UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

ANÁLISIS DE LAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA EN ESTUDIANTES DE 15 A 17 AÑOS

Juan Felipe Alarcón Echeverri

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

ANÁLISIS DE LAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA EN ESTUDIANTES DE 15 A 17 AÑOS

Juan Felipe Alarcón Echeverri

Trabajo final de maestría presentado como requisito para optar al título de:

Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Juan Gabriel Rave-Agudelo

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2024

Resumen

Esta tesis examina las estrategias de resolución de problemas y el conocimiento movilizado por estudiantes de 15 a 17 años en trigonometría, a través del análisis de sus respuestas a un cuestionario. Para llevar a cabo este análisis, se siguieron las cuatro fases de resolución de problemas propuestas por Pólya y un modelo de clasificación de los niveles de comprensión y conocimiento en trigonometría. El proceso de recolección y análisis de datos se llevó a cabo utilizando el software MAXQDA, que permitió segmentar y codificar las respuestas del cuestionario, seguido de la categorización de los códigos identificados. Los resultados obtenidos indican que los estudiantes suelen resolver problemas de trigonometría siguiendo algoritmos aprendidos de ejercicios previamente resueltos, sin necesariamente aplicar las cuatro fases de Pólya en la resolución de problemas. Además, se observa un nivel generalizado de comprensión instrumental entre los estudiantes, sugiriendo que utilizan el conocimiento como una herramienta para resolver problemas sin un profundo entendimiento del conocimiento subyacente a los conceptos y procedimientos empleados. Se destaca un mayor dominio de la trigonometría de triángulos y del círculo unitario en comparación con el conocimiento de las gráficas de funciones trigonométricas. Los resultados de esta investigación pueden ser de utilidad para profesores de matemáticas o investigadores que buscan diseñar tareas coherentes con las estrategias de resolución de problemas y el nivel de conocimiento movilizado por los estudiantes.

Palabras clave: resolución de problemas, trigonometría, nivel de conocimiento, nivel de comprensión, problema.

ANALYSIS OF THE STRATEGIES FOR SOLVING TRIGONOMETRY PROBLEMS IN STUDENTS AGED 15 TO 17.

Abstract

This paper examines the problem-solving strategies and knowledge mobilized by 15–17-year-old students in trigonometry through the analysis of their answers to a questionnaire. To carry out this analysis, the four phases of problem solving proposed by Pólya and a model for classifying levels of understanding and knowledge in trigonometry were followed. The data collection and analysis process were carried out using MAXQDA software, which allowed for the segmentation and coding of the questionnaire responses, followed by the categorization of the codes identified. The results obtained indicate that students tend to solve trigonometry problems according to algorithms learned from previously solved exercises, without necessarily applying Pólya's four phases of problem solving. Furthermore, a generalized level of instrumental understanding is observed among students, suggesting that they use knowledge as a tool to solve problems without a deep understanding of the knowledge underlying the concepts and procedures used. A greater mastery of the trigonometry of triangles and the unit circle is highlighted in comparison to the knowledge of trigonometric function graphs. The results of this research may be useful for mathematics teachers or researchers who wish to design tasks that are consistent with the problem-solving strategies and level of knowledge mobilized by students.

Keywords: problem solving, trigonometry, problem, knowledge level, understanding level.

Contenido

LISTA DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

1. INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas es un componente esencial en el proceso de aprendizaje y desarrollo de habilidades cognitivas, siendo un elemento transversal tanto en la formación académica como en el desarrollo profesional y la vida cotidiana de cualquier persona. En particular, la resolución de problemas matemáticos por parte de estudiantes de secundaria representa una oportunidad para que ganen confianza en el uso de las matemáticas y desarrollen procesos de pensamiento cada vez más complejos.

El nivel de complejidad de los problemas está parcialmente determinado por la variedad de conocimientos y habilidades necesarios para su resolución. En trigonometría, por ejemplo, convergen diversos conceptos matemáticos que se espera que los estudiantes hayan adquirido a lo largo de su proceso educativo. La necesidad de recurrir a estos conceptos previos, a la vez que se incorporan los nuevos, hace de la trigonometría un reto para el aprendizaje de los estudiantes y para la planeación de la enseñanza en los profesores de secundaria.

Los estudiantes demuestran su conocimiento a través de la resolución de problemas, lo cual, además de ser un indicador del aprendizaje alcanzado, permite al profesor identificar los contenidos matemáticos que requieren más profundización y determinar la manera más conveniente para enseñarlos. La comprensión de lo que los estudiantes saben y no saben hacer, junto con el diseño de tareas acorde a este conocimiento, permite que el profesor pueda diseñar tareas de clase que respondan a las necesidades reales de los estudiantes.

Los procedimientos y las estrategias empleadas por los estudiantes en la resolución de problemas trigonométricos reflejan el nivel de dominio que tienen los estudiantes de los diferentes conceptos y procedimientos requeridos para la solución. Identificar el grado de dominio de los conceptos básicos de trigonometría y las estrategias de resolución utilizadas por los estudiantes permite al profesor diseñar tareas acordes con el conocimiento existente y los conceptos que requieren de mayor desarrollo por parte de los estudiantes. En este sentido, estas dos líneas se convierten en factores relevantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este sentido el objetivo es describir las estrategias de resolución de problemas que utilizan estudiantes de 15 a 17 años en el aprendizaje de la trigonometría. Para ellos se ha de:

1) Describir las estrategias usadas por estudiantes de 15 a 17 años al resolver problemas de trigonometría.

2) Identificar el conocimiento movilizado por estudiantes de 15 a 17 años al resolver problemas de trigonometría.

En el presente trabajo, se exponen las razones que motivaron esta investigación y la importancia de conocer el conocimiento sobre trigonometría que es movilizado por estudiantes de 15 a 17 años, así como las estrategias de resolución de problemas que demuestran. A continuación, se presentan los objetivos definidos para el desarrollo de la investigación, junto con los referentes teóricos y metodológicos a partir de los cuales se diseñó esta investigación. Finalmente, se ofrece un análisis de los datos y la consolidación de resultados en la línea de los objetivos propuestos.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este apartado se presenta la descripción y justificación del problema, y se presenta la pregunta y los objetivos de la investigación.

2.1 Descripción y justificación del problema

El estudio de la resolución de problemas y del aprendizaje de la trigonometría en el contexto del aula de clase de matemática es una línea de investigación en desarrollo en Educación Matemática. Por una parte, los estudios sobre resolución de problemas se han centrado en el significado del concepto de problema, los recursos matemáticos, las heurísticas de resolución, las creencias sobre la naturaleza y el sentido de las matemáticas y las comunidades de práctica entendidas como entornos de aprendizaje (Vilanova et al., 2019). Por otra parte, los estudios sobre el aprendizaje de la trigonometría se han centrado en los métodos de enseñanza, dificultades en el aprendizaje y niveles de comprensión (Demir y Heck, 2013). Sin embargo, los estudios conjuntos sobre resolución de problemas y aprendizaje de la trigonometría se han centrado en los errores en la resolución de problemas (Castro y Cárcamo, 2023), nociones sobre razones y funciones trigonométricas (Fernández *et al*., 2016; Weber, 2005); y estrategias didácticas para la enseñanza de la trigonometría (Sampaio y Batista, 2018).

En el ámbito curricular colombiano, el planteamiento y la resolución de problemas es una de las competencias que deben desarrollarse en el contexto de la matemática escolar (NCTM, 1989 como se cita en MEN, 2003):

> *Las investigaciones que han reconocido la resolución de problemas como una actividad muy importante para aprender matemáticas, proponen considerar en el currículo escolar de matemáticas aspectos como los siguientes: formulación de problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas; desarrollo y aplicación de diversas estrategias para resolver problemas; verificación e interpretación de resultados a la luz del problema original; generalización de*

soluciones y estrategias para nuevas situaciones de problemas; adquisición de confianza en el uso significativo de las matemáticas (p. 52).

En la estructura curricular planteada en los lineamientos del MEN (2003) se describen los procesos generales en matemáticas: resolución y planteamiento de problemas; razonamiento; comunicación; modelación; elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. En los lineamientos se resalta la importancia de la resolución de problemas por ser una competencia transversal a cada uno de los pensamientos (numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional) (MEN, 2003).

La razón de ser de las matemáticas es la resolución de problemas (Halmos, 1980). En consecuencia, diferentes propuestas curriculares consideran que la resolución de problemas debe ser transversal al currículo de matemáticas y su desarrollo debe ser un objetivo principal en la enseñanza (MEN, 2003). Las situaciones problema proporcionan un contexto donde el conocimiento matemático cobra sentido, especialmente en la medida en que los problemas tienen sentido en relación con el contexto del estudiante (MEN, 2006).

La resolución exitosa de un problema matemático requiere el desarrollo de una amplia variedad de habilidades por parte del estudiante (Stacey, 2005), por lo que el proceso de aprender a resolver problemas puede resultar complejo tanto para estudiantes como para profesores. La importancia y complejidad de la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas ha sido reconocida por la investigación en Educación Matemática en múltiples estudios (Pólya, 1945; Schoenfeld, 1987; Guzmán, 1994).

Las habilidades requeridas para resolver problemas matemáticos aumentan a medida que se incrementa el nivel de complejidad de los problemas. El conocimiento matemático y la capacidad de razonamiento son requisitos básicos en la resolución de problemas. Sin embargo, en la resolución de problemas más complejos son indispensables el pensamiento estratégico y un conjunto de creencias y atributos personales que permitan organizar y dirigir el proceso de resolución (Stacey, 2005).

Según Schoenfeld (1987), no es suficiente resolver muchos problemas y conocer una amplia variedad de estrategias (heurísticas) sino que se requiere de la capacidad de reflexión en el proceso de discernir si una determinada herramienta funciona.

Además de proponer problemas como una tarea para los estudiantes, la enseñanza de la resolución de problemas requiere el análisis de las estrategias y técnicas de resolución, verbalizando el pensamiento y contrastándolo con el de otras personas (Echenique, 2006). De acuerdo con lo anterior, el proceso enseñanza-aprendizaje en la resolución de problemas requiere conocer y analizar las estrategias y técnicas de resolución que usan los estudiantes. Las decisiones basadas en el diagnóstico son indispensables para adaptar las estrategias de enseñanza a las necesidades individuales de los estudiantes y a los procesos de aprendizaje en curso (Codreanu *et al*., 2022).

El análisis de las estrategias y técnicas de resolución de problemas podría servir como insumo para que el profesor tenga una mayor comprensión sobre el conocimiento de sus estudiantes. En el diseño de tareas se reconoce la importancia de que el profesor tenga en cuenta las comprensiones actuales de los estudiantes (Ruthven, 2015). La comprensión del conocimiento de los estudiantes se reconoce en este trabajo como un insumo fundamental para que el profesorado de matemáticas planee y gestione los procesos de enseñanza.

Así mismo el aprendizaje de la trigonometría se ubica en los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) para grado 10°, donde se establece la comprensión y uso de funciones para modelar fenómenos periódicos y justificar las soluciones como uno de los temas que han de aprender los estudiantes. Entre las evidencias de aprendizaje relacionadas con la trigonometría, el MEN (2015) menciona:

- *Reconoce el significado de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo para ángulos agudos, en particular, seno, coseno y tangente (p. 76).*
- *Reconoce algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en el estudio de fenómenos diversos de variación periódica, por ejemplo: movimiento*

circular, movimiento del péndulo, del pistón, ciclo de la respiración, entre otros (p. 76).

- *Modela fenómenos periódicos a través de funciones trigonométricas (p. 76).*

Por otro lado, la trigonometría aparece en la normatividad del sistema educativo colombiano en el año 1951 donde por primera vez se incluye en el plan de estudios de las instituciones escolares (González yy Rodríguez, 2019). La trigonometría no ha sido establecida como un área fundamental de conocimiento, sino que se ha ubicado dentro del área de matemáticas. Desde 1951 hasta 1974 no se presenta la trigonometría como una asignatura independiente en le Educación Media. Desde 1998 hasta 2006 no se establece la trigonometría como materia de estudio, sino que se dio relevancia a los procesos y pensamientos que se deben llevar en la escuela. Desde 2007 hasta la actualidad se promueven las evidencias de aprendizaje donde se abordan conceptos y procedimientos de la trigonometría (González y Rodríguez, 2019).

2.2 Pregunta de investigación

¿Qué estrategias y conocimientos movilizan estudiantes de 15 a 17 años al resolver problemas sobre trigonometría?

2.3 Objetivos de investigación

2.3.1 Objetivo General

Describir las estrategias y el conocimiento movilizado por estudiantes de 15 a 17 años al resolver problemas de trigonometría.

2.3.2 Objetivos específicos

- Describir las estrategias usadas por estudiantes de 15 a 17 años al resolver problemas de trigonometría.
- Identificar el conocimiento movilizado por estudiantes de 15 a 17 años al resolver problemas de trigonometría.

3. MARCO REFERENCIAL

En el presente capítulo se presenta el marco teórico, el marco conceptual y el marco legal que fundamenta este trabajo.

3.1 Marco teórico

Pólya (1945) define un problema como aquella situación que requiere la búsqueda consciente de una acción apropiada para el logro de un objetivo claramente concebido, pero que no es alcanzable de forma inmediata. Si bien este asunto se tratará más adelante, es pertinente considerar el hecho de que una tarea matemática no es problema en sí misma, sino que depende del nivel de conocimientos que tiene quien pretende resolverla y del nivel de dificultad que puede suponerle.

Con base en la definición propuesta por Pólya y, en coherencia con el hecho de que un problema no tiene una solución inmediata, el autor desarrolló un método para la resolución de problemas. Pólya estudió los patrones de pensamiento productivo que le permitían resolver de manera exitosa un problema matemático bajo la premisa de que este patrón serviría también a cualquiera que intentase resolverlo (Schoenfeld, 1987).

Pólya (1945) considera que una buena educación consiste en dar al sistemáticamente al estudiante la oportunidad de descubrir cosas por sí mismo y bajo esta idea desarrolla las dos principales temáticas de su trabajo: el orden (sistematicidad) y el descubrimiento. El orden se refiere al descubrimiento sistemático de las matemáticas y el descubrimiento a la exposición sistemática a un método (Schoenfeld, 1987). El estudio del método y de los patrones de pensamiento involucrados en el proceso, condujeron al método heurístico de cuatro pasos de Pólya para la resolución de problemas.

Pólya (1945) describe su método de resolución de problemas en cuatro fases: comprensión del problema, diseño del plan, ejecución del plan y finalmente la etapa de revisión. En cada una de las fases Pólya propone diferentes estrategias heurísticas, entre las cuales se mencionan para la fase de comprensión del problema: enfocarse en lo desconocido, en los datos o dibujar un diagrama; en la fase del diseño del plan: trabajar con problemas relacionados, problemas análogos o trabajar hacia atrás; en la fase de ejecución del plan persistir con el plan escogido hasta que se encuentre que no funciona, entonces descartarlo y hacer uno nuevo; y mirar hacia atrás o revisar el procedimiento, en el cual enfatiza en la importancia de tomarse el tiempo de revisar lo desarrollado para determinar qué funcionó y qué no funcionó.

Pólya (1945) describe la importancia de la fase de comprender el problema, resaltando la carencia de sentido en la idea de dar respuesta a un problema que no se entiende. Este es un error que se comete con frecuencia y el profesor debe tratar de prevenirlo. El estudiante no solo debe entender el problema, sino también desear resolverlo. El autor menciona que la falta de entendimiento o interés en el entendimiento de un problema no puede ser atribuida al estudiante, ya que el problema debe ser escogido apropiadamente por el profesor, de manera que tenga un nivel de dificultad adecuado, que resulte natural e interesante y que se dedique algún tiempo a dar una presentación adecuada para el estudiante.

Una vez se escoge bien el problema y se le presenta al estudiante, el profesor puede verificar que el problema fue entendido correctamente. Para esto Pólya (1945) propone que el profesor le solicite al estudiante repetir el enunciado del problema y verificar que sea capaz de hacerlo con fluidez. En este punto el profesor debería preguntarle al estudiante sobre qué es lo desconocido y cuáles son los datos del problema.

Una de las tareas más importante del profesor es ayudar a sus estudiantes favoreciendo condiciones para el aprendizaje y esta tarea requiere tiempo, práctica y principios sólidos. El profesor debe ayudar en la justa medida, procurando entender el razonamiento que está haciendo el estudiante y formulando las preguntas correctas llevar al estudiante a seguir los pasos que se pretende llegue por sí mismo. Pólya (1945) propone algunas preguntas generales que debería hacerse el estudiante para guiar la solución del problema a través de las cuatro fases y enuncia las posibles respuestas a cada una de ellas.

Pólya (1945) menciona que se tiene un plan cuando se conoce al menos un esbozo sobre los cálculos que se deben ejecutar para obtener lo desconocido. La concepción de un plan es el mayor logro en la solución de un problema y es también la fase que puede llegar a representar un mayor reto. Es posible que el plan se elabore gradualmente o que ocurra de repente como una idea brillante. En esta fase Pólya propone hacer preguntas sobre dónde empezar, qué hacer y si se han resuelto problemas similares con anterioridad.

La ejecución del plan es considerada por Pólya mucho más sencilla que la concepción de la idea de solución. Lo más importante es que el estudiante no olvide el plan y para ello lo más importante es que sea él mismo quien lo haya concebido. En este punto se debe asegurar que cada paso que se va desarrollando es correcto.

En la fase de revisión o de mirar atrás, una vez se ha completado la solución y se reconsidera el resultado y el plan que llevó a dicho resultado, se invita al estudiante a consolidar su conocimiento y desarrollar la habilidad para resolver problemas. Pólya (1945) menciona que la mayoría de los estudiantes deja el problema a un lado una vez han conseguido la solución. En esta fase se propone cuestionar al estudiante si pudiera verificar el resultado obtenido, el argumento o conseguir el resultado de una manera diferente (Pólya, 1945)

Las cuatro fases propuestas por Pólya establecen un marco útil para la resolución de problemas y en el caso de esta investigación para evaluar lo que hacen y no hacen los estudiantes. Sin embargo, se reconoce la posibilidad de que los estudiantes no necesariamente resuelvan problemas siguiendo las cuatro fases y que usen estrategias diferentes que pueden también ser válidas y conducir a resultados matemáticos relevantes.

3.2 Marco conceptual

La trigonometría es reconocida como una parte importante de las matemáticas en secundaria (Kamber y Takaci, 2017). La trigonometría es un prerrequisito para diferentes cursos como Física y Cálculo. Además del campo académico, la trigonometría tiene aplicación práctica en ciencias y tecnología, siendo ampliamente utilizada en topografía, geodesia, electricidad, electrónica y óptica, entre otras disciplinas (Army, 1991). La trigonometría es una parte de la matemática de gran riqueza conceptual donde se fusiona aritmética, álgebra y geometría (Fernández et al., 2016). El aprendizaje de la trigonometría brinda al estudiante herramientas para la solución de cierto tipo de problemas matemáticos complejos (Koyunkaya, 2016).

El interés por estudiar el conocimiento de los estudiantes en trigonometría desde la investigación ha sido mínimo a pesar de reconocerse su importancia y aplicabilidad. Algunos autores han reportado que la trigonometría representa un nivel de dificultad particularmente alto para estudiantes y profesores (Koyunkaya, 2016). Se ha señalado la escasa investigación en relación con las ideas intuitivas que los estudiantes poseen sobre trigonometría y sobre los métodos más adecuados para construir un núcleo sólido de conocimiento (Brown, 2005). También se ha señalado que la investigación orientada a conocer y superar las dificultades de los estudiantes en trigonometría es escasa (Weber, 2005).

Al revisar los estudios que abordan el conocimiento de los estudiantes en trigonometría, se identificaron dos categorizaciones. La primera relacionada con el nivel de comprensión y la segunda con el contenido matemático específico. Existen diferentes propuestas de clasificación para los niveles de comprensión de los estudiantes. En este estudio, se adoptará una clasificación de tres niveles: instrumental, relacional y formal. El nivel instrumental representa un primer grado de comprensión del objeto o tema, concebido como una herramienta para resolver problemas. Se alcanza este nivel cuando una persona puede emplear conceptos, definiciones, fórmulas, teoremas o algoritmos para solucionar un problema y llegar a la respuesta deseada, incluso si carece de comprensión de las razones subyacentes a los elementos utilizados en el proceso. El nivel relacional implica la capacidad de conectar los contenidos matemáticos con otras áreas, tanto dentro como fuera de las matemáticas. En este nivel, no solo se comprende el método que resuelve un problema específico, sino que también se posee la habilidad de aplicarlo y adaptarlo a nuevas situaciones. En el nivel formal, la persona puede reconstruir el camino que la llevó al resultado, proporcionando explicaciones de sus razonamientos, así como métodos para demostrar afirmaciones y evidencias que justifiquen las fórmulas o resultados utilizados. En este nivel, la persona adopta un enfoque crítico, percibiendo la construcción del conocimiento como una tarea compleja, y puede comunicar creativamente lo que sabe a otros (Chacón *et al.*, 2016).

Existen diferentes modelos que categorizan el nivel de comprensión del conocimiento en trigonometría (Weber, 2005; Brown, 2005; Thompson, 2008; Demir yy Heck, 2013). El modelo escogido para este estudio comprende tres contextos de la trigonometría: trigonometría de triángulos (TT), trigonometría del círculo unitario (TCU) y trigonometría de la gráfica de funciones (GFT) (ver **Figura 1**). El modelo pone énfasis en significados dentro de los tres contextos y entre ellos. También se presume que es más fácil para los estudiantes el aprendizaje de la covariación de cantidades con la misma unidad de medida (desplazamientos longitudinales horizontales o verticales) que el uso de funciones que involucran distancias y ángulos (Demir y Heck, 2013).

