2)(a - b) \\
&= (a - b)(a + b)(a - b) \\
&= (a + b)(a - b)^2.
\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}
y^4 + 4 &= y^4 + 4y^2 - 4y^2 + 4 \\
&= (y^4 + 4y^2 + 4) - 4y^2 \\
&= (y^2 + 2)^2 - 4y^2 \\
&= (y^2 + 2 - 2y)(y^2 + 2 + 2y) \\
&= (y^2 - 2y + 2)(y^2 + 2y + 2).
\end{aligned}$$

2.5. Fracciones algebraicas

Una **fracción algebraica** es el cociente de dos expresiones algebraicas. Si la fracción algebraica es el cociente de dos polinomios, la llamamos una **fracción racional**. Algunos ejemplos son

$$\frac{3x^2 - 5x + 1}{2x + 7}, \quad \frac{7x - \sqrt{x^2 - 5}}{x^{\frac{2}{3}} + 1}, \quad \frac{5x^2y - x^3 + 6y^2}{2xy - y^4}, \quad \frac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}}$$

La primera y tercera fracciones son fracciones racionales.

La mayoría de las fracciones que consideramos, son fracciones racionales en una sola variable. Como la división por cero no es posible, siempre que tratemos con fracciones, supondremos implícitamente que los denominadores son diferentes de cero.

2.5.1. Simplificación de fracciones

En el trabajo con fracciones, se acostumbra simplificarlas hasta donde sea posible, de tal manera que obtengamos fracciones donde el numerador y el denominador no tengan factores comunes. El principio básico para simplificar fracciones es la relación siguiente, que mencionamos en el capítulo 1:

$$\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y} \quad \text{si} \quad z \neq 0$$

Este principio, nos indica que podemos cancelar los factores distintos de cero, comunes al numerador y al denominador de una fracción.

Ejemplo 2.43. Simplifiquemos algunas fracciones

1. $\frac{2x^2+5x-3}{x^2-2x-15} = \frac{(2x-1)(x+3)}{(x-5)(x+3)} = \frac{2x-1}{x-5}$.

2. $\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$.

3. $\frac{x(x+y)(x^3-y^3)}{(x-y)(x^2-y^2)} = \frac{x(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x-y)(x+y)} = \frac{x(x^2+xy+y^2)}{x-y}$.

Los siguientes casos ilustran errores que se cometen frecuentemente en la simplificación de fracciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x+y}{x+z} &= \frac{y}{z} \\ \frac{x+y}{x} &= y \\ \frac{x+y}{x} &= 1 + y \end{aligned}\right\} \text{(Fórmulas incorrectas)}$$

Notemos que en el primer caso se pretende simplificar sumandos de numerador y denominador. En los otros dos casos se pretende simplificar el denominador con un sumando del numerador. No se simplifican sumandos y se simplifican factores diferentes de cero comunes a numerador y denominador.

Ejemplo 2.44.

1. $\frac{5x+3}{5x+8}$ no es igual a $\frac{3}{8}$.

2. $\frac{3x+4y}{3x}$ no es igual ni a $4y$ ni a $1+4y$.

2.5.2. Operaciones con fracciones

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de fracciones se basan en las propiedades que mencionamos en el capítulo 1 y que por comodidad repetimos ahora. Estas propiedades son:

- $\dfrac{x}{z} \pm \dfrac{y}{w} = \dfrac{xw \pm yz}{zw}$
- $\dfrac{x}{z} \cdot \dfrac{y}{w} = \dfrac{xy}{zw}$
- $\dfrac{x}{z} \div d\dfrac{y}{w} = \dfrac{\frac{x}{z}}{\frac{y}{w}} = \dfrac{x}{z} \cdot \dfrac{w}{y} = \dfrac{xw}{yz}$

Cuando realizamos operaciones con fracciones debemos simplificar el resultado hasta donde sea posible. En los casos de multiplicación y división de fracciones, cuando sea factible, se simplifican numeradores y denominadores, antes de realizar las operaciones más complejas.

Ejemplo 2.45.

1. $$\begin{aligned}\frac{x}{x+y} + \frac{3}{x^2-y^2} &= \frac{x(x^2-y^2)+3(x+y)}{(x+y)(x^2-y^2)}\\ &= \frac{x(x-y)(x+y)+3(x+y)}{(x+y)(x^2-y^2)}\\ &= \frac{(x(x-y)+3)(x+y)}{(x^2-y^2)(x+y)}\\ &= \frac{x(x-y)+3}{x^2-y^2}\\ &= \frac{x^2-xy+3}{x^2-y^2}\end{aligned}$$

2. $$\frac{(4x^2+4xy-3y^2)}{(x^2-2xy-3y^2)}\cdot\frac{(2x^2-xy-3y^2)}{(4x^2-9y^2)}$$
$$\begin{aligned}
&= \frac{(4x^2+4xy-3y^2)(2x^2-xy-3y^2)}{(x^2-2xy-3y^2)(4x^2-9y^2)}\\
&= \frac{(2x+3y)(2x-y)(2x-3y)(x+y)}{(x-3y)(x+y)(2x-3y)(2x+3y)}\\
&= \frac{2x-y}{x-3y}
\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}
\frac{\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-2ab}}{\frac{a^2-b^2}{a^2-ab-2b^2}} &= \frac{(a^2-2ab+b^2)(a^2-ab-2b^2)}{(a^2-2ab)(a^2-b^2)}\\
&= \frac{(a-b)^2(a-2b)(a+b)}{a(a-2b)(a-b)(a+b)}\\
&= \frac{a-b}{a}
\end{aligned}$$

Cuando se suman o restan dos o más fracciones algebraicas, es aconsejable escribir todas las fracciones con el mismo denominador pues en este caso las operaciones resultan inmediatas si aplicamos repetidamente las fórmulas

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{y}=\frac{x+z}{y} \quad \text{y} \quad \frac{x}{y}-\frac{z}{y}=\frac{x-z}{y}$$

Cualquier denominador común funciona, pero el más utilizado es el **mínimo común denominador**, que es el mínimo común múltiplo (m. c. m.) de los denominadores y lo podemos encontrar de la siguiente forma: primero factorizamos todos los denominadores y, luego, formamos un producto que contenga todos los factores que aparezcan en alguno de los denominadores, cada uno elevado a la mayor potencia con que se presente. Este producto es el mínimo común denominador buscado.

Ejemplo 2.46. Hallemos el m. c. m. de las siguientes expresiones:

$$x^2-y^2, \quad x^2+2xy+y^2, \quad x^2-3xy+2y^2 \quad \text{y} \quad x^3+y^3$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
x^2-y^2 &= (x-y)(x+y)\\
x^2+2xy+y^2 &= (x+y)^2\\
x^2-3xy+2y^2 &= (x-2y)(x-y)\\
x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2)
\end{aligned}$$

Luego, el mínimo común múltiplo es

$$(x-y)(x+y)^2(x-2y)(x^2-xy+y^2)$$

Ejemplo 2.47. Hallemos

$$\frac{2x+1}{x^2-4}+\frac{x}{x+2}-\frac{3x-1}{x^2-4x+4}$$

El m. c. m. de los denominadores es $(x-2)^2(x+2)$ y ampliando las fracciones para que el denominador de todas sea ese m. c. m. de los denominadores tenemos:

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{2x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{(2x+1)(x-2)}{(x-2)^2(x+2)}, \qquad \frac{x}{x+2}=\frac{x(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)}$$

y

$$\frac{3x-1}{x^2-4x+4}=\frac{3x-1}{(x-2)^2}=\frac{(3x-1)(x+2)}{(x-2)^2(x+2)}.$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{x^2-4}+\frac{x}{x+2}-\frac{3x-1}{x^2-4x+4}&\\ &=\frac{(2x+1)(x-2)}{(x-2)^2(x+2)}+\frac{x(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)}-\frac{(3x-1)(x+2)}{(x-2)^2(x+2)}\\ &=\frac{(2x+1)(x-2)+x(x-2)^2-(3x-1)(x+2)}{(x-2)^2(x+2)}\\ &=\frac{x^3-5x^2-4x}{(x-2)^2(x+2)}\end{aligned}$$

2.5.3. Racionalización de fracciones

Algunas veces se hace necesario expresar una fracción de tal manera que su numerador o su denominador no contenga radicales. El proceso a seguir se conoce con el nombre de **racionalización** del numerador o del denominador, según sea el caso y lo ilustramos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.48.

1. Racionalicemos el denominador en la siguiente expresión

$$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$$

Para eliminar los radicales en el denominador nos basamos en el producto notable $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ con $a=\sqrt{x+h}$ y $b=\sqrt{x}$

Tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} &= \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
&= \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}\\
&= \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(x+h)-x}\\
&= \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h}\\
&= \sqrt{x+h}+\sqrt{x}
\end{aligned}
$$

2. Racionalicemos el numerador en la expresión

$$\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{x-y}$$

En este caso nos basaremos en el producto notable

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

con $a=\sqrt[3]{x}$ y $b=\sqrt[3]{y}$.

Tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{x-y} &= \frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+(\sqrt[3]{y})^2)}{(x-y)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right)}\\
&= \frac{(\sqrt[3]{x})^3-(\sqrt[3]{y})^3}{(x-y)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}\\
&= \frac{x-y}{(x-y)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}\\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}
\end{aligned}
$$

2.6. Ecuaciones e inecuaciones

Una condición en x es una expresión que contiene la variable x y se transforma en una proposición matemática, es decir, en una afirmación que es verdadera o falsa, cuando se sustituye x por un elemento del dominio de la expresión en consideración; en nuestro caso, por un número real.

Es el caso, por ejemplo, de

$$3x + 1 = 5 - x$$

que es verdadera para $x = 1$ y falsa para cualquier otro número.

El conjunto de elementos del dominio que hacen de la condición una proposición verdadera, se llama el **conjunto solución** de la condición.

La mayoría de las condiciones que se presentan en matemáticas tienen la forma de una ecuación o de una una inecuación o desigualdad. En esta sección estudiaremos algunas ecuaciones e inecuaciones que se presentan con frecuencia y mostraremos cómo encontrar sus soluciones.

Resolver una ecuación o una inecuación es encontrar su conjunto solución, es decir, encontrar todos los números reales que la hacen verdadera. El procedimiento para resolver ecuaciones e inecuaciones consiste en transformarlas en **condiciones equivalentes**, es decir, en ecuaciones o inecuaciones que tengan las mismas soluciones, hasta que el conjunto solución sea obvio.

Para transformar ecuaciones e inecuaciones usamos las propiedades de la igualdad en relación con la adición y la multiplicación y las propiedades estudiadas en la sección 1.4, sobre la relación de orden.

Las propiedades que usamos son las siguientes:

- Para todos los números reales a, b y c, $a = b$ si, y solo si, $a + c = b + c$. Además, $a \leq b$ si, y solo si, $a + c \leq b + c$. Entonces, se puede sumar el mismo número a los dos miembros de la ecuación o de la inecuación y el conjunto solución no cambia.

- Para todos los números reales a, b y c, donde $c \neq 0$, $a = b$ si, y solo si, $ac = bc$. Además, $a \leq b$ si, y solo si, $ac \leq bc$ si $c > 0$ y $a \leq b$ si, y solo si, $ac \geq bc$ si $c < 0$: Entonces, se puede multiplicar los dos miembros de una ecuación o de una inecuación por el mismo número positivo o negativo y el conjunto solución no cambia.

2.6.1. Solución de ecuaciones

- **Ecuaciones lineales**

Las ecuaciones más sencillas que se presentan en la práctica son las ecuaciones lineales en una variable, que son las que se pueden escribir en la forma

$$ax + b = 0 \text{ con } a \text{ y } b \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad a \neq 0.$$

Aplicando las propiedades básicas de los números reales, vemos que la ecuación lineal anterior es equivalente a cada una de las ecuaciones siguientes:

$$ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{a}$$

Por lo tanto, su única solución es $x = -\frac{b}{a}$.

Ejemplo 2.49. Resolvamos la ecuación $4x + 8 = 2x - 10$.

Tenemos la siguiente lista de ecuaciones equivalentes

$$\begin{array}{rl} 4x + 8 = 2x - 10 & \text{ecuación dada} \\ 4x = 2x - 18 & \text{sumando } -8 \text{ a cada miembro} \\ 2x = -18 & \text{sumando } -2x \text{ a cada miembro} \\ x = -9 & \text{dividiendo cada miembro por } 2 \end{array}$$

Luego, la solución de la ecuación inicial es $x = -9$. Remplazando este valor en la ecuación podemos comprobar que efectivamente es la solución, pues en este caso tenemos

$$4(-9) + 8 = 2(-9) - 10 \text{ o sea } -28 = -28.$$

El siguiente ejemplo nos muestra que una ecuación aparentemente complicada es realmente una ecuación lineal.

Ejemplo 2.50. Resolvamos la ecuación

$$4x(x - 4) + 5x - 6 = (x - 1)(x + 2) + 3x^2 - 10x + 3$$

Tenemos la siguiente lista de ecuaciones equivalentes:

$$\begin{array}{rl} 4x(x - 4) + 5x - 6 = (x - 1)(x + 2) + 3x^2 - 10x + 3 & \text{ecuación dada} \\ 4x^2 - 16x + 5x - 6 = x^2 + x - 2 + 3x^2 - 10x + 3 & \text{multiplicando} \\ 4x^2 - 11x - 6 = 4x^2 - 9x + 1 & \text{simplificando} \\ -11x - 6 = -9x + 1 & \text{sumando } -4x^2 \\ -2x = 7 & \text{sumando } 6 + 9x \\ x = -\frac{7}{2} & \text{dividiendo por } -2 \end{array}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación inicial es $x = -\frac{7}{2}$, como puede comprobarse fácilmente.

- **Ecuaciones cuadráticas**

Las ecuaciones cuadráticas son las que se pueden escribir en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a,\ b \text{ y } c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0.$$

Para resolver una ecuación cuadrática consideramos la siguiente lista de ecuaciones equivalentes:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 && \text{ecuación dada}\\
ax^2 + bx &= -c && \text{sumando } -c\\
x^2 + \tfrac{b}{a}x &= -\tfrac{c}{a} && \text{dividiendo por } a\\
x^2 + \tfrac{b}{a}x + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 &= -\tfrac{c}{a} + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 && \text{sumando } \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2\\
\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 &= \tfrac{b^2-4ac}{4a^2} && \text{factorizando a la izquierda y}\\
& && \text{efectuando la suma a la derecha}\\
x + \tfrac{b}{2a} &= \pm\tfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \text{extrayendo raíz cuadrada}\\
x &= -\tfrac{b}{2a} \pm \tfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \text{despejando } x
\end{aligned}
$$

Como los denominadores en los términos del lado derecho de la ecuación son iguales, tenemos que las soluciones de la ecuación cuadrática son los dos valores dados por la expresión

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.1}$$

La expresión $b^2 - 4ac$ de esta fórmula es el **discriminante** de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.

Ejemplo 2.51. Resolvamos la ecuación $3x^2 - 13x = 10$.

Escribiendo la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ obtenemos $3x^2 - 13x - 10 = 0$. Luego $a = 3$, $b = -13$ y $c = -10$. Aplicando la fórmula 2.1, tenemos estas soluciones:

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(3)(-10)}}{2(3)}$$

que, simplificando, se convierten en

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{289}}{6} = \frac{13 \pm 17}{6}$$

Por lo tanto, escogiendo el signo más y el signo menos, obtenemos como soluciones

$$x = 5 \qquad \text{y} \qquad x = -\frac{2}{3}$$

Se puede comprobar inmediatamente que estos valores son efectivamente soluciones de la ecuación dada.

Ejemplo 2.52. Resolvamos la ecuación $7x^2 + 4x + 1 = 0$.

En este caso $a = 7$, $b = 4$ y $c = 1$. Aplicando la fórmula 2.1, obtenemos las soluciones

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(7)(1)}}{2(7)}$$

que simplificando se convierten en

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{14} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}i}{14} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}i}{14} = \frac{-2 \pm \sqrt{3}i}{7}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación original son los números complejos

$$x = \frac{-2 + \sqrt{3}i}{7} \quad \text{y} \quad x = \frac{-2 - \sqrt{3}i}{7}$$

Una ecuación cuadrática puede tener dos soluciones reales diferentes, como en el ejemplo 2.51, dos soluciones reales iguales o dos soluciones complejas no reales, como en el ejemplo 2.52, lo cual depende del valor que tome el discriminante: el primer caso corresponde al discriminante positivo; el segundo, al discriminante cero y el tercero, al discriminante negativo.

Notemos que las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, son las raíces del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Muchas ecuaciones se pueden transformar en ecuaciones cuadráticas mediante una sustitución apropiada, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.53. Resolvamos la ecuación

$$4x^{\frac{2}{3}} - 8x^{\frac{1}{3}} + 3 = 0$$

Si tomamos $y = x^{\frac{1}{3}}$, la ecuación dada se convierte en $4y^2 - 8y + 3 = 0$, que es una ecuación cuadrática en la variable y. Aplicando la fórmula 2.1, las soluciones de esta ecuación son

$$\begin{aligned} y &= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(3)}}{2(4)} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} \\ &= \frac{8 \pm 4}{8} \end{aligned}$$

o sea

$$y = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \quad \text{o} \quad y = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Si $y = \frac{3}{2}$, entonces $x^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$; luego, $x = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$.

Si $y = \frac{1}{2}$, entonces $x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$; luego, $x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación original son $x = \frac{27}{8}$ y $x = \frac{1}{8}$. En efecto, al reemplazar $x = \frac{27}{8}$ en el miembro izquierdo de la ecuación dada, $4x^{\frac{2}{3}} - 8x^{\frac{1}{3}} + 3$, tenemos:

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} - 8\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + 3 &= 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{3}{2}\right) + 3 \\ &= 4\frac{9}{4} - 8\frac{3}{2} + 3 = 9 - 12 + 3 = 0. \end{aligned}$$

Así que el primer valor de x satisface la ecuación. De manera similar $x = \frac{1}{8}$ la satisface.

- **Ecuaciones que contienen fracciones**

Cuando una ecuación contiene fracciones racionales, para resolverla se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador, que definimos en la sección 2.4.2, después del ejemplo 2.45, y se resuelve la ecuación resultante. Este procedimiento lleva con frecuencia a multiplicar por expresiones que son iguales a 0 para algunos valores de la variable x. Por esta razón las ecuaciones obtenidas no siempre son equivalentes y hay necesidad de verificar si las "soluciones" obtenidas son verdaderas soluciones.

Ejemplo 2.54. Resolvamos la ecuación $\frac{x}{x-1} + \frac{6}{x+3} = \frac{3x+1}{x^2+2x-3}$.

Como $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$, el mínimo común denominador es $(x + 3)(x - 1)$. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por este mínimo común denominador tenemos

$$(x + 3)(x - 1)\left(\frac{x}{x - 1} + \frac{6}{x + 3}\right) = (x + 3)(x - 1)\left(\frac{3x + 1}{x^2 + 2x - 3}\right)$$

que, al efectuar la multiplicación, se convierte en

$$x(x + 3) + 6(x - 1) = 3x + 1.$$

Simplificando, la ecuación anterior se reduce a

$$x^2 + 6x - 7 = 0.$$

Utilizando la fórmula 2.1 o bien escribiendo la ecuación anterior en la forma $(x + 7)(x - 1) = 0$, encontramos que las posibles soluciones de la ecuación inicial son $x = -7$ y $x = 1$. Como el valor $x = 1$ hace cero el denominador de uno de los términos de la ecuación inicial, este valor no es solución de la misma. Mediante una comprobación directa vemos que el valor $x = -7$ si satisface la ecuación y es, por lo tanto, su única solución.

Los números que aparecen como posibles soluciones de una ecuación, pero que en realidad no son verdaderas soluciones de esta, se llaman **soluciones extrañas** o **raíces extrañas** de la ecuación dada.

- **Ecuaciones que contienen radicales**

Para resolver ecuaciones que contienen radicales es necesario eliminar estos radicales elevando los miembros de la ecuación a las potencias adecuadas. Cuando se eleva un miembro a una potencia par generalmente se introducen soluciones extrañas y, por esta razón, es indispensable comprobar cuáles de los números que se obtienen como posibles soluciones, son en realidad soluciones de la ecuación original.

Ejemplo 2.55. Resolvamos la ecuación $\sqrt{7+3x} + \sqrt{1+x} = 6$.

Tenemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{7+3x} + \sqrt{1+x} &= 6 && \text{ecuación dada}\\
\sqrt{7+3x} &= 6 - \sqrt{1+x} && \text{aislando un radical}\\
\left(\sqrt{7+3x}\right)^2 &= \left(6 - \sqrt{1+x}\right)^2 && \text{elevando al cuadrado}\\
7 + 3x &= 36 - 12\sqrt{1+x} + 1 + x && \text{desarrollando los cuadrados}\\
-30 + 2x &= -12\sqrt{1+x} && \text{reduciendo términos semejantes,}\\
&&& \text{simplificando y aislando el término}\\
&&& \text{que contiene el radical}\\
(-30 + 2x)^2 &= (-12\sqrt{1+x})^2 && \text{elevando al cuadrado}\\
900 - 120x + 4x^2 &= 144(1+x) && \text{desarrollando los cuadrados}\\
4x^2 - 264x + 756 &= 0 && \text{reduciendo términos semejantes}\\
x^2 - 66x + 189 &= 0 && \text{dividiendo por 4}\\
(x-3)(x-63) &= 0 && \text{factorizando}\\
x = 3 \ \text{ o } \ x &= 63 && \text{resolviendo la ecuación}
\end{aligned}$$

Si $x = 3$, remplazando en la ecuación original tenemos

$$\sqrt{7+3(3)} + \sqrt{1+(3)} = 6 \quad \text{o sea} \quad 4 + 2 = 6$$

Luego, $x = 3$ es solución de la ecuación.

Si $x = 63$, remplazando en la ecuación original tenemos

$$\sqrt{7+3(63)} + \sqrt{1+(63)} = 6 \quad \text{o sea} \quad 14 + 8 = 6$$

Luego, $x = 63$ no es solución de la ecuación.

Por lo tanto, la única solución de la ecuación dada es $x = 3$.

2.6.2. Solución de inecuaciones

Como en el caso de las ecuaciones, el procedimiento para resolver inecuaciones consiste en transformarlas en inecuaciones equivalentes, hasta que se pueda determinar facilmente el conjunto solución.

Las herramientas para este trabajo son las propiedades del orden entre los números reales estudiadas en la sección 1.4. Por su uso tan frecuente nos permitimos recordar las siguientes:

Si $x < y$, entonces $x + z < y + z$ para todo número real z.

Si $x < y$ y $z > 0$, entonces $xz < yz$.

Si $x < y$ y $z < 0$, entonces $xz > yz$.

- **Solución de inecuaciones lineales**

Ejemplo 2.56. Resolvamos la inecuación

$$2x + 7 \leq 5x - 6$$

Las siguientes inecuaciones son equivalentes:

$$\begin{aligned} 2x + 7 &\leq 5x - 6 && \text{Inecuación dada} \\ -3x + 7 &\leq -6 && \text{Sumando } -5x \\ -3x &\leq -13 && \text{Sumando } -7 \\ x &\geq \frac{13}{3} && \text{Multiplicando por } -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación es

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{13}{3}\right\}$$

esto es, el intervalo $\left[\frac{13}{3}, \infty\right)$, que se muestra en la figura 2.1.

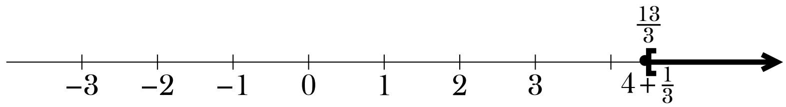


Figura 2.1.

Ejemplo 2.57. Resolvamos la inecuación

$$-5 < 4x + 1 < 9$$

Aunque la inecuación dada es equivalente a estas dos inecuaciones

$$-5 < 4x + 1 \quad \text{y} \quad 4x + 1 < 9,$$

las podemos resolver simultáneamente de la siguiente forma:

$-5 < 4x + 1 < 9$	Inecuación dada
$-6 < 4x < 8$	Sumando -1 en cada una de las tres expresiones
$-\frac{6}{4} < x < \frac{8}{4}$	Multiplicándolas por $\frac{1}{4}$
$-\frac{3}{2} < x < 2$	simplificando las fracciones.

Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad es

$$\left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{3}{2} < x < 2\right\}$$

esto es, el intervalo $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.

- **Solución de inecuaciones cuadráticas y de grado mayor que dos**

Una inecuación se llama cuadrática si tiene alguna de las formas siguientes:

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$
$$ax^2 + bx + c < 0$$

con $a \neq 0$.

Antes de indicar cómo se resuelven estas inecuaciones, recordemos que las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ donde $a \neq 0$ son

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Además, fácilmente se verifica que r_1 y r_2 satisfacen las siguientes relaciones

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}, \qquad r_1 r_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{y} \qquad ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

La última fórmula nos proporciona un método para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ en todos los casos posibles.

Veamos ahora cómo se resuelven las inecuaciones cuadráticas. Una primera simplificación que podemos hacer es suponer que $a > 0$, pues en caso contrario, multiplicando la desigualdad por -1, esta se transforma en otra inecuación cuadrática con $a > 0$.

Se presentan dos casos:

Caso 1 $b^2 - 4ac \geq 0$.

En este caso las soluciones r_1 y r_2 de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c = 0$ son reales, podemos factorizar el trinomio ax^2+bx+c en la forma $a(x-r_1)(x-r_2)$, y la inecuación se resuelve como en el ejemplo 2.58.

Caso 2 $b^2 - 4ac < 0$.

En este caso las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son complejas no reales, y la factorización $a(x-r_1)(x-r_2)$ no sirve para resolver la inecuación. Para resolver la inecuación, en este caso, procedemos de la siguiente forma:

Completamos el cuadrado:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las inecuaciones cuadráticas mencionadas al inicio de esta sección se transforman, en su orden, en M

$$\begin{aligned} a(x + \frac{b}{2a})^2 &> \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ a(x + \frac{b}{2a})^2 &\geq \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ a(x + \frac{b}{2a})^2 &\leq \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ a(x + \frac{b}{2a})^2 &< \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Como estamos suponiendo que $a > 0$ y sabemos que $b^2 - 4ac < 0$, las dos primeras desigualdades son válidas para todo número real y las dos últimas para ninguno.

Ejemplo 2.58. Resolvamos la inecuación $x^2 - 10x + 21 > 0$.

Factorizamos y obtenemos la inecuación $(x - 7)(x - 3) > 0$.

El producto $(x - 7)(x - 3)$ puede cambiar de signo solo en 7 o en 3, que son los puntos donde $x - 7 = 0$ o $x - 3 = 0$. A estos puntos los llamamos **puntos de separación** y dividen la recta en tres intervalos $(-\infty, 3)$, $(3, 7)$ y $(7, \infty)$.

En cada uno de estos intervalos $(x - 7)(x - 3)$ es positivo o es negativo, es decir, es positivo o es negativo para todo valor de x que pertenezca al intervalo. Para determinar el signo en cada intervalo usamos un punto de prueba, elegido dentro del intervalo. Por ejemplo, si tomamos $x = 0$ en el intervalo $(-\infty, 3)$ los valores de $(x-7)$ y $(x-3)$ son ambos negativos y por lo tanto $(x-7)(x-3) > 0$ en este intervalo. Similarmente, se procede con los otros intervalos. Los resultados se pueden expresar en una tabla de signos como la siguiente:

Intervalo	$(-\infty, 3)$	$(3, 7)$	$(7, \infty)$
Signo de $(x-7)$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x-3)$	$-$	$+$	$+$
Signo de $(x-7)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

donde el signo de $(x-7)(x-3)$ se obtiene aplicando las reglas de los signos.

Por lo tanto, vemos que el conjunto solución de la inecuación es $(-\infty, 3) \cup (7, \infty)$.

Una manera más práctica de resolver esta inecuación es elaborando un diagrama de signos, como se muestra en la figura 2.2.

Signo de $(x-7)$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x-3)$	$-$	$+$	$+$
Signo de $(x-7)(x-3)$	$+$	$-$	$+$
	3	7	

Figura 2.2.

En el diagrama, las líneas verticales corresponden a los puntos de separación y la recta horizontal es la recta real.

En la resolución de inecuaciones de grado mayor que 2, igualmente, hacemos uso de la factorización y de la regla de los signos.

Ejemplo 2.59. Resolvamos la inecuación $2x^2 + 4x + 5 \geq 0$.

En este caso tenemos que $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -24 < 0$. Por lo tanto, la ecuación $2x^2 + 4x + 5 = 0$ no tiene raíces reales y, de acuerdo con la teoría desarrollada, el conjunto solución de la inecuación $2x^2 + 4x + 5 \geq 0$ es todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.60. Resolvamos la inecuación $-5x^2 + 7x - 6 > 0$.

Multiplicamos por -1 y obtenemos la inecuación $5x^2 - 7x + 6 < 0$, que es equivalente a la inecuación dada.

Para esta última, tenemos que $b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = -71 < 0$. Por lo tanto, la ecuación $5x^2 - 7x + 6 = 0$ no tiene raíces reales y de acuerdo a la teoría desarrollada, el conjunto solución de la desigualdad $5x^2 - 7x + 6 < 0$

es $\varnothing$, el conjunto vacío. Es decir, la desigualdad original $-5x^2 + 7x - 6 > 0$ no tiene soluciones reales.

Recalcamos que cuando $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, las desigualdades cuadráticas, o tienen como conjunto solución todo $\mathbb{R}$, o no tienen soluciones reales.

Ejemplo 2.61. Resolvamos la inecuación $3x^2 - 10x + 2 \leq 0$.

En este caso, $b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 76 \geq 0$. Por lo tanto, la ecuación $3x^2 - 10x + 2 = 0$ tiene raíces reales que son

$$r_1 = \frac{10 + \sqrt{76}}{6} = \frac{10 + 2\sqrt{19}}{6} = \frac{5 + \sqrt{19}}{3} \quad \text{y}$$
$$r_2 = \frac{10 - \sqrt{76}}{6} = \frac{10 - 2\sqrt{19}}{6} = \frac{5 - \sqrt{19}}{3}$$

Luego, la factorización de $3x^2 - 10x + 2$ es

$$3x^2 - 10x + 2 = 3\left[x - \left(\frac{5 + \sqrt{19}}{3}\right)\right]\left[x - \left(\frac{5 - \sqrt{19}}{3}\right)\right]$$

y la desigualdad original es equivalente a

$$3\left[x - \left(\frac{5 + \sqrt{19}}{3}\right)\right]\left[x - \left(\frac{5 - \sqrt{19}}{3}\right)\right] \leq 0$$

Obsevando el diagrama de signos de la figura 2.3, vemos que la solución de la desigualdad es el intervalo $\left[\frac{5-\sqrt{19}}{3}, \frac{5+\sqrt{19}}{3}\right]$.

Signo de $\left[x - \left(\frac{5+\sqrt{19}}{3}\right)\right]$	$-$	$-$	$+$
Signo de $\left[x - \left(\frac{5-\sqrt{19}}{3}\right)\right]$	$-$	$+$	$+$
Signo resultante	$+$	$-$	$+$
	$\frac{5-\sqrt{19}}{3}$	$\frac{5+\sqrt{19}}{3}$	

Figura 2.3.

Ejemplo 2.62. Resolvamos la inecuación

$$(2x + 3)(4 - x)(x + 5) \leq 0$$

Elaboramos un diagrama de signos. Primero, obtenemos los puntos de separación resolviendo las ecuaciones $2x + 3 = 0$, $4 - x = 0$ y $x + 5 = 0$. Estos puntos son $-\frac{3}{2}$, 4 y -5. Observemos el diagrama de la figura 2.4.

Signo de $(2x+3)$	$-$	$-$	$+$	$+$
Signo de $(4-x)$	$+$	$+$	$+$	$-$
Signo de $(x+5)$	$-$	$+$	$+$	$+$
Signo resultante	$+$	$-$	$+$	$-$
	-5	$-\frac{3}{2}$	4	

Figura 2.4.

Analizando el signo resultante, es decir, el signo de $(2x+3)(4-x)(x+5)$, vemos que la solución de la desigualdad dada es $\left[-5, -\frac{3}{2}\right] \cup [4, \infty)$.

También la factorización y las reglas de los signos son herramientas útiles para resolver inecuaciones que incluyen fracciones racionales.

Ejemplo 2.63. Resolvamos la inecuación

$$\frac{3x-1}{x+4} > 2$$

La inecuación es equivalente a cada una de las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{x+4} - 2 &> 0 \\ \frac{(3x-1)-2(x+4)}{x+4} &> 0 \\ \frac{x-9}{x+4} &> 0 \end{aligned}$$

Elaborando el diagrama de signos tenemos

Signo de $(x-9)$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x+4)$	$-$	$+$	$+$
Signo resultante	$+$	$-$	$+$
	-4	9	

Figura 2.5.

Por lo tanto, la solución de la inecuación es $(-\infty, -4) \cup (9, \infty)$.

Notemos que si para resolver la inecuación $\frac{3x-1}{x+4} > 2$ multiplicamos por $x + 4$ tanto $\frac{3x-1}{x+4}$ como 2 y resolvemos (más sencillamente) la inecuación lineal

$$\begin{aligned} 3x - 1 &> 2(x + 4) \\ 3x - 1 &> 2x + 8 \\ 3x - 2x &> 8 + 1 \\ x &> 9 \end{aligned}$$

Obtenemos como conjunto solución el intervalo $(9, \infty)$ en lugar de $(-\infty, -4) \cup (9, \infty)$. La diferencia entre los dos procedimientos radica en que al multiplicar $\frac{3x-1}{x+4} > 2$ por $x + 4$ y pasar a la inecuación $3x - 1 > 2(x + 4)$, implícitamente estamos suponiendo que $x + 4 > 0$ con lo cual solo estamos hallando las soluciones x que cumplen esta condición, es decir, tales que $x > -4$. Necesitamos completar el procedimiento buscando las soluciones x con $x < -4$, es decir, soluciones x para las cuales $x + 4 < 0$. En este caso, de la inecuación $\frac{3x-1}{x+4} > 2$ pasamos a la inecuación lineal

$$\begin{aligned} 3x - 1 &< 2(x + 4) \\ 3x - 1 &< 2x + 8 \\ 3x - 2x &< 8 + 1 \\ x &< 9 \end{aligned}$$

Esta condición junto y la condición $x < -4$ implican que $x < -4$, de donde la solución parcial es el intervalo $(-\infty, -4)$. Así, la solución total es $(-\infty, -4) \cup (9, \infty)$ como en el procedimiento anterior.

- **Solución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto**

En el capítulo 1 definimos el valor absoluto de un número real x, que representamos por $|x|$, mediante

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

También observamos en dicho capítulo que $|x|$ representa la distancia del origen al punto x sobre la recta real y, de forma más general, que $|x_1 - x_2|$ representa la distancia entre x_1 y x_2 sobre esa recta.

Ahora bien, al elevar un número real x al cuadrado obtenemos el número real x^2 que es positivo o cero y al extraer la raíz cuadrada positiva (raíz principal) de este número x^2 obtenemos un número positivo o cero que es el mismo x si x es positivo o cero. Por ejemplo, $\sqrt{(4)^2} = \sqrt{16} = 4$.

Si x es negativo, el resultado de elevarlo al cuadrado y, luego, extraer la raíz cuadrada positiva de ese cuadrado no puede ser un número negativo, entonces no puede ser x. Además $\left(\sqrt{x^2}\right)^2 = x^2$, entonces el resultado es $-x$, $\sqrt{x^2} = -x$, por ejemplo, $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -(-3)$. Con lo anterior tenemos que

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Así, resulta la igualdad

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Entre las siguientes propiedades del valor absoluto, las cinco primeras indican cómo se comporta con respectos al opuesto y a las operaciones de multiplicación, división, adición y la sustracción.

Propiedades del valor absoluto. Si x y y son números reales arbitrarios entonces:

1. $|-x| = |x|$
2. $|xy| = |x|\,|y|$
3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, para $y \neq 0$
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular)
5. $|x| - |y| \leq |x - y|$ y $|y| - |x| \leq |x - y|$
6. Si $a \geq 0$ entonces $|x| = a$ es equivalente a $x = a$ o $x = -a$
7. Si $a \geq 0$, $|x| \leq a$ es equivalente a $-a \leq x \leq a$
8. Si $a \geq 0$, $|x| \geq a$ es equivalente a $x \geq a$ o $x \leq -a$

   Justificación de las dos propiedades anteriores:

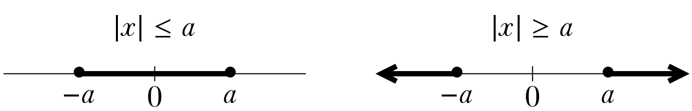


Figura 2.6.

Otra propiedad del valor absoluto, muy utilizada en la solución de inecuaciones, es la siguiente

9. $|x| \leq |y|$ es equivalente a $x^2 \leq y^2$

En la propiedad 7 el símbolo $\leq$ puede remplazarse por $<$, si $a > 0$, y en la propiedad 8 el símbolo $\geq$ puede remplazarse por $>$.

Ejemplo 2.64. Resolvamos la inecuación $|3 - 4x| \leq 7$.

Utilizando la propiedad 7, tenemos la siguiente cadena de inecuaciones equivalentes:

$\lvert 3 - 4x\rvert \leq 7$	Inecuación dada
$-7 \leq 3 - 4x \leq 7$	Utilizando la propiedad 7
$-10 \leq -4x \leq 4$	Restando 3 en cada expresión
$-\dfrac{10}{4} \leq -x \leq 1$	Dividiendo por 4
$\dfrac{10}{4} \geq x \geq -1$	Multiplicando por -1

Por lo tanto, la solución de la inecuación es el intervalo $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$.

Ejemplo 2.65. Resolvamos la inecuación $|5x + 14| > 10$ y la ecuación $|5x + 14| = 10$.

La propiedad 8 nos dice que la inecuación es equivalente a

$$5x + 14 > 10 \quad \text{o} \quad 5x + 14 < -10$$

Resolviendo $5x > -4$ o $5x < -24$ o sea

$$x > -\frac{4}{5} \quad \text{o} \quad x < -\frac{24}{5}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación dada es

$$\left(-\infty, -\frac{24}{5}\right) \cup \left(-\frac{4}{5}, \infty\right)$$

Para la ecuación $|5x+14| = 10$, de acuerdo con la propiedad 6, $5x+14 = 10$ o $5x + 14 = -10$ entonces $x = \frac{10-14}{5} = -\frac{4}{5}$ o $x = \frac{-10-14}{5} = -\frac{24}{5}$.

Ejemplo 2.66. Resolvamos la inecuación $\left|\frac{2x-1}{x+3}\right| \geq 3$.

Utilizando la propiedad 9 del valor absoluto, tenemos la siguiente cadena de desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2x-1}{x+3}\right| &\geq 3 \;\text{ para }\; x \neq -3 \\
\frac{|2x-1|}{|x+3|} &\geq 3 \;\text{ para }\; x \neq -3 \\
|2x-1| &\geq 3|x+3| \;\text{ notemos que }\; |x+3| > 0 \\
(2x-1)^2 &\geq 9(x+3)^2 \;\text{ para }\; x \neq -3 \\
(2x-1)^2 - 9(x+3)^2 &\geq 0 \;\text{ para }\; x \neq -3 \\
[(2x-1)-3(x+3)][(2x-1)+3(x+3)] &\geq 0 \;\text{ para }\; x \neq -3 \\
(-x-10)(5x+8) &\geq 0 \;\text{ para }\; x \neq -3
\end{aligned}$$

Observando el diagrama de los signos de la figura 2.7, vemos que la solución de la desigualdad es $\left[-10, -\frac{8}{5}\right]$, $x \neq -3$. Es decir, la solución es $[-10, -3) \cup \left(-3, -\frac{8}{5}\right]$

Signo de $(-x-10)$	$+$	$-$	$-$
Signo de $(5x+8)$	$-$	$-$	$+$
Signo restante	$-$	$+$	$-$
	-10	$-\frac{8}{5}$	

Figura 2.7.

2.7. Resolución de problemas

La resolución de ecuaciones y de inecuaciones son usadas para resolver problemas de aplicación práctica. Un paso que puede presentar dificultad, en ese caso, es convertir un enunciado expresado en lenguaje natural en un problema matemático expresado mediante ecuaciones o inecuaciones que deben ser resueltas para dar solución al problema original. Por ello, conviene tener en cuenta que existen técnicas para la resolución de problemas de aplicación práctica. En su libro *How to solve it*, George Polya (1888-1985) propuso un proceso de cuatro pasos para resolver problemas:

1. Entender el problema.
2. Formular un plan.
3. Realizar el plan.
4. Revisar y comprobar.

Para llevar a la práctica técnicas de resolución de problemas pueden resultar útiles las siguientes estrategias:

1. Leer y analizar cuidadosamente el problema hasta que se entienda completamente. En particular, debe identificar las condiciones, los datos y determinar muy claramente qué debe encontrar.
2. De ser posible, de acuerdo con las condiciones del problema, elaborar una tabla con los datos o dibujar un diagrama e identificar en él los datos y las cantidades buscadas.
3. Introducir una notación asignando símbolos de variables como x, y, z, etc., a las cantidades por determinar. Situar los datos y estos símbolos sobre el diagrama, si se ha elaborado uno.
4. Expresar las variables usadas, x, y, z, etc., en términos de una sola de ellas o de otros símbolos, de acuerdo con los datos del problema. Utilizar la información dada para hallar relaciones entre símbolos y datos, expresadas en forma de ecuaciones o inecuaciones.
5. Resolver estas.
6. Interpretar las soluciones obtenidas en términos del problema dado, verificar que tienen sentido, que satisfacen las condiciones del problema y que este se ha solucionado completamente.

En los dos ejemplos que incluimos a continuación resolvemos dos problemas siguiendo los pasos antes mencionados.

Ejemplo 2.67. Se debe mezclar 20 litros de una solución ácida al 30 % con una segunda solución ácida al 70 %. Si la mezcla debe ser una solución al 60 % ¿cuántos litros de solución al 70 % se requieren?

1. Los datos nos dicen que los 20 litros contienen 30 % de ácido puro, es decir, contiene $20 \times \frac{30}{100} = 6$ litros de ácido puro. De la segunda solución, de cada 100 litros, 70 deben ser de ácido. De la solución final, de cada 100 litros, 60 deben ser de ácido. Debemos hallar el número de litros de la segunda solución.

2. En este caso no elaboramos tabla o esquema alguno.

3. Usemos x para denotar el número de litros al $70\,\%$ que se requiere. Esa es la única variable que introducimos.

4. De acuerdo con los datos tenemos que en los 20 litros al $30\,\%$ hay $20 \times \frac{30}{100} = 6$ litros de ácido puro.

   La segunda solución, de x litros, contendrá $x \times \frac{70}{100} = \frac{7}{10}x$ litros de ácido puro.

   La solución final, que se obtendrá de adicionar los 20 litros de la primera y los x litros de la segunda, contendrá en total $20 + x$ litros y de ellos contendrá $(20 + x) \times \frac{60}{100}$ litros de ácido puro.

   Así, tenemos dos expresiones para la cantidad de ácido puro que contendrá la mezcla final. Por una parte, $6 + \frac{7}{10}x$ litros que corresponde al aporte de ácido puro de la dos soluciones que se mezclan. Por otra parte, $(20 + x)\times\frac{60}{100} = \frac{3}{5}(20 + x)$ litros. Entonces tenemos la siguiente igualdad $6 + \frac{7}{10}x = \frac{3}{5}(20 + x)$.

5. Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}
6 + \frac{7}{10}x &= \frac{3}{5}(20 + x)\\
6 + \frac{7}{10}x &= 12 + \frac{3}{5}x\\
\frac{7}{10}x - \frac{3}{5}x &= 12 - 6\\
\left(\frac{7}{10} - \frac{3}{5}\right)x &= 6\\
\frac{7-6}{10}x &= 6\\
\frac{1}{10}x &= 6\\
x &= 60
\end{aligned}$$

6. 60 es el número de litros requerido de la solución al $70\,\%$.

Comprobamos: la cantidad de ácido puro de la solución al $70\,\%$ es $60\times\frac{70}{100} = 42$ litros. La cantidad de mezcla final es de $20+60 = 80$ litros los cuales contendrán ácido puro que aportan respectivamente las soluciones al $30\,\%$ y al $70\,\%$. En total 48 litros. Este número corresponde efectivamente al $60\,\%$ de los 80 litros de la mezcla final.

Ejemplo 2.68. En tres evaluaciones de una asignatura, un estudiante ha obtenido estas notas sobre 5.0: 4.0, 3.8 y 3.2. Si él desea obtener un promedio de, por lo menos, 3.6/5.0 ¿cuál es la menor nota que puede obtener en la cuarta y última evaluación?

1. Determinar la menor nota admisible en la cuarta evaluación.
2. En este caso no elaboramos tabla o esquema alguno.
3. Usemos x para denotar la nota de la cuarta evaluación.
4. El promedio después de la cuarta evaluación será $\frac{4.0+3.8+3.2+x}{4}$. Ese promedio debe ser, por lo menos, de 3.6, es decir, se debe tener $\frac{4.0+3.8+3.2+x}{4} \geq 3.6$.
5. Al resolver esta inecuación tenemos
$$\begin{aligned}\frac{4.0+3.8+3.2+x}{4} &\geq 3.6\\ 11.0+x &\geq 14.4\\ x &\geq 14.4-11.0\\ x &\geq 3.4\end{aligned}$$
6. La nota de la cuarta evaluación debe ser, por lo menos, de 3.4 sobre 5.0.

   Al verificar, el promedio con esta nota será $\frac{4.0+3.8+3.2+3.4}{4} = \frac{14.4}{4} = 3.6$. Si la nota de la cuarta evaluación fuera mayor, el promedio será mayor.

Taller 1

1. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. En cada caso justificar su respuesta.

   a) Si x es un número real diferente de cero y n es un entero positivo, entonces
   $$\left(\frac{12x^{2n-2}}{6x^{n-2}}\right)^4 \left(\frac{1}{2x^{2n}}\right)^2 = 4x$$

   b) Si a y b son números reales diferentes de cero, entonces
   $$\left(\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}\right)^{-1} = \frac{ab}{a+b}.$$

c) Si p y q son números reales diferentes de cero, entonces

$$\left(\frac{p^{-1}q^{-1}}{p^{-1}-q^{-1}}\right)^{-2}=\frac{p^2q^2}{p^2-q^2}.$$

d) Para todo número real x, se tiene que

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=1.$$

e) Para todo número real a, se tiene que $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2=a$.

f) Para todo número real a, y todo r y s números racionales positivos, se tiene que $(a^r)^s=a^{rs}$.

g) Si x, y y z son números reales distintos de cero entonces

$$\frac{64^{2/3}x^{-2/5}y^{-1/3}z^{1/2}}{32^{4/5}x^{3/5}y^{-1}z^{-1/2}}=\frac{y^{2/3}z}{x}.$$

h) Para todo x, y y z números reales distintos de cero, se tiene que

$$\sqrt[5]{\frac{-96x^{25}y^{12}}{z^6}}=-\frac{2x^5y^2}{z^2}\sqrt[5]{3y^2z^4}.$$

i) Si a y b son números reales positivos, entonces

$$\frac{\sqrt{56a^6b^{-1}}\sqrt{108a^{-3}b^3}}{\sqrt{21ab^{-5}}}=12a^3\sqrt{2z}.$$

j) Para todo a y b reales, se tiene que

$$\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}=a+b.$$

k) Para todo número real $z\neq 0$, se tiene que

$$\left(z^{-5}-z^{-10}\right)^{\frac{3}{5}}=\frac{\left(z^5-1\right)^{\frac{3}{5}}}{z^6}.$$

l) Para todo x y y números reales, se tiene que

$$\sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=\sqrt[3]{2x}.$$

Taller 2

1. En cada caso dividir $f(x)$ por $p(x)$

    a) $f(x) = 27x^4 - 36x^2 + x + 9, \quad p(x) = 3x^2 + x + 2$

    b) $f(x) = 7x + 6, \quad p(x) = 2x^2 - 3$

    c) $f(x) = x^2 + x + 1, \quad p(x) = x^2 + 1$

2. Usar división sintética para determinar el cociente y el residuo de dividir $f(x)$ por $p(x)$ en cada uno de los siguientes casos:

    a) $f(x) = x^5 - 3x^2 + 4x + 5, \quad p(x) = x - \frac{1}{4}$

    b) $f(x) = -4x^6 - 21x^5 + 26x^3 - 27x, \quad p(x) = x + 5$

3. Usar el teorema del residuo para determinar el residuo de dividir $f(x)$ por $p(x)$ en cada uno de los siguientes casos:

    a) $f(x) = 2x^7 - 3x^5 + 4x - 2, \quad p(x) = x + 2$

    b) $f(x) = \frac{x^4}{27} - \frac{x^3}{9} + x + 1, \quad p(x) = x - 3$

    c) $f(x) = 6x^{100} + 10x^{85} - x^{38} + 4x^{17} - 12, \quad p(x) = x - 1.$

4. En cada caso, usar el teorema del factor para demostrar que $p(x)$ es factor de $f(x)$:

    a) $f(x) = 6x^{100} + 10x^{85} - 8x^{38} + 4x^{17} - 12, \quad p(x) = x - 1$

    b) $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1, \quad p(x) = x + 1$

    c) $f(x) = 5x^{12} - 20\,480, \quad p(x) = x - 2$

    d) $f(x) = x^{49} + 3^{49}, \quad p(x) = x + 3$

    e) $f(x) = 6x^3 - 7x^2 + 1, \quad p(x) = x - \frac{1}{2}$

5. Responder. ¿Para qué valores de k, $f(x)$ es divisible por el polinomio lineal $p(x)$?

    a) $f(x) = x^3 - k^2x^2 - 8kx - 16, p(x) = x - 4$

    b) $f(x) = kx^3 - 17x^2 - 4kx + 5, p(x) = x - 5$

6. Hallar todos los valores de k para los cuales el residuo de dividir $f(x) = 3x^2 + 4kx^2 + 6$, por $x + 2$ sea -2.

7. Responder. Si se divide $f(x) = x^2 - 5x + 5$, por $x - c$ y se obtiene como residuo $r = -1$ ¿a qué es igual c?

8. Hallar el polinomio $f(x)$ de coeficientes reales y coeficiente principal 1, que tiene el grado y las raíces que se indican:

   a) grado 4, raíces $-\frac{1}{2}, 1, 3, -3$

   b) grado 4, raíces $-\frac{1}{4} - 3i, 0, -3$

   c) grado 5, raíces $-3i, 1+i, 2$

9. Determinar el polinomio $f(x)$ de grado 3 y coeficientes reales que tenga los ceros indicados y satisfaga la condición dada:

   a) $-1, 2, 3, f(-2) = 80$

   b) $-3, -2, 0, f(-4) = 16$

   c) $-2i, 2i, 3, f(1) = 20$

10. Hallar el polinomio $f(x)$ de grado 7 para el cual -2 y 2 son raíces de multiplicidad 2, 0 es raíz de multiplicidad 3 y $f(-1) = 27$.

11. Para cada uno de los siguientes polinomios hallar todas sus raíces y escribirlo como producto de factores lineales:

    a) $x^3 - x^2 + x - 1$

    b) $2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$

    c) $8x^6 + 7x^3 - 1$

    d) $x^6 - 64$

Taller 3

1. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. En cada caso justificar su respuesta.

   a) Para todos x y y números reales se tiene que $(2x+3y)^2 = 4x^2 + 9y^2$.

   b) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 = 10$.

   c) Para todo número real a se tiene que $a^2 - 2a - 8 = (a-2)(a+4)$.

   d) Para todos x y y números reales se tiene que $16x^2 - 9y^2 = (4x-3y)^2$.

   e) Para todos z y y números reales se tiene que $z^3 - y^3 = (z-y)\left(z^2+y^2\right)$.

   f) Para todo número real x se tiene que $27x^3 - 64 = (3x-4)\left(9x^2+12x+16\right)$.

g) Para todos t y s números reales se tiene que $t^8 - 9t^2s^2 = t^2\left(t^4 - 9s^2\right) = t^2\left(t^2 - 3s\right)\left(t^2 + 3s\right)$.

h) Para todo número real b se tiene que $b^3 + 64 = (b+4)\left(b^2 + 16\right)$.

i) Para todos x y y números reales se tiene que $4x^2 - 2xy - 6y^2 = (x+y)(4x-6y)$.

j) Para todos m y n números reales se tiene que $6m^2 - 26m - 20 = (2m-10)(3m+2)$.

k) Para todos x y y números reales se tiene que $(3x - 2y + 5)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2 + 25$.

l) Para todo número real z se tiene que $z^4 + 2z^2 + 9 = \left(z^2 - 2z + 3\right)\left(z^2 + 2z + 3\right)$.

m) Para todos x y y números reales se tiene que $x^4y^4 - 8xy = \left(x^2y^2 - 2\right)\left(x^2y^2 + 2xy + 4\right)$.

n) Si los denominadores son distintos de cero, se tiene que $\frac{y+4}{(2y+9)y+4} = \frac{1}{2y+1}$.

ñ) Si los cocientes están definidos, se tiene que $\frac{x-2}{(3x-5)x-2} = \frac{1}{3x-5}$.

o) Para todo número real $x \neq 0$ se tiene que $\frac{5x-1}{x+x^2} + \frac{3}{x-x^2} = \frac{5x+2}{2x}$.

p) Suponiendo que las fracciones están definidas, se tiene que $\frac{1}{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x+h} + \sqrt[3]{x}}{h}$.

q) Al dividir el polinomio $2x^4 - x^3y + 2xy^3 - y^4$ por el polinomio $x^2 - xy + y^2$ el residuo es 0.

2. En cada caso efectuar las operaciones y simplificar hasta donde sea posible.

a) $\frac{2^{n+3} - 2^n + 7}{2^{n+1} - 2^n + 1}$.

b) $\frac{4x^2 - 15x - 4}{8x^2 - 10x - 3}$.

c) $\left(\frac{15s^2 + 2st - 8t^2}{3s^2 + st - 2t^2}\right)\left(\frac{2s^2 + st - t^2}{5s^2 - st - 4t^2}\right)$.

d) $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 6x + 8} \div \frac{x^2 + 10x + 24}{x^2 - 2x - 8}$.

e) $\frac{x}{(x-y)(x-z)} + \frac{y}{(y-x)(y-z)} + \frac{z}{(z-x)(z-y)}$.

f) $\frac{2x-1}{2x^2 - x - 6} + \frac{x+3}{6x^2 + x - 12} - \frac{2x-3}{3x^2 - 10x + 8}$.

g) $\frac{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}}{x + \frac{x^3}{1-x^2}}$.

3. *a*) En cada caso racionalizar el numerador.
   1) $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$
   2) $\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}{16x^2-y^2}$
   3) $\frac{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x-4}}{x}$
   4) $\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$

   b) En cada caso racionalizar el denominador.
   1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}$
   2) $\frac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
   3) $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}-3}$
   4) $\frac{y}{y+\sqrt[3]{x}}$

Taller 4

1. Resolver cada una de las siguientes ecuaciones.

   a) $\frac{2}{y+5} - \frac{y+3}{(y+4)(y+5)} = \frac{1}{4(y-8)}$
   b) $y^4 - 10y^2 + 21 = 0$
   c) $4z^{2/3} - 8z^{1/3} + 3 = 0$
   d) $x^{\frac{2}{5}} - x^{\frac{1}{5}} - 2 = 0$
   e) $6x - 7\sqrt{x} + 2 = 0$
   f) $\sqrt{x} - 6\sqrt[4]{x} + 9 = 0$
   g) $\sqrt{2x + \sqrt{6+x}} = 3$
   h) $\sqrt{1-5x} + \sqrt{1-x} = 0$
   i) $\sqrt{x-5} + \sqrt{x-2} = 1$
   j) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} - 2 = 0$
   k) $\sqrt{4x-3x} + \sqrt{3x-9} = \sqrt{3x-14}$

2. Resolver cada una de las siguientes inecuaciones.

   a) $5x - 4 \leq 8x + 3$
   b) $6x^2 + 10x - 4 > 0$
   c) $2x^2 + 3x - 3 \leq 0$
   d) $-2x^2 + x - 1 < 0$

e) $(3-x)(x+2)(4x-11)>0$

f) $\frac{2x+3}{4x-1}\leq 2$

g) $\frac{3}{1-x}>\frac{5}{3x-6}$

h) $\frac{1}{x-2}-\frac{20}{x^2-4}<2$

i) $\frac{\sqrt{x-3}}{x^2-4x-5}\leq 0$

j) $2x^3-5x^2-x+6<0$

3. Resolver cada una de las siguientes inecuaciones.

a) $\left|\frac{3x+4}{2}\right|\leq 1$

b) $|6-2x|>8$

c) $3\leq|2x-3|\leq 7$

d) $\left|\frac{x+2}{3x-1}\right|\leq 4$

e) $\left|\frac{x+6}{2x+1}\right|>2$

f) $|x|>|x-1|$

g) $|2-|x+1||<1$

h) $|x-3|+|x+3|<18$

i) $|7x+3|+|3-x|\geq 6|x+1|$

4. Responder. Para qué valores de k la desigualdad $\left(k^2-1\right)x^2+2(k-1)x+2>0$ es verdadera para todo $x\in\mathbb{R}$.

Taller 5

1. Se desea enchapar el corredor de ingreso de un apartamento de 60 cm de ancho por 4, 8 m de largo, utilizando solamente baldosas completas. En el mercado se encuentran tres clases de baldosas de las siguientes características:

a) Baldosas de 30×30 cm, empacadas en cajas de 11 unidades a precio de \$35 800 por caja, y admite devolución hasta de dos baldosas a \$3000 cada una.

b) Baldosas de 20×20 cm, empacadas en cajas de 25 unidades a precio de \$36 000 por caja, y admite devolución hasta de cuatro baldosas a \$1200 cada una.

c) Baldosas de 25×20 cm, empacadas en cajas de 20 unidades a precio de \$30 000 por caja, y admite devolución hasta de dos baldosas a \$2000 cada una.

¿Cuántas baldosas de cada tamaño se necesitan para hacer el enchape? ¿Cuál es el enchape más económico y cuánto cuesta?

2. En un examen aplicado a 200 estudiantes, $\frac{3}{10}$ obtuvieron como calificación más de 4 (sobre 5), y $\frac{5}{7}$ de los restantes obtuvieron calificación entre 3 y 4. ¿Cuántos estudiantes perdieron la prueba?

3. Un empleado recibe un aumento del 10 % en un mes y al siguiente mes le reducen el salario en un 10 % ¿Cuál era el salario original mensual si después del aumento y la reducción recibió \$198 000?

4. Juan vende su bicicleta y su calculadora en \$120 000 cada una. Si en la bicicleta perdió el 20 % del costo y en la calculadora ganó el 20 % del costo, ¿Cuánto ganó o perdió en total?

5. Individualmente, Jairo puede realizar un trabajo en 3 horas y Pedro puede realizarlo en 4 horas. ¿En cuánto tiempo lo realizarán si trabajan juntos?

6. La administración de un parque natural estimó el número total de individuos de cierta especie usando la técnica de captura-marca-recaptura. Inicialmente marcó y liberó 100 individuos. Tres meses después cuando los individuos estaban suficientemente mezclados, capturó 100 individuos y entre ellos encontró 4 marcados. Si suponemos que la proporción de individuos marcados en la segunda muestra es igual a la proporción de individuos marcados en la población total, ¿cuál es la población total de dicha especie?

7. Un ganadero vendió parte de un lote de ganado en 35 millones y el resto en 16 millones. Si en el primer grupo había el doble de reses que en el segundo, y vendió cada res del primer grupo en \$75 000 más que cada res del segundo, ¿cuántas reses había en cada grupo?

8. Luis empieza a jugar con cierta cantidad de dinero. Primero, gana una cantidad igual a la que tenía al comenzar el juego; después, pierde \$80, más tarde pierde los $\frac{2}{3}$ de lo que le queda y, finalmente, pierde el resto que le queda que es igual a los $\frac{13}{15}$ de la cantidad con que empezó a jugar. ¿Con cuánto dinero empezó Luis el juego?

9. Si el mayor de dos enteros cuya suma es 88 se divide por el más pequeño, el cociente es 5 y el residuo es 10, ¿cuáles son los números?

10. Las notas de un estudiante son 28, 32, 40 y 20. Si el examen final vale el 30 %, ¿qué nota debe obtener el estudiante en el examen para que su nota definitiva sea 35?

11. Una lámina metálica de 16 cm de anchura se dobla para hacer una artesa abierta de sección transversal rectangular de 30 cm^2 de área. Hallar la profundidad y anchura de la artesa. ¿Cuántas soluciones hay?

12. Un triángulo rectángulo de 210 m^2 de área tiene un perímetro de 70 m. Hallar los lados del triángulo.

13. Se puede llenar una piscina mediante dos mangueras en 4 horas. Si se usan las dos mangueras separadamente, la más pequeña gasta 6 horas más que la más grande en llenar la piscina. ¿En cuánto tiempo se llena la piscina si se usa solo la más pequeña de las mangueras?

14. Una barra metálica contiene un 20 % plata y una segunda barra un 12 %. ¿Cuántos kilos de cada una deben tomarse para fabricar una barra de 40 kilos que contenga un 14, 5 % de plata?

15. Dos ciudades A y B están separadas por 360 km. A la 1 p. m. parte un carro de A hacia B viajando con velocidad uniforme. Una hora más tarde parte un carro de B hacia A y viaja con una velocidad mayor en 15 km/h que la del primero. Si los dos carros se encuentran en la mitad del camino entre las dos ciudades, ¿cuál es la velocidad del primer carro?

16. Un grupo de estudiantes alquila por \$8000 un aparato para realizar un experimento, pagando el costo en partes iguales entre ellos. Una semana más tarde el grupo alquila nuevamente el aparato pero faltaron 10 estudiantes y los restantes tuvieron que pagar \$40 adicionales por el alquiler. ¿Cuántos estudiantes formaban el grupo?

17. Dos hombres trabajando juntos hacen un trabajo en $6\frac{2}{3}$ horas. Los hombres empiezan a trabajar juntos, uno de ellos se enferma 3 horas después y el otro termina el trabajo laborando $8\frac{1}{4}$ horas más. ¿En cuánto tiempo hace cada hombre el trabajo si laborara solo?

18. Una persona pone a rentar \$110 000, parte a cierta tasa de interés y parte a otra tasa, y cada parte le produce el mismo rendimiento. Si la

primera parte se coloca a la tasa de la segunda y la segunda a la tasa de la primera rentan \$2800 y \$2000, respectivamente. Hallar el valor de las dos partes y de las dos tasas.

Problemas que implican desigualdades

19. Una agencia de alquiler de autos cobra \$200 000 semanalmente, más \$50 por cada km de recorrido. Describir mediante una desigualdad el costo semanal para una persona que planea recorrer entre 1800 y 2300 km en su semana de vacaciones.

20. Un inversionista tiene \$10 000 dólares invertidos al 8 %, y tiene la oportunidad de invertir más dinero al 15 %. Hallar la cantidad adicional que debe invertir para que su rendimiento total sea mayor del 12 %.

21. Si el perímetro de un lote rectangular es menor que 300 m, y su longitud es de 80 m, ¿cuál es es ancho del lote?

22. Un platero desea obtener una aleación que contenga entre el 72 % y el 75 % de plata. Determinar las cantidades mínima y máxima de una aleación de plata al 80 % que deban combinarse con una aleación de plata al 65 % con el fin de tener 30 gramos de la aleación requerida.

23. Responder. ¿Cuál es la cantidad mínima de alcohol puro que debe agregarse a 24 litros de una solución de alcohol al 20 % para obtener una mezcla que tenga al menos 30 % de alcohol?

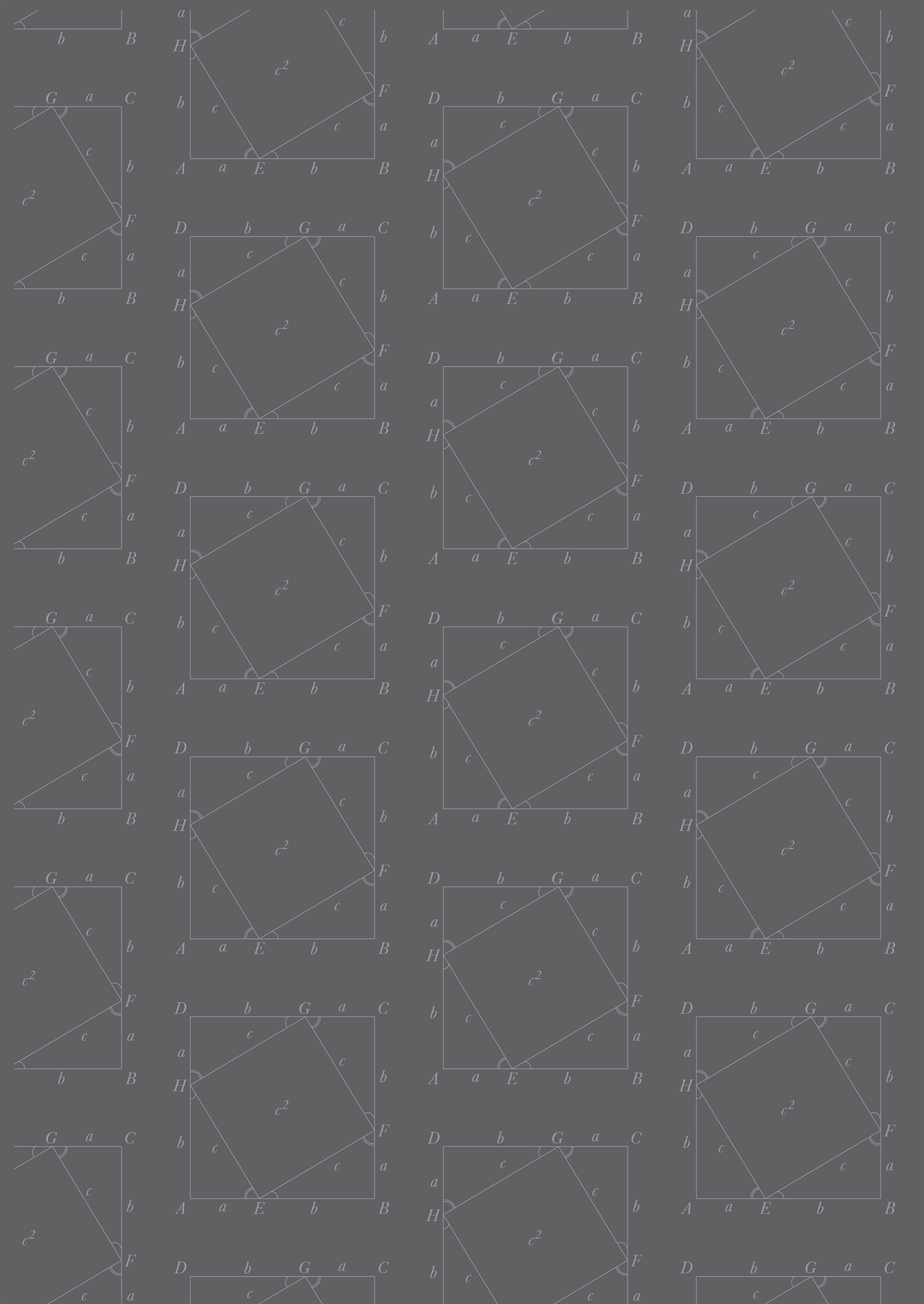
24. El interior de una pista de carreras de longitud 500 m, consta de un rectángulo con semicírculos en dos lados opuestos. Hallar las dimensiones que hacen máxima el área del rectángulo.

25. Un fabricante de cuadernos calcula que puede vender 4800 al mes a \$2800 cada uno y que si rebajase el precio podría vender 400 más mensualmente por cada rebaja de \$100. Si cada cuaderno le cuesta al fabricante \$1200, ¿a qué precio debe vender cada cuaderno para obtener la máxima ganancia?

26. El propietario de un huerto de manzanas calcula que si siembra 24 árboles por acre, entonces cada árbol adulto dará 600 manzanas al año. Por cada 3 árboles más que se planten por acre el número de manzanas que produce cada árbol disminuye en 12 al año. ¿Cuántos árboles se deben plantar por acre para obtener el mayor número posible de manzanas al año?

Capítulo *tres*

Geometría



D b G a C
c c
a b
H c²
F
b c c a
A a E b B

3.1. Introducción histórica

Desde sus orígenes como una herramienta para describir y medir figuras, la geometría ha desarrollado un gran número de teorías y métodos con los cuales se pueden construir y estudiar modelos tanto del mundo físico, como de otros fenómenos del mundo real. El estudio de las magnitudes, por ejemplo, constituye parte fundamental de la vida cotidiana y es básico en las ciencias naturales. Continuamente nos encontramos, además, con representaciones planas de objetos espaciales que aparecen en los dibujos y en las imágenes y estas deben ser analizadas y usadas para construir objetos. La geometría es una valiosa herramienta tanto para construir representaciones visuales de conceptos y procedimientos de otros dominios de las matemáticas y de otras ciencias, como para desarrollar pensamiento y comprensión.

La geometría es un punto de encuentro de la matemática como teoría y la matemática como fuente de modelos. Es en la actualidad una herramienta con aplicaciones en estudios tradicionales como en campos innovadores: gráficos computarizados, procesamiento de imágenes, patrones de reconocimiento, robótica e investigación de operaciones. Es pues una herramienta manipulativa, intuitiva, deductiva y analítica.

Pero, ¿cómo fueron realmente los inicios de esta importante rama de la matemática? Reseñaremos a continuación algunos apartes de las primeras fases de su desarrollo.

La historia nos enseña que el desarrollo de cualquier rama de la matemática se ha llevado a cabo de una manera gradual. Frecuentemente han sido necesarias varias décadas y aún cientos de años de esfuerzos antes de conseguir un avance importante y, en muchas ocasiones, lo que se consigue es simplemente un punto de partida para desarrollos más completos y avanzados. Esto sucedió, desde luego, con el desarrollo de la geometría. En sus inicios, aproximadamente 3000 años a. C., en las culturas egipcia y babilónica se encuentran los primeros rasgos de su desarrollo.

En Babilonia no se constituyó realmente como una rama independiente de la matemática. Se estudió en conexión con problemas prácticos, pero aún algunos de estos problemas, como los de reparto de terrenos o construcción (que en nuestros días se relacionan con la geometría y la medición), se transformaban usualmente en problemas aritméticos o algebraicos. Calcularon áreas de figuras planas sencillas y volúmenes de sólidos simples usando algunas reglas o fórmulas, que en la actualidad no se consideran del todo correctas, pero que posiblemente les proporcionaban aproximaciones que les permitieron resolver interesantes problemas de aplicación. Es importante destacar que conocían la relación pitagórica, usaban la semejanza de triángulos y la proporcionalidad y utilizaron una muy buena aproximación del número irracional π para determinar el área del círculo.

Los egipcios no establecieron separación entre aritmética y geometría. En los papiros se encuentran problemas en los que integran los dos dominios. Ellos, como los babilonios, consideraron la geometría como una herramienta práctica. Un historiador muy importante de la antigüedad, Heródoto, nos dice que la geometría egipcia tuvo su origen en un problema práctico que le interesaba resolver al pueblo egipcio: las cosechas se perdían cuando se crecía el río Nilo. La solución estaba entonces en trazar los linderos de los terrenos cultivados para que no se perdiera la cosecha. Tenían, como los babilonios, algunas fórmulas para calcular áreas de rectángulos, de triángulos, de trapezoides y de círculos, y fórmulas para determinar volúmenes de cubos, cilindros y otros sólidos sencillos. Las reglas planteadas no aparecen expuestas en símbolos: enunciaban los problemas verbalmente pero su procedimiento para resolverlos era esencialmente el mismo que usamos nosotros cuando calculamos siguiendo una fórmula. A pesar de que algunas de ellas no resulten hoy correctas, les proporcionaron importantes elementos. Las pirámides representan en esta cultura una sorprendente aplicación de la geometría. En la construcción de cada una de ellas se puso especial cuidado en seleccionar forma y dimensión de las bases y en escoger las dimensiones relativas adecuadas. Es importante destacar, además, que los egipcios combinaron sus conocimientos de astronomía y de geometría para construir sus templos y pirámides.

En la historia de las civilizaciones los griegos alcanzaron una posición destacada y en la historia de la matemática su época fue una de las más brillantes. La contribución griega a la geometría plana y del espacio, a la trigonometría, a la teoría de números, la ampliación del álgebra y la aritmética de los babilonios y egipcios es enorme. A pesar de que la civilización griega se remonta al 2800 a. C. y duró aproximadamente hasta el 600 en la historia de la matemática griega solo se distinguen dos períodos: el clásico, del 600 al 300 a. C., y el helenístico, del 300 a. C. al 600. Precisamente, entre finales del período clásico e inicios del helenístico se ubican dos de las contribuciones más importantes de los griegos: *Elementos* de Euclides y *Cónicas* de Apolonio, allí está la fuente original de gran parte de los conceptos de geometría que hoy estudiamos en las aulas.

Euclides vivió y enseño en Alejandría alrededor del año 300 a. C., *Elementos* es sin duda su obra más famosa, es considerada la primera fuente de conocimiento matemático y ha influido como ningún otro libro en el derrotero de las matemáticas. Estudiándola se aprendió el concepto mismo de matemática, la noción de demostración y la ordenación lógica de los teoremas. Su contenido determinó realmente el curso del pensamiento matemático posterior. *Elementos* consta de trece libros. Los libros del I al IV tratan sobre las propiedades básicas de las figuras (triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos regulares), los teoremas sobre congruencia y paralelismo y el teorema de Pitágoras. En el I Euclides incluye definiciones iniciales, básicas para el trabajo en geometría, entre las que se destacan las de recta, círculo, paralelas y paralelogramo, y presenta además cinco postulados considerados como verdades incuestionables, que sirven de base para la construcción de la llamada geometría euclidiana, rama que usualmente trabajamos en las aulas. En el libro V trabaja la teoría de proporciones entre magnitudes. En el VI las figuras semejantes y, además, presenta lo que hoy podríamos entender como una generalización del teorema de Pitágoras. En los libros VII, VIII y IX se dedica a trabajar en términos geométricos lo que hoy conocemos como teoría de los números (clasificación de irracionales) y en los libros XI, XII y XIII plantea la geometría de los sólidos y sus volúmenes.

Apolonio (287 - 212 a. C.), en su obra maestra el tratado sobre las cónicas, desarrolla elementos fundamentales que hoy retomamos en los cursos de geometría analítica. Basta decir aquí que fue conocido en su época, como: "el gran geómetra".

Del 287 al 212 a. C. vivió en Alejandría el considerado como el mayor matemático de la antigüedad: Arquímedes. Sus trabajos en matemáticas incluyen el cálculo de áreas y volúmenes y, por el método de aproximaciones sucesivas y el cálculo del número π. Sus trabajos geométricos representan el punto más alto de la matemática greco alejandrina. En sus razonamientos usa teoremas de Euclides y sus demostraciones están perfectamente argumentadas.

3.2. Geometría plana

3.2.1. Puntos, rectas, rayos y segmentos

Siguiendo la tradición de la geometría euclidiana, consideraremos en este escrito el punto, la recta y el plano como términos indefinidos.

Los objetos físicos sugieren las ideas de puntos, rectas y planos. Por ejemplo, la marca que deja la punta de un lápiz en una hoja de papel nos da la idea intuitiva de punto. Una hoja de papel, pensando que se extiende infinitamente, nos da la idea de plano. A su vez, los bordes de una hoja de papel extendidos infinitamente nos sugieren la idea de recta. Las nociones intuitivas de punto, recta y plano y sus posibles descripciones nos permitirán usarlos en la reconstrucción de algunos elementos de la geometría euclidiana, que muy seguramente ya han sido trabajados en la educación básica. Así, tomando estos términos como puntos de partida, podemos recordar unas primeras nociones importantes:

- Una **figura** es un conjunto de puntos.
- El **espacio** es el conjunto de todos los puntos.
- Tres o más puntos son **colineales** si, y solo si, ellos están sobre la misma recta.
- Cuatro o más puntos son **coplanares** si, y solo si, ellos están en un mismo plano.

Las figuras que están en un plano tales como cuadrados, círculos y triángulos son **bidimensionales** (tienen dos dimensiones, figura 3.1). Las esferas, cajas, cubos y los objetos reales son figuras **tridimensionales** (tienen tres dimensiones, figura 3.2).

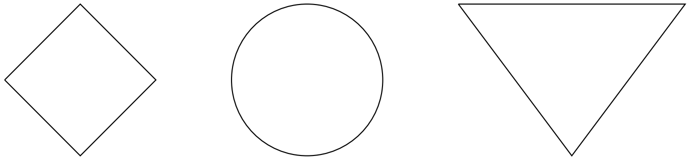


Figura 3.1.

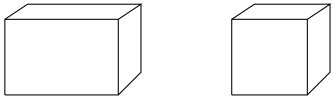


Figura 3.2.

Diferentes maneras de describir los puntos y las rectas han dado origen a distintas geometrías. En la geometría euclidiana, por ejemplo, un punto se describe como una localización y en la geometría analítica un punto es un par ordenado de números. Para hacer más clara la descripción de los puntos y las rectas se plantean los postulados, que además de servir para explicar los términos indefinidos sirven de punto de partida para deducir y probar otros enunciados. Los postulados en la geometría euclidiana, que como lo comentamos en la sección anterior planteó Euclides en los *Elementos* pueden ser resumidos de la siguiente manera:

Postulados:

- *Dos puntos determinan una recta*. A través de cualesquiera dos puntos, pasa exactamente una recta.
- *Una recta contiene infinitos puntos*.
- *Dada una recta en un plano, existe por lo menos un punto en el plano que no está en la recta*.
- *Dos rectas diferentes se intersectan a lo más en un punto*.
- *Todo plano contiene al menos tres puntos que no están alineados*.
- *Si dos puntos de una recta están en un plano, entonces la recta está contenida en el mismo plano*.
- *Tres puntos cualesquiera están al menos en el mismo plano y tres puntos cualesquiera no alineados están exactamente en un mismo plano*.
- *Dado un plano en el espacio, existe al menos un punto en el espacio que no está en el plano*.

De los postulados anteriores se derivan definiciones, teoremas y caracterizaciones que permitirán posteriormente solucionar problemas.

Definición 3.2.1. Dos rectas que están en un mismo plano son paralelas, si, y solo si, ellas no tienen puntos en común.

Señalamos los puntos con letras mayúsculas A,B,C, ... (figura 3.3). La recta que contiene a los puntos A y B se nota $\overleftrightarrow{AB}$ y algunas veces con letras minúsculas, como por ejemplo l. Si $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son rectas paralelas, escribimos $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{CD}$.

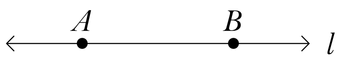


Figura 3.3.

Postulado:

En un plano, por un punto exterior a una recta pasa una única recta paralela.

Ya tenemos alguna familiaridad con los números reales y su representación en una recta numérica (sección 1.5). La distancia entre dos puntos podemos medirla por medio de una regla ordinaria, para esto basta establecer una unidad de medida. Si convenimos en elegir una unidad, para cualquier par de puntos A y B, habrá un número que nos diga cuanto dista

A de B. Expondremos esto en forma más precisa, enunciando enseguida un postulado.

Postulado:

A cada par de puntos diferentes le corresponde un único número positivo llamado la distancia.

Si los puntos son A y B, entonces, indicaremos la distancia por AB. Admitimos la posibilidad de que $A = B$, es decir, de que A y B sean el mismo punto; en tal caso, $AB = 0$. Es necesario anotar que la distancia no depende del orden en el que se consideren los puntos. En consecuencia, siempre tenemos que $AB = BA$.

Teniendo en cuenta las discusiones dadas en capítulos anteriores, podemos establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales de tal manera que a cada punto de la recta corresponde exactamente un número real y reciprocamente, a cada número real corresponde exactamente un punto de la recta. La distancia entre dos puntos cualesquiera es el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes.

Una correspondencia como la descrita en el postulado anterior se llama un **sistema de coordenadas** y el número correspondiente a un punto se llama la **coordenada** del punto.

Es evidente el significado de la palabra **entre**. Sin embargo esta admite una definición precisa, la cual se enuncia a continuación.

Definición 3.2.2. Dados los puntos A, B y C, se dice que B está entre A y C, si A, B y C son puntos distintos de una misma recta y $AB + BC = AC$ (figura 3.4).

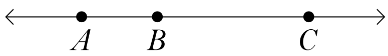


Figura 3.4.

Definición 3.2.3. El **segmento** (o **segmento de recta**) con puntos extremos A y B, notado $\overline{AB}$, es el conjunto formado por los puntos A y B y por todos los puntos ubicados entre ellos dos. La longitud del segmento $\overline{AB}$ (notada AB) se define como la distancia entre A y B (figura 3.5).

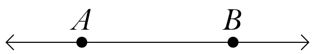


Figura 3.5.

Definición 3.2.4. Un punto B se llama **punto medio** de un segmento $\overline{AC}$, si B está entre A y C y $AB = BC$.

Naturalmente, todo segmento tiene un punto medio y decimos que este **biseca** al segmento. Dos segmentos con la misma medida se llaman **segmentos congruentes**. Así, $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son congruentes si $AB = DE$ y, en tal caso, se escribe $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.

Definición 3.2.5. El **rayo** con punto extremo o punto inicial A y que contiene un punto B, que notaremos $\overrightarrow{AB}$, consiste en todos los puntos sobre el segmento $\overline{AB}$ y todos los puntos que cumplen que B está entre ellos y A (figura 3.6).

Figura 3.6

Si A está entre B y C, entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se llaman **rayos opuestos**.

3.2.2. Ángulos

Definición 3.2.6. Un **ángulo** es la unión de dos rayos que tienen el mismo punto inicial. Los dos rayos se llaman los **lados del ángulo** y el extremo común se llama **vértice**. Si los rayos son $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, entonces el ángulo se denota $\angle BAC$ o $\angle CAB$ (figura 3.7).

Se dice que un punto D está en el **interior** de $\angle BAC$, si D y B están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ y D y C están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Se dice que un punto E está en el **exterior** de $\angle BAC$ si no está en dicho ángulo ni en su interior. En la figura 3.7 D es un punto del interior de $\angle BAC$ y E es un punto exterior.

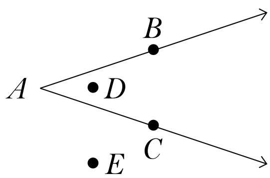


Figura 3.7

- **Medida y clasificación**

La **medida de un ángulo** indica la abertura del interior del ángulo. Para medirlo, inicialmente, la unidad de medida que se toma es el **grado**. Para indicar que se hace referencia a la medida se acostumbra a escribir $m\angle BAC$.

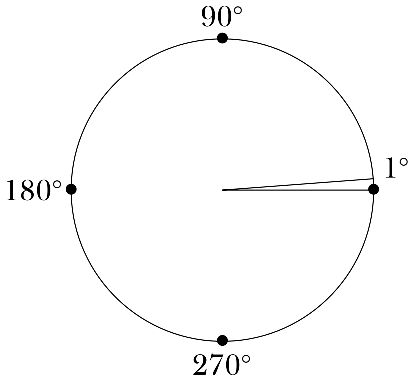


Figura 3.8.

Aunque en la subsección 3.2.5. estudiaremos la circunferencia, suponemos que se tiene algún conocimiento de ella. Un ángulo de un grado (1°) está determinado por la división de una circunferencia en 360 partes iguales y dos radios que unen el centro con dos puntos consecutivos de la división. Entonces la circunferencia completa tiene 360° (figura 3.8).

Recordemos que, así como medimos segmentos con una regla, medimos los ángulos con un transportador. El número de grados de un ángulo es su medida. Si hay x grados en el $\angle BAC$, entonces escribimos $m\angle BAC = x°$.

En general, para el estudio de la geometría, solo se consideran ángulos cuyas medidas estén entre 0 y 180 grados. Para el estudio de la trigonometría se consideraran ángulos de medidas mayores. En este punto, es necesario advertir, que cuando no haya lugar a confusión, en algunos apartes se omite el símbolo usado para notar los grados.

Todo ángulo tiene una única medida, que nos permite clasificarlo. Si se considera como unidad el grado, en el rango entre 0° y 180°, la clasificación usual es la siguiente:

Si m es la medida de un ángulo, el ángulo es **agudo** si, y solo si, $0 < m < 90$; el ángulo es **recto** si, y solo si, $m = 90$; es **obtuso** si, y solo si, $90 < m < 180$ y es **llano** si, y solo si $m = 180$ (figura 3.9).

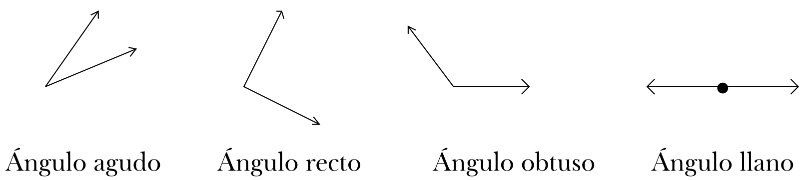


Figura 3.9.

Si D está en el interior de $\angle BAC$, entonces $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$ (figura 3.10).

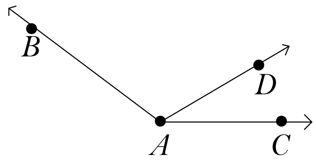


Figura 3.10.

Ejemplo 3.1. En la figura 3.11, determinar: $m\angle CPD$

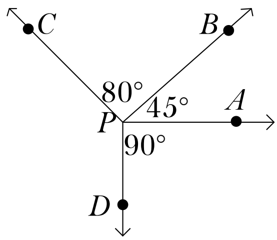


Figura 3.11.

Pensando a P como centro de un círculo, podemos afirmar que:
$m\angle CPD = 360° - (90° + 45° + 80°) = 145°$.

Definición 3.2.7. Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180°, entonces decimos que los ángulos son **suplementarios** y que cada uno es el **suplemento** del otro.

Ejemplo 3.2. Sabiendo que la medida m de cierto ángulo es un cuarto de la medida de su suplemento, determine m. Si m es la medida del ángulo, su suplemento tendrá medida $180 - m$. Teniendo en cuenta la relación:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{4}(180 - m) \\ 4m &= 180 - m \\ 5m &= 180 \\ m &= 36. \end{aligned}$$

Definición 3.2.8. Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90°, decimos que los ángulos son **complementarios** y que cada uno es el **complemento** del otro.

Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo recto, entonces se dice que $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ y se denota $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. Además, se dice que dos rectas son

perpendiculares si forman un ángulo recto. Empleamos la misma notación anterior para indicar que dos rectas son perpendiculares.

En la figura 3.12, el $\angle ABC$ es recto, $r \perp s$ y $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$. Notemos el símbolo usado en la figura para indicar un ángulo recto.

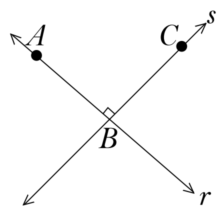


Figura 3.12.

Si dos rectas coplanares r y s son perpendiculares a la misma recta, entonces son paralelas (figura 3.13).

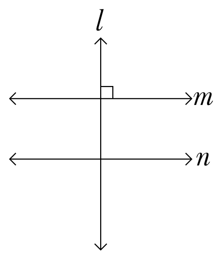


Figura 3.13.

En un plano, si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas, entonces es perpendicular a la otra.

Se dice que dos ángulos son **congruentes** si tienen la misma medida. Así, $\angle ABC$ y $\angle DEF$ son congruentes si $m\angle ABC = m\angle DEF$ y en tal caso lo notamos $\angle ABC \cong \angle DEF$.

Dos ángulos rectos cualesquiera son congruentes. Si dos ángulos son a la vez congruentes y suplementarios, entonces cada uno de ellos es un ángulo recto. Notemos que los suplementos de ángulos congruentes son congruentes y que los complementos de ángulos congruentes son congruentes.

Definición 3.2.9. Dado $\angle ABC$ y un punto interior D de $\angle ABC$, se dice que $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del $\angle ABC$, si $m\angle ABD = m\angle DBC$.

Ejemplo 3.3. Si en la figura 3.14, $\overrightarrow{BD}$ biseca el ángulo $\angle ABC$ y si $m\angle DBC = 5x - 11$ y $m\angle ABD = 2x + 25$, encontrar $m\angle ABC$.

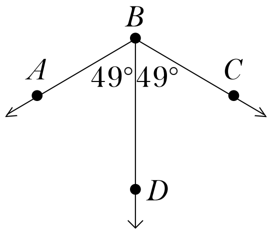


Figura 3.14.

$$
\begin{aligned}
m\angle DBC &= m\angle ABD\\
5x - 11 &= 2x + 25\\
3x &= 36\\
x &= 12.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo x, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
m\angle DBC &= 5(12) - 11 = 49\\
m\angle ABD &= 2(12) + 25 = 49
\end{aligned}
$$

De donde $m\angle ABC = 98$.

Dependiendo de sus posiciones, los ángulos también tienen nombres especiales:

Definición 3.2.10. Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ es otro rayo cualquiera, entonces, se dice que $\angle BAD$ y $\angle DAC$ forman un **par lineal** (figura 3.15).

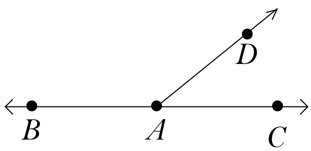


Figura 3.15.

En la figura 3.15, $\angle BAD$ y $\angle DAC$ forman un par lineal.

Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios. Notemos que dos ángulos pueden ser suplementarios sin que formen un par lineal.

Definición 3.2.11. Dos ángulos no nulos y no llanos se dicen ángulos **adyacentes**, si tienen un lado común y no tienen puntos interiores comunes.

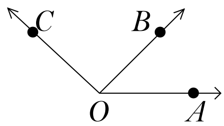


Figura 3.16. Los ángulos $\angle COB$ y $\angle BOA$ son adyacentes.

Cuando dos rectas se intersectan determinan 4 ángulos. Cada par de ángulos no adyacentes, se dice opuesto por el vértice, lo cual se expresa en la siguiente definición:

Definición 3.2.12. Dos ángulos no llanos se dicen **opuestos por el vértice**, si al unir sus lados se determinan dos rectas. En otras palabras, dos ángulos son opuestos por el vértice, si sus lados forman dos pares de rayos opuestos.

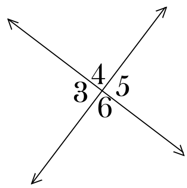


Figura 3.17.

En la figura 3.17, los ángulos 3 y 5 son opuestos por el vértice y cada uno de ellos forma un par lineal con el ángulo 6. Entonces podemos afirmar que: $m\angle 3 + m\angle 6 = 180°$ y $m\angle 5 + m\angle 6 = 180°$, entonces $m\angle 3 + m\angle 6 = m\angle 5 + m\angle 6$. De esto se concluye que $m\angle 3 = m\angle 5$ y esto muestra un resultado importante: **si dos ángulos son opuestos por el vértice entonces tienen la misma medida y por tanto son congruentes.**

Ejemplo 3.4. Determinar la medida de los ángulos 1, 2 y 3 en la figura 3.18, sabiendo que la medida de $\angle AEB = 62°$.

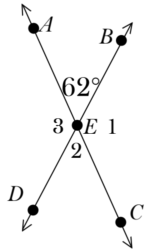


Figura 3.18.

Puesto que $\angle DEC$ y $\angle AEB$ son opuestos por el vértice, se tiene que $m\angle 2 = 62°$. Ahora, dado que $\angle AEB$ y $\angle BEC$ forman un par lineal, ellos son suplementarios, por tanto $m\angle 1 = 180° - 62° = 118°$. Como además los ángulos 1 y 3 son opuestos por el vértice entonces $m\angle 3 = 118°$.

- **Rectas paralelas, ángulos correspondientes y ángulos alternos internos**

Consideremos los ángulos que se forman cuando dos rectas, *m* y *n*, son cortadas por una tercera recta *l* llamada una **transversal**. Se determinan 8 ángulos, cuatro determinados por *m* y *l* y cuatro determinados por *n* y *l*. Cualquier par de ángulos en posiciones similares con respecto a la transversal y a cada recta, es llamado par de **ángulos correspondientes**.

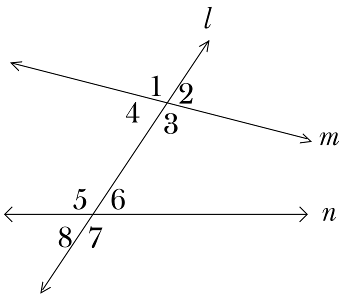


Figura 3.19.

En la figura 3.19, pares de ángulos correspondientes son 1 y 5, 2 y 6, 3 y 7, 4 y 8. Los ángulos 3 y 5, y 4 y 6 reciben el nombre de **alternos internos**.

Si *m* y *n* son rectas paralelas cortadas por una transversal *l*, entonces las parejas de ángulos correspondientes resultan congruentes y, por lo tanto, las pareja de ángulos alternos internos resultan congruentes.

Por ejemplo, en la figura 3.20, asumiendo que *m* y *n* son paralelas, los ángulos 2 y 6 son congruentes y también lo son los ángulos 3 y 5.

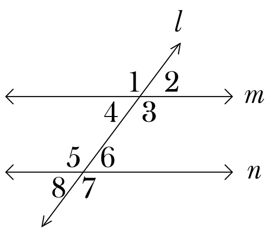


Figura 3.20.

Es necesario anotar que el recíproco de la afirmación anterior es cierto. Es decir, si dos rectas cortadas por una transversal determinan ángulos correspondientes congruentes o ángulos alternos internos congruentes, entonces dichas rectas resultan paralelas.

En este punto es conveniente aclarar algunos aspectos relacionados con las gráficas y algunas cuestiones de notación, que serán consignados en las siguientes notas.

Nota: existen límites para la información que podemos suponer cuando se presenta un dibujo. Por ejemplo, dada la figura 3.21, podemos asumir:

- **Colinealidad** de los puntos que aparecen marcados sobre la recta. E, D, B y C están todos sobre la recta m y D está entre B y E.
- **Intersección** de las rectas en un punto dado. m y l se intercectan en el punto B.
- **Puntos** en el interior de un ángulo, sobre un lado, o en el exterior del ángulo. Por ejemplo, F está en el interior del $\angle ABC$, G está en el exterior y A está sobre el lado.

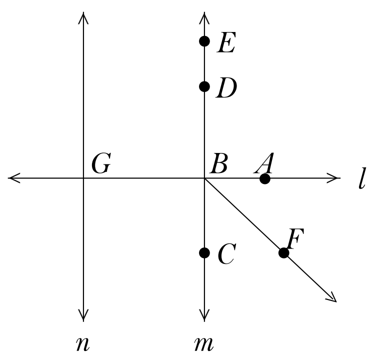


Figura 3.21.

No se puede asumir:

- **Colinealidad** de tres o más puntos que no están dibujados sobre la recta. Por ejemplo, no se puede asumir que F está entre A y C.
- **Paralelismo** entre rectas. No se puede asumir, por ejemplo, que $m \parallel n$, si no se dice explícitamente en el enunciado del problema.
- **Medida** de ángulos y longitud de segmentos. Por ejemplo, no se puede asumir que $\overrightarrow{BF}$ bisecte a $\angle ABC$ o que $DE = DB$.

Para asumir información como ésta, acerca de una figura, debe ser especificada en el enunciado del problema.

Notas:

1. Al comparar dos figuras, es usual usar algunas marcas para indicar lados o ángulos congruentes. Por ejemplo, en el par de gráficas que se muestra en la figura 3.22, se tiene que:

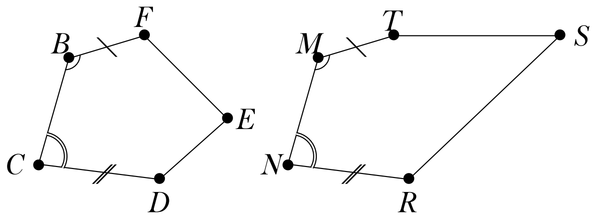


Figura 3.22.

   - $\overline{BF} \cong \overline{MT}$.
   - $\overline{CD} \cong \overline{NR}$.
   - $\angle FBC \cong \angle TMN$.
   - $\angle BCD \cong \angle MNR$.

2. En algunos casos, si no hay lugar a confusión, se omiten las unidades de medida.

3.2.3. Triángulos: congruencia y semejanza

- **Conceptos básicos**

Definición 3.2.13. Si A, B y C son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llama un **triángulo**, y se simboliza $\triangle ABC$.

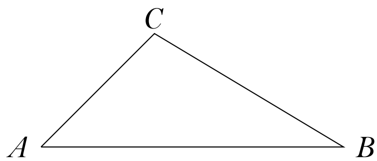


Figura 3.23.

Los puntos A, B y C (figura 3.23) se llaman **vértices** y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llaman **lados**. Los ángulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle ACB$ se llaman los

ángulos del triángulo; en ocasiones designaremos a dichos ángulos como $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.

Se dice que un lado de un triángulo está comprendido entre dos ángulos si sus extremos son los vértices de dichos ángulos. Se dice que un ángulo de un triángulo está comprendido entre dos lados si su vértice es el extremo común de dichos lados.

Por ejemplo, en el triángulo ABC de la figura 3.23, el lado $\overline{AC}$ está comprendido entre los ángulos $\angle A$ y $\angle C$; por su parte, el ángulo B está comprendido entre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

Definición 3.2.14. El **perímetro** de un triángulo corresponde a la suma de las medidas de sus lados.

Considerando algunas relaciones entre los lados de un triángulo surgen las siguientes definiciones:

Definición 3.2.15. Un **triángulo equilátero** es aquel que tiene sus tres lados congruentes. Un **triángulo isósceles** es aquel que tiene al menos dos de sus lados congruentes. Un **triángulo escaleno** es aquel que no tiene un par de lados congruentes.

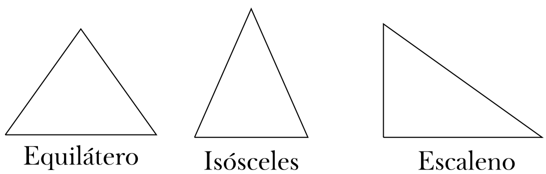


Figura 3.24.

De las definiciones anteriores, se puede deducir que un triángulo es isósceles si, y solo si, tiene al menos dos ángulos congruentes. Por lo tanto, un triángulo es equilátero si, y solo si, sus tres ángulos son congruentes.

Teniendo en cuenta las medidas de los ángulos en un triángulo, aparece la siguiente definición:

Definición 3.2.16. Un triángulo es llamado **rectángulo**, si tiene un ángulo recto; el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** y los otros dos lados son llamados **catetos**. Un triángulo **acutángulo** es aquel que tiene los tres ángulos agudos. Un triángulo **obtusángulo** es aquel que tiene un ángulo obtuso.

Definición 3.2.17. Un triángulo **equiángulo** es aquel que tiene sus tres ángulos congruentes.

Así, un triángulo es equilátero si, y solo si, es equiángulo.

Nota: algunos aspectos de las líneas notables en un triángulo, como las medianas, bisectrices y mediatrices serán estudiadas en los talleres propuestos: las medianas se consideran en el taller 3, ejercicio 9, y las bisectrices y mediatrices se presentan en el taller 6, ejercicios 10 y 12 respectivamente.

Teorema 3.2.1. La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°.

Demostración. Dado el triángulo ABC (figura 3.25), debemos probar que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$. Dibujamos $\overline{BD}$, con $\overleftrightarrow{BD} || \overleftrightarrow{AC}$. Existe solamente una recta que cumple esta condición. Se tiene por adición de ángulos que: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$. Dado que las rectas son paralelas, por propiedad de ángulos alternos internos entonces $m\angle 1 = m\angle A$ y $m\angle 3 = m\angle C$ y, además, $\angle 2 = \angle B$. Sustituyendo se obtiene que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$.

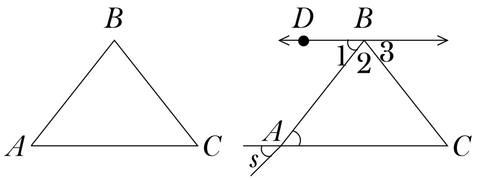


Figura 3.25.

Ejemplo 3.5. Si en el triángulo ABC de la figura 3.26, las medidas de los ángulos están en razón 1 : 2 : 3. Determinar las medidas de los ángulos.

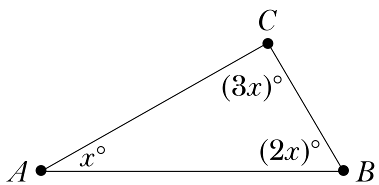


Figura 3.26.

Que las medidas de los ángulos están en razón 1 : 2 : 3 significa que para algún número real x, si $x°$ es la medida de uno de los ángulos en grados, las otras medidas son $2x°$ y $3x°$. Si aplicamos el teorema anterior tenemos: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$ entonces, $x° + 2x° + 3x° = 180°$ De donde $6x° = 180°$, $x° = 30°$. Los ángulos del triángulo tienen en consecuencia medidas 30, 60 y 90 grados.

- **Desigualdades en un triángulo**

En un triángulo, la suma de las medidas de dos de sus lados es mayor que la medida del tercer lado. Esta se conoce como la **desigualdad triangular**.

En un triángulo, a mayor ángulo, se opone mayor lado y recíprocamente a mayor lado se opone mayor ángulo.

En un triángulo, un **ángulo exterior** es un ángulo formado por uno de sus lados y la prolongación de otro de sus lados. Por ejemplo, en la figura 3.27, el ángulo CBD es exterior al triángulo ABC.

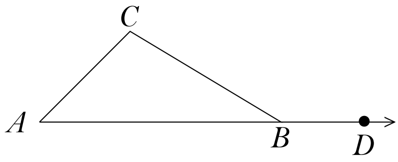


Figura 3.27.

Puesto que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180, se tiene que la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes. Por ejemplo, en la figura 3.27, $m\angle CBD = m\angle CAB + m\angle BCA$.

- **Congruencia de triángulos**

Intuitivamente dos figuras geométricas son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño. Esta observación referida al caso de los triángulos, estaría diciendo que dos triángulos son **congruentes** si uno de ellos puede superponerse en el otro, de tal manera que sus lados y ángulos coincidan.

Si $\triangle ABC$ es congruente con $\triangle DEF$, escribimos $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Puesto que un triángulo se puede notar de seis formas distintas, existen 36 maneras de expresar que dos triángulos son congruentes. Ahora, al adoptar la escritura $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ estaremos significando que se verifican las siguientes relaciones (figura 3.28):

- $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$.
- $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

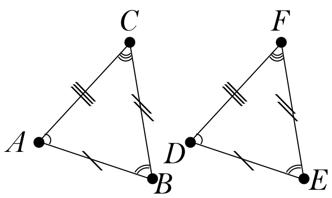


Figura 3.28.

Postulados de congruencias de triángulos

En esta sección se enuncian criterios que permitirán decidir cuando dos triángulos son congruentes.

En la figura 3.29, en cada caso, el par de figuras tiene las mismas medidas de sus lados y las mismas medidas de sus ángulos. Notemos que una figura se puede superponer a la otra si la trasladamos, la rotamos o la reflejamos o si efectuamos consecutivamente más de una de estas transformaciones. Se dice que estos pares de figuras son congruentes.

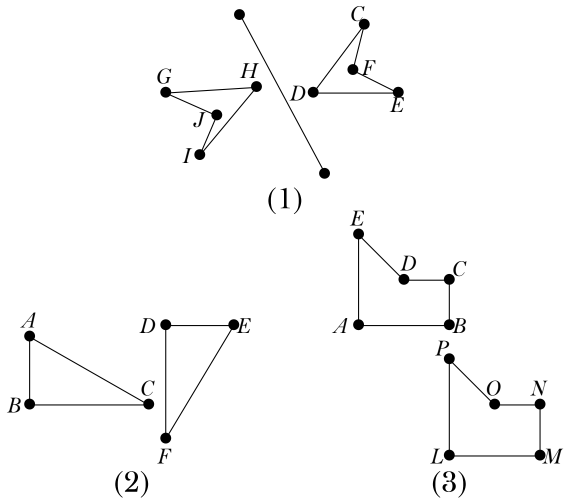


Figura 3.29.

En síntesis, se dice que dos figuras, F y G, son **congruentes**, lo cual se nota $F \cong G$, si cualquiera de ellas resulta de trasladar, rotar o reflejar la otra.

En la figura 3.30, se dicen **correspondientes** las parejas de lados $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$, $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$. De manera similar, la parejas de ángulos A y A', B y B', C y C' son **correspondientes**.

Recordemos que dos segmentos son congruentes si, y solo si, tienen la misma longitud y que dos ángulos son congruentes, si, y solo si, tienen la misma medida. Así que, si dos figuras son congruentes, cualquier par de lados o de ángulos correspondientes son congruentes.

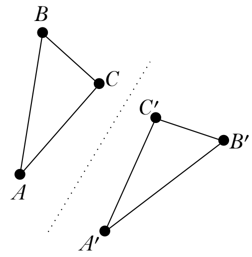


Figura 3.30.