En la **Figura 1** se presenta una representación gráfica del modelo del nivel de comprensión de la trigonometría. Los contextos TT, TCU, GFT representan tres contextos en los cuales la trigonometría puede entenderse parcialmente, mientras que el punto central U representa el nivel de entendimiento deseado del conocimiento en trigonometría. Las líneas numeradas representan que la comprensión trigonométrica implica aspectos en los tres contextos y las conexiones entre ellos. Las líneas 1, 2 y 3 representan el entendimiento de diferentes aspectos dentro de cada uno de los tres contextos. Estas líneas no solo hacen referencia a definiciones sino a la capacidad de los estudiantes de utilizar dicho conocimiento. Las líneas más gruesas (4 y 5) representan niveles de entendimiento más profundos ya que implican conexiones entre los contextos presentados con las líneas punteadas. El segmento 4 representa el conocimiento de aspectos que integran la trigonometría del triángulo y el círculo unitario. El segmento 5 representa el conocimiento de la relación entre el círculo unitario y la gráfica de funciones trigonométricas (Demir y Heck, 2013).

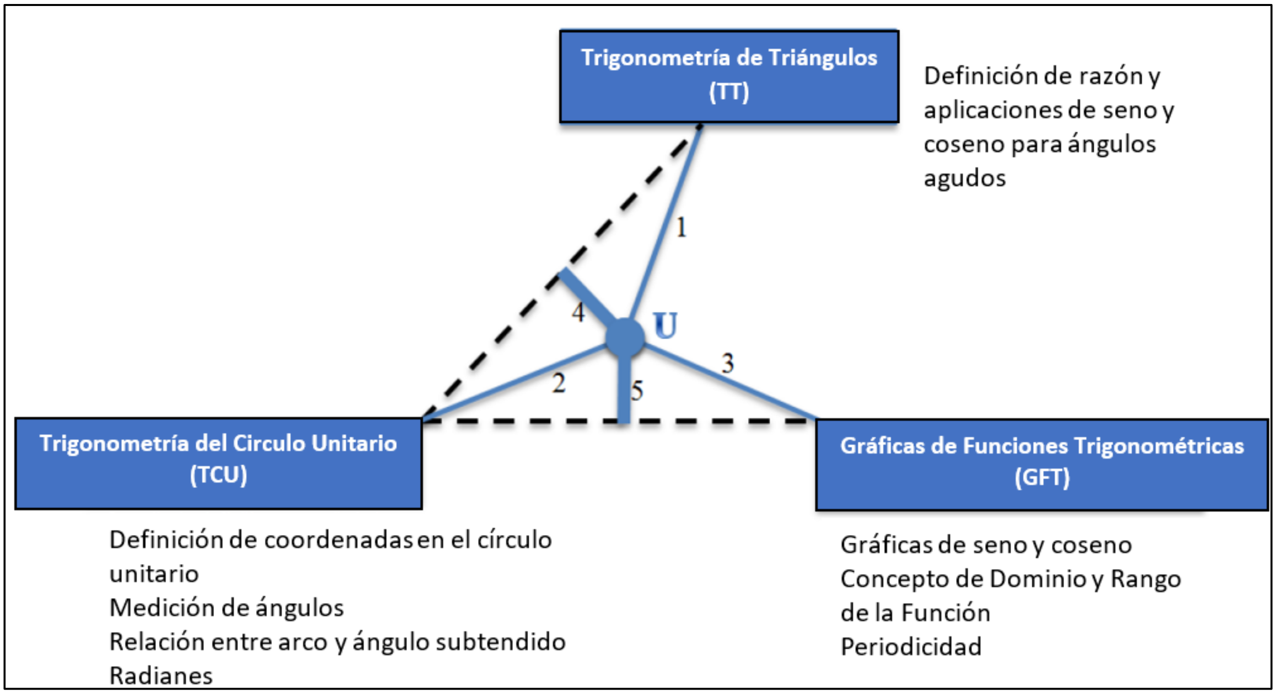


Figura 1. Modelo del conocimiento en trigonometría. Adaptado de Demir y Heck (2013, p.3)

En la **Tabla 1** se presentan algunos aspectos que se destacan como importantes para el modelo presentado del conocimiento a partir de un análisis conceptual de la trigonometría. El orden de estos aspectos es considerado por los autores como un orden razonable para el aprendizaje de las funciones trigonométricas. La medición de ángulos es considerada en este modelo solo después de que la mayoría de las conexiones entre las gráficas de funciones trigonométricas y la trigonometría del círculo unitario se han establecido (Demir y Heck, 2013).

Tabla 1. Aspectos del modelo del conocimiento en trigonometría

SEGMENTO	CONTEXTO O CONEXIÓN	ASPECTOS
1	Triángulo (TT)	Definición de razón del seno y coseno en un triángulo rectángulo y aplicaciones
2	Círculo Unitario (TCU)	Definiciones de coordenadas de seno y coseno y aplicaciones con ángulos o números reales
		Aplicación de las definiciones de coordenadas para evaluar el seno y el coseno para ciertas entradas
		Relaciones trigonométricas que pueden mostrarse en el círculo unitario. Ejemplo: seno es una función impar
		Relaciones entre arcos y ángulos subtendidos a través de la noción de radián
		Conversión de ángulos de grados a radianes
3	Gráfica (GFT)	Relación de la gráfica dels eno y coseno con funciones reales
		Propiedades funcionales de las gráficas de funciones trigonométricas. Ej: dominio y rango
		Relación trigonométrica revelada en las gráficas. Ej: paridad de funciones
4	Conexión TT - TCU	Integración del método de la razón con el método del círculo unitario mediante la referencia a triángulos, utilizando valores trigonométricos de ángulos mayores a 90°
5	Conexión TCU - GFT	Construcción e interpretación de gráficas trigonométricas
		Explicación de las propiedades de las funciones trigonométricas

Nota: Adaptado de (Demir y Heck, 2013, pág. 4)

El modelo del nivel de comprensión de la trigonometría permite trazar una trayectoria hipotética de aprendizaje. A partir del reconocimiento del nivel de dominio de los estudiantes, en contraste con el nivel esperado, se pueden diseñar tareas que favorezcan el progreso de los estudiantes a través de la trayectoria de aprendizaje propuesta.

3.3 Marco legal

En la **Tabla 2** se citan algunos de los principales documentos que rigen el sistema educativo colombiano en relación con los temas de interés de este trabajo. El marco legal que se cita aborda particularmente los apartados donde se menciona la necesidad de abordar la resolución de problemas y argumentación en la educación matemática.

Tabla 2. Marco legal del trabajo de investigación

Nombre y Fecha	Contexto	Texto
Constitución Política de Colombia (1991)	Carta Magna promulgada por el pueblo de Colombia representado por sus delegatarios a la Asamblea Nacional Constituyente	El Artículo 67 establece la educación como un derecho y un servicio público que tiene una función social: el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica y a los demás bienes y valores de la cultura.
Ley General de Educación. Ley 115 de febrero 8 de 1994	Ley que define y desarrolla la organización y la prestación de la educación formal (preescolar hasta media), no formal e informal.	Artículo 5º. Fines de la educación. De conformidad con el artículo 67 de la Constitución Política, la educación se desarrollará atendiendo a los siguientes 13 fines (…) 9. El desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional (…)
Lineamientos Curriculares en Matemáticas	Orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares que define el MEN con el apoyo de la comunidad académica educativa para apoyar el proceso de fundamentación y planeación de las áreas obligatorias y fundamentales definidas por la Ley General de Educación (MEN, 2003)	En el numeral 2.4.3.1 se menciona la resolución y el planteamiento de problemas como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático, resaltando su valor en diferentes propuestas curriculares donde la resolución de problemas es el eje central del currículo de matemáticas y el objetivo primario de la enseñanza. Como pauta de evaluación se menciona la necesidad de indagar si el estudiante formula y argumenta hipótesis, las modifica o descarta cuando no resisten la argumentación y detecta y aplica distintas formas de razonamiento y métodos de argumentación en la vida cotidiana (…)
Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006)	Constituyen uno de los parámetros de lo que todo niño, niña y joven debe saber hacer para lograr el nivel de calidad esperado a su paso por el sistema educativo	"(…) es necesario que en los procesos de enseñanza de las matemáticas se asuma la clase como una comunidad de aprendizaje donde docentes y estudiantes interactúan para construir y validad conocimiento, para ejercer la iniciativa y la crítica para aplicar ese conocimiento en diversas situaciones y contextos"
Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) en Matemáticas V.2 (2016)	El MEN define los DBA como un conjunto de aprendizajes estructurante para un grado y un área particular. Se entienden los aprendizajes como la conjunción de unos	Los DBA establecen la formulación, tratamiento y resolución de problemas como un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas. Se destaca la posibilidad de desarrollar una actitud mental

	conocimientos, habilidades y actitudes que otorgan un contexto cultural e histórico a quien aprende.	perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas. En el marco del pensamiento lógico y pensamiento matemático se menciona también la contribución de la educación matemática a la formación integral de estudiantes: el desarrollo del pensamiento lógico, de la racionalidad y de la argumentación. (…) el desarrollo de las competencias argumentativas que implican saber dar y pedir razones, probar y refutar y ojalá avanzar hacia la demostración formal. En el cuarto DBA para grado 10: Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones, menciona las siguientes evidencias de aprendizaje: - Reconoce el significado de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo para ángulos agudos, en particular, seno, coseno y tangente. - Reconoce algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en el estudio de fenómenos diversos de variación periódica, por ejemplo: movimiento circular, movimiento del péndulo, del pistón, ciclo de la respiración, entre otros. - Modela fenómenos periódicos a través de funciones trigonométricas.

4. DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se presenta el diseño metodológico de la investigación. Primero, se describen las características generales del contexto en el cual se desarrolló la investigación, algunas características generales de las instituciones educativas donde se hicieron las tomas de datos, las técnicas e instrumentos utilizados para la recolección y el análisis de datos.

4.1 Enfoque y descripción general de la investigación

Este estudio se lleva a cabo en el marco de una investigación de tipo cualitativo, ya que el objetivo no es predecir o generalizar, sino analizar cómo los estudiantes resuelven problemas y evidencian conocimiento matemático (Ortiz, 2015). En Educación Matemática, los procedimientos experimentales y exclusivamente cuantitativos no logran capturar la complejidad del hecho educativo. Además, generan la sensación de que reducen el objeto de estudio y de que sus resultados carecen de interés (Sierra, 2011). La complejidad inherente al objeto de estudio impide que las investigaciones estrictamente cualitativas aborden en su totalidad dicho fenómeno. En este trabajo, hemos optado por utilizar una mezcla de ambos enfoques, realizando una interpretación cualitativa de datos cuantitativos para desarrollar una aproximación coherente con la naturaleza del objeto de estudio.

Las metodologías centradas en la interpretación y comprensión se sitúan dentro del enfoque histórico-hermenéutico, adoptando un modelo epistémico constructivista (Ortiz, 2015). Estas metodologías buscan comprender las acciones de los sujetos en términos prácticos, en contraposición a la noción de que el comportamiento humano está regido por leyes generales y regularidades subyacentes. Se centran en la descripción y comprensión de lo único y particular de cada individuo, fomentando el conocimiento ideográfico y reconociendo la realidad como dinámica, múltiple y holística. Además, se cuestiona la existencia de una realidad externa objetiva para el análisis (Ortiz, 2015).

El estudio de las estrategias de resolución de problemas empleadas por los estudiantes tiene como objetivo describir, en lugar de predecir o generalizar patrones. Por tanto, el enfoque de investigación cualitativa es pertinente en este caso. La caracterización de estas estrategias y del conocimiento movilizado por los estudiantes cobra sentido al utilizar métodos que faciliten su descripción e interpretación.

4.2 Diseño metodológico e instrumento de recolección de datos

Se optó por un enfoque de métodos mixtos para guiar la investigación, aprovechando la rigurosidad del método deductivo basado en el marco teórico, al mismo tiempo que se emplea el método inductivo para abordar la complejidad del fenómeno de estudio y evitar limitar los resultados a la teoría seleccionada para su análisis. Los análisis con métodos mixtos utilizan supuestos o posturas paradigmáticas, al tiempo que permiten la generación de temas independientes a la teoría a partir de lo que muestran los datos (Proudfoot, 2023). La deducción implica un patrón teórico predeterminado, mientras que la inducción comienza con observaciones y busca encontrar un patrón dentro de ellas (Babbie, 2010).

Se diseñó un cuestionario para recopilar información sobre cómo los estudiantes abordan la resolución de problemas trigonométricos y evidencian conocimientos sobre trigonometría. En una primera fase, se consultaron varios libros de matemáticas de secundaria para identificar los temas principales abordados en el curso de trigonometría y el tipo de problemas a los que los estudiantes suelen enfrentarse en sus clases. Se seleccionaron cuatro contenidos específicos: razones trigonométricas, gráficos de funciones trigonométricas y sus propiedades, ecuaciones trigonométricas, y leyes del seno y coseno. Cada uno de estos contenidos se relacionó con los niveles de conocimiento en trigonometría mencionados anteriormente, a saber, trigonometría de triángulos, trigonometría del círculo unitario y gráficas de funciones trigonométricas.

A partir de los contenidos seleccionados, se eligió un problema representativo para cada tema, asegurándose de que tuviera un nivel de demanda cognitiva asumible por estudiantes del contexto social del estudio. La elección del nivel de dificultad se basó en la premisa de que un estudiante con un nivel de comprensión instrumental pudiera resolverlo. Los niveles relacional y formal se verificarían a través de los posteriores procesos de análisis. Para facilitar el análisis y la sistematización de las respuestas de los estudiantes, se formularon nueve preguntas para guiar el proceso de resolución. Estas preguntas se basaron en las fases de resolución de problemas propuestas por Pólya (1945) y preguntas sobre argumentación que no serán consideradas en este estudio.

En la revisión de la literatura sobre resolución de problemas, se destaca la distinción entre lo que constituye y lo que no constituye un problema. Esta diferenciación generalmente se relaciona con el nivel de complejidad de la solución y la posibilidad de resolverlo de manera inmediata, en consonancia con la definición propuesta por Pólya (1945). En este estudio, se seleccionaron tareas que estuvieran al alcance de los estudiantes pero que pudieran representar un desafío, especialmente debido al formato propuesto en el cuestionario. Este formato requería no solo la solución, sino también la verificación y justificación del procedimiento propuesto. Las tareas utilizadas en el cuestionario fueron tomadas y/o adaptadas del libro 'Los Caminos del Saber. Matemáticas 10' (Buitrago *et al*., 2013)Aunque en dicho libro se presentan ejercicios y problemas por separado, no se plantea una distinción clara entre ambos. En este trabajo, se consideró que el nivel de complejidad y la inmediatez de la solución son relativos, dependiendo del nivel de conocimiento de quien resuelve la tarea. Por lo tanto, las tareas seleccionadas podrían representar un problema para los estudiantes participantes en esta investigación.

La primera tarea propuesta se muestra en la **Figura 2**, donde se pide encontrar la altura del faro a partir de la situación presentada. Para resolverla, es necesario calcular el cateto opuesto al ángulo de 25° y sumar la altura del barco. Esta tarea se planteó con el objetivo de explorar las estrategias de resolución de problemas vinculadas al conocimiento de la trigonometría de triángulos (TT).

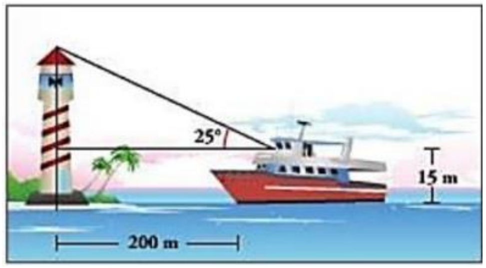


Figura 2. Tarea 1: Razones trigonométricas *(Buitrago et al., 2013)*

La segunda tarea consistió en hallar el dominio, rango y período de la siguiente función y graficarla: y = 2 cos (x) + 1. A partir de esta tarea se buscó identificar las estrategias que usan los estudiantes para graficar funciones trigonométricas y para identificar sus propiedades, lo cual corresponde al nivel de conocimiento GFT descrito en el marco teórico.

La tercera consistió en hallar el valor del ángulo θ en la situación que se presenta en la **Figura 3**, la cual podía hallarse directamente utilizando la ley del seno. Esta tarea también se relacionó con el conocimiento de la trigonometría de triángulos, pero se incluyó por considerarse un tema relevante para el área.

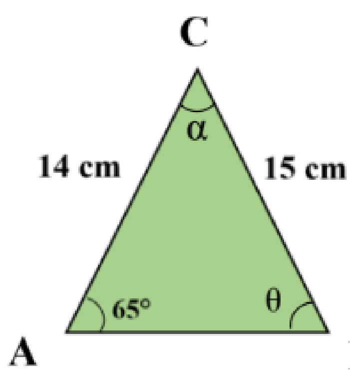


Figura 3. Tarea 3: Ley del seno

La cuarta tarea consistió en encontrar los valores que satisfacen la siguiente ecuación:

$$8 + 2 \cos x = 9, \quad 0 < x < 2\pi$$

Esta tarea se relacionó con el conocimiento de la trigonometría de triángulos ya que no requería el uso de gráficas ni ángulos del círculo unitario, en coherencia con lo expuesto en el modelo.

Las preguntas incluidas en el cuestionario fueron seleccionadas de manera que guiaran al estudiante a través de las cuatro fases propuestas por Pólya en la resolución del problema. El nivel de conocimiento en trigonometría se analizó considerando el tipo de conocimiento necesario para resolver cada tarea: el conocimiento de trigonometría de triángulos (TT) se relacionó con las Tareas 1 y 4, el conocimiento de gráficos de funciones trigonométricas (GFT) con la Tarea 2 y el conocimiento del círculo unitario (TCU) con la Tarea 3. Se evaluó el nivel de comprensión de los estudiantes mediante el análisis del procedimiento, la capacidad para llegar a la respuesta del problema, y la verificación y argumentación de la solución propuesta.

Las preguntas de argumentación en el cuestionario facilitaron la comprensión de las consideraciones que tuvieron al proponer la solución, permitiendo evaluar el nivel de comprensión subyacente a los procedimientos desarrollados. Sin embargo, debido a la naturaleza y limitaciones del presente estudio, no fue viable realizar un análisis independiente específico sobre este tema. En este sentido, se espera que los datos recopilados mediante estas preguntas sean útiles para investigaciones futuras sobre la argumentación en matemáticas.

En la Tabla 3 se presentan las nueve preguntas incluidas en el cuestionario, junto con la fase correspondiente a la propuesta de resolución de problemas. La fase de comprensión del problema se aborda en las primeras dos preguntas, que buscan la identificación de los datos e incógnitas. La fase de diseño del plan se considera en la tercera pregunta, donde se solicita al estudiante describir lo que debe hacer para resolver el problema. La fase de ejecución del plan se incluye en la cuarta pregunta, que requiere el desarrollo del procedimiento, así como en la quinta pregunta, que busca una descripción detallada del mismo. Además, la fase de ejecución del plan se refleja en la octava pregunta, que solicita la respuesta al problema. La fase de verificación está presente en la séptima pregunta, que pide al estudiante verificar el resultado obtenido durante el desarrollo del procedimiento, y nuevamente en la octava pregunta, donde se espera la respuesta final al problema.

Tabla 3. Preguntas del cuestionario

Pregunta	Categoría
1. ¿Qué datos te da el problema?	Primera Fase
2. ¿Qué te pregunta el problema?	Primera Fase
3. ¿Qué tienes que hacer para resolver el problema?	Segunda Fase
4. Realiza los procedimientos matemáticos necesarios para resolver el problema	Tercera Fase
5. Describe, paso a paso, lo que has hecho para resolver el problema.	Tercera Fase
6. ¿Por qué crees que cada paso del procedimiento es correcto para resolver el problema?	Argumentación
7. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.	Cuarta Fase
8. Responde la pregunta del problema.	Tercera y Cuarta Fase
9. ¿Por qué crees que la respuesta que has dado es correcta?	Argumentación

El instrumento de recolección de datos fue diseñado a partir de revisiones constantes que resultaron en el cuestionario que finalmente se propuso (ver 8.2 Anexo 1:). El formato utilizado y las instrucciones que se dieron antes de su aplicación buscaron que los datos fueran representativos del conocimiento de los estudiantes a través de un entorno controlado como lo es el aula de clase, el acompañamiento de un profesor y la socialización previa de los objetivos de su aplicación.

4.3 Contexto e implementación de los cuestionarios

La investigación se llevó a cabo en dos instituciones educativas: Institución Educativa Técnico Industrial Simona Duque, la cual es una institución pública del municipio de Marinilla y en la Escuela Normal Superior Antioqueña, la cual es una institución privada católica del municipio de Medellín. El autor de la investigación no contaba con un grupo propio al que pudiera aplicar el instrumento por lo cual los profesores del área de matemáticas de las instituciones anteriormente mencionadas facilitaron el espacio en sus clases para aplicar el instrumento de recolección de datos.

Los datos se tomaron con estudiantes entre 15 y 17 años de edad. En la primera institución educativa se aplicó el cuestionario con estudiantes del grado undécimo, con el fin de garantizar que todos estuvieran familiarizados con los temas de trigonometría que normalmente se abordan en grado décimo. Para la segunda toma de datos se decidió aplicar el instrumento en el grado décimo atendiendo a las sugerencias de estudiantes y profesores quienes hicieron la notación acerca de la complejidad de abordar temas que no se repasaban desde el año anterior. Después de validar con el profesor encargado que todos los temas ya se hubiesen visto se aplicó la prueba con estudiantes de grado décimo.

El instrumento se aplicó en total a 50 estudiantes, con 26 pertenecientes a la primera institución y 24 a la segunda. De los participantes, 24 fueron mujeres. En la primera fase de recolección de datos, el instrumento se administró a 26 estudiantes de grado undécimo. Después de un análisis inicial de los datos, se decidió ampliar la muestra para tener en cuenta la variabilidad de los participantes. Como resultado, se llevó a cabo una segunda fase de recolección de datos con 24 estudiantes de grado décimo.

Antes de aplicar el cuestionario, se proporcionó a cada estudiante un consentimiento informado que detallaba aspectos generales sobre la evaluación, su propósito y el uso previsto de los datos recolectados (consultar Anexo 1). Este documento fue leído y firmado tanto por los estudiantes como por sus acudientes.