Usando las propiedades anteriores es posible presentar algunos criterios que nos permiten decidir cuando dos triángulos son congruentes.

1) **Postulado LLL**: *dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente congruentes.*

   Si en los triángulos ABC y DEF de la figura 3.31, se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

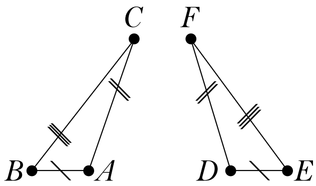


Figura 3.31. Congruencian LLL

2) **Postulado LAL**: *dos triángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente congruentes y el ángulo comprendido entre ellos también es congruente.*

   Si en los triángulos ABC y DEF de la figura 3.32, se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\angle A \cong \angle D$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

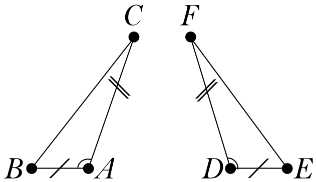


Figura 3.32. Congruencia LAL

3) **Postulado ALA**: *dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos congruentes y el lado comprendido entre ellos también congruente.*

Si en los triángulos ABC y DEF de la figura 3.33, se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

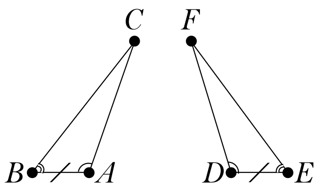


Figura 3.33. Congruencia ALA

Ejemplo 3.6. Usando solamente la información señalada en la figura 3.34, seleccionar pares de triángulos que sean congruentes. Justificar cada escogencia con los postulados anteriores.

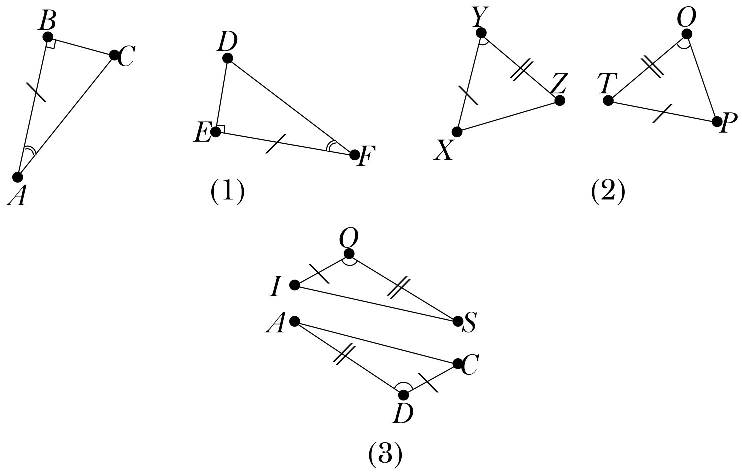


Figura 3.34.

1. $\triangle ABC \cong \triangle FED$ porque tienen un par de lados correspondientes congruentes comprendidos entre dos pares de ángulos correspondientes congruentes. En otras palabras, $\triangle ABC \cong \triangle FED$, por el postulado ALA.

2. No se puede concluir que el triángulo XYZ sea congruente con el triángulo TQP, porque el ángulo congruente no está comprendido entre el par de lados congruentes.

3. $\triangle CAD \cong \triangle ISO$ porque dos pares de lados y el ángulo que ellos determinan son congruentes. En otras palabras, $\triangle CAD \cong \triangle ISO$ por el postulado LAL.

- **Semejanza de triángulos**

Informalmente se dice que dos figuras son semejantes cuando tienen “la misma forma”y diferente tamaño. Una ampliación y una reducción nos da la idea de figuras semejantes. De manera más precisa, se dice que dos figuras son **semejantes** si los ángulos correspondientes tienen la misma medida y la razón entre lados correspondientes se mantiene constante. Así, con la idea intuitiva de semejanza, vemos que para su estudio debemos tener presentes las nociones de razón y proporción.

Dados dos números reales positivos a y b, la **razón** entre a y b es el cociente $\frac{a}{b}$. Por ejemplo, la razón entre 2 y 4 se puede escribir $\frac{2}{4}, \frac{1}{2}, 0,5$. Una **proporción** es una igualdad entre dos razones. Por ejemplo, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Volviendo al tema que nos ocupa, por ahora nos dedicaremos a la semejanza de triángulos, noción que se puede extender a otro tipo de figuras. De las gráficas de la figura 3.35, son semejantes 1 y 2, no son semejantes 3 y 4, son semejantes 5 y 6, son semejantes 7 y 8 y no son semejantes 9 y 10.

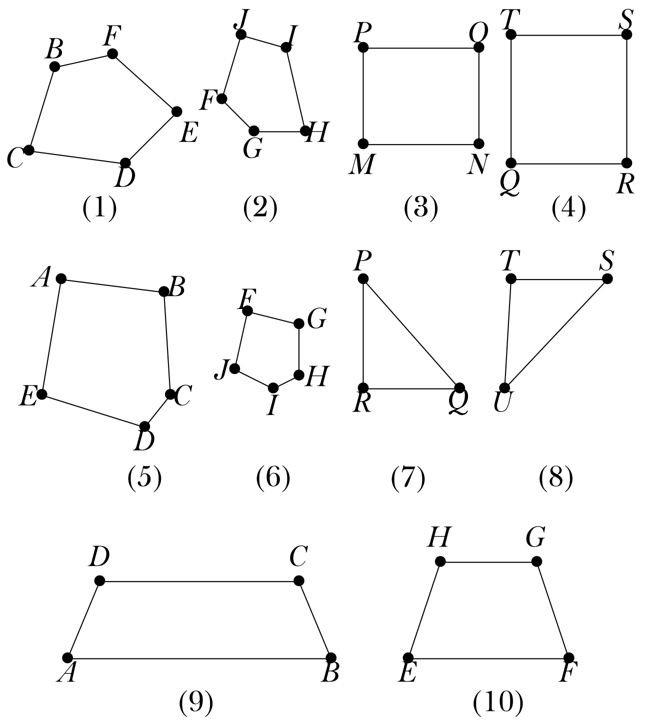


Figura 3.35.

Habría varias formas de notar que dos triángulos son semejantes; sin embargo, adoptaremos una escritura la cual está considerada en la siguiente definición.

Definición 3.2.18. Dados los triángulos ABC y DEF, se dice que $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle DEF$, lo cual se denota $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, si se verifican las siguientes condiciones:

- $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$.

  o

- $\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{FE} = \frac{CA}{FD}$.

El cociente $\frac{AB}{DE}$ es llamado la **razón de semejanza**.

Criterios de congruencias de triángulos

En la misma forma como se establecieron criterios para determinar cuando dos triángulos son congruentes, se establecen criterios para determinar cuando dos triángulos son semejantes.

1) Los triángulos ABC y QRS de la figura 3.36, son semejantes.

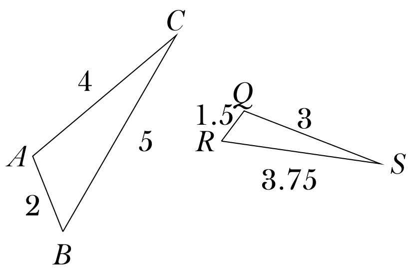


Figura 3.36.

Comparando las dimensiones de sus lados correspondientes, observamos que: $\frac{2}{1,5} = \frac{4}{3} = \frac{5}{3,75}$, es decir, sus tres lados son proporcionales.

El resultado anterior es válido, en general, y se conoce como criterio de semejanza LLL (lado-lado-lado).

Criterio LLL: *si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de un segundo triángulo, entonces los triángulos son semejantes.*

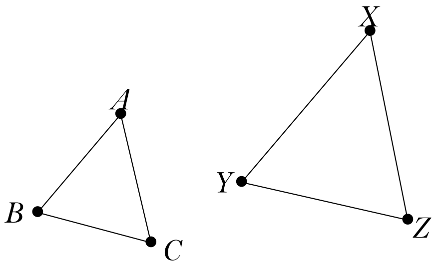


Figura 3.37.

Si los tres lados del $\triangle XYZ$ son proporcionales a los tres lados del $\triangle ABC$ se cumple que:

$$\frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC} = \frac{XZ}{AC} = k$$

Los lados del triángulo XYZ son respectivamente $XY = kAB$, $YZ = kBC$ y $XZ = kAC$. En ese caso, el triángulo XYZ puede considerarse como una ampliación o una reducción del triángulo ABC, dependiendo del valor de k, pero en cualquier caso los triángulos resultan ser semejantes.

Ejemplo 3.7. Determine si $\triangle LEA$ es semejante a $\triangle YUO$ en la figura 3.38.

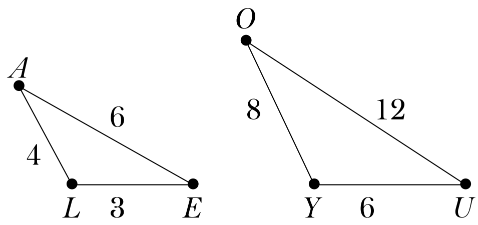


Figura 3.38.

Para aplicar el criterio anterior y determinar si dos triángulos son semejantes, basta ordenar las longitudes de los lados de cada triángulo y comparar las razones formadas por longitudes correspondientes. En este caso, las longitudes del triángulo mayor son, en orden de menor a mayor, 6, 8 y 12, y las del triángulo menor son en el mismo orden 3, 4 y 6. Las razones correspondientes son entonces: $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{4}$ y $\frac{12}{6}$. Dado que estas razones son iguales, los triángulos son semejantes. Podemos decir que el triángulo YUO es una ampliación del triángulo LEA o, de otra forma, que el triángulo LEA es una reducción del triángulo YUO.

Veamos ahora otro criterio de semejanza:

2) En la figura 3.39, los dos triángulos son semejantes. Notemos que ellos tienen dos ángulos congruentes.

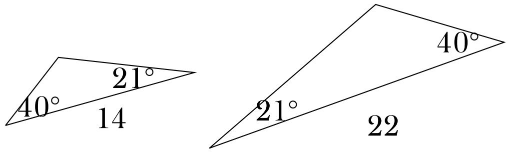


Figura 3.39.

La afirmación anterior corresponde a un segundo criterio de semejanza AA (ángulo-ángulo), que se expresa en general de la siguiente manera:

Criterio AA: *si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro, entonces los triángulos son semejantes.*

Sean ABC y XYZ los triángulos de la figura 3.40 que satisfacen que $\angle A \cong \angle X$ y $\angle B \cong \angle Y$.

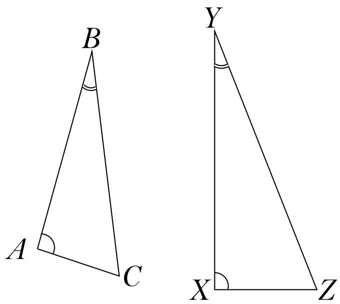


Figura 3.40.

Los ángulos congruentes determinan los vértices correspondientes y a su vez los vértices correspondientes determinan los lados correspondientes. Se tiene entonces que X y A, Y y B son vértices correspondientes. Por lo tanto, los lados $\overline{XY}$ y $\overline{AB}$ son correspondientes. Sea $k = \frac{XY}{AB}$. En la figura 3.41, se puede observar la transformación que se aplica al triángulo ABC, que conserva la medida de los ángulos.

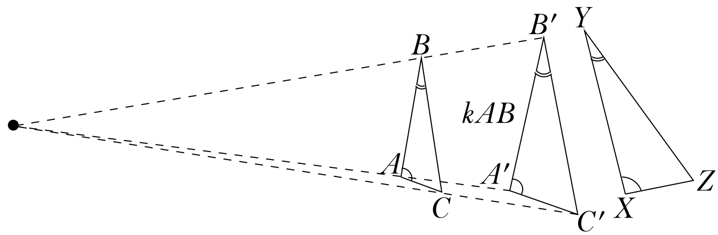


Figura 3.41.

Se tiene entonces que $A\prime B\prime = kAB = \frac{XY}{AB}AB = XY$.

Como la transformación conserva la medida de los ángulos, $m\angle A' = m\angle X$ y $m\angle B' = m\angle Y$, los triángulos $A'B'C'$ y XYZ son congruentes, y, entonces, el triángulo ABC puede ser transformado en XYZ al aplicar dos transformaciones sucesivas, una ampliación y una reflexión. Lo anterior permite concluir que $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

Ejemplo 3.8. Si en un determinado instante del día una estaca de un metro produce una sombra de 70 cm de longitud (figura 3.42), ¿cuál será la altura de un árbol que en ese mismo instante produce una sombra de 3, 4 m de longitud?

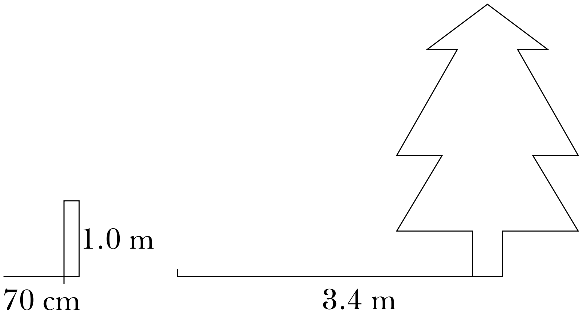


Figura 3.42.

Asumiendo que los rayos del sol pueden ser considerados como paralelos, se determinan triángulos rectángulos con ángulos agudos congruentes (figura 3.43).

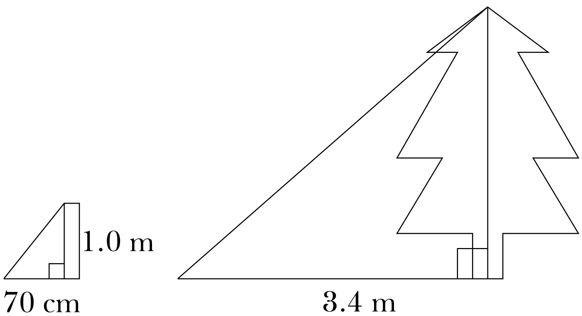


Figura 3.43.

Por el criterio anterior, estos triángulos son semejantes, de donde se concluye que sus lados correspondientes son proporcionales, $\frac{1\text{ m}}{70\text{ cm}} = \frac{h}{3{,}4\text{ m}}$.

Realizando conversión de unidades se tiene: $\frac{100\text{ cm}}{70\text{ cm}} = \frac{h}{340\text{ cm}}$, de donde $70h = 34000$ y $h = 486$ cm. El árbol tiene, entonces, una altura aproximada de $4, 9$ m.

3) Un tercer criterio para determinar la semejanza de triángulos es el llamado lado-ángulo-lado (LAL).

Criterio LAL: *si en dos triángulos, las razones de dos pares de lados correspondientes son iguales y los ángulos que estos lados determinan son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.*

Específicamente, si en los triángulos ABC y XYZ de la figura 3.44 se tiene que $\angle B \cong \angle Y$ y $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$. (El argumento de la demostración es similar al ilustrado en el criterio anterior).

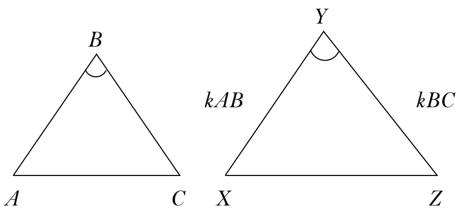


Figura 3.44.

Ejemplo 3.9. En la figura 3.45, T es el punto medio de $\overline{PS}$ y Q es el punto medio de $\overline{PR}$. Se afirma que $\triangle PTQ \sim \triangle PSR$. ¿Por qué?

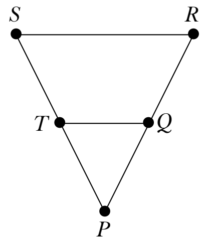


Figura 3.45.

$\frac{PT}{PS} = \frac{PQ}{PR} = \frac{1}{2}$ y el ángulo P, comprendido por estos lados es común a los dos triángulos. Por lo tanto, por el criterio LAL, se tiene $\triangle PTQ \sim \triangle PSR$.

3.2.4. Polígonos

- **Conceptos básicos**

Las figuras geométricas tienen ciertas características que las diferencian. Si nos preguntaran, por ejemplo, ¿cuáles de las formas de la figura 3.46 son rectángulos?, ¿qué responderíamos?, ¿cómo explicamos la escogencia de una de ellas?

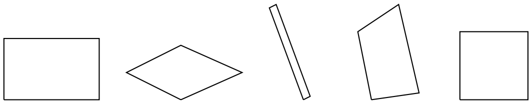


Figura 3.46.

Si nos pidieran definir de manera precisa los términos con los que se nombran formas como las de la figura 3.47, ¿qué responderíamos?

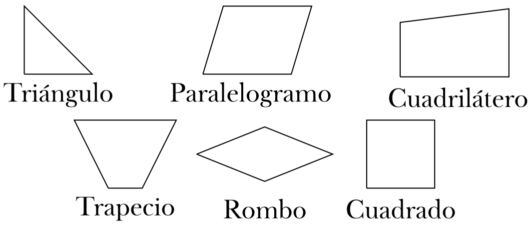


Figura 3.47.

Definir adecuadamente una figura no es simple en geometría. Si decimos, por ejemplo, que "un triángulo es la unión de tres segmentos", podrían aparecer formas como las de la figura 3.48.

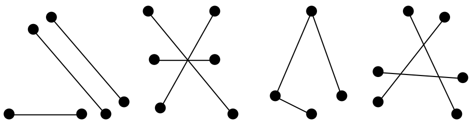


Figura 3.48.

Todas ellas son la unión de tres segmentos, pero no son triángulos, esto significa que nuestra definición no es buena, pues cada segmento debe intersectar a los otros y las intersecciones deben ser puntos extremos de los segmentos. Este criterio nos puede ayudar a dar una buena definición de triángulo y nos permite, además, presentar una definición general del término polígono, teniendo en cuenta que aparte de los polígonos muy familiares que se presentaban en las figuras 3.46 y 3.47, también son polígonos los de la figura 3.49.

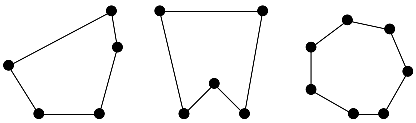


Figura 3.49.

Definición 3.2.19. Un **polígono** es la unión de segmentos en un mismo plano tales que cada segmento intersecta exactamente a otros dos, a cada uno de ellos en uno de sus puntos extremos o, en otras palabras, una figura plana limitada por rectas que forman una línea cerrada. Los segmentos con los que se determina un polígono son sus **lados**, los puntos extremos de los lados son los **vértices** del polígono.

Un polígono puede ser nombrado dando en orden sus vértices.

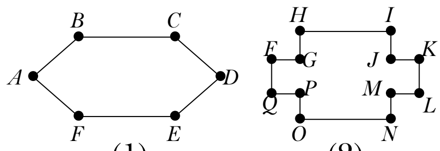


Figura 3.50.

Dos vértices son **consecutivos** o **adyacentes** si son puntos extremos de un lado. Por ejemplo, en la figura 3.50, G y H son vértices adyacentes del polígono 2. Una **diagonal** es un segmento que conecta vértices no adyacentes. Por ejemplo, $\overline{NY}$ y $\overline{PG}$ son diagonales del polígono de la figura 3.51.

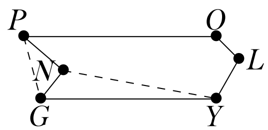


Figura 3.51.

Atendiendo al número de lados los polígonos se clasifican en triángulos (3 lados), cuadriláteros (4 lados), pentágonos (5 lados), hexágonos (6 lados), heptágonos (7), octágonos (8), nonágonos (9) y decágonos (10). En general, se hace referencia a ellos como **n-ágonos**.

De la definición de polígono podemos concluir que todo polígono está contenido completamente en un plano. Dado un polígono se distinguen entonces dos conjuntos en el plano: el **interior** del polígono y el **exterior**. La unión de un polígono con su interior es una **región poligonal** (figura 3.52).

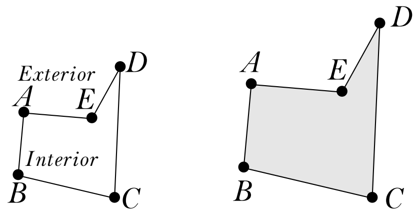


Figura 3.52.

Un polígono se dice **convexo** si, y solo si, su correspondiente región poligonal es convexa; es decir, si dados dos puntos cualesquiera en la región, el segmento de recta que determinan, está completamente contenido en ella. Muchos de los polígonos con los que trabajamos frecuentemente son convexos (figura 3.53).

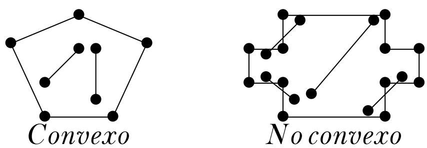


Figura 3.53.

Un polígono se dice **regular** si es convexo y tiene todos sus lados congruentes y todos sus ángulos congruentes.

3.2.4.1. Los ángulos en un polígono

Conociendo la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, podemos determinar la suma de las medidas de los ángulos de cualquier polígono convexo. Observemos el cuadrilátero de la figura 3.54

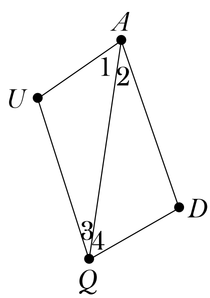


Figura 3.54.

La suma de las medidas de los ángulos del cuadrilátero $QUAD$ es:

$$S = m\angle U + m\angle A + m\angle D + m\angle Q.$$

Si dibujamos el segmento $\overline{AQ}$ se determinan dos triángulos y entonces

$$\begin{aligned} S =& m\angle U + (m\angle 1 + m\angle 2) + m\angle D + (m\angle 3 + m\angle 4) = \\ & (m\angle U + m\angle 1 + m\angle 3) + (mD + m\angle 2 + m\angle 4) = 180^o + 180^o = 360^o \end{aligned}$$

En conclusión, la suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero convexo es $360°$.

3.2.4.2. Cuadriláteros

Los triángulos, como lo comentamos anteriormente, son usualmente clasificados por la medida de sus lados o por el tipo de ángulos que se determinan en ellos, pero los cuadriláteros tienen una clasificación más diversa y más compleja. Se habla, entre otros, de paralelogramos, rombos, rectángulos, cuadrados y trapezoides. Recordemos algunas definiciones al respecto.

Definición 3.2.20. Un **paralelogramo** es un cuadrilátero que tiene sus pares de lados opuestos paralelos.

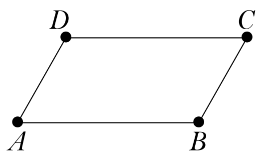


Figura 3.55.

En la figura 3.55, se ilustra el paralelogramo $ABCD$, con $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

Notemos que cada diagonal de un paralelogramo determina dos triángulos congruentes. Ahora, si en un cuadrilátero cada diagonal determina un par de triángulos congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. Así que un paralelogramo se puede definir como un cuadrilátero que tiene cada par de lados opuestos congruentes.

Definición 3.2.21. Un **rombo** es un paralelogramo que tienen sus cuatro lados de igual longitud (figura 3.56).

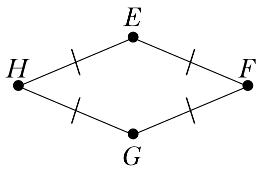


Figura 3.56.

En la figura 3.56, $\overline{EF} \cong \overline{FG} \cong \overline{GH} \cong \overline{HE}$.

Definición 3.2.22. Un **rectángulo** es un cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos (figura 3.57).

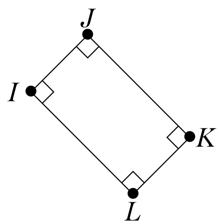


Figura 3.57.

En la figura 3.57, los ángulos I, J, K y L son rectos.

Definición 3.2.23. Un **cuadrado** es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos (figura 3.58).

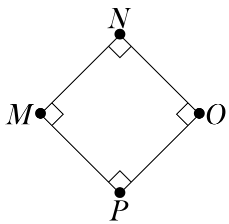


Figura 3.58.

En la figura 3.58, MN=NO=OP=PM y los ángulos M, N, O y P son rectos.

Definición 3.2.24. Un **trapecio** es un cuadrilátero donde al menos un par de lados son paralelos (figura 3.59).

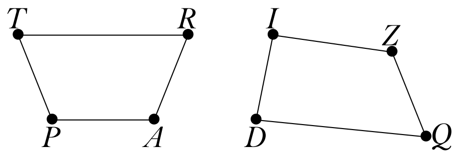


Figura 3.59.

En la figura 3.59, $\overline{TR} \parallel \overline{PA}$ e $\overline{IZ} \parallel \overline{DQ}$.

3.2.4.3. Perímetro de un polígono

Definición 3.2.25. El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.

Si todos los lados de un polígono tienen diferentes longitudes no existe una fórmula especial para determinar su perímetro. Por ejemplo, el perímetro de un triángulo con lados x, y, z es $P = x + y + z$ (figura 3.60)

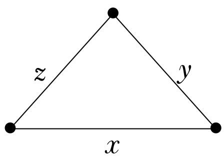


Figura 3.60.

Cuando un polígono tiene lados de igual longitud, como es el caso del rectángulo, la expresión puede ser simplificada. El perímetro de un rectángulo de lados a, b es

$$P = 2a + 2b = 2(a + b).$$

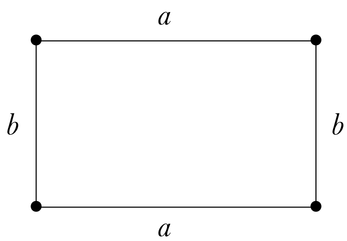


Figura 3.61.

El perímetro de un $n-$ágono regular de lado s es $P = ns$.

3.2.4.4. Área de un polígono

El área se puede interpretar como la medida del espacio ocupado por una región bidimensional. Si recubrimos una región con una unidad y contamos el número de copias de la unidad que se necesitan para recubrir la región, decimos que este número es el área de la región en estas unidades. Usualmente la unidad es un cuadrado cuyo lado es una unidad lineal y, por eso, se afirma que el área está medida en las mismas unidades cuadradas (figura 3.62).

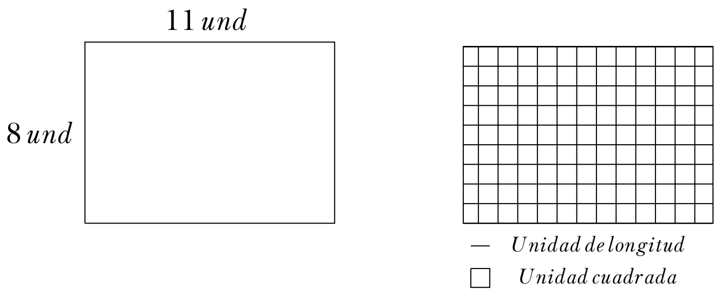


Figura 3.62.

Es posible usar el razonamiento anterior para concluir que: el área A de un rectángulo con dimensiones a y b es $A = a \cdot b$ y, utilizando la fórmula anterior, es posible deducir que el área de un cuadrado de lado l es l^2.

Es fácil encontrar el área de un triángulo rectángulo.

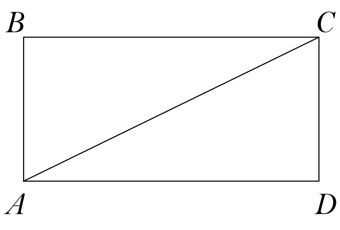


Figura 3.63.

En la figura 3.63 los triángulos ABC y CDA son congruentes, $ABCD$ es un rectángulo y su área es $(AB) \cdot (BC)$, de donde el área del triángulo ABC es:

$$\frac{1}{2}(AB) \cdot (BC).$$

Ejemplo 3.10. El triángulo PQR que muestra la figura 3.64 es rectángulo y el ángulo Q es recto. Determinar el área del $\triangle PQR$.

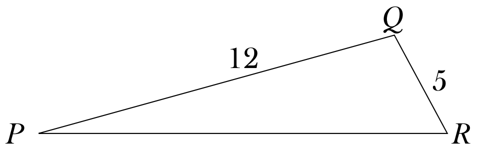


Figura 3.64.

Los catetos del $\triangle PQR$ tienen 5 y 12 cm. Puesto que $\triangle PQR = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$, el área del triángulo PQR es 30 cm^2.

Del área de un triángulo rectángulo se puede derivar una fórmula para el área de cualquier triángulo, se requiere para ello recordar la idea de altura. En un triángulo una **altura** es el segmento que tiene uno de sus extremos en un vértice del triángulo, y es perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto a ese vértice. En la figura 3.65, en cada caso, el segmento $\overline{AD}$ es altura del lado $\overline{CB}$ del triángulo ABC.

Notemos que la altura puede ser interior o exterior al triángulo o puede coincidir con uno de los lados de este.

La longitud de una altura es llamada la **altura** del triángulo relativa a una base. Como base de un triángulo puede ser tomado cualquiera de sus lados, pero a cada base corresponde una altura distinta que es la perpendicular a dicha base o a su prolongación.

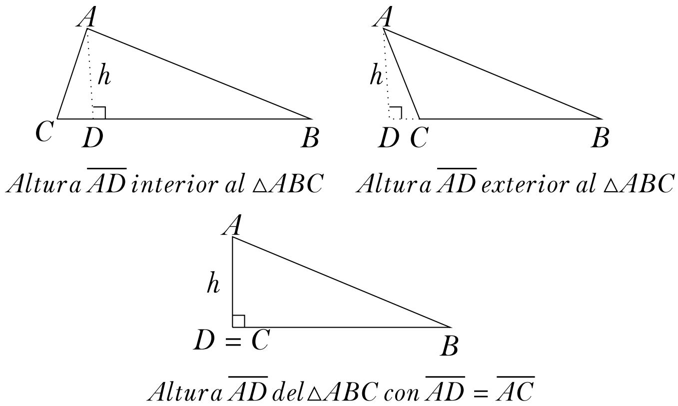


Figura 3.65.

Teorema 3.2.2. El área de un triángulo es la mitad del producto de un lado (la base) por la altura correspondiente a ese lado.

$$A = \frac{1}{2}bh$$

Demostración. Cuando la altura está sobre el triángulo, se tiene el caso de un triángulo rectángulo (ver tercer triángulo de la figura 3.65). Analicemos los otros casos.

Caso 1: altura interior al triángulo (figura 3.66).

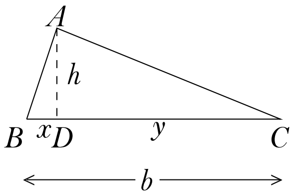


Figura 3.66.

La altura divide el triángulo en dos triángulos. Sea $BD = x$ y $DC = y$. Entonces $b = x + y$.

$$\begin{aligned} \text{Área}(\triangle ABC) &= \text{Área}(\triangle ABD) + \text{Área}(\triangle ADC) \\ &= \frac{1}{2}hx + \frac{1}{2}hy \\ &= \frac{1}{2}h(x+y) \\ &= \frac{1}{2}hb \end{aligned}$$

Caso 2: altura exterior al triángulo (figura 3.67).

El área del triángulo puede ser determinada restando las áreas de dos triángulos rectángulos.

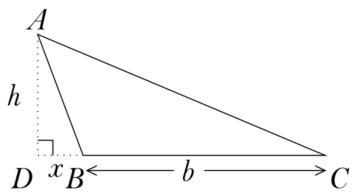


Figura 3.67.

Sea $DB = x$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\text{Área}(\triangle ABC) &= \text{Área}(\triangle ADC) - \text{Área}(\triangle ADB) \\
&= \frac{1}{2}h\,(x+b) - \frac{1}{2}hx \\
&= \frac{1}{2}hx + \frac{1}{2}hb - \frac{1}{2}hx \\
&= \frac{1}{2}hb
\end{aligned}$$

3.2.4.5. El teorema de Pitágoras

Como una aplicación de estos resultados acerca del área se puede desarrollar una demostración del importante **teorema de Pitágoras** el cual relaciona las longitudes de los tres lados de cualquier triángulo rectángulo.

Este teorema recibe su nombre, porque el matemático griego Pitágoras, o uno de sus estudiantes, lo demostró 600 años antes de Cristo. Todavía hoy siguen apareciendo variadas demostraciones de este teorema, provenientes de culturas diversas a través del mundo. No es claro realmente dónde se enunció por primera vez y dónde se presentó la primera demostración. Como lo comentamos en la reseña inicial, este teorema era conocido ya por los babilonios por el 1650 a. C. y, posiblemente, se conoció también en la India hacia el 800 a. C. Una colección de 370 diferentes demostraciones de este teorema fue compilada en 1940 por Elisa Loomis. Incluye allí demostraciones del matemático indú Bhaskara (siglo XII), de Leonardo Da Vinci (siglo XV) y hasta del presidente de los Estados Unidos, James A. Garfield (siglo XIX). No en vano, este teorema es llamado por algunos historiadores "el primer gran teorema en matemáticas".

El teorema se puede enunciar también en la siguiente forma:

Teorema 3.2.3. (Teorema de Pitágoras). En cualquier triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Demostración. Dado un triángulo rectángulo con catetos a y b e hipotenusa c, debemos demostrar que $a^2 + b^2 = c^2$. El triángulo rectángulo y sus "copias"congruentes se muestran en la figura 3.68.

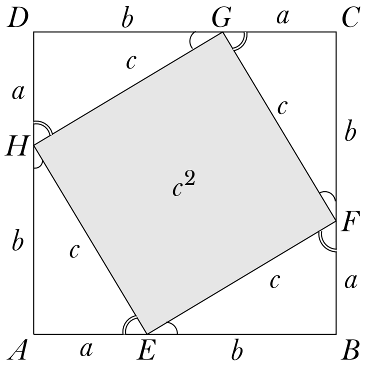


Figura 3.68.

El cuadrilátero exterior es un cuadrado porque cada uno de sus lados tiene longitud $a+b$ y tiene cuatro ángulos rectos. El cuadrilátero sombreado también es un cuadrado porque cada lado tiene longitud c y cada uno de sus ángulos es recto. Dejamos al lector la tarea de hallar una justificación, a esta afirmación. Notemos que los cuatro triángulos son congruentes y, por lo tanto, tienen igual área.

Determinemos ahora el área del cuadrado sombreado.

$$\text{Área}\,(\square EFGH) = \text{Área}\,(\square ABCD) - 4\text{Área}\,(\triangle EBF).$$

Dado que el lado del cuadrado mayor es $a+b$, su área es $(a+b)^2$. Cada uno de los cuatro triángulos tiene área $\frac{1}{2}ab$, de donde se tiene que el área del cuadrado sombreado es:

$$(a+b)^2 - 4\left(\frac{1}{2}ab\right) = (a^2 + 2ab + b^2) - 2ab = a^2 + b^2.$$

Pero, de otra parte, el cuadrado sombreado tiene lado c y, por lo tanto, su área es c^2. Concluimos entonces que:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Nota: si un triángulo con lados de longitudes a, b y c satisface que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

Ejemplo 3.11. Aplicaciones del teorema de Pitágoras.

1. Hallar la hipotenusa de cada triángulo que aparece en la figura 3.69.

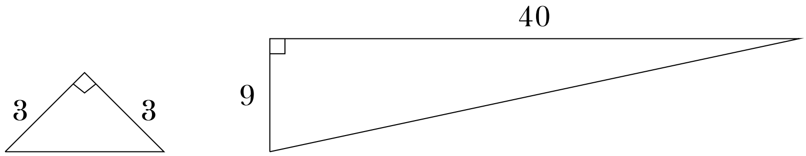


Figura 3.69.

Para el primer triángulo se tiene que $a = b = 3$, de donde

$$a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = 2(3)^2 = 18.$$

Como

$$c^2 = a^2 + b^2 = 18, \quad c^2 = 18, \quad c = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Para el segundo se tiene que $a = 40$, $b = 9$, de donde

$$c^2 = a^2 + b^2 = (40)^2 + (9)^2 = 1681$$

y de aquí $c = \sqrt{1681}$.

2. Hallar el cateto a del triángulo de la figura 3.70.

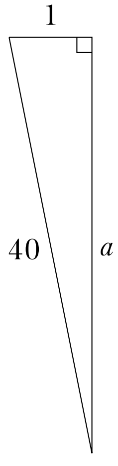


Figura 3.70.

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned} (40)^2 - 1 &= a^2 \\ 1599 &= a^2 \\ \sqrt{1599} &= a. \end{aligned}$$

3.2.5. La circunferencia y el círculo

Definición 3.2.26. Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos de un plano que se encuentran a una distancia fija, su **radio**, desde un cierto punto, su **centro**.

La circunferencia con centro en O y radio r es el conjunto de todos los puntos P en el plano con $PO = r$ (figura 3.71).

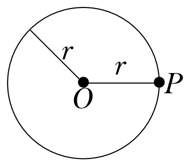


Figura 3.71.

El **radio** es pues la distancia, o el segmento, del centro a un punto sobre la circunferencia y el **diámetro** es la longitud del segmento, o el segmento mismo, que une dos puntos sobre la circunferencia y contiene al centro, la longitud de este segmento es entonces el doble del radio ($2r$).

Un **círculo** es la superficie plana limitada por una circunferencia. Incluye los puntos que están sobre esta y los puntos que están en su interior, es decir todos los puntos cuya distancia al centro es menor o igual que el radio. En la figura 3.72 aparece sombreado el interior de la circunferencia.

El centro y el radio del círculo son, respectivamente, el centro y el radio de la circunferencia que lo limita.

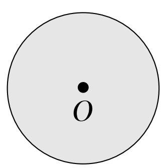


Figura 3.72.

Un segmento que conecta dos puntos sobre la circunferencia es llamado una **cuerda**. En la figura 3.73, $\overline{AB}$ es una cuerda. Desde luego, el diámetro es una cuerda, pero no toda cuerda pasa por el centro.

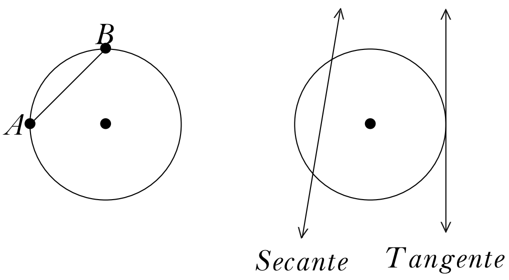


Figura 3.73.

Una **tangente** es una recta que tiene un solo punto en común con la circunferencia; el punto común es el **punto de tangencia** y la tangente es perpendicular al radio en su punto de tangencia. Una **secante** es una recta que corta la circunferencia en dos puntos (figura 3.73).

Un **sector circular** es la parte del círculo comprendida entre dos radios y el arco intersectado por ellos. En la figura 3.74 se ha sombreado el sector circular ORS.

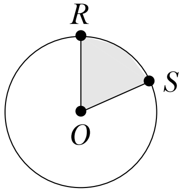


Figura 3.74.

Una porción de la circunferencia, como la determinada por los puntos R y S se llama un **arco**. En realidad, dos puntos determinan dos arcos; sin embargo, en una discusión será fácil entender a cual arco nos referimos.

Un **ángulo central** es el ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y lados que son radios. En la circunferencia de centro O que muestra la figura 3.75, se ha dibujado el ángulo central $\angle BOR$.

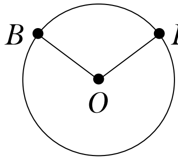


Figura 3.75.

3.2.5.1. El perímetro de la circunferencia y el área del círculo

Pensemos en una actividad como la siguiente:

- Construir circunferencias de diferentes radios, como $3, 4, 5, 6, \ldots, 10$.
- Medir con una cuerda la longitud de cada una de estas circunferencias que llamaremos C.
- Calcular la razón

$$\frac{\text{Longitud de la circunferencia}}{\text{diámetro}} = \frac{C}{d}.$$

En esta actividad podemos observar que esta razón, en todos los casos, es muy próxima a 3.14. Esta observación se puso ya de manifiesto en culturas muy antiguas como la egipcia y la babilónica a las que nos referimos en la introducción de este capítulo. Realmente la razón es constante, es el número irracional π, que tiene un expresión decimal infinita no periódica. Como curiosidad, las primeras 50 cifras decimales de este número son:

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510\ldots$$

Una buena aproximación la usaban ya los babilonios, la fracción $\frac{22}{7}$. En muchas de las aplicaciones que trabajamos basta tomar 3.14.

De la mencionada razón $\frac{C}{d}$ es posible obtener una expresión para el perímetro o longitud C de la circunferencia de radio r o diámetro $d = 2r$, la cual corresponde a:

$$C = \pi d \qquad \text{o} \qquad C = 2\pi r$$

La longitud de un arco

La longitud de un arco determinado en una circunferencia de radio r, por un ángulo central de n grados es:

$$\begin{aligned} l &= \frac{n}{360} 2\pi r \\ &= \frac{n}{180} \pi r \end{aligned}$$

Note que la expresión $\frac{n}{360}$, indica intuitivamente la parte de la longitud de la circunferencia que se está considerando.

Ejemplo 3.12. En la circunferencia de la figura 3.76, $OB = 1,3$ cm y $m\angle AOB = 80°$. Encontrar la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$.

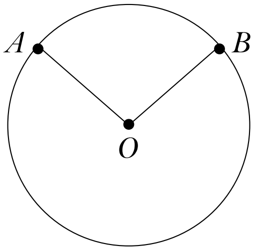


Figura 3.76.

$$l = \frac{80^\circ}{360^\circ}(2\pi)(1,3)$$

Por lo tanto, la longitud del arco $\widehat{AB}$ es aproximadamente $1,8$ cm.

Área del círculo

La circunferencia no es un polígono pero puede ser aproximada por polígonos tanto como uno lo desee. Para determinar el área de la región interior podemos intentar recubrirla con cuadrados de una unidad de área como lo hacíamos con los polígonos (figura 3.62), pero resulta más fácil usar sectores circulares.

En la figura 3.77, uniendo los sectores circulares según se indica en la parte derecha, se determina una figura similar a un rectángulo de lados πr y r. Al calcular el área del rectángulo se obtiene el área del círculo. Desde esta idea se puede concluir que el área A del círculo de radio r es: $A = \pi r^2$.

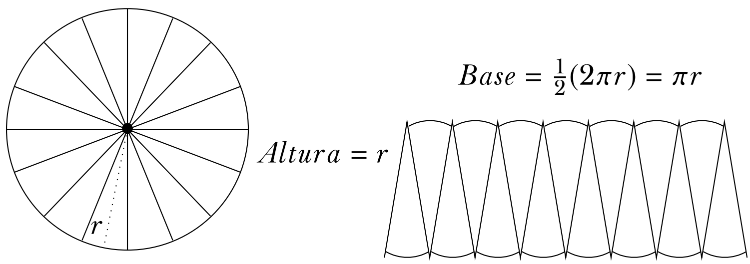


Figura 3.77.

Área de un sector circular

El área de un sector circular determinado por un ángulo central de n grados en un círculo de radio r está dada por:

$$A = \frac{n}{360}\pi r^2.$$

La expresión $\frac{n}{360}$ indica la parte del círculo que se está considerando.

Ejemplo 3.13. Encontrar el área del sector circular sombreado en la figura 3.78.

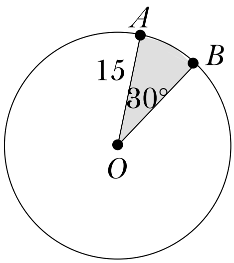


Figura 3.78.

$m\angle AOB = 30°$, por lo tanto el sector sombreado es $\frac{30}{360}$ del área del círculo. Así:

$$A = \frac{30}{360}(\pi)(15)^2$$

De esta manera, tenemos que el área del sector circular sombreado es 58, 9, tomando 3, 1416 como aproximación de π.

Polígonos inscritos en una circunferencia

Teóricamente, para construir un polígono regular de n lados, se parte de una circunferencia y se construyen en ella ángulos centrales de $\frac{360°}{n}$. Así que un polígono regular puede considerarse **inscrito** en una circunferencia, es decir, sus vértices son puntos de ella.

Por ejemplo, para construir un hexágono regular, se parte de una circunferencia y se construyen ángulos centrales de 60° como lo ilustra la figura 3.79. Puesto que los triángulos involucrados en la figura resultan equiláteros, el lado del hexágono resulta igual al radio de la circunferencia.

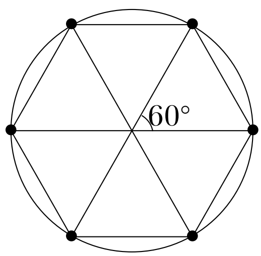


Figura 3.79.

Teorema 3.2.4. Si un diámetro de una circunferencia es un lado de un triángulo inscrito en ella, entonces el triángulo es rectángulo.

Demostración. Sean A, B y C puntos de la circunferencia de centro O y radio r y $\overline{AB}$ es un diámetro de dicha circunferencia como en la figura 3.80. El ángulo C es recto y, por lo tanto, el triángulo ABC es rectángulo.

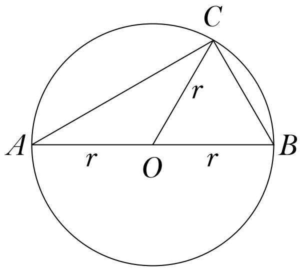


Figura 3.80.

En efecto, puesto que $AO = OC = r$, $\triangle AOC$ es isósceles, de donde $m\angle CAO = m\angle ACO$. Análogamente, $OC = OB = r$, luego, $\triangle OBC$ es isósceles y, por lo tanto, $m\angle OCB = m\angle OBC$.

Entonces, como la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$, si se nota con $x = m\angle CAO$ y $y = m\angle OCB$, se tiene que $\triangle ABC$ se tiene que $2x + 2y = 180°$; de donde $x + y = 90°$. Por lo tanto, $\angle C$ es recto, y, en consecuencia, $\triangle ABC$ es rectángulo.

3.3. Algunos sólidos y sus volúmenes

El estudio de las figuras tridimensionales es llamado **geometría de los sólidos**. Cuando hablamos de los polígonos, insistimos en diferenciar entre el polígono y la región poligonal. Un polígono es la frontera de una región poligonal y la región es la unión de la frontera con su interior.

Una distinción similar se hace con las figuras tridimensionales, una **superficie** es la frontera de una región tridimensional. Un **sólido** es la unión de la frontera y la región del espacio encerrada por la superficie. Por ejemplo una caja de cartón es una superficie y un bloque de ladrillo es un sólido.

Definición 3.3.1. Un **poliedro** es un cuerpo o sólido geométrico limitado por planos. Las intersecciones de estos planos forman polígonos llamados **caras** del poliedro; los lados de las caras se llaman **aristas** y las intersecciones de las aristas se llaman **vértices** (figura 3.81).

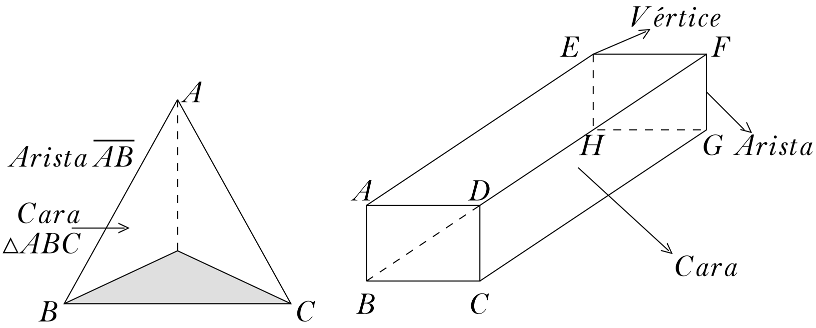


Figura 3.81.

Una **diagonal** de un poliedro es una recta que une dos vértices no situados en una misma cara.

Definición 3.3.2. Un **poliedro regular** es aquel cuyas caras son polígonos regulares iguales (figura 3.82).

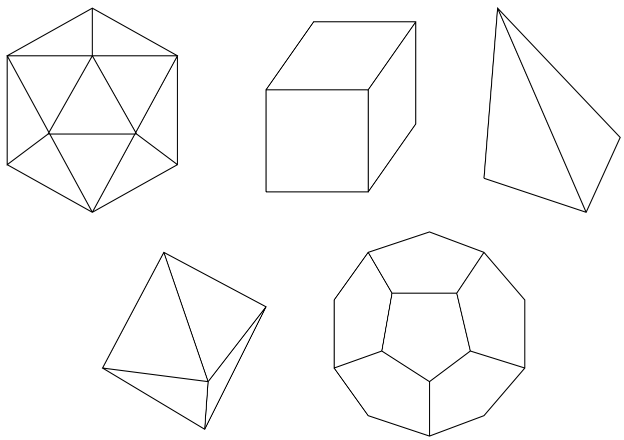


Figura 3.82.

De acuerdo al número de caras los poliedros se clasifican en **tetraedros**, **pentaedros**, **hexaedros**, etc., según tengan cuatro, cinco, seis o más caras. El poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas, y cuyas otras caras son paralelogramos, recibe el nombre de **prisma** (figura 3.83).

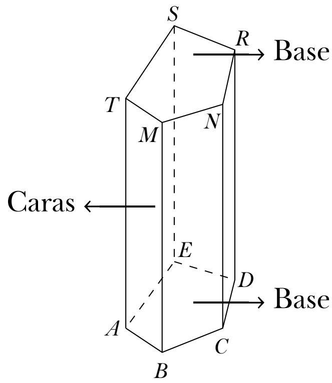


Figura 3.83.

Las caras iguales y paralelas se denominan **bases** y las demás, **caras laterales**. Si las bases son triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc., se habla de prismas triangulares, cuadrangulares o pentagonales y si las caras laterales son perpendiculares se habla de **prisma recto**.

Un **paralelepípedo** es un prisma cuyas bases son paralelogramos, es decir, sus seis caras son paralelogramos. Si sus bases son rectángulos se habla de **paralelepípedo rectángulo**, si sus caras laterales son perpendiculares a las bases se habla de **paralelepípedo recto** (figura 3.84). El cubo es el paralelepípedo rectángulo cuyas seis caras son cuadrados.

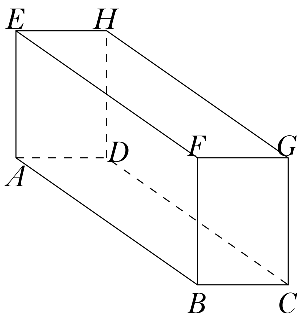


Figura 3.84.

Volumen

El **volumen** de un cuerpo es la medida del espacio que el cuerpo ocupa. Si cada uno de los lados de las caras de un cubo tiene una unidad de longitud, podemos afirmar que cada cara tiene una unidad cuadrada de área. Como el cubo tiene seis caras podemos decir además que el área de la superficie de este cubo es de 6 unidades cuadradas y que este cubo tiene una unidad cúbica de volumen ($1u^3$). Por esta razón, es llamado cubo unidad. Usualmente el volumen es medido en unidades cúbicas.

Ejemplo 3.14. ¿Cuál será entonces el volumen del sólido que se construye como se ilustra en la figura 3.85 con cubos unidad? Las dimensiones de la base son, respectivamente, 12 y 7 unidades lineales y tiene 17 unidades de altura.

En la capa de la base se han colocado 12×7 cubos unidad y hay 17 de estas capas. Es decir, el volumen total se puede hallar determinando el producto $12 \times 7 \times 17$. Hay pues en total 1428 cubos unidad, así el volumen es de 1428 unidades cúbicas.

Como en el caso del área de un rectángulo la idea anterior nos permite intuir que el volumen de un paralelepípedo rectángulo (una caja) es igual al producto de sus tres dimensiones (figura 3.86).

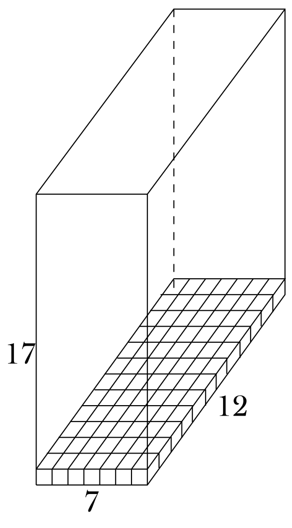


Figura 3.85.

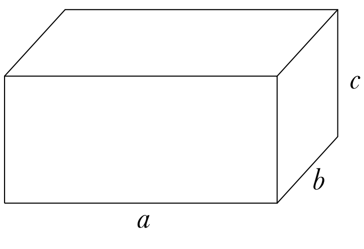


Figura 3.86.

Si las dimensiones de este paralelepípedo rectángulo son a, b y c su volumen V es

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Esta expresión es equivalente a afirmar que si el área de la base del paralelepípedo es A y la altura es c, el volumen V es

$$V = A \cdot c$$

Como caso especial, el volumen de un cubo es el cubo del arista, pues sus tres dimensiones son iguales. Si el arista es a, el volumen V es

$$V = a^3$$

La idea anterior se puede generalizar al volumen de un paralelepípedo cualquiera (o de un prisma cualquiera). En otras, palabras, el volumen de un paralelepípedo es $V = Ah$, donde h es la altura y A el área de la base.

Ejemplo 3.15.

1. Si un cubo tiene 64 cm^3 de volumen, ¿cuál es la longitud de un lado?

   Si s es la longitud de un lado, como $V = s^3 = 64$, entonces el lado del cubo es 4 cm.

2. Si un cubo tiene de lado a cm y otro tiene de lado $4a$ cm, ¿cuál es la razón entre los volúmenes de los dos cubos?

   El volumen V del primer cubo es a^3 y el volumen V_1 del segundo cubo es $(4a)^3$ y la razón entre el volumen V y el volumen V_1 es $\frac{a^3}{64a^3} = \frac{1}{64}$.

3. Si las dimensiones de una caja se incrementan en 2, 3 y 4 unidades, ¿qué sucede con el volumen de la caja?

   Si las dimensiones de la caja original son x, y y z (figura 3.87), su volumen es xyz. Si llamamos las nuevas dimensiones h, w y l, tenemos que:

   $$h = x + 2, \quad w = y + 3 \quad \text{y} \quad l = z + 4.$$

   De donde el volumen V de la nueva caja es:

   $$V = lwh = (z + 4)(y + 3)(x + 2).$$

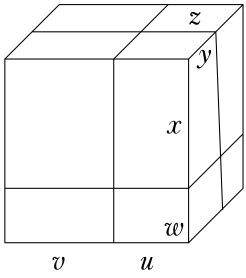


Figura 3.87.

Efectuando la multiplicación obtenemos que:

$$V = xyz + 3xz + 4xy + 12x + 2yz + 6z + 8y + 24.$$

El volumen se incrementa entonces en: $3xz + 4xy + 12x + 2yz + 6z + 8y + 24$ unidades de volumen.

Por ejemplo, si las dimensiones de la caja original son $x = 6$, $y = 8$, $z = 10$, el volumen de la caja sería 480 y el de la nueva caja sería $(6 + 2) \cdot (8 + 3) \cdot (10 + 4) = 1232$. En ese caso se incrementaría en 752 unidades cúbicas.

Nota: otros sólidos y sus volúmenes, como por ejemplo, el cilindro, el cono y la esfera se presentan en el taller 7.

Taller 1

1. (a) ¿Cuántas rectas pasan por un punto dado?
   (b) ¿Cuántos planos pueden contener una recta dada?

2. (a) Dados tres puntos no colineales, ¿cuántas rectas pueden dibujarse, de tal manera que cada una de las rectas pase por dos de dichos puntos?
   (b) Dados cuatro puntos no coplanarios tales que tres cualesquiera de ellos no sea colineales, ¿cuántas rectas pueden dibujarse de tal manera que cada una de las rectas pase por dos de dichos puntos?

3. La medida de un ángulo es 30 menos que el doble de la medida de su complemento. Hallar la medida del ángulo.

4. El triple de la medida de un ángulo es la tercera parte de su suplemento. Hallar la medida del ángulo.

5. En la recta numérica que muestra la figura 3.88, C es el punto medio de $\overline{AB}$. Si la coordenada de A es $1,7$ y la coordenada de C es $3,21$, hallar la coordenada de B.

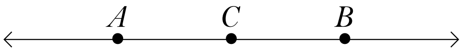


Figura 3.88.

6. Determinar las medidas de los ángulos 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 en la figura 3.89, sabiendo que la recta s es paralela a la recta t, y l es una recta transversal.

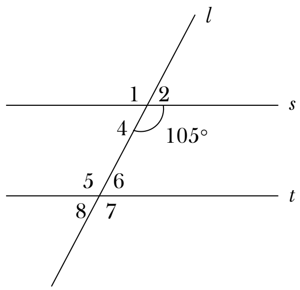


Figura 3.89.

Taller 2

1. (a) Si dos lados de un triángulo miden respectivamente 11 cm y 16 cm, ¿cuáles son las posibles medidas del tercer lado?
   (b) Si un lado de un triángulo mide 57 cm y otro lado mide 58 cm, ¿cuáles son las posibles medidas del otro lado?
   (c) ¿Pueden ser las medidas de los lados de un triángulo números enteros consecutivos $(n, n+1, n+2)$?

2. En $\triangle ABC$, $AB = 10$, $BC = 7$ y $AC = 8$. ¿Cuál es el ángulo mayor?, ¿cuál es el ángulo menor?

3. Recordemos que un triángulo es llamado **rectángulo** si tiene un ángulo recto, **acutángulo** si tiene los tres ángulos agudos y **obtusángulo** si tiene un ángulo obtuso.

(a) Construir un triángulo rectángulo, uno obtusángulo y uno acutángulo.

(b) Responder, ¿se puede construir un triángulo rectángulo que sea isósceles?

4. Si el triángulo $\triangle ABC$ de la figura 3.90, es isósceles, ($\overline{AB} \cong \overline{AC}$), explicar por qué es correcto afirmar que $\angle ABC \cong \angle ACB$.

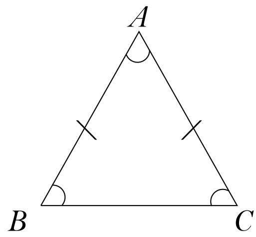


Figura 3.90.

5. Si en la figura 3.91, $m\angle ABC = 105°$, $m\angle A = 6t$ y $m\angle C = 9t$, encontrar el valor de t.

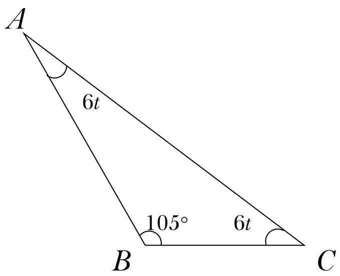


Figura 3.91.

6. Construir dos triángulos ABC y DEF que cumplan que $m\angle A = m\angle D$, $m\angle B = m\angle E$. ¿Qué se puede afirmar acerca de las medidas de los ángulos C y F?

7. Usando ejemplos, ilustrar que el siguiente criterio que es válido para triángulos rectángulos: si en dos triángulos rectángulos la hipotenusa y un cateto de uno son congruentes a la hipotenusa y un cateto del otro, entonces los dos triángulos son congruentes.

Taller 3

1. En cada caso, hallar la razón entre cada par de números reales.

   (a) 12 y 15.

   (b) 21 y 7.

   (c) $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$

2. En cada proporción, hallar el valor de x.

   (a) $\frac{3}{x} = \frac{x}{27}$

   (b) $\frac{x+1}{4} = \frac{x}{3}$

3. Sean a, b, c y d números reales positivos. Considere la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. En cada caso completar la proporción:

   (a) $\frac{a}{c} =$

   (b) $\frac{d}{b} =$

4. Los triángulos OMN y QMP de la figura 3.92 son semejantes.

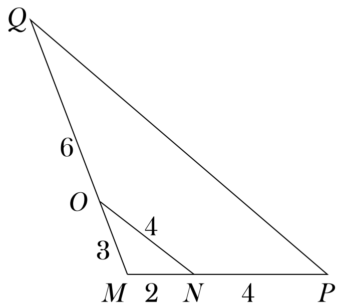


Figura 3.92.

   (a) Determinar la razón de semejanza.

   (b) Hallar la longitud de $\overline{QP}$

   (c) Comparar ángulos correspondientes de los dos triángulos.

5. ¿Son semejantes los pares de triángulos que se muestran en la figura 3.93? Explique por qué sí o por qué no.

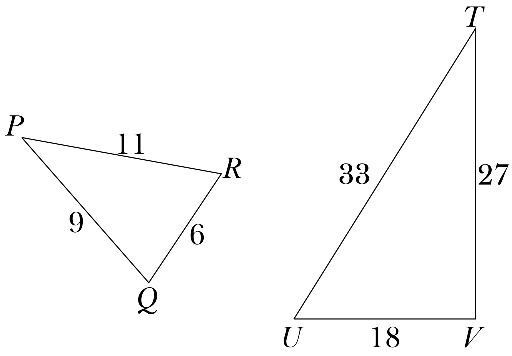


Figura 3.93.

6. (a) Explicar por qué la parejas de triángulos que aparecen en la figura 3.94 son semejantes.

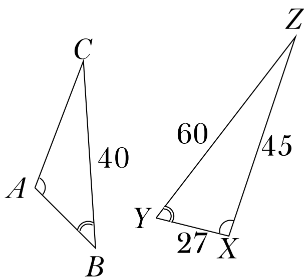


Figura 3.94.

(b) Hallar razón de semejanza entre los lados de los triángulos correspondientes.

(c) Determinar las longitudes de los lados desconocidos.

7. En la figura 3.95, $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, $AB = 10$, $DE = 5$, $CD = 4$ y $CE = 6$.

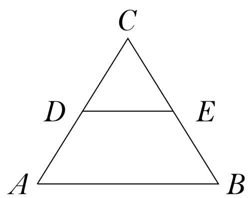


Figura 3.95.

(a) Hallar CA y CB.

(b) Hallar el perímetro de $\triangle ABC$.

8. La altura $\overline{CD}$ del triángulo ABC divide la hipotenusa en dos segmentos de longitudes 6 y 9 unidades. Hallar CD y los dos catetos del triángulo ABC (figura 3.96).

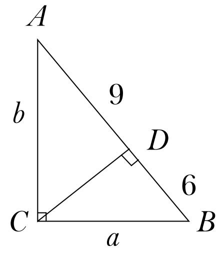


Figura 3.96.

9. Una **mediana** de un triángulo es un segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Verificar que las medianas de un triángulo son concurrentes, es decir, se intersectan en un mismo punto, siguiendo estos pasos: considerar el enunciado y la figura que siguen, y responder las preguntas planteadas en los literales a, b, c y d.

   En el $\triangle ABC$ que muestra la figura 3.97, AE y BD son medianas. Sea O el punto de intersección de AE y BD.

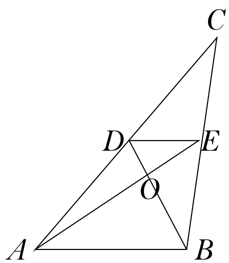


Figura 3.97.

   (a) $\triangle ABO \sim \triangle EDO$, ¿por qué?
   (b) $\frac{AB}{ED} = \frac{AO}{EO} = 2$, ¿por qué?
   (c) $AO = 2EO$ y $BO = 2DO$, ¿por qué?
   (d) En forma análoga si $\overline{CF}$ es una mediana, al considerar otra mediana, por ejemplo $\overline{AE}$, y suponer que estas se intersectan en un punto P se concluye que $CP = 2PF$ y que $AP = 2PE$; de lo cual se sigue que $O = P$. ¿Por qué?

Por lo tanto las medianas de un triángulo son concurrentes. El punto de intersección de las medianas se llama **baricentro** y dista de cada vértice $\frac{2}{3}$ de la longitud de la mediana respectiva.

Taller 4

1. Sabemos que una diagonal de un polígono es un segmento que une dos vértices no consecutivos. ¿Cuál es el número de diagonales de un cuadrilátero?, ¿de un pentágono?, ¿de un hexágono?, ¿de un n-ágono?

2. En los polígonos que aparecen en la figura 3.98 se han determinado algunos triángulos. Observar cada una de las construcciones para responder las preguntas.

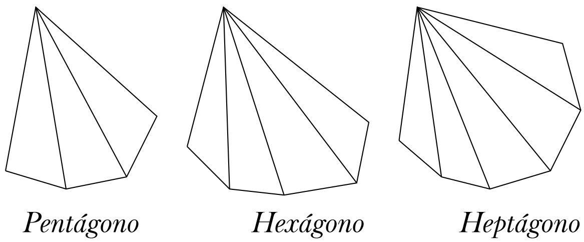


Figura 3.98.

   (a) ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un pentágono?, ¿de un hexágono?, ¿de un heptágono?, ¿de un decágono? En cada caso considere que el polígono es convexo. Encontrar una expresión general que le permita determinar la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo.

   (b) Recordemos que un **polígono regular** es un polígono convexo cuyos ángulos son todos congruentes y cuyos lados son todos congruentes. El triángulo equilátero, el cuadrado, el pentágono regular y el hexágono regular son ejemplos de este tipo de polígonos. Construir estos polígonos y determinar las medidas de sus ángulos interiores en cada caso.

3. En forma similar a la definición de **ángulo externo** de un triángulo, se tiene la definición de ángulo externo de un polígono regular. Nuevamente, se puede observar que en cada vértice se determinan dos ángulos externos, los cuales resultan congruentes. Así, para este ejercicio consideraremos solamente un ángulo externo en cada vértice.

¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo? ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos exteriores de un cuadrado, pentágono regular, hexágono regular, n-ágono regular? En cada caso, considere que el polígono es convexo.

4. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En cada caso, justifique su respuesta.

   (a) Todo cuadrado es un rombo.

   (b) Todo rombo es un cuadrado.

   (c) Todo cuadrado es un rectángulo.

   (d) Todo rectángulo es un cuadrado.

   (e) Todo rectángulo es un paralelogramo.

   (f) Algunos rectángulos son rombos.

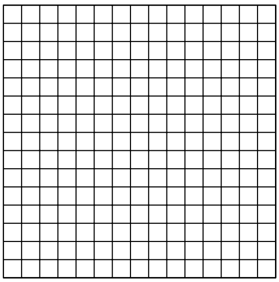
   (g) Algunos trapecios son paralelogramos.

Taller 5

1. Si el perímetro de un rectángulo es de 48 cm, ¿cuáles son las posibles dimensiones de los lados?

2. Si el perímetro de un triángulo es de 30 cm, ¿cuáles son las posibles dimensiones de sus lados?

3. (a) Usando la cuadrícula que se presenta a continuación, dibujar tres polígonos diferentes que tengan 12 unidades de perímetro. Los vértices de los polígonos deben estar sobre puntos de la cuadrícula.



   (b) ¿Es posible construir un triángulo que tenga 12 unidades de perímetro?

(c) ¿Cuál de las figuras construidas tiene mayor área?

4. Encontrar el área del paralelogramo que se presenta en la figura 3.99.

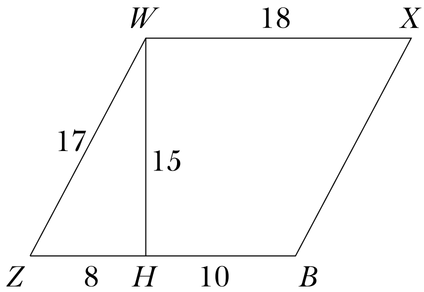


Figura 3.99.

5. En la figura 3.100, $ABCD$ y $AMEN$ son cuadrados, M es el punto medio de $\overline{AB}$ y $BC = 16$. Determinar el área del polígono $BCDNEM$.

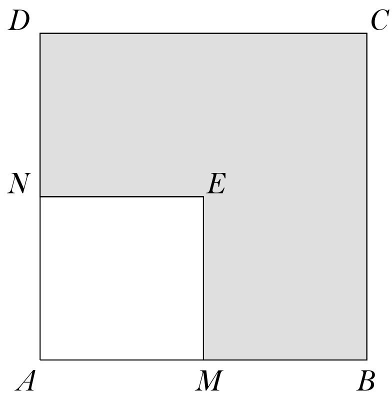


Figura 3.100.

6. En la figura 3.101, $DCBA$ es un cuadrado y los cuatro triángulos que aparecen son congruentes.

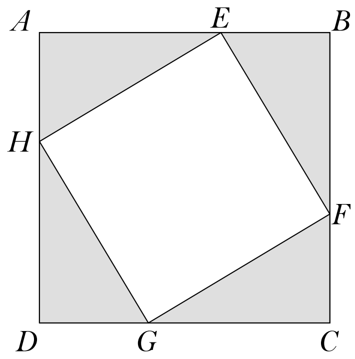


Figura 3.101.

Si $AB = 7$ y $HE = 5$, ¿cuál es el área de la región sombreada?

7. En la figura 3.102, determinar las áreas de los triángulos EFH, FGH y EGH.

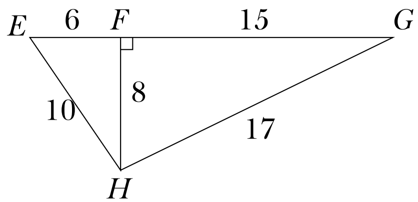


Figura 3.102.

8. Hallar el área del $\triangle XYZ$ en cada uno de los siguientes casos (figura 3.103).

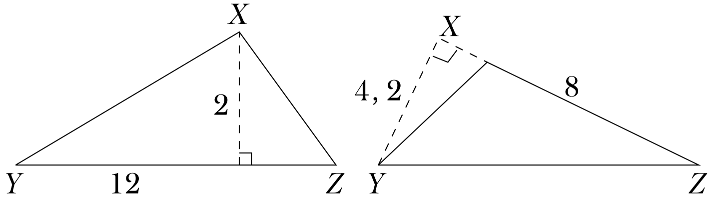


Figura 3.103.

9. Determinar el área, en unidades cuadradas, del cuadrilátero $ABCD$ de la figura 3.104.

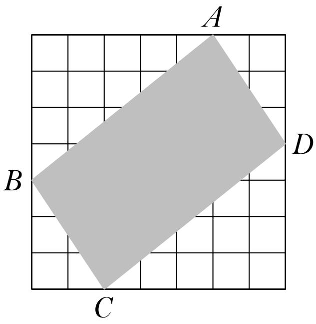


Figura 3.104.

10. Trazar un triángulo ABC cualquiera, dibujar sus tres alturas. Determinar el área del triángulo en cm^2, midiendo la longitud de cada uno de sus lados y la altura correspondiente a ese lado. ¿Qué valor tiene el área, en cada caso?

11. En el triángulo ABC de la figura 3.105, se han trazado las alturas $\overline{AW}$ y $\overline{CF}$. Si $AB = 8$, $CF = 6$ y $AW = 7$. Determinar CB.

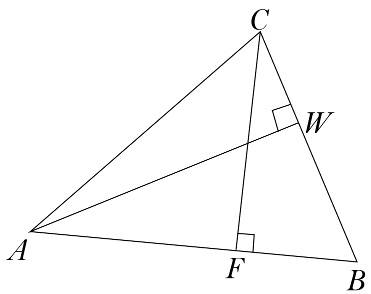


Figura 3.105.

12. Si se sabe que un cateto de un triángulo rectángulo es el doble del otro, determinar su hipotenusa. ¿Cuál es la razón entre la hipotenusa y el cateto menor?

13. (a) Construir un sistema de coordenadas y localizar en él los puntos $A : (0, 0)$, $B : (3, 0)$ y $C : (3, 2)$.

(b) Trazar el triángulo con vértices en los puntos A, B, C. Determinar las longitudes de sus lados y las medidas de sus ángulos. ¿Qué tipo de triángulo es?

(c) ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras quedan en el interior del triángulo?

(d) ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras quedan sobre cada uno de los lados?

Taller 6

1. En la figura 3.106, $\overline{PR}$ y $\overline{SQ}$ son diámetros de la circunferencia C y O es el punto de intersección de $\overline{PR}$ y $\overline{SQ}$.

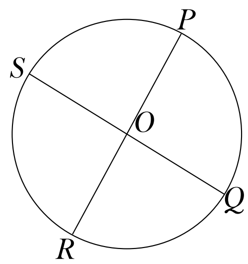


Figura 3.106.

Discutir la validez de las siguientes afirmaciones:

(a) $\overline{OP} \cong \overline{OQ}$.

(b) $\overline{OR} \cong \overline{OS}$.

(c) $\angle POQ \cong \angle ROS$.

2. (a) Trazar un segmento $\overline{AB}$.

(b) Construir una circunferencia con radio AB.

(c) Construir una circunferencia con diámetro AB.

(d) Hallar la razón entre las longitudes de las circunferencias construidas en b y c.

(e) Hallar la razón entre las áreas de las circunferencias construidas en b y c.

3. Las dos circunferencias que aparecen en la figura 3.107 son concéntricas, es decir, tienen el mismo centro

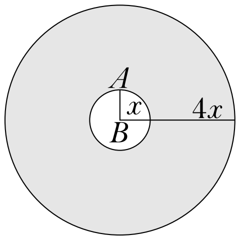


Figura 3.107.

Si el radio de la circunferencia mayor es cuatro veces el radio de la circunferencia menor, ¿cuál es el área de la región sombreada?, ¿cuál es la razón entre las áreas del círculo menor y el mayor?, ¿cuál es la razón entre las longitudes de la circunferencia menor y la mayor?

4. En la figura 3.108, se han cortado 8 discos circulares de metal de una lámina rectangular de 12 cm por 24 cm. La lámina restante no se usa.

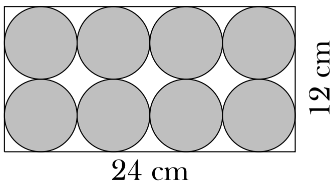


Figura 3.108.

¿Cuál es el área del metal que no se usa?

5. Una circunferencia de diámetro 12 unidades se ha inscrito en el cuadrado $EFGH$ como se muestra en la figura 3.109.

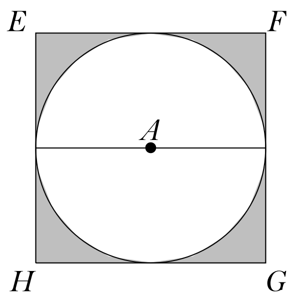


Figura 3.109.

¿Cuál es el área de la región sombreada?

6. En la circunferencia de la figura 3.110, $\overline{BD}$ es un diámetro, $OD = 15$ y $m\angle AOD = 20°$.

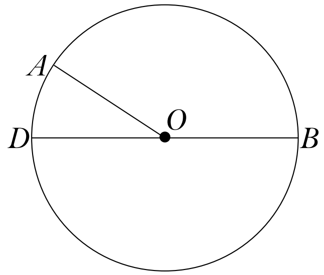


Figura 3.110.

Hallar el área del sector circular determinado por A, O y D.

7. Hallar el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 5.

8. Hallar el área y el perímetro de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio 6.

9. El radio de la circunferencia de centro O que muestra la figura 3.111 es 4. El $\triangle ABC$ es isósceles y $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia.

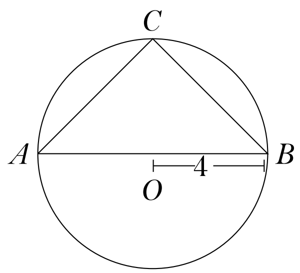


Figura 3.111.

(a) Hallar las medidas de los ángulos del $\triangle ABC$.
(b) Hallar el área del $\triangle ABC$.
(c) Hallar el perímetro del $\triangle ABC$.

10. Una **bisectriz de un triángulo** es una bisectriz de uno de sus ángulos.

(a) Dibujar un triángulo y sus bisectrices.

(b) Como puede observarse las tres bisectrices se intersectan en un mismo punto. Sea O el punto de intersección de las bisectrices. Verificar que O equidista de los tres lados del triángulo.

(c) Tomar la distancia r de O a uno de los lados del triángulo. Luego dibujar la circunferencia de centro O y radio r.

Entonces, como puede observarse el punto de intersección de las bisectrices de un triángulo es el centro de la circunferencia inscrita en dicho triángulo. Es necesario anotar que el punto de intersección de las bisectrices es llamado el **incentro** del triángulo.

11. En una circunferencia de radio r, un **radián** (1 rad) es la medida de un ángulo central que subtiende un arco de longitud r. En la circunferencia de centro O y radio r, el ángulo AOB mide un radián. Cuando la medida de un ángulo está dada en radianes se acostumbra omitir el símbolo rad o el término radianes (figura 3.112).

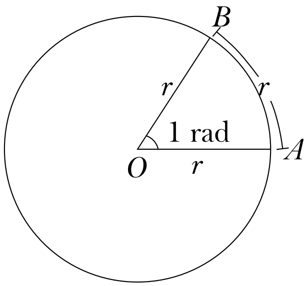


Figura 3.112.

Puesto que la longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$, alrededor de la circunferencia caben 2π radios. Entonces, un ángulo central de un giro completo mide 2π radianes. Por lo tanto, $360°$ corresponden a 2π radianes.

(a) Hallar la medida en radianes de cada uno de los siguientes ángulos:

i. $30°$.
ii. $45°$.
iii. $60°$.
iv. $90°$.
v. $180°$.

vi. $210°$.
vii. $270°$.

(b) Cada uno de los siguientes ángulos está expresado en radianes. Hallar la medida en grados de cada ángulo.

i. $\frac{4\pi}{3}$.
ii. $\frac{5\pi}{6}$.
iii. $\frac{3\pi}{4}$.

(c) Hallar una fórmula para calcular la longitud de un arco en una circunferencia de radio r, cuando el ángulo central que lo subtiende está medido en radianes.

(d) Hallar una fórmula para calcular el área de un sector circular en una circunferencia de radio r, cuando el ángulo central que lo subtiende está medido en radianes.

(e) Hallar la longitud de un arco que subtiende un ángulo de $\frac{4\pi}{3}$ en una circunferencia de 6 cm de radio.

(f) Hallar el área de un sector circular que subtiende un ángulo de $\frac{5\pi}{6}$ en una circunferencia de 8 cm de radio.

12. Una **mediatriz de un segmento** es una recta perpendicular al segmento en su punto medio.

(a) Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos. ¿Por qué?

(b) Si un punto equidista de los extremos de un segmento, entonces el punto está en la mediatriz del segmento. ¿Por qué? Es necesario tener en cuenta que las mediatrices de un triángulo corresponden a las mediatrices de sus lados.

(c) Dibujar un triángulo y sus mediatrices.

(d) Como puede observarse las tres mediatrices se intersectan en un mismo punto. Sea O el punto de intersección de las mediatrices. Este punto se llama **circuncentro**. Verificar que O equidista de los tres vértices del triángulo.

(e) Tomar la distancia r de O a uno de los vértices del triángulo. Dibujar la circunferencia de centro O y radio r. Entonces, como puede observarse el punto de intersección de las mediatrices de un triángulo es el centro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.

Taller 7

1. La longitud de la diagonal de un cubo es $8\sqrt{3}$. Hallar el área de su superficie total y su volumen.

2. Analizar cómo varía el volumen de una caja de dimensiones l, w y h cuando se realizan los siguientes cambios sobre ellas:

   (a) Una de las dimensiones se multiplica por cinco y las otras no se cambian.

   (b) Todas las dimensiones se cuadruplican.

   (c) Una de las dimensiones se incrementa en seis unidades y las otras no se cambian.

   (d) Las tres dimensiones se incrementan en una unidad.

3. Recuerde que el volumen V de un **cilindro circular recto**, de radio r y altura h es $V = \pi r^2 h$. Puesto que el área de la base del cilindro es $B = \pi r^2$, se deduce que el volumen del cilindro es $V = Bh$ (área de la base por la altura) (figura 3.113).

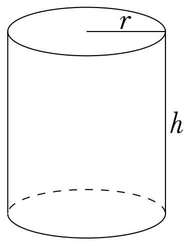


Figura 3.113.

   (a) Si un tanque cilíndrico tiene 100 pies de diámetro y 70 pies de alto, ¿cuál es el volumen del tanque?

   (b) Comparar los volúmenes de dos cilindros que tengan la misma altura, pero el radio del segundo sea la tercera parte del radio del primero.

   (c) En la figura 3.114, se muestran un cilindro cicular recto de radio 10 y un cubo de lado 10. Ambos sólidos tienen la misma altura. ¿Tienen ellos el mismo volumen? Si no lo tienen, ¿cuál de los dos tiene mayor volumen?

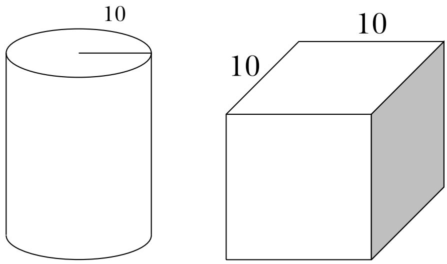


Figura 3.114.

4. Sabemos que el volumen V de un **cono circular recto** de radio r y altura h es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (figura 3.115). Puesto que el área de la base del cono es $B = \pi r^2$, se deduce que el volumen del cono es $V = \frac{1}{3}Bh$.

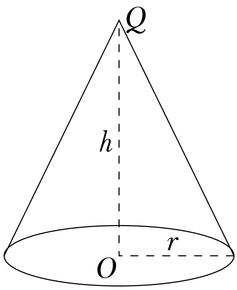


Figura 3.115.

   (a) Si un cono tiene un volumen de 40 cm^3 y su altura es 5 cm, ¿cuál es el radio de su base?
   (b) Si un cono y un cilindro tienen bases y alturas iguales y el volumen del cilindro es V, ¿cuál es el volumen del cono?

5. En el prisma que se muestra en la figura 3.116, se tiene que $BC = 4$, $AB = 12$ y $CG = 3$.

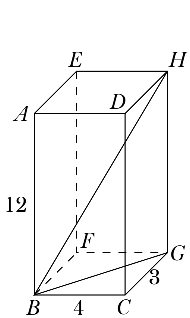


Figura 3.116.

(a) Calcular las áreas de los cuadriláteros $ABCD$, $AEHD$ y $AEFB$.

(b) Determinar la longitud de $\overline{BG}$ y la longitud de $\overline{BH}$.

(c) Determinar el área del triángulo BGH.

6. Arquímedes (287 - 212 a. C.) demostró que el volumen de una esfera es dos tercios del volumen del cilindro circular recto más pequeño que puede contenerla. Verificar el resultado de Arquímenes recordando que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y siguiendo los pasos señalados en los siguientes literales:

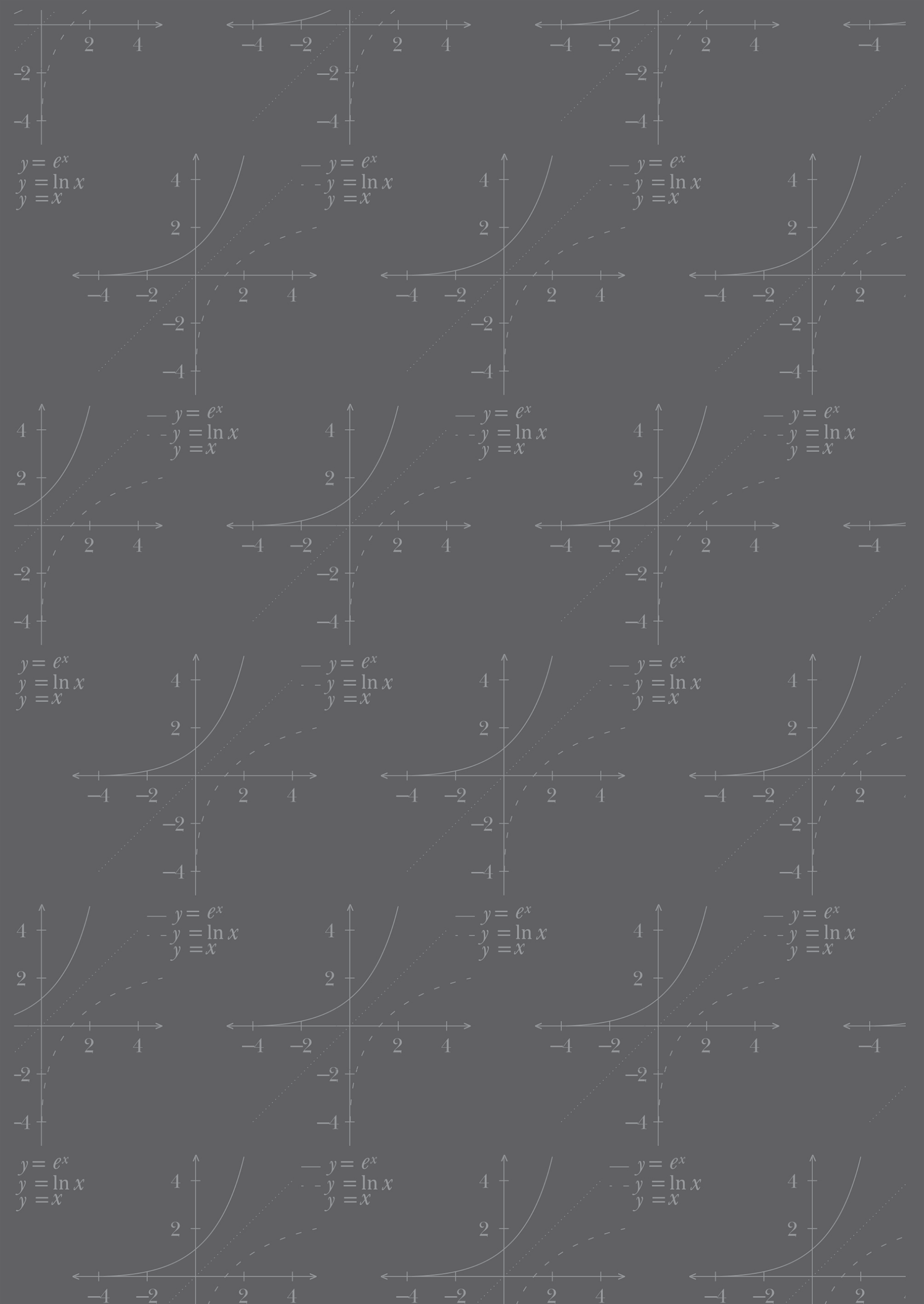
   (a) Notar que el cilindro más pequeño que puede contener una esfera de radio r tiene de base un círculo de radio r y una altura igual a $2r$. Ilustrar con un dibujo la esfera contenida en el cilindro.

   (b) Hallar el volumen del cilindro.

   (c) Hallar la razón entre el volumen de la esfera y el volumen del cilindro.

Capítulo *cuatro*

Funciones


$y = e^x$
$y = \ln x$
$y = x$

4.1. Introducción histórica

Estamos acostumbrados a usar la idea de "función" para expresar una relación de dependencia entre varias magnitudes; por ejemplo, decimos que "los precios están en función de los costos de producción". El de función es un concepto unificador. Es un concepto básico y general que comprende las distintas interpretaciones como una tabla de valores, como una curva o como una fórmula. A pesar de ello, se puede decir que su significado actual es reciente, de 1837 y es debido al matemático alemán Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859).

La evolución del concepto es de gran interés, se desarrolló con el paso del tiempo, su significado fue cambiando y precisando a través de los años. La versión más rudimentaria del concepto de función está presente en tablillas de arcilla de los babilonios y en papiros de los egipcios. Unos y otros elaboraron tablas que contenían mediciones de fenómenos observados tales como la variación de la luminosidad de la luna en intervalos iguales de tiempo, o períodos de visibilidad de un planeta respecto a su posición relativa al sol. Ello tiene un sentido de funcionalidad. Además, los babilonios escribieron múltiples tablas de cálculo. Dos de ellas datan de 2000 a. C. y corresponden a los cuadrados de los números del 1 al 59, y los cubos de los números del 1 al 32. Existe evidencia de que los egipcios y los babilonios manejaron las progresiones geométricas.

La noción de dependencia entre cantidades aparece entre los griegos con Arquímedes (287 - 212 a. C.) y las leyes de la mecánica: la primera ley de la hidrostática, descubierta por él, establece que cada cuerpo sólido sumergido en un fluido es empujado en dirección ascendente por una fuerza igual al peso del volumen del líquido desplazado por ese cuerpo. Otros ejemplos de dependencia entre cantidades se encuentran en su trabajo sobre las espirales. En ellos se dice, por ejemplo, que el área barrida por el radio en la segunda vuelta es 6 veces el área de la primera vuelta. En sus trabajos en geometría, en el tratado sobre la esfera y el cilindro, destaca la relación entre el área y el volumen de una esfera y un cilindro circunscrito con la misma altura y diámetro. Arquímedes descubrió que la esfera tiene un área y un volumen equivalentes a dos tercios de los del cilindro.

Otro ejemplo de que entre los griegos se usó el concepto de función lo encontramos en las ideas de Ptolomeo (100 - 160), quien calculó cuerdas de una circunferencia, lo que esencialmente quiere decir que calculó funciones trigonométricas. Pensando una función como una relación que asocia elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto, en el *Almagesto* de Ptolomeo, podemos decir, abundan las funciones.

Los logaritmos y, por ende, las potencias también aparecieron entre griegos como una herramienta de cálculo. En el libro *Elementos* de Euclides aparece la igualdad $a^{m+n} = a^m a^n$, para enteros positivos n y m. Arquímedes utilizó la idea de reducir la multiplicación de dos potencias de un número por medio de la suma de sus logaritmos (exponentes).

Entre los siglos VII y XIII, los árabes mostraron conocimiento de las llamadas razones trigonométricas. Ya en esa época, ellos tenían tablas de senos y cosenos, y tablas para la secante, cosecante, tangente y cotangente. Su interés en la trigonometría se vio potenciado cuando conocieron las tablas elaboradas en la India, lo que les permitió sentar las bases de la trigonometría, como también las del álgebra y el aritmética. Así, se puso en evidencia una concepción primaria del concepto de función: la tabla de valores. Pasarían otros 600 años antes de que apareciera la actual noción de función.

Durante la Edad Media, el concepto de función tuvo muy poco desarrollo. Sin embargo, es necesario anotar que en el siglo XIV, en Oxford, Thomas Bradwardine (1300 - 1349) utilizó un "álgebra de palabras" para expresar relaciones de tipo funcional. Su idea era utilizar letras del alfabeto en lugar de números para sustituir cantidades variables y representar con palabras, las operaciones de suma, resta, etc. Además, en París, alrededor de 1361, Nicholas Oresme (1325 - 1382) diseñó una versión primitiva de representación gráfica para modelar la forma en la que varían algunos fenómenos naturales. Utilizó segmentos verticales de diferentes longitudes, para representar diferentes variaciones en una cualidad o un aspecto de un mismo objeto observado, apoyados sobre un segmento horizontal que no tenía referencia a escala o a posiciones relativas, con la idea de formar una figura geométrica. Su idea era que las propiedades de la figura geométrica, representaban propiedades de la cualidad o el aspecto en cuestión. El mismo Nicholas Oresme halló la regla $a^{m+n} = a^m a^n$, para exponentes racionales, y estableció otras identidades como $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$, $(a^m)^{\frac{p}{q}} = \left(a^{mp}\right)^{\frac{1}{q}}$. Un siglo después, en 1484 Nicolás Choquet (1644 - 1722) utilizó las potencias con exponentes negativos. En esta época se consolidó la función exponencial entre los números reales y los reales positivos, aunque ninguno de los términos eran conocidos como tales. En el siglo XVI, en 1544 el matemático alemán Michael Stifel (1487 - 1567) utilizó por primera vez el término exponente, construyó la noción de exponente cero y exponente negativo y completó el trabajo, introduciendo exponentes racionales arbitrarios.

En el Renacimiento, el desarrollo del concepto de función fue impulsado por el uso de símbolos para representar objetos matemáticos, como lo hizo François Viète (1540 - 1603) en 1570. Viète, considerado uno de los precursores del álgebra, fue el primero en representar los parámetros de una ecuación mediante letras. Después lo haría René Descartes (1596 - 1650) en 1637. Especialmente en el siglo XVI, los científicos se plantearon problemas desde el punto de vista experimental y físico. El estudio de variables requería entonces relacionarlas, expresarlas mediante números y representarlas adecuadamente. Todo esto conllevaba relaciones nuevas, que se podía verificar de manera experimental. Al estudiar fenómenos naturales desde una nueva perspectiva matemática, se descubrieron nuevas interrelaciones y ello implicó un notable progreso de la ciencia.

En los siglos XVII y XVIII, matemáticos como Isaac Newton (1642 - 1726/27), Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716), los hermanos Bernoulli, Jacob (1654- 1705) y Johann (1667 - 1748), y otros muchos, se expresaban en términos de curvas, superficies, áreas y líneas tangentes. De hecho, en el primer libro de cálculo titulado *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* (*Análisis de los infinitamente pequeños para el entendimiento de las líneas curvas*) y publicado en 1696 por Guillaume François Antoine, marqués de l'Hôpital (1661 - 1704), como ya se indica en su propio título, lo que se estudia son curvas, no funciones. Esto no es extraño pues los métodos del cálculo infinitesimal eran todavía muy recientes y, con frecuencia, sus razonamientos eran confusos. Entonces los matemáticos preferían fundamentar sus resultados geométricamente pues, desde Euclides, se consideraba la geometría como el paradigma de la claridad y la perfección en la deducción.

El rápido desarrollo de las matemáticas en esos siglos y en los siglos siguientes y muy particularmente el desarrollo del concepto de función, se inicia con la publicación de los trabajos de Galileo Galilei (1564 - 1642), Descartes, Pierre de Fermat (1601 - 1665), Newton y Leibniz a partir del año 1600.

En sus estudios sobre el movimiento, Galileo mostró relacionamiento entre variables. Es por ello que algunos autores atribuyen a Galileo la introducción en matemáticas, de manera formal, del concepto de función como una relación entre variables. También Galileo mostró una correspondencia entre conjuntos. En 1638 consideró dos circunferencias concéntricas con centro O, la más grande, A, con diámetro del doble del diámetro de la más pequeña, B. Para cualquier punto P sobre A, el segmento OP corta B en un punto Q. Así Galileo construyó una función que aplicaba cada punto de A sobre un punto de B. De modo similar, para un punto Q sobre B, la semirrecta de extremo O que contine el segmento OQ, corta A en exactamente un punto P. De nuevo obtuvo una función, esta vez de los puntos en B hacia los puntos en A. Aunque la longitud de la circunferencia A sea el doble de la longitud de la circunferencia B, ambas tienen el mismo número de puntos. También estableció la correspondencia uno-a-uno estándar entre los enteros positivos y sus cuadrados, la cual en términos modernos daba una biyección entre $\mathbb{N}$ y un subconjunto propio.

Casi al mismo tiempo que Galileo llegaba a estas ideas, Descartes introducía el álgebra a la geometría en "La géométrie" ("La geometría"), uno de los apéndices del *Discours de la méthode* (*Discurso del Método,* 1637). Afirmó que se puede dibujar una curva al permitir que una línea tome sucesivamente un número infinito de valores distintos. Esto de nuevo llevó el concepto de función a la construcción de una curva. También en el *Discours de la méthode,* Descartes introdujo el sistema de coordenadas, que, si bien no incluía números negativos, si sentó las bases del "sistema cartesiano de coordenadas", llamado así en su nombre. Descartes distinguía el concepto de dependencia entre cantidades, el papel de la variable independiente y la variable dependiente, la dependencia entre las variables expresadas mediante fórmulas, cantidades que permanecen constantes, entre otros. Aunque tenía ecuaciones para representar ciertas curvas, nunca dio una definición explícita de función. En este período Fermat usó ecuaciones para representar ciertas curvas. En el año 1629 encontró las ecuaciones de la recta, la circunferencia con centro en el origen, la elipse, la parábola y la hipérbola. Estos hechos, además de favorecer la formalización del concepto de función, marcaron el nacimiento de la geometría analítica.

El primer gran aporte de esta época a la formalización del concepto de función surgió en la teoría de fluxiones de Newton en la que las magnitudes están descritas como movimientos continuos, de manera tal que la variable dependiente se va generando en forma continua a partir de la variable independiente. Newton utilizó la palabra *genita*, que en latín significa "generada" o "nacida", para referirse a expresiones de la forma Ax^n. Para varios autores, *genitum* surge como la primera expresión usada para referirse al concepto de función.

Como otros términos en matemáticas, inicialmente la palabra función fue empleada con su significado usual (no matemático). En 1692, en su artículo *De Linea Ex Lineis Numero Infinitis Ordinatim Ductis*, Leibniz usó por primera vez las palabras cálculo diferencial.

En este período se realiza el paso a exponentes reales y la consolidación de los logaritmos con John Napier, barón de Merchiston, llamado también Neper o Nepair (1550 - 1617). Como Arquímedes, él buscaba una forma rápida de hacer multiplicaciones. Introdujo el número *e* como base de exponenciales y logaritmos. El relojero y matemático suizo Joost Bürgi o Jobst

Bürgi (también conocido por su forma latinizada Byrgius) (1552 - 1632) en ocasiones es considerado como el inventor de los logaritmos porque hacia 1600 elaboró una tabla en que caculó potencias de la misma base, tabla que solo publicó en 1620. Habitualmente, el crédito del descubrimiento de los logaritmos se otorga al británico John Napier, quien fue el primero en publicar su trabajo, lo que hizo en 1614. El reverendo Henry Briggs (1561 - 1630) contribuyó a difundir los logaritmos de Napier e impulsó la utilización de los logaritmos en base 10 o Briggs, muy apreciados por su menor complejidad de cálculo. Él elaboró las primeras tablas de logaritmos en esa base, como también calculó diversas tablas trigonométricas.

En 1748 el concepto de "función" tomó relevancia en matemáticas cuando el matemático, físico y filósofo suizo Leonhard Paul Euler (1707 - 1783) en su libro *Introductio in Analysis Infinitorum*, en el capítulo sobre las funciones, se centró en el concepto de función de una cantidad variable como cualquier expresión analítica formada a partir de esa cantidad variable y constantes. Se entendía que expresión analítica significaba expresión formada por las operaciones de suma, multiplicación, potencias, raíces, etc., que incluían series, fracciones, productos infinitos y primitivas. Euler distinguió entre varios tipos de funciones según que puedan o no representarse por medio de una sola expresión analítica. Fue él quien introdujo la notación $f(x)$ para indicar el valor de una función f en un valor x de la variable. *Introductio in Analysis Infinitorum* cambiaría la manera en la que los matemáticos pensaban sobre conceptos como el seno, el coseno, la tangente, etc. Antes de Euler se consideraban como líneas relacionadas con el círculo. Fue él quien introdujo el acercamiento funcional. Para Euler el análisis matemático es la ciencia general de las variables y sus funciones.

Entre los años 1750 y 1801, el concepto de "función", en el sentido entendido por Euler generó polémica y ocupó a muchos matemáticos de Europa. La discusión se centraba en si una función debía o no ser expresada mediante una sola fórmula. La necesidad de precisar el concepto de función surgió al tratar de determinar el comportamiento al vibrar, de una cuerda elástica tensa, sujeta por sus extremos, y en el estudio de la propagación del calor. Se destacaron los estudios de Daniel Bernoulli (1700 - 1782), Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717 - 1783) y Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830). En 1801, el trabajo de este último permitió concluir que lo más importante es precisar los valores que toma la función y que no es esencial si esos valores se pueden expresar de una o de varias maneras. Ello corresponde a la idea de Gustav Dirichlet (1805 - 1859), quien fue el primer matemático en dar una definición satisfactoria, la que se maneja en la actualidad, es decir que una cantidad variable y es función de la cantidad variable x si a cada valor de x le corresponde un solo y determinado valor de y. En este caso, x es la variable independiente.

El mismo Dirichlet inició, casi de inmediato, la siguiente etapa en el desarrollo del concepto de función al sugerir que una función podía ser expresada, incluso, solamente con palabras. La intención era desligar el concepto de función de fenómenos físicos o de fórmulas concretas.

En el siglo XX el concepto de función se desligó del uso de variables numéricas, ya no era necesario que la variable independiente fuera un número real o complejo, o que los valores de la función lo fueran. El concepto alcanzó los altos grados de generalidad con los que se le conoce hoy en día, cuando se consideran funciones definidas sobre conjuntos arbitrarios con valores en conjuntos arbitrarios.

4.2. El plano cartesiano

Como vimos en la sección 1.5, escogido un punto de la recta para representar el número 0 y otro punto, a la derecha de ese, para representar el 1, a cada número real podemos asignar un punto de la recta y, recíprocamente, a cada punto de la recta podemos asignar un número real. También a cada pareja ordenada (a, b) de números reales hacemos corresponder un punto del plano y a cada punto del plano una pareja ordenada, de la manera que veremos enseguida: establecemos un **sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas** en un plano, dibujando dos rectas coordenadas, perpendiculares entre sí, una horizontal y una vertical, llamadas **ejes coordenados**. Su punto de corte, llamado **origen del sistema**, se nota **0**. La recta horizontal es el **eje X** o eje de las x o abscisas y la vertical es el **eje Y**, eje de las y u ordenadas. La mitad positiva del eje X se extiende hacia la derecha y la mitad positiva del eje Y se extiende hacia arriba. Los ejes dividen el plano en cuatro partes llamadas **cuadrantes** primero, segundo, tercero y cuarto usualmente señalados con I, II, III y IV. Los puntos de los ejes no están en ninguno de los cuadrantes.

Ya establecido un sistema de coordenadas, si dado un punto P del plano trazamos una recta vertical que pase por P, ella corta el eje X en un punto cuya coordenada llamamos a y trazamos una recta horizontal que pase por P, ella corta el eje Y en un punto cuya coordenada llamamos b. Al punto P le asociamos la pareja ordenada (a, b). a es llamada la **coordenada x o abscisa de P** y b **la coordenada y u ordenada de P**. Decimos que P tiene coordenadas (a, b) y escribimos $P(a, b)$ (figura 4.1). Recíprocamente, si para una pareja ordenada (a, b) de números reales cualesquiera, trazamos una recta vertical que corte el eje X en el punto de coordenada a y trazamos una recta horizontal que corte el eje Y en el punto de coordenada b, esas rectas se intersectan en un punto P. Este punto se asocia a la pareja. Las coordenadas de P son (a, b) (figura 4.2).

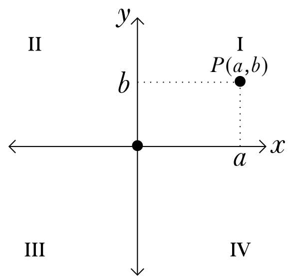


Figura 4.1.

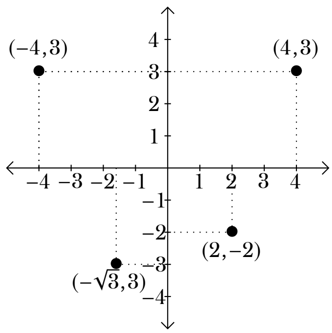


Figura 4.2.

Usualmente nos referimos al punto correspondiente a una pareja ordenada (a, b) como el **punto de coordenadas** (a, b). El plano dotado de un sistema de coordenadas cartesianas es el **plano cartesiano**.

4.2.1. Fórmula de la distancia

En el plano cartesiano, mediante la aplicación del teorema de Pitágoras, podemos hallar la distancia entre dos puntos, sean estos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$. La distancia entre ellos es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos vértices están en los puntos $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $R(x_2, y_1)$ (figura 4.3). El vértice R corresponde al ángulo recto.

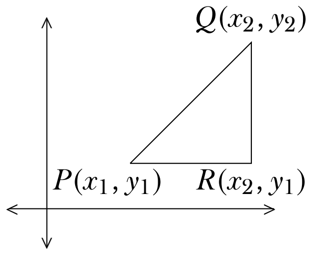


Figura 4.3.

La distancia entre P y Q es entonces

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Notemos que, por tratarse de cuadrados de números reales,

$$(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2 \quad \text{y} \quad (y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$$

así que $d(P, Q) = d(Q, P)$.

Otras **propiedades de la distancia** son las siguientes:

1. $d(P, Q) \geq 0$ y $d(P, Q) = 0$ si, y solo si, $P = Q$
2. Si R es cualquier otro punto del plano $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$. Esta es la **desigualdad triangular**. La igualdad se presenta cuando los puntos están alineados.

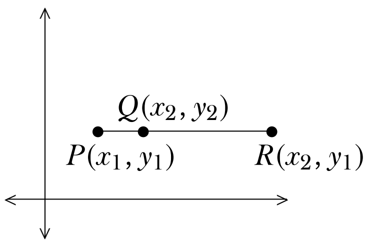


Figura 4.4.

Ejemplo 4.1.

1. (a) Si $P(-1, 3)$ y $Q(2, -1)$ entonces

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-1 - 3)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5. \end{aligned}$$

(b) Si $P\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ y $Q\left(-\sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$, entonces

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \sqrt{\left(-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{3+2\sqrt{6}+2+2-2\sqrt{6}+3} \\ &= \sqrt{10}. \end{aligned}$$

2. Los puntos $P(6,-3)$, $Q(1,-5)$ y $R(-3,5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. En efecto,

$$\begin{aligned} d(P,Q)^2 &= (1-6)^2+(-5+3)^2 = 25+4 = 29 \\ d(Q,R)^2 &= (-3-1)^2+(5+5)^2 = 16+100 = 116 \\ d(P,R)^2 &= (-3-6)^2+(5+3)^2 = 81+64 = 145 \end{aligned}$$

Así

$$d(P,R)^2 = d(P,Q)^2 + d(Q,R)^2.$$

P, Q y R son los vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el segmento que une los puntos P y Q y el segmento que une los puntos Q y R y cuya hipotenusa es el segmento que une los puntos P y R.