La aplicación del cuestionario tuvo una duración de dos horas, y se permitió el uso de calculadora. Previamente a la aplicación, se impartieron instrucciones generales sobre el formato de la prueba, enfatizando la importancia de proporcionar respuestas lo más completas posible y de no dejar espacios en blanco.

4.4 Procedimiento de análisis

La integración de enfoques cualitativos y cuantitativos proporciona una comprensión más completa, según Fetters y Molina (2017, citado en Proudfoot, 2023). Este método híbrido involucra una aproximación "top-down", donde se proporciona un marco teórico previo al estudio del fenómeno, y una aproximación "bottom-up", organizando observaciones específicas del fenómeno (Niss, 2005).

En el diseño del instrumento de recolección de datos, se empleó el método deductivo basado en las fases de resolución de problemas y los niveles de comprensión y conocimiento definidos en el marco teórico y conceptual. Por otro lado, el método inductivo se utilizó en el análisis de los datos recopilados, segmentando respuestas y asignando códigos.

La segmentación y codificación inicial se realizó con el propósito de comprender los datos y extraer la máxima información posible de las respuestas. Los códigos reflejaban las acciones de los estudiantes, sin imponer restricciones en el proceso, generando así una variedad de códigos distintos. Además de codificar las respuestas de los estudiantes, se realizó la codificación de las pruebas según la institución, estudiante, pregunta y categoría de la pregunta, siguiendo la correspondencia con las fases de resolución de problema y las preguntas de argumentación.

Esta codificación se realizó en el Software MAXQDA, por lo que se analizó con facilidad y se pudo obtener información relativa a las frecuencias de relaciones entre diversas combinaciones de códigos. Esto simplificó el análisis inductivo al revelar tendencias en función de la frecuencia de codificación.

En el análisis de resolución de problemas, se consideró la fase correspondiente a la pregunta y las acciones de los estudiantes en sus respuestas. A partir de los códigos obtenidos, se llevó a cabo un proceso de categorización para reducir la cantidad de códigos y facilitar el análisis inductivo.

La categorización se dividió en 3 niveles. Los códigos de nivel 3 fueron los más numerosos, identificados directamente de las respuestas de los estudiantes, mientras que las demás categorías surgieron de la clasificación de estos códigos en categorías más generales. La Tabla 4 presenta los códigos agrupados en los niveles 1 y 2. El software permite agregar segmentos codificados a nuevos códigos y anidarlos, facilitando así el proceso de análisis de datos.

Tabla 4. Nivel 1 y 2 del proceso de categorización

	Nivel 1	**Nivel 2**
FASE 1	Identifica Datos	Nombrar los datos del problema con vocabulario y notación matemática
		Realiza procedimientos adicionales para identificar los datos
		Realizar representaciones gráficas
		Enuncia propiedades y teoremas matemáticos
	Identifica Pregunta	Señala la variable que debe ser encontrada
		Señala la práctica que debe ser desarrollada
	Retos en la identificación de datos y preguntas	Dificultades
		Sin respuesta / Incompleto
FASE 2	Comprensión del Problema	Identificar Datos
		Identificar Incógnita
	Uso de Fórmulas	No específico
		Usar fórmulas de razones trigonométricas
		Usar identidades trigonométricas
		Usar ley de senos y cosenos
		Usar fórmulas matemáticas de otros contenidos
	Desarrollo del Procedimiento	Tareas no específicas
		Tareas específicas
	Retos para la concepción de un plan	Sin respuesta/incompleto
		Dificultades
		Indica requerimientos
FASE 3	Identificación de datos y pregunta	Tareas no específicas
		Tareas específicas
	Desarrollo del procedimiento	Tareas no específicas
		Tareas específicas
	Retos para la ejecución del plan	Sin Respuesta / Incompleto
		Discurso
		Procedimiento
		Conceptuales
		Gráficos
		No Específicos
		Requerimientos
	Aciertos	Calcular
		Graficar
		Descripciones o afirmaciones
FA	Retos	Sin Respuesta/Incompleto
		Dificultades

	Aciertos	Respuesta
		Procedimiento
	Verificación	Reemplazar Fórmulas
		Graficar
		Calcular
		No Específicas
		Comentarios sobre la verificación
	Desarrollo Procedimiento	Tareas Específicas
		Tareas No Específicas

El análisis de nivel de conocimiento en trigonometría se hizo teniendo en cuenta el tema de la pregunta, es decir el conocimiento asociado a ella (TT, TCU o GFT) y la capacidad del estudiante para dar solución al problema. Aquellos estudiantes que lograron resolver correctamente un problema determinado se categorizaron como estudiantes que conseguían el nivel de conocimiento en trigonometría asociado a la pregunta.

El análisis de los niveles de comprensión se realizó a partir del desarrollo del procedimiento, la verificación y argumentación de este. La capacidad para resolver el problema y llegar a la respuesta da cuenta de un nivel de conocimiento instrumental. La capacidad de verificar el resultado obtenido y argumentarlo da cuenta de un nivel de conocimiento formal. El nivel relacional por tratarse de un nivel que requiere la extrapolación del conocimiento de un tema determinado a otras áreas del conocimiento se consideró por fuera del alcance de esta investigación.

El proceso de codificación, categorización e interpretación de resultados se validó a partir de revisiones constantes e independientes del investigador y el director del trabajo. El uso del análisis inductivo fue importante para permitir que los resultados surgieran directamente de los datos (bottom-up), mientras el análisis deductivo (top-down) proporcionó un análisis estructurado de los datos con un marco conceptual bien establecido y teorizado (Proudfoot, 2023).

5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

En este capítulo se presentará el análisis de los datos y la discusión de los resultados de la investigación.

El proceso de análisis se desarrolló a partir de métodos híbridos inductivos y deductivos de análisis (Proudfoot, 2023). Se desarrollaron procesos de codificación en diferentes etapas que fueron mediados por el software MAXQDA. La organización y la delimitación de los temas fueron favorecidas por un proceso de codificación inicial que permitió conocer la naturaleza de los datos. A continuación, se presentan los resultados del análisis conforme los objetivos de la investigación, es decir, para: (1) describir las estrategias de resolución de problemas; e (2) identificar el conocimiento sobre trigonometría movilizado por los estudiantes. En la **Figura 4**, se presenta una nube de palabras que muestra el conjunto de códigos definidos en el análisis, donde el tamaño de la letra es proporcional a su frecuencia.

Figura 4. Nube de códigos por frecuencia

5.1 Análisis para el objetivo 1

A partir de la categorización descrita en la metodología se analizaron las relaciones existentes entre los diferentes códigos. Para ello, se utilizaron las herramientas *Matriz de relación de códigos* y *Búsqueda compleja de codificaciones* en el Software MAXQDA para extraer las tablas de frecuencia correspondientes. El análisis de los resultados obtenidos sobre las estrategias de resolución de problemas se hizo para cada una de las fases de resolución de problemas en relación con las tareas y con las categorías de nivel 2.1.1.

5.1.1 Análisis de la Fase 1

En las respuestas a las preguntas relacionadas con la Fase 1 se codificaron 602 segmentos que se agruparon en tres grandes temas: (1) *identificación de datos*, (2) *identificación de la pregunta*, y (3) *retos en la identificación de datos y preguntas*. La *identificación de datos* incluyó actividades como nombrar los datos del problema con vocabulario y notación matemática, realizar procedimientos adicionales para identificar datos, realizar representaciones gráficas y enunciar propiedades y teoremas matemáticos. En la *identificación de la pregunta*, los estudiantes señalaron la variable que debía ser encontrada y el procedimiento matemático que debía ser desarrollada para conseguirlo. Los *retos en la identificación de datos y preguntas* fueron transversales a las dos primeras categorías y se dividieron en dos grupos: dificultades y preguntas sin respuesta o incompletas. En Tabla 5 se presentan los porcentajes de cada tema en relación con cada una de las tareas.

Tabla 5. Resultados codificación fase 1

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Sistema de códigos</th><th colspan="2">Tarea 1</th><th colspan="2">Tarea 2</th><th colspan="2">Tarea 3</th><th colspan="2">Tarea 4</th></tr>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Razón Trigonométrica</th><th colspan="2" rowspan="2">Gráfica y propiedades</th><th colspan="2" rowspan="2">Ley de senos</th><th colspan="2" rowspan="2">Ecuación Trigonométrica</th></tr>
<tr><th>Nivel 3</th><th>Nivel 2</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Identificación de datos</td><td>Nombrar los datos del problema con vocabulario y notación matemática</td><td>97%</td><td rowspan="2">65%</td><td>100%</td><td rowspan="2">27%</td><td>100 %</td><td rowspan="2">53 %</td><td>100%</td><td rowspan="2">33%</td></tr>
<tr><td>Realizar procedimientos adicionales para identificar datos</td><td>1%</td><td>0%</td><td>0%</td><td>0%</td></tr>
</table>

	Realizar representaciones gráficas	1%		0%		0%		0%	
	Enunciar propiedades y teoremas matemáticos	1%		0%		0%		0%	
Identificación de la pregunta	Señalar la variable que debe ser encontrada	100%	21%	66%	46%	100 %	29 %	100%	29%
	Señalar la práctica que debe ser desarrollada	0%		34%		0%		0%	
Retos en la identificación de datos y preguntas	Dificultades	33%	14%	38%	28%	35%	18 %	51%	38%
	Sin Respuesta / Incompleto	67%		63%		65%		49%	

5.1.1.1. Análisis de la Fase 1 en la Tarea 1

En la Tarea 1, la mayor frecuencia de codificación se presentó en el tema de *identificación de datos*. Este tema incluyó una mayor cantidad de segmentos codificados ya que a partir de la representación gráfica del problema los estudiantes podían identificar fácilmente las medidas de las distancias y de la amplitud de los ángulos. El 97% de los segmentos codificados en la identificación de datos correspondió a actividades sobre nombrar los datos del problema con vocabulario y notación matemática (por ejemplo, ver **Figura 5a**). Solo un 1% de los segmentos codificados señalan representaciones gráficas adicionales (por ejemplo, ver **Figura 5b**) y fue mínimo el número de estudiantes que enunciaron propiedades y teoremas matemáticos en esta fase (por ejemplo, ver **Figura 5c**).

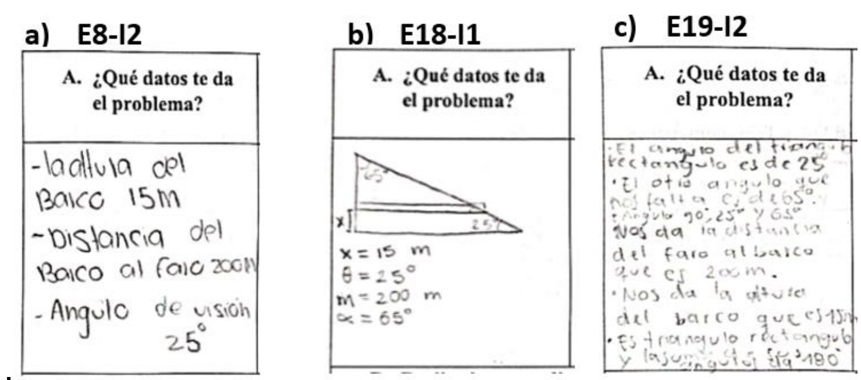


Figura 5. Identificación de datos en la fase 1 de la tarea 1

Respecto a la identificación de la pregunta se codificaron 47 segmentos, lo cual indica que el 100% de los segmentos codificados dan cuenta de que los estudiantes lograron identificar cuál era la pregunta del problema. La **Figura 6** ilustra algunas respuestas dadas por los estudiantes dentro de este tema. Las respuestas que dieron los estudiantes fueron afirmaciones sobre la pregunta del problema como la de la E1-I1, respuestas donde se nombra la incógnita como la del E6-I2 y respuestas donde se reescribe la pregunta del problema como el E6-I.

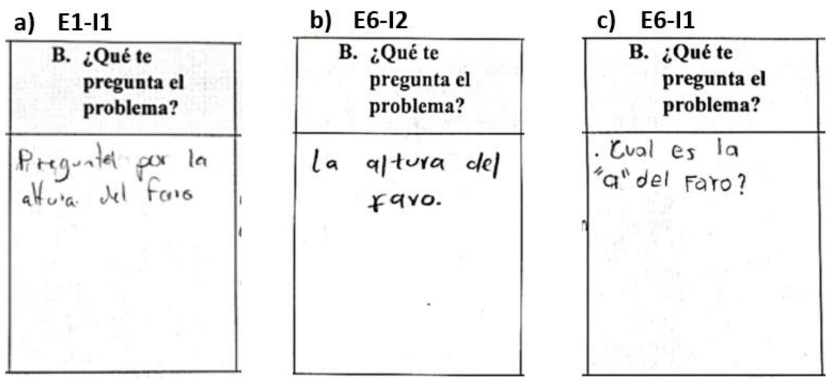


Figura 6. Identificación de la pregunta en la fase 1 de la Tarea 1

Algunos estudiantes, como el E6-I1, utilizaron notación matemática para denotar la variable y los datos del problema. En este caso, los datos del problema fueron señalados en el dibujo dado en el enunciado de la tarea, como se puede observar en la **Figura 7**.

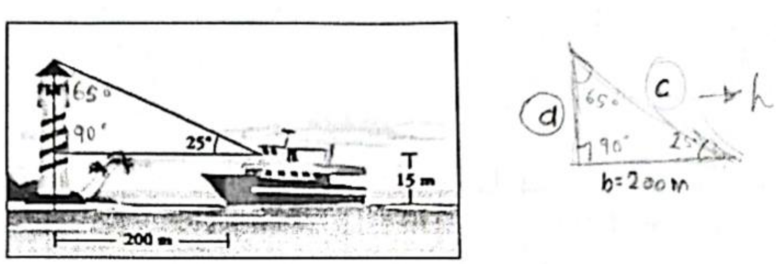


Figura 7. Identificación de datos por parte del E6-I1en la fase 1 de la Tarea 1

Los retos en la identificación de datos y preguntas presentados en esta fase estuvieron relacionados con el uso inapropiado del vocabulario y la notación matemática, la falta de claridad y la identificación errónea de datos. En la **Figura 8** se presentan algunos ejemplos. Un ejemplo del uso inapropiado del vocabulario se presenta en la

Figura 8a, donde el estudiante E1-I2 utiliza la palabra "grados" en lugar de la expresión "medida de la amplitud del ángulo" o, la palabra "largo" en lugar de la expresión "medida de la longitud o de la distancia entre…". En la **Figura 8b**, el estudiante E14-I2 identifica los datos del problema sin utilizar palabras del vocabulario matemático y nombra *h* y *d* a dos de las medidas de las distancias sin indicarlas en el dibujo del problema. En la **Figura 8c**, el estudiante E10-I1 no indicó los valores de la distancia y la altura a los que hace alusión en su respuesta; además, hay poca claridad en la identificación de la medida de la amplitud del ángulo dado por el problema.

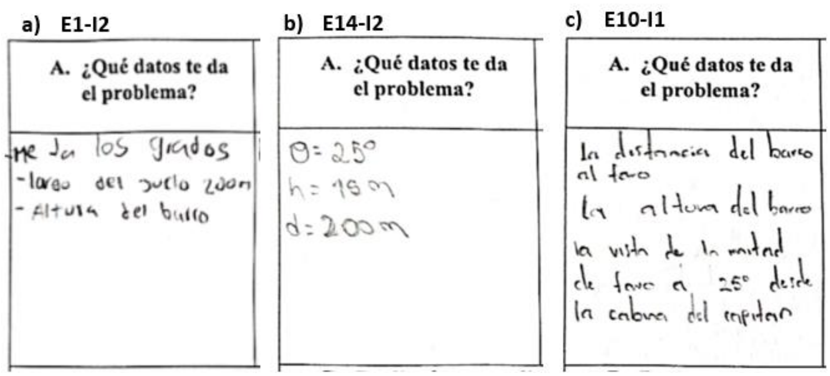


Figura 8. Retos en la identificación de los datos en la Tarea 1

5.1.1.2. Análisis de la Fase 1 en la Tarea 2

En la Tarea 2, la identificación de datos tuvo la menor frecuencia de codificación. Una posible razón puede estar relacionada con que las respuestas de los estudiantes en la identificación de datos en esta tarea consistieron únicamente en nombrar los datos del problema, es decir, en identificar la función a graficar. En la **Figura 9** se presenta la respuesta del E11-I2, que ilustra el tipo de respuesta que dieron los estudiantes en la identificación de los datos en esta tarea.

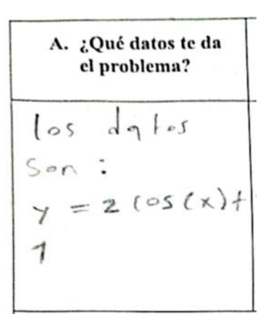


Figura 9. Identificación de datos del E11-I2 en la fase 1 de la tarea 2

En la *identificación de la pregunta* se identificaron principalmente dos tipos de respuestas: (i) estudiantes que indicaron la pregunta del dominio, rango y período de la función y (ii) estudiantes que, además de las propiedades de la función, indicaron que esta función debía graficarse. El E12-I2, por ejemplo, indicó las características que debía hallar de la función, pero no menciona la gráfica (ver **Figura 10a**). El E5-I1 indica las características solicitadas de la función y también menciona que debe hacer una gráfica (ver **Figura 10b**).

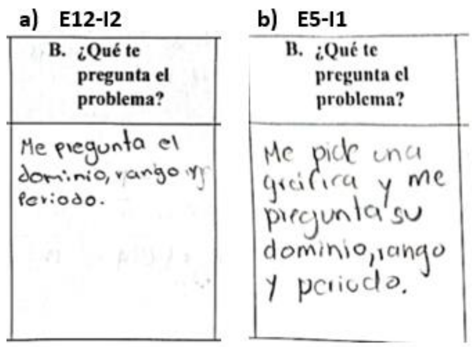


Figura 10. Identificación de la pregunta en la fase 1 de la Tarea 2

El 84 % de los retos en la identificación de datos y preguntas en la Tarea 2 fueron relacionados con preguntas sin respuesta o respuestas incompletas. Se identificaron también respuestas sin claridad o erróneas o como las que se presentan en la ***Figura 11***. El estudiante E8-I1 afirma que la función está en el "eje y", el estudiante E25-I1 afirma que los datos presentan "una función" y "cómo se desarrolla la función" pero no la indica; y el E7-I1 afirma que el problema da "una ecuación" y que se debe "calcular *y*". Este último da cuenta de la confusión entre función y ecuación que es común en el aprendizaje de este contenido.

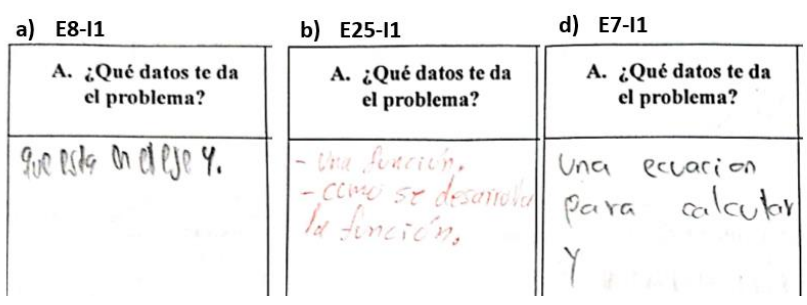


Figura 11. Retos en la identificación de datos en la Tarea 2

5.1.1.3. Análisis de la Fase 1 en la Tarea 3

En la Tarea 3, la mayor frecuencia de codificación se presentó en la categoría *Identificación de datos* y la menor en la categoría *Retos en la identificación de datos y la pregunta.* Esto indica que en general los estudiantes no tuvieron mayores dificultades en la identificación de los datos del problema y que en esta tarea no fue significativa la cantidad de dificultades, preguntas sin respuesta o respuestas incompletas.

La identificación de los datos consistió, en su mayoría, en nombrar los datos del problema con vocabulario y notación matemática (ver **Figura *12*a**). En general, la identificación de la pregunta no representó inconvenientes y fue respondida indicando la notación usada para denotar el ángulo que debía hallarse (ver ***Figura* 12c)**. El reto de mayor frecuencia en esta tarea fueron las preguntas sin respuesta o con respuestas incompletas, tales como la que se presenta en la ***Figura* 12b**, donde el estudiante menciona con palabras los datos sin indicar los valores numéricos.

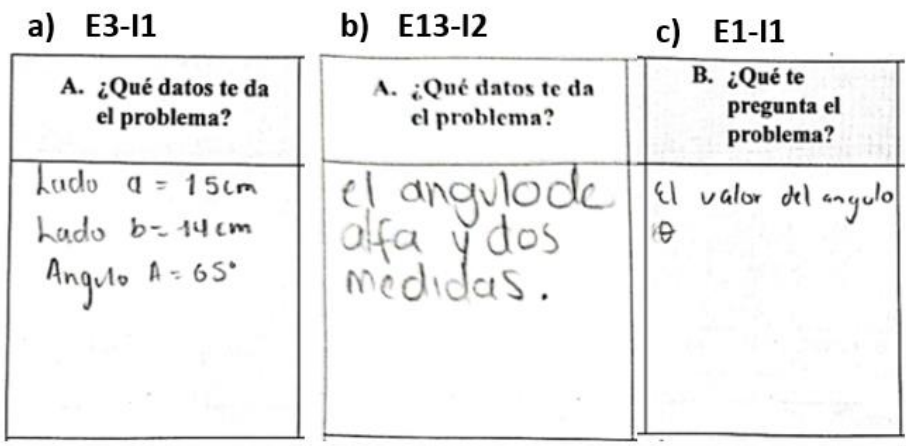
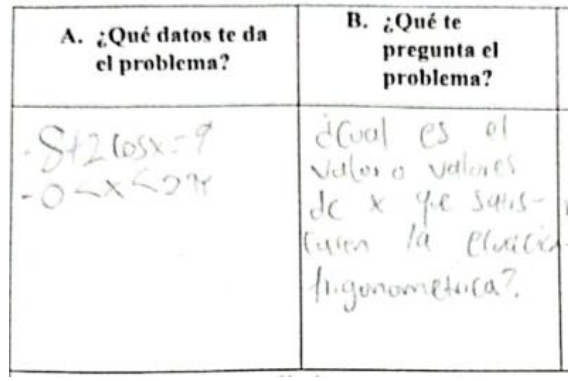


Figura 12. Respuestas de la fase 1 para la Tarea 3

5.1.1.4. Análisis de la Fase 1 en la Tarea 4

La *identificación de datos* y la *identificación de la pregunta* tuvieron frecuencias de codificación similares (33% y 29%, respectivamente). Los estudiantes que lograron responder las preguntas dieron respuestas como las del E15-I2 (ver **Figura 13**), donde en la *identificación de datos* se indica la función y el intervalo de solución y en la *identificación de la pregunta* se menciona que deben encontrarse valores de x que satisfacen la ecuación.