El **punto medio** (ver definición 3.2.4) del segmento que une dos puntos, es el punto del segmento que equidista de los puntos dados. Si estos son $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ y R es el punto medio, entonces $d(P,R) = d(R,Q)$. Supongamos que $x_1 < x_2$ (figura 4.5).

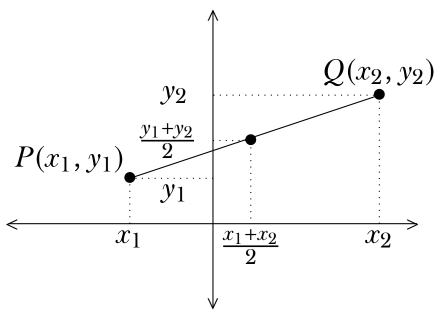


Figura 4.5.

Sobre el eje X, el punto medio entre los puntos de coordenadas x_1 y x_2 tiene coordenada dada así:

$$x_1 + \frac{x_2-x_1}{2} = \frac{x_1+x_2}{2}.$$

De manera de similar, sobre el eje Y, el punto medio entre los puntos de coodenadas y_1 y y_2 tiene coordenada $\frac{y_1+y_2}{2}$.

Veamos que el punto R de coordenadas $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ equidista de P y Q. Veremos después que R pertenece al segmento $\overline{PQ}$, es el punto medio entre P y Q:

$$d(P,R) = \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{y_1+y_2}{2} - y_1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)^2}$$
$$d(R,Q) = \sqrt{\left(x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{y_1+y_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)^2}$$

Como $d(P,R) = d(R,Q)$, R es el punto medio entre P y Q.

Notemos que una aplicación de la fórmula de la distancia permite deducir la ecuación de la circunferencia y la descripción del círculo. Si el centro de la circunferencia es el punto $C\,(h,k)$ y llamamos $r > 0$, la distancia fija que debe haber entre el centro y los puntos de la circunferencia, entonces cuaquier punto $P\,(x,y)$ que pertenezca a esta cumple la condición $d(P,C) = r$, esto es $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$, la cual es equivalente a $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$.

Esta es la **ecuación de la circunferencia** de centro (h,k) y radio r. En particular, si el centro es el origen $(0,0)$ del sistema de coordenadas, la ecuación toma la forma $x^2+y^2 = r^2$.

Ahora bien, un punto $P(x,y)$ pertenece al círculo de centro $C(h,k)$ y radio r si $d(P,C) \leq r$, esto es, $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} \leq r$ o $(x-h)^2+(y-k)^2 \leq r^2$. Si el centro es el origen $(0,0)$ del sistema de coordenadas, la inecuación toma la forma $x^2+y^2 \leq r^2$.

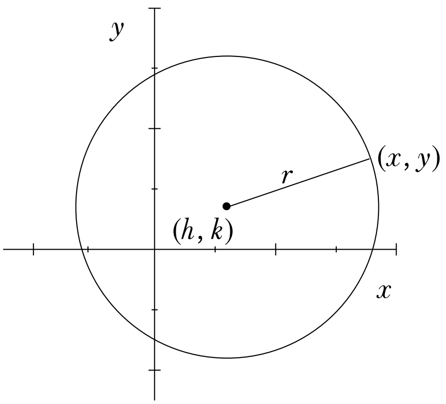


Figura 4.6.

Ejemplo 4.2.

1. La ecuación de la circunferencia de centro $C(-3, 1)$ que tiene radio 4 es

$$\begin{aligned}(x-(-3))^2+(y-1)^2&=4^2\\(x+3)^2+(y-1)^2&=16\end{aligned}$$

esto es,

$$x^2+6x+9+y^2-2y+1=16$$

de donde tenemos que

$$x^2+y^2+6x-2y-6=0.$$

2. La ecuación $x^2+y^2-8x+7y=0$ corresponde a una circunferencia. Vamos a determinar su centro y su radio. Para ello, completamos cuadrados:

$$\begin{aligned}x^2+y^2-8x+7y&=0\\x^2-8x+y^2+7y&=0\\x^2-8x+4^2+y^2+7y+\left(\frac{7}{2}\right)^2&=4^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2\\(x-4)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2&=16+\frac{49}{4}=\frac{113}{4}\end{aligned}$$

Así, se trata de la circunferencia de centro $C(4, -\frac{7}{2})$ y radio $\frac{\sqrt{113}}{2}$

4.3. Funciones y sus gráficas

En la vida diaria oímos afirmaciones como las siguientes: el precio del transporte depende del precio de la gasolina, el consumo de energía en una persona que hace ejercicio, depende de la intensidad de este, la temperatura de un lugar situado en el trópico depende de su altura sobre el nivel del mar, la oferta de un producto determina el precio del mismo, el número de individuos de una población varía con el tiempo. Esa idea de que un dato depende, está en función o varía con otro aparece frecuentemente en física (el espacio, por ejemplo, recorrido por un móvil en una unidad de tiempo depende de la velocidad) y naturalmente, en matemáticas (el área del círculo es función del radio, el volumen de un cono de base fija depende de la altura). Con respecto a estos dos últimos ejemplos, si A denota el área y r el radio del círculo, para indicar que A depende de r, se escribe $A(r)$. Si V denota el volumen del cono y h su altura, para indicar que V depende de h, se escribe $V(h)$. Específicamente se tiene

$$A(r) = \pi r^2 \quad \text{y} \quad V(h) = \frac{1}{3}Bh$$

donde B es el área de la base del cono. Así

$$A(3) = 9\pi, \quad V(2) = \frac{2}{3}B.$$

Definición 4.3.1. Sea D un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales. Definir una **función** f de D en $\mathbb{R}$ es asociar a cada número real x de D un único número real notado $f(x)$ (leído f de x). El conjunto D es el **dominio** de f. Se dice también que f está definida sobre D. El número real $f(x)$ es la **imagen** de x por f. El **rango** de f es el conjunto de la imágenes $f(x)$ con x en D, x es la **variable independiente** y, si $y = f(x)$, y es la **variable dependiente**. Dos funciones f y g son **iguales** si sus dominios son iguales y $f(x) = g(x)$ para todo x del dominio.

Ejemplo 4.3.

1. a) Consideremos el siguiente conjunto: $\{(1, 2), (2, 4), (4, 8)\}$. Si a la primera componente de cada una de las parejas asociamos como imagen la segunda componente, obtenemos una función cuyo dominio es $\{1, 2, 4\}$ y cuyo rango es $\{2, 4, 8\}$.

   b) Si procedemos de la misma manera con el conjunto de parejas $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$ no obtenemos una función puesto que al único elemento del dominio estaríamos asociando más de una imagen.

2. Como en la primera parte del ejemplo anterior, el conjunto de parejas $\{(n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ define una función cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. La imagen de un entero n es el siguiente entero $n + 1$, es decir, $s(n) = n + 1$. El rango es también el conjunto $\mathbb{Z}$. $s(n) = n + 1$ se llama el **sucesor** de n.

3. Sea $D = \mathbb{R}$. Si a cada elemento $x \in D$ asociamos como imagen $g(x) = x^2$ obtenemos una función cuyo dominio es, según lo hemos escogido, $\mathbb{R}$. Su rango es el conjunto de los números reales no negativos. Una función como esta usualmente se expresa simplemente mediante la ecuación $y = x^2$.

4. Las **funciones constantes** son de la forma $f(x)=c$, para todo x, donde c es una constante fija. Las **funciones lineales**: son de la forma $f(x) = mx + b$, con $m \neq 0$. Entre estas se halla la función identidad I, tal que $I(x) = x$. Las **funciones cuadráticas**: son de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. De estas funciones nos ocuparemos más ampliamente en secciones posteriores.

5. Sean $D = \mathbb{R}$ y $f(x) = x^2 + 3x + 1$ para $x \in D$. El rango de f es $R_f = \{f(x) : x \in D\} = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x)$, para algún $x \in D\}$. Vamos a precisarlo. Si suponemos que un número real y pertenece a ese conjunto, entonces existe algún número real x tal que

$$y = f(x) = x^2 + 3x + 1$$

es decir, tal que

$$x^2 + 3x = y - 1$$

Para hallar el valor de x, completamos el cuadrado en el miembro izquierdo de la igualdad y tenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= y - 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 &= y + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Como $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$, de esta última igualdad tenemos que $y+\frac{5}{4} \geq 0$, es decir, $y \geq -\frac{5}{4}$. Esta es una condición necesaria para que y pertenezca a R_f. Así $R_f \subseteq \left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$.

De la última igualdad deducimos que

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{2} &= \pm\sqrt{\frac{5}{4} + y} \\ x &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5 + 4y}{4}} \\ &= -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5 + 4y}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{5 + 4y}}{2} \end{aligned}$$

Quiere decir que cada número real $y \geq -\frac{5}{4}$, es imagen de $x = \frac{-3\pm\sqrt{5+4y}}{2}$, con lo cual $y \in R_f$. En consecuencia, el rango de f es $\left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$.

6. Estas son algunas funciones de dominio $D = [-1, 1]$:

   a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ para todo $x \in D$. Su rango es el intervalo $[0, 1]$.

   b) $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ para todo $x \in D$. Su rango es el intervalo $[-1, 0]$.

   c) $h(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, \text{ para } x \text{ tal que } -1 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{1 - x^2}, \text{ para } x \text{ tal que } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

   Su rango es el intervalo $[-1, 1]$.

7. Si una circunferencia tiene longitud L, el área del círculo limitado por ella, expresada como función de L, es

$$A(L) = \pi \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2$$

8. Para elaborar una caja de base cuadrada sin tapa se emplea un cartón cuadrado que tiene 20 cm de lado. En cada una de las cuatro esquinas se corta un cuadrado cuyo lado tiene longitud x, de acuerdo con la figura 4.7. Luego se unen los bordes adyacentes de longitud x determinados sobre el cartón. El volumen de la caja, expresado como función de x es $V(x) = x(20 - 2x)^2$.

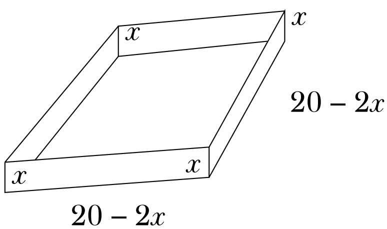


Figura 4.7.

Frecuentemente el dominio de una función f no está indicado. Se toma entonces como dominio el conjunto de los números reales para los cuales $f(x)$ representa un número real. Ese conjunto es llamado el **dominio natural** de f. Lo notamos D_f.

Ejemplo 4.4.

1. El dominio natural de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ es

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 1} \in \mathbb{R}\right\}$$

para que esta raíz cuadrada dé como resultado un número real, se requiere que el radicando x^2-1 no sea negativo, con lo cual $x^2-1 \geq 0$. Así,

$$\begin{aligned} D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} &= \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2-1} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x+1) \geq 0\} \\ &= (-\infty, -1] \cup [1, \infty). \end{aligned}$$

2. Si $f(x) = \frac{1}{x^3-1}$ el dominio natural de f es

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 - 1 \neq 0\right\}$$

Puesto que 1 es el único valor real de x para el cual $x^3 - 1 = 0$, este conjunto es

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

En adelante nos referiremos al dominio natural de una función como el dominio de la función, simplemente.

Dada una función f, hacer la **evaluación** de f en un valor (número) a de su dominio consiste en calcular $f(a)$, la imagen de a por f. Para ello basta reemplazar la variable independiente por a en la expresión de $f(x)$ y realizar las operaciones que quedan indicadas.

Ejemplo 4.5.

1. Si $f(x) = x^3 + x + 1$, al evaluar la función en 2, 0 y -1 obtenemos, respectivamente:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 + 2 + 1 = 11 \\ f(0) &= 0^3 + 0 + 1 = 1 \\ f(-1) &= (-1)^3 - 1 + 1 = -1 \end{aligned}$$

2. Sea $f(x) = 2x^2 + 1$ al evaluar esta función en 2, 3 y 5 obtenemos

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \cdot 2^2 + 1 = 9 \\ f(3) &= 2 \cdot 3^2 + 1 = 19 \\ f(5) &= 2 \cdot 5^2 + 1 = 51 \end{aligned}$$

Si comparamos estas imágenes vemos que $f(2) + f(3) \neq f(2+3)$.

Para a y b números reales cualesquiera,

$$\begin{aligned} f(a) &= 2a^2 + 1 \\ f(b) &= 2b^2 + 1 \\ f(a+b) &= 2(a+b)^2 + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ab + b^2) + 1 \\ &= 2a^2 + 4ab + 2b^2 + 1. \end{aligned}$$

Así, $f(a+b) = f(a)+f(b)$ solo si $2a^2+4ab+2b^2+1 = 2a^2+1+2b^2+1$ solo si $4ab = 1$, caso en el cual $a \neq 0$, $b \neq 0$ y, $b = \frac{1}{4a}$. De modo que en general, $f(a+b) \neq f(a) + f(b)$.

3. Sea $g(x) = 2x$. Para a y b números reales cualesquiera,

$$g(a+b) = 2(a+b) = 2a + 2b = g(a) + g(b)$$

4. Sea $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

$$\begin{aligned} f(4) &= 4^2 - 2 \cdot 4 + 2 = 10 \\ f(4+h) &= (4+h)^2 - 2(4+h) + 2 = h^2 + 6h + 10 \end{aligned}$$

y si h representa un número real distinto de cero, entonces

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{h^2 + 6h}{h} = \frac{h(h+6)}{h} = h + 6$$

5. Si $f(x) = \frac{1}{x}$ y h representa un número real distinto de cero, entonces

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{(a+h)a}}{h} = \frac{\frac{a-a-h}{(a+h)a}}{h} = \frac{-h}{h\,(a+h)\,a} = -\frac{1}{a^2 + ha}$$

6. Al evaluar en 3 la función $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, el volumen de una esfera como función del radio, obtenemos

$$V(3) = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi.$$

Nota: como en los ejemplos anteriores, las funciones pueden ser denotadas con letras distintas de f y la variable independiente puede ser denotada con letras distintas de x.

Definición 4.3.2. La **representación gráfica**, o simplemente, la **gráfica** de una función f de dominio D, es el conjunto de los puntos (x, y) del plano cartesiano tales que $x \in D$ y $y = f(x)$. Se dice que la gráfica representa f o que la gráfica tiene ecuación cartesiana $y = f(x)$.

Notemos que la gráfica de una función no puede contener dos puntos que coincidan en la abscisa (primera coordenada) y difieran en la ordenada (segunda coordenada), puesto que para cada elemento x del dominio de la función existe solamente un real y que es su imagen. Luego, en la gráfica de una función no vamos a encontrar dos o más puntos que estén en la misma recta vertical, es decir, ninguna recta vertical puede intersectar la gráfica de la función en dos o más puntos. Este es el **criterio de la recta vertical**.

Así, una circunferencia que tiene su centro en el origen del sistema, no es la representación gráfica de una función puesto que, por ejemplo, la recta vertical que pasa por el origen, contiene dos puntos de la circunferencia. En general, si el centro de esta es el punto $C\,(h, k)$ y el radio es r, el segmento que une los puntos $(h - r, k)$ y $(h + r, k)$ es un diámetro de la circunferencia y toda vertical que lo corte en un punto que no sea un extremo, intersecta la circunferencia en dos puntos (figura 4.8).

La situación cambia si consideramos solamente la semicircunferencia superior o solamente la semicircunferencia inferior. En la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio r ¿qué valores de y corresponden a cada x? Dado que la ecuación de esa circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$ entonces $y^2 = r^2 - x^2$. Así que a cada x corresponden $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ que son iguales si, y solo si, $x^2 = r^2$, si, y solo si, $x = \pm r$. Con esto, a todo x en el intervalo abierto $(-r, r)$ corresponden dos valores distintos de y. Al asignar a x solamente la raíz cuadrada positiva, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, tenemos una función $f\,(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ cuya gráfica es la semicircunferencia superior. Al asignar a x solamente la raíz cuadrada negativa, $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, tenemos una función $g\,(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ cuya gráfica es la semicircunferencia inferior. El dominio de cada una de ellas es el intervalo cerrado $[-r, r]$ (figura 4.8).

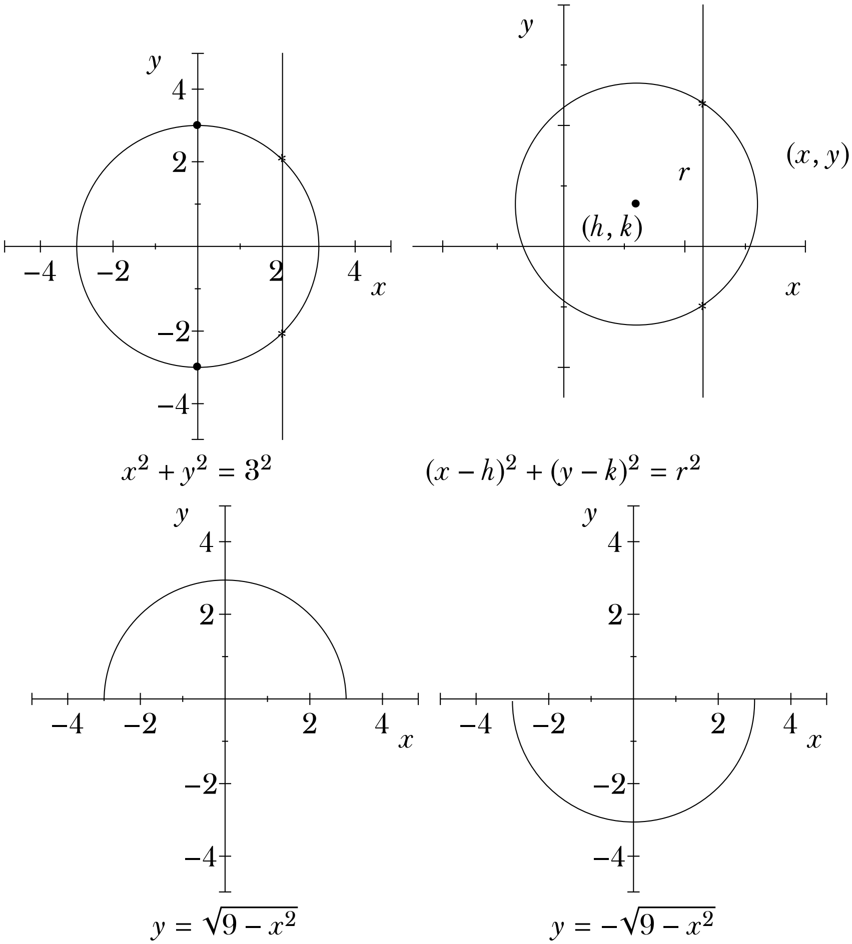
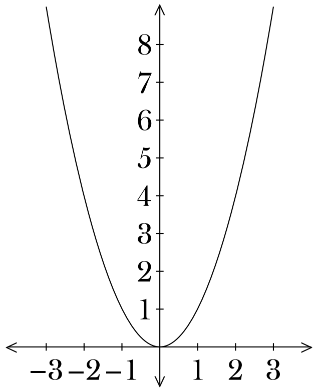


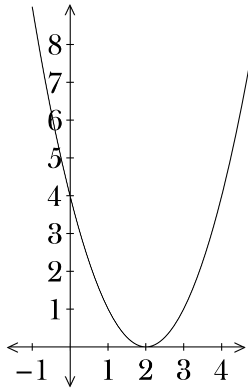
Figura 4.8.

Transformaciones de funciones y de gráficas

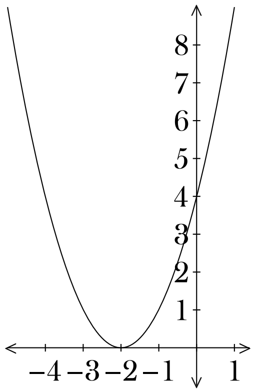
Un método para estudiar algunas funciones y para trazar sus gráficas es compararlas con otras conocidas o simples. Consideremos, por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ y comparemos las gráficas de las funciones f, g tal que $g(x) = f(x - 2)$ y h tal que $h(x) = f(x + 2)$; esto es, las gráficas de las ecuaciones $y = f(x)$, $y = f(x - 2)$, $y = f(x + 2)$ todas de dominio $\mathbb{R}$ (figura 4.9).



$y = x^2$
(1)



$y = (x - 2)^2$
(2)



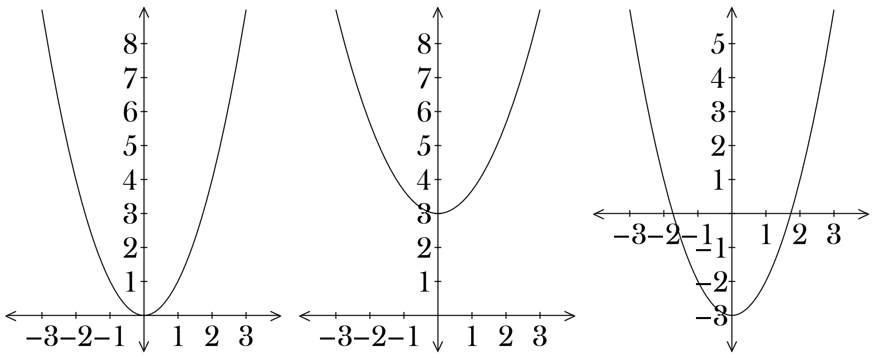
$y = (x + 2)^2$
(3)

Figura 4.9.

Las curvas tienen la misma forma pero al reemplazar x por $x - 2$ en la ecuación $y = f(x)$, obtenemos la ecuación $y = f(x - 2)$ cuya gráfica es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ desplazada dos unidades a la derecha. Al reemplazar x por $x + 2$, en la ecuación $y = f(x)$, obtenemos la ecuación $y = f(x + 2)$ cuya gráfica también es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$, desplazada esta vez dos unidades hacia la izquierda.

Este es otro hecho general: si $a > 0$, podemos hallar la gráfica de la ecuación $y = f(x-a)$ por una **traslación** de la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ un número a de unidades hacia la derecha y podemos hallar la gráfica de la ecuación $y = f(x+a)$ por una traslación de la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ un número a de unidades hacia la izquierda. Expresado de otra manera, si $g(x) = f(x - a)$ y $h(x) = f(x + a)$, las gráficas de las funciones g y h se pueden obtener por **traslación horizontal** de la gráfica de la función f, a unidades hacia la derecha en el caso de g y a unidades hacia la izquierda en el caso de h.

Hacer una traslación vertical de la gráfica de una función f un número b de unidades corresponde a aumentar el valor de la segunda coordenada y, en b unidades, donde $b > 0$ si la traslación es hacia arriba, y corresponde a disminuir la segunda coordenada en b unidades si la traslación es hacia abajo. En el primer caso, se tiene la gráfica de la ecuación $y = f(x) + b$ y, en el segundo caso, la de la ecuación $y = f(x) - b$ (figura 4.10). Notemos que a estas últimas se llega cuando en la ecuación $y = f(x)$ se reemplaza y por $y - b$ o por $y + b$, según sea el caso. En el primero obtenemos la ecuación $y - b = f(x)$, la cual es equivalente a la ecuación $y = f(x) + b$. Al reemplazar y por $y + b$ obtenemos, $y + b = f(x)$ que es equivalente a $y = f(x) - b$. Expresado de otra manera, si $g(x) = f(x) + b$ y $h(x) = f(x) - b$, entonces las gráficas de las funciones g y h se pueden obtener por **traslación vertical** de la gráfica de la función f, b unidades hacia arriba en el caso de g y b unidades hacia abajo en el caso h.



$y = x^2$
(1)

$y = x^2 + 3$
(2)

$y = x^2 - 3$
(3)

Figura 4.10.

Por otra parte, consideremos un número positivo a, $a > 0$, y el efecto de multiplicar un valor de la variable independiente x por a. En este análisis distinguiremos dos casos, $a > 1$ y $0 < a < 1$.

- Caso $a > 1$.

Si $a > 1$ y $x > 0$, entonces $ax > x$, así que, sobre el eje X, el punto de coordenada x está más cerca del origen que el punto de coordenada ax. En consecuencia, para todo valor y, la pareja (x, y) está más cerca del eje Y que la pareja (ax, y).

Si $a > 1$ y $x < 0$, entonces $ax < x$, así que, sobre el eje X, el punto de coordenada x está más cerca del origen que el punto de coordenada ax. En consecuencia, para todo valor y, la pareja (x, y) está más cerca del eje Y que la pareja (ax, y).

Con esto tenemos que si f es una función y g es la función definida así: $g(x) = f(ax)$, entonces, en este caso ($a > 1$), g le asocia al valor x de la variable independiente, el valor $g(x) = f(ax)$, es decir, el valor que f asocia al valor ax, que sobre el eje X se halla más alejado del origen que x, como mencionamos antes. Ahora, como $g(x) = f(ax)$, si y es este valor, a la gráfica de la función g pertenece el punto (x, y) y a la gráfica de la función f pertenece el punto (ax, y). El primero, (x, y), está más cerca del eje Y que el segundo.

En consecuencia, la gráfica de la función g, es decir, la gráfica de la ecuación $y = f(ax)$, se puede obtener de la gráfica de la función f, que es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$, mediante una **compresión** o **contracción horizontal** de factor a.

- Caso $0 < a < 1$.

En este caso, $ax < x$ para $x > 0$ y $ax > x$ para $x < 0$. Así que sobre el eje X, el punto de coordenada x está más lejos del origen que el punto de coordenada ax. Entonces, si $y = f(ax)$, en el plano cartesiano el punto de coordenadas (x, y) está más lejos del eje Y que el punto de coordenadas $(ax, y) = (ax, f(ax))$.

En consecuencia, la gráfica de la función g, es decir, la gráfica de la ecuación $y = f(ax)$, se puede obtener de la gráfica de la función f, que es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$, mediante una **expansión** o **dilatación horizontal** de factor a.

En resumen, supongamos que, en la ecuación $y = f(x)$, reemplazamos x por ax, con a una constante positiva. Si $a > 1$, entonces cada valor de la variable independiente x tendrá como imagen la de ax, con $ax > x$. Así la gráfica de $y = f(ax)$ se obtiene mediante una **compresión horizontal** de factor a de la gráfica de $f(x)$. Si $0 < a < 1$, la gráfica de la función que resulta, es decir, de $y = f(ax)$, se puede obtener de la de $f(x)$ mediante una **expansión horizontal** de factor a (figura 4.11).

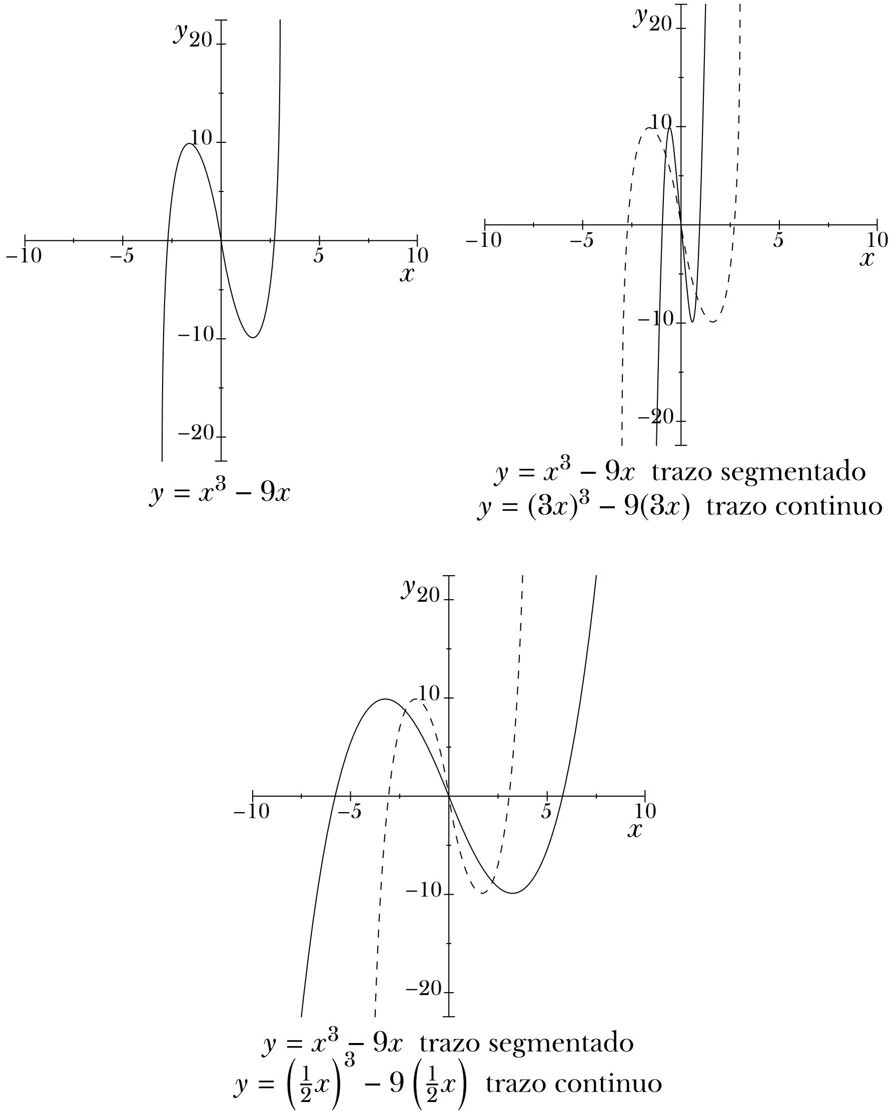


Figura 4.11.

Por otra parte, la gráfica de la ecuación $y = af(x)$ se puede obtener de la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ mediante una **compresión vertical** de factor a si $0 < a < 1$ y mediante una **expansión vertical** de factor a si $a > 1$ (figura 4.12).

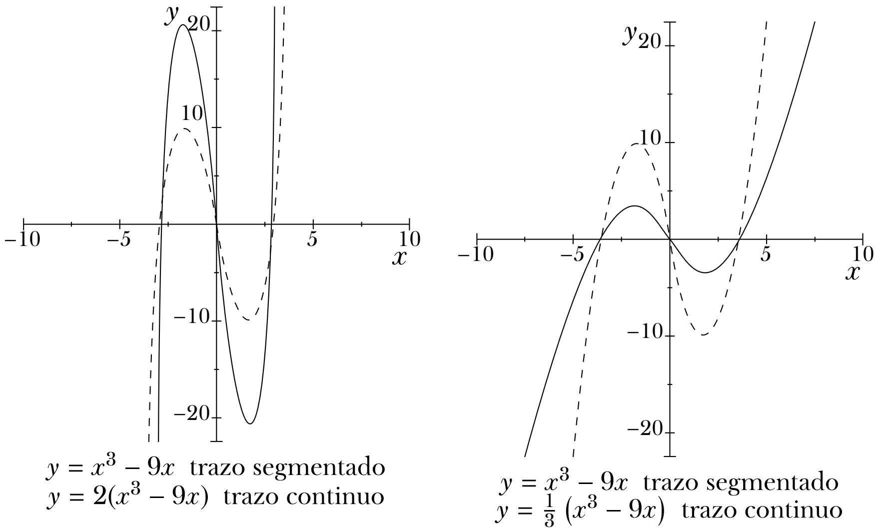
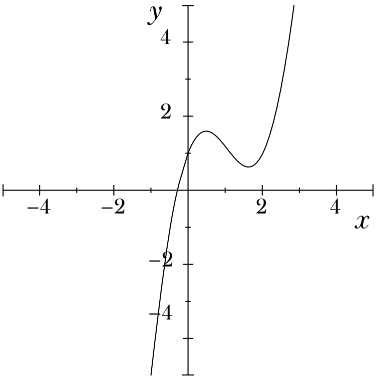
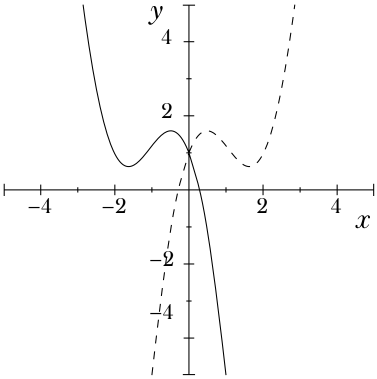


Figura 4.12.

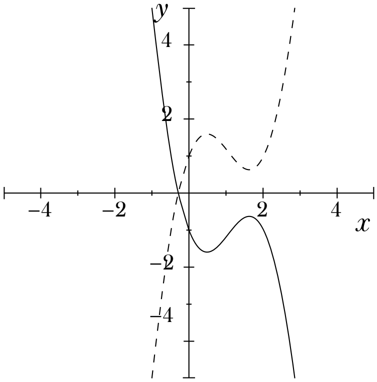
Finalmente, la gráfica de $y = f(-x)$ se puede obtener de la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ mediante una **reflexión horizontal** en el eje Y y la gráfica de la ecuación $y = -f(x)$ se puede obtener de la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ mediante una **reflexión vertical** en el eje X (figura 4.13)



$y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$



$y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ trazo segmentado
$y = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 2(-x) + 1$ trazo continuo



$y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ trazo segmentado
$y = -(x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$ trazo continuo

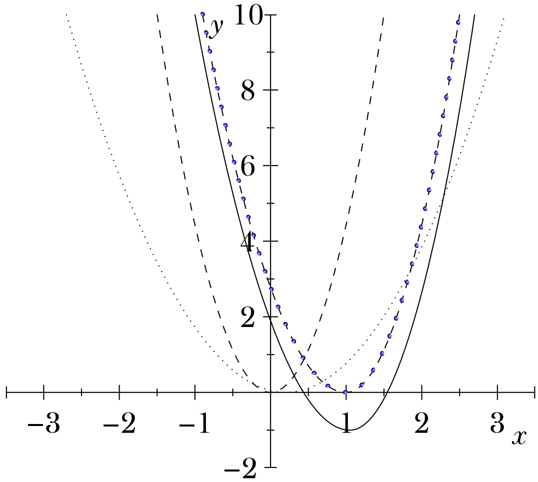
Figura 4.13.

Ejemplo 4.6. Sea $h(x) = 4x^2 - 8x + 3$. Como $h(x)$ se puede expresar así

$$h(x) = (2x - 2)^2 - 1 = (2(x - 1))^2 - 1$$

entonces la gráfica de $h(x)$ (figura 4.14), se puede obtener a partir de la gráfica de la función $i(x) = x^2$ por una secuencia de transformaciones cada una de las cuales da lugar a una curva cuya ecuación aparece frente a la transformación en esta lista:

- Función dada $i(x) = x^2$
- Compresión horizontal de factor 2: $j(x) = i\,(2x) = (2x)^2$
- Traslación horizontal hacia la derecha de una unidad:
  $k(x) = j(x - 1) = (2(x - 1))^2$
- Traslación vertical hacia abajo de una unidad:
  $l(x) = k(x) - 1 = (2\,(x - 1))^2 - 1$



$y = x^2$ trazo punteado

$y = (2x)^2$ trazo segmentado

$y = (2(x - 1))^2$ trazo punteado y segmentado

$y = (2(x - 1))^2 - 1$ trazo continuo

Figura 4.14.

4.4. Algunas familias de funciones

Estudiamos ahora tres familias de funciones: las funciones lineales, las funciones cuadráticas y las funciones exponenciales.

4.4.1. Funciones lineales y funciones cuadráticas

- **Funciones lineales**

Consideremos el siguiente problema: una compañía fabrica lápices y sus costos fijos (como arriendo) ascienden a la suma de dos millones de pesos. Si el costo de fabricar un lápiz es de 400 y el precio de venta es de 600 y x representa un número de lápices, entonces el costo de producirlos es de $400x+2\,000\,000$ mientras que los ingresos que produce su venta son de $600x$. Así, las ganancias de la fábrica están representadas por la función

$$f(x) = 600x - (400x + 2\,000\,000) = 200x - 2\,000\,000$$

Queremos además determinar cuántos lápices debe vender la fábrica para obtener una ganancia de 6 millones de pesos, esto es, buscamos x tal que

$$f(x) = 200x - 2\,000\,000 = 6\,000\,000$$

es decir, tal que

$$200x = 8\,000\,000$$

Entonces

$$x = 40\,000$$

Una función como f es una función lineal. En general:

Definición 4.4.1. Una función f es una **función lineal** si la imagen de la variable independiente x se expresa en la forma $f(x) = mx + b$ para algunas constantes m y b.

Si $m \neq 0$, la gráfica de f es una recta que intersecta el eje X en el punto $\left(-\frac{b}{m}, 0\right)$ e intersecta el eje Y en el punto $(0, b)$, pues $f\left(-\frac{b}{m}\right) = 0$ y $f(0) = b$.

Si $m = 0$, es decir, si $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, f es una función constante y su gráfica está formada por los puntos (x, y) del plano cartesiano tales que $x \in \mathbb{R}$ y $y = f(x) = b$. La gráfica es entonces una recta horizontal.

Notemos que una recta vertical está formada por los puntos de coordenadas (a, y) donde a es un número fijo y y recorre el conjunto $\mathbb{R}$. Su ecuación es $x = a$ y no corresponde a una función.

Ejemplo 4.7.

1. La función $f(x) = 2x + 3$ tiene como gráfica una recta a la cual pertenecen lo puntos $(0, 3)$ y $(1, 5)$ puesto que $f(0) = 3$ y $f(1) = 5$ (figura 4.15 (1)).

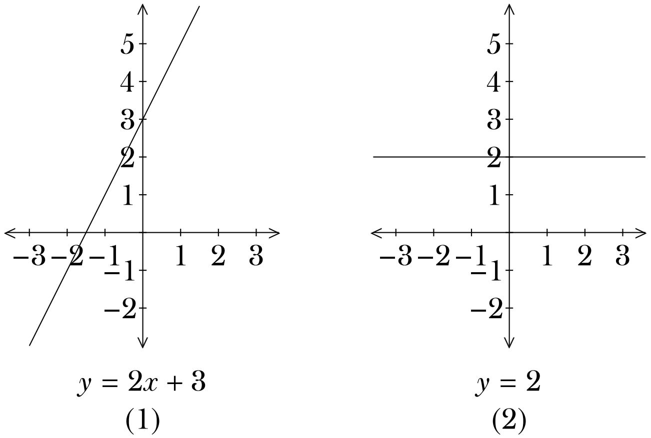


Figura 4.15.

2. La gráfica de la función $f(x) = 2$ está formada por los puntos (x, y) del plano cartesiano tales que $x \in \mathbb{R}$ y $y = 2$ (figura 4.15 (2)).

La función $f(x) = mx + b$ está determinada por los números reales m y b. Este último se llama **término independiente.** El coeficiente m de x es la **pendiente** de la recta y, si la gráfica de la función pasa por los puntos $Q\,(x_1, y_1)$ y $P\,(x_2, y_2)$, donde $x_1 \neq x_2$, entonces $y_1 = mx_1 + b$ y $y_2 = mx_2 + b$, esto es, $b = y_1 - mx_1 = y_2 - mx_2$, de donde

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ahora, $y_2 - y_1$ representa el cambio que se produce en la coordenada y al pasar de Q a P y $x_2 - x_1$ representa el cambio que se produce en la coordenada x al pasar de Q a P. Así, m es la razón entre el cambio en y y el cambio x. Para puntos cualesquiera que satisfagan la ecuación, esta razón tiene el mismo valor, es decir, no depende de los puntos considerados.

Si $m > 0$ la recta asciende (figura 4.16) y si $m < 0$ la recta desciende (figura 4.16). A una recta vertical no se le define pendiente.

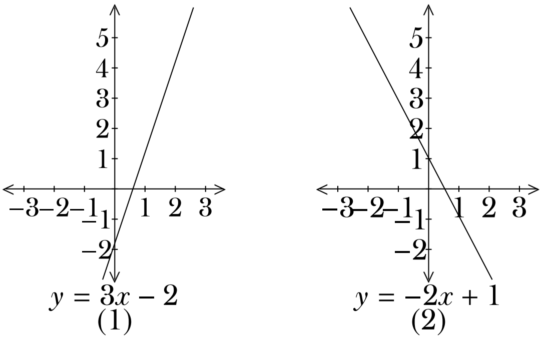


Figura 4.16.

Dados una constante m y un punto $Q\,(x_1, y_1)$, los puntos $P\,(x, y)$ situados sobre la recta que contiene el punto Q y tiene pendiente m están caracterizados por la condición

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Una ecuación $y - y_1 = m\,(x - x_1)$ es la **forma punto-pendiente** de esa recta.

Ejemplo 4.8. La recta que pasa por los puntos $(4, -3)$ y $(6, 8)$ tiene pendiente

$$m = \frac{8 - (-3)}{6 - 4} = \frac{11}{2}$$

y dado que pasa por el punto $(6, 8)$, una ecuación punto-pendiente de esa recta es

$$y - 8 = \frac{11}{2}(x - 6)$$

Como la recta pasa por el punto $(4, -3)$, también

$$y + 3 = \frac{11}{2}(x - 4)$$

es ecuación punto-pendiente de esa recta.

Cada una de esas dos ecuaciones se convierte en la ecuación

$$y = \frac{11}{2}x - 25$$

Cualquier recta no vertical corta al eje Y. Si $(0, b)$ es el punto de corte de una recta no vertical con el eje Y y m es la pendiente, una ecuación de la recta es

$$y - b = m\,(x - 0)$$

esto es,

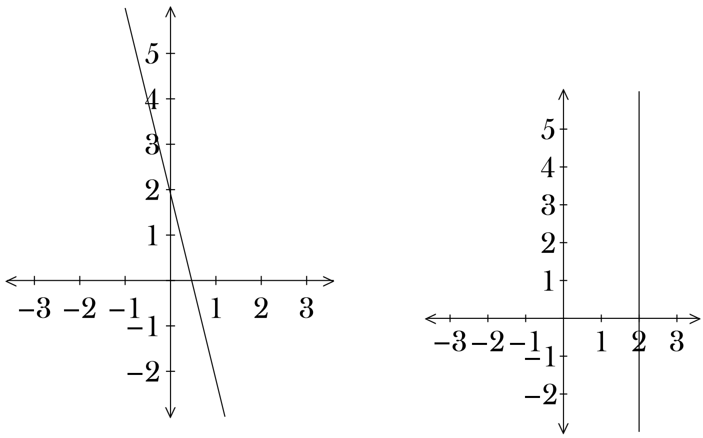
$$y = mx + b$$

Esta es la **forma pendiente−intersección** de la ecuación de la recta.

Ejemplo 4.9.

1. La pendiente de la recta que tiene ecuación $y = -4x + 2$ es -4 (figura 4.17 (1)). La recta intersecta al eje Y en el punto $(0, 2)$.

2. La ecuación de una recta vertical es $x = a$ donde a es la abscisa de cada uno de sus puntos (figura 4.17 (2)). Una recta vertical no representa una función.



$y = 4x + 2$
(1)

$x = 2$
(2)

Figura 4.17.

Cualquiera sea la forma de la ecuación de la recta, es equivalente a una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ donde A, B y C son constantes y A y B no son simultáneamente iguales a 0.

Recíprocamente, la gráfica de una ecuación de esta forma es una recta. En efecto, si $B = 0$ y $A \neq 0$, la ecuación es $x = \frac{-C}{A}$ cuya gráfica es una recta vertical. Si $B \neq 0$, la ecuación puede llevarse a la forma $y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}$ cuya gráfica es una recta no vertical. Si, además, $A \neq 0$ la recta tampoco es horizontal.

La ecuación lineal $Ax+By+C = 0$, donde A y B no son simultáneamente nulos, es la **ecuación general de la recta**. Cuando dos rectas se hallan en el plano, podemos expresar su posición relativa mediante sus pendientes. Así tenemos que dos rectas son paralelas si, y solo si, tienen la misma pendiente.

Teorema 4.4.1. Dos rectas de pendientes $m_1 \neq 0$ y $m_2 \neq 0$, respectivamente son perpendiculares si, y solo si, $m_1 m_2 = -1$. Cualquier recta vertical es perpendicular a cualquier recta horizontal.

Demostración. Consideremos dos rectas que se cortan en un punto. Como cada una de ellas es paralela a una recta que pasa por el origen O, basta considerar el caso en el que el punto de corte coincide con O (figura 4.18).

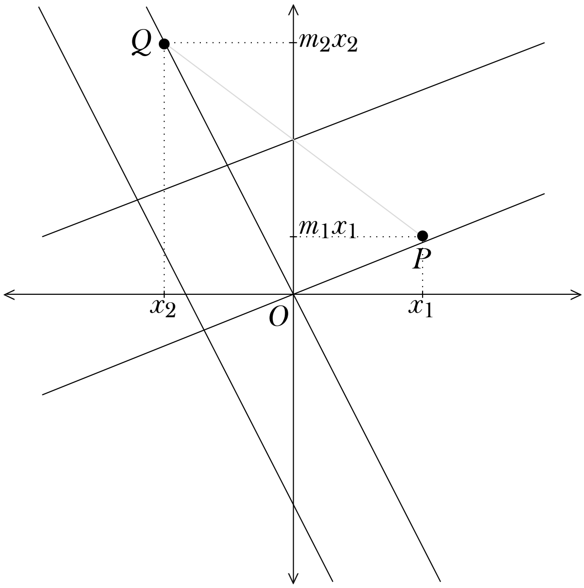


Figura 4.18.

Sean $y = m_1x$ y $y = m_2x$ las ecuaciones de las rectas. Sean además x_1 y x_2 reales diferentes de 0. El punto $P\,(x_1, m_1x_1)$ pertenece a la primera recta y el punto $Q\,(x_2, m_2x_2)$ pertenece a la segunda. El ángulo QOP (figura 4.18) es un ángulo recto si, y solo si,

$$(d\,(O, P))^2 + (d\,(O, Q))^2 = (d\,(P, Q))^2$$

esto es,

$$x_1^2 + (m_1x_1)^2 + x_2^2 + (m_2x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (m_2x_2 - m_1x_1)^2$$

$$0 = -2x_1x_2 - 2m_1x_1m_2x_2 = -2x_1x_2\,(1 + m_1m_2)$$

Puesto que el factor $x_1x_2 \neq 0$, esto equivale a $-1 = m_1m_2$.

Ejemplo 4.10.

1. La recta que pasa por los puntos $(1, 5)$ y $(-2, 3)$ tiene pendiente

$$m = \frac{5-3}{1-(-2)} = \frac{2}{3}$$

Su ecuación es

$$y - 5 = \frac{2}{3}(x-1)$$

esto es,

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$$

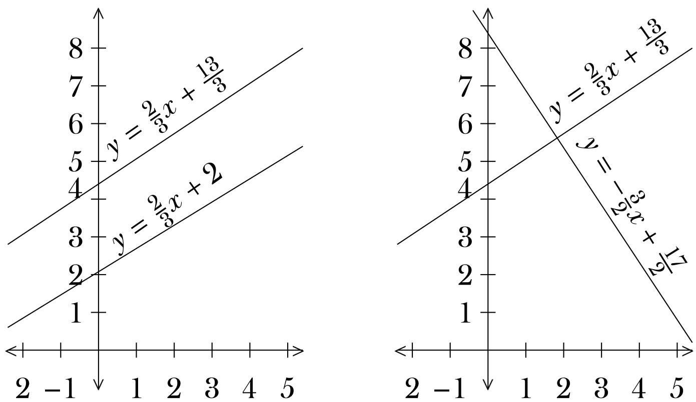


Figura 4.19.

La recta paralela a ella que pasa por el punto $(3, 4)$ (figura 4.19 (1)) tiene ecuación

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x-3),$$

esto es,

$$\frac{2}{3}x - y = -2 \text{ o } y = \frac{2}{3}x + 2$$

y la recta que es perpendicular a las anteriores y pasa por el punto $(3, 4)$ (figura 4.19 (2)) tiene pendiente $m = -\frac{3}{2}$ y ecuación

$$y - 4 = -\frac{3}{2}(x-3),$$

es decir,

$$\frac{3}{2}x + y = \frac{17}{2} \text{ o } y = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}.$$

2. Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$. La **mediatriz** del segmento PQ es la recta perpendicular a él, que pasa por su punto medio. Veamos su ecuación.

   Supongamos $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$. La pendiente del segmento es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y su punto medio tiene coordenadas $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, entonces la ecuación de la mediatriz es

$$y - \frac{y_2 + y_1}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

- **Funciones cuadráticas**

Recordemos que el área de un cuadrado de lado l está dada por

$$A_1(l) = l^2$$

y el área de un círculo de radio r está dada por

$$A_2(r) = \pi r^2.$$

En la expresión de cada una de estas áreas, la variable independiente (l o r) aparece elevada al cuadrado. Es también el caso, por ejemplo, de la expresión de la altura h que alcanza una pelota lanzada hacia arriba: si v_0 es la velocidad inicial, t segundos después del lanzamiento la altura es

$$h(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t,$$

donde g es la aceleración debida a la fuerza de gravedad.

Definición 4.4.2. Una función f es una **función cuadrática** si la imagen de la **variable independiente** x se expresa en la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

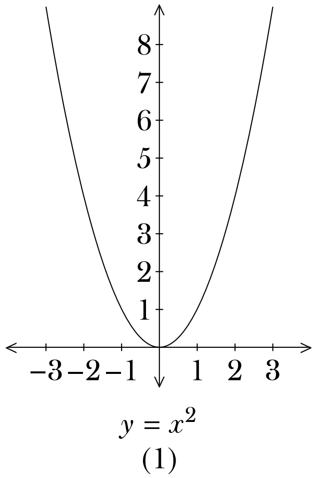
para algunas constantes a, b y c con $a \neq 0$.

La gráfica de toda función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, *con* $a \neq 0$, *es una parábola que se abre hacia arriba si* $a > 0$ *o se abre hacia abajo si* $a < 0$. *El vértice tiene abscisa* $x = -\frac{b}{2a}$.

Ejemplo 4.11.

1. Si $D = \mathbb{R}$ y $g(x) = x^2$ para todo $x \in D$, la gráfica de g es una parábola que pasa por el punto $(0, 0)$ y abre hacia arriba (figura 4.20 (1)).

2. La gráfica de $f(x) = x^2 + 3x + 1$ es una parábola cuyo vértice tiene abscisa $x = -\frac{3}{2}$ y ordenada $y = f(-\frac{3}{2}) = (-\frac{3}{2})^2 + 3(-\frac{3}{2}) + 1 = -\frac{5}{4}$ (figura 4.20 (2)).



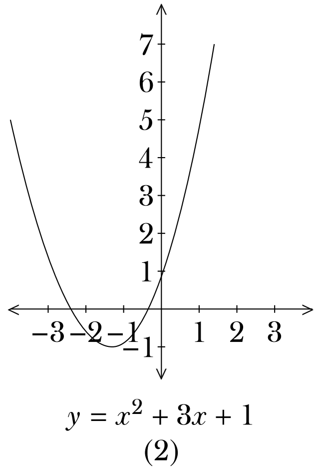


Figura 4.20.

3. La gráfica de la ecuación $y = -x^2 + 1$ es una parábola que abre hacia abajo (figura 4.21). El vértice tiene abscisa $x = -\frac{b}{2a} = 0$ y ordenada $f(0) = 1$. El punto $(0, 1)$ es el punto de corte de la gráfica y el eje Y. Los puntos de corte con el eje X tienen ordenada 0 y su abscisa verifica entonces la ecuación $0 = -x^2 + 1$. En consecuencia, $x = \pm 1$ y los puntos son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. La gráfica de la ecuación $y = -x^2 + 1$ se puede obtener reflejando la gráfica de la ecuación $y = x^2$ y luego trasladando la gráfica obtenida una unidad hacia arriba.

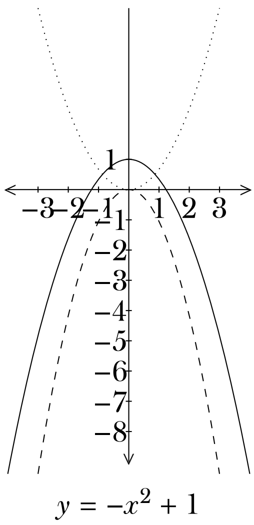


Figura 4.21.

4. La aceleración debida a la gravedad es de $g = 32, 2$ pies/s. Una pelota lanzada a una velocidad v_0 alcanza la máxima altura en el vértice, es decir cuando $t = -\frac{v_0}{2(-\frac{g}{2})} = \frac{v_0}{g}$.

4.4.2. Funciones exponenciales y logarítmicas

- **Funciones exponenciales**

Consideremos la siguiente situación: la población de cierto tipo de bacteria se duplica cada hora. Si P_0 denota el número de individuos existentes en cierto instante, transcurrida la primera hora la población es $2P_0$, transcurrida la segunda hora la población es $2(2P_0) = 2^2P_0$, transcurrida la tercera hora la población es $2(2^2P_0) = 2^3P_0$. En general, transcurridas k horas la población es 2^kP_0 bacterias.