A. ¿Qué datos te da el problema?	B. ¿Qué te pregunta el problema?
·S+2cosx=9 -0<x<2π	¿Cual es el valor o valores de x que satisfacen la ecuación trigonométrica?

Figura 13. Respuesta del E15-I2 a la fase 1 de la Tarea 4

La categoría *Retos en la identificación de datos y preguntas* fue la que presentó una mayor frecuencia de codificación en la Tarea 4 con un 38% del total de segmentos codificados. Los retos en esta categoría se repartieron de manera casi uniforme entre la categoría dificultades y preguntas sin respuesta e incompletas. Los estudiantes manifestaron no recordar o no entender el tema de ecuaciones trigonométricas, lo cual sumado al hecho de ser la última tarea del cuestionario resultó en una mayor cantidad de retos.

Las preguntas sin respuesta e incompletas fueron uno de los retos más frecuentes, aunque también se identificaron retos como el confundir el intervalo con otra función (ver **Figura 14a**), donde el estudiante indica que los datos del problema son dos funciones trigonométricas. Esto sugiere que el estudiante considera el intervalo como una segunda función. Además, esta tarea fue la única que representó un reto en la identificación de la pregunta, ya que la mayoría de los estudiantes que respondieron lo hicieron con respuestas similares a la que se presenta en la **Figura 14b**, donde, si bien se indica que debe encontrarse el valor de x que satisface la función, el estudiante no menciona que, de las infinitas soluciones, sólo debe encontrar las que están en el intervalo indicado. Por último, solo un 26% de los estudiantes dieron respuestas completas como la que se presenta en la **Figura 14c**, donde se indicaba que debía encontrarse el "valor de x" y el intervalo de solución. A pesar de que la mayoría de los estudiantes no indicaron el intervalo en el que debía encontrarse la solución, ningún estudiante encontró soluciones por fuera del intervalo dado en el enunciado.

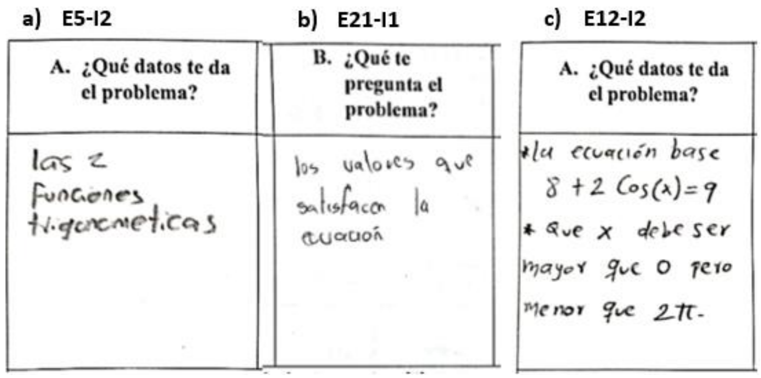


Figura 14. Retos de la fase 1 para la Tarea 4

5.1.2 Análisis de la Fase 2

En las respuestas a las preguntas relacionadas con la Fase 2 se codificaron 313 segmentos que se agruparon en: (1) *comprensión del problema*, (2) *uso de fórmulas*, (3) *desarrollo del procedimiento*, y (4) *retos* para la concepción de un plan. En la **Tabla 6** se presentan los porcentajes correspondientes a la frecuencia de codificación para la categorización definida para esta fase.

Tabla 6. Resultados de la codificación de la fase 2

Sistema de códigos		Tarea 1		Tarea 2		Tarea 3		Tarea 4	
Nivel 3	**Nivel 2**	**Razón Trigonométrica**		**Gráfica y propiedades**		**Ley de senos**		**Ecuación Trigonométrica**	
Comprensión del Problema	Identificar Datos	90%	9%	100%	6 %	100 %	7%	0%	0%
	Identificar Incógnita	10%		0%		0%		0%	
Uso de Fórmulas	No específico	47%	16%	0%	1 %	27%	44 %	0%	4%
	Usar fórmulas de razones trigonométricas	37%		0%		0%		100%	
	Usar identidades trigonométricas	5%		0%		0%		0%	
	Usar ley de senos y cosenos	5%		100%		73%		0%	
	Usar fórmulas matemáticas de otros contenidos	5%		0%		0%		0%	
Desarrollo del	Tareas no específicas	20%	68%	46%	50 %	58%	25 %	90%	57%

Procedimiento	Tareas específicas	80%		54%		42%		10%	
Retos para la concepción de un plan	Sin respuesta/incompleto	89%	8%	83%	43 %	67%	24 %	80%	39%
	Dificultades	11%		10%		28%		15%	
	Indica requerimientos	0%		7%		6%		5%	

La categoría que presentó una mayor frecuencia de codificación en la comprensión del problema fue *identificar datos* con un 90%. En el *uso de fórmulas* el 47% correspondió a actividades no específicas (como señalar que se deben usar fórmulas de manera general) y el 37% al uso específico de fórmulas trigonométricas. En el *desarrollo del procedimiento* las *tareas específicas* tuvieron la mayor frecuencia con un 80% y en la categoría *retos* las preguntas sin respuesta o incompletas fueron un 89% del total.

5.1.2.1. Análisis de la Fase 2 en la Tarea 1

La categoría con mayor frecuencia de codificación fue *desarrollo del procedimiento con un 68%.* La segunda categoría con mayor frecuencia de codificación en la Tarea 1 fue el *uso de fórmulas* con un 16%. En la Tarea 1 los estudiantes indicaron que era necesario comprender el problema para poder resolverlo, principalmente resaltando la importancia de identificar los datos del problema como indica el estudiante E13-I1 (ver **Figura 15a**). Los estudiantes mencionaron que para resolver el problema era necesario usar fórmulas e indicaron algunas de ellas, como se muestra, por ejemplo, en la **Figura 15b.**

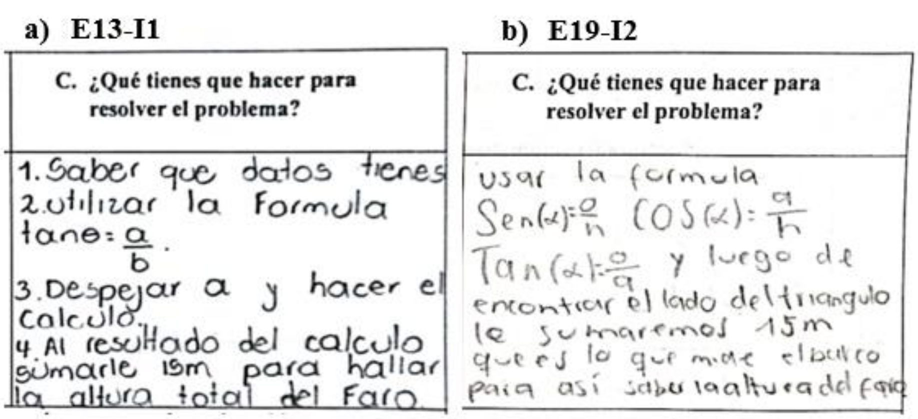


Figura 15. Respuestas de la fase 2 para la Tarea 1

La mayor frecuencia de codificación en esta tarea fue relacionada con el desarrollo del procedimiento. Los estudiantes describieron los pasos necesarios para la resolución del problema con respuestas como las que se presentan en la **Figura 16**. Las descripciones de los estudiantes incluyeron actividades no específicas como hallar la incógnita, realizar procedimientos y usar datos; y actividades específicas como calcular la medida del cateto opuesto y sumar la altura del barco.

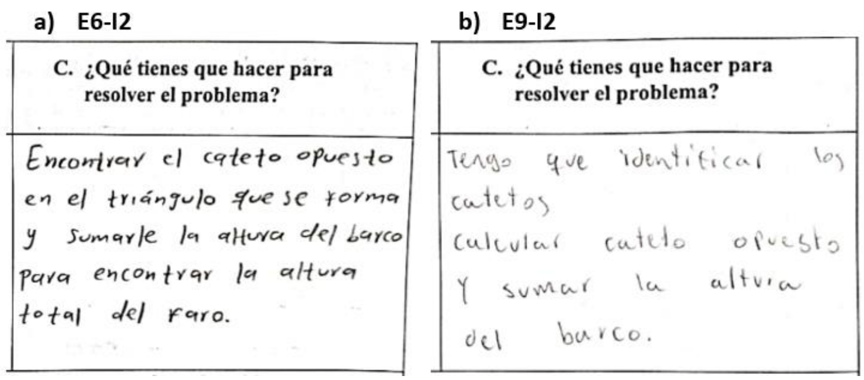


Figura 16. Respuestas de la fase 2 para la Tarea 1

En esta tarea se identificaron menos retos que en las demás tareas. Uno de los retos identificados fue la poca claridad en el paso a paso descrito, como en la respuesta del estudiante E11-I2 (ver **Figura 17a)** que indica correctamente que hay que hallar primero la medida del cateto opuesto, pero no menciona que posteriormente se debe sumar la altura del barco**.** La descripción de procedimientos incorrectos también fue uno de los retos encontrados en la concepción del plan, como en la respuesta del estudiante E14-I1(ver **Figura 17b**) donde indica que debe hallarse el valor de la hipotenusa, lo cual es posible pero innecesario para resolver el problema.

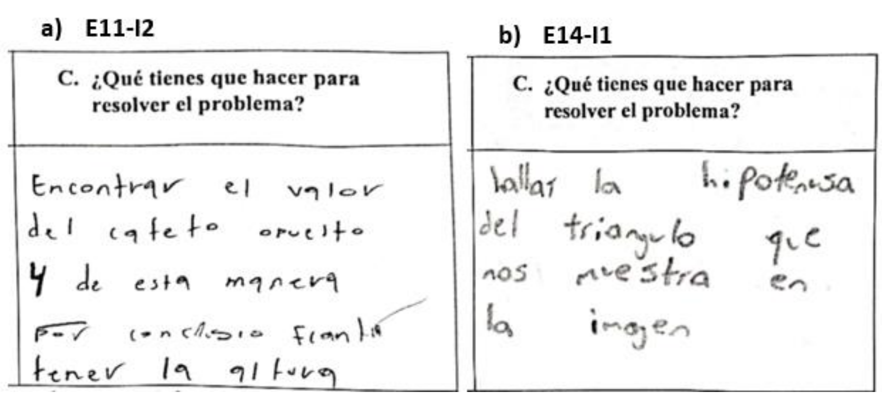
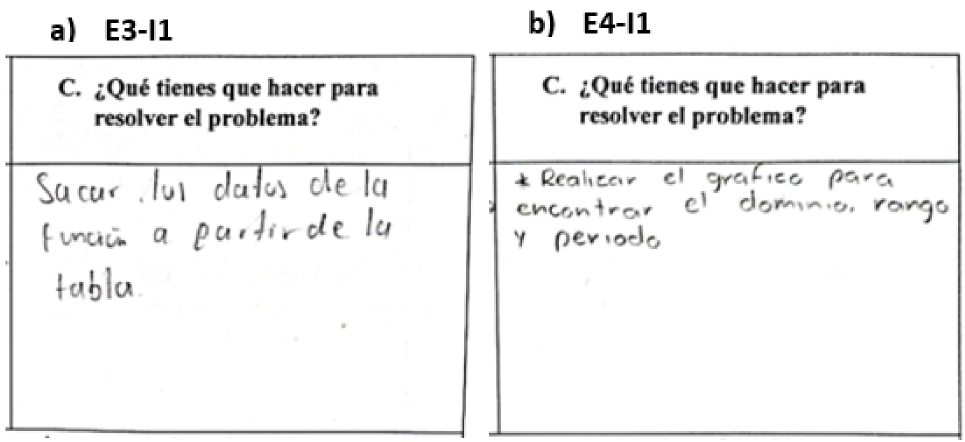


Figura 17. Retos identificados en la Tare 1 en la fase 2

5.1.2.2. Análisis de la Fase 2 en la Tarea 2

En la Tarea 2 se encontró una frecuencia de codificación del 6% donde los estudiantes indicaron que era necesario comprender el problema como primer paso para diseñar el plan de resolución. El uso de fórmulas tuvo la menor frecuencia de codificación en esta tarea con un 1%, lo cual es razonable ya que no era necesario usar fórmulas para resolver el problema.

La descripción del desarrollo del procedimiento fue la categoría con una mayor frecuencia de codificación. Entre las propuestas para la solución del problema los estudiantes propusieron la realización de una tabla con puntos de la función para graficar a partir de ella (**Figura 18a**). En general, los estudiantes propusieron realizar primero la gráfica para obtener el dominio, rango y período a partir de ella (**Figura 18b**). No se encontraron respuestas que indicaran la identificación de las propiedes de la función antes de proceder a graficar.



a) E3-I1

C. ¿Qué tienes que hacer para resolver el problema?

Sacar los datos de la función a partir de la tabla.

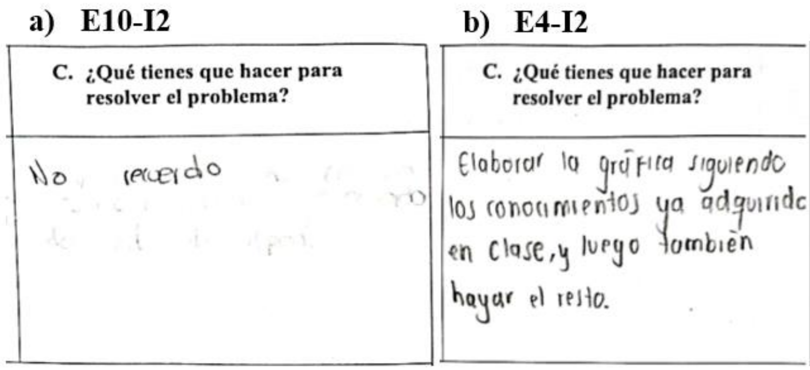
b) E4-I1

C. ¿Qué tienes que hacer para resolver el problema?

* Realizar el grafico para encontrar el dominio, rango y periodo

Figura 18. Respuestas con descripciones del procedimiento en la fase 2 para la Tarea 2

La categoría *retos* presentó la segunda mayor frecuencia de codificación de la Tarea 2 con un 43%. Algunos de los retos que se identificaron fueron nuevamente las preguntas sin respuesta, indicando no saber cómo hacerlo o no recordar el tema como el E10-I2 (ver **Figura 19a)** y respuestas donde más que concebir un plan, se enunció nuevamente la pregunta, como en la respuesta de la E4-I2 (ver **Figura 19b**). La tercera subcategoría de los *retos* fueron los requerimientos para la solución del problema, generalmente con respuestas donde se mencionaba que para resolver el problema primero era necesario saber del tema o saber hacerlo.


a) E10-I2

C. ¿Qué tienes que hacer para resolver el problema?

No recuerdo

b) E4-I2

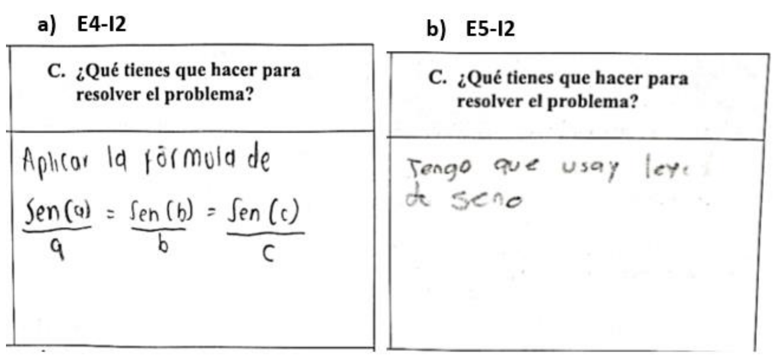
C. ¿Qué tienes que hacer para resolver el problema?

Elaborar la gráfica siguiendo los conocimientos ya adquiridc en clase, y luego también hayar el resto.

Figura 19. Respuesta del estudiante E4-I2 a la fase 2 de la Tarea 2

5.1.2.3. Análisis de la Fase 2 en la Tarea 3

En esta tarea la mayor frecuencia de codificación se encontró en el uso de fórmulas y la descripción del procedimiento con un 44% y 25% respectivamente. En general, la concepción del plan consistió en hacer alusión al uso de la ley del seno, escribiendo la fórmula, tal como lo hace el estudiante E4-I2 (ver **Figura 20a**) o solo nombrándola, como lo hace el estudiante E5-I2 (ver **Figura 20b**).


a) E4-I2

C. ¿Qué tienes que hacer para resolver el problema?

Aplicar la fórmula de

$$\frac{Sen(a)}{a} = \frac{Sen(b)}{b} = \frac{Sen(c)}{c}$$

b) E5-I2

C. ¿Qué tienes que hacer para resolver el problema?

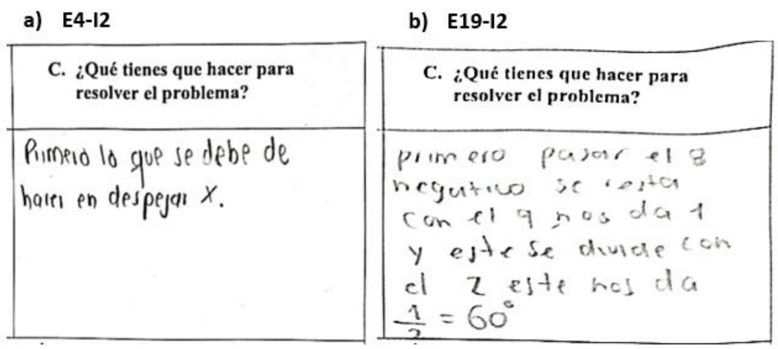
Tengo que usay ley de seno

Figura 20. Respuestas a la fase 2 en la tarea de la Tarea 4

Los retos que se identificaron con mayor frecuencia para esta tarea fueron las respuestas incompletas o en blanco (67%), afirmaciones sobre el desconocimiento del tema (28%) y respuestas indicando que era necesario saber del tema para diseñar el plan (6%).

5.1.2.4. Análisis de la Fase 2 en la Tarea 4

La concepción del plan en la Tarea 4 se concentró en un 57% en la descripción del desarrollo del procedimiento. El diseño del plan de los estudiantes generalmente consistió en mencionar que se requería despejar la incógnita de la ecuación dada. Las descripciones fueron generales como la del E4-I2 (ver **Figura 21a**) o con instrucciones más específicas sobre el despeje como la de la E19-I2 (ver **Figura 21b).**


a) E4-I2

C. ¿Qué tienes que hacer para resolver el problema?

Primero lo que se debe de hacer en despejar X.

b) E19-I2

C. ¿Qué tienes que hacer para resolver el problema?

primero pasar el 8 negativo se resta con el 9 nos da 1 y este se divide con el 2 este nos da $\frac{1}{2} = 60°$

Figura 21. Respuestas de la fase 2 para la tarea 4

La segunda categoría con mayor frecuencia de codificación para esta tarea fue la de *retos.* Los retos que se identificaron con mayor frecuencia para esta tarea fueron las respuestas incompletas, en blanco o afirmaciones sobre el desconocimiento del tema, con una frecuencia de codificación del 80% en la categoría *retos*.

5.1.3 Análisis de la fase 3

En las respuestas a las preguntas relacionadas con la Fase 3 se codificaron 1.227 segmentos que se agruparon en tres grandes temas: (1) identificación de datos, (2) identificación de la pregunta, y (3) retos en la identificación de datos y preguntas.

En la fase 3 lo que los estudiantes hicieron se agrupó en 4 categorías: *identificación de datos y preguntas*, *desarrollo del procedimiento, retos para la ejecución del plan* y *aciertos.* En la

Tabla 7 se presentan las frecuencias correspondientes a esta fase para la categorización definida a partir del proceso de codificación.

La fase de ejecución del plan incluyó más preguntas en el instrumento de recolección de datos que las demás fases, por lo cual la frecuencia de codificación fue más alta. Las preguntas relacionadas con la fase 3 incluyeron el desarrollo del procedimiento, la descripción paso a paso del procedimiento y la respuesta del problema.

Tabla 7. Resultados de la codificación de la fase 3

Sistema de códigos		Tarea 1		Tarea 2		Tarea 3		Tarea 4	
		Razón Trigonométrica		**Gráfica y propiedades**		**Ley de senos**		**Ecuación Trigonométrica**	
Identificación de datos y pregunta	Tareas no específicas	70%	5%	100%	1%	75%	6%	0%	0%
	Tareas específicas	30%		0%		25%		100%	
Desarrollo del procedimiento	Tareas no específicas	54%	60%	41%	24%	81%	53%	71%	38%
	Tareas específicas	46%		59%		19%		29%	
Retos para la ejecución del plan	Sin Respuesta / Incompleto	60%	21%	61%	53%	71%	26%	77%	48%
	Discurso	3%		1%		2%		3%	
	Procedimiento	9%		10%		16%		13%	
	Conceptuales	23%		9%		7%		7%	
	Gráficos	0%		16%		0%		0%	
	No Específicos	5%		1%		3%		0%	
	Requerimientos	0%		1%		0%		0%	
Aciertos	Calcular	86%	14%	66%	23%	92%	15%	91%	14%
	Graficar	9%		34%		6%		0%	
	Descripciones o afirmaciones	5%		0%		2%		9%	

La Tarea 1 y Tarea 3 fueron las que presentaron un menor número de retos y un mayor número de segmentos codificados en el desarrollo del procedimiento. Como se mencionó anteriormente esto puede estar relacionado con una menor cantidad de retos, principalmente preguntas sin respuesta e incompletas. El mayor número de respuestas y desarrollo de procedimientos se presentó en las preguntas donde la solución requería la aplicación directa de fórmulas, lo cual en general representó un menor reto para los estudiantes.