Ahora bien, supongamos que P es la población existente en un instante t y que la población existente 20 minutos (un tercio de hora) después se expresa en la forma rP. Entonces transcurridos 40 minutos, dos períodos de 20 minutos (dos tercios de hora), la población existente es de $r(rP) = r^2P$ individuos. Transcurrido otro período de 20 minutos la población es $r\left(r^2P\right) = r^3P$. Transcurridos tres períodos de 20 minutos, ha transcurrido una hora, entonces en ese momento la población es, por una parte r^3P y por otra parte $2P$. Así tenemos la igualdad $r^3P = 2P$, de donde $r^3 = 2$ y entonces $r = 2^{\frac{1}{3}}$. Con esto, al final de los 20 primeros minutos el número de individuos es $2^{\frac{1}{3}}P$ y a los 40 minutos, $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2 P = 2^{\frac{2}{3}}P$.

En general, si p y q son enteros positivos, la hora se divide en q períodos de $\frac{1}{q}$ horas entonces $2^{\frac{p}{q}} = \left(2^{\frac{1}{q}}\right)^p$ es el factor por el que queda multiplicada la población, transcurridos p períodos de $\frac{1}{q}$ horas.

Como el tiempo es continuo y no se restringe solamente a valores racionales, para un número real $t > 0$, 2^t es el factor por el que se multiplica la población transcurrido un tiempo t.

El significado que tiene 2^t cuando t es un número irracional es el valor al cual se acerca $2^{\frac{p}{q}}$ para sucesivas aproximaciones decimales racionales de t. Así, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, ..., son aproximaciones decimales racionales de $\sqrt{2}$ entonces $2^{\sqrt{2}}$ es el valor al cual tiende la secuencia $2^{1.4}, 2^{1.41}, 2^{1.414}, 2^{1.4142}, 2^{1.41421}, 2^{1.414213}, \ldots$.

El ejemplo permite introducir el tema de las funciones exponenciales de base a para a un número real positivo. Si $a > 0$, la función esponencial de base a asocia a x, un número real a^x, $f(x) = a^x$ donde x es una variable que recorre el conjunto $\mathbb{R}$.

Anotamos en primer lugar que las **leyes de los exponentes** son válidas en este caso, es decir, cualesquiera sean a y b números reales positivos, x y y números reales (racionales o irracionales) tenemos:

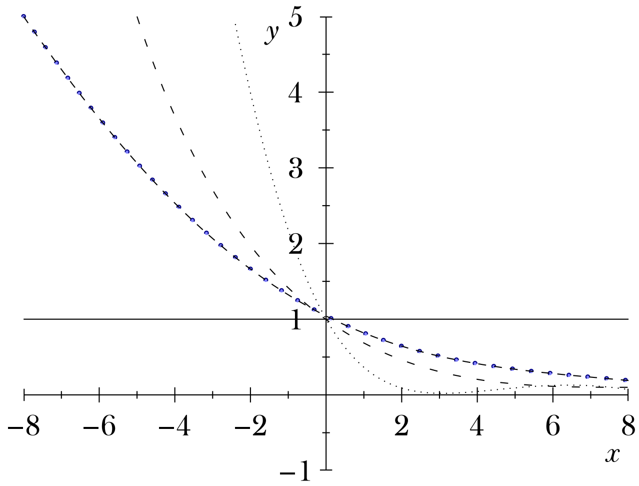
- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $a^{-x} = \left(a^{-1}\right)^x = (a^x)^{-1} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^0 = 1$
- $a^x > 0$ para todo x.

Con el objeto de analizar otras propiedades de la función exponencial distinguimos entre dos casos: $a > 1$ y $0 < a < 1$. Si $a > 1$ y z un racional positivo entonces $a^z > 1$.

Supongamos que y y z son números racionales tales que $y < z$. Como $0 < z - y$ entonces $1 < a^{z-y}$ y, en consecuencia, $a^y \cdot 1 < a^y a^{z-y}$, es decir, $a^y < a^z$. Esto es, a un mayor valor del exponente corresponde un mayor valor de la función en el caso de los exponentes racionales y como para los irracionales la función se define a partir de aproximaciones decimales racionales, en general, a mayor valor del exponente corresponde un mayor valor de la función. Decimos que la función es **creciente**.

Ahora si $0 < a < 1$, sea $b = \frac{1}{a}$. Como $1 < b$, la función $g(x) = b^x$ se comporta como en el caso anterior, es decir, si y y z son números reales tales que $y < z$ entonces $b^y < b^z$, esto es, $\left(\frac{1}{a}\right)^y < \left(\frac{1}{a}\right)^z$ o, de otra manera, $\frac{1}{a^y} < \frac{1}{a^z}$ lo cual implica, $a^z < a^y$. Así, en este caso, a mayor valor del exponente corresponde un menor valor de la función. Decimos que la función es **decreciente**.

En la figura 4.21, aparecen las gráficas de funciones exponenciales de base a para diferentes valores de a.

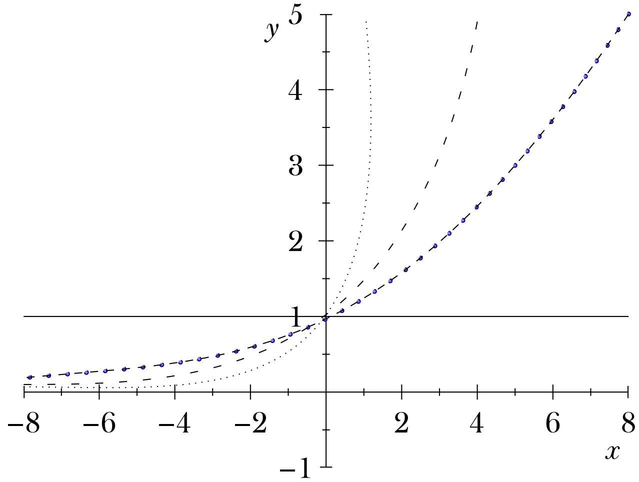


$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ trazo punteado

$y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ trazo segmentado

$y = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ trazo punteado y segmentado

$y = (1)^x$ trazo continuo



$y = (3)^x$ trazo punteado

$y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ trazo segmentado

$y = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ trazo punteado y segmentado

$y = (1)^x$ trazo continuo

Figura 4.22.

Notemos que para $a > 1$, dado que la función $f(x) = a^x$ es creciente, si y y z son números reales tales que $y \neq z$ entonces $y < z$ o $z < y$. En el primer caso, $a^y < a^z$, en particular $a^y \neq a^z$. En el segundo caso, $a^z < a^y$ y también $a^y \neq a^z$. El caso $0 < a < 1$ es similar. Así, en todos los casos, $y \neq z$ implica $a^y \neq a^z$ o, de manera equivalente, $a^y = a^z$ implica $y = z$.

- **Funciones logarítmicas**

Si y es un número real positivo y $y = a^x$ para algún número real x entonces se dice que x, es el **logaritmo en base** a **de** y. Se denota por $\log_a y$.

Así, tenemos:

- $y = a^x \Longleftrightarrow \log_a y = x$
- $\log_a (a^x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$
- $a^{\log_a y} = y$, para todo $y \in \mathbb{R}^+$

Las siguientes son **propiedades de los logaritmos**, si a, b, x y y son números reales positivos:

1. $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
2. $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$
3. $\log_a x^y = y \log_a x$
4. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Demostración. La relación entre los logaritmos y las exponenciales de base a permite demostrar estas propiedades de la siguiente manera:

Sean $r = \log_a x$, $s = \log_a y$, $t = \log_a xy$, $u = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$ y $v = \log_a x^y$.

1. $a^{r+s} = a^r a^s = xy$ y $a^t = xy$.

   Así, $a^{r+s} = a^t$ entonces $r + s = t$, es decir, $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$.

2. $a^{r-s} = a^r a^{-s} = \frac{a^r}{a^s} = \frac{x}{y}$ y $a^u = \frac{x}{y}$

   Así, $a^{r-s} = a^u$ entonces, $r - s = u$, es decir, $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$.

3. $a^v = x^y$ y $a^{yr} = (a^r)^y = x^y$.

   Así, $a^v = a^{yr}$ entonces $\log_a x^y = y \log_a x$.

Nota: cuando $a = 10$, $\log_a x$ se denota simplemente por $\log x$.

Ejemplo 4.12.

1. $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$.

2. $\log_{\frac{1}{2}}(4) = \log_{\frac{1}{2}}(2)^2 = \log_{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$.

3. Supongamos que $4^{2x} = 64$, entonces $\log_4 4^{2x} = \log_4 64$, esto es, $2x = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$. En consecuencia, $x = \frac{3}{2}$.

4. Si $2x + 2 > 0$ y $\log_6(2x + 2) = 3$ entonces $6^{\log_6(2x+2)} = 6^3$, es decir, $2x + 2 = 216$, de donde $x = 107$.

5. Si $\log(x - 2) = 1 - \log(x + 1)$, entonces

$$10^{\log(x-2)} = 10^{1-\log(x+1)} = \frac{10}{10^{\log(x+1)}}$$

así, $x-2 = \frac{10}{x+1}$ de donde, $(x - 2)(x + 1) = 10$, esto es, $x^2 - x - 12 = 0$. Esta ecuación tiene dos soluciones: $x = 4$ y $x = -3$. Pero para $x = -3$, $\log(x - 2)$ y $\log(x + 1)$ no están definidos. Así, la única solución es $x = 4$.

6. Es posible expresar la suma de logaritmos

$$7\log_a(x + 1) + \frac{1}{2}\log_a(3x + 6) - \log_a\left(x^2 + 3x + 2\right)$$

como un solo logaritmo. En efecto, la expresión dada es igual a

$$\begin{aligned}&\log_a(x + 1)^7 + \log_a(3x + 6)^{\frac{1}{2}} - \log_a\left(x^2 + 3x + 2\right)\\ &= \log_a(x + 1)^7 + \log_a\sqrt{3x + 6} - \log_a\left(x^2 + 3x + 2\right)\end{aligned}$$

y a su vez esta suma es igual a

$$\log_a\frac{(x + 1)^7\sqrt{3x + 6}}{x^2 + 3x + 2} = \log_a\frac{(x + 1)^7\sqrt{3x + 6}}{(x + 1)(x + 2)} = \log_a\frac{(x + 1)^6\sqrt{3x + 6}}{x + 2}$$

La **función logaritmo** de base a donde $a > 0$, notada $\log_a$, se define asociando a cada número real positivo x el número real $\log_a x$.

Así como deducimos las propiedades de los logaritmos a partir de las propiedades de las exponenciales, podemos decir, que si $a > 1$, a un mayor valor de x corresponde un mayor valor de $\log_a x$ y si $0 < a < 1$, a un mayor valor de x corresponde un menor valor de $\log_a x$, es decir, que si $a > 1$, la función $\log_a$ es creciente y si $0 < a < 1$, la función es decreciente.

De otra parte, notamos que si una pareja (r, s) pertenece a la gráfica de la función exponencial de base a es porque $s = a^r$, luego $\log_a s = r$, entonces la pareja (s, r) pertenece a la gráfica de la función $\log_a$. De igual manera, si una pareja (u, v) pertenece a la gráfica de la función $\log_a$, entonces la pareja (v, u) pertenece a la gráfica de la función exponencial de base a. La pareja (s, r) se puede obtener reflejando la pareja (r, s) en la recta de ecuación $y = x$ y recíprocamente. Así, la gráfica de la función $\log_a$ se puede obtener reflejando la gráfica de la función exponencial de base a en la recta de ecuación $y = x$ (figura 4.23).

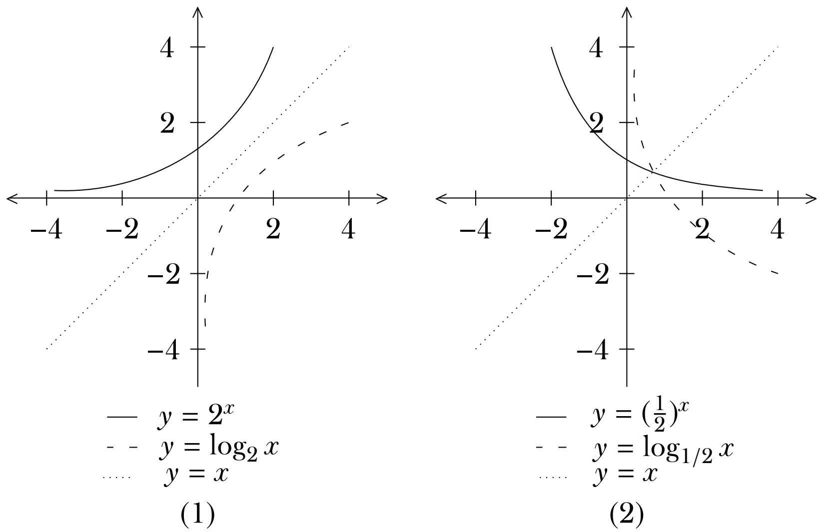
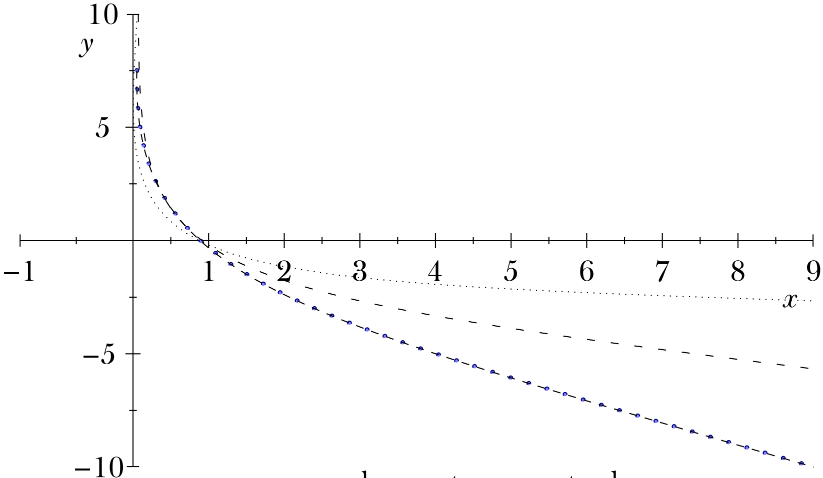


Figura 4.23.

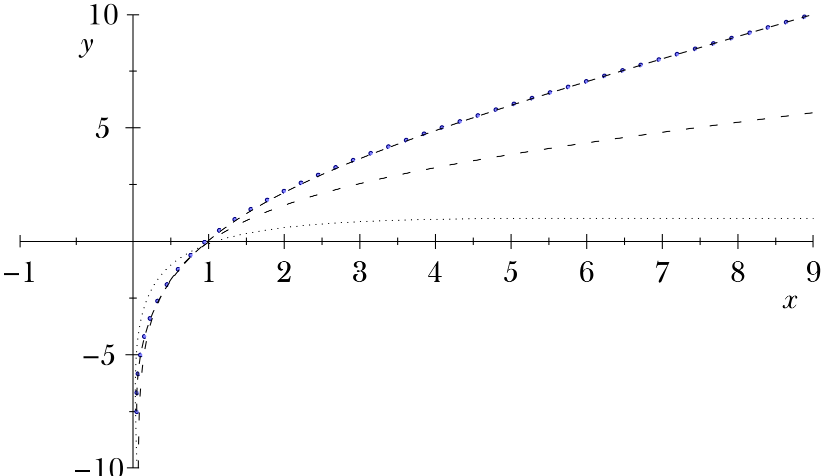
En la figura 4.24 aparecen las gráficas de las funciones $\log_a$ para los valores de a tomados como base de las funciones exponenciales trazadas en la figura 4.22.



$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ trazo punteado

$y = \log_{\frac{3}{5}} x$ trazo segmentado

$y = \log_{\frac{4}{5}} x$ trazo punteado y segmentado



$y = \log_{3} x$ trazo punteado

$y = \log_{\frac{5}{3}} x$ trazo segmentado

$y = \log_{\frac{5}{4}} x$ trazo punteado y segmentado

Figura 4.24.

- **Las funciones exponencial natural y logaritmo natural**

Consideremos ahora esta situación: mensualmente se invierte un capital C. Si la tasa de interés i es anual y se expresa como decimal, la cantidad acumulada en un mes, capital más interés, es $C + C\frac{i}{12} = C\left(1 + \frac{i}{12}\right)$. Si esta cantidad acumulada se invierte a su vez durante un mes en las mismas condiciones, entonces al final de ese período el capital acumulado será $C\left(1+\frac{i}{12}\right)+C\left(1+\frac{i}{12}\right)\frac{i}{12}=C\left(1+\frac{i}{12}\right)^{2}$. Si nuevamente se reinvierte el capital acumulado, al cabo de k meses, la cantidad acumulada es $C\left(1+\frac{i}{12}\right)^{k}$.

En general, si n es el número de períodos de inversión durante el año y el capital se invierte durante t años, el capital acumulado será $A(t)=C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$. Esta es la **fórmula de interés compuesto** y es un ejemplo ilustrativo del crecimiento exponencial.

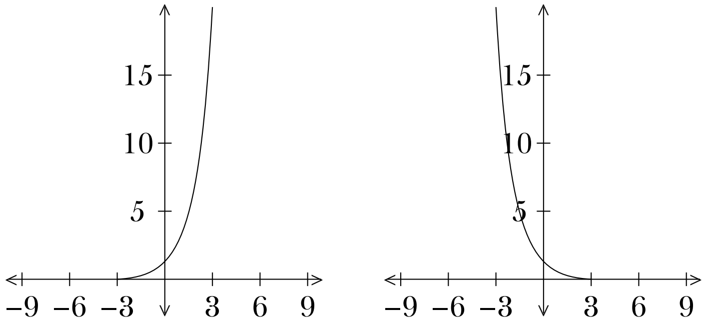
Supongamos que el número n de períodos se incrementa cada vez más. Para algunos enteros n, aproximando a la octava cifra decimal, el comportamiento de la expresión $\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n}$, tomando $i=1$, está descrito en la siguiente tabla:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$
1	2	1 000 000	2.71828047
10	2.59374246	10 000 000	2.71828169
100	2.70481383	100 000 000	2.71828181
1000	2.71692393	1 000 000 000	2.71828183

Tabla 4.1.

El valor de la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ tiende a un número irracional denotado por e, que aparece en matemáticas y en física y que, con 14 cifras decimales es $e\approx 2.71828182849045$. En los cálculos, la aproximación racional más usada de e es $2,7183$ (así como la de π es $3,1416$; la de $\sqrt{2}$ es $1,4142$ y la de $\sqrt{3}$ es $1,7320$). e se llama el **número de Euler**.

La **función exponencial natural** es la función exponencial de base e, $f(x)=e^{x}$, como toda exponencial solo toma valores positivos y, puesto que $e>1$, es una función creciente (figura 4.25 (1)). La función e^{-x} es decreciente (figura 4.25 (2)).



$y = e^x$
(1)

$y = e^{-x}$
(2)

Figura 4.25.

Si y es un número real que se puede escribir de la forma $y = e^x$, entonces el exponente x se llama el **logaritmo natural** de y y se nota $\ln y$.

En este caso, las relaciones entre exponenciales y logaritmos establecidas anteriormente, toman las formas:

- $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$
- $\ln(e^x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$
- $e^{\ln y} = y$, para todo $y \in \mathbb{R}^+$

También de las observaciones generales tenemos que la gráfica de la función $g(x) = \ln x$ se puede obtener reflejando la gráfica de la función $f(x) = e^x$ en la recta de ecuación $y = x$. En la figura 4.26 se muestra las gráficas de las dos funciones y de la recta.

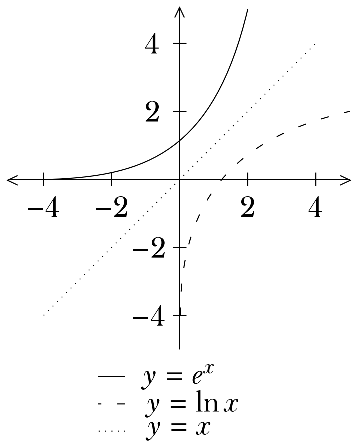


Figura 4.26.

La función logaritmo natural es creciente y tiene las siguientes propiedades.

1. $\ln x + \ln y = \ln xy$
2. $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$
3. $\ln x^y = y \ln x$
4. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Ejemplo 4.13.

1. Usando logaritmo natural, la igualdad $e^{2t} = 4 + x$ se puede expresar en la forma $2t = \ln(4 + x)$ y la igualdad $e^4 = a$ en la forma $4 = \ln a$.
2. $\ln \sqrt[3]{1+e} - \ln \sqrt[3]{e+e^2} = \ln \frac{\sqrt[3]{1+e}}{\sqrt[3]{e+e^2}} = \ln \sqrt[3]{\frac{1+e}{e+e^2}} = \ln \sqrt[3]{\frac{1+e}{e(1+e)}} = \ln \sqrt[3]{\frac{1}{e}}$ $= \ln \sqrt[3]{e^{-1}} = \ln e^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$.

4.5. Operaciones entre funciones

Así como los números reales se suman, restan, multiplican y dividen, también se pueden realizar operaciones entre funciones.

4.5.1. Álgebra de funciones

Definición 4.5.1. Una **operación entre funciones** es una regla que asocia a dos de ellas una tercera función, precisando cuál es la imagen de un número real x por esta última.

Al operar directamente las imágenes (que representan números reales) es posible obtener nuevas funciones.

Definición 4.5.2. Dadas las funciones f y g se definen:

$f+g$	la adición de f y g:	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$f-g$	la sustracción, la resta o la diferencia de f y g:	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
$f \cdot g$	la multiplicación de f y g:	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
$\frac{f}{g}$	el cociente de f por g :	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ si $g(x) \neq 0$

Para determinar el dominio (natural) de cada una de ellas notemos que al definir la imagen de x, deben estar definidas tanto $f(x)$ como $g(x)$ y que en el caso del cociente, $g(x)$ debe ser distinto de 0. Así, si D_h denota el dominio de la función h entonces:

$$\begin{aligned} D_{f+g} &= D_{f-g} = D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g \\ D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g - \{x \in D_g : g(x) = 0\} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.14. 1. Sean $f(x) = 4 - 2x$ y $g(x) = 16 - x^2$

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= (4-2x) + \left(16 - x^2\right) = 20 - 2x - x^2 \\ (f-g)(x) &= (4-2x) - \left(16 - x^2\right) = -12 - 2x + x^2 \\ (f\cdot g)(x) &= (4-2x)\left(16 - x^2\right) = 64 - 32x - 4x^2 + 2x^3 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{4-2x}{16-x^2} \end{aligned}$$

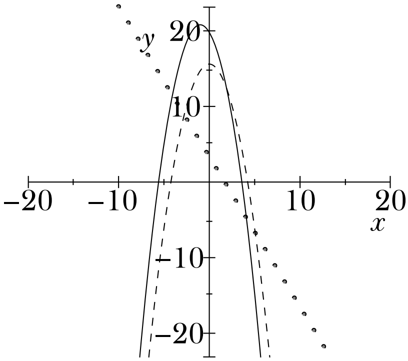
Ahora bien,

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

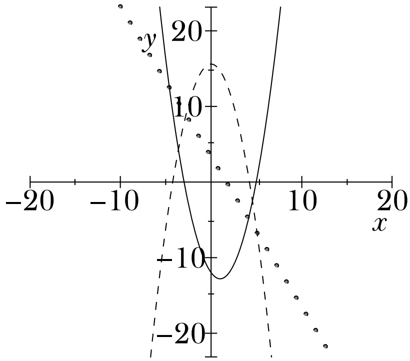
En consecuencia

$$\begin{aligned} D_{f+g} &= D_{f-g} = D_{f\cdot g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \quad \text{y} \\ D_{\frac{f}{g}} &= \mathbb{R}\setminus\left\{x \in \mathbb{R} : 16 - x^2 = 0\right\} = \mathbb{R}\setminus\{-4, 4\} \end{aligned}$$

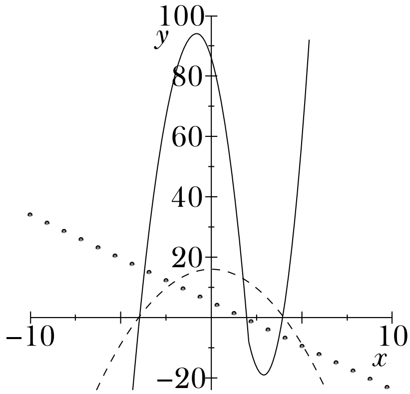
En la figura 4.27, se muestran las gráficas de f, g y las funciones que acabamos de obtener.



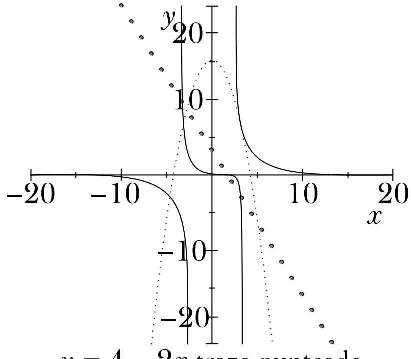
$y = 4 - 2x$ trazo punteado
$y = 16 - x^2$ trazo segmentado
$y = 20 - 2x - x^2$ trazo continuo



$y = 4 - 2x$ trazo punteado
$y = 16 - x^2$ trazo segmentado
$y = -12 - 2x + x^2$ trazo continuo



$y = 4 - 2x$ trazo punteado
$y = 16 - x^2$ trazo segmentado
$y = 64 - 32x - 4x^2 + 2x^3$ trazo continuo



$y = 4 - 2x$ trazo punteado
$y = 16 - x^2$ trazo segmentado
$y = \frac{4-2x}{16-x^2}$ trazo continuo

Figura 4.27.

2. Como caso particular del producto tenemos $(f \cdot f)(x) = f^2(x) = (f(x))^2$ y en general $f^n(x) = (f(x))^n$. Así, para $f(x) = 4 - 2x$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
f^2(x) &= (4-2x)^2 = 16 - 16x + 4x^2 \quad \text{y} \\
f^4(x) &= (4-2x)^4 = \left(16 - 16x + 4x^2\right)\left(16 - 16x + 4x^2\right) \\
&= 256 - 512x + 384x^2 - 128x^3 + 16x^4.
\end{aligned}
$$

En la figura 4.28, se puede observar las gráficas de f, f^2 y f^4.

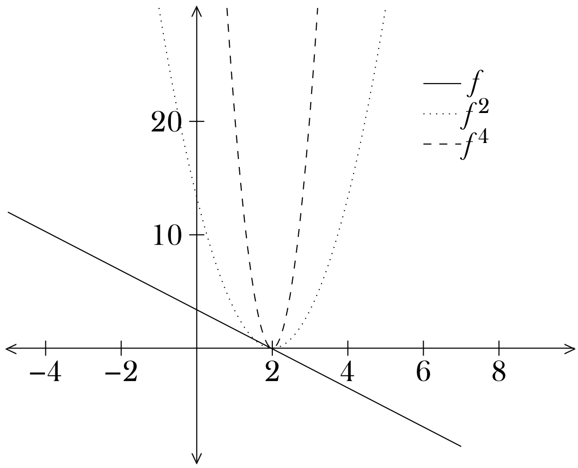


Figura 4.28.

3. Sean $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$.

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= e^x + e^{-x} = e^x + \frac{1}{e^x} = \frac{e^x e^x + 1}{e^x} = \frac{e^{2x}+1}{e^x} \\
(f-g)(x) &= e^x - e^{-x} = e^x - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x e^x - 1}{e^x} = \frac{e^{2x}-1}{e^x} \\
(f \cdot g)(x) &= e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1 \\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{e^x}{e^{-x}} = e^x e^x = (e^x)^2 = e^{2x}
\end{aligned}
$$

Ahora bien, $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$ y, en consecuencia $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ y $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : e^x = 0\}$. Como $e^x > 0$ para todo x entonces $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}$.

En la figura 4.29 se pueden observar las gráficas de f, g y de las funciones que acabamos de obtener.

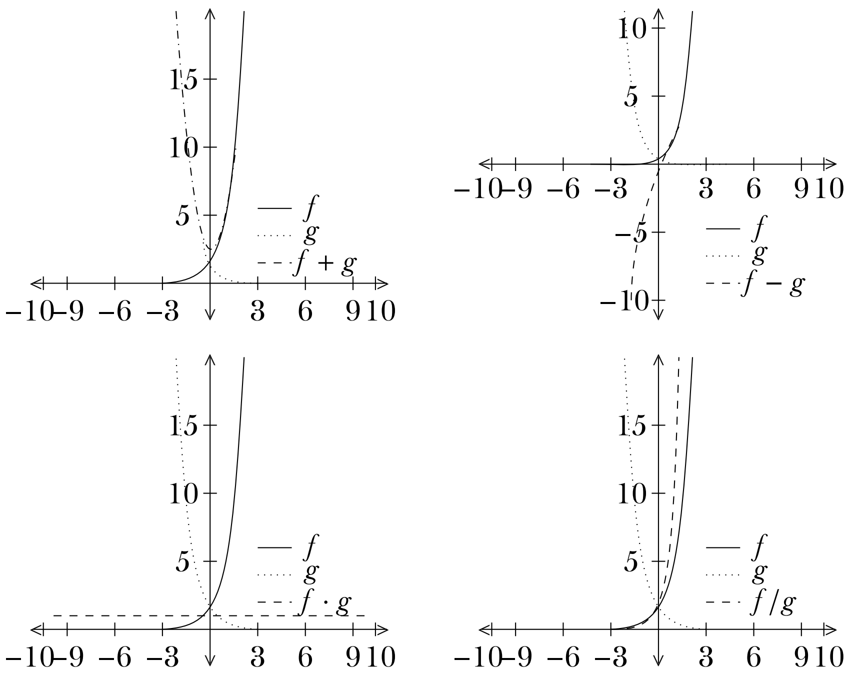


Figura 4.29.

Las operaciones definidas entre funciones tienen propiedades heredadas de las propiedades que tienen las operaciones de adición y multiplicación de números reales. Así tenemos:

1. La asociatividad de la adición pues, dadas f, g y h funciones,

$$(f+g)+h = f+(g+h)$$

Para verificar esta igualdad de funciones, de acuerdo con la definición 4.2.1, debemos ver que sus dominios son iguales y también son iguales los resultados de calcularlas en un número real x del dominio común.

El dominio de $(f+g)+h$, es

$$D_{(f+g)+h} = D_{f+g} \cap D_h = \left(D_f \cap D_g\right) \cap D_h,$$

mientras que el dominio de $f+(g+h)$ es

$$D_{f+(g+h)} = D_f \cap D_{g+h} = D_f \cap \left(D_g \cap D_h\right).$$

Como tenemos la igualdad de conjuntos

$$\left(D_f \cap D_g\right) \cap D_h = D_f \cap \left(D_g \cap D_h\right),$$

entonces

$$D_{(f+g)+h} = D_{f+(g+h)}.$$

Además, para todo $x \in D_f \cap D_g \cap D_h$,

$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x).$$

Puesto que $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ representan números reales, esta última suma es igual a

$$f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g+h)(x) = (f+(g+h))(x)$$

Así:

$$(f+g)+h = f+(g+h)$$

De manera similar se prueba la asociatividad del producto.

2. La conmutatividad de la multiplicación, pues

   $D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g = D_g \cap D_f = D_{g\cdot f}$, además, para todo $x \in D_{f\cdot g}$

   $$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x),$$

   como $f(x)$ y $g(x)$ representan números entonces este producto es igual a:

   $$g(x)\, f(x) = (g \cdot f)(x).$$

   Así $f \cdot g = g \cdot f$. De manera similar se prueba la conmutatividad de la suma.

3. Sea $\overline{0}$ la función que a todo número real x asocia el número 0, es decir, $\overline{0}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y sea $\overline{1}$ la función que a cada real x asocia el número 1. Entonces, por una parte,

   $$D_{f+\overline{0}} = D_f \cap D_{\overline{0}} = D_f \cap \mathbb{R} = D_f$$

   y, para todo $x \in D_f$,

   $$\left(f+\overline{0}\right)(x) = f(x) + \overline{0}(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

   es decir,

   $$f + \overline{0} = f$$

   Por otra parte,

   $$D_{f\cdot\overline{1}} = D_f \cap D_{\overline{1}} = D_f \cap \mathbb{R} = D_f$$

y, para todo $x \in D_f$,

$$\left(f \cdot \overline{1}\right)(x) = f(x)\,\overline{1}(x) = f(x) \cdot 1 = f(x)$$

es decir,

$$f \cdot \overline{1} = f$$

Así, entre las funciones existen módulos para la adición, la función $\overline{0}$, y para la multiplicación, la función $\overline{1}$.

4. Se define la función $-f$ así: su dominio es igual al dominio de f, $D_{-f} = D_f$, y para $x \in D_f$,

$$(-f)(x) = -f(x)$$

entonces

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0 = \overline{0}(x)$$

es decir,

$$f + (-f) = \overline{0}.$$

Por otra parte, para aquellos $x \in D_f$ para los cuales $f(x) \neq 0$, se define $\frac{1}{f}$ así:

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Con esto,

$$D_{\frac{1}{f}} = D_f \setminus \left\{x \in D_f : f(x) = 0\right\}$$

y $D_{f \cdot \frac{1}{f}} = D_f \cap D_{\frac{1}{f}} = D_f \cap (D_f \setminus \{x \in D_f : f(x) = 0\}) = D_f \setminus \left\{x \in D_f : f(x) = 0\right\}$, y, para todo $x \in D_{f \cdot \frac{1}{f}}$

$$\left(f \cdot \frac{1}{f}\right)(x) = f(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = 1 = \overline{1}(x)$$

es decir,

$$f \cdot \frac{1}{f} = \overline{1}$$

Así, entre las funciones existen inversos para la adición e inversos parciales para la multiplicación (figura 4.30).

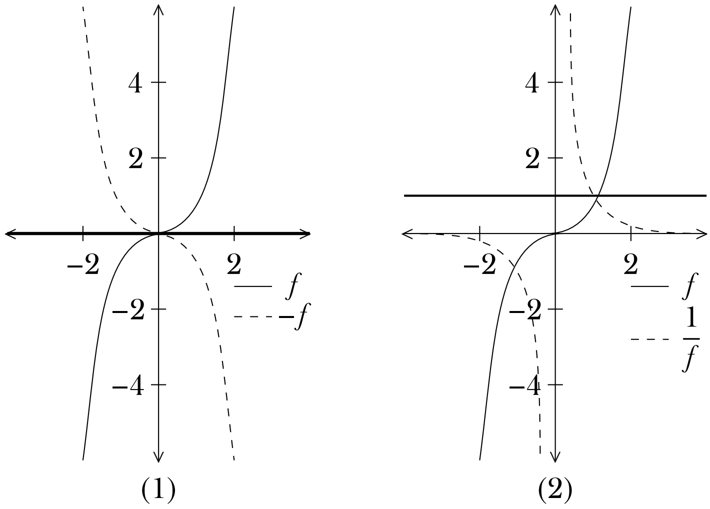


Figura 4.30.

4.5.2. Composición de funciones

Existe otra manera de obtener una función a partir de dos funciones dadas.

Definición 4.5.3. Dadas las funciones f y g, se define la **función compuesta** de f y g, notada $f \circ g$, así:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Esta función compuesta se puede evaluar en los números reales x para los cuales están definidas tanto $g(x)$ como $f(g(x))$, así:

$$D_{f \circ g} = \left\{x \in D_g : g(x) \in D_f\right\}$$

Ejemplo 4.15

1. Sean $f(x) = 4 - 2x$ y $g(x) = 16 - x^2$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(16 - x^2\right) = 4 - 2\left(16 - x^2\right) = -28 + 2x^2$$
$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4 - 2x) = 16 - (4 - 2x)^2 = 16x - 4x^2$$
$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

En la figura 4.31 aparecen las gráficas de f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$. Notemos que las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ son distintas pues, aunque $D_{f \circ g} = D_{g \circ f}$, en general, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

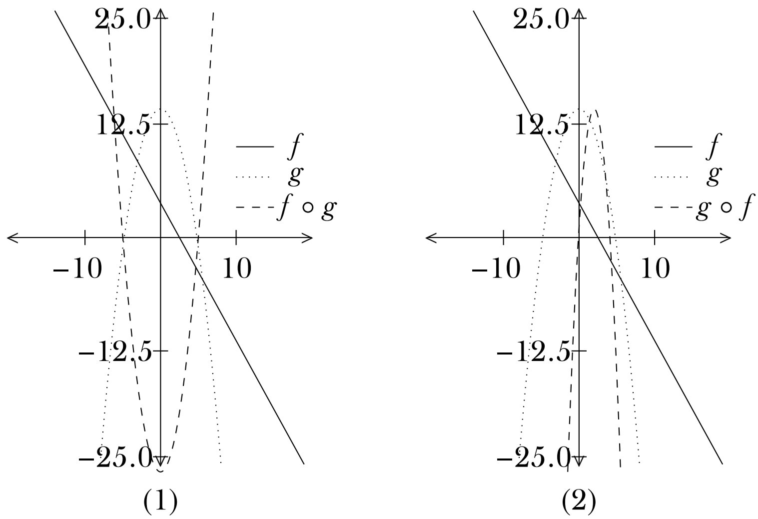


Figura 4.31.

2. Si $f(x) = \frac{3}{x+1}$, entonces

   a) $f\left(x^2\right) = \frac{3}{x^2+1}$, en particular, $f\left(2^2\right) = \frac{3}{5}$.

   b) $f(x)^2 = \left(\frac{3}{x+1}\right)^2 = \frac{9}{(x+1)^2}$, en particular, $f(2)^2 = 1$.

   c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{3}{x+1}\right) = \frac{3}{\frac{3}{x+1}+1} = \frac{3(x+1)}{x+4}$.

   También $f(f(x)) = \frac{3}{f(x)+1}$. En particular, $(f \circ f)(2) = \frac{3}{2}$.

   En general, $f\left(x^2\right) \neq f(x)^2$, $f\left(x^2\right) \neq f(f(x))$ y $f(x)^2 \neq f(f(x))$.

3. Se puede expresar la función $h(x) = \sqrt{x^2-1}$ en la forma $(f \circ g)(x)$ para $g(x) = x^2 - 1$ y $f(x) = \sqrt{x}$. Notemos que $D_{g \circ f} = D_h$.

4. Se puede expresar la función $k(x) = \frac{2}{x^2+2x+3}$ como una función compuesta, de más de una manera. Así, por ejemplo,

   Si $f_1(x) = \frac{1}{x}$ y $g_1(x) = \frac{x^2+2x+3}{2}$, entonces $D_{f_1 \circ g_1} = D_k$ y

$$(f_1 \circ g_1)(x) = f_1(g_1(x)) = \frac{1}{g_1(x)} = \frac{1}{\frac{x^2+2x+3}{2}} = \frac{2}{x^2+2x+3} = k(x)$$

   Si $f_2(x) = \frac{2}{x^2+2}$ y $g_2(x) = x + 1$ entonces $D_{f_2 \circ g_2} = D_k$

$$(f_2 \circ g_2)(x) = f_2(g_2(x)) = f_2(x+1) = \frac{2}{(x+1)^2+2} = \frac{2}{x^2+2x+3} = k(x)$$

Además, si $f_3(x) = \frac{2}{x}$, $g_3(x) = x + 3$ y $h(x) = x^2 + 2x$, entonces

$$\begin{aligned}((f_3 \circ g_3) \circ h)(x) &= (f_3 \circ g_3)h(x) = f_3(g_3(h(x))) \\ &= f_3\left(g_3\left(x^2 + 2x\right)\right) = f_3\left(x^2 + 2x + 3\right) \\ &= \frac{2}{x^2 + 2x + 3}.\end{aligned}$$

Además. $D_{(f_3 \circ g_3)\circ h} = D_k$. También

$$(f_3 \circ (g_3 \circ h))(x) = f_3((g_3 \circ h)(x)) = f_3(g_3(h(x))) = k(x).$$

5. Sean $a > 0$ y $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x \\ D_{f\circ g} &= \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R},\ x > 0 : g(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+ \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(a^x) = \log_a a^x = x \\ D_{g\circ f} &= \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} = \mathbb{R}\end{aligned}$$

Examinamos ahora las **propiedades de la composición** de funciones:

1. La asociatividad se verifica en general pues

$$\begin{aligned}D_{(f\circ g)\circ h} &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in D_h \text{ y } h(x) \in D_{f\circ g}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in D_h, h(x) \in D_g \text{ y } g(h(x)) \in D_f\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_{f\circ(g\circ h)} &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in D_{g\circ h} \text{ y } (g \circ h)(x) \in D_f\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in D_h, h(x) \in D_g \text{ y } g(h(x)) \in D_f\right\}\end{aligned}$$

Así $D_{(f\circ g)\circ h} = D_{f\circ(g\circ h)}$.

Además,

$$\begin{aligned}&((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) \\ &(f \circ (g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))\end{aligned}$$

Luego,

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

2. La conmutatividad no se verifica en general como lo vimos anteriormente.

3. Sea I la función identidad que a cada $x \in \mathbb{R}$ asocia x, es decir, $I(x) = x$. Para toda función f tenemos

$$\begin{aligned} D_{f \circ I} &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in D_I \text{ y } I(x) \in D_f\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \text{ y } x \in D_f\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in D_f\right\} \\ &= D_f \end{aligned}$$

De igual manera, se puede mostrar que $D_{I \circ f} = D_f$.

Además,

$$\begin{aligned} (f \circ I)(x) &= f(I(x)) = f(x) \\ (I \circ f)(x) &= I(f(x)) = f(x) \end{aligned}$$

esto es,

$$f \circ I = f \quad \text{e} \quad I \circ f = f$$

Taller 1

1. Situar en el plano cartesiano los siguientes puntos: $P(-3, 4)$, $Q\left(4, -\frac{3}{4}\right)$, $R\left(-\frac{7}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right)$.

2. Hallar la distancia que existe entre los puntos P y Q en cada uno de los siguientes casos:

   a) $P(7, 3)$, $Q(2, 5)$

   b) $P(-3, 4)$, $Q\left(\frac{5}{3}, 4\right)$

   c) $P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, $Q\left(-\frac{2}{3}, -1\right)$

   d) $P\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $Q\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

3. Los vértices de la base de un triángulo isósceles están en los puntos $(1, 2)$ y $(8, 2)$. Si el triángulo tiene 4 unidades de altura con respecto a la base, hallar las coordenadas del tercer vértice.

4. Para cada par de puntos P y Q del punto 2, hallar las coordenadas del punto medio.

5. Verificar que las siguientes parejas definen una función f : $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, $(\pi, -2)$, $(4, 2\pi)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$.

   a) Hallar $f(\pi)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

   b) Hallar x tal que $f(x) = 5$.

   c) Responder. ¿existe $f\left(\frac{1}{2}\right)$?

   d) Responder. ¿existe x tal que $f(x) = \pi$?

   e) Responder. ¿Cuántos elementos distintos posee el dominio de f? ¿Cuántos elementos distintos posee el rango de f?

   f) Responder. ¿Cuántos elementos distintos tienen imágenes iguales?

6. Determinar si las siguientes parejas definen una función $(-1, -1)$, $(-3, 4)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$, $(5, -5)$. Justificar su respuesta.

7. Verificar que las siguientes parejas definen una función f : $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 9)$, $(4, 16)$, $(5, 25)$.

   a) Hallar $f(2)$, $f(5)$.

   b) Hallar x tal que $f(x) = 9$.

Taller 2

1. Hallar el dominio de cada una de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \frac{3x+4}{x+1}$

   b) $g(x) = \sqrt{5 - 2x}$

   c) $h(x) = \frac{x+6}{x^2+1}$

   d) $k(x) = 3x^2 + 3 + \frac{3}{x}$

2. Sea $D = \mathbb{R}$ y f la función definida por $f(x) = 3x - 2$ para todo $x \in D$. Hallar $f(0)$, $f(2)$, $f(-3)$, $-f(3)$.

3. Sea $D = \mathbb{R}$ y f la función definida por $f(x) = x^2 + 2x$ para todo $x \in D$.

   a) Hallar $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$, $f(-3)$, $\frac{8}{f(2)}$.

   b) Hallar todos los valores de x tales que $f(x) = 0$.

4. Para las funciones de los ejercicios 2 y 3, hallar $f(x+h)$. ¿Es $f(x+h) = f(x) + f(h)$? Hallar $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

5. Sea $f(x) = x^3 + 2x$. Hallar $f(-x)$ y comparar el resultado con $f(x)$. ¿Cómo se relacionan $f(-x)$ y $f(x)$?

6. Sea $g(x) = x^2 - 5$. Hallar $g(-x)$ y comparar el resultado con $g(x)$. ¿Cómo se relacionan $g(-x)$ y $g(x)$?

7.
   a) El área de un cuadrado en términos de la longitud de su lado.
   b) El área de un cuadrado en términos de la longitud de una de sus diagonales.
   c) El volumen de un cubo en términos de la longitud de su arista.
   d) El volumen de un cubo en términos del área de una de sus caras.
   e) El volumen de una esfera en términos del diámetro.
   f) El área de un triángulo equilátero en términos de la longitud de uno de sus lados.

8. A partir de una pieza rectangular de cartón de 20×30 cm, se debe elaborar una caja, cortando cuadrados idénticos de área x^2 de cada esquina y volteando hacia arriba los lados. Indicar el volumen V de la caja en términos de x.

9. Si el lado de un cuadrado mide a unidades y se incrementa en h unidades, hallar el incremento que experimenta el área.

10. Si las aristas de dos cubos miden, respectivamente, a y $2a$ unidades, ¿qué relación existe entre sus volúmenes?

Taller 3

1. La relación entre las lecturas de las temperaturas *Fahrenheit* (F) y *Celcius (C)* está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.
   a) ¿A qué temperatura las lecturas en las dos escalas son iguales?
   b) ¿En qué momento la lectura en Fahrenheit es el doble de la lectura en Celsius?

2. En cada caso determinar la ecuación de la recta que cumple las condiciones dadas:

   a) Pasa por el punto $P\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ y tiene pendiente igual a 4.

   b) Pasa por el punto $P(1, -1)$ y tiene pendiente igual a -1.

   c) Pasa por los puntos $P(3, 4)$ y $Q(-2, 5)$.

   d) Pasa por los puntos $P(-\frac{2}{3}, 0)$ y $Q(-2, \frac{2}{3})$.

3. Para cada una de las rectas cuyas ecuaciones aparecen a continuación hallar:
   - La pendiente.
   - Las intersecciones con los ejes X y Y.
   - La ecuación de la recta perpendicular a ella, que pasa por $(1, 1)$.
   - La ecuación de la recta paralela a ella que pasa por $(1, 1)$.

   a) $\frac{3}{4}x + 2y = 1$

   b) $4x + 3y = 12$

   c) $\frac{x}{3} + 2y + 3 = 0$

4. Dada la recta L de ecuación $3x - 3y + 5 = 0$ y el punto $P(2, -1)$, en cada caso hallar la ecuación de la recta que pasa por P y verifica la condición:

   a) Es paralela a L.

   b) Es perpendicular a L.

5. Hallar los puntos de la recta $3x + y = 2$ que están a dos unidades del punto $P(1, 2)$.

6. Hallar la ecuación de la parábola que satisface estas condiciones: tiene un vértice en $(0, 0)$, pasa por el punto $(2, -3)$ y es simétrica con respecto al eje Y. Dibujar la gráfica.

7. El dominio de cada una de las siguientes funciones es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Trazar su gráfica.

   a) $f(x) = 3x + 4$

   b) $g(x) = 5 - 2x$

   c) $h(x) = 2x^2 + 1$

   d) $k(x) = -3x^2 + 4$

8. Sea $f(x) = x^2 - 2$. En cada caso, dibujar en el mismo sistema de coordenadas las gráficas de f y de la función dada.

   a) $e(x) = f(x+2)$
   b) $g(x) = f(x-3)$
   c) $h(x) = f(3x)$
   d) $k(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$
   e) $l(x) = f(x) + 2$
   f) $g(x) = f(x) - 3$
   g) $h(x) = f(-x)$
   h) $k(x) = -f(x)$
   i) $e(x) = f\left(x^2\right)$
   j) $g(x) = f(x)^2$

Taller 4

1. En cada uno de los siguientes casos, elaborar una tabla de la función para los valores enteros de x pertenecientes al intervalo $[-5, 5]$. Dibujar la gráfica.

   a) $f(x) = 3^x$
   b) $g(x) = (\frac{1}{3})^x$
   c) $h(x) = 3^{x+2} - 6$
   d) $k(x) = 3(2^x)$

2. Simplificar las siguientes expresiones:

   a) $2^{3x-2}2^{4-2x}$
   b) $(a^{2x})^{3x}$
   c) $\dfrac{4^{x+9}}{4^{7-x}}$
   d) $\dfrac{2^{3x}}{3^{2x}}$

3. Teniendo en cuenta que si a es positivo y distinto de 1 y u y v son números reales entonces $a^u = a^v$ si, solo si, $u = v$, hallar x en cada uno de los siguientes casos:

a) $3^{4x-1} = 3^{7x-2}$

b) $5^{6x-3} = 125^{x^2+1}$

c) $16^{x^2} = 4^{5x+3}$

4. Para cada una de las siguientes igualdades, escribir una expresión equivalente usando logaritmos.

a) $3^4 = 81$

b) $\sqrt[3]{125} = 5$

c) $4^{-1} = \frac{1}{4}$.

5. En cada caso, hallar el valor de x que verifica la igualdad.

a) $3\log_b 2 + \frac{1}{2}\log_b 25 - \log_b 20 = \log_b x$

b) $x^{\log x} = 100x$.

6. A partir de la gráfica de la función $f(x) = e^x$, obtener las gráficas de las siguientes funciones:

a) $g(x) = 3e^x$

b) $h(x) = e^x-3$

c) $j(x) = 2e^x - 2$

d) $k(x) = e^{2x}$

e) $l\,(x) = e^{\frac{x}{2}}$

f) $m\,(x) = e^{-x}$

7. Usar las propiedades del logaritmo para probar las siguientes afirmaciones:

a) Si $\ln(x+8) - \ln(x) = 3\ln(2)$ entonces $x = \frac{8}{7}$.

b) Cualquiera sea $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, si $x^{\log_a x} = a^2x$, entonces $x = a^2$ o $x = a^{-1}$.

Taller 5

1. Se definen las funciones f y g de la siguiente forma: f : $(-1,-1)$, $(1,1)$, $\left(2,\sqrt{8}\right)$, $(-2,-4)$, $(3,9)$, $\left(-3,-\sqrt{6}\right)$; g : $(-1,3)$, $(1,-4)$, $(2,5)$, $(-2,-6)$, $(3,-5)$,$(-3,4)$.

a) Escribir la función cuyos valores son $f(x) + g(x)$.

b) Escribir la función cuyos valores son $f(x) - g(x)$.

2. Se definen las funciones f y g de la siguiente forma: $f : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(1, \sqrt{2}\right), \left(2, \sqrt{8}\right), (-2, -4), \left(3, -\frac{1}{2}\right), (-3, -6)$; $g : \left(\frac{1}{2}, 3\right), (1, -4), \left(2, \sqrt{2}\right), (-2, -6), (3, -4), (-3, 4)$.

   a) Escribir la función cuyos valores son $f(x) \cdot g(x)$.

   b) Escribir la función cuyos valores son $[f(x)]^2$.

   c) Escribir la función cuyos valores son $\frac{f(x)}{g(x)}$.

3. Se definen las funciones f y g de la siguiente forma: $f : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(1, \sqrt{2}\right), \left(2, \sqrt{8}\right), (-2, -4), \left(3, -\frac{1}{2}\right), (4, -6)$; $g : \left(-1, -\sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right), (1, -4), \left(2, \sqrt{2}\right), (-2, -6), (3, -4), (-3, 4)$.

   a) ¿Para qué valores de x se puede definir la función cuyos valores son $f(x) + g(x)$? Escribir esa función.

   b) ¿Para qué valores de x se puede definir la función cuyos valores son $f(x) - g(x)$? Escribir esa función.

4. Se definen las funciones f y g de la siguiente forma: $f : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(1, \sqrt{2}\right), \left(2, \sqrt{8}\right), (-2, -4), \left(3, -\frac{1}{2}\right), (-3, -6)$; $g : \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), (0, 1), \left(\frac{1}{2}, 3\right), (1, 0), \left(2, \sqrt{2}\right), (-2, -6), \left(\frac{5}{2}, -4\right), (-3, 4)$.

   a) ¿Para qué valores de x se puede definir la función cuyos valores son $f(x) \cdot g(x)$? Escribir esa función.

   b) ¿Para qué valores de x se puede definir la función cuyos valores son $\dfrac{f(x)}{g(x)}$? Escribir esa función.