5.1.3.1. Análisis de la Fase 3 en la Tarea 1

El desarrollo de procedimientos fue el tema más frecuente para la Tarea 1, con una frecuencia de 60%. Los estudiantes hicieron procesos más extensos en el desarrollo del procedimiento de esta tarea ya que la solución del problema requería de más pasos que en el de las demás, lo cual explica el aumento de la frecuencia de codificación.

El procedimiento más frecuente para hallar la altura del faro fue el cálculo de la medida del cateto opuesto usando la razón trigonométrica tangente (ver **Figura 22**).

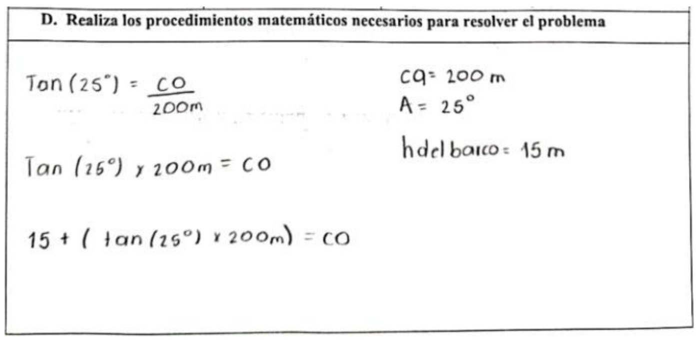


Figura 22. Respuesta del E3-I2 a la fase 3 de la Tarea 2

Algunas soluciones alternativas incluyeron usar ley de senos como el E9-I1 que halla la medida del cateto opuesto de esta forma (ver **Figura 23a**) y el uso del seno y coseno como el E7-I1 que primero usa el coseno para hallar la tangente y luego halla la medida del cateto opuesto reemplazando en la función seno (ver **Figura 23b**). En los 3 casos los estudiantes acertaron al sumar la altura del barco después de hallar la lontiud del cateto opuesto.

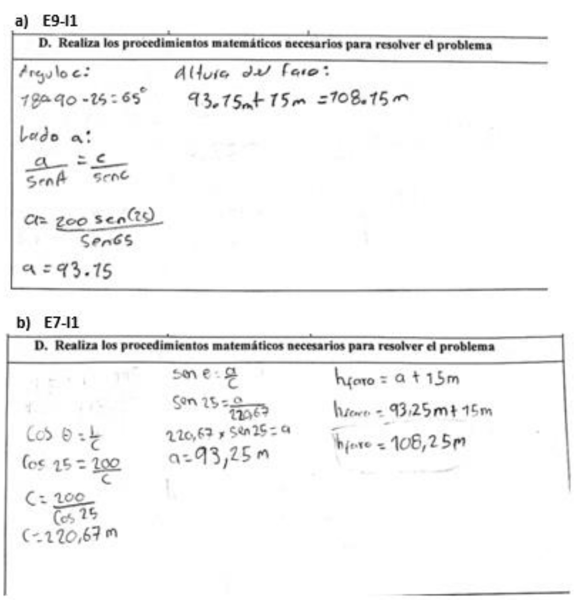


Figura 23. Procedimientos propuestos por los estudiantes para resolver la Tarea 1

La categoría *retos* presentó una frecuencia de codificación del 21%. El reto más frecuente fueron las preguntas sin respuesta o incompletas con una frecuencia de codificación del 60%. El 40% restante fueron retos conceptuales como el identificado en la respuesta del E8-I2 donde usa incorrectamente la tangente sin multiplicar por la medida del cateto adyacente; de procedimiento como el E14-I2 que reemplaza incorrectamente los datos en la fórmula de ley del seno (ver **Figura 24b)**; no específicas como el E12-I1 que menciona que los datos del problema son insuficientes para resolverlo (ver **Figura 24c)** o de discurso como el E6-I2 que en la descripción de su procedimiento menciona el uso de identidades en vez de funciones trigonométricas. (ver **Figura 24d).**

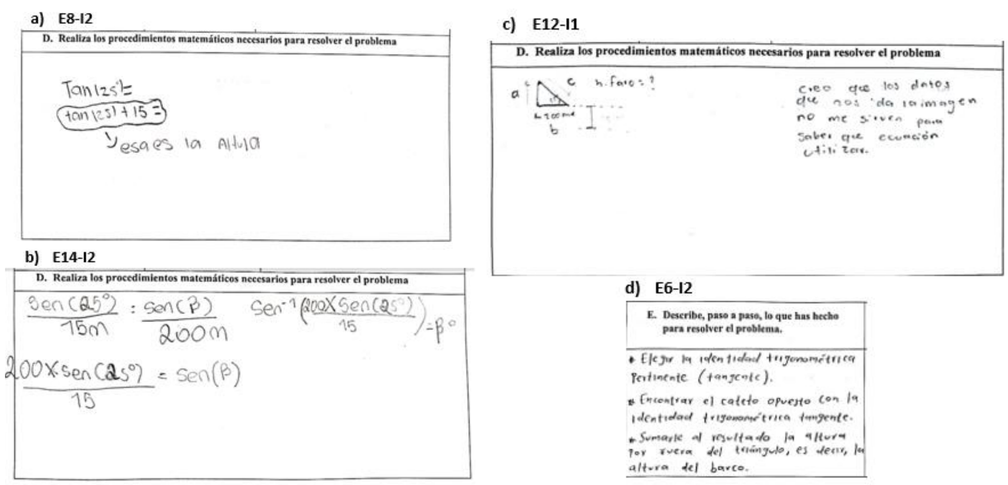


Figura 24. Retos de la Tarea 1 para la fase 3

En la **Figura 25** se presentan las 3 respuestas del E11-I2 para la fase 3. En el desarrollo del procedimiento de este estudiante (ver **Figura 25**) se puede ver que dejó el resultado expresado, lo cual fue un reto que se identificó frecuentemente en otros estudiantes. En las respuestas del E11-I2 también se puede observar que la descripción del paso a paso no corresponde con el procedimiento desarrollado. Esta misma situación se repite con la respuesta a la pregunta del problema, donde aún estudiantes que resolvieron el problema correctamente no dieron respuesta al problema o se identificaron retos en su respuesta. Uno de los retos más frecuentes identificados en la respuesta la pregunta del problema fue la ausencia de palabras y la repetición del procedimiento desarrollado con anterioridad, como en el caso del E11-I2.

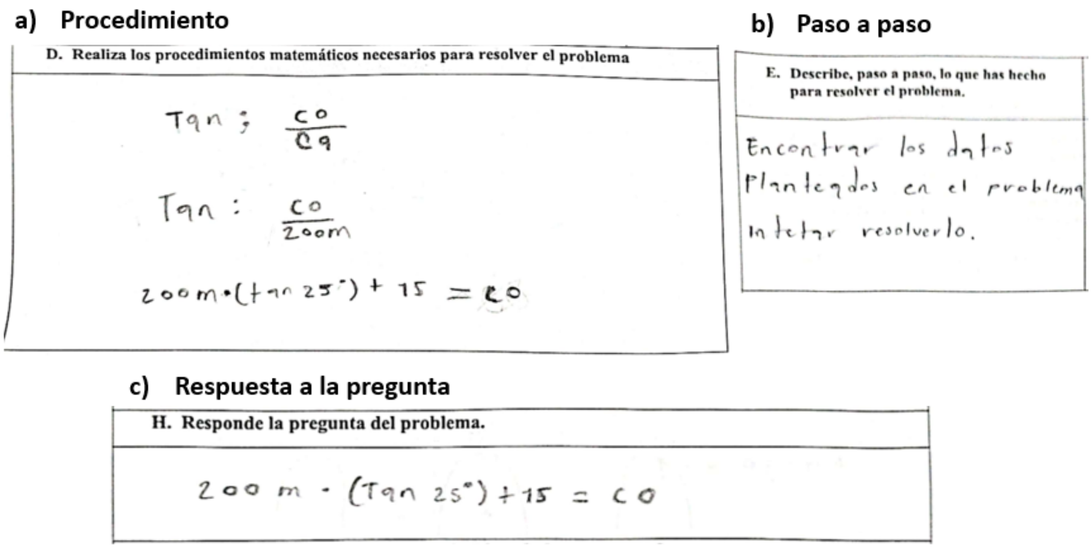


Figura 25. Respuesta a la fase 3 del estudiante E11-I2

5.1.3.2. Análisis de la Fase 3 en la Tarea 2

En la Tarea 2 la categoría *retos* presentó la mayor frecuencia de codificación con un 53% del total. Los estudiantes lograron graficar la forma de la función e identificar las características solicitadas, pero ninguno logró hacer ambas cosas correctamente. Algunos estudiantes se acercaron a la respuesta correcta como el E25-I1 que logró graficar la función e identificar el dominio y el rango (ver **Figura 26**). Se destaca en la respuesta del estudiante el uso de una tabla de datos ya que fue el único que consiguió rotular el eje de las abscisas correctamente. La respuesta del estudiante no se considera completamente correcta y que no halló el período de la función y dio el orden de los valores del rango invertidos.

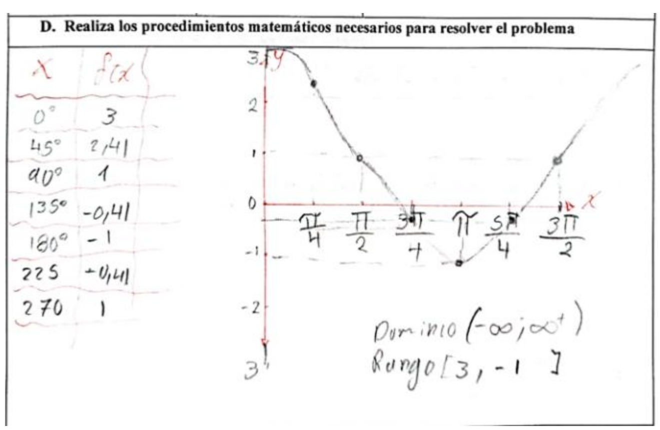


Figura 26. Procedimiento del E25-I1 en la fase 3 de la Tarea 2

Los estudiantes utilizaron notación matemática en todas sus respuestas para indicar los valores del rango y el domingo. El rango de la función fue indicado usando dos notaciones diferentes: (-∞, +∞) o ℝ.

En el desarrollo del procedimiento frecuentemente los estudiantes graficaron funciones sinusoidales como la que se presenta en la **Figura 27** sin tener en cuenta la función dada en el enunciado del problema. En este caso el E15-I2 identifica correctamente el dominio y el rango de la función que graficó, pero la gráfica no coincide con la función indicada en el problema.

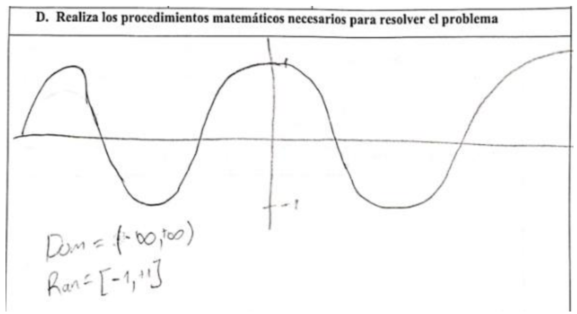


Figura 27. Función sinusoidal graficada por el E15-I2 en la fase 3 de la tarea 2

Algunos estudiantes identificaron la forma de la función Cos(x) y, a partir de esta, modificaron la amplitud y trasladaron las gráficas según el coeficiente y el término independiente, respectivamente. Un ejemplo de este proceso de transformación de la función Cos(x) se presenta en **Figura 28** donde el E5-I2 realiza los procedimientos descritos anteriormente para presentar la gráfica solicitada. Un reto identificado en la solución de este estudiante fue la inversión del orden del rango, lo cual se asoció con un reto conceptual que el estudiante tiene por mejorar.

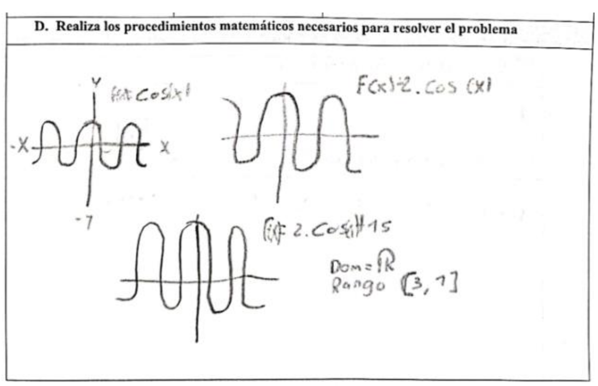


Figura 28. Transformación de la función Cos(x) por el E5-I2 en la Tarea 2

La mayor frecuencia de codificación de los retos fueron las preguntas sin respuesta e incompletas con un 61%, seguido de los retos relacionados con el gráfico con un 16%. En los retos relacionados con el gráfico la falta de rotulación o la rotulación incorrecta de los ejes de coordenadas fue uno de los retos más frecuentes que se identificó, especialmente del eje de las abscisas.

En la **Figura 29** se presenta un ejemplo del reto mencionado anteriormente en la rotulación del eje de las abscisas. El E3-I2 realiza la gráfica e identifica correctamente los elementos de la función, pero se identifica un reto relacionado con la rotulación del eje horizontal. El E3-I2 hace la anotación de que el plano está en radianes, pero aun así la rotulación no coincide con el desarrollo de la función en el plano. También en este estudiante se presentó el *reto* de la inversión en el orden de los valores del rango.

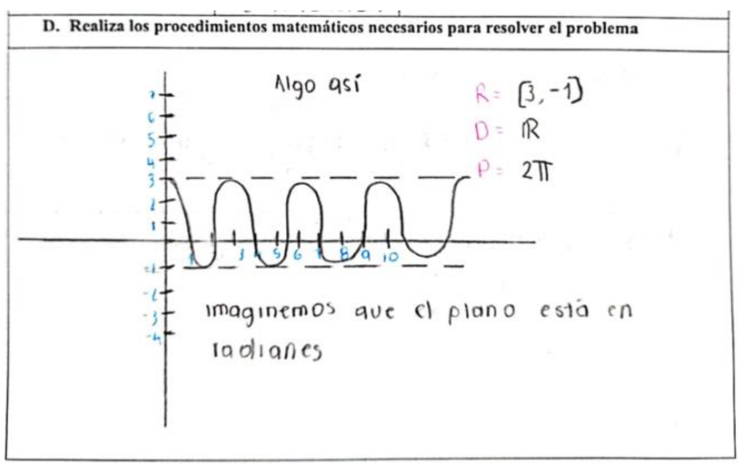
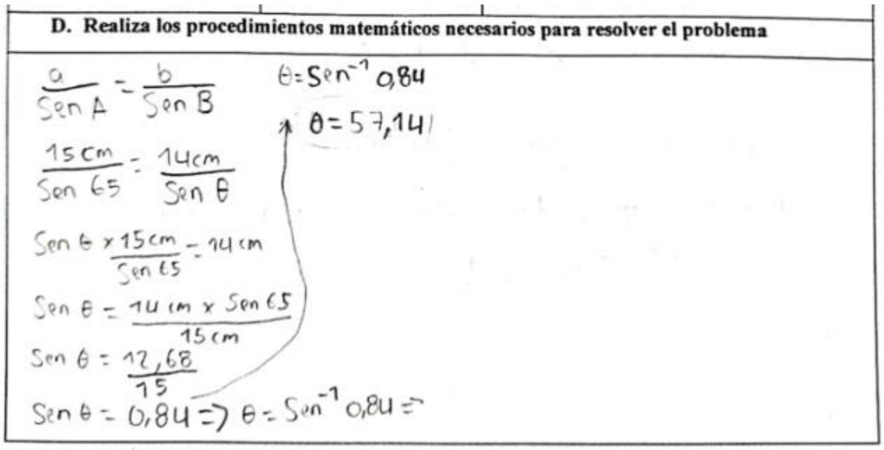


Figura 29. Respuesta de la E3-I2 a la Tarea 2 en la fase 3

5.1.3.3. Análisis de la Fase 3 en la Tarea 3

La mayor frecuencia de codificación en la Tarea 3 se presentó en el *desarrollo del procedimiento* con un 53% del total. La segunda categoría con mayor frecuencia de codificación fue la de *retos* con un 26%.

Los estudiantes que resolvieron el problema realizaron procedimientos similares al del E7-I1, indicando la fórmula que debía usarse, reemplazando los datos y despejando el ángulo faltante como se presenta en la **Figura 30**. En general los estudiantes reemplazaron los datos del problema en la ecuación antes de despejar. En el proceso de despejar la incógnita los estudiantes escribieron el paso a paso indicando cada una de las operaciones que iban haciendo (ver **Figura 30**).



D. Realiza los procedimientos matemáticos necesarios para resolver el problema

$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{b}{Sen\ B}$

$\frac{15\ cm}{Sen\ 65} = \frac{14cm}{Sen\ \theta}$

$Sen\ \theta \times \frac{15cm}{Sen\ 65} = 14\ cm$

$Sen\ \theta = \frac{14\ cm \times Sen\ 65}{15\ cm}$

$Sen\ \theta = \frac{12,68}{15}$

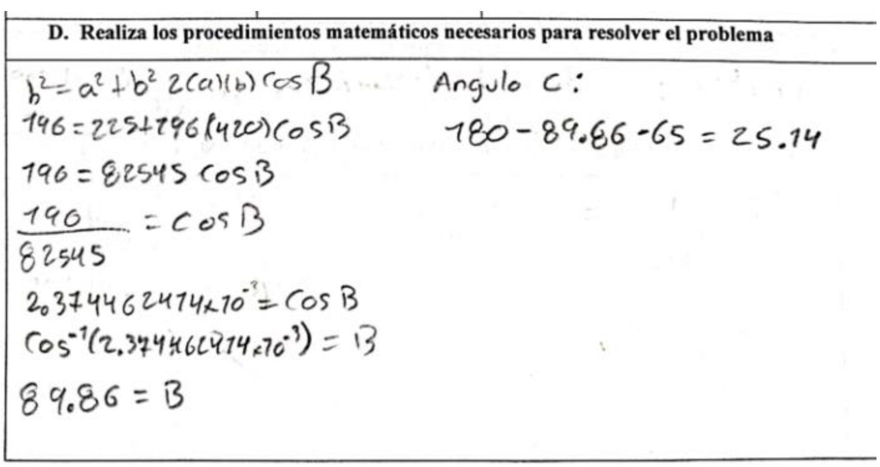
$Sen\ \theta = 0,84 \Rightarrow \theta = Sen^{-1}\ 0,84 \Rightarrow$

$\theta = Sen^{-1}\ 0,84$

$\theta = 57,14$

Figura 30. Procedimiento del E7-I1 en la fase 3 de la Tarea 3

Un reto que se identificó en la respuesta de múltiples estudiantes fue la selección entre la ley del seno y la del del coseno. Los estudiantes que intentaron resolver el ejercicio utilizando la ley del coseno llegaron a resultados incorrectos como el del E14-I1 (ver **Figura 31**).



D. Realiza los procedimientos matemáticos necesarios para resolver el problema

$b^2 = a^2 + b^2\ 2(a)(b)\cos B$

$196 = 225 + 196(420)\cos B$

$196 = 82545\cos B$

$\frac{190}{82545} = \cos B$

$2,374462474 \times 10^{-?} = \cos B$

$\cos^{-1}(2,374462474 \times 10^{-3}) = B$

$89.86 = B$

Angulo C:

$180 - 89.86 - 65 = 25.14$

Figura 31. Procedimiento propuesto por el E14-I1 para la Tarea 3 utilizando la ley del coseno

Los procedimientos que condujeron a respuestas incorrectas incluyeron procedimientos como el que se presenta en la **Figura 32** donde el E14-I2 inicialmente encuentra incorrectamente el valor de uno de los ángulos internos y a partir de este halla el ángulo faltante, lo cual conduce también a un resultado incorrecto. En este caso no hay claridad sobre la manera en la que el estudiante resuelve usando la ley del seno ya que su planteamiento incluye dos variables y una única ecuación.

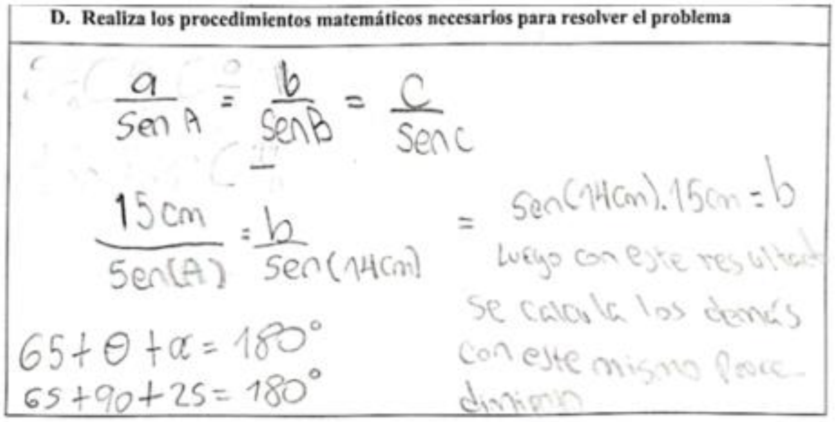


Figura 32 .Respuesta del E14-I2 a la Tarea 3 en la fase 3

5.1.3.4. Análisis de la Fase 3 en la Tarea 4

Los estudiantes que lograron resolver la Tarea 4 siguieron procedimientos muy similares despejando la x de la función dada, resolviendo y convirtiendo el resultado a radianes. En la **Figura 33a** y **Figura 33b** se presenta el procedimiento del E3-I2 y del E6-I2, los cuales siguen procedimientos casi idénticos.