5. Sean $D = \mathbb{R}$ y f y g funciones definidas por $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = x^2 + 3x + 2$ para todo $x \in D$. En cada caso hallar la función indicada.

   a) $f(x) + g(x)$

   b) $f(x) - g(x)$

   c) $f(x) \cdot g(x)$

   d) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

6. Para las funciones del ejercicio anterior hallar

   a) $f(g(0))$
   b) $g(f(2))$
   c) $f(g(a))$
   d) $g(f(a))$.

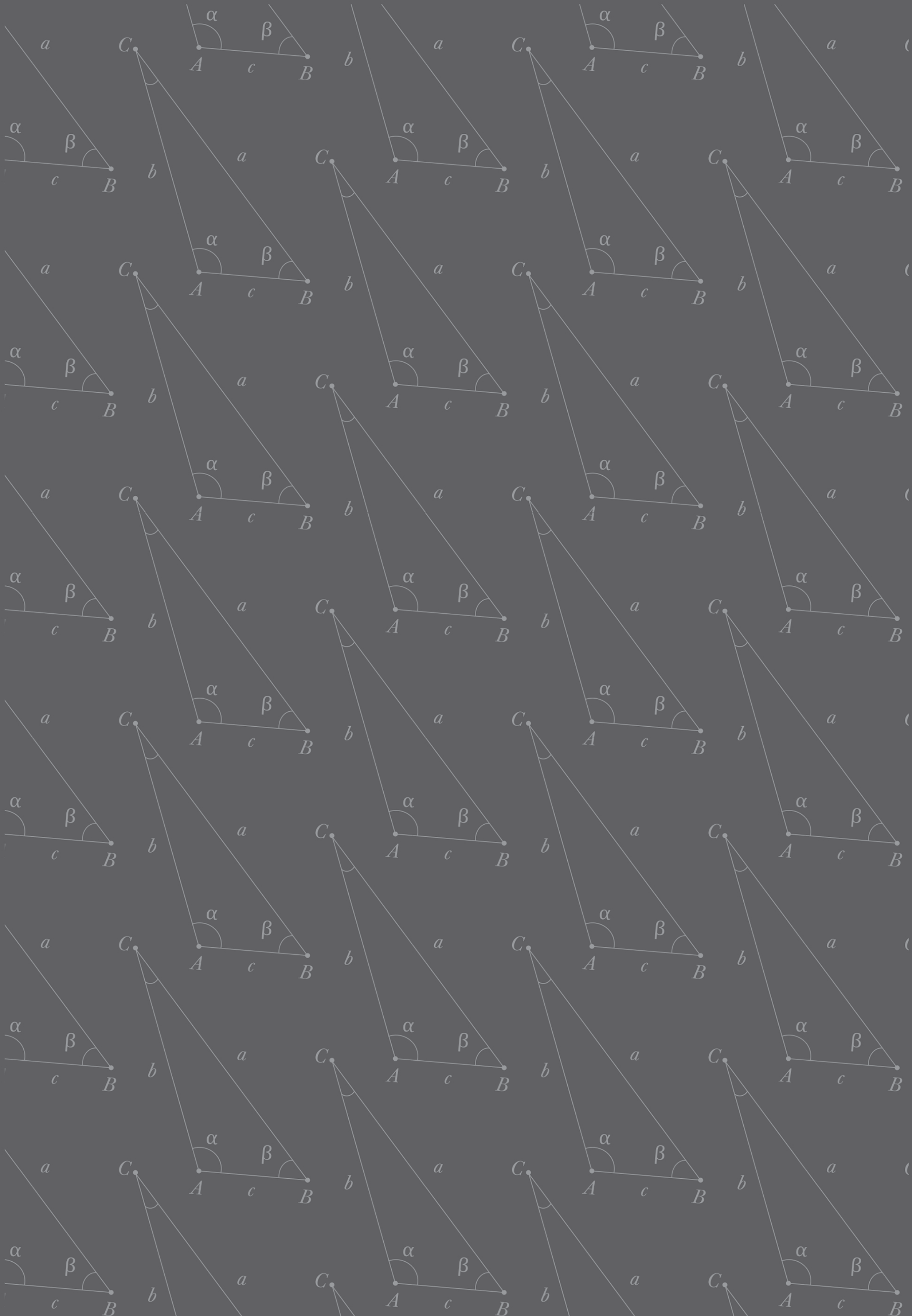
7. Sea $D = \mathbb{R}$ y f y g las funciones definidas por $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 + 2$ para todo $x \in D$. Hallar:

   a) $f\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{f(a)}$
   b) $g\left(\sqrt{a}\right) - \sqrt{g(a)}$
   c) $f(a) + g(a)$
   d) $f(a+h)$
   e) $\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$
   f) $f(3) + g(1)$
   g) $f(g(a))$
   h) $g(f(a))$

Capítulo

cinco

Trigonometría



5.1. Introducción histórica

Los astrónomos y navegantes utilizaron antiguamente la aritmética y la geometría para el análisis de los desplazamientos y de la ubicación de los astros en el firmamento; pero estas disciplinas no bastaban para hacer mediciones muy exactas, se requería de más herramientas. Para ello surgió la trigonometría, que les permitió encontrar soluciones a estos problemas.

Aunque el término *trigonometría* (*trigon*: 'triángulo', *metria*: 'medida') apareció por primera vez en el libro *Trigonometriae siue. De dimensione triangulorum libri quinque. Item problematorum variorum*. . . *libri decem*, del matemático y científico alemán Bartholomaeus Pitiscus (1561 - 1613) [7], se cree que hace más de 3000 años los babilonios utilizaban los concepto de ángulos y razones trigonométricas para establecer relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. "Una tablilla de barro –escrita por los babilonios– denominada *Plimpton 322* (1800 a. C.), muestra una sucesión de columnas y filas con números en escritura cuneiforme que, parece, representa una serie de funciones trigonométricas" [7]. También, en Egipto fueron hallados papiros al respecto. En uno de ellos, el Papiro de Rhind, se presentan rudimentos de trigonometría y teoría de los triángulos semejantes. En la construcción de las pirámides, debido a que debía mantenerse una pendiente uniforme en una cara y la misma en las cuatro, se introdujo un concepto equivalente al de la cotangente de un ángulo: *seqt*, que representa la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por cada unidad de variación de altura (es la inversa de la tangente más utilizada actualmente).

Tales de Mileto (c. 624 - c. 546 a. C.), Pitágoras de Samos (569 - 475 a. C.) y Arquímedes de Siracusa (287 - 212 a. C.) demostraron teoremas en geometría que fueron básicos para el desarrollo de la trigonometría. Mientras que los egipcios y babilonios utilizaron con frecuencia las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo; los griegos estudiaron la relación entre las rectas y las circunferencias, propiedades que se aplicaban principalmente en astronomía.

Hiparco de Nicea (c. 190 - c. 120 a. C.) –llamado el padre de la trigonometría– compuso la primera tabla trigonométrica, utilizando una gran cantidad de ángulos centrales en una circunferencia: la razón entre el arco y su cuerda; también, desarrolló el primer catálogo de estrellas con sus posiciones mediante coordenadas elípticas, y clasificó las estrellas según la intensidad de su brillo (método aún vigente). Asimismo, en geografía fue el primero en dividir el globo terráqueo en paralelos y meridianos, introduciendo los conceptos *longitud* y *latitud* [16], [10].

Otra obra significativa de la antigüedad es *Sintaxis matemática*, constituida por trece libros escritos en el siglo II por Claudio Ptolomeo de Alejandría (c. 100 - c. 170), y traducida al árabe como *Almagesto*. En esta obra se dan ejemplos de cómo calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de algunos conocidos utilizando una tabla de cuerdas; y conduce a muchas de fórmulas trigonométricas, como el seno de la suma de dos ángulos y el seno del ángulo medio [10]. De igual forma, Ptolomeo estableció criterios científicos para predecir con cierta exactitud los eclipses; hizo aportes para el estudio de la música, ya que consideraba que las matemáticas subyacían en la música y los movimientos estelares; inició la investigación sobre la óptica; en geografía, mostró técnicas matemáticas para trazar mapas, lo que llevó a que fuera uno de los primeros en realizar mapas con coordenadas, longitud y latitud; mejoró los métodos de representación de mapas y la representación de los términos *paralelo* y *meridiano* para trazar las líneas imaginarias de latitud y longitud. Del mismo autor se conservan: el libro de óptica (*Tetrabiblos*), el de geografía (*Geographia*), y el de teoría musical (*Harmonicos*) [10]. Además, inventó el astrolabio:

> Un instrumento de campo que permite no sólo medir la altura de un astro sobre el horizonte, sino también determinar inmediatamente la posición de la Luna, el Sol y los planetas en relación con las estrellas. Así como cualquier otra relación de interés astronómico. Como uso complementario puede servir para determinar la hora de la noche y también realizar numerosas observaciones geodésicas [15].

Los astrónomos árabes, así como los egipcios, desarrollaron su sistema trigonométrico a partir de la función seno, definida como la longitud del lado opuesto a un lado de un triángulo cuya longitud se conoce. También, "a finales del siglo X, ya tenían completas las tablas para las seis funciones trigonométricas conocidas actualmente (. . .), además fueron los árabes quienes sugirieron el uso de un radio igual a uno para encontrar los valores de las relaciones trigonométricas" [10]. En el siglo XIII, Nassir al-Din al-Tusi (1201 - 1274), de origen persa, postuló una de sus contribuciones: la creación de la trigonometría como una disciplina matemática y no como una simple herramienta para aplicaciones astronómicas. Escribió la obra *Kitab al-Shaki al-qatta*, un tratado sobre el cuadrilátero que, en el fondo, es el primer tratado sistemático de trigonometría en cinco volúmenes. Según SH, Nasr, al-Tusi hizo la primera exposición del sistema de trigonometría plana y esférica existente [14].

En Occidente, la trigonometría se introdujo hacia el siglo XII, a partir de las traducciones de los libros árabes. El primer trabajo importante fue del matemático alemán Johhan Müller (1436 - 1476), De *triangulis Omnimodis Libri*, compuesta por cinco libros en los que se describen proposiciones que tratan la resolución de triángulos basada en propiedades de los triángulos rectángulos; y se enuncia y demuestra el teorema del seno, y presenta los problemas para su aplicación. En el siglo XVIII fueron determinantes los aportes del matemático suizo Leonhard Euler (1707 - 1783), quien fundó la trigonometría moderna al definir las funciones trigonométricas con expresiones con exponenciales de números complejos [10]. A finales del siglo XIX, el profesor y físico británico James Thomson (1822 - 1892) usó por primera vez la palabra *radián* –una forma contraída de ángulo radial– para la medida del ángulo cuyo arco subyacente tiene una longitud igual a un radio.

Aunque la trigonometría se inició, principalmente, para resolver problemas en astronomía, su desarrollo sigue generando aplicaciones en diferentes ámbitos como la navegación, la geografía, la medicina, la arquitectura y en todos los campos de la ingeniería. Veamos ejemplos de algunas de ellas [3]:

- **Arquitectura.** En la construcción de edificaciones se requiere precisión en la medición de cada ángulo para evitar desplomes. También, para la construcción de túneles a través de montañas, y en el cálculo de la dirección que debe seguir para que sus extremos queden en los lugares deseados.

- **Cartografía.** Es utilizada en la elaboración de mapas de lugares determinados del que se conocen algunas distancias y algunos ángulos.

- **Navegación.** Es utilizada para la construcción de cartas marinas en las que se detallan la ubicación de arrecifes, islas, barcos, entre otros. En la navegación marítima se usó el sextante –inventado por John Hadley y Thomas Godfray– con el que se podía medir la distancia angular entre dos objetos (entre dos puntos de una costa, dos barcos, un barco y la costa); también, para obtener la altura angular de un astro sobre el horizonte, y con ello poder medir el ángulo de elevación de este en el horizonte. De igual forma es posible determinar la distancia entre un observador y un astro.

- **Topografía.** Tiene un importante uso debido a que es una base fundamental para conocer distancias, coordenadas, medidas angulares, etc. Hoy en día, en cualquier lugar del mundo, cualquier posición sobre la Tierra, sea la de un objeto, una persona, un vehículo o una nave se puede determinar usando el sistema de posicionamiento global GPS. Ese sistema utiliza 24 satélites en órbita terrestre, cada uno con un reloj atómico que mide el tiempo con una precisión de 8 mil millonésimas partes de segundo por día. Para obtener una ubicación, el receptor debe recibir señales directas desde cuatro satélites diferentes al mismo tiempo, así: desde la línea imaginaria de la unidad GPS a un satélite, y entre cada dos satélites forman los lados de varios triángulos rectángulos que utiliza el receptor en cálculos trigonométricos, para ello se necesita la longitud de por lo menos uno de los lados de un triángulo. Un dispositivo GPS obtiene una ubicación calculando el tiempo que tarda la señal del satélite para llegar a él. Debido a que la velocidad de las señales de radio es igual a la de la luz, la unidad determina con precisión la distancia a un satélite, multiplicando el tiempo de viaje de la señal por la velocidad de la luz. La ley de los cosenos permite que el receptor GPS calcule su distancia a cada satélite. [20]

- **Medicina.** Se aplica para leer, entre otros, los electrocardiogramas que registran gráficamente la actividad del corazón en función del tiempo. En estos estudios aparecen las funciones seno y coseno. Con ello, según como vaya apareciendo un latido, se le va otorgando una letra que le va dando significado a la onda, lo que permite a los médicos leer y diagnosticar.

- **Arte.** La trigonometría está vinculada al arte desde la antigüedad. Se aplica en dibujos, pinturas, esculturas y obras arquitectónicas. Esto es perceptible a través de proporciones y simetrías, luces y las sombras. En diseño gráfico se ha acentuado su aparición, debido a la comodidad del uso del computador en el cálculo de fórmulas.

- **Música [9].** En el siglo XVI se empezaba a entender que la música no era una disciplina destinada únicamente a la composición y la interpretación "donde las matemáticas sólo proveían los elementos de ajuste cuando surgían problemas de consonancia –como pasó con los epiciclos en el sistema ptolemaico– (sino que) debían además tratar de explicar las razones técnicas que sustentan la música" [9, p. 32].

  A partir del siglo XI, los músicos tuvieron una representación gráfica semejante a lo que la geometría representaría como función en dos dimensiones en un sistema de coordenadas cartesianas. En la representación musical la abscisa es el tiempo y la ordenada el tono; mientras que una partitura los matemáticos y los físicos observan conceptos que usan como las nociones de simetría, periodicidad, proporción, o lo discreto y lo continuo.

En los siglos XVI y XVII hubo dos corrientes para encontrar los vínculos entre la música y la matemática: la primera consideraba que la música no pertenecía ni a las artes ni a las matemáticas aplicadas, sino a un conjunto de conocimientos que tenían en común el lenguaje de las matemáticas; la segunda, que se interesaban en resolver problemas concretos originados al tratar de explicar la mecánica del sonido y la manera en que es percibido por el cuerpo humano.

Por ejemplo, Vicenzo Galilei (1520 - 1591), musico y padre de Galileo Galilei, y Gioseffo Zarlino (1517 - 1590), compositor, hicieron estudios relacionados con la longitud, tensión y grosor de las cuerdas con el fin de elaborar escalas para composiciones en las que voces e instrumentos se interpretaban juntos. Galileo Galilei (1564 - 1642) planteó cómo con una pieza metálica se podría grabar en una lámina diferentes líneas, cuya cantidad representaría las diferentes escalas, lo que pareciera ser el principio de una grabación para escuchar en fonógrafo. En 1618, René Descartes (1596 - 1650) escribió el *Compendium musicae*, en el que explicó por medio de proporciones cómo la música provoca que surjan diferentes sensaciones. En esta obra muestra que la matemática permite descifrar teorías físicas (relacionadas con el sonido), musicales y fisiológicas.

Durante el siglo XVIII hubo grandes avances en diferentes ramas matemáticas, especialmente en el análisis, del que se generaron el cálculo diferencial, el cálculo integral, las ecuaciones diferenciales y el cálculo de las variaciones entre otras teorías. La música recibió aportes de esta última. Desde 1746, Leonhard Euler (1707 - 1783) y Jean le Rond D'Alembert (1717 - 1783) se propusieron describir matemáticamente el movimiento de una cuerda que vibra. El estudio lo plantearon en dos variables: el tiempo y la distancia desde un punto de la cuerda a uno de sus extremos. Euler estudió las propiedades de las cuerdas, y concluyó que la solución estaba en una ecuación diferencial en derivadas parciales a la que se conoce como ecuación de onda unidimensional. D'Alembert llegó a esta misma conclusión, pero la diferencia entre los dos fue la característica que debía tener la solución.

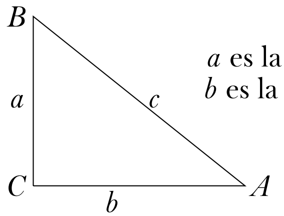
Daniel Bernoulli (1700 - 1782) propuso que cualquier función inicial para la solución podría expresarse en términos de series trigonométricas, lo cual no fue aceptado por Euler. Posteriormente, en 1759, Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) publicó *Recherches sur la na-*

> *ture et propagation du son*, obra a la que llegó a la misma ecuación, aunque utilizando métodos diferentes. Concluyó que las curvas iniciales podrían expresarse en series trigonométricas, con lo que al final estuvieron de acuerdo. Lagrange, Bernoulli y Euler siguieron publicando investigaciones al respecto, y canalizaron sus estudios de manera directa para perfeccionar los tonos producidos por algunos instrumentos musicales como, por ejemplo, los de los cilindros de los órganos.

Como podemos apreciar, la presencia de la trigonometría está en diferentes ámbitos, aunque muchas veces no seamos conscientes de ello.

5.2. Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

Definición 5.2.1



a es la longitud del cateto opuesto de $\angle A$,
b es la longitud del cateto adyacente de $\angle A$.

Figura 5.1.

Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas son seno de A, notado $\operatorname{sen} A$; coseno de A, notado $\cos A$; tangente de A, notada $\tan A$; cotangente de A notada, $\cot A$; secante de A, notada $\sec A$, y cosecante de A, notada $\csc A$. Estas se definen por:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} A &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}, \\
\cos A &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}, \\
\tan A &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}, \\
\cot A &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}, \\
\sec A &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}, \\
\csc A &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}.
\end{aligned}
$$

Observemos que el valor de cada una de estas razones depende únicamente de la medida del ángulo.

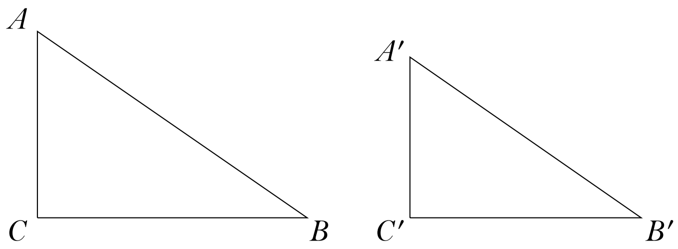


Figura 5.2.

En los triángulos rectángulos $\triangle ACB$ y $\triangle A'C'B'$, $\angle A \cong \angle A'$, entonces $\angle B \cong \angle B'$, por el criterio AA los triángulos son semejantes y, por lo tanto, las razones entre las medidas de los lados correspondientes son iguales:

$$
\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}; \quad \frac{CB}{AB} = \frac{C'B'}{A'B'}; \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}
$$

Es decir,

$$
\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} B'; \quad \cos B = \cos B'; \quad \tan B = \tan B'.
$$

Observación:

En el triángulo rectángulo ACB, los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios. De acuerdo con las definiciones de las relaciones trigonométricas observamos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A &= \cos B \text{ y} \\ \cos A &= \operatorname{sen} B. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que **el seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento.**

Razones trigonométricas de los ángulos de $30°$, $60°$ **y** $45°$. Consideremos el triángulo equilátero de la figura 5.3 cuyos lados tienen longitud 1.

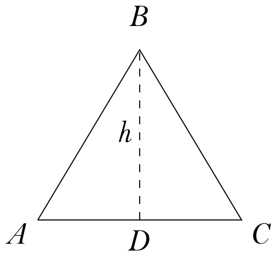


Figura 5.3.

Como el triángulo $\triangle ACB$ es equilátero, cada uno de sus ángulos mide $60°$. $\overline{BD}$ es altura y mediana. La longitud de $\overline{AD}$ es $\frac{1}{2}$. El triángulo $\triangle ADB$ es rectángulo. Aplicamos el teorema de Pitágoras y tenemos:

$$\begin{aligned} h^2 &= 1 - \frac{1}{4}. \\ h &= \sqrt{1 - \frac{1}{4}}. \\ h &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \operatorname{sen}(60°) &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \cos(60°) &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}. \\ \tan(60°) &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Para hallar el valor de las razones de un ángulo cuya medida es 30°, utilizamos las propiedades de las relaciones de un ángulo con las de su complemento.

$$\operatorname{sen}(30°) = \cos(60°) = \frac{1}{2}.$$
$$\cos(30°) = \operatorname{sen}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
$$\tan(30°) = \cot(60°) = \frac{1}{\tan(60°)} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Veremos las razones trigonométricas del ángulo de medida 45° utilizando, también, las definiciones dadas para triángulos rectángulos. Consideremos el triángulo de la figura 5.4, cuyos ángulos basales miden 45° y en el que l es la longitud de sus lados congruentes.

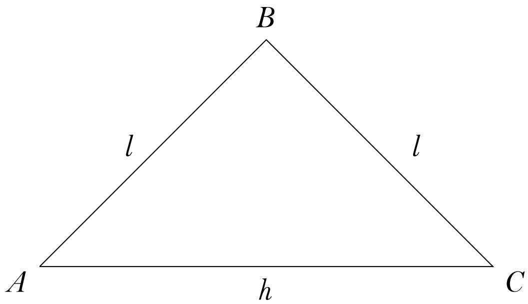


Figura 5.4.

Como la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, y la suma de las medidas de los ángulos $\angle A$ y $\angle C$ es 90°, el ángulo $\angle B$ debe medir 90°.

El triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo y su hipotenusa es $\overline{AC}$.

$$h^2 = l^2 + l^2$$
$$h^2 = 2(l^2)$$
$$h = l\sqrt{2}$$

Utilizamos las definiciones correspondientes:

$$\operatorname{sen}(45°) = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\cos(45°) = \operatorname{sen}(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\tan(45°) = 1.$$

A continuación veremos algunos ejemplos de problemas que pueden ser resueltos utilizando las definiciones anteriores. Para resolver problemas en trigonometría es conveniente trazar gráficos que ilustren las hipótesis.

Ejemplo 5.1.

Los matemáticos griegos y el ingeniero Heron mostraron cómo se puede construir un túnel bajo una montaña trabajando en los dos lados simultáneamente. Eligieron un punto A en un lado, un punto B en el otro y, finalmente, un punto C tal que la medida del ángulo $\angle ACB$ fuera de $90°$.

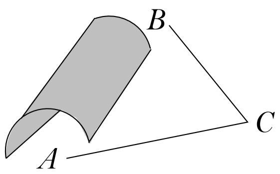


Figura 5.5.

Después, midieron $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ y encontraron que sus longitudes eran 100 pies y 75 pies respectivamente.

Ahora, dijo Heron, es posible encontrar la medida de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$. Entonces instruyó al trabajador ubicado en A para que siguiera una línea recta que conservara el ángulo calculado con AC y dio instrucciones análogas al trabajador en B. ¿Cómo calculó estos dos ángulos?

Solución. Encontrando la tangente del ángulo en A:

$$\tan A = \frac{75}{100}$$

Y calculando la tangente del ángulo en B:

$$\tan B = \frac{100}{75}.$$

Ejemplo 5.2.

Sara está volando una cometa y tiene sus manos a 5 pies por encima del piso. Si la cometa está a 200 pies arriba del suelo y la cuerda de la cometa forma un ángulo de $32,4°$ con la horizontal, ¿ Cuántos pies de cuerda está utilizando?

Solución. Para encontrar la longitud de la cuerda utilizamos el esquema de la figura 5.3:

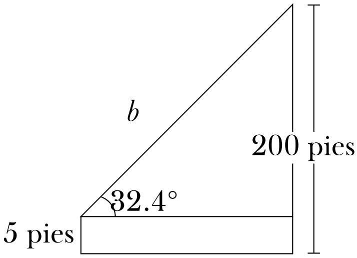


Figura 5.6.

Debemos hallar el valor de b. Podemos hacer uso de la definición de seno de un ángulo en un triángulo rectángulo:

$$\operatorname{sen}(32,4^\circ) = \frac{195}{b}, \text{ entonces : } b = \frac{195}{\operatorname{sen}(32,4^\circ)} \approx 363 \text{ pies.}$$

Ejemplo 5.3.

Una trayectoria recta que sube una colina se eleva 26 pies por cada 100 pies horizontales. ¿Qué ángulo forma con la horizontal?

Solución. En la figura 5.7 mostramos la información dada, la elevación de la colina a los primeros 100 pies horizontales.

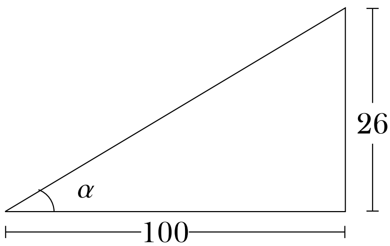


Figura 5.7.

Como el valor de las razones trigonométricas no depende de la longitud de los lados que consideramos, basta con utilizar la información que nos han dado: a los 100 pies horizontales la altura es de 26 pies verticales.

$$\tan\alpha = \frac{26}{100}; \quad \tan\alpha = 0,26; \quad \alpha = 14,57^\circ$$

Ejemplo 5.4.

Un automovilista que circula por una carretera a una velocidad de 60 km/h va directamente hacia una montaña. Observa que entre la 1:00 p.m. y la 1:10 p.m., el ángulo de elevación de la montaña cambia de 10° a 70°. Calcular la altura de la montaña.

Solución.

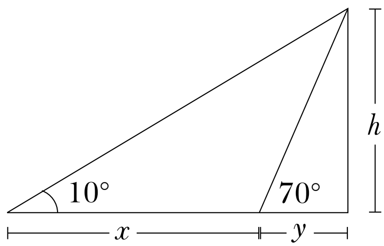


Figura 5.8.

$$\tan 10° = \frac{h}{x+y}$$
$$x+y = \frac{h}{tan 10°}$$

x es la distancia que el automovilista ha recorrido en 10 minutos.

Como recorre 60 km en una hora, se habrá desplazado 10 km en 10 minutos. Así $x = 10$.

$y = \frac{h}{\tan 10°} - 10$, al despejar de la ecuación 5.2.

Ahora, por definición de tangente, $\tan 70° = .\frac{h}{y}$

Por tanto,

$$\frac{h}{\tan 10°} - 10 = \frac{h}{\tan 70°}$$
$$\frac{h}{\tan 10°} - \frac{h}{\tan 70°} = 10$$
$$2,74h - 0,176h = 10(2.74)(0.176)$$
$$2.569h = 4.82$$
$$h = 1.9 \text{ km}$$

La altura de la montaña es 1.9 km.

5.3. Generalización del concepto de ángulo

En geometría se define un **ángulo** como la unión de dos semirrectas con origen común y solo se consideran ángulos cuya medida no es mayor a 180°. En trigonometría trabajamos con ángulos generalizados. Estos se obtienen a partir de dos rayos coincidentes. Uno permanece fijo y el otro gira en torno al origen de ellos. El rayo que permanece fijo recibe el nombre de **lado inicial**, el que gira va a constituirse en el **lado final** y el origen de los rayos es el **vértice** del ángulo.

Para formar el ángulo, el rayo que gira puede pasar más de una vez por su posición original, al hacerlo se genera una circunferencia. Como la circunferencia tiene 360°, encontramos ángulos con todas las medidas comprendidas entre 0° y 360°.

Debido a que el número de giros es ilimitado obtenemos ángulos con medidas mayores que 360°. Un ángulo que mide más de 360° recibe el nombre de ángulo de más de una vuelta.

Ejemplo 5.5.

- El ángulo que mide 400° es un á de más de una vuelta.
- Si la medida de α es 840°, α es un ángulo de más de dos vueltas. Observamos que $840 = 2(360) + 120$.

Existe la opción de que la rotación se haga en diferentes direcciones. **Un ángulo está orientado positivamente, o es positivo**, si el rayo gira en sentido contrario de las manecillas del reloj, en caso contrario está **orientado negativamente o es negativo**.

Ejemplo 5.6.

- Si $\alpha = 230°$, α es un ángulo que mide 230° y está orientado positivamente.
- Si $\beta = -100°$, β es un ángulo que mide 100°, orientado negativamente.
- Si $\phi = -390°$, ϕ es de más de una vuelta, mide 390°, orientado negativamente.

Trabajaremos con ángulos cuyo vértice es el origen de un sistema de coordenadas cartesianas y su lado inicial coincide con el **semieje positivo** X. Estos se denominan ángulos en **posición normal (canónica o estádar)**.

Según la posición del lado final, los ángulos reciben el nombre de ángulos de primero, segundo, tercero o cuarto cuadrante de acuerdo con el cuadrante que lo contenga o cuadrantales si está en uno de los ejes.

Ejemplo 5.7.

- Los ángulos de 45° y de 380° son ángulos de primer cuadrante.
- El ángulo de 150° es de segundo cuadrante.
- Si $\alpha = -120°$, α es de tercer cuadrante.
- Si $\beta = -30°$, β es de cuarto cuadrante.

- Los ángulos de $0°$, $90°$, $180°$, $270°$ son cuadrantales.

Como el número de giros del lado final así como su sentido no tienen restricción, el lado final de dos ángulos diferentes puede coincidir. **Estos ángulos reciben el nombre de ángulos coterminales.**

Ejemplo 5.8.

1. En la figura 5.9 se muestran ángulos α y β que son coterminales.

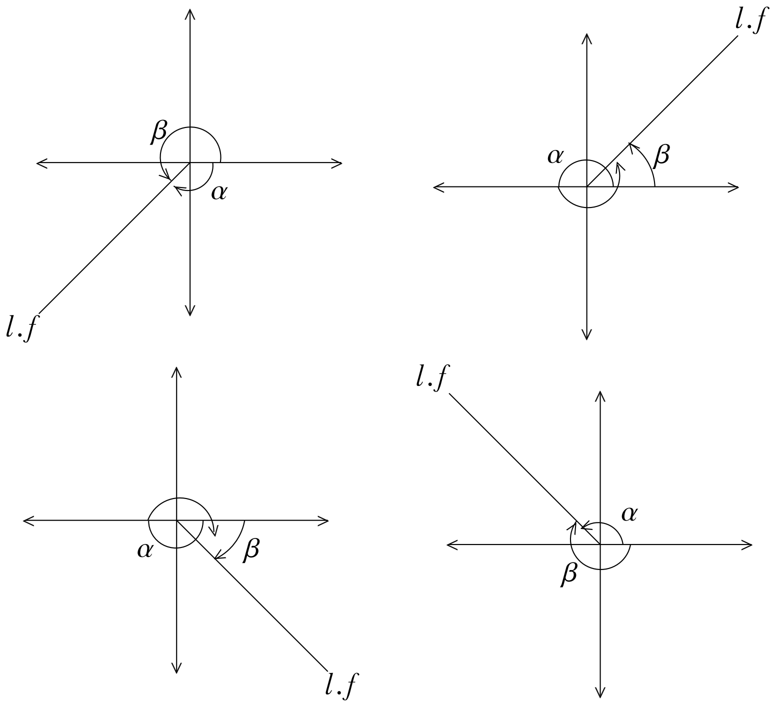


Figura 5.9.

2. Los ángulos cuyas medidas son $0°$ y $360°$ son coterminales.

3. α es coterminal con $\alpha + 360°$.

5.4. Razones trigonométricas de ángulos en posición canónica

Vamos a extender la definición de las razones trigonométricas dadas a ángulos en posición normal. Consideremos un ángulo en posición canónica θ de primer cuadrante (figura 5.10)

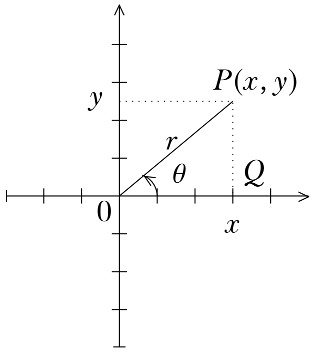


Figura 5.10.

$P(x, y)$ un punto que pertenece al lado final de θ.

El triángulo $\triangle OQP$ es rectángulo. A partir de las definiciones dadas para las razones trigonométricas en triángulos rectángulos se puede afirmar que

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r} & \cos\theta = \dfrac{x}{r} & \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\ \csc\theta = \dfrac{r}{y} & \sec\theta = \dfrac{r}{x} & cot\theta = \dfrac{x}{y} \end{array}$$

Este lado final, como lo hemos mencionado, puede pertenecer a ángulos de medidas diferentes a la de θ e incluso tener distinta orientación.

Estas relaciones se definen de manera similar para todos los ángulos no cuadrantales. Si el ángulo es cuadrantal, se debe observar que los denominadores sean diferentes de cero.

Definición 5.4.1. Si θ es un ángulo en posición canónica y $P(x, y)$ es un punto del lado final de θ, con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, se define:

$$\begin{array}{ll} \text{seno de } \theta = \dfrac{y}{r}. & \\ \text{coseno de } \theta = \dfrac{x}{r}. & \\ \text{tangente de } \theta = \dfrac{y}{x}, & \text{si } x \neq 0. \end{array}$$

Se tienen además las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{cosecante de } \theta = \dfrac{r}{y}, & \text{si } y \neq 0. \\ \text{secante de } \theta = \dfrac{r}{x}, & \text{si } x \neq 0. \\ \text{cotangente de } \theta = \dfrac{x}{y}, & \text{si } y \neq 0. \end{array}$$

Observemos que, salvo las funciones seno y coseno, todas tienen restricciones para su definición. También que los valores de las razones trigonométricas solo dependen de la ubicación del lado final del ángulo. Así, para ángulos coterminales, las relaciones trigonométricas son respectivamente iguales.

En general, si α y β son coterminales,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \operatorname{sen}\beta\,, \\ \cos\alpha &= \cos\beta\,, \\ \tan\alpha &= \tan\beta\,. \end{aligned}$$

Lo mismo sucede con las otras tres relaciones.

Como consecuencia de estas definiciones, las funciones son positivas o negativas, según el cuadrante que contenga el lado final.

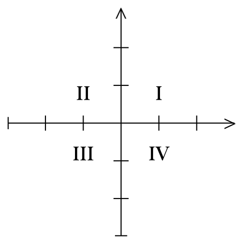


Figura 5.11.

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, tan, sec, cot
III	tan, cot	sen, cos, csc, sec
IV	cos, sec	sen, tan, csc, cot

5.4.1. Funciones trigonométricas de ángulos negativos

Observe las figuras:

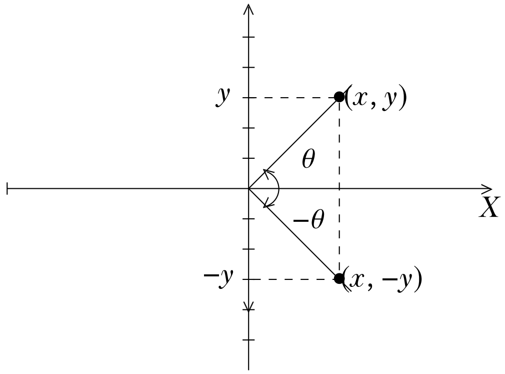


Figura 5.12.

Sabemos que θ y $-\theta$ son ángulos con la misma medida pero que difieren en la orientación. Si $P(x, y)$ pertenece al lado final de θ, entonces $Q(x, -y)$ pertenecerá al lado final de $-\theta$.

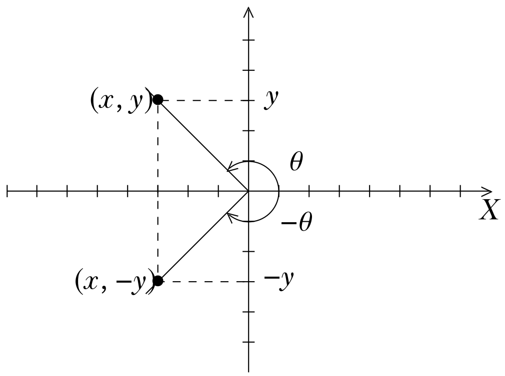


Figura 5.13.

Como $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2}$, la distancia del origen al punto P es igual a la distancia del origen al punto Q. Si llamamos r a esta distancia, tenemos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}; \quad \operatorname{sen}(-\theta) = -\frac{y}{r}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r}; \quad \cos(-\theta) = \frac{x}{r}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}; \quad \tan(-\theta) = -\frac{y}{x}$$

Concluimos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-\theta) &= -\operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(-\theta) &= \cos\theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan(\theta) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.9.

Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo cuyo lado final contiene al punto $(-1, -3)$.

Solución.

$$r = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}; \quad \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\tan\theta = \frac{-3}{-1} = 3; \ \csc\theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\sec\theta = -\sqrt{10}; \quad \cot\theta = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 5.10.

Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ si θ es un ángulo de segundo cuadrante y el lado final de θ está en la recta $y = -4x$.

Solución. Como θ es un ángulo de segundo cuadrante, cualquier punto del lado final debe tener la abscisa negativa. Para $x = -1$, $y = 4$. El punto $(-1, 4)$ pertenece al lado final del ángulo.

$$r = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{\sqrt{17}}; \quad \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\tan\theta = -4; \quad \csc\theta = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\sec\theta = -\sqrt{17}; \quad \cot\theta = -\frac{1}{4}$$

Ejemplo 5.11.

Encuentre las seis funciones trigonométricas del ángulo cuyo lado final biseca el tercer cuadrante.

Solución. Tomamos un punto en el tercer cuadrante, por ejemplo $(-2, -2)$.

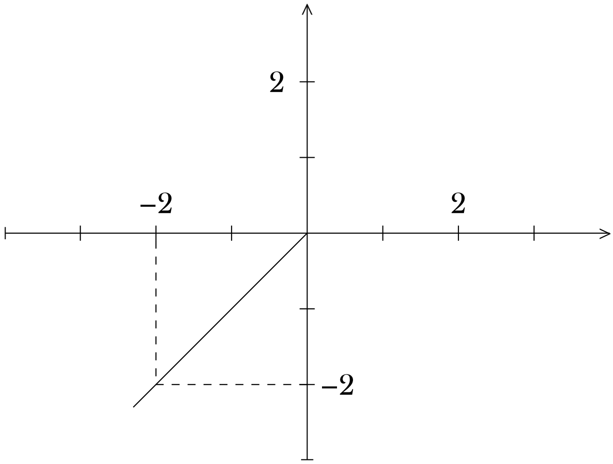


Figura 5.14.

$$r = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\theta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\theta = 1; \qquad \csc\theta = -\sqrt{2}$$

$$\sec\theta = -\sqrt{2}; \qquad \cot\theta = 1$$

5.5. Funciones trigonométricas de números reales

Las relaciones que se definieron inicialmente como razones entre los lados de un triángulo rectángulo, han sido base de generalizaciones que permiten describir con lenguaje matemático muchos comportamientos en el mundo físico.

Veremos cómo se extiende la definición de estas razones, a funciones que tienen como dominio subconjuntos de números reales.

Definición 5.5.1.

Tomemos un número real t. Si t es positivo y f es una función trigonométrica que está definida en t, $f(t)$ es la misma imagen por f del ángulo orientado positivamente que mide t radianes.

Si t es negativo y f es una función trigonométrica definida en t, $f(t)$ es la imagen por f del ángulo que mide $-t$ radianes y está orientado negativamente.

Por ejemplo:

Si t es un número real positivo, $\cos t$ es el coseno del ángulo cuya medida es t radianes, orientado positivamente.

Si t es un real negativo, sen t es el seno del ángulo que mide $-t$ radianes y está orientado negativamente.

Si el lado final de t no está en el eje Y y t es real, $\tan t$ se define de la misma forma como se definieron seno y coseno teniendo en cuenta si t es positivo o es negativo.

Ejemplo 5.12.

Tan 30 es la tangente del ángulo que mide 30 radianes y está orientado positivamente. Observe que $\tan 30 \neq \tan 30°$.

Sen (-3) es el seno del ángulo orientado negativamente que mide 3 radianes.

Cos $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ es el coseno del ángulo que mide $\frac{\pi}{4}$ radianes y que está orientado negativamente.

Dominio de las funciones trigonométricas

Hemos visto anteriormente que no importa cual sea la medida u orientación del ángulo, es posible encontrar los valores de su seno y coseno. Así estas funciones pueden ser definidas para cualquier número real, lo que permite afirmar que el dominio de las funciones seno y coseno es el conjunto de números reales.

No sucede lo mismo con la función tangente. Se puede calcular $\tan t$ solo si el lado final del ángulo t no está sobre el eje Y, esto implica que en el dominio de la función tangente no están:

$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \ldots$

Concluimos entonces que el dominio de la función tangente es:

$\mathbb{R} \setminus \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \text{ es entero}\right\}$

El dominio de las funciones secante, cosecante y cotangente tampoco es el conjunto de todos los números reales. En efecto, de acuerdo con sus definiciones:

- El dominio de la secante es:

$$\mathbb{R} \setminus \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \text{ es entero}\right\}$$

- El dominio de la cosecante es:

$$\mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \text{ es entero}\}$$

- El dominio de la cotangente es:

$$\mathbb{R} \setminus \{n\pi : \text{n es entero}\}$$

Gráficas y propiedades

Función seno

Consideremos un círculo de radio 1 y centro $(0, 0)$ llamado **círculo trigonométrico** (figura 5.15), un punto (x, y) en su circunferencia satisface la ecuación. $x^2 + y^2 = 1$.

Teniendo en cuenta la definición de las relaciones de seno y coseno para los ángulos en posición normal, el valor de la ordenadda y representa el del seno y el de la abscisa x el del coseno. Si empezamos a generar los ángulos positivos cuya medida en radianes aumente progresivamente de 0 hasta el valor $\frac{\pi}{2}$, observamos que la ordenada va aumentando de 0 a 1.

Como la ordenada es el valor del seno, este va aumentando de 0 a 1.

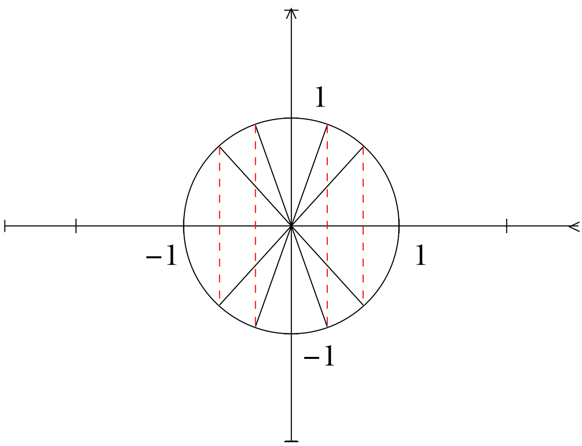


Figura 5.15.

Si se toman ángulos de medida mayor que $\frac{\pi}{2}$ pero menor que π, la ordenada disminuye hasta tomar el valor 0.

Para los ángulos cuya medida está entre π y $\frac{3\pi}{2}$, la ordenada es negativa y va de 0 hasta -1. Y para ángulos entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π, la ordenada sigue siendo negativa y va tomando valores entre -1 y 0. Si se continúa con el giro, notamos que la situación descrita anteriormente se repite. De estas observaciones se derivan las siguientes conclusiones:

1. El mayor valor que toma el seno de un número real es 1.

2. El menor valor que toma el seno de un número real es -1.

3. Los números $t, t+2\pi, t+4\pi, \ldots$, tienen el mismo valor del seno.

Esto es, $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t+2\pi) = \operatorname{sen}(t+4\pi) = \ldots$

Si el movimiento se realiza en sentido contrario a las manecillas del reloj, concluimos:

$\operatorname{Sen} t = \operatorname{sen}(t-2\pi) = \operatorname{sen}(t-4\pi) = \operatorname{sen}(t-6\pi) = \ldots$

Función coseno

Si además durante el recorrido descrito tenemos en cuenta la variación de la abscisa, que es el valor del coseno, concluimos que

1. El mayor valor de coseno es 1.

2. El menor valor de coseno es -1.

3. $\operatorname{Cos} t = \cos(t+2\pi) = \cos(t+4\pi) = \ldots = \cos(t-2\pi) = \cos(t-4\pi)$.

Funciones periódicas

Definición 5.5.2. Una función f es una **función periódica** si existe un real positivo p, tal que para cualquier t en el dominio de f, $t+p$ pertenece al dominio y $f(t+p) = f(t)$. El menor número real positivo p que cumple esta condición recibe el nombre de **período**.

Una característica importante de la gráfica de una función con período p es que la gráfica se repite en intervalos de longitud p. Como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} t &= \operatorname{sen}(t+2n\pi), \quad n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \\ \cos t &= \cos(t+2n\pi), \quad n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Las funciones seno y coseno son periódicas, con período 2π. En las figuras 5.16 y 5.17 aparecen sus respectivas gráficas.

Función seno

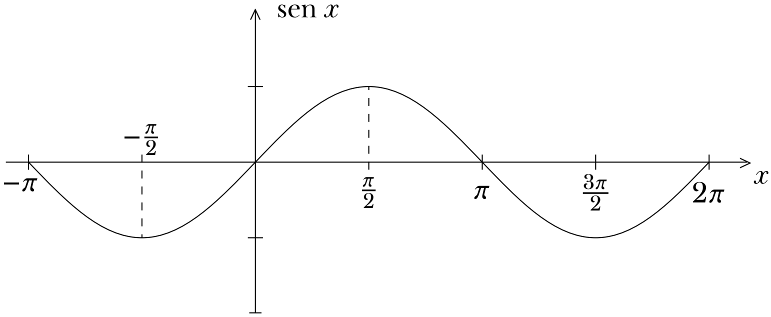


Figura 5.16.

Función coseno

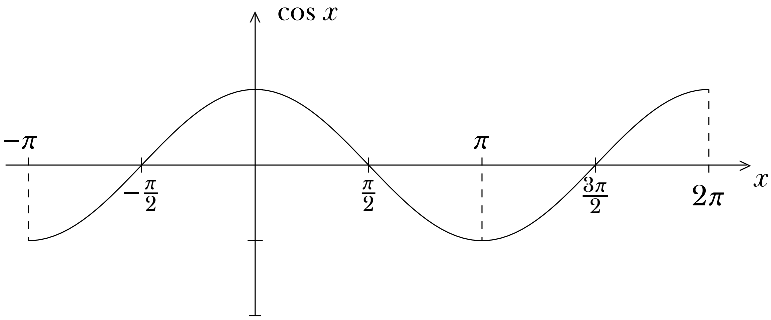


Figura 5.17.

Ejemplo 5.13.

Sen $\left(14\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + 4\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Cos $\left(25\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(6\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Sen $\left(-13\frac{\pi}{6}\right) = -\text{sen}\left(13\frac{\pi}{6}\right) = -\text{sen}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Cos $(-390°) = \cos(390°) = \cos(360° + 30°) = \cos(30°)$

Función tangente

Para analizar el comportamiento de la función tangente, usaremos nuevamente el círculo trigonométrico.

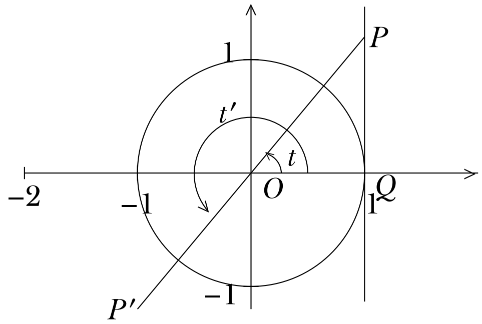


Figura 5.18.

El lado final del ángulo t intersecta la recta vertical, tangente la circunferencia unitaria en el punto $(1, 0)$. El punto de corte P tiene como coordenadas $(1, y)$; por lo tanto,

$$\tan t = \frac{y}{1}$$

Si tomamos el ángulo $t' = \pi + t$. El punto P' del lado final de t' tiene como coordenadas $(-1, -y)$.

$$\begin{aligned} \tan(t') &= \frac{-y}{-1} = y; \\ \tan(t') &= \tan t. \\ \tan(t + \pi) &= \tan t. \end{aligned}$$

Concluimos que la función tangente tiene período π. Si t es un ángulo de primer cuadrante, $t + \pi$ es un ángulo de tercer cuadrante, cuya tangente es igual a la de t. Igualmente, si t es un ángulo de segundo cuadrante, $t + \pi$ es un ángulo de cuarto cuadrante y sus tangentes son iguales. Para hacer un esbozo de la gráfica, basta con ver la variación de la ordenada, en los cuadrantes I y IV.

Veamos cómo varía el valor de la tangente en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Consideremos un ángulo t en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Si la medida del ángulo varía continuamente de 0 a $\frac{\pi}{2}$, observamos que la ordenada va aumentando. Cuando el ángulo mide $\frac{\pi}{2}$, el lado final del ángulo no intersecta a dicha tangente y, como lo hemos observado anteriormente, $\tan\frac{\pi}{2}$ no está definida.

Como $\tan -t = -\tan t$, la función tangente es impar y, por lo tanto, su gráfica es simétrica con respecto al origen. En la figura 5.19, vemos la gráfica de la función tangente en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

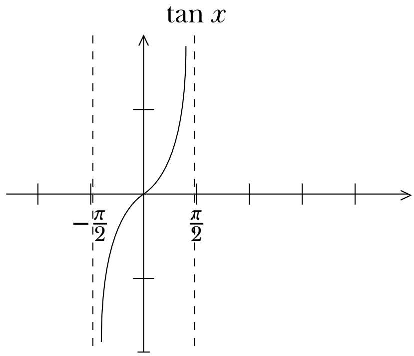


Figura 5.19.

Para representar gráficamente la función tangente repetimos la que hemos trazado en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, teniendo en cuenta que el período de esta función es π. La gráfica en el intervalo $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ es la que se muestra en la figura 5.20.

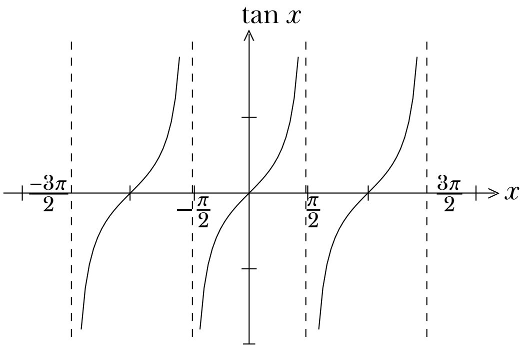


Figura 5.20.

De estas observaciones se obtienen las siguientes conclusiones:

1. Al dominio de la función tangente no pertenecen los números reales que sean múltiplos impares de $\dfrac{\pi}{2}$.
2. La tangente de un número puede tomar cualquier valor real.
3. El período de la función tangente es π.

Ejemplo 5.14. $\tan \frac{5\pi}{4} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$, entonces $\tan \frac{5\pi}{4} = \tan \frac{\pi}{4}$.
$\tan \frac{7\pi}{2}$ no está definida.
$\tan(-205°) = -\tan(205°)$, entonces:
$\tan(-205°) = -\tan(205° - 180°) = -\tan(25°)$.
$\tan\left(-\frac{11\pi}{10}\right) = -\tan \frac{\pi}{10}$.

5.6. Ángulos de referencia

Para el cálculo de los valores de las funciones trigonométricas de cualquier número (o ángulo), basta con conocer los que corresponden a un número que esté en el intervalo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, esto es, los que corresponden a los ángulos agudos. Para realizar este proceso se utiliza un ángulo llamado ángulo de referencia.

Definición 5.6.1. Un **ángulo de referencia** θ_r para θ, es el ángulo agudo que forman el lado final de θ y el eje X.

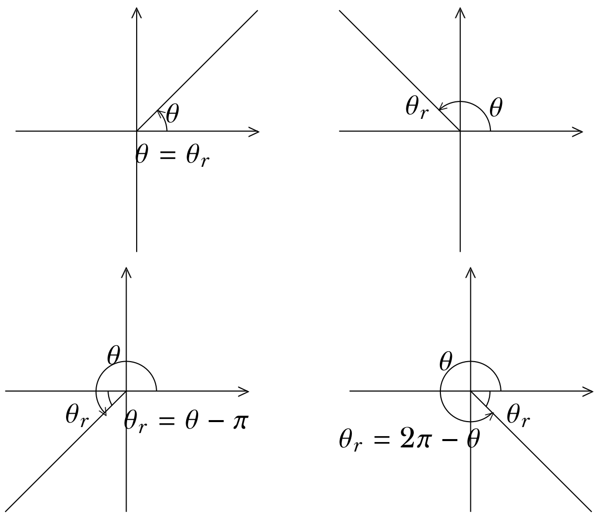


Figura 5.21.