El 33% de los estudiantes que lograron resolver la ecuación trigonométrica dieron el resultado en grados y radianes a pesar de que el enunciado no lo solicitaba. La conversión de grados a radianes la hicieron utilizando regla de 3 con procedimientos similares a los de la E3-I2 (ver **Figura 33a**) y la E6-I2 (ver **Figura 33b).**

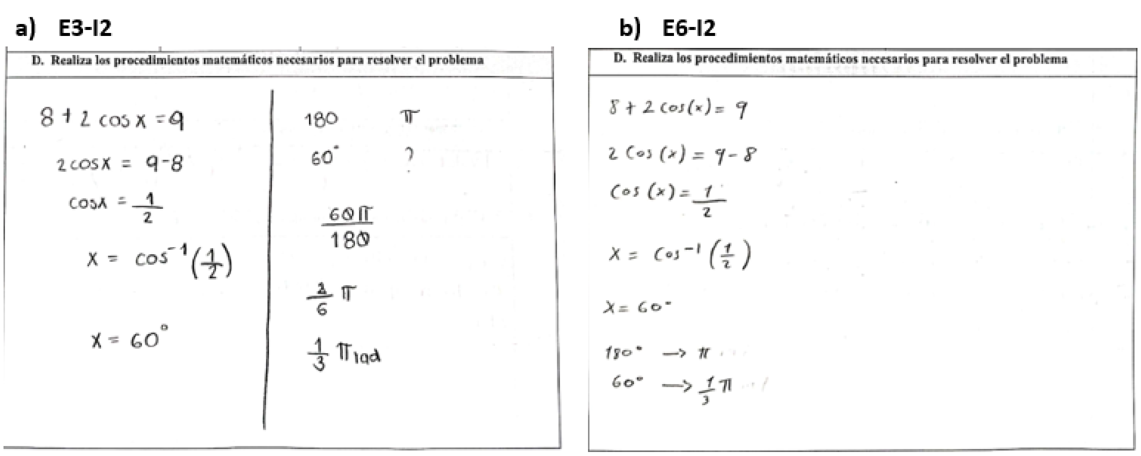
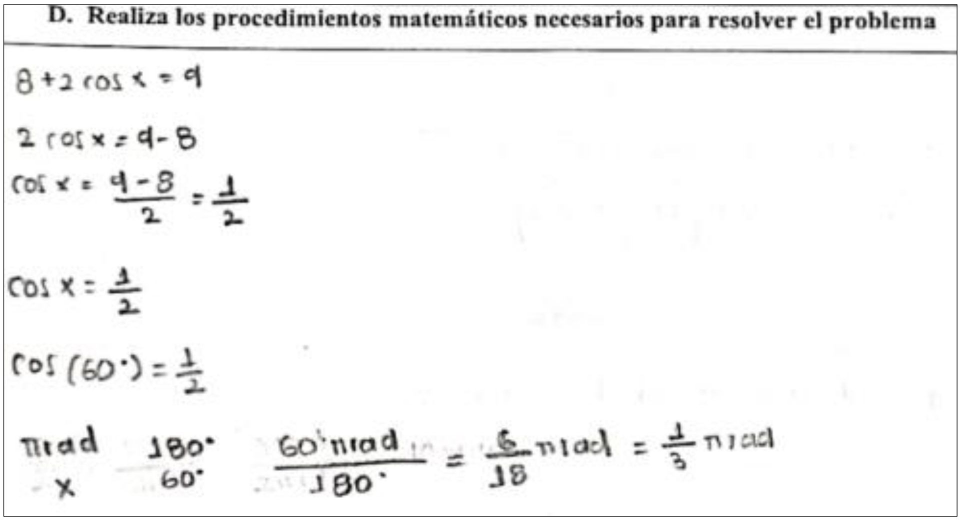


Figura 33. Procedimiento de la E24-I2 en la fase 3 de la Tarea 4

Algunos estudiantes como la E24-I2 utilizaron la tabla de ángulos notables incluida al comienzo del cuestionario para hallar el ángulo sin usar coseno inverso (ver **Figura 34**).


D. Realiza los procedimientos matemáticos necesarios para resolver el problema

$8+2\cos x = 9$

$2\cos x = 9-8$

$\cos x = \frac{9-8}{2} = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{2}$

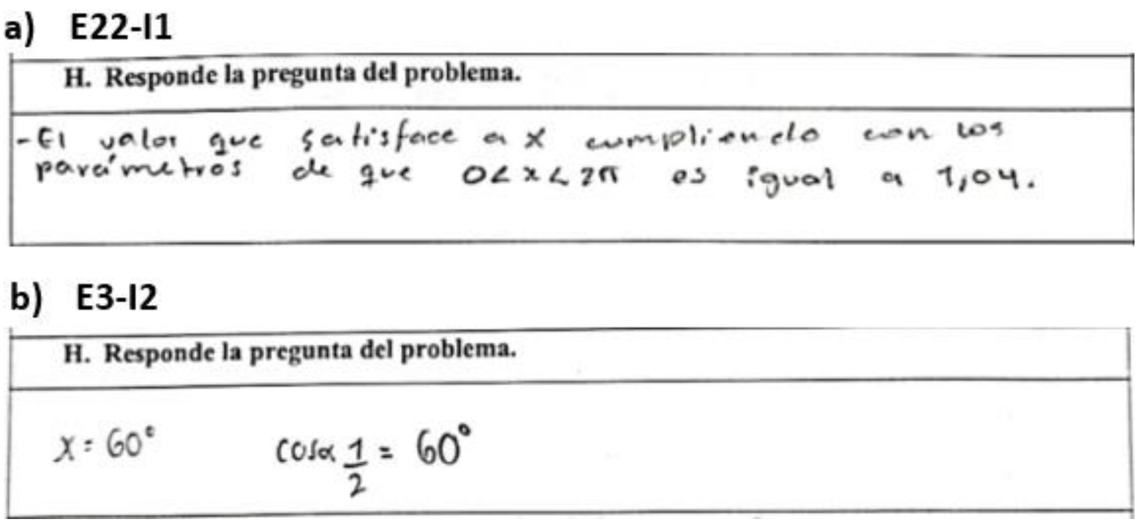
$\cos(60°) = \frac{1}{2}$

$\pi rad \quad 180° \qquad \frac{60°\pi rad}{180°} = \frac{6}{18}\pi rad = \frac{1}{3}\pi rad$

$x \quad 60°$

Figura 34. Conversión a radianes en la fase 3 de la Tarea 4

Las respuestas del problema incluyeron enunciados completos como el del E22-I1 (ver **Figura 35a)** y respuestas sin palabras como la del E3-I2 (ver **Figura 35b).**


a) E22-I1

H. Responde la pregunta del problema.

-El valor que satisface a x cumpliendo con los parámetros de que $0 < x < 2\pi$ es igual a 1,04.

b) E3-I2

H. Responde la pregunta del problema.

$x = 60°$ $\quad \cos\alpha \frac{1}{2} = 60°$

Figura 35. Respuestas a la pregunta del problema en la Tarea 4

El 77% de los retos en esta tarea fueron las preguntas sin respuesta o con respuestas incompletas. El 23% restante de los retos estuvo asociado a dificultades en el procedimiento (13%) como en el caso del E22-I1 que realiza todo el proceso de despeje correctamente pero resuelve incorrectamente el coseno inverso (ver **Figura 36a)** ; conceptuales (7%) como el E14-I2 que no despeja x usando coseno inverso y reemplaza el resultado de Cos(x) en el intervalo de solución (ver **Figura 36b)**; o de discurso (3%) como el E6-I2 que afirma que x toma el valor de π/3 en lugar de que este valor es el que satisface la ecuación del problema (ver **Figura 36c)**.

Los retos identificados en el *desarrollo del procedimiento* incluyeron errores en el proceso de despejar la incógnita, uso de la calculadora y uso del coseno inverso para finalmente obtener el ángulo.

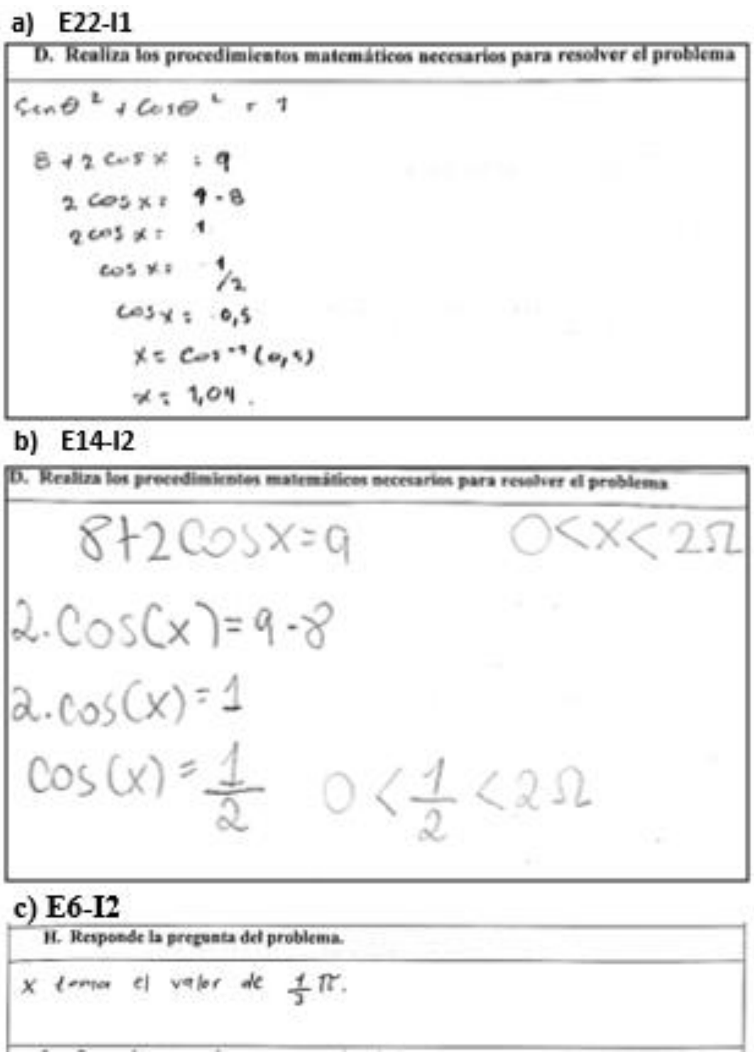


Figura 36. Retos en la fase de la Tarea 4

5.1.4 Análisis de la Fase 4

En las respuestas a las preguntas relacionadas con la Fase 4 se codificaron 477 que se agruparon en tres grandes temas: (1) *verificación,* (2) *desarrollo del procedimiento*, (3) *retos* y (4) *aciertos*. En la

Tabla 8 se presentan las frecuencias correspondientes a esta fase para la categorización definida a partir del proceso de codificación.

Tabla 8*.* Resultados de la codificación de la fase 4.

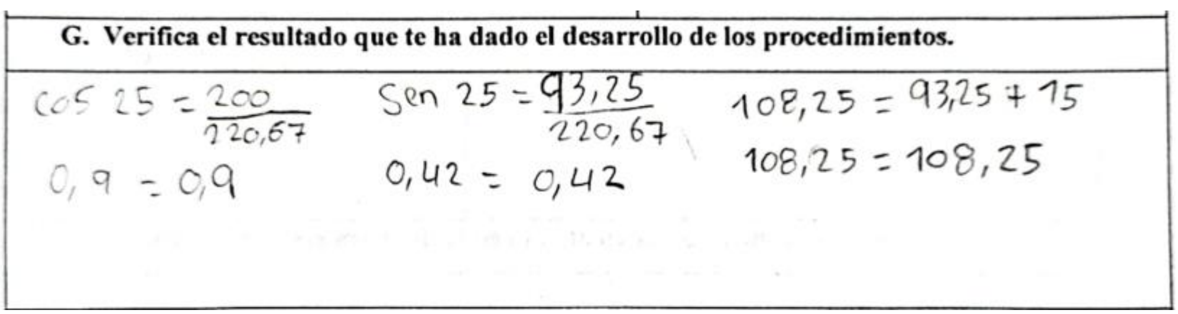
Sistema de códigos		**Tarea 1**		**Tarea 2**		**Tarea 3**		**Tarea 4**	
		Razón Trigonométrica		**Gráfica y propiedades**		**Ley de senos**		**Ecuación Trigonométrica**	
Retos	Sin Respuesta/Incompleto	84%	43%	86%	66%	84%	50 %	88%	65%
	Dificultades	16%		14%		16%		12%	
Aciertos	Respuesta	80%	28%	27%	19%	100 %	18 %	100%	13%
	Procedimiento	20%		73%		0%		0%	
Verificación	Reemplazar Fórmulas	3%	22%	0%	13%	0%	24 %	0%	22%
	Graficar	0%		47%		0%		0%	
	Calcular	55%		13%		43%		35%	
	No Específicas	19%		7%		21%		22%	
	Comentarios sobre la verificación	23%		33%		36%		43%	
Desarrollo Procedimiento	Tareas Específicas	33%	6%	67%	3%	50%	9%	0%	0%
	Tareas No Específicas	67%		33%		50%		0%	

Las preguntas asociadas a esta fase fueron 2: responde la pregunta del problema y verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos. La primera de estas preguntas también fue incluida en la fase 3 por lo cual el análisis se centrará solo en la pregunta sobre la verificación del procedimiento

El elevado número de preguntas sin respuesta o incompletas en esta fase corresponde además de los retos en la verificación misma, a la ausencia de procedimiento en las preguntas anteriores, lo cual impedía a los estudiantes hacer la verificación del mismo.

5.1.4.1. Análisis de la Fase 4 en la Tarea 1

En la fase de la Tarea 1 los estudiantes respondieron en repetidas ocasiones haber verificado el resultado en la calculadora o haber revisado su procedimiento. En la **Figura 37** se presenta la respuesta del E7-I1 quien utilizó el valor de algunas de las distancias que calculó en su procedimiento y los datos del problema para verificar las razones trigonométricas del triángulo, lo cual es una propuesta alternativa de verificación que fue también utilizada por otros estudiantes.

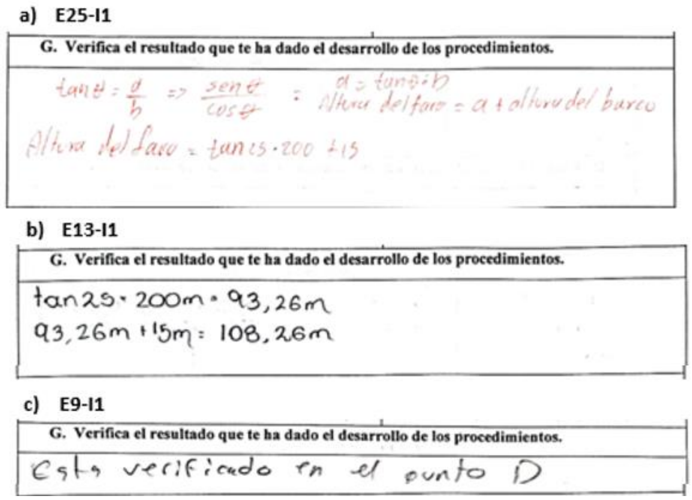

G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.

$\cos 25 = \frac{200}{220,67}$ $\quad$ $\text{Sen } 25 = \frac{93,25}{220,67}$ $\quad$ $108,25 = 93,25 + 15$

$0,9 = 0,9$ $\quad$ $0,42 = 0,42$ $\quad$ $108,25 = 108,25$

Figura 37. Verificación propuesta por el E7-I1 en la Tarea 1

Los estudiantes que respondieron la pregunta de la verificación en la tarea 4 generalmente repitieron el procedimiento que habían desarrollado previamente, mencionan haber revisado nuevamente el procedimiento o simplemente refieren el procedimiento desarrollado anteriormente como la misma verificación. En la **Figura 38a** el E25-I1 escribe nuevamente el procedimiento que había desarrollado en la fase 3 y el E13-I1 (ver **Figura 38b**) también escribe nuevamente el mismo procedimiento desarrollado con anterioridad. Algunos estudiantes mencionaron que el procedimiento en sí mismo era la verificación como el E9-I1 (ver **Figura 38c**) que refiere al punto D (desarrollo del procedimiento) como respuesta a la pregunta de verificación.


a) E25-I1

G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.

$\tan\theta = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{sen\,\theta}{\cos\theta} = a = \tan\theta \cdot b$ Altura del faro = a + altura del barco

Altura del faro = tan 15 · 200 + 15

b) E13-I1

G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.

tan25 · 200m · 93,26m

93,26m + 15m = 108,26m

c) E9-I1

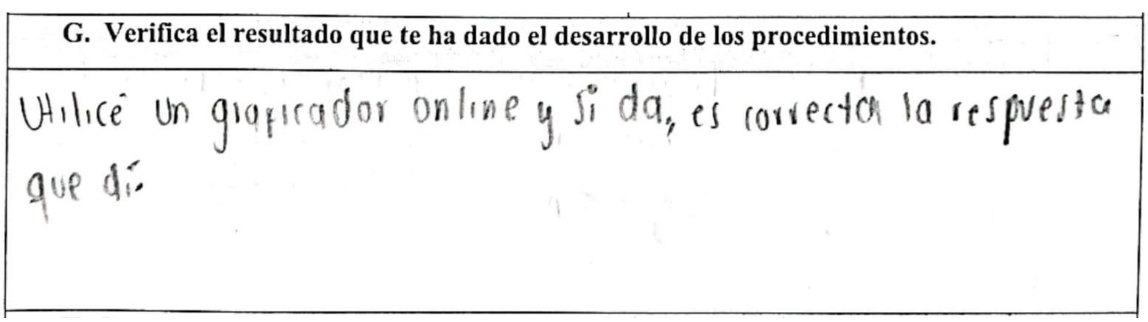
G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.

Esta verificado en el punto D

Figura 38. Verificación del procedimiento desarrollado en la Tarea 1

5.1.4.2. Análisis de la Fase 4 en la Tarea 2

La tarea de la gráfica y sus propiedades tuvo la mayor frecuencia de codificación de la fase 4.. En esta tarea la mayoría de estudiantes no respondieron, manifestaron que no era posible verificar, no tenían los implementos necesarios o no sabían hacerlo. Solo algunos estudiantes de la institución 2 afirmaron haber verificado su procedimiento en un graficador online, como la E4-I2 (ver **Figura 39**).


G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.

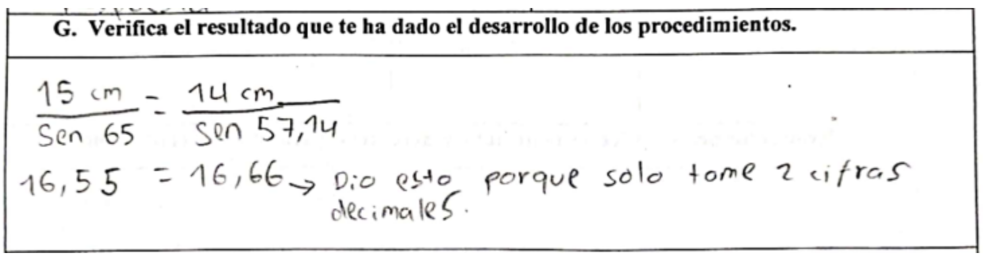
Utilicé un graficador online y sí da, es correcta la respuesta que dí

Figura 39. Respuesta de la E4-I2 a la fase 4 de la Tarea 2

En el desarrollo del procedimiento algunos estudiantes utilizaron una tabla de valores para el proceso de graficación, como se presentó anteriorente en el analisis de la fase 3 (ver **Figura 26**). Sin embargo en el proceso de verificación ningún estudiante encontró puntos de la función para comprobar que su gráfica correspondiera. Algunos estudiantes mencionaron que su proceso de verificación había consistido en revisar nuvamente la gráfica que habían propuesto en la pregunta D.

5.1.4.3. Análisis de la Fase 4 en la Tarea 3

La verificación de la Tarea 3 se facilitó ya que solo requería reemplzar el resultado en la fórmula de la ley del seno y verificar la igualdad. En la **Figura 40** se presenta la verificación del E26-I1, el cual reemplazó su resultado y los datos del problema en la fórmula de la ley del seno y comprobó que esu solución era correcta ya que se cumplía la igualdad.


G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.

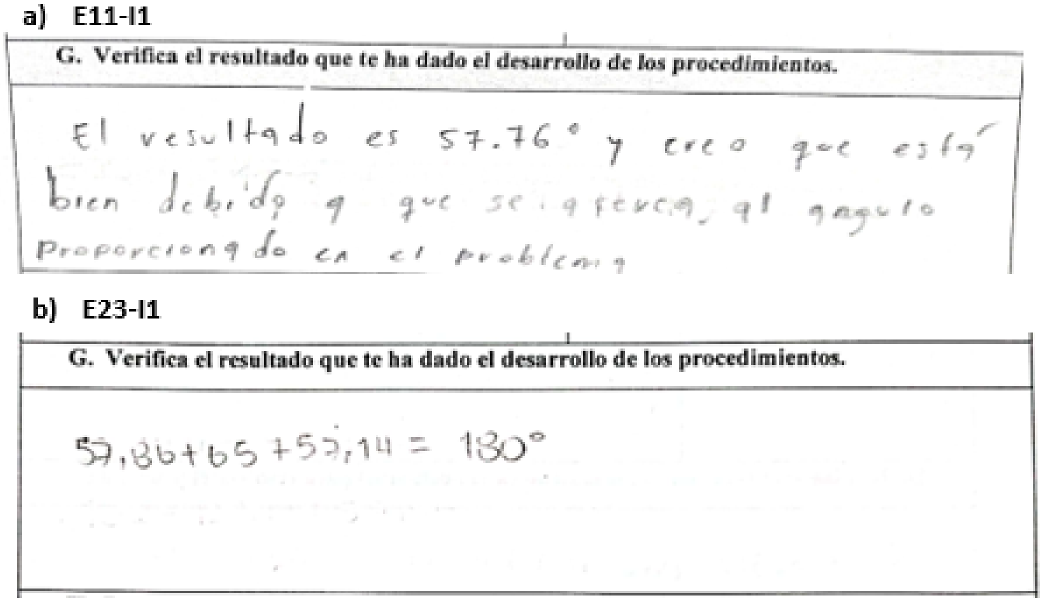
$$\frac{15\text{ cm}}{\text{Sen } 65} = \frac{14\text{ cm}}{\text{Sen } 57{,}14}$$

$16{,}55 = 16{,}66 \rightarrow$ Dio esto porque solo tome 2 cifras decimales.