Para calcular los valores de las funciones de un ángulo no cuadrantal θ, usando los ángulos de referencia, se hallan los que corresponden al ángulo de referencia y se hace la relación teniendo en cuenta el cuadrante al cual pertenece el ángulo dado.

Ejemplo 5.15. Si $\theta = 135°$,

$\theta_r = 180° - 135° = 45°$.

Sen $135° =$ sen $45°$, $\cos 135° = -\cos 45°$, $\tan 135° = -\tan 45°$.

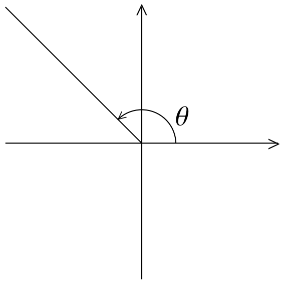


Figura 5.22.

Ejemplo 5.16. Si $\theta = \frac{7\pi}{6}$,
$\theta_r = \frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{6}$.
Sen $\frac{7\pi}{6} = -\text{sen}\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6}$, $\tan\frac{7\pi}{6} = \tan\frac{\pi}{6}$.

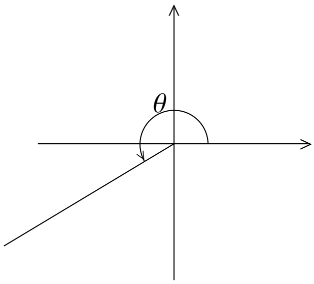


Figura 5.23.

Ejemplo 5.17. Si $t = 3,5$, y como $\pi < 3,5 < \frac{3\pi}{2}$,
$\theta_r = 3,5 - \pi$.
Sen $t = -\text{sen}\,(3,5 - \pi)$, $\cos t = -\cos(3,5 - \pi)$, $\tan t = \tan(3,5 - \pi)$.

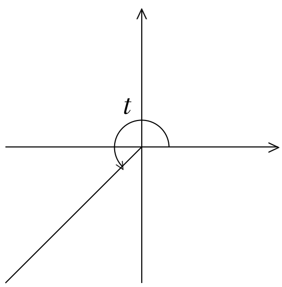


Figura 5.24.

Ejemplo 5.18. Si $t = \frac{5\pi}{3}$,
$\theta_r = 2\pi - 5\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.
Sen $t = -\text{sen}\frac{\pi}{3}$, $\cos t = \cos\frac{\pi}{3}$, $\tan t = -\tan\frac{\pi}{3}$.

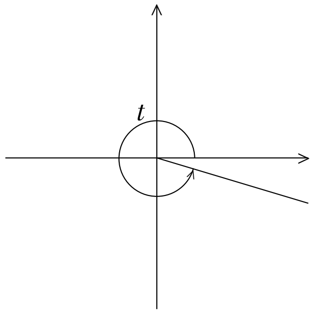


Figura 5.25.

5.7. Expresiones con seno y coseno

Las funciones trigonométricas permitieron la real incursión del hombre en la naturaleza de los sonidos y lograron que su conocimiento fuera utilizado en el diseño de aparatos como el teléfono, el fonógrafo, la radio, etc. Inicialmente, el estudio matemático de los sonidos, no se realizó con la aplicación de las funciones trigonométricas.

Los pitagóricos descubrieron que la longitud de dos cuerdas igualmente tensionadas y pulsadas levemente, cuyos sonidos armonizaban, están relacionadas por una simple razón aritmética. La nota más baja es originada por las cuerdas de mayor longitud. Además diseñaron escalas musicales cuyas notas fueron medidas cuantitativamente por las longitudes de las cuerdas vibrantes porque poseían valores numéricos precisos.

Fueron los matemáticos del siglo XVII quienes iniciaron otras investigaciones e hicieron importantes descubrimientos. Merssene, por ejemplo, estudió el efecto de cambiar la tensión y la masa de la cuerda y encontró que un aumento en la masa y una disminución en la tensión producen notas bajas en una cuerda de longitud dada. Este descubrimiento fue muy importante para instrumentos con cuerdas, tales como el violín y el piano. Galileo y Hooke demostraron, experimentalmente, que cada sonido musical está caracterizado por un número determinado de vibraciones del aire por segundo.

Grandes matemáticos del siglo XVII, estudiaron cuerdas vibrantes. Encontraron que las funciones trigonométricas eran adecuadas para representar estas vibraciones. A pesar de que estos sonidos provengan de diferentes instrumentos y de distintos medios, son descritos por las mismas leyes. Todos los sonidos musicales son periódicos. Esto es, un sonido musical es un movimiento de moléculas de aire que es repetido muchas veces en un segundo. Estos movimientos periódicos pueden describirse usando las funciones seno o coseno.

Recordemos que la función seno tiene como período 2π, esto significa que la función repite su comportamiento en cada intervalo de longitud 2π a lo largo del eje horizontal.

Si t representa el tiempo en segundos, tomamos t como variable independiente. La frecuencia con la cual se repite la gráfica es 1 en 2π segundos.

La función $y = \operatorname{sen} 2t$ tiene las siguientes características: repite su comportamiento dos veces en cada intervalo de longitud 2π o una vez en uno de longitud π. La frecuencia es 2 en cada 2π segundos o 1 en π segundos.

Si $y = \operatorname{sen}((256)(2\pi t))$, y tiene un período de $\frac{1}{256}$, y una frecuencia de 256 por segundo. Esta función representa un sonido puro o simple que se repite 256 veces en un segundo. Tal sonido es dado por un diapasón, que está diseñado para vibrar a esta frecuencia.

Los valores de y representan la variación de los desplazamientos de una molécula de aire desde su reposo hasta su posición no perturbada. Pero los sonidos musicales no son simples. Cada sonido musical es una combinación de sonidos simples. Joseph Fourier, estableció que todo sonido musical puede ser representado como la suma de funciones trigonométricas simples. Una forma sería:

$$y = a_1 \operatorname{sen} b_1 x + a_2 \operatorname{sen} b_2 x + ... + a_n \operatorname{sen} b_n x$$

5.7.1. Gráficas sinusoidales

En general, funciones que se pueden representar por:

$$y = A \operatorname{sen}\ (Bx + C)\,, \qquad y = A \cos (Bx + C)$$

o una combinación de estas pueden ser usadas para obtener conocimientos de los fenómenos físicos, la economía, la política, el arte y seguramente en muchos otros. Veamos matemáticamente cómo se interpreta una de estas funciones.

Características de la función. $y = A \operatorname{sen}\ (Bx + C)$ con A, B, C números reales, $B > 0$

1. La **amplitud** de una función f es $\frac{1}{2}$ (valor máximo de f - valor mínimo de f).

   Veamos que para este caso es el máximo valor que toma la función.

- $-1 \leq \operatorname{sen}(Bx + C) \leq 1$.
- Si $A \geq 0$, $-A \leq A\operatorname{sen}(Bx + C) \leq A$.
  La amplitud es $\frac{1}{2}(A + A) = A$
- Si $A \leq 0$, $-A \geq A\operatorname{sen}(Bx + C) \geq A$. La amplitud es $\frac{1}{2}(-A - A) = -A$.

De la definición de valor absoluto obtenemos la amplitud de la función es $|A|$.

2. La función es periódica y el período es $\dfrac{2\pi}{B}$.

3. La gráfica, con respecto a la de la función seno, está desplazada $-\dfrac{C}{B}$ unidades a la derecha o a la izquierda, según si C es negativo o positivo, respectivamente. $-\frac{C}{B}$ es el **desfase** o **corrimiento de fase**.

Ejemplo 5.19. Si $y = 2$ sen $3x$, concluimos:
Amplitud: 2. Período: $\frac{2\pi}{3}$.

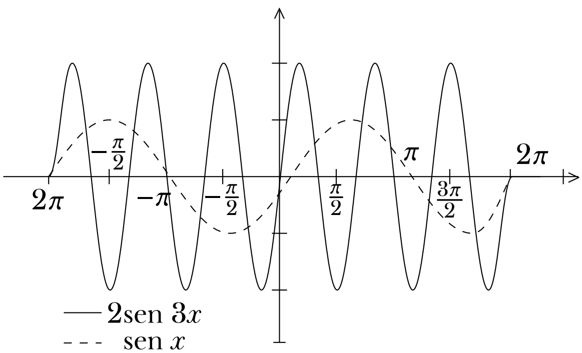


Figura 5.26.

Ejemplo 5.20.

Si $y = -3\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, concluímos:

Amplitud: $|-3|$, período: $\frac{2\pi}{2} = \pi$, desfase: $-\frac{\frac{-\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

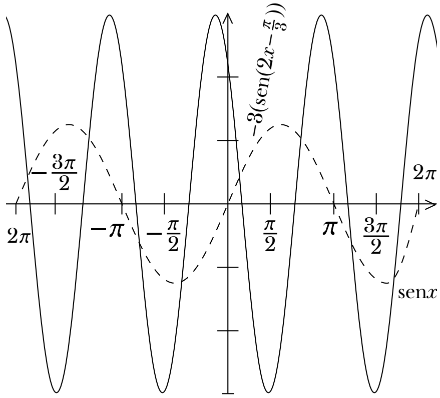


Figura 5.27.

Ejemplo 5.21.

Un tsunami es una ola de marea ocasionada por un terremoto bajo el mar. Estas olas pueden medir más de 100 pies de altura y pueden viajar a grandes velocidades. A veces los ingenieros representan estas olas por expresiones trigonométricas de la forma $y = a\cos(bt)$ y utilizan estas representaciones para calcular la efectividad de los muros rompeolas. Supongamos que una ola en el instante $t = 0$ tiene una altura de $y = 25$ pies, viaja a razón de 180 pies por segundo con un período de 30 min. La expresión del movimiento de las olas es:

$$y = a\cos(bt)$$

Como para $t = 0$, $y = 25$ pies, entonces:

$$25 = a\cos(b0), \text{ así } a = 25 \text{ pies.}$$

El período es 30 min, por lo tanto, $\frac{2\pi}{b} = 30$ min.

De donde se obtiene que $b = \frac{\pi}{15}$.

La ecuación es $y = 25\cos\frac{\pi}{15}t$.

Podemos, ahora, calcular la distancia entre dos crestas consecutivas:

Como recorre 180 pies en un segundo, recorrerá 10 800 pies en un minuto. La longitud de onda es la distancia entre dos crestas consecutivas, como el período es 30 min, en 30 minutos recorrerá:

$$(10\,800)(30) = 324\,000 \text{ pies.}$$

5.8. Identidades trigonométricas

Cuando una expresión contiene términos con funciones trigonométricas, se dice que es una **expresión trigonométrica**. Muchas veces dichas expresiones presentan formas complicadas que pueden reemplazarse por expresiones equivalentes más sencillas.

El **dominio** de una expresión trigonométrica es el conjunto de los valores que pueden tomar las variables independientes para que la expresión represente un número real.

Una **identidad trigonométrica** es una igualdad entre expresiones trigonométricas, que es verdadera para todos los valores para los cuales dicha expresión tiene sentido. Esto es, si $f(t)$ y $g(t)$ son expresiones trigonométricas, entonces

$f(t) = g(t)$ es una identidad trigonométrica, si la igualdad se cumple para todo t que esté en los dos dominios.

5.8.1. Identidades fundamentales

1. Recíprocas: a partir de las definiciones de las funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica, deducimos $\csc(\theta) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$, $\sec(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot(\theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$, $\tan(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, $\cot(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

2. Identidades pitagóricas:

   a) $\operatorname{Sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. Recordemos que si (x, y) es un punto que está en el lado final de un ángulo en posición canónica y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\operatorname{Sen} t = \dfrac{y}{r}$, $\cos t = \dfrac{x}{r}$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t &= \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} \\
&= \frac{y^2 + x^2}{r^2} \\
&= \frac{r^2}{r^2} = 1
\end{aligned}
$$

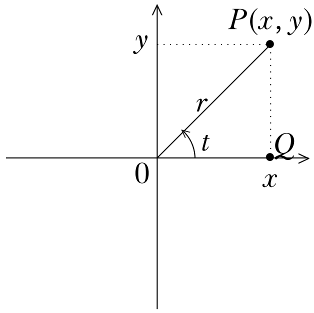


Figura 5.28.

b) $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$. Se obtiene dividiendo $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, por $\cos^2 t$

c) $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$. Si se divide la igualdad: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2 \theta = 1$, por $\operatorname{sen}^2\theta$

$$1 + \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$$
$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

A partir de estas identidades es posible obtener otras más complejas. Realmente no hay un método especial para demostrar que una igualdad es una identidad, pero en general se aconseja iniciar con el lado en el que aparezcan más operaciones para realizar y hacer las transformaciones que se considere adecuadas, para obtener la expresión del otro lado de la igualdad. No conviene transformar los dos miembros simultáneamente porque se estaría suponiendo que la igualdad es verdadera.

Ejemplo 5.22.

Haciendo uso de las identidades fundamentales encuentre los valores de las funciones trigonométricas del ángulo θ, si $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$.

Solución.

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = -\frac{4}{3}$$
$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$
$$\sec^2\theta = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$
$$\sec\theta = \pm\sqrt{\frac{25}{16}}.$$

Como la tangente es negativa y el seno positivo, θ está en el segundo cuadrante, por lo tanto la secante es negativa.

$$\sec\theta = -\frac{5}{4}.$$

Esto nos permite concluir que:

$$\cos\theta = -\frac{4}{5}.$$

Haciendo uso de la identidad $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$, tenemos que:

$$\csc^2\theta = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}$$
$$\csc\theta = \pm\sqrt{\frac{25}{9}}$$

Como sen $\theta > 0$,

$$\csc\theta = \frac{5}{3}$$

Entonces:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$$

En los siguientes ejemplos vamos a demostrar algunas identidades trigonométricas:

Ejemplo 5.23.
Csc θ − senθ = $\cot\theta\cos\theta$.

Solución.

$$\begin{aligned}\csc\theta - \operatorname{sen}\theta &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{sen}\theta = \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\\ &= \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta = \cot\theta\cos\theta\end{aligned}$$

Ejemplo 5.24.
Tan $t + 2\cos t \csc t = \sec t \csc t + \cot t$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\tan t + 2\cos t \csc t &= \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} + (2\cos t)\,\frac{1}{\operatorname{sen} t}.\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 t + 2\cos^2 t}{\cos t\ \operatorname{sen} t}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + \cos^2 t}{(\cos t)\,(\operatorname{sen} t)}\\
&= \frac{1}{(\cos t)(\operatorname{sen} t)} + \frac{\cos^2 t}{(\cos t)(\operatorname{sen} t)}\\
&= (\sec t)(\csc t) + \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\\
&= (\sec t)(\csc t) + \cot t.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.25.
(Sec $u - \tan u)(\csc u + 1) = \cot u$.

Solución.

$$\begin{aligned}
(\sec u - \tan u)\,(\csc u + 1) &= \left(\frac{1}{\cos u} - \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{sen} u} + 1\right)\\
&= \left(\frac{1 - \operatorname{sen} u}{\cos u}\right)\left(\frac{1 + \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} u}\right)\\
&= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 u}{(\cos u)(\operatorname{sen} u)}\\
&= \frac{\cos^2 u}{(\cos u)(\operatorname{sen} u)}\\
&= \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}\\
&= \cot u.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.26.
Sen$^4 r - \cos^4 r = \operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^4 r - \cos^4 r &= \left(\operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r\right)\left(\operatorname{sen}^2 r + \cos^2 r\right)\\
&= \left(\operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r\right) 1\\
&= \left(\operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.27.
$\dfrac{1}{1-\cos v}+\dfrac{1}{1+\cos v}=2\csc^2 v.$

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\cos v}+\frac{1}{1+\cos v}&=\frac{(1+\cos v)+(1-\cos v)}{(1-\cos v)(1+\cos v)}\\&=\frac{2}{1-\cos^2 v}\\&=\frac{2}{\operatorname{sen}^2 v}\\&=2\csc^2 v.\end{aligned}$$

Observe que en cada una de las demostraciones anteriores:

- Se inició en el lado más complejo.
- Se efectuaron las operaciones básicas.
- Se hizo uso de la factorización.
- Se emplearon identidades fundamentales.

5.8.2. Fórmulas de suma y resta

En ocasiones se encuentran expresiones de la forma: $\cos(\alpha+\beta)$, $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$, etc., y es importante poder escribirlas directamente en términos de $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{sen}\beta$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$.

Mediante construcciones geométricas, la definición de distancia y el uso de la identidades fundamentales se puede demostrar que:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

y, a partir de ella, determinar el valor del coseno de la suma. Así, la fórmula para determinar el coseno de la suma se encuentra a partir de la anterior, expresando $s+t$ como $s-(-t)$:

$$\cos(s+t)=\cos(s-(-t))=\cos s\cos(-t)+\operatorname{sen}s\operatorname{sen}(-t)$$

Teniendo en cuenta que $\cos(-t)=\cos t$ y que $\operatorname{sen}(-t)=-\operatorname{sen}t$:

$$\cos(s+t)=\cos s\cos t-\operatorname{sen}s\operatorname{sen}t$$

Las igualdades son válidas para cualquier tipo de ángulos y su medida puede estar dada en grados sexagesimales o en radianes.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\text{sen}\,\alpha = 0\cos\alpha + 1\ \text{sen}\,\alpha = \text{sen}\alpha.$$

Se utiliza la identidad para el coseno de la diferencia:

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\text{sen}\beta$$

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\ \text{sen}\,\beta$$

Mediante un razonamiento similar al que se hizo para el caso del coseno se puede hallar el seno de la diferencia:

$$\begin{aligned}\text{sen}\,(\alpha-\beta) &= \text{sen}\,(\alpha+(-\beta))\\ &= \text{sen}\,\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\ \text{sen}\,(-\beta)\\ \text{sen}\,(\alpha-\beta) &= \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\beta\cos\alpha\end{aligned}$$

$\tan(\alpha\pm\beta)$ se obtiene haciendo uso de la identidad $\tan t = \dfrac{\text{sen}t}{\cos t}$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ \tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

Ejemplo 5.28.

Como $\frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, a partir de los valores de seno y coseno de $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{4}$ se puede hallar, $\text{sen}\frac{11\pi}{12}$, $\cos\frac{11\pi}{12}$ y $\tan\frac{11\pi}{12}$

$$\begin{aligned}\text{sen}\frac{11\pi}{12} &= \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{3}\text{sen}\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{11\pi}{12} &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}\right)\\
&= -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{11\pi}{12} &= \tan\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{2\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{2\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}\\
&= \frac{-\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}}\\
&= \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5.29.

Si α es un ángulo en el primer cuadrante con $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ y β es un ángulo en el segundo cuadrante con $\operatorname{sen}\beta = \frac{12}{13}$. Evalúe $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ y $\tan(\alpha+\beta)$. Determine el cuadrante de $(\alpha+\beta)$.

Solución. Sen $\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{16}{25}}$. Como es un ángulo de primer cuadrante:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha &= \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}\\
\tan\alpha &= \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}\\
\cos^2\beta &= 1-\frac{144}{169} = \frac{25}{169}\\
\cos\beta &= \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{5}{13}
\end{aligned}
$$

Como β es un ángulo de segundo cuadrante,

$$
\begin{aligned}
\cos\beta &= -\frac{5}{13}\\
\tan\beta &= \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\\
&= \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)+\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{33}{65}\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&= \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)-\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)=-\frac{56}{65}\\
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{12}{5}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{12}{5}\right)}=-\frac{33}{56}
\end{aligned}$$

Como sen $(\alpha+\beta)$ es positivo y cos $(\alpha+\beta)$ es negativo, $\alpha+\beta$ es un ángulo de segundo cuadrante.

Ejemplo 5.30.

Si α es un ángulo de segundo cuadrante y β es un ángulo de tercer cuadrante, con $\cos\alpha=\cos\beta=-\frac{3}{7}$, calcule $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ y $\cos(\alpha-\beta)$ y determine el cuadrante para $\alpha-\beta$.

Solución. $\operatorname{sen}\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{9}{49}}$, como α es un ángulo de segundo cuadrante:

$$\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{\frac{40}{49}}=\frac{2}{7}\sqrt{10}.$$

Como β es un ángulo de tercer cuadrante:

$$\operatorname{sen}\beta=-\frac{2}{7}\sqrt{10}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\\
&= \left(\frac{2}{7}\sqrt{10}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)-\left(-\frac{2}{7}\sqrt{10}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)\\
&= -\frac{12}{49}\sqrt{10}\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&= \left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{2}{7}\sqrt{10}\right)\left(-\frac{2}{7}\sqrt{10}\right)\\
&= \frac{9}{49}-\frac{4}{49}10=\frac{1}{49}(9-4(10))\\
&= -\frac{31}{49}
\end{aligned}$$

Como sen$(\alpha - \beta)$ y cos$(\alpha - \beta)$ son negativos, $\alpha - \beta$ es un ángulo de tercer cuadrante.

5.8.3. Ángulos múltiples

A partir de las fórmulas del seno y coseno para la suma de dos ángulos se pueden encontrar fórmulas para calcular los valores de seno y coseno del doble de un ángulo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 2t &= 2\operatorname{sen} t \cos t \\
\cos 2t &= \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t \\
\tan 2t &= \frac{2\tan t}{1 - \tan^2 t}
\end{aligned}$$

Para demostrar estas afirmaciones, se toma $2t = t + t$, y se aplican las fórmulas respectivas:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 2t &= \operatorname{sen}\ (t + t) = \operatorname{sen} t \cos t + \cos t \operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen} t \cos t \\
\cos 2t &= \cos (t + t) = \cos t \cos t - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t \\
\tan 2t &= \tan (t + t) = \frac{\tan t + \tan t}{1 - \tan t \tan t} = \frac{2\tan t}{1 - \tan^2 t}
\end{aligned}$$

En cada uno de los siguientes ejemplos hallaremos sen 2θ, $\cos 2\theta$, $\tan 2\theta$, haciendo uso de la información dada.

Ejemplo 5.31.
Sen $\theta = -\frac{4}{5}$; $270° \leq \theta \leq 360°$.

Solución. Como pertenece al cuarto cuadrante, $\cos\theta$ es positivo. Usando la identidad fundamental, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta &= 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \\
\cos\theta &= \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \\
\cos\theta &= \frac{3}{5} \\
\operatorname{sen} 2\theta &= 2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25} \\
\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}
\end{aligned}$$

Se puede hallar $\tan 2\theta$ calculando directamente $\frac{\text{sen}2\theta}{\cos 2\theta}$:

$$\tan 2\theta = \frac{24}{7}.$$

Ejemplo 5.32.
Sec $\theta = -3$; $180° < \theta < 270°$.

Solución. Cos $\theta = \frac{1}{\sec\theta} = -\frac{1}{3}$.
Por las identidades pitagóricas podemos afirmar:

$$\text{sen}\ \theta = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{9}}.$$

Como θ está en el tercer cuadrante:

$$\text{sen}\ \theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{sen}\ 2\theta = 2\ \text{sen}\ \theta\cos\theta = 2\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}\sqrt{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \frac{1}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{7}{9}$$

$$\tan 2\theta = -\frac{4}{7}\sqrt{2}.$$

5.9. Ecuaciones trigonométricas

Cuando se propone una igualdad de expresiones trigonométricas que no es una identidad, el objetivo es determinar valores que la hacen verdadera. Para ello se requiere resolver una ecuación. La ecuación puede no tener solución y, si la tiene, no necesariamente es la única. Puede haber infinitas soluciones en un intervalo, por esto es muy importante tener en cuenta el conjunto en el cual se va a encontrar dicha solución. En los siguientes ejemplos resolveremos algunas ecuaciones.

Ejemplo 5.33.
$2\cos\theta + 1 = 0$.

Solución. Si $2\cos\theta + 1 = 0$, entonces:

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}.$$

Para encontrar la solución general se buscan primero los ángulos tales que $0 \leq \theta \leq 2\pi$, que satisfacen la igualdad. Como la función coseno es negativa en los cuadrantes segundo y tercero, buscamos qué ángulos tienen como valor de coseno $-\frac{1}{2}$ en dichos cuadrantes. Los ángulos que satisfacen esta condición son $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$.

Teniendo en cuenta que se debe encontrar la solución general, y que la función coseno tiene como período 2π, la solución general es:

$$\left\{\frac{2\pi}{3} + 2n\pi : \text{n es entero}\right\} \cup \left\{\frac{4\pi}{3} + 2n\pi : \text{n es un entero}\right\}$$

Ejemplo 5.34.

(Csc θ)(sen θ) = 1.

Solución. Si sen $\theta \neq 0$, $\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$, por lo tanto:

$$(\csc\theta)(\operatorname{sen}\theta) = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)(\operatorname{sen}\theta) = 1.$$

Lo anterior indica que los únicos valores que no satisfacen la ecuación son aquellos para los cuales el seno es igual a cero, o sea los múltiplos enteros de π. Así, la solución es el conjunto de reales θ tales que $\theta \neq n\pi$, donde n es un número entero. El conjunto de soluciones es:

$$\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$$

Ejemplo 5.35.

$\text{Cot}^2\theta - \cot\theta = 0$.

Solución. $\cot^2\theta - \cot\theta = \cot\theta(\cot\theta - 1)$ (factorizando).

Entonces:

$$\cot\theta(\cot\theta - 1) = 0 \text{ (hipótesis).}$$

Por lo tanto:

$$\cot\theta = 0 \text{ o } \cot\theta - 1 = 0.$$

Si $\cot\theta = 0$, entonces $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, donde n es un entero.

Si $\cot\theta = 1$, entonces $\theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ o $\theta = \frac{5\pi}{4} + 2n$, donde n es un entero.

Así:

$S = \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \text{ es entero}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + 2n\pi : n \text{ es entero}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{4} + 2n\pi : n \text{ es entero}\right\}$

En los siguientes ejemplos encontraremos las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Ejemplo 5.36.

$2\cos^2\gamma + \cos\gamma = 0$.

Solución. $2\cos^2\gamma + \cos\gamma = \cos\gamma\,(2\cos\gamma + 1)$

Cos $\gamma\,(2\cos\gamma + 1) = 0$, por lo tanto:

$$\cos\gamma = 0 \text{ o } 2\cos\gamma + 1 = 0.$$

Si $\cos\gamma = 0$, entonces $\gamma = \frac{\pi}{2}$ o $\gamma = \frac{3\pi}{2}$. No se toman más valores debido a que nos interesan solo los que están en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Si $2\cos\gamma + 1 = 0$, $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$, los valores en $[0, 2\pi]$ que satisfacen la ecuación son: $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$. El conjunto solución es:

$$S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$$

Ejemplo 5.37.

$2\tan t - \sec^2 t = 0.$

Solución. Expresamos todo en términos de una sola función. Observamos que es más conveniente hacer uso de la identidad: $\sec^2 t = 1 + \tan^2 t$. Haciendo el reemplazo tenemos:

$$2\tan t - \sec^2 t = 2\tan t - \left(1 + \tan^2 t\right) = 0$$

O sea:

$$-\tan^2 t + 2\tan t - 1 = 0$$
$$\tan^2 t - 2\tan t + 1 = 0 \quad \text{(multiplicando por -1).}$$

Esta es una ecuación cuadrática. Si hacemos $x = \tan t$, la ecuación se convierte en:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x - 1)^2 = 0, \text{ (factorizando).}$$

Así, $x = 1$. Entonces:

$$\tan t = 1.$$

Los valores en el intervalo $[0, 2\pi]$, que satisfacen la igualdad son: $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4}$.

Ejemplo 5.38.

Cos θ − sen $\theta = 1$.

Solución. Para facilitar los cálculos, despejamos $\cos\theta$ y, después, expresamos todo en términos de una sola función:

$$\cos\theta = 1 + \operatorname{sen}\theta.$$

Elevamos al cuadrado:

$$\cos^2\theta = 1 + 2\ \text{sen}\ \theta + \text{sen}^2\theta.$$

Se debe tener cuidado porque al elevar al cuadrado podrían introducirse soluciones extrañas.

$$\text{sen}^2\theta + 2\ \text{sen}\ \theta + 1 - \cos^2\theta = 0.$$

Como $1 - \cos^2 x = \text{sen}^2 x$,

$$2\ \text{sen}^2\theta + 2\ \text{sen}\ \theta = 0$$
$$\text{sen}\ \theta(\text{sen}\ \theta + 1) = 0 \text{ (simplificando y factorizando).}$$
$$\text{sen}\ \theta = 0 \text{ o } \text{sen}\ \theta + 1 = 0$$

Si $\text{sen}\ \theta = 0$, entonces θ puede tomar como valores $0, \pi, 2\pi$.

Si $\text{sen}\ \theta + 1 = 0$, entonces $\text{sen}\ \theta = -1$, luego $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Como es posible que haya soluciones extrañas, debemos verificar si todas las encontradas satisfacen la ecuación.

$\cos 0 - \text{sen} 0 = 1 - 0 = 1$ (0 sí satisface la ecuación)

$\cos\pi - \text{sen}\pi = -1 - 0 = -1$ (π no satisface la ecuación)

$\cos 2\pi - \text{sen} 2\pi = 1 - 0 = 1$ (2π sí satisface la ecuación)

$\cos\frac{3\pi}{2} - \text{sen}\frac{3\pi}{2} = 0 - (-1) = 1$ ($\frac{3\pi}{2}$ sí satisface la ecuación)

De lo anterior:

$$S = \left\{0, 2\pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

5.10. Aplicaciones de la trigonometría

Hemos visto aplicaciones en problemas que pueden resolverse utilizando las funciones trigonométricas en triángulos rectángulos. Hay casos en los que se requiere el uso de triángulos que no son rectángulos y, sin embargo, es posible encontrar sus elementos (lados, ángulos), mediante los teoremas del seno y del coseno, que establecen relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo que no contiene un ángulo recto.

5.10.1. Teorema del seno

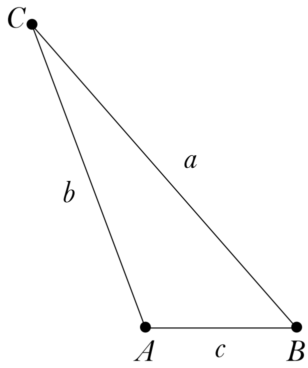


Figura 5.29.

Si en el triángulo $\triangle ABC$, a, b, c son las longitudes de los lados opuestos a los ángulos A, B, C, respectivamente, entonces:

$$\frac{\text{sen } \angle A}{a} = \frac{\text{sen } \angle B}{b} = \frac{\text{sen } \angle C}{c}$$

Para encontrar todos los elementos de un triángulo mediante el teorema del seno, se debe utilizar cualquiera de los siguientes grupos de información:

1. Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

2. Dos ángulos y cualquier lado.

Ejemplo 5.39.

Encuentre la medida de los ángulos y de los lados desconocidos del $\triangle ABC$ de la siguiente figura, si se sabe que $\angle\alpha = 115°$, $a = 46$, $b = 40$.

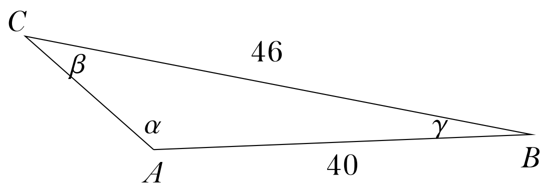


Figura 5.30.

Solución. Si $\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b}$, entonces $\frac{\text{sen } 115°}{46} = \frac{\text{sen } \beta}{40}$.
Despejando:

$$\text{sen } \beta = \frac{40 \text{ sen } 115°}{46} \approx \frac{40(0,906)}{46}.$$

Si sen $\beta \approx 0,787$, entonces $\beta \approx 51,9°$.

Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, entonces:

$$\gamma = 180° - (51,9 + 115)° \approx 13,1°.$$

Si $\frac{\text{sen}\,\gamma}{c} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{a}$, entonces $\frac{\text{sen}\,13,1°}{c} = \frac{\text{sen}\,115°}{46}$.

Despejando:

$$\text{Si } c = \frac{46\,\text{sen}\,13,1°}{\text{sen}\,115°}, \text{ entonces } c \approx \frac{(46(0,226))}{0,906} \approx 11,5.$$

Ejemplo 5.40.

Dos observadores situados a 110 m de separación, en puntos A y B de la orilla de un río, están mirando una torre en la orilla opuesta en el punto C (figura 5.31). Si los ángulos $\angle CAB$ y $\angle CBA$, miden 43° y 57° respectivamente. ¿A qué distancia está el primer observador de la torre?

Solución. A partir del triángulo de la figura

$$\gamma = 180° - (57° + 43°) = 80°$$

$$\frac{b}{\text{sen}\,57°} = \frac{110}{\text{sen}\,\gamma}$$

Despejando:

$$b = \frac{110\,\text{sen}\,57°}{\text{sen}\,80°} = \frac{92,25}{0,98} \approx 94,13 \text{ m}.$$

El primer observador está aproximadamente a 94,13 m de la torre.

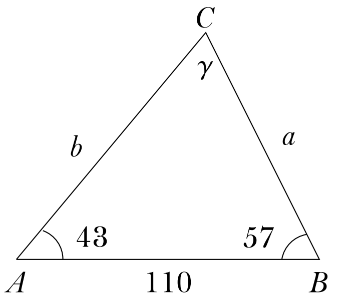


Figura 5.31.

Ejemplo 5.41.

Un poste vertical de 60 pies de longitud está colocado en la cima de una colina y proyecta una sombra de 138 pies de largo, colina abajo, a lo largo del camino, cuando el ángulo de elevación del sol es de 58° (figura 5.32). Encuentre el ángulo de inclinación del camino.

Solución. El triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo. Si se conoce γ, se puede calcular θ, teniendo en cuenta que $58° = \theta + \gamma$.

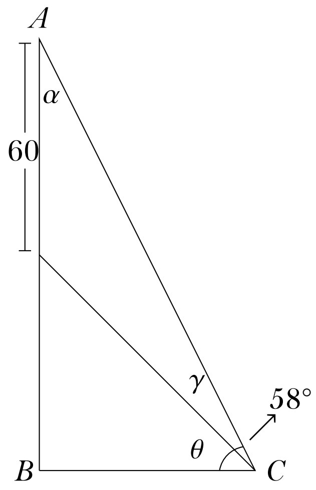


Figura 5.32.

En el triángulo $\triangle ABC$, $\alpha + 58° + 90° = 180°$. Entonces $\alpha = 32°$.
Por el teorema del seno, $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{138} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{60}$.
Despejando, tenemos que: $\operatorname{sen}\gamma = \frac{(60)(0{,}53)}{138} = 0,23$; $\gamma \approx 13,29°$.

$$\theta = 58° - 13,29° = 44,71°.$$

El ángulo de inclinación es de $44,71°$.

5.10.2. Teorema del coseno

En algunos problemas no es posible aplicar solamente el teorema del seno, como en aquellos en los que se conocen solamente dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Si se tienen estos elementos y se quiere calcular los que hacen falta, se aplica el teorema del coseno y ya conocido el lado restante puede utilizarse el teorema del seno.

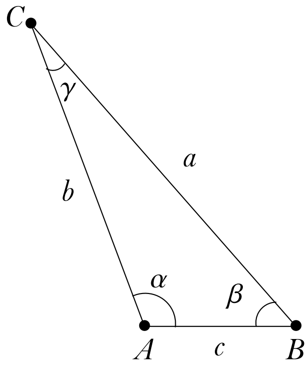


Figura 5.33.

Si en el triángulo $\triangle ABC$ de la figura 5.33, a, b y c, son los lados opuestos a los ángulos α, β y γ, respectivamente, entonces:

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Ejemplo 5.42.

En una esquina de un campo triangular el ángulo mide $52,4°$, los lados que se encuentran en esa esquina miden 100 m y 120 m de largo. ¿Cuánto mide el tercer lado?

Solución.

$$\begin{aligned} l^2 &= 100^2 + 120^2 - 2(120)(100)\cos(52,4°) \\ l^2 &= 10\,000 + 14\,400 - 24\,000(0,61) = 9760 \text{ m}^2 \\ l &= \sqrt{9760} \approx 98,9 \text{ m.} \end{aligned}$$

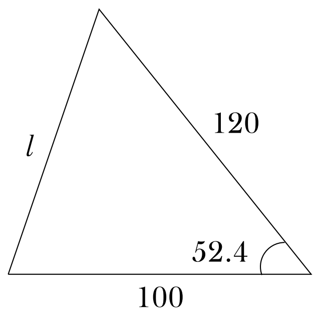


Figura 5.34.

Ejemplo 5.43.

Dos corredores A y C parten del mismo punto B a las 12:00 m. Uno de ellos se dirige hacia el norte a 6 millas por hora y el otro se dirige a 68° al este del norte a 8 millas por hora. ¿Cuál es la distancia entre ellos a las 3:00 p.m.

Solución.

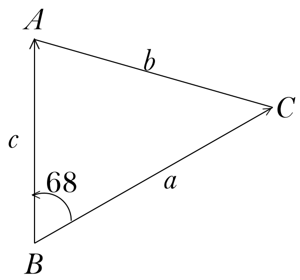


Figura 5.35.

Debemos encontrar la longitud de b, entonces encontramos las longitudes de a y c. Como parten a las 12:00 m., a las 3:00 p. m. cada uno ha corrido durante tres horas. Así:

$$c = (6\text{mph})3\text{h} = 18 \text{ millas}$$
$$a = (8\text{mph})3\text{h} = 24 \text{ millas}$$

Por el teorema del coseno: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(68°)$.

$$b^2 = 18^2 + 24^2 - 2(18)(24)(0,37)$$
$$b^2 = 580,32$$
$$b \approx 24 \text{ millas.}$$

Taller 1

1. La rueda delantera del triciclo de Pedro tiene un diámetro de 10 pulgadas. ¿Qué tan lejos llegará pedaleando 60 revoluciones?

2. Un reloj tiene el minutero y el horario del mismo tamaño, miden 6 pulgadas y llegan hasta la orilla de la carátula del reloj. Encontrar el área de la región angular entre las dos manecillas a las 5:40 a. m.

3. Indicar en grados y en radianes el ángulo central θ, en una circunferencia de radio 4 cm., subtendido por el arco S de longitud 7 cm.

4. Hallar el área del sector determinado por un ángulo central de medida $50°$ en un círculo de diámetro 16 m.

5. Encontrar el área de la región sombreada de la figura 5.36.

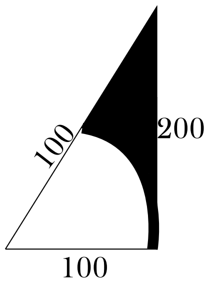


Figura 5.36.

6. Se utiliza una gran polea de 3 pies de diámetro para levantar cargas. Hallar la distancia que la carga es levantada si la polea gira un ángulo de $7\frac{\pi}{4}$ radianes.

7. Un guarda bosques que está a 200 pies de la base de un árbol, observa que el ángulo de elevación entre el suelo y la parte superior del árbol es de $60°$. Calcular la altura del árbol.

8. Se desea construir una rampa de 24 pies de largo que se levante a una altura de 5 pies sobre el nivel del suelo. Calcular el ángulo de la rampa con la horizontal.

9. Una escalera que mide 20 pies se apoya en un edificio y el ángulo entre ambos es de $22°$.

   a) Calcular la distancia del pie de la escalera al piso.

   b) Si la distancia del pie de la escalera al edificio aumenta 3 pies, ¿aproximadamente cuánto bajará del edificio la parte alta de la escalera?

10. En cada caso hallar los valores exactos de las 6 funciones trigonométricas:

   a) El punto de coordenadas $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ pertenece al lado final del ángulo.

   b) $(30, -40)$ es un punto del lado final del ángulo.

   c) El lado final está en el tercer cuadrante y sobre la recta $3y–4x = 0$.

11. Encontrar los valores de las 6 funciones trigonométricas del ángulo θ, si $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

12. Si $\tan\alpha = 2$, $\pi < \alpha < 3\frac{\pi}{2}$, encontrar los valores de $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$.

Taller 2

1. Usando los ángulos de referencia encuentrar el valor exacto de:

   a) $\cos 150°$

   b) $\cot\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

   c) $\tan(-225°)$

   d) $\csc\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

2. En cada caso encontrar: amplitud, periodo y corrimiento de fase.

   a) $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x$

   b) $y = \operatorname{sen}(-4x)$

   c) $y = -\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x + 4\pi\right)$

   d) $y = -2\operatorname{sen}(2x - \pi) + 1$

3. Para las gráficas 5.37 y 5.38 encontrar: amplitud y período. Expresarlas en la forma $y = a\operatorname{sen} bx$, o $y = a\cos bx$.

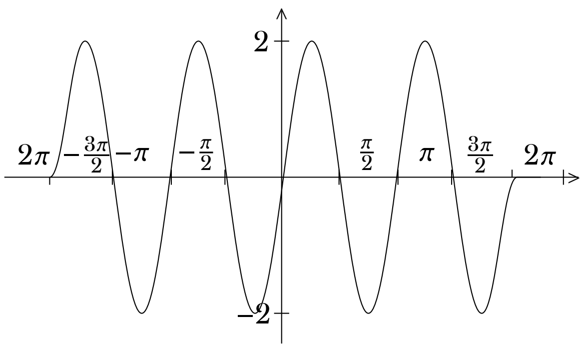


Figura 5.37.

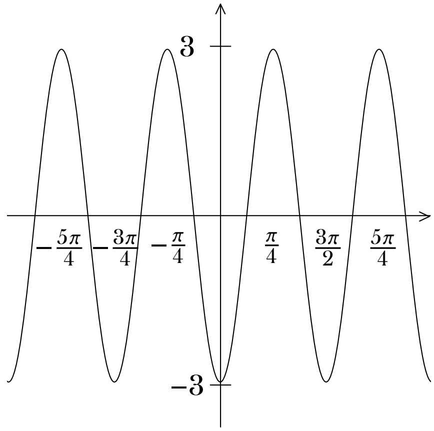


Figura 5.38.

4. El bombeo cardíaco consta de una fase sistólica, en la cual la sangre sale del ventrículo izquierdo hacia la aorta, y de una fase diastólica durante la que el corazón se relaja. En ocasiones, la función cuya gráfica se muestra a continuación sirve para hacer un modelo del ciclo completo de este proceso. Para un individuo en particular, la fase sistólica dura $\frac{1}{4}$ de segundo y tiene un volumen máximo de 8 litros por minuto. Encontrar a y b, en la ecuación que muestra la figura 5.39.

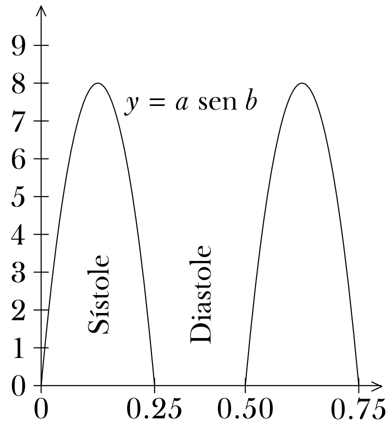


Figura 5.39.

5. La onda portadora de la onda de cierta estación de FM tiene la forma $y = A\text{sen}\left(2\pi 10^8 t\right)$, donde t está medido en segundos. ¿Cuál es la frecuencia de esa onda?

6. En un ecosistema de presa-depredador, el número de depredadores y de presas tiende a variar periódicamente. En cierta región con lobos como depredadores y conejos como presa, la población de conejos varía con la fórmula:

$$R = 15\,000 + 1500 \operatorname{sen} 2t,$$

donde t está medido en años después del 1.° de enero de 2000.

   a) ¿Cuál es la máxima población de conejos?
   b) ¿Cuándo se alcanzó por primera vez?
   c) ¿Cuál fue la población el 1.° de enero de 2003?

7. Un peso atado a un resorte suspendido en un techo, se está moviendo hacia arriba y hacia abajo. Su movimiento está descrito por la ecuación:

$$y = 8 + 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right),$$

y está medido en pies y t en segundos. ¿Cuál es la distancia mínima del peso al techo y cuándo se alcanza por primera vez?

8. Encontrar el valor exacto de:

   a) $\cos\left(-3\frac{\pi}{4}\right)$
   b) $\operatorname{sen}(-225°)$
   c) $\tan(-5\pi)$

9. Escribir en términos de las funciones trigonométricas de sus respectivos ángulos de referencia:

   a) $\cos(510°)$
   b) $\cot\left(19\frac{\pi}{6}\right)$
   c) $\csc(5)$
   d) $\operatorname{sen}(-235°)$
   e) $\tan(13)$

10. Si $\pi < t < 3\frac{\pi}{2}$, y $\cos t = -\frac{5}{13}$, encontrar sen $2t$, $\cos 2t$, $\tan 2t$.

11. Si α y β son ángulos de primero y tercer cuadrante respectivamente, con sen $\alpha = \frac{1}{5}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$:

a) Encontrar: $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{sen} 2\beta$.

b) ¿En qué cuadrantes están $\alpha+\beta$ y $\alpha-\beta$?

12. Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}^2\varphi\,(1+\csc\varphi)}{1+\csc\varphi\,\operatorname{sen}^2\varphi}$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x+\cos^3 x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$

c) $\dfrac{\cot^2\theta-4}{\cot^2\theta-\cot\theta-6}$

Taller 3

1. Encontrar la solución de cada ecuación en el intervalo $[0,\pi]$:

a) $\operatorname{sen} t=\frac{1}{2}$

b) $\sec\beta=2$

c) $\sec^2\alpha-4=0$

d) $2\operatorname{sen}^2 u=1-\operatorname{sen} u$

e) $2\cos^2 t+3\cos t+1=0$

2. Encontrar la solución de cada ecuación en el intervalo $[0,2\pi]$:

a) $\operatorname{sen} x-\cos x=0$

b) $\operatorname{sen}^2\theta-\operatorname{sen}\theta-6=0$

c) $2\tan t-\sec^2 t=0$

3. En un día despejado con D horas de iluminación, la intensidad de la luz solar I (en calorías/cm^2) se puede calcular mediante: $I=I_m\operatorname{sen}^3\left(\dfrac{\pi t}{D}\right)$, $0\le t\le D$, donde I_m es la intensidad máxima. Un dermatólogo recomienda protegerse del sol cuando la intensidad I revase el 75 % de la máxima. Si $D=12$ horas, calcular el número de horas para las que se requiere protección en un día despejado.

4. Un jardín triangular tiene lados que miden 42, 50 y 63 m. Encontrar la medida del ángulo menor.

5. Dos automóviles parten de la intersección de 2 carreteras rectas, y viajan a lo largo de ellas a una velocidad de 55 millas por hora y 65 millas por hora, respectivamente. Si el ángulo de intersección de las carreteras mide 72°, ¿qué tan separados están los automóviles después de 36 minutos?

6. Las boyas A, B y C, marcan los vértices de una pista triangular de carreras en un lago. Las boyas A y B, distan 4200 pies, las boyas A y C distan 3800 pies y el ángulo $\angle CAB$ mide 100°. Si la lancha ganadora de la carrera recorrió la pista en 6,4 segundos, ¿cuál fue su promedio en millas por hora?

7. Un camino recto hace un ángulo de 15° con la horizontal. Cuando el ángulo de elevación del sol es de 57°, un poste vertical que está a un lado del camino, proyecta una sombra de 75 pies de largo, cuesta abajo. Calcular la longitud del poste.

8. Un trotador corre a una velocidad constante de una milla cada 8 minutos en dirección S40°E durante 20 minutos y luego en dirección N20°E durante los siguientes 16 minutos. Calcular la distancia desde el punto final al punto de partida.

Taller 4

1. Completar el enunciado, seleccionado la opción correcta.

   a) sen 90 = 1
   b) $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = \tan x$
   c) $\cos\left(11\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$
   d) $\tan(x + 5\pi) = \tan x$

   Son verdaderas:

   a. 1 y 4
   b. 2 y 3
   c. 1 y 2
   d. *3* y 4

2. Si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, entonces:

   a) sen $3x = 0$ no tiene solución.

   b) $\cos 3x = 0$ tiene una única solución.

   c) $\tan 3x = 0$, tiene infinitas soluciones.

   d) sen $3x = \cos 3x$, no tiene solución.

3. Seleccionar la afirmación verdadera:

   a) El período de $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x + 3\right)$ es π.

   b) La amplitud de $\operatorname{sen}(\pi x + 1) + 2$ es 2.

   c) Sen $\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, está desfasado, con respecto a sen x, $\dfrac{\pi}{2}$ unidades a la derecha.

   d) La amplitud de $-2\cos(2x + 1)$ es 2.

4. Seleccionar la opción que complete el enunciado. Vientos dominantes han ocasionado la inclinación de 11° de un viejo árbol hacia el este desde la vertical.

   a) El sol en el oeste está a 32° arriba de la horizontal.

   b) El árbol mide 114 pies de la corona al suelo.

   Si se quiere hallar la longitud de la sombra:

   a. la información a es suficiente pero b no lo es.

   b. la información b es suficiente pero a no lo es.

   c. se necesitan las dos informaciones.

   d. cualquiera de las dos informaciones es suficiente.

5. Seleccionar la opción que complete el enunciado.

   a) $\cos(t + \pi) = -\cos t$

   b) $\operatorname{sen}\left(t + \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} t$

   c) $\operatorname{sen}\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos t$

   d) $\cos\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} t$

   De las afirmaciones anteriores son verdaderas:

   a. 1 y 3.

   b. 2 y 4.

   c. 3 y 4.

   d. 1 y 2.

Referencias

[1] Allendoerfer, C.; Oakley, C. *Fundamentos de matemáticas universitarias.* MacGraw-Hill, 1973.

[2] Brumfiel, C. F.; Eicholz, R. E.; Shanks, M. E. *Geometry.* Addison Wesley, Reading, 1962.

[3] Cajal, A. *Las 13 aplicaciones de la trigonometría más destacadas.* [Internet]. Disponible en https://www.lifeder.com/aplicaciones-trigonometria/ (2020, jul. 23).

[4] Clemens, S. R.; Cooney T. *Geometry*. Addison-Wesley Longman, 1$^{a.}$ edición, México, 1998.

[5] Coxeter, H.; Greitzer, S. *Fundamentos de Geometría.* Limusa-Wiley, México, 1971.

[6] Equipo editorial, (2022, ene. 6). *Claudio Ptolomeo*. [Internet]. Disponible en www.lifeder.com/aportes-Ptolomeo

[7] González, G. *Historia de la trigonometría desde sus orígenes*. [Internet]. Disponible en
https://www.lifeder.com/historia-trigonometria/ (2020, may. 26).

[8] Gutierrez, M. V. *Notas de Geometría.* Univ. Nal. de Col., Bogotá, 1992.

[9] Guevara Bravo, J César *Matemáticas y música en la revolución cientíca.* Ciencias 100, octubre-diciembre, 32-41, 2010 [En línea]. Disponible en http://revistas.unam.mx/index.php/cns/article/download/25383/23995

[10] Historia de la trigonometría (s.f.). [Internet]. Disponible en http://ameyali.weebly.com/ uploads/3/0/1/9/30195545/historia_trigonometria_2016_.pdf

[11] Moise, E. *Geometría Elemental desde un Punto de Vista Avanzado.* CECSA, México, 1968.

[12] Moise, E.; Downs, F. *Modern Geometry.* Addison-Wesley, México, 1986.

[13] Leithold, L. *Matemàticas previas al Cálculo*. Oxford University Press, tercera edición. 1994.

[14] Nasir al-Tusi: Eminente erudito musulmán del siglo XIII y fundador de la trigonometría (s.f). [Internet]. Disponible en https://www.balansiya.com/herencia_nasir_al-tusi.html

[15] Quién inventó el astrolabio (s.f.). [Internet]. Disponible en https://curiosfera-historia.com/quien- invento-el-astrolabio-historia/

[16] Ramírez, A.; Banbague, C. *Historia de la trigonometría*. [Internet]. Disponible en https://pt.slideshare.net/guest968011/ historia-de-la-trigonometra-296964 (2008, mar. 7).

[17] Stewart I. *Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años*. Barcelona, España: Critica. 2008.

[18] Stewart J.; Redlin, L.; Watson S. *Precálculo. Matemáticas previas al Cálculo.* Internacional Thomson editores, tercera edición, 2001.

[19] Swokowski, E.; Cole, J. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* Internacional Thomson editores, novena edición, 1998.

[20] Trigonometría involucrado en GPS (s.f.). [Internet]. Disponible en https://gocrazyx.info/bricolaje/14838-trigonometr %C3 %ADa-involucrado-en-gps.html#

[21] www.lifeder.com/aplicaciones trigonométricas.

Índice analítico

Curso libre juvenil de matemáticas fue editado
por el Centro Editorial de la Facultad de
Ciencias, Universidad Nacional de Colombia,
sede Bogotá. Se utilizaron como
fuentes principales Baskerllive y Fira Sans.
Bogotá D.C.