Figura 40. Verificación de la Tarea 3 propuesta por el estudiante E26-I1

En la tarea de la ley del seno los estudiantes también repitieron nuevamente el procedimiento que habían realizado anteriormente o mencionaron que habían verificado su resultado en la calculadora. Debido a que la longitud de los dos lados del triángulo del problema tenía medidas similares y el dibujo estaba a escala, era razonable que los ángulos internos tuvieran un valor similar cercano a 60°. En la **Figura 41a** se puede observar que el E11-I1 hizo uso de lo anteriormente mencionado para su verificación, lo cual no permite encontrar el valor exacto del ángulo, pero si verificar que el resultado encontrado sea un valor razonable.

Un método de verificación alternativo fue propuesto por estudiantes como el E23-I1 que encontró ambos ángulos faltantes y verificó que la suma de los ángulos internos diera 180° (ver **Figura 41b)**.


a) E11-I1

G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.

El resultado es 57.76° y creo que esta bien debido a que se acerca al angulo proporcionado en el problema

b) E23-I1

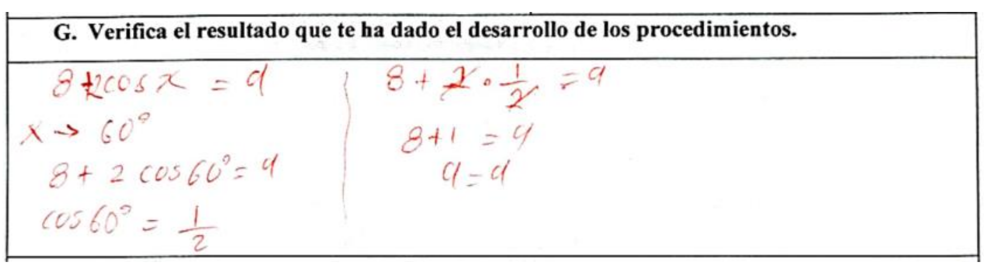
G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.

57,86+65+57,14 = 180°

Figura 41. Verificación de la Tarea 3 por el E11-I1 y el E23-I1

5.1.4.4. Análisis de la Fase 4 en la Tarea 4

Los estudiantes que lograron desarrollar el procedimiento y encontrar una respuesta en general no lograron verificar el resultado. Algunos estudiantes respondieron a esta pregunta únicamente verificando que su resultado estuviera en el intervalo de solución propuesto en el enunciado del problema A pesar de que la pregunta permitía verificarse directamente reemplazando el resultado en la ecuación, fueron pocos los estudiantes que proporcionaron respuestas como las del E25-I1 (ver **Figura 42**).


G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.

$8+2\cos x = 9$

$x \to 60°$

$8+2\cos 60° = 9$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$

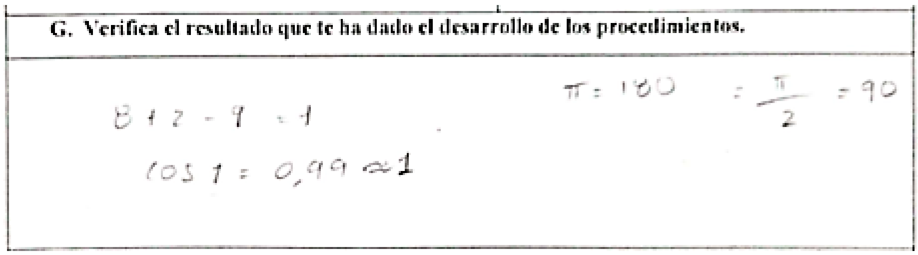
$8+\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = 9$

$8+1 = 9$

$9 = 9$

Figura 42. Verificación del procedimiento en la Tarea 1 por el E25-I1

Los estudiantes respondieron frecuentemente a la verificación realizando nuevamente el mismo procedimiento que habían hecho anteriormente. En general las respuestas de este tipo no permitieron encontrar errores en el procedimiento, como en el caso de E19-I1 que a pesar de haber propuesto un procedimiento incorrecto no logra identificar su error durante la verificación (ver **Figura 43**). Si bien volver sobre el procedimiento y los cálculos desarrollados puede servir para identificar errores, el uso de métodos alternativos que permitan contrastar el resultado puede ser también efectivo para identificar errores en el procedimiento.


G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.

$8 + 2 - 9 = 1$

$\cos 1 = 0{,}99 \approx 1$

$\pi = 180 \quad = \frac{\pi}{2} = 90$

Figura 43. Respuesta de la E19-I1 a la pregunta de verificación de la Tarea 4

5.2 Análisis para el objetivo 2

Los resultados relacionados con el conocimiento movilizado por los estudiantes sobre Trigonometría fueron obtenidos a partir de la codificación y categorización del procedimiento de los estudiantes en cada tarea con base en los modelos descritos en el Marco Conceptual. Se utilizó la herramienta visual Matriz de relación de códigos y la herramienta de análisis Búsqueda compleja de codificaciones para extraer las tablas de frecuencia correspondientes del software MAXQDA. El análisis de los resultados obtenidos en trigonometría se hizo para cada uno de los niveles de conocimiento matemático y de comprensión en relación con las respectivas tareas.

5.2.1. Análisis de niveles de conocimiento

Los resultados obtenidos son congruentes con la trayectoria propuesta en el modelo ya que el 66% de los estudiantes demostró suficiencia en este primer nivel (ver **Tabla 9**). A pesar de que el modelo contempla un mayor nivel de dificultad para el conocimiento TCU que para el TT, la Tarea 3 requería un dominio básico de los ángulos, lo cual explica por qué el mismo porcentaje de estudiantes alcanzaron ambos niveles. El *Conocimiento GFT* requiere del manejo de distancias y ángulos en variación, lo cual requiere un mayor nivel de conocimiento que permite explicar el menor porcentaje de estudiantes que demostraron el dominio de este nivel en comparación con los dos anteriores.

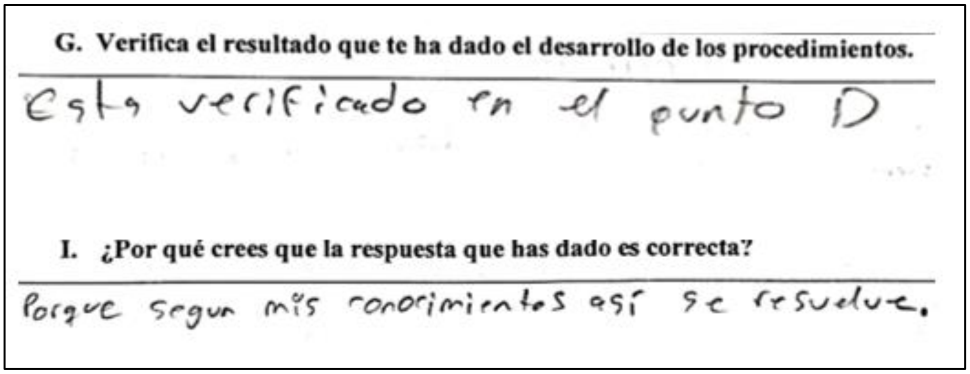
Tabla 9. Resultados del nivel de conocimiento matemático

Nivel de Conocimiento Matemático	**Tarea 1**	**Tarea 2**	**Tarea 3**	**Tarea 4**
	Razón Trigonométrica	**Gráfica y propiedades**	**Ley de senos**	**Ecuación Trigonométrica**
Trigonometría Triángulos (TT)	33	0	0	0
Trigonometría del Círculo Unitario (TCU)	0	0	33	23
Gráfica de Funciones Trigonométricas (GFT)	0	16	0	0
Datos Insuficientes / No responde	17	34	17	27

La trayectoria de aprendizaje propuesta en el modelo ubica al *Conocimiento de Trigonometría de Triángulos* (TT) como el primer nivel de conocimiento de la trigonometría ya que solo involucra distancias. La Tarea 1 se relacionó con el conocimiento de la trigonometría de triángulos debido a que su resolución implicaba conocer de razones trigonométricas y las aplicaciones del seno y coseno para ángulos agudos

El nivel de comprensión que demostraron los estudiantes fue en un 66% instrumental. Las respuestas de los estudiantes dan cuenta de la capacidad de usar las razones trigonométricas como herramientas para resolver problemas principalmente usando definiciones y fórmulas. Sin embargo, los datos también dan cuenta del desconocimiento de las razones subyacentes detrás del procedimiento que ejecutan, el cual se manifiesta por ejemplo en los retos al verificar el resultado o argumentar sus procedimientos.

En la **Figura 44** se presentan las respuestas del E9-I1 a las preguntas de verificación y la argumentación del procedimiento. En la primera respuesta el estudiante remite al punto D (desarrollo del procedimiento), lo cual sugiere que desconoce métodos alternativos de solución que le permitan comprobar su resultado. La segunda respuesta también permite inferir que el estudiante desconoce las razones subyacentes detrás del procedimiento que utilizó.


G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.

Esta verificado en el punto D

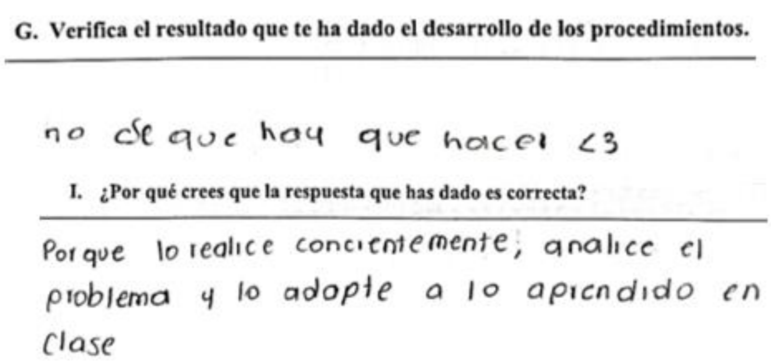
I. ¿Por qué crees que la respuesta que has dado es correcta?

Porque segun mis conocimientos así se resuelve.

Figura 44. Respuestas del E9-I1

La trayectoria de aprendizaje propuesta en el modelo ubica al *Conocimiento del Círculo Unitario* (TCU) como el segundo nivel de conocimiento. La Tarea 3 se asoció a este nivel ya que su resolución implicaba el uso de ángulos y distancias. El 66% de los estudiantes demostró un dominio de este tipo de conocimiento.

El nivel de comprensión que demostraron los estudiantes fue en un 66% instrumental. Las respuestas de los estudiantes dan cuenta de la capacidad de usar fórmulas y algoritmos como herramientas para la resolución de problemas. La comprensión de las razones detrás de la fórmula de la ley del seno fue un reto que llevó a los estudiantes a dar respuestas como las de la E3-I2 (ver **Figura 45**) que a pesar de haber resuelto correctamente el problema, no logra verificar el resultado. La justificación de su procedimiento también reafirma el nivel instrumental del conocimiento de la estudiante ya que no hace referencia al conocimiento matemático en sí.


G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.

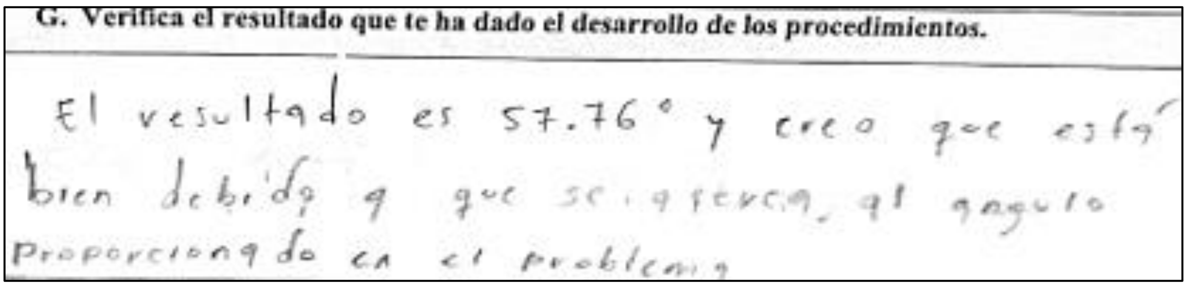
no se que hay que hacer <3

I. ¿Por qué crees que la respuesta que has dado es correcta?

Porque lo realice concientemente, analice el problema y lo adopte a lo aprendido en clase

Figura 45. Respuestas de la E3-I2 a la verificación y justificación de la Tarea 3

El razonamiento del estudiante E11-I1 permite inferir un nivel de conocimiento relacional en la verificación de la Tarea 3 (ver **Figura 46**). Como se comentó anteriormente, debido a que la longitud de los dos lados del triángulo del problema tenía medidas similares y el dibujo estaba a escala, era razonable que los ángulos internos tuvieran un valor similar cercano a 60°. Sin embargo, el resultado del estudiante no fue correcto y su afirmación tampoco aduce el argumento anteriormente mencionado de manera explícita, por lo cual se descartó el nivel relacional en su respuesta.


G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.

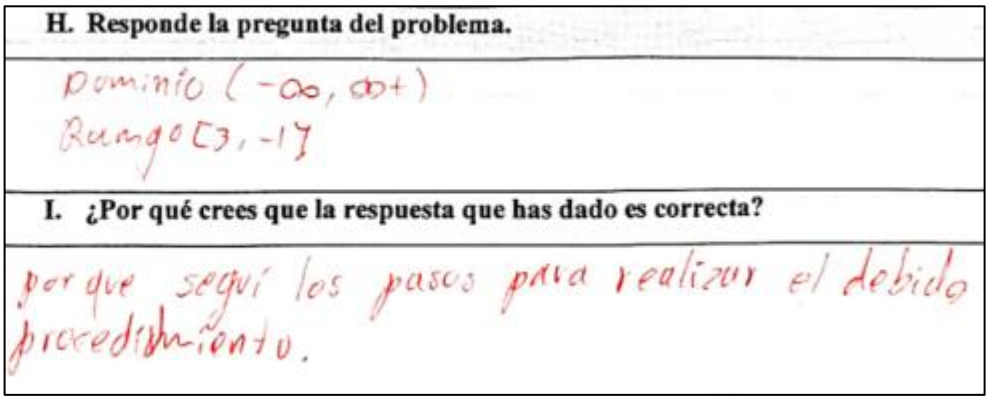
El resultado es 57.76° y creo que esta bien debido a que se acerca al angulo proporcionado en el problema

Figura 46. Respuesta del E11-I1 a la verificación de la Tarea 3

La trayectoria de aprendizaje propuesta en el modelo ubica al *Conocimiento de la Gráfica de Funciones Trigonométricas* (TCU) como el tercer nivel de conocimiento. La Tarea 2 se asoció a este nivel ya que su resolución requería el uso de las gráficas de seno y coseno, el concepto de dominio, rango y periodicidad. El 32% de los estudiantes demostró un dominio de este tipo de conocimiento.

Los estudiantes demostraron un nivel de comprensión instrumental en el dominio del *Conocimiento GFT.* Los estudiantes no demostraron mayores niveles de comprensión ya que como se mencionó anteriormente, lograron graficar la forma de la función e identificar las características solicitadas, pero ninguno logró hacer ambas cosas correctamente. La verificación y justificación de los procedimientos también dio cuenta del nivel de dominio de la gráfica del seno solo como una herramienta para resolver problemas mediante la memorización de conceptos y repetición de algoritmos.

En la **Figura 47** se presentan las respuestas del E25-I1 a la verificación del procedimiento, la respuesta a la pregunta del problema y la justificación de la respuesta. Anteriormente se mencionó que este estudiante fue el único que logró graficar correctamente la función e indicar las características solicitadas de la función y el único reto identificado en su procedimiento fue la inversión del orden de los valores en el rango. Sin embargo, la justificación de la respuesta del problema demuestra un nivel de comprensión instrumental ya que solo hace referencia al seguimiento de un algoritmo para conseguir el resultado correcto.


H. Responde la pregunta del problema.

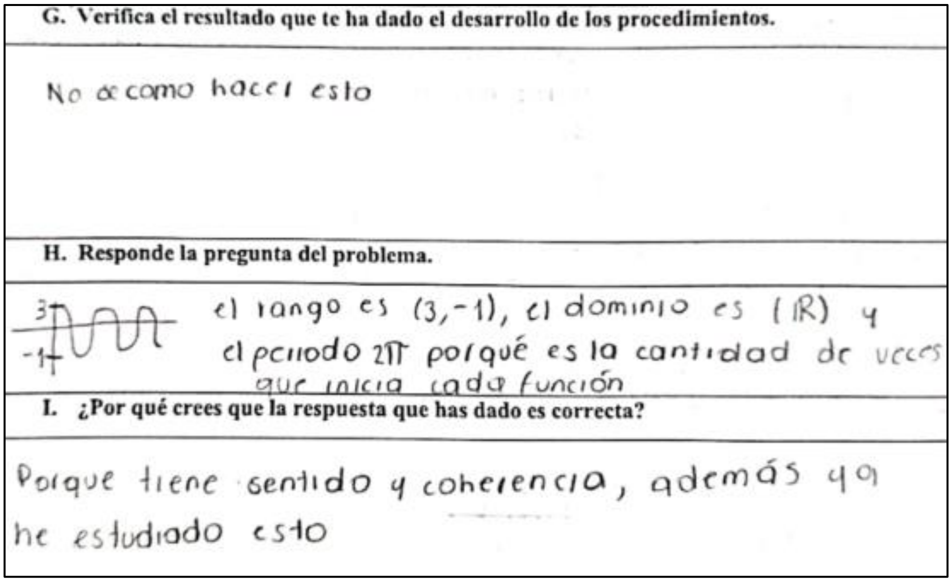
Dominio $(-\infty, \infty+)$
Rango $[3, -1]$

I. ¿Por qué crees que la respuesta que has dado es correcta?

porque seguí los pasos para realizar el debido procedimiento.

Figura 47. Respuesta del E25-I1 a la justificación de la respuesta en la Tarea 2

En la **Figura 48** se presentan las respuestas del E25-I1 a la verificación del procedimiento, la respuesta a la pregunta del problema y la justificación de la respuesta. La estudiante también realizó un procedimiento cercano a la solución del problema excepto por la inversión de los valores del rango y la rotulación del eje de las abscisas, como se presentó anteriormente en la **Figura 29**. El estudiante indica correctamente el período de la función, pero agrega en la respuesta al problema que el período indica la cantidad de veces que inicia la función, lo cual representa un reto ya que la función se repite infinitas veces cada 2π. La idea anterior da cuenta del nivel de dominio del *Conocimiento GFT* de la estudiante, el cual se limita a su uso como herramienta para la resolución de problemas sin una mayor comprensión de las razones subyacentes de sus procedimientos.


G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.

No se como hacer esto

H. Responde la pregunta del problema.

3
-1

el rango es (3,-1), el dominio es (ℝ) y el periodo 2π porqué es la cantidad de veces que inicia cada función

I. ¿Por qué crees que la respuesta que has dado es correcta?

Porque tiene sentido y coherencia, además ya he estudiado esto

Figura 48. Respuestas del E3-I2 a la verificación, respuesta a la pregunta y justificación de la Tarea 2

5.2.2 Análisis de niveles de comprensión

En la **Tabla 10** se presentan los resultados encontrados con respecto a los niveles de comprensión demostrados por los estudiantes. Los niveles de comprensión relacional y formal no fueron identificados en las respuestas de los estudiantes. El nivel relacional requiere además de la resolución de un problema específico, la movilización del conocimiento a otros problemas y áreas del conocimiento. El nivel formal requiere la adopción de un enfoque crítico que permita justificar las fórmulas usadas y los resultados obtenidos.

Tabla 10. Resultados de los niveles de comprensión

Niveles de Comprensión	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
	Razón Trigonométrica	Gráfica y propiedades	Ley de senos	Ecuación Trigonométrica
Nivel Instrumental	33	16	33	21
Nivel Relacional	0	0	0	0
Nivel Formal	0	0	0	0
Datos Insuficientes / No responde	17	34	17	29

La razón de no haber identificado los niveles relacional y formal en las respuestas de los estudiantes puede estar relacionada efectivamente con un nivel de conocimiento instrumental generalizado entre los estudiantes, aunque también se reconoce las limitaciones existentes en los datos disponibles para hacer una caracterización efectiva en los tres niveles. La disponibilidad de otros datos como entrevistas y cuestionarios con otros problemas permitirían hacer una clasificación más precisa, pero las limitaciones en el tiempo derivado de la naturaleza de este trabajo impidieron utilizar otros instrumentos de investigación.

5.3 Discusión de resultados

La resolución de los problemas propuestos estuvo guiad por la estructura del cuestionario, la cual fue diseñada con el fin de facilitar el proceso de análisis de cada una de las fases de resolución de problemas propuestas por Pólya. El análisis de las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver problemas requiere la consideración de las preguntas del cuestionario, ya que los resultados están enmarcados en dichas preguntas. El número de preguntas sin respuesta y la calidad de las respuestas de los estudiantes puede interpretarse como una evidencia de que no necesariamente resuelven problemas siguiendo las cuatro fases de Pólya, como era lo esperado, y que el trabajo en cada una de estas fases podría mejorarse para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, se evidenció que, en general, la verificación no es un proceso que los estudiantes consideren necesario en la resolución de problemas, ya que no es presentado frecuentemente en sus procedimientos y algunos estudiantes afirman que no lo consideran necesario.

El análisis de datos permitió identificar las fortalezas y los retos que demuestran los estudiantes en la resolución de problemas de trigonometría. En sus respuestas los estudiantes mostraron cierta facilidad para resolver problemas que requieren el uso de fórmulas, tales como los problemas de razones trigonométricas y la ley del seno. Los problemas que requieren procedimientos no algorítmicos, tales como la graficación de funciones trigonométricas, fueron identificados como retadores para los estudiantes. En este sentido, los estudiantes se enfrentan al reto de la resolución de problemas que no siguen procedimientos algorítmicos. Este resultado sugiere una reflexión acerca de la relevancia de los ejercicios propuestos en los libros de texto y su función para facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Si bien es necesario el uso de ejercicios para que los estudiantes alcancen el nivel instrumental de conocimiento, también es necesario diseñar e implementar tareas que faciliten el aprendizaje de los niveles relacional y formal, para los cuales el estudiante podrá poner en contexto sus conocimientos en un contexto externo al aula de clase.

Los estudiantes que demostraron su capacidad para hallar la solución del problema, pero no el conocimiento necesario para sustentarlo dio cuenta de un nivel de conocimiento instrumental. Este nivel se caracteriza por el uso del conocimiento como una herramienta para resolver problemas mediante la repetición de algoritmos sin comprensión del conocimiento subyacente, es decir, sin la construcción de significados matemáticamente relevantes para el estudiante.

El nivel relacional da cuenta de la capacidad para extrapolar el conocimiento a otras áreas, lo cual requiere del aprendizaje profundo del contenido y de la búsqueda de relaciones entre estos. Un estudiante que consiga graficar una función requerirá de un mayor nivel de comprensión al realizar este proceso y al comprender su significado de cara a la interpretación de esta en un contexto donde represente un fenómeno físico como el movimiento ondulatorio o la variación de la corriente alterna en el tiempo.

El nivel instrumental es necesario como una primera aproximación al conocimiento, pero el nivel relacional es el mínimo necesario para garantizar que el conocimiento del estudiante pueda serle útil por fuera del aula de clase (Chacón *et al.,* 2011). En este nivel de conocimiento pueden situarse los conocimientos básicos que se propone desde los lineamientos curriculares en matemática, es decir, los pensamientos: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Sin embargo, además de los conocimientos básicos, deben considerarse los procesos generales como el razonamiento, la modelación y la comunicación; y el contexto, en referencia a las situaciones problemáticas, configurándose los tres como ejes de un mismo espacio tridimensional de conocimiento (MEN, 2003).

La presentación axiomática presentaciones una forma clásica de hacer matemáticas y, en este sentido, conlleva a que los estudiantes sean usuarios del conocimiento sin mayor capacidad para sustentarlo (MEN, 2003). La ausencia de estudiantes que demostraran un nivel de conocimiento formal dio cuenta de lo retadores que resultaron los problemas propuestos en el cuestionario.

La comprensión de los resultados obtenidos a partir del análisis de las respuestas de los estudiantes se presenta como una posibilidad para que los profesores de matemáticas identifiquen información valiosa que favorezca el diseño y la implementación de tareas en clases de trigonometría. El conocimiento de la fortalezas y retos a los que se enfrentan los estudiantes favorece que el profesor pueda identificar los temas en los que debe profundizar y, a partir del nivel de conocimiento demostrado por los estudiantes, proponer determinado tipo de tareas.

En el caso de los estudiantes que participaron en esta investigación se identificó la necesidad de profundizar temas como la graficación de funciones y la resolución de ecuaciones trigonométricas. El nivel de comprensión demostrado por los estudiantes también permitió evidenciar la necesidad de introducir actividades que requieran más que resolver procedimientos algorítmicos, reflexionar sobre lo que se hace en dichos procedimientos y aprender a comunicarlo. La resolución de problemas mediante la ejecución de instrucciones sistemáticas puede favorecer el dominio del nivel instrumental, pero es necesario que el profesor brinde oportunidades que favorezcan el desarrollo de los niveles de comprensión relacional y formal.

El papel del profesor y específicamente el diseño de tareas en clase de matemática, deben alinearse con los lineamientos dados por el Ministerio de Educación Nacional en relación con el tipo de conocimiento que se espera adquieran los estudiantes. La identificación de las necesidades particulares del grupo a partir del estudio del conocimiento que movilizan los estudiantes y las estrategias que utilizan para resolver problemas es un primer punto de partida para que el proceso enseñanza-aprendizaje sea coherente con los resultados esperados.

6. CONCLUSIONES

A continuación, se presentan las conclusiones que se obtuvieron a partir del análisis de resultados en relación con los objetivos de investigación.

La resolución de problemas de trigonometría por parte de los estudiantes se lleva a cabo mediante la aplicación de algoritmos previamente aprendidos a partir de ejercicios resueltos. Esto implica la identificación de datos y preguntas, así como el desarrollo de procedimientos. Sin embargo, la creación de un plan y la ejecución de los procedimientos planeados no suelen formar parte de las estrategias de resolución empleadas por los estudiantes, a menos que se les requiera específicamente. Además, la verificación de los resultados no es una estrategia natural y puede representar una dificultad en la resolución de este tipo de tareas.

Los estudiantes evidencian un nivel de conocimiento instrumental en el cual el conocimiento se percibe como una herramienta para resolver problemas, pero sin la comprensión profunda de los conceptos matemáticos subyacentes. Aunque se reconocen las limitaciones del cuestionario para evaluar la comprensión relacional, los retos identificados en la resolución de problemas, incluso sin considerar la verificación ni la argumentación, indican un nivel instrumental predominante entre los estudiantes.

La resolución de problemas de trigonometría se realiza principalmente mediante el uso de fórmulas y, en general, siguiendo algoritmos replicables para otros problemas. Aquellos problemas que no requieren el uso de fórmulas o que no pueden abordarse mediante procesos repetitivos, vinculados a problemas previos resueltos, tienden a representar un desafío mayor para los estudiantes. Esto sugiere la importancia de diseñar problemas y tareas en clase de matemáticas que estén en línea con el nivel de comprensión que se espera que los estudiantes alcancen.

Para fomentar el desarrollo de niveles más altos de comprensión, es necesario plantear problemas que desafíen a los estudiantes, los motiven a aplicar su conocimiento en otras áreas y los conlleven a reconocer los conceptos subyacentes al conocimiento que están utilizando. Este enfoque es fundamental para promover un aprendizaje más profundo y significativo en matemáticas.

Los estudiantes evidencian un mayor dominio en trigonometría de triángulos (TT) y círculo unitario (TCU) en comparación con el conocimiento de gráficos de funciones trigonométricas (GFT). Además, resuelven con mayor facilidad problemas que involucran el uso de fórmulas, como razones trigonométricas y la ley del seno, mientras que la graficación de funciones y la resolución de ecuaciones trigonométricas representan un desafío más significativo para ellos. Este patrón sugiere que los estudiantes pueden beneficiarse de un enfoque pedagógico-didáctica que favorezca su comprensión en áreas donde enfrentan mayores dificultades, promoviendo un desarrollo más equilibrado en la comprensión de diversos significados en el marco del estudio y el aprendizaje de la trigonometría.

La investigación sobre las estrategias de resolución de problemas y el conocimiento movilizado por los estudiantes ofrece valiosas perspectivas que permiten que los profesores de matemáticas identifiquen tanto las fortalezas como los desafíos que enfrentan de cara a su futura práctica profesional. Por un lado, reconocer las estrategias de resolución de problemas, es posible determinar las habilidades que ya poseen los estudiantes y aquellas que aún deben desarrollarse. Por otro lado, conocer el nivel de dominio de los estudiantes en un tema específico capacita a los profesores para identificar áreas que requieren mayor profundización y adaptar consecuentemente las tareas.

La coordinación del diseño de tareas con las necesidades específicas del grupo de estudiantes es esencial para que los profesores de matemáticas proporcionen las herramientas necesarias para alcanzar el nivel de conocimiento esperado. Por lo tanto, la investigación sobre estrategias de resolución de problemas y el nivel de conocimiento en áreas distintas a la trigonometría puede ser un recurso valioso para los profesores de matemáticas, ofreciendo insumos clave para el diseño de tareas. Este enfoque contribuye a optimizar la enseñanza y a mejorar la comprensión de los estudiantes en diversas áreas matemáticas. Además, se reconocen los desafíos asociados con llevar a cabo este tipo de investigaciones en el entorno del aula, tales como las limitaciones de tiempo y recursos para su implementación.

La difusión de los resultados ofrece a los profesores información clave que les permite adaptar y personalizar sus enfoques de enseñanza, diseñando tareas que aborden las necesidades específicas identificadas en sus grupos de estudio. Aunque la implementación directa de investigaciones en el aula puede ser desafiante, compartir y aplicar los hallazgos puede ser un medio eficaz para mejorar la calidad de la enseñanza y enriquecer las experiencias de aprendizaje de los estudiantes en matemáticas.

El desarrollo de investigaciones que amplíen los métodos de recolección de información, como la incorporación de entrevistas posteriores a la aplicación de cuestionarios utilizados en esta investigación, podría contribuir a profundizar en las respuestas de los estudiantes y mejorar la comprensión de su conocimiento. Explorar la efectividad de estas investigaciones como insumo para el diseño de tareas es una línea de investigación futura que permitiría determinar hasta qué punto el rediseño de las actividades de clase, basado en la información obtenida de estudios como el presente, puede tener un impacto positivo. Además, el análisis de la argumentación de los estudiantes al resolver problemas de trigonometría podría ser una valiosa línea de investigación futura que podría desarrollarse utilizando los datos existentes. Aunque este estudio no incluyó el análisis de la argumentación debido a limitaciones de tiempo y recursos, se reconoce el potencial para profundizar en este tema en investigaciones posteriores. Este enfoque podría proporcionar una comprensión más completa de las estrategias y el razonamiento de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.

7. REFERENCIAS

Army, P. (1991). *An approach to teaching college course in trigonometry using applications and a graphing calculator*. Illinois State University.

Babbie, E. R. (2010). *The practice of social research.* Cengage.

Brown, S. A., y Presmeg, N. C. (2005). *The trigonometric connection students' understanding of sine and cosine.* [Tesis de Doctorado], Illinois State University

Buitrago, L., Romero, J., Gamboa, J., Morales, D., Castaño, J., y Jiménez, J. (2013). *Los Caminos del Saber. Matemáticas 10.* Santillana.

Castro, T., y Cárcamo, A. (2023). Errores en la resolución de ecuaciones trigonométricas. *Bolema, 37*(75), 336-351. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n75a16

Chacón, A., Sánchez, A. y Quirós, C. (2011). Comprensión de las razones trigonométricas: niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. Actualidades Investigativas en Educación, ISSN 1409-4703, Vol. 7, Nº. 2, 2007. 7. https://doi.org/10.15517/aie.v7i2.9274.

Codreanu, E., Huber, S., Reinhold, S., Sommerhoff, D., Neuhaus, B. J., Schmidmaier, R. Ufer, S. y Seidel, T. (2022). Diagnosing Mathematical Argumentation Skills: A Video-Based Simulation for Pre-Service Teachers. En: Fischer, F., Opitz, A. (eds) Learning to Diagnose with Simulations. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-89147-3_4

Demir, Ö., y Heck, A. (2013). A new learning trajectory for trigonometric functions. En: E. Faggiano, & A. Montone (Eds.), *Proceedings of ICTMT11* (pp. 119-124). University of Bari.

Fernández, E. M., Ruiz Hidalgo, J. F., y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(2), 51-71. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1871

González, C. A. y Mendoza, J. A. (2018). M*ás de 60 años de presencia de la Trigonometría en la educación media colombiana. Una mirada a libros de textos escolares*. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12209/11114..

Halmos, P. R. (1980). The Heart of mathematics. T*he American Mathematical Monthly, 87*(7), 519–524. https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11995081

Kamber, D., y Takaci, D. (2018). On problematic aspects in learning trigonometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(2), 161-175. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1357846

Koyunkaya, M. (2016). Mathematics education graduate students'understanding of trigonometric ratios. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(7), 1-21. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1155774

Ministerio de Educación Nacional. (2003). *Lineamientos curriculares en matemáticas.* https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Derechos básicos de aprendizaje.* https://wccopre.s3.amazonaws.com/Derechos_Basicos_de_Aprendizaje_Matematicas_1.pdf

Niss, M. A. (2007). The concept and role of theory in mathematics education: plenary presentation. En: C. Bergsten, B. Grevholm, H. Skrømskag Måsøval, & F. Rønning (Eds.), Relating Practice and Research in Mathematics Education: Proceedings of NORMA 05, Fourth Nordic Conference on Mathematics Education (pp. 97-110). TAPIR Akademisk Forlag.

Ortiz Ocaña, A. (2015). *Enfoques y métodos de investigación en las ciencias humanas y sociales.* Ediciones de la U.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.

Proudfoot, K. (2023). Inductive/deductive hybrid thematic analysis in mixed methods Research. *Journal of Mixed Methods Research, 17*(3), 308-326. https://doi.org/10.1177/15586898221126816

Ruthven, K. (2015). Taking design to task: a critical appreciation. En: A. Watson, y M. Ohtani, *Task Design in Mathematics Education* (pp. 311-320). Springer.

Sampaio, H., y Batista, I. (2018). Mathematics history and cognitive values on a didactic sequence: teaching trigonometry. *REDIMAT Journal of Research in Mathematics Education, 7*(3), 311-332. https://doi.org/10.17583/redimat.2018.2727

Schoenfeld, A. H. (1987). Pólya, problem solving, and education. *Mathematics Magazine, 60*(5), 283-291. https://doi.org/10.1080/0025570X.1987.11977325

Sierra Vázquez, M. (2011). Investigación en Educación Matemática: objetivos, cambios, criterios, método y difusión. *Educatio Siglo XXI*, 29(2), 173–198.

Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(3), 341–350. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.004

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundations of mathematics education. En: O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A.Sépulveda (Eds.), Plenary Paper presented at the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (Vol 1, pp. 31-49). PME

Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., . . . Alvarez, E. (2019). El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. Revista Iberoamericana de Educación: https://rieoei.org/historico/deloslectores/203Vilanova.PDF

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal, 17*(3), 91–112. https://doi.org/10.1007/BF03217423

8. ANEXOS

8.1 Anexo 1: Taller completo

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Estrategias de resolución y argumentación utilizadas por estudiantes de grado undécimo al trabajar problemas de trigonometría

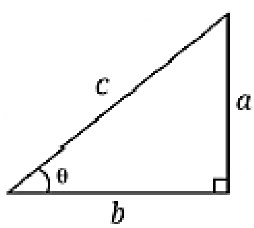
Instrumento de recolección de datos

Nombre: ____

Fecha: ____

Resuelve cada uno de los 3 problemas atendiendo a las indicaciones en cada uno de ellos

Razones trigonométricas



$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{c}$ $\csc\theta = \frac{c}{a}$

$\cos\theta = \frac{b}{c}$ $\sec\theta = \frac{c}{b}$

$\tan\theta = \frac{a}{b}$ $\cot\theta = \frac{b}{a}$

Identidades Trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Ley del Seno y Ley del Coseno

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Seno y Coseno de ángulos notables

-	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Coseno	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

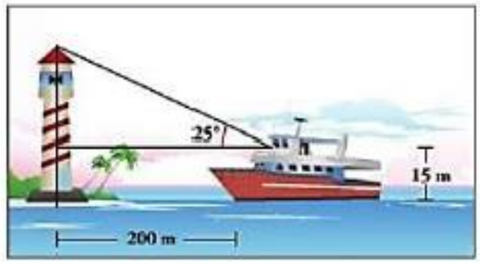
Te animamos a dar lo mejor de ti y responder con sinceridad

¡Éxitos!

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Resuelve los siguientes problemas:

1. ¿Cuál es la altura del faro que se presenta en la imagen?



A. ¿Qué datos te da el problema?	B. ¿Qué te pregunta el problema?	C. ¿Qué tienes que hacer para resolver el problema?
D. Realiza los procedimientos matemáticos necesarios para resolver el problema		

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

E. Describe, paso a paso, lo que has hecho para resolver el problema.	**F. ¿Por qué crees que cada paso del procedimiento es correcto para resolver el problema?**
G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.	
H. Responde la pregunta del problema.	
I. ¿Por qué crees que la respuesta que has dado es correcta?	

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

2. A partir de la siguiente función:

$$y = 2\cos(x) + 1$$

a) Elabora la gráfica de la función dada

b) ¿Cuál es el dominio, rango y período de la función?

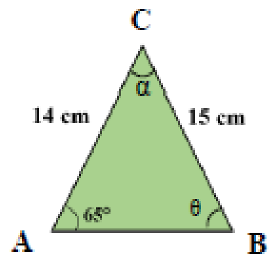
A. ¿Qué datos te da el problema?	**B. ¿Qué te pregunta el problema?**	**C. ¿Qué tienes que hacer para resolver el problema?**
D. Realiza los procedimientos matemáticos necesarios para resolver el problema		

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

E. Describe, paso a paso, lo que has hecho para resolver el problema.	**F. ¿Por qué crees que cada paso del procedimiento es correcto para resolver el problema?**
G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.	
H. Responde la pregunta del problema.	
I. ¿Por qué crees que la respuesta que has dado es correcta?	

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

3. ¿Cuál es el valor del ángulo θ en el siguiente triángulo?



A. ¿Qué datos te da el problema?	B. ¿Qué te pregunta el problema?	C. ¿Qué tienes que hacer para resolver el problema?
D. Realiza los procedimientos matemáticos necesarios para resolver el problema		

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

<table>
<tr><th>E. Describe, paso a paso, lo que has hecho para resolver el problema.</th><th>F. ¿Por qué crees que cada paso del procedimiento es correcto para resolver el problema?</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="2">G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th colspan="2">H. Responde la pregunta del problema.</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th colspan="2">I. ¿Por qué crees que la respuesta que has dado es correcta?</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

4. ¿Cuál es el valor o valores de x que satisfacen la siguiente ecuación trigonométrica?

$$8 + 2\cos x = 9\ , \qquad 0 < x < 2\pi$$

A. ¿Qué datos te da el problema?	B. ¿Qué te pregunta el problema?	C. ¿Qué tienes que hacer para resolver el problema?

D. Realiza los procedimientos matemáticos necesarios para resolver el problema

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

<table>
<tr><td>E. Describe, paso a paso, lo que has hecho para resolver el problema.</td><td>F. ¿Por qué crees que cada paso del procedimiento es correcto para resolver el problema?</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">G. Verifica el resultado que te ha dado el desarrollo de los procedimientos.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">H. Responde la pregunta del problema.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">I. ¿Por qué crees que la respuesta que has dado es correcta?</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

8.2 Anexo 1: Formato consentimiento informado

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

CONSENTIMIENTO INFORMADO

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Por favor, lee cuidadosamente este documento de consentimiento antes de decidir que el estudiante participe en este estudio y contacta con Juan Felipe Alarcón Echeverri (jalarcone@unal.edu.co) para cualquier pregunta o duda.

Título del estudio: Análisis de las estrategias de resolución y argumentación en problemas de trigonometría entre estudiantes de grado undécimo de la Escuela Normal Superior Antioqueña.

Objetivo
Describir las estrategias de resolución y de argumentación que utilizan estudiantes de grado undécimo de la Escuela Normal Superior Antioqueña. al trabajar problemas de trigonometría.

Metodología empleada
Se administrará una prueba escrita a los estudiantes que constará de 3 problemas de matemáticas, en la cual se les solicitará resolverlos y argumentar el procedimiento empleado para encontrar la respuesta en cada uno de ellos. La prueba tendrá lugar durante la clase de matemáticas y será el profesor quien dirija su aplicación. Los estudiantes solo tendrán acceso al material de la prueba, a un lápiz/lapicero y borrador. No se permitirá el uso de calculadora ni de ningún otro dispositivo electrónico.

Durante el desarrollo de la evaluación se tomarán registros fotográficos que podrán ser incluidos en el informe del trabajo de grado y las posibles presentaciones y/o publicaciones que de este se deriven.

Riesgos, beneficios y voluntariedad
No se espera que el estudiante experimente riesgos significativos durante su participación en este estudio. Los resultados del estudio podrían beneficiar a futuros estudiantes, permitiendo una mejor comprensión de los conocimientos de los estudiantes cuando resuelven problemas de trigonometría. La participación del estudiante en este estudio es completamente voluntaria, y usted puede autorizarla o no sin ninguna consecuencia negativa.

Confidencialidad
En cumplimiento con la legislación colombiana vigente en materia de protección de datos personales (Ley 1581 de 2012: Ley de Protección de Datos Personales en Colombia), todos los datos e información recopilados durante el desarrollo de este estudio serán tratados de manera confidencial y cumpliendo con los principios de privacidad y seguridad establecidos por ley.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

El acceso a dicha información quedará restringido al equipo de investigación que estará obligado a mantener la confidencialidad de la información. Los resultados del estudio podrán ser comunicados a la comunidad científica a través de congresos y/o publicaciones con datos del participante debidamente anonimizados. Los datos serán utilizados para los fines específicos de este estudio y en todo caso si fuese necesario podrán ser también utilizados con otros fines de tipo docente o carácter científico. De acuerdo con la ley vigente, tiene derecho al acceso de sus datos personales; asimismo, y si está justificado, tiene derecho a su rectificación y cancelación.

Recogida y uso de datos

Marca con una X para aceptar cada condición:

__ Estoy de acuerdo con el registro de los datos del estudiante.

__ Autorizo el uso científico de los datos anteriores en citas literales y menciones anonimizadas.

Consentimiento

Marca con una X para aceptar cada condición:

__ Comprendo la información del estudio y he tenido la oportunidad de hacer preguntas por medio del correo electrónico que han sido respondidas satisfactoriamente.

__ Entiendo y acepto las condiciones relacionadas con la *Recogida y uso de datos*.

__ Entiendo que la participación es voluntaria y que soy libre de retirar mi consentimiento en cualquier momento, sin dar razón ni existir consecuencias o penalización.

__ Estoy de acuerdo en que el estudiante a mi cargo participe.

Personas de contacto

En caso de duda o consulta sobre el estudio puedes contactar con Juan Felipe Alarcón Echeverri al correo electrónico jalarcone@unal.edu.co

NOMBRE DEL PARTICIPANTE: ____

Firma: ____ **Fecha:** ________________

NOMBRE DEL ACUDIENTE: ____

Firma: ____ **Fecha:** ________________

INVESTIGADOR A CARGO DEL ESTUDIO:

Firma: ____ **Fecha:** ________________

